THÈSE

Pour l'obtention du Grade de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE MÉCANIQUE ET D'AÉROTECHNIQUE

(Diplôme National – Arrêté du 25 mai 2016)

École Doctorale :
Sciences et Ingénierie des Matériaux, Mécanique, Énergétique

Secteur de Recherche : Énergétique, Thermique et Combustion

Présentée par :

Hamza RIAHI

****

DÉVELOPPEMENT D'UNE MÉTHODE DES FRONTIÈRES IMMERGÉES POUR L'ANALYSE ET LE CONTRÔLE DES ÉCOULEMENTS COMPRESSIBLES

****

Directeur de thèse : GONCALVES Eric
Co-encadrant : MELDI Marcello

****

Soutenue le 16 octobre 2018

devant la Commission d'Examen

****

JURY

Présidente :
SALVETTI Maria Vittoria, Professeur des Universités, Université de Pise-Italie
Rapporteurs :
HOARAU Yannick, Professeur des Universités, Université de Strasbourg
REVEILLON Julien, Professeur des Universités, CORIA Rouen
Membres du jury :
GONCALVES Eric, Professeur des Universités, ISAE-ENSMA Poitiers
FORTUNÉ Véronique, Maître de Conférences, Université de Poitiers
MELDI Marcello, Maître de Conférences, ISAE-ENSMA Poitiers

À mon âme sœur … Alma,

« Le rôle de l’ingénieur c’est de trouver les solutions »

RIAHI Habib

Remerciements

Il me sera très difficile de remercier tout le monde car c'est grâce à l'aide de nombreuses personnes que j'ai pu mener cette thèse à son terme.

Je voudrais tout d'abord remercier grandement mon directeur de thèse, M. Eric Goncalves, Professeur des Universités à l'ENSMA pour m'avoir accueilli au sein de son équipe et pour ses conseils et son écoute qui ont été prépondérants pour la bonne réussite de cette thèse. J'ai beaucoup appris à ses côtés et je lui adresse ma gratitude pour tout cela.

J'adresse de chaleureux remerciements à mon co-encadrant de thèse, M. Marcello Meldi, Maître de conférences à l'ENSMA, pour son attention de tout instant sur mes travaux et pour le temps conséquent qu'il m'a accordé. J'ai pris un grand plaisir à travailler avec lui. Son énergie et sa confiance ont été des éléments moteurs pour moi.

J'adresse tous mes remerciements à M. Yannick Hoarau, Professeur à l'Université de Strasbourg, ainsi qu'à M. Julien Réveillon, Professeur au CORIA Rouen, de l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'être rapporteurs de cette thèse.

J'associe à ces remerciements M^{me} Maria Vittoria Salvetti, Professeur à l'Université de Pise - Italie, et M^{me} Véronique Fortuné, Maître de conférences à l'Université de Poitiers, pour avoir acceptées d'examiner mon travail et pour l'intérêt qu'elles ont porté à mon travail.

Je tiens à remercier tous les membres de l'équipe « aérodynamique » de l'ENSMA, pour leur aide et leur bonne humeur.

Enfin, j'adresse ma reconnaissance éternelle à ma famille : mon père Habib, ma mère Latifa, mes frères Ahmed et Hatem, et ma pensée profonde aux âmes de mes grands-pères et grands-mères : Arbia, Ahmed, Hssen et Jannet.

DÉVELOPPEMENT D'UNE MÉTHODE DES FRONTIÈRES IMMERGÉES POUR L'ANALYSE ET LE CONTRÔLE DES ÉCOULEMENTS COMPRESSIBLES

Résumé :

Cette thèse s'inscrit dans le contexte de la simulation numérique et l'analyse des écoulements compressibles, notamment en géométrie complexe ou mobile. Dans ces situations, la mise en place d'un maillage représentant correctement le solide sans perte de précision des méthodes de discrétisation s'avère difficile. Une alternative est de travailler en maillage cartésien quelque que soit la géométrie du domaine d'écoulement en introduisant une approche aux frontières immergées.

Dans ce contexte, on propose une amélioration et extension d'une méthode formulée pour la simulation des écoulements incompressibles. Les deux principales caractéristiques du modèle proposé sont d'une part l'intégration d'un nouveau terme de forçage des vitesses qui prend en compte les effets de pression et d'autre part l'intégration d'un nouveau terme de correction de température dans le traitement de l'équation de l'énergie.

Cette méthode a été intégrée dans deux solveurs compressibles du code OpenFOAM : SonicFOAM et RhoCentralFOAM. La validation a été effectuée en considérant différents cas de complexité croissante sur des corps 2D fixes et mobiles, pour lesquels on a fait varier les nombres de Mach et de Reynolds. De plus, des cas mettant en jeu des transferts de chaleur pariétaux ont été étudiés. Les résultats ont été comparés à un grand nombre de données numériques et expérimentales issues de la littérature.

Enfin, des études sur des configurations plus complexes tridimensionnelles ont été mises en place. Les bifurcations de régime d'écoulement de la sphère ont été investiguées quand le nombre de Mach augmente. Une sphère avec des parois non-adiabatiques a été également analysée. Une géométrie réaliste de drone a été simulée en régime compressible.

Ces analyses mettent en évidence de nombreuses caractéristiques favorables de la méthode des frontières immergées en termes de précision, de flexibilité et de coût de calcul.

Mots clés :

Compressibilité ; Fluides, Dynamique des ; Méthodes des frontières immergées ; Navier-Stokes, Équations de ; Transfert de chaleur ; Mach, Nombre de ; Reynolds, Nombre de ; Code OpenFOAM.

DEVELOPMENT OF AN IMMERSED BOUNDARY METHOD FOR THE ANALYSIS AND CONTROL OF COMPRESSIBLE FLOWS

Abstract:
This thesis is related to the numerical simulation and the analysis of compressible flows, especially in complex or mobile geometry. In these situations, the establishment of a mesh correctly representing the solid without loss of precision of discretization methods is difficult. An alternative is to use Cartesian mesh independently of the geometry of the flow domain by introducing an immersed boundary approach.

In this context, we propose an improvement and extension of a method formulated for the simulation of incompressible flows. The two main characteristics of the proposed model are on the one hand the integration of a new velocity forcing term which takes into account the effects of pressure and on the other hand the integration of a new term of temperature correction in the treatment of the energy equation.

This method has been integrated in two compressible solvers of OpenFOAM code: SonicFOAM and RhoCentralFOAM. The validation was carried out by considering different cases of increasing complexity on fixed and mobile 2D bodies, for which the Mach and Reynolds numbers were varied. In addition, cases involving parietal heat transfer have been studied. The results were compared to a large number of numerical and experimental data from the literature.

Finally, studies on more complex three-dimensional configurations have been done. The flow regime bifurcations of the sphere have been investigated as the Mach number increases. A sphere with non-adiabatic walls was also analyzed. A realistic drone geometry was simulated in a compressible regime.

These analyzes highlight many favorable features of the immersed boundary method in terms of accuracy, flexibility and computational cost.

Keywords:

Compressibility ; Fluid dynamics ; Immersed Boundary Methods ; Navier-Stokes equations; Heat transfer ; Mach number ; Reynolds number ; OpenFOAM Code.

Table des matières

Introduction générale **23**
0.1 Écoulements compressibles : pertinence pour les applications industrielles 23
0.2 Objectifs 25
0.3 Plan de la Thèse 26

1 État de l'art **29**
1.1 Les équations de Navier-Stokes pour les écoulements compressibles 30
1.2 Méthodes numériques pour les écoulements compressibles 34
1.3 Solveurs compressibles d'OpenFOAM 35
1.4 Approches numériques pour l'aérodynamique externe autour de géométrie complexe / mobile 39
1.5 Méthodes des frontières immergées 41
1.5.1 Formulation originale de Peskin 41
1.5.2 Approches continues directes 44
1.5.3 Approche discrète : Ghost-Cell 48
1.5.4 Approche discrète : Cut-Cell 52
1.5.5 Approche discrète directe 54
1.6 Conclusion 64
Bibliographie 65

2 Méthode des frontières immergées pour les écoulements compressibles **73**
2.1 Formulation théorique 74
2.1.1 Fonction de passage 75
2.1.2 Formulation analytique des termes de forçage 78
2.2 Implémentation numérique 83
2.2.1 IBM _ sonicFOAM 83
2.2.2 IBM _ rhoCentralFOAM 83
2.2.3 Librairies IBM compressibles 84
Bibliographie 85

3 Validation numérique des solveurs IBM **87**
3.1 Écoulement compressible autour d'un cylindre circulaire 2D 88
3.1.1 Domaine de calcul 88
3.1.2 Écoulement incompressible ($Ma = 0.05$,$Re = 40$ et 100) 89
3.1.3 Écoulement subsonique ($Ma = 0.3$, $Re = 300$) 93
3.1.4 Écoulement transsonique ($0.8 \leq Ma < 1$, $Re = 100$) 94
3.1.5 Écoulement supersonique 95

3.1.6 Écoulement autour d'un cylindre en mouvement 98
3.2 Écoulement compressible autour d'un cylindre circulaire chauffé 2D 103
3.2.1 Domaine de calcul 103
3.2.2 Écoulement stationnaire 105
3.2.3 Écoulement instationnaire($Ma = 0.025$) 109
3.2.4 Sensibilité aux effets de compressibilité ($Re = 100$ et $r_\theta = 1.1$) 111
3.2.5 Écoulement autour d'un cylindre chauffé oscillant ($Ma = 0.05$, $Re = 100$) 112
3.3 Écoulement compressible autour d'un profil d'aile 2D 115
3.3.1 Domaine de calcul 115
3.3.2 Écoulement incompressible ($Ma = 0.05$) 115
3.3.3 Écoulement transsonique ($Ma = 0.8$, $Re = 500$) 120
3.3.4 Écoulement supersonique ($Ma = 2$, $Re = 1000$) 121
3.3.5 Écoulement autour d'un profil d'aile en mouvement ($Ma = 0.05$) 123
Bibliographie 125

4 Application : Étude d'écoulement compressible autour d'une sphère 129
4.1 Introduction 130
4.2 Domaine de calcul 130
4.3 Les régimes d'écoulement autour d'une sphère pour des Reynolds laminaires . . 131
4.4 Émergence des régimes caractéristiques des écoulements laminaires compressibles : une étude paramétrique 134
4.5 Investigation de l'écoulement subsonique instationnaire autour d'une sphère . . . 136
4.6 Analyse plus fine des régimes transoniques 137
4.7 Investigation de l'écoulement supersonique autour d'une sphère 138
4.8 Écoulement autour d'une sphère en rotation 139
4.9 Transfert de chaleur 141
4.9.1 Domaine de calcul 141
4.9.2 L'influence de r_θ sur le régime de l'écoulement($Ma = 0.8$, $Re = 300$) . . . 141
4.9.3 Investigation d'écoulement supersonique autour d'une sphère chauffée . . 146
Bibliographie 149

5 Application 2 : Écoulement compressible autour d'un drone 151
5.1 Introduction 152
5.2 Domaine de calcul 152
5.3 Investigation de l'écoulement subsonique instationnaire autour d'un drone 153

Conclusion 161

A Ordre de précision de la méthode 165
Bibliographie 165

Table des figures

1 Train à sustentation magnétique (MagLev). 23
2 Boeing 777X. 24
3 Missile de défense hypersonique. 24
4 Montage expérimental en soufflerie. 25

1.1 Transformation de la surface de solide en points Lagrangiens sur une grille cartésienne. 40
1.2 Schéma illustrant les forces de correction introduites par Peskin. 42
1.3 Terme de forçage entre la position du point Lagrangien actuelle (∘) et la position souhaitée (⋆). 45
1.4 Répartition des points Eulériens (•), des points Lagrangiens (∘) et des points fantômes (⊙) autour de l'interface fluide-solide. 49
1.5 Schéma d'interpolation linéaire pour l'approche Ghost-Cell. 50
1.6 Schéma d'interpolation quadratique pour l'approche Ghost-Cell. 51
1.7 Identification des cellules coupées au niveau de l'interface fluide-solide. 53
1.8 Schéma d'interpolation proposé par Mohd-Yusof. 55
1.9 Schémas d'interpolation proposé par Fadlun 57
1.10 Schéma d'interpolation unidirectionnel proposé par Kim. 58
1.11 Schéma d'interpolation bidirectionnel proposé par Kim. 59
1.12 Support de calcul de la fonction d'interpolation dans l'approche de Pinelli et al. :(□) points Eulériens à l'extérieur du support, (■) points Eulériens dans le support,(•) points Lagrangiens 62

2.1 Point Neumann $\mathbf{X}_k^N$ relatif au point Lagrangien $\mathbf{X}_k$. 75

3.1 Domaine de calcul 2D utilisé pour la validation IBM. 89
3.2 Les isocontours de vorticité axiale et les lignes de courant pour l'écoulement autour d'un cylindre circulaire pour $Ma = 0.05$ et $Re = 40$. Un zoom autour de la zone de recirculation est affiché. 90
3.3 Coefficient de pression C_p le long de la surface du cylindre, pour l'angle $\alpha \in [0, \pi]$. Les résultats d'IBM sont comparés aux données disponibles dans la littérature, solution stationnaire pour $Ma = 0.05$ et $Re = 40$. 91
3.4 Isocontours de vorticité axiale de l'écoulement autour d'un cylindre circulaire, solution instationnaire pour $Ma = 0.05$ et $Re = 100$. Un zoom autour de la région de sillage est montré. 91
3.5 Évolution temporelle du coefficient de portance C_l pour l'écoulement autour d'un cylindre circulaire pour : (a) $Ma = 0.05$ $Re = 100$, (b) $Ma = 0.3$ $Re = 300$. t_a est le temps d'advection caractéristique défini par $t_a = D/U_\infty$. 92

3.6 Isocontours de vorticité de l'écoulement autour d'un cylindre circulaire, $Ma = 0.3$ et $Re = 300$. 93
3.7 Domaine de calcul 2D utilisé pour la validation IBM. 94
3.8 Isocontours du nombre de Mach pour un écoulement transonique autour d'un cylindre circulaire à $Re = 100$; (a) et (b) $Ma = 0.8$, (c) et (d) $Ma = 0.9$. 95
3.9 Isocontours de masse volumique pour un écoulement transonique autour d'un cylindre circulaire à $Re = 100$; (a) et (b) $Ma = 0.8$, (c) et (d) $Ma = 0.9$. 96
3.10 (a) Isocontours de masse volumique et (b) Critère de Schlieren sont représentés pour un écoulement autour d'un cylindre circulaire, $Ma = 2.0$, $Re = 300$. 97
3.11 Répartition du coefficient de pression pour le cas $Ma = 2$, $Re = 300$. Les résultats obtenus sont comparés aux données disponibles dans la littérature. 98
3.12 (a) Isocontours de Ma et (b) masse volumique sont représentés pour un écoulement autour d'un cylindre circulaire, $Ma = 1.7$, $Re = 200000$. 99
3.13 Iso-contours du nombre de Mach (a)-(d) et vorticité (e)-(h) pour un écoulement autour d'un cylindre oscillant transversal $Ma = 0.05$: (a) et (e) : $t = 0.25T$; (b) et (f) : $t = 0.5T$;(c) et (g) : $t = 0.75T$;(d) et (h) : $t = 1.0T$ avec T : Temps de retournement des lâchers instationnaires. 101
3.14 Évolution temporelle du coefficient de portance C_l pour l'écoulement autour d'un cylindre circulaire oscillant(transversal) 102
3.15 Comparaison du coefficient de portance C_l avec les résultats de Constant et al. [1]103
3.16 Iso-contours du nombre de Mach (a)-(d) et vorticité (e)-(h) pour un écoulement autour d'un cylindre oscillant longitudinal $Ma = 0.05$: (a) et (e) : $t = 0.25T$; (b) et (f) : $t = 0.5T$;(c) et (g) : $t = 0.75T$;(d) et (h) : $t = 1.0T$ avec T : Temps de retournement des lâchers instationnaires. 104
3.17 Évolution temporelle du coefficient de portance C_l pour l'écoulement autour d'un cylindre circulaire oscillant(longitudinal) 105
3.18 Domaine de calcul 2D utilisé pour la validation IBM. 106
3.19 Iso-contours de température et lignes de courant pour un écoulement autour d'un cylindre circulaire neutre $Ma = 0.05$: (a) $Re = 20$ et (b) $Re = 40$. 107
3.20 Iso-contours de température et lignes de courant pour un écoulement autour d'un cylindre circulaire chauffé $Ma = 0.05$: (a) $Re = 20$ et (b) $Re = 40$. 107
3.21 Variation du Nusselt sur la surface du cylindre pour $Re = 20$ 108
3.22 Iso-contours et lignes de courant pour un écoulement autour d'un cylindre circulaire à $Ma = 0.4$, $Re = 40$ et $q_{paroi} = -0.2W/m^2$: (a) approche IBM et (b) maillage conforme. 109
3.23 Iso-contours et lignes de courant (à gauche) et évolution temporelle du coefficient de portance C_l (à droite) pour un écoulement autour d'un cylindre circulaire chauffé $Ma = 0.025$: (a) et (c) $Re = 100$,$r_\theta = 1.8$; (b) et (d) $Re = 260$,$r_\theta = 3$. . 110
3.24 Iso-contours du nombre de Mach et Température pour un écoulement autour d'un cylindre circulaire chauffé : (a)-(b) $Ma = 0.05$; (c)-(d) $Ma = 0.3$; (e)-(f) $Ma = 0.5$; (g)-(h) $Ma = 0.7$. 113
3.25 Iso-contours de vorticité (a)-(d) et température (e)-(h) pour un écoulement autour d'un cylindre oscillant longitudinal $Ma = 0.05$: (a) et (e) : $t = 0.25T$; (b) et (f) : $t = 0.5T$;(c) et (g) : $t = 0.75T$;(d) et (h) : $t = 1.0T$ avec T : Temps de retournement des lâchers instationnaires. 114

3.26 (a) Évolution temporelle du coefficient de portance C_l pour l'écoulement autour d'un cylindre circulaire oscillant(longitudinal) et (b) comparaison du coefficient de portance C_l avec les résultats de Luo et al. [27]. 116
3.27 Domaine de calcul 2D utilisé pour la validation IBM. 117
3.28 Les iso-contours du nombre de Mach et les lignes de courant autour d'un $NACA0008$ ($Ma = 0.05$; $Re = 2 \times 10^3$ et un angle d'attaque de 4°). 117
3.29 Les iso-contours du nombre de Mach et les lignes de courant autour d'un $NACA0018$ ($Ma = 0.05$; $Re = 10^4$ et un angle d'attaque de 10°). 118
3.30 Iso-contours du nombre de Mach (a)-(d) et vorticité (e)-(h) pour un écoulement autour d'un $NACA0018$ ($Ma = 0.05$; $Re = 10^4$ et un angle d'attaque de 10°) : (a) et (e) : $t = 0.25T$; (b) et (f) : $t = 0.5T$;(c) et (g) : $t = 0.75T$;(d) et (h) : $t = 1.0T$ avec T : Temps de retournement des lâchers instationnaires. 119
3.31 Coefficient de pression C_p le long de la surface de l'aile, pour l'abscisse $\in$ [0, 1] de la corde. Les résultats d'IBM sont comparés aux données disponibles dans la littérature [17]. 120
3.32 (a) Les iso-contours du nombre de Mach et les lignes de courant et (b) le critère Schlieren autour d'un $NACA0012$ ($Ma = 0.8$; $Re = 500$ et un angle d'attaque de 10°). 120
3.33 Coefficient de pression C_p le long de la surface de l'aile, pour l'abscisse $\in$ [0, 1] de la corde. Les résultats d'IBM sont comparés aux données disponibles dans la littérature [38]. 121
3.34 (a) Les iso-contours du nombre de Mach et les lignes de courant et (b) le critère Schlieren autour d'un $NACA0012$ ($Ma = 2$; $Re = 1000$ et un angle d'attaque de 10°). 122
3.35 Coefficient de pression C_p le long de la surface de l'aile, pour l'abscisse $\in$ [0, 1] de la corde. Les résultats d'IBM sont comparés aux données disponibles dans la littérature [33]. 122
3.36 Iso-contours du nombre de Mach (a)-(d) et vorticité (e)-(h) pour un écoulement autour d'un profil NACA 0012 oscillant $Ma = 0.05$: (a) et (e) : $t = 0.25T$; (b) et (f) : $t = 0.5T$;(c) et (g) : $t = 0.75T$;(d) et (h) : $t = 1.0T$ avec T : Temps de retournement des lâchers instationnaires. 124

4.1 Visualisation des plans du maillage cartésien 3D utilisé pour le calcul de l'écoulement autour d'une sphère. 131
4.2 Vorticité d'un écoulement autour de la sphère pour $Ma = 0.4$, (a) $Re = 205$ (État axisymétrique stationnaire), (b) $Re = 250$ (État planaire-symétrique stationnaire) et (c) $Re = 300$ (État instationnaire). La composante de vorticité autour de l'axe y est tracée. 132
4.3 Critère Q d'un écoulement autour d'une sphère pour Re=300, (a) $Ma = 0.3$ (Configuration instationnaire), (b) $Ma = 0.95$ (Configuration stationnaire) et (c) $Ma = 2$ (Configuration stationnaire). 133
4.4 Émergence de différents régimes caractéristiques pour l'écoulement autour d'une sphère, en fonction de Re et Ma : (+) écoulement axisymétrique stationnaire, (•) écoulement planaire-symétrique stationnaire, (×) Écoulement instationnaire périodique. 135

4.5 Type de topologie d'écoulement subsonique : (+) écoulement axisymétrique stationnaire, (•) écoulement planaire-symétrique stationnaire, (×) Écoulement instationnaire périodique. Les lignes pointillées représentent les valeurs de seuil pour le changement de régime d'écoulement, calculées par l'analyse de stabilité par Sansica et al. [2]. 136
4.6 (a) Coefficient de trainée C_d, (b) l'angle de séparation α_s et (c) la longueur de recirculation x_s en fonction de Re et Ma. Les données sont échantillonnées à partir d'une base de données de 120 simulations. 137
4.7 Évolution temporelle de coefficient de portance C_l de l'écoulement autour de la sphère pour $Ma = 0.3$ et $Re = 300$. 139
4.8 Simulation numérique d'un écoulement transsonique autour de la sphère pour $Ma = 0.95$, en utilisant le maillage haute résolution *sphereB*. Les isocontours du nombre de Mach Ma sont tracés pour (a) $Re = 50$ et (b) $Re = 600$, respectivement. Pour le deuxième cas, un choc en aval est observé via (c) le critère Q et (d) le critère Schlieren. 140
4.9 Simulation numérique d'un écoulement supersonique autour de la sphère pour $Ma = 2$, en utilisant le maillage haute résolution *sphereB*. (a) Les isocontours du nombre de Mach Ma sont tracés pour $Re = 300$ et (b) le critère Schlieren pour $Re = 600$. 140
4.10 Les structures tourbillonnaires pour un écoulement autour d'une sphère en rotation pour $Ma_\infty = 0.5$. Les configurations (a) $Ma_\omega = 0$, $Re = 200$, (b) $Ma_\omega = 0$, $Re = 300$, (c) $Ma_\omega = 0.5$, $Re = 200$ et (d) $Ma_\omega = 0.5$, $Re = 300$ sont représentées, respectivement. 142
4.11 Les lignes de courants d'un écoulement autour d'une sphère en rotation pour $Ma_\infty = 0.5$. Les configurations (a) $Ma_\omega = 0$, $Re = 200$, (b) $Ma_\omega = 0$, $Re = 300$, (c) $Ma_\omega = 0.5$, $Re = 200$ et (d) $Ma_\omega = 0.5$, $Re = 300$ sont représentées, respectivement. 143
4.12 Les isocontours du nombre de Mach d'un écoulement autour d'une sphère en rotation pour $Ma_\infty = 0.5$. Les configurations (a) $Ma_\omega = 0$, $Re = 200$, (b) $Ma_\omega = 0$, $Re = 300$, (c) $Ma_\omega = 0.5$, $Re = 200$ et (d) $Ma_\omega = 0.5$, $Re = 300$ sont représentées, respectivement. 144
4.13 Iso-contours de vorticité de l'écoulement autour de la sphère à $Ma = 0.8$ et $Re = 300$, (a) $r_\theta = 2$ (État stationnaire axisymétrique), (b) $r_\theta = 1.5$ (État stationnaire planaire-symétrique) et (c) $r_\theta = 0.5$ (Régime instationnaire). Seulement la composante suivant z de vorticité est représentée. 145
4.14 Les isocontours du Ma et de température pour $Ma = 0.8$ et $Re = 300$: (a) $r_\theta = 0.5$;(b) $r_\theta = 1$;(c) $r_\theta = 1.5$;(d) $r_\theta = 2$ 147
4.15 Variation du nombre de Nusselt en fonction de r_θ pour $Ma = 0.8$ 148
4.16 Simulation numérique d'un écoulement supersonique autour d'une sphère chauffée à $Ma = 2$, $Re = 300$ et $r_\theta = 2$: (a) Les isocontours du nombre de Mach (b) Les isocontours de la température et (c) Le critère Schlieren. 148

5.1 Visualisation des plans du maillage dans les directions (y) et (z) utilisés pour le calcul de l'écoulement autour d'un drone. 153
5.2 Visualisation des plans du maillage dans les directions (x) et (z) utilisés pour le calcul de l'écoulement autour d'un drone. 154

5.3 Isocontours de vorticité (y) de l'écoulement autour des profils d'aile d'un drone, $Ma = 0.4$ et $Re = 10^5$: (a) $y = 0m$; (b) $y = 0.3m$; (c) $y = 0.6m$; (d) $y = 0.9m$. 155
5.4 Coefficient de pression de l'écoulement autour des profils d'aile d'un drone, $Ma = 0.4$ et $Re = 10^5$: (a) $y = 0m$; (b) $y = 0.3m$; (c) $y = 0.6m$; (d) $y = 0.9m$. 156
5.5 Isocontours de nombre de Mach de l'écoulement autour des profils d'aile d'un drone, $Ma = 0.4$ et $Re = 10^5$: (a) $y = 0m$; (b) $y = 0.3m$; (c) $y = 0.6m$; (d) $y = 0.9m$. 157
5.6 Isocontours de nombre de Mach de l'écoulement autour d'un drone à un plan défini par $z = 4.07$, $Ma = 0.4$ et $Re = 10^5$. 158
5.7 Isocontours de vorticité de l'écoulement autour d'un drone à un plan défini par $z = 4.07$, $Ma = 0.4$ et $Re = 10^5$. 158
5.8 Critère Q d'un écoulement autour d'un drone, $Ma = 0.4$ et $Re = 10^5$. 159
5.9 Les lignes de courants d'un écoulement autour d'un drone, $Ma = 0.4$ et $Re = 10^5$.160

A.1 Courbes d'ordre en norme L_2 (a) et en norme L_∞ (b) pour la composante de la vitesse u_x en fonction de la taille de l'élément du maillage. La ligne "- - -" (précision du premier ordre) et la ligne "..." (précision du second ordre) sont incluses afin d'estimer l'ordre de précision de la méthode. 166
A.2 Courbe d'ordre pour le coefficient de traînée C_D. La ligne "- - -" (précision du premier ordre) et la ligne "..." (précision du second ordre) sont incluses afin d'estimer l'ordre de précision de la méthode. 167

Liste des tableaux

2.1 Résumé des propriétés des fonctions d'interpolation : (-) critère non satisfait ; (+) critère moyennement satisfait ; (++) critère satisfait 77

3.1 Comparaison des quantités caractéristiques d'écoulement autour d'un cylindre circulaire avec les données disponibles dans la littérature pour $Ma = 0.05$. C_D est le coefficient de traînée, C_L est le coefficient de portance, S_t le nombre de Strouhal, x_s la longueur de recirculation, (a, b) sont les longueurs caractéristiques de la zone de recirculation et α_s est l'angle de séparation. Les données sont fournies pour $Re = 40$ (en haut) et $Re = 100$ (en bas), respectivement. 90

3.2 Coefficient de traînée C_D, L'écart type du coefficient de portance C_l^{rms} et emplacement de front de choc $\triangle_{choc}$, calculés pour l'écoulement autour d'un cylindre circulaire pour $Re = 300$, $Ma = 0.3$ et $Ma = 2$. Les résultats obtenus sont comparés aux données disponibles dans la littérature. 93

3.3 Coefficient de traînée C_D, l'angle de séparation α_s et emplacement de front de choc $\triangle_{choc}$, calculés pour l'écoulement autour d'un cylindre circulaire pour $Ma = 1.7$ et $Re = 2 \times 10^5$. Les résultats obtenus sont comparés aux données disponibles dans la littérature. 96

3.4 Coefficient de traînée C_D, Valeur efficace du coefficient de portance C_l^{rms} et nombre de Strouhal St, calculés pour l'écoulement autour d'un cylindre circulaire oscillant pour $Ma = 0.05$ et $Re = 500$. Les résultats obtenus sont comparés aux données disponibles dans la littérature. 100

3.5 Coefficient de traînée C_D et coefficient de portance C_l^{max}, calculés pour l'écoulement autour d'un cylindre circulaire oscillant pour $Ma = 0.05$ et $Re = 100$. Les résultats obtenus sont comparés aux données disponibles dans la littérature. . . 102

