Le rôle de l'enseignant dans l'organisation de l'étude personnelle hors la classe de collégiens : le cas des équations du premier degré à une inconnue

Stéphane Sirejacob

Université Sorbonne Paris Cité

Thèse de doctorat

de l'Université Sorbonne Paris Cité

Préparée à l'Université Paris Diderot

Ecole doctorale ED400 : Savoirs scientifiques : épistémologie, histoire des sciences et didactique des disciplines

Laboratoire de Didactique André Revuz

Le rôle de l'enseignant dans l'organisation de l'étude personnelle hors la classe de collégiens : le cas des équations du premier degré à une inconnue

Par Stéphane Sirejacob

Thèse de doctorat de didactique des mathématiques

Dirigée par Madame Brigitte Grugeon-Allys

Présentée et soutenue publiquement à l'Université Paris Diderot 7 le 18 octobre 2018

Président du jury : Vandebrouck, Fabrice / Professeur des Universités / Université Paris Diderot 7
Rapporteurs : Coulange, Lalina / Professeure des Universités / Université de Bordeaux
Matheron, Yves / Professeur des Universités / IFE-ENS de Lyon
Examinatrices : Bosch, Marianna / Professeure des Universités / Universitat Ramon Llull
Castela, Corine / Professeure des Universités / Université de Rouen
Pilet, Julia / Maître de conférences / Université Paris Est-Créteil
Directrice de thèse : Grugeon-Allys, Brigitte / Professeure des Universités / Université Paris Est-Créteil

Titre : Le rôle de l'enseignant dans l'organisation de l'étude personnelle hors la classe de collégiens : le cas des équations du premier degré à une inconnue

Résumé : Ce travail de thèse s'articule autour de deux axes majeurs : d'une part, l'étude personnelle hors la classe de collégiens, sujet d'actualité peu abordé en didactique des mathématiques ; d'autre part, l'enseignement des équations du premier degré à une inconnue en collège, thème agrégeant plusieurs notions d'algèbre élémentaire et source de difficultés pour les élèves. Dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1999), nous réinterrogeons ces difficultés d'un point de vue institutionnel : nous faisons l'hypothèse que certains besoins d'apprentissages, tant relatifs aux gestes d'étude hors la classe que disciplinaires (équations), sont implicitement laissés à la charge des élèves ou ignorés de l'institution (Castela, 2008), alors que ces apprentissages sont nécessaires à la construction d'un rapport personnel idoine aux équations. En appui sur une organisation mathématique épistémologique de référence (Bosch et Gascon, 2005) relative aux équations du premier degré et sur une synthèse de travaux de recherche sur l'étude personnelle, nous construisons et analysons les effets de la mise en œuvre d'un parcours d'étude et de recherche sur les apprentissages de collégiens.

Mots clefs : Travail hors la classe, travail personnel, équations, didactique

Title : The role of the teacher in the organization of private study of middle school students : the case of equations of the first degree with one unknown

Abstract : This work is based on two main areas : on the one hand, the private study of middle school students, a few discussed topic in science education (in mathematics) ; on the other hand, the teaching of the equations of the first degree with one unknown, which aggregates many elementary algebra concepts and which is a source of difficulties for students. Thanks to the Anthropological Theory of the Didactic (Chevallard, 1999), we re-examine these difficulties from an institutional point of view : we assume that some of the learning needs relative to private study and subject knowledge are not explicitly organized by the institution (Castela) while these needs are necesseray to build a an appropriate personal relationship to equations. Based on an epistemological mathematic organization reference (Bosch et Gascon, 2005) related to the equations of the first degree and on a research overview about private study, we build and analyse the impacts of a teaching sequence on students learnings.

Keywords : Private study, equations, science education

À mes élèves d'hier et d'aujourd'hui

Remerciements

> *« Dans un tourbillon de poussière qu'élève un vent impétueux, quelque confus qu'il paraisse à nos yeux, dans la plus affreuse tempête excitée par des vents opposés qui soulèvent les flots, il n'y a pas une seule molécule de poussière ou d'eau qui soit placée au hasard, qui n'ait sa cause suffisante pour occuper le lieu où elle se trouve, et qui n'agisse rigoureusement de la manière dont elle doit agir. »*
>
> Paul Henri Thiry d'Holbach

Cette citation résume bien l'état d'esprit dans lequel je me trouve à l'heure où je rédige ces remerciements. Quand on « fait » une thèse, on ne commence pas à neuf heures le matin en arrivant au bureau et on ne s'arrête pas à dix-huit heures le soir après avoir fermé la porte. On le « fait » tout le temps, du lever au coucher, la nuit, le dimanche et les jours fériés. On le « fait » en prenant son petit-déjeuner, en se promenant dans le parc, en regardant par la fenêtre la pluie tomber. Une conversation attrapée au détour d'un café a peut-être planté une graine ; l'arc de cercle décrit par une grue dans le ciel gris a peut-être provoqué sa lente croissance ; un étrange motif sur papier peint a peut-être facilité sa rencontre avec une autre idée naissante ; et c'est cet air de jazz qui a peut-être créé cette ambiance tamisée propice au jaillissement d'une étincelle, cette même étincelle à l'origine du dix-huitième paragraphe du chapitre sept de ce manuscrit.

Alors, qui donc a contribué à construire cette thèse ? Beaucoup trop de personnes et d'événements pour être tou.te.s cité.e.s. Je vais hélas tenter d'en nommer certain.e.s et renoncer à le faire pour bien d'autres. Puisse-t-on me pardonner.

Je remercie :

- ma directrice de thèse, Brigitte Grugeon-Allys, et Julia Pilet, qui l'a plus que largement co-encadrée ;
- les membres du jury : les rapporteurs Lalina Coulange et Yves Matheron ; les examinateurs Marianna Bosch, Corine Castela et Fabrice Vandebrouck ;

— Matthieu, Haifa et leurs élèves ;
— ma famille, en particulier : Alexis, Brigitte, Didi, Line, Cindy, Yoann, Papa et Maman ;
— les doctorant.e.s qui ont partagé des moments de vie et d'étude durant ma thèse, et plus particulièrement : Alice, Faezeh, Frank, Huafeng, Inés, Jorge, Leonard, Luz, Parisa, Pooneh, Rodolfo, Ronnel, Rubén ;
— les parents, ami.e.s et connaissances, entre autres : Assia, Alejandro, Alexia, Amélie, Antoine, Arnaud, Audrey, Clara, Clélia, Chéryne, Delphine, David, Emilie, Emilie, Fanny, Florent, Gael, Gwenaël, Julie, Juliette, Luc, Nicolas, Marco, Martin, Michel-Pierre, Minh, Philippe, Pierre, Ratha, Renaud, Sébastien, Sébastien, Shiran, Quentin, Soledad, Sylvain, Turan, Véronique, Vito, ... ;
— les membres du LéA Pecanumeli et en particulier : Alberto, Florian, Geoffroy, Maëlle et Olivier ;
— les membres de la « Tâche 2 » du projet NéoPraeval et en particulier Françoise ;
— les membres du Laboratoire de Didactique André Revuz, dont le groupe des jeunes chercheur.e.s ;
— et bien sûr, mes élèves d'hier et d'aujourd'hui ; ils sont au cœur de tout ce travail.

Table des matières

Introduction

Notre travail de thèse s'articule autour de deux axes majeurs. Le premier concerne le travail personnel des élèves à l'école primaire et dans l'enseignement secondaire. Il s'agit d'un sujet d'actualité, pourtant peu abordé en recherche en didactique des mathématiques. Le second porte sur l'algèbre (les équations du premier degré à une inconnue), domaine des mathématiques qui s'avère fréquemment source de difficultés pour les collégiens.

Nous faisons l'hypothèse que l'institution laisse implicites certains besoins d'apprentissages des élèves tant en algèbre qu'au niveau du travail personnel et cherchons à déterminer des conditions pour que l'enseignant puisse organiser en classe ce travail, afin que les élèves construisent les apprentissages relatifs aux équations du premier degré à une inconnue et ceux relatifs à l'autonomie en mathématiques.

Onze chapitres structurent notre travail de thèse.

Le premier chapitre pose les questions initiales de la thèse, le contexte de recherche et les enjeux de notre travail dans un langage informel. Il s'agit d'amener progressivement une problématique soulevée par le thème du travail personnel des collégiens, en lien avec l'enseignement et l'apprentissage des équations du premier degré à une inconnue.

Dans le chapitre deux, nous formalisons le questionnement initial en précisant les cadres théoriques dans lesquels nous nous plaçons. Nous y délimitons notre sujet de thèse, précisons nos hypothèses de travail et de recherche, formulons la problématique de recherche et donnons les principaux éléments méthodologiques.

Dans le chapitre trois, nous réalisons une synthèse de travaux sur le travail personnel de l'école primaire au lycée afin d'identifier des obstacles et des leviers potentiels pour organiser ce travail personnel.

Une première étude exploratoire auprès de collégiens fait l'objet du chapitre quatre. Nous y analysons les entretiens que nous avons menés avec différents élèves sur la manière dont ils organisent leur travail hors la classe en algèbre élémentaire.

Nous construisons au chapitre cinq un modèle théorique de l'étude personnelle des élèves au collège en mathématiques. Nous opérationnalisons ce modèle pour l'analyse des pratiques enseignantes relatives à l'organisation en classe de cette étude.

Notre thèse relevant de la didactique des mathématiques, nous prenons en compte les spécificités et la complexité de l'activité mathématique dans notre travail. Dans le chapitre six, nous établissons une référence épistémologique relative aux équations du premier degré à une inconnue.

Cette référence nous sert d'appui pour construire une organisation mathématique (OM) épistémologique de référence relative aux équations du premier degré à une inconnue dans le chapitre sept.

Nous opérationnalisons l'OM de référence pour analyser dans le huitième chapitre les programmes et les manuels afin de déterminer la part des enjeux d'apprentissages relatifs aux équations laissés implicites par l'institution.

Le chapitre neuf constitue un point de concours des résultats obtenus dans les précédents chapitres : en appui sur la synthèse de travaux sur l'étude personnelle, sur l'étude exploratoire menée auprès de collégiens, sur la référence épistémologique et l'OM de référence relatives aux équations, sur les enjeux d'apprentissages laissés implicites dans les programmes et les manuels, nous construisons un parcours d'étude et de recherche sur les équations prenant en compte les besoins d'apprentissages des élèves relatifs aux équations et à l'autonomie.

Dans le chapitre dix, nous réalisons une analyse *a posteriori* de la mise en œuvre du parcours d'étude et de recherche par un enseignant. Nous analysons les effets potentiels des gestes d'aide à l'étude de l'enseignant sur la construction des apprentissages des élèves relativement aux équations et sur l'évolution dans leur manière d'organiser leur travail en autonomie hors la classe.

Le chapitre onze est un chapitre conclusif qui met en avant les principaux résultats de notre travail de thèse et ouvre sur des perspectives de recherche.

Chapitre 1

Enjeux, questions initiales et contexte de la thèse

Enjeu, n. m. : Ce que l'on peut gagner ou perdre dans une entreprise quelconque.

1.1 Objectifs du chapitre

Dans ce chapitre introductif, nous exposons les principaux enjeux de la thèse, les questions initiales qui l'ont motivée et le contexte de la recherche. Il s'agit d'un chapitre quelque peu informel dans le sens où les premières questions posées, naïves, ne sont ni tout à fait délimitées, ni formulées en des termes de recherche ; où la problématique y apparaît seulement en filigrane des paradoxes et obstacles évoqués, et où les cadres théoriques patientent encore en coulisses. Notre but consiste essentiellement à développer nos motivations originelles qui impulsent le travail de thèse tout entier. Elles viendront en assez grande partie justifier les formalisations opérées à partir du chapitre deux (problématique de recherche, choix des outils théoriques et de la méthodologie) et tisseront un fil rouge dans les chapitres suivants.

Nous présentons d'abord les deux thèmes majeurs étudiés : d'une part le travail personnel des collégiens en mathématiques, d'autre part les apprentissages relatifs aux équations en classe de quatrième (classe désormais dissoute dans le cycle 4 des nouveaux programmes de 2016). Pour chacun de ces deux thèmes, nous cherchons à illustrer la manière dont ils occupent selon nous une place importante dans la scolarité de tout élève, et nous soulevons des premiers problèmes apparents qui leur sont relatifs. Nous expliquons ensuite comment l'étude du premier thème se fera à travers celle du second, nous plaçant ainsi d'emblée dans une perspective de recherche en didactique *des mathématiques*, c'est-à-dire en prenant en compte de façon prédominante ce que la discipline a de spécifique.

Nous décrivons dans un second temps le contexte de recherche dans lequel s'inscrit la thèse de manière brève. Ce dernier permet de comprendre en partie les choix que nous avons effectués pour les deux principaux thèmes retenus, et dans une autre mesure d'épaissir les enjeux.

1.2 Enjeux de la thèse

1.2.1 La question du travail personnel

a. Introduction

Il nous a semblé important de partir de notre propre expérience de praticien en collège pour aborder la question du travail personnel. En effet, nous faisons l'hypothèse que les questionnements que nous nous sommes initialement posés en tant qu'enseignant sont partagés par d'autres de nos (anciens) collègues et reflètent certaines représentations communes du métier autour du travail personnel. Nous abordons dans un ordre prémédité plusieurs éléments que nous avons jugés intéressants parce qu'ils nous ont posé problème dans notre pratique, et qui seront progressivement développés tout au long de la thèse. À partir de ces éléments, nous interrogeons ensuite quelques textes officiels. Nous le verrons, ces derniers n'apporteront que des réponses partielles à nos préoccupations enseignantes et ouvriront la porte à de nouvelles questions. Nous synthétisons alors les points problématiques soulevés dans cette section.

Nous rappelons que les développements opérés le sont dans un langage enseignant dans ce chapitre (d'où l'utilisation fréquente de guillemets). Ils ne seront reformulés en termes de recherche qu'à partir du chapitre deux.

b. Notre expérience d'enseignant sur le travail personnel

« Cet élève paraît sérieux en classe, il écoute, il participe, mais les résultats ne sont pas au rendez-vous. Son travail personnel est probablement insuffisant. » Voilà le genre de phrases que nous [1] avons souvent entendues au détour de la salle des professeurs ou lors de conseils de classe, moments fatidiques des bilans trimestriels. Fréquemment décrit en termes de manque ou d'inexistence, responsable désigné de

1. Dans cette sous-section, il faut considérer le sujet « nous » comme désignant le narrateur, c'est-à-dire l'enseignant que nous étions, et non pas forcément l'ensemble des enseignants.

certains échecs, le travail personnel nous a semblé régulièrement évoqué comme s'érigeant en condition *sine qua non* à la réussite scolaire.

Durant notre enseignement, nous avons fait l'expérience de la nécessité d'un tel travail. En effet, comme d'autres de nos collègues, nous nous sommes sentis contraint de nous reposer sur (et donc de croire en l'existence de) ce travail personnel car deux objectifs incompatibles nous paraissaient devoir être atteints simultanément : d'une part, réussir à faire rencontrer aux élèves toutes les notions mathématiques exigées par le programme officiel, ce qui impose un rythme cadencé de travail en classe et une incompressibilité du temps où ces notions sont présentées ; d'autre part, faire se réaliser les apprentissages relatifs à ces notions à des élèves qui les construisent – ou ne les construisent pas – à des vitesses très variées en raison de leurs différentes difficultés, ce qui exige (ou plutôt *exigerait*) d'étendre le temps disponible en fonction de chacun. Or celui-ci, nous l'avons dit, n'est pas extensible à loisir.

Cette tension permanente (repérée par Castela (Castela, 2008) comme une tension entre le temps didactique et le temps praxique, comme nous l'expliciterons dans le chapitre deux) entre avancer suivant les demandes de l'institution et avancer suivant les besoins de chaque élève, nous a conduit à accepter le fait que le temps des « apprentissages officiels » devait se *prolonger* d'une manière ou d'une autre en autant de temps d'« apprentissages personnels » qu'il y avait d'élèves, c'est-à-dire des temps nécessaires à chacun pour construire les apprentissages qui auraient « dû » l'être durant le temps « officiel » et qui n'ont pas pu l'être. Mais nous pensons qu'il ne s'agit pas seulement d'une question d'heures supplémentaires passées à travailler. Même en augmentant indéfiniment la durée de travail pour les élèves en difficulté, ceux-ci auraient-ils construit davantage les apprentissages ? Nous en doutons et nous interrogeons : n'y avait-il pas, outre ce problème de temps, un problème d'ordre *organisationnel* ? Les élèves savaient-ils ce qu'il « convenait » de faire durant leur travail personnel ? Il s'agit là d'un point de vue sur les difficultés qui n'est peut-être pas celui communément adopté dans la profession : au-delà des difficultés cognitives seules, peut-être davantage attribuées à l'élève uniquement, nous posons la question de la relation entre ces difficultés et d'éventuels décalages institutionnels qui en seraient potentiellement à l'origine. Nous formaliserons ce changement de point de vue en nous plaçant, au chapitre deux, dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1992), (Chevallard, 1998), (Chevallard, 2002a), qui permet d'interroger les difficultés des élèves en mathématiques en lien avec l'institution dans laquelle ils apprennent et en prenant en compte les phénomènes transpositifs du savoir.

Le fait que l'élève ait à sa charge d'organiser son travail personnel conduit à l'idée que l'accomplissement d'un tel travail requiert une certaine *autonomie*. Celle-ci n'est bien sûr pas « totale » : par exemple, les élèves ne choisissent pas d'étudier telle ou telle notion mathématique de manière parfaitement arbitraire, ils le font parce qu'elles leur auront été *a minima* présentées en classe. Ou encore, l'enseignant peut aider l'élève à accomplir ce travail personnel et donc quelque part « diminuer » cette autonomie – reste à voir *comment* il le fait. Mais cette autonomie existe du fait que tous les besoins d'apprentissages n'ont pas pu être assouvis lors du travail en classe par l'enseignant et appellent à l'être notamment quand les interactions avec ce dernier sont interrompues. L'adjectif « personnel » signifie que l'élève, d'une manière *distincte* de ce qui est collectivement orchestré par l'enseignant, doit accomplir un travail qui lui est *spécifique, particulier*, qui relève de son investissement *propre*. L'autonomie, du grec *autos*, « soi-même », et *nomos*, « la loi », implique que l'élève doit faire siennes certaines règles liées au travail en mathématiques pour que l'enseignant n'ait plus à les lui rappeler. Ceci suppose que ces règles aient été clairement explicitées d'une part, et que l'élève dispose de moyens pour les intégrer et ensuite les appliquer seul d'autre part.

Or, nous avons constaté que le travail personnel, d'autant plus nécessaire pour les élèves en difficulté, demeurait de manière visible insuffisamment accompli par ces derniers. L'adverbe « insuffisamment » ne renvoie pas forcément à une idée de quantité : nous avons vu des élèves aux résultats très faibles fournir des efforts massifs, sur des temps très longs. Ceci nous amène à poser la question des « règles » relatives au travail en mathématiques – nous gardons volontairement le terme assez vague de « règles » pour le moment. Avions-nous suffisamment explicitées ces dernières à nos élèves ? Leur avions-nous réellement donné les moyens de se les approprier ?

Avant de développer ce point, notons ici l'apparition d'un paradoxe éclatant : ceux pour qui le travail personnel est le plus conséquent sont potentiellement ceux qui, de fait, ont le moins suivi le rythme imposé du travail en classe ; généralement, ce sont aussi ceux qui ont le plus de difficultés à construire leurs apprentissages, même avec l'aide de l'enseignant, et à faire preuve d'autonomie dans ces apprentissages. Or, c'est à ceux-là mêmes que l'on demande d'accomplir un travail supplémentaire considérable : ils ont non seulement le plus grand « retard » à rattraper, mais ils doivent en plus le faire en autonomie !

Revenons à présent aux « règles » qui, une fois qu'il les a intégrées, permettraient à l'élève d'accomplir un travail personnel efficace, c'est-à-dire favorisant la construction de ses apprentissages. En quoi consiste un tel travail *précisément* ? Quelles sont ces « règles » qui le régissent ? En tant qu'enseignant, nous avions la conception d'un travail personnel comme étant un travail englobant des tâches aussi larges que « refaire les exercices », « réviser régulièrement pour le prochain contrôle », ou encore « apprendre les leçons tous les jours », tâches que le temps officiel en classe ne permettait pas d'accomplir pour tous (surtout pour les plus « en retard ») et que nous estimions nécessaires à la réussite et fonction des besoins de chacun (d'où le « personnel »). Parfois, nous ajoutions des nuances, du type « attention, n'apprenez surtout pas par cœur, l'essentiel est de *comprendre* » ; mais cela apportait-il un quelconque éclaircissement sur ce qu'il convenait de faire *concrètement* pour vraiment *comprendre* ? Qu'attendions-nous *exactement* lorsque nous exigions de nos élèves qu'ils « révisent » ? *Comment* devaient-ils apprendre une leçon en mathématiques ? Au vu de ces questions que nous nous sommes – et donc que nous avons auprès de nos élèves – insuffisamment posées, était-il raisonnable d'attendre de ces derniers l'autonomie indissociable du travail personnel et à laquelle nous ne les préparions pas spécialement en classe ? Les plus en difficulté avaient-ils seulement les capacités d'assumer une charge de travail d'autant plus importante qu'ils étaient, justement, en difficulté ? Quelles aides – quelles « balises » – aurions-nous pu ou dû leur apporter ?

c. Le travail personnel : un enjeu pour l'enseignement

Dans les paragraphes précédents, nous posions la question de la définition et des « règles » régissant le travail personnel, ainsi que la manière de l'organiser pour aider les élèves à l'accomplir. Dans cette sous-section, nous étudions à présent quelques documents officiels : que disent-ils à propos du travail personnel ? Ce dernier y est-il clairement défini et si oui, comment ? Des éléments précis pour aider à l'organiser sont-ils présentés ?

À l'école élémentaire, le travail personnel est évoqué par les textes officiels dans le cadre des activités pédagogiques complémentaires (APC) et associé à un besoin d'individualisation du travail pour combler des difficultés :

> « Les APC offrent un large champ d'action pédagogique et permettent d'apporter aux élèves un accompagnement différencié, adapté à leurs besoins, pour susciter et renforcer le plaisir d'apprendre. Les enseignants peuvent aider les élèves lorsqu'ils rencontrent des difficultés dans leurs apprentissages, **les accompagner dans leur travail personnel** ou

leur proposer une activité prévue dans le cadre du projet d'école. » (Site Eduscol [2])

Au collège (cycle 4), le travail personnel est mentionné comme une composante du travail de l'élève favorisant l'acquisition d'une autonomie sans laquelle la poursuite des études n'est pas possible :

> « Etre élève s'apprend par l'exemple des adultes mais aussi en s'appropriant des règles et des codes que ce domaine [3] explicite. Il s'agit du travail en classe et **du travail personnel de l'élève qui augmente progressivement dans le cycle**. Ils permettront l'autonomie nécessaire à des poursuites d'étude. Il ne s'agit ni d'un enseignement spécifique des méthodes, ni d'un préalable à l'entrée dans les savoirs : c'est dans le mouvement même des apprentissages disciplinaires et des divers moments et lieux de la vie scolaire qu'une attention est portée aux méthodes propres à chaque discipline et à celles qui sont utilisables par toutes. » (Bulletin Officiel Spécial de 2015 [4])

Au collège et au lycée (cycle 5), l'accompagnement personnalisé (AP) est un dispositif qui prend le relais des activités pédagogiques complémentaires. Une circulaire [5] du B.O. de 2011 décrit l'AP d'une manière très globale : elle en donne des « principes généraux » (comme le fait qu'un enseignant, *quelle que soit sa discipline*, peut organiser l'AP des élèves), détaille des « domaines d'activités prioritaires » (avec des recommandations générales comme « soutenir » les élèves dans leurs apprentissages, « leur faire acquérir une autonomie et des méthodes de travail », « les aider à approfondir leurs connaissances ») et des modalités de mise en œuvre. Au lycée [6], l'AP consiste à mettre l'accent sur des éléments méthodologiques ou des compétences transversales, entre autres « apprendre à argumenter », « gérer son stress pour mieux apprendre », « construire une carte mentale pour apprendre une leçon ».

À travers ces quelques exemples, nous pouvons constater que l'institution souligne la nécessité du travail personnel des élèves : il s'agit d'un enjeu d'enseignement

---

2. Voir : http ://eduscol.education.fr/cid74795/les-activites-pedagogiques-complementaires.html

3. Il est question du domaine numéro 2, « Méthodes et outils pour apprendre », qui jouxte d'autres domaines décrits dans les textes officiels de 2015.

4. Disponible sur le site Eduscol à l'adresse suivante :
http ://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html ?cid_bo=94717

5. Voir : http ://www.education.gouv.fr/pid25535/bulletin_officiel.html ?cid_bo=57154

6. Voir par exemple : http ://eduscol.education.fr/cid55003/accompagner-le-lyceen-methodologie.html

majeur, puisque le travail personnel prend de plus en plus d'importance au fur et à mesure que l'élève progresse dans sa scolarité. Il devient une condition nécessaire à la réussite dans la construction de ces apprentissages, notamment au lycée et dans le supérieur où, à temps d'enseignement égal, les notions à étudier sont plus nombreuses et plus complexes.

Paradoxalement, si l'institution propose des dispositifs pour accompagner ce travail personnel, si elle affirme que ce dernier ne doit pas faire l'objet d'un enseignement propre et que toutes les disciplines concourent, de par leurs spécificités, à l'accomplir, elle n'explicite jamais en quoi il consiste *précisément*, et les dispositifs, orientés sur l'individualisation, la gestion de l'hétérogénéité ou l'acquisition de compétences générales, le sont sans prise en compte des spécificités des disciplines.

Résumons les points importants développés dans les paragraphes précédents :

- Le travail personnel concentre des enjeux d'apprentissages et d'enseignement d'envergure : selon les programmes, il se pose en condition nécessaire à la réussite scolaire et augmente progressivement de l'école élémentaire jusqu'au lycée et au-delà.
- Ce travail vient en sus du travail en classe et s'avère nécessaire parce que le temps officiel des apprentissages imposé par le programme et le temps requis par chaque élève pour construire ces apprentissages ne coïncident pas toujours, le premier étant incompressible alors que le second astreint à une flexibilité.
- Le travail personnel, du fait qu'il a lieu en supplément du travail en classe, suppose une certaine autonomie, toutefois modulée par l'enseignant qui présente au minimum les notions mathématiques et peut guider l'élève dans son travail personnel.
- Les programmes officiels n'explicitent pas en quoi consiste le travail personnel, dans tous les cas pas en mathématiques. Les dispositifs proposés semblent davantage d'ordre méthodologique et ne prennent pas en compte les contenus propres à chaque discipline, avec les difficultés spécifiques d'apprentissage qui leur sont relatives.

Ces éléments donnent naissance à un paradoxe majeur : l'élève le plus en difficulté pour construire ses apprentissages en classe avec l'aide de l'enseignant est potentiellement celui pour qui le travail personnel est le plus conséquent et requiert davantage d'autonomie. Il peut éprouver, plus que les autres, un besoin fort d'explicitation des « règles » relatives à ce travail personnel et d'une aide adaptée à ses besoins, besoins qui portent sur des contenus mathématiques. Or, du fait de ses difficultés scolaires, des implicites non levés par les programmes ou les enseignants à propos de la définition et de l'organisation de ce travail personnel, de la non prise en compte des spécificités de la discipline dans les dispositifs proposés par l'institution, cet élève se trouve probablement dans l'incapacité d'assumer cette charge.

La principale question que nous formulons à ce stade de la réflexion est donc la suivante : comment définir et organiser le travail personnel des élèves pour qu'il favorise la construction de leurs apprentissages en mathématiques ?

Pour prendre en compte dans notre travail les spécificités de la discipline, nous avons choisi de nous concentrer sur un thème d'étude : les équations. Nous expliquons dans les paragraphes qui suivent le choix d'un thème algébrique.

1.2.2 La question de l'algèbre élémentaire au collège

a. Introduction

Comme précédemment, nous relatons dans les lignes qui suivent notre expérience personnelle d'enseignant sur le second thème majeur de cette thèse, les équations – et plus généralement, l'algèbre élémentaire. Nous supposons que les questions qui nous ont traversé durant notre enseignement en collège [7] dans ce domaine mathématique cristallisent des problématiques enseignantes générales [8] (comme les difficultés de gestion de l'hétérogénéité des apprentissages en algèbre) et à ce titre sont intéressantes.

Encore une fois, nos interrogations ne sont pas ici énoncées en des termes de recherche et le seront à partir du chapitre deux.

b. Notre expérience d'enseignant sur l'enseignement de l'algèbre et des équations

« $3x+2$, ça fait $5x$ ». Combien de nos élèves ont-ils commis un jour cette erreur ? En tant qu'enseignant, nous nous sommes rapidement senti démuni pour mettre en œuvre un enseignement de l'algèbre en collège qui nous paraisse satisfaisant. Bien qu'ayant le sentiment de respecter le programme officiel, d'épuiser la variété des exercices présents dans les manuels, de posséder une progression dite spiralée en

7. Entre 2010 et 2014, donc avant les programmes de 2015-2016.

8. C'est la deuxième fois que nous faisons cette hypothèse. Nous la justifierons théoriquement au chapitre cinq, en partant du postulat que les pratiques enseignantes – au moins pour les professeurs en activité depuis quelques années – sont stables et cohérentes (Robert & Rogalski, 2002).

algèbre pour entretenir les notions tout au long de l'année et d'utiliser des dispositifs dits de « remédiation » de l'erreur en algèbre, différenciés de surcroît, nous nous sommes heurté à des élèves toujours en proie aux mêmes difficultés que nous qualifiions ainsi : un symbolisme incompris, des règles mathématiques appliquées à l'aveugle, souvent fausses ou déformées, une absence de sens donné à la lettre, une incapacité à contrôler les résultats.

Nos difficultés semblaient partagées par d'autres enseignants autour de nous, même ceux possédant une plus longue expérience que la nôtre. Nous avons entendu des collègues de lycée faire le constat d'un niveau très faible en algèbre chez les élèves nouvellement arrivés en classe de seconde générale. En particulier, les « plaintes » portaient sur l'incapacité de ces élèves à appliquer les techniques élémentaires de calcul algébrique. Pourtant, répondaient les enseignants de collège, ces techniques sont longuement travaillées en quatrième et en troisième. En effet, les manuels scolaires de 2011 débordent d'innombrables exercices uniquement consacrés au développement et à la factorisation d'expressions ou à la résolution algébrique d'équations.

Le respect du programme officiel et l'appui sur les manuels pour le travail de la technique semblaient ainsi avoir trop peu d'influence sur la réussite des élèves en algèbre. Nous nous sommes alors interrogé : le programme officiel n'était-il pas « incomplet » à ce sujet, dans le sens où il omettrait des éléments cruciaux pour que se réalisent les apprentissages en algèbre ? Les manuels proposaient-ils des activités et des exercices « pertinents » en regard de ces apprentissages ? Les raisons de notre échec n'étaient-elles pas plus profondes que ces questions d'entraînements *techniques* ? Ne touchaient-elles pas de près à la *compréhension* des objets de l'algèbre, à leur *motivation*, à la *justification* des techniques associées(Chevallard, 1998) ; Bosch et Gascon, (Bosch & Gascón, 2005) ? Finalement, en tant qu'enseignant, disposions-nous d'outils pour permettre à nos élèves de réussir en algèbre en collège ?

c. L'algèbre et les équations en collège : un enjeu pour l'enseignement des mathématiques

Dans les programmes de 2008 [9] (et les programmes actuels aussi), c'est au collège que l'étude de l'algèbre élémentaire commence « sérieusement » même si, à l'école

9. Voir le Bulletin Officiel de 2008, disponible par exemple à l'adresse suivante :
http ://media.education.gouv.fr/file/special_6/52/5/Programme_math_33525.pdf
Nous nous focaliserons sur ces programmes car ce sont eux que nous avons largement analysés dans cette thèse. Les programmes plus récents ont été publiés tardivement par rapport à nos recherches.

élémentaire, quelques formules géométriques font leur apparition (périmètre et aire du rectangle et du carré par exemple). L'étude des expressions algébriques (développement, factorisation) démarre en classe de cinquième et se prolonge jusqu'en troisième. En fin de cinquième, une « initiation » aux équations est suggérée, ces dernières étant davantage travaillées en quatrième et en troisième. L'étude des fonctions arrive en fin de collège et nécessite de savoir manipuler les équations algébriques. Au lycée et dans le supérieur, l'algèbre devient un domaine pilier de l'étude des mathématiques ou d'autres disciplines comme les sciences physiques. Entre autres, les carrefours avec l'analyse ou la géométrie se multiplient : on parle par exemple de topologie ou de géométrie *algébriques* à l'université.

L'entrée dans l'algèbre élémentaire constitue donc un tournant majeur pour les élèves dans leur scolarité en mathématiques. Beaucoup de nos anciens collègues enseignants s'accordent à dire que la classe de quatrième est une classe particulièrement « difficile », notamment à cause de cette algèbre qui selon eux est en grande partie responsable du « décrochage » de nombreux collégiens en mathématiques. Dans le supérieur, nous avons rencontré des enseignants-chercheurs qui déploraient un niveau « catastrophique » de certains étudiants dans ce domaine en licence, avec des lacunes qui remonteraient au collège. En bref, « rater » le passage d'une arithmétique travaillée et ancrée depuis l'école élémentaire à une algèbre où se mêlent symboles, lettres, opérations suspendues et qui sera le pivot dans l'étude de nombreuses notions ultérieures ne peut donc qu'être lourd de conséquences dans la construction des apprentissages mathématiques.

d. Le travail personnel des élèves sur les équations

Nous faisons à présent le pont entre le thème du travail personnel et celui sur les équations.

Notre travail de thèse s'inscrit dans une recherche en didactique des mathématiques. À ce titre, nous partons du postulat que les spécificités de la discipline ont une importance primordiale dans les phénomènes d'apprentissages et d'enseignement. Par conséquent, nous cherchons à étudier la manière dont les élèves accomplissent leur travail personnel – et la manière dont leurs enseignants l'organisent – sur le thème des équations, en mettant en avant ce que ce thème a de particulier, dans une institution donnée : les difficultés qui semblent être récurrentes en algèbre chez les élèves, les nouvelles propriétés mises en jeu, les nouveaux types d'exercices pouvant être résolus avec les équations, etc ; nous supposons que ce travail ne serait pas identique dans une autre matière (histoire, français, biologie, ...) ni même dans un autre domaine mathématique (géométrie, analyse). Or, nous l'avons vu, les documents officiels et les dispositifs mis en place par l'institution paraissent peu prendre, voire ne pas prendre en compte ces spécificités.

De plus, les équations, parce qu'elles agrègent plusieurs notions comme, entre autres, le calcul sur les nombres relatifs, sur les fractions ou sur les expressions algébriques, parce qu'elles nécessitent des « ruptures » avec une pensée arithmétique – il s'agit de ruptures épistémologiques et didactiques (Vergnaud, Cortes et Favre-Artigue, (Vergnaud, Cortes, & Favre-Artigue, 1987)) que nous préciserons dans le chapitre six –, nous paraissent constituer un thème mathématique intéressant pour reprendre nos questionnements sur le travail personnel. En effet, c'est sur un chapitre comme celui-ci que nous avons pu voir en tant qu'enseignant s'opérer de grands décalages entre le temps « officiel » que nous accordions à ce chapitre et que nous ne pouvions pas dépasser pour pouvoir traiter toutes les autres notions du programme, et le temps nécessaire à chaque élève pour construire les apprentissages relatifs aux équations. Là où certains semblaient ne rencontrer aucune difficulté particulière et résolvaient correctement les équations proposées en classe, de nombreux autres paraissaient constamment en proie soit à des difficultés liées à l'apprentissage de nouvelles notions ou en lien avec d'anciennes notions (calcul sur les nombres relatifs, les fractions, les expressions, etc.), soit peut-être à des difficultés liées à des choix didactiques mais que nous ne parvenions pas à identifier avec précision.

Dans tous les cas, l'entraînement répétitif sur des exercices techniques n'effaçait visiblement pas ces difficultés, et la diversité et la pluralité de ces dernières, que nous ne réussissions pas toutes à étiqueter, nous conduisait une nouvelle fois à nous reposer sur « l'espoir » que les élèves, en dehors du temps alloué en classe à l'étude des équations, s'investiraient dans leur travail personnel pour combler leurs lacunes. Une gageure pour les plus en difficulté, comme nous l'avons déjà souligné : comment pouvaient-ils d'une part identifier ce qui leur posait problème dans la compréhension du calcul sur les équations alors que leur propre enseignant n'y parvenait pas, et d'autre part apporter des réponses adaptées à leurs besoins d'apprentissages alors même que notre mise en œuvre des objets de savoir, inspirée des programmes et des manuels, ne semblait pas les leur avoir fournies ?

Nous retenons des paragraphes précédents les points suivants :

– Les apprentissages en algèbre élémentaire débutent de manière importante en collège, se poursuivent et deviennent essentiels au lycée et dans le supérieur. Les équations, abordées en classe de quatrième (programmes 2008), constituent donc un enjeu fort dans la scolarité des élèves en mathématiques.

– Malgré un apparent respect des programmes officiels et un appui sur les manuels scolaires, certains enseignants semblent peiner à faire se construire les apprentissages en algèbre au collège.
– Les équations articulent plusieurs thèmes et les besoins des élèves peuvent rapidement s'avérer très divers. La gestion de l'hétérogénéité de ces besoins d'apprentissages par l'enseignant devient essentielle, mais ce dernier peut se retrouver démuni pour diagnostiquer puis répondre de manière adéquate à ces besoins.
– Par conséquent, le paradoxe des élèves en difficulté apparaît encore plus flagrant sur le thème des équations : leur travail personnel en algèbre, domaine d'étude qui provoque des ruptures avec l'arithmétique du primaire et agrège une multitude de notions antérieures et nouvelles, explose potentiellement alors même que leur enseignant n'est pas toujours en mesure de l'organiser explicitement, notamment en raison des besoins d'apprentissages qui ne sont pas toujours identifiés.

1.3 Une première présentation du contexte de la recherche

a. L'influence du contexte sur les thèmes étudiés dans la thèse

Notre travail de thèse se situe par rapport à différents travaux et projets de recherche (Grugeon, 1997) ; Jean, (Jean, 2000) ; Delozanne, Prévit, Grugeon et Chenevotot (Delozanne, Prévit, Grugeon, & Chenevotot, 2008), (Delozanne, Prévit, Grugeon, & Chenevotot, 2010) ; Grugeon, (Grugeon, 2009) ; Chenevotot et Grugeon, (Chenevotot & Grugeon, 2009) ; Darwesh, (Darwesh, 2010) ; Pilet, (Pilet, 2012) qui expliquent en partie notre choix d'étudier les questions du travail personnel et de l'enseignement des équations en collège, et qui permettent de mieux saisir les enjeux de notre travail de thèse au sein de la recherche en didactique des mathématiques. Nous n'en parlons pas ici en détails ; nous exposons de manière concise et temporairement superficielle les enjeux généraux en recherche en didactique autour des questions relatives au travail personnelle et aux équations car pour être pleinement compris, ces enjeux de recherche nécessiteraient de petits développements théoriques que nous avons choisis d'effectuer dans le chapitre suivant.

b. La question du travail personnel : un enjeu peu abordé dans la recherche en didactique des mathématiques

Comme nous le verrons dans le chapitre trois, le travail personnel est l'objet d'étude de peu de travaux de recherche en didactique des mathématiques. Il est davantage analysé en sociologie ou en sciences de l'éducation (voir par exemple le dossier de veille de l'IFE de Thibert (Thibert, 2016), mais ces dernières ne donnent pas la primauté aux spécificités des contenus mathématiques dans l'enseignement et l'apprentissage. Cette rareté de travaux de recherche en didactique s'explique en partie par des difficultés d'ordre méthodologique : le travail personnel est plutôt observable en dehors du cours de mathématiques (où a principalement lieu le travail en classe) ce qui le rend potentiellement peu accessible aux chercheurs. Les données que nous pouvons recueillir sur ce travail personnel sont donc d'autant plus précieuses qu'elles ne sont pas aisées à obtenir.

De plus, même au sein des recherches en didactique, qui se situent plus souvent au niveau du lycée ou du supérieur qu'à celui du collège, la prise en compte des spécificités d'un thème particulier dans l'accomplissement du travail personnel au collège est quasiment absente. Les élèves ou les étudiants observés ou interrogés sur leur travail personnel le sont certes en lien avec leur apprentissage des mathématiques (voir par exemple Félix, (Félix, 2002) ; Castela, (Castela, 2007a)), mais la nature précise des contenus travaillés est peu considérée. En nous focalisant sur le thème particulier des équations en classe de quatrième en collège, nous mettons davantage en avant les liens entre les spécificités d'un contenu mathématique et les (difficultés d') apprentissages qui lui sont relatifs.

Enfin, nous avons illustré le fait que le travail personnel accrochait plusieurs problématiques enseignantes générales, comme l'autonomie des élèves ou la gestion de l'hétérogénéité des besoins d'apprentissages. Ces questions sont également des questions vivantes en recherche en didactique, et le travail personnel est une occasion de les traiter d'une manière originale sous certains aspects.

c. La question de l'enseignement des équations : un thème d'actualité dans la recherche en didactique des mathématiques

Contrairement au travail personnel, l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre sont très largement étudiés en didactique des mathématiques, et les nombreux travaux de recherche sur le sujet témoignent de son importance et de son actualité[10]. Notre travail s'insère dans divers projets de recherche et dans la continuité de plusieurs travaux en didactique de l'algèbre. Nous poursuivons notamment des travaux relatifs à l'enseignement des expressions algébriques, ces dernières constituant des notions préalables à l'étude des équations. Nos résultats ont de plus servi à des enseignants et des chercheurs pour concevoir des parcours d'enseignement[11] sur les équations et des ressources écrites à destination des enseignants à propos de l'évaluation en algèbre. Nous présentons tout ceci plus en détail dans le chapitre deux.

Le fait de choisir d'étudier le travail personnel sur le thème des équations nous paraît cohérent dans la mesure où nous disposons pour le second de nombreux éléments théoriques sur lesquels nous pourrons nous appuyer pour analyser la manière dont le premier, peu étudié en recherche, est accompli par les élèves et organisés par leurs enseignants.

1.4 Conclusion

Nous avons présenté les deux thèmes principaux de la thèse dans ce chapitre introductif. Pour chacun d'eux, nous avons exposé des questions et des problèmes qui témoignent d'enjeux forts tant du point de vue de l'enseignement des mathématiques que de la recherche en didactique.

À l'issue de ce premier chapitre, nous nous posons les principales questions suivantes :

1. Les difficultés des élèves à réaliser un travail personnel efficace ne proviendraient-ils pas d'un manque d'explicitation des attentes vis-à-vis d'un tel travail par les programmes officiels et les enseignants ?
2. Ce manque d'explicitation autour du travail personnel ne serait-il pas lui-même issu d'un manque d'identification par les programmes et les enseignants des besoins d'apprentissages des élèves, en lien avec le contenu mathématique étudié ?
3. Ainsi, l'identification des besoins d'apprentissages relatifs aux équations ne permettrait-elle pas d'expliciter une organisation de ce travail personnel favorisant les apprentissages en lien avec les spécificités des contenus mathématiques correspondants ?

10. Une synthèse de travaux de référence sur les équations est présentée dans le chapitre six de cette thèse.

11. Voir chapitres neuf et dix.

Ces questions montrent l'intérêt de passer d'une approche uniquement cognitive pour expliquer les difficultés des élèves à une approche anthropologique prenant en compte la structure même de l'activité mathématique et de son étude au cours de la transposition didactique, approche présentée dans le chapitre suivant.

Chapitre 2

Cadres théoriques, problématique et méthodologie générale

« Il y aura juste proportion si l'on ne parle ni sans art sur des questions d'une haute importance, ni solennellement sur des questions secondaires, et pourvu que l'on n'adapte pas un terme fleuri au nom d'une chose ordinaire ; sinon, la comédie apparaît. »

Aristote, La Rhétorique, Livre III

2.1 Objectifs du chapitre

Dans ce deuxième chapitre, nous formalisons à l'aide de cadres et outils théoriques les phénomènes et interrogations abordés dans le chapitre précédent, et nous exposons la méthodologie générale de la thèse.

Nous commençons par présenter les principaux cadres théoriques dans lesquels nous nous plaçons en nous efforçant d'en expliquer les raisons : pourquoi tel et tel cadres théoriques nous semblent pertinents pour étudier tel et tel aspects du travail personnel et de l'enseignement des équations en collège. L'explicitation des cadres théoriques permet simultanément celle des principales hypothèses de travail sur lesquelles nous nous appuierons, et celle de quelques limites au-delà desquelles nous ne nous prononcerons pas. Ils guident également la méthodologie générale ; celle-ci se précisera dans les chapitres qui suivent en fonction des besoins théoriques et des résultats obtenus au fur et à mesure.

Une fois mis à notre disposition, les principaux outils théoriques nous servent ensuite à élaborer une problématique formelle et à esquisser des premières hypothèses de recherche. Ils sont aussi l'occasion de revenir sur le contexte dans lequel s'inscrit la thèse, leur absence nous ayant conduit à seulement aborder ce contexte en surface dans le chapitre un.

Enfin, les éléments développés ici aident à comprendre la structure du plan de thèse, qui complète les éléments méthodologiques fournis auparavant et que nous annonçons à l'issue de ce deuxième chapitre.

2.2 Présentation et motivation de l'usage de cadres théoriques, premiers éléments méthodologiques

2.2.1 L'apport d'une approche anthropologique

Nous allons dans un premier temps motiver le recours aux cadres et outils théoriques dans notre travail de thèse. Notre but est de reformuler de manière progressive et argumentée nos questions d'enseignant en questions de recherche et d'exposer des éléments méthodologiques pour y répondre.

Rappelons les interrogations qui ont clôturé le chapitre un :

1. Les difficultés des élèves à réaliser un travail personnel efficace ne proviendraient-ils pas d'un manque d'explicitation des attentes vis-à-vis d'un tel travail par les programmes officiels et les enseignants ?
2. Ce manque d'explicitation autour du travail personnel ne serait-il pas lui-même issu d'un manque d'identification par les programmes et les enseignants des besoins d'apprentissages des élèves, en lien avec le contenu mathématique étudié ?
3. Ainsi, l'identification des besoins d'apprentissages relatifs aux équations ne permettrait-elle pas d'expliciter une organisation de ce travail personnel favorisant les apprentissages en lien avec les spécificités des contenus mathématiques correspondants ?

Ces questions nécessitent pour être traitées d'adopter une approche prenant en compte le savoir mathématique et sa transposition dans différentes institutions, et donc ce qu'est l'activité mathématique et ce que sont les pratiques enseignantes pour organiser didactiquement l'étude de leurs élèves. La théorie anthropologique du didactique, que nous présentons ci-après, constitue à ce titre une telle approche multidimensionnelle permettant de réinterroger et de faire évoluer ces premières questions.

2.2.2 La théorie anthropologique du didactique

a. Les notions d'institution et de rapport à un objet pour modéliser et analyser les relations entre les individus, les institutions et les objets de savoir

Les phénomènes mentionnés au chapitre un mettent en scène des élèves et des enseignants dans des classes, soumis à des contraintes diverses présentes dans ces classes, mais aussi dans des établissements, dans un système éducatif en général, et qui entretiennent des relations particulières avec des objets de savoir, comme celui sur les équations.

L'approche anthropologique développée par Chevallard ((Chevallard, 1992), (Chevallard, 1998), (Chevallard, 1999), (Chevallard, 2005)) fournit des outils pour étudier ces différents éléments. Chevallard définit une *institution* comme étant un dispositif social « total » permettant et imposant aux personnes qui occupent des *positions* offertes dans cette institution la mise en jeu de manières de faire propres et de manières de penser propres. Par exemple, une classe est une institution, avec deux positions : celle d'élève et celle d'enseignant. Le système éducatif est une autre institution.

Toute personne vivant dans une institution est un *sujet* de cette institution : l'élève est le sujet de son enseignant, lui-même sujet du système éducatif. L'institution, même si elle les contraint, permet à ses sujets de faire et de penser : l'élève étudie les mathématiques parce qu'il trouve en classe les conditions pour le faire, conditions en partie mises en place par l'enseignant.

Une institution possède des attentes vis-à-vis de ses sujets en fonction des positions qu'ils y occupent. En particulier, elle attend d'eux qu'ils entretiennent certains *rapports* à des *objets*. Un objet est à comprendre au sens large : il s'agit d'une entité matérielle ou immatérielle existant au moins pour un individu. Le rapport d'un individu à un objet est l'ensemble de toutes les interactions que cet individu a avec cet objet. Dès qu'un objet existe pour au moins un individu, alors cet individu possède un rapport *personnel* à cet objet.

Le rapport *institutionnel* à un objet en une certaine position est le rapport qu'un sujet dans cette certaine position devrait avoir avec l'objet en question d'après les attentes de l'institution dont il est le sujet. Par exemple, à la fin de la classe de quatrième, l'institution système éducatif [1] attend d'un élève qu'il sache ce que sont des équations du premier degré à une inconnue réelle et à coefficients réels et qu'il sache en résoudre certaines. Si tel est le cas, alors l'élève a développé un rapport

1. Programmes de 2008.

personnel à l'objet équation en fin de quatrième qui se confond avec un rapport institutionnel.

Il faut noter que l'évaluation du rapport personnel à un objet par un évaluateur connaissant le rapport institutionnel à cet objet ne peut qu'être *apprécié*. Ainsi, de manière générale, deux évaluateurs connaissant ce rapport institutionnel l'apprécieront différemment.

En résumé, les élèves – tout comme leurs enseignants – entretiennent des rapports personnels à des objets de savoir au sein de l'institution qu'est la classe, et l'enseignant souhaite qu'à travers son enseignement, ces rapports tendent vers des rapports institutionnels définis par les programmes officiels. Par conséquent, la compréhension des apprentissages personnels des élèves passe en partie par l'analyse des apprentissages institutionnels : le savoir appris dépend de l'institution dans lequel il est appris et donc est liée aux rapports institutionnels aux objets de savoir. Une question vient alors naturellement : comment se construisent les rapports personnels des élèves au sein des différentes institutions (classes) dans lesquelles ils évoluent ?

b. La transposition didactique : un outil pour modéliser et analyser les transformations du savoir

Dans nos interrogations du chapitre un, les élèves ont appris dans des classes avec des enseignants mettant en œuvre un enseignement. L'enseignement est construit en fonction des contraintes imposées par des documents officiels et des institutions (comme l'inspection, le Ministère de l'Education Nationale), eux-mêmes soumis à d'autres contraintes émises par d'autres personnes (enseignants, formateurs, inspecteurs, chercheurs, mathématiciens, ...). Ainsi, en descendant cette chaîne d'institutions exerçant des contraintes aux différents sujets y occupant certaines positions, le savoir savant issu des mathématiciens est transformé en un savoir à enseigner dans les documents officiels et les manuels, lui-même transformé en un savoir enseigné par les enseignants au sein des classes, lui-même transformé en un savoir appris par les élèves (voir figure 2.1).

La prise en compte des phénomènes liés à cette *transposition didactique* (Chevallard, 1985), au sein de laquelle le savoir subit des transformations, nous permet d'étudier l'évolution et la transmission des savoirs véhiculés au sein des institutions.

Dans notre cas, les élèves en quatrième construisent leurs rapports personnels aux équations grâce à l'enseignement prodigué par l'enseignant. Cet enseignement est lié au savoir à enseigner présent dans les manuels et les programmes officiels.

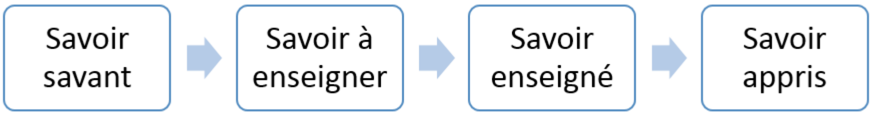


FIGURE 2.1 – La transposition didactique

Cependant, au regard de l'échec des élèves en algèbre, nous nous sommes interrogés : l'institution fournit-elle explicitement aux enseignants et aux élèves les moyens de faire construire aux élèves des rapports institutionnels aux objets de l'algèbre ? Surtout, ces rapports institutionnels permettent-ils par la suite, lorsque les élèves changent d'institution (passent en classe supérieure) de construire les nouveaux rapports institutionnels attendus ? Comment ces rapports institutionnels sont-ils décrits dans les programmes officiels et les manuels ?

Chevallard (Chevallard, 1989a) fait la distinction entre le rapport institutionnel (qu'il appelle aussi le rapport *officiel*) à un objet attendu au sein d'une institution et le rapport *idoine* à cet objet :

> « *La transposition didactique, qui modifie le fonctionnement des objets de savoir, imprime une certaine spécificité au rapport officiel que l'enseignement prodigué propose à l'élève. Et ce rapport officiel engendre chez l'élève un rapport personnel qui, aussi conforme soit-il au rapport officiel, jouira d'une idonéité limitée dès lors que l'objet de savoir concerné, ayant cessé d'être enjeu didactique pur, ne sera plus qu'outil de l'activité didactique-mathématique de l'élève [...]* »

Autrement dit, l'enseignant souhaite que ses élèves entretiennent des rapports personnels aux objets de savoir à la fois proches des rapports institutionnels, mais aussi des rapports personnels *idoines* qui leur permettront, dans d'autres institutions, de construire de nouveaux rapports personnels idoines. Cependant, d'après Chevallard, rapport institutionnel et rapport personnel idoine ne sont pas toujours confondus.

c. Les organisations praxéologiques pour modéliser et analyser l'activité mathématique des élèves

Les élèves construisent des rapports personnels aux équations à travers l'enseignement fourni par l'enseignant au sein de la classe. Concrètement, comment étudier ces rapports personnels ? Comment les mettre en relation avec les rapports institutionnels à l'œuvre dans les programmes et les manuels ?

Pour répondre à ces questions, et toujours en nous plaçant dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (abrégée TAD dans la suite), nous partons du postulat que toute action humaine procède d'une *praxéologie* : pour réaliser une *tâche* t relevant d'un certain *type de tâches* T, un individu va mettre en œuvre une manière de faire, une *technique* τ, qu'il justifiera par un discours rationnel, la *technologie* θ, elle-même éventuellement justifiée par un autre discours supérieur, la *théorie* Θ. Un quadruplet $[T, \tau, \theta, \Theta]$ constitue une *organisation praxéologique ponctuelle* et, dans le cas particulier des mathématiques, une *organisation mathématique ponctuelle*. Dans toute la thèse, nous désignerons par OM une organisation mathématique, et nous utiliserons indifféremment les termes d'organisations mathématiques ou de praxéologies mathématiques.

Il est à noter que la technologie θ peut être décrite à l'aide de deux composantes, l'une théorique, l'autre pratique (Castela, 2008). La composante théorique comprend les définitions et théorèmes mathématiques ; la composante pratique renvoie au discours non mathématique qui guide la mise en œuvre d'une technique.

Par exemple, la tâche « Résoudre l'équation $3x + 1 = 6x + 5$ » relève du type de tâches « Résoudre une équation du type $ax + b = cx + d$ ». Une technique pour résoudre cette équation peut être de le faire en utilisant les propriétés de conservation de l'égalité, qui constituent la composante théorique de la technologie justifiant cette technique. Les discours comme « Isoler l'inconnue dans un membre » font partie de la composante pratique de la technologie. Enfin, la technologie peut elle-même être justifiée par une théorie, celle issue des propriétés du corps des réels.

Un type de tâches peut relever d'un *genre de tâches*. Par exemple, le type de tâches « Résoudre une équation du type $ax + b = cx + d$ » relève du genre de tâches « Résoudre une équation ». La précision avec laquelle on décide de formuler types et genres de tâche relève de choix dépendant de ce que l'on veut étudier et du grain d'analyse souhaité.

d. Les différents niveaux d'OM pour analyser les agrégations entre OM

Dans le chapitre un, nous avons vu que les équations constituaient un thème riche dans le sens où il articule plusieurs notions : calcul sur les nombres relatifs, sur les fractions, sur les expressions algébriques, etc. Autrement dit, les OM ponctuelles relatives aux équations ne sont pas esseulées, elles forment généralement des agrégats. Ces phénomènes d'agrégation entre OM, dont nous supposons qu'ils peuvent être en partie à l'origine des difficultés des élèves, peuvent être analysés à l'aide des différents niveaux d'OM que nous détaillons ici.

Une même technologie θ peut permettre de justifier plusieurs techniques τ_i pour réaliser des types de tâche T_i. Une OM définie par le bloc $[T_i, \tau_i, \theta, \Theta]$ est une OM *locale*. Par suite, ces OM locales s'agrègent en OM *régionales* $[T_{ij}, \tau_{ij}, \theta_j, \Theta]$ où une même théorie Θ justifie plusieurs technologies θ_j. Enfin, les OM régionales s'agrègent en OM *globales* correspondant à une agrégation de théories Θ_k et formant des blocs $[T_{ijk}, \tau_{ijk}, \theta_{jk}, \Theta_k]$.

Dans notre problème d'enseignant, par exemple, les types de tâches relevant du genre de tâches « Résoudre une équation du premier degré à une inconnue réelle et à coefficients réels » peuvent être réalisés par des techniques algébriques justifiées par une même technologie (propriétés de conservation de l'égalité), elle-même justifiée par une théorie (propriétés du corps des réels). Ceci forme une OM locale. D'autres OM locales (par exemple, l'OM locale autour de la mise en équation) prennent place au sein d'une OM régionale relative aux équations, elle-même se situant dans une OM de niveau supérieur : l'OM globale « Algèbre ».

Nous verrons dans les paragraphes suivants la puissance octroyée par l'étude de ces OM, en particulier pour traquer des OM ponctuelles qui sont en réalité *ignorées* par l'institution et pourtant nécessaires pour la réussite des élèves.

Nous pouvons étudier les rapports personnels des élèves à un objet de savoir en analysant les techniques et les technologies qu'ils utilisent, et juger si celles-ci ne sont pas idoines vis-à-vis des types de tâche donnés. Par exemple, en fin de quatrième, un élève qui utilise systématiquement une technique d'essais/erreurs pour résoudre des équations de la forme $ax + b = cx + d$ ou qui écrit que l'équation $3x = 2$ est équivalente à l'équation $x = \frac{2}{-3}$ n'aura pas construit un rapport idoine aux équations. Il est possible de faire des hypothèses sur les technologies mobilisées par cet élève, en particulier de supposer que ces dernières sont utilisées en dehors de leur domaine de validité.

Sans prétendre à l'exhaustivité, l'identification des organisations praxéologiques permet d'émettre des hypothèses probables sur les rapports personnels des élèves aux objets de savoir, en particulier sur les technologies qu'ils utilisent, pour déterminer quels sont les rapports qui constituent des points d'appui et quels sont ceux qui constituent des obstacles ; elle donne des pistes pour mettre en place des situations d'enseignement qui ciblent avec une relative précision les OM à travailler ou les techniques à déstabiliser.

Concernant l'étude des rapports institutionnels, l'analyse des types de tâches, techniques et technologies présents dans les programmes et les manuels fournit des indicateurs sur ces rapports institutionnels attendus.

Cependant, l'étude des rapports personnels des élèves et des rapports institutionnels n'est pas suffisante pour déterminer si ces derniers sont *idoines*. Les points soulevés au chapitre un questionnent directement l'idonéité des rapports institutionnels, en remettant potentiellement en question les OM à enseigner présentes dans les manuels et les programmes. Qu'est-ce qui permet de juger de cette idonéité ?

e. L'OM de référence épistémologique : un outil pour analyser l'incomplétude des OM à enseigner, enseignées, apprises et pour concevoir un parcours d'étude et de recherche sur les équations

Bosch, Fonseca et Gascon (Bosch, Fonseca, & Gascón, 2004) et Bosch et Gascon (Bosch & Gascón, 2005) introduisent la notion d'incomplétude des OM locales pour décrire certains déficits praxéologiques dans les OM à enseigner, enseignées ou apprises. Une OM locale est dite *incomplète* lorsqu'elle est composée d'OM ponctuelles « rigides », « isolées », c'est-à-dire sans discours technologique θ justificateur et unificateur. Par exemple, un manuel scolaire proposant de travailler des types de tâches de manière isolée, en faisant peu ou prou référence à un discours technologique, présente une OM locale incomplète.

À l'inverse, une OM locale *relativement complète* est une OM locale qui intègre et articule les OM ponctuelles qui la composent.

Bosch et Gascon (Bosch & Gascón, 2005) proposent alors de faire intervenir une *OM de référence épistémologique* dans le schéma de la transposition didactique(voir figure 2.2).

Une telle OM de référence est une OM construite à partir d'une référence épistémologique. Elle présente des OM locales relativement complètes, qui intègrent et articulent des OM ponctuelles. Contrairement à l'OM savante qui n'est pas direc-

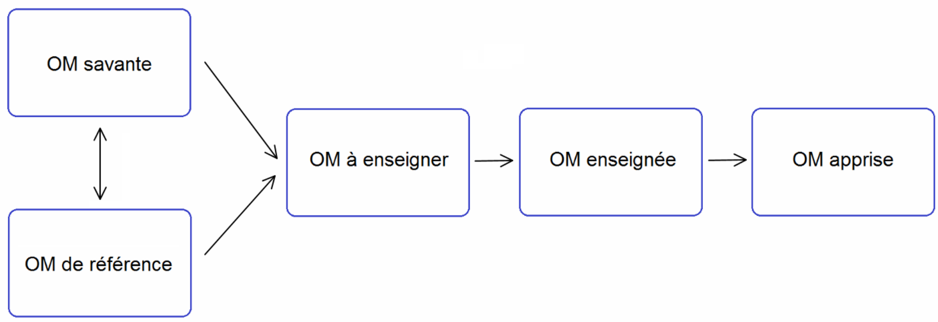


FIGURE 2.2 – La transposition didactique chez Bosch et Gascon (2005)

tement visible et accessible dans la réalité, l'OM de référence est une OM tangible. Elle ne coïncide pas forcément avec l'OM savante.

La construction d'une OM de référence relative aux équations du premier degré, que nous présenterons au chapitre six, est un résultat majeur de notre travail de thèse et constitue un outil adapté aux problèmes d'enseignant que nous avons posés : la comparaison des OM locales de l'OM de référence épistémologique aux OM à enseigner présentes dans les programmes et les manuels permet de détecter des OM ponctuelles isolées et rigides, mais également des OM ponctuelles *absentes* et pourtant nécessaires d'un point de vue épistémologique pour la construction de rapports personnels idoines. Toutefois, comme nous l'argumenterons plus tard, si disposer d'une OM de référence relative aux équations nous semble être une condition nécessaire à l'établissement d'un rapport personnel idoine à ces équations, il ne s'agit pas selon nous d'une condition suffisante : d'autres facteurs, dont beaucoup ne seront considérés que comme des « paramètres » dans cette thèse car situés hors du champ de la recherche en didactique, contribuent très probablement à la construction de ce rapport personnel idoine.

Cette méthodologie a été éprouvée par Pilet (2012), Grapin (2015) et Rinaldi (2016) dans leurs travaux, avec l'obtention de résultats probants dans l'analyse des déficits praxéologiques des OM à l'œuvre dans les institutions qu'elles ont respectivement étudiées [2]. Pilet (2012) a montré, en la comparant avec une OM de référence relative aux expressions algébriques, que l'OM à enseigner relative aux expressions

2. Grugeon (Grugeon, 1995) avait également employée une méthodologie similaire mais à partir de la définition d'une autre référence, la compétence algébrique, pour comparer les rapports institutionnels à l'algèbre dans deux institutions et montrer les décalages importants.

algébriques dans les programmes et les manuels de collège n'était pas complète, que certaines OM ponctuelles étaient peu travaillées, et que d'autres l'étaient de manière isolée, avec un manque de discours technologique unificateur. Nous ferons de même avec l'OM à enseigner relative aux équations du premier degré.

L'OM de référence nous sert également à concevoir des *Parcours d'Etude et de Recherche* (Chevallard, 2011), abrégés PER par la suite. Un PER modélise un processus d'étude où l'on cherche à répondre en partie ou totalement à une « grande » question dans un projet social, cette question pouvant donner lieu à des sous-questions plus « petites » et isolées, qui font potentiellement l'objet d'*Activités d'Etude et de Recherche* (AER). Comme pour les types ou les genres de tâches, ou les OM locales au sein d'une OM régionale, nous considérons que la formulation et le découpage de PER en AER sont fonctions des questions de recherche et de la finesse d'analyse désirée. Le PER – du moins, c'est ainsi que nous l'avons appelé en regard de notre compréhension de cet outil théorique – que nous avons conçu et qui sera présenté au chapitre neuf se veut être une réponse à une grande question que nous formulons comme suit : comment résoudre un problème du premier degré ? Plusieurs étapes, correspondant à ce que nous considérons comme des AER, décomposent la recherche de la réponse à cette grande question. La première étape motive la production d'une équation du premier degré à une inconnue ; la deuxième donne une raison d'être à la technique de résolution algébrique d'une telle équation ; la troisième fait travailler la mise en équation de problèmes du premier degré.

f. Convocations d'OM et phénomènes silencieux d'apprentissage

Depuis quelques paragraphes, nous laissons sous-entendre que l'Institution *ignore* certains besoins d'apprentissage des élèves, que certaines OM ponctuelles sont peu présentes dans les programmes et les manuels. Chevallard (Chevallard, 1998) évoque de tels phénomènes lorsque des élèves sont confrontés pour la première fois à un nouvel objet d'étude annoncé par le professeur :

> « *S'il existe en effet des premières rencontres* annoncées *[...], il existe aussi, à l'autre extrême, des premières rencontres vraies, qui, pourtant, passent presque entièrement* inaperçues *parce que, dans l'institution où elles se produisent, l'objet rencontré est en quelque sorte de deuxième, voire de troisième rang, et qu'il n'est rencontré que parce qu'il vit en étroite association avec l'objet véritable de la rencontre. [...] Pour [l'organisateur de l'étude], seuls* certains *objets appellent une mise en scène*

introductive, tandis que les autres sont censés s'introduire sans façon, comme silencieusement, dans l'organisation mathématique qui se construit. » (p. 20)

Dans ses travaux, Castela (Castela, 2008) parle d'enjeux « *non explicités d'apprentissage en mathématiques, c'est-à-dire [des] apprentissages qui doivent être réalisés par les élèves pour réussir dans la classe de mathématiques alors même que l'institution d'enseignement n'organise aucun système didactique visant explicitement à permettre la réalisation des apprentissages en question.* » (p. 137). En particulier, la réalisation d'un même type de tâche peut impliquer plusieurs OM ponctuelles, dont, pour certaines, la *convocation* est laissée à la charge des élèves.

En s'appuyant sur les travaux de Robert et Rogalski (Robert & Rogalski, 2002), et Robert et Pouyanne (Robert & Pouyanne, 2004), Castela précise ces convocations d'OM en termes d'OM *R-convoquée* et d'OM *T-convoquée*. Une OM est R-convoquée lorsque la tâche ne fait pas explicitement référence à une technique à mettre en œuvre pour la réaliser ; à l'inverse, une OM est T-convoquée lorsque la tâche rend plus ou moins explicite la technique à utiliser ou lorsqu'est telle que l'élève reconnaît une situation « prototypique » appelant telle ou telle technique.

Pilet (Pilet, 2012) a montré l'existence de différentes convocations entre OM ponctuelles des OM locales de l'OM de référence relative aux expressions, dont certaines n'étaient pas prises en charge par les manuels et n'étaient pas explicitées par les programmes.

L'étude de ces phénomènes silencieux, par la traque d'OM ponctuelles intervenant dans la réalisation de certains types de tâche, et qui sont ignorées par l'Institution, est en lien direct avec notre problème d'enseignant, qui interroge les conditions mises en place par cette Institution et dans lesquelles les élèves construisent leurs rapports personnels aux objets de savoir.

g. Temps didactique, temps praxique, curriculum praxique : des outils pour décrire la tension entre temps officiel des apprentissages et temps nécessaire aux élèves pour réaliser ces apprentissages

Notre problème d'enseignant pose la question du temps disponible en classe et qui n'est pas extensible pour travailler des objets de savoir, en particulier des objets de savoir anciens ou récents, censés être stables d'un point de vue de l'Institution mais qui ne le sont pas en pratique chez les élèves.

Supposant avoir identifié les besoins explicites et implicites dans l'institution de ses élèves par rapport aux équations, et supposant disposer d'outils pour favoriser la construction de rapports personnels idoines aux équations, subsiste le problème du temps à trouver par l'enseignant dans sa classe. Soumis à la contrainte du programme officiel à respecter, l'enseignant organise son enseignement en déterminant des durées qu'il souhaite consacrer à tel ou tel objet de savoir. Ce *temps didactique officiel* rythme l'apparition des objets de savoir dans cet enseignement. En parallèle, l'enseignant souhaite que se réalise un travail sur des objets de savoir récents ou anciens et qui interviennent dans l'étude des objets de savoir nouveaux ; ce travail, lui, est réalisé sur un temps qui n'est pas le temps didactique officiel et qui est en tension avec ce dernier car il ne le fait pas progresser.

Castela (2008) parle de *temps praxique* : « *les avancées du temps didactique sont marquées par l'apparition d'objets de savoir, celles du* temps praxique *le sont par l'apparition d'exigences pratiques nouvelles.* » (p. 151). Elle ajoute que « *au moment même où le rapport officiel à un objet neuf apparaît à l'avant-scène didactique, les rapports institutionnels à une foule d'autres objets, antérieurement introduits, sont subrepticement retravaillés et transformés. Le temps praxique n'avance pas au même rythme que le temps didactique au sens usuel, un objet peut être encore praxiquement sensible quand il ne l'est plus au plan théorique. Pour une OM ponctuelle donnée, le moment du travail de la technique se prolonge clandestinement au sein de l'étude d'OM nouvelles.* » (p. 159).

Castela (Castela, 2007) introduit la notion de *curriculum praxique* comme étant « *l'ensemble des tâches mathématiques que [l'élève] rencontre dans son parcours scolaire [...], l'ensemble des « passages obligés » sur la route praxique* » (p. 92). Selon elle, ce curriculum praxique est visible dans l'Institution mais ignoré par celle-ci. La TAD fournit des outils appropriés pour étudier ce curriculum praxique, en posant la question des OM sollicitées : cette sollicitation est-elle laissée à la charge des élèves ? Est-ce à eux de choisir entre plusieurs OM possibles ? Ces OM portent-elles sur des objets de savoir anciens, récents ?

h. La notion d'étude pour modéliser en partie le travail personnel

Dans le chapitre un, nous avons interrogé cette tension entre temps didactique et temps praxique. Dans l'hypothèse où les élèves disposeraient d'un temps praxique extensible à l'infini, construiraient-ils quand même leurs apprentissages ? Cette question nous paraît purement rhétorique. En effet, nous faisons l'hypothèse que les difficultés d'apprentissages ne sauraient être levés par l'élève uniquement par la possibilité de rallonger à souhait le temps praxique. Ce dernier nous paraît devoir être *investi* par l'élève *d'une certaine manière* et notre expérience du terrain nous laisse penser que là où une poignée d'élèves parvient à mettre véritablement à profit ce temps, d'autres n'y arrivent jamais, faute de savoir ce qu'il convient de faire. On en revient aux « règles » sur la façon d'exploiter le temps praxique, c'est-à-dire d'accomplir le « travail personnel ».

La notion d'*étude* développée en TAD par Chevallard (Chevallard, 1999), (Chevallard, 2002a) nous permet de modéliser ce travail personnel – du moins, de commencer ici à le faire ; nous détaillerons ce point dans le chapitre cinq.

D'après Chevallard (1999), *étudier* à l'école signifie :

> « faire quelque chose afin d'apprendre quelque chose (« savoir ») ou d'apprendre à faire quelque chose (« savoir-faire ») » (p. 240)

En TAD, *apprendre* équivaut à faire tendre son rapport personnel à un objet de savoir vers un rapport institutionnel. Cet apprentissage résulte potentiellement d'une coopération entre enseignant et élève : d'une part, l'enseignant crée un ensemble de conditions qu'il pense favorables à l'apprentissage ; d'autre part, l'élève exploite ces conditions pour apprendre, et ce faisant, il *étudie*. Plus précisément, l'élève accomplit des *gestes d'étude*, le mot « geste » signifiant non pas un simple mouvement du corps, mais au sens large une action relevant de la *gestion*. Lire la leçon, mémoriser une correction, faire des exercices d'un manuel parascolaire sont des exemples de gestes d'étude. De son côté, l'enseignant peut aider l'élève à accomplir ces gestes d'étude, par exemple en lui donnant des pistes pour réaliser un type de tâches ; nous dirons alors qu'il effectue un *geste d'aide à l'étude.*[3]

L'étude supposerait donc parfois une certaine *autonomie* : bien que l'enseignant désigne *a minima* les objets de savoir à étudier, l'élève a sa part de responsabilité dans la construction de ses apprentissages. Nous verrons plus loin que le cadre de la théorie des situations didactiques permet de décrire plus finement cette autonomie, ici à peine évoquée.

Les phénomènes silencieux d'apprentissage, introduits plus haut, peuvent conduire l'élève à étudier de manière autonome et *personnelle* : en fonction de ses besoins – si tant est qu'il se montre capable de les identifier – l'élève peut se retrouver en position de devoir étudier des objets de savoir, notamment ceux dont la rencontre est qualifiée par Chevallard (1998) « de deuxième, voire de troisième rang » et dont l'étude, parfois non organisée explicitement par l'institution, peut s'avérer nécessaire.

3. Nous distinguerons au chapitre cinq différents *types* de gestes d'étude ou d'aide à l'étude.

Ces outils étant posés, viennent naturellement les questions suivantes : quelles sont les conditions d'étude qui facilitent l'établissement d'un rapport personnel idoine aux objets de savoir ? Quels gestes d'aide à l'étude l'enseignant peut-il réaliser pour que l'élève accomplisse des gestes d'étude favorisant la construction des apprentissages ?

Des éléments de réponse en TAD sont apportés par Chevallard (1998) et introduits dans les paragraphes ci-après.

i. L'organisation didactique, les moments de l'étude et les systèmes didactiques principaux et auxiliaires : des éléments pour décrire l'organisation de l'étude personnelle

Comment l'enseignant peut-il amener l'élève à étudier le thème des équations ? Comment peut-il lui faire élaborer et travailler les OM correspondantes ? C'est à travers une *organisation didactique*, qui est une organisation praxéologique dont l'enjeu est didactique, que l'étude d'objets de savoir peut avoir lieu. Elle peut être décrite à l'aide de six *moments* (Chevallard, 1998), qui sont presque toujours présents quelle que soit la manière dont l'étude est menée :

1. Le moment de la première rencontre avec un type de tâches T. Comme cela a déjà été dit, il est possible que cette première rencontre s'accompagne en réalité de plusieurs premières rencontres, par exemple avec des types de tâches convoqués dans la réalisation de T.
2. Le moment de l'exploration de T et de l'élaboration d'une technique pour le réaliser.
3. Le moment de la constitution de l'environnement technologico-théorique relatif à cette technique.
4. Le moment du travail de la technique.
5. Le moment de l'institutionnalisation de la technique. L'enseignant explicite ce qu'il y a « à retenir » et le distingue de ce qui n'était que contingent.
6. Le moment d'évaluation de la technique. L'enseignant amène les élèves à se demander ce que vaut la technique élaborée : quels sont les types de tâches qu'elle permet de résoudre, celles qui la mettent en échec (test de la *portée* de la technique) ? Existe-t-il des techniques plus faciles à manier, moins coûteuses dans ses conditions d'utilisation ?

Ces six moments ne se déroulent pas nécessairement les uns à la suite des autres de manière chronologique. Ils peuvent avoir lieu dans le désordre, de façon étalée dans le temps ; plusieurs moments peuvent survenir simultanément.

Nous montrerons au chapitre cinq comment nous relions ces moments de l'étude et l'organisation de l'étude personnelle des élèves. Tout ce que nous dirons ici, et que le lecteur comprendra intuitivement, c'est que certains gestes d'étude et gestes d'aide à l'étude sont ou au contraire ne sont pas attendus selon le moment de l'étude considéré : par exemple, tant que le moment de l'élaboration de l'environnement technologico-théorique relatif à une technique nouvelle n'a pas eu lieu, l'élève n'accomplira pas de gestes d'étude directement en lien avec une technologie nouvelle justifiant la technique, puisque cette technologie n'est pas encore élaborée ; inversement, dans le moment du travail de la technique, il sera supposé possible, et il sera attendu, que l'élève mobilise cette technique.

Nous avons évoqué au chapitre un la distinction entre ce que les programmes appellent le travail en classe et le travail personnel. Les notions de *systèmes didactiques principaux et auxiliaires* (Chevallard, 2002a), que nous présentons maintenant, permettent de décrire cette distinction en mettant en avant les liens que peuvent entretenir ces deux formes de travail.

À l'échelle du pays, le ministère de l'Education Nationale définit les *disciplines* scolaires à étudier. Chaque discipline est étudiée à travers plusieurs *classes* [4] par plusieurs élèves, selon un *programme d'étude*, sous la direction de plusieurs enseignants qui sont des *directeurs d'étude*, et éventuellement avec des *aides à l'étude* (personnes aidant les élèves à étudier, par exemple dans le cadre de l'accompagnement personnalisé). Les systèmes didactiques disciplinaires ainsi formés par les élèves, les directeurs d'étude et les aides à l'étude, sont appelés par Chevallard (2002) des *systèmes didactiques principaux*, abrégés SDP dans la suite. Chevallard décrit ainsi une classe comme une « sommation de SDP ». Mais il ajoute que ces SDP ne peuvent exister seuls :

> « D'autres dispositifs didactiques sont cependant nécessaires ; car d'une manière générale, l'existence et le fonctionnement d'un système didactique S_0 supposent l'existence et le fonctionnement de *tout un ensemble* de systèmes didactiques [...] que nous dirons *auxiliaires* (SDA), qui vivent dans l'établissement ou hors de l'établissement. » (2002, p. 13)

4. Elles-mêmes incluses dans des cycles.

L'accompagnement personnalisé est un exemple de tel SDA. À la maison, lorsqu'un élève étudie une question mathématique, seul ou avec l'aide d'un parent, il s'agit aussi d'un SDA.

Selon Chevallard (2002), et comme cela est également dit dans les programmes que nous avons précédemment étudiés, ces SDA sont nécessaires parce qu'ils sont censés répondre aux besoins d'apprentissages des divers élèves, besoins qui n'auront pas été comblés dans les SDP. Le problème est que certains SDA ne sont pas explicitement organisés par l'institution. Ils peuvent notamment placer l'élève dans une autonomie qu'il n'est pas capable d'assumer. L'enseignant, quant à lui, peut être amené à se poser la question – et parfois à y répondre sans en être conscient – de ce qui peut ou doit être étudié dans les SDP et de ce qui peut ou doit l'être dans les SDA. Ce problème de coordination entre SDP et SDA nous conduit à parler de premières limites à notre travail de thèse dans les paragraphes qui suivent.

j. La complexité des systèmes didactiques et les interrelations entre les niveaux de codétermination didactique pour décrire une partie des aspects non analysés dans la thèse

Notre thèse n'a en réalité pas pour objet *l'*étude personnelle des élèves, tout comme elle ne porte sur *l'*autonomie ou *l'*hétérogénéité des besoins d'apprentissages ; elle ne se concentre que sur *certains* aspects de ces sujets et donc renonce à le faire sur d'autres. Nous allons ici mentionner quelques-uns de ces aspects qui ne feront pas l'objet d'une étude approfondie dans notre travail.

Nous l'avons vu, SDP et SDA sont censés aller de concert pour assurer une étude permettant la construction chez les élèves de rapports personnels idoines aux objets de savoir mis en scène par l'enseignant. Cependant, cette coordination est difficile à obtenir. En effet, les influences de plusieurs « strates » sont à prendre en compte dans l'organisation de l'étude, ce que Chevallard (2002) explique grâce à l'échelle des niveaux de codétermination didactique (voir figure 2.3 ci-après) :

> « chaque niveau impose aux niveaux plus profonds des contraintes déterminées, tandis que ces niveaux exercent en retour sur les niveaux supérieurs une pression qui tend à modifier les contraintes y ayant leur siège » (p. 21)

Là où la didactique s'attache possiblement à considérer les contraintes imposées par les niveaux 1 à 5 en particulier, Chevallard (2002) explique que les directives des programmes (ou du ministère), elles, peuvent rester cantonnées aux niveaux 0 à -2 :

> « Le problème est bien, alors, que, dans les projets ministériels qui tentent de réorganiser l'espace de l'étude au sein de l'établissement et autour de la classe entendue comme somme de SDP, on ne trouvera pas d'analyse didactique qui ose (et qui sache) prendre en charge tout l'empan des niveaux de détermination didactique. Dans la plupart des cas, au vrai, le seul niveau de la pédagogie, soit le niveau 0 de l'échelle, va borner l'horizon de l'analyse... » (p. 21)

FIGURE 2.3 – L'échelle des niveaux de codétermination didactique (Chevallard, 2002)

La question de l'étude personnelle, parce qu'elle se situe à plusieurs niveaux, en fait une question complexe. L'étude personnelle pouvant avoir lieu hors de l'école, des phénomènes liés par exemple à la société sont largement susceptibles d'interférer avec cette étude. Nous nous concentrerons principalement sur les niveaux 2 à 5.

Nous sommes conscients de ne pas suffisamment prendre en compte les contraintes imposés par certains niveaux de codétermination didactique. De même, nous sommes conscients que les outils de la TAD que nous utilisons nous servent uniquement à étudier des rapports personnels à des objets de savoir, et non des rapports à l'école, à l'autorité, au professeur, etc., qui ont certainement un poids considérable dans la construction (ou l'absence de construction) des apprentissages. Nous n'*ignorons* pas ces phénomènes, mais nous les considérons uniquement comme des *paramètres* fixés.

k. Le cadre de la TAD : conclusion

En conclusion, le cadre de la théorie anthropologique du didactique fournit un panel d'outils pour modéliser et analyser plusieurs phénomènes relatifs à l'étude personnelle des élèves et à l'enseignement et à l'apprentissage des équations, en les replaçant au cœur des institutions où ils ont lieu. Il s'agit du cadre théorique principal de notre travail de thèse, auquel nous aurons très souvent recours dans la plupart des chapitres qui suivent : il nous servira de filtre pour présenter les concepts et outils employés dans les travaux de recherche sur l'étude personnelle au chapitre trois et sur les équations au chapitre six, pour modéliser l'étude personnelle des élèves en lien avec les gestes d'aide à l'étude de leurs enseignants au chapitre cinq, pour construire l'OM de référence relative aux équations dans le chapitre sept et analyser les OM à enseigner présentes dans les programmes et les manuels au chapitre huit, et pour concevoir le PER relatif aux équations dans le chapitre neuf.

2.2.3 Autres cadres théoriques : complémentarité et articulation avec la TAD

a. La Théorie des Situations Didactiques pour décrire et analyser des dynamiques à un niveau plus local dans les interactions entre l'élève, le savoir et l'enseignant

La TAD pose la question des types de tâches à proposer aux élèves pour faire évoluer leur rapport personnel à un objet de savoir vers un rapport idoine (autrement dit, pour qu'ils *apprennent*). Bien qu'elle mette à notre disposition les moments de l'étude pour décrire l'organisation didactique à travers laquelle ces types de tâches seront travaillés, nous pensons que certains outils de la Théorie des Situations Didactiques de Brousseau (abrégée TSD), présentés ci-après, permettent de rendre davantage compte des « dynamiques » qui peuvent surgir au sein d'une séance lorsqu'un élève est confronté à l'étude d'un type de tâches, notamment pour la première fois : comment l'enseignant présente-t-il ce type de tâches à l'élève (dévolution) ? Par quelles « étapes » peut-il passer pour amener ce dernier à élaborer une technique nouvelle ?

Par ailleurs, même si la TAD nous fournit quelques outils pour aborder la question de l'autonomie inhérente à l'étude personnelle, elle ne précise pas les différentes formes que cette autonomie peut prendre, en lien avec ce qui a été fait ou non sous la direction de l'enseignant. La TSD propose avec le modèle de structuration des milieux ((Margolinas, 2002) ; (Castela, 2007a)) une manière de préciser des niveaux d'autonomie de l'élève dans son étude personnelle, en fonction des gestes d'étude qu'il a à sa charge d'accomplir et ceux qui ont été explicitement travaillés avec ou demandés par l'enseignant.

Dans toutes les sous-sections ci-dessous relatives à la TSD, nous faisons référence à la conférence donnée par Brousseau à Montréal [5].

b. Situation fondamentale : un outil pour tenter de provoquer de manière optimale les apprentissages

La notion de *situation* est au cœur de la TSD :

> « Une situation est l'ensemble des circonstances dans lesquelles une personne se trouve, et des relations qui l'unissent à son milieu. » (p.2)

Une situation comprend l'environnement de l'élève, et cet environnement est conçu et manipulé comme un outil par l'enseignant. Une situation s'apparente à un jeu dans lequel l'élève joue des coups et cherche à déterminer une stratégie gagnante. Un enseignant met en œuvre une situation afin de faire construire à l'élève une connaissance [6] ; l'élève n'est généralement pas au courant de cette intention didactique de la part de l'enseignant. Une situation concentrant avec la plus grande économie possible les processus « fondamentaux » pour faire acquérir à l'élève une nouvelle connaissance (au sens de Brousseau) est une situation *fondamentale*. Dans le cadre de notre thèse, la conception de situations fondamentales nous sert à provoquer les apprentissages [7] relatifs aux équations.

c. Des milieux riches pour favoriser les rétroactions, les moyens de contrôle et habituer l'élève à une forme d'autonomie

Le *milieu* désigne ce avec quoi l'élève interagit. Il comporte des éléments matériels et symboliques, mais ne comprend ni l'enseignant, ni les éventuels autres élèves, ni les connaissances (au sens de Brousseau) de l'élève. Le milieu offre à l'élève des *rétroactions*, ou *feed-backs* : quand l'élève agit sur le milieu, ce dernier renvoie à l'élève des informations (les rétroactions) qui influencent son action. Les différentes actions de l'élève sur le milieu peuvent le conduire à un apprentissage :

> « "Agir" consiste pour un sujet à choisir directement les états du milieu antagoniste en fonction de ses propres motivations. Si le milieu réagit

5. Disponible à l'adresse : http ://www.cfem.asso.fr/actualites/Brousseau.pdf

6. Dans notre travail, sauf mention contraire, nous considérerons toujours une connaissance au sens de la TAD : un individu *connaît* un objet dès lors qu'il entretient un rapport personnel à cet objet au sein d'une institution.

7. De même, dans notre travail, le terme d'apprentissage sera celui donné dans le cadre de la TAD : il s'agit de toute évolution du rapport personnel de l'élève à un objet de savoir vers un rapport institutionnel ou idoine. Cette définition reste toutefois très proche de celle donnée par Brousseau (voir sous-section qui suit).

> avec une certaine régularité, le sujet peut être conduit à anticiper ses réactions et à en tenir compte dans ses propres actions. Les connaissances sont ce qui permet de produire et de changer ces "anticipations". L'apprentissage est le processus par lequel les connaissances se modifient. » (p. 6)

Dans notre travail, nous cherchons à proposer aux élèves des milieux riches, c'est-à-dire avec lesquels les interactions et rétroactions sont suffisantes pour provoquer les apprentissages, en particulier en donnant à l'élève des moyens de contrôle de ses actions. De plus, le fait de disposer d'un tel milieu rend possible une *a-didacticité* : l'enseignant peut demeurer en retrait pendant que l'élève, en interagissant seul avec le milieu, construit ses apprentissages. C'est alors une occasion de laisser l'élève faire l'expérience d'une forme d'autonomie. Comme nous le justifierons au chapitre trois, nous faisons l'hypothèse que plus un élève est placé en autonomie en classe *sous certaines conditions*, plus il y sera habitué et plus il saura l'assumer lorsque la relation didactique avec l'enseignant sera suspendue, comme cela peut être le cas pendant l'étude personnelle.

d. Jouer sur les variables didactiques pour favoriser l'élaboration d'une technique nouvelle, décourager l'utilisation de techniques anciennes, donner des moyens de contrôle

Une *variable didactique* d'une situation est une variable cognitive sur laquelle l'enseignant peut jouer de façon optimale pour chercher à provoquer des modifications dans la connaissance. Les types de tâches relatifs aux équations, présents dans le PER que nous élaborerons, sont paramétrés de manière réfléchie et selon plusieurs objectifs : pour assurer une certaine progressivité dans la difficulté des types de tâches ; pour encourager ou au contraire décourager l'usage de certaines techniques ; pour différencier les énoncés en fonction des besoins des élèves.

e. Différentes phases pour décrire les dynamiques relatives à l'étude d'une situation didactique

Dans la TSD, l'acquisition de la nouvelle connaissance (au sens de Brousseau) par l'élève passe par différentes phases :

1. Phase de *dévolution* : l'enseignant expose les règles du jeu (les consignes) puis se place en retrait pour laisser l'élève agir avec le milieu. « *La dévolution est l'acte par lequel l'enseignant fait accepter à l'élève la responsabilité d'une*

situation d'apprentissage (a-didactique) ou d'un problème et accepte lui-même les conséquences de ce transfert. » (p. 41)

2. Phase d'*action* : l'élève agit dans une dialectique avec le milieu et ajuste ses actions en fonction des rétroactions, en vue d'établir une stratégie.
3. Phase de *formulation* : l'élève formule la stratégie qu'il estime gagnante pour répondre au problème posé par la situation. Il peut se créer une dialectique de la formulation lors de la confrontation avec d'autres formulations données par d'autres élèves.
4. Phase de *validation* : cette situation vise à valider la stratégie proposée par l'élève, par une preuve ou une démonstration.
5. Phase d'*institutionnalisation* : l'enseignant décontextualise la situation et souligne ce qui est institutionnellement important, reconnu, « à retenir ». Il confère à la connaissance nouvelle un statut de savoir officiel, culturellement indispensable.

Dans notre PER sur les équations, les situations fondamentales proposées sont décrites à l'aide des différentes phases ci-dessus et s'efforcent ainsi de répondre aux questions suivantes : comment l'enseignant peut-il dévoluer telle situation ? Quel discours suggérons-nous d'utiliser ou à l'inverse d'éviter pour bien motiver l'élaboration d'une technique nouvelle ou la mobilisation d'une technologie en particulier ? Quelles sont les actions des élèves que nous pouvons anticiper et quelles réponses l'enseignant pourra ou évitera d'apporter ? Quelles formes de validation peuvent être envisagées ? Quelle trace écrite pour l'institutionnalisation ?

f. Un contrat didactique à expliciter pour aider à réaliser une étude personnelle idoine

Le *contrat didactique* est l'ensemble des attentes réciproques, explicites et implicites, entre l'élève et l'enseignant dans leur projet commun de faire acquérir à l'élève une connaissance nouvelle à travers l'acte d'enseignement. Brousseau souligne le fait que le contrat didactique est fortement paradoxal :

> « Aucun contrat didactique entre l'enseignant et l'enseigné n'est possible. » (p. 33)

En effet, l'enseignant peut souhaiter faire construire à l'élève une connaissance nouvelle mais il ne peut rendre explicite cette construction à l'élève, sinon l'apprentissage ne se réalise pas. Le contrat didactique est donc voué à être rompu pour que s'en installe un nouveau, qui se rompra au profit d'un autre, et ainsi de suite. Par conséquent, ce n'est pas le contrat didactique en lui-même qui permet la réalisation de l'apprentissage par l'élève, mais la succession de ses ruptures.

L'étude personnelle, nous le verrons, pose la question de l'explicitation du contrat didactique qui lui est relatif : quelles attentes l'enseignant explicite-t-il à ses élèves ? Quelles sont celles qui sont passées sous silence ?

g. Le modèle de structuration des milieux pour décrire plusieurs niveaux d'autonomie dans l'étude personnelle

Lors de son étude personnelle, nous avons vu que l'élève était placé dans une certaine autonomie. Cette autonomie peut être plus ou moins « forte » selon ce que l'élève a à sa charge d'accomplir, selon ce que l'enseignant lui a indiqué de faire, selon le moment de l'étude, etc. Le modèle de structuration des milieux (Margolinas, 2002 ; Castela, 2007a), dont nous ferons une présentation plus complète dans les chapitres trois et cinq, nous sert à distinguer plusieurs niveaux : un niveau où cette autonomie est plutôt locale, par exemple quand l'élève s'appuie sur les milieux proposés par l'enseignant en classe et ne détermine pas lui-même les objets de savoir à étudier ; un autre niveau où elle est plus globale, par exemple quand l'élève détermine lui-même des objets d'étude sans que l'enseignant les lui ait désignés comme utiles à ses apprentissages, ces objets pouvant se référer à des OM anciennes.

h. Le postulat de la Théorie de l'Activité pour faire le lien entre pratiques enseignantes et gestes d'étude des élèves

La Théorie de l'Activité (abrégée TA), initiée par Leontiev puis enrichie par Vygotski (Vygotski, 1997), part du postulat que les apprentissages des élèves sont directement influencés par les pratiques de leur enseignant. Elle met ainsi en avant le lien entre étude personnelle de l'élève et l'enseignement qu'il a reçu. Nous nous appuyons sur ce postulat lorsque nous nous posons la question de l'organisation par l'enseignant de l'étude personnelle de ses élèves, puisque nous supposons que cette organisation aura une influence importante dans les apprentissages. Faire référence à la TA permet d'expliciter ici cette hypothèse de travail.

2.3 Hypothèses et problématique de recherche

Nous venons de présenter un ensemble d'outils théoriques et de justifier leur pertinence en regard des phénomènes d'enseignement que nous voulons analyser. Ce faisant, nous avons également donné des éléments de méthodologie.

Nous énonçons à présent notre problématique de recherche : sachant que temps didactique et temps praxique sont en tension permanente, que certains besoins des élèves tant au niveau de l'étude personnelle – sa définition et son organisation – que des apprentissages mathématiques nécessaires relatifs aux équations ne sont pas explicitement pris en charge par l'Institution, comment l'enseignant peut-il organiser l'étude des équations en quatrième pour favoriser une évolution des rapports personnels des élèves aux équations vers des rapports idoines ? En particulier, quels gestes d'aide à l'étude peut-il accomplir en classe pour que ses élèves réalisent des gestes d'étude personnelle hors la classe favorisant la construction de leurs apprentissages relatifs aux équations ?

Nous présentons maintenant nos deux principales hypothèses de recherche. Nous supposons que la construction d'un rapport personnel idoine aux équations du premier degré par des élèves en classe de quatrième est favorisée par :

- une certaine organisation explicite par l'enseignant en classe et hors classe de leur étude personnelle, organisation appuyée sur l'identification des différents besoins des élèves pour cette étude personnelle ;
- la mise en œuvre d'un PER sur les équations prenant en compte l'hétérogénéité des besoins d'apprentissages des élèves, notamment ceux laissés implicites dans les OM à enseigner présents dans les programmes et les manuels, et fondé sur les principaux éléments épistémologiques relatifs à la production et à la manipulation des équations.

Ces hypothèses seront affinées au fur et à mesure des chapitres. En particulier, la première hypothèse le sera au chapitre suivant, lorsque nous aurons précisé des leviers potentiels pour l'organisation par l'enseignant de l'étude personnelle de ses élèves.

Nous justifions à présent le choix de centrer notre travail sur les équations, en présentant le contexte de nos recherches et en situant nos travaux dans la lignée d'autres travaux.

2.4 Retour sur le contexte de la recherche

La présentation des principaux cadres et outils théoriques sur lesquels nous nous appuierons par la suite nous permettent désormais de situer plus précisément notre travail de thèse par rapport à différents travaux et projets déjà évoqués dans le chapitre un.

2.4.1 Les travaux de Grugeon (1997)

Les travaux de Grugeon (Grugeon, 1997) sont à l'origine des différents travaux et projets que nous allons présenter.

Partant d'un problème de recherche portant sur les raisons de l'échec d'élèves de lycée professionnel dans leur transition en lycée d'enseignement général en algèbre, Grugeon (1997) a émis l'hypothèse que cet échec était issu de décalages entre les différentes institutions. Elle a alors construit ce qu'elle appelle une grille d'analyse multidimensionnelle de la compétence algébrique, indépendante des institutions. En référence à la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1998), cette grille sert à mettre en relation les rapports personnels des élèves aux objets de savoir en algèbre avec les rapports institutionnels, et à identifier à la fois leurs difficultés mais également des leviers potentiels sur lesquels agir pour favoriser les apprentissages. Grugeon définit la compétence algébrique suivant deux dimensions (Douady, 1986) : la dimension outil (utiliser l'algèbre pour prouver, généraliser, résoudre des problèmes de modélisation) et la dimension objet (l'algèbre comprend plusieurs objets comme les expressions, les équations, les fonctions, qui ont des propriétés propres). De plus, elle prend en compte le fait que le passage entre l'arithmétique et l'algèbre nécessite des ruptures épistémologiques (Vergnaud, 1989), et que la capacité à utiliser l'algèbre efficacement implique une habilité à articuler syntaxe, sémantique, conceptions procédurale et structurale (Sfard, 1991), technique et sémiotique (Duval, 1993).

L'analyse de cette compétence algébrique est structurée selon six composantes, qui sont (i) le traitement algébrique, (ii) le rapport arithmétique/algèbre, (iii) la gestion dans le registre des écritures algébriques, (iv) l'articulation entre registre des écritures algébriques et les autres registres, (v) la fonction de l'algèbre et (vi) la rationalité algébrique. À chaque composante sont associés plusieurs critères : par exemple, la composante rapport arithmétique/algèbre possède quatre critères qui sont la démarche utilisée, le statut du signe =, le statut des lettres et le statut des objets, chaque critère possédant une valeur. Cette grille a permis de réaliser des analyses fines des réponses des élèves à un test diagnostic en codant leurs réponses pour établir leur profil cognitif en algèbre, profil cognitif qui est déterminé à partir de trois descripteurs : un descripteur quantitatif exprimé en termes de taux de réussite et de traitements algébriques maîtrisés, un descripteur qualitatif mettant en avant des cohérences de fonctionnement selon l'usage des objets, le calcul algébrique, la traduction, le type de justification, et un descripteur de l'articulation entre registres et cadres. Nous renvoyons le lecteur à (Grugeon, 1997) pour une présentation plus complète et détaillée de ses travaux.

Malgré son efficacité pour, entre autres, analyser les manuels, les programmes et pointer les décalages entre institutions, la complexité et la lourdeur de ce modèle le rendent difficilement utilisable tel quel dans les classes et par les enseignants au quotidien. C'est pourquoi la création de logiciels automatiques pour permettre une utilisation pratique de cet outil a été envisagée.

2.4.2 Les projets Pépite, Lingot, PépiMep et NeoPraeval et les travaux de Pilet

a. Présentation et historique

Notre travail de thèse s'inscrit dans la continuité de plusieurs projets de recherche, dont nous faisons ici un bref historique.

Après la thèse de Grugeon en 1995, les projets Pépite et Lingot se développent de 1996 à 2008 (voir Jean (Jean, 2000), Delozanne, Prévit, Grugeon & Chenevotot (Delozanne et al., 2008), (Delozanne et al., 2010), Grugeon (Grugeon, 2009), Chenevotot & Grugeon (Chenevotot & Grugeon, 2009), Darwesh (Darwesh, 2010)). Ces projets ont pour objectifs de concevoir des Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain et de réguler les apprentissages des élèves en algèbre de manière differenciée. C'est au sein de ses projets que le test baptisé Pépite naît et que plusieurs versions de ce test se succèdent. Pépite est un test diagnostique, informatisé et automatisé, que des élèves peuvent passer sur ordinateur et à l'issue duquel un « profil cognitif » en algèbre est déterminé. Le fonctionnement du test, que nous détaillons au chapitre neuf, s'appuie sur les travaux de Grugeon (1997), notamment sur la grille d'analyse multidimensionnelle précédemment mentionnée.

De 2009 à 2012 prend place le projet PepiMep. Il s'agit d'un projet pluridisciplinaire rassemblant des chercheurs en didactique des mathématiques, des chercheurs en informatique et des membres d'une association enseignante de ressources mathématiques en ligne, Sesamath [8]. La conception et le développement de ressources mathématiques à partir de résultats de recherche ont été au cœur de ce projet.

8. http ://www.sesamath.net/

De 2009 à 2012, Pilet (2012) travaille au sein du projet PepiMep. Sa thèse porte sur la conception de parcours d'enseignement différenciés sur les expressions algébriques en classes de troisième et de seconde générale. Pilet s'interroge sur les besoins d'apprentissage des élèves relatifs aux expressions algébriques en fin de collège. Elle élabore une OM de référence épistémologique relative aux expressions, traque les enjeux d'apprentissages non explicitement pris en charge par les programmes et les manuels, et conçoit ses parcours dont la différenciation s'appuie sur le test Pépite.

Enfin, le projet NeoPraeval [9] débuté en 2014 et étalé sur une durée de trois ans, dans lequel notre travail de thèse s'insère pleinement, vise en particulier à outiller les enseignants dans le but de gérer l'hétérogénéité des apprentissages par le développement et la mise à disposition, sur une plateforme en ligne largement utilisée par les enseignants (WIMS), de dispositifs d'évaluations diagnostiques, automatiques, utilisables dans les classes (test Pépite), ainsi que des ressources adaptées à des besoins identifiés des élèves. Ces dispositifs se veulent dotés d'une meilleure portée diagnostique que ceux déjà existants et ne fournissent que des indicateurs généraux sur des connaissances, des compétences ou de la culture mathématique à l'échelle nationale ou internationale (PISA, évaluations de la DEPP, du MEN, etc.).

Au-delà de leur conception, ces dispositifs sont testés dans des classes réelles afin d'assurer leur viabilité auprès des élèves et des enseignants. Cette viabilité s'appuie sur des travaux de recherche déjà engagés, en particulier sur les résultats autour de l'évaluation diagnostique automatique Pépite présenté précédemment et sur les pratiques enseignantes (Robert et Rogalski 2002, Roditi 2011).

Il s'agit d'un projet articulant plusieurs domaines de recherche (évaluation, didactique des mathématiques, psychologie cognitive, informatique, édumétrie), impliquant un public diversifié (enseignants, élèves, formateurs, chercheurs), et portant sur l'arithmétique en fin de cycle 3 au primaire et sur l'algèbre élémentaire en collège.

Les retombées pour la recherche, pour l'enseignement et la formation des enseignants se veulent être des enjeux majeurs du projet : publication d'articles scientifiques, engagement des enseignants dans de nouvelles pratiques d'évaluation, exploitation des résultats, contribution aux formations, etc.

Le projet s'organise autour de trois grandes tâches (voir figure 2.4 ci-après) :

- le développement d'une expertise pour étudier la validité des outils d'évaluation et concevoir des dispositifs d'évaluation ;
- l'utilisation de cette expertise pour étendre des dispositifs d'évaluation exis-

9. Voir le site du Laboratoire de Didactique André Revuz à l'Université Paris Diderot 7 pour une présentation plus complète du projet : http ://www.ldar.univ-paris-diderot.fr/page/praeval

tants ;
– l'analyse des pratiques enseignantes en classe (programmation des enseignants et régulation des apprentissages).

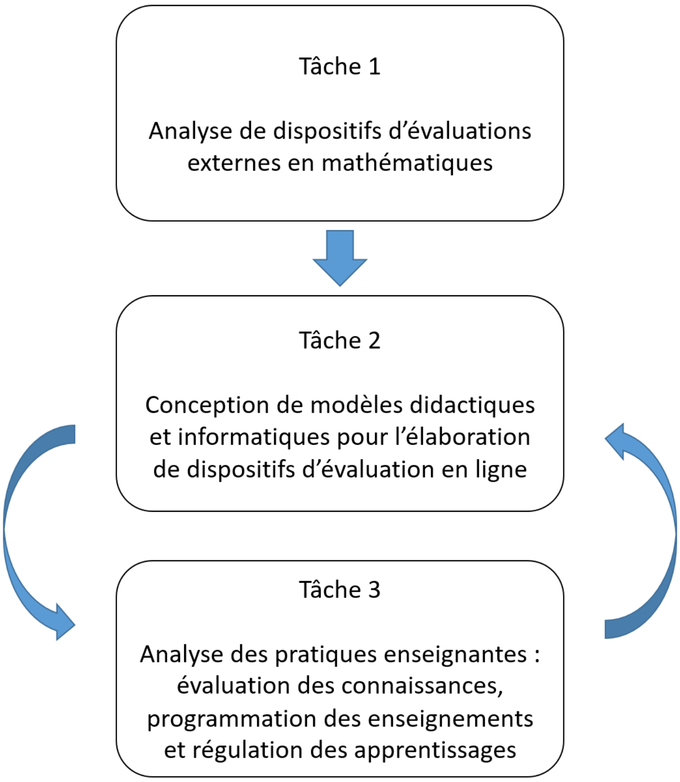


FIGURE 2.4 – Structure du projet NéoPraeval autour de trois tâches

b. Positionnement du travail de thèse par rapport aux différents projets et travaux

Dans le projet NeoPraeval, nous situons notre travail de thèse au niveau de la tâche 2 et, dans une certaine mesure, au niveau de la tâche 3 (figure 2.4).

La tâche 2 a pour objectifs d'une part d'étendre le modèle diagnostique et de stratégie de différenciation à d'autres niveaux de collège (classe de cinquième et de quatrième) et à d'autres objets mathématiques (arithmétique, équations), d'autre part d'analyser l'activité des élèves et leurs productions. La méthodologie est basée sur une synthèse et une analyse de travaux de recherche en algèbre, à une analyse des programmes et des manuels scolaires, à la définition de modèles de tâches et de grilles d'analyses, à l'analyse des productions d'élèves sur des tests en papier-crayon, et un travail collaboratif et itératif avec des enseignants pour faire évoluer ces modèles. Notre thèse porte sur les extensions en classe de quatrième et sur les équations.

La tâche 3 a pour objectifs d'enrichir, en fonction des contenus mathématiques enseignés, les catégories permettant de décrire les pratiques enseignantes (quant à la programmation de leur enseignement, à la régulation des situations d'apprentissage en classe et aux évaluations qu'ils mettent en oeuvre), de mettre en relation des observables relevant de ces catégories pour mettre en exergue des cohérences dans leurs pratiques, et d'établir des critères portant sur la formation des enseignants (usages des ressources informatiques, programmation des enseignements, régulations des situations d'apprentissage). Dans le cadre du travail collaboratif avec des enseignants, notre travail a permis de réaliser des apports pour aider les enseignants à concevoir des ressources sur les équations.

Nous avons fait le choix de centrer notre travail sur les équations car nous nous plaçons dans la lignée des travaux de Pilet ((Pilet, 2012), (Pilet, 2015)). Ces derniers portent sur les expressions algébriques. L'étude des équations algébriques venant après et en appui sur celle des expressions, nous avons décidé de poursuivre les recherches sur ce thème. Le fait de disposer des résultats de recherche de Pilet sur les expressions et d'utiliser une méthodologie similaire à la sienne (notamment avec la construction d'une OM de référence épistémologique) nous autorise à préciser davantage les agrégations praxéologiques entre les OM relatives aux expressions et celles relatives aux équations, et d'assurer une meilleure assise pour la conception d'un PER sur les équations en prenant en compte les besoins d'apprentissages des élèves sur les expressions.

2.5 Méthodologie générale de la thèse

Dans les paragraphes précédents, nous avons progressivement reformulé nos interrogations naïves du chapitre un en questions de recherche à l'aide de cadres et d'outils théoriques que nous avons motivés et explicités. Ce faisant, nous avons donné des premiers éléments méthodologiques pour répondre à ces questions de recherche. Nous complétons ces éléments en exposant ici la méthodologie générale.

Nous avons montré que la question de l'étude personnelle soulevait un certain nombre de points problématiques. Entre autres, quelle définition en donner ? Comment l'organiser et l'articuler avec l'étude en classe pour que se construisent les apprentissages ? Nous cherchons des éléments de réponse à ces questions en passant en revue plusieurs travaux de recherche en didactique des sciences sur le sujet, mais également en sciences de l'éducation (chapitre trois). Ceci nous permet de repérer des obstacles et des leviers dans l'organisation de l'étude personnelle et de préciser des outils théoriques pour modéliser et analyser cette étude.

Nous réalisons ensuite (chapitre quatre) une première étude exploratoire auprès de collégiens en train d'accomplir leur étude personnelle, pour recueillir des données et comparer nos observations avec les résultats de recherche obtenus dans les travaux étudiés au chapitre trois. Cette phase d'observation, dans laquelle nous ne sommes pas activement intervenu du point de vue enseignement, nous sert également de témoin. En effet, dans le chapitre dix, nous comparerons les gestes d'étude personnelle de quelques collégiens observés dans cette première expérimentation avec ceux qu'ils accomplissent à l'issue d'une seconde expérimentation, pour y repérer une évolution.

Deux points problématiques sont soulevés à l'issue du chapitre quatre. Le premier est le manque de prise en compte de notre part des pratiques de l'enseignant et de leur impact sur les gestes d'étude des élèves. Le second est le manque de prise en compte des spécificités des contenus mathématiques étudiés et là encore de leur influence sur la manière dont les élèves accomplissent leur étude personnelle.

Compte tenu des limites rencontrées, nous proposons une modélisation de l'étude personnelle (chapitre cinq). Ce modèle théorique est un résultat majeur de notre travail de thèse. Grâce à lui, nous sommes à même de mettre en relation les gestes d'aide à l'étude des enseignants et les gestes d'étude de leurs élèves en fonction des organisations mathématiques travaillées.

Pour prendre en compte les spécificités de ces OM, nous élaborons une référence épistémologique relative aux équations (chapitre six). Nous déterminons les principaux éléments épistémologiques relatifs aux équations en réalisant une synthèse de travaux de référence en recherche en didactique sur le sujet. Nous apportons également des compléments en adoptant des points de vue logique et historique.

La référence établie nous sert de point d'appui pour obtenir un autre résultat majeur de notre thèse : la construction d'une OM régionale de référence épistémologique relative aux équations (chapitre sept). Cette OM nous sert dans un premier temps à compléter les outils théoriques développés dans le chapitre cinq (prise en compte des spécificités des OM relatives aux équations dans l'accomplissement des gestes d'aide à l'étude et des gestes d'étude sur ce thème).

Ensuite, parce que nous l'avons rendue opérationnelle pour cela, l'OM de référence nous permet d'analyser les OM à enseigner dans les programmes et les manuels afin de traquer les besoins d'apprentissages non explicitement organisés par l'institution et pourtant nécessaires à la construction d'un rapport personnel idoine aux équations d'après la référence épistémologique (chapitre huit).

Nous concevons un Parcours d'Etude et de Recherche (PER) sur les équations (chapitre neuf). C'est encore l'OM de référence épistémologique qui fonde ce PER, ainsi que les résultats obtenus aux chapitres quatre et huit : compte tenu des implicites autour de l'organisation de l'étude personnelle et des besoins d'apprentissages peu ou non pris en compte par les programmes et les manuels, nous proposons des situations didactiques et des ensembles de types de tâches, ainsi qu'une organisation didactique pour les mettre en œuvre.

Ce PER a été testé dans une classe de collège. Nous exposons l'analyse *a posteriori* de cette expérimentation dans le chapitre dix. Nous y décrivons la mise en scène du PER par l'enseignant, les adaptations que ce dernier a apportées au PER, et nous analysons les effets sur les apprentissages des élèves et la manière dont ils organisent leur étude personnelle.

La présentation de la méthodologie générale explique la structure du plan de thèse présentée en introduction.

2.6 Conclusion

Cadre théorique principal dans lequel s'inscrit notre thèse, la TAD nous a permis dans ce deuxième chapitre de faire évoluer les questions posées dans le chapitre un. Opérant un changement de point de vue par rapport à l'approche cognitive des difficultés, la TAD met ces dernières en relation avec l'institution et la structure de l'activité mathématique (praxéologies) et prend en compte les phénomènes transpositifs du savoir autour desquels se nouent nos interrogations sur l'étude personnelle des élèves et la manière dont les enseignants aident potentiellement à l'organiser.

Nous allons voir dans le chapitre suivant comment les outils de la TAD sont utilisés – ou pourraient l'être – dans les travaux de recherche sur l'étude personnelle.

Chapitre 3

Une synthèse de travaux de recherche sur le thème de l'étude personnelle

3.1 Objectifs du chapitre

Dans ce chapitre, nous réalisons une synthèse de nos lectures sur l'étude personnelle.

La problématique énoncée dans le chapitre deux porte sur les besoins des élèves en termes d'organisation de cette étude et sur les pratiques enseignantes correspondantes. En nous situant dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique, nous interrogeons les conditions dans lesquelles les élèves, au sein d'une institution donnée et en lien avec les spécificités des savoirs mathématiques en jeu, peuvent ou non accomplir cette étude. C'est avec cet arrière-plan théorique que nous présentons ici une revue de travaux sur le sujet qui nous préoccupe : comment l'étude personnelle y est-elle définie et étudiée ? Les recherches en sciences de l'éducation ou en sociologie prennent-elles suffisamment en compte la structure de l'activité mathématique et le rôle de l'institution dans la réalisation de cette étude personnelle ? Comment celles en didactique se positionnent-elles par rapport à nos interrogations ? Quels obstacles et quels leviers potentiels pour l'organisation de l'étude personnelle peut-on identifier ? Quels apports nos choix théoriques autorisent-ils ?

Dans un premier temps, nous comparons dans plusieurs travaux de recherche (Barrère, (Barrère, 1997) ; Milhaud, (Milhaud, 1998) ; Chevallard, (Chevallard, 2002b) ; Félix, (Félix, 2002), (Félix & Joshua, 2002) ; Cooper, Robinson et Patall, (Cooper, Robinson, & Patall, 2006) ; Erdogan, (Erdogan, 2006) ; Esmenjaud-Genestoux, (Esmenjaud-Genestoux, 2006) ; Rayou, (Rayou, 2008) ; Caillet et Sembel, (Caillet & Sembel,

2008) ; Mario, (Mario, 2012) ; Farah, (Farah, 2015)) les diverses définitions et fonctions attribuées à l'étude personnelle par les enseignants et leurs élèves. Cette comparaison est motivée par les éléments problématiques soulevés dans les chapitres un et deux à propos des implicites autour des attentes et de l'organisation de l'étude personnelle des élèves par leurs enseignants ou les programmes officiels. C'est également l'occasion pour nous de présenter la manière dont certains outils théoriques mentionnés au chapitre deux sont utilisés dans les travaux de recherche.

Dans un deuxième temps, nous revenons sur certains enjeux relatifs à l'étude personnelle : d'après les articles et thèses sur le sujet, en quoi cette étude est-elle nécessaire dans le parcours scolaire d'un élève ? Y a-t-il réellement un lien entre elle et la construction des apprentissages ?

Les obstacles et les leviers potentiels pour organiser l'étude personnelle sont abordés dans un troisième temps. Les élèves dits en réussite réalisent-ils leur étude personnelle d'une manière similaire ? Cette étude est-elle différente de celle accomplie par les élèves dits en difficulté, et si oui, quelles sont ces différences ? Quelles aides l'enseignant peut-il apporter pour accompagner les élèves en difficulté à accomplir cette étude ?

3.2 Définitions et fonctions attribuées à l'étude personnelle

3.2.1 Etude hors classe, autonome, personnelle : de quoi parle-t-on ?

Lors de notre revue de travaux de recherche sur la question de l'étude personnelle, nous avons pris en compte les articles et les thèses portant sur l'étude hors la classe et sur l'étude autonome. En effet, l'intersection de ces trois types d'études (personnelle, hors la classe, autonome) est rarement vide, et parler d'un type conduit souvent à parler des deux autres. C'est pour cette raison que nous commençons par exposer les définitions que nous avons trouvées à propos de ces types d'études et que nous ne nous restreignons pas par la suite au cas unique de l'étude personnelle.

a. L'étude en classe et hors la classe

Nous rappelons ici la définition de l'étude donnée par Chevallard (2002a) et déjà présentée au chapitre précédent. Selon lui, étudier, c'est

> « faire quelque chose afin d'apprendre quelque chose (« savoir ») ou d'apprendre à faire quelque chose (« savoir-faire »), [...] recréer une réponse O déjà produite en quelque autre institution. Etudier, c'est donc étudier une réponse – au sens fort – que l'on tient pour valable. C'est étudier une œuvre existant ailleurs dans la société, pour la reconstruire, la transposer dans l'institution qui sert d'habitat à l'étude » (p. 240-241)

Par conséquent, nous considérons que l'étude en classe est tout simplement l'étude qui se déroule à l'intérieur de la salle de classe, et que l'étude hors classe est celle qui a lieu en dehors de la salle de classe. Cette étude hors la classe peut toutefois avoir lieu dans l'établissement scolaire (étude hors de la salle de classe de mathématiques mais dans une salle de l'établissement abritant cette salle de classe) ou en dehors de l'établissement (étude à la maison).

b. L'étude autonome et l'étude personnelle

Comme nous l'avons déjà plusieurs fois souligné, étude personnelle et étude hors la classe sont souvent reliées à une idée d'autonomie.

Erdogan (2006), dans sa thèse portant sur l'enseignement de l'algèbre en seconde, définit dans le cadre de la TAD l'étude autonome de l'élève ainsi :

> « Elle désigne le travail de l'élève suivant des lieux et des temps où il dispose d'une autonomie qui est relative mais indispensable pour qu'il puisse avancer dans la construction de ses apprentissages » (p. 37)

Farah (2015), en appui sur les travaux d'Erdogan (Erdogan, 2006), définit le travail personnel – qu'elle assimile à l'étude autonome – des étudiants en classes préparatoires et à l'université comme la part de travail nécessaire incombant à l'étudiant et qui peut avoir lieu en supplément des tâches prescrites et organisées par l'Institution.

Chevallard (2002a) considère qu'un élève est *en autonomie didactique* lorsqu'il n'est plus en interaction avec l'enseignant et lorsqu'il ressent une certaine solitude le mettant face à ses responsabilités vis-à-vis de la construction de ses apprentissages :

> « Dans une grande partie des situations de classe, l'élève doit accomplir des tâches *coopératives*, où chacun des acteurs – élèves et professeurs – doit accomplir certains gestes dont l'ensemble constitue son *rôle*. Mais à côté de ces phases où l'élève opère ainsi *en interaction didactique*, il existe des phases où il est amené à opérer *en autonomie didactique*, accomplissant des tâches dont il est l'unique acteur, et dont l'ensemble constitue

par définition son *topos*, ce lieu où, psychologiquement, il éprouve le sentiment d'être *seul à la barre* et *de ne devoir compter que sur ses propres forces.* » (p. 14-15)

Dans la thèse de Mario (Mario, 2012) [1] sur les gestes d'étude de « très bons » lycéens en mathématiques, nous retrouvons une définition similaire de l'autonomie didactique. Il s'agit pour Mario de

> « la possibilité (personnelle et institutionnelle) qu'a un individu à prendre la responsabilité et le contrôle de ses propres apprentissages, sachant que dans le cas des élèves, le contenu officiel de ses apprentissages est, a minima, désigné par un professeur » (p. 43)

Nous retenons donc quatre type d'études (en classe, hors classe, personnelle, autonome) :

- l'étude en classe (respectivement hors la classe) est l'ensemble des gestes accomplis par l'élève à un niveau scolaire donné dans la salle de classe (respectivement hors de la salle de classe) pour tenter de construire les apprentissages institutionnellement attendus et d'établir un rapport personnel idoine aux objets de savoir mis en scène par l'enseignant ;
- l'étude personnelle est l'étude qui est *nécessaire* et *propre* à l'élève pour construire les apprentissages et établir un rapport personnel idoine aux objets de savoir ;
- l'étude autonome est l'étude qui a lieu lorsque l'élève n'est plus en interaction didactique avec l'enseignant, lorsqu'il est « seul à la barre » pour construire ses apprentissages.

L'étude en classe et l'étude hors classe sont par définition disjointes : elles ne peuvent pas avoir lieu simultanément. En revanche, l'étude personnelle et l'étude autonome peuvent avoir lieu simultanément ou non (voir paragraphe ci-après). Elles ont nécessairement lieu soit en classe soit hors la classe. Nous résumons ceci dans le diagramme ci-dessous (figure 3.1), qui aide peut-être à distinguer plus clairement les différents types d'étude et à situer l'étude personnelle par rapport aux autres études.

L'existence de certaines parties de ce diagramme peut paraître étonnante, peut-être parce que rare. Par exemple, qu'est-ce qu'une étude personnelle non autonome hors la classe ? Le lecteur pourrait penser qu'une étude personnelle est forcément

1. Thèse non publiée.

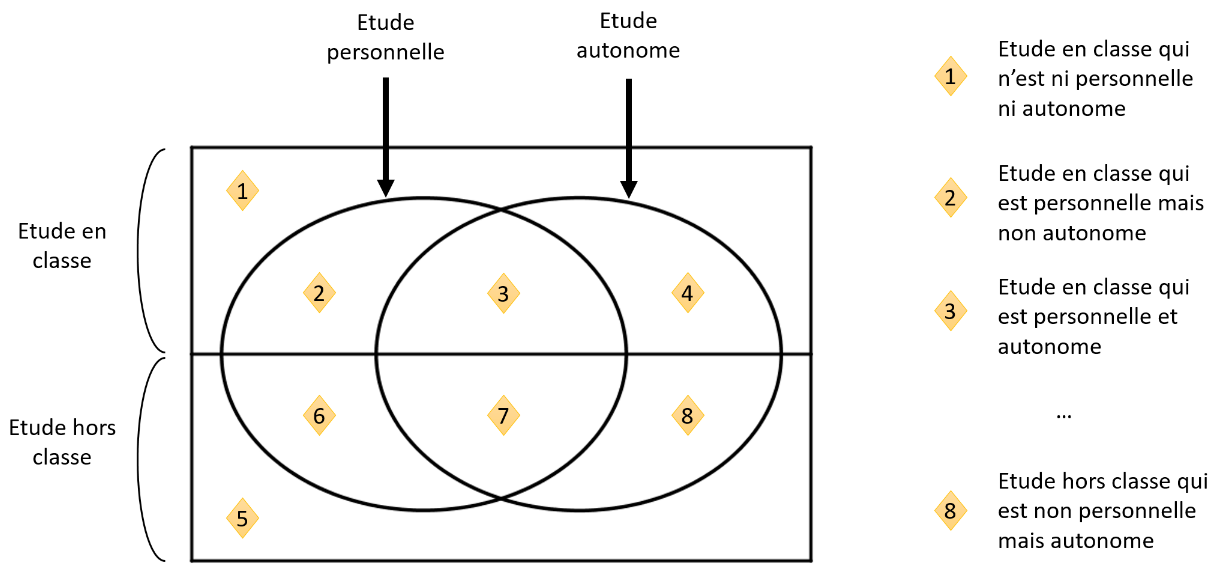


FIGURE 3.1 – Les quatre types d'études

autonome ou encore qu'une étude hors la classe est nécessairement autonome puisqu'il n'y a plus d'interaction avec l'enseignant. Cela n'est pas tout à fait vrai d'après les définitions que nous avons données. Il est possible d'imaginer une étude personnelle non autonome : ce serait une étude où l'élève est en constante interaction avec l'enseignant, ce dernier lui faisant travailler toutes les organisation praxéologiques nécessaires à la construction du rapport personnel idoine de cet élève à un objet de savoir, travail qui serait spécifique de cet élève particulier et donc différent pour un autre élève (d'où le caractère personnel de l'étude). De même, il est possible d'imaginer une étude hors la classe qui ne soit pas autonome, dans le cas où l'élève aurait la possibilité d'interagir – via un ordinateur par exemple – avec l'enseignant. Nous convenons que cette situation est probablement peu fréquente, bien que certaines pratiques enseignantes récentes comme la classe inversée soient susceptibles de multiplier ces cas de figure.

Nous allons voir à présent que cette autonomie didactique peut être précisée grâce au modèle de structuration du milieu.

3.2.2 Développement sur l'autonomie : le modèle de structuration du milieu

Dans le chapitre deux (page g.), nous avons commencé à expliquer que l'autonomie dans laquelle un élève se trouve peut être plus ou moins *locale*, plus ou moins *large*, selon que l'enseignant aura ou non explicité ses attentes à l'égard de l'étude personnelle, selon la manière dont il aura initié et organisé cette étude, selon les besoins d'apprentissages qu'il aura identifiés et pris en charge ou non, etc.

Le modèle de structuration du milieu, initialement développé par Brousseau (Brousseau, 1986), repris et modifié entre autres par Margolinas (Margolinas, 2002) puis Castela (Castela, 2007a) donne à voir diverses positions de l'élève dans l'autonomie et est potentiellement utile pour envisager des éléments de différenciation, notamment dans l'élaboration du PER sur les équations (chapitre neuf).

Rappelons que dans une situation didactique, trois systèmes sont en jeu : le milieu, l'enseignant et l'élève. L'enseignant cherche à faire émerger une connaissance nouvelle (au sens de Brousseau) chez l'élève en lui proposant un problème. Ce problème est énoncé d'une certaine manière, sur un certain support, avec certaines contraintes, etc. Lorsque l'élève tente de résoudre le problème, il est ainsi confronté à un milieu (l'énoncé, le support, les contraintes, ...). En agissant sur ce milieu, l'élève peut recueillir des informations, qui vont éventuellement guider, modifier sa prochaine action. Ces rétroactions entre élève et milieu vont amener l'élève à élaborer peu à peu une stratégie pour répondre au problème posé et, ce faisant, à construire la connaissance visée.

Le modèle de structuration du milieu permet de caractériser les positions de l'enseignant et de l'élève à travers des situations didactiques, ainsi que cela sera expliqué dans les paragraphes qui suivent du côté de l'enseignant et du côté de l'élève.

a. Le modèle côté enseignant

Lorsqu'un enseignant met en scène des objets de savoir dans une classe, il réfléchit d'abord à cette mise en scène, partant d'un niveau très général, pour aboutir à une élaboration plus ou moins précise d'un scénario, puis il met effectivement en scène les objets de savoir dans la classe. Voici comment le modèle de structuration du milieu sert à décrire l'activité de l'enseignant.

À un niveau très général, l'enseignant réfléchit à l'enseignement des mathématiques, se situant à un niveau *noosphérien*. Ce niveau se voit attribuer une valeur égale à $+3$ (nous expliquons plus loin la raison d'une telle valeur).

Au niveau suivant, de valeur $+2$, l'enseignant réfléchit sur les axes principaux d'un thème mathématique donné : il cherche un angle d'attaque pour ce thème, une problématique. Il est ainsi à un niveau de *construction*.

Au niveau $+1$, l'enseignant dispose de sa problématique pour le thème retenu. Il élabore alors un scénario : mise en scène du problème, exercices à proposer aux élèves, minutage, etc. Ce niveau est celui de *projet*.

Au niveau 0, qualifié de niveau *didactique*, l'enseignant est en classe et il y interagit avec des élèves. La rupture entre la position de l'enseignant qui réfléchit à son enseignement et celle de l'enseignant qui met en œuvre de manière effective son enseignement fait que Margolinas (Margolinas, 2002) choisit ce niveau comme le niveau 0, le niveau « de base », et ceci explique l'attribution des valeurs (positives ou négatives) aux différents niveaux du modèle.

Au niveau -1, niveau de l'*observation*, l'enseignant dévolue la situation, observe l'activité des élèves et les place en situation d'a-didacticité. Après la dévolution, l'enseignant n'interagit plus avec les élèves pendant un certain laps de temps. Cette nouvelle rupture dans sa position (passage d'enseignant interagissant avec les élèves à enseignant en retrait) explique que le niveau d'observation se voit attribuer une valeur négative, -1. Une fois que les élèves ont passé du temps à chercher à résoudre le problème donné par l'enseignant, ce dernier interagit de nouveau avec eux pour discuter des stratégies adoptées, pour valider des formulations, pour institutionnaliser le savoir. Dès lors, l'enseignant « remonte » au niveau 0.

Margolinas a synthétisé le modèle dans le tableau ci-après (voir figure 3.2).

b. Le modèle côté élève

Côté élève, le modèle peut être présenté de manière ascendante. Ceci correspond aux différences d'activité entre élèves et enseignant : l'enseignant ne peut pas se situer au niveau -1 d'observation s'il ne s'est pas situé préalablement au niveau 0 d'acteur pour mettre en scène les objets de savoir, et il ne peut pas mettre en scène les objets de savoir s'il n'a pas élaboré un scénario au niveau $+1$, et ainsi de suite jusqu'au niveau $+3$.

Pour l'élève, un raisonnement analogue va montrer qu'il ne peut pas se situer à un niveau $n + 1$ sans s'être trouvé au niveau n auparavant. C'est pourquoi la description ci-dessous commence au niveau -3 pour *monter* vers des niveaux supé-

M3 : M-de construction		P3 : P noosphérien	S3 : Situation noosphérienne	
M2 : M-de projet		P2 : P constructeur	S2 : Situation de construction	Sur-didactique
M1 : M-didactique	E1 : E-réflexif	P1 : P projeteur	S1 : Situation de projet	
M0 : M-d'apprentissage	E0 : Elève	P0 : Professeur-pour -l'élève	S0 : Situation Didactique	
M-1 : M-de référence	E-1 : E apprenant[3]	P-1 : Professeur en action	S-1 : Situation d'apprentissage	
M-2 : Milieu objectif	E-2 : E agissant	P-2 : P Observateur	S-2 : Situation de référence	A- didactique
M-3 : Milieu matériel	E-3 : E objectif		S-3 : Situation objective	

FIGURE 3.2 – Le modèle de structuration des milieux (Margolinas, 2002)

rieurs. La valeur -3 s'explique par l'existence de trois niveaux dans lesquels l'élève est en situation d'a-didacticité : l'enseignant n'interagit pas avec lui. Au passage, des éléments de description des milieux des différents niveaux sont également donnés.

Au niveau -3, l'élève est d'abord face au milieu *matériel* (M_{-3}) : l'ensemble des données matérielles constitutives de la situation. L'élève objective cette situation puis rapidement se retrouve au niveau -2.

Au niveau -2, il est *agissant* : il agit sur le milieu *objectif* (M_{-2}), suit des intuitions, teste une conjecture sur des exemples ou tente de trouver des contre-exemples, ...

Lorsqu'il devient conscient du caractère générique d'un calcul, d'une méthode, lorsqu'il pense avoir obtenu une conjecture solide et qu'il tente de la démontrer rigoureusement, lorsqu'il devient convaincu de l'efficacité d'une stratégie et n'attend plus qu'une validation de la part de l'enseignant, il passe au niveau -1 et devient *apprenant.* Le milieu (M_{-1}) est alors ici un milieu *de référence.*

Au niveau 0, l'élève $E0$ est celui qui accepte de s'engager dans le projet qui anime l'enseignant de construire des nouvelles connaissances et d'endosser les responsabilités qui en découlent. Le milieu (M_0) est celui d'*apprentissage.*

Castela (2007a) complète le modèle de structuration du milieu en ajoutant deux niveaux supplémentaires pour l'élève et en considérant qu'au niveau 0, l'élève est celui *du professeur* P_0. Le passage à des valeurs positives marque la rupture entre l'élève qui passe d'une place d'élève du professeur au niveau 0 avec lequel il interagit à une place d'élève qui ne peut plus interagir avec le professeur (niveaux +1 et +2).

Le niveau +1 correspond à l'élève $E1$ *étudiant localement autonome*. Le mot « étudiant » se réfère à « l'étude » telle qu'elle est définie en TAD. Il est localement autonome, car il s'appuie sur des situations récentes, travaille des OM encore sensibles, il n'est animé que par un projet local, comme par exemple la préparation d'une évaluation arrivant prochainement.

Au niveau +2, l'élève $E2$ choisit lui-même ses objets d'étude. Il est en grande partie responsable de la constitution du milieu sur lequel il s'appuie, il travaille avec des OM anciennes, de manière transversale. Il est alors *étudiant globalement autonome*.

c. Conclusion sur le modèle de structuration du milieu

Nous avons distingué quatre types d'étude et précisé avec un souci de clarté ce que nous entendions par étude, qu'elle soit en classe, hors la classe, personnelle ou autonome. De plus, grâce au modèle de structuration du milieu, nous avons détaillé différents niveaux côté enseignant et côté élève et ainsi modélisé des dynamiques d'enseignement et d'apprentissages potentiellement utiles pour analyser l'étude personnelle des élèves et l'organisation de cette dernière par l'enseignant. En particulier, les positions $E0$, $E1$ et $E2$ occupées par l'élève servent à décrire plus précisément l'autonomie dans laquelle cet élève est potentiellement placé. Nous présenterons une utilisation concrète du modèle par Castela (2007a) plus loin dans ce chapitre, lorsque nous aborderons les obstacles et les leviers possibles pour organiser l'étude personnelle.

3.2.3 Fonctions attribuées à l'étude personnelle

Les définitions des quatre types d'étude données précédemment sont générales. Ce qui pose question dans l'enseignement (voir chapitre un et la sous-section qui suit) est de déterminer les gestes attendus dans tel ou tel type d'étude.

Nous croisons à présent les différentes fonctions qui peuvent être fréquemment attribuées à l'étude, qu'elle soit personnelle ou hors la classe.

a. Le flou autour de l'étude hors la classe et l'étude personnelle

Dans leur article sur les gestes de l'étude personnelle chez des collégiens, Félix et Joshua (Félix & Joshua, 2002) évoquent un flou institutionnel à propos de ce qui est attendu dans l'étude hors la classe :

« lorsque l'on interroge les acteurs du système, et principalement les enseignants et les élèves, on remarque que demeure une forte opacité autour du sens des activités exigées en dehors de la classe, des apprentissages à effectuer et des savoirs à mobiliser par les élèves lorsqu'ils sont seuls. » (p. 90)

De plus, nous avons vu au chapitre un que les documents officiels, en particulier les ressources relatives à l'accompagnement personnalisé, prenaient peu voire ne prenaient pas en compte les spécificités des disciplines. Dans sa thèse, Félix (Félix, 2002) a interrogé des enseignants et des élèves en collège à propos de l'étude personnelle et le constat semble être le même :

« Ramené le plus souvent à des attitudes ou comportements souhaitables et plus rarement décrit à partir de la spécificité des contenus des savoirs en jeu au moment de l'étude, le travail personnel semble entouré d'une certaine opacité. » (p. 23-24)

Face à cette opacité, Félix (2002) choisit d'inscrire son travail de thèse dans le cadre de la TAD, en s'appuyant – comme nous le faisons – sur l'étude, les gestes d'étude et les moments de l'étude. Nous détaillerons à la section a. les gestes d'étude analysés par Félix.

Les travaux de Barrère (Barrère, 1997) en sciences de l'éducation, font également état de ce flou autour de l'étude personnelle chez des lycéens. Selon elle, volume de travail hors la classe et réussite scolaire ne vont pas de pair. La réussite serait davantage due à une certaine organisation par le lycéen de son travail personnel. Mais cette organisation peut être une difficulté pour lui : le lycéen peut être amené à s'interroger sur ce qui attendu de lui sachant que l'étude hors classe n'est par exemple pas toujours évaluée par les enseignants ou que les modalités de travail diffèrent d'un enseignant à l'autre. Barrère explique qu'il existe des élèves travailleurs qui ne reconnaissent pas les normes scolaires et peuvent ainsi tomber dans une organisation aléatoire de leur travail (ce que nous verrons aussi dans le chapitre quatre).

b. Des fonctions diverses attribuées à l'étude hors la classe et à l'étude personnelle

Plusieurs études, qu'elles soient de recherche en didactique (Milhaud, (Milhaud, 1998) ; Esmenjaud-Genestoux, (Esmenjaud-Genestoux, 2006)), en sciences de l'éducation ou en sociologie (Cooper, Robinson et Patall, (Cooper et al., 2006) ; Rayou, (Rayou, 2008) ; Caillet et Sembel, 2008), qu'elles soient menées au collège ou au lycée, semblent indiquer qu'enseignants et élèves attribuent plusieurs fonctions à l'étude hors la classe et à l'étude personnelle. Les listes qui suivent ne prétendent pas à l'exhaustivité, elles témoignent simplement de cette multitude, mais aussi de ce qui semble communément admis par les différents acteurs du système éducatif sur le rôle de ces types d'études.

Dans plusieurs des travaux suscités, deux composantes sont utilisées pour décrire les fonctions attribuées à l'étude personnelle : une composante scolaire (ou pédagogique) et une composante sociale.

Par ailleurs, l'étude personnelle peut être abordée sous le prisme des enseignants, des parents et des élèves. En fonction des uns et des autres, elle n'est pas perçue de la même façon. Dans notre thèse, nous faisons le choix de ne nous intéresser qu'aux points de vue enseignants et élèves.

Le vocabulaire employé est celui des articles que nous avons lus. Certains n'étant pas issus de recherches en didactique, les termes utilisés ne font pas référence aux cadres théoriques dans lesquels nous inscrivons notre travail de thèse. Nous réinterprétons dans la conclusion les divers éléments présentés ci-dessous au filtre de nos cadres théoriques.

c. Côté enseignant

Dans sa dimension scolaire, l'étude personnelle ou hors la classe peut être utilisée par les enseignants pour :

- Entrer dans l'étude d'un thème. Dans ce cas, l'étude personnelle est vue comme un travail de préparation, un travail en amont.
- Etudier le cours, permettre aux élèves de faire ou refaire ce qui a été fait en classe, de traiter des exercices proches de ceux réalisés en classe et qui ont été corrigés par l'enseignant. Dans ce cas, l'étude personnelle est qualifiée de travail de maintien, d'entretien de ce qui a été abordé ou acquis en classe.
- S'entraîner à la résolution et à la rédaction de problèmes plus complexes, effectuer un travail d'approfondissement.
- Transférer d'anciennes compétences dans de nouvelles situations : travail de mise en relation des savoirs, anciens et nouveaux.
- Permettre aux élèves « lents », « faibles », de rattraper l'éventuel retard qu'ils peuvent prendre en classe, de revenir sur les points qu'ils n'ont pas compris (homogénéisation des parcours cognitifs).

Dans sa dimension sociale, l'étude personnelle ou hors la classe peut, du point de vue de l'enseignant, avoir pour fonction :

– De discriminer les élèves travailleurs et les élèves non travailleurs en contrôlant que l'étude hors la classe est effectivement réalisée.
– D'établir un lien avec les parents et les élèves (information aux parents sur ce que les élèves font en classe par exemple).
– De satisfaire des directives administratives de l'établissement scolaire.
– De punir les élèves pour maintenir une paix scolaire.

d. Côté élève

Dans sa composante scolaire, l'étude personnelle ou hors la classe peut consister pour les élèves à :

– Faire les exercices demandés par l'enseignant.
– Apprendre sa leçon.
– Revoir les exercices traités en classe.

Dans sa composante sociale, les élèves considèrent l'étude personnelle ou hors la classe comme :

– Une habitude scolaire importée à la maison, un rituel au même titre que manger, dormir, ...
– Une activité qui contraste avec les loisirs, les activités extra-scolaires.
– Un travail qui responsabilise, qui peut se faire seul, sans aide et pour soi.

3.2.4 Premières conclusions et interprétation en termes de recherche en didactique

Trois éléments peuvent être retenus concernant l'étude personnelle :

– Il s'agit d'une « activité » dont le rôle précis ne semble pas bien défini pour les enseignants et les élèves.
– Malgré cela, il est possible de distinguer deux composantes pour décrire cette étude personnelle : une composante scolaire, recouvrant des activités comme l'apprentissage d'une leçon ou l'entraînement sur des exercices, et une composante sociale, quand elle agit comme un vecteur de maintien de la paix scolaire ou de lien entre école et famille.
– Selon que l'on se place du point de vue de l'enseignant ou du point de vue l'élève (et, du point de vue de l'élève, selon que celui-ci est en réussite ou en difficulté), l'étude personnelle n'est pas vécue de la même façon.

Nous reformulons ceci à l'aide de nos outils théoriques.

Comme nous l'avons déjà dit au chapitre deux, l'étude personnelle se situe sur plusieurs niveaux de co-détermination didactique (Chevallard, 2002). Les travaux de recherche de sciences de l'éducation (Cooper et al., (Cooper et al., 2006) ; Rayou, (Rayou, 2008) ; Caillet et Sembel, 2008) font ressortir la composante sociale de l'étude personnelle ; selon nous, ceci fait référence aux niveaux « société » (niveau -2) et « école » (niveau -1), que nous avons choisis de ne pas développer – sans toutefois les ignorer – dans notre travail de thèse.

Quant à la composante scolaire, parfois qualifiée de composante pédagogique, elle nous semble pouvoir être rattachée au niveau « pédagogie » (niveau 0), mais pas aux niveaux positifs (discipline, domaine d'étude, secteur d'étude, thème d'étude, sujet d'étude). En effet, les éléments présentés précédemment demeurent encore à un niveau de généralité trop élevé en regard des spécificités de la discipline mathématiques. Par exemple, dire que l'étude personnelle peut servir à préparer l'entrée dans un thème d'étude ne renseigne ni sur la manière d'organiser cette étude personnelle, ni sur la façon de le faire en lien avec le thème d'étude visé. De même, s'entraîner sur des exercices de résolution ou apprendre la leçon sont des gestes généraux qui ne prennent pas en compte les spécificités du thème étudié – puisque ce dernier n'est pas précisé — et donc ne précisent pas *comment*, *précisément*, *sur ce thème donné*, s'entraîner à résoudre des exercices (lesquels ?) ou apprendre une leçon (de quelle manière ?).

De fait, comme nous le détaillerons plus loin à l'aide du modèle de structuration du milieu (Félix, 2002a ; Castela, 2007a), les gestes d'étude réalisés par les élèves pour « apprendre » une leçon ou « revoir » les exercices sont loin d'être identiques. Certains gestes sont même *spécifiques* aux élèves dits en réussite scolaire. En d'autres termes, un élève en réussite ne voit pas l'apprentissage d'une leçon ou la révision des exercices de la même manière qu'un élève en difficulté.

3.3 L'étude personnelle : entre nécessité et controverse

3.3.1 Une nécessité pour les programmes officiels, les enseignants et les élèves

Comme nous l'avons mentionné au chapitre un, en collège en mathématiques, le Bulletin Officiel du 28 août 2008 évoque explicitement le travail personnel comme une forme de travail que les enseignants doivent mettre en place dans leur enseignement avec les élèves (page 12 du B.O.) et qui est nécessaire aux apprentissages et à l'acquisition d'une autonomie utile pour les années qui suivent. L'étude personnelle est donc exigée par les programmes officiels.

Pour les enseignants et les élèves, l'étude personnelle peut être vue comme une nécessité pour les raisons scolaires et sociales évoquées dans la section précédente. Du côté des enseignants, cette étude personnelle peut être utilisée pour les soulager de nombreuses tensions (Caillet et Sembel, (Caillet & Sembel, 2008)).

Selon la composante scolaire, il s'agit :

- de tensions liées à l'avancée du temps didactique : l'étude personnelle hors la classe permet de prolonger un temps de travail qui peut être insuffisant en classe pour répondre aux exigences du programme ;
- de tensions liées à l'avancée du travail de chaque élève : l'étude personnelle, dans sa vision idéalisée, permet une homogénéisation des parcours cognitifs.

Selon la composante sociale, il s'agit de réduire :

- les tensions liées à l'ordre scolaire ;
- les tensions liées aux attentes des parents et de l'établissement (il « faut » donner du travail hors la classe parce que parents et établissement l'exigent).

3.3.2 Le débat sur les inégalités scolaires et sociales, et l'influence de l'étude personnelle sur ces inégalités

D'après les paragraphes précédents, un consensus relatif entre les programmes, les enseignants et les élèves [2] semble établi concernant le fait que l'étude personnelle est nécessaire à la construction des apprentissages.

En revanche, l'étude personnelle, notamment celle qui a lieu hors la classe, peut soulever le débat concernant les inégalités scolaires et sociales. En effet, l'école de la République prétend vouloir donner les mêmes chances pour tous de réussir. Or, l'étude hors la classe, notamment l'étude à la maison, parce qu'elle a lieu en dehors de l'Ecole, peut être vue comme une atteinte à cette égalité des chances [3], car chaque élève ne baigne pas dans le même environnement socio-culturel : untel, enfant unique, issu d'un milieu aisé, aura la possibilité de se faire aider par ses parents ou un

2. Et aussi les parents d'élèves.

3. Sans vouloir entrer plus avant dans le débat, l'étude *en* classe, d'une étrange façon, semble moins remise en cause, alors qu'elle présente elle aussi de nombreux facteurs sociaux susceptibles d'être sources d'inégalités scolaires.

professeur particulier, seul dans une chambre, au calme, tandis que tel autre, issu d'un milieu défavorisé, ne pourra compter que sur lui-même, pris entre des frères et sœurs bruyants et nombreux, dont il a en plus la charge de s'occuper.

Ce débat pose en particulier la question du lien entre l'étude personnelle – hors la classe, hors l'école – et la construction des apprentissages. Or, la corrélation entre étude personnelle hors la classe et réussite scolaire n'est pas indiscutablement établie. Selon Cooper et al. (2006), la diversité des études menées aux Etats-Unis, des méthodologies employées, des critères sur ce qu'est l'étude hors la classe et la réussite scolaire, sur les nombreux facteurs pouvant influencer cette étude hors la classe, et le caractère mitigé des résultats obtenus, rendent difficile l'estimation des effets de l'un sur l'autre. Cooper et al. avancent néanmoins des arguments en faveur de « tendances » témoignant de liens entre étude hors la classe et réussite scolaire : entre 1962 et 1986 aux Etats-Unis, 14 études sur 20 « montrent » que plus le niveau est élevé (plus on monte dans les classes), plus le travail hors la classe aurait des effets bénéfiques (meilleure rétention des savoirs, meilleure capacité à conceptualiser, amélioration de l'attitude envers l'école, meilleure discipline de soi, meilleure autonomie) ; 43 études sur 50 « montrent » que plus le temps passé à travailler hors la classe est important, plus grande est la réussite scolaire. Encore une fois, ces résultats sont à considérer avec prudence, car ils dépendent des méthodologies de recherche employées.

Les études de Cooper et al. ont été cependant critiquées et sont à considérer avec précaution, comme cela est souligné dans Thibert (Thibert, 2016) :

> « elles se basaient sur quelques approximations et étaient trop dépendantes des systèmes de notation utilisées par les enseignants. En outre, leur interprétation pose problème car elles établissent une corrélation entre le temps passé aux devoirs et la réussite scolaire, corrélation réaffirmée depuis par d'autres recherches, mais sans que l'on puisse conclure dans quel but tout ceci fonctionne : les bons élèves passent-ils plus de temps à faire leurs devoirs, ou passer du temps sur les devoirs rend-il les résultats des élèves meilleurs ? »

Selon Bautier et Goigoux (Bautier & Goigoux, 2004), plusieurs travaux de recherche (didactique, psychologie, sciences de l'éducation, ...) menés dans plusieurs disciplines et sur plusieurs niveaux – et là encore avec plusieurs méthodologies – semblent étayer une hypothèse relationnelle entre inégalités scolaires et inégalités sociales :

> « c'est l'hypothèse d'une inadéquation des pratiques d'enseignement (objectifs assignés, choix des tâches, modes de régulation, etc.) aux caractéristiques de certains élèves les moins performants issus des milieux populaires. » (p. 92-93)

3.3.3 Conclusion sur l'influence de l'étude personnelle sur la réussite scolaire

D'un côté, pour les programmes, les enseignants et même les élèves, l'étude personnelle, notamment hors la classe, s'érige en condition nécessaire pour la construction des apprentissages. D'un autre côté, pour certains chercheurs, cette étude pose problème car elle creuse potentiellement les inégalités scolaires, en lien avec les inégalités sociales. Par conséquent, nous nous interrogeons sur la possibilité de faire exister et d'organiser cette étude personnelle à la fois nécessaire pour les apprentissages et problématique du point de vue des inégalités. Nous allons voir dans ce qui suit que les difficultés pour ce faire sont nombreuses mais que des leviers semblent exister.

3.4 Organiser l'étude personnelle : quelles difficultés et quels leviers ?

Nous avons vu qu'une première difficulté pour organiser l'étude personnelle était due à l'opacité sur le rôle et la définition de cette étude. Nous allons montrer qu'à celle-ci viennent s'ajouter d'autres difficultés.

3.4.1 Le paradoxe de l'élève en difficulté vis-à-vis de l'étude personnelle

Nous avons déjà évoqué au chapitre un le paradoxe relatif à l'étude personnelle de l'élève en difficulté. Ce paradoxe peut provenir d'une des fonctions attribuées à l'étude personnelle, notamment hors classe, qui est celle de l'homogénéisation cognitive : certains enseignants attendent des élèves les plus « lents » et les plus « en difficulté » qu'ils comblent à la maison le retard qu'ils auraient pu prendre en classe et revoir les points qu'ils n'auraient pas compris durant le cours. Mais cela n'est pas toujours aisé pour ces élèves en difficulté, comme l'explique Esmenjaud-Genestoux (2005) dans ses travaux sur l'étude personnelle :

> « L'élève le plus lent et le plus faible d'une classe est trop souvent celui qui reçoit la quantité de devoirs la plus importante : non seulement il doit s'acquitter de ce que ses pairs ont à résoudre, mais il doit aussi se mettre à jour, terminer ce qui aurait dû être réalisé en classe et comprendre ce que le professeur a tenté d'expliquer. » (p. 74)

De plus, les élèves les plus en difficulté peuvent aussi être ceux qui sont le moins susceptibles de faire preuve d'autonomie d'une part, et d'organiser correctement leur étude personnelle d'autre part. Le modèle de structuration du milieu permet de préciser la position des élèves les plus en difficulté :

> « Pour eux, le deuxième niveau sur-didactique est beaucoup plus développé que pour les autres : pour certaines OM anciennes, ils n'ont pas construit au moment où ces OM étaient les enjeux de l'enseignement le rapport visé par $S0$; dans des situations didactiques ultérieures où ces OM sont sollicitées au service des OM nouvelles, ces élèves sont confrontés à ces « retards d'apprentissage » dont le rattrapage sollicite $E2$. On peut raisonnablement faire l'hypothèse qu'en difficulté, ils sont encore moins que les autres susceptibles de poser le bon diagnostic et d'assumer la responsabilité auto-didactique associée. » (Castela 2007a, p. 73)

Castela (2007a) émet à ce propos une conjecture côté institutionnel :

> « Au collège, l'étude des objets de savoir, savoirs théoriques et OM, est prise en charge par P0 ; en particulier, pour les OM rencontrées, le temps est suffisant pour assurer en classe les principaux moments de l'étude. » (p. 73)

Le fait d'avoir enseigné plusieurs années en collège nous conduit à adopter ici une position différente de celle de Castela (2007a). D'une part, nous nous interrogeons sur les éléments qui permettent d'affirmer que le temps est suffisant en collège pour assurer en classe les principaux moments de l'étude. D'expérience, nous pouvons dire que rares sont les enseignants de collège qui parviennent à « finir le programme », ce qui va plutôt dans le sens d'un temps disponible insuffisant. D'autre part, Castela (2008) elle-même explique que des enjeux d'apprentissage sont ignorés par l'Institution et pourtant nécessaires à la réussite. Ces phénomènes silencieux nous paraissent tout à fait opérer dès le collège. Partant de là, comment peut-on être sûr que $P0$, sujet d'une institution qui ne prend pas explicitement en charge l'organisation didactique de ces enjeux, le fera lui-même ?

En revanche, nous partageons le point de vue de Castela (2007a) sur une autre de ses conjectures, qui consiste à dire qu'en première scientifique, il y a une accumulation plus importante d'OM à étudier qu'en collège ou en seconde, OM qui convoquent d'autres OM anciennes, ce qui implique une plus forte sollicitation de $E2$. Mais en classe de quatrième au collège, pour les équations, il faut aussi articuler des OM anciennes : développement d'expressions, opérations sur les relatifs, les fractions, test d'une égalité, ... Selon nous, le phénomène de forte sollicitation de la position $E2$ pour les élèves en difficulté peut tout à fait exister dès le collège.

3.4.2 Impliquer les parents dans l'accomplissement de l'étude personnelle hors la classe : une illusion ?

Une des fonctions (dans sa dimension sociale) qui attribuée à l'étude personnelle, notamment hors la classe, est celle du lien entre l'école et la famille. Certains enseignants y voient un moyen d'impliquer les parents dans les études de leur enfant. Aussi pourrait-on croire qu'une façon d'organiser l'étude personnelle pour favoriser la réussite scolaire peut être de passer par les parents. Les travaux d'Esmenjaud-Genestoux (2005) témoignent de difficultés à procéder comme tel : Esmenjaud-Genestoux a étudié plusieurs binômes parents-enfants qui avaient pour objectif de résoudre ensemble un même problème d'algèbre en collège. Elle en conclut que les parents ne parviennent pas à réguler l'étude personnelle hors la classe des élèves :

> « l'espoir de faire évoluer les connaissances et les représentations des parents sur l'apprentissage des mathématiques [est] fort mince, même lorsqu'ils se portent volontaires et en relation avec un conseiller expert. Il n'est donc pas raisonnable de compter sur les familles pour réguler le travail personnel des élèves, tout spécialement lorsque ces derniers rencontrent d'importantes difficultés. » (p. 74)

Kapko et Rayou (Kapko & Rayou, 2010), dans leurs travaux sur la construction des inégalités d'apprentissages à travers l'étude hors la classe des élèves, rejoignent Esmenjaud-Genestoux sur l'idée de ne pas pouvoir demander aux familles d'assumer le rôle d'accompagnateurs de l'étude. Selon eux, les difficultés des élèves à se projeter dans un travail personnel stratégique sont accentués par le phénomène d'externalisation du travail, qui opacifie davantage le contrat didactique autour de ce travail d'une part par le manque de prise en charge par l'institution de son organisation, d'autre part par la diversité des aides apportées par les familles.

3.4.3 L'Aide au Travail Personnel

L'Aide au Travail Personnel (ATP) compte parmi les dispositifs qui ont été mis en place dans les établissements scolaires pour aider les élèves en difficultés et ainsi prolonger, au sein des établissements et non plus dans les familles, sous la direction d'enseignants et non plus de parents ou de professeurs particuliers, le travail des élèves et favoriser leur autonomie. Des professeurs ont la charge de diriger le travail, en dehors des heures de cours habituels, d'un groupe d'élèves qui ne sont pas nécessairement les leurs, et ce, dans diverses disciplines. Félix et al. (Félix, Saujat, & Mouton, 2008) ont effectué des recherches sur ce type de dispositif. Les questions initiales sur ce qu'est l'étude personnelle, son rôle, se retrouvent dans leurs interrogations :

> « De quoi parle-t-on ? De l'organisation institutionnelle des conditions de l'étude, adressée à tous les élèves d'une classe ou d'une aide ciblée, dirigée vers quelques élèves en particulier, de manière personnalisée ou individualisée ? [...] Quel rôle l'enseignant, en charge de ces dispositifs, doit-il jouer auprès de ces élèves [...] ? » (p. 40)

Le flou institutionnel autour de l'étude personnelle est également un leitmotiv chez les enseignants en charge des ATP. Toujours dans Felix et al. (?, ?)2008, trois enseignants ont été observés, et trois façons de faire différentes ont été relevées : le premier enseignant envisage l'ATP comme un temps pour réaliser le travail attendu par les enseignants des élèves, le deuxième comme du soutien et une occasion d'approfondir la discipline étudiée par les élèves, et le troisième enfin comme une aide essentiellement méthodologique. Ces différences de méthode conduisent les enseignants à faire état d'un manque de formation concernant l'étude personnelle et d'un manque d'entente commune sur ce qui doit être fait dans les ATP :

> « Tout porte à croire ici que le métier n'est pas – ou n'est plus – en mesure de répondre à ces questions [...] on est bien dans une situation de travail inédite, ne serait-ce que par la division qui semble s'opérer entre le travail que l'enseignant doit ogranniser avec tous les élèves en classe et le travail qu'il doit prévoir et mettre en œuvre avec une partie seulement des élèves, dans des temps et des espaces en dehors de la classe. » (Félix et al. (?, ?)2008, p. 46)

Cette question de l'articulation entre ce qui se fait en classe et hors la classe semble primordiale.

3.4.4 L'utilisation du cahier de cours

Le cahier de cours (mais aussi celui d'exercices quand les deux sont dissociés) est un objet matériel que les élèves utilisent fréquemment en classe et exportent hors la classe. Il est légitime de s'interroger sur l'utilisation faite par les élèves de ce cahier dans leur étude personnelle hors la classe.

Blochs (Blochs, 2012) s'est intéressé au cahier de cours. Bien que sa problématique porte sur la question de savoir si ce cahier est une œuvre ou un instrument pour le professeur ou l'élève, ses travaux nous donnent des informations sur son utilisation. En effet, Blochs cherche à savoir si les enseignants avec qui il travaille définissent explicitement les possibilités et limites du cahier de cours, s'ils identifient les types de tâches pour lesquels ce cahier de cours pourra être utile.

D'après ce chercheur, selon le professeur observé, le cahier de cours n'est pas organisé de la même manière : certains y inscrivent de manière successive et chronologique les leçons ; certains classent les leçons par thèmes, par définitions/théorèmes ; certains numérotent les pages, font créer un sommaire ; certains demandent aux élèves de rajouter des fiches personnelles de cours à leur cahier ; certains utilisent plus ou moins souvent des photocopies (à compléter ou non) ; certains autorisent une forme de personnalisation du cahier par leurs élèves ; certains imposent des codes de couleur pour les titres, les sous-titres, les définitions, les théorèmes ; etc. Cette multiplicité nous interroge : ne renvoie-t-elle pas quelque part à « l'opacité » relevée par Félix (2002) sur l'organisation de l'étude personnelle ?

Sur une leçon particulière, le théorème de Pythagore (probablement en quatrième), Blochs remarque que le cours permet de « réglementer » (p. 176) la rédaction des élèves dans le cahier d'exercices (celle-ci est identique à celle du cours). En revanche, une grande variabilité apparaît encore entre la façon dont la leçon est construite chez les enseignants : certains énoncent le théorème de Pythagore, un autre y ajoute la contraposée ; certains font référence aux aires, aux rectangles, d'autres non ; certains insistent sur la notion de valeur exacte, de valeur approchée, sur l'utilisation de la touche racine carrée de la calculatrice. Si nous reformulons en termes de TAD et de TSD, il s'agit visiblement de différences dans ce qui a été institutionnalisé : différences dans les choix de la nature et du nombre d'OM faisant l'objet d'une institutionnalisation, dans les agrégations entre OM, dans les technologies et techniques étiquetées comme « à retenir ». Quel impact sur l'étude personnelle des élèves ces choix ont-ils ?

Selon Blochs, le moment où les élèves écrivent dans le cahier de cours est généralement un moment qualifié de « pris en main » par le professeur. La construction du cours est dans la majorité des cas réalisée par un jeu de questions-réponses, où les questions sont souvent très fermées ou portent sur du style (« vous préférez telle formulation ou telle formulation ? », « quel nom voulez-vous donner à cette figure ? », ...). Les élèves recopient ce que l'enseignant écrit au tableau (ou complètent la photocopie distribuée), ou écrivent ce que l'enseignant dicte. En classe, lors de la résolution d'exercices, les élèves utilisent peu le cahier de cours. Blochs explique que les exercices donnés sont généralement des exercices d'application directe (on est au niveau t-convoqué, Castela, 2008). Si un élève est en difficulté, il est plus souvent tenté de demander de l'aide à un autre élève ou au professeur, qui peuvent alors se substituer avantageusement au cahier.

À la question « Faut-il aider les élèves à utiliser leur cahier de cours ? », les réponses données par les enseignants sont diverses :

> « Pour Joëlle il n'y a pas conception puis usage mais usage dans la conception, elle privilégie l'écriture du cours à son usage. Pour Claude, le cours doit être appris (au sens « mémorisé »). Pour les autres professeurs, aider les élèves à utiliser le cahier revient à les inciter à utiliser le cahier. » (p. 183)

Blochs ajoute :

> « Nous n'avons pas vu de professeur montrer explicitement à l'ensemble de la classe, ou à un élève, comment le cahier de cours pouvait aider à la résolution de tel ou tel exercice. » (p. 184)

Cette remarque nous interpelle et renvoie au manque d'explicitation dans les attentes des enseignants quant à l'utilisation du cahier de cours.

Ceci conduit Blochs à qualifier le cahier de cours comme étant véritablement une œuvre, puisque son écriture semble être une fin en soi. Par ailleurs, il s'agit bien de l'œuvre d'un professeur, un cahier de cours étant aisément reconnaissable en fonction du professeur.

Les enseignants n'ont pas les mêmes attentes vis-à-vis du cahier de cours :

> « Certains voient plutôt dans le cahier un contenu qui doit être appris, leçon après leçon, d'autres davantage le cahier comme une boîte à outil » (p. 185).

À l'unanimité, les enseignants interrogés pensent que le cahier de cours est indispensable et ne saurait être remplacé par un manuel. Pourtant, un certain nombre pense que les élèves s'en servent peu ou ne s'en servent pas chez eux. Le cahier est également conçu pour répondre à une attente institutionnelle (il peut être regardé par l'inspection, notamment). Nous retrouvons l'idée de nécessité institutionnelle relative à l'étude personnelle, ici à travers la nécessité de « produire » un cahier de cours, même si les enseignants semblent conscients d'un déficit dans son utilisation par les élèves.

Ces derniers, de leur côté, affirment pour la plupart lire ou relire les leçons du cahier, sans différencier savoir et savoir-faire selon Blochs ; une grande partie apprend par cœur les définitions et les théorèmes. De rares élèves disent que le cahier de cours sert « surtout à réviser, quelque fois à apprendre et à trouver des solutions de problèmes » (p. 188).

En conclusion, Blochs estime que le cahier de cours est « bien plus une mémoire du travail du professeur que du travail de l'élève ou de la classe, bien plus une œuvre et un instrument du professeur que de l'élève. » (p. 192) De grandes variabilités sont identifiées dans la façon d'organiser le cahier de cours par les enseignants et d'en expliciter l'utilisation à faire aux élèves.

3.4.5 Sur la piste de leviers pour l'organisation de l'étude personnelle

Dans les paragraphes précédents, nous avons présenté un certain nombre de difficultés en lien avec l'organisation de l'étude personnelle ; à présent, nous cherchons à identifier des leviers potentiels.

Nous commençons par exposer les travaux de Castela (2007a) et Félix (2002), qui décrivent différents gestes d'étude accomplis par les élèves dans leur étude personnelle.

a. Des gestes d'étude personnelle différents chez les élèves en difficulté et chez les élèves en réussite

Dans une vision idéalisée, les enseignants peuvent s'imaginer que les élèves sont capables d'organiser seuls leur étude personnelle, alors même que ni les premiers ni les seconds peuvent ne pas savoir exactement en quoi consiste cette. Nous allons voir à présent que les élèves, selon qu'ils sont « bons » ou « en difficulté », n'utilisent pas les mêmes « gestes » pour leur étude personnelle, notamment hors la classe, et que certains de ces gestes sont spécifiques aux élèves en réussite.

Felix (2002a) et Castela (2007a) ont observé ce qu'elles appellent des *gestes d'étude* chez des élèves de collège (Félix, 2002a) et de lycée (Castela, 2007a) lorsqu'ils travaillent personnellement hors la classe, en particulier pour préparer une évaluation en classe. Nous commençons par présenter quelques résultats obtenus dans les travaux de Castela (2007a) sur les gestes d'étude de lycéens de première scientifique, puis ceux de Félix (Félix, 2004) sur des collégiens en mathématiques et en histoire.

a. Les gestes d'étude de lycéens en première scientifique (Castela, 2007a)

Nous avons présenté à la sous-section 3.2.2 le modèle de structuration du milieu. Castela (2007a) fait fonctionner ce modèle dans le cadre d'une expérimentation en lycée sur la question de l'étude personnelle, côté élève. d'une part de décrire d'une manière exemplifiée une utilisation possible du modèle, d'autre part d'identifier des éléments théoriques susceptibles de nous servir pour la conception du PER sur les équations et pour l'analyse de données.

Castela (2007a) s'intéresse au passage de la classe de seconde à la classe de première scientifique. Selon elle, l'étude personnelle, qu'elle appelle plutôt travail personnel, est un travail de l'élève portant sur des OM non explicitement désignées par l'enseignant comme étant des enjeux d'apprentissages et non constituées en enjeux didactiques pour cet enseignant. D'un point de vue institutionnel, Castela cherche à savoir ce qui change entre collège-seconde et première scientifique, et d'un point de vue élève, ce qui change au niveau du travail personnel et des gestes d'étude, notamment des gestes chez les élèves qui réussissent. Ceci est motivé par le constat apparemment partagé par beaucoup d'enseignants et d'élèves selon lequel il y a une sorte de rupture entre collège-seconde et lycée-première, notamment en première scientifique. Cet article présente la poursuite des travaux menés par Castela dans celui de (Castela, 2000).

Castela (2007a) réalise des entretiens avec plusieurs élèves de première S de niveaux différents. Le niveau, à savoir faible, moyen ou bon, est estimé à partir de trois notes obtenues en mathématiques pour chaque élève.

Lorsque l'élève est en position $E0$ dans le modèle de structuration du milieu, Castela lui attribue deux grands types de gestes d'étude : les gestes d'évaluation de l'état de l'apprentissage relatif aux exercices faits en S0, et les gestes visant à pallier les ignorances [4] auto-diagnostiquées.

4. Le terme d'« ignorances » est celui employé par Castela. Dans la suite, nous utiliserons plutôt

Le premier type de geste concerne **l'évaluation de l'état de l'apprentissage relatif aux exercices faits en S0 :** il s'agit de gestes pour préparer un contrôle, en appui sur les exercices et les corrigés dans S0, dans l'optique d'identifier les ignorances (diagnostic) : lire directement le corrigé ; refaire mentalement un exercice, partiellement ou totalement, avec des allers et retours avec le corrigé ; refaire par écrit, intégralement, l'exercice puis contrôler avec le corrigé.

Castela constate que les élèves faibles ne refont pas systématiquement par écrit les exercices de S0 pour la préparation d'un contrôle, ils sont plus fréquemment dans de la lecture mentale, avec une volonté de mémorisation des façons de faire, sans mettre en œuvre eux-mêmes cette façon de faire. Les autres élèves (moyens et bons) refont par écrit les exercices, partiellement ou totalement en fonction de leurs besoins, besoins qu'ils estiment eux-mêmes, d'où l'expression « auto-diagnostic ». Cependant, j'interroge cette capacité des élèves à s'auto-diagnostiquer, surtout en collège. Cela peut mettre en avant le rôle du test Pépite.

Les **gestes visant à pallier les ignorances auto-diagnostiquées constituent le second grand type de geste d'étude pour développer le travail personnel**. Ce travail est celui de E0, élève *du* professeur (donc lien avec S0). C'est « ce que font les élèves lorsqu'ils ont éprouvé un sentiment d'incompréhension ou lorsqu'ils ont échoué dans leur reprise d'un exercice (erreur ou impasse) » (p. 59).

Ces gestes comprennent :

- Des **gestes de lecture** (p. 59) : lire, parfois à plusieurs reprises, d'une part pour comprendre, d'autre part pour mémoriser. Cette lecture porte sur le cours mais aussi sur les exercices.
- Des **gestes de résolutions écrites répétées** (p. 61) : refaire un exercice par écrit jusqu'à retrouver la même solution que celle donnée par l'enseignant, pour être capable de reproduire à l'identique la manière de faire de l'enseignant (validée par ce dernier). Pour cela, le cours joue un rôle important (Blochs, 2012 parle de « réglementation » par le cours d'une rédaction type). On voit bien ici que l'élève est celui d'un professeur donné.
- Des **gestes d'implication du professeur dans l'étude personnelle** (p. 61) : solliciter l'aide du professeur. L'élève E0 rappelle « P0 à l'ordre de la relation didactique en le sommant de lui donner plus d'éléments pour apprendre. » (p. 62) Ces gestes ne peuvent être réalisés que par les élèves qui

les termes de connaissances construites (ou de besoins d'apprentissages), qui mettent selon nous plus en avant le fait que les élèves *ont* des connaissances et que celles-ci se construisent dans une institution donnée.

anticipent largement la préparation d'un contrôle et qui osent interpeler le professeur en classe ; ceux qui s'y prennent au dernier moment ou n'osent pas questionner le professeur ne réalisent pas ces gestes.

– Des **gestes de sollicitation de systèmes didactiques auxiliaires** (p. 62) : recourir à des personnes susceptibles d'accompagner l'étude de l'élève (parents, professeur particulier, ...) ou au manuel (plus rare chez les élèves interrogés).

Parmi les élèves utilisant un manuel, Castela décrit l'attitude d'une excellente élève qui se sert du manuel pour « éviter autant que possible d'être en situation d'invention ; d'après ses dires, elle situe sa part de créativité dans la recontextualisation d'une règle décontextualisée ou dans le transfert à partir d'un exemple. » (p. 63-64) On retrouve ce que Castela dit dans son article de 2002 sur le fonctionnement mathématique (cette élève voit la réussite comme une question de connaissances sur le fonctionnement mathématique).

L'importance accordée aux exercices faits dans S0 par les élèves se justifie à l'unanimité par le pari que les exercices donnés en contrôle seront similaires à ceux faits en classe. Nous avons là aussi déjà vu dans (Castela, 2002) comment des étudiants envisageaient la réussite en contrôle.

Castela (2007a) identifie ensuite deux types de gestes de prolongement de l'étude attribués au premier niveau sur-didactique.

Les **gestes de développement des moments du travail et de l'évaluation de la technique** (p. 65) correspondent à un prolongement du travail de la technique qui va « au-delà de ce que P0 a organisé dans S0, l'élève doit pouvoir résoudre des exercices nouveaux. » (p. 65) Sur les dix élèves interrogés, quatre disent faire des exercices qui n'ont pas été traités en classe. Parmi eux, deux résolvent des exercices de base uniquement, deux autres utilisent des manuels parascolaires avec corrigés, ce que Castela considère comme des *institutions didactiques auxiliaires* : les élèves « s'assujettissent à une institution didactique auxiliaire qui ici se substitue à P0 pour prolonger l'étude. » (p. 66) Une seule élève cherche des exercices du même type que ceux traités en classe.

Le second type de gestes attribué au premier niveau sur-didactique concerne les **gestes de développement de la technologie et d'institutionnalisation** (p. 68). Rappelons que le professeur peut émettre des commentaires à l'oral qui sont inégalement pris en compte par les élèves. Ces commentaires peuvent en particulier porter sur la composante pratique de la technologie ou sur l'institutionnalisation de la technique. De fait, l'élève en position E1 peut avoir à sa charge d'élaborer cette composante pratique ou d'institutionnaliser cette technique. Ceci nécessite, d'après Castela, une décontextualisation de l'exercice, pour repérer des « schémas », des façons de faire, applicables sur d'autres exercices du même type. D'après Castela, ce type de geste n'est pas du tout évoqué par les élèves faibles, il « pourrait donc constituer un geste spécifique de la réussite. » (p. 70)

b. Les gestes d'étude de collégiens en mathématiques et en histoire (Félix, 2002a ; Félix et Joshua, 2002

Dans sa thèse, Félix (Félix & Joshua, 2002) analyse les gestes de l'étude personnelle de collégiens en mathématiques et en histoire. Elle interprète leur étude personnelle au prisme de systèmes didactiques [5] : un système didactique principal (SDP), qui pilote un réseau de systèmes didactiques auxiliaires (SDA). Ceci permet à Félix et Joshua (2002) de décrire le lien entre ce qui a lieu en classe et hors la classe au niveau de l'étude personnelle. En articulant la TAD avec la TSD, Félix introduit la notion de milieu pour l'étude, qui est un milieu formé par le contrat didactique liant élève et enseignant, ainsi que les « trous » – les ignorances – créés par l'enseignant et qui fait justement le lien entre SDP et SDA. Félix constate que les élèves dits « bons » et ceux dits « faibles » n'étudient pas de la même manière dans les SDA. Elle liste différents gestes d'étude, qu'il est possible de rapprocher avec ceux présentés par Castela (2007a), et qu'elle qualifie de gestes d'étude *généraux* : gestes de mémorisation d'une partie ou de la totalité d'une leçon, gestes de lecture (lecture du cahier, plus rarement du manuel), gestes d'écriture (résolution d'exercices en mathématiques, élaboration de fiches en histoire), gestes d'oralité (commentaires oraux de documents).

Cependant, selon Félix, ces gestes sont inégalement réalisés par les « bons » élèves et par les « faibles ». Les « bons », pour qui la majeur partie de l'étude s'est effectuée dans le SDP classe, vont chercher le caractère générique des problèmes à résoudre et leur associer des techniques de résolution dans le SDA maison, là où les « faibles » ne sauront pas distinguer en classe – et donc hors la classe – les objets à étudier (ce qui est mathématiquement nécessaire et ce qui est mathématiquement contingent) ou vont se sentir contraints de devoir inventer des gestes d'étude. Dans le chapitre quatre, nous verrons que nos observations de collégiens en train d'accomplir leur étude personnelle en mathématique rejoignent complètement celles de Félix.

5. Voir chapitre deux pour une définition des SDP et SDA.

c. Conclusion

Dans leurs travaux respectifs, résolument didactiques de par la prise en compte des spécificités de la discipline, Félix et Castela font le même constat : les gestes d'étude des élèves en difficulté ne sont pas identiques à ceux des élèves en réussite. Les premiers se contentent la plupart du temps de gestes de lecture, de mémorisation, en faisant le pari d'une proximité très locale des exercices donnés en contrôle avec ceux donnés en classe par l'enseignant, tandis que les seconds sont capables de pratiquer des gestes de repérage de leurs connaissances construites (diagnostic) et sont les seuls à répondre à leurs besoins d'apprentissages par des gestes de développement de la technologie et d'institutionnalisation de la technique.

Le fait d'avoir identifié des gestes d'étude partagés par les élèves « bons » et non accomplis par les élèves « en difficulté » constitue une piste potentielle pour aider l'enseignant à organiser l'étude personnelle : il s'agirait de mettre l'accent sur un travail de ces gestes, voire de les institutionnaliser (*cf.* page b. plus loin).

b. La nécessité d'un diagnostic et d'une différenciation

Nous venons de voir qu'un élève en difficulté n'est pas toujours à même de réaliser un geste d'étude d'auto-diagnostic de ses difficultés (Castela, 2007a). Ne posant pas le bon diagnostic, il n'effectuera dès lors pas des gestes d'étude lui permettant d'organiser son étude personnelle de sorte à pallier à ses difficultés.

Nous pensons que le recours à une évaluation diagnostique automatique – comme le test Pépite évoqué au chapitre deux – pour identifier les besoins d'apprentissages des élèves aux équations facilite l'organisation de l'étude personnelle. Il évite aux élèves d'avoir à réaliser le geste d'auto-diagnostic dont seuls les élèves en réussite semblent à même de faire correctement. Il peut aider l'enseignant à différencier cette étude personnelle.

Selon nous, l'étude personnelle peut être aisément rattachée à l'évaluation [6]. Nous faisons l'hypothèse qu'un élève va organiser son étude personnelle, notamment celle hors la classe, en fonction de ce sur quoi il sera évalué prochainement en classe. Dans le cadre du projet NeoPraeval présente au chapitre deux, nous avons pu voir que les enseignants avec qui nous avons travaillés avaient différentes logiques vis-à-vis de

6. Nous n'approfondirons pas le vaste thème qu'est l'évaluation et nous cantonnerons, par ce terme, à faire référence à des évaluations écrites « classiques » dans l'enseignement actuel en France, parfois appelées « interrogations » ou « contrôles de fin de chapitre ».

l'évaluation, notamment sommative. Par exemple, l'un d'entre eux établit un contrat très clair avec ses élèves : il leur dit précisément sur quoi ils seront évalués, les types d'exercices qui seront dans le contrôle, etc. Pour un autre enseignant, l'évaluation devait comporter une idée d'épreuve, il devait forcément y avoir un exercice plus difficile que les autres, relativement inédit par rapport à ce qui a été fait en classe. Nous supposons que ces différentes visions vont modifier les contrats d'étude pour préparer une évaluation et donc la façon dont les uns et les autres vont organiser l'étude personnelle. À ce propos, Félix (Félix, 2004) évoque le ressenti des élèves en difficulté durant une évaluation, au cours de laquelle ils ont parfois l'impression que certains exercices ne se réfèrent pas à des notions abordées en classe ,alors que c'est bien le cas. Ces élèves n'ont peut-être pas eu les bons gestes d'étude, mais l'enseignant n'a peut-être pas non plus proposé en évaluation uniquement des exercices types vus en classe.

Ceci peut être analysé à l'aide du modèle de structuration du milieu côté enseignant : dans les niveaux positifs (projet, construction, voire noosphérien), l'enseignant a-t-il intégré des éléments explicites pour préciser le contrat didactique autour de l'évaluation et de l'étude personnelle correspondante ? Dans la thèse, parce que nous nous sommes davantage intéressé aux gestes d'étude des élèves (et à leur mise en relation avec les gestes d'aide à l'étude de l'enseignant), nous avons peu employé ce modèle du côté enseignant ; il s'agit selon nous d'une perspective intéressante.

c. Connaissances sur le fonctionnement mathématique

En lien avec les travaux de Castela (2007a) et Félix (2002) présentés plus haut, comment expliquer que les élèves en difficulté n'organisent pas de la même manière leur étude personnelle que les élèves en réussite ?

Pour Castela ((Castela, 2000), (Castela, 2002), (Castela, 2007a)), cela peut provenir de la manière dont les élèves voient la réussite en mathématiques. Castela (2002) a interrogé des étudiants universitaires sur la manière dont ils préparaient leurs révisions pour un contrôle ou un examen. Selon elle, il y a trois grandes visions de la réussite chez ces étudiants :

- la réussite est considérée de manière naïve comme une question d'entraînement : l'étudiant pense qu'il doit résoudre beaucoup de problèmes pour réussir, sans chercher à mettre en lien les différents problèmes ou à les réutiliser, les voir comme une aide pour en résoudre d'autres ;
- la réussite est considérée comme une question de maîtrise des exercices cor-

rigées et d'adaptations très locales : l'étudiant estime que les situations qui lui seront proposées en évaluation seront très proches, similaires à celles que l'institution lui aura déjà fait travailler en amont ; il produit alors un grand effort de mémorisation des corrigés, et ne fait là encore pas vraiment de liens entre les exercices travaillés ;

– la réussite est vue comme une question de connaissances sur le fonctionnement mathématique [7] : l'étudiant considère les exercices déjà rencontrés comme des aides pour résoudre des problèmes nouveaux en opérant de grandes adaptations ; il repère des façons de faire, il se situe dans une analyse des solutions ; consciemment ou non, il décontextualise les exercices.

La troisième vision de la réussite est celle qui favorise le mieux, selon Castela, la construction de connaissances sur le fonctionnement mathématique. Castela s'interroge sur le rôle de l'enseignant dans cette construction :

> « Quels savoirs sur le fonctionnement mathématique [...] l'enseignant considère-t-il comme des enjeux d'apprentissage pour ses élèves ? Dans quelle mesure se reconnaît-il une responsabilité dans la construction par ses élèves de tels savoirs ? Jusqu'à quel point et dans quels dispositifs ces apprentissages sont-ils favorisés dans la classe ? » (2000, p. 365)

Même si ces travaux portent sur l'enseignement supérieur, nous allons voir que ces visions de la réussite se retrouvent chez les collégiens que nous avons interrogés (voir chapitre quatre). Avoir étiqueté ces visions peut permettre à l'enseignant de montrer l'insuffisance des unes au profit d'une vision davantage orientée sur la stratégie et donc de connaissances sur le fonctionnement mathématique.

d. Le phénomène de secondarisation

Une explication proche de celle présentée précédemment concerne ce que Bautier et Goigoux (2004) appellent le *phénomène de secondarisation*. Selon eux, les élèves en difficulté le sont parce qu'ils réalisent les tâches demandées sans chercher à se soucier de ce que ces tâches pourraient permettre de faire, ni si elles ressemblent à, ou sont en lien avec, d'autres tâches déjà rencontrées. Autrement dit, ces élèves sont constamment dans l'affrontement de la contingence, dans la tactique, au lieu d'être dans de la stratégie, dans le puisement du déjà vu pour aborder la nouveauté.

7. Castela se place en TAD : par « connaître », elle entend « avoir un rapport personnel à ». Le fonctionnement mathématique est : « l'ensemble des manières qu'ont les objets d'intervenir dans les solutions de problèmes. » (Castela, 2000, p. 336)

Ce comportement qui consiste à mettre en relation exercices et façons de faire (« circulation des savoirs »), à dégager la généricité des tâches rencontrées (« décontextualisation »), qui capitalise les expériences passées en vue d'affronter le nouveau (« stratégie »), les auteurs l'appellent *attitude de secondarisation*. Le terme de *secondarisation* s'explique par le fait que cette attitude ne relève pas de la spontanéité, du *prime* abord, mais nécessite un recul, un effort d'abstraction, de décontextualisation, de mise en relation, qui a lieu dans un *second* temps.

Ainsi, quand un enseignant aborde un exercice, il attend d'une part que ses élèves fassent ledit exercice (*performance vers la procédure*), mais d'autre part qu'ils *apprennent* de cet exercice (*compréhension de la procédure*) : ce qu'il met en jeu comme savoirs anciens et nouveaux, ce qui a été nécessaire comme techniques pour le résoudre, ce qu'il permettrait de faire plus tard, ... Ce deuxième niveau n'est pas toujours (il l'est même sans doute rarement, hormis peut-être pour les activités de découverte) explicite pour l'élève. Il y a probablement ici, dans une certaine mesure, un manque de mise en relation avec le fonctionnement du contrat didactique : certains élèves comprennent les intentions didactiques de l'enseignant quand d'autres demeurent dans la simple réalisation de la tâche demandée de façon isolée [8]. À propos de cette attitude de secondarisation, les auteurs ajoutent :

> « elle est davantage supposée ou requise par les enseignants que construite dans, avec et par l'école, et ce dès l'école maternelle. » (p. 91)

Dans les paragraphes précédents, nous avons abordé plusieurs difficultés pour les élèves, les parents et les enseignants face à l'étude personnelle :

- les élèves les plus en difficulté sont ceux pour qui l'étude personnelle semble être la plus conséquente en terme de quantité et d'autonomie (Esmenjaud-Genestoux, 2005), ils ne réalisent pas les mêmes gestes d'étude que les élèves en réussite (Castela, 2007a ; Félix, 2002a) ;
- les parents n'ont pas toujours la possibilité ou les capacités pour les aider (Esmenjaud-Genestoux, 2005) ;
- les dispositifs comme l'Aide à l'Etude Personnelle mis en place au sein des établissements présentent de grandes variabilités dans les façons de faire,

8. Castela (2007a) a également observé que des lycéens en réussite étaient capables d'identifier certaines attitudes, plus ou moins conscientes, des professeurs et qui leur donnaient des indices sur ce qui était à travailler pour l'évaluation en classe. Ces indices sont variés : un temps plus long passé à corriger un exercice de la part du professeur, des remarques orales plus appuyées, etc.

avec des enseignants en charge de ces dispositifs qui paraissent relativement démunis et interrogatifs sur la méthode à suivre (Félix, 2008).

Plusieurs hypothèses et explications ont été avancées : le manque de clarté sur la définition et le rôle de l'étude personnelle, des visions différentes de la réussite et des gestes d'étude différents chez les élèves, une incapacité pour certains d'entre eux à identifier le caractère générique des types d'exercices chez les élèves en difficulté, une construction incomplète de connaissances sur le fonctionnement mathématique, un manque d'explicitation de la manière d'utiliser le cahier de cours, ...

Ces différents éléments, nombreux, ouvrent autant de perspectives pour déterminer des leviers pour les enseignants et les élèves afin d'organiser l'étude personnelle de manière efficace, que nous présentons dans ce qui suit.

3.4.6 Quels leviers existe-t-il pour les enseignants afin d'organiser l'étude personnelle des élèves ?

a. Une piste récurrente : l'identification des types d'exercices

Plusieurs travaux (Milhaud, 1997-1998, Esmenjaud-Genestoux, 2005, Castela, 2000, 2002, 2007a) convergent vers un premier levier : l'identification de types d'exercices.

Esmenjaud-Genestoux (2005) explique que

> « l'enjeu des devoirs du soir n'est pas de résoudre telle question particulière, mais de devenir capable de résoudre seul le même type de questions, en reconnaissant des similitudes dans les énoncés et en se fabriquant des tours de main adaptés. Or nos résultats expérimentaux traduisent l'importance accordée par chacun (parent ou enfant) à l'aboutissement d'une réponse juste, bien plus qu'aux moyens de l'établir ou de la contrôler. » (p. 73)

Selon Milhaud (1997-1998), dont les travaux s'inscrivent dans le cadre de la TAD, la prise de conscience chez les élèves des points communs et des différences dans les exercices et les problèmes qui leur sont donnés à faire est également susceptible de leur permettre de « repérer des familles de problèmes et de situer les problèmes rencontrés par rapport à ces familles. » (Milhaud, 1997-1998, p. 63). Le but est de faire comprendre aux élèves qu'à un type de tâche donné (ou famille de problèmes), qui suppose donc d'être clairement *identifié*, il existe une technique (ou un ensemble de techniques) de résolution de ce type de tâche (ou de cette famille de problèmes). Un appui sur le caractère fonctionnel des mathématiques favorise cette identification des types de tâches : à quoi *sert* telle ou telle technique ? tel ou tel élément technologique ? Nous avons déjà vu dans les chapitres précédents de ce travail de thèse l'importance des raisons d'être des objets en algèbre pour en motiver l'utilisation et la manipulation.

Castela (2000) évoque aussi l'importance du caractère fonctionnel des mathématiques : elle fait l'hypothèse, en TAD,

> « qu'une réponse à la nécessité où peut se trouver une personne de résoudre des problèmes de mathématiques est l'élaboration de complexes et de types, organisations dont la raison d'être est, à l'origine du moins, purement fonctionnelle : repérer l'appartenance d'un problème à un type doit constituer une aide pour la résolution, c'est-à-dire rendre disponible des ressources qui, à l'usage, se révèlent souvent suffisamment efficaces. Potentiellement utiles par le simple fait qu'ils favorisent les mises en relation de situations singulières et donc la mobilisation au service d'une question nouvelle des connaissances du sujet sur la résolution (pratique personnelle) et la solution (fonctionnement mathématique) de certains problèmes déjà rencontrés, les types créent des conditions propices à l'émergence de connaissances décontextualisées, dotées d'une certaine généralité et par là orientées vers un réinvestissement futur » (p. 354)

Toutefois, l'identification des types de problèmes n'est pas l'entière solution pour pallier aux difficultés des élèves selon Castela (2000) : « invention, contrôle et régulation restent fondamentaux. » (p. 358)

b. Institutionnaliser en classe les gestes de l'étude personnelle

Selon Castela (2000) ; l'identification de savoirs sur le fonctionnement mathématique est une piste sérieuse pour préciser la responsabilité de l'enseignant dans la dévolution du travail personnel laissé à l'élève. Un contrat peut être établi entre enseignant et élève de sorte que l'élève comprenne qu'au sein même de la résolution de problèmes, et en dehors de l'institutionnalisation, il y a des connaissances à acquérir :

> « Une connaissance produite dans les exercices, c'est-à-dire, en principe par les élèves, n'est pas supposée « à savoir » ; une connaissance produite dans le cours, c'est-à-dire, en principe, par l'enseignant, sera

réputée « à savoir ». [...] [Mais] la procédure de production de connaissances, que l'élève pourra oublier, compte moins que les connaissances produites, qu'il devra faire siennes. Les « exercices » viendront ensuite, non pas produire de nouvelles connaissances à institutionnaliser, mais attester de la capacité de l'élève à manipuler les connaissances produites et institutionnalisées par l'enseignant [...]. La situation de résolution de problème est ainsi le lieu d'une intense amnésie didactique. Un problème est « à faire », non « à apprendre » [...] » (p. 31-32)

À l'aide du modèle de structuration du milieu, Castela (2007a) explique qu'en position P0, le professeur organise d'une part l'étude des savoirs théoriques et d'autre part l'étude des OM associées. Cependant, elle souligne le fait que l'importance accordée à l'une et à l'autre de ces études n'est pas identique. Selon elle, lors du moment de l'institutionnalisation, les savoirs théoriques vont être explicitement désignés comme cruciaux, à retenir. Le fait de les *écrire* (ou de les distribuer sous forme de polycopiés) revêt une importance particulière, en France du moins : pour la plupart des élèves, c'est ce que le professeur écrit au tableau (ou distribue en polycopiés) qui est principalement à retenir. Les explications, remarques, ajouts faits *à l'oral*, quant à eux, sont potentiellement pris avec un intérêt moins élevé. Les effets de contrat sont ici à prendre en compte : certains élèves, par l'observation de gestes du professeur (temps long passé sur un exercice, répétition de certaines remarques ou d'exercices, ...) vont identifier des connaissances à acquérir (ce sur quoi ils seront évalués en contrôle), contrairement à d'autres élèves qui ne percevront pas le contrat didactique sous-jacent. Du fait que l'étude des OM n'est pas systématiquement mise au même niveau d'institutionnalisation que celle des savoirs théoriques peut ainsi engendrer des gestes d'étude différents chez les élèves.

Par ailleurs, parce que l'enseignant P0 a manqué de temps ou parce qu'il ne les a pas placées au même niveau d'institutionnalisation que le savoir théorique (ou pour d'autres raisons encore, comme la conviction pédagogique), Castela (2007a) ajoute que le travail de la technique et l'élaboration de la composante pratique [9] d'une technologie peuvent, au niveau 1, revenir à la charge de l'élève $E1$ pour l'étude d'OM à la maison.

Ces constats nous amènent à émettre l'hypothèse selon laquelle une institutionnalisation de la composante pratique des technologies travaillées en classe, notamment

9. Voir chapitre deux pour une définition de la composante pratique d'une technologie, ou bien Castela (Castela, 2008).

par le passage à l'écrit, peut réduire les différences de nature dans les gestes d'étude accomplis par les élèves dits en difficulté et les élèves dits en réussite. Nous allons même plus loin en supposant que l'institutionnalisation de gestes de l'étude personnelle dont l'exclusivité semble partager par les « bons » élèves conduirait à réduire davantage ces différences.

Cette dernière remarque nous permet de faire la transition avec la sous-section qui suit : la question de ce qui est à institutionnaliser pose celle de l'explicitation des attentes réciproques entre l'enseignant et l'élève sur l'étude personnelle, autrement dit la question du contrat didactique correspondant.

c. La définition d'un contrat d'étude plus clair à propos de l'étude personnelle

Dans sa thèse, Farah (2015) explique que le contrat didactique passé entre l'étudiant et l'enseignant laisse implicites certaines actions que l'étudiant doit réaliser :

> « Si le contrat didactique détermine l'ensemble des attentes et responsabilités réciproques du professeur et de l'étudiant engagés dans une tâche coopérative, tous les objets du topos de l'étudiant ne sont pas nécessairement désignés de façon explicite. Ainsi, reste à la charge de l'étudiant la nécessité de définir certains gestes qu'il doit accomplir en autonomie. » (2015, p. 132) »

Ce point, plusieurs fois soulevé depuis le chapitre un, amène à réfléchir sur la manière d'expliciter certaines composantes du contrat didactique, notamment autour de l'étude personnelle. D'après Milhaud (1998), il est nécessaire d'instaurer un contrat didactique où professeur et élèves comprennent leurs rôles respectifs au sein de la classe (et notamment, pour le professeur : accepter de dévoluer la situation aux élèves (adidacticité)).

Pour Esmenjaud-Genestoux (2005, p. 75), l'élaboration d'un « contrat d'étude plus réaliste » et d'un aménagement fin des « conditions de l'action, en différenciant les tâches plutôt d'après leurs fonctions qu'à partir des différences de performance individuelles » pourrait « maintenir, dans [l'enseignement des enseignants], les conditions d'une égalité de droits à l'instruction, sans dénier pour autant les inégalités de capacités ou de moyens. » Une définition de « contrat d'étude » peut à ce propos être trouvée dans la thèse de Erdogan (2006) :

> « En considérant l'étude autonome comme la part de travail nécessaire incombant à l'élève, nous parlerons de *contrat d'étude* pour désigner

la composante spécifique du contrat concernant l'étude. »

d. L'appui sur les moments de l'étude

En lien avec le contrat d'étude, l'appui sur les moments de l'étude (TAD) est souligné par plusieurs travaux dans nos lectures.

Pour Milhaud (1997-1998), le professeur a la responsabilité de faire prendre conscience aux élèves de l'existence et du rôle des différents moments de l'étude, afin d'atteindre un double objectif : celui de « rendre intelligible le travail d'étude que l'on attend [des élèves] » et de « les aider à acquérir l'autonomie dans ce travail. » (p. 62)

Esmenjaud-Genestoux (2006) insiste sur le rôle de la mise en avant du lien entre moments de l'étude et contrat didactique pour organiser l'étude personnelle : « Chaque étape d'un processus d'enseignement correspond à des intentions, des conditions et des enjeux différents. Il ne semble donc pas déraisonnable de chercher à adapter les dispositifs à ces variations. Distinguer avec plus d'expertise les différentes fonctions que nous attribuons aux exercices devrait redonner sa dignité à un pan essentiel du métier d'enseignant. » (p. 51)

Ainsi, l'explicitation du contrat d'étude à travers les différents moments de l'étude constitue un levier potentiel pour lever le flou évoqué plus haut autour de l'étude personnelle et de son organisation.

e. L'utilisation du cahier de cours

Partant du constat que le cahier est plutôt une œuvre et un instrument du professeur, que les élèves l'utilisent hors la classe presque uniquement pour lire et relire les leçons, voire mémoriser des définitions et des théorèmes ou refaire les exemples, quelles pistes envisager pour que ce cahier favorise l'organisation de l'étude personnelle ?

En s'appuyant sur Castela et Mercier (Castela & Mercier, 1995), Blochs (2012) soulève une première piste : les élèves ne devraient pas uniquement mémoriser ou relire la leçon, mais saisir le champ d'application des connaissances construites. Pour cela, on peut imaginer qu'en plus des définitions, théorèmes et exemples, le cahier présente explicitement ce champ d'application : « ce théorème est utile pour... cette méthode s'ajoute à telle ou telle autre méthode qui permettait déjà de faire ceci... ». Il peut être envisagé de faire des liens avec le cahier d'exercices : « ce théorème a été utilisé dans les exercices untel, untel, untel... », voire même de lister des exercices « emblématiques » (des problèmes *types*) résolubles à l'aide des théorèmes ou méthodes retenus au sein même du cahier de cours.

f. Les assortiments didactiques

Esmenjaud-Genestoux (2006) explique que seul à la maison, l'élève a la charge de régler « la durée, l'intensité, la cible de son entraînement, il apprend à identifier ses points faibles et s'acharne sélectivement pour les estomper. » (p. 52) L'emploi d'exercices « adéquats » permettrait à cet élève de réaliser son étude personnelle et d'assumer la part de responsabilités qui lui incombe. Ces exercices, Genestoux les appelle des *assortiments didactiques* : il s'agit d'« une suite ordonnée de questions réunies autour d'une même intention didactique [...] qui a pour fonction de décrire, de comparer, de construire, d'éprouver, de modifier des suites de questions, rassemblées à des fins didactiques, pour optimiser le rendement d'une résolution groupée. » (p. 54) Genestoux souligne l'existence de liens entre les questions constituant un assortiment didactique, leur rôle, celui de l'ordre des questions, de leur nombre.

Genestoux donne un exemple d'assortiment didactique sur le thème de la factorisation de polynômes à l'aide d'identités remarquables en classe de troisième. Cet assortiment est bâti à partir d'exercices trouvés dans les manuels scolaires de troisième :

1. $x^2 + 4x + 4$
2. $x^2 - 4x + 4$
3. $x^2 + 2\sqrt{3}x + 3$
4. $x^2 - 2\sqrt{3}x + 3$
5. $x^2 + \sqrt{5}x + \frac{5}{4}$
6. $-x^2 + \sqrt{5}x - \frac{5}{4}$
7. $9x^2 + 3\sqrt{2}x + \frac{1}{2}$
8. $9x^2 - 3\sqrt{2}x + \frac{1}{2}$
9. $3x^2 + 2\sqrt{6}x + 2$
10. $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2$

La façon dont est construit cet assortiment repose sur plusieurs caractéristiques :

- les questions présentent une certaine redondance : elles nécessitent l'emploi de deux identités remarquables, de manière alternée, avec un jeu sur la nature des coefficients du polynôme ;

- sa taille (10 questions) est en lien avec l'importance que l'on veut donner au travail du type de tâches sous-jacent (par comparaison, Esmenjaud-Genestoux présente un autre assortiment de 33 questions) ;
- sa régularité ou son rythme (deux identités utilisées en alternance), qui crée ce que Esmenjaud-Genestoux appelle une *complicité didactique*, complicité qu'elle suppose aisément détectable par un élève et qui permettrait de souligner les changements de signe ;
- son profil de résolution : les questions avec un numéro impair dirigent la réflexion sur le numérique (« détermination des termes dans la formule, racines carrées de ces deux termes, vérifications des doubles produits » (p. 61), tandis que les questions avec un numéro pair mettent en avant les signes ;
- la difficulté croissante des questions (coefficients entiers, puis apparition de radicaux et de fractions).

Ainsi, un jeu sur des variables didactiques et sur des paramètres régulant les assortiments didactiques, favoriserait potentiellement chez l'élève l'identification des types de tâches et l'aiderait à organiser son étude personnelle de manière à construire un rapport personnel idoine aux objets de savoir étudiés.

g. La nécessité d'une étude hors la classe initiée en classe

D'après Milhaud (1997-1998), travail en classe et travail hors la classe constituent deux composantes du travail de l'élève, dépendantes l'une de l'autre et contribuant à l'élaboration de complexes praxéologiques. Il incombe au professeur d'organiser ces deux travaux. Esmenjaud-Genestoux (2006) précise que l'enseignant ne peut pas donner hors la classe n'importe quel type de travail, notamment des problèmes complètement nouveaux. Selon elle, il est nécessaire pour les élèves de disposer de procédures expertes, éprouvées, leur permettant de solutionner des types de problèmes déjà rencontrés en classe. Chevallard (2002) semble également aller dans ce sens en définissant la *zone d'étude proche* d'un élève :

> « Pour que l'élève vienne effectivement occupé le *topos* qui a été prévu pour lui, il semble logiquement nécessaire que cet investissement n'exige pas de lui des gestes d'étude trop éloignés de ceux qui lui sont culturellement et techniquement familiers : pour signifier cette solidarité du passé didactique de la classe avec ce qui peut *hif et nunc* advenir, on dira que le *topos* dessiné pour l'élève doit se situer dans une *zone d'étude proche* des activités didactiques antérieures de la classe. Le profond déficit, dans

> l'Ecole que l'histoire nous a léguée, en matière d'autonomie didactique des élèves restreint souvent, il est vrai, cette zone à un simple liseré qui ne permet généralement qu'une autonomie évanescente » (p. 15)

Milhaud (1998), quant à elle, suggère plusieurs conditions pour favoriser l'étude personnelle hors la classe : « l'institution, les professeurs et les élèves [doivent être] persuadés de la nécessité de ce travail » et les élèves doivent développer des capacités à « avoir une activité rétroactive de ce qui a été fait en classe » (p. 65). Elle ajoute ensuite des conditions didactiques : en classe, les élèves doivent faire l'expérience de leur propre responsabilité vis-à-vis de leur travail personnel ; sinon, hors la classe, il devient difficile d'établir un contrat de travail place justement sous la responsabilité de l'élève. Cependant, Milhaud ne donne pas d'exemples concrets sur la façon de faire prendre conscience aux élèves de leurs responsabilités pour le travail personnel.

h. Les gestes mémoriels chez Araya-Chacon (2008)

Dans la sous-section précédente, nous avons cité Chevallard (2002) à propos de la zone d'étude proche. Dans cette citation, Chevallard évoque le passé didactique de la classe auquel il est possible de faire référence pour « dessiner » cette zone.

