REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE
UNION- DISCIPLINE- TRAVAIL

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

THÈSE DE DOCTORAT

présentée à l'UFR de Mathématiques et Informatique
de l'Université de Cocody Abidjan
pour obtenir le grade de

DOCTEUR ÈS-SCIENCES

Spécialité : **Mathématiques Appliquées**
Option : **Analyse Numérique et E. D. P.**

Par : **AHOULOU Kacou Rémy**
Sous la direction du Prof. **ADJE Assohoun**

Sujet :

METHODE DES SOUS ET DES SUR-SOLUTIONS DANS L'ETUDE DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES MULTIVOQUES DU SECOND ORDRE

Soutenue publiquement le 28 novembre 2007

Jury :

Président :	Pr. Edmond **FEDIDA**	Professeur Titulaire à l'Université de Cocody
Membres :	Pr. **N'ZI** Modeste	Professeur Titulaire à l'Université de Cocody
	Pr. **ADJE** Assohoun	Maître de Conférences à l'Université de Cocody
	Pr. **AKMEL** De Godefroy	Maître de Conférences à l'Université de Cocody
	Pr. **DIALLO** Hassimiou	Maître de Conférences à l'Ecole Normale Supérieure d'Abidjan

THÈSE DE DOCTORAT
DE MATHÉMATIQUES

SUJET

Méthode des sous et des sur-solutions dans l'étude des équations différentielles multivoques du second ordre

Présentée le 28 novembre 2007

par AHOULOU Kacou Rémy

Sous la Direction du Professeur ADJE Assohoun

Université de Cocody - Abidjan

U.F.R de Mathématiques et Informatique

Spécialité : Mathématiques Appliquées et Informatique

Option : EDP et Analyse Numérique

Table des matières

A la mémoire de

EKRA AHOULOU

et de

AHOULOU YONG KYUMO SARAH

Remerciements

Le Professeur Assohoun ADJE, directeur de cette thèse, m'a aidé de sa profonde expérience scientifique. Sa disponibilité, son enthousiasme, sa rigueur et ses conseils m'ont été d'un soutien sans faille pour la réussite de ce travail. Qu'il veuille trouver ici l'expression de ma profonde gratitude.

Je voudrais exprimer mes vifs remerciements au Professeur Edmond FEDIDA qui a bien voulu présider le jury.

Je suis également reconnaissant aux professeurs Modeste N'ZI , De Godefroy AKMEL et Hassimou DIALLO d'avoir accepté de participer au jury.

Ma reconnaissance va également à l'endroit du Professeur Jérôme ADOU et du Docteur Adama COULIBALY pour leurs conseils, remarques et observations.

Je remercie l'ensemble du personnel de l'U.F.R. de Mathématiques et Informatique de l'Université de Cocody et tous les amis du troisième cycle pour leur soutien à divers niveaux.

Mes parents et mon épouse ABA Brigitte, par leur soutien affectif, matériel et financier, ont été un appui précieux pour la réussite de ce travail. Aussi, à eux et à tous ceux qui, de près ou de loin, y ont contribué, j'adresse mes remerciements sincères.

Introduction

Nous pouvons situer le début d'une théorie systématique pour la résolution des équations différentielles ordinaires non linéaires dans une note aux comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris publiée en 1883 par Poincaré et intitulée "Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps". Il s'agit d'un article de mécanique céleste d'une page ne contenant aucune formule dont une version détaillée paraîtra en 1884, sous le même titre au Bulletin Astronomique. Cette approche de Poincaré [44] donnera naissance au début du 20$^{\text{ème}}$ siècle à l'analyse non linéaire avec les travaux de Picard [43], Brouwer [15], Hadamard [28], Birkhoff [11] et autres. Sous l'influence de leurs travaux, des techniques mathématiques se sont développées et trouvent leurs applications dans tous les domaines de l'activité humaine : économie, biologie, environnement, mécanique, stratégies militaires, etc. C'est sur la base de ces travaux, particulièrement sur la base du théorème de point fixe de Brouwer, que John Von Neumann [41] construisit en 1928 les fondements de la théorie des jeux.

Antérieurement, la résolution des problèmes se ramenait souvent à la recherche des zéros d'une certaine fonction. L'approche de Brouwer consiste à écrire le problème sous la forme d'un problème équivalent de point fixe dans un espace fonctionnel approprié.

Le progrès de l'analyse non linéaire est allé de pair avec celui de la théorie de l'équilibre économique et de la théorie des jeux, chacun interagissant sur l'autre : les mathématiques trouvant des applications dans les sciences économiques, humaines et environnementales, et celles-ci motivant de nouvelles recherches, jetant de nouveaux défis aux mathématiciens.

En 1922, Banach [10] publie ses premières découvertes sur les opérateurs dans les ensembles abstraits et leurs applications aux équations intégrales et en 1932 il publia "Théorie des opérateurs linéaires", qui eut et continue d'avoir une influence déterminante sur le cours de l'histoire mathématique. Ainsi vers le milieu du 20$^{\text{ème}}$ siècle, plusieurs contributions et développements ont été faits. Nous pouvons citer au passage Borsuk [12], Fenchel [26], Kuhn et Tucker [29], Leray et Schauder [30,31], Markoff [32], Mazur [36], Nikodym [42] et Sobolev [50].

Dans la recherche de solutions d'un problème de point fixe, la première étape est de s'assurer de l'existence de solution, éventuellement de s'assurer de son unicité ou non ; ensuite, si les solutions ne sont pas facilement accessibles et c'est généralement le cas, de construire un algorithme ou programme qui permet d'approcher et si possible d'atteindre l'unique solution ou une des solutions.

Comme technique pour prouver l'existence de solution et sa localisation pour les équations différentielles non linéaires, la méthode des sous et des sur-solutions est un outil intéressant par sa simplicité. Le résultat principal de la méthode est un genre de théorème des valeurs intermédiaires. Il prouve que si nous pouvons trouver une sous-solution inférieure à une sur-solution, alors il existe une solution qui évolue entre les deux.

Notre contribution à la méthode consiste à l'étendre aux équations différentielles multivoques du second ordre avec des conditions aux limites non linéaires. La méthode des sous et des sur-solutions pour les équations différentielles ordinaires fut initiée par Scorza [48] en 1931. Depuis lors, un grand nombre de contributions ont enrichi la théorie. Notamment, les extensions faites par Nagumo [38,39,40], Erbe [24], Mawhin [33,34,35], Adjé [1,2,3,4,5], De Coster et Habets [17, 18, 19, 20]. Cependant la plupart des travaux existant traite des équations différentielles ordinaires ou des équations aux dérivées partielles univoques. Toutefois, à certains problèmes univoques, Adjé [5] et Frigon [27] ont associé des problèmes multivoques qui permettent, en utilisant le degré de coïncidence relatif aux opérateurs multivoques, d'établir l'existence de solution.

Le travail est organisé de la façon suivante :

Le chapitre 1 est consacré à la théorie des applications multivoques. Nous y rappelons particulièrement la notion d'application multivoque, de semi-continuité et de continuité des applications multivoques ainsi que celle de sélections d'application multivoque. L'idée sous-jacente est de ramener la recherche de solutions d'un problème multivoque à la recherche de solution d'un problème univoque. Pour cela, nous aurons besoin du théorème de sélection de Michael [37] qui prouve l'existence de sélections continues pour les applications multivoques semi-continues inférieurement dont les images sont convexes. Comme les applications multivoques semi-continues supérieurement n'admettent en général pas de sélections continues, nous contournons cette difficulté par la forme généralisée du théorème de Schauder pour les applications multivoques semi-continues supérieurement à valeurs convexes compactes non vides.

Dans le chapitre 2, nous présentons la méthode des sous et des sur-solutions dans l'étude du problème multivoque

$$\begin{cases} u''(t) \in F(t, u(t)) \quad \forall\, t \in I, \\ g_1(u(a), u'(a)) = 0 = g_2(u(b), u'(b)), \end{cases} \tag{1}$$

dans lequel F dépend de t et de $u(t)$. Un tel modèle peut traduire le champ du mouvement d'un système dynamique, t représentant éventuellement le temps, $u(t)$ la position ou encore l'état du système et $u''(t)$ son accélération. Nous établissons que sous certaines hypothèses de continuité ou de semi-continuité de F, de monotonie pour g_1 et g_2, l'existence d'une sous-solution inférieure à une sur-solution, garantisse l'existence d'au moins une solution pour le problème (1).

Au chapitre 3, nous présentons quelques applications et extensions. Nous expliquons dans un premier temps que la méthode des sous et des sur-solutions peut nous permettre de savoir l'existence de solutions positives ou négatives, de relaxer un certain nombre de problèmes univoques avec discontinuités ou de prouver l'existence de trajectoires viables pour un problème de contrôle. Ensuite, nous étudions le problème

$$\begin{cases} u''(t) \in F(t, u(t), u'(t)) \quad \forall\, t \in I, \\ g_1(u(a), u'(a)) = 0 = g_2(u(b), u'(b)), \end{cases} \tag{2}$$

dans lequel, en plus de t et $u(t)$, F dépend de $u'(t)$ et pour lequel nous faisons l'hypothèse de la satisfaction de la condition de Berstein-Nagumo qui permet d'obtenir une estimation de la norme C^1 des solutions du problème (2) lorsque nous connaissons une estimation de la norme C^0 de ces solutions.

En annexes, nous donnons la démonstration de résultats importants utilisés dans nos démonstrations ou nous rappelons sans démonstrations quelques outils nécessaires pour la bonne compréhension de notre travail.

NOTATIONS

Soient $a,\ b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, nous noterons :

$$\begin{aligned}
I &= [a,b] = \{t \in \mathbb{R} : a \leq t \leq b\},\\
\overset{\circ}{I} &=]a,b[= \{t \in \mathbb{R} : a < t < b\},\\
[a,b[&= \{t \in \mathbb{R} : a \leq t < b\},\\
]a,b] &= \{t \in \mathbb{R} : a < t \leq b\}.
\end{aligned}$$

Soient $u, f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ des applications, alors :

u' est la dérivée de u,

u'' est la dérivée seconde de u,

$\underline{\lim}_{x \longrightarrow x_o} f(x) = \lim_{x \longrightarrow x_o} inf\ f(x) = \sup_{\eta > 0} \inf_{x \in B(x_o,\eta)} f(x),$

$\overline{\lim}_{x \longrightarrow x_o} f(x) = \lim_{x \longrightarrow x_o} \sup\ f(x) = \inf_{\eta > 0} \sup_{x \in B(x_o,\eta)} f(x),$

$D_{-}u(t_o),\ D^{-}u(t_o),\ D_{+}u(t_o),\ D^{+}(t_o)$ sont les dérivées de Dini de l'application u au point t_o :

$$\begin{aligned}
D_{-}u(t_o) &= \lim_{h \longrightarrow 0^-} \inf \tfrac{u(t_o+h)-u(t_o)}{h}, \quad t_o \in]a,b],\\
D^{-}u(t_o) &= \lim_{h \longrightarrow 0^-} \sup \tfrac{u(t_o+h)-u(t_o)}{h}, \quad t_o \in]a,b],\\
D_{+}u(t_o) &= \lim_{h \longrightarrow 0^+} \inf \tfrac{u(t_o+h)-u(t_o)}{h}, \quad t_o \in [a,b[,\\
D^{+}u(t_o) &= \lim_{h \longrightarrow 0^+} \sup \tfrac{u(t_o+h)-u(t_o)}{h}, \quad t_o \in [a,b[.
\end{aligned}$$

$Dom(f)$ désigne le domaine de f,

∂f désigne le sous-différentiel de f,

$Graph(f)$ est le graphe de f,

$Im(f)$ est l'ensemble des images de f,

2^{Ω} désigne l'ensemble des parties d'un ensemble non vide Ω donné,

$\varnothing$ désigne l'ensemble vide.

Nous noterons $2^{\Omega}\backslash\varnothing$ au lieu de $2^{\Omega}\backslash\{\varnothing\}$,

$C^k(\Omega)$: l'ensemble des fonctions numériques de classe C^k sur Ω,

$C(\Omega)$ ou $C^0(\Omega)$: l'ensemble des fonctions numériques continues sur Ω,

les espaces $C^0(\Omega)$ et $C^1(\Omega)$ sont munis respectivement des normes

$$|v|_{C^0} = \sup\{|v(t)| : t \in \Omega\}, \quad |u|_{C^1} = \max\{|u|_{C^0}, |u'|_{C^0}\};$$

$int(\Omega)$ ou $\overset{\circ}{\Omega}$: l'intéreure de Ω,

$\overline{\Omega}$ ou $adh(\Omega)$: l'adhérence de Ω,

$co(\Omega)$: l'enveloppe convexe de Ω,

$\partial\Omega$: la frontière de Ω.

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

s.c.i. : semi-continue inférieurement,

s.c.s. : semi-continue supérieurement,

$L^p(I) = \{f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable $/ \int_I |f(x)|^p\, dx < +\infty\}, \quad 1 \le p < +\infty.$

L'espace $L^p(I)$ est muni de la norme $|u|_{L^p} = (\int_I |u(t)|^p\, dt)^{1/p}$.

$W^{k,p}(I) = \{f \in C^{k-1}(I) \;/\; f^{(k)} \in L^p(I)\}$ (espaces de Sobolev usuels).

Chapitre 1

Opérateurs multivoques

1.1 Introduction

Nous rappelons dans ce chapitre quelques propriétés des applications multivoques. Les éléments à faire ressortir sont essentiellement la notion d'application multivoque, la définition de la semi-continuité, de la continuité et de sélections des applications multivoques ainsi que quelques unes de leurs propriétés. Ces rappels sont en grande partie tirés de Aubin et Celina [9].

1.2 Notion d'application multivoque

Soient X et Y deux ensembles non vides.

Définition 1.1. Les applications multivoques sont des applications définies d'un ensemble X dans l'ensemble des parties d'un ensemble Y noté 2^Y.

Nous rencontrons ce type d'applications en considérant la réciproque d'une application (univoque et non injective), la surjection canonique, le sous-différentiel d'une application.

Exemple 1.1. Etant donné deux ensembles X et Y et une application $f : X \longrightarrow Y$, l'application $F = f^{-1} : Y \longrightarrow 2^X$ qui à tout $y \in Y$ associe

$$F(y) = \{x \in X \ / \ f(x) = y\},$$

est une application multivoque ainsi que la surjection canonique $F_s : X \longrightarrow X/Im(f)$ qui à $x \in X$ associe sa classe d'équivalence

$$F_s(x) = \dot{x} = \{u \in X \ / \ f(u) = f(x)\}.$$

Exemple 1.2. Soient X un espace vectoriel, X^* son espace dual et $\varphi : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une application. L'application $\partial\varphi : X \longrightarrow 2^{X^*}$ qui à $x_o \in X$ associe $\partial\varphi(x_o)$ telle que :

$$\partial\varphi(x_o) = \{u \in X^* \ / \ \forall x \in X, \ \varphi(x) \geqslant \varphi(x_o) + u(x - x_o)\},$$

est une application multivoque. $\partial\varphi(x_o)$ est appelé le sous-différentiel de φ au point x_o et les éléments de $\partial\varphi(x_o)$ sont les sous-gradients de φ en x_o.

Exemple 1.3. Toute application univoque peut aussi être considérée comme une application multivoque. En effet, pour $f : X \longrightarrow Y$, il suffit de considérer $F : X \longrightarrow 2^Y$ définie par $F(x) = \{f(x)\}$.

Soient X et Y deux ensembles non vides et $F : X \longrightarrow 2^Y$ une application multivoque qui à tout $x \in X$, associe un sous-ensemble $F(x)$ de Y.

Définition 1.2. Les $F(x)$ sont appelés les images de F ou encore les valeurs de F. Le sous-ensemble

$$Dom(F) = \{x \in X \ / \ F(x) \neq \varnothing\}$$

de X est le domaine de F.

Quand $Dom(F) = X$, on dit que l'application multivoque F est stricte. Elle est dite propre quand $Dom(F) \neq X$.

Remarque 1.1. Soient $K \subset X$ non vide et $F : K \subset X \longrightarrow 2^Y$ une application multivoque telle que $\forall x \in K, \quad F(x) \neq \varnothing$. On peut prolonger F sur tout l'ensemble X par l'application multivoque F_K définie par :

$$F_K(x) = \begin{cases} F(x) & \text{si } \ x \in K \ ; \\ \varnothing & \text{si } \ x \notin K. \end{cases}$$

Il est évident que $Dom(F_K) = K$.

Il est très pratique de caractériser une application multivoque par son graphe.

Définition 1.3. Le graphe de l'application multivoque $F : X \longrightarrow 2^Y$ est l'ensemble des couples $(x, y) \in X \times Y$ tels que $y \in F(x)$.

$$Graph(F) = \{(x, y) \in X \times Y \ / \ y \in F(x)\}.$$

Proposition 1.1. *Etant donné G un sous-ensemble non vide de $X \times Y$, il existe une et une seule application multivoque $F : X \longrightarrow 2^Y$ dont G est le graphe.*

Preuve. Il suffit de définir F par $F(x) = \{y \in Y \ / \ (x, y) \in G\}$. ■

On dit que F est l'application multivoque associée au sous-ensemble G de $X \times Y$.

Définition 1.4. L'image $Im(F)$ d'une application multivoque F définie de X dans 2^Y est le sous-ensemble de Y défini par :

$$Im(F) = F(X) = \underset{x \in X}{\cup} F(x).$$

De même, on définit l'image d'un sous-ensemble A de X par :

$$F(A) = \underset{x \in A}{\cup} F(x).$$

Définition 1.5. La réciproque de l'application multivoque F de X dans 2^Y est l'application multivoque $F^{-1} : Im(F) \longrightarrow 2^X$ définie par

$$x \in F^{-1}(y) \Longleftrightarrow y \in F(x).$$

C'est-à-dire :

$$F^{-1}(y) = \{x \in X \ / \ y \in F(x)\}.$$

Remarque 1.2. L'image réciproque d'un sous-ensemble A de Y est le sous-ensemble de X noté

$$F^{-1}(A) = \{x \in X \ / \ F(x) \cap A \neq \varnothing\} = \underset{y \in A}{\cup} F^{-1}(y).$$

Proposition 1.2. *Si F est l'application multivoque associée à un sous-ensemble non vide G de $X \times Y$, alors F^{-1} est définie par :*

$$F^{-1}(y) = \{x \in X \; / \; (x, y) \in G\}.$$

Preuve. Ce résultat provient de la relation suivante :

$x \in F^{-1}(y) \Leftrightarrow y \in F(x) \Leftrightarrow (x, y) \in G.$ ■

Remarque 1.3. $Dom(F)$ est la projection du graphe de F sur X et $Im(F)$ est la projection du graphe de F sur Y.

1.3 Notion de continuité des applications multivoques

Soient X et Y des espaces métriques.

Définition 1.6. On dit qu'une application multivoque F de X dans 2^Y est compacte (respectivement bornée) si $\overline{Im(F)}$ est compacte (respectivement bornée) dans Y.

On dit qu'elle est localement compacte (respectivement localement bornée) si $\forall x \in Dom(F)$, il existe un voisinage $V(x)$ de x sur lequel F est compacte (respectivement bornée).

Définition 1.7. Etant donné un sous-ensemble A de X, on appelle voisinage de A toute partie de X contenant un ouvert contenant A.

1.3.1 Applications multivoques semi-continues supérieurement

Soient X et Y des espaces métriques.

Définition 1.8. Soit $F : X \longrightarrow 2^Y$ une application multivoque. On dit que F est semi-continue supérieurement (s.c.s.) en $x_o \in X$ si pour tout voisinage ouvert $V(F(x_o))$ de $F(x_o)$, il existe un voisinage $V(x_o)$ de x_o tel que :

$$F(V(x_o)) \subset V(F(x_o)).$$

On dit que F est semi-continue supérieurement sur X si elle l'est en tout point x de X.

Remarque 1.4. La semi-continuité supérieure de F se traduit également par le fait que le sous-ensemble $M = \{x \in X/F(x) \subset U\}$ de X est ouvert pour tout sous-ensemble ouvert U de Y. Cela revient aussi à dire que le sous-ensemble $F^{-1}(A) = \{x \in X/F(x) \cap A \neq \varnothing\}$ est fermé pour tout sous-ensemble fermé A de Y.

Proposition 1.3. *Soient $F : X \longrightarrow 2^Y$ et $G : Y \longrightarrow 2^Z$ deux applications multivoques. Définissons $GF : X \longrightarrow 2^Z$ par*

$$GF(x) = \underset{y \in F(x)}{\cup} G(y).$$

Si F et G sont semi-continues supérieurement alors GF l'est également.

Preuve. Soient $x_o \in X$ et $V(GF(x_o))$ un voisinage ouvert de $GF(x_o)$. Comme G est s.c.s., le sous-ensemble $M = \{y \in Y \ / \ G(y) \subset V(GF(x_o))\}$ est ouvert. F étant aussi s.c.s., il existe un voisinage $V(x_o)$ de x_o tel que

$$F(V(x_o)) \subset M.$$

Ainsi $\quad GF(V(x_o)) \subset V(GF(x_o)).$ ■

Proposition 1.4. *Le graphe d'une application multivoque semi-continue supérieurement dont les images sont fermées est fermé.*

Preuve. Considérons une suite (x_n, y_n) d'éléments du graphe de F qui converge vers $(x, y) \in X \times Y$. Comme F est s.c.s., pour tout voisinage fermé $V(F(x))$, il existe n_o tel que

$$\forall n \geqslant n_o, \;\; y_n \in V(F(x)).$$

Ainsi $y \in V(F(x))$ quelque soit le voisinage fermé $V(F(x))$ de $F(x)$. Donc $y \in adh(F(x)) = F(x)$. ■

Théorème 1.1. *Soient F et G deux applications multivoques de X dans 2^Y telles que $\forall x \in X, \; F(x) \cap G(x) \neq \varnothing$.*
On suppose que :

(i) F est semi-continue supérieurement en $x_o \in X$,

(ii) $F(x_o)$ est compacte ,

(iii) le graphe de G est fermé.

Alors l'application $F \cap G$ définie par $(F \cap G)(x) = F(x) \cap G(x)$ est semi-continue supérieurement en x_o.