3.6 Comparaison du Nusselt moyen Nu sur la surface du cylindre pour $Re = 20$ et $Re = 40$ 108

3.7 Comparaison des quantités caractéristiques d'écoulement autour d'un cylindre circulaire avec un flux de chaleur imposé $q_{paroi} = -0.2W/m^2$. C_D est le coefficient de traînée, x_s la longueur de recirculation et α_s est l'angle de séparation. 109

3.8 Nombre de Strouhal S_t pour un écoulement instationnaire autour du cylindre circulaire chauffé à $Ma = 0.025$ 111

3.9 C_d et C_l^{max} pour un écoulement instationnaire autour du cylindre circulaire chauffé à $Ma = 0.025$ 111

3.10 C_d , C_l^{max} et St pour l'ensemble des nombres de Mach ($\mathbf{r_\theta = 1.1}$ et $\mathbf{Re = 100}$) . 112

3.11 C_d , C_l^{max} et St pour le cas d'un cylindre oscillant chauffé 112

3.12 Comparaison des quantités caractéristiques d'écoulement autour d'un profil d'aile avec les données disponibles dans la littérature pour $Ma = 0.05$. C_D est le coefficient de traînée, C_L est le coefficient de portance, S_t le nombre de Strouhal. Les données sont fournies pour $NACA$ 0008 à un angle d'attaque de 4° et $Re = 2 \times 10^3$ (en haut) et $NACA$ 0018 à un angle d'attaque de 10° et $Re = 10^4$ (en bas), respectivement. 118
3.13 Comparaison des quantités caractéristiques d'écoulement autour d'un profil d'aile avec les données disponibles dans la littérature pour $Ma = 0.8$, $Re = 500$ et un angle d'attaque $\alpha = 10°$. C_D est le coefficient de traînée, C_L est le coefficient de portance 121
3.14 Comparaison des quantités caractéristiques d'écoulement autour d'un profil d'aile avec les données disponibles dans la littérature pour $Ma = 2$, $Re = 1000$ et un angle d'attaque $\alpha = 10°$. C_D est le coefficient de traînée, C_L est le coefficient de portance et $\triangle_{choc}$ est l'emplacement du choc 123
3.15 Comparaison du coefficient de Poussée C_T pour l'écoulement autour d'un profil $NACA$ 0012 en mouvement de tangage. 123

4.1 Les quantités caractéristiques de l'écoulement autour de la sphère, obtenues avec la simulation IBM et en utilisant la grille raffinée $sphereB$. Les résultats sont comparés aux données disponibles dans la littérature. C_D est le coefficient de traînée moyen, x_s est la longueur de recirculation, S_t est le nombre de Strouhal et Δ_{shock} est l'emplacement de choc. 138
4.2 Quantités physiques caractéristiques de l'écoulement autour d'une sphère en rotation. 141
4.3 Grandeurs caractéristiques d'un écoulement compressible autour d'une sphère chauffée. Les résultats actuels sont comparés avec les données disponibles dans la littérature. C_D est le coefficient de traînée moyen, x_s est la longueur de recirculation et S_t est le nombre de Strouhal. 149
4.4 Grandeurs caractéristiques d'un écoulement supersonique autour d'une sphère chauffée.Les résultats actuels sont comparés avec les données disponibles dans la littérature. C_D est le coefficient de traînée moyen, x_s est la longueur de recirculation , Nu est le nombre de Nusselt et Δ_{choc} est l'emplacement du choc. 149

Introduction

0.1 Écoulements compressibles : pertinence pour les applications industrielles

Les progrès technologiques récents dans les domaines de l'ingénierie du transport aérospatial, du transport terrestre et de la défense ont permis d'obtenir des engins de plus en plus performants et des structures de plus en plus complexes. Ainsi, le développement des méthodes d'analyse capables de traiter l'écoulement autour de ces structures est fondamental afin d'améliorer encore plus les performances de ces applications qui sont pertinentes pour un large spectre d'applications industrielles. Afin de fixer les idées, prenons un cas d'exemple concret dans chacun des domaines des transports terrestre et aérospatial et de la défense :

- Train à sustentation magnétique (MagLev) : c'est une nouvelle technologie des transports ferroviaires basée sur le phénomène de "supraconductivité" dont le but est de faire léviter un wagon afin de réduire la consommation d'énergie à cause du frottement avec des rails et augmenter la vitesse du train (Voir figure 1). Ainsi, la modélisation de ce système nécessite l'étude de l'écoulement autour d'une géométrie à la fois complexe et en mouvement. L'optimisation géométrique de ces véhicules est un aspect fondamental du développement parce que la réduction de la traînée même de quelques points de pourcentage entraînera une réduction significative de la consommation du carburant et facilitera le passage à une consommation d'énergie verte dans les années à venir, et en particulier, en accord avec les récentes lois européennes en matière d'environnement.

FIGURE 1 – Train à sustentation magnétique (MagLev).

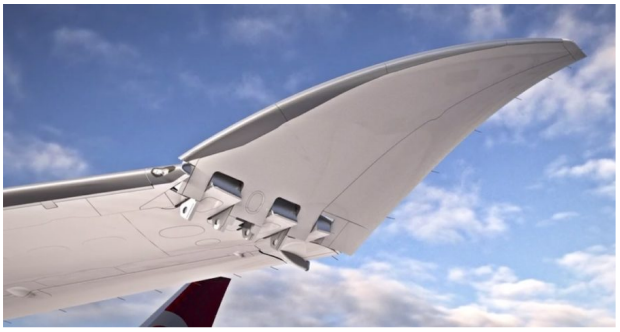


FIGURE 2 – Boeing 777X.

FIGURE 3 – Missile de défense hypersonique.

- Les avions de ligne avec des composants mobiles tels que les nouvelles ailes du Boeing 777X avec une extrémité d'aile mobile. Cette technologie permet l'accès à plus grands nombres d'aéroports de taille plus petite et ainsi améliorer l'efficacité des avions avec les mêmes infrastructures (Voir figure 2). Également, la modélisation de ces avions avec des composants mobiles représente un grand défi pour les constructeurs et les autorités de certification.

- Missile de défense hypersonique : A l'époque d'une course internationale aux armements, la maîtrise de la technologie des missiles hypersoniques est vitale. L'écoulement autour de ces engins implique plusieurs phénomènes comme le couplage thermique / dynamique et l'interaction choc / couche limite (Voir figure 3).

Dans cette perspective, les avancées en ingénierie des transports sont de plus en plus liées à des configurations des écoulements compressibles.
Les méthodes d'analyse de ces écoulements peuvent être classées, en général, sous deux catégories :

- Les méthodes expérimentales et principalement les études en souffleries. Ce sont les méthodes les plus classiques mais qui restent incontournables. Néanmoins, elles présentent deux inconvénients majeurs : la difficulté de la réalisation et le coût élevé des montages expérimentaux. En plus, les mesures expérimentales sont souvent affectées par des incertitudes qui peuvent être difficilement éliminées ou contrôlées.

- Les méthodes numériques, des alternatives aux méthodes expérimentales qui prennent de plus en plus de place avec l'avancée fulgurante des moyens de calcul informatiques.

FIGURE 4 – Montage expérimental en soufflerie.

Malgré ce progrès, il reste beaucoup de pistes de développement à faire sur ces méthodes numériques notamment pour le traitement des géométries complexes et mobiles.

La simulation précise de l'évolution de l'écoulement autour des engins est sans doute l'un des problèmes les plus difficiles dans les applications d'ingénierie du transport et de la défense. Ainsi, une bonne prédiction de la topologie de l'écoulement permet une estimation précise des forces aérodynamiques agissant sur l'engin, ce qui fournit un aperçu fondamental de l'optimisation de la forme. De plus, une bonne estimation de l'écoulement est nécessaire pour estimer d'autres aspects tels que le champ acoustique, ce qui peut améliorer les conditions du confort et de la sécurité pour les passagers dans des applications du transport. Cependant, l'état de l'art en simulation numérique a encore besoin d'un développement important pour devenir un outil efficace pour les applications avancées de l'ingénierie des transports et de la défense. Deux principaux problèmes critiques doivent être abordés :

1. **Le maillage des formes géométriques complexes**. La représentation des caractéristiques géométriques fines dans les simulations classiques conformes au corps peut entraîner des éléments de maillage trop déformés / étirés et des caractéristiques défavorables de la qualité du maillage. Cet aspect problématique peut conduire à de mauvais résultats prédictifs.

2. **Mouvement du corps** : Jusqu'à aujourd'hui, des lois de mouvement simples imposées au corps peuvent nécessiter plusieurs remaillages pendant la simulation numérique. Ces opérations entraînent des coûts de calcul importants.

0.2 Objectifs

C'est dans ce contexte d'étude d'aérodynamique externe compressible que se situent les travaux menés durant cette thèse . Nous avons cherché à modéliser des écoulements compressibles autour des géométries rigides, fixes ou en mouvement.

Pour ce faire, nous avons choisi de développer une méthode des frontières immergées qui consiste, en général, à utiliser un maillage cartésien non conforme au corps étudié et à modifier le système des équations Navier-Stokes afin de prendre en compte les effets de la présence du corps :

- le choix du maillage cartésien est fait pour pouvoir utiliser des schémas numériques simples et contrôler l'erreur numérique.
- le choix du maillage non conforme est fait pour pouvoir traiter des géométries complexes et mobiles sur des temps de calcul relativement courts.

Pendant le présent travail, on étudie une méthode IBM améliorée, conçue à l'origine pour des écoulements incompressibles, qui est étendue aux écoulements compressibles avec des nouveaux termes de forçage, relatifs en plus de la vitesse à la température, la pression et la masse volumique.
Nous envisageons également de concevoir une librairie des frontières immergées capable d'être implémentée dans les différents algorithmes des codes de calcul compressibles. Pour cette raison, nous avons choisi de développer le travail de recherche dans le cadre de la plate-forme numérique *OpenFOAM*. Ce logiciel est une librairie des codes C++ largement utilisée par la communauté scientifique pour l'analyse d'une vaste gamme des problèmes de la mécanique des fluides. Ainsi, dans ce travail, on choisit d'appliquer notre méthode sur deux solveurs compressibles d'OpenFOAM : *sonicFOAM* et *rhoCentralFOAM* avec deux architectures différentes.
L'objectif principal du travail de recherche est la validation des caractéristiques fondamentales (précision, robustesse...) de la méthode numérique développée. Pour cette raison, les géométries choisies pour les applications de cette nouvelle approche des frontières immergées sont principalement le cylindre (pour les applications 2D) et la sphère (pour les applications 3D) qui représentent des outils de modélisation incontournables notamment dans la phase d'avant-projet. L'objectif de ces cas d'application classiques est la validation de la nouvelle approche sur une large gamme des nombres de Mach et des nombres de Reynolds laminaires et également sur différents types des conditions aux limites sur la température appliquée à la structure :

- Condition neutre (i.e. la surface du corps n'interagit pas directement avec l'écoulement par rapport au transfert de chaleur).
- Condition de température imposée.
- Condition de flux imposé.

D'autre part, on choisit d'analyser les écoulements autour des profils d'ailes, fixes et en mouvement, à différents Ma et Re ce qui constitue un cas 2D complexe où l'on met en évidence les atouts de la nouvelle méthode.
Finalement notre dernier objectif est de simuler et d'analyser l'écoulement autour d'un drone ce qui constitue un cas complexe en écoulement tridimensionnel.

0.3 Plan de la Thèse

Pour commencer, nous introduirons les notions et les outils relatifs aux écoulements compressibles et aux simulations numériques. Nous détaillerons par la suite les différentes approches

des frontières immergées de la littérature relatives aux écoulements incompressibles et compressibles.
Une fois ces approches introduites, nous commençons le développement de notre approche des frontières immergées pour l'analyse des écoulements compressibles.
Dans le troisième chapitre de la thèse, on effectue une étude de validation sur des cas 2D (cylindre et profil d'aile) où l'on étudie les principaux paramètres physiques de l'écoulement.
Finalement, les deux derniers chapitres sont consacrés à deux applications 3D de notre approche IBM sur des problématiques physiques complexes :

- Chapitre 4 : Une étude de l'émergence des régimes des écoulements compressibles autour d'une sphère en fonction des nombres de Mach et de Reynolds et une analyse de l'effet de la température imposée sur la sphère.

- Chapitre 5 : L'étude d'un écoulement compressible autour d'un drone.

Chapitre 1

État de l'art

Sommaire

1.1 Les équations de Navier-Stokes pour les écoulements compressibles 30

1.2 Méthodes numériques pour les écoulements compressibles 34

1.3 Solveurs compressibles d'OpenFOAM 35

1.4 Approches numériques pour l'aérodynamique externe autour de géométrie complexe / mobile 39

1.5 Méthodes des frontières immergées 41

1.5.1 Formulation originale de Peskin 41

1.5.2 Approches continues directes 44

1.5.3 Approche discrète : Ghost-Cell 48

1.5.4 Approche discrète : Cut-Cell 52

1.5.5 Approche discrète directe 54

1.6 Conclusion 64

Bibliographie 65

1.1 Les équations de Navier-Stokes pour les écoulements compressibles

La méthode des frontières immergées, quelle que soit l'approche utilisée, est basée sur l'introduction des termes de correction au sein des équations utilisées pour la représentation de l'écoulement. En particulier, les équations de Navier-Stokes sont ici considérées. Ainsi, il est important de bien identifier la signification physique de chacun des termes de ces équations afin d'en déduire les corrections nécessaires mathématiquement mais surtout des corrections qui ont leur légitimité physique. C'est pourquoi dans ce paragraphe, on prend le soin de détailler toutes les bases théoriques pour la détermination des termes sources dans notre approche des frontières immergées.

Lois de conservation

D'une manière générale, on considère un volume de contrôle matériel $V(t)$ et la surface totale qui le limite, et on étudie la variation d'une grandeur extensive $A(\mathbf{x},t)$ contenue dans ce volume à l'instant t. Le bilan de cette grandeur extensive s'écrit :

$$\frac{D}{Dt}\int_{V(t)} A(\mathbf{x},t)\,\mathrm{d}V + \int_{S(t)} \Phi_A.\mathbf{n}\,\mathrm{d}s = \int_{V(t)} P_A\,\mathrm{d}V \tag{1.1}$$

avec :

- $\frac{D}{Dt}$: la dérivée particulaire
- S : surface du domaine d'étude
- $\mathbf{x}$: la position spatiale
- P_A : taux de production volumique
- Φ_A : flux de diffusion de A à travers la surface S

Lorsque les quantités $\frac{D}{Dt}$,S,P_A et Φ_A sont continues sur le domaine $V(t)$, et en utilisant le théorème de Stokes, le bilan local en un point M du domaine et à l'instant t s'en déduit :

$$\frac{\partial A}{\partial t} + div(A\mathbf{u} + \Phi_A) = P_A \tag{1.2}$$

avec :

- $\mathbf{u}$: Champ des vitesses

En mécanique des fluides compressibles, on s'intéresse à plusieurs bilans des quantités extensives notamment le bilan de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie totale.

Bilan de masse

La grandeur extensive dans ce paragraphe est la masse contenue dans le volume de contrôle $V(t)$ et la grandeur intensive associée est la masse volumique locale $\rho(\mathbf{x},t)$. Dans notre cas, on considère qu'il n'y a pas ni de production de la masse au sein de l'écoulement ni de flux de diffusion Φ_A à travers la surface du volume de contrôle $V(t)$. Ainsi, le bilan de masse se réduit

à :
Bilan global de la masse :

$$\frac{D}{Dt}\int_{V(t)} \rho(\mathbf{x},t)\,\mathrm{d}V = 0 \tag{1.3}$$

Bilan local de la masse :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \mathbf{u}) = 0} \tag{1.4}$$

Cette équation traduit la conservation de la masse en tout point du fluide. Cette propriété est particulièrement importante dans le cas des méthodes des frontières immergées pour s'assurer qu'il n'y a pas de fuite à travers l'interface fluide-solide.

Bilan de la quantité de mouvement
De la même façon, on obtient le bilan global de la quantité de mouvement :

$$\frac{D}{Dt}\int_{V(t)} \rho\mathbf{u}(\mathbf{x},t)\,\mathrm{d}V = \int_{S(t)} [(-p\,\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}})\,.\,\mathbf{n}]\,\mathrm{d}s + \int_{V(t)} [\rho\mathbf{f}(\mathbf{x},t)]\,\mathrm{d}V \tag{1.5}$$

avec :

- p : Champ de la pression
- $\overline{\overline{\tau}}$: Tenseur des contraintes visqueuses
- $\mathbf{f}$: Forces volumiques extérieures telles que la pesanteur ...

Comme le volume de contrôle V(t) est arbitraire, on peut transformer le bilan global 1.5 en bilan local qui s'écrit :

$$\frac{D(\rho\mathbf{u}(\mathbf{x},t))}{Dt} = \mathbf{grad}(-p) + \mathbf{div}(\overline{\overline{\tau}}) + \rho\mathbf{f}(\mathbf{x},t) \tag{1.6}$$

En combinant le bilan de la masse et le bilan de la quantité de mouvement, on trouve une nouvelle formulation de ce dernier :

$$\boxed{\rho\frac{D(\mathbf{u}(\mathbf{x},t))}{Dt} = \mathbf{grad}(-p) + \mathbf{div}(\overline{\overline{\tau}}) + \rho\mathbf{f}(\mathbf{x},t)} \tag{1.7}$$

Bilan de l'énergie totale
En appliquant le premier principe de la thermodynamique au volume de contrôle $V(t)$, le bilan global de l'énergie totale massique e_t s'écrit :

$$\frac{D}{Dt}\int_{V(t)} \rho(e_t(\mathbf{x},t))\,\mathrm{d}V = \int_{V(t)} [\rho\mathbf{f}(\mathbf{x},t).\mathbf{u} + q](\mathbf{x},t)\,\mathrm{d}V + \int_{S(t)} [[(-p\,\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}})\,.\,\mathbf{n}]\,.\,\mathbf{u}(\mathbf{x},t)]\,\mathrm{d}s - \int_{S(t)} [\mathbf{r}\,.\,\mathbf{n}]\,\mathrm{d}V \tag{1.8}$$

avec :

- q : terme source thermique volumique extérieur
- $\mathbf{r}$: flux de chaleur par conduction, calculé par la loi de Fourier ($\mathbf{r} = -\lambda\mathbf{grad}(\theta)$ avec λ est la conductivité thermique).

Comme le volume de contrôle $V(t)$ est arbitraire, on peut transformer le bilan global de l'énergie totale massique 1.8 en bilan local qui s'écrit :

$$\boxed{\rho \frac{D(e_t(\mathbf{x},t))}{Dt} = -\,div(p\,\mathbf{u}) + div(\overline{\overline{\tau}}\mathbf{u}) - div(\mathbf{r}) + \rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{u} + q} \tag{1.9}$$

D'autre part, l'expression de l'énergie interne massique e s'écrit :

$$e(\mathbf{x},t) = e_t(\mathbf{x},t) - \frac{1}{2}u^2(\mathbf{x},t) \tag{1.10}$$

Ainsi le bilan local de l'énergie interne massique s'écrit :

$$\boxed{\rho \frac{D(e(\mathbf{x},t) + \frac{1}{2}u^2(\mathbf{x},t)))}{Dt} = -\,div(p\,\mathbf{u}) + div(\overline{\overline{\tau}}\mathbf{u}) - div(\mathbf{r}) + \rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{u} + q} \tag{1.11}$$

Finalement, l'équation de fermeture est l'équation d'état des gaz parfaits :

$$p = \frac{\rho R\theta}{M} \tag{1.12}$$

avec :

- θ : Champ de la température
- R : Constante universelle des gaz parfaits
- M : Masse molaire

Il faut bien noter qu'on considère pour la suite du travail que le fluide est newtonien. Sous cette hypothèse, le tenseur de contraintes visqueuses $\overline{\overline{\tau}}$ s'écrit :

$$\overline{\overline{\tau}} = \eta\, div(\mathbf{u})\,\overline{\overline{I}} \,+\, 2\mu\,\overline{\overline{D}} \tag{1.13}$$

avec :

- η et μ : Coefficients de viscosité. Ils sont reliés par la relation : $2\mu + 3\eta = 0$.
- $\overline{\overline{D}} = sym[\overline{\overline{grad}}(\mathbf{u})]$ est le tenseur des taux de déformation.

Physique des écoulements compressibles

Ce système des équations aux dérivées partielles (EDP) qui fait intervenir plusieurs paramètres physiques (vitesse, pression, température, masse volumique ...), traduit une physique spécifique aux écoulements compressibles.
Ces fluides compressibles peuvent être caractérisés déjà par leur compressibilité intrinsèque en absence de tout écoulement qui se mesure via la vitesse de la propagation des ondes acoustiques c :

$$c^2 = (\frac{\partial p}{\partial \rho})_s \tag{1.14}$$

avec "$_s$" désignant une transformation à entropie constante.
On établit ainsi une relation entre la pression et la masse volumique dans un milieu au repos et on démontre que toute variation de pression se traduit par une variation de masse volumique (ou de volume).
D'autre part, en se référant à l'équation de continuité 1.4, on démontre que le fait d'appliquer une vitesse au fluide compressible provoque également une variation de la masse volumique (ou de volume).
Ainsi, on constate qu'il y a une concurrence entre ces deux phénomènes. Par conséquent, on définit un paramètre adimensionnel pour juger de l'effet de compressibilité dans un fluide en mouvement, qui s'appelle le nombre de Mach Ma :

$$Ma = \frac{u}{c} \tag{1.15}$$

En aérodynamique externe, on classifie les écoulements compressibles en fonction du nombre de Mach Ma :

- Écoulement subsonique : Pour cette catégorie, le nombre de Mach est compris entre $0.3 \leq Ma \leq Ma_c$ avec Ma_c est le nombre de Mach critique limite à partir duquel on observe une apparition d'un point sonique. La valeur de ce Mach Ma_c dépend de la géométrie étudiée. Les phénomènes observés dans cette catégorie des écoulements compressibles sont similaires aux écoulements incompressibles mais avec des effets importants tels que par exemple :
  - L'influence sur le nombre de Reynolds de transition entre les écoulements laminaires stationnaires et instationnaires.
  - Les échanges de chaleur limités par l'augmentation de la température de l'écoulement à cause de la compression du fluide.

  Le domaine d'application de cette catégorie d'écoulement est large avec des applications dans l'aviation civile , le transport terrestre ...

- Écoulement transsonique : qui se caractérise par l'apparition des chocs localisés sur le corps étudiés et qui divise l'écoulement en zone subsonique et en zone supersonique. Ainsi, plusieurs phénomènes complexes apparaissent notamment l'interaction choc-couche limite. Pour cette catégorie, le nombre de Mach est compris entre $Ma_c \leq Ma \leq 1.4$.
  C'est le régime de vol des avions. On trouve cette catégorie d'écoulement également autour des aubes des turbomachines.

- Écoulement supersonique : qui se caractérise par une onde de choc étendue qui sépare une zone supersonique ($Ma \geq 1$) et une zone subsonique ($Ma < 1$). Les phénomènes spécifiques à cette catégorie des écoulements compressibles sont plutôt focalisés sur la forme et l'emplacement de l'onde de choc et son influence sur la topologie de l'écoulement derrière ces discontinuités.
  L'étude des écoulements supersoniques trouve son intérêt dans des applications militaires (avions de chasses, missiles tactiques ...) et des applications spatiales.

- Écoulement hypersonique : où les ondes de choc et des autres variations des propriétés de l'écoulement sont spécialement forts. Cette catégorie d'écoulement sort du cadre classique

des équations de Navier-Stokes et nécessite un traitement spécial. Dans ce travail, les écoulements hypersoniques ne seront par étudiés.

Il faut noter ici que pour les nombres de Mach très faibles ($Ma \leq 0.3$), la variation de la masse volumique est négligeable et l'écoulement est considéré incompressible. D'autre part, **la couche limite**, qui se forme autour des corps, est fortement influencée par les effets de compressibilité. Ces effets sont visibles sur deux paramètres clés :

- Le coefficient de frottement : on constate une diminution du coefficient de frottement grâce à l'effet de compressibilité.
- Le coefficient de flux de chaleur : contrairement au coefficient de frottement, une augmentation de compressibilité entraîne une augmentation de la température autour du corps ce qui limite l'échange thermique et ainsi une diminution du coefficient de flux de chaleur.

Également, la transition laminaire-turbulente de la couche limite est influencée par les effets de compressibilité via la modification des gradients de la pression.
Finalement, on constate que **les coefficients aérodynamiques** tels que le coefficient de traînée C_d et le coefficient de portance C_l dépendent du nombre de Mach :

- Une augmentation de C_d à cause notamment d'un nouveau type de traînée spécifique aux écoulements compressibles qui s'appelle la traînée d'onde.
- Une augmentation de C_l avec le Ma via l'augmentation du coefficient de pression C_p.

1.2 Méthodes numériques pour les écoulements compressibles

Plusieurs méthodes numériques ont été développées pour l'analyse des écoulements compressibles. Le fait de la présence des phénomènes liés à l'effet de compressibilité tels que les ondes acoustiques, ondes de chocs, ... nécessitent un traitement adapté à l'ensemble des problématiques présentes. La méthode des volumes finis est l'une des approches les plus utilisées pour résoudre les équations Navier-Stokes compressibles. On présente ainsi la discrétisation des termes présents dans les bilans de conservation dans la cadre de la méthode des volumes finis sur une maille m et pour une variable A entre les instants $n(\Delta t)$ et $(n+1)(\Delta t)$:

Terme instationnaire

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{V_m} A dV = \frac{(A_m^{n+1} - A_m^n)}{a_t} \times V_m \tag{1.16}$$

avec :

- V_m : le volume de la maille m
- A_m : la valeur de A sur la maille m
- a_t : coefficient qui résulte de la discrétisation numérique du terme temporel. Par exemple, pour un schéma d'Euler $a_t = \Delta t$ et pour un schéma Backward $a_t = 1.5 \times \Delta t$.

Terme de convection

$$\int_{S_m} (\mathbf{u}A) \cdot dS = \sum_f S_f \cdot \mathbf{u}_f A_f \tag{1.17}$$

avec :

- S_m : les surfaces de la maille m
- f : le nombre de faces de la maille m

Terme de diffusion

$$\int_{S_m} (\mu_f \nabla(A)) \cdot dS = \sum_f \mu_{Af} S_f \cdot (\nabla A)_f \tag{1.18}$$

avec :

- μ_f : coefficient de diffusivité
- $\nabla(\phi)$: gradient de ϕ

Terme de pression

$$\int_{S_m} p dS = \sum_f S_f p_f \tag{1.19}$$

Dans ce travail, on choisit d'utiliser les solveurs volumes finis d'OpenFOAM comme base pour le développement numérique de la simulation des écoulements compressibles.

1.3 Solveurs compressibles d'OpenFOAM

OpenFOAM (Open source Field Operation And Manipulation) est un référentiel large et évolutif de librairies C ++, publié sous licence publique GNU (GPL) et utilisant des modules de calcul-parallèle. Il contient des solveurs relatifs aux différents domaines d'applications et notamment pour les écoulements compressibles où chaque équation est résolue séparément en traitant implicitement la variable inconnue dans l'équation et le reste des variables explicitement. Des récentes activités de recherche académiques et industrielles ont été développées sur la base des solveurs d'OpenFOAM [1, 2, 3] qui devient de plus en plus utilisé.
Dans cette section, on présente brièvement les deux architectures des solveurs compressibles d'OpenFOAM : le solveur basé sur la masse volumique (Density-based solver :*rhoCentralFoam*) et le solveur basé sur la pression (Pressure-based solver :*sonicFoam*).
Il faut noter que dans cette étape, les termes sources sont nuls.