Cette idée a été explorée dans les travaux d'Araya-Chacon (Araya-Chacón, 2008). Araya-Chacon s'intéresse aux gestes réalisés par l'enseignant en classe pour mobiliser des « éléments » d'un temps didactique passé et amener les élèves à s'appuyer sur d'anciens rapports personnels ou institutionnels à des objets de savoir, ou à revenir à une position occupée dans une institution antérieure. Ces gestes, Araya-Chacon les appelle des gestes *mémoriels*, en référence à la mémoire didactique (Matheron, 2001) :

> « La gestion de la mémoire didactique de la classe est l'accomplissement de gestes par l'enseignant – ce que fait le professeur, au sens large, sans aucune délimitation *a priori* – pour provoquer ou contrôler des phénomènes qui se rapportent à une indexation sur le temps des objets institutionnels de savoir et des rapports institutionnels des élèves à ces objets. Etant donné que ces gestes sont relatifs à une mémoire, nous les appelons *gestes mémoriels* » (p. 133)

Araya-Chacon établit alors une typologie des gestes mémoriels. Les gestes mémoriels sont des ostensifs [10] relevant de différents registres : ils peuvent être langagiers,

10. En TAD, un ostensif est un objet tangible, avec une forme matérielle, sensible, qu'il est

figuraux, scripturaux, ... Nous décrivons la fonction de chacun de ces gestes dans les paragraphes suivants.

Les gestes *technologiques* servent à amener les élèves à mobiliser un élément du bloc technologico-théorique d'une OM ponctuelle déjà rencontrée. Araya-Chacon prend en compte trois fonctions d'une technologie : explicative, justificative et productrice de techniques. Autrement dit, l'élément en question dans ce bloc technologico-théorique peut relever de l'une de ces trois fonctions.

Les gestes *techniques* servent à amener les élèves à mobiliser une technique d'une OM ponctuelle déjà rencontrée. Ils font appel à la mémoire *pratique* des élèves (Matheron, 2001) : c'est la mémoire sollicitée à un moment opportun pour mobiliser une pratique ou la reproduire dans une institution donnée.

Les gestes *de replacement* servent à situer l'élève dans une position anciennement occupée ou en cours d'occupation dans une institution donnée pour l'inciter à user de praxéologies utilisées dans le cadre de cette institution. En termes de TAD, il peut s'agir pour l'enseignant de revenir à des niveaux de co-détermination didactique anciens et aux praxéologies correspondant à ces niveaux.

Plusieurs sous-types de gestes de replacement sont distingués par Araya-Chacon (2008) :

- *Les gestes en appui sur l'histoire de la classe* : l'enseignant rappelle par exemple un événement incongru qui s'est produit au moment où une praxéologie était étudiée, comme un téléphone qui a sonné au beau milieu d'une explication.
- *Les gestes en appui sur le sens des mots* : l'enseignant demande à un élève de se situer dans une position où cet élève était en train d'utiliser une praxéologie pour expliquer le sens d'un mot en lien avec cette praxéologie.
- *Les gestes d'analogie* : l'enseignant sollicite la mémoire des élèves en s'appuyant sur une analogie utilisée par le passé ; cela implique que les élèves se replacent dans le temps pour se rappeler l'instant où l'enseignant a utilisé cette analogie, et fassent le lien avec l'instant présent où cette analogie est à nouveau utilisée. Par exemple, l'enseignant peut utiliser la métaphore de la balance de Roberval pour la résolution d'équations, les élèves devant alors se souvenir du moment où l'enseignant a pour la première fois utilisé cette métaphore pour guider la mise en place de la technique de résolution algébrique

possible de manipuler (avec les mains, la voix, le corps, ...), comme un stylo, un compas, mais aussi des mots, des dessins, des écritures. Par opposition, un non-ostensif est une notion, un concept, une idée, qui ne peut qu'être évoqué. Nous reviendrons sur la notion d'ostensif au chapitre six.

d'une équation.

– *Les gestes en appui sur des ostensifs de guidage* : l'enseignant utilise des ostensifs censés déclencher chez l'élève la mémoire de praxéologies liées à cet ostensif. Ce peut être, par exemple, le simple fait d'écrire le titre d'une leçon ancienne.

Les gestes *chronologiques* s'appuient sur des marqueurs dans le temps. Ils sont fréquemment utilisés par les enseignants, par exemple lorsqu'ils disent : « Vous avez vu cela pendant tel trimestre ou durant telle année scolaire ». Les élèves se replacent alors dans la position qu'ils occupaient à l'instant indiqué par l'enseignant pour mobiliser des pratiques utilisées à cet instant.

Les gestes *déstabilisateurs* visent à interroger les rapports personnels des élèves à un objet de savoir, soit par l'exigence d'une explication sur une affirmation énoncée par l'élève, soit par la mise en doute de cette affirmation, soit par l'exhibition d'un contre-exemple. Araya-Chacon considère qu'il s'agit d'un geste mémoriel dans le sens où celui-ci oblige l'élève à se replacer dans un temps durant lequel son rapport personnel à l'objet dont il parle s'est construit.

L'enseignant réalise des gestes dits *preneurs d'indices* lorsqu'il prend en charge la reconnaissance d'éléments dans un énoncé ou dans une résolution pour favoriser l'utilisation ou la mise en œuvre d'une technique permettant de réaliser un type de tâches.

Les gestes de *fixation* servent à affirmer, par autorité, qu'un élément peut temporairement être admis ou ignoré, afin d'inciter les élèves à focaliser leur attention sur d'autres éléments.

Araya-Chacon définit enfin les gestes en appui sur un ostensif déclencheur. Selon elle, un *ostensif déclencheur* peut être décrit comme suit :

> « il s'agit de désigner un ostensif comme celui qui a la plus haute valence sémiotique [...]. L'ostensif désigné peut, chez un groupe de sujets qui intègrent l'institution, réactiver, avec un certain degré d'« automaticité », un non-ostensif. » (2008, p. 259)

Un exemple typique est celui des identités remarquables : en réordonnant par exemple les termes d'une expression algébrique et en faisant apparaître les carrés et les doubles produits, l'enseignant réalise un geste en appui sur l'ostensif déclencheur « identités remarquables » en mettant en évidence d'une certain façon la structure de l'expression algébrique, ce qui déclenche chez les élèves des automatismes liés à la mémorisation de formules algébriques associées à ces identités remarquables.

En conclusion, les travaux d'Araya-Chacon (2008) portent sur les gestes mémoriels accomplis par l'enseignant pour aider les élèves à la remémoration et sur l'aménagement d'un milieu pour l'étude. La typologie développée par Araya-Chacon nous paraît intéressante pour décrire potentiellement les pratiques enseignantes en ce sens. Cependant, Araya-Chacon se situe davantage du côté de l'enseignant et analyse l'effet de ses assujettissements sur sa gestion mémorielle. Ses travaux n'ont pas pour objectif d'analyser la manière dont les élèves exploitent lors de leur étude personnelle ces cadres mémoriels ; la question des gestes mémoriels de l'enseignant qui favorisent l'émergence de gestes d'étude idoines chez les élèves hors la classe demeure.

3.5 Conclusion

Cette synthèse de travaux de recherche sur l'étude personnelle nous permet de dégager plusieurs éléments saillants.

Tout d'abord, la définition et le rôle de l'étude personnelle demeurent flous pour les enseignants et les élèves (Milhaud, 1997-1998, Esmenjaud-Genestoux, 2005, Castela, 2002, Felix, 2004), qui lui attribuent des fonctions très diverses. Néanmoins, un consensus semble se faire autour de la description de cette étude, qui peut être décomposée selon deux dimensions, scolaire et sociale (Rayou, 2008 ; Caillet et Sembel, 2008 ; Félix, Saujat et Mouton, (Félix et al., 2008) ; Bautier et Goigoux, 2004). Nous avons par ailleurs distingué quatre types d'étude : en classe, hors classe, personnelle, autonome.

Les programmes officiels de collège, les enseignants et les élèves considèrent l'étude personnelle comme une nécessité (Caillet et Sembel, 2008). Pour les enseignants, l'étude personnelle permet notamment de soulager un certain nombres de tensions liées à l'avancement du temps didactique, du travail de chaque élève, de l'ordre scolaire et des attentes des parents et de l'administration.

Les élèves « en difficulté » sont ceux pour qui, paradoxalement, la charge de travail personnel est la plus importante, alors qu'ils sont les moins susceptibles de savoir l'organiser en autonomie, hors la classe (Esmenjaud-Genestoux, 2005 ; Castela, 2007a ; Felix, 2004). Les parents ne semblent pas pouvoir constituer un appui fiable (Esmenjaud-Genestoux, 2005 ; Kapko et Rayou, 2010). Les dispositifs d'aide à l'étude ne font que refléter l'opacité du rôle du travail personnel (Félix et al., 2008), de même que l'utilisation du cahier de cours (Blochs, 2012).

Plusieurs leviers peuvent néanmoins être envisagés. Afin d'aider les élèves à réaliser les gestes d'étude visiblement partagés par les élèves « en réussite » (Castela, 2007a), l'enseignant peut endosser la responsabilité d'expliciter des savoirs sur le fonctionnement mathématique, par exemple dans le cahier de cours. Il peut institutionnaliser au même niveau composante théorique d'une technologie et composante pratique de cette technologie (Castela, 2007a). L'enseignant peut également expliciter le contrat d'étude à propos de l'étude personnelle. En particulier, il peut le préciser en fonction des moments de l'étude d'une OM. Ceci rendrait intelligible pour l'élève le travail qui est attendu de sa part (Milhaud, 1998). Il peut aussi recourir à certains gestes mémoriels (Araya-Chacon, 2008) pour aménager un milieu pour l'étude – reste à déterminer de quelle manière ou pour construire quel milieu. Pour différencier l'étude personnelle et répondre aux besoins des élèves, l'enseignant peut recourir à des assortiments didactiques (Esmenjaud-Genestoux, 2006), mais ceci ne peut se faire que si l'enseignant a diagnostiqué les besoins d'apprentissages de l'élève. Dans tous les cas, le rôle d'une initiation *en classe* de l'étude personnelle hors la classe paraît nécessaire à prendre en compte (Milhaud, 1998 ; Esmenjaud-Genestoux, 2006).

Ces éléments nous permettent de préciser les hypothèses de recherche établies dans le chapitre deux. Nous avons supposé qu'une certaine organisation par l'enseignant de l'étude personnelle des élèves, appuyée sur l'identification de leurs besoins, favorise la construction de rapports personnels idoines aux objets de savoir mis en jeu. À la lumière des travaux ici présentés, nous affinons cette supposition : selon nous, l'explicitation en classe, voire l'institutionnalisation, de certains gestes d'étude pour apprendre à construire et utiliser les praxéologies mathématiques, à travers la mise en place d'un contrat d'étude explicite et l'aménagement d'un certain milieu pour l'étude, favorise la mobilisation par les élèves de gestes d'étude idoines lors de leur étude personnelle hors la classe.

Cependant, les relations entre gestes de l'enseignant et gestes des élèves sont peu abordées dans les travaux précédents. C'est pourquoi, en appui sur les résultats retenus dans ce troisième chapitre, nous construisons au chapitre cinq un modèle théorique de l'étude personnelle rendant compte de ces relations, à travers une approche anthropologique.

Dans le chapitre suivant, nous allons confronter nos propres observations de terrain sur les gestes d'étude de collégiens en algèbre avec les résultats présentés ici.

Chapitre 4

Une première étude exploratoire avec des collégiens en REP

4.1 Objectifs du chapitre

Dans le chapitre trois, nous avons passé en revue plusieurs travaux de recherche sur l'étude personnelle, qu'elle soit autonome et/ou hors la classe. Dans ce chapitre quatre, nous rendons compte des résultats d'une première étude exploratoire que nous avons menée auprès d'élèves d'un collège REP [1] en classe de quatrième et comparons ces résultats à ceux des travaux du chapitre trois : confirment-ils certaines tendances ? Qu'apportent-ils d'inédit ? Quelles nouvelles questions posent-ils ?

Nous cherchons en particulier à identifier les gestes accomplis par des collégiens dans leur étude personnelle hors la classe. Pour cela, nous les avons filmés et interrogés durant cette dernière, puis nous avons analysé ces gestes en fonction de plusieurs paramètres :

- Le « profil » de l'élève : un élève jugé « bon » par l'enseignant réalise-t-il des gestes d'étude différents d'un élève qualifié de « moyen » ou « en difficulté » hors la classe en mathématiques ? Les élèves de « profils » voisins réalisent-ils des gestes similaires ?
- Le moment où ces gestes sont réalisés : quels gestes sont accomplis entre deux séances de mathématiques hors la classe ? Pour préparer une évaluation sommative ?

1. Réseau d'Education Prioritaire. Les REP sont issus d'une volonté politique du gouvernement de « *corriger l'impact des inégalités sociales et économiques par un renforcement de l'action pédagogique et éducative dans les écoles et établissements des territoires qui rencontrent les plus grandes difficultés sociales* » (source : http ://www.education.gouv.fr/cid187/l-education-prioritaire.html).

– Ce qu'ont dit (ou n'ont pas dit) et ce qu'ont fait (ou n'ont pas fait) les enseignants en classe et qui pourraient avoir une influence sur les gestes d'étude réalisés hors la classe par leurs élèves.

Rares sont les travaux de recherche – surtout en didactique – qui portent sur l'activité mathématique des élèves hors la classe ; plus rares encore sont ceux qui s'intéressent aux gestes de l'étude personnelle de collégiens. Analyser ces données nous permet de comparer nos observations avec celles obtenues dans d'autres travaux (voir chapitre précédent) et ainsi conforter ou nuancer ce qui a pu être supposé ou affirmé dans ces derniers.

Dans un premier temps, nous présentons le déroulement des entretiens : les élèves et les enseignants auprès de qui nous les avons menés, les questions posées, les données que nous cherchions à obtenir à travers ces questions.

Dans un deuxième temps, nous rendons compte de nos analyses des transcriptions de ces entretiens : comment les élèves accomplissent-ils leur étude personnelle hors la classe entre deux séances de mathématiques ? Comment préparent-ils une évaluation sommative ?

Dans un troisième temps, nous mettons en relation les gestes d'étude observés chez les élèves avec certaines pratiques de leurs enseignants.

4.2 Les entretiens

4.2.1 Présentation du déroulement des entretiens

a. Positionnement de notre travail par rapport aux entretiens d'explicitation de Vermersch (1994)

Durant les entretiens que nous avons menés auprès des élèves, nous avons cherché à obtenir des informations sur leurs gestes d'étude. Nos questions initiales ont été élaborées de sorte à respecter dans les grandes lignes les contraintes de la technique de questionnement mise au point par (Vermersch, 1994) pour conduire un entretien d'explicitation. Entre autres, ces questions encourageaient davantage la description (« Comment fais-tu pour... ? », « Qu'as-tu fait lorsque... ? ») que la justification (pas de question du type « Pourquoi fais-tu... ? ») ; elles portaient de plus sur des tâches réelles, effectivement accomplies par les élèves et sur lesquelles ils pouvaient s'appuyer.

Cependant, en raison de leur jeune âge et de la difficulté de nos questions, les élèves ont eu tendance à répondre de manière peu détaillée et très brève dans un premier temps. Nous avons alors fait le choix de ne pas suivre en permanence l'organisation d'un entretien d'explicitation tel qu'il est préconisé par Vermersch pour pouvoir extraire des données plus précises. Parfois, nous avons choisi de demander les raisons de tel ou tel geste parce que cela nous paraissait intéressant pour nos questions de recherche, ou nous avons, lorsque l'élève ne trouvait pas les mots pour décrire ses actions, suggéré plusieurs choix de réponses.

b. Eléments de contexte

Au total, huit élèves du même collège REP ont été interrogés. La moitié fait partie d'une classe de quatrième d'une enseignante baptisée H1 et l'autre moitié, d'une classe de quatrième d'un enseignant renommé M2 [2]. Ces deux professeurs ont entre quatre et sept ans d'expérience d'enseignement en collège.

Les enseignants de mathématiques du collège travaillent ponctuellement ensemble pour élaborer les sujets des devoirs communs ou brevets blancs [3] ; cependant, la plupart du temps, il n'existe pas de travail collectif.

Les élèves possèdent tous en mathématiques un cahier d'exercices, consacré à la recherche et à la résolution de tâches mathématiques, et un cahier de leçons, réservé aux traces écrites « officielles », comportant les définitions et propriétés mathématiques « à retenir », ainsi que des exemples.

Les enseignants ont pour habitude de donner régulièrement des « devoirs » à la maison. Entre deux séances de mathématiques, les élèves ont généralement un ou deux exercices à résoudre pour la fois suivante. Une fois par séquence (c'est-à-dire environ une fois par mois), H1 donne une interrogation de leçons en classe où elle demande aux élèves de réciter des énoncés de propriétés mathématiques ou de résoudre des tâches simples (exercices d'application), ce que ne fait pas M2. H1 et M2 font en revanche tous deux des interrogations d'une heure par séquence, ce qui correspond environ à une interrogation toutes les deux semaines, où ils demandent aux élèves de résoudre par écrit des tâches mathématiques.

En classe, la disposition des tables et des chaises est la même pour H1 et M2 : trois rangées de plusieurs paires de tables, face au tableau et au bureau du professeur (pas d'îlots).

Les huit élèves avec lesquels nous nous sommes entretenus ont été sélectionnés par leurs enseignants pour leurs « profils » différents. Hormis l'utilisation de la clas-

2. Nous justifierons ces dénominations (H1 et M2) quelque peu « déshumanisantes » plus loin.

3. En fin de collège, un examen appelé brevet des collèges a lieu. Un brevet blanc est un entraînement à cet examen.

sification « classique » des élèves en « bons », « moyens » et « en difficulté », nous n'avons pas donné plus de précision quant à la signification du mot « profil » lorsque nous avons demandé à H1 et M2 de choisir leurs élèves.

Ainsi, nous avons interrogé ces huit élèves, sachant que leurs enseignants respectifs les considéraient comme faisant partie d'une des trois catégories suscitées (entre parenthèses, nous précisons l'enseignant correspondant à l'élève mentionné) :

- trois « bons » élèves : Marianne (M2), Tamara (H1) et Ryan (M2) ;
- trois élèves « moyens » : Géraldine (M2), Daouda (M2) et Mehdi (H1) ;
- deux élèves [4] « en difficulté » : Annabelle (H1) et Vincent (H1).

Les entretiens ont tous eu lieu au sein de l'établissement, mais en dehors de la classe de mathématiques (c'est-à-dire dans une salle de classe vide de l'établissement, sans la présence de l'enseignant de mathématiques et uniquement avec le chercheur). Ils se sont déroulés en deux temps :

- Un premier entretien avec des élèves a été réalisé entre deux séances de mathématiques, au milieu d'une séquence sur le calcul littéral (production d'une lettre en algèbre, distributivité simple et double d'une expression algébrique), afin de recueillir des informations sur l'étude personnelle hors la classe des élèves entre deux cours ;
- Un second entretien a été réalisé à la fin de cette même séquence sur le calcul littéral, avant l'évaluation sommative [5] portant sur cette séquence.

Nous ne cherchons pas à donner ici une définition précise de ce qu'est une évaluation sommative. Il s'agit de ce que les enseignants H1 et M2 entendent dans un sens très général et commun : une évaluation écrite d'une heure, sous forme d'une série d'exercices portant sur les thèmes des séquences préalablement réalisées en classe, notée sur 20 points, ritualisée, partagée par une majorité d'enseignants dans l'établissement scolaire, toutes disciplines confondues.

Avant chaque entretien, un temps variant entre cinq et quinze minutes a été laissé aux élèves pour réaliser le travail « comme s'ils étaient à la maison ». Il leur a été précisé que tout ce qu'ils diraient ne serait pas répété à leurs enseignants. Les élèves étaient seuls, face à une caméra, avec le chercheur, dans une salle de classe, avec une demande explicite de faire « comme si ». Nous avons conscience qu'il s'agit de conditions très particulières et que les élèves ont très certainement réalisé des gestes

4. Une troisième élève « en difficulté » avait été initialement choisie par M2 ; malheureusement, après un premier entretien, elle est demeurée absente et n'a pas pu être interrogée par la suite.

5. Sauf pour une élève, Tamara, qui n'a pu être interrogée qu'après l'évaluation à cause de contraintes du terrain.

qu'ils n'auraient habituellement pas réalisé chez eux, dit des choses qu'ils n'auraient pas dites. Nous avons néanmoins choisi ce qui, selon nous, permettait d'accéder à des explicitations des gestes de l'étude personnelle.

Les transcriptions intégrales de ces entretiens sont fournies en annexe (cf. annexes du chapitre quatre, page 461). Nous avons fait le choix de transcrire les propos des élèves sans corriger les éventuelles fautes de français qu'ils ont pu commettre.

4.2.2 Justification de la manière dont nous avons menée les entretiens

Les raisons des limitations précédemment présentées sont multiples, en particulier :

- Nous avons choisi d'observer l'étude personnelle hors la classe des élèves car nous avons supposé que l'autonomie de l'élève y était plus forte qu'en classe, où l'enseignant est présent, où les objets de savoir à étudier sont proches dans le temps et dans l'espace.
- C'est également hors la classe, selon nous, que se manifestent davantage les besoins des élèves en termes d'organisation de l'étude personnelle.
- Nous avons particulièrement privilégié le moment de la préparation de l'évaluation car nous faisons l'hypothèse que cette préparation requiert un effort cognitif important pour l'élève et une autonomie plus forte que d'une séance à l'autre : l'élève doit « réviser » une séquence dans sa globalité, il sera susceptible de revenir sur plusieurs séances ayant eu lieu à plusieurs instants du passé didactique de la classe.
- Le nombre d'élèves interrogés s'élève à huit. Suivre ces huit élèves pendant quatre entretiens [6] espacés dans le temps, mettre en relation ce qu'ils disent ou font (ou ne disent pas ou ne font pas) avec les gestes d'aide à l'étude accomplis par l'enseignant, avant et après, s'est faite à l'avantage d'une certaine qualité au détriment de la quantité.
- Nos limitations sont aussi issues de contraintes de temps et liées à la difficulté d'accéder à une étude personnelle des élèves hors la classe : les enseignants avec qui nous avons mené nos recherches ont dû accepter d'aménager leur emploi du temps pour que nous puissions observer et interroger ces huit élèves, car ces derniers ont été pris à part pour être observés et interrogés pendant

6. Seuls les deux premiers entretiens sont analysés ici. Les deux autres, réalisés après avoir mis en place le PER sur les équations, sont analysés dans le chapitre dix.

que les enseignants demeuraient avec le reste des élèves en classe, à travailler sur autre chose que la séquence en cours.

4.2.3 Questions posées aux élèves

Nous présentons maintenant les questions posées aux élèves durant ces deux entretiens. Il s'agit ici d'un questionnaire utilisé par le chercheur comme un « guide » ; les questions n'ont ni été formulées telles que présentées ci-dessous, ni posées dans l'ordre ci-dessous.

La conception du questionnaire s'appuie sur la synthèse des travaux de recherche sur l'étude personnelle des élèves réalisée dans le chapitre trois. À côté de chaque question, en gras, nous explicitons les données que nous voulons recueillir, sans prétention à l'exhaustivité. Dans le second entretien, rien n'est précisé pour certaines questions, car elles sont similaires voire identiques à des questions posées dans le premier entretien.

Premier entretien (entre deux cours)

1. Généralement, combien de temps passes-tu à travailler à la maison entre deux cours de mathématiques ? Avec quelle régularité ? → **Informations sur la régularité des gestes accomplis hors la classe.**
2. Qu'est-ce que tu as fait pendant ces quelques minutes, seul ? → **Gestes d'étude en général.**
3. As-tu utilisé ton cahier d'exercices ? Si oui, comment ? Qu'as-tu écrit dedans ? Comment as-tu fait ces exercices ? → **Gestes d'étude possibles attendus : simple réalisation des exercices demandés, appui sur des corrigés d'exercices antérieurement faits en classe pour réaliser les exercices demandés, appui sur la leçon ou le manuel pour réaliser les exercices, relecture des corrigés d'exercices, mémorisation des corrigés d'exercices, résolution mentale ou écrite des exercices puis comparaison avec les corrigés, identification des types d'exercices et de la technique de résolution associée.**
4. As-tu utilisé ton cahier de leçons ? Si oui, comment l'as-tu utilisé ? → **Gestes d'étude possibles attendus : simple relecture de la leçon, sélective ou non, mémorisation des exemples, des définitions, des théorèmes, sélective ou non, reconnaissance du champ d'application des tech-**

niques, mise en relation des propriétés de la leçon avec les exercices où elles ont été utilisées.

5. Si tu ne parviens pas à faire un exercice (éventuellement, nous avons demandé à l'élève de trouver un exercice récent que l'élève n'a pas réussi à faire), que fais-tu dans ce cas ? → **Gestes d'étude possibles attendus : sollicitation de systèmes didactiques auxiliaires : manuel, parent, camarade de classe, ..., sollicitation de l'enseignant si le temps entre deux séances de mathématiques le permet, appui sur la leçon, les corrigés, ...**
6. Selon toi, qu'est-ce que le professeur attend que tu fasses entre deux séances de mathématiques ? Le fais-tu ? → **Sensibilité au contrat d'étude autour de l'étude personnelle hors la classe entre deux séances, aux gestes d'aide à l'étude de l'enseignant.**

Second entretien (avant l'évaluation)

1. Généralement, combien de temps passes-tu à « réviser » un contrôle de mathématiques ? Combien de temps avant ? Avec quelle régularité ?
2. Qu'est-ce que tu as fait pendant ces quelques minutes, seul ?
3. Selon toi, qu'est-ce que le professeur attend que tu fasses pour « réviser » un contrôle ? Le fais-tu ?
4. Selon toi, pour réussir cette évaluation, qu'est-ce qu'il est important de préparer ? → **Vision de la réussite scolaire : reproduire, s'entraîner, capitaliser des connaissances sur le fonctionnement mathématique.**
5. Comment fais-tu pour décider si tu es prêt(e) pour l'évaluation ? → **Gestes d'étude de l'auto-diagnostic des besoins d'apprentissages.**
6. Que fais-tu pour travailler tes difficultés ? → **Gestes d'étude pour répondre aux besoins d'apprentissages auto-diagnostiqués.**
7. De façon général, trouves-tu que l'évaluation ressemble à ce que vous faites en classe avec le professeur ? → **Sensibilité au contrat d'étude relatif à l'évaluation.**
8. As-tu utilisé ton cahier de leçon pour réviser ? Si oui, que faisais-tu précisément avec ce cahier ?
9. As-tu utilisé ton cahier d'exercices ? Si oui, que faisais-tu précisément avec ce cahier ?

10. Si tu ne comprends pas quelque chose dans ce chapitre, que fais-tu ?
11. Le professeur a-t-il mis à ta disposition des fiches ou des vidéos ou autres pour t'aider à préparer cette évaluation en dehors de la classe ? → **Sensibilité relatif au contrat d'étude : utilisation ou non des dispositifs mis en place par l'enseignant.**

4.2.4 Questions posées aux enseignants

Nous avons également interrogé les enseignants afin de recueillir des informations sur leurs pratiques. Nous n'avons cependant pas cherché à analyser ici leurs réponses car, comme nous l'avons expliqué en début de chapitre, nous avons fait le choix initial de nous centrer sur l'élève et non sur son enseignant.

Voici les questions que nous avons posées aux enseignants H1 et M2 (comme pour les élèves, nous n'avons pas nécessairement posé les questions dans l'ordre).

Phrase d'introduction : « Je vais vous interroger sur le travail personnel des élèves. Par commodité, nous distinguerons le travail personnel qui se fait en classe en votre présence, et le travail personnel qui se fait hors la classe en votre absence. Pour bien vous mettre en situation, pensez à une de vos classes en particulier et au chapitre sur lequel vous travaillez actuellement avec cette classe (ou bien, un chapitre sur lequel vous avez récemment travaillé). »

1. En classe, sur ce chapitre en particulier, qu'est-ce qui selon vous relève du travail personnel de l'élève ?
2. Et hors la classe ?
3. Sur ce chapitre, quelles actions concrètes ou quels dispositifs mettez-vous en place pour favoriser l'engagement des élèves dans un travail personnel en classe ?
4. Et pour le travail hors la classe ?
5. Sur ce chapitre, de quelle manière récoltez-vous des informations sur le travail personnel que réalisent les élèves en classe ?
6. Quelle exploitation faites-vous de ces informations ? Faites-vous des retours à vos élèves ? Si oui, de quelle manière ?
7. Evaluez-vous ce travail personnel réalisé en classe ? Si oui, de quelle manière ?
8. Mêmes questions pour le travail hors la classe.

9. Les élèves ont-ils un cahier de leçon ? Si oui, y a-t-il des éléments dans ce cahier, sur le chapitre que vous étudiez, que vous incluez spécifiquement parce qu'ils favorisent selon vous l'engagement des élèves dans un travail personnel ? Lesquels ?
10. Même question pour le cahier d'exercices.
11. Pour ce chapitre, donnez-vous du travail personnel à faire d'une séance sur l'autre ? Si oui, quelles formes prend ce travail ?
12. Lorsque les élèves ont un travail personnel à faire hors la classe d'une séance sur l'autre, à leur retour en classe, prenez-vous en compte ce travail ? Si oui, comment ?
13. Pour favoriser l'engagement des élèves dans un travail personnel hors la classe sur ce chapitre, initiez-vous ce travail en classe ? Si oui, de quelle manière ?
14. Utilisez-vous des supports particuliers (cahier de textes en ligne, site Internet, vidéos, ...) que vous estimez être utile pour favoriser l'engagement des élèves dans un travail personnel en classe et hors la classe sur ce chapitre ? Si oui, de quelle manière l'utilisez-vous ? En quoi cela favorise-t-il selon vous l'engagement des élèves dans un travail personnel sur ce chapitre ?
15. Concernant les évaluations des apprentissages sur ce chapitre, que devraient faire selon vous les élèves comme travail personnel pour préparer correctement ces évaluations ?
16. Mettez-vous à leur disposition des dispositifs ou ressources (sites Internet, fiche méthodologique, fiche de révision, auto-évaluation, vidéos, ...) pour qu'ils puissent réaliser un travail personnel visant à préparer spécifiquement ces évaluations ? Si oui, lesquels ?
17. Si vous dites à vos élèves de revoir la leçon sur ce chapitre, qu'attendez-vous précisément qu'ils fassent pour revoir cette leçon ? Explicitez-vous ces attentes en classe ?
18. De même, si vous leur dites de revoir les exercices de ce chapitre, qu'attendez-vous qu'ils fassent précisément ? Explicitez-vous ces attentes en classe ?
19. Une fois que vous aurez terminé ce chapitre et évalué les apprentissages relatifs à ce chapitre, mettrez-vous en place des actions ou des dispositifs pour que les élèves poursuivent leur travail personnel sur ce chapitre ? Si oui, lesquels ? Et pourquoi ?

20. De manière générale, sur ce chapitre, encouragez-vous les élèves, que ce soit en classe ou hors la classe, à solliciter de l'aide pour réaliser leur travail personnel (à vous, à leurs camarades, à leurs parents, ...) ?

Dans les analyses qui suivent, les réponses à ces questions nous ont servi à faire quelques liens entre les pratiques des enseignants et certains gestes d'étude observés chez les élèves interrogés durant leur étude personnelle hors la classe.

4.3 Analyse des entretiens

Par commodité, nous utiliserons les lettres « B », « M » et « D » pour préciser les « profils » des élèves ; ceci correspondra respectivement à « bon », « moyen » et « en difficulté ». De même, nous préciserons si l'élève est celui de l'enseignante H1 ou de l'enseignant M2. Par exemple, la notation « Mehdi (M, H1) » signifie que Mehdi est un élève jugé « moyen » et qu'il est élève de l'enseignante H1. Le lecteur peut désormais comprendre notre choix d'attribuer une lettre suivie d'un chiffre à l'enseignant(e) : cela permet d'éviter toute confusion avec un élève ou son profil. Ainsi, dans tout le reste du chapitre, chaque fois qu'un prénom sera donné, il fera nécessairement référence à un élève et non à un enseignant ; les lettres M, B, D feront référence au « profil » d'un élève ; une lettre accompagnée d'un chiffre, à un(e) enseignant(e).

4.3.1 L'étude personnelle entre deux cours de mathématiques

a. Temps passé à « faire les devoirs » et régularité

5 élèves sur les 8 interrogés disent passer entre cinq et dix minutes pour « faire leurs devoirs » en mathématiques d'une séance à l'autre, et 3 élèves entre vingt et trente minutes.

Ces déclarations sont à considérer avec prudence, car les élèves peuvent avoir une perception du temps assez éloignée de la réalité. En effet, nous avons parfois demandé à certains élèves interrogés le nombre de minutes qu'ils pensaient avoir passé à étudier seuls face à la caméra et constaté quelques écarts importants avec la réalité (une élève nous a par exemple dit qu'elle avait passé vingt minutes à faire son exercice alors qu'en réalité, elle en avait passé moins de dix).

Concernant la « régularité » avec laquelle les devoirs sont « faits », les réponses varient et semblent indépendantes du « profil » de l'élève. Ainsi, Tamara (B, H1) dit parfois oublier de noter les exercices à faire pour la fois suivante tandis que Marianne (B, M2) assure les faire à chaque fois ; Géraldine (M, M2) prétend ne pas les faire tout le temps (« *Des fois, j'ai pas envie donc je les fais pas* ») alors que Mehdi (M, H1) affirme les faire « souvent » ; enfin, Annabelle (D, H1) et Vincent (D, H1) semblent avoir des difficultés à faire ces devoirs, la première étant parfois occupée, selon ses dires, à faire la cuisine ou à discuter avec sa mère, le second parce qu'il « *oublie* » ou n'a « *pas trop le temps* ».

En résumé, les élèves disent passer entre zéro et trente minutes à « faire leurs devoirs » en mathématiques d'une séance à l'autre, régulièrement pour certains et irrégulièrement pour d'autres, sans lien visible avec leur « profil ». Il semblerait donc y avoir une assez grande variabilité sur le temps consacré aux mathématiques et la régularité de l'étude personnelle hors la classe chez les huit élèves interrogés.

b. Gestes d'étude accomplis de manière générale

Tous les élèves interrogés ont utilisé leur cahier d'exercices et ont fait les exercices demandés par leur enseignant de mathématiques (H1 ou M2) pour la séance suivante, et aucun élève n'a utilisé son cahier de leçons.

Nous avons considéré qu'il y avait « utilisation » d'un cahier dès lors que l'élève ouvre ledit cahier et semble regarder ce qui est à l'intérieur. Bien entendu, ce sont les analyses des entretiens avec les élèves à propos de cette « utilisation » d'un cahier qui permettra de la préciser : lecture intégrale, lecture partielle, mémorisation, recherche d'informations, ...

Par « faire les exercices », nous entendons que l'élève écrit une résolution des exercices donnés par l'enseignant.

Lorsqu'on leur demande ce qu'ils viennent de faire, seuls, les élèves répondent spontanément et pour la plupart de manière similaire : ils disent « avoir fait les exercices ».

c. Utilisation du cahier d'exercices

Hormis Tamara (B, H1) qui a résolu l'exercice demandé par son enseignante sur une feuille, tous les élèves ont résolu le leur sur leur cahier d'exercices.

Trois élèves (Daouda (M, M2), Tamara (B, H1) et Mehdi (M, H1)) ont eu le même geste pour résoudre leurs exercices : ils ont comparé les exercices à faire avec ceux déjà réalisés lors de la séance qui a précédé. Il y a donc, pour ces trois élèves, un appui sur des milieux antérieurs et très proches dans le temps. Annabelle (D, H1), qui disait avoir réfléchi à ce qui avait été fait le matin même pour pouvoir résoudre ses exercices, réalise un geste mémoriel lui permettant probablement de s'appuyer sur ce même milieu, même si elle ne l'explicite pas.

d. Utilisation du cahier de leçons

Aucun élève n'a utilisé son cahier de leçons. Plusieurs élèves disent ne l'utiliser qu'en cas de difficulté ou de doute, ou pour préparer une évaluation. Entre deux séances, les élèves ne semblent donc pas éprouver le besoin de revenir sur leur leçon, probablement parce que celle-ci est encore fraîche dans leur mémoire :

> *« J'apprends les leçons quand j'en ai besoin, mais sinon, j'écoute en cours, j'écoute régulièrement en cours, et après, je... j'arrive à refaire ce qu'on a fait en cours. » (Mehdi, M, H1)*
> *« je me suis **rappelé** du cours et des bases [...] je me **rappelle** toujours » (Ryan, B, M2)*
> *« j'ai **pensé à ce qu'on a fait ce matin** » (Annabelle, D, H1)*

e. Sensibilité au contrat didactique relatif à l'étude hors la classe entre deux séances de mathématiques

Bien qu'aucun élève n'ait utilisé le cahier de leçons lors de l'observation précédant l'entretien, tous ont répondu que la « révision » de ces leçons était un attendu de l'enseignant entre deux séances de mathématiques.

Là encore, quelques différences apparaissent dans le discours des élèves, non seulement en fonction de leur « profil », mais également en fonction de l'enseignant qu'ils ont en mathématiques.

Ainsi, les élèves de M2, qui dit avoir beaucoup insisté en classe sur le fait de ne pas apprendre par cœur les leçons, semblent conscients de cette part du contrat didactique relatif à leur étude en dehors de la classe. Voici ce qu'ils répondent lorsqu'on leur demande ce que, selon eux, l'enseignant M2 attend d'eux entre deux séances de mathématiques :

> *« qu'on fait ses exercices, qu'on **comprend** » (Géraldine, M, M2)*
> *« Qu'on fasse les devoirs et qu'on révise [...] qu'on relise chaque jour notre leçon [...] il nous demande **pas de l'apprendre par cœur.** » (Daouda, M, M2)*
> *« Je lis. En fait, j'essaie de lire, pas de... **pas d'apprendre par cœur**. » (Ryan, B, M2)*

En revanche, les élèves de H1 ont une tendance plus prononcée envers la mémorisation du cours. Ceci peut être mis en relation avec le fait que H1 exige parfois que ce cours soit appris par cœur.

4.3.2 Avant une évaluation sommative

Pour des raisons liées à des contraintes de temps et de terrain, certains élèves n'ont pas pu être interrogés avant le jour de l'évaluation sommative. Ainsi, Vincent (D, H1) a été interrogé le matin même de l'évaluation et Tamara quelques jours après l'évaluation. Ces élèves n'ont donc pas pu être filmés en train de « réviser ».

a. Temps passé à « réviser » et régularité

Les élèves disent passer en général et en moyenne au plus 30 minutes à « réviser un contrôle », sauf en cas de difficulté où là, les révisions peuvent prendre jusqu'à une heure. Le temps passé à « réviser » ne semble pas dépendre du « profil » de l'élève : Ryan (B, M2), Mehdi (M, H1) et Annabelle (D, H1), par exemple, passent un temps relativement proche (entre 5 et 15 minutes) à réviser. Marianne (B, M2) fait figure d'exception : elle dit ne jamais réviser. Géraldine (M, M2) et Vincent (D, H1) sont ceux qui prétendent réviser le plus longtemps (entre 20 et 30 minutes).

Au niveau de la régularité, la plupart des élèves disent réviser la veille de l'évaluation. Seule Géraldine (M, M2) dit réviser dès que l'enseignant annonce la date de l'évaluation, généralement une semaine en amont.

b. Gestes d'étude en général

La totalité des élèves ayant pu être filmés a utilisé le cahier de leçons (même Marianne (B, M2), qui d'habitude ne révise jamais, a exceptionnellement réalisé des gestes d'étude en vue de préparer l'évaluation).

L'observation des élèves en train de réviser face à la caméra, seuls, rend compte de légères différences dans leur attitude. Annabelle (H1), élève « D », semble lire très lentement sa leçon (elle reste plusieurs minutes sur une même page), lève les yeux de temps à autre, ses lèvres remuant silencieusement, comme si elle récitait quelque chose. Daouda (M2) et Mehdi (H1), élèves « M », semblent également vouloir mémoriser le contenu de leur leçon : le premier paraît la lire plusieurs fois, revenant de temps en temps en arrière ; le second lève régulièrement les yeux de sa leçon comme pour s'en rappeler. Ryan (M2) et Marianne (M2), deux élèves « B », quant à eux, semblent accorder moins d'importance à la mémorisation de leur leçon, qu'ils semblent ne lire qu'une seule fois, puis utilisent ensuite leur cahier d'exercices : Marianne (B, M2) résout un exercice choisi dans son manuel scolaire ; Ryan, lui, semble faire des allers et retours entre son cahier de leçons et son cahier d'exercices. Géraldine (M2) est la seule élève « M » filmée qui semble procéder de manière similaire à Ryan (B, M2) (va-et-vient entre les cahiers de leçons et d'exercices).

Les entretiens vont venir confirmer ces hypothèses. Annabelle (D, H1), en plus de la relecture multiple, a effectivement réalisé un geste d'étude de mémorisation et de récitation de la leçon :

> *« J'ai pris ma leçon.* ***Je l'ai lue, je l'ai relue****. [...] J'ai tout lu une première fois, j'ai relu les choses importantes (elle pointe du doigt un exemple de sa leçon) et après, je me suis fait...* ***j'ai dit ce qui était important dans ma tête****. » (Annabelle, D, H1)*

Nous verrons dans les sous-sections qui suivent (utilisation du cahier d'exercices et de leçons) qu'Annabelle demeure dans un effort constant de mémorisation, que ce soit du cours ou même des exercices et de leur correction.

Daouda (M, M2) est également dans un effort de mémorisation (la relecture semble être un geste important chez lui), mais qui semble moins intense que celui fourni par Annabelle. En effet, il dit :

> *« J'ai révisé... J'ai* **relu** *tout... tout ce chapitre. Il fait trois pages et je l'ai* **relu plusieurs fois***. Et voilà, quoi. Après,* ***je reste pas sur... sur une phrase, à répéter, répéter sans cesse****. Moi, je suis plutôt en train de* **relire***.* ***Je relis, je relis, je relis*** *plusieurs fois le chapitre. »* (Daouda, M, M2)

Marianne (B, M2) et Ryan (B, M2), eux, se distinguent de leurs camarades au profil « moyen » ou « en difficulté » par leurs gestes d'étude qui comprennent une simple lecture de la leçon et la résolution d'exercices en lien avec cette leçon :

> *«* ***J'ai lu****, au tout début, j'ai lu. Ensuite [...] j'ai essayé* ***d'appliquer****... sur le cahier de... sur le cahier de... d'exer... de brouillon. » (Ryan, B, M2)*

c. Utilisation du cahier de leçons

Une fois ces premières réponses obtenues, nous avons cherché à faire préciser aux élèves la manière dont ils ont lu, relu, mémorisé cette leçon, ce sur quoi ils se sont attardés et pourquoi.

Annabelle (D, H1) confirme par ses propos ses efforts pour mémoriser intensément la leçon :

> *« – Chercheur : Apprendre la leçon, qu'est-ce que ça veut dire ?*
>
> *– Annabelle : Ben... C'est* ***la mémoriser****.*
>
> *– C : Donc tu l'apprends par cœur ?*
>
> *– A : Non.*
>
> *– C : Non ? Comment tu fais pour la mémoriser ? Mémoriser, ça veut dire quoi, pour toi ?*
>
> *– A : Mémoriser, c'est pour moi... quand j'entends un truc, je le...* ***j'y pense plusieurs fois, je... je le répète plusieurs fois dans ma tête****, c'est tout. »*

Pour une raison que nous ignorons, Annabelle semble ne pas vouloir admettre que la mémorisation dont elle parle s'apparente fortement à de l'apprentissage « par cœur ».

Mehdi (M, H1), qui semblait lui aussi, devant la caméra, faire un effort important de mémorisation, vient confirmer ce geste d'étude vis-à-vis de la leçon. Il prétend même apprendre par cœur certains exemples de la leçon, lorsque ceux-ci ne sont pas trop « longs » à retenir :

> *« – Chercheur : Tu m'as dit « j'apprends ma leçon ». Tu m'as dit d'abord que tu l'avais lue et relue... et « j'apprends », ça veut dire quoi ? C'est ça « j'ai relu » ?*
>
> *– Mehdi : « Apprendre », pour moi,* ***c'est par cœur.***
>
> *– C : Et tu l'apprends par cœur ta leçon ?*
>
> *– M :* ***Oui, je l'apprends par cœur****.*
>
> *– C : À chaque fois, tu es capable de réciter par cœur la leçon ?*
>
> *– M (souriant) : À mon père, oui.*
>
> *– C : [...] Mais tu vas apprendre par cœur... on va dire, les définitions, les théorèmes et les propriétés, mais tu vas aussi apprendre par cœur les exemples ?*
>
> *– M : Oui... Non... Les exemples, c'est pas souvent que je les apprends par cœur. [...]* ***J'apprends que les exemples qui sont pas très longs.*** *»*

Mehdi semble sensible aux habitudes de son enseignante, H1, qui, en contrôle, pose généralement une ou deux questions de cours. C'est pourquoi cet effort de mémorisation paraît revêtir une importance certaine pour lui :

« – C : Et pourquoi tu fais ça ?

– M : Ben pour que ma leçon, elle reste dans ma tête. Pour que comme ça, ***dès qu'il y a une question de cours, ben je peux la répondre directement****. »*

Cependant, contrairement à Annabelle (D, H1) ou Daouda (M, M2) qui semblent avoir pour seul objectif de relire plusieurs fois et de mémoriser leur leçon, Mehdi (M, H1) paraît réaliser un geste de reconstruction du sens de cette leçon dans ses relectures, en s'appuyant sur un geste mémoriel (souvenir de ce qui a été fait en classe à propos des exemples) :

« Relire ma leçon, ça veut dire que... [...] J'essaie de comprendre qu'est-ce que ça veut dire. Je lis de point en point, en fait. J'essaie de ***comprendre le titre, ce qu'il veut dire****. J'essaie de* ***comprendre les exemples, de les refaire dans ma tête****. J'essaie de m'****imaginer comment on avait fait en cours****. »*

Géraldine (M2), une autre élève « M », se rapproche de Mehdi et des élèves « B » comme Ryan (M2) ou Marianne (M2) dans sa relecture du cours : elle cherche à reconstruire le sens de la leçon en faisant des liens entre cette dernière et ce qui a été fait en classe, notamment dans le cahier d'exercices :

« Par exemple, « les nombres et les lettres » (titre d'un paragraphe de la leçon). Ben ***je vais chercher dans mon cahier [d'exercices] si on a fait ça****. Parce que normalement,* ***on fait toujours ça. S'il nous fait une leçon, on fait des exercices****. Vu qu'il nous fait ça, je cherche. »*

Notons la sensibilité de Géraldine aux gestes routiniers de son enseignant, M2 (faire des exercices après avoir écrit une leçon).

Un point qui a été souvent relevé lors des entretiens concerne les exemples de la leçon. Ceux-ci ont été cités par plusieurs élèves comme étant des éléments importants et sur lesquels ils s'appuyaient. Là encore, les discours varient d'un élève à l'autre selon son « profil » sur l'utilisation de ces exemples. Voici des extraits d'entretiens mis côte à côte pour faire ressortir les différences :

(Annabelle, D, H1)

« – Chercheur : Tu me parles de l'exemple. Pour toi, l'exemple, c'est la chose importante dans la leçon ?

– Annabelle : ***Oui****.*

– C : C'est une chose importante. Pourquoi est-ce que c'est plus important que... je sais pas, qu'est-ce que vous écrivez à côté ? Vous écrivez des définitions, peut-être, ou des propriétés... Pourquoi est-ce que c'est l'exemple que tu trouves plus important ?

*– A : Ben euh... **parce que c'est une expression littérale**.*

*– C : Et donc ? (**Annabelle demeure silencieuse**.) Parce que tout ton chapitre parle des expressions littérales... c'est ça ?*

– A : Oui.

– C : Donc pourquoi est-ce que tu t'intéresses à l'exemple ?

*– A : Hm... Parce que pour moi, l'exemple, **c'est... ça... c'est plus précis...** »*

(Vincent, D, H1)

« – Chercheur : Pourquoi est-ce que tu t'intéresses aux exemples ?

*– Vincent : Parce que... **ça montre... ça montre, simplement.***

*– C : Ca montre quoi ? (**Vincent demeure silencieux**.) Explique-moi.*

*– V : **Ca montre la leçon**... Enfin, c'est-à-dire, ça...*

– C : C'est-à-dire ?

– V : Ca...

– C : Ca illustre ?

– V : Ouais, c'est ça. »

(Daouda, M, M2)

« – Chercheur : Tu n'as pas une certaine méthode, pour lire ?

*– Daouda : Avant je... Avant, je restais sur... je restais sur l'exemple, **juste je relis l'exemple**, l'exemple, plusieurs fois. Après, c'est... Après, j'avoue, je réussisais plus facilement, mais... je préfère relire, relire, relire et... comme ça... je comprends mieux. Je comprends mieux quand je relis, quand je relis tout directement.*

– C : D'accord. Pourquoi tu t'intéresses spécialement à l'exemple ?

*– D : Parce que **c'est de cette manière que je peux mieux comprendre**. Après, y a la définition ou... la définition, ou autre, mais... je préfère l'exemple.*

– C : L'exemple, ça t'aide à mieux comprendre, tu dis. Pourquoi ça t'aide à mieux comprendre ?

– D : ***Je sais pas****. »*

(Mehdi, M, H1)

« – Mehdi : J'essaie de ***comprendre*** *les exemples, de* ***les refaire dans ma tête****. J'essaie de m'imaginer comment on avait fait en cours et...*

– Chercheur : D'accord. Alors là, par exemple, qu'est-ce que tu as imaginé ? Des choses que vous aviez faites en cours en relisant ta leçon ?

– Mehdi : ***J'ai imaginé qu'on avait fait un tableau****... On avait fait un tableau, je crois. On avait fait un tableau, et... y avait... y avait des nombres dessus... avec des lettres... et on l'a reproduit...* ***J'essaie de revoir ça dans ma tête****.*

– C : [...] Et tu y es arrivé ?

– M : Oui, j'ai réussi. »

(Ryan, B, M2)

« – Chercheur : Tu relis pas les exercices que vous avez faits, tu relis pas les corrections ?

– Ryan (fait « non » de la tête) : Parce qu'en fait, ***ça sert à rien, vu que du coup, il y a des exemples****.*

– C : Dans la leçon ?

– R (fait « oui » de la tête) : ***Les exemples, ils m'aident****.*

– C : Généralement, les exemples qu'il y a dans la leçon, ça suffit pour toi ?

– R : Ouais, enfin... Pour moi, c'est la même chose. Simplement, en fait, je vous explique : moi, l'exemple, c'est juste quand... c'est juste quand je lis la leçon. Mais sinon, en cours, en fait... pour moi, le cahier d'exercices sert juste à ***appliquer la leçon, en fait. Juste à appliquer. Je vais pas revenir dessus vu qu'on a une leçon****. Je révise, et ensuite, j'applique »*

Nous pouvons constater qu'Annabelle (H1) et Vincent (H1), élèves « D », ou Daouda (M2), élève « M », ne parviennent pas à expliciter l'intérêt que représentent les exemples dans une leçon, à savoir qu'il peut s'agir d'une part de représentants d'une classe d'exercices (ou des tâches relevant d'un certain type de tâches), d'autre part qu'il peut s'agir d'une illustration de la manière dont une propriété ou une définition (éléments technologiques) peuvent être *appliquées.* Cette idée d'*application* est formulée explicitement par Ryan (M2), élève « B », qui par ailleurs semble avoir saisi le caractère générique des exemples du cours, qui lui suffisent lorsqu'il révise (« pour moi, le cahier d'exercices sert juste à **appliquer la leçon** [...] Je vais pas revenir dessus vu qu'on a une leçon. Je révise et **j'applique**. »

Notons également une différence dans la manière de revenir sur ces exemples entre deux élèves de « profils » similaires – ce qui au passage témoigne de l'imprécision de cette classification en « bons », « moyens » et « en difficulté » – comme c'est le cas pour Daouda (M2) et Mehdi (H1), tous deux élèves « M ». Alors que Daouda ne fait que « relire » les exemples, Mehdi, lui, semble plus avancé dans l'association « exemple / technique pour résoudre l'exemple » : il ne relit pas seulement l'exemple, il essaie de le « refaire » et de retrouver, par un geste mémoriel, la technique utilisée en classe pour réaliser cet exemple. Ceci nous paraît constituer un pas vers une décontextualisation, vers l'identification d'une tâche comme étant un représentant d'un type de tâches, un pas que Daouda ne semble pas avoir franchi, ou en tout cas, qu'il n'explicite pas comme Mehdi.

d. Utilisation du cahier d'exercices

Contrairement au cahier de leçons, utilisé par la totalité des élèves interrogés lors de leurs révisions pour préparer une évaluation sommative, le cahier d'exercices n'est employé que par une partie des élèves, certains n'y ayant pas du tout recours.

Là aussi, le cahier d'exercices n'est pas du tout utilisé de la même manière selon les élèves. En particulier, les façons de relier exercices et leçons, de choisir des exercices à faire pour réviser ou encore d'utiliser la correction d'exercices faits en classe ne sont pas identiques selon les profils. De plus, certaines « cohérences » vont désormais se dessiner franchement : les élèves qui déjà ne semblaient pas identifier des types de tâches ou demeuraient dans de la mémorisation intense pour la leçon, vont réaliser des gestes similaires dans leur utilisation du cahier d'exercices et, comme nous allons tenter de l'argumenter, ces gestes semblent en accord avec leur vision de la réussite vis-à-vis de l'évaluation et de leur rapport aux mathématiques.

Choix des exercices à travailler et identification des types de tâches

Ainsi, voici comment Annabelle (D, H1) va utiliser son cahier d'exercices :

« – Chercheur : Tu m'as dit que parfois, tu t'entraînais à faire les exercices. Comment fais-tu ?

– Annabelle : Je les fais et si j'ai un trou, je prends mon cahier de... de leçons.

– C : Tu fais les mêmes que ceux que vous avez faits en classe ?

*– A : Non, **j'en prends au pif**.*

– C : Au hasard ?

– A : Oui.

– C : Et qui ressemblent ou pas ?

*– A : **Un peu...** »*

Déjà en difficulté pour expliciter le caractère générique des exemples dans la leçon, Annabelle va résoudre des exercices au hasard pour réviser son évaluation. Le fait qu'elle semble ne pas être certaine de choisir des exercices qui « ressemblent » à ceux faits en classe conforte l'hypothèse que nous avons émise selon laquelle Annabelle n'identifie pas les différents types de tâches. Dès lors, il lui est impossible de diagnostiquer l'état de ses apprentissages (à aucun moment de l'entretien, Annabelle ne précise qu'elle choisit des exercices en fonction de ses difficultés).

Vincent (D, H1) est dans une situation similaire. Entre deux séances de mathématiques, il avait expliqué qu'il ne parvenait pas à utiliser son cahier d'exercices pour résoudre les exercices donnés à faire par l'enseignant, parce qu'il y en avait trop selon lui, et qu'il était incapable de faire un tri. Là encore, l'absence d'identification des types de tâches se traduit pour Vincent par l'impossibilité de sélectionner des exercices pertinents en regard de l'évaluation et de ses difficultés.

Daouda (M, M2), pour des raisons analogues, est également embarrassé lorsqu'il s'agit pour lui d'expliquer la manière dont il sélectionne les exercices du manuel scolaire qu'il résout chez lui pour réviser :

« – Chercheur : Comment tu les choisis, ces exercices ?

*– Daouda : Bah... J'ai juste à les choisir, ceux que... **ceux qu'on n'a pas faits en classe**.*

– C : Oui, mais dans le livre, il y en a plein que vous n'avez pas faits. Tu fais des exercices au hasard ?

– D : Non... Ceux qui... ceux qui... En fait, ***ceux qu'on doit faire, en quelque sorte****. [...]* ***Je sais pas comment l'expliquer****, en fait, c'est ça, le truc ! (Il rit.) »*

Toutefois, Daouda, bien qu'il ne sache pas expliciter l'existence de types d'exercices, semble conscient de cette dernière : à partir des numéros et pages des exercices faits en classe sous la direction de M2, Daouda va aller « piocher » des exercices dans les mêmes pages ou avec des numéros proches de ceux déjà traités en classe.

Géraldine (M2), autre élève « M », va laisser à d'autres la charge d'identifier les types de tâches : ce sont ses proches (parents, grande sœur) qui vont repérer des classes d'exercices et lui proposer d'en résoudre des représentants.

« – Géraldine : [...] quand je suis chez moi, ***je demande à ma sœur ou à mes parents de me prendre des exercices qu'on fait****, comme des activités. Ils mettent sur une feuille, et moi j'essaie de remplir, et eux,* ***ils voient si c'est bon ou pas****. Et si c'est pas bon, je vais aller voir la leçon ou je vais revoir, en fait.*

– Chercheur : D'accord. Et ces exercices... Comment ils les choisissent ? Tu leur demandes de choisir des exercices en particulier ?

– G : Euh... Des fois, je leur dis d'aller dans le livre. Ou je leur dis de voir les exercices, activités, comme ça (elle montre un exercice de son cahier d'exercices).

– C : Tu peux me donner un exemple ? Là, est-ce que tes parents ou ta sœur t'ont aidé à réviser le contrôle de mathématiques, et si oui, qu'est-ce qu'ils t'ont fait faire ?

– G Par exemple, l'exercice 2 (elle montre un exercice dans son cahier), vu que je le connaissais bien, euh... ma sœur, elle m'a fait* ***d'autres calculs comme ça****, elle m'a fait un tableau, et puis elle m'a dit de le remplir.*

– C : Elle a pris les mêmes expressions ? Avec les mêmes nombres ?

– G : Non, elle a changé.

– C : Elle a changé, et elle t'a dit de le faire.

– G : Oui. »

*L'exercice 2 désigné par Géraldine est le suivant :

« Complète ce tableau avec les valeurs des expressions pour chaque valeur de a proposée.

	$a = 2$	$a = -5$	$a = -3$
$2a - 2$			
$-3a + 1$			
$-3(a + 4)$			
$-a(4 - a)$			

»

Remarquons que le fait de recourir à un système didactique auxiliaire permet à Géraldine de disposer d'un moyen de contrôle de ce qu'elle fait, bien que ce soit une institution différente de l'institution « enseignant M2 » qui prodigue un jugement sur la validité de ce qu'accomplit Géraldine, contrairement à Annabelle et Vincent qui eux, en choisissant leurs exercices au hasard (ou en n'en faisant aucun), n'ont pas de moyen de vérifier la correction de leurs résolutions.

Nous faisons l'hypothèse que Géraldine, à force de solliciter un système didactique auxiliaire qui lui propose des exercices similaires à ceux traités en classe, finit par identifier l'existence de différents types de tâches rencontrés sous la direction de l'enseignant, comme l'illustre l'extrait suivant, où nous avons demandé à Géraldine de lister les types d'exercices qu'il risquait d'y avoir à la prochaine évaluation :

*« – Géraldine : Y aura ces **types** d'exercices.*

– Chercheur : Tu peux me les expliquer, ces « types d'exercices » ? Il n'y en a pas une infinité, donc qu'est-ce qu'il va y avoir, comme types d'exercices ?

*– G : Beh... Y aura par exemple... par exemple les x... S'il nous dit de **faire les** x, beh... y aura déjà les x... Y aura par exemple les a **égal à** 2, **égal à** 5...*

– C : Ca s'appelle comment ?

– G : Euh... C'est des calculs littérals.

– C (aidant) : D'accord, donc il faut calculer en remplaçant...

– G : Par la lettre.

– C : ...la lettre par la valeur, c'est ça.

– G : Oui.

– C : D'accord. Alors, il y a ça : il y a remplacer une lettre par une valeur pour calculer l'expression. Euh... Je n'ai pas bien compris ce truc-là (C montre un exercice), c'est quoi ce type d'exercices ?*

– G (se gratte la tête et fait une grimace) : Euh... En fait, ça aussi, j'ai pas très bien compris. »

*L'exercice en question était le suivant (les pointillés correspondent aux espaces dans lesquels l'élève doit écrire ses réponses) :

« Recopie les expressions suivantes en faisant apparaître les signes « × » sous-entendus.

$A = 3x + 6$
....
$B = -5(2y + 7)$
....
$C = 4w^2$
....
$D = 4u(5 - 2u)$
....
$E = (4 + x)(3 - 4x)$
....
$F = 2a^2 + 4a - 5$
.... »

Comme nous pouvons le constater, Géraldine éprouve des difficultés à définir précisément les types d'exercices, même si elle a conscience de leur multiplicité. Elle parle de « *faire les x* », de « *a égal à* 2 », et de « *calculs littérals* » de manière générale. De plus, elle n'est pas toujours capable, lorsque nous lui désignons une tâche, de déterminer le type de tâches parent.

Du côté des élèves « B », les extraits ci-dessous de leur entretien montrent de manière flagrante leur capacité à identifier des types de tâches et à orienter leurs gestes d'étude hors la classe grâce à cette identification, ce que ne faisaient pas ou faisaient avec difficulté les élèves de profils « moins bons ». Ainsi, Marianne (B, M2), bien que ne sachant par parfaitement nommer les types de tâches, va se révéler capable d'en dresser une liste pratiquement exhaustive ou, en tous les cas, capable, à partir d'une tâche donnée, d'en abstraire le type :

« – Chercheur : Qu'est-ce qu'il y aura comme types d'exercices ?

*– Marianne : Euh... **Réduire**.*

– C : Réduire quoi ?

– M : Les expressions.

– C : [...] Après, qu'est-ce qu'il y a d'autre ?

*– M : Y a... euh... **Je sais plus comment ça s'appelle, mais en gros, c'est l'agrandir.***

– C : Ca veut dire quoi ?

– M : C'est... si l'expression, c'est... 3... ensuite, entre parenthèses, y a 4 plus x, on fera 3 fois 4 plus 3 fois x.

– C : D'accord, alors ça s'appelle pas agrandissement, c'est développement.

– M (sourit) : Oui.

– C : Voilà, c'est ça. OK. Est-ce qu'il y a d'autres choses ? Comme types d'exercices, qu'est-ce qu'il pourrait y avoir ?

– M : Des multiplications, sûrement.

– C : Donc là encore, c'est de la réduction. Et ça, là, par exemple ? (C montre un exercice de calcul d'une expression par substitution.) C'est un type d'exercices aussi ?

– M : Oui. Parce qu'il y a du... du... de la multiplication et de l'addition et de la soustraction.

– C : Mais qu'est-ce qu'il faut faire, dans ces exercices ? Est-ce que là, il faut développer ou réduire ?

*– M : Là, **il faut calculer**.*

– C : Et comment on fait pour calculer une expression comme ça ?

– M : Bah... Il nous donne la valeur pour la lettre... et ensuite... si c'est 3*a, on va faire trois fois le nombre qui est donné. »*

Notons qu'en plus de pouvoir lister les types de tâches ou d'identifier un type de tâches à partir d'une tâche, Marianne associe spontanément une technique de résolution à des tâches mathématiques (reconnaissance de la structure d'une expression pour déterminer si on peut la développer, identification des opérateurs pour calculer une expression ou pour la réduire).

Ryan (B, M2) va lui aussi parler spontanément de types de tâches lors de ses révisions avant une évaluation sommative, en employant les termes de « forme d'exercices », que nous lui demandons d'expliciter par la suite :

« – Chercheur : [...] donc j'ai scanné ton... ton cahier d'exercices, et parfois... y a pas exactement écrit comme ce que monsieur M2 a fait au tableau. Tu... Ben je vois beaucoup de calculs, parfois il y a juste les résultats [...] tu n'as pas peur d'oublier, par exemple une semaine ou deux semaines après, les calculs qu'il y avait écrits, puisque tu n'as écrit que le résultat ? [...]

*– Ryan : Bah en fait, je sais ça va pas me resservir, **ce sera pas exactement les mêmes calculs**, ce sera **la forme**, mais... du moment que j'ai compris, du moment que j'arrive à le faire...*

[...]

– C : Tout à l'heure, tu m'as parlé... « cette forme d'exercices, il suffit de comprendre ». C'est quoi, une « forme d'exercices » ?

*– R : Forme d'exercices... C'est par exemple... enfin, les **exercices typiques**... Y a la valeur, x... **Pour moi, c'est la même chose, si vous ramenez un calcul et juste vous inversez le** x **par le 2**, voilà... C'est ça... »*

Terminons avec un extrait de Tamara (H1), la troisième élève « B » des élèves interrogés, qui, pour parler de type de tâches, va utiliser le terme de « notion » :

« – Chercheur : Tu m'as dit que tu as refait un exercice[7]. Alors, comment tu l'as choisi, cet exercice, et comment tu l'as refait ?

– Tamara : Ben... Ben j'ai pris... Ben des fois, madame H1, elle donne des exercices à refaire... pour s'entraîner au contrôle. Si elle les a donnés, ben je les fais... sur une feuille et je mets mon cahier de maths sur le côté...

– C : Oui ?

*– T : Ou sinon, ben je prends un exercice au hasard, **qui est sur la même notion**, ou un exercice qu'on a déjà fait en classe. [...] par exemple, sur chapitre où on a révisé la distributivité, ben je vais faire un... un exercice sur la distributivité simple, un sur la double [...] je fais un exercice sur la notion qu'on a vue. Donc **si on a vu six notions, ben je vais faire six exercices**. »*

Il semblerait que l'identification des types de tâches permet à Tamara de guider son choix de se constituer un milieu pour l'étude personnelle que nous pourrions

7. Tamara ne nous a pas présenté cet exercice.

qualifier de « pertinent » : ayant listé x types de tâches, par souci d'efficacité, d'économie de temps et de travail, Tamara va s'exercer sur x tâches correspondant à ces x types.

Sur l'utilisation de la correction des exercices

La correction des exercices donnés à faire en classe et hors classe est organisée et validée par les enseignants. Nous allons voir, une fois de plus, que cette correction est différemment utilisée par les élèves selon leur « profil ».

Annabelle (D, H1) va poursuivre ses efforts intenses de mémorisation, jusque dans les corrections des exercices :

> *« – Chercheur : Pourquoi est-ce que tu refais pas les exercices que vous avez faits en classe ? Puisque... il y a la correction, non, de ces exercices ?*
>
> *– Annabelle : Oui.*
>
> *– C : Pourquoi tu les refais pas ?*
>
> *– A : Hm... Je sais pas... Parce que* ***la correction de l'exercice me suffit.***
>
> *– C : Ah, donc tu les* ***relis****, ces corrections d'exercices ?*
>
> *– A :* ***Oui****.*
>
> *– C : Ca, tu ne me l'as pas dit. [...] Ca t'arrive souvent d'utiliser la correction des exercices, alors ? (Annabelle fait « oui » de la tête.) D'accord. Et donc, cette correction, comment tu l'utilises ? Tu la relis simplement ? Tu la mémorises aussi ? Tu compares avec ce que... ce que tu es en train de faire ?*
>
> *– A :* ***Je la mémorise... Je la mémorise****.*
>
> *– C : Tu la mémorises... »*

Ne comprenant pas comment Annabelle peut mémoriser une correction, nous lui demandons des précisions sur la manière dont elle s'y prend :

> *« – Chercheur : Tu veux dire que tu mémorises la correction de l'exercice ou tu mémorises par exemple les méthodes, comment on a réussi à répondre à l'exercice ?*
>
> *– Annabelle :* ***Je mémorise la correction****.*
>
> *– C : Tu mémorises la correction, juste la correction. D'accord... »*

Annabelle semble donc ne pas réaliser de décontextualisation des corrections : elle ne semble pas par exemple y rechercher des éléments de technique qui pourraient lui être utiles pour la résolution d'exercices futurs. Elle ne cherche pas non plus à refaire les exercices ; la relecture de la correction lui « suffit ». Nous nous interrogeons sur la conception qu'Annabelle a de l'activité mathématique par rapport à d'autres disciplines : en a-t-elle saisi les spécificités ?

Daouda (M, M2), lui, ne revient pas du tout sur les corrections de ses exercices parce qu'il juge que celles-ci n'ont aucun intérêt pour lui :

> *« – Chercheur : Tu ne relis pas, par exemple, la correction ? À quoi elle te sert, la correction, finalement ?*
>
> *– Daouda : Pff... **J'en sais rien, en fait**.*
>
> *– C : Ah... C'est pour faire plaisir à monsieur M2, peut-être ?*
>
> *– D : Non, c'est juste... comme ça, mais... juste au cas où... mais **ça sert à rien après, pour moi**. »*

En revanche, Mehdi (H1), élève « M » lui aussi, dit utiliser parfois la correction :

> *« des fois, **quand j'y arrive vraiment pas, je regarde**. [...] J'essaie de comprendre d'abord que... c'est quoi le... **comment c'est fait**... et après, si j'arrive pas à comprendre, ben... je sors la calculatrice, soit je demande à mes parents. »*

Contrairement à Annabelle (D, H1), Mehdi ne cherche pas à mémoriser cette correction, mais à « comprendre [...] comment c'est fait ». Et contrairement à Daouda (M, M2) qui ne trouve pas d'usage à cette correction, elle est pour Mehdi un moyen de contrôler ce qu'il fait, lorsqu'il n'y « arrive vraiment pas ».

Mehdi partage ainsi ce geste de comparaison entre ce qu'il fait et ce qui a été validé par l'enseignant dans la correction avec une « bonne » élève, Tamara (B, H1), qui utilise également les corrections pour contrôler l'état de ses apprentissages :

> *« je vais le faire [l'exercice] toute seule pour réfléchir et **ensuite, je vais prendre mon cahier pour regarder la correction** qu'on avait fait en cours, et je vais regarder **où sont mes erreurs pour essayer de les corriger**. »*

e. Manière dont les élèves décident s'ils sont prêts pour l'évaluation

Nous avons demandé aux élèves comment ils déterminaient s'ils étaient prêts pour l'évaluation. Ceci nous a permis de recueillir un geste de diagnostic de l'état des apprentissages. Les différences entre élèves « bons » et élèves « moins bons » sont ici aussi assez éclatantes.

Les élèves « D » comme Annabelle (H1) ou Vincent (H1) se disent prêts pour l'évaluation selon des critères qui sont peu en lien avec l'état de leurs apprentissages ou leur compréhension du thème d'étude :

> *« – Chercheur : Comment tu fais pour décider quand tu es prête, pour l'évaluation ? [...]*
>
> *– Annabelle : Quand... **Quand j'ai fini de réviser plusieurs fois**.*
>
> *– C : Seulement quand tu as révisé plusieurs fois ? Et si jamais t'as pas compris, si t'as révisé plusieurs fois, tu décides que tu es prête ou pas ? Oui ? Même si tu as pas tout compris ?*
>
> *– A : **Oui**. »*

Pour Annabelle, le discriminant n'est donc pas sa bonne compréhension des objets de savoir à travailler pour l'évaluation, mais le nombre de fois où elle a « révisé » (avec ce que l'on a pu voir dans sa manière de procéder).

Vincent, quant à lui, paraît bien en peine d'expliquer la manière dont il décide qu'il est prêt pour l'évaluation :

> *« – Chercheur : Comment tu fais pour décider si tu es prêt pour l'évaluation ? [...]*
>
> *– Vincent : Bah... **Je sais pas**.*
>
> *– C : Tu sais pas trop ?*
>
> *– V : Franchement, je sais pas.*
>
> *– C : Y a pas un moment où tu te dis, « bon, là, c'est bon, je suis prêt » ? Ou au contraire un moment où tu te dis « bon, j'ai révisé, mais je suis pas prêt » ?*
>
> *– V : Ben... **Quand j'ai bien appris**.*
>
> *– C : Comment tu sais que t'as bien appris ?*
>
> *– V : C'est-à-dire... Ben **quand tu relis plusieurs fois, que tu t'entraînes, c'est bon**. »*

Comme Annabelle, Vincent semble s'appuyer sur une certaine quantité de temps ou de fois où il a relu, où il s'est « entraîné ». Le terme d'« entraînement » retient notre attention : les élèves qui ne sont pas jugés « bons » semblent avoir une vision de la réussite similaire à un entraînement quasi « sportif ». Cela paraît d'ailleurs être le cas de Mehdi (M, H1), qui se sent prêt lorsqu'il s'est beaucoup entraîné :

« – Chercheur : Quand est-ce que tu te dis : « Ca y est, je suis prêt » ?

– Mehdi : Quand j'ai fait ***beaucoup, beaucoup d'exercices****... et j'ai* ***beaucoup révisé ma leçon****.*

– C : Bon, alors, ça veut dire quoi « faire les exercices » ? Tu m'as dit « j'en prends au hasard, je les fais ».

– M : Oui. Disons que quand... ***quand je fais une page d'exercices****, je me dis « c'est bon, j'ai plus besoin de faire d'exercices ». »*

Les élèves « bons », eux, semblent beaucoup plus économes en terme de temps et de quantité : Marianne (B, M2) n'éprouve jamais le besoin de préparer une évaluation. Ecouter en classe et résoudre régulièrement les exercices demandés par l'enseignant lui suffisent. De même, Tamara (B, H1), comme nous l'avons déjà vu, se contente presque uniquement de travailler autant d'exercices que de types de tâches qu'elle a identifiés pour le chapitre :

« Déjà, en cours, j'ai compris la... ***les notions et les termes à aborder****, et* ***direct savoir les exercices qu'on devait faire*** *à la maison... Ben* ***je vois pas l'intérêt de réviser****. À la limite, je vais regarder vite fait mon cahier avant de faire le contrôle, sinon je vais pas réviser. » (Tamara, B, H1)*

f. Ce que disent les élèves au niveau de la ressemblance entre ce qui est demandé en évaluation sommative et ce qui est fait en classe

À la question « Trouves-tu que l'évaluation ressemble à ce que vous aviez fait en classe », le lecteur, après avoir lu les paragraphes précédents, ne sera désormais plus surpris d'apprendre que les élèves « bons » et les élèves « moins bons » perçoivent de manière différente ces ressemblances entre évaluation et ce qui est fait en classe.

Ainsi, les élèves « B » trouvent généralement ces ressemblances fortes, comme en témoigne Marianne (B, M2) dans cet extrait :

« – Chercheur : De façon générale, est-ce que tu trouves que l'évaluation que vous faites avec monsieur M2 en classe, elle ressemble à ce que vous aviez fait... dans le chapitre... qu'il y a à réviser ?

– Marianne : ***Oui****. C'est pour ça que je me souviens la plupart du temps. C'est parce que c'est... c'est ressemblant et* ***on voit le cours à l'intérieur, presque****.*

– C : Tu trouves toujours que c'est très ressemblant.

– M : Oui, mais sans... En fait, ***c'est ressemblant sans être ressemblant*** *parce que... Y en a, ils vont avoir du mal parce qu'ils auront pas appris et en plus, ils auront pas écouté pendant le cours. Alors que moi... J'apprends pas mais j'écoute pendant le cours, alors c'est ça qui fait que c'est plus simple pour moi. »*

Géraldine (M, M2), qui paraît être beaucoup aidée par ses proches dans son étude hors la classe, proches qui, rappelons-le, ont pour habitude de lui proposer des exercices du même type que ceux traités en classe par l'enseignant, trouve également de fortes ressemblances dans l'évaluation : « *c'est toujours en rapport avec les leçons ou les exercices* », nous dit-elle. Notre hypothèse selon laquelle, à force de voir ses parents lui proposer des exercices similaires à ceux faits en classe, Géraldine a fini par reconnaître partiellement des types de tâches sans les nommer explicitement, se voit donc ici confortée.

En revanche, pour Mehdi (M, H1), qui s'entraîne beaucoup en résolvant une grande quantité d'exercices pris au hasard dans son manuel sans souci d'identifier leur type, l'évaluation présente des tâches différentes de celles rencontrées avec l'enseignant, ou bien des tâches vues comme des approfondissements, ou des « ajouts » :

« – Chercheur : Est-ce que l'évaluation, le contrôle, ça ressemble à ce que vous avez fait en classe ? [...]

– Mehdi : Oui... ***Pas tous, mais quelques-uns****, oui.*

– C : Pas tous... Y en a qui sont très différents ?

– M : Ils sont... là... ceux qu'on n'a pas faits en classe... et ceux qu'on a faits en classe, des fois, la prof, madame H1, elle ***approfondit ce qu'on a fait*** *en classe. Elle* ***rajoute quelque chose****. »*

Pour Vincent (H1), élève « D », les ressemblances apparaissent encore moins franches :

« – Chercheur : De façon générale, est-ce que tu trouves que l'évaluation que vous avez en classe, elle ressemble à ce que vous avez fait durant le chapitre ? [...]

– Vincent : Euh... ***Des fois oui... Des fois non****... 'fin, y a* ***quelques trucs****.*

– C : Alors, des fois oui, des fois non, c'est-à-dire ?

– V : Ben des fois... C'est-à-dire oui, il y a ***des choses*** *de la leçon.*

– C : Donc dans le contrôle, tu trouves des « choses de la leçon ».

– V : Oui. ***Quasiment tout, sauf des fois, y a quelque chose d'autre****.*

– C : Et c'est... donc... ça veut dire quoi, « quelque chose d'autre » ? Quelque chose que vous n'avez pas du tout vu ?

– V : Si, on a vu, ***mais vite fait****. »*

L'évaluation semble contenir pour Vincent une part d'aléatoire et d'inconnu : « *Des fois oui... Des fois non... [...] des fois, il y a* ***quelque chose d'autre*** ». Cette idée d'aléatoire se retrouve dans le discours d'Annabelle (D, H1) et paraît être à l'origine d'une certaine anxiété durant l'évaluation, voire même d'un découragement se traduisant par un abandon de la résolution de la tâche demandée :

« – Chercheur : De façons générale, est-ce que tu trouves que l'évaluation que vous faites en classe, elle ressemble à ce que vous aviez fait dans le cahier d'exercices ?

– Annabelle : ***Un petit peu****.*

– C : Un petit peu seulement ?

– A : Oui.

– C : Explique-moi.

– A : ***Des fois****... Y a des* ***choses****... plus... plus difficiles... 'fin, je trouve, un peu plus difficiles... et... ça...* ***ça me stresse*** *encore plus pendant le contrôle, ça... ça me stresse... et après, je sais pas...* ***Si pour moi, je trouve ça trop dur, je fais pas****, soit je réfléchis pendant... longtemps... mais... voilà...* ***je fais pas****... et je mets au hasard. »*

Nous rapprochons ces observations de notre hypothèse selon laquelle, parce qu'ils ne sont pas capables d'identifier les types de tâches rencontrés en classe, les élèves « en difficulté » trouvent probablement moins de ressemblances entre ce qui a été traité en classe et l'évaluation sommative que les « bons » élèves.

Ces analyses peuvent également être mises en perspective avec les différentes sensibilités au contrat didactique vis-à-vis de l'évaluation, présentées dans la sous-section suivante.

g. La sensibilité au contrat didactique relatif à l'évaluation sommative

Qu'est-ce que l'enseignant attend des élèves pour préparer l'évaluation ? À cette question, les réponses diffèrent une fois encore selon le « profil » des élèves, ce qui témoigne de sensibilités différentes au contrat didactique vis-à-vis de l'évaluation.

Alors que les « bons » élèves vont avoir une sensibilité assez élevée des attentes de leur enseignant relativement à l'évaluation, les élèves « moins bons » ne parviennent pas toujours à déterminer avec précision les attentes institutionnelles. Annabelle (D, H1) et Vincent (D, H1) vont ainsi évoquer la « révision » d'exercices, sans être capable d'expliciter une méthodologie pour ce faire ou de mettre en relation cette révision avec ce qui est attendu par l'enseignant :

> *« – Annabelle : [...] se préparer à ce qui pourrait tomber*[8] *dans le contrôle... ce qui... ce qui peut être... par exemple, on peut réviser aussi les exercices qu'on a faits,* ***s'entraîner***[9]*, et voilà. [...]* ***Qu'on s'entraîne****... qu'on fasse des exercices,* ***qu'on s'entraîne****, qu'on apprenne et euh... qu'on soit prêt pour le contrôle. [...] prendre un exercice du manuel qui peut tomber dans le contrôle... et faut s'entraîner...*
>
> *– Chercheur : Les exercices que vous avez faits en classe et qui sont sur le manuel, elle vous demande parfois les mêmes en contrôle ?*
>
> *–* ***Peut-être... Je sais pas... Ca peut arriver...*** *»*

Vincent, lui, parle de « conclusion » à « réviser » dans les leçons et les exercices. Lorsque nous lui demandons ce qu'est une conclusion dans sa leçon, il n'a pas su nous en montrer une. Cette idée de « conclusion » viendrait-elle d'une autre discipline, comme l'histoire-géographie ou la biologie où ces conclusions sont davantage présentes ? Vincent confondrait-il les contrats didactiques de plusieurs matières ? Nous ne nous prononcerons pas plus avant sur ces hypothèses.

Les élèves « M » et « B » semblent s'avérer plus sensibles au contrat. Mehdi (M,H1) et Tamara (B, H1) prêtent une attention certaine aux exercices supplémentaires donnés par H1 pour préparer une évaluation et au fait que l'évaluation soit davantage axée sur la résolution d'exercices que sur une récitation de connaissances théoriques du cours : « ***Elle nous dit*** *de...* ***Elle veut*** *qu'on fasse des exercices supplémentaires... pour qu'on puisse réussir le contrôle... Parce que* ***la plupart du temps, les contrôles de madame H1, ils sont plus sur exercices que sur cours****. Ils sont plus sur exercices. [...] des fois, là, madame H1, elle nous redonne les exercices que... qu'on a faits en cours,* ***elle nous les redonne dans les devoirs,*** *pour qu'on les refasse à la maison.* » (Mehdi, M, H1). « *des fois, madame H1, elle donne des exercices à refaire... pour s'entraîner au contrôle. Si elle les a donnés, ben je les fais.* » (Tamara, B, H1)

8. « ce qui pourrait tomber » : on retrouve encore l'idée d'un aléatoire dans l'évaluation.
9. Et encore l'idée d'entraînement sportif.

Daouda (M, M2) est également sensible aux pratiques d'évaluation de son enseignant M2, il sait par exemple que des questions de cours peuvent être demandées : « parfois,le prof, il laisse une petite définition [dans le contrôle]. » Ceci va induire chez lui un geste de mémorisation (par cœur) des définitions de la leçon.

h. Prise en compte des spécificités des thèmes étudiés : analyse des OM mobilisées par les élèves

Dans les paragraphes ci-dessus, nous nous sommes longuement attardés sur les gestes d'étude des élèves et ce, indépendamment des spécificités du thème étudié : le calcul sur les expressions algébriques.

Nous donnons ici quelques éléments sur les OM mobilisées par les élèves dans leur étude hors la classe. Sans « surprise », les élèves « B » utilisent et articulent les OM relatives aux expressions algébriques (Pilet, (2012)) de manière plus idoine que les élèves « D », comme l'indiquent les extraits ci-dessous.

Le chercheur désigne à l'élève Daouda (D, M2) un exemple issu de son cours et qui relève du type de tâches « Calculer la valeur d'une expression littérale à plusieurs variables pour certaines valeurs données aux variables ». Voici l'exemple en question :

« Si on remplace x par 2 et m par -1 dans l'expression $6x + 4m$ on obtient :

$$\begin{aligned} 6x + 4m &= 6 \times 2 + 4 \times (-1) \\ &= 12 - 4 \\ &= 8 \text{ »} \end{aligned}$$

– Chercheur : C'est quoi le but de l'exercice ici, qu'est-ce qu'il faut faire ? Explique-moi un peu.

– Daouda : Ici, il faut juste les... comment dire... en fait, c'est... en fait c'est pas question de calculer, en fait... les... les rédui... en fait... on doit les réduire.

– C : Tu dois réduire, ici, l'expression ?

– D : Oui.

– C : Alors comment tu réduis ?

– D : Bah j'ai juste à... j'ai juste à... (rires) j'ai juste à... je sais pas comment dire ! En fait je... en fait, il y a... un calcul... j'ai juste à les prendre, à les... simplifier, en quelque sorte. Je dois juste les simplifier.

Daouda ne parvient pas à résoudre la tâche ci-dessus. Il ne fait pas référence à la technologie « substituer » ou à la technique correspondante. Nous faisons l'hypothèse que l'échec de Daouda s'explique en partie par les implicites présents dans la leçon écrite par son enseignant M2. En effet, dans cette leçon, la technique pour calculer la valeur d'une expression littérale n'est pas explicitement donnée, elle est directement appliquée. C'est donc à Daouda d'inférer à partir de la résolution de la tâche qu'il faut repérer les opérateurs (dont les multiplications implicites), respecter les priorités opératoires, substituer les lettres par les valeurs demandées. Cette agrégation d'OM ponctuelles lui pose visiblement problème. Daouda tente néanmoins de fournir – au hasard ? – des techniques ou éléments technologiques pour essayer d'apporter une réponse à ce qui lui est demandé (il parle de « réduire », de « simplifier », ce qui ne correspond au type de tâches à réaliser).

Ryan (B, M2) a calculé l'expression $3x \times 2z$ pour $x = 2$ et $z = 7$. Il a obtenu un résultat correct.

– *Chercheur : Vas-y, explique-moi ce que tu as appliqué.*

– *Ryan : Alors... J'ai fait trois x fois deux z.*

– *C : Cette expression, tu l'as inventée ?*

– *R : Oui, je l'ai inventée. Et j'ai remplacé deux valeurs par... par un chiffre. x c'est 2 et z c'est 7. Donc comme le prof, il avait dit... 'fin, j'ai pas regardé dans le cahier... le prof, il avait dit que entre une lettre et un chiffre, il y avait toujours... 'fin, une valeur et un chiffre, y avait toujours un petit fois qui se cachait, sauf que on le marque pas sinon ce sera trop long, et euh... si on trouve la valeur, là, on le fait en priorité, bah j'ai fait... j'ai remplacé x par 2 et j'ai rajouté la multiplication au milieu, ça m'a fait deux fois trois donc j'ai fait 6. Pareil pour le deux z, j'ai remplacé z par 7 et j'ai mis le fois donc ça fait quatorze, et ensuite ça a donné le résultat six fois quatorze qui est... et après j'ai mis égal le résultat.*

Dans cet extrait, nous pouvons voir que l'explicitation des éléments de la technique pour calculer une expression littérale est beaucoup plus poussée chez Ryan que chez Daouda : Ryan évoque les priorités opératoires, les opérateurs « cachés », le remplacement des lettres par les valeurs. De plus, le fait qu'il ait lui-même inventé cette expression témoigne de sa capacité à identifier le type de tâches demandé et donc à changer lui-même les variables didactiques.

Pour les élèves de H1, entre deux séances, le type de tâches suivant leur avait été donné à faire :

« Ecrire autrement : $3 \times (a + 5) =$ »

La formulation de la consigne, sur laquelle on peut s'interroger, est celle de l'enseignante H1 qui, pour des raison que nous ignorons, a fait le choix de ne pas utiliser le verbe « Développer ».

Voici les réponses des élèves de H1 que nous avons interrogés pour cette tâche :

Vincent (D, H1) a écrit ceci : $3 \times (a + 5) = 3 \times 5a = 15$.

– *Chercheur : Vas-y, explique-moi ce que tu as fait.*

– *Vincent : J'ai fait trois fois a... Enfin, a plus cinq. Donc ça fait euh... cinq a fois* 3. *Donc du coup, ça fait quinze a.*

– *C : Ca fait ?*

– *V : Quinze a.*

– *C : Tu n'as écrit que quinze.*

– *V : Ah ! (Vincent « corrige ».)*

Tamara (B, H1) a écrit ceci : $3 \times (a + 5) = 3 \times a + 3 \times 5$.

– *Chercheur : Explique-moi ce que tu as fait pendant... ces quelques secondes.*

– *Tamara : Euh ben... on a eu des calculs... trois fois entre parenthèses a plus cinq. Ben j'ai utilisé la distributivité simple. Ca fait... l'égalité... trois fois a plus trois fois cinq.*

Nous pouvons constater que Tamara est capable de développer correctement l'expression et lui associe une idée de calcul (« *On a eu des calculs* »). De plus, elle donne spontanément la propriété utilisée (la distributivité simple). Autrement dit, Tamara convoque de manière correcte les OM nécessaires à la réalisation de la tâche. Vincent, lui, demeure moins précis que Tamara dans ses explications : il ne calcule pas, il « fait », et il ne précise pas la technologie qu'il utilise. De plus, il commet une erreur de type « concaténation » fréquente en collège ($a + 5 = 5a$), probablement due à son assujettissement à une institution antérieure (école primaire) : il continue peut-être de mobiliser une technologie arithmétique (l'addition doit nécessairement être effectuée et le symbole + donc doit « disparaître »). L'« oubli » de la lettre a, que Vincent s'empresse de « corriger » lorsque nous lui faisons remarque, ne nous paraît pas anodin : Vincent donne-t-il du sens à cette lettre ? Ne l'a-t-il pas elle aussi fait « disparaître » comme l'addition puisque, conformément à ce qui est habituellement fait en arithmétique, le résultat ne peut être qu'un nombre (sans lettre) ?

Remarquons que ni Tamara ni Vincent ne cherche à contrôler la validité de son calcul, par exemple en substituant la lettre par une valeur. Nous supposons que comme H1 n'a pas présenté en classe un tel moyen de contrôle, les élèves n'y ont pas recours dans leur étude hors la classe.

4.3.3 Conclusion

Selon leur « profil » et leur enseignant, les élèves n'accomplissent pas les mêmes gestes durant leur étude personnelle hors la classe entre deux séances et avant de préparer une évaluation sommative. Les élèves dits « moyens » ou « en difficulté » ne semblent pas réaliser certains gestes effectués par les « bons », comme l'identification des types de tâches, le diagnostic des besoins d'apprentissages, le choix de résoudre des types de tâches en fonction de ces besoins ; ils paraissent davantage accomplir des gestes de lecture et de mémorisation qui ne sont pas directement en lien avec la complexité de l'activité mathématique et peuvent être faits dans d'autres disciplines.

4.4 Mise en relation de gestes (ou d'absence de gestes) d'aide à l'étude des enseignants avec les gestes d'étude hors la classe de leurs élèves

Dans cette section, nous mettons en relation certains gestes d'étude observés chez les élèves hors la classe durant leur étude personnelle avec certaines pratiques de leurs enseignants. Les analyses seront affinées dans le chapitre dix, lorsque les outils théoriques du chapitre cinq auront été présentés.

Nous nous appuyons sur les entretiens [10] réalisés auprès des enseignants H1 et M2 pour déterminer des éléments de pratiques enseignantes en lien avec l'étude personnelle hors la classe des élèves. Les questions posées aux enseignants ont été présentées à la section 4.2.4.

H1 et M2 se sont appuyés sur une séquence sur les opérations sur les nombres relatifs pour répondre à nos questions.

10. Non transcrits.

4.4.1 Eléments sur les représentations des enseignants de l'étude personnelle de leurs élèves

a. Définition de l'étude personnelle

Pour l'enseignante H1, les élèves accomplissent un travail personnel en mathématiques seulement s'ils sont seuls et s'ils ne peuvent solliciter aucune aide. Selon elle, les moments où les élèves peuvent accomplir un tel travail ont lieu uniquement durant les évaluations écrites sur table, en classe. Le reste du temps, H1 estime que les élèves peuvent la solliciter en classe ou peuvent demander hors la classe de l'aide à leurs familles ou à leurs amis et ne sont donc pas en situation d'étude personnelle. H1 précise que pour elle, travail personnel et travail autonome coïncident.

Pour l'enseignant M2, le travail personnel consiste à écouter le professeur, faire les exercices, être attentif en classe et travailler à la maison. En appui sur la séquence sur les opérations sur les nombres relatifs, M2 explique que selon lui, le travail personnel sur cette séquence consiste à apprendre les règles opératoires : comment additionner, soustraire, multiplier des nombres relatifs. Contrairement à H1, M2 distingue travail personnel et travail en autonomie : selon lui, les élèves sont en autonomie lorsqu'ils ne peuvent pas le solliciter, ce qui n'arrive presque jamais en classe.

b. Ce que les enseignants attendent de leurs élèves hors la classe en mathématiques

Les leçons

L'enseignante H1 attend de ses élèves qu'ils apprennent leur cours lorsqu'ils étudient hors la classe. Pour la séquence sur les nombres relatifs, elle explique qu'il s'agit de mémoriser les règles et d'être capable de donner des exemples où ces règles s'appliquent. H1 a interrogé par écrit ses élèves sur ce cours. Pour cette interrogation, elle leur a explicitement demandé d'apprendre par cœur la règle des signes ; les élèves devaient réciter cette règle et donner un exemple où cette règle s'applique. En amont, H1 a rappelé aux élèves ce sur quoi ils seraient interrogés. Elle explique qu'avant chaque évaluation, elle explicite clairement en classe les points de cours sur lesquels les élèves seront interrogés.

De son côté, M2 attend de ses élèves hors la classe qu'ils relisent le cours et l'apprennent. Pour lui, apprendre le cours ne signifie pas l'apprendre par cœur, mais le « comprendre ». Selon lui, faire les exercices d'application en lien avec la leçon et ensuite relire cette leçon permettent cette compréhension. À la différence de H1, M2 ne fait pas d'interrogation sur ce cours, et réitère moins régulièrement ses exigences autour de l'étude hors la classe au cours de l'année ; il dit le faire en début d'année, puis environ une fois par trimestre, à l'occasion de bilans suivant les conseils de classe.

Les exercices

Entre deux séances, H1 et M2 donnent tous deux des exercices d'application à résoudre hors la classe. Au retour en classe des élèves, ils disent vérifier que les exercices ont bien été résolus. Ces exercices sont corrigés ; cependant, M2 ne vérifie pas si ses élèves prennent effectivement la correction, contrairement à H1.

La préparation d'une évaluation écrite sommative

Avant une évaluation sommative [11], H1 explique qu'elle précise toujours le contenu de cette évaluation. Sur la séquence sur les nombres relatifs par exemple, elle dit avoir détaillé oralement à ses élèves en classe une liste de types de tâches qui ont été demandés pendant l'évaluation : « *je leur ai dit que je les interrogerai sur les produits, et que tel exercice qu'on a fait s'y référait ; sur la division, et que tel exercice qu'on a fait s'y référait [...] il y aura des calculs de ce type, donc référez-vous à tel exercice* ». Elle dit également leur avoir donné des conseils oraux sur la manière de revoir les exercices : « *On cache [la correction], on refait seul, on ne regarde pas la correction, ensuite on compare* ».

M2, lui, dit donner aussi des conseils à ses élèves pour les aider à préparer une évaluation : « *révisez bien les additions et les soustractions, révisez bien les multiplications, révisez bien les divisions [...] révisez bien comment est-ce qu'on prouve qu'un triangle est rectangle, révisez bien comment est-ce qu'on trouve une mesure dans un triangle rectangle* ». Cependant, il reconnaît ne pas donner plus de précisions quant à la signification du verbe « réviser » : « *Pour être honnête, dans la plupart des cas, quand je leur dis « révisez, révisez », je n'explicite pas* ».

M2 dit ne donner que des types de tâches traités en classe dans ses évaluations. H1, elle, dit insérer dans les siennes un ou deux exercices d'une complexité plus élevée que ceux réalisés en classe.

Ni H1 ni M2 ne donnent de documents spécifiques pour aider les élèves à préparer leur évaluation durant leur étude personnelle hors la classe.

11. Nous ne parlons pas des interrogations courtes de leçons comme celles que H1 fait régulièrement, mais d'interrogations d'une heure dans lesquelles plusieurs exercices sont à résoudre par les élèves.

4.4.2 Mise en relation de gestes d'étude d'élèves avec certaines pratiques de leurs enseignants

Dans les paragraphes précédents, nous avons donné quelques éléments sur les pratiques des enseignants H1 et M2. Le choix de présenter ces éléments n'est pas anodin : nous mettons à présent en relation ces pratiques avec certains gestes d'étude observés chez les élèves interrogés et cherchons à faire ressortir les implicites autour du contrat relatif à l'étude personnelle hors la classe qui nous semblent pouvoir être relié à certains gestes d'étude accomplis – ou au contraire non accomplis – par les élèves.

Concernant l'apprentissage des leçons, nous avons constaté que les élèves de H1 accordaient davantage d'importance à la mémorisation par cœur du cours, contrairement aux élèves de M2 pour qui une ou plusieurs relectures semblaient suffire. Ceci peut être mis en lien avec le fait que H1 demande explicitement à ses élèves de mémoriser leur cours et les interroge par écrit sur ce cours, tandis que M2 demande explicitement à ne pas apprendre par cœur les leçons et ne réalise pas d'interrogations écrites sur ces leçons.

L'implicite demeure dans le verbe « apprendre » : apprendre quoi, apprendre comment ? Nous supposons que ceci explique que les gestes des élèves sont très variés dans l'apprentissage de cette leçon : certains lisent, relisent, mémorisent, s'attardent sur les exemples, récitent les définitions, font des allers et retours avec le cahier d'exercices, etc.

H1 et M2 demandent aux élèves de « refaire » ou « réviser » les exercices, sans apporter là non plus beaucoup de précisions, comme cela a été expliqué dans les paragraphes précédents. H1 et M2 donnent oralement une liste de quelques types de tâches qu'il y aura dans l'évaluation. Cependant, nous supposons encore que le manque de précision sur la manière de « revoir » les exercices, ou le fait que certaines recommandations sont uniquement orales, se traduit par une grande variété de gestes chez les élèves : lecture, relecture des corrigés (ou au contraire, ces corrigés sont ignorés, jugés inutiles), exercices faits au hasard dans le manuel, etc.

Les corrections ne sont pas beaucoup utilisées par les élèves de M2 ; elles semblent l'être davantage par les élèves de H1 qui est un peu plus regardante sur la prise de notes de ses élèves, même dans le cahier d'exercices.

H1 propose parfois, dans ses évaluations, un ou deux exercices dont les types n'ont pas été traités en classe ou l'ont peu été. Nous faisons l'hypothèse que cela accentue chez les élèves en difficulté l'idée d'« aléatoire » dans l'évaluation, ce qui peut générer du stress.

Enfin, H1 et M2 donnent peu voire ne donnent pas de document spécifique pour la préparation d'une évaluation. L'effort de synthèse, les liens à refaire, l'identification des types de tâches, le sens de la leçon à reconstruire, etc., semblent être essentiellement à la charge des élèves.

4.5 Conclusion

Huit élèves ont été interrogés sur la manière de conduire leur étude personnelle hors la classe en mathématiques, et dans des conditions particulières. La juxtaposition des extraits d'entretiens, l'identification de gestes récurrents (ou l'absence récurrente de gestes pour certains élèves), la tentative de mise en relation des éléments de discours des élèves avec leur profil, avec les gestes réalisés par leurs enseignants en classe et avec des hypothèses issues de la synthèse de travaux de recherche sur l'étude personnelle, semblent dessiner certaines tendances et indiquer des cohérences dans les pratiques d'élèves autour de la préparation d'une évaluation sommative.

4.5.1 Des gestes d'étude qui semblent liés au « profil »

Les analyses précédentes semblent corroborer l'hypothèse selon laquelle les « bons » élèves réalisent des gestes communs et qui ne sont pas ceux des élèves « moins bons ». En particulier, un geste dont nous supposons qu'il joue un rôle crucial dans la réussite scolaire de ces « bons » élèves est l'identification des types de tâches.

a. Un élément central : l'identification des types de tâches

Les « bons » élèves semblent en effet davantage identifier les différents types de tâches d'un thème d'étude que les élèves « moins bons ». Nous faisons l'hypothèse que cette identification des types de tâches les amène à réaliser d'autres gestes d'étude que n'accomplissent pas les élèves « moins bons ». Elle leur permet entre autres :

- de disposer d'une confiance en eux vis-à-vis de l'évaluation ;
- de trouver un intérêt modéré aux révisions, voire de ne pas réviser du tout ;
- d'établir un diagnostic pertinent de l'état de leurs apprentissages ;
- de cibler rapidement les types d'exercices à travailler parmi la liste des types exigibles dans l'évaluation, de sélectionner des exercices en lien avec leurs difficultés et ainsi construire un milieu pertinent pour la préparation de l'évaluation ;

– de décontextualiser les exemples de la leçon, de faire les liens entre les propriétés et ces exemples, entre les propriétés et les exercices faits en classe (attitude de secondarisation) ;
– de ne pas être surpris par ce qui est demandé en évaluation et d'y retrouver tous les types de tâches travaillés en classe.

À l'inverse, les élèves « moins bons » ne vont pas aussi bien identifier les types de tâches, et par conséquent :

– considèrent l'évaluation comme contenant une part d'aléatoire, parce qu'ils n'y retrouvent pas – puisqu'ils ne les ont pas tous identifiés – les types d'exercices qu'ils croient avoir traité en classe ;
– fournissent d'importants efforts durant leurs révisions, en se lançant dans une entreprise de mémorisation intense des exercices et/ou de leurs corrigés, ou bien en s'entraînant longuement sur des exercices, en en résolvant une grande quantité, alors que ces exercices n'auront pas été choisis de manière pertinente (parce qu'ils ne recouvrent pas l'ensemble des types d'exercices qui pourront être demandés en évaluation ou parce qu'un même type d'exercice sera travaillé plus de fois que nécessaire) ;
– utilisent des discriminants d'arrêt des révisions en termes de temps passé à travailler ou en nombre d'exercices résolus à la place de critères portant sur les savoirs à acquérir ;
– ne décontextualisent pas suffisamment les exemples de la leçon et ne font pas autant de liens entre propriétés et exercices que les « bons » élèves.

Ici, nous retrouvons des tendances communes à d'autres travaux, entre autres : Milhaud ((1998)) et Esmenjaud-Genestoux ((2005)) pour l'identification des types de tâches, Castela ((2000), (2007a)) et Farah ((2015)) pour les gestes spécifiques des élèves en réussite même si nous nous situons au collège et que ces travaux portent sur le lycée et le supérieur.

b. Rapport stratégique VS rapport tactique (Castela, 2000)

Les discours tenus et les gestes réalisés par les « bons » élèves semblent conforter l'idée selon laquelle ces élèves entretiennent un rapport stratégique vis-à-vis des mathématiques : le cours et les exercices résolus constituent pour eux un capital dans lequel ils pourront puiser afin d'affronter le futur, le nouveau et/ou le similaire.

> *« Que je m'exerce [...] que j'essaie de comprendre. Que je comprenne, pour que je sois motivé* ***pour le prochain cours et que je comprenne***

> ***vite.*** *» (Ryan, B, M2)*
>
> *« Comprendre la leçon* ***pour comprendre les erreurs qu'on fait*** *lorsqu'on a des exercices. » (Tamara, B, H1)*
>
> *« j'écoute surtout les définitions et comment calculer, pour mieux enregistrer ça et après, je fais aussi les exercices, je me concentre dessus* ***pour réussir et que pour la prochaine fois, je continue*** *» (Marianne, B, M2)*

À l'inverse, les élèves « moins bons » paraissent avoir un rapport plutôt tactique aux mathématiques, avec une vision de la réussite comme relevant d'un entraînement sportif. Ces élèves semblent miser sur une proximité forte entre ce qui a été traité en classe et ce qui sera demandé à l'évaluation, ce qui les amène probablement à fournir de gros efforts de mémorisation dans l'espoir de parvenir à une adaptation locale, faible, lors de l'évaluation.

Nos résultats rejoignent ici Castela (2000) sur le rapport tactique / rapport stratégique et la vision de la réussite, même si les travaux de Castela portent sur le supérieur. Nous constatons donc que dès le collège semblent s'installer – ou semblent déjà être installées – des visions de la manière de réussir une évaluation sommative.

4.5.2 Des gestes d'étude qui semblent liés aux pratiques enseignantes

À plusieurs reprises, nous avons constaté des différences entre les élèves de H1 et de M2. Les premiers semblent davantage accorder de l'importance à la mémorisation – par cœur – de la leçon que les seconds. Ceci peut être mis en relation avec les attentes explicites des enseignants H1 et M2. Contrairement à M2, H1 semble avoir tendance à exiger de ses élèves cet apprentissage par cœur des propriétés et des définitions. Ses évaluations comprennent par ailleurs toujours une ou plusieurs questions de cours. Les élèves paraissent être assez sensibles à cette part du contrat didactique relatif à l'évaluation.

D'autre part, les élèves de H1 semblent avoir trouvé plus de différences entre ce qui est traité en classe et ce qui est demandé à l'évaluation que les élèves de M2. Ceci provient peut-être du fait que nous n'avons pas pu interroger des élèves « en difficulté » pour M2 (le « profil » joue possiblement un rôle dans la sensation de ressemblance ou non), mais nous faisons l'hypothèse que cela est peut-être dû aussi au fait que H1 propose souvent un ou deux types d'exercices en évaluation qui n'ont pas été traités en classe, ou peu traités, ou qui portent sur d'anciens chapitres, créant ainsi ce sentiment de dissemblance, voire d'aléatoire chez les élèves les plus « en difficulté ». Nous qualifions ceci de « trahison » relative au contrat passé avec les élèves vis-à-vis de l'évaluation, car H1 explicite les savoirs et savoir-faire qui seront principalement exigés lors de l'évaluation lorsqu'elle prévient ses élèves que cette évaluation va avoir lieu ; le fait de rajouter des exercices de complexité différente de ceux traités en classe ou des types d'exercices relevant d'anciens chapitres constitue un écart par rapport à ce contrat.

Nous rapprochons en partie nos observations de celles obtenues dans Felix et Joshua ((2002)) sur les différences entre évaluation et ce qui est fait en classe, et l'hypothèse selon laquelle un contrat d'étude personnelle réaliste (Esmenjaud-Genestoux, (2005)) favorise la réussite scolaire nous paraît tout à fait envisageable.

4.5.3 Une première étude exploratoire qui débouche sur de nouvelles questions

Comment préciser la mise en relation de certaines pratiques enseignantes avec les gestes d'étude de leurs élèves hors la classe ? En particulier, comment analyser d'une part les liens entre les OM enseignées en classe et les OM apprises, d'autre part les gestes d'aide accomplis en classe par l'enseignant pour accompagner ses élèves dans leur étude personnelle hors la classe ?

Des éléments de réponse ont pu être apportés dans ce quatrième chapitre, mais cette première étude exploratoire a présenté quelques limites. Elle ne prend notamment pas assez en compte des éléments importants mentionnés dans les chapitres un et deux, à savoir les spécificités du thème d'étude travaillé par les élèves en classe, et l'influence des pratiques des enseignants sur la manière dont les élèves organisent leur étude personnelle appelle à être précisée. Ceci s'explique par le fait qu'au moment où nous avons conduit cette étude, nous ne disposions ni de la synthèse complète de travaux présentée au chapitre trois, ni des outils théoriques développés au chapitre cinq pour analyser l'étude personnelle des élèves. Nos interrogations étaient à l'époque centrées sur l'élève, sur ce qu'il faisait ou non hors la classe en mathématiques ; la question de la mise en relation entre les gestes d'étude de cet élève et les pratiques de son enseignant n'est apparue qu'à la suite de cette première étude exploratoire.

Les résultats que nous avons obtenus nous paraissent néanmoins intéressants à présenter et justifient l'intégration de ce chapitre dans notre manuscrit. Les limites rencontrées nous ont conduit à développer les outils théoriques du chapitre cinq. Comprendre ces limites revient à comprendre les raisons d'être de ces outils.

Les tendances qui ressortent des présentes analyses nous servent également de point d'appui pour concevoir le PER sur les équations du chapitre neuf. En effet, ces analyses ont permis d'identifier une partie des besoins des élèves concernant l'organisation de leur étude personnelle, identification que nous avons au chapitre deux supposée nécessaire à l'établissement d'un rapport personnel idoine des élèves aux objets de l'algèbre.

Enfin, nous avons dégagé des gestes d'étude qui semblent accomplis par les élèves en réussite ; certains de ces gestes ont déjà été repérés dans d'autres travaux (Félix, 2002 ; Castela, 2007a). Ces tendances demandent à être confirmées par une étude sur un échantillon d'élèves plus vaste avec des outils statistiques adaptés.

Chapitre 5

Modélisation de l'étude personnelle

5.1 Objectifs du chapitre

Ce cinquième chapitre présente le modèle théorique que nous avons développé pour pouvoir analyser la relation entre les gestes d'étude accomplis par les élèves en autonomie hors la classe dans une institution donnée (classe de quatrième dans un collège REP) et sur un thème d'étude donné (les équations), et les gestes d'aide à l'étude effectués par leur enseignant en classe sur ce même thème.

Dans les chapitres trois et quatre, nous avons respectivement réalisé une synthèse de travaux de recherche sur la question de l'étude personnelle des élèves et des gestes d'aide à l'étude de leurs enseignants, et une étude exploratoire sur le terrain. Nous avons constaté que les élèves interrogés et filmés lors de leur étude personnelle hors la classe accomplissent ou non certains gestes d'étude, et que selon leur « profil » et leur enseignant, ces gestes ne sont pas les mêmes. Nous relions ces observations à nos hypothèses de recherche émises au chapitre deux : selon nous, les gestes d'étude accomplis ou non par les élèves hors la classe sont influencés par les gestes d'aide à l'étude accomplis ou non par leurs enseignants en classe (postulat de la théorie de l'activité, Vygotski, (Vygotski, 1997), mais aussi aux phénomènes transpositifs du savoir ((Chevallard, 1985)), et nous cherchons à mettre en relation les gestes des uns et des autres.

Cependant, les travaux de recherche que nous avons passés en revue au chapitre trois ne présentent pas de résultats concernant cette mise en relation, du moins pas dans une approche anthropologique prenant en compte à la fois la structure de l'activité mathématique, les spécificités d'un thème donné et le rôle de l'institution dans l'organisation de l'étude. Dans notre première étude exploratoire présentée au chapitre quatre, nous avons davantage mis l'accent sur les praxéologies mathématiques mobilisées par les élèves sur le thème des expressions algébriques (comparativement aux travaux de recherche du chapitre trois), mais le lien avec les pratiques enseignantes, les OM enseignées et les gestes d'aide à l'étude demeurait encore à préciser.

Ces constatations nous conduisent à élaborer un modèle théorique davantage adapté à nos questions de recherche, autrement dit un modèle nous permettant, dans une institution donnée, sur un thème d'étude donné, de traquer les implicites autour de l'étude personnelle qui ne sont pas levés par l'enseignant et qui pourraient expliquer l'absence de certains gestes d'étude chez les élèves les plus en difficulté, absence conduisant à la construction d'un rapport personnel non idoine aux équations.

5.2 Les principaux éléments dont le modèle doit pouvoir rendre compte

Nous présentons dans cette section les principaux éléments que nous voulons inclure dans le modèle théorique relatif à l'étude personnelle des élèves.

a. Rappels : les gestes d'étude et d'aide à l'étude, et l'étude personnelle

Rappelons que dans le cadre de la TAD, l'étude consiste pour l'élève, au sein d'une institution donnée, à exploiter les conditions mises en place par l'enseignant pour que se produisent les apprentissages. Un geste d'étude est une action accomplie par l'élève pour étudier et un geste d'aide à l'étude est une action accomplie par l'enseignant pour aider l'élève à étudier. Chaque fois que nous parlerons d'un geste d'aide à l'étude (respectivement d'un geste d'étude), nous nous placerons du côté de l'enseignant (respectivement du côté de l'élève). Ainsi, à tout geste d'aide à l'étude correspond un geste d'étude.

Nous reprenons la définition donnée dans le chapitre trois de l'étude personnelle d'un élève sur des OM au sein d'une institution donnée : il s'agit de l'ensemble des gestes d'étude accomplis par cet élève pour construire les apprentissages qui lui sont nécessaires pour établir un rapport personnel idoine aux OM en question dans cette institution. Nous qualifions cette étude d'idoine si elle permet effectivement la construction d'un rapport personnel idoine aux objets de savoir en jeu.

Cette définition est motivée par plusieurs éléments. Nous avons expliqué dans les chapitres un et deux qu'il pouvait exister d'une part un décalage en classe entre le temps didactique et le temps praxique (Castela, (Castela, 2008)), d'autre part des besoins d'apprentissages auxquels l'institution pouvait ne pas apporter de réponse en termes d'organisation didactique. De tout ceci découle la nécessité pour certains élèves, au moins de prolonger l'étude des OM étudiées en classe, au plus de prendre eux-mêmes en charge, sans que cela ne soit explicitement et didactiquement organisé par l'institution, l'étude d'OM non travaillées en classe. Cette étude, non obligatoirement prescrite par l'institution, qui a lieu en sus de l'étude en classe et qui dépend des besoins de l'élève, constitue l'étude personnelle.

b. Des praxéologies d'étude pour modéliser l'étude personnelle

Par ailleurs, dans les chapitres trois et quatre, des gestes d'étude accomplis par les élèves dits en réussite dont nous supposons qu'ils favorisent la réalisation d'une étude personnelle idoine ont été étiquetés, comme le fait d'identifier à partir d'une tâche mathématique donnée le type de tâches mathématiques parent. Ces gestes d'étude relèvent de praxéologies non mathématiques même s'ils sont en lien avec la structure de l'activité mathématique telle qu'elle est décrite en TAD. Il s'agit de praxéologies ne contribuant pas au produit de l'activité mathématique mais davantage à son déroulement. Nous appelons de telles praxéologies des *praxéologies d'étude*. Nous développons ce point plus bas (section 5.3). Le modèle théorique que nous voulons construire ici doit prendre en compte ce type de praxéologies.

c. La prise en compte des moments de l'étude

Le modèle doit aussi intégrer le fait que l'étude d'OM peut être accomplie suivant une organisation didactique dont la description est donnée à l'aide des six moments de l'étude présentés au chapitre deux. Selon le moment de l'étude, les gestes d'aide à l'étude et les gestes d'étude peuvent différer ou ne pas apparaître.

d. Etude personnelle et autonomie

Enfin, nous avons indiqué dans les chapitres un à quatre que l'étude personnelle s'accompagne potentiellement d'une autonomie vis-à-vis des apprentissages. Ainsi, lorsque l'élève a le sentiment d'être « seul à la barre » et que l'enseignant n'interagit pas avec lui durant l'étude personnelle, cette dernière est qualifiée d'autonome. Nous voulons intégrer dans le modèle de l'étude personnelle cette dimension « autonomie ».

5.3 Praxéologies d'étude supposées permettre de construire de manière idoine des praxéologies mathématiques

5.3.1 Présentation

Dans cette section, nous développons la notion de praxéologie d'étude et listons des praxéologies d'étude supposées permettre de construire de manière idoine des praxéologies mathématiques qui nous serviront à analyser les gestes d'aide à l'étude de l'enseignant et les gestes d'étude de ses élèves hors la classe (chapitre dix).

a. Définition d'une praxéologie d'étude

Une praxéologie d'étude est une praxéologie visant à apprendre à construire, à utiliser, à articuler, à situer les unes par rapport aux autres, des OM (ou praxéologies mathématiques). Une praxéologie d'étude concerne le déroulement de l'activité de recherche mathématique et non pas son produit, elle fait référence aux gestes d'étude heuristiques, aux gestes pour apprendre.

Une organisation praxéologique d'étude ponctuelle, comme pour une OM ponctuelle, se constitue en un quadruplet [type de tâches d'étude, technique d'étude, technologie d'étude, théorie d'étude], bien que, comme nous allons l'expliquer, il nous semble actuellement difficile de préciser le bloc du *logos* [technologie, théorie].

Nous distinguons praxéologie d'étude et geste d'étude (ou d'aide à l'étude). La définition d'un geste d'étude, rappelée précédemment, est générale et ne fait pas précisément référence à un type de tâches d'étude ou à une technique d'étude. Le modèle praxéologique que nous proposons permet justement de préciser le geste d'étude accompli en décrivant au moins le type de tâches d'étude réalisé et une technique d'étude mise en œuvre pour ce faire.

b. Justification du choix de parler de praxéologies d'étude

Parler de *praxéologies* d'étude revient à affirmer l'existence de techniques d'étude et de technologies justifiant ces techniques, que l'enseignant peut explicitement mettre en scène en classe, qu'il peut élaborer, travailler, évaluer auprès de ses élèves à travers une organisation didactique. Ceci constitue potentiellement un renversement dans la manière de considérer l'étude personnelle : la responsabilité qui peut habituellement peser en totalité sur les élèves concernant leur étude personnelle est ici partagée avec l'enseignant. Nous posons en effet la question des aides que ce dernier peut apporter aux élèves pour que ceux-ci développent des praxéologies d'étude favorisant la construction non seulement d'un rapport personnel idoine aux objets de savoir étudiés, mais également de gestes d'étude utiles pour apprendre à construire et à organiser des praxéologies mathématiques. L'enseignant organise-t-il en classe un moment de première rencontre avec un type de tâches d'étude, des moments d'élaboration d'une technique d'étude, du travail de cette technique, d'institutionnalisation de cette technique, voire même d'évaluation de cette technique ? Nous faisons l'hypothèse que des élèves, notamment ceux en difficulté, ne mobilisent pas certaines praxéologies d'étude parce qu'il n'y a jamais eu pour eux de tels moments officiels. N'étant pas des enjeux didactiques explicites, ces techniques d'étude sont potentiellement passées sous silence dans l'institution, et ne sont utilisées que par un nombre restreint d'élèves, les « bons », qui ont probablement élaboré, travaillé, testé et jugé comme fiables de telles techniques.

5.3.2 Des praxéologies d'étude ne dépassant pas le niveau pédagogique

Dans le modèle théorique que nous développons, où se situent les types de tâches d'étude fréquemment demandés aux élèves, à savoir « apprendre une leçon », « revoir des exercices », « réviser un contrôle » ?

Enoncés tels quels et sans précision de techniques d'étude explicites, ces types de tâches sont accomplis de manière diverse par les élèves, comme l'ont montré certains travaux de recherche ((Félix, 2002), (Castela, 2007a)) du chapitre trois et nos observations du chapitre quatre. En particulier, les élèves en difficulté utilisent potentiellement des techniques d'étude qui ne leur permettent pas de construire effectivement les OM nécessaires à l'établissement d'un rapport personnel idoine aux objets de savoir en jeu, comme la simple relecture de corrigés, la mémorisation du cours ou l'entraînement intensif sur des tâches choisies aléatoirement.

Selon nous, ces types de tâches d'étude (apprendre, revoir, réviser, ...) relèvent de praxéologies d'étude « générales » ne prenant pas en compte la spécificité et la complexité de l'activité mathématique ; elles peuvent être mobilisées dans d'autres disciplines : on peut *apprendre une leçon* d'histoire, *revoir des exercices* de chimie, *réviser un contrôle* d'éducation musicale. Autrement dit, ces praxéologies d'étude se situent à un niveau pédagogique dans l'échelle des niveaux de codétermination didactique[1] (Chevallard, 2002) et ne vont pas au-delà (niveaux discipline, domaine, secteur, etc.). Nous faisons l'hypothèse qu'accomplir ces types de tâches d'étude *en mathématiques* nécessitent de mobiliser certaines praxéologies d'étude – que nous allons décrire ci-dessous – pour pouvoir construire et organiser des OM. Or, l'absence de discours explicite en classe de la part de l'enseignant sur des techniques d'étude en mathématiques peut entraîner la mobilisation de gestes d'étude non idoines hors la classe par les élèves, notamment ceux qui sont le plus en difficulté.

5.3.3 Les praxéologies d'étude supposées permettre la construction idoine de praxéologies mathématiques

La synthèse de travaux réalisée au chapitre trois, les observations issues de l'étude exploratoire présentés au chapitre quatre et le modèle des moments de l'étude (Chevallard, 1998a) pour décrire l'organisation didactique de l'étude nous servent de points d'appui pour déterminer des praxéologies d'étude que nous considérons comme permettant effectivement d'apprendre à construire et à organiser des praxéologies mathématiques, et sur lesquelles nous nous appuierons pour décrire et analyser les praxéologies d'étude travaillées en classe sous la direction de l'enseignant et mobilisées ensuite hors la classe par les élèves.

Contrairement à ce que nous ferons au chapitre sept lorsque nous présenterons l'OM de référence épistémologique relative aux équations du premier degré, nous ne présentons pas ici de manière formelle des organisations praxéologiques d'étude pilotées par des technologies d'étude. En effet, quelles sont ces technologies d'étude reconnues institutionnellement ? Nous n'avons pas connaissance à ce jour de discours rationnels partagés officiellement par la communauté des enseignants sur la manière idoine de mener une étude personnelle en mathématiques. Les observations sur le terrain de collégiens, de lycéens et d'universitaires en train d'accomplir leur étude personnelle en mathématiques sont des données empiriques à partir desquelles nous pouvons extrapoler que certaines techniques d'étude – celles mobilisées par les sujets en réussite scolaire – permettent effectivement d'apprendre à construire et organiser des praxéologies mathématiques. Autrement dit, si technologies d'étude il y a, celles-ci sont selon nous pour le moment essentiellement empiriques. L'appui sur les moments de l'étude (Chevallard, 1998a) nous donne à la rigueur une assise *théorique* pour justifier en partie que telle ou telle praxéologie d'étude permet effectivement de construire et d'articuler des praxéologies mathématiques. En effet, l'organisation

1. Voir chapitre 2 pour un rappel de ces niveaux.

didactique telle qu'elle est décrite par Chevallard fournit bien des gestes d'aide à l'étude que doit accomplir l'enseignant, en tant que directeur d'*étude*, pour aider ses élèves, lors de leur *étude*, à construire et à organiser des OM pour établir un rapport personnel idoine à cet objet de savoir. Ces remarques expliquent l'absence de précision d'un discours technologique d'étude dans les praxéologies d'étude présentées ci-après.

Les sous-sections qui suivent décrivent les praxéologies d'étude dont nous supposons qu'elles favorisent une construction idoine des praxéologies mathématiques, du moins pour le collège :

- Identifier à partir d'une tâche mathématique donnée le type de tâches parent.
- Mettre en relation un type de tâches avec une technique pour le réaliser et une technologie justifiant cette technique.
- Situer et articuler des OM entre elles [2].
- Diagnostiquer l'état de ses apprentissages et réguler en fonction ses besoins d'apprentissages [3].

Les techniques d'étude que nous décrivons ci-après pour réaliser les types de tâches d'étude précédents ne sont pas supposées être réalisées de manière indépendante ; au contraire, nous faisons l'hypothèse que les « bons » élèves articulent plusieurs de ces techniques.

5.3.4 Identifier un type de tâches mathématique, une technique mathématique, une technologie mathématique

a. Présentation

Le premier type de tâches d'étude que nous retenons concerne l'identification des types de tâches mathématiques. D'après la synthèse de travaux de recherche sur l'étude personnelle et les observations de l'étude exploratoire en collège que nous avons menée, identifier un type de tâches mathématiques est un geste d'étude central qui semble accompli par les élèves en réussite et qui est convoqué dans la réalisation d'autres types de tâches d'étude, comme le diagnostic des besoins d'apprentissages et la régulation de ces derniers.

---

2. Ceci inclut : situer et articuler des OM nouvelles entre elles, et situer et articuler des OM nouvelles par rapport à d'anciennes OM qu'elles convoquent.

3. Comme nous le préciserons plus loin, nous considérons que cette praxéologie d'étude n'est pas à mobiliser par les élèves en difficulté ; nous estimons que c'est à l'enseignant que revient la charge de diagnostiquer et de réguler les besoins d'apprentissages de ses élèves.

Comme nous allons l'expliquer, une technique d'étude pour identifier un type de tâches mathématiques peut consister à repérer des techniques ou technologies mathématiques fréquemment associées à ce type de tâches. De fait, identifier une technique mathématique et identifier une technologie mathématique comme telles nous semblent être des types de tâches d'étude permettant la construction des OM, parce qu'utiles, si ce n'est nécessaires, à la réalisation d'autres techniques d'étude.

b. Techniques d'étude pour identifier un type de tâches, une technique, une technologie mathématiques

Pour identifier un type de tâches mathématiques, différentes techniques peuvent être utilisées, voire articulées les unes aux autres.

Une technique d'étude peut consister à repérer des mots-clés dans la consigne (résoudre, mettre en équation, ...) ou des ostensifs habituellement rattachés à l'objet de savoir étudié. Ceci peut être rapproché des gestes mémoriels « preneurs d'indice » et des gestes mémoriels en appui sur un ostensif déclencheur (Araya-Chacon, (Araya-Chacón, 2008)) même si dans notre cas, il ne s'agit pas de gestes accomplis par l'enseignant spécifiquement en lien avec la mémoire didactique de la classe.

Une autre technique d'étude peut être de consulter des systèmes didactiques (cahiers de leçons et d'exercices, manuels, Internet, accompagnateur d'étude, ...) susceptibles de pouvoir présenter une liste des types de tâches mathématiques en lien avec l'objet de savoir étudié.

Une autre technique d'étude peut être de comparer les tâches mathématiques rencontrées en classe entre elles et de comparer leurs énoncés, les variables didactiques qui changent d'un énoncé à l'autre, voire les techniques ou technologies mathématiques mobilisées pour réaliser ces tâches, et abstraire de ces différents éléments les divers types de tâches mathématiques correspondants. Cette technique d'étude suppose de pouvoir identifier des techniques et des technologies mathématiques.

Pour identifier une technique mathématique ou une technologie mathématique, et de manière similaire à ce qui vient d'être expliqué, une technique d'étude peut consister à consulter des ouvrages (cahiers, manuels, ...) ou solliciter des aides à l'étude susceptibles de lister ces techniques et technologies mathématiques. Une autre technique d'étude pour ce faire consiste à comparer les résolutions de tâches mathématiques et à abstraire de ces résolutions les techniques et technologies mathématiques mobilisées.

5.3.5 Mettre en relation type de tâches avec une technique et technologie mathématiques

a. Présentation

Une technique mathématique permet de réaliser un ensemble de type de tâches mathématiques ; une technologie permet de justifier et de guider la mise en œuvre d'un ensemble de techniques mathématiques. Aussi, pour construire une OM ponctuelle, l'élève doit-il être capable d'associer à un type de tâches mathématiques une technique et une technologie mathématiques. Dans le modèle proposé par Chevallard (1998a) d'une organisation didactique de l'étude, plusieurs moments de l'étude permettent cette mise en relation et ont fréquemment lieu simultanément : le moment de la première rencontre avec un type de tâches mathématique peut coïncider avec le moment de l'élaboration d'une technique pour le réaliser et le moment de l'élaboration de l'environnement technologico-théorique justifiant cette technique. Ces éléments nous confortent dans notre choix de retenir la mise en relation d'un type de tâches mathématique avec une technique et une technologie mathématiques comme relevant d'une praxéologie d'étude permettant effectivement de construire des OM.

La mise en relation d'un type de tâches mathématiques avec une technique et une technologie peut contribuer à l'identification du type de tâches mathématiques en question, et réciproquement.

b. Techniques d'étude pour mettre en relation un type de tâches mathématiques avec une technique et une technologie mathématiques

Une technique d'étude générale pour réaliser le type de tâches d'étude précédent consiste à se remémorer les types de tâches, techniques, technologies mathématiques rencontrés en classe, à solliciter des systèmes didactiques tels que les manuels scolaires, cahiers de leçons et d'exercices, et à identifier les relations entre types de tâches, techniques et technologies qui y sont – explicitement ou non – présentes.

Une autre technique d'étude consiste à solliciter des aides à l'étude susceptibles d'identifier ces relations.

Une autre technique d'étude peut être de comparer plusieurs corrigés et de repérer dans ces corrigés les techniques et technologies mobilisées dans la réalisation d'une tâche mathématique pour en déduire les relations les unissant.

5.3.6 Situer et articuler des OM entre elles

a. Présentation

La réalisation d'une tâche mathématique à l'aide d'une technique peut nécessiter d'articuler des praxéologies mathématiques ponctuelles entre elles, et notamment de convoquer des OM anciennes. Par exemple, résoudre algébriquement une équation du premier degré en classe de quatrième nécessite d'utiliser les priorités opératoires et le calcul sur les expressions algébriques rencontrés en classe de cinquième, de mobiliser le sens des opérateurs travaillé à l'école primaire, etc.

D'après la synthèse de travaux de recherche sur l'étude personnelle, les « bons » élèves semblent pouvoir occuper la position $E2$ dans le sur-didactique lors de leur étude personnelle hors la classe parce qu'ils savent en particulier mettre en relation de manière transversale dans le temps et dans l'espace des OM anciennes et nouvelles sans que le travail de certaines OM anciennes n'ait été pointé comme nécessaire aux apprentissages par l'enseignant (Castela, 2007a), là où d'autres de leurs camarades, plus en difficulté, n'y parviennent pas.

Ainsi, pour apprendre à construire et à organiser des OM nouvelles, il peut être nécessaire de savoir situer ces OM par rapport à d'anciennes OM qui sont potentiellement convoquées par les nouvelles. C'est pourquoi nous retenons ce type de tâches d'étude dans les praxéologies d'étude supposées favoriser une activité mathématique idoine.

b. Technique pour situer et articuler des OM entre elles

Une technique d'étude pour situer des OM nouvelles entre elles peut être d'identifier des OM ponctuelles et les technologies justifiant les techniques permettant de réaliser les tâches mathématiques de ces OM ponctuelles. Une autre technique d'étude peut être de recourir à des systèmes didactiques auxiliaires (manuels, aides à l'étude, ...) susceptibles de pouvoir faire cette identification.

Une technique d'étude pour situer une OM nouvelle par rapport à d'anciennes OM qu'elle convoque peut consister à identifier ces OM anciennes et les techniques mathématiques des OM nouvelles qui convoquent ces OM anciennes. Une autre technique peut consister là encore à solliciter un système didactique auxiliaire susceptible d'aider à identifier les OM anciennes convoquées dans l'étude des nouvelles OM.

5.3.7 Diagnostiquer l'état de ses apprentissages mathématiques et réguler ses besoins d'apprentissages

D'après la synthèse de travaux de recherche sur l'étude personnelle, notamment d'après les travaux de Castela (2007a), et d'après l'étude exploratoire du chapitre sept, deux gestes d'étude qui semblent accomplis par les élèves en réussite sont le diagnostic de l'état de leurs apprentissages et la régulation de ses besoins d'apprentissages. Ces gestes correspondent au moment de l'étude de l'évaluation de la technique (Chevallard, 1998a). Ces gestes relèvent bien de praxéologies d'étude car ils permettent de construire des OM.

a. Techniques d'étude pour diagnostiquer l'état de ses apprentissages mathématiques et réguler ses besoins d'apprentissages

Pour diagnostiquer l'état de ses apprentissages mathématiques, plusieurs techniques d'étude sont envisageables :

- Tester sa capacité à réaliser les différents types de tâches travaillés dans le SDP classe. Cette technique d'étude convoque le type de tâches d'étude « identifier un type de tâches mathématique à partir d'une tâche mathématique ». Elle permet une étude économique en termes de temps et d'efforts.
- Tester la fiabilité, la robustesse, la portée d'une technique mathématique en accomplissant des tâches mathématiques que cette technique permet de réaliser. Différentes tâches mathématiques, même si elles relèvent du même type de tâches, peuvent nécessiter des adaptations dans l'application de la technique mathématique. Lorsqu'un sujet évalue une technique, il vérifie qu'il est capable de résister aux petites variations d'énoncés nécessitant des adaptations dans l'application de cette technique mathématique. Cette technique d'étude convoque les types de tâches d'étude « identifier un type de tâches, une technique, une technologie mathématiques » et « mettre en relation un type de tâches mathématiques avec une technique et une technologie mathématiques » car il est nécessaire pour l'appliquer d'identifier une tâche mathématique comme relevant d'un type de tâches paramétré par des variables didactiques, d'identifier une technique ou une technologie comme en étant une, et d'associer à un type de tâches mathématiques une technique permettant de le réaliser.
- Comparer sa manière de réaliser les types de tâches mathématiques avec un corrigé institutionnel et d'identifier les écarts : écart en termes de rédaction

(ostensifs utilisés par exemple), écart en termes d'application de la technique ou d'utilisation de la technologie pour justifier la technique. Cette technique convoque donc les types de tâches d'étude « identifier un type de tâches, une technique, une technologie mathématiques » et « mettre en relation un type de tâches mathématiques avec une technique et une technologie mathématiques ».

Une technique d'étude générale pour réguler ses besoins d'apprentissages consiste d'abord à les identifier (types de tâches d'étude précédent), puis en fonction des besoins identifiés – ici, nous parlerons d'*écarts* avec ce qui est institutionnellement attendu – d'effectuer une technique d'étude adaptée à ces besoins (la liste qui suit n'est pas exhaustive) :

- S'il y a par exemple un écart au niveau des ostensifs utilisés, réutiliser ces ostensifs en réalisant un type de tâches identique à celui qui vient d'être réalisé, et dont on dispose d'un corrigé institutionnel, pour vérifier que l'on sait les utiliser conformément aux attentes de l'institution.
- S'il y a un écart au niveau de l'application de la technique, appliquer de nouveau la technique sur un type de tâches identique à celui qui vient d'être réalisé, et dont on dispose d'un corrigé institutionnel, pour vérifier que l'on sait l'appliquer conformément aux attentes de l'institution.
- S'il y a un écart au niveau de l'utilisation d'une technologie, utiliser de nouveau cette technologie en réalisant un type de tâches identique à celui qui vient d'être réalisé, et dont on dispose d'un corrigé institutionnel, pour vérifier que l'on sait l'utiliser conformément aux attentes de l'institution.
- Si l'écart provient d'un rapport personnel non idoine à un objet de savoir ancien, construire et organiser les OM anciennes correspondantes, à l'aide des praxéologies d'étude qui viennent d'être décrites dans ces sous-sections.

Ces techniques d'étude permettent à l'élève d'occuper les positions E1 ou E2 dans les niveaux du sur-didactique du modèle de structuration du milieu.

5.3.8 À propos du glissement métacognitif

À la lecture des paragraphes précédents, le lecteur pourrait penser qu'à force de parler de praxéologies d'étude et non plus de praxéologies mathématiques, nous perdions de vue ces dernières et tombions dans ce que Brousseau ((Brousseau, 1986)) appelle un *glissement métacognitif* :

> « Lorsqu'une activité d'enseignement a échoué, le professeur peut

être conduit à se justifier et pour continuer son action, à prendre ses propres explications et ses moyens heuristiques comme objets d'étude à la place de la véritable connaissance mathématique. [...] le 'moyen' devient à son tour objet d'enseignement et se surcharge de conventions, de langages spécifiques à leur tour enseignés et expliqués à chaque étape de diffusion. Dans ce processus, plus l'activité d'enseignement produit de commentaires et de conventions, moins les étudiants peuvent contrôler les situations qui leur sont proposées. – C'est l'effet de glissement métacognitif » (Brousseau, 1986, p. 43-44)

Nous anticipons les critiques qui pourraient être adressées à l'encontre de notre travail de thèse à ce sujet. D'une part, le modèle théorique que nous avons construit prend en compte la complexité de l'activité *mathématique* contrairement à ce qui peut être trouvé dans les ressources officielles [4]. Nous cherchons à analyser la manière dont les élèves étudient et peuvent étudier les mathématiques, et les praxéologies d'étude concernent la manière d'apprendre à construire et à organiser des praxéologies *mathématiques* (OM). À aucun moment nous ne perdons donc de vue les mathématiques qu'il y a « derrière » ces praxéologies d'étude. D'autre part, nous ne cherchons pas dans ce travail de thèse à faire des praxéologies d'étude un objet d'enseignement complètement désarticulé de l'étude des mathématiques. Nous avançons prudemment l'hypothèse que l'étude des mathématiques, notamment l'étude personnelle hors la classe, n'est peut-être pas accomplie de manière idoine par certains élèves parce ces praxéologies d'étude se constituent insuffisamment en enjeux didactiques pour l'enseignant et par conséquent ne sont pas assez explicitement travaillés en classe. Nous supposons que, sans les laisser complètement implicites et sans en faire non plus un objet d'enseignement à part entière, l'enseignant peut suggérer des techniques d'étude explicites en classe à ses élèves pour les aider à accomplir leur étude personnelle en mathématiques, *en lien avec* les OM travaillées. Bien entendu, nous ne nous attendons pas à ce que l'enseignant utilise explicitement le vocabulaire théorique développé dans notre travail de thèse pour faire travailler ces praxéologies d'étude en classe.

4. Nous renvoyons le lecteur au chapitre un où nous avons nous-même fortement interrogé les limites de telles ressources méthodologiques.

5.4 Opérationnalisation du modèle pour analyser les pratiques enseignantes relatives à l'organisation de l'étude personnelle des élèves

Nous avons présenté dans la section précédente des praxéologies d'étude. Nous exposons à présent la manière dont nous opérationnalisons le modèle théorique de l'étude personnelle pour analyser les gestes d'aide à l'étude des enseignants et les gestes d'études accomplis par leurs élèves hors la classe en mathématiques.

5.4.1 Un schéma pour une vue d'ensemble

Nous schématisons le modèle théorique de l'étude personnelle développé dans ce chapitre dans la figure 5.1 ci-après. Ce schéma montre une partie de la complexité des phénomènes que nous cherchons à analyser et les relations entre ces phénomènes.

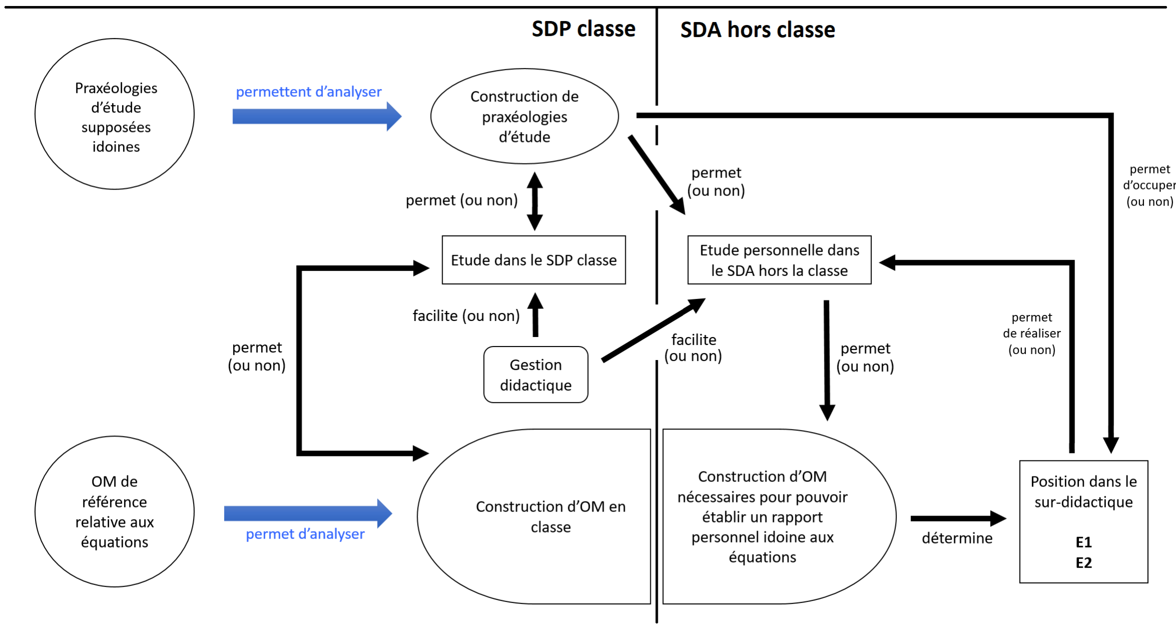


Figure 5.1 – Schéma du modèle théorique de l'étude personnelle hors la classe

Les différents éléments de ce schéma sont expliqués dans les sous-sections qui suivent. Les facteurs non scolaires, qui n'apparaissent pas dans le schéma mais que nous prenons en compte en tant que paramètres fixés, influencent l'étude personnelle hors la classe – et l'étude en classe – d'une manière que nous ne cherchons pas à décrire.

5.4.2 L'étude en classe et l'étude hors classe respectivement considérées à l'intérieur d'un SDP et d'un SDA

Nous faisons le choix de considérer la classe comme un système didactique principal (SDP) et le hors la classe comme un système didactique auxiliaire (SDA) [5]. Modéliser l'étude personnelle aux seins d'un SDP et d'un SDA permet de mettre en avant les liens entre ces deux systèmes didactiques : le fonctionnement de l'un nécessite le fonctionnement de l'autre (Chevallard, (Chevallard, 2002a)). Cela permet de considérer les gestes d'étude d'un élève comme étant accomplis au sein d'une institution donnée, conformément à l'approche anthropologique. Le SDA hors la classe est *piloté par* le SDP classe, c'est-à-dire que ce que font et ne font pas les élèves dans le SDA en termes d'étude personnelle hors la classe est relié à ce qui est fait ou non dans le SDP en termes d'étude en classe.

5.4.3 Premier niveau d'analyse à partir du modèle : les praxéologies mathématiques travaillées en classe et effectivement mobilisées par les élèves

a. Comparaison des OM enseignées et apprises

Le premier niveau d'analyse intègre les OM enseignées dans le SDP classe et les OM apprises ou du moins « visiblement » mobilisées par les élèves lors de leur étude personnelle dans le SDA hors la classe. La mise en perspective des OM enseignées et apprises respectivement dans le SDP et le SDA permet de caractériser l'étude personnelle des élèves hors la classe relativement aux OM : quelles OM travaillées en classe font l'objet d'une prolongation de l'étude hors la classe ? Quelles sont celles qui n'ont pas été travaillées mais qui sont nécessaires à la construction d'un rapport personnel idoine aux objets de savoir étudiés ?

5. Formellement, un système didactique s'écrit S(X,Y,P) où S, X, Y, P désignent respectivement un système (S), un élève ou un collectif d'élèves (X), une aide à l'étude comme l'enseignant ou les parents (Y), un programme d'étude (P). Une classe peut être vue comme une sommation de systèmes didactiques. Nous renvoyons à ce sujet le lecteur vers Chevallard ((Chevallard, 2002a)).

b. Comparaison des OM enseignées avec l'OM de référence épistémologique relative aux équations

Nous comparons les OM enseignées avec l'OM épistémologique de référence (Bosch et Gascon, (Bosch & Gascón, 2005)) relative aux équations [6], et nous interprétons les écarts observés comme autant d'enjeux d'apprentissages mathématiques non explicitement organisés par l'institution et donc susceptibles de provoquer chez les élèves la construction de rapports personnels non idoines aux équations.

En observant les élèves en train d'accomplir leur étude personnelle hors la classe pour préparer une évaluation sommative et en analysant leurs traces écrites à cette évaluation, nous interpréterons ensuite les OM apprises relatives aux équations en les mettant en perspective des OM enseignées.

c. Codages pour analyser les OM enseignées

Soit T un genre de tâches mathématiques relatif aux équations [7].

1. $T1$: Le genre de tâches mathématique T est explicitement travaillé.
2. $T0$: Le genre de tâches mathématique T n'est pas explicitement travaillé alors que l'étude de T favorise la construction d'un rapport personnel idoine aux équations d'après la référence épistémologique sur les équations.
3. $\tau 1$: La technique pour réaliser un type de tâches relevant d'un genre de tâches T est explicitée (exemple : « Pour répondre à ce problème, on le traduit par une équation »).
4. $\tau 0$: La technique pour réaliser un type de tâches relevant d'un genre de tâches T n'est pas explicitée (exemple : l'enseignant résout un problème en le traduisant par une équation sans expliciter cette technique).
5. $\theta^{th}1$: La composante théorique de la technologie mobilisée pour justifier la technique permettant de réaliser le type de tâches relevant de T est explicitée (exemple : l'ensiegnant cite la propriété, le théorème ou la définition utilisée dans l'application de la technique). Autrement dit, il y a appui sur cette composante théorique pour justifier la technique utilisée.
6. $\theta^{th}0$: La composante théorique de la technologie mobilisée pour justifier la technique permettant de réaliser le type de tâches relevant de T n'est pas explicitée.

6. Cette OM de référence sera présentée dans le chapitre sept.

7. Pour ne pas alourdir les analyses, nous avons choisi de ne coder que les genres de tâches travaillés. Ces genres de tâches seront explicités dans les chapitres sept et dix.

7. $\theta^p 1$: La composante pratique de la technologie mobilisée pour justifier la technique permettant de réaliser le type de tâches relevant de T est explicitée. Autrement dit, les éléments pratiques qui guident la mise en œuvre de cette technique sont détaillés. type de tâches relevant de T n'est pas explicitée.
8. $\theta^p 0$: La composante pratique de la technologie mobilisée pour justifier la technique permettant de réaliser le type de tâches relevant de T n'est pas explicitée.
9. Nous nous intéressons de plus aux responsabilités laissées à l'élève : qui de lui ou de l'enseignant prend majoritairement en charge la réalisation du type de tâches relevant T, l'explicitation de τ et de θ ? Pour cela, nous ajoutons les codes suivants :
   (a) C-élève 1 (suivi de T, respectivement de τ, respectivement de θ) : l'élève prend majoritairement en charge la réalisation du type de tâches T, respectivement explicite une technique pour réaliser ce type de tâches, respectivement explicite une technologie pour justifier ou guider la mise en œuvre d'une technique.
   (b) C-élève 0 (suivi de T, respectivement de τ, respectivement de θ) : l'enseignant prend majoritairement en charge la réalisation du type de tâches T, respectivement explicite une technique pour réaliser ce type de tâches, respectivement explicite une technologie pour justifier ou guider la mise en œuvre d'une technique.

Par exemple, le code $T_{Mettre-en-equation}1$ $\tau_{T_{Mettre-en-equation}}0$ signifie qu'un type de tâches relevant de la résolution algébrique d'équation a été effectivement réalisé et que la technique pour le réaliser n'a pas été explicitée. Le code C-élève 1 ($\theta^p_{\tau_{T_{Mettre-en-equation}}}$) signifie que l'élève a majoritairement pris en charge l'explicitation d'éléments de la composante pratique pour guider la mise en œuvre de la technique de résolution algébrique d'une équation.

Il est à noter que selon le moment de l'étude, certains codes n'apparaissent pas ou apparaissent plus que d'autres. C'est le cas pour les trois premiers moments de l'étude où la technique et la technologie sont en cours d'élaboration : la réalisation d'un type de tâches ne s'accompagnera que progressivement d'une explicitation de la technique et de la technologie associées, le guidage de l'enseignant sera peut-être plus fort que pour le moment du travail de la technique. Ceci sera précisé dans le chapitre dix lorsque nous utiliserons effectivement ces codages dans les analyses menées.

5.4.4 Second niveau d'analyse à partir du modèle : les praxéologies d'étude travaillées en classe et effectivement mobilisées par les élèves

a. Comparaison des praxéologies d'étude travaillées en classe et effectivement mobilisées par les élèves

Les praxéologies d'étude mentionnées à la section 5.2 se situent sur un second niveau d'analyse.

La mise en perspective des praxéologies d'étude travaillées en classe et celles qui sont effectivement mobilisées par les élèves permet de caractériser l'étude personnelle relativement à ces praxéologies d'étude : quelles sont celles qui ont fait l'objet d'un travail explicite en classe par l'enseignant ? Quelles sont celles qui sont à construire par les élèves ?

b. Comparaison des praxéologies d'étude travaillées en classe avec les praxéologies d'étude supposées permettre une étude idoine en mathématiques

Comme pour les OM enseignées, nous comparons les praxéologies d'étude travaillées en classe aux praxéologies d'étude listées dans les sections à , à savoir : identifier à partir d'une tâche donnée le type de tâches parent ; mettre en relation un type de tâches, une technique et une technologie ; situer une OM nouvelle par rapport à une OM plus ancienne.

Nous interprétons les écarts observés comme des implicites sur les praxéologies d'étude à mobiliser lors de l'étude personnelle. En particulier, nous considérons les discours généraux du type « apprenez vos leçons », « revoyez vos exercices », « relisez les corrections », « révisez le chapitre », énoncés sans autre précision de technique d'étude, c'est-à-dire sans référence explicite aux praxéologies d'étude supposées idoines, comme des gestes d'aide à l'étude peu explicites. Il s'agit selon nous de gestes d'aide à l'étude décorrélés de la complexité de l'activité mathématique – ils ne font référence ni à des types de tâches, ni à des techniques, ni à des technologies mathématiques – et qui peuvent s'appliquer à d'autres disciplines.

Nous estimons que le diagnostic des besoins d'apprentissages et la réponse à ses besoins reviennent en collège à la charge de l'enseignant. En effet, même si de telles praxéologies d'étude sont possiblement mobilisées par certains élèves, nos observations (chapitre trois) nous laissent penser qu'elles demeurent hors de portée des élèves les plus en difficulté.

c. Codages pour analyser les praxéologies d'étude travaillées

Comme pour les OM enseignées, nous codons les types de tâches d'étude qui ont été explicitement travaillés en classe par l'enseignant ; en revanche, comme nous avons fait le choix de ne pas préciser de technologies d'étude pour les techniques d'étude permettant de réaliser ces types de tâches d'étude, la manière de coder diffère.

Pour distinguer les types de tâches mathématiques, codées T, des types de tâches d'étude, nous codons ces dernières H (pour « Help[8]) »

Soit H un type de tâches d'étude relatif aux équations.

1. $H0$: Le type de tâches d'étude H n'est pas explicitement travaillé en classe à travers l'étude des équations.
2. $H1$: Le type de tâches d'étude H est explicitement travaillé en classe à travers l'étude des équations. Dans ce cas, nous précisons si une technique d'étude est explicitée ou non pour accomplir H en codant ceci $H1\tau$..., les « ... » pouvant prendre la valeur 0 ou 1 selon les règles ci-dessous :
   (a) $\tau 1$: Une technique d'étude pour accommplir H est explicitée.
   (b) $\tau 0$: Une technique d'étude pour accomplir H n'est pas explicitée.
3. Concernant les responsabilités laissées à l'élève, qui de lui ou de l'enseignant prend majoritairement en charge la réalisation de H ? Pour cela, nous ajoutons le code suivant :
   (a) C-élève 0 : l'enseignant prend majoritairement en charge (ou en totalité) la réalisation de H : c'est lui qui met en œuvre la technique d'étude pour réaliser H.
   (b) C-élève 1 : l'élève prend majoritairement en charge (ou en totalité) la réalisation de H : c'est lui qui met en œuvre la technique d'étude pour réaliser H.

Ainsi, le code $H1$ $\tau 1$ C-élève 0 signifie que H est explicitement travaillé à travers l'étude des équations, qu'une technique d'étude pour réaliser H est explicitée, et que l'enseignant prend majoritairement en charge la réalisation de H.

8. Nous n'avons pas utilisé la lettre A comme « Aide » car celle-ci est déjà employée pour « Autonomie » ; voir ci-après.

Les types de tâches d'étude des praxéologies d'étude des sections à sont codés comme suit :

$Hidt_T$: À partir d'une tâche mathématique, identifier le type de tâches T correspondant.

$Hidt_\tau$: Identifier une technique mathématique comme telle.

$Hidt_\theta$: Identifier une technologie mathématique comme telle.

$Hrel$: Mettre en relation un type de tâches avec des tâches du même type, avec des techniques pour le réaliser et des technologies justifiant ces techniques.

$Hsit$: Situer et articuler les OM étudiées entre elles. Plus précisément, situer et articuler d'une part les OM récentes et nouvelles entre elles, d'autre part les OM récentes et nouvelles par rapport à d'anciennes OM qu'elles font intervenir.

Dans le cas où la praxéologie d'étude ne fait pas référence à la structure de l'activité mathématique (types de tâches, technique, technologie), nous considérons qu'il s'agit d'une praxéologie d'étude pédagogique, « générale », et nous la notons $Hgen$. « Apprenez votre leçon », « revoyez vos exercices », « révisez la prochaine évaluation » seront par exemple codés $Hgen$.

Nous rappelons que le diagnostic des besoins d'apprentissages mathématiques des élèves, codé $Hdiag$, et la régulation de ces besoins, codée $Hreg$, sont jugés comme relevant de la responsabilité de l'enseignant et non des élèves.

Comme pour les OM, certains codes apparaissent peu ou n'apparaissent pas selon le moment de l'étude [9]. Par exemple, la mise en relation d'un type de tâches mathématiques avec une technique et une technologie mathématiques ($Hrel$) ne peut se faire que si cette technique et cette technologie mathématique ont été élaborés (deuxième et troisième moments didactiques).

5.4.5 L'interprétation de l'autonomie dans laquelle l'élève est placé lors de son étude personnelle hors la classe

Nous voulons caractériser l'autonomie dans laquelle l'élève est potentiellement placé lors de son étude personnelle dans le SDA hors la classe en fonction des gestes d'aide à l'étude accomplis par son enseignant dans le SDP classe.

Pour cela, nous nous appuyons sur le modèle de structuration du milieu (Castela, (?, ?)). L'élève doit occuper la position E1 (niveau 1 du sur-didactique) s'il a à sa charge de prolonger l'étude des OM travaillées en classe avec l'enseignant, en

9. Il peut s'agir d'un moment relatif au travail des OM ou d'un moment relatif au travail des praxéologies d'étude.

prolongeant certains moments de l'étude (travail de la technique ; élaboration de la technologie, notamment dans sa composante pratique) ou en étendant à partir de la situation travaillée en classe le milieu d'étude (par exemple en sollicitant des systèmes didactiques auxiliaires). Il doit occuper la position E2 (niveau 2 du surdidactique) s'il a à sa charge d'étudier de manière transversale des OM non travaillées en classe et pourtant nécessaires à l'établissement d'un rapport personnel idoine aux objets de savoir correspondants.

Mais pour pouvoir occuper les positions E1 et E2, nous faisons l'hypothèse que l'élève doit mobiliser les praxéologies d'étude lui permettant de construire les OM nécessaires à l'établissement d'un rapport personnel idoine aux objets de savoir correspondants. Ainsi, le travail explicite en classe de ces praxéologies d'étude par l'enseignant peut faciliter leur mobilisation hors la classe par l'élève.

5.4.6 Les conditions sur la gestion et l'organisation didactique en classe rendant possibles l'accomplissement d'une étude personnelle idoine hors la classe

a. Présentation

Quelle gestion didactique l'enseignant peut-il adopter en classe pour permettre et favoriser l'accomplissement par ses élèves de gestes d'étude idoines lors de leur étude personnelle hors la classe ?

En appui sur l'hypothèse de travail selon laquelle les gestes d'étude accomplis par les élèves durant leur étude personnelle sont directement influencés par les gestes d'aide à l'étude accomplis par leur enseignant en classe, et en appui sur les outils théoriques de la TSD (dévolution, action des élèves en phase de recherche, institutionnalisation, ...) qui permettent de prendre davantage en compte certaines dynamiques d'enseignement à l'échelle d'une séance par rapport à la TAD, nous observons les éléments suivants :

- L'enseignant prend-il des informations sur l'étude personnelle ou autonome des élèves, en classe et hors la classe ? L'absence d'une telle prise d'informations nous semble être un facteur de risque conduisant l'enseignant à ne pas se situer dans la zone d'étude proche des élèves [10].
- De même, pour se situer dans la zone d'étude proche de ses élèves, l'ensei-

10. Le « risque » est peut-être moins élevé pour des enseignants avec beaucoup d'expérience, qui ont en tête les gestes d'étude fréquemment utilisés par les élèves.

gnant dévolue-t-il les situations didactiques relatives aux équations, et si oui, comment ?

- Toujours pour se situer dans la zone d'étude proche et motiver ou faire évoluer les techniques (mathématiques ou d'étude) et les technologies mobilisées par les élèves, l'enseignant présente-t-il et hiérarchise-t-il selon une logique explicite les procédures des élèves lors des phases de formulation et de validation ?
- D'après certains travaux sur l'étude personnelle (Milhaud, 1998), (Esmenjaud-Genestoux, 2006), si l'élève ne fait jamais en classe l'expérience de l'autonomie, il est potentiellement moins à même de l'assumer lors de son étude hors classe. Ainsi, l'enseignant dégage-t-il en classe des temps où les élèves étudient en autonomie – par exemple lors des phases de recherche en adidacticité – ou bien est-il immédiatement sollicitable ? Combien de temps les élèves sont-ils en autonomie ?
- Selon (Castela, 2007a), l'institutionnalisation n'est pas mise au même niveau selon qu'elle porte sur le savoir théorique ou le savoir pratique, selon qu'elle donne lieu à une trace écrite ou non. Comment l'enseignant mène-t-il les institutionnalisations en classe ? En particulier, les praxéologies d'étude font-elles l'objet de ces institutionnalisations ?
- L'enseignant organise-t-il des moments didactiques pour travailler les praxéologies d'étude : les introduit-il ? font-elles l'objet d'une institutionnalisation ?

b. Codages pour analyser la gestion didactique de l'enseignant

Nous utilisons les codages suivants pour analyser la gestion didactique de l'enseignant relativement à l'étude personnelle des élèves.

1. Quelle dévolution des types de tâches à réaliser (en classe ou hors classe) l'enseignat effectue-t-il ?
   (a) **D1** : L'enseignant initie l'étude autonome : *a minima*, il lit l'énoncé avec les élèves ; il peut donner des pistes de recherche, réaliser une tâche du même type que celui demandé, ...
   (b) **D0** : L'enseignant n'initie pas l'étude autonome : l'énoncé est donné aux élèves et ceux-ci doivent se lancer directement dans la recherche.
2. Quelles sont les caractéristiques des phases de recherche en autonomie des élèves ?
   (a) L'enseignant laisse un temps de recherche aux élèves. Dans ce cas :

      i. **A11** : L'enseignant est en retrait.
      ii. **A10** : L'enseignant interagit avec les élèves (A10).
   (b) **A0** : L'enseignant ne laisse pas de temps de recherche individuelle aux élèves (A0).

3. Comment l'enseignant prend-il en compte ce que font les élèves pendant la recherche (en classe ou hors classe) ?
   (a) **V1** : L'enseignant vérifie que le travail effectué en autonomie est bien réalisé.
   (b) **V0** : L'enseignant ne vérifie pas que le travail effectué en autonomie est bien réalisé.
   (c) L'enseignant corrige le travail réalisé en autonomie. Dans ce cas :
      i. **C111** : Il présente plusieurs procédures possibles et les hiérarchise selon une logique explicite.
      ii. **C110** : Il présente plusieurs procédures mais ne les hiérarchise pas selon une logique explicite.
      iii. **C100** : Il ne présente qu'une procédure correcte.
   (d) **C0** : L'enseignant ne corrige pas le travail effectué en autonomie.

4. Comment l'enseignant mène-t-il les phases d'institutionnalisation ?
   (a) L'enseignant réalise des phases d'institutionnalisation, qui sont notamment des occasions de faire travailler les praxéologies d'étude. Une phase d'institutionnalisation est un récapitulatif des procédures utilisées, avec une synthèse des explications sur le pourquoi de la réussite de certaines procédures et de l'échec des autres. Dans ce cas :
      i. L'institutionnalisation porte sur les OM mais aussi sur les praxéologies d'étude.
         A. **I111** : Cette institutionnalisation se traduit majoritairement par une trace écrite.
         B. **I110** : L'institutionnalisation demeure majoritairement orale.
      ii. L'institutionnalisation porte uniquement sur les OM.
         A. **I101** : Cette institutionnalisation se traduit majoritairement par une trace écrite.
         B. **I100** : Cette institutionnalisation demeure majoritairement orale.

(b) **I0** : L'enseignant ne réalise pas d'institutionnalisation.

À l'usage, certains codages se sont avérés difficiles à appliquer, notamment ceux sur l'institutionnalisation, celle-ci pouvant parfois être « diffuse », « diluée » au cours d'une séance, voire d'une séquence. Nous reviendrons sur ces difficultés au chapitre dix.

Nous précisons que dans le cadre de notre thèse, nous avons dû faire le choix d'étudier certains aspects de l'étude personnelle des élèves, captés sur une période restreinte et sur un thème précis (les équations). Nos données ont été recueillies sur deux échelles de temps, celle d'une séquence et celle d'une séance, échelles qui ne nous autorisent pas à observer des effets qui n'ont lieu que sur un temps long. Par conséquent, nos analyses (voir chapitre dix) ne prennent pas en compte des phénomènes ayant lieu à une échelle plus globale, celle d'une année scolaire par exemple. Pour reprendre la terminologie de Robert (**réf manquante et je ne sais pas laquelle**), nous nous situons davantage dans du local (la classe au quotidien), voire du micro (gestes, routines et automatismes de l'enseignant). Une perspective de la thèse serait de poursuivre la recherche d'un point de vue plus global (projet et représentations de l'enseignement de l'enseignant) et sur un temps plus long.

5.5 Conclusion

Le modèle théorique construit dans ce chapitre est un autre résultat majeur de notre travail de thèse. Nous nous en servons comme outil d'analyse dans plusieurs des chapitres à venir :

– Dans le chapitre huit, nous analysons les programmes et les manuels au filtre de ce modèle pour déterminer les praxéologies d'étude qui y sont explicitement mises en avant.
– Le PER relatif aux équations construit intègre des éléments de ce modèle. Nous détaillerons ces éléments dans le chapitre neuf.
– Dans le chapitre dix, nous l'utilisons pour analyser les gestes d'aide à l'étude accomplis en classe par l'enseignant et mettre en perspective ceux-ci avec les gestes d'étude accomplis par les élèves lors de leur étude personnelle hors la classe sur les équations.

Dans ce cinquième chapitre, nous avons également affiné nos hypothèses de recherche : nous supposons que la construction explicite de certaines praxéologies d'étude en classe, en lien avec celle des praxéologies mathématiques travaillées, favorise l'accomplissement d'une étude personnelle hors la classe qui permet à l'élève d'occuper les positions $E1$ (éventuellement $E2$) dans lesquelles il pourra construire les OM nécessaires à l'établissement d'un rapport personnel idoine aux équations.

Chapitre 6

Eléments historiques et mathématiques sur les équations algébriques ; construction d'une référence épistémologique relative aux équations du premier degré à une inconnue

6.1 Objectifs du chapitre

Les chapitres trois à cinq portaient sur l'étude personnelle des élèves en mathématiques. Nous avons longuement expliqué dans ces chapitres la nécessité de prendre en compte les spécificités des contenus et la complexité de l'activité mathématique pour traiter les questions que nous nous sommes posé sur l'étude personnelle hors la classe des élèves. Ce sixième chapitre entame la partie de notre travail de thèse qui concerne plus particulièrement les équations du premier degré à coefficients réels et à une inconnue réelle.

Dans un premier temps, nous présentons des éléments sur l'histoire des équations algébriques. Quelles ont été les principales avancées en mathématiques relativement aux équations ? Quels sont les obstacles majeurs auxquels les mathématiciens se sont heurtés au cours des siècles et qui en sont potentiellement pour des élèves de collège, à qui il est demandé de construire un rapport personnel idoine à des équations en l'espace de quelques mois seulement ?

Dans un deuxième temps, nous définissons mathématiquement une équation algébrique. Cette définition permet de poser de manière claire ce que nous entendons par équation dans notre travail.

La référence épistémologique que nous construisons dans un troisième temps constitue un outil majeur de notre travail de thèse : nous nous appuyons dessus pour élaborer une organisation mathématique de référence relative aux équations dans le chapitre sept, pour analyser l'organisation mathématique à enseigner à l'œuvre dans les manuels et les programmes dans le chapitre huit, et pour concevoir et évaluer des dispositifs de travail en classe et hors la classe dans les chapitres neuf et dix afin de favoriser l'évolution des rapports personnels des élèves aux équations vers des rapports idoines.

6.2 Eléments sur l'histoire des équations algébriques

6.2.1 Présentation

Nous proposons dans cette section une synthèse de l'histoire des équations algébriques (une définition de ce qu'est une équation *algébrique* y est justement donnée, de même qu'une définition de ce qu'est une résolution *algébrique*). L'étude de la genèse et de l'évolution des équations algébriques et de leur résolution algébrique au fil des siècles nous donne des éléments épistémologiques sur celles-ci et nous permet de prendre du recul par rapport à leur enseignement actuel duquel nous pourrions nous montrer trop proche.

Nous nous appuyons sur le travail de Mahammed (Mahammed, 1998) pour synthétiser l'histoire des équations algébriques, depuis la période des premières dynasties babyloniennes, environ deux millénaires avant Jésus Christ, jusqu'au XIX$^{\text{ème}}$ siècle, époque qui a vu naître Evariste Galois.

N.B. : Dans toute cette section, nous écrirons en *italique* tout élément qui n'est pas explicitement utilisé à l'époque considérée (en dehors des références comme les *Eléments* d'Euclide, qui seront elles aussi écrites en italique).

6.2.2 Les équations chez les Babyloniens, Euclide et Diophante

a. Les équations chez les Babyloniens (environ -2000)

L'étude des textes présents sur des tablettes des premières dynasties babyloniennes montre que les Babyloniens savaient *résoudre toutes les équations du premier et du second degré qui possèdent une ou deux solutions positives, dans le sous-anneau de $\mathbb{R}$ des nombres exprimables d'une façon finie en base 60* (les Babyloniens utilisaient un système de numération de position et sexagésimal). De plus, ils savaient aussi *résoudre certaines équations du troisième degré*. Les méthodes de résolution proposées, exprimées en langage naturel, ne sont pas justifiées. La plupart des problèmes abordés dans les tablettes conduisent à des solutions *rationnelles*, ce qui laisse penser qu'ils étaient construits à partir de grandeurs choisies à l'avance, peut-être dans une optique pédagogique.

Voici un exemple de problème, dont la méthode pour le résoudre est rédigée par un scribe et traduite en français : « J'ai additionné la surface et le côté de mon carré : 45'. Tu poseras 1, l'unité. Tu fractionneras en deux 1 : 30'. Tu croiseras 30' et 30' : 15'. Tu ajouteras 15' à 45' : 1. C'est le carré de 1. Tu soustrairas 30', que tu as croisé, de 1 : 30', le côté du carré. » (Mahammed, 1998, p.8)

Ce problème correspond à *l'équation* $x^2 + x = 45'$, où x désigne le côté du carré. Les différentes étapes détaillées par le scribe correspondent à une résolution *algébrique de l'équation du type $x^2 + px - q = 0$ où p et q sont positifs et rationnels, et dont la solution positive, qui existe toujours, est $x = \sqrt{\frac{p^2}{4} + q} - \frac{p}{2}$*. Ces étapes sont les suivantes : $p = 1°$; $\frac{p}{2} = 30'$; $\frac{p^2}{4} = 30' \times 30' = 15'$; $\frac{p^2}{4} + q = 15' + 45' = 1°$; $\sqrt{\frac{p^2}{4} + q} = 1°$; $\sqrt{\frac{p^2}{4} + q} - \frac{p}{2} = 1° - 30' = 30' = x$.

Au passage, remarquons qu'il s'agit d'un problème de géométrie. Les problèmes étudiés par les Babyloniens étaient issus de diverses activités, dont économiques (commerce, impôts, superficie des domaines imposables, ...) et astronomiques (calendrier, astrologie).

b. Les équations chez Euclide (environ -300)

À propos des *Eléments* d'Euclide, Mahammed explique que « toutes les questions géométriques sont traitées au moyen de solutions ne faisant intervenir que des constructions faisables *à la règle et au compas*, c'est-à-dire basées sur l'emploi exclusif de droites et de cercles. Dans ce contexte, les problèmes étudiées peuvent être considérés comme afférents au premier et second degrés. Avec ces réserves de langage, il est admis que la théorie des équations du second degré est basée sur le livre II, et développée au livre VI. » (p. 13) Autrement dit, selon Mahammed, si l'on peut dire retrospectivement que les questions géométriques traitées dans les *Eléments* se rapportent aux équations du second degré, on ne peut pas affirmer que les motivations initiales étaient *algébriques*.

c. Diophante et l'*Arithmétique* : l'ancêtre de l'algèbre (environ 250)

Les solutions des problèmes posés dans l'*Arithmétique* de Diophante conduisent à la résolution *d'équations du premier et du second degré à une ou plusieurs inconnues*. Diophante recourt parfois à la géométrie pour résoudre certains de ces problèmes, mais son but est toujours arithmétique. L'*Arithmétique* est considéré comme un ancêtre de l'algèbre ; il commence d'ailleurs par une définition méthodique du carré, du cube, du carré-carré, du carré-cube et du cube-cube (les trois derniers termes correspondent respectivement aux *puissances* quatre, cinq et six), chaque définition se voyant attribuée un *symbole*.

6.2.3 Les équations dans les travaux d'al-Khwârizmî et d'al-Khayyâm

a. al-Khwârizmî et la naissance de l'algèbre (780 - 850)

al-Khwârizmî a été rendu célèbre grâce à son traité dont l'intitulé peut être traduit par *Court traité sur le calcul de l'algèbre et de la muqabala*. Les travaux sur les équations du premier et du second degré se trouvent dans la première partie de ce traité et portent sur des problèmes issus de la géométrie ou de la vie quotidienne. Aucun symbolisme n'est utilisé : al-Khwârizmî s'exprime en langage naturel. Il distingue six types d'équation :

$$ax^2 = bx$$
$$ax^2 = c$$
$$ax = c$$
$$x^2 + bx = c$$
$$x^2 + c = bx$$
$$bx + c = x^2$$

al-Khwârizmî montre que toutes les équations du premier et second *degrés* peuvent se ramener à l'une des équations ci-dessus, grâce à deux opérations : *jabr*, qui correspond à une *transposition* d'un terme négatif d'un membre à l'autre (pour le « rendre » positif) ; et *muqabala*, qui consiste à réduire des termes semblables de l'équation. Il démontre ses résultats à l'aide de méthodes géométriques en s'appuyant sur les travaux d'Euclide, ce qui montre « qu'il a su interpréter algébriquement la géométrie des *Eléments* comme une géométrie conduisant à des problèmes des deux premiers degrés. » (Mahammed, p. 24-25)

Dans les problèmes traités, pour chaque type d'équation, al-Khwârizmî décrit en langage naturel la succession de calculs à opérer pour trouver les solutions de l'équation, comme les Babyloniens le faisaient. Même si les exemples sont numériques, les règles énoncées sont générales.

Bien que ses travaux soient postérieurs à ceux d'Indiens comme Brahmagupta (VIème siècle) qui a introduit le zéro et les négatifs (« dettes »), al-Khwârizmî ne considère pas les solutions négatives.

b. Les équations dans les travaux d'al-Khayyâm (vers 1074)

Depuis les célèbres problèmes de la *duplication du cube* et de la *trissection d'un angle* qui trouvent leur origine dans les mathématiques grecques du IXème siècle avant J.-C. et qui se ramènent respectivement à la résolution de l'*équation* $x^3 = 2a^3$ *d'inconnue* x et à celle de l'*équation* $4x^3 - 3x + q = 0$, *d'inconnue* x, les problèmes conduisant à des équations du troisième et quatrième degré se sont multipliés au fil des siècles pour diverses raisons comme par exemple l'amélioration de tables astronomiques ou la résolution de problèmes d'optique géométrique. Ainsi, trouver une théorie générale sur les équations du troisième et du quatrième degrés, en particulier des algorithmes [1] pour calculer leurs racines, est devenue une nécessité.

L'étude des travaux d'al-Khayyâm et en particulier de son traité d'algèbre *Sur les démonstrations de l'algèbre et de la muqabala* (rédigé vers 1074) montre que l'algèbre y est vue comme une branche des mathématiques autonome, distincte de la géométrie et de l'arithmétique, et plus précisément comme la *science des équations* (Mahammed, p. 43) : al-Khayyâm étudie les relations entre nombres ou grandeurs connus et nombres ou grandeurs inconnus, et classe les équations en fonction de leur *degré* et de leur nombre de termes après réduction. Ensuite, « il exprime l'idée qu'une résolution *numérique* (au sens où nous dirions algébrique) est tout aussi

1. Signalons au passage que le mot « algorithme » sérait un dérivé du nom d'al-Kwhârizmî.

valable qu'une résolution géométrique. Il reconnaît cependant que certaines équations se résolvent aisément par les *propriétés du cercle*, établissant de ce fait une correspondance entre les équations résolubles par radicaux (racines carrées) et la construction géométrique (à la règle et au compas) de leurs solutions. De plus [...], il indique nettement que les équations du troisième degré ne ressortissent en général pas de ces procédés, et doivent être résolues par intersection de coniques ; c'est la première affirmation concernant l'impossibilité de résoudre les équations du troisième degré à la règle et au compas. » (p. 44) Mahammed conclut en évoquant les avancées que représentent les travaux d'al-Khayyâm pour les équations : « [...] en liant le problème de l'existence des racines (positives) d'une équation à la nature des relations existant entre les coefficients de cette équation, Omar al-Khayyâm a fait subir un progrès qualitatif à la théorie générale des équations algébriques. » (p. 46)

6.2.4 Les équations aux XVI$^{\text{ème}}$, XVII$^{\text{ème}}$ et XVIII$^{\text{ème}}$ siècles

a. La résolution des équations du troisième et du quatrième degrés à la Renaissance européenne (XVI$^{\text{ème}}$ siècle)

Bien que cela soit sujet à controverse, il semblerait que le premier à avoir résolu algébriquement l'équation $x^3 + qx = r$ fut Del Ferro (1465-1526), mais ce dernier n'a pas publié sa solution. Ensuite, il s'est avéré que Tartaglia (1500-1557) savait non seulement résoudre les équations du type précédent, mais également celles du type $x^3 + px^2 = r$. Il a réfusé de divulguer publiquement sa méthode ; il l'aurait finalement confiée à Cardan (1501-1576) qui publie ses travaux sur les équations du troisième et du quatrième degrés dans son *Ars Magna* : « Adoptant le principe des classifications d'al-Khowarîzmî [2] et d'al-Khayyâm, il indique pour chaque type la marche à suivre sur des exemples numériques ; il est cependant tout à fait clair qu'il emploie un procédé général de résolution. Signalons aussi qu'il sait interpréter le coefficient du teme du second degré comme la somme des racines, et le terme constant comme leur produit. Enfin, il remarque qu'une équation du troisième degré peut avoir trois racines (réelles), et l'équation du quatrième degré quatre racines. » (Mahammed, p. 48)

Dans ses travaux, Cardan note la présence de racines *complexes*, qu'il appelle des « racines sophistiquées ». Il juge cependant son calcul avec ces racines « aussi subtil qu'inutile ». Bombelli (1526-573) reprend l'étude des nombres *complexes* et

2. Mahammed emploie différentes dénominations pour al-Khwârizmî.

développe par analogie avec les nombres connus des règles de calcul sur ces « racines sophistiquées ».

Cardan et Bombelli accordent également une grande place dans leurs travaux à la résolution des équations du quatrième degré, en se référant à Ferrari (1522-1565), le secrétaire et élève de Cardan, qui a trouvé une méthode générale de résolution de ces équations.

b. Les équations au XVII$^{\text{ème}}$ siècle : Stevin, Viète, Girard, Descartes

Nous avons vu jusqu'à présent que les mathématiciens avaient beaucoup de réticence à considérer les racines négatives pour les équations. Stevin (1548-1620) contourne cette réticence et choisit de voir les racines négatives comme les racines positives de l'équation obtenue en changeant x en $-x$. Il accepte ainsi les nombres négatifs autant que les nombres positifs, ce qui lui permet de dégager des règles de calcul en considérant l'addition d'un négatif comme la soustraction d'un positif, et d'établir des formules uniques pour le calcul des racines des équations de degrés 2 et 3 en fonction uniquement de leur degré (il ne classe plus les équations en fonction du signe de leurs coefficients, comme cela se faisait habituellement). Cependant, les racines *complexes* continuent d'être mises de côté.

De son côté, le *symbolisme algébrique* connaît une avancée significative grâce aux travaux de Viète (1540-1603). Viète adopte un système de notations — toutefois assez éloigné du nôtre, actuel — pour désigner grandeurs connues et inconnues et leurs relations dans un problème donné ; les équations obtenues sont ensuite résolues, mais Viète refuse encore les racines négatives (appelées racines « fausses »), ce qui le conduit à opérer des transformations pour les changer en racines positives, ou à augmenter ou diminuer les racines pour annuler leur *somme*. Viète finit par entrevoir par le biais de ces transformations les liens entre racines et coefficients d'une équation, mais sa réticence à manipuler les nombres négatifs et les nombres « impossibles » (c'est-à-dire imaginaires) l'empêche d'étudier les *fonctions symétriques* des racines d'une équation.

À côté de ces développements sur l'étude des transformations sur les équations, Girard (1595-1632) se penche sur la question du nombre de racines d'une équation algébrique et énonce sous une certaine forme ce que l'on appelle aujourd'hui le *théorème fondamental de l'algèbre* ; bien qu'il ne démontre pas ce théorème, il en donne des explications et l'applique sur des exemples. Contrairement à Viète, Girard considère toutes les racines (avec leur *multiplicité*), même celles qui sont négatives et imaginaires, et s'intéresse de près à l'étude des *fonctions symétriques* des racines (il parle de « groupements »).

La théorie des équations progresse encore avec les travaux de Descartes (1596-1650), dont notamment son mémoire intitulé *La Géométrie*, qui comprend trois livres. Le premier livre traite des problèmes de construction à la règle et au compas (*Des problèmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles et des lignes droites*), le deuxième porte sur l'étude de courbes géométriques et de courbes mécaniques [3] et le troisième a pour objet des constructions de problèmes plans, solides ou plus que solides [4]. Descartes « réintègre dans le champ de la géométrie des courbes algébriques qui en avaient été écartées. Il prépare ainsi la voie à une classification des courbes algébriques basée [...] sur la nature des équations qui les représentent » (Mahammed, p. 63). Descartes définit une équation comme suit : « des sommes composées de plusieurs termes partie connus et partie inconnus, dont les uns sont égaux aux autres, ou plutôt qui considérés tous ensemble sont égaux à rien ; car ce sera souvent le meilleur de les considérer en cette sorte. » Le symbolisme utilisé par Descartes est d'ailleurs très proche de celui que nous employons actuellement (plus que ne l'était celui de Viète).

Descartes sait que le nombre de racines d'une équation algébrique est au plus égal « au nombre de dimensions », c'est-à-dire à son *degré*. Toutefois, contrairement à Girard, il refuse les racines imaginaires, même s'il admet que les racines ne sont pas toujours *réelles* : « il y a quelque fois aucune quantité qui corresponde à celle qu'on imagine ».

Plusieurs théorèmes intéressants sont exposés dans *La Géométrie*, sans toutefois être démontrés. D'abord, une version du théorème *Soit* P *un polynôme de* $\mathbb{R}[X]$ *; si* $P(a) = 0$ *alors* P *est divisible par* $(x - a)$ et de sa contraposée est énoncée ; ceci est utile à Descartes pour ramener certaines équations de degré 3, correspondant à des problèmes solides, à des équations de degré 2 par division par un polynôme de degré 1. Cependant, Descartes ne s'intéresse pas du tout à la question de l'*irréductibilité des polynômes* et *a fortiori* à celle de la *décomposition d'un polynôme en facteurs irréductibles.* Un autre résultat que l'on trouve dans *La Géométrie* est la règle des signes qui porte son nom depuis et qui correspond au théorème *Soit une équation* $a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$, *où les* a_i *sont réels, alors le nombre de racines positives de cette équation est au plus égal au nombre de variations de signe*

3. Courbes ne pouvant pas être exprimées à l'aide une équation algébrique.

4. C'est-à-dire, respectivement, des problèmes dans le plan, dans l'espace, et dans des espaces de dimension supérieure à 3.

que présente la suite $a_0, a_1, ..., a_n$ *de ses coefficients.* Enfin, Descartes développe des transformations à effectuer sur une équation, par exemple celles qui permettent de changer les racines négatives en positives, celles qui permettent d'annuler la somme des racines, ou encore celles qui permettent de diviser ou multiplier les racines sans les connaître.

c. Les équations au XVIII$^{\text{ème}}$ siècle : l'apport des mathématiciens français de la Révolution

La résolution des équations de degré 3 et de degré 4 par les mathématiciens italiens de la Renaissance encourage ceux du XVIII$^{\text{ème}}$ siècle à chercher à résoudre les équations de degré supérieur ou égale à 5 de la même manière, c'est-à-dire *par extraction de radicaux*. Ils s'intéressent également à la démonstration du *théorème fondamental de l'algèbre*, encore jamais établie. Par ailleurs, les nombres *complexes*, méconsidérés par le passé, connaissent un regain d'intérêt grâce aux travaux de De Moivre (1667-1754), connu de nos jours pour la formule qui porte son nom.

L'encyclopédiste D'Alembert (1717-1783) tente de prouver que toute équation possède au moins une racine *complexe*, mais il échoue. Euler (1707-1783) s'y essaie à son tour, introduisant au passage la notation i pour désigner la racine carrée de -1 ; c'est malheureusement un nouvel échec. Toutefois, Euler affirme — sans le prouver — que *tout polynôme à coefficients réels peut se décomposer en produit de facteurs de degré 1 et de degré 2* en remarquant que *si un polynôme admet* $a+ib$ *pour racine alors son conjugué* $a-ib$ *est également une racine.*

Un grand pas en avant est effectué avec les travaux de Vandermonde (1735-1796) qui « développe l'idée que la résolution (algébrique) d'une équation dépend de la possibilité de trouver des fonctions rationnelles des racines telles que les valeurs prises, après permutation des racines, soient sinon inchangées du moins en plus petit nombre possible. Il met ainsi en évidence le rôle important que jouent les fonctions symétriques des racines de l'équation et le concept de substitution dans un ensemble fini (ici celui des racines de l'équation). » (Mahammed, p. 82). De manière indépendante, Lagrange (1736-1813) s'intéresse aux équations *résolvantes*, c'est-à-dire aux équations auxiliaires qui servent d'intermédiaires pour trouver les racines d'une équation initiale. Ceci le conduit à ouvrir la voie de la *théorie des groupes finis.* Avec Vandermonde, Lagrange change la problématique de la résolubilité des équations algébriques : « au lieu de rechercher des expressions algébriques explicites des racines d'une équation, il convient de *donner des critères permettant de savoir* a priori *si une équation donnée est ou n'est pas résoluble algébriquement.* Cette question est évidemment intimement liée à la suivante : *pour un degré donné, caractériser toutes les équations résolubles algébriquement.* » (Mahammed, p. 85).

6.2.5 La résolution algébrique des équations algébriques au XIX$^{\text{ème}}$ siècle : les réponses d'Abel et de Galois

Ruffini (1765-1822) est le premier à affirmer qu'il est impossible de *résoudre algébriquement les équations de degré supérieur ou égal à 5*, mais il ne parvient pas à le démontrer. Gauss (1777-1855), de son côté, donne plusieurs démonstrations correctes du *théorème fondamental de l'algèbre* et développe la théorie des congruences, avec des applications en arithmétique comme l'unicité de la décomposition d'un nombre en facteurs premiers et les équations diophantiennes.

Il faut attendre Abel (1802-1829) pour obtenir la première démonstration correcte de l'impossibilité de résoudre les équations algébriques de degré 5 ou plus par radicaux. Abel définit d'ailleurs ce que signifie résoudre *algébriquement* une équation : « *résoudre algébriquement une équation donnée* $x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n = 0$, *c'est exprimer ses racines* $x_1, x_2, ..., x_n$ *par des fonctions algébriques de ses coefficients* a_i, $1 \leq i \leq n$; il faut donc rechercher la forme la plus générale de telles fonctions et étudier leurs propriétés. » (Mahammed, p. 89). Une fonction f de n variables est algébrique en $x_1, x_2, ..., x_n$ lorsque l'expression $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ne requiert que les opérations arithmétiques usuelles : addition, soustraction, multiplication, division, élévation à des puissances entières et extraction de racines. Les équations résolubles algébriquement sont aussi appelées, actuellement, équations *abéliennes.*

Abel a donné dans ses travaux une condition nécessaire, mais non suffisante, pour qu'une équation soit résoluble algébriquement ; de plus, il ne s'agit pas d'un critère aisé à vérifier. Vers la fin de sa vie, Abel s'attèle à trouver une caractérisation de toutes les équations résolubles par radicaux. Selon Bourbaki, les résultats qu'il parvient à établir sont proches de ceux de Galois.

Galois (1811-1832) est celui qui finit par donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation soit résoluble par radicaux : il faut et il suffit que son *groupe de Galois soit résoluble.*

6.2.6 Conclusion sur les éléments historiques

À partir de ce rapide survol de l'histoire des équations algébriques, nous retenons les points qui nous semblent importants :

- comme en témoignent entre autres les exemples babyloniens (vers -2000) ou arabes (IX$^{\text{ème}}$ siècle), l'étude des équations a été motivée par la nécessité de résoudre des problèmes issus de la vie courante (économie, astronomie, ...) ;
- les mathématiciens ont longtemps été ralentis dans l'étude des équations algébriques par leur réticence à manipuler les nombres négatifs et les nombres complexes, auxquels ils ont donné des noms évocateurs : racines « fausses », nombres « impossibles », ... ;
- le détour formel, par l'usage d'un symbolisme algébrique, a mis longtemps à émerger dans la résolution de problèmes, d'abord solutionnés en langage naturel ; de même, pendant longtemps, des théorèmes généraux ont été énoncés mais uniquement *illustrés* ou *expliqués* sur des exemples *numériques* ;
- les équations et leur résolution sont en lien étroit avec la géométrie (Euclide, Descartes), en particulier avec les questions liées aux constructions à la règle et au compas, et l'arithmétique (Diophante, Gauss) ;
- les équations algébriques sont tantôt vues comme un outil pour résoudre des problèmes, tantôt étudiées en tant qu'objet, avec ses propriétés ; en ce sens, nous retrouvons dans l'histoire des équations les dimensions outil et objet introduits par Douady (1987) ;
- quelques éléments du savoir savant sur les équations nous ont été donnés par notre étude historique ; nous y reviendrons dans la section qui suit.

6.3 Eléments mathématiques et logiques

Avant d'entamer la construction d'une référence épistémologique relative aux équations, nous abordons deux points vues utiles pour éclairer certains éléments de cette référence : le point de vue mathématique et le point de vue logique.

6.3.1 Point de vue mathématique pour définir une équation algébrique

La question de la définition d'une équation peut paraître naïve, mais nous avons cherché dans plusieurs manuels universitaires de mathématiques chez différents éditeurs, notamment des manuels de première année de licence prétendant vouloir redéfinir formellement les objets mathématiques étudiés lors des années antérieures, et nous n'avons trouvé aucune définition formelle d'une équation dans la plupart d'entre eux, comme si celle-ci était supposée bien connue des étudiants – ou alors, jugée inaccessible. Il ne s'agit pas pour nous de donner ici une définition qu'il faudrait inscrire dans les manuels de collège ou de licence, ni de faire un cours de mathématiques, mais simplement d'éclaircir ce que l'on entend par « équation » et par « résolution algébrique », car de notre expérience de professeur et de chercheur, la définition de ces termes, même au sein de la communauté des enseignants et des didacticiens, peut laisser place à un certain nombre d'ambiguïtés que nous espérons lever dans les lignes qui suivent.

Dans un ouvrage destiné aux préparationnaires du CAPES et de l'agrégation ainsi qu'aux professeurs et formateurs, Rogalski (Rogalski, 2001) donne la définition suivante d'une équation :

Remarquons que Rogalski ne définit pas ce qu'est une équation et qu'il parle immédiatement de résolution ; selon lui, il y a une nécessairement une intention de résoudre un problème lorsqu'on parle d'équation. Il faut inférer, d'après le texte, qu'une équation est une égalité fonctionnelle. Nous pouvons ensuite compléter cette définition générale dans le cadre qui nous intéresse (collège), à savoir les équations algébriques, à une variable réelle et à coefficients réels, par quelques éléments de vocabulaire :

- Une équation est définie sur un certain ensemble. Au collège, il s'agit généralement de l'ensemble des nombres réels. Dire que l'on résout une équation, c'est dire que l'on cherche tous les éléments appartenant à cet ensemble de définition vérifiant l'égalité considérée (éventuellement, il peut n'y avoir aucun élément satisfaisant l'égalité). Dans le cas où l'équation ne possède qu'une seule inconnue et qu'elle est définie sur l'ensemble des réels, on parle alors d'équation à une inconnue réelle ou à une variable réelle (nous verrons dans quelques paragraphes la distinction entre inconnue et variable).
- Deux équations sont dites équivalentes sur un ensemble si elles possèdent les mêmes solutions sur cet ensemble. Par exemple, les équations $x^2 = 1$ et $x = 1$ ne sont pas équivalentes sur l'ensemble des nombres réels, mais elles le sont sur l'ensemble des nombres réels positifs.
- Une équation de la forme $P(x) = 0$ à une variable réelle x est dite algébrique (ou polynomiale), à coefficients réels, de degré n, si l'objet P est un polynôme à une variable réelle, à coefficients réels, de degré n. Toute équation de la

forme $Q(x) = R(x)$ où Q et R sont deux polynômes tels que le polynôme $Q - R$ soit un polynôme à une variable réelle, à coefficients réels, de degré n, est dite *équivalente* à une équation algébrique de degré n. On constate ainsi que la définition d'une équation algébrique repose sur celle d'un polynôme. D'ailleurs, on parle parfois de *racines* d'une équation, ce qui renvoie aux racines d'un polynôme.

– La résolution d'une équation $P(x) = 0$ (où P est un polynôme de degré n) sur un ensemble E est dite algébrique si l'on peut exprimer algébriquement dans E sa ou ses solutions, c'est-à-dire les exprimer à l'aide des coefficients du polynôme P, des quatre opérations élémentaires et d'extractions de racines n-ièmes (rappel : un nombre a est une racine n-ième d'un nombre b si $a^n = b$). L'exemple classique est celui d'une équation du second degré de la forme $ax^2+bx+c = 0$ dont les deux racines réelles, lorsqu'elles existent, s'expriment algébriquement en fonction des coefficients a, b, c et de la racine carrée (racine « deuxième ») du discriminant $b^2 - 4ac$.

6.3.2 Point de vue logique

Un point de vue logique permet de compléter le point de vue mathématique en abordant les équations comme des fonctions propositionnelles dont la valeur de vérité dépend des valeurs attribuées aux variables, en considérant des éléments de syntaxe et de sémantique, de sens, de dénotation et d'interprétation.

Syntaxe et sémantique. Nous faisons un premier emprunt à l'approche logique pour étudier la question de la syntaxe et la sémantique en algèbre. Kouki (Kouki, 2008) définit la syntaxe ainsi :

> « *En logique, la syntaxe d'un langage formel donne donc les règles de formation et de transformations des énoncés du langage considéré ; elle permet de reconnaître si un énoncé est bien formé ou non et si le passage d'un énoncé à un autre dans une démonstration de théorème, par exemple, est valide.* » (p. 24)

Puis, à partir des travaux de Frege (Frege, 1971) et de Tarski (Tarski, 1974), il définit la sémantique :

> « *Etant donné un langage formalisé [...],* la sémantique logique *étudie les interprétations possibles des symboles utilisés ainsi que les relations entre les diverses interprétations des formules utilisées.* » (p. 25-26)

Ainsi, pour les équations, les règles de formation des équations et les règles de transformations pour transformer une équation en une équation équivalente sont données par la syntaxe : on peut transformer une équation en une équation équivalente sans connaître la valeur numérique des solutions, sans même savoir s'il existe des solutions. Le contrôle, l'interprétation et le choix de ces transformations relèvent de la sémantique : celle-ci intervient lorsqu'on teste des solutions par substitution des variables par des valeurs numériques, par exemple pour rechercher des racines évidentes ou pour vérifier que les solutions obtenues en sont bien (certaines transformations ne préservant pas l'équivalence des équations), ou lorsqu'on conjecture graphiquement l'existence, le nombre et les valeurs numériques des solutions d'une équation à partir de courbes représentatives de fonctions.

Les exemples précédents montrent que la résolution d'une équation articule syntaxe et sémantique, et que cette articulation a lieu avec celle du numérique et de l'algébrique, et celle des registres de représentation. Nous reverrons ces points dans le paragraphe consacré à la source de signification de l'algèbre liée aux conversions sémiotiques entre registres de représentation.

Kouki situe ainsi une partie de la signification des équations dans l'articulation entre syntaxe et sémantique :

> « *D'un point de vue logique, la signification d'une expression algébrique et en particulier d'une égalité réside à la fois au niveau de sa syntaxe, et [...] de son aspect sémantique.* » (2008, p. 27)

Un élève qui n'articule pas syntaxe et sémantique n'aura donc pas une compréhension idoine des équations. Chevallard (1989) donne l'exemple d'un élève qui parvient parfaitement à factoriser l'expression relativement complexe

$$(2x-3)^2 - 4(x+1)(4x-6) + (4x^2-9)$$

mais qui est incapable de contrôler son résultat numériquement :

> « *il n'y a pour lui, à cet instant, aucun lien entre la transformation qu'il a fait subir à l'expression algébrique proposée, d'une part, et le fait de substituer des valeurs numériques à ce... petit x qu'il a si habilement manipulé, d'autre part* » (p. 46)

Dans cet exemple, l'élève est resté sur l'aspect purement syntaxique des transformations ; il ne sait pas articuler ce dernier avec l'aspect sémantique pour vérifier ses calculs.

D'autres travaux comme ceux de Grugeon (1997) à propos de la compétence algébrique mettent en avant l'importance de la prise en compte de cette articulation entre syntaxe et sémantique :

> « *La compétence algébrique s'évalue à travers des capacités techniques d'ordre syntaxique et des capacités interprétatives mettant en jeu dénotation, interprétation et sens des expressions* » (p.179)

Cette dernière remarque nous sert de transition pour le paragraphe suivant sur la *dénotation*, le *sens* et l'*interprétation* des expressions et des équations.

Dénotation, sens, interprétation. Selon Frege (1971), un signe est composé de deux éléments : sa *dénotation* et son *sens*. La dénotation d'un signe est exactement ce que ce signe désigne. Le sens d'un signe est la désignation par laquelle on y fait référence.

Drouhard (Drouhard, 1992) s'est intéressé à la syntaxe, au sens, à la dénotation et à l'interprétation des expressions. Par exemple, les expressions $2x$, $x+x$, $6x-4x$, qui possèdent toutes une certaine syntaxe, ont la même dénotation (elles se réfèrent toutes au même objet) mais ont des sens différents. Le sens d'une expression est ce qui permet de voir de quoi elle est faite, comment elle peut être calculée et comment elle pourrait être transformée ; ce sens permet d'élaborer une *stratégie* dans les transformations effectuées en fonction du but visé. Drouhard précise de plus qu'une expression peut avoir plusieurs *interprétations* ; par exemple, l'expression $2x$ peut être vue comme l'aire d'un rectangle de dimensions 2 sur x, ou l'image d'un nombre x par la fonction linéaire de coefficient directeur 2. L'interprétation est ainsi dépendante du *cadre* où l'on se place (Douady, 1986), et un jeu de changements de cadres peut favoriser la diversité des interprétations.

Frege (1971) donne une définition de la dénotation d'une proposition (comme l'égalité). Il s'agit selon lui de la valeur de vérité de cette proposition. Par exemple, les égalités $2 = 2$ et $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ont la même dénotation car elles sont toutes les deux vraies (la seconde l'étant pour toutes valeurs de a et b), mais elles n'ont pas le même sens.

Nous transposons ces considérations aux équations. Nous dirons que deux équations ont la même dénotation si elles sont satisfaites par les mêmes nombres, autrement dit si elles sont équivalentes, comme cela a été défini dans la section 6.3. Nous parlerons du sens d'une équation en faisant référence à la façon dont elle est formée, dont on peut en tester la valeur de vérité en substituant les variables par des valeurs numériques, et dont on peut la transformer. Par exemple, les équations $3x + 2 = 5x$ et $-2x = -2$ ont la même dénotation, car elles sont satisfaites pour la même valeur (le nombre 1) sur $\mathbb{R}$. En revanche, elles ont des sens différents parce qu'elles ne mettent pas à égalité les mêmes expressions et parce que pour résoudre chacune d'entre elles, on n'effectuera pas les mêmes transformations. Enfin, chaque équation peut avoir plusieurs interprétations. Par exemple, l'équation $3x + 2 = 5x$ peut être interprétée comme l'égalité entre deux programmes de calcul ou l'égalité entre deux expressions de fonctions.

Deux équations équivalentes n'ont donc ni le même sens, ni forcément les mêmes interprétations possibles ; vouloir, à chaque étape de la résolution algébrique d'une équation, donner un sens ou une interprétation à chaque équation obtenue, n'a pas de signification relativement au projet que l'on se fixe selon Drouhard, à savoir résoudre l'équation. C'est pourquoi cette résolution, réalisée à l'aide de manipulations formelles, demeure généralement pour celui qui l'effectue au niveau syntaxique. En revanche, si le projet consiste à *contrôler* numériquement les étapes, alors il faut effectivement redonner du sens aux équations.

Le statut de l'égalité : point de vue logique. La façon dont l'égalité est considérée dépend du point de vue adopté relativement aux équations (fonction propositionnelle mettant en jeu des variables, ou égalité supposée vraie mettant en jeu des nombres inconnus). La logique prédicative permet de donner un cadre unificateur : « *Le point de vue ̎relation entre deux expressions dépendant d'une variable ̎est unificateur, puisqu'il fonde aussi bien la notion d'équation que celle d'identité algébrique. D'autre part, [...] il prend facilement appui sur le raisonnement spontané des élèves. Pour ces raisons, il nous paraît souhaitable de l'introduire dès les débuts du calcul algébrique, en préalable à la notion d'identité.* » (Durand-Guerrier, 2000, p. 77)

Nous distinguons deux types de raisonnement utilisés lors de la résolution d'une équation et qui dépendent du statut donné à l'égalité et aux lettres. Soit une équation $P(x) = Q(x)$ à résoudre. Le premier raisonnement consiste à supposer l'existence d'un nombre x_s vérifiant l'égalité $P(x_s) = Q(x_s)$ (c'est-à-dire tel que l'égalité est vraie). Ici, x_s a le statut d'inconnue. Sous réserve de cette existence, on raisonne ensuite par équivalence sur cette égalité en tant que proposition (supposée vraie), en utilisant les propriétés de conservation de l'égalité dans le corps des réels. Si par équivalence on aboutit à une égalité fausse (par exemple $3 = 2$), alors cela signifie que la supposition de départ (existence d'une solution) est fausse, et que l'équation n'admet aucune solution réelle. À l'inverse, si par équivalence on aboutit à une égalité vraie où le nombre x_s n'apparaît pas (généralement, ceci se traduit par une égalité « triviale » comme $3 = 3$), alors l'équation admet une infinité de solutions (l'égalité supposée vraie au départ l'est effectivement et ce, quel que soit le nombre x_s). Enfin, si l'on aboutit à une égalité de la forme $x_s = a$ avec a un réel, alors on peut dire que le nombre x_s *est* le nombre a.

Le second raisonnement consiste à adopter le point de vue *variable* pour la lettre x et l'équation $P(x) = Q(x)$ comme *fonction propositionnelle*, et à raisonner par *équivalence entre équations* : résoudre l'équation $P(x) = Q(x)$ revient à résoudre l'équation ..., qui revient à résoudre l'équation ..., jusqu'à aboutir à une équation équivalente permettant de trouver aisément les solutions qui la satisfont (généralement, une telle équation se présente sous la forme $x = a$ avec a un réel, et est satisfaite pour la valeur a donnée à la *variable* x).

Dans les manuels scolaires que nous avons analysés (chapitre huit), les résolutions d'équations sont rédigées sans préciser le raisonnement employé, c'est-à-dire sans préciser si la lettre x est un nombre inconnu et si le raisonnement s'appuie sur les propriétés de conservation de l'égalité, ou si x est une variable dont on cherche à trouver des valeurs particulières et si le raisonnement est réalisé par équivalence sur des équations. Par conséquent, cela peut dégager l'impression que l'équation est assimilée à une égalité, que la variable est assimilée à un nombre fixe.