Preuve. Soit $V = V(F(x_o) \cap G(x_o))$ un voisinage ouvert de $F(x_o) \cap G(x_o)$. Nous devons trouver un voisinage $V(x_o)$ de x_o tel que $\forall x \in V(x_o)$,

$$F(x) \cap G(x) \subset V(F(x_o) \cap G(x_o)).$$

- Si $F(x_o) \subset V(F(x_o) \cap G(x_o))$ alors il existe un voisinage $V(F(x_o))$ de $F(x_o)$ tel que

$$V(F(x_o)) \subset V(F(x_o) \cap G(x_o)).$$

Comme F est s.c.s., alors il existe un voisinage $V(x_o)$ tel que

$$F(V(x_o)) \subset V(F(x_o)).$$

Donc

$$F(V(x_o)) \cap G(V(x_o)) \subset F(V(x_o)) \subset V(F(x_o)) \subset V(F(x_o) \cap G(x_o)).$$

- Si $F(x_o) \not\subset V(F(x_o) \cap G(x_o))$, alors nous introduisons le sous-ensemble

$$K = F(x_o) \cap (Y \backslash V)$$

qui est compact (car $F(x_o)$ est compacte). Le graphe de G étant fermé, pour tout $y \in K$, on a $y \notin G(x_o)$ et donc

$$(x_o, y) \notin Graph(G).$$

Comme $Graph(G)$ est fermé, il existe un voisinage ouvert $V_y(x_o)$ de x_o et $V(y)$ de y tels que

$$Graph(G) \cap (V_y(x_o) \times V(y)) = \varnothing.$$

Ainsi

$$\forall x \in V_y(x_o), \;\; G(x) \cap V(y) = \varnothing. \tag{1.1}$$

K étant compact, nous pouvons le recouvrir par un nombre fini n de voisinages $V(y_i),\ y_i \in K,\ 1 \leq i \leq n$. La réunion

$$M = \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\cup} V(y_i)$$

est un voisinage de K et $M \cup V$ est un voisinage de $F(x_o)$. Par la semi-continuité supérieure de F en x_o, il existe un voisinage $V_o(x_o)$ de x_o tel que

$$\forall x \in V_o(x_o), \quad F(x) \subset M \cup V. \tag{1.2}$$

Notons

$$V(x_o) = V_o(x_o) \cap (\underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\cap} V_{y_i}(x_o)).$$

Ainsi $\forall x \in V(x_o)$, les relations (1.1) et (1.2) impliquent que

$$\begin{cases} (i) & F(x) \subset M \cup V, \\ (ii) & G(x) \cap M = \varnothing. \end{cases}$$

Donc $\quad F(x) \cap G(x) \subset V \quad \forall x \in V(x_o)$. ■

Corollaire 1.1. *Si Y est compact, alors toute application multivoque $G : X \longrightarrow 2^Y$ dont le graphe est fermé, est semi-continue supérieurement.*

Preuve. Il suffit de prendre dans le théorème précédant, $F : X \longrightarrow 2^Y$ définie par $F(x) = Y \quad \forall x \in X$. ■

Ce corollaire fournit un outil très utile pour prouver qu'une application multivoque est semi-continue supérieurement. Remarquons cependant que la compacité de Y est essentielle.

Considérons $F : \mathbb{R} \longrightarrow 2^{\mathbb{R}^2}$ l'application multivoque définie par :

$$F(\xi) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y = \xi x\}.$$

Alors, le graphe de F est fermé. En effet, supposons que (ξ_n) est une suite convergente vers ξ^* et (x_n, y_n) une suite convergente vers (x^*, y^*) tel que

$$\forall n, \;\; (x_n, y_n) \in F(\xi_n).$$

Alors

$$y_n = \xi_n \cdot x_n$$

et en passant à la limite

$$y^* = \xi^* \cdot x^* \ ,$$

c'est à dire

$$(x^*, y^*) \in F(\xi^*).$$

Cependant pour le cas $\xi^o = 0$, pour aucun $\varepsilon > 0$, il n'existe pas de $\xi \neq 0$ tel que

$$F(\xi) \subset F(0) + \varepsilon \overset{o}{B},$$

où B est la boule fermé de centre 0 et de rayon 1 de $\mathbb{R}^2$.

Proposition 1.5. *Soit $F : X \longrightarrow 2^Y$ une application multivoque semi-continue supérieurement à valeurs compactes.*
Si X est compact, alors $F(X)$ est aussi compacte.

Preuve. Nous avons à prouver que pour tout recouvrement

$$\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$$

de $F(X)$ par des ouverts, on peut en extraire un recouvrement fini. Comme chaque image $F(x)$ est compacte, elle peut être recouverte par un nombre fini

$n(x)$ de tels U_λ. Nous pouvons écrire :

$$F(x) \subset U_x = \bigcup_{i=1}^{i=n(x)} U_{\lambda_i}.$$

F étant semi-continue supérieurement, il existe un voisinage ouvert $V(x)$ de x tel que

$$F(V(x)) \subset U_x.$$

Mais comme X est compact, il est inclus dans un nombre fini p de tels voisinages $V(x_j)$ avec $1 \leq j \leq p$. Donc

$$F(X) \subset \bigcup_{1\leq j\leq p} F(V(x_j)) \subset \bigcup_{1\leq j\leq p} U_{x_j} = \bigcup_{1\leq j\leq p} \Big(\bigcup_{1\leq i\leq n(x_j)} U_{\lambda_i} \Big).$$

Ainsi, du recouvrement d'ouverts $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de $F(X)$ on peut en extraire un recouvrement fini

$$\{U_{\lambda_i} \,/ 1 \leq j \leq p \,, 1 \leq i \leq n(x_j)\}.$$

Cela prouve que $F(X)$ est compacte. ■

1.3.2 Applications multivoques semi-continues inférieurement

Soient X et Y des espaces métriques.

Définition 1.9. Etant donné une application multivoque $F : X \longrightarrow 2^Y$, on dit que F est semi-continue inférieurement (s.c.i.) en $x_o \in X$ si pour tout $y_o \in F(x_o)$ et pour tout voisinage $V(y_o)$ de y_o, il existe un voisinage $V(x_o)$ de x_o tel que

$$\forall x \in V(x_o), \quad F(x) \cap V(y_o) \neq \varnothing.$$

On dit que F est semi-continue inférieurement sur X si elle est semi-continue inférieurement en chaque point $x_o \in X$.

Remarque 1.5. La semi-continuité inférieure de F en x_o traduit le fait que pour toute suite $(x_n) \longrightarrow x_o$ et pour tout $y_o \in F(x_o)$, il existe une suite $(y_n) \longrightarrow y_o$ telle que $y_n \in F(x_n) \;\; \forall n > 0$. La semi-continuité inférieure de F sur X traduit aussi le fait que $F^{-1}(U)$ est ouvert pour tout ouvert U de Y.

Remarque 1.6. (1) L'application multivoque $F_+ : \mathbb{R} \longrightarrow 2^{\mathbb{R}}$ définie par

$$F_+(0) = [-1, +1] \;\text{ et }\; F_+(x) = \{0\} \text{ pour } x \neq 0,$$

est s.c.s. mais n'est pas s.c.i.

(2) L'application multivoque $F_- : \mathbb{R} \longrightarrow 2^{\mathbb{R}}$ définie par $F_-(0) = \{0\}$ et $F_-(x) = [-1, +1]$ pour $x \neq 0$, est s.c.i. mais n'est pas s.c.s.

1.3.3 Applications multivoques continues

Définition 1.10. Une application multivoque $F : X \longrightarrow 2^Y$ est dite continue en $x_o \in X$ si elle y est à la fois semi-continue supérieurement et semi-continue inférieurement. Elle est dite continue sur X si elle est continue en chaque point de X.

1.3.4 Propriétés de continuité des applications paramétrées

C'est la théorie du contrôle qui utilise les applications de ce type. Considérons trois ensembles X, Y et U et $f : X \times U \longrightarrow Y$ une application univoque. On associe à f l'application multivoque $F : X \longrightarrow 2^Y$ définie par :

$$F(x) = \{f(x,u) \ / \ u \in U\} = f(x,U).$$

On dit que F est contrôlée par les éléments de U.

Proposition 1.6. *Supposons que X et Y sont des espaces topologiques de Hausdorff.*

(a) Si $\forall u \in U$, l'application $x \longrightarrow f(x,u)$ est continue ; alors F est s.c.i.

(b) Si U est un espace topologique compact et f est continue de $X \times U$ dans Y ; alors F est continue.

Preuve. (a) Soit $x_o \in X$, donc

$$F(x_o) = \underset{u\in U}{\cup} f(x_o,u).$$

Ainsi $\forall y_o \in F(x_o)$, il existe $u_o \in U$ tel que $y_o \in f(x_o,u_o)$. Par la continuité de l'application $x \longrightarrow f(x,u_o)$, pour tout voisinage $V(y_o)$ de y_o, on peut trouver un voisinage $V(x_o)$ de x_o tel que

$$\forall x \in V(x_o), \quad f(x,u_o) \in V(y_o),$$

c'est-à-dire :

$$F(x) \cap V(y_o) \neq \varnothing \quad \forall x \in V(x_o).$$

Donc F est semi-continue inférieurement.

(b) Soient $x_o \in X$ et $V(F(x_o))$ un voisinage de $F(x_o)$. Pour tout $u \in U$, $V(F(x_o))$ est un voisinage de $f(x_o, u)$. La continuité de f implique qu'il existe des voisinages $V(x_o, u)$ de x_o et $V(u)$ de u tels que

$$f(x, v) \in V(F(x_o)) \ \ \forall x \in V(x_o, u) \text{ et } \forall v \in V(u) \ .$$

Nous pouvons recouvrir le compact U par de tels ensembles $V(u_i),\ 1 \leq i \leq n$. Ainsi l'ensemble

$$M(x_o) = \bigcap_{1 \leq i \leq n} V(x_o, u_i)$$

est un voisinage de x_o. Si $x \in M(x_o)$ et si $v \in U$, alors v appartient à un certain $V(u_i)$. Donc

$$f(x, v) \in V(F(x_o)).$$

C'est pourquoi $F(x)$ est contenu dans $V(F(x_o))$ quand x parcourt $M(x_o)$. ■

Définition 1.11. Soient X un espace métrique et $K \subset X$, on appelle Boule de rayon η autour de K l'ensemble

$$B(K, \eta) = \{x \in X \ / \ d(y, K) \leq \eta\}.$$

Remarque 1.7. Quand X est un espace vectoriel normé, $B(K, \eta) = K + \eta B$, où B est la boule fermé de centre l'origine et de rayon 1.

Théorème 1.2. *On suppose que F est une application multivoque d'un espace métrique X à valeurs fermées dans un espace de Banach Y et qu'il existe une* *suite de sous-ensembles compacts et connexes U_n et une suite f_n d'applications continues de $X \times U_n$ dans Y tels que :*

(i) $\forall x \in X,\ \forall n \in \mathbb{N},\ F(x) \subset ... \subset f_{n+1}(x, U_{n+1}) \subset f_n(x, U_n) \subset ...$

(ii) $\forall x \in X,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geq N,\ f_n(x, U_n) \subset F(x) + \varepsilon B.$

Alors F est s.c.s. et à valeurs compactes et connexes.

La démonstration de ce théorème provient du lemme suivant :

Lemme 1.1. *Considérons une famille de sous-ensembles compacts et connexes K_n d'un espace métrique vérifiant :*

(i) $K = \bigcap_{j>0} K_j \subset ... \subset K_{j+1} \subset K_j \subset ... \subset K_o;$

(ii) $\forall x \in X,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geq N,\ K_n \subset B(K, \varepsilon).$

Alors K est aussi compact et connexe.

Preuve. La compacité de K étant évidente, nous avons à montrer que K est connexe. Supposons que K n'est pas connexe. Alors

$$K = K^1 \cup K^2$$

où K^1 et K^2 sont non vides disjoints et fermés. Comme les K^i sont compacts et disjoints, il existe ε tel que

$$B(K^1, 2\varepsilon) \cap B(K^2, 2\varepsilon) = \varnothing. \tag{1.3}$$

Par la condition (ii) du lemme, nous pouvons trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$K \subset K_n \subset B(K, \varepsilon) = B(K^1, \varepsilon) \cup B(K^2, \varepsilon).$$

Notons

$$K_n^i = K_n \cap B(K^i, \varepsilon), \quad i = 1, 2.$$

Alors

$$K_n = K_n^1 \cup K_n^2$$

avec $K^i \subset K_n^i \subset K_n$ et les K_n^i non vides. Ce qui contredit la connexité de K_n car $K_n^1 \cup K_n^2$ n'est pas connexe. ■

1.4 Sélections d'applications multivoques

Définition 1.12. Soient X et Y deux ensembles non vides, $F : X \longrightarrow 2^Y \backslash \varnothing$ une application multivoque. Une application univoque $f : X \longrightarrow Y$ est dite sélection de F si $\forall x \in X, \;\; f(x) \in F(x)$.

Remarque 1.8. Une application multivoque continue n'admet pas nécessairement une sélection continue.

Exemple 1.4. Comme cela a été montrer dans [9, p 68], l'application multivoque $\Phi :] - 1, 1[\longrightarrow 2^{\mathbb{R}^2}$ définie par :

$$\Phi(t) = \begin{cases} \{(v_1, v_2) \text{ tels que } v_1 = cos\ \theta, \;\; v_2 = t\ sin\ \theta \\ \text{ avec } \dfrac{1}{t} \leq \theta \leq \dfrac{1}{t} + 2\pi - |t|\} \;\text{ quand } t \neq 0, \\ \{(v_1, v_2) \text{ tels que } \; - 1 \leq v_1 \leq 1\ ,\ v_2 = 0\} \;\text{ pour } t = 0, \end{cases}$$

est continue mais n'admet pas de sélection continue.

1.4.1 Sélection minimale

Théorème 1.3. *Soient X un espace métrique, Y un espace de Hilbert et $F : X \longrightarrow 2^Y \backslash \varnothing$ une application multivoque continue à valeurs convexes et fermées. Alors l'application $\varphi : X \longrightarrow Y$ telle que*

$$\varphi(x) = m(F(x)) = \Pi_{F(x)}(0_Y)$$

où $\Pi_{F(x)}(0_Y)$ est la projection de 0_Y sur le convexe fermé $F(x)$, est une sélection continue de F appelée sélection minimale.

Preuve. Soient $\varepsilon > 0$ et $x^* \in X$. Par la continuité de F, pour tout $x \in X$ "suffisamment proche" de x^*, nous avons :

$$\|m(F(x))\|^2 \leq \|m(F(x^*))\|^2 + \varepsilon.$$

Si $\|m(F(x^*))\| = 0$, alors $m(F(x)) \in \sqrt{\varepsilon}B$.

Supposons que $\|m(F(x^*))\| > 0$. Pour tout x assez proche de x^*, il existe $y \in F(x^*)$ tel que

$$\|m(F(x)) - y\| \leq \frac{\varepsilon}{\|m(F(x^*))\|}. \tag{1.4}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \langle m(F(x^*)), m(F(x))\rangle &= \langle m(F(x^*)), y_x\rangle + \langle m(F(x^*)), m(F(x)) - y_x\rangle \\ &\geq \langle m(F(x^*)), y_x\rangle - \varepsilon. \end{aligned}$$

Une propriété des projections donne que $\forall y \in F(x^*)$,

$$\langle m(F(x^*)), y\rangle \geq \langle m(F(x^*)), m(F(x^*))\rangle.$$

Donc (1.4) devient

$$\langle m(F(x^*)), m(F(x)) - m(F(x^*))\rangle \geq -\varepsilon. \tag{1.5}$$

D'un autre côté ,

$$\begin{aligned}\|m(F(x))\|^2 &= \|m(F(x^*))\|^2 + \|m(F(x^*)) - m(F(x))\|^2 \\ &+ 2\langle m(F(x^*)), m(F(x)) - m(F(x^*))\rangle.\end{aligned}$$

Cette relation et (1.5) donne

$$\|m(F(x^*)) - m(F(x))\|^2 \leq \|m(F(x^*)) - m(F(x))\|^2 + 2\varepsilon$$

c'est à dire $\quad \|m(F(x^*)) - m(F(x))\|^2 \leq 3\varepsilon.$ ■

Remarque 1.9. $m(F(x))$ est l'élément de $F(x)$ de norme minimale.

1.4.2 Sélection de Chebishev

Proposition 1.7. *Soient X un espace de Hilbert, $a,\ b,\ x \in X$,*

$\delta = \|b - a\|,\ \ \rho = \max\{\|x - a\|, \|x - b\|\}.$ *Alors* $\forall t \in [0, 1]$,

$$\|x - (ta + (1 - t)b)\|^2 \leq \rho^2 - t(1 - t)\delta^2.$$

Preuve. Supposons que

$$\rho = \|x - a\|,$$

alors comme

$$\|x - b\|^2 = \rho^2 + \delta^2 - 2\langle x - a, b - a\rangle\ ,$$

nous avons :

$$\delta^2 - 2\langle x - a, b - a\rangle \leq 0.$$

Egalement, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$-2(1 - t)\langle x - a, b - a\rangle \leq -(1 - t)\delta^2. \tag{1.6}$$

D'un autre côté,

$$\begin{aligned}\|x-(ta+(1-t)b)\|^2 &= \rho^2+(1-t)^2\delta^2-2\langle x-a, ta+(1-t)b-a\rangle \\ &= \rho^2+(1-t)^2\delta^2-2(1-t)\langle x-a, b-a\rangle.\end{aligned}$$

D'après (1.6), le nombre de droite est majoré par

$$\rho^2+(1-t)^2\delta^2-(1-t)\delta^2=\rho^2-t(1-t)\delta^2.$$

Donc $\|x-(ta+(1-t)b)\|^2 \leq \rho^2-t(1-t)\delta^2$. ■

Définition 1.13. Soient X un Hilbert, K un sous-ensemble borné de X. Le rayon de Chebishev r_c de K est défini par :

$$r_c = \inf\{\rho>0 \ / \ \exists k\in X,\ K\subset k+\rho B\}.$$

Pour tout $\rho > r_c$, on définit C_ρ par :

$$C_\rho=\{k\in X \ / \ K\subset k+\rho B\}.$$

Remarque 1.10. Le rayon de Chebishev de K est le rayon de la plus petite boule contenant K.

Proposition 1.8. *L'ensemble* $\bigcap\limits_{\rho>r_c} C_\rho$ *est réduit en un point* $C(K)$ *appelé centre de Chebishev de* K *et nous avons :*

$$C(K)+r_cB\supset K.$$

De plus si K *est convexe, alors* $C(K)\in\overline{K}$ *.*

Preuve. Par la définition, pour tout $\rho > r_c$, C_ρ est un sous-ensemble fermé borné non vide de X. Par la proposition 1.7, il est aussi convexe car

$$\sqrt{\rho^2 - t(1-t)\delta^2} \leq \rho \ .$$

Ainsi il est faiblement compact et par conséquent

$$\bigcap_{\rho > r_c} C_\rho \neq \varnothing \ .$$

De plus

$$\forall c \in \bigcap_{\rho > r_c} C_\rho, \ \ c + r_c B \supset K \ .$$

En effet, $\bigcap_{\rho > r_c} C_\rho$ est réduit à un seul point. Supposons qu'il contient deux points a et b. Considérons leur moyenne $\frac{1}{2}(a+b)$. Pour tout $x \in K$,

$$x \in a + r_c B \qquad \text{et} \qquad x \in b + r_c B \ .$$

Ainsi

$$x \in \frac{a+b}{2} + \sqrt{r_c^2 - \frac{1}{4}\|a-b\|^2}\ B \ .$$

Le rayon de cette boule est strictement inférieur à r_c, ce qui est une contradiction. Finalement, Par le théorème de séparation de Hahn-Banach, il existe un hyperplan H séparant strictement $C(K)$ et l'ensemble convexe et fermé $\overline{K}$ et $\Pi_H(C(K))$ la projection de $C(K)$ sur l'hyperplan H est plus proche de tous les points de $\overline{K}$ que $C(K)$. Ce qui contredit la définition de $C(K)$. ■

Remarque 1.11. Le centre de Chebishev de K est le centre de la plus petite boule contenant K.

Théorème 1.4. *Si F est une application multivoque continue de K à valeurs convexes, fermées et bornées dans un Hilbert X, alors l'application univoque $c : K \longrightarrow X$ définie par*

$$c(x) = C(F(x)),$$

est une sélection continue de F appelée sélection de Chebishev.

Preuve. Il est évident que l'application univoque c est une sélection de l'application multivoque F. Il nous faut monter que l'application c est continue. Montrons d'abord que l'application $x \longrightarrow r_c(F(x))$ est continue. Pour cela fixons $x^o \in K$ et $\eta > 0$. Il existe un point $a \in X$ tel que :

$$F(x^o) \subset a + (r_c(F(x^o)) + \frac{\eta}{2})B \ .$$

Comme F est s.c.s, il existe $\delta_1 > 0$ tel que :

$$d(x, x^o) < \delta_1 \Rightarrow F(x) \subset F(x^o) + \frac{\eta}{2}B \ ,$$

de telle sorte que

$$F(x) \subset a + (r_c(F(x^o)) + \eta)B \ .$$

C'est pourquoi

$$r_c F(x) \leq r_c F(x^o) + \eta$$

quand x est suffisamment proche de x^o .

D'un autre côté, comme F est s.c.i, il existe $\delta_2 > 0$ tel que :

$$d(x, x^o) < \delta_2 \Rightarrow F(x^o) \subset F(x) + \frac{\eta}{2}B.$$

Donc pour un certain $a \in X$,

$$F(x^o) \subset F(x) + \frac{\eta}{2}B \subset a + r_c(F(x)) + \eta B,$$

c'est-à-dire

$$r_c(F(x^o)) \leq r_c(F(x)) + \eta \ ,$$

pour x assez proche de x^o. D'où la continuité de r_c.

Supposons maintenant que c n'est pas continue en x^o. Il existerait $\eta > 0$ et des points x_n proche de x^o tels que

$$|c(x_n) - c(x^o)| > \eta \ .$$

Soit $\varepsilon > 0$ assez petit tel que

$$\sqrt{(r_c(F(x^o)) + \varepsilon)^2 - \frac{1}{4}\eta^2} < r_c(F(x^o)) - 2\varepsilon$$

et soit n assez grand pour avoir

$$F(x_n) \subset F(x^o) + \varepsilon B$$

et tel que

$$|r_c(F(x_n)) - r_c(F(x^o))| < \varepsilon \ .$$

Par ailleurs

$$F(x_n) \subset c(x_n) + r_c(F(x_n))B \subset c(x_n) + (r_c(F(x^o)) + \varepsilon)B \ .$$

La distance de tout point de $F(x_n)$ à la moyenne $\frac{1}{2}(c(x_n) + c(x^o))$ est au plus $\sqrt{(r_c(F(x^o)) + \varepsilon)^2 - \frac{1}{4}\eta^2}$ qui est strictement plus petit que $r_c(F(x^o)) - 2\varepsilon$, c'est à dire strictement plus petit que $r_c(F(x_n))$, ce qui contredit la définition du rayon de Chebishev. ■

1.4.3 Applications multivoques localement sélectionnables

Définition 1.14. $F : X \longrightarrow 2^Y$ est localement continûment sélectionnable (ou simplement localement sélectionnable) en x_o si $\forall y_o \in F(x_o)$, il existe un voisinage ouvert $V(x_o)$ de x_o et une application univoque continue $f : V(x_o) \longrightarrow Y$ tels que :

$$f(x_o) = y_o \quad \text{et} \quad f(x) \in F(x) \;\; \forall x \in V(x_o).$$

On dit que F est localement sélectionnable si elle l'est en tout point $x \in X$.

Proposition 1.9. *Toute application multivoque localement sélectionnable est sémi-continue inférieurement.*

Preuve. Soit $v_o \in F(x_o)$ et $V(v_o)$ un voisinage de v_o.
Soit $f : V_1(x_o) \longrightarrow Y$ une sélection locale de F passant par v_o. Comme f est continue, il existe un voisinage $V_2(x_o)$ tel que :

$$f(x) \in V(v_o) \quad \forall\, x \in V_2(x_o).$$

Ainsi

$$F(x) \cap V(v_o) \neq \varnothing \quad \forall\, x \in V_2(x_o)$$

car $\quad f(x) \in F(x) \cap V(v_o)$. ■

Définition 1.15. Soient $(\Omega_i)_{i \in I}$ et $(\Omega'_j)_{j \in J}$ deux recouvrements ouverts d'un ensemble E. On dit que le deuxième est plus fin que le premier, si pour tout $j \in J$, il existe $i \in I$ tel que $\Omega'_j \subset \Omega_i$.

Définition 1.16. Un espace topologique E est dit paracompact s'il est séparé et si tout recouvrement ouvert de E admet un recouvrement plus fin localement fini.