Density-based solver

On commence par la description du solveur *rhoCentralFoam*. Les schémas numériques de Kurganov et Tadmor "KT" [4] et de Kurganov, Noelle et Petrova "KNP" [5] sont utilisés, et permettent de capturer les caractéristiques des discontinuités / chocs tout en conservant une formulation générale du schéma centré du second ordre. Avec ces schémas numériques, l'intégration du terme convectif sur un volume de contrôle V s'écrit :

$$\sum_f \pi_f \sigma_f = \sum_f \beta \pi_{f+} \sigma_{f+} + (1-\beta)\pi_{f-}\sigma_{f-} + \omega_f(\sigma_{f-} - \sigma_{f+}) \tag{1.20}$$

avec :

1. le flux massique π_f
2. la variable inconnue volumique $\sigma = (\rho\mathbf{u}); (\mathbf{u}(\rho\mathbf{u})); (\mathbf{u}(\rho e_t))$
3. f_+ et f_- représente les deux directions de flux entrant et sortant, respectivement.
4. β le coefficient du poids de f_+ et f_-
5. ω_f le flux massique diffusif de la vitesse maximale de propagation de chaque discontinuité

On note que dans cette formulation du terme convectif, les deux premiers termes sont relatifs au débit de l'écoulement (la vitesse des particules) et le dernier terme traduit la contribution de la propagation des ondes. De plus, la différence entre les deux schémas est dans la définition de ω_f :

$$\omega_f = \begin{cases} 0.5 \times max(\varsigma_{f+}; \varsigma_{f-}) & "KT" \\ 0.25 \times (\varsigma_{f+} + \varsigma_{f-}) & "KNP" \end{cases} \tag{1.21}$$

avec :

- $\varsigma_{f+} = max(c_{f+} \mid S_f \mid +\pi_{f+}; c_{f-} \mid S_f \mid +\pi_{f-}; 0)$
- $\varsigma_{f-} = max(c_{f+} \mid S_f \mid -\pi_{f+}; c_{f-} \mid S_f \mid -\pi_{f-}; 0)$
- c : vitesse de son

La résolution numérique est ici effectuée avec un cycle combiné. Initialement, les termes de viscosité et de flux de chaleur sont négligés. Suite à cette première prédiction, des équations d'évolution progressivement plus complètes sont considérées. Ainsi, les matrices $\phi'_{\mathbf{u}}$, $\phi_{\mathbf{u}}$, ϕ'_{e_t} et ϕ_e utilisées ci-dessous représentent la discrétisation en volumes-finis de :

1. l'équation de quantité de mouvement excluant le terme visqueux et le terme de la pression
2. l'équation de la quantité de mouvement
3. l'équation de l'énergie totale excluant le terme de flux de chaleur
4. l'équation de l'énergie interne

Les coefficients $a_{\mathbf{u}}, a_{e_t}$ et a_e résultent de la discrétisation numérique des termes temporels et spatiaux. Les équations de Navier-Stokes sont ainsi résolues entre l'instant n et l'instant $n+1$ dans l'ordre suivant :

1. L'équation de continuité 1.4 pour la masse volumique ρ^{n+1} :

$$\rho^{n+1} = \frac{\phi_\rho(\rho^n, \mathbf{u}^n)}{a_\rho} \tag{1.22}$$

2. L'équation de la quantité de mouvement 1.7 pour une estimation intermédiaire de la quantité de mouvement $(\rho\mathbf{u})^\star$. Dans cette étape, les termes de viscosité sont exclus :

$$(\rho\mathbf{u})^\star = \frac{\phi'_\mathbf{u}((\rho\mathbf{u})^n)}{a_\mathbf{u}} - \frac{\mathbf{grad}p^n}{a_\mathbf{u}} \tag{1.23}$$

3. Le champ des vitesses est ainsi calculé : $\mathbf{u}^\star = (\rho\mathbf{u})^\star/\rho^{n+1}$

4. L'équation de la quantité de mouvement, incluant les termes de viscosité, est résolue à nouveau en combinant avec l'équation 1.23 :

$$\rho^{n+1}\mathbf{u}^{n+1} = \rho^{n+1}\mathbf{u}^\star + \frac{\phi_\mathbf{u}(\rho^n, \mathbf{u}^n)}{a_\mathbf{u}} - \frac{\phi'_\mathbf{u}((\rho\mathbf{u})^n)}{a_\mathbf{u}} \tag{1.24}$$

5. Mise à jour de la quantité de mouvement : $(\rho\mathbf{u})^{n+1} = \rho^{n+1}\mathbf{u}^{n+1}$

6. L'équation de l'énergie 1.9 pour l'énergie totale $(\rho e_t)^\star$ est résolue en excluant le terme de flux de chaleur.

$$(\rho e_t)^\star = \frac{\phi'_{e_t}(\mathbf{u}^{n+1}, (\rho e_t)^n)}{a_{e_t}} - \frac{div(p^n\mathbf{u}^n)}{a_{e_t}} \tag{1.25}$$

7. Mise à jour d'une estimation intermédiaire de l'énergie interne $e^\star$ associée à $(\rho e_t)^\star$:

$$e^\star = \frac{(\rho e_t)^\star}{\rho^{n+1}} - 0.5(\mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{u}^{n+1}) \tag{1.26}$$

et une estimation intermédiaire de la température $\theta^\star = e^\star/c_v$

8. Résolution de l'équation de l'énergie pour l'énergie interne e^{n+1} incluant le terme de flux de chaleur :

$$\rho^{n+1}e^{n+1} = \rho^{n+1}e^\star + \frac{\phi_e(\rho^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1}, e^n)}{a_e} - \frac{div(\lambda(\theta^\star)\mathbf{grad}(\theta^\star))}{a_e} - \frac{\phi'_{e_t}(\mathbf{u}^{n+1}, (\rho e_t)^n)}{a_{e_t}} \tag{1.27}$$

9. Finalement, on met à jour le champ de la température $\theta^{n+1} = e^{n+1}/c_v$ et de la pression $p^{n+1} = \rho^{n+1} \cdot (r\theta^{n+1})$.

Pressure-based solver

Comme précédemment mentionné, *sonicFoam* est un solveur ségrégé basé sur l'équation de Poisson et reposant sur une discrétisation implicite de la dérivée temporelle et une étape implicite de la pression utilisant une décomposition des opérateurs (PIMPLE) et une résolution itérative [6, 7]. Les différentes étapes de l'algorithme sont maintenant décrites pour l'évolution temporelle du pas de temps n à $n+1$. Une première estimation des quantités $\rho^\star$, $U^\star$ et

$e^\star$ est calculée à travers une discrétisation en volumes finis des équations 1.4 , 1.7 et 1.9 , respectivement :

$$\rho^\star = \frac{\phi_\rho(\rho^n, \mathbf{u}^n)}{a_\rho} \tag{1.28}$$

$$\mathbf{u}^\star = \frac{\phi_\mathbf{u}(\rho^\star, \mathbf{u}^n)}{a_\mathbf{u}} - \frac{\mathbf{grad}p^n}{a_\mathbf{u}} \tag{1.29}$$

$$e_t^\star = \frac{\phi_{et}(\rho^\star, \mathbf{u}^\star, e_t^n)}{a_{et}} - \frac{div(p^n\mathbf{u}^\star)}{a_{et}} \tag{1.30}$$

Les termes ϕ_ρ, $\phi_\mathbf{u}$ et ϕ_e représentent les résultats de la discrétisation en volumes finis pour chaque terme à l'exception des termes liés à la pression et des termes de forçage (qui sont pour l'instant considérés comme nuls). Les termes a_ρ, $a_\mathbf{u}$ et a_e incluent des coefficients résultant de la discrétisation temporelle et éventuellement de la modélisation de la turbulence / sous-maille. Deux aspects importants doivent être soulignés :

- Les équations 1.28, 1.29 et 1.30 ne sont pas résolues simultanément, mais elles sont strictement résolues dans l'ordre présenté en raison de leur structure imbriquée ;
- les équations sont résolues en utilisant le champ de pression calculé au précédent pas de temps n.

La prédiction du nouveau champ de pression est obtenue par manipulation de l'équation de la quantité de mouvement 1.7 via l'application de l'opérateur de divergence. L'équation de Poisson résultante pour le champ de pression est :

$$div(\mathbf{grad}p) = -\frac{\partial}{\partial t}div(\rho\mathbf{u}) - div(\mathbf{div}(\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u})) \tag{1.31}$$

Le terme $\partial div(\rho\mathbf{u})/\partial t$, qui est égal à zéro dans les écoulements incompressibles, peut être reformulé en utilisant l'équation 1.4 :

$$div(\rho\mathbf{u}) = -\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{\partial\rho}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial t} = -\Psi\frac{\partial p}{\partial t} \tag{1.32}$$

avec $\Psi = \partial\rho/\partial p$ est le coefficient de compressibilité normalisé. La combinaison des équations 1.31 et 1.32 fournit une équation d'évolution pour p, qui peut être discrétisée sous la forme suivante :

$$p^\star = \frac{\phi_p(p^n, \rho^\star, \mathbf{u}^\star)}{a_p} \tag{1.33}$$

L'équation 1.33 permet l'avancement temporel de p. La boucle PIMPLE consiste en :

1. une résolution de l'équation 1.33, qui permet de mettre le champ de pression à un état intermédiaire $p^\star$
2. les équations 1.28, 1.29 et 1.30 sont résolues en utilisant la valeur de $p^\star$. Les nouvelles quantités physiques calculées sont utilisées pour fournir une nouvelle estimation pour le champ de la pression.

Cette boucle continue jusqu'à ce qu'un critère de convergence approprié défini par l'utilisateur soit satisfait. En raison de l'utilisation d'une quasi-équation de Poisson pour déterminer la pression p, cet algorithme fonctionne mieux pour les nombres de Mach, où les effets de compressibilité ne sont pas dominants.

1.4 Approches numériques pour l'aérodynamique externe autour de géométrie complexe / mobile

La résolution des équations de Navier-Stokes pour des écoulements autour de géométrie complexe montre des aspects problématiques qui doivent être gérés. Plusieurs approches numériques ont été développées afin de simuler l'écoulement autour des obstacles présents dans des environnements non-confinés.
Plusieurs axes de développement ont été élaborés notamment la grille du domaine de calcul où il existe deux stratégies du maillage de la partie solide et de la partie fluide : conforme ou indépendant.Les principales méthodes de l'approche du maillage conforme (ou adapté) sont : la méthode ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian) et la méthode chimère. D'autre part la principale méthode de l'approche du maillage indépendant (non conforme) est la méthode des frontières immergées.

Méthode ALE

Cette méthode a été introduite par Noh [8] et elle se base sur une description hybride du domaine de calcul en combinant les avantages de la description lagrangienne et de la description eulérienne mais avec une vitesse de maillage arbitrairement définie : les nœuds de maillage se déplacent avec le fluide d'une façon lagrangienne et les grandes déformations du maillage sont gérées d'une façon eulérienne. La vitesse de maillage est déterminée de façon à minimiser les déformations du maillage. La méthode a été développée par la suite pour des formulations des différences finies et des volumes finis par Franck et Lazarus [9], Trulio [10] et Hirt et al [11]. Cette méthode est largement utilisée dans la littérature pour l'analyse des interactions fluide-solide. Cependant, elle est limitée à des déplacements ou à des déformations relativement faibles. Elle a besoin également des procédures de remaillage dès que le corps est mobile.

Méthode Chimère

La méthode chimère est également une technique du maillage conforme introduite par J.L. Steger et F.D.J. Benek [12]. Elle consiste à créer des sous-domaines indépendants qui se rejoignent à leurs interfaces par interpolation et par conséquent les équations sont couplées via des conditions de transmission (dans la méthode des éléments finis) ou en imposant la continuité des flux (dans le contexte des volumes finis). Cette méthode trouve tout son intérêt dans le cas des simulations impliquant des parties mobiles car les parties du maillage indépendantes sont libres de se déplacer par rapport aux autres. Ainsi on n'a pas besoin de remailler à chaque pas de temps, ce qui permet un gain de temps de calcul considérable mais avec une précision limitée à cause de la discontinuité de maillage.

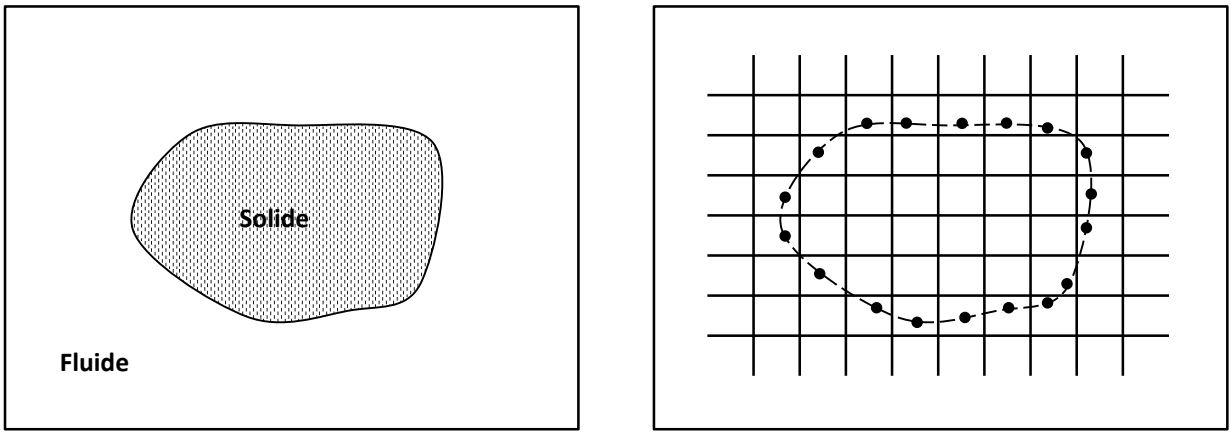


FIGURE 1.1 – Transformation de la surface de solide en points Lagrangiens sur une grille cartésienne.

Méthode des frontières immergées

Les études de conception des valves artificielles menées par Peskin ont mis l'accent sur le besoin de mettre en place un modèle numérique qui modélise l'écoulement autour des corps mobiles tel que l'écoulement du sang autour de ces valves. Les méthodes de résolution classiques des équations de Navier-Stokes proposées, entre autres, par Chorin [13] présentent des limites pour traiter ces problématiques. Dans ce contexte, Peskin [14] développe en 1972 une nouvelle méthode mieux adaptée à ce type de problème où la frontière physique du corps étudié est remplacée par un champ de force qui impose à la partie fluide les même conditions que la frontière réelle (Figure 1.1).
L'originalité de la méthode est le fait que le maillage de la partie fluide n'est pas adapté au corps solide ce qui permet d'utiliser des maillages structurés même avec des géométries complexes et d'autre part pouvoir traiter des géométries mobiles sans remaillage.

Par conséquent, chaque méthode possède des avantages et des inconvénients. Dans cette thèse, on se focalise sur la méthode des frontières immergées parce qu'elle permet :

- **l'utilisation des schémas numériques précis grâce au maillage cartésien, parce que le maillage ne se déforme pas et donc la precision des schémas peut être contrôlée plus facilement.**

- **un calcul plus rapide notamment pour les géométries mobiles.**

Nous développons, ainsi, une approche IBM bien adaptée pour l'analyse et le contrôle des écoulements compressibles notamment dans le cas des géométries complexes et mobiles .

1.5 Méthodes des frontières immergées

Dans cette partie, on détaillera les méthodes des frontières immergées développées auparavant afin de choisir la formulation qui servira de base au développement d'une nouvelle méthode qui respecte les critères suivants :

- Une formulation valable pour les écoulements compressibles subsoniques, transsoniques et supersoniques.
- Une formulation simple à implémenter.
- Une formulation capable de s'intégrer dans les différents types de solveurs compressibles.

1.5.1 Formulation originale de Peskin

On commence par la formulation originale de Peskin qui reste incontournable pour la compréhension de toutes les approches qui en découlent.
En fait, Peskin propose d'étudier l'écoulement du sang autour d'une valve 2D du coeur. Le domaine d'étude est maillé avec une grille cartésienne. La valve est représentée avec un ensemble de points Lagrangiens. Il faut noter que d'une manière générale, les nœuds du maillage cartésien (les points Eulériens) ne coïncident pas avec les points Lagrangiens qui délimitent la valve.
Ainsi, le problème est modélisé par le système d'équations suivant :

$$\mathbf{F} = M(\mathbf{X}) \tag{1.34}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{X}\in\partial D} \mathbf{F}(\mathbf{X})\delta(\mathbf{x}-\mathbf{X})\,\mathrm{d}\mathbf{X} \tag{1.35}$$

$$\rho\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = P(-\rho\,(\mathbf{u}.\overrightarrow{grad})\mathbf{u} + \eta\,\overrightarrow{grad}\,(div(\mathbf{u})) + \mathbf{f}) \tag{1.36}$$

$$div\,(\overrightarrow{grad}(p)) = -\,\rho\,div(\mathbf{u}\,div(\mathbf{u})) \tag{1.37}$$

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \int_{\mathbf{x}\in D} \mathbf{u}(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x}-\mathbf{X})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \tag{1.38}$$

- **L'équation 1.34** introduit le terme de forçage $\mathbf{F}$. Cette force de correction est déterminée à partir de la configuration spatiale et les propriétés physiques de la frontière du corps qui se regroupent au sein de la matrice M. Dans le cas des écoulements étudiés par Peskin, la paroi de la valve est une frontière élastique ainsi elle est régie par la loi de Hooke.
  Afin de calculer la force au niveau de chaque point Lagrangien$\mathbf{X}_k$, on met en place un système de liaisons bipolaires entre ce point et le reste des points Lagrangiens et Eulériens (Figure 1.2). On la note L_{ki} avec i l'indice du deuxième point de la liaison.
  Deux types de liaisons peuvent être utilisés :
  - "Corde" dans le cas des frontières élastiques
  - "Barre" dans le cas des frontières mobiles

  Chaque liaison est aussi caractérisée par une longueur au repos R_0 et une raideur S. Ainsi, pour une longueur R de L_{ki}, la tension $\mathbf{T}_{ki}$, qui s'en est générée, est :

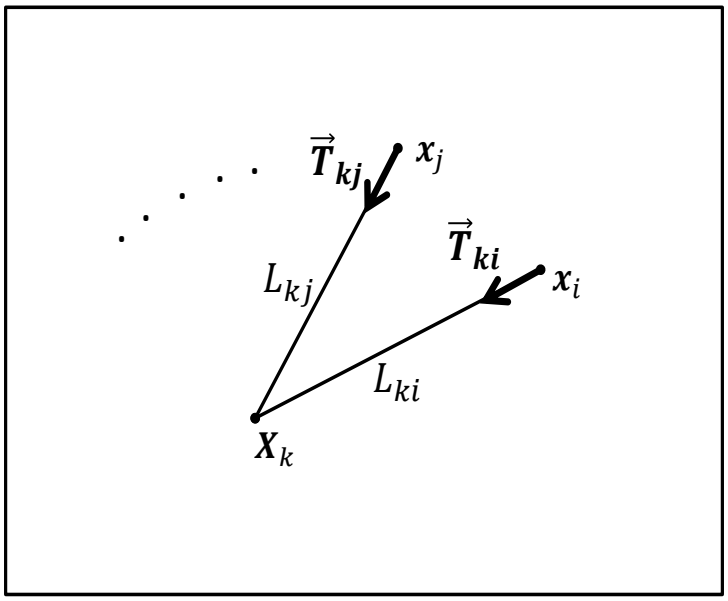


FIGURE 1.2 – Schéma illustrant les forces de correction introduites par Peskin.

- Pour une liaison type "corde"

$$\mathbf{T}_{ki} = \begin{cases} S(R - R_0) & R \geq R_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{1.39}$$

- Pour une liaison type "barre", $\mathbf{T}_{ki} = S(R - R_0)$ pour toute R.

Par la suite, le terme de forçage $\mathbf{F}_k$ au point Lagrangien $\mathbf{X}_k$ est la somme des tensions de toutes les liaisons qui passent par ce point :

$$\mathbf{F}_k = \sum_i \mathbf{T}_{ki} \tag{1.40}$$

- **L'équation 1.35** représente la diffusion de la force, initialement calculée sur un point Lagrangien, sur l'ensemble des points Eulériens du domaine de calcul. Ainsi, la fonction delta représente une étape clé de la méthode. Peskin propose une expression de la fonction δ qui permet de faire le lien entre les points Eulériens et les points Lagrangiens même pour des parois en mouvement :

$$\delta_h(r) = \frac{1}{16h^2} \begin{cases} 2 - |r| & r \leq 2h \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{1.41}$$

avec :

- r : la distance entre le point Lagrangien et le point Eulérien.
- h : le pas spatial.

Cette fonction a été choisie parce qu'elle vérifie principalement deux conditions :

- La continuité partout dans le domaine de calcul afin de pouvoir traiter des frontières mobiles et assurer la transformation entre les points Lagrangiens et Eulériens de manière continue.
- La conservation de l'intégrale de toute fonction continue φ :

$$\varphi(\mathbf{X}_k) = \int_{\mathbf{x}\in D} \varphi(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_k)\,\mathrm{d}\mathbf{x} \tag{1.42}$$

- **L'équation 1.36** introduit un opérateur de projection P qui est défini par :

$$w^D = P(w) \tag{1.43}$$

si et seulement si

$$div(w^D) = 0 \qquad et \qquad w = w^D + div(\varphi) \tag{1.44}$$

avec w et w^D deux champs vectoriels et φ un champ scalaire. Les propriétés intéressantes qui découlent de cette définition sont :

- P est un opérateur linéaire
- $P(div\varphi) = 0$ pour tout champ scalaire φ
- $P(w) = w$ pour tout vecteur w à divergence nulle

Ainsi les propriétés de l'opérateur P assurent l'équivalence entre l'équation 1.36 et le système des équations de continuité et de la quantité de mouvement parce que dans le cas où le champ des vitesses est initialement à divergence nulle, alors il restera à divergence nulle pour tout instant ultérieur.
L'avantage d'une telle formulation est sa capacité à résoudre séparément le champ des vitesses 1.36 et par la suite le champ de la pression 1.37.
Cette reformulation des équations de Navier Stokes demeure une méthode très utilisée pour étudier les écoulements incompressibles [14] et elle est développée également pour étudier les écoulements compressibles notamment grâce aux travaux de Issa [6] et Chung [15].

- **L'équation 1.38** représente la condition de non glissement à la frontière de la valve. Celle ci exprime la relation entre la position du point Lagrangien $\mathbf{X}$ et la vitesse des points Eulériens qui l'entourent via une fonction δ.

Cette formulation a été testée avec succès sur l'écoulement autour des valves cardiaques mais elle présente tout de même des faiblesses telles que :

- L'utilisation de cette fonction d'interpolation réduit la précision spatiale. Ainsi, [16, 17, 14, 18] ont proposé des nouvelles fonctions d'interpolation plus efficaces afin d'augmenter la précision de la méthode.
- La formulation est conditionnellement stable([19, 20]), ainsi, elle est très coûteuse à cause de la restriction imposée au nombre de CFL du fait de la formulation explicite du schéma numérique temporel. D'autre part, l'utilisation d'une formulation implicite permet d'avoir un schéma inconditionnellement stable mais elle nécessite des sous-itérations supplémentaires très coûteuses également([21, 22]). Afin de contourner ce problème, des approches semi-implicites ont été développées pour le calcul du terme de forçage([21, 22, 23, 24, 25])

Par la suite, cette approche numérique, initialement développée pour traiter les frontières élastiques, a été étendue pour les frontières rigides.
Il existe deux principales familles de méthodes des frontières immergées :

1. Les approches continues où le terme de forçage s'applique aux équations de Navier-Stokes avant la discrétisation.

2. Les approches discrètes (directes et indirectes) où le terme de forçage s'applique aux équations de Navier-Stokes discrètes.

1.5.2 Approches continues directes

Dans le cas des corps solides, il existe 3 formulations du terme de forçage :

1. La première approche est introduite par Goldstein et al. [26] et appelée "Méthode des frontières virtuelles". En fait, le corps est considéré comme une surface virtuelle appliquant une force sur le fluide qui impose une vitesse sur la surface du solide. Pour ce faire, il propose un modèle d'oscillateur amorti inspiré de la théorie du contrôle des systèmes linéaires où le terme de forçage se calcule d'une manière rétroactive de sorte que le champ des vitesses dans la partie fluide est utilisé pour déterminer la force nécessaire([26],[27]). Dans ce cas, le terme de forçage $\mathbf{F}_k$ au point Lagrangien $\mathbf{X}_k$ s'écrit :

$$\mathbf{F}_k = -\kappa_1 \int_0^t (\mathbf{u}_{target} - \mathbf{u})(\tau)\, \mathrm{d}\tau - \kappa_2(\mathbf{u}_{target} - \mathbf{u}) \tag{1.45}$$

avec :

- $\mathbf{u}_{target}$: la vitesse souhaitée au point Lagrangien $\mathbf{X}_k$
- κ_1 et κ_2 : les deux constantes du modèle.

κ_1 et κ_2 doivent prendre des valeurs assez grandes afin de bien forcer la vitesse au niveau des points Lagrangiens à avoir des valeurs suffisamment proches de zéro. Cette approche a été testée sur un écoulement :

- autour du cylindre fixe à des nombres de Reynolds modérés $Re = 550$,
- dans un canal turbulent avec rainures.

Comme Goldstein a choisi la méthode spectrale pour l'étude de ces exemples, ainsi il a construit un maillage qui coïncide avec les points Lagrangiens ce qui lui permet de ne pas utiliser une fonction d'interpolation. Les résultats obtenus sont prometteurs avec cette approche mais il reste des limites relatives à l'utilisation des coefficients κ_1 et κ_2
Cette approche a été par la suite utilisée par Saiki et al. [18] avec un solveur des différences finies dont l'objectif est de supprimer les oscillations numériques parasites observées avec l'approche de Goldstein et al. [26]. Ainsi, l'étape d'interpolation est incontournable surtout dans le cas de simulation des frontières mobiles pour calculer les vitesses aux niveaux des points Lagrangiens qui vont servir par la suite à calculer le terme de forçage dans

l'équation 1.45. Pour ce faire, Saiki utilise une fonction bilinéaire qui s'écrit au point Lagrangien $\mathbf{X}_k$:

$$\mathbf{U}(\mathbf{X}_k) = \begin{cases} \sum_{i,j}^{i+1,j+1} \dfrac{(x_k - x_{i+1})(y_k - y_{j+1})}{(x_i - x_{i+1})(y_j - y_{j+1})} \times \mathbf{U}_{i,j} & x_i < x_k \quad et \quad y_i < y_k \\ \sum_{i,j}^{i+1,j+1} \dfrac{(x_k - x_{i+1})(y_k - y_{j-1})}{(x_i - x_{i+1})(y_j - y_{j-1})} \times \mathbf{U}_{i,j} & x_i < x_k \quad et \quad y_i > y_k \\ \sum_{i,j}^{i+1,j+1} \dfrac{(x_k - x_{i-1})(y_k - y_{j+1})}{(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j+1})} \times \mathbf{U}_{i,j} & x_i > x_k \quad et \quad y_i < y_k \\ \sum_{i,j}^{i+1,j+1} \dfrac{(x_k - x_{i-1})(y_k - y_{j-1})}{(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})} \times \mathbf{U}_{i,j} & x_i > x_k \quad et \quad y_i > y_k \end{cases} \tag{1.46}$$

Cette approche a été utilisée afin d'étudier l'écoulement :

- autour du cylindre fixe à des nombres de Reynolds modérés $Re \leq 400$.
- autour du cylindre oscillant à $Re = 200$.

Également dans ces cas, les valeurs de ces constantes ont une influence sur la stabilité et la rapidité de la convergence du modèle.

2. La deuxième approche est introduite par Lai et al. [17] et elle est inspirée directement de la formulation pour les frontières élastiques où la force de tension (Loi de Hook) est remplacée par une force de rappel (modélisation type ressort) (Voir figure 1.3).

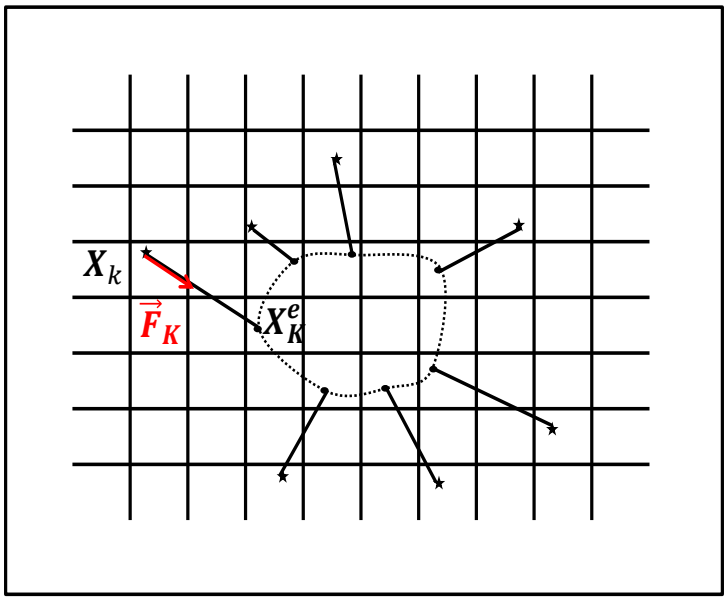


FIGURE 1.3 – Terme de forçage entre la position du point Lagrangien actuelle (∘) et la position souhaitée (⋆).

Le terme de forçage $\mathbf{F}_k$ au point Lagrangien $\mathbf{X}_k$ s'écrit ainsi :

$$\mathbf{F}_k = -\kappa_3(\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_k^e(t)) \tag{1.47}$$

avec :

- $\mathbf{X}_k(t)$: position effective du point Lagrangien $\mathbf{X}_k$ à l'instant t.
- $\mathbf{X}_k^e(t)$: position souhaitée du point Lagrangien $\mathbf{X}_k$ à l'instant t.
- κ_3 : raideur du ressort.

En fait, à chaque mouvement de la position du point Lagrangien $\mathbf{X}_k(t)$, une force de rappel tend à le ramener à sa position de référence $\mathbf{X}_k^e(t)$. Ainsi, $\mathbf{X}_k(t)$ et $\mathbf{X}_k^e(t)$ sont reliés durant la simulation par une sorte de ressort de raideur κ_3. Cette constante doit prendre des grandes valeurs afin de respecter la rigidité du corps. Cependant, cette condition entraîne des problèmes de stabilité sur le modèle. D'autre part, des faibles valeurs de κ_3 engendrent des oscillations élastiques parasites. On note que cette approche peut être interprétée comme une formulation particulière de l'approche de Goldstien (1.45) avec $\kappa_2 = 0$.
Lai et al. [17] ont implémenté la méthode dans un solveur de type différences finies. La fonction d'interpolation s'écrit au point Lagrangien $\mathbf{X}_k$:

$$\delta_h(r) = \frac{1}{8h}\begin{cases} \left(3 - 2 \mid r \mid /h + \sqrt{1 + 4 \mid r \mid /h - 4((\mid r \mid /h)^2)}\right) & \mid r \mid \leq h \\ \left[5 - 2 \mid r \mid /h - \sqrt{-7 + 12 \mid r \mid /h - 4((\mid r \mid /h)^2)}\right] & h \leq \mid r \mid \leq 2h \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{1.48}$$

Cette approche a été testée sur un écoulement incompressible autour du cylindre pour plusieurs nombres de Reynolds.