Pour illustrer notre propos, nous donnons un exemple d'une même équation modélisant deux problèmes différents, donnés dans des cadres différents, l'un présentant une lettre avec un statut d'inconnue, l'autre une lettre avec un statut de variable. Pour cet exemple, nous considérons les deux problèmes ci-dessous.

Problème 1 : Anita pense à un nombre x. Si elle ajoute 10 à x, elle obtient le même résultat que si elle multiplie x par 4. À quel nombre Anita pense-t-elle ?

Problème 2 : Soit [AB] un segment de longueur 10 cm. Un point M se déplace le long de [AB]. On note x la longueur du segment [AM]. Où doit-on placer le point M sur [AB] pour que le carré de côté AM ait le même périmètre que le triangle isocèle dont la base a pour longueur MB et les deux autres côtés ont chacun pour longueur x ?

Dans ces deux problèmes, la lettre x n'a pas le même statut. Dans le premier, elle représente un nombre fixe, *le* nombre précis auquel Anita pense, dont on ne connaît pas la valeur : il s'agit d'une inconnue. Dans le second, elle représente un nombre qui varie, une longueur dépendant d'un point qui se *déplace* sur un segment : c'est une variable.

Pour chacun de ces problèmes, la plupart des manuels (si ce n'est *tous* les manuels) de collège appelleraient x l'« inconnue » et amèneraient l'élève à établir l'égalité $4x = 10 + x$ (modulo l'ordre des membres et des termes dans les membres de l'équation), sans préciser s'il s'agit d'une égalité en tant que proposition ou d'une équation. Par conséquent, le raisonnement utilisé pour résoudre le problème demeure *implicite* : pour le premier problème, il s'effectue par équivalence sur des égalités (en utilisant des propriétés de conservation de l'égalité) ; pour le second, il s'effectue par équivalence sur des équations.

Si les deux résolutions peuvent paraître semblables voire identiques (on écrit l'égalité $4x = 10 + x$ puis une série d'égalités (propositions) ou d'équations équivalentes jusqu'à être capable de déterminer la solution du problème), elles ne le sont pas exactement : sont sous-jacentes les subtiles distinctions entre équation et égalité en tant que proposition, entre variable et inconnue.

Nous interrogeons le choix de certains manuels (tous ?) de garder implicites ces ambiguïtés : est-ce fait par souci d'éviter de la complexité ? En réalité, cela ne provoque-t-il pas aussi une confusion chez les élèves, entre ce qui est fixe et ce qui varie ? sur ce qu'est une solution, une égalité, une équation ? N'est-ce pas construire un obstacle à la conceptualisation du concept de variable lorsque l'étude des fonctions, par exemple, sera abordée ?

Dans ses travaux, Durand-Guerrier (2000) affirme que « *D'une façon générale, notre expérience montre qu'il est plus difficile de passer du point de vue inconnue au point de vue variable que l'inverse.* » (p.81) Selon elle, la conception de l'équation comme une égalité avec une inconnue renforce l'idée, chez l'élève, que résoudre une équation d'inconnue x, c'est *calculer x*. Elle explique que cette vision peut présenter des limites, par exemple lorsque l'étude des inéquations est abordée et que les solutions sont en nombre infini, les élèves voyant x comme un nombre à calculer usent de rédactions comme « *la solution de l'inéquation est $x < 4$* » (p. 80). De plus, le point de vue variable est nécessaire dans la définition de solution d'une équation (ce sont *toutes les valeurs* de x telle que l'égalité est vraie ; donc x est ici vu comme une variable), dans l'éventuelle vérification numérique de solutions trouvées (tester une égalité en substituant x par des valeurs, c'est encore voir x comme une variable), ou encore dans des problèmes mettant en jeu des programmes de calcul (on peut calculer le résultat d'un programme de calcul pour *différentes* valeurs du nombre de départ, x).

Durand-Guerrier donne plusieurs exemples pour argumenter le fait que la vision de la lettre comme variable *avant* celle de la lettre comme inconnue permet aux élèves de réussir en algèbre, entre autres (p. 81 et p. 85) :

- en quatrième, le problème « Peut-on trouver trois nombres entiers consécutifs dont le produit est égal à 924 ? », s'il est résolu en passant par une mise en équation [5], nécessite de quitter le point de vue inconnue pour basculer vers celui de variable, car « *la difficulté de cette mise en équation est l'expression de deux des nombres cherchés en fonction de l'un des trois, qui ne va pas de soi pour des élèves de quatrième. Il faut quitter un instant le problème pour établir, par exemple, le résultat général :* quel que soit l'entier x, l'entier précédent est égal à $x - 1$ et l'entier suivant à $x + 1$ » (p. 85) ;
- en terminale S, dans le problème « Etant donné que $sin(a) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et que $\frac{\pi}{2} \leq a \leq \pi$, calculer la valeur exacte de $cos(2a)$ et de $cos(4a)$. En déduire la valeur exacte de a. », la lettre a est présentée comme une inconnue et le calcul de $cos(4a)$ amène à l'équation $cos(4a) = sin(a)$. « *On constate que beaucoup d'élèves restent bloqués à ce niveau. Pourtant si on leur pose, par ailleurs, la question : résoudre l'équation $cos4t = sint$, ils savent faire. Pour penser à résoudre l'équation $cos4t = sint$, il faut en effet changer de point de vue sur a, et lui donner un statut de variable* » (p. 81).

Le point de vue logique nous permet d'éclairer certains éléments que nous développons dans la section suivante pour la construction de la référence épistémologique relative aux équations.

6.4 Construction de la référence épistémologique relative aux équations

Nous abordons dans les sections qui suivent la construction d'une référence épistémologique relative aux équations. Le lecteur pourra en trouver une version synthétique dans (Sirejacob, 2016).

Nous fondons cette référence sur des travaux de recherche en didactique de l'algèbre, en croisant deux approches complémentaires : une approche anthropologique

5. Le problème ne se prête pas vraiment, en quatrième, à une mise en équation, car il peut être résolu non algébriquement, en remarquant que le nombre du milieu est égal à 924 : 3.

et une approche cognitive. Nous tentons de répondre aux questions suivantes : quelle place et quelle fonction les équations occupent-elles dans les curricula ? Qu'est-ce qui à la base de leur génération et de leur manipulation ? Quels processus cognitifs permettent leur conceptualisation ?

Dans un premier temps, par le biais d'une approche anthropologique, nous situons la place et la fonction des équations dans les curricula. Cette approche nous fournit des modèles épistémologiques de l'enseignement des équations et tient compte des processus de transposition didactique.

Nous étudions dans un second temps les ruptures épistémologiques qui sont nécessaires à l'étude des équations, les sources de signification des équations et les processus de conceptualisation et de l'activité des élèves relativement aux équations à travers une approche cognitive, puis des modèles de l'activité algébrique d'un point de vue de l'élève.

Le croisement entre approche cognitive et approche anthropologique permet de dépasser les usages classiques employés en TAD en situant les processus de conceptualisation *et* les rapports personnels des élèves aux équations par rapport aux rapports institutionnels attendus par l'institution.

De plus, nous avons défini à la section 6.3 ce qu'est une équation grâce aux outils de la logique prédicative. Nous nous appuyons sur ces outils dans l'approche cognitive pour éclairer certains points liés au statut des lettres et de l'égalité au sein des équations.

6.4.1 Approche anthropologique

a. Présentation

Dans cette section, nous nous appuyons sur les travaux de Chevallard (Chevallard, 1985), (Chevallard, 1989b), (Chevallard, 1998), de Bosch et Gascon (Bosch & Gascón, 2005), de Gascon (Gascón, 1994), Ruiz-Munzon (Ruiz-Munzón, 2010) et Ruiz-Munzon et al. (Ruiz-Munzón, Matheron, Bosch, & Gascón, 2012), et Bosch et Chevallard (Bosch, 2012), qui proposent différents modèles et se situent dans le cadre de la TAD.

b. Préambule

Dans le cadre de la TAD, Chevallard (1998a) explique que la plupart du temps, l'écologie des savoirs au sein des différentes institutions fait que les OM étudiées d'une insitution à une autre subissent des modifications (transposition) visant généralement à améliorer ces OM. Par « améliorer », Chevallard entend que l'institution doit proposer des types de tâches *problématiques*, par opposition aux types de tâches *routiniers* qui sont réalisés grâce à des techniques bien maîtrisées par les élèves. Ces types de tâches problématiques amènent à des *questions génératrices* susceptibles de fonder des Parcours d'Etude et de Recherche (ou des Activités d'Etude et de Recherche) : quelle est la technique qui va permettre de réaliser tel type de tâches problématique ? La réponse à cette question conduit à la construction d'un nouvel environnement technologico-théorique pour justifier, expliquer ou produire les nouvelles techniques. Ces techniques doivent avoir une *portée* supérieure aux anciennes techniques, c'est-à-dire qu'elles doivent réussir sur une plus grande partie du type de tâches proposé. En effet, bien qu'il existe —généralement — un petit nombre de techniques institutionnellement reconnues pour réaliser un types de tâche donné, certaines sont jugées institutionnellement obsolètes, inaccessibles, contestables ou inacceptables.

L'un des objectifs de la construction de la présente référence épistémologique est de dégager des éléments épistémologiques cruciaux pour bâtir une organisation mathématique de référence relative aux équations. Chevallard (1998a) donne justement des pistes méthodologiques dont nous nous servirons et qui sont les suivantes :

- Les types de tâches proposés sont-ils bien identifiés, notamment dans les programmes et les manuels ? Forment-ils un bon découpage relativement aux situations mathématiques les plus souvent rencontrées ? Sont-ils écologiquement pertinents pour le futur ? Sont-ils isolés ?
- Les techniques sont-elles effectivement élaborées ou ne s'agit-il que de simples ébauches ? Ont-elles une portée suffisante ? Sont-elles fiables, suffisamment intelligibles, écologiquement concevables ?
- Les blocs technologico-théoriques justifient-ils les problèmes posés ou sont-ils artificiels, issus d'un « folklore » institutionnel ? Les justifications qu'ils apportent sont-elles adaptées, explicatives, éclairantes ? Les discours technologiques sont-ils explicités, exploités au maximum ?

Cette grille d'analyse peut être complétée par d'autres éléments apportés dans Bosch et Gascon (2005), qui expliquent que les « faiblesses » (rigidités) des élèves peuvent provenir :

- de l'utilisation de notations fixes (par exemple, l'emploi systématique de la lettre x en algèbre dans les expressions ou dans les équations) ;
- de l'inexistence de techniques « rivales » pour réaliser un même type de tâches

(par exemple, toujours appliquer la technique de résolution algébrique pour résoudre une équation, sans la mettre en opposition ou en parallèle avec les autres techniques pour pouvoir les comparer et évaluer les portées de chacune) ;

- de la faible présence de « tâches réciproques » (par exemple, il est souvent demandé de mettre en équation un problème donné en langage naturel, mais rarement d'écrire un problème en langage naturel à partir d'une équation donnée) ;
- de l'absence de certains discours technologiques ;
- de la faible exploitation du caractère génératif de certaines technologies (par exemple, le degré d'une équation donne une indication sur le nombre maximal de solutions auquel on peut s'attendre ; cet ingrédient technologique est-il explicite dans les programmes et les manuels ?)

Ces rigidités chez les élèves peuvent s'expliquer, selon les auteurs, par la présence d'OM locales incomplètes, comme cela a été expliqué dans le chapitre deux.

c. Le passage de l'arithmétique à l'algèbre chez Chevallard (1989)

Chevallard (1989) fait état, au cours des réformes successives des programmes, avant, pendant et après la réforme des mathématiques modernes dans les années 70, d'un émiettement des apprentissages en algèbre. Dans les décennies précédant la réforme, l'algèbre était selon lui positivement opposée à l'arithmétique dans les curricula :

> « *l'algèbre apparaît, positivement, comme* ***l'accomplissement*** *de l'arithmétique [...], elle est une arithmétique délivrée de l'opacité et de l'oubli qui dérobent à nos yeux la structure des problèmes étudiés. Elle est un instrument supérieur pour une tâche semblable. Elle est une arithmétique* ***universelle*** *— comme l'appelle Newton — ou encore une arithmétique* ***généralisée*** ». (p. 57)

Mais après la réforme, les nouveaux programmes ne mettent pas en place les conditions de construction d'un rapport officiel *idoine* aux objets de l'algèbre, notamment avec l'évanouissement d'un élément crucial, la dialectique entre arithmétique et algèbre :

> « *Ce qui disparaît [...] ce n'est pas l'arithmétique [...], mais la* ***dialectique*** *de l'arithmétique et de l'algèbre. Or cet affaissement d'une structuration traditionnelle va moins peser sur la composante arithmétique que*

sur la composante algébrique des mathématiques enseignées au collège : c'est l'algèbre (entendu au sens traditionnel de ce mot à ce niveau des études mathématiques) qui va se trouver le plus violemment mis en cause par les changements opérés. » (p. 60)

Concernant les équations, qui nous intéressent plus particulièrement, Chevallard (1989) donne un extrait de manuel de 1827 où les équations sont explicitement situées par rapport à l'arithmétique et à l'étude des expressions (voir figure 6.1).

I L'algèbre est l'art d'exécuter sur des quantités quelconques, au moyen des signes généraux, toutes les opérations de l'arithmétique, et de représenter, à l'aide des mêmes signes, toutes les relations entre ces quantités.

II La partie de l'algèbre qui enseigne les règles pour exécuter les opérations arithmétiques sur des quantités quelconques se nomme **calcul littéral.**

III La partie de l'algèbre qui traite de la manière de représenter, à l'aide de signes, les relations entre les quantités, se nomme **calcul par équation.**

IV On verra dans la suite que, dans le calcul par équation, on a sans cesse besoin du calcul littéral ; c'est donc par celui-ci qu'il faut commencer.

FIGURE 6.1 – Extrait d'un manuel de 1827 sur l'introduction de l'algèbre (Chevallard, 1989, p. 62)

Dans les programmes réformés, Chevallard explique que c'est « *cet ensemble (calcul algébrique, équations algébriques) qui va se trouver fortement minoré* » (p. 62)

Ces différents constats conduisent Chevallard (1989) au projet ambitieux d'établir un curriculum pour l'enseignement de l'algèbre afin de rendre idoines les rapports personnels des élèves et les rapports officiels à l'algèbre, et dont la notion clef est la *modélisation mathématique.* Selon lui, ce curriculum doit prendre en compte l'importance de la dialectique entre arithmétique et algèbre : l'algèbre est un outil d'étude du numérique, et inversement. Il doit également mettre en place un emploi *fonctionnel* des objets algébriques. L'introduction de *variables* et de *paramètres* pour passer d'une modélisation arithmétique à une modélisation algébrique permet une « *ouverture indéfinie* », passant d'une arithmétique enfermée dans un monde clos à une algèbre « *dont la puissance [...] est mise en relation avec le fait de désigner par des lettres, à côté de quantités inconnues, que l'on recherche, les quantités connues* *elles-mêmes — les données.* » (p. 65)

À propos des équations, Chevallard rappelle que celles-ci sont utilisées pour étendre des *systèmes de nombres* : par exemple, le passage de $\mathbb{N}$ à $\mathbb{Z}$ assure l'existence d'une solution pour toutes les équations de la forme $x + a = 0$ (où a est un entier naturel).

> « *D'une manière générale, la notion d'équation (algébrique) est l'**outil essentiel** pour gérer les extensions successives des systèmes de nombres étudiés, jusqu'à* $\mathbb{Q}$ *au moins* » (1989, p. 51)

d. Le patron d'analyse-synthèse de Gascon (1994)

Face au modèle implicite de l'algèbre comme « arithmétique généralisée », Gascon (1994), en se plaçant lui aussi dans une approche anthropologique, propose un modèle alternatif de l'algèbre basé sur un patron d'analyse-synthèse reformulé. Partant du patron d'analyse-synthèse de Pappus et à l'aide de *variations*, il construit une nouvelle modélisation algébrique permettant l'étude non seulement de problèmes dits « arithmétiques », c'est-à-dire des problèmes dont la résolution « *comporte toujours la résolution successive d'une chaîne de problèmes simples dont le résultat numérique est calculable et interprétable dans les termes de l'énoncé* » (p. 45), mais également l'étude d'un champ beaucoup plus vaste de problèmes (problèmes non arithmétiques, constructions géométriques, dénombrement, logique, etc.).

Gascon précise entre autres que « *la méthode algébrique nous fournit une symbolisation globale de la relation entre les données et les inconnues du problème* » et que la « *modélisation algébrique permet de découvrir les conditions d'existence de l'objet inconnu [...] ainsi que la forme de dépendance de chaque variable par rapport aux autres variables du système. Elle permet, en particulier, d'étudier comment dépendent les variables "connues" des variables "inconnues".* » (p. 58) Nous retrouvons ici l'importance des paramètres déjà évoquée par Chevallard dans la section précédente. Si ces paramètres sont davantage reliés aux notions de formules et de fonctions, il nous apparaît important d'évoquer au travers la résolution de problèmes à l'aide des équations l'idée de dépendance entre grandeurs données et grandeurs inconnues.

Nous reviendrons dans l'approche cognitive, à la section c., sur l'utilisation des équations en tant qu'outil pour résoudre des problèmes où le patron classique d'analyse-synthèse est insuffisant avec les travaux de Bednarz et Janvier (Bednarz, Kieran, & Lee, 1996) sur les problèmes connectés et déconnectés, et ceux de Filloy, Rojano et Puig (Filloy, Puig, & Rojano, 2008) concernant les équations arithmétiques et les équations non arithmétiques avec la question de la coupure didactique.

e. La place des équations dans le processus d'algébrisation de Ruiz-Munzon (2010, 2012)

Ruiz-Munzon (2010) et Ruiz-Munzon et al. (2012) proposent un modèle selon lequel la genèse de l'algèbre s'inscrit dans un processus progressif d'algébrisation des programmes de calcul. Dans Chevallard et Bosch (2012), une expression algébrique est assimilée à un programme de calcul. Par exemple, l'expression $3x+1$ correspond au programme de calcul énoncé rhétoriquement de la façon suivante : « Multiplier le nombre donné par 3 puis lui ajouter 1 ». Afin de motiver l'algèbre en tant qu'outil pour résoudre des problèmes de modélisation, Chevallard part des types de tâche basés sur des questions d'équivalence entre programmes de calcul. L'algèbre est ainsi présentée comme une science d'étude de ces programmes de calcul.

Le processus d'algébrisation de Ruiz-Munzon (2010) comporte plusieurs étapes, chaque étape amenant à la construction d'un nouvel environnement technologico-théorique pour justifier de nouvelles techniques permettant de réaliser des types de tâche problématiques (voir figure 6.2).

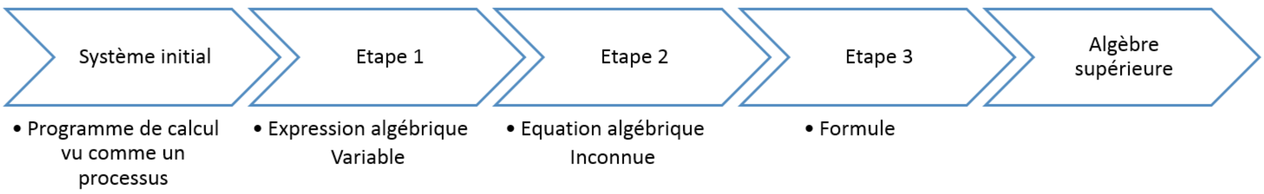


FIGURE 6.2 – Le processus d'algébrisation de Ruiz-Munzon (2010)

Le processus d'algébrisation démarre avec des programmes de calcul en arithmétique, donnés en langage naturel et vus comme des procédures « pas à pas » : à tel nombre donné, on applique une opération, *puis* une autre, *puis* une autre, etc., jusqu'à parvenir à un résultat final.

La première étape consiste à faire émerger l'environnement technologico-théorique lié aux expressions algébriques. Dans cette étape est posé le type de tâches problématique suivant : deux programmes de calcul étant donnés, sont-ils équivalents ? Ceci conduit à mettre en avant l'insuffisance des méthodes arithmétiques et à faire émerger des techniques basées sur la production et l'équivalence d'expressions algébriques. Les programmes de calcul ne sont alors plus vus comme des procédures mais comme un tout, comme une *structure*. Nous verrons à la section a., paragraphe 4., qu'il s'agit d'un passage d'une conception procédurale à une conception structurale des expressions comme le décrit Sfard (Sfard, 1991) et que cette double conception est nécessaire à la conceptualisation et à la construction de rapports idoines aux objets de l'algèbre.

La deuxième étape correspond aux types de tâche problématiques : quelle(s) valeur(s) de départ entrer dans un programme de calcul donné pour obtenir un résultat donné ? quelle(s) même(s) valeur(s) de départ entrer dans deux programmes de calcul donnés pour qu'ils renvoient le même résultat final ? C'est à cette étape que se situe l'étude des équations avec l'émergence de la technique de résolution algébrique et l'environnement technologico-théorique la justifiant. Les techniques arithmétiques sont encore mises en échec au profit des techniques algébriques, qui possèdent une portée supérieure. Une nouvelle fois, cette étape nécessite de passer d'une conception procédurale de certaines équations comme les équations de la forme $ax + b = c$, dites « arithmétiques » (Filloy et al. 2008) à une conception structurale des équations dites « algébriques » par le biais d'une « coupure didactique » (*ibid.*, 2008). Nous reparlons des points précédents dans la section c..

Cette deuxième étape du processus d'algébrisation vient après celle sur les expressions algébriques car les praxéologies relatives aux équations et celles relatives aux expressions s'articulent : les organisations mathématiques relatives aux expressions sont convoquées dans la production et la résolution des équations.

Nous illustrons ces propos avec un exemple. Voici deux programmes de calcul :

- Programme A : Choisir un nombre, le multiplier par 7, ajouter 3 au résultat.
- Programme B : Choisir un nombre, lui soustraire 4, multiplier par 2 le résultat.

Quel même nombre choisir pour que les deux programmes de calcul renvoient le même résultat final ?

Ce problème met en échec la méthode arithmétique : il n'est pas possible, partant du résultat qui est inconnu, de réaliser une « remontée » arithmétique jusqu'au nombre de départ. Il met également en échec la méthode par essais/erreurs : le nombre à trouver est $\frac{-5}{3}$. Il motive ainsi l'outil équation : mobilisant une lettre, par exemple x, pour désigner le nombre de départ, la résolution du problème conduit à l'équation $7x + 3 = (x - 4) \times 2$, qui est algébrique et motive la technique de résolution algébrique. Cette résolution algébrique doit être justifiée par un environnement technologique (propriétés de conservation de l'égalité) ; l'existence et l'unicité de la solution aussi (propriétés des polynômes et de leurs racines). Produire cette équation implique de produire les expressions de chaque membre ; la résoudre implique d'opérer des transformations sur ces expressions (par exemple, développer le membre de droite) : il y a agrégation entre OM relatives aux expressions et OM relatives aux expressions.

La troisième étape du processus d'algébrisation correspond à l'étude des formules. Nous ne nous y attardons pas car elle n'est pas au cœur de notre travail.

f. Conclusion sur l'approche anthropologique : des éléments épistémologiques

La synthèse des travaux précédents pointe l'existence de préoccupations communes à travers les différents modèles épistémologiques proposés pour l'enseignement des équations. Situés dans le cadre de la TAD et prenant en compte l'influence de la transposition didactique et de l'écologie des savoirs, ces travaux mettent en avant la puissance de l'outil algébrique pour résoudre des problèmes de modélisation, de preuve et de généralisation, par le biais de modèles valorisant l'algèbre comme étant plus qu'une simple « arithmétique généralisée » (Chevallard, 1989 ; et Gascon, 1994), et d'un processus plaçant l'étude des programmes de calcul au cœur d'une algébrisation progressive de praxéologies (Ruiz-Munzon, 2010).

Nous retenons plusieurs éléments épistémologiques importants relatifs aux équations :

- il est important de conserver la dialectique entre numérique et algébrique, dont l'évanouissement au cours des réformes successives ayant eu lieu dans le passé est dénoncé par Chevallard (1989) ;
- les équations trouvent leurs raisons d'être en tant qu'outil pour résoudre un champ de problèmes plus vaste qu'avec les outils arithmétiques, à condition de proposer des types de tâche problématiques adaptés aux objectifs d'apprentissage visés (Gascon (1994), Chevallard (1998a)) ;
- la proposition de ces types de tâche problématiques doit prendre place au sein d'OM ponctuelles intégrées et articulées autour d'un discours technologique justificateur et unificateur, avec une confrontation avec des techniques rivales et la présence de types de tâches « réciproques » (Bosch et Gascon, 2005) ;
- les équations se situent à la deuxième étape du processus d'algébrisation de Ruiz-Munzon (2010) ; elles sont précédées de l'étude des expressions, per-

mettent de dégager un nouvel environnement technologico-théorique pour résoudre des problèmes reliés aux programmes de calcul et de mettre en échec d'anciennes méthodes arithmétiques.

6.5 Approche cognitive

Nous abordons à présent l'approche cognitive. Dans cette section, nous cherchons à déterminer ce qui, d'un point de vue cognitif, permet et favorise la conceptualisation de l'objet équation chez l'élève à travers une activité algébrique.

Selon Vergnaud (Vergnaud, 1990), la construction d'un concept passe par un ensemble de situations qui donnent du sens au concept, un ensemble de concepts-en-acte et de théorèmes-en-acte qui permettent le traitement de ces situations, et un ensemble de représentations symboliques et langagières pour pouvoir exprimer des objets et des relations entre ces objets dans ces situations.

Lorsque nous nous posons la question du concept d'équation et de la façon dont les élèves conceptualisent les équations, nous nous posons donc la question de situations qui donnent du sens aux équations, des processus mis en jeu par les élèves pour traiter ces situations, des représentations qu'ils se font des équations d'une part et de leur capacité à en avoir plusieurs représentations d'autre part.

En nous appuyant sur les travaux de Kieran (2007), nous allons apporter des éléments de réponse à ces interrogations.

6.5.1 Présentation

À partir de la vision de l'algèbre comme étant quelque chose que l'on *fait*, c'est-à-dire comme étant une *activité*, et tentant de trouver ce qui donne du sens à l'algèbre, Kieran (1996, 2007) a développé un modèle synthétisant les activités liées à l'algèbre à l'école, baptisé « modèle GTG » (pour *generational, transformational, global/meta-level*), qui liste trois types d'activité algébrique chez l'élève : activité générative, activité transformationnelle et activité globale.

Nous faisons le choix de fonder notre approche cognitive sur ce modèle, parce qu'il croise et met en relation plusieurs approches issues des nombreux travaux sur l'épistémologie de l'algèbre.

Bien que nous présentions une synthèse des travaux de Kieran qui porte sur l'algèbre en général, nous nous focalisons sur les équations et nous faisons des apports empruntés à d'autres travaux lorsque nous l'estimons pertinent ; en particulier, nous utiliserons parfois l'éclairage fourni par le point de vue logique abordé à la section ??.

Nous structurons notre réflexion de la manière suivante : nous commençons par exposer les ruptures dans l'arithmétique nécessaires à opérer pour l'étude des équations, puis nous présentons les sources de signification de l'algèbre (en nous centrant sur les équations), enfin nous abordons les équations au sein des activités algébriques du modèle GTG de Kieran.

6.5.2 L'étude des équations : ruptures et fausses continuités avec l'arithmétique

a. La double rupture épistémologique et les fausses continuités avec l'arithmétique

La double rupture épistémologique. Les travaux de Vergnaud, Cortes et Favre-Artigue (1987) parlent d'une *double rupture épistémologique* entre l'arithmétique et l'algèbre : d'une part, une rupture dans l'utilisation d'objets communs à l'arithmétique et à l'algèbre (signes, lettres) et qui n'ont pas la même signification ; d'autre part, une rupture liée à un détour formel dans la résolution de problèmes par l'algèbre.

Les problèmes connectés et déconnectés. Bednarz et Janvier (1996), en prenant en compte la nature et le nombre de relations entre les quantités connues et inconnues présentes dans des problèmes, font la distinction entre ceux qui sont *connectés* et ceux qui sont *déconnectés*. Dans les premiers, une relation peut être aisément établie entre deux données connues et laissent possible une résolution arithmétique ; dans les seconds, ce n'est plus le cas, et un détour formel par une mise en équation peut être envisagé.

Par exemple, le problème suivant est un problème connecté : « Sachant qu'Amélie a 32 billes, que Renaud en a six fois plus qu'Amélie, et qu'Ulysse en a 128 de moins que Renaud, combien Amélie, Renaud et Ulysse ont-ils de billes à eux trois ? ». Pour trouver le résultat, il est possible, partant du nombre de billes d'Amélie, de déduire celui de Renaud et celui d'Ulysse puis le nombre total de billes, en utilisant uniquement un raisonnement arithmétique. Voici maintenant un exemple de problème déconnecté : « Sachant qu'Amélie a six fois moins de billes que Renaud, qu'Ulysse en a 128 de moins que Renaud, et qu'à eux trois, Amélie, Renaud et Ulysse ont 288 billes au total, combien de billes chaque personne possède-t-elle ? ». Dans ce problème, il devient impossible, partant d'une donnée, par exemple le nombre de billes de Renaud, de trouver la solution du problème par une méthode arithmétique, car le nombre de billes de Renaud (ou des deux autres) est inconnue et non « directement » relié à la seule donnée connue (le nombre total de billes).

Ainsi, pour des problèmes connectés, il est possible d'utiliser la technique d'analyse-synthèse de base de Gascon (1994), mais pour les problèmes déconnectés, c'est la technique d'analyse-synthèse reformulée qui fonctionne, avec le recours à une méthode algébrique (équation).

Les fausses continuités. Kieran (2001) décrit les ruptures épistémologiques entre arithmétiques et algèbre en termes de *fausses continuités* et de *discontinuités* : en arithmétique, le travail se fait sur des nombres « concrets » tandis qu'en algèbre apparaissent des lettres dont le statut varie en fonction du contexte ; en arithmétique, le signe = est vu comme une annonce d'un résultat, tandis qu'en algèbre, il endosse d'autres statuts ; en arithmétique, les signes et les opérations sont évalués, alors qu'en algèbre, cette évaluation est suspendue, avec un intérêt tantôt pour l'aspect structural, tantôt pour l'aspect procédural. Ces ruptures, ces fausses continuités et ces discontinuités sont sources de difficulté pour les élèves débutants en algèbre. Filloy et al. (2008) évoquent une coupure didactique à réaliser par les élèves pour passer de la résolution des équations arithmétiques à celle des équations algébriques.

Ces différentes ruptures ont lieu entre l'arithmétique et l'algèbre. Toutefois, l'étude des équations doit prendre en compte non seulement les conceptions importées du travail réalisé dans les années antérieures en arithmétique par les élèves, mais également celles issues du travail effectué sur les expressions.

Des ambiguïtés peuvent subsister sur le statut de l'égalité, issues de l'étude précédemment réalisée sur les expressions. Chalançon, Coppé et Pascal (Chalancon, Coppé, & Pascal, 2002) expliquent par exemple que « *Après avoir insisté en calcul littéral sur le fait que* $2x + 5 \neq 7x$ *(erreur classique), on demande de résoudre l'équation* $2x + 5 = 7x$*, ce qui peut être déstabilisant.* » Les discours tenus par les enseignants peuvent être interrogés à ce propos : par exemple, quel impact peuvent avoir les phrases d'ordre légal du type « On n'a pas le *droit* d'ajouter les x avec les nombres ? ».

b. La coupure didactique dans la résolution d'équations

Filloy, Puig et Rojano (2008), dans leur étude sur les processus de modélisation des élèves et la résolution de problèmes de modélisation, expliquent que pour passer de la résolution d'une équation de la forme $ax + b = c$, qu'ils appellent « équation arithmétique », à une équation de la forme $ax + b = cx + d$, dite « algébrique », les élèves doivent opérer un saut conceptuel, une « coupure didactique » (p. 89 et p. 96). Comme cela a déjà été dit dans le paragraphe sur le double aspect procédural et structural (Sfard, 1991), la résolution d'équations arithmétiques par opérations réciproques ne fait intervenir que la conception procédurale des équations ; en revanche, la résolution algébrique d'équations algébriques comme $ax + b = cx + d$ nécessite une conception structurale des équations et l'émergence d'une nouvelle technique consistant à opérer sur l'inconnue.

Par la suite, l'objectif est d'appliquer ces techniques sur des équations de formes plus complexes pour se ramener si possible à des équations « canoniques » comme celles de la forme $ax + b = cx + d$. Historiquement, dans le contexte du monde du commerce, cet objectif est celui que s'est donné Al-khwârizmî (780-850, Bagdad), considéré comme le père fondateur de l'algèbre, dans son célèbre traité.

Filloy, Puig et Rojano expérimentent des situations avec des étudiants pour qu'ils construisent le nouvel environnement technologico-théorique relatif aux équations et justifiant la technique de résolution algébrique. L'une de ces situations concerne la balance de Roberval. La question de l'impact de ce genre de situation, extérieure aux mathématiques, est justement le sujet de la dernière source de signification de l'algèbre.

6.5.3 Les équations au sein des différentes sources de signification (*meanings*) de l'algèbre

Appelées *meanings* en anglais, les sources de signification de l'algèbre répertoriées par Kieran (Kieran, 2007) à partir des travaux de Radford (Radford, 2004) visent à répondre à la question : « Qu'est-ce qui rend l'algèbre significative ? ». Elles portent sur les représentations du symbolisme algébrique, la conversion sémiotique, la résolution de problèmes, et ce qui est extérieur aux mathématiques, comme les gestes, les métaphores, les dessins, etc.

Nous nous attardons sur chacune de ces sources de signification en orientant notre synthèse sur les équations. Nous voulons répondre aux interrogations suivantes : qu'est-ce qui permet de donner du sens aux équations chez les élèves ? Quelles sont les significations qu'ils leur donnent ou ne leur donnent pas ? Comment se représentent-ils les lettres et l'égalité dans une équation ? Comment hiérarchiser et articuler ces sources de signification en vue de favoriser une conceptualisation idoine ? en vue de proposer des situations d'apprentissage visant à déstabiliser des conceptions constituant des obstacles ?

a. Les représentations du symbolisme algébrique dans les équations

La première source de signification de l'algèbre concerne la structure de l'algèbre elle-même. Elle implique les aspects syntaxique et sémantique des expressions et des équations, ainsi que leurs aspects procédural et structural.

Kieran (Kieran, 2007) et Booth (Booth, 1984) expliquent que notre capacité à manipuler correctement les symboles algébriques, c'est-à-dire à distinguer les transformations algébriques adéquates à effectuer, suppose une compréhension de la signification de ces symboles et une compréhension de la structure des expressions et des équations, de la hiérarchie des opérations et des relations mathématiques.

Pour comprendre ce qu'est une équation, il faut par conséquent comprendre la signification des différents symboles qui la composent : l'égalité, les opérateurs, les délimitants, les lettres, les puissances, ... et il faut aussi comprendre la structure de l'équation, qui passe par la compréhension de la structure des expressions de chacun de ces membres, qui fait intervenir la compréhension des priorités opératoires. Sans cette compréhension, il est impossible d'anticiper et de choisir les transformations à effectuer par exemple pour résoudre une équation.

Nous n'entrerons pas pleinement dans les détails pour chacun des points précédents, car certains ne font pas l'objet central de notre thèse et nécessiteraient à eux seuls plusieurs chapitres. Nous retenons simplement les éléments épistémologiques importants pour chacun d'entre eux.

(i) Statuts des lettres, de l'égalité, du signe « moins », et figures de représentation

Selon les travaux de Booth (Booth, 1984) et de Kieran (Kieran, 1992), la lettre peut avoir différents statuts :

- le statut de variable (ou nombre généralisé) : la lettre n'a pas de valeur numérique fixe, elle peut prendre plusieurs valeurs, comme dans les fonctions ;
- le statut d'indéterminée : la lettre désigne un nombre quelconque, comme dans les identités ;
- le statut d'inconnue : la lettre représente un nombre dont on ne connaît pas la valeur numérique, que l'on cherche à déterminer, comme dans les équations ;

- le statut de paramètre : la lettre désigne une quantité connue aux côtés d'autres quantités inconnues, comme dans les formules.

Le point de vue logique abordé à la section 6.3 nous conduit à préciser quelques points à propos de ces statuts. Si l'on considère une équation en tant que fonction propositionnelle, alors la lettre n'est pas une inconnue au sens où l'entendent Booth et Kieran, mais une variable. Par ailleurs, en logique, une identité *est* une équation : c'est une fonction propositionnelle satisfaite quelles que soient les valeurs attribuées aux *variables*. Sous cet angle, la distinction entre variable et indéterminée n'est plus faite. Selon Durand-Guerrier (Durand-Guerrier, Le Berre, Pontille, & Reynaud-Feurly, 2000), « *la notion d'indéterminée [...] paraît peu pertinente. La distinction nom d'objet, lettre de variable, suffit à rendre compte de toutes les situations.* »

Nous rajoutons que la lettre peut désigner, entres autres choses :

- une unité de mesure (« m » pour « mètre ») ;
- une abréviation d'un mot ;
- une étiquette (par exemple, à l'école primaire, il est possible de rencontrer des figures géométriques découpées en plusieurs parties, et où chacune de ces parties est désignée par une lettre)

Kieran (Kieran, 1992), à partir des travaux de Kuechemann (Küchemann, 1978), (Küchemann, 1981)1981, répertorie quelques statuts donnés à la lettre par les élèves, entre autres :

- la lettre évaluée : la lettre est considérée en permanence comme une valeur numérique ;
- la lettre non prise en considération : aucun sens n'est donné à la lettre, ou bien celle-ci n'est pas du tout prise en compte par l'élève ;
- la lettre désignant un objet concret.

Dans le cas particulier des équations, Bardini (Bardini, 2003) catégorise les différents *modes d'interprétation* de la lettre, que nous noterons x ici, en tant qu'inconnue dans les équations :

- x peut changer de valeurs au cours de la résolution : il ne s'agit pas, pour l'élève, d'une quantité « permanente » mais « changeante » ;
- x peut représenter des quantités inconnues différentes, notamment si elle apparaît plusieurs fois dans l'équation ;
- x peut désigner toute quantité ou toutes les quantités inconnues dans le texte, c'est-à-dire qu'aucune distinction n'est fait entre la quantité inconnue qui est recherchée et la *part d'inconnue* qu'il peut y avoir dans l'énoncé.

Après les différents statuts endossés par la lettre et par l'inconnue, nous présentons maintenant les différents statuts possibles pour l'égalité [6] :

- le statut d'annonce d'un résultat : l'égalité est considérée sous un angle « opératoire », où le membre de droite est le résultat des opérations présentes dans le membre de gauche, avec une lecture « gauche-droite » dissymétrique ;
- le statut d'instanciation : c'est celui utilisé (en premier) dans l'exemple suivant : « pour $x = 2$, calculer la valeur de l'expression $3x + 5$ » ;
- le statut de relation d'équivalence : c'est l'égalité vue comme relation réflexive, symétrique et transitive ;
- le statut de mise en relation entre deux expressions algébriques où l'on cherche les valeurs des variables pour que l'égalité soit vraie.

Nous complétons ces travaux avec ceux de Bardini (2003) sur la construction du symbolisme algébrique chez les élèves, qui parlent de *figures de représentation* :

- la représentation du requis : c'est la représentation symbolique par une lettre d'un élément inconnu dans un énoncé ;
- la représentation du donné : c'est la représentation symbolique par une lettre d'un élément qui est donné ;
- la représentation des instructions opératoires élémentaires : par exemple, l'erreur de concaténation $a + b = ab$ peut être interprétée comme un signe montrant que l'élève considère l'addition sous un angle opératoire et non comme un objet ;
- la représentation de la mise à égalité : l'injonction « égaler » d'une égalité n'est pas toujours comprise d'une part comme « mettre en relation d'égalité deux objets » et d'autre part comme « juger la valeur de vérité de l'égalité » ;
- la représentation des concepts composés : par exemple, les puissances, les radicaux, ...

Lettres et égalité ne sont pas les seuls à posséder plusieurs statuts. Vlassis (Vlassis, 2004) liste trois interprétations possibles du signe « moins » en algèbre :

- le « moins » est vu comme l'opération de soustraction, comme dans $5-3 = 2$;
- le « moins » est vu comme le signe d'un nombre négatif, comme dans la phrase : « Le thermomètre indique -3 $^\circ$C » ;

6. Ces différents statuts sont présentés dans le document d'accompagnement « Du numérique au littéral ». Source : http ://media.eduscol.education.fr/file/Programmes/17/3/du_numerique_au_litteral_109173.pdf

– le « moins » est vu comme l'opposé d'un nombre : par exemple, $-x$ désigne « l'opposé de x ».

Vlassis conclut sur le caractère contre-intuitif des différents usages du signe « moins » pour les élèves débutant en algèbre, et parle d'obstacle conceptuel significatif dans leur tentative de donner du sens aux symboles et aux processus algébriques.

Nous ajoutons que le travail sur les équations peut conduire à des changements de statut du signe « moins » au sein d'une même résolution. Par exemple, l'équation $1 - x = 7$ peut être transformée en l'équation équivalente $-x = 6$; mais le statut du signe « moins » n'est pas le même dans les deux équations : dans la première, il s'agit de l'opération de soustraction, et dans la seconde, du signe indiquant l'opposé d'un nombre.

Nous avons montré dans les paragraphes précédents que la lettre, l'égalité et le signe « moins » pouvaient endosser plusieurs statuts, que ces statuts pouvaient varier au sein d'une même résolution algébrique d'équation et que les élèves leur donnaient potentiellement des significations diverses et parfois non idoines. Nous avons également montré que le point de vue logique permettait de lever un certain nombre de confusions, possédait un caractère unificateur, et nous avons donné plusieurs arguments en faveur d'une vision de la lettre comme variable précédant la vision de la lettre comme inconnue dans les équations.

(ii) Aspects procudéral et structural

Sfard (1991), dans ses travaux sur la nature duale des conceptions mathématiques, parle d'aspects procédural et structural dans les processus de conceptualisation. Nous résumons dans le tableau (voir figure 6.3) les caractéristiques de ces deux aspects.

	Conception procédurale	Conception structurale
Caractéristiques générales	Un objet mathématique est conçu comme le produit d'un certain processus ou est identifié comme étant le processus lui-même	Un objet mathématique est conçu comme une structure statique, comme s'il s'agissait d'un objet réel
Représentations internes	La conception procédurale est supportée par les représentations verbales	La conception structurale est supportée par les représentations visuelles
Place dans le développement conceptuel	La conception procédurale est développée aux premiers stades de la formation du concept	La conception structurale évolue à partir de la conception procédurale
Rôle dans les processus cognitifs	La conception procédurale est nécessaire mais non suffisante pour la résolution de problèmes et l'apprentissage	La conception structurale facilite tous les processus cognitifs (résolution de problème, apprentissage)

FIGURE 6.3 – Conceptions procédurale et structurale de Sfard (1991)

Selon Sfard, la conception structurale d'un objet mathématique vient après la conception procédurale de cet objet. Ces deux conceptions sont incompatibles (« *how can anything be a process and an object at the same time ?* » (1991, p. 4)) mais complémentaires : l'appropriation des deux aspects procédural et structural est nécessaire à la conceptualisation.

Chez un élève, la vision de l'égalité comme annonce d'un résultat, avec une lecture « gauche-droite » dissymétrique, où le membre de droite est obligatoirement le résultat des opérations apparaissant dans le membre de gauche, traduit une conception procédurale de l'égalité. De même, les erreurs de concaténation comme $a + b = ab$ peuvent aussi traduire une conception procédurale : l'addition présente dans le membre de gauche « doit » être effectuée (procédure oblige) et « disparaître » dans le membre de droite. Voir l'addition comme un objet, ne pas l'évaluer et la laisser « en suspens », suppose une conception structurale de celle-ci.

Dans leurs travaux sur la façon dont des étudiants appréhendent le concept d'équation, Lima et Tall (Lima & Tall, 2006) ont demandé à soixante-dix-sept étudiants brésiliens âgés de 15 à 16 ans ce qu'est une équation. La plupart des réponses données témoignent d'une conception procédurale des équations chez ces étudiants : « *It is a mathematical calculation* », « *It is a calculation you do to find the solution, x* » (p. 4). Lima et Tall font remarquer qu'aucun étudiant ne mentionne explicitement l'égalité. Peut-être celle-ci n'est-elle considérée que sous un angle opérationnel, ne servant qu'à annoncer un résultat.

b. Le rôle des conversions sémiotiques dans l'appropriation du concept d'équation

La deuxième source de signification en algèbre, après celle sur les représentations du symbolisme algébrique, provient de ce que Kieran (2007) appelle les autres représentations mathématiques, incluant de mutiples représentations (p. 711). Elle explique que les difficultés des élèves dans l'apprentissage de l'algèbre réside d'une part dans les difficultés inhérentes à la syntaxe formelle et concise des symboles algébriques, et d'autre part dans le manque de lien avec d'autres représentations ; cette transversalité entre systèmes de représentations mathématiques, cette capacité à coordonner objets et actions entre deux représentations différentes, est source de signification en algèbre (p. 712).

Nous relions ces résultats directement avec les travaux de Duval (Duval, 1993) sur les registres de représentations sémiotiques, qui, d'après cet auteur, « *jouent un rôle fondamental dans l'activité mathématique* » et donc *a fortiori* dans l'activité algébrique. Comme Vergnaud (1989), Duval affirme que l'appropriation d'un concept et la production de représentations sémiotiques liées à ce concept vont de pair.

Duval (1993) distingue trois activités cognitives fondamentales mises en jeu dans la production d'une représentation sémiotique :

- sa formation, qui implique d'une part des choix dans les données du contenu à représenter et d'autre part de respecter certaines règles ;
- son traitement, qui consiste à transformer la représentation dans le registre même où elle a été formée ;
- la conversion du contenu de cette représentation depuis son registre initial vers un autre registre, et qui peut impliquer de perdre une partie du contenu de la représentation initiale.

Par exemple, partant d'un problème de mathématique donné en langage naturel et pouvant être résolu à l'aide d'une équation, un élève utilisera les trois activités précédentes : en choisissant de nommer l'inconnue par une lettre et de traduire les relations entre grandeurs par une équation en respectant la syntaxe formelle de cette dernière, il formera et convertira une représentation depuis le registre du langage naturel vers le registre des écritures algébriques (en perdant une quantité de données qu'il aura jugées inutiles à prendre en compte pour établir l'équation) ; puis il traitera cette équation par des transformations formelles à l'intérieur même du registre des écritures algébriques pour aboutir à la solution du problème de départ.

L'intérêt d'effectuer l'activité de traitement dans un certain registre réside dans son caractère économique. Les écritures algébriques constituent un registre performant pour résoudre certains problèmes par une mise en équation dans le sens où elles permettent un traitement plus rapide de ces problèmes. De plus, la coordination entre au moins deux registres est parfois nécessaire pour appréhender un concept, afin ne pas être limité au contexte sémiotique d'un seul registre. Duval ajoute :

> « *Cette coordination est loin d'être naturelle. Et elle ne semble pas pouvoir se réaliser dans le cadre d'un enseignement principalement déterminé par les contenus conceptuels. On peut observer à tous les niveaux un* ***cloisonnement des registres de représentation*** *chez la très grande majorité des élèves. Ceux-ci ne reconnaissent pas le même objet à travers des représentations qui en sont donnés dans des systèmes sémiotiques différents* » (1993, p. 52)

À l'inverse, toutes les conversions sémiotiques ne sont pas porteuses de sens. Filloy, Puig et Rojano (2008) ont réalisé une expérimentation où des élèves devaient traduire géométriquement par des aires des équations dans le cadre d'une activité d'introduction. Les auteurs ont déclaré que cette façon de faire était innapropriée, car certains élèves convertissaient systématiquement leurs équations en termes d'aires de rectangles, sauf que certaines équations conduisaient à des solutions négatives, non représentables par des aires.

La conversion sémiotique entre registres peut être rendue plus ou moins complexe en fonction de la *congruence sémiotique*. Nous donnons ci-dessous un énoncé rédigé de deux manières différentes et la formule traduisant les relations présentes dans cet énoncé pour illustrer cette notion de congruence.

Enoncé, formulation A : Dans cette classe, le nombre de filles multiplié par 2 est égal au nombre de garçons.

Enoncé, formulation B : Dans cette classe, il y a deux fois plus de garçons que de filles.

Appelons f le nombre de filles et g le nombre de garçons. Chaque énoncé conduit à la formule $f \times 2 = g$ (voir figure 6.4). Cependant, il y a *congruence* entre cette formule et la formulation A de l'énoncé (la traduction en formule suit mot à mot le fil de la lecture), alors qu'il n'y en a pas entre cette formule et la formulation B de l'énoncé, qui nécessite une certaine réorganisation des données avant traduction. De plus, notons d'une part que dans la formulation A, la traduction de l'égalité est immédiate de par la présence de l'expression « est égal à », alors que dans la formulation B, l'égalité est beaucoup plus « implicite » dans le texte, et d'autre part que la cardinalité (« le nombre de ») est sous-entendue dans la formulation B alors qu'elle ne l'est pas dans la formulation A. Enfin, au moins une donnée a disparu dans les deux cas lors de la conversion depuis le registre du langage naturel vers celui des écritures algébriques : le « Dans cette classe ».

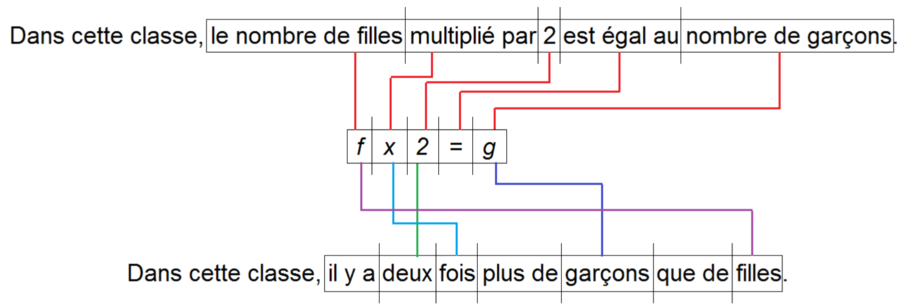


FIGURE 6.4 – Un exemple de congruence et de non congruence sémiotique

Nous retenons que le jeu de conversions sémiotiques entre plusieurs registres de représentations sémiotiques est source de signification pour appréhender le concept d'équation et que le traitement d'un problème dans le registre des écritures algébriques peut être motivé par un intérêt d'économie, sous certaines conditions. Ce dernier point nous amène naturellement à la troisième source de signification des équations dans le paragraphe suivant.

c. Les équations : un outil de résolution de problèmes

Le contexte de la résolution de problèmes est la troisième source de signification en algèbre (Kieran, 2007). Ce contexte peut être interne ou externe aux mathématiques.

L'algèbre peut être travaillée non seulement comme un *objet* d'étude avec des propriétés propres mais aussi comme un *outil* pour résoudre des problèmes. Douady (1986) a mis en évidence l'importance d'une dialectique outil-objet pour donner du sens aux objets mathématiques.

Les problèmes, en important des éléments sémantiques externes aux mathématiques, permettent à l'élève d'articuler le symbolisme algébrique et la syntaxe avec la sémantique et des situations diverses, créatrices de sens. Les problèmes sont l'occasion de travailler les conversions sémiotiques entre registres pour favoriser les activités de formation et de traitement des représentations, et de coordination interregistres.

Concrètement, quels problèmes relatifs aux équations, porteurs de sens, proposer aux élèves ?

Nous rappelons que des éléments de réponse à cette question ont déjà été apportés dans l'approche anthropologique : les objets de savoir doivent être motivés, leurs raisons d'être fondatrices doivent être dégagées, par le biais de types de tâches *problématiques* à l'origine de *questions génératrices* des OM nouvelles à étudier (Chevallard, 1998, 2002). Ces types de tâche doivent amener les élèves à se rendre compte de l'insuffisance des outils arithmétiques et à percevoir la puissance de l'outil algébrique, avec l'émergence de techniques à plus grande portée et, avec elles, de nouveaux discours technologiques et théoriques. Pour les équations, certains problèmes de modélisation leur donnent des raisons d'être. Par exemple, le processus d'algébrisation de Ruiz-Munzon (2010) intègre en son sein l'étude des équations à travers celle des programmes de calcul : pour quelle(s) valeur(s) d'entrée un programme de calcul renvoie-t-il un résultat donné ? Pour quelle(s) même(s) valeur(s) d'entrée deux programmes de calcul renvoient-ils le même résultat ? Ces types de tâches conduisent à construire des environnements technologico-théoriques autour des équations et de la technique de résolution algébrique.

d. Des éléments extérieurs aux mathématiques qui donnent du sens aux équations

La quatrième et dernière source de signification de l'algèbre porte sur ce qui est extérieur aux mathématiques, comme les gestes, les métaphores, les artefacts, etc.

Une approche utilisée dans certains manuels scolaires de collège pour introduire la technique de résolution algébrique des équations algébriques est celle de la balance de Roberval. Les plateaux de la balance représentent les deux membres de l'équation, les masses posées sur chaque plateau représentent les quantités (connues ou inconnues) de chaque expression, et l'égalité est traduite par celle des hauteurs des deux plateaux.

Cependant, nous interrogeons la pertinence de la métaphore de la balance. En effet, celle-ci nous semble présenter des limites : il est difficile de modéliser des masses « décimales », « fractionnaires » ou « négatives » pour traduire respectivement des nombres décimaux, des fractions et des négatifs présents dans une équation ; de même, il est difficile de modéliser des équations du second degré (que serait le produit d'une masse par cette même masse par exemple ?). L'utilisation de cette métaphore de la balance, s'il peut éventuellement « bien » illustrer certaines transformations et certaines propriétés de conservation de l'égalité, doit en tous les cas s'accompagner d'un discours pointant les limites de celle-ci.

Un autre exemple de situation faisant intervenir des éléments extérieurs aux mathématiques peut être trouvé dans Boulton-Lewis, Cooper, Atweh, Pillay, Wilss et Mutch (Boulton-Lewis et al., 1997) (voir figure 6.5). Les auteurs ont proposé à des étudiants de modéliser des expressions et des équations à l'aide de différents objets pour étudier la façon dont ces objets peuvent (ou non) les aider. Les résultats sont contrastés chez les étudiants : 18 étudiants sur 21 ont jugé que les matériaux les ont seulement parfois aidés (8) ou ne les ont pas aidés (10)).

Les auteurs précisent que pour construire un concept, la manipulation d'objets concrets peut être efficace et qu'elle l'est d'autant plus s'il y a en quelque sorte « isomorphisme » entre ce concept et sa représentation concrète.

Nous complétons avec les notions d'*ostensifs et non-ostensifs* introduits par Chevallard (1993). Un ostensif est un objet ayant « *une forme matérielle, sensible, au demeurant quelconque* » (p. 4) et pouvant être manipulé. Ceci inclut les objets matériels (stylo, compas, ...), les gestes, les mots, les schémas, les écritures et les formalismes. Un non-ostensif, à l'inverse, est un objet qui ne peut pas être manipulé, mais seulement évoqué à la travers la manipulation d'ostensifs associés. Ceci inclut les

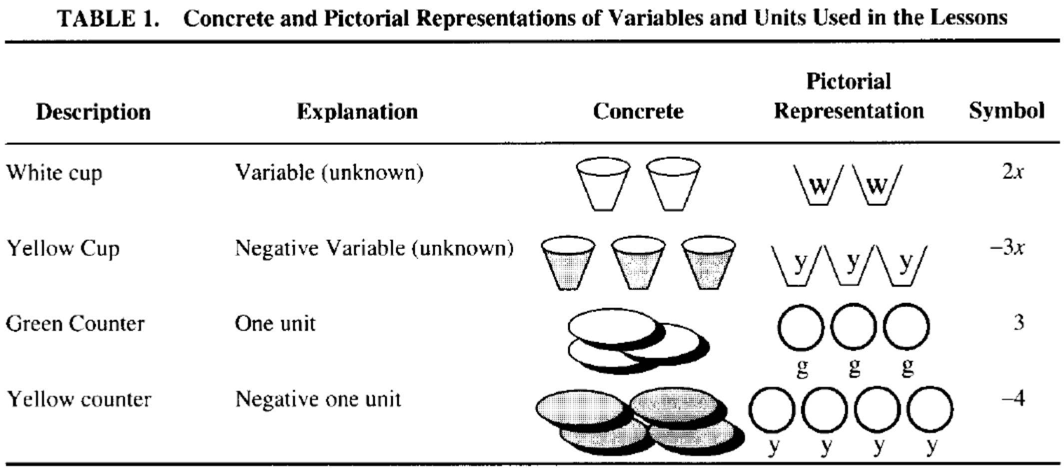


TABLE 1. Concrete and Pictorial Representations of Variables and Units Used in the Lessons

Description	Explanation	Concrete	Pictorial Representation	Symbol
White cup	Variable (unknown)		w w	$2x$
Yellow Cup	Negative Variable (unknown)		y y y	$-3x$
Green Counter	One unit		g g g	3
Yellow counter	Negative one unit		y y y y	-4

FIGURE 6.5 – Des matériaux utilisés pour le travail sur les équations (Boulton-Lewis & al., 1997, p. 383)

concepts, les idées, les notions, etc. Chevallard parle de dialectique entre ostensifs et non-ostensifs : « *La manipulation des ostensifs est réglée à l'aide notamment des non-ostensifs, et ces derniers, inversement, sont évoqués à l'aide d'ostensifs.* » (p. 5)

De nombreux exemples de manipulation d'ostensifs réglée par des non-ostensifs peuvent être trouvés dans les manuels scolaires ou *in situ* en classe, ou au contraire en être complètement asbents. Chevallard donne justement un exemple qui concerne directement les équations et qui porte sur le signe d'équivalence :

> « *Le signe d'équivalence, ⇔, est aujourd'hui banni de l'enseignement secondaire français jusqu'à un niveau relativement élevé, au motif que les élèves* ne comprendraient pas la notion d'équivalence *et seraient donc conduits à utiliser ce symbole* sans le comprendre. *L'idée sous-jacente est ici qu'il convient d'abord de comprendre (« abstraitement ») la* notion *d'équivalence avant d'utiliser (« concrètement ») le* signe *d'équivalence. À l'inverse, on peut soutenir que la notion d'équivalence et l'emploi réglé du signe d'équivalence* s'élaborent ensemble, *dans une dialectique où le signe joue un rôle non moins important que le concept ; la notion d'équivalence émerge de l'emploi, chaque fois rectifié, du signe d'équivalence.* » (p. 6)

Ceci nous amène à nous interroger sur cette dialectique entre ostensifs et non-ostensifs : l'utilisation de ces derniers est-elle présente dans les programmes et les manuels ? Conduit-elle à l'élaboration de techniques fiables ? Quel peut être l'impact de l'absence de cette dialectique pour certains concepts liés aux équations, comme celui d'équivalence, sur les rapports personnels des élèves aux équations et sur leurs processus de conceptualisation ?

6.5.4 Les équations au sein du modèle GTG de Kieran

Nous avons détaillé dans la section précédente les différentes sources de signification de l'algèbre et plus particulièrement des équations. Dans la présente section, nous allons présenter les trois types d'activité algébrique du modèle GTG de Kieran (2007) et situer ces différentes sources.

a. Les équations dans l'activité générative

La première activité du modèle GTG est l'activité générative. Elle correspond à la génération des objets de l'algèbre élémentaire ainsi qu'à leur interprétation. En ce qui concerne les équations, c'est dans cette activité que commencent à se construire les différents statuts de la lettre (inconnue, variable), du signe =, le concept de solution et le concept d'équation lui-même.

Cependant, la génération et l'interprétation de ces différents objets seront influencées par des conceptions anciennes présentes chez les élèves, lesquelles seront tantôt des points d'appui, tantôt des obstacles conceptuels, et que nous prenons largement en compte dans notre étude.

Nous complétons ces remarques avec des éléments de réflexion autour des différences entre l'étude des expressions et celle des équations, qui pourraient conduire les élèves à faire des confusions. Un premier élément est le suivant : une expression n'a pas de valeur de vérité (elle ne peut pas être vraie ou fausse) ; une équation n'est ni vraie ni fausse non plus, mais elle *peut* se dériver en une proposition vraie ou fausse dès lors qu'on attribue des valeurs aux variables, ce qui n'est pas le cas pour une expression. Un deuxième élément est que la définition d'une équation englobe celle de l'identité utilisée pour les expressions équivalentes, car une identité est une équation satisfaite pour n'importe quelle valeur attribuée à la variable ; en revanche, toutes les équations ne sont pas des identités.

Comment mettre en œuvre des situations d'apprentissage en classe pour réaliser l'activité générative autour des équations, prenant en compte les conceptions issues de l'arithmétique et de l'étude sur les expressions ? Quels contenus sont proposés dans les manuels ? Quelles injonctions sont émises dans les programmes ?

b. Les équations au sein de l'activité transformationnelle

La deuxième activité algébrique du modèle GTG est l'activité transformationnelle. Elle correspond à la manipulation d'objets de l'algèbre et à leurs transformations. C'est dans cette activité que se construit le sens donné à l'utilisation de propriétés algébriques dans la manipulation des objets. Kieran (2007) évoque les difficultés des élèves à identifier les propriétés algébriques qui justifient théoriquement les transformations opérées sur les équations. Elle explique que concernant la résolution d'équations et le travail sur l'équivalence des équations, un des grands enjeux de l'activité transformationnelle concerne les transformations symboliques d'une équation dans le but de maintenir l'équivalence. En plus de développer le sens de cette équivalence, cette activité inclut également le sens de la construction et de l'utilisation des propriétés et des axiomes des processus de transformations eux-mêmes.

Chez les élèves, l'activité transformationnelle relative aux équations peut être influencée par les conceptions issues de l'arithmétique et peut être en rupture avec celles-ci. Par exemple, la résolution d'équations algébriques nécessite d'opérer sur l'inconnue, ce qui constitue une coupure didactique avec la résolution d'équations arithmétiques.

Nous complétons une nouvelle fois cette remarque par le fait que l'étude des expressions qui précède celle des équations peut également avoir une influence sur l'activité transformationnelle des élèves et éventuellement expliquer certaines de leurs erreurs. Nous avançons plusieurs éléments à ce sujet ; certains d'entre eux ne sont pas appuyés par des travaux de recherche mais issus de notre réflexion personnelle.

L'égalité dans les transformations sur les équations. Le premier est que lorsqu'une expression est transformée en une autre expression équivalente, le signe = est employé pour *traduire* cette transformation, si bien qu'il peut encore être interprété comme annonce d'un résultat, non plus numérique, mais algébrique (telle expression *donne* telle expression développée ou factorisée ou réduite) ; dans les équations, l'égalité ne traduit plus de transformations, c'est le symbole d'équivalence qui le fait.

Le statut des lettres dans les transformations sur les équations. Un deuxième élément concerne le statut des lettres, notamment variable et inconnue pour les équations. Chalançon, Coppé et Pascal (2002) prennent l'exemple de la résolution de l'équation $2(x+3)+2=4(5x-3)$: « *pour résoudre cette équation, on doit dans un premier temps développer et réduire les deux membres en utilisant des égalités littérales. Pour passer d'une ligne à l'autre on utilise les règles du calcul littéral. Une autre difficulté est que la lettre* x *change de statut suivant que l'on raisonne horizontalement ou verticalement, c'est-à-dire : lorsque l'on passe de la première à la deuxième ligne en utilisant* $2(x+3)+2=2x+6+2$*, d'une part, et* $4(5x-3)=20x-12$*, d'autre part,* x *joue le rôle d'une variable, alors que lorsqu'on écrit* $2x+6+2=20x-12$*,* x *joue le rôle d'une inconnue.* » Nous avons vu dans grâce au point de vue logique qu'en réalité, x peut être vue comme une variable dans tous les cas si l'on considère une équation comme une fonction propositionnelle.

Des transformations doubles. Un troisième élément porte sur le caractère « double » des transformations effectuées sur les équations. Certaines transformations concernent uniquement les expressions présentes dans chaque membre de l'équation, tandis que d'autres correspondent à l'ajout d'un même nombre ou à la multiplication de chaque membre par un même nombre non nul. Par exemple, pour résoudre l'équation

$$(E1)\quad 2(x+2)=(x-6)(2x+4)$$

on peut d'abord développer l'expression du membre de gauche. Ceci constitue une première transformation, qui porte uniquement sur l'expression du membre de gauche, et qui conduit à une expression équivalente. On obtient alors l'équation

$$(E2)\quad 2x+4=(x-6)(2x+4)$$

qui est équivalente à $(E1)$. On remarque que ces deux équations équivalentes possèdent des expressions respectivement équivalentes membre à membre (l'expression du membre de gauche dans $(E1)$ est équivalente à l'expression du membre de gauche dans $(E2)$, et même chose pour les expressions des membres de droite de chaque équation). Si l'on continue la résolution, on peut soustraire à chaque membre de l'équation $(E2)$ l'expression $2x+4$; on obtient alors l'équation

$$(E3)\quad 0=(x-6)(2x+4)-(2x+4).$$

Cette équation $(E3)$ est équivalente à $(E1)$ et à $(E2)$ mais cette fois, les expressions des membres de $(E3)$ ne sont pas équivalentes membre à membre avec celles de $(E1)$ ou de $(E2)$. À travers cet exemple, nous mettons en avant l'articulation entre transformations sur les expressions d'une part, transformations sur les équations d'autre part, et le fait qu'il existe deux « types » de transformations qui ne font pas intervenir les mêmes propriétés mathématiques.

La reconnaissance double des structures. Kieran (2007) évoque l'importance de la reconnaissance des structures dans l'optique de guider les transformations à effectuer en fonction du but visé. Le quatrième élément de réflexion que nous apportons concerne justement cette reconnaissance. Selon nous, dans le cas des équations, celle-ci est « double » : il faut d'une part reconnaître les structures des expressions de chaque membre de l'équation, et d'autre part reconnaître la structure « globale » de l'équation. Reprenons l'exemple donné plus haut là où nous l'avons laissé : pour résoudre l'équation

$$(E3) \quad 0 = (x-6)(2x+4) - (2x+4),$$

il faut d'une part identifier la structure globale de l'équation, qui est $0 = P(x)$, et d'autre part la structure du membre de droite, qui est $A(x)B(x) - B(x)$. Cette double identification étant faite, elle guide le cheminement de la résolution : elle « pousse » à factoriser le membre de droite pour obtenir l'équation produit nul

$$(E4) \quad 0 = (2x+4)(x-6-1).$$

L'équivalence des équations. Un cinquième élément porte sur l'équivalence des équations : tout comme les élèves peuvent avoir une lecture « gauche-droite » de l'égalité en arithmétique, et même, dans l'étude des expressions (telle expression « donne » telle autre expression), nous nous demandons s'ils ont également une lecture « haut-bas » dans la résolution algébrique d'une équation, où chaque nouvelle équation équivalente obtenue pourrait être vue seulement comme un « résultat » ; est-elle aussi vue comme une équation *équivalente* ? Nous interrogeons notamment l'impact de l'absence d'utilisation du symbole $\Leftrightarrow$ ou même de rédaction pour insister sur cette équivalence en collège actuellement.

c. Les équations au sein de l'activité globale

Nous avons présenté les activités générative et transformationnelle du modèle GTG. La troisième et dernière activité est l'activité globale. Elle consiste à motiver une situation pour amener les élèves à se lancer dans les activité générative et transformationnelle, au travers la résolution de problèmes. Kieran (2007) insiste sur l'importance de ne pas minimiser les activités générative et transformationnelle par rapport à l'activité transformationnelle.

Nous avons déjà évoqué un certain nombre d'éléments concernant les problèmes en lien avec les équations : les types de tâches problématiques pour mettre en échec les méthodes arithmétiques et dégager des nouvelles techniques à plus grande portée (Chevallard, 1998a ; Gascon, 1994), les problèmes de modélisation conduisant à des équations algébriques pour amener à la coupure didactique avec les équations arithmétiques et à opérer sur l'inconnue (Filloy et al., 2008), les problèmes mettant en jeu des programmes de calcul pour construire de nouveaux environnements technologico-théoriques relatifs aux équations (Ruiz-Munzon, 2010 ; Chalançon et al., 2002), les problèmes déconnectés (Bednarz et Janvier, 1996 ; Gascon, 1994).

Nous complétons ces travaux avec ceux de Coulange (Coulange, 1998) sur la mise en équation de problèmes. Coulange propose un modèle de la démarche de modélisation d'un problème à mettre en équation (voir figure 6.6).

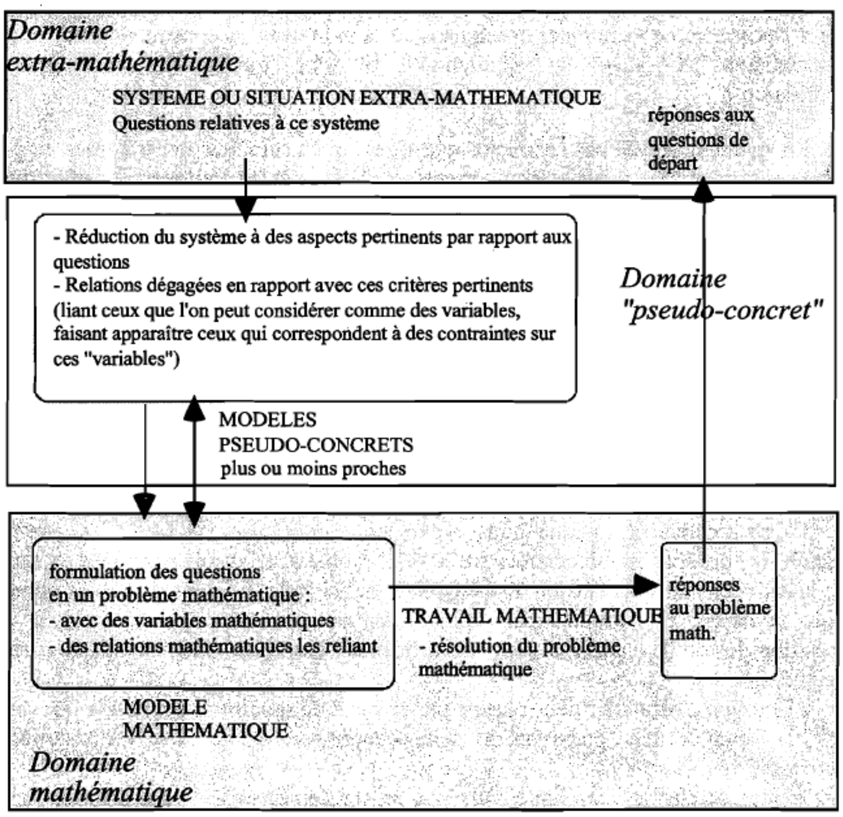


FIGURE 6.6 – Modèle de la démarche de modélisation (p. 35)

Dans ce modèle, une phase correspond à un travail dans un modèle *pseudo-concret* : il s'agit d'un modèle se situant entre la situation réelle et le modèle mathématique. Coulange fait le constat du faible nombre d'exercices dans les manuels où les situations présentées ne sont pas déjà dans ce modèle pseudo-concret. Un élève habitué à traiter des problèmes mettant en jeu des modèles pseudo-concrets peut éprouver des difficultés à résoudre des problèmes issus de domaines extérieurs aux mathématiques (situation réelle) et qui sont moins proches du modèle mathématique.

Nous traduisons ces résultats en termes des conversion entre registres de représentation sémiotique : une situation réelle, extérieure aux mathématiques, est généralement donnée en langage naturel, avec un certain nombre de données inutiles à la résolution du problème et qui disparaissent lors de la conversion dans le registre des écritures algébriques. Pour passer du registre du langage naturel au registre des écritures algébriques, selon Coulange, l'élève peut passer par une étape intermédiaire — correspondant au modèle pseudo-concret — où il se situe dans un registre à mi-chemin entre celui du langage naturel et celui des écritures algébriques et qui lui permet de dégager des éléments pertinents pour la résolution avant la conversion des données dans le registre des écritures algébriques. Ceci peut constituer une piste méthodologique pour travailler des problèmes ne présentant pas de congruence sémiotique : une étape intermédiaire correspondant à la sélection des données utiles et à leur réorganisation avant la conversion dans le registre des écritures algébriques peut être envisagé pour faciliter le travail de traduction.

6.5.5 Conclusion sur l'approche cognitive : d'autres éléments épistémologiques relatifs aux équations

L'approche cognitive a mis en évidence quatre grandes sources de signification de l'algèbre : celle relative au symbolisme algébrique, celle issue d'autres représentations mathématiques, celle dérivant du contexte des problèmes, et celle provenant d'éléments extérieurs aux mathématiques. Par ailleurs, les activités algébriques peuvent être classées en trois types : générative, transformationnelle, globale.

À l'issue des différentes synthèses de travaux et des éléments de réflexion que nous avons apportés, nous retenons les principaux éléments épistémologiques suivants concernant la génération et la manipulation des équations d'un point de vue des processus cognitifs chez l'élève et de leurs difficultés de conceptualisation :

- le rôle de l'articulation entre syntaxe et sémantique, mettant en jeu la dénotation, le sens et l'interprétation des équations ;
- le rôle des changements de cadres et des conversions entre registres de repré-

sentation sémiotique pour la formation et le traitement des représentations et de coordination inter-registres pour donner du sens aux équations et à leurs transformations ;

- la prise en compte de ruptures avec l'arithmétique ;
- la double conception procédural et structural des équations, la déstabilisation du statut des lettres, de l'égalité, des opérations ;
- l'importance de ces reconnaissances de structure pour guider l'intelligence des calculs ;
- l'influence des métaphores (balance de Roberval) et des discours utilisés pour travailler les concepts liés aux équations, avec la prise en considération des limites de ces métaphores et de ces discours ;
- le rôle de problèmes de modélisation, déconnectés, en lien avec des programmes de calcul, autres que des modèles pseudo-concrets, pour donner des raisons d'être aux équations et à leurs transformations, mais aussi du sens ;
- l'importance de l'équilibre à conserver entre activités générative, transformationnelle et globale, qui sont complémentaires.

6.6 Conclusion sur la référence épistémologique relative aux équations

Notre synthèse des différents travaux de didactique de l'algèbre autour des équations nous permet de dégager des éléments épistémologiques cruciaux et significatifs relativement aux équations, correspondant aux questions initiales que nous nous posions au début de ce chapitre et directement en lien avec notre problématique de thèse : qu'est-ce qui est au cœur de la génération des équations et de leur manipulation ? Qu'est-ce qui leur donne des raisons d'être et du sens chez les élèves ? Comment prennent-elles place au sein des curricula ? Le point de vue logique nous a permis de donner une définition des équations, évacuant des ambiguïtés liées aux statuts des lettres et de l'égalité dans les équations. L'approche anthropologique nous a fourni des modèles d'enseignement des équations prenant en compte les phénomènes didactiques et transpositifs dans le cadre de la TAD. Enfin, l'approche cognitive a situé les processus de conceptualisation des élèves au sein de l'activité algébrique.

La référence épistémologique que nous venons de construire est un résultat majeur de notre travail de thèse. Elle nous sert de point d'appui pour la suite de notre étude. À partir des éléments cruciaux qui ont été dégagés ici, nous allons à présent construire dans le chapitre sept une organisation mathématique de référence, opérationnalisée pour analyser les programmes et les manuels dans le chapitre huit. La référence épistémologique nous fournit des pistes d'analyse : les principaux éléments épistémologiques concernant les équations sont-ils suffisamment présents dans les programmes, les manuels et en classe ? Prennent-ils place au sein d'une organisation particulière ? Celle-ci met-elle en place les conditions pour favoriser la construction de rapports personnels idoines aux équations ? En particulier, ne provoque-t-elle pas l'apparition de besoins d'apprentissages implicites, des convocations d'organisation mathématiques laissées à la charge des élèves, un travail sur un curriculum praxique visible dans l'institution mais ignoré par elle, et qui sont à l'origine d'une hétérogénéité des apprentissages et de rapports non idoines aux équations ?

Chapitre 7

Organisation mathématique de référence relative aux équations du premier degré

7.1 Présentation

Nous avons établi au chapitre précédent une référence épistémologique relative aux équations algébriques en algèbre élémentaire. Cette référence nous sert de base pour la construction d'une OM de référence (Bosch et Gascon, 2005) relative aux équations dans le présent chapitre. Nous situons notre travail par rapport à celui réalisé par Pilet (2012) autour des expressions algébriques et nous l'articulons avec le sien ; en particulier, nous nous intéressons aux agrégations entre les OM relatives aux expressions et les OM relatives aux équations. Nous opérationnalisons l'OM de référence pour réaliser notre analyse praxéologique de l'OM à enseigner dans les programmes et les manuels dans le chapitre huit, afin de pouvoir mettre en relation les rapports personnels des élèves aux équations avec les rapports institutionnels à l'œuvre dans les programmes et les manuels.

Nous rappelons d'abord le découpage de l'OM régionale relative aux expressions algébriques réalisé par Pilet (2012). Ensuite, nous présentons le découpage de l'OM régionale relative aux équations algébriques en OM locales et nous détaillons chacune de ces OM locales. Enfin, nous donnons un exemple de problème faisant intervenir différentes convocations entre OM relatives aux expressions et OM relatives aux équations.

7.2 L'OM de référence relative aux expressions algébriques (Pilet, 2012)

Nous rappelons que Pilet (2012) a spécifié son étude sur les expressions algébriques en termes d'OM locales et régionales au sein de l'OM globale du domaine de l'algèbre.

Trois OM locales prennent place au sein de l'OM régionale relative aux expressions : une OM locale concernant la génération des expressions algébriques, une OM locale autour de l'équivalence des expressions et une OM locale portant sur l'algèbre des polynômes (voir figure 7.1).

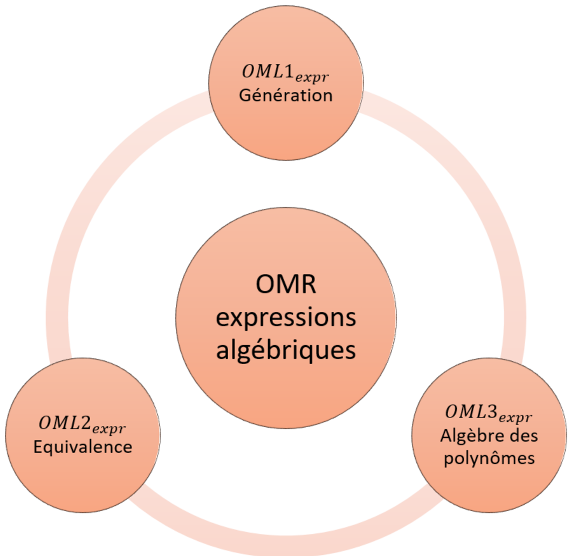


FIGURE 7.1 – OM locales de l'OM régionale relative aux expressions algébriques (Pilet, 2012)

Pilet explique que les OM locales de l'OM régionale relative aux expressions sont intimement liées : par exemple, la manipulation d'expressions algébriques, constitutive de l'OM locale sur l'algèbre des polynômes, trouve des raisons d'être dans l'OM locale autour de la génération des expressions au travers de problèmes de généralisation et des raisons d'être dans l'OM locale portant sur l'équivalence des expressions dans les moyens de contrôle de la conservation de l'équivalence entre des expressions.

Nous poursuivons les travaux menés par Pilet en spécifiant à notre tour notre étude en termes d'OM locales et régionales relatives aux équations au sein de l'OM globale de l'algèbre. Nous identifions et explicitons les articulations qui existent non seulement au sein des OM locales relatives aux équations, mais également entre les OM locales relatives aux expressions et les OM locales relatives aux équations.

7.3 Découpage de l'OM régionale relative aux équations

Avant de présenter en détail les OM locales de l'OM régionale relative aux équations, nous exposons la manière dont nous avons procédé pour réaliser le découpage de cette dernière.

Tout d'abord, nous rappelons qu'une OM locale est constituée d'un bloc $[T_i, \tau_i, \theta, \Theta]$. Autrement dit, une OM locale est pilotée par une technologie θ qui justifie les différentes techniques τ_i permettant de réaliser les types de tâches T_i constitutifs de l'OM locale. Un des objectifs de la construction d'une OM de référence est de disposer d'OM locales relativement complètes (Bosch et Gascon, 2005), intégrant et articulant des OM ponctuelles, avec des discours technologiques justificateurs et unificateurs. C'est donc par le choix des technologies qui pilotent les OM locales que le découpage de l'OM régionale relative aux équations est réalisé.

Ce choix des technologies s'appuie sur les éléments dominants de la référence épistémologique relative aux équations établie au chapitre précédent ; ainsi, il tient compte des raisons d'être des équations et de ce qui est au coeur de leur manipulation. Les genres et les types de tâches retenus, dont les techniques sont justifiées par les technologies choisies, l'ont été parce que nous les avons jugés pertinents pour le découpage des OM compte tenu de la référence épistémologique.

Le découpage se justifie également par le fait que nous situons notre travail dans le domaine de l'algèbre élémentaire. Nous nous sommes restreints aux équations et problèmes du premier degré, ou du second degré se ramenant au premier degré.

Enfin, nous décrivons pour certaines OM locales les technologies en termes de composante théorique et de composante pratique (Castela, 2008). Cette description est particulièrement adaptée à notre étude sur les équations, où les techniques de résolution algébrique, par exemple, sont certes justifiées par des discours théoriques, mais aussi par des discours pratiques qui facilitent leur mise en œuvre.

Le découpage de l'OM de référence relative aux équations que nous présentons est issu de choix argumentés de notre part. Il découle de la manière dont nous avons synthétisé des travaux de didactique de l'algèbre, des croisements entre les différentes approches employées, des outils et cadres théoriques retenus, des objectifs d'étude que nous nous sommes fixés.

7.4 Présentation des OM locales

Les OM locales intégrées au sein de l'OM de référence régionale relative aux équations sont au nombre de trois (voir figure 7.2) et notées $OML1_{eq}$, $OML2_{eq}$, $OML3_{eq}$ dans la suite pour pouvoir être distinguées des OM locales de l'OM régionale relative aux expressions.

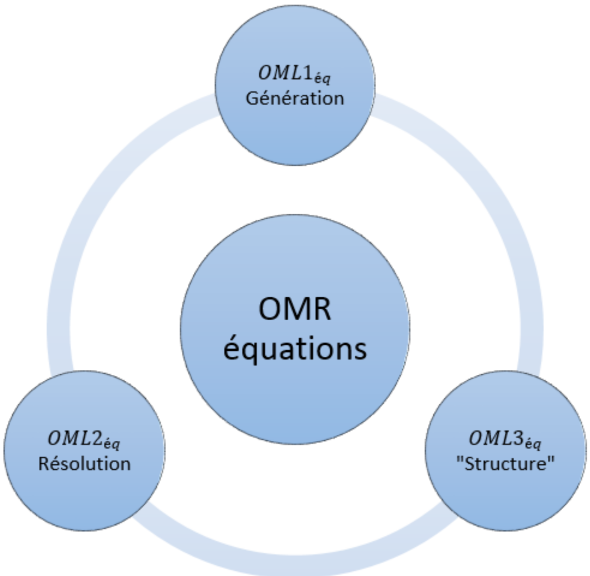


FIGURE 7.2 – OM locales de l'OM régionale relative aux équations

$OML1_{eq}$ est une OM locale autour de la génération des équations. D'après l'étude épistémologique, les équations constituent un outil pour résoudre un champ de problèmes, ceux nécessitant une mise en équation. Des processus de modélisation sont mis en jeu dans la résolution de ces problèmes, impliquant la traduction de relations entre grandeurs et des conversions entre registres de représentation sémiotiques (registre du problème de départ, registre des écritures algébriques). Cette première OM locale fournit un environnement technologico-théorique justifiant les techniques de mise en équation et de traduction entre registres de représentation sémiotiques.

La mise en équation de problèmes de modélisation fait passer d'un registre de représentation à celui du registre des écritures algébriques qui, sous certaines conditions, permet de trouver d'une manière plus économique les solutions de l'équation, en effectuant des transformations sur celle-ci qui préservent l'ensemble des solutions. Ces transformations font l'objet de $OML2_{eq}$. L'environnement technologico-théorique de cette OM justifie les techniques de résolution algébrique des équations algébriques.

L'étude épistémologique a montré que cette résolution algébrique nécessite une intelligence des calculs, passant par l'identification de la structure et du degré des équations en jeu, éventuellement par un contrôle numérique par test des solutions obtenues. Elle nécessite aussi une articulation avec le sémantique, notamment en ce qui concerne l'existence et le nombre de solutions d'une équation, car il est possible de transformer des équations en équations équivalentes sans même savoir s'il existe des solutions. $OML3eq$ est une OM locale autour de la structure des équations et du concept de solution d'une équation, et fournit un environnement technologico-théorique justifiant l'existence et le nombre de solution d'une équation en fonction de sa structure et de son degré.

$OML1_{eq}$ porte sur la dimension outil de l'algèbre et $OML2_{eq}$ et $OML3_{eq}$ portent sur la dimension objet (Douady, 1986).

Pour chacune des trois OM locales de l'OM régionale relative aux équations, nous identifions des genres et des types de tâches, des techniques, une technologie (décrite en termes de composantes théorique et pratique) et une théorie, sans prétendre à quelque exhaustivité, et nous illustrons par quelques exemples de tâches. Nous mettons en exergue les principaux genres et types de tâches impliqués dans le calcul sur et avec les équations d'une part, et les articulations entre les OM locales elles-mêmes de l'OM régionale relative aux équations.

7.5 $OML1_{eq}$: génération des équations

7.5.1 Présentation

$OML1_{eq}$ est une OM locale autour de la génération des équations, qui fait intervenir les activités de formation des représentations, de conversion et de coordination entre registres de représentation sémiotiques. Elle fournit un environnement technologico-théorique pour justifier les techniques de production, de traduction et d'association de relations entre grandeurs dans un registre de représentation sémiotique vers un autre registre de représentation sémiotique.

$OML1_{eq}$ donne des raisons d'être aux équations, comme outils pour répondre à la question génératrice : quelles sont les valeurs à entrer dans deux programmes de calcul pour qu'ils renvoient le même résultat final ? En ce sens, elle traite de la dimension *outil* de l'algèbre (Douady, 1986).

7.5.2 Principaux genres de tâches

$T_{Mettre-en-equation}$: Mettre en équation un problème, c'est-à-dire nommer les inconnues et écrire dans le registre de représentation sémiotique des écritures algébriques la relation entre ces inconnues et les grandeurs données dans un problème de modélisation énoncé dans un autre registre de représentation sémiotique

$T_{Traduire_{eq}}$: Les inconnues étant déjà nommées dans un problème énoncé dans un registre de représentation sémiotique, écrire la relation entre ces inconnues et les grandeurs données dans le registre de représentation sémiotique des écritures algébriques, et inversement

$T_{Associer_{eq}}$: Une équation étant donnée dans le registre de représentation des écritures algébriques, lui associer un problème énoncé dans un autre registre de représentation sémiotique, et inversement

La distinction entre les genres de tâches $T_{Mettre-en-equation}$ et $T_{Traduire_{eq}}$ est double : d'une part, pour $T_{Traduire_{eq}}$, la convocation d'une ou de plusieurs lettres (nommer x l'inconnue par exemple) n'est pas à la charge de l'élève, alors qu'elle l'est pour $T_{Mettre-en-equation}$; d'autre part, il existe une hiérarchie dans les deux genres de tâches, parce que $T_{Mettre-en-equation}$ *convoque* $T_{Traduire_{eq}}$.

La distinction entre les genres de tâches $T_{Traduire_{eq}}$ et $T_{Associer_{eq}}$ réside dans le fait que pour $T_{Traduire_{eq}}$, l'écriture des relations entre grandeurs du problème est à la charge des élèves alors qu'elle ne l'est pas pour $T_{Associer_{eq}}$ (où problème et équation correspondante sont donnés).

La complexité de ces trois genres de tâches dépend en particulier de la variable didactique qu'est la congruence sémiotique. Le travail nécessaire sur cette congruence sémiotique a été identifié dans la référence épistémologique.

De plus, toujours d'après la référence épistémologique, le travail nécessaire des types de tâches « réciproques » (par exemple, le type de tâches « réciproque » du type de tâches « mettre tel ou tel problème en équation » est « produire un problème dont l'équation est telle ou telle »), afin de favoriser la travail de conversion et de coordination entre registres, nous conduit à distinguer dans les types de tâches ceux qui se font du registre de représentation sémiotique du problème vers le registre des écritures algébriques, et ceux qui se font dans le sens inverse.

7.5.3 Principaux types de tâches

Pour chacun des genres de tâches listés précédemment, nous présentons les principaux types de tâches correspondants, sans prétendre à l'exhaustivité.

Les types de tâches considérés sont en lien avec des problèmes mettant en jeu des programmes de calcul et qui conduisent à la résolution algébrique d'une équation algébrique. Sont donc exclues les équations arithmétiques [1] et les équations non algébriques.

a. Principaux types de tâches relevant de $T_{Mettre-en-equation}$

$T_{Mettre-en-equation-PC=nb}$: Déterminer pour quelle(s) valeur(s) d'entrée un programme de calcul renvoie un nombre donné

$T_{Mettre-en-equation-PC=PC}$: Déterminer pour quelle(s) valeur(s) d'entrée deux programmes de calcul renvoient le même résultat

$T_{Mettre-en-equation-PbNat \to eq}$: Mettre en équation un problème donné en langage naturel

b. Principaux types de tâches relevant de $T_{Traduire_{eq}}$

$T_{Traduire_{eq}-PC=nb \to eq}$: Traduire un problème donné en langage naturel et mettant en jeu une égalité entre un programme de calcul et un nombre par une équation

$T_{Traduire_{eq}-eq \to PC=nb}$: Traduire une équation de la forme $P(x) = a$ en un problème en langage naturel mettant en jeu une égalité entre un programme de calcul et un nombre

$T_{Traduire_{eq}-PC=PC \to eq}$: Traduire un problème donné en langage naturel et mettant en jeu une égalité entre deux programmes de calcul par une équation

$T_{Traduire_{eq}-eq \to PC=PC}$: Traduire une équation par un problème en langage naturel mettant en jeu une égalité entre deux programmes de calcul par une équation

$T_{Traduire_{eq}-Longueur=Longueur \to eq}$, $T_{Traduire_{eq}-Aire=Aire \to eq}$, $T_{Traduire_{eq}-Volume=Volume \to eq}$, $T_{Traduire_{eq}-Angle=Angle \to eq}$: Respectivement, traduire une égalité entre longueurs (ou entre périmètres), une égalité entre aires, une égalité entre volumes, une égalité entre mesures d'angle, par une équation

1. Pour rappel, une équation arithmétique est une équation de la forme $ax + b = c$ pouvant être résolue par la technique d'opérations réciproques (ou remontée arithmétique) : $x = (c - b) \div a$.

$T_{Traduire_{eq}-eq \to Longueur=Longueur}$, $T_{Traduire_{eq}-eq \to Aire=Aire}$, $T_{Traduire_{eq}-eq \to Volume=Volume}$, $T_{Traduire_{eq}-eq \to Angle=Angle}$: Respectivement, traduire une équation par une égalité entre longueurs (ou entre périmètres), une égalité entre aires, une égalité entre volumes, une égalité entre mesures d'angle

c. Principaux types de tâches relevant de $T_{Associer_{eq}}$

$T_{Associer_{eq}-PC=nb \leftrightarrow eq}$: Associer un problème donné en langage naturel et mettant en jeu une égalité entre un programme de calcul et un nombre donné à une équation

$T_{Associer_{eq}-PC=PC \leftrightarrow eq}$: Associer un problème donné en langage naturel et mettant en jeu une égalité entre deux programmes de calcul à une équation

$T_{Associer_{eq}-Longueur=Longueur \leftrightarrow eq}$, $T_{Associer_{eq}-Aire=Aire \leftrightarrow eq}$, $T_{Associer_{eq}-Volume=Volume \leftrightarrow eq}$, $T_{Associer_{eq}-Angle=Angle \leftrightarrow eq}$: Respectivement, associer une égalité entre longueurs (ou entre périmètres), une égalité entre aires, une égalité entre volumes, une égalité entre mesures d'angle, à une équation

7.5.4 Technique

La technique permettant de réaliser les types de tâches relevant de $T_{Mettre-en-equation}$ consiste à désigner la quantité recherchée par une lettre et traduire les relations entre les grandeurs données dans le registre de représentation de départ dans le registre de représentation des écritures algébriques.

La technique permettant de réaliser les types de tâches relevant de $T_{Traduire_{eq}}$, où la quantité recherchée est déjà désignée par une lettre, consiste à traduire les relations entre les grandeurs données dans le registre de représentation de départ dans le registre de représentation des écritures algébriques, ou réciproquement (par exemple pour $T_{Traduire_{eq}-eq \to PC=PC}$).

La technique permettant de réaliser les types de tâches relevant de $T_{Associer_{eq}}$ consiste à repérer et à interpréter les relations entre les grandeurs données dans le registre de représentation de départ et dans le registre de représentation des écritures algébriques.

La complexité des techniques précédentes a des origines multiples. Par exemple, si l'énoncé de départ est en langage naturel, les quantités à chercher peuvent apparaître clairement (« trouver la valeur de ... ») ou non, l'égalité peut être visible (« ... est égal à ... ») ou implicite, les mêmes grandeurs peuvent être exprimées de deux façons différentes, il peut y avoir congruence sémiotique ou non, etc. Nous revenons sur cette complexité dans la description de la composante pratique de la technologie ci-après.

7.5.5 Eléments technologico-théoriques

a. Composante théorique de la technologie

La technologie justifiant les techniques précédentes est constituée des règles de formation des représentations, de conversion d'un registre de représentation sémiotique à un autre et de coordination inter-registres. Ceci implique le rôle des quatre opérateurs $+, -, \times, :$ et des puissances, des délimitants (parenthèses, crochets), le rôle et la signification du signe $=$ dans les équations, et les priorités opératoires.

b. Composante pratique de la technologie

Pour mettre en œuvre les techniques précédentes, il faut :

- repérer et extraire les quantités connues et inconnues pertinentes ;
- repérer l'expression « est égal à » dans l'énoncé de départ s'il est en langage naturel, ou bien, si l'égalité est implicite (l'expression « est égal à » n'apparaît pas ou le registre de départ n'est pas le langage naturel), il faut reformuler le problème en explicitant l'égalité, ou utiliser une propriété de géométrie (par exemple, pour qu'un rectangle devienne un carré, l'égalité sera celle des longueurs de deux côtés consécutifs), ou identifier qu'une même grandeur est exprimée de deux façons différentes ;
- dans le cas de la mise en équation, il faut choisir l'inconnue ; soit il n'y a qu'une seule grandeur inconnue à trouver, auquel cas c'est cette grandeur qui sera l'inconnue ; soit plusieurs grandeurs sont inconnues et dépendent d'une seule grandeur inconnue, auquel cas on peut choisir une grandeur inconnue ;
- dans le cas de la mise en équation et de la traduction, en fonction de l'inconnue choisie, il faut exprimer dans le registre des écritures algébriques les relations entre les grandeurs pour chacune des expressions mises à égalité.

c. Eléments théoriques

Les éléments théoriques justifiant la technologie précédente sont le sens et la dénotation d'une équation, impliquant la double conception procédurale et structurale des équations.

7.5.6 Quelques exemples de tâches relevant de types de tâches de $OML1_{eq}$

Exemple 1. Paul pense à un nombre. Quand il le multiplie par 2 et qu'il ajoute 7 au résultat, il obtient la même chose que lorsqu'il le multiplie par 3 et qu'il retranche 5 au résultat. Traduire cette situation par une mise en équation. (Tâche relevant de $T_{Mettre-en-euation-PbNat \to eq}$)

Exemple 2. Rédiger en français un problème avec des programmes de calcul qui peut être traduit par l'équation $2x + 7 = 3x - 5$. (Tâche relevant du type de tâches $T_{Traduire_{eq}-eq \to PC=PC}$)

Exemple 3. Voici un programme de calcul : choisir un nombre x, lui ajouter 3, multiplier le résultat par 5, et ajouter x au tout. Maude cherche la valeur du nombre x pour que le résultat final du programme soit égal à 7. Parmi les équations suivantes, quelle est celle qui traduit la situation ?

(a) $x + 3 \times 5 + x = 7$

(b) $(x + 3) \times (5 + x) = 7$

(c) $(x + 3) \times 5 + x = 7$

(Tâche relevant du type de tâches $T_{Associer_{eq}-PC=PC \leftrightarrow eq}$)

7.6 $OML2_{eq}$: résolution

7.6.1 Présentation

$OML2_{eq}$ est une OM locale autour de la résolution des équations algébriques, ou équations polynomiales. Dans le cadre de l'algèbre élémentaire telle qu'elle est étudiée au collège, nous considérons les équations polynomiales de degré au plus 2, et dans le cas où une équation est de degré 2, elle doit pouvoir se ramener à la résolution d'équations du premier degré. Les équations polynomiales de degré supérieur ou égal à 3 sont rares en algèbre élémentaire au collège et leur résolution se fait essentiellement à partir de tests de valeurs (pour trouver une première racine avant de procéder éventuellement à une factorisation du polynôme).

Prenant place au sein de l'OM régionale relative aux équations, elle-même intégrée à l'OM globale de l'algèbre, $OML2_{eq}$ comprend les types de tâches dont les techniques relèvent de l'algèbre uniquement. Les autres techniques (arithmétique, essais-erreurs, graphique) ne sont pas incluses dans cette OM locale. Nous les évoquons dans une section à part (voir section (réf)).

Pour être tout à fait précis, $OML2_{eq}$ ne porte pas exactement sur la résolution (trouver les solutions) mais sur les *transformations* opérées sur une équation *en vue d'en trouver l'ensemble des solutions*. Nous l'avons tout de même intitulée « Résolution ».

$OML2_{eq}$ porte sur la dimension *objet* (Douady, 1986) de l'algèbre.

7.6.2 Principaux genres de tâches

$T_{Resoudre}$: Résoudre une équation (transformer une équation en vue de trouver ses solutions)

$T_{Prouver-equivalence_{eq}}$: Prouver que deux équations sont (ou ne sont pas) équivalentes

7.6.3 Principaux types de tâches

a. Principaux types de tâches relevant de $T_{Resoudre}$

Pour chacun des types de tâches ci-dessous, nous ne distinguons pas certaines formes d'équations. Par exemple, une équation de la forme $a+bx=c+dx$ n'est pas distinguée[2] de l'équation de la forme $ax+b=cx+d$.

La liste ci-dessous est loin d'être exhaustive car les variables didactiques que constituent les coefficients, la structure et le degré des équations donnent lieu à une très grande variété d'équations. Nous n'avons retenu que quelques équations dont nous estimons que les formes sont celles souvent rencontrées en algèbre élémentaire.

$T_{Resoudre-P(x)=a/deg(P)=1}$: Résoudre une équation de la forme $P(x)=a$ où P est un polynôme de degré 1 tel que son expression fait apparaître plusieurs fois la variable x

$T_{Resoudre-ax+b=cx+d}$: Résoudre une équation de la forme $ax+b=cx+d$ avec $ac \neq 0$, $a \neq c$, $b \neq d$

$T_{Resoudre-P(x)=Q(x)/deg(P)=deg(Q)=1}$: Résoudre une équation de la forme $P(x)=Q(x)$ où P et Q sont deux polynômes de degré 1 et tels que l'expression de l'un au moins fait apparaître plusieurs fois la variable x

$T_{Resoudre-(ax+b)(cx+d)=0}$: Résoudre une équation de la forme $(ax+b)(cx+d)=0$ avec $ac \neq 0$

2. Cela ne signifie pas que nous ignorons le fait qu'une équation de la forme $ax+b=cx+d$ et qu'une équation de la forme $a+bx=c+dx$ soient considérées différemment par les élèves.

$T_{Resoudre-P(x)Q(x)=0/deg(P)=deg(Q)=1}$: Résoudre une équation de la forme $P(x)Q(x) = 0$ où P et Q sont deux polynômes de degré 1 et tels que l'expression de l'un au moins fait apparaître plusieurs fois la variable x

$T_{Resoudre-P(x)=0/deg(P)=2}$: Résoudre une équation de la forme $P(x) = 0$ où P est un pôlynôme de degré 2 dont l'expression fait intervenir plusieurs fois des termes en x^2 et/ou des termes en x et qui se ramène après développement ou factorisation (ou combinaison des deux) à une équation de la forme $ax+b = 0$ ou $(ax+b)(cx+d) = 0$.

$T_{Resoudre-P(x)=Q(x)/deg\geq 1\rightarrow deg\leq 2}$: Résoudre une équation de la forme $P(x) = Q(x)$ où P et Q sont des polynômes de degré supérieur ou égale à 1, et qui se ramène après transformations à une équation du premier degré

7.6.4 Techniques

a. Techniques pour les types de tâches relevant du genre de tâches $T_{Resoudre}$

Une technique pour résoudre une équation algébrique du premier degré consiste à transformer l'équation en une équation équivalente de la forme $ax + b = 0$ dont la solution est donnée par la définition de la fraction $\frac{-b}{a}$.

Une technique pour résoudre une équation algébrique du second degré et pouvant se ramener à une équation produit nul consiste à transformer l'équation en une équation produit nul.

La technique pour résoudre des équations présentant des fractions rationnelles consiste à se ramener, par multiplication par le plus petit commun multiple des polynômes des dénominateurs des fractions en présence, à une équation polynomiale et à résoudre cette dernière.

b. Techniques pour les types de tâches relevant du genre de tâches $T_{Prouver-equivalence_{eq}}$

Les techniques pour les types de tâches relevant du genre de tâches $T_{Prouver-equivalence_{eq}}$ consistent soit à identifier les transformations qui ont été opérées sur une équation pour obtenir une équation équivalente, soit à transformer chaque équation en des équations équivalentes et à comparer les équations obtenues, soit à résoudre chaque équation puis à comparer leurs solutions. Une technique pour montrer que deux équations ne sont pas équivalentes peut consister à exhiber un nombre qui soit solution d'une équation et pas de l'autre. Ces techniques convoquent les types de tâches relevant des genres de tâches $T_{Structure_{eq}}$, $T_{Degre_{eq}}$, $T_{Denombrer-sol}$ et $T_{Tester-sol}$ de $OML3_{eq}$.

7.6.5 Eléments technologico-théoriques

a. Composante théorique de la technologie

Dans $\mathbb{R}$, les propriétés de conservation de l'égalité ainsi que la propriété du produit de facteurs réels nul constituent la composante théorique justifiant les techniques précédentes. Nous les rappelons :

1. $\forall(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$
2. $\forall(a, b, c) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^*, a = b \Leftrightarrow ac = bc$
3. $\forall(a, b) \in \mathbb{R}^2, ab = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$.

b. Composante pratique de la technologie

Des discours pratiques peuvent être tenus pour faciliter la mise en œuvre des techniques précédentes, par exemple :

- pour les équations de degré 1 : « Transformer l'équation en une équation équivalente dont on peut manifestement déterminer l'ensemble des solutions », « Isoler x » ;
- pour les équations de degré 2 : « Transformer l'équation en une équation équivalente avec second membre nul et essayer de reconnaître une identité remarquable dans le premier membre pour se ramener à une équation produit nul ».

7.6.6 Eléments théoriques

Les éléments théoriques justifiant la technologie précédente sont la définition et les propriétés du corps des réels $(\mathbb{R}, +, \times)$.

7.7 $OML3_{eq}$: structure des équations

7.7.1 Présentation

$OML3_{eq}$ est une OM locale autour de la structure des équations, qui est liée aux solutions : en fonction de la structure d'une équation, il est possible de déterminer l'existence et le nombre maximal de solutions d'une équation. De plus, la compréhension de la structure d'une équation permet de guider les transformations à effectuer lors d'une résolution algébrique et de tester des solutions numériquement par substitution.

$OML3_{eq}$ porte sur la dimension *objet* de l'algèbre.

7.7.2 Principaux genres de tâches

$T_{Structure_{eq}}$: Identifier la structure d'une équation

$T_{Degre_{eq}}$: Identifier le degré d'une équation

$T_{Denombrer-sol}$: Dénombrer les solutions réelles d'une équation

$T_{Tester-sol}$: Tester si un nombre est solution d'une équation

$T_{Ecrire_{eq}}$: Ecrire une équation en respectant certaines conditions sur la structure et/ou le degré et/ou les solutions de l'équation

Le genre de tâches $T_{Ecrire_{eq}}$ n'a pas été placé au sein de $OML1_{eq}$ car il ne fait pas intervenir de conversions entre registres de représentation sémiotiques. Il est lié au concept de solution d'équation et sa réalisation permet un travail sur la structure d'une équation, nécessaire à la résolution. Les techniques pour effectuer les types de tâches relevant de $T_{Ecrire_{eq}}$ sont justifiées par le discours technologique pilotant $OML3_{eq}$, c'est pourquoi nous l'y intégrons.

7.7.3 Principaux types de tâches

Les types de tâches relevant des genres de tâches autres que $T_{Ecrire_{eq}}$ dépendent des types d'équation en jeu. Nous ne présentons donc que quelques types de tâches relevant de $T_{Ecrire_{eq}}$.

a. Types de tâches relevant de $T_{Ecrire_{eq}}$

$T_{Ecrire_{eq}-deg=n}$: Ecrire une équation de degré n

$T_{Ecrire_{eq}-sol=n}$: Ecrire une équation comportant n solutions (éventuellement : les solutions sont multiples et distinctes ; la solution est unique ; le nombre de solution est 0)

$T_{Ecrire_{eq}-P(x)=0}$: Ecrire une équation avec un membre nul

$T_{Ecrire_{eq}-produitnul}$: Ecrire une équation produit nul

Selon la valeur de n, les types de tâches précédents peuvent ne pas apparaître dans les OM à enseigner présents dans les programmes et les manuels de collège.

7.7.4 Techniques

a. Technique pour les types de tâches relevant du genre de tâches $T_{Structure_{eq}}$

La technique pour identifier la structure d'une équation consiste à repérer le signe d'égalité et les opérateurs de plus haut niveau dans les expressions de chaque membre de l'équation.

b. Technique pour les types de tâches relevant du genre de tâches $T_{Degre_{eq}}$

Une technique pour identifier le degré d'une équation consiste à effectuer des transformations sur l'équation jusqu'à pouvoir identifier clairement ce degré.

Si l'équation est une équation produit nul (avec éventuellement plus de deux facteurs polynomiaux), une technique pour déterminer le degré de l'équation consiste à multiplier les degrés de chaque facteur polynomial.

c. Techniques pour les types de tâches relevant du genre de tâches $T_{Denombrer-sol}$

Les techniques pour dénombrer les solutions d'une équation consistent soit à résoudre l'équation (il y a alors convocation de types de tâches de $OML_{eq}2$), soit à identifier la structure et le degré d'une équation et à appliquer la propriété relative au nombre maximal de solutions d'une équation polynomiale en fonction de son degré.

d. Technique pour les types de tâches relevant du genre de tâches $T_{Tester-sol}$

La technique pour tester les solutions d'une équation consiste à substituer la variable par des valeurs et à déterminer la valeur de vérité de l'égalité obtenue.

e. Technique pour les types de tâches relevant du genre de tâches $T_{Ecrire_{eq}}$

La technique pour écrire une équation respectant certaines contraintes de structure et/ou de degré et/ou de nombre de solutions consiste à appliquer la définition d'une équation et de solution d'une équation.

7.7.5 Eléments technologico-théoriques

La technologie justifiant les techniques précédentes est formée par la définition d'un polynôme à coefficients réels et à une variable réelle (coefficient, degré, variable, racine) les propriétés (existence, unicité, multiplicité, appartenance à l'ensemble des réels) sur les racines de tels polynômes de degré au plus 4, et les propriétés sur le degré. Les polynômes de degré 1 admettent toujours une unique racine réelle. Les polynômes de degré 2 ; 3 ou 4 admettent un nombre de racines dépendant du signe d'un certain discriminant (donné par les méthodes de Cardan et de Ferrari pour les équations de degrés 3 et 4 ; ces méthodes ne sont pas enseignées en collège).

7.7.6 Elément théorique

Les propriétés de l'anneau des polynômes justifie la technologie précédente.

7.8 Techniques et technologies non algébriques relatives à la résolution des équations

Pour résoudre une équation, d'autres techniques existent mais ne relèvent pas du domaine algébrique :

1. la technique de résolution arithmétique, qui consiste à effectuer les opérations réciproques pour remonter à la solution, qui implique une vision procédurale des équations, et dont la portée couvre seulement quelques types d'équations (typiquement, les équations de la forme $x + a = b$, $ax = b$ et $ax + b = c$) ;
2. la technique de résolution par essais/erreurs ; elle peut être utilisée lorsque les équations sont difficiles ou impossibles à résoudre par la technique algébrique, ou pour trouver des racines évidentes pour les équations de degré supérieur à 2 ; les solutions irrationnelles sont difficilement trouvables par cette technique ;
3. la technique de résolution graphique, qui est en réalité une technique utilisée plutôt pour conjecturer ou contrôler l'existence, le nombre et la valeur numérique des solutions d'une équation, et disponible après l'étude des fonctions et de leur représentation graphique ;
4. la technique consistant à appliquer la définition de la racine carrée d'un nombre réel positif (pour les équations de la forme $x^2 = a$).

Les technologies correspondantes et justifiant ces techniques sont, respectivement :

1. les règles opératoires de base et leur sens (résolution arithmétique) ;
2. les règles de substitution (résolution par essais/erreurs) ;

3. la définition de la courbe représentative d'une fonction (résolution graphique) ;
4. la définition de la racine carrée d'un nombre positif.

Enfin, il existe des discours pratiques, comme « tout terme qui change de membre est remplacé par son opposé » et « tout facteur qui change de membre est remplacé par son inverse ». Pour être en accord avec la référence épistémologique relative aux équations, ces discours pratiques doivent s'appuyer sur des discours théoriques (propriétés de conservation de l'égalité).

7.9 Convocations entre OM

Nous avons vu que les types de tâches relevant du genre de tâches $T_{Mettre-en-equation}$ convoquent les types de tâches relevant de $T_{Traduire_{eq}}$. Cependant, la mise en équation convoque aussi les types de tâches relevant des genres de tâches *Produire une expression algébrique* et *Traduire une expression algébrique depuis un registre de représentation sémiotique vers le registre des écritures algébriques* qui sont intégrés aux OM locales de l'OM de référence sur les expressions algébriques (Pilet, 2012).

Ceci n'est qu'un exemple. Il existe au sein de l'OM de référence relative aux équations de nombreuses convocations d'OM ponctuelles entre elles, et il existe entre les OM de l'OM de référence relative aux équations et les OM de l'OM de référence relative aux expressions de nombreuses convocations également. Nous renvoyons le lecteur aux travaux de Pilet (2012, p. 83-93) pour plus de détails sur les OM locales de l'OM de référence relative aux expressions.

7.10 Conclusion sur l'OM de référence relative aux équations algébriques

L'OM de référence que nous avons construite est une OM régionale prenant place au sein de l'OM globale « Algèbre », qui intègre et articule trois OM locales relativement complètes (Bosch et Gascon, 2005). Les agrégations entre OM relatives aux équations (au sein même de l'OM régionale de référence relative aux équations), et les agrégations entre OM relatives aux équations et OM relatives aux expressions, permettent de donner du sens aux équations.

Les genres et les types de tâches présents dans les OM locales de l'OM de référence nous permettent également de faire opérer le modèle théorique développé dans le chapitre cinq. Disposer de l'OM de référence relative aux équations rend possible la comparaison de cette OM avec celles enseignées en classe et de déterminer les enjeux d'apprentissages laissés implicites, susceptibles d'avoir un impact dans l'accomplissement des gestes d'étude des élèves hors la classe. Cette comparaison sera réalisée au chapitre dix.

Grâce à la construction de l'OM de référence relative aux équations, nous disposons aussi d'un outil performant pour réaliser une analyse praxéologique des manuels et des programmes. En lien avec nos questionnements des chapitres précédents sur l'étude personnelle et sur l'explicitation du contrat relatif à cette étude, les convocations entre OM que nous venons d'évoquer nous intéressent plus particulièrement : sont-elles explicitées dans les programmes ou leur identification est-elle laissée à la charge des enseignants ? De même, sont-elles explicitées dans les manuels ou laissées à la charge des élèves ? Quelles conditions le curriculum praxique de ces derniers (Castela, 2007) et les organisations didactiques des manuels mettent-ils en place pour favoriser les apprentissages relatifs aux équations ? Nous apportons des éléments de réponse à ces questions dans le chapitre suivant.

Chapitre 8

Analyse des OM et des praxéologies d'étude présentes dans les programmes officiels et les manuels scolaires

8.1 Objectifs du chapitre

Dans ce chapitre [1], nous réalisons une analyse praxéologique des programmes officiels, des documents d'accompagnement et de plusieurs manuels scolaires pour déterminer l'OM à enseigner relative aux équations qui y est présente, ainsi que les praxéologies d'étude qui y sont développées.

Parce qu'ils constituent les principaux vecteurs institutionnels du savoir à enseigner, parce qu'ils sont souvent consultés, interprétés, utilisés – voire conçus – par les enseignants, nous faisons l'hypothèse que les programmes officiels et les manuels scolaires influencent directement la mise en œuvre des enseignements dans les classes. Le cadre de la théorie anthropologique de la didactique permet de réinterroger les difficultés des élèves en mathématiques d'un point de vue institutionnel, en mettant en relation celles-ci avec les praxéologies développées en classe par les enseignants et donc dans les programmes et les manuels.

Dans un premier temps, nous analysons l'OM à enseigner. Pour cela, nous nous appuyons sur la référence épistémologique et l'OM de référence construites dans les chapitres six et sept. Notre objectif est d'étudier l'OM à enseigner présente dans

1. Ce chapitre a servi de base à la rédaction de l'article (Sirejacob, 2016).

les programmes et les manuels relativement aux équations et de la comparer aux éléments épistémologiques dominants dans la référence et à l'OM de référence afin d'identifier d'éventuelles OM ponctuelles absentes, peu travaillées, isolées, et qui seraient susceptibles de conduire les élèves à la construction de rapports personnels non idoines aux équations.

Dans un second temps, en appui sur le modèle théorique de l'étude personnelle construit au chapitre, nous analysons les praxéologies d'étude développées dans les documents officiels et les manuels scolaires et les comparons aux praxéologies d'étude que nous supposons favoriser une activité mathématique idoine.

8.2 Analyse de l'OM à enseigner présente dans les programmes officiels et les documents d'accompagnement

8.2.1 Analyse praxéologique des programmes de 2008

Dans le Bulletin Officiel d'août 2008, la résolution de problèmes est un élément central de l'apprentissage des mathématiques et c'est par ce biais que les équations sont travaillées. Cependant, quel que soit le niveau scolaire considéré, nous allons constater que les conditions pour que les problèmes en question motivent le recours à l'algèbre et aux équations demeurent pour la plupart implicites, et que certains types de tâches dont le travail est nécessaire d'après la référence épistémologique ne sont pas présents.

En classe de cinquième, un des objectifs de la résolution de problèmes vise l'initiation à la notion d'équation, « *dans des situations où le problème ne peut pas être facilement résolu par un raisonnement arithmétique* » (p. 23), mais aucun exemple précis de telle situation n'est fourni. Certaines situations peuvent ne pas être facilement résolubles arithmétiquement sans toutefois motiver le recours à une équation. C'est le cas par exemple des problèmes pouvant être résolus par essais/erreurs, par une méthode de fausse position, ou à l'aide d'un schéma. En l'absence des propriétés de conservation de l'égalité, la résolution algébrique semble en tous les cas exclue. Le seul type de tâches exigé concerne le test d'égalité ($OML3_{eq}$) ; aucun travail sur les autres types de tâches et les autres OM n'est explicitement suggéré.

En quatrième, les problèmes doivent conduire à une équation du premier degré à une inconnue, mais là encore, aucune information supplémentaire n'est fournie :

quels types *précis* de problèmes travailler ? à quel type *précis* d'équations doivent-ils aboutir ? Un problème arithmétique ou résoluble par essais/erreurs peut être mis en équation, ou l'équation à laquelle conduit un problème peut être résolue arithmétiquement ou par essais/erreurs, sans qu'aucun recours à la technique algébrique ne soit nécessaire (nous montrerons que les manuels « glissent » ici sur ces implicites et proposent, dans leur chapitre sur les équations, une proportion importante de problèmes ne nécessitant pas la technique de mise en équation ou de résolution algébrique). Concernant les types de tâches, la mise en équation, la résolution de l'équation et l'interprétation de la solution sont demandées. Ces types de tâches relèvent de $OML1_{eq}$ et $OML2_{eq}$. Nous pouvons donc constater l'absence d'exigences concernant le travail de types de tâches de $OML3_{eq}$ qui est pourtant cruciale puisqu'elle concerne la reconnaissance des structures dans une équation, reconnaissance sans laquelle aucune intelligence des calculs ne peut avoir lieu. Nous remarquons également que l'ingrédient technologique « propriétés de conservation de l'égalité » n'est pas nommé comme tel (le programme présente plutôt des relations d'ordre) et fait l'objet d'une rubrique portant sur la comparaison de nombres relatifs ; bien que les commentaires précisent l'utilité de ces propriétés dans le domaine du calcul littéral, elles ne sont pas directement reliées aux équations.

En classe de troisième, l'un des objectifs de la résolution de problèmes est « *de compléter les bases du calcul littéral et d'en confronter le sens pour résoudre des problèmes* ». Cette tournure de phrase laisse supposer que la résolution de problèmes vient après le travail sur les bases du calcul littéral ; or, les problèmes à base de programme de calcul comme celui que nous avons présenté en exemple permettent aussi de motiver le calcul littéral et le recours aux équations. Les conditions à imposer aux problèmes travaillés par les élèves demeurent aussi implicites qu'en quatrième, le programme parlant simplement de problèmes du second degré se ramenant à des problèmes du premier degré. La mise en équation et la résolution d'équations produit nul sont exigées ; aucun type de tâches de l'organisation 3 n'est, une fois de plus, explicitement demandé. Dans leur étude de l'évolution de quelques objets algébriques dans les programmes de collège, Assude et al. (2012) ont mis en avant un manque potentiel de cohérence entre les diverses injonctions données et la mise à l'écart de certaines connaissances du socle commun. Nous rejoignons ces constats avec les contradictions provoquées par les remarques relatives au socle commun où le recours à l'algèbre n'est pas exigible : « *La notion d'équation ne fait pas partie du socle commun* » (classe de 5ème, p. 23, et classe de 3ème, p. 36) ; « *Les élèves, dans le cadre du socle commun, peuvent être amenés à résoudre des problèmes se* *ramenant à une équation du premier degré sans que la méthode experte soit exigible.* » (classe de 4ème, p. 29). Comment les enseignants gèrent-ils ces contradictions dans les programmes ? Comment parviennent-ils à proposer simultanément des problèmes permettant de « *conforter les bases du calcul littéral* » tout en n'obligeant pas le recours aux équations ? Comment un élève, habitué aux démarches arithmétiques ou par essais/erreurs depuis plusieurs années peut-il donner des raisons d'être à l'outil algébrique s'il lui est proposé des situations où il peut s'en passer ?

8.2.2 Analyse des documents d'accompagnement

Les directives générales du Bulletin Officiel (B.O.) d'août 2008 sont complétées par des documents d'accompagnement relativement récents et dont nous interrogeons l'utilisation qui en est faite par les enseignants, étant donné que ces documents se situent en marge du B.O. Viennent-ils néanmoins combler les enjeux d'apprentissages laissés implicites dans ce B.O. ?

Pour ce qui est de l'enseignement de l'algèbre et des équations, deux documents ont retenu notre attention. Le premier, « *Du numérique au littéral au collège* » (février 2008), propose un exemple précis de situation (cf. figure 8.1) pour introduire la notion d'équation (et le calcul littéral) en classe de cinquième, celle du carré bordé (Combier, Pressiat et Guillaume, 1996). Dans ce problème, un grand carré est composé de plusieurs petits carrés identiques, les petits carrés de la bordure étant grisés. Le nombre de petits carrés grisés sur le côté du grand carré définit la taille de ce dernier. Il s'agit de déterminer la taille du grand carré pour que le nombre total de carreaux grisés soit égal à un nombre donné, ce nombre étant choisi relativement « grand » pour empêcher une stratégie de comptage à partir d'un dessin. Le document suggère l'utilisation d'un tableur pour faire travailler les notions de variable et de solution d'une équation, installant ainsi un nouveau statut pour l'égalité. Pour motiver la technique de résolution algébrique et questionner la démarche par essais/erreurs – qui est celle employée lorsque les élèves recherchent les solutions à l'aide d'un tableur – le document explique que le nombre de tentatives ou l'accessibilité des solutions peuvent constituer des arguments. Cette situation et les explications qui l'accompagnent sont en accord avec les éléments de la référence épistémologique relative aux équations que nous avons établie. Les types de tâches des trois organisations locales de l'OM de référence sont mis en jeu : produire une équation en passant par la production d'une expression littérale ($OML1_{eq}$) ; travailler la structure de ces expressions et tester une égalité ($OML3_{eq}$) ; puis aboutir à la résolution algébrique d'une équation ($OML2_{eq}$). Signalons qu'un autre exemple précis et lui aussi en accord avec les éléments de la référence épistémologique relative aux équations est fourni dans ce document d'accompagnement (cf. figure 8.2 ci-après), celui de la boîte sans couvercle : un grand carré de 10 cm de côté auquel on retire quatre petits carrés identiques au niveau des « coins » constitue le patron d'une boîte sans couvercle. Il s'agit de déterminer la longueur du côté d'un petit carré pour que la boîte ait un volume donné. Ce problème nécessite lui aussi d'articuler les trois organisations locales de l'OM de référence.

Exemple de problème : il s'agit d'établir une formule qui permet de calculer le nombre de carreaux grisés d'une figure construite sur le modèle ci-contre, quel que soit le nombre de carreaux sur le côté du carré.[1]

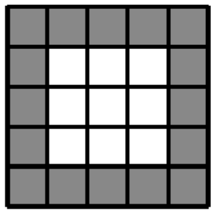


FIGURE 8.1 – Situation du carré bordé

On dispose d'une plaque de carton carrée de 10 cm de côté. Dans chaque coin de la plaque, on découpe un carré comme indiqué sur le dessin. On obtient alors le patron d'une boîte parallélépipédique, sans couvercle.
Quelle doit être la mesure du côté du carré que l'on découpe dans chaque coin pour que le volume de la boîte soit 72 cm^3 ?

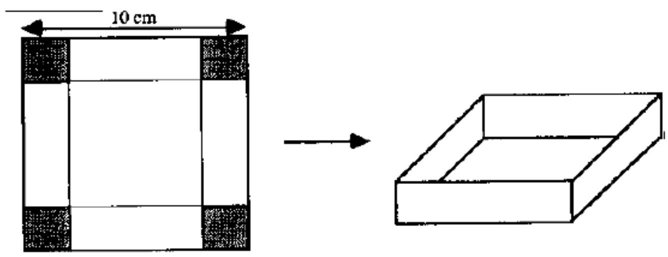


FIGURE 8.2 – Situation de la boîte sans couvercle, extrait du document officel « Du numérique au littéral au collège » de février 2008, p. 4

Le second document d'accompagnement, « *Le calcul sous toutes ses formes au collège et au lycée* », bien que se concentrant sur le calcul de manière générale, contient des informations sur le calcul algébrique et notamment sur les équations. Un exemple précis de problème, très proche d'un problème à base de programmes de calcul comme celui que nous avons proposé, y est présenté (cf. la figure 8.3 ci-après). Ce problème conduit à des équations algébriques (c'est-à-dire de la forme $ax + b = cx + d$ non résoluble par une technique arithmétique), avec des solutions fractionnaires non décimales, ce qui motive bien le recours aux équations et à la technique de résolution algébrique. Si le document souligne que les solutions ne peuvent être trouvées par une démarche par essais/erreurs, le fait que les équations obtenues soient algébriques demeure implicite. De plus, bien que les commentaires insistent sur le caractère motivant de la traduction algébrique ($OML1_{eq}$), puis sur l'introduction qui doit se faire des propriétés permettant de résoudre l'équation ($OML2_{eq}$), la question de la reconnaissance des structures des expressions et des équations ($OML3_{eq}$) reste implicite également. Le document insiste sur l'importance de l'exercice d'un calcul intelligent mais les recommandations sont d'ordre général (« *L'enseignement doit prendre en charge le développement des moyens de cette intelligence du calcul nécessaire à un calcul raisonné, des moyens qui sont en partie communs et en partie propres à chaque type de calcul.* » p. 8) et aucun exemple mettant en jeu les équations n'est donné.

Exemple 4 (classe de 4^{e}, avant d'introduire les équations)

Dans les deux situations qui suivent, les deux chemins mènent au même résultat. De quel nombre est-on parti ?

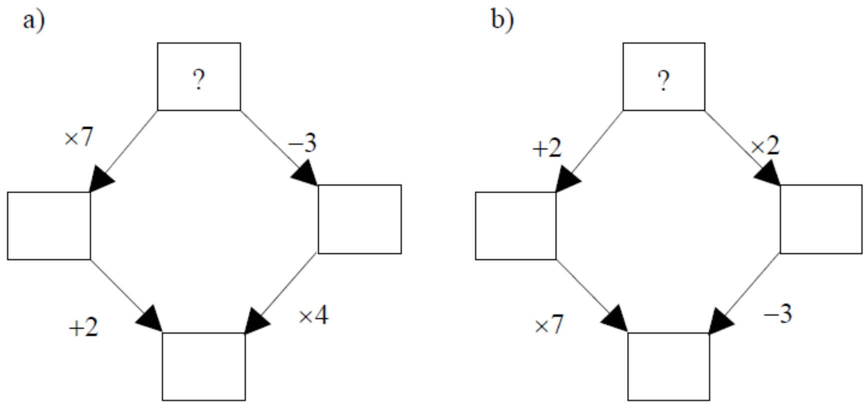


FIGURE 8.3 – Situation précédant l'introduction des équations, extrait du document officiel « Le calcul sous toutes ses formes au collège et au lycée », février 2013, p. 7

8.2.3 Analyse des manuels

a. Eléments méthodologiques

Nous avons analysé précédemment les programmes officiels. Nous avons vu que ces programmes donnent des directives plus ou moins générales, commentées et informatives. Ils constituent un élément important du savoir à enseigner, mais ne couvrent pas la totalité de ce savoir à enseigner et font l'objet d'une interprétation de la part des enseignants. Les manuels, pour la plupart élaborés par des enseignants, de par la façon dont ils organisent les objets de savoir, de par les types de tâche, techniques, éléments technologico-théoriques qu'ils proposent, fixent *une* interprétation des programmes officiels. Pour concevoir un enseignement, les enseignants s'appuient en partie (voire en totalité) sur ces manuels et/ou sur les programmes (et/ou les documents d'accompagnement).

Dans cette section, nous présentons une analyse praxéologique des manuels. Nous identifions les parties des chapitres des manuels — Activités, Cours, Savoir-Faire, Exercices — à différents *moments didactiques* de l'étude ((Chevallard, 1998)). Nous rappelons la liste de ces moments, numérotés de 1. à 6. :

1. le moment de la première rencontre avec une OM : il se fait généralement avec des types de tâches constitutifs de l'OM rencontrée ;

2. le moment de l'exploration d'un type de tâche T_i et de l'élaboration d'une technique τ_i relative à ce type de tâche : il s'agit du moment où se construit une technique pour pouvoir résoudre un type de tâche nouveau, et cette techique doit devenir peu à peu routinière ;
3. le moment de la constitution de l'environnement technologico-théorique relatif à τ_i ; ce moment est parfois le premier à être mis en œuvre afin de produire les techniques τ_i permettant de réaliser les types de tâche T_i ;
4. le moment du travail de la technique ; dans ce moment, la *portée* de la technique τ_i est aussi testée afin de déterminer jusqu'à quel point elle permet de réaliser les types de tâche T_i et quels sont les types de tâches qui lui résistent ; ce moment correspond également au travail de la maîtrise de la technique τ_i ;
5. le moment de l'institutionnalisation : c'est le moment où l'OM est précisée et où les éléments institutionnellement reconnus sont soulignés tandis que d'autres sont signalés — ou non — comme non institutionnellement « importants », « à retenir », « à savoir » ;
6. le moment de l'évaluation des rapports personnels : la robustesse de la technique est évaluée.

Chevallard (1998) fait plusieurs remarques importantes à propos de ces moments. D'abord, l'expression « première rencontre » est trompeuse dans le sens où en réalité, un objet dit « nouveau » peut avoir déjà été rencontré auparavant, mais les conditions dans lesquelles il est rencontré sont inédites, supplémentaires ou changées par rapport à d'habitude. Ensuite, les moments de l'étude ne se déroulent pas nécessairement dans l'ordre présenté ci-dessus. Parfois, certains peuvent avoir lieu simultanément (la constitution de l'environnement technologico-théorique relatif à la technique τ_i peut se réaliser en même temps que cette technique se construit durant l'exploration d'un type de tâche T_i d'une OM premièrement rencontrée), ou être en dialectique (moments 2. et 3.).

Ces remarques justifient le fait que dans notre analyse praxéologique des manuels, nous faisons parfois correspondre plusieurs moments à une même partie d'un manuel, ou le fait qu'un même moment se retrouve dans deux parties différentes.

Nous associons la partie *Activités* aux moments 1., 2. et 3. En effet, la partie activités a pour fonction de proposer des premières rencontres avec des types de tâches nouveaux ou bien des types de tâches connus mais présentés dans des situations inédites, et des contenus visant à élaborer de nouvelles techniques pour réaliser les types de tâches rencontrés ainsi que les discours technologiques justifiant ces techniques. Ici, nous sommes particulièrement attentifs aux types de tâches présents dans les situations proposées (motivent-ils le recours aux équations ?), à la présence de changements de registres (par exemple à travers des situations à base de programmes de calcul), au statut donné en premier à la lettre (variable ou inconnue ?) et à la manière dont ces situations amènent la construction du discours technologique justifiant les techniques de résolution algébrique et de mise en équation.

Nous relions les parties *Cours* et *Savoir-faire* aux moments 4. et 5. Ces parties concernent l'institutionnalisation et comporte des exercices visant à travailler les techniques découvertes. Quelle définition d'une équation est retenue ? Quel discours technologique justifie la technique de résolution algébrique ? Quels discours pratiques sont employés pour faciliter la mise en œuvre de cette technique et de celle de mise en équation ? Quels moyens de contrôle (des transformations et des solutions) sont présentés ?

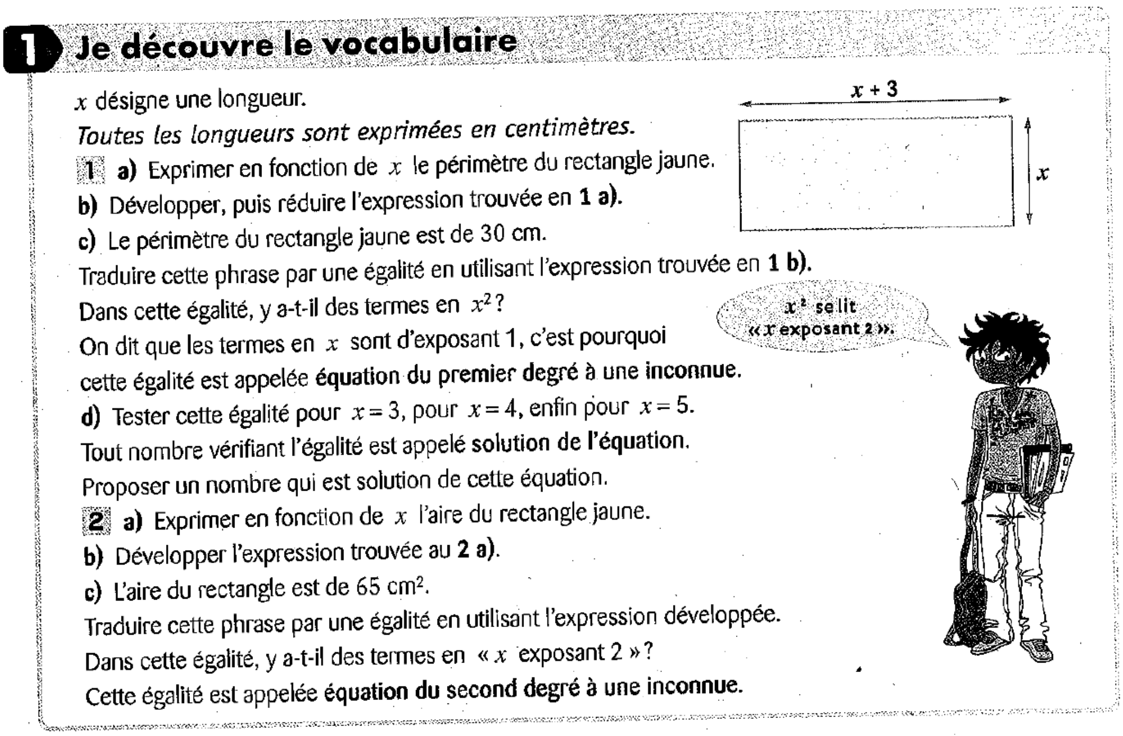
Enfin, nous rattachons la partie *Exercices* aux moments 4. et 6. (certains exercices sont signalés dans les manuels comme des exercices d'évaluation ou d'auto-évaluation). La partie exercices prolonge ce travail des techniques et peut aussi comprendre des moments d'évaluation de ces techniques (dans des rubriques du type « J'évalue mes connaissances »). Quels types de tâches sont ou ne sont pas présents ? Quel poids est accordé à chaque organisation locale de l'OM de référence ? Quels types d'équations et de problèmes sont travaillés (arithmétiques, algébriques) ? Quelles justifications sont demandées ?

Toutes les questions que nous nous posons sont mises en perspective avec la référence épistémologique relative aux équations et l'organisation praxéologique de référence.

Nous tentons d'apporter des éléments de réponse à ces questions en présentant les résultats de nos analyses de quatre manuels scolaires français de collège en mathématiques : le manuel Horizon (quatrième, 2011, Ed. Didier), le manuel Myriade (quatrième, 2011, Ed. Bordas), le manuel Phare (quatrième, 2011, Ed. Hachette) et le manuel Transmath (quatrième, 2011, Ed. Nathan).

b. Analyse des parties *Activités*

Dans trois des quatre manuels, les équations sont motivées grâce à des situations à base de programmes de calcul. Dans un premier temps, les démarches arithmétiques et par essais/erreurs fonctionnent. Mais à la fin des activités, les programmes à égaliser font échouer ces démarches, la solution à trouver étant fractionnaire non décimale, ce qui motive le recours à une équation. Ceci est en accord avec les éléments que nous avons dégagés dans la référence épistémologique. Seul le manuel Phare (quatrième, 2011) propose une activité ne motivant pas le recours aux équations (cf. figure 8.4 ci-après) : il s'agit principalement de donner du vocabulaire à l'élève (équation, inconnue, degré).



1 Je découvre le vocabulaire

x désigne une longueur.

Toutes les longueurs sont exprimées en centimètres.

1 **a)** Exprimer en fonction de x le périmètre du rectangle jaune.

b) Développer, puis réduire l'expression trouvée en **1 a)**.

c) Le périmètre du rectangle jaune est de 30 cm.
Traduire cette phrase par une égalité en utilisant l'expression trouvée en **1 b)**.
Dans cette égalité, y a-t-il des termes en x^2 ?
On dit que les termes en x sont d'exposant 1, c'est pourquoi cette égalité est appelée **équation du premier degré à une inconnue.**

d) Tester cette égalité pour $x = 3$, pour $x = 4$, enfin pour $x = 5$.
Tout nombre vérifiant l'égalité est appelé **solution de l'équation.**
Proposer un nombre qui est solution de cette équation.

2 **a)** Exprimer en fonction de x l'aire du rectangle jaune.

b) Développer l'expression trouvée au **2 a)**.

c) L'aire du rectangle est de 65 cm^2.
Traduire cette phrase par une égalité en utilisant l'expression développée.
Dans cette égalité, y a-t-il des termes en « x exposant 2 » ?
Cette égalité est appelée **équation du second degré à une inconnue.**

Figure 8.4 – Activité d'introduction des équations dans le manuel Phare (quatrième, 2011)

Dans ces situations d'introduction aux équations, nous notons toutefois que pour trois manuels, la lettre a dans un premier temps un statut d'inconnue et non de variable ; ce n'est que dans un second temps, lorsque les démarches par essais/erreurs sont employées, qu'elle acquiert le statut de variable. Seul le manuel Horizon (quatrième, 2011), parce qu'il propose une activité avec utilisation du tableur, introduit d'abord la notion de variable avant celle d'inconnue.

Concernant l'élaboration du discours technologique « propriétés de conservation de l'égalité », deux manuels – Phare (quatrième, 2011) et Transmath (quatrième, 2011) – utilisent la métaphore de la balance (cf. figure 8.5 ci-après). Cependant, aucun ne présente les limites d'une telle métaphore. De plus, dans le manuel Phare (quatrième, 2011), la tâche de l'élève est réduite à identifier les masses retirées sur les balances et à leur associer une équation ; dans le manuel Transmath (quatrième, 2011), l'activité n'a pas de motivation particulière dans le sens où la balance présente deux masses inconnues x et y dont on ne cherche pas à trouver la valeur (les élèves doivent simplement conclure l'activité par l'énoncé des propriétés).

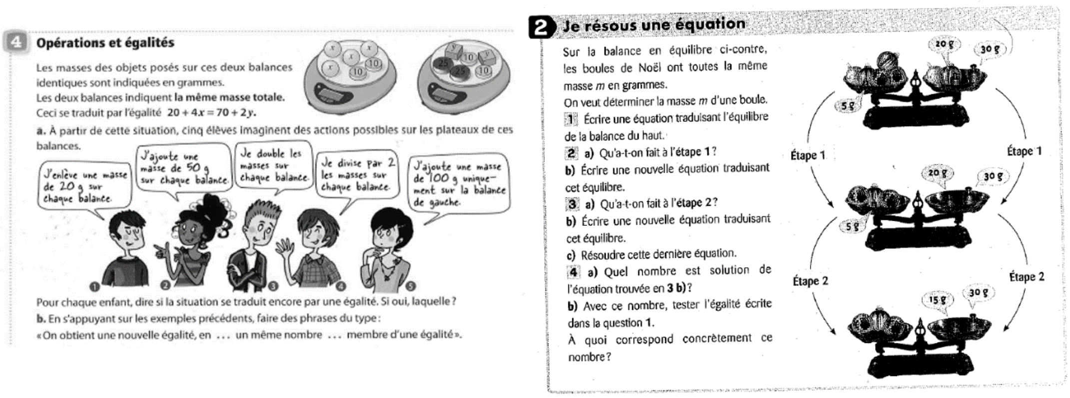


FIGURE 8.5 – Activités utilisant la métaphore de la balance dans les manuels Transmath (quatrième, 2011, à gauche) et Phare (quatrième, 2011, à droite)

Le manuel Myriade (quatrième, 2011, cf. figure 8.6), quant à lui, utilise les propriétés de conservation de l'égalité pour résoudre des équations mais celles-ci sont arithmétiques (donc ne nécessitent pas la technique de résolution algébrique) et ne correspondent à aucune situation particulière (donc ne sont pas motivées).

2 Résoudre une équation

Une transformation d'équations

1. On veut résoudre l'équation $3x - 8 = 7$, c'est-à-dire trouver les valeurs de x pour lesquelles cette égalité est vraie.

a. Ajouter 8 à chacun des membres de l'équation puis les écrire le plus simplement possible.

b. Cette nouvelle équation a-t-elle les mêmes solutions que $3x - 8 = 7$? Expliquer.

2. a. Diviser chacun des membres de la nouvelle équation par 3 puis les écrire le plus simplement possible.

b. Cette nouvelle équation a-t-elle les mêmes solutions que $3x - 8 = 7$? Expliquer.

c. En déduire la solution de l'équation $3x - 8 = 7$.

3. a. Pourquoi a-t-on choisi d'ajouter 8 à chacun des membres à la question **a.** ? Pourquoi a-t-on choisi de diviser par 3 chacun des membres à la question **c.** ?

b. Quelles actions semble-t-on pouvoir faire pour transformer une équation en une autre équation qui a les mêmes solutions ?

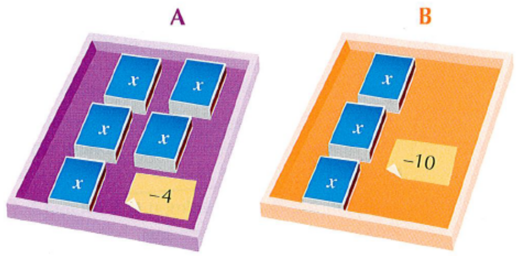
4. Manu doit résoudre l'équation $9x = 5x + 20$. Il prétend qu'elle a les mêmes solutions que l'équation $4x = 20$. Justifier l'affirmation de Manu et en déduire la solution de cette équation.

FIGURE 8.6 – Activité introduisant les propriétés de conservation de l'égalité dans le manuel Myriade (quatrième, 2011)

Enfin, le manuel Horizon (quatrième, 2011) propose une activité similaire à la balance avec des boîtes dont les contenus possèdent des quantités égales (cf. figure 8.7 ci-après) ; contrairement à la métaphore de la balance, la situation permet de mettre en jeu des quantités négatives et fractionnaires. Les équations sont motivées, la technique de résolution algébrique aussi (une des solutions à trouver est fractionnaire non décimale), et l'image employée (les boîtes) a l'avantage de dépasser les limites potentielles de l'image de la balance de Roberval.

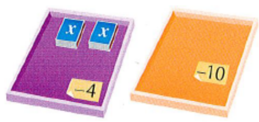
Un jeu pour résoudre une équation

Lucien et Loubna jouent ensemble. Lucien cache un nombre, toujours le même, dans chaque boîte bleue. Loubna doit deviner ce nombre.

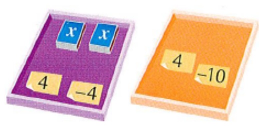


Matériel : 2 plateaux A et B, des boîtes et des étiquettes.
Déroulement du jeu : un des joueurs écrit le même nombre au fond de chaque boîte puis il les referme.
But : l'autre joueur doit trouver le nombre caché.
Règle : la somme des nombres présents sur chaque plateau est la même.

1. On appelle x le nombre écrit dans les boîtes.
a. Écrire en fonction de x la somme des nombres du **plateau A**.
b. Écrire en fonction de x la somme des nombres du **plateau B**.
c. Écrire une équation qui traduit le fait que les deux sommes sont égales.



2. Loubna enlève trois boîtes de chaque plateau.
a. Le nombre inscrit dans les boîtes a-t-il changé ?
b. Écrire en fonction de x la somme des nombres du **plateau A** et la somme des nombres du **plateau B**.
c. Expliquer pourquoi ces sommes sont égales.



3. Loubna ajoute une étiquette 4 sur chaque plateau.
a. Expliquer pourquoi les sommes des nombres présents sur les deux plateaux sont toujours égales.
b. Écrire une équation qui traduit la nouvelle disposition sur les plateaux et réduire les deux membres si c'est possible.

4. Loubna annonce le nombre inscrit dans les boîtes.
Quel est ce nombre ? Comment a-t-elle fait ?

FIGURE 8.7 – Activité introduisant les propriétés de conservation de l'égalité dans le manuel Horizon (quatrième, 2011)

Le savoir à enseigner dans le manuel Horizon (quatrième, 2011) est donc le seul à porter les principaux éléments épistémologiques relatifs aux équations des éléments de l'OM de référence pour l'élaboration du discours technologique justifiant la technique de résolution algébrique.

Enfin, la technique de mise en équation est différemment traitée dans les quatre manuels. Le manuel Phare (quatrième, 2011) ne propose aucune activité pour élaborer cette technique. Les manuels Myriade (quatrième, 2011) et Transmath (quatrième, 2011) présentent chacun une situation énoncée en langage naturel mais qui relève de la traduction (cf. figure 8.8) : l'inconnue est déjà nommée, l'élève n'a donc pas à sa charge de produire des expressions ou des équations, et il n'y a donc pas plusieurs choix possibles pour cette inconnue. Or, c'est la capacité à gérer cette complexité dans la convocation des types de tâches qui, d'après la référence épistémologique, permet de manipuler les équations de manière idoine.

1. On cherche à savoir combien d'euros Chloé doit donner à Paul.

a. On appelle x le nombre cherché. Écrire, en fonction de x, la somme que Chloé aura après la transaction.

b. De même, écrire, en fonction de x, la somme que Paul aura après la transaction.

c. Écrire une équation traduisant le fait que ces deux quantités doivent être égales.

d. Résoudre cette équation.

e. L'équation précédente a-t-elle une solution ? Si oui laquelle ? Est-il alors possible que Chloé donne une certaine somme à Paul pour qu'ils aient ensuite la même somme d'argent?
Si oui, combien. Sinon, expliquer pourquoi.

2. Clara dispose de 621 cartes du jeu Majax et Arthur en a 258.
Est-il possible que Clara donne un certain nombre de cartes à Arthur pour qu'ils en aient ensuite le même nombre ? Si oui combien. Sinon, expliquer pourquoi.

3. Quelles sont les différentes actions à mener pour résoudre un problème à l'aide d'une équation ?

Dans un magasin :
- Emma achète 2 stylos identiques et un CD à 15 € ;
- Greg achète 6 de ces stylos et un livre à 10 €.

À la caisse, ils paient la même somme.
On se propose de trouver le prix p, en euros, de l'un de ces stylos.

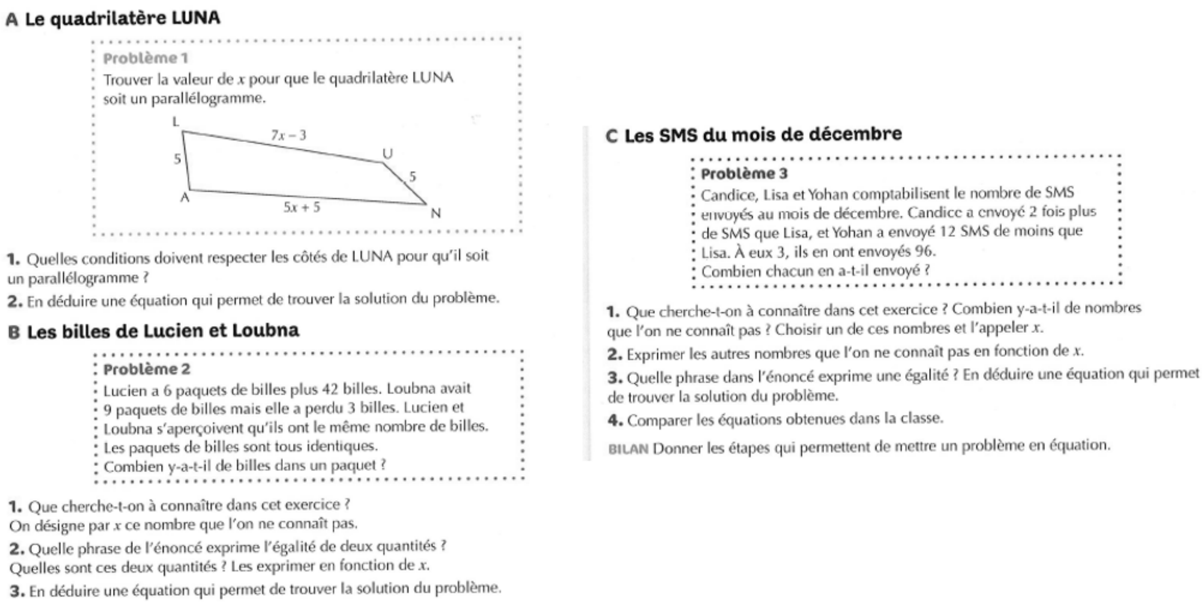
a. Traduire cette situation par une équation d'inconnue p.

b. Résoudre cette équation avec la méthode vue à l'activité 5.

c. Conclure sur le prix d'un stylo acheté par Emma et Greg.

FIGURE 8.8 – Activités sur la mise en équation des manuels Myriade (quatrième, 2011, à gauche) et Transmath (quatrième, 2011, à droite)

Le manuel Horizon (quatrième, 2011) est celui qui fait le plus travailler cette complexité, d'abord parce qu'il propose trois problèmes différents à résoudre (cf. figure 8.9), deux en langage naturel et un issu de la géométrie, ce qui favorise les changements de cadres et de registres ; ensuite parce que l'égalité à trouver dans chaque énoncé nécessite un effort différent : le premier requiert l'utilisation d'une propriété géométrique (égalité de longueurs dans un parallélogramme), les deux autres de débusquer ce qui, dans le langage naturel, fait référence à une égalité (par exemple, la présence de l'adjectif « identique ») ; enfin, la résolution d'un des problèmes nécessite de faire un choix pour l'inconnue parmi deux possibles et d'exprimer les autres grandeurs en fonction de cette inconnue.



A Le quadrilatère LUNA

Problème 1
Trouver la valeur de x pour que le quadrilatère LUNA soit un parallélogramme.

1. Quelles conditions doivent respecter les côtés de LUNA pour qu'il soit un parallélogramme ?

2. En déduire une équation qui permet de trouver la solution du problème.

B Les billes de Lucien et Loubna

Problème 2
Lucien a 6 paquets de billes plus 42 billes. Loubna avait 9 paquets de billes mais elle a perdu 3 billes. Lucien et Loubna s'aperçoivent qu'ils ont le même nombre de billes. Les paquets de billes sont tous identiques.
Combien y-a-t-il de billes dans un paquet ?

1. Que cherche-t-on à connaître dans cet exercice ? On désigne par x ce nombre que l'on ne connaît pas.

2. Quelle phrase de l'énoncé exprime l'égalité de deux quantités ? Quelles sont ces deux quantités ? Les exprimer en fonction de x.

3. En déduire une équation qui permet de trouver la solution du problème.

C Les SMS du mois de décembre

Problème 3
Candice, Lisa et Yohan comptabilisent le nombre de SMS envoyés au mois de décembre. Candice a envoyé 2 fois plus de SMS que Lisa, et Yohan a envoyé 12 SMS de moins que Lisa. À eux 3, ils en ont envoyés 96.
Combien chacun en a-t-il envoyé ?

1. Que cherche-t-on à connaître dans cet exercice ? Combien y-a-t-il de nombres que l'on ne connaît pas ? Choisir un de ces nombres et l'appeler x.

2. Exprimer les autres nombres que l'on ne connaît pas en fonction de x.

3. Quelle phrase dans l'énoncé exprime une égalité ? En déduire une équation qui permet de trouver la solution du problème.

4. Comparer les équations obtenues dans la classe.

BILAN Donner les étapes qui permettent de mettre un problème en équation.

FIGURE 8.9 – Activités sur la mise en équation du manuel Horizon (quatrième, 2011)

Nous mettons à présent en avant plusieurs autres implicites dans les parties activités des manuels analysés. Premièrement, aucun manuel ne met explicitement les techniques arithmétiques ou essais/erreurs en concurrence avec la technique algébrique ; parfois, ces techniques sont mises en parallèle mais aucun discours ne vient mettre en lumière les avantages de l'une par rapport aux autres (sauf le manuel Transmath (quatrième, 2011) qui pose, à l'issue d'une activité, la question « *Pourquoi ne pouvait-on pas trouver cette solution avec le tableur [. . .] ?* »).

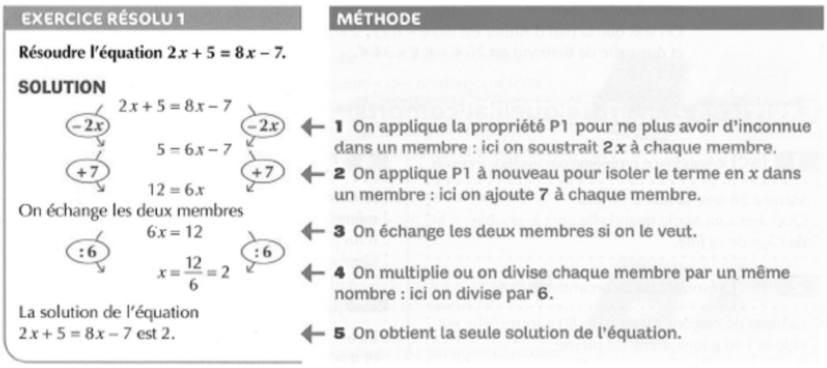
Ensuite, nous avons noté l'absence quasi-totale de types de tâches « réciproques » dans les activités. Seul le manuel Transmath (quatrième, 2011) en présente un dans une de ses activités : « *Imaginer une situation [. . .] qui conduit à résoudre l'équation* $8x + 7 = 5x + 12$ *(c'est-à-dire trouver sa solution)* » (page 96 du manuel). Or, nous avons expliqué l'intérêt de ces types de tâches au niveau de la « flexibilité » qu'ils font développer chez les élèves.

Enfin, si la plupart des types de tâches des trois organisations locales de l'OM épistémologique de référence relative aux équations sont présents dans les activités, l'un d'entre eux fait très peu l'objet d'un travail spécifique explicite dans les quatre manuels analysés. Il s'agit de l'identification de la structure d'une équation et des expressions la composant et qui fait partie de $OML3_{eq}$. Nous interrogeons ce choix de la part des auteurs de manuels, qui est en désaccord avec la référence épistémologique : comment les élèves peuvent-ils exercer une intelligence des calculs sans passer par la reconnaissance des opérateurs, des délimitants, des puissances et des priorités opératoires ? Comment peuvent-ils sans cela contrôler la cohérence entre leur modèle (l'équation) et la situation proposée ?

c. Analyse des parties *Cours et savoir-faire*

Au niveau de la définition d'une équation, trois manuels emploient, à quelques mots près, la suivante : « Une équation est une égalité dans laquelle un ou plusieurs nombres de valeur inconnue interviennent. » Le manuel Horizon (quatrième, 2011) ne donne pas de définition, il laisse à la charge de l'élève d'inférer celle-ci à partir d'un exemple (« *ceci est une équation* »). Tous les manuels donnent une définition similaire de ce que signifie « résoudre une équation » (trouver toutes les valeurs rendant l'égalité vraie) et ce qu'est une solution d'une équation (la valeur donnée à la lettre et qui rend l'égalité vraie).

Au niveau des discours technologiques, les manuels exposent les propriétés de conservation de l'égalité. Tous présentent ensuite des exemples de résolution algébrique d'équations. Les propriétés de conservation de l'égalité sont alors employées différemment d'un manuel à l'autre pour justifier la technique de résolution algébrique et guider sa mise en œuvre. Les paramètres suivants varient : identification des propriétés utilisées, ostensifs employés (couleurs, flèches, ...) et raisons d'être des transformations effectuées. Par exemple, le manuel Horizon (quatrième, 2011, cf. figure 8.10, en haut), en accord avec les éléments de référence épistémologiques, propose une résolution d'équation où, à chaque étape, la propriété utilisée est identifiée, et la raison pour laquelle telle ou telle transformation est réalisée est explicitée à l'aide de discours pratiques comme « isoler l'inconnue » ; des bulles fléchées, colorées, où apparaissent les transformations effectuées, accompagnent le discours. À l'inverse, le manuel Phare (quatrième, 2011, cf. figure 8.10, en bas) n'identifie pas la propriété utilisée et n'expose pas de stratégie générale expliquant le choix des transformations opérées dans les exemples du cours ; seuls des ostensifs « couleurs » accompagnent le discours (de plus, les équations résolues sont arithmétiques, ce qui ne motive pas l'outil algébrique).



EXERCICE RÉSOLU 1

Résoudre l'équation $2x + 5 = 8x - 7$.

SOLUTION

$$2x + 5 = 8x - 7$$
$-2x$ $\quad$ $-2x$
$$5 = 6x - 7$$
$+7$ $\quad$ $+7$
$$12 = 6x$$
On échange les deux membres
$$6x = 12$$
$:6$ $\quad$ $:6$
$$x = \frac{12}{6} = 2$$
La solution de l'équation $2x + 5 = 8x - 7$ est 2.

MÉTHODE

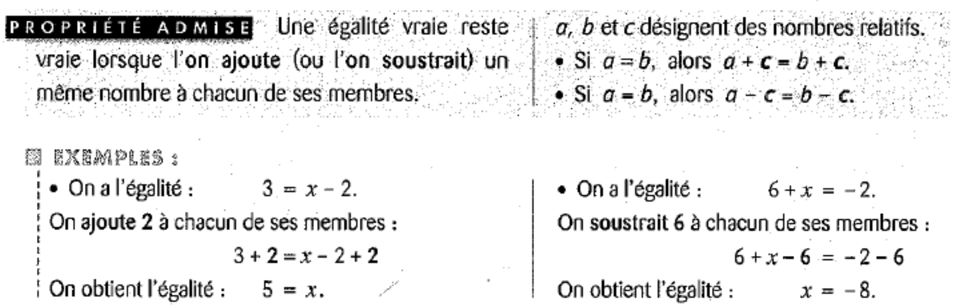
1 On applique la propriété P1 pour ne plus avoir d'inconnue dans un membre : ici on soustrait $2x$ à chaque membre.

2 On applique P1 à nouveau pour isoler le terme en x dans un membre : ici on ajoute **7** à chaque membre.

3 On échange les deux membres si on le veut.

4 On multiplie ou on divise chaque membre par un même nombre : ici on divise par **6**.

5 On obtient la seule solution de l'équation.



PROPRIÉTÉ ADMISE Une égalité vraie reste vraie lorsque l'on **ajoute** (ou l'on **soustrait**) un même nombre à chacun de ses membres.

a, b et c désignent des nombres relatifs.
- Si $a = b$, alors $a + c = b + c$.
- Si $a = b$, alors $a - c = b - c$.

EXEMPLES :

- On a l'égalité : $3 = x - 2$.
On **ajoute 2** à chacun de ses membres :
$$3 + 2 = x - 2 + 2$$
On obtient l'égalité : $5 = x$.

- On a l'égalité : $6 + x = -2$.
On **soustrait 6** à chacun de ses membres :
$$6 + x - 6 = -2 - 6$$
On obtient l'égalité : $x = -8$.

Figure 8.10 – Extraits de la partie *Cours* des manuels Horizon (quatrième, 2011, en haut) et Phare (quatrième, 2011, en bas)

Pour ce qui est des discours pratiques facilitant la mise en œuvre de la technique de mise en équation, nous remarquons là encore des variabilités entre les manuels. Si tous proposent une méthode générale déclinée en trois ou quatre étapes (choix de l'inconnue, mise en équation, résolution, vérification) et appliquée sur des exemples, seul le manuel Horizon (quatrième, 2011) détaille la complexité des types de tâches qui peuvent être convoqués et articulés lors de cette mise en équation : trouver l'égalité (quatre cas sont distingués : ou l'égalité est donnée, ou il faut utiliser une reformulation, ou il faut utiliser une propriété géométrique, ou il faut trouver une grandeur exprimée de deux façons différentes), choisir l'inconnue (trois cas distingués : ou l'inconnue est déjà donnée, ou un seul nombre est à chercher et c'est lui qui sera l'inconnue, ou plusieurs nombres sont à chercher, auquel cas il faut en choisir un comme inconnue et exprimer les autres en fonction de celui-ci), et traduire les deux membres de l'équation par des expressions algébriques faisant intervenir l'inconnue. Enfin, concernant la validation des calculs, tous les manuels proposent au moins un exemple de résolution d'équation où la solution trouvée est ensuite testée dans l'équation de départ pour contrôler le fait que l'égalité obtenue est bien vraie, et aucun n'évoque la question de l'existence et de l'unicité de la solution. L'identification de la structure de l'équation et des expressions est encore le type de tâches absent, alors qu'il pourrait servir à contrôler en partie la cohérence entre le modèle et la situation.

d. Analyse des parties *Exercices*

La figure 8.11 ci-après présente la proportion des organisations locales présentes dans les manuels . Nous remarquons les tendances suivantes : $OML2_{eq}$ (résolution) est dominante dans les quatre manuels, et pour trois d'entre eux, $OML3_{eq}$ (structure et solution) est la moins présente. Parmi les types de tâches les plus travaillés, notre comptage indique que la résolution d'équations ($OML2_{eq}$) arrive largement en tête, et la reconnaissance des structures ($OML3_{eq}$) est pratiquement absente. Ceci est peu étonnant et peut s'expliquer par le fait qu'il n'y a quasiment que des problèmes du premier degré à une inconnue qui sont abordés dans les manuels de quatrième. Toutefois, la question de l'existence d'une solution n'est que rarement posée, et l'appui sur la structure d'une équation pour exercer une intelligence des calculs dans la résolution algébrique est très peu présent. Le type de tâches majoritairement travaillé dans $OML3_{eq}$ est le test de solutions. Les types de tâches « réciproques » ne sont quasiment pas travaillés (leur proportion est de l'ordre de 1%) ; de fait, le travail sur les conversions entre différents registres de représentation sémiotiques et leur coordination en est amoindri.

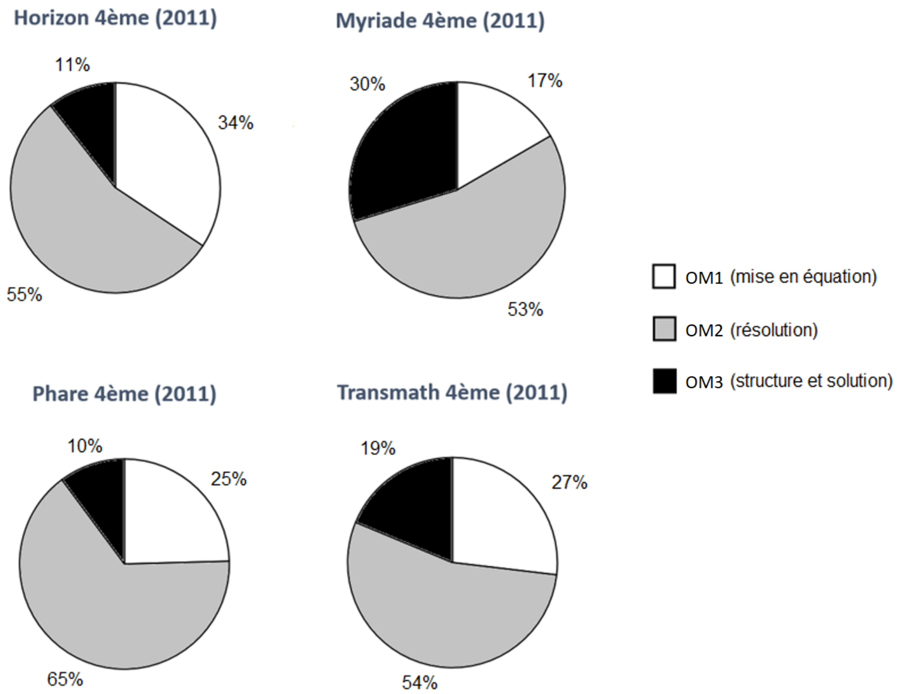


FIGURE 8.11 – Proportions des OM locales de l'OM de référence relative aux équations présentes dans les manuels analysés

La figure 8.12 ci-après expose la proportion d'équations à résoudre seules, sans contexte, et d'équations issues de problèmes à mettre en équation. Nous pouvons constater qu'un pourcentage non négligeable d'équations (entre un quart et la moitié des équations que l'on peut résoudre dans tous les exercices du chapitre sur les équations) concerne des équations données à résoudre seules. Or la résolution de problèmes est ce qui donne du sens aux équations, ce qui favorise leur conceptualisation. Si le travail de la technique a bien entendu sa place et est complémentaire de la résolution de problèmes, il peut être à craindre que la présence d'une telle proportion d'exercices purement techniques conduise les enseignants à en faire faire à leurs élèves de manière isolée et déconnectée de la résolution de problèmes.

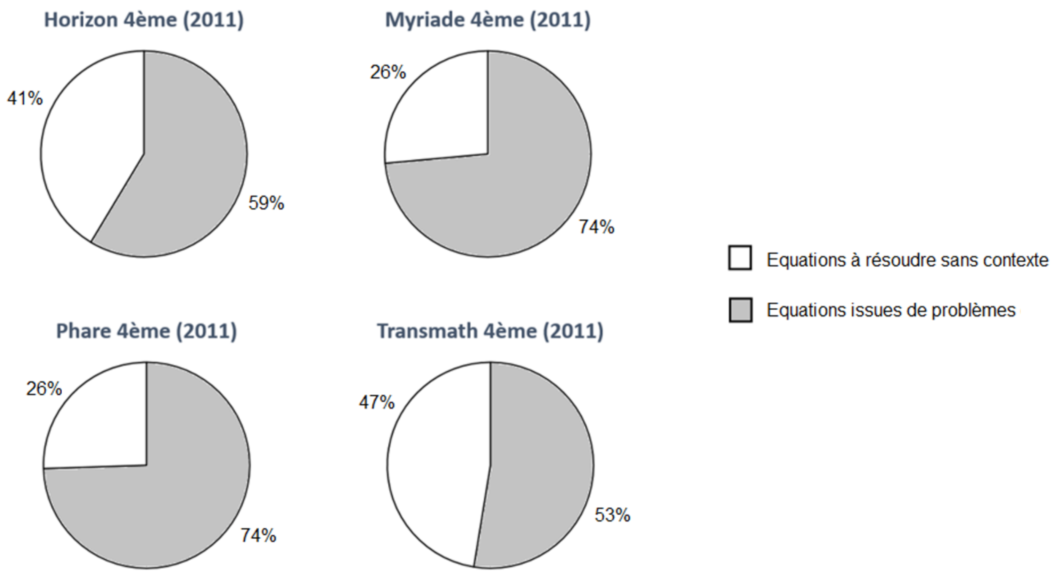


FIGURE 8.12 – Proportions des équations à résoudre seules (sans contexte) et des équations issues de la résolution algébrique de problèmes

Nous nous sommes intéressé de plus près aux problèmes proposés dans les exercices (figure 8.13 ci-après). Dans les quatre manuels, quasiment un problème sur deux peut être résolu de manière non algébrique (tous les problèmes relevant du socle commun sont dans ce cas). Nous avons considéré qu'un problème ne nécessitait pas une résolution algébrique s'il était possible de le résoudre par une démarche arithmétique ou essais/erreurs, ou à l'aide d'un schéma, de manière « raisonnable ». Si dans le manuel Horizon (quatrième, 2011), la proportion de problèmes non algébriques peut être en partie expliquée par le fait que le chapitre ne s'intitule pas « équations » mais « résolution de problèmes » et que tous les types de problèmes, algébriques ou non, sont étudiés, nous interrogeons pour les trois autres manuels le choix des auteurs de proposer une si grande proportion de situations ne nécessitant pas le recours à l'algèbre : les élèves, habitués depuis l'école primaire à utiliser des démarches non algébriques, vont-ils être à même de donner des raisons d'être aux équations et aux techniques de résolution algébrique et de mise en équation si la moitié des problèmes qu'ils rencontrent sont susceptibles d'être résolus autrement ?

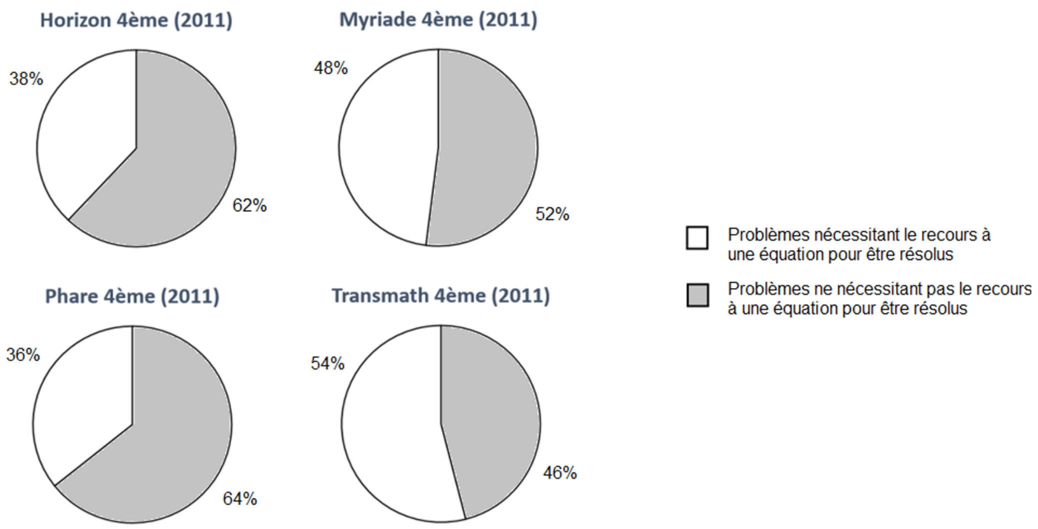


FIGURE 8.13 – Proportions de problèmes nécessitant le recours à une équation pour être résolus et de problèmes ne nécessitant pas le recours à une équation pour être résolus

8.2.4 Conclusion sur l'OM à enseigner relative aux équations présente dans les documents officiels et les manuels

La comparaison des programmes et des manuels français sur le thème des équations avec une référence épistémologique nous a permis de dégager un ensemble d'enjeux d'apprentissages laissés implicites par l'institution au niveau du savoir à enseigner. Nous résumons ici nos principaux résultats :

- Le Bulletin Officiel d'août 2008 présente des directives générales ; bien que son objectif ne soit probablement pas de fournir des exemples exhaustifs, il n'en demeure pas moins qu'il comporte des implicites au niveau des équations : les variables didactiques à utiliser sur les situations proposées aux élèves et les équations auxquelles ces situations doivent conduire ne sont pas précisées.
- Les documents d'accompagnement ne comblent pas toujours les implicites du Bulletin Officiel. De plus, ils se situent en marge du Bulletin et nous questionnons l'utilisation potentielle qui en est faite par les enseignants.
- Concernant les manuels étudiés, la majorité proposent des activités motivant le recours aux équations. Cependant, dans ces activités, la lettre est souvent présentée en premier avec un statut d'inconnue et non de variable ; certains manuels utilisent la métaphore de la balance de Roberval sans en préciser les objectifs ou les limites, ne s'attardent pas sur la complexité de la technique de mise en équation, et ne mettent pas en concurrence les techniques algébriques avec les techniques arithmétiques ou essais/erreurs.
- Au niveau du cours et des savoir-faire, l'existence et le nombre de solutions d'une équation ne sont pas abordés. Certains manuels utilisent des ostensifs (couleurs, flèches) dans leurs exemples de résolution d'équations, sans les accompagner d'un discours mathématique ou d'une stratégie explicative. La validation des calculs, lorsqu'elle est présente, ne passe pas par la reconnaissance des structures des expressions et des équations.
- Pour ce qui est des exercices, un certain déséquilibre entre les organisations locales est identifié, avec une prédominance pour $OML2_{eq}$ (résolution). Ce déséquilibre se retrouve dans les types de tâches travaillés, avec notamment l'absence presque totale de la reconnaissance des structures des expressions et des équations, qui pourtant guide l'intelligence des calculs et permet un contrôle des transformations. La résolution pure d'équations est travaillée de manière isolée, sans contexte moteur, à travers de nombreux exercices techniques. Les types de tâches « réciproques », favorisant une flexibilité

chez les élèves, sont présents en quantité infime. Enfin, près de la moitié des problèmes ne nécessitent pas l'utilisation de techniques algébriques.

8.3 Analyse des praxéologies d'étude présentes dans les programmes et les manuels

Nous avons montré dans les paragraphes précédents que les OM relatives aux équations étaient travaillées de manière déséquilibrée dans les manuels étudiés, que certains types de tâches étaient peu ou non travaillés alors qu'ils sont nécessaires à la construction de rapports personnels idoines aux équations.

Par conséquent, nous pouvons déjà affirmer que les manuels que nous avons analysés placent sous la responsabilité de l'enseignant l'explicitation de certains besoins d'apprentissage mathématiques, et donc éventuellement sous celle de l'élève la réalisation de certains gestes d'étude.

Nous nous intéressons à présent à la façon dont les programmes et les manuels organisent l'étude hors la classe des élèves : proposent-ils des techniques d'étude des OM relatives aux équations ou laissent-ils à la charge des élèves d'en construire et d'en mobiliser ? Font-ils travailler les types de tâches d'étude que nous supposons favoriser une activité mathématique idoine (chapitre cinq) ou ne présentent-ils que des types de tâches d'étude pédagogiques « généraux » qui ne prennent pas en compte la complexité de l'activité mathématique ? Les programmes suggèrent-ils une gestion didactique précise pour organiser cette étude personnelle ?

8.3.1 Les praxéologies d'étude présentes dans les programmes

Le Bulletin Officiel du 28 août 2008 évoque en page 12 le travail personnel des élèves :

> « ***En étude ou à la maison***, *ce type de travail est nécessaire non seulement pour affermir les connaissances de base et le réinvestir dans des exemples simples mais aussi pour en élargir le champ de fonctionnement et susciter ainsi de l'intérêt pour l'activité mathématique. Il contribue aussi à habituer l'élève à l'indispensable régularité d'un travail autonome, complémentaire de celui réalisé avec le professeur.*
>
> *Il peut prendre diverses formes :*

- *résolution d'exercices d'entraînement, combinée avec l'étude de la leçon pour asseoir les connaissances ;*
- *travaux individuels de rédaction pour développer les capacités d'expression écrite et la maîtrise de la langue ;*
- *résolution de problèmes variés (exercices de synthèse, énigmes, jeux mathématiques...) pour mettre en œuvre des démarches heuristiques en temps non limité ;*
- *construction d'objets géométriques divers (frises, pavages, solides, ...) en utilisant ou non l'informatique ;*
- *lectures ou recherches documentaires, en particulier sur l'histoire de la discipline ou plus généralement des sciences pour enrichir les connaissances ;*
- *constitution de dossiers sur un thème donné.*

Pour ces travaux en dehors de la classe, il convient de favoriser l'accès aux élèves aux ordinateurs de l'établissement qui doivent être munis des logiciels adéquats.

La correction individuelle du travail d'un élève est une façon d'en apprécier la qualité et de permettre à son auteur de l'améliorer, donc de progresser.

Le travail personnel proposé ***en classe*** *aux élèves peut prendre chacune des formes décrites ci-dessus, en tenant compte, chaque fois, de la durée impartie. Il faut veiller à un bon équilibre entre ces diverses activités.*

Ces travaux doivent être différenciés en fonction du profil et des besoins des élèves, ainsi que des objectifs du socle commun. »

Nous pouvons constater que le programme officiel :

- parle d'une *complémentarité* du travail personnel de l'élève avec le travail réalisé avec l'enseignant en classe, d'un *élargissement* du champ de fonctionnement des connaissances ; autrement dit, l'institution laisse clairement entendre ici que l'élève a à sa charge de compléter, de prolonger un travail abordé par l'enseignant en classe et qui semblerait insuffisant pour réaliser tous les apprentissages nécessaires à la réussite scolaire ;
- évoque la nécessité d'une autonomie dans ce travail, mais ne précise pas *comment*, concrètement, précisément, initier et favoriser cette autonomie ;
- liste différentes formes de travaux personnels, mais ne les situe pas expli-

citement vis-à-vis des moments de l'étude et ne précise pas de techniques d'étude pour réaliser chaque forme de travail ; par exemple, il parle de résolution d'exercices d'entraînement sans expliciter la façon de les travailler (identification de leur généricité, potentiel de réutilisation dans d'autres exercices) ou bien d'étude de la leçon sans détailler en quoi consiste exactement cette étude (type de tâches d'étude pédagogique « général ») ;

– suggère la prise en compte du travail personnel par une correction individuelle mais sans donner d'instructions particulières pour y parvenir (pas d'indications précises sur la gestion didactique à mener).

Le programme officiel laisse donc implicites un certain nombre d'éléments qui, d'après la synthèse de travaux de recherche sur l'étude personnelle (chapitre quatre) et d'après le modèle théorique développé au chapitre cinq, favoriseraient l'organisation d'une étude personnelle idoine.

8.3.2 L'aide à l'organisation de l'étude personnelle dans les manuels

Nous analysons à présent la manière dont les manuels aident les élèves à organiser leur travail personnel, en particulier hors la classe. Pour cela, nous utilisons la grille d'analyse suivante :

– Dans la partie *activités*, les manuels identifient-ils explicitement les nouveaux types de tâches rencontrés ? les nouvelles techniques et technologies ? Situent-ils les OM nouvelles avec des OM anciennes pour donner des raisons d'être aux techniques et technologies qui s'élaborent, par exemple en explicitant les objectifs des activités ou en réalisant ce que les enseignants appellent des « bilans » ?

– Dans la partie *cours et savoir-faire*, les manuels explicitent-ils des liens entre les types de tâches mathématiques, les techniques pour les réaliser et les technologies justifiant ces techniques ? Renvoient-ils vers des exercices en particulier ?

– Dans la partie *exercices*, identifient-ils la généricité des exercices qu'ils proposent ? Font-ils des liens entre ces exercices (utilisation de techniques employées dans des exercices précédents par exemple) ?

– Y a-t-il des parties consacrées explicitement au travail personnel, au travail en autonomie ? Si oui, ces parties font-elles référence à des gestes d'étude particuliers à réaliser ? Permettent-elles un diagnostic des besoins d'apprentissages des élèves ? Fournissent-elles aux élèves des moyens de contrôler leurs réponses ?

Certains points de cette grille d'analyse ont été abordés dans les paragraphes précédents (analyse de l'OM à enseigner). Par exemple, nous avons montré que dans les manuels étudiés, les raisons d'être des équations n'étaient pas toujours données dans les activités, et que la composante pratique des technologies pouvait être sommaire.

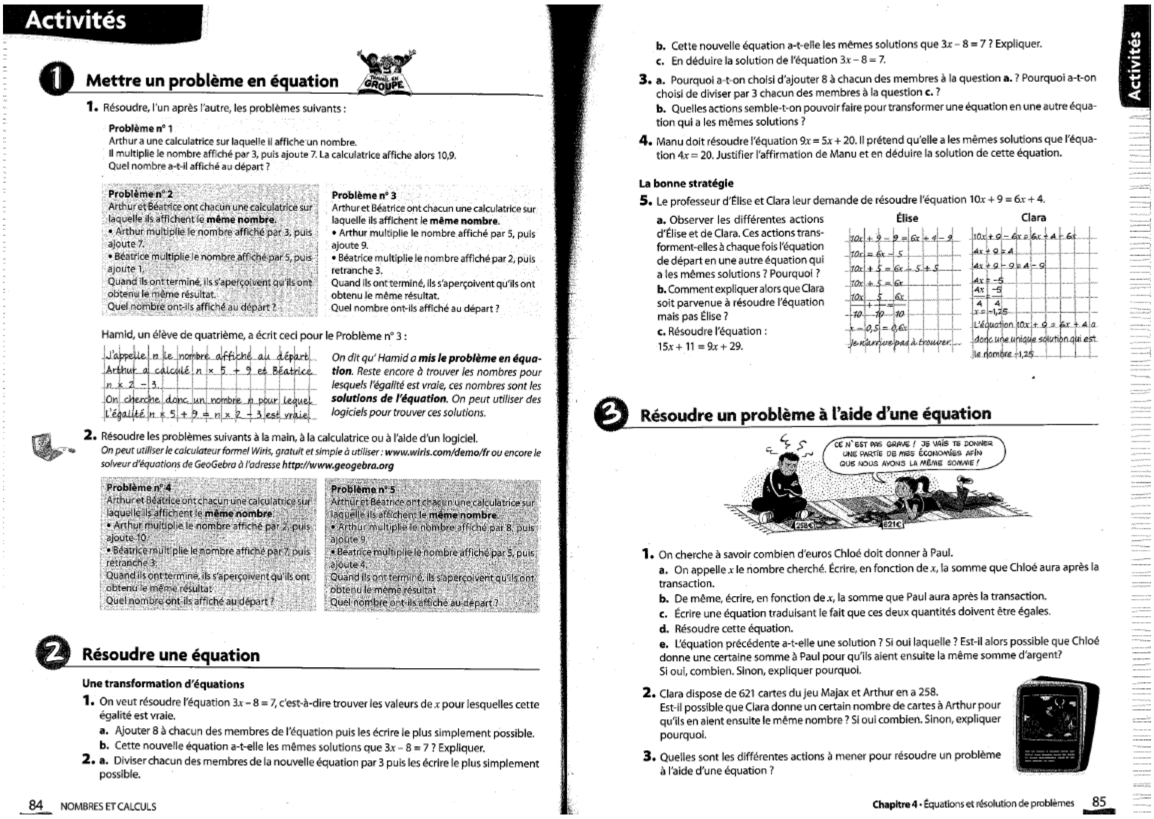
Nous analyons les quatre manuels déjà étudiés précédemment : Horizon $4^{\text{ème}}$ 2011, Phare $4^{\text{ème}}$ 2011, Myriade $4^{\text{ème}}$ 2011 et Transmath $4^{\text{ème}}$ 2011.

a. Analyse de la partie *activités*

Les objectifs des activités ne sont pas tous explicités selon le manuel et leur niveau d'explicitation est variable. Dans le manuel Horizon, par exemple, le titre des activités ne permet pas toujours de déterminer l'objectif de chacune : « Des petits problèmes à résoudre » (p. 110), « Le tableur pour résoudre des problèmes » (p. 111), « Vers une équation » (p. 112). Dans le manuel Myriade (voir figure 8.14 ci-après), les titres sont déjà plus évocateurs : « Mettre un problème en équation » et « Résoudre une équation » (p. 84), et « Résoudre un problème à l'aide d'une équation » (p. 85). Mais l'on voit bien que dans chaque cas, les motivations sont peu mises en avant, voire absentes (pourquoi mettre en un problème en équation ?).

On note également, dans les quatre manuels, l'absence de « bilans » : il n'y a pas de mise en valeur de ce que chaque activité a permis de faire. Il n'y a pas non plus de renvois vers la partie cours (lien avec l'institutionnalisation).

Autrement dit, un élève qui souhaiterait, en autonomie, revenir sur les raisons d'être des équations et de la technique de résolution algébrique, ne peut pas facilement – c'est-à-dire rien qu'en lisant ce qui est mis en avant (titres, bilans, encadrés, ...) – repérer celles qui permettent de reconstruire ces raisons d'être. Il revient à sa charge – ou à celle de son enseignant – d'identifier les obstacles qu'elles permettent de surmonter, les raisons d'être des objets de savoir rencontrés.



Activités

1 Mettre un problème en équation

TRAVAIL EN GROUPE

1. Résoudre, l'un après l'autre, les problèmes suivants :

Problème n° 1
Arthur a une calculatrice sur laquelle il affiche un nombre.
Il multiplie le nombre affiché par 3, puis ajoute 7. La calculatrice affiche alors 10,9.
Quel nombre a-t-il affiché au départ ?

Problème n° 2
Arthur et Béatrice ont chacun une calculatrice sur laquelle ils affichent le **même nombre**.
• Arthur multiplie le nombre affiché par 3, puis ajoute 7.
• Béatrice multiplie le nombre affiché par 5, puis ajoute 1.
Quand ils ont terminé, ils s'aperçoivent qu'ils ont obtenu le même résultat.
Quel nombre ont-ils affiché au départ ?

Problème n° 3
Arthur et Béatrice ont chacun une calculatrice sur laquelle ils affichent le **même nombre**.
• Arthur multiplie le nombre affiché par 5, puis ajoute 9.
• Béatrice multiplie le nombre affiché par 2, puis retranche 3.
Quand ils ont terminé, ils s'aperçoivent qu'ils ont obtenu le même résultat.
Quel nombre ont-ils affiché au départ ?

Hamid, un élève de quatrième, a écrit ceci pour le Problème n° 3 :

J'appelle n le nombre affiché au départ.
Arthur a calculé $n \times 5 + 9$ et Béatrice $n \times 2 - 3$.
On cherche donc un nombre n pour lequel l'égalité $n \times 5 + 9 = n \times 2 - 3$ est vraie.

On dit qu'Hamid a ***mis le problème en équation****. Reste encore à trouver les nombres pour lesquels l'égalité est vraie, ces nombres sont les* ***solutions de l'équation****. On peut utiliser des logiciels pour trouver ces solutions.*

2. Résoudre les problèmes suivants à la main, à la calculatrice ou à l'aide d'un logiciel.
On peut utiliser le calculateur formel Wiris, gratuit et simple à utiliser : ***www.wiris.com/demo/fr*** *ou encore le solveur d'équations de GeoGebra à l'adresse* ***http://www.geogebra.org***

Problème n° 4
Arthur et Béatrice ont chacun une calculatrice sur laquelle ils affichent le **même nombre**.
• Arthur multiplie le nombre affiché par 2, puis ajoute 10.
• Béatrice multiplie le nombre affiché par 7, puis retranche 3.
Quand ils ont terminé, ils s'aperçoivent qu'ils ont obtenu le même résultat.
Quel nombre ont-ils affiché au départ ?

Problème n° 5
Arthur et Béatrice ont chacun une calculatrice sur laquelle ils affichent le **même nombre**.
• Arthur multiplie le nombre affiché par 8, puis ajoute 9.
• Béatrice multiplie le nombre affiché par 5, puis ajoute 4.
Quand ils ont terminé, ils s'aperçoivent qu'ils ont obtenu le même résultat.
Quel nombre ont-ils affiché au départ ?

2 Résoudre une équation

Une transformation d'équations

1. On veut résoudre l'équation $3x - 8 = 7$, c'est-à-dire trouver les valeurs de x pour lesquelles cette égalité est vraie.
a. Ajouter 8 à chacun des membres de l'équation puis les écrire le plus simplement possible.
b. Cette nouvelle équation a-t-elle les mêmes solutions que $3x - 8 = 7$? Expliquer.

2. a. Diviser chacun des membres de la nouvelle équation par 3 puis les écrire le plus simplement possible.

84 NOMBRES ET CALCULS

b. Cette nouvelle équation a-t-elle les mêmes solutions que $3x - 8 = 7$? Expliquer.
c. En déduire la solution de l'équation $3x - 8 = 7$.

3. a. Pourquoi a-t-on choisi d'ajouter 8 à chacun des membres à la question **a.** ? Pourquoi a-t-on choisi de diviser par 3 chacun des membres à la question **c.** ?
b. Quelles actions semble-t-on pouvoir faire pour transformer une équation en une autre équation qui a les mêmes solutions ?

4. Manu doit résoudre l'équation $9x = 5x + 20$. Il prétend qu'elle a les mêmes solutions que l'équation $4x = 20$. Justifier l'affirmation de Manu et en déduire la solution de cette équation.

La bonne stratégie

5. Le professeur d'Élise et Clara leur demande de résoudre l'équation $10x + 9 = 6x + 4$.
a. Observer les différentes actions d'Élise et de Clara. Ces actions transforment-elles à chaque fois l'équation de départ en une autre équation qui a les mêmes solutions ? Pourquoi ?
b. Comment expliquer alors que Clara soit parvenue à résoudre l'équation mais pas Élise ?
c. Résoudre l'équation :
$15x + 11 = 9x + 29$.

Élise
$10x + 9 - 9 = 6x + 4 - 9$
$10x = 6x - 5$
$10x + 5 = 6x - 5 + 5$
$10x + 5 = 6x$
$\frac{10x}{10} + \frac{5}{10} = \frac{6x}{10}$
$x + 0{,}5 = 0{,}6x$
Je n'arrive pas à trouver.

Clara
$10x + 9 - 6x = 6x + 4 - 6x$
$4x + 9 = 4$
$4x + 9 - 9 = 4 - 9$
$4x = -5$
$\frac{4x}{4} = \frac{-5}{4}$
$x = -1{,}25$
L'équation $10x + 9 = 6x + 4$ a donc une unique solution qui est le nombre $-1{,}25$

3 Résoudre un problème à l'aide d'une équation

1. On cherche à savoir combien d'euros Chloé doit donner à Paul.
a. On appelle x le nombre cherché. Écrire, en fonction de x, la somme que Chloé aura après la transaction.
b. De même, écrire, en fonction de x, la somme que Paul aura après la transaction.
c. Écrire une équation traduisant le fait que ces deux quantités doivent être égales.
d. Résoudre cette équation.
e. L'équation précédente a-t-elle une solution ? Si oui laquelle ? Est-il alors possible que Chloé donne une certaine somme à Paul pour qu'ils aient ensuite la même somme d'argent?
Si oui, combien. Sinon, expliquer pourquoi.

2. Clara dispose de 621 cartes du jeu Majax et Arthur en a 258.
Est-il possible que Clara donne un certain nombre de cartes à Arthur pour qu'ils en aient ensuite le même nombre ? Si oui combien. Sinon, expliquer pourquoi.

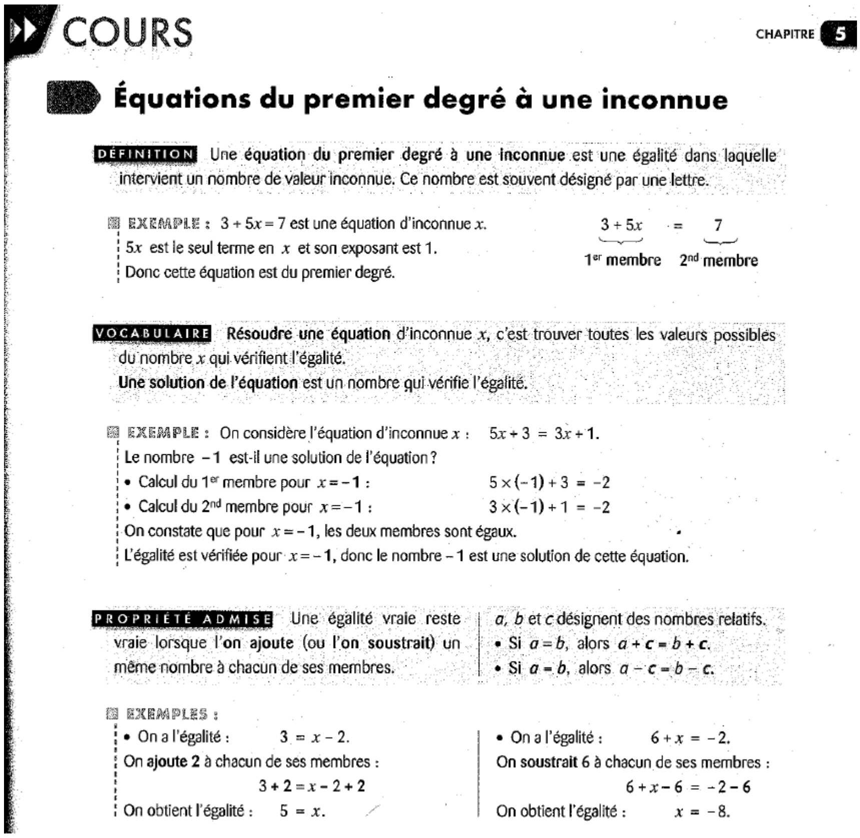
3. Quelles sont les différentes actions à mener pour résoudre un problème à l'aide d'une équation ?

Chapitre 4 • Équations et résolution de problèmes 85

FIGURE 8.14 – La partie activités du manuel Myriade 4$^{\text{ème}}$ (2011)

b. Analyse de la partie cours et savoir-faire

Trois des quatre manuels présentent d'une part le cours, qui comporte les savoirs théoriques relatifs aux équations (définition, propriétés) illustrés par quelques exemples (voir par exemple la figure 8.15 ci après), et d'autre part des savoir-faire, avec des « méthodes » correspondant à la composante pratique des technologies. Seul le manuel Horizon mélange cours et savoir-faire.



COURS — CHAPITRE 5

Équations du premier degré à une inconnue

DÉFINITION Une **équation du premier degré à une inconnue** est une égalité dans laquelle intervient un nombre de valeur inconnue. Ce nombre est souvent désigné par une lettre.

EXEMPLE : $3 + 5x = 7$ est une équation d'inconnue x.
$5x$ est le seul terme en x et son exposant est 1.
Donc cette équation est du premier degré.

$\underbrace{3 + 5x}_{1^{er}\text{ membre}} = \underbrace{7}_{2^{nd}\text{ membre}}$

VOCABULAIRE **Résoudre une équation** d'inconnue x, c'est trouver toutes les valeurs possibles du nombre x qui vérifient l'égalité.
Une solution de l'équation est un nombre qui vérifie l'égalité.

EXEMPLE : On considère l'équation d'inconnue x : $5x + 3 = 3x + 1$.
Le nombre -1 est-il une solution de l'équation ?
• Calcul du 1er membre pour $x = -1$: $5 \times (-1) + 3 = -2$
• Calcul du 2nd membre pour $x = -1$: $3 \times (-1) + 1 = -2$
On constate que pour $x = -1$, les deux membres sont égaux.
L'égalité est vérifiée pour $x = -1$, donc le nombre -1 est une solution de cette équation.

PROPRIÉTÉ ADMISE Une égalité vraie reste vraie lorsque l'**on ajoute** (ou l'**on soustrait**) un même nombre à chacun de ses membres.

a, b et c désignent des nombres relatifs.
• Si $a = b$, alors $a + c = b + c$.
• Si $a = b$, alors $a - c = b - c$.

EXEMPLES :
• On a l'égalité : $3 = x - 2$.
On **ajoute 2** à chacun de ses membres :
$3 + 2 = x - 2 + 2$
On obtient l'égalité : $5 = x$.

• On a l'égalité : $6 + x = -2$.
On **soustrait 6** à chacun de ses membres :
$6 + x - 6 = -2 - 6$
On obtient l'égalité : $x = -8$.

FIGURE 8.15 – Extrait de la partie cours du manuel Phare 4$^{\text{ème}}$ (2011)

Concernant le champ d'application de ces savoirs inscrits dans la leçon, aucun manuel ne met vraiment en avant l'utilité des équations ou des propriétés de conservation de l'égalité et aucun ne fait de liens avec ce qui a été vu dans les activités : il y a donc institutionnalisation de savoirs, mais sans référence à la façon dont ces savoirs sont apparus, leurs raisons d'être mathématiques. Dans les exemples donnés, on trouve uniquement des exemples d'équations (pour illustrer la définition d'une équation), de solutions d'une équation, et de résolution d'équations (pour illustrer l'emploi des propriétés). Pourquoi définir une équation ? Pourquoi résoudre une équation ? Ces questions n'apparaissent pas explicitement dans le cours, hormis dans le manuel Myriade qui explique brièvement : « *On peut résoudre un problème à l'aide d'équations. Pour cela, il faut mettre le problème en équation, résoudre l'équation, répondre en interprétant la solution de l'équation en fonction du problème initial.* » (p. 86) mais ne précise pas le type de problèmes à mettre en équation, et donc pas l'intérêt d'utiliser les équations.

Il revient donc à la charge de l'élève qui souhaite retravailler sa leçon en autonomie à l'aide d'un manuel de dépasser la simple lecture d'un « listing » de définitions-propriétés-exemples et de comprendre le pourquoi de ce « listing », sans pourtant disposer de renvoi avec ce qui a été fait dans des activités (qui, rappelons-le, ne mettent pas non plus en avant leurs objectifs).

Concernant les savoir-faire, deux grands titres ressortent dans les manuels étudiés : résoudre une équation, résoudre un problème à l'aide d'une équation. Ceci semble constituer deux réponses à deux questions que pourrait se poser un élève : comment résoudre une équation ? comment résoudre un problème à l'aide d'une équation ? Tous les manuels proposent des exercices résolus en lien avec ces questions : il y a donc, dans une certaine mesure, un contrôle possible de la part de l'élève des résultats qu'il obtient lui-même. Cependant, les manuels décontextualisent peu ces exercices. Sur des exemples précis, ils détaillent pour la plupart une stratégie : pour résoudre telle équation, isoler l'inconnue en effectuant telle ou telle transformation algébrique ; pour mettre tel problème en équation, prendre telle grandeur pour inconnue, écrire une équation et la résoudre. En revanche, ils ne précisent pas le type d'équation qui « doit » être résolu par une technique algébrique, ils ne précisent pas non plus quel type de problèmes « doit » être résolu à l'aide d'une équation. Les manuels Horizon et Transmath proposent ainsi des problèmes qu'ils demandent de résoudre sans équation et des problèmes qu'ils demandent de résoudre à l'aide d'une équation, mais n'expliquent pas pourquoi les uns peuvent être résolus sans équation alors que les autres ne peuvent pas l'être.

Des exercices d'application sont juxtaposés aux exercices résolus et aux méthodes, permettant à l'élève de travailler des exercices similaires à ceux résolus. Mais l'identification de cette similitude est généralement laissée à la charge de l'élève ; seul le manuel Transmath (voir figure 8.16 ci-après) renvoie précisément, à la fin de chaque exercice résolu, à un ou plusieurs exercices d'application. Le manuel Myriade, lui, renvoie à la fin des exercices d'application vers des exercices précis de la partie exercices (jugés similaires).

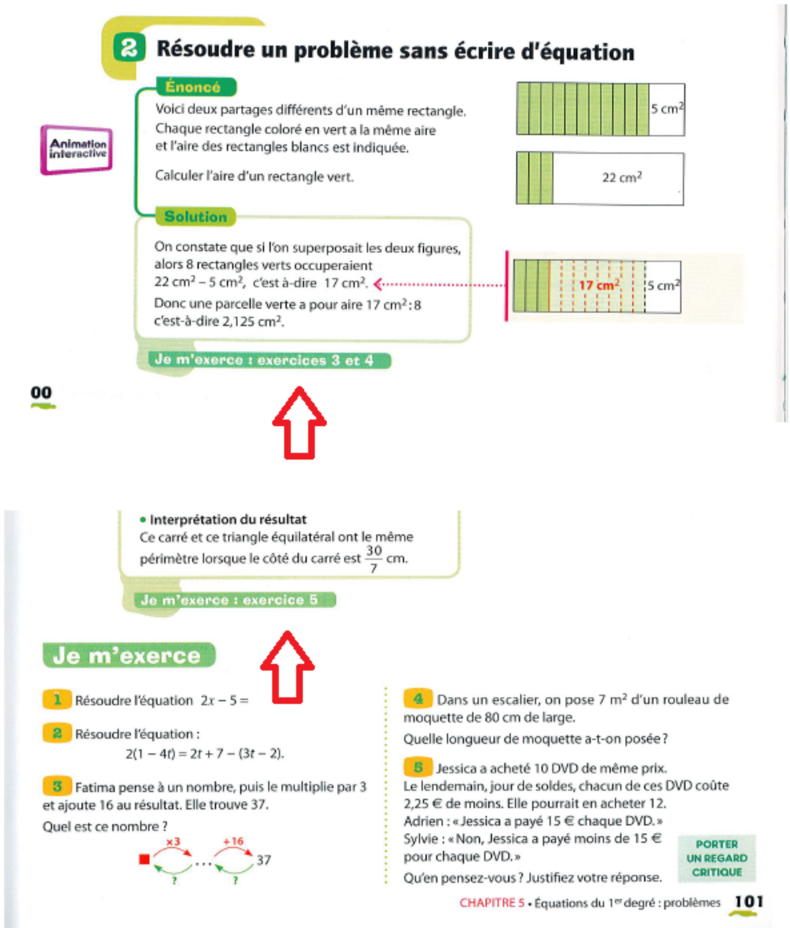


FIGURE 8.16 – Extrait de la partie savoir-faire du manuel Transmath 4ème (2011)

Cette reconnaissance des types de tâches mathématiques à partir des tâches données, qui d'après nos hypothèses favorise une étude personnelle efficace, est donc placée sous la responsabilité d'un élève travaillant en autonomie les parties savoir-faire de ces manuels.

c. Analyse de la partie exercices

Les exercices sont rassemblés sous des titres généraux : résoudre une équation, résoudre un problème sans équation, résoudre un problème avec une équation. Dans une certaine mesure, les manuels identifient une partie des types de tâches mathématiques relatifs aux équations – mais pas tous ceux de l'OM de référence épistémologique. Les exercices ne sont pas mis en lien les uns avec les autres : on ne trouve par exemple aucune remarque du type « cet exercice utilise la même démarche que tel autre ». Tout ceci est encore laissé à la charge de l'élève travaillant en autonomie sur un manuel.

d. Analyse de la partie consacrée à l'auto-évaluation

Tous les manuels présentent une partie consacrée à ce qu'ils appellent « l'auto-évaluation » et au travail personnel : « Je m'évalue » pour Horizon (p. 125), « Parcours autonome » pour Myriade (p. 92),« Je fais le point » pour Phare (p. 87) et « Travail autonome » pour Transmath (p. 108).