Remarque 1.12 (Théorème de Stein). Tout espace topologique métrisable est paracompact.

Proposition 1.10. *Soient X un espace paracompact, Y un espace vectoriel topologique et $F : X \longrightarrow 2^Y$ une application multivoque localement sélectionnable à valeurs convexes, alors F admet une sélection continue.*

Preuve. Pour tout $y \in X$, associons un point $z \in F(y)$ et une sélection locale $f_y : V(y) \longrightarrow Y$ vérifiant $f_y(y) = z$ et $f_y(x) \in F(x)$ quand $x \in V(y)$. Comme X est paracompact, il existe une partition continue de l'unité $\{a_y\}_{y \in X}$, associée à un recouvrement de X par des voisinages ouverts $V(y)$. On définit l'application f par :

$$f(x) = \sum_{y \in X} a_y(x) f_y(x) = \sum_{y \in I(x)} a_y(x) f_y(x)$$

où $I(x)$ est un ensemble non vide fini de points y de X tels que

$$a_y(x) > 0.$$

Ainsi f est continue comme somme de produit de fonctions continues.
Si $y \in I(x)$, alors

$$x \in V(y)$$

parce que le support de a_y est contenu dans $V(y)$. C'est pourquoi

$$f_y(x) \in F(x)$$

et par conséquent

$$f(x) = \sum_{y \in I(x)} a_y(x) f_y(x) \in F(x)$$

car $F(x)$ est convexe. Ainsi f est une sélection continue de F. ■

Proposition 1.11. *Si $F^{-1}(y)$ est un ouvert $\forall y \in Y$, alors F est localement sélectionnable.*

Preuve. En effet, si $x_o \in X$ et $y_o \in F(x_o)$, on prend

$$N(x_o) = F^{-1}(y_o),$$

qui est ouvert et contient x_o. Définissons f par

$$f(x) = y_o \quad \forall x \in N(x_o),$$

qui est une sélection locale continue de F. ■

Proposition 1.12. *Soient X un espace paracompact, Y un espace vectoriel topologique et $F, G : X \longrightarrow 2^Y$ deux applications multivoques. Si F est localement sélectionnable en $x_o \in X$, le graphe de G est ouvert et*

$$F(x_o) \cap G(x_o) \neq \varnothing.$$

Alors $F \cap G$ est localement sélectionnable en x_o .

Preuve. Soit $y_o \in F(x_o) \cap G(x_o)$. Nous considérons une sélection locale $f : V(x_o) \longrightarrow Y$ qui est continue telle que

$$f(x_o) = y_o \quad \text{et} \quad f(x) \in F(x) \quad \forall x \in V(x_o).$$

Comme le graphe de G est ouvert, il existe un voisinage $V_1(x_o) \times V(y_o)$ de (x_o, y_o) contenu dans le graphe de G. Par la continuité de f, il existe un voisinage $V_2(x_o) \subset V(x_o)$ tel que :

$$f(x) \in V(y_o) \;\; \forall\, x \in V_2(x_o).$$

Donc $f : V_1(x_o) \cap V_2(x_o) \longrightarrow Y$ est une sélection locale de $F \cap G$. ■

1.4.4 Théorème de sélection de Michael

Cet important résultat fut établit par E. Michael en 1956.

Théorème 1.5 (Michael). *Soient X un espace métrique, Y un espace de Banach et $F : X \longrightarrow 2^Y$ une application multivoque sémi-continue inférieurement à valeurs convexes et fermées. Alors F admet une sélection continue.*

Preuve. a) Commençons par prouver le résultat suivant :
Etant donné une application multivoque convexe s.c.i. Φ et $\varepsilon > 0$, il existe une application univoque continue $\varphi : X \longrightarrow Y$ telle que :

$$\forall\, \xi \in X, \;\; d(\varphi(\xi), \Phi(\xi)) \leq \varepsilon.$$

En fait, pour tout $x \in X$, soient $y_x \in \Phi(x)$ et $\delta_x > 0$ tels que :

$$(y_x + \varepsilon B) \cap \Phi(x') \neq \varnothing \quad \forall\, x' \in B(x, \delta_x).$$

Comme X est un espace métrique, il est paracompact. Ainsi il existe un raffinement localement fini $\{\mathcal{U}_x\}_{x\in\Lambda}$ de $\{B(x,\delta_x)\}_{x\in X}$. Soit$\{\pi_x\}_{x\in\Lambda}$ une partition de l'unité qui lui est subordonnée. L'application $\varphi : X \longrightarrow Y$ définie par :

$$\varphi(\xi) = \sum_{x\in\Lambda} \pi_x(\xi) y_x$$

est continue car elle est localement une somme finie de fonctions continues.

Fixons ξ. Quand $\pi_x(\xi) > 0$, $\xi \in \mathcal{U}_x$. Ainsi

$$y_x \in \Phi(\xi) + \varepsilon B.$$

Comme $\Phi(\xi) + \varepsilon \overset{\circ}{B}$ est convexe, toute combinaison convexe de ses éléments (en particulier $\varphi(\xi)$) s'y trouve.

b) Maintenant, montrons que nous pouvons définir une suite $\{f_n\}$ d'applications continues de X dans Y vérifiant

$$i) \quad \forall\, \xi \in X, \quad d(f_n(\xi), F(\xi)) \le \frac{1}{2^n}\ , \qquad n = 1, 2, ...$$

$$ii) \quad \forall\, \xi \in X, \quad \|f_n(\xi) - f_{n-1}(\xi)\| \le \frac{1}{2^{n-2}}\ , \quad n = 2, ...$$

Pour $n = 1$, il suffit de prendre $\Phi = F$ et $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ dans la partie a).

Supposons que la suite f_n vérifie i) jusqu'au rang $n = n_o$. Montrons que f_{n_o+1} vérifie i) et ii). Considérons l'ensemble

$$\Phi(\xi) = (f_{n_o}(\xi) + \frac{1}{2^{n_o}} B) \cap F(\xi).$$

Par i) , $\Phi(\xi)$ n'est pas vide et par a) il existe une application continue φ telle que :

$$d(\varphi(x), \Phi(x)) \le \frac{1}{2^{n_o+1}}\ .$$

Posons

$$f_{n_o+1}(\xi) = \varphi(\xi).$$

A fortiori

$$d(f_{n_o+1}(\xi), F(\xi)) \leq \frac{1}{2^{n_o+1}}$$

ce qui prouve i). Aussi

$$f_{n_o+1}(\xi) \in \Phi(\xi) + \frac{1}{2^{n_o+1}}B \subset f_{n_o}(\xi) + (\frac{1}{2^{n_o}} + \frac{1}{2^{n_o+1}})B,$$

c'est-à-dire

$$\|f_{n_o+1}(\xi) - f_{n_o}(\xi)\| \leq \frac{1}{2^{n_o-1}} \ ,$$

ce qui prouve ii).

c) Comme la série $\Sigma\frac{1}{2^n}$ converge, $\{f_n\}$ est de cauchy et converge uniformément vers une fonction continue f. F étant fermée, par i) de b), f est une sélection de F. ■

1.4.5 Sélections approximatives

Les applications multivoques semi-continues supérieurement n'admettent pas de sélection continue en général, mais plutôt des sélections continues approximatives.

Théorème 1.6. *Soient X, Y des espaces de Banach, Ω un ouvert de X tel que $\overline{\Omega}$ est compact, $F : \overline{\Omega} \longrightarrow 2^Y \backslash \varnothing$ une application multivoque semi-continue supérieurement à valeurs convexes. Alors $\forall \varepsilon > 0$, il existe une application continue f_ε de $B(\Omega, \varepsilon)$ à valeurs dans l'enveloppe convexe de $F(\overline{\Omega})$ telle :*

$$Graph(f_\varepsilon) \subset Graph(F) + \varepsilon B.$$

Preuve. Fixons $\varepsilon > 0$. F étant s.c.s, pour tout $x \in \overline{\Omega}$, on peut trouver $\delta(x) > 0$ tel que pour tout $x' \in B(x, \delta(x))$,

$$F(x') \subset F(x) + \varepsilon B.$$

Par la compacité de $\overline{\Omega}$, nous avons :

$$\overline{\Omega} = \underset{1 \leq i \leq n}{\cup} (\overline{\Omega} \cap B(x_i, r_i))$$

où $n \in \mathbb{N}$, $\;x_i \in \overline{\Omega}\;$ et $\;r_i \leq \dfrac{\delta(x)}{3}$.

Posons $W_\varepsilon = \underset{1 \leq i \leq n}{\cup} B(x_i, r_i)$ et choisissons une partition de l'unité $\{a_i\}_{1 \leq i \leq n}$, qui lui est subordonnée. On peut définir $f_\varepsilon : W_\varepsilon \longrightarrow co(F(\overline{\Omega}))$ par :

$$f_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) m(F(x_i))$$

qui est continue. ■

1.4.6 Sélections mesurables

Définition 1.17. Soient Ω un ensemble, $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ non vide. On dit que $\mathcal{A}$ est une σ-algèbre de parties de Ω si :

i) $\varnothing \in \mathcal{A}$,

ii) $A \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \Omega \backslash A \in \mathcal{A}$,

iii) $\forall (A_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}, \quad \underset{i \in \mathbb{N}}{\cup} A_i \in \mathcal{A}$.

Lorsque $\mathcal{A}$ est une σ-algèbre de parties de Ω, on dit que $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace mesurable.

Définition 1.18. Soit $K \subset 2^{\Omega}$. La σ-algèbre engendrée par K est l'intersection σ-$\mathcal{A}(K)$ de toutes les σ-algèbres de parties de Ω contenant K.

Exemple 1.5. Soit Ω un ensemble non vide. $\{\varnothing, \Omega\}$ et 2^{Ω} sont des σ-algèbres de parties de Ω .

Exemple 1.6. Si Ω est un espace topologique, la σ-algèbre engendrée par la famille des sous-ensembles ouverts de Ω est appelée la σ-algèbre de Borel (ou la σ-algèbre des boréliens) de Ω . On la note $\mathcal{B}$.

Exemple 1.7. Dans $\mathbb{R}^n$, nous avons aussi la σ-algèbre $L(\mathbb{R}^n)$ des sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ Lebesgue-mesurables. Pour $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, la σ-algèbre des sous-ensembles de Ω Lebesgue-mesurable est :

$$\mathcal{L}(\Omega) = \{M \cap \Omega \ : \ M \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)\}.$$

Définition 1.19. Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ et $(\Omega', \mathcal{A}')$ deux espaces mesurables. Une application $f : \Omega \longrightarrow \Omega'$ est $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$-mesurable si

$$\forall A' \in \mathcal{A}', \ \ f^{-1}(A') \in \mathcal{A} \ .$$

De même une application multivoque $F : \Omega \longrightarrow 2^{\Omega'} \backslash \varnothing$ est $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$-mesurable si

$$F^{-1}(A') \in \mathcal{A} \quad \forall A' \in \mathcal{A}' \ .$$

Remarque 1.13. Si Ω et Ω' sont des espaces métriques, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\Omega)$ et $\mathcal{B}' = \mathcal{B}(\Omega')$ leurs σ-algèbres de Borel respectives, alors $f : \Omega \longrightarrow \Omega'$ est $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$-mesurable si f vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :

i) $f^{-1}(U) \in \mathcal{B}$ pour tout ouvert $U \subset \Omega'$,

ii) $f^{-1}(W) \in \mathcal{B}$ pour tout fermé $W \subset \Omega'$.

Remarque 1.14. $f_n : \Omega \longrightarrow \Omega'$ est mesurable et $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ sur Ω, alors f est mesurable aussi. Notons que

$$f^{-1}(M) = \underset{p\geq 1}{\cap} \overline{\lim} f_n^{-1}(M_p)$$

si M est fermé et $M_p = \{y \in \Omega',\ \ d(y, M) < \dfrac{1}{p}\}$. Dans le cas où $\Omega \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et $\Omega' = \mathbb{R}^m$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est dite Lebesgue-mesurable si f est $(\mathcal{L}(\Omega), \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$-mesurable, c'est à dire, $f^{-1}(V)$ est Lebesgue-mesurable pour tout ouvert V de $\mathbb{R}^m$. Pour $m = 1$, f est Lebesgue-mesurable si et seulement si l'une des propriétés équivalentes suivantes est réalisée :

i) $\{x \in \Omega\ :\ f(x) < r\} \in \mathcal{L}(\Omega)\ \ \forall r \in \mathbb{R}$,

ii) $\{x \in \Omega :\ f(x) \geq r\} \in \mathcal{L}(\Omega)$,

iii) $f^{-1}([a, b[) \in \mathcal{L}(\Omega)$,

iv) $f^{-1}(V) \in \mathcal{L}(D)$ pour tout ouvert $V \subset \mathbb{R}$.

Maintenant considérons l'application multivoque $F : \Omega \longrightarrow 2^{\Omega'} \backslash \varnothing$. Ici nous pouvons encore dire que F est $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$-mesurable si

$$F^{-1}(B) \in \mathcal{B}\ \ \forall B \in \mathcal{B}'.$$

Mais cette généralisation n'est pas assez simple comme dans le cas univoque car $\mathcal{M} = \{W \subset \Omega' \ : \ F^{-1}(W) \in \mathcal{B}\}$ n'est pas nécessairement une σ-algèbre. Nous avons seulement

$$\Omega \backslash F^{-1}(W) = \{x \in \Omega : F(x) \cap W = \varnothing\} \subset F^{-1}(\Omega' \backslash W) = \{x \in \Omega : F(x) \cap (\Omega' \backslash W) \neq \varnothing\}.$$

Cependant, il est très utile de considérer les applications multivoques F telles que $F^{-1}(M) \in \mathcal{B}$ quelque soit M fermé de Ω' ou $F^{-1}(V) \in \mathcal{B}$ quelque soit V ouvert de Ω'.

Proposition 1.13. *Soit* $(\Omega, \mathcal{A})$ *un espace mesurable,* (Ω', d) *un espace métrique séparable et* $F : \Omega \longrightarrow 2^{\Omega'} \backslash \varnothing$. *Alors nous avons :*
a) si $F^{-1}(M) \in \mathcal{A}$ *quelque soit* M *un sous-ensemble fermé de* Ω', *alors* $F^{-1}(V) \in \mathcal{A}$ *pour toute partie ouverte* $V \subset \Omega'$.
b) $F^{-1}(V) \in \mathcal{A} \quad \forall V \subset \Omega'$ *si et seulement si* $d(x, F(\cdot))$ *est* $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$*-mesurable* $\forall x \in \Omega'$.

Preuve. a) Pour V sous-ensemble ouvert de Ω', nous avons :

$$V = \underset{n \geq 1}{\cup} M_n$$

où $M_n = \{x \in V : \ d(x, \Omega' \backslash V) \geq \dfrac{1}{n}\}$ est fermé. Ainsi

$$F^{-1}(M_n) \in \mathcal{A} .$$

b) provient immédiatement de $F^{-1}(B_r(x)) = \{z \in \Omega : \ d(x, F(z)) < r\}$. ■

Maintenant nous allons démonter le résultat suivant d'existence de sélections mesurables.

Théorème 1.7. *Soient* $(\Omega, \mathcal{A})$ *un espace mesurable,* (Ω', d) *un espace métrique séparable et* $F : \Omega \longrightarrow 2^{\Omega'} \backslash \varnothing$ *une application multivoque telle que :*

(a) $F^{-1}(V) \in \mathcal{A} \quad \forall V \subset \Omega'$ *ouvert;*

(b) $F(z)$ *est complet* $\forall z \in \Omega$.

Alors F *admet une sélection* $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\Omega'))$*-mesurable.*

Preuve. Définissons la suite $f_n : \Omega \longrightarrow \Omega'$ telle que pour tout $n \geq 0$,

$$d(f_n(z), F(z)) < \frac{1}{2^n} \quad \text{et} \quad d(f_{n+1}(z), f_n(z)) < \frac{1}{2^{n-1}}$$

sur Ω. Ces deux conditions et le fait que $F(z)$ est complet implique l'existence de $f : \Omega \longrightarrow \Omega'$ telle que $f(z) \in F(z)$ et $f_n(z) \longrightarrow f(z)$ sur Ω et f est mesurable car les f_n le sont.

Soit $\{x_n, \ n \geq 1\}$ un ensemble dense dans Ω' . Définissons $f_o(z) = x_p$ où p est le plus petit entier tel que

$$F(z) \cap B_1(x_p) \neq \varnothing \ .$$

Comme

$$f_o^{-1}(x_p) = F^{-1}(B_1(x_p)) \backslash \bigcup_{m<p} F^{-1}(B_1(x_m)) \in \mathcal{A}$$

et $f_o^{-1}(x_p)$ est au plus une réunion dénombrable de telles $f_o^{-1}(x_p)$, il est clair que f_o est mesurable. Supposons qu'on ait déjà f_k . Alors

$$z \in \Omega_i = f_k^{-1}(x_i)$$

implique que

$$f_k(z) = x_i \quad \text{et} \quad d(f_k(z), F(z)) < \frac{1}{2^k} \ .$$

Cela donne

$$f(z) \cap B_{\frac{1}{2^k}}(x_i) \neq \varnothing \, .$$

C'est pourquoi on définit

$$f_{k+1} = x_p$$

pour $z \in \Omega_i$ et p le plus petit entier tel que

$$F(z) \cap B_{\frac{1}{2^k}}(x_i) \cap B_{\frac{1}{2^{k+1}}}(x_p) \neq \varnothing \, .$$

Ainsi f_{k+1} est définie sur $\Omega = \underset{i\geq 1}{\cap} \Omega_i$, elle est mesurable et on a :

$$d(f_{k+1}(z), F(z)) < \frac{1}{2^{k+1}}$$

et
$$d(f_{k+1}(z), f_k(z)) \leq \tfrac{1}{2^k} + \tfrac{1}{2^{k+1}} \leq \tfrac{1}{2^{k-1}} \, . \quad \blacksquare$$

Remarque 1.15. Sous les même hypothèses il existe une famille f_n au plus dénombrable de sélections mesurables telle que $F(z) = \overline{\{f_n(z) : n \geq 1\}}$.

Corollaire 1.2. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\Omega = [a, b] \times \mathbb{R}^n$ et $F : \Omega \longrightarrow 2^{\mathbb{R}} \backslash \varnothing$ une application multivoque semi-continue supérieurement, bornée et à valeurs fermées. Alors F admet une sélection Lebesgue-mesurable. Par ailleurs, $\forall u \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$, l'application $F(., u(.)) : [a, b] \longrightarrow 2^{\mathbb{R}} \backslash \varnothing$ qui à tout $t \in [a, b]$ associe l'ensemble $F(t, u(t))$, est aussi semi-continue supérieurement.*

Preuve. (a) Soit M une partie fermée de $\mathbb{R}$. F étant semi-continue supérieurement, $F^{-1}(M)$ est fermée dans Ω donc élément de la σ-algèbre de Borel de Ω notée $\mathcal{B}(\Omega)$. Par la proposition 1.13, $F^{-1}(V) \in \mathcal{B}(\Omega)$ pour toute partie ouverte V de $\mathbb{R}$. Par ailleurs, $\forall x \in \Omega, \quad F(x)$ est un ensemble complet dans $\mathbb{R}$ car fermé et borné. Donc par le théorème 1.7, F admet une sélection Borel-, donc Lebesgue-mesurable.

(b) u étant continue, l'application $p(t) = (t, u(t)) \quad \forall t \in [a, b]$, est continue, donc semi-continue supérieurement. Par la proposition 1.3, $F(., u(.)) = F \circ p$ est semi-continue supérieurement. ■

Exemple 1.8. Soient $F : [-1; 1] \longrightarrow 2^{\mathbb{R}} \backslash \varnothing$ l'application multivoque définie par :

$$F(x) = \begin{cases} \{-1\} & \text{si} \quad x \in [-1; 0[, \\ [-1; 1] & \text{si} \quad x = 0, \\ \{1\} & \text{si} \quad x \in]0; 1]. \end{cases}$$

F est semi-continue supérieurement à valeurs convexes et compactes. Par ailleurs le graphe de F est compact. F n'a pas de sélection continue mais admet une famille de sélections approximatives et une famille de sélections mesurables. En effet $\forall \varepsilon \in]0; 1[$, on peut trouver une application continue $f_\varepsilon : [-1; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $Graph(f_\varepsilon) \subset Graph(F) + \varepsilon B$. Il suffit de prendre

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x \in [-1; -\varepsilon[, \\ \frac{1}{\varepsilon} x & \text{si} \quad x \in [-\varepsilon; \varepsilon], \\ 1 & \text{si} \quad x \in]\varepsilon; 1]. \end{cases}$$

Et $\forall \lambda \in]-1; 1[$, on peut également trouver une application $g_\lambda : [-1; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$

qui est une sélection mesurable de F. Il suffit de définir

$$g_\lambda(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x \in [-1;0[, \\ \lambda & \text{si} \quad x = 0, \\ 1 & \text{si} \quad x \in]0;1]. \end{cases}$$

Chapitre 2

Sous et sur-solutions dans l'étude des problèmes multivoques

2.1 Introduction

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$,

$$\begin{aligned} I &= [a,b] = \{t \in \mathbb{R} : a \leq t \leq b\}, \\ \overset{\circ}{I} &=]a,b[= \{t \in \mathbb{R} : a < t < b\}, \end{aligned}$$

et $F : \mathrm{I} \times \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}} \backslash \varnothing$ une application multivoque.

Notre objectif est d'étendre le domaine d'application de la méthode des sous et des sur-solutions à la classe de problèmes aux limites multivoques du type

$$\begin{cases} u''(t) \in F(t, u(t)) \quad \forall\, t \in I, \\ g_1(u(a), u'(a)) = 0 = g_2(u(b), u'(b)), \end{cases} \tag{2.1}$$

où $g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont des applications continues qui vérifient respectivement :

(H1) : $\forall x \in \mathbb{R}$, l'application $y \to g_1(x, y)$ est décroissante,

(H2) : $\forall x \in \mathbb{R}$, l'application $y \to g_2(x, y)$ est croissante.

Notre contribution consiste à définir une notion de sous et de sur-solutions pour le problème aux limites multivoque (2.1) et à établir un résultat d'existence de solution.

Rappelons brièvement la définition de la notion de sous et de sur-solutions pour le problème univoque suivant :

$$\begin{cases} u''(t) = f(t, u(t)) \quad \forall\, t \in I, \\ g_1(u(a), u'(a)) = 0 = g_2(u(b), u'(b)), \end{cases} \tag{2.2}$$

où $f : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application continue et g_1 et g_2 sont des applications continues qui vérifient les hypothèses (H1) et (H2).

Définition 2.1.

1°) Une fonction $\alpha \in C^2(\overset{\circ}{I}) \cap C^1(I)$ est une sous-solution de (2.2) si :

(i) $\quad \forall t \in \overset{\circ}{I}, \qquad \alpha''(t) \geq f(t, \alpha(t))$;

(ii) $\quad g_1(\alpha(a), \alpha'(a)) \leq 0$, $\qquad g_2(\alpha(b), \alpha'(b)) \leq 0$.

2°) Une fonction $\beta \in C^2(\overset{\circ}{I}) \cap C^1(I)$ est une sur-solution de (2.2) si :

(i) $\quad \forall t \in \overset{\circ}{I}, \qquad \beta''(t) \leq f(t, \beta(t))$;

(ii) $\quad g_1(\beta(a), \beta'(a)) \geq 0$, $\qquad g_2(\beta(b), \beta'(b)) \geq 0$.

3°) Une solution de (2.2) est une fonction $u \in C^2(I)$ qui vérifie (2.2).