3. La troisième approche s'appelle méthode de pénalisation où le domaine de calcul est modélisé comme un milieu poreux. Dans ce cas, l'écoulement est régi par le système d'équations de Navier-Stokes/Brinkman [28]. Cette approche a été introduite par Arquis et Caltagirone [29] pour calculer le terme de forçage $\mathbf{F}_k$ qui s'écrit au point Lagrangien $\mathbf{X}_k$:

$$\mathbf{F}_k = \kappa_4 \times \kappa_5(\mathbf{u}_{target} - \mathbf{u}) \tag{1.49}$$

avec :

- κ_4 : le paramètre de pénalisation ou le coefficient de perméabilité qui permet de définir les parties solides et les parties fluides du domaine de calcul.
- κ_5 : la fonction masque qui assure le passage entre la partie fluide et la partie solide.

Angot et al. [30] ont développé par la suite l'approche de pénalisation en proposant une étude mathématique de l'implémentation de ce terme de forçage. On prouve que la méthode présente plusieurs avantages tels que :

- la facilité de la mise en œuvre.
- la robustesse des calculs.

- l'efficacité des résultats.

Cependant, il existe des limites sur les coefficients de la formulation de forçage (1.49) :

- κ_4 doit être déterminé en fonction de la simulation afin d'améliorer la précision de la méthode et doit avoir une valeur assez importante dans le solide pour améliorer le forçage mais pas trop pour garantir la stabilité du résultat. Angot et al. [30] montrent que l'erreur due au paramètre de pénalisation est toujours négligeable devant l'erreur d'approximation de l'approche numérique.
- κ_5 doit éviter les points singuliers de forçage. Pour ce faire, Kevlahan et al. [31] proposent d'utiliser la fonction de Heaviside ce qui améliore la régularité de la fonction de forçage à l'interface fluide-solide. Par la suite, Gazzola et al. [32] introduisent la fonction suivante :

$$\kappa_5 = \begin{cases} 0 & d < -\varepsilon \\ \frac{1}{2}[1 + \frac{d}{\varepsilon} + \frac{1}{\pi} sin(\pi \times \frac{d}{\varepsilon})] & |d| \leq \varepsilon \\ 1 & d > -\varepsilon \end{cases} \tag{1.50}$$

avec :

  - d la distance algébrique de l'interface fluide-solide
  - ε la longueur de support des points Lagrangiens qui s'étale en général sur 4 à 5 mailles.

  L'introduction de cette fonction assure la stabilité numérique de la méthode et évite les oscillations numériques parasites [33].

La méthode a été introduite dans des codes spectraux ([31] et [34]), des codes d'éléments finis [35] et volumes finis [36]. D'autre part, l'outil Level Set (une technique numérique d'analyse des courbes et des surfaces. Elle consiste à repérer une interface entre deux milieux par l'introduction de courbes de niveaux et permet notamment d'étudier le mouvement de la surface d'un corps déformable.) a été utilisé par [32],[37],[38] et [39] pour capturer l'interface fluide-solide.
On note que cette approche peut être interprétée comme une formulation particulière de l'approche de Goldstien (1.45) avec $\kappa_1 = 0$.
Liu et al. [40] ont développé la méthode de pénalisation pour traiter les écoulements compressibles régis par les équations de Navier-Stokes / Brinkman. En fait, ils démontrent qu'une extension directe de l'approche donne des résultats insatisfaisants à cause des ondes parasites transmises dans l'obstacle solide et qui entraînent une perte de masse et d'énergie. Ainsi, ils proposent une nouvelle technique de pénalisation adaptée aux écoulements compressibles et basée sur un modèle mathématique respectant les propriétés acoustiques de l'écoulement. Dans cette approche, la pénalisation doit être appliquée aux équations de continuité, de la quantité de mouvement et de l'énergie. Le système d'équations s'écrit alors :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -(1 + (\frac{1}{\kappa_6} - 1) \times \kappa_5) div(\rho \mathbf{u}) \tag{1.51}$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\mathbf{grad} p + \mathbf{div}\overline{\overline{\tau}} + \kappa_7 \kappa_5 \times (\mathbf{u} - \mathbf{u}_{souhaite}) \tag{1.52}$$

$$\frac{\partial \rho e_t}{\partial t} + div(\rho\, e_t\, \mathbf{u}) = -div(p\, \mathbf{u}) + div(\overline{\overline{\tau}}\mathbf{u}) + div(\lambda(\theta)\mathbf{grad}\theta) \\ - \kappa_7\kappa_5 \times (\theta - \theta_{souhaite}) \tag{1.53}$$

avec :

- $\mathbf{u}_{souhaite}$: la vitesse à imposer à la frontière fluide-solide
- $\theta_{souhaite}$: la température à imposer à la frontière fluide-solide
- κ_6 : porosité du domaine de calcul
- κ_7 : Coefficient de perméabilité visqueuse
- κ_8 : Coefficient de perméabilité thermique

Cette approche a été testée avec succès sur des applications acoustiques avec des ondes de faibles amplitudes. Liu précise que l'application de la méthode à des simulations des écoulements compressibles plus généraux génère des résultats erronés.

En résumant, les formulations continues des termes de forçage ont prouvé leurs efficacités avec des résultats satisfaisants mais elles soufrent tout de même d'une limitation majeure due aux coefficients arbitraires qu'on doit déterminer pour chaque simulation. Ainsi, des approches indirectes ont été développées afin de contourner cette limitation. On présente, par la suite, les approches indirectes les plus utilisées :

- L'approche Ghost-Cell
- L'approche Cut-Cell
- L'approche discrète directe

1.5.3 Approche discrète : Ghost-Cell

La méthode Ghost-Cell (Cellule-Fantôme) a été introduite par Tseng et Ferziger [41]. Cette approche n'est pas basée sur le calcul d'un terme de forçage à introduire dans les équations de Navier-Stokes, mais elle consiste plutôt à appliquer la condition souhaitée directement sur certains points du maillage Eulérien. Ainsi, certains auteurs la classifient dans une catégorie particulière qui s'appelle "les méthodes des interfaces affinées".
L'idée principale ici est de calculer les grandeurs physiques (vitesse, pression et température) sur des mailles dites fantômes (c'est-à-dire à l'extérieur du domaine fluide) en prenant en compte les conditions aux limites à imposer sur l'interface fluide-solide.
Pour ce faire, Tseng et al. [41] proposent l'algorithme suivant :

1. Repérer l'interface fluide-solide. Cette étape peut se faire grâce à la fonction Level Set.
2. Définir l'ensemble des points fantômes. En se référant à la thèse de Cai [42], cet ensemble de mailles doit respecter les critères suivants (Voir figure 1.4) :
   - La maille doit appartenir à la partie solide ou sur l'interface fluide-solide.
   - Elle doit avoir au moins une maille voisine dans la partie fluide ou sur l'interface fluide-solide.

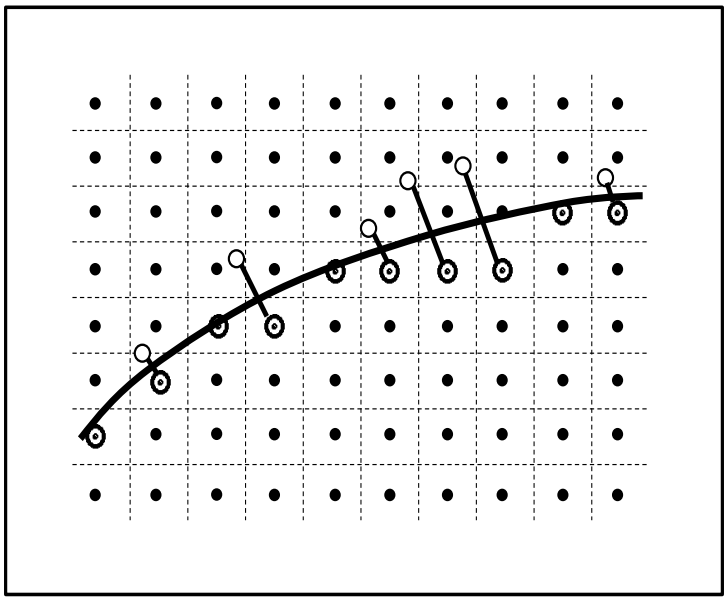


FIGURE 1.4 – Répartition des points Eulériens (•), des points Lagrangiens (∘) et des points fantômes (⊙) autour de l'interface fluide-solide.

- Le centre de la maille doit appartenir à la partie solide.

3. Pour chaque cellule fantôme, un schéma d'interpolation, qui intègre implicitement les conditions aux limites, est conçu. Cette étape est importante parce que le choix de ce schéma va déterminer l'ordre de précision de la méthode. En fait, plusieurs approches d'interpolations ont été utilisées auparavant. On détaillera ici les expressions des schémas d'interpolations les plus utilisés dans les cas de simulations 2D, l'extension 3D étant triviale :

   - Le premier schéma d'interpolation utilisé par Tseng et al. [41] est un schéma linéaire. Comme il est indiqué sur la figure (1.5), on désigne les premiers points Eulériens voisins de la cellule fantôme dans les deux directions où les valeurs des variables physiques sont connues. Ainsi, pour toute variable physique de l'écoulement, l'expression de son interpolation linéaire s'écrit :

   $$\delta_{linaire} = c_0 + c_1 x + c_2 y \tag{1.54}$$

   avec :
   c_0, c_1 et c_2 : les coefficients de la fonction d'interpolation. Ils sont calculés avec les valeurs de la variable physique aux points Eulériens $\mathbf{x}_1$ et $\mathbf{x}_2$ et la valeur souhaitée au niveau du point Lagrangien. Finalement, la valeur de la variable est ainsi calculée au niveau de la cellule fantôme grâce à la fonction d'interpolation $\delta_{linaire}$.

   - Le deuxième schéma d'interpolation utilisé par Tseng et al. [41] est un schéma quadratique. Comme il est indiqué sur la figure (1.6) , pour appliquer cette interpolation, on a besoin des valeurs des variables physiques sur les points Eulériens :

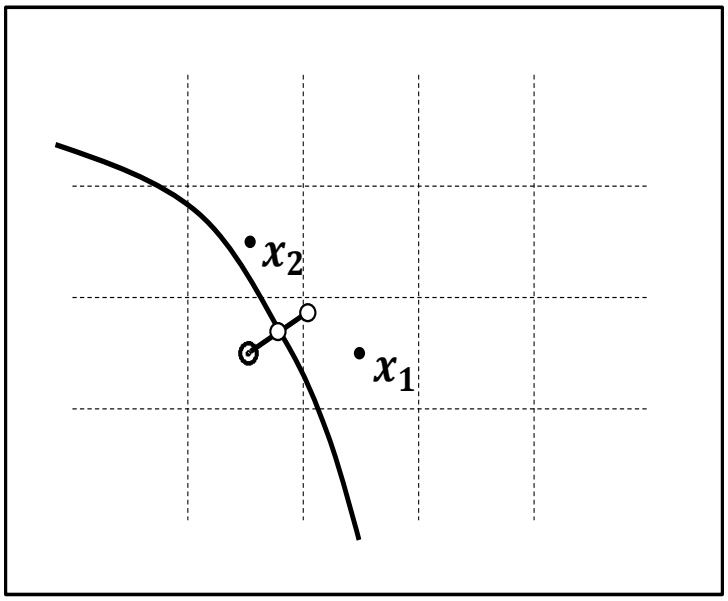


FIGURE 1.5 – Schéma d'interpolation linéaire pour l'approche Ghost-Cell.

P_1, P_2 et P_3 voisins de la cellule fantôme dans les deux directions. Dans ce cas, l'interpolation d'une variable physique de l'écoulement s'écrit :

$$\delta_{quadratique} = c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 xy \tag{1.55}$$

avec :
c_0, c_1, c_2 et c_3 : les coefficients de la fonction d'interpolation. Ils sont calculés avec les valeurs de la variable physique aux points Eulériens $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ et la valeur souhaitée au niveau du point Lagrangien. Par la suite, la valeur de la variable ainsi est calculée au niveau de la cellule fantôme grâce à la fonction d'interpolation $\delta_{quadratique}$. Iaccarino et al. [43] montrent que l'utilisation d'un schéma d'interpolation linéaire ou quadratique conduit à avoir des résultats satisfaisants dans le cas des écoulements laminaires et des écoulements turbulents à un nombre de Reynolds élevé à condition que le premier point Eulérien se situe dans la sous-couche visqueuse.

- Le troisième schéma d'interpolation a été utilisé par Majumdar et al. [44] . On propose une interpolation plutôt dans les directions normales et tangentielles. En fait, on cherche à appliquer une interpolation linéaire dans la direction tangentielle et une interpolation quadratique dans la direction normale, ainsi, on garde les points Eulériens $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ et $\mathbf{x}_3$ utilisés par le schéma d'interpolation précèdent et on rajoute un quatrième point $\mathbf{x}_4$ en fonction de la direction normale à l'interface et qui passe par le point fantôme. Dans ce cas, l'interpolation d'une variable physique de l'écoulement s'écrit :

$$\delta_{Majumdar} = c_0 + c_1 t + c_2 n + c_3 nt + c_4 n^2 \tag{1.56}$$

avec :

  - n la coordonnée du point Eulérien dans la direction normale et t la coordonnée du point Eulérien dans la direction tangentielle.

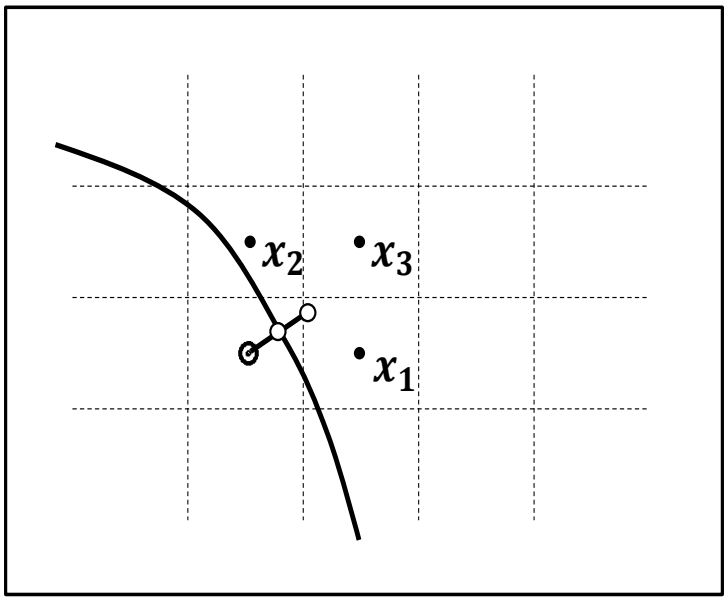


FIGURE 1.6 – Schéma d'interpolation quadratique pour l'approche Ghost-Cell.

- c_0, c_1, c_2, c_3 et c_4 : les coefficients de la fonction d'interpolation. Ils sont calculés avec les valeurs de la variable physique aux points Eulériens $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$, $\mathbf{x}_4$ et la valeur souhaitée au niveau du point Lagrangien. Par la suite, la valeur de la variable est ainsi calculée au niveau de la cellule fantôme grâce à la fonction d'interpolation $\delta_{Majumdar}$.

4. Utiliser une formulation aux différences finies des équations de Navier-Stokes avec une boucle de prédiction-correction.

Afin de valider la méthode, elle a été testée sur plusieurs cas tels que :

- La simulation d'un écoulement turbulent autour d'un véhicule [45]
- L'étude d'un écoulement à travers une conduite rugueuse [46]
- Des applications de propulsions aquatiques [47]
- La simulation des géométries tridimensionnelles mobiles [48]

Cette approche a été également développée pour l'analyse des écoulements compressibles. Dans un premier temps, [49], [50], [51] et [52] ont développé des approches pour les écoulements non visqueux. Par la suite, Ghias et al. [53] ont repris les travaux de Majumdar et al. ([44] et [54]) et les étendent pour le traitement des écoulements compressibles visqueux bidimensionnels et tridimensionnels. L'algorithme de l'approche a été reformulé pour pouvoir être appliqué sur des maillages cartésiens et curvilignes. Ghias prouve que la méthode est précise à l'ordre 2 localement et globalement et il la teste pour étudier les écoulements compressibles autour d'un cylindre circulaire 2D et 3D et autour d'un profil d'aile 2D et 3D.
Par la suite, Seo et al. [55] étendent la méthode de Ghias [53] avec une nouvelle interpolation basée sur la méthode polynomiale de Luo et al. [56] et en augmentant le support des points

Eulériens relatifs à chaque point fantôme ce qui améliore l'ordre de précision de la formulation de base pour résoudre des problèmes aéro-acoustiques avec des corps complexes pour des écoulements à faible nombre de Mach.
D'autre part, Takahashi et al. [57] et Mizuno et al. [58] ont développé une méthode pour les écoulements supersoniques autour des géométries bidimensionnelles et tridimensionnelles respectivement. Ils ont réussi à bien capturer l'onde de choc générée autour des différents obstacles et à bien prédire la topologie de l'écoulement avec des bonnes estimations des coefficients aérodynamiques (coefficient de pression, coefficient de traînée, coefficient de portance ...).
Finalement, Boukharfane et al. [59] développent une méthode mixte : l'approche Ghost-Cell pour la température, la pression et la densité et le forçage directe pour les vitesses. On note que l'ordre de convergence de cette méthode est supérieure à 2
L'approche Ghost-Cell a été également utilisée pour des applications thermiques. Luo et al. [60] [61] ont développé récemment une formulation afin de pouvoir étudier l'influence d'un flux de chaleur extérieur. L'originalité de la méthode proposée reside dans le fait de prendre en compte l'ensemble des conditions aux limites possibles du champ de la température :

1. Condition de Dirichlet. La valeur de la température à imposer au point fantôme G_K s'écrit en fonction de la valeur de température au point Lagrangien X_K et au point miroir M_K :

$$T_{G_K} = 2 \times T_{X_K} - T_{M_K} \tag{1.57}$$

2. Condition de Neumann. La valeur de la température à imposer au point fantôme G_K s'écrit en fonction de la valeur de flux de chaleur au point Lagrangien $(\frac{\partial T}{\partial n})_{X_K}$ et la température au point miroir M_K : :

$$T_{G_K} = T_{M_K} + d_{GM} \times (-\frac{\partial T}{\partial n})_{X_K} \tag{1.58}$$

avec : d_{GM} la distance entre le point G_K et le point M_K.

1.5.4 Approche discrète : Cut-Cell

La méthode Cut-Cell (Cellule-Coupée) a été introduite par Clarke [62] pour étudier les écoulements non-visqueux avec une approche volumes finis. Elle consiste à modifier les cellules coupées par l'interface fluide-solide afin d'appliquer directement les conditions aux limites sur le solide. Pour ce faire, des bilans globaux de masse, de quantité de mouvement et d'énergie doivent être effectués sur ces nouvelles cellules. Le fait que la méthode utilise une approche volumes finis, garantie que les lois de conservation locales et globales sont respectées.
Cette approche a été développée par la suite par Ye et al. [63] pour la simulation des écoulements visqueux. Ils proposent l'algorithme suivant :

1. L'identification des cellules du maillage traversées par l'interface du solide et pour chaque cellule identifiée, le repérage des points d'intersection entre les éléments du maillage Eulérien et l'interface.

2. La modification des cellules coupées par l'interface fluide-solide (Voir figure 1.7) :

   - Si le centre de la cellule se trouve dans le fluide, on élimine la partie solide.

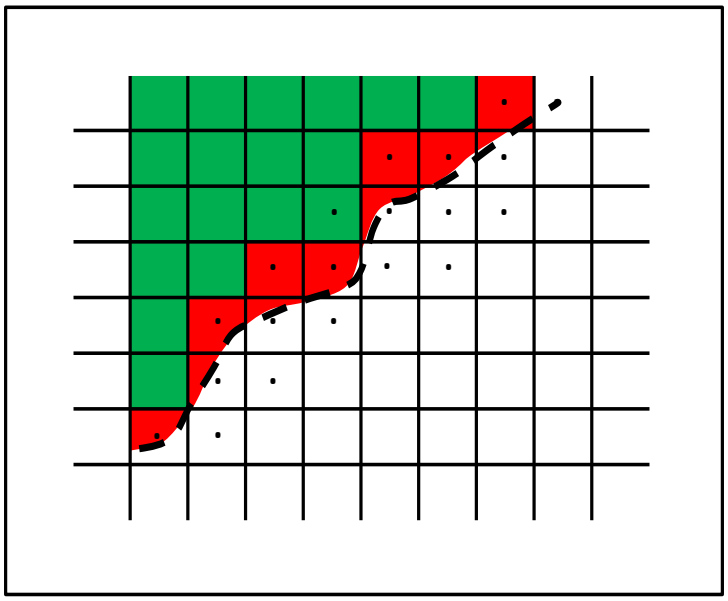


FIGURE 1.7 – Identification des cellules coupées au niveau de l'interface fluide-solide.

- Si le centre de la cellule se trouve dans le solide, on rajoute la partie fluide à la cellule fluide adjacente.

3. Le calcul du flux de l'ensemble des variables physiques à travers les nouvelles mailles où les bilans relatifs aux équations de Navier-Stokes s'appliquent à l'ensemble des faces de la nouvelle cellule modifiée. En fait, il existe deux types de faces possibles :

   - Une face symétrique aux nœuds du maillage ce qui permet d'effectuer la même interpolation que les autres mailles du domaine fluide.
   - Une face non symétrique aux nœuds du maillage ce qui requiert une modification du schéma d'interpolation afin de conserver le même ordre de precision.

   Le schéma d'interpolation doit être choisi de façon à conserver l'ordre global du solveur. Dans ce cas, ce schéma s'écrit :

$$\delta = c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 xy + c_4 x^2 + c_5 y^2 \tag{1.59}$$

   avec :
   c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 et c_5 : les coefficients de la fonction d'interpolation.

D'autre part, deux configurations de calcul des variables physiques sur les cellules sont envisagées :

- Une grille à variables colocalisées où toutes les variables sont calculées sur les faces de chaque cellule [63].
- Une grille à variables décalées où la pression est calculée au centre de la cellule alors que le reste des variables est estimé sur la face de la cellule [64],[65],[66].

Cheny et Botella [64] montrent que l'utilisation d'une grille à variables décalées (Une grille MAC) est plus adaptée à la méthode Cut-Cell parce qu'elle permet un couplage pression-vitesse.
La méthode a été testée sur des cas écoulements bidimensionnels incompressibles tels que [67],[68], [69] ; [70],[71],[47] et [72], également sur des cas tridimensionnels [73] et [74].
Cette approche a été par la suite développée pour l'analyse des écoulements compressibles non visqueux par Yang et al. [75], par Hu et al. [76] pour les écoulements 2D visqueux et par Lauer et al. [77] pour les écoulements 3D visqueux. Elle a été testée sur des écoulements laminaires autour d'un cylindre circulaire fixe [78] et oscillant [79], [80], des écoulements transsoniques autour des profils d'ailes symétriques [80] et non symétriques [81] et des écoulements turbulents autour des géométries 3D (cube et sphère) [82]. D'autres applications plus complexes ont été analysées avec cette approche telles que l'étude de l'interaction entre le choc et un solide déformable (barre et sphère déformables) [83], l'étude d'un écoulement à travers une soupape d'injecteur [84] et l'étude de la combustion dans un cylindre avec piston et valves mobiles[85].
Malgré la pertinence de la méthode Cut-Cell, elle présente cependant 3 problèmes majeurs :

1. La première difficulté de l'approche se présente dans l'application à des simulations 3D en raison des nombreuses possibilités de la forme géométrique des cellules coupées surtout avec des géométries complexes ce qui rend l'algorithme de la méthode très lourd.

2. Le deuxième problème qui affecte les résultats est lié à l'apparition des oscillations numériques parasites des champs de la pression et des contraintes de cisaillement sur le solide [81],[86].

3. Le dernier problème principal est la présence de très petites cellules, ce qui contraint le pas de temps. Ainsi, plusieurs approches ont été développées pour résoudre ce problème :

   - l'approche Cell-merging où les petites cellules sont physiquement fusionnées avec la cellule voisine pour créer une cellule composée plus grande [63], [87].
   - l'approche Cell linking où les petites mailles sont liées à une maille maître plus grande pour former une paire maître / esclave et sur laquelle s'applique la correction [65].
   - l'approche Cell mixing/redistribution où le flux numérique provenant des petites cellules est additionné aux flux des cellules environnantes [66],[88].

1.5.5 Approche discrète directe

Pour remédier aux limites des approches frontières immergées présentées ci-dessus , une méthode de forçage direct a été proposée pour traiter les écoulements autour des corps rigides. Dans cette nouvelle formulation, les termes de forçage sont calculés sur la base des équations de Navier-Stokes déjà discrétisées.
Cette approche a été initialement développée par Mohd-Yusof [89] et implémentée dans un code spectral. Cette catégorie de codes offre une précision élevée avec un schéma numérique pseudospectral B-spline / Fourier de Kravchenko et al. [90] mais elle reste limitée à des géométries relativement simples. Ainsi, Mohd-Yusof [89, 91] a eu recours à la méthode des frontières immergées afin d'étendre le champ d'application des codes spectraux à des géométries complexes. On utilise un schéma temporel semi-implicite de Cranck-Nicolson et un schéma de Runge-Kutta d'ordre 3 pour la discrétisation spatiale

(les termes non-linéaires). Le terme de forçage s'écrit pour un temps intermédiaire entre l'instant n et $n+1$:

$$\mathbf{F} = \begin{cases} \alpha_1 \mathbf{H}^{(n-1)} + \alpha_2 \mathbf{H}^n + \nabla P^n - \dfrac{1}{Re}\nabla^2 \mathbf{U}^n + \dfrac{1}{\Delta t}(\mathbf{U}_{target} - \mathbf{U}^n) & sur S \\ 0 & Ailleurs \end{cases} \tag{1.60}$$

avec :

- $\mathbf{H}$: Le terme de convection du bilan de la quantité de mouvement.
- α_1 et α_2 : Les coefficients du schéma de Runge-Kutta.
- $\mathbf{U}_{target}$: la vitesse souhaitée sur l'interface solide-fluide.

Afin de calculer ce terme, il a développé une procédure d'interpolation adaptée à cette approche spectrale afin de conserver la meilleure précision. Les étapes de ce processus sont :

- Discrétisation de la surface avec des points Lagrangiens qui appartiennent aux plans B-spline afin de garantir qu'ils coïncident avec les points de collocation de Fourier. Grâce à cette propriété, le processus d'interpolation est moins coûteux.
- Pour chaque point Lagrangien, on modifie la vitesse des points Eulériens qui l'entourent de telle sorte qu'on garde les vitesses des points qui se trouvent dans le fluide et qu'on inverse la valeur de la composante tangentielle de la vitesse des points qui se trouvent à l'intérieur du solide(Voir figure 1.8).
  Les vitesses tangentielles sont par la suite pondérées afin d'avoir une fonction de

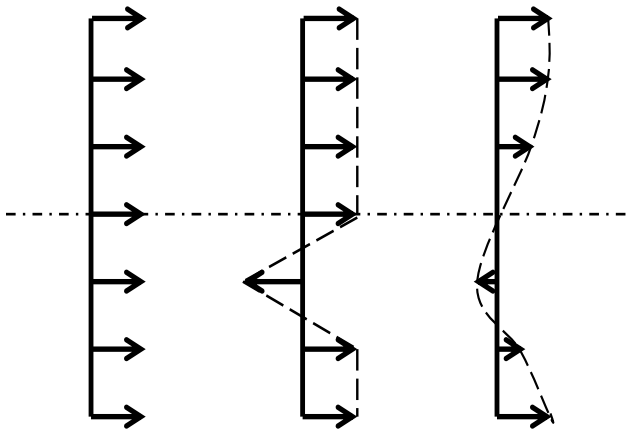


FIGURE 1.8 – Schéma d'interpolation proposé par Mohd-Yusof.

forçage avec une dérivée d'ordre 1 continue :

$$\mathbf{V}_{solide} = \frac{L_{solide}}{L_{fluide}} \mathbf{V}_{fluide} \tag{1.61}$$

avec :

- $\mathbf{V}_{solide}$: la composante tangentielle de la vitesse du point Eulérien $\mathbf{x}_s$ dans le solide
- $\mathbf{V}_{fluide}$: la composante tangentielle de la vitesse du point Eulérien $\mathbf{x}_f$ dans le fluide qui est symétrique à $\mathbf{x}_s$ par rapport au point Lagrangien $\mathbf{X}_k$
- L_{solide} : la distance entre le point $\mathbf{x}_s$ et $\mathbf{X}_k$
- L_{fluide} : la distance entre le point $\mathbf{x}_f$ et $\mathbf{X}_k$

Fadlun et al.[92] reprennent le même principe de forçage direct mais avec un code qui utilise la méthode des différences finies. Ils proposent ainsi plusieurs schémas d'interpolation, différents de celui de Mohd-Yusof[89] non adapté à la méthode des différences finies, afin d'étudier leurs influences sur la précision de l'approche :

- On cherche le point Eulérien le plus proche du point Lagrangien et on calcule le terme de forçage à ce niveau(Voir figure 1.9.a). C'est l'approche la plus simple avec un ordre de précision égal à zéro.
- Pour chaque cellule traversée par la frontière, on calcule un coefficient de pondération égal à $\chi = \frac{Volume\,de\,la\,partie\,solide}{Volume\,de\,la\,cellule}$. Ainsi, le terme de forçage est égale à $\mathbf{F}_2 = \chi \times \mathbf{F}_1$ avec $\mathbf{F}_1$: le terme de forçage calculé avec le premier schéma d'interpolation(Voir figure 1.9.b).
- On calcule la vitesse au point Eulérien le plus proche de la frontière en utilisant une interpolation linéaire sur les 3 cellules adjacentes à l'interface solide-fluide (Voir figure 1.9.c).