Il est intéressant de noter que le travail personnel et la préparation à l'évaluation sont systématiquement associés dans les manuels étudiés. Ceci peut être assimilé à une logique repérée dans les pratiques des élèves : l'objectif principal du travail personnel est la réussite à l'évaluation sommative proposée en classe par l'enseignant.

Tous les manuels proposent des exercices dont l'objectif est de « vérifier les connaissances acquises » des élèves. Trois d'entre eux utilisent le format du questionnaire à choix multiple (Q.C.M.) pour ce faire ; le quatrième, Horizon, en plus d'utiliser des Q.C.M., propose de réaliser des exercices qui ne sont pas sous ce format. Tous les manuels présentent pour ces exercices d'auto-évaluation un corrigé permettant à l'élève de contrôler en partie ses résultats.

En revanche, tous les manuels ne suggèrent pas les mêmes techniques d'étude suite aux résultats obtenus à l'auto-évaluation. Le manuel Myriade ne suggère aucune technique : une fois le Q.C.M. réalisé, l'élève dispose simplement de son score. Les manuels Phare et Transmath renvoient à certaines pages du livre : si l'élève donne une mauvaise réponse à une question du Q.C.M., une page à « revoir » est spécifiée (sans toutefois expliciter ce que « revoir » signifie ; il s'agit d'une technique pédagogique ne prenant pas en compte les spécificités des OM à étudier). Le manuel Phare est moins précis que le manuel Transmath : ce dernier, en plus d'indiquer le numéro de la page à revoir, précise des numéros d'exercices résolus ou des paragraphes du cours.

Le manuel Horizon est celui qui suggère selon nous les techniques d'étude les plus fines des quatre manuels étudiés (voir figure 8.17 à la toute fin du chapitre). Dans l'évaluation de fin de chapitre proposée par le manuel, trois capacités relatives aux équations sont distinguées : « Je sais résoudre un problème, avec ou sans équation », « Je sais résoudre une équation », et « Je sais mettre un problème en équation ». Il propose ensuite neuf tâches mathématiques à faire dans la partie auto-évaluation.

En fonction du nombre de réponses correctes, il indique à l'élève s'il doit « refaire » tous les exercices corrigés (moins de 5 bonnes réponses), « refaire » les exercices où il a échoué seulement (entre 5 et 7 bonnes réponses), et « s'assurer » qu'il a compris les exercices où il a échoué (plus de 8 bonnes réponses). Les termes« refaire » et « s'assurer d'avoir bien compris » sont précisément ceux employés par le manuel ; on peut là aussi s'interroger sur leur signification précise. Enfin, à chaque exercice correspond une ou plusieurs des trois capacités retenues par le manuel (voir figure 8.18 à la toute fin du chapitre). Par conséquent, l'élève connaît en fonction de ses échecs les « capacités » qui lui font défaut.

Nous pouvons donc remarquer que les auto-évaluations sont diverses dans les manuels. Dans tous ces manuels, l'élève peut connaître le nombre d'exercices qu'il sait résoudre (son score) et possède un corrigé sous la main pour contrôler ses résultats ; pour quelques manuels, il a la possibilité de « revoir » certains exercices ou certaines parties du cours vers lequel il est explicitement renvoyé ; et pour le manuel Horizon seulement, il dispose d'informations sur des savoir-faire généraux qu'il maîtrise ou non. Les techniques d'étude suggérées par tous les manuels demeurent néanmoins « générales » pour la plupart : « revoir » et « s'assurer d'avoir bien compris » ne renvoient pas à des actions précises : *comment* revoir un cours ? *Comment* retravailler un exercice ? *Comment* être sûr d'avoir *compris* ?

e. Conclusion sur l'aide à l'organisation de l'étude personnelle dans les manuels

L'analyse des quatre manuels au filtre de nos questions met en avant les éléments suivants :

- Les objectifs des activités ne sont pas explicites.
- Les cours consistent la plupart du temps en une liste de définitions-propriétés-exemples, dont le champ d'application n'est pas explicitement déterminé. Les parties savoir-faire rendent possible un contrôle, par le biais d'exercices résolus, des réponses d'un élève par comparaison avec le corrigé. S'ils présentent des exemples de mise en œuvre des techniques avec des exemples de stratégie estampillées « méthode », la décontextualisation et l'institutionnalisation de la composante pratique de la technologie ne sont pas prises en charge par le manuel.
- Les parties exercices catégorisent les exercices en grandes sous-parties mais n'identifient pas leur généricité et ne les mettent pas en relation les uns avec

les autres.

– Enfin, le travail personnel de l'élève est pris en compte dans tous les manuels, qui lui accordent une partie entière, mais les auto-évaluations sont d'une finesse relative, inégale, et explicitent peu de techniques d'étude qui ne demeurent pas qu'à un niveau pédagogique « général ».

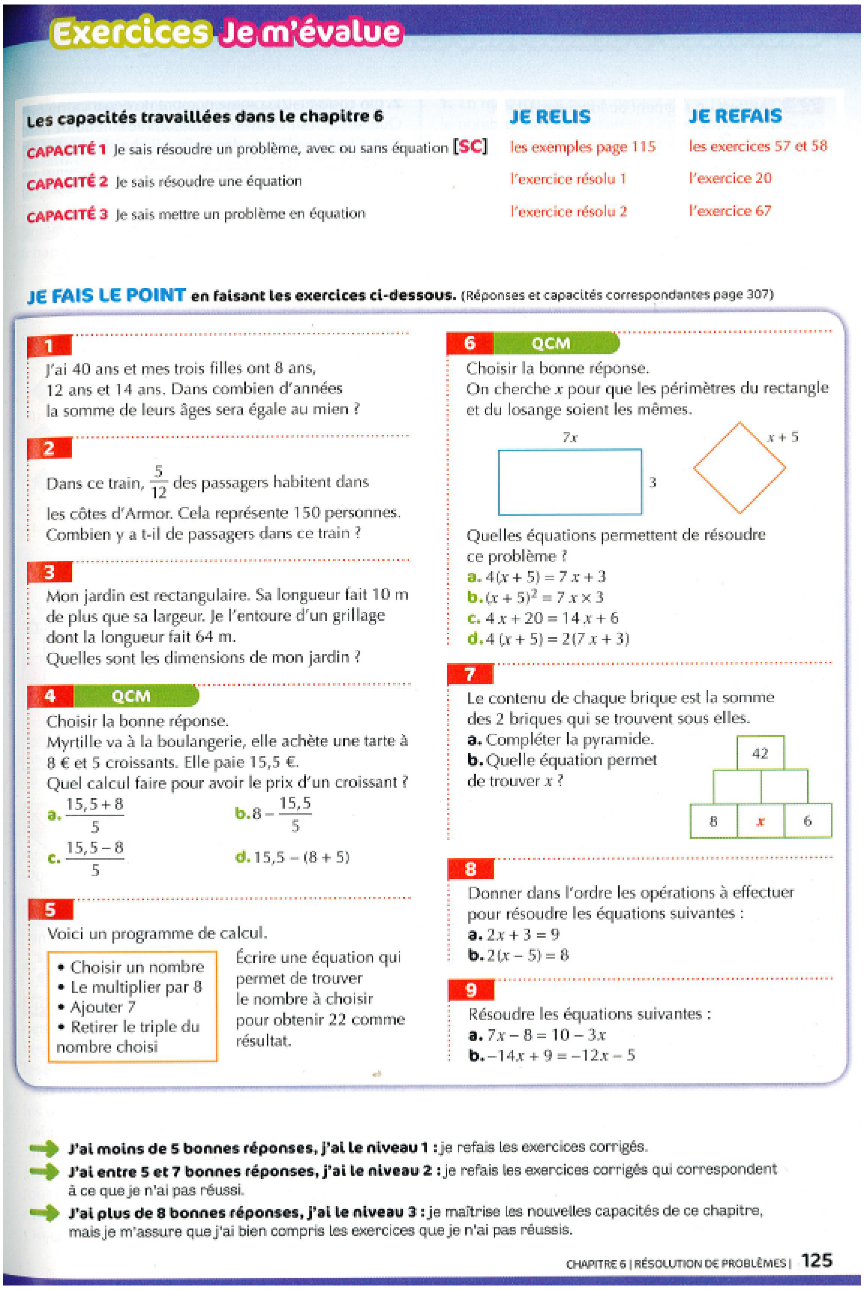
Nous avons conscience que les manuels sont soumis à des contraintes éditoriales d'une part qui ne leur permettent peut-être pas de détailler tout ce que nous pointons comme des implicites pour favoriser une étude personnelle hors la classe efficace ; d'autre part, les auteurs de manuel n'ont pas nécessairement pour objectifs de permettre à un élève en totale autonomie de réussir scolairement uniquement à l'aide de son manuel.

8.3.3 Conclusion sur l'analyse des manuels

Nous avons analysé dans ce chapitre les programmes et plusieurs manuels scolaires pour déterminer les besoins d'apprentissages qui n'y sont pas explicitement présents ou développés. Nous nous sommes en particulier appuyés sur l'OM épistémologique de référence relative aux équations et avons montré qu'elle était effectivement opérationnelle.

L'enseignant, parce qu'il met en œuvre les activités, les exercices et le cours des manuels à sa manière, en les modifiant, en les adaptant, en les agençant d'une certaine façon, en les complétant aussi, peut être à même d'expliciter tous les enjeux d'apprentissages relatifs aux équations non explicités par les documents officiels et les manuels. Cependant, nous faisons l'hypothèse, à vérifier expérimentalement, que certains implicites échappent à la vigilance de l'enseignant et qu'un travail spécifique de ces implicites permettrait de favoriser chez les élèves la construction d'un rapport idoine aux équations.

À titre de perspective, les résultats que nous avons obtenus peuvent être utiles pour questionner le découpage des OM des programmes mis en œuvre à la rentrée de 2016. Par exemple, dans les « *repères de progressivité* » proposés dans les programmes, la mise en équation d'un problème du premier degré est conseillée en classe de quatrième ; cependant, la technique de résolution algébrique ne semble être un attendu qu'en classe de troisième (en quatrième, un tel problème se résout seulement d'une « *façon exacte ou approchée* », sans ajout sur ce que cela signifie précisément). Pourquoi alors utiliser une équation pour modéliser un problème si c'est pour le résoudre non algébriquement ? Nous notons par ailleurs l'apparition la notion de variable dans la rubrique « *Calcul littéral* » aux côtés de la notion d'inconnue. Nous avons indiqué que cette notion était potentiellement intéressante à travailler dans le cadre de l'enseignement des équations ; mais elle ne fait l'objet d'aucun commentaire explicite, ni dans les attendus de fin de cycle, ni dans ces repères de progressivité. Le document ressource du cycle 4 « Nombres et calculs » évoque seulement l'utilité du tableur pour aborder cette notion. Les éléments que nous avons développés permettraient de questionner ces points en termes d'écologie des savoirs.



Exercices Je m'évalue

Les capacités travaillées dans le chapitre 6	JE RELIS	JE REFAIS
CAPACITÉ 1 Je sais résoudre un problème, avec ou sans équation [SC]	les exemples page 115	les exercices 57 et 58
CAPACITÉ 2 Je sais résoudre une équation	l'exercice résolu 1	l'exercice 20
CAPACITÉ 3 Je sais mettre un problème en équation	l'exercice résolu 2	l'exercice 67

JE FAIS LE POINT en faisant les exercices ci-dessous. (Réponses et capacités correspondantes page 307)

1
J'ai 40 ans et mes trois filles ont 8 ans, 12 ans et 14 ans. Dans combien d'années la somme de leurs âges sera égale au mien ?

2
Dans ce train, $\frac{5}{12}$ des passagers habitent dans les côtes d'Armor. Cela représente 150 personnes. Combien y a t-il de passagers dans ce train ?

3
Mon jardin est rectangulaire. Sa longueur fait 10 m de plus que sa largeur. Je l'entoure d'un grillage dont la longueur fait 64 m.
Quelles sont les dimensions de mon jardin ?

4 QCM
Choisir la bonne réponse.
Myrtille va à la boulangerie, elle achète une tarte à 8 € et 5 croissants. Elle paie 15,5 €.
Quel calcul faire pour avoir le prix d'un croissant ?
a. $\frac{15,5+8}{5}$ **b.** $8-\frac{15,5}{5}$
c. $\frac{15,5-8}{5}$ **d.** $15,5-(8+5)$

5
Voici un programme de calcul.

- Choisir un nombre
- Le multiplier par 8
- Ajouter 7
- Retirer le triple du nombre choisi

Écrire une équation qui permet de trouver le nombre à choisir pour obtenir 22 comme résultat.

6 QCM
Choisir la bonne réponse.
On cherche x pour que les périmètres du rectangle et du losange soient les mêmes.

$7x$ 3 $x+5$

Quelles équations permettent de résoudre ce problème ?
a. $4(x+5)=7x+3$
b. $(x+5)^2=7x\times 3$
c. $4x+20=14x+6$
d. $4(x+5)=2(7x+3)$

7
Le contenu de chaque brique est la somme des 2 briques qui se trouvent sous elles.
a. Compléter la pyramide.
b. Quelle équation permet de trouver x ?

42
8 x 6

8
Donner dans l'ordre les opérations à effectuer pour résoudre les équations suivantes :
a. $2x+3=9$
b. $2(x-5)=8$

9
Résoudre les équations suivantes :
a. $7x-8=10-3x$
b. $-14x+9=-12x-5$

➜ **J'ai moins de 5 bonnes réponses, j'ai le niveau 1 :** je refais les exercices corrigés.
➜ **J'ai entre 5 et 7 bonnes réponses, j'ai le niveau 2 :** je refais les exercices corrigés qui correspondent à ce que je n'ai pas réussi.
➜ **J'ai plus de 8 bonnes réponses, j'ai le niveau 3 :** je maîtrise les nouvelles capacités de ce chapitre, mais je m'assure que j'ai bien compris les exercices que je n'ai pas réussis.

CHAPITRE 6 | RÉSOLUTION DE PROBLÈMES | 125

FIGURE 8.17 – La partie sur le travail personnel du manuel Horizon 4$^{\text{ème}}$ (2011)

Je m'évalue

1 Capacité 1 Dans 3 ans.
AIDE : il y a 6 ans d'écart entre mon âge et la somme de ceux de mes filles. Chaque année, l'écart se réduit de 2 ans.

2 Capacité 1 360 passagers.
AIDE : un douzième des passagers représentent 5 fois moins que 150 personnes.

3 Capacité 1 Largeur 11 m. Longueur 21 m.
AIDE : utiliser un schéma.

4 Capacité 1 Réponse **c.**
AIDE : 5 fois le prix d'un croissant + 8 € = 15,5 €.

5 Capacité 2 $8x + 7 - 3x = 22$ ou $5x + 7 = 22$.

6 Capacité 2 Réponses **c.** et **d.**
AIDE : utiliser les formules du périmètre d'un rectangle et d'un losange. (C'est la même que celle du périmètre du carré !)

7 Capacité 2 **a.** Case de gauche : $8 + x$
Case de droite : $x + 6$.
b. $8 + x + x + 6 = 42$ ou $2x + 14 = 42$
AIDE : se reporter à la page 117.

8 Capacité 3 **a.** Enlever 3 et diviser par 2.
b. Diviser par 2 et ajouter 5.
AIDE : se reporter à l'exercice résolu 1.

9 Capacité 3 **a.** $x = 1{,}8$ **b.** $x = 7$
AIDE : se reporter à l'exercice résolu 1.

FIGURE 8.18 – Extrait des corrigés de l'évaluation diagnostique sur le thème des équations du manuel Horizon 4ème (2011)

Chapitre 9

Elaboration d'un Parcours d'Etude et de Recherche sur les équations

9.1 Objectifs du chapitre

Dans ce chapitre, nous présentons un Parcours d'Etude et de Recherche (PER) sur les équations en classe de quatrième.

Nous avons montré dans le chapitre précédent que certains besoins d'apprentissages, qu'ils portent sur les OM relatives aux équations ou sur les praxéologies d'étude des équations, sont laissés implicites dans les programmes officiels et les manuels scolaires alors que ces apprentissages sont nécessaires pour mener une activité algébrique idoine avec les équations d'après la synthèse de travaux sur l'étude personnelle du chapitre trois et la référence épistémologique établie au chapitre six. Nous avons alors interrogé la possibilité que dans la chaîne transpositive des savoirs, les déficits praxéologiques repérés se répercutent dans les praxéologies travaillées en classe et celles mobilisées par les élèves. En lien avec nos hypothèses de recherche du chapitre deux, nous supposons que la construction d'un rapport personnel idoine aux équations est favorisé par un travail des OM en accord avec les principaux éléments de la référence épistémologique, éléments qui ne sont pas toujours portés par les programmes et les manuels de la discipline. Nous supposons de plus que pour construire et articuler les OM locales de l'OM de référence du chapitre sept, l'élève peut être amené à mobiliser certaines praxéologies d'étude – celles présentées dans les chapitres quatre et cinq – en particulier lorsqu'il accomplit un travail personnel hors la classe.

C'est au prisme de ces différentes considérations que nous élaborons un PER relatif aux équations. Nous nous appuyons pour construire ce dernier sur les principaux éléments portant sur l'étude personnelle et ceux de la référence épistémologique sur les équations.

Nous présentons dans un premier temps une vision générale du PER ainsi que les outils théoriques qui nous ont servi à le construire. Ce dernier est découpé en trois étapes, que nous exposons dans un deuxième temps. Un troisième et dernier temps est consacré à la description des types de tâches mathématiques prévus pour l'étude personnelle hors la classe des élèves.

Une partie des situations didactiques proposées préexiste dans le champ des recherches en didactique et peut être trouvée dans (Combier, Guillaume, & Pressiat, 1996).

9.2 Vision générale et fondements théoriques du PER

9.2.1 Outils théoriques pour construire le PER

Nous articulons deux cadres théoriques pour fonder la structure du PER relatif aux équations : la théorie anthropologique du didactique (TAD) et la théorie des situations didactiques (TSD), présentées au chapitre deux.

Cadre théorique principal de notre thèse, la TAD est ce qui nous permet de définir un PER balisé par des questions génératrices qui vont motiver les principales techniques et les technologies mathématiques relatives aux équations. Elle permet de décrire les OM et genres de tâches travaillées au sein de chaque étape en appui sur la référence épistémologique relative aux équations (chapitres six et sept), ainsi que l'organisation didactique en termes de moments de l'étude. Elle est également utile pour penser l'organisation de l'étude personnelle des élèves (travail sur les praxéologies d'étude).

Nous nous appuyons par ailleurs sur la TSD pour disposer d'outils autrement dynamiques que ceux offerts par la TAD. Chaque étape du PER s'articule autour d'une situation didactique. L'analyse du jeu sur les valeurs des variables didactiques permet de mettre en lumière les raisons d'être des techniques et technologies mathématiques qui s'élaborent. Nous proposons de plus pour chacune des situations des éléments de gestion didactique pour l'enseignant (phases de dévolution, d'action des élèves, etc.). La TSD nous permet aussi de penser l'organisation de l'aide à l'étude personnelle hors la classe.

Chaque étape du PER s'appuie sur les principaux résultats de la synthèse de travaux sur l'étude personnelle du chapitre trois et ceux de la référence épistémologique relative aux équations établie au chapitre six. La section suivante détaille ces éléments et donne une vue d'ensemble du PER.

9.2.2 Schémas récapitulatifs : vision générale du PER

Le schéma de la figure 9.1 donne un aperçu des principales étapes du PER, ainsi que des phases préalables : l'évaluation diagnostique, qui permet de repérer les besoins d'apprentissages des élèves en algèbre et sur laquelle nous prenons appui pour différencier certains contenus du PER, et les tâches préparatoires à réaliser avant la mise en œuvre du PER pour renforcer les raisons d'être des OM relatives aux équations et faciliter certains aspects de la gestion didactique. Les sous-sections qui suivent apportent des précisions sur chaque phase et sur chaque étape.

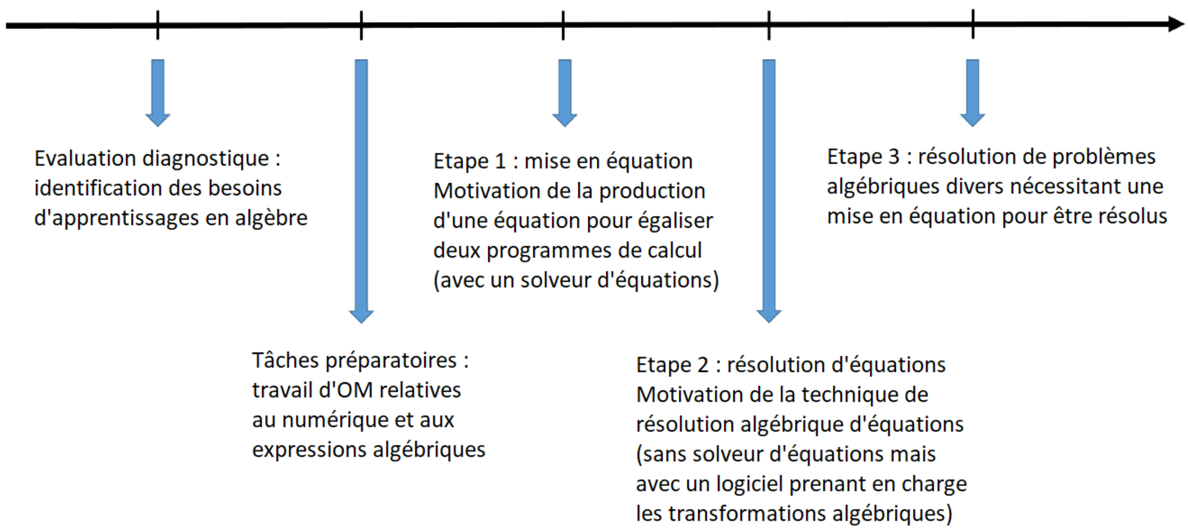


FIGURE 9.1 – Vue d'ensemble du PER et des phases en amont

Le schéma de la figure 9.2 ci-dessous présente la succession des séances correspondant à chaque étape du PER et leurs objectifs principaux.

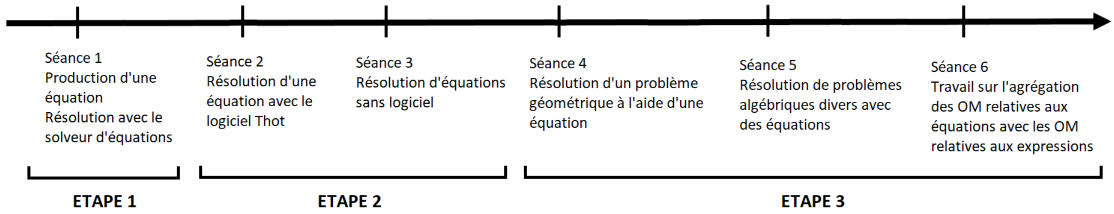


FIGURE 9.2 – Vue d'ensemble du PER : séance par séance

9.2.3 L'appui sur le test Pépite pour construire une partie du PER

a. Un test diagnostic pour identifier les besoins d'apprentissages des élèves et différencier certaines tâches du PER

Dans les chapitres un et deux de la thèse, nous avons mentionné les difficultés potentielles des enseignants à identifier les besoins d'apprentissages de leurs élèves, étant donné que certains de ces besoins n'étaient pas explicitement pointés dans les programmes et les manuels, comme nous l'avons montré dans le chapitre huit.

Nous nous appuyons sur un test qui prend en charge cette identification des besoins d'apprentissages en algèbre des élèves. Il s'agit du test Pépite (Delozanne, Prévit, Grugeons-Allys et Chenevotot-Quentin, 2010). Nous décrivons brièvement son fonctionnement dans les sous-sections qui suivent. Le test fin de cinquième / début de quatrième est celui dont nous nous servons pour différencier certaines tâches du PER relatif aux équations. Pour plus de détails sur ce test, nous renvoyons le lecteur à (Delozanne et al., 2010) et à l'annexe (annexe du chapitre neuf, page 541).

b. Présentation générale du test

Le test Pépite fin de cinquième / début de quatrième est un test diagnostic automatique, informatisé, composé de plusieurs tâches appelées items, recouvrant un domaine des mathématiques, et qui détermine le profil cognitif d'un élève en algèbre élémentaire en fin de cinquième ou en début de quatrième. Il ne prend pas uniquement en compte les attentes institutionnelles des programmes mais s'appuie sur une analyse didactique et épistémologique. Dépassant la dichotomie classique « échec / réussite », il réalise une analyse multidimensionnelle des réponses données par les élèves (Grugeon, 1997), en identifiant non seulement des erreurs et des capacités maîtrisées, mais également des cohérences de fonctionnement dans l'activité algébrique des élèves [1].

Trois niveaux de diagnostic composent le test :

– sur chaque exercice du test, un diagnostic local analyse la réponse donnée par l'élève à la ou aux questions, en la comparant à un type de réponse anticipée et en la codant en conséquence ;
– sur un ensemble d'exercices, un diagnostic global individuel repère des cohérences entre les réponses et détermine une position de l'élève par rapport à plusieurs composantes (taux de réussite, leviers, fragilités, règles utilisées fausses ou correctes) ;
– enfin, un diagnostic global collectif situe l'élève par rapport à des groupes de niveau, chaque groupe partageant des caractéristiques communes.

Nous renvoyons le lecteur vers l'annexe (annexes du chapitre neuf, 541) pour une description plus détaillée de chacun de ces trois niveaux.

Le niveau global collectif du test permet la gestion de l'hétérogénéité cognitive existant dans une classe en regroupant des stéréotypes voisins et en proposant des apprentissages différenciés pour chaque groupe. Trois groupes sont formées à l'issue du test : un groupe A, un groupe B et un groupe C. Les élèves du groupe A sont ceux dont le rapport personnel à l'algèbre est proche d'un rapport personnel idoine. Ils donnent des raisons d'être aux objets de l'algèbre et s'en servent comme outil pour résoudre des problèmes. Ceux du groupe B comment à motiver et articulent partiellement les OM relatives à l'algèbre pour mener, prévoir et contrôler les transformations algébriques. Les élèves du groupe C sont ceux dont le rapport personnel à l'algèbre le plus éloigné d'un rapport personnel idoine : ils persévèrent dans l'utilisation de techniques arithmétiques ou par essais/erreurs en dehors de leur domaine de validité et donnent peu de sens à la lettre.

c. Les tâches diagnostiques

Le test Pépite fin de 5$^{\text{ème}}$ / début de 4$^{\text{ème}}$ comporte dix tâches diagnostiques (cf. annexes du chapitre neuf, page 541). Le choix des tâches a été réalisé suivant une grille multidimensionnelle (Grugeon, 1997) afin de couvrir une partie des domaines numérique et algébrique : le calcul numérique (fractions, priorités opératoires, ordre de grandeur, ...), le calcul algébrique (développer, factoriser), le test d'égalités,

1. Il existe plusieurs tests Pépite, correspondant à plusieurs niveaux scolaires : en fin de quatrième / début de troisième, et en fin de troisième / début de seconde. Le premier test (3$^{\text{ème}}$ / 2$^{\text{nde}}$) a été mis en ligne en 2011 sur une plateforme largement utilisée par les enseignants : LaboMEP, de l'association Sésamath.

la traduction de relations entre grandeurs, avec des changements de registres (par exemple : exprimer le périmètre d'une figure en fonction d'une grandeur inconnue). Les tâches comprennent des Q.C.M. mais aussi des énoncés ouverts.

d. L'appui sur le test Pépite pour différencier

Nous nous appuyons sur les regroupements effectués par le test Pépite (groupes A, B et C) pour différencier les tâches données à faire en autonomie dans le PER relatif aux équations. Nous avons choisi de ne pas systématiquement différencier toutes les tâches, d'une part parce que cela obligerait les enseignants à changer fortement leurs pratiques s'ils n'ont pas l'habitude de travailler en regroupant leurs élèves, d'autre part parce que les élèves doivent selon nous rencontrer les mêmes situations à certains moments du PER pour réaliser les apprentissages.

9.2.4 Les trois étapes du PER et leurs fondements théoriques

Les trois étapes du PER sont prévues pour s'étendre sur six à sept séances d'une heure.

Etape 1 : motivation de la production d'une équation. Dans cette étape, un cycle complet des moments de l'étude a lieu pour le problème d'égalisation de programmes de calcul faisant échouer les techniques de résolution arithmétique et par essais/erreurs. D'après la référence épistémologique relative aux équations, les équations constituent un outil pour résoudre un certain champ de problèmes. Les techniques par remontée arithmétique ou par essais/erreurs doivent être mises en échec et la production d'équations doit trouver des raisons d'être. Dans la première étape du PER, les équations sont introduites pour résoudre un problème d'égalisation de programmes de calcul, ce qui correspond à la deuxième étape du processus d'algébrisation de Ruiz-Munzon et al. (2012). La question génératrice est la suivante : comment trouver la même valeur à entrer dans deux programmes de calcul pour que les valeurs de sortie soient égales ? Les programmes de calcul en question correspondent à des expressions du premier degré à une variable, leur égalité à une équation du premier degré à une variable. La présence de la variable dans les deux membres met en échec la technique de résolution par remontée arithmétique et l'équation est telle que sa solution est fractionnaire non décimale, mettant en échec la technique de substitution par essais/erreurs. L'objectif principal de cette première étape est ainsi d'amener les élèves à se rendre compte de l'insuffisance des portées d'anciennes techniques de résolution de ce type de tâches. La présence d'un solveur d'équations dans le milieu didactique de la situation motive la production d'une équation et prend en charge la résolution algébrique. Les tâches mathématiques travaillées relèvent principalement de $OML1_{eq}$ (production d'une équation) et $OML3_{eq}$ (structure et solution).

Etape 2 : motivation de la technique de résolution algébrique d'une équation. Dans cette étape, un cycle complet de moments de l'étude a lieu pour la résolution algébrique d'équations en appui sur les propriétés de conservation de l'égalité. Cette deuxième étape donne des raisons d'être à la technique de résolution algébrique appuyée sur les propriétés de conservation de l'égalité. Suivant les éléments de la référence épistémologique relative aux équations, cette technique permet de résoudre des équations du premier degré à une variable, cette variable étant présente dans les deux membres de l'équation, et les coefficients de l'équation tels que la solution ne peut être trouvée par une technique par essais/erreurs. La question génératrice correspondant à cette étape est la suivante : comment trouver la valeur d'une variable dans une égalité de la forme $ax + b = cx + d$? Il s'agit de construire une technique fonctionnant quels que soient les coefficients a, b, c, d. Le solveur d'équations, présent à la première étape du PER, n'est plus disponible pour résoudre des équations algébriques et les élèves doivent s'approprier la technique de résolution algébrique à l'aide d'un logiciel, Thot, prenant temporairement en charge les transformations dans cette résolution algébrique. Les tâches mathématiques travaillées dans cette étape relèvent principalement de $OML2_{eq}$ (résolution algébrique d'équations) et $OML3_{eq}$.

Etape 3 : résolution de problèmes algébriques divers. Dans cette étape, les moments de l'élaboration de la technique de mise en équation et de l'environnement technologico-théorique correspondant se poursuivent, ainsi que celui du travail de la technique de mise en équation et de la technique de résolution algébrique d'équations en appui sur les propriétés de conservation de l'égalité. Cette troisième et dernière étape porte sur la résolution de problèmes algébriques divers avec un jeu important sur les valeurs des variables didactiques : la relation d'égalité est explicite ou implicite dans l'énoncé des problèmes, le recours à une propriété de géométrie est nécessaire ou non pour expliciter l'égalité, la reconnaissance d'une même quantité exprimée de deux façons différentes est nécessaire ou non, l'inconnue est déjà désignée par une lettre ou est à désigner par l'élève. D'après la référence épistémologique relative aux équations, le travail de la production et de la manipulation des équations à travers des problèmes mettant en jeu différents registres de représentation sémiotiques et des problèmes donnés dans différents cadres favorise la construction d'un rapport personnel idoine aux équations. Les tâches mathématiques travaillées dans cette étape relèvent des trois OM locales de l'OM de référence.

Chaque étape du PER est en lien avec un type d'activité dans le modèle de l'activité algébrique de Kieran (2007) présenté au chapitre six : la première étape correspond à l'activité générative (production d'une équation), la deuxième à l'activité transformationnelle (résolution algébrique d'une équation) et la troisième à l'activité globale (production, transformation et utilisation d'une équation pour résoudre des problèmes divers). D'après la référence épistémologique, c'est le travail de ces trois types d'activité qui favorise la conceptualisation des équations.

De plus, les trois étapes du PER permettent de travailler de manière articulée les types de tâches des trois OM locales de l'OM épistémologique de référence, notamment les types de tâches qui sont peu présents dans les programmes officiels et les manuels scolaires et dont la convocation est pourtant nécessaire pour appliquer et guider la mise en œuvre des techniques mathématiques de résolution algébrique d'équations et de problèmes, ainsi que pour exercer un contrôle sur les calculs algébriques.

Le PER s'inscrit dans la dialectique outil-objet : les équations sont d'abord introduites comme un outil pour résoudre des problèmes, puis travaillées en tant qu'objet, afin d'être à nouveau étudiées comme un outil pour résoudre un ensemble de plus en plus large de problèmes résolubles par une mise en équation.

9.2.5 Les moments de l'étude au sein du PER

Chaque étape du PER voit s'opérer un cycle de moments de l'étude pour le principal type ou genre de tâches mathématiques étudié (voir l'exemple dans la figure 9.3 ci-dessous pour l'étape 1, séance 1). D'autres moments ont lieu simultanément pour d'autres types de tâches (numérique et expressions algébriques).

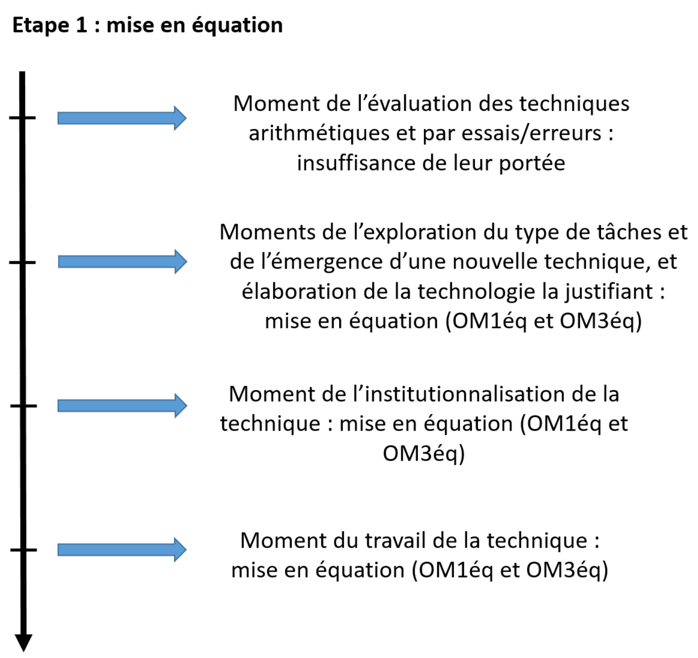


Figure 9.3 – Un cycle de moments de l'étude dans l'étape 1 du PER relatif aux équations

9.2.6 Des praxéologies d'étude travaillées à chaque étape

À chaque étape du PER, nous prévoyons un travail explicite des praxéologies d'étude supposées favoriser une activité mathématique idoine. Ce travail ne fait pas l'objet d'un enseignement spécifique mais est réalisé en lien fort avec celui des OM relatives aux équations et les moments de l'étude. Nous développons ce point dans les sections qui suivent en fonction de l'étape considérée. La figure 9.4 ci-dessous donne des exemples de praxéologies d'étude que nous suggérons comme étant potentiellement à travailler en lien avec les OM étudiées.

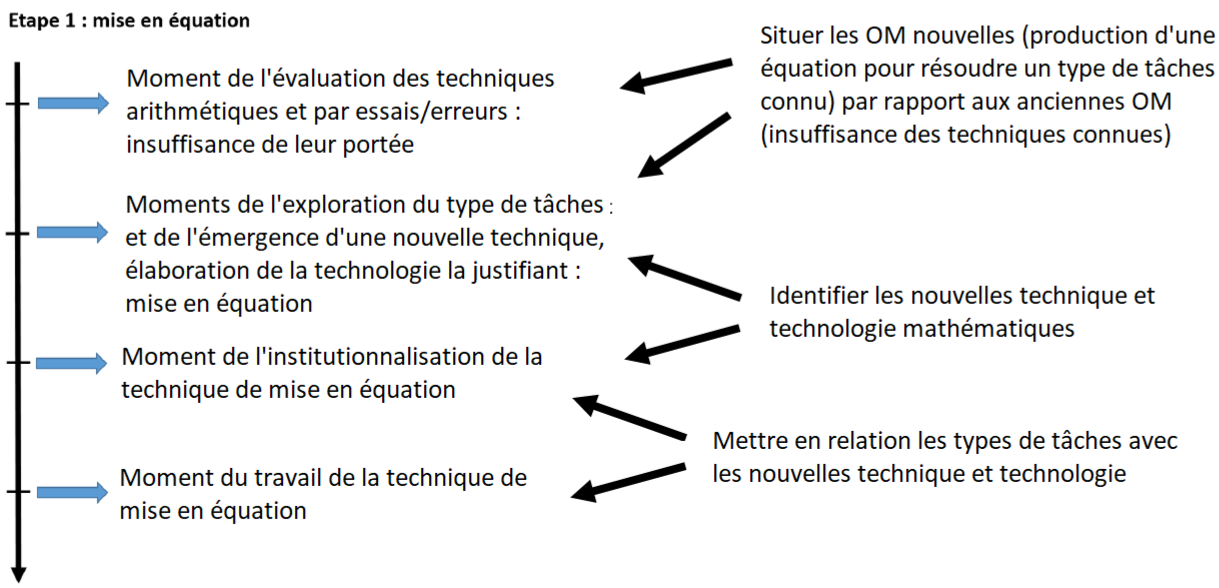


FIGURE 9.4 – Articulation du travail des praxéologies d'étude avec les OM relatives aux équations selon les moments de l'étude

9.2.7 Les différentes phases de mise en œuvre des situations didactiques

Comme nous l'avons mentionné à la section 9.2.1, nous articulons les outils de la TAD avec ceux de la TSD afin de décrire les déroulements suggérés aux enseignants, avec le minutage prévu, les procédures potentiellement mobilisées par les élèves et les réactions possibles à avoir face à ces procédures, les rétroactions avec le milieu et les différentes phases (voir figure 9.5 ci-après), en lien avec le modèle de l'étude personnelle que nous avons développé (chapitre cinq).

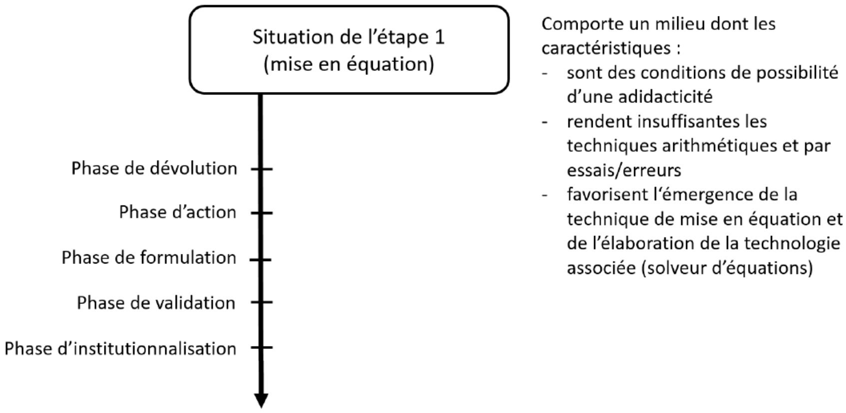


FIGURE 9.5 – Eléments de description du déroulement de l'étape 1 du EPR à l'aide des outils de la TSD

9.2.8 Les types de tâches mathématiques donnés à travailler en autonomie en appui sur des milieux riches et favorisant le développement de praxéologies d'étude

Pour chaque étape du PER, nous suggérons un ensemble de types de tâches à étudier en autonomie, par exemple lors de l'étude personnelle hors la classe. Nous différencions les contenus en fonction des besoins d'apprentissages des élèves en algèbre repérés par le test Pépite. Les énoncés des types de tâches s'accompagnent d'aides, elles aussi différenciées. Ces aides font partie du milieu didactique : elles donnent des rétroactions aux élèves en fonction de leurs réponses et sont de plusieurs types (voir le tableau de la figure 9.8 à la toute fin du chapitre). Nous nous sommes inspirés des gestes mémoriels de l'enseignant développés dans les travaux de (Araya-Chacón, 2008) et présentés au chapitre trois pour classifier ces aides [2], en les adaptant à nos questions de recherche sur l'étude personnelle des élèves et en lien avec les praxéologies d'étude supposées favoriser une activité mathématique idoine. Les aides incitent à mobiliser une ou plusieurs de ces praxéologies d'étude. Nous illustrerons ces éléments avec des exemples lors de la description détaillée des étapes du PER aux sections 9.3, 9.4 et 9.5.

Dans chaque ensemble de types de tâches donnés à travailler en autonomie, il peut y avoir une progressivité dans les tâches, qui forment un assortiment didactique

2. Nous n'avons pas modélisé en profondeur ces aides ; elles nécessiteraient une étude plus poussée et pourraient être situées par rapport à d'autres travaux comme ceux de Robert (2008).

(Esmenjaud-Genestoux, 2005). Un même type de tâches peut être donné à plusieurs groupes d'élèves, mais les valeurs des variables didactiques seront différentes en fonction des groupes et telles que la technique à appliquer devra être adaptée.

Nous exposons à présent et de manière détaillée les principales étapes du PER sur les équations dans les trois sections qui suivent. Pour chaque étape, nous présentons la durée envisagée de l'étape, l'énoncé de la situation didactique donnée aux élèves, l'analyse *a priori* de la situation, celle des tâches préparatoires et celle du déroulement. Selon les phases et les moments de l'étude, nous suggérons des possibilités de travail des praxéologies d'étude.

9.3 Etape 1 du PER : introduction et motivation des équations

La durée prévue pour la mise en œuvre de cette étape est d'environ une heure.

9.3.1 Enoncé de la situation d'introduction

Situation d'introduction aux équations

Voici deux programmes de calcul :

PROGRAMME A
- Choisir un nombre
- Le multiplier par 9
- Soustraire 4 au résultat

PROGRAMME B
- Choisir un nombre
- Le multiplier par 2
- Ajouter 1 au résultat

Alice et Bertrand choisissent un même nombre de départ. Alice teste le programme A et Bertrand teste le programme B. Alice et Bertrand s'aperçoivent qu'ils trouvent le même résultat final. Quel nombre de départ ont-ils choisi ?

9.3.2 Analyse *a priori* de la situation didactique

a. Objectif d'apprentissage

L'objectif de l'étape est d'utiliser l'algèbre (les équations) pour résoudre un problème du premier degré de mise en équation à base de programmes de calcul. Le problème en question motive le recours aux équations : l'équation correspond au problème, $9x - 4 = 2x + 1$, est de la forme $ax + b = cx + d$ avec un choix de valeurs pour a, b, c, d tel que la solution à trouver est un nombre fractionnaire non décimal (la solution est $\frac{5}{7}$. Ce choix de valeurs met en échec les techniques de résolution arithmétiques (présence de la variable dans les deux membres) et par essais/erreurs (solution fractionnaire non décimale).

Les élèves sont ainsi amenés à prendre conscience :

- De l'insuffisance des techniques arithmétiques (« remontée inverse » des opérations) ou par essais/erreurs pour résoudre certains problèmes.
- De l'intérêt de produire une équation algébrique pour résoudre un problème à l'aide d'un solveur d'équations.
- De l'intérêt de contrôler l'adéquation entre l'équation produite et la situation : il faut interpréter l'équation algébrique, ce qui passe par l'interprétation des expressions de chaque membre exprimant les relations entre données et l'interprétation de l'égalité.

L'analyse des techniques envisageables lors de la résolution sont présentées à la section 9.3.4 (déroulement).

Cette étape est également l'occasion de travailler plusieurs praxéologies d'étude en lien avec les OM rencontrées :

- Mettre en relation les tâches travaillées (égalisation de programmes de calcul) avec les tâches du même type qui ont déjà été rencontrées auparavant, en focalisant l'attention sur les changements de valeurs des variables didactiques qui mettent en échec les anciennes techniques et nécessitent d'appliquer la nouvelle technique de mise en équation. Cette mise en relation ne peut se faire que si un travail d'identification du type de tâches « Egaliser deux programmes de calcul » est réalisé.
- Situer et articuler d'anciennes OM (calcul numérique, calcul sur les expressions algébriques) par rapport aux nouvelles OM relatives aux équations : le test d'une solution, type de tâches déjà rencontré auparavant avec les expressions algébriques, permet de contrôler que la solution obtenue à l'aide du solveur d'équations égalise effectivement les deux programmes de calcul.

b. OM que doivent avoir construites les élèves au préalable

Les OM nécessaires pour la réalisation de la tâche précédente sont, entre autres :

- Les OM relatives aux nombres et aux propriétés sur les opérations : sens des opérations, priorités opératoires, opérations sur les fractions et les nombres relatifs.
- Les OM relatives au calcul algébrique sur les expressions algébriques : conven-

tions d'écriture (ex : signe de la multiplication implicite devant une lettre), réduction d'une expression algébrique, équivalence de deux expressions algébriques.

Les élèves doivent selon nous être familiarisés avec les programmes de calcul et avoir déjà réalisé des conversions de relations entre grandeurs depuis le registre des programmes de calcul vers le registre des écritures numériques et algébriques. Autrement, la situation sera difficile à mettre en œuvre.

9.3.3 Analyse *a priori* des tâches préparatoires

Ci-dessous sont donnés des exemples de tâches préparatoires à faire avant la séance 1 du PER et qui vont renforcer les raisons d'être de la production d'une équation pour résoudre des problèmes. Ces tâches permettent aux élèves de travailler sur des programmes de calcul et d'utiliser des techniques anciennes (arithmétique, essais/erreurs). Ce sont ces techniques qui seront remises en question dans la situation présentée.

a. Enoncés

Exemple 1 de tâche préparatoire *(traduire un programme de calcul à l'aide d'une expression algébrique ; revenir sur le rôle des parenthèses dans les priorités opératoires)*

Voici deux programmes de calcul :

PROGRAMME A	PROGRAMME B
Choisir un nombre Le multiplier par 3 Ajouter 8 au résultat	Choisir un nombre Lui ajouter 8 Multiplier le résultat par 3

On appelle n le nombre de départ.

Ecrire l'expression littérale correspondant au résultat de chaque programme.

Exemple 2 de tâche préparatoire *(chercher la valeur à entrer dans un programme de calcul pour qu'il renvoie un résultat donné, la recherche de cette valeur pouvant se faire en effectuant les opérations du programme dans l'ordre inverse)*

Voici un programme de calcul :

– Choisir un nombre
– Lui soustraire 5

– Multiplier le résultat par 3

Quel nombre doit-on choisir au départ pour obtenir comme résultat final 27 ? -6 ?

Exemple 3 de tâche préparatoire *(chercher la valeur à entrer dans deux programmes de calcul pour qu'ils renvoient le même résultat final ; la recherche de cette valeur peut se faire par essais/erreurs)*

Voici deux programmes de calcul :

PROGRAMME A	PROGRAMME B
Choisir un nombre Le multiplier par 3	Choisir un nombre Lui ajouter 8

Alex et Bianca choisissent le même nombre de départ. Alex teste le programme A et Biance teste le programme B. Alex et Bianca s'aperçoivent qu'ils trouvent le même résultat final. Quel nombre de départ ont-ils choisi ?

b. Analyse *a priori*

Dans l'exemple 1, les deux programmes présentent les mêmes instructions (multiplier par 3, ajouter 8) mais dans un ordre différent, ce qui implique d'utiliser un produit parenthésé dans un cas pour respecter les priorités opératoires.

Dans l'exemple 2, le problème est arithmétique et peut être résolu à l'aide d'une technique de remontée arithmétique : partant du résultat, on divise par 3 puis on ajoute 5 pour retrouver le nombre de départ. Il peut également être résolu par une technique par essais/erreurs, les solutions à trouver étant des entiers naturels (14 et 3).

Dans l'exemple 3, l'équation correspondant au problème est $3x = x + 8$. La présence de deux programmes – ou d'une inconnue dans les deux membres de l'équation correspondante – gêne l'utilisation de la technique arithmétique. Toutefois, le choix des coefficients conduit à une solution qu'il est possible de trouver par une technique par essais/erreurs (la solution est 4).

9.3.4 Déroulement proposé et analyse *a priori* de ce déroulement

a. Dévolution : découverte d'une nouvelle technique pour résoudre certains problèmes (1 minute)

L'enseignant peut expliquer l'enjeu de la situation proposée : il s'agit de découvrir un nouvel outil permettant de résoudre certains problèmes mathématiques.

Le fait d'avoir travaillé au préalable les tâches préparatoires proposées plus haut favorise le processus de dévolution et permet d'engager plus facilement les élèves dans la résolution de la tâche, et la reconnaissance du type de tâches peut être travaillée : la consigne a déjà été rencontrée auparavant et des techniques de résolution de ce type de tâches sont connues.

b. Action des élèves : premier temps de recherche et tentatives de résolution avec d'anciennes techniques (arithmétiques et essais/erreurs) (5 minutes)

Pour favoriser l'engagement des élèves dans un travail autonome, un temps de recherche de quelques minutes est laissé aux élèves, seuls, sans intervention de l'enseignant.

Si un élève n'arrive vraiment pas à s'engager dans le travail, l'enseignant peut lui suggérer de procéder de la même manière que durant les tâches préparatoires précédemment réalisés. L'élève peut ainsi tester les programmes de calcul avec des nombres pris au hasard (essais/erreurs) pour commencer.

Principales procédures attendues ou envisageables

Techniques par essais/erreurs (attendues). Plusieurs écritures possibles pour cette démarche où les élèves testent des valeurs au hasard sont attendues :

- *Ecriture pas à pas enchaînée en succession d'opérations incorrecte vis-à-vis de l'égalité.* L'élève choisit un nombre de départ, par exemple 7, puis applique le programme de calcul A comme suit : $7 \times 9 = 63 - 4 = 59$.
  Réaction possible de l'enseignant face à cette procédure lors de la mise en commun qui suivra : l'égalité peut se lire dans les deux sens. Or, $63 - 4 = 7 \times 9$ n'est pas une égalité vraie. Il est nécessaire en mathématiques, à chaque fois, d'écrire des égalités vraies « dans les deux sens ».

- *Ecriture pas à pas séparée en succession d'opérations.* Pour le nombre 7, l'élève écrit pour le programme A : $7 \times 9 = 63$; $63 - 4 = 59$.

  Réaction possible de l'enseignant face à cette procédure lors de la mise en commun qui suivra : La réponse est correcte mais il y a plusieurs étapes pour parvenir au résultat. En algèbre, il va devenir nécessaire d'écrire moins d'étapes.
- *Ecriture linéaire globale avec respect des priorités opératoires.* Pour le nombre 7, l'élève écrit : $7 \times 9 - 4 = 63 - 4 = 59$.

Technique par essais/erreurs avec remontée du programme de calcul (envisageable). Cette technique est envisageable mais non attendue. Elle consiste à partir d'un nombre final pris au hasard, à « remonter arithmétiquement » chaque programme en inversant les opérations puis à comparer les résultats ainsi obtenus.

Techniques qualifiées de « pré-algébriques » (attendues). Nous considérons que l'élève utilise de telles techniques si le nombre à chercher n'est pas codé ou n'est pas représenté à l'aide d'une lettre. Les types d'écritures correspondantes sont les suivantes :

- Alice : $\times 9$ -4 résultat
  Bertrand : $\times 2$ $+1$ même résultat ;
- Alice : nombre $\times 9 - 4$
  Bertrand : même nombre $\times 2 + 1$
  Même résultat pour Alice et Bertrand.

c. Phase de formulation : première mise en commun et débat sur les techniques arithmétiques ou par essais/erreurs qui échouent (5 minutes)

En accord avec les éléments de la synthèse de travaux de recherche sur l'étude personnelle, une fois le temps de recherche écoulé, nous conseillons de prendre en compte ce que les élèves ont écrit, même les procédures erronées ou inattendues, et de les hiérarchiser en fonction des techniques utilisées, depuis les techniques arithmétiques et par essais/erreurs aux techniques pré-algébriques, en passant par celles qui seraient à mi-chemin.

Cette première mise en commun porte sur l'échec de l'utilisation de techniques anciennes : les techniques arithmétiques (si celles-ci sont apparues) et par essais/erreurs. L'enseignant acceptera les réponses contenant des procédures algébriques ou pré-algébriques mais focalisera l'attention sur l'insuffisance des techniques arithmétiques et par essais/erreurs (la solution n'est pas un nombre entier). C'est une occasion pour lui de commencer à situer les OM anciennes avec les OM qui vont se construire (travail sur les praxéologies d'étude).

Ceci correspond au moment de l'évaluation des techniques arithmétiques et par essais/erreur pour résoudre le type de tâches proposé.

d. Introduction d'un nouvel élément dans le milieu didactique : le solveur d'équations (2 minutes)

Après la première mise en commun, l'enseignant annonce qu'il dispose d'un outil appelé solveur d'équations. Il en explique le fonctionnement : si on propose deux expressions littérales à cet outil, il est capable de déterminer la ou les valeurs pour lesquelles les deux expressions sont égales. Un exemple peut être donné pour illustrer le fonctionnement du solveur.

L'enseignant donne alors une nouvelle consigne : il demande aux élèves de lui faire des propositions pour pouvoir utiliser ce solveur d'équations afin de résoudre la situation sur les programmes de calculs donnée.

Si dans la mise en commun précédente, des procédures algébriques ou pré-algébriques ont déjà été proposées, elles peuvent constituer une base de réflexion commune à la classe.

Sinon, l'enseignant peut s'appuyer sur les techniques qui ont été utilisées pour réaliser ces tâches afin de traduire un programme de calcul en une expression algébrique, favorisant ainsi l'engagement des élèves dans la phase d'action.

e. Seconde phase d'action : recherche et tentatives des élèves pour produire une équation et utiliser le solveur (5-10 minutes)

Un second temps de recherche est laissé aux élèves, qui doivent proposer à l'enseignant une équation à entrer dans le solveur. Chaque élève écrit sur son cahier une équation qui selon lui correspond au problème à résoudre. L'enseignant circule dans les rangs pour repérer les principales procédures et les hiérarchiser. Ceci correspond au moment de l'élaboration de la technique de mise en équation du type de tâches « Egaliser deux programmes de calcul ».

Principales procédures attendues et envisageables

Techniques algébriques (attendues). Les écritures suivantes sont attendues :

- *Utilisation de plusieurs inconnues et d'un système d'équations avec prise en compte partielle ou totale des données, et sans utilisation de la transitivité de l'égalité.*

  Exemple 1 (prise en compte totale des données) :

  $a \times 9 - 4 = x$

  $b \times 2 + 1 = y$

  $a = b$

  $x = y$

  Exemple 2 (prise en compte totale des données) :

  $n \times 9 - 4 = r$

  $n \times 2 + 1 = r$

  Exemple 3 (prise en compte partielle des données) :

  $a \times 9 - 4 = x$

  $b \times 2 + 1 = y$

  $a = b$
- *Utilisation de plusieurs inconnues mais d'une seule équation, avec prise en compte partielle ou totale des données de l'énoncé, avec ou sans utilisation de la transitivité de l'égalité.*

  Exemple 1 (prise en compte totale des données, avec utilisation de la transitivité de l'égalité) :

  $n \times 9 - 4 = n \times 2 + 1 = r$

  Exemple 2 (prise en compte partielle des données) :

  $n \times 9 - 4 = r$

  Réaction face à ces procédures : Certaines lettres désignent les mêmes quantités ; il n'y a donc pas besoin d'autant de lettres différentes. Certaines égalités sont redondantes ; on peut en écrire moins. Certaines données ne sont éventuellement pas traduites ; il est nécessaire de les traduire.

Parmi les procédures algébriques, des erreurs au niveau du calcul algébrique sont attendues :

- *Ecriture pas à pas enchainée en succession d'opérations incorrecte vis-à-vis de l'égalité.* Si l'élève appelle x le nombre choisi au départ, il peut écrire : $x \times 9 = 9x - 4 = 5x$. Dans cet exemple, l'élève concatène l'expression $9x - 4$ en $5x$.
- *Ecriture pas à pas séparée en succession d'opérations.* Si l'élève appelle x le nombre de départ, il peut écrire : $x \times 9 = 9x$, $9x - 4 = 5x$ (là encore, dans cet exemple, l'élève concatène).

Réaction possible de l'enseignant face à ces procédures : En testant l'égalité $x \times 9 = 9x - 4 = 5x$ à l'aide d'une valeur bien choisie, l'élève doit s'apercevoir qu'elle est fausse. De plus, les priorités opératoires n'ont pas été ici respectées.

f. Seconde phase de formulation et validation : mise en commun et débat sur les procédures utilisées et les écritures algébriques produites (5 minutes)

Une seconde mise en commun a lieu à l'issue du second temps de recherche :

- Les différentes procédures utilisées sont discutées. Si les techniques arithmétiques et par essais/erreurs sont encore proposées, alors elles sont écartées d'une part parce qu'elles se sont déjà révélées insuffisantes lors de la première mise en commun, d'autre part parce qu'elles ne sont pas utilisables pour employer le solveur d'équations.
- Des retours sur les écritures algébriques incorrectes sont faits : revenir aux priorités opératoires et utiliser des tests numériques d'égalité pour les erreurs de concaténation dans les expressions algébriques, s'appuyer sur l'énoncé pour justifier le choix de l'inconnue et souligner l'égalité des expressions, interpréter les expressions algébriques proposées et éventuellement les tester numériquement pour contrôler l'adéquation entre ces expressions et les programmes de calcul qu'elles modélisent.
- Le solveur d'équations est utilisé pour valider ou invalider les propositions d'équations. La vérification numérique des solutions trouvées est réalisée en testant les deux programmes de calcul.

Le solveur d'équations donne des rétroactions aux élèves, car il n'accepte que des équations à une inconnue. Autrement dit, tout objet qui ne comporte pas d'égalité et/ou qui comporte plus d'une lettre ne sera pas pris en compte par le solveur, obligeant l'élève à produire une équation à une inconnue.

g. Institutionnalisation (2 minutes)

Une phase d'institutionnalisation suit et correspond au moment de l'institutionnalisation de la technique de mise en équation :

- Le fait que certains problèmes mathématiques ne peuvent pas être résolus à l'aide des techniques anciennes (vues à l'école primaire et en début de collège) est mis en avant. Il est nécessaire d'avoir recours aux expressions littérales et à une démarche algébrique.

– Le solveur d'équations permet de trouver la ou les valeurs rendant vraie une égalité entre deux expressions littérales. Une telle égalité que l'on cherche à rendre vraie est appelée « équation ».

Un travail des praxéologies d'étude est ici possible. L'identification de la nouvelle technique (mise en équation) peut être explicitée. Cette nouvelle technique peut être mise en relation avec certaines valeurs des variables didactiques de la tâche, qui la rendent nécessaire. Bien entendu, l'enseignant n'utilisera pas les termes de « variables didactiques » mais pourra simplement interroger les élèves sur ce qui a fait échouer les anciennes techniques : la « forme » des programmes de calcul, les coefficients des programmes, le fait que dans l'équation produite, la variable soit présente dans les deux membres (ce qui fait échouer les techniques de résolution arithmétiques), et le fait que la solution soit fractionnaire non décimale (ce qui fait échouer les techniques par essais/erreurs).

Une proposition de trace écrite pour le cours est proposée ci-après (oralement, l'enseignant peut expliciter l'appellation « équation *du premier degré* à une inconnue » en lien avec la puissance de l'inconnue) :

Certains problèmes mathématiques ne peuvent pas être résolus avec les méthodes numériques de l'école primaire (*mettre la référence à la situation précédente*) mais peuvent l'être grâce aux équations.

1) Qu'est-ce qu'une équation ?

Une équation à une inconnue est une égalité où apparaît une lettre (éventuellement plusieurs fois) dont on ne connaît pas la valeur et qui est appelée **inconnue**.

Exemple

$9x - 4 = 2x + 1$ est une **équation**.

x est l'**inconnue** de l'équation.

L'enseignant peut écrire le vocabulaire autour de l'équation : inconnue, ***membre de gauche, membre de droite****.*

Est-ce que $9x - 4$ est égal à $2x + 1$?

> Cela dépend de la valeur par laquelle on remplace la lettre x. On a vu dans (*mettre la référence à la situation précédente*) que si on remplace x par $\frac{5}{7}$, alors l'égalité est vraie.
>
> Une valeur de x qui rend l'égalité vraie est appelée une **solution** de l'équation.
>
> Si on trouve toutes les solutions de l'équation, alors on dit qu'on a **résolu** l'équation.

Oralement, l'enseignant pourra ajouter que le solveur d'équations permet de résoudre des équations, mais qu'une méthode pour résoudre des équations sans solveur sera vue prochainement. Il lui est possible, selon le public, de préciser que les équations rencontrées sont du premier degré, et d'expliquer ce que cela signifie : la plus haute puissance de la variable est égale à 1.

9.3.5 Types de tâches mathématiques donnés à faire en autonomie et travail des praxéologies d'étude en autonomie ; analyse *a priori*

a. Eléments de gestion didactique possible

Suite à la mise en œuvre de la situation didactique précédente, et éventuellement avant la phase d'institutionnalisation (trace écrite dans le cahier de leçons par exemple), l'enseignant peut faire travailler un ensemble de types de tâches aux élèves en autonomie. Ceci peut avoir lieu en classe ou hors la classe et correspond au moment du travail de la technique de mise en équation.

Le travail en autonomie est l'occasion de faire verbaliser les élèves sur la reconnaissance de types de tâches mathématiques, l'identification des techniques, etc. Si des tâches sont données à réaliser hors la classe, l'accent peut être mis sur les praxéologies d'étude mobilisées par les élèves hors la classe lors de leur retour en classe.

Les énoncés des tâches correspondant à l'étape 1, ainsi que les aides associées, sont fournis en annexe (annexes du chapitre neuf, page 581). En fonction du groupe auquel appartient l'élève d'après le test diagnostic Pépite, les énoncés et les aides varient.

Dans le cas où les tâches seraient données à faire hors la classe, nous suggérons d'initier en classe leur travail, notamment pour familiariser les élèves à l'utilisation des différentes aides (le tableau de la figure 9.8 lisible à la toute fin de ce chapitre présente les différents types d'aides). C'est l'occasion pour l'enseignant de faire mobiliser par les élèves, en lien avec les OM étudiées, des techniques d'étude. Selon leur type, les aides favorisent ce travail de praxéologies d'étude (cf. tableau de la figure 9.8 en fin de chapitre). Nous apportons sur ce point des précisions dans les paragraphes qui suivent.

b. Les types de tâches mathématiques proposés : analyse *a priori* et travail des praxéologies d'étude

Analyse a priori des types de tâches

Les types de tâches que nous proposons de faire travailler en autonomie (cf. annexe page 581) sont :

- L'égalisation de programmes de calcul conduisant à une équation sans produit parenthésé (exercice 1, relevant de $OML1_{eq}$), puis avec produit parenthésés (exercice 2, relevant de $OML1_{eq}$). L'objectif est de faire travailler la production d'équations et les priorités opératoires. Le choix des valeurs des coefficients dans les programmes de calcul est tel que les techniques arithmétique et par essais/erreurs ne fonctionnent pas : l'inconnue est présente dans les deux membres de l'équation correspondant au problème et la solution est difficilement trouvable par une technique par essais/erreurs. Le solveur, en tant qu'élément du milieu didactique, motive la production d'une équation et permet à l'élève d'obtenir des réatroactions sur la manière dont il produit l'équation et sur la solution qu'il trouve.
- La rédaction d'un problème d'égalisation de programmes de calcul à partir d'une équation donnée sans ou avec produit parenthésé (exercice 3, relevant de $OML1_{eq}$), qui est un type de tâches « réciproque », fait travailler la conversion des, et la coordination entre, registres de représentation sémiotique.
- Le test d'égalités (exercice 4, relevant de $OML3_{eq}$), est utile en tant que moyen de contrôle. Les coefficients des équations proposées rendent impossible ou difficile l'application de techniques de résolution arithmétique et par essais/erreurs. La technique de substitution est la plus économique en termes de temps.

Différenciation des énoncés et travail des praxéologies d'étude

Nous avons pris en compte les besoins d'apprentissages des élèves en algèbre diagnostiqués par le test Pépite (cf. section 9.2.3) et opéré une différenciation en conséquence. Cette différenciation porte sur certains énoncés et sur les aides suggérées aux élèves.

Par exemple, pour le type de tâches « écrire un énoncé à base de programmes de calcul à égaliser à partir d'une équation » (exercice 3, cf. annexe page 581), le groupe A dispose d'un énoncé différent de celui des groupes B et C. Le groupe A doit rédiger un énoncé de problème d'égalisation de programmes de calcul à partir de l'équation $2(x + 7) = 5 - 3x$, alors que les groupes B et C doivent le faire à partir de l'équation $2 \times x + 7 = 5 - 3 \times x$. Nous avons joué sur les valeurs des variables didactiques afin d'adapter la difficulté de la tâche en fonction des besoins du groupe d'élèves correspondant. Pour les élèves du groupe A, qui ont un bon rapport personnel à l'algèbre, les multiplications sont implicites et il y a la présence d'un produit parenthésé. Pour les élèves des groupes B et C, pour qui les conventions d'écriture ne sont pas toujours respectées et pour qui l'articulation des OM relatives aux expressions algébriques et aux priorités opératoires n'est que partielle, nous avons explicité les multiplications et n'avons pas proposé de produit parenthésé.

Nous avons volontairement choisi deux équations présentant des points communs au niveau des coefficients et de la structure des expressions. Lors du traitement de la tâche en classe, l'enseignant peut ainsi mettre en parallèle les deux énoncés, faire ressortir les différences de valeurs des variables didactiques et ce que ces différences impliquent dans la rédaction des programmes de calcul correspondant. Ceci permet de travailler des praxéologies d'étude : les consignes sont identiques dans leur formulation et renvoient donc au même type de tâches (identification du type de tâches par comparaison de plusieurs tâches du même type et des formulations des consignes), mais il y a des différences en termes d'écriture et de priorités opératoires, donc les programmes de calcul correspondants voient leur ordre d'instructions modifié (mise en relation d'une tâche avec une technique par comparaison des valeurs des variables didactiques et des adaptations nécessaires dans l'application de la technique).

Différenciation des aides et travail des praxéologies d'étude

Dans toutes les tâches proposées pour le travail en autonomie, nous avons élaboré des aides de plusieurs types (cf. tableau de la figure 9.8 lisible à la toute fin de ce chapitre et qui définit les différents types d'aides) et les avons différenciées en fonction du groupe auquel appartiennent les élèves d'après l'évaluation diagnostique Pépite. Sur des exemples, nous allons montrer en quoi ces aides favorisent potentiellement un travail des praxéologies d'étude en lien avec le travail des OM relatives aux équations.

Aide de renvoi. Pour la tâche « exercice 1 » (mettre en équation un problème d'égalisation de programmes de calcul), nous avons proposé aux groupes A et B une première aide du type « aide de renvoi ». Cette aide invite l'élève à retrouver dans ses cahiers des tâches du même type que celui à réaliser afin de l'aider dans sa résolution. Les formulations de cette aide varient légèrement d'un groupe à l'autre. Par exemple, pour le groupe A, nous avons proposé « Regarde le type de problème identique qui a été traité en classe pour t'aider. » et pour le groupe B : « Regarde le type de problème qui a été traité en classe et qui ressemble à celui-ci. » Nous avons supposé que les élèves du groupe A étaient capables d'identifier des types de tâches et que ceux du groupe B l'étaient en partie, ce qui explique que nous ayons précisé pour ce groupe que pour retrouver une tâche du même type, il fallait chercher une tâche « qui ressemblait » à la tâche à réaliser. Nous avons fait l'hypothèse, appuyée sur la synthèse de travaux du chapitre trois et sur les observations faites lors de notre première étude exploratoire, que les élèves du groupe C ne parvenaient pas facilement à identifier des types de tâches, donc nous ne leur avons pas proposé pour ce premier exercice d'aide de renvoi. Ils disposent directement d'un autre type d'aide (voir ce qui suit). En classe, l'enseignant peut réaliser un travail pour apprendre à utiliser ce type d'aide, ce qui est une occasion de développer des techniques d'étude pour identifier un type de tâches ou mettre en relation des tâches du même type.

Aide régulatrice. Toujours pour l'exercice 1, nous avons proposé à tous les groupes la même aide régulatrice sous forme d'arbre (voir figure ci-dessous). Ce type d'aide permet à l'élève, en fonction de sa réponse, de trouver une proposition adaptée à son erreur. Nous faisons l'hypothèse que des élèves des groupes B et C peuvent ne pas recourir à la lettre ; la première branche de l'arbre (« Je n'ai pas utilisé de lettres ») leur présente alors les limites de cette absence de recours à la lettre. Des élèves peuvent produire une lettre, des expressions, voire des équations, et utiliser dans ce cas la seconde branche de l'arbre (« J'ai utilisé des lettres »).

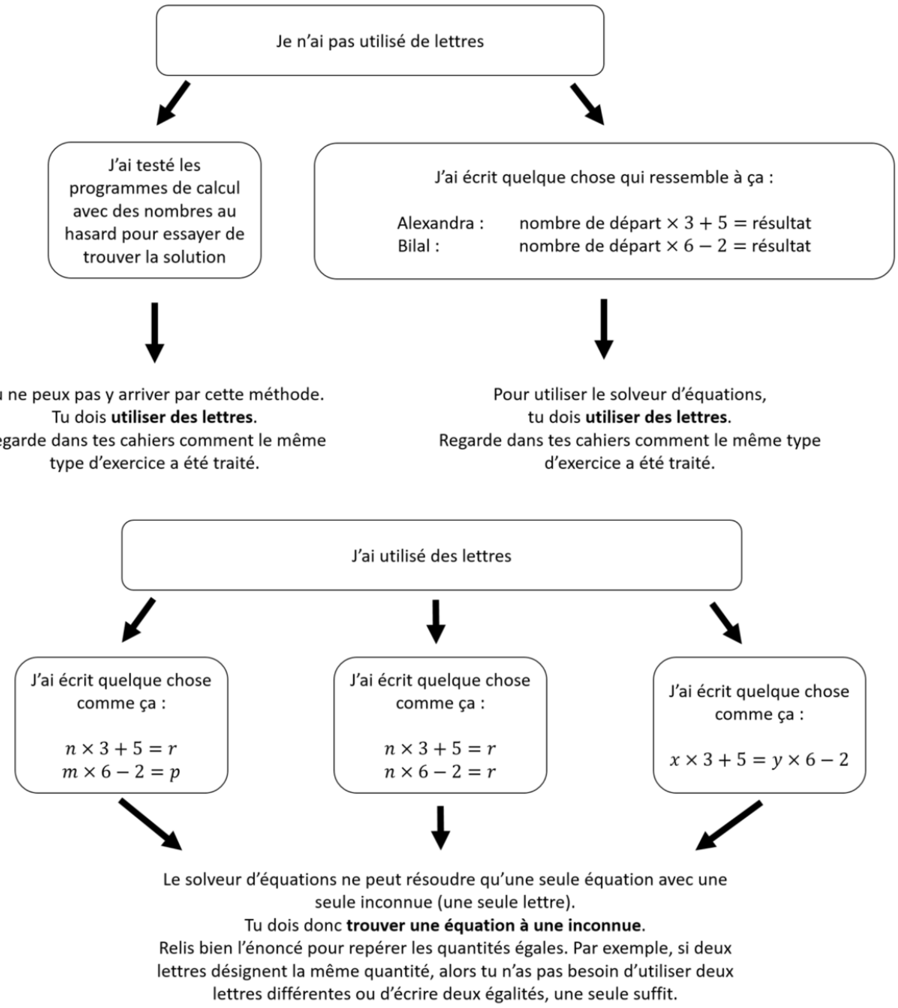


FIGURE 9.6 – Aide régulatrice pour le problème d'égalisation de programmes de calcul (étape 1 du PER)

Aide comparatrice et aide à l'application d'une technique. Pour les élèves des groupes B et C qui n'auraient pas su identifier dans leurs cahiers des tâches du même type que celui à réaliser, nous avons proposé une tâche résolue qui relève du même type de tâches. Dans cette tâche résolue, les programmes de calcul sont quasiment identiques à ceux de la tâche à réaliser : les instructions sont identiques (multiplier/additionner, multiplier/soustraire), aussi nombreuses (deux instructions) et énoncées dans le même ordre (multiplier puis additionner ou soustraire) ; seules les valeurs numériques changent. En classe, l'enseignant peut réaliser un travail sur ce type d'aide afin de développer des techniques d'étude pour identifier les types de tâches et les changements de valeurs des variables didactiques.

Nous avons conscience que les aides en format papier nécessitent beaucoup de lecture et sont peu pratiques. Une informatisation de ces aides permettrait de faciliter leur emploi. Nous reviendrons sur ce point dans le chapitre onze, en perspective.

9.4 Etape 2 : résolution algébrique d'équations

La durée prévue pour la mise en scène de cette étape est de deux à trois heures.

9.4.1 Enoncé de la situation

Situation pour la résolution algébrique d'équations

Voici deux programmes de calcul :

PROGRAMME A :
- Choisir un nombre
- Le multiplier par 8
- Ajouter 2 au résultat

PROGRAMME B :
- Choisir un nombre
- Le multiplier par 5
- Ajouter 9 au résultat

Alice et Bertrand choisissent un même nombre de départ. Alice teste le programme A et Bertrand teste le programme B. Alice et Bertrand s'aperçoivent qu'ils trouvent le même résultat final. Quel nombre de départ ont-ils choisi ?

Résous ce problème en utilisant le logiciel Thot (voir mode d'emploi du logiciel).

9.4.2 Analyse *a priori* de la situation didactique

a. Objectif d'apprentissage

L'objectif est de résoudre algébriquement une équation algébrique du premier degré à une inconnue. L'équation correspondant à la situation proposée ne peut pas être résolue par des techniques arithmétiques ou par essais/erreurs : elle est de la forme $ax + b = cx + d$ avec un choix de valeurs pour a, b, c, d tel que la solution est fractionnaire non décimale, comme c'était le cas à l'étape 1.

Les élèves doivent se rendre compte des points suivants :

- Insuffisance des démarches arithmétiques ou par essais/erreurs pour résoudre certaines équations.
- Intérêt d'utiliser les propriétés de conservation de l'égalité pour résoudre algébriquement une équation.
- Contrôle de l'adéquation entre l'équation produite et la situation qu'elle modélise : interprétation de l'équation algébrique, qui passe par l'interprétation des expressions de chaque membre et de l'égalité ; contrôle numérique de l'adéquation entre les expressions produites et les programmes qu'elles modélisent.

Le logiciel informatique Thot utilisé dans un premier temps durant la séance met en évidence les étapes de résolution et prend en charge les calculs algébriques.

Nous suggérons de développer dans cette étape les praxéologies d'étude suivantes en lien avec les OM travaillées :

- Le type de tâches mathématiques $T_{resoudre}$, spécifiquement travaillé dans cette étape, est explicitement identifié (en appui sur la consigne, sur la présence de l'équation à résoudre). De même, la nouvelle technique de résolution algébrique et la nouvelle technologie justifiant cette technique (propriétés de conservation de l'égalité) peuvent être explicitement identifiées et associées à la réalisation de $T_{resoudre}$.
- Les équations à résoudre peuvent être mises en relation avec d'anciennes équations que les élèves ont déjà rencontrées (équations arithmétiques ou résolubles par essais/erreurs). L'appui explicite sur la structure des équations (présence de la variable dans les deux membres, coefficients tels que la solution ne peut être trouvée par essais/erreurs) permet d'effectuer cette mise en relation.
- Les anciennes OM (calcul numérique, expressions algébriques) peuvent être explicitement situées par rapport aux OM nouvelles (équations) et articulées

avec elles.

b. OM que doivent avoir construites les élèves au préalable

Les OM nécessaires sont les suivantes :

- OM relatives aux nombres et aux propriétés sur les opérations : sens des opérations, priorités opératoires, opérations sur les fractions et les nombres relatifs.
- OM relatives au calcul algébrique sur les expressions algébriques : conventions d'écriture (ex : signe de la multiplication implicite devant une lettre), réduction d'une expression algébrique, équivalence de deux expressions algébrique.

9.4.3 Analyse *a priori* des tâches préparatoires

Nous donnons ci-dessous des exemples de tâches préparatoires [3] à réaliser avant de mettre en œuvre la situation présentée.

a. Enoncés

Exemple 1 de tâche préparatoire *(compléter une égalité pour qu'elle soit vraie)*

Compléter l'égalité $3 \times ...... + 7 = 28$ pour qu'elle soit vraie.

Exemple 2 de tâche préparatoire *(trouver la valeur à donner à une variable dans une expression pour obtenir un résultat donné)*

Pour quelle valeur de la lettre n l'expression $2 \times (n + 1)$ est égale à 9 ?

Exemple 3 de tâche préparatoire *(trouver la valeur à donner à une variable pour qu'une égalité entre deux expressions soit vraie)*

Pour quelle valeur de la lettre a l'égalité $3a = a + 1$ est-elle vraie ?

b. Analyse *a priori*

Les équations des exemples 1 et 2 peuvent être résolues :

---

3. Nous présentons les tâches préparatoires au fur et à mesure des étapes pour mettre en évidence le lien entre ces tâches préparatoires et l'étape considérée. Cependant, si la mise en œuvre du PER fait se succéder les étapes, alors les tâches préparatoires doivent avoir été accomplies en amont.

– Par une technique arithmétique par opérations réciproques (attendue). Pour l'exemple 1, partant de 28, l'élève peut soustraire 7 puis diviser par 3. Pour l'exemple 2, partant de 9, il peut diviser par 2 puis soustraire 1. Cette technique fait travailler les priorités opératoires et le sens des opérations.
– Par une technique par essais/erreurs (envisageable). Pour l'exemple 1, la solution de l'équation est 7. Pour l'exemple 2, la solution est 3,5.

La distributivité peut être employée pour développer le produit parenthésé dans l'équation de l'exemple 2 ; les techniques de résolution précédentes peuvent encore être appliquées ensuite.

9.4.4 Déroulement proposé et analyse *a priori* de ce déroulement

a. Matériel

La séance se déroule en salle informatique, chaque élève dispose d'un poste.
Le logiciel Thot est nécessaire (téléchargeable à l'adresse suivante :
http ://www.emmanuelmorand.net/thot/telechargement.php).

b. Dévolution. Premières consignes et enjeux : résolution d'une équation sans solveur mais avec un autre logiciel (Thot) (1 minute)

L'enseignant peut expliquer l'enjeu de la situation proposée : il s'agit de résoudre le même type de problèmes que celui proposé à l'étape précédente (situation didactique de l'étape 1) mais cette fois-ci sans solveur d'équations. Un autre logiciel sera temporairement utilisé : le logiciel Thot. Par la suite, le logiciel ne sera plus utilisé.

La présentation des enjeux peut s'accompagner d'une poursuite du travail sur l'identification du type de tâches « Egaliser deux programmes de calcul » et sur les variables didactiques paramétrant le problème. Il peut également s'agir d'une occasion pour l'enseignant de situer les OM nouvelles par rapport aux OM anciennes en rappelant ou en faisant rappeler la nécessité d'élaborer une nouvelle technique pour résoudre le problème, en regard de ce qui a été fait à l'étape 1.

Le travail des tâches préparatoires facilite la dévolution de la tâche et l'engagement des élèves dans la phase d'action.

Pour le premier temps de recherche, l'enseignant demande aux élèves de lui fournir l'équation qui traduit la situation, comme cela a été fait à la séance précédente. Aucun matériel informatique ne doit être utilisé pour cette première phase.

c. Production d'une équation modélisant la situation (2 minutes) puis introduction du logiciel Thot (5 minutes)

Les élèves cherchent à produire une équation modélisant la situation (moment du travail de la technique de mise en équation). Très rapidement, une mise en commun a lieu, qui permet de faire avancer le temps didactique et de valider l'équation qu'il faudra résoudre par la suite. L'enjeu de la séance n'est pas la production de l'équation mais sa résolution algébrique.

Une fois l'équation validée par l'enseignant, ce dernier explique le fonctionnement du logiciel Thot : il s'agit d'un logiciel qui ne résout pas automatiquement une équation (contrairement au solveur utilisé à l'étape précédente) mais qui fait certains calculs demandés à la place de l'utilisateur.

L'enseignant entre dans son ordinateur une équation au hasard distincte de l'équation à résoudre, en montrant aux élèves comment il procède. Puis il explique le fonctionnement des différents boutons : boutons opérations, bouton pour intervertir les membres de l'équation, etc. (*se référer au mode d'emploi*).

En aucun cas, l'enseignant ne cherchera à résoudre l'équation qu'il propose, mais utilisera les différentes opérations et montrera les résultats affichés en conséquence par le logiciel.

Si la séance a lieu en salle informatique, l'enseignant demande alors aux élèves d'entrer l'équation à résoudre pour la situation proposée et de manipuler le logiciel pour essayer de trouver la valeur de la lettre x qui rende l'égalité vraie.

Si la séance a lieu en salle ordinaire, l'enseignant demande alors aux élèves de lui proposer des opérations à rentrer dans le logiciel et l'enseignant lui-même (ou un élève) entre ces opérations pour l'ensemble de la classe.

d. Phase d'action : tentatives des élèves pour résoudre l'équation à l'aide du logiciel Thot (10 minutes)

Si la séance a lieu en salle informatique, les élèves sont laissés en autonomie devant leurs ordinateurs et tentent de résoudre l'équation à l'aide du logiciel Thot. Tout au plus, l'enseignant pourra donner des indications portant sur le fonctionnement du logiciel (par exemple, comment utiliser tel bouton, comment intervertir les membres de l'équation, comment multiplier par une fraction, etc.).

Ceci correspond aux moment d'exploration du genre de tâches $T_{resoudre}$, d'élaboration de la technique de résolution algébrique et d'élaboration de la technologie « propriétés de conservation de l'égalité ».

Si la séance a lieu en salle ordinaire, la recherche est collective, puisque chaque proposition d'élève prise en compte par l'enseignant donnera une rétroaction immédiate à toute la classe.

Ceci correspond au moment de l'élaboration de la technique de résolution algébrique ainsi que de l'environnement technologico-théorique associé.

Principales procédures attendues

Opérations réalisées au hasard, sans résultat. L'élève teste au hasard des opérations avec le logiciel, sans stratégie visible, et n'aboutit pas au résultat.

Opérations aboutissant au résultat mais réalisées en un nombre d'étapes non minimal. L'élève arrive à trouver la valeur de x mais a utilisé plus d'étapes que nécessaires.

Opérations aboutissant au résultat et réalisées en un nombre minimal. L'élève parvient au résultat avec un nombre minimal d'étapes (peu probable).

e. Phase de formulation : mise en commun et débat sur les procédures utilisées avec le logiciel Thot (5 minutes)

Une deuxième mise en commun a lieu.

Cette mise en commun porte sur les points suivants :

- Débat sur les différentes procédures utilisées. Les procédures sont hiérarchisées dans l'ordre indiqué ci-dessus.
- Retours sur les procédures qui n'ont pas abouti : l'enseignant s'appuie explicitement sur la structure des expressions constituant chaque membre de l'équation pour chercher à isoler l'inconnue. Cela lui permet d'expliciter la stratégie à adopter et correspond au moment de l'élaboration de la composante pratique de la technologie justifiant la technique de résolution algébrique. Il peut s'agir également d'une occasion d'identifier la technique de résolution algébrique comme telle ; l'appui sur la structure des expressions algébriques constitue un travail d'articulation entre les OM relatives aux expressions et aux équations, qui peut commencer à être explicité (travail sur les praxéologies d'étude).
- Retours sur les procédures qui ont abouti mais en un nombre non minimal d'étapes. L'enseignant pose la question de l'économie maximale d'étapes qu'il est possible de faire avec le logiciel.
- Retours sur les procédures qui ont abouti avec un nombre minimal d'étapes :

l'enseignant remarque ou fait remarquer la non unicité de ces éventuelles procédures.

f. Phase d'institutionnalisation

L'enseignant dégage ou fait dégager les propriétés qu'il est possible d'utiliser pour résoudre une équation (propriétés de conservation de l'égalité) et la technique de résolution algébrique. Des praxéologies d'étude associées peuvent là aussi être développées.

g. Modification du milieu didactique : résolution d'une équation sans le logiciel Thot (utilisé seulement pour la vérification) (1 minute)

L'enseignant propose de résoudre une nouvelle équation (de la forme $ax + b = cx + d$ avec un choix de valeurs pour a, b, c, d tel que la solution à trouver soit fractionnaire non décimale), en exigeant un nombre minimal d'étapes, d'abord sans utiliser le logiciel Thot, puis en l'utilisant pour contrôler ses calculs.

h. Phase d'action : tentatives des élèves pour résoudre l'équation sans le logiciel Thot (5-10 minutes)

Les élèves cherchent seuls à résoudre la nouvelle équation et continuent ainsi d'élaborer la technique de résolution algébrique et les propriétés de conservation de l'égalité.

Procédures attendues

En plus des procédures listées précédemment (et celles de l'étape 1), une procédure attendue est l'utilisation incorrecte des propriétés de conservation de l'égalité :

- L'élève transforme un membre de l'équation par ajout d'un nombre ou par multiplication par un nombre sans procéder à la même transformation pour l'autre membre.

  Réaction possible de l'enseignant face à cette procédure lors de la mise en commun qui suivra : L'égalité n'est pas conservée, car une quantité a été ajoutée dans un membre mais pas dans l'autre. L'image de la balance peut être évoquée pour illustrer la propriété mathématique sous-jacente.
- L'élève multiplie (ou divise) les deux membres par 0.

  Réaction possible de l'enseignant face à cette procédure lors de la mise en commun qui suivra : La multiplication par 0 de chaque membre donne l'égalité $0 = 0$, ce qui ne fait pas avancer la résolution. La division par 0 n'a pas de sens en mathématique.

- L'élève multiplie (ou divise) un ou les deux membres par x ou toute autre puissance non nulle de x (par exemple, l'élève transforme l'équation $2x = 5+x$ en $2 = 5 + x$ en divisant le membre de gauche par x pour « éliminer » la présence du x dans ce membre de gauche).

  Réaction possible de l'enseignant face à cette procédure lors de la mise en commun qui suivra : Si l'enseignant ne souhaite pas pénétrer en terrain glissant, il peut simplement « interdire » avec autorité les opérations de multiplication et de division par x. S'il le souhaite, il pourra tenter d'expliquer que multiplier une équation par x peut entraîner une augmentation du nombre de solutions de l'équation (puisqu'elle augmente le degré) ; or, deux équations sont équivalentes si et seulement si elles ont les mêmes solutions. Cependant, cette explication n'est probablement pas à donner à ce stade de la séquence où les élèves commencent à découvrir la technique de résolution algébrique.
- Lors de sa résolution, l'élève transforme une équation du type $ax = b$ en $x = b - a$.

  Réaction possible de l'enseignant face à cette procédure lors de la mise en commun qui suivra : Plusieurs raisons peuvent être données pour amener l'élève à travailler son erreur. La première est que le nombre $b-a$ n'est probablement pas solution de l'équation de départ et l'élève peut le vérifier en substituant l'inconnue par $b - a$ dans cette équation de départ et s'apercevoir qu'il obtient une égalité fausse. Une deuxième raison est que les propriétés de conservation de l'égalité ne sont pas respectées : dans le membre de gauche, on a divisé par a et dans le membre de droite, on a soustrait a.

i. Phase de formulation et de validation : mise en commun et débat sur les procédures utilisées pour résoudre l'équation sans le logiciel Thot (5 minutes)

La mise en commun porte sur les points suivants :

- Débat sur les différentes procédures utilisées. Les procédures sont sélectionnées et hiérarchisées pour faire raisonnablement avancer le temps didactique.
- Retours sur les procédures incorrectes : l'enseignant peut s'appuyer sur l'image de la balance pour illustrer les transformations algébriques (propriétés de conservation de l'égalité). Si des élèves ont multiplié ou divisé les membres

de l'équation par des termes en x, il peut s'appuyer sur un exemple simple pour montrer que cela peut changer le nombre de solutions (exemple : pour l'équation $x = 4$ dont la seule solution, évidente, est 4, le fait de multiplier par x chaque membre conduit à l'équation $x^2 = 4x$ dont 4 n'est plus l'unique solution : 0 est l'autre solution. La transformation algébrique opérée ne préserve donc pas les solutions).

j. Phase d'institutionnalisation (10 minutes)

Une phase de synthèse suit : pour résoudre une équation, on utilise les propriétés de conservation de l'égalité, en cherchant à « isoler » l'inconnue.

Un temps supplémentaire peut être prévu pour proposer aux élèves plusieurs équations de formes différentes à résoudre avant de passer à la phase d'institutionnalisation.

Cette phase correspond au moment de l'institutionnalisation de la technique de résolution algébrique d'une équation appuyée sur les propriétés de conservation de l'égalité.

Voici une proposition de trace écrite :

2) Comment résoudre une équation ?

Pour résoudre une équation (*mettre la référence de la situation précédente*), on utilise les propriétés de conservation de l'égalité ci-dessous.

Propriétés

(P1) On ne change pas les solutions d'une équation si on ajoute ou si on soustrait le même nombre à chaque membre de l'équation.

(P2) On ne change pas les solutions d'une équation si on multiplie ou si on divise par le même nombre non nul chaque membre de l'équation.

Méthode

Pour résoudre une équation :

1. On regarde la forme de l'équation : la place de l'inconnue, les parenthèses s'il y en a et les opérations.
2. On utilise les propriétés (P1) et (P2) pour isoler l'inconnue, en faisant attention aux priorités opératoires.

Exemple 1 (sans parenthèse) : Résoudre l'équation $6x - 2 = 3x + 8$.

Equation	Transformation	Propriétés utilisée	Objectif
$6x - 2 = 3x + 8$			
$3x - 2 = 8$	On soustrait $3x$ à chaque membre	(P1)	On « élimine » les termes en x dans le membre de droite
$3x = 10$	On ajoute 2 à chaque membre	(P1)	On « isole » les termes en x dans le membre de gauche
$x = \frac{10}{3}$	On divise chaque membre par 3	(P2)	On « isole » l'inconnue

La solution de l'équation est $\frac{10}{3}$

Exemple 2 (avec parenthèses) : Résoudre l'équation $2(x + 1) = 8 - 5x$

Equation	Transformation	Propriétés utilisée	Objectif
$2(x + 1) = 8 - 5x$			
$2x + 2 = 8 - 5x$	On développe l'expression du membre de gauche	Distributivité simple	On transforme l'équation en une équation sans parenthèses
$7x + 2 = 8$	On ajoute $5x$ à chaque membre	(P1)	On « élimine » les termes en x dans le membre de droite
$7x = 6$	On soustrait 2 à chaque membre	(P1)	On « isole » les termes en x dans le membre de gauche
$x = \frac{6}{7}$	On divise chaque membre par 7	(P2)	On « isole » l'inconnue

La solution de l'équation est $\frac{6}{7}$.

Cette phase d'institutionnalisation est aussi l'occasion d'un travail sur des praxéologies d'étude. L'enseignant peut suggérer des techniques d'étude pour identifier le type de tâches $T_{resoudre}$ (repérer le verbe « Résoudre », donner des consignes synonymes comme « Déterminer ou trouver la solution de l'équation », « Pour quelle valeur de la lettre telle égalité est-elle vraie ? »), pour mettre en relation les différentes tâches relevant de ce type en focalisant l'attention sur les changements de valeurs des variables didactiques (recherche de la présence ou non de produits parenthésés dans les équations en appui sur les conventions d'écritures algébriques, les opérateurs et les délimitants) et en mettant en relation ces variables avec l'agrégation potentielle d'OM relatives aux expressions (distributivité) avec les OM relatives aux équations.

9.4.5 Déroulements alternatifs

Il existe au moins deux autres façons d'introduire – voire de démontrer – les propriétés de conservation de l'égalité qui ont été « élaborées » lors de cette étape 2 du PER à l'aide du logiciel Thot. Nous employons des guillemets car en réalité, ces propriétés ont été *inférées* à partir de l'utilisation du logiciel, puis admises.

La première façon consiste à ne pas utiliser les propriétés de conservation de l'égalité. Il est en effet possible de résoudre algébriquement une équation du premier degré en classe de quatrième et de justifier théoriquement cette résolution à l'aide d'une autre propriété connue des élèves à ce niveaux scolaire : si $a = b$ alors $a - b = 0$ et réciproquement.

Dès lors, il est possible de résoudre une équation algébrique non arithémtique de la forme $ax + b = cx + d$, avec $b - d \neq 0$, en utilisant uniquement cette propriété. En effet :

$$ax + b = cx + d \Leftrightarrow ax + b - (cx + d) = 0 \Leftrightarrow (a - c)x + (b - d) = 0 \Leftrightarrow (a - c)x = b - d$$

La définition du quotient permet de conclure que $x = \frac{b-c}{a-c}$.

La seconde façon consiste à démontrer les propriétés de conservation de l'égalité à l'aide de cette propriété :

$$a = b \Leftrightarrow a - b = 0 \Leftrightarrow a - b + c - c = 0 \Leftrightarrow (a + c) - (b + c) = 0 \Leftrightarrow a + c = b + c$$

Et :

$$a = b \Leftrightarrow a - b = 0 \Leftrightarrow (a - b)c = 0 \Leftrightarrow ac - bc = 0 \Leftrightarrow ac = bc$$

Ces deux manières de faire peuvent être insérées dans le PER que nous avons construit : dans un premier temps, les équations sont résolues uniquement à l'aide de la propriété $a = b \Leftrightarrow a - b = 0$; dans un second temps, éventuellement, elles le sont grâce aux propriétés de conservation de l'égalité. De plus, la démonstration de ces dernières peut avoir lieu après l'utilisation du logiciel Thot, en posant aux élèves la question de la validité de ce que fait le logiciel : comment pourrait-on *prouver* que les transformations opérées par le logiciel sur les équations sont mathématiquement correctes ?

9.4.6 Types de tâches mathématiques donnés à faire en autonomie et travail des praxéologies d'étude en autonomie ; analyse *a priori*

a. Eléments de gestion didactique

Comme pour l'étape 1, nous suggérons à l'enseignant pour le moment du travail de la technique de résolution algébrique de faire travailler des types de tâches correspondant à l'étape 2 après avoir réalisé la situation didactique de cette étape 2, et éventuellement avant le moment de l'institutionnalisation.

b. Les types de tâches mathématiques proposés : analyse *a priori* et travail des praxéologies d'étude

Analyse a priori des types de tâches et travail possible de praxéologies d'étude

Les tâches sont fournies en annexe (page 595). Les types de tâches travaillés sont la résolution algébrique d'équations à l'aide des propriétés de conservation de l'égalité, sans ou avec produits parenthésés (exercices 1 et 2, relevant de $OML2_{eq}$) et la preuve que deux équations sont équivalentes ou non (exercice 3, relevant de $OML2_{eq}$).

Nous avons joué sur les valeurs des variables didactiques pour les exercices 1 et 2. L'exercice 1 propose à l'élève de compléter un tableau afin qu'il explicite la technique mathématique de résolution algébrique et les composantes théorique et pratique de la technologie qui justifient et guident les transformations. L'exercice 2 ne présente plus de tableau. Quatre équations sont données à résoudre et forment un assortiment didactique. La première explicite les signes de multiplication qui peuvent ne pas être écrits selon les conventions d'écriture algébrique, les autres laissent ces multiplications pour la plupart implicites. Les premières équations ne comportent pas de produit parenthésé ; les dernières en comportent. Ceci oblige l'élève, lors de l'application de la technique de résolution algébrique, à agréger davantage les OM entre expressions et équations pour appliquer la technique de résolution sur les équations avec parenthèses que sur les équations sans parenthèses (dans le second cas, il doit utiliser la propriété de distributivité en plus des propriétés de conservation de l'égalité).

L'explicitation de ces changements dans les valeurs de variables didactiques et des adaptations nécessaires à opérer dans l'application de la technique fait partie des gestes d'aide à l'étude que nous suggérons à l'enseignant d'accomplir en classe avec les élèves avant de les placer en autonomie (en classe ou hors la classe).

Différenciation des énoncés et travail des praxéologies d'étude

Comme pour l'étape 1, nous avons différencié certains énoncés en fonction des groupes formés suite au passage du test Pépite.

Par exemple, les élèves du groupe A doivent compléter le tableau ci-dessous :

Equation	Transformation	Propriété utilisée	Objectif
$2a + 2 = 4 \times (a + 2)$			
$2a + 2 = 4a + 8$			
$-2a + 2 = 8$			
$-2a = 6$			
$a = -3$			

Les élèves des groupes B et C doivent quant à eux compléter le même tableau, sauf que celui-ci est partiellement rempli :

Equation	Transformation	Propriété utilisée	Objectif
$2a + 2 = 4 \times (a + 2)$			
$2a + 2 = 4a + 8$		Distributivité simple	On transforme l'équation en une équation sans parenthèses
$-2a + 2 = 8$	On soustrait $4a$ à chaque membre		On « élimine » les termes en a dans le membre de droite
$-2a = 6$		Conservation de l'égalité (P1)	
$a = -3$			

Les équations à résoudre sont identiques pour tous les groupes. En classe, l'enseignant peut demander aux élèves du groupe A de verbaliser la manière dont ils ont complété le tableau, afin que les techniques d'étude correspondantes soient explicitées pour les élèves des groupes B et C. Ces derniers, grâce au fait que le tableau soit partiellement rempli, n'auront en effet peut-être pas eu besoin d'utiliser ces techniques.

Aides et éléments de gestion didactique pour le travail des praxéologies d'étude

Nous n'avons pas différencié les aides pour cette étape. Les aides sont du même type qu'à l'étape 1 (aide de renvoi, aide comparatrice, aide à l'application d'une technique). En classe, l'enseignant peut poursuivre le travail entamé à l'étape 1 sur la manière d'utiliser les aides, en laissant plus souvent aux élèves la charge d'expliciter les techniques d'étude en jeu.

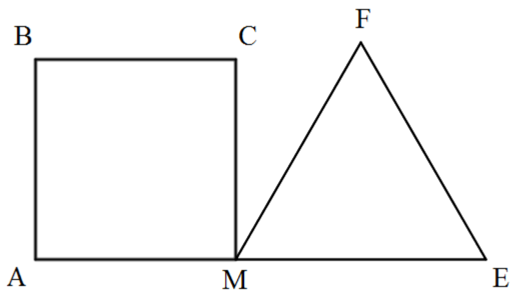
9.5 Etape 3 : résolution algébrique de problèmes conduisant à une équation

Durée : 2-3 heures

9.5.1 Enoncé de la situation

Situation pour la résolution algébrique d'un problème

Sur la figure ci-dessous, ABCM est un carré et EFM est un triangle équilatéral. Le segment [AE] mesure 10 cm. Où faut-il placer le point M sur le segment [AE] pour que le carré ABCM et le triangle EFM aient le même périmètre ?



9.5.2 Analyse *a priori* de la situation didactique

a. Objectif d'apprentissage

L'objectif est de résoudre algébriquement un problème conduisant à une équation du premier degré à une inconnue.

Les élèves doivent prendre conscience des points suivants :

- Insuffisance des démarches arithmétiques ou par essais/erreurs pour résoudre des problèmes conduisant à une équation du premier degré à une inconnue de la forme $ax + b = cx + d$ avec un choix de valeurs de a, b, c, d tel que la solution à trouver est fractionnaire non décimale.
- Intérêt d'utiliser l'algèbre (équations) pour résoudre un problème.
- Identification de l'égalité, parfois implicite, dans un énoncé.
- Possibilité de désignations multiples pour l'inconnue.

– Contrôle de l'adéquation entre l'équation produite et la situation qu'elle modélise : interprétation de l'équation algébrique, qui passe par l'interprétation des expressions de chaque membre et de l'égalité, en lien avec la situation (périmètre du triangle équilatéral, périmètre du carré, égalité des deux périmètres) ; éventuellement, contrôle numérique de l'adéquation entre les expressions produites et les programmes qu'elles modélisent.

En lien avec les OM travaillées, nous conseillons de développer les praxéologies d'étude suivantes :

– La poursuite du travail d'identification du genre de tâches $T_{mettre-en-equation}$, déjà rencontré avec l'égalisation de programmes de calcul dans les étapes 1 et 2, permet de mettre en relation les résolutions de problèmes de l'étape 3 avec celles des étapes 1 et 2 et de souligner les différences de valeurs de variables didactiques.
– Les OM relatives à la géométrie (périmètres) sont situées par rapport aux OM relatives aux expressions et aux équations.

Les techniques d'étude pour identifier et mettre en relation les types de tâches mathématiques relatifs aux équations, pour identifier et mettre en relation les techniques et technologies relatives aux équations, pour situer et articuler des OM entre elles, sont de plus en plus laissées à la charge des élèves, notamment dans le moment du travail de la technique de mise en équation, afin qu'ils puissent en autonomie être capables de les mobiliser sans la présence de l'enseignant.

b. Analyse *a priori*

Le problème nécessite d'être mis en équation car l'équation correspondant au problème ne peut pas être résolue par des démarches arithmétiques ou par essais/erreurs : elle est de la forme $ax + b = c(dx + f)$ avec un choix de valeurs pour a, b, c, d, f tel que la solution est fractionnaire non décimale.

Un changement de cadres est nécessaire (du géométrique vers l'algébrique). L'inconnue n'est pas explicite et plusieurs choix pour désigner cette inconnue sont possibles.

9.5.3 OM que doivent avoir construites les élèves au préalable

Les OM suivantes sont nécessaires pour travailler la situation en classe :

– OM relatives aux nombres et aux propriétés sur les opérations.
– OM relatives au calcul algébrique sur les expressions algébriques.

- OM relatives aux équations du premier degré à une inconnue : résolution algébrique (propriétés de conservation de l'égalité).

9.5.4 Tâche préparatoire

Nous conseillons fortement à l'enseignant de proposer aux élèves de travailler en amont une situation quasi-identique à celle proposée dans cette étape 3 du PER, en effectuant le changement suivant dans les valeurs des variables didactiques : prendre $AE = 21$ cm. En effet, ce choix de longueur pour le segment $[AE]$ rend possible une résolution par essais/erreurs.

Ce travail préalable pourra accélérer grandement la mise en œuvre de la situation de cette troisième étape du PER : les difficultés liées aux périmètres, à l'expression « place du point M » et de manière plus générale à la compréhension de l'énoncé auront déjà été rencontrées et travaillées, ce qui permettra de focaliser l'attention sur la mise en équation.

9.5.5 Déroulement proposé et analyse *a priori* de ce déroulement

a. Dévolution. Consignes et enjeux : résoudre un problème (2 minutes)

L'enjeu est d'utiliser les équations pour résoudre un problème. Cet enjeu n'est pas explicité par l'enseignant (car il donnerait alors une indication de résolution).

L'enseignant demande aux élèves de résoudre le problème. Il présente la figure dynamique à la classe et fait se déplacer le point M sur le segment $[AE]$ pour montrer la manière dont le carré et le triangle se comportent en fonction de la position du point M (voir figure 9.7 ci-après).

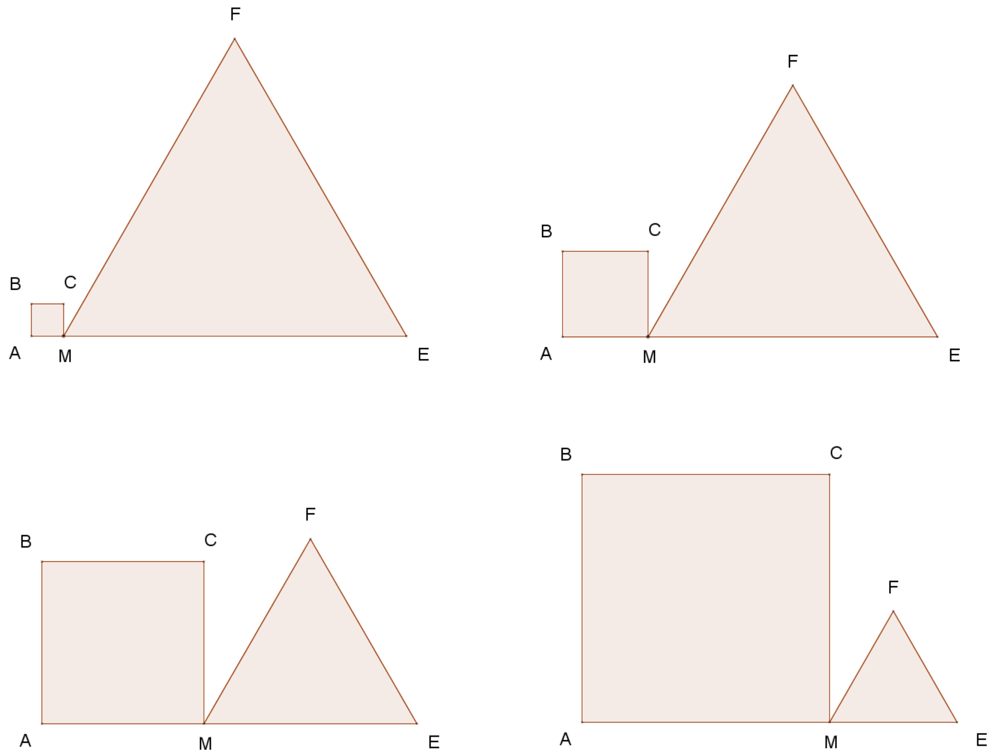


FIGURE 9.7 – Exemples de configurations du triangle et du carré selon la position du point M

Une ou plusieurs reformulations de l'énoncé peuvent être faite par les élèves avec l'enseignant.

Le fait d'avoir travaillé la situation en amont (cf. tâche préparatoire ci-avant) facilite la dévolution et l'engagement des élèves dans la phase d'action.

b. Phases d'action et de formulation. Recherche des élèves et mises en commun : résolution guidée (20 minutes)

Les élèves cherchent d'abord seuls à résoudre le problème. L'enseignant circule dans les rangs pour repérer et hiérarchiser les différentes procédures. Puis, afin de faire raisonnablement avancer le temps didactique, ce temps de recherche pourra osciller régulièrement entre des phases de recherche individuelle, de recherche collective et de mises en commun.

Procédures attendues

Techniques en appui sur un dessin. L'élève dessine en grandeur réelle la figure dans l'espoir que ce dessin lui apporte des informations.

Réaction possible face à cette procédure : Pour éviter que cette procédure coûteuse en temps n'apparaisse, l'enseignant peut l'évacuer lors de la lecture de l'énoncé en demandant à ce que ses élèves ne se lancent pas dans la construction de la figure sur leurs cahiers.

Comme pour les situations précédentes (étapes 1 et 2), les techniques arithmétiques et par essais/erreurs sont attendues, mais elles sont vouées à l'échec (la solution de l'équation modélisant le problème étant $\frac{4}{3}$).

Technique par essais/erreurs La technique par essais/erreurs consiste à calculer le périmètre du carré et le périmètre du triangle pour plusieurs positions du point M.

Réaction possible face à cette procédure : l'enseignant explique que le problème est tel que cette technique est vouée à l'échec et qu'il est impossible de trouver la solution par essais/erreurs car elle est fractionnaire non décimale.

Technique pré-algébrique. Une technique pré-algébrique consiste à exprimer des quantités et leurs relations sans recours à une (seule) inconnue. Par exemple, l'élève écrit quelque chose comme « périmètre du carré = périmètre du triangle » ou bien « 4 AB = 3 EF ».

Réaction possible face à cette procédure : en fonction de ce que l'élève écrit, l'enseignant pourra d'abord faire vérifier à l'élève que ce qu'il écrit est correct, ensuite dans quelle mesure il peut exploiter ce qu'il a écrit et ce qu'il faudrait préciser. Il amènera l'élève à mettre en relation la mesure de la longueur du côté du carré et celle du côté du triangle équilatéral sachant que la somme des deux mesures est égale à 10 cm.

Techniques algébriques. Nous considérons que les élèves mobilisent des techniques algébriques lorsqu'ils tentent d'utiliser les expressions littérales et d'opérer sur l'inconnue. Plusieurs cas sont attendus :

- L'élève ne choisit pas une inconnue pertinente pour l'énoncé. Par exemple, il prend le périmètre du carré pour inconnue.

  Réaction possible face à cette procédure : le choix de l'inconnue est guidé par ce que l'on recherche. On ne cherche pas un périmètre mais la place du point M sur le segment $[AE]$.
- L'élève prend pour inconnue la place du point M sans saisir exactement ce que le terme « place » signifie.

  Réaction possible face à cette procédure : si la situation avec la longueur

$AE = 21$ cm a été traitée en amont, l'enseignant peut y faire référence ; sinon, il peut dessiner un segment $[RS]$ d'une longueur donnée, y placer un point P et demander à l'élève comment décrire la position du point P sur le segment. La position du point P est décrite soit par la longueur RP soit par la longueur PS.

- L'élève prend deux inconnues, par exemple la longueur AM et la longueur ME, et écrit une ou plusieurs équations avec ces deux inconnues.

  Réaction possible face à cette procédure : l'enseignant fera d'abord s'interroger l'élève sur la pertinence des inconnues choisies, la désignation de l'inconnue dépendant de ce que l'on cherche. Ensuite, l'enseignant fera s'interroger l'élève sur la nécessité ou non d'utiliser deux inconnues : les quantités exprimées ne peuvent-elles pas l'être en fonction d'une seule inconnue ? Enfin, il mettra en avant le fait qu'une donnée n'a pas été utilisée (la somme des deux mesures est égale à 10 cm).
- L'élève choisit une inconnue pertinente (la longueur AM ou la longueur ME) mais ne sait pas quoi en faire ou n'aboutit pas à une équation.

  Réaction possible face à cette procédure : l'enseignant peut suggérer d'écrire ce que l'élève connaît en fonction de cette inconnue et de rechercher ce qui dans l'énoncé correspond à une égalité pour pouvoir aboutir à une équation.
- L'élève écrit une équation qui ne correspond pas au problème ou une équation « presque » correcte mais a oublié les parenthèses.

  Réaction possible face à cette procédure : l'enseignant peut amener l'élève à tester les expressions avec des nombres pour amener l'élève à voir la non correspondance entre ces expressions et ce qu'elles représentent géométriquement.

Les mises en commun permettent :
- de débattre sur les différentes procédures utilisées.
- de mettre en avant l'insuffisance des techniques arithmétiques et par essais/erreurs et la nécessité d'utiliser une équation ;
- de revenir sur les grandeurs géométriques à mobiliser ;
- de revenir sur les résolutions algébriques incorrectes ;
- de revenir sur le choix de l'inconnue (deux choix possibles) ;
- de mettre en œuvre et d'expliciter une technique de résolution d'un problème conduisant à une équation (voir la synthèse ci-dessous).

Elles permettent également de travailler des praxéologies d'étude :

– Situer et articuler les OM relatives à la géométrie avec les OM relatives à l'algèbre.
– Mettre en relation la situation avec celle éventuellement travaillée en amont ou avec d'autres tâches qui relèvent du genre de tâches $T_{mettre-en-equation}$.
– Identifier la technique de mise en équation d'un problème.

Les phases précédentes correspondent aux moments d'élaboration de la technique de mise en équation et des éléments technologiques guidant la mise en œuvre de cette technique, ainsi qu'au moment du travail de la technique de résolution algébrique appuyée sur les propriétés de conservation de l'égalité.

c. Phase d'institutionnalisation (10 minutes)

L'enseignant dégage ou fait dégager par les élèves les principaux éléments de la technique de mise en équation : pour mettre un problème en équation, il faut repérer ce que l'on cherche et ce que l'on connaît, repérer ce qui dans l'énoncé traduit une égalité, choisir une inconnue et la désigner par une lettre, traduire les relations du problème en une équation avec l'inconnue choisie, résoudre l'équation, répondre au problème, puis contrôler numériquement son résultat si le temps le permet. Ceci correspond au moment d'institutionnalisation de la technique de mise en équation d'un problème.

Voici une proposition de trace écrite pour la leçon, qui peut être donnée après un travail sur des problèmes algébriques divers (cf. annexe page 604 pour des exemples de tels problèmes).

3) Comment mettre un problème en équation ?

Certains problèmes peuvent être résolus à l'aide d'une équation (*mettre la référence à la situation précédente*). Quand on écrit une équation qui correspond à un problème, on dit qu'on met le problème en équation.

Méthode

Pour mettre un problème en équation :

1. On lit attentivement l'énoncé : on repère ce que l'on connaît et ce que l'on cherche.
2. On trouve dans l'énoncé ce qui correspond à une égalité et si nécessaire, on le reformule.

(a) Ce peut être une phrase.

Ex : « Le prix des trois CD est le même que le prix d'un DVD. »

→ Le prix de trois CD **est égal** au prix d'un DVD.

(b) Ce peut être une propriété géométrique.

Ex : « On veut que le triangle ABC soit isocèle en A. »

→ La longueur BA **est égale** à la longueur CA.

(c) Ce peut être une même grandeur exprimée de deux façons différentes.

Ex : « Si j'achète 5 stylos identiques, il me restera 2,30 euros dans mon portefeuille, mais si j'en achète 6, il me manquera 0,50 euro. »

→ La somme d'argent qu'il y a dans mon portefeuille est exprimée de deux façons : elle est **égale** au prix de 5 stylos plus 2,30 euros, et elle est **égale** au prix de 6 stylos moins 0,50 euro.

Donc l'égalité est : prix de 5 stylos + 2,30 euros = prix de 6 stylos - 0,50 euro

3. Si l'inconnue n'est pas donnée par l'énoncé, il faut la choisir (on l'appelle souvent x mais ce n'est pas obligatoire).

   (a) S'il y a une seule quantité à chercher, alors c'est elle qu'on choisit comme inconnue.

   (b) S'il y a plusieurs quantités à chercher, alors on en choisit une et on essaie d'exprimer les autres en fonction de celle qu'on a choisie.

4. On écrit l'équation correspondant au problème.
5. On résout l'équation.
6. On répond au problème.

Exemple(s) ou renvoi vers les problèmes traités en classe

9.5.6 Types de tâches mathématiques donnés à faire en autonomie

Les tâches associées à l'étape 3 du PER sont fournies en annexe (page 604) et correspondent au moment du travail de la technique de mise en équation de problèmes algébriques divers, qui peut avoir lieu avant le moment de l'institutionnalisation.

Les types de tâches travaillés sont les suivants : traduire une phrase énoncée en langage naturelle en une équation (exercice 1, relevant de $OML1_{eq}$), associer à une phrase énoncée en langage naturelle une équation (exercice 2, relevant de $OML1_{eq}$), mettre en équation des problèmes algébriques divers (exercice 3, relevant de $OML1_{eq}$). Nous avons joué sur les valeurs des variables didactiques pour différencier les énoncés et proposer une progressivité dans la complexité des exercices. Par exemple, dans l'exercice 3, le problème 1 est un problème d'égalisation de programmes de calcul, rencontré plusieurs fois au cours du PER (et avant) par les élèves ; dans le problème 2, l'égalité est explicitement mentionnée dans l'énoncé ; dans le problème 3, l'égalité est implicite : il s'agit d'un problème agrégeant les OM relatives à la géométrie avec celles relatives aux équations et la mise en équation nécessite de recourir à une propriété de géométrie sur l'égalité de longueurs dans un parallélogramme ; dans le problème 4, une même quantité est exprimée de deux façons différentes, ce qui n'était pas le cas des autres problèmes.

Comme pour les étapes 1 et 2, nous suggérons à l'enseignant de réaliser un travail des tâches proposées en classe avec les élèves. Puisqu'il s'agit de la troisième étape et que plusieurs heures ont été passées à travailler à la fois les OM relatives aux équations et les praxéologies d'étude, nous proposons de laisser la réalisation des unes et des autres aux élèves progressivement, de plus en plus.

Les exercices 4 et 5 travaillent spécifiquement l'agrégation entre OM relatives aux expressions et OM relatives aux équations.

9.5.7 Des types de tâches « méta-mathématiques » finalement non inclus dans le PER (risque de glissement méta-cognitif)

Nous avions initialement inclus dans le PER relatif aux équations des tâches non mathématiques pour favoriser le travail des praxéologies d'étude. Le lecteur trouvera l'énoncé de ces tâches en annexe (page 622). Il s'agissait de faire trouver aux élèves une consigne manquante dans une tâche relative aux équations. Du fait que ces tâches ne soient pas des tâches mathématiques, et craignant que l'enseignant ne se dirige vers un glissement méta-cognitif, nous avons finalement décidé de ne pas les inclure dans la version finale du PER. Toutefois, ces tâches inhabituelles, assez complexes pour certaines, nous paraissent intéressantes car elles sont largement en lien avec les OM relatives aux équations et favorisent selon nous un travail des techniques d'étude de ces OM. En effet, pour trouver une consigne manquante, l'élève doit d'abord identifier certains éléments dans l'énoncé et les mettre en relation avec des tâches qu'il a rencontrées ; pour certaines consignes manquantes, il s'agit pratiquement de rédiger un problème, ce qui suppose d'identifier des techniques et technologies relatives aux équations pour qu'elles soient mobilisées dans la résolution du problème.

9.6 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre neuf un Parcours d'Etude et de Recherche portant sur les équations en classe de quatrième, qui donne des raisons d'être à la production et la résolution algébrique des équations, ainsi que la mise en équation de certains problèmes. Ce PER vise à déstabiliser les conceptions erronées des élèves en algèbre, à faire évoluer leurs techniques d'étude lorsqu'ils accomplissent un travail personnel (en autonomie et/ou hors la classe), afin de faire tendre leurs rapports personnels aux équations vers des rapports idoines.

Articulant les outils de la TAD et de la TSD, nous prenons appui sur l'OM épistémologique de référence relative aux équations pour intégrer au PER un travail équilibré des tâches mathématiques relevant des trois OM locales présentées au chapitre sept et suggérons des éléments de gestion et d'organisation didactique à l'enseignant. En lien avec notre problématique de thèse, nous avons pensé ces éléments afin de favoriser l'engagement des élèves dans une étude autonome et le développement de praxéologies d'étude prenant en compte la spécificité et la complexité de l'activité mathématique. Nous avons également identifié les besoins des apprentissages des élèves à l'aide d'une évaluation diagnostique (test Pépite) et différencié les contenus et les aides en conséquence, toujours dans l'optique d'organiser plus explicitement et en accord avec nos hypothèses de recherche l'étude personnelle des élèves.

Nous avons aussi évoqué quelques limites du PER. Nous avons construit ce dernier sur six ou sept heures et d'un seul « bloc » afin de correspondre aux contraintes du terrain pour nos expérimentations. Etaler les étapes dans le temps, en plusieurs fois, nous paraît davantage favorable aux apprentissages. Par ailleurs, concernant les aides différenciées fournies aux élèves pour les tâches à réaliser en autonomie, nous avons été contraints de maintenir un format papier/crayon peu pratique. Selon nous, une informatisation de ces aides faciliterait l'organisation de l'étude autonome des élèves, notamment hors la classe.

La construction de ce PER constitue un autre résultat majeur de notre thèse. Il donne en particulier des raisons d'être aux développements théoriques réalisés dans les chapitres précédents. Sa mise en œuvre par un enseignant dans une classe de collège est présentée dans le chapitre dix.

Type d'aide	Description	Exemple	Praxéologies d'étude travaillées
Aide de renvoi	Renvoie l'élève vers ses cahiers pour qu'il trouve des tâches mathématiques du même type que celui à réaliser.	« Observe les problèmes du même type qui ont été traités en classe pour t'aider à résoudre le problème demandé. »	Identifier un type ou un genre de tâches mathématiques à partir d'une tâche donnée. Mettre en relation des tâches mathématiques du même type.
Aide comparatrice	Invite l'élève à comparer deux énoncés, deux formulations, deux corrigés, etc. Les aides sous forme de tâches résolues sont aussi des aides comparatrices.	« Quelles différences y a-t-il entre cet énoncé et l'énoncé précédent ? »	Identifier un type ou un genre de tâches mathématiques à partir d'une tâche donnée. Mettre en relation des tâches mathématiques du même type. Identifier des techniques et technologies mobilisées pour réaliser un type de tâches mathématiques. Situer et articuler des OM entre elles.
Aide à la mobilisation d'une technique ou d'une technologie mathématique	Explicite la technique ou la technologie à employer pour réaliser la tâche, sans préciser de manière de l'appliquer.	« Pour résoudre cette équation, tu dois utiliser les propriétés de conservation de l'égalité. »	Identifier des techniques et technologies mobilisées pour réaliser un type de tâches mathématiques. Mettre en relation un type de tâches mathématiques avec une technique et une technologie pour le réaliser.
Aide à l'application d'une technique mathématique	Explicite la technique à employer pour réaliser la tâche en précisant une manière de l'appliquer.* Les aides sous forme de tâches résolues sont aussi des aides à l'application d'une technique mathématique.	« Voici un exemple corrigé… »	Identifier des techniques et technologies mobilisées pour réaliser un type de tâches mathématiques. Mettre en relation un type de tâches mathématiques avec une technique et une technologie pour le réaliser.
Aide régulatrice	Une aide régulatrice se présente sous la forme d'un arbre où plusieurs procédures ont été anticipées. L'élève choisit la procédure qu'il a employée et dispose d'une aide en conséquence.	« Si tu as trouvé telle solution, alors tu as probablement fait telle erreur. Voici comment travailler ton erreur. »	Dépend de l'aide.
Aide au contrôle	Donne à l'élève des moyens de contrôler ses réponses.	« Pour vérifier que la solution que tu as trouvée est correcte, tu peux tester l'égalité de départ avec cette solution ou utiliser un solveur d'équations. »	Mettre en relation des tâches mathématiques du même type. Situer et articuler des OM entre elles.

FIGURE 9.8 – Les différents types d'aides proposés aux élèves lors de leur étude en autonomie

Chapitre 10

Analyse *a posteriori* de la mise en œuvre du PER sur les équations par un enseignant de collège

10.1 Objectifs du chapitre

En lien avec notre problématique de thèse, nous décrivons et analysons dans ce chapitre la mise en œuvre du Parcours d'Etude et de Recherche (PER) sur les équations dans une classe de quatrième par l'enseignant M2, présenté au chapitre quatre, et ses effets sur les gestes d'étude des élèves hors la classe : le PER effectivement mis en scène par l'enseignant a-t-il permis aux élèves de faire tendre leur rapport personnel aux équations vers un rapport idoine ? Par rapport à la période où nous avons mené notre étude exploratoires, ont-ils davantage eu recours à des praxéologies d'étude supposées permettre une activité mathématique idoine ?

Dans un premier temps, nous décrivons la manière dont la mise en œuvre du PER sur les équations s'est déroulée : comment nous avons présenté le PER à l'enseignant M2, quelles ont été les adaptations que M2 a opérées par rapport à ses pratiques habituelles pour mettre en scène le PER. Pour éviter toute confusion dès à présent, nous appelons « PER chercheur » le PER présenté au chapitre neuf et que nous avons élaboré, et « PER professeur » le PER effectivement mis en œuvre par l'enseignant dans ses classes.

Dans un second temps, nous réalisons une analyse *a posteriori* de la mise en œuvre du PER professeur. À partir du modèle théorique de l'étude personnelle que nous avons développé (chapitre cinq), nous analysons du côté de l'enseignant les organisations mathématiques et les praxéologies d'étude travaillées en classe en les comparant respectivement à l'OM épistémologique de référence (chapitre sept) et aux praxéologies d'étude supposées permettre une activité mathématique idoine (chapitre cinq). Nous analysons également la gestion et l'organisation didactique de l'enseignant pour mettre en scène le PER sur les équations. Du côté des élèves, nous nous intéressons aux effets du PER professeur sur les OM apprises et sur les gestes d'étude mobilisés hors la classe, et cherchons à repérer une évolution par rapport aux gestes mobilisés lors de notre première étude exploratoire (chapitre quatre). Pour analyser les OM apprises, nous travaillons en particulier sur des productions d'élèves à une évaluation sommative sur les équations. Enfin, nous mettons en relation les praxéologies d'étude travaillées avec celles qui semblent mobilisées par les élèves et les OM enseignées avec celles qui semblent apprises, et avançons des hypothèses sur les liens potentiels entre les premières et les secondes. Ceci permet d'apporter des éléments de réponse à la problématique de cette thèse.

Toutes les analyses réalisées dans ce chapitre l'ont été à partir des transcriptions des vidéos des séances relatives aux équations ou des vidéos elles-mêmes. Ces transcriptions sont lisibles dans l'annexe (annexes du chapitre dix, page 640).

10.2 Mise en œuvre du PER

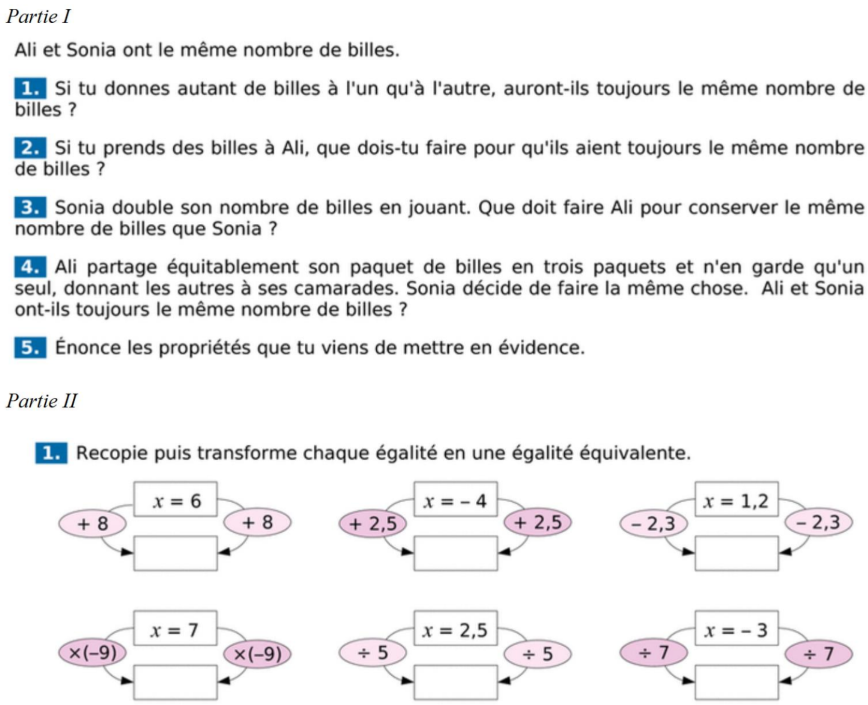
10.2.1 Pratiques de l'enseignant sur le chapitre des équations l'année précédant la mise en œuvre du PER chercheur

Avant de présenter la façon dont l'enseignant a mis en œuvre le PER relatif aux équations, et afin de situer une partie de ses pratiques professionnelles par rapport aux pratiques que nous lui avons demandé d'essayer d'adopter (travailler les OM relatives aux équations suivant les indications du PER chercheur, développer en classe des praxéologies d'étude), nous présentons brièvement des éléments sur la manière dont M2 a mis en œuvre, lors de l'année précédant la mise en œuvre du PER que nous avons conçu, la séquence relative aux équations qu'il a lui-même construite. Nous appelons cette séquence « l'ancienne séquence ». Les éléments que nous fournissons ici permettent d'éclairer les modifications que M2 a apportées au PER chercheur.

Dans l'ancienne séquence, baptisée « Calcul littéral 2 » et comprenant cinq séances au total (une séance durant 55 minutes environ), les équations sont travaillées sur les quatre dernières séances (séances 2 à 5), la séance 1 étant dédiée à la double distributivité. Comparée au PER chercheur, l'ancienne séquence comprend donc deux séances de moins.

a. Contenus mathématiques de l'ancienne séquence

Dans la séance 2, les propriétés de conservation de l'égalité sont introduites à travers une tâche mathématique où deux enfants possèdent initialement le même nombre de billes (voir figure 10.1 ci-après). Les élèves sont interrogés sur les possibilités de changer le nombre de billes d'un des deux enfants (en lui en rajoutant, en lui en retirant, en doublant ou en divisant son nombre de billes) en faisant en sorte que les deux enfants aient toujours le même nombre de billes.



Partie I

Ali et Sonia ont le même nombre de billes.

1. Si tu donnes autant de billes à l'un qu'à l'autre, auront-ils toujours le même nombre de billes ?

2. Si tu prends des billes à Ali, que dois-tu faire pour qu'ils aient toujours le même nombre de billes ?

3. Sonia double son nombre de billes en jouant. Que doit faire Ali pour conserver le même nombre de billes que Sonia ?

4. Ali partage équitablement son paquet de billes en trois paquets et n'en garde qu'un seul, donnant les autres à ses camarades. Sonia décide de faire la même chose. Ali et Sonia ont-ils toujours le même nombre de billes ?

5. Énonce les propriétés que tu viens de mettre en évidence.

Partie II

1. Recopie puis transforme chaque égalité en une égalité équivalente.

FIGURE 10.1 – Tâche introduisant les propriétés de conservation de l'égalité (ancienne séquence de M2 sur les équations)

Cette tâche vise probablement à préparer la résolution algébrique des équations, travaillée dans la séance suivante. Toutefois, nous interrogeons les raisons d'être données par les élèves à cette tâche travaillée de manière non articulée avec la résolution de problèmes (ce à quoi les équations *servent*) : pourquoi chercher à conserver une égalité ? Pourquoi transformer une équation de la forme $x = a$ d'inconnue x en une équation équivalente ?

Suite à la réalisation de cette tâche, l'institutionnalisation opérée par M2 (voir figure 10.2 ci-après) porte sur la définition d'une équation et les propriétés de conservation de l'égalité. L'objet équation est donc étudié avant d'avoir été motivé comme outil pour résoudre des problèmes et les propriétés de conservation de l'égalité (éléments technologiques) sont fournies elles aussi sans avoir de raison d'être puisque la résolution algébrique n'a pas encore été abordée.

Définition

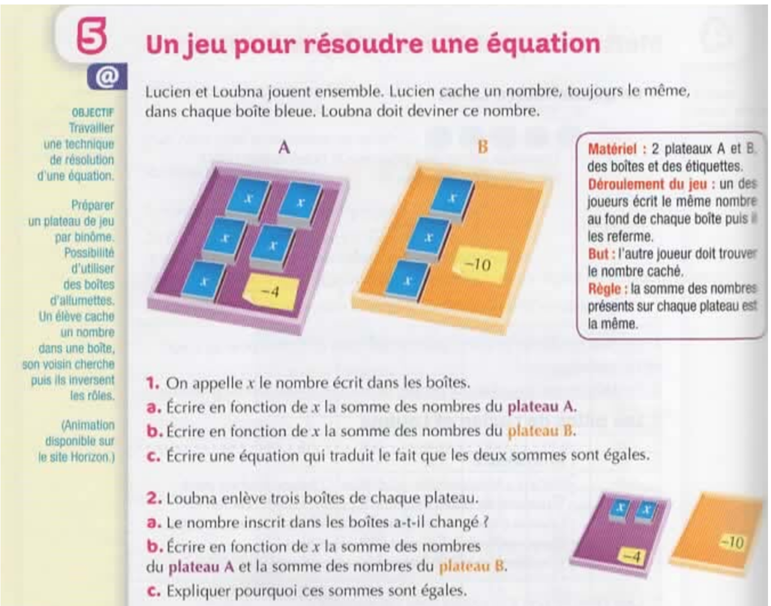
Une **équation** est une expression dans laquelle il y a toujours un signe égal et une ou plusieurs inconnues (désignées chacune par une lettre, en général).

Exemple 1 : $2x^2 - 5 = x + 10$ est une équation où l'inconnue est désignée par la lettre x.
Cette équation a deux membres : $2x^2 - 5$ (membre de gauche) et $x + 10$ (membre de droite).

Propriétés

	Pour tous nombres a, b et c :
• Une égalité reste vraie **si on ajoute ou si on soustrait un même nombre** à ses deux membres.	• si $a = b$ alors $a + c = b + c$ • si $a = b$ alors $a - c = b - c$
• Une égalité reste vraie **si on multiplie ou si on divise** ses deux membres **par un même nombre non nul.**	• si $a = b$ alors $a \times c = b \times c$ • si $a = b$ alors $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ (où $c \neq 0$)

FIGURE 10.2 – Leçon de la séance 2 sur les équations (ancienne séquence de M2 sur les équations)



5 Un jeu pour résoudre une équation

OBJECTIF Travailler une technique de résolution d'une équation.

Préparer un plateau de jeu par binôme. Possibilité d'utiliser des boîtes d'allumettes. Un élève cache un nombre dans une boîte, son voisin cherche puis ils inversent les rôles.

(Animation disponible sur le site Horizon.)

Lucien et Loubna jouent ensemble. Lucien cache un nombre, toujours le même, dans chaque boîte bleue. Loubna doit deviner ce nombre.

Matériel : 2 plateaux A et B, des boîtes et des étiquettes.
Déroulement du jeu : un des joueurs écrit le même nombre au fond de chaque boîte puis il les referme.
But : l'autre joueur doit trouver le nombre caché.
Règle : la somme des nombres présents sur chaque plateau est la même.

1. On appelle x le nombre écrit dans les boîtes.
a. Écrire en fonction de x la somme des nombres du **plateau A.**
b. Écrire en fonction de x la somme des nombres du **plateau B.**
c. Écrire une équation qui traduit le fait que les deux sommes sont égales.

2. Loubna enlève trois boîtes de chaque plateau.
a. Le nombre inscrit dans les boîtes a-t-il changé ?
b. Écrire en fonction de x la somme des nombres du **plateau A** et la somme des nombres du **plateau B.**
c. Expliquer pourquoi ces sommes sont égales.

FIGURE 10.3 – Tâche introduisant la technique de résolution algébrique sur les équations (ancienne séquence de M2 sur les équations)

Dans la séance 3, la technique de résolution algébrique d'une équation est travaillée. Elle est introduite à partir d'une « activité » (voir figure 10.3 ci-après) issue du manuel Horizon (2011, quatrième, éd. Didier), manuel que nous avons analysé dans le chapitre six de la thèse. Cette tâche permet d'élaborer la technique en appui sur les propriétés de conservation de l'égalité ; toutefois, ainsi insérée dans la séquence construite par M2, elle n'est pas motivée par la résolution de problèmes. Peut-être M2 a-t-il mis en concurrence la technique de résoltion algébrique avec les techniques par opérations réciproques ou par essais/erreurs en en montrant la plus grande portée ? À partir des documents en notre possession, nous ne pouvons pas l'affirmer, mais rien dans ces documents ne semble indiquer qu'une telle confrontation entre techniques a eu lieu.

La résolution de problèmes, principale raison d'être de la production d'équations, est travaillée dans les deux dernières séances de la séquence sur les équations. Les tâches travaillées pour introduire la résolution de problèmes sont là aussi extraites du manuel Horizon (voir figure 10.4 ci-après).

L'ancienne séquence de M2 comporte donc certaines tâches mathématiques relevant du même type ou genre de tâches que ceux proposés dans le PER chercheur, mais introduites dans un ordre différent et articulées entre elles autrement. Nous faisons l'hypothèse que la logique de M2 était la suivante lorsqu'il a construit cette ancienne séquence : le travail sur les propriétés de conservation de l'égalité (séance 2) prépare la résolution d'équations (séance 3) qui à son tour prépare la résolution de problèmes (séances 4 et 5).

Selon nous, mettre en œuvre le PER chercheur demande à M2 de modifier son ancienne séquence en agençant et en articulant les tâches mathématiques d'une manière différente pour faire ressortir autrement des raisons d'être à la production d'équation, à la technique de résolution algébrique et à la technique de résolution de problèmes, en accord avec les principaux éléments de la référence épistémologique relative aux équations. Cela lui demande aussi de faire travailler des genres de tâches ne figurant pas explicitement sur les fiches de préparation de M2, comme l'identification de la structure d'une équation pour guider l'intelligence des calcul, contrôler les transformations et vérifier l'adéquation entre une équation et un problème qu'elle modélise.

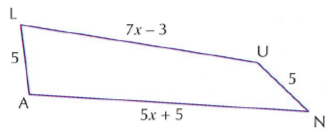
Nous notons également que l'ancienne séquence ne comporte pas de séances en salle informatique ou utilisant les outils TICE. M2 est néanmoins habitué à se rendre en salle informatique et possède une certaine expérience du tableur ou des logiciels de géométrie dynamique. Avant la mise en œuvre du PER, il n'avait cependant jamais utilisé de solveur d'équations ou le logiciel Thot ; nous avons dû lui donner des indications orales pour lui présenter ces outils. M2 n'a pas semblé rencontrer de difficulté particulière pour prendre en main ces nouveaux outils informatiques. Nous ne nous étendons pas sur ces échanges qui ont été succints, dont nous avons gardé peu de traces, et qui nécessiteraient potentiellement des développements théoriques sur l'intégration et l'utilisation des TICE par les enseignants pour être analysées en profondeur, car ceci n'est pas au cœur de notre thèse.

Mettre un problème en équation

A Le quadrilatère LUNA

Problème 1

Trouver la valeur de x pour que le quadrilatère LUNA soit un parallélogramme.



1. Quelles conditions doivent respecter les côtés de LUNA pour qu'il soit un parallélogramme ?

2. En déduire une équation qui permet de trouver la solution du problème.

B Les billes de Lucien et Loubna

Problème 2

Lucien a 6 paquets de billes plus 42 billes. Loubna avait 9 paquets de billes mais elle a perdu 3 billes. Lucien et Loubna s'aperçoivent qu'ils ont le même nombre de billes. Les paquets de billes sont tous identiques.
Combien y-a-t-il de billes dans un paquet ?

1. Que cherche-t-on à connaître dans cet exercice ?
On désigne par x ce nombre que l'on ne connaît pas.

2. Quelle phrase de l'énoncé exprime l'égalité de deux quantités ?
Quelles sont ces deux quantités ? Les exprimer en fonction de x.

3. En déduire une équation qui permet de trouver la solution du problème.

C Les SMS du mois de décembre

Problème 3

Candice, Lisa et Yohan comptabilisent le nombre de SMS envoyés au mois de décembre. Candice a envoyé 2 fois plus de SMS que Lisa, et Yohan a envoyé 12 SMS de moins que Lisa. À eux 3, ils en ont envoyés 96.
Combien chacun en a-t-il envoyé ?

1. Que cherche-t-on à connaître dans cet exercice ? Combien y-a-t-il de nombres que l'on ne connaît pas ? Choisir un de ces nombres et l'appeler x.

2. Exprimer les autres nombres que l'on ne connaît pas en fonction de x.

3. Quelle phrase dans l'énoncé exprime une égalité ? En déduire une équation qui permet de trouver la solution du problème.

4. Comparer les équations obtenues dans la classe.

Figure 10.4 – Tâches relevant de la résolution de problèmes (ancienne séquence de M2 sur les équations)

b. Gestion d'une séance dans l'ancienne séquence

Au regard des fiches de préparation de séances que M2 nous a fournies, nous inférons certaines régularités dans ses pratiques au niveau de la préparation et de la gestion d'une séance.

Chaque fiche de préparation commence par présenter le ou les objectifs de la séance ainsi que des « prérequis ». S'ensuit une description de ce que M2 appelle le « déroulement » de la séance. Ce déroulement comporte presque toujours les mêmes phases (nous réutilisons les termes employés par M2) :

1. Activité mentale (flash).
2. Correction de l'activité mentale.
3. Présentation d'une activité.
4. Recherche des élèves sur cette activité, avec liste des obstacles et difficultés attendus.
5. Mise en commun.
6. Institutionnalisation (trace écrite dans la leçon).
7. Exercices.

Pour chaque phase, un tableau à quatre colonnes précise ce que font les élèves et ce que fait l'enseignant dans cette phase, le dispositif éventuellement utilisé (exemple : outil TICE), et la durée prévue de la phase.

Nous cherchons à mettre en perspective ce « déroulement » avec les différentes phases pour la mise en scène des situations didactiques du PER chercheur en théorie des situations didactiques : pouvons-nous rapprocher ce que M2 appelle la « présentation d'une activité » de la phase de dévolution en théorie des situations didactiques ? la « recherche des élèves », de la phase d'action ? la « mise en commun », de la phase de formulation et de validation ? « l'institutionnalisation », de la phase d'institutionnalisation ?

10.2.2 Brève description de la mise en œuvre du PER professeur

Le PER professeur a été mis en œuvre par M2 durant sept heures, soit une heure de plus que le nombre d'heures prévu dans le PER chercheur. Ces sept heures ont été successives : M2 n'a pas « étalé » la séquence sur les équations en plusieurs blocs de séances séparés dans le temps. Une huitième heure a été utilisée pour l'évaluation sommative sur les équations.

De manière globale, M2 a suivi les trois étapes du PER chercheur : motivation de la production d'une équation pour résoudre un problème d'égalisation de programmes de calcul, motivation de la technique de résolution algébrique d'une équation, et résolution de problèmes divers à l'aide des équations. Cependant, PER chercheur et PER professeur présentent des écarts dûs à des choix de M2, à ses pratiques professionnelles, et à des contraintes du métier et du terrain. Ces écarts retiennent notre attention et font partie des éléments que nous analysons plus bas (section 10.3.2) et sur lesquels nous nous appuierons pour formuler des hypothèses relatives aux apprentissages mathématiques des élèves sur les équations et à l'évolution – ou l'absence d'évolution – des gestes qu'ils mobilisent en dehors de la classe durant leur étude personnelle (section 10.5).

Nous avons analysé les six premières heures de la séquence effective.

10.2.3 Echanges entre chercheur et enseignant pour la mise en œuvre du PER

Afin de faciliter la mise en œuvre du PER relatif aux équations, nous avons eu de nombreux échanges avec l'enseignant M2 avant et pendant la mise en œuvre – échanges téléphoniques, par mail, ou directs lorsque nous venions dans l'établissement de M2 pour le filmer ou filmer ses élèves. Nous avons donné beaucoup d'indications à M2 dans un langage qui n'était pas celui de la communauté des chercheurs. Par exemple, nous n'avons pas parlé des cadres et outils théoriques tels que nous en parlons dans le présent manuscrit. Dans cet esprit, nous avons fourni les énoncés des situations didactiques – que nous appelions « activités » quand nous discutions avec M2 – et des tâches mathématiques – appelées « exercices » ou « problèmes » – du PER chercheur sans les accompagner des analyses *a priori* telles que nous les avons rédigées dans cette thèse. Nous avons fourni à M2 des éléments d'analyse *a priori* mais dans un langage que nous voulions accessible pour un enseignant non familier avec la recherche en didactique des mathématiques.

Le texte ci-après donne au lecteur une idée des termes et de la précision avec lesquels nous avons fourni des indications à M2. Il s'agit d'indications écrites envoyées à M2 avant la mise en œuvre de la première séance du PER sur les équations.

Points importants pour la séance 1

Au début (avant le solveur), vraiment laisser les élèves chercher 5 minutes pour qu'ils se rendent compte de l'insuffisance des techniques utilisées dans les séances précédentes et en flashs.

Prendre vraiment en compte les procédures qui apparaissent et les hiérarchiser :

1) Procédure arithmétique : impossible à utiliser ici.

2) Procédures par essais/erreurs : revenir sur les égalités incorrectement enchaînées, les égalités « pas à pas », celles « en ligne » ; la technique n'aboutit pas non plus.

3) Les procédures pré-algébriques (écriture d'une équation mais sans lettre) doivent être mises en valeur même si elles n'aboutissent pas.

Une fois le solveur présenté, vraiment laisser les élèves produire une équation : demander d'abord de la faire écrire sur leurs cahiers avant d'autoriser les propositions. Circuler dans les rangs pendant qu'ils écrivent et là encore, repérer puis hiérarchiser les procédures (présenter ces procédures si elles apparaissent et ce, pendant la mise en commun) :

1) Elèves qui ne produisent pas de lettres (impossible à rentrer dans le solveur)

2) Elèves qui ne produisent pas d'équations (égalité non prise en compte, impossible à mettre dans le solveur car il faut une égalité)

3) Elèves qui utilisent plusieurs inconnues et/ou plusieurs égalités (questionner ce que représentent les lettres et quelles sont celles qui désignent les mêmes quantités ; impossible à mettre dans le solveur car il faut une seule inconnue)

4) Elèves qui produisent une équation mais avec erreurs sur la traduction algébrique de l'énoncé (revenir sur la structure et l'interprétation des expressions en lien avec les données du problème)

5) Quand une équation semble être trouvée (mais que ce n'est pas la bonne), si la solution donnée par le solveur est facilement « testable », la tester pour l'invalider ; sinon, revenir sur la structure et l'interprétation des expressions

N'écrire la leçon que si le temps le permet. Prioritairement faire un ou deux exercices du même type en classe avant de donner d'autres mêmes types à faire hors la classe. Dans la leçon, mettre « équation du premier degré à une inconnue » mais expliquer seulement oralement ce que signifie « premier degré » avec les puissances

Une fois le ou les exercices en classe résolus, impérativement utiliser la fiche méthode : nommer le type d'exercices (« programmes à égaliser » par exemple), associer à ce type la production d'une équation, mettre les références des cahiers.

Si un exercice avec parenthèses a été vu en classe, bien mettre en évidence les différences entre cet exercice et un exercice sans parenthèses : qu'est-ce qui change dans l'énoncé ? (ordre des indications du programme de calcul) qu'est-ce que cela implique dans la production des équations ? (présence de parenthèses ; faire le lien avec la structure et les priorités opératoires)

Ne pas hésiter à prévoir 2h : faire des exercices du même type avec parenthèses la 2ème heure, faire des exercices du type « tester si un nombre est solution », faire les exercices réciproques (écrire un problème de PC à égaliser à partir d'une équation), et leçon.

Le lecteur l'aura constaté, ces indications contiennent certains éléments présentés au chapitre neuf sur le PER chercheur : motivation des tâches mathématiques, procédures attendues, hiérarchisation et limites de ces procédures, réactions possibles de l'enseignant face à l'apparition de ces procédures, praxéologies d'étude à développer, etc. Toutefois, des implicites demeurent, notamment sur la manière d'utiliser la « fiche méthode » qui est évoquée dans ces indications : il s'agit d'un outil que nous avons proposé à M2 pour l'inciter à travailler les praxéologies d'étude (identifier un type de tâches, mettre en relation des tâches du même type ou une tâche avec une technique et une technologie). Nous revenons plus loin sur le contenu de cette fiche et sur la manière dont M2 l'a effectivement utilisée sur le terrain. Nous constaterons que les implicites que nous avons laissés sur l'emploi de cet outil se sont fortement retrouvés en classe.

Nous rappelons que les « flashs » font référence aux courtes tâches mathématiques de début d'heure (parfois appelées « calculs mentaux » ou « activités mentales » par la communauté enseignante, même si elles ne sont pas nécessairement « mentales »).

Avec ces indications, nous avons donné à M2 un autre document (voir annexe page 625) contenant les énoncés des tâches mathématiques et de la situation didactique à faire travailler aux élèves en amont de la séquence et pendant la séance 1.

Bien que nous lui ayons demandé son avis de praticien sur le PER chercheur, M2 n'a pas « négocié » sa mise en œuvre dans le sens où il a écouté toutes nos indications et accepté de mettre en scène toutes les situations didactiques et bon nombre de tâches mathématiques du PER chercheur, sans volonté apparente de les modifier.

10.2.4 Des documents d'aide à la préparation de l'évaluation

Lors de la septième séance du PER professeur, l'enseignant M2 a distribué aux élèves des documents pour les aider à préparer l'évaluation. Nous n'avons pas échangé avec l'enseignant sur l'utilisation de ces documents ; M2 nous a dit les avoir distribués aux élèves en leur demandant de les utiliser, mais il n'a pas réalisé un travail spécifique sur ces documents en classe.

Ces documents sont lisibles en annexe (page 757). Nous les présentons brièvement ici.

Le premier document présente à l'élève des tableaux qui suggèrent des techniques d'étude pour travailler sur les cahiers de leçons et d'exercices. Par exemple, pour « revoir la méthode pour résoudre une équation » inscrite dans le cahier de leçons, le document propose à l'élève « d'appliquer la méthode en résolvant des équations (par exemple ceux du cahier d'exercices) ».

Pour aider l'élève à choisir des tâches mathématiques sur lesquelles s'entraîner, un second document suggère une liste de quatre tâches relevant des principaux genres de tâches mathématiques relatifs aux équations et qui ont été demandés lors de l'évaluation écrite : tester si un nombre est solution d'une équation, résoudre algébriquement des équations (sans et avec produits parenthésés), résoudre un problème d'égalisation de programmes de calcul, résoudre un problème d'égalisation de périmètres de figures dynamiques. Cette liste s'accompagnait de corrections très détaillées : le type dont relevait chaque tâche était identifié, la technique et les éléments technologiques nécessaires à sa résolution étaient explicitement rappelés, et la réalisation intégrale de la tâche avec une rédaction précise était proposée.

Ces documents s'étendaient sur quatre pages (recto), avec une grande quantité de textes à lire, et nous avions conscience des difficultés que cela pouvait poser aux élèves. Selon nous, une informatisation de tels documents, sous un format différent, autrement structuré et plus interactif, permettrait de faciliter leur utilisation hors la classe par l'élève. Il s'agit d'une perspective de recherche sur laquelle nous reviendrons dans le chapitre onze.

10.3 Analyse *a posteriori* de la mise en œuvre du PER relatif aux équations : côté enseignant

Nous analysons à présent dans cette section la manière dont M2 a mis en œuvre le PER chercheur relatif aux équations.

10.3.1 Eléments méthodologiques

Dans le chapitre cinq, nous avons développé un modèle théorique de l'étude personnelle et opérationnalisé ce modèle pour réaliser les analyses *a posteriori* du présent chapitre. Deux niveaux sont considérés : les OM enseignées et les praxéologies d'étude travaillées. En surplomb, nous analysons également la gestion et l'organisation didactique de l'enseignant pour le travail des OM et des praxéologies d'étude.

a. Analyse de l'OM enseignée

Pour analyser l'OM enseignée relative aux équations en classe à travers la mise en œuvre par l'enseignant M2 du PER sur les équations, nous reprenons les questions posées dans le chapitre huit pour l'analyse praxéologique de l'OM à enseigner dans les manuels :

- Lors des moments de première rencontre avec les principaux types de tâches relatifs aux équations, à savoir ceux relevant de la mise en équation d'un problème et de la résolution algébrique d'une équation, les types de tâches en question et le recours aux équations sont-ils motivés ? Quel est le statut de la lettre : variable ou inconnue ? Comment l'enseignant gère-t-il les conversions de registres de représentation sémiotique ?
- Lors des moments de l'élaboration des techniques de mise en équation et de résolution algébrique d'équations et de l'élaboration des environnements

technologico-théoriques correspondants, les techniques sont-elles motivées ? Les environnements technologico-théoriques (propriétés de conservation de l'égalité, discours pratiques pour guider l'intelligence des transformations) sont-ils clairement dégagés ?

– Lors des moments du travail des techniques de mise en équation et de résolution algébrique des équations, les types de tâches proposés continuent-ils de motiver le recours à ces techniques ? Quels moyens de contrôle (test numérique d'une égalité par substitution, preuve de l'équivalence des équations) sont présentés ? Quels discours, pratiques et théoriques, justifient et guident les techniques employées ? En particulier, les discours relevant de la composante pratique de la technologie justifiant la technique de résolution algébrique d'une équation sont-ils présents et s'accompagnent-ils, au moins au départ, de discours théoriques (propriétés de conservation de l'égalité) ? Quel poids est accordé à chaque OM locale de l'OM de référence relative aux équations ?
– Lors des moments d'institutionnalisation, quelle définition des équations est donnée, avec quel vocabulaire ? Quelles techniques et quelles technologies (composantes pratique et théorique) sont explicitement désignées comme « à retenir » ?

Nous utilisons également les codages présentés au chapitre cinq dans le modèle théorique de l'étude personnelle pour analyser les OM enseignées. Ces codages nous servent de critères pour répondre en partie aux questions posées ci-avant.

Avant de rappeler ces codages, nous redonnons les genres de tâches relatifs aux équations que nous avons choisis de retenir dans nos analyses, compte tenu du fait que les autres genres de tâches comme identifier le degré d'une équation ou dénombrer les solutions d'une équation ne relèvent pas de la classe de quatrième :

– $T_{Mettre-en-equation}$: Mettre un problème en une équation
– $T_{Traduire_{eq}}$: Traduire un problème en une équation ou réciproquement
– $T_{Associer_{eq}}$: Associer un problème à une équation ou réciproquement
– $T_{Rsoudre}$: Résoudre algébriquement une équation
– $T_{Prouver-equivalence_{eq}}$: Prouver que deux équations sont équivalentes
– $T_{Tester-sol}$: Tester si un nombre est solution d'une équation
– $T_{Structure_{eq}}$: Identifier la structure d'une équation

Nous rappelons maintenant la liste des codages utilisés pour les analyses :

1. $T1$: Le genre de tâches mathématique T est explicitement travaillé.

2. $T0$: Le genre de tâches mathématique T n'est pas explicitement travaillé alors que l'étude de T favorise la construction d'un rapport personnel idoine aux équations d'après la référence épistémologique sur les équations.
3. $\tau_T 1$: La technique pour réaliser un type de tâches relevant d'un genre de tâches T est explicitée (exemple : « Pour répondre à ce problème, on le traduit par une équation »).
4. $\tau_T 0$: La technique pour réaliser un type de tâches relevant d'un genre de tâches T n'est pas explicitée (exemple : l'enseignant résout un problème en le traduisant par une équation sans expliciter cette technique).
5. $\theta^{th}_{\tau_T} 1$: La composante théorique de la technologie mobilisée pour justifier la technique permettant de réaliser le type de tâches relevant de T est explicitée (exemple : l'ensiegnant cite la propriété, le théorème ou la définition utilisée dans l'application de la technique). Autrement dit, il y a appui sur cette composante théorique pour justifier la technique utilisée.
6. $\theta^{th}_{\tau_T} 0$: La composante théorique de la technologie mobilisée pour justifier la technique permettant de réaliser le type de tâches relevant de T n'est pas explicitée.
7. $\theta^{p}_{\tau_T} 1$: La composante pratique de la technologie mobilisée pour justifier la technique permettant de réaliser le type de tâches relevant de T est explicitée. Autrement dit, les éléments pratiques qui guident la mise en œuvre de cette technique sont détaillés. type de tâches relevant de T n'est pas explicitée.
8. $\theta^{p}_{\tau_T} 0$: La composante pratique de la technologie mobilisée pour justifier la technique permettant de réaliser le type de tâches relevant de T n'est pas explicitée.
9. Nous nous intéressons de plus aux responsabilités laissées à l'élève : qui de lui ou de l'enseignant prend majoritairement en charge la réalisation du type de tâches relevant T, l'explicitation de τ_T et de θ_{τ_T} ? Pour cela, nous ajoutons les codes suivants :
   (a) C-élève 1 (suivi de T, respectivement de τ_T, respectivement de θ_{τ_T}) : l'élève prend majoritairement en charge la réalisation du type de tâches T, respectivement explicite une technique pour réaliser ce type de tâches, respectivement explicite une technologie pour justifier ou guider la mise en œuvre d'une technique.
   (b) C-élève 0 (suivi de T, respectivement de τ_T, respectivement de θ_{τ_T}) : l'enseignant prend majoritairement en charge la réalisation du type de

tâches T, respectivement explicite une technique pour réaliser ce type de tâches, respectivement explicite une technologie pour justifier ou guider la mise en œuvre d'une technique.

Ces codages facilitent le comptage et la présentation de données sous forme de graphiques lisibles pour le lecteur. Nous illustrerons longuement la manière dont nous utilisons ces codages.

b. Analyse des praxéologies d'étude travaillées

En parallèle des OM enseignées, nous analysons les praxéologies d'étude travaillées. Nous rappelons que les genres de tâches d'étude supposées permettre une étude personnelle idoine sont les suivants :

- $Hidt_T$: À partir d'une tâche mathématique, identifier le type de tâches T correspondant.
- $Hidt_\tau$: Identifier une technique mathématique comme telle.
- $Hidt_\theta$: Identifier une technologie mathématique comme telle.
- $Hrel$: Mettre en relation un type de tâches avec des tâches du même type, avec des techniques pour le réaliser et des technologies justifiant ces techniques.
- $Hsit$: Situer et articuler les OM étudiées entre elles. Plus précisément, situer et articuler d'une part les OM récentes et nouvelles entre elles, d'autre part les OM récentes et nouvelles par rapport à d'anciennes OM qu'elles font intervenir.

Lorsqu'un genre de tâches d'étude est pédagogique et non didactique, c'est-à-dire ne prenant pas en compte les spécificités de la discipline, du domaine, du secteur ou du sujet d'étude, il est codé $Hgen$.

Nous analysons les praxéologies d'étude travaillées à l'aide des codages ci-dessous :

1. $H1$: Le genre de tâches d'étude H est explicitement travaillé à travers l'étude des OM enseignées.
2. $H0$: Le genre de tâches d'étude H n'est pas explicitement travaillé à travers l'étude des OM enseignées.
3. $\tau_H 1$: Une technique d'étude pour réaliser H est explicitée.
4. $\tau_H 0$: Aucune technique d'étude pour réaliser H n'est explicitée.
5. Nous nous intéressons de plus aux responsabilités laissées à l'élève : qui de lui ou de l'enseignant prend majoritairement en charge la réalisation du genre de

tâches d'étude H et l'explicitation d'une technique d'étude τ pour le réaliser ? Pour cela, nous ajoutons les codes suivants :

(a) C-élève 1 (suivi de H, respectivement de τ_H) : l'élève prend majoritairement en charge la réalisation de H, respectivement explicite une technique d'étude pour réaliser H.

(b) C-élève 0 (suivi de H, respectivement de τ_H) : l'enseignant prend majoritairement en charge la réalisation de H, respectivement explicite une technique d'étude pour réaliser H.

c. Analyse de la gestion et de l'organisation didactique de l'enseignant

Les OM enseignées et les praxéologies d'étude travaillées sont analysées en fonction des moments de l'étude des types ou genres de tâches mathématiques étudiés. Selon le moment de l'étude, nous ne nous attendons pas à voir apparaître certains codages, et inversement. Par exemple, dans le moment de l'étude d'élaboration de la technique, l'absence d'explicitation d'éléments technologico-théoriques ou une faible prise en charge de l'explicitation de cette technique par les élèves ne sont pas étonnantes.

Nous rappelons que nous utilisons les codages suivants pour analyser la gestion didactique de l'enseignant relativement à l'étude personnelle des élèves.

1. Quelle dévolution des types de tâches à réaliser (en classe ou hors classe) l'enseignant effectue-t-il ?
   (a) **D1** : L'enseignant initie l'étude autonome : *a minima*, il lit l'énoncé avec les élèves ; il peut donner des pistes de recherche, réaliser une tâche du même type que celui demandé, ...
   (b) **D0** : L'enseignant n'initie pas l'étude autonome : l'énoncé est donné aux élèves et ceux-ci doivent se lancer directement dans la recherche.
2. Comment se caractérise les phases de recherche en autonomie des élèves ?
   (a) L'enseignant laisse un temps de recherche aux élèves. Dans ce cas :
      i. **A11** : L'enseignant est en retrait.
      ii. **A10** : L'enseignant interagit avec les élèves (A10).
   (b) **A0** : L'enseignant ne laisse pas de temps de recherche individuelle aux élèves (A0).
3. Comment l'enseignant prend-il en compte ce que font les élèves pendant la recherche (en classe ou hors classe) ?

(a) **V1** : L'enseignant vérifie que le travail effectué en autonomie est bien réalisé.

(b) **V0** : L'enseignant ne vérifie pas que le travail effectué en autonomie est bien réalisé.

(c) L'enseignant corrige le travail réalisé en autonomie. Dans ce cas :

   i. **C111** : Il présente plusieurs procédures possibles et les hiérarchise selon une logique explicite.

   ii. **C110** : Il présente plusieurs procédures mais ne les hiérarchise pas selon une logique explicite.

   iii. **C100** : Il ne présente qu'une procédure correcte.

(d) **C0** : L'enseignant ne corrige pas le travail effectué en autonomie.

4. Comment l'enseignant mène-t-il les phases d'institutionnalisation ?

(a) L'enseignant réalise des phases d'institutionnalisation, qui sont notamment des occasions de faire travailler les praxéologies d'étude. Une phase d'institutionnalisation est un récapitulatif des procédures utilisées, avec une synthèse des explications sur le pourquoi de la réussite de certaines procédures et de l'échec des autres. Dans ce cas :

   i. L'institutionnalisation porte sur les OM mais aussi sur les praxéologies d'étude.

      A. **I111** : Cette institutionnalisation se traduit majoritairement par une trace écrite.

      B. **I110** : L'institutionnalisation demeure majoritairement orale.

   ii. L'institutionnalisation porte uniquement sur les OM.

      A. **I101** : Cette institutionnalisation se traduit majoritairement par une trace écrite.

      B. **I100** : Cette institutionnalisation demeure majoritairement orale.

(b) **I0** : L'enseignant n'effectue pas d'institutionnalisation.

Dans les sous-sections qui suivent, dans un premier temps, nous analysons de manière détaillée la séance 1 du PER professeur relatif aux équations à l'aide de la grille de questions indiquée plus haut, des codages, et comparativement au PER chercheur. Le temps en minutes et secondes donné entre parenthèses en début de paragraphe indique à quel moment de la séance l'événement décrit a lieu (0 min étant le début de la séance, 55 min la fin). En gras et entre crochets, nous indiquons les codages que nous avons choisi d'associer aux OM et praxéologies d'étude travaillées et à la gestion didactique de l'enseignant. Parfois, ces codages sont présents dans le texte, parfois dans les extraits de transcription, pour faciliter la lecture et éviter les lourdeurs dans notre présentation des analyses. Cette analyse détaillée n'est pas synonyme d'analyse intégrale ; en effet, une analyse intégrale supposerait d'inclure l'entière transcription de la séance 1 pour pouvoir expliquer tous les codages employés pour cette transcription. Nous avons fait le choix de ne présenter que des parties de transcriptions, suffisamment pour que le lecteur rencontre un ensemble significatif de codages et comprenne l'utilisation que nous avons fait de ces codages pour l'analyse des OM et praxéologies d'étude travaillées et de la gestion didactique de l'enseignant M2.

Dans un second temps, nous exposons une synthèse des analyses des cinq autres séances, à l'aide de graphiques et de commentaires.

10.3.2 Analyse détaillée de la séance 1 du PER professeur

a. Tâches préparatoires : travail de la technique de résolution d'équations arithmétiques par opérations réciproques

(0 min) La séance débute par deux tâches du même type : les élèves doivent résoudre mentalement des équations arithmétiques de la forme $ax + b = c$ ou $a(x + b) = c$ d'inconnue x.

M2 lit l'énoncé **[D1]** de la première tâche (« Compléter l'égalité $3 \times ... + 7 = 28$ pour qu'elle soit vraie »). Puis il réalise le geste d'aide à l'étude suivant :

> *« [...] vous me complétez les pointillés / trois fois combien plus sept égal vingt-huit /* ***rappelez-vous de ce qu'on a déjà fait*** *»*

Nous considérons que cet appel à la mémoire relève d'une praxéologie d'étude générale **[Hgen]** car M2 ne met pas explicitement en relation une tâche mathématique *précise* avec la tâche à réaliser **[Hrel 0]**. M2 aurait pu identifier ou demander aux élèves d'identifier le type de tâches parent de la tâche proposée **[H**idt_T **0]**[1].

En revanche, pour la deuxième tâche (« Pour quelle valeur de n l'expression $2 \times (n + 1)$ est-elle égale à 9 ? »), cette mise en relation est plus explicite car elle se réfère à la tâche qui vient juste d'être réalisée et M2 met en avant un changement de

1. Nous ne précisons pas avec un codage particulier qui est T ici car il ne s'agit pas d'un genre de tâches relatif aux équations algébriques non arithmétiques.

valeur dans une variable didactique (présence d'une lettre à la place des pointillés) **[Hrel 1]** :

> « *Allez* ***c'est la même chose sauf qu'à la place des pointillés j'ai mis une / lettre*** »

Toutefois, M2 n'identifie pas ou ne fait pas identifier le type de tâches dont relève la tâche prescrite **[H**idt_T **0]** et n'explicite pas une technique d'étude qui lui a permis de faire la mise en relation entre cette tâche et celle d'avant **[**τ_{Hrel} **0]**.

Pour la première tâche, les élèves ont été laissées dans une phase de recherche en autonomie, où M2 n'était pas sollicitable **[A11]**. Durant ce temps, M2 ne circule pas dans la salle pour prendre des informations sur l'étude personnelle qui se déroule **[V0]**. En revanche, pour la seconde tâche, M2 a été sollicité et a répondu à des questions portant sur la tâche prescrite **[A10]**, et a observé durant la recherche les procédures utilisées par les élèves **[V1]**.

Lors de la correction des deux tâches, M2 donne la parole à des élèves volontaires et prend en compte plusieurs procédures utilisées (technique de résolution arithmétique par opérations réciproques, techniques par essais/erreurs), sans hiérarchie apparente **[C110]** (M2 interroge les élèves qui lèvent la main, sans avoir au préalable identifié les procédures utilisées). M2 s'appuie sur la structure des équations pour expliciter la technique de résolution par opérations réciproques (ou remontée arithmétique). Par exemple, voici les explications de M2 pour la résolution de l'équation $3 \times ... + 7 = 28$ à partir de la réponse donnée par un élève :

> « *tu t'es dit trois fois quelque chose plus sept est égal vingt-huit / donc il faudrait que je cherche trois fois quoi égal vingt-et-un / parce que toi tu te souvenais que vingt-et-un plus sept égal vingt-huit* ».

M2 ne réalise pas de phase d'institutionnalisation à la fin de la correction des deux tâches **[I0]**.

Ces tâches préparent partiellement la motivation du type de tâches « Mettre un problème algébrique d'égalisation de programmes de calcul en équation » (OML_q1) dont la réalisation nécessite la production d'une équation algébrique de la forme $ax+b = cx+d$ avec a, b, c, d « bien choisis » : la technique par remontée arithmétique ne pourra plus être utilisée pour résoudre de telles équations algébriques.

Cependant, contrairement aux types de tâches préparatoires suggérés dans le PER chercheur, les tâches proposées par M2 dans le PER professeur ne font travailler ni la traduction dans le registre des écritures algébriques d'un problème donné dans le registre des programmes de calcul, ni la technique de résolution par essais/erreurs qui, d'après la référence épistémologique relative aux équations, peut continuer d'être utilisée par les élèves persévérant dans l'utilisation de technologies arithmétiques. Selon nous, les tâches proposées par M2 en ce début de séance préparent moins le moment de la première rencontre avec le type de tâches « Résoudre un problème algébrique d'égalisation de programmes de calcul » que les types de tâches proposés dans le PER chercheur.

Toutefois, M2 aurait proposé lors des séances précédentes à ses élèves des types de tâches [2] similaires à ceux du PER chercheur, puisqu'au moment où il présente la situation didactique (problème d'Alice et Bertrand, voir ci-après), il dit :

> *« ça devrait vous rappeler quelque chose on a déjà fait ça en calcul mental le cours dernier et le cours encore avant [...] il y a deux programmes de calcul lisez bien le texte c'est exactement la même chose que lors des questions flashs* [3] *»*

Dans ce nouvel appel à la mémoire, M2 aurait pu identifier (ou faire identifier par les élèves) les types de tâches en jeu **[H**idt_T **0]** et les tâches précises mises en relation **[Hgen] [Hrel 0]**.

b. Moments de première rencontre avec le type de tâches « Résoudre un problème algébrique d'égalisation de programmes de calcul », de l'élaboration de la technique et de l'environnement technologico-théorique

(8 min 25) Conformément au PER chercheur, M2 propose aux élèves la situation fondamentale du problème d'Alice et Bertrand **[**$T_{Mettre-en-equation}$ **1]** (voir chapitre dix), qui relève de $OML1_q$ (mettre un problème en équation) et $OML3_q$ (résoudre algébriquement une équation) et dont nous rappelons l'énoncé :

Voici deux programmes de calcul :

PROGRAMME A

- Choisir un nombre
- Le multiplier par 9
- Soustraire 4 au résultat

2. Nous n'avons pas eu accès à ces types de tâches.

3. Les questions flashs se rapportent aux tâches courtes que beaucoup d'enseignants de mathématiques ont pour habitude de donner à réaliser en début de séance.

PROGRAMME B

– Choisir un nombre
– Le multiplier par 2
– Ajouter 1 au résultat

Alice et Bertrand choisissent un même nombre de départ. Alice teste le programme A et Bertrand teste le programme B. Alice et Bertrand s'aperçoivent qu'ils trouvent le même résultat final. Quel nombre de départ ont-ils choisi ?

M2 ne présente pas les enjeux de la situation et ne s'assure pas que les élèves ont compris l'énoncé (par exemple en leur faisant reformuler la consigne). Ceci peut peut-être s'expliquer par le fait que le type de tâches a déjà été travaillé dans les séances précédentes, comme le rappelle M2 lorsqu'il dévolue la situation :

> « *Je vous distribue une activité que vous allez lire et que vous allez commencer / hé / vous avez cinq minutes pour la faire / ça devrait vous rappeler quelque chose on a déjà fait ça en calcul mental le cours dernier et le cours encore avant* ***[D1]*** *// c'est avec des programmes de calcul [...] il y a deux programmes de calcul lisez bien le texte en dessous c'est exactement la même chose que lors des questions flashs* »

(9 min 18) Les élèves sont laissés dans une phase de recherche où M2 est sollicitable (et sollicité) **[A10]**. Cette fois, M2 circule dans la salle pour prendre des informations sur les procédures des élèves **[V1]**.

(13 min 35) Lors de la première mise en commun, deux élèves font des propositions pour répondre à la question posée (l'un a testé les deux programmes avec un nombre, l'autre a fait de même avec un autre nombre). Ces propositions relèvent de la technique par essais/erreurs. Cette technique n'est pas identifiée comme telle par M2 **[H***idt*$_\tau$ **0]**[4]. Les limites de cette technique, bien qu'effectivement atteintes en classe, ne sont pas explicitement mises en avant en tant que limites par M2, qui aurait pu saisir l'occasion de situer d'anciennes OM (calcul numérique) avec les nouvelles (équations) **[Hsit 0]**.

À la fin de cette première mise en commun, M2 propose d'avoir recours à la lettre pour avancer dans la résolution, en appui sur une procédure qu'il aurait remarquée

4. Nous ne précisons pas τ avec un codage particulier car cette technique ne relève pas de l'OM de référence relative aux équations algébriques non arithmétiques.

durant la phase de recherche des élèves :

> « *[...] j'ai vu quelqu'un dans la classe / qui a mis une lettre / à la place d'un / choisir un nombre cette personne a mis une lettre / et a / essayé de regarder ce qui se passait quand je mettais une lettre / m'a écrit une expressions littérale / m'a traduit ces deux programmes de calcul avec une expression littérale comme on avait fait en question flash / et pour le moment ça ne l'a pas trop avancé / mais elle est pas loin de trouver la solution grâce à mon aide / donc je vous conseille de l'imiter / essayez de me traduire le programme A et le programme B par une ? / par une ? / expression littérale* ».

Cependant, ce début de technique de mise en équation ne semble pas motivé (ce qui est peut-être dû à l'absence d'une phase d'institutionnalisation qui aurait pu avoir lieu à cet instant **[I0]** et aurait permis cette motivation) : pourquoi recourir à une lettre et à des expressions littérales ? D'ailleurs, c'est ce qu'un élève, Samuel, fait remarquer pendant la nouvelle phase de recherche qui suit cette première mise en commun et où les élèves doivent traduire les programmes de calcul en expressions littérales :

> « *Monsieur je trouve rien / je trouve des expressions une formule mais je trouve rien* ».

Dans le PER chercheur, la présentation du solveur d'équations a lieu *avant* la phase de recherche où les élèves doivent produire une équation, afin de motiver cette production. Nous nous interrogeons sur la présentation tardive du solveur d'équations par M2 vis-à-vis de la motivation de la production d'équation.

(18 min 06) Les élèves sont à nouveau en autonomie, M2 n'est pas sollicitable **[A11]** et circule dans la classe pour observer ce que font les élèves **[V1]**.

(19 min 29) Dans la seconde mise en commun, les programmes de calcul sont traduits en expressions littérales. M2 interroge des élèves pour effectuer cette traduction. L'un d'entre eux propose les expressions $n \times (9-4)$ et $n \times (2+1)$ pour traduire respectivement les programmes A et B ; un autre élève propose de ne pas utiliser de parenthèses dans ces expressions. M2 prend en compte ces propositions sans les hiérarchiser **[C110]** et rappelle le rôle des parenthèses dans les priorités opératoires **[Hsit 1], [τ_{Hsit}0]**. Nous remarquons que M2 aurait pu (faire) contrôler l'adéquation entre les expressions produites et les programmes de calcul, par exemple en effectuant un test numérique (substitution) ou en appui sur la structure des expressions. Nous faisons cette remarque car par la suite, nous allons constater

que M2 contrôlera peu les mises en équation ($OML1_q$) ou les résolutions d'équation ($OML2_q$) à l'aide du test numérique ou de l'identification de la structure des équations ($OML3_q$). Nous interrogeons cette faible articulation des trois OM locales de l'OM de référence épistémologique relative aux équations.

M2 insiste cependant sur le fait que les deux programmes de calcul sont à égaliser, pour aboutir à la production d'une équation, comme le montre l'extrait suivant :

> – *M2 : [...] vous êtes d'accord qu'on veut que / le programme / le résultat du programme A ce soit le même que le résultat du programme B / on est d'accord // donc on veut que neuf fois n moins quatre soit égal à ?*
>
> – *Samuel : Hé / les équations*
>
> – *M2 : À quoi ? / (M2 écrit l'égalité $n \times 9 - 4 = n \times 2 + 1$* ***sans attendre de réponse*** **[$\tau_{T_{Mettre-en-equation}}$0], [C-élève 0 $\tau_{T_{Mettre-en-equation}}$]** *, mais il semble avoir entendu l'élève Samuel et le pointe du doigt) les quoi ? / les quoi ?*
>
> – *Samuel : Les équations*
>
> – *M2 : Et c'est quoi une équation ?*
>
> – *Samuel : C'est ça ce que vous venez de faire*
>
> – *M2 : Ouais mais*
>
> – *Samuel : (inaudible)*
>
> – *M2 : Mais c'est quoi une équation ? /* ***allez une définition c'est quoi une équation ?*** **[H$idt_{\theta^{th}_{\tau_{T_{Mettre-en-equation}}}}$ 1]**
>
> – *Un élève : (inaudible)*
>
> – *M2 : Non / c'est quelque chose qui est égal à quelque chose ok / hé /* ***une équation c'est une expression littérale qui est égale à une autre*** **[$\theta^{th}_{\tau_{T_{Mettre-en-equation}}}$ 1]** *et on va surtout chercher pour quelle valeur de (M2 montre les lettres n au tableau) / la lettre / ici n / cette équation est / est / égale / est vraie / est vérifiée [...] ça c'est une équation (M2 montre l'égalité $n \times 9 - 4 = n \times 2 + 1$ au tableau) / il y a un membre de gauche un membre de droite séparés par une égalité d'accord ?* »

Durant l'élaboration de l'environnement technologico-théorique qui est en train de se dérouler dans cet extrait, nous nous interrogeons sur la possibilité qu'ont les élèves de répondre si rapidement à la demande de M2 de donner une définition d'une équation, dont la production n'est toujours pas motivée. Peut-être que le fait que le terme « équation » ait été prononcé par l'élève Samuel a poussé M2 à saisir l'occasion de construire immédiatement l'élément technologique « définition d'une équation ».

Par la suite, M2 ne reviendra pas sur la technique de résolution par opérations réciproques, valable pour résoudre des équations arithmétiques mais insuffisante pour résoudre les équations algébriques comme celle qui vient d'être produite **[Hsit 0]**. En termes d'alternative, ceci aurait permis à M2 de travailler explicitement sur la structure de l'équation ($OML3_q$) **[$T_{Structure_{eq}}$ 0]**, qui présente une inconnue dans les deux membres, et de mettre en avant l'insuffisance de la technique par opérations réciproque travaillée en début de séance durant les calculs mentaux, ce qu'il ne fait pas.

Remarquons que le vocabulaire employé par M2 à propos de la définition d'une solution d'une équation n'est pas toujours correct d'un point de vue mathématique : une équation n'est ni « égale » ni « vraie ».

Peu après les échanges ci-dessus, le statut du signe égal est discuté :

> *« – M2 : [...] est-ce que ce signe égal me dit que ça c'est forcément égal à ça ? / pour toutes les valeurs de n ? »*
>
> *– Elèves : Non*
>
> *– M2 : Ben non on vient de prouver que pour deux valeurs de n ce n'était pas vrai / si on se permet d'écrire le signe égal ici / c'est parce que en effet n fois neuf moins quatre ça va être égal à n fois deux plus un / mais pas pour toutes les valeurs de n on va devoir trouver la bonne valeur de n*

Cependant, M2 ne met pas explicitement en avant le fait que le statut de l'égalité est dans le cas présent différent de celui rencontré par les élèves à l'école primaire (annonce d'un résultat) ou en classe de cinquième (identité, comme dans la propriété de distributivité) **[Hsit 0]**.

(26 min 30) Après avoir introduit la définition d'une équation et répondu à quelques questions d'élèves, M2 présente un solveur d'équations à l'aide d'un vidéo-projecteur (le solveur en question [5] se présente sous la forme d'une calculatrice, avec une touche « Résoudre » ; voir figure 10.5) :

> *– M2 : Je vais utiliser ce qu'on appelle un solveur d'équations [...] je vais taper / mon équation là-bas / mon équation me dit que c'est quelle lettre ?*
>
> *– Un élève : n*

5. Ce solveur, gratuit à l'époque où M2 a mis en œuvre le PER, est désormais payant. Il est disponible à l'adresse suivante : http ://equationsolver.intemodino.com/fr/resolution-d-equations-du-premier-degre-a-une-inconnue.html

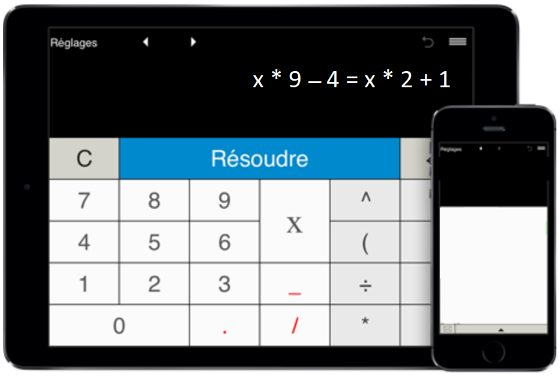


FIGURE 10.5 – Solveur d'équations utilisé par M2 à la séance 1

– *M2 : Mais si j'utilise a ou si j'utilise b ou si j'utilise c est-ce qu'ici ça change quelque chose ?*

– *Elève : Non (M2 commence à taper l'équation dans le solveur : $x*9-4$) / pourquoi il y a une étoile ?*

–*M2 : Parce que sur ce logiciel l'étoile c'est le fois (M2 complète l'équation : $x*9-4=x*2+1$) / et donc là j'appuie sur ? (M2 met son curseur sur la touche « Résoudre » du solveur)*

– *Plusieurs élèves : Résoudre (M2 appuie sur la touche ; une résolution algébrique de l'équation apparaît à l'écran, en détaillant les étapes de résolution et en affichant la solution exacte et une valeur approchée de cette solution)*

– *M2 : Alors attendez je vous explique ce qu'il y a écrit en dessous la solution tout ça on s'en fiche / ce qui va nous intéresser c'est juste ça (M2 surligne : $x=\frac{5}{7}$ et la valeur approchée 0,7142857)*

– *Samuel : C'est cinq septièmes*

– *M2 : Merci / hé / si je résous une équation c'est peut-être pour avoir la valeur exacte*

La définition du verbe « Résoudre » est pour l'instant laissée implicite par M2 $[\theta^{th}_{\tau_{T_{Resoudre}}}$ **0**], qui l'utilise sans l'expliquer. C'est aux élèves d'inférer la définition. Nous questionnons la présence de cet implicite dans les moments – car ils ont lieu quasi-simultanément – de première rencontre et d'élaboration de l'environnement technologico-théorique. Nous nous interrogeons également sur l'argument donné par

M2 à propos de la valeur exacte de la solution : pourquoi la résolution d'une équation nécessite-t-elle de donner une solution exacte ? M2 aurait pu mettre en perspective les caractéristiques de la résolution algébrique avec le fait que la solution, $\frac{5}{7}$, est presque impossible à trouver à l'aide de la technique par essais/erreurs ; il aurait également pu expliquer que la valeur approchée fournie par le solveur n'est pas solution de l'équation **[Hsit 0]**.

M2 termine cette phase de mise en commun en demandant aux élèves si le solveur est fiable :

– *M2 : Qu'est-ce qu'il faut faire pour être sûr ?*

– *Un élève : Il faut vérifier*

– *M2 : Oui / alors / cinq septièmes fois neuf moins quatre / quarante-cinq septièmes (M2 commence à écrire le calcul au tableau)*

Ici, de manière ponctuelle, M2 articule explicitement le genre de tâches Tester si un nombre est solution d'une équation ($OML3_q$) pour contrôler numériquement le résultat obtenu **[$T_{Tester-sol}$ 1]** (c'est lui qui réalise ce contrôle numérique **[C-élève 0 $T_{Tester-sol}$]**). Ceci est conforme aux éléments de la référence épistémologique. En revanche, la technique de substitution n'est pas explicitement fournie par M2, qui aurait pu (faire) préciser qu'il faut remplacer la lettre par la valeur trouvée dans chaque membre **[$\tau_{T_{Tester-sol}}$0]**.

c. Moment de l'institutionnalisation : définition et vocabulaire autour des équations

(30 min 35) Durant la phase d'institutionnalisation, M2 fait noter la trace écrite suivante sur leurs cahiers de leçons. L'institutionnalisation porte sur les OM travaillées, ne porte pas sur les praxéologies d'étude travaillées, et est majoritairement écrite **[I101]**. La leçon n'est pas co-construite et les élèves doivent la copier (d'où les codages C-élève 0 qui apparaissent ici) :

I. Qu'est-ce qu'une équation ?

Définition : Une équation est une égalité où apparaît une ou plusieurs lettres dont on ne connaît pas la valeur et qui sont appelées *inconnues.* **[$\theta^{th}_{\tau_{T_{Mettre-en-equation}}}$ 1]**, **[C-élève 0 $\theta^{th}_{\tau_{T_{Mettre-en-equation}}}$]**, **[H$idt_{\theta^{th}_{\tau_{T_{Mettre-en-equation}}}}$ 1]**

Exemple : $9x - 4 = 2x + 1$ est une équation. x est l'inconnue de l'équation.

On a vu dans l'activité 1 que si l'on remplace x par $\frac{5}{7}$, alors l'égalité est vraie.

Une valeur de x qui rend l'égalité vraie est appelée une *solution* de l'équation. **[**$\theta^{th}_{\tau_{T_{Resoudre}}}$ **1]**, **[C-élève 0** $\theta^{th}_{\tau_{T_{Resoudre}}}$**]**, **[H**$idt_{\theta^{th}_{\tau_{T_{Mettre-en-equation}}}}$ **1]**

Si on trouve toutes les solutions de l'équation, alors on dit qu'on a *résolu* l'équation. **[**$\theta^{th}_{\tau_{T4}}$ **1]**, **[C-élève 0** $\theta^{th}_{\tau_{T_{Resoudre}}}$**]**, **[H**$idt_{\theta^{th}_{\tau_{T_{Mettre-en-equation}}}}$ **1]**

La technique de mise en équation n'est pas institutionnalisée mais le sera plus tard (nous ne codons donc pas 0 pour cela) ; en revanche, ni la technique pour tester numériquement si un nombre est solution par substitution ni la technologie correspondante ne font partie de l'institutionnalisation **[**$\tau_{T_{Tester-sol}}$**0]**, **[**$\theta^{th}_{\tau_{T_{Tester-sol}}}$ **0]**, qu'elle soit écrite ou orale.

Suite cette à phase d'institutionnalisation, M2 distribue un document méthodologique (voir annexe page 757) que nous lui avons proposé d'utiliser en classe avec ces élèves – sans précision sur la manière de le faire. Ce document se présente sous la forme d'un tableau à plusieurs colonnes. La première colonne sert à l'identification des types de tâches : l'élève doit y reporter les types de tâches (appelés en classe « types d'exercices ») rencontrés au cours de la séquence. Dans les deuxième et troisième colonnes, l'élève doit respectivement inscrire la technique (appelée « méthodes ») et les éléments technologiques (appelés « propriétés du cours ») lui permettant de réaliser les types de tâches identifiés. Des tâches relevant du même type que ceux identifiés doivent être listés dans une quatrième et dernière colonne.

Alors qu'il distribue ce document aux élèves, M2 doit faire face à une véritable « levée de boucliers » de la part de ses élèves, à qui il avait déjà distribué une feuille similaire lors du chapitre précédent :

– *Elève : Oh non pas elle*

– *Elève : J'aime pas les trucs comme ça*

– *Elève : C'est vrai ça sert à rien monsieur*

– *Elève : Personne ne regarde dedans*

– *M2 : Et comment vous révisez vos contrôles ? [...] (plusieurs autres élèves protestent) donc ça vous la collerez dans le cahier d'exercices / et peut-être qu'**en apprenant à l'utiliser et en révisant pour une fois ça servira*** **[Hgen]** */ (à une élève qui râle) tu n'as pas envie d'une feuille qui t'explique où sont les corrections d'exercices ?*

– *L'élève en question : Ca me sert pas*

– *M2 : Ben si ça te sert pas c'est que tu révises pas bien*

Le document distribué par M2 ne sera pas utilisé lors de cette séance. Il ne le sera qu'une fois durant la séquence (séance 3 du PER professeur). Nous reviendrons en fin de section sur l'utilisation de ce document par M2, en particulier sur ses potentialités et sur nos hypothèses concernant le rejet manifeste des élèves à employer cet outil.

d. Moment du travail de la technique de mise en équation

(39 min 48) Durant le moment du travail de la technique de mise en équation, M2 propose aux élèves de réaliser deux tâches relevant du type de tâches Résoudre un problème d'égalisation de deux programmes de calcul, similaires au type de tâches « Alice et Bertrand » précédemment donné **[$T_{Mettre-en-equation}$ 1]**, **[$T_{Mettre-en-equation}$ 1]**, et qui sont celles du PER chercheur (voir annexes du chapitre neuf, page 581). Il indique aux élèves que les tâches à réaliser sont « en lien » avec la leçon et les exercices, sans préciser ce lien **[Hgen]** **[Hrel 0]** ni identifier les genres de tâches dont relève les exercices **[H$idt_{T_{Mettre-en-equation}}$ 0]**. Il ne lit pas non plus l'énoncé **[D0]**.

(42 min 26) Les élèves cherchent en autonomie en sollicitant M2 **[A10]**. M2 observe les procédures **[V1]**.

Lors de la correction de la première tâche, celle-ci est majoritairement réalisée par M2 **[C100]**, comme en témoigne l'extrait suivant :

> – *M2 : Hé / on corrige le un / quelle est l'équation correspondante à ces deux programmes de calcul Shiran ?*
>
> – *Shiran : a fois trois plus cinq égal (M2 écrit au tableau : $a \times 3 + 5 =$) / trois a plus cinq*
>
> – *M2 : Ah d'accord si tu veux / mais moi je veux une équation*
>
> – *Shiran : Euh / a fois trois plus cinq*
>
> – *M2 : Oui non mais a fois trois plus cinq Shiran tu viens de me traduire ce programme de calcul / donc ok tu voulais réduire c'est très bien / tu voulais réduire c'est très bien mais / le programme A doit être égal au programme ? (M2 montre « programme B » dans l'énoncé) / ben traduis-moi le programme B*
>
> – *Shiran : a fois six moins deux (M2 complète : $a \times 3 + 5 = a \times 6 - 2$)*
>
> – *M2 : Et là si tu veux en dessous tu peux m'écrire que c'est / trois a plus cinq égal à six a moins deux d'accord ? / (M2 écrit l'équation $3a + 5 = 6a - 2$ en dessous de la première) ok ?*

Lorsque M2 lui demande de fournir une équation, Shiran ne fournit que l'expression algébrique correspondant à un des programmes de calcul. C'est M2 qui focalise l'attention de l'élève sur l'égalité présente dans l'énoncé, qui lui demande de produire l'expression correspondant au second programme, et qui écrit l'équation **[**$T_{Mettre-en-equation}$ **C-élève 0]**, **[**$\tau_{T_{Mettre-en-equation}}$ **C-élève 0]**, **[H**$idt_{\tau_{T_{Mettre-en-equation}}}$ **0]**.

Pour la seconde tâche, en revanche, c'est l'élève interrogée, Marianne, qui fournit l'équation correspondant au problème (voir extrait ci-dessous) :

> – *M2 : Exercice deux écrivez-moi l'équation / ben non mais donnez-la moi on corrige / Marianne*
>
> – *Marianne : Trois e plus cinq / égal / entre parenthèses e moins deux / fois six (M2 écrit au fur et à mesure au tableau :* $3e + 5 = (e - 2) \times 6$*)* **[C-élève 1** $T_{Mettre-en-equation}$**]**
>
> – *M2 : S'il vous plaît / euh / choisir un nombre le multiplier par trois ajouter cinq / d'accord / choisir un nombre lui soustraire deux mutliplier par six / euh / Hélène est-ce qu'il y a écrit qu'il faut mettre des parenthèses ici ?*
>
> – *Hélène : Non*
>
> – *M2 : Ben Marianne / pourquoi t'as mis des parenthèses ?*
>
> – *Marianne : Parce que d'abord on soustrait deux*
>
> – *M2 : Et que si tu n'avais pas mis des parenthèses qu'est-ce qui aurait été prioritaire ?*
>
> – *Marianne : La multiplication*
>
> – *M2 : Donc très bien / sans parenthèses ici on ne respecte pas les priorités du programme*

Notons dans cet extrait que M2 insiste sur les priorités opératoires, en s'appuyant à la fois sur les programmes de calcul et sur la structure de l'équation produite **[**$T_{Structure_{eq}}$ **1]**. Marianne fournit elle-même cette explication **[C-élève 1** $T_{Structure_{eq}}$**]**.

En fin de séance, M2 donne deux tâches à réaliser pour la séance suivante ainsi que des fiches d'aide (il s'agit des aides correspondant au parcours 1 du PER chercheur, voir chapitre neuf), mais, comme pour la fiche méthodologique distribuée en cours de séance, n'explique pas comment utiliser ces fiches d'aide et ne dit rien sur les tâches à réaliser **[D0]**.

e. Synthèse sur l'analyse détaillée de la séance 1

Au niveau des OM enseignées, le PER professeur présente des écarts avec le PER chercheur (voir section 10.3.3 de ce chapitre) que nous interrogeons :

- Dans les premiers moments didactiques (première rencontre, élaboration de la technique et de l'environnement technologico-théorique), l'introduction tardive du solveur d'équations ne motive pas le recours aux équations. Nous questionnons ce choix de la part de M2 : quelles raisons d'être les élèves donnent-ils à la production d'équation ($OML1_{eq}$) ?
- Quel que soit le moment de l'étude, l'identification de la structure des équations ($OML3_{eq}$), nécessaire au contrôle de l'adéquation entre l'équation produite et le problème qu'elle modélise (puis dans la suite de la séquence, nécessaire pour guider l'intelligence des transformations à opérer lors de la résoltion algébrique) est pour la plupart du temps *implicitement* utilisée. Quel impact sur la résolution algébrique de problèmes cela peut-il avoir auprès des élèves ?
- De même, le test d'une égalité ($OML3_{eq}$) à l'aide de la technique de substitution de la variable par une valeur est peu présent. Quelles peuvent en être les conséquences sur la manière dont les élèves contrôlent leurs calculs sur les équations ou accomplissent le genre de tâches $T_{tester-sol}$?

Au niveau des praxéologies d'étude, nous questionnons aussi les écarts entre PER professeur et chercheur et leur impact potentiel sur les apprentissages mathématiques et les techniques d'étude mobilisées par les élèves :

- Les types ou genres de tâches mathématiques sont peu identifiés, quel que soit le moment de l'étude. Or nous faisons l'hypothèse que cette identification est fondamentale pour mener une étude personnelle idoine. Comment les élèves, en particulier ceux qui sont en difficulté, peuvent-ils apprendre à construire des OM si les types de tâches constitutifs de ces OM ne sont pas explicitement repérés en classe ?
- Des tentatives de mise en relation entre tâches du même type sont réalisées par M2. Cependant, celles-ci demeurent à un niveau pédagogique : M2 fait mention d'un lien entre tâches sans préciser les tâches en jeu ni de technique d'étude pour effectuer cette mise en relation. Or les entretiens menés auprès des élèves et la synthèse de travaux de recherche semblent indiquer que cette mise en relation constitue une difficulté pour certains élèves lors de leur étude personnelle hors la classe. Si cette difficulté n'est pas levée en classe, comment peut-elle l'être hors la classse ?
- Quel que soit le moment de l'étude, et notamment dans les premiers moments, M2 ne situe pas explicitement les OM anciennes par rapport aux OM nouvelles : le statut de l'égalité dans les équations est peu mis en avant, spécialement en regard des autres statuts que les élèves ont rencontré dans

leur curriculum praxique ; les techniques arithmétique et par essais/erreurs pour résoudre certaines équations, travaillées dans les séances précédentes ou en début de cette première séance, ne voient pas leurs limites explicitement mises en exergue, et ne sont pas explicitement mises en concurrence avec la technique de résolution utilisant le solveur d'équations, affaiblissant la motivation de la production des équations. Dès lors, les élèves ne risquent-ils pas de persévérer dans l'utilisation d'anciennes techniques de résolution ou de donner à l'égalité des statuts inadéquats ?

– Des documents potentiellement utiles à la création d'un milieu d'aide à l'étude personnelle sont fournis par M2 : une fiche méthodologique pouvant servir au travail des praxéologies d'étude supposées favoriser une activité mathématique idoine, et des aides pour réaliser les tâches données pour la séance suivante. Cependant, M2 n'explicite pas en classe la manière d'utiliser ces documents. Visiblement, leurs raisons d'être n'ont pas été saisies par les élèves, qui pour beaucoup semblent ouvertement rejeter ces fiches. Nous mettons ceci en lien avec la faible explicitation – et donc la faible motivation – de techniques d'étude en classe par M2 ; pourquoi les élèves remettraient-ils en doute les techniques d'étude qu'ils utilisent si elles ne l'ont pas été en classe à travers par exemple des moments didactiques de première rencontre avec des types de tâches *d'étude*, d'élaboration et de travail de techniques *d'étude* ? Comment peuvent-ils faire évoluer leurs techniques d'étude – voire en *créer* pour certains – alors que l'enseignant ne les a pas explicitement travailées à travers une organisation didactique ? Comment peuvent-ils utiliser un milieu d'aide à l'étude dont ils ne se servent pas en classe, dont ils n'ont pas expérimenté l'intérêt, et qui de plus n'est pas habituellement proposé par M2 ?

Enfin, au niveau de la gestion didactique de l'enseignant, plusieurs éléments retiennent notre attention :

– Les différentes procédures utilisées par les élèves en phase de recherche, bien qu'elles soient prises en compte par M2, ne sont pas spécialement hiérarchisées durant les phases de mise en commun (formulation/validation). Nous nous demandons si une hiérarchisation en fonction des techniques utilisées (arithmétique, par essais/erreurs, pré-algébriques), des statuts donnés à l'égalité, n'auraient pas permis à M2 de davantage situer les OM anciennes par rapport aux OM relatives aux équations, de monter l'insuffisance des techniques non algébriques et de motiver la production d'une équation.

– Les élèves sont régulièrement placés en autonomie, mais cette autonomie est la plupart du temps caractérisée par la possible sollicitation de M2 par les élèves.
– La réalisation des tâches et l'explicitation des techniques mathématiques sont majoritairement prises en charge par M2. Ceci est peu étonnant compte tenu du fait que l'on se situe dans cette séance introductive essentiellement dans les premiers moments didactiques ; nous allons constater cependant dans la section qui suit que sur l'ensemble de la séquence, les élèves prennent beaucoup moins de tâches (mathématiques et d'étude) en charge que l'enseignant. Nous interrogerons ce point.

L'analyse détaillée de cette séance 1 a montré des premières tendances qui se dessinent au niveau des pratiques de M2 autour de l'enseignement des OM relatives aux équations, du travail des praxéologies d'étude et de la gestion didactique. Ces tendances vont-elles se confirmer au cours de la séquence ? La section ci-après, qui présente une analyse synthétique sur l'ensemble des séances que nous avons pu filmer sur les équations, permet d'apporter des éléments de réponse à cette question.

10.3.3 Analyse synthétique de l'ensemble des séances du PER professeur

Dans cette section, nous présentons de manière synthétique les résultats majeurs que nous avons obtenus suite à l'observation et à l'analyse des six séances filmées du PER professeur.

Nous exposons et interrogeons d'abord les principaux écarts qui sont apparus entre le PER chercheur et le PER professeur.

Nous présentons ensuite plusieurs graphiques commentés correspondant à l'analyse des OM, des organisations didactiques et des praxéologies d'étude travaillées en classe sur les six séances. Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que les échelles des graphiques ne sont pas toutes identiques et que les notations subissent quelques variations par rapport aux codages rappelés plus haut (section 10.3). Ceci est dû au fait que nous ne pouvions afficher certains symboles avec les logiciels utilisés pour traiter les données, comme les codages τ, θ^{th} et θ^{p} que nous avons respectivement remplacés par t, th et pr. Le contexte et des déductions élémentaires permettront cependant au lecteur de s'y retrouver sans trop de peine.

Nous terminons par l'analyse de la gestion didactique de M2 sur ces six séances.

Cette analyse permet d'apporter un éclairage sur la manière dont les praxéologies d'étude et les OM ont été travaillées en classe, car elle pose la question des conditions mises en place ou non par l'enseignant en classe pour rendre possible ou faciliter le travail de ces praxéologies d'étude et de ces OM.

a. Principaux écarts entre PER chercheur et PER professeur

Nous présentons de manière synthétique les principaux écarts entre le PER chercheur et le PER professeur sous forme de tableaux (figures 10.44 à 10.49) situés à la fin de ce chapitre. Ces tableaux aideront également le lecteur à se remémorer la structure générale du PER chercheur. La colonne « PER chercheur » rappelle les éléments majeurs du PER chercheur : pour chaque séance sont décrits les moments de l'étude correspondant aux types ou genres de tâches relatifs aux équations, les situations didactiques, les tâches utiles à la préparation de ces situations, les types ou genres de tâches mathématiques relatifs aux équations, les praxéologies d'étude potentiellement à travailler. Dans la colonne « PER professeur » sont exposés les principaux écarts entre le PER professeur et le PER chercheur.

b. Les OM travaillées en classe

Nous avons dénombré les genres de tâches travaillés en classe durant la mise en œuvre du PER professeur. Chaque fois qu'une tâche était travaillée, nous avons compté une occurrence pour le genre de tâches dont elle relevait. Si la réalisation de la tâche convoquait d'autres tâches relevant d'autres genres de tâches (par exemple, le genre de tâches « résoudre algébriquement une équation » convoque potentiellement « identifier la structure d'une équation » pour pouvoir être réalisé), nous avons aussi compté une occurrence pour ces genres de tâches.