Il est évident que toute solution de (2.2) est à la fois une sous-solution et une sur-solution. Réciproquement, toute fonction $u \in C^2(I)$ qui est à la fois sous et sur-solution, est une solution. Mais l'intérêt principal de la méthode réside dans le fait que l'existence d'une sous-solution α et d'une sur-solution β telles que $\alpha(t) \leq \beta(t) \;\; \forall t \in I$, assure l'existence d'au moins une solution

$u \in C^2(I)$ telle que

$$\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t) \quad \forall t \in I.$$

C'est ce résultat essentiel que nous allons étendre aux problèmes multivoques.

Nous nous intéresserons premièrement aux problèmes multivoques qui admettent des sélections continues, c'est le cas des applications multivoques s.c.i. à valeurs convexes et fermées. Nous nous intéresserons ensuite aux problèmes avec des applications multivoques s.c.s. à valeurs convexes et fermées.

2.2 Problèmes multivoques continûment sélectionnables

Nous allons considérer une application multivoque $F : I \times \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}} \backslash \varnothing$ et le problème aux limites

$$\begin{cases} u''(t) \in F(t, u(t)) \quad \forall\, t \in I, \\ g_1(u(a), u'(a)) = 0 = g_2(u(b), u'(b)), \end{cases} \tag{2.3}$$

où $g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont deux applications continues qui vérifient respectivement les hypothèses (H1) et (H2).

Définition 2.2.

1°) Une fonction $\alpha \in C^2(\overset{\circ}{I}) \cap C^1(I)$ est une sous-solution de (2.3) si :

(i) $\quad \forall t \in \overset{\circ}{I}, \qquad \alpha''(t) \geq y \quad \forall y \in F(t, \alpha(t))$;

(ii) $\quad g_1(\alpha(a), \alpha'(a)) \leq 0\,, \qquad g_2(\alpha(b), \alpha'(b)) \leq 0.$

2°) Une fonction $\beta \in C^2(\overset{\circ}{I}) \cap C^1(I)$ est une sur-solution de (2.3) si :

(i) $\quad \forall t \in \overset{\circ}{I}, \qquad \beta''(t) \leq y \quad \forall y \in F(t, \beta(t))$;

$(ii)\quad g_1(\beta(a), \beta'(a)) \geq 0\ , \qquad g_2(\beta(b), \beta'(b)) \geq 0.$

3°) Une solution de (2.3) est une fonction $u \in C^2(I)$ qui vérifie (2.3).

Lorsque l'application multivoque F admet une sélection continue, nous pouvons envisager la recherche de solutions de classe $C^2(I)$.

Théorème 2.1. *On suppose que F admet une sélection continue et qu'il existe une sous-solution α et une sur-solution β du problème* (2.3) *telles que*

$$\alpha(t) \leq \beta(t) \quad \forall t \in I.$$

Alors le problème (2.3) *admet au moins une solution $u \in C^2(I)$ vérifiant*

$$\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t) \quad \forall t \in I.$$

Preuve. Soit $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une sélection continue de F. Alors toute solution du problème univoque

$$\begin{cases} u''(t) = f(t, u(t)) \qquad \forall\, t \in I\ , \\ g_1(u(a), u'(a)) = 0 = g_2(u(b), u'(b))\ , \end{cases} \tag{2.4}$$

est une solution du problème multivoque (2.3). Il nous suffira donc de montrer que le problème (2.4) possède au moins une solution. Cette démonstration est basée sur l'étude du problème :

$$\begin{cases} u''(t) = f(t, \gamma(t, u(t))) + u(t) - \gamma(t, u(t)) \quad \forall t \in I, \\ u(a) = \gamma\left(a\ ,\ u(a) + g_1\left(\gamma(a, u(a)), u'(a)\right)\right), \\ u(b) = \gamma\left(b\ ,\ u(b) + g_2\left(\gamma(b, u(b)), u'(b)\right)\right), \end{cases} \tag{2.5}$$

où γ est l'application continue de $I \times \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\gamma(t, u) = \max[\alpha(t), \min(u, \beta(t))] = \begin{cases} \alpha(t) & \text{si} \quad u < \alpha(t), \\ u & \text{si} \quad \alpha(t) \leq u \leq \beta(t), \\ \beta(t) & \text{si} \quad u > \beta(t). \end{cases} \tag{2.6}$$

La suite de la démonstration se fera en deux étapes. Nous allons d'abord montrer que toute solution u du problème (2.5) vérifie l'inégalité

$$\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t) \quad \forall t \in I,$$

et est par conséquent une solution du problème (2.4), donc solution de (2.3). Nous allons ensuite démontrer que (2.5) admet au moins une solution.

<u>Etape 1</u> : Estimation à priori

Soit u une solution de (2.5). Montrons que

$$\alpha(t) \leq u(t) \quad \forall t \in I.$$

Supposons qu'il existe $t_o \in I$ tel que

$$\min_{t \in I}(u(t) - \alpha(t)) = u(t_o) - \alpha(t_o) < 0 \, ,$$

alors $\gamma(t_o, u(t_o)) = \alpha(t_o)$.

- Si $t_o \in \overset{\circ}{I}$, alors

$$u'(t_o) - \alpha'(t_o) = 0 \quad \text{ et } \quad u''(t_o) - \alpha''(t_o) \geq 0 \, .$$

Comme

$$u''(t_o) = f(t_o, \alpha(t_o)) + u(t_o) - \alpha(t_o) \leq \alpha''(t_o) + u(t_o) - \alpha(t_o) \, ,$$

nous avons la contradiction

$$0 \leq u''(t_o) - \alpha''(t_o) \leq u(t_o) - \alpha(t_o) < 0 \, .$$

- Si $t_o = a$, c'est-à-dire

$$\min_{t \in I}(u(t) - \alpha(t)) = u(a) - \alpha(a) < 0 ,$$

alors

$$u'(a) - \alpha'(a) \geq 0 .$$

Or

$$u(a) = \gamma\left(a\ ,\ u(a) + g_1\left(\alpha(a), u'(a)\right)\right)$$

et d'après (H1)

$$g_1(\alpha(a), u'(a)) \leq g_1(\alpha(a), \alpha'(a)) \leq 0 .$$

Il en résulte que

$$u(a) + g_1\left(\alpha(a), u'(a)\right) \leq u(a) < \alpha(a) ,$$

ce qui conduit à la contradiction

$$\alpha(a) > u(a) = \gamma\left(a\ ,\ u(a) + g_1\left(\alpha(a), u'(a)\right)\right) = \alpha(a) .$$

- Si $t_o = b$, c'est-à-dire

$$\min_{t \in I}(u(t) - \alpha(t)) = u(b) - \alpha(b) < 0 ,$$

alors

$$u'(b) - \alpha'(b) \leq 0 .$$

Or

$$u(b) = \gamma\left(b\ ,\ u(b) + g_2\left(\alpha(b), u'(b)\right)\right)$$

et d'après (H2)

$$g_2(\alpha(b), u'(b)) \leq g_2(\alpha(b), \alpha'(b)) \leq 0 .$$

Nous obtenons ainsi l'inégalité

$$u(b) + g_2\left(\alpha(b), u'(b)\right) \leq u(b) < \alpha(b)$$

qui nous donne la contradiction

$$\alpha(b) > u(b) = \gamma\left(b\ ,\ u(b) + g_2\left(\alpha(b), u'(b)\right)\right) = \alpha(b).$$

Ainsi $\quad \forall t \in I, \quad \alpha(t) \leq u(t).$

Par un raisonnement analogue, nous prouvons que $\quad u(t) \leq \beta(t) \quad \forall t \in I$.

Etape 2 : Existence de solution

Nous allons maintenant démontrer via le théorème de point fixe de Schauder [21, p 60] que le problème (2.5) admet au moins une solution. Pour cela posons $X = C(I),\ Z = C(I) \times \mathbb{R}^2$ et considérons l'application $L : C^2(I) \subset X \longrightarrow Z$ définie par :

$$Lu = (u'' - u, u(a), u(b)).$$

L'application L est linéaire et bijective, donc de Fredholm et d'indice zéro. De plus L^{-1} est compacte (cf. Annexe A).

Par ailleurs l'application $N : X \longrightarrow Z$ définie par :

$$\begin{aligned} Nu(t) &= \left(f(t, \gamma(t, u(t))) - \gamma(t, u(t))\right., \\ &\quad \gamma\left(a\ ,\ u(a) + g_1\left(\gamma(a, u(a)), u'(a)\right)\right), \\ &\quad \left.\gamma\left(b\ ,\ u(b) + g_2\left(\gamma(b, u(b)), u'(b)\right)\right)\right), \end{aligned}$$

est continue et bornée sur $C(I)$. En effet, l'application f étant continue sur le compact

$$K = I \times [\min_{t \in I} \alpha(t), \max_{t \in I} \beta(t)]\ ,$$

elle y est bornée. Donc l'application N est L-complètement continue, de telle sorte que $L^{-1}N$ est compacte et par le théorème de Schauder [21, p 60], $L^{-1}N : X \longrightarrow X$ admet un point fixe qui est solution du problème (2.3). ■

Corollaire 2.1. *Soient $F : I \times \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}} \backslash \varnothing$ une application multivoque semi-continue inférieurement à valeurs convexes et fermées, α une sous-solution et β une sur-solution du problème*

$$\begin{cases} u''(t) \in F(t, u(t)) \quad \forall t \in I \ , \\ g_1(u(a), u'(a)) = 0 = g_2(u(b), u'(b)) \ , \end{cases} \tag{2.7}$$

telles que

$$\alpha(t) \leq \beta(t) \qquad \forall t \in I \ .$$

Alors le problème (2.7) *admet au moins une solution $u \in C^2(I)$ et telle que*

$$\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t) \qquad \forall t \in I \, .$$

Preuve. F étant une application multivoque semi-continue inférieurement à valeurs convexes et fermées, elle admet une sélection continue par le théorème de sélection de Michael. Pour finir, il suffit d'appliquer le théorème 2.1. ■

Exemple 2.1. Soient $\varphi, \psi : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux applications telles que φ est semi-continue supérieurement et ψ semi-continue inférieurement vérifiant

$$\varphi(t, x) \leq \psi(t, x) \quad \forall (t, x) \in I \times \mathbb{R} \ .$$

Définissons l'application multivoque $F : I \times \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}} \backslash \varnothing$ par

$$F(t, x) = [\varphi(t, x), \ \psi(t, x)] = \{v \in \mathbb{R} : \varphi(t, x) \leq v \leq \psi(t, x)\} \ ,$$

et considérons le problème multivoque suivant

$$\begin{cases} u''(t) \in F(t, u(t)) \quad \forall t \in I \, , \\ g_1(u(a), u'(a)) = 0 = g_2(u(b), u'(b)) \, , \end{cases} \tag{2.8}$$

qui, comme nous l'avons prouvé dans [6], est un exemple type de problème multivoque admettant une sélection continue et pour lequel nous avons la définition et le corollaire suivants :

Définition 2.3.

1°) Une fonction $\alpha \in C^2(\overset{\circ}{I}) \cap C^1(I)$ est une sous-solution de (2.8) si :

(*i*) $\forall t \in \overset{\circ}{I}, \quad \alpha''(t) \geq \psi(t, \alpha(t))$;

(*ii*) $g_1(\alpha(a), \alpha'(a)) \leq 0 \, , \quad g_2(\alpha(b), \alpha'(b)) \leq 0.$

2°) Une fonction $\beta \in C^2(\overset{\circ}{I}) \cap C^1(I)$ est une sur-solution de (2.8) si :

(*i*) $\forall t \in \overset{\circ}{I}, \quad \beta''(t) \leq \varphi(t, \beta(t))$;

(*ii*) $g_1(\beta(a), \beta'(a)) \geq 0 \, , \quad g_2(\beta(b), \beta'(b)) \geq 0.$

3°) Une solution de (2.8) est une fonction $u \in C^2(I)$ qui vérifie (2.8).

Corollaire 2.2. *Supposons qu'il existe une sous-solution α et une sur-solution β de* (2.8) *telles que*

$$\alpha(t) \leq \beta(t) \qquad \forall t \in I \, .$$

Alors le problème (2.8) *admet au moins une solution $u \in C^2(I)$ et telle que*

$$\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t) \qquad \forall t \in I \, .$$

Preuve. Nous avons à prouver en application du théorème 2.1, que l'application multivoque F admet au moins une sélection continue. Sachant que $\forall (t, x) \in I \times \mathbb{R}$,

$$F(t, x) = [\varphi(t, x), \psi(t, x)]$$

est convexe et fermé, il nous reste à montrer que F est s.c.i. en vertu du théorème de sélection de Michael. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}$, $(t_n, x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $I \times \mathbb{R}$ convergeant vers $(t_o, x_o) \in I \times \mathbb{R}$ et telle que

$$F(t_o, x_o) \cap U \neq \emptyset.$$

Par la semi-continuité supérieure de φ et la semi-continuité inférieure de ψ, nous avons la relation

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \varphi(t_n, x_n) \leq \varphi(t_o, x_o) \leq \psi(t_o, x_o) \leq \underline{\lim_{n\to\infty}}\, \psi(t_n, x_n) \ ,$$

de laquelle nous déduisons que

$$F(t_n, x_n) \cap U \neq \emptyset$$

à partir d'un certain rang. Donc $F^{-1}(U)$ est un ouvert de $I \times \mathbb{R}$. Ce qui prouve que F est s.c.i. Par le théorème de sélection de Michael, il existe une application continue $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\quad \forall (t, x) \in I \times \mathbb{R}$,
nous avons : $\quad f(t, x) \in F(t, x) = [\varphi(t, x), \psi(t, x)]$. ∎

Remarque 2.1. Les résultats ci-dessus exposés généralisent le cas univoque. En effet, si nous nous donnons une application continue $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, en prenant $\varphi(t, x) = \psi(t, x) = f(t, x)$ dans le problème (2.8) ou en prenant

$F(t,x) = \{f(t,x)\}$ dans le problème (2.3), nous retrouvons la définition et le résultat d'existence relatifs au problème univoque suivant :

$$\begin{cases} u''(t) = f(t,u(t)) \quad \forall t \in I, \\ g_1(u(a),u'(a)) = 0 = g_2(u(b),u'(b)) \ , \end{cases} \tag{2.9}$$

Définition 2.4.

1°) Une fonction $\alpha \in C^2(\overset{\circ}{I}) \cap C^1(I)$ est une sous-solution de (2.9) si :

(*i*) $\quad \forall t \in \overset{\circ}{I}, \quad \alpha''(t) \geq f(t,u(t))$;

(*ii*) $\quad g_1(\alpha(a),\alpha'(a)) \leq 0$, $\quad g_2(\alpha(b),\alpha'(b)) \leq 0$.

2°) Une fonction $\beta \in C^2(\overset{\circ}{I}) \cap C^1(I)$ est une sur-solution de (2.9) si :

(*i*) $\quad \forall t \in \overset{\circ}{I}, \quad \beta''(t) \leq f(t,\beta(t))$;

(*ii*) $\quad g_1(\beta(a),\beta'(a)) \geq 0$, $g_2(\beta(b),\beta'(b)) \geq 0$.

3°) Une solution de (2.9) est une fonction $u \in C^2(I)$ qui vérifie (2.9).

Corollaire 2.3. *Supposons qu'il existe une sous-solution α et une sur-solution β du problème* (2.9) *telles que*

$$\alpha(t) \leq \beta(t) \qquad \forall t \in I \ .$$

Alors le problème (2.9) *admet au moins une solution $u \in C^2(I)$ et telle que*

$$\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t) \qquad \forall t \in I \ .$$

Remarque 2.2. Les conditions aux limites

$$g_1(u(a),u'(a)) = 0 = g_2(u(b),u'(b))$$

généralisent les conditions aux limites

$$a_1u(a) - a_2u'(a) = A \ ; \quad b_1u(b) + b_2u'(b) = B \ ;$$

avec $A, B \in \mathbb{R}$, $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$, $a_2, b_2 \in \mathbb{R}^+$ tels que $a_1^2 + a_2^2 > 0$ et $b_1^2 + b_2^2 > 0$, lesquelles conditions contiennent les conditions aux limites de Dirichlet

$$u(a) = A \ , \ \ u(b) = B \ , \qquad A, B \in \mathbb{R} \ ;$$

et celles de Neumann

$$u'(a) = A, \ u'(b) = B, \quad A, B \in \mathbb{R} \ .$$

Il faut enfin remarquer que le travail fait ici s'adapte facilement aux conditions aux limites périodiques

$$u(a) = u(b) \ , \ u'(a) = u'(b).$$

2.2.1 Existence de solutions pour le problème aux limites périodiques

Soit $F : I \times \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}} \backslash \varnothing$ une application multivoque, considérons cette fois-ci le problème aux limites périodiques

$$\begin{cases} u''(t) \in F(t, u(t)) \quad \forall t \in I \ , \\ u(a) = u(b) \ , \ u'(a) = u'(b) \ . \end{cases} \tag{2.10}$$

Définition 2.5.

1°) Une fonction $\alpha \in C^2(\overset{\circ}{I}) \cap C^1(I)$ est une sous-solution de (2.10) si :

(i) $\quad \forall t \in \overset{\circ}{I}, \qquad \alpha''(t) \geq y \quad \forall y \in F(t, \alpha(t))$;

(ii) $\quad \alpha(a) = \alpha(b)$, $\quad \alpha'(a) \geq \alpha'(b)$.

2°) Une fonction $\beta \in C^2(\overset{o}{I}) \cap C^1(I)$ est une sur-solution de (2.10) si :

(i) $\quad \forall t \in \overset{o}{I}, \quad \beta''(t) \leq y \quad \forall y \in F(t, \beta(t))$;

(ii) $\quad \beta(a) = \beta(b)$, $\quad \beta'(a) \leq \beta'(b)$).

3°) Une solution de (2.10) est une fonction $u \in C^2(I)$ qui vérifie les relations (2.10).

Théorème 2.2. *Si $F : I \times \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}} \backslash \varnothing$ est une application multivoque qui admet une sélection continue, α une sous-solution et β une sur-solution du problème* (2.10) *telles que*

$$\alpha(t) \leq \beta(t) \qquad \forall t \in I \ .$$

Alors le problème (2.10) *admet au moins une solution $u \in C^2(I)$ et telle que*

$$\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t) \qquad \forall t \in I \ .$$

Preuve. Nous allons procéder comme dans la démontration du théorème 2.1. Soit $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une sélection continue de F. Alors toute solution du problème univoque

$$\begin{cases} u''(t) = f(t, u(t)) \quad \forall\, t \in I \ , \\ u(a) = u(b) \ , \ u'(a) = u'(b) \ , \end{cases} \tag{2.11}$$

est une solution du problème multivoque (2.10). Il nous suffira de montrer que le problème (2.11) possède au moins une solution. Cette démonstration est basée sur l'étude du problème :

$$\begin{cases} u''(t) = f(t, \gamma(t, u(t))) + u(t) - \gamma(t, u(t)) \quad \forall t \in I, \\ u(a) = u(b) \ , \ u'(a) = u'(b) \ , \end{cases} \tag{2.12}$$

où γ est l'application continue de $I \times \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\gamma(t,u) = \max\left[\alpha(t)\ ,\ \min(u,\beta(t))\right] = \begin{cases} \alpha(t) & \text{si} \quad u < \alpha(t), \\ u & \text{si} \quad \alpha(t) \leq u \leq \beta(t), \\ \beta(t) & \text{si} \quad u > \beta(t). \end{cases}$$

La suite de la démonstration se fera en deux étapes. Nous allons d'abord montrer que toute solution u du problème (2.12) vérifie l'inégalité

$$\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t) \quad \forall t \in I,$$

et est par conséquent une solution du problème (2.11). Nous allons ensuite démontrer que (2.12) admet au moins une solution.

Etape 1 : Soit u une solution de (2.12). Montrons que

$$\alpha(t) \leq u(t) \quad \forall t \in I.$$

Supposons qu'il existe $t_o \in I$ tel que

$$\min_{t\in I}(u(t) - \alpha(t)) = u(t_o) - \alpha(t_o) < 0\ ,$$

alors $\gamma(t_o, u(t_o)) = \alpha(t_o)$.

- Si $t_o \in \overset{\circ}{I}$, nous obtenons la contradiction

$$0 \leq u''(t_o) - \alpha''(t_o) \leq u(t_o) - \alpha(t_o) < 0\ .$$

- Si $t_o = a$, le minimum de $u - \alpha$ sur I est aussi atteint en b.

Nous avons donc

$$u(a) - \alpha(a) = u(b) - \alpha(b) < 0$$

et

$$u'(a) - \alpha'(a) \geq 0 \geq u'(b) - \alpha'(b)\ . \tag{2.13}$$

Or

$$\alpha'(a) \geq \alpha'(b) \quad \text{et} \quad u'(a) = u'(b)$$

de sorte que

$$u'(a) - \alpha'(a) \leq u'(b) - \alpha'(b)\ . \tag{2.14}$$

De (2.13) et (2.14), nous déduisons que

$$u'(a) - \alpha'(a) = 0 = u'(b) - \alpha'(b)\ .$$

Par ailleurs, comme $u(a) - \alpha(a) < 0$, il existe $t_1 \in \overset{\circ}{I}$ tel que

$$u(t) - \alpha(t) < 0 \quad \forall t \in \,]a, t_1[\ ,$$

ce qui permet d'écrire

$$\gamma(t, u(t)) = \alpha(t) \quad \forall t \in \,]a, t_1[\,.$$

Par conséquent

$$u''(t) - \alpha''(t) = f(t, \alpha(t)) + u(t) - \alpha(t) - \alpha''(t) < 0 \quad \forall t \in \,]a, t_1[\,.$$

Il en résulte que $\forall t \in \,]a, t_1[$,

$$u'(t) - \alpha'(t) - u'(a) + \alpha'(a) = \int_a^t \left(u''(s) - \alpha''(s)\right)\, ds < 0\ .$$

Comme $u'(a) - \alpha'(a) = 0$, nous obtenons

$$u'(t) - \alpha'(t) < 0 \quad \forall t \in \,]a, t_1[\,,$$

ce qui contredit le fait que le minimum est atteint en a.

Donc $\quad \forall t \in I, \quad \alpha(t) \leq u(t)$.

On démontre de même que $u(t) \leq \beta(t) \quad \forall t \in I$.

Etape 2 : Nous allons maintenant démontrer que (2.12) admet au moins une solution. Pour cela posons $X = C(I),\ Z = C(I) \times \mathbb{R}^2$ et considérons l'application $L : C^2(I) \subset X \longrightarrow Z$ définie par

$$Lu = (u'' - u,\ u(a) - u(b),\ u'(a) - u'(b)).$$

L'application L est linéaire et bijective, donc de Fredholm et d'indice zéro. De plus L^{-1} est compacte (cf [1, p 167]).

Par ailleurs l'application $N : X \longrightarrow Z$ définie par :

$$Nu(t) = (f(t, \gamma(t, u(t))) - \gamma(t, u(t))\ ,\ 0,\ 0)$$

est continue et bornée sur $C(I)$, donc L-complètement continue, et par le théorème de Schauder [21, p 60], $L^{-1}N : X \longrightarrow X$ admet un point fixe qui est solution de (2.12). ■

2.3 Problèmes avec une application multivoque semi-continue supérieurement

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$, $I = [a, b]$ et $F : I \times \mathbb{R} \longrightarrow 2^{\mathbb{R}} \backslash \varnothing$ un opérateur multivoque. Considérons le problème aux limites multivoque

$$\begin{cases} u''(t) \in F(t, u(t)) \quad p.p.\ t \in I, \\ g_1(u(a), u'(a)) = 0 = g_2(u(b), u'(b)), \end{cases} \tag{2.15}$$

où $g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont des applications continues qui vérifient respectivement les hypothèses (H1) et (H2). Considérons l'hypothèse suivante :

(H3) : l'application multivoque F est semi-continue supérieurement et est à valeurs convexes et fermées.