Fadlun et al.[92] testent l'ensemble des schémas d'interpolation présentés ci-dessus sur une simulation de formation des vortex dans une tuyère curviligne et ils démontrent que le troisième schéma d'interpolation est celui qui donne les résultats les plus précis.
D'autre part, kim et al [93] reformulent le forçage direct avec une approche explicite. Pour ce faire, ils proposent un nouvel algorithme avec une étape de prédiction qui sert à calculer le terme de forçage. Par la suite, ils proposent deux procédures d'interpolation d'ordre 2 : unidirectionnelle et bidirectionnelle. En fait, on commence par chercher le point Eulérien le plus proche de l'interface et on désigne l'ensemble des points Eulériens qui l'entourent (Voir figure 1.10). En suite, si au moins l'un des points de cet ensemble se trouve dans le solide alors on applique une interpolation unidirectionnelle (Voir figure 1.10)et si l'ensemble des points se trouve entièrement dans la partie fluide alors on applique une interpolation bidirectionnelle (Voir figure 1.11). Ainsi, pour une simulation 2D, la fonction d'interpolation s'écrit :

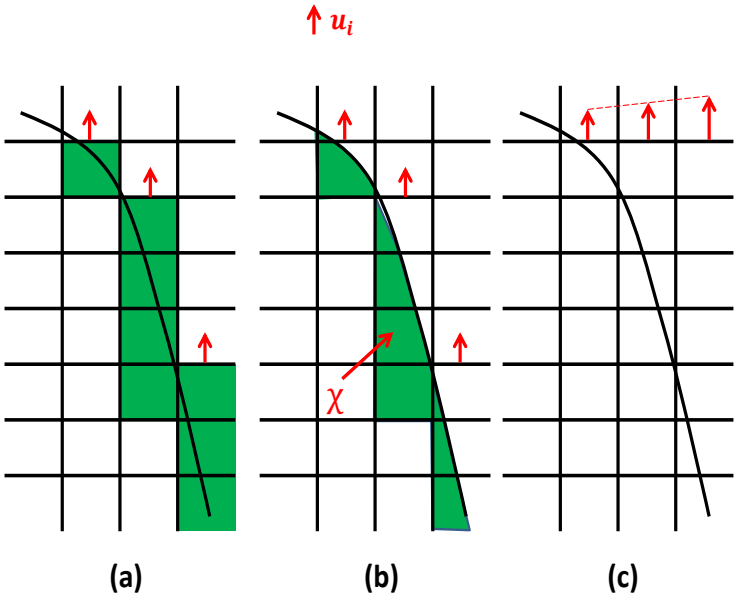


FIGURE 1.9 – Schémas d'interpolation proposé par Fadlun .

- Pour une procédure unidirectionnelle :

$$\mathbf{U}_{target} = \begin{cases} -\dfrac{x_p - x_1}{y_2}\mathbf{u}_2 & 0 < |x_p - x_1| \leq |x_2| \\ -\dfrac{(x_5 - (x_p - x_1))\mathbf{u}_2 - (x_2 - (x_p - x_1))\mathbf{u}_5}{x_5 - x_2} & |x_5| < |x_p - x_1| < |x_5| \end{cases} \tag{1.62}$$

- Pour une procédure bidirectionnelle :

$$\mathbf{U}_{target} = \frac{(1-\alpha_1)\mathbf{u}_2 + (1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\mathbf{u}_3 - \alpha_1(1-\alpha_2)\mathbf{u}_4}{\alpha_1\alpha_2} \tag{1.63}$$

avec :
$\alpha_1 = \dfrac{x_3 - x_p}{x_3 - x_1}$ et $\alpha_2 = \dfrac{y_4 - y_p}{y_4 - y_1}$.

Uhlmann [94] prouve que les approches de Kim et al. [93] et Fadlun et al. [92] provoquent des oscillations parasites affectant la précision de la méthode. Ainsi, il développe une nouvelle approche des frontières immergées dans le cadre d'étude des écoulements incompressibles autour de plusieurs corps solides en mouvement.
L'originalité de la méthode proposée [94] consiste à garder la famille des fonctions d'interpolation proposée par Peskin [14] et à l'utiliser dans une nouvelle formulation directe et discrète du calcul des termes de forçage et leurs intégrations dans les équations de Navier-Stokes. De ce fait, le passage entre les espaces Lagrangien et Eulérien est stable et génère moins d'oscillations parasites que dans les approches directes présentées ci-dessus.

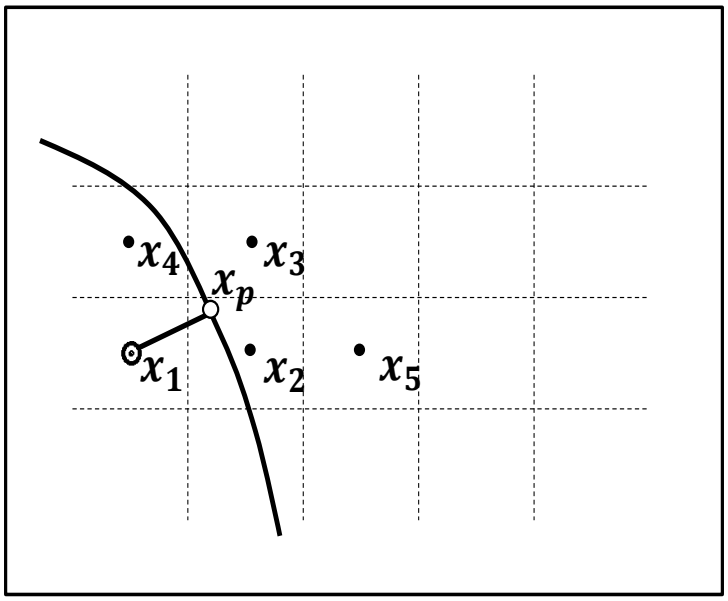


FIGURE 1.10 – Schéma d'interpolation unidirectionnel proposé par Kim.

Méthode de Uhlmann

En fait, Ulhlman propose d'évaluer le terme de forçage directement sur le point Lagrangien. Pour ce faire, il relie le terme de forçage $\mathbf{F}$ et la vitesse à imposer aux points Lagrangiens $\mathbf{U}^{(d)}$ via une formulation générale de discrétisation de l'équation de la quantité de mouvement entre un instant initial n et un instant intermédiaire $n+1/2$:

$$\mathbf{F}^{n+1/2} = \frac{\mathbf{U}^{(d)} - \mathbf{U}^{n}}{\Delta t} - \mathbf{RHS}^{n+1/2} \tag{1.64}$$

avec **RHS** un terme qui regroupe les termes convectif, visqueux et de pression de bilan de la quantité de mouvement.
En factorisant par le coefficient de discrétisation temporelle Δt, cette équation s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{F}^{n+1/2} = \frac{\mathbf{U}^{(d)} - \widetilde{\mathbf{U}}}{\Delta t} \tag{1.65}$$

avec

$$\widetilde{\mathbf{U}} = \mathbf{U}^{n} + \Delta t \times \mathbf{RHS}^{n+1/2} \tag{1.66}$$

On reconnaît une formulation classique de l'équation de la quantité de mouvement sans le terme de forçage. Ainsi, $\mathbf{F}$ est proportionnel à la différence entre la vitesse désirée $\mathbf{U}^{(d)}$ et une première estimation de la vitesse sans le terme de forçage $\widetilde{\mathbf{U}}$.
Or, comme les équations de Navier-Stokes sont résolues sur les points Eulériens, l'équation 1.66 doit être réécrite :

$$\widetilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^{n} + \Delta t \times \mathbf{rhs}^{n+1/2} \tag{1.67}$$

Par la suite le champ des vitesses calculées avec l'équation 1.67 sur l'espace Eulérien doit être transformé sur l'espace Lagrangien. Cette transformation se fait avec une fonction d'interpolation δ_h qui, pour Uhlmann, doit satisfaire ces conditions :

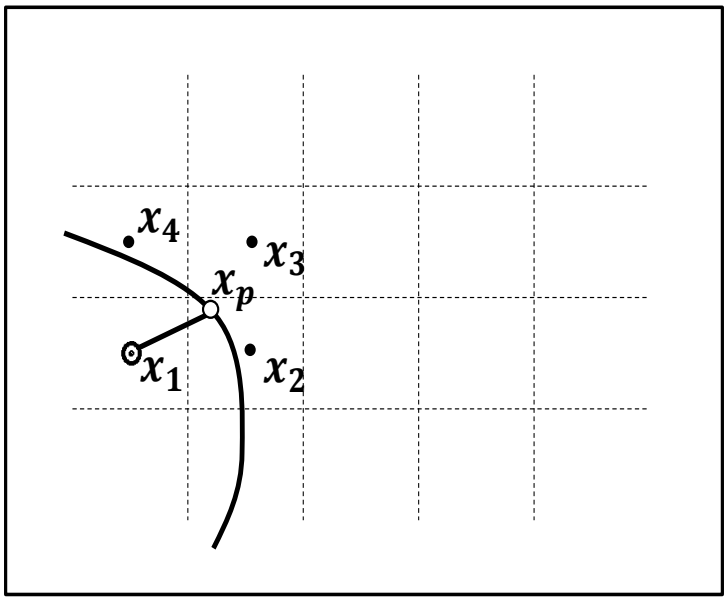


FIGURE 1.11 – Schéma d'interpolation bidirectionnel proposé par Kim.

- Une fonction continue partout dans le domaine de calcul
- Une fonction d'ordre 2
- Le support de la fonction doit être relativement étroit afin de minimiser le coût de calcul
- La conservation de l'intégrale du terme de forçage et de son premier moment lors de la transformation Eulérien-Lagrangien, c'est-à-dire :

$$\sum_{\mathbf{x}\in V} \mathbf{f}(\mathbf{x})h^3 = \sum_{m=1}^{N_p} \sum_{\mathbf{X}\in S_m} \mathbf{F}(\mathbf{X})\Delta V_m(\mathbf{X}) \tag{1.68}$$

$$\sum_{\mathbf{x}\in V} \mathbf{x}\times\mathbf{f}(\mathbf{x})h^3 = \sum_{n=1}^{N_p} \sum_{\mathbf{X}\in S_n} \mathbf{X}\times\mathbf{F}(\mathbf{X})\Delta V_n(\mathbf{X}) \tag{1.69}$$

avec : N_p le nombre des corps solides présents dans le domaine de calcul et $\Delta V_n(\mathbf{X})$ le volume élémentaire autour du point Lagrangien $\mathbf{X}$ du n^{ime} corps solide.
On déduit des deux égalités 1.68 et 1.69 deux conditions directes sur la fonction δ_h. Pour tout point Lagrangien $\mathbf{X}$ on écrit :

$$\sum_{\mathbf{x}\in V} \delta_h(\mathbf{x}-\mathbf{X})h^3 = 1 \tag{1.70}$$

$$\sum_{\mathbf{x}\in V} (\mathbf{x}-\mathbf{X})\times\delta_h(\mathbf{x}-\mathbf{X})h^3 = 0 \tag{1.71}$$

La fonction candidate qui vérifie l'ensemble de ces conditions et que Uhlmann a choisi, est la fonction d'interpolation introduite par Roma et al. [95] :

$$\delta_h(\mathbf{x}-\mathbf{X}) = \begin{cases} \frac{1}{3}\left(1+\sqrt{-3(\mid \mathbf{x}-\mathbf{X} \mid /h)^2+1}\right) & 0 \leq \mathbf{x}-\mathbf{X} \leq 0.5h \\ \frac{1}{6}\left[5-3(\mid \mathbf{x}-\mathbf{X} \mid /h)-\sqrt{-3(1-(\mid \mathbf{x}-\mathbf{X} \mid /h))^2+1}\right] & 0.5h \leq \mathbf{x}-\mathbf{X} \leq 1.5h \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{1.72}$$

Méthode de Pinelli. et al

Les différentes approches directes de la méthode des frontières immergées présentées ci-dessus utilisent un maillage uniforme et cartésien. Or, pour étudier un écoulement avec un nombre de Reynolds élevé, on a besoin d'un maillage très fin au niveau des parois des corps présents dans le domaine de calcul afin de pouvoir capturer la physique de l'écoulement. Avec une grille uniforme, le calcul de ces cas devient très coûteux en terme de taille du maillage, ainsi, on doit développer les méthodes existantes pour fonctionner avec des maillages raffinés.
Également, dans certains cas avec des frontières arrondies, l'utilisation des grilles cartésiennes peut ne pas être optimale car le raffinement va s'étendre vers des zones où il n'est pas nécessaire. La solution ici est d'utiliser un maillage curviligne dans les cas où l'utilisation d'une grille cartésienne est moins optimale.
C'est dans ce cadre que Pinelli et al [96] proposent une nouvelle approche capable de s'intégrer dans plusieurs types de grilles : cartésienne ou curviligne , uniforme ou non-uniforme. En fait, cette approche se base sur la méthode de Uhlmann pour la simplicité du calcul du terme de forçage et sa capacité à examiner plusieurs types d'écoulement . Ensuite, Pinelli intervient au niveau de la fonction d'interpolation parce que ce sont les propriétés de cette fonction qui vont permettre l'extension de la méthode, initialement développée pour un maillage cartésien et uniforme, vers d'autres types de maillage. Pour ce faire, cette fonction doit satisfaire la conservation de l'intégrale du terme de forçage ainsi que l'intégrale de tous ses moments jusqu'à l'ordre n. Ainsi, on se base sur la fonction introduite par Roma [95] et on suit la démarche proposée par Liu et al. [97] pour la construction de la nouvelle fonction $\widetilde{\delta_d}$ qui s'écrit :

$$\widetilde{\delta_d}(\mathbf{x}-\mathbf{X}) = \sum_{i=0}^{n} b_i(d) \times (\mathbf{x}-\mathbf{X})^i \times \delta_d(\mathbf{x}-\mathbf{X}) \tag{1.73}$$

où les coefficients $b_i(d)$ sont déterminés à partir des relations de conservation des intégrales :

$$\sum_{\mathbf{x}\in D} \widetilde{\delta_h}(\mathbf{x}-\mathbf{X})\Delta v_m = 1 \tag{1.74}$$

$$\sum_{\mathbf{x}\in D} (\mathbf{x}-\mathbf{X})^i \times \widetilde{\delta_h}(\mathbf{x}-\mathbf{X})\Delta v_m = 0 \tag{1.75}$$

Dans cette partie on développe le calcul pour un cas 2D et on prend les notations suivantes :

- Pour les points Eulériens $\mathbf{x} = (x, y)$
- Pour les points Lagrangiens $\mathbf{X} = (X, Y)$
- La largeur du support des fonctions $\widetilde{\delta}_d$ et Δ_d sont d_x dans la direction $\overrightarrow{e}_x$ et d_y dans la direction $\overrightarrow{e}_y$

Dans ce cas, il faut que toutes les combinaisons linéaires (1,x,y) soient prises en compte pour le calcul de $\widetilde{\delta}_d$. Donc, on a :

$$\widetilde{\delta}_{d_x,d_y}(x-X, y-Y) = [b_0 + (x-X)b_1 + (y-Y)b_2 + (x-X)(y-Y)b_3 + (x-X)^2 b_4 + (y-Y)^2 b_5]\delta_{d_x,d_y}(x-X, y-Y) \quad (1.76)$$

On commence par définir le support spatial de $\widetilde{\delta}$. Pinelli propose de suivre l'algorithme suivant pour chaque point Lagrangien que l'on note $\mathbf{X}_l$:

- On choisit le point Eulérien $\mathbf{x}_{i,j}$ le plus proche du $\mathbf{X}_l$
- Pour chaque direction de l'espace, on désigne les deux nœuds de la grille Eulérienne qui se situent des deux cotés du $\mathbf{x}_{i,j}$. On forme ainsi un ensemble N_l de 3 points Eulériens dans chaque direction de l'espace qui entoure le point Lagrangien $\mathbf{X}_l$: $N_l = \{\mathbf{x}_{i+k,j+l}\}$ avec $k, l \in \{1, 0, 1\}$. On introduit par la suite les 4 grandeurs suivantes :

$$\begin{cases} h_x^+(\mathbf{X}_l) = max\{|x_{i,j} - x_{i-1,j}| : x_{i,j}, x_{i-1,j} \in N_l\} \\ h_x^-(\mathbf{X}_l) = min\{|x_{i,j} - x_{i-1,j}| : x_{i,j}, x_{i-1,j} \in N_l\} \\ h_y^+(\mathbf{X}_l) = max\{|x_{i,j} - x_{i,j-1}| : x_{i,j}, x_{i,j-1} \in N_l\} \\ h_y^-(\mathbf{X}_l) = min\{|x_{i,j} - x_{i,j-1}| : x_{i,j}, x_{i,j-1} \in N_l\} \end{cases} \quad (1.77)$$

- En se basant sur ces grandeurs, on calcule les paramètres d_{xl} et d_{y_l} de la fonction d'interpolation $\widetilde{\delta}$:

$$\begin{cases} d_{xl} = (\frac{5}{6}h_x^+(\mathbf{X}_l) + \frac{1}{6}h_x^-(\mathbf{X}_l) + \epsilon_x(\mathbf{X}_l)) \\ d_{y_l} = (\frac{5}{6}h_y^+(\mathbf{X}_l) + \frac{1}{6}h_y^-(\mathbf{X}_l) + \epsilon_y(\mathbf{X}_l)) \end{cases} \quad (1.78)$$

  avec $\epsilon_x(\mathbf{X}_l)$ et $\epsilon_y(\mathbf{X}_l)$ des petites fractions supplémentaires afin d'éviter que les points Eulériens touchent la frontière du support ce qui engendre des problème de matrice de moment singulier.

- On trace finalement le support présenté dans la figure 1.12.

  Dans le cas 2D, il prend la forme d'un rectangle dont le centre est le point Lagrangien $\mathbf{X}_l$ et les longueurs de ses arrêtes sont $3d_{xl}$ dans la direction $\overrightarrow{e}_x$ et $3d_{y_l}$ dans la direction $\overrightarrow{e}_y$. L'ensemble S_l des points Eulériens associés au point Lagrangien $\mathbf{X}_l$ est ainsi défini par :

$$S_l = \{\mathbf{x}_{\hat{i,j}} : |x_{i,j} - x_{i,j}| < \frac{3}{2}d_{xl} \text{ et } |y_{i,j} - y_{i,j}| < \frac{3}{2}d_{y_l}\} \quad (1.79)$$

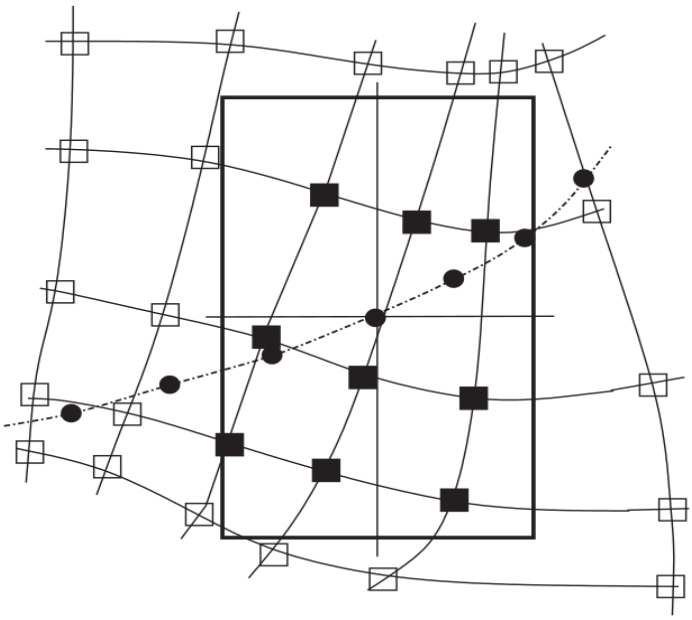


FIGURE 1.12 – Support de calcul de la fonction d'interpolation dans l'approche de Pinelli et al. :(□) points Eulériens à l'extérieur du support, (■) points Eulériens dans le support,(•) points Lagrangiens

Une fois le support de la fonction d'interpolation défini, il reste à déterminer les coefficients $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ à partir des équations 1.74 et 1.75 qui s'écrivent dans un cas 2D :

$$\sum_{\mathbf{x}\in S_l} \widetilde{\delta}_{d_x,d_y}(x-X, y-Y))\Delta x\Delta y = 1 \tag{1.80}$$

$$\sum_{\mathbf{x}\in S_l} (x-X) \times \widetilde{\delta}_{d_x,d_y}(x-X, y-Y)\Delta x\Delta y = 0 \tag{1.81}$$

$$\sum_{\mathbf{x}\in S_l} (y-Y) \times \widetilde{\delta}_{d_x,d_y}(x-X, y-Y)\Delta x\Delta y = 0 \tag{1.82}$$

$$\sum_{\mathbf{x}\in S_l} (x-X)(y-Y) \times \widetilde{\delta}_{d_x,d_y}(x-X, y-Y)\Delta x\Delta y = 0 \tag{1.83}$$

$$\sum_{\mathbf{x}\in S_l} (x-X)^2 \times \widetilde{\delta}_{d_x,d_y}(x-X, y-Y)\Delta x\Delta y = 0 \tag{1.84}$$

$$\sum_{\mathbf{x}\in S_l} (y-Y)^2 \times \widetilde{\delta}_{d_x,d_y}(x-X, y-Y)\Delta x\Delta y = 0 \tag{1.85}$$

$$\tag{1.86}$$

Ainsi,le calcul des coefficients $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ revient à résoudre le système :

$$M_{2D}\,\overrightarrow{b} = \overrightarrow{e}_1 \tag{1.87}$$

avec $\overrightarrow{e}_1$ est le premier vecteur unitaire de la base canonique $\mathbb{R}^6$. Par la suite, on écrit l'équation 1.82 sous une forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} m_{0,0} & m_{1,0} & m_{0,1} & m_{1,1} & m_{2,0} & m_{0,2} \\ m_{1,0} & m_{2,0} & m_{1,1} & m_{2,1} & m_{3,0} & m_{1,2} \\ m_{0,1} & m_{1,1} & m_{0,2} & m_{1,2} & m_{2,1} & m_{0,3} \\ m_{1,1} & m_{2,1} & m_{1,2} & m_{2,2} & m_{3,1} & m_{2,3} \\ m_{2,0} & m_{3,0} & m_{2,1} & m_{3,1} & m_{4,0} & m_{2,2} \\ m_{0,2} & m_{1,2} & m_{0,3} & m_{1,3} & m_{2,2} & m_{0,4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.88}$$

avec :

$$m_{i,j} = \sum_{\mathbf{x} \in S_l} (x - X)^i (y - Y)^j \times \delta_{d_x,d_y}(x - X, y - Y)\Delta x \Delta y \tag{1.89}$$

Or, dans le cas des nœuds très proches de la limite du support, on peut avoir des problèmes dans la matrice à cause des moments singuliers. Pour l'éviter, Pinelli propose de modifier le système 1.87 en intégrant la matrice H^l :

$$H^l M^l_{2D} (H^l)^{-1} \overrightarrow{b} = \overrightarrow{e}_1 \tag{1.90}$$

avec :

$$H^l = diag(1, \frac{1}{d_{xl}}, \frac{1}{d_{yl}}, \frac{1}{d_{xl} d_{yl}}, \frac{1}{{d_{xl}}^2}, \frac{1}{{d_{yl}}^2}) \tag{1.91}$$

Ainsi, le système se traite en deux étapes :

(a) On résout le système 1.90 pour le vecteur $\overrightarrow{\tilde{b}} = (H^l)^{-1} \overrightarrow{b}$

(b) On calcule par la suite le vecteur $\overrightarrow{b} = H^l \overrightarrow{\tilde{b}}$

A ce stade, la fonction d'interpolation $\tilde{\delta}$ est entièrement définie et on peut l'utiliser à la fois pour transformer les grandeurs physiques de l'espace Eulérien vers l'espace Lagrangien et vice versa.
Dans l'algorithme adopté par Pinelli, le recours à la fonction $\tilde{\delta}$ se fait à deux niveaux :

(a) Le champ des vitesses, initialement calculé avec les équations de Navier-Stokes sans forçage, doit être interpolé sur les points Lagrangiens. La vitesse interpolée au point $\mathbf{X}_l$ s'écrit :

$$\mathbf{U}(\mathbf{X}_l) = \sum_{\mathbf{x} \in S_l} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \times \tilde{\delta}_{d_x,d_y}(x - X, y - Y)\Delta x \Delta y \tag{1.92}$$

Le terme de forçage au point Lagrangien $\mathbf{X}_l$ est calculé par la suite avec une discrétisation temporelle d'Euler :

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}_l) = \frac{\mathbf{U}_{souhaite} - \mathbf{U}(\mathbf{X}_l)}{\Delta t} \tag{1.93}$$

avec $\mathbf{U}_{souhaite}$ est la vitesse à imposer sur le point $\mathbf{X}_l$

(b) Le terme de forçage doit être diffusé sur les points Eulériens via l'expression :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{X}_l \in \partial D} \mathbf{F}(\mathbf{X}_l) \times \tilde{\delta}_{d_x,d_y}(x - X, y - Y)\Delta s_l \varepsilon_l \tag{1.94}$$

avec :

- Δs_l : longueur de l'arc entre $\mathbf{X}_{l+1/2}$ et $\mathbf{X}_{l+1/2}$
- ε_l : largeur caractéristique liée au choix des points Lagrangiens. Elle doit satisfaire le système suivant :

$$A\overrightarrow{\varepsilon} = \overrightarrow{1} \tag{1.95}$$

avec : $A \equiv a_{l,k} = \sum_{\mathbf{x}\in S_l} \widetilde{\delta}_{d_x,d_y}(x - X_l, y - Y_l)\widetilde{\delta}_{d_x,d_y}(x - X_k, y - Y_k)\Delta x \Delta y$
et $\overrightarrow{1}$ est le vecteur unité.

1.6 Conclusion

Pour conclure, l'approche discrète directe introduite par Uhlmann [94] est la formulation qui satisfait le plus les critères fixés au départ. Elle peut s'intégrer directement dans les solveurs compressibles sans modifier leurs architectures de base. En plus, avec un bon choix de la fonction d'interpolation, on peut conserver le même ordre de précision des schémas numériques utilisés pour la discrétisation des équations de Navier-Stokes, au niveau de l'interface fluide-solide.

Bibliographie

[1] B. Zang, U. S. Vevek, H. D. Lim, X. Wei, and T. H. New. An assessment of openfoam solver on rans simulations of round supersonic free jets. *Journal of Computational Science*, 2018.

[2] M. V. Kraposhin, E. V. Smirnova, T. G. Elizarova, and M. A. Istomina. Development of a new openfoam solver using regularized gas dynamic equations. *Computers and Fluids*, 166 :163–175, 2018.

[3] D. Modesti and S. Pirozzoli. A low-dissipative solver for turbulent compressible flows on unstructured meshes, with openfoam implementation. *Computers and Fluids*, 152 :14–23, 2017.

[4] A. Kurganov and E. Tadmor. New high-resolution central schemes for nonlinear conservation laws and convection-diffusion equations. *Journal of Computational Physics*, 160 :241–282, 2000.

[5] A. Kurganov, S. Noelle, and G. Petrova. Semidiscrete central-upwind schemes for hyperbolic conservation laws and hamilton-jacobi equations. *Journal on Scientific Computing*, 23 :707–740, 2001.

[6] R. Issa. Solution of the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting. *Journal of Computational Physics*, 62 :40–65, 1986.

[7] M. Meldi and A. Poux. A reduced order model based on kalman filtering for sequential data assimilation of turbulent flows. *Journal of Computational Physics*, 347 :207–234, 2017.

[8] W.F. Noh. Cel :a time-dependent two-space dimensional coupled eulerian-lagrangian code. *Methods in Computational Physics*, 3 :117–179, 1964.

[9] R.M. Franck and R.B. Lazarus. Mixed eulerian-lagrangian method. *Methods in Computational Physics : Fundamental methods in Hydrodynamics*, 3 :47–67, 1964.

[10] J.G. Trulio. Theory and structure of the afton codes. *Tech. rep. AFWL-TR-66-19. Air Force Weapons Laboratory : Kirtland Air Force Base*, pages 227–253, 1966.

[11] C.W. Hirt, A.A. Amsden, and J.L. Cook. An arbitrary lagrangian-eulerian computing method for all flow speeds. *Journal of Computational Physics*, 14 :227–253, 1974.

[12] J. Steger and F.D.J. Benek. A chimera grid scheme. *Advances in Grid GEneration 5*, pages 59–69, 1983.