Chaque occurrence pour un genre de tâches entraîne simultanément une occurrence pour l'OM locale de l'OM de référence épistémologique relative aux équations qui comprend le genre de tâches. (par exemple, pour chaque occurrence pour « résoudre algébriquement une équation », il y a une occurrence pour $OML2_q$).

Nous commençons par présenter les proportions des OM travaillées durant le PER professeur. Nous affinons ensuite l'analyse en nous focalisant sur les genres de tâches travaillés, les techniques et les technologies explicitées. En lien avec la question de l'autonomie des élèves, nous précisons de plus qui de l'enseignant ou des élèves prennent majoritairement en charge la réalisation des tâches mathématiques et l'explicitation des techniques et des technologies. Enfin, nous analysons le travail des OM et des genres de tâches au filtre des moments de l'étude pour nuancer les éventuelles interprétations que l'on pourrait faire des données récoltées.

Des OM travaillées de manière équilibrée. Les OM travaillées en classe (voir figure 10.6 ci-après) l'ont été de manière plutôt équilibrée : 29% des genres de tâches travaillés relèvent de $OML2_q$ et $OML3_q$, 42% relèvent de $OML1_q$.

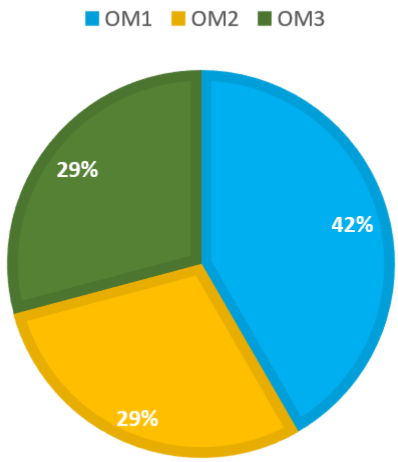


FIGURE 10.6 – Proportions des OM travaillées sur l'ensemble du PER professeur

Des genres de tâches peu travaillés par rapport à d'autres. Au niveau des genres de tâches (voir figure 10.7 ci-après), $T_{resoudre}$ est de manière peu étonnante le plus travaillé (27% du total des genres de tâches travaillés) ; $T_{prouver-equivalence}$ est le moins travaillé (2%). Au total, près de 50 tâches mathématiques relatives aux équations ont été travaillées sur les six séances filmées. Les genres de tâches $T_{resoudre}$, $T_{mettre-en-equation}$, $T_{traduire}$ et $T_{structure_{eq}}$ sont à peu près autant travaillés les uns que les autres. Ceci correspond au fait que M2 a travaillé la résolution algébrique des équations de manière articulée à la résolution de problèmes et qu'il s'appuie partiellement sur la structure des équations pour guider les transformations à opérer lors de la résolution algébrique, ce qui est en adéquation avec les éléments de la référence épistémologique.

Toutefois, la convocation de $T_{structure_{eq}}$ a été la moitié du temps occultée par M2 (voir figure 10.8). Dans les séances filmées, durant la résolution algébrique d'équations, M2 attire beaucoup l'attention sur la présence des produits parenthésés dans les équations, qui nécessitent la mobilisation de la propriété de distributivité ; mais

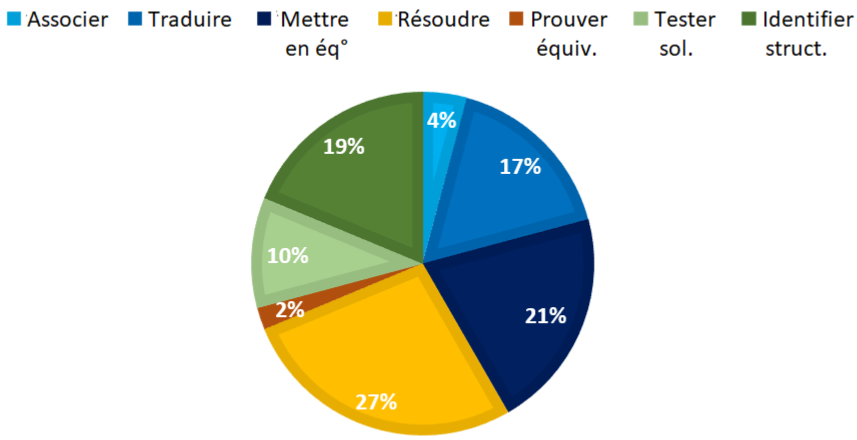


FIGURE 10.7 – Proportions des genres de tâches travaillés sur l'ensemble du PER professeur

en-dehors du cas des produits parenthésés, M2 s'appuie peu sur la structure des expressions en jeu dans les équations pour justifier le recours à telle ou telle propriété de conservation de l'égalité lors des résolutions. C'est aux élèves d'inférer que tel nombre a été ajouté ou retiré des deux membres d'une équation parce que les expressions en jeu présentaient telle ou telle structure et parce que la stratégie de résolution était unetelle ou unetelle.

Le faible travail de $T_{prouver-equivalence}$ et $T_{tester-sol}$ n'est pas conforme aux éléments de la référence épistémologique ; ces genres de tâches sont utiles au contrôle des calculs dans la résolution algébrique d'une équation. Nous reviendrons sur cette notion de contrôle au fil de nos analyses ; il nous est apparu que construire et utiliser des moyens de contrôle (vérifier qu'une tâche mathématique est correctement réalisée) relevaient potentiellement de praxéologies d'étude favorisant une activité mathématique idoine et que nous n'avions pas anticipées comme telles.

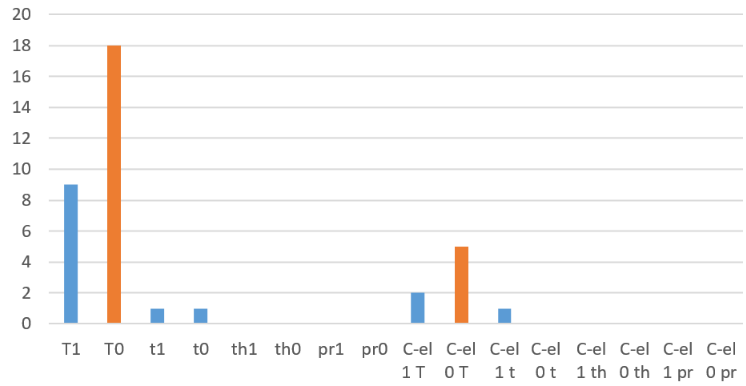


FIGURE 10.8 – Travail du genre de tâches $T_{structure_q}$ sur l'ensemble du PER professeur

Des technologies relativement explicitées ; des techniques mathématiques qui auraient pu l'être davantage. Concernant l'explicitation des techniques et des composantes pratique et théorique des technologies travaillées sur l'ensemble du PER professeur, le graphique de gauche de la figure 10.9 indique que les techniques mathématiques utilisées en classe pour réaliser les tâches sont pour plus de la moitié d'entre elles non explicitées. Par exemple, lorsque M2 convoque le genre de tâches $T_{tester-sol}$ pour contrôler une résolution d'équation, il explicite peu la technique pour ce faire (substituer la lettre par le nombre testé et comparer les résultats des deux membres de l'égalité). En revanche, les fois où les composantes théorique et pratique des technologies mobilisées sont explicitées sont plus nombreuses que celles où elles ne sont pas explicitées ; cela correspond notamment aux fois où M2 justifie théoriquement les résolutions algébriques d'équations à l'aide des propriétés de conservation de l'égalité et guide la mise en œuvre de la technique de résolution à l'aide de discours pratiques (comme « supprimer les parenthèses »).

Des élèves qui auraient pu avoir plus de responsabilité dans la réalisation des tâches et l'explicitation des techniques et technologies. Le graphique de la figure 10.10 montre le nombre d'occurrences des codages C-el ; ceci correspond aux fois où les élèves prennent majoritairement en charge soit la réalisation d'une tâche mathématique, soit l'explicitation d'une technique ou d'une technologie mathématiques. Nous pouvons voir que les codages C-el 0 plus nombreux que les C-el 1. Ce graphique indique que dans plus de la moitié des cas, M2 prend en charge la réalisation des tâches mathématiques ou l'explicitation des techniques et technologies.

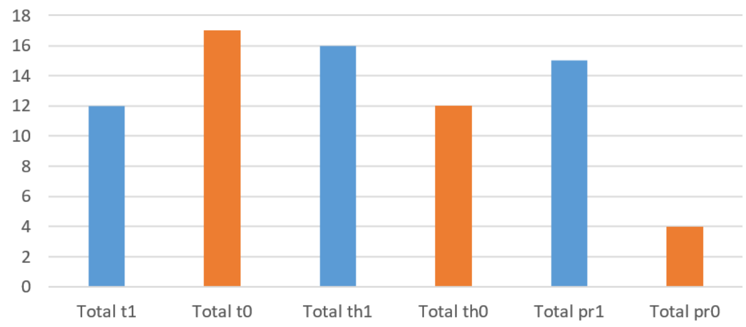


FIGURE 10.9 – Nombre de fois où les techniques et technologies travaillées sont explicitées (ou non) sur l'ensemble du PER professeur

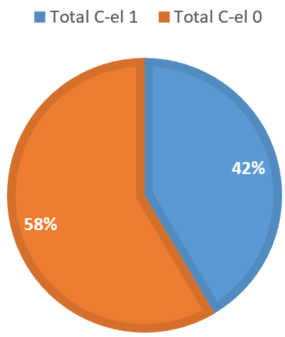


FIGURE 10.10 – Proportions des codages C-el au niveau des OM travaillées sur l'ensemble du PER professeur

Des résultats qui sont à mettre en perspective avec les moments de l'étude. Nous complétons les deux derniers graphiques à l'aide de graphiques supplémentaires prenant en compte les moments de l'étude [6] (figure 10.11) et qui permet de nuancer les éventuelles interprétations que l'on pourrait opérer. En effet, l'explicitation d'une technique ou d'une technologie peut ne pas avoir lieu durant les

6. Pour rappel, les moments 1, 2 et 3 sont respectivement les moments de première rencontre avec le genre de tâches T, l'élaboration de la technique pour réaliser T et l'élaboration de l'environnement technologico-théorique correspondant ; le moment 4 est le moment du travail de la technique ; le moment 5 est le moment de l'institutionnalisation. Nous n'avons pas pris en compte le moment de l'évaluation car celui-ci intervient de manière régulière en même temps que les autres moments et nous a paru moins aisé à localiser durant les séances filmées.

premiers moments de l'étude où technique et technologie sont en cours d'élaboration ; de même, durant ces moments, l'enseignant peut davantage prendre en charge la réalisation de tâches que dans d'autres moments comme celui du travail de la technique.

Nous avons donc réalisé des comptages selon les moments de l'étude pour les genres de tâches $T_{mettre-en-equation}$ et $T_{resoudre}$ qui sont, rappelons-le, les deux genres de tâches les plus travaillés sur l'ensemble des séances filmées.

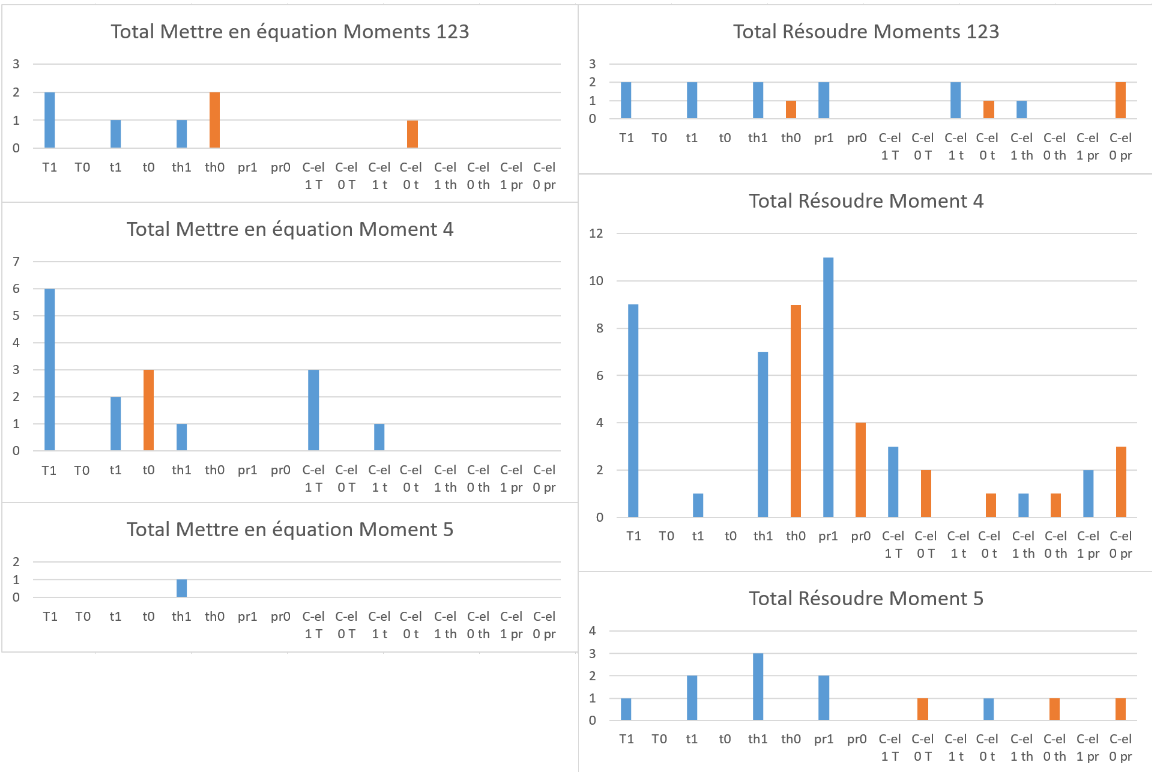


FIGURE 10.11 – Travail des genres de tâches $T_{mettre-en-equation}$ et $T_{resoudre}$ en fonction du moment de l'étude

Le faible nombre de codages pour le genre de tâches $T_{mettre-en-equation}$ pour le moment 5 correspond au fait que l'institutionnalisation de la technique de mise en équation a eu lieu à la septième séance du PER professeur, que nous n'avons pas analysée.

Nous remarquons que les codages apparaissent en plus grand nombre pendant le moment de travail des techniques de mise en équation et de résolution algébrique d'équations ; ceci s'explique par le fait que ces moments ont été plus nombreux pendant le PER professeur.

Les codages C-el 0 sont plus fréquents dans les moments 123 et les codages C-el 1 le sont plus dans le moment 4 pour les deux genres de tâches. De manière peu surprenante, M2 prend davantage en charge l'explicitation des techniques et technologies durant les moments 123 où ces techniques et technologies sont en cours d'élaboration que durant le moment du travail des techniques.

Sur les graphiques, le nombre d'occurrences pour les codages *th* et *pr* est beaucoup plus élevé que celui des codages *t*, ce qui peut paraître incohérent : cela voudrait dire qu'il y a beaucoup d'explicitations des composantes théorique et pratique des technologies alors qu'il semble n'y avoir pas autant de techniques utilisées. Ce décalage provient du fait qu'il nous a été difficile de coder systématiquement l'explicitation d'une technique durant les séances : la résolution algébrique d'une équation peut s'étendre sur plusieurs minutes (voire dizaines de minutes) durant lesquelles les élèves et l'enseignant interagissent, digressent, font des retours en arrière, et la technique de résolution algébrique, bien qu'effectivement utilisée, est peu aisée à étiqueter comme étant davantage explicitée par l'élève que par l'enseignant étant donné qu'elle est « dissoute » dans les nombreux échanges oraux. En revanche, l'explicitation des composantes théorique et pratique de la technologie « Propriétés de conservation de l'égalité » est facilement repérable, même au milieu des discussions. C'est pourquoi les codages $t0$ et $t1$ sont en nombre bien moins élevé que les codages *th* ou *pr*.

À propos des codages *th* et *pr*, nous notons que le codage $pr1$ est plus présent que le codage $th1$ dans le moment du travail de la technique de résolution algébrique. Ceci correspond au fait que M2 s'est davantage appuyé sur des discours pratiques pendant le travail de cette technique que sur les propriétés de conservation de l'égalité.

c. Les praxéologies d'étude travaillées en classe

Nous avons compté les types de tâches d'étude et techniques d'étude travaillés en classe. Chaque fois qu'un type de tâches d'étude, respectivement une technique d'étude, était travaillé à travers l'étude des équations, nous avons compté une occurrence pour ce type de tâches d'étude, respectivement cette technique d'étude. Si la réalisation d'une tâche d'étude convoquait d'autres tâches d'étude, nous avons compté une occurrence pour chacune des tâches d'étude convoquées.

Nous avons choisi de commencer par exposer les proportions des types de tâches d'étude travaillés durant le PER professeur et ceux qui auraient pu l'être davantage, puis les techniques d'étude développées (ou non), en précisant qui de l'élève ou de l'enseignant prend majoritairement en charge l'explicitation et la mise en œuvre de ces techniques d'étude, en lien avec la question de l'autonomie des élèves. Nous terminons par l'analyse du travail des praxéologies d'étude au filtre des moments de l'étude.

Des technologies mathématiques identifiées, des types de tâches mathématiques qui auraient pu être davantage reconnus et des gestes pédagogiques en nombre. Le diagramme de la figure 10.12 montre les proportions dans lesquelles chaque type de tâches d'étude est travaillé, en prenant en compte les types de tâches d'études pédagogiques « généraux » ($Hgen$), c'est-à-dire ceux ne prenant pas en compte la complexité et la spécificité de l'activité mathématique. Les lettres « idt » présentes dans la légende du graphique signifient « identifier ».

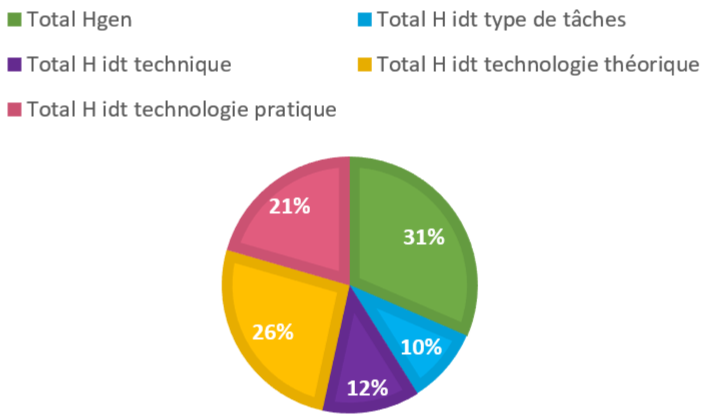


FIGURE 10.12 – Proportions des praxéologies d'étude travaillées sur l'ensemble du PER professeur

Nous pouvons constater que les types de tâches d'étude pédagogiques « généraux » représentent près d'un tiers des types de tâches d'étude travaillés, et que l'identification des types de tâches mathématiques est le type de tâches d'étude le moins travaillé (10%) : en effet, en classe, M2 ne nomme que très rarement les types de tâches mathématiques rencontrés et ne donne presque jamais de techniques d'étude pour identifier ces types de tâches mathématiques (en repérant par exemple des verbes dans la consigne, en reconnaissant des techniques et technologiqes mathématiques souvent mobilisées pour réaliser un type de tâches). Nous interrogeons les effets que cela peut avoir sur les gestes d'étude des élèves hors la classe. D'après la synthèse de travaux sur le travail personnel (chapitre trois), notre étude exploratoire (chapitre quatre) et les hypothèses que nous émettons quant aux praxéologies d'étude permettant une activité mathématiques idoine (chapitre cinq), l'identification des types de tâches mathématiques est un type de tâches d'étude central pour apprendre à construire et à articuler des OM, notamment parce qu'il est convoqué dans la réalisation de nombreux autres types de tâches d'étude. En étant peu travaillé en classe, sera-t-il mobilisé par les élèves hors la classe ?

Nous nous demandons de plus si les types de tâches d'étude pédagogiques « généraux », accomplis en nombre, ne risquent pas de laisser à la charge des élèves la mobilisation – voire la création pour certains – de techniques d'étude qui, par définition de ces praxéologies d'étude pédagogiques, ne sont ni explicitées ni en lien avec la structure de l'activité mathématique.

L'identification des technologies mathématiques comme telles (composantes pratique et théorique réunies) est beaucoup travaillée (47%) par rapport aux autres types de tâches d'étude. Cela traduit le fait que les composantes théorique et pratique mathématiques relatives aux équations sont fréquemment identifiées en classe comme telles.

Des praxéologies d'étude travaillées, avec des occasions non saisies. Nous avons compté ce que nous appelons des « occasions manquées » de faire travailler des types de tâches d'étude à travers les tâches mathématiques traitées en classe (voir le « Total 0 » dans le diagramme en barres[7] de la figure 10.13). Par exemple, chaque fois qu'une tâche mathématique a été travaillée sans que son type ne soit explicitement identifié, chaque fois qu'une technique a été appliquée sans être identifiée, chaque fois que deux tâches sont mises en relation sans précision sur le lien les unissant (par exemple, le fait qu'elles relèvent du même type de tâches), nous avons compté une occurrence dans le « Total 0 » (figure 10.13). Sur les six séances, les types de tâches d'étude supposés favoriser une activité mathématique idoine ont été travaillés plus de 80 fois. Nous détaillons dans les paragraphes qui suivent ceux qui ont été le plus travaillés, selon les séances et les moments de l'étude. Les « occasions manquées » quant à elles s'élèvent à plus de 100. M2 fait donc travailler des praxéologies d'étude en classe ; selon notre grille d'analyse, il aurait été possible de saisir davantage d'occasions de le faire.

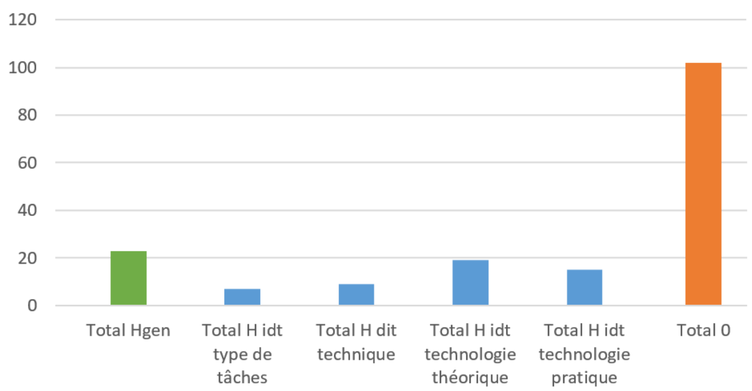


FIGURE 10.13 – Types de tâches d'étude travaillés sur l'ensemble du PER professeur

7. Ce graphique est complémentaire du diagramme de la figure 10.12 : il donne le nombre de types de tâches d'étude travaillés et le nombre « d'occasions manquées ».

Des techniques d'étude qui auraient pu être davantage explicitées, et ce, par les élèves. Concernant l'explicitation de techniques d'étude et la prise en charge de cette explicitation par les élèves, le graphique de la figure 10.14 montre que M2 explicite lui-même un certain nombre de techniques d'étude (20 occurrences pour « Total $t1$ » sur le graphique) sur l'ensemble du PER professeur et que plus de soixante techniques d'étude sont appliquées sans être explicitées. Par exemple, à de nombreuses reprises, M2 met en relation des tâches entre elles avec des discours du type « Cet exercice ressemble à ceux que nous avons déjà faits dans les séances précédentes » et ni ne précise les genres de tâches dont les tâches en question relèvent, ni ne suggère de technique d'étude permettant de faire cette mise en relation. L'application de techniques d'étude est davantage réalisée par M2 que par les élèves d'après le nombre de codages C-el 0 (13 occurrences sur l'ensemble du PER) qui est supérieur à C-el 1 (7 occurrences).

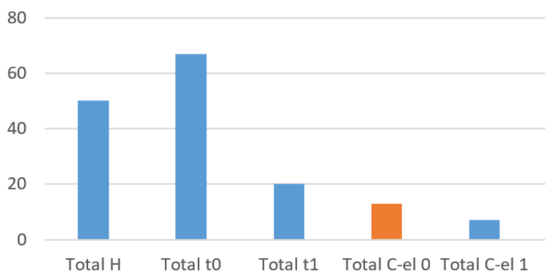


FIGURE 10.14 – Explicitation des techniques d'étude et responsabilités laissées aux élèves pour expliciter ces techniques sur l'ensemble du PER professeur

Des évolutions au cours des séances : de plus en plus de types de tâches d'étude travaillés, et ce, de plus en plus par les élèves. Le détail des types de tâches et de techniques d'étude travaillés et explicités au fil des séances est donné dans les graphiques de la figure 10.15. Le lecteur notera que les graduations des axes des ordonnées des graphiques ne sont pas identiques. Les barres vertes correspondent aux types de tâches d'étude pédagogiques « généraux » ; les barres oranges, aux « occasions manquées » ; les bleues, aux types de tâches d'étude travaillés.

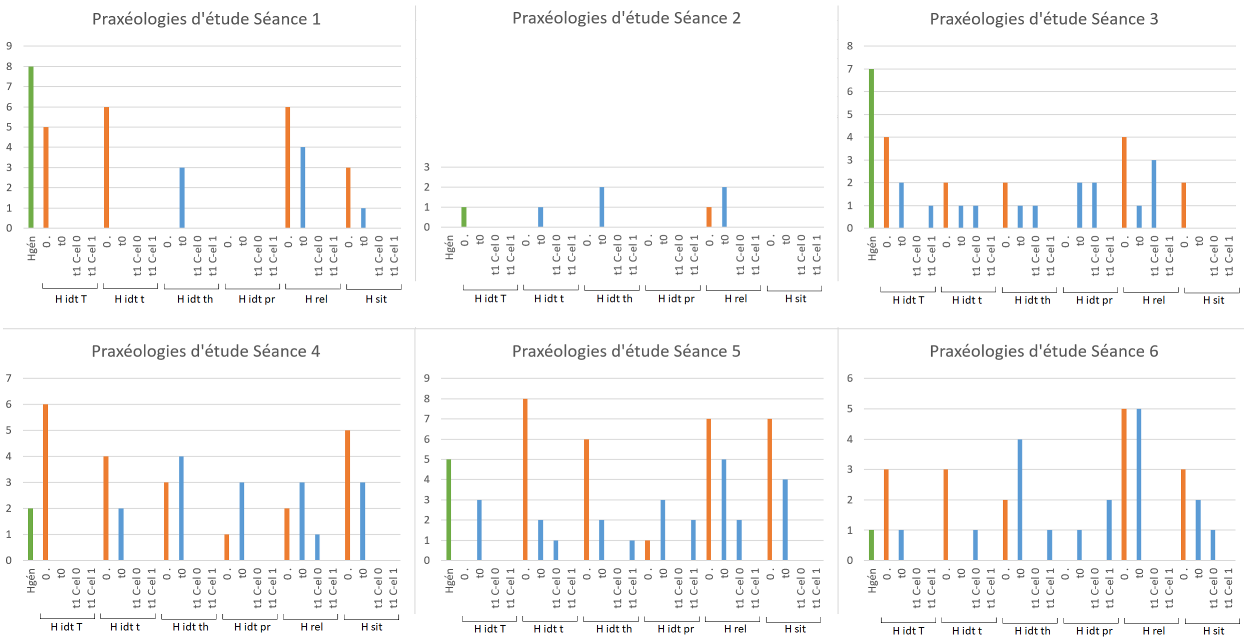


FIGURE 10.15 – Travail des praxéologies d'étude séance par séance

Nous constatons que les praxéologies d'étude sont travaillées en plus grand nombre dans les trois dernières séances que dans les trois premières. Ces trois dernières séances correspondent notamment et entre autres au travail de la technique de résolution algébrique et au travail de la technique de mise en équation pour résoudre des problèmes divers, où les agrégations entre OM, qu'elles soient relatives aux équations ou à d'autres secteurs d'étude, sont plus importantes ; c'est pourquoi, selon nous, M2 a davantage travaillé ou fait travailler les praxéologies d'étude, compte tenu des types de tâches mathématiques rencontrés.

Le graphique de la figure 10.16 indique l'évolution des codages C-el au cours des séances. Nous remarquons que M2 prend moins en charge la réalisation des types de tâches d'étude et que les élèves les prennent davantage en charge dans les deux dernières séances. Sur ces séances, le nombre de types de tâches d'étude travaillés par les élèves eux-mêmes reste peu élevé (trois pour la séance 5 et autant pour la séance 6) mais traduit peut-être une volonté de la part de M2 de laisser progressivement les élèves accomplir ces types de tâches d'étude. Sur l'ensemble des six séances, les codages C-el 0 sont en plus grande proportion que les codages C-el 1 (voir le diagramme circulaire de la figure 10.17).

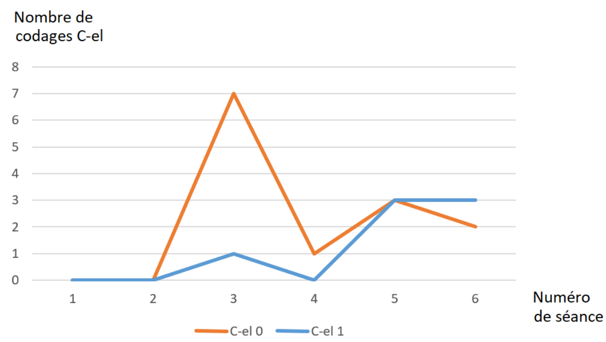


FIGURE 10.16 – Evolution du nombre de codages C-el correspondant aux praxéologies d'étude au fil des séances du PER professeur

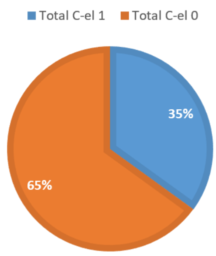


FIGURE 10.17 – Proportions des codages C-el correspondant aux praxéologies d'étude sur l'ensemble du PER

Des praxéologies d'étude davantage travaillées durant le moment du travail des techniques mathématiques relatives aux équations que durant les autres moments. Les graphiques des figures 10.18 et 10.19 montrent dans le détail les praxéologies d'étude travaillées à travers l'étude des genres de tâches $T_{mettre-en-equation}$ et $T_{resoudre}$ en fonction du moment de l'étude. Nous pouvons visualiser le fait que les praxéologies d'étude sont davantage travaillées durant le moment du travail de la technique de mise en équation et de résolution algébrique d'équations (voir figure 10.19), notamment $Hrel$ et $Hsit$ pour $T_{mettre-en-equation}$ (figure 10.18).

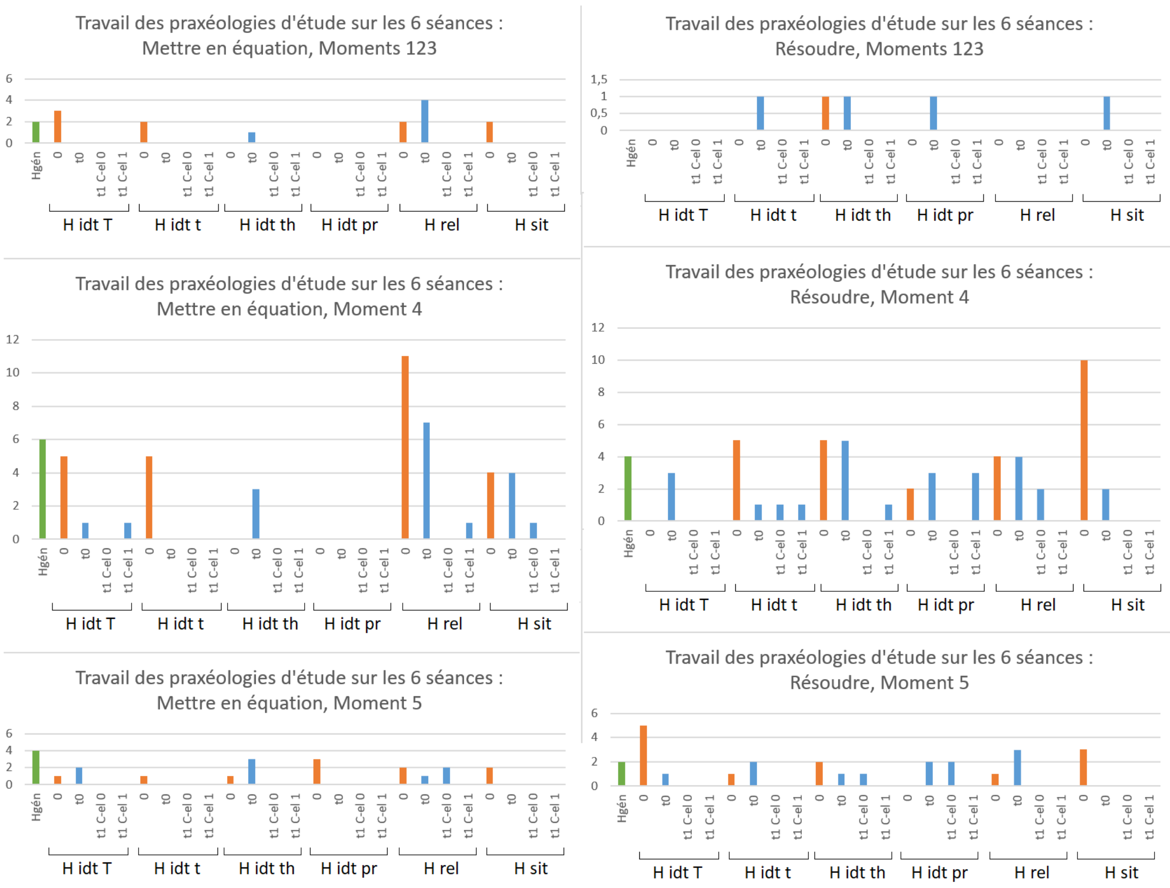


FIGURE 10.18 – Travail des praxéologies d'étude en fonction du genre de tâches mathématique travaillé et du moment de l'étude sur l'ensemble du PER professeur (diagrammes en barres)

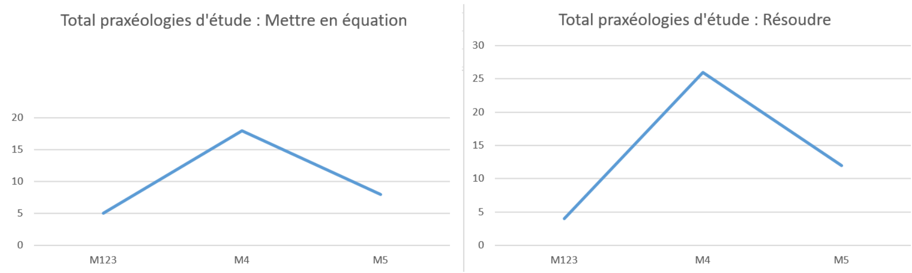


FIGURE 10.19 – Travail des praxéologies d'étude en fonction du genre de tâches mathématique travaillé et du moment de l'étude sur l'ensemble du PER professeur (courbes)

Nous interrogeons la quasi-absence d'identification des genres de tâches dans les premiers moments de l'étude (moments 1 à 3, c'est-à-dire moment de première rencontre, moment d'élaboration de la technique, moment d'élaboration de l'environnement technologico-théorique). Selon nous, ces moments sont propices au travail de ce type de tâches d'étude en le faisant débuter en même temps que le travail des genres de tâches mathématiques correspondants.

Nous remarquons que pour le genre de tâches $T_{mettre-en-equation}$, la technique de mise en équation n'est jamais identifiée comme telle. Nous faisons le lien avec le fait que cette technique n'est pas explicitée (revoir le graphique 10.11 plus haut, dans la sous-section où nous analysons les OM travaillées en classe).

Nous questionnons également le faible nombre de codages $Hsit$ quel que soit le moment de l'étude, et en particulier dans le moment du travail de la technique de résolution algébrique, qui s'accompagne d'un nombre élevé d'« occasions manquées » pour travailler $Hsit$. D'après la référence épistémologique relative aux équations, l'étude des équations nécessite d'agréger des OM relatives aux expressions et au calcul numérique ; le fait que M2 situe peu les OM entre elles, notamment pendant le travail de la technique, nous interroge : les élèves sont-ils à même de le faire lors de leur étude personnelle hors la classe alors qu'ils ne l'ont pas explicitement travaillé avec l'enseignant en classe ?

Praxéologies relatives aux moyens de contrôle. Nous revenons sur un élément évoqué à la sous-section 10.3.3 (analyse des OM travaillées en classe) et qui porte sur les moyens de contrôle donnés aux élèves. Selon nous, certains implicites dans le travail en classe des praxéologies d'étude que nous avons analysées portent sur ces moyens de contrôle et que nous aurions pu davantage rendre compte dans nos analyses. Par exemple, le fait que les techniques mathématiques soient peu explicitées ne nous semble pas favoriser chez les élèves l'acquisition d'habitudes de contrôle de la bonne application de cette technique. Ou encore, le fait que les codages $Hsit$ apparaissent peu nous interroge : l'agrégation des OM relatives au calcul numérique et aux expressions algébriques est nécessaire pour réaliser des tâches du genre $T_{tester-sol}$ ou $T_{prouver-equivalence}$ qui permettent de vérifier la correction des transformations dans les résolutions algébriques. Si cette agrégation n'apparaît pas clairement en classe, les élèves sont-ils à même de construire les moyens de contrôle qui en dépendent ?

d. Une gestion didactique qui ne favorise pas toujours le travail des praxéologies d'étude et des OM

Présentation. Nous abordons à présent l'analyse d'éléments de gestion didactique de l'enseignant M2. Cette sous-section, qui arrive après l'analyse du travail en classe des OM et des praxéologies d'étude, permet d'apporter sur ce dernier un éclairage important : quelles conditions M2 a-t-il mis en place pour mettre en œuvre le PER professeur ? Dans quelle mesure ces conditions ont-elles favorisé – ou auraient-elles pu favoriser – un travail des praxéologies d'étude et des OM facilitant l'étude des OM relatives aux équations ?

Nous avons dans un premier temps analysé la manière dont M2 dévoluait ou non les tâches mathématiques à ses élèves, s'il prenait des informations sur les procédures utilisées, s'il hiérarchisait ces procédures, si des mises en commun et des phases d'institutionnalisation avaient lieu et de quelle manière, et si les élèves étaient placés en classe en situation d'autonomie et si oui, de quelle autonomie il s'agissait. Selon nous, ces éléments relèvent de conditions nécessaires à mettre en place pour favoriser l'acquisition de techniques d'étude par les élèves facilitant l'accomplissement d'une étude personnelle idoine hors la classe. En effet, si l'enseignant ne cherche pas à engager les élèves dans la résolution des tâches proposées, s'il ne prend pas en compte leurs procédures durant les phases de recherche, s'il y a davantage de corrections (enseignant qui corrige et prend majoritairement en charge la réalisation de la tâche) que de réelles mises en commun (où les procédures utilisées sont exposées et hiérarchisées pour être discutées collectivement), et si les élèves font peu l'expérience en classe d'une autonomie où ils sont « seuls à la barre », comment les praxéologies d'étude peuvent-elles être travaillées puis mobilisées par ces élèves une fois hors la classe ?

Dans un second temps, nous avons justement concentré nos observations sur l'étude hors la classe, en analysant les fins de séance et les retours en classe, pour mettre davantage en avant la gestion didactique de M2 relativement aux éléments précédents.

Nous avons réalisé plusieurs comptages :

- Quand une tâche mathématique était donnée à faire aux élèves, nous avons observé si M2 dévoluait la tâche ou non (codages $D1$ et $D0$). Nous précisons à ce sujet plusieurs éléments. D'abord, il n'y a pas autant de codages D que de tâches mathématiques travaillées au total (environ 50) parce que dans un même énoncé, plusieurs tâches pouvaient être convoquées, alors qu'une seule dévolution a eu lieu. Ensuite, si M2 *a minima* lisait l'énoncé d'une tâche – ou d'un ensemble de tâches – avec les élèves, nous avons estimé qu'il y avait dévolution et avons codé $D1$. Autrement dit, les codages $D0$ correspondent aux tâches mathématiques données à faire par M2 sans que M2 ne lise les énoncés des tâches ni ne donne des explications sur la manière de réaliser ces tâches. Avec le recul, nous interrogeons à la fois la pertinence de notre codage $D1$ – la lecture seule de l'énoncé avec les élèves ne suffit probablement pas à les *engager* dans la résolution de la tâche prescrite, ce qui est le but d'une *dévolution* – et celle de la binarité $1/0$. Nous n'avons pas voulu alourdir notre grille de lecture qui comporte déjà des niveaux assez détaillés pour les phases de correction ou d'institutionnalisation, mais peut-être aurions-nous dû affiner le grain d'analyse.
- Quand les élèves étaient placés en autonomie en classe, nous avons considéré que M2 prenait des informations sur leur étude personnelle s'il circulait dans la salle et si son regard était dirigé vers les productions des élèves. Si tel était le cas, nous comptions une occurrence pour $V1$, sinon une pour $V0$. De même, lorsque M2 circulait dans la salle et regardait les cahiers d'élèves au retour de ces derniers en classe, nous avons considéré qu'il prenait des informations sur l'étude personnelle des élèves hors classe et avons utilisé les même codages de la même façon.
- Quand une tâche était corrigée, nous avons codé la manière dont cette correction avait lieu comme cela est expliqué dans le chapitre cinq (codage $C111$ si l'enseignant prend en compte et hiérarchise plusieurs procédures, $C110$ s'il

les prend en compte mais ne les hiérarchise pas, $C100$ s'il ne les prend pas en compte).

– Pour ce qui est de l'institutionnalisation, les codages se sont révélés plus difficiles à employer que les autres codages. En effet, les moments d'institutionnalisation n'étaient pas aisés à délimiter dans les transcriptions, certains étaient « diffus » au milieu de nombreux échanges. Nous avons essentiellement étiqueté les moments où les leçons étaient construites – ou plutôt données à recopier – comme des moments d'institutionnalisation et avons codé ces moments comme cela est expliqué dans le chapitre cinq ou à la section 10.3 de ce chapitre ; ou bien, quand M2 annonçait qu'il effectuait ce qu'il appelait un « bilan », nous avons aussi considéré qu'il s'agissait d'une institutionnalisation. Les codages $I0$ qui apparaissent ont été utilisés lorsque nous jugions qu'une phase d'institutionnalisation aurait pu être réalisée.

Une étude personnelle des élèves davantage prise en compte dans les premières séances et les premiers moments de l'étude. Le graphique de la figure 10.20 ci-après montre le total des codages apparus au cours des six séances du PER professeur. Ce graphique indique notamment :

– que M2 lit au moins l'énoncé des tâches mathématiques avant de laisser les élèves en phase de recherche (14 occurrences pour $D1$, 6 pour $D0$) ;
– qu'il prend des informations sur l'étude personnelle des élèves environ une fois sur deux (11 occurrences pour $V1$, 10 pour $V0$) ;
– que les tâches mathématiques données à faire sont quasiment toutes corrigées et que la grande majorité des corrections sont menées sans prise en compte ni hiérarchisation de plusieurs procédures.

Nous interrogeons ces éléments de gestion didactique vis-à-vis de l'étude personnelle hors la classe des élèves. Ces derniers sont-ils vraiment habitués en classe à s'engager dans la réalisation des tâches mathématiques si leur enseignant lit l'énoncé ou indique simplement les tâches à réaliser ? Quelle importance accorde-t-il au travail qu'ils accomplissent en autonomie hors la classe sur les techniques mathématiques relatives aux équations si celles-ci ne sont ni vérifiées par M2 ni exposées puis débattues en classe ? Les corrections, nombreuses, ne rendent-elles pas moins possible l'existence de réelles mises en commun ?

Les graphiques de la figure 10.21 (ci-après) montrent l'évolution des occurrences des codages au fil des séances. Ces graphiques permettent de noter l'évolution des occurrences de certains codages ; nous relevons par exemple que les vérifications du

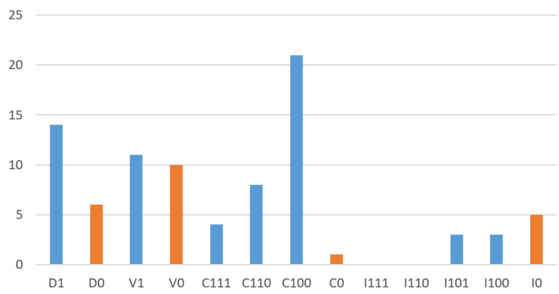


FIGURE 10.20 – Gestion didactique de l'enseignant sur l'ensemble des séances du PER professeur

travail accompli pendant l'étude personnelle (en classe ou hors classe) des élèves sont de moins en moins nombreuses au fil des séances et que les corrections sans prise en compte de plusieurs procédures sont, elles, de plus en plus nombreuses. Nous nous questionnons sur cette évolution : M2 était-il pressé par le temps et a-t-il davantage « repris la main » dans la seconde moitié du PER professeur ? Ou bien étaient-ce ses pratiques professionnelles habituelles qui « reprenaient le dessus » ?

En lien avec notre volonté de prendre en compte les moments de l'étude dans la manière dont l'enseignant organise l'étude personnelle des élèves, et pour nuancer les quelques interprétations réalisées ci-avant, nous avons analysé la gestion didactique de M2 en fonction de ces moments et des genre de tâches $T_{mettre-en-equation}$ et $T_{resoudre}$ (voir les graphiques de la figure 10.22). Nous pouvons constater que selon le moment didactique, la gestion didactique de M2 est différente :

- Dans les moments 1 à 3, M2 s'attache au moins à lire l'énoncé des tâches mathématiques données à faire aux élèves (présence de codages $D1$ uniquement), à prendre des informations sur les procédures utilisées par les élèves lors des phases de recherche (codages $V1$) et à exposer ces différentes procédures lors des corrections ($C110$ ou $C111$).
- Dans le moment du travail des techniques (moment 4), la dévolution n'est pas systématique pour le genre de tâches $T_{mettre-en-equation}$ et la prise en compte des procédures est plus faible pour les deux genres de tâches mathématiques (présence plus importante de codages $V0$ et $C100$).
- Les institutionnalisations portent essentiellement sur les OM.

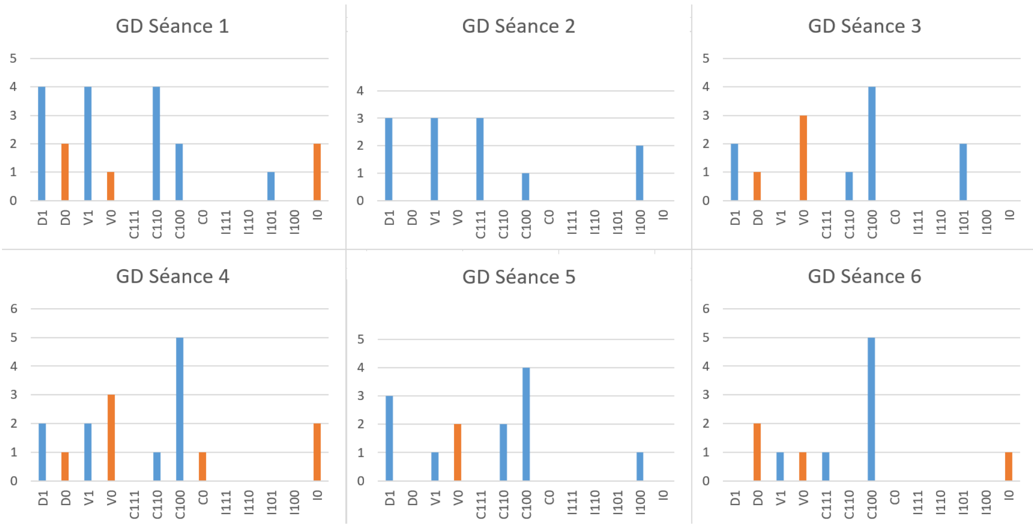


FIGURE 10.21 – Gestion didactique de l'enseignant séance par séance

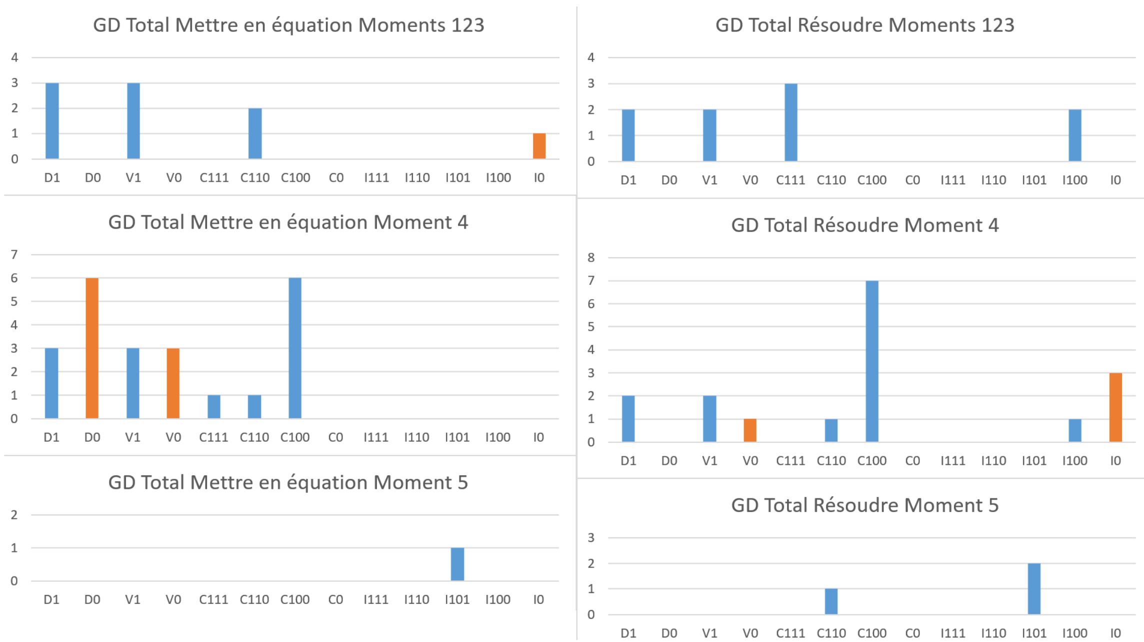


FIGURE 10.22 – Gestion didactique de l'enseignant sur l'ensemble des séances du PER professeur en fonction des moments de l'étude et des genres de tâches mathématiques

Une autonomie des élèves variable. Nous avons observé la durée pendant laquelle les élèves étaient placés en autonomie et nous avons caractérisé cette autonomie. Nous avons considéré que les phases de recherche, où les élèves tentent de réaliser une tâche mathématiques, constituaient des phases d'autonomie. Ces phases débutent avec la fin de la lecture de l'énoncé de la tâche donnée à faire et finissent avec le début de la correction de la tâche sous la direction de l'enseignant.

Nous avons codé $A10$ les phases de recherche où M2 était sollicité par les élèves, c'est-à-dire lorsqu'il se déplaçait dans la salle, se dirigeait vers les élèves levant la main et répondait à leurs questions ou leur fournissait des aides. Nous avons codé $A11$ les phases de recherche où M2 était en retrait et ne répondait pas aux sollicitations des élèves.

Les diagrammes circulaires de la figure 10.23 ci-après présentent séance par séance les proportions des durées pendant lesquelles les élèves sont ou non en autonomie, 100% représentant la durée totale d'une séance.

Nous constatons tout d'abord que les élèves sont très peu placés en autonomie où ils ne peuvent pas solliciter l'enseignant (faible proportion de codages $A11$). Nous interrogeons cet aspect de la gestion didactique de M2 : si les élèves font peu l'expérience en classe d'une autonomie où ils se sentent « seuls à la barre », parviendront-ils à assumer cette même forme d'autonomie hors la classe en l'absence de l'enseignant ?

Les séances 1, 4, 5 et 6 comportent à peu près les mêmes proportions de codages $A10$ (entre 15 et 22%). Les séances 2 et 3 peuvent être considérées ensemble : la séance 2 correspond à la séance en salle informatique et la séance 3 au « bilan », pour reprendre un terme enseignant, de cette séance 2. En salle informatique, les élèves étaient pendant une grande partie de la séance en autonomie relative sur les ordinateurs, d'où la proportion élevée de codages $A10$. À la séance 3, M2 a « repris la main » : la séance s'est déroulée autour de résolutions collectives d'équations, avec une longue phase d'institutionnalisation sous forme de trace écrite dans le cahier de leçons, ce qui explique la faible proportion de codages $A10$ et $A11$.

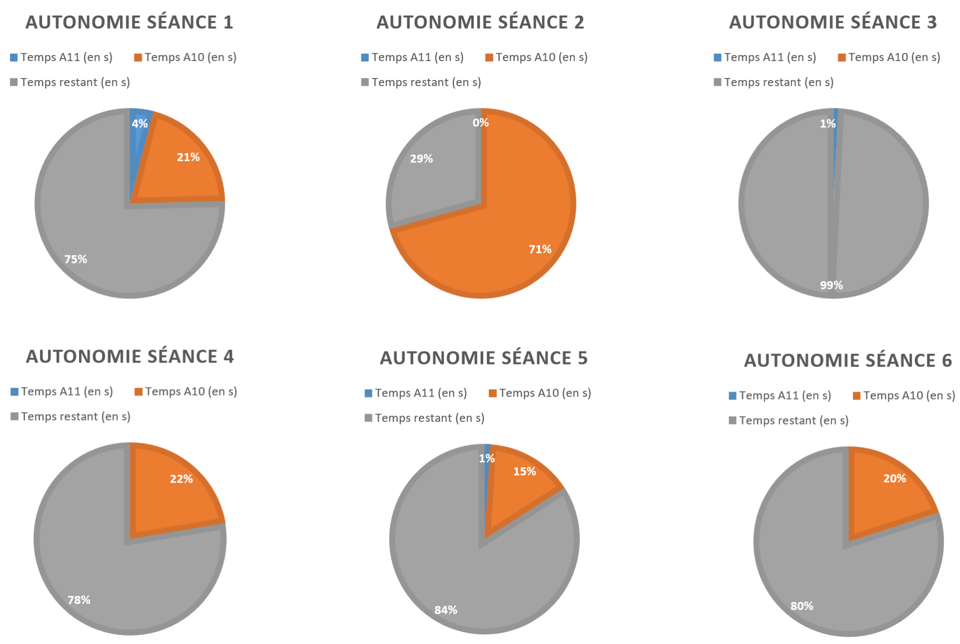


FIGURE 10.23 – Autonomie des élèves séance par séance

Le diagramme en barres de la figure 10.24 ci-après montre la durée pendant laquelle les élèves ont été placés en autonomie en fonction du genre de tâches mathématiques travaillé. Nous pouvons constater que les élèves sont placés en autonomie essentiellement pour travailler deux genres de tâches : $T_{mettre-en-equation}$ et $T_{resoudre}$. Nous questionnons aussi cet aspect de la gestion didactique de M2 : lors de leur étude personnelle hors la classe, les élèves sont-ils à même de travailler des genres de tâches mathématiques en autonomie alors qu'ils ne l'ont pas fait en classe ?

Le graphique de la figure 10.25 ci-après montre la durée pendant laquelle les élèves sont placés en autonomie en fonction du genre de tâches travaillés ($T_{mettre-en-equation}$ et $T_{resoudre}$) et du moment de l'étude. Nous n'avons considéré que les moments 1 à 4, les élèves n'étant pas en autonomie pendant les moments d'institutionnalisation (moment 5). Nous constatons que les élèves sont placés en autonomie aussi longtemps durant les moments 1 à 3 que durant le moment 4, et ce, quel que soit le genre de tâches considéré parmi les deux genres $T_{mettre-en-equation}$ et $T_{resoudre}$.

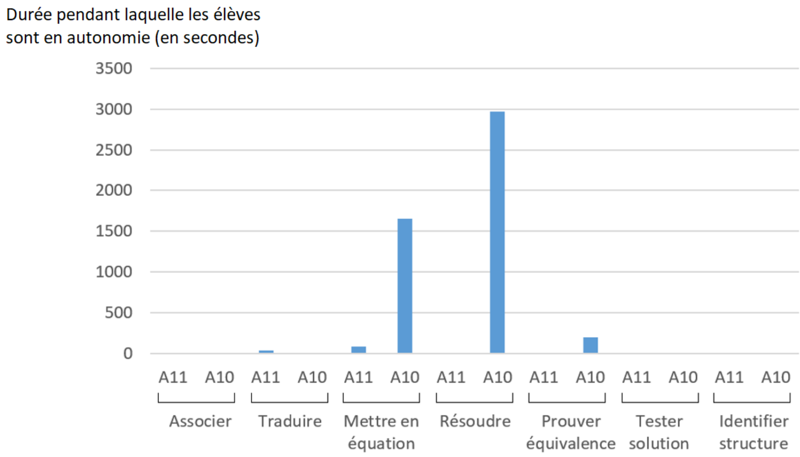


FIGURE 10.24 – Genres de tâches travaillés en autonomie en classe sur l'ensemble du PER professeur

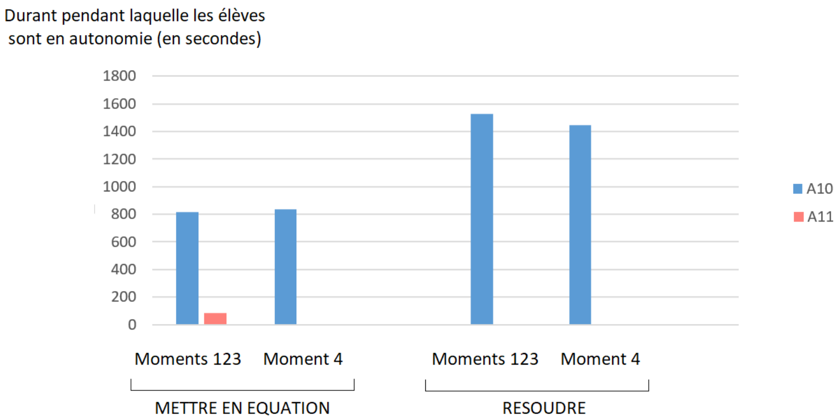


FIGURE 10.25 – Autonomie des élèves en fonction du moment et du genre de tâches mathématiques sur l'ensemble du PER professeur

e. Focalisation sur les genres de tâches donnés à faire hors la classe, sur les fins de séance et les retours en classe

Dans cette sous-section, nous nous concentrons sur les genres de tâches mathématiques donnés à faire hors la classe, ainsi que la gestion didactique de l'enseignant en fin de séance au moment où l'étude personnelle hors la classe est davantage organisée, notamment avec les tâches mathématiques données à faire hors la classe pour la séance suivante ou les gestes d'aide à l'étude accomplis par l'enseignant pour la préparation d'une évaluation sommative, et au retour des élèves en classe où ces tâches mathématiques sont traitées sous la direction de l'enseignant. Comme nous l'avons indiqué plus haut, nous avons jugé intéressant le fait de se focaliser sur ces instants particuliers pour observer le rôle de l'enseignant dans l'organisation et la régulation de l'étude personnelle de ses élèves.

Des genres de tâches inégalement travaillés hors la classe. Le graphique de la figure 10.26 indique les genres de tâches donnés à travailler hors la classe par M2 durant le PER professeur. Dans le PER chercheur, les genres de tâches sont inégalement travaillés hors la classe ; ces inégalités se retrouvent de manière peu étonnante dans le PER professeur.

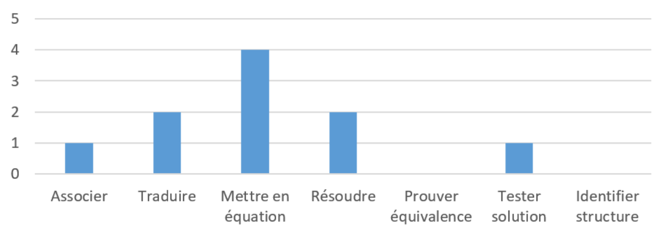


FIGURE 10.26 – Genres de tâches travaillés hors la classe sur l'ensemble du PER professeur

Caractérisation des fins de séance et des retours en classe. Le tableau de la figure 10.27 résume la manière dont M2 gère les fins de séance et les retours en classe. Nous nous sommes focalisé sur les praxéologies d'étude travaillées durant ces phases et sur la gestion didactique de M2.

Nous relevons les points suivants :

– Le travail hors classe est peu contrôlé.
– Les corrections sont majoritairement du type C100 : il y a donc peu de prise en compte des procédures utilisées par les élèves hors la classe.
– Les types de tâches donnés à faire hors la classe ne sont pas dévolués. Ils ont cependant été travaillés en classe.
– Des types de tâches d'étude généraux sont donnés à faire hors la classe par M2, comme revoir ou relire la leçon. Il n'y a pas de retours sur ces types de tâches d'étude au retour en classe.
– Nous comptons plusieurs « occasions manquées » de travailler certaines praxéologies d'étude, notamment $Hsit$, qui situe et articule les OM el'identification des types de tâches, élément que nous supposons crucial.

Nous interrogeons certains aspects de la gestion didactique de M2 sur les fins de séance et les retours en classe : cette dernière favorise-t-elle l'accomplissement d'une étude hors la classe idoine ? La faible vérification des tâches données à faire et la faible prise en compte des procédures des élèves lors de cette étude hors la classe les encouragent-elles à accomplir le travail demandé ? La présence de gestes pédagogiques généraux ne laisse-t-elle pas subsister des implicites au niveau des techniques d'étude à mener qui pourraient ne pas être levés par les élèves une fois ceux-ci placés en autonomie ?

Séance	Fin de séance	Retour en classe à la séance suivante
1	M2 donne le numéro des tâches mathématiques à réaliser hors la classe (mettre en équation des problèmes d'égalisation de programmes de calcul) ainsi que des feuilles qui « donnent des indications » pour réaliser ces tâches. M2 ne dévolue pas les tâches (D0) et ne présente pas les feuilles donnant les indications (contenus, manière de les utiliser).	Les tâches mathématiques données à faire à la séance 1 sont corrigées pendant la séance 3. M2 ne vérifie pas que les tâches données à faire ont été accomplies (V0). Les corrections sont du type C100 : pas de prise en compte de différentes procédures, pas de hiérarchisation des procédures. Durant cette correction, les types de tâches sont identifiés par les élèves (H idtT1) à l'aide d'une technique d'étude explicite : appui sur la consigne (t1). Les différences entre certaines variables didactiques (priorités opératoires) sont pointées (H rel 1).
2	Durant cette séance informatique, les élèves ont résolu des équations à l'aide du logiciel Thot jusqu'à la fin de la séance. M2 n'a pas donné de tâches à faire hors la classe.	-
3	M2 donne un type de tâches d'étude pédagogique général à accomplir hors la classe : « revoir la leçon » sans suggérer de technique d'étude pour le faire (Hgen). Deux tâches mathématiques sont données à faire pour la séance suivante (traduire une équation en un problème d'égalisation de programmes de calcul et tester si un nombre est solution d'une équation). M2 ne dévolue pas ces tâches (D0).	Aucun retour n'est fait sur le type de tâches d'étude « revoir la leçon » à la séance 4. Les tâches sont corrigées mais sans hiérarchisation des procédures (C110 ou C100). Les types de tâches ne sont pas identifiés (H idt T0) les techniques pour les réaliser non plus (H idt t 0), et les agrégations entre OM ne sont pas explicitées (Hsit 0).
4	M2 donne un type de tâches d'étude général à accomplir hors la classe : « relire la leçon » (Hgen) sans donner de technique d'étude pour le faire. Des tâches mathématiques sont données à faire hors la classe (prouver l'équivalence d'équations et résoudre des équations) sans être dévoluées (D0).	M2 ne vérifie pas que les tâches données à faire ont été accomplies (V0). Aucun retour n'est fait sur le type de tâches d'étude « relire la leçon » à la séance 5. Les tâches sont corrigées sans prise en compte des différentes procédures et sans hiérarchisation de ces procédures (C100). Le type de tâches, la technique pour le réaliser et la composante théorique de la technologie associée sont explicitées (H idt T 1, H idt t 1, H idt th 1) ; les agrégations d'OM ne sont pas mises en avant (Hsit 0).
5	Des tâches mathématiques sont données à faire hors la classe (résoudre des problèmes algébriques) sans être dévoluées (D0). M2 dit que les tâches sont en lien (« vous faites l'exercice 2 qui est le même que l'exercice un ») sans préciser ce lien (Hgen, Hrel 0).	M2 ne vérifie pas que les tâches données à faire ont été accomplies (V0). Les exercices sont corrigés avec des corrections du type C100.

FIGURE 10.27 – Gestion didactique des fins de séance et des retours en classe sur les séances 1 à 5 du PER professeur

10.3.4 Conclusion sur l'analyse *a posteriori* de la mise en œuvre du PER professeur

Les analyses précédentes ont mis en avant plusieurs tendances dans les pratiques de l'enseignant M2 vis-à-vis de l'organisation de l'étude personnelle de ses élèves. Parmi elles, nous retenons celles qui nous paraissent susceptibles de laisser des besoins d'apprentissages implicites, tant au niveau des OM à construire que des praxéologies d'étude à développer pour accomplir un travail personnel hors la classe idoine :

– Au niveau des OM étudiées, les OM locales de l'OM épistémologique de référence relative aux équations ont été travaillées de manière équilibrée durant la mise en œuvre du PER professeur, mais certains genres de tâches ont été moins réalisés et moins convoqués que d'autres durant le PER professeur, en particulier les genres de tâches potentiellement utiles à l'intelligence et au contrôle des calculs. Si les technologies sont plutôt explicitées, les techniques pour réaliser les tâches mathématiques proposées aux élèves, elles, le sont moins.

– Concernant les responsabilités laissées aux élèves, ces derniers auraient probablement pu prendre davantage en charge la réalisation des tâches et l'explicitation des techniques et des technologies afin d'être plus régulièrement placés en situation d'autonomie.
– Au niveau des praxéologies d'étude développées, l'identification des genres de tâches mathématiques aurait pu être plus fréquemment réalisée par l'enseignant et par les élèves, car cette reconnaissance est fondamentale pour apprendre à construire et à articuler des OM d'après nos hypothèses (chapitre cinq), la synthèse de travaux de recherche sur l'étude personnelle (chapitre trois) et l'étude exploratoire (chapitre quatre). L'enseignant aurait pu à plusieurs occasions suggérer explicitement aux élèves des techniques d'étude et les leur faire davantage mobiliser en classe. Enfin, nous avons noté une présence non négligeable de types de tâches d'étude pédagogiques « généraux » sans explicitation de techniques d'étude prenant en compte la complexité et les spécificités de l'activité mathématique.
– La présence des implicites précédents sur la manière d'organiser l'étude personnelle peut être éclairée par certains éléments de gestion didactique de l'enseignant M2. En effet, nous nous demandons si les conditions que ce dernier a mis en place n'ont pas rendu difficile le travail des OM et des praxéologies d'étude en lien avec la responsabilisation des élèves vis-à-vis de leur étude personnelle. En effectuant une simple lecture des énoncés des tâches prescrites, en ne prenant pas régulièrement des informations sur les procédures mobilisées durant les phases de recherche, en demeurant presque toujours disponible dans ces phases, en corrigeant davantage qu'en mettant en commun et en hiérarchisant différentes procédures lors des phases de formulation, de validation et d'institutionnalisation, l'enseignant a probablement réduit le nombre d'occasions d'engager et de maintenir ses élèves en situation d'autonomie, de faire émerger et de motiver des techniques d'étude des OM relatives aux équations.

Dans la section suivante, nous analysons les effets de la mise en œuvre du PER professeur sur les apprentissages des élèves. La section d'après aura pour objet la mise en relation entre ces apprentissages durant leur étude personnelle hors la classe et les pratiques de l'enseignant.

10.4 Analyse *a posteriori* de la mise en œvre du PER relatif aux équations : côté élèves

10.4.1 Présentation : analyse des OM apprises à partir des productions d'élèves sur une évaluation sommative relative aux équations

L'un des objectifs de cette thèse est d'amener les élèves à faire évoluer leur rapport personnel aux équations vers un rapport idoine. Pour cela, nous avons bâti une séquence d'enseignement sur les équations (PER chercheur) intégrant les principaux éléments épistémologiques relatifs à ce thème. Suite à la mise en œuvre de cette séquence par l'enseignant M2 qui, nous l'avons expliqué, s'est opérée moyennant quelques modifications liées aux contraintes du terrain et aux pratiques professionnelles, nous cherchons à apporter des éléments de réponse à la question suivante : quel rapport personnel aux équations les élèves ont-ils construit ? Plus exactement, nous manifestons la volonté d'*apprécier* ce rapport personnel en regard des traces observables dont nous disposons.

C'est à partir d'une évaluation écrite co-organisée avec l'enseignant M2 et qui porte sur les équations que nous allons tenter ici d'extraire des éléments permettant de caractériser en partie le rapport personnel des élèves aux équations (le sujet intégral de cette évaluation est lisible en annexe, page 752). Dans les paragraphes qui suivent, nous présentons les énoncés proposés aux élèves lors de cette évaluation, puis la manière dont nous avons listé et interprété leurs réponses. Nous proposons des tableaux et graphiques pour illustrer le nombre et la proportion des erreurs pour chaque exercice et nous illustrons notre manière d'analyser les réponses à l'aide d'exemples pour chaque exercice.

Nous tenons à rester prudent sur notre analyse et nous n'avancerons que des hypothèses sur les origines des erreurs. En effet, si certaines erreurs paraissent relativement aisées à interpréter en termes de praxéologies mises en œuvre, nombreuses sont celles où il est plus ardu de se prononcer. La figure 10.28 ci-après donne un exemple d'une telle erreur (l'annotation en rouge est celle de l'enseignant M2).

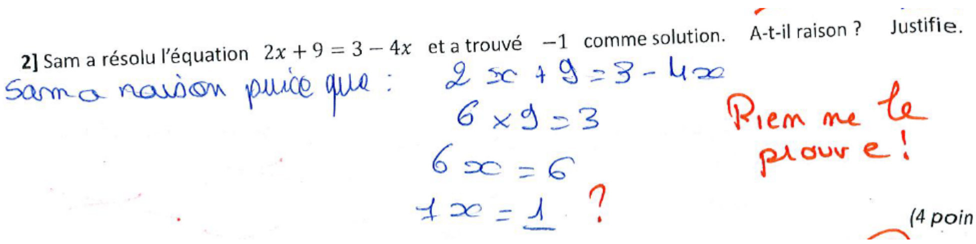


FIGURE 10.28 – Une erreur difficile à interpréter

Comment l'élève a-t-il par exemple transformé l'équation $2x + 9 = 3 - 4x$ en $6 \times 9 = 3$ (si tant est qu'il s'agit bien d'une « transformation » du point de vue de l'élève) ? Il a peut-être ajouté $4x$ à chaque membre de l'équation, ou bien il a « déplacé » le terme $4x$ d'un membre à l'autre en changeant son signe sans s'appuyer sur une quelconque propriété mathématique (en l'absence d'ostensifs visibles, il est difficile de se prononcer) ; puis au lieu d'écrire l'équation équivalente correcte $6x+9 = 3$, il a écrit $6 \times 9 = 3$, peut-être parce qu'il a oublié le signe + et qu'il a confondu la lettre x avec le symbole de la multiplication, d'où le 6×9 au lieu de $6x + 9$. Nous avons conscience qu'ici, notre interprétation est poussée. Par conséquent, dans ce genre de situation, nous avons fait le choix de classer l'erreur comme étant « non interprétable ».

10.4.2 Présentation générale de l'évaluation

L'évaluation écrite proposée aux élèves comporte six tâches mathématiques, dont cinq portent sur les équations (la sixième a pour objet la double distributivité). Nous n'avons réalisé nos analyses que sur les tâches ayant trait aux équations et sur lesquelles nous pouvions proposer des interprétations intéressantes en regard de nos questions de recherche.

Ces tâches mathématiques relèvent des principaux types ou genres de tâches rencontrés au cours de la séquence d'enseignement : résoudre algébriquement une équation du premier degré à une inconnue, tester si un nombre est solution, résoudre un problème de programmes de calcul à égaliser, résoudre un problème de périmètres de figures dynamiques à égaliser.

Vingt élèves ont passé l'évaluation.

L'évaluation a été construite avec l'enseignant. Ce dernier nous a proposé une première version qui recouvrait l'ensemble des types de tâches travaillés en classe (voir ci-dessus), et sur laquelle nous avons émis des suggestions pour opérer quelques changements de valeurs dans les variables didactiques : présence de signes multipliés dans des expressions, ordre dans lequel les équations à résoudre sont proposées, questions intermédiaires pour le problème de géométrie avec les figures dynamiques. Ces changements ont été mineurs et la proposition initiale de sujet de M2 a été finalement peu modifiée.

10.4.3 Méthodologie pour les analyses

Nous avons choisi d'analyser en détail trois tâches mathématiques de l'évaluation et de commenter plus brièvement les tâches à partir desquelles nous ne pouvions tirer de conclusions pertinentes vis-à-vis de nos interrogations.

Pour les tâches analysées (exercices 2, 3 et 4), nous présentons :

- **L'énoncé de l'exercice.** Nous avons scanné et inséré dans le texte les énoncés des tâches de l'évaluation.
- **Une analyse *a priori* de la tâche orientée vers nos objectifs de recherche.** Dans cette analyse *a priori*, nous n'avons pas cherché à anticiper de manière exhaustive toutes les procédures envisageables, potentiellement mobilisées par les élèves. Les éléments présentés ont été choisis en regard des réponses envisageables à l'évaluation et de nos questions de recherche. Nous avons rapproché les procédures incorrectes de la mise en œuvre de techniques en dehors de leur domaine de validité, qui traduisent la mobilisation de technologies mathématiques anciennes et/ou l'absence de mobilisation de technologies requises. L'analyse *a priori* présente de plus les principales procédures mobilisées par les élèves, classées en fonction de nos hypothèses relatives aux techniques et technologies sur lesquelles ils s'appuient. Nous avons trié les réponses des élèves en fonction de nos hypothèses sur la technologie algébrique relative aux équations ou non qui est mobilisée. Dans les cas où les élèves semblent s'appuyer sur une technologie algébrique mais n'obtiennent pas de solution correcte, nous avons avancé des hypothèses sur les OM que les élèves n'ont pas articulées.
- **Des données chiffrées.** Nous fournissons des tableaux informatifs sur les occurrences des procédures mobilisées en fonction des technologies. Une réponse est jugée incorrecte dès lors qu'elle présente une erreur mathématique ; cela ne signifie pas que l'élève ne s'appuie pas sur une technologie algébrique relative aux équations. Une réponse est jugée correcte si l'élève obtient la so-

lution attendue et fournit des éléments technologiques justifiant l'application de la technique utilisée pour réaliser la tâche si cela est demandé.

- **Un exemple analysé.** À titre d'illustration, nous présentons un exemple tiré d'une copie d'élève et sur lequel nous montrons comment nous réalisons nos analyses.

10.4.4 Analyse des erreurs à l'exercice 2 : résolution algébrique d'équations

a. Enoncé

Exercice 2 **Résoudre les équations ci-dessous en détaillant les étapes :** *(5 points)*

$5 \times x + 8 = 3 \times x + 2$	$8x - 4 = -3x + 9$	$3 \times (x + 5) = x + 3$

FIGURE 10.29 – Tâches de l'évaluation sommative portant sur la résolution algébrique d'équations

b. Analyse *a priori*

Objectif de la tâche : L'objectif est de résoudre une équation en utilisant la technique de résolution algébrique.

Variables didactiques : La première équation explicite les signes de multiplication. Dans les deux autres, certains signes de multiplication sont implicites.

La première et la troisième équations ne présentent que des coefficients entiers naturels. La deuxième équation présente des coefficients négatifs.

La troisième équation est la seule à présenter un membre avec un produit parenthésé. Cela nécessite de mobiliser la technique de développement (OM expressions algébriques) pendant l'application de la technique de résolution algébrique.

Les solutions respectives des trois équations sont -3, $\frac{13}{11}$ et -6. La deuxième équation est donc la seule à présenter une solution fractionnaire non décimale. Cela signifie qu'il est possible d'utiliser une technique par essais/erreurs pour résoudre les première et troisième équations.

Le fait que deux des trois solutions soient des nombres « petits » (-3 et -6) autorisent une vérification relativement aisée des calculs. Cependant, le fait qu'ils soient négatifs augmente la complexité de cette vérification : l'élève doit réaliser une agrégation avec les OM portant sur les nombres relatifs.

Résolution correcte par une technique algébrique : La technique de résolution est considérée algébrique (appuyée sur les propriétés de conservation de l'égalité) lorsqu'elle est utilisée de manière correcte et détaillée, conformément à la consigne. Dans ce cas, l'élève obtient la solution de l'équation attendue et présente au moins une équation équivalente intermédiaire lors de sa résolution avant d'aboutir à la solution de l'équation. Il peut ou non utiliser des ostensifs traduisant la mise en œuvre des propriétés de conservation de l'égalité et/ou citer ces propriétés comme réalisé en classe.

Pour la troisième équation, l'élève mobilise correctement la propriété de distributivité simple pour développer le produit parenthésé du membre de gauche avant de poursuivre la résolution algébrique appuyée sur les propriétés de conservation de l'égalité. Il peut citer cette propriété de distributivité simple ou non ; il peut utiliser des ostensifs (flèches) ou non pour indiquer l'utilisation de cette propriété.

Résolution incorrecte par une technique algébrique : L'élève mobilise des éléments technologiques pour la résolution algébrique d'une équation mais de manière incomplète ou sans agréger ces éléments avec d'autres éléments nécessaires à l'accomplissement de la tâche (technologies relatives à l'égalité, au calcul sur les expressions algébriques, sur les nombres relatifs, sur les fractions, etc.) :

- Il s'appuie majoritairement sur la composante théorique de la technologie relative à la résolution algébrique d'une équation. Ceci se traduit par l'utilisation des propriétés de conservation de l'égalité, éventuellement de manière visible avec la présence d'ostensifs, mais sans intelligence des calculs : par exemple, les opérations utilisées ne permettent pas de faire avancer la résolution de l'équation ; ou bien, l'élève s'arrête avant la fin de la résolution/
- Il s'appuie majoritairement sur la composante pratique de la technologie relative à la résolution algébrique d'une équation. Ceci se traduit par des transformations sur les membres de l'équation de manière asymétrique, c'est-à-dire sans respect des propriétés de conservation de l'égalité, mais cohérente dans le sens où elles visent bien à « isoler » ou « éliminer » l'inconnue dans un membre ou un autre. Nous considérons également qu'une technique du type

« transposition » (c'est-à-dire « faire passer de l'autre côté de l'égalité ») peut s'appuyer uniquement sur la composante pratique et non pas sur la composante théorique ; mais il est plus difficile néanmoins d'être catégorique (difficile de dire si l'élève s'appuie aussi sur la composante théorique ou non).

– Il s'appuie sur les deux composantes de la technologie relative à la résolution algébrique d'une équation, mais il lui manque les technologies relatives à l'égalité ou au calcul sur les expressions algébriques ou sur les nombres relatifs ou sur les fractions. Ceci peut se traduire par exemple par l'utilisation d'ostensifs relatifs aux propriétés de conservation de l'égalité, utilisés avec une intelligence des calculs appropriée et en respectant les propriétés de conservation de l'égalité, mais avec des transformations erronées en ce qui concerne les expressions (exemple : concaténation du type $ax + b = (a + b)x$) ou les nombres relatifs (exemple : $5 - 7 = 2$) ou les fractions. Autre exemple, relatif à la mobilisation d'une technologie ancienne relative à l'égalité vue comme annonce d'un résultat : à chaque fois que l'élève écrit une équation équivalente à une autre, il la précède du signe d'égalité.

Résolution correcte mais non attendue des première et troisième équations par une technique par essais/erreurs : L'élève utilise la technique par essais/erreurs pour résoudre la première et/ou la troisième équations de manière correcte. Dans ce cas, l'élève mobilise la technologie de substitution et la définition de solution d'une équation. Il peut détailler ses calculs en présentant les valeurs successives prises par chaque membre de l'équation selon la valeur donnée à l'inconnue, jusqu'à obtenir une égalité vraie entre les deux membres.

Résolution incorrecte de la deuxième équation avec une technique par essais/erreurs : L'élève emploie la technique par essais/erreurs pour tenter de résoudre la deuxième équation ; cette technique est alors utilisée en dehors de son domaine de validité puisque la solution de l'équation est $\frac{13}{11}$.

c. Tableaux récapitulatifs

Le tableau ci-dessous présente le nombre de réponses correctes et incorrectes et le nombre de non réponses à l'exercice 2 :

Question	Réponse correcte	Non réponse	Réponse incorrecte
2.1	11	1	8
2.2	11	1	8
2.3	7	1	12

Pour chacune des trois équations de l'exercice, nous comptons le nombre d'élèves utilisant une technique de résolution algébrique. Nous considérons qu'il y a utilisation d'une telle technique si l'élève écrit plusieurs équations les unes en-dessous des autres jusqu'à aboutir à une équation de la forme $x = a$ (d'inconnue x) ou à un nombre. Parmi les élèves utilisant une technique de résolution algébrique, nous distinguons ceux qui s'appuient sur les deux composantes (théorique et pratique) de la technologie justifiant cette technique, de ceux qui ne s'appuient que sur l'une ou l'autre de ces composantes. Nous considérons qu'un élève s'appuie sur les deux composantes s'il y a présence d'ostensifs qui correspondent à l'application des propriétés de conservation de l'égalité et que ces ostensifs traduisent une « logique » de calcul (par exemple, l'élève semble vouloir « isoler » l'inconnue, même s'il se trompe dans le calcul sur les expressions algébriques ou sur les nombres relatifs). Nous considérons qu'il ne s'appuie que sur la composante théorique si les ostensifs sont présents mais sont utilisés de sorte que la résolution algébrique ne « progresse » pas (transformations inutiles ou « qui tournent en rond »), et qu'il ne s'appuie que sur la composante pratique s'il semble « transposer » des termes d'un membre de l'équation à l'autre. Si un élève écrit plusieurs équations les unes en-dessous des autres, jusqu'à trouver la solution, et que toutes les équations sont effectivement équivalentes, mais qu'aucun ostensif n'est présent, nous ne nous prononçons pas sur le fait que l'élève s'appuie sur l'une, l'autre, ou les deux composantes de la technologie. Nous le comptons comme un élève utilisant la technique de résolution algébrique.

Nous comptons ensuite le nombre d'élèves utilisant une technique non algébrique. Nous considérons que l'élève utilise une technique de résolution par essais/erreurs si plusieurs calculs témoignent d'une volonté de calculer les expressions de chaque membre de l'équation jusqu'à trouver une égalité entre ces expressions (aucun élève n'a procédé ainsi). Si l'élève n'écrit pas d'équations les unes en-dessous des autres ou des calculs semblant correspondre à une technique par essais/erreurs, mais écrit autre chose, nous ne nous prononçons pas sur la technique utilisée.

Enfin, nous comptons le nombre d'élèves ne répondant pas (rien d'écrit, ou quelque chose d'écrit mais entièrement raturée).

En classe, de nombreuses résolutions algébriques d'équations similaires à celles proposées dans cet exercice ont été réalisés.

Le tableau ci-après présente les résultats de nos analyses dont nous venons de faire la description :

	$5 \times x + 8 = 3 \times x + 2$	$8x - 4 = -3x + 9$	$3 \times (x + 5) = x + 3$
Nombre d'élèves résolvant l'équation par une technique algébrique **en appui visible** sur les deux composantes théorique et pratique de la technologie associée	13	12	14
Nombre d'élèves résolvant l'équation par une technique algébrique **sans appui visible** sur les deux composantes théorique et pratique de la technologie associée	3	4	3
Nombre d'élèves tentant de résoudre l'équation sans utiliser la technique de résolution algébrique appuyée sur les propriétés de conservation de l'égalité	2	1	1
Nombre d'élèves n'ayant pas répondu	1	2	1
Nombre d'élèves sur lesquels nous ne nous prononçons pas	1	1	3

FIGURE 10.30 – Procédures de l'exercice 2

La troisième équation, qui nécessitait de développer une expression dans un membre avant de résoudre l'équation en utilisant les propriétés de conservation de l'égalité, a été moins bien réussie que les deux premières équations qui sont de la forme $ax + b = cx + d$. Le fait que les signes multipliés soient explicites ou non ne semblent pas affecter la réussite des élèves. Tous les élèves qui ont donné une réponse détaillée, c'est-à-dire des réponses qui ne présentent pas seulement la solution de l'équation, semblent avoir tenté de résoudre algébriquement cette équation ; entre 16 et 17 élèves sur 20 sont dans cette situation.

d. Un exemple analysé

Nous donnons ci-après un exemple de réponse d'élève analysée (figure 10.31).

En raison des équations visibles, nous considérons que l'élève utilise une technique de résolution algébrique. De plus, en raison des ostensifs visibles et du fait que l'élève parvienne à trouver une solution à l'équation, nous considérons qu'il s'appuie sur les propriétés de conservation de l'égalité (composante théorique) utilisées avec une intelligence des calculs et une volonté d'« éliminer » l'inconnue (composante pratique), à tel point que celle-ci finit même par « disparaître » complètement.

L'équation initiale est transformée en l'égalité $2 + 8 = +2$ suite à l'ajout du terme $-3x$ dans chaque membre. L'élève semble commettre ici l'erreur $5x - 3x = 2$. Plusieurs interprétations sont possibles. Par exemple, le fait d'écrire l'ostensif

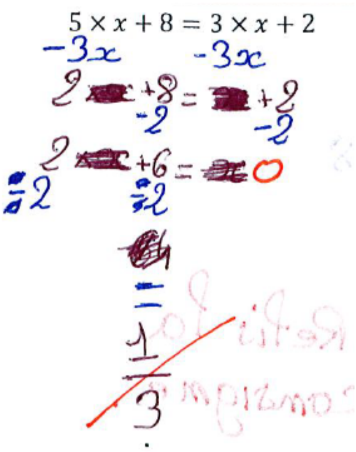


FIGURE 10.31 –

$-3x$ en-dessous du monôme $5 \times x$ a peut-être poussé l'élève à utiliser la technique opératoire de la soustraction posée en-dehors de son domaine de validité.

L'élève ajoute ensuite -2 à chaque membre de l'égalité et obtient l'égalité $2+6 = 0$; puis il divise chaque terme (2 et 6) par 2 (division non pertinente pour la résolution de l'équation et que nous interprétons comme un effet de contrat : la résolution d'une équation « doit » se terminer par une division avec l'un des nombres en présence dans l'équation, car c'est que l'enseignant M2 a fait durant toute la séquence sur les équations en classe). Il annonce le résultat $\frac{1}{3}$ à l'aide d'une égalité et semble commettre au passage l'erreur $a \div b = \frac{b}{a}$ puisque $6 \div 2$ devient $\frac{1}{3}$.

Nous faisons l'hypothèse que cet élève n'entretient pas un rapport idoine à des praxéologies anciennes (calcul sur les expressions algébriques, calcul sur les fractions) et que ses erreurs sont imputables à l'absence de technologies ou l'utilisation de techniques en dehors de leur domaine de validité en rapport avec ces praxéologies anciennes. Autrement dit, nous estimons que l'élève dispose des principaux éléments technologiques relatifs à la résolution algébrique d'une équation, qu'il applique la technique de résolution algébrique en appui sur ces éléments technologiques, mais que cette application est incorrecte *parce qu'*elle convoque des types de tâches de praxéologies anciennes avec lesquelles l'élève n'entretient pas un rapport idoine.

10.4.5 Analyse des erreurs à l'exercice 3 : tester si un nombre est solution d'une équation

a. Enoncé

Exercice 3 *(2 points)*

1] Le nombre 2 est-il solution de l'équation $3x + 5 = 7x - 1$? Justifie.

2] Sam a résolu l'équation $2x + 9 = 3 - 4x$ et a trouvé -1 comme solution. A-t-il raison ? Justifie.

FIGURE 10.32 – Tâche de l'évaluation sommative portant sur le test de solution d'une équation

b. Analyse *a priori*

Objectif de la tâche : L'objectif est de déterminer si un nombre est solution d'une équation ou non.

Variables didactiques : Bien que les deux questions puissent être résolues de la même manière, les formulations sont différentes et le fait d'introduire dans la seconde question un élève fictif qui a *résolu* une équation peut, du fait de l'utilisation de ce verbe « résoudre » dans l'énoncé, davantage inciter les élèves à résoudre eux-mêmes l'équation pour vérifier que la solution trouvée par cet élève fictif est correcte ou non. De plus, ce genre de formulation n'a jamais été rencontré en classe avec l'enseignant M2.

Le nombre proposé par l'énoncé est un entier naturel dans la première question et un entier négatif dans la seconde. Le fait que l'entier soit négatif dans la seconde question peut être source de difficulté pour les élèves utilisant la technique de substitution puisque cela nécessite de mobiliser des praxéologies mathématiques relative aux entiers relatifs.

Le nombre 2 n'est pas solution de la première équation (la solution est $\frac{3}{2}$ ou 1,5). -1 est solution de la seconde équation.

Résolution correcte attendue par une technique algébrique : Nous considérons que l'élève dispose de la technologie de substitution pour tester si un nombre est solution, ainsi que des éléments technologiques justifiant les techniques de calcul numérique (priorités opératoires, sens des opérateurs, etc.) s'il applique la technique consistant à substituer la variable par le nombre proposé et à regarder si l'égalité obtenue est vraie.

Résolution correcte envisageable par une technique algébrique (application des propriétés de conservation de l'égalité) : Nous considérons que l'élève dispose de la technologie justifiant la technique de résolution algébrique s'il utilise cette dernière pour résoudre algébriquement l'équation.

Résolution incorrecte par une technique algébrique : Les procédures incorrectes liées à la résolution algébrique de l'équation ont déjà été envisagées à l'exercice 2 (résolution d'équations).

Si l'élève ne dispose pas des technologies liées au calcul sur les nombres relatifs ou aux priorités opératoires ou aux conventions des écritures algébriques, alors il peut se tromper dans les calculs lors de l'utilisation de la technique de substitution, ou bien ne rien écrire.

c. Tableaux récapitulatifs

Le tableau ci-dessous présente le nombre de réponses correctes et incorrectes et le nombre de non réponses à l'exercice 3 :

Question	Réponse correcte	Non réponse	Réponse incorrecte
3.1	9	4	7
3.2	6	5	9

Le tableau ci-après (figure 10.33) présente les occurrences de chaque procédure.

		Question 3.1	Question 3.2
Elèves utilisant une technique algébrique	Nombre d'élèves qui tentent de substituer la lettre par la valeur proposée	6	5
	Nombre d'élèves qui tentent de résoudre algébriquement l'équation	5	6
Nombre d'élèves n'ayant pas répondu		4	5
Nombre d'élèves sur lesquels nous ne nous prononçons pas		5	4

FIGURE 10.33 – Procédures de l'exercice 3 (tester si un nombre est solution d'une équation)

Nous constatons que plus de la moitié des élèves (11 sur 20) utilisent une technique algébrique pour réaliser la tâche.

La deuxième question a été moins bien réussie que la première alors que la même technique de résolution de la tâche (du type « tester si un nombre est solution ») pouvait être utilisée. Cependant, la formulation de la question n'était pas la même : dans la question 1, la technique est pratiquement $T-$convoquée (« le nombre 2 est-il solution ? ») alors que dans la question 2, elle est plutôt $R-$convoquée (il s'agit de contrôler la réponse d'un élève fictif ; la question est moins prototypique que la première). De plus, la première question a été traitée en classe alors la seconde ne l'a pas été.

Le nombre de réponses incorrectes peut également être mis en relation avec le fait que la technique de substitution pour réaliser le genre de tâches $T_{tester-sol}$ a été peu explicitée en classe par l'enseignant.

d. Un exemple analysé

Nous donnons ci-après un exemple de réponse d'élève analysée (figure 10.34). Les annotations en rouge sont celles de l'enseignant M2.

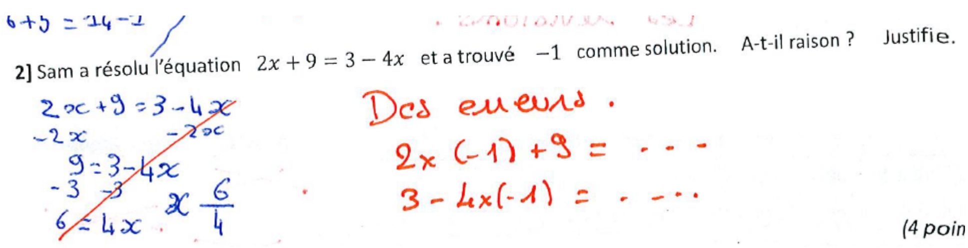


FIGURE 10.34 – Une procédure d'élève à l'exercice 3

En raison des ostensifs visibles, nous considérons que l'élève utilise une technique de résolution algébrique en appui sur les propriétés de conservation de l'égalité et avec stratégie. L'équation initiale est transformée en l'équation $9 = 3 - 4x$ par ajout du terme $-2x$ à chaque membre. Dans ses calculs, l'élève semble alors avoir omis d'ajouter $-2x$ au membre de droite (alors qu'il semble l'avoir bien ajouté au membre de gauche). Ensuite, l'élève semble commettre l'erreur $3 - 4x - 3 = 4x$. L'élève ne respecte donc pas les priorités opératoires (opérations différentes dans les membres de gauche et de droite) et se trompe dans le calcul avec les nombres relatifs ($3-4x-3$ « donne » $4x$). Ses erreurs nous semblent provenir d'un rapport personnel non idoine à d'anciennes OM (priorités opératoires, calcul sur les nombres relatifs) étant donné que les technique et technologie algébriques sont mobilisées.

10.4.6 Analyse des erreurs à l'exercice 4 : programmes de calcul à égaliser

a. Enoncé

Exercice 4 *(4 points)*

Voici deux programmes de calcul :

PROGRAMME A	PROGRAMME B
• Choisir un nombre • Le multiplier par 11 • Soustraire 4 au résultat	• Choisir un nombre • Lui ajouter 2 • Multiplier le résultat par 6

Alice et Benjamin choisissent le même nombre de départ.

Alice teste le programme A et Benjamin teste le programme B.

Alice et Benjamin trouvent le même résultat final.

Quel nombre de départ ont-ils choisi ? Justifie ta réponse.

FIGURE 10.35 – Tâche de l'évaluation sommative portant sur la mise en équation et la résolution algébrique d'un problème d'égalisation de programmes de calcul

b. Analyse *a priori*

Objectif de la tâche : L'objectif est de résoudre un problème consistant à égaliser deux programmes de calcul.

Variables didactiques : Les nombres présents dans les instructions des programmes sont des entiers naturels. L'ordre des instructions du programme B nécessite, lors de sa traduction en expression algébrique, de recourir à un produit parenthésé.

L'équation correspondant au problème est $11x - 4 = 6(x + 2)$ et la solution est $\frac{16}{5}$ ou 5,2.

Résolution attendue par une technique algébrique appuyée sur les propriétés de conservation de l'égalité : L'élève convoque une lettre et traduit chaque programme par une expression algébrique. Il égalise ces expressions puis résout l'équation à l'aide d'une technique de résolution appuyée sur les propriétés de conservation de l'égalité.

Résolution envisageable par une technique algébrique de mise en équation et par une résolution par essais/erreurs : L'élève convoque une lettre et traduit chaque programme par une expression algébrique. Il égalise ces expressions puis résout l'équation à l'aide d'une technique par essais/erreurs.

Résolution envisageable par une technique par essais/erreurs : L'élève ne produit pas d'expression algébrique et tente de réaliser la tâche en testant les programmes par des valeurs d'entrée successives jusqu'à obtenir des valeurs de sortie égales.

c. Tableaux récapitulatifs

Le tableau ci-dessous présente le nombre de réponses correctes et incorrectes et le nombre de non réponses à l'exercice 4 :

Question	Réponse correcte	Non réponse	Réponse incorrecte
4.	7	4	9

Le tableau ci-après (figure 10.36) présente les occurrences de chaque procédure.

<table>
<tr><th colspan="3"></th><th>Occurrences</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Elèves utilisant une technique algébrique</td><td rowspan="2">Elèves produisant une équation et résolvant cette équation</td><td>Nombre d'élèves résolvant l'équation par une technique algébrique appuyée sur les propriétés de conservation de l'égalité</td><td>9</td></tr>
<tr><td>Nombre d'élèves résolvant l'équation par une technique par essais/erreurs</td><td>0</td></tr>
<tr><td colspan="2">Nombre d'élèves produisant une équation sans la résoudre</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="2">Nombre d'élèves produisant des expressions algébriques sans les égaliser</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="3">Nombre d'élèves réalisant la tâche par une technique par essais/erreurs sans produire d'expressions algébriques</td><td>3</td></tr>
<tr><td colspan="3">Nombre d'élèves n'ayant pas répondu</td><td>4</td></tr>
<tr><td colspan="3">Nombre d'élèves sur lesquels nous ne nous prononçons pas</td><td>2</td></tr>
</table>

FIGURE 10.36 – Procédures de l'exercice 4 (programmes de calcul à égaliser)

Au total, plus de la moitié des élèves (11 sur 20) utilisent ou semblent utiliser une technique algébrique. Parmi eux, 7 résolvent la tâche de manière correcte. Bien que la technique par essais/erreurs eût pu aboutir, aucun des 4 élèves l'ayant utilisée n'est parvenu à un résultat correct.

L'égalisation de programmes de calcul a été fréquemment travaillé en classe ; cependant, les programmes de calcul étudiés conduisaient plus souvent à des équations du type $ax + b = cx + d$ sans produit parenthésé qu'à des équations avec produit parenthésé, comme c'est le cas dans cet exercice, ce qui peut expliquer le nombre de procédures non attendues.

d. Un exemple analysé

Nous donnons ci-après un exemple de réponse d'élève analysé (figure 10.37). Les annotations en rouge sont celles de l'enseignant M2.

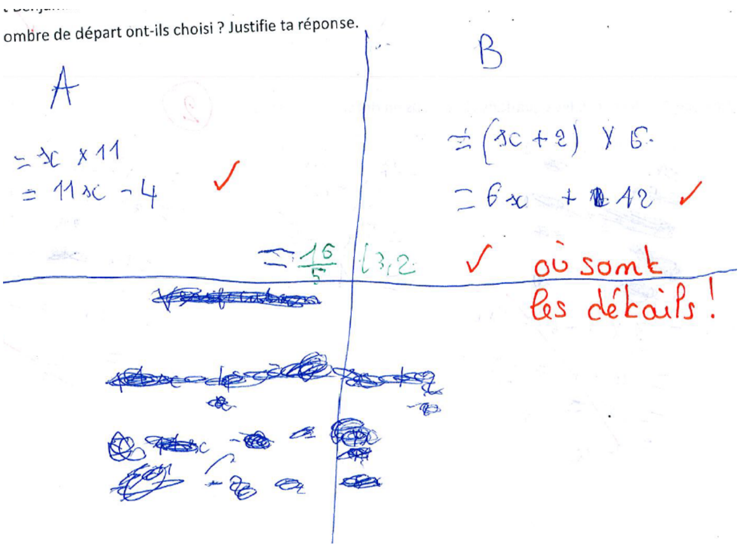


FIGURE 10.37 –

L'élève semble avoir traduit chaque programme de calcul par une expression, la lettre x semblant représenter le nombre de départ pour chaque programme. Il n'y a pas d'équation écrite malgré la présence d'un signe d'égalité à gauche de chaque expression et avant le résultat final (l'égalité semble annoncer un résultat). La résolution de l'équation n'est pas écrite mais l'élève aboutit à un résultat correct. L'élève ne répond pas clairement à la question posée même s'il a trouvé la solution.

Nous n'avons pas tenu compte de ce qui a été raturé par l'élève et qui semble correspondre à une tentative de vérification (le mot « vérification » lui-même semble avoir été écrit par l'élève avant d'être barré).

10.4.7 Commentaires sur l'exercice 1 : vocabulaire sur les équations

Nous présentons simplement l'énoncé de l'exercice 1 et un tableau récapitulant les réponses correctes, incorrectes et les non réponses. Cette tâche consiste à mobiliser le vocabulaire sur les équations et a été la plus réussie.

a. Enoncé

Exercice 1 *(3 points)*

1] Entoure en bleu l'inconnu de l'équation ci-dessous :	2] Entoure en rouge le membre de droite de l'équation ci-dessous :	3] Entoure en vert la solution de l'équation ci-dessous :
$8 \times x - 3 = 6 + 3 \times x$	$8 \times x - 3 = 6 + 3 \times x$	$8 \times x - 3 = 6 + 3 \times x$ $5 \times x - 3 = 6$ $5 \times x = 9$ $x = \frac{9}{5}$

FIGURE 10.38 – Tâche de l'évaluation sommative portant sur le vocabulaire relatif aux équations

b. Tableau récapitulatif

Le tableau ci-dessous présente le nombre de réponses correctes et incorrectes et le nombre de non réponses à l'exercice 1 :

Question	Réponse correcte	Non réponse	Réponse incorrecte
1.a	14	1	5
1.b	16	1	3
1.c	17	2	1

Nous avons considéré, pour la question 1.c, que la réponse était correcte si l'élève a entouré l'égalité $x = \frac{9}{5}$.

10.4.8 Commentaires sur l'exercice 5 : périmètres de figures dynamiques à égaliser

Tout comme la tâche précédente, nous n'avons pas analysé en détail cette tâche en raison de sa complexité et du faible taux de réponse. La tâche nécessite d'articuler beaucoup d'OM issues de domaines différents, dont le type n'a été travaillé qu'une seule fois durant la mise en œuvre du PER professeur, et ce, de manière très guidée par l'enseignant M2, ce qui explique selon nous l'absence importante de réponses et nous empêche de tirer des interprétations intéressantes.

Une erreur est présente dans l'énoncé et a été corrigée en classe durant l'évaluation : il faut remplacer $FC = 20cm$ par $FE = 20cm$.

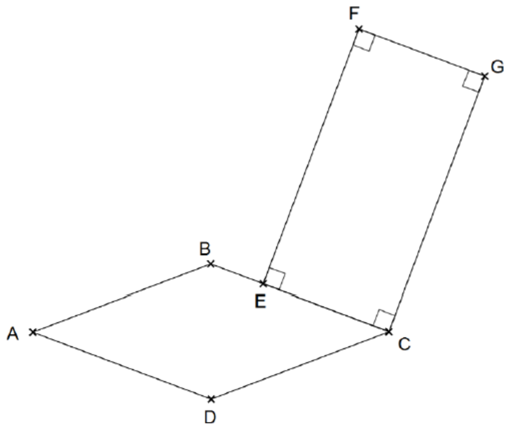
a. Enoncé

<u>Exercice 5</u> *(4 points)*

La figure ci-contre est composée d'un losange ABCD et d'un rectangle GFCE (la figure n'est pas en grandeur réelle).

On sait que BC = 14 cm et que FC = 20 cm
Le point E se déplace le long du segment [BC].

On se demande où placer le point E sur le segment [BC] pour que le losange et le rectangle aient le même périmètre.



1] Calcule le périmètre du losange ABCD .

2] On pose EC = x. Exprime le périmètre du rectangle EFGC en fonction de x .

3] Ecris une équation qui correspond au problème et résous-la .

4] Où doit-on placer le point E sur le segment [BC] pour que le losange et le rectangle aient le même périmètre ?

Aide : voici des copies d'écran du logiciel Geogebra qui montrent d'autres configurations de la figure quand le point E se déplace sur le segment [BC].

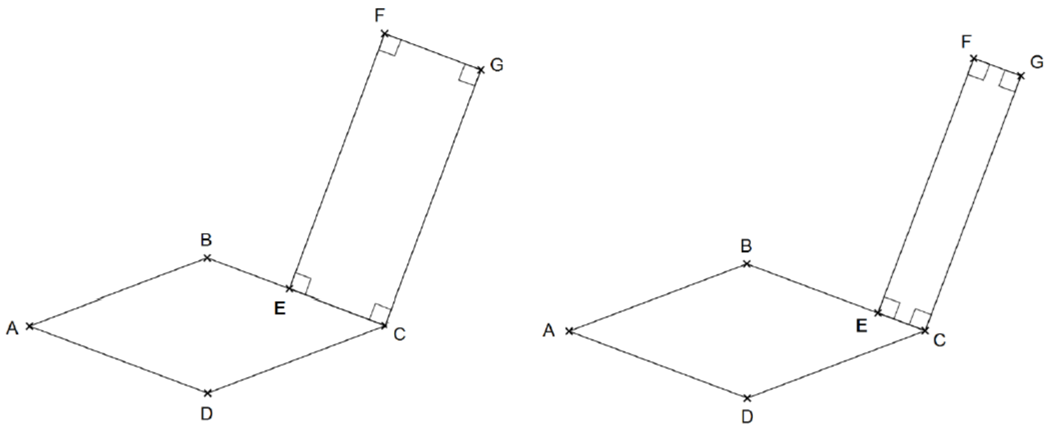


FIGURE 10.39 – Tâche de l'évaluation sommative portant sur la résolution d'un problème d'égalisation de périmètres de figures dynamiques

b. Tableau récapitulatif

Le tableau ci-dessous présente le nombre de réponses correctes et incorrectes et le nombre de non réponses à l'exercice 4 :

Question	Réponse correcte	Non réponse	Réponse incorrecte
5.1	7	12	1
5.2	2	14	4
5.3	1	14	5
5.4	1	15	4

10.4.9 Conclusion sur l'analyse des effets de la mise en œuvre du PER professeur sur l'étude personnelle hors la classe des élèves

a. Des élèves qui semblent majoritairement mobiliser des techniques algébriques

Parmi les tâches que nous avons analysées, nous avons constaté qu'au moins la moitié des élèves avaient recours à des techniques algébriques pour réaliser les tâches. La tâche relevant de $T_{resoudre}$ (exercice 2) a été particulièrement réussie, avec entre 16 et 17 élèves sur 20 utilisant la technique de résolution algébrique.

b. Des erreurs qui portent davantage sur des OM anciennes que sur les OM relatives aux équations

Parmi les élèves utilisant des techniques algébriques pour réaliser les tâches que nous avons analysées, nous avons noté que les erreurs relevaient pour la majorité d'entre elles d'anciennes OM. Autrement dit, même s'ils ne réalisent pas correctement les tâches – dans le sens où ils n'obtiennent pas la solution correcte – ces élèves paraissent néanmoins s'appuyer sur les éléments technologiques relatifs aux équations, mobilisant en particulier les propriétés de conservation de l'égalité avec stratégie pour résoudre les équations.

c. Un rapport personnel aux équations qui reste encore à faire évoluer

En fin de quatrième, entretenir un rapport personnel idoine aux équations, c'est être capable de réaliser tout un ensemble des types de tâches à l'aide de techniques justifiées par des technologies mathématiques : résoudre algébriquement une équation du premier degré à une inconnue, mettre en un problème en équation, tester si un nombre est solution d'une équation, etc. Les techniques pour réaliser ces types de tâches supposent d'être capable de convoquer des types de tâches issus de différentes praxéologies mathématiques régionales : résoudre une équation peut nécessiter de développer une expression (OM relatives aux expressions algébriques), résoudre un problème peut nécessiter de calculer un périmètre (OM relatives aux grandeurs et mesures, à la géométrie), tester si un nombre est solution peut nécessiter de faire des calculs (OM relatives aux nombres relatifs, aux fractions), etc.

Si, sur des tâches agrégeant un nombre modéré de praxéologies mathématiques (exercices 2, 3 et 4), la majorité des élèves ayant passé l'évaluation écrite sur les équations semblent parvenir à s'appuyer sur les technologies algébriques attendues, il apparaît que sur d'autres tâches (exercice 5) ou dans l'application de techniques, les élèves ne parviennent pas à articuler toutes les OM nécessaires.

Les résultats que nous avons obtenus nous paraissent donc encourageants dans le sens où certains apprentissages sur les équations ont été construits. Il reste à réaliser un travail approfondi, sur un terme beaucoup plus long et sur un ensemble beaucoup plus vaste de praxéologies mathématiques, pour que les élèves puissent construire un rapport personnel idoine aux équations.

10.5 Analyse *a posteriori* du PER relatif aux équations : mise en relation des gestes de l'enseignant avec ceux des élèves

Dans cette section, et partant du postulat en théorie de l'activité que les apprentissages mathématiques des élèves sont dépendants des pratiques de leur enseignant, nous cherchons à émettre des hypothèses argumentées pour avancer des éléments d'explication sur les OM apprises des élèves à court terme en regard des OM enseignées, ainsi que sur les praxéologies d'étude qu'ils ont développées en regard de celles qui ont été travaillées en classe, l'étude à plus long terme étant à mener. En lien avec notre problématique de thèse, nous tentons en particulier de repérer des intersections entre les besoins d'apprentissages non explicitement pris en charge par M2 en classe et les apprentissages qui semblent effectivement non construits chez les élèves.

10.5.1 Mise en relation des OM enseignées avec celles qui semblent apprises

a. Eléments méthodologiques

Pour mettre en relation les OM enseignées avec celles qui semblent apprises, nous reprenons les observations de la section 10.4 (productions écrites des élèves et interprétations praxéologiques), celles de la section 10.3 (OM enseignées), et les mettons en parallèle : pour tel type de tâches relatif aux équations, quel travail en a été fait en classe et quels résultats à l'évaluation sur ce type de tâches a-t-on pu observer ? Le fait qu'un type de tâches ait été travaillé en classe conformément au PER chercheur et selon les principaux éléments de la référence épistémologiques relative aux équations correspond-il à des réalisations correctes des tâches de ce type dans l'évaluation ? Inversement, à une tâche mathématique réalisée par les élèves à l'aide de techniques utilisées hors de leur domaine de validité dans l'évaluation, peut-on associer, au niveau de l'organisation didactique mise en œuvre par M2 en classe autour du type dont relève cette tâche mathématique, des écarts par rapport au PER chercheur et aux éléments de référence épistémologique ?

b. Mise en relation

Dans la sous-section 10.3.3, nous avons listé les genres de tâches les moins travaillés durant le PER professeur. Il s'agissait de $T_{structure_{eq}}$, de $T_{tester-sol}$ et de $T_{prouver-equivalence}$. Ces genres de tâches ont également été les moins donnés à travailler hors la classe et les moins travaillés en autonomie en classe. Inversement, les genres de tâches $T_{resoudre}$ et $T_{mettre-en-equation}$ sont ceux qui ont été le plus travaillés, que ce soit en classe et/ou en autonomie et/ou hors la classe.

Nous faisons des rapprochements, sur un mode hypothétique, entre le faible travail de ces genres de tâches avec certains résultats obtenus à l'évaluation sommative sur les équations :

- Dans l'exercice 2 (résolution algébrique d'équations), le fait qu'entre 16 et 17 élèves sur 20 semblent mobiliser une technologie algébrique pour résoudre des équations peut être là encore mis en lien avec le travail important de $T_{resoudre}$ suivant le PER chercheur et les éléments de la référence épistémologique relative aux équations. Nous rapprochons le fait que la troisième équation, qui présentait un produit parenthésé et nécessitait d'agréger des OM relatives aux expressions (distributivité) et aux équations, a été moins bien résolue que les autres équations (dans le sens où moins d'élèves trouvent la solution correcte), du fait que M2 n'a pas pu mettre en œuvre la séance 6 du PER chercheur, qui prévoyait un travail spécifique de cette agrégation d'OM.

- Entre 7 et 9 réponses incorrectes ont été données pour l'exercice 3, tâche relavant de $T_{tester-sol}$. Nous mettons ceci en perspective du le faible travail de ce genre de tâches durant le PER professeur. Rappelons que la technique pour réaliser $T_{tester-sol}$ a été très peu explicitée en classe par M2, qui s'appuyait *sans le verbaliser* sur la technique de substitution de la lettre par une valeur. De plus, la seconde question de cet exercice présente une formulation non rencontrée par les élèves durant le PER professeur (un élève fictif a résolu une équation et veut vérifier que la solution trouvée est correcte), ce qui explique potentiellement le nombre plus élevé de réponses incorrectes.
- Le nombre de réponses incorrectes à l'exercice 4 (égalisation de programmes de calcul) peut paraître étonnant (rappelons toutefois que pour cet exercice, plus de la moitié des élèves ont utilisé une technique algébrique pour réaliser la tâche). Cet exercice relève en effet du type de tâches $T_{mettre-en-equation-PC=PC}$, très largement travaillé durant le PER professeur, et le nombre de non réponses et de réponses incorrectes est relativement élevé (respectivement 4 et 9). Nous avançons quelques hypothèses pour expliquer cela. Cet exercice 4 conduit à produire une équation de la forme $ax + b = c(dx + f)$, c'est-à-dire avec un second membre comportant un produit parenthésé. En classe, les élèves ont davantage été habitués à la production d'équations de la forme $ax + b = cx + d$ pour ce type de tâches. De plus, la convocation de $T_{structure_{eq}}$ joue un rôle particulièrement important ici pour contrôler l'adéquation de l'équation produite avec le problème qu'elle modélise, au niveau des priorités opératoires et l'ordre des instructions des programmes de calcul. Or, $T_{structure_{eq}}$ a été peu travaillé en ce sens.
- Le fait que l'exercice 5 soit très peu traité (beaucoup de non réponses) malgré la présence de questions détaillées et intermédiaires peut être rapproché de plusieurs éléments :
  - Par rapport aux autres tâches de l'évaluation, la tâche proposée met en jeu le plus grand nombre d'OM différentes : celles issues de la géométrie, des expressions algébriques et des équations algébriques. La tâche met en jeu des figures géométriques dynamiques : des grandeurs (longueurs, périmètres, aires) varient simultanément et il s'agit d'un type de tâches avec lequel les élèves ne sont probablement pas très familiers.

- ◦ En classe, une seule tâche avec des figures géométriques dynamiques a été traitée et ce, de manière très guidée par l'enseignant (séance 3 du PER professeur). De plus, l'organisation didactique de M2 présente un écart avec celle suggérée dans le PER chercheur : les élèves n'ont pas travaillé en amont la tâche préparatoire du PER chercheur. Par conséquent, M2 a pris du temps en classe pour lever certaines difficultés qui auraient pu être levées avant, et a de plus fortement guidé la résolution de la tâche.

– Nous émettons l'hypothèse que le fait que les genres de tâches $T_{structure_{eq}}$, de $T_{tester-sol}$ et de $T_{prouver-equivalence}$ aient été les moins travaillées en adéquation avec le PER chercheur et les éléments de la référence épistémologique relative aux équations, notamment comme des genres de tâches à convoquer pour contrôler les calculs, expliquent la quasi-absence de vérifications de la part des élèves sur leurs copies des calculs qu'ils ont menés.

10.5.2 Mise en relation des praxéologies d'étude travaillées en classe avec celles qui semblent mobilisées hors la classe ; comparaison avec celles mobilisées lors de l'étude exploratoire

a. Eléments méthodologiques

Dans cette sous-section, nous mettons en relation les praxéologies d'étude travaillées en classe avec celles qui semblent mobilisées hors la classe par les élèves, et nous comparons les praxéologies d'étude mobilisées par les élèves hors la classe avec celles qu'ils mobilisaient anciennement lors de notre première étude exploratoire (chapitre quatre). Nous cherchons à observer des effets du PER professeur sur les praxéologies d'étude de ces élèves : ces derniers mobilisent-ils davantage des praxéologies supposées favoriser une activité mathématique idoine que lors de la première étude exploratoire ?

Pour réaliser la mise en relation entre praxéologies d'étude travaillées en classe et celles mobilisées hors la classe par les élèves, nous nous appuyons sur des entretiens filmés que nous avons réalisés auprès d'élèves de M2 lors de leur étude hors la classe. Nous mettons en perspective ces entretiens avec nos observations de la section 10.3 sur les praxéologies d'étude travaillées en classe sous la direction de M2.

Les entretiens ont été réalisés de manière quasi-identique à ceux menés au chapitre quatre : nous avons posé les mêmes questions aux élèves, dans des conditions similaires. Ceci permet de faciliter la comparaison entre les gestes d'étude mobilisés durant l'étude exploratoire et ceux mobilisés durant ces derniers entretiens.

En raison de contraintes liées au terrain, trois élèves ont pu être réinterrogés une fois : Daouda (M, M2), Géraldine (M, M2) et Marianne (B, M2). Nous rappelons que les abréviations M et B signifient respectivement que l'élève est jugé être un élève « moyen » et un élève « bon » en mathématiques par l'enseignant M2. Les questions posées ont porté sur la façon dont les élèves préparaient l'évaluation sommative (voir chapitre quatre) relative aux équations par ces trois élèves. Nous avons cependant demandé aux élèves de réaliser deux tâches mathématiques : l'une relevant de $T_{resoudre}$ (résoudre une équation de la forme $ax + b = c(dx + f)$) et l'autre relevant de $T_{mettre-en-equation}$ (égaliser deux programmes de calcul).

b. Analyse des productions écrites à l'évaluation sommative sur les équations des trois élèves interrogés

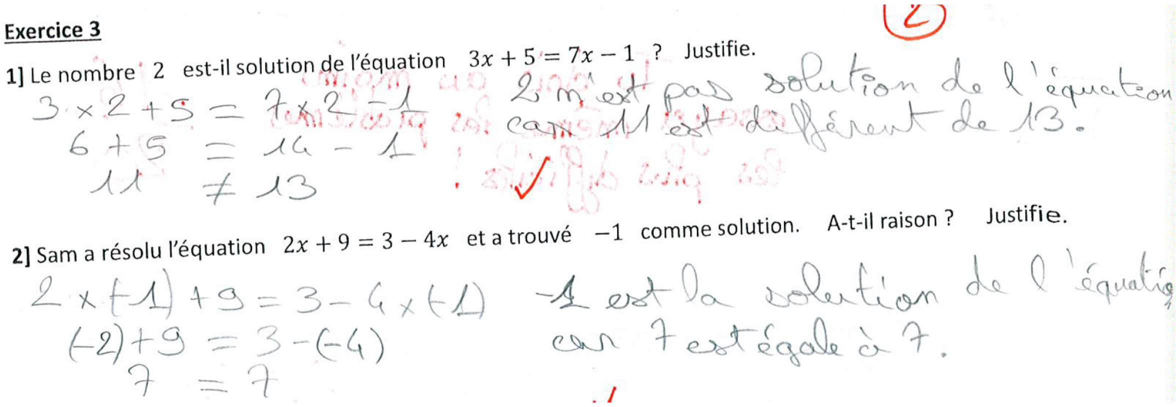
Avant de mettre en relation les gestes d'étude des élèves avec qui nous nous sommes entretenus avec les pratiques de l'enseignant M2, et afin d'apporter un éclairage sur les apprentissages construits par ces élèves sur les équations, nous réalisons une courte analyse de leurs productions écrites à l'évaluation sommative.

Le tableau de la figure 10.40 ci-après présente les techniques et technologies mathématiques mobilisées par les élèves à l'évaluation sommative sur les équations sur les exercices 2, 3, 4 (correspondant respectivement à la résolution algébrique d'équations, au test de solution, à la résolution d'un problème d'égalisation de programmes de calcul).

Les figures 10.41, 10.42 et 10.43 qui suivent présentent les traces écrites respectives de Marianne (B), Géraldine (M) et Daouda (M) sur certaines tâches.

Elève	Marianne (B)	Géraldine (M)	Daouda (M)
Technique et technologie mathématiques mobilisées pour réaliser la tâche de résolution d'équations	Technique de résolution algébrique appuyée sur les propriétés de conservation de l'égalité. Les trois équations ont été résolues, avec détail des étapes de résolution et présence des ostensifs indiquant l'utilisation des propriétés de conservation de l'égalité.	Technique de résolution algébrique appuyée sur les propriétés de conservation de l'égalité. Les deux premières équations ont été résolues correctement. Une erreur qui nous paraît due à de l'étourderie a été commise dans la résolution de la troisième équation (voir figure ci-après).	Technique de résolution algébrique mais avec une application incorrecte des propriétés de conservation de l'égalité. Aucune des trois équations n'a été correctement résolue.
Technique et technologie mathématiques mobilisées pour réaliser la tâche de test de solutions	Technique de substitution. Les deux questions ont été traitées correctement (voir figure ci-après).	Pour la première question, nous considérons la réponse de Géraldine comme non interprétable. Pour la deuxième question, Géraldine a utilisé une technique de résolution algébrique de l'équation appuyée sur les propriétés de conservation de l'égalité.	Pas de réponse.
Technique et technologie mathématiques mobilisées pour réaliser la tâche d'égalisation de programmes de calcul	Mise en équation du problème et résolution de l'équation par une technique algébrique appuyée sur les propriétés de conservation de l'égalité. La résolution est correcte.	Mise en équation du problème et résolution de l'équation par une technique algébrique appuyée sur les propriétés de conservation de l'égalité. La résolution est correcte sauf à la dernière étape où Géraldine propose une solution incorrecte.	Technique par essais/erreurs : Daouda teste successivement plusieurs valeurs d'entrée pour les deux programmes sans parvenir au résultat (voir figure ci-après).

FIGURE 10.40 – Techniques et technologies mathématiques mobilisées à l'évaluation sommative sur les équations (exercices 2, 3 et 4) par les trois élèves interrogés



Exercice 3

1] Le nombre 2 est-il solution de l'équation $3x + 5 = 7x - 1$? Justifie.

$3 \times 2 + 5 = 7 \times 2 - 1$
$6 + 5 = 14 - 1$
$11 \neq 13$

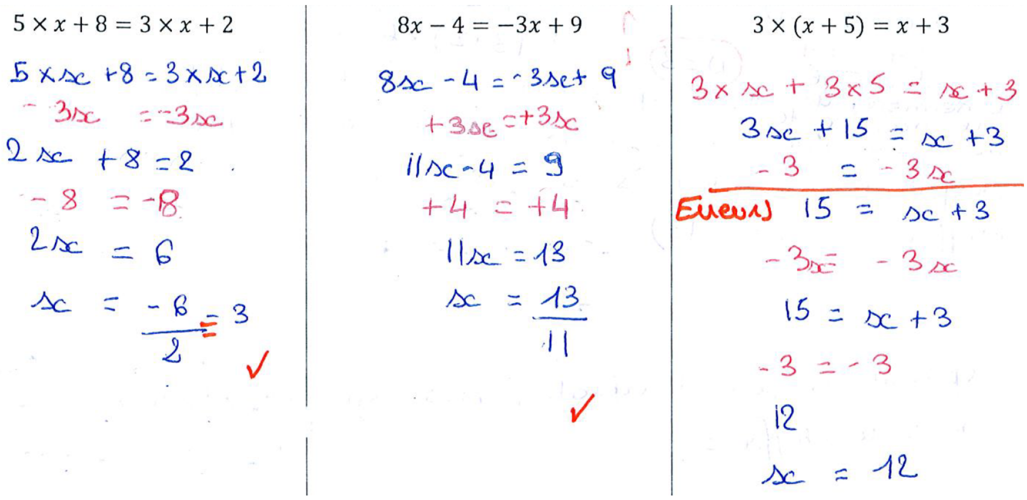
2 n'est pas solution de l'équation car 11 est différent de 13.

2] Sam a résolu l'équation $2x + 9 = 3 - 4x$ et a trouvé -1 comme solution. A-t-il raison ? Justifie.

$2 \times (-1) + 9 = 3 - 4 \times (-1)$
$(-2) + 9 = 3 - (-4)$
$7 = 7$

-1 est la solution de l'équation car 7 est égale à 7.

FIGURE 10.41 – Réponse de Marianne à la tâche sur le teste de solution (les annotations en rouge sont celles de l'enseignant M2)



$5 \times x + 8 = 3 \times x + 2$

$5 \times x + 8 = 3 \times x + 2$
$-3x \quad = -3x$
$2x + 8 = 2$
$-8 \quad = -8$
$2x = 6$
$x = \frac{-6}{2} = 3$

$8x - 4 = -3x + 9$

$8x - 4 = -3x + 9$
$+3x = +3x$
$11x - 4 = 9$
$+4 = +4$
$11x = 13$
$x = \frac{13}{11}$

$3 \times (x + 5) = x + 3$

$3 \times x + 3 \times 5 = x + 3$
$3x + 15 = x + 3$
$-3 \quad = -3x$
Erreur $15 = x + 3$
$-3x = -3x$
$15 = x + 3$
$-3 = -3$
12
$x = 12$

FIGURE 10.42 – Réponse de Géraldine à la tâche sur la résolution algébrique d'équations (les annotations en rouge sont celles de l'enseignant M2)

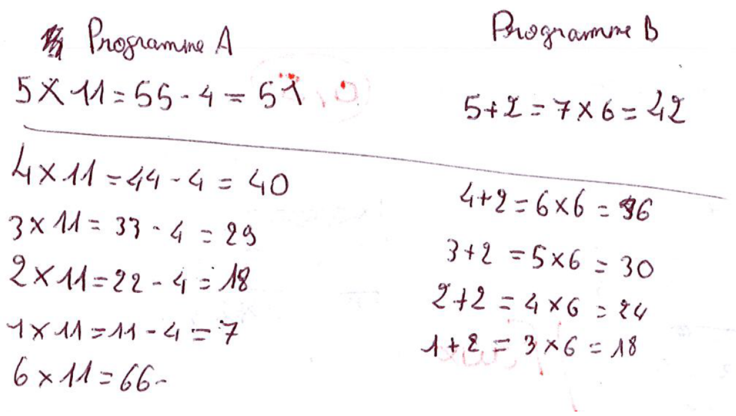


FIGURE 10.43 – Réponse de Daouda à la tâche sur l'égalisation de programmes de calcul

c. Mise en relation et évolution des gestes d'étude de trois élèves hors la classe

De manière globale, nous n'avons pas constaté de changements majeurs dans la manière dont les deux élèves « moyens », Daouda et Géraldine, accomplissaient leur étude hors la classe pour préparer une évaluation :

– **Une importance prépondérante accordée à la leçon et peu de réalisation effective de tâches mathématiques (exercices).** Daouda et Géraldine disent tous deux avoir « révisé » leur leçon sur les équations. Lorsque nous leur avons demandé des précisions sur ce que signifiait « réviser », ils ont expliqué avoir lu plusieurs fois le cours écrit sur les équations. Ils n'ont pas cherché à réaliser des tâches mathématiques à partir de leurs cahiers d'exercices ou des exemples du cours. Daouda a insisté, comme lors de la première étude exploratoire, sur le fait qu'il ne *mémorisait* pas la leçon. Géraldine, en revanche, semble vouloir mémoriser de manière intensive cette leçon [8] : elle dit la relire plusieurs fois, la répéter à haute voix, puis la réécrire sur une feuille blanche. Les éléments les plus importants pour elle sont les définitions et les méthodes du cours. Ainsi, pour réaliser le type de tâches d'étude « Se préparer à l'évaluation », nous remarquons que Daouda et Géraldine n'utilisent pas de techniques d'étude que nous avons supposées permettre de construire et d'articuler des OM. Nous nous interrogeons sur les techniques d'étude employées pour réaliser le type de tâches d'étude « Réviser la leçon » et le rapprochons

8. Nous nous demandons si cette volonté de mémoriser n'est pas en lien avec les attendus d'autres disciplines où elle est davantage nécessaire.

des pratiques professionnelles de l'enseignant M2 : ce type de tâches d'étude a été plusieurs fois donné à réaliser d'une séance à l'autre, mais sans précision sur la manière de l'effectuer – ce que nous avons qualifié de gestes d'aide à l'étude pédagogiques « généraux », qui ni n'explicitent de technique d'étude ni ne prennent en compte la complexité de l'activité mathématique.

– **Des élèves qui s'estiment prêts selon des critères ne dépendant pas de la complexité de l'activité mathématique.** Nous avons demandé à Daouda et à Géraldine à quel moment ils s'estimaient préparés pour l'évaluation. Dadoua nous a répondu « *comme ça / sur un coup de tête / je me suis dit c'est bon* » et ne nous a pas fait part de critères précis pour cesser son étude personnelle ; Géraldine, elle, juge être prête lorsqu'elle a réussi à réécrire au moins une fois sa leçon dans son intégralité. Les documents fournis par l'enseignant M2 pour aider à la préparation de l'évaluation (présentés à la section 10.2.4) proposaient pourtant des critères davantage en lien avec la complexité de l'activité mathématique que ceux utilisés par Daouda et Géraldine ; cependant, le fait que ces documents n'aient pas été travaillés en classe avec l'enseignant a probablement empêché Daouda et Géraldine de recourir aux critères proposés dans ces documents. Nous avons voulu savoir si Daouda et Géraldine avaient conscience de documents distribués par M2 pour les aider à préparer l'évaluation. Les deux ont répondu par l'affirmative, mais le premier a « oublié » l'existence de ces documents, la seconde a dit ne pas avoir envisagé de les utiliser. Selon elle, seule la leçon importe ; réaliser des tâches mathématiques ne lui paraît pas d'une grande utilité : « *Chercheur : Pourquoi ça ne t'aide pas [de refaire des exercices] ? / Géraldine : Parce que c'est que des exercices et des corrections [...] y a que des exercices ça n'aide pas trop à apprendre* ».

– **Des types de tâches mathématiques qui semblent plus ou moins identifiés.** À la question « À ton avis, quels exercices vont être demandés au contrôle », Daouda a donné deux types de tâches : égaliser deux programmes de calcul et résoudre des équations, qu'il a énoncés ainsi : « *Ca va être sur les programmes A et B [...] sur les équations avec les divisions à la fin* ». Visiblement, Daouda a été marqué par le fait que les fins de résolutions algébriques d'équations se soldaient par une division. Géraldine, elle, a répondu à notre question par : « *Y aura des chiffres / il faudra les calculer [...] il y aura des chiffres avec parenthèses [...] et je pense que c'est tout* ». Ce faisant, elle nous indiquait sur une page de son cahier d'exercices des tâches relevant du genre de tâches $T_{resoudre}$. Nous avons montré à Géraldine un problème d'égalisation de programmes de calcul en lui demandant si ce type de tâches figurerait à l'évaluation selon elle ; elle a estimé que oui. En revanche, lorsque nous lui avons montré la tâche réalisée en classe durant le PER professeur sur l'égalisation de périmètres de deux figures dynamiques (carré et triangle équilatéral), elle semblait plus dubitative et a dit ne pas être sûre d'être interrogée sur une tâche de ce type en raison de la présence de figures. Nous pensons que l'utilisation – ou plutôt, dans le cas présent, l'absence d'utilisation – de ces documents peut s'expliquer par le fait qu'ils aient été distribués par l'enseignant M2 sans que ce dernier ne donne ni motive des techniques d'étude permettant de les exploiter – sans doute parce qu'il s'agissait d'outils inhabituels pour M2. Nous rapprochons d'autre part le fait que les types de tâches soient plus ou moins identifiés par Daouda et Géraldine avec le fait que ce type de tâches d'étude (identifier le type de tâches mathématique dont relève une tâche) a été peu travaillé en classe.

– **Un rapport personnel aux équations non idoine.** Au niveau des OM apprises, le rapport personnel aux équations de ces deux élèves semblait, au moment où nous avons mené les entretiens avec eux, assez loin d'être idoine. Pour résoudre algébriquement une équation, Daouda « déplaçait » des termes d'un membre à l'autre sans justification mathématique, et sans parvenir à trouver une solution correcte. Géraldine n'a pas su ne serait-ce que débuter la résolution. Quand nous lui avons proposé de mettre en équation un problème d'égalisation de programmes de calcul, elle a su produire une équation correcte, sans toutefois être capable d'expliciter le lien entre cette équation et le problème à résoudre (et sans être capable de résoudre l'équation. À l'évaluation sommative, Géraldine a toutefois su appliquer de manière quasi-correcte la technique de résolution algébrique en appui sur les propriétés de conservation de l'égalité. Ceci indique qu'elle a accompli – peut-être avec l'aide de sa famile – une étude personnelle qui a fait évoluer de manière positive son rapport personnel aux équations. Daouda, en revanche, n'a pas réussi à résoudre les équations proposées à l'évaluation sommative.

Selon nous, Daouda et Géraldine ne parviennent pas à occuper une position d'élève autonome ($E1$ dans le modèle de structuration des milieux) parce qu'ils ne disposent pas de techniques d'étude le leur permettant. Nous avons fait remarquer dans le chapitre quatre (première étude exploratoire) que Géraldine sollicitait l'aide de sa famille pour pouvoir occuper une position d'élève $E1$.

En ce qui concerne Marianne, la « bonne » élève avec qui nous nous étions entretenue lors de la première étude exploratoire (chapitre quatre) et qui disait ne jamais « réviser » pour les évaluations, les changements au niveau des praxéologies d'étude mobilisées nous paraissent plus importants que pour Daouda et Géraldine :

– **Une plus grande sensibilité aux documents distribués par l'enseignant.** Lorsque nous avons demandé à Marianne pourquoi elle avait, cette fois, « révisé » pour l'évaluation, elle nous a répondu que l'enseignant avait distribué des documents utiles pour ce faire et qu'elle les avait par conséquent utilisés. Peut-être que Marianne, parce que « bonne » élève déjà capable d'occuper une position d'élève autonome (au moins $E1$ dans le modèle de structuration des milieux), a davantage eu recours aux documents fournis par l'enseignant par rapport à Daouda et Géraldine.
– **Des techniques d'étude se rapprochant des techniques supposées permettre une activité mathématique idoine.** Les techniques d'étude mobilisées par Marianne nous paraissent proches de celles dont nous avons fait l'hypothèse qu'elles permettaient de construire et d'articuler des OM. Contrairement à Daouda et Géraldine, Marianne ne cherche pas à mémoriser la leçon. Elle réalise davantage des tâches mathématiques qui, dit-elle, lui permettent simultanément de travailler des éléments de la leçon. Elle nous semble même être capable d'occuper la position $E2$ dans le modèle de structuration des milieux, puisqu'elle choisit de travailler des « exercices compliqués » c'est-à-dire des tâches mathématiques articulant plusieurs OM, comme des équations à résoudre et qui présentent des expressions avec produits parenthésés et/ou des coefficients négatifs. De plus, Marianne est capable de nous donner une liste de types de tâches à travailler lors de son étude personnelle plus longue que celle donnée par Daouda et Géraldine, et avec un vocabulaire plus précis : « *– Chercheur : Quel genre d'exercices avec les équations ? – Marianne : Résoudre / en créer avec les problèmes et les programmes [de calcul] / quand on avait fait fait un genre de carré (référence à au problème d'égalisation de périmètres de figures dynamiques)* ».
– **Un rapport personnel aux équations quasiment idoine à ce niveau scolaire.** Nous avons proposé à Marianne de résoudre une équation présentant une expression avec produit parenthésé et de résoudre un problème d'égalisation de programmes de calcul. Sans aucune difficulté visible, Marianne a correctement réalisé les deux tâches, tout en étant capable de justifier – en le verbalisant – les techniques employées : utilisation de la distributivité

pour développer une expression, explicitation des propriétés de conservation de l'égalité pour la résolution algébrique des équations, explicitation de la stratégie (« isoler l'inconnue »).

10.5.3 Conclusion sur la mise en relation des gestes de l'enseignant avec ceux mobilisés par les élèves hors la classe

Nous avons avancé dans les paragraphes précédents plusieurs hypothèses sur la manière dont le travail des praxéologies d'étude et des OM en classe sous la direction de l'enseignant avait influencé les apprentissages des élèves et la façon dont ils organisaient leur étude personnelle hors la classe. Selon nous, le fait que les élèves aient majoritairement mobilisé des techniques et technologies mathématiques algébriques lors de l'évaluation sommative sur les équations peut être mis en relation avec le fait que l'enseignant a mis en œuvre un PER relatif aux équations intégrant les principaux éléments épistémologiques dégagés dans le chapitre six de la thèse. Toutefois, certains écarts entre le PER professeur et le PER chercheur ont attiré notre attention et nous avons supposé que certains de ces écarts pouvaient être en partie à l'origine de certaines erreurs commises par les élèves. Par exemple, le faible travail de certains genres de tâches, notamment ceux favorisant un contrôle des calculs, peut éclairer selon nous certains résultats observés dans les productions écrites des élèves.

Concernant les praxéologies d'étude, les élèves « moyens » ne paraissent pas avoir changé leurs habitudes de travail hors la classe et ont continué à mobiliser des techniques d'étude que qui permettent pas d'accomplir une activité mathématique idoine. Nous avons mis cela en relation avec la faible explicitation en classe par l'enseignant de techniques d'étude potentiellement efficaces pour réaliser une étude personnelle favorisant la construction et l'articulation des OM. Seule Marianne, la « bonne » élève avec qui nous nous sommes entretenu, a opéré davantage de changements dans sa manière de préparer une évaluation, grâce au milieu d'aide à l'étude (les documents distribués par l'enseignant) dont elle disposait.

10.6 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons analysé et questionné les pratiques en classe d'un enseignant autour de la mise en œuvre du PER relatif aux équations. Nous avons repéré des similitudes et des décalages entre cette mise en œuvre et celle prévue dans le PER chercheur et avons mis en relation certains d'entre eux avec les praxéologies d'étude et mathématiques mobilisées par les élèves hors la classe, en avançant des hypothèses de cause à effet.

Nous avons montré que notre modèle théorique était effectivement opérationnel et permettait d'analyser des pratiques enseignantes autour de l'organisation de l'étude personnelle des élèves. Entre autres, celles-ci ont permis de souligner les points suivants :

– L'enseignant a travaillé les OM locales de l'OM épistémologique de référence relative aux équations de manière équilibrée, mais certains genres de tâches ont été peu étudiés ou réalisés sans explicitation des techniques utilisées.
– L'enseignant aurait pu selon nous laisser davantage les élèves en situation d'autonomie pour qu'ils prennent en charge la construction de leurs apprentissages et de techniques d'étude pour pouvoir mener leur étude personnelle hors la classe.
– Certaines praxéologies d'étude ont été travaillées en classe mais l'identification des types de tâches mathématiques, que nous avons supposée centrale pour pouvoir apprendre à construire et à articuler des OM, aurait pu être davantage réalisée.
– Selon nous, toutes les conditions de gestion didactique n'étaient pas réunies pour qu'il y ait des effets conséquents sur les apprentissages (peu de mises en commun, peu de hiérarchisation des procédures des élèves).

À l'issue de nos analyses, nous nous sommes aperçu que nous n'avions pas pris en compte dans le modèle théorique développé au chapitre cinq sur l'étude personnelle hors la classe des praxéologies qui nous paraissent désormais pertinentes à intégrer à ce modèle. Il s'agit des praxéologies d'étude qui relèvent des moyens de contrôler l'activité mathématique. Selon nous, ces praxéologies favorisent la construction et l'articulation des OM. Elles sont en lien fort avec les OM étudiées : dans le cas des équations, les moyens de contrôle peuvent être associés à la mobilisation des genres de tâches de $OML3_{eq}$ (identification de la structure d'une équation, preuve qu'une équation est équivalente à une autre, test numérique d'une solution) pour guider et vérifier les résolutions algébriques d'équations ($OML2_{eq}$) et les résolutions de problèmes algébriques à mettre en équation ($OML1_{eq}$). Des techniques d'étude sont certainement envisageables pour ce faire et mériteraient un approfondissement.

Nous avons relevé quelques effets du PER relatif aux équations sur les apprentissages des élèves. Certains de ces effets, comme la mobilisation par les élèves de techniques et technologies mathématiques algébriques pour produire, utiliser et transformer des équations, nous paraissent positifs. D'autres sont plus mitigés : les élèves « moyens » avec qui nous nous sommes entretenus n'ont pas fait évoluer leur manière d'organiser leur étude personnelle hors la classe, en continuant de recourir à des techniques d'étude qui ne sont pas celles que nous avons supposées permettre une activité mathématique idoine.

Toutefois, nous ne tirons pas de conclusion définitive de notre expérimentation. En effet, le fait d'avoir mené cette dernière sur une si petite échelle de temps ne permet pas de le faire : l'enseignant M2 n'a probablement pas eu assez de temps pour changer ses pratiques et les faire correspondre aux pratiques requises à la mise en œuvre du PER chercheur, et les élèves n'ont pas pu être suffisamment sensibilisées à ces changements de pratique pour changer leur manière d'étudier des OM hors la classe. Le modèle de l'étude personnelle que nous avons élaboré reste donc à éprouver expérimentalement sur des temps plus longs, sur un échantillon d'enseignants et d'élèves plus important, avec des outils statistiques adaptés.

SEANCE 1	PER chercheur	PER professeur
Moments de l'étude	Première rencontre avec un problème d'égalisation de programmes de calcul nécessitant une mise en équation et une résolution algébrique de l'équation obtenue ; élaboration de la technique de mise en équation ; définition d'une équation	Les moments didactiques ont eu lieu.
Tâches préparatoires	Traduction de programmes de calcul en expressions littérales ; égalisation de programmes de calcul à l'aide de techniques arithmétiques ou par essais/erreurs	Les tâches préparatoires ont été réalisées.
Situation didactique	Problème d'Alice et Bertrand (programmes de calcul à égaliser).	Le problème a été donné à faire aux élèves.
	Les techniques de résolution arithmétique et par essais/erreurs sont mises en échec.	Le solveur d'équations est présenté plus tardivement que dans le PER chercheur : les élèves produisent l'équation correspondant au problème *avant* que l'enseignant ne leur présente le solveur ; cette production n'est donc pas motivée.
	La résolution de la situation se fait à l'aide d'un solveur d'équations. Le solveur d'équations fait partie du milieu de la situation didactique et motive la production d'une équation.	La définition d'une équation est demandée alors que les élèves ne savent pas ce qu'est une équation. L'enseignant utilise le verbe « résoudre » alors que celui-ci n'a pas été défini au préalable.
Genres de tâches et OM travaillés	Mettre en équation (OM1), identifier la structure d'une équation (OM3), tester si un nombre est solution d'une équation (OM3).	Les genres de tâches ont été travaillés.
	L'identification de la structure d'une équation permet de contrôler l'adéquation de l'équation produite avec le problème qu'elle modélise, en appui sur le sens des opérateurs, les priorités opératoires et les instructions du programme de calcul.	L'identification de la structure d'une équation n'est pas convoquée dans la mise en équation du problème.
	Le test d'une égalité, en appui sur la substitution, est potentiellement utilisé pour contrôler numériquement qu'un nombre est (ou non) solution d'une équation.	Le test de la solution trouvée par substitution dans l'équation initiale est réalisé, mais la technique (substitution) pour ce faire reste implicite : l'enseignant ne dit pas que pour tester une égalité, il faut remplacer la lettre par une valeur et comparer les deux membres.
Praxéologies d'étude potentiellement travaillées	Identifier le type de tâches « Egaliser deux programmes de calcul » à partir des tâches travaillées ; identifier des éléments de la technique de mise en équation d'un problème ; mettre en relation la situation didactique d'introduction (problème d'Alice et Bertrand) avec les types de tâches d'égalisation de programmes de calcul déjà étudiés auparavant (tâches préparatoires) ; situer les OM relatives au numérique (techniques de résolution arithmétique et par essais/erreurs, statut de l'égalité) par rapport aux OM relatives aux équations (technique de résolution à l'aide du solveur, motivation de la production d'une équation, nouveau statut de l'égalité)	Le type de tâches « Egaliser deux programmes de calcul » n'est pas identifié. Le fait que ce type de tâches ait été déjà rencontré est signalé par l'enseignant mais la mise en relation entre ce type de tâches et des tâches *précises* relevant du même type et rencontrées auparavant n'est pas effectuée. Le fait que la technique par essais/erreurs, spontanément utilisée par les élèves, échoue n'est pas mis en avant par l'enseignant. Le nouveau statut de l'égalité (proposition dont la valeur de vérité dépend des valeurs données à la variable) n'est pas mis en relation avec d'anciens statuts (annonce d'un résultat, identité). Des éléments de technique de mise en équation, bien qu'appliqués, ne sont pas explicités par l'enseignant.

FIGURE 10.44 – Séance 1 : principaux écarts entre le PER professeur et le PER chercheur

SEANCE 2	PER chercheur	PER professeur
Moments de l'étude	Motivation et élaboration de la technique de résolution algébrique ; élaboration de l'environnement technologico-théorique correspondant	Les moments didactiques ont eu lieu.
Tâches préparatoires	Résolution arithmétique d'équations arithmétiques et résolution par essais/erreurs d'équations non arithmétiques	La résolution arithmétique d'équations arithmétiques a eu lieu à la séance 1. La résolution d'équations non arithmétiques par une technique par essais/erreurs n'a pas eu lieu.
Situation didactique	Programmes de calcul à égaliser. La résolution de la situation se fait à l'aide d'un logiciel (Thot) prenant en charge les transformations d'une équation en une équation équivalente	La situation a été donnée à faire aux élèves. Le logiciel Thot a été utilisé.
Genres de tâches et OM travaillés	Mettre en équation (OM1), résoudre algébriquement une équation (OM2), identifier la structure d'une équation (OM3).	Les genres de tâches ont été travaillés. Le genre de tâches « identifier la structure d'une équation (OM3) » est toutefois peu présent.
	Durant la résolution algébrique d'une équation, l'identification de la structure d'une équation permet de guider l'intelligence des calculs (choix des opérations à effectuer dans chaque membre), en appui sur le sens des opérateurs et les priorités opératoires.	L'appui sur la structure des équations à résoudre à l'aide du logiciel est peu présent pour guider les transformations.
Praxéologies d'étude potentiellement travaillées	Identifier le type de tâches « Egaliser deux programmes de calcul » et le genre de tâches « Résoudre une équation » ; identifier la technique de résolution algébrique ; identifier la technologie justifiant cette technique ; mettre en relation l'équation à résoudre en début de séance avec les équations déjà rencontrées auparavant (équations arithmétiques ou résolubles à l'aide d'une technique essais/erreurs, vues dans les tâches préparatoires) ; situer les OM relatives au numérique (techniques de résolution arithmétique et par essais/erreurs, calcul sur les fractions et les relatifs) par rapport aux OM relatives aux équations (technique de résolution à l'aide du solveur, motivation de la production d'une équation, résolution algébrique d'une équation)	Le type de tâches « Egaliser deux programmes de calcul » n'est pas identifié. La technique de résolution algébrique et la technologie associée sont identifiées. La mise en relation entre les équations algébriques nécessitant la technique de résolution algébrique avec les équations arithmétiques ou résolubles par essais/erreurs n'est pas effectuée.

FIGURE 10.45 – Séance 2 : principaux écarts entre le PER professeur et le PER chercheur

SEANCE 3	PER chercheur	PER professeur : écarts avec le PER chercheur
Moments de l'étude	Elaboration, travail et institutionnalisation de la technique de résolution algébrique	Les moments didactiques ont eu lieu.
Tâches préparatoires	Résolution d'une équation algébrique nécessitant l'application de la technique de résolution algébrique. La résolution algébrique d'équations qui s'ensuit se fait sans logiciel et avec un jeu sur les variables didactiques : nature des coefficients, présence ou non de produits parenthésés dans les équations	Les tâches préparatoires ont été travaillées.
Genres de tâches et OM travaillés	Résoudre algébriquement une équation (OM2), identifier la structure d'une équation (OM3), tester si un nombre est solution d'une équation (OM3), prouver que deux équations sont équivalentes ou non (OM3).	Les genres de tâches ont été travaillés. Toutefois, pendant le travail de la technique, l'enseignant réduit le genre de tâches « Mettre en équation » en « Traduire un problème en équation » : il prend en charge la convocation de la lettre pour désigner l'inconnue.
	L'identification de la structure et la preuve que deux équations sont équivalentes sont utilisées pour contrôler et guider l'intelligence des calculs dans la résolution algébrique.	Lors du moment de l'institutionnalisation, dans la trace écrite (leçon), l'appui sur la structure d'une équation en vue de sa résolution est explicite. En revanche, lors du travail de la technique de résolution, l'identification de la structure n'est pas convoquée. Il en va de même pour le genre de tâches « Prouver que deux équations sont équivalentes ».
	Le test numérique est utilisé pour contrôler qu'un nombre est solution ou non d'une équation.	Le contrôle numérique des solutions n'est pas accompli.
Praxéologies d'étude potentiellement travaillées	Identifier le genre de tâches « Résoudre une équation », la technique de résolution algébrique et la technologie la justifiant ; mettre en relation les tâches relevant du genre de tâches « Résoudre une équation » en identifiant les changements de valeurs des variables didactiques et les conséquences dans l'application de la technique de résolution algébrique ; situer les OM relatives au numérique (techniques de résolution arithmétique et par essais/erreurs, calcul sur les fractions et les relatifs) par rapport aux OM relatives aux équations (technique de résolution algébrique d'une équation) ; les techniques d'étude travaillées jusqu'à présent sont progressivement laissées à la charge des élèves durant le moment de travail de la technique de résolution algébrique des équations ; l'institutionnalisation de la technique de résolution algébrique peut coïncider avec celle des techniques d'étude travaillées en classe jusqu'à présent	La mise en relation entre les équations algébriques nécessitant la technique de résolution algébrique avec les équations arithmétiques ou résolubles par essais/erreurs n'est pas effectuée.

FIGURE 10.46 – Séance 3 : principaux écarts entre le PER professeur et le PER chercheur

SEANCE 4	PER chercheur	PER professeur : écarts avec le PER chercheur
Moments de l'étude	Elaboration de la technique de mise en équation et de l'environnement technologico-théorique correspondant à travers la résolution de problèmes algébriques divers ; travail de la technique de mise en équation à travers la résolution de problèmes algébriques divers	L'enseignant a travaillé durant la première moitié de la séance les genres de tâches « Traduire un problème en équation », « Tester si un nombre est solution d'une équation » et « Prouver l'équivalence de deux équations ».
Tâches préparatoires	Egalisation des périmètres d'un carré et d'un triangle équilatéral avec un choix de variables didactiques rendant possible la résolution du problème à l'aide de la technique par essais/erreurs	La tâche préparatoire du PER chercheur n'a pas été travaillée par les élèves.
Situation didactique	Egalisation de périmètres d'un carré et d'un triangle équilatéral mais avec un choix de variables didactiques nécessitant la mise en équation du problème et la résolution algébrique de l'équation obtenue. Suite à la résolution de la situation didactique, la résolution algébrique de problèmes algébriques nécessitant une mise en équation (ou une traduction en équation) et l'application de la technique de résolution algébrique d'équation avec jeu sur les variables didactiques est travaillée : inconnue à désigner ou non, présence d'une ou de plusieurs inconnues, congruence sémiotique ou non, convocation de propriétés géométriques ou non.	Compte tenu du fait que la tâche préparatoire n'a pas été réalisée, l'enseignant prend du temps pour agréger les OM relatives à la géométrie (périmètres) et les OM relatives aux équations et aux expressions durant le traitement de la situation didactique, et la résolution d'autres problèmes algébriques n'a pas eu lieu.
Genres de tâches et OM travaillés	Mettre en équation (OM1), traduire un problème en équation (OM1), résoudre algébriquement une équation (OM2), identifier la structure d'une équation (OM3), tester si un nombre est solution d'une équation (OM3), prouver que deux équations sont équivalentes ou non (OM3)	La structure de l'équation produite n'est pas identifiée et le test numérique n'est pas utilisé pour contrôler la mise en équation du problème ; ces genres de tâches ne sont pas non plus convoqués pour contrôler la résolution algébrique de l'équation obtenue.
Praxéologies d'étude potentiellement travaillées	Identifier le genre de tâches « Mettre en équation un problème », la technique de mise en équation et la technologie la justifiant ; mettre en relation les différentes tâches relevant du genre de tâches « Mettre en équation un problème » en identifiant les changements des valeurs des variables didactiques paramétrant les types de tâches correspondants ; situer les OM relatives à la géométrie, au calcul numérique et aux expressions algébriques par rapport aux OM relatives aux équations ; les techniques d'étude sont progressivement laissées à la charge des élèves, notamment durant le moment du travail de la technique de mise en équation des problèmes travaillés et de la résolution algébrique des équations correspondantes	Durant le travail de la technique de résolution algébrique, ni le genre de tâches « Résoudre une équation », ni la technique de résolution algébrique ne sont identifiés. Les OM relatives au calcul numérique (nombres relatifs, fractions), convoquées dans la résolution des équations, sont travaillées, mais le fait qu'elles soient (potentiellement) convoquées dans la résolution d'une équation n'est pas explicite ; autrement dit, l'enseignant ne met pas explicitement en relation les OM relatives aux équations avec celles relatives au calcul numérique. Le genre de tâches « Mettre en équation » n'est pas identifié.

FIGURE 10.47 – Séance 4 : principaux écarts entre le PER professeur et le PER chercheur

SEANCE 5	PER chercheur	PER professeur : écarts avec le PER chercheur
Moments de l'étude	Travail et institutionnalisation de la technique de mise en équation pour la résolution de problèmes algébriques divers	L'enseignant ne commence à mettre en scène la séance 5 du PER chercheur que vers la fin de cette séance 5 du PER professeur. Avant cela, il prolonge le travail de la technique de résolution algébrique des équations.
Tâches préparatoires	Traduction de problèmes en équation, association d'un problème avec une équation ; résolution algébrique de problèmes algébriques nécessitant une mise en équation (ou une traduction en équation) et l'application de la technique de résolution algébrique d'équation avec jeu sur les variables didactiques (voir séance 4)	Les tâches préparatoires n'ont pas été traitées dans cette séance.
Genres de tâches et OM travaillés	Mettre en équation (OM1), traduire un problème en équation (OM1), résoudre algébriquement une équation (OM2), identifier la structure d'une équation (OM3), tester si un nombre est solution d'une équation (OM3), prouver que deux équations sont équivalentes ou non (OM3).	Les genres de tâches mathématiques ont été travaillés, sauf « Tester si un nombre est solution d'une équation » et « Prouver que deux équations sont équivalentes ».
	Le contrôle des calculs en appui sur l'identification de la structure, le test numérique et l'équivalence d'équations peut être moins fréquent.	Durant les résolutions, le test numérique n'est jamais convoqué et l'appui sur la structure des équations demeure peu présent. Une tâche relevant du genre de tâches « Prouver que deux équations sont équivalentes », prévue par l'enseignant, n'est finalement pas réalisée. Le contrôle numérique des tâches relevant du genre de tâches « Traduire un problème en équation » n'est pas convoqué.
Praxéologies d'étude potentiellement travaillées	Identifier le genre de tâches « Mettre en équation un problème », la technique de mise en équation et la technologie la justifiant ; mettre en relation les différentes tâches relevant du genre de tâches « Mettre en équation un problème » en identifiant les changements des valeurs des variables didactiques paramétrant les types de tâches correspondants ; situer les OM relatives à la géométrie, au calcul numérique et aux expressions algébriques par rapport aux OM relatives aux équations ; les techniques d'étude sont progressivement laissées à la charge des élèves, notamment durant le moment du travail de la technique de mise en équation des problèmes travaillés ; l'institutionnalisation de la technique de mise en équation peut coïncider avec celle des techniques d'étude travaillées en classe en lien avec cette technique de mise en équation	Les praxéologies d'étude ont été travaillées, sauf la mise en relation des différentes tâches relevant du genre de tâches « Mettre en équation un problème », en identifiant les changements des valeurs des variables didactiques paramétrant les types de tâches correspondants. Seul le fait que ces tâches soient en lien est signalé par l'enseignant, sans précision sur ce lien.

FIGURE 10.48 – Séance 5 : principaux écarts entre le PER professeur et le PER chercheur

SEANCE 6	PER chercheur	PER professeur : écarts avec le PER chercheur
Objectifs	Agrégation entre les OM relatives aux expressions et les OM relatives aux équations ; préparation à l'évaluation sommative	L'enseignant ne met pas en scène la séance 6 du PER chercheur durant cette séance 6 du PER professeur. Il continue la mise en scène correspondant à la scène 5 du PER chercheur.
Genres de tâches travaillés	Déterminer si une égalité entre deux expressions est vraie quelle que soit la valeur de la variable ou, dans le cas contraire, déterminer la valeur de la variable pour laquelle l'égalité est vraie ; déterminer les actions possibles (développer, factoriser, résoudre) sur une expression ou une équation donnée	La séance 6 du PER chercheur n'est pas mise en scène.
Praxéologies d'étude potentiellement travaillées	Mettre en relation les différentes tâches proposées avec les types de tâches travaillés dans les séances précédentes ; situer les OM relatives aux expressions algébriques par rapport aux OM relatives aux équations ; l'enseignant peut aider au diagnostic des besoins d'apprentissages relatifs aux équations et à la réponse à ces besoins en proposant par exemple une liste de tâches recouvrant l'ensemble des principaux types de tâches relatifs aux équations, avec correction de ces tâches ; des techniques d'étude parmi les celles qui sont supposées permettre une activité mathématique idoine peuvent être suggérées pour la préparation à l'évaluation sommative	La séance 6 du PER chercheur n'est pas mise en scène.

FIGURE 10.49 – Séance 6 : principaux écarts entre le PER professeur et le PER chercheur

Chapitre 11

Conclusion sur le rôle de l'enseignant dans l'organisation de l'étude personnelle des élèves relative aux équations du premier degré à une inconnue

11.1 Objectifs du chapitre

Dans ce chapitre conclusif, nous mettons en avant les résultats majeurs de notre travail de thèse et ouvrons sur des perspectives de recherche.

Nous rappelons dans un premier temps les objectifs de la thèse, la problématique que nous avons formulée, les hypothèses de recherche émises et les principaux éléments méthodologiques employés.

Nous résumons les résultats de recherche que nous avons obtenus :

- Les résultats de nos observations des gestes d'étude hors la classe de collégiens en algèbre.
- Un modèle de l'étude personnelle opérationnel pour analyser les pratiques enseignantes relatives à l'organisation du travail personnel de ses élèves et les mettre en relation avec les gestes d'étude des élèves hors la classe.
- Une OM épistémologique de référence relative aux équations, opérationnelle pour analyser les OM à enseigner et enseignée ainsi que les OM mobilisées par les élèves.

– Un Parcours d'Etude et de Recherche relatif aux équations prenant en compte les besoins d'apprentissages des élèves en algèbre, les principaux éléments de la référence épistémologique relative aux équations, qui articule le travail des OM locales de l'OM de référence et celui des praxéologies d'étude supposées favoriser une activité mathématique idoine, avec des effets sur la construction des rapports personnels des élèves aux équations.

Nous terminons par des perspectives de recherche, en suggérant des prolongements potentiels de nos travaux sur l'utilisation du modèle de l'étude personnelle que nous avons établie, sur la construction de nouvelles OM épistémologiques de référence en appui sur celles relatives aux équations, sur la mise en œuvre du PER relatif aux équations, sur une extension des expérimentations sur une échelle de temps plus grande et sur une échantillon d'enseignants et d'élèves plus important, et sur une formation possible d'accompagnateurs d'étude.

11.2 Rappel des objectifs de la thèse, de la problématique de recherche et des principaux éléments méthodologiques

Dans cette thèse, nous avons questionné d'une part les difficultés des enseignants à organiser de manière explicite l'étude personnelle hors la classe des élèves, dont l'importance augmente avec le niveau scolaire et qui est peu analysée dans les recherches en didactique, d'autre part leurs difficultés à gérer les besoins d'apprentissages des élèves en algèbre élémentaire.

Nous avons réinterrogé ces difficultés au filtre de la théorie anthrolopologique du didactique (cf. chapitre deux) en adoptant un point de vue institutionnel (Chevallard, 1998) et en partant de l'hypothèse (Castela, 2007) que certains besoins d'apprentissages tant relatifs aux gestes d'étude hors la classe que relatifs aux équations du premier degré à une inconnue sont pour une part implicitement laissés à la charge des élèves alors que ces apprentissages sont potentiellement nécessaires à la construction d'un rapport personnel idoine aux équations. Nous avons postulé que les praxéologies d'étude et les organisations mathématiques mobilisées par les élèves ne sauraient être comprises ni expliquées si elles ne sont pas mises en relation avec celles qui sont travaillées en classe et celles qui sont développées dans les manuels et les documents officiels.

Nos hypothèses de recherche ont été les suivantes : nous avons supposé qu'une organisation de l'étude personnelle en classe par l'enseignant, à travers la mise en œuvre d'un PER sur les équations permettant un travail équilibré des OM locales de l'OM de référence relative aux équations et un travail de certaines praxéologies d'étude, favoriserait chez les élèves la construction de rapports personnels aux équations vers un rapport idoine et ferait évoluer leurs techniques d'étude personnelle en techniques plus efficaces pour construire et agréger ces OM.

Pour déterminer des praxéologies d'étude favorisant une activité mathématique idoine, nous avons réalisé une synthèse de travaux de recherche sur le travail personnel (entre autres : Castela, 2002, 2007a ; Esmenjaud-Genestoux, 2005, 2006 ; Felix, 2002 ; Milhaud, 1998 ; Rayou, 2008) (cf.chapitre trois) et une étude exploratoire sur le terrain (cf. chapitre quatre). Nous avons alors émis des hypothèses sur les praxéologies d'étude permettant de développer l'autonomie des élèves. Nous nous sommes appuyés sur ces résultats pour élaborer un modèle théorique de l'étude personnelle (cf. chapitre cinq). Nous avons opérationnalisé ce modèle pour analyser et mettre en relation les praxéologies d'étude des élèves avec celles présentes dans les programmes et les manuels (cf. chapitre huit) et celles travaillées en classe (cf. chapitre dix).

Notre recherche relevant de la didactique des mathématiques, nous avons insisté sur la mise en relation des praxéologies d'étude avec celle des OM. Pour construire l'OM de référence sur les équations (cf. chapitre sept), nous avons établi une référence épistémologique en croisant deux approches, l'une cognitive (entre autres : Bednarz et Janvier, 1996 ; Duval, 1993 ; Kieran, 2007 ; Puig, Filloy et Rojano, 2008 ; Sfard, 1991 ; Vergnaud et al., 1987), l'autre anthropologique (entre autres : Bosch et Chevallard, 2005 ; Bosch et Gascon, 2005 ; Chevallard, 2002 ; Ruiz-Munzon, 2010), pour dégager les aspects épistémologiques relatifs aux équations et la complexité des agrégations qui existent entre les techniques et technologies en jeu dans la réalisation de types de tâches portant sur les équations (cf. chapitre six). Nous avons opérationnalisé l'OM épistémologique de référence développée pour analyser l'OM à enseigner dans les manuels et les programmes afin de déterminer des enjeux d'apprentissages laissés implicites par l'institution (cf. chapitre huit), et pour analyser les OM mobilisées par les élèves en lien avec ces implicites (cf. chapitre dix).

Nous avons fondé un PER sur les équations (cf. chapitre neuf) à partir des praxéologies de l'OM épistémologique de référence relative aux équations et des praxéologies d'étude supposées permettre une activité mathématique idoine. Nous avons ensuite analysé les effets de la mise en œuvre de ce PER auprès de collégiens en termes de praxéologies d'étude et mathématiques développées (cf. chapitre dix).

11.3 Principaux résultats de la thèse

Nous exposons à présent les principaux résultats de notre travail de thèse.

11.3.1 L'étude personnelle de collégiens hors la classe en algèbre

Nous avons montré dans le chapitre trois correspondant à la synthèse de travaux de recherche sur le travail personnel des élèves en France que les recherches en didactique sur le sujet sont peu nombreux. À notre connaissance, il n'existe pas de travaux portant sur l'étude hors la classe de collégiens prenant en compte la spécificité et la complexité de l'activité mathématique. Nos recherches permettent donc d'apporter des connaissances sur ce terrain assez inexploré.

Les entretiens que nous avons menés auprès de plusieurs collégiens (cf. chapitre quatre) ont montré que ceux-ci ne mobilisent pas les mêmes praxéologies d'étude selon qu'ils sont « bons » ou « en difficulté », mais aussi selon les pratiques de leurs enseignants. Les élèves « bons » partagent l'exclusivité de certaines techniques d'étude : ils sont capables d'identifier des types de tâches mathématiques, de mettre en relation les tâches entre elles, d'associer à des types de tâches des techniques et des technologies mathématiques, voire de situer et d'articuler des OM les unes par rapport aux autres, ainsi que de diagnostiquer et de répondre de manière économique et autonome à leurs besoins d'apprentissages. Les élèves « en difficulté », eux, emploient des techniques d'étude qui s'appuient peu sur la structure de l'activité mathématique : ils relisent ou tentent de mémoriser leurs leçons et s'entraînent sur des tâches ne recouvrant pas l'ensemble des types de tâches traités en classe, sans parvenir à reconnaître l'ensemble de ces types de tâches ou à associer des techniques et des technologies à ces derniers. Il s'agit selon nous d'un travail à l'aveugle sans piste d'organisation.

11.3.2 Un modèle de l'étude personnelle opérationnalisé pour analyser les pratiques enseignantes et les mettre en relation avec les gestes d'étude des élèves

Adoptant un point de vue institutionnel, nous avons cherché dans notre thèse à comprendre la manière dont les élèves étudient hors la classe en mettant en relation les techniques d'études qu'ils emploient avec les pratiques de leur enseignant. Nous avons construit pour cela un modèle théorique de l'étude personnelle et utilisé les termes de *praxéologies d'étude* afin d'affirmer l'existence de techniques d'étude pour apprendre à construire et à articuler des OM, et celle d'un *logos* à leur sujet.

Nous avons dégagé des types de tâches d'étude qui, lorsqu'ils sont accomplis de façon explicite ou non, sont supposés favoriser une activité mathématique idoine :

- Identifier à partir d'une tâche mathématique donnée le type de tâches parent.
- Identifier une technique mathématique comme telle.
- Identifier une technologie mathématique comme telle.
- Mettre en relation des tâches mathématiques du même type, mettre en relation des tâches mathématiques avec des techniques et des technologies.
- Situer et articuler des OM entre elles (anciennes et nouvelles).
- Diagnostiquer et réguler ses besoins d'apprentissages au regard des objectifs visés.

Après analyse des pratiques de l'enseignant ayant mis en œuvre le PER relatif aux équations, nous avons mis en évidence le fait que la mise en œuvre de moyens de contrôle de l'activité mathématique relevaient également de praxéologies d'étude favorisant une activité mathématique idoine et sont en lien avec la régulation des besoins d'apprentissages. Par exemple, les moyens de contrôle des transformations algébriques lors des résolutions d'équation peuvent s'appuyer sur la reconnaissance de la structure de l'équation et le test numérique d'une égalité. En classe, l'enseignant peut présenter ces genres de tâches comme des moyens de contrôle et montrer comment les convoquer pour contrôler effectivement les transformations et les calculs relatifs aux équations

Dans le modèle de l'étude personnelle que nous avons construit, l'étude est considérée à l'intérieur de systèmes didactiques, l'un principal (en classe), qui pilote l'autre système, auxiliaire (hors la classe). À partir de l'organisation didactique mise en place et de sa gestion, l'enseignant fait rencontrer, construire et étudier aux élèves des OM et des praxéologies d'étude dans le système didactique principal « classe ». Cependant, pour diverses raisons, il peut ne pas explicitement et didactiquement organiser l'étude d'une partie de ces praxéologies en classe. Il revient alors aux élèves de prolonger cette étude de manière personnelle, en fonction de leurs besoins, à travers des systèmes didactiques auxiliaires, comme dans des dispositifs d'aide aux devoirs ou à la maison.

Pour mettre en relation les pratiques de l'enseignant avec la manière dont les élèves accomplissent leur étude personnelle de ses élèves, nous avons opérationnalisé le modèle pour analyser les pratiques enseignantes à plusieurs niveaux :

- Au niveau des OM étudiées : quels types de tâches l'enseignant fait-il travailler en classe ? Quelles sont les techniques et technologies mathématiques construites ? Quelle part de responsabilité les élèves ont-ils dans la réalisation des tâches, dans l'explicitation des techniques et technologies utilisées ?
- Au niveau des praxéologies d'étude développées en lien avec les OM relatives aux équations : l'enseignant identifie-t-il et fait-il identifier des types de tâches, des techniques, des technologies ? Met-il en relation et fait-il mettre en relation des tâches entre elles ? Situe-t-il et fait-il situer des OM entre elles ? Suggère-t-il des techniques d'étude aux élèves, et les leur fait-il travailler explicitement en classe, en particulier en lien avec leur travail personnel hors la classe ? Quelle est la part de gestes d'aide à l'étude purement pédagogiques qu'il accomplit et qui ne prennent pas en compte la spécificité de l'activité mathématique, laissant implicites les techniques d'étude qui favoriseraient cette dernière de manière idoine ?
- Au niveau de l'organisation et de la gestion didactique : en fonction des moments de l'étude, quelles conditions l'enseignant met-il en place pour donner aux élèves des occasions de faire l'expérience en classe de l'autonomie, de s'engager dans la réalisation des tâches ? Notamment, quelles informations sur leurs procédures prend-il en compte et quels retours en fait-il aux élèves ?

Le modèle que nous avons développé nous a permis d'analyser et de mettre en relation les pratiques d'un enseignant de collège avec les gestes d'étude de ses élèves hors la classe. Nous revenons sur ce point à la sous-section 11.3.4 à propos des effets du PER relatif aux équations sur les apprentissages des élèves.

11.3.3 Une OM épistémologique de référence sur les équations opérationnalisée pour analyser les OM à enseigner et enseignées et les OM construites par les élèves

La construction d'une OM épistémologique de référence relative aux équations, fondée sur une synthèse de travaux de recherche en didactique sur l'apprentissage et l'enseignement des équations et éclairée par des points de vue historique et logique, est un autre résultat majeur de notre thèse. Nous avons dégagé dans notre travail les principaux éléments épistémologiques relatifs aux équations, parmi lesquels figurent les suivants :

- Les programmes de calcul permettent une reconstruction des savoirs en algèbre et les équations du premier degré à une inconnue se situent à la deuxième étape de ce processus (Ruiz-Munzon et al., 2012). Dans ce contexte, la production d'une telle équation est motivée par la recherche d'une réponse à la question : quelle même valeur à entrer dans deux programmes de calcul permet d'obtenir deux valeurs de sortie égales ?

- La mise en avant de l'insuffisance des techniques arithmétiques et par essais/erreurs pour résoudre certaines équations du premier degré à une inconnue et certains problèmes algébriques donne des raisons d'être à la production, à la manipulation et à l'utilisation des équations du premier degré à une inconnue. Cette mise en avant ne peut avoir lieu qu'avec la prise en compte, dans une approche anthropologique, du rapport à la résolution de problèmes du premier degré construit préalablement, et celle, dans une approche cognitive, des conceptions initiales des élèves qui relèvent de l'arithmétique, des ruptures épistémologiques et didactiques nécessaires à opérer dans la transition entre institutions (école primaire - collège), en particulier du double aspect procédural-structural des expressions et des équations.
- L'explicitation et l'articulation des discours pratiques (reconnaître la structure de l'équation pour décider de la stratégie à adopter, chercher à « isoler l'inconnue ») avec les propriétés mathématiques relatives aux équations (propriétés de conservation de l'égalité) favorisent l'intelligence des calculs dans la résolution algébrique d'équations du premier degré à une inconnue et de problèmes.
- Le travail sur la conversion et la coordination des registres de représentation sémiotique favorise la conceptualisation des équations.

En appui sur ces éléments, nous avons structuré l'OM épistémologique de référence relative aux équations du premier degré à une inconnue en la découpant en trois OM locales articulées les unes avec les autres. La première porte sur la génération d'équations. L'environnement technologico-théorique associé justifie les techniques pour réaliser les genres de tâches relatifs à la mise en équation des problèmes. La deuxième OM locale concerne la résolution algébrique d'équations et est pilotée par les propriétés de conservation de l'égalité. La troisième OM locale est relative à la structure d'une équation. Elle comprend genres de tâches nécessaires à l'intelligence et au contrôle des transformations algébriques dans la résolution d'équations et la mise en équation de problèmes.

Ces trois OM locales s'articulent les unes aux autres mais s'articulent aussi avec d'autres OM relatives au calcul numérique, aux expressions algébriques et à la géométrie. Par exemple, mettre en équation un problème algébrique portant sur une égalisation de périmètres de figures nécessite d'agréger plusieurs OM ponctuelles issues de différentes OM régionales. C'est l'articulation des OM qui permet d'exercer une activité algébrique idoine avec les équations du premier degré à une inconnue.

Nous avons opérationnalisé l'OM épistémologique de référence pour pouvoir analyser l'OM à enseigner présente dans les programmes et les manuels (cf. chapitre huit). Nous avons montré que certains enjeux d'apprentissages demeuraient implicites :

- Les programmes donnent des directives générales qui ne précisent pas les types de problèmes à faire rencontrer aux élèves dans l'enseignement des équations (pas de précision sur les variables didactiques des problèmes relatifs aux équations). Les documents d'accompagnement tentent de compléter ces directives mais se situent en marge des programmes et nous interrogeons l'utilisation qui en est faite par les enseignants.
- Dans les manuels scolaires que nous avons analysés, les proportions des OM travaillées dans les manuels sont déséquilibrées, avec une prépondérance forte pour l'OM locale relative à la résolution algébrique d'équations ; les résolutions algébriques d'équation sont insuffisamment articulées avec la résolution de problèmes ; les problèmes proposés peuvent être résolus, pour plus de la moitié d'entre eux, par des techniques ne nécessitant pas le recours aux équations ; enfin, certains genres de tâches, notamment l'identification de la structure d'une équation, nécessaire pour guider et contrôler des transformations, sont peu présents.

11.3.4 Un PER sur les équations avec des effets positifs sur les apprentissages des élèves

Le dernier résultat important de notre travail de thèse est la construction d'un Parcours d'Etude et de Recherche en appui sur les résultats de recherche précédemment présentés. Ce PER a permis aux élèves de mobiliser les technologies algébriques relatives aux équations : entre 16 et 17 élèves sur 20 résolvent des équations à l'aide de la technique algébrique appuyée sur les propriétés de conservation de l'égalité ; plus de la moitié convoquent une équation pour résoudre un problème algébrique d'égalisation de programmes de calcul.

Trois étapes composent le PER. La première vise à donner des raisons d'être à la production d'une équation du premier degré à une inconnue pour résoudre un problème d'égalisation de programmes de calcul ; la deuxième a pour objectif de montrer les limites techniques de résolution arithmétique et par essais/erreurs d'une équation du premier degré à une inconnue et motive la technique de résolution algébrique en appui sur les propriétés de conservation de l'égalité ; la troisième cible un travail sur la résolution algébrique de problèmes du premier degré ou se ramenant à des problèmes du premier degré dans des cadres variés.

Nous avons articulé les outils de la théorique anthropologique de la didactique et de la théorie des situations pour favoriser le travail des OM et des praxéologies d'étude et suggérer à l'enseignant des éléments de gestion et d'organisation didactique. Un des enjeux était de proposer aux enseignants des situations viables et des éléments didactiques suffisamment précis pour mettre en œuvre ces dernières, car celles-ci nécessitent des pratiques potentiellement différentes des pratiques habituelles. Trois situations didactiques clefs permettent de structurer le PER en trois étapes, avec un milieu riche permettant des rétroactions avec les élèves : dans l'étape 1, le solveur d'équations est un élément du milieu qui donne des raisons d'être à la production d'une équation, permet aux élèves de contrôler cette production et prend en charge la résolution algébrique ; dans l'étape 2, un logiciel (Thot) fait également partie du milieu, prend en charge une partie des transformations algébriques lors de la résolution d'une équation du premier degré à une inconnue, et donne des rétroactions aux élèves en affichant les résultats de chaque transformation ; dans l'étape 3, un logiciel de géométrie dynamique permet de conjecturer la solution d'un problème du premier degré d'égalisation de périmètres.

À travers les trois étapes, un cycle complet de moments de l'étude pour les principaux les genres de tâches relevant des trois OM locales de l'OM épistémologique de référence relative aux équations a lieu. Les moments de travail des techniques mathématiques se caractérisent par la proposition de tâches différenciées. Nous nous sommes aussi appuyé sur l'identification des besoins d'apprentissages en algèbre des élèves réalisée à partir du test dignostic automatique Pépite pour proposer des contenus adaptés à ces besoins. Plusieurs aides de différents types constituent un milieu d'aide à l'étude autonome et incitent les élèves à mobiliser des techniques d'étude explicites (cf. figure 11.2 lisible à la toute fin de ce chapitre). Toutefois, ces aides, que nous n'avons pas cherché à modéliser en profondeur ni à situer par rapport à d'autres travaux de recherche (comme ceux de (Robert, 2008)), dont la classification et le lien avec les praxéologies d'étude sont potentiellement à questionner, peuvent faire l'objet de nouvelles études.

Nous avons organisé une expérimentation dans la classe d'un enseignant de collège (l'enseignant est présenté au chapitre quatre). Cet enseignant a pu mettre en place le PER auprès de ses élèves du niveau quatrième. Nous avons proposé une présentation du PER pour qu'il réponde aux contraintes du terrain et corresponde à une seule séquence d'enseignement d'environ sept heures (ce qui représente la quantité d'heures d'une séquence habituellement chez cet enseignant). À l'aide du modèle de l'étude établi au chapitre cinq, nous avons analysé et mis en relation les pratiques de cet enseignant pendant la mise en œuvre du PER avec les OM mobilisées par les élèves lors d'une évaluation sommative, ainsi que les praxéologies d'étude et mathématiques développées par les élèves lorsqu'ils étudient hors la classe. Nous avons montré l'opérationnalité du modèle pour analyser les pratiques de l'enseignant vis-à-vis de l'organisation de l'étude personnelle de ses élèves et avons mis en évidence des régularités dans ces pratiques, qui restent prégnantes au regard des propositions travaillées.

Durant la mise en œuvre du PER, nous avons constaté que l'enseignant a travaillé de manière équilibrée les trois OM locales de l'OM de référence relative aux équations, même si certains genres de tâches ne s'articulaient pas toujours entre eux : l'enseignant s'appuyait peu sur la structure d'une équation pour guider l'application de la technique de résolution algébrique des équations appuyée sur les propriétés de conservation de l'égalité, ou encore convoquait rarement le test numérique pour vérifier qu'une solution trouvée était correcte. À partir des productions écrites des élèves à une évaluation sommative sur les équations, nous avons observé que la majorité d'entre eux mobilisaient des technologies algébriques dans la réalisation des tâches proposées, et avons rapproché les enjeux d'apprentissages laissés implicites de certaines erreurs commises.

Concernant les praxéologies d'étude mobilisées par les élèves hors la classe, seule une élève « bonne » a fait évoluer ses gestes d'étude parmi les trois élèves suivis. Auparavant, cette élève disait ne jamais préparer spécifiquement à la maison les évaluations sommatives données en classe ; après la mise en œuvre du PER, elle s'est appuyée sur le milieu d'aide à l'étude fourni par l'enseignant. En revanche, les deux élèves « moyens » ne semblent pas avoir appliqué les techniques d'étude supposées favoriser une activité mathématique idoine et ont persévéré dans l'utilisation de leurs techniques habituelles (relecture, mémorisation). Nous avons mis ceci en relation avec la faible explicitation de ces techniques d'étude par l'enseignant en classe.

Nous ne pouvons cependant pas tirer de conclusion définitive de l'expérimentation. Selon, l'échelle de temps était trop courte, les pratiques de l'enseignant encore trop éloignées de celles requises pour la mise en œuvre du PER, pour pouvoir confirmer ou infirmer nos hypothèses de recherche.

11.4 Perspectives de recherche

Notre travail de thèse porte sur un sujet peu abordé en didactique et les recherches que nous avons menées appellent de nombreuses perspectives. Nous en proposons quelques-unes dans les sous-sections qui suivent.

11.4.1 Des analyses à étendre sur des échantillons plus vastes et sur un temps plus long

En raison de contraintes de temps, l'enseignant avec qui nous avons travaillé a mis en œuvre le PER relatif aux équations en moins de deux semaines. L'échelle de temps est selon nous trop courte pour pouvoir tirer des conclusions larges de nos analyses et des effets des gestes d'étude hors la classe des élèves sur l'apprentissage dans un domaine de savoir donné.

Nous n'avons pas mis en place un véritable travail collaboratif avec l'enseignant avec qui nous avons mené nos expérimentations et lui avons simplement fait des suggestions orales et écrites. Nous faisons l'hypothèse que certaines tendances que nous avons observées dans sa gestion didactique peuvent s'expliquer par le fait que ses pratiques habituelles ont « repris le dessus », les pratiques requises pour la mise en œuvre du PER n'étant pas les siennes. L'évolution nécessaire des pratiques de l'enseignant pour pouvoir mettre en scène le PER d'une part et celle des techniques d'étude personnelle des élèves d'autre part nécessitent selon nous un temps beaucoup plus conséquent et probablement un travail collaboratif avec des chercheurs. Une perspective de recherche serait donc de mener des analyses sur des échelles de temps plus grandes, sur des échantillons d'enseignants et d'élèves plus importants, avec un accompagnement spécifique des enseignants, afin de pouvoir confirmer ou infirmer certaines de nos hypothèses de recherche.

11.4.2 Des OM épistémologiques de référence en algèbre à construire en appui sur celles relatives aux expressions algébriques et aux équations

L'OM épistémologique de référence que nous avons construite porte sur les équations à coefficients réels, du premier degré, à une inconnue réelle. La démarche de construction d'OM épistémologiques de référence reste à élargir. Nous donnons à titre indicatif quelques exemples dans cette sous-section.

La construction d'autres OM épistémologiques de référence peut être réalisée à partir de celle sur les équations du premier degré à une inconnue, par exemple celles relatives aux systèmes d'équations du premier degré et aux inéquations du premier degré à une inconnue. Les environnements technologico-théoriques des OM relatives à ces deux objets nous paraissent proches de ceux pilotant les OM locales de l'OM de référence relative aux équations. Nous suggérons quelques pistes à ce propos :

- Les systèmes d'équations du premier degré constituent un outil permettant de traiter un champ de problèmes plus vaste que les équations du premier degré à une inconnue. Les systèmes d'équations ont également une syntaxe qui leur est propre, avec des conventions spécifiques (accolade, nom du système, nom de chaque équation, ...). Les conversions entre registres de représentation sont plus complexes : la mise en équation nécessite de convoquer plusieurs lettres pour chaque inconnue, ainsi que plusieurs relations d'égalité. Concernant la résolution des systèmes, la composante pratique de la technologie justifiant la technique correspondante comporte plus d'éléments que pour la résolution d'une équation du premier degré à une inconnue : par exemple, la résolution nécessite de prendre en compte la structure de chaque équation du système, de repérer les inconnues et leurs coefficients pour pouvoir choisir les substitutions ou les combinaisons adéquates. Enfin, les systèmes d'équations font intervenir des solutions sous forme de $n-$uplets avec $n \geq 1$, ce qui n'est pas le cas des équations à une inconnue réelle. Cela nécessité d'agréger des OM à différents niveaux de granularité.
- Pour ce qui est des inéquations du premier degré à une inconnue, les conversions entre registres de représentations sémiotiques impliquent l'expression de la relation d'inégalité, différente de celle d'égalité, et qui nécessite probablement une étude épistémologique spécifique. Les transformations permettant d'obtenir une inéquation équivalente à une autre utilisent un environnement technologico-théorique impliquant ce que les manuels appellent un « changement de sens » de l'inégalité (composante pratique de la technologie) lorsqu'il y a multiplication de chaque membre par un nombre négatif, ce qui n'existe pas pour les équations. Enfin, les solutions d'une inéquation sont généralement données sous forme d'un intervalle, contrairement aux solutions d'une équation à une inconnue généralement données sous forme d'un ensemble d'éléments discrets, réduits à un ou deux éléments en algèbre élémentaire au collège. Ces solutions peuvent de plus être représentées graphiquement à l'aide d'intervalles.

11.4.3 Un modèle de l'étude personnelle à adapter mais portentiellement transférable à d'autres domaines, d'autres niveaux et d'autres disciplines

Nous avons orienté la construction d'un modèle de l'étude personnelle en regard de nos questions de recherche et du niveau scolaire sur lequel nous avons travaillé. Nous nous sommes ainsi autorisé à penser l'étude des équations du premier degré à une inconnue en collège dans une approche anthropologique en termes de praxéologies, en particulier en termes de types de tâches qu'il était possible d'identifier et de dénombrer raisonnablement, pour pouvoir leur associer des techniques et des technologies afin de les réaliser et de contrôler l'activité mathématique.

Au collège, pour des OM relevant d'autres secteurs ou domaines d'étude, ou encore pour d'autres disciplines, le modèle que nous avons élaboré peut servir de base à la construction d'autres modèles, prenant en compte les spécificités du secteur, du domaine, de la discipline d'étude.

Au lycée et à l'université, nous nous demandons si l'augmentation du nombre d'OM et de leurs articulations ainsi que celle de la complexité des problèmes rencontrés rend possible un découpage du savoir semblable à celui que nous avons réalisé. Les techniques d'étude correspondantes restent encore à identifier et à analyser ; certaines l'ont déjà été, par exemple dans les travaux de Castela (2007a) pour des élèves de première scientifique.

11.4.4 Des éléments du PER sur les équations pour l'étude hors la classe à informatiser

Dans le PER relatif aux équations que nous avons construit, nous avons proposé des ensembles de types de tâches mathématiques à faire travailler en autonomie aux élèves. Nous avons élaboré des aides de différents types, différenciées selon les groupes d'élèves. Cela a donné naissance à des documents dans un environnement papier/crayon certainement trop complexes à utiliser et peu habituelles pour des collégiens en difficulté, de par leur nombre et la quantité de texte à lire. Nous pensons notamment aux aides dites régulatrices, qui suggèrent en fonction des réponses des élèves des techniques d'étude pour travailler les éventuelles erreurs et qui se présentent sous forme d'arbre (voir figure 11.1 ci-dessous pour un exemple de telle aide ; la tâche correspondante à réaliser consiste à traduire sous la forme d'une équation la phrase « *Paul a six ans de moins que Charlotte* »).

Selon nous, ces aides pourraient faire l'objet d'une informatisation sur une plateforme en ligne, utilisable par les élèves depuis leur domicile ou des postes de l'établissement qu'ils fréquentent, en aide aux devoirs ou en accompagnement personnalisé. L'accès à des aides numériques permettrait d'adapter les rétroactions en fonction d'une analyse des réponses et des besoins d'apprentissages de l'élève. Il nous semble par exemple possible d'intégrer ces aides en lien avec le test diagnostic Pépite (Grugeon et al., 2010) et des parcours d'enseignement différencié (Pilet, 2012).

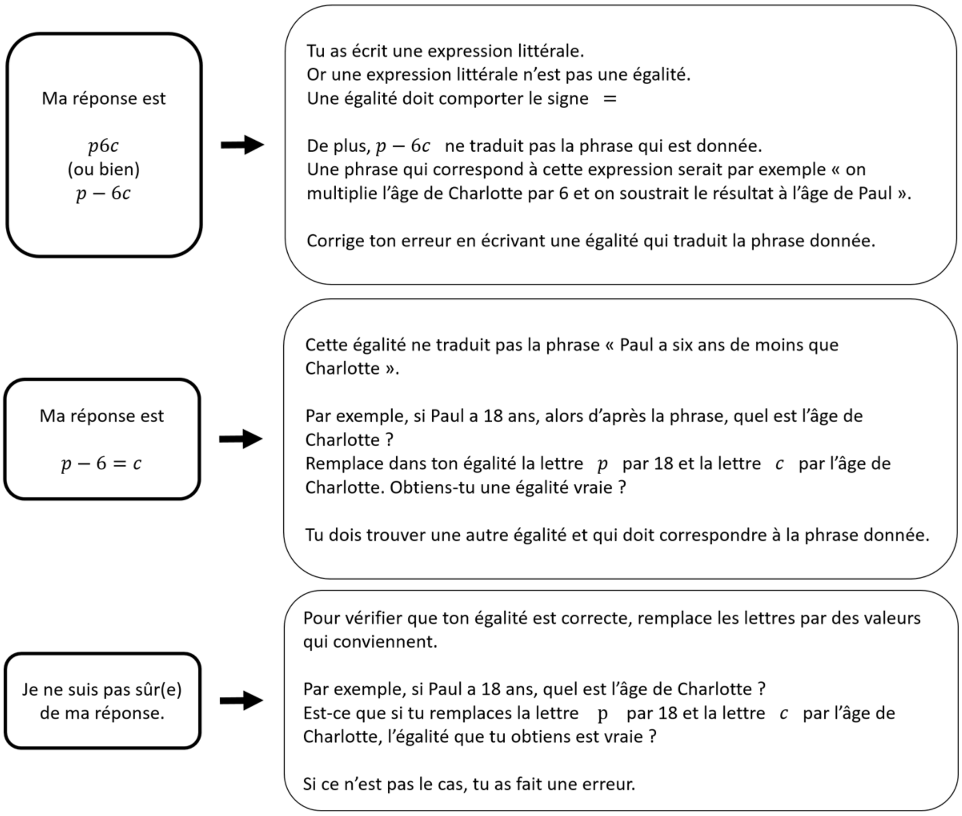


FIGURE 11.1 – Un exemple d'aide régulatrice issue du PER relatif aux équations (cf. chapitre neuf)

11.4.5 Des résultats de recherche potentiellement utilisables pour renforcer les dispositifs d'aide à l'étude existants

En lien avec une formation potentielle des enseignants sur l'organisation de l'étude personnelle des élèves évoquée à la sous-section précédente, nous pensons que nos résultats de recherche peuvent servir de base pour concevoir des dispositifs de formation des enseignants et/ou des accompagnateurs d'étude et revisiter les dispositifs d'aide à l'étude déjà existants. Nous avons expliqué au chapitre un que les aides aux devoirs ou les accompagnements personnalisés, tels qu'ils sont décrits dans les documents officiels, prennent peu voire ne prennent pas en compte les spécificités et la complexité de l'activité mathématique. Or ces dispositifs nous paraissent intéressants à investir pour accompagner les élèves dans leur travail personnel en mathématiques, parce qu'ils sont *internes* à l'Ecole. Notre thèse relevant de la recherche en didactique des mathématiques, nous n'avons pas pris pour objet d'étude les phénomènes non scolaires qui interfèrent de manière sans doute non négligeable avec l'étude hors la classe (voir (Rochex & Crinon, 2011)). Une Ecole qui « externalise » l'étude prend le risque de voir s'accroître des inégalités scolaires en lien avec des inégalités non scolaires. Il nous paraît donc crucial qu'Elle s'efforce, dans les dispositifs *internes* qu'Elle propose *déjà*, d'accompagner au mieux les élèves. Selon nous, une articulation des champs de recherche et une approche multidimensionnelle est indispensable pour aborder des problématiques aussi complexes et qui se situent à plusieurs niveaux dans l'échelle de co-détermination didactique (Chevallard, 2002). Nous avons mis en place notre recherche au niveau d'un thème d'étude des mathématiques qu'il conviendrait d'étendre et d'articuler aux niveaux de la pédagogie, de l'école et de la société.

11.5 Des perspectives pour nos propres pratiques enseignantes

Nous avons entamé cette thèse par des questionnements d'enseignant. Nous nous autorisons dans ces dernières lignes à exprimer de manière informelle quelques transformations parmi les plus importantes qui se sont opérées en nous au cours de notre travail. Nous prenons en effet la mesure du chemin que nous avons parcouru et précisons en quoi cette thèse a changé notre représentation du métier.

Nous avons tout d'abord dépassé le point de vue cognitif qui peut conduire au simple constat, potentiellement culpabilisant pour les élèves, de leurs difficultés conceptuelles. Nous avons basculé dans un point de vue institutionnel et redonné aussi bien à l'Ecole qu'à nous-même une plus grande part de responsabilité dans la réussite et dans l'échec de nos élèves. Il s'agit selon nous du changement le plus conséquent dans notre représentation du métier.

Nous avons ensuite pris la mesure de la nécessité de nous appuyer sur des éléments épistémologiques et didactiques pour donner des raisons d'être aux objets de savoir que nous mettons en scène, et celle de jouer pleinement notre rôle d'*organisateur* de l'étude en accompagnant les élèves dans leur apprentissage de l'autonomie, par des suggestions et un travail en classe de techniques d'étude *explicites*, ce que nous faisions peu auparavant ou en tout cas de manière implicite. Nous envisageons désormais d'articuler davantage l'étude des OM avec le développement de praxéologies d'étude pour favoriser l'apprentissage de l'autonomie.

Enfin, nous avons fait évoluer notre manière d'évaluer les apprentissages et valorisons davantage les productions des élèves grâce à des points d'appui technologiques.

Nous avons pris conscience au cours de ce travail de thèse de la confiance que nous pouvions à juste titre rendre à nos élèves, pour un plaisir toujours plus grand de leur faire faire des mathématiques.

Type d'aide	Description	Exemple	Praxéologies d'étude travaillées
Aide de renvoi	Renvoie l'élève vers ses cahiers pour qu'il trouve des tâches mathématiques du même type que celui à réaliser.	« Observe les problèmes du même type qui ont été traités en classe pour t'aider à résoudre le problème demandé. »	Identifier un type ou un genre de tâches mathématiques à partir d'une tâche donnée. Mettre en relation des tâches mathématiques du même type.
Aide comparatrice	Invite l'élève à comparer deux énoncés, deux formulations, deux corrigés, etc. Les aides sous forme de tâches résolues sont aussi des aides comparatrices.	« Quelles différences y a-t-il entre cet énoncé et l'énoncé précédent ? »	Identifier un type ou un genre de tâches mathématiques à partir d'une tâche donnée. Mettre en relation des tâches mathématiques du même type. Identifier des techniques et technologies mobilisées pour réaliser un type de tâches mathématiques. Situer et articuler des OM entre elles.
Aide à la mobilisation d'une technique ou d'une technologie mathématique	Explicite la technique ou la technologie à employer pour réaliser la tâche, sans préciser de manière de l'appliquer.	« Pour résoudre cette équation, tu dois utiliser les propriétés de conservation de l'égalité. »	Identifier des techniques et technologies mobilisées pour réaliser un type de tâches mathématiques. Mettre en relation un type de tâches mathématiques avec une technique et une technologie pour le réaliser.
Aide à l'application d'une technique mathématique	Explicite la technique à employer pour réaliser la tâche en précisant une manière de l'appliquer.* Les aides sous forme de tâches résolues sont aussi des aides à l'application d'une technique mathématique.	« Voici un exemple corrigé… »	Identifier des techniques et technologies mobilisées pour réaliser un type de tâches mathématiques. Mettre en relation un type de tâches mathématiques avec une technique et une technologie pour le réaliser.
Aide régulatrice	Une aide régulatrice se présente sous la forme d'un arbre où plusieurs procédures ont été anticipées. L'élève choisit la procédure qu'il a employée et dispose d'une aide en conséquence.	« Si tu as trouvé telle solution, alors tu as probablement fait telle erreur. Voici comment travailler ton erreur. »	Dépend de l'aide.
Aide au contrôle	Donne à l'élève des moyens de contrôler ses réponses.	« Pour vérifier que la solution que tu as trouvée est correcte, tu peux tester l'égalité de départ avec cette solution ou utiliser un solveur d'équations. »	Mettre en relation des tâches mathématiques du même type. Situer et articuler des OM entre elles.

FIGURE 11.2 – Les différents types d'aides pour l'accompagnement des élèves dans leur étude personnelle autonome

Références

Araya-Chacón, A.-M. (2008). *La gestion de la mémoire didactique par le professeur dans l'enseignement secondaire des mathématiques : étude du micro-cadre institutionnel en france et au costa rica* (Thèse de doctorat). Laboratoire DiDiST : Didactique des Disciplines Scientifiques et Technologiques-CREFI-T.

Bardini, C. (2003). *Le rapport au symbolisme algébrique : une approche didactique et épistémologique* (Thèse de doctorat). Université Paris 7 Denis-Diderot, Paris.

Barrère, A. (1997). *Les lycéens au travail.* Paris : PUF.

Bautier, E., & Goigoux, R. (2004). Difficultés d'apprentissage, processus de secondarisation et pratiques enseignantes : une hypothèse relationnelle. *Revue Française de Pédagogie*, *148*, 89-100.

Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (1996). *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching* (Vol. 18). Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Blochs, B. (2012). Le cahier de cours au collège : une oeuvre du professeur ? un instrument pour l'élève ? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *32*(2), 159-193.

Booth, L. (1984). Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire. *Petit x*, *5*, 5-17.

Bosch, M. (2012). Doing research within the anthropological theory of the didactic : the case of school algebra. In *Proceedings du 12ème International Congress on Mathematical Education, du 8 au 15 juillet 2012, COEX, Séoul, Korea.*

Bosch, M., Fonseca, C., & Gascón, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matematicas locales en las instituciones escolares. *Recherches en didactique de mathématiques*, *24.2*(3), 205-250.

Bosch, M., & Gascón, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. In A. Mercier & C. Margolinas (Eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques : cours de la 12e École d'été de didactique des mathématiques. Corps (Isère) . Du 20 au 29 août 2003* (p. 107-122). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Boulton-Lewis, G., Cooper, T., Atweh, B., Pillay, H., Wilss, L., & Mutch, S. (1997). Processing load and the use of concrete representations strategies for solving linear equations. *Journal of mathematics behavior*, *16*(4), 379-397.

Brousseau, G. (1986). La relation didactique : le milieu. *Actes de la 4e école d'été de didactique des mathématiques, IREM de Paris 7*.

Caillet, V., & Sembel, N. (2008). Efficacité et équité du travail hors la classe dans un contexte scolaire et social "pacifié" : les points de vue croisés d'élèves, de parents et d'enseignants. In P. Rayou (Ed.), *Colloque international efficacité et équité en éducation* (p. 23-30).

Castela, C. (2000). Un objet de savoir spécifique en jeu dans la résolution de problèmes : le fonctionnement mathématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *20*(3), 331-380.

Castela, C. (2002). Les objets du travail personnel en mathématiques des étudiants dans l'enseignement supérieur : comparaison de deux institutions, université et classes préparatoires aux grandes ecoles. *Cahier de Didirem. Paris : IREM Paris 7*(40).

Castela, C. (2007). Approche didactique des processus différenciateurs dans l'enseignement des mathématiques : l'exemple des apprentissages relatifs à la résolution de problèmes. In A. Rouchier & I. Bloch (Eds.), *Perspectives en didactique des mathématiques : cours de la 13e École d'été de didactique des mathématiques, Sainte-Livrade, Lot-et-Garonne, du 18 au 16 août 2005* (p. 89-114). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Castela, C. (2007a). Les gestes d'étude en mathématiques d'élèves de première scientifique. In G. Gueudet & Y. Matheron (Eds.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, année 2006* (p. 33-77). Paris : IREM Paris 7.

Castela, C. (2008). Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissages ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherches en didactique des mathématiques*, *28*(2), 135-182.

Castela, C., & Mercier, A. (1995). Peut-on enseigner des méthodes ? comment les élèves apprennent-ils des méthodes ? *Petit x*, *33*, 5-26.

Chalancon, F., Coppé, S., & Pascal, N. (2002). Les vérifications dans les équations, inéquations et en calcul littéral. *Petit x*, *58*, 23-41.

Chenevotot, F., & Grugeon, B. (2009). Diagnostic cognitif en algèbre élémentaire à différents niveaux de la scolarité. In C. Ouvrier-Buffet & M.-J. Perrin-Glorian (Eds.), *Actes du colloque DIDIREM. Approches plurielles en didactique des* *mathématiques - Apprendre à faire des mathématiques du primaire au supérieur : Quoi de neuf ?* (p. 141-149). Paris : Université Paris Diderot - Paris 7 - L.D.A.R.

Chevallard, Y. (1985). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Première partie. L'évolution de la transposition didactique. *Petit x*, *5*, 51-94.