Dans ce cas, l'application multivoque F n'admet en général pas de sélection continue. C'est pourquoi, nous allons envisager la recherche de solutions du problème (2.15) dans $W^{2,1}(I)$. Pour y arriver, à partir de F, définissons $G : C^1(I) \longrightarrow 2^{L^1(I)}$ par

$$Gu = \{v \in L^1(I) : v(t) \in F(t, u(t)) \quad p.p.\ t \in I\}.$$

Ainsi le problème (2.15) peut s'écrire :

$$\begin{cases} u'' \in Gu\ , \quad u \in W^{2,1}(I), \\ g_1(u(a), u'(a)) = 0 = g_2(u(b), u'(b)). \end{cases}$$

Proposition 2.1. *On suppose l'hypothèse (H3) satisfaite. Alors, pour tout $u \in C^1(I)$, l'ensemble Gu est convexe.*

Preuve. soient $v_1,\ v_2 \in Gu$ et $\lambda \in [0, 1]$. Montrons que

$$\lambda v_1 + (1 - \lambda)v_2 \in Gu.$$

Il est évident $\lambda v_1 + (1 - \lambda)v_2 \in L^1(I)$. Il reste à montrer que

$$\lambda v_1(t) + (1 - \lambda)v_2(t) \in F(t, u(t)) \quad p.p.\ t \in I.$$

Nous savons par la définition de Gu que

$$v_1(t) \in F(t, u(t))\ \ p.p.\ t \in I \ \text{ et } \ v_2(t) \in F(t, u(t))\ \ p.p.\ t \in I.$$

Posons

$$\Sigma_1 = \{t \in I : v_1(t) \notin F(t, u(t))\} \ \text{ et } \ \Sigma_2 = \{t \in I : v_2(t) \notin F(t, u(t))\}.$$

Alors Σ_1 et Σ_2 sont négligeables ainsi que leur réunion.

Donc pour tout $t \in I\backslash(\Sigma_1 \cup \Sigma_2)$, $v_1(t)$ et $v_2(t)$ appartiennent à $F(t, u(t))$ qui est convexe. D'où

$$\lambda v_1(t) + (1-\lambda)v_2(t) \in F(t, u(t)) \quad \forall t \in I\backslash(\Sigma_1 \cup \Sigma_2),$$

c'est-à-dire

$$\lambda v_1(t) + (1-\lambda)v_2(t) \in F(t, u(t)) \quad p.p.\ t \in I.$$

■

Proposition 2.2. *Si en plus de l'hypothèse (H3), l'application multivoque F est bornée, alors l'application multivoque G est aussi bornée, à valeurs non vides et fermées.*

Preuve. Supposons que F est bornée. Alors il existe deux nombres réels r et R tels que $\forall t \in I$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$F(t, x) \subset [r, R].$$

Posons

$$M = \max\{|r|, |R|\}.$$

Alors pour tout $u \in C^1(I)$ et pour tout $v \in Gu$,

$$|v(t)| < M \quad p.p.\ t \in I.$$

Ainsi

$$\int_I |v(t)|dt < M(b-a).$$

Ce qui montre que G est bornée.

Par ailleurs, par le corollaire (1.2) du chapitre 1, $\forall u \in C^1(I)$, l'application multivoque $F(., u(.))$ est semi-continue supérieurement bornée et à valeurs fermées et elle admet par conséquent une sélection mesurable v qui appartient Gu. Donc, Gu n'est pas vide.

Montrons maintenant que l'ensemble Gu est fermé quelque soit $u \in C^1(I)$. Pour cela donnons-nous une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de Gu qui converge vers v dans $L^1(I)$. Montrons que $v \in Gu$. Comme l'ensemble Gu est borné, la limite v de la suite v_n est bornée, donc intégrable. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers v dans $L^1(I)$, elle admet une sous-suite $(\overline{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\overline{v}_n(t) \longrightarrow v(t) \quad p.p.\ t \in I.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$\Sigma_n = \{t \in I : \overline{v}_n(t) \notin F(t, u(t))\}.$$

Alors Σ_n est négligeable de même que $\Sigma = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \Sigma_n$ qui est une réunion dénombrable d'ensembles négligeables. Ainsi, pour tout $t \in I \backslash \Sigma$,

$$\overline{v}_n(t) \longrightarrow v(t)$$

et comme l'ensemble $F(t, u(t))$ est fermé, nous avons

$$v(t) \in F(t, u(t)) \quad \forall t \in I \backslash \Sigma.$$

C'est-à-dire que

$$v(t) \in F(t, u(t)) \quad p.p.\ t \in I$$

et donc $v \in Gu$. ■

Proposition 2.3. *Supposons l'hypothèse (H3) satisfaite et l'application multivoque F bornée. Alors, l'application multivoque G est faiblement semi-continue supérieurement.*

Preuve. Soient $r, R \in \mathbb{R}$ tels que $F(t,x) \subset [r,R]$ et $M = \max\{|r|,|R|\}$. Posons

$$K = \{w \in C(I) : w \text{ Lipschitzienne de constante } M \text{ et } w(a) = 0\}$$

et pour tout $\psi \in L^\infty(I)$, définissons $H_\psi : C^1(I) \longrightarrow 2^K$ par

$$H_\psi(u) = \{w \in K \ / \ \exists v \in Gu \text{ tel que } w(t) = \int_a^t \psi(s)v(s)ds\}.$$

Nous devons montrer que pour tout $\psi \in L^\infty(I)$, l'application multivoque H_ψ est semi-continue supérieurement. L'ensemble K est un ensemble compact et convexe de $C(I)$. On déduit des propriétés de K et de G que l'application multivoque H_ψ est bornée et à valeurs convexes compactes non vides. Il nous faut alors montrer que le graphe de H_ψ est fermé dans $C^1(I) \times K$ pour déduire que H_ψ est semi-continue supérieurement. Pour cela, donnons nous une suite $u_n \longrightarrow u$ dans $C^1(I)$ et une suite $w_n \longrightarrow w$ dans K telles que $w_n \in H_\psi(u_n)$. Montrons que $w \in H_\psi(u)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $v_n \in L^1(I)$ telle que

$$v_n(t) \in F(t, u_n(t)) \ \ p.p. \ t \in I$$

et

$$w_n(t) = \int_a^t \psi(s)v_n(s)ds \longrightarrow w(t).$$

Par le théorème de Alaoglu, il existe $\overline{v} \in L^{\infty}(I)$ et une sous suite $\overline{v}_n$ de la suite v_n qui converge vers $\overline{v}$ dans $\sigma(L^{\infty}, L^1)$. Plus précisément $\overline{v} \in L^1(I)$ et en particulier, nous avons :

$$\int_a^t \psi(s)\overline{v}_n(s)ds \longrightarrow \int_a^t \psi(s)\overline{v}(s)ds = w(t).$$

Comme F est semi-continue supérieurement à valeurs fermées, le graphe de F est fermé et donc

$$\overline{v}(t) \in F(t, u(t)) \quad p.p. \ \ t \in I.$$

Ce qui implique que $\overline{v} \in Gu$. Par conséquent, $w \in H_{\psi}(u)$. Ainsi l'application multivoque H_{ψ} est semi-continue supérieurement à valeurs convexes compactes non vides. ■

Définition 2.6.

Une solution de (2.15) est une fonction $u \in W^{2,1}(I)$ qui vérifie les relations (2.15).

Théorème 2.3. *Supposons qu'il existe une sous-solution α et une sur-solution β du problème* (2.15) *telles que $\alpha(t) \leq \beta(t) \quad \forall t \in I$. Posons*

$$E = I \times [\min_{t\in I} \alpha(t), \ \max_{t\in I} \beta(t)]$$

et supposons que l'application multivoque sémi-continue supérieurement à valeurs convexes fermées non vides F est bornée sur E. Alors le problème (2.15) *admet au moins une solution $u \in W^{2,1}(I)$ telle que*

$$\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t) \quad \forall t \in I.$$

Preuve. La démonstration de ce résultat se fera en deux étapes et reposera sur l'étude du problème modifié suivant :

$$\begin{cases} u''(t) + \gamma(t, u(t)) - u(t) \in F(t, \gamma(t, u(t))) \quad p.p.\ t \in I, \\ u(a) = \gamma(a\ ,\ u(a) + g_1\gamma(a, u(a)), u'(a))), \\ u(b) = \gamma(b\ ,\ u(b) + g_2(\gamma(b, u(b)), u'(b))), \end{cases} \tag{2.16}$$

où $\gamma : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est l'application continue bornée définie par (2.6).

<u>Etape 1</u> : Estimation à priori

Montrons que toute solution u du problème (2.16) vérifie l'inégalité

$$\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t) \quad \forall t \in I,$$

et est par conséquent solution du problème (2.15).

Soit $u \in W^{2,1}(I)$ une solution du problème (2.16). Par la définition de la fonction γ, nous avons

$$\alpha(a) \leq u(a) \leq \beta(a) \quad \text{et} \quad \alpha(b) \leq u(b) \leq \beta(b).$$

Supposons qu'il existe $t_o \in \overset{o}{I}$ tel que

$$\min_{t \in I}(u(t) - \alpha(t)) = u(t_o) - \alpha(t_o) < 0,$$

alors $\quad \gamma(t_o, u(t_o)) = \alpha(t_o) \quad$ et $\quad u'(t_o) - \alpha'(t_o) = 0.$

Comme $\alpha(b) \leq u(b)$ et que $u - \alpha$ est continue sur I, il existe $t_1 \in]t_o, b]$ tel que

$$(u - \alpha)(t_1) = 0 \ \text{ et } \ (u - \alpha)(t) < 0 \ \ \forall t \in [t_o, t_1[. \tag{2.17}$$

On déduit de (2.16) et (2.17) que pour presque tout $t \in]t_o, t_1[$,

$$u''(t) - u(t) + \alpha(t) \in F(t, \alpha(t)).$$

Comme α est une sous-solution de (2.15), nous obtenons que pour presque tout $t \in]t_o, t_1[$,

$$u''(t) - u(t) + \alpha(t) \leq \alpha''(t).$$

Donc pour presque tout $t \in]t_o, t_1[$,

$$u''(t) - \alpha''(t) \leq u(t) - \alpha(t) < 0,$$

ce qui contredit le fait que de $(u - \alpha)(t_o)$ est un minimum. Ainsi,

$$\alpha(t) \leq u(t) \quad \forall t \in I.$$

On montre de manière analogue que $u(t) \leq \beta(t) \;\; \forall t \in I$.

<u>Etape 2</u> : Existence de solution pour (2.16)

Posons, pour tout $(t, x) \in I \times \mathbb{R}$,

$$\widehat{F}(t, x) = F(t, \gamma(t, x)) - \gamma(t, x).$$

Pour tout $(t, x) \in I \times \mathbb{R}$,

$$\gamma(t, x) \in [\alpha(t), \beta(t)]$$

et comme F est bornée sur $E = I \times [\min_{t \in I} \alpha(t), \max_{t \in I} \beta(t)]$, alors $\widehat{F}$ est une application multivoque bornée sur $I \times \mathbb{R}$, semi-continue supérieurement et à valeurs convexes fermées non vides. Ainsi, par les propositions (2.1), (2.2) et (2.3), l'application multivoque $\widehat{G} : C^1(I) \longrightarrow 2^{L^1(I)}$ définie par

$$\widehat{G}u = \{v \in L^1(I) : v(t) \in \widehat{F}(t, u(t)) \;\; p.p. \; t \in I\}$$

est faiblement semi-continue supérieurement et à valeurs convexes fermées non vides.

Considérons l'application linéaire $L : W^{2,1}(I) \longrightarrow L^1(I) \times \mathbb{R}^2$ définie par

$$Lu = (u'' - u, u(a), u(b)),$$

l'opérateur multivoque $N : W^{2,1}(I) \longrightarrow 2^{L^1(I)} \times \mathbb{R}^2$ défini par

$$Nu = (\widehat{G}u, g_a u, g_b u)$$

où $\quad g_a u = \gamma(a\ ,\ u(a) + g_1\gamma(a, u(a)), u'(a)))$

et $\quad g_b u = \gamma(b\ ,\ u(b) + g_2(\gamma(b, u(b)), u'(b))),$

l'injection canonique $i : W^{2,1}(I) \longrightarrow C^1(I)$ et posons

$$T = iL^{-1}N : C^1(I) \longrightarrow C^1(I).$$

Alors le problème (2.16) peut s'écrire

$$u \in Tu, \quad u \in W^{2,1}(I).$$

L'application L est linéaire bijective (donc de Fredholm d'indice zéro) et iL^{-1} est compacte (cf. [1, p 167]). Par ailleurs, l'application multivoque N est faiblement semi-continue supérieurement, bornée et à valeurs non vides, convexes et fermées. Ainsi T est un opérateur multivoque compact, semi-continue supérieurement et à valeurs convexes compactes non vides. Donc par le théorème de Schauder pour les opérateurs multivoques semi-continues supérieurement (cf. Annexe A, Théorème A.3), l'opérateur T admet un point fixe qui est solution de (2.16), donc solution de (2.15). ■

Remarque 2.3. Comme l'existence de solution de (2.15) est établie dans $W^{2,1}(I)$, nous pouvons affaiblir la notion de sous et de sur-solutions en les choisissant également dans $W^{2,1}(I)$ ou même dans $C(I)$.

Définition 2.7 (Sous et sur-solutions dans $W^{2,1}$).

1°) Une fonction $\alpha \in W^{2,1}(I)$ est une sous-solution de (2.15) si :

(*i*) pour presque tout $t \in \overset{o}{I}$, $\alpha''(t) \geq y \quad \forall y \in F(t, \alpha(t))$;

(*ii*) $g_1(\alpha(a), \alpha'(a)) \leq 0$, $g_2(\alpha(b), \alpha'(b)) \leq 0$.

2°) Une fonction $\beta \in W^{2,1}(I)$ est une sur-solution de (2.15) si :

(*i*) pour presque tout $t \in \overset{o}{I}$, $\beta''(t) \leq y \quad \forall y \in F(t, \beta(t))$;

(*ii*) $g_1(\beta(a), \beta'(a)) \geq 0$, $g_2(\beta(b), \beta'(b)) \geq 0$.

Définition 2.8 (Sous et sur-solutions dans $C(I)$).

1°) Une fonction $\alpha \in C(I)$ est une sous-solution de (2.15) si :

(*i*) $\forall t_o \in \overset{o}{I}$, ou bien $D_-\alpha(t_o) < D^+\alpha(t_o)$, ou bien il existe un voisinage I_o de t_o tel que $I_o \subset \overset{o}{I}$, $\alpha \in W^{2,1}(I_o)$ et pour presque tout $t \in I_o$,

$$\alpha''(t) \geq y \quad \forall y \in F(t, \alpha(t));$$

(*ii*) $g_1(\alpha(a), D^+\alpha(a)) \leq 0$, $g_2(\alpha(b), D_-\alpha(b)) \leq 0$.

2°) Une fonction $\beta \in C(I)$ est une sur-solution de (2.15) si :

(*i*) $\forall t_o \in \overset{o}{I}$, ou bien $D^-\beta(t_o) > D_+\beta(t_o)$, ou bien il existe un voisinage I_o de t_o tel que $I_o \subset \overset{o}{I}$, $\beta \in W^{2,1}(I_o)$ et pour presque tout $t \in I_o$,

$$\beta''(t) \leq y \quad \forall y \in F(t, \beta(t));$$

(*ii*) $g_1(\beta(a), D_+\beta(a)) \geq 0$, $g_2(\beta(b), D^-\beta(b)) \geq 0$.

Proposition 2.4. *Le théorème 2.3 reste vrai si nous prenons la sous-solution α et la sur-solution β conformément à la définition 2.7 ou conformément à la définition 2.8.*

Preuve. Si nous prenons la sous-solution α et la sur-solution β conformément à la définition 2.7 (resp. à la définition 2.8), il nous suffit de montrer que toute solution du problème (2.16) demeure toujours entre α et β et est ainsi solution de (2.15). La preuve de l'existence de solution étant identique à l'étape 2 de la démonstration du théorème 2.3.

Soit $u \in W^{2,1}(I)$ une solution de (2.16). Par la définition de la fonction γ, nous avons

$$\alpha(a) \leq u(a) \leq \beta(a) \quad \text{et} \quad \alpha(b) \leq u(b) \leq \beta(b).$$

Supposons qu'il existe $t_o \in \overset{o}{I}$ tel que

$$\min_{t \in I}(u(t) - \alpha(t)) = u(t_o) - \alpha(t_o) < 0,$$

alors $\quad \gamma(t_o, u(t_o)) = \alpha(t_o) \quad \text{et} \quad D_-\alpha(t_o) \geq D^+\alpha(t_o).$

La condition $D_-\alpha(t_o) < D^+\alpha(t_o)$ n'étant pas réalisée, par la définition de la sous-solution dans $C(I)$, il existe $I_o \subset \overset{o}{I}$ un voisinage ouvert de t_o tel que $\alpha \in W^{2,1}(I_o)$ et pour presque tout $t \in I_o$,

$$\alpha''(t) \geq y \quad \forall y \in F(t, \alpha(t)). \tag{2.18}$$

Ainsi α' est définie sur I_o et nous avons

$$u'(t_o) - \alpha'(t_o) = 0.$$

Comme $u(t_o) - \alpha(t_o) < 0$, nous pouvons supposer I_o "assez petit" pour que nous ayons

$$u(t) - \alpha(t) < 0 \quad \forall t \in I_o.$$

Nous obtenons ainsi, que pour presque tout $t \in I_o$,

$$u''(t) - u(t) + \alpha(t) \in F(t, \alpha(t)).$$

Par la relation (2.18), pour presque tout $t \in I_o$,

$$u''(t) - u(t) + \alpha(t) \leq \alpha''(t),$$

de sorte que :

$$u''(t) - \alpha''(t) \leq u(t) - \alpha(t) < 0 \quad p.p.\ t \in I_o.$$

Il s'en suit que $\forall t_1 \in I_o$ tel que $t_1 > t_o$,

$$u'(t_1) - \alpha'(t_1) - u'(t_o) + \alpha'(t_o) = \int_{t_o}^{t_1} (u''(t) - \alpha''(t))dt < 0,$$

par conséquent,

$$u'(t_1) - \alpha'(t_1) < 0.$$

Ce qui contredit le fait que $u(t_o) - \alpha(t_o)$ est un minimum.

Ainsi, $\quad \alpha(t) \leq u(t) \quad \forall t \in I.$

Par un raisonnement analogue, on démontre que $\quad u(t) \leq \beta(t) \quad \forall t \in I$. ■

Chapitre 3

Applications et extensions

3.1 Introduction

Nous présentons dans ce chapitre quelques applications et extensions de la méthode des sous et des sur-solutions pour les problèmes multivoques du second ordre. Nous expliquons dans un premier temps que la méthode des sous et des sur-solutions peut nous permettre de savoir l'existence de solutions positives ou négatives, de relaxer un certain nombre de problèmes univoques avec discontinuités ou de prouver l'existence de trajectoires viables pour un problème de contrôle. Ensuite, nous étudions le problème

$$\begin{cases} u''(t) \in F(t, u(t), u'(t)) \quad \forall\, t \in I, \\ g_1(u(a), u'(a)) = 0 = g_2(u(b), u'(b)), \end{cases}$$

dans lequel, en plus de t et $u(t)$, F dépend de $u'(t)$ et pour lequel nous faisons l'hypothèse de la satisfaction de la condition de Berstein-Nagumo qui permet d'obtenir une estimation de la norme C^1 des solutions du problème lorsque nous connaissons une estimation de la norme C^0 de ces solutions.

3.2 Applications

3.2.1 Existence de solution positive ou négative

Une des applications intéressantes de la méthode des sous et des sur-solutions est qu'elle peut nous permettre, dans certains cas, de savoir s'il existe une solution positive ou s'il existe une solution négative. C'est le cas où la sous-solution α est supérieure ou égale à 0 ou le cas où la sur-solution β est inférieure ou égale à 0. Ce qui nous permet d'énoncer les résultats triviaux suivants :

Proposition 3.1. *On suppose que F admet une sélection continue et qu'il existe une sous-solution α et une sur-solution β du problème* (2.3) *telles que*

$$0 \leq \alpha(t) \leq \beta(t) \quad \forall t \in I.$$

Alors le problème (2.3) *admet au moins une solution positive $u \in C^2(I)$ vérifiant*

$$\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t) \quad \forall t \in I.$$

Proposition 3.2. *On suppose que F admet une sélection continue et qu'il existe une sous-solution α et une sur-solution β du problème* (2.3) *telles que*

$$\alpha(t) \leq \beta(t) \leq 0 \quad \forall t \in I.$$

Alors le problème (2.3) *admet au moins une solution négative $u \in C^2(I)$ vérifiant*

$$\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t) \quad \forall t \in I.$$

3.2.2 Exemple : Inégalité différentielle

Considérons le problème d'inégalité différentielle suivant :

$$\begin{cases} 0 \leq u''(t) \leq \dfrac{t}{\pi} \ \ \forall\, t \in [0, \pi], \\ u(0) = 0 = u(\pi). \end{cases} \tag{3.1}$$

Pour tout $(t, x) \in [0, \pi] \times \mathbb{R}$, posons $F(t, x) = [0, \dfrac{t}{\pi}]$, alors le problème (3.1) se met sous la forme multivoque suivante :

$$\begin{cases} u''(t) \in F(t, u(t)) \ \ \forall\, t \in [0, \pi], \\ u(0) = 0 = u(\pi). \end{cases} \tag{3.2}$$

On vérifie facilement que (3.2) admet des sélections continues, que $\beta(t) = 0 \ \ \forall t \in [0, \pi]$ est une sur-solution de (3.2) et $\alpha(t) = \dfrac{t^3 - \pi^2 t}{6\pi} \quad \forall t \in [0, \pi]$ est une sous-solution de (3.2) telles que :

$$\alpha(t) \leq \beta(t) \ \ \forall t \in [0, \pi].$$

Donc (3.2) admet au moins une solution $u \in C^2(I)$ telle que

$$\frac{t^3 - \pi^2 t}{6\pi} \leq u(t) \leq 0 \ \ \forall\, t \in [0, \pi].$$

Plus précisément pour tout $(t, x) \in [0, \pi] \times \mathbb{R}$, l'application :

- $f_\infty(t, x) = 0$ est continue et est la sélection minimale de F,

- $f_1(t, x) = \dfrac{t}{\pi}$ est une sélection continue de F,

- $f_2(t, x) = \dfrac{t}{2\pi}$ est continue et est la sélection de Chebishev de F,

- $f_n(t, x) = \dfrac{t}{n\pi}$, pour tout entier $n > 2$, est une sélection continue de F.