[13] A.J. Chorin. Numerical solution of the navier-stokes equations. *Mathematics of Computation*, 22 :745–762, 1968.

[14] C.S. Peskin. Flow patterns around heart valves : a numerical method. *Journal of Computational Physics*, 10 :252–271, 1972.

[15] T.J. Chung. Computational fluid dynamics. *Cambridge University Press*, 2 edition, 2010.

[16] R.P. Beyer and R.J. Leveque. Analysis of a one-dimensional model for the immersed boundary method. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 29 :332–364, 1992.

[17] M.C. Lai and C.S. Peskin. An immersed boundary method with formal second-order accuracy and reduced numerical viscosity. *Journal of Computational Physics*, 160 :705–719, 2000.

[18] E.M. Saiki and S. Biringen. Numerical simulation of a cylinder in uniform flow : application of a virtual boundary method. *Journal of Computational Physics*, 123 :450–465, 1996.

[19] J.M. Stockie and B.T.R. Wetton. Stability analysis for the immersed fiber problem. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 55 :1577–1591, 1995.

[20] J.M. Stockie and B.T.R. Wetton. Analysis of stiffness in the immersed boundary method and implications for time-stepping schemes. *Journal of Computational Physics*, 154 :41–64, 1999.

[21] C. Tu and C.S. Peskin. Stability and instability in the computation of flows with moving immersed boundaries : a comparison of three methods. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 13 :1361–1376, 1992.

[22] Y. Mori and C.S. Peskin. Implicit second-order immersed boundary methods with boundary mass. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197 :2049–2067, 2008.

[23] C.S. Peskin. Numerical analysis of blood flow in the heart. *Journal of Computational Physics*, 25 :220–252, 1977.

[24] T.Y. Hou and Z. Shi. An efficient semi-implicit immersed boundary method for the navier–stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 227 :8968–8991, 2008.

[25] T.Y. Hou and Z. Shi. Removing the stiffness of elastic force from the immersed boundary method for the 2d stokes equations. *Journal of Computational Physics*, 227 :9138–9169, 2008.

[26] D. Goldstein, R. Handler, and L. Sirovich. Modeling a no-slip flow with an external force field. *Journal of Computational Physics*, 105 :354–366, 1993.

[27] D. Goldstein, R. Handler, and L. Sirovich. Direct numerical simulation of turbulent flow over a modelled riblet covered surface. *Journal of Fluid Mechanics*, 302 :333–376, 1995.

[28] H.C. Brinkman. A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a swarm of particles. *Applied Scientific Research*, A1 :27–34, 1947.

[29] E. Arquis and J. Caltagirone. Sur les conditions hydrodynamiques au voisinage d'une interface milieu fluide-milieu poreux : application à la convection naturelle. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris II*, 299 :1–4, 1984.

[30] P. Angot, C. Bruneau, and P. Fabrie. A penalization method to take into account obstacles in incompressible viscous flows. *Numerische Mathematik*, 81 :497–520, 1999.

[31] N. Kevlahan and J. Ghidaglia. Computation of turbulent flow past an array of cylinders using a spectral method with brinkman penalization. *European Journal of Mechanics*, 20 :333–350, 2001.

[32] M. Gazzola, P. Chatelain, W.M. van Rees, and P. Koumoutsakos. Simulations of single and multiple swimmers with non-divergence free deforming geometries. *Journal of Computational Physics*, 230 :7093–7114, 2011.

[33] D. Kolomenskiy and K. Schneider. A fourier spectral method for the navier–stokes equations with volume penalization for moving solid obstacles. *Journal of Computational Physics*, 228 :5687–5709, 2009.

[34] G. Keetels, U. D'Ortona, W. Kramer, H. Clercx, K. Schneider, and G. van Heijst. Fourier spectral and wavelet solvers for the incompressible navier–stokes equations with volume-penalization : convergence of a dipole-wall collision. *Journal of Computational Physics*, 227 :919–945, 2007.

[35] B. Maury. Numerical analysis of a finite element/volume penalty method. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 47 :1126–1148, 2009.

[36] K. Khadra, P. Angot, S. Parneix, and J.P. Caltagirone. Fictitious domain approach for numerical modelling of navier–stokes equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 34 :651–684, 2000.

[37] C. Bost, G. Cottet, and E. Maitre. Convergence analysis of a penalization method for the three-dimensional motion of a rigid body in an incompressible viscous fluid. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 48 :1313–1337, 2010.

[38] F. Chantalat, C.H. Bruneau, C. Galusinski, and A. Iollo. Level-set, penalization and cartesian meshes : a paradigm for inverse problems and optimal design. *Journal of Computational Physics*, 228 :6291–6315, 2009.

[39] M. Bergmann and A. Iollo. Modeling and simulation of fish-like swimming. *Journal of Computational Physics*, 230 :329–348, 2011.

[40] Q. Liu and O. V. Vasilyev. A brinkman penalization method for compressible flows in complex geometries. *Journal of Computational Physics*, 227 :946–966, 2007.

[41] Y. Tseng and J. H. Ferziger. A ghost-cell immersed boundary method for flow in complex geometry. *Journal of Computational Physics*, 192 :593–623, 2003.

[42] S-G. Cai. Computational fluid-structure interaction with the moving immersed boundary method. *Ph.D. thesis, Université de Technologie de Compiègne*, 2016.

[43] G. Iaccarino and R. Verzicco. Immersed boundary technique for turbulent flow simulations. *Applied Mechanics Reviews*, 56 :331–347, 2003.

[44] S. Majumdar, G. Iaccarino, and P.A. Durbin. Rans solver with adaptive structured boundary non-conforming grids. *Annual Research Briefs 2001, Center For Turbulence Research*, pages 353–364, 2001.

[45] G. Kalitzin, G. Iaccarino, and B. Khalighi. Towards and immersed boundary solver for rans simulations. *Annual Research Brief, Center for Turbulence Research*, pages 369–378, 2003.

[46] G. Iaccarino, G. Kalitzin, and C.J. Elkins. Numerical and experimental investigation of the turbulent flow in ribbed serpentine passage. *Annual Research Brief, Center for Turbulence Research*, pages 379–388, 2003.

[47] R. Mittal, F.M. Najjar, R. Byrganhalli, V. Seshadri, and H. Singh. Simulation of complex biological flows andflow control problems on cartesian grids. *Fifth International Conference on Advances in Fluid Mechanics*, 2003.

[48] S. Marella, S. Krishnan, H. Liu, and H.S. Udaykumar. Sharp interface cartesian grid method i : An easily implemented technique for 3d moving boundary computations. *Journal of Computational Physics*, 210 :1–31, 2005.

[49] P. Colella, D.T. Graves, B.J. Keen, and D. Modiano. A cartesian grid embedded boundary method for hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 211 :347–366, 2006.

[50] P.H. Tran and F. Plourde. Computing compressible internal flows by means of an immersed boundary method. *Computers and Fluids*, 97 :21–30, 2014.

[51] G.H. Miller and P. Colella. A conservative three-dimensional eulerian method for coupled solid-fluid shock capturing. *Journal of Computational Physics*, 183 :26–82, 2002.

[52] A. Legay, J. Chessa, and T. Belytschko. An eulerian–lagrangian method for fluid–structure interaction based on level sets. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195 :2070–2087, 2006.

[53] R. Ghias, R. Mittal, and H. Dong. A sharp interface immersed boundary method for compressible viscous flows. *Journal of Computational Physics*, 225 :528–553, 2007.

[54] F. Gibou, R.J. Fedkiw, L-T. Cheng, and M. Kang. A second order-accurate symmetric discretization of the poisson equation on irregular domains. *Journal of Computational Physics*, 176 :205–227, 2002.

[55] J.H. Seo and R. Mittal. A high-order immersed boundary method for acoustic wave scattering and low-mach number flow-induced sound in complex geometries. *Journal of Computational Physics*, 230 :1000–1019, 2011.

[56] H. Luo, R. Mittal, X. Zheng, S.A. Bielamowicz, R.J. Walsh, and J.K. Hahn. An immersed-boundary method for flow–structure interaction in biological systems with application to phonation, j. comput. phys. 227 (2008) 9303–9332. *Journal of Computational Physics*, 227 :9303–9332, 2008.

[57] S. Takahashi, T. Nonomura, and K. Fukuda. A numerical scheme based on an immersed boundary method for compressible turbulent flows with shocks : application to two-dimensional flows around cylinders. *Journal of Applied Mathematics*, 2014 :1–21, 2014.

[58] Y. Mizuno, S. Takahashi, T. Nonomura, T. Nagata, and K. Fukuda. A simple immersed boundary method for compressible flow simulation around a stationary and moving sphere. *Journal of Applied Mathematics*, 2015 :1–17, 2015.

[59] R. Boukharfane, F.H.E. Ribeiro, Z. Bouali, and A. Mura. A combined ghost-point-forcing / direct-forcing immersed boundary method (ibm) for compressible flow simulations. *Computers and Fluids*, 162 :91–112, 2018.

[60] K. Luo, Z. Zhuang, J. Fan, and N.E.L. Haugen. A ghost-cell immersed boundary method for simulations of heat transfer in compressible flows under different boundary conditions. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 92 :708–717, 2015.

[61] K. Luo, C. Mao, Z. Zhuang, J. Fan, and N.E.L. Haugen. A ghost-cell immersed boundary method for the simulations of heat transfer in compressible flows under different boundary conditions part-ii : Complex geometries. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 104 :98–111, 2016.

[62] D. Clarke, M. Salas, and H. Hassan. Euler calculations for multi-element airfoils using cartesian grids. *AIAA Journal*, 24 :353–358, 1986.

[63] T. Ye, R. Mittal, H. Udaykumar, and W. Shyy. An accurate cartesian grid method for viscous incompressible flows with complex immersed boundaries. *Journal of Computational Physics*, 156 :209–240, 1999.

[64] Y. Cheny and O. Botella. The ls-stag method : A new immersed boundary/level-set method for the computation of incompressible viscous flows in complex moving geometries with good conservation properties. *Journal of Computational Physics*, 229 :1043–1076, 2010.

[65] M. Kirkpatrick and S. Armfield. A representation of curved boundaries for the solution of the navier–stokes equations on a staggered three-dimensional cartesian grid. *Journal of Computational Physics*, 184 :1–36, 2003.

[66] M. Meyer, A. Devesa, S. Hickel, X. Hu, and N. Adams. A conservative immersed interface method for large-eddy simulation of incompressible flows. *Journal of Computational Physics*, 229 :6300–6317, 2010.

[67] H.S. Udaykumar, W. Shyy, and M.M. Rao. Elafint : a mixed eulerian–lagrangian method for fluid flows with complex and moving boundaries. *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, 22 :691–712, 1996.

[68] H.S. Udaykumar, R. Mittal, and W. Shyy. Computation of solid–liquid phase fronts in the sharp interface limit on fixed grids. *Journal of Computational Physics*, 153 :535–574, 1999.

[69] H.S. Udaykumar, R. Mittal, P. Rampunggoon, and A. Khanna. A sharp interface cartesian grid method for simulating flows with complex moving boundaries. *Journal of Computational Physics*, 174 :345–380, 2001.

[70] R. Mittal, Y. Utturkar, and H.S. Udaykumar. Computational modeling and analysis of biomimetic flight mechanisms. *AIAA Paper*, 2002.

[71] R. Mittal, C. Bonilla, and H.S. Udaykumar. Cartesian grid methods for simulating flows with moving boundaries. *Computational Methods and Experimental Measurements*, 33 :557–566, 2003.

[72] Y. Utturkar and R. Mittal. Sensitivity of synthetic jets to the design of the jet cavity. *AIAA Paper*, 2002.

[73] A.S. Almgren, J. Bell, P. Colella, and T. Marthaler. A cartesian grid projection method or the incompressible euler equations in complex geometries. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 18 :1289–1309, 1997.

[74] S. Popinet. Gerris : a tree-based adaptive solver for the incompressible euler equations in complex geometries. *Journal of Computational Physics*, 190 :572–600, 2003.

[75] G. Yang, D. Causon, and D. Ingram. Calculation of compressible flows about complex moving geometries using a three-dimensional cartesian cut cell method. *International Journal For Numerical Methods In Fluids*, 33 :1121–1151, 2000.

[76] X. Hu, B. Khoo, N. Adams, and F. Huang. A conservative interface method for compressible flows. *Journal of Computational Physics*, 219 :553–578, 2006.

[77] E. Lauer, X.Y. Hu, S. Hickel, and N.A. Adams. Numerical modelling and investigation of symmetric and asymmetric cavitation bubble dynamics. *Computers and Fluids*, 69 :1–19, 2012.

[78] D. Hartmann, M. Meinke, and W. Schröder. A strictly conservative cartesian cut-cell method for compressible viscous flows on adaptive grids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200 :1038–1052, 2011.

[79] M. Grilli, S. Hickel, X.Y. Hu, and N.A. Adams. Conservative immersed interface method for compressible viscous flows with heat transfer. *Academy Colloquium on Immersed Boundary Methods : Current Status and Future Research Directions, Amsterdam, The Netherlands*, 2009.

[80] L. Schneiders, D. Hartmann, M. Meinke, and W. Schröder. An accurate moving boundary formulation in cut-cell methods. *Journal of Computational Physics*, 235 :786–809, 2013.

[81] M. Berger and M. Aftosmis. Progress towards a cartesian cut-cell method for viscous compressible flow. *50th AIAA Conference, Nashville*, 2012.

[82] D. Cecere and E. Giacomazzi. An immersed volume method for large eddy simulation of compressible flows using a staggered-grid approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 280 :1–27, 2014.

[83] V. Pasquariello, G. Hammerl, F. Örley, S. Hickel, C. Danowski, A. Popp, W.A. Wall, and N.A. Adams. A cut-cell finite volume – finite element coupling approach for fluid–structure interaction in compressible flow. *Journal of Computational Physics*, 307 :670–695, 2016.

[84] F. Örley, V. Pasquariello, S. Hickel, and N.A. Adams. Cut-element based immersed boundary method for moving geometries in compressible liquid flows with cavitation. *Journal of Computational Physics*, 33 :1–22, 2015.

[85] C. Günther, D. Hartmann, L. Schneiders, M. Meinke, and W. Schröder. A cartesian cut-cell method for sharp moving boundaries. *AIAA Paper*, 2011.

[86] W. Coirier and K. Powell. Solution-adaptive cartesian cell approach for viscous and inviscid flows. *AIAA Journal*, 34 :938–945, 1996.

[87] M. Chung. Cartesian cut cell approach for simulating incompressible flows with rigid bodies of arbitrary shape. *Computers and Fluids*, 35 :606–623, 2006.

[88] J.H. Seo and R. Mittal. A sharp interface immersed boundary method with improved mass conservation and reduced spurious pressure oscillations. *Journal of Computational Physics*, 230 :7347–7363, 2011.

[89] J. Mohd-Yusof. Combined immersed-boundary/b-spline methods for simulations of flow in complex geometries. *CTR Annual Research Briefs*, pages 317–327, 1997.

[90] A.G. Kravchenko, P. Moin, and R. Moser. Zonal embedded grids for numerical simulations of wall-bounded turbulent flows. *Journal of Computational Physics*, 127 :412–423, 1996.

[91] J. Mohd-Yusof. Development of immersed boundary methods for complex geometries. *CTR Annual Research Briefs*, pages 325–336, 1998.

[92] E.A. Fadlun, R. Verzicco, P. Orlandi, and J. Mohd-Yusof. Combined immersed-boundary finite-difference methods for three-dimensional complex flow simulations. *Journal of Computational Physics*, 161 :35–60, 2000.

[93] J. Kim, D. Kim, and H. Choi. An immersed-boundary finite-volume method for simulations of flow in complex geometries. *Journal of Computational Physics*, 171 :132–150, 2001.

[94] M. Uhlmann. An immersed boundary method with direct forcing for the simulation of particulate flows. *Journal of Computational Physics*, 209 :448–476, 2005.

[95] A.M. Roma, C.S. Peskin, and M.J. Berger. An adaptive version of the immersed boundary method. *Journal of Computational Physics*, 153 :509–534, 1999.

[96] A. Pinelli, I.Z. Naqavi, U. Piomelli, and J. Favier. Immersed-boundary methods for general finite-difference and finite-volume navier–stokes solvers. *Journal of Computational Physics*, 229 :9073–9091, 2010.

[97] W.K. Liu, Y. Chen, R.A. Uras, and C.T. Chang. Generalized multiple scale reproducing kernel particle methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139 :91–157, 1996.

Chapitre 2

Méthode des frontières immergées pour les écoulements compressibles

Sommaire

2.1 Formulation théorique 74
2.1.1 Fonction de passage 75
2.1.2 Formulation analytique des termes de forçage 78
2.2 Implémentation numérique 83
2.2.1 IBM _ sonicFOAM 83
2.2.2 IBM _ rhoCentralFOAM 83
2.2.3 Librairies IBM compressibles 84
Bibliographie 85

L'objectif de la thèse est de concevoir une librairie des frontières immergées capable de s'intégrer facilement dans les codes de simulations des écoulements compressibles. Ainsi, on a besoin de plusieurs architectures des solveurs compressibles avec des sources accessibles et modifiables. On choisit donc de développer la librairie des frontières immergées sur OpenFOAM.
Dans ce chapitre, on détaillera la formulation théorique des termes sources relatifs à notre approche des frontières immergées pour les écoulements compressibles et l'implémentation numérique de ces termes dans chaque solveur.

2.1 Formulation théorique

En écoulement compressible, les termes sources doivent prendre en compte la variation du champ de la température, du champ de la pression (ou de la masse volumique) en plus du champ des vitesses. Ainsi, les corrections des frontières immergées doivent s'appliquer aux :

- Bilan de masse
- Bilan de quantité de mouvement
- Bilan d'énergie

Pour ce faire, l'approche est basée sur la communication entre deux espaces :

- L'espace Lagrangien qui contient les éléments nécessaires pour le calcul des termes de corrections relatifs à chaque inconnue physique (vitesse, température, pression et masse volumique). Cet espace contient principalement les marqueurs Lagrangiens de la discrétisation de la géométrie étudiée. Mais comme la méthode peut prendre en compte des conditions aux limites de type "Dirichlet" ou de type "Neumann" pour chaque quantité physique, on propose ainsi la démarche suivante :
  - Dans le cas de conditions aux limites de Dirichlet, on calcule directement le terme source aux points Lagrangiens.
  - Dans le cas de conditions aux limites de Neumann, on a besoin de connaître la valeur des différentes grandeurs physiques en un point "très proche" du point Lagrangien. Pour ce faire, on associe à chaque point Lagrangien un vecteur normal et un vecteur tangentiel au solide et un nouveau point dans la direction normale qu'on appelle "point Neumann" (Voir figure 2.1). Ainsi, on applique également la fonction d'interpolation sur le point Neumann et on se servira de ces valeurs pour le calcul des termes de forçage.
- L'espace Eulérien qui coïncide avec les éléments du maillage initial du domaine d'étude et notamment le support relatif aux points Lagrangiens et aux points Neumanns. A ce niveau se fait la résolution des équations de Navier-Stokes modifiées.

La communication entre ces deux domaines est assurée par une fonction δ dite fonction de passage, et elle se fait à travers deux étapes :

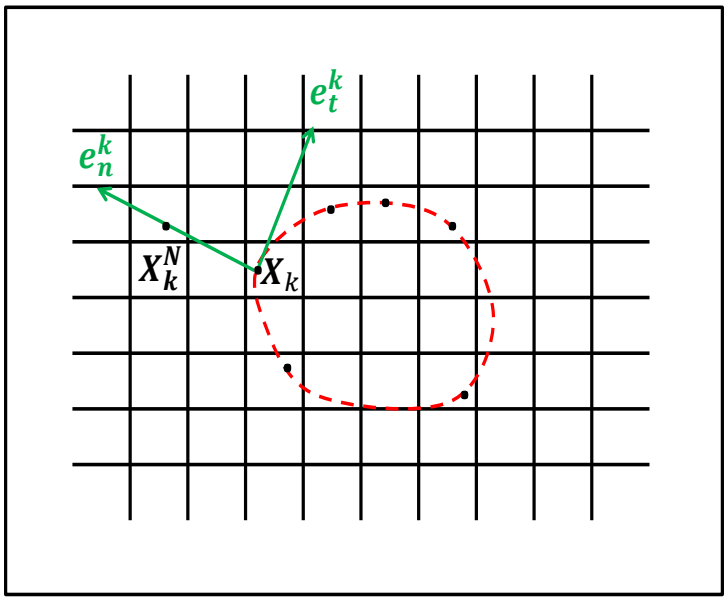


FIGURE 2.1 – Point Neumann $\mathbf{X}_k^N$ relatif au point Lagrangien $\mathbf{X}_k$.

- *L'étape d'interpolation* : Les quantités physiques définies ou calculées sur les points Eulériens sont interpolées sur les points Lagrangiens. Par la suite, les termes de forçages seront calculés en utilisant ces quantités interpolées.
- *L'étape de diffusion* : Une fois le terme de forçage calculé sur les points Lagrangiens, il se transfère sur les points Eulériens du maillage initial. Ce terme s'intègre par la suite dans les équations de Navier-Stokes.

Dans ce chapitre, on va commencer par définir la fonction de passage la plus adaptée à notre méthode des frontières immergées. Par la suite, on développera les termes de forçage des équations de Navier-Stokes relatifs à cette méthode.

2.1.1 Fonction de passage

Dans cette partie, on détermine l'opérateur mathématique d'interpolation le plus adéquat dans le cas des écoulements compressibles. Ainsi, il doit satisfaire un ensemble de critères tels que :

- Permettre de prédire correctement la présence de discontinuités des quantités physiques (Des ondes de choc par exemple)
- Utilisation des maillages non-uniformes tels que le maillage étiré ...
- Conservation de l'ordre de précision de la discrétisation spatiale initiale
- un temps d'exécution raisonnable

Ainsi, le choix de la fonction d'interpolation δ_h est déterminant afin de respecter l'ensemble des critères :

- Beyer et LeVeque [1] proposent la fonction la plus simple des opérateurs de passage avec un support seulement à deux points :

$$\delta_h(r) = \begin{cases} 1- \mid r/h \mid & \mid r \mid \leq h \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.1}$$

Par la suite, ils ont proposé une nouvelle formulation d'ordre 2 de la fonction d'interpolation en appliquant un opérateur de lissage à la première fonction. Elle s'écrit :

$$\delta_h(r) = \frac{1}{h} \begin{cases} \left(1 - (\frac{r}{h})^2\right) & \mid r \mid \leq h \\ \left(2- \mid 3r/h \mid +(\frac{r}{h})^2\right] & h \leq \mid r \mid \leq 2h \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.2}$$

Cette formulation présente un inconvénient majeur : sa dérivée première n'est pas continue. En plus, la fonction n'est pas adaptée au maillage non uniforme.

- Saiki and Berigen [2] introduisent une fonction d'interpolation qui s'écrit :

$$\delta_h(r) = \frac{1}{h} \begin{cases} (2h + r)/4h^2 & r \leq 2h \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.3}$$

C'est une fonction d'ordre 1 où la faible précision n'affecte que la région très proche de l'espace Lagrangien. Cependant, plusieurs phénomènes physiques ont pu être capturés avec succès notamment dans le cas d'écoulement incompressible autour d'un cylindre à un nombre de Reynolds $Re = 400$ où sont capturées les allées de Von Karman derrière le cylindre.
L'exécution de cette fonction est assez rapide parce qu'elle n'a besoin que de 2 points Eulériens par direction mais le désavantage le plus important de cette méthode est le fait qu'elle n'est pas adaptée à traiter les discontinuités.

- Après la première fonction de passage de l'approche originale de la méthode des frontières immergées, Peskin [3] a développé une nouvelle fonction d'interpolation qui s'écrit :

$$\delta_h(r) = \frac{1}{h} \begin{cases} (cos(\pi r/2h) + 1)/4h & r \leq 2h \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.4}$$

C'est une fonction d'ordre 2 mais qui ne fonctionne pas en présence des discontinuités, ce qui limite son utilisation dans le cas des écoulements compressibles.

- Lai et Peskin [4] ont introduit une nouvelle fonction d'interpolation qui contourne l'inconvénient de la fonction de Beyer & Leveque [1] . Elle s'écrit :

$$\delta_h(r) = \frac{1}{8h} \begin{cases} \left(3 - 2 \mid r \mid /h + \sqrt{1 + 4 \mid r \mid /h - 4((\mid r \mid /h)^2)}\right) & \mid r \mid \leq h \\ \left[5 - 2 \mid r \mid /h - \sqrt{-7 + 12 \mid r \mid /h - 4((\mid r \mid /h)^2)}\right] & h \leq \mid r \mid \leq 2h \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.5}$$

Ainsi, la dérivée première de cette fonction d'interpolation est continue mais elle n'est pas toujours adaptée pour être utilisée en maillages non uniformes.

- Pinelli [5] a utilisé la fonction introduite par Roma et al. [6] :

$$\delta_h(r) = \begin{cases} \frac{1}{3}\left(1 + \sqrt{-3(\mid r \mid /h)^2 + 1}\right) & 0 \leq r \leq 0.5h \\ \frac{1}{6}\left[5 - 3(\mid r \mid /h) - \sqrt{-3(1 - (\mid r \mid /h))^2 + 1}\right] & 0.5h \leq r \leq 1.5h \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.6}$$

Cette fonction présente plusieurs avantages et notamment sa capacité à être utilisée avec un maillage non-uniforme en gardant le même ordre de précision de la discrétisation initiale.
En fait, on a :

$$\sum_l \delta_h(r - l) = 1 \; \forall \; l \; \in \; \aleph \tag{2.7}$$

Donc on a bien la propriété de conservation.

Pour conclure, le tableau 2.1 résume les propriétés des principales fonctions d'interpolation utilisées au sein de la méthode des frontières immergées :

Fonction d'interpolation	ordre de précision	Présence de discontinuité	Dérivée continue	Maillage non-uniforme	Temps d'exécution
Saiki et Berigen [2]	-	-	-	-	++
Peskin [3]	+	-	+	-	++
Beyer & Leveque [1]	+	+	-	-	+
Lai et Peskin [4]	+	+	+	-	+
Pinelli et al. [5]	+	+	+	+	+

TABLE 2.1 – Résumé des propriétés des fonctions d'interpolation : (-) critère non satisfait ; (+) critère moyennement satisfait ; (++) critère satisfait

Ainsi, la fonction d'interpolation proposée par Pinelli et al. [5] (basée sur la fonction de Roma et al. [6] et transformée avec la démarche de Liu et al. [7]) est retenue pour le reste de ce travail.

L'étape de l'interpolation

D'une manière générale, l'interpolation d'une quantité physique G s'écrit en un point Lagrangien X_s :

$$[G](X_s) = \mathcal{I}[g]_{X_s} = \sum_{j \in D_s} (g)_j^n \delta_h(\mathbf{x}_j - \mathbf{X}_s)\Delta\mathbf{x} \tag{2.8}$$

avec :

- D_s : l'ensemble d'indice des points Eulériens du domaine
- g : la quantité physique à interpoler située en un point Eulérien
- $\mathbf{x}_j - \mathbf{X}_s$: la distance entre un point Lagrangien et chacun des points Eulériens du maillage

- $\Delta\mathbf{x}$: quadrature Eulérienne qui est égale, dans le cas d'un maillage cartésien, à : $\Delta\mathbf{x} = \Delta x \Delta y \Delta z$
- δ_h : la fonction d'interpolation

L'étape de diffusion

La diffusion des quantités physiques des points Lagrangiens vers les points Eulériens du maillage se fait avec la même fonction d'interpolation. L'expression d'une quantité physique g en un point Eulérien x_s s'écrit :

$$g(\mathbf{x}_s) = \sum_{k \in D_s} G_k \delta_h(\mathbf{x}_s - \mathbf{X}_k)\boldsymbol{\epsilon}_k \tag{2.9}$$

avec :

- D_s : l'ensemble des points Lagrangiens dont le support associé contient le point Eulérien x_s
- $\boldsymbol{\epsilon}_k$: la quadrature Lagrangienne

La quadrature Lagrangienne est calculée en résolvant le système linéaire :

$$A\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{1} \tag{2.10}$$

avec les vecteurs $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{N_s})^T$ et $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)^T$ ont la même dimension N_s où N_s est le nombre des points Lagrangiens, et A est la matrice définie par le produit :

$$A_{kl} = \sum_{j \in D_l} \delta_h(\mathbf{x}_j - \mathbf{X}_k)\delta_h(\mathbf{x}_j - \mathbf{X}_l) \tag{2.11}$$

2.1.2 Formulation analytique des termes de forçage

Comme introduit précédemment, les termes de corrections relatifs à la méthode des frontières immergées doivent être appliqués :

- au champ des vitesses afin d'imposer une condition de Dirichlet au solide.
- au champ de température afin d'imposer une condition de Neumann ou une condition de Dirichlet au solide.