Chevallard, Y. (1989a). Evaluation, véridiction, objectivation. In J. Colomb & J. Marsenach (Eds.), *L'évaluation en révolution. Actes des Rencontres internationales sur l'évaluation en éducation, Asssociation pour le développement des méthodologies en Éducation-Europe, Paris, 27-29 septembre 1989* (p. 13-36). Paris : Institut national de recherche pédagogique.

Chevallard, Y. (1989b). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Seconde partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x*, *19*, 43-72.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *12*(1), 73-111.

Chevallard, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. In R. Noirefalise (Ed.), *Actes de l'École d'été de la Rochelle, du 4 au 11 juillet 1998, La Rochelle* (p. 91-120). Clermont-Ferrand : IREM de Clermont-Ferrand.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique de mathématiques*, *19*(2), 221-265.

Chevallard, Y. (2002a). Nouveaux dispositifs didactiques au collège et au lycée : raisons d'être, fonctions, devenir. In *Communication aux journées de la communication inter-irem didactique (dijon, 24-25 mai 2002). paru dans les actes correspondants, irem, dijon* (p. 1-26).

Chevallard, Y. (2002b). Organiser l'étude. 1. structures et fonctions. In *Actes de la 11ème école d'été de didactique des mathématiques* (p. 3-32).

Chevallard, Y. (2005). La place des mathématiques vivantes dans l'éducation scolaire : transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire. *Publication de l'APMEP*, *168*, 239-263.

Combier, G., Guillaume, J.-C., & Pressiat, A. (1996). *Les débuts de l'algèbre au collège. au pied de la lettre !* Institut National de Recherche Pédagogique (INRP).

Cooper, H., Robinson, J., & Patall, E. (2006). Does homework improve academic achievement ? a synthesis of research, 1987-2003. *Review of Educational Research*, *76*(1), 1-62.

Coulange, L. (1998). Les problèmes "concrets" à "mettre en équations" dans l'enseignement. *Petit x*, *47*, 33-58.

Darwesh, A. (2010). *Diagnostic cognitif en E.I.A.H. : le système PépiMeP* (Thèse de doctorat). Université Pierre-et-Marie-Curie, Paris.

Delozanne, E., Prévit, D., Grugeon, B., & Chenevotot, F. (2008). Automatic Multi-Criteria Assessment of Open-Ended Questions : a Case Study in School Algebra. In *Intelligent Tutoring Systems : 9th International Conference, ITS 2008, Montreal, Canada, June 23-27, 2008 : proceedings* (p. 101-110). New York : Springer.

Delozanne, E., Prévit, D., Grugeon, B., & Chenevotot, F. (2010). Vers un modèle de diagnostic de compétences. *Revue Techniques et Sciences Informatiques*, *29*(8-9), 899-938.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil/objet. *Recherches en didactique de mathématiques*, *7*(2), 5-32.

Drouhard, J.-P. (1992). *Les écritures symboliques de l'algèbre élémentaire* (Thèse de doctorat). Université Paris 7 Denis-Diderot, Paris.

Durand-Guerrier, V., Le Berre, M., Pontille, M., & Reynaud-Feurly, J. (2000). Le statut logique des énoncés dans la classe de mathématiques. Éléments d'analyse pour les enseignants. *IREM de Lyon*.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, *5*, 37-65.

Erdogan, A. (2006). *Le diagnostic de l'aide à l'étude en mathématiques : analyse didactique des difficultés relatives à l'algèbre et aux fonctions en seconde* (Thèse de doctorat). Université Paris Diderot 7.

Esmenjaud-Genestoux, F. (2005). Le travail 'personnel' au collège ou le partage des responsabilités didactiques entre le professeur, l'élève et ceux qui accompagnent la réalisation des devoirs en mathématiques. partie 1 : La partie 'privée' du travail des élèves et de l'accompagnement aux devoirs. *Petit x*, *69*, 58-77.

Esmenjaud-Genestoux, F. (2006). Le travail 'personnel' au collège ou le partage des responsabilités didactiques entre le professeur, l'élève et ceux qui accompagnent la réalisation des devoirs en mathématiques. partie 2 : Le professeur accompagne le travail personnel des élèves. *Petit x*, *70*, 48-72.

Farah, L. (2015). *Etude et mise à l'étude des mathématiques en classes préparatoires économiques et commerciales : point de vue des étudiants, point de vue des professeurs* (Thèse de doctorat). Université Paris Diderot 7.

Filloy, E., Puig, L., & Rojano, T. (2008). *Educational Algebra.* A *theoretical and Empirical Approach* (Vol. 43). New York : Springer.

Félix, C. (2002). *Une analyse comparative des gestes de l'étude personnelle : le cas des mathématiques et de l'histoire* (Thèse de doctorat). Université Aix-Marseille 1.

Félix, C. (2004). Les gestes de l'étude personnelle chez les collégiens : une perspective comparatiste. *Spirale*, *33*, 483-505.

Félix, C., & Joshua, S. (2002). Le travail des élèves à la maison : une analyse didactique en termes de milieu pour l'étude. *Revue française de pédagogie*, *141*, 89-97.

Félix, C., Saujat, F., & Mouton, J.-C. (2008). Dispositifs d'aide au travail personnel des élèves, quelle efficacité pour quelle équité ? In P. Rayou (Ed.), *Colloque international efficacité et équité en éducation* (p. 39-49).

Frege, G. (1971). *Écrits logiques et philosophiques.* Paris : Éditions du Seuil. (Traduction de Claude Imbert)

Gascón, J. (1994). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'« arithmétique généralisée ». *Petit x*, *37*, 43-63.

Grugeon, B. (1995). *Etudes des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves à l'algèbre élémentaire à la transition entre deux cycles d'enseignement : BEP et Première G* (Thèse de doctorat). Université Paris 7, Paris.

Grugeon, B. (1997). Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. *Recherches en didactique des mathématiques*, *17*(2), 167-210.

Grugeon, B. (2009). *Quelques apports de l'analyse multidimensionnelle : activités des élèves et pratiques des professeurs de mathématiques ; vers une modélisation.* (Note de synthèse pour une habilitation à diriger des recherches). Université Paris-Diderot, Paris 7, Paris.

Jean, S. (2000). *PEPITE : un système d'assistance au diagnostic de compétence* (Thèse de doctorat). Université du Maine.

Kapko, S., & Rayou, P. (2010). Contrats didactiques et contrats sociaux du travail hors la classe. *Education et didactique*, *4*(2), 41-55.

Küchemann, D. (1978). Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in School*, *7*(4), 23-26.

Küchemann, D. (1981). Algebra. In K. M. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics* (p. 102-119). London : John.

Kieran, C. (1992). The Learning and Teaching of School Algebra. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (p. 390-415). New York, NY, England : Macmillan Publishing Co, Inc.

Kieran, C. (2007). Learning and Teaching Algebra At the Middle School Through College Levels. Building Meaning for Symbols and Their Manipulation. In J. Lester F. K. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, p. 707-762). Charlotte, NC : I.A.P.

Kouki, R. (2008). *Enseignement et apprentissage des équations, inéquations et fonctions au secondaire : entre syntaxe et sémantique* (Thèse de doctorat). Université Claude Bernard Lyon 1.

Lima, R., & Tall, D. (2006). The concept of equations : what have students met before ? In J. Novotna, H. Moraova, M. Kratka, & N. Stehlikova (Eds.), *Proceedings 30th conference of the international group for the pscyhology of mathematics education* (p. 233-240). Prague : PME.

Mahammed, N. (1998). *Histoire des équations algébriques* (D. Paris, Ed.).

Margolinas, C. (2002). Situations, milieux, connaissances : analyse de l'activité du professeur. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, & R. Floris (Eds.), *Actes de la 11ème école d'été de didactique des mathématiques* (p. 141-156). Grenoble La Pensée Sauvage.

Mario, R. (2012). *Conversion et influence des assujettissements au milieu scolaire dans l'étude autonome des mathématiques : comment les très bons élèves de lycée étudient les mathématiques après la classe.observation anthropologique et suivi biographique de quelques cas exemplaires* (Thèse de doctorat, Université Aix-Marseille 1). Consulté sur `http://www.theses.fr/2012AIXM3001`

Matheron, Y. (2001). Une modélisation pour l'étude didactique de la mémoire. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, *11*(3), 51-78.

Milhaud, N. (1998). Le travail personnel des élèves. *Petit x*, *47*, 59-70.

Pilet, J. (2012). *Parcours d'enseignement différencié appuyés sur un diagnostic en algèbre élémentaire à la fin de la scolarité obligatoire : modélisation, implémentation dans une plateforme en ligne et évaluation* (Thèse de doctorat, Université Paris-Diderot, Paris 7). Consulté sur `http://tel.archives-ouvertes.fr/index.php?halsid=6185fjgj96ua6r1eb9ik8j00l7&view_this_doc=tel-00784039&version=1`

Pilet, J. (2015). Réguler l'enseignement en algèbre élémentaire par des parcours d'enseignement différencié. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *35*(3), 273-312.

Radford, L. (2004). Syntax and Meaning. In M. Johnsen Hoines & A. Berit Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. (PME28)* (Vol. 1). Bergen University College.

Rayou, P. (2008). Logiques cognitives et logiques sociales du travail hors la classe. *Communication présentée lors du colloque international Efficacité et équité en éducation.* Consulté sur `https://esup.espe-bretagne.fr/efficacite_et_equite_en_education/programme/symposium_rayou.pdf`

Robert, A. (2008). Une méthologie pour analyser les activités (possibles) des élèves en classe. In F. Vandebrouck (Ed.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (p. 46-57). Toulouse : Octares.

Robert, A., & Pouyanne, N. (2004). *Formateurs d'enseignants de mathématiques du second degré : éléments pour une formation* (Vol. 5). Paris : IREM Paris 7.

Robert, A., & Rogalski, J. (2002, October). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *La Revue canadienne de l'enseignement des sciences des mathématiques et des technologies*, 505-528.

Rochex, J.-Y., & Crinon, J. (2011). *La construction des inégalités scolaires. Au cœur des pratiques et des dispositifs d'enseignement.* Rennes : P.U.R.

Rogalski, M. (2001). *Carrefours entre analyse, algèbre, géométrie* (Ellipses, Ed.).

Ruiz-Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarollo hacia la modelización funcional* (Thèse de doctorat). Univesité Autonome de Barcelone.

Ruiz-Munzón, N., Matheron, Y., Bosch, M., & Gascón, J. (2012). Autour de l'algèbre : les entiers relatifs et la modélisation algébrico-fonctionnelle. *Recherches en didactique de mathématiques, hors série, Enseignement de l'algèbre, bilan et perspectives*, *Hors-série*, 87-106.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions : Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 1-36.

Sirejacob, S. (2016). Les organisations de savoirs mathématiques à enseigner : les équations au collège. *Petit x*, *102*, 27-55.

Tarski, A. (1974). *Logique, sémantique, mathématique : 1923-1944* (Vol. 2 ; A. Colin, Ed.).

Thibert, R. (2016). Représentations et enjeux du travail personnel de l'élève. *Dossier de veille de l'IFE*, *111*.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique de mathématiques*, *10.2*(3), 133-170.

Vergnaud, G., Cortes, A., & Favre-Artigue, P. (1987). Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles. Problèmes épistémologiques et didactiques. In *Actes du colloque de Sèvres : Didactique et acquisition des connaissances scientifiques* (p. 259-288). La Pensée Sauvage.

Vermersch, P. (1994). *L'entretien d'explicitation en formation initiale et continue* (P. . ESF, Ed.).

Vlassis, J. (2004). Making sense of the minus sign or becoming flexible in "negativity". *Learning and instruction*.

Vygotski, L. (1997). *Pensée et langage* (1ère éd.). La Dispute/SNEDIT.

Annexes

ANNEXES DU CHAPITRE 4

Transcriptions des entretiens avec les élèves de H1 (16 janvier 2016), entre deux séances de mathématiques

a. Remarques préliminaires

Il se trouve qu'au moment de l'entretien, les élèves interrogés n'avaient pas d'exercice à faire pour la séance suivante. Le chercheur a donc proposé aux élèves interrogés des exercices similaires à ceux faits en classe avec l'enseignante H1 pour simuler une situation d'étude autonome sur des exercices à faire pour la séance de mathématiques suivante.

Les exercices donnés sont les suivants :

1) Ecrire autrement :
$3 \times (a + 5) =$
$b \times (7 + c) =$
2) Calculer mentalement :
14×101

La formulation des consignes est identique à celle employée par H1 lors de la séance précédente. Les calculs donnés sont très similaires à ceux donnés par H1 lors de cette même séance.

b. Entretien avec Tamara (B, H1)

– Chercheur : Alors bonjour Tamara.

– Tamara : Bonjour.

– C : Euh... Je vais te demander de faire comme si tu avais des devoirs pour lundi prochain. Alors je t'en ai inventés et je te laisse 5 minutes – ou le temps qu'il te faut – disons 5 minutes maximum, pour faire ces devoirs. Donc tu fais comme si tu étais chez toi et que tu travaillais pour lundi sachant que tu as des devoirs à faire en mathématiques.

– T : D'accord.

– C : Tout ce que j'enregistrerai, je le garderai pour moi, je ne le montrerai pas à madame H1, d'accord ? Ce sera juste entre toi et moi. Voilà (C donne le morceau de papier où se trouvent les exercices inventés), je te laisse 5 minutes et si tu as fini avant, tu m'appelles.

– T : Est-ce que je peux avoir un stylo s'il vous plaît ? Monsieur, je peux faire directement sur la fiche ?

– C : Oui, tu peux faire directement sur la fiche si tu veux.

À peine Tamara prend-elle la fiche en main qu'elle se met à écrire des réponses dessus. Elle semble résoudre le premier exercice facilement (une trentaine de secondes lui suffisent). Pour le second exercice, elle s'aide de son cahier d'exercices, qu'elle ouvre pour retrouver l'exercice similaire fait en classe avec H1 lors d'une séance précédente. Elle retrouve rapidement cet exercice dans son cahier. Son regard fait des va-et-vient entre la fiche que le chercheur lui a donnée et son cahier d'exercices, même lorsqu'elle rédige sa réponse. Une minute lui semble nécessaire pour finir ce second exercice, après quoi Tamara pose son stylo sur la table et informe le chercheur qu'elle a fini. En tout, deux minutes environ se sont écoulées entre le moment où Tamara a reçu les instructions et où elle a « terminé ses devoirs ».

– Tamara : Monsieur, j'ai fini.

– Chercheur : Bon, tu as fait comme si tu avais des devoirs pour lundi, tu as fait comme d'habitude, comme tu ferais chez toi. (T fait « oui » de la tête avec assurance.) OK. Alors vas-y, explique-moi ce que tu as fait pendant... ces quelques secondes.

– T : Euh ben... on a eu des calculs... trois fois entre parenthèses a plus cinq. Ben j'ai utilisé la distributivité simple. Ca fait... l'égalité... trois fois a plus trois fois cinq. J'ai fait la même chose pour le deuxième calcul. Et pour l'exercice numéro deux, « calculer mentalement », j'ai utilisé... j'ai utilisé euh... (elle regarde son cahier d'exercices, resté ouvert à côté d'elle) le tableau, comme on a... comme j'ai appris en cours. Donc euh... ça fait... quatorze... d'abord... d'abord j'ai décomposé le nombre cent un. Donc j'ai fait quatorze fois cent. Ca fait mille quatre cents. Plus quatorze fois un, ça fait quatorze. Mille quatre cents plus quatorze ça fait mille quatre cent quatorze.

– C : D'accord. D'habitude, entre deux séances de mathématiques, comment tu fais pour travailler ? Ou qu'est-ce que tu fais quand tu dois travailler entre deux séances de mathématiques pour la fois suivante ?

– T : Ben je relis la leçon si on en a écrit une et je fais les devoirs.

– C : Hm hm. Ce matin, on a écrit... 'fin vous avez écrit une leçon... mais tu l'as pas relue là, je t'ai pas vue la relire ? (T fait « non » de la tête.) Tu la relis pas tout le temps ? (« non ») Quand est-ce que tu la relis ?

– T : Quand y a un contrôle.

– C : Ah, seulement quand il y a un contrôle. Donc entre deux cours de mathématiques, quand y a pas contrôle, on va dire que tu relis pas ta leçon. (« non ») D'accord. Pourquoi ?

– T : Euh bah... comme là j'avais le cahier ouvert (elle montre son cahier d'exercices), j'ai vu rapidement c'était quoi le thème, donc j'ai compris.

– C : Tu ne regardes d'habitude jamais ton cahier de leçons entre deux séances ?

– T : Non, jamais.

– C : Est-ce que madame H1 attend de vous... alors, qu'est-ce que madame H1 attend de vous selon toi quand vous travaillez à la maison entre deux cours de mathématiques ?

– T : Ben... Comprendre au moins la leçon.

– C : Hm hm ?

– T : Et... pour... comme ça, ça permet de comprendre les erreurs quand on a fait les exercices.

– C : Alors parle un petit peu plus fort pour le micro.

– T : Comprendre la leçon pour comprendre les erreurs qu'on fait lorsqu'on a des exercices.

– C : Madame H1 attend que vous compreniez la leçon... comment... qu'est-ce qu'elle attend, pour que vous compreniez cette leçon ? À ton avis, qu'est-ce que tu dois faire ?

– T : Ben... faut... faut relire, faut réviser.

– C : Relire quoi ?

– T : Ben les... la leçon et... si on n'y arrive pas, on peut refaire les exercices d'application qu'on a faits en cours.

– C : Si on n'arrive pas à quoi ?

– T : Ben si on n'arrive pas trop à... comprendre la leçon, refaire les exercices, ça aide.

– C : Hm hm. Toi, quand tu relis, tu relis comment ? (Se ravisant.) Tu m'as dit que tu relisais pas la leçon, entre deux cours de mathématiques... d'accord. Alors je te demande pas ça. Donc là, d'habitude, tu utilises ton cahier d'exercices, est-ce que pendant ces quelques secondes où je t'ai laissée toute seule, tu as utilisé ton cahier d'exercices ?

– T : J'ai juste regardé vite fait.

– C : Tu as regardé quoi et pourquoi ?

– T : Euh bah... quand j'ai vu l'opération, j'ai regardé le tableau... le tableau qu'on a fait dans l'exercice de ce matin. C'était juste pour être sûr que je m'y prenais de la bonne façon.

– C : Hm hm.

– T : Et ça m'a permis aussi de vérifier, vu que j'ai pas de calculatrice. Ensuite j'ai écrit mon résultat.

– C : Tu as vérifié comment ?

– T : Ben comme je l'ai fait mentalement, dans le tableau, on avait les chiffres, le signe multiplié, les résultats en rouge, ben voilà. Faut juste que je remplace les chiffres, et c'est bon... les nombres, plutôt.

– C : Je vois ce sur ton cahier d'exercices que... justement, il y a un tableau, tu me parles de tableau depuis tout à l'heure, mais sur... ta réponse, je ne vois pas de tableau.

– T : Bah parce que j'ai pas la place de le dessiner !

– C : (rires) Ah, d'accord. Mais si par exemple, tu avais écrit tes devoirs dans ton cahier de textes, tu aurais fait le tableau dans le cahier d'exercices ?

– T : Bah si la... le professeur, elle l'a demandé, oui.

– C : D'accord. Alors, je regarde juste mes questions, c'est bientôt fini. Alors d'habitude, quand l'enseignant te donne des exercices à faire entre deux cours de mathématiques, est-ce que tu les fais ?

– T : Euh... ça dépend.

– C : Ca dépend ? Ca dépend de quoi ?

– T : Ben je sais pas... (sourire) Euh ben des fois, quand ça sonne, je pars directement. Donc ça fait... j'oublie d'écrire le numéro de la page donc je sais pas c'est quel exercice.

– C : D'accord. Ca t'arrive souvent, ça, d'oublier d'écrire le numéro de la page ?

– T : Non.

– C : Non... ?

– T : Bah des fois... alors je vais demander à un camarade, sauf que... il va écrire un mauvais numéro ou un truc, donc au final je le fais pas.

– C : (rires) D'accord. Quand tu es en difficulté pour faire tes exercices entre deux cours de mathématiques, ou pour apprendre ta leçon, qu'est-ce que tu fais ?

– T : Ben je demande à ma grande sœur de m'aider.

– C : Hm hm. (Silence.) C'est tout ?

– T : Ben sinon, je regarde sur Internet.

– C : Ah, ça t'arrive de regarder sur Internet ?

– T : Oui.

– C : Tu regardes où ? Comment tu fais ?

– T : Bah... Je cherche des exercices de mathématiques ou des trucs du genre.

– C : Au hasard ?

– T : Euh... non... sur un thème... sur le thème qu'on étudie.

– C : D'accord. Par exemple imaginons que tu ne saches pas faire la distributivité et que tu veuilles te servir d'Internet, tu aurais fait quoi ?

– T : Ben je mets « exercices sur la distributivité simple niveau quatrième ».

– C : OK. Et dernière question : habituellement, tu travailles combien de temps, en moyenne, entre deux cours de mathématiques ?

– T : Je sais pas.

– C : Tu sais pas ? Cinq minutes ? Un quart d'heure ? Une heure ? Trois heures ?

– T : Bah je fais mes devoirs rapidement.

– C : Tu dirais que les mathématiques, ça te prend combien de temps environ ?

– T : Si c'est juste les exercices, cinq minutes, si c'est un long devoir maison qu'on doit faire, peut-être que je vais... le temps que je réfléchis, que je fasse le brouillon et que je fasse la présentation propre, peut-être une heure.

– C : OK. Et bien écoute, je te remercie, Tamara.

c. Entretien avec Vincent (D, H1)

– Chercheur : Bonjour Vincent.

– Vincent : Bonjour.

– C : Je vais te demander de faire comme si tu étais chez toi et que lundi tu avais des exercices à faire en mathématiques. J'en ai inventés, donc tu imagines que c'est madame H1 qui t'a donné ces exercices, et je vais te demander de faire ces ex... 'fin, de faire tes devoirs, donc, lundi, comme si tu étais chez toi, pour lundi. OK, tu as compris ?

– V : D'accord.

– C : Tout ce que tu diras, ce sera enregistré, mais je garderai l'enregistrement pour moi, je ne montrerai rien, je ne répèterai rien à madame H1. D'accord, OK ?

– V : D'accord.

– C : Voilà (C donne les exercices). Je te laisse... on va dire à peu près cinq minutes. Si jamais tu finis tes devoirs avant, ben tu m'appelles.

Vincent ouvre directement son cahier d'exercices. En le feuilletant, on peut remarquer que V a écrit dans son cahier à plusieurs endroits : au début, à la fin, et qu'au milieu, les pages sont vierges. V feuillette en avant et en arrière son cahier, jusqu'à retrouver la page où il semble avoir écrit les exercices réalisés avec H1 le matin. Il semble répondre au premier exercice assez facilement (quelques dizaines de secondes). Pour le second exercice, il passe quelques secondes à réfléchir, durant lesquelles ses yeux semblent aller de sa feuille de cahier à la fiche donnée par le chercheur, parfois dans le vague, et il n'écrit rien. Au bout d'une minute, il se met enfin à écrire quelque chose et appelle le chercheur pour lui signifier qu'il a terminé.

– Vincent : C'est bon, j'ai terminé.

– Chercheur : Tu as fait comme si tu étais chez toi, hein ? (V fait « oui » de la tête) OK. Alors Vincent, habituellement, quand tu travailles entre deux cours de mathématiques, tu dirais que tu mets combien de temps pour faire tes devoirs en mathématiques, en moyenne ?

– V : Euh... Ca dépend de l'exercice, s'il est plus court ou plus long, mais cinq à dix minutes.

– C : Entre cinq et dix minutes. Je t'ai laissé tout seul pendant quelques minutes, vas-y, explique-moi ce que tu as fait.

– V : J'ai fait trois fois... Enfin a plus cinq. Donc ça fait euh... cinq a fois trois. Donc du coup, ça fait quinze a.

– C : Ca fait ?

– V : Quinze a.

– C : Tu n'as écrit que quinze...

– V : Ah ! (V « corrige »)

– C : Et le deuxième ?

– V : Euh... j'ai fait sept plus c donc ça fait sept c... fois b donc ça fait sept c b.

– C : Et... pour le deuxième... deuxième exercice, « calculer mentalement » ?

– V : Euh... Quatorze mille quatorze. Non. Mille quatre cent quatorze.

– C : Mille quatre cent quatorze. Comment as-tu fait ?

– V : Euh... Ben j'ai rajouté... juste deux zéros, en fait. C'est-à-dire j'ai rajouté... 'fin j'ai pas rajouté deux zéros, mais j'ai fait cent onze fois dix, donc déjà ça fait mille. Après on rajoute plus dix vu que c'est un un, donc ça fait mille dix, et un quatre.

– C : (qui n'a pas saisi tout le raisonnement mais essaie de ne rien laisser transparaître) OK. Est-ce que... tu... Alors, selon toi, qu'est-ce madame H1 attend que tu fasses entre deux cours de mathématiques ?

– V : Faire mes exercices, revoir mes leçons.

– C : Hm hm. Est-ce que tu fais ce que madame H1 te demande d'habitude ou pas ?

– V : Pas toujours.

– C : Pas toujours ? Qu'est-ce que tu fais pas toujours et pourquoi ?

– V : Des fois j'oublie ou j'ai pas trop le temps.

– C : Tu oublies quoi ?

– V : De faire mes devoirs.

– C : D'accord. Et... là, par exemple, tu n'as pas revu ta leçon.

– V : Non, j'ai pas revu.

– C : Non ? Pourquoi est-ce que tu ne l'as pas revue ?

– V : Ben je sais pas.

– C : Tu sais pas ? Pourquoi est-ce que des fois tu la revois et des fois tu la revois pas ? Alors que tu sais... d'après toi, hein, c'est toi qui me dis que madame H1 elle te demande de revoir la leçon...

– V : Ben si on a un contrôle.

– C : Ah, tu le fais seulement si on a un contrôle ? Mais entre deux cours de mathématiques, tu le fais pas spécialement, revoir la leçon ?

– V : Non, pas spécialement.

– C : Non ? Pourquoi ?

– V : Ben ça, je sais pas.

– C : Tu sais pas ?

– V : Je sais pas.

– C : Parce que t'as pas envie, ou... ?

– V : Ouais, parce que j'ai pas envie.

– C : (Se voulant compréhensif) T'as d'autres choses à faire plus intéressantes (rires) que revoir la leçon de mathématiques. Euh... Donc là, est-ce que tu as utilisé ton cahier d'exercices pour faire ces exercices-là ? Hormis le fait d'écrire dessus.

– V : Non, non. Non, j'ai pas utilisé.

– C : Non ? Pourquoi ?

– V : Parce qu'il faut les rechercher, après, les exercices.

– C : Et ? C'est difficile de rechercher les exercices ?

– V : Non, mais...

– C : Non ? Pourquoi tu ne les recherches pas, du coup ?

– V : Je sais pas où ils sont... dans mon cahier. (sourire)

– C : Comment ça, tu sais pas où ils sont ?

– V : Ben je sais pas. (Il tourne une page de son cahier) Les exercices, etc., y en a plein...

– C : Y en a trop ? Et tu te perds un peu quand tu veux retrouver les exercices ?

– V : Oui.

– C : C'est ça... ? Mais tu ne notes pas le numéro et la page ?

– V : Si, je le note.

– C : Si... mais ?

– V : Mais ça change pas grand-chose.

– C : Pourquoi ?

– V : Parce qu'après, faut savoir qu'est-ce que... qu'est-ce que ça parle.

– C : De quoi ça parle. Donc du coup, qu'est-ce qui t'aiderait finalement à... à utiliser ce cahier d'exercices, ou à retrouver facilement les exercices ? Qu'est-ce que tu...

– V : Faire les exercices par catégorie.

– C : Par catégorie. Tu aimerais que ces catégories apparaissent ?

– V : Oui.

– C : Ca t'aiderait peut-être... un peu... à utiliser ton cahier d'exercices, tu penses ?

– V : Oui. (Silence)

– C : Alors attends, je suis en train de lire les questions que je dois te poser... Ah oui. Quand tu es en difficulté... qu'est-ce que tu fais, à la maison, pour faire tes devoirs en mathématiques quand ces devoirs-là te posent des problèmes ?

– V : Euh... J'utilise ma calculatrice ou j'appelle ma sœur.

– C : Tu appelles ta sœur. Ta sœur, elle peut t'aider, souvent ?

– V : Oui.

– C : Oui ? Et elle t'aide bien ?

– V : Ouais, ça va.

– C : Ca va, d'accord. Comment ça s'appelle – je t'ai pas demandé mais... – ce type d'exercices ? Ca, là. (C montre l'exercice qu'il a donné sur la distributivité simple.) « Ecrire autrement ». En fait, qu'est-ce que tu utilises ?

– V : C'est « simplifier ».

– C : Simplifier. Et là, dans le deuxième exercice, qu'est-ce qu'on utilise ?

– V : Hm... C'est-à-dire ?

– C : Ben... tu m'as donné une certaine méthode de calcul, quatorze fois cent un, est-ce que... elle porte un nom ou euh... pas spécialement.

– V : Non. Je pense pas.

– C : D'accord. Bon, je te remercie beaucoup, Vincent.

d. Entretien avec Annabelle (D, H1)

– Chercheur : Bonjour Annabelle. On va faire comme si, pour lundi, tu avais des exercices de mathématiques à faire – enfin, des devoirs en mathématiques à faire – et on va faire aussi comme si tu étais chez toi. D'accord ? Euh... On va faire comme si madame H1 t'avait donné des exercices – donc c'est moi qui les ai inventés – et donc tu as ces devoirs à faire pour lundi. Je vais te demander de faire exactement ce que tu ferais si tu étais chez toi, d'accord ? Euh... Tout ce que j'enregistrerai, je le garderai dans la caméra, ce sera pour moi uniquement, je ne le montrerai à personne, pas à même à madame H1, donc tout ce que tu diras, je ne le répèterai pas à madame H1, OK ?

– Annabelle : D'accord.

– C (donne les exercices) : Je te laisse cinq minutes. Si jamais tu as fini avant, ben tu peux m'appeler.

Annabelle se lance tout de suite dans la résolution des exercices, à même la petite feuille distribuée par le chercheur. Moins d'une minute plus tard, elle annonce qu'elle a terminé.

– Annabelle : J'ai fini.

– Chercheur (cachant son étonnement) : Tu as fait comme si tu avais travaillé chez toi ?

– A : (approuve de la tête.)

– C : Annabelle, tu dirais que... entre deux cours de mathématiques, tu travailles combien de temps en moyenne pour faire tes devoirs ? De mathématiques, hein...

– A : Euh... Entre vingt à trente minutes.

– C : Entre vingt à trente minutes. Là, tu as mis... moins de trois minutes ! D'habitude, c'est plus long, alors ?

– A : Oui, parce que... (inaudible)

– C : Parle plus fort pour le micro.

– A : Je suis soit sur mon téléphone ou en train de faire autre chose.

– C : Ah... Tu fais tes devoirs avec ton téléphone... ou en faisant autre chose. Quoi ? L'ordinateur ? La musique ?

– A : Non. Soit je parle avec ma mère, ou euh... je me fais à manger.

– C : Tu parles avec ta mère ou tu fais la cuisine en même temps. Tu parleras bien fort, hein, pour le micro. Alors raconte-moi un peu ce que tu as fait pendant ces quelques... secondes... où je t'ai laissée toute seule.

– A : Hm... J'ai eu un temps de réflexion... J'ai... J'ai eu un temps de réflexion, j'ai pensé à ce qu'on a fait ce matin, et... voilà.

– C : Hm hm. Alors... qu'est-ce que tu as fait, exactement ?

– A : Ben... j'ai... calculé... J'ai...

– C : Par exemple, pour faire le premier exercice : explique-moi ce que tu as fait.

– A : J'ai... j'ai dis...tri...bué (elle bute un peu sur le mot) la... le... le trois... et le *a*... et le cinq.

– C : Hm hm. Pour le deuxième ?

– A : J'ai fait la même chose que le premier.

– C : La même chose que pour le premier ; et pour le troisième ?

– A : Là j'ai distribué les nombres, c'est... c'est comme si je faisais quatorze fois cent, et j'ai rajouté un.

– C : D'accord. Euh... Est-ce que... tu as utilisé ton cahier de leçons ?

– A : Non.

– C : Pourquoi ?

– A : Parce que je... je me suis... Avant de faire le... l'exercice, je me suis rap... j'ai pensé à ce qu'on a fait ce matin, et j'ai... je m'en suis souvenu. Et je l'ai fait automatiquement.

– C : Est-ce que tu as utilisé ton cahier d'exercices ?

– A : Non.

– C : Pourquoi ?

– A : ... Je viens de vous répondre (sourire).

– C : Je t'ai demandé pour le cahier de leçons... mais c'est les mêmes raisons, c'est ça ? Pour le cahier d'exercices... parce que tu te souvenais de ce que vous aviez fait ce matin. Selon toi, qu'est-ce que madame H1, elle attend que vous fassiez entre deux cours de mathématiques ?

– A : De réviser...

– C : Plus fort.

– A : De réviser, d'apprendre les choses importantes. Par exemple, si elle nous donne un contrôle surprise, de réviser tous les jours.

– C : Tu dois réviser tous les jours... Ca veut dire quoi, « réviser » ?

– A : Ben... apprendre ce qu'on a fait le jour, pendant le cours, ce qu'on a fait... ce qu'on a... les exercices qu'on a faits... faire des exercices pour s'entraîner... et euh... relire ses leçons plusieurs fois.

– C : Et là, tu l'as pas fait... ?

– A : Non.

– C : Pourquoi ?

– A : Parce que... parce que je me souvenais déjà... je me suis déjà entraînée plein de fois chez moi. Et voilà.

– C : Donc tu m'as dit que madame H1, elle attendait que vous fassiez comme devoirs... de relire les leçons... et de faire les exercices pour s'entraîner, c'est ça que tu m'as dit... ?

– A : Oui.

– C : ... et pourquoi est-ce que tu ne le fais pas spécialement, du coup ? Est-ce que tu le fais, habituellement ?

A : Non. Des fois, je... je fais mes devoirs, je relis mes leçons...

– C : Je ne t'entends pas bien.

– A : Je fais mes leçons, je fais mes devoirs, je relis mes leçons, et je m'entraîne un tout petit peu mais pas souvent.

– C : Pas souvent.

– A : Rarement.

– C : Rarement... (amusé par la gradation décroissante) Jamais ?

– A : Euh...

– C (rires) : Très, très, très rarement ?

– A : (sourire) Oui.

– C : D'accord. Alors est-ce que d'habitude tu fais les devoirs que madame H1 te fait... euh, que madame H1 te demande de faire, pardon... ?

– A : Oui, et si j'ai pas compris, je fais pas.

– C : Si t'as pas compris, tu fais pas.

– A : Non.

– C : Mais habituellement, tu le fais, tu essaies toujours ?

– A : Oui.

– C : Et quand tu es en difficulté, justement, tu dis que tu fais pas. C'est tout ce que tu fais ou euh... est-ce qu'il y a quelque chose que tu fais en particulier quand tu es en difficulté ?

– A : Euh... C'est tout ce que je fais.

– C : D'accord, tu fais pas l'exercice. Il n'y a personne pour t'aider à la maison, par exemple ?

– A : Si, des fois je demande à ma grande sœur si elle est disponible et si elle peut venir chez moi, mais c'est... c'est rare qu'elle vienne.

– C : C'est rare. Et tu demandes pas à... un camarade ?

– A : Non.

– C : Ou à madame H1 quand tu reviens en classe ?

– A : Si, des fois je lui demande, mais euh... quand elle m'explique, c'est pas trop clair pour moi.

– C : D'accord, les explications de madame H1 ne sont pas toujours trop claires. Bon. OK, je te remercie, Annabelle.

e. Entretien avec Mehdi (M, H1)

– Chercheur : Bonjour Mehdi.

– Mehdi : Bonjour.

– C : Euh... On va faire comme si lundi, tu avais des devoirs en mathématiques, comme si madame H1 t'avait donné ces devoirs-là que je vais te donner à faire en mathématiques, et tu feras comme si tu étais chez toi, donc je te demanderai de travailler habituellement comme tu as l'habitude de faire chez toi. OK ? Pour faire ces devoirs. Euh... Je te laisse cinq minutes. Si jamais t'as besoin de moins, ben tu dis « j'ai fini » et je viens te poser des questions ensuite, et tout ce que tu diras, ça restera entre toi et moi, et la caméra, je montrerai pas ce que je vais filmer avec madame H1, et je dirai rien de ce que tu me diras à madame H1. OK ?

– M : OK.

Mehdi ouvre immédiatement son cahier d'exercices, jusqu'à une page vierge et se lance dans la résolution des exercices. Il semble rédiger rapidement la réponse pour le premier calcul, mais le second semble lui demande plus de réflexion (M passe quelques secondes, stylo contre le front, sans rien écrire, les yeux sur la feuille), alors qu'il est très similaire au premier. Quant au deuxième exercice (calcul mental), M lève les yeux de la feuille et semble réfléchir quelques secondes. Il se gratte la tête, puis finit par tracer les contours d'un tableau. Il y inscrit les nombres 14 ; 100 *et* 1. *Puis il tourne les pages de son cahier d'exercices pour retrouver les tableaux réalisés le matin avec madame H1. Il les regarde pendant deux ou trois secondes, revient à son tableau, écrit quelque chose, retourne aux tableaux du matin. Ces va-et-vient* *se poursuivent pendant quelques secondes. M remplit au fur et à mesure son tableau puis rédige une ligne de calculs, toujours en ayant l'air de comparer sa façon de faire avec celle de madame H1. Un peu moins de cinq minutes se sont écoulées depuis que M a entamé ses « devoirs », lorsqu'il annonce avoir terminé.*

– Mehdi : Monsieur, j'ai fini.

– Chercheur : Tu n'es pas trop pressé ? Si ça sonne, tu peux rester deux minutes ?

– M : Non, c'est bon.

– C : OK. Mehdi, d'habitude, tu mets combien de temps pour faire tes devoirs en mathématiques entre deux cours de mathématiques ?

– M : Ca dépend, si j'ai beaucoup de devoirs en mathématiques, je peux mettre trente minutes, si j'ai pas beaucoup, je peux mettre cinq, dix minutes.

– C : Pour faire ce genre de chose (le chercheur montre la feuille d'exercices donnée), habituellement, tu mets entre cinq et dix minutes, c'est ça ?

– M : Cinq à dix minutes.

– C : Cinq à dix minutes. OK. Tu dirais que tu fais tes devoirs régulièrement ?

– M : Ouais, en mathématiques, souvent, ouais.

– C : Souvent ? Tu fais les devoirs que madame H1 te donne ?

– M : Oui. Des fois, j'en rajoute aussi, quand elle...

– C : Tu t'en rajoutes toi-même ? Comment tu fais pour t'en rajouter ?

– M : Ben avec le livre (il touche son manuel scolaire).

– C : Avec le livre ? C'est toi qui choisis les exercices ?

– M : Je prends une file d'exercices et je les suis, je les suis, je les suis (il mime point par point une liste imaginaire avec son stylo).

– C : D'accord. Euh... Au hasard ?

– M : Au hasard, je prends euh... par exemple, on va dire, j'ai l'exercice trente-et-un, je fais l'exercice trente-et-un jusqu'à l'exercice trente-cinq. Je file un... Je me file un objectif et je finis mon objectif.

– C : D'accord. Ca, tu le fais souvent ?

– M : Euh... Ca dépend. C'est des fois, quand j'ai envie, pour rajouter, et je le fais surtout quand on a contrôle qui arrive.

– C : D'accord. Alors je te réinterrogerai pour le contrôle une autre fois, mais... entre deux cours de mathématiques, parfois ça t'arrive quand même de faire cette série d'exercices ou c'est plutôt pour le contrôle ?

– M : C'est plutôt pour le contrôle ou quand je suis chez moi.

– C : Bon. Selon toi, qu'est-ce que madame H1 attend que vous fassiez entre deux séances de mathématiques ? Pas spécialement pour le contrôle, mais juste entre deux séances de mathématiques.

– M : Ben... rester calme, travailler.

– C : Non, mais chez toi, entre deux cours, quand tu es chez toi, qu'est-ce qu'elle attend que tu fasses comme devoirs ?

– M : Ben réviser... que je révise mes cours.

– C : Hm hm. Ca veut dire quoi, « réviser les cours » ?

– M : Que... euh... On a copié une leçon, y a une heure, l'heure dernière... ben que je révise la leçon qu'on avait écrit.

– C : Ca veut dire quoi, « réviser la leçon » ?

– M : Ben soit apprendre la leçon, soit relire la leçon.

– C : Relire. Et apprendre, ça veut dire... ? Mémoriser ?

– M : Oui, voilà, mémoriser.

– C : Par cœur ?

– M : Par cœur.

– C : D'accord. Parfois, elle vous demande d'apprendre par cœur.

– M : Ouais.

– C : Alors là, est-ce que tu as utilisé ton cahier de leçons, justement ?

– M : Non.

– C : Non, pas spécialement ? Pourquoi ?

– M : (sourire) Parce que c'est facile.

– C : Et tu n'apprends pas spécialement la leçon ou... ? Parce que vous avez écrit une leçon. Tu me dis que madame H1 attend que vous appreniez les leçons.

– M : Oui, mais... J'apprends les leçons quand j'en ai besoin, mais sinon, j'écoute en cours, j'écoute régulièrement en cours, et après, je... j'arrive à refaire ce qu'on a fait en cours.

– C : D'accord, ça te suffit pour apprendre la leçon, t'as pas besoin de la relire ou de la revoir.

– M : Non. À part si je suis vraiment... si j'ai pas trop suivi le cours.

– C : Quand tu es en difficulté ?

– M : Oui, voilà.

– C : On y reviendra. Explique-moi un petit peu ou raconte-moi un petit peu ce que tu as fait pour faire ces exercices-là.

– M : Alors... (M lit ce qu'il a écrit sur son cahier d'exercices.) 3 fois entre parenthèses a plus 5 est égal à... Euh fallait écrire autrement, en fait... donner une autre explication... Alors, j'ai fait trois fois a plus... plus a fois cinq.

– C : D'accord. Et pour le deuxième ?

– M : Euh... b... b fois entre parenthèses sept fois c...

– C : Alors, c'est un « plus »... (M semble ne pas comprendre) Bon, d'accord, tu t'es peut-être trompé, c'est juste un « plus » ici (C montre l'endroit où M a mal recopié l'énoncé).

– M : Ah oui, excusez-moi.

– C : C'est pas grave.

– M : Des fois, ça m'arrive en mathématiques de ne pas trop voir...

– C : Donc... d'accord, ça, c'est pour les deux premiers.

– M (terminant son explication) : J'ai fait sept fois c plus b fois c.

– C : D'accord. Et la dernière ? Quatorze fois cent un ?

– M : Euh... J'ai fait... j'ai fait un tableau, comme on avait étudié... comme on avait fait en cours de mathématiques. (Il s'appuie sur les tableaux faits le matin) Après j'ai fait... le... j'ai fait dix-sept fois entre parenthèses cent plus un... est égal à dix-sept fois cent plus un. C'est la même chose, donc après ça donne cent un... Ca donne... Ca donne... Alors... Ah (rires) j'ai pas écrit le résultat.

– C : Ben... il faut l'écrire ou pas ?

– M : Ouais. Il faut l'écrire.

– C : Bon. Comment tu ferais ?

– M : Je ferais cent... cent fois... (Il fronce les sourcils et agite son stylo en semblant calculer) Alors... je ferais quatorze fois cent, ça me donne mille quatre cents... et alors avec cent un, ça me donnerait mille qua... ça me donnerait... avec cent un, mille quatre cents... (il réfléchit) Je vais juste regarder un truc derrière (avec un grand sourire, il tourne une page de son cahier pour regarder à nouveau ce que H1 a fait).

– C : D'accord, alors justement, ça, ça m'intéresse, est-ce que tu as utilisé ce que vous aviez fait, est-ce que tu es revenu sur... tu as relu cette page ? (C montre la page avec les tableaux en question)

– M : Oui, j'ai relu un peu la page qu'on avait fait.

– C : Ca, souvent ça t'arrive, ça, quand tu fais les devoirs, de regarder les exercices d'avant ?

– M : Oui, de regarder les exercices d'avant.

– C : Tu le fais assez souvent ?

– M : Hm hm.

– C : D'accord, et ça t'aide.

– M : Oui.

– C : OK. Bon. Alors on va pas atten... on va pas faire le calcul parce qu'on n'a pas.. on n'a pas trop le temps, mais... tu regardes, ça m'intéresse que tu regardes avant... (Résumant) Euh, donc tu m'as dit que tu n'avais pas utilisé ton cahier de leçons... Donc là tu as utilisé ton cahier d'exercices, généralement tu regardes les exercices que vous aviez faits avant...

– M : Parce que madame H1, elle nous fait bien la correction, elle nous explique tout dans la correction, donc ça me suffit un peu la correction aussi.

– C : Tu reviens sur la correction, ça t'aide de l'utiliser ?

– M : Ouais.

– C : OK. Alors justement, quand tu es en difficulté, tu m'en parlais un petit peu tout à l'heure, qu'est-ce que tu fais... quand tu es en difficulté pour faire tes devoirs en mathématiques ?

– M : Je relis le cours, ou euh... ou autrement, y a des fois, euh... j'essaie de m'aider un peu de l'ordinateur.

– C : Comment tu fais pour t'aider de l'ordinateur ?

– M : Je mets... je mets des... J'écris « exercices de mathématiques », j'écris le nom de la leçon, et après, automatiquement, c'est soit je trouve où y a un cours au-dessus, avant la leçon, ou avant l'exercice, ou soit j'écris « cours de mathématiques ».

– C : Cette méthode, c'est toi qui l'as trouvée tout seul ou... c'est madame H1 qui vous l'a expliquée ?

– M : Non, c'est... c'est... c'est mon père, il m'a dit « des fois, quand tu trouves pas », quand même lui, des fois il arrive pas à trouver avec moi, donc euh... il me dit « va voir sur l'ordinateur ».

– C : Parfois, tes parents t'aident ?

– M : Oui voilà, il m'aide souvent, en plus, mon père.

– C : À faire tes devoirs de mathématiques ?

– M : Oui.

– C : OK. Alors je suis en train de relire... les questions que je dois te poser... Bon écoute, je crois que je t'ai tout demandé. Je te remercie Mehdi, et on se revoit dans pas très longtemps pour parler de l'évaluation.

– M : D'accord.

Transcriptions des entretiens avec les élèves de M2 (11 décembre 2015), entre deux séances de mathématiques

f. Entretien avec Ryan (B, M2)

Chercheur : Alors... Dis-moi, combien de temps tu as passé, là, à faire ton... ton travail ?

Ryan : Je pense... 15 minutes ? 10 minutes ?

C : Tu penses entre 15 et 10 minutes ? D'accord. Habituellement, tu penses que tu mets combien de temps pour faire tes... tes devoirs à la maison ?

R : Ben... dans les... les 9... 8 minutes... 'fin... Pas exactement vu qu'en fait, j'écris pas d'habitude pour les calculs mais là cette fois, j'ai écrit.

C : D'habitude, tu n'écris pas les calculs ? Tu écris quoi, d'habitude ?

R : En fait, je fais comme si c'était un brouillon... Je réfléchis, je réfléchis, et ensuite je mets le résultat. Et après je vérifie tous mes... à la fin, fin, fin, je vérifie tout.

C : Tu mets juste le résultat et après tu vérifies tes calculs ?

R : Non, je fais un peu les calculs, mais il y a des calculs inutiles, mais... comment on pourrait dire... 'fin là, je les ai marqués mais...

C : D'accord... Bon, très bien. Alors, dis-moi, raconte-moi un petit peu ce que tu as fait pendant ces quelques minutes : tu avais quoi à faire et qu'est-ce que tu as fait ?

R : Exercices 34, 35, 36 page 72.

C : Donc tu avais des exercices...

R : Exercice 33, il y avait a) et b)...

C : D'accord, bon, il y avait des questions, et alors qu'est-ce que tu as fait pour les faire, ces exercices ? Tu t'es servi de quoi ?

R : En fait, je me suis rappelé du cours, et des bases.

C : Alors le cours, c'était le cours de ce matin, ou le cours de la séance de la dernière fois ?

R : C'est le cours qu'on nous appris... 'fin, le cours, celui qu'on y est, là. Ben, en fait, je m'en suis rappelé... 'fin, je m'en rappelle toujours...

C : Tu t'en rappelles toujours ? Tu ne prends jamais ton cahier de leçon ? Tu n'en as pas besoin ?

R : Euh... Quand je réussis pas... Quand j'ai des doutes... Je prends mon cahier de leçon. Quand il y a des contrôles, là, je prends vraiment mon cahier de leçon.

C : D'accord. Alors on verra une autre fois pour les contrôles, mais entre... entre deux séances de mathématiques, quand tu fais les exercices, tu prends le cahier de leçon, mais quand tu as des doutes, c'est ça ?

R : Oui.

C : Et donc là, je ne t'ai pas vu l'utiliser, donc tu n'as pas eu de doute, tu as réussi, tu penses, les exercices.

R : Oui.

C : D'accord. Très bien. Du coup, tu m'as dit que tu avais écrit exceptionnellement les calculs mais sinon habituellement tu écris juste la réponse, c'est ça ?

R : Je marque les calculs un peu nécessaires, mais ceux qui sont pas nécessaires...

C : C'est quoi les calculs nécessaires ?

R : Ca veut dire, je vais pas... je vais pas tout marquer, tout remarquer une autre fois, une autre fois... Je marque une fois le calcul, je mets le résultat, je marque un autre résultat, et ensuite je les additionne, pas besoin de tout remarquer et tout faire. Et les calculs inutiles, je les supprime, comme zéro, je sais que ça va faire zéro.

C : OK. (Consulte sa grille de questions) Alors tu n'as pas utilisé ton cahier de leçon, tu m'as dit... Alors quand tu parviens pas à faire un exercice, en revanche, tu m'as dit que tu utilisais ton cahier de leçon.

R : Oui.

C : Et qu'est-ce que tu fais dans ce cas-là ? Avec ton cahier de leçon ?

R : Je lis le... le cours, les propriétés. Après, je réfléchis, je regarde le problème que j'ai. Après j'essaie de trouver dans la propriété, je lis, et après, je commence à essayer de comprendre, et voilà.

C : Alors ça veut dire quoi que tu commences à essayer de comprendre ?

R : Ben... Imaginons j'ai un doute, euh... sur 3 fois x, quelque chose comme ça, je sais pas comment faire, quand il y a 3x, je sais pas comment donner une valeur, je prends mon cahier, et je l'ouvre, et je regarde un peu tout le chapitre, et je lis, je lis, je lis, ensuite quand je trouve la réponse à ma question, je sais comment multiplier une valeur, là, dans ce cas-là, je vais prendre mon cahier (le cahier d'exercices) et je vais écrire.

C : Tu trouves toujours la réponse à ta question dans ton cahier de leçon ?

R : Oui.

C : Il n'y a jamais de moment où... non ?

R : Non.

C : D'accord. Est-ce que tu fais appel à un parent, un professeur, un camarade, quand tu as des difficultés ou pas ?

R : Vraiment quand je suis en difficulté, ouais, j'appelle mes parents… ouais, j'appelle, j'appelle, ils essaient de m'aider, mais ça arrive très rarement, d'habitude, j'y arrive.

C : D'habitude, tu y arrives. Très bien. Alors selon toi, qu'est-ce que le professeur attend que tu fasses entre deux cours de mathématiques ?

R : Euh… Que… Que je m'exerce…

C : Hm, que tu fasses les exercices demandés…

R : Et euh… que j'essaie de comprendre. Que je comprenne, pour que je sois motivé pour le prochain cours et que je comprenne vite, apprendre les bases.

C : D'accord. Autre chose ?

R : Euh… que je révise les leçons.

C : Ca veut dire quoi, réviser la leçon ?

R : Prendre mon cahier et re-réviser tout le cours.

C : Alors précise-moi, qu'est-ce que tu fais exactement quand tu révises ? Je t'embête avec des questions précises…

R : (rires) Ca me dérange pas.

C : Quand tu révises, ça veut dire quoi réviser une leçon ?

R : Je lis. Je lis… En fait, j'essaie de lire, pas de… pas d'apprendre par cœur… 'fin, je vais pas répéter exactement les mêmes termes. J'essaie de comprendre dans un premier temps, ensuite je vais essayer de faire un peu de par cœur mais… le jour du contrôle, s'il y en a, j'utilise pas mes propres mots. Sinon, j'essaie de comprendre par moi-même, et ensuite, je… je… j'apprends un peu par cœur.

C : D'accord. Et qu'est-ce que tu apprends par cœur ?

R : Les mots que je connais pas… Les mots que j'arrive pas à retenir. Et euh… comment… 'fin, je sais que j'arrive à m'exercer, mais est-ce que je saurai l'écrire, à l'écrit… les nombres et les chiffres… 'fin, c'est ça que j'essaie.

C : OK.

g. Entretien avec Marianne (B, M2)

Chercheur : Combien de temps tu as passé pour… pour faire ton travail ?

Marianne : 20 à 30 minutes.

C : Tu as passé 20 à 30 minutes, là ?

M : Peut-être…

C : Oui, selon toi ? Habituellement, tu penses que tu passes combien de temps pour faire ton travail à la maison ?

M : Je sais pas...

C : Entre deux cours de mathématiques... environ ?

M : Je regarde pas le temps.

C : Tu regardes pas... mais tu penses que c'est quoi : cinq minutes, un quart d'heure, une demi-heure, une heure ? (Avec emphase) Trois heures ?

M : Parfois, c'est plus trente minutes, parfois c'est plus cinq minutes, parce qu'il y en a qui sont plus durs que d'autres.

C : D'accord, ça dépend de la difficulté de l'exercice. OK. Tu travailles régulièrement ?

M : Oui.

C : Généralement, quand il y a des devoirs à faire, on va dire que tu les fais ?

M : Oui.

C : D'accord. Alors dis-moi ce que tu as fait pendant ces quelques minutes.

M : J'ai fait... Ben les trois exercices, je les ai tous faits.

C : Alors tu as fait... les trois exercices demandés, donc je vois (regarde le cahier de M). Ah tiens, tu as écrit avec différentes couleurs ! Pourquoi ?

M : Pour mieux mémoriser, et parce que ça m'aide.

C : D'accord. Monsieur M2, il fait pareil ?

M : Non.

C : Non, il n'utilise pas de couleur ? C'est toi-même qui as trouvé ce système ?

M : Oui.

C : Oui ? D'accord. Alors, tu as utilisé le manuel pour faire tes exercices, est-ce que tu as utilisé ton cahier de leçon ?

M : Non.

C : Non ? Est-ce que tu l'utilises parfois pour faire les exercices ?

M : Parfois oui, parfois non. Parfois oui parce qu'il y a quelque chose que j'ai pas compris, et je relis le cours.

C : Tu relis le cours... Ca veut dire quoi, relire le cours ? Juste tu le lis ?

M : Je le lis et j'essaie de comprendre le calcul qu'il faut faire.

C : (après avoir été interrompu par l'arrivée d'un élève) Excuse-moi... Donc la leçon, quand tu n'y arrives pas, parfois, tu la relis, ça veut dire que tu la lis et puis tu essaies... tu cherches à trouver une solution, c'est ça que tu m'as dit ?

M : (fait oui de la tête)

C : Et sinon, tu fais quoi avec ton cahier de leçon ?

M : J'écris le cours.

C : Oui, ça, c'est en classe, mais à la maison ?

M : Ben juste je relis le cours quand il y a un exercice que je comprends pas.

C : D'accord. Alors entre deux séances, qu'est-ce que tu dois faire, selon toi, et qu'est-ce que tu penses que le professeur attend de toi ?

M : Je devrais... relire le cours... faire mes devoirs...

C : C'est quoi, faire les devoirs ?

M : Les exercices qu'il nous donne.

C : D'accord.

M : Et... c'est tout.

C : C'est à peu près tout. Faire les exercices et revoir la leçon. Donc la leçon, tu la relis, tu ne l'apprends pas par cœur, tu m'as dit ?

M : Non.

C : Non, jamais ? rien du tout ?

M : Non.

C : D'accord. OK. Je te remercie, Marianne.

h. Entretien avec Daouda (M, M2)

Chercheur : Combien de temps tu as passé à peu près pour faire tes exercices ?

Daouda : Hm, je sais pas... Cinq, dix minutes ?

C : Cinq à dix minutes ? Est-ce que chez toi, d'habitude, tu mets à peu près ce temps-là ou pas ? Combien de temps tu mets pour faire tes devoirs ?

D : Dix minutes environ.

C : Dix minutes. Tu les fais tous les jours ? tout le temps ? Les devoirs de mathématiques, je parle ?

D : Oui.

C : Oui. Donc en moyenne, tu mets dix minutes. D'accord. Donc tu travailles régulièrement. Alors qu'est-ce que tu as fait pendant ces dix minutes ? Explique-moi.

D : J'ai fait des calculs... comment dire... des calculs... (il semble chercher un mot.)

C : Oui, tu as fait du calcul littéral...

D : Oui, du calcul littéral.

C : D'accord, alors qu'est-ce que tu as fait pour faire ces exercices ?

D : Pour faire les exercices... j'ai dû les calculer... calculer des...

C : Oui… Alors tu as su que c'étaient ceux-là parce que c'était monsieur M2 qui te les as donnés… En fait, ce que je voulais savoir, c'est par exemple, tout à l'heure, je t'ai vu, tu as tourné ta page, dans ton cahier d'exercices. Qu'est-ce que tu as fait, quand tu as tourné la page ? Je t'ai vu regarder quelque chose derrière…

D : J'ai regardé… (il tourne la page en question) J'ai regardé ici pour m'aider (il montre un exercice similaire à celui dont il est en train de parler). Pour pas oublier, j'avais noté les solutions.

C : Oui, donc en fait, tu t'es appuyé sur un exercice que vous aviez fait ce matin ?

D : Oui.

C : Ca, tu le fais souvent, quand t'arrives pas à faire un exercice, tu t'appuies sur un exercice que tu avais déjà fait ?

D : Oui, oui, parfois.

C : Qu'est-ce que tu fais d'autre, quand tu n'arrives pas à faire un exercice ?

D : Ben je regarde… j'essaie de trouver des… le… la… j'essaie de… je prends mon cahier de leçon et j'essaie de regarder le bilan… ou regarder ce que j'avais écrit.

C : D'accord. Il y a un bilan dans le cahier de leçon ?

D : Euh…

C : Qu'est-ce que tu appelles bilan ?

D : Ce que j'appelle bilan, c'est qu'est-ce qu'on a écrit.

C : Ah d'accord, ce que vous avez écrit simplement dans le cahier de leçon. (intéressant : D considère la leçon comme un bilan de quelque chose, il a conscience que la leçon est rattachée à ce quelque chose, en est une synthèse) D'accord. Est-ce que entre deux exerc… entre deux séances de mathématiques… qu'est-ce que, selon toi, monsieur M2 attend, et est-ce que tu le fais, et pourquoi ?

D : Il attend que… que je lève la main.

C : Non, à la maison, qu'est-ce qu'il attend que vous fassiez entre deux cours de mathématiques ? D : Les devoirs. C : Oui ? Alors c'est quoi, les devoirs ? D : Qu'on fasse les devoirs et qu'on révise. C : C'est quoi, faire les devoirs ? Faire les exercices demandés ? D : Oui. C : D'accord… et qu'on révise quoi, tu dis ? D : Qu'on révise… qu'on relise chaque jour notre leçon. Pas tout le temps, mais chaque jour. C : Pas tout le temps ? Entre deux séances, il ne vous demande pas toujours de relire votre leçon ? D : Oui, on relit, mais pas tout le temps, il nous demande pas de l'apprendre par cœur. C : D'accord. Alors qu'est-ce que tu fais, toi ? D : Ben je relis, je relis parfois. C : Parfois. Pas toujours ?

D : Non.

C : Non ? Pourquoi ?

D : (rires) Parce que parfois, j'avoue, j'en ai pas envie.

C : (rires) Ah d'accord, t'as pas envie. Et… quand tu relis, tu fais quoi ? Tu lis juste ? Tu lis tout ? une partie ?

D : Je lis la partie où je comprends pas trop.

C : D'accord. Les parties que tu comprends, tu lis pas trop ?

D : Ceux que je comprends, non, je les lis pas, parce que je les connais déjà.

C : Et ceux que tu comprends pas trop, tu les lis. Est-ce que tu… et comment tu les lis ?

D : Euh…

C : Tu les lis plusieurs fois ? Tu essaies de les mémoriser ?

D : J'essaie de mémoriser… de les mémoriser… ou après, parfois, quand on revient en cours, j'essaie de les faire moi-même, sans le cahier de leçon.

C : D'accord. En cours ? Et chez toi, tu fais pas ça ?

D : Non.

C : Non. T'attends d'être en classe, plutôt.

D : (fait oui de la tête)

C : Pourquoi t'attends d'être en classe ?

D : Parce que comme ça je peux poser des questions.

C : Ah. D'accord. Chez toi, tu ne demandes jamais d'aide, à un parent, un frère, un… ?

D : Non.

C : Tu n'en as pas qui peut t'aider ?

D : Si, mais… je préfère plus le prof.

C : Ah. D'accord, tu as plus confiance en monsieur M2. (rires) D'accord. OK, Daouda, je te remercie, tu peux rentrer chez toi.

i. Entretien avec Géraldine (M, M2)

Chercheur : Alors, combien tu as passé, Géraldine, pour faire tes exercices ? Dis-moi.

Géraldine : Ca dépend en fait. Si je comprends, je vais pas rester longtemps. Si je comprends pas, ben je vais un peu durer.

C : D'accord. En moyenne, on va dire que tu prends combien de temps ? Dix minutes, une heure, quatre heures ?

G : Vingt minutes, trente minutes.

C : Vingt minutes à peu près, trente minutes, selon toi. D'accord. Tu travailles régulièrement, c'est-à-dire est-ce que tu fais toujours tes devoirs demandés en mathématiques ?

G : Pas tout le temps.

C : Pas tout le temps ?

G : Des fois, j'ai pas envie de les faire donc je les fais pas.

C : Donc il y a des moments où tu ne les fais pas trop, OK. Alors dis-moi, qu'est-ce que tu as fait pendant ces quelques minutes où tu étais toute seule ?

G : Euh, j'ai fait les trois exercices qu'il avait demandés. Sauf le dernier, comme j'ai pas compris, j'ai remis la consigne, comme ça je vais soit demander à mes parents, ou lundi je demanderai à monsieur M2.

C : D'accord. C'est monsieur M2 qui vous demande de réécrire les questions quand vous ne comprenez pas ?

G : Oui.

C : D'accord. Donc tu as juste fait les trois exercices, c'est ça ?

G : Oui. Ceux qu'il fallait faire, quoi.

C : Ceux qu'il fallait faire, OK. Alors, pour faire ces exercices, qu'est-ce que tu as fait en particulier ? Tu as juste répondu aux questions ?

G : Oui, j'ai fait les calculs qu'il fallait faire, et voilà.

C : D'accord. Est-ce que… Comment tu fais quand tu n'arrives pas ? Typiquement, par exemple, là, tu m'as dit « je n'ai pas réussi donc j'ai recopié l'énoncé pour demander à mes parents », est-ce que c'est la seule chose que tu fais ou… ?

G : Parfois j'essaie de regarder le cahier de leçon, mais si j'y arrive pas du tout, je demande à mes parents.

C : Qu'est-ce que tu fais quand tu vas regarder dans le cahier de leçon ? Qu'est-ce que tu regardes ?

G : Ben j'essaie de trouver les exemples, de lire les leçons qui sont écrites…

C : Hm hm ? T'espères trouver quoi dans les exemples ?

G : Euh, j'espère trouver euh… En fait j'ai essayé de faire par exemple comme l'exemple, pour mieux réussir, en fait.

C : D'accord, OK. Alors entre deux cours, qu'est-ce que selon toi monsieur M2 demande, attend, qu'est-ce que tu fais, qu'est-ce que tu fais pas et pourquoi ? Y a beaucoup de questions. (rires)

G : (rires) Ben en fait… ben par exemple…

C : D'après toi, qu'est-ce que monsieur M2 attend ?

G : Il attend que.. qu'on fait ses exercices, qu'on comprend, et que si on comprend pas, on lui demande. Et après, voilà… (rires) C : Donc juste les exercices ?

G : Et aussi les leçons. Il veut qu'on apprenne et qu'on puisse participer lorsqu'il demande euh… la leçon.

C : D'accord. C'est quoi, apprendre la leçon ?

G : Ben apprendre, c'est comprendre en fait. Si on comprend la leçon, ben en gros, on a compris, quoi, on a compris qu'est-ce qu'il a demandé.

C : D'accord. Et comment tu fais pour… quand tu veux comprendre la leçon, qu'est-ce que tu fais ?

G : J'essaie… j'apprends, déjà.

C : T'apprends quoi ?

G : Ben… j'apprends la leçon… en fait qu'est-ce qui est écrit, j'apprends.

C : T'apprends par cœur, tu veux dire ?

G : Oui. J'essaie de comprendre les phrases. Si je comprends, ben après, normalement, je comprends les exercices, mais sinon, après… C : D'accord. Donc…Et tu apprends par cœur toute, toute, toute la leçon, ou… ?

G : Non.

C : Non ? Seulement quoi ?

G : Ben seulement les choses importantes.

C : Alors qu'est-ce que tu appelles importantes ?

G : Par exemple… Par exemple, s'il écrit une leçon en rouge, je vais apprendre qu'est-ce qui a en rouge, et voilà.

C : Ah, monsieur M2 utilise des couleurs ?

G : Oui.

C : D'accord. Ce qui est en rouge, toi, tu as tendance à l'apprendre par cœur, c'est ça que tu es en train de me dire.

G : Oui.

C : OK.

Transcriptions des entretiens avec les élèves de H1 (22 janvier 2016), préparation d'une évaluation sommative

j. Entretien avec Annabelle

Chercheur : Bonjour Annabelle, j'espère que tu vas bien. Mardi prochain, tu as un contrôle en mathématiques, normalement. Euh… ben comme la dernière fois, je vais te demander de faire comme si tu étais chez toi, et je vais te laisser… alors, pas beaucoup de temps malheureusement… entre dix et quinze minutes… euh… et tu vas faire comme si tu allais réviser ce contrôle de mathématiques, d'accord ? Donc comme si tu étais chez toi, tu révises le contrôle de mathématiques. Si jamais tu finis de réviser avant les quinze minutes, tu m'appelles, je viendrai, sinon au bout des quinze minutes, je viendrai quand même, OK ?

Annabelle : D'accord.

C : Je te demanderais de réviser seulement la partie sur le calcul littéral. Pas le reste. Si tu as autre chose… tu ne le regardes pas, d'accord ? Juste le calcul littéral. Voilà, je te laisse dix minutes, un quart d'heure.

Avant même que le chercheur ne laisse Annabelle réviser, celle-ci s'est déjà emparée de son cahier de leçons. Elle le feuillette jusqu'à trouver la leçon sur le calcul littéral. Elle se met à lire. Après une minute de lecture sur la première page, elle semble noter quelque chose sur ce cahier, puis continue de lire. Elle reste près de 2 minutes 30 secondes sur cette même page, ce qui peut faire penser qu'elle lit plusieurs fois cette même page ou fait un effort de mémorisation (ou alors, elle lit très lentement). Après ces 2min30, elle tourne la page et lit la page suivante, qui ne comporte que trois lignes. Elle y reste quelques secondes puis passe à la lecture de la page d'après. À un moment, elle regarde la page encore d'après, mais revient sur la page d'avant. Quelques secondes, elle lève les yeux, ses élèves remuent silencieusement – peut-être est-elle en train de réciter mentalement le contenu de sa leçon. 4 minutes se sont écoulées depuis le début des révisions d'Annabelle, lorsqu'elle reprend son cahier de leçons à la première page de la leçon sur le calcul littéral et semble entamer une deuxième lecture. Dans cette deuxième lecture, elle lève une nouvelle fois les yeux, et se place encore dans ce qui semble être une posture de récitation silencieuse. Puis, sans aller plus loin que cette première page, elle annonce qu'elle a terminé. Le tout aura duré moins de 6 minutes.

Annabelle : J'ai fini.

Chercheur : Tu as fini ?

A : Oui. (Elle ferme son cahier.)

C : Alors habituellement, Annabelle, combien de temps tu passes pour réviser un contrôle chez toi ?

A : Euh… Dix à cinq minutes.

C : Entre cinq et dix minutes.

A : Oui.

C : Tu le fais… longtemps avant ? Tu prépares longtemps avant, ou tu prépares la veille, ou le jour même ? Combien de temps avant, tu te prépares ?

A : La veille et le jour même.

C : Essentiellement la veille et le jour même. Raconte-moi ce que tu as fait, un peu, pendant ces quelques minutes. Parle bien fort.

A : Ben j'ai euh… j'ai… (elle ouvre son cahier de leçons) J'ai pris la leçon… Je l'ai lue, je l'ai relue. Et voilà.

C : Alors montre-moi la leçon.

A (cherche la page de son cahier où est inscrite la leçon sur le calcul littéral) : Ca, celle-là. Et là (elle tourne les pages et les balaie de la main).

C : D'accord. Quand tu dis que tu l'as lue et relue… Essaie de me préciser un petit peu…

A : J'ai euh… Je me… J'ai lu.

C : Tu as tout lu une première fois ?

A : Oui, j'ai tout lu une première fois, j'ai relu les choses importantes (elle pointe du doigt un exemple de la leçon) et après, je me suis fait… j'ai dit ce qui était important dans ma tête.

C : Hm hm. Qu'est-ce qui était important, dans cette leçon, selon toi ? Montre-moi. Tu m'as dit « j'ai lu les choses importantes », alors ça veut dire que dans ton cahier, il y a des choses que tu considères plus importantes que d'autres. Lesquelles ?

A : Par exemple, si on prend 3x+2, c'est le… entre le 3 et le x, il y a une multiplication, et pour le x, on prend un nombre… le nombre qu'on veut… et on fait le calcul dans sa tête. Et pour calculer une expression… (elle lit l'exemple qu'elle a désigné précédemment) Par exemple : 2 fois 6 moins a plus b, avec a on prend 1 et b on prend moins 4, ben on… on fait le calcul.

C : D'accord. Ma question, c'était simplement… tu m'as dit que tu avais relu les choses importantes, donc là, je vois, tu me parles de l'exemple, pour toi, l'exemple, c'est la chose importante dans la leçon ?

A : Oui.

C : C'est une chose importante. Pourquoi est-ce que c'est plus important, par exemple, que… je sais pas, qu'est-ce que vous écrivez à côté ? Vous écrivez des définitions, peut-être, ou des propriétés… Pourquoi est-ce que c'est l'exemple que tu trouves plus important ?

A : Ben euh… parce que c'est une expression littérale.

C : Et donc ? (Silence.) Parce que tout ton chapitre parle des expressions littérales, c'est ça ?

A : Oui.

C : Donc pourquoi est-ce que tu t'intéresses à l'exemple ?

A : Hm... Parce que pour moi, l'exemple, c'est... ça... c'est... plus précis.

C : C'est plus précis, ça te parle plus, que le reste. T'as besoin de l'exemple pour bien comprendre, c'est ça ? (A fait « oui » de la tête) D'accord. Donc pour toi, pour réussir cette évaluation, qu'est-ce qu'il est important de préparer ?

A : Euh...

C : Donc tu as lu la leçon. Il est important de préparer la leçon, par exemple.

A : Oui, de... de se préparer à ce qui pourrait tomber dans le contrôle... ce qui... ce qui peut être... par exemple, on peut réviser aussi les exercices qu'on a faits, s'entraîner, et voilà.

C : Alors justement... Tu n'as pas... utilisé le cahier d'exercices apparemment, là, si ? Tu l'as utilisé le cahier d'exercices ?

A : Oui... euh non.

C : Non. Pourquoi ? Parce que tu dis que c'est important de s'entraîner avec les exercices, pourquoi tu t'entraînes pas ?

A : Parce que chez moi, j'en fais beaucoup, et... voilà, c'est tout.

C : La veille du contrôle, tu refais pas des exercices, parce qu'avant, tu en fais beaucoup ?

A : Si, la veille aussi, j'en fais.

C : Ben pourquoi tu l'as pas fait, alors ? Je t'ai dit « fais comme si tu étais chez toi et que tu avais contrôle bientôt ». Pourquoi tu as pas... tu t'es pas entraînée ? Parce que tu as bien compris ?

A : Hm.

C : Quand tu... tu comprends bien, tu ne t'entraînes pas spécialement ?

A : Non.

C : Donc là, tu as eu l'impression d'avoir bien compris. Selon toi, madame H1, elle attend quoi, quand tu révises à la maison ? Qu'est-ce qu'elle attend de toi ?

A : Qu'on s'entraî... qu'on fasse des exercices, qu'on s'entraîne, qu'on apprenne et euh... qu'on soit prêt pour le contrôle.

C : Hm hm. Alors tu as dit plusieurs choses... « qu'on s'entraîne à faire les exercices », qu'est-ce que ça veut dire, s'entraîner à faire les exercices ? Explique-moi.

A : ‘fin… Par exemple euh… soit prendre un exercice du manuel qui peut tomber dans le contrôle… et faut s’entraîner…

C : Les exercices que vous avez faits en classe et qui sont sur le manuel, elle vous demande parfois les mêmes en contrôle ?

A : Peut-être… Je sais pas… Ca peut arriver…

C : Est-ce que c’est déjà arrivé ? Tu as fait plusieurs contrôles avec madame H1.

A : Oui.

C : Est-ce que c’est déjà arrivé qu’elle prenne le même exercice… que ce que vous aviez fait dans le cahier d’exercices ?

A : Hm… Oui.

C : Le même, exactement le même ?

A : Hm, non, pas exactement.

C : Je ne sais pas, j’ai pas vu ces contrôles, donc euh… je te pose la question, c’est tout (C sourit).

A : C’est pas vraiment les mêmes, mais c’est… les mêmes, sans être les mêmes.

C (souriant un peu plus) : C’est les mêmes sans être les mêmes… Alors explique-moi ça un petit peu.

A : Ben… Elle prend… un exercice… et elle le modifie…

C : Elle modifie quoi ?

A : Les expressions.

C : D’accord. C’est le même type d’exercices, c’est ça, la même forme d’exercices.

A : Oui.

C : D’accord. Euh, tu as dit… quoi d’autre… « s’entraîner à faire les exercices »… oui, quand tu les fais, les exercices, comment tu fais ? Donc là, tu les as pas faits, mais tu m’as dit que parfois, tu t’entraînais à faire les exercices. Comment fais-tu ?

A : Je les fais et si j’ai un trou, je prends mon cahier de… de leçons.

C : Tu fais les mêmes que ceux que vous avez faits en classe ?

A : Non, j’en prends au pif.

C : Au hasard ?

A : Oui.

C : Et qui ressemblent ou pas ?

A : Un peu…

C : Un peu. Tu sais pas trop, tu pioches comme ça, dans le manuel, et tu en fais au hasard. (A fait « oui » de la tête.) C’est pas grave si ça ressemble pas trop ? (« Non. ») Bon. Et… tu m’as dit… Alors, tu fais ces exercices, et quand tu regardes dans le cahier de leçons. Et là, qu'est-ce que tu fais, quand tu regardes dans le cahier de leçons ? Tu regardes quoi ?

A : Je regarde la leçon… pour m'aider… et si j'ai… j'ai pas compris, je demande à ma grande sœur.

C : D'accord. Ta grande sœur, elle t'aide souvent, à réviser les contrôles ?

A : Non.

C : Non. C'est seulement quand tu es en difficulté que tu vas aller lui demander. « Apprendre la leçon », qu'est-ce que ça veut dire ?

A : Hm… Ben c'est… la mémoriser.

C : Donc tu l'apprends pas cœur ?

A : Non.

C : Non ? Comment tu fais pour la mémoriser ? « Mémoriser », ça veut dire quoi pour toi ?

A : Mémoriser, c'est pour moi euh… quand j'entends un truc, je le… j'y pense plusieurs fois, je… je le répète plusieurs fois dans ma tête… c'est tout.

C : Hm hm. Donc la leçon, tu te la répètes plusieurs fois, pour la mémoriser, c'est ça ? D'accord. Comment tu fais pour décider que tu es prête, pour l'évaluation ? À quel moment tu te dis « ça y est, je suis prête » ?

A : Quand… quand j'ai fini de réviser plusieurs fois.

C : Seulement quand tu as révisé plusieurs fois ? Et si jamais t'as pas compris, si t'as révisés plusieurs fois, tu décides que tu es prête ou pas ? (A fait « oui » de la tête) Oui ? Même si tu as pas tout compris ?

A : Oui.

C : Donc toi, tu es prête, une fois que tu as révisé plusieurs fois. Tu me dis, hein, si je me trompe ! Je te pose des questions, y a pas de bonne ou de mauvaise réponse, c'est tes réponses à toi, d'accord ?

A : Oui.

C : Hm… Donc tu m'as dit que pour travailler tes difficultés, tu regardais dans le cahier de leçons, c'est ça ?

A : Oui.

C : Et parfois, tu demandais à ta grande sœur, mais pas souvent.

A : Oui.

C : De façon générale, est-ce que tu trouves que l'évaluation que madame H1 vous donne ressemble à ce que vous avez fait en classe ? Tu m'as dit qu'il y avait des exercices qui ressemblaient, mais est-ce que tous les exercices ressemblent à ce que vous faites en classe ou pas ?

A : Non.

C : Non ?

A : Y en a que je trouve difficiles, d'autres simples, sinon... C'est tout.

C : Les exercices que tu trouves difficiles, est-ce que c'est des exercices qui justement ne ressemblent pas aux exercices que vous avez faits en classe ou... ?

A : Non, c'est... c'est des exercices qu'on a... qu'on a faits en classe mais que... j'ai... pas bien, bien, bien mémorisés et que... Je mets des trucs au hasard.

C : D'accord. Alors tu viens de me dire « j'ai pas bien mémorisé » en parlant des exercices. Ca veut dire que les exercices, tu mémorises aussi ? Comment tu fais pour mémoriser les exercices ?

A : Je les refais plusieurs fois.

C : (résumant) Donc... tu choisis des exercices au hasard dans le manuel, et ces exercices-là, tu les refais plusieurs fois ?

A : Oui.

C : Oui ? Et comment tu fais pour savoir si tu as raison ou pas, puisque dans le manuel, ils ne sont pas tous corrigés, les exercices... ?

A : Hm... Je prends ma calculatrice... et je demande à ma grande sœur.

C : Et tu demandes à ta grande sœur. Pourquoi est-ce que tu refais pas les exercices que vous avez faits en classe ? Puisque... il y a la correction, non, de ces exercices ?

A : Oui.

C : Pourquoi tu les refais pas ?

A : Hm... Je sais pas... Parce que la correction de l'exercice me suffit.

C : Ah ! Donc, tu les relis ces corrections d'exercices ?

A : Oui.

C : Ca, tu ne me l'as pas dit. Quand tu révises les exercices, tu prends des exercices au hasard, mais tu... regardes aussi la correction des exercices que vous aviez faits avant. Ca t'arrive souvent d'utiliser la correction, alors ? (A fait « oui » de la tête.) D'accord. Et donc cette correction, comment tu l'utilises ? Tu... la relis simplement ? Tu la mémorises aussi ? Tu compares avec ce que... ce que tu es en train de faire ?

A : Je la mémorise... Je la mémorise...

C : Tu la mémorises. Donc tu la relis plusieurs fois et tu essaies de mémoriser la correction, c'est ça. Bon. (C réfléchit à cette réponse.) Tu veux dire que tu mémorises la correction de l'exercice ou tu mémorises par exemple les méthodes, comment on a réussi à répondre à l'exercice ?

A : Je… Je mémorise la correction.

C : Tu mémorises la correction. Juste la correction. D'accord. Est-ce que madame H1 met à ta disposition des… documents ou des fiches ou des vidéos… pour t'aider à préparer, à réviser cette évaluation à la maison.

A : Non.

C : Non ? Elle vous donne pas de fiches de révisions ?

A : Non.

C : Des documents ? Des exercices ? Une fiche d'exercices ? Elle vous dit « ces exercices, ça va ressembler à ça au contrôle » ? (A fait « non » de la tête.) Non, pas spécialement. Bon, d'accord… OK Annabelle, et bien je te remercie.

En raison d'une erreur de la part du chercheur, Annabelle a été interrogé deux fois, la seconde fois ayant eu lieu le matin du contrôle. Les questions posées étaient identiques. Annabelle n'a pas fait de remarques sur le fait d'être interrogée deux fois, avec les mêmes questions, et a répondu avec une docilité surprenante… Néanmoins, dans cet autre entretien, d'autres informations ont pu être recueillies.

C : De façon générale, est-ce que tu trouves que l'évaluation que vous faites en classe, elle ressemble à ce que vous aviez fait pendant le chapitre qu'il y avait à réviser ?

A : Un petit peu.

C : Un petit peu seulement ?

A : Oui.

C : Explique-moi.

A : Des fois… y a des… des choses euh… plus… plus difficiles… 'fin, je trouve, un peu plus difficiles… et… ça… ça me stresse encore plus pendant le contrôle, ça… ça me stresse… et après, je sais pas… si pour moi, je trouve ça trop dur, je fais pas, soit je réfléchis pendant… longtemps… mais… voilà… je fais pas… et je mets au hasard.

C : Et tu mets au hasard. Quand tu dis… que ce sont des exercices qui sont difficiles… C'est difficile pourquoi ? Parce que vous ne l'avez pas fait en classe ? Pourquoi c'est difficile ?

A : Parce que… pour moi… euh… pour moi, madame H1, elle explique les choses pas précisément, pour moi, et j'ai du mal à comprendre.

C : Hm hm. Alors est-ce que tu as… Est-ce que par exemple, sur ce chapitre, il y a quelque chose que tu n'as pas bien compris ou que tu trouves qu'elle n'a pas expliqué précisément ?

A : J'ai pas compris euh... (elle regarde sa leçon) transfor... euh « développer, c'est transformer le produit en une somme algébrique. » J'ai pas compris, ça. C : D'accord. Donc la phrase « développer, c'est transformer un produit en une somme algébrique. », tu n'as pas compris cette phrase... et... tu penses que s'il y a quelque chose euh... qui va tomber dessus au contrôle, tu vas être en difficulté, c'est ça ?

A : Oui.

[...]

C : Alors à ton avis, quels sont les types d'exercices qu'il y aura à ce contrôle cet après-midi ?

A : « Types », c'est-à-dire ?

C : Euh... À ton avis, à quoi ressemblera le contrôle ?

A : Comme d'habitude.

C : Hm hm. Qu'est-ce qu'il va y avoir comme exercices ? Si tu essayais de deviner, un petit peu... (Silence.) Est-ce qu'elle va vous int... je te donne un exemple, hein... est-ce qu'elle va vous interroger sur... euh... le... elle va vous donner des calculs euh... qu'est-ce que vous avez fait en quatrième... est-ce qu'elle va vous donner... vous avez fait les puissances ?

A : Non.

C : Alors est-ce qu'elle va te donner des exercices sur les puissances ?

A : Non.

C : Non, parce que vous l'avez pas fait. Est-ce qu'elle va te donner par exemple un exercice sur le théorème de Pythagore ?

A : Oui.

C : Oui ? Ca, elle l'a dit ou pas ?

A : Non.

C : Non. Et pourquoi est-ce qu'elle va donner un th... un exercice sur le théorème de Pythagore alors ?

A : Je sais pas... Peut-être c'est... surprise...

C : Ah ! Ca arrive, ça, qu'il y ait des exercices comme ça, un peu « surprises » ?

A : Oui.

C : Oui ? Et là aussi, tu es en difficulté ?

A : Oui.

C : Souvent, tu es en difficulté sur ces exercices-là ?

A : Oui.

C : Et alors qu'est-ce que... il y aura à ton avis sûrement, certainement, dans ce contrôle, cet après-midi ?

A : La distributivité et les fractions.

C : La distributivité et les fractions. Tu vois, tu sais qu'il y aura certaines choses que vous avez vues. Est-ce que tu peux me donner un exemple d'exercices qu'il y aura sur la distributivité ?

A : Euh... Développer... et réduire.

C : Hm. Tu veux bien m'en écrire un ? Tu en inventes un ? Par exemple sur... développer. Un truc sur « développer », qu'est-ce que ça va être ?

Annabelle écrit un exemple sur un morceau de papier tendu par le chercheur : $4 \times (x + 2) = 4 \times x + 4 \times 2 = 4x + 2$

[...]

C : Tu penses qu'au contrôle, il y aura – c'est ça que je te demandais – comme type d'exercices, il y aura un type d'exercices « développer une expression ». D'accord. Qu'est-ce qu'il y aura d'autre ? Tu m'as dit « développer », tu m'as dit « réduire » ; quoi d'autre ? Est-ce que tu penses qu'il y aura autre chose ?

A : Transformer une somme en une somme algébrique.

C : Transformer une somme en une somme algébrique...

A : Un produit !

C : Un produit. Un produit en une somme algébrique. Et ça, tu n'as pas compris, c'est ça ?

A : Non.

C : Bon. OK. Il y a autre chose ? Non, pas spécialement ? Et bien écoute Annabelle, je crois que je t'ai tout posé comme questions...

k. Entretien avec Mehdi

Chercheur : Bonjour Mehdi.

Mehdi : Bonjour.

C : Mardi prochain, tu as un contrôle en mathématiques avec madame H1. Je vais te demander de faire comme la dernière fois, c'est-à-dire faire comme si tu étais chez toi et que tu préparais, que tu révisais ce contrôle. Je vais te laisser... dix minutes... peut-être un quart d'heure si on a le temps mais je pense plutôt dix minutes. Euh, je sais que c'est pas beaucoup, peut-être. Si tu finis avant les dix minutes, tu m'appelles, et sinon euh…

M : Je relis le cours ?

C : Pardon ?

M : Faut que je relise le cours ?

C : Alors tu fais comme tu veux, mais comme si tu préparais le contrôle. Imagine que tu…

M : Après, vous allez me donner un exercice ?

C : Non, je vais simplement te demander comment tu as fait pour réviser ton contrôle.

M : D'accord.

C : OK ? Et tout ce que tu diras, comme la dernière fois, je ne le répèterai pas.

M : D'accord.

C : Ah oui, tu ne révises que… le calcul littéral.

M : Oui. (M prend l'unique cahier qu'il semble avoir avec lui, l'ouvre et s'arrête sur une page. Il se tourne vers C.) C'est « fractions : comparer, addition et soustraction » ?

C : Ca, c'est pas « calcul littéral »…

M : Alors… calcul littéral… (M feuillette son cahier) La distributivité ?

C : Voilà, tout ce qui est « calcul littéral ».

M : Oui monsieur.

M se met alors à lire sa leçon. Sa lecture semble entrecoupée de moments où il lève les yeux du cahier et paraît réfléchir, avant de se replonger dans sa lecture. M semble fatigué et peu concentré : plusieurs fois, il bâille ; sa tête repose entre ses mains tandis qu'il lit ; il se préoccupe de l'état de son blanc correcteur, dont il examine attentivement la pointe, qu'il secoue… Après quelques dizaines de secondes, il passe à la page suivante. À cet instant, il prend sa calculatrice et semble vérifier un calcul écrit dans sa leçon. Puis il poursuit sa lecture, marmonnant, bâillant. Une fois arrivé en bas de cette seconde page, il la tourne et, ne trouvant rien derrière, annonce qu'il a terminé.

Mehdi : Monsieur, j'ai fini.

Chercheur : Tu as fini de réviser ?

M : Oui.

C : Alors Mehdi, habituellement, tu mets combien de temps pour réviser un contrôle ?

M : Si j'ai pas trop bien suivi le cours, je mets... une heure. Je peux rester une heure à apprendre.

C : Hm hm. Et si tu as bien compris ?

M : Ben si j'ai bien compris, je peux rester quinze... quinze à trente minutes. Et réviser après... faire des exercices.

C : D'accord.

M : Mais des fois, j'ai pas envie d'apprendre, donc je reste cinq minutes, dix minutes... j'apprends vite fait et après je fais des exercices.

C : D'accord. Mais là, tu n'as « tenu » que cinq minutes, entre guillemets. D'habitude, tu travailles plus longtemps ? Pourquoi tu travailles... (inaudible)

M : Ouais, c'est parce que là, en fait, la leçon, ça fait pas longtemps qu'on vient de la faire...

C : Oui... ?

M : Parce que j'ai l'habitude de... la leçon, je la fais, et j'attends... deux jours à peu près, avant que... par exemple, mercredi, on a... par exemple un contrôle vendredi... mercredi après-midi, j'apprends le contrôle. Et j'apprends la leçon.

C : D'accord. Donc on va dire que tu révises environ... deux jours avant...

M : Deux jours...

C : Deux jours ou la veille.

M : Ou la veille.

C : D'accord. Alors explique-moi ce que tu as fait pendant ces quelques minutes où je t'ai laissé tout seul.

M : Ben j'ai relu la leçon. J'ai essayé de comprendre, j'ai corrigé des fautes aussi. J'ai euh... Quelque chose que j'ai compris, j'ai cru voir une faute, j'ai pris ma calculatrice et j'ai... et j'ai copié.

C : Et c'est tout ?

M : C'est tout.

C : D'accord. Alors tu me dis « j'ai relu ma leçon ». Explique-moi... précise-moi un petit peu ce que ça veut dire.

M : Relire ma leçon, ça veut dire que... je... je... (rires)

C : (souriant) Tu quoi ? Tu la lis du début à la fin ?

M : Je la lis du début à la fin... J'essaie de comprendre qu'est-ce que ça veut dire. Je lis de point en point, en fait. J'essaie de comprendre le titre, ce qu'il veut dire. J'essaie de comprendre les exemples, de les refaire dans ma tête. J'essaie de m'imaginer comment on avait fait en cours et...

C : D'accord. Alors là, par exemple, qu'est-ce que tu as… imaginé… ? Des choses que vous aviez fait en cours en relisant ta leçon ?

M : J'ai imaginé qu'on avait fait un tableau. Euh… (il fronce les sourcils.) On avait fait un tableau, je crois… On avait fait un tableau, et euh… y avait… y avait des nombres dessus… avec des lettres… et on l'a reproduit… j'essaie de revoir ça dans ma tête.

C : Ce tableau… il se référait à quoi, dans la leçon ? Ca concernait quoi ?

M : Ca m'aidait, en fait… C'est pas… ça m'aidait pas… sur cette leçon, ça m'aidait sur une autre leçon, mais ça me revenait à penser… en fait, j'essayais… vous voyez par exemple, 5… 5 fois x plus 1 (écrit $5\times(x+1)$ sur son cahier), j'essayais d'imaginer le tableau et de replacer 5 fois x plus 1 dedans.

C : Et tu y es arrivé ?

M : Oui j'ai réussi.

C : Bon. Selon toi, qu'est-ce que madame H1 attend de toi, quand tu révises ta leçon ? Quand tu révises, pardon, ton contrôle !

M : Que… que j'aie une bonne note au contrôle.

C : (rires) Elle attend que t'aies une bonne note au contrôle, et pour avoir une bonne note, elle pense que tu dois faire quoi, madame H1 ? Qu'est-ce qu'elle attend de toi ?

M : Copier le cours.

C : Elle veut que vous recopiiez le cours à la maison ?

M : Non ! En cours !

C : Non, je parle… Quand tu es chez toi, en dehors de la classe, que tu travailles contrôle chez toi…

M : Ah ! Elle nous dit de… Elle veut qu'on fasse des exercices supplémentaires… pour qu'on puisse réussir le contrôle… Parce que la plupart du temps, les contrôles de madame H1, ils sont plus sur exercices que sur cours. Ils sont plus sur exercices.

C : D'accord. Et les exercices… Comment est-ce que tu les révises ? Comment est-ce que tu les choisis, ces exercices supplémentaires ?

M : Euh… je prends un… je prends un seul exercice, par exemple, et je fais ce qui… je fais un par un (il mime les points d'une liste imaginaire avec la main). Ou sinon quand…

C : Les exercices, tu les choisis comment ?

M : Euh… Je vais du plus difficile… au plus facile (il fait un geste partant du bas et remontant vers le haut). Et après, des fois, c'est mon père, il me donne les exercices.

C : Là par exemple, est-ce que tu pourrais… me retrou… me prendre un exercice dans ton manuel et me dire comment tu ferais si tu devais réviser ces exercices.

M (prenant son manuel) : Par exemple, si je devais réviser mes exercices sur le calcul littéral… où je vais ? Donc si je reconnais plus la page, je vais au sommaire (il joint le geste à la parole), je cherche euh… (il parcourt le sommaure, à voix basse) Calcul sur les nombres relatifs… Calcul, écriture fractionnaire… Calcul littéral ! Page 80. (Il se rend à la page 80.) Alors, calcul littéral, je prends… je vais à la fin (il tourne les pages jusqu'à tomber sur une page particulière où il s'arrête), voilà, je fais surtout exercices que… où il est marqué « je vérifie si j'ai compris ». Je vais par exemple du 57 (il pointe l'exercice situé tout en bas à droite de la page, donc le dernier de cette page) jusqu'au 44 (il remonte jusqu'à l'exercice situé tout en haut à droite, sachant qu'il y a deux colonnes d'exercices sur la page).

C : Et pourquoi tu fais du plus difficile au…

M : Comme ça, je fais le plus difficile… je m'entraîne, je m'entraîne, je m'entraîne, et après ça me fait plus vite (il balaie la page de sa main vers le haut), je peux les faire plus facilement, les autres.

C : OK… Donc ça, tu le fais assez souvent.

M : Des fois oui… En mathématiques, surtout, je le fais souvent.

C : D'accord. Là, pourquoi tu l'as pas fait ?

M : Hm… (il rit.)

C : (souriant) Je sais pas, hein ! Pourquoi tu l'as pas fait ? Parce qu'il y avait la caméra ? Parce que t'avais pas envie ?

M : Non, parce que j'ai pas pensé.

C : Ah, t'y as pas pensé. Mais tu y aurais pensé, tu penses, chez toi ?

M : Hm. (« oui »)

C : Bon… D'accord.

M : Mais c'est souvent mon père qui me rappelle.

C : D'accord. Et… là, tu prends l'exercice au hasard, ou pas ?

M : Maintenant ?

C : Tu m'as dit… tu… tu pars du dernier et tu remontes mais… (C se penche sur le manuel pour balayer de la main les exercices précédemment balayés par M) là, tu fais juste ça, mais ici, là, par exemple (C montre l'autre colonne, où des exercices de types différents de ceux de la seconde colonne désignée par M apparaissent), tu vas pas faire, alors que… peut-être qu'il y a des exercices que tu vas rater…

M : Si, ça dépend, ça dépend… Peut-être je fais ça (première colonne d'exercices), peut-être je fais ça (seconde colonne). Ou y a des fois, mêmes, je fais d'en haut, et je descends.

C : D'accord. Mais c'est un peu au hasard… ?

M : Oui.

C : C'est un peu au… au gré de tes envies.

M : Oui.

C : Bon, d'accord. Euh… Alors comment tu fais pour décider… quand tu es prêt… ?

M : Pour le contrôle ?

C : Oui. Quand est-ce que tu te dis : « ça y est, je suis prêt » ?

M : Quand… j'ai fait beaucoup, beaucoup d'exercices… et j'ai beaucoup révisé ma leçon.

C : Bon. Alors ça veut dire quoi « faire les exercices » ? Tu m'as dit « j'en prends au hasard, je les fais ».

M : Oui. Disons que quand… quand je fais une page d'exercices, je me dis « c'est bon, j'ai plus besoin de faire d'exercices ».

C : Hm hm, et « faire les exercices », c'est quoi ? Donc tu… tu prends par exemple le numéro 57, là, tu essaies de le faire, et puis ?

M : Ben dès que je l'ai fini, j'essaie de le corriger.

C : Hm hm ?

M : Soit je le corrige à la calculatrice, et soit euh… je le corrige avec mon père, ou ma mère.

C : Ah d'accord, il y a toujours ton père ou ta mère pour venir vérifier que… voilà, alors c'est ma question, comme il n'y a pas toutes les corrections d'exercices dans le manuel, comment tu fais pour avoir raison ou pas, là, tu demandes confirmation auprès de tes parents.

M : Oui, voilà.

C : Pourquoi… Est-ce que tu refais les exercices que vous aviez faits en classe ?

M : Oui, je les refais souvent.

C : Souvent. Aussi. Donc en plus du manuel, tu refais des exercices du… du cahier d'exercices. Et là, pareil, comme tu fais pour refaire ces exercices ?

M : Euh… Je m'imagine… des fois, je fais comment ? Je prépare une feuille de copie, et j'écris « contrôle » en haut, je fais une note sur 20, je fais tous les exercices, et je vais euh… je les montre à mes parents.

C : Tu refais tous les exercices que vous aviez faits avec madame H1…

M : Qu'on a faits en cours, et euh… des fois, là, madame H1, elle nous redonne les exercices que… qu'on a faits en cours, elle nous les redonne dans les devoirs, pour qu'on les refasse à la maison.

C : Elle vous redonne les mêmes ?

M : Oui. Elle nous redonne à faire les mêmes.

C : J'ai pas bien compris. Tu veux dire qu'au contrôle, y a des exercices qui sont ceux que vous aviez déjà faits en classe ?

M : Oui, voilà.

C : Ca, ça arrive.

M : Oui.

C : D'accord. Tu regardes un peu la correction des exercices ou pas ?

M : Dans le manuel ?

C : Non, dans ton... cahier d'exercices.

M : Oui, y a des fois, quand j'y arrive vraiment pas, je regarde.

C : Hm hm. Et comment tu fais, quand tu regardes la correction que utilises ?

M : J'essaie de comprendre d'abord que... c'est quoi le... comment c'est fait... et après, si j'arrive pas à comprendre, ben... je sors la calculatrice, soit je demande à mes parents.

C : D'accord. Euh... Pour la leçon... Tu m'as dit « j'apprends ma leçon ». Tu m'as dit d'abord que tu l'avais lue et relue... et « j'apprends », ça veut dire quoi. C'est ça, « j'ai relu » ?

M : « Apprendre », pour moi, c'est... par cœur.

C : Et tu l'apprends par cœur ta leçon ?

M : Oui, je l'apprends par cœur.

C : (quelque peu étonné) À chaque fois, tu es capable de réciter par cœur la leçon ?

M (souriant) : À mon père, oui.

C : À ton père, d'accord. Et pourquoi tu fais ça ?

M : Ben pour que ma leçon, elle reste dans ma tête. Pour que comme ça, dès qu'il y a une question du cours, ben je peux la répondre directement.

C : D'accord. Est-ce qu'il y a des choses dans la leçon qui sont plus importantes pour toi que d'autres ou pas ?

M : Euh... non, pour moi, y a tout qui est important dans la leçon.

C : Mais tu vas apprendre par cœur euh... on va dire les définitions, les théorèmes et les propriétés, mais tu vas aussi apprendre par cœur les exemples ?

M : Oui... Non ! Les exemples, c'est pas souvent que je les apprends par cœur.

C : Donc... Est-ce que les exemples, ça veut dire que c'est moins important ou... ?

M : Pour moi les exemples, j'apprends que… j'apprends que les exemples qui sont pas très longs, parce que longs, ça me dérange de faire x plus 3 fois x plus 4 plus 3 plus 6 plus 8…

C : Donc tu apprends pas les exemples par cœur.

M : Les exemples très longs, non.

C : Bon. Tu m'as dit… 'fin, je pense que tu as déjà à cette question… Quand tu ne comprends pas quelque chose, qu'est-ce que tu fais ?

M : Ben je demande à mes parents.

C : Tu demandes à tes parents.

M : Ou sinon, si je suis… si j'ai cours le lendemain, je vais voir madame H1 et je peux lui demander.

C : Hm, tu poses la question à madame H1. Est-ce que madame H1 met à ta disposition des documents, des fiches ou des vidéos… qui t'aident à réviser… pour t'aider à réviser le contrôle ?

M : En cours ?

C : En cours… 'fin, chez toi… 'fin, est-ce qu'elle t'en donne en cours pour réviser chez toi ?

M : Chez moi… non. Mais je sais que si je lui demande, elle peut m'en donner.

C : Hm hm. Mais elle vous en donne pas spontanément, tu n'as pas de fiches de révisions ou…

M : Si, elle nous fait, de temps en temps, mais c'est rare.

C : D'accord. C'est déjà arrivé mais c'est rare. OK. Bon. (Silence.) Je crois que je t'ai posé toutes les questions… Je t'ai demandé si l'évaluation ressemblait à ce que vous faites en classe, tu m'as dit… Non ? Je ne t'ai pas demandé, ça ? Est-ce que l'évaluation, globalement, ressemble à ce que vous faites en classe ?

M : Répétez, s'il vous plaît ?

C : Est-ce que l'évaluation, le contrôle, ça ressemble à ce que vous avez fait en classe ? Est-ce que les exercices, par exemple…

M : Oui… Pas tous, mais quelques-uns, oui.

C : Pas tous… Y en a qui sont très différents ?

M : Ils sont… là… ceux qu'on n'a pas faits en classe… et ceux qu'on a faits en classe, des fois, la prof, madame H1, elle approfondit ce qu'on a fait en classe. Elle rajoute quelque chose, ou…

C : Et ces exercices-là, tu arrives à les réussir, ou pas ?

M : Oui. Parce qu'après, elle nous explique tout pendant le contrôle.

C (étonné) : Ah, pendant le contrôle, madame H1 vous aide ?

M : Oui. Et dès qu'on comprend pas quelque chose, on lève la main, elle vient.

C : Et elle vous donne des indications ?

M : Oui. (Souriant) Même des fois, elle est gentille, elle nous donne les réponses.

C (rires) : OK. Très bien. Et bien écoute, Mehdi, je te remercie.

l. Entretien avec Vincent

Pour diverses raisons (un mouvement de grève chez les enseignants, la difficulté à interroger les élèves en dehors de la classe, les contraintes du chercheur, la disponibilité du matériel d'enregistrement, ...), Vincent a été interrogé le matin du jour de l'évaluation. Par conséquent, les questions ont directement portées sur la façon dont il a préparé cette évaluation, sans observation de ses actions avec une caméra. D'ailleurs, Vincent n'a pu être enregistré que de manière audio et non visuelle. (Même chose pour l'entretien suivant, avec Tamara).

Chercheur : Bonjour Vincent.

Vincent : Bonjour.

C : Tu as un contrôle cet après-midi en mathématiques. Est-ce que tu as révisé ?

V : Euh oui, j'ai révisé.

C : Oui, hier, tu as révisé, OK (C dispose de cette information, car V la lui a fournie avant le début de l'enregistrement.) Donc on va parler un petit peu de... de comment tu révises contrôles. Habituellement, tu passes combien de temps à réviser un contrôle de mathématiques ?

V : Environ trente minutes.

C : Trente minutes pour réviser. Tu révises régulièrement, tu révises longtemps avant ?

V : Euh le soir, et peut-être la veille... 'fin la veille...

C : La veille au soir ?

V : Ouais, c'est ça.

C : D'accord. Donc on va dire, généralement, un jour avant, tu révises le contrôle.

V : C'est ça.

C : Alors explique-moi un peu ce que tu as fait hier, puisque tu as révisé hier, pour ton contrôle de mathématiques de cet après-midi.

V : Euh ben j'ai juste euh... lu mes leçons...

C : (qui a mal entendu) Tu as allumé le son ? ? ?

V : Non, lu mes leçons.

C (rires) : Ah ! « Lu mes leçons », d'accord !

V (rires)

C : Donc tu as lu tes leçons et euh… d'accord. Comment tu as lu tes leçons ? Explique-moi.

V : Ben je l'ai lue… j'ai… je sais plus trop.

C : D'accord… Alors, « lire », ça veut dire quoi ? Est-ce que tu as lu… de haut en bas ? une fois, deux fois, quatre fois ? Est-ce qu'il y a des passages où tu as lu… euh, où tu t'étais attardé un petit peu plus parce qu'ils étaient un petit peu plus importants, et d'autres que tu as lus plus rapidement ? Explique-moi un peu comment tu as travaillé ta leçon.

V : Bah j'ai pris plus de temps sur les conclusions et euh… les exemples.

C : Les conclusions… ? Alors, c'est quoi une conclusion, par exemple ? Tu peux me montrer ?

V : Euh… Ben c'est-à-dire, ça… ça résume le cours…

C : Ah, vous avez des conclusions dans le cours ?

V : Euh, oui, des fois. (Il feuillette son cahier de leçons)

C : Oui, je veux bien que tu me montres… cette histoire de conclusion.

V (cherche dans son cahier de leçons) : En fait, sur cette leçon… ben y en a pas… Mais des fois, y en a.

C : D'accord, donc là, tu n'as pas lu de conclusion finalement… Tu as lu… tu m'as dit… hormis les conclusions… ?

V : Les exemples.

C : Les exemples. Alors pourquoi est-ce que tu t'intéresses aux exemples ?

V : Parce que ça montre… ça montre, simplement.

C : Ca montre quoi ? (Silence.) Explique-moi.

V : Ca montre la leçon… 'fin c'est-à-dire, ça…

C : C'est-à-dire ?

V : Ca…

C : Ca illustre ?

V : Ouais, c'est ça.

C : Ca illustre et… ça t'aide à comprendre la leçon ?

V : Oui.

C : OK, donc les exemples, tu dis, parce que ça illustre la leçon. Par exemple – justement, parce qu'on parle d'exemple – montre-moi un exemple qui t'a servi ou sur lequel tu t'es appuyé.

V (feuillette encore son cahier) : Par exemple, ici.

C : Oui, donc un exemple « développer ». Ca, ça t'aide à comprendre quoi ?

V : Ben comment... (pour lui-même) Comment ça s'appelle ? (De nouveau, au chercheur) Ben comment on distribue, en fait.

C : D'accord... OK. Alors selon toi, qu'est-ce que madame H1 attend que tu fasse pour réviser ou pour préparer un contrôle ?

V : Euh... ben apprendre mes leçons... revoir ses exercices...

C : Apprendre les leçons et revoir les exercices. Alors tu m'as dit justement, t'as pas... alors tu m'as pas dit « j'ai appris ma leçon », tu m'as dit « j'ai relu ». Alors ça veut dire quoi, « apprendre » ? Qu'est-ce qu'elle entend, madame H1 par « apprendre » ?

V : Ben c'est-à-dire comprendre la leçon, savoir ce qu'il faut faire.

C : Comprendre la leçon, savoir ce qu'il faut faire... D'accord. Et « revoir les exercices » ? Qu'est-ce que ça veut dire ? Est-ce que tu l'as fait ?

V : Non, ça j'ai pas fait.

C : Non ? Pourquoi tu l'as pas fait ?

V : Parce qu'après, faut que je retrouve mes exercices, etc.

C : Ah oui, donc la dernière fois, je me souviens, tu avais dit que tu avais du mal, un petit peu, à chercher les exercices dans ton cahier, donc là, pour euh... quand madame H1 te dit de revoir les exercices, tu le fais parce que t'as du mal à... à les retrouver, c'est ça ?

V : C'est ça.

C : Et d'après toi, qu'est-ce que ça voudrait dire, « revoir les exercices », pour madame H1 ?

V : Ben les exercices qu'on a faits en classe, pour les revoir et...

C : Alors ça veut dire quoi, « les revoir » ? C'est le mot « revoir » que je ne comprends pas bien. Est-ce que ça veut dire « les lire » ? Est-ce que ça veut dire « lire la correction » ? Est-ce que ça veut dire « les refaire » ? Est-ce que ça veut dire « en faire d'autres » ? Tu vois, il y a plusieurs choses dans « revoir », peut-être ? Qu'est-ce que toi, tu comprends par « revoir » ?

V : Lire la conclusion.

C : La conclusion ? Il y a une conclusion aussi, dans les exercices ?

V : Non, pas une conclusion, mais euh... la correction, quoi.

C : La... la correction. Alors comment madame H1 aimerait que vous vous serviez de cette correction ?

V : C'est-à-dire ?

C : Ben tu me dis « madame H1 nous dit de revoir les exercices », et pour toi, « revoir les exercices », c'est regarder la… 'fin, c'est utiliser la correction. Je ne sais pas encore comment, justement… Donc je te pose la question. Comment tu utilises cette correction ? Enfin, tu le fais pas, toi, mais, qu'est-ce que selon toi, madame H1… attend ?

V : Ben c'est essayer de comprendre. C'est-à-dire de comprendre l'exercice.

C : De comprendre l'exercice… à partir de la correction ?

V : C'est ça.

C : C'est ça. Bon… Alors comment tu fais pour décider si tu es prêt pour l'évaluation ? Est-ce qu'il y a un moment où tu te dis « ça y est, je suis prêt », ou bien euh… « je suis pas prêt » ? Qu'est-ce qui te décide ?

V : Bah… je sais pas.

C : Tu sais pas trop ?

V : Franchement, je sais pas.

C : Y a pas un moment où tu te dis « bon, là, c'est bon, je suis prêt » ? Ou au contraire, un moment où tu te dis « bon, j'ai révisé, mais je suis pas prêt » ?

V : Ben… quand j'ai bien appris.

C : Hm hm. Comment tu sais que t'as bien appris ?

V : C'est-à-dire… ben quand tu relis plusieurs fois, que tu t'entraînes, c'est bon.

C : J'ai pas entendu ?

V : Quand tu t'entraînes… avec la leçon.

C : Alors comment tu t'entraînes avec la leçon ? Parce que moi, dans ma… 'fin, quand tu me dis « je m'entraîne », je sais pas trop ce que ça veut dire. Tu t'entraînes sur quoi ? avec quoi ?

V : Tu fais l'ex… tu fais les exercices où euh…

C : Mais tu m'as dit que tu ne l'utilisais pas, le cahier d'exercices… ?

V : Oui, mais en faire, mais pas par le cahier d'exercices…

C : Ah ! Alors, tu en fais, mais sans utiliser le cahier d'exercices. Tu en as fait, hier ?

V : Euh oui, j'en ai fait.

C : Oui ? Lesquels ?

V : Euh… ben en fait, euh… j'invente. C'est pas marqué.

C : Ah ! Tu inventes ! Et comment tu inventes ces exercices ?

V : Ben euh… je sais pas.

C : Comme ça ? (C claque des doigts.)

V : (rires) Ouais, c'est ça.

C : Y a pas… tu n'as pas… tu n'as pas une source d'inspiration ?

V : Ben si, avec la leçon.

C : (content de commencer à comprendre ce que V semble avoir des difficultés à expliquer) Ah ! Alors par exemple, de quoi tu te sers dans la leçon pour inventer ces exercices ? Sur quoi tu t'appuies ?

V : Sur l'exemple.

C : Sur l'exemple, d'accord ! Et comment tu fais ? Tu reprends le même exemple ?

V : Non.

C : Non ? Qu'est-ce que tu fais ?

V : Je change des chiffres ou euh… les lettres.

C : Tu changes… Est-ce que tu pourrais, justement, me donner un exemple ? (C cherche un morceau de papier) Tiens, j'ai pas de… tu as un stylo ?

V : Euh non, j'en ai pas.

C (ayant trouvé du matériel) : Alors vas-y, montre-moi, qu'est-ce que c'est un exemple de… invente-moi un exemple comme tu as fait hier.

V (écrit sur le papier et le tend à C)

C : Donc, tu m'as mis « x plus 3 entre parenthèses fois… x plus 4 entre parenthèses. » ($(x + 3) \times (x + 4)$) (C se rend compte qu'il s'agit de l'exemple du cours) Mais ça, c'est le même exemple que…

V : Ah oui !

C (rires)

V (rires) : Oui, j'ai pas fait attention ! (V corrige)

C : D'accord. x plus 4 et… 'fin, x plus 4 fois x plus 6 ($(x + 4) \times (x + 6)$). Y a juste ces deux nombres (C montre le 4 et le 6) qui peuvent varier, là ? Le 4 et le 6 ? Y a que ça que l'on peut changer ?

V : Non, non.

C : Qu'est-ce que tu pourrais changer d'autre ?

V : Euh… les lettres ou les signes. Je peux mettre un multiplié.

C : Alors vas-y, donne-moi un autre exemple, mais tu changes pas ces chiffres, tu changes autre chose. (V modifie son exemple et le présente à C) OK, donc là, tu m'as mis x mois 4 fois x moins 6. OK. Alors du coup, j'en reviens à ma question : comment tu fais pour décider si tu es prêt ou pas ? Tu dis « quand j'ai bien appris » ?

V : Ouais, c'est ça.

C : Et alors comment tu sais que tu as bien appris ?

V : Ben en relisant plein de fois la leçon, etc.

C : Et y a des moments où tu te sens pas prêt ?

V : Oui, à des moments, quand j'ai pas très bien compris quelque chose.

C : Quand t'as pas très bien compris quelque chose. Et hier, tu as tout compris ?

V : Euh oui.

C : Là, tu dirais que tu es prêt pour l'évaluation.

V : Ouais, je pense.

C : Tu penses. Bon. Quand tu as des difficultés pour préparer une évaluation, qu'est-ce que tu fais ?

V : J'appelle ma sœur ou ma mère.

C : Hm hm. T'appelles ta sœur ou ta mère, et qu'est-ce que tu leur demandes ?

V : Euh bah... pour qu'elles m'expliquent.

C : Pour qu'elles t'expliquent ce que tu n'as pas compris ?

V : C'est ça.

C : Et qu'est-ce qu'elles font, dans ce cas-là ?

V : Ben... je sais pas... elles m'expliquent... ce qu'il faut faire.

C : Elles t'expliquent... oralement ? Elle te font faire des exercices ?

V : Oralement.

C : Oralement essentiellement. De façon générale, est-ce que tu trouves que l'évaluation que vous avez en classe, elle ressemble à ce que vous avez fait durant le chapitre ? Avec madame H1, en classe.

V : Euh... des fois oui... des fois non... 'fin, y a quelques trucs...

C : Alors « des fois oui, des fois non »... c'est-à-dire ?

V : Ben des fois... 'fin c'est-à-dire oui, il y a des choses de la leçon.

C : Donc dans le contrôle, tu retrouves des « choses de la leçon ».

V : Oui. Quasiment tout, sauf des fois, y a quelque chose d'autre.

C : Et c'est... donc... ça veut dire quoi, « quelque chose d'autre » ? Quelque chose que vous n'avez pas du tout vu ?

V : Si, on a vu, mais vite fait.

C : Donc dans le contrôle, parfois, y a des exercices... que vous avez faits en classe, mais « vite faits ». C'est-à-dire, « vite faits » ?

V : Par exemple, la dernière fois, c'était sur la géométrie... on avait... ben quelque chose... ben en maths, en fait... comment dire... 'fin, c'étaient des calculs. (V confond « maths » et « numérique » apparemment)

C : Donc oui, c'étaient des calculs en géométrie, et ? Ca ressemblait pas à ce que vous aviez fait en classe ?

V : Si, si, si.

C : Si… mais ?

V : Mais on n'a pas appris à en faire beaucoup.

C : Vous vous êtes… vous n'avez pas fait beaucoup de fois ce type d'exercices, tu veux dire ?

V : C'est ça.

C : C'est ça. Donc… Si je comprends bien… dans le contrôle, il y a, pour toi, des exercices qui ressemblent à ceux que vous avez faits en classe, en tout cas, des types d'exercices que vous avez souvent faits en classe, et puis, parfois, il y a des exercices, des types d'exercices, que vous n'avez pas beaucoup faits en classe. C'est ça ?

V : C'est ça.

C : OK. Est-ce que madame H1 a mis à ta disposition des fiches de révisions, ou des documents, ou des vidéos, voilà, ce genre de choses pour t'aider à préparer cette évaluation.

V : Non.

C : Non ? Dans votre cahier d'exercices, dans votre cahier de leçons, vous n'avez pas une petite fiche de révisions, une fiche bilan ?

V : Non, on n'a pas ça, on n'a pas de fiche de révision.

C : Vous n'avez pas ça. D'accord. Et tu aimerais en avoir une, tu penses que ça t'aiderait ?

V : Euh oui, je pense.

C : Bon. OK, je te remercie Vincent. Et… qu'est-ce que tu penses qu'il y aura au contrôle, cet après-midi ? Ca, c'était la question qu'il fallait que je pose.

V : Euh, sur la… comment ça s'appelle ? (V cherche dans son cahier de leçons)

C : Vas-y, dis-moi. À ton avis, y aura quoi comme types d'exercices ? Sur le calcul littéral, hein.

V : La distributivité.

C : Y aura distributivité…

V : Et la double distributivité.

C : Et la double distributivité.

V : E c'est tout, je pense.

C : Il n'y aura que ça ?

V : Oui.

C : OK. Bon, bah très bien.

m. Entretien avec Tamara

Mêmes remarques que pour Vincent, sauf que Tamara n'a pu être interrogée qu'après l'évaluation.

Chercheur : Bonjour Tamara.

Tamara : Bonjour.

C : Donc vendredi dernier, tu as eu un contrôle de mathématiques, et je vais t'interroger sur la façon dont tu as travaillé ce contrôle de mathématiques. Alors tout d'abord, est-ce que, habituellement, tu prends du temps pour réviser les contrôles, et combien de temps avant ?

T : Ben habituellement, je révise pas spécialement les contrôles. Et si je le fais, je vais peut-être prendre… une bonne heure pour… pour réviser.

C : Donc… habituellement, tu ne révises pas, mais quand tu révises, tu prends une bonne heure ? Pourquoi ?

T : Ben en fait, les matières où je suis plus ou moins en difficulté, et que je sens que j'ai pas compris et que j'ai besoin de réviser, ben je vais réviser pendant une heure, une heure et demie, et celles où je pense que ça va aller, je vais ouvrir vite fait le cahier, ou sinon je ne révise pas du tout.

C : D'accord. En l'occurrence, pour le dernier contrôle de mathématiques, tu n'as pas du tout révisé, c'est ça ? Même pas ouvert le cahier ?

T : Si.

C : Si, quand même ? Alors, quel cahier, et qu'est-ce que tu as fait avec ce cahier ?

T : Cahier de leçons… et euh… j'ai révisé la leçon… et j'ai refait un exercice vite fait.

C : D'accord. Alors quand tu dis « j'ai révisé la leçon », qu'est-ce que ça veut dire ?

T : Ben je la relis.

C : Hm hm. Tu la lis une première fois, tu la lis plusieurs fois ?

T : Je la lis plusieurs fois.

C : Plusieurs fois. Est-ce qu'il y a des passages sur lesquels tu t'attardes ? Si tu veux, tu peux reprendre ton cahier de leçons pour te souvenir. Est-ce qu'il y a des passages sur lesquels tu t'attardes, ou est-ce que tu lis tout de la même façon ?

T : Je lis tout de la même façon.

C : D'accord. Il n'y a pas de choses que tu considères comme plus importantes dans la leçon que d'autres, ou qui t'aident à réviser un petit plus que d'autres ?

T : Euh non. À part quand y a marqué en rouge, les remarques, ou des choses du genre, ben là, je vais essayer de m'en rappeler.

C : D'accord. Donc tu prêtes un petit plus d'attention à ce qui est écrit en rouge parce que c'est ce qui est plus important pour toi.

T : Hm.

C : OK. Et tu m'as dit que tu as « refait » un exercice... Alors, comment tu l'as choisi cet exercice, et comment tu l'as refait ?

T : Ben... ben j'ai pris... ben... des fois, madame H1, elle donne des exercices à refaire... pour s'entraîner au contrôle. Si elle les a donnés, ben je les fais... sur une feuille et je mets mon cahier de maths sur le côté...

C : Oui ?

T : Ou sinon, ben je prends un exercice au hasard, qui est sur la même notion, ou un exercice qu'on a déjà fait en classe.

C : D'accord. Alors tu dis « je prends un exercice sur la même notion ». Donc l'exercice, tu ne le choisis pas complètement au hasard, c'est ça ?

T : 'fin, c'est un exercice qu'on n'a pas fait.

C : D'accord. Tu... En général, quand tu prépares, quand tu le fais, hein, quand tu révises, rarement, un contrôle de mathématiques, et que tu refais un exercice, ta méthode pour choisir cet exercice, c'est quoi ? Tu peux me le rappeler ou me le résumer ?

T : Ben j'en ai pas. Je prends juste un exercice qu'on n'a pas fait en cours. Et si je vois que c'est trop compliqué parce qu'on l'a pas fait, je vais prendre un exercice qu'on a déjà fait, sauf que je vais... je vais pas prendre mon cahier parce qu'il y a la correction dedans, je vais... je vais essayer... je vais le faire toute seule pour réfléchir et ensuite je vais prendre mon cahier pour regarder la correction qu'on avait fait en cours, et je vais regarder où sont mes erreurs pour essayer de les corriger.

C : OK, donc tu utilises la correction de l'exercice que vous aviez déjà fait mais une fois seulement que tu as fait l'exercice toute seule sans regarder cette correction. C'est ça. Mais... tu fais un seul exercice, mais dans un chapitre, euh... est-ce qu'il y a un seul type d'exercices ?

T : Non, y en a plusieurs.

C : Y en a plusieurs. Alors du coup, en en faisant un seul, est-ce que tu rates pas des exercices ?

T : Ben... Exemple : sur le chapitre où on a révisé la distributivité, ben je vais faire un... un exercice sur la distributivité simple, un sur la double.

C : Ah ! Donc finalement, tu ne fais pas qu'un seul exercice !

T : Ben je fais un exercice sur la notion qu'on a vue. Donc si on a vu six notions, ben je vais faire six exercices.

C : Ah OK ! Ben j'avais pas compris ça comme ça, moi. Je croyais que tu avais simplement fait un exercice. Toi, tu fais un exercice par notion, ce que tu appelles des « notions ». Alors justement, sur ce chapitre sur le calcul littéral, m'en as donnée deux, c'est ça, distributivité simple, distributivité double, est-ce qu'il y avait d'autres notions ou pas ?

T : Non.

C : Non ? Bon.

T : Euh, y avait les fractions.

C : Alors les fractions, du coup, c'est pas du calcul littéral. Donc distributivité simple, distributivité double. OK, donc selon toi, pour réussir cette évaluation, il était important de préparer ces deux notions. Euh... Qu'est-ce que madame H1, elle attend de toi, quand tu révises un contrôle chez toi ?

T : Je sais pas.

C : Tu ne sais pas ? Elle ne vous a rien dit que la manière de réviser un contrôle à la maison ? Elle ne vous a pas donné de conseils ?

T : Ben je m'en rappelle pas.

C : Tu t'en rappelles pas spécialement. Et tu n'as pas une idée ? Qu'est-ce que madame H1 aimerait que tu fasses pour préparer une évaluation en mathématiques ?

T : J'en sais rien.

C : T'en sais rien du tout. Bon. OK. Comment tu fais pour décider si tu es prête pour l'évaluation ? Par exemple, la dernière fois où tu as un tout petit peu révisé, tu m'as dit que t'avais ouvert ton cahier de leçons, t'as fait quelques exercices, donc... à quel moment tu t'es dit « ça y est, je suis prête » ? (Silence.) Tu t'es jamais dit « je suis prête » ? Non ? Tu te sentais peut-être déjà prête ? Tu sais pas ? Bon. Et habituellement, non plus, tu n'as pas de critères pour te dire « là c'est bon, je suis prête », « j'ai suffisamment travaillé »... ?

T : 'fin si, je sais que... Déjà, en cours, j'ai compris la... les notions et les termes à aborder, et direct savoir les exercices qu'on devait faire à la maison... ben je vois pas l'intérêt de réviser. À la limite, je vais regarder vite fait mon cahier avant de faire le contrôle, sinon je vais pas réviser. Mais si je vois que j'ai un peu galéré pour les exercices, je vais réviser, je vais refaire tous les exercices, mais j'ai toujours un petit doute avant de faire le contrôle, et je galère.

C : Et tu « galères »... C'est-à-dire ?

T : Ben... en fait... Peut-être que j'ai la bonne réponse, mais sauf que j'ai un doute, je suis pas sûre d'avoir la bonne, donc soit je vais pas faire, soit je vais mettre n'importe quoi… ou je vais barrer la réponse que j'avais mis alors qu'elle était juste.

C : D'accord. Donc ça m'amène à poser la question suivante : est-ce que dans l'évaluation, en général en mathématiques, tu trouves que les exercices qui sont demandés, ou les questions de cours, ça ressemble aux exercices que vous aviez faits en classe ou au cours que vous aviez fait en classe ?

T : Ben… en fait… sur les contrôles en général, je trouve pas, mais sur le dernier qu'on a fait, j'ai trouvé qu'il y avait certains calculs dans les exercices qu'on devait faire, ben je les ai trouvés compliqués. Donc j'ai fait tout le contrôle et ensuite il me restait que le dernier… le premier exercice tout au début, j'ai tout fait sur le premier et y avait un calcul, je bloquais, j'y arrivais pas.

C : D'accord… mais du coup, j'ai pas bien compris ta réponse à ma question qui était « est-ce que ça ressemblait à ce que vous aviez fait pendant le cours ou pas » ?

T : Ben en fait… sur… sur certains contrôles où ça ressemble, c'est plutôt facile, mais sur le dernier contrôle qu'on a fait, ben je trouvais… y avait des parties ça ressemblait, et d'autres… le concept, il était le même, mais les calculs, ils étaient difficiles donc j'avais pas l'impression que c'était la même chose qu'en cours.

C : Et… c'était plus difficile qu'en cours ?

T : En général non, mais y en avait par exemple un ou deux qui étaient difficiles et je bloquais dessus.

C : Donc il y avait un ou deux exemples qui étaient plus difficiles que ce que vous aviez fait en classe. Et ça, c'est en général ? Est-ce que dans les autres évaluations aussi, tu trouves que… y a toujours un ou deux exercices, ou une ou deux questions qui sont plus difficiles ou que vous n'avez… pas vraiment traités comme ça dans le cours ?

T : Non.

C : Non. Donc la plupart du temps, tu trouves quand même que ça ressemble.

T : Oui.

C : OK. Si je reprends tes mots – tu me dis si je me trompe, hein, parce que là, j'essaie d'interpréter – tu retrouves dans l'évaluation des « notions », ces fameuses notions dont tu me parles, que vous aviez traitées en classe, tu les retrouves dans le… le contrôle.

T : Oui.

C : D'accord. OK. Quand tu es en difficulté pour réviser un contrôle à la maison, qu'est-ce que tu fais ?

T : Ben je vais regarder sur Internet. Ou sinon je vais demander l'aide d'un adulte.

C : D'accord. Tu me l'avais déjà dit, je crois, lors de notre premier entretien, tu regardes sur Internet, tu tapes « exercices corrigés sur la distributivité niveau quatrième », c'est ça ?

T : Hm.

C : Voilà. D'accord, OK, donc ça, c'est que tu fais quand tu es en difficulté. Tu le fais même pour préparer une évaluation ? Ca peut t'arriver ? Non, pas spécialement. C'était plutôt entre deux cours, ça, c'est ça ? Le soir, quand tu comprenais pas. OK. Est-ce que madame H1 met à ta disposition des documents, des fiches, des fiches de révisions, des fiches d'exercices, ou bien des vidéos, pour t'aider à préparer l'évaluation chez toi ?

T : Elle nous donne des exercices à faire pour nous aider.

C : Des exercices supplémentaires ?

T : Ouais. Par exemple… elle nous dit « refaites l'exercice 4, parce que dans le contrôle, y aura un exercice similaire ».

C : D'accord. Et… mais ça, elle vous le dit ?

T : Oui, on le note comme devoirs.

C : Ah, vous le notez.

T : On le note dans le cahier de textes, y a ceux qui veulent, ils le font, et ceux qui veulent pas, bah ils le font pas.

C : D'accord. Et toi ? Qu'est-ce que tu fais ?

T : Ben je vais faire l'exercice.

C : Ah, donc tu vas quand même le faire, même si tu l'avais réussi ou si tu avais compris ?

T : Hm. (« oui »)

C : Bon. (Souriant) Donc finalement, tu travailles un peu pour réviser un contrôle ! Tu m'as dit « je révise pas beaucoup, voire pas du tout pour certains contrôles », mais de ce que tu me dis, j'ai l'impression que tu fais pas mal de choses ! Tu utilises ce que madame H1 vous a donné pour…

T : Ben en fait, ça dépend… ça dépend des cours. Si j'ai pas vraiment compris le cours, ben je vais refaire les exercices ; si j'ai compris, ben je les fais pas.

C : D'accord, OK. Bon là, en l'occurrence, pour le calcul littéral… ?

T : Ben j'ai rien fait.

C : T'as rien fait du tout ? Ben tu m'as pas dit que t'avais refait un exercice sur la distributivité simple et sur la distributivité double ?

T : ‘fin, j’ai juste refait l’exercice, mais sinon, à part ça, j’ai rien fait.

C : D’accord, mais c’est pas…

T : ‘fin, c’est un exercice que je fais quoi… en dix minutes ! Dix, quinze minutes ! C’est pas… Je vais pas prendre une heure pour réviser comme dans certains chapitres.

C : Tout ce que tu fais m’intéresse, Tamara, (rires) pour réviser le contrôle, donc même si pour toi, c’est n’est rien de refaire un exercice, faut que tu m’en parles, OK ? D’accord ? Donc tu n’as pas rien fait, c’est ça que je veux dire. OK. Bon, je crois que je t’ai posé toutes les questions, donc je te remercie.

Transcriptions des entretiens avec les élèves de M2 (8 janvier 2016), préparation d’une évaluation sommative

n. Entretien avec Daouda

Chercheur : Daouda, tu as un contrôle mercredi prochain en mathématiques. Je te laisse dix minutes, tu révises comme si tu avais contrôle, on va dire, demain. Je sais, dix minutes, c’est pas beaucoup, mais on n’a pas beaucoup de temps. Donc je te laisse 10 minutes pour réviser, tu fais comme si tu avais contrôle demain, et après je te demande comment tu as travaillé. OK ?

Daouda : Oui.

C : Et bien entendu, comme la dernière fois, tout ce que tu diras, je ne le répèterai pas, même à monsieur M2. D’accord ?

D : D’accord.

Le chercheur s’éloigne et s’assoit sur un bureau, laissant Daouda seul devant la caméra. Daouda sort son cahier de leçon. Après l’avoir brièvement feuilleté, il s’arrête sur une page et commence à lire. Durant la quasi-totalité des dix minutes, il ne fait rien d’autre : il lit, et relit sa leçon (il revient en arrière à deux reprises), sans ouvrir son cahier d’exercices ou son manuel, sans rien écrire. La lecture a l’air assez linéaire : les yeux de Daouda semblent parcourir chaque page de haut en bas, puis une fois arrivés en bas, passent au haut de la page suivante. Lorsque les dix minutes sont presque écoulées, il lève quelques secondes les yeux en l’air, souffle dans le micro (pour s’amuser, visiblement), puis prend son stylo et se met à dessiner dans un coin de son cahier de leçon, en attendant la fin des dix minutes.

Chercheur (revenu devant Daouda une fois les dix minutes écoulées) : Bon, ça fait à peu près dix minutes. Je sais, c'est très très court, mais…

Daouda : Non c'est bon, j'ai fini depuis tout à l'heure.

C (étonné) : Tu as déjà fini de réviser ton contrôle pour mercredi prochain ? !

D : Oui. Je savais déjà comment faire.

C : Tu savais déjà comment faire, bon… Alors dis-moi, Daouda, d'habitude, tu passes combien de temps, en moyenne, pour réviser un contrôle ?

D : Si… Si j'ai du mal à comprendre, vingt minutes.

C : Et sinon ?

D : Si j'arrive complètement, cinq minutes… Cinq ou dix minutes… Cinq à sept minutes.

C : D'accord. Quand tu révises un contrôle, tu révises combien de temps à l'avance, généralement ?

D : Juste… euh…

C : La veille ? Cinq jours avant ? Trois semaines avant ?

D : Je dirais plutôt… plutôt… la veille.

C : La veille. À peu près uniquement la veille, tu révises le contrôle. C'est sur combien de temps, le contrôle ? Tu dois réviser combien de… de semaines à peu près, ou combien de jours généralement pour préparer un contrôle… ?

D : Pour préparer un contrôle, euh… Trois jours… Trois ou quatre jours… à l'avance.

C : Non, mais le… Ce que je veux dire, c'est que… le chapitre que tu as à réviser, ça fait combien de temps, généralement, avant le contrôle, qu'il existe ? D : Une semaine ? (Il semble ne pas comprendre la question qui, il est vrai, est très mal formulée…)

C : Monsieur M2 vous interroge généralement sur un chapitre qui dure à peu près une semaine ? C'est ça ? Selon toi.

D : (hoche la tête pour approuver)

C : OK. Bon, explique-moi un peu ce que tu as fait pendant ces quelques minutes… où je t'ai laissé tout seul… pour réviser.

D : Ben j'ai révisé… j'ai relu tout… tout ce chapitre (il montre trois pages de son cahier de leçon avec son stylo). Il fait trois pages et j'ai relu tout ça plusieurs fois. Et euh… voilà, quoi. Après, je reste pas sur euh… sur une phrase, à répéter, répéter sans cesse… Moi je suis plutôt… je suis plutôt en train de relire. Je relis, je relis, je relis plusieurs fois le chapitre, après je commence à comprendre.

C : D'accord. Quand tu dis que tu relis, ça veut dire que… tu lis du début à la fin ?

D : Je lis du début à la fin.

C : D'accord. Tu as pas une certaine méthode, pour lire ?

D : Avant je… Avant je restais sur… je restais sur l'exemple, juste je relis l'exemple, l'exemple, plusieurs fois. Après c'est… Après j'avoue, je réussissais plus facilement, mais… Je préfère relire, relire, relire et… comme ça… comme ça, je comprends mieux. Je comprends mieux quand je relis, quand je relis tout directement.

C : D'accord. Pourquoi tu t'intéresses spécialement à l'exemple ?

D : Parce que c'est de cette manière que je peux mieux comprendre. Après y a la définition ou… la définition ou autre mais… je préfère l'exemple.

C : L'exemple, ça t'aide mieux à comprendre, tu dis. Pourquoi ça t'aide mieux à comprendre ?

D : Je sais pas (il sourit).

C : Par rapport à la définition, ou aux autres choses qu'apparemment, tu sembles ne…

D : Parce que c'est là où… où on fait les calculs, où il y a les calculs par rapport aux définitions, ça nous montre juste qu'est-ce qu'il faut faire.

C : Bon. Alors selon toi, qu'est-ce qu'il faut faire pour réussir l'évaluation ? Qu'est-ce qu'il est important de préparer ?

D : La définition. Parce que parfois, le prof, il laisse une petite définition… Définition et (il montre un exemple du cahier de leçon) les calculs.

C : Parfois, monsieur M2 pose des questions de cours, tu veux dire ? Des questions de leçon ?

D : Oui. Parfois.

C : Parfois, pas toujours ?

D : Non.

C : Non. Tu penses que la définition, tu dois l'apprendre par cœur ?

D : Euh… Oui, par cœur.

C : Pour pouvoir bien la réciter le jour du contrôle, c'est ça ?

D : (hoche la tête pour approuver)

C : Comment est-ce que tu fais pour savoir si tu es prêt pour l'évaluation ? Est-ce que tu fais quelque chose de particulier ?

D : Non.

C : Non ?

D : Non, parce que… je sais juste… je sais juste quand j'ai compris. Je comprends.

C : Et quand est-ce que tu sais que t'as compris ?

D : Bah… Quand je fais un exercice, si je le réussis plus facilement… que la première fois…

C : Mais là, je t'ai… Tu as refait des exercices, là ?

D : Non, mais ce matin, on l'a fait (Daouda fait référence à une séance de révision de mathématiques sur le contrôle et qui a eu lieu le matin même de l'entretien) et j'ai compris par rapport à… par rapport à il y a quelques jours.

C : Donc mardi prochain, qui sera la veille du contrôle, quand tu réviseras, tu vas relire encore la leçon, mais est-ce que tu vas faire des exercices ou pas ?

D : Euh… Non.

C : Non… Ceux que tu as faits ce matin, tu penses que ça suffit…

D : Oui.

C : D'accord. Si jamais tu ne comprends pas bien ou que tu as des difficultés, qu'est-ce que tu fais ?

D : Bah… Je demande un peu de l'ai… Je demande un peu de l'aide à… à mes amis… et parfois, et parfois j'ai juste à regarder qu'est-ce que j'ai fait à… pendant mes exercices. Je regarde mes exercices, comment j'ai fait, plutôt la correction… et euh… après j'essaie de… de refaire la même chose avec d'autres… d'autres méthodes… D'autres calculs, pardon.

C : Comment tu les choisis, ces calculs ?

D : Bah, euh…

C : C'est des calculs du livre ou des calculs que vous avez faits en classe ?

D : Je choisis les exercices qu'on n'a pas faits dans le livre.

C : Ah, tu travailles dans le livre avec des…

D : Parce qu'il y en a certains qu'on faits pas, on fait plus précisément.

C : Donc quand tu n'arrives pas bien, tu utilises le livre et tu fais des exercices qui, selon toi… Comment tu les choisis, ces exercices ?

D : Bah, j'ai juste à les choisir, ceux que… ceux qu'on n'a pas faits en classe.

C : Oui mais dans le livre, il y en a plein que vous n'avez pas faits, tu fais des exercices au hasard ?

D : Non. Ceux qui… Ceux qui… En fait, ceux qu'on doit faire, en quelque sorte.

C : Comment tu sais, ceux qu'on doit faire ?

D : Parce que… en fait, il y a… (rires) Je sais pas comment expliquer ! C'est ceux qu'on doit faire dans… En fait, c'est… Dans le chapitre, plutôt les calculs qu'on doit faire (il montre à nouveau l'exemple dans sa leçon), y en a qu'on les fait pas. Je sais pas comment l'expliquer, en fait, c'est ça le truc. (rires)

C : Ben là par exemple, imaginons, je te demande de prendre ton manuel et de choisir un exercice que tu vas refaire en admettant que tu aies des difficultés, je sais pas, moi… imaginons que tu aies des difficultés à… (le chercheur regarde le cahier de leçon de Daouda) qu'est-ce qu'il y a, ici ?

D : Calcul littéral.

C : Voilà, là, par exemple, (le chercheur pointe l'exemple sur lequel Daouda s'appuie depuis le début et qui est un type de tâches « calculer la valeur d'une expression littérale pour des valeurs données ») c'est quoi le but de l'exercice ici, qu'est-ce qu'il faut faire ? Explique-moi un peu.

D : Ici, il faut juste les… comment dire… en fait c'est… en fait c'est pas question de calculer, en fait… les… les rédui… en fait… on doit les réduire.

C : Tu dois réduire, ici, l'expression… ?

D : Oui.

C : Alors comment tu réduis ?

D : Bah j'ai juste à… j'ai juste à… (rires) j'ai juste à… je sais pas comment dire ! En fait je… en fait, il y a… un calcul… j'ai juste à les prendre, à les… simplifier, en quelque sorte. Je dois juste les simplifier.

C : Donc si je te demande de… Imaginons que tu aies des difficultés pour faire ça (le chercheur remontre l'exemple), et que je te dis… que tu me dis que… « je vais travailler dans mon manuel » des exercices, qu'est-ce que tu vas choisir, comme exercices, pour travailler cette difficulté ?

D : D'abord le plus facile. Pour moi, en quelque sorte. S'il est facile, pour moi.

C : D'accord.

D : Après j'essaierai avec le plus difficile.

C : Alors dans le manuel, il y a plusieurs exercices faciles, mais… quel type d'exercices tu vas choisir ? (le chercheur montre encore l'exemple de la leçon) Tu vas choisir un exercice qui ressemble à ça ?

D : Oui.

C : Oui, voilà, c'était ça ma question.

D : (souriant et apparemment soulagé de donner une réponse qui satisfait le chercheur) Ah, c'est ça ! (rires)

C : Non, non, mais j'attends pas de réponse, mais je me demandais... mais je pense que tu choisis un exercice qui ressemble...

D : Oui, qui ressemble à ça (il montre l'exemple). Chercheur : ... un exercice que tu n'as pas compris, d'accord, OK. Et tu as des facilités, à trouver ces exercices, ou parfois, tu n'arrives pas à trouver ?

D : Si, j'arrive à les choisir parce que... quand on fait nos devoirs, par exemple, il nous donne une page, par exemple.

C : Qui vous donne une page ?

D : Le prof.

C : Oui ?

D : Il nous donne une page et dans cette page-là, il y a les exercices. Et après, j'ai juste à les faire.

C : D'accord. Donc tu arrives à repérer, en fonction de la page et de l'exercice, le type d'exercices qui correspond.

D : (hoche la tête)

C : Est-ce que le professeur met à ta disposition des... des documents, des fiches, des vidéos, des... je sais pas... qui... pour t'aider à préparer l'évaluation chez toi ? Est-ce qu'il vous donne un document particulier ?

D : Non.

C : Non ?

D : Juste le cahier de leçon, qu'on écrit, pour mieux comprendre.

C : (qui sait que M2 a donné une fiche d'exercices qui ressemble à ce qui sera demandé en contrôle) Et ce matin, par exemple, tu m'as... tu m'as dit « j'ai révisé ce matin », mais ce matin, il vous a donné un document, non ?

D : Ce matin... Ah !

C : Qu'est-ce que vous avez fait ce matin ?

D : (souriant) J'ai oublié...

C : Tu peux prendre ton cahier d'exercices, si tu veux...

D : (prend son cahier) Ce matin, il nous a... Si ce matin, je pense, il nous a passé quelque chose. Ce matin, il nous a passé euh... une activité... (il trouve le document dont le chercheur parle). Si, il nous a passé une activité.

C : Oui, donc ça, cette fiche, est-ce qu'il vous en donne d'habitude, des fiches comme ça, ou pas, monsieur M2 ?

D : Oui.

C : Oui ? Et tu t'en sers, de cette fiche, pour réviser, ou pas ?

D : Oui.

C : Oui ? Comment tu t'en sers ?

D : Ben j'ai… j'ai juste à les reprendre et à les changer…. À changer les… les chiffres… ou les nombres, et après, c'est parti, je les fais.

C : Alors tu m'as dit, pour… (voyant que Daouda ferme son cahier) – laisse ton cahier d'exercices ouvert, c'est bien, comme ça – tu vois, dans le cahier d'exercices, t'as des corrections en vert, tu fais toujours ça ? Tu fais la correction en vert et le reste, c'est en noir, c'est ce que tu as écrit. Et quand tu utilises ton cahier d'exercices, tu me dis que tu refais des exercices du manuel, mais est-ce que tu refais des exercices que vous, vous avez déjà fait en classe ?

D : Non.

C : Non, tu ne refais jamais les exercices ? (Daouda fait « non » de la tête.) Tu ne relis pas, par exemple, la correction ? À quoi elle te sert, la correction, finalement ?

D : Pff… (il sourit). J'en sais rien, en fait.

C : (rires) Ah… C'est pour faire plaisir à monsieur M2, peut-être ?

D : Non, c'est juste… comme ça, mais… juste au cas où… mais ça sert à rien après, pour moi…

C : Ah, donc tu corriges, mais tu trouves que ça te sert à rien… Quand tu regardes le livre finalement, quand tu as un problème, tu te réfères plutôt au cahier de leçon, plus qu'au cahier d'exercices, c'est ça ? (Daouda fait « oui » de la tête.) Pourquoi ?

D : Parce que… je sais pas, je trouve que c'est mieux le cahier de leçon…

C : Et pourquoi c'est mieux ?

D : Je sais pas. (rires)

C : Parce que c'est un peu plus propre, peut-être ?

D : Hm.

C : Bon, OK.

o. Entretien avec Ryan

Chercheur : Ryan, tu as un contrôle mercredi prochain en mathématiques. Euh… Je vais te demander… Je vais te laisser seulement dix minutes – peut-être que c'est trop court mais on n'a pas beaucoup de temps – donc je te laisse dix minutes, tu fais comme si tu allais réviser ce contrôle pour mercredi prochain, en mathématiques. Alors je ne veux pas que tu révises la partie sur Thalès, mais tout le reste. D'accord ? Pour le contrôle… parce que le contrôle, c'est sur Thalès et sur… ?

Ryan : Chapitres 9 et 10 ?

C : Alors je ne sais pas ce que c'est, le chapitre 9 et 10, mais voilà, tu révises pas le… tu révises pas la partie Thalès, OK ?

R : D'accord.

C : Et euh… voilà, je te laisse dix minutes, avec la caméra, tout seul, et après je viendrai te poser des questions, OK ? Et tout ce que tu me diras, je ne le répèterai pas à monsieur M2 ni personne.

Le chercheur laisse Ryan seul. Ce dernier sort son cahier d'exercices et son cahier de leçon. Il commence par ouvrir son cahier de leçon, puis se met à le lire, de manière linéaire. De temps en temps, on l'entend lire à voix basse. La lecture semble durer environ 3min30s, après quoi, Ryan semble être arrivé au bout du chapitre sur le calcul littéral et ferme son cahier de leçon pour ouvrir celui d'exercices. Il cherche une page vierge, puis sort sa trousse, prend un stylo et se met à écrire des calculs. Peu après, il tourne les pages de son cahier d'exercices pour retrouver le document donné par M2 à la séance précédente (la fiche d'exercices pour le contrôle). Il le consulte quelques secondes, puis prend à nouveau son cahier de leçon. Il semble relire le début du chapitre sur le calcul littéral, puis tourne plusieurs pages : il a l'air de chercher un paragraphe précis de sa leçon. Il fait cela à une autre reprise, puis revient en arrière ; sa lecture ne paraît donc plus linéaire, contrairement à la première fois. Il annonce enfin qu'il a terminé de réviser. Le tout lui aura pris environ 8 minutes.

Chercheur (de retour devant Ryan) : Tu as fini ? Tu as révisé comme si demain, il y avait contrôle ?

Ryan : Hm, hm.

C : Alors Ryan, habituellement, tu mets à peu près combien de temps pour réviser un contrôle de mathématiques ?

R : De mathématiques, euh… je prends 15 minutes ?

C : 15 minutes. Tu révises combien de jours avant ?

R : Une journée, pas plus.

C : La veille, alors. (Ryan fait « oui » de la tête.) La veille, tu révises, et du coup, tu révises pas spécialement régulièrement avant le contrôle.

R : En fait, c'est en… J'écoute en cours pour que… pour qu'après, j'ai pas à revenir sur… sur les… les cours.

C : Le fait d'écouter, ça te permet, quelque part, de travailler régulièrement, c'est ça ?

R : Hm, hm.

C : D'accord.

R : De participer, aussi.

C : Oui, participer, oui, d'accord. Alors raconte-moi ce que tu as fait pendant ces quelques minutes où tu étais tout seul. Tu peux ouvrir tes cahiers pour m'expliquer un petit peu mieux si tu veux, pour réviser ce contrôle.

R : Euh... en fait j'ai regardé un peu ce qu'on avait à faire (il prend son cahier de leçon et le feuillette), j'ai vu qu'on avait que le chapitre 9, enfin je pense, parce que le chapitre 8, on l'avait déjà fait.

C : Parle un peu plus fort, pour qu'on t'entende bien.

R : Le chapitre 9...

C : Tu as révisé le chapitre 9.

R : Oui. Et euh... ben j'ai... j'ai lu, au tout début, j'ai lu. Ensuite euh... j'ai regardé... Par moment, je ne comprenais pas mais quand j'ai regardé, et ben je comprenais, et euh... ben j'ai révisé. Je regardais un peu les exemples. Euh... ensuite j'ai essayé d'appliquer... 'fin sur le cahier de... sur le cahier de... d'exer... de brouillon... et euh... voilà.

C : Bon, alors on va revenir sur deux choses. Euh... Quand tu dis « j'ai lu » ou « j'ai regardé », j'aimerais que tu sois un petit plus précis. Quand tu dis « j'ai lu », c'est-ce que tu lis tout d'un coup ? Est-ce qu'il y a des moments où tu t'attardais un petit peu ? Qu'est-ce que... tu penses qu'il est plus important dans... dans ce que tu lis ?

R : En fait je regarde plus principalement les définitions, 'fin je regarde, au tout début...

C : Ca veut dire quoi, « je regarde » ? « Je lis » ?

R : Oui. Au tout début, en fait, je lis la première page, juste je lis, je lis le premier paragraphe, ensuite euh... Pour mieux comprendre, en fait, j'essaie pas de... de faire du par cœur, j'essaie de comprendre, comprendre le sens pour qu'après, je me dise « voilà, c'est logique ». Donc euh... euh... j'essaie de comprendre, quand j'essaie de comprendre, ben je regarde après, juste après, l'exemple. Euh... Si j'arrive vraiment pas, j'essaie de faire du par cœur...

C : Si t'arrives pas à quoi ?

R : Si j'arrive pas à... à comprendre... J'essaie de faire du par cœur mot pour mot. Et euh... et après j'essaie d'appliquer sur euh... sur le cahier de maths, 'fin le livre... Et euh... ensuite, je regarde les définitions, ça, j'apprends par cœur, tout ce qui est en rouge, mais euh... par moment, en fait j'apprends pas, 'fin c'est pas j'apprends pas, c'est... j'apprends pas par cœur, je fais pas du par cœur, j'essaie juste de comprendre et de me dire que c'est facile, 'fin… et après, j'essaie de… d'appliquer, voir si j'arriverais, me poser des questions dans ma tête… et après, je relis, je relis, je relis, jusqu'à que ça vient.

C : C'est quoi les questions que tu te poses dans ta tête, par exemple ?

R : Par exemple, je me dis euh… combien ça ferait deux x fois deux, et pourquoi… pourquoi, x, ça remplace euh… 'fin, pourquoi en fait y a euh… pourquoi on ferait ça, et pourquoi ce serait pas moins ? 'fin je me dis, en fait des fois, j'hésite, quand c'est par exemple euh… 2-3… J'hésite à faire -1 ou 1, ça dépend en fait, et des fois, après, je re… je réfléchis et euh… quand euh… quand le prof, il a dit euh… la première lettre, 'fin, qui est placée, c'est comme si on avait de l'argent, 'fin je réfléchis à l'argent, comme si j'avais 2 euros, on m'en enlève 3, donc j'ai… il me reste quelques pièces à rendre, bon voilà, c'est ça que je me pose, c'est tout.

C : Par exemple, ce 2x-2 dont tu me parles dans ta tête… Comment tu as fait pour choisir cet exemple, 2x-2 ?

R : J'ai regardé juste avant.

C : C'est-à-dire ?

R : Juste avant, en fait euh… (il tourne une page de son cahier de leçon) en fait il y avait marqué 2x et euh… c'est revenu dans ma tête, je me suis redemandé si 2x ça faisait pas la même chose.

C (qui regarde l'exemple de la leçon sur lequel Ryan s'appuie) : C'est pas tout à fait le même exemple, là, je vois que c'est 6x+4m, mais tu as pris un exemple qui ressemble ? (Ryan fait « oui » de la tête) C'est ça ? C'est ce que tu fais généralement, tu prends des exemples qui ressemblent, dans ta tête, pour savoir si tu as compris ?

R : Oui.

C : Et tu dis aussi « je me suis rappelé ce que monsieur M2 avait dit », que « 2 moins 3, est-ce que je suis dans le positif ou dans le négatif », est-ce que ça aussi, tu le fais souvent, aussi, de te rappeler ce que monsieur M2 dit ?

R : Euh, je le fais plus principalement, en fait.

C : Ah, principalement, tu essaies de te souvenir de ce que monsieur M2 a dit…

R : Des fois, j'hésite même avec euh… parce que des fois, j'écris trop mal, des fois je comprends pas même moi ce que j'écris des fois, et euh… par moment, je réfléchis, ce que monsieur M2 me… m'a dit. Quand je trouve c'est pas logique, 'fin par exemple des fois j'oublie des mots, j'écris tellement vite, et euh… je me dis « ouais c'est pas logique », et le lendemain, en fait, 'fin j'apprends comme monsieur M2 me dit, et le lendemain, ben je regarde sur le cahier d'un copain, je me suis trompé, et là je me dis « voilà, c'est bien ce que monsieur M2 a dit ». Chercheur : D'accord.

Tu as utilisé seulement le cahier de leçon ? Tu m'as dit que tu avais utilisé le cahier de brouillon pour appliquer ? Est-ce que tu as appliqué, là, par exemple ? Ryan : Oui. Chercheur : Tu peux me montrer… Ryan : Un petit exemple… Chercheur : … ce que tu as fait. Ryan : (ouvre son cahier d'exercices, qu'il appelle visiblement « cahier de brouillon » en même temps) Mais… habituellement, je prends pas le cahier de leçon, 'fin je regarde pas, sauf si je suis en difficulté. Mais je regarde un peu les feuilles. Chercheur (légèrement perplexe) : Alors, redis-moi… Habituellement, tu ne fais pas comme tu as fait maintenant ? (rires) Ryan : Euh… Non, c'est pas que je fais pas comme j'ai fait maintenant, c'est quand je suis en difficulté en fait, je regarde les feuilles, mais là j'ai juste jeté un petit coup d'œil vu qu'il n'y avait plus rien à faire. Chercheur : … D'accord. Bon… On reviendra quand tu es en difficulté. Là par exemple, vas-y, explique-moi ce que tu as appliqué. Ryan : Alors… J'ai fait trois x fois deux z. Chercheur : Cette expression, tu l'as inventée ? Ryan : Oui, je l'ai inventée. Et j'ai remplacé deux valeurs par… par un chiffre : x c'est 2 et z c'est 7. Donc comme le prof, il avait dit – 'fin, j'ai pas regardé dans le cahier – le prof, il avait dit que entre une lettre et un chiffre, il y avait toujours… 'fin, une valeur et un chiffre, y avait toujours un petit fois qui se cachait, sauf que on le marque pas sinon ce sera trop long, et euh… si on trouve la valeur, là on le fait en priorité, bah j'ai fait… j'ai remplacé x par 2 et j'ai rajouté la multiplication au milieu, ça m'a fait deux fois trois donc j'ai fait 6 ; pareil pour le 2z, j'ai remplacé z par 7 et j'ai mis le « fois » donc ça fait 14, et ensuite ça a donné le résultat six fois quatorze qui est… et après j'ai mis égal le résultat. Chercheur : Et comment tu fais pour… savoir si tu ne t'es pas trompé ? Puisque c'est toi qui l'as inventé, l'exemple…

R : Ben je compte (rires), c'est logique ! Euh 'fin… j'essaie de faire euh… j'essaie de faire ce que je comprends, en fait. Je sais pas, en fait, comment expliquer…

C : Mais tu es d'accord que comme c'est toi qui l'inventes, finalement, il n'y a pas monsieur M2 pour te dire si ce que tu fais c'est vraiment juste ou si c'est pas juste.

R : Non, il est pas là.

C : Donc t'as pas de moyen de vérifier ou…

R : Bah je peux prendre la calculatrice.

C : D'accord… Dans un chapitre de géométrie, on peut pas toujours prendre la calculatrice pour vérifier qu'on bien compris mais… En fait tu le fais généralement… Quand tu sens que tu as l'impression d'y arriver, ça te… ça te suffit.

R : Après, si c'est trop, trop, trop compliqué, bah là, j'ai… j'abandonne, 'fin, c'est pas j'abandonne, c'est que… bah j'essaie de pas faire trop compliqué non plus sinon… sinon je vais faire des erreurs.

C : Donc tu m'as dit que tu ne te servais pas beaucoup de ton cahier de leçon, tu relisais, t'apprenais les définitions par cœur – ou ce que tu ne comprenais pas bien, par cœur, c'est ça ? – et du coup, tu utilises plutôt le cahier d'exercices quand tu révises ?

R (montrant ses cahiers) : C'est l'inverse… 'fin, c'est c'ui-là que j'utilise (il montre le cahier de leçon), c'ui-là je l'utilise pas (il montre le cahier d'exercices), en fait, c'ui-là (cahier d'exercices) c'est quand je suis en difficulté, je l'utilise pas trop, en fait.

C (un peu confus) : Tu n'utilises pas trop les cahiers ?

R : Ben en fait, si, avant le contrôle, bien sûr, je révise. Ca, c'est obligé, je révise.

C : Oui, et c'est ça qui m'intéresse, qu'est-ce que tu fais quand tu révises ?

R (souriant) : Bah, je prends mon cahier de leçon…

C : Oui ?

R : … je lis…

C : Oui ?

R : … j'essaie de comprendre…

C : Oui ? Comme tu m'as dit tout à l'heure.

R : Oui, je comprends et…

C : Donc c'est le cahier de leçon. Mais le cahier d'exercices, finalement, tu n'y reviens pas trop ?

R : Non. Seulement quand je suis en difficulté.

C : Bon. OK. Alors, justement, quand tu es en difficulté, c'est très bien, qu'est-ce que tu fais pour travailler ces difficultés ?

R : Pour travailler ces difficultés… Bah je… Je ressors… 'fin, je tourne un peu les pages (il joint le geste à la parole et se met à tourner les pages de son cahier d'exercices), j'essaie de comprendre…

C : C'est ton cahier d'exercices, cette fois.

R : Euh… Oui, c'ui-là.

C : Quand tu es en difficulté, c'est là que tu vas voir le cahier d'exercices.

R : Oui. Ensuite je regarde un peu les calculs qu'on a faits. Les corrections, pas forcément, vu que en fait les corrections, j'écris pas tous les résul... j'écris pas tout le calcul.

C : Pourquoi t'écris pas tout le calcul ?

R : Bah parce qu'en fait, je… en fait, moi comme je le fais… quand je fais, j'écris le résultat, je vois comme c'est bon… quand c'est bon, je mets « oui, c'est bon, c'est bon ». Et quand c'est faux, bah juste je barre et je réécris le résultat.

C : Tu écris juste le résultat, pas forcément les calculs ?

R : 'fin j'écris, j'écris... un peu les résultats comme ça (il montre un résultat sur une feuille d'exercices). Je suis pas obligé de recopier l'énoncé...

C : Est-ce que tu... est-ce que tu recopies la correction que monsieur M2 donne par exemple au tableau ?

R : Euh oui.

C : Parce que monsieur M2, il rédige toujours, donc est-ce que tu prends cette correction-là ?

R : Oui, sauf qu'à la fin, en fait euh... regardez, comme par exemple, là (il montre ce qu'il a fait pour un exercice dans son cahier), j'ai fait l'expression, et j'ai mis « égal », mais si je m'étais trompé, j'aurais enlevé le « égal » et j'aurais remplacé le résultat seulement, 'fin l'expression, elle serait déjà marquée.

C : D'accord. OK, je vois. Parce que... donc, j'ai scanné ton... ton cahier d'exercices, et parfois euh... y a pas exactement écrit comme ce que monsieur M2 a fait au tableau.

R : Hm hm.

C : Tu... Ben je vois beaucoup de calculs, parfois il y a juste les résultats, donc c'est pas tout à fait comme... C'est pas un reproche, hein ! (souriant)

R (souriant à son tour) : Non, non, je sais !

C : Je regarde simplement... je regarde simplement comment tu travailles. Et... et du coup... t'as pas... t'as pas peur d'oublier, par exemple une semaine ou deux semaines après... (Ryan fait « non » de la tête) ... les calculs qu'il y avait écrits, puisque tu as écrit que le résultat ?

R : Bah en fait, je sais ça va pas me resservir, ce sera pas exactement les mêmes calculs, ce sera la forme, mais... du moment que j'ai compris, du moment que j'arrive à le faire... pour moi, en fait, pour moi, c'est ma logique, 'fin, je suis pas obligé de tout recopier non plus si je sais déjà.

C : D'accord, donc ça, je comprends, tu refais pas les exercices que tu as bien compris, c'est ça ?

R : Hm hm.

C : Mais, on... on parlait... quand tu es en difficulté... donc admettons qu'il y ait un exercice que tu n'as pas bien compris... là, comment tu fais pour re... re... revoir ou comprendre cet exercice ?

R (tourne les pages de son cahier d'exercices) : Je regarde les feuilles (il montre la feuille d'exercices de révision donné par M2 le matin), parce que les feuilles, c'est tout le temps là où il y a déjà marqué l'énoncé, je marque le résultat juste à côté. Je regarde un peu toutes les feuilles, et euh… des fois, quand je fais des exercices, quand il nous laisse du temps libre, 'fin pour faire les exercices, on écrit tous les euh… calculs. Moi, j'écris pas que le résultat, parce que là, c'est comme si c'était en contrôle, j'écris tous les exercices et là, du coup, je regarde… je re-regarde les euh… comme par exemple, ça (il montre un exercice), oui, ça aussi, c'était page 17… 89, avant la fin du cours, il nous l'avait donné, donc j'ai écrit tout l'énoncé, j'ai écrit le résultat, normal…

C : Parce que tu étais en difficulté ?

R : Non. C'est juste parce que… c'était comme un contrôle, c'est… c'est pas les exercices qu'il nous donne à faire chez nous, par exemple les exercices qu'il donne à faire chez nous, moi je mets juste le résultat. Ou les calculs avant de rentrer (Ryan fait référence aux calculs mentaux de début d'heure), il donne des calculs, ben je mets juste le résultat, comme là. Et après ensuite, je corrige, je regarde… et quand j'ai bon, je mets 10 sur 10, comme là.

C : Donc quelque part, si je comprends bien, il y a un Ryan qui travaille quand il n'y a pas contrôle, donc ce Ryan-là, il écrit euh… les calculs, les résultats simplement. Et puis il y a le Ryan qui sait qu'il va y avoir un contrôle, qui se met « en mode contrôle » si je comprends bien (Ryan rit), et là il rédige tout correctement, comme s'il était en contrôle.

R : Oui.

C : Quelque part, c'est ça. D'accord. Alors est-ce que généralement, tu trouves que l'évaluation, elle ressemble à ce que vous avez fait en classe ?

R : Oui.

C : Oui. Bon, ça, généralement, c'est le cas pour toi. Ah oui, ça me fait penser… tu m'as dit : « Je révise… je retiens la forme des exercices. » C'est quoi, la forme des exercices ? Tout à l'heure, tu m'as parlé… « cette forme d'exercices… il suffit de comprendre »… C'est quoi, une forme d'exercices ?

R : Forme d'exercices… c'est par exemple… 'fin, les exercices typiques… 'fin, y a la valeur, x, 'fin… pour moi, c'est la même chose, si vous ramenez un calcul, et juste vous inversez le x par le… par le 2… 'fin voilà. C'est ça.

C : Ce qui veut dire, quand par exemple tu as un chapitre à réviser, tu repères ces formes d'exercices, tu as compris que pendant le chapitre, il y avait des exercices qui se ressemblaient, c'est ça que t'appelles des formes d'exercices ?

R : Oui.

C : C'est ça. Bon. Tu m'as dit que tu avais utilisé ton cahier de leçons pour réviser, tu m'as dit, essentiellement, tu lis, t'apprends par cœur, si je résume, et le cahier d'exercices, tu l'utilises rarement, sauf quand tu es en difficulté, mais tu... tu relis pas les exercices que vous avez faits, tu relis pas les corrections ? (Ryan fait « non » de la tête.)

R : Parce qu'en fait, ça sert à rien, vu que du coup, il y a des exemples.

C : Dans la leçon ?

R (fait « oui » de la tête) : Les exemples, ils m'aident.

C : Généralement, les exemples qu'il y a dans la leçon, ça suffit pour toi ?

R : Ouais, 'fin... Pour moi, c'est la même chose. Simplement, en fait, je vous explique : moi, l'exemple, c'est juste quand... c'est juste quand je lis la leçon. Mais sinon, en cours, en fait... pour moi, le cahier d'exercices sert juste à appliquer la leçon, en fait. Juste à appliquer. Je vais pas revenir dessus vu qu'on a une leçon. Je révise, et ensuite j'applique, sur le contrôle, là, par contre.

C : D'accord. Est-ce que monsieur M2... il met à ta disposition des fiches, des documents, ou des vidéos, pour t'aider spécifiquement, spécialement, à réviser le contrôle ?

R (fronce les sourcils) : Comment ça ?

C : Est-ce que par exemple, il te donne une fiche « pour réviser, il faut faire ça, il faut réviser ça... »

R : Ah, non. J'en ai pas besoin.

C : D'accord, toi, tu n'en as pas besoin, mais monsieur M2 ne vous en donne pas ? Ca, par exemple (le chercheur désigne la feuille de révisions du matin), il a dit, ce matin, parce que j'étais là : « c'est une fiche qui ressemblera au contrôle ».

R : Ah, oui ! Ca ! Bah oui !

C : Ca, il vous le donne régulièrement ?

R : Ca, euh...

C : Est-ce qu'à chaque chapitre, il vous donne une fiche comme ça, où il dit euh... « les exercices qu'il y a sur cette fiche, ça ressemblera aux exercices qu'il y aura au contrôle » ?

R : Ouais. Souvent il nous fait des... comme par exemple, je vous montre... (il tourne les pages de son cahier d'exercices) Il nous avait fait une fiche avec euh... un ski... y a une personne qui fait du ski... voilà ça, téléski (il montre une fiche mettre le scan). Bah il a dit aussi... je crois, 'fin, je sais plus... il a dit « ça aussi, ça va ressembler », et quand on a fait le contrôle, bah ça a ressemblé à ça. Pareil pour ça (il prend une autre feuille), il nous avait laissé toute l'heure pour le faire. Bah oui, il donne souvent des fiches comme ça, mais moi je pensais, quand vous parlez, comme euh… (il mime une liste avec les mains) « Révisez ça, révisez ça… » Ca, non.

C : Ca, il donne pas. Il donne des fiches d'exercices.

R : Oui.

C : Et donc du coup, ça, tu ne les utilises pas non plus trop parce que tu n'en as pas besoin ?

R : Seulement quand je suis en difficulté.

C : Seulement quand tu es en difficulté. Et bien écoute, Ryan, merci pour tout ce que tu m'as raconté.

R : De rien.

p. Entretien avec Marianne

Chercheur : Marianne, tu as un contrôle mercredi prochain en mathématiques. Je vais te demander de faire comme si tu étais chez toi et que tu révisais ce contrôle de mathématiques. Simplement, je vais te demander de réviser… pas la partie sur le théorème de Thalès… mais tout le reste, sur le calcul littéral. D'accord ? C'est bon, tu as compris les consignes ? (Marianne fait « oui » de la tête.) Je te laisse seulement dix minutes parce qu'on n'a pas beaucoup de temps. Si jamais tu finis avant, tu m'appelles, et si tu finis pas avant, ben… c'est pas grave, on commencera l'entretien après, ok ? Et tout ce que tu diras, je ne le répèterai pas à monsieur M2 comme la dernière fois.

Avant même la fin des consignes, Marianne a déjà ouvert son cahier de leçons et commencé à le feuilleter à la recherche du chapitre sur le calcul littéral. Une fois la leçon trouvée, elle la lit pendant deux minutes environ. Puis elle retourne son cahier de leçons à l'envers, sans perdre la page, le pose sur la table, et prend son cahier d'exercices et son manuel. Elle feuillette les pages de son manuel pour trouver le chapitre sur le calcul littéral. Ne le trouvant pas, elle va voir l'index à la fin du manuel et finit par trouver le chapitre. Elle se lance alors rapidement dans la résolution d'un exercice, jusqu'à la fin des dix minutes imparties.

Chercheur : OK Marianne, on va s'arrêter. Je suis désolé, je sais que tu n'as peut-être pas fini. Alors dis-moi… Habituellement, combien de temps tu mets pour réviser un contrôle ?

Marianne : Zéro.

C : Tu ne révises jamais les contrôles ?

M : Non.

C : Alors là, c'est exceptionnel, tu as révisé parce que je te l'ai demandé ?

M : Oui.

C : Mais d'habitude, tu révises pas du tout.

M : Non.

C : Pourquoi tu révises pas ?

M : Parce que je préfère être attentive au cours pendant que...

C : Alors, parle un peu plus fort, juste pour le micro.

M(toussote) : Je préfère être attentive au cours pendant l'heure de cours que... et euh... comme ça je retiens mieux. C'est ma technique à moi.

C : Tu retiens mieux en classe, mais à la maison, t'as pas besoin de... de relire pour te souvenir ? (Marianne fait « non » de la tête avec insistance.) Jamais ? (« non ») Bon, d'accord. Euh... (le chercheur est déstabilisé par cette réponse.)

Le chercheur interroge Marianne sur ce qu'elle a fait durant les quelques minutes où elle a révisé, visiblement « sous contrainte ». Comme Marianne en révise jamais habituellement, la transcription de ce passage n'a pas été faite. Marianne dit avoir simplement relu une fois la leçon en entier, parce qu'elle trouve « assez simple » le calcul littéral. Elle a fait trois exercices (exercices 1 à 3 page 87 du manuel Horizon), en cherchant dans l'index du manuel de mathématiques. Elle ne précise pas comment elle les a choisis. Elle n'a pas refait des exercices faits en classe parce qu'elle dit les avoir tous réussis et que cela ne lui servirait à rien de les refaire. Elle a conscience qu'elle ne peut pas contrôler ses résultats, mais elle dit qu'en cas de doute, elle peut refaire les calculs ou utiliser la calculatrice.

Chercheur : Selon toi, pour réussir une évaluation, qu'est-ce qu'il est important de préparer ? Bon... sauf que tu m'as dit que tu ne préparais pas grand-chose... (Marianne sourit.) Alors finalement, en classe, qu'est-ce que tu fais qui est important ?

Marianne : Ben j'écoute surtout les définitions et comment calculer... pour mieux enregistrer ça et... après, je fais aussi les exercices, je me concentre dessus pour réussir et que pour la prochaine fois, je continue...

C : D'accord. Dans le cours, on va dire euh... qu'est-ce qui est le plus important, pour toi ? Ce qui t'aide le mieux à retenir, pour réviser ?

M : Les exemples.

C : Dans la leçon, ce sont les exemples... et dans les exercices ?

M : L'exercice en lui-même.

C : Comment tu fais pour savoir si tu es prête, pour l'évaluation ?

M : (Après un instant de réflexion.) Je sais pas. (Elle sourit.)

C : Il n'y a pas de moment où tu te dis « ah, là, cette évaluation de mathématiques, je ne suis pas prête » ?

M : Non.

C : Non ? Tu as toujours été plus ou moins prête ?

M : Oui.

C : Bon, ok. Alors… et du coup, qu'est-ce qui fait que… « ben c'est bon, c'est sûr que j'ai compris » ?

M : Parce que… Quand je suis chez moi, je me rappelle plus, mais quand je suis au contrôle, c'est là où ça re… tout revient. Et ça, ça m'arrive tout le temps.

C : D'accord. (Rires.) C'est un peu le miracle !

M : (rires)

C : À chaque fois, ça revient pendant le contrôle… Ben tant mieux ! Alors… en imaginant… bon, du coup, tu m'as dit que tu n'avais jamais trop de difficultés, mais… si jamais tu avais des difficultés, qu'est-ce que tu ferais pour les travailler ?

M : Euh… Je ferais des exercices… Je… Je poserais des questions à monsieur M2…

C : Tu ferais des exercices sur lesquels tu as des difficultés ?

M : Oui.

C : De façon générale, est-ce que tu trouves que l'évaluation que vous faites avec monsieur M2 en classe, elle ressemble à ce que vous aviez fait euh… dans le chapitre… qu'il y a à réviser ?

M : Oui. C'est pour ça que je me souviens la plupart du temps. C'est parce que c'est… c'est ressemblant et on voit le cours à l'intérieur, presque.

C : Hm hm, tu trouves toujours que c'est très ressemblant.

M : Oui, mais sans… En fait c'est ressemblant sans être ressemblant parce que… Y en a, ils vont avoir du mal parce qu'ils auront pas appris et en plus ils auront pas écouté pendant le cours. Alors que moi… j'apprends pas mais j'écoute pendant le cours, alors c'est ça qui fait que c'est plus simple pour moi.

C : Et tu arrives à voir les exercices qui se ressemblent… qui ressemblent à ceux que vous aviez faits en classe pendant le contrôle ?

M : Oui.

C : Tu trouves vraiment que les exercices ressemblent à ceux que vous faites en classe. Bon. (Résumant.) Tu as utilisé ton cahier de leçons, tu m'as dit… Tu l'avais simplement relu une fois… Et euh… tu as utilisé ton cahier d'exercices exceptionnellement pour faire… quelques exercices. Pourquoi ceux-là ? Juste parce que, euh… il fallait que tu révises ? Ou parce que c'était des exercices qui te paraissaient difficiles en particulier ?

M : Non, parce que c'est des exercices qu'il y aura… vu que c'est sur les expressions littérales plus le théorème de Thalès, et vu que vous m'avez dit de pas… pour… pas le théorème de Thalès… j'ai fait ce qu'il y avait pour les expressions littérales.

C : Alors… Comme on a un peu de temps… Ah oui, pardon. Une avant-dernière question : est-ce que le professeur a mis à ta disposition des documents, des fiches, des vidéos, pour t'aider à réviser le contrôle, et est-ce qu'il le fait habituellement ?

M : Parfois oui… il nous… nous explique à l'oral… comment il va se dérouler, il nous explique parfois… quand on est sages (rires), et silencieux, ce qu'il y aura un peu au contrôle. Sinon euh…

C : Et après, chez toi, quand tu es chez toi, est-ce que tu as des documents ?

M : Non. J'ai juste…

C : Il n'y a pas de fiches ? De fiches de révisions ? De fiches d'exercices qui ressembleront au contrôle ?

M : Non.

C : Non ? Par exemple, vendredi matin, puisque j'étais là, monsieur M2 a donné une… une fiche… d'exercices… et il a dit « ces exercices ressembleront à ceux qu'il y aura au contrôle ». Ca, par exemple, c'est pas un document dont tu pourrais te servir ? Bon, tu t'en sers pas toi, parce que tu révises pas, mais puisqu'il dit que ça ressemble…

M : Non.

C : Bon, d'accord. Euh… ah oui, alors du coup, puisqu'on a un peu de temps, puisqu'on est passé un peu vite parce que tu révises pas d'habitude, c'est quoi les… les types d'exercices que tu vas avoir au contrôle sur le calcul littéral à ton avis ? Qu'est-ce qu'il y aura comme type d'exercices ?

M : Euh… Réduire.

C : Hm hm. Réduire quoi ?

M : Les expressions.

C : Ca veut dire quoi, réduire ?

M : Si elles sont trop longues, c'est… faire en gros que ça soit plus petit, plus facile…

C : Tu peux me donner un exemple ?

M : Par exemple euh…

C : Comme ça, rapidement…

M : Par exemple, ici (elle montre un exercice qu'elle vient de faire), x fois x moins quatre fois x plus trois, ben on ferait… on simplifiera, en gros, et on fera 4… euh… x au carré moins quatre x plus trois. C'est tout.

C : D'accord. Alors ça, c'est réduire les expressions. Après, qu'est-ce qu'il y a d'autre ?

M : Y a… euh… je sais plus comment ça s'appelle, mais en gros, c'est l'agrandir.

C : Hm ? Ca veut dire quoi ?

M : C'est… si l'expression, c'est… 3… ensuite entre parenthèses, y a 4 plus x, on fera 3 fois 4 plus 3 fois x.

C : D'accord. Alors ça s'appelle pas agrandissement, c'est développement.

M (souriante) : Oui.

C : Voilà, c'est ça. Ok. Est-ce qu'il y a d'autres choses ? Comme types d'exercices, qu'est-ce qu'il pourrait y avoir ?

M : Des multiplications, sûrement.

C : Hm hm. Donc là encore, c'est de la réduction… (Silence.) Et ça, là, par exemple (le chercheur pointe un exercice dans le livre resté ouvert où il est demandé de calculer la valeur d'une expression littéral lorsque des valeurs sont attribuées aux variables), c'est un type d'exercices, aussi ?

M : Oui. Parce qu'il y a du… du… de la multiplication et de l'addition et de la soustraction.

C : Mais qu'est-ce qu'il faut faire dans ces exercices ? Est-ce que là il faut développer ou il faut réduire ?

M : Là, il faut calculer.

C : Hm hm. Et comment on fait pour calculer une expression comme ça ?

M : Bah… il nous donne la valeur pour la lettre… et ensuite… si c'est 3a, on va faire trois fois le nombre qui est donné.

C : D'accord. Et bien écoute Marianne, je te remercie. C'était très intéressant.

q. Entretien avec Géraldine

Chercheur : Alors Géraldine, tu as un contrôle mercredi prochain en mathématiques. Je vais te demander de faire comme si tu étais chez toi et que tu devais réviser ce contrôle. Je vais te laisser seulement dix minutes parce qu'on n'a pas beaucoup de temps. Si t'as besoin de moins de dix minutes, tant mieux, tu m'appelles et tu me dis « j'ai fini ». Si tu as besoin de plus de dix minutes, malheureusement, on n'ira pas au-delà. Et tout ce que tu me diras ensuite quand je t'interrogerai sera entre toi et moi, je ne le répèterai pas à monsieur M2. Et je vais te demande de ne pas réviser la partie sur Thalès, seulement sur le calcul littéral. OK ?

Géraldine : Oui.

Géraldine s'empare de son cahier de leçons, le feuillette et trouve rapidement le chapitre sur le calcul littéral. Elle passe environ trois minutes à lire sa leçon en entier. Au bout de ces trois minutes, elle revient au début de la leçon et semble entamer une deuxième lecture. Cependant, elle ne semble pas tout relire et au bout d'une minute, elle prend son cahier d'exercices. Son cahier de leçons est toujours ouvert dans sa main. Elle feuillette de l'autre main, lentement, son cahier d'exercices, s'arrête sur une page où est collée la fiche d'exercices donnée par M2 pour réviser le contrôle, puis ferme son cahier de leçons. Elle semble alors lire la fiche d'exercices. Au bout de quelques dizaines de secondes, elle prend un stylo dans sa trousse et semble corriger quelque chose sur un exercice déjà fait. Elle range ensuite son stylo et semble reprendre sa lecture du cahier d'exercices. Puis elle reprend son stylo et se met à écrire des choses sur son cahier d'exercices. Quelques dizaines de secondes plus tard, elle reprend son cahier de leçons, semble y chercher une information, relire une page. Une feuille volante tombe au sol ; elle la ramasse et prend un certain temps à la coller dans son cahier de leçons. Elle revient ensuite sur son cahier d'exercices, le cahier de leçons restant ouvert à proximité, et semble encore lire ce qu'il y a écrit dans son cahier d'exercices. Les va-et-vient entre exercices et leçons semblent continuer ainsi jusqu'à la fin du temps imparti.

C : Alors Géraldine, habituellement, tu mets combien de temps pour réviser un contrôle de mathématiques ?

G : Euh… 20… 30 minutes.

C : Entre 20 et 30 minutes. (Géraldine opine.) Et est-ce que tu révises régulièrement ? Tu révises longtemps à l'avance ?

G : Régulièrement.

C : Régulièrement, c'est-à-dire ?

G : Beh… je préfère plus réviser quand il y a un contrôle qui arrive que réviser avant, en fait.

C : Je n'ai pas bien compris. (G rit.) Tu veux dire que tu ne révises pas juste la veille ?

G : En fait, j'attends qu'il y ait un contrôle pour réviser. Je révise pas… quand y a pas de contrôle.

C : D'accord. Et c'est dès le moment où tu sais qu'il y aura un contrôle que tu te mets à réviser ou euh… tu attends ?

G : Euh… Des fois j'attends mais sinon, je révise régulièrement.

C : Donc par exemple, là, ce contrôle de mathématiques, comme tu sais apparemment – je crois – depuis mercredi dernier qu'il y aura contrôle mercredi, tu as commencé à réviser dès mercredi ou euh… un peu plus tard ?

G : Oui.

C : Dès mercredi, tu as commencé à réviser.

G : Oui.

C : OK. Raconte-moi un peu ce que tu as fait pendant ces quelques minutes toute seule ?

G : Bah j'ai revu quelques cours. J'ai revu des exercices, des calculs mentals.

C : C'est tout ?

G : Hm.

C : Quand tu dis « j'ai revu le cours », précise-moi ce que tu entends par là.

G : Ben en fait, qu'est-ce que je fais, ben… en fait, quand je revois un cours, je regarde aussi les exercices qu'on a faits en… en classe.

C : Et ça veut dire quoi, « revoir » ? Ca veut dire « relire » ? « feuilleter » ? « apprendre par cœur » ?

G : Je relis… et quand je relis une phrase, en même temps, j'apprends en fait.

C : T'apprends, c'est-à-dire ? Tu retiens ?

G : Oui, je retiens. Je retiens plus les mots importants que les autres, en fait.

C : Comment tu sais qu'un mot est important ?

G : Ben je les écris en rouge.

C : Monsieur M2 les écrit en rouge aussi ou pas ?

G : Oui.

C : C'est ça, donc tu lis, et en même temps que tu lis, tu apprends, notamment les mots en rouge. Quand tu lis, tu lis de manière euh… tu lis de haut en bas… ou est-ce qu'il y a des moments, tu t'attardes un petit peu… tu relis certains passages… ou d'autres que tu ne lis pas ou que tu lis plus rapidement ?

G : En fait euh… par exemple, je lis comme ça (de sa main, elle balaie une page de sa leçon de gauche à droite, rapidement), je vais lire. Après je vais tourner la page et je vais revenir pour voir si j'ai bien retenu la leçon que… (silence.)

C : D'accord. Tu m'as dit « j'ai revu les exercices », alors on va passer à ces exercices. Qu'est-ce que ça veut dire « revoir les exercices » ? Explique-moi.

G : Euh… Par exemple, vendredi…

C : Parle plus fort pour le micro, s'il te plaît.

G : Par exemple, vendredi, on avait fait… il nous avait donné trois exercices à faire, plus le calcul mental… Parce qu'à chaque fois qu'on a maths, on fait des calculs mentals. Après euh… voilà, il nous donne aussi des activités. Des fois on utilise la calculatrice, des fois on l'utilise pas.

C : Alors… je sais… un peu ce que monsieur M2 fait puisque je le regarde, mais moi, ce qui m'intéresse, c'est… comment tu travailles avec ce que monsieur M2 vous a donné. Qu'est-ce que tu… quand tu dis « je revois mes exercices », qu'est-ce que tu dais dans ton… avec ton cahier d'exercices ?

G : En fait… Déjà, quand je suis chez moi, je demande à ma sœur ou à mes parents de me prendre des exercices qu'on faits, comme des activités, ils mettent sur une feuille, et moi j'essaie de remplir, et eux, ils voient si c'est bon ou pas. Et si c'est pas bon, je vais aller voir la leçon et je vais revoir, en fait.

C : D'accord. Et ces exercices, euh… comment ils les choisissent ? Tu leur demandes de choisir des exercices en particulier ?

G : Euh… Des fois je leur dis d'aller dans le livre. Ou je leur dis de voir les exercices, activités, comme ça… (elle montre un exercice de son cahier d'exercices).

C : Tu peux me donner un exemple ? Là, est-ce que tes parents ou ta sœur t'ont aidé à réviser le contrôle de mathématiques, et si oui, qu'est-ce qu'ils t'ont fait faire ?

G : Par exemple, l'exercice 2 (elle montre un exercice de la feuille d'exercices donné par M2 pour réviser le contrôle), vu que je le connaissais bien, euh… ma sœur elle m'a fait d'autres calculs comme ça, elle m'a fait un tableau, et puis elle m'a dit de le remplir.

C : Elle a pris les mêmes expressions ? Avec les mêmes nombres ?

G : Non, elle a changé.

C : Elle a changé… et elle t'a dit de le faire.

G : Oui.

C : D'accord. Donc c'est ce genre d'exercices que tes parents ou ta sœur te donnent. Et toi, toute seule, est-ce que tu fais quelque chose, ou pas ? Pour revoir les exercices…

G : Euh… Hm… Pas vraiment.

C : Non ? Tu dis que tu regardes les calculs mentaux. Euh… Comment tu fais ?

Parce que les calculs mentaux… j'ai regardé ton… ton cahier d'exercices, parfois tu écris simplement le résultat ou la correction, comment tu arrives à te souvenir du type de calculs que monsieur M2 vous a donné ?

G : Mais… (elle feuillette son cahier d'exercices) Des fois je revois… quand je revois… parce que vu que… il nous fait des calculs mentals qu'il y a en rapport avec l'exercice (elle montre un exercice qui précède un calcul mental), je revois l'exercice qu'on a fait, après j'essaie de refaire avec le calcul mental, en fait.

C : Bon. OK. Selon toi, pour réussir l'évaluation, qu'est-ce qu'il est important de préparer ?

G : Déjà, il est important de revoir les… euh, de préparer (rires) euh… ben… euh… les leçons… enfin… déjà… si on connaît d'abord les euh… les définitions, les théorèmes, etc., si on connaît ça, c'est bon… et vu qu'il nous fait des exercices, c'est mieux de regarder d'abord les exercices aussi.

C : D'accord. Toi, tu fais toujours des liens – j'ai l'impression que c'est ça mais tu me dis si je me trompe – entre la leçon et les exercices.

G : Oui.

C : Comment, par exemple, tu fais un lien ?

G : Par exemple, euh…

C : Prends un chap… un paragraphe de ta leçon et explique-moi comment tu fais ce lien.

G : (prend son cahier de leçons et s'arrête à la première page de la leçon sur le calcul littéral) Par exemple, euh… « les nombres et les lettres » (il s'agit du premier sous-titre de la leçon, où la définition d'une expression littérale est donnée et où un exemple de calcul d'expression littérale en attribuant des valeurs aux variables est donné). Ben je vais chercher dans mon cahier (G sous-entend : le cahier d'exercices) si on a fait ça. Parce que normalement, on fait toujours ça. S'il nous fait cette leçon, on fait des exercices. Vu qu'il nous fait ça, je cherche…

C : Tu arrives facilement à les retrouver, ces… cet exercice ?

G : Ca dépend en fait, si je l'ai fait ou pas, en fait (rires). Mais normalement je le retrouve.

C : Assez facilement ?

G : Euh… Oui… J'ai juste à feuilleter les pages, et puis c'est bon.

C : D'accord. Quand tu as des difficultés, qu'est-ce que tu fais de particulier pour les travailler ?

G : Hm… Des fois, je demande à monsieur M2, ou à mes parents. Si mes parents, ils comprennent pas, je demande à monsieur M2.

C : D'accord, mais quand t'as des difficultés, tu te tournes souvent vers tes parents, ou ta grande sœur si j'ai bien compris, et ils te donnent d'autres exercices, c'est ça. (G approuve de la tête.) De façon générale, est-ce que tu trouves que l'évaluation que vous faites en classe, elle ressemble à ce que vous… aux exercices que vous aviez faits pendant le chapitre ?

G : Hm. Oui.

C : Oui, toujours ?

G : Oui.

C : Il y a pas d'exercices qui te surprennent ou…

G : Non, c'est toujours en rapport avec les leçons et les exercices.

C : D'accord. Tu arrives à repérer des types d'exercices pendant le cours et tu les retrouves dans la leçon, c'est ça ?

G : Oui.

C : Est-ce que le professeur met à ta disposition, pour réviser chez toi, des fiches ou des documents ou des vidéos ou… je sais pas… pour t'aider à réviser, à préparer ce contrôle ?

G : Non, on fait plus des révisions en classe, en fait. Des révisions en classe avant le contrôle. Mais sinon… après, il nous donne quelques exercices pour les contrôles, mais sinon, après…

C : Alors il te donne quand même quelques exercices supplémentaires que vous n'aviez pas faits et que vous pouvez faire tout seul, c'est ça ?

G : Oui.

C : D'accord. Et tu les fais, toi ?

G : Des fois… mais sinon je les fais.

C : OK. Alors puisqu'on a un petit peu de temps étant donné que… on est en avance… euh… explique-moi quels sont les types d'exercices qu'il risque d'y avoir au contrôle.

G : Hm… (G prend son cahier d'exercices et montre le tableau dont elle parlait tout à l'heure, sur le calcul d'expressions algébriques) Déjà, y aura ça. (Elle balaie la feuille de sa main.) Déjà, y aura toute cette feuille, j'en suis sûre.

C : Ca veut dire quoi, « cette feuille » ?

G : Y aura ces types d'exercices.

C : Tu peux me les expliquer, ces « types d'exercices » ? Y en a pas une infinité, donc qu'est-ce qu'il va y avoir, comme types d'exercices ?

G : Beh… y aura par exemple euh… par exemple les x… s'il nous dit de faire les x, beh… y aura déjà les x… y aura par exemple les a égal à 2, égal à 5…

C : Ca s'appelle comment ?

G : Euh... c'est des calculs littérals.

C : Hm hm. (Aidant) D'accord, donc il faut calculer en remplaçant...

G : Par la lettre.

C : ... la lettre par la valeur, c'est ça ?

G : Oui.

C : D'accord. Alors y a ça : y a remplacer une lettre par une valeur pour calculer l'expression... Euh... j'ai pas bien compris ce truc-là (le chercheur montre un exercice de la feuille), c'est quoi ce type d'exercices ?

G : (se gratte la tête avec une petite grimace) Euh... en fait, ça aussi, j'ai pas très bien compris...

C : Ah.

G : Moi, je fais plus ceux-là et ceux-là (elle montre d'autres exercices de la feuille).

C : Et ça (C montre de nouveau l'exercice que G n'a pas compris), comme t'as pas bien compris, tu vas demander à tes parents ou à monsieur M2 pour... ?

G : À mes parents et à monsieur M2.

C : D'accord. Donc il y a « calculer une expression ». Après ?

G : Il y a aussi derrière (elle tourne la page de son cahier d'exercices).

C : Hm hm. Quels sont les autres types d'exercices ?

G : Il y a... faut... il y a supprimer les parenthèses ici... (G montre un exercice.) Faut réduire les expressions (autre exercice).

C : Ca veut dire quoi, « réduire l'expression » ?

G : En fait, faut que ça soit moins long, en fait. Faut qu'on réussit à faire un calcul moins long. 'fin... d'après ce que j'ai compris (sourire).

C : Donc il y a « réduire », il y a « supprimer les parenthèses ». Qu'est-ce qu'il y a d'autre ? Il y a autre chose ?

G : Après, il nous a donné une feuille (elle montre une feuille d'exercices de géométrie).

C : Ca, c'est le théorème de Thalès (C fait un geste de la main pour que G revienne en arrière, sur la feuille d'exercices en algèbre). Le dernier exercice, l'exercice 8, qu'est-ce que c'est comme type d'exercices ?

G : Là, faut développer, en fait. C'est ce qu'on avait fait en cours. Par exemple là, ils ont dit euh... là par exemple je devrais mettre euh... 3 fois x plus 3 fois 5.

C : D'accord. Donc ça, tu penses que ce sera les types d'exercices qu'il y aura...

G : ... au contrôle.

C : OK Géraldine. Je vérifie que je t'ai posé toutes mes questions. (C lit sa feuille de questions.) Ah oui ! Est-ce que, dans ton cahier d'exercices, quand tu me dis que tu revois ton cahier d'exercices, tu regardes la correction que tu as prise ou pas ? Est-ce que tu travailles sur la correction ?

G : Euh oui... Je travaille sur la correction. Par exemple, qu'est-ce que j'ai pas mis, je l'ai mis plutôt en rouge.

C : Tu... écris avec une couleur différente pour corriger (G opine)... et comment tu te sers de cela pour réviser, après ?

G : Beh... j'utilise pas trop les corrections, en fait. J'utilise plus les exercices que moi-même, j'ai faits. Les corrections, je les écris comme ça, mais après, voilà...

C : Est-ce que par exemple, quand tu vois un exercice où tu as beaucoup corrigé en rouge, tu vas avoir plus tendance à le refaire que les autres ou pas spécialement ?

G : Si, je vais les refaire parce que... ça veut dire en fait que je l'ai raté, quoi. Voilà.

C : Et donc tu vas le refaire.

G : Oui.

C : Donc la correction, tu... tu t'appuies un peu dessus, même si tu te sers pas... 'fin, tu t'appuies dessus pour décider si tu vas travailler plus un exercice qu'un autre, c'est ça ?

G : Oui.

C : Très bien. Et bien écoute, je te remercie Géraldine.

G : De rien.

ANNEXES DU CHAPITRE 9

Détails sur le test Pépite

Cette annexe s'appuie sur (Delozanne et al., 2010).

Les dix tâches diagnostiques du test et leur analyse *a priori*

Analyse a priori du test en algèbre niveau fin de $5^{ème}$ / début de $4^{ème}$

Exercice 1 :

Coche la ou les égalités correctes			
☐ $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}$	☐ $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3}{9}$	☐ $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3}{18}$	☐ $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$
☐ $14+7\ \times\ 1{,}5=119$	☐ $14+7\ \times\ 1{,}5=24{,}5$	☐ $14+7\ \times\ 1{,}5=31{,}5$	☐ $14+7\ \times\ 1{,}5=315$
☐ $3\times(24+3{,}5)$ $=3\times 24+3{,}5$	☐ $3\times(24+3{,}5)$ $=3\ \times 27{,}5$	☐ $3\times(24+3{,}5)$ $=(3\times 24)+3{,}5$	☐ $3\times(24+3{,}5)$ $=3\times 24+3\times 3{,}5$

Grille d'analyse et consignes de codage
Pour Q1 (choix 4 correct), Q2 (choix 2 correct) et Q3 (choix 2 et 4 corrects).

Question 1 :

Si plusieurs choix sont cochés, le code correspondant au choix incorrect est retenu.

Question 2 :

Si plusieurs choix sont cochés, le code correspondant au choix incorrect est retenu avec un cas particulier :

- Le choix 4 est coché : le codage de ce choix est retenu quel que soit l'autre choix fait.

Question 3 :

Si plusieurs choix sont cochés, le code correspondant au choix incorrect est retenu.

Si une seule bonne réponse est cochée le codage devient V2 EN1 et le commentaire « Toutes les bonnes réponses ».

Réponse	Type	Choix	Label	Code	Forme
Q1	3	1	Addition des numérateurs sans mettre au même dénominateur	V3 EN33	$\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}$
	2	2	Addition des numérateurs et des dénominateurs	V3 EN33	$\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3}{9}$
	4	3	Addition des numérateurs et produit des dénominateurs	V3 EN33	$\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3}{18}$
	1	4	Technique correcte	V1 EN1	$\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$
Q2	2	1	Priorité opératoire correcte mais confusion entier/décimal $14+7\times 1{,}5\ =119$	V3 EN42	$14+7\ \times\ 1{,}5=119$
	1	2	Technique correcte	V1 EN1	$14+7\ \times\ 1{,}5$ $=24{,}5$
	3	3	Pas de gestion des priorités opératoires (calcul de gauche à droite) $14+7\ \times\ 1{,}5=(14+7)\times\ 1{,}5$	V3 EN42	$14+7\ \times\ 1{,}5{,}5$ $=31{,}5$
	4	4	Pas de gestion des priorités opératoires (calcul de gauche à droite) et erreur de	V3 EN42 N42	$14+7\ \times\ 1{,}5=315$

			calcul dans la multiplication par un décimal (oubli de la virgule) $14 + 7 \times 1{,}5 = (14 + 7) \times 15$		
Q3	3	1	Erreur dans la distributivité de la multiplication / addition a(b+c)→ab + c	V3 EN32	$3 \times (24 + 3{,}5)$ $= 3 \times 24 + 3{,}5$
	1	2	Technique correcte	V1 EN1	$3 \times (24 + 3{,}5)$ $= 3 \times 27{,}5$
	4	3	Erreur dans la distributivité et usage de parenthèses inutiles a(b+c)→(ab) + c	V3 EN32	$3 \times (24 + 3{,}5)$ $= (3 \times 24) + 3{,}5$
	2	4	Développement d'une expression en utilisant la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition	V2 EN2	$3 \times (24 + 3{,}5)$ $= 3 \times 24 + 3 \times 3{,}5$

Commentaires associés au codage des réponses après diagnostic

Pour cet exercice, le texte des commentaires associés au codage des réponses après diagnostic sont ceux de la colonne « Label ».