Ainsi, pour $n = 1, 2, ..., \infty$, nous avons la famille de problèmes sélectionnés suivante :

$$(Pn) \begin{cases} u''(t) = f_n(t, u(t)) \ \ \forall\, t \in [0, \pi], \\ u(0) = 0 = u(\pi) \end{cases}$$

dont les solutions

$$u_\infty(t) = 0 \quad \forall t \in [0, \pi] \ \text{ pour } n = \infty$$

et

$$u_n(t) = \frac{t^3 - \pi^2 t}{6n\pi} \quad \text{pour } n \neq \infty$$

sont telles que :

$$u_1(t) \leq u_2(t) \leq ... \leq u_n(t) \leq ... \leq u_\infty(t) = 0.$$

3.2.3 Relaxation des problèmes univoques avec discontinuités

Soient $a < b$ deux nombres réels, $I = [a, b]$, une application $f : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Cherchons une fonction $u \in C^2(I)$ telle que

$$\begin{cases} u''(t) = f(t, u(t)) \quad \forall t \in I, \\ g_1(u(a), u'(a)) = 0 = g_2(u(b), u'(b)), \end{cases} \tag{3.3}$$

où g_1 vérifie l'hypothèse (H1) et g_2 l'hypothèse (H2).

A partir de f, on définit deux applications f_- et f_+ par :

$$f_-(t, x) = \underline{\lim}_{(\bar{t},\bar{x}) \longrightarrow (t,x)} f(\bar{t}, \bar{x}) \quad \leq \quad f_+(t, x) = \overline{\lim}_{(\bar{t},\bar{x}) \longrightarrow (t,x)} f(\bar{t}, \bar{x})$$

et l'application multivoque $F(t, x) = [f_-(t, x), f_+(t, x)]$. L'application f_- est s.c.i., l'application f_+ est s.c.s. et l'application multivoque F est s.c.s., à valeurs convexes et fermées (cf. Adjé [1, p 97]). En réalité nous cherchons la "plus petite" application multivoque semi-continue supérieurement F dont le graphe contient le graphe de f. Cette application multivoque F est également obtenue par la formule :

$$F(t,x) = \underset{\varepsilon>0}{\cap} \overline{co} f((t,x)+\varepsilon B),$$

où B est la boule fermée de centre $(0,0)$ et de rayon 1 de $\mathbb{R}^2$ (cf. Aubin et Celina [9, p 102]). Il est clair que :

i) $\forall(t,x),\ \ f(t,x) \in F(t,x)$,
ii) l'application F est s.c.s, à valeurs convexes fermées non vides,
iii) quand f est continue en (t,x), $F(t,x) = \{f(t,x)\}$.

La relaxation du problème (3.3) est posée par la recherche d'une fonction $u \in W^{2.1}(I)$ telle que :

$$\begin{cases} u''(t) \in F(t,u(t)) \qquad p.p.\ t \in I, \\ g_1(u(a),u'(a)) = 0 = g_2(u(b),u'(b)). \end{cases} \tag{3.4}$$

Si l'application f est continue, alors le problème relaxé coïncide avec le problème initial. De plus, toute sous-solution de (3.4) est sous-solution de (3.3) et toute sur-solution de (3.4) est sur-solution de (3.3). Nous avons le corollaire suivant du théorème 2.3 :

Corollaire 3.1. *On suppose qu'il existe une sous-solution α et une sur-solution β du problème* (3.4) *telles que $\alpha(t) \leq \beta(t) \quad \forall t \in I$. Posons*

$$E = I \times [\min_{t\in I} \alpha(t), \max_{t\in I} \beta(t)]$$

et supposons que l'application multivoque semi-continue supérieurement à valeurs non vides, convexes et fermées F, est bornée sur E. Alors le problème

(3.4) *admet au moins une solution* $u \in W^{2,1}(I)$ *et telle que*

$$\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t) \quad \forall t \in I.$$

3.2.4 Existence de trajectoires viables pour un problème de contrôle

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, $I = [a, b]$, V un ensemble non vide, α, β deux applications continues différentiables de classe C^2 de I dans $\mathbb{R}$. On se donne un système dynamique décrit par l'équation

$$u''(t) = f(t, u(t), v(t)) \quad \forall t \in I, \tag{3.5}$$

avec la condition aux limites

$$g_1(u(a), u'(a)) = 0 = g_2(u(b), u'(b)), \tag{3.6}$$

où f est une application définie de $I \times \mathbb{R} \times V$ dans $\mathbb{R}$ et $v(t) \in V \quad \forall t \in I$. Pouvons-nous trouver une application mesurable $v : I \longrightarrow V$ pour laquelle le problème (3.5)-(3.6) possède une solution $u \in C^2(I)$ vérifiant la condition de viabilité suivante :

$$\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t) \quad \forall t \in I? \tag{3.7}$$

C'est-à-dire que nous cherchons quelle action $v(t)$ à appliquer à notre système dynamique à chaque instant $t \in I$, pour que le système suive une trajectoire souhaitée.

Nous ferons les hypothèses suivantes :

(H1) : $\forall x \in \mathbb{R}$, l'application $y \to g_1(x, y)$ est décroissante , (H2) : $\forall x \in \mathbb{R}$, l'application $y \to g_2(x,y)$ est croissante ,

(H3) : l'ensemble V est compact ,

(H4) : l'application $f : I \times \mathbb{R} \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue.

Sous les hypothèses (H3) et (H4) l'application multivoque définie par :

$$F(t,x) = f(t,x,V) = \underset{v \in V}{\cup} \{f(t,x,v)\}$$

est continue et à valeurs compactes. Faisons les hypothèses complémentaires suivantes :

(H5) : $\alpha''(t) \geq y \quad \forall y \in F(t,\alpha(t)), \quad g_1(\alpha(a),\alpha'(a)) \leq 0$ et $g_2(\alpha(b),\alpha'(b)) \leq 0$;

(H6) : $\beta''(t) \leq y \quad \forall y \in F(t,\beta(t)), \quad g_1(\beta(a),\beta'(a)) \geq 0$ et $g_2(\beta(b),\beta'(b)) \geq 0$.

Remarquons que toute application $\alpha \in C^2(I)$ vérifiant (H5) est une sous-solution et toute application $\beta \in C^2(I)$ vérifiant (H6) est une sur-solution du problème multivoque

$$\begin{cases} u''(t) \in F(t,u(t)) \quad \forall\, t \in I, \\ g_1(u(a),u'(a)) = 0 = g_2(u(b),u'(b)), \end{cases} \tag{3.8}$$

qui est une formulation implicite du problème de contrôle (3.5).

L'intérêt de la formulation implicite des problèmes de contrôle réside dans le fait qu'elle nous permet de trouver des contrôles à actions constantes sur I.

Proposition 3.3. *Sous les hypothèses de (H1) à (H6), pour tout $v \in V$, l'équation (3.5) admet une trajectoire viable, c'est-à-dire qu'elle possède une solution $u_v \in C^2(I)$ et telle que*

$$\alpha(t) \leq u_v(t) \leq \beta(t) \quad \forall t \in I.$$

Preuve. Pour tout $v \in V$, l'application $f_v : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_v(t,x) = f(t,x,v)$ étant une sélection continue de F, la conclusion provient immédiatement de l'application du théorème 2.1. ■

3.3 Extensions à l'équation $u''(t) \in F(t,u(t),u'(t))$

Soient $a < b$ deux nombres réels, $I = [a,b]$ et $F : I \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow 2^{\mathbb{R}} \backslash \varnothing$ un opérateur multivoque admettant une sélection continue. Considérons le problème aux limites multivoque

$$\begin{cases} u''(t) \in F(t,u(t),u'(t)) \quad \forall\, t \in I, \\ g_1(u(a),u'(a)) = 0 = g_2(u(b),u'(b)), \end{cases} \tag{3.9}$$

où g_1 vérifie l'hypothèse (H1) et g_2 l'hypothèse (H2).

Définition 3.1.

1°) Une fonction $\alpha \in C^2(I)$ est une sous-solution de (3.9) si :

a) $\alpha''(t) \geq y \quad \forall y \in F(t,\alpha(t),\alpha'(t))$;

b) $g_1(\alpha(a),\alpha'(a)) \leq 0$, $g_2(\alpha(b),\alpha'(b)) \leq 0$.

2°) Une fonction $\beta \in C^2(I)$ est une sur-solution de (3.9) si :

a) $\beta''(t) \leq y \quad \forall y \in F(t,\beta(t),\beta'(t))$;

b) $g_1(\beta(a),\beta'(a)) \geq 0$, $g_2(\beta(b),\beta'(b)) \geq 0$.

3°) Une solution de (3.9) est une fonction $u \in C^2(I)$ qui vérifie (3.9).

Théorème 3.1. *On suppose que F admet une sélection continue et qu'il existe une sous-solution α et une sur-solution β du problème* (3.9) *telles que*

$$\alpha(t) \leq \beta(t) \quad \forall t \in I.$$

On pose $E = \{(t, u, v) \in I \times \mathbb{R}^2 : \alpha(t) \leq u \leq \beta(t)\}$ et on suppose qu'il existe une application continue $\theta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ telle que :

(a) $F(t, u, v) \subset [-\theta(|v|), \theta(|v|)] \quad \forall (t, u, v) \in E$;

(b) $\int_0^{+\infty} \dfrac{s}{\theta(s)} ds \; = \; +\infty.$

Alors le problème (3.9) *admet au moins une solution $u \in C^2(I)$ et telle que*

$$\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t) \quad \forall t \in I.$$

Remarque 3.1. Pour la démonstration de ce théorème, nous allons commencer par rappeler le lemme de Berstein-Nagumo qui permet d'obtenir une estimation de la norme C^1 des solutions de (3.9) lorsqu'on connaît une estimation en norme C^0 de ces solutions.

Lemme 3.1 (Berstein-Nagumo). *Si $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ est une application continue satisfaisant à la relation*

$$\int_0^{+\infty} \frac{s}{h(s)} ds \; = \; +\infty, \tag{3.10}$$

$K_1 > 0$ et si $x \in C^2(I)$ est telle que pour tout $t \in I$,

$$|x(t)| \leq K_1 \quad \texttt{et} \quad |x''(t)| \leq h(|x'(t)|),$$

alors il existe une constante réelle $K_2 = K_2(K_1, h)$ telle que :

$$|x'(t)| < K_2 \quad \forall t \in I.$$

Preuve. Par le théorème des accroissements finis, il existe $z_1 \in I$ tel que

$$x'(z_1) = \frac{x(b) - x(a)}{b - a}.$$

Posons

$$m = |x'(z_1)| = \frac{|x(b) - x(a)|}{b - a}.$$

La condition (3.10) implique que

$$\int_m^{+\infty} \frac{s}{h(s)} ds \ = \ +\infty$$

et qu'il existe un nombre réel $R > 0$ assez grand pour que

$$\int_m^{R} \frac{s}{h(s)} ds \ > \ 2K_1. \tag{3.11}$$

Supposons qu'il existe $z_2 \in I$ tel que $|x'(z_2)| > R$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un intervalle

$$I_o = [t_o, t_1] \subset I$$

sur lequel x est monotone avec

$$(x'(t_o), x'(t_1)) \in \{(m, R), (R, m), (-m, -R), (-R, -m)\},$$

de telle sorte que

$$\int_m^{R} \frac{s}{h(s)} ds = \left| \int_{|x'(t_o)|}^{|x'(t_1)|} \frac{s}{h(s)} ds \right|$$

c'est-à-dire :

$$\int_m^{R} \frac{s}{h(s)} ds = \left| \int_{t_o}^{t_1} \frac{|x'(t).x''(t)|}{h(|x'(t)|)} dt \right| \leq \left| \int_{t_o}^{t_1} x'(t) dt \right| = |x(t_1) - x(t_o)| \leq 2K_1,$$

car $|x''(t)| \leq h(|x'(t)|)$ et x est monotone sur I_o.

Ce qui est en contradiction avec (3.11). ■

Démonstration du théorème 3.1. Soit $f : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une sélection continue de F, c'est-à-dire une application continue telle que

$$f(t,u,v) \in F(t,u,v) \quad \forall (t,u,v) \in I \times \mathbb{R}^2.$$

Toute solution du problème univoque

$$\begin{cases} u''(t) = f(t,u(t),u'(t)) \qquad \forall\, t \in I, \\ g_1(u(a),u'(a)) = 0 = g_2(u(b),u'(b)), \end{cases} \tag{3.12}$$

étant solution du problème (3.9), il nous suffit alors de montrer que le problème univoque (3.12) admet au moins une solution. Pour cela définissons $\widehat{f}$ de $I \times \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $\widehat{f}(t,u,v) = f(t,\gamma(t,u),v)$ et introduisons la famille de problèmes aux limites $(P_\lambda)_{\lambda \in [0,1]}$ avec :

$$(P_\lambda) \begin{cases} u''(t) = (1-\lambda)\theta(|u'(t)|)u(t) \ + \lambda \widehat{f}(t,u(t),u'(t)) \qquad \forall t \in I, \\ \qquad + \lambda\theta(|u'(t)|)(u(t)-\gamma(t,u(t))) \\ u(a) = \lambda\gamma\left(a\ ,\ u(a) + g_1\left(\gamma(a,u(a)),u'(a)\right)\right), \\ u(b) = \lambda\gamma\left(b\ ,\ u(b) + g_2\left(\gamma(b,u(b)),u'(b)\right)\right), \end{cases}$$

où γ est l'application continue de $I \times \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\gamma(t,u) = \max[\alpha(t), \min(u,\beta(t))] = \begin{cases} \alpha(t) & \text{si} & u < \alpha(t), \\ u & \text{si} & \alpha(t) \le u \le \beta(t), \\ \beta(t) & \text{si} & u > \beta(t). \end{cases}$$

Pour $\lambda = 1$, nous avons :

$$(P_1) \begin{cases} u''(t) = f(t,\gamma(t,u(t)),u'(t)) + \theta(|u'(t)|)(u(t)-\gamma(t,u(t))) \quad \text{ sur } I, \\ u(a) = \gamma\left(a\ ,\ u(a) + g_1\left(\gamma(a,u(a)),u'(a)\right)\right), \\ u(b) = \gamma\left(b\ ,\ u(b) + g_2\left(\gamma(b,u(b)),u'(b)\right)\right). \end{cases}$$

Nous allons d'abord montrer que toute solution u du problème (P_1) vérifie

$$\alpha(t) \le u(t) \le \beta(t) \quad \forall t \in I,$$

et est par conséquent une solution du problème (3.12). Ensuite, par un théorème d'existence de type Leray-Schauder, nous allons établir que le problème (P_1) admet au moins une solution.

Etape 1 : Estimation à priori des solutions de (P_1)

Soit u une solution de (P_1). Montrons que

$$\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t) \quad \forall t \in I.$$

Supposons qu'il existe $t_o \in I$ tel que

$$\min_{t\in I}(u(t) - \alpha(t)) = u(t_o) - \alpha(t_o) < 0,$$

alors $\quad \gamma(t_o, u(t_o)) = \alpha(t_o)$.

- Si $t_o \in \overset{\circ}{I}$ alors,

$$u'(t_o) - \alpha'(t_o) = 0 \text{ et } \quad u''(t_o) - \alpha''(t_o) \geq 0.$$

Or

$$\begin{aligned} u''(t_o) &= f(t_o, \alpha(t_o), u'(t_o)) + \theta(|u'(t_o)|)\,(u(t_o) - \alpha(t_o)) \\ &= f(t_o, \alpha(t_o), \alpha'(t_o)) + \theta(|u'(t_o)|)\,(u(t_o) - \alpha(t_o)) \\ &\leq \alpha''(t_o) + \theta(|u'(t_o)|)\,(u(t_o) - \alpha(t_o)) < \alpha''(t_o), \end{aligned}$$

car $\quad \theta(|u'(t_o)|) > 0$ et $u(t_o) - \alpha(t_o) < 0$,

ce qui fait que $\quad \theta(|u'(t_o)|)\,(u(t_o) - \alpha(t_o)) < 0$.

Nous obtenons ainsi la contradiction

$$0 \leq u''(t_o) - \alpha''(t_o) < 0.$$

- Si $t_o = a$, c'est-à-dire

$$\min_{t\in I}(u(t)-\alpha(t)) = u(a)-\alpha(a) < 0\ ,$$

alors

$$u'(a) \geq \alpha'(a).$$

L'hypothèse (H1) nous donne ainsi,

$$g_1(\alpha(a), u'(a)) \leq g_1(\alpha(a), \alpha'(a)) \leq 0.$$

Il s'en suit que :

$$u(a) + g_1\left(\alpha(a), u'(a)\right) \leq u(a) < \alpha(a)\ ,$$

ce qui conduit à la contradiction

$$\alpha(a) > u(a) = \gamma\left(a\ ,\ u(a) + g_1\left(\alpha(a), u'(a)\right)\right) = \alpha(a).$$

- Si $t_o = b$, en utilisant l'hypothèse (H2) et le fait que $u'(b) \leq \alpha'(b)$, nous obtenons la contradiction

$$\alpha(b) > u(b) = \gamma\left(b\ ,\ u(b) + g_2\left(\alpha(b), u'(b)\right)\right) = \alpha(b).$$

Donc $\quad \alpha(t) \leq u(t) \quad \forall t \in I.$

Par un raisonnement analogue, on démontre que $\quad u(t) \leq \beta(t) \quad \forall t \in I.$

<u>Etape 2</u> : Estimation à priori des solutions de (P_λ)

Nous allons maintenant prouver qu'il existe un ouvert borné $\Omega \subset C^1(I)$ tel que pour tout $\lambda \in [0,1]$ et pour toute solution u de (P_λ), $u \in \Omega$.

Soient $\lambda \in [0,1]$, u une solution de (P_λ) et $t_o \in I$ tel que $u(t_o) = \max_{t\in I} u(t)$.

Supposons que $u(t_o) > \beta(t_o)$, alors $\gamma(t_o, u(t_o)) = \beta(t_o)$.

- Si $t_o = a$, alors

$$\max_{t\in I} u(t) = u(a) \leq \beta(a) \leq |\beta(a)|.$$

- Si $t_o = b$, alors

$$\max_{t\in I} u(t) = u(b) \leq \beta(b) \leq |\beta(b)|.$$

- Si $t_o \in \overset{\circ}{I}$, alors

$$u'(t_o) = 0$$

et

$$0 \geq u''(t_o) = (1-\lambda)\theta(0)u(t_o) \ + \ \lambda f(t_o, \beta(t_o), 0) \ + \ \lambda\theta(0)(u(t_o) - \beta(t_o)).$$

Il en résulte que

$$u(t_o) \leq \lambda \left[\beta(t_o) - \frac{f(t_o, \beta(t_o), 0)}{\theta(0)}\right].$$

D'après la condition (a) du théorème,

$$-1 \leq -\frac{f(t_o, \beta(t_o), 0)}{\theta(0)} \leq 1.$$

Par suite :

$$u(t_o) \leq \lambda[\beta(t_o) + 1] \leq |\beta(t_o) + 1| \leq |\beta(t_o)| + 1.$$

Donc

$$\max_{t\in I} u(t) \leq \ \max_{t\in I} |\beta(t)| + 1 < +\infty.$$

Soit $t_1 \in I$ tel que $u(t_1) = \min\limits_{t\in I} u(t)$.

Supposons que $u(t_1) < \alpha(t_1)$, alors $\gamma(t_1, u(t_1)) = \alpha(t_1)$.

- Si $t_1 = a$, alors

$$\min_{t\in I} u(t) = u(a) \geq \alpha(a) \geq - \left|\alpha(a)\right|.$$

- Si $t_1 = b$, alors

$$\min_{t\in I} u(t) = u(b) \geq \alpha(b) \geq - \left|\alpha(b)\right|.$$

- Si $t_1 \in \overset{\circ}{I}$, alors

$$u'(t_1) = 0$$

et

$$0 \leq u''(t_1) = (1-\lambda)\theta(0)u(t_1) \ + \ \lambda f(t_1, \alpha(t_1), 0) \ + \ \lambda\theta(0)(u(t_1) - \alpha(t_1)).$$

Il en résulte que

$$\lambda \left[\alpha(t_1) - \frac{f(t_1, \alpha(t_1), 0)}{\theta(0)}\right] \leq u(t_1).$$

Comme

$$-1 \leq -\frac{f(t_1, \alpha(t_1), 0)}{\theta(0)} \leq 1 \quad \text{et} \quad \lambda \in [0, 1],$$

nous avons :

$$u(t_1) \geq \lambda[\alpha(t_1) - 1] \geq - \left|\alpha(t_1)\right| - 1.$$

Donc

$$\min_{t\in I} u(t) \geq -(\max_{t\in I}|\alpha(t)| + 1) > -\infty.$$

Posons $R_1 = \max\limits_{t\in I}|\beta(t)| + 1$, $R_2 = \max\limits_{t\in I}|\alpha(t)| + 1$ et $R = \max\{R_1, R_2\}$.

Alors $\forall\lambda \in [0, 1]$, $\forall u \in C^2(I)$ une solution de (P_λ), nous avons :

$$|u|_{C^0} = \max_{t\in I}|u(t)| \leq R.$$

Posons $\forall \lambda \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} f_\lambda(t,u(t),u'(t)) &= (1-\lambda)\theta(|u'(t)|)u(t) + \lambda f(t,\gamma(t,u(t)),u'(t)) \\ &\quad + \lambda\theta(|u'(t)|)(u(t)-\gamma(t,u(t))). \end{aligned}$$

Alors :

$$|f_\lambda(t,u(t),u'(t))| \leq R\theta(|u'(t)|) + \theta(|u'(t)|) + 2R\theta(|u'(t)|) \leq (3R+1)\theta(|u'(t)|).$$

Donc en prenant $h = (3R+1)\theta$ dans le lemme 3.1, toute solution u du problème (P_λ), $\forall \lambda \in [0,1]$, vérifie les conditions de Berstein-Nagumo et par conséquent, il existe un nombre réel $R_3 > 0$ tel que

$$|u'|_{C^0} = \max_{t\in I}|u'(t)| < R_3.$$

Finalement, il existe $M > 0$ tel que $\forall \lambda \in [0,1]$, $\forall u \in C^2(I)$ une solution de (P_λ),

$$|u|_{C^1} = |u|_{C^0} + |u'|_{C^0} < M\ .$$

Il suffit de prendre $\Omega = B_{C^1}(0,M)$ la boule ouverte dans C^1 de centre 0 et de rayon M.

Etape 3 : Existence de solution pour (P_1)

Posons $X = C^1(I)$ et $Z = C(I) \times \mathbb{R}^2$. L'application $L : C^2(I) \subset X \to Z$ définie par

$$Lu = (u'', u(a), u(b)) \tag{3.13}$$

est linéaire et inversible, donc de Fredholm et d'indice zéro. De plus l'application L^{-1} est compacte (cf. [1, p 167]).