Formulation analytique du terme de forçage de bilan de quantité de mouvement

On écrit l'équation de quantité de mouvement discrétisée en temps sur un point Eulérien du maillage x_s entre l'instant n et l'instant $n+1$:

$$a_{\mathbf{u}}\,(\rho\mathbf{u})^{n+1} = \phi_{\mathbf{u}}^{n+1/2} - \mathbf{grad}p^{n+1/2} + \mathbf{f}_{\mathbf{u}}^{n+1/2} \tag{2.12}$$

avec :

- $a_{\mathbf{u}}$: le coefficient de discrétisation temporelle et spatiale
- $\phi_{\mathbf{u}}^{n+1/2}$: un terme de discrétisation calculé au temps intermédiaire $n+\frac{1}{2}$ qui regroupe le terme de convection et de viscosité
- $\mathbf{grad}p^{n+1/2}$: terme de la pression au temps intermédiaire $n+\frac{1}{2}$
- $\mathbf{f}_{\mathbf{u}}^{n+1/2}$: terme de la force extérieure. Dans notre cas, il représente le terme de forçage à calculer au temps intermédiaire $n+\frac{1}{2}$

Donc à partir de l'équation 2.12, le terme de forçage optimal est dérivé comme :

$$\mathbf{f}_{\mathbf{u}}^{n+1/2} = a_{\mathbf{u}}\,(\rho\mathbf{u})^{d} - \phi_{\mathbf{u}}^{n+1/2} + \mathbf{grad}p^{n+1/2} \tag{2.13}$$

avec $(\rho\mathbf{u})^{d}$ désigne la valeur souhaitée pour la quantité de mouvement à l'instant $n+1$ au point Eulérien x_s.
En appliquant la transformation Eulérien-Lagrangien via la fonction de passage proposée par Pinelli et al.[5], l'équation 2.13 se transforme en :

$$\mathbf{F}_{\mathbf{u}}^{n+1/2} = a_{\mathbf{u}}\,(\varrho\mathbf{U})^{d} - \mathbf{\Phi}_{\mathbf{u}}^{n+1/2} + \mathbf{grad}P^{n+1/2} \tag{2.14}$$

- $\varrho\mathbf{U}$: le terme de la quantité de mouvement souhaitée aux points Lagrangiens
- $\mathbf{\Phi}_{\mathbf{u}}^{n+1/2}$: le terme de convection et de viscosité interpolée à l'instant $n+\frac{1}{2}$
- $\mathbf{grad}P^{n+1/2}$: le terme de la pression interpolée à l'instant $n+\frac{1}{2}$

A ce niveau le terme de la pression interpolée ne respecte par la condition aux limites de Neumann (c'est-à-dire un gradient normal de pression nul à la paroi). Ainsi pour faire apparaître la composante normale du gradient, on projette le terme de pression de l'équation 2.14 sur le repère de Frenet associé au point Lagrangien X_s :

$$\mathbf{grad}P^{n+1/2} = \mathbf{grad}P^{n+1/2}\overrightarrow{e_{ns}} + \mathbf{grad}P^{n+1/2}\overrightarrow{e_{ts}} \tag{2.15}$$

avec :

- $\overrightarrow{e_{ns}}$: composante normale dans le repère de Frenet
- $\overrightarrow{e_{ns}}$: composante tangentielle dans le repère de Frenet

or comme la composante normale du gradient du champ de la pression souhaitée $\mathbf{grad}P^{d}\overrightarrow{e_{ns}}$ est nulle, donc en ajoutant ce terme, l'équation 2.15 s'écrit :

$$\mathbf{F}_{\mathbf{u}}^{n+1/2} = a_{\mathbf{u}}\,(\varrho\mathbf{U})^{d} - \mathbf{\Phi}_{\mathbf{u}}^{n+1/2} + \mathbf{grad}P^{n+1/2}\overrightarrow{e_{ts}} - (\mathbf{grad}P^{d} - \mathbf{grad}P^{n+1/2}).\overrightarrow{e_{ns}} \tag{2.16}$$

D'autre part, si on ne prend pas en compte le terme de forçage et selon la même démarche, l'équation 2.12 s'écrit :

$$a_{\mathbf{u}}\,\overline{(\rho\mathbf{u})} = \phi_{\mathbf{u}}^{n+1/2} - \mathbf{grad}p^{n+1/2} \tag{2.17}$$

avec $a_{\mathbf{u}}\,\overline{(\rho\mathbf{u})}$ représente la quantité de mouvement sans prendre en compte le terme de forçage.
Donc en appliquant l'opérateur d'interpolation, l'équation 2.17 se transforme en :

$$a_{\mathbf{u}}\,\overline{(\varrho\mathbf{U})} = \mathbf{\Phi}_{\mathbf{u}}^{n+1/2} - \mathbf{grad}P^{n+1/2} \tag{2.18}$$

Dans ce travail de recherche, on considère que le champ de pression respecte la condition sur le solide suivante :

$$\mathbf{grad}P^{n+1/2}.\overrightarrow{e_{ns}} = 0 \tag{2.19}$$

Ainsi, l'équation 2.18 s'écrit :

$$a_{\mathbf{u}}\,\overline{(\varrho\mathbf{U})} = \mathbf{\Phi}_{\mathbf{u}}^{n+1/2} - \mathbf{grad}P^{n+1/2}.\overrightarrow{e_{ts}} \tag{2.20}$$

Finalement, en combinant les deux équations 2.16 et 2.20, on trouve le terme de forçage proposé pour le champ des vitesses :

$$\boxed{\mathbf{F}_{\mathbf{u}}^{n+1/2} = a_{\mathbf{u}}\left((\varrho\mathbf{U})^d - \overline{(\varrho\mathbf{U})}\right) - (\mathbf{grad}P^d - \mathbf{grad}P^{n+1/2}).\overrightarrow{e_{ns}}} \tag{2.21}$$

Les avantages de cette formulation de forçage sont :

- Ce terme s'intègre naturellement aux solveurs ségrégués, où les variables de flux ne sont pas résolues simultanément et elles peuvent être obtenues via des boucles correctives. Les nouvelles propositions exploitent cette fonctionnalité grâce à la séparation de la contribution de la pression et donc il est censé être efficace sur un plus grand spectre d'architectures CFD
- Le calcul des termes $\overline{(\rho_L\mathbf{U})}$ et $\mathbf{grad}P^{n+1/2}$ est intégré dans la formulation classique du solveur considéré, et une boucle complète supplémentaire sans addition du forçage n'est plus exigée. Cela implique une réduction significative des coûts de calcul associés à la détermination du forçage Lagrangien $\mathbf{F}$.

Formulation analytique du terme source de bilan d'énergie

Dans le cadre de l'analyse des écoulements compressibles, la spécificité de l'utilisation de la méthode des frontières immergées est dans la nécessité d'ajouter des termes de correction à l'équation d'énergie.
Comme montré dans le paragraphe 1.1, le travail de toutes les forces extérieures doit être intégré dans le bilan de l'énergie totale. Ainsi, le premier terme de correction de l'équation de l'énergie totale est le travail du terme de forçage de champ des vitesses présenté dans le paragraphe 2.1.2. Le premier terme de forçage de l'équation de l'énergie totale s'écrit en un point Eulérien x_s :

$$w_f = \mathbf{f}.\mathbf{u} \tag{2.22}$$

D'autre part, la correction du champ de température doit s'effectuer au niveau de l'équation de l'énergie interne. Or pour la température il existe deux types de conditions aux limites :

- Température imposée (Condition de Dirichlet)
- Flux de chaleur imposé (Condition de Neumann)

Cas de la température imposée

On commence par déterminer le terme de forçage thermique dans le cas d'une condition aux limites de Dirichlet. On reprend la même démarche que dans le cas de forçage du champ des vitesses mais on change l'équation de quantité de mouvement par l'équation de l'énergie interne :

$$a_e\,(\rho e)^{n+1} = \phi_e^{n+1/2} + \mathbf{f}_{\mathbf{u}}^{n+1/2}.\mathbf{u}^{n+1/2} + q_e^{n+1/2} \tag{2.23}$$

avec :

- a_e : le coefficient de discrétisation temporelle
- ϕ_e : un terme de discrétisation calculé au temps intermédiaire $n+\dfrac{1}{2}$ qui regroupe les terme de convection, du flux de chaleur et de travail de la pression et du frottement.
- $\mathbf{f}^{n+1/2}.\mathbf{u}^{n+1/2}$: terme de travail de forçage du champ des vitesses au temps intermédiaire $n+\dfrac{1}{2}$
- $q_e^{n+1/2}$: le terme source dans l'équation d'énergie interne qui compte pour l'action thermique associée à la surface du corps immergé, à calculer au temps intermédiaire $n+\dfrac{1}{2}$

Ainsi le terme de flux de correction peut s'écrire en un point Eulérien x_s :

$$q_e^{n+1/2} = a_e\,(\rho e)^d - \phi_e^{n+1/2} - \mathbf{f}_{\mathbf{u}}^{n+1/2}.\mathbf{u}^{n+1/2} \tag{2.24}$$

où $(\rho e)^d$ désigne la valeur souhaitée pour l'énergie interne à l'instant $n+1$ au point Eulérien x_s.
En appliquant la transformation Eulérien-Lagrangien via l'opérateur d'interpolation proposé par Pinelli et al.[5], l'équation 2.24 se transforme en :

$$Q_e^{n+1/2} = a_e\,(\varrho E)^d - \Phi_e^{n+1/2} - \mathbf{F}_{\mathbf{u}}^{n+1/2}.\mathbf{U}^{n+1/2} \tag{2.25}$$

- $(\varrho E)^d$: le terme d'énergie interne souhaitée aux points Lagrangiens
- $\Phi_e^{n+1/2}$: les termes de convection, de travail de la pression et du frottement et du flux de chaleur interpolés à l'instant $n+\dfrac{1}{2}$
- $\mathbf{F}_{\mathbf{u}}^{n+1/2}.\mathbf{U}^{n+1/2}$: le travail du forçage interpolé à l'instant $n+\dfrac{1}{2}$

D'autre part, d'après l'équation 2.23 l'énergie interne sans prendre en compte le flux de correction thermique s'écrit en un point Eulérien x_s :

$$a_e\,\overline{(\rho e)^{n+1}} = \phi_e^{n+1/2} + \mathbf{f}_{\mathbf{u}}^{n+1/2}.\mathbf{u}^{n+1/2} \tag{2.26}$$

Donc en appliquant l'opérateur d'interpolation, l'équation 2.26 se transforme en :

$$a_e\,\overline{(\varrho E)^{n+1}} = \Phi_e^{n+1/2} + \mathbf{F}_{\mathbf{u}}^{n+1/2}.\mathbf{U}^{n+1/2} \tag{2.27}$$

où $\overline{(\varrho E)^{n+1}}$ représente l'énergie interne interpolée en un point Lagrangien X_s sans prendre en compte le flux de correction thermique.
Ainsi, en combinant les deux équations 2.25 et 2.27, on trouve l'expression du flux de correction pour le champ de température :

$$Q^{n+1/2} = a_e \left((\varrho E)^d - \overline{(\varrho E)}\right) \tag{2.28}$$

Or comme on a $e = c_v\theta$ pour un gaz parfait ; donc on peut intégrer directement la température imposée dans l'expression du flux de correction pour le champ de température dans ce cas. L'équation 2.28 se transforme en :

$$\boxed{Q^{n+1/2} = a_e \, \varrho \, C_v(\Theta^d - \overline{\Theta})} \tag{2.29}$$

avec

- C_v : la capacité thermique à volume constant du fluide aux points Lagrangiens
- Θ^d : la température souhaitée aux points Lagrangiens
- $\overline{\Theta}$: la température interpolée aux points Lagrangiens

Cas du flux de chaleur imposé

Dans ce paragraphe, on détermine le terme de forçage de l'équation d'énergie pour une condition aux limites de type Neumann sur le champ des températures.
Goncalves [8] établit une relation entre la température et la vitesse au niveau de la paroi dans le cas du flux de chaleur imposé à travers la paroi (paroi adiabatique si le flux de chaleur est nul). La température sur un point Lagrangien x_s s'écrit alors :

$$\boxed{\Theta_{paroi} = \Theta_{ad} + \frac{P_r}{Cp_L}\frac{U_{ad}^2}{2}(1 + \frac{2Q_p}{\tau_d U_{ad}})} \tag{2.30}$$

avec :

- Θ_{ad} : la température à la maille adjacente à la paroi
- U_{ad} : la composante longitudinale de la vitesse à la maille adjacente à la paroi
- P_r : le nombre de Prandtl
- Cp_L : capacité thermique à pression constante du fluide
- Q_p : flux de chaleur pariétal souhaité
- τ_p : le frottement à la paroi

Ainsi, avec cette formulation de la température à la paroi, on peut ramener le problème avec une condition aux limites type Neumann à un problème avec une condition aux limites type Dirichlet et par la suite on va pouvoir utiliser la même démarche introduite dans le paragraphe 2.1.2 pour déterminer le terme de forçage du champ de température. L'équation 2.29 s'écrit de la même façon mais en changement la température souhaitée Θ^d au point Lagrangien x_s par la température à la paroi Θ_{paroi} :

$$\boxed{Q^{n+1/2} = a_e \, \varrho C v_L(\Theta^{paroi} - \overline{\Theta})} \tag{2.31}$$

2.2 Implémentation numérique

Les solveurs créés seront décrits dans ce paragraphe en se basant sur les solveurs *sonicFOAM* et *rhoCentralFOAM* et en intégrant les nouveaux termes de forçage relatifs à la nouvelle approche des frontières immergées. Ces termes de forçage sont basés sur les développements pour les écoulements incompressibles de Constant et al. [9, 10]

2.2.1 IBM _ sonicFOAM

La structure du code est basée sur le schéma présenté dans la section 1.3, l'algorithme passe par les étapes suivantes :

(a) Les équations de continuité et de quantité de mouvement discrétisées 1.28 - 1.29 sont résolues, ce qui donne une première estimation de $\rho^\star$, $\mathbf{u}^\star$.

(b) Une première estimation de la pression mise à jour $p^\star$ est obtenue via l'équation 1.33.

(c) Les champs calculés aux étapes (1) et (2) sont *interpolés* sur les marqueurs Lagrangiens afin d'obtenir l'ensemble des termes de forçage. Ces termes de forçage sont par la suite diffusés sur l'espace Eulérien afin de determiner la valeur des termes de forçage pour chaque cellule du maillage.

(d) Le système entier est à nouveau résolu, en partant des quantités calculées à l'instant n et incluant les termes de forçage. Les équations sont résolues itérativement jusqu'à ce que la convergence soit atteinte :

$$\rho^{n+1} = \frac{\phi_\rho(\rho^\star, \mathbf{u}^\star)}{a_\rho} \tag{2.32}$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \frac{\phi_\mathbf{u}(\rho^{n+1}, \mathbf{u}^\star)}{a_\mathbf{u}} - \frac{\mathbf{grad}p^\star}{a_\mathbf{u}} + \frac{\mathbf{f}}{a_\mathbf{u}} \tag{2.33}$$

$$e^{n+1} = \frac{\phi_e(\rho^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1}, e^\star)}{a_e} - \frac{div(p^\star \mathbf{u}^{n+1})}{a_e} + \frac{\phi_{fe}(\mathbf{f}, \mathbf{u}^{n+1})}{a_e} + \frac{q_e}{a_e} \tag{2.34}$$

$$p^{n+1} = \frac{\phi_p(p^\star, \rho^{n+1}, \mathbf{u^{n+1}})}{a_p} + \frac{\phi_{fp}(\mathbf{f})}{a_p} \tag{2.35}$$

Dans ce cas, on n'a pas besoin de recalculer le terme $\mathbf{f}$ pendant la boucle PISO et il est déterminé une seule fois au début de la boucle de résolution.

2.2.2 IBM _ rhoCentralFOAM

L'intégration de la méthode des frontières immergées dans le solveur rhoCentralFoam présenté dans la section 1.3 est effectuée à travers les étapes suivantes :

(a) La première étape de prédiction en résolvant les équations 1.22 , 1.23 , 1.24 , 1.25 et 1.27 pour obtenir $\rho^\star$, $e^\star$ et $\mathbf{u}^\star$ (et $p^\star$ via l'équation d'état). L'ensemble des termes de forçage est nul à cette étape.

(b) Les grandeurs physiques $\rho^\star$, $p^\star$, $e^\star$ et $\mathbf{u}^\star$ sont interpolées dans l'espace Lagrangien et les termes de forçage sont ainsi calculés. Ce champ est par la suite diffusé sur le maillage Eulérien, de sorte que la valeur des termes de forçage est déterminée sur l'ensemble de l'espace Eulérien.

(c) Les équations 1.23 , 1.24 , 1.25 et 1.27 sont à nouveau résolues en incluant les termes de forçage :

$$\rho^{n+1} = \frac{\phi_\rho(\rho^\star, \mathbf{u}^\star)}{a_\rho} \tag{2.36}$$

$$(\rho\mathbf{u})^{\star\star} = \frac{\phi'_{\mathbf{u}}((\rho\mathbf{u})^\star)}{a_{\mathbf{u}}} - \frac{\mathbf{grad}p^\star}{a_{\mathbf{u}}} \tag{2.37}$$

$$(\mathbf{u})^{\star\star} = (\rho\mathbf{u})^{\star\star}/\rho^{n+1} \tag{2.38}$$

$$\rho^{n+1}\mathbf{u}^{n+1} = \rho^{n+1}\mathbf{u}^{\star\star} + \frac{\phi_{\mathbf{u}}(\rho^\star, \mathbf{u}^\star)}{a_{\mathbf{u}}} - \frac{\phi'_{\mathbf{u}}((\rho\mathbf{u})^\star)}{a_{\mathbf{u}}} + \frac{\mathbf{f}}{a_{\mathbf{u}}} \tag{2.39}$$

$$(\rho e_t)^{\star\star} = \frac{\phi'_{e_t}((\rho e_t)^\star, \mathbf{u}^{\star\star})}{a_{e_t}} - \frac{div(p^\star\mathbf{u}^\star)}{a_{e_t}} \tag{2.40}$$

$$e^{\star\star} = (\rho e_t)^{\star\star}/\rho^{n+1} - 0.5((\mathbf{u})^{\star\star}.(\mathbf{u})^{\star\star}) \tag{2.41}$$

$$\theta^{\star\star} = e^{\star\star}/c_v \tag{2.42}$$

$$\begin{aligned}\rho^{n+1}e^{n+1} &= \rho^{n+1}e^{\star\star} + \frac{\phi_e(\rho^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1}, e^n)}{a_e} - \frac{div(\lambda(\theta^{\star\star})\mathbf{grad}(\theta^{\star\star}))}{a_e} \\ &- \frac{\phi'_{e_t}((\rho e_t)^\star, \mathbf{u}^{\star\star})}{a_{e_t}} + \frac{\phi_{fe}(\mathbf{f}, \mathbf{u}^{n+1})}{a_e} + \frac{q_e}{a_e}\end{aligned} \tag{2.43}$$

(d) Finalement, la température $\theta^{n+1} = e^{n+1}/C_v$ et la pression $p^{n+1} = \rho^{n+1} \cdot (r\theta^{n+1})$ sont mises à jour.

2.2.3 Librairies IBM compressibles

La libraire IBM comporte les fonctions nécessaires pour le calcul des termes de correction des frontières immergées. Ces fonctions peuvent être classées suivant trois catégories principales :

- Les fonctions de "Maillage-IBM" : l'ensemble des fonctions qui manipule les points Lagrangiens et leurs supports en points Eulériens et points Neumanns ainsi que les quantités physiques associées à chacun de ces points.
- Les fonctions de "Forçage-IBM" : l'ensemble des fonctions de calcul de l'interpolation et la diffusion des quantités physiques ainsi que le calcul des termes de correction.
- Les fonctions de "Interface-IBM" : l'ensemble des fonctions qui assure la liaison entre la librairie IBM et le solveur utilisé.

Bibliographie

[1] R.P. Beyer and R.J. Leveque. Analysis of a one-dimensional model for the immersed boundary method. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 29 :332–364, 1992.

[2] E.M. Saiki and S. Biringen. Numerical simulation of a cylinder in uniform flow : application of a virtual boundary method. *Journal of Computational Physics*, 123 :450–465, 1996.

[3] C.S. Peskin. The immersed boundary method. *Acta Numerica*, 11 :479–517, 2002.

[4] M.C. Lai and C.S. Peskin. An immersed boundary method with formal second-order accuracy and reduced numerical viscosity. *Journal of Computational Physics*, 160 :705–719, 2000.

[5] A. Pinelli, I. Naqavi, U. Piomelli, and J. Favier. Immersed-boundary methods for general finite-difference and finite-volume navier–stokes solvers. *Journal of Computational Physics*, 229 :9073–9091, 2010.

[6] A.M. Roma, C.S. Peskin, and M.J. Berger. An adaptive version of the immersed boundary method. *Journal of Computational Physics*, 153 :509–534, 1999.

[7] W.K. Liu, Y. Chen, R.A. Uras, and C.T. Chang. Generalized multiple scale reproducing kernel particle methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139 :91–157, 1996.

[8] E. Goncalves and R. Houdeville. Reassessment of the wall functions approach for rans computations. *Aerospace Science and Technology*, 5 :1–14, 2001.

[9] E. Constant, J. Favier, M. Meldi, P. Meliga, and E. Serre. An immersed boundary method in openfoam : verification and validation. *Computers & Fluids*, 157 :55–72, 2017.

[10] H. Riahi, M. Meldi, J. Favier, E. Serre, and E. Goncalves. A pressure-corrected immersed boundary method for the numerical simulation of compressible flows. *Journal of Computational Physics*, 374 :361–383, 2018.

Chapitre 3

Validation numérique des solveurs IBM

Sommaire

3.1 Écoulement compressible autour d'un cylindre circulaire 2D 88
3.1.1 Domaine de calcul . . . 88
3.1.2 Écoulement incompressible ($Ma = 0.05$,$Re = 40$ et 100) . . . 89
3.1.3 Écoulement subsonique ($Ma = 0.3$, $Re = 300$) . . . 93
3.1.4 Écoulement transsonique ($0.8 \leq Ma < 1$, $Re = 100$) . . . 94
3.1.5 Écoulement supersonique . . . 95
3.1.6 Écoulement autour d'un cylindre en mouvement . . . 98
3.2 Écoulement compressible autour d'un cylindre circulaire chauffé 2D . . . 103
3.2.1 Domaine de calcul . . . 103
3.2.2 Écoulement stationnaire . . . 105
3.2.3 Écoulement instationnaire($Ma = 0.025$) . . . 109
3.2.4 Sensibilité aux effets de compressibilité ($Re = 100$ et $r_\theta = 1.1$) . 111
3.2.5 Écoulement autour d'un cylindre chauffé oscillant ($Ma = 0.05$, $Re = 100$) . . . 112
3.3 Écoulement compressible autour d'un profil d'aile 2D . . . 115
3.3.1 Domaine de calcul . . . 115
3.3.2 Écoulement incompressible ($Ma = 0.05$) . . . 115
3.3.3 Écoulement transsonique ($Ma = 0.8$, $Re = 500$) . . . 120
3.3.4 Écoulement supersonique ($Ma = 2$, $Re = 1000$) . . . 121
3.3.5 Écoulement autour d'un profil d'aile en mouvement ($Ma = 0.05$) 123
Bibliographie . . . 125

La validation des nouveaux solveurs est effectuée pour un écoulement 2D autour de deux types de géométries (cylindre circulaire et profil d'aile) et avec trois conditions aux limites sur la température (neutre "Pas de terme source dans l'équation d'énergie", température imposée et flux imposé). Ces cas tests classiques ont été largement étudiés dans la littérature pour un large spectre de valeurs de Re et Ma, et de nombreuses bases de données sont disponibles pour la comparaison.

3.1 Écoulement compressible autour d'un cylindre circulaire 2D

Dans cette première étape de validation nous considérons exclusivement l'effet IBM sur l'équation de quantité de mouvement, afin de bien étudier le comportement de ce forçage.

3.1.1 Domaine de calcul

La taille du domaine de calcul est choisie pour être égale à $[-16D, 48D]$ dans la direction de l'écoulement (x) et $[-16D, 16D]$ dans la direction verticale (y) avec D le diamètre du cylindre. Le domaine physique a été déterminé à partir des résultats d'IBM obtenus pour des écoulements incompressibles [1]. Le centre du cylindre circulaire est choisi pour être à l'origine du référentiel (Figure 3.1). Des éléments du maillage hexaédrique ont été choisis pour la discrétisation. Le domaine physique dans la zone centrale $x \times y \in [-D,\, D] \times [-D,\, D]$ est discrétisé en éléments homogènes de taille $\Delta x = \Delta y = 0.01D$. En dehors de cette région centrale, un déraffinement des éléments du maillage est imposé (rapport entre les éléments voisins $r = 1.05$) dans les deux directions x et y. Le nombre total d'éléments du maillage qui en résulte est égal à 1.5×10^5. De plus, les conditions aux limites ont été soigneusement choisies pour chaque cas, en tenant compte du nombre de Mach, et de sorte que leur effet sur les résultats prévus puisse être considéré comme négligeable. D'une manière générale, une condition d'entrée sur la vitesse est imposée en amont (côté gauche), une condition de sortie de conservation de masse est imposée en aval et les conditions de glissement / non-réflexion sont choisies dans la direction verticale.
Pour chaque cas analysé, les principales quantités physiques sont comparées aux données disponibles de la littérature. En particulier, les coefficients aérodynamiques sont définis comme :

$$C_D = \frac{2F_x}{\rho_\infty D U_\infty^2}\,, \qquad C_L = \frac{2F_y}{\rho_\infty D U_\infty^2} \tag{3.1}$$

où les forces F_x et F_y sont directement calculées sur les points Lagrangiens et projetées dans la direction de l'écoulement x et la direction verticale y, respectivement. ρ_∞ et U_∞ représentent les grandeurs physiques asymptotiques imposées à l'entrée.
Pour notre méthode IBM, le coefficient de traînée est directement calculé à l'aide des informations disponibles sur les points Lagrangiens.

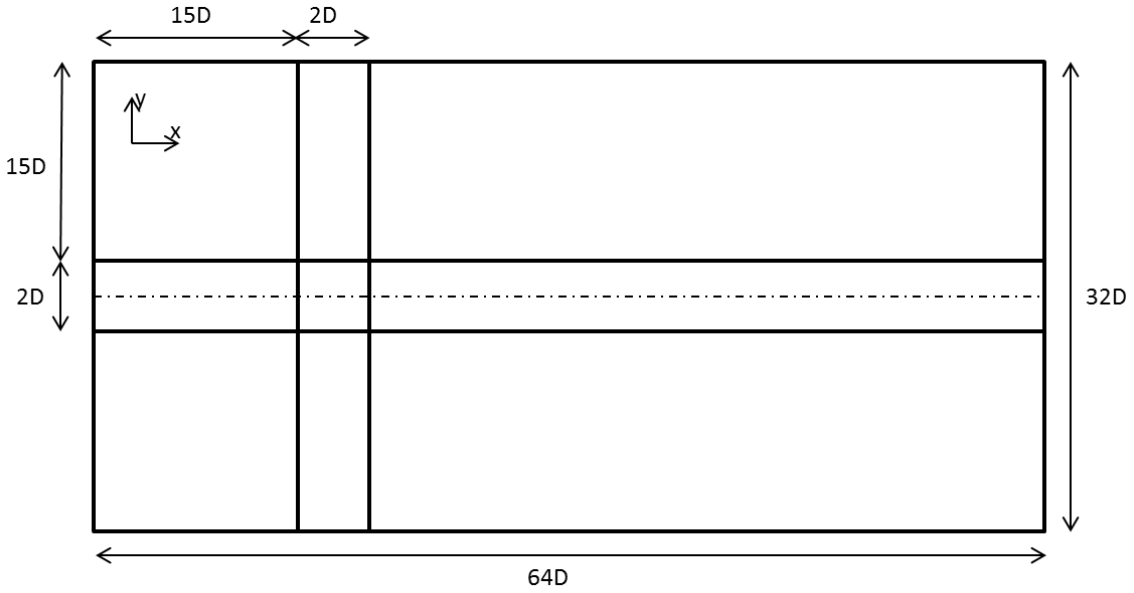


FIGURE 3.1 – Domaine de calcul 2D utilisé pour la validation IBM.

3.1.2 Écoulement incompressible ($Ma = 0.05$,$Re = 40$ et 100)

En raison de l'effet presque négligeable de la compressibilité dans ce cas, le solveur $IBM-sonicFoam$ est choisi pour l'investigation. Deux configurations sont étudiées pour les nombres de Reynolds $Re = 40$ et $Re = 100$.

Pour $Re = 40$ l'écoulement est caractérisé par une région de recirculation laminaire stable (voir Figure 3.2) puisque le point critique d'instabilité de Bénard - von Kàrman n'est pas atteint. Tous les paramètres géométriques caractéristiques et les coefficients aérodynamiques (coefficient de traînée C_D) montrent une bonne convergence avec les données de la littérature rapportées dans le tableau 3.1. De plus, on observe que le coefficient de pression $C_p = \frac{2\times(p-p_\infty)}{\rho_\infty \times \mathbf{U}_\infty^2}$ est en bon accord avec les résultats de Stålberg [2] comme le montre la figure 3.3.

Pour $Re = 100$ on observe un comportement instationnaire caractérisé par un cycle périodique de von Kàrman. Les résultats incluent aussi le nombre de Strouhal $S_t = \frac{fD}{U_\infty}$, où f est la fréquence de formation des structures instationnaires calculée en utilisant l'évolution temporelle du coefficient de portance C_L. La comparaison montre un très bon accord avec les résultats disponibles dans la littérature, voir Table 3.1.
De plus, les isocontours de la vorticité axiale instantanée sont représentés sur la figure 3.4 et l'évolution temporelle du coefficient de portance est illustrée sur la figure 3.5(a).