Caractérisation du point de vue didactique

Caractérisation didactique	
Objectifs	Vérifier les compétences d'un élève dans le domaine numérique, en particulier : les règles d'addition de fractions, les règles de priorités opératoires et d'utilisation des parenthèses, les ordres de grandeur.
Composantes	Effectuer du calcul numérique (CN)
Capacités	Reconnaitre la structure d'une expression numérique (priorités opératoires) (22.1) pour CN
Types de tâche	Interpréter des écritures numériques Effectuer des calculs numériques Gérer les règles des priorités opératoires et des égalités, évaluer des ordres de grandeur
Critères d'évaluation	Vi : critères d'évaluation de la dimension « Validité » V0 : Absence de réponse V1 : Correct V2 : Traitement non attendu V3 : Incorrect
	ENi : critères d'évaluation de la dimension « Utilisation des règles d'Écriture et de réécriture Numérique » EN1 : Utilisation correcte des règles de transformation EN2 : Maitrise technique fragile EN3 : Règles de transformation non maîtrisées, mais identification correcte du rôle des opérateurs + et × EN32 : Utilisation inadaptée des parenthèses qui conduit à un résultat incorrect EN33 : Utilisation de règles de transformation fausses identifiées EN4 : Identification incorrecte du rôle des opérateurs + et × EN42 : Les règles de transformation utilisées « assemblent » les termes
	Ni : critères d'évaluation de la dimension « Connaissances Numériques » N4 : Mobilisation des nombres décimaux

	N42 : Mobilisation incorrecte

Exercice 2 :

Indique si les égalités suivantes sont vraies pour toutes valeurs de *a*. Propose des justifications.		
Egalités	**Vraie / Fausse**	**Justification**
$3 + a = 3a$	O vraie O fausse	
$7a - a = 0$	O vraie O fausse	
$2 + 3a = 5a$	O vraie O fausse	

Grille d'analyse et consignes de codage

Réponse	Type	Justification	Code
Q1	**3+a=3a**	**m + a = ma**	
Vrai incorrect	Type 0.2	Aucune justification ne me convient	V3 J0
	Type 5.1	Additionner et multiplier, c'est pareil	V2 L5 EAX J33
	Type 7.4	m + a = ma	V3 L3 EA42 J31
	Type 9.4	Le signe multiplié entre 3 et a est inutile	V3 L5 EA42 J33
	Type 10.4	3+2 = 3×2	V3 L2 EA42 J2
Faux correct	Type 0.1	Aucune justification ne me convient	V2 J0
	Type 1	Pour a=2, on a : 3+2=5 alors que 3×2=6	V1 L1 EA1 J1
	Type 2	m + a ≠ ma	V1 L1 EA1 J1
	Type 4	Additionner et multiplier, c'est pas pareil	V2 L5 EA1 J32
	Type 5	Dans la deuxième partie de l'égalité il y a un « fois » entre le 3 et le a alors que dans la première partie il y a un « plus » ou	V2 L5 EAX J32
	Type 5	On ne peut pas additionner des nombres et des lettres	V2 L5 EAX J32

Réponse	Type	Justification	Code
Q2	**7a-a=0**	**ma - a = 0**	
Vrai incorrect	Type 0.2	Aucune justification ne me convient	V3 J0
	Type 5.1	Les « a » s'annulent.	V2 L5 EA42 J33
	Type 5.1	Il faut soustraire les « a ».	V2 L5 EA42 J33
	Type 9.1	ma-a=m(a-a)=0	V3 L5 EA32 J33
	Type 10.1	Pour a=0, 7x0-0=0	V3 L2 EA32 J2
Faux correct	Type 0.1	Aucune justification ne me convient	V2 J0
	Type 1	Pour a=1, 7x1-1=7-1=6 et pas 0	V1 L1 EA1 J1
	Type 2	ma-a=m×a-a=(m-1)×a ± 0	V1 L1 EA1 J1
	Type 4	Il y a un signe « x » entre le « m » et le « a » et la multiplication est prioritaire sur l'addition	V2 L5 EA1 J32
	Type 5	« 7a » ce n'est pas pareil que « a » alors cela ne fait pas « 0 » lorsqu'on les soustrait	V2 L5 EAX J32

Réponse	Type	Justification	Code
Q3	**2+3a=5a**	**m + n a = (m + n) a**	
Vrai incorrect	Type 0.2	Aucune justification ne me convient	V3 J0
	Type 5.1	On peut mettre ensemble les nombres	V2 L5 EAX J33
	Type 7.1	m+n×a=(m+n)×a	V3 L3 EA32 J31
	Type 9.1	Il faut faire la somme des coefficients	V3 L5 EA32 J33
	Type 10.1	Pour a=1, 2+3=5	V3 L2 EA32 J2
Faux correct	Type 0.1	Aucune justification ne me convient	V2 J0
	Type 1	Pour a=0, 2+0=2 et pas 0	V1 L1 EA1 J1
	Type 2	(m+n)a=ma+na≠m+na	V1 L1 EA1 J1
	Type 4	Multiplier (m+n) par a, ce n’est pas pareil que multiplier n par a puis ajouter m	V2 L5 EA1 J32
	Type 5	On ne peut pas additionner des nombres et des lettres	V2 L5 EAX J32

Commentaires associés au codage des réponses après diagnostic

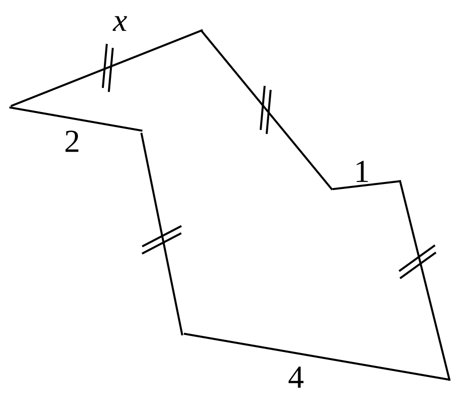
Type	Commentaire	Code (EA dépend de la question)
0.1	Pas de justification d’une réponse correcte	V2 J0
0.2	Pas de justification d’une réponse incorrecte	V3 J0
1	Contre-exemple	V1 L1 EA1 J1
2	Règle correcte algébrique	V1 L1 EA1 J1
2.1	Définition correcte algébrique (contre-exemple attendu)	V2 L1 EA1 J1
2.2	Définition correcte algébrique	V1 L1 EA1 J1
3	Règle correcte instanciée	V2 L2 EA1 J1
4	Règle correcte énoncée en français	V2 L5 EA1 J32
5	Argument faible énoncé en français	V2 L5 EAX J32
5.1	Argument faux d’ordre légal énoncé en français	V2 L5 EAX J33
6	Justification algébrique incomplète	V2 EA1 JX
7	*Règle incorrecte :*	
7.1	Règle incorrecte : Erreur de parenthèse	V3 L3 EA32 J31
7.2	Règle incorrecte : a^(m)×a^(n) = a^(m×n)	V3 L3 EA33 J31
7.3	Règle incorrecte pseudo-algébrique qui linéarise	V3 L3 EA41 J31
7.4	Règle incorrecte pseudo-algébrique qui assemble	V3 L3 EA42 J31
7.5	Règle incorrecte instanciée : a^(m)×a^(n) = a^(m×n)	V3 L3 EA33 J31
8	*Règle incorrecte partiellement instanciée*	
8.1	Règle incorrecte partiellement instanciée : Erreur de parenthèse	V3 L3 EA32 J31
8.2	Règle incorrecte partiellement instanciée : a^(m)×a^(n) = a^(m×n)	V3 L3 EA33 J31
8.3	Règle incorrecte partiellement instanciée qui linéarise	V3 L3 EA41 J31
8.4	Règle incorrecte partiellement instanciée qui assemble	V3 L3 EA42 J31
8.5	Règle incorrecte instanciée (pas de lettres)	V3 L5 EA33 J31
9	*Règle incorrecte énoncée en français*	
9.1	Règle incorrecte énoncée en français : Erreur de parenthèse	V3 L5 EA32 J33
9.2	Règle incorrecte énoncée en français : a^(m)×a^(n) = a^(m×n)	V3 L5 EA33 J33
9.3	Règle incorrecte énoncée en français qui linéarise	V3 L5 EA41 J33
9.4	Règle incorrecte énoncée en français qui assemble	V3 L5 EA42 J33
	Preuve par l’exemple	
10	Preuve par l’exemple correcte	V3 L2 EA1 J2

10.1	Preuve par l'exemple et erreur de parenthèse	V3 L2 EA32 J2
10.2	Preuve par l'exemple et Règle incorrecte: a^(m)×a^(n) = a^(m×n)	V3 L2 EA33 J2
10.3	Preuve par l'exemple et Règle incorrecte qui linéarise	V3 L2 EA41 J2
10.4	Preuve par l'exemple et Règle incorrecte qui assemble	V3 L2 EA42 J2

Caractérisation du point de vue didactique

Caractérisation didactique	
Objectifs	Tester la reconnaissance des règles de formation des expressions algébriques et plus particulièrement le rôle du signe multiplié non écrit ainsi que le rôle des parenthèses et des exposants
Composante	Utiliser l'algèbre (UA) Traduire algébriquement (TA) Effectuer du calcul algébrique (CA)
Capacité	Démontrer des règles de calcul (3.1) pour UA Démontrer des propriétés, des identités (3.2) pour UA Démontrer des identités (3.3) pour UA Ajouter des capacités pour TA Tester si une égalité est vraie en donnant des valeurs numériques à 1 ou 2 nombres indéterminés (10.1) pour CA Reconnaître la structure d'une expression algébrique (somme, produit…) (16.1) pour CA
Type de tâche	Rechercher si les égalités portant sur des expressions algébriques sont vraies ou fausses
Critères de validation	Vi : critères d'évaluation de la dimension « Validité » V0 : Absence de réponse V1 : Correct V2 : Correct partiel ou non attendu V3 : Incorrect
	Li : critères d'évaluation de la dimension « Utilisation des lettres » L1 : Utilisation correcte des lettres L2 : Utilisation des lettres pour leur substituer des valeurs numériques L3 : Utilisation des lettres pour faire du calcul algébrique avec des règles fausses L5 : Aucune utilisation des lettres
	EAi : critères d'évaluation de la dimension « Utilisation des règles d'Ecriture et de réécriture Algébrique » EA1 : Utilisation correcte des règles de transformation EA3 : Règles de transformation non maitrisées, mais indentification correcte du rôle des opérateurs + et × EA32 : Utilisation inadaptée des parenthèses qui conduit à un résultat incorrect EA4 : Identification incorrecte du rôle des opérateurs + et × EA42 : Les règles de transformation utilisées « assemblent » les expressions
	Ji : critères d'évaluation de la dimension « Type de justification » J0 : Pas de justification J1 : Justification par l'algèbre J2 : Justification par l'exemple numérique J31 : Justification reposant sur l'application de règles incorrectes J32: Justification en langage naturel par argumentation J33 : Justification s'appuyant sur des formulations d'ordre légal

Exercice 3 :



Calcule le périmètre de la figure	
Brouillon pour les calculs	Périmètre de la figure

Coche la (ou les) expression(s) qui donne(nt) le périmètre de la figure	
☐ $11\,c$	☐ $7c$
☐ $c+7$	☐ 11
☐ $4c+7$	☐ $c+c+1+c+4+c+2$

Grille d'analyse et consignes de codage
Pour Q2 (réponses 3 et 6 correctes).

Si plusieurs choix sont cochés pour la question 2

- Le choix 6 et le choix 3 sont cochés : le code du choix 6 est retenu,
- Sinon, si l'un des choix incorrect est coché : le code de ce choix est retenu.

Réponse	Type	Choix	Label	Code	Forme
Q1	1		Solution correcte avec expression algébrique réduite Somme des longueurs des côtés de la figure puis simplification de l'expression algébrique obtenue : $c+c+1+c+4+c+2=4c+7$	V1 L1 EA1 T1	$4c+7$
	2		Solution correcte avec expression algébrique non réduite ou partiellement réduite Le calcul précédent s'arrête à : $c+c+1+c+4+c+2$ ou à $c+c+7+c+c$	V2 L1 EA2 T1	$c+c+1+c+4+c+2$ $c+c+7+c+c$
	4		$c+7$ Usage des lettres sans prise en compte du codage	V3 T4	$c+7$
	5		$c\times 7$	V3 T4	$c\times 7$

			Usage des lettres sans prise en compte du codage avec confusion aire et périmètre et ajout des données numériques		
	5		$7c$ Usage des lettres sans prise en compte du codage avec assemblage des données	V3 T4	$7c$
	3		$11c$ Usage des lettres et prise en compte du codage, calcul mais concaténation	V3 L3 EA42 T4	$11c$
	7		Usage des lettres mais erreur dans le calcul (exemples)	V3 L3 EA3	
	6		11 Sans usage des lettres (mesurage).	V3 L5	
Q2	3	1	$11c$ Calcul et concaténation à partir des données schéma codé	V3 EA42 T4	$11c$
	4	2	$c + 7$ Pas de prise en compte du codage	V3	$c + 7$
	1	3	$4c + 7$ Réponse incomplète : expression algébrique réduite	V1 L1 EA1 T1	$4c + 7$
	5	4	$7c$ Pas de prise en compte du codage et assemblage des données	V3	$7c$
	6	5	11 Mesure sur figure pour les segments codés ayant même valeur	V3 L5 T4	11
	2	6	$c + c + 1 + c + 4 + c + 2$ Réponse incomplète : expression algébrique non réduite ou partiellement réduite	V2 L1 EA2 T1	$c + c + 1 + c + 4 + c + 2$
	1	3 et 6	Toutes les bonnes réponses	V1 L1 EA1 T1	$c + c + 1 + c + 4 + c + 2$ et $4c + 7$

Commentaires associés au codage des réponses après diagnostic

Pour cet exercice, le texte des commentaires associés au codage des réponses après diagnostic sont ceux de la colonne « Label ».

Question	Type	Commentaire	Code
Q1	1	Réponse correcte	V1 L1 EA1 T1
	2	Le calcul de l'aire n'est pas conduit complétement	V2 L1 EA2 T1
	3	Usage des lettres et prise en compte du codage, calcul avec concaténation	V3 L3 EA42 T4
	4	Usage des lettres sans prise en compte du codage	V3 T4
	5	Usage des lettres et prise en compte du codage avec confusion	V3 T4

		aire périmètre	
	5	Usage des lettres sans prise en compte du codage avec assemblage des données	V3 T4
	6	Sans usage des lettres (mesurage)	V3 L5
	7	Usage des lettres mais erreur dans les calculs	V3 L3 EA3
Q2	1	Toutes les bonnes réponses	V1 L1 EA1 T1
	2	Réponse correcte avec expression algébrique non réduite	V2 L1 EA1 T2
	3	Calcul et concaténation à partir des données schéma codé	V3 EA42 T4
	4	Pas de prise en compte du codage	V3
	5	Pas de prise en compte du codage et assemblage des données	V3
	6	Mesure sur figure pour les segments codés ayant même valeur	V3 L5 T4

Caractérisation du point de vue didactique

Caractérisation didactique	
Objectifs	Recherche si un élève sait traduire algébriquement une situation géométrique Identifier les règles de conversion utilisées pour passer du registre des figures au registre des écritures algébriques
Composantes	Utiliser l'algèbre (UA) Traduire algébriquement (TA) Effectuer du calcul algébrique (CA)
Capacités	Produire une expression littérale pour résoudre un problème (1.1) pour UA Traduire le périmètre d'une figure par une expression algébrique (5.6) pour TA Reconnaitre une expression algébrique traduisant un problème (7.5) pour TA Réduire une expression littérale à une variable (11.1) pour CA Factoriser une expression dans laquelle le facteur est apparent (13.1) pour CA
Types de tâche	Produire une expression algébrique Réduire une expression algébrique
Critères d'évaluation	Vi : critères d'évaluation de la dimension « Validité » V0 : Absence de réponse V1 : Correct V2 : Traitement non attendu V3 : Incorrect
	Li : critères d'évaluation de la dimension « Utilisation des lettres » L1 : Utilisation correcte des lettres L3 : Utilisation des lettres pour faire du calcul algébrique avec des règles fausses L5 : Aucune utilisation des lettres
	EAi : critères d'évaluation de la dimension « Utilisation des règles d'Écriture et de réécriture Algébrique » EA1 : Utilisation correcte des règles de transformation EA2 : Maitrise technique fragile EA3 : Règles de transformation non maîtrisées, mais identification correcte du rôle des opérateurs + et × EA4 : Identification incorrecte du rôle des opérateurs + et × EA42 : Les règles de transformation utilisées « assemblent » les

	expressions
	Ti : critères d'évaluation de la dimension « Traduction » T1 : Traduction correcte T4 : Traduction abréviative

Exercice 4 :

Indique si les égalités suivantes sont vraies pour toutes valeurs de a. Propose des justifications.		
Egalités	**Vraie / Fausse**	**Justification**
$3a = a \times 3$	O vraie O fausse	
$7a - a = 6a$	O vraie O fausse	

Grille d'analyse et consignes de codage

Réponse	Type		Justification	Code
Q1	**3a=ax3**		**ma = a x m**	
Vrai (correct)	Type 0.1		Aucune justification ne me convient	V2 J0
	Type 2		ma=m×a	V1 L1 EA1 J1
	Type 4		Il y a un « fois » entre le 3 et le a à gauche et donc cela fait pareil	V2 EA1 J32 L5
	Type 10		Pour a =2, 3×2=6 et 2×3=6	V3 EA1 J2 L2
Faux (incorrect)	Type 0.2		Aucune justification ne me convient	V3 J0
	Type 5.1		Lorsqu'il y a un « fois » ce n'est pas pareil que lorsqu'il n'y en a pas	V2 L5 EAX J33
	Type 5.1		Ajouter et multiplier, ce n'est pas pareil	V2 L5 EAX J33
	Type 7.4		3a=3+a	V3 L3 EA42 J31
	Type 10.4		3+1≠3×1	V3 L2 EA42 J2
Q2	**7a-a=6a**		**ma - a = (m-1) a**	
Vrai (correct)	Type 0.1		Aucune justification ne me convient	V2 J0
	Type 2		ma - a = (m-1) a	V1 L1 EA1 J1
	Type 4		On enlève une fois a à 7a ce qui donne 6a	V2 EA1 J32 L5
	Type 10.1		Pour a=1, 7×1-1=7-1=6	V3 L2 EA32 J2
Faux (incorrect)	Type 0.2		Aucune justification ne me convient	V3 J0
	Type 5.1		Il ne faut pas soustraire d'abord les a	V2 L5 EAX J33
	Type 5.1		Il faut faire (a-a) en premier	V2 L5 EAX J33
	Type 7.4		7a-a=0	V3 L3 EA42 J31
	Type 10.4		Pour a=1, on a 7×1-1=7×0=0 ≠ 6×1	V3 L2 EA42 J2

Commentaires associés au codage des réponses après diagnostic

Type	Commentaire	Code (dépend de la question)
0.1	Pas de justification d'une réponse correcte	V2 J0
0.2	Pas de justification d'une réponse incorrecte	V3 J0
1	Contre-exemple	V1 L1 EA1 J1
2	Règle correcte algébrique	V1 L1 EA1 J1
2.1	Définition correcte algébrique (contre-exemple attendu)	V2 L1 EA1 J1
2.2	Définition correcte algébrique	V1 L1 EA1 J1
3	Règle correcte instanciée	V2 L2 EA1 J1
4	Règle correcte énoncée en français	V2 L5 EA1 J32
5	Argument faible énoncé en français	V2 L5 EAX J32
5.1	Argument faux d'ordre légal énoncé en français	V2 L5 EAX J33
6	Justification algébrique incomplète	V2 EA1 JX

7	*Règle incorrecte :*	
7.1	Règle incorrecte : Erreur de parenthèse	V3 L3 EA32 J31
7.2	Règle incorrecte : a^(m)×a^(n) = a^(m×n)	V3 L3 EA33 J31
7.3	Règle incorrecte pseudo-algébrique qui linéarise	V3 L3 EA41 J31
7.4	Règle incorrecte pseudo-algébrique qui assemble	V3 L3 EA42 J31
7.5	Règle incorrecte instanciée : a^(m)×a^(n) = a^(m×n)	V3 L3 EA33 J31
8	*Règle incorrecte partiellement instanciée*	
8.1	Règle incorrecte partiellement instanciée : Erreur de parenthèse	V3 L3 EA32 J31
8.2	Règle incorrecte partiellement instanciée : a^(m)×a^(n) = a^(m×n)	V3 L3 EA33 J31
8.3	Règle incorrecte partiellement instanciée qui linéarise	V3 L3 EA41 J31
8.4	Règle incorrecte partiellement instanciée qui assemble	V3 L3 EA42 J31
8.5	Règle incorrecte instanciée (pas de lettres)	V3 L5 EA33 J31
9	*Règle incorrecte énoncée en français*	
9.1	Règle incorrecte énoncée en français : Erreur de parenthèse	V3 L5 EA32 J33
9.2	Règle incorrecte énoncée en français : a^(m)×a^(n) = a^(m×n)	V3 L5 EA33 J33
9.3	Règle incorrecte énoncée en français qui linéarise	V3 L5 EA41 J33
9.4	Règle incorrecte énoncée en français qui assemble	V3 L5 EA42 J33
	Preuve par l'exemple	
10	Preuve par l'exemple incorrecte	V3 L2 EA3 J2
10.1	Preuve par l'exemple et erreur de parenthèse	V3 L2 EA32 J2
10.2	Preuve par l'exemple et Règle incorrecte: a^(m)×a^(n) = a^(m×n)	V3 L2 EA33 J2
10.3	Preuve par l'exemple et Règle incorrecte qui linéarise	V3 L2 EA41 J2
10.4	Preuve par l'exemple et Règle incorrecte qui assemble	V3 L2 EA42 J2

Caractérisation du point de vue didactique

Caractérisation didactique	
Objectifs	Tester la reconnaissance des règles de formation des expressions algébriques et plus particulièrement le rôle du signe multiplié non écrit ainsi que le rôle des parenthèses et des exposants
Composante	Utiliser l'algèbre (UA) Effectuer du calcul algébrique (CA)
Capacité	Démontrer des règles de calcul (3.1) pour UA Démontrer des propriétés, des identités (3.2) pour UA Démontrer des identités (3.3) pour UA Tester si une égalité est vraie en donnant des valeurs numériques à 1 ou 2 nombres indéterminés (10.1) pour CA Reconnaître la structure d'une expression algébrique (somme, produit…) (16.1) pour CA
Type de tâche	Rechercher si les égalités portant sur des expressions algébriques sont vraies ou fausses
Critères de validation	Vi : critères d'évaluation de la dimension « Validité » V0 : Absence de réponse V1 : Correct V2 : Correct partiel ou non attendu V3 : Incorrect
	Li : critères d'évaluation de la dimension « Utilisation des lettres » L1 : Utilisation correcte des lettres L2 : Utilisation des lettres pour leur substituer des valeurs numériques L5 : Aucune utilisation des lettres

	EAi : critères d'évaluation de la dimension « Utilisation des règles d'Ecriture et de réécriture Algébrique » EA1 : Utilisation correcte des règles de transformation EA3 : Règles de transformation non maitrisées, mais identification correcte du rôle des opérateurs + et × EA32 : Utilisation inadaptée des parenthèses qui conduit à un résultat incorrect
	Ji : critères d'évaluation de la dimension « Type de justification » J1 : Justification par l'algèbre J2 : Justification par l'exemple numérique J3 : Justification de type scolaire J32 : Justification en langage naturel par argumentation J33 : Justification s'appuyant sur des formulations d'ordre légal

Exercice 5 :

13 filles et 15 garçons vont au cinéma. Chacun d'eux paye sa place à 6,80€, s'achète un soda à 3€, du pop-corn à 3,20€ et une glace à 2,50€.
Ecris une seule expression permettant de trouver la somme dépensée par le groupe sans faire le calcul
Résultat

Grille d'analyse et consignes de codage

Réponse	Type	Label	Code	Forme
Q1	1	Expression globale (parenthésée) traduisant le résultat de l'enchaînement opératoire $(13+15)\times(6{,}80+3+3{,}20+2{,}50)$	V1 EN1 T1	
	2	Expression globale partiellement calculée traduisant le résultat de l'enchaînement opératoire ; le développement et la réduction de l'expression sont corrects $28\times(6{,}80+3+3{,}20+2{,}50)$ $(13+15)\times 15{,}50$	V2 EN2 T1	
	3	Expression incorrecte partiellement ou complétement calculée avec écriture pas à pas enchaînée en succession d'opérations $13+15=28\times(6{,}80+3+3{,}20+2{,}50)=28\times 15{,}50=434$	V3 EN2 T4	
	4	Expression linéaire globale non parenthésée $13+15\times 6{,}80+3+3{,}20+2{,}50$	V3 T3	
	5	Expression linéaire globale non complétement parenthésée $(13+15)\times 6{,}80+3+3{,}20+2{,}50$ $13+15\times(6{,}80+3+3{,}20+2{,}50)$	V3EN32 T3	
	6	Calcul avec des expressions partielles traduisant pas à pas les résultats intermédiaires de l'enchaînement opératoire ; le développement et la réduction des expressions sont corrects $13+15=28$ $6{,}80+3+3{,}20+2{,}50=15{,}50$ $28\times 18{,}20=434$	V3 EN2 T4	
	9	Tout autre résultat	V3	

Commentaires associés au codage des réponses après diagnostic

Réponse	Type	Commentaire	Code
Q1	1	Expression globale (parenthésée) traduisant le résultat de l'enchaînement opératoire	V1 EN1 T1

	2	Expression globale partiellement calculée traduisant le résultat de l'enchaînement opératoire ; le développement et la réduction de l'expression sont corrects	V2 EN2 T1
	3	Expression incorrecte partiellement ou complétement calculée avec écriture pas à pas enchaînée en succession d'opérations	V3 EN2 T4
	4	Expression linéaire globale non parenthésée	V3 T3
	5	Expression linéaire globale non complétement parenthésée	V3EN32 T3
	6	Calcul avec des expressions partielles traduisant pas à pas les résultats intermédiaires de l'enchaînement opératoire ; le développement et la réduction des expressions sont corrects	V3 EN2 T4
	7	Expression globale (parenthésée) traduisant le résultat de l'enchaînement opératoire. Erreur au résultat final	V3 EN1 T1
	8	Expression globale partiellement calculée traduisant le résultat de l'enchaînement opératoire ; le développement et la réduction de l'expression sont corrects. Erreur au résultat final	V3 EN2 T1
	9	Tout autre résultat	V3

Caractérisation du point de vue didactique

Caractérisation didactique	
Objectifs	Vérifier les compétences à traduire un problème en une expression numérique parenthésée Utiliser les nombres décimaux
Composantes	Utiliser l'algèbre (UA) Effectuer du calcul numérique (CN)
Capacités	Produire une expression littérale pour résoudre un problème (1.1) pour UA Ecrire une expression numérique correspondant à une succession donnée d'opérations (23.1) pour CN
Types de tâche	Produire une expression numérique
Critères d'évaluation	Vi : critères d'évaluation de la dimension « Validité » V0 : Absence de réponse V1 : Correct V2 : Correct partiel ou non attendu V3 : Incorrect
	ENi : critères d'évaluation de la dimension « Utilisation des règles d'Écriture et de réécriture Numérique » EN1 : Utilisation correcte des règles de transformation EN2 : Maitrise technique fragile EN3 : Règles de transformation non maitrisées, mais identification correcte du rôle des opérateurs + et × EN32 : Utilisation inadaptée des parenthèses qui conduit à un résultat incorrect
	Ti : critères d'évaluation de la dimension « Traduction » T1 : Traduction correcte T3 : Traduction incorrecte T4 : Traduction abréviative

Exercice 6 :

Un élève dit à un camarade : « Tu prends un nombre, tu ajoutes 6 à ce nombre, tu multiplies le résultat par 3, tu soustrais le triple du nombre de départ. ». Cette élève affirme qu'on trouve toujours le même résultat. Cette affirmation est-elle vraie pour n'importe quel nombre ? Justifie ta réponse.
Démarche
L'affirmation est vraie pour n'importe quel nombre : O Oui O Non

Grille d'analyse et consignes de codage

	Réponses et commentaires	**Code**
Solution correcte	Preuve algébrique avec expression globale (parenthésée) Pour les expressions comportant des fractions, deux tactiques de calcul sont envisageables :	
	(1) on réduit les deux expressions au même dénominateur	V1 L1 EA1 T122 J1
	(2) la première expression est simplifiée	V1 L1 EA2 T122 J1
Solution correcte non attendue	Preuve algébrique avec des calculs pas à pas	V2 L1 EA1 T222 J1
	Preuve algébrique avec l'interprétation de l'énoncé comme une équation admettant une infinité de solutions	V2 L1 T122 J1 EA1 : tactique (1) EA2 : tactique (2)
Solution partielle	Une preuve algébrique est engagée avec l'une des trois interprétations précédentes. Mais une erreur de calcul conduit à un résultat faux ou a un abandon ou à une égalité non justifiée	
	- Cas d'une expression globale	V2 L1 EA33 T122 J1
	- Cas d'expressions partielles	V2 L1 EA33 T222 J1
Solution incorrecte	Démarche algébrique	
	Écriture globale non parenthésée	V3, L3, T322, J
	Calculs pas à pas	V3, L3, T422, J3
	On affine le codage de la dimension Calcul Algébrique (EA) pour les 3 cas avec deux possibilités : Possibilité 1 : il y a manipulation formelle	
	- avec mémoire de l'énoncé	EA31
	- sans mémoire de l'énoncé	EA32
	- avec erreurs d'application d'une règle de calcul	EA33
	- pseudo-opératoire en assemblage par exemple : $3\,x + 12 = 15$	EA42
	Possibilité 2 : il y n'a pas manipulation formelle mais substitution à x de valeurs numériques (preuve par l'exemple) :	V3 L2 T322 J2
	- avec mémoire de l'énoncé	EA31
	- sans mémoire de l'énoncé	EA32
	- avec erreurs d'application d'une règle de calcul	EA33

	Démarche non algébrique (preuve par l'exemple)	
	1) Les solutions mettent en jeu des écritures correctes	
	- expression globale parenthésée	V3 L5 EA1 T122 J2
	- expressions partielles	V3 L5 EA1 T222 J2
	2) les solutions mettent en jeu des écritures incorrectes.	
	- écriture pas à pas enchaînée en succession d'opérations	V3 L5 T422 J2
	- écriture linéaire globale non parenthésée	V3 L5 T322 J2
	- avec mémoire	EA31
	- sans mémoire	EA32

Commentaires associés au codage des réponses après diagnostic

Type	Commentaire	Code	Forme (à une Pépinière-équivalence près)
1	*Preuve algébrique avec une expression globale (parenthésée) traduisant le résultat de l'enchaînement opératoire*		
1.1	Preuve algébrique correcte et l'énoncé est traduit par une seule expression parenthésée. L'expression comporte des fractions qui sont simplifiées	V1 L1 EA1 T122 J1 E1	
1.2	Preuve algébrique correcte et l'énoncé est traduit par une seule expression parenthésée .L'expression comporte des fractions qui sont réduites au même dénominateur	V1 L1 EA2 T122, J1 E1	
1.3	Preuve algébrique correcte et l'énoncé est traduit par une seule expression parenthésée L'expression ne comporte pas de fractions.	V1 L1 EA1 T122, J1 E1	
	Preuve algébrique correcte et l'énoncé est traduit par des calculs pas à pas séparé		
2	Preuve algébrique correcte et l'énoncé est traduit par des calculs pas à pas séparé	V2 L1 EA1 T222, J1E2	
3	*Preuve algébrique correct et l'énoncé est traduit comme une équation admettant une infinité de solutions*		
3.1	Preuve algébrique correcte et l'énoncé est traduit par une équation admettant une infinité de solutions. L'expression comporte des fractions qui sont simplifiées	V2 L1 EA1 T222 J1 E1	
3.2	Preuve algébrique correcte et l'énoncé est traduit par une équation admettant une infinité de solutions L'expression comporte des fractions qui sont réduites au même	V2 L1 EA2 T222 J1 E1	

	dénominateur		
3.3	Preuve algébrique correcte et l'énoncé est traduit par une équation admettant une infinité de solutions. L'expression ne comporte pas de fractions.	V2 L1 EA1 T222 J1 E1	
4	*Preuve algébrique avec une traduction algébrique correcte de l'énoncé (une seule expression parenthésée) mais la justification est incomplète ou une erreur de calcul final conduit à un résultat faux ou une égalité non justifiée*		
4.1	L'énoncé est traduit par une seule expression parenthésée mais la justification est incomplète	V2 L1 EAx T222 J1 E1	
4.2	l'énoncé est traduit par une seule expression parenthésée mais une erreur de calcul final conduit à un résultat faux ou une égalité non justifiée	V2 L1 EA33 J1 T222 E1	
4.3	Démarche de preuve algébrique : l'énoncé est traduit par une équation admettant une infinité de solutions mais la justification est incomplète.	V2 L1 EAx J1 T222 E1	
4.4	Démarche de preuve algébrique : l'énoncé est traduit par une équation admettant une infinité de solutions et une erreur de calcul final conduit à un résultat faux ou une égalité non justifiée	V2 L1 EA33 J1 T222 E1	
5	*Preuve algébrique avec une traduction algébrique correcte de l'énoncé (une seule expression parenthésée) et manipulation formelle incorrecte*		
5.1	l'énoncé est traduit par une seule expression parenthésée mais une erreur de calcul avec mémoire de l'énoncé conduit à un résultat faux ou une égalité non justifiée	V3 L3 EA31 J3 T122 E1	
5.2	L'énoncé est traduit par une seule expression parenthésée mais une erreur de calcul sans mémoire de l'énoncé conduit à un résultat faux ou une égalité non justifiée	V3 L3 EA32 J3 T122 E1	
5.3	Démarche de preuve algébrique : l'énoncé est traduit par une seule expression parenthésée mais une erreur de calcul avec assemblage conduit à un résultat faux ou une égalité non justifiée	V3 L3 EA42 J3 T122 E1	
5.4	Démarche de preuve algébrique : l'énoncé est traduit par une seule expression parenthésée mais des erreurs de calcul conduisent à un résultat faux ou une égalité non	V3 L3 EA33 J3 T122 E1	

	justifiée		
5.5	Démarche de preuve algébrique : l'énoncé est traduit par une équation admettant une infinité de solutions mais une erreur de calcul avec mémoire de l'énoncé conduit à un résultat faux ou une égalité non justifiée	V3 L3 EA31 J3 T222 E1	
5.6	Démarche de preuve algébrique : l'énoncé est traduit par une équation admettant une infinité de solutions mais une erreur de calcul sans mémoire de l'énoncé conduit à un résultat faux ou une égalité non justifiée	V3 L3 EA32 J3 T222 E1	
5.7	Démarche de preuve algébrique : l'énoncé est traduit par une équation admettant une infinité de solutions mais une erreur de calcul avec assemblage conduit à un résultat faux ou une égalité non justifiée	V3 L3 EA42 J3 T222 E1	
5.8	Démarche de preuve algébrique : l'énoncé est traduit par une équation admettant une infinité de solutions mais des erreurs de calcul conduisent à un résultat faux ou une égalité non justifiée	V3 L3 EA33 J3 T222 E1	
6	*Preuve algébrique correct et l'énoncé est traduit par des calculs pas à pas séparés mais la justification est incomplète ou une erreur de calcul final conduit à un résultat faux ou une égalité non justifiée*		
6.1	Démarche algébrique : l'énoncé est traduit par des calculs pas-à-pas séparés mais la justification est incomplète.	V2 L1 EAx J1 T222 E2	
6.2	Démarche de preuve algébrique : l'énoncé est traduit par des calculs pas-à-pas séparés et une erreur de calcul final conduit à un résultat faux ou une égalité non justifiée	V2 L1 EA33 J1 T222 E2	
7	*Démarche algébrique en pas-à-pas séparé et manipulation formelle incorrecte*		
7.1	Démarche de preuve algébrique : l'énoncé est traduit par des calculs pas-à-pas séparés et une erreur de calcul avec mémoire de l'énoncé conduit à un résultat faux ou une égalité non justifiée	V3 L3 J3 T322 EA31 E2	
7.2	Démarche de preuve algébrique : l'énoncé est traduit par des calculs pas-à-pas séparés et une erreur de calcul sans mémoire de l'énoncé conduit à un résultat faux ou une	V3 L3 J3 T322 EA32 E2	

	égalité non justifiée		
7.3	Démarche de preuve algébrique : l'énoncé est traduit par des calculs pas-à-pas séparés et une erreur de calcul avec assemblage conduit à un résultat faux ou une égalité non justifiée	V3 L3 J3 T322 EA42 E2	
7.4	Démarche de preuve algébrique : l'énoncé est traduit par des calculs pas-à-pas séparés mais des erreurs de calcul conduisent à un résultat faux ou une égalité non justifiée	V3 L3 J3 T322 EA33 E2	
8	*Démarche de preuve algébrique correcte où une opération est oubliée*		
8.1	Démarche de preuve algébrique avec une expression globale (parenthésée) où une opération est oubliée	V2 L1 EAx J1 T122 E1	
8.2	Démarche de preuve algébrique : l'énoncé est traduit par une équation admettant une infinité de solutions où une opération est oubliée	V2 L1 EAx J1 T222 E1	
9	*Démarche de preuve algébrique avec retour au numérique*		
9.1	Début de démarche de preuve algébrique : l'énoncé est traduit par une seule expression parenthésée puis retour au numérique	V3 L1 EAx J2 T122 E1	
9.2	Début de démarche de preuve algébrique : l'énoncé est traduit par une équation admettant une infinité de solutions puis retour au numérique	V3 L1 EAx J2 T222 E1	
10	*Tentative de démarche algébrique mais avec des erreurs dans l'interprétation de l'énoncé et des calculs corrects ou incomplets*		
10.1	Tentative de démarche algébrique : l'énoncé est traduit par une expression non parenthésée qui n'est pas transformée	V3 L3 J3 T322 EAx Ex	
10.2	Tentative de démarche algébrique : l'énoncé est traduit par une expression non parenthésée avec des calculs avec mémoire de l'énoncé	V3 L3 J3 T322 EA31	
10.3	Tentative de démarche algébrique : l'énoncé est traduit par une expression non parenthésée avec des calculs sans mémoire de l'énoncé	V3 L3 J3 T322 EA32	
10.4	Tentative de démarche algébrique : l'énoncé est traduit par une équation qui n'est pas transformée	V3 L3 J3 T322 EAx	
10.5	Tentative de démarche algébrique : l'énoncé est traduit par une équation avec des calculs avec mémoire de l'énoncé	V3 L3 J3 T322 EA31	
10.6	Tentative de démarche algébrique : l'énoncé est traduit par une équation	V3 L3 J3 T322 EA32	

	avec des calculs sans mémoire de l'énoncé		
10.7	Tentative de démarche algébrique mais l'énoncé est traduit par une suite de calculs pas-à-pas enchaînés corrects	V3 L4 EA1 J3 T422 E3	
11	*Tentative de démarche algébrique mais avec des erreurs dans l'interprétation de l'énoncé et des calculs incorrects*		
11.1	Tentative de démarche algébrique mais l'énoncé est traduit par une suite de calculs pas-à-pas enchaînés. Des erreurs de calculs avec mémoire de l'énoncé	V3 L4 EA31 J3 T422 E3	
11.2	Tentative de démarche algébrique mais l'énoncé est traduit par une suite de calculs pas-à-pas enchaînés. Des erreurs de calculs sans mémoire de l'énoncé	V3 L4 EA32 J3 T422 E3	
11.3	Tentative de démarche algébrique mais l'énoncé est traduit par une suite de calculs pas-à-pas enchaînés. Des erreurs de calculs avec assemblage	V3 L4 EA42 J3 T422 E3	
11.4	Tentative de démarche algébrique mais l'énoncé est traduit par une suite de calculs pas-à-pas enchaînés. Des erreurs de calcul conduisent à un résultat faux ou une égalité non justifiée.	V3 L4 EA33 J3 T422 E3	
12	*Preuve par des exemples avec une traduction correcte de l'énoncé et des calculs corrects*		
12.1	Preuve par un exemple : l'énoncé est traduit par une seule expression parenthésée correcte et les calculs sont corrects	V3 L5 EN1 J2 T151 E1	
12.2	Preuve par un exemple : l'énoncé est traduit par une équation et les calculs sont corrects	V3 L5 EN1 J2 T251 E1	
12.3	Preuve par un exemple : l'énoncé est traduit par des calculs pas à pas corrects	V3 L5 EN1 J2 T251 E2	
13	*Preuve par des exemples avec une traduction correcte de l'énoncé mais : la justification est incomplète ou une erreur de calcul conduit à un résultat faux ou une égalité non justifiée*		
13.1	Preuve par un exemple : l'énoncé est traduit par une seule expression parenthésée correcte mais la justification est incomplète	V3 L5 ENx J2 T151 E1	
13.2	Preuve par un exemple : l'énoncé est	V3 L5 EN33 J2	

	traduit par une seule expression parenthésée correcte mais une erreur de calcul conduit à un résultat faux	T151 E1	
13.3	Preuve par un exemple : l'énoncé est traduit par des calculs pas à pas corrects mais la justification est incomplète	V3 L5 ENx J2 T251 E2	
13.4	Preuve par un exemple : l'énoncé est traduit par des calculs pas à pas corrects mais une erreur de calcul conduit à un résultat faux	V3 L5 EN33 J2 T251 E2	
14	*Preuve par des exemples avec une traduction incorrecte de l'énoncé et des calculs corrects*		
14.1	Preuve par un exemple : l'énoncé est traduit de façon incorrecte par des calculs pas à pas enchaînés	V3 L5 J2 T451 E3	
14.2	Preuve par un exemple : l'énoncé est traduit par une seule expression non parenthésée	V3 L5 J2 T351 E1	
15	*Preuve par des exemples avec une traduction incorrecte de l'énoncé et des calculs incorrects*		
16.1	Ecriture incorrecte et erreur de calcul avec mémoire de l'énoncé	V3 L5 J2 T351 EN31	
15.2	Ecriture incorrecte et erreur de calcul sans mémoire de l'énoncé	V3 L5 J2 T351 EN32	
15.3	Ecriture incorrecte et des erreurs de calcul	V3 L5 J2 T351 EN33	
15.4	Ecriture incorrecte et erreur de calcul avec assemblage	V3 L5 J2 T351 EN42	
15.5	Ecriture incorrecte : l'énoncé est traduit par des calculs pas à pas enchainés avec des erreurs de calcul	V3 L5 J2 T451 EN33	
16	*Preuve exprimée par argumentation en langage naturel*	CODAGE HUMAIN POUR L'INSTANT	
16.1	Preuve par l'exemple exprimée en langage naturel	V3 L5 J2	
16.2	Écriture du programme de calcul	V3 L5 J2	
16.3	Argument extra-mathématiques	V3 L5 J33	

Caractérisation du point de vue didactique

<table>
<tr><th colspan="2">Caractérisation didactique</th></tr>
<tr><td>Objectifs</td><td>Etudier
le type de preuve utilisé (preuve par l'exemple ou preuve algébrique) pour prouver qu'un énoncé est vrai
les types de traitements algébriques mobilisés (utilisation d'une expression globale parenthésée ou calculs pas à pas faisant apparaître les résultats intermédiaires)
la gestion de l'articulation entre difféntes représentations (algébrique, arithmétique et langage naturel)
la signification accordée au signe d'égalité</td></tr>
<tr><td>Composantes</td><td>Utiliser l'algèbre (UA)</td></tr>
</table>

	Traduire algébriquement (TA) Effectuer du calcul algébrique (CA)
Capacités	Conjecturer que 2 programmes de calcul sont égaux (0.3) pour UA Produire une expression littérale pour résoudre un problème (1.1) pour UA Prouver que 2 programmes de calcul sont égaux (3.6) pour UA Traduire un programme de calcul par une expression algébrique (5.2) pour TA Réduire une expression littérale à une variable (11.1) pour CA
Types de tâches	Conjecturer une proposition Prouver que cette proposition est vraie
Critères d'évaluation	Vi: critères d'évaluation de la dimension « Validité » V0 : Absence de réponse V1 : Correct V2 : Correct partiel ou non attendu V3 : Incorrect
	Li : critères d'évaluation de la dimension « Utilisation des Lettres » L1 : Utilisation correcte des lettres L2 : Utilisation des lettres pour leur substituer des valeurs numériques L3 : Utilisation des lettres pour faire du calcul algébrique avec des règles fausses L5 : Aucune utilisation des lettres
	EAi : critères d'évaluation de la dimension « Utilisation des règles d'Ecriture et de réécriture Algébrique » EA1 : Utilisation correcte des règles de transformation EA3 : Règles de transformation non maîtrisées, mais identification correcte du rôle des opérateurs + et × EA32 : Utilisation inadaptée des parenthèses qui conduit à un résultat incorrect EA33 : Utilisation de règles de transformation fausses identifiées EA4 : Identification incorrecte du rôle des opérateurs + et × EA42 : Les règles de transformation utilisées « assemblent » les termes
	Ti : critères d'évaluation de la dimension « Traduction » T1 : Traduction correcte T2 : Traduction correcte non attendue T3 : Traduction incorrecte (s'appuyant sur des erreurs récurrentes) T4 : Traduction abréviative
	Ji : critères d'évaluation de la dimension « Type de Justification » J1 : Justification par l'algèbre J2 : Justification par l'exemple numérique J3 : Justification de type scolaire
	ENi : critères d'évaluation de la dimension « Utilisation des règles d'Ecriture et de réécriture Numérique » EN1 : Utilisation correcte des règles de transformation EN2 : Maîtrise technique fragile EN3 : Règles de transformation non maîtrisées, mais identification correcte du rôle des opérateurs + et × EN32 : Utilisation inadaptée des parenthèses qui conduit à un résultat incorrect EN4 : pas de respect des priorités opératoires

Caractérisation de l'interface et de l'énoncé

Interface	
Un énoncé composé d'un programme de calcul variable exprimé en langage naturel, d'une question fermée et d'une question ouverte dont les énoncés sont invariants Pour la question ouverte : une zone de saisie pour les justifications Pour la question fermée : deux choix exclusifs « Vrai » et « Faux »	
Invariants	
Paramètres	Un programme de calcul exprimé dans deux registres : Langage naturel : texte Algèbre : expression algébrique
Contraintes	Le degré de complexité de l'expression algébrique : Nombre de parenthèse (au plus 3) Nombre et type des opérations (addition, soustraction, multiplication, division) L'expression réduite du programme de calcul est une constante
Type de génération	Génération assistée : L'auteur choisit les termes de la palette pour écrire le programme de calcul PépiGen construit l'expression algébrique traduisant le programme de calcul et calcule la forme réduite de l'expression

Paramètres des clones

Paramètres	Partie	
Exercice originel	Programme de calcul en langage naturel	Tu prends un nombre, tu ajoutes 4 à ce nombre, tu multiplies le résultat par 3, tu soustrais le triple du nombre de départ et enfin, tu divises le résultat par 2 : tu trouves 6.
	Expression	$(x+6)\times 3-3x=18$
Clone	Programme de calcul en langage naturel	
	Expression	

Exercice 7 :

	Brouillon pour les calculs	Résultat
Factorise $3 \times a + 3 \times 100$		
Réduis $5a + 2a + 1 + a + 5$		
Développe $5(2 - a)$		

Grille d'analyse et consignes de codage

Réponse	Type	Label	Code	Forme
Q1	1	Réponse correcte $3 \times a + 3 \times 100 = 3 \times (a + 100)$	V1 L1 EA1 T1	$3 \times (a + 100)$
	2	$3 \times \ a + 100$ Utilisation incorrecte de la distributivité de la multiplication / addition sans parenthèsage	V3 L3 EA32	$3 \times a + 100$
	3	$3 \times (a + 3 \times 100)$ Utilisation incorrecte de la distributivité de la multiplication / addition	V3 L3 EA3	$3 \times (a + 3 \times 100)$
	4	300a ; 900a Concaténation	V3 L3 EA42	300a 900a 303a
	5	3a+ 300 Confusion factoriser et calculer	V3 T3	3a+ 300
	6	Autres réponses	V3	
Q2	1	Réponse correcte 8a+6	V1 L1 EA1	8a+6
	2	7a+a+6 « a » n'est pas compris comme « 1×a » et n'est pas traité	V2 L1 EA1	7a+a+6
	3	8a+1+5 Le calcul n'est pas simplifié	V2 L1 EA1	8a+1+5
	4	14a La lettre est assimilée à un « nombre » ; concaténation des termes	V3 L3 EA42	14a
	5	7a+6 ; (5a+2a)+(1+5) « a » n'est pas compris comme « 1×a ».	V3 L3 EA3	7a+6 (5a+2a)+(1+5)
	6	13a La lettre est assimilée à un nombre et « a » n'est pas compris comme « 1×a »	V3 L3 EA42 EA5	13 a
	7	Autres réponses	V3	
Q3	1	Réponse correcte 10-5a	V1 L1 EA1	10-5a
	2	$5 \times 2 - 5 \times a$ Le calcul n'est pas simplifié	V2 L1 EA1	$5 \times 2 - 5 \times a$
	3	10-a	V3 L3 EA32	10-a

		Mauvaise gestion des parenthèses utilisation incorrecte de la distributivité simple		
	4	10+5a ; $5\times 2+5\times a$ Erreur de signe en développant une parenthèse	V3 L3 EA34	10+5a $5\times 2+5\times a$
	5	5a Concaténation	V3 EA42	5a
	6	Autres réponses	V3	

Commentaires associés au codage des réponses après diagnostic

Question	Type	Commentaire	Code
Q1	1	Réponse correcte	V1 L1 EA1 T1
	2	Utilisation incorrecte de la distributivité de la multiplication / addition sans parenthésage	V2 L3 EA32
	3	Utilisation incorrecte de la distributivité de la multiplication / addition	V2 L3 EA3 EA32
	4	Concaténation	V2 L3 EA42
	5	Confusion factoriser et calculer	V3 T3
	6	Réponse incorrecte	V3
Q2	1	Réponse correcte	V1 L1 EA1
	2	« a » n'est pas compris comme « $1\times$a ».	V2 L1 EA1
	3	Le calcul n'est pas simplifié	V2 L1 EA1
	4	La lettre est assimilée à un « nombre » ; concaténation des termes	V3 L3 EA42
	5	« a » n'est pas compris comme « $1\times$a »	V3 L3 EA3
	6	La lettre est assimilée à un nombre et « a » n'est pas compris comme « $1\times$a »	V3 L3 EA42 EA5
	7	Réponse incorrecte	V3
Q3	1	Réponse correcte	V1 L1 EA1
	2	Le calcul n'est pas simplifié	V2 L1 EA1
	3	Mauvaise gestion des parenthèses utilisation incorrecte de la distributivité simple	V3 L3 EA32
	4	Erreur de signe en développant une parenthèse	V3 L3 EA34
	5	Concaténation	V3 EA42
	6	Réponse incorrecte	V3

Caractérisation du point de vue didactique

Caractérisation didactique	
Objectifs	Vérifier les compétences d'un élève dans le domaine algébrique pour la factorisation, la réduction et le développement d'expressions Tester la reconnaissance des règles de formation des expressions algébriques et plus particulièrement le rôle du signe multiplié non écrit dans les écritures algébriques, ainsi que le rôle des parenthèses
Composantes	Effectuer du calcul algébrique (CA)
Capacités	Réduire une expression littérale à une variable (11.1) pour CA Développer une expression en utilisant la distributivité simple de la multiplication sur l'addition (12.1) pour CA Factoriser une expression dans laquelle le facteur est apparent (13.1)

	pour CA
Types de tâche	Factoriser une expression algébrique Réduire une expression algébrique Développer ou réduire une expression algébrique
Critères d'évaluation	Vi : critères d'évaluation de la dimension « Validité » V0 : Absence de réponse V1 : Correct V2 : Correct partiel ou non attendu V3 : Incorrect
	Li : critères d'évaluation de la dimension « Utilisation des Lettres » L1 : Utilisation correcte des lettres L3 : Utilisation des lettres pour faire du calcul algébrique avec des règles fausses
	EAi : critères d'évaluation de la dimension « Utilisation des règles d'Ecriture et de réécriture Algébrique » EA1 : Utilisation correcte des règles de transformation EA3 : Règles de transformation non maîtrisées, mais identification correcte du rôle des opérateurs + et × EA32 : Utilisation inadaptée des parenthèses qui conduit à un résultat incorrect EA4 : Identification incorrecte du rôle des opérateurs + et × EA42 : Les règles de transformation utilisées « assemblent » les termes EA5 : Ecriture sans repérage de blocs
	Ti : critères d'évaluation de la dimension « Traduction » T1 : Traduction correcte T3 : Traduction incorrecte

Exercice 8 :

La valeur de l'expression $2 + 7x$ pour $x = 5$ est	O 77	O 35	O 37
L'égalité $5 + 3x = 2x + 12$ est vérifiée pour	O $x = 2$	O $x = 0$	O $x = 7$

Grille d'analyse et consignes de codage

Réponse	Type	Choix	Label	Code	Forme
Q1	3	1	2+75=77 Pas de reconnaissance d'un signe « fois » entre 7 et x	V3 EA5 EN5	
	1	2	Calcul partiel de 7×5 avec oubli d'un terme au lieu du calcul de $2 + 7 \times 5$	V3 EA3 EN3	
	2	3	Priorité des opérations respectée	V1 L1 EA1 EN1 T1	
Q2	2	1	$5 + 3 \times 2 = 8 \times 2 = 16$ $2 \times 2 + 12 = 4 + 12 = 16$ Lecture des expressions de la gauche vers la droite sans prise en compte des priorités opératoires	V3 EA42 EN42	
	4	2	L'égalité, devenue fausse, s'écrit $5 + 3 \times 0 = \ 2 \times 0 + 12$ pas de respect des blocs de calcul avec 0	V3 EA5 EN5	
	1	3	Résultat correct	V1 L1 EA1 EN1T1	

Commentaires associés au codage des réponses après diagnostic

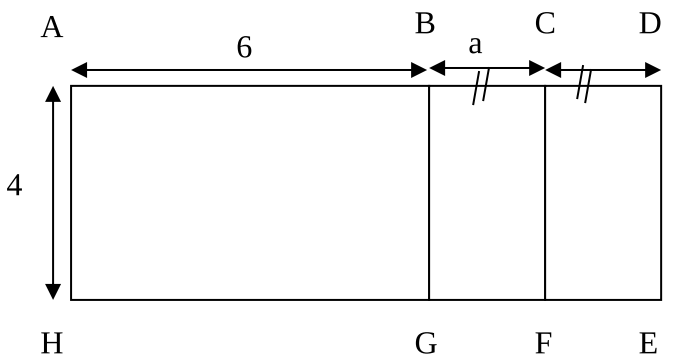
Réponse	Type	Commentaire	Code
Q1	3	Pas de reconnaissance d'un signe « fois » entre 7 et x	V3 EA5 EN5
	1	Calcul partiel de 7×5 avec oubli d'un terme au lieu du calcul de $2 + 7 \times 5$	V3 EA3 EN3
	2	Réponse correcte, la priorité des opérations respectée	V1 L1 EA1 EN1 T1
Q2	2	Lecture des expressions de la gauche vers la droite sans prise en compte des priorités opératoires	V3 EA42 EN42
	4	L'égalité, devenue fausse, s'écrit $5 + 3 \times 0 = \ 2 \times 0 + 12$ pas de respect des blocs de calcul avec 0	V3 EA5 EN5
	1	Réponse correcte	V1 L1 EA1 EN1T1

Caractérisation du point de vue didactique

Caractérisation didactique

Objectifs	Vérifier les compétences d’un élève à substituer des valeurs numériques dans des expressions algébriques Vérifier les compétences d'un élève à tester une égalité pour résoudre une équation
Composantes	Traduire algébriquement (TA) Effectuer du calcul algébrique (CA) Effectuer du calcul numérique (CN)
Capacités	Ajouter des capacités pour TA Calculer la valeur d’une expression littérale en donnant aux variables des valeurs numériques (9.1) pour CA Tester si une égalité est vraie en donnant des valeurs numériques à 1 ou 2 nombres indéterminés (10.1) pour CA Effectuer une succession d’opérations (22.1) pour CN
Types de tâche	Interpréter des expressions algébriques Substituer des valeurs numériques dans des expressions algébriques Tester une égalité
Critères d’évaluation	Vi : critères d’évaluation de la dimension « Validité » V0 : Absence de réponse V1 : Correct V3 : Incorrect
	Li : critères d’évaluation de la dimension « Utilisation des Lettres » L1 : Utilisation correcte des lettres
	EAi : critères d’évaluation de la dimension « Utilisation des règles d’Ecriture et de réécriture Algébrique » EA1 : Utilisation correcte des règles de transformation EA3 : Règles de transformation non maîtrisées, mais identification correcte du rôle des opérateurs + et × EA4 : Identification incorrecte du rôle des opérateurs + et × EA42 : Les règles de transformation utilisées « assemblent » les termes EA5 : Ecriture sans repérage de blocs EA4

Exercice 9 :



A partir du schéma ci-dessus associe chaque expression littérale à la (ou les) description(s) correspondante(s) dans la liste de droite.

Question	Expression littérale
Q1	$4 \times a$
Q2	$6 + a$
Q3	$(6 + 2a) \times 4$

Description	Choix
Longueur de [AC]	1
Longueur de [AD]	2
Périmètre de BCFG	3
Périmètre de CDEF	4
Aire de BCFG	5
Aire de ADEH	6

Grille d'analyse et consignes de codage

Réponse	Type	Choix	Label	Code	Forme
Q1	1	5	Aire du rectangle BCFG	V1 T1	
	3	3 et 4	Association montrant une confusion entre aire et périmètre	V3 T4	
	2	1,2,6 et 7	Toute autre association	V3 T3	
Q2	1	1	Longueur du segment [AC]	V1 T1	
	2	Autres choix	Toute autre association	V3 T3	
Q3	1	6	Aire du rectangle ADEH	V1 T1	
	2	Autres choix	Toute autre association	V3 T3	

Commentaires associés au codage des réponses après diagnostic

Réponse	Type	Commentaire	Code
Q1	1	Réponse correcte	V1 T1
	3	Association montrant une confusion entre aire et périmètre	V3 T4
	2	Réponse incorrecte	V3 T3
Q2	1	Réponse correcte	V1 T1
	2	Réponse incorrecte	V3 T3
Q3	1	Réponse correcte	V1 T1
	2	Réponse incorrecte	V3 T3

Caractérisation du point de vue didactique

Caractérisation didactique	
Objectifs	Rechercher si un élève sait traduire une expression algébrique comme la longueur d'un segment, le périmètre et l'aire d'une figure composée d'un assemblage de rectangles
Composantes	Traduire algébriquement (TA)
Capacités	Traduire une expression algébrique comme longueur d'un segment (5.3) pour TA Traduire une expression algébrique comme périmètre d'une figure (5.5) pour TA Traduire une expression algébrique comme aire d'une figure (5.7) pour TA
Types de tâche	Utiliser une expression littérale
Critères d'évaluation	Vi : critères d'évaluation de la dimension « Validité » V0 : Absence de réponse V1 : Correct V3 : Incorrect
	Ti : critères d'évaluation de la dimension « Traduction » T1 : Traduction correcte T3 : Traduction incorrecte T4 : Traduction abréviative

Exercice 10 :

Dans une cour de récréation, il y a trois fois d'élèves que de vélos. On note E le nombre d'élèves et *V* le nombre de vélos. Ecris une égalité qui traduit cette phrase en utilisant les lettres *E* et *V*.
Egalité en utilisant les lettres *E* et *V*.

Grille d'analyse et consignes de codage

Réponse	Type	Label	Code	Forme
	1	La relation fonctionnelle entre les deux variables E et V est traduite par l'égalité 3V = E	V1 L1 EA1 T122	3V = E
	2	La relation fonctionnelle entre les deux variables E et V est traduite par le quotient $\frac{E}{V}=3$	V2 L1 T222	$\frac{E}{V}=3$ $\frac{E}{3}=V$
	3	Réponse fausse 3E=V traduisant une relation incorrecte liée à une traduction de l'énoncé sans reformulation.	V3 L3 T322	3E=V
	4	Réponses fausses 3E+V; 3E > V sans repérage d'une relation d'égalité entre les données du problème; E et V sont des étiquettes	V3 L4 T422	3E+V 3E > V

Commentaires associés au codage des réponses après diagnostic

Type	Commentaire	Code
1	Traduction correcte : la relation fonctionnelle entre les deux variables E et V est traduite par l'égalité 3V = E	V1 L1 EA1 T122
2	Traduction correcte : la relation fonctionnelle entre les deux variables E et V est traduite par un quotient	V2 L1 T222
3	Réponse incorrecte liée à une traduction de l'énoncé sans reformulation ; E et V sont des étiquettes	V3 L3 T322
4	Réponses incorrectes sans repérage d'une relation d'égalité entre les données du problème; E et V sont des étiquettes	V3 L4 T422

Caractérisation du point de vue didactique

Caractérisation didactique	
Objectifs	Étudier si un élève sait traduire algébriquement un énoncé en langage naturel Identifier la gestion de l'articulation entre différentes représentations (algébrique et langage naturel)

Composantes	Utiliser l'algèbre (UA) Traduire algébriquement (TA)
Capacités	Produire une expression littérale pour résoudre un problème (1.1) pour UA Traduire un programme de calcul par une expression algébrique (5.2) pour TA
Types de tâche	Traduire une situation
Critères d'évaluation	Vi : critères d'évaluation de la dimension « Validité » V0 : Absence de réponse V1 : Correct V2 : Traitement non attendu V3 : Incorrect
	Li : critères d'évaluation de la dimension « Utilisation des lettres » L1 : Utilisation correcte des lettres L4 : Utilisation des lettres comme étiquette ou abréviation
	Ti : critères d'évaluation de la dimension « Traduction » T122 : Traduction correcte de la langue naturelle vers l'algèbre T222 : Traduction correcte non attendue de la langue naturelle ver l'algèbre T422 : Traduction abréviative de la langue naturelle vers l'algèbre

Caractérisation de l'interface et de l'énoncé

Interface	
Un énoncé composé d'un texte variable décrivant une relation entre deux grandeurs *f* et *g* et une valeur numérique *n* Une question ouverte comportant un énoncé composé d'un texte invariant Une zone de saisie pour la relation	
Invariants	
Paramètres	La valeur numérique *n* Le nom des grandeurs désignées par *f* et *g* Une relation entre *f* et *g* exprimée dans deux registres - langage naturel : texte - algèbre : expression algébrique : x = n*y (ou x= y/n)
Contraintes	$\forall\ n \in \mathrm{N} \qquad 1 < n < 1000$ Zone de saisie : l'élève ne peut saisir que des nombres, le signe = et les opérateurs arithmétiques et les lettres désignant les grandeurs
Type de génération	Génération assistée L'auteur choisit la situation et le nom des grandeurs L'auteur choisit les termes de la palette pour écrire la relation entre *f* et *g* PépiGen construit l'expression algébrique traduisant cette relation

Paramètres des clones

Paramètres	f	g	n
Exercice originel	R	T	3
Clone			

Le niveau local du test

Présentation

Au niveau local, le test évalue la réponse proposée par l'élève en la comparant à un « type de réponse » et la code selon une première composante, la validité (V). D'autres codes viennent étiquetées cette réponse en termes de cohérences de fonctionnement, selon plusieurs composantes : le statut du signe d'égalité (E), l'utilisation des règles d'écriture et de réécriture algébriques dans les transformations symboliques (EA), l'utilisation de règles d'écriture et de réécritures numériques dans les calculs numériques (EN), le statut des lettres (L), le type de justification (J) et la traduction (T).

Interprétation praxéologique

Presque toutes les composantes interviennent dans chacune des trois OM locales de l'OM de référence, sauf la traduction (T). En effet :

- dans les trois OM locales, le statut de l'égalité (E), le statut des lettres (L), l'utilisation de règles d'écriture et de réécriture numériques et algébriques (EA et EN) sont en jeu dans la génération d'équations pour résoudre un problème algébrique ($OML1_q$), dans la résolution algébrique d'une équation ($OML2_q$) et dans $OML3_q$ (par exemple, tester une solution implique de donenr du sens à l'égalité et à la lettre, et de comprendre les règles d'écriture numérique et algébrique) ;
- la traduction (T) est associée essentiellement à $OML1_q$.

Le niveau global individuel

Présentation

Au niveau global individuel, le test détermine un profil cognitif de l'élève. Il établit d'abord un stéréotype selon quatre composantes : le calcul algébrique (CA), le calcul numérique (CN), l'usage de l'algèbre (UA) et la traduction algébrique (TA) ; il présente ensuite des caractéristiques personnelles : le taux de réussite, les leviers, les fragilités, la liste des erreurs et la liste des réussites. Par exemple, pour le calcul algébrique, le niveau 1 correspond à un calcul algébrique intelligent et contrôlé, le niveau 2 à un calcul technique basé sur des règles syntaxiques souvent en aveugle, et le niveau 3 à un calcul sans signification et sans priorités opératoires.

L'algorithme de calcul des stéréotypes se déroule en trois étapes :

- une description quantitative, qui détermine le taux de réussite sur des sous-ensembles d'exercices qui comprennent le même type d'exercices ou font intervenir les mêmes capacités ;
- une description qualitative par composante à partir d'indicateurs évaluant le degré de maîtrise de certaines capacités ;
- un calcul du stéréotype par composante, en combinant des indicateurs.

Les indicateurs de la description qualitative (deuxième étape) déterminent :

- pour la composante calcul algébrique (CA) : la maîtrise du calcul algébrique (MCA), la maîtrise des règles de transformations algébriques (MR), l'interprétation des expressions algébriques (IEA) ;
- pour la composante calcul numérique (CN) : la maîtrise des règles dans le domaine numérique (MRN) et l'interprétation des expressions numériques (IEN) ;
- pour la composante usage de l'algèbre (UA) : la maîtrise de l'outil algébrique (MOA), la justification algébrique (JA) et le statut des lettres (SL) ;
- pour la composante traduction algébrique (TA) : la maîtrise de la traduction algébrique (MTA) et la traduction des relations mathématiques (TRM).

Interprétation praxéologique

Nous associons ces indicateurs avec les éléments technologiques pilotant les OM locales de l'OM de référence relative aux équations. Beaucoup de composantes sont en jeu dans chacune des trois OM locales :

- IEN, IEA, MOA, JA, SL, MTA et TRM avec les éléments technologiques de $OML1_q$ (règles de conversions entre registres de représentation sémiotiques, rôle des opérateurs et du signe d'égalité) ;
- MCA, MR, IEA, MRN et IRN avec les éléments technologiques de $OML2_q$ (propriétés de conservation des solutions d'une équation pour justifier les transformations algébriques opérées sur une équation en vue de trouver ses solutions, composante pratique guidant la mise en œuvre de la technique de résolution algébrique) ;
- MOA, IEA, MRN et IEN avec les éléments technologiques de $OML3_q$ (définition d'une équation pour la reconnaissance de sa structure, propriétés sur les racines d'un polynôme pour le test de solutions).

Le niveau global collectif

Présentation

Un stéréotype est défini par les quatre composantes calcul numérique (CN), calcul algébrique (CA), usage de l'algèbre (UA), traduction algébrique (TA). Chaque composante possède entre trois et quatre niveaux :

a. pour la composante CN :

   1. : règles du domaine numérique correctement utilisées, respect des priorités opératoires et interprétation appropriée des expressions numériques ;
   2. : règles du domaine numérique pas toujours respectées et interprétation moyennement appropriée des expressions numériques ;
   3. : règles du domaine numériques non maîtrisées, non respect des priorités opératoires et interprétation défaillante des expressions numériques.

b. pour la composante CA :

   1. niveau 1 : traitement algébrique prenant en compte les aspects syntaxique et sémantique des expressions s'appuyant sur une adaptabilité dans l'interprétation des expressions selon les usages visés (conception structurale) ;
   2. niveau 2 : traitement essentiellement syntaxique avec des erreurs récurrentes de transformation privilégiant une conception procédurale des expressions ;
   3. niveau 3 : traitement s'appuyant sur une conception pseudo-structurale, mettant en jeu des règles de formation et de transformation incorrectes du type concaténation.

c. pour la composante UA :

   1. niveau 1 : disponibilité de l'outil algébrique et mobilisation adaptée ;
   2. niveau 2 : mobilisation de l'outil algébrique et traduction algébrique non adaptée ;
   3. niveau 3 : mobilisation de l'outil algébrique sans cohérence entre le modèle et la situation.
   4. niveau 4 : non disponibilité de l'outil algébrique pour généraliser, prouver ou modéliser et démarches arithmétiques persistantes.

d. pour la composante TA :

   1. niveau 1 : traduction correcte ;

2. niveau 2 : traduction pas toujours adaptée ;
3. niveau 3 : au moins une traduction sans cohérence entre le modèle et la situation.

Un stéréotype est donc de la forme $CN_iCA_jUA_kTA_l$ avec $0 \leq i \leq 3$, $0 \leq j \leq 3$, $0 \leq k \leq 4$ et $0 \leq l \leq 3$. Il existe potentiellement 108 stéréotypes différents. Cependant, comme le fait remarquer Grugeon (2009), certains stéréotypes sont improbables. Par exemple, un élève qui ne maîtrise pas du tout le calcul numérique n'aura très probablement pas une bonne maîtrise du calcul algébrique, ou bien un élève qui ne maîtrise pas le calcul algébrique ne saura probablement pas mobiliser l'outil algébrique pour résoudre des problèmes, ce qui élimine les stéréotypes contenant les composantes CN3/CA1 et les stéréotypes contenant les composantes UA3/CA1.

Tâches en autonomie pour le PER relatif aux équations

Tâches en autonomie pour l'étape 1 du PER relatif aux équations

Exercice 1 (type : mettre en équation un problème à base de deux programmes de calcul dont on cherche la valeur pour laquelle ces deux programmes renvoient le même résultat final)

Enoncé

PROGRAMME A	PROGRAMME B
Choisir un nombre	Choisir un nombre
Le multiplier par 3	Le multiplier par 6
Ajouter 5 au résultat	Soustraire 2 au résultat

Alexandra et Bilal choisissent le même nombre de départ. Alexandra teste le programme A et Bilal teste le programme B. Alexandra et Bilal obtiennent le même résutat final. Quel nombre de départ ont-ils choisi ?

Si tu penses avoir trouvé une solution, vérifie que celle-ci est la bonne.

Aides pour le groupe A

Aide 1 (type :

Regarde le type de problème identique qui a été traité en classe pour t'aider.

Aide 2

Voir figure 3 ci-après.

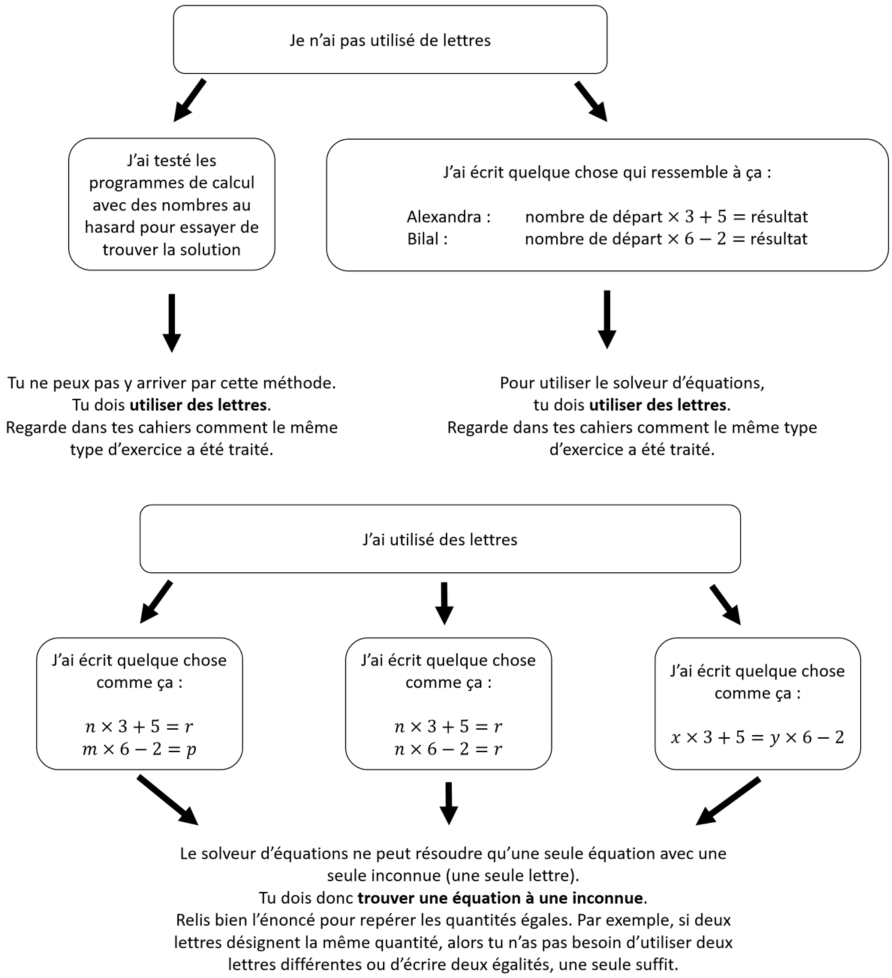


Figure 3 – Aide 2 du groupe A

Aides pour le groupe B

Aide 1

Regarde le problème qui a été traité en classe et qui ressemble à celui-ci pour t'aider.

Aide 2

Voir figure 4 ci-après.

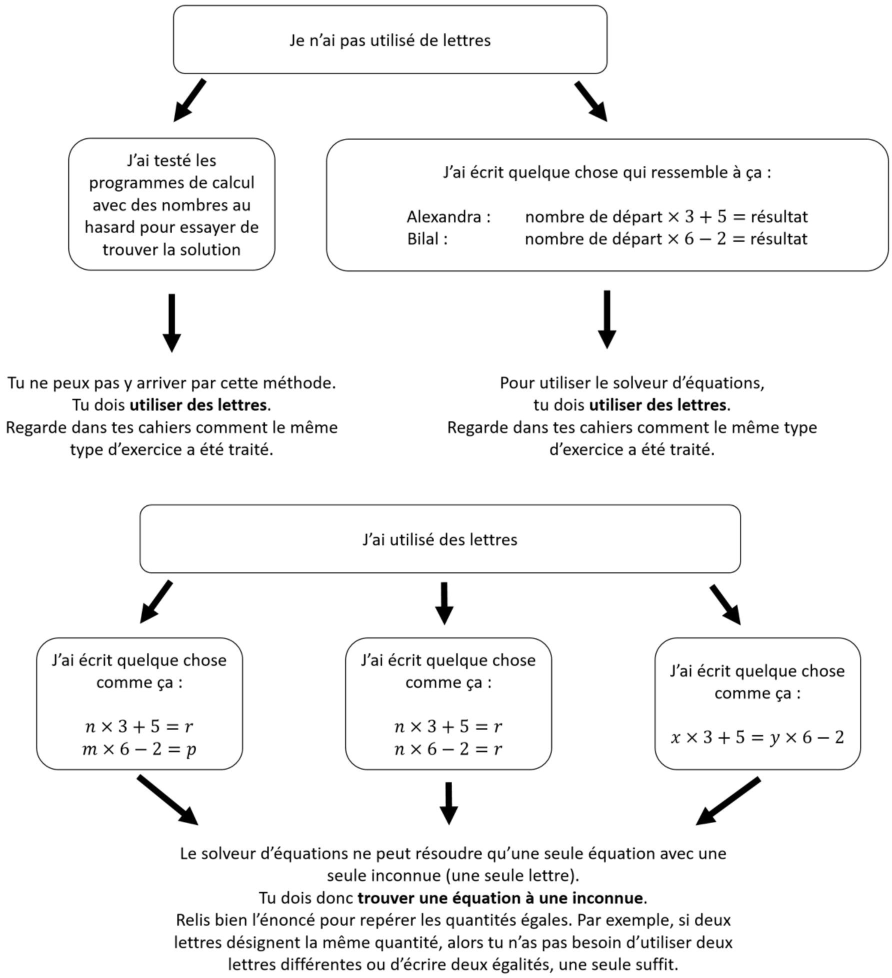


FIGURE 4 – Aide 2 du groupe B

Aide 3

Voici un exercice du même type que celui que tu dois faire et qui est résolu. Tu peux t'en inspirer pour résoudre l'exercice.

Enoncé de l'exercice résolu

PROGRAMME A	PROGRAMME B
Choisir un nombre Le multiplier par 5 Ajouter 2 au résultat	Choisir un nombre Le multiplier par 3 Soustraire 4 au résultat

Alicia et Brieg choisissent le même nombre de départ. Alicia teste le programme A et Brieg teste le programme B. Alicia et Brieg obtiennent le même résutat final. Quel nombre de départ ont-ils choisi ?

Solution rédigée

On appelle n le même nombre de départ choisi par Alicia et Brieg.

Le résultat du programme A est $n \times 6 + 2$.

Le résultat du programme B est $n \times 3 - 5$.

Alicia et Brieg trouvent le même résultat final, donc on a l'égalité $n \times 6 + 2 = n \times 3 - 5$.

Cette égalité est une équation. Grâce à un solveur d'équations, on trouve que la solution est $\frac{-3}{7}$.

Vérification : on teste chaque programme avec $\frac{-3}{7}$ (le résultat final obtenu pour chaque programme est $\frac{26}{7}$).

Aides pour le groupe C

Aide 1

Aide 2

Voici un exercice du même type que celui que tu dois faire et qui est résolu (on a simplement changé les nombres dans l'énoncé). Tu peux t'en inspirer pour résoudre l'exercice.

Exercice résolu

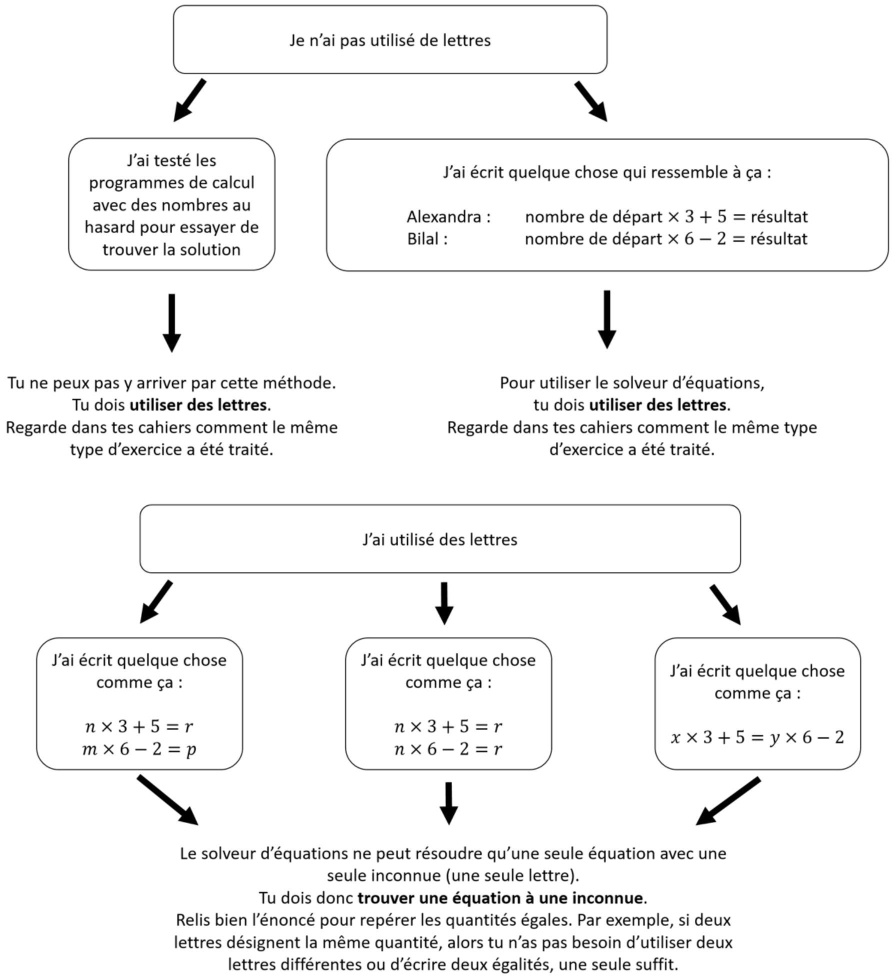


FIGURE 5 – Aide 2 du groupe C

PROGRAMME A	PROGRAMME B
Choisir un nombre Le multiplier par 5 Ajouter 2 au résultat	Choisir un nombre Le multiplier par 3 Soustraire 4 au résultat

Alicia et Brieg choisissent le même nombre de départ. Alicia teste le programme A et Brieg teste le programme B. Alicia et Brieg obtiennent le même résutat final. Quel nombre de départ ont-ils choisi ?

Solution rédigée

On appelle n le même nombre de départ choisi par Alicia et Brieg.

Le résultat du programme A est $n \times 6 + 2$.

Le résultat du programme B est $n \times 3 - 5$.

Alicia et Brieg trouvent le même résultat final, donc on a l'égalité $n \times 6 + 2 = n \times 3 - 5$.

Cette égalité est une équation. Grâce à un solveur d'équations, on trouve que la solution est $\frac{-3}{7}$.

Remarque : on peut vérifier que $\frac{-3}{7}$ est bien solution du problème en testant chaque programme avec $\frac{-3}{7}$ (le résultat final obtenu pour chaque programme est $\frac{26}{7}$).

Exercice 2 (même type que l'exercice 1 mais avec parenthèses)

Enoncé

PROGRAMME A	PROGRAMME B
Choisir un nombre Le multiplier par 3 Ajouter 5 au résultat	Choisir un nombre Lui soustraire 2 Multiplier le résultat par 6

Alexandra et Bilal choisissent le même nombre de départ. Alexandra teste le programme A et Bilal teste le programme B. Alexandra et Bilal obtiennent le même résultat final. Quel nombre de départ ont-ils choisi ?

Aides pour les groupes A et B

Aide 1

Regarde le type de problème identique qui a été traité en classe pour t'aider.

Aide 2

Quelle est la différence entre cet exercice et l'exercice 1 ? Qu'est-ce que cela va changer concernant les priorités opératoires ?

Aide 3

Ceci est une aide pour comprendre la différence entre l'exercice 1 et l'exercice 2.

Voici deux programmes de calcul :

PROGRAMME 1	PROGRAMME 2
Choisir un nombre Le multiplier par 2 Ajouter 5 au résultat	Choisir un nombre Lui ajouter 5 Multiplier le résultat par 2

Tu remarqueras que le programme 2 est presque le même que le programme 1, sauf que les deux dernières lignes ont été échangées.

On appelle n le nombre choisi au départ. Ecris l'expression qui correspond à chaque programme de calcul. Quelle différence y a-t-il entre ces deux expressions ?

Sers-toi de tes observations pour résoudre maintenant l'exercice 2.

Aide 4

Voici un exercice du même type que celui demandé et qui est résolu.

Enoncé de l'exerice résolu

Voici deux programmes de calcul :

PROGRAMME A	PROGRAMME B
Choisir un nombre Le multiplier par 6 Ajouter 2 au résultat	Choisir un nombre Lui soustraire 1 Multiplier le résultat par 3

Alessio et Binta choisissent le même nombre de départ. Alessio teste le programme A et Binta teste le programme B. Alessio et Binta obtiennent le même résultat final. Quel nombre de départ ont-ils choisi ?

Solution rédigée

On appelle n le nombre choisi au départ par Alessio et Binta.

L'expression correspondant au résultat du programme A est $6n + 2$.

L'expression correspondant au résultat du programme B est $(n - 1) \times 3$ (il ne faut pas oublier les parenthèses).

Alessio et Binta obtiennent le même résultat final, donc l'équation correspondant au problème est $6n + 2 = (n - 1) \times 3$.

Grâce à un solveur d'équations, on trouve que la solution de cette équation est $\frac{-5}{3}$.

Le nombre de départ choisi par Alessio et Binta est $\frac{-5}{3}$.

Aides pour le groupe C

Aide 1

Regarde le type de problème identique qui a été traité en classe pour t'aider.

Aide 2

Quelle différence y a-t-il entre le programme B de cet exercice et le programme B de l'exercice 1 ? Qu'est-ce que cela va changer concernant les priorités opératoires ?

Aide 3

Ceci est une aide pour comprendre la différence entre l'exercice 1 et l'exercice 2.

Voici deux programmes de calcul :

PROGRAMME 1	PROGRAMME 2
Choisir un nombre Le multiplier par 2 Ajouter 5 au résultat	Choisir un nombre Lui ajouter 5 Multiplier le résultat par 2

Tu remarqueras que le programme 2 est presque le même que le programme 1, sauf que les deux dernières lignes ont été échangées.

On appelle n le nombre choisi au départ. Ecris l'expression qui correspond à chaque programme de calcul. Quelle différence y a-t-il entre ces deux expressions ?

Sers-toi de tes observations pour résoudre maintenant l'exercice 2.

Aide 4

Voici un exercice du même type que celui demandé et qui est résolu.

Enoncé de l'exerice résolu

Voici deux programmes de calcul :

PROGRAMME A	PROGRAMME B
Choisir un nombre Le multiplier par 6 Ajouter 2 au résultat	Choisir un nombre Lui soustraire 1 Multiplier le résultat par 3

Alessio et Binta choisissent le même nombre de départ. Alessio teste le programme A et Binta teste le programme B. Alessio et Binta obtiennent le même résultat final. Quel nombre de départ ont-ils choisi ?

Solution rédigée

On appelle n le nombre choisi au départ par Alessio et Binta.

L'expression correspondant au résultat du programme A est $6n + 2$.

L'expression correspondant au résultat du programme B est $(n - 1) \times 3$ (il ne faut pas oublier les parenthèses).

Alessio et Binta obtiennent le même résultat final, donc l'équation correspondant au problème est $6n + 2 = (n - 1) \times 3$.

Grâce à un solveur d'équations, on trouve que la solution de cette équation est $\frac{-5}{3}$.

Le nombre de départ choisi par Alessio et Binta est $\frac{-5}{3}$.

Exercice 3 (type réciproque : écrire un problème correspondant à une équation donnée)

Enoncé pour le groupe A

Rédige un problème avec deux programmes de calcul qui correspond à l'équation $2(x+7) = 5 - 3x$.

Enoncé pour les groupes B et C

Rédige un problème avec deux programmes de calcul qui correspond à l'équation $2 \times x + 7 = 5 - 3 \times x$.

Aide pour le groupe A

Aide 1

Contrôle ce que tu fais en t'appuyant sur les priorité opératoires et/ou en faisant des tests numériques.

Aide 2

Ecris les signes multipliés si tu en as besoin.

Aide 3

Si tu as un doute sur le fait qu'un programme de calcul corresponde bien à l'expression $2(x+7)$ ou à l'expression $5 - 3x$, tu peux tester ton programme avec deux ou trois nombres simples, calculer l'expression correspondante avec ces mêmes nombres simples, et vérifier que tu obtiens bien les mêmes résultats à chaque fois.

Aide 4

Voici un exercice du même type et qui est résolu. Inspire-toi de cette solution.

Enoncé de l'exercice résolu

Rédige un problème avec deux programmes de calcul qui correspond à l'équation $2(x+9) = 5 - 4x$.

Solution rédigée

Voici deux programmes de calcul :

PROGRAMME A	PROGRAMME B
Choisir un nombre Lui ajouter 9 Multiplier le résultat par 2	Choisir un nombre Le multiplier par -4 Ajouter 5 au résultat

(Le programme A correspond à l'expression $2(x+9)$ *et le programme B à* $5-4x$*.)*

Axelle et Bob choisissent le même nombre de départ. Axelle teste le programme A et Bob teste le programme B. Axelle et Bob trouvent le même résultat final. Quel nombre de départ ont-ils choisi ?

Aide pour le groupe B

Aide 1

Si tu as un doute sur un programme de calcul, tu peux vérifier que les priorités opératoires du programme correspondent bien à celles de l'expression $2(x+7)$ ou $5-3x$.

Aide 2

Voici un exercice du même type et qui est résolu. Inspire-toi de cette solution.

Enoncé de l'exercice résolu

Rédige un problème avec deux programmes de calcul qui correspond à l'équation $2 \times x + 9 = 5 - 4 \times x$.

Solution rédigée

Voici deux programmes de calcul :

PROGRAMME A	PROGRAMME B
Choisir un nombre Le multiplier par 2 Ajouter 9 au résultat	Choisir un nombre Le multiplier par -4 Ajouter 5 au résultat

(Le programme A correspond à l'expression $2\times x+9$ *et le programme B à* $5-4\times x$*.)*

Axelle et Bob choisissent le même nombre de départ. Axelle teste le programme A et Bob teste le programme B. Axelle et Bob trouvent le même résultat final. Quel nombre de départ ont-ils choisi ?

Aide 3

Résous l'équation avec un solveur d'équations et teste la solution trouvée sur tes programmes de calcul.

Aides pour le groupe C

Aide 1

Pour la rédaction du problème, inspire-toi des exercices 1 et 2.

Aide 2

Voici un exercice du même type et qui est résolu. Inspire-toi de cette solution.

Enoncé de l'exercice résolu

Rédige un problème avec deux programmes de calcul qui correspond à l'équation $2 \times x + 9 = 5 - 4 \times x$.

Solution rédigée

Voici deux programmes de calcul :

PROGRAMME A	PROGRAMME B
Choisir un nombre Le multiplier par 2 Ajouter 9 au résultat	Choisir un nombre Le multiplier par -4 Ajouter 5 au résultat

(Le programme A correspond à l'expression $2\times x+9$ *et le programme B à* $5-4\times x$*.)*

Axelle et Bob choisissent le même nombre de départ. Axelle teste le programme A et Bob teste le programme B. Axelle et Bob trouvent le même résultat final. Quel nombre de départ ont-ils choisi ?

Aide 3

Résous l'équation avec un solveur d'équations et teste la solution trouvée sur tes programmes de calcul.

Exercice 4 (type : déterminer si un nombre est solution d'une équation)

(a) Voici une équation : $5 + 3a = -2a$.

Le nombre 6 est-il solution de cette équation ? Et le nombre -1 ?

(b) Voici une équation : $6m + 1 = 2(1 + m)$.

Le nombre (-2) est-il solution de cette équation ? Et le nombre $0,25$?

Aide pour le groupe A

Aide 1

Regarde le type d'exercice identique qui a été traité en classe pour t'aider.

Aide 2

Aide-toi de la définition d'une solution d'une équation donnée dans ton cahier de leçons.

Aides pour le groupe B

Aide 1

Regarde le type d'exercice identique qui a été traité en classe pour t'aider.

Aide 2

Si tu as oublié ce qu'est la solution d'une équation, regarde dans ton cahier de leçons ou dans ton manuel.

Aide 3

Tu peux faire apparaître les signes multipliés qui ne sont pas écrits pour faire tes calculs.

Aide 4

Tu peux utiliser un solveur d'équations pour contrôler ta réponse.

Aides pour le groupe C

Aide 1

Regarde le type d'exercice identique qui a été traité en classe pour t'aider.

Aide 2

Si tu as oublié ce qu'est la solution d'une équation, regarde dans ton cahier de leçons ou dans ton manuel.

Aide 3

Tu peux faire apparaître les signes multipliés qui ne sont pas écrites pour faire tes calculs.

Par exemple, pour la question (a), l'équation est : $5 + 3 \times a = -2 \times a$.

Aide 4

Si tu n'as pas trouvé que -1 est solution pour la question (a), fais attention aux priorités opératoires dans tes calculs. Demande-toi toujours quelle opération est prioritaire.

Tu peux utiliser un solveur d'équations pour contrôler ta réponse.

Tâches en autonomie pour l'étape 2 du PER relatif aux équations

Exercice 1 (type : une résolution d'équation étant donnée, justifier les transformations effectuées à chaque étape ; type réciproque)

Enoncé pour le groupe A

Complète les tableaux ci-dessous :

Equation	Transformation	Propriété utilisée	Objectif
$2a + 2 = 4 \times (a + 2)$			
$2a + 2 = 4a + 8$			
$-2a + 2 = 8$			
$-2a = 6$			
$a = -3$			

Conclusion : La solution de l'équation $2a + 2 = 4(a + 2)$ est :

Vérification :

Equation	Transformation	Propriété utilisée	Objectif
$2(t + 15) = 7t - 5$			
	On développe et on réduit le membre de gauche		
			On « élimine » les termes en t dans le membre de droite
			On « isole » les termes en t dans le membre de gauche
	On divise chaque membre par -5		

Conclusion :

Vérification :

Enoncé pour les groupes B et C

Complète les tableaux ci-dessous :

Equation	Transformation	Propriété utilisée	Objectif
$2a + 2 = 4 \times (a + 2)$			
$2a + 2 = 4a + 8$		Distributivité simple	On transforme l'équation en une équation sans parenthèses
$-2a + 2 = 8$	On soustrait $4a$ à chaque membre		On « élimine » les termes en a dans le membre de droite
$-2a = 6$		Conservation de l'égalité (P1)	
$a = -3$			

Conclusion : La solution de l'équation $2a + 2 = 4(a + 2)$ est :

Vérification :

Equation	Transformation	Propriété utilisée	Objectif
$2(t + 15) = 7t - 5$			
	On développe et on réduit le membre de gauche		
$-5t + 30 = -5$		Conservation de l'égalité (P1)	On « élimine » les termes en t dans le membre de droite
			On « isole » les termes en t dans le membre de gauche
	On divise chaque membre par -5		

Conclusion :

Vérification :

Aides pour tous les groupes

Aide 1 *(pour remplir le premier tableau)*

Pour trouver les transformations et propriétés utilisées d'une équation à une autre, observe ce qui change. En particulier :

- Si des parenthèses ont « disparu », alors on a probablement utilisé la propriété de distributivité. On utilise cette propriété dans le but de transformer une équation en une équation sans parenthèses.
- Si des termes ont « changé » dans les deux membres de l'équation, alors on a probablement utilisé une propriété de conservation de l'égalité. Pour trouver quelle propriété a été utilisée, observe bien les expressions de chaque membre et les opérateurs (addition, soustraction, multiplication, division). On utilise les propriétés de conservation pour transformer l'équation en une équation plus simple à résoudre, en « isolant » dans un membre les termes avec l'inconnue et dans l'autre membre les termes sans inconnue.

Aide 2

Voici un exemple de tableau complété :

Equations	Transformations	Propriétés utilisées	Objectifs
$4 \times (x+4) = 2 \times x - 6$			
$4x + 16 = 2x - 6$	On développe et on réduit le membre de gauche	Distributivité simple	On transforme l'équation en une équation sans parenthèses
$2x + 16 = -6$	On soustrait $2x$ à chaque membre	Conservation de l'égalité (P1)	On « élimine » les termes en x dans le membre de droite
$2x = -22$	On soustrait 16 à chaque membre	Conservation de l'égalité (P1)	On « isole » les termes en x dans le membre de gauche
$x = -11$	On divise chaque membre par 2	Conservation de l'égalité (P2)	On « isole » l'inconnue

Conclusion : La solution de l'équation $4(x + 4) = 2x - 6$ est -11.

Vérification : On remplace x par -11 dans chaque membre de l'équation.

$4(-11 + 4) = -44 + 16 = -28$

$2 \times (-11) - 6 = -22 - 6 = -28$

Exercice 2 (type : résoudre une équation du premier degré à une inconnue)

Résous les équations ci-dessous :

(1) $7 \times y + 2 = 3 \times y + 9$

(2) $5t - 2 = 10 + 3t$

(3) $5y + 7 = 5 \times (3y + 4)$

(4) $3 + 7n = 4 - (n + 2)$

Aides pour tous les groupes

Aide 1

Regarde les exercices du même type qui ont été traités en classe.

Aide 2

Pour résoudre une équation, tu peux refaire un tableau comme dans l'exercice 2.

Aide 3

Pour chaque équation, en fonction de ce que tu as fait, lis les indications correspondantes.

Si tu as procédé d'une manière qui n'est pas donnée dans les aides, demande à ton professeur de contrôler ta réponse.

Indications pour l'équation (1) :

Dans ma résolution, j'ai transformé l'équation de départ en $9y = 11y$ →

Tu as fait des erreurs de transformations d'expressions.
Tu as transformé le membre de gauche $7y + 2$ en $9y$
et tu as transformé le membre de droite $3y + 9$ en $11y$.

Teste l'égalité $7y + 2 = 9y$ en remplaçant y par 3 par exemple.
Donc est-ce que cette égalité est vraie pour n'importe quel nombre y ?
Corrige tes erreurs et recommence la résolution.

Je trouve 3 comme solution. →

Tu as fait une erreur.
La fin de ta résolution ressemble probablement à ceci :

$$\begin{gathered} 4y = 7 \\ y = 7 - 4 \\ y = 3 \end{gathered}$$

Explique pourquoi les équations $4y = 7$ et $y = 7 - 4$ ne sont pas équivalentes : les propriétés de conservation de l'égalité sont-elles respectées ? Est-ce que ces deux équations ont la même solution ?

Je trouve $\frac{4}{7}$ comme solution. →

Tu as fait une erreur.
La fin de ta résolution ressemble probablement à ceci :

$$\begin{gathered} 4y = 7 \\ y = \frac{4}{7} \end{gathered}$$

Explique pourquoi les équations $4y = 7$ et $y = \frac{4}{7}$ ne sont pas équivalentes : les propriétés de conservation de l'égalité sont-elles respectées ? Est-ce que ces deux équations ont la même solution ?

Je trouve $\frac{7}{4}$ (ou 1,75) comme solution. →

C'est la bonne solution.
Tu peux le vérifier en remplaçant y par $\frac{7}{4}$ ou $1{,}75$ dans l'équation de départ.
N'hésite pas à utiliser ta calculatrice pour contrôler tes calculs.

Indications pour l'équation (2) : utilise les aides précédentes (équation 1) pour corriger tes erreurs si tu ne trouves pas 6 comme solution. Ecris les signes multipliés qui ne sont pas écrits pour faire tes calculs.

Indications pour l'équation (3) :

Dans ma résolution, j'ai transformé l'équation de départ en $12y = 35y$

Tu as fait des erreurs de transformations d'expressions.
Tu as transformé le membre de gauche $5y + 7$ en $12y$
et tu as transformé le membre de gauche $5(3y + 4)$ en $35y$.

Explique pourquoi ces transformations sont fausses en testant les égalités $5y + 7 = 12y$ et $5(3y + 4) = 35y$ (remplace y par 3 par exemple).
Ecris tous les signes multipliés pour faire tes calculs si tu en as besoin.

Corrige tes erreurs et recommence la résolution.

Dans ma résolution, j'ai transformé l'équation de départ en $5y + 7 = 15y + 4$

Tu as fait une erreur de transformation d'expressions.
Tu as transformé le membre de droite $5(3y + 4)$ en $15y + 4$.

Montre que cette transformation est fausse en testant l'égalité $5(3y + 4) = 15y + 4$ (remplace y par 2 par exemple).
Quelle propriété faut-il utiliser pour transformer l'expression $5(3y + 4)$ en une expression sans parenthèses ?

Corrige tes erreurs et recommence la résolution.

Je trouve -23 comme solution.

Tu as fait une erreur.
La fin de ta résolution ressemble à ceci :

$$10y = -13$$
$$y = -13 - 10$$
$$y = -23$$

Explique pourquoi les équations $10y = -13$ et $y = -13 - 10$ ne sont pas équivalentes : les propriétés de conservation sont-elles bien respectées ? Ces équations ont-elles la même solution ?

Corrige ton erreur et termine la résolution.

Je trouve $\frac{10}{-13}$ comme solution.

Tu as fait une erreur.
La fin de ta résolution ressemble à ceci :

$$10y = -13$$
$$y = \frac{10}{-13}$$

Explique pourquoi les équations $10y = -13$ et $y = \frac{10}{-13}$ ne sont pas équivalentes : les propriétés de conservation sont-elles bien respectées ? Ces équations ont-elles la même solution ?

Corrige ton erreur et termine la résolution.

Je trouve $\frac{-13}{10}$ ou $-1{,}3$ comme solution.

C'est la bonne solution.
Tu peux le vérifier en remplaçant y par $\frac{-13}{10}$ ou par $-1{,}3$ dans l'équation de départ.
Tu peux aussi utiliser un solveur d'équations et vérifier que tu obtiens la même solution que le solveur.

Indications pour l'équation (4) :

Dans ma résolution, j'ai transformé l'équation de départ en

$3 + 7n = 4n - 8$
ou
$3 + 7n = 4n + 8$
ou
$3 + 7n = -4n + 8$

Tu as fait une erreur de transformation d'expressions.
Tu as transformé l'expression $4 - (n + 2)$ en $4n - 8$ ou $4n + 8$ ou $-4n + 8$.

Explique pourquoi cette transformation est fausse en remplaçant n par une valeur (3 par exemple).
Explique aussi pourquoi cette transformation est fausse en t'appuyant sur la propriété de distributivité : de quelle forme doit être une expression pour pouvoir être développée ?

Dans ma résolution, j'ai transformé l'équation de départ en

$3 + 7n = 4 - n + 2$

Tu as fait une erreur de transformation d'expressions.
Tu as transformé l'expression $4 - (n + 2)$ en $4 - n + 2$.

Explique pourquoi cette transformation est fausse en remplaçant n par une valeur (3 par exemple).
Explique aussi pourquoi cette transformation est fausse en t'appuyant sur la propriété de distributivité.
En effet, $4 - (n + 2)$ s'écrit aussi $4 + (-1) \times (n + 2)$ et tu peux développer $(-1) \times (n + 2)$ à l'aide de la propriété de distributivité.

Je ne trouve pas $\frac{-1}{8}$ comme solution.

Reprends les aides précédentes pour essayer de déterminer ton erreur.
Vérifie que tu as bien utilisé la propriété de distributivité pour transformer l'équation de départ en une équation sans parenthèses.
Vérifie tes transformations d'expressions en remplaçant la lettre par une valeur.
Vérifie que tu respectes bien les propriétés de conservation de l'égalité : par exemple, quand tu ajoutes un nombre dans un membre, n'oublie pas d'ajouter le même nombre dans l'autre membre.
Attention à l'erreur classique du type « $4x = 7$ donc $x = 7 - 4$ ».

Aide 4

Tu peux contrôler ta résolution en remplaçant l'inconnue dans l'équation de départ par la solution que tu as trouvée et en vérifiant que tu obtiens une égalité vraie.

Tu peux également utiliser un solveur d'équations et vérifier que tu obtiens la même solution que le solveur.

Exercice 3 (type : déterminer si deux équations sont équivalentes)

Dans le tableau ci-dessous, on demande dans chaque cas si les deux équations sont équivalentes et de justifier la réponse.

Equations	Les deux équations sont-elles équivalentes ? (oui / non)	Justification
$4x = 7$ $x = 7 - 4$		
$3y = 5$ $y = \frac{3}{5}$		
$x + 3 = 0$ $x = 3$		
$2t = 5t + 4$ $-3t = 4$		
$3(a + 1) = 2a$ $3a + 1 = 2a$		

Aides

Aide 1

Regarde comment les problèmes du même type que celui-ci ont été traités en classe.

Aide 2

Pour montrer que deux équations sont équivalentes, tu peux :

- montrer que l'on transforme l'une en l'autre en utilisant des propriétés de conservation de l'égalité ou la propriété de distributivité ;
- montrer que les deux équations ont les mêmes solutions.

Pour montrer que deux équations ne sont pas équivalentes, tu peux :

- montrer que les propriétés de conservation de l'égalité de sont pas respectées ou que la propriété de distributivité n'est pas bien appliquée ;
- montrer qu'elles n'ont pas les mêmes solutions.

Aide 3

Voici un exemple résolu pour t'aider à compléter le tableau :

(a) Les deux équations $x + 7 = 0$ et $x = 7$ sont-elles équivalentes ?

(b) Les deux équations $3z + 1 = 5z$ et $1 = 2z$ sont-elles équivalentes ?

Solutions :

(a) Non, ces deux équations ne sont pas équivalentes.

Justification : 7 est solution de l'équation $x = 7$ mais n'est pas solution de l'équation $x + 7 = 0$ car $7 + 7 \neq 0$.

Autre justification possible : pour transformer l'équation $x + 7 = 0$ en $x = 7$, on a soustrait 7 au membre de gauche et on a ajouté 7 au membre de droite donc les propriétés de conservation de l'égalité ne sont pas respectées.

(b) Oui, ces deux équations sont équivalentes.

Justification : pour transformer l'équation $3z + 1 = 5z$ en $1 = 2z$, on a soustrait $2z$ à chaque membre (propriété de conservation de l'égalité).

Autre justification possible : $\frac{1}{2}$ est la solution de l'équation $1 = 2z$. C'est aussi la solution de l'équation $3z + 1 = 5z$. Les deux équations ont la même solution donc elles sont équivalentes (définition du cours).

Tâches en autonomie pour l'étape 3 du PER relatif aux équations

Exercice 1 (type : traduire un énoncé en français par une équation)

Réécris chacune des phrases ci-dessous en utilisant une égalité mathématiques avec des lettres.

Exemple : « Marion a cinq ans de plus que Bill. »

(On appelle m l'âge de Marion et b l'âge de Bill.)

$\rightarrow \quad m = b + 5 \quad$ (ou bien : $\quad m - 5 = b \quad$)

1. Si on ajoute 3 ans à l'âge de Vincent, on obtient l'âge d'Assia.

   (On appelle v l'âge de Vincent et a l'âge d'Assia.)

2. Paul a six ans de moins que Charlotte.

   (On appelle p l'âge de Paul et c l'âge de Charles.)

3. Mustafa est quatre fois plus âgé qu'Ali.

   (On appelle m l'âge de Mustafa et a l'âge d'Ali.)

Pour le groupe A seulement :

4. Si Xavier donnait dix de ses peluches à Zoé, alors Zoé aurait trois fois plus de peluches que Xavier.

(Pour les lettres : à toi de choisir.)

Aides

Aide 1

Regarde les problèmes du même type qui ont été traités en classe pour t'aider à résoudre le problème demandé.

Aide 2

Pour chaque phrase, en fonction de ce que tu as fait, lis les indications correspondantes.

Indications pour la phrase 1 :

Ma réponse		Indications
Ma réponse est $3va$ (ou bien) $3 + va$ (ou bien) $3 + v + a$	→	Tu as écrit une expression littérale. Or une expression littérale n'est pas une égalité. Une égalité doit comporter le signe $=$ De plus, $3va$ ne traduit pas la phrase qui est donnée car il s'agit de la multiplication $3 \times v \times a$. Une phrase qui correspond à cette expression serait par exemple « on multiplie l'âge de Vincent par l'âge d'Assia puis le tout par 3 ». Corrige ton erreur en écrivant une égalité qui traduit la phrase donnée.
Je ne suis pas sûr(e) de ma réponse.	→	Pour vérifier que ton égalité est correcte, remplace les lettres par des valeurs qui conviennent. Par exemple, si Vincent a 15 ans, quel est l'âge d'Assia ? Est-ce que si tu remplaces la lettre v par 15 et la lettre a par l'âge d'Assia, l'égalité que tu obtiens est vraie ? Si ce n'est pas le cas, tu as fait une erreur.

Indications pour la phrase 2 :

Ma réponse est

$p6c$
(ou bien)
$p - 6c$

Tu as écrit une expression littérale.
Or une expression littérale n'est pas une égalité.
Une égalité doit comporter le signe $=$

De plus, $p - 6c$ ne traduit pas la phrase qui est donnée.
Une phrase qui correspond à cette expression serait par exemple « on multiplie l'âge de Charlotte par 6 et on soustrait le résultat à l'âge de Paul ».

Corrige ton erreur en écrivant une égalité qui traduit la phrase donnée.

Ma réponse est

$p - 6 = c$

Cette égalité ne traduit pas la phrase « Paul a six ans de moins que Charlotte ».

Par exemple, si Paul a 18 ans, alors d'après la phrase, quel est l'âge de Charlotte ?
Remplace dans ton égalité la lettre p par 18 et la lettre c par l'âge de Charlotte. Obtiens-tu une égalité vraie ?

Tu dois trouver une autre égalité et qui doit correspondre à la phrase donnée.

Je ne suis pas sûr(e) de ma réponse.

Pour vérifier que ton égalité est correcte, remplace les lettres par des valeurs qui conviennent.

Par exemple, si Paul a 18 ans, quel est l'âge de Charlotte ?
Est-ce que si tu remplaces la lettre p par 18 et la lettre c par l'âge de Charlotte, l'égalité que tu obtiens est vraie ?

Si ce n'est pas le cas, tu as fait une erreur.

Indications pour la phrase 3 :

Ma réponse est $4ma$	→	Tu as écrit une expression littérale. Or une expression littérale n'est pas une égalité. Une égalité doit comporter le signe $=$ De plus, $4ma$ ne traduit pas la phrase qui est donnée car il s'agit de la multiplication $4 \times m \times a$. Une phrase qui correspond à cette expression serait par exemple « on multiplie la taille de Mustafa par celle d'Ali puis le tout par 4 ». Corrige ton erreur en écrivant une égalité qui traduit la phrase donnée.
Ma réponse est $m = 4a$	→	Cette égalité ne traduit pas la phrase « Mustafa est quatre fois plus âgé qu'Ali ». Par exemple, si Mustafa a 40 ans, alors d'après la phrase, quel est l'âge d'Ali ? Remplace dans ton égalité la lettre m par 40 et la lettre a par l'âge d'Ali. Obtiens-tu une égalité vraie ? Tu dois trouver une autre égalité et qui doit correspondre à la phrase donnée.
Je ne suis pas sûr(e) de ma réponse.	→	Pour vérifier que ton égalité est correcte, remplace les lettres par des valeurs qui conviennent. Regarde les aides pour les phrases 1 et 2.

Exercice 2 (type : associer une équation à une phrase ; type réciproque de l'exercice 1 : traduire une équation par un énoncé en français)

Enoncé pour le groupe A

(a) $a = b - 8$

La lettre a désigne l'âge d'Alexis et la lettre b l'âge de Brigitte.

Parmi les phrases ci-dessous, laquelle ou lesquelles correspondent à cette égalité ?

(1) Si on ajoute 8 ans à l'âge d'Alexis, on obtient l'âge de Brigitte.

(2) Alexis a 8 ans de plus que Brigitte.

(3) Brigitte a 8 ans de plus qu'Alexis.

(4) Si on soustrait 8 ans à l'âge de Brigitte, on obtient l'âge d'Alexis.

(b) $6p = e$

La lettre e désigne le nombre d'élèves qu'il y a dans un collège et la lettre p le nombre de professeurs.

Parmi les phrases ci-dessous, laquelle ou lesquelles correspondent à cette égalité ?

(1) Il y a 6 fois plus de professeurs que d'élèves dans ce collège.

(2) Il y a 6 professeurs de plus que d'élèves dans ce collège.

(3) Il y a 6 fois plus d'élèves que de professeurs dans ce collège.

(4) Il y a 6 professeurs et 1 élève dans ce collège.

(c) $r + 5 = 3s$

La lettre r désigne le prix d'un paquet de réglisses et la lettre s le prix d'une sucette.

Ecris deux phrases différentes qui correspondent à cette égalité.

Enoncé pour les groupes B et C

(a) $8 + a = b$

La lettre a désigne l'âge d'Alexis et la lettre b l'âge de Brigitte.

Parmi les phrases ci-dessous, laquelle ou lesquelles correspondent à cette égalité ?

(1) Si on ajoute 8 ans à l'âge d'Alexis, on obtient l'âge de Brigitte.

(2) Alexis a 8 ans de plus que Brigitte.

(3) Brigitte a 8 ans de plus qu'Alexis.

(4) Si on soustrait 8 ans à l'âge de Brigitte, on obtient l'âge d'Alexis.

(b) $6 \times p = e$

La lettre e désigne le nombre d'élèves qu'il y a dans un collège et la lettre p le nombre de professeurs.

Parmi les phrases ci-dessous, laquelle ou lesquelles correspondent à cette égalité ?

(1) Il y a 6 fois plus de professeurs que d'élèves dans ce collège.

(2) Il y a 6 professeurs de plus que d'élèves dans ce collège.

(3) Il y a 6 fois plus d'élèves que de professeurs dans ce collège.

(4) Il y a 6 professeurs et 1 élève dans ce collège.

(c) $r + 5 = 3 \times s$

La lettre r désigne le prix d'un paquet de réglisses et la lettre s le prix d'une sucette.

Ecris une phrase qui correspond à cette égalité.

Aides

Aide 1

Regarde les problèmes du même type qui ont été traités en classe pour t'aider à résoudre le problème demandé.

Aide 2

Pour vérifier qu'une phrase correspond à une égalité, donne aux quantités des valeurs qui conviennent.

Par exemple, pour la question (a), pour vérifier si la phrase (1) correspond bien à l'égalité, choisis un âge pour Alexis et calcule l'âge de Brigitte. L'égalité et la phrase correspondent-elles ?

Aide 3

Voici un exemple de vérification de la phrase (1) pour la question (a).

Imaginons qu'Alexis ait 12 ans. La phrase (1) dit que « Si on ajoute 8 ans à l'âge d'Alexis, on obtient l'âge de Brigitte. » Brigitte a donc 20 ans.

Maintenant, regardons si l'égalité $8 + a = b$ est vraie si on remplace a par 12 et b par 20 :

$$a + 8 = b$$

On remplace a par 12 et b par 20 et on obtient :

$$8 + 12 = 20$$

L'égalité ci-dessus est vraie. La phrase (1) correspond bien à l'égalité $8 + a = b$.

Exercice 3 (type : résoudre un problème conduisant à une équation)

Résous les problèmes ci-dessous.

PROBLEME 1 : Voici deux programmes de calcul.

PROGRAMME A	PROGRAMME B
Choisir un nombre Le multiplier par -3 Ajouter 7 au résultat	Choisir un nombre Lui ajouter 4 Multiplier le résultat par 3

Je teste chaque programme avec le même nombre de départ. Les résultats finaux que je trouve sont égaux. Quel nombre ai-je choisi au départ ?

Aide

Regarde les problèmes du même type qui ont été traités en classe pour t'aider à résoudre le problème demandé.

Regarde également les aides des parcours 1 et 2.

PROBLEME 2 :

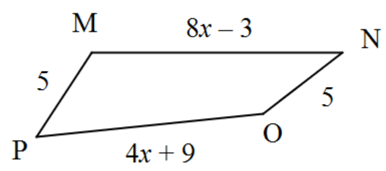
Pour le groupe A

Pour quelle valeur de n l'expression $5n + 2$ est-elle égale à l'expression $2(n + 9)$?

Pour les groupes B et C

Pour quelle valeur de n l'expression $5n + 2$ est-elle égale à l'expression $2n + 9$?

PROBLEME 3 : x désigne une longueur en cm. Pour quelle valeur de x le quadrilatère MNOP ci-dessous est-il un parallélogramme ?



Aides

Aide 1

Parmi les propriétés ou définition ci-dessous, laquelle dois-tu utiliser pour répondre au problème ?

Propriété 1 : Si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles, alors c'est un parallélogramme.

Propriété 2 : Si un quadrilatère a ses côtés opposés de même longueur, alors c'est un parallélogramme.

Propriété 3 : Si un quadrilatère a ses diagonales qui ont le même milieu, alors c'est un parallélogramme.

Propriété 4 : Si un quadrilatère a ses angles opposés de même mesure, alors c'est un parallélogramme.

Si tu hésites, relis l'énoncé du problème et applique la méthode vue en cours : que connais-tu ? que cherches-tu ?

En te posant ces questions, tu vas trouver la propriété géométrique à utiliser. Par exemple, tu n'as pas d'information sur les angles du quadrilatère MNOP : donc tu ne vas pas utiliser la propriété 4.

Aide 2

Une fois que tu as trouvé la propriété géométrique à utiliser, écris l'équation qui correspond au problème, résous-la puis réponds à la question posée.

PROBLEME 4 : Si j'ajoute 2 euros au prix d'un CD, alors j'obtiens le prix d'un DVD. Si j'ajoute le prix de 4 CD et d'un DVD, alors j'obtiens 77 euros. Quel est le prix de chaque objet ? (On suppose que tous les CD ont le même prix et que tous les DVD ont le même prix.)

Aides

Aide 1

Pour résoudre le problème, tu dois appliquer la méthode vue en cours :

1. Lis attentivement l'énoncé : repère ce que tu connais et ce que tu cherches.
2. Trouve dans l'énoncé ce qui correspond à une égalité (une phrase, une propriété géométrique à utiliser, une même quantité exprimée de deux façons différentes).
3. Désigne l'inconnue par une lettre. S'il y a plusieurs inconnues, il faut en choisir une et exprimer les autres en fonction de cette inconnue.
4. Ecris l'équation correspondant au problème et résous-la, puis réponds au problème.

Aide 2

Voici un problème du même type que celui qui est demandé et qui est résolu. Lis attentivement cette solution détaillée pour t'aider à résoudre l'exercice, en regardant comment la méthode du cours est utilisée et en quoi ce problème ressemble au problème que tu dois résoudre.

Enoncé : Si j'ajoute 4 euros au prix d'une boite de biscuits, alors j'obtiens le prix d'une boite de chocolats. Si j'ajoute le prix de 6 boîtes de chocolats et d'une boite de biscuits, alors j'obtiens 66 euros. Quel est le prix de chaque boite ? (On suppose que toutes les boites de chocolats ont le même prix et que toutes les boites de biscuits ont le même prix.)

Solution détaillée :

On applique la méthode vue en cours (attention, dans ton cahier d'exercices, il ne faut pas tout écrire ; une rédaction pour ton cahier est proposée à la fin de cette solution).

1. On cherche le prix d'une boite de chocolats et le prix d'une boite de biscuits.

   On sait que :

   (a) le prix d'une boite de biscuits + 4 euros = le prix d'une boite de chocolats

   (b) le prix de 6 boites de chocolats + le prix d'une boite de biscuits = 66 euros

2. Dans l'énoncé, il y a une même grandeur exprimée de deux façons différentes : c'est le prix d'une boite de biscuits. En effet, d'après les deux égalités écrites précédemment, on a :

   le prix d'une boite de biscuits = le prix d'une boite de chocolats − 4 euros

   le prix d'une boite de biscuits = 66 euros − le prix de 6 boites de chocolats

   Donc on a l'égalité :

   le prix d'une boite de chocolats − 4 euros = 66 euros − le prix de 6 boites de chocolats

3. L'inconnue n'est pas donnée par l'énoncé donc il faut la choisir. Il y a deux inconnues : le prix d'une boite de chocolats et le prix d'une boite de biscuits. À cause de l'égalité que l'on a trouvée précédemment, on choisit le prix d'une boite de chocolats pour inconnue. On appelle x le prix d'une boite de chocolats.

4. L'égalité

   le prix d'une boite de chocolats − 4 euros = 66 euros − le prix de 6 boites de chocolats

   s'écrit mathématiquement :

   $x - 4 = 66 - 6x$

   On résout l'équation $x - 4 = 66 - 6x$.

   On trouve que la solution de cette équation est 10.

5. On répond au problème : le prix d'une boite de chocolats est de 10 euros. Une boite de biscuits coûte donc 6 euros (car d'après l'énoncé, si on ajoute 4 euros au prix d'une boite de biscuits, alors on trouve le prix d'une boite de chocolats).

   Rédaction pour le cahier :

   On appelle x le prix d'une boite de chocolats.

   L'équation qui traduit le problème est : $x - 4 = 66 - 6x$.

On résout cette équation.

$x - 4 = 66 - 6x$

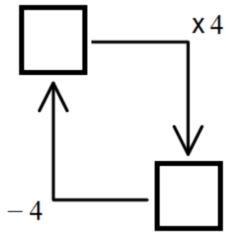
$7x - 4 = 66$

$7x = 70$

$x = 10$

Le prix d'une boite de chocolats est de 10 euros et le prix d'une boite de biscuits est de 6 euros.

PROBLEME 5 : Quels sont les deux nombres à mettre dans les cases ci-dessous ?



Aides

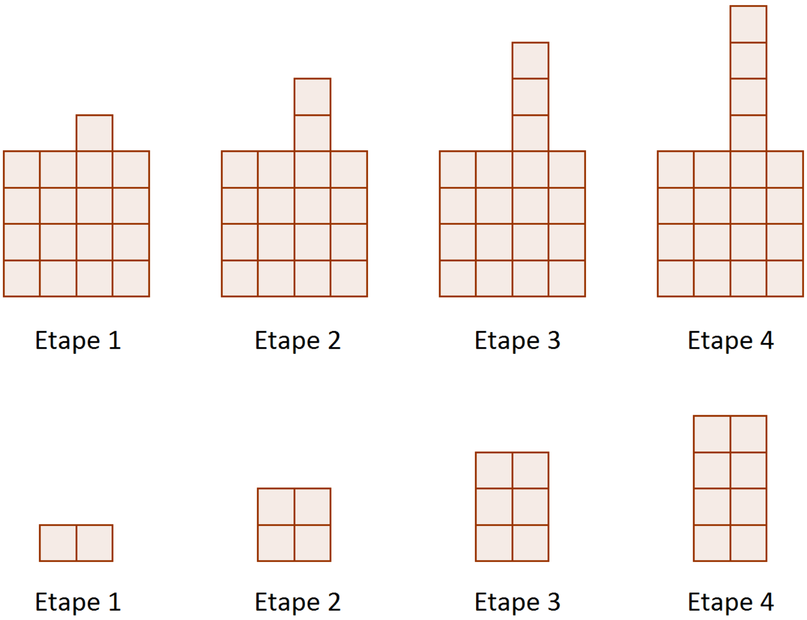
Aide 1

Si tu testes des nombres au hasard, tu n'arriveras pas à trouver la solution.

Aide 2

Pour résoudre ce problème, applique la méthode vue en cours. Regarde l'aide du problème précédent pour voir comment appliquer cette méthode.

PROBLEME 6 (groupe A uniquement) : Voici deux suites de figures géométriques formées de petits carrés :



Y a-t-il une étape où les deux figures ont le même nombre de petits carrés ?

Si oui, quel est le numéro de cette étape ?

Aides

Aide 1

Tu as déjà rencontré des problèmes qui ressemblent à celui-ci, avec une seule suite de figures géométriques. Regarde ces problèmes pour commencer.

Aide 2

Si tu essaies de dessiner les figures et de compter les petits carrés, cela va être trop long.

Tu dois utiliser une lettre et des expressions littérales.

Aide 3

Ecris, en fonction du numéro de l'étape, le nombre de petits carrés qu'il y a dans la figure de chaque suite.

Aide 4

Pour résoudre le problème, applique la méthode vue en cours :

1. Que cherches-tu ?
2. Dans l'énoncé, quelle phrase correspond à une égalité ?
3. Quelle est l'inconnue ? Désigne-la par une lettre.
4. Ecris l'équation qui correspond au problème et réponds à la question posée.

Aide 5

Voici un problème du même type que celui qui est demandé et qui est résolu.

Enoncé

Voici deux suites de figures géométriques formées de petits carrés (voir figure 6) :

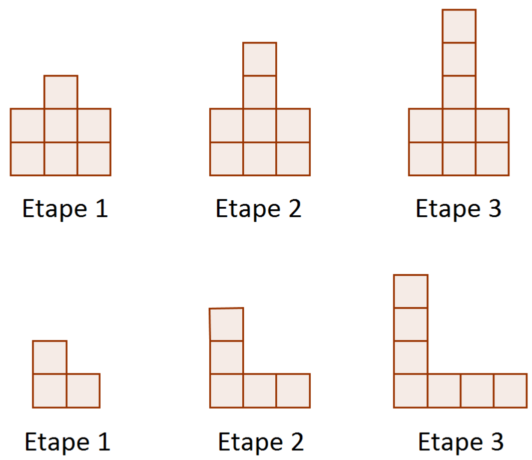


FIGURE 6 – Suites de figures géométriques de l'aide 4 du problème 3

Y a-t-il une étape où les deux figures ont le même nombre de petits carrés ?
Si oui, quel est le numéro de cette étape ?

Solution détaillée

On cherche le numéro de l'étape où les deux figures ont le même nombre de petits carrés : c'est donc ce numéro qui est l'inconnue. On l'appelle x.

Dans la première suite de figures, à l'étape n, la figure comporte $6 + n$ petits carrés.

Dans la seconde suite de figures, à l'étape n, la figure comporte $1 + 2n$ petits carrés à l'étape n.

On a appelé x le numéro de l'étape où les deux figures ont le même nombre de petits carrés. Le nombre x vérifie donc l'équation $6 + x = 1 + 2x$.

On la résout :

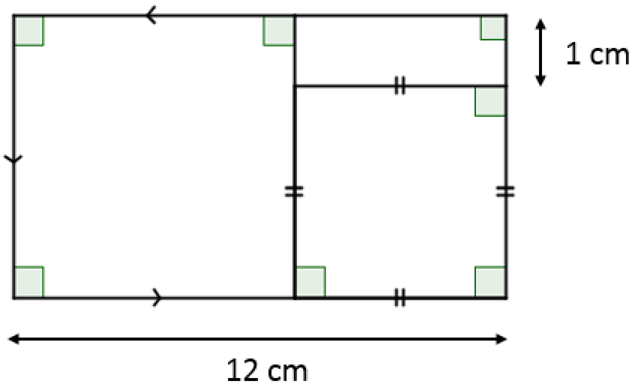
$6 + x = 1 + 2x$

$5 + x = 2x$ (on a soustrait 1 à chaque membre)

$5 = x$ (on a soustrait x à chaque membre)

On répond au problème : à l'étape 5, les deux figures ont le même nombre de petits carrés.

PROBLEME 7 (groupe A uniquement) : Dessine en vraie grandeur la figure ci-dessous. Explique ta démarche.



Exercice 4 (type : déterminer si une égalité entre deux expressions est vraie pour n'importe quelle valeur de la variable ou s'il existe une valeur de la variable pour laquelle l'égalité est vraie)

Les égalités ci-dessous sont-elles vraies pour n'importe quelle valeur de la lettre ? Si non, déterminer pour quelle valeur de la lettre elles sont vraies.

(a) $3a + 5 = 8a$

(b) $3a + 5a = 8a$

(c) $2(p + 1) = 2p + 2$

(d) $2(p + 1) = 2p + 1$

Aides

Aide 1

Regarde les problèmes du même type qui ont été traités en classe pour t'aider à résoudre le problème demandé.

Aide 2

Si tu trouves une valeur de la lettre qui rend l'égalité fausse, alors tu peux en conclure que l'égalité n'est pas vraie pour n'importe quelle valeur de la lettre.

Si tu trouves une valeur de la lettre qui rend l'égalité vraie, cela ne suffit pas à montrer que l'égalité est vraie pour toute valeur de la lettre. Pour le montrer, il faut utiliser la propriété de la distributivité.

Pour chercher une valeur de la lettre qui rende l'égalité vraie, soit tu arrives à la trouver facilement (de tête par exemple), soit tu résous une équation.

Aide 3

Voici trois exemples corrigés :

Exemple 1 : $5a + 2a = 7a$

Cette égalité est vraie pour n'importe quel nombre a. En effet, d'après la propriété de distributivité : $5a + 2a = a \times (5 + 2) = a \times 7 = 7a$.

Exemple 2 : $9b = 13b - 4$

Cette égalité n'est pas vraie pour n'importe quel nombre b. Par exemple, elle est fausse si on remplace b par 0 (on aurait pu choisir un autre nombre, différent de 1).

En revanche, elle est vraie si on remplace b par 1.

Exemple 3 : $2n + 7 = 5n$

Cette égalité n'est pas vraie pour n'importe quel nombre n. Par exemple, elle est fausse si on remplace n par 1.

Résolvons l'équation $2n + 7 = 5n$.

$2n + 7 = 5n$

$7 = 3n$ (on soustrait $2n$ à chaque membre)

$\frac{7}{3} = n$ (on divise chaque membre par 3)

L'égalité $2n + 7 = 5n$ est vraie si on remplace n par $\frac{7}{3}$.

Exercice 5 (type : déterminer les actions possibles à réaliser sur une expression ou une équation)

Dans chaque cas, déterminer la ou les actions possibles que l'on peut réaliser (développer, réduire, résoudre), puis réaliser ces actions et donner le résultat de ces actions.

	Actions possibles à réaliser	**Résultat des actions**
$3(x + 5)$	Développer et réduire	$3x + 15$
$2n + 7 + 4n - 10$	Réduire	$6n - 3$
$5 - (3 - 7a)$	Réduire	$2 + 7a$
$2m + 3 = 4m - 1$	Résoudre (dans la résolution, on réduit des expressions)	$2m + 3 - 2m = 4m - 1 - 2m$ $3 = 2m - 1$ $3 + 1 = 2m - 1 + 1$ $4 = 2m$ $2 = m$
$8t - 11$	Aucune	-
$4b - 6$		
$4(b - 6)$		
$4 - (b - 6)$		
$4b = -6$		
$2h + 4 - (-9h + 7)$		
$(2h + 4)(-9h + 7)$		
$2h + 4 = -9h + 7$		

Aides

Aide 1

Regarde les problèmes du même type qui ont été traités en classe pour t'aider à résoudre le problème demandé.

Aide 2

Pour déterminer les actions possibles, tu dois être observateur :

- Si tu as une expression, alors soit tu ne peux rien faire de particulier, soit tu peux la factoriser, la développer et/ou la réduire.
  S'il y a des parenthèses dans l'expression, alors tu peux probablement réaliser un développement (puis parfois une réduction).
  S'il n'y a pas de parenthèses, alors tu peux essayer de la factoriser ou de la réduire, ou bien tu ne peux rien faire de particulier.
- Si tu as une égalité, alors il s'agit probablement d'une équation que tu peux résoudre.
  Il se peut que pour résoudre l'équation, tu aies besoin de développer des expressions au sein de l'équation.

Aide 3

Contrôle tes actions au maximum :

- Si tu développes ou factorises une expression, remplace la lettre par une valeur pour contrôler ta transformation. Vérifie que tu respectes les priorités opératoires.
- Si tu résous une équation, vérifie que tu respectes les propriétés de conservation de l'égalité et teste la solution que tu trouves en remplaçant l'inconnue dans l'équation de départ par cette solution.

Exercice « méta-mathématique » non inclus dans le PER relatifs aux équations (écrire une consigne connaissant l'énoncé d'un problème relevant du domaine des équations)

Pour les cinq exercices ci-dessous, il manque la consigne !

Pour chaque exercice, rédige une consigne possible puis résous l'exercice. L'endroit où la consigne doit être écrite est indiqué par les signes « ... »

Exercice 1

Voici une équation : $5x + 2 = 4x - 3$

« ... »

(a) le nombre 2 (b) le nombre -1 (c) le nombre -6

Exercice 2

« … » : $6x + 1 = 3(2 - x)$

Exercice 3

Voici deux programmes de calcul :

PROGRAMME A	PROGRAMME B
Choisir un nombre Le multiplier par 7 Ajouter 2 au résultat	Choisir un nombre Le multiplier par -2 Soustraire 5 au résultat

« … »

Exercice 4

Dans le triangle ABC ci-dessous, x désigne un nombre positif. L'unité de longueur est le centimètre. « … »

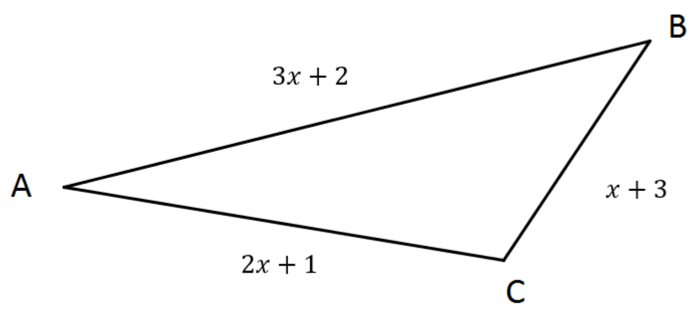


FIGURE 7 – Figure de l'exercice 4 (de l'exercice 3 du parcours)

Exercice 5

Dans un bar, un coca coûte 0,50 euro de plus qu'une grenadine. Un groupe d'amis commande 5 grenadines et 4 cocas. Ils paient 20 euros au total.

« ... »

Aide

Pour trouver la consigne manquant, tu dois identifier le type de problèmes auquel tu as affaire. Pour cela, regarde dans tes cahiers les problèmes que tu as rencontrés et compare-les :

- Qu'est-ce qui est ressemblant d'un problème à l'autre ? Qu'est-ce qui est différent ?
- Lis bien les consignes et les énoncés. Y a-t-il des consignes identiques ? Les énoncés se ressemblent-ils ? Et les calculs ?
- Observe ce que tu dois faire pour résoudre un problème : quelles sont les propriétés ou les méthodes utilisées d'un problème à l'autre ? Est-ce que ce sont les mêmes ? Dans quel cas peut-on les utiliser, dans quel cas ne le peut-on pas ?

ANNEXES DU CHAPITRE 10

Document donné à l'enseignant pour la mise en œuvre du PER relatif aux équations

Séquence sur les équations (aperçu « rapide »)

- Durée : environ 6h
- 1 séance informatique prévue
- 3 grandes étapes :
  1) Mise en équation de problèmes à base de programmes de calcul ; résolution avec un solveur d'équations
  2) Résolution d'équations sans solveur d'équations (salle informatique)
  3) Résolution de problèmes conduisant à une équation

À faire impérativement avant la séquence (flashs de début d'heure)

- Traduire un programme de calcul à l'aide d'une expression (pour commencer, on pourra d'abord proposer un programme et plusieurs expressions et l'élève doit associer la bonne expression au programme)

Voici deux programmes de calcul :

PROGRAMME A	PROGRAMME B
Choisir un nombre Le multiplier par 3 Ajouter 8 au résultat	Choisir un nombre Lui ajouter 8 Multiplier le résultat par 3

On appelle n le nombre de départ.
Ecrire l'expression littérale correspondant au résultat de chaque programme.

- Trouver le nombre de départ pour qu'un PC renvoie un résultat donné (remontée arithmétique du programme)

Voici un programme de calcul :
— Choisir un nombre
— Lui soustraire 5
— Multiplier le résultat par 3
Quel nombre doit-on choisir au départ pour obtenir comme résultat final 27 ? -6 ?

- Trouver le nombre de départ égalisant deux PC (essais/erreurs)

Voici deux programmes de calcul :

PROGRAMME A	PROGRAMME B
Choisir un nombre Le multiplier par 3	Choisir un nombre Lui ajouter 8

Alex et Bianca choisissent le même nombre de départ. Alex teste le programme A et Biance teste le programme B. Alex et Bianca s'aperçoivent qu'ils trouvent le même résultat final. Quel nombre de départ ont-ils choisi ?

- Compléter une égalité pour qu'elle soit vraie (remontée arithmétique de l'égalité)

Compléter l'égalité $3 \times \ldots\ldots + 7 = 28$ pour qu'elle soit vraie.

- Trouver la valeur d'une lettre pour qu'une expression soit égale à un résultat donnée

Pour quelle valeur de la lettre n l'expression $2 \times (n + 1)$ est égale à 9 ?

- Résoudre une équation par essais/erreurs

Pour quelle valeur de la lettre a l'égalité $3a = a + 1$ est-elle vraie ?

Séance 1 : mise en équation de problèmes à base de programmes de calcul ; résolution avec solveur d'équations

Activité

Voici deux programmes de calcul :

PROGRAMME A
- Choisir un nombre
- Le multiplier par 9
- Soustraire 4 au résultat

PROGRAMME B
- Choisir un nombre
- Le multiplier par 2
- Ajouter 1 au résultat

Alice et Bertrand choisissent un même nombre de départ. Alice teste le programme A et Bertrand teste le programme B. Alice et Bertrand s'aperçoivent qu'ils trouvent le même résultat final. Quel nombre de départ ont-ils choisi ?

Obstacle
- Les démarches arithmétiques et par essais/erreurs (revues en flashs) ne fonctionnent pas

Déroulement

Temps 1 : les élèves cherchent à résoudre le problème avec leurs propres moyens (mais ils n'y arriveront pas).
Temps 2 : l'enseignant introduit le solveur d'équations et explique son fonctionnement aux élèves. Les élèves doivent produire une équation pour que le solveur puisse être utilisé.

Leçon (suggestion)

CHAPITRE : EQUATIONS

Certains problèmes mathématiques ne peuvent pas être résolus avec les méthodes numériques de l'école primaire (*mettre la référence à la situation précédente*) mais peuvent l'être grâce aux équations.

1) Qu'est-ce qu'une équation ?

Une équation est une égalité où apparaît une ou plusieurs lettres dont on ne connaît pas la valeur et qui sont appelées **inconnues**.

Exemple
$9x - 4 = 2x + 1$ est une **équation**.
x est l'**inconnue** de l'équation.

Est-ce que $9x - 4$ est égal à $2x + 1$?
Cela dépend de la valeur donnée à x. On a vu dans (*mettre la référence à la situation précédente*) que si x a pour valeur $\frac{5}{7}$, alors l'égalité est vraie.
Une valeur de x qui rend l'égalité vraie est appelée une **solution** de l'équation.
Si on trouve toutes les solutions de l'équation, alors on dit qu'on a **résolu** l'équation.

Exercices types

Type 1 : égaliser deux PC sans parenthèses (solveur d'équations pour résoudre)

PROGRAMME A	PROGRAMME B
Choisir un nombre Le multiplier par 3 Ajouter 5 au résultat	Choisir un nombre Le multiplier par 6 Soustraire 2 au résultat

Alexandra et Bilal choisissent le même nombre de départ. Alexandra teste le programme A et Bilal teste le programme B. Alexandra et Bilal obtiennent le même résutat final. Quel nombre de départ ont-ils choisi ?

Si tu penses avoir trouvé une solution, vérifie que celle-ci est la bonne.

Type 2 : égaliser deux PC avec parenthèses (solveur d'équations pour résoudre)

PROGRAMME A	PROGRAMME B
Choisir un nombre Le multiplier par 3 Ajouter 5 au résultat	Choisir un nombre Lui soustraire 2 Multiplier le résultat par 6

Alexandra et Bilal choisissent le même nombre de départ. Alexandra teste le programme A et Bilal teste le programme B. Alexandra et Bilal obtiennent le même résultat final. Quel nombre de départ ont-ils choisi ?

Type 3 : rédiger un problème correspondant à deux PC à égaliser

Enoncé pour le groupe A

Rédige un problème avec deux programmes de calcul qui correspond à l'équation $2(x+7) = 5 - 3x$.

Enoncé pour les groupes B et C

Rédige un problème avec deux programmes de calcul qui correspond à l'équation $2\times x+7 = 5 - 3 \times x$.

Type 4 : déterminer si un nombre est solution d'une équation donnée

(a) Voici une équation : $5 + 3a = -2a$.

Le nombre 6 est-il solution de cette équation ? Et le nombre -1 ?

(b) Voici une équation : $6m + 1 = 2(1 + m)$.

Le nombre (-2) est-il solution de cette équation ? Et le nombre $0,25$?

Séance 2 : résolution d'une équation sans solveur (séance informatique)

Activité

Voici deux programmes de calcul :

PROGRAMME A :
- Choisir un nombre
- Le multiplier par 8
- Ajouter 2 au résultat

PROGRAMME B :
- Choisir un nombre
- Le multiplier par 5
- Ajouter 9 au résultat

Alice et Bertrand choisissent un même nombre de départ. Alice teste le programme A et Bertrand teste le programme B. Alice et Bertrand s'aperçoivent qu'ils trouvent le même résultat final. Quel nombre de départ ont-ils choisi ?

Résous ce problème en utilisant le logiciel Thot (voir mode d'emploi du logiciel).

Obstacle
- Première rencontre avec la résolution algébrique d'une équation : opérations sur l'inconnue et sur une égalité

Déroulement

Temps 1 : mise en équation du problème (passer très peu de temps)
Temps 2 : l'enseignant présente le logiciel Thot qui permet de résoudre une équation en prenant en charge les calculs ; l'élève ne se concentre que sur les résultats des transformations et la stratégie à adopter, pas sur les calculs. L'élève doit résoudre l'équation du problème en utilisant le logiciel.
Temps 3 : l'enseignant propose une nouvelle équation à résoudre, sans aucun logiciel cette fois ; le logiciel ne sert qu'à vérifier les calculs.

Leçon (suggestion)

2) Comment résoudre une équation ?

Pour résoudre une équation (*mettre la référence de la situation précédente*), on utilise les propriétés de conservation de l'égalité ci-dessous.

Propriétés

(P1) On ne change pas les solutions d'une équation si on ajoute ou si on soustrait le même nombre à chaque membre de l'équation.

(P2) On ne change pas les solutions d'une équation si on multiplie ou si on divise par le même nombre non nul chaque membre de l'équation.

Méthode

Pour résoudre une équation :

1. On regarde la forme de l'équation : la place de l'inconnue, les parenthèses s'il y en a et les opérations.
2. On utilise les propriétés (P1) et (P2) pour isoler l'inconnue, en faisant attention aux priorités opératoires.

+ définition : deux équations sont équivalentes si elles ont les mêmes solutions.

Exemple : *Résoudre l'équation* $6x - 2 = 3x + 8$

Equation	Transformation	Propriété utilisée	Objectif
$6x - 2 = 3x + 8$			
$3x - 2 = 8$	On soustrait $3x$ à chaque membre	(P1)	On « élimine » les termes en x dans le membre de droite
$3x = 10$	On ajoute 2 à chaque membre	(P1)	On « isole » les termes en x dans le membre de gauche
$x = \frac{10}{3}$	On divise chaque membre par 3	(P2)	On « isole » l'inconnue

Toutes les équations du tableau ci-dessus sont équivalentes : elles ont les mêmes solutions.

Exercices types

Type 1 : une résolution d'équation étant donnée, justifier les étapes de résolution ; et inversement

Complète les tableaux ci-dessous :

Equation	Transformation	Propriété utilisée	Objectif
$2a + 2 = 4 \times (a + 2)$			
$2a + 2 = 4a + 8$			
$-2a + 2 = 8$			
$-2a = 6$			
$a = -3$			

Conclusion : La solution de l'équation $2a + 2 = 4(a + 2)$ est :

Vérification :

Equation	Transformation	Propriété utilisée	Objectif
$2(t + 15) = 7t - 5$			
	On développe et on réduit le membre de gauche		
			On « élimine » les termes en t dans le membre de droite
			On « isole » les termes en t dans le membre de gauche
	On divise chaque membre par -5		

Conclusion :

Vérification :

Type 2 : résoudre une équation sans ou avec parenthèses

(1) $7 \times y + 2 = 3 \times y + 9$

(2) $5t - 2 = 10 + 3t$

(3) $5y + 7 = 5 \times (3y + 4)$

(4) $3 + 7n = 4 - (n + 2)$

Type 3 : justifier que deux équations sont ou non équivalentes

Dans le tableau ci-dessous, on demande dans chaque cas si les deux équations sont équivalentes et de justifier la réponse.

Equations	Les deux équations sont-elles équivalentes ? (oui / non)	Justification
$4x = 7$ $x = 7 - 4$		
$3y = 5$ $y = \frac{3}{5}$		
$x + 3 = 0$ $x = 3$		
$2t = 5t + 4$ $-3t = 4$		
$3(a + 1) = 2a$ $3a + 1 = 2a$		

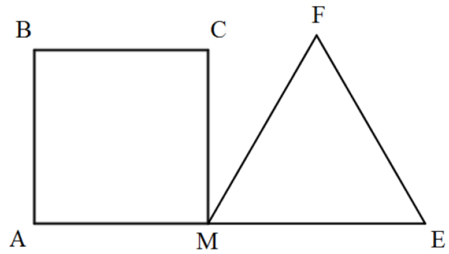
Séance 3 : résolution d'équations sans et avec parenthèses

● Si la séance précédente n'a pas pu être finie, la finir.
● Résolution d'équations sans parenthèses puis avec parenthèses.
● Leçon : ajout d'un exemple de résolution d'équations avec parenthèses (utiliser le même type de tableau que pour l'exemple sans parenthèses ; la propriété pour supprimer les parenthèses est la distributivité ; l'objectif est de transformer l'équation en une équation sans parenthèses)
● Exercices types qui n'auraient pas eu le temps d'être abordés en classe à la séance précédente.

Séance 4 : résolution de problèmes conduisant à une équation (1)

Activité

Sur la figure ci-dessous, ABCM est un carré et EFM est un triangle équilatéral. Le segment [AE] mesure 10 cm. Où faut-il placer le point M sur le segment [AE] pour que le carré ABCM et le triangle EFM aient le même périmètre ?



Obstacles

- Changement de cadres : passage de la géométrie à l'algèbre
- Choix de l'inconnue : l'inconnue n'est pas explicite ; il y a deux choix possibles pour l'inconnue

Déroulement

L'activité, difficile, sera guidée par l'enseignant qui fera raisonnablement avancer le temps didactique et donnera sans hésiter les aides nécessaires.
Temps 1 : recherche des élèves, seuls, puis mise en commun.
Temps 2 : explicitation de la technique de mise en équation (lecture de l'énoncé, détermination de ce que l'on connaît et de ce que l'on cherche, recherche dans l'énoncé de ce qui traduit une égalité, choix de l'inconnue, traduction du problème par une équation, résolution de l'équation, réponse au problème). La mise en œuvre de cette technique est guidée par l'enseignant.

Exercices types

Type 1 : traduire un énoncé en français par une équation

Réécris chacune des phrases ci-dessous en utilisant une égalité mathématiques avec des lettres.

Exemple : « Marion a cinq ans de plus que Bill. »
(On appelle m l'âge de Marion et b l'âge de Bill.)
$\rightarrow \quad m = b + 5 \quad$ (ou bien : $\quad m - 5 = b \quad$)

1. Si on ajoute 3 ans à l'âge de Vincent, on obtient l'âge d'Assia.
   (On appelle v l'âge de Vincent et a l'âge d'Assia.)
2. Paul a six ans de moins que Charlotte.
   (On appelle p l'âge de Paul et c l'âge de Charles.)
3. Mustafa est quatre fois plus âgé qu'Ali.
   (On appelle m l'âge de Mustafa et a l'âge d'Ali.)

Type 2 : associer/écrire une équation à un énoncé en français

(a) $8 + a = b$

La lettre a désigne l'âge d'Alexis et la lettre b l'âge de Brigitte.

Parmi les phrases ci-dessous, laquelle ou lesquelles correspondent à cette égalité ?

(1) Si on ajoute 8 ans à l'âge d'Alexis, on obtient l'âge de Brigitte.

(2) Alexis a 8 ans de plus que Brigitte.

(3) Brigitte a 8 ans de plus qu'Alexis.

(4) Si on soustrait 8 ans à l'âge de Brigitte, on obtient l'âge d'Alexis.

(b) $6 \times p = e$

La lettre e désigne le nombre d'élèves qu'il y a dans un collège et la lettre p le nombre de professeurs.

Parmi les phrases ci-dessous, laquelle ou lesquelles correspondent à cette égalité ?

(1) Il y a 6 fois plus de professeurs que d'élèves dans ce collège.

(2) Il y a 6 professeurs de plus que d'élèves dans ce collège.

(3) Il y a 6 fois plus d'élèves que de professeurs dans ce collège.

(4) Il y a 6 professeurs et 1 élève dans ce collège.

(c) $r + 5 = 3 \times s$

La lettre r désigne le prix d'un paquet de réglisses et la lettre s le prix d'une sucette.

Ecris une phrase qui correspond à cette égalité.

Type 3 : problèmes divers

PROBLEME 1 : Voici deux programmes de calcul.

PROGRAMME A	PROGRAMME B
Choisir un nombre	Choisir un nombre
Le multiplier par -3	Lui ajouter 4
Ajouter 7 au résultat	Multiplier le résultat par 3

Je teste chaque programme avec le même nombre de départ. Les résultats finaux que je trouve sont égaux. Quel nombre ai-je choisi au départ ?

PROBLEME 2 :

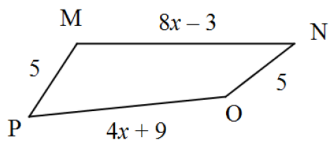
Pour le groupe A

Pour quelle valeur de n l'expression $5n + 2$ est-elle égale à l'expression $2(n + 9)$?

Pour les groupes B et C

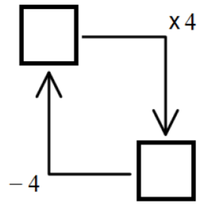
Pour quelle valeur de n l'expression $5n + 2$ est-elle égale à l'expression $2n + 9$?

PROBLEME 3 : x désigne une longueur en cm. Pour quelle valeur de x le quadrilatère MNOP ci-dessous est-il un parallélogramme ?

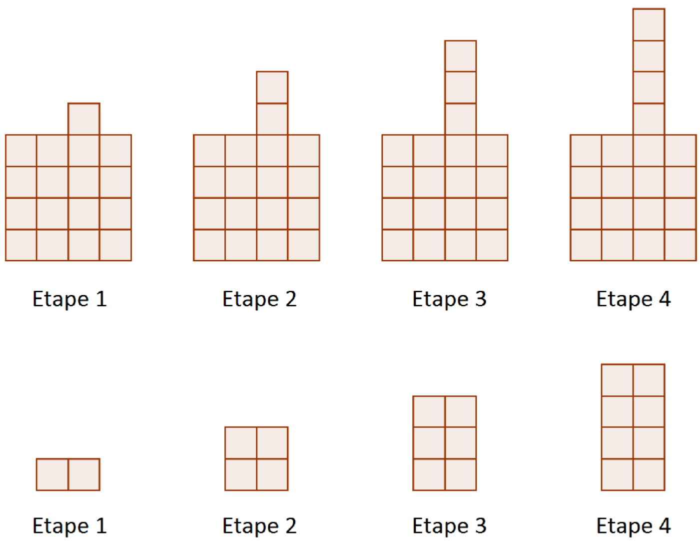


PROBLEME 4 : Si j'ajoute 2 euros au prix d'un CD, alors j'obtiens le prix d'un DVD. Si j'ajoute le prix de 4 CD et d'un DVD, alors j'obtiens 77 euros. Quel est le prix de chaque objet ? (On suppose que tous les CD ont le même prix et que tous les DVD ont le même prix.)

PROBLEME 5 : Quels sont les deux nombres à mettre dans les cases ci-dessous ?

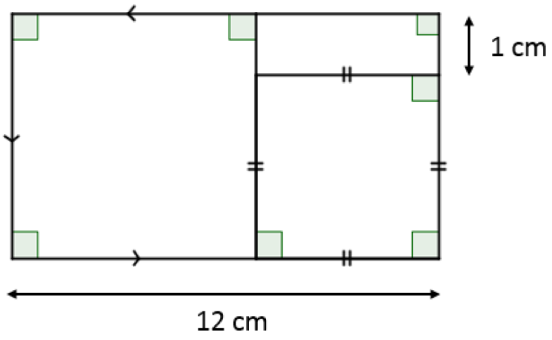


PROBLEME 6 (groupe A uniquement) : Voici deux suites de figures géométriques formées de petits carrés :



Y a-t-il une étape où les deux figures ont le même nombre de petits carrés ?
Si oui, quel est le numéro de cette étape ?

PROBLEME 7 (groupe A uniquement) : Dessine en vraie grandeur la figure ci-dessous. Explique ta démarche.



Séance 5 : résolution de problèmes conduisant à une équation (2)

● Exercices types qui n'auraient pas été abordés en classe à la séance précédente.
● Après avoir rencontré plusieurs types différents de problèmes, faire écrire/coller la leçon (suggestion)

3) Comment mettre un problème en équation ?

Certains problèmes peuvent être résolus à l'aide des équations (*mettre la référence à la situation précédente*). Quand on écrit une équation qui correspond à un problème, on dit qu'on met le problème en équation.

Méthode

Pour mettre un problème en équation :

1. On lit attentivement l'énoncé : on repère ce que l'on connaît et ce que l'on cherche.
2. On trouve dans l'énoncé ce qui correspond à une égalité.
   (a) Ce peut être une phrase.
   Ex : « Le prix des trois CD est le même que le prix d'un DVD. »
   → Le prix de trois CD **est égal** au prix d'un DVD.
   (b) Ce peut être une propriété géométrique.
   Ex : « On veut que le triangle ABC soit isocèle en A. »
   → La longueur BA **est égale** à la longueur CA.
   (c) Ce peut être une même grandeur exprimée de deux façons différentes.
   Ex : « Si j'achète 5 stylos identiques, il me restera 2,30 euros dans mon portefeuille, mais si j'en achète 6, il me manquera 0,50 euro. »
   → La somme d'argent qu'il y a dans mon portefeuille est exprimée de deux façons : elle est **égale** au prix de 5 stylos plus 2,30 euros, et elle est **égale** au prix de 6 stylos moins 0,50 euro.
   Donc l'égalité est : prix de 5 stylos + 2,30 euros = prix de 6 stylos + 0,50 euro
3. Si l'inconnue n'est pas donnée par l'énoncé, il faut la choisir (on l'appelle souvent x mais ce n'est pas obligatoire).
   (a) S'il y a une seule quantité à chercher, alors c'est elle qu'on choisit comme inconnue.
   (b) S'il y a plusieurs quantités à chercher, alors on en choisit une et on essaie d'exprimer les autres en fonction de celle qu'on a choisie.
4. On écrit l'équation correspondant au problème.
5. On résout l'équation.
6. On répond au problème.

Séance 6 : articulation entre expressions et équations ; exercices « méta »

Exercice types

Type 1 : déterminer si une égalité entre deux expressions est vraie ou fausse pour n'importe quelle valeur de la lettre ou bien s'il existe une valeur de la lettre rendant l'égalité vraie

Les égalités ci-dessous sont-elles vraies pour n'importe quelle valeur de la lettre ? Sinon, déterminer pour quelle valeur de la lettre elles sont vraies.

(a) $3a + 5 = 8a$
(b) $3a + 5a = 8a$
(c) $2(p + 1) = 2p + 2$
(d) $2(p + 1) = 2p + 1$

Type 2 : déterminer les actions possibles à effectuer sur une expression ou une équation

Dans chaque cas, déterminer la ou les actions possibles que l'on peut réaliser (développer, réduire, résoudre), puis réaliser ces actions et donner le résultat de ces actions.

	Actions possibles à réaliser	**Résultat des actions**
$3(x + 5)$	Développer et réduire	$3x + 15$
$2n + 7 + 4n - 10$	Réduire	$6n - 3$
$5 - (3 - 7a)$	Réduire	$2 + 7a$
$2m + 3 = 4m - 1$	Résoudre (dans la résolution, on réduit des expressions)	$2m + 3 - 2m = 4m - 1 - 2m$ $3 = 2m - 1$ $3 + 1 = 2m - 1 + 1$ $4 = 2m$ $m = 2$
$8t - 11$	Aucune	-
$4b - 6$		
$4(b - 6)$		
$4 - (b - 6)$		
$4b = -6$		
$2h + 4 - (-9h + 7)$		
$(2h + 4)(-9h + 7)$		
$2h + 4 = -9h + 7$		

Type 3 : exercices « méta » (préparation au contrôle)

Pour les cinq exercices ci-dessous, il manque la consigne !
Pour chaque exercice, rédige une consigne possible puis résous l'exercice. L'endroit où la consigne doit être écrite est indiqué par les signes « ... »

Exercice 1
Voici une équation : $5x + 2 = 4x - 3$
« ... »
(a) le nombre 2 (b) le nombre -1 (c) le nombre -6

Exercice 2
« ... » : $6x + 1 = 3(2 - x)$

Exercice 3

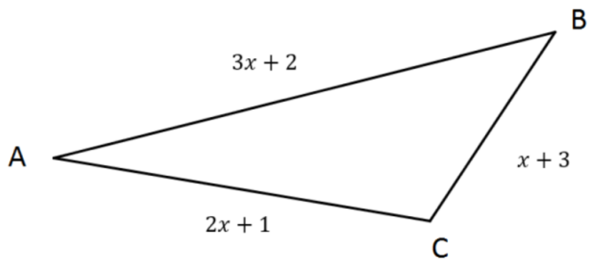
Voici deux programmes de calcul :

PROGRAMME A	PROGRAMME B
Choisir un nombre Le multiplier par 7 Ajouter 2 au résultat	Choisir un nombre Le multiplier par -2 Soustraire 5 au résultat

« … »

Exercice 4

Dans le triangle ABC ci-dessous, x désigne un nombre positif. L'unité de longueur est le centimètre. **« … »**



Exercice 5

Dans un bar, un coca coûte 0,50 euro de plus qu'une grenadine. Un groupe d'amis commande 5 grenadines et 4 cocas. Ils paient 20 euros au total.

« … »

Transcriptions des séances filmées en classe lors de la mise en œuvre du PER relatif aux équations par l'enseignant M2

Transcription de la séance 1 de M2 sur les équations, découpage en épisodes

Episode 1 : Installation des élèves

Pendant que les élèves s'installent, M2 écrit au tableau « Calcul mental 25/05 ». Il demande à plusieurs élèves de sortir leurs affaires.

Episode 2 : Lancement du calcul mental 1

2 min 32

M2 vidéoprojette le calcul mental. Voici l'énoncé du premier calcul :

Compléter l'égalité $3 \times ... + 7 = 28$ pour qu'elle soit vraie.

M2 (lisant l'énoncé) : Compléter l'égalité trois fois quelque chose plus sept égal vingt-huit / pour qu'elle soit vraie / je vous rappelle qu'une égalité / c'est quand on a deux membres séparés par le signe égal / et on sera un peu plus précis tout à l'heure / donc vous me complétez les pointillés / trois fois combien plus sept égal vingt-huit / rappelez-vous de ce qu'on a déjà fait / allez il reste sept secondes

Episode 3 : Recherche des élèves sur le calcul mental 1

3 min 00

M2 circule dans la classe, demande à plusieurs élèves de se dépêcher, de cesser de bavarder.

Episode 4 : Correction du calcul mental 1

3 min 52

M2 réécrit au tableau l'égalité à compléter. Plusieurs élèves lèvent alors la main pour participer à la correction. M2 en interroge une.

M2 : Alice ?

Alice : (inaudible)

M2 : Combien ?

Un autre élève : Trois fois sept

M2 : Non mais elle peut parler non ?

Alice : (inaudible)

M2 (écrit le chiffre 7 sur les pointillés) : Ah oui d'accord / pourquoi sept ? / euh oui pourquoi sept ?

Alice : Parce que / trois fois sept égal vingt-et-un / plus sept égal vingt-huit

M2 : Très bien / comment as-tu fait pour trouver le sept ? / par hasard ? / donc t'as fait sept comme ça et c'était le bon du premier coup ? / t'as pas essayé / Alessio comment t'as fait ?

Alessio : J'ai retiré sept à vingt-huit / ça fait vingt-et-un

M2 : Ah / tu t'es dit trois fois quelque chose plus sept égal vingt-huit / donc il faudrait que je cherche trois fois quoi égal vingt-et-un / parce que toi tu te souvenais que vingt-et-un plus sept égal vingt-huit / très bien / mais moi ce que / Alice elle a eu beaucoup de chance / je / quelqu'un n'aurait pas essayé par exemple avec cinq puis essayé avec huit puis fini par trouver sept ? / non ?

Un élève : On connaît nos tables

M2 : On connaît nos tables / Shiran ?

Shiran : Moi j'ai fait six ça faisait dix-huit après j'ai fait sept ça faisait vingt-et-un

M2 : D'accord donc en fait la plupart d'entre vous vous aviez déjà identifié que il fallait enlever sept à vingt-huit c'est ça ?

Des élèves : Oui

M2 : Vu que vous cherchiez pour vingt-et-un / et après vous avez cherché dans vos tables / très bien d'accord c'était très bien expliqué Alessio / Alessio très bien expliqué

Episode 5 : Lancement du calcul mental 2

5 min 24

M2 vidéoprojette le calcul suivant :

Pour quelle valeur de n l'expression $2 \times (n + 1)$ est égale à 9 ?

M2 : Allez c'est la même chose sauf qu'à la place des pointillés j'ai mis une / lettre donc / deux fois parenthèses n plus un est égale à neuf / trouvez-moi la bonne valeur de n / la bonne valeur de n pour que deux fois parenthèse n plus un soit égal à neuf / Alessio tu gardes ton idée elle était bien

Episode 6 : Recherche des élèves sur le calcul mental 2

5 min 42

Un élève : Monsieur vous pouvez réexpliquer ?

M2 : Deux fois quoi plus un est égal à neuf ? / le résultat ça sera neuf / allez (M2 circule dans la classe et regarde ce que les élèves ont écrit sur leurs cahiers) // (à un élève) t'as fini ? / je t'interrogerai / c'est un nombre entier ? / Ryan n'a pas trouvé un nombre entier lui / Mustafa non plus /

Un élève : Attendez attendez j'ai pas compris / vous avez dit que n

M2 : Trouve-moi la valeur de n

Episode 7 : Correction du calcul mental 2

6 min 34

M2 : Ryan ? / n égal ? (M2 écrit au tableau : $n =$)

Ryan : n est égal à trois virgule cinq

M2 : Trois virgule cinq pourquoi ? (M2 complète : $n = 3,5$)

Ryan : Parce que trois virgule cinq plus un c'est égal à quatre virgule cinq / et quatre virgule cinq fois deux est égal à neuf (M2 écrit au fur et à mesure : $2 \times (3,5 + 1) = 2 \times 4,5 = 9$)

M2 : Ouais / comment t'as fait pour trouver trois virgule cinq ?

Ryan : J'ai divisé neuf par deux

M2 : Pourquoi divisé ?

Ryan : Ben parce que (inaudible) quand on va diviser vu que c'est fois deux après

M2 : Attends / on va revenir au ?

Ryan : (inaudible)

M2 : Très bien / dans la parenthèse on a n plus un et moi je veux deux fois n plus un et je sais que deux fois n plus un ça fait ? / ça doit faire neuf très bien / donc il faut que je réfléchisse à deux fois quoi fait neuf / et là Ryan s'est dit ben deux fois quatre virgule cinq ça fait neuf / donc il savait qu'en fait la parenthèse devait valoir / quatre virgule cinq / d'accord / donc tout le monde a utilisé cette super méthode dès le début ? personne ne s'est dit moi je vais essayer deux moi je vais essayer cinq moi je vais essayer six

Un élève : Moi j'ai fait deux fois quatre plus un ça fait neuf

M2 Oui donc tu n'as pas utilisé la règle de priorité parce que tu as commencé par la multiplication alors que ce qui était prioritaire ici c'est les / parenthèses / oui Samuel ?

Samuel : J'ai fait la distributivité

M2 : Toi tu as fait la distributivité / c'est-à-dire ?

Samuel : Deux fois n / plus deux fois un

M2 : Donc toi tu as fait deux n plus deux égal à neuf / et tu t'es retrouvé à faire la même chose qu'ici (M2 montre le calcul mental 1) / en fait à peu près / excellent / euh / là Samuel vient de vous montrer pourquoi la distributivité pouvait être utile / j'espère que vous avez écouté

Episode 8 : Lancement d'une activité

8 min 25

M2 : Je vous distribue une activité que vous allez lire et que vous allez commencer / hé / vous avez cinq minutes pour la faire / ça devrait vous rappeler quelque chose on a déjà fait ça en calcul mental le cours dernier et le cours encore avant (M2 circule dans la classe pour distribuer l'activité) // c'est avec des programmes de calcul [...] Vous avez cinq minutes dans cinq minutes on fait le point / et comme je l'ai expliqué c'est un chapitre important que vous aurez en troisième aussi qui tombera certainement au brevet et que vous aurez encore au lycée

Episode 9 : Recherche des élèves sur l'activité

9 min 18

M2 : Allez dans cinq minutes précisément on fait un point / donc vous vous dépêchez / il y a deux programmes de calcul lisez bien le texte en dessous c'est exactement la même chose que lors des questions flashs

Elève : Monsieur

M2 : Oui

Elève : Là faut choisir un nombre de départ ou le nombre est déjà donné au départ ?

M2 (lisant l'énoncé) : Alice et Bertrand choisissent un même nombre de départ Alice teste le programme A et Bertrand teste le programme B Alice et Bertrand s'aperçoivent qu'ils trouvent le même résultat final quel nombre ont-ils choisi au départ ? / donc / oui tu dois choisir le nombre / mais qu'est-ce qu'il faut à la fin ? / il faut que ce nombre mis dans le programme A et ce nombre mis dans le programme B te donne le même résultat oui / j'ai bien dit / le même nombre va donner le / même résultat / si vous vous souvenez bien on avait fait une question là-dessus / vous aviez un nombre fois trois doit donner la même chose qu'un nombre plus huit

M2 se met à circuler dans la classe pour encourager des élèves à se lancer dans l'activité (« Allez Andry, fais quelque chose », « Thomas, essaie, essaie, essaie ! ». Puis il regarde plusieurs cahiers.

M2 : Je vous ai déjà dit / ce n'est pas grave si on se trompe sur le cahier d'exercices / faut qu'on essaye [...] (à un élève) T'as pas compris ? / tu dois faire quoi là avec le nombre ?

Elève : (inaudible)

M2 : Non / choisir un nombre

Elève : Le multiplier ?

M2 : Ouais / par combien ?

Elève : Neuf

M2 : Ouais et après ?

Elève : Soustraire quatre

M2 : Ben alors choisis un nombre / celui que tu veux / et tu mets exactement le même nombre ici / et tu me dis si tu trouves le même résultat / (à une élève, Marianne) t'as trouvé ? (Marianne fait « oui » avec la tête) / le bon nombre ? / (M2 regarde son cahier) un fois neuf moins quatre / ça fait trois / neuf moins quatre ça fait trois ? / toi t'avais vraiment envie de trouver le bon résultat alors t'as trafiqué tes trucs quoi / tu viens de nous créer de nouveaux mathématiques allez hop / (regardant le cahier d'une autre élève) pourquoi n ?

L'élève : Ben je sais pas

M2 : Pourquoi des parenthèses ? (L'élève hausse les épaules) / Choisir un nombre le multiplier par neuf puis soustraire quatre / c'est quoi qui est prioritaire la soustraction ou la multiplication ?

L'élève : La multiplication

M2 : Et ben choisis un nombre / mais c'est une très bonne idée ça tu sais quoi / on va garder ça

Episode 10 : Correction de l'activité

13 min 35

M2 : Alors s'il vous plaît écoutez / qu'avez-vous fait ? / on lève la main et on s'exprime / qu'avez-vous fait ? / Gustave

Gustave : C'est pas possible

M2 : C'est pas possible / pourquoi c'est pas possible Gustave ?

Gustave : J'ai pas trouvé

M2 : T'as pas trouvé / qu'est-ce que t'as fait ? / t'as essayé des nombres Gustave

Gustave : Oui

M2 : Lesquels ?

Gustave : Un

M2 : Allez donc t'as fait un / programme A / t'as fait quoi t'as fait un

Gustave : Un fois neuf

M2 : Ouais (M2 écrit au tableau : $A = 1 \times 9$.)

Gustave : Est égal à neuf

M2 : Ouais mais t'as fait quoi après

Un élève : Moins quatre

M2 : Y a qu'un seul Gustave qui est capable c'est juste que je le perturbe parce que je ne fais pas comme lui (M2 complète : $A = 1 \times 9 - 4 =$) / Gustave tu sais bien que moi j'aime bien tout écrire d'un coup d'accord et après on fait mais toi là en fait ce que tu vas me faire c'est tu vas me faire un fois neuf ça fait neuf moins quatre (M2 continue : $A = 1 \times 9 - 4 = 9 - 4$) t'es d'accord on revient à ce que t'étais en train de me faire / mais c'est bien d'écrire tout le calcul d'un coup d'accord ? sinon vous faites des erreurs de rédaction après / neuf moins quatre ?

Gustave : Cinq

M2 (termine d'écrire : $A = 1 \times 9 - 4 = 9 - 4 = 5$) : Et après tu as fait le programme ? / le programme B / tu choisis quoi comme nombre ?

Gustave : Un

M2 : Et tu fais quoi ?

Gustave : Un fois deux

M2 : Ouais

Gustave : Plus un

M2 : Et ça fait combien ? (M2 écrit le calcul en parlant : $B = 1 \times 2 + 1 = 3$) / mais laissez-le tranquille / cinq c'est égal à trois ?

Gustave : Non

M2 : Donc est-ce que c'est un qu'ils avaient choisi ici ? / non sinon on aurait trouvé la même chose / quelqu'un a essayé autre chose ?

Un élève : Hé monsieur votre calcul il est dur

M2 : C'est dur de faire un fois deux plus un ?

Elève : De trouver les deux bons (inaudible) / Ryan ?

Ryan : Zéro virgule cinq

M2 : Je choisis un autre nombre / zéro virgule cinq fois

Ryan : Fois neuf moins quatre

M2 : Et ça fait combien ?

Ryan : Euh

Samuel : Quatre virgule cinq moins quatre

Ryan : Vingt-quatre virgule cinq

M2 : Ryan Ryan Ryan / multiplier par zéro virgule cinq c'est comme diviser par deux tout à l'heure tu as été capable de me dire que deux fois quatre virgule cinq ça faisait neuf donc zéro virgule cinq fois neuf ça fait ? / zéro virgule cinq fois neuf Ryan ?

Ryan : Quatre virgule cinq

M2 : Quatre virgule cinq moins cinq ?

Ryan : Zéro virgule cinq

M2 : Très bien

Ryan : C'est ce que j'avais dit

M2 : J'avais compris vingt-quatre virgule cinq tout à l'heure et je suis pas le seul donc c'est pour ça (M2 a écrit le calcul : $A = 0,5 \times 9 - 4 = 4,5 - 4 = 0,5$) / et Ryan ici tu vas faire quoi ?

Ryan : Zéro virgule cinq fois deux plus un / ça fait un plus un / égal deux

M2 (après avoir écrit $B = 0,5 \times 2 + 1 = 1 + 1 = 2$) : Bon donc ils ont choisi zéro virgule cinq / ils ont choisi zéro virgule cinq ? / non / est-ce que quelqu'un a trouvé ?

Elève : (inaudible)

M2 : Ben je sais pas tout à l'heure dans la question flash je faisais fois trois et plus huit et pourtant je trouvais la même chose parce que quatre fois douze et quatre plus huit douze

Elève : Là c'est fois deux

M2 : Ouais mais dans le / dans le

Elève : Là c'est multiplier par deux

Nadia : Monsieur là ça fait deux et là ça fait trois c'est pas la même

M2 : Ben ouais c'est pas la même / problème / euh

Nadia : Là on soustrait par quatre

M2 : On soustrait par quatre / ah tu voudrais changer le programme de calcul toi ? / tricheuse / euh / moi / j'ai vu quelqu'un dans la classe / qui a mis une lettre / à la place d'un / choisir un nombre cette personne a mis une lettre / et a / essayé de regarder ce qui se passait quand je mettais une lettre / m'a écrit une expression littérale / m'a traduit ces deux programmes de calcul avec une expression littérale comme on avait fait une question flash / et pour le moment ça ne l'a pas trop plus avancé / mais elle est pas loin de trouver la solution grâce à mon aide / donc je vous conseille de l'imiter / essayez de me traduire le programme A et le programme B par une ? / par une ? / expression littérale / c'est-à-dire au lieu de me choisir un nombre choisissez-moi

Un élève : Une lettre

M2 : Mais une lettre c'est pas un nombre ?

Elève : Non

M2 : Ben si la lettre c'est quelque chose qui représente tous les nombres

Episode 11 : Nouvelle recherche des élèves sur l'activité

18 min 06

M2 : Allez il faut gribouiller on est parti / Géraldine gribouille / Thomas trouve-moi une lettre / (regardant le cahier d'un élève) ouiiii

M2 circule dans la classe et encourage encore des élèves.

Samuel : Monsieur je trouve rien / je trouve des expressions une formule mais je trouve rien

Episode 12 : Mise en commun

19 min 29

M2 : Alors / hé / s'il vous plaît / euh / Delila / quel nombre as-tu choisi ?

Delila : La lettre

M2 : La lettre est un nombre / quelle lettre as-tu choisi pour qu'on se comprenne ?

Delila : n

M2 : n donc choisir un nombre tu as mis n et tu as fait quoi après ?

Delila : Euh fois neuf

M2 : Fois neuf (M2 écrit : $A = n \times 9$)

Delila : n fois parenthèse

M2 : Ouais

Delila : Moins quatre (M2 complète : $A = n \times (9 - 4)$)

M2 : Et pour le B tu as fait quoi ?

Delila : Euh n fois parenthèse deux plus un

M2 : Bon tout le monde est d'accord ? / tiens Ryan t'es d'accord ?

Elève : Mais monsieur là ça change tout les parenthèses

M2 : Est-ce que t'es d'accord ? / ah attends attends excuse-moi / quoi ?

Elève : Ca change tout vos parenthèses

M2 : Pourquoi ça change tout

Elève : Ben parce que ce qu'il y a entre parenthèses c'est prioritaire par rapport à la multiplication

Nadia : Mais monsieur après on va faire cinq fois quatre

M2 : Oui là on en a parlé avec Delila elle s'est rendu compte qu'en mettant des parenthèses ici c'était neuf moins quatre qui devenait prioritaire mais Delila est-ce que c'est ce qui est sous-entendu par mon programme de calcul ?

Delila : Non

M2 : Non / je choisis un nombre et je fais quoi directement ?

Nadia : On le multiplie

M2 : Youri / Daouda / si je vous embête vous me le dites et vous sortez il fait beau dehors je suis sûr que vous serez contents d'y être avec un rapport et une heure de colle pour revenir / donc ici les parenthèses n'étaient pas nécessaires / (M2 efface les parenthèses dans les expressions qu'il a écrites au tableau) et même faisaient tout se tromper / alors / hé / euh / le programme A / je l'ai traduit avec une expression littérale / le programme B aussi est-ce qu'on est d'accord ? / oui ou non ?

Un élève : Ouais

M2 : Et moi je veux quoi ? / je veux que le résultat de mon programme A soit le même que ? // que ?

Elève : Que celui de B

M2 : Que celui de B / très bien / donc / ça serait vachement bien d'écouter c'est quelque chose d'un petit peu important là /

Nadia : Mais le B c'est lequel ? / c'est le A là ? / c'est zéro virgule cinq ou c'est deux ?

M2 (comprenant que Nadia fait référence aux résultats trouvés lors du test des programmes de calcul avec le nombre de départ $0,5$) : Non non alors là j'ai choisi zéro virgule cinq et j'ai eu comme résultat deux / Youri dernier avertissement avant prise du carnet pareil pour Thomas // Maxence chut / Marianne chut

Nadia : Monsieur

M2 : Oui

Nadia : Donc deux c'est n

M2 : Non / zéro virgule cinq c'est le nombre que j'ai choisi donc c'est n et deux c'est le résultat / si je remplace n par zéro virgule cinq là je vais trouver deux / d'accord ? / hé / alors / euh / donc

Nadia : Monsieur

M2 : Trente secondes / vous êtes d'accord qu'on veut que / le programme / le résultat du programme A ce soit le même que le résultat du programme B / on est d'accord // donc on veut que neuf fois n moins quatre soit égal à ?

Samuel : Hé / les équations

M2 : À quoi ? / (M2 écrit l'égalité $n \times 9 - 4 = n \times 2 + 1$ sans attendre de réponse, mais il semble avoir entendu Samuel et le pointe du doigt) les quoi ? / les quoi ?

Samuel : Les équations

M2 : Et c'est quoi une équation ?

Samuel : C'est ça ce que vous venez de faire

M2 : Ouais mais

Samuel : (inaudible)

M2 : Mais c'est quoi une équation ? / allez une définition c'est quoi une équation ?

Elève (inaudible)

M2 : Non / c'est quelque chose qui est égal à quelque chose ok / hé / une équation c'est une expression littérale qui est égale à une autre et on va surtout chercher pour quelle valeur de (M2 montre les lettres n) / la lettre / ici n / cette équation est / est / égale / est vraie / est vérifiée / c'est-à-dire que si n vaut zéro virgule cinq est-ce que mon équation est vérifiée ?

Elève : Non

M2 : Non puisque le jour où zéro virgule cinq sera égal à deux vous m'appellerez / je vous donnerai cinquante centimes et vous me donnerez deux euros

Elève : Vous avez dit quoi monsieur ?

M2 : Shiran / ça c'est une équation (M2 montre l'égalité $n \times 9 - 4 = n \times 2 + 1$) / y a un membre de gauche un membre de droite séparés par une égalité d'accord ? / le signe égal / une équation c'est quoi ? / je vais chercher / à quoi ça sert déjà une équation ?

Nadia : Ben c'est le égal à quelque chose

M2 : Hé (M2 montre l'énoncé de l'exercice) / c'était quoi ça ? / je vous ai posé quoi ?

Elève : Un problème

M2 : Ouais un problème / et ben les équations ça sert à résoudre des problèmes / et donc

Nadia : C'est ça la définition ?

M2 : Non ça c'est à quoi ça sert / la définition c'est

Nadia : Monsieur tout à l'heure vous avez dit (inaudible) mais vous avez pas répondu à ma question

M2 : Oui mais parce que j'avais besoin de finir ça peut-être que je vais y répondre / tu m'écoutes bien et si tu l'as toujours dans deux minutes c'est bon

Nadia : Monsieur c'est pas ça c'est est-ce que cinq c'est n ? / dans le A

M2 : Non / cinq c'est le résultat de tout ça

Nadia : Mais n c'est cinq

M2 : Non c'est un

Nadia : Ah ben tout à l'heure j'avais raison alors

Elève : (inaudible)

M2 : Ah // attends trente secondes je vais crier un coup // Nadia Nadia Nadia / chose très importante / nécessaire pour la troisième / si tu perturbes tout le monde tu sors comme Maxence (M2 passe quelques secondes à rétablir le calme en grondant quelques élèves)

Ryan : Pour moi on a neuf n et / deux n / dans tous les cas / si t'enlèves quatre ou si tu rajoutes un dans tous les cas c'est trop loin

M2 : Donc on est d'accord que ce que t'es en train de me dire c'est que comme on n'est pas sûr que ce soit tout le temps vrai / on peut pas écrire égal / t'es en train de me dire parce que égale c'est / cinq égal cinq / c'est trois virgule cinq égal trois virgule cinq / c'est quelque chose de / de sûr / c'est ça que t'es en train de me dire / c'est deux plus deux égal deux fois deux / parce que quatre égal quatre c'est ce que t'es en train de me dire / et ben / le problème c'est que / est-ce que tu connais la valer de n ?

Ryan : Non

M2 : Donc est-ce que tu sais quel nombre je vais utiliser ?

Ryan : Non

M2 : Mais si ça se trouve je vais choisir le bon / qui fait en sorte que ça ce soit égal à ça

Ryan : Monsieur et si y en a pas de bon ?

M2 : Ah / s'il n'y en a pas / donc peut-être qu'il n'y en a pas c'est ce que t'es en train de me dire ? / ok d'accord s'il n'y en a pas il faudrait écrire différent / mais est-ce que je suis sûr ici / est-ce que ce signe égal me dit que ça c'est forcément égal à ça ? / pour toutes les valeurs de n ?

Elève : Non

M2 : Ben non on vient de prouver que pour deux valeurs de n c'était pas vrai / si on se permet d'écrire le signe égal ici / c'est parce que en effet n fois neuf moins quatre ça va être égal à n fois deux plus un / mais pas pour toutes les valeurs de n on va devoir trouver la bonne valeur de n / c'est-à-dire on va devoir trouver la valeur de n pour laquelle ça / ça marche / et ici je vous le dis il va y en avoir qu'une seule / le problème c'est que là tout de suite nous on sait pas faire / quand on sait pas faire un calcul on utilise quoi ?

Samuel : Une calculatrice

M2 : Ouais / et ben de la même façon aujourd'hui on va utiliser quelque chose sur l'ordinateur qui va nous aider à faire ça / ah / mais à partir de vendredi / c'est vous qui saurez le faire tout seul / alors

Episode 13 : Présentation et utilisation du solveur d'équations

26 min 30

M2 vidéoprojette un site Internet sur lequel se trouve un solveur d'équations.

M2 : Je vais utiliser ce qu'on appelle un solveur d'équations / euh / si vous voulez le retrouver chez vous / dans n'importe quel moteur de recherche vous tapez / solveur / équations / et c'est le sixième lien / mais il y en a d'autres

Nadia : On peut prendre le téléphone hein

M2 : Oui prends ton téléphone si t'as ça sur ton téléphone parfait

Nadia : Ok

M2 : Alors / je vais taper / mon équation là-bas / mon équation me dit que c'est quelle lettre ?

Un élève : n

M2 : Mais si j'utilise a ou si j'utilise b ou si j'utilise c est-ce qu'ici ça change quelque chose ?

Elève : Non

Samuel : (inaudible)

M2 : (M2 commence à taper l'équation dans le solveur : $x * 9 - 4$)

Elève : Pourquoi il y a une étoile ?

M2 : Parce que sur ce logiciel l'étoile c'est le fois (M2 complète l'équation : $x * 9 - 4 = x * 2 + 1$) / et donc là j'appuie sur ? (M2 met son curseur sur la touche « Résoudre » du solveur)

Elèves : Résoudre

M2 : (M2 appuie sur la touche ; une résolution algébrique de l'équation apparaît à l'écran) Alors attendez je vous explique ce qu'il y a écrit en dessous la solution tout ça on s'en fiche / ce qui va nous intéresser c'est juste ça (M2 surligne : $x = \frac{5}{7}$ et la valeur approchée $0,7142857$)

Samuel : C'est cinq septièmes

M2 : Merci / hé / si je résous une équation c'est peut-être pour avoir la valeur exacte

Nadia : (inaudible)

M2 : Parce qu'il s'exprime peut-être un peu mieux / euh / donc en effet ici moi j'ai fait avec x mais nous on a choisi quelle lettre nous ? / ben donc on va rester avec n ici / n ça vaut ?

Elève : Cinq septièmes

M2 : (M2 écrit au tableau : $n = \frac{5}{7}$) Et ça vaut environ ?

Elève : Zéro virgule sept

M2 : Zéro virgule soixante-et-onze (il complète : $n = \frac{5}{7} \simeq 0,71$) / euh / je vais vous dire une chose / est-ce que là je vous demandais de me dire le nombre de centimètres le nombre de litres la somme d'argent ?

Elève : Non

M2 : Et ben du coup on va rester sur la valeur exacte (M2 efface le $\simeq 0,71$) / cinq septièmes / c'est-à-dire que / oui Ryan ?

Ryan : Comment on peut avoir la valeur de x s'il n'y a pas (inaudible)

M2 : Ben je viens pas de la calculer là ? / je viens pas de la trouver ?

Ryan : Je veux dire / même s'il y a pas (inaudible) / comment ils font pour trouver ?

M2 : Tu veux savoir comment le solveur fait pour savoir que x vaut cinq septièmes pour que ça soit bon ? / et ben on voit ça vendredi / alors euh / donc / vous croyez vous / vous croyez le logiciel ? / je vous montre un truc que vous connaissez pas il vous donne une réponse vous le croyez ?

Elève : Non

M2 : Et ben j'espère que non / hé

Elève : Donc c'est pas ça la réponse ?

M2 : Qu'est-ce qu'il faut faire pour être sûr ?

Elève : Il faut vérifier

M2 : Ouais / alors / cinq septièmes fois neuf moins quatre (M2 écrit : $\frac{5}{7} \times 9 - 4 =$) / quarante-cinq septièmes / quarante-cinq septièmes

Samuel : Moins quatre

M2 : Quanrante-cinq septièmes moins quatre / on va mettre quatre au même ?

Samuel : Dénominateur

M2 : Donc / ici ça va faire sept et ici / quatre fois sept ?

Samuel : Vingt-huit

M2 : Quarante-cinq moins vingt-huit ?

Samuel : (inaudible)

M2 : Et donc ça fait combien ?

Samuel : Je sais pas j'ai pas envie de me casser la tête

M2 : (M2 écrit le calcul : $\frac{5}{7} \times 9 - 4 = \frac{45}{7} - \frac{28}{7} = \frac{17}{7}$; puis il teste le membre de droite de l'équation pour $n = \frac{5}{7}$, écrit le calcul et trouve encore $\frac{17}{7}$) Je trouve dix-sept septièmes au membre de gauche et dix-sept septièmes au membre de droite / c'est la même chose ?

Elève : Oui

M2 : Hé / est-ce que maintenant on peut croire le logiciel ?

Elève : Oui

M2 : En tout cas on vient de trouver que là il ne nous avait pas menti

Episode 14 : Institutionnalisation

30 min 35

M2 : On a appris quoi aujourd'hui ?

Samuel : Les équations

Nadia : On a appris les équations

Elève : À résoudre

M2 : Oulà / oui on a appris les équations / t'es sûr qu'on a appris à résoudre ? / on sait le faire nous-mêmes ?

Samuel : Non non non / on a appris ce que c'était

M2 : On a appris ce que c'était / donc si on a appris ce que c'était le titre d'aujourd'hui ?

Plusieurs élèves : Qu'est-ce qu'une équation ?

M2 : Et c'est parti (M2 vidéoprojette la leçon au tableau) // euh vous avez trente secondes pour copier le titre / je crois que c'est le chapitre dix-neuf (le titre à copier est : Chapitre 19 Equations) // euh que vous ayez terminé ou pas dans cinq minutes y a plus rien / et si jamais on n'a pas fini on finira plus tard

Voici le contenu de la leçon qui est vidéoprojeté (les mots en italiques sont en rouge en réalité) :

I. Qu'est-ce qu'une équation ?

Définition : Une équation est une égalité où apparaît une ou plusieurs lettres dont on ne connaît pas la valeur et qui sont appelées *inconnues*.

Exemple : $9x - 4 = 2x + 1$ est une équation. x est l'inconnue de l'équation.

On a vu dans l'activité 1 que si l'on remplace x par $\frac{5}{7}$, alors l'égalité est vraie.

Une valeur de x qui rend l'égalité vraie est appelée une *solution* de l'équation.

Si on trouve toutes les solutions de l'équation, alors on dit qu'on a *résolu* l'équation.

M2 : Dans cinq minutes il n'y aura plus rien / ce sera tant pis pour vous (certains élèves protestent contre le peu de temps laissé) // une équation c'est quoi ? / (lisant ce qui est vidéoprojeté) une équation c'est une égalité où apparaît une ou plusieurs lettres dont on ne connaît pas la valeur et qui sont appelées inconnues

Nadia : (inaudible)

M2 : Ca ressemble mais c'est pas pareil / hé / hé / ça ressemble à la définition d'une expression littérale mais ce n'est pas pareil / chut / chut / après je vous ai mis un exemple / le même que dans le cahier de leçons / euh / que dans le cahier d'exercices / c'est pour ça qu'à un moment je vous dis de retourner dans l'activité une (M2 pointe les mots « activité 1 ») parce que ça vient de l'activité une / Thomas chut / tout ce que j'ai mis en rouge (en italiques dans cette transcription) vous le soulignez le surlignez le mettez en couleur vous faites quelque chose / Debiah tu parles trop fort t'as le droit de chuchoter pas plus / Samuel je dois pas t'entendre [...] / donc la lettre dans une équation on appelle ça l'inconnue / pourquoi est-ce qu'on appelle ça l'inconnue ? / et ben / ben ouais parce qu'on la connaît pas et qu'on veut la trouver / d'accord ? / alors je vous dis que dans l'activité un si on remplaçait x par / ici il y a écrit cinq septièmes / cinq slash sept cinq septièmes / alors l'égalité est vraie / donc l'égalité est vraie lorsque le membre de gauche c'est-à-dire ce qui est à gauche du signe égal est égal à ce qu'il y a à droite du signe égal c'est-à-dire le membre de ? / droite / et / la valeur ou les valeurs de x qui rendent l'égalité vraie on les appelle des / solutions / quand on a un problème et quand on trouve la réponse on dit qu'on a trouvé la / solution / et ben voilà

Elève : Le x il y a des fois ?

M2 : Où ça ?

Elève : À exemple

M2 : Ici ? / c'est deux x / là j'ai pas mis de fois c'est que des x / euh / chut / et on a résolu l'équation / on a fini l'équation que lorsqu'on a trouvé toutes les / solutions / cette année ensemble il n'y aura à chaque fois qu'une seule solution / dès l'année prochaine peut-être qu'il y en aura plusieurs / et au lycée il y en aura certainement beaucoup / et des solutions

Durant toutes ces explications, M2 ne circule pas dans la classe pour vérifier que les élèves copient la leçon.

Episode 15 : Distribution d'une fiche méthodologique

37 min 30

M2 distribue une fiche méthodologique aux élèves. Cette fiche est composée de plusieurs colonnes : une colonne « exercice » où l'élève inscrit le numéro des exercices réalisés en classe, une colonne « type d'exercices » où l'élève inscrit le type d'exercices dont relève un exercice particulier, une colonne « propriété / méthode à utiliser pour réaliser le type d'exercices » et une colonne « où trouver des exercices du même type dans les cahiers ? ».

M2 : (montrant la fiche) C'est quoi ça ?

Elève : Une feuille blanche.

Elève : Oh non pas elle

Elève : J'aime pas les trucs comme ça

Elève : C'est vrai ça sert à rien monsieur

Samuel : Personne ne regarde dedans

M2 : Et comment vous révisez vos contrôles ? / l'autre on l'a quasi pas remplie je suis d'accord (visiblement, M2 aurait distribué une fiche similaire par le passé et ne l'aurait pas beaucoup utilisée en classe)

Plusieurs autres élèves protestent.

M2 : Donc ça vous la collerez dans le cahier d'exercices / et peut-être qu'en apprenant à l'utiliser et en révisant pour une fois ça servira / (à une élève qui râle) t'as pas envie d'une feuille qui t'explique où sont les corrections d'exercices

L'élève : Ca me sert pas

M2 : Ben si ça te sert pas c'est que tu révises pas bien // (à la classe) donc vous la mettrez dans votre cahier d'exercices sans la perdre

Elève (inaudible)

M2 : Oui ben j'en veux une nouvelle parce que celle-là on va la remplir / oui il y en a une par chapitre

M2 finit de distribuer les fiches à tous les élèves. Il ne donne pas d'explication sur la manière d'utiliser cette fiche.

Distribution d'une fiche d'exercices et lancement de deux exercices

39 min 48

M2 : Hé / je distribue la feuille d'exercices / feuille d'exercices en lien avec ? / en lien avec ? (M2 montre le tableau)

Nadia : Avec la leçon

M2 : Avec la leçon et avec l'activité / oui Tifany et moi je parle / feuille d'exercices que vous me commencez / l'exercice un et l'exercice deux avant que ça sonne / puisqu'on doit les corriger ce qui veut dire que une fois que j'ai fini de distribuer j'ai / j'arrête la leçon / et vous vous concentrez sur les exercices

M2 finit de distribuer les feuilles d'exercices. La classe s'agite, M2 tente de rétablir le calme pendant la distribution. Il ne donne pas d'explication sur les exercices à faire (pas de lecture de l'énoncé). Simplement :

M2 : Exerices un et deux maintenant

L'exercice 1 est le suivant :

PROGRAMME A	PROGRAMME B
Choisir un nombre Le multiplier par 3 Ajouter 5 au résultat	Choisir un nombre Le multiplier par 6 Soustraire 2 au résultat

Alexandra et Bilal choisissent le même nombre de départ. Alexandra teste le programme A et Bilal teste le programme B. Alexandra et Bilal obtiennent le même résutat final. Quel nombre de départ ont-ils choisi ?

Si tu penses avoir trouvé une solution, vérifie que celle-ci est la bonne.

L'énoncé de l'exercice 2 est le suivant :

PROGRAMME A	PROGRAMME B
Choisir un nombre Le multiplier par 3 Ajouter 5 au résultat	Choisir un nombre Lui soustraire 2 Multiplier le résultat par 6

Alexandra et Bilal choisissent le même nombre de départ. Alexandra teste le programme A et Bilal teste le programme B. Alexandra et Bilal obtiennent le même résultat final. Quel nombre de départ ont-ils choisi ?

Recherche des élèves sur l'exercice 1

42 min 26

M2 circule dans les rangs. Puis au bout d'une minute :

M2 : J'ai une petite information pour les exercices un deux trois et quatre / est-ce qu'on a appris à résoudre une équation nous-mêmes ?

Un élève : Non

M2 : On a besoin de quoi nous maintenant ?

Elève : Euh solveur

M2 : D'un solveur donc en fait / hé / donc en fait / que faut-il faire dans les exercices un deux trois et quatre / il suffit de m'écrire / l'équation / l'équation / et pour la résoudre soit nous le ferons en classe comme nous allons faire tout à l'heure en utilisant le solveur soit chez vous si vous le souhaitez vous pouvez aller utiliser le solveur vous-mêmes / ce qui m'intéresse là c'est que vous me traduisiez les programmes en / équations

Elève : (inaudible)

M2 : (à l'élève) Une expression littérale c'est un calcul avec des lettres / une équation c'est deux expressions littérales séparées par un signe égal

Elève : (inaudible)

M2 : Si t'as trouvé l'équation sans le solveur (M2 lève les pouces) tu vérifieras avec le solveur

Un autre élève : (inaudible)

M2 : L'équation c'est tu m'écris le programme A sous forme d'expression littérale / tu m'écris le programme B sous forme d'expression littérale et comme tu veux que le programme A soit égal au programme B tu m'écris (M2 mime le signe « égal » avec les doigts) / égal

M2 circule de nouveau dans la classe et répond à quelques questions d'élèves individuellement. Exemple :

Shiran : Monsieur la solution elle est possible à trouver ?

M2 : Je sais pas / je pense qu'il va être très dur à trouver / il est possible mais vous ne savez pas le faire pour le moment donc pour le moment je vous ai juste demandé de m'écrire les équations / d'accord ? / et on les résolvera ensemble

M2 regarde le cahier d'une élève qui utilise une technique par essais/erreurs pour réaliser l'exercice 1. M2 lui dit qu'elle est en train de faire comme dans l'activité 1 et qu'elle n'y arrivera pas. Il lui demande de produire une équation pour pouvoir utiliser le solveur.

Episode 16 : Correction de l'exercice 1

47 min 15

M2 : Hé / on corrige le un / quelle est l'équation correspondante à ces deux programmes de calcul Shiran ?

Shiran : a fois trois plus cinq égal (M2 écrit au tableau : $a \times 3 + 5 =$) / trois a plus cinq

M2 : Ah d'accord si tu veux / mais moi je veux une équation

Shiran : Euh / a fois trois plus cinq

M2 : Oui non mais a fois trois plus cinq Shiran tu viens de me traduire ce programme de calcul / donc ok tu voulais réduire c'est très bien / tu voulais réduire c'est très bien mais / le programme A doit être égal au programme ? (M2 montre « programme B » dans l'énoncé) / ben traduis-moi le programme B

Shiran : a fois six moins deux (M2 complète : $a \times 3 + 5 = a \times 6 - 2$)

M2 : Et là si tu veux en dessous tu peux m'écrire que c'est / trois a plus cinq égal à six a moins deux d'accord ? / (M2 écrit l'équation $3a + 5 = 6a - 2$ en dessous de la première) ok ? / en fait ce que tu nous faisais c'est bien mais tu devais rallonger / ouais ? / mais Shiran / tu gardes ça en tête / les autres auraient pas compris sinon

Episode 17 : Correction de l'exercice 2

48 min 40

M2 : Exercice deux écrivez-moi l'équation / ben non mais donnez-la moi on corrige / Marianne

Marianne : Trois e plus cinq / égal / entre parenthèses e moins deux / fois six (M2 écrit au fur et à mesure au tableau : $3e + 5 = (e - 2) \times 6$)

M2 : S'il vous plaît / euh / choisir un nombre le multiplier par trois ajouter cinq / d'accord / choisir un nombre lui soustraire deux mutliplier par six / euh / Hélène est-ce qu'il y a écrit qu'il faut mettre des parenthèses ici ?

Hélène : Non

M2 : Ben Marianne / pourquoi t'as mis des parenthèses ?

Marianne : Parce que d'abord on soustrait deux

M2 : Et que si tu n'avais pas mis des parenthèses qu'est-ce qui aurait été prioritaire ?

Marianne : La multiplication

M2 : Donc très bien / sans parenthèses ici on ne respecte pas les priorités du programme/ euh on a réduit ces équations ? (M2 s'est trompé ; il voulait probablement dire « on a résolu ces équations ? ») / et ben on va peut-être le faire / grace au ?

Des élèves : Au solveur

M2 : (M2 reprend le solveur utilisé précédemment) Première équation / x fois trois plus cinq égal / (M2 écrit l'équation dans le solveur puis clique sur la touche « Résoudre » ; la solution s'affiche)

Un élève : Ca fait sept tiers

M2 : Oui / (M2 revient au tableau) donc ici combien vaut a ? / combien vaut a ? / combien vaut a ?

Un élève : Sept tiers (M2 écrit : $a = \frac{7}{3}$)

M2 : Pour a égal sept tiers est-ce que l'équation est vraie ?

Elève : Ouais

M2 : Donc a c'est une ?

Un élève : Fraction

M2 : a c'est une ?

Le même élève (répétant) : Fraction

M2 : Non l'équation c'est ça / ce qui me donne

Un élève : La solution

M2 : a c'est une solution de l'équation / et comme nous avons trouvé la seule et unique solution de cette équation nous avons ?

Un élève : Résolu

M2 : Résolu cette équation / si on n'a rien compris c'est le moment de parler

Tifany : Moi monsieur j'ai rien compris

M2 : D'accord / Tifany tu es d'accord que / tiens pour celui-là (M2 montre l'exercice 2) j'ai deux programmes de calcul / comme / pour / depuis ce matin / on veut faire en sorte que / de / pour choisir le bon nombre / le programme A soit /

donne le même résultat que le programme B / tu es d'accord / sauf que est-ce que tu vas réussir en testant plein de nombres ?

Tifany : Ben oui

M2 : Pas forcément / si t'as de la chance oui / tu penses que tu aurais réussi à tester sept tiers ? / t'aurais pensé à sept tiers ?

Tifany : Non

M2 : Ben moi non plus / donc / ce qu'on fait c'est qu'on traduit les programmes en une expression littérale d'accord ? / et comme on veut que le programme A donne le même résultat que le programme B ça veut bien dire qu'on veut mes deux expressions littérales soient / égales / tu es d'accord / donc ça me forme une ? (M2 montre les équations au tableau) / donc là tout ce qu'on a fait c'est traduire les programmes de calcul d'accord ? / et sauf que on ne sait pas / on ne sait pas / résoudre nous-mêmes ces programmes de calcul / donc on utilise un logiciel qui nous aide / mais dès vendredi tu feras tout toute seule / Delila ça va mieux ?

Delila : Non

M2 : Et qu'est-ce que t'as pas compris ?

Delila : (inaudible)

M2 : Et ben je recommencerai

Elève : Pourquoi e ?

M2 : Ben parce qu'il fallait choisir une lettre / on a choisi e / (M2 tape dans le solveur l'équation $3x + 5 = (x - 2) \times 6$ puis affiche la solution, qu'il surligne) / quelle est la solution de la deuxième équation ? / hé

Elève : Dix-sept tiers

M2 : Hé / (M2 écrit $e = \frac{17}{3}$ au tableau) est-ce que je suis toujours obligé de choisir x comme lettre ?

Elève : Non

M2 : On est bien d'accord

Nadia : Monsieur ça a sonné c'est fini

Episode 18 : Devoirs pour la séance suivante

M2 : Pour vendredi / exercices / exercices trois quatre et cinq de la feuille (M2 écrit au tableau : « Pour vendredi Ex 3, 4 et 5 de la feuille ») / avant de partir vous attendez trente secondes

Elève : Pourquoi ?

M2 : Parce que j'ai des feuilles d'aide à vous donner / pour faire ces trois exercices j'ai des feuilles qui vous donnent des indications / je donne pas à tout le monde / c'est fait exprès / certains se débrouilleront // (M2 distribue les fiches) donc ça c'est l'aide pour les exercices / euh / est-ce qu'il faut forcément lire ces feuilles ? / ben si vous avez pas besoin d'aide / si on a besoin c'est obligatoire

Transcription de la séance 2 de M2 sur les équations, découpage en épisodes

Episode 1 : Installation des élèves

La séance a lieu en salle informatique. Les élèves s'installent d'abord sur des tables au centre, pas devant les ordinateurs.

1 min 00

Episode 2 : Explication du déroulé de la séance

M2 explique aux élèves comment va se dérouler la séance. Un travail sur table va d'abord avoir lieu, puis les élèves seront autorisés à aller sur les ordinateurs pour utiliser un logiciel (le logiciel Thot).

2 min 18

Episode 3 : Dévolution pour la production d'une équation

Au tableau sont écrits deux programmes de calcul :

PROGRAMME A
Choisir un nombre
le multiplier par 8
ajouter 2 au résultat

PROGRAMME B
Choisir un nombre
le multiplier par 5
ajouter 9 au résultat

M2 : Rappelez-vous / qu'est-ce qu'on a fait au dernier cours ?

Un élève : On a utilisé un solveur

M2 : On a utilisé un solveur de quoi ?

Des élèves : D'équations

M2 : D'équations / pourquoi est-ce qu'on a utilisé un solveur d'équations ?

Plusieurs élèves : (inaudibles)

M2 : Parce qu'on voulait des solutions et parce qu'on ne savait pas résoudre / et ben là / la dernière fois c'était l'ordinateur qui faisait tout le travail pour nous là on va aider l'ordinateur à faire le travail et cette après-midi on fera le travail tout seul / donc si vous voyez du moment à où vous passez de l'ordinateur qui fait le travail tout seul à je fais le travail tout seul on va se faire aider par l'ordinateur d'accord / travail en équipe / le problème c'est que si vous suivez pas là là maintenant là et ben vous allez rater toute une page / d'aide / ok ? / donc/ regardez le tableau derrière vous / programme A / qu'est-ce qu'il dit le programme A Nadia ?

Nadia : Euh choisir un nombre le multiplier par huit ajouter deux au résultat

M2 : Très bien / Géraldine qu'est-ce qu'il dit le programme B ?

Géraldine : Choisir un nombre le multiplier par cinq ajouter neuf au résultat

M2 : Très bien / mon but est que vous me / trouvez le nombre / qui quand je vais le mettre dans le programme A quand je vais le mettre dans le programme B va me donner le même / résultat donc qu'est-ce qu'on va créer pour faire ça ?

Plusieurs élèves : Une équation

M2 : Une équation / donc choisissez la lettre x et créez-moi l'équation en lien avec cette activité / créez-moi l'équation pour faire en sorte que l'expression littérale du programme A soit égale à l'expression littérale du programme B

3 min 52

Episode 4 : Recherche des élèves sur la production d'une équation

Plusieurs élèves posent des questions à M2 individuellement pour comprendre ce qu'il faut faire. Puis M2 circule et vérifie les équations produites. Apparemment, un nombre significatif d'élèves a réussi à produire la bonne équation.

6 min 12

Episode 5 : Mise en commun

M2 : Ryan / quelle est l'équation que tu as utilisée ? / hé on écoute Ryan

Ryan : x fois huit plus deux égal x fois cinq plus neuf

M2 : x fois huit plus deux c'est égal à x fois cinq plus neuf (M2 écrit l'équation au tableau en même temps : $x \times 8 + 2 = x \times 5 + 9$.) / très bien donc ça c'est l'équation du jour qu'on va / qu'on va résoudre / résoudre ça veut dire trouver les solutions / ici il n'y en aura / qu'une seule alors hé / hé / maintenant je vous montre le logiciel qu'il va falloir utiliser puis après je vous laisserai aller par deux sur les ordinateurs

M2 fournit les explications pour se connecter à l'ordinateur

7 min 05

Episode 6 : Dévolution pour utiliser le logiciel Thot

M2 : Le logiciel qu'il faut utiliser / regardez-bien hé (M2 vidéoprojette son écran d'ordinateur pour montrer la manière dont le logiciel Thot s'utilise) / celui qui est ici il s'appelle Thot T-H-O-T et il est représenté par une pyramide / une pyramide en mathématiques on sait ce que c'est / ensuite quand il s'affiche ça ressemble à ça d'accord ? (M2 ouvre le logiciel ; l'équation $0 = 0$ apparaît par défaut) / zéro égal zéro c'est vrai ?