L'application continue $N : X \to Z$ définie par

$$\begin{aligned} Nu(t) &= (-\widehat{f}(t,u(t),u'(t)) - \theta(|u'(t)|)(u(t)+\gamma(t,u(t))), \\ &\quad -\gamma(a\ ,\ u(a)+g_1(\gamma(a,u(a)),u'(a))), \\ &\quad -\gamma(b\ ,\ u(b)+g_2(\gamma(b,u(b)),u'(b)))) \end{aligned}$$

est continue et transforme les bornés en bornés et il en est de même de l'application $A : C^1(I) \longrightarrow C^0(I) \times \mathbb{R}^2$ définie par

$$Au(t) = (-\theta(|u'(t)|)u(t), 0, 0)$$

qui, en outre, est impaire. Ainsi, $\forall \lambda \in [0,1]$, u est une solution de (P_λ) équivaut à

$$Lu + \lambda Nu + (1-\lambda)Au = 0$$

qui équivaut encore à

$$\lambda(L+N)u + (1-\lambda)(L+A)u = 0$$

et comme toutes les solutions des problèmes (P_λ) sont dans l'ouvert Ω, nous avons

$$Lx + \lambda Nx + (1-\lambda)Ax \neq 0 \ \ \forall x \in \partial\Omega,\ \forall \lambda \in [0,1].$$

Par ailleurs, l'application A étant impaire, par le théorème de Borsuk (cf. Annexe A, proposition A.6), $D_L(L+A,\Omega) = D_{LS}(I+L^{-1}A,\Omega,0)$ est impair, donc non nul. D_{LS} désigne le degré de Leray-Schauder et D_L le degré topologique dans Ω par rapport à l'opérateur linéaire L pour lesquels nous renvoyons le lecteur à l'Annexe A. Donc par l'un des théorèmes d'existence de type Leray-Schauder de Mawhin (cf. Annexe A, Théorème A.1), le problème

$$Lx + Nx = 0$$

qui équivaut à (P_1) possède au moins une solution. ■

3.3.1 Exemple

Soient $\varphi, \psi : I \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications telles que φ est semi-continue supérieurement et ψ semi-continue inférieurement vérifiant :

$$\varphi(t,u,v) \leq \psi(t,u,v) \quad \forall (t,u,v) \in I \times \mathbb{R}^2.$$

Considérons la multi-application $F : I \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow 2^{\mathbb{R}} \backslash \varnothing$ définie par :

$$F(t,u,v) = [\varphi(t,u,v),\ \psi(t,u,v)].$$

Nous prouverons qu'en présence d'une sous-solution α et d'une sur-solution β telles que $\alpha \leq \beta$ et sous l'hypothèse de la satisfaction de la condition de Berstein-Nagumo, le problème aux limites multivoque

$$\begin{cases} u''(t) \in F(t,u(t),u'(t)) \quad \forall\, t \in I, \\ g_1(u(a),u'(a)) = 0 = g_2(u(b),u'(b)), \end{cases} \tag{3.14}$$

admet au moins une solution.

Corollaire 3.2. *On suppose qu'il existe une sous-solution α et une sur-solution β du problème* (3.14) *telles que*

$$\alpha(t) \leq \beta(t) \quad \forall t \in I.$$

On pose $E = \{(t,u,v) \in I \times \mathbb{R}^2 : \alpha(t) \leq u \leq \beta(t)\}$ et on suppose qu'il existe une application continue $\theta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \backslash \{0\}$ telle que :

(a) $F(t,u,v) \subset [-\theta(|v|), \theta(|v|)] \quad \forall (t,u,v) \in E$;

(b) $\int_0^{+\infty} \dfrac{s}{\theta(s)} ds \ = \ +\infty$

Alors le problème (3.14) *admet au moins une solution* $u \in C^2(I)$ *et telle que*

$$\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t) \quad \forall t \in I.$$

Preuve. Pour justifier ce résultat, il nous suffit de prouver que l'application multivoque F admet une sélection continue en application du théorème 3.1. Il est évident que $\forall (t,u,v) \in I \times \mathbb{R}^2$, $F(t,u,v)$ est convexe et fermé. Par ailleurs F est sémi-continue inférieurement. En effet, soient U un ouvert de $\mathbb{R}$, $(t_n, x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de $I \times \mathbb{R}^2$ convergeant vers $(t_o, x_o) \in I \times \mathbb{R}^2$ et telle que $F(t_o, x_o) \cap U \neq \emptyset$. Alors de

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \varphi(t_n, x_n) \leq \varphi(t_o, x_o) \leq \psi(t_o, x_o) \leq \underline{\lim_{n\to\infty}} \psi(t_n, x_n) \ ,$$

nous déduisons que

$$F(t_n, x_n) \cap U \neq \varnothing$$

à partir d'un certain rang. Donc $F^{-1}(U)$ est un ouvert de $I \times \mathbb{R}^2$. Ce qui prouve que F est s.c.i. Par le théorème de sélection de Michael, il existe donc une application continue $f : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(t,u,v) \in F(t,u,v) \quad \forall (t,u,v) \in I \times \mathbb{R}^2.$$

Ce qui achève la preuve. ∎

Annexe A

Eléments de la théorie du degré

A.1 Opérateurs de Fredholm

Soient X et Z des espaces vectoriels normés réels.

Définition A.1. Une application linéaire $L : D(L) \subset X \to Z$, $D(L)$ étant le domaine de L, est dite de Fredholm si les conditions suivantes sont satisfaites :

(i) $Ker\ L = L^{-1}(\{0_Z\})$ est de dimension finie ,

(ii) $Im\ L = L(D(L))$ est fermé et de codimension finie ,

où 0_Z représente le vecteur nul de l'espace vectoriel Z.

Si L est de Fredholm, l'indice de L est, par définition, l'entier

$$ind(L) = dim(Ker\ L) - codim(Im\ L)\ .$$

Remarque A.1. Il résulte de la définition que toute application linéaire bijective $L : X \to Z$ est de Fredholm et d'indice zéro. En effet si $L : X \to Z$ est linéaire et bijective, alors

$$Ker\ L = \{0_X\} \quad \text{et} \quad Im\ L = Z\ .$$

Donc

$$dim(Ker\ L) = 0 \quad \text{et} \quad codim(Im\ L) = 0\ .$$

Le résultat suivant est tiré de Adjé [1] :

Proposition A.1. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, $I = [a, b]$, $X = C^2(I)$ et $Z = C(I) \times \mathbb{R}^2$. L'application linéaire $L : X \to Z$ définie par*

$$Lu = (u'' - u,\ u(a),\ u(b))\ ,$$

est bijective (donc de Fredholm et d'indice zéro) et L^{-1} est compacte.

Preuve. Il est facile de voir que :

$$Ker\ L = \{0_X\} \quad \text{et} \quad Im\ L = Z\ .$$

En fait, si $G : I \times I \to \mathbb{R}$ est l'opérateur de Green du problème aux limites

$$\begin{cases} u''(t) - u(t) = h(t) \quad \forall\, t \in I\ , \\ u(a) = 0 = u(b)\ , \end{cases}$$

l'unique solution u du problème aux limites

$$\begin{cases} u''(t) - u(t) = h(t) \quad \forall\, t \in I\ , \\ u(a) = A\ ,\ u(b) = B\ , \end{cases}$$

où $A, B \in \mathbb{R}$ et $h \in C(I)$, est donnée par la formule

$$u(t) = e(t) + \int_a^b G(t, x)h(x)dx\ ,$$

où $e(t) = Ae^{-(t-a)} + (B - Ae^{-(b-a)}) \left(e^{b-a} - e^{-(b-a)}\right)^{-1} \left(e^{t-a} - e^{-(t-a)}\right)$.

Donc L est bijective et $L^{-1} : C(I) \times \mathbb{R}^2 \to C^2(I)$ est définie par :

$$L^{-1}(h, A, B)(t) = e(t) + \int_a^b G(t, x)h(x)dx\ .$$

Nous allons montrer que L^{-1} transforme les parties bornées de $C(I) \times \mathbb{R}^2$ en ensembles relativement compacts.

Soit $K \subset C(I) \times \mathbb{R}^2$ une partie bornée. Alors il existe une constante $r_K > 0$ telle que $|h|_{C(I)} < r_K \ \forall (h, A, B) \in K$.

En vertu du théorème d'Ascoli-Arzéla, il suffit de prouver les points suivants :

(i) l'ensemble $L^{-1}K$ est borné ,

(ii) l'ensemble $L^{-1}K$ est équi-uniformément continu.

La bornation de $L^{-1}K$:

Pour chaque $v \in L^{-1}K$, il existe $(h, A, B) \in K$ tel que

$$\forall\, t \in I\ , \quad v(t) = e(t) + \int_a^b G(t, x) h(x) dx\ .$$

Comme $|h|_{C(I)} < r_K$ et $e : I \to \mathbb{R}$ est continue, nous avons :

$$\max_{t \in I} |v(t)| \leq \max_{t \in I} |e(t)| + (b - a) r_K \max_{I \times I} |G(t, x)|\ .$$

Equi-continuité uniforme de $L^{-1}K$:

Il nous faut montrer que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $\forall (h, A, B) \in K$, $\forall (t_1, t_2) \in I \times I$, la relation $|t_1 - t_2| < \delta$ implique

$$\left| L^{-1}(h, A, B)(t_1) - L^{-1}(h, A, B)(t_2) \right| < \varepsilon\ .$$

Soit $\varepsilon > 0$, les fonctions $G : I \times I \to \mathbb{R}$ et $e : I \to \mathbb{R}$ étant uniformément continues sur leurs domaines respectifs, il existe $\delta > 0$ tel que $\forall (t_1, x_1) \in I \times I$ et $\forall (t_2, x_2) \in I \times I$, l'inégalité $|t_1 - t_2| + |x_1 - x_2| < \delta$ entraîne

$$|G(t_1, x_1) - G(t_2, x_2)| \leq \frac{\varepsilon}{2}(b - a)^{-1} \quad \text{et} \quad |e(t_1) - e(t_2)| < \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

En prenant t_1 et t_2 tels que $|t_1 - t_2| < \delta$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
& |L^{-1}(h, A, B)(t_1) - L^{-1}(h, A, B)(t_2)| \\
= \; & \left| e(t_1) - e(t_2) + \int_a^b (G(t_1, x) - G(t_2, x))\, h(x) dx \right| \\
\leq \; & |e(t_1) - e(t_2)| + \int_a^b |G(t_1, x) - G(t_2, x)|\, |h(x)|\, dx \\
< \; & \frac{\varepsilon}{2} + r_K (b - a).\frac{\varepsilon}{2}(b - a)^{-1} = \varepsilon\ .
\end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration. ■

Remarque A.2. 1. Un raisonnement analogue montre que les applications linéaires $L_k : C^2(I) \to C(I) \times \mathbb{R}^2, \quad k = 1, 2, 3$, définies par :

$$\begin{aligned}
L_1 u &= (u'',\ u(a),\ u(b)), \\
L_2 u &= (u'' - u,\ u'(a),\ u'(b)), \\
L_3 u &= (u'' - u,\ u(a) - u(b),\ u'(a) - u'(b)),
\end{aligned}$$

sont bijectives et d'inverses compactes.

2. Les applications linéaires $\widetilde{L}_k : W^{2,1}(I) \to L^1(I) \times \mathbb{R}^2, \quad k = 1, 2$, définies par :

$$\begin{aligned}
\widetilde{L}_1 u &= (u'' - u,\ u(a),\ u(b)), \\
\widetilde{L}_2 u &= (u'' - u,\ u'(a),\ u'(b)),
\end{aligned}$$

sont également bijectives et les applications $i\widetilde{L}_k^{-1} : L^1(I) \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow C^1(I)$ sont compactes, où i est l'injection canonique de $W^{2,1}(I)$ dans $C^1(I)$. (cf. [1, p 167])

Les résultats qui vont suivre sont de Mawhin [33].

A.2 Axiomatiques du degré des perturbations L-compactes

Soient X et Z des espaces vectoriels normés réels, $L : dom(L) \subset X \longrightarrow Z$ une application de Fredholm d'indice zéro. Désignons par $F(L)$ l'ensemble des applications linéaires continues de rang fini $A : X \longrightarrow Z$ telles que $L + A : dom(L) \longrightarrow Z$ soit une bijection. Soit Ω un ouvert borné de X et $N : \overline{\Omega} \longrightarrow Z$ une application (en général) non linéaire. Il est clair que, pour tout $A \in F(L)$, l'équation

$$Lx + Nx = 0 \tag{A.1}$$

équivaut à

$$(L + A)x + (N - A)x = 0$$

et donc à

$$x + (L + A)^{-1}(N - A)x = 0. \tag{A.2}$$

Notons que (A.1) est à considérer dans $dom(L) \cap \overline{\Omega}$ et est donc équivalente à (A.2) dans cet ensemble. Par ailleurs, (A.2) est définie dans $\overline{\Omega}$ mais comme $(L + A)^{-1}(N - A)x \in dom(L) \quad \forall x \in \overline{\Omega}$, toute solution de (A.2) appartient à $dom(L)$. On a en fait équivalence entre (A.1) considérée dans $dom(L) \cap \overline{\Omega}$ et (A.2) considérée dans $\overline{\Omega}$. Notons que $(L + A)^{-1}A$ est un opérateur linéaire, continue et de rang fini dans X, et donc un opérateur compact.

Lemme A.1. *S'il existe un $A \in F(L)$ tel que $(L + A)^{-1}N$ soit compact sur $\overline{\Omega}$, alors il en est de même pour tout $B \in F(L)$.*

Preuve. Soit $B \in F(L)$; alors

$$\begin{aligned}(L+B)^{-1}N &= (L+B)^{-1}(L+A)(L+A)^{-1}N \\ &= (L+B)^{-1}(L+B+A-B)(L+A)^{-1}N \\ &= [I+(L+B)^{-1}(A-B)](L+A)^{-1}N.\end{aligned}$$

Comme $A-B$ est continu et de rang fini, $(L+B)^{-1}(A-B)$ est continu et de rang fini. Dès lors $(L+B)^{-1}(A-B)(L+A)^{-1}N$ est compact sur $\overline{\Omega}$, ce qui achève la démonstration. ■

La définition suivante est donc justifiée.

Définition A.2. Soit E un espace métrique. On dit que $G : E \longrightarrow Z$ est L-compact sur E s'il existe $A \in F(L)$ tel que $(L+A)^{-1}G : E \longrightarrow X$ soit compact sur E.

Remarque A.3. Si $L : dom(L) \subset X \longrightarrow Z$ est inversible, on peut prendre $A = 0$ et la L-compacité de N sur $\overline{\Omega}$ revient à la compacité de $L^{-1}N$ sur $\overline{\Omega}$. En particulier, si $X = Z$ et $L = I$, on retrouve la compacité de N sur $\overline{\Omega}$.

Définition A.3. Si $G : X \longrightarrow Z$ est L-compact sur tout borné $B \subset X$, On dit que G est L-complètement continue sur X.

Donnons une propriété intéressante des applications linéaires L-complètement continues.

Proposition A.2. *Si $A : X \longrightarrow Z$ est linéaire, L-complètement continue sur X et si $ker(L+A) = 0$, alors $L + A : dom(L) \longrightarrow Z$ est bijective et, pour toute application $G : E \longrightarrow Z$ L-compacte sur l'espace topologique E, $(L+A)^{-1}G : E \longrightarrow X$ est compacte sur E.*

Preuve. Soit $C \in F(L)$. On a sur $dom(L)$,

$$L + A = (L + C)[I + (L + C)^{-1}(A - C)]$$

et $(L+C)^{-1}(A-C)$ est linéaire et complètement continue sur X. Comme

$$Ker(I + (L + C)^{-1}(A - C)) = Ker(L + A) = \{0\}$$

il résulte de la théorie de Riesz que $I + (L+C)^{-1}(A-C)$ est un homéomorphisme linéaire de X sur X. Dès lors, si $z \in X$, l'équation

$$(L + A)x = z, \;\; x \in dom(L)$$

équivaut à

$$(L + C)[I + (L + C)^{-1}(A - C)]x = z, \;\; x \in dom(L)$$

et possède donc une solution unique

$$x = [I + (L + C)^{-1}(A - C)]^{-1}(L + C)^{-1}z,$$

ce qui montre que $(L + A)(dom(L)) = z$. Si maintenant $G : E \longrightarrow Z$ est L-compacte, alors, comme

$$\begin{aligned}
(L + C)^{-1} &= (L + C)^{-1}(L + A)(L + A)^{-1}G \\
&= (L + C)^{-1}(L + C + A - C)(L + A)^{-1}G \\
&= [I + (L + C)^{-1}(A - C)](L + A)^{-1}G
\end{aligned}$$

on a :

$$(L+A)^{-1}G = [I + (L+C)^{-1}(A-C)]^{-1}(L+C)^{-1}G$$

et la compacité de $(L+A)^{-1}G$ sur E s'en déduit aussitôt. ■

Désignons par $C_L(\Omega)$ l'ensemble des applications

$$F : dom(L) \cap \overline{\Omega} \longrightarrow Z$$

qui sont de la forme $F = L + N$, où $N : \overline{\Omega} \longrightarrow Z$ est L-compacte sur Ω, et qui vérifient la condition

$$0 \notin F(dom(L) \cap \partial\Omega).$$

Définition A.4. Une application $D_L(\cdot, \Omega)$ de $C_L(\Omega)$ dans $\mathbb{Z}$ sera appelée un degré dans Ω par rapport à L si elle n'est pas identiquement nulle et vérifie les axiomes suivants :

1. (Propriété de normalisation). Si $F \in C_L(\Omega)$ est injective, alors

$$D_L(F, \Omega) = 0 \text{ si } 0 \notin F(dom(L) \cap \Omega)$$

et

$$|D_L(F, \Omega)| = 1 \text{ si } 0 \in F(dom(L) \cap \Omega).$$

2. (Propriété d'addition-excision). Si Ω_1 et Ω_2 sont des ouverts disjoints dans Ω tels que

$$0 \notin F(dom(L) \cap \overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)),$$

alors

$$D_L(F, \Omega) = D_L(F, \Omega_1) + D_L(F, \Omega_2).$$

3. (Propriété d'invariance par homotopie). Si $H : (dom(L) \cap \overline{\Omega}) \times [0,1] \longrightarrow Z$ est de la forme

$$H(x, \lambda) = L(x) + N(x, \lambda)$$

où $N : \overline{\Omega} \times [0,1] \longrightarrow Z$ est L-compact sur $\overline{\Omega} \times [0,1]$, et si

$$0 \notin H((dom(L) \cap \partial\Omega) \times [0,1]),$$

alors pour tout $x \in \Omega$, l'application $\lambda \longrightarrow D_L(H(x, \lambda), \Omega)$ est une constante sur $[0,1]$.

Une application simple des axiomes ci-dessus donne les propriétés suivantes du degré.

Proposition A.3 (Propriété d'excision).

Si $F \in C_L(\Omega)$ et $\Omega_1 \subset \Omega$ est ouvert et tel que

$$0 \notin F(dom(L) \cap (\overline{\Omega} \setminus \Omega_1)),$$

alors

$$D_L(F, \Omega) = D_L(F, \Omega_1).$$

Proposition A.4 (Propriété d'existence).

Si $F \in C_L(\Omega)$ et si $D_L(F, \Omega) \neq 0$, alors $0 \in F(dom(L) \cap \Omega)$.

Proposition A.5 (Dépendance par rapport aux valeurs de F sur $\partial\Omega$).

Si $F, G \in C_L(\Omega)$ sont telles que

$$\forall x \in dom(L) \cap \partial\Omega, \quad F(x) = G(x),$$

alors

$$D_L(F, \Omega) = D_L(G, \Omega).$$

On renverra le lecteur aux ouvrages classiques pour la construction de $D_0(\cdot, \Omega)$ vérifiant les axiomes 1 à 3 lorsque X et Z sont des espaces vectoriels normés orientés de même dimension finie et $F = N : \overline{\Omega} \subset X \longrightarrow Z$ est continue telle que $0 \notin F(\partial\Omega)$ (degré de Brouwer) ou lorsque $X = Z$ est un espace vectoriel normé, $L = I$ et $F = I + N$ où $N : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ est compacte telle que $0 \notin (I + N)(\partial\Omega)$ (degré de Leray-Schauder).

Dans le cas général d'une application L de Fredholm d'indice zéro, nous pouvons définir le degré des perturbations L-compactes à partir du degré des perturbations compactes de l'identité de Leray-Schauder en posant

$$D_L(L + N, \Omega) = D_{LS}(I + L^{-1}N, \Omega, 0),$$

où D_{LS} désigne le degré de Leray-Schauder.

Le théorème de Borsuk pour les perturbations L-compactes s'énonce comme suit :

Proposition A.6. *Si L est bijective, $\Omega \subset X$ est un ouvert borné symétrique contenant 0, $N : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application L-compacte telle que*

$$0 \notin (L + N)(\partial\Omega) \quad et \quad (L + N)(-x) \neq \lambda(L + N)(x) \text{ sur } \partial\Omega \ \ \forall\lambda \geq 1.$$

Alors $D_L(L + N, \Omega)$ est impair. En particulier, cela est vrai si N est impaire.

Preuve. Ce résultat est une conséquence du théorème 8.3. de [21]. En effet, comme

$$0 \notin (L+N)(\partial\Omega) \quad \text{et} \quad (L+N)(-x) \neq \lambda(L+N)(x) \text{ sur } \partial\Omega \ \ \forall\lambda \geq 1,$$

$$0 = L^{-1}(0) \notin (I+L^{-1}N)(\partial\Omega) \ \ \text{et} \ \ (I+L^{-1}N)(-x) \neq \lambda(I+L^{-1}N)(x) \text{ sur } \partial\Omega \ \forall\lambda \geq 1.$$

Donc $D_L(L+N), \Omega) = D_{LS}(I + L^{-1}N, \Omega, 0)$ est impair. Par ailleurs pour N impaire, l'application compacte $L^{-1}N$ est impaire. ■

A.3 Théorèmes d'existence du type de Leray-Schauder

Les propriétés d'existence et d'invariance par homotopie du degré conduisent facilement à d'intéressants théorèmes d'existence. Ils découlent tous du résultat suivant.

Soient X et Z des espaces vectoriels normés réels, $\Omega \subset X$ un ouvert borné et $L : dom(L) \subset X \longrightarrow Z$ une application de Fredholm d'indice zéro.

Théorème A.1. *Soient $G \in C_L(\Omega)$ et $F = L + N$, avec $N : \overline{\Omega} \longrightarrow Z$ L-compact. Si les conditions suivantes sont vérifiées :*
(i) $\lambda F(x) + (1-\lambda)G(x) \neq 0$ pour tout $(x, \lambda) \in (dom(L) \cap \partial\Omega) \times]0, 1[$;
(ii)$D_L(G, \Omega) \neq 0$,
alors l'équation

$$L(x) + N(x) = 0$$

possède au moins une solution dans $dom(L) \cap \overline{\Omega}$.

Preuve. Pour tout $x \in dom(L) \cap \overline{\Omega}$ et tout $\lambda \in [0,1]$, on a, si $G = L + K$ avec $K : \overline{\Omega} \longrightarrow Z$ L-compact,

$$\lambda F(x) + (1-\lambda)G(x) = L(x) + \lambda N(x) + (1-\lambda)K(x) = L(x) + \mathcal{N}(x,\lambda)$$

avec $\mathcal{N} : \overline{\Omega} \times [0,1]$ L-compact ainsi qu'on le vérifie aisément. Si $F(x) = 0$ pour un $x \in dom(L) \cap \partial\Omega$, le théorème est démontré. Sinon, $L(x) + \mathcal{N}(x,\lambda) \neq 0$ pour tout $(x,\lambda) \in (dom(L) \cap \partial\Omega) \times [0,1]$ et par l'invariance pour une homotopie,

$$D_L(F,\Omega) = D_L(L + \mathcal{N}(\cdot,1),\Omega) = D_L(L + \mathcal{N}(\cdot,0),\Omega) = D_L(G,\Omega) \neq 0,$$

ce qui entraîne l'existence d'un zéro de F dans $dom(L) \cap \Omega$ et achève la démonstration. ■

Une conséquence très utile est le

Théorème A.2. *Soient $F = L + N$ avec $N : \overline{\Omega} \longrightarrow Z$ une application linéaire L-complètement continue sur X et $z \in (L + A)(dom(L) \cap \Omega)$ tels que*

(i) $Ker(L + A) = \{0\}$

(ii) $L(x) + (1-\lambda)(A(x) - z) + \lambda N(x) \neq 0$ pour tout $x \in dom(L) \cap \partial\Omega$ et tout $\lambda \in]0,1[$.

Alors l'équation

$$L(x) + N(x) = 0$$

possède au moins une solution dans $dom(L) \cap \overline{\Omega}$.

Preuve. Il suffit de prendre $G = L + A - z$ dans le théorème précédant et noter que

$$|D_L(L + A - z, \Omega)| = 1$$

puisque $z \in (L + A)(dom(L) \cap \Omega)$. $\blacksquare$

Rappelons aussi la version du théorème de Schauder pour les applications multivoques semi-continue supérieurement pour laquelle une démonstration détaillée pourra être trouvée dans J. Dugundji et A. Granas [22], Théorème (11.3), page 96.

Théorème A.3. *Soient X un espace vectoriel normé, Ω un sous-ensemble convexe de X et $F : \Omega \longrightarrow 2^{\Omega} \backslash \varnothing$ une application multivoque semi-continue supérieurement à valeurs convexes fermées non vides telle que $\overline{F(\Omega)}$ est un sous-ensemble compact de Ω. Alors, F possède un point fixe.*

Annexe B

Eléments d'analyse convexe

B.1 Ensembles convexes

Définition B.1. Soient X un espace vectoriel réel, et x et y deux éléments de X. On appelle segment fermé ou simplement segment d'extrémités x, y, l'ensemble

$$[x, y] = \{\lambda x + (1-\lambda)y \;/\; 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

Le segment ouvert est l'ensemble .

$$]x, y[= \{\lambda x + (1-\lambda)y \;/\; 0 < \lambda < 1\}.$$

Remarque B.1. La dénomination "segment fermé" est correcte car $[x, y]$ est bien un ensemble fermé dans X ; mais la dénomination "segment ouvert" est abusive car si la dimension de l'espace vectoriel X est supérieure ou égale à 2, $]x, y[$ n'est pas un ensemble ouvert. On définit de manière évidente les segments semi-fermés $[x, y[$ et $]x, y]$:

$$[x, y[= \{\lambda x + (1-\lambda)y \;/\; 0 < \lambda \leq 1\};$$

$$]x, y] = \{\lambda x + (1 - \lambda)y \;/\; 0 \leq \lambda < 1\}.$$

Définition B.2. Soit X un espace vectoriel réel. Une partie C de X est dite convexe si $\forall x, y \in C,\ \ [x, y] \subset C$; autrement dit $\forall x, y \in C,\ \forall \lambda \in [0, 1]$,

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in C.$$

Remarque B.2. Dans un espace vectoriel X,

1. Un sous-ensemble C est convexe si et seulement si, pour toute famille finie $x_1,\ ...,\ x_n$ d'éléments de C et pour toute famille $\lambda_1,\ ...,\ \lambda_n$ de nombres réels positifs de somme 1, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in C.$$

2. L'espace X est convexe et par convention l'ensemble vide est convexe.

3. Toute intersection des parties convexes est convexe, mais en général une réunion d'ensembles convexes n'est pas convexe.

Définition B.3. Soit A une partie d'un espace X. On appelle enveloppe convexe de A et on note $co(A)$, l'intersection de toutes les parties convexes de X contenant A. C'est donc le plus petit ensemble convexe contenant A. C'est aussi l'ensemble de toutes les combinaisons convexes d'éléments de A, c'est-à-dire :

$$co(A) = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \;/\; n \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0,\ x_i \in A,\ 1 \leq i \leq n\}.$$

Remarque B.3. Dans un espace vectoriel topologique X, l'adhérence d'un ensemble convexe est convexe, et l'intérieur d'un ensemble convexe est convexe (éventuellement vide). Plus généralement, si $A \subset X$ est convexe, si $x \in \mathring{A}$ et si $y \in \overline{A}$ alors $[x, y[\subset \mathring{A}$; on en déduit que $\overline{\mathring{A}} = \overline{A}$ chaque fois que $\mathring{A} \neq \emptyset$.
Si A est une partie quelconque de X, l'intersection de tous les convexes fermés contenant A est le plus petit convexe fermé contenant A. c'est aussi l'adhérence de l'enveloppe convexe de A (et non l'enveloppe convexe de l'adhérence). On l'appelle l'enveloppe convexe fermé de A et on la note $\overline{co}(A)$.

B.2 Fonctions convexes

Définition B.4. Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Une application $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est convexe si $\forall x, y \in X$ et $\forall \lambda \in [0, 1]$,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y). \tag{B.1}$$

Le domaine effectif de f est l'ensemble

$$Dom(f) = \{x \in X \ / \ f(x) < +\infty\}.$$

Nous avons la propriété évidente suivante :

Proposition B.1. *Si $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est une application convexe, alors $\forall a \in \mathbb{R}$, les ensembles $f^{-1}([-\infty, a])$ et $f^{-1}([-\infty, a[)$ sont des convexes de X.*

Définition B.5. On appelle épigraphe d'une fonction $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble :

$$Epi(f) = \{(x, a) \in X \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq a\}.$$

Proposition B.2. *Une application $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est convexe si et seulement si son épigraphe est convexe.*

Preuve. Supposons f convexe et prenons (x, a) et (y, b) dans $Epi(f)$. Nécessairement $f(x) \leq a < +\infty$ et $f(y) \leq b < +\infty$, et pour tout $\lambda \in [0, 1]$, nous aurons donc :

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \leq \lambda a + (1 - \lambda)b,$$

ce qui signifie que $\lambda(x, a) + (1 - \lambda)(y, b) \in Epi(f)$. Réciproquement, supposons $Epi(f)$ convexe. Sa projection sur $Dom(f)$ est donc convexe, et il suffit de vérifier (B1) sur $Dom(f)$. Prenons x et y dans $Dom(f)$, $a \geq f(x)$ et $b \geq f(y)$. Par hypothèse,

$$\lambda(x, a) + (1 - \lambda)(y, b) \in Epi(f) \;\; \forall \lambda \in [0, 1],$$

en sorte que :

$$(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda a + (1 - \lambda)b.$$

Si $f(x)$ et $f(y)$ sont finis, il suffit de prendre $a = f(x)$ et $b = f(y)$; si $f(x)$ ou $f(y)$ vaut $-\infty$, il suffit de faire tendre a ou b vers $-\infty$, et on obtient (B.1) dans les deux cas. ■

Définition B.6. Une application $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est semi-continue inférieurement (s.c.i.) si elle satisfait aux conditions équivalentes :

i) $\forall a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{x \in X \;/\; f(x) \leq a\}$ est fermé ;

ii) $\forall \overline{x} \in X \quad \underline{lim}_{x \longrightarrow \overline{x}} f(x) \geq f(\overline{x})$.

On dira que f est semi-continue supérieurement (s.c.s.) si $(-f)$ est s.c.i.

Définition B.7. Soient X un espace vectoriel topologique et A un sous-ensemble de X. On appelle fonction indicatrice de A la fonction $\chi_A : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ définie par :

$$\begin{cases} \chi_A(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \in A\ , \\ \chi_A(x) = +\infty \quad \text{si} \quad x \notin A. \end{cases} \tag{B.2}$$

Proposition B.3. *Une application $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est s.c.i. si et seulement si son épigraphe est fermé.*

Preuve. Définissons sur $X \times \mathbb{R}$ une fonction φ par $\varphi(x, a) = f(x) - a$. Dire que f est s.c.i. sur X équivaut à dire que φ est s.c.i. sur $X \times \mathbb{R}$. Or $\forall r \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\varphi^{-1}([-\infty, r[)$ se déduit de $Epi(f)$ par la translation de vecteur $(r, 0)$ et il est fermé si et seulement si $Epi(f)$ est fermé. $\blacksquare$

Exemple B.1. La fonction indicatrice χ_A d'un sous-ensemble $A \subset X$ sera s.c.i. (resp. s.c.s.) si et seulement si A est fermé (resp. ouvert).

B.3 Théorème de projection

Soit X un espace vectoriel réel.

Définition B.8. On appelle produit scalaire sur X, une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ bilinéaire, symétrique et définie positive, c'est-à-dire qui vérifie :

$$\begin{array}{l} i) \ \ \langle x, \cdot \rangle : X \longrightarrow \mathbb{R} \text{ est linéaire pour tout } x \in X, \\ ii) \ \ \langle \cdot, y \rangle : X \longrightarrow \mathbb{R} \text{ est linéaire pour tout } x \in X, \\ iii) \ \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \ \ \forall x, y \in X, \\ iv) \ \ \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0, \quad \text{et} \quad \langle x, x \rangle \geq 0 \ \ \forall x \in X. \end{array}$$

On appelle espace préhilbertien un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

Remarque B.4. L'application $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par :

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$$

étant une norme sur l'espace X, un espace préhilbertien est toujours considéré comme étant muni de cette norme, qui en fait aussi un espace vectoriel normé. S'il est complet pour cette norme, c'est un espace de Hilbert. Tout espace vectoriel normé de dimension finie étant complet, l'espace $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien est un exemple d'espace de Hilbert.
Notons au passage l'inégalité de Schwarz :

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\| \ \ \forall x, y \in X,$$

qui entraîne la continuité du produit scalaire, considéré comme application de $X \times X$ dans $\mathbb{R}$. Enfin rappelons que cette inégalité devient une égalité si et seulement si les deux vecteurs x et y qui figurent dans la formule sont linéairement dépendants.

Proposition B.4 (théorème de projection). *Soit C un sous-ensemble non vide, convexe, fermé d'un espace de Hilbert X.*

1. $\forall x \in X$, il existe un et un seul élément $\Pi_C(x) \in C$ tel que :

$$\|x - \Pi_C(x)\| = \inf_{y \in C} \|x - y\|.$$

2. $\Pi_C(x)$ vérifie $\langle \Pi_C(x) - x, y - \Pi_C(x)\rangle \geq 0 \ \ \forall y \in C$, et réciproquement, si $\overline{x} \in C$ est tel que

$$\langle \overline{x} - x, y - \overline{x}\rangle \geq 0 \ \ \forall y \in C,$$

alors $\overline{x} = \Pi_C(x)$.

3. L'application $\Pi_C : X \longrightarrow C$ *ainsi définie est telle que*

$$\|\Pi_C(x) - \Pi_C(y)\| \leq \|x - y\| \;\; x, y \in C$$

4. Par ailleurs l'application $\Pi_C : X \longrightarrow C$ *est continue monotone car*

$$\langle \Pi_C(x) - \Pi_C(y), x - y \rangle \geq 0 \;\; \forall x, y \in X.$$

5. Enfin, l'application $\Pi_C : X \longrightarrow C$ *est linéaire si et seulement si le sous-ensemble* C *est un sous-espace vectoriel, auquel cas*

$$\langle \Pi_C(x) - x, y \rangle = 0 \;\; \forall x \in X, \;\; \forall y \in C.$$

Remarque B.5. Les résultats de cette proposition sont prouvés dans Aubin [8].

B.4 Sous-différentiabilité

Définition B.9. Soient X un espace vectoriel topologique, X^* son espace dual et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une application.

1) Le sous-différentiel de f au point $x_o \in X$ est l'ensemble

$$\partial f(x_o) = \{u \in X^* \;/\; \forall x \in X, \; f(x) \geq f(x_o) + u(x - x_o)\}.$$

2) f est sous-différentiable en x_o si $\partial f(x_o) \neq \emptyset$, et les éléments de $\partial f(x_o)$ sont les sous-gradients de f en x_o.

3) L'application multivoque $\partial f : X \longrightarrow 2^{X^*}$ qui à chaque $x \in X$ associe $\partial f(x)$, est le sous-différentiel de f.

Proposition B.5. *Si une application convexe* $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *est finie et continue en* $x_o \in X,$ *alors* $\forall x \in int(Dom(f)), \quad \partial f(x) \neq \emptyset; \quad$ *en particulier* $\partial f(x_o) \neq \emptyset.$

Remarque B.6. Une fonction convexe s.c.i. propre définie sur un espace de Banach est sous-différentiable presque partout dans le domaine.

B.5 Différentiabilité au sens de Gâteaux

Nous rappelons ici que dans le cadre des fonctions convexes, la sous-différentiabilité constitue une généralisation de la différentiabilité.

Définition B.10. Soit $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. On appelle dérivée de f en $x_o \in X$ dans la direction u, et on note $f'_u(x_o)$ la limite, si elle existe,

$$\lim_{\lambda \longrightarrow 0^+} \frac{f(x_o + \lambda u) - f(x_o)}{\lambda}.$$

S'il existe $g \in X^*$ tel que $\forall u \in X, \;\; f'_u(x_o) = g(x_o)$, on dit que f est Gâteaux-différentiable et g est la différentielle de Gâteaux au point x_o de f qu'on note $f'(x_o)$.

Proposition B.6. *Soit* f *une fonction convexe de* X *dans* $\overline{\mathbb{R}}$. *Si* f *est Gâteaux-différentiable en* $x_o \in X,$ *elle est sous-différentiable en* x_o *et*

$$\partial f(x_o) = \{f'(x_o)\}.$$

Réciproquement, si au point $x_o \in X,$ f *est finie, continue et ne possède qu'un seul sous-gradient, alors* f *est Gâteaux-différentiable en* x_o *et*

$$\partial f(x_o) = \{f'(x_o)\}.$$

Preuve. Si f est Gâteau-différentiable en x_o, il est claire que

$$f'(x_o) \in \partial f(x_o).$$

Soit $x \in X$, posons $w = x - x_o$, on a alors :

$$f(x_o + w) - f(x_o) \geq \langle f'(x_o), w\rangle,$$

ainsi,

$$f(x) - f(x_o) \geq \langle f'(x_o), x - x_o\rangle.$$

Par ailleurs, si $x_o^* \in \partial f(x_o)$, on aura pour tout $w \in X$ et tout $\lambda > 0$:

$$f(x_o + \lambda w) - f(x_o) \geq \lambda\langle x_o^*, w\rangle.$$

En divisant par λ et passant à la limite, on obtient :

$$\langle f'(x_o), w\rangle \geq \langle x_o^*, w\rangle,$$

d'où

$$\langle f'(x_o) - x_o^*, w\rangle \geq 0.$$

Comme w est quelconque dans X,

$$x_o^* = f'(x_o).$$

Passons à la réciproque. f étant convexe, on a pour tout $x \in x$ et tout $\lambda \in$:

$$f(x_o) + \lambda\langle f'(x_o), x\rangle \leq f(x_o + \lambda x).$$

Cela signifie que dans $X \times \mathbb{R}$, la droite

$$D = \{(x_o + \lambda x, f(x_o) + \lambda\langle f'(x_o), x\rangle) \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

ne rencontre pas l'intérieur de l'épigraphe de f qui est un convexe ouvert non vide. Par le théorème de Hahn-Banach, il existe un hyperplan affine fermé H qui contient D et qui est le graphe d'une minorante affine continue de f en x_o. Comme le sous-gradient x_o^* de f en x_o a été supposé unique, la pente de H est x_o^*, et comme H contient D, alors

$$\langle f'(x_o), x \rangle = \langle x_o^*, x \rangle$$

ce qui prouve que f est Gâteau-différentiable en x_o de différentielle x_o^*. ■

Remarque B.7. Pour plus d'informations sur l'analyse convexe, nous invitons le lecteur intéressé à consulter aubin [8], Aubin et Celina [9], Ekeland et Teman [23], Rockafellar [46,47].

Bibliographie

[1] **Adjé, A.**, *Sur et sous-solutions dans les équations différentielles discontinues avec conditions aux limites non linéaires*, dissertation doctorale, Univ. Cath. de Louvain, Mars 1987, Belgique.

[2] **Adjé, A.**, *Existence et multiplicité des solutions d'équations différentielles ordinaires du premier ordre à nonlinéarité discontinue*, Ann. Soc. Sci. Bruxelles, T.101, III, 1987, 69-87.

[3] **Adjé, A.**, *Sur et sous-solutions généralisées et problèmes aux limites du second ordre*, Bull.Soc. Math. Bel. 42 (1990), 3, ser. B, 347-368.

[4] **Adjé, A.**, *Monotone iterative techniques for solutions of non linear second order ordinary differential equations*, Bull.Soc. Math. Bel. (1990), 6 ser. I, 259-267.

[5] **Adjé, A.**, *Sur et sous-solutions dans les équations semi-linéaires de type elliptyque avec conditions aux limites non linéaires*, Portu. Math. Vol. 49 Fasc. 2, 1992, 131-146.

[6] **Ahoulou, K. R. and Adjé, A.**, *Existence of solutions of a differential inclusion with nonlinear boundary conditions by the lower and upper solutions method,* Far East Journal of Applied Mathematics, Vol. 26, No 2, 2007, 281-287.

[7] **Alexander, J. W.**, *On tranformations with invariant points*, Trans. AMS 23, 1922, 89-95.

[8] **Aubin, J. P.**, *Analyse non linéaire et ses motivations économiques,* Masson, Paris, 1984.

[9] **Aubin, J. P. and Celina, A.**, *Differential Inclusions,* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo 1984.

[10] **Banach, S.**, *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*, Fund. Math. 3, 1922, 113-181.

[11] **Birkhoff, G. D.**, *Proof of Poincaré's geometric theorem*, Trans. AMS 14, 1913, 14-22.

[12] **Borsuk, K.**, *Sur un espace des transformations continues et ses applications topologiques*, Monatsh. für Math. Phys. 38, 1931, 381-386.

[13] **Brezis, H.**, *Equations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité*, Ann. de l'inst. Fourier, 18, I 1968, 115-175.

[14] **Breziz, H.**, *Analyse fonctionnelle - théorie et applications*, Masson, Paris, 1983.

[15] **Brouwer, L.E.J.**, *Invarianz des n-dimensionalen Gebiets*, Math. Ann. 71, 1912, 305-313.

[16] **Cabada A., Habets P. and Pouso R.**, *Optimal existence conditions for Phi-Laplacian equation with upper and lower solutions in the reversed order*, J. Differential Eq., 166, 2000, 385-401.

[17] **De Coster and Habets, P.**, *Upper and lower solutions in the theory of ODE boundary value problems : Classical and recent results*, C.I.S.M. Courses and lectures 371, Springer-Verlag, New-York, 1996, 1-79.

[18] **De Coster and Habets, P.**, *An overview of the method of lower and upper solutions for ODEs.* Pub. de l'inst. Math. Pure et App., Louvain-la Neuve, Belgique, 1998.

[19] **De Coster and Habets, P.**, *The lower and upper solutions method for boundary value problems*, In : Handbook of Differential Equations, ODE, A. Canada, P. Drabek, A. Fonda ed., Elsevier, 2004, 69-160.

[20] **De Coster and Habets, P.**, *Two points Boundary Value Problems : Lower and Upper Solutions*, Elsevier, Amsterdam et al, 2006, 502, ISBN0-444-52200-X.

[21] **Deimling, K.**, *Nonlinear functional analysis*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo 1985.

[22] **Dugundji, J. and Granas, A.**, *Fixed Point Theory*, Volume I, Monograf. Mat. Tom 61, Polish Scientific Publ. Warzawa, 1982.

[23] **Ekeland, I. and Teman, R.**, *Analyse convexe et problèmes variationnels,* Dunod Gauthier-Villars, Paris Bruxelles Montréal, 1974.

[24] **Erbe, L.H.**, *Nonlinear boundary value problems for second order differential equations,* J. Differential Equations 7, 1970, 459-472.

[25] **Fan, K.**, *Fixed points and minimax theorem in locally cinvex topological linear spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. 38, 1952, 121-126.

[26] **Fenchel, W.**, *On conjugate convex functions*, Canad. J. Math., 1, 1949, 73-77.

[27] **Frigon, M.**, *Solutions faibles pour une certaine classe d'équations différentielles ordinaires multivoques du second ordre,* Rapport de recherche du département de math. et de statistique. D.M.S. N°85-17, juin 1985, Univ. de Montréal.

[28] **Hadamard, J.**, *Sur les transformations ponctuelles*, Bull. Soc. Math. France 34, 1906, 71-84.

[29] **Kuhn, H. W. and Tucker, A. W.**, *Contribution to the theory of games*, Ann. of Math. Studies, Vol. 24, Princeton 1950.

[30] **Leray, J.**, *Discussion d'un problème de Dirichlet*, J. Math. Pures Appl.,18, 1939, 249-284.

[31] **Leray, J. and Schauder, J.**, *Topologie et équations fonctionnelles,* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 51, 1934, 45-78.

[32] **Markoff, A. A**, *Quelques théorèmes sur les ensembles abéliens*, C.R. Acad. Sci. URSS (N.S.) I, 1936, 311-313.

[33] **Mawhin, J.**, *Nonlinear perturbations of Fredholm mappings in normed spaces and applications to differential equations,* Univ. de Brasilia, Trabalho de Matematica no 61, 1974.

[34] **Mawhin, J.**, *The Bernstein-Nagumo problem and two-points boundary value problems for ordinary differential equatyions,* Coll. Math. Soc. János Bolyai. 30. Qualitative theory of diff. equations, Budapest, Farkas ed., 1981, 709-740.

[35] **Mawhin, J. and Schmitt, K.** , *Upper and lower solutions and semilinear second order elliptic equation with non-linear boundary conditions,* Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 97A, 1984, 199-207.

[36] **Mazur, S.**, *Un théorème sur les points invariants*, Ann. Soc. Polon. Math. Soc. Math. 17 (1938), 110.

[37] **Michael, E.**, *Continuous selection,* Ann. of Math. 63, 1956, 361-382.

[38] **Nagumo, M.**, *Uber die Differentialgleichung* $y'' = f(t, y, y')$, Proc. Physi-Maths. Soc. Japan (3) 19, 1937, 861-866.

[39] **Nagumo, M.**, *Uber des Randwertproblem der nichtlinearen gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung* , Proc. Physi-Maths. Soc. Japan 24, 1942, 845-851.

[40] **Nagumo, M.**, *On principally linear elliptic differential equations of the second order*, Osaka Math. J. 6, 1954, 207-229.

[41] **Neumann, J. V.**, *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*, Math. Ann. 100 (1928), 295-320.

[42] **Nikodym, O.**, *Sur le principe de minimum dans le problème de dirichlet*, Ann. Soc. Polon. Math. 10, 1931, 120-121.

[43] **Picard, E.**, *Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives*, J. Math. Pures Appl. 6, 1890, 145-210.

[44] **Poincaré, H.**, *Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps*, Bull. Astr. 1, 1884, 65-74.

[45] **Poincaré, H.**, *Sur les courbes définies par une équation différentielle*,III, J. Math. Pures Appl., 1885, 167-244.

[46] **Rockafellar, E. T.**, *Extension of Fenchel's duality in optimization problems and dynamics*, Duke Math. J. 33, 1960, 81-90.

[47] **Rockafellar, E. T.**, *Conjugate convex functions in optimal control and calculus of variations*, J. of Math. Anal. and Appl., 32, 1970, 174-222.

[48] **Scorza Dragoni**, *Il problema dei valori ai limiti studiato in grande per gli integrali di una equazione differenziali del secondo ordine*, Math. Ann. 105, 1931, 133-143.

[49] **Scorza Dragoni**, *Intorno a un criterio di esistenza per un problema di valori ai limiti*, Rend. Semin. R. Accad. Naz. Lincei 28, 1938, 317-325.

[50] **Sobolev, S. L.**, *Sur les problèmes aux limites pour les équations polyharmoniques*, Mat. Sbornik, 2, 44, 1937, 467-500.

[51] **Stampacchia, G.**, *Formes bilinéaires coercitives sur les ensembles convexes*, C.R. Ac. Sc. Paris, 258, 1964, 4413-4416.