Elèves : Oui

M2 : Ouais / alors pour créer une équation je vais dans / je clique ici vous voyez

M2 explique aux élèves comment utiliser le logiciel : comment créer une nouvelle équation, comment ajouter ou soustraire un nombre ou des termes en x aux deux membres de l'équation, ce que l'ordinateur fait lorsqu'on lui demande de faire ces transformations

M2 : Maintenant que vous avez compris et suivi il y a quatre choses utiles / d'accord ? / ce que vous allez faire / c'est que vous allez vous diriger vers les ordinateurs avec le binôme que vous souhaitez / deux maximum / deux maximum / pas trois / et vous me résolvez l'équation que j'ai écrite en rouge sur le tableau que vous avez quasiment tous trouvée vous-mêmes sur le cahier / dans dix minutes on fait un premier point

9 min 30

Episode 7 : Installation des élèves devant les ordinateurs et recherche

M2 circule parmi les élèves pour leur donner des explications sur ce qu'est une équation ou comment utiliser le logiciel pour créer l'équation. Certains élèves rencontrent des difficultés en raison du fait que l'équation au tableau présente des signes de multiplication, sous-entendus dans le logiciel pour créer l'équation.

Ensuite, M2 donne des indications pour résoudre l'équation : ce qui est recherché, essayer de faire en sorte de ne plus avoir des termes x dans les deux membres.

Au bout d'un quart d'heure, certains binômes parviennent à trouver la solution de l'équation.

24 min 40

Episode 8 : Mise en commun et nouvelle dévolution

M2 : S'il vous plaît / ceux qui n'ont pas terminé font une petite pause et regardent au tableau (M2 rentre l'équation dans le logiciel de son ordinateur dont l'écran est vidéoprojeté) / s'il vous plaît vous regardez / alors j'ai vu beaucoup de choses / beaucoup de choses différentes / déjà on va se mettre d'accord sur une chose / qu'est-ce que c'est que résoudre une équation ?

Elève : (inaudible)

M2 : Connaître la et la seule valeur de x / très bien / en quatrième en tout cas / après je vous ai dit peut-être qu'il y aura plusieurs solutions / à l'heure actuelle il n'y en aura qu'une seule / euh / du coup / comment est-ce que je vais faire / pour connaître la / valeur de x pour laquelle cette équation va être bonne / alors il y en a qui ont commencé à cliquer sur un peu tous les boutons / ils ont par exemple cliqué sur euh / comme j'avais fait / ajouter un terme en x / ils ont rajouté cinq x / ils ont rajouté dix x / ils ont rajouté huit x / pourquoi ? / pourquoi ?

Samuel : (inaudible)

M2 : T'as dit quoi Samuel ? / il faut ?

Samuel : Enlever pas rajouter

M2 : Pourquoi il faudrait enlever ? / alors entre enlever et rajouter ça va dépendre / il faudrait oui ?

Samuel : Qu'il y ait zéro x

M2 : Où ça ? / dans les deux membres ?

Samuel : (inaudible)

M2 : Donc ton but c'est de faire quoi ?

Samuel : Me retrouver avec x dans une seule équation / dans un seul chiffre quoi

M2 : Dans un seul membre / donc là Samuel vous dit qu'il aimerait bien / on va appeler ça isoler les termes en x / isoler les termes en x ça veut dire quoi ? / ça veut dire que soit dans le membre de gauche soit dans le membre de droite ça c'est moi qui choisis / je vais laisser / juste / les termes en x / ou le terme en x / d'accord ? / mais donc si dans ce membre j'ai juste le terme en x dans l'autre membre j'aurai quoi ?

Elève : (inaudible)

M2 : Ah bon ? / oui j'aurai zéro x mais j'aurai quoi ?

Samuel : Un nombre sans x

M2 : J'aurai des termes sans x / est-ce que vous êtes d'accord qu'ici j'ai huit x et cinq x qui sont des termes en x / et deux et neuf qui sont des termes sans x ? /

on est bien d'accord ? / oui ou non ?

Elève : Oui

M2 : Donc / là ce qu'on est en train de vous dire c'est que sans doute pour résoudre cette équation il faudrait isoler les termes en x d'un côté / dans un membre / et isoler les termes sans x de l'autre / est-ce qu'on est d'accord ? / donc déjà vous allez essayer de faire ça / vous avez trois quatre minutes pour essayer de faire ça et après on corrige / il y en a qui ont déjà terminé / ceux qu'ont déjà terminé vous créez une nouvelle équation et vous pratiquez / vous essayez vous essayez / et dès que vous trouvez la petite pyramide en bas ça veut dire bingo vous recommencez (NB : lorsque l'élève parvient à trouver la solution d'une équation, le logiciel affiche une petite pyramide pour indiquer que la solution a bien été trouvée.) / si vous avez le temps de m'en faire cinq c'est parfait

28 min 00

Episode 9 : Recherche des élèves

M2 circule à nouveau parmi les élèves. Il répond à leurs questions et interagit avec eux. Exemple d'interactions avec un binôme :

M2 : Vous allez enlever quoi ? / vous allez enlever huit x ou cinq x alors ?

Elève 1 : Cinq x

M2 : Et ben donc vous allez / cliquer là / comme ça (M2 réalise la manipulation) / vous enlevez quoi aux deux membres ? / celui de gauche et celui de droite / vous enlevez (le résultat de la transformation s'affiche) / est-ce que j'ai toujours des x dans le membre de gauche ? / euh de droite ?

Elève 1 : Et donc là faut enlever le trois

M2 : Non / est-ce que tu peux l'enlever ? / si tu l'enlèves ici il va pas réapparaître ici ?

Elève 2 : Ah donc on fait trois x plus neuf

M2 : Non non / on fait trois x plus deux est égal à neuf sauf que / là est-ce qu'on a isolé les termes sans x ?

Elève 1 : Euh / non

M2 : Non / là on a trois x plus deux / j'aimerais beaucoup que ce plus deux il disparaisse là / comment est-ce qu'on fait pour faire disparaître ?

Elève 1 : Moins deux

M2 : Moins deux

38 min 15

Episode 10 : Mise en commun

M2 : Euh s'il vous plaît on va faire un point au tableau / hé / il reste quinze minutes on fait un point de cinq minutes au tableau après ça vous laisse dix minutes pour vous entraîner avec le logiciel d'accord ? / donc vous suivez // la plupart voire quasiment tout le monde voire tout le monde a compris / le principe / quelle est la première chose à faire quand j'ai une équation ? / Nadia ?

Nadia : On enlève quatre x

M2 : Alors / on isole / x / à gauche ou à droite

Nadia : (inaudible)

M2 : Oui mais / si par exemple le but Nadia / si jamais regarde moi j'ai pas quatre x (M2 montre l'équation qui se trouve sur son écran vidéoprojeté : $8x+2=5x+9$) j'ai cinq x et huit x

Nadia : Moins cinq x

M2 : D'accord donc ça dépend donc pour rester général et pas parler d'un cas en particulier qu'est-ce qu'on fait ? / on isole / les termes en x / ou les termes en y ou les termes en a ou les termes en b / on les isole soit à gauche soit dans le membre de droite / on choisit ça c'est vous voulez / si vous le faites dans le membre de gauche et que moi je le fais dans le membre de droite y a aucun problème on aura tous les deux bons / (M2 rabroue un élève en train de jouer sur l'ordinateur) / donc pour isoler les termes / en x (M2 manipule le logiciel pour enlever $5x$ à chaque membre de l'équation $8x+2=5x+9$) / il faut bien enlever / cinq x ou huit x / pourquoi est-ce que j'ai pas enlevé huit x ?

Elève : (inaudible)

M2 : Parce que sinon cinq x serait parti et aurait été remplacé par moins trois x / vous aimez travailler avec des signes négatifs vous ?

Elèves : Non

M2 : Je pense qu'on est tous plus à l'aise quand c'est en positif / euh / qu'est-ce que ça signifie ce qui a été fait en rouge ici ? (M2 montre les ostensifs $-5x$ correspondant à l'opération venant juste d'être réalisée)

Elèves : (inaudible)

M2 : C'est l'opération que j'ai faite / très bien / donc ça ça signifie que j'ai enlevé cinq x aux deux membres / alors d'après le logiciel est-ce que vous pouvez enlever quelque chose qu'à un seul membre ?

Elèves : Non

M2 : Non / hé on est bien d'accord que mes deux membres ils sont reliés par quoi ?

Elève : Par un égal

M2 : Par une égalité / donc si vous faites quelque chose dans le membre de gauche / si vous ajoutez si vous enlevez quelque chose dans le membre de gauche / forcément il va falloir faire quoi dans le membre de droite ? / l'enlever ou l'ajouter aussi / forcément / c'est-à-dire vous ne pouvez pas / travailler que dans le membre de gauche et ne pas travailler sur le membre de droite / sinon vous me changez totalement l'équation / d'accord ? / si par exemple je vous dis que / deux fois trois / c'est la même chose que trois plus trois / vous êtes d'accord avec moi / deux fois trois six est égal à trois plus trois six vous êtes d'accord ? / si je ne travaille que sur un membre / par exemple je vais avoir trois égal à six c'est vrai ? (tout ceci se passe à l'oral ; M2 ne prend pas de support écrit pour son exemple) / est-ce que c'est vrai trois égal à six ?

Elève : Non

M2 : Donc est-ce que ça reste la même équation ? / donc attention / attention / et maintenant / alors là la plupart d'entre vous se sont un petit peu perdus / parce que / l'indication que j'avais donnée c'est isoler les termes en x / donc ils se sont dit ben c'est fait qu'est-ce que je peux bien faire maintenant ?

Elève : (inaudible)

M2 : Oui / isoler les termes en x / là les termes en x ils sont pas isolés (M2 montre l'équation $3x + 2 = 9$ au tableau) / ils sont pas isolés puisque j'ai trois x plus deux égal à neuf / donc trois x n'est pas isolé / Géraldine si je t'embête tu me le dis tout de suite y a pas de problème / donc trois x plus deux / comme trois x n'est pas isolé il va avec plus deux va falloir que j'arrive à enlever ce deux / pour enlever deux quelle est la seule et unique solution ?

Elève : Moins deux

M2 : Et ben je fais moins deux (M2 s'exécute en manipulant le logiciel) // donc trois x égal sept ok / et là c'est quelque chose qui tout le long de la quatrième va vous poser problème et va vous poser encore problème en troisième / pourquoi / trois x plus sept / c'est trois fois x plus sept / trois fois x plus sept / sauf que moi je veux pas la valeur de trois x je veux la valeur de x / tout seul / et le problème / c'est que beaucoup d'entre vous avaient envie de m'enlever deux x comme ça j'aurais plus qu'un seul x / mais si j'enlève deux x / ça me ferait x égal sept moins deux x / est-ce que je retombe pas au début là quasiment ? / si / donc / rappelez-vous une chose / partez dans la vie de tous les jours / au lieu de dire x on va dire bonbons / si trois bonbons m'ont coûté sept euros / qu'est-ce que je vais faire Samuel pour connaître le prix d'un bonbon ?

Samuel : Diviser par trois

M2 : Je vais tout diviser par trois vous êtes bien d'accord / oui ou non ? / parce que là si vous me rajoutez des x m'enlevez des x m'ajoutez sept enlevez sept / le problème c'est que vous allez devoir faire la même chose dans l'autre membre (tout ceci reste encore oral, M2 n'écrit rien ou n'effectue pas les opérations dont il parle avec le logiciel) / donc vous n'arriverez jamais à la fin vous allez tourner en rond pendant des jours et des jours (M2 rappelle à l'ordre deux élèves) / donc trois x égal à sept / trois / bonbons / m'ont coûté sept euros je veux le prix d'un bonbon / donc je vais diviser par / trois (M2 s'exécute en manipulant le logiciel) / et quand vous avez trouvé la solution le logiciel vous met une petite pyramide pour vous dire c'est bien / t'as fini / x égal sept tiers / donc à part Youri qui a été cherché la solution dans un solveur sur Internet c'était quand même un peu dur de la trouver de base / mais c'est très bien pour ceux qui l'ont trouvée / ce qui veut dire que là (M2 regarde sa montre) / pendant les dix prochaines minutes qui restent vous me créez des équations celles que vous voulez et vous les résolvez toutes / si vous pouvez en résolver dix mille c'est bien / euh en résoudre dix mille pardon moi je sais pas parler français / c'est parti je fais le tour

43 min 38

Episode 11 : Recherche des élèves sur des équations générées aléatoirement par le logiciel

Les élèves résolvent des équations jusqu'à la fin de la séance. M2 continue de circuler parmi eux. Ils demandent à certains binômes de commencer à résoudre des équations sans utiliser le logiciel et de vérifier leur résolution ensuite avec le logiciel.

Fin de séance : 54 min 20

Transcription de la séance 3 de M2 sur les équations, découpage en épisodes

Episode 1 : Installation des élèves

0 min 41

Episode 2 : Dévolution du calcul mental 1

M2 : On va faire le bilan de tout ce qu'on a fait ce matin et faire des exercices pour voir si une fois qu'on n'a vraiment plus d'ordinateur on s'en sort ou pas donc encore une fois séance importante / maintenant on va faire du calcul mental donc vous aurez dix secondes dans dix secondes on corrigera donc / là j'aimerais beaucoup que tout le monde ait son cahier de sorti pour pouvoir écrire calcul mental on se dépêche / après il y aura une leçon à copier donc ce sera plus tranquille vous inquiétez pas // (M2 fait l'appel) alors / dix secondes / allez

Le premier calcul mental est le suivant :

Compléter l'égalité $3 \times ... + 26 = 35$ pour qu'elle soit vraie.

M2 : On l'a déjà fait / vite / vite vite [...] / ça on l'avait déjà fait il y a deux cours c'est très facile / trois fois quoi pus vingt-six égal trente-cinq

2 min 45

Episode 3 : Recherche des élèves sur le calcul mental 1

M2 ne circule pas dans les rangs et n'interagit pas avec les élèves. Il ne laisse que cinq secondes de recherche aux élèves.

2 min 50

Episode 4 : Correction du calcul mental 1 et dévolution du calcul mental 2

Un élève, Thomas, lève la main pour donner sa réponse.

M2 : Thomas ?

Thomas : Trois

M2 : Merci / trois fois trois neuf neuf plus vingt-six égal ?

Thomas : Trente-cinq

M2 : Je me suis permis d'interroger Thomas parce que tout le monde aurait dû avoir le temps / là je laisserai un peu plus de temps / je laisse encore une fois dix secondes / maintenant que vous êtes concentrés ça vous fait vraiment dix secondes

M2 affiche le calcul suivant :

Pour quelle valeur de la lettre n l'expression $3 \times (n + 1)$ est-elle égale à 15 ?

M2 (lisant l'énoncé) : Trois fois parenthèses n plus un est égal à quinze / combien vaut n ? / très facile / on l'a déjà fait c'est pour ça que je me permets d'aller plus vite

3 min 16

Episode 5 : Recherche des élèves sur le calcul mental 2

M2 ne circule pas dans les rangs et n'interagit pas avec les élèves.

3 min 31

Episode 6 : Correction du calcul mental 2

Une élève lève la main pour répondre.

L'élève : Moi monsieur je sais (M2 la montre du doigt pour lui donner la parole) / c'est quatre

M2 : Ben oui / quatre plus un cinq / trois fois cinq quinze / la personne qui m'a dit ne peut pas s'est trompée et a oublié les règles de priorité

Elève : (inaudible)

M2 : Non / les parenthèses étant prioritaires il fallait trouver quoi fois trois est égal à quinze / or je sais que trois fois cinq est égal à quinze donc comme ce qui est prioritaire c'est ça il fallait que j'aie cinq là / ben ouais mais quoi plus un fait cinq bah la réponse évidente est / quatre / quatre plus un ça fait cinq on est d'accord / on est d'accord

4 min 07

Episode 7 : Résolution collective d'une équation de deux manières différentes

M2 : On va reparler sur ce qu'on a fait ce matin / Gustave ce serait bien que tu prennes ton cahier pour copier le cours c'est important / hé / euh / tout doucement d'accord / on va reparler de ce qu'on a fait ce matin on va copier une leçon qui est assez longue mais je vais vous laisser du temps exprès / parce qu'on va beaucoup en discuter / beaucoup en discuter alors / (M2 reprend deux élèves qui discutent) / imaginons que je veux résoudre (M2 écrit au tableau l'équation : $2x + 8 = 5x + 3$) // quelle est la première chose à faire ? / Delila ?

Delila : On fait deux x moins cinq x

M2 : Alors / tu me dis qu'on / enlève quoi ? / qu'on isole quoi plutôt ?

Delila : Cinq x

M2 : Donc / je fais moins cinq x / on fait comme on veut / on en parlera après / on en parlera après / on en parlera après / (M2 écrit les ostensifs $-5x$ sous les deux termes en x de l'équation, en rouge, comme le fait le logiciel Thot utilisé le matin même) / si je me trompe pas il me reste moins trois x plus huit est égal à / euh / ben est égal à trois en fait (M2 écrit l'équation $-3x + 8 = 3$ au fur et à mesure qu'il parle) / et maintenant Delila je fais quoi après ? / maintenant Delila ? / hé / s'il vous plaît / s'il vous plaît / chut / chut / chut / Delila je continue quoi maintenant ? / on fait moins quoi ?

Des élèves : Moins huit

M2 : Delila / on me dit moins huit tu es d'accord ?

Delila : Oui je suis d'accord

M2 : Ok et pourquoi tu fais ça ? (Delila demeure silencieuse)

Un élève : Monsieur je peux le faire ?

M2 : Car on veut ? / on veut isoler ? / on veut isoler les termes en x d'un côté et les termes sans x de l'autre (M2 écrit les ostensifs -8 sous les deux termes constants)

Un élève : (inaudible)

M2 (répondant à l'élève) : Mais si tu vires moins trois x ils vont pas arriver ici ? (M2 montre le membre de droite de l'équation ; puis il écrit l'équation $-3x = 5$) / et maintenant tu fais quoi ? / hé

Un élève : Trois divisé par euh

M2 : Non / l'inverse

L'élève : Cinq divisé par trois

M2 : Par ?

L'élève : Par trois / trois divisé par

M2 : Je recommence / par ? (M2 montre le coefficient -3)

L'élève : Moins trois (M2 écrit les ostensifs $\div(-3)$ sous chaque membre de l'équation $-3x = 5$)

M2 : Moins trois x divisé par moins trois x / x est égal à / moins cinq sur moins trois c'est-à-dire cinq tiers (M2 écrit $x = \frac{5}{3}$)

Un élève : (inaudible)

M2 : Non on ne fait pas ça parce que / alors / j'ai déjà envie de vous dire une chose / ok / ok / Delila n'a peut-être pas choisi la méthode la plus simple parce qu'elle avait des chances de se tromper dans les signes mais / Delila ici a trouvé la bonne réponse donc / (M2 réécrit l'équation $2x + 8 = 5x + 3$ sur une partie vide du tableau) / l'essentiel est d'arriver à la bonne réponse (M2 donne la parole à Nadia qui a levé la main)

Nadia : On fait moins cinq x

M2 : C'est exactement ce qu'on vient de faire donc non / alors / certaines personnes partent du principe qu'il vaut mieux faire en sorte d'isoler en faisant disparaître le plus petit / d'accord / parce que c'est des calculs un peu moins compliqués

Nadia : Monsieur ?

M2 : Oui ?

Nadia : Euh je vous ai dit on fait moins cinq x vous m'avez dit non

M2 : Oui je t'ai dit non (M2 écrit les ostensifs $-2x$ sous chaque terme en x)

Nadia : Ben merci

Des élèves (à Nadia) : On l'a déjà fait

Nadia : Donc pourquoi ici vous enlevez deux ?

Un élève : Monsieur j'ai rien compris du tout

M2 : Nadia / tu es d'accord / non non mais Nadia / Nadia / regarde / est-ce que ici j'ai pas dit oui à Delila quand elle m'a demandé ? (M2 montre la résolution d'équation précédente) / et ben si parce que ça marchait / c'est juste que là on essaie une autre méthode

Nadia : Mais c'est le même calcul

M2 : Oui

Nadia : Pourquoi vous avez pas enlevé cinq x ?

M2 : Parce que j'enlève deux x

Nadia : Pourquoi ?

M2 : Parce qu'en enlevant cinq x je me retrouve avec des nombres négatifs / des termes en x négatifs / alors qu'en enlevant deux x je me retrouve avec des termes en x / positifs / et ça m'évite de faire des erreurs de signe

Nadia : Tout à l'heure elle elle a dit des chiffres à virgule et il fallait faire des trucs de ouf pour arriver à

M2 : Oui / oui parce que ça les transformait en fraction / les / le / Thot / voilà

Nadia : Mais pourquoi on fait pas les fractions là ?

M2 : Mais parce que / les frac / je suis pas arrivé sur un nombre à fraction ? / x égal cinq tiers ?

Nadia : Non je / je / j'ai oublié / je sais plus comment on fait

M2 : Et ben regarde / on le fait doucement

Nadia : Je comprends pas

M2 : Daouda ?

Daouda : J'ai rien compris

M2 : Oui c'est normal t'étais pas là ce matin t'as loupé le cours de ce chapitre / donc maintenant tu vas te galérer pour te rattraper mais on va réussir / ou pas / (M2 revient à sa résolution d'équation) et maintenant ? / maintenant ? (M2 poursuit seul la résolution ; s'ensuit une discussion avec Nadia qui ne comprend toujours pas pourquoi M2 montre une autre résolution ; puis M2 revient à la résolution : il cherche à résoudre $5 = 3x$) / et maintenant je fais quoi ? / j'ai trois baguettes de pain qui valent cinq euros / je veux le prix d'une baguette de pain

Des élèves : Cinq divisé par trois (M2 termine la résolution)

10 min 00

Episode 8 : Bilan de la résolution collective

M2 : Maintenant qu'on a revu ça on va réfléchir entre nous / hé / qu'est-ce que je peux faire / d'après les deux choses ici (M2 montre les deux résolutions d'équations) / à une équation ? / qu'est-ce que je peux faire pour modifier une équation ? / allez / qu'est-ce que je peux faire ? / Herman ?

Herman : Soustraire

M2 : Soustraire quoi ?

Herman : (inaudible)

M2 : Soustraire des nombres / à un seul membre ?

Herman : Non aux deux

M2 : D'accord / je peux soustraire / des nombres aux deux membres / autre chose ?

Un élève : Multiplier

M2 : On peut multiplier quoi ? / un membre ou les deux ?

L'élève : Les deux

M2 : On peut multiplier aussi / les deux membres / mais à chaque fois je les multiplie par la même chose / c'est-à-dire est-ce que j'ai le droit d'additionner / dans un membre / et de soustraire dans l'autre ?

Des élèves : Non

M2 : Hors de question / quand je fais quelque chose / je fais dans / les deux membres / Shiran ?

Shiran : On peut aussi diviser

M2 : On peut aussi diviser / Djibril ?

Djibril : On peut additionner

M2 : Ouais mais autre que l'addition y a la ?

Elèves : Soustraction

M2 : Et ben on peut soustraire et additionner / très bien / on peut multiplier aussi très bien / très très bien

Elève : (inaudible)

M2 : Exactement / si vous / si vous multipliez d'un côté vous multipliez de l'autre c'est important c'est-à-dire si jamais je touche au membre de gauche mais que je ne touche pas au membre de droite ce n'est pas la même chose et je vais vous le prouver tout de suite / imaginons qu'ici / j'ai décidé tout simplement de (M2 plaque sa main sur le tableau pour cacher le +3 de l'équation $2x + 8 = 5x + 3$) / d'enlever le 3 / je n'aurais pas eu le trois ici (M2 montre le 3 du membre de droite de l'équation équivalente $-3x + 8 = 3$) / donc j'aurais eu le moins huit tout seul / ç'aurait fait moins trois x égal moins huit / solution huit tiers / huit tiers c'est la même chose que cinq tiers ? / donc est-ce que ça aurait été la même équation ?

Un élève : Non

M2 : Non parce que / regardez / quand je résous l'équation qui est là (M2 montre l'équation initiale $2x + 8 = 5x + 3$) / ça va me donner cinq tiers / quand je résous l'équation ici (M2 montre l'équation équivalente $-3x + 8 = 3$) / ça va me donner aussi cinq tiers / quand je résous cette équation (M2 montre l'équation équivalente $-3x = -5$) c'est aussi cinq tiers / donc tout ça (M2 montre les trois équations) / c'est la même équation c'est juste que je l'écris différemment j'ai le droit de l'écrire différemment si je respecte les règles qu'on vient de voir / ces règles que nous allons écrire dans le cahier d'exercices

Elève : (inaudible)

M2 : Oui mais le but étant d'isoler les termes en x d'un côté et les termes sans x de l'autre

Elève : Ah d'accord / donc on choisit au hasard

M2 : Oui

12 min 23

Episode 9 : Institutionnalisation et trace écrite dans le cahier de leçons

M2 : Tifany au lieu de te marrer avec ta voisine une idée de titre ?

Un autre élève : Comment résoudre une équation ?

M2 : Merci / résoudre une équation (M2 vidéoprojette le début de la leçon du jour, déjà écrite sur son ordinateur et que les élèves doivent copier) / hé / alors [...]

Le début de la leçon est le suivant :

II. Comment résoudre une équation ?

Pour résoudre une équation, on utilise les propriétés de conservation de l'égalité ci-dessous :

Propriétés

(P1) On ne change pas les solutions d'une équation si on ajoute ou si on soustrait le même nombre à chaque membre de l'équation

(P2) On ne change pas les solutions d'une équation si on multiplie ou si on divise par le même nombre non nul chaque membre de l'équation

M2 : Vous avez cinq minutes / je suis sûr que c'est le grand deux / vu que le grand un c'était qu'est-ce qu'une équation // si vous ne m'avez pas copié ces cinq lignes en trois minutes tant pis pour vous je descends / j'ai une deuxième diapo à faire en plus / donc vous allez bien m'écouter parce que j'ai autre chose à faire [...] / ici / ici (M2 montre le début de la leçon et la lit à voix haute) / pour résoudre une équation on utilise les propriétés de conservation de l'égalité ci-dessous ça veut dire quoi ? / propriétés de conservation de l'égalité / ça veut dire que ça va conserver notre égalité notre équation ça veut dire que ça va rester la même équation et que même si je change l'écriture dedans c'est la mê c'est le même problème que je suis en train de résoudre et donc j'ai mis un petit P un et petit P deux P un pour propriété une et P deux pour propriété deux / vous me mettez le P un et le P deux parce que ça va nous servir de raccourci dans des feuilles d'exercices plutôt que d'écrire tout ça [...] / on ne change pas les solutions d'une équation si on ajoute ou si on soustrait le même nombre à chaque membre de l'équation / c'est ce qu'on a dit / si je fais une addition ou une soustraction dans les deux membres de mon équation je ne change pas en fait l'équation ça reste une équation équivalente / c'est-à-dire une équation qui me donnera la même solution / de la même façon on ne change pas les solutions d'une équation si on multiplie ou si on divise par le même nombre non nul chaque / chaque / membre de l'équation / pourquoi nombre non nul ? parce que je vous rappelle qu'on ne peut pas diviser par zéro

16 min 39

Episode 10 : Les élèves copient le début de la leçon

Pendant que les élèves recopient la leçon, M2 répond à quelques élèves qui lui posent des questions sur la résolution de l'équation précédente $2x + 8 = 5x + 3$

18 min 39

Episode 11 : Suite de l'institutionnalisation et de la trace écrite dans le cahier de leçons

M2 : Donc je vous ai laissé écrire la propriété deux maintenant vous pouvez copier la méthode (M2 fait défiler l'écran de son ordinateur pour afficher la suite de la leçon) / allez [...]

La suite de la leçon est la suivante :

Méthode

Pour résoudre une équation :

1. On regarde la forme de l'équation : la place de l'inconnue, les parenthèses s'il y en a, et les opérations
2. On utilise les propriétés P1 et P2 pour isoler l'inconnue, en faisant attention aux priorités opératoires

M2 : Méthode / pour résoudre une équation / Herman je suis en train de parler / donc pour résoudre une équation on regarde sa forme / s'il y a des parenthèses / où est-ce qu'est l'inconnue / quelle est la lettre qui représente l'inconnue et / les opérations / toutes les opérations / c'est-à-dire y a-t-il des multiplications / des divisions / *et caetera* / puis après / j'utilise les propriétés une et deux / qu'on a écrites juste au-dessus / pour / pour quoi ? / pour isoler le terme / le terme en x par exemple ou le terme en a le terme en b d'un côté / et le terme / du coup / avec des nombres / de l'autre côté / le terme sans x

M2 laisse les élèves copier. Il ne circule pas dans les rangs pour vérifier que la leçon est bien copiée.

M2 : Bon c'est terminé [...]

25 min 22

Episode 12 : Suite et fin de l'institutionnalisation

M2 vidéoprojette le contenu suivant :

Exemple : Résoudre l'équation $6x - 2 = 3x + 8$

Equation	Transformation	Propriétés utilisée	Objectif
$6x - 2 = 3x + 8$			
$3x - 2 = 8$	On soustrait $3x$ à chaque membre	(P1)	On « élimine » les termes en x dans le membre de droite
$3x = 10$	On ajoute 2 à chaque membre	(P1)	On « isole » les termes en x dans le membre de gauche
$x = \frac{10}{3}$	On divise chaque membre par 3	(P2)	On « isole » l'inconnue

Toutes les équations du tableau ci-dessus sont équivalentes, c'est-à-dire qu'elles ont les mêmes solutions.

M2 : Avant de copier vous m'écoutez / ça veut dire on se tait maintenant // non c'est toi que je regarde Daouda parce que tout le monde se tait sauf toi / euh / ça là (M2 montre le tableau) je vous demanderai pas de le faire / c'est juste qu'on va faire après des exercices là-dessus / exercices pour passer progressivement de la résolution ordinateur à une résolution manuelle où il n'y aura que nous et pour que vous compreniez bien ce que vous faites / pour que ça ne soit pas du hasard / j'ai donc une équation qui s'appelle / qui est six x moins deux égal trois x plus huit on est bien d'accord / donc je l'écris (M2 va montrer successivement les cases du tableau au fur et à mesure de ses explications) / là je ne fais rien donc je n'ai pas transformé je n'ai pas utilisé de propriété il n'y avait pas d'objectif / c'est pour ça que c'est gris / ensuite / l'équation maintenant elle est devenue trois x moins deux égal huit / qu'est-ce que j'ai bien pu faire ? / Marianne ?

Marianne : (inaudible)

M2 : Et ben oui / on soustrait trois x à chaque membre / c'est la transformation que j'ai utilisée / c'est quelle propriété ça ? / celle qui dit que je peux multiplier diviser ou celle qui dit que je peux additionner soustraire ?

Elève : Additionner soustraire

M2 : Additionner soustraire donc la une / et quel était l'objectif ? / d'éliminer les termes en x dans le dans le membre de droite / donc j'explique tout ce que je fais / ensuite trois x égal dix qu'est-ce que j'ai transformé

Marianne : On a ajouté deux à chaque fois

M2 : On a ajouté deux / moins deux plus deux / zéro / huit plus deux / dix / c'est toujours la propriété P un et c'est toujours / mon objectif d'isoler le terme en x d'accord ? / et après quand j'ai trois baguettes de pain qui valent dix euros combien vaut une baguette de pain il faut diviser par trois pour le savoir / x égal dix tiers on a divisé par trois / propriété deux / on a isolé l'inconnue / vous me copiez ce tableau vous avez (M2 regarde sa montre) sept minutes / dans sept minutes je corrige les exercices

Elève : (inaudible)

M2 : Ca c'est l'exemple du cours / l'exemple type qu'il faut connaître pour se préparer au contrôle [...]

27 min 44

Episode 13 : Les élèves copient la leçon

M2 ne circule pas pour vérifier que les élèves copient. Il discute avec certains élèves sur des sujets non mathématiques.

37 min 54

Episode 14 : Correction des exercices qu'il y avait à faire pour cette séance

M2 : Dans les exercices que vous aviez à faire pour aujourd'hui // et dans ceux-là il y avait les exercices trois et quatre / alors / les exercices un deux trois et quatre donc on les a faits vu qu'il y en a deux qu'on a corrigés et deux que vous aviez à faire / avez-vous pu identifier un type d'exercices ? / avez-vous pu identifier quelle était la consigne de tous ces exercices ? / alors ?

Samuel : Trouver une solution

M2 : Trouver une solution / mais qu'est-ce que moi je vous ai demandé de faire surtout ?

Elève : Tester les programmes

M2 : Non / écrire les programmes sous forme ?

Elève : D'équations

M2 : D'équations / donc en fait qu'est-ce que je vous ai demandé de faire c'est juste d'écrire des ?

Elève : Equations

M2 : Ecrire des équations mais / y avait pas une petite différence entre les exercices trois et quatre en termes d'écriture ? / est-ce qu'il y avait des p... (M2 se retient probablement de dire « parenthèses » ; voyant que les élèves sont dissipés, il interrompt ses explications et dit :) bon allez on le corrige / de toute façon c'était prévu / exercice trois / hé / hé / choisir un nombre / je choisis quel nombre ?

Elève : Cinq

M2 : Non vu que je dois écrire ça sous la forme d'une expression littérale / allez x / et je dois le multiplier par / six / et je dois additionner / quatre / merci à tous ceux qui ont fait leurs exercices c'est rassurant / programme B je dois choisir un nombre le multiplier par dix (M2 ne finit pas sa phrase ; il écrit l'équation $x \times 6 + 4 = x \times 10 - 3$ sans interroger d'élève, visiblement pressé par le temps) / exercice quatre

Un élève : r monsieur / r fois trois / plus cinq / égal / r moins six / fois deux

Un autre élève : Entre parenthèses

M2 : (qui a écrit l'équation au fur et à mesure au tableau) Merci / alors y a pas une différence d'écriture là ? (M2 montre les parenthèses)

Elève : Si / il y a les parenthèses parce qu'on multiplie par

M2 : Ouais / est-ce que faut pas faire attention quand y a des parenthèses ?

Des élèves : Oui

M2 : Est-ce que ça change pas un petit peu ?

Des élèves : Oui

39 min 50

Episode 15 : Institutionnalisation du geste d'étude « identification d'un type de tâches »

M2 : Donc / vous me prenez hé / vous me prenez la feuille / la feuille où il y a écrit le nom de l'exercice / le type d'exercices / *et caetera* / je vous la remontre pour qu'on soit clair de quelle feuille on parle

Un élève : (inaudible, mais dit avoir perdu sa feuille)

M2 : Et ben voilà / après on me dit elle sert à rien mais c'est sûr si on la perd [...] / et ben pour ceux qui l'ont je pense que ça pourra vous aider mais au pire tant pis / euh / après s'il y en a qui ont pas envie d'apprendre leurs leçons et tout je peux rien pour eux / euh / il reste deux minutes avant que ça sonne donc moi je m'arrête jusqu'à ce que j'ai le silence (M2 vidéoprojette la fiche méthodologique dont il est en train de parler et attend le silence) // donc on a dit que les exercices un et trois c'étaient les mêmes et les exercices deux et quatre c'était un autre type donc on va commencer par mettre un et trois de la F un si je mets F un vous comprenez feuille une (M2 complète la première colonne de la fiche en écrivant « 1 et 3 de la F1 ») / donc on va commencer par ces deux exercices / ces deux exercices / exercices un et trois de la feuille une le type d'exercices on a dit qu'il fallait quoi ? / non / qu'il fallait créer une équation / écrire une équation / formuler une équation ça fait un peu bizarre / mais c'est pas mal / écrire une équation / sans parenthèse (M2 complète la deuxième colonne par « Ecrire une équation sans parenthèses ») / oui parce qu'il y avait pas de parenthèses dans ces équations / propriété ou méthode du cours à utiliser ? / pour écrire ça c'est le grand un du cours / donc on va mettre grand un du chapitre / est-ce que je parle du chapitre sur les triangles ? / ben non je vais le préciser chapitre sur les équations (M2 écrit dans la troisième colonne : « I. du chapitre sur les équations ») [...] / où trouver des exercices du même type ? / vous écrivez feuille une (M2 écrit « F1 » dans la quatrième et dernière colonne de son tableau) et sans doute qu'il y en aura d'autres donc vous allez laisser un peu de place // donc exercices deux et quatre (M2 commence une nouvelle ligne dans son tableau et écrit dans la première colonne « 2 et 4 de la F1 ») / écrire une équation / c'est quoi cette fois la différence ?

Un élève : Avec des parenthèses

M2 : Merci (M2 écrit dans la deuxième colonne « Ecrire une équation avec des parenthèses ») / tous ceux qui parlent c'est qu'ils travaillent pas donc c'est qu'ils sortiront encore après le dernier / écrire une équation avec parenthèses / encore une fois la méthode c'est le grand un (M2 écrit « I. du chapitre sur les équations » dans la troisième colonne) / du chapitre / deux pionts / équations / et encore une fois où est-ce que je peux en trouver d'autres ? / sur la feuille une mais sans doute que dans le manuel on en verra plus tard / alors

M2 a rempli le tableau pratiquement tout seul, sans les élèves.

Episode 16 : Devoirs pour la séance suivante

M2 : (regarde sa montre) Je ne comptais pas vous donner des exercices pour lundi / euh / vu la fin du cours j'ai changé d'avis / je comptais pas vous en laisser pour bien que vous puissiez revoir la leçon pour comprendre et prendre juste du temps là-dessus parce que je sais que quand je vous donne plusieurs choses vu que vous êtes super courageux comme enfants donc tant pis pour vous je vous conseille de revoir le cours ça vous aidera à bien comprendre pour bien comprendre ce qu'on va faire dès lundi / mais vous me finissez / la feuille numéro une (M2 écrit au tableau : « Finir la feuille 1 ») / pour lundi

44 min 27

Transcription de la séance 4 de M2 sur les équations, découpage en épisodes

Episode 1 : Installation des élèves

Les élèves s'installent. M2 vidéoprojette les exercices de la feuille 1 et écrit au tableau « Exercice 5 F1 ». L'exercice 5 en question est le suivant :

Rédige un problème avec deux programmes de calcul qui correspond à l'équation $2 \times x + 7 = 5 - 3 \times x$.

M2 ne circule pas parmi les élèves pour vérifier que le travail à la maison a été fait.

2 min 11

Episode 2 : Correction de l'exercice 5 feuille 1

M2 : Je commence la correction des exercices / finir la feuille 1 / il nous en restait trois on est parti [...] / (M2 lit l'énoncé) exercice cinq rédige un problème avec deux programmes de calcul qui correspond à l'équation [...] / allez / allez / personne n'a fait ? / le conseil de classe c'est dans une semaine félicitations / oui ? (interrogeant Alessio, un élève)

Alessio : Cchoisir un nombre

M2 : Très bien (M2 écrit « Programme A » puis en-dessous « Choisir un nombre ») [...] / choisir un nombre oui ?

Alessio : Le multiplier par x

M2 : (lève les bras avec dépit) Alessio il représente quoi x ici ? (M2 montre le x du membre de gauche de l'équation)

Samuel : N'importe quel nombre

Alessio : Un nombre

M2 : (revient au tableau et montre « Choisir un nombre ») Un nombre / qu'est-ce que tu fais avec ce nombre Alessio ? (M2 montre le $2\times$ du membre de gauche de l'équation)

Alessio : Je le multiplie

M2 : Par ?

Alessio : Par deux (M2 écrit « Le multiplier par 2 ») / et lui ajouter sept (M2 lève son pouce et écrit « Lui ajouter sept ». Puis il écrit « Programme B » sur une autre partie du tableau.)

M2 : Programme B / sors tes affaires Samuel / Manon ?

Manon : Choisir un nombre // le multiplier par trois (M2 écrit les instructions du programme au fur et à mesure) // euh soustraire cinq (M2 fait une grimace) / soustraire le résultat par cinq (Mé fait une nouvelle grimace)

M2 : Par cinq ? / par cinq ça voudrait dire trois fois x moins cinq

Delila : Le multiplier par trois

M2 : On vient de le faire

Un élève : Ah / euh / soustraire moins cinq (M2 grimace)

M2 : Youri / soustraire / à / cinq / c'est pas un peu différent de soustraire par cinq ? (M2 écrit « Soustraire à 5 le résultat ») / une autre façon ici / mais on l'aurait fait en deux étapes / est-ce que quelqu'un l'a ? / chut / euh / si j'ai trois x / et que j'obtiens moins trois x / qu'est-ce que c'est trois x et moins trois x ? / qu'est-ce que trois et moins trois ? / trois et moins trois allez / vous savez il y a deux moins deux un moins un trois moins trois (M2 fait des gestes de balancier avec ses mains) / trois virgule cinq moins trois virgule cinq / on l'a vu dans le chapitre sur les nombres relatifs / quand je change le signe et que je ne change pas la distance à zéro ? / l'o... ?

Un élève : L'opposé

M2 : L'opposé / et ben on aurait pu prendre l'opposé du résultat et / euh / cinq c'est positif ou négatif ?

Elève : Positif

M2 : Et ajouter cinq / parce que faire moins trois x plus cinq ou cinq moins trois x c'est ?

Elève : La même chose

M2 : La même chose / euh / du coup rapidement quand j'ai mon équation ici (M2 montre l'équation $2 \times x + 7 = 5 - 3 \times x$) qu'est-ce que je peux faire avec une équation ?

Elève : La résoudre

M2 : La ?

Elève : La résoudre

M2 : La résoudre oui / quand je la résous je trouve quoi ?

Elève : La solution

M2 : La solution / très bien / alors / euh

6 min 23

Episode 3 : Correction de l'exercice 6 de la feuille 1

M2 : Maintenant pour l'exercice numéro six

L'énoncé de l'exercice 6 est le suivant :

Rédige un problème avec deux programmes de calcul qui correspond à l'équation $5 \times x - 9 = 4 + 8 \times x$.

M2 : (écrit au tableau « Ex 6 » puis « Programme A » et regarde sa montre) Alors ? / pareil / rédigez-moi un programme / Ryan ?

Ryan : Choisir un nombre / le multiplier par cinq

M2 : Le multiplier par ?

Ryan : Le multiplier par cinq

M2 : Le multiplier par cinq

Ryan : (inaudible)

M2 : Soustraire neuf au résultat ça te va pas plutôt ? / ou juste soustraire neuf / tous ceux qui sont en train de parler parce qu'il est huit heures du mat qu'ils sont encore dans leur lit et ne prennent pas la correction je vais faire un tour si je vois pas tout ça parce que ça prend trente secondes ça va pas le faire / donc j'espère que votre carnet sera sorti parce qu'il y a des chances que je le prenne / et que je vous montre que pour écrire ça il faut trente secondes / le programme B (M2 écrit « Programme B ») / allez / allez / allez / (à un élève, Shiran) ouais

Shiran : (inaudible)

M2 : Oui (M2 écrit « Choisir un nombre »)

Shiran : (inaudible)

M2 : T'es sûr qu'on commence par ajouter ?

Shiran : (inaudible)

M2 : (après avoir levé les bras de dépit, M2 écrit « Le multiplier par 8 » puis « Ajouter 4 ») Merci / à ne pas écouter vous avez loupé quelque chose de très important / Shiran a commencé par / il m'a dit choisir un nombre et lui ajouter quatre / qu'est-ce qu'il se passe s'il fait ça ? / si je choisis un nombre que j'ajoute quatre / qu'est-ce qu'il se passe si on fait ça ? / hein ?

Un élève : (inaudible)

M2 : Oui ce n'est plus les mêmes règles de priorité / très très bien / imaginons que dans le premier / ce qu'on a appelé programme A / j'aie mis des parenthèses ici

(M2 montre le premier membre de l'équation $5 \times x - 9 = 4 + 8 \times x$, plus précisément la partie $x - 9$) / j'aie mis cinq fois parenthèses x moins neuf / est-ce que j'aurais écrit le même problème ?

Elève : Non

M2 : Qu'est-ce qui aurait été prioritaire cette fois ? / cinq fois parenthèses x plus neuf / qu'est-ce qui aurait été prioritaire cette fois Kévin ?

Kévin : (inaudible)

M2 : La soustraction / très bien [...]

9 min 15

Episode 4 : Correction de l'exercice 7 de la feuille 1

M2 : Correction de l'exercice sept / et du coup j'efface l'exercice six

Elève : Non non non

M2 : Et ben t'as dix secondes / exercice sept

L'exercice 7 est le suivant :

(a) Voici une équation : $5 + 3a = -2a$

Le nombre 6 est-il solution de cette équation ? Et le nombre (-1) ?

(b) Voici une équation : $6m + 1 = 2(1 + m)$

Le nombre (-2) est-il solution de cette équation ? Et le nombre $0,25$?

M2 : Voici une équation cinq plus trois a égal moins deux a / le nombre six est-il solution de cette équation ? / et le nombre moins un ? / allez / allez // (M2 va au tableau et écrit « Ex 7 ») euh vous voyez bien au fait le tableau ?

Elèves : Oui

M2 : Ben pour ceux qui voient pas je suis entièrement désolé les seules lumières qui marchent dans cette salle sont allumées

Elève : C'est la crise monsieur

M2 : Ouais c'est la crise / alors le nombre six est-il solution de cette équation ? / (à Delila, qui lève la main) oui ?

Delila : Euh on fait / cinq plus trois

M2 : Oui

Delila : Parenthèse moins un

M2 : Moi j'ai dit le nombre six est-il solution / toi tu fais moins un ou six ?

Delila : Moins un

M2 : Toi tu fais moins un très bien / donc / tiens justement pour pas se tromper pour savoir / quel nombre je teste / je peux pas dire quelque chose avant ? / une petite phrase qui m'expliquerait ça ?

Delila : Euh moins un est solution

M2 : Ah ça j'en sais rien / regarde Delila / tu dis pour a égal moins un (M2 écrit « Pour $a = -1$ ») ou quelque chose comme ça pour dire que toi tu décides d'associer à a la valeur moins un d'accord ? / parce que est-ce qu'on est sûr que a vaut moins un ?

Delila : Non

M2 : Donc vas-y / cinq plus trois fois moins un tu m'as dit / ça fait combien ? / chut / chut / chut / Delila ? / tu commences par l'addition ou par la multiplication ?

Delila : La multiplication

M2 : Trois fois moins un ? / trois fois un ?

Delila : Trois

M2 : Trois fois moins un ?

Delila : Moins / moins trois

M2 : Cinq plus moins trois ?

Delila : Huit

M2 : (claque la langue de manière désapprobatrice)

Delila : Moins huit

M2 : T'as cinq euros / t'en perds trois

Delila : Moins deux

M2 : (grimace) Moins deux ?

Delila : Deux

M2 : Deux / plus cinq plus moins trois tu prends les distances à zéro / cinq moins trois / d'accord / ça fait deux / et tu gardes le signe de celui qui a la plus grande distance à zéro / donc ça fait plus deux / d'accord ? / euh / très bien / et il faut que je fasse quoi pour être sûr ?

Delila : (inaudible)

M2 : Non / je sais pas j'ai fait un membre de l'équation / chut / chut / faut faire le ?

Delila : L'autre

M2 : (M2 écrit au tableau $-2 \times (-1)$ sans attendre la réponse de Delila) Deux fois un ?

Delila : Deux

M2 : Moins deux fois moins un ? / rappelle-toi quand je multiplie deux nombres négatifs j'obtiens un nombre ?

Delila : Positif

M2 : Plus deux / alors ? (M2 montre les deux 2 obtenus suite aux calculs précédents)

Delila : Moins un est une solution de l'équation

M2 : Très bien (M2 écrit : « Comme $2 = 2$, (-1) est une solution de l'équation ») // hé les quatre trois / non mais s'il y a un problème si je vous embête vous me le dites tout de suite / depuis tout à l'heure il y en a trois ou quatre qui bossent tous les autres ils font que ça là (M2 mime avec sa main une bouche qui parle) / non mais ça va être dur de bosser dans la bonne humeur si on continue non ? / ça serait peut-être bien de suivre / il y a des chances que le dernier contrôle de l'année ce soit sur les équations / que vos moyennes soient pas vraiment hautes / alors vous allez vous bouger / s'il faut que je le compte coefficient deux ce contrôle y a pas de problème / il sera dur exprès / maintenant faut tester pour a égal six (M2 écrit « Pour $a = 6$ ») // on est sûr que c'est la seule solution ? on sait combien de solutions il y a ?

Elève : Non

M2 : Alors du coup on va faire pour a égal six / si on était sûr qu'il y en avait une est-ce que ça servirait de / euh / de faire pour a égal six ?

Elève : Non

M2 : Ben non parce que si j'étais sûr qu'il y en avait une je viens de la trouver très bien / du coup je vais me dépêcher puisque ça n'intéresse personne / ça fait dix-huit plus cinq ça fait vingt-trois (M2 écrit sans attendre de réponse d'un élève : $5 + 3 \times 6 = 23$) / ensuite moins deux fois six tiens moins deux fois six / moins douze / et moins vingt-trois égal moins douze non ? / pardon vingt-trois égal moins douze / Shiran ?

Shiran : Non

M2 : Je suis bien d'accord avec toi / donc six est solution

Shiran : Non

M2 : Merci (M2 écrit : « Comme $23 \neq -12$), 6 n'est pas solution de l'équation. »

Ryan : Monsieur (inaudible)

M2 : Hein ? / ici là ? (M2 montre le premier calcul) / combien vaut a ? / combien vaut a ?

Ryan : Moins un

M2 : Alors pourquoi t'as toujours un a au résultat

Ryan : (inaudible)

M2 : Quoi ? ici ? mais moins deux fois moins un / ça fait deux / ça fait pas deux a

Ryan : (inaudible)

M2 : Là ? là ? / mais c'est une équation Ryan

Ryan : Oui

M2 : Ma question c'est que pour six / est-ce que pour moins un / cinq a plus trois a égal à moins deux a

Ryan : (inaudible)

M2 : Mais / Ryan lève-toi (M2 lui fait signe de venir au tableau) / bouge-toi / tu vas me regarder dans le pour a égal un où est-ce qu'est le moins deux a / vas-y au résultat

Ryan : (inaudible)

M2 : Non non

Ryan : (Ryan montre le $(-2) \times (-1)$) ben il est là

M2 : Ben ouais mais ça vaut combien ça quand a égal moins un ?

Ryan : Ca fait deux

M2 : Ouais et au-dessus ?

Ryan : Ah on a résolu

M2 : Hé on a fait ce qu'on fait depuis un moment / on a juste remplacé une lettre par une valeur / ok ? / pas réveillé ? / je comprends (Ryan regagne sa place) / hé / euh clairement / le b sera au contrôle / le b sera au contrôle / et je le corrige pas

16 min 11

Episode 5 : Dévolution du type de tâches « Résoudre une équation »

M2 : Maintenant je vous distribue une feuille d'exercices qui s'inspire directement de la leçon qu'on a écrit vendredi dernier / vous savez où on remplissait un tableau avec une équation les transformations les propriétés utilisées et les objectifs / vous me faites l'exercice un c'est-à-dire les deux premiers tableaux / faites bien attention / aux équations (M2 distribue les feuilles d'exercices) / et donc une chose / je vous rappelle que la propriété une c'est quand on utilisait l'addition et la soustraction quand on transformait mon équation et la propriété deux c'est quand on utilisait la multiplication et la / division / très bien / donc dès que je vous donne ça vous vous dépêché / vous avez cinq minutes pour faire le premier tableau / et si en sept minutes vous pouviez avoir fait les deux ce serait parfait // je vous conseille de coller la feuille

L'énoncé de l'exercice 1 de la feuille 2 est le suivant :

Complète les tableaux ci-dessous :

Equation	Transformation	Propriété utilisée	Objectif
$2a + 2 = 4 \times (a + 2)$			
$2a + 2 = 4a + 8$		Distributivité simple	On transforme l'équation en une équation sans parenthèses
$-2a + 2 = 8$	On soustrait $4a$ à chaque membre		On « élimine » les termes en a dans le membre de droite
$-2a = 6$		Conservation de l'égalité (P1)	
$a = -3$			

Conclusion : La solution de l'équation $2a + 2 = 4(a + 2)$ est :
Vérification :

17 min 31

Episode 6 : Recherche des élèves sur l'exercice 1 de la feuille 2 (résoudre algébriquement une équation) et poursuite de la dévolution (ou bien début de la correction...)

Durant la recherche, M2 vidéoprojette l'énoncé de l'exercice 1. Ensuite, il se rend auprès d'élèves qui le sollicitent à propos de cet exercice pour leur fournir des indications. À un moment, il dit à toute la classe :

M2 : Si vous n'arrivez pas je vous rappelle que la bonne idée est de regarder dans son cahier de leçons puisque clairement ça c'est en lien avec le grand deux du cahier de leçons où on a fait exactement le même tableau / exactement / juste l'équation qui change / allez / allez allez / si j'ai pas laissé beaucoup de place parce que les tableaux sont petits c'est justement pour vous dire qu'il n'y a pas grand-chose à écrire / le but c'est juste de bien comprendre ce qu'on est en train de faire

/ qu'est-ce qu'on fait ? pourquoi on le fait ? pourquoi je peux utiliser cette règle ?

20 min 50

Episode 7 : Correction de l'exercice 1 feuille 2

Un élève demande à M2 s'il faut résoudre l'équation. M2 répond à cet élève mais en restant au tableau, suffisamment fort pour que toute classe entende, ce qui constitue en réalité le début de la correction de l'exercice :

M2 : Là j'ai l'équation d'accord ? (M2 montre l'équation à résoudre) / t'es d'accord ? / elle est résolue ou pas cette équation ?

Elève : (inaudible)

M2 : (montre la première colonne) Donc elle est résolue / donc est-ce que tu dois la résoudre ?

L'élève : Non

M2 : Non / par contre tu dois m'expliquer quelle transformation j'ai utilisée par exemple pour passer de ça / de cette équation à celle-ci / qu'est-ce qui a changé qu'est-ce que j'ai fait ? / et tu as des exemples / oui Alessio ?

Alessio : On a supprimé la parenthèse

M2 : On a supprimé la parenthèse et comment on a fait ? (M2 écrit dans la première case vide du tableau : « Supprimé les parenthèses »

Alessio : (inaudible)

M2 : Oui mais en multipliant quoi avec quoi ? / Alessio ? (M2 montre la case « Distributivité simple »)

Alessio : La distributivité simple

M2 : Oui du coup on a fait quatre fois / et ce qu'il y avait dans la parenthèse très bien / hé / chut / chut chut / donc là Alessio tout simplement tu me disais ben on a multiplié quatre avec a plus deux / d'accord ? / ça sert à rien de me dire avec / euh / ok faut pas t'embrouiller l'opération c'est quatre fois a plus deux / d'accord ? / donc on a utilisé la distributivité simple (M2 montre la troisième colonne) et l'objectif c'était de transformer l'équation en une équation sans parenthèses (M2 montre la quatrième colonne) / pourquoi ? / pourquoi est-ce que la première chose a été de supprimer les parenthèses ? / pourquoi ?

Elève : (inaudible)

M2 : Est-ce que dans les équations que vous avez résolues dans le logiciel grâce au logiciel vendredi et celles qu'on a fait vendredi après-midi ensemble est-ce qu'une seule fois il y a eu des parenthèses ?

Plusieurs élèves : Non

M2 : Non / c'est bien normal / je pense que si jamais vous ne supprimiez pas les parenthèses ça pourrait pas être un peu compliqué après pour utiliser mes propriétés d'addition de soustraction de division de multiplication ? / parce que qu'est-ce qui est prioritaire ici ?

Un élève : Ben euh les parenthèses

M2 : Donc peu importe ce que vous rajoutez comme opérations qu'est-ce qui sera toujours prioritaire ?

Des élèves : Les parenthèses

M2 : Et ben tant que vous supprimez pas ça tout ce que vous faites après ça ne pourra pas être prioritaire / donc forcément même si vous rajoutiez dix mille additions dix mille soustractions dix mille divisions ce qui sera toujours prioritaire ce sera toujours les parenthèses / ensuite si on regarde / je passe de deux a plus deux égal quatre a plus huit à moins deux a plus deux égal huit / Ryan j'ai fait quoi ?

Un élève (qui n'est pas Ryan) : (inaudible)

M2 : Hein ? / c'est marrant tu savais faire ça il y a une semaine quand on a fait la double distributivité / parce que quatre fois a plus quatre fois deux (M2 mime la distributivité avec son doigt sur l'expression $4 \times (a + 2)$) / le principe du facteur qui distribue à tout le monde / euh / donc je vous dis que là on a soustrait quatre a à chaque membre / alors / hé / soustraire quatre a à chaque membre c'est quelle propriété ?

Un élève : La une

M2 : Oui c'est / et c'est bien pour ça que je vous avais dit de mettre ça c'est P un (M2 écrit « P1 » dans la case correspondante) / voilà comme ça ça m'évite d'écrire / que lorsqu'on additionne ou qu'on soustrait les deux membres de l'équation par le même nombre on conserve l'égalité / que mon équation se transforme en une équation équivalente c'est-à-dire qui va me donner la même solution / euh / et qu'est-ce que j'ai fait pour passer / de moins deux a plus huit égal deux à moins deux a égal six ?

Un élève : On soustrait

M2 : On soustrait quoi ?

Elève : Moins deux / moins deux a

M2 : On soustrait moins deux ?

Elève : Deux / deux deux

M2 : On soustrait deux oui (M2 écrit « Soustrait 2 » dans la case correspondante)

/ parce que soustraire moins deux c'est additionner deux / et soustraitre moins deux a c'est additionner deux a / et quel était l'objectif ? / hé / c'était quoi l'objectif ?

Elève : (inaudible)

M2 : (fait la grimace) ouais / éliminer pour ?

Un autre élève : Isoler l'inconnue

M2 : Isoler / isoler / isoler / l'inconnue / ouais ça marche allez (M2 écrit « Isoler l'inconnu ») / dernière étape allez / William ?

William : On divise

M2 : On divise pourquoi ? / on divise par combien pardon ?

Un élève : Par trois

M2 : Y a qu'un seul William / pourquoi on fait ça ? / quelle propriété on utilise ?

William : La deux

M2 : (écrit « P2 » dans la case correspondante) Et pourquoi ?

Des élèves : C'est par moins deux qu'on divise

M2 : Ah ben je sais pas on me dit trois moi (M2 corrige) / pourquoi on fait ça ?

William : Euh / pour trouver le résultat ?

M2 : Ouais / ça marche

Des élèves : Pour trouver la solution

M2 : (écrit « Pour trouver la solution » dans la case correspondante) / conclusion / euh / hé / à votre avis si je l'ai mise c'est important la conclusion ?

Elève : Ouais

M2 : Sans conclusion c'est comme lorsque vous / me trouvez les solutions d'un problème et qu'il se passe rien ça sert à rien (M2 regarde sa montre) / conclusion (M2 lit) la solution de l'équation deux a plus deux égal quatre a plus deux est ? / est ? (M2 montre le nombre -3)

Des élèves : Moins trois

M2 : Moins trois / merci / vérification [...] / comment on fait pour vérifier ?

Elève : (inaudible)

M2 : Le quoi ?

Elève : (inaudible)

M2 : Oui lequel ?

Elève : (inaudible)

M2 : Et bien on repart du début pour vérifier de ne m'être trompé nulle part ici / ou on remonte comme vous voulez / ici d'accord / mais vous êtes d'accord que si je fais / quatre calculs / autant en faire qu'un seul / et ben c'est une très bonne idée d'avoir pensé à remonter comme ça je vois où je me suis trompé / si je me suis trompé / deux fois moins trois ? (M2 écrit à côté de « Vérification » le calcul : $2 \times (-3) + 2 = -4$ tout en posant ses questions)

Elève : Moins six

M2 : Moins six plus deux ?

Elève : Moins quatre

M2 : Moins quatre / j'en ai un petit peu marre que ce ne soit pas rentré depuis le temps qu'on fait ça / Daouda moins trois plus deux ?

Daouda : Moins trois plus deux ? / euh / euh

Un élève : Moins un (M2 montre cet élève du doigt)

Daouda : Moins un

M2 : Trois fois moins un ? / euh pardon quatre fois moins un ?

Daouda : Moins quatre

M2 : Daouda / je trouve que lorsque je remplace a par moins trois le membre de gauche est égal au membre de droite / est-ce que moins trois est solution ?

Daouda : Ouais

M2 : Ouais / bien sûr si le membre de gauche est égal au membre de droite alors ouais

27 min 43

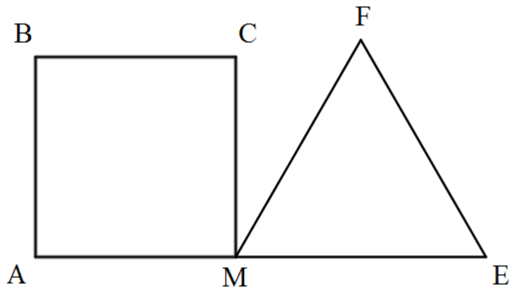
Episode 8 : Lancement d'une activité

M2 : On passe à une activité // (M2 distribue l'énoncé aux élèves, qui se dissipent ; M2 tente de rétablir le calme) donc cette activité vous la collez vous la lisez je vais l'expliquer avec vous sinon vous n'allez pas comprendre ce qu'il faut faire / si quelqu'un comprend avant mes explications c'est très bien mais il me fait le petit plaisir de me laisser croire que mon explication est importante // je me permets juste de rappeler que pendant les explications on doit se taire / et là on doit coller et lire pour comprendre / alors / donc / il y a une figure sur cette activité / pardon il y a une figure sur cette activité / alors / hé / chut chut

L'énoncé de l'activité est le suivant :

Sur la figure ci-dessous, ABCM est un carré et EFM est un triangle équilatéral. Le segment [AE] mesure 10 cm. Où faut-il placer le point M sur le segment [AE] pour que le carré ABCM et le triangle EFM aient le même périmètre ?

M2 : Sur la figure ci-dessous (M2 montre la figure de l'énoncé) / celle-ci / A B



C M / A / B / C / M (M2 montre les sommets correspondants) est un carré / et EFM est un triangle équilatéral / c'est quoi un triangle équilatéral ?

Un élève : C'est un triangle qui a trois angles

M2 : Oui mais tous les triangles ont trois angles ou alors c'est pas un triangle

Elèves : (inaudibles, parlent en même temps)

M2 : Trois côté de la même longueur et en effet / les trois angles aussi / mais là c'est plus les côtés qui vont nous intéresser // le segment AE (M2 montre le segment) / mesure / dix centimètres / c'est-à-dire qu'entre le point A et le point E vous avez dix centimètres / la question / où faut-il placer le point M // où faut-il placer le point M / en sachant que M doit forcément être sur le segment [AE]

Un élève : Au milieu

M2 : Pour que / le périmètre du carré / soit égal au périmètre du / triangle / alors / pour bien vous montrer ce que je veux dire / regardez ici / alors (M2 vidéoprojette son écran d'ordinateur ; l'écran montre un logiciel de géométrie dynamique, Geogebra ; M2 a construit la figure de l'activité de sorte à pouvoir montrer aux élèves comment la figure évolue lorsque le point M se déplace sur le segment [AE]) / est-ce que ici M est bien sur le segment AE ?

Des élèves : Oui

M2 : Donc regardez / M va pouvoir parcourir mon segment (M2 déplace le point M) / et plus M va grandir / pardon / plus M sera loin de A et plus le carré sera ?

Elèves : Grand

M2 : Et plus le triangle sera ?

Elèves : Petit

M2 : On parle bien sûr ici du triangle / du périmètre et du ca / et du / et du carré (M2 déplace « de droite à gauche » et « de gauche à droite » le point M sur la figure)

Elève : Il faut qu'ils aient la même longueur

M2 : Et il faut pas qu'ils aient la même longueur / il faut que le périmètre du carré soit

Un élève : Plus grand

M2 : Egal au périmètre du triangle / c'est-à-dire il faudrait

Des élèves : Au milieu

M2 : (place le point à peu près au milieu du segment [AE]) Ben voilà je suis au milieu là

Elève : Non

M2 : Là je suis au milieu ? / et ben moi non plus j'en sais rien / et tant que tu ne me l'auras pas prouvé je ne te croirai pas

Elève : (inaudible)

M2 : Et ben essaie / teste

Elève : Est-ce que ça a un rapport avec les équations ?

M2 : À ton avis ? / hé / (à toute la classe) on va juste se mettre d'accord sur une chose / comment est-ce que je calcule le périmètre d'un carré ?

Elèves : (inaudibles)

M2 : Côté plus côté plus côté plus côté c'est-à-dire quatre fois côté / comment je calcule le périmètre d'un triangle équilatéral ?

Elève : Côté fois côté

Elève : Longueur fois largeur

M2 : Non ça c'est l'aire / le périmètre / le périmètre je vous rappelle si je devais trouver le périmètre de cette salle (M2 balaie la salle de classe avec sa main) je ferais le tour de cette salle

Elève : Côté fois trois

M2 : Côté fois trois / côté plus côté plus côté / hé / le périmètre d'une figure ça revient à additionner / toutes les longueurs des côtés de la figure / comme ici il y a quatre fois la même et là trois fois la même ça va assez vite / euh (M2 regarde sa montre) / dans dix minutes on fait le premier point / dans dix minutes on fait le premier point / c'est-à-dire que là dans dix minutes / trouvez-moi / quelle doit être / la place du point M / où doit être le point M / pour que / le périmètre de ce carré soit égal / je dis bien égal / au périmètre de ce / triangle / bon courage la première personne qui trouve m'appelle / sans dire la solution aux autres

33 min 53

Episode 9 : Recherche des élèves sur l'activité

M2 : Je devrais entendre vos cerveaux là / tellement vous êtes en train de réfléchir / et pas ta voix Thomas

Un élève : (inaudible)

M2 : Non / c'est des bêtises [1] ça / tu mesures / ça fait combien de fois que je te dis le problème de mesurer c'est qu'on peut faire des erreurs / qu'arrivé en quatrième il faut prouver il faut démontrer / (à l'élève) Hélène je t'engueule pas je te motive / Daouda / travaille / travaille / Nadia / Tifany / au boulot

Nadia : Je suis pas forte pour faire ça

M2 : Nadia / vendredi t'étais forte / Youri / chut / (M2 va voir Hélène) tu as mesuré / je vais te tirer les oreilles tu as mesuré

Hélène : Mais monsieur

M2 : C'est une représentation que j'ai faite / si ça se trouve j'ai fait exprès de faire tout faux // j'ai dit il faut que le périmètre et le triangle aient la même / aient le même périmètre

M2 circule dans la classe pour interagir avec quelques élèves qui le sollicitent. Il ne va pas voir les élèves qui ne l'appellent pas.

43 min 13

Episode 10 : Première mise en commun et correction collective

M2 : S'il vous plaît / on fait un premier point et après je vous laisse dix minutes / hé / (à un élève) on fait un point ça va t'aider / alors / (à toute la classe) qu'est-ce que vous voulez ? / qu'est-ce que vous voulez ?

Nadia : Ben trouver la réponse

M2 : Oui mais la réponse à quelle question ?

Un élève : Où placer le point M

M2 : Où placer le point M / pour que / le périmètre du carré soit égal au périmètre du triangle / hé

Elève : Au milieu

M2 : Comment / comment est-ce qu'on peut / comment est-ce qu'on peut placer le point M / comment est-ce qu'on peut lui trouver une position / comment est-ce que je peux décrire sa position / Ryan

Ryan : (inaudible)

1. Le mot employé par M2 était plus grossier en réalité.

M2 : On en revient après / comment est-ce que je peux / hé / non non mais hé / comment est-ce que je peux expliquer à quelqu'un où se trouve le point M / au milieu oui mais pour tous les cas de figure ?

Elève : (inaudible)

M2 : On fait une équation oui mais alors dans une équation y a quoi ?

Elève : Des chiffres

Elève : Un calcul

Elève : Des lettres

M2 : Une lettre mais / la lettre représente / représenterait quoi ?

Elève : Une solution

Elève : Le point M

M2 : La solution / le point M mais non on a déjà une lettre pour le point M qu'est-ce que c'est / qu'est-ce que c'est que représenter le point M

Elève : (inaudible)

M2 : Oui bravo / nous ce qu'on veut / c'est déjà / pouvoir / essayer d'expliquer à quelqu'un / où se trouve le point M par rapport aux dix centimètres / par exemple / si moi je suis le point M que je vais du bureau à la porte / euh / s'il y avait pas d'élève pour dire là par exemple là je suis devant Delila / comment vous dites si je suis plus proche de la porte plus proche de mon bureau précisez-moi où je suis il faut bien parler d'une notion de distance / ah là monsieur M2 est à trois mètres de la porte / (M2 se déplace dans la salle) là monsieur M2 il est plus à six mètres / d'accord ? / donc / oui / Thomas / là l'essentiel / (M2 reprend un élève qui bavarde) / hé / donc le but est de pouvoir dire à quelle distance M se trouve de (M2 montre le point A) / allez de A / d'accord ? / ou de E mais moi je vais choisir A / parce qu'on lit de gauche à droite / alors / hé / là j'impose quelque chose / comment je pourrais dire / comment expliquer à quelqu'un / où se trouve le point M sur le segment AE

Elève : Il est plus proche de A

M2 : Il est plus proche de A d'accord mais / faut / un peu / du coup / on est d'accord que ce qui m'intéresse pour le moment c'est la distance entre A et M / d'accord ? / hé / mais la distance A et M elle peut valoir combien ?

Elève : Ben on sait pas

Elève : De zéro à cinq

M2 : Alors normalement / de zéro à dix / puisque M se promène là-dessus (M2 montre le segment [AE]) / chut / chut / chut / regardez (M2 montre à nouveau la figure dynamique) M se promène là donc M peut valoir quelque chose / pardon /

notre distance peut valoir quelque chose entre zéro et / et dix et certains grâce à leurs calculs ont trouvé entre zéro et ?

Elève : Cinq

M2 : Certains grâce à leurs calculs ont réduit (M2 regarde sa montre) / sauf qu'à votre avis qu'est-ce qu'il va falloir tester là ? / si on me parle d'équations là est-ce qu'on va tester ? / non / mais / il nous manque toujours une chose / si on me parle d'équations / on a vu que la chose importante c'était la distance entre A et M / hé / mais si pour une équation qu'est-ce qu'il me faut ? / (M2 écrit « Activité 3 » au tableau) / Marianne ?

Marianne : (inaudible)

M2 : Ben déjà il me faudrait pas la lettre ? / il me faudrait pas la lettre ? / hé / est-ce qu'on s'est décidé d'une lettre pour représenter mon inconnue dans mon équation ?

Elève : Non

M2 : Alors on l'appelle comment ?

Elève : Ben x

M2 : On peut l'appeler x / quelqu'un l'a appelé m à cause du point M / euh on va l'appeler x d'accord ? / c'est ce qui m'a été proposé ici mais hé / ho / euh étape importante / on avait un problème / y a deux cours je vous ai dit que les équations servaient à résoudre des problèmes / ah / bizarrement on y revient / j'ai un problème / un problème où je dois trouver une mesure / une distance / quelque chose que je ne connais pas / une inconnue / j'ai testé / en testant j'ai vu que ce n'était pas possible / donc je me rabats sur quelque chose qui marche tout le temps / les équations / en tout cas qui marchera tout le temps dans ce type de problèmes / et donc / je me suis rendu compte que pour écrire une équation il faut que je pose quoi ?

Elèves : (inaudibles)

M2 : La lettre / une lettre / il faut que j'en choisisse une / on peut choisir x on peut choisir m on peut choisir / n'importe quelle lettre très bien / alors sauf que l'essentiel c'est déjà de dire quoi ? de dire ce que représente la lettre / si je vous mets x dans un calcul et que je vous dis pas ce que ça représente est-ce que ça sert à quelque chose ?

Un élève : Non

M2 : Donc on va écrire x / représente / la distance (M2 écrit au tableau au fur et à mesure) / la distance quoi ? / entre quoi et quoi ?

Un élève : Entre A et M

M2 : (a écrit au tableau : « x représente la distance AM » ; puis il écrit en-dessous « Périmètre du carré = » et « Périmètre du triangle = » en laissant vides les membres de droite de ces égalités) // hé / chut / chut chut / rappelez-moi quel comment est-ce que je fais pour calculer le périmètre d'un carré ? William ?

William : (inaudible)

M2 : Quatre fois côté / côté fois quatre / ici le côté vaut ? / est représenté par ?

Elève : x

Elève : Cinq

M2 : Pourquoi cinq ? / pourquoi ?

Elève : Quatre fois x (M2 complète au tableau : « Périmètre du carré = $4 \times x$ ») // et le triangle ?

Elève : Trois fois x

M2 : Ah / perdu / pourquoi ? / le triangle c'est aussi côté fois trois (M2 montre le côté [ME] sur la figure) / sauf que le côté ici c'est ? (M2 montre à nouveau le segment [ME])

Elèves : ME

M2 : Donc / on écoute Samuel / Samuel ?

Samuel : Dix moins x fois trois (M2 complète au tableau : « Périmètre du triangle = $(10 - x) \times 3$ »)

M2 : Pourquoi ? / je pense que le fois trois tout le monde a compris que c'était côté fois trois / pourquoi dix moins x ?

Samuel : (inaudible)

M2 : Là / Samuel a vu que comme le côté de mon carré on l'appelait x vous êtes d'accord que le côté de mon carré il prend un morceau des dix centimètres / vous êtes d'accord / il est sur les dix centimètres / donc plus x est grand et plus ME sera / petit / donc c'est-à-dire que / en fait / si jamais mon carré a un côté de x / et ben combien est-ce qu'il me reste pour mon triangle ? / et ben il me reste les dix centimètres moins les x centimètres que j'ai pris / oui ou non ? / euh moi j'ai un petit problème

Samuel : Distributivité

M2 : On a vu lors d'une équation que quand y avait / bon ben allez / on va écrire l'équation (M2 montre un élève du doigt pour lui donner la parole)

L'élève : Quatre x moins

M2 : Une équation c'est quoi ? / c'est un membre de gauche un membre de droite séparés par une ?

Elève : Egalité (M2 écrit « $4x =$ »)

L'élève initialement interrogé : Est égal à trente moins

M2 : Ah / d'accord / alors moi je vais écrire ça comme ça (M2 complète l'équation : « $4x = (10-x)\times 3$ » puis écrit en-dessous l'équation équivalente « $4x = 30-3$ ») // euh par contre comme lorsqu'on fait le tableau là on va pas l'écrire mais on va se mettre bien d'accord / là j'ai utilisé la ? (M2 montre la dernière équation écrite)

Elève : Distributivité

M2 : Distributivité simple / maintenant je fais quoi ? / on enlève trois x parce qu'on veut faire quoi ?

Elève : On veut les isoler

M2 : On veut isoler très bien / donc ça veut dire que pour enlever trois x il faut faire quoi ?

Elève : Il faut aussi enlever de l'autre côté

M2 : Pour enlever moins trois x il faut ?

Elève : Plus

M2 : Il faut ajouter trois x (M2 écrit les ostensifs $+3x$ en rouge sous chaque membre de l'équation puis écrit l'équation qui en résulte : « $7x = 30$ ») // je veux sept x ou je veux x ?

Elèves : x

M2 : Donc je divise (M2 écrit les ostensifs $\div 7$ sous chaque membre) / quelle propriété j'utilise là ?

Elève : La propriété deux

Elève : Deux

M2 : La deux (M2 écrit l'équation « $x = \frac{30}{7}$ ») / je conserve l'égalité si je divise les deux membres par le même nombre / combien vaut la longueur x ? (M2 montre la fraction $\frac{30}{7}$)

Elève : Trente septièmes

Elève : Quatre virgule deux deux deux

M2 : La valeur exacte trente septièmes (M2 écrit toutefois « $x \simeq 4,2$ » au tableau) / pourquoi tu as ressenti le besoin de m'écrire une valeur approchée ?

Elève : Parce que c'est sur dix centimètres

M2 : Parce que c'est quelque chose qu'on va peut-être devoir ?

Elève : Placer

M2 : Placer / tracer / vous êtes d'accord que si avec votre règle je vous demande de remplacer trente septièmes ça va être dur / donc la valeur approchée quatre virgule deux est très bien

53 min 11

Episode 11 : Fin de la correction et devoirs

M2 : Maintenant / pendant que je vous distribue / une feuille d'exercices / et après il y en aura une deuxième / on va faire le bilan de cette activité

M2 distribue une feuille d'exercices. Une élève, Baya, lui pose une question sur l'activité qui vient d'être corrigée. M2 lui répond :

M2 : Il fallait trouver où placer le point M / ben / quelle est la valeur de x ? / quelle est la valeur de x ?

Un autre élève : Ah monsieur c'est quatre virgule deux

M2 : Baya quelle est la valeur de x ?

Baya : C'est quatre virgule deux

M2 : Ah / ben peut-être qu'il manque une phrase / pourquoi ? / parce que là j'ai résolu une équation mais est-ce que / est-ce que j'ai répondu au problème qui était où placer / oui non très bien / je te rappelle que x / c'était AM / donc à quelle distance va se trouver le point M ?

Baya : Quatre virgule deux

M2 : Quatre virgule deux donc / le point M sera à / et on va être précis / trente septièmes de centimètres de A (M2 écrit la phrase réponse en même temps au tableau) / donc / hé / je viens vous donner / la suite de la feuille deux (M2 distribue une nouvelle feuille aux élèves) / là je vous donne la feuille trois / vous allez bien m'écouter les devoirs / devoirs pour jeudi / on se voit mercredi mais vous allez voir / si je vous les donne pour jeudi c'est parce qu'on va avoir besoin du cours de mercre / euh / pour vendredi / devoirs pour vendredi / pour vendredi / parce qu'on va avoir besoin du cours de mercredi pour pouvoir faire les exercices que je vais vous donner d'accord ? / donc vous attendrez / mercredi soir / pour les faire / d'accord ? / merci oui vous écrivez / oui oui oui oui oui / alors vous allez me faire / vous écoutez ? / vous allez me faire / l'exercice / l'exercice trois de la feuille deux / et l'exercice un / de la feuille / trois / donc je répète / j'écris ça au tableau / pour vendredi / pour vendredi / vous me faites exercice trois de la feuille deux et euh / exercice un de la feuille trois / donc c'est-à-dire que là pour mercredi vous n'avez rien à faire à part me relire la leçon / et j'insiste là dessus vous la relisez au moins deux fois / et pour / vendredi vous avez ces deux exercices à faire / j'ai bien dit ces deux exercices à faire que vous ne commencerez que / mercredi soir (M2 a écrit au tableau : « Vend : Ex 3 de la F2 et Ex 1 de la F3 »)

56 min 33

Transcription de la séance 5 de M2 sur les équations, découpage en épisodes

Episode 1 : entrée en classe et installation des élèves

Les élèves entrent en classe et s'installent à leur place. M2 salue chaque élève à son entrée en classe. Le vidéoprojecteur est déjà en marche au moment où les élèves s'installent. L'énoncé de l'exercice qu'il y avait à faire à la maison pour cette séance est vidéoprojeté :

Equation	Transformation	Propriété utilisée	Objectif
$2(t+15)=7t-5$			
	On développe et on réduit le membre de gauche		
$-5t+30=-5$		Conservation de l'égalité (P1)	On « élimine » les termes en t dans le membre de droite
			On « isole » les termes en t dans le membre de gauche
	On divise chaque membre par -5		

M2 : Euh / on sort ses affaires / Shiran / on sort ses affaires / on sort la fiche d'exercices numéro deux / et je pense qu'on fait ça là tout de suite allez / Manon là tout de suite ça veut dire là maintenant s'il te plaît / Samuel toi aussi du coup // Sors ta feuille numéro deux /

Un élève : J'arrive pas à comprendre

M2 : Et ben on va tout comprendre ensemble

Les élèves s'installent. M2 demande à plusieurs d'entre eux de sortir leurs affaires et d'ouvrir leur cahier d'exercices. Il ne circule pas pour vérifier que le travail est réalisé ou pour prendre des informations.

M2 : Bon hé / ceux qu'ont pas la feuille prennent tous les exercices en correction tant pis pour eux / c'est-à-dire là ils me refont le tableau rapidement

Une élève : Monsieur j'ai pas cette feuille

M2 : Je te promets tu l'as eue tant pis tu te débrouilles / parce que quand tu la retrouveras ou quand j'arriverai à te la rephotocopier un jour mais comme j'ai un quota limité je suis pas sûr que ça sera possible euh tu te débrouilleras oui ?

Un élève : (inaudible)

M2 : Ben fin d'heure comme ça ça m'évitera de te mettre zéro / oui (**3 :55**)

Episode 2 : correction de l'exercice que les élèves avaient à faire chez eux pour cette séance

M2 : Gustave tiens Gustave hé / rappelle-moi qu'est-ce que / comment on utilise ce tableau / est-ce qu'on le fera tous les jours ? (M2 montre le tableau de l'exercice qu'il y avait à faire)

Gustave : Non

M2 : C'est juste pour que vous compreniez bien comment est-ce qu'on fait / comment est-ce qu'on résout des équations / histoire que ça rentre c'est-à-dire que ce tableau-là après il sera sous-entendu / c'est-à-dire qu'à chaque fois que vous allez me faire un équation avant de faire quoi que ce soit vous dites mais ma transformation qu'est-ce que je vais faire ? quelle propriété je vais utiliser ? et pourquoi je fais ça ? et dans votre tête vous vous dites ça / (à un élève) dans ta tête ça t'évitera de faire des bêtises

Un élève : (inaudible)

M2 : Normal vu que c'est des feuilles de brouillon vu que t'as perdu ton cahier vu que tu te fais voler par ton petit frère de dix ans / allez hé Gustave / Gustave / on développe et on réduit le membre de gauche qu'est-ce que ça veut dire que développer ? / (à deux élèves) hé toutes les deux c'est votre dernière chance si vous faites pas un bon cours c'est fini d'être côte à côte / j'ai demandé à Gustave Gustave ça veut dire quoi développer ? / (à un élève) après celle-là garde celle-là / Gustave ça veut dire quoi ?

Gustave : (inaudible)

M2 : Hé ben qu'est-ce qu'on fait ici ? / Alice ?

Alice : (inaudible)

M2 : Et comment est-ce qu'on fait pour enlever la parenthèse ? on ? / on développe et ben développe-moi ça alors / chut

Alice : Deux t plus dix-sept est égal à sept t moins cinq

M2 : Alors il y a un problème c'est que tu n'es pas cohérente / si tu dis deux t c'est que tu fais deux fois t est-ce qu'on d'accord ? / deux t c'est deux fois t t'es d'accord avec moi / alors pourquoi est-ce que tu me dis qu'il faut faire deux t plus deux plus quinze ? t'es d'accord ? dix-sept c'est deux plus quinze / pourquoi est-ce que tu multiplierais le t pourquoi est-ce que tu additionnerais le quinze ? c'est logique à ton avis ? distributivité développer c'est distribuer le deux / au // ben alors fais-le

Alice : Deux t / plus deux fois quinze

M2 : Deux fois quinze trente très bien (M2 écrit $2t + 30 = 7t - 5$ dans une case du tableau) / est-ce que le membre de droite j'ai bien fait de le réécrire comme ça Lisa ? est-ce que j'aurais dû le modifier ?

Lisa : Non

M2 : Pourquoi ? / chut chut chut chut chut

Lisa : (inaudible)

M2 : Est-ce que tu as le droit d'additionner de soustraire ou de multiplier / par un nombre le membre de droite / sans faire la même chose au membre de gauche ?

Lisa : Non

M2 : Ici (M2 montre le membre de gauche $2t + 30$) est-ce que tu as rajouté quelque chose dans ton calcul dans ton équation ? / est-ce que quand tu multiplies par deux le deux il n'était pas déjà dans ton équation ? // ben Alice ici (M2 montre $2(t + 15)$) est-ce que j'ai rajouté un nombre ou une lettre ? / non / donc je n'utilise ni la propriété une ni la propriété deux (référence aux propriétés de conservation de l'égalité) / d'accord ? / ok / propriété utilisée alors si ce n'est ni la une ni la deux c'est quoi ? propriété de /

Elève : (inaudible)

M2 : (montre le mot « développe » qui est écrit dans le tableau) donc est-ce que c'est une des propriétés juste qui concernent les équations ?

Elève : (inaudible)

M2 : Oui (M2 écrit « distributivité » dans la case propriété utilisée) / Herman quel était l'objectif / d'utiliser la distributivité ?

Herman : Euh supprimer les parenthèses

M2 : (écrit « enlever les parenthèses » dans la case « objectif ») et à l'oral tu m'expliques pourquoi on voulait enlever les parenthèses ? / Herman / quel est le but d'une résolution d'équations ? / le but c'est quoi on veut faire quoi avec la lettre ? on veut l'i...

Un élève : ...soler

M2 : Est-ce que tu peux l'isoler si elle est entre parenthèses ?

Herman : Non

M2 : Samuel Samuel Samuel / fais un effort je viens juste de te regarder là / euh Ryan ici (M2 montre la case suivante à remplir) / ah ben tu veux le faire après ? / et ben alors quelqu'un d'autre pour ici / euh / Thomas Thomas on passe de deux t plus trente égal sept t moins cinq à moins cinq t plus trente égal moins cinq on a fait quoi ?

Thomas : On a / on a / euh (inaudible)

M2 : Moins quoi ? / alors moins / moins trois moins trois moins cinq moins trois ça ferait moins huit

Thomas : (inaudible)

M2 : T'avais quoi là ? (M2 montre $7t$)

Thomas : (inaudible)

M2 : On a fait quoi ?

Thomas (inaudible)

M2 : Donc on a soustrait / sept quoi ?

Thomas : Sept t

M2 : T'es sûr ? / donc deux t moins sept t ça fait moins cinq t / ben oui / (M2 écrit « soustraire $7t$ » dans la case « transformation ») donc soit vous me dites on a additionné moins sept t soit vous me dites qu'on a soustrait sept t / mais moins moins sept t c'est comme ajouter sept t t'es d'accord ? / donc propriété utilisée la une / objectif éliminer les termes en t dans le membre de droite parce que le but c'est d'isoler les termes en t / Ryan

Ryan : (inaudible)

M2 : On soustrait quoi ?

Ryan : (inaudible)

M2 : On soustrait trente très bien pourquoi ? (M2 écrit « soustrait 20 » dans la case « transformation »)

Ryan : (indaudible)

M2 : Le terme en t et le terme sans t / eh bien dis-moi combien ça fait alors / hé chut chut chut / Samuel je vais perdre patience

Ryan : (inaudible)

M2 : (M2 écrit $-5t = -35$ dans la case appropriée) Propriété utilisée Ryan ?

Ryan : (inaudible)

M2 : Hé ben il va falloir / Ryan on a utilisé l'addition ou la soustraction des deux membres dans les deux membres pardon ou on a utilisé la multiplication dans les deux membres ?

Ryan : (inaudible)

M2 : Donc P1 (M2 écrit « P1 » dans la case « propriété utilisée ») / la deux c'est celle qu'on va utiliser ici (M2 écrit « P2 » dans la case du dessous) Samuel / (M2 regarde sa montre) la deux c'est / quand on / divise / les deux membres ensemble / pas ensemble pardon quand on divise le membre de gauche et le membre de droite par le même nombre / par quoi est-ce que je vais diviser ici Youri ?

Youri : Par moins cinq

M2 : Excellent / donc il me reste quoi ici ?

Youri : Moins cinq //

M2 : (M2 écrit le signe d'égalité) Yanis / le but c'est quoi ? d'avoir quoi ?

Youri : (inaudible)

M2 : Non d'avoir la solution donc et quelle lettre je vais trouver pour trouver la solution ?

Youri : t

M2 : Hé ben si t'as tout bien fait tu dois juste avoir t égal t'es d'accord ? / et je me permets juste de t'expliquer que comme j'ai moins cinq t / moins cinq t divisé par moins cinq / tu divises deux nombres négatifs ça te fait donc un nombre / positif et cinq divisé par cinq ça fait un / un t c'est t d'accord ? / moins trente-cinq divisé par moins cinq / chut chut chut chut chut / réfléchis avec moi à moins cinq fois combien est égal à moins trente-cinq

Youri : Sept

M2 : Alessio tu as intérêt à te taire et à arrêter de l'appeler parce que si je prends son carnet

Un élève : (inaudible)

M2 : Ben ça dépend tu veux t ou tu veux moins t ? / et ben si tu divises par cinq ça t'aurait fait moins t / tu divises par moins cinq / ça fait deux nombres négatifs que tu divises ça fait un nombre positif / et ici le but / tiens Youri le but c'était quoi ?

Youri : Trouver la solution

M2 : Trouver la solution (M2 écrit « trouver la solution » dans la case « objectif ») / ce qui est un peu le but de tout ça alors / (**12 :44**)

Episode 3 : lancement d'un exercice (exercice 2 feuille 3)

M2 : Vous prenez vite la correction maintenant / vous avez l'exercice trois de cette feuille / l'exercice trois de cette feuille d'accord ? / si vous / le regardez bien vous verrez qu'il y a quatre équations à résoudre / j'ai bien dit quatre équations à résoudre / euh je vous rappelle une chose // est-ce qu'on a déjà fait des exercices du type équations à résoudre ?

L'exercice 3 en question est le suivant :

Résous les équations ci-dessous :

(1) $7 \times y + 2 = 3 \times y + 9$

(2) $5t - 2 = 10 + 3t$

(3) $5y + 7 = 5 \times (3y + 4)$

(4) $3 + 7n = 4 - (n + 2)$

Des élèves : Oui

M2 : On a fait quoi là ? (M2 montre le tableau) / sauf que là c'était mis dans un ?

Des élèves : Tableau

M2 : Comme quel autre exercice ?

Un élève : Le un

M2 : Ouais ça c'est le un le un et le ?

Un élève : Le deux

M2 : D'accord un et deux / très bien / euh est-ce que cette fois il y a un tableau pour nous aider ?

Un élève : Non

M2 : Est-ce qu'on va le faire ? / ceux qu'ont envie parce qu'ils en ont besoin oui celui qui n'en a pas besoin est-ce qu'il doit le faire ?

Des élèves : Non

M2 : Non / mais ça c'est votre choix / euh à terme vous n'utilisez plus les tableaux parce que ça prendra trop de temps mais si vous en avez besoin y a aucun problème / essayez de penser au logiciel Thot / essayez de penser au logiciel Thot / (à un élève) et ben alors le fais pas / essayez de penser au logiciel Thot

Un élève : (inaudible)

M2 : Je vais afficher je vais afficher / euh une chose / dans dix minutes je corrige / si vous avez des questions vous levez la main / et euh le grand deux du chapitre vous vous rappelez comment il s'appelle ? /

Un élève : (inaudible)

M2 : Comment résoudre une équation / donc là si on a des problèmes pour résoudre une équation on fait quoi ?

Des élèves : On va voir le cahier de leçons

M2 : Hé ben on est parti (M2 vidéoprojette l'exercice)

Un élève : Faut faire quoi ?

M2 : Ca / exercice trois / les quatre équations ici présentes

Gustave : C'est quelle feuille ?

M2 : La suite de la feuille deux / mais au pire c'est au tableau Gustave perds pas de temps à chercher la feuille

Un élève : Monsieur on a appris avec les fois ? / les fois sur les équations ?

M2 : Hein ? / les fois sur les équations ?

Un élève : Les multiplications

M2 : Et on les a pas apprises ? / sept y et sept fois y c'est la même chose non ? / au boulot

Un élève : Ah oui c'est vrai (**15 :00**)

Episode 4 : recherche des élèves sur l'exercice (exercice 2 feuille 3)

Alessio : Monsieur / en fait je sais pas si / quand on avait fait euh / les additions sur le logiciel

M2 : Oui (M2 réécrit le début de la première équation de l'exercice au tableau)

Alessio : Est-ce que c'est pareil ? Faut retirer euh

M2 : Attends-tends-tends / à ton avis est-ce que je vais te dire de faire quelque chose sur ordinateur et te dire de faire l'inverse après ?

Alessio : Mais par exemple quand on retire deux nombres /

M2 : Alessio Alessio / ça c'est les / le titre c'était comment résoudre les équations / et là y avait les propriétés t'es d'accord / est-ce que j'ai précisé comment résoudre les opérations les équations sur ordinateur ? / non / c'est comment résoudre les équations tout le temps donc / qu'est-ce que tu vas faire du coup ?

Samuel : Les résoudre tout le temps

M2 : Alessio tu me parlais d'une propriété qu'est-ce que tu vas faire du coup ?

Alessio : Euh on retire

M2 : Alors c'est parti essaie (M2 termine de réécrire la première équation de l'exercice au tableau) // Dans cinq minutes on fait un premier point sur la première (M2 réécrit la deuxième équation de l'exercice au tableau) / normalement dans cinq minutes vous êtes au minimum dans la deuxième / faites bien attention aux différences d'écriture / ne soyez pas des robots

M2 commence à circuler dans la classe.

M2 : (à un élève) T'as vraiment besoin de calculette ? (M2 regarde ce que l'élève écrit) Enlève-moi le égal / parce que là tu me dis que ça c'est égal / qui est égal d'accord ? / dans une équation le seul égal il est entre les deux membres / ok ? / euh sache que t'as pas besoin d'écrire égal pour justifier le fait de faire des calculs / parce que tu modifies deux expressions littérales qui sont égales entre elles d'accord ?

/ donc si tu me rajoutes un égal ici ça veut dire que / si je te suis bien / sept y / sept y plus deux c'est égal à trois fois y plus neuf / c'est égal à sept y plus deux est égal à trois y plus neuf / je suis d'accord les deux équations c'est la même / elles sont équivalentes on a dit / mais l'équivalence ne se traduit pas par un signe égal d'accord ? / donc c'est pour ça que j'insiste depuis un moment sur le fait de / de mettre les calculs les uns en dessous des autres comme ça / en ligne / d'accord ?

L'élève : Pour que le égal il soit

M2 : Exactement / le égal centré c'est une règle des mathématiques / comme ça tu te perds pas dans tes calculs c'est plus clair c'est plus propre c'est / ok ? (à un élève) Allez André bouge-toi un peu / (à un élève) j'arrive Daouda regarde je fais le tour / (une élève appelle M2) j'arrive tout de suite je vais voir Daouda et puis j'arrive / comme il est pas loin de vous / (à Daouda) oui ?

Daouda : (inaudible)

M2 : Pose-moi une question vas-y

Daouda : Est-ce que ça c'est bon ? (M2 regarde le cahier de Daouda)

M2 : Ouais si tu veux mais là t'as juste fait un changement d'écriture y a pas de problème / mais maintenant fais en sorte d'isoler les termes en y d'accord ? (à une élève, Nadia, qui l'avait appelé) oui ? / oui ?

Nadia : Euh monsieur j'ai pas compris le

M2 : Ecris déjà / si t'écris pas ça va être dur / tiens / écris-moi ça là allez

Nadia : La une

M2 : Ouais ouais sept fois y plus deux est égal à trois y plus neuf / (à sa voisine) toi aussi / c'est fait ?

Nadia : Là c'est sept ?

M2 : Oui sept fois y plus deux est égal à trois fois y plus neuf / bon / quelqu'un a son cahier de leçons ou quoi ?

Nadia : Ouais

M2 : Merci Nadia

Un élève : Monsieur ?

M2 : Oui ?

L'élève : (inaudible)

M2 : J'arrive juste après regarde / (M2 prend le cahier que Nadia a sorti de son sac entre temps et le feuillette) j'aide les deux filles et puis j'arrive / alors / (à Nadia) tu sais quoi ? / si jamais le cours est copié proprement je suis fou / je suis / perdu y a que le grand un

Nadia : Non parce que le deuxième j'étais pas là

M2 : Si t'étais là tout le temps

Nadia : Non j'étais pas là c'est vrai

M2 : (montrant la caméra du chercheur) Ben je vérifierai les enregistrements d'accord ?

Nadia : D'accord

M2 : (prenant le cahier de la voisine) J'ai tellement cru en toi Nadia / franchement tu sais quoi / je serais sorti là / je serais sorti je me serais vanté avec moi Nadia elle travaille / bon c'est pas grave / alors euh / (il lit le contenu du cahier) pour résoudre une équation on utilise les propriétés de conservation de l'égalité ci-dessous d'accord ? / je les lis / d'accord on me parle de la propriété où il faut que j'additionne et que je soustrais les deux membres / par la même chose / ou que je multiplie ou que je divise les deux membres par la même chose d'accord ? / attends-tends non mais attends / donc c'est ça qu'on / mais / pff / le problème c'est que ça ça me dit pas comment résoudre une équation donc je descends encore (M2 parcourt le cahier du doigt) / méthode / pour résoudre une équation / c'est pas ce qu'on essaie de faire là ? / on regarde la forme de l'équation la place de l'inconnue les parenthèses s'il y en a et les opérations / y a-t-il des parenthèses ?

Nadia : Non

M2 : Bon / ok / y a rien qui a l'air de m'embêter / deuxième point on utilise les propriétés p un et p deux pour isoler l'inconnue en faisant attention aux priorités opératoires / qu'est-ce que je cherche à faire ?

La voisine de Nadia : à isoler l'inconnue

M2 : Oui à isoler l'inconnue / l'inconnue ici c'est quoi ?

La voisine de Nadia : y

M2 : y / ben si c'est y

Nadia : Mais en fait il y a fois

M2 : Oui mais / trois y ou trois fois y c'est la même chose

Nadia : Donc fois et y c'est pas la même ?

M2 : Non

Nadia : y c'est un chiffre mais on sait pas c'est quoi mais

M2 : Et pourquoi quand y a trois y ça te choque pas alors que trois y trois fois y c'est la même chose et que je te le dis depuis un an . / donc / tu gardes ça en tête

Nadia : Donc on fait d'abord on fait d'abord on fait sept fois y

M2 : Non donc il faudrait d'abord le faire mais est-ce que tu connais la valeur de y ?

Nadia : Non

M2 : Donc / on va regarder ensemble / si je veux isoler les y / isoler un y/ il faut que j'enlève quoi ?

La voisine de Nadia : Un y

M2 : Oui mais si t'enlèves un y il va t'en rester six et là il va t'en rester deux

Nadia : Trois

M2 : Non / ah trois y ?

Nadia : Oui y a trois

M2 : Ben d'accord ok / si j'enlève trois y ici il m'en reste combien ? / si j'en ai sept et que j'en enlève trois ?

Nadia : Quatre

M2 : Quatre / quatre y plus deux égal ? / il va m'en rester ici ? / égal quoi ?

Nadia : Neuf

M2 : Hé ben écrivez-moi ça allez / trois y plus / euh pardon quatre y plus deux (Nadia et sa voisine se mettent à écrire dans leur cahier) / quatre y plus deux / est égal à neuf / bon Nadia / (un élève demande à voir M2) ouais attends je j'arrive je te promets je fais l'appel je cours / bon Nadia regardez ici / maintenant / est-ce que le y il est tout seul ?

La voisine de Nadia : Non

M2 : Non / le problème c'est que c'est qu'il y a quoi avec le quatre y ?

Nadia et sa voisine : Le deux

M2 : Le plus deux

Nadia : Le plus deux

M2 : Comment je fais pour isoler mon

La voisine : On soustrait

M2 : Oui on soustrait par ?

Nadia : Par deux / par neuf

M2 : Ben faites ça / non non si tu soustrais par neuf

Nadia : Par deux

M2 : Soustrais par deux

Nadia : Attendez monsieur j'ai pas compris pour ça pour ça et pour ça là

La voisine : Ca veut dire ça sera par deux et ça ce sera par deux

M2 : Oui

Nadia : Donc ici / ici on a soustrait

M2 : Oui / par trois y donc / comme t'en avais trois et que t'en enlèves trois il t'en reste ?

Nadia : Non

M2 : Non donc ici t'en avais sept il t'en reste quatre

Nadia : Donc pour le deuxième

La voisine : Donc y donc en gros y il est égal à un

M2 : Non / écris-moi / quatre y égal / vas-y

Nadia : Ici / ici du coup / ici je vais faire trois moins cinq

M2 : Ouais ouais ouais ouais oui / si tu veux oui / ou cinq moins trois / oui oui on peut faire comme ça / (à Samuel) va me faire la première au tableau / ben résous / (M2 retourne au bureau du professeur et fait l'appel sur l'ordinateur ; des élèves l'appellent) je vous jure je fais l'absence et j'a / je vais voir les deux personnes qui m'ont appelée là-bas depuis très longtemps et j'arrive / sinon ils vont me faire la tête / (M2 se dirige vers un élève qui l'a appelé ; en passant devant le tableau et ce que Samuel est en train d'écrire, il efface un signe d'égalité en disant) il sert à rien celui-là arrête tes bêtises

L'élève qui a appelé M2 : Est-ce que si on trouve un nombre à virgule on le met ou

M2 : Tu mets / si tu précises tu mets ça / hé ben tu mets ça / (à Daouda qui lève le doigt) j'arrive / (regardant le cahier d'un élève) ç'a l'air pas mal / mais je sais pas pourquoi j'ai un égal ici (**23 :00**)

Episode 5 : correction de la question 1 de l'exercice 2 feuille 3

Voici ce que Samuel a écrit au tableau (la première équation, celle de l'énoncé, a été écrite par M2) :

$7 \times y + 2 = 3 \times y + 9$

$7y + 2 = 3y + 9$

$4y + 2 = 9$

$4y = 7$

$y = \frac{7}{4}$

M2 : (à la classe entière) S'il vous plaît // s'il vous plaît / attends / (M2 interroge Daouda qui lève la main) tiens Daouda tu tombes bien / Daouda as-tu trouvé la même solution ? (M2 montre la solution rédigée par Samuel au tableau)

Daouda : Non

M2 : Bon alors déjà / euh / petit point méthode / l'équation qu'on fait depuis un moment déjà d'accord / est-ce qu'il y a quelque chose de surprenant dedans ?

/ (à un élève) trente secondes toi tu feras la deuxième / y a-t-il quelque chose de surprenant dedans ?

Un élève : Non

M2 : Y a-t-il des parenthèses ?

Un élève : Non

M2 : Donc est-ce que je dois commencer par développer un des deux membres ?

Un élève : Non

M2 : Donc c'est comme celles qu'on a fait plein de fois dans Thot on commence / alors / j'ai écrit sept fois y plus deux égal trois fois y plus neuf / une erreur que j'ai vue plusieurs fois s'il vous plaît / une erreur / importante / c'est que beaucoup de personnes pour me justifier le fait qu'ils écrivent quelque chose en dessous me mettent des égal tout là (M2 rajoute les signes d'égalité abusifs dans une autre couleur) / euh je comprends le principe vous voulez dire que c'est la même équation que vous modifiez comme quand c'était la même expression littérale que vous modifiiez sauf que imaginez / que si vous m'écrivez sept fois y plus deux égal trois fois y plus neuf égal sept y plus deux égal trois y plus neuf est-ce qu'on va savoir c'est quoi l'équation et c'est quoi le égal qui dit que vous avez modifié votre équation ? / est-ce que c'est clair quand on fait ça ? / ben non en tout cas ça l'est pas / donc / hé / oui les équations sont équivalentes / ce sont les mêmes / on a modifié l'écriture dedans pour arriver à la résolution d'équations / mais ce n'est pas la peine d'écrire le signe égal / le signe équivalent n'est pas le même que le signe égal / et vous verrez plus tard comment écrire le signe équivalent et vous verrez la notion mathématique d'équivalence qui est un peu plus compliquée que la notion d'égalité / plus tard / donc pour le moment vous embrouillez pas avec ça / euh / Samuel / pourquoi as-tu fait cette étape ? / la deuxième qu'as-tu fait ? / hé / chut chut chut chut chut chut chut

Samuel : J'ai enlevé les fois

M2 : Mais pourquoi ? / beaucoup de personnes l'ont fait mais pourquoi ?

Samuel : C'est plus facile

M2 : C'est plus facile d'accord ok / tu as fait une transformation d'écritures / on est d'accord / tu as réduit / les deux membres / d'accord hé / donc / là Samuel vient de me justifier quelle transformation il a fait / quel était son objectif / son objectif pour lui c'était simplifier et pour ça il a réduit

Un élève : Et euh la troisième

M2 : Attends on n'en est qu'à la deuxième / on n'en est qu'à la deuxième

L'élève : Non mais il a écrit trois y plus neuf et après il a écrit neuf

M2 : Attends-tends-tends / pour le moment on est à la deuxième / pour le moment on est à la deuxième / alors / donc ici Samuel a juste réécrit de façon pour lui plus simple / beaucoup de vous l'ont fait d'accord / mais vous êtes bien d'accord que trois fois y c'est la même chose que trois y on est d'accord ou pas ? / (silence dans la classe) ok on va prendre ça pour un oui / alors maintenant justement plutôt que de demander à Samuel de justifier tu vas justifier ce qu'il a fait Shiran / (M2 montre l'équation $4y + 2 = 9$) but / propriété utilisée / transformation / qu'est-ce qu'il s'est passé ?

Shiran : Ben il a fait moins trois

M2 : Moins trois quoi ?

Shiran : Moins trois

M2 : Ben si je fais moins trois (M2 montre le nombre 2) ça me fait moins un et (M2 montre le nombre 9) ça me fait six

Shiran : Sept moins trois

M2 : (M2 fait non de la tête) Shiran / qu'est-ce qui a disparu ? / allez

Shiran : Neuf / ah non pas neuf / le trois

M2 : Non mais le trois / c'est pas juste un trois Shiran

Shiran : Trois y

M2 : Le trois fois y oui donc il a soustrait quoi ?

Shiran : Il a soustrait trois

M2 : Trois quoi ?

Shiran : Trois y

M2 : Donc il a fait moins trois y (M2 écrit un $-3y$ sous l'équation en rouge comme le logiciel Thot le fait) / comme je l'ai déjà dit le fait de justifier ce que vous faites en rouge comme le logiciel Thot c'est pas obligatoire sur vos copies d'accord ? / moi je le ferai toujours / pour bien vous montrer ce qu'on fait (M2 écrit un autre $-3y$ sous l'équation de sorte que chaque membre s'est vu retiré la quantité $3y$) / sept y moins trois y ça fait bien quatre y / trois y moins trois y ça fait bien zéro / donc / sept y plus deux moins trois y ça fait bien quatre y plus deux et trois y plus neuf moins trois y ça fait bien neuf / euh propriété utilisée Shiran ?

Shiran : La un

M2 : La un très bien / but ?

Shiran : (inaudible)

M2 : Enlever les termes en y du membre de droite / chut / chut / Samuel / euh / comment as-tu fait pour passer du troisième au quatrième ? (M2 pointe les équations concernées)

Samuel : J'ai enlevé deux

M2 : Tu as enlevé deux pourquoi ? (M2 écrit les ostensifs -2 correspondants)

Samuel : (inaudible)

M2 : Pour isoler le terme en y dans le membre de gauche / quelle propriété as-tu utilisé ?

Samuel : (inaudible)

M2 : (s'interrompant à cause du bruit qui règne dans la classe) Si ça va pas assez vite y a aucun problème / je peux aller deux fois plus vite / et vous pouvez bosser au moins quatre fois plus vite / est-ce qu'on est clair ? (M2 regarde sa montre) / je vous ai donné une feuille d'exercices numéro trois je peux vous demander de la faire là dans les vingt minutes qui restent la récupérer pour la noter

Nadia : (inaudible)

M2 : Non parce que justement je tiens à ce qu'on fasse des problèmes et là on est déjà / j'ai un problème c'est qu'on va pas pouvoir les faire / donc on va se dépêcher / euh / (M2 s'adresse à nouveau à Samuel) et ici tu as fait quoi ? (M2 montre la dernière équation)

Samuel : Je divise par quatre

M2 : Pourquoi ? (M2 écrit les ostensifs $\div 4$ correspondants)

Samuel : Pour trouver le résultat

M2 : Pour trouver la solution et donc tu as utilisé quelle propriété ?

Samuel : Deux

M2 : La deux très bien quelle est la solution ? (M2 montre la fraction $\frac{7}{4}$) / quelle est la solution ? / y égal sept quarts très bien / alors hé (**28 :40**)

Episode 6 : correction de la question 2 de l'exercice 2 feuille 3

Nadia : C'est moi qui fais le deuxième (rappel : la deuxième équation à résoudre est $5t - 2 = 10 + 3t$)

M2 : Oui / et / tu vas me dicter / je vais t'obéir / euh / une chose / maintenant qu'on fait la deuxième / Nadia quelle est la différence entre la première et la deuxième équation ? est-ce qu'il y a des choses qui changent ? est-ce qu'il y a des choses qui te choquent ?

Nadia : Euh non

M2 : Non

Nadia : Enfin si

M2 : Oui ?

Nadia : Y a plus / y a plus les / y a plus les fois y a que des soustractions

M2 : Très bien très bien mais ils sont pas sous-entendus les signes de la multiplication là ? (M2 montre le terme $5t$ en mettant le doigt entre le 5 et le t)

Nadia : Non

Un élève : Si

Nadia : C'est quoi sous-entendu déjà ?

M2 : Ils sont pas écrits mais ils sont là

Nadia : Ah oui ils sont écrits

M2 : Très bien / alors / c'est la seule différence en effet c'est-à-dire que là (M2 montre la première équation, les deux premières lignes) on va gagner l'étape que Samuel s'est senti obligé de faire parce qu'il était plus à l'aise mais / c'est la même chose

Nadia : Ouais

M2 : Et ben alors c'est parti je t'écoute

Nadia : Donc on fait trois t moins cinq t

M2 : Donc si tu veux dire que tu enlèves moins cinq t aux deux membres

Nadia : Ouais (M2 écrit les ostensifs $-5t$)

M2 : Quelle propriété utilises-tu ?

Nadia : Quoi ?

M2 : Quelle propriété utilises-tu ? tu te souviens si c'est la une ou la deux ?

Nadia : C'est la / c'est quoi ça ? / la deux

M2 : Perdu la une t'avais une chance sur deux (M2 écrit l'équation $-2 = 10-2t$)

Nadia : (inaudible)

M2 : C'est pour ça / faut apprendre tes leçons / euh maintenant ?

Nadia : Ben non mais en fait on enlève trois t / moins cinq

M2 : Ouais / ben j'ai fait / trois t moins cinq t

Nadia : Moins trois sur cinq

M2 : Ouais ben c'est fait

Nadia : Non vous avez / vous avez enlevé / ah si c'est bon / donc ensuite / non monsieur faut mettre le t devant / parce que c'est le cinq que j'ai enlevé moi

M2 : Ben ouais ben / je l'ai en / je l'ai enlevé

Nadia : C'est pas le cinq que j'ai enlevé j'ai fait cinq moins trois moi

M2 : Non non t'as fait trois t moins cinq

Nadia : Mais moi je voulais dire cinq moins trois

M2 : Ben c'est pas possible

Nadia : Pourquoi ?

M2 : Ben j'ai pas cinq tout seul j'ai pas trois tout seul / j'ai cinq t et trois t

Nadia : Oui / cinq t moins trois t

M2 : Ah donc toi tu voulais cinq t moins trois t

Nadia : Oui

M2 : Et ben on change alors

Nadia : Mais c'est ça qu'on avait fait le premier (M2 efface tout ce qu'il a écrit)

M2 : Mais c'est pas ce que tu m'as dit moi je t'obéis (M2 écrit les ostensifs $-3t$) / donc les autres je crois que vous avez compris qu'il allait falloir attendre la fin avant de copier la correction / parce que dans deux heures Nadia va me demander de refaire ce qu'on avait fait je crois (M2 écrit l'équation $2t - 2 = 10$) / et ben voilà / je t'embête Nadia

Nadia : Donc / on fait / dix moins deux / attends / dix moins / dix deux / dix deux / on fait moins

M2 : Bon Nadia / tu as moins deux tu veux enlever moins deux

Nadia : Non sur le dix / on fait / on fait / moins deux sur dix / non en fait on fait dix moins deux

M2 : Ah / on fait dix moins deux / mais si je fais moins deux moins deux ça va me faire moins quatre

Nadia : Non / dix moins deux

M2 : Ouais mais / ça / si je fais moins deux à droite je fais moins deux à gauche non ? / Nadia Nadia / quand tu as vingt euros / pour arri / quand tu as vingt euros / pour arriver à zéro il faut que tu perdes de l'argent

Nadia : Ouais

M2 : Quand tu dois de l'argent à quelqu'un / pour revenir à zéro / pour plus avoir de dettes / il faut que tu en ?

Nadia : Gagnes

M2 : Rajoutes du coup / très bien / donc ?

Nadia : Plus (M2 écrit les ostensifs $+2$) / Donc ça fait quatorze

M2 : Hop pe-là pe-là pe-là (M2 écrit $2t =$) / dix plus deux ça fait quatorze ?

Nadia : Euh douze (M2 finit d'écrire l'égalité : $2t = 12$) / Donc après ça fait / après on fait deux / attendez attendez / on fait deux

Un élève : On divise

Nadia : Ouais on divise déjà

M2 : On divise par ?

Nadia : Par deux / deux t

M2 : Non

Nadia : Par douze

M2 : Non on divise juste par ?

Nadia : Par deux par deux par deux (M2 écrit les ostensifs $\div 2$) / après ça fait / ça fait / ça fait t est égal / (à d'autres élèves qui essaient de donner la réponse) c'est moi qui parle / euh quatorze

M2 : Douze sur deux

Nadia : Ah

M2 : Deux fois combien égal douze ?

Nadia : Ben j'ai dit douze sur deux

M2 : Oui / ben c'est très bien mais on va le faire directement / dans la table de deux / deux fois combien égal douze ?

Des élèves : Six

Nadia : Six

M2 : Y a qu'une seule Nadia qui est très bien capable de s'en sortir (M2 écrit $t = 6$)

Nadia : Mais non vous avez dit douze sur deux

M2 : Non / si tu / allez regarde / regarde regarde / si tu veux je te rajoute ça (M2 écrit $= \frac{12}{2}$ à côté de $t = 6$) / voilà / t égal six mais c'est aussi égal à douze demis

Nadia : Pourquoi six ?

M2 : Ben douze divisé par deux ça fait six Nadia

Nadia : Ah / alors si je fais dans un contrôle et que je divise par deux

M2 : T'as aussi bon que / t'as bon / t'as bon

Nadia : J'ai quand même bon

M2 : Oui / bon j'efface la première (M2 efface la première équation) (**32 : 53**)

Episode 7 : correction de la question 3 de l'exercice 2 feuille 3

M2 : (réécrit la troisième équation de l'exercice au tableau : $5y+7 = 5\times(3y+4)$) William / qu'est-ce qui change par rapport à la deuxième ? / (à la classe) hé / si vous avez remarqué je prends un peu les choses en main là / ça veut dire suivez

William : Il y a des parenthèses

M2 : Donc qu'est-ce qu'il faut faire en premier ?

William : Il faut les enlever

M2 : Et comment on les enlève ? / on utilise quelle propriété ? / la di...

Un élève : L'addition

M2 : La distributivité / hé ben / William développe-moi cinq fois trois y plus quatre / chut

William : Cinq fois quatre

M2 : Cinq fois trois y / ça fait combien cinq fois trois y

William : Ca fait quinze y / quinze y plus quatre

M2 : Ssss / tu distribues aux deux // William il faut que je te fasse les flèches ou quoi ?

William : Non c'est bon / (M2 dessine les ostensifs flèches correspondants à la distributivité) c'est bon c'est bon / vingt

M2 : Moins vingt ? plus vingt ?

William : Vingt

M2 : (montrant le signe +) Ben oui / plus vingt / Wiliam / maintenant on sait faire ou quoi ? / (à la classe) euh / tout retard pris aujourd'hui se traduira en exercices pour vendredi / là pour le moment vous en aviez deux / on vient de passer à trois / si jamais on perd encore du temps on passe à quatre

Un élève : Quatre quoi ?

M2 : Exercices pour vendredi / et comme c'est du temps perdu si vous ne les faites pas cette fois je les vérifierai / parce que là je vous fais un peu confiance en ce moment mais peut-être que j'ai tort / un exercice non fait une heure de colle / deux exercices non faits deux heures / trois heures / *et caetera*

Un élève : Non

M2 : Alors je le fais / (de nouveau à William) William comment on fait ?

William : Moins cinq y

M2 : Ok on enlève cinq y aux deux membres (M2 écrit les ostensifs $-5y$) / quelle propriété utilises-tu ?

William : La une

M2 : La une (M2 écrit 7 =)

William : On enlève

M2 : Sept égal quoi ? Attends-tends-tends moi je sais pas faire moi

William : Dix y / plus vingt (M2 complète : $7 = 10y + 20$)

M2 : Ah fffff / t'as failli m'entendre crier toi (M2 écrit les ostensifs -20 avant que William ne parle)

William : Moins vingt

M2 : Pourquoi ? (M2 écrit, toujours sans attendre William : $= 10y$) / parce qu'on veut isoler les termes en y

William : (inaudible)

M2 : Sept moins vingt ?

William : Treize ? / moins treize moins treize (M2 complète : $-13 = 10y$)

M2 : On fait quoi maintenant ?

William : (inaudible)

M2 : Non non non non non non non

William : (inaudible)

M2 : Mais j'ai juste un petit problème (M2 écrit les ostensifs $\div 10$)

William : Moins treize

M2 : Pourquoi on fait ça ? (M2 écrit sans attendre : $\frac{-10}{13} = y$) / euh / attends une chose une chose une chose / euh / on n'oublie pas quelque chose depuis tout à l'heure ?

Un élève : La parenthèse

M2 : Non non non / on n'oublie pas quelque chose depuis tout à l'heure ?

Un élève : (inaudible)

M2 : Ah ça on le dit vu que je demande mais non non ça sert à rien de les écrire

Un élève : (inaudible)

M2 : Ben on le fait aussi / hé quand on fait un problème on fai quoi à la fin ? toujours ?

Un élève : Une phrase réponse

M2 : Ben ouais / on l'a pas fait depuis tout à l'heure quand même / donc (M2 écrit en même temps qu'il parle) la solution de l'équation / très important ça / est / bon plutôt que d'écrire moins dix tiers je peux écrire

Un élève : Moins un virgule trois

M2 : Moins un virgule trois / très bien (M2 a donc écrit au tableau : La solution de l'équation est $-1,3$)

Nadia : (inaudible)

M2 : C'est fini Nadia

Nadia : Monsieur

M2 : Et ben tu fais l'autre avec moi (M2 réécrit la quatrième équation de l'exercice : $3 + 7n = 4 - (n + 2)$)

Nadia : Mais monsieur pourquoi en fait vous avez euh / vous avez fait cinq fois trois y ? / alors que normalement on fait trois / on fait cinq moins trois / cinq y moins trois

M2 : Attends trente secondes trente secondes trente secondes / où ça ? où ça ?

Nadia : (montrant l'équation précédente) Là / là où il y a la parenthèse / pourquoi on n'a pas fait / pourquoi on n'a pas fait cinq y

M2 : Parce qu'il faut développer / tu ne peux pas résoudre une équation s'il y a des parenthèses dans le membre de droite ou de gauche

Nadia : Ben alors pourquoi cinq y ?

M2 : Pourquoi on a enlevé cinq y ? / ben parce que / il y avait cinq y ici on voulait

Nadia : Non non / je voulais dire pourquoi vous avez fait / cinq / fois / trois y

M2 : Plus cinq fois quatre / ben parce que j'ai développé / je n'ai pas fait que cinq fois trois y j'ai fait cinq fois trois y plus cinq fois quatre / règle de distributivité

Nadia : Donc attendez / monsieur

M2 : Dernière question

Nadia : Donc / euh / si euh / (M2 regarde sa montre) dans le contrôle si vous faites ça / je fais cinq / enfin non je fais six / fois / trois k / plus quatre

M2 : Oui / fois six

Nadia : Pourquoi fois six ?

M2 : Parce qu'il faut multiplier par ce qu'il y a devant la parenthèse

Nadia : J'ai pas mis six

M2 : T'as mis quoi devant la parenthèse ?

Nadia : Je sais même plus

M2 : Hé ben on recommencera

Samuel : Euh monsieur pourquoi est-ce que vous mettez moins un virgule trois ? c'est moins treize

M2 : Pfff (M2 efface le $-1,3$ de la phrase réponse, puis repérant l'erreur qu'il a commise dans la résolution, efface aussi le $\frac{-10}{13}$) / pourquoi je t'écoute toi ? / non mais toi t'as raison / c'est parce qu'ici c'est moins treize dixièmes donc là c'est bien moins un virgule trois (M2 corrige toutes les erreurs) / donc c'est moi qui ne sais pas / je ne comprends plus ce que me dit William (**38 :40**)

Episode 8 : correction de la question 4 de l'exercice 2 feuille 3

M2 : Tifanny / Tifanny / qu'est-ce qui différencie cette équation de la troisième ? (M2 montre la nouvelle équation à résoudre $3 + 7n = 4 - (n + 2)$) / hé / aow / allez vite vite vite / oui / on soustrait quoi ?

Tifanny : (inaudible)

M2 : Oui est-ce qu'on va pouvoir développer comme tout à l'heure ? / est-ce que j'ai cinq fois quelque chose entre parenthèses ? / chut chut chut chut chut chut chut / chut chut chut chut chut / est-ce que tu te souviens de comment on fait quand j'ai / un moins devant une parenthèse ? / on fait quoi ?

Tifanny : (inaudible)

M2 : Ouais mais tu peux pas faire n plus deux là / hé / je te rappelle une chose / moins n plus deux c'est moins un fois n plus deux / donc tu vas distribuer moins un / donc (M2 écrit $= 4-$) moins un fois n ça fait ?

Tifanny : (inaudible)

M2 : Oui ça fait m-moins n (M2 complète : $= 4 - n$) / moins un fois deux ?

Tifanny : Ca fait un

M2 : Moins un fois deux ?

Tifanny : Ah ben moins un moins deux / ça fait moins deux

M2 : Oui (M2 complète : $3 + 7n = 4 - n - 2$) / hé / pff / et euh Tifanny est-ce que tu peux pas me réduire ce membre ? / me le simplifier si tu préfères

Un élève : Deux n

M2 : Chut (M2 écrit le début de l'équation suivante $3+7n =$) / Tifanny / quatre moins n est-ce que tu peux faire ?

Tifanny : Non

M2 : Quatre moins deux est-ce que tu peux faire ? / ça fait combien ?

Tifanny : Moins deux

M2 : Quatre moins deux ?

Des élèves : Deux (M2 complète : $3 + 7n = 2 - n$)

M2 : Bon maintenant Tifanny je crois qu'on est arrivé au même point que d'habitude tu me dévelo euh tu me résous cette équation

Tifanny : Euh / on enlève moins deux

M2 : Non / tu enlèves deux / donc tu fais moins deux (M2 écrit les ostensifs -2) / pourquoi tu fais ça ?

Tifanny : (inaudible)

M2 : Pour / pour isoler le n / isoler / allez pour supprimer les termes sans n dans le membre de droite d'accord ? (M2 écrit : $1 + 7n = -n$) / quelle propriété c'était ?

Tifanny : La deux ?

M2 : La une / l'addition soustraction la une / maintenant tu fais quoi ?

Un élève : (inaudible)

M2 (à cet élève) : C'est pour faire ou c'est pour poser une question ?

L'élève : (inaudible)

M2 (agite le bras avec énervement et revient à Tifanny) : Vas-y

Tifanny : J'enlève un

M2 : Mais non si t'enlèves un il va réapparaître là / il faut que tu ?

Tifanny : (inaudible)

M2 : Ouais mais quel n ? / sept n ou le moins n ?

Tifanny : Le moins n

M2 : Ben si t'enlèves le moins n tout va se retrouver là est-ce que tu l'auras isolé ?

Un élève : Ben il faut faire moins sept n

M2 : Moins sept n (M2 écrit les ostensifs $-7n$) / quelle propriété tu utilises ?

Un élève : La une (M2 écrit $1 = -8n$)

M2 : Alors maintenant tu fais quoi ? (M2 regarde sa montre)

Tifanny : Je divise

M2 : Par ?

Tifanny : Un / (voyant M2 grimacer) huit / (M2 grimace encore et montre le signe moins du terme $-8n$) / moins huit

M2 : Pourquoi ? (M2 écrit les ostensifs -8)

Tifanny : Parce que c'est négatif

M2 : Et pourquoi tu divises ?

Tifanny : Pour avoir la solution (M2 écrit : $\frac{-1}{8} = n$)

M2 : Phrase réponse Tifanny ?

Tifanny : La solution de l'équation est / moins un / moins un sur huit (M2 écrit la phrase réponse) (**42 :44**)

Episode 9 : bilan de la correction de l'exercice 2 feuille 3

M2 (à l'élève Thomas) : Thomas j'ai déjà pris ton carnet t'as pas compris / André il fait comme si il y était / pareil pour son voisin de devant qui parle / Youri du coup / pour préciser // (à toute la classe) vous êtes au courant qu'il y aura un contrôle là-dessus ce sera votre dernière note du trimestre

Nadia : Hé / heureusement c'est trop facile

M2 : Ben là le problème c'est que certains pensent que c'est trop facile mais j'ai quand même pas mal d'idées / ce qui fait qu'une fois que j'aurai disparu en forme d'aide que monsieur M2 ne sera plus là pour répondre à vos petites questions et surtout à vous pousser en vous mettant des coups de pied dans les fesses quand vous faites des bêtises / je pense pas qu'il y aura la même chose / par exemple / je suis désolé pour toi Tifanny / ici si Tifanny l'avait fait toute seule / elle aurait été bloquée ici (M2 montre la première ligne de la dernière résolution d'équation effectuée, plus précisément le membre $4-(n+2)$) / je l'aurais aidée en contrôle / elle aurait réussi je pense jusqu'à ici après (M2 montre la ligne $3+7n=2-n$) / là elle aurait fait une erreur (M2 montre les ostensifs -2) elle aurait tourné en rond mais elle aurait fini par s'en sortir / on va dire / et si elle était arrivée là (M2 montre la ligne $1=-8n$) elle aurait oublié / que c'était pas / huit n mais moins huit n ce qui fait que toute sa solution aurait été / fausse / si vous trouvez que la solution d'un problème c'est de creuser dix mètres / c'est-à-dire moins dix mètres / et qu'en fait la solution c'était de construire un building de dix mètres je suis pas sûr que / la réponse va être la même vous êtes d'accord ? / c'était un peu flou mais on en reparlera / alors / l'exercice quatre nous le ferons plus tard parce que nous n'avons vraiment pas le temps (**44 :06**)

Voici l'exercice en question qui ne sera pas travaillé en classe :

Dans le tableau ci-dessous, on demande dans chaque cas si les deux équations sont équivalentes et de justifier la réponse.

Equations	Les deux équations sont-elles équivalentes ? (oui / non)	Justification
$4x=7$ $x=7-4$		
$3y=5$ $y=\frac{3}{5}$		
$x+3=0$ $x=3$		
$2t=5t+4$ $-3t=4$		
$3(a+1)=2a$ $3a+1=2a$		

Episode 10 : lancement d'un nouvel exercice (exercice 3 feuille 3)

M2 vidéoprojette une feuille d'exercices

M2 : L'exercice trois / (M2 regarde sa montre) euh s'il vous plaît / on a moins de dix minutes d'accord ? / moins de dix minutes / donc l'exercice un on le fait ensemble / et vous êtes productifs / hé

Voici l'énoncé de l'exercice :

Réécris chacune des phrases ci-dessous en utilisant une égalité mathématiques avec des lettres.

Exemple : « Marion a cinq ans de plus que Bill. »

(On appelle m l'âge de Marion et b l'âge de Bill.)

$\rightarrow \quad m = b + 5 \quad$ (ou bien : $\quad m - 5 = b \quad$)

1. Si on ajoute 3 ans à l'âge de Vincent, on obtient l'âge d'Assia.
   (On appelle v l'âge de Vincent et a l'âge d'Assia.)
2. Paul a six ans de moins que Charlotte.
   (On appelle p l'âge de Paul et c l'âge de Charles.)
3. Mustafa est quatre fois plus âgé qu'Ali.
   (On appelle m l'âge de Mustafa et a l'âge d'Ali.)

M2 : Hé / alors / donc exercice un de la feuille trois / et vous allez me dire si l'exercice un de la feuille trois on en a déjà fait de comme ça // est-ce que je vous ai déjà demandé de traduire des phrases en équation ?

Ryan : Non

M2 : Donc est-ce qu'on en a déjà fait Ryan ?

Ryan : Non

M2 : Et ben ça me plaît comme réponse / à ton avis où est-ce qu'on va en trouver d'autres d'exercices comme ça ?

Ryan : Au contrôle

Un élève : Sur la feuille trois

M2 : Au contrôle et sur la feuille trois surtout / alors / mais ça on découvrira ça quand on sera à l'exercice / (lisant la consigne) réécris chacune des phrases ci-dessous en utilisant une égalité mathématique avec des lettres / une égalité mathématique ça s'appelle aussi une ?

Des élèves : Equation

M2 : Merci / exemple / Marion a cinq ans de plus que Bill / on appelle m l'âge de Marion et b l'âge de Bill / vous êtes bien d'accord ?

Une élève, Tania : Il faut trouver le m ça vaut combien

M2 : Non / est-ce que je t'ai demandé de me résoudre l'équation ? / je t'ai juste demandé de m'en écrire une / Tania tu es d'accord que si je te dis que m c'est l'âge de Marion et b l'âge de Bill / si m / si m c'est l'âge de Marion

Nadia (à propos de l'exercice précédent) : Monsieur j'ai oublié d'écrire le trois

M2 : Et ben écris le quatre il est très bien aussi

Nadia : Mais non après ça le fait pas dans mon cahier

M2 : Et ben tu laisses une place et je te l'écrirai moi-même / (reprenant son explication avec Tania) d'accord ? / m a cinq ans de plus que Bill / donc c'est-à-dire que l'âge de m c'est cinq ans plus l'âge de b t'es d'accord ? / ou c'est l'âge de b plus cinq ans / t'es d'accord (il y a du bruit dans la salle) / Thomas / dis tais-toi le jour où tu participeras et où toi t'auras de bonnes idées / Tania t'as quel âge ?

Tania : Quatorze ans

M2 (se montrant lui-même) : Vingt-cinq / donc j'ai onze ans de plus que toi

Nadia : Vous n'avez pas vingt-six ans ?

M2 : Bientôt / me vieillis pas non plus trop vite / ton âge plus onze c'est le mien / donc t plus onze égal m / ça va là ? / et ben alors on est parti / maintenant si je vous dis si on ajoute trois ans à l'âge de Vincent on obtient l'âge d'Assia / on appelle v l'âge de Vincent et a l'âge d'Assia / écrivez-moi une équation / allez / vous avez trente secondes vous me posez une équation là allez hop hop hop

Un élève : Vous pouvez pas zoomer ?

M2 : Si je peux zoomer / d'abord vous écrivez après j'écouterai vos idées / écrire d'abord

Ryan : Je le fais dans ma tête

M2 : Non ben tu l'écris ta tête j'y crois pas elle va s'effacer dans deux secondes

Samuel : Dans ma tête

M2 : Non mais toi j'ai toute confiance en toi (**46 : 50**)

Episode 11 : recherche des élèves sur l'exercice (exercice 2 feuille 3)

M2 ne circule pas dans la classe et reste devant le tableau pendant la phase de recherche.

Un élève : (inaudible)

M2 : Dix / donc quand tu perds du temps pour faire des soustractions / au moins tu les réussis

Nadia : Vous monsieur vous êtes un zéro zéro

M2 : Je suis un quatre-vingt-dix

Nadia : Vous êtes un neuf zéro

M2 : Oui je suis un quatre-vingt-dix je suis pas un deux mille / hé hé hé hé hé hé

Un élève : Monsieur ?

M2 : Oui

L'élève : (inaudible)

M2 : Ah bon ? / bon ben déjà on corrige le premier

Un élève : (inaudible)

M2 : Tu m'expliques juste après tu m'expliques juste après / hé (**47 : 23**)

Episode 12 : correction de l'exercice 3 feuille 3

M2 : Comment est-ce qu'on appelle l'âge de Vincent ?

Un élève : Je sais pas

Un élève : v

M2 : v (M2 écrit v au tableau) // donc v c'est quoi par rapport à a / allez si on ajoute trois ans à l'âge de Vincent ajouter c'est quelle opération ?

Des élèves : Plus

Samuel : Une addition

Un élève : Plus trois est égal à a

M2 : (M2 complète : $v + 3 =$)

Nadia : Mais monsieur / on connaît pas la valeur de n

M2 : Samuel t'es collé une heure Samuel

Nadia : Monsieur

M2 : Attends / v plus trois est égal à ?

Un élève : a

M2 : Ben à a en effet (M2 complète : $v + 3 = a$) / parce que Vincent plus trois est égal l'âge d'Assia / Vincent plus trois ans égal l'âge d'Assia très bien

Nadia : Monsieur

M2 : Oui

Nadia : On connaît pas la valeur de n

M2 : Non / mais est-ce que je t'ai demandé / est-ce que je t'ai demandé / là-bas là ? (M2 se rend compte que Nadia parle de l'équation $3 + 7n = 4 - (n + 2)$ corrigée il y a plusieurs minutes) / non mais ça on verra plus tard

Nadia : (inaudible)

M2 (à Nadia) : Plus tard / à la fin de l'heure je prends trente secondes pour toi (M2 regarde sa montre et reprend la correction de l'exercice en cours) / et donc l'âge d'Assia si je veux l'âge de / pardon si je veux l'âge de Vincent et que j'ai l'âge d'Assia je fais quoi ? (M2 écrit $v = a$)

Un élève : a moins trois (M2 complète : $v = a - 3$)

M2 : Paul a six ans de moins que Charlotte / hé / Paul a six ans de moins que l'âge de Charlotte / Ryan

Ryan : p

M2 : Ouais

Ryan : Moins six / ah non / oui oui

M2 : p a six ans de moins que Charlotte / d'accord p moins six égal

Ryan : Egal euh c (M2 écrit $p - 6 = c$)

M2 : Et si je voulais une addition ? (M2 écrit $c +$
$= p$)

Ryan : (inaudible)

M2 (complète : $c + 6 = p$) : Tu t'es embrouillé //

Un élève : (inaudible)

M2 : Ah / ben j'ai fait une erreur de frappe / c'est le même / juste il a changé de sexe entre les deux // Mustafa est quatre fois plus âgé qu'Ali / on appelle m l'âge de Mustafa et a l'âge d'Ali / alors ?

Tania : a / a m plus a six

Un élève : (inaudible)

M2 : Non non non non non / (retour à la question précédente) c'est c plus six égal p / Charlotte elle est six ans moins âgée que

Un élève : Elle a quatorze ans

M2 : Par exemple / regarde / Paul a six ans / non / oh là là là là / (M2 efface une partie de ce qu'il a écrit) on va trop vite on écrit des bêtises

Un élève : Non mais si c'est bon monsieur

M2 : Et ben je veux qu'on le relise / Paul a six ans de moins que Charlotte tu es d'accord / donc si t'as l'âge de Charlotte imaginons j'ai l'âge de Charlotte (M2 écrit $c =$) et je veux l'âge de Paul (M2 complète : $c = p$) / j'enlève combien à l'âge de Charlotte pour avoir l'âge de Paul ?

Un élève : (inaudible)

M2 : (complète : $c - 6 = p$)

Un élève : Ben non

M2 : Charlotte / moins six / c'est égal à Paul

Un élève : Mais c'est qui le plus grand ?

M2 : Ben / c'est / c'est Charlotte / vu que Paul a six ans de moins

Ryan : Ah ouais

M2 : Et donc ici c'est p plus six égal c (M2 écrit $p + 6 = c$) / hé / hé hé hé / hé / Alice ?

Alice : a fois quatre égal m (M2 écrit : $a \times 4 = m$ puis juste en-dessous $\frac{m}{4} = a$)

Ryan : Bon allez c'est quand qu'on aura les DM ?

M2 : Tu n'auras pas le tien aujourd'hui

Nadia : De quoi ?

M2 : Un devoir maison mais il fait que m'en parler depuis tout à l'heure là donc tu l'auras pas et je vais te mettre zéro / montre-moi ce que t'as comme affaires sur / ah tout est fermé tu viens me voir à la fin de l'heure

Ryan : J'ai ma trousse

M2 : Ben ouais ben t'as ta trousse dessus tu prends pas la correction / et ben tu viendras me voir que tout est écrit exactement aux mêmes lignes que moi / et si tu te plantes d'un carreau t'es collé une heure ça te va ? / ça fait plusieurs fois que je te le dis j'en ai marre Ryan / (M2 regarde sa montre) euh il reste / il reste une minute je vous explique le problème un que vous allez devoir faire à la maison donc là je vous fais confiance parce que c'est un peu difficile pour des gens qu'ont pas écouté pendant une heure (**51 :26**)

Episode 13 : initiation du travail à faire à la maison pour la séance suivante

Voici l'énoncé du problème 1 que les élèves auront à faire chez eux :

Voici deux programmes de calcul.

PROGRAMME A	PROGRAMME B
Choisir un nombre Le multiplier par -3 Ajouter 7 au résultat	Choisir un nombre Lui ajouter 4 Multiplier le résultat par 3

Je teste chaque programme avec le même nombre de départ. Les résultats finaux que je trouve sont égaux. Quel nombre ai-je choisi au départ ?

Un élève : (inaudible)

M2 : Oui je te promets dès que ça sonne je cours vers toi pour t'expliquer / euh / problème un / (M2 lit l'énoncé) voici deux programmes de calcul le programme A et le programme B / on en a fait plein / on en a fait plein donc vous êtes capables / je teste chaque programme avec le même nombre de départ les résultats finaux que je trouve sont égaux / quel nombre ai-je choisi au départ ça vous rappelle pas quelque chose ?

Des élèves : Si

M2 : L'activité deux si je me trompe pas d'accord ? (l'activité 2 est un type de tâches « programmes de calcul à égaliser » qui avait été résolu à l'aide du logiciel

Thot en séance informatique) / c'est-à-dire que vous avez tous réussi super bien cette activité alors vous allez me réussir ce problème / je vous répète / une chose / je vous demande de créer quoi ?

Un élève : Une équation

M2 : Et je vous demande cette fois de la ?

Elèves : (inaudibles)

M2 : On est bien d'accord / comment est-ce que je sais comment résoudre une équation je vais regarder où ?

Des élèves : Dans le cahier de leçons

M2 : J'ai pas fait des exercices qui m'aident à créer une équation ?

Des élèves : Si

M2 : Qu'est-ce que je viens de faire là ? (M2 montre les derniers exercices corrigés au tableau, ceux portant sur la traduction) / créer des équations / qu'est-ce que j'ai fait dans l'activité deux ?

Des élèves : Créer des équations

M2 : donc je regarde / l'activité deux / la feuille trois / l'exercice un qu'on vient de faire / et je regarde aussi mon cours le grand deux / est-ce que c'est clair ?

Des élèves : Oui

M2 : On n'a pas le temps de le noter donc vous le gardez dans votre tête / pour vendredi / nous serons le trois / donc je vous ai déjà donné des exercices mais j'ai changé d'avis on les a faits aujourd'hui / ceux que je vous avais donnés on les a faits aujourd'hui donc vous en notez des nouveaux / exercice deux et problème un de l'exercice trois / c'est-à-dire / ceux qui m'écoutent pas ils vont faire toute la feuille ils vont se planter / vous faites l'exercice deux qui est la même chose que l'exercice un et vous ne faites que le problème un de l'exercice trois / l'exercice trois c'est quatre problèmes ou cinq je sais plus vous faites que le ?

Un élève : (inaudible)

M2 : Ouf (M2 a écrit au tableau : Vend 03/01 -> Exercices 2 et problème 1 de l'Exercice 3)

Transcription de la séance 6 de M2 sur les équations, découpage en épisodes

Episode 1 : Installation des élèves

Lorsque les élèves sont installés, M2 écrit au tableau « Exercice 2 ». Il ne vérifie pas que le travail à la maison est réalisé.

2 min 35

Episode 2 : Correction de l'exercice 2 de la feuille 3

M2 vidéoprojette l'énoncé de l'exercice, qui est le suivant :

(a) $8 + a = b$

La lettre a désigne l'âge d'Alexis et la lettre b l'âge de Brigitte.

Parmi les phrases ci-dessous, laquelle ou lesquelles correspondent à cette égalité ?

(1) Si on ajoute 8 ans à l'âge d'Alexis, on obtient l'âge de Brigitte.

(2) Alexis a 8 ans de plus que Brigitte.

(3) Brigitte a 8 ans de plus qu'Alexis.

(4) Si on soustrait 8 ans à l'âge de Brigitte, on obtient l'âge d'Alexis.

(b) $6 \times p = e$

La lettre e désigne le nombre d'élèves qu'il y a dans un collège et la lettre p le nombre de professeurs.

Parmi les phrases ci-dessous, laquelle ou lesquelles correspondent à cette égalité ?

(1) Il y a 6 fois plus de professeurs que d'élèves dans ce collège.

(2) Il y a 6 professeurs de plus que d'élèves dans ce collège.

(3) Il y a 6 fois plus d'élèves que de professeurs dans ce collège.

(4) Il y a 6 professeurs et 1 élève dans ce collège.

(c) $r + 5 = 3 \times s$

La lettre r désigne le prix d'un paquet de réglisses et la lettre s le prix d'une sucette.

Ecris une phrase qui correspond à cette égalité.

M2 : Pour ceux qui n'ont pas remarqué je suis en train de commencer là / Kévin tu sors vite ce qu'il faut là / feuilles affaires et tout / de quoi copier la correction / de quoi participer à la correction / Hélène / Hélène / est-ce que les exercices deux ici (M2 montre l'énoncé de l'exercice 2) ressemblent à des exercices qu'on a déjà faits ?

Hélène : Ouais

M2 : Auxquels ? // chut / Daouda bouge-toi

Hélène : Là franchement je sais pas (M2 affiche un air déçu) / je vous dis la vérité monsieur

M2 : Et si tu regardais juste au-dessus tu verrais quoi ?

Hélène : (inaudible)

M2 : Ben oui [...] // (lisant l'énoncé de la question (a)) huit plus a égal b la lettre a désigne l'âge d'Alexis et la lettre b désigne l'âge de Brigitte / qu'est-ce qu'elle désigne la lettre a ?

Elèves : L'âge d'Alexis

M2 : La / la lettre b ?

Elèves : L'âge de Brigitte

M2 : Merci / parmi les phrases ci-dessous laquelle ou lesquelles correspond à cette égalité d'accord ? / c'est-à-dire qu'il y a / quatre propositions (M2 montre les quatre propositions en question) il y en a / peut-être plusieurs qui correspondent / Samuel ton carnet maintenant / vite (*M2 s'occupe d'un élève qui bavarde*)

Un élève (ayant levé la main pour participer) : La une et la trois

M2 : La une (M2 montre la première proposition de la question (a)) si on ajoute huit ans à l'âge d'Alexis on obtient l'âge de Brigitte c'est ça ? / quelqu'un n'est pas d'accord ? (silence) / et ben alors on valide la une / une autre ?

L'élève (le même) : La trois

M2 : Brigitte a huit ans de plus qu'Alexis / t'es sûr ? (M2 valide cette réponse en l'écrivant au tableau)

L'élève : La quatre

M2 : Si on enlève huit ans à l'âge de Brigitte on obtient l'âge d'Alexis / mais / c'est pas moins huit c'est plus huit

L'élève : Oui mais comme elle a huit ans de plus (M2 sourit et montre ainsi son approbation)

Au tableau, pour la correction, M2 a écrit : « (a) 1, 3 et 4 »

M2 : (lit l'énoncé de la question (b) à voix haute puis demande :) Qu'est-ce qui diffère entre cette équation et la première qu'on vient de faire ? / alors ? / qu'est-ce qui diffère ?

Elève (le même qui a été interrogé précédemment) : (inaudible)

M2 : Oui mais qu'est-ce qui diffère ? Là j'ai huit plus a égal b là j'ai six fois p égal e / y a quoi de différent ? / Alice ?

Alice : La une

M2 : Tu penses que la phrase une est bonne ? / il y a six fois plus de professeurs que d'élèves dans ce collège / six fois p égal e six fois professeur égal élèves / ben si je suis d'accord / d'accord [...] / il y a six professeurs de plus que d'élèves dans ce collège / pourquoi ? / Aline ?

Aline : (inaudible)

M2 : Très bien / il y a six fois plus d'élèves que de professeurs dans ce collège

Elève : (inaudible)

Nadia : Ben oui monsieur / vous croyez qu'il y a sept cents profs ?

M2 : Hé / lisez-moi ça lisez-moi ça / c'est fait exprès que ce soit pas comme dans la vie d'accord ? (*En fait, M2 ne se rend pas compte pour l'instant qu'il s'est trompé, d'où le discours qu'il tient*)

Nadia : Ah d'accord

M2 : Ah / donc d'après l'équation qui est ici six fois p égal e me dit qu'il y a six fois plus d'élèves que de professeurs / non surtout que l'on vient de marquer que la une au-dessus traduisait bien ça et que la une (*à cet instant, le chercheur qui est dans la classe fait un signe discret à M2 pour lui signaler l'erreur*) / ah c'est pas ça / alors / il y a six professeurs et un élève dans ce collège

Marianne : C'est pas possible

M2 : Pourquoi c'est pas possible ?

Marianne : Parce que si p est égal un / et si e (inaudible)

M2 : Mais même / de / Marianne / ta réflexion est bonne mais / si e vaut un / forcément / est-ce que / non pardon / si e vaut six / ah / recommence ce que tu m'as dit parce que tu t'es trompé / tu m'as dit / ici

Marianne : (inaudible)

M2 : Donc tu fais six fois un égal un / c'est bon ça ? (M2 écrit au tableau « $6 \times 1 = 1$ ») / non (M2 efface le deuxième 1)

Samuel : Egal six

M2 : Alors ? / on vient d'essayer quelque chose là / six fois

Elève : (inaudible)

M2 : La un elle est bonne alors ? / la un elle est bonne ? / on essaie / on essaie avec un test / on teste / six fois p égal e on est d'accord ? / on a dit que ça voulait dire il y a six fois plus de professeurs que d'élèves dans ce collège / ah / il y a six fois plus de professeurs que d'élèves dans ce collège / moi je veux / trois élèves (M2 écrit au tableau « $e = 3$ ») combien y aura-t-il de professeurs d'après notre phrase ?

Elèves : Six

M2 : Donc il y en aura six fois ? / six fois ? / il y en aura dix-huit (M2 écrit « $6 \times 3 = 18$ ») / c'est ce qui est traduit ici là ? (M2 montre la première proposition) il y a six fois plus de professeurs que d'élèves dans ce collège ? / on est d'accord / mais euh / p égal quoi ? (M2 montre l'égalité $6 \times 3 = 18$)

Elèves : Six fois trois

M2 : Six fois trois et / six / c'est nous / c'est ce qu'on nous a donné et trois c'est quoi ?

Un élève : Trois c'est e

M2 : C'est les élèves / et l'élève c'est représenté par quelle inconnue ?

Elève : e

M2 : (M2 écrit « $p = 6 \times e$ ») Bon c'est clairement l'équation qu'il y a écrit là-bas non ?

Un élève : Oui / non / non

M2 : Ah / non

Samuel : Mais si c'est ça / mais si / monsieur / e est égal à six fois le nombre de professeurs

M2 : Ah / donc c'est laquelle ? (M2 montre les propositions (b) et (c))

Samuel : Je sais pas moi je les ai pas lues

M2 : Nadia t'avais donné la bonne réponse tout à l'heure

Nadia : C'est la trois

M2 : Est-ce que la trois elle est bonne Nadia ? / est-ce qu'il y a six fois plus d'élèves que de professeurs ? / ben oui

Samuel : Je le savais

M2 : Ben t'avais qu'à le dire plus tôt

Samuel : Je l'ai dit vous m'avez pas écouté

M2 : Ben peut-être que j'attendais une argumentation / comme mais monsieur il y a écrit élèves ici comme dans le membre de gauche il y a écrit six fois professeurs / ça veut bien dire que quand j'ai un élève j'ai six professeurs / euh / l'inverse / quand j'ai un professeur j'ai six élèves / euh / il y a six professeurs et un élève dans ce collège / on vient de dire que c'était ?

Marianne : Faux

M2 : Faux / euh / quand on a été un peu perdu on a utilisé quoi pour se retrouver ?

Elève : (inaudible)

M2 : Ouais mais on a remplacé les inconnues par quoi ?

Elève : Des lettres

M2 : Des nombres / des valeurs / on a testé // hé / chut / chut / (M2 lit la question suivante) la lettre r désigne le prix d'un paquet de réglisses et la lettre s le prix d'une sucette / écris une phrase qui correspond à cette égalité / allez

Hélène : Ben r s

M2 : Par quoi tu remplaces r Hélène ? / Hélène par quoi tu remplaces r ?

Hélène : Euh / par euh / ben je vois pas en fait

M2 : Le prix d'un paquet de réglisses

Hélène : Un paquet de réglisses

M2 : J'écris ça ? / alors un paquet de réglisses (M2 commence à écrire la phrase qu'il est en train d'énoncer)

Elève : (inaudible)

M2 : Ben non vu qu'on doit écrire une phrase / euh un paquet de réglisse [...] plus cinq / cinq quoi ? / cinq ? / je parle de quoi Hélène ? je parle de quoi moi ?

Hélène : De réglisse

M2 : Oui mais de quoi de réglisse ? / de son poids ?

Hélène : Non / la quantité qu'il y a

M2 : D'un quoi ? / quand t'achètes un paquet c'est quoi qui t'intéresse ?

Un autre élève : L'argent

M2 : Le prix / donc cinq ici ça peut être quoi ?

Hélène : Ben le prix

M2 : Le prix de quoi ?

Un élève : Du paquet

Hélène : Du paquet

M2 : Ah donc je mets le prix du paquet plus le prix du paquet et j'écris pas ça de la même façon ? / non mais hé / qu'est-ce que j'additionne ? / est-ce que j'additionne un prix et une masse ensemble ?

Samuel : Non mettez égal

M2 : Non on additionne ensemble des ? / si j'ai un prix de l'autre côté je vais avoir encore un ?

Samuel : Un prix

M2 : Donc un paquet de réglisse plus / un paquet de réglisse / et cinq euros / d'accord / donc je suis arrivé ici là / comment je peux traduire euh / ben une équation en fait avec des mots ?

Samuel : Est égal

M2 : Est égal / c'est tout ? / y a pas d'autres euh ?

Elève : Vous voulez quoi encore ?

M2 : Est égal ou sont égals ?

Elève : Sont égals

M2 : Je sais pas moi

Samuel : Si vous savez / écrivez sont égals

M2 : Sont égals ça pose pas de problème ? // sont égaux à ? / à quoi ?

Marianne : À trois euros

M2 : Non

Samuel : À le prix d'une sucette / au prix d'une sucette

Elève : Ah non parce que s c'est le prix de la sucette

M2 : Et j'ai combien de fois le prix de la sucette ?

Samuel : À trois fois le prix d'une sucette

M2 : Très bien à trois sucettes / ou à trois fois le prix d'une sucette comme vous voulez

La phrase finale écrite par M2 au tableau est : « Un paquet de réglisse et 5 *euros sont égaux à trois fois le prix d'une sucette ». M2 vérifie auprès de quelques élèves que ceux-ci prennent bien la correction.*

13 min 58

Episode 3 : Correction du problème 1 de l'exercice 3 de la feuille 3 et lancement du problème 2 du même exercice

M2 : Shiran / comme t'as fait l'exercice trois tu m'expliques // euh le problème un pardon

L'énoncé du problème est le suivant :

PROBLEME 1 : Voici deux programmes de calcul.

PROGRAMME A	PROGRAMME B
Choisir un nombre Le multiplier par -3 Ajouter 7 au résultat	Choisir un nombre Lui ajouter 4 Multiplier le résultat par 3

Je teste chaque programme avec le même nombre de départ. Les résultats finaux que je trouve sont égaux. Quel nombre ai-je choisi au départ ?

Shiran : (inaudible)

M2 : Le problème un de l'exercice trois t'as dû le faire

Shiran : Oui

M2 : Et ben tu m'expliques qu'est-ce que c'est / on connaît on connaît pas qu'est-ce qu'il se passe qu'est-ce qu'on me demande

Un autre élève : (inaudible)

M2 : Je demande à Shiran il y en a qu'un seul à ce que je sache / et ça me suffit / alors ? / chut chut / Shiran dépêche-toi

Shiran : (inaudible)

M2 : Non attends tends tends / on fait on fait / moi je sais pas ce qu'il faut faire moi je comprends rien là / tu m'expliques pas / si j'étais un élève je comprendrais rien du tout

Shiran : (inaudible)

M2 : Et on a déjà fait ça ?

Shiran : Ben oui

M2 : On a déjà fait ça où ? // chut / Shiran on a déjà fait ça où ? / on a déjà fait ça où ? / activité / feuille d'exercices / ça te dit rien ? // et donc la question tu l'as bien dit c'est je veux tester le même nombre au début pour obtenir le même nombre / à la fin le même résultat

Samuel : Monsieur j'ai dit à la fin

M2 : Shiran ?

Shiran : (inaudible) j'ai fait à la calculette (inaudible)

M2 : Ah donc tu as testé des valeurs numériques / tu t'es rendu compte que c'était un peu compliqué

Shiran : Après j'ai fait avec une lettre

M2 : Donc si tu as fait une lettre c'est que / tu as fait quoi ?

Shiran : J'ai créé une expression littérale

M2 : Tu as créé deux expressions littérales séparées par un signe égal / c'est une ?

Des élèves : Une équation

M2 : Donc tu as utilisé une équation pour faire quoi ?

Shiran : Pour le programme A

M2 : Pour ?

Shiran : Pour le programme A

M2 : Pour ?

Marianne : Non pour résoudre un problème

Shiran : Ah / pour résoudre un problème

M2 : Pour résoudre un problème // donne-moi ton équation

Shiran : a fois moins trois

Samuel : Pourquoi a ?

M2 : Parce qu'il a le droit

Shiran : Après euh / je fais moins trois plus sept (M2 écrit au tableau $a \times (-3) + 7 =$ puis, Shiran ne disant plus rien, M2 efface le signe $=$)

M2 : Deux fois par semaine / deux fois par semaine / non non Shiran / deux fois par semaine on en parle / Shiran quel est l'objectif de ce problème j'ai été trop vite t'as pas compris

Samuel : Monsieur / laissez-moi le faire comme ça on aura terminé plus vite

M2 : Quel est l'objectif du problème ?

Elève : De développer

M2 : T'as quelque chose à développer là ?

Autre élève : Résoudre

M2 : De résoudre quoi ?

Samuel : Trois plus trois

M2 : T'as une équation là ?

Shiran : Ben avec un seul programme

M2 : T'as un seul programme là ? / Samuel arrête / Samuel arrête / t'as un seul programme ?

Shiran : Non

M2 : Et le but c'est de mettre une seule valeur dans les deux programmes / la même valeur / et d'obtenir le même résultat à la fin t'es bien d'accord ? / et comment on traduit ça en mathématiques

Shiran : C'est un problème

M2 : Ne répète pas ce qu'il te dit parce que c'est faux / oui c'est un problème mais on a dit qu'on utilisait quoi ?

Elève : (inaudible)

M2 : Ouais / des lettres / juste une seule expression littérale ? / t'as combien de programmes ?

Shiran : Deux

M2 : Donc combien d'expressions littérales ?

Shiran : Deux

M2 : Et le but c'est que tu veux trouver quoi ? / la / valeur / pour que / ces deux programmes de calcul soient

Shiran : À peu près pareils

M2 : Egaux / et ben alors c'est quoi ça ? / un membre de gauche / un membre de droite / séparés par un signe égal

Samuel : Lis ton cours

Shiran : C'est une équation

M2 : Et tu m'as écrit une équation là ?

Samuel : Non t'as écrit une expression littérale

M2 : Samuel / il manque quoi pour avoir une équation

Un élève : Egal

Shiran : Egal

M2 : Et ben traduis-moi l'autre alors (M2 rajoute le signe = qu'il avait effacé) / égal ?

Samuel : Après parenthèses

M2 : Tais-toi

Shiran : (inaudible)

M2 : a plus quatre

Shiran : Fois trois

M2 : J'ai fini là ?

Elèves : Non

Samuel : Il manque les parenthèses

M2 : (à Shiran) Mais t'es sûr qu'il faut des parenthèses ? / je suis peut-être pas d'accord avec eux

Shiran : (inaudible ; M2 rajoute les parenthèses manquantes)

M2 : S'il vous plaît / hé / Manon / pourquoi est-ce qu'on a dû mettre des parenthèses dans le membre de droite ?

Manon : Sinon ça va changer l'ordre des priorités

M2 : Sinon ça lange / ça change pardon l'ordre des priorités / très bien / euh / est-ce qu'on a déjà vu ce genre d'équations ?

Samuel : Ouais

M2 : Chut / plusieurs fois / une fois deux fois trois fois ?

Elèves : Plusieurs fois

M2 : Plusieurs fois très bien / quelle est la première chose à faire dans ce cas ?

Samuel : La distributivité

M2 : William ? / et ben William t'es parti

William : On fait euh / moins trois

Samuel : Mais non pas moins trois on s'en moque [2] de moins trois / c'est de l'autre côté qu'on s'intéresse (pendant ce temps, M2 a écrit au tableau $-3a + 7 =$)

William : Trois fois a / euh / quatre a plus

M2 : Attends tends tends là / qu'est-ce que tu me fais ? qu'est-ce que tu me fais ? / le premier membre / j'ai été trop vite ?

Samuel : On s'en moque* du premier membre

William : Oui

M2 : Ben / j'ai juste enlevé la multiplication / je / parce que / on n'est pas obligé de l'écrire / j'ai simplifié l'écriture / est-ce qu'il y avait quelque chose à développer là ?

Elève : Non

M2 : Donc je développe dans quel membre ? / gauche ? droite ?

William : Droite

M2 : Droite / alors t'es parti

William : Euh / quatre a

Samuel (criant) : Mais non

M2 : Chut chut chut / William / depuis quand tu peux développer et me dire que a plus quatre c'est quatre a ?

Elève : Trois / trois a plus quatre

M2 (à l'élève qui vient de parler) : Tais-toi / tais-toi tais-toi tais-toi

William : Trois a plus quatre

M2 : Trois a plus ? / pourquoi est-ce que tu multiplies a par trois et pas quatre alors ? (M2 dessine des ostensifs flèches au-dessus de l'expression $(a + 4) \times 3$ pour symboliser l'action de développement)

Samuel : Trois fois a plus trois fois quatre

M2 (écrit au tableau $3a + 12$; les élèves s'étant dissipés, il tente de rétablir le calme) /// donc il y en a qui ne savent toujours pas développer / la distributivité simple / programme de cinquième / revue deux fois cette année / travaillée une

2. Samuel a été plus grossier en réalité.

bonne centaine de fois // un moment s'il y en a qui veulent rester sur le bord de la route y a pas de problème ils me le disent tout de suite je gagne deux semaines de leur présence direct [...] / Marianne tu me finis l'équation en m'expliquant qu'est-ce que c'est que résoudre une équation / Marianne quel est le but quand on résout une équation ?

Marianne : (inaudible

M2 : Et ben on est parti / hé

Marianne : Moins trois a (M2 écrit les ostensifs $-3a$ en rouge sous l'équation)

M2 : Hé / chacun sa méthode / et donc ?

Marianne : Egal moins six a / plus sept / égal douze

M2 : Quelle propriété as-tu utilisé ?

Marianne : La un

M2 : La un qui dit / que je peux additionner / ajouter ou enlever / additionner ou soustraire aux deux membres le même / nombre / est-ce que ça / change mon équation ? / d'un point de vue visuel oui / d'un point de vue calcul oui / mais est-ce que au final ça va être la même équation ? une équation semblable ? / oui ? / oui / alors ?

Marianne : Moins sept

M2 : Oui / Samuel arrête

Marianne : Ca fait moins six a est égal à sept (M2 écrit tout ceci au tableau) / puis on divise par moins six

M2 : Donc on divise par moins six / pourquoi ?

Marianne : Pour trouver la valeur de a

M2 : Quelle propriété utilises-tu ?

Marianne : La deux

M2 : Qui dit quoi ?

Marianne : (inaudible)

M2 : Ou diviser par le même nombre dans chaque membre / d'accord / c'est bon ? / j'ai pas fait une erreur de signe ? / j'ai pas fait d'erreur de signe ?

Samuel : Non

M2 : Quelle est la phrase réponse ?

Nadia : Euh / euh / c'est quoi déjà la question ?

M2 : Quelle est la solution de l'équation ?

Nadia : La solution de l'équation est a est égal moins cinq sur six

M2 : La solution de l'équation est moins cinq sixièmes très bien mais / le problème dire que là j'ai résolu une équation c'est très bien mais là c'était basé sur un problème

/ la question était quel nombre dois-je choisir pour obtenir le même résultat ? / quel nombre dois-je choisir pour obtenir le même résultat ? / quel nombre dois-je choisir pour obtenir le même résultat ?

Samuel : Moins cinq sixièmes

M2 : Moins cinq sixièmes

Nadia : Y a pas écrit moins cinq (inaudible)

M2 : Nadia Nadia / la solution de mon problème c'est moins cinq sixièmes / comme mon équation traduit mon problème / d'accord ?

Nadia : Mais monsieur pourquoi vous avez mis des a ?

M2 : Ben parce qu'on peut mettre des a des x des b des c des d des n

Nadia : Monsieur si vous faites ça / vous mettez ça le jour du contrôle / euh genre euh / je devrai écrire comme ça

M2 : Oui

Nadia : Je devrai faire a fois entre parenthèses moins trois plus sept

M2 : Oui ou quelque chose qui veut dire la même chose

Nadia : Mais comment vous avez fait ça ? (Samuel intervient et Nadia et lui commencent à se disputer. M2 rétablit le calme.)

M2 : Pourquoi j'ai fait ça ?

Nadia : Ouais

M2 : Ben parce que j'ai traduit les deux programmes

Nadia : Mais pourquoi vous avez mis / les fois les plus / les parenthèses les a

M2 : Et ben pendant que tout le monde fait le progra / le problème deux j'explique à Nadia / donc vous êtes partis sur le problème deux / vous avez cinq minutes / dans cinq minutes je corrige / si vous avez fini avant les cinq minutes vous faites le trois / si vous avez fini avant les cinq minutes vous faites le quatre / mais dans cinq minutes je corrige le deux / si je vois quelqu'un ne pas l'utiliser c'est pas bon / Marianne t'es en train de faire quoi avec ta calculatrice ?

Marianne : (inaudible)

M2 : Ah mais tu en as besoin ? / j'ai cru que tu avais une super idée et qu'on n'a pas fait / qui était de vérifier si moins cinq sixièmes était bien solution de mon équation / comment on fait pour vérifier que moins cinq sixièmes est bien solution de l'équation ? / on remplace quoi par moins cinq sixièmes ?

Elèves : a

M2 : a / et il va falloir qu'on trouve que le membre de gauche soit égal au membre de ?

Elèves : Droite

M2 : Très bien

26 min 38

Episode 4 : Recherche des élèves sur le problème 2 de l'exercice 3 de la feuille 3

L'énoncé du problème est le suivant :

PROBLEME 2 :

Pour quelle valeur de n l'expression $5n + 2$ est-elle égale à l'expression $2n + 9$?

M2 passe quelques minutes à donner des explications à l'élève Nadia. Puis il va voir quelques élèves qui l'interpellent à propos du problème 2 à résoudre.

32 min 56

Episode 5 : Correction du problème 2 de l'exercice 3 de la feuille 3

M2 : Pour quelle valeur de n cinq n plus deux est égale à l'expression deux n plus neuf ? / attention / questions annexes / hé / questions qui ne sont pas là / que je vais vous poser en plus pour voir si vous avez réfléchi trente secondes / s'il vous plaît / chut / chut / quel outil mathématiques avez-vous utilisé pour répondre à ce problème ? / pour résoudre ce problème ?

Elève : Ben c'était marqué / ce qu'il y a dessus / ben la consigne je sais pas

M2 : Quel outil mathématique / c'est quoi le nom du chapitre ?

Elèves : Equations

M2 : Très bien / tu as utilisé une équation / qu'est-ce qui t'a / qu'est-ce qui sous-entendait qu'il fallait utiliser une équation ? / hé / chut chut chut chut / expression d'accord / mais expression / cinq n plus deux c'est une expression c'est pas une équation

Elève : Mais y a marqué / c'est égal à l'expression

M2 : Donc / deux expressions qui sont égales tu t'es dit ah ça c'est une équation

Elève : Oui

M2 : C'est bien tu as appris ton cours / et dans celui-là ? (M2 montre le problème précédent avec les programmes de calcul) / est-ce qu'il y avait écrit aussi clairement est égal / ou faites une équation si vous voulez

Elève : Non ils ont dit

Elève : (inaudible)

M2 : Ah mais y avait toujours égal / égaux / cette notion [...] / maintenant tu fais le problème deux

Tifany (qui est interrogée) : Alors / cinq n plus deux est égal à deux n plus neuf

Shiran : Pourquoi elle ?

M2 : Shiran je t'ai interrogé en premier aujourd'hui donc je me demande même pourquoi tu râles [...]

Tifany : J'ai enlevé deux n à cinq n (M2 écrit au tableau les deux ostensifs $-2n$ sous chaque membre de l'équation ; puis il semble s'apercevoir que Tifany ne lui a pas dit de soustraire $2n$ au membre de droite)

M2 : Attends tends tends / j'ai soustrait deux n à deux n mais peut-être que je me trompe ?

Tifany : (inaudible)

M2 : Ah on enlève aux quoi ? / un seul membre ?

D'autres élèves : Aux deux membres

D'autres élèves : Ca fait trois n

Tifany : C'est moi qui parle / ça fait trois n plus deux / est égal à neuf (M2 écrit l'équation au fur et à mesure) // après j'ai soustrait deux à neuf des deux côtés

M2 : Des deux côtés ?

Tifany : Ben oui

M2 : On est obligé ?

Tifany : Ben oui

M2 : Sûr sûr sûr ? / si on fait pas des deux côtés c'est bon ?

Tifany : Non

M2 : Donc si on fait pas des deux côtés est-ce que monsieur M2 va être content ?

Elèves : Non

Tifany : Voilà / après ça donne trois n est égal à sept / et après on divise par (inaudible)

M2 : Je divise par combien ?

Tifany : Sept

M2 : Donc quand t'achètes trois baguettes de pain à sept euros pour connaître le prix d'une baguette de pain tu divises par sept ?

Tifany : Ouais

Elèves : Ben non par trois (M2 poursuit la résolution au tableau en même temps)

Nadia : Donc ça fait / ça fait / ça fait vingt-sept / ça fait vingt-quatre / euh vingt-et-un vingt-et-un (M2 écrit $n = \frac{7}{3}$ pendant que Nadia donne sa réponse)

M2 : Nadia / est-ce que c'est une multiplication ?

Nadia : Ben non parce que / mais trois divisé par sept ça fait vingt-et-un

M2 : Non non non non non / déjà c'est sept tiers / c'est tu / alors / tu as sept euros que tu partages avec deux amis tu as donc partagé sept euros en trois / tu vas avoir vingt-et-un euros toi ? / tu vas avoir vingt-et-un euros si tu fais ça ?

Nadia : Ben non

M2 : Ben c'est la même chose / si je partage sept en trois j'ai pas vingt-et-un

Nadia : Ben non je vais avoir quatre euros et eux deux euros / ben non / comment on va faire ? / parce qu'il y a quelqu'un qui va avoir trois euros / une autre deux et moi j'aurai un euro ça se fait pas

M2 : Et là t'as partagé ? je pense pas que t'aies partagé / Alessio ?

Alessio : J'ai pas compris pourquoi on divise par trois

M2 : Alessio si tu as trois baguettes de pain à sept euros / je veux le prix d'une baguette de pain

Alessio : (inaudible)

M2 : Oui sept tiers /

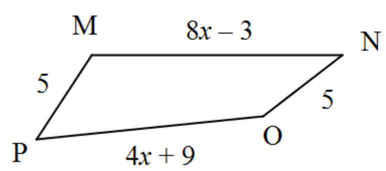
36 min 52

Episode 6 : Lancement du problème 3 de l'exercice 3 de la feuille 3

M2 : Hé (M2 regarde sa montre) / problème trois vous avez / cinq minutes encore / euh celui-là je vais vous laisser six minutes / hé / hé / euh / bizarrement le problème trois a une certaine importance / je sais pas pourquoi je dis ça

L'énoncé du problème est le suivant :

PROBLEME 3 : x désigne une longueur en cm. Pour quelle valeur de x le quadrilatère MNOP ci-dessous est-il un parallélogramme ?



37 min 12

Episode 7 : Recherche des élèves sur le problème 3

Pendant la recherche, M2 va voir trois élèves qui l'interpellent.

41 min 35

Episode 8 : Correction du problème 3 de l'exercice 3 de la feuille 3

M2 : Hé / chut / chut / regardez au tableau / je me permets juste de préciser une chose / alors déjà là-dessus je suis pas bon mais vous êtes pire que moi / on a encore oublié d'écrire la phrase réponse alors déjà que là-dessus j'oublie tout le temps si en plus je peux pas compter sur vous / on n'est vraiment pas sorti / alors / donc on fait quoi chaque fois qu'on résout une équation on ?

Elève : Phrase réponse

M2 : Si j'oublie la prochaine fois vous me le dites comme ça j'oublierai plus [...] / Delila tu me fais le problème trois / chut / chut / déjà / déjà / tiens tu me feras le problème trois mais je vais questionner Samuel sur certaines choses avant / Samuel / euh / en quoi ce problème est différent des deux autres qu'on a faits avant ? / du programme et du problème deux

Samuel : Ben parce que ça c'est une figure

M2 : Donc c'est de la quoi ? / quand on trace c'est de la ?

Daouda : Géométrie

M2 : Ouais c'est de la géométrie donc on peut résoudre des problèmes de géométrie grâce aux équations / ok d'accord / euh / hé / hé hé / hé hé / chut chut / chut / euh et ensuite / ensuite euh / chut / qu'est-ce qu'il y a d'autre de différent Samuel ? / on avait insisté sur quels mots dans le problème un et le problème deux ? / des mots qui sous-entendaient une équation / égal / est-ce qu'ici il y a à un seul moment le mot égal Samuel ?

Samuel : Non

M2 : Non / mais / euh / qu'est-ce qui sous-entend cette égalité ? Samuel toujours

Samuel : Le parallélogramme

M2 : Et alors ?

Samuel : C'est un parallélogramme donc ses côtés en haut en bas ils sont égaux

M2 : Très bien une chose / une chose / euh Samuel / si tu ne connaissais pas tes propriétés sur les parallélogrammes aurais-tu pu résoudre ce problème ? / aurais-tu pu ?

Samuel : Euh non

M2 : Très bien / hé / Djibril / du coup on arrive un peu au moment que je pointais du doigt depuis un moment / si on a des lacunes on le paie / c'est-à-dire que là quelqu'un qui ne connaissait pas les propriétés du parallélogramme ne peut pas avancer / même s'il sait résoudre des équations / si quelqu'un ne sait pas faire ça / et ben tant pis pour lui il ne peut avoir aucun point / donc Delila qu'as-tu fait ?

Delila : Euh j'ai fait huit x moins trois est égal quatre x plus neuf

M2 : Pourquoi ? / pourquoi tu écris cette équation ?

Samuel : Elle a fait au hasard monsieur

M2 : Ben si elle a fait au hasard elle a de la chance et c'est très bien pour elle / chut / chut / pourquoi ? / qu'est-ce que Samuel vient de dire sur les parallélogrammes ? / chut / Delila ?

Delila : (inaudible)

M2 : Donc tu as écrit au hasard / parce que tu as vu que ça ça ressemblait à une expression littérale et ça aussi (M2 montre les deux expressions littérales $8x - 3$ et $4x - 9$ de la figure) / mais si je t'avais demandé de me calculer le périmètre ? / tu aurais été perdue puisque dans le périmètre il y avait aussi cinq qui comptait / donc attention attention

Elève : (inaudible) ils sont égaux

M2 : Là et là ? (M2 montre les côtés de longueur 5 du quadrilatère) / euh on le voit pas c'est écrit mais excuse-moi mais ça et ça me dire que ça fait le même nombre de centimètres alors que ça a été fait exprès

Elève : (inaudible)

M2 : Oui comme c'est écrit on le voit on le sait

Elève : Donc ça fait huit x moins trois (inaudible)

M2 : Ah / Delila / est-ce que tu as eu du mal à choisir l'inconnue ? / est-ce que tu as dû choisir l'inconnue ?

Delila : Ben l'inconnue ça doit être x

M2 : Pourquoi l'inconnue ça doit être x ? / est-ce qu'on t'a laissé le choix ? / est-ce que dans le problème deux on te laissait le choix celui-là ?

Delila : Non

M2 : Est-ce que dans le problème un on t'a laissé le choix ?

Delila : Non

M2 : Shiran il a pas choisi a ? / moi j'aurais pu choisir autre chose / c'est marrant on est en train de pointer du doigt comment faire pour différents programmes et vous vous êtes en train de (M2 mime avec sa main une bouche qui parle) / tu me résous celui-là Delila ? (M2 regarde sa montre) / allez

Delila : Euh moins quatre x

M2 : Pourquoi ? (M2 écrit les ostensifs) / pourquoi ? / pourquoi ? / quel est le but

Delila : Et ben / comme il y a x dans les deux

M2 : On veut faire ? / disparaître un terme en x d'une ?

Delila : D'une équation

M2 : D'un membre / pardon ma faute / d'un membre / allez

Delila : Après je fais quatre x moins trois

M2 : Qui est égal à ?

Delila : Neuf (M2 écrit l'équation correspondante)

M2 : Chut / chut chut Kevin / chut chut / je t'écoute encore ?

Delila : Après je fais moins trois (M2 écrit les ostensifs -3)

M2 : Kevin / pourquoi Delila fait moins trois ?

Kevin : Parce que / euh / trois c'est le plus petit (les élèves s'agitent en entendant cette réponse)

M2 : Hé non non non / oui / oui / oui / oui / oui // oui / oui / oui / d'accord / Kevin / Kevin / oui d'accord mais / pourquoi ? / quel est le but ?

Samuel : Moins trois moins trois ça fait moins six

M2 : Delila / Kevin a trouvé / moins trois moins trois ça fait moins six donc je vais l'enlever moins trois là ? / chut chut chut chut chut

Elève : Plus

M2 : Ah (M2 transforme les ostensifs -3 en $+3$) // il reste quoi ici ? / il reste quoi ici ? (M2 montre le terme $4x$)

Delila : (inaudible)

M2 : Tu les as pas enlevés les x / neuf plus trois ça donne ? / neuf plus trois ?

Delila : (inaudible)

M2 : Neuf plus trois ? (M2 écrit la réponse) / trop de bruit [...] / Delila je finis comment ? / (à Tifany qui lève la main) et après je t'interroge / après je t'interroge / après on quoi ?

Delila : (inaudible ou silencieuse)

M2 : Delila / regarde ici // Delila / quatre baguettes de pain coûtent douze euros comment tu fais pour connaître le prix d'une baguette de pain ?

Nadia : Trois / trois fois quatre douze

M2 : Une baguette de pain égale trois euros parce que tu as divisé par ? (M2 écrit les ostensifs $\div 4$ avant d'attendre l'éventuelle réponse de Delila) / ok ? / Tifany ta question ? / (è Samuel qui lève la main) et après je t'interroge

Tifany : Pourquoi c'est plus alors que c'est moins ? (elle montre les ostensifs +3)

M2 : Moins trois / si je veux enlever moins trois / tu es d'accord que / je veux l'enlever / je veux retourner à zéro / mon but c'est de retourner vers zéro / quand j'ai quelque chose de positif comme cinq comme quatre comme huit / il faut enlever pour retourner vers zéro / mais quand j'ai quelque chose de négatif / s'il fait moins trois degrés / comment tu fais pour retourner à moins trois degrés ? / tu enlèves ou tu rajoutes des degrés ? / Tifany tu enlèves ou tu rajoutes ?

Tifany : Je rajoute

M2 : Ben c'est ce que j'ai fait

Tifany : Je comprends pas

M2 : Qu'est-ce que tu comprends pas ?

Tifany : Je sais pas (inaudible)

M2 : Tifany / Tifany / si tu veux / si tu veux supprimer d'un des membres quelque chose de négatif / il faut que tu rajoutes quelque chose de positif / si tu veux supprimer d'un des membres quelque chose de positif il faut que tu ajoutes quelque chose de négatif / c'est aussi simple / ah je veux faire disparaître moins trois et ben donc il faut faire plus trois / euh pour que la figure soit un parallélogramme (M2 écrit en même temps qu'il l'énonce cette phrase réponse) / il faut / que x égal / trois

Elève : C'est ça la phrase ?

M2 : Ben oui / vu que / si je dis que la solution de l'équation est égale à trois / est-ce que je réponds vraiment à mon problème ?

Samuel : Monsieur

M2 : Ouais

Samuel : Pour revenir à l'équation tout en haut / (inaudible mais il semble vouloir vérifier que 3 est bien la solution de l'équation)

M2 : Et ben huit fois trois ?

Samuel : Vingt-quatre

M2 : Moins trois

Samuel : Vingt-deux

M2 : Quatre fois trois ?

Samuel : Douze

M2 : Plus neuf ?

Samuel : Vingt-deux

M2 : Est-ce qu'on trouve la même chose Samuel ?

Samuel : Ouais

M2 : Est-ce qu'on a bon Samuel ?

Samuel : Ouais

M2 : Hé / le réflexe entre vérifier sa réponse / Nadia

Nadia : Quoi ?

M2 : Et passer à autre chose sans vérifier / c'est ce qui permet de passer de dix au brevet à quatorze

Nadia : Mais monsieur pourquoi vous êtes possédé ?

M2 : Je suis pas possédé je suis énervé parce qu'on n'avance pas / je suis possédé par mon envie de te voir réussir et toi ? / t'as une envie quelconque ?

Nadia : Non

M2 : Et ben voilà c'est bien le problème // vu l'heure on n'aura pas le temps de faire le problème numéro quatre ou le problème numéro cinq / ce qui va se passer / c'est que je vais vous donner la leçon à coller / grand trois / je ne fais que le dire à l'oral / grand trois / comment résoudre un problème grâce aux équations ? / comment (voyant que les élèves ne notent rien) vous copiez pas là le grand trois dans le cahier de leçons ? / comment résoudre un problème grâce aux équations (M2 distribue la leçon) /// je réécris le grand trois cet après-midi / allez en cours

53 min 19

Sujet de l'évaluation sommative sur les équations données aux élèves par l'enseignant M2

Devoir surveillé de mathématiques n°8		
Nom et prénom:	**Appréciation:**	**Note:**
Exercices pour s'améliorer:		

Connaissances et compétences	Acquises	Non Acquises
Connaître le vocabulaire d'une équation		
Vérifier qu'un nombre est solution d'une équation		
Résoudre une équation		
Utiliser les équations pour résoudre un problème		
Utiliser la double distributivité		

Exercice 1 *(3 points)*

1] Entoure en bleu l'inconnu de l'équation ci-dessous :	2] Entoure en rouge le membre de droite de l'équation ci-dessous :	3] Entoure en vert la solution de l'équation ci-dessous :
$8 \times x - 3 = 6 + 3 \times x$	$8 \times x - 3 = 6 + 3 \times x$	$8 \times x - 3 = 6 + 3 \times x$ $5 \times x - 3 = 6$ $5 \times x = 9$ $x = \frac{9}{5}$

Exercice 2 **Résoudre les équations ci-dessous en détaillant les étapes :** *(5 points)*

$5 \times x + 8 = 3 \times x + 2$	$8x - 4 = -3x + 9$	$3 \times (x + 5) = x + 3$

Exercice 3 *(2 points)*

1] Le nombre 2 est-il solution de l'équation $3x + 5 = 7x - 1$? Justifie.

2] Sam a résolu l'équation $2x + 9 = 3 - 4x$ et a trouvé -1 comme solution. A-t-il raison ? Justifie.

Exercice 4 *(4 points)*

Voici deux programmes de calcul :

PROGRAMME A	PROGRAMME B
● Choisir un nombre ● Le multiplier par 11 ● Soustraire 4 au résultat	● Choisir un nombre ● Lui ajouter 2 ● Multiplier le résultat par 6

Alice et Benjamin choisissent le même nombre de départ.

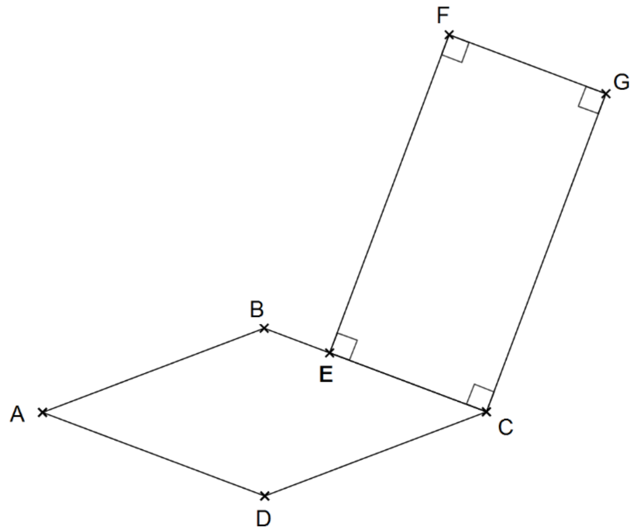
Alice teste le programme A et Benjamin teste le programme B.

Alice et Benjamin trouvent le même résultat final.

Quel nombre de départ ont-ils choisi ? Justifie ta réponse.

Exercice 5 *(4 points)*

La figure ci-contre est composée d'un losange ABCD et d'un rectangle GFCE (la figure n'est pas en grandeur réelle).



On sait que BC = 14 cm et que FC = 20 cm
Le point E se déplace le long du segment [BC].

On se demande où placer le point E sur le segment [BC] pour que le losange et le rectangle aient le même périmètre.

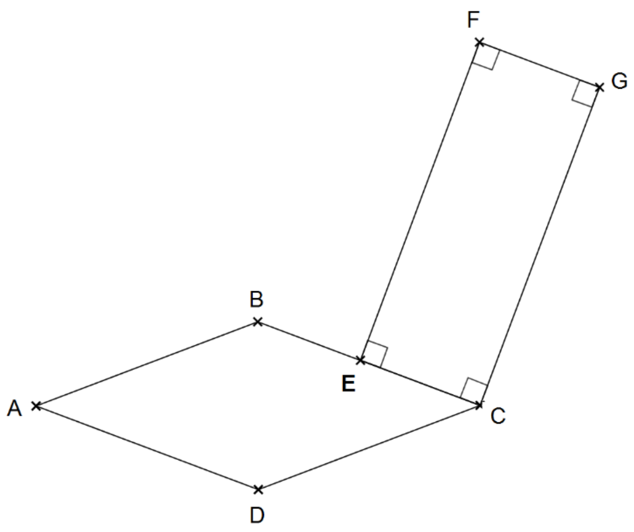
1] Calcule le périmètre du losange ABCD :

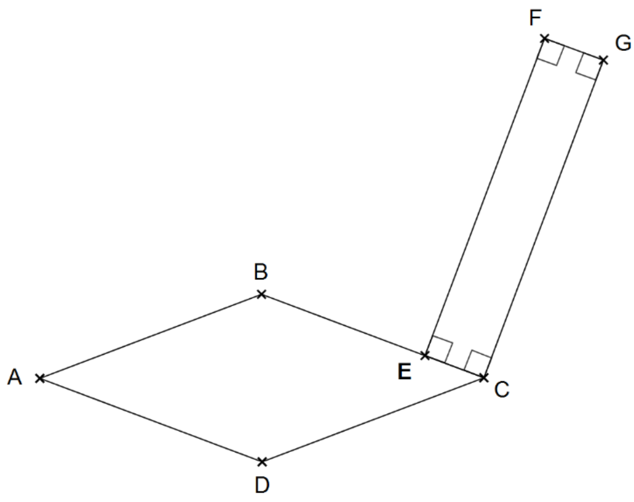
2] On pose EC = x. Exprime le périmètre du rectangle EFGC en fonction de x :

3] Ecris une équation qui correspond au problème et résous-la :

4] Où doit-on placer le point E sur le segment [BC] pour que le losange et le rectangle aient le même périmètre ?

Aide : voici des copies d'écran du logiciel Geogebra qui montrent d'autres configurations de la figure quand le point E se déplace sur le segment [BC].





Exercice 6 *(2 points)*

- $(5u + 1) \times (2 - 3u)$ **Peut-on développer cette expression ? Oui / Non**

Si oui, développe-la :

- $(5u \times 1) + (2 - 3u)$ **Peut-on développer cette expression ? Oui / Non**

Si oui, développe-la :

Documents distribués par l'enseignant M2 aux élèves pour les aider à préparer en autonomie l'évaluation sommative sur les équations

FICHE POUR PREPARER LE CONTROLE SUR LES EQUATIONS

➢ Je revois la leçon

	Oui	Non
J'ai relu attentivement ma leçon une fois en entier		Je relis ma leçon.
Je connais le vocabulaire des équations : ● équation ● inconnue ● solution ● résoudre une équation		J'apprends le vocabulaire. Sur des exemples d'équations, je m'entraîne à utiliser ce vocabulaire.
Je connais la méthode pour résoudre une équation : ● les transformations à faire ● les propriétés à utiliser ● le but de chaque transformation		J'applique la méthode en résolvant des équations (par exemple ceux de mon cahier d'exercices).
Je connais la méthode pour traduire un problème par une équation.		J'applique la méthode sur des exemples de problèmes (par exemple ceux de mon cahier d'exercices).

Quand j'ai coché toute la colonne « Oui », cela signifie que j'ai bien révisé ma leçon.

➢ Je revois les exercices

	Oui	Non
J'ai repéré les différents types d'exercices qu'on a faits sur les équations durant cette séquence.		Je cherche les types d'exercices dans mon cahier d'exercices et les exemples de la leçon.
Je refais un exercice de chaque type pour m'entraîner sans regarder la correction. Quand j'ai fini, je regarde la correction pour vérifier mes réponses. Je réussis à faire chaque type d'exercices.		Pour chaque type d'exercices où je me suis trompé, je cherche un exercice du même type dans mon cahier d'exercices et je le refais. Je regarde aussi dans ma leçon les exemples du même type pour m'aider.

Quand j'ai coché toute la colonne « Oui », cela signifie que j'ai bien révisé mes exercices.

EXERCICES TYPES SUR LES EQUATIONS

Exercice 1

a) Voici une équation : $2x + 6 = 7x - 4$
Dire si les nombres suivants sont solutions de cette équation : • 0 • -2 • 2

b) Voici une équation : $4a + 1 = 2(a - 5)$
Un élève a résolu cette équation et trouvé $-5{,}5$ comme solution. Vérifie s'il s'est trompé ou non.

Exercice 2

Résoudre les deux équations suivantes : • $6x - 1 = 2x + 1$ • $-8x = 2(1 + x)$

Exercice 3

Voici deux programmes de calcul :

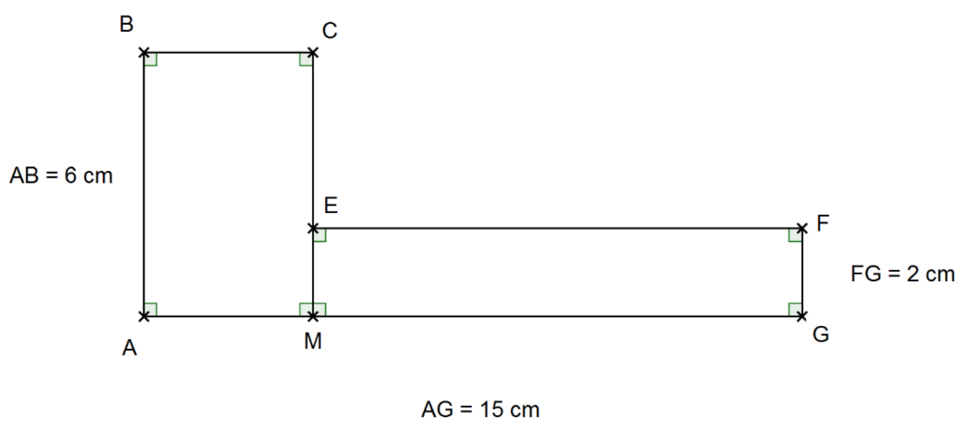
PROGRAMME A	PROGRAMME B
• Choisir un nombre • Le multiplier par 5 • Soustraire 2 au résultat	• Choisir un nombre • Lui ajouter 1 • Multiplier le résultat par 3

Ali et Baya choisissent le même nombre de départ.
Ali teste le programme A et Baya teste le programme B.
Ali et Baya trouvent le même résultat final.

Quel nombre de départ ont-ils choisi ? Justifie ta réponse.

Exercice 4

La figure ci-dessous est composée de deux rectangles ABCM et EFGM (la figure n'est pas en grandeur réelle).

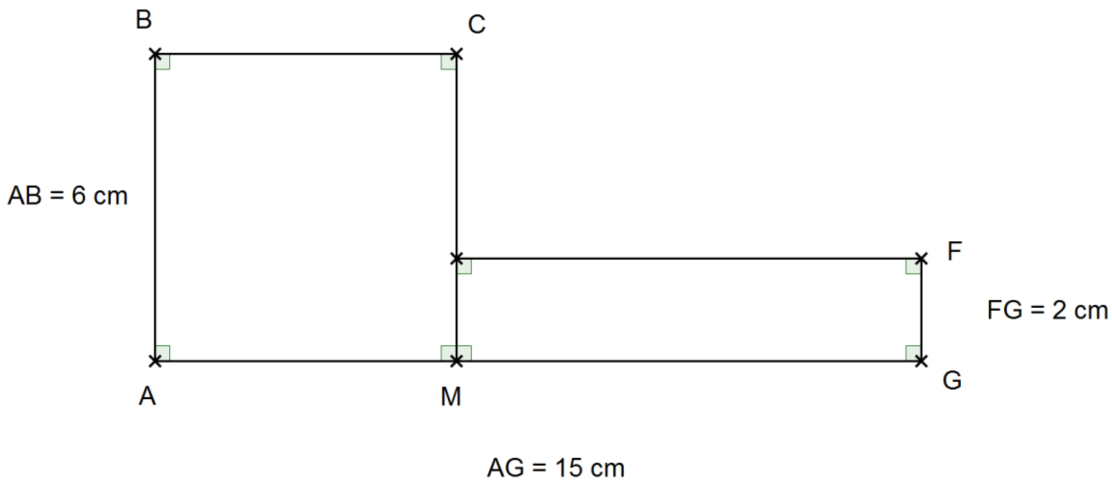


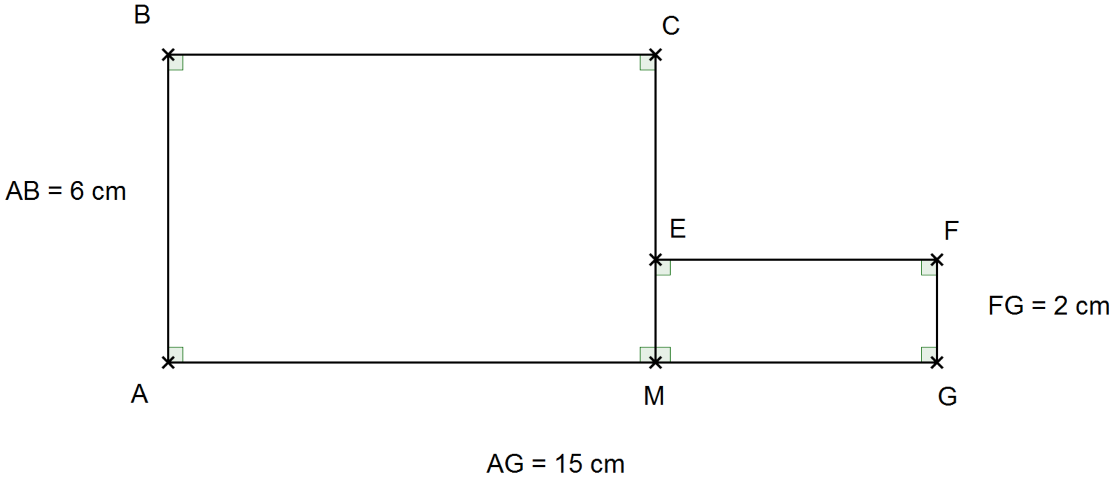
On sait que AG = 15 cm ; AB = 6 cm ; FG = 2 cm.
Le point M se déplace le long du segment [AG].

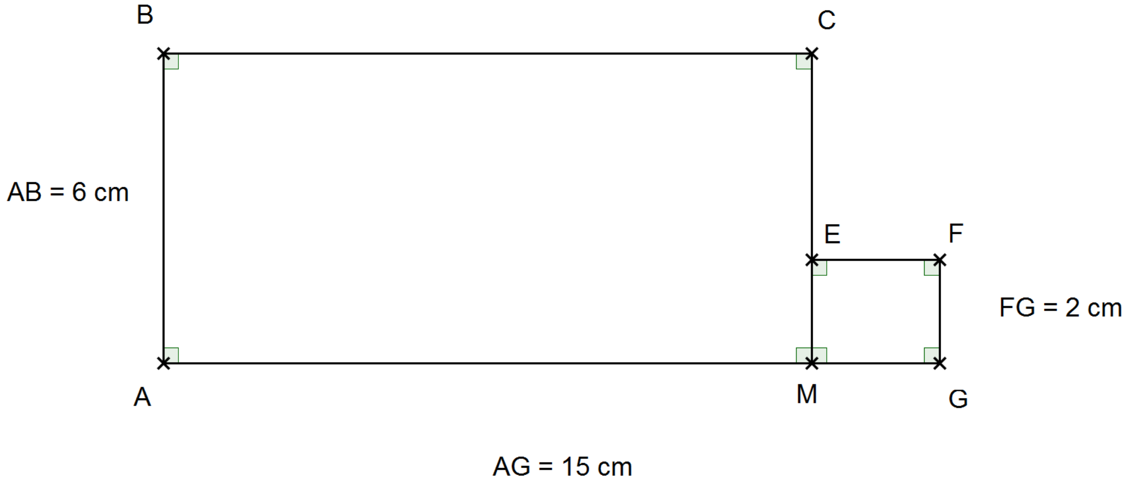
Où doit-on placer le point M sur le segment [AG] pour que les deux rectangles aient le même périmètre ?

Aide :

Grâce au logiciel GeoGebra, on a représenté ci-dessous plusieurs configurations des rectangles suivant la position du point M.







CORRECTION DES EXERCICES TYPES SUR LES EQUATIONS

Correction de l'exercice 1

Point méthode

Cet exercice est du type « Tester si un nombre est solution d'une équation ».
Pour réussir ce type d'exercices, il faut remplacer l'inconnue par le nombre proposé et regarder si on obtient une égalité vraie ou fausse. Si l'égalité est vraie, alors le nombre proposé est solution.
L'exercice 7 de la feuille 1 est du même type : regarde comment il a été corrigé pour t'aider.

a) On remplace x par les nombres proposés dans l'équation $2x+6=7x-4$
puis on regarde si on obtient une égalité vraie.

Si on remplace x par 0 alors l'égalité devient $2\times 0+6=7\times 0-4$ c'est-à-dire $6=-4$ qui est une égalité fausse donc 0 n'est pas solution de l'équation.
Si on remplace x par -2, on trouve encore une égalité fausse : $2=-18$ donc -2 n'est pas solution de l'équation.
Si on remplace x par 2, on trouve une égalité vraie : $10=10$ donc 2 est la solution de l'équation.

b) Pour vérifier si l'élève s'est trompé ou non, on remplace la lettre a par le nombre $-5{,}5$ et on regarde si on obtient une égalité vraie ou fausse.
Remplaçons a par $-5{,}5$ dans l'équation : $4\times(-5{,}5)+1=2\times(-5{,}5-5)$ c'est-à-dire $-21=-21$ qui est une égalité vraie, donc l'élève ne s'est pas trompé.

Correction de l'exercice 2

Point méthode

Cet exercice est du type « Résoudre une équation ».
Pour réussir ce type d'exercices, il faut utiliser les propriétés de conservation de l'égalité et parfois la propriété de la distributivité (pour obtenir une équation sans expression avec parenthèses).
Tous les exercices de la feuille 2 sont du même type : regarde comment ils ont été corrigés pour t'aider.

- $6x-1=2x+1$

$\quad\mathbf{+1}\qquad\mathbf{+1}$ (Propriété P1 : on conserve l'égalité car on ajoute le même nombre à chaque membre. On élimine ainsi les termes sans x dans le membre de gauche.)

$6x=2x+2$

$\boldsymbol{-2x}\qquad\boldsymbol{-2x}$ (Propriété P1 : on conserve l'égalité car on ajoute le même nombre à chaque membre. On élimine ainsi les termes en x dans le membre de droite.)

$4x=2$

$\div\mathbf{4}\qquad\div\mathbf{4}$ (Propriété P2 : on conserve l'égalité car on divise chaque membre par le même nombre. On isole ainsi x dans le membre de gauche.)

$x=\frac{2}{4}$

$x=\frac{1}{2}$ (On simplifie la fraction finale si on le peut.)

La solution de l'équation est $\frac{1}{2}$ (ou 0,5).

- $-8x=2(1+x)$

$-8x=2\times 1+2\times x$ (Propriété de la distributivité : on distribue le facteur 2 dans le membre de droite pour obtenir une équation sans parenthèses.)

$-8x=2+2x$

$\boldsymbol{-2x}\qquad\boldsymbol{-2x}$

$-10x=2$ (Comme précédemment, on utiliser les propriétés de conservation de l'égalité.)

$\div(\mathbf{-10})\qquad\div(\mathbf{-10})$

$x=\frac{2}{-10}$

$x=\frac{-1}{5}$ La solution de l'équation est $\frac{-1}{5}$ (ou $-0{,}2$)

Correction de l'exercice 3

Point méthode

Cet exercice est du type « Résoudre un problème grâce à une équation. »
Pour réussir ce type d'exercices, il faut : chercher une égalité, choisir l'inconnue et la désigner par une lettre, écrire l'équation qui traduit le problème, résoudre cette équation et répondre au problème.
Les problèmes dans la feuille 3 sont du même type : regarde comment ils ont été corrigés pour t'aider.

On appelle n le nombre choisi au départ par Ali et Baya (ils choisissent le même nombre de départ donc il n'y a pas besoin d'utiliser une deuxième lettre).
L'expression correspondant au programme A est $5n - 2$.
L'expression correspondant au programme B est $(n + 1) \times 3$. (Les parenthèses sont nécessaires pour respecter les priorités opératoires.)
L'équation qui traduit le problème est $5n - 2 = (n + 1) \times 3$ (car Ali et Baya trouvent le même résultat final).
On résout l'équation et on trouve $\frac{5}{2}$ (ou 2,5) comme solution.

Correction de l'exercice 4

Cet exercice est encore du type « Résoudre un problème grâce à une équation » sauf qu'il s'agit ici d'un problème de géométrie.

On applique la méthode du grand 3) de la leçon :
● On cherche l'égalité. Ici, on veut que les périmètres des deux rectangles soient **égaux**.
● On choisit l'inconnue. Ici, on cherche la position du point M sur le segment [AG]. On peut prendre la longueur AM ou la longueur MG comme inconnue. Par exemple, prenons AM comme inconnue. On pose AM = x.
● Le périmètre de ABCM est égal à $6 + x + 6 + x$ (la longueur du contour) c'est-à-dire $12 + 2x$.
De même, le périmètre de EFGM est égal à $(15 - x) + 2 + (15 - x) + 2$ c'est-à-dire $34 - 2x$.
● On veut que les deux périmètres soient égaux donc l'équation qui traduit le problème est $12 + 2x = 34 - 2x$.
● On résout cette équation et on trouve que 5,5 est la solution.
● On répond au problème : pour que les rectangles aient le même périmètre, il faut que AM = 5,5 cm.