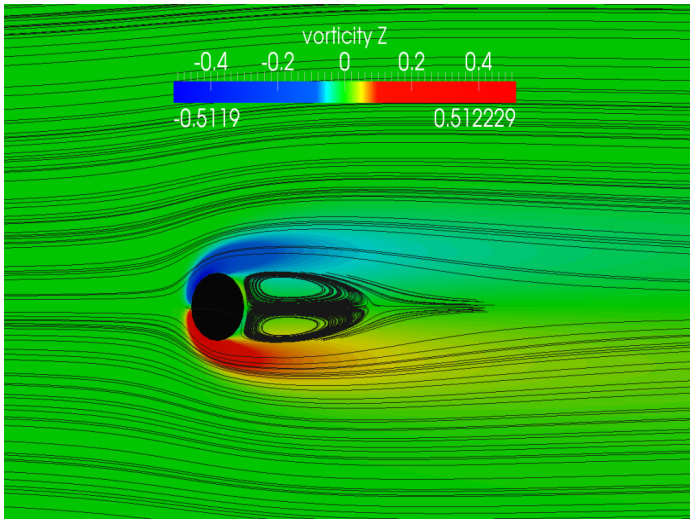


FIGURE 3.2 – Les isocontours de vorticité axiale et les lignes de courant pour l'écoulement autour d'un cylindre circulaire pour $Ma = 0.05$ et $Re = 40$. Un zoom autour de la zone de recirculation est affiché.

Study	C_D	x_s	a	b	α_s	C_l^{rms}	S_t
Present (Re=40)	1.58	2.35	0.7	0.6	53.7	-	-
Tritton [3] (Exp.)	1.59	-	-	-	-	-	-
Le et al. [4] (Num.)	1.56	2.22	-	-	53.6	-	-
Dennis & Chang [5] (Num.)	1.52	2.35	-	-	53.8	-	-
Coutanceau & Bouard [6] (Exp.)	-	2.13	0.76	0.59	53.5	-	-
Gautier et al. [7] (Exp.)	1.49	2.24	0.71	0.59	53.6	-	-
Chiu et al. [8] (Num.)	1.52	2.27	0.73	0.6	53.6	-	-
Taira & Colonius [9] (Num.)	1.54	2.30	0.73	0.60	53.7	-	-
Brehm et al. [10] (Num.)	1.51	2.26	0.72	0.58	52.9	-	-
Present (Re=100)	1.35	-	-	-	-	0.237	0.164
Berger & Wille [11] (Exp.)	-	-	-	-	-	-	0.16-0.17
Le et al. [4] (Num.)	1.37	-	-	-	-	0.228	0.160
White [12] (Theo.)	1.46	-	-	-	-	-	
Stalberg et al. [2] (Num.)	1.32	-	-	-	-	0.233	0.166
Russell & Wang. [13] (Num.)	1.38	-	-	-	-	0.212	0.172
Chiu et al. [8] (Num.)	1.35	-	-	-	-	0.214	0.167
Liu et al. [14] (Num.)	1.35	-	-	-	-	0.240	0.165
Brehm et al. [10] (Num.)	1.32	-	-	-	-	0.226	0.165

TABLE 3.1 – Comparaison des quantités caractéristiques d'écoulement autour d'un cylindre circulaire avec les données disponibles dans la littérature pour $Ma = 0.05$. C_D est le coefficient de traînée, C_L est le coefficient de portance, S_t le nombre de Strouhal, x_s la longueur de recirculation, (a, b) sont les longueurs caractéristiques de la zone de recirculation et α_s est l'angle de séparation. Les données sont fournies pour $Re = 40$ (en haut) et $Re = 100$ (en bas), respectivement.

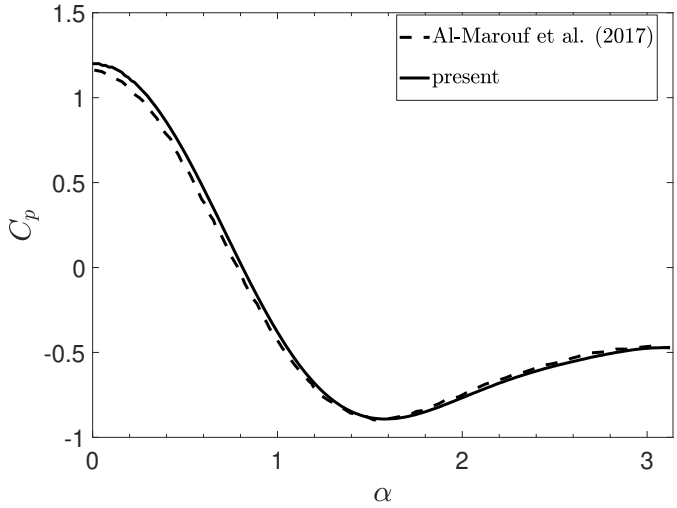


FIGURE 3.3 – Coefficient de pression C_p le long de la surface du cylindre, pour l'angle $\alpha \in [0, \pi]$. Les résultats d'IBM sont comparés aux données disponibles dans la littérature, solution stationnaire pour $Ma = 0.05$ et $Re = 40$.

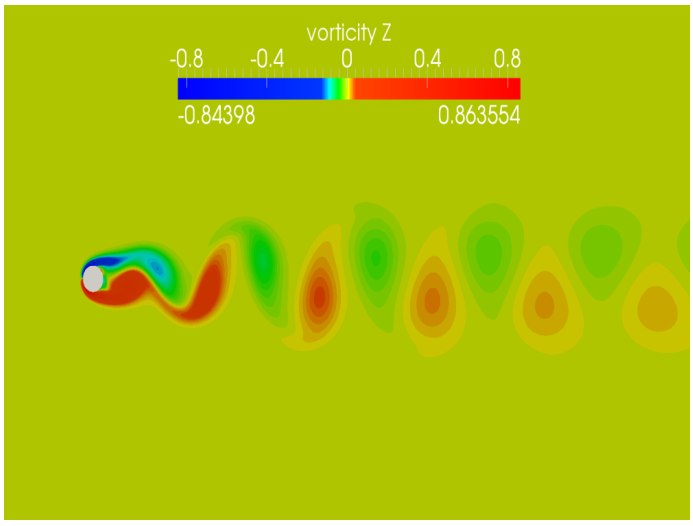
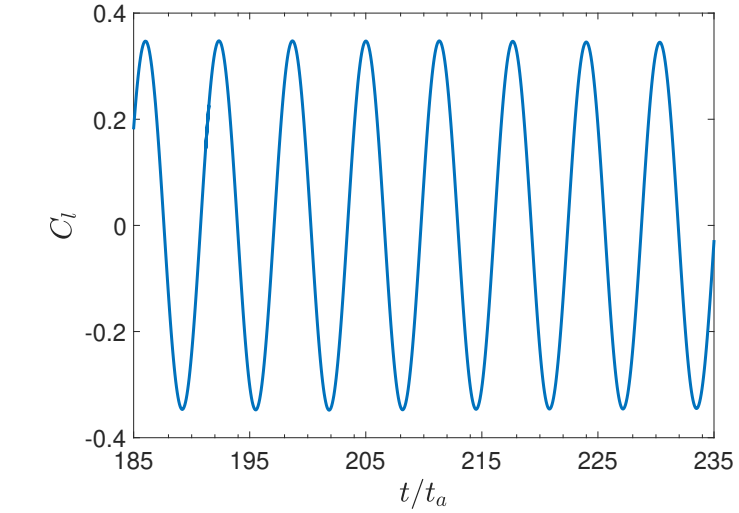
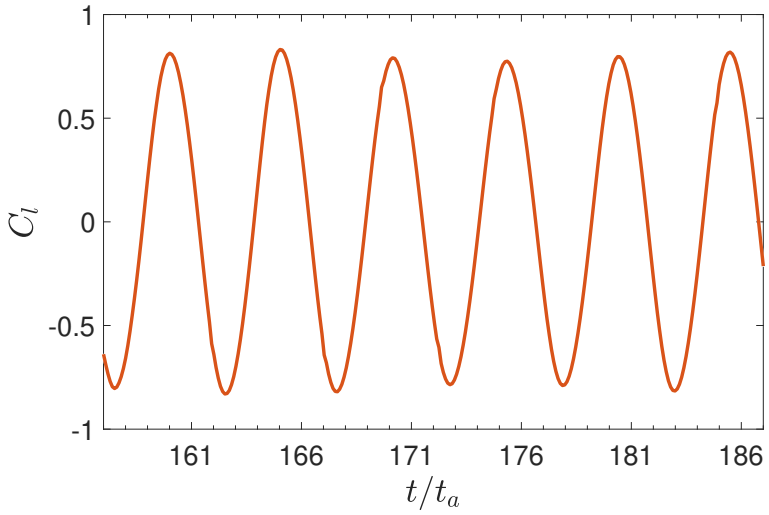


FIGURE 3.4 – Isocontours de vorticité axiale de l'écoulement autour d'un cylindre circulaire, solution instationnaire pour $Ma = 0.05$ et $Re = 100$. Un zoom autour de la région de sillage est montré.



(a)



(b)

FIGURE 3.5 – Évolution temporelle du coefficient de portance C_l pour l'écoulement autour d'un cylindre circulaire pour : (a) $Ma = 0.05$ $Re = 100$, (b) $Ma = 0.3$ $Re = 300$. t_a est le temps d'advection caractéristique défini par $t_a = D/U_\infty$.

3.1.3 Écoulement subsonique ($Ma = 0.3$, $Re = 300$)

Le solveur *IBM-sonicFoam* est utilisé pour effectuer la présente investigation. Pour ce cas, les effets de compressibilité ne sont plus négligeables, bien qu'ils ne pilotent pas l'évolution du l'écoulement. On retrouve les observations de Takahashi et al. [15] concernant le comportement bidimensionnel de ce cas, contrairement à ce qui est obtenu pour des écoulements incompressibles au même Re. Les isocontours de vorticité axiale sont représentés sur la figure 3.6 et l'évolution temporelle du coefficient de portance est tracée sur la figure 3.5 (b).

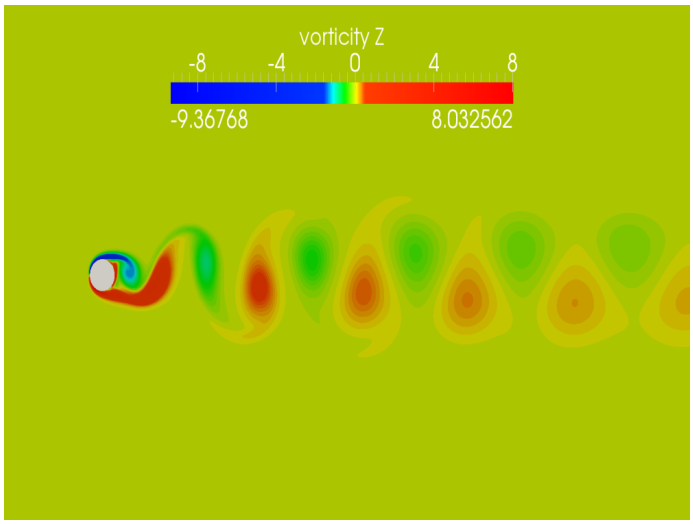


FIGURE 3.6 – Isocontours de vorticité de l'écoulement autour d'un cylindre circulaire, $Ma = 0.3$ et $Re = 300$.

Les résultats obtenus pour les quantités caractéristiques de l'écoulement sont comparés à une simulation classique avec un maillage conforme à la géométrie disponible dans la littérature [15] dans la Table 3.2. Les coefficients globaux de l'écoulement correspondent bien à la référence disponible, ce qui prouve la capacité du solveur IBM proposé pour la simulation des écoulements légèrement compressibles.

Case	C_D	C_l^{rms}	$\triangle_{choc}$
Present (Ma=0.3)	1.5	0.566	-
Takahashi et al. [15] (Num.)	1.444	0.573	
Present (Ma=2)	1.51	-	0.69
Takahashi et al. [15] (Num.)	1.55	-	-
Billig. [16] (Theo.)	-	-	0.62

TABLE 3.2 – Coefficient de traînée C_D, L'écart type du coefficient de portance C_l^{rms} et emplacement de front de choc $\triangle_{choc}$, calculés pour l'écoulement autour d'un cylindre circulaire pour $Re = 300$, $Ma = 0.3$ et $Ma = 2$. Les résultats obtenus sont comparés aux données disponibles dans la littérature.

3.1.4 Écoulement transsonique ($0.8 \leq Ma < 1$, $Re = 100$)

Dans ce cas, les effets de compressibilité deviennent importants et le solveur IBM-rhoCentralFoam est ainsi choisi pour les simulations. On considère un écoulement transsonique autour d'un cylindre à $Re = 100$ et pour les nombres de Mach $Ma = 0.8$ et $Ma = 0.9$. Le traitement de ce cas nécessite un domaine de calcul et des conditions aux limites adaptés à ces problématiques. En fait, on élargit les dimensions du domaine de calcul utilisé dans les études précédentes dans la directions transversales avec $[-16D, 48D]$ dans la direction de l'écoulement (x) et $[-100D, 100D]$ dans la direction verticale (y). Des éléments du maillage hexaédrique ont été également choisis pour la discrétisation. Le domaine physique dans la zone centrale $x \times y \in [-D,\ D] \times [-D,\ D]$ est discrétisé en éléments homogènes de taille $\Delta x = \Delta y = 0.01D$. En dehors de cette région centrale, un déraffinement des éléments du maillage est imposé (rapport entre les éléments voisins $r = 1.05$) dans les deux directions x et y. Le nombre total d'éléments du maillage qui en résulte est égal à 2.5×10^5 (Voir figure 3.7). De plus, une condition d'entrée sur les valeurs totales de la pression et de la température est imposée en amont (côté gauche), une condition de sortie de conservation de masse est imposée en aval et les conditions de glissement / non-réflexion sont également choisies dans la direction verticale.

Les figures 3.8 et 3.9 présentent les isocontours du nombre de Mach et de masse vo-

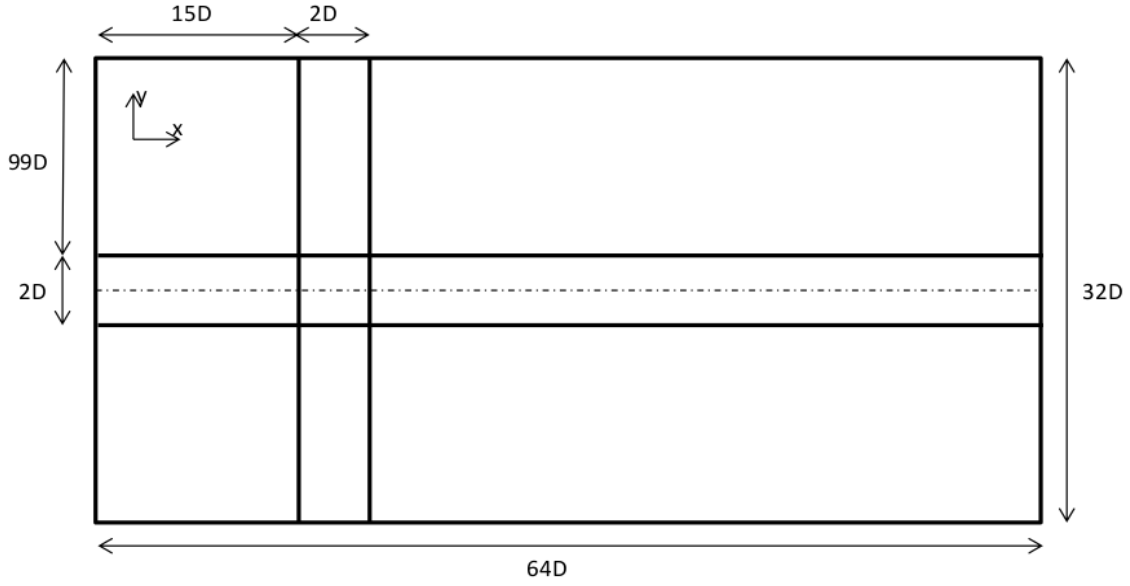


FIGURE 3.7 – Domaine de calcul 2D utilisé pour la validation IBM.

lumique, respectivement, pour cet écoulement transsonique. On identifie bien la zone supersonique et l'onde de choc et on souligne la capacité de notre solveur à capturer ces phénomènes physiques même quand ils se produisent au niveau des points Lagrangiens ce qui présente un grand défi des méthodes des frontières immergées.
Il faut préciser que les petites fluctuations au bout de sillage sont dues à une convergence incomplète et non à un comportement physique.

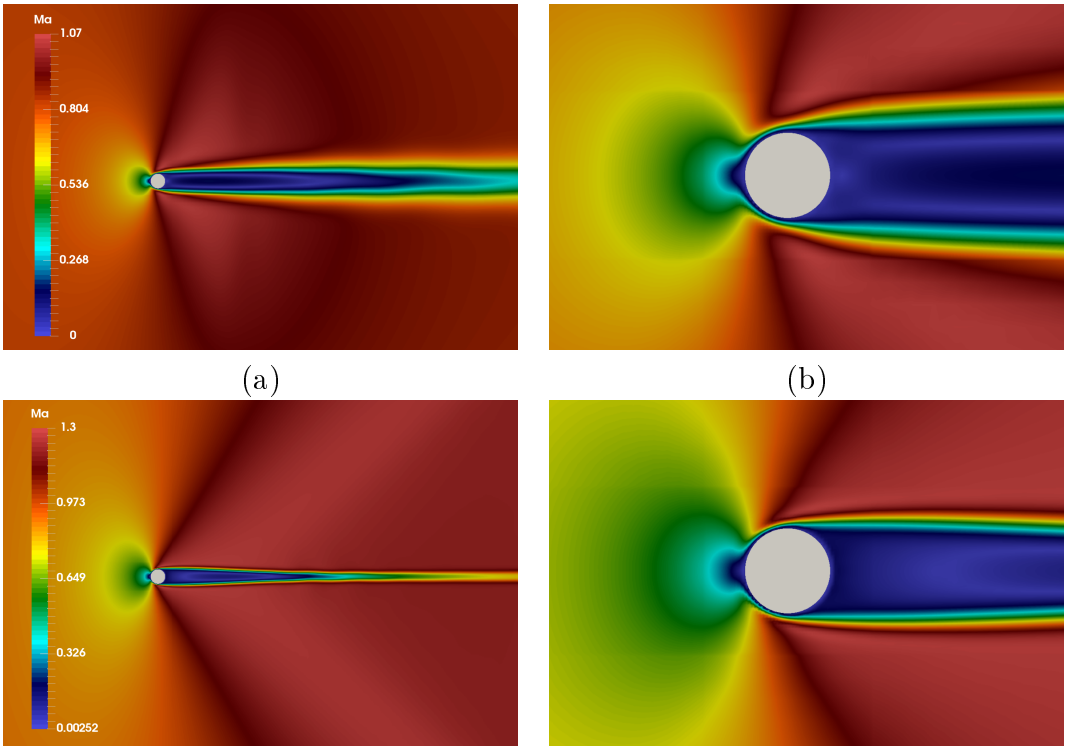


FIGURE 3.8 – Isocontours du nombre de Mach pour un écoulement transonique autour d'un cylindre circulaire à $Re = 100$; (a) et (b) $Ma = 0.8$, (c) et (d) $Ma = 0.9$.

3.1.5 Écoulement supersonique

Écoulement laminaire ($Ma = 2.0$, $Re = 300$)

Les forts effets de compressibilité induisent une régularisation de l'écoulement, qui est dans ce cas stationnaire et bidimensionnel. Les isocontours de masse volumique dans le champ proche du cylindre sont représentés sur la figure 3.10. Le solveur IBM-rhoCentralFoam capture avec succès le comportement stationnaire et symétrique de l'écoulement. De plus, un choc en amont du cylindre circulaire est clairement obtenu.

La comparaison du coefficient de traînée C_D et de l'emplacement du front de choc $\triangle_{shock}$ avec les données disponibles de la littérature [15, 16] est reportée dans le Tableau 3.2. On constate qu'une bonne prédiction de l'écoulement est obtenue. De plus, la distribution du coefficient de pression est comparée aux données de Takahashi et al. [15] en Fig.3.11, montrant à nouveau, une très bonne correspondance avec la référence disponible.

Écoulement turbulent ($Ma = 1.7$, $Re = 2 \times 10^5$)

Dans ce cas, on augmente le nombre de Reynolds afin d'avoir un régime turbulent derrière le cylindre. On n'utilise pas de modèle de turbulence pour l'investigation de ce cas et on se limite juste à tester le comportement de notre solveur pour des nombres de Reynolds élevés. Il faut noter que le cas de référence Al-Marouf et al. [17] n'utilise pas également

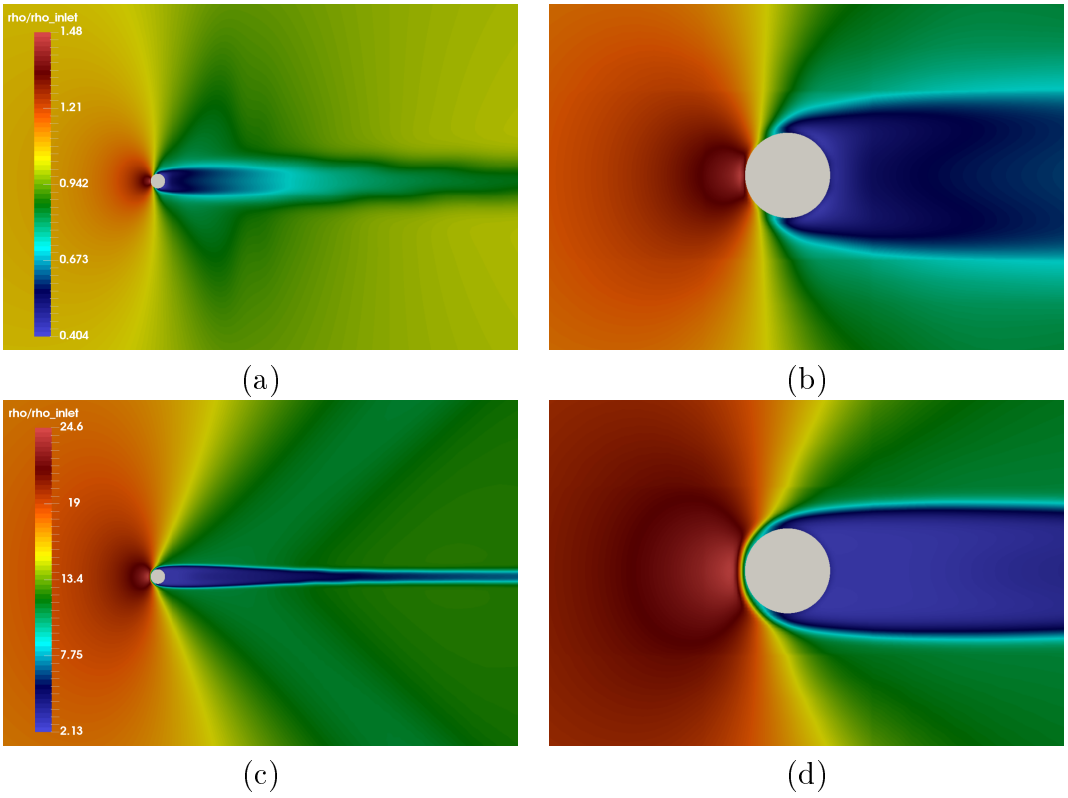
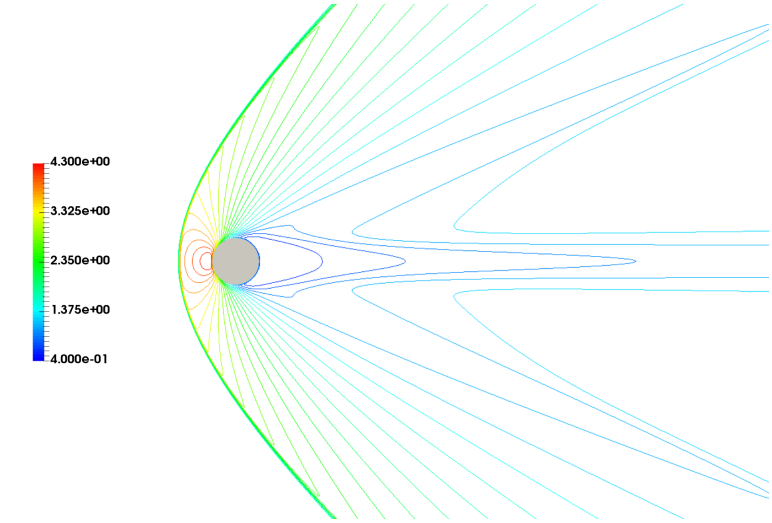


FIGURE 3.9 – Isocontours de masse volumique pour un écoulement transonique autour d'un cylindre circulaire à $Re = 100$; (a) et (b) $Ma = 0.8$, (c) et (d) $Ma = 0.9$.

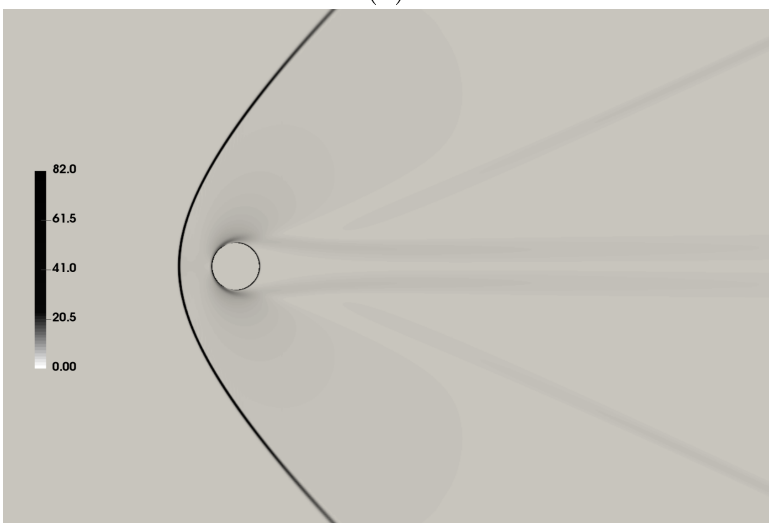
un modèle de turbulence.
Nous examinons l'écoulement supersonique autour d'un cylindre à un nombre de Mach $Ma = 1.7$, et un nombre de Reynolds $Re = 2 \times 10^5$. La figure 3.12 représente les champs du nombre de Mach (a) et de masse volumique (b), obtenus après l'établissement d'un régime permanent. Les valeurs obtenus de l'angle de séparation, de l'emplacement du choc et du coefficient de traînée sont présentées dans le tableau 3.3. Un bon accord entre nos résultats est observé en comparaison avec d'autres données de la littérature numériques [17, 18] et expérimentales [19].

Case	C_D	α_s	$\triangle_{choc}$
Present	1.37	111	1.035
Al-Marouf et al. [17] (Num.)	1.35	113	1.035
Tullio et al. [18] (Num.)	1.41	113	1.04
Bashkin et al. [19] (Expe.)	1.40	112	-

TABLE 3.3 – Coefficient de traînée C_D, l'angle de séparation α_s et emplacement de front de choc $\triangle_{choc}$, calculés pour l'écoulement autour d'un cylindre circulaire pour $Ma = 1.7$ et $Re = 2 \times 10^5$. Les résultats obtenus sont comparés aux données disponibles dans la littérature.



(a)



(b)

FIGURE 3.10 – (a) Isocontours de masse volumique et (b) Critère de Schlieren sont représentés pour un écoulement autour d'un cylindre circulaire, $Ma = 2.0$, $Re = 300$.

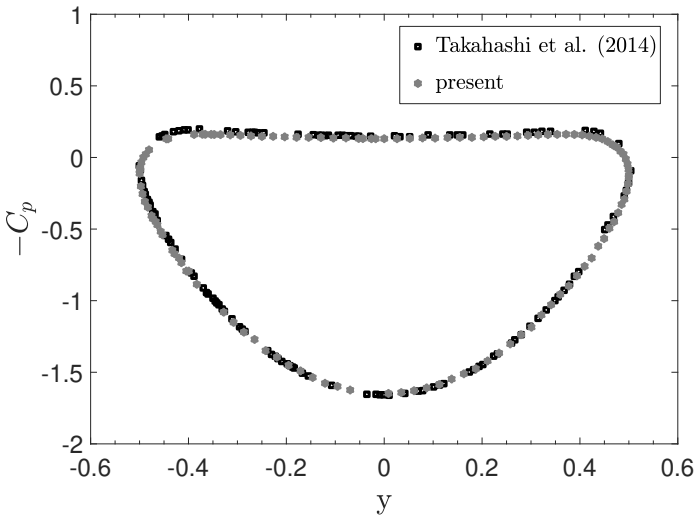


FIGURE 3.11 – Répartition du coefficient de pression pour le cas $Ma = 2$, $Re = 300$. Les résultats obtenus sont comparés aux données disponibles dans la littérature.

3.1.6 Écoulement autour d'un cylindre en mouvement

On s'intéresse dans ce paragraphe à l'analyse des écoulements compressibles autour de géométries mobiles. L'approche des frontières immergées est notamment développée pour ses capacités à traiter ce type de problèmes en aérodynamique externe.
L'algorithme des deux solveurs compressibles est légèrement modifié pour pouvoir prendre en compte le mouvement du corps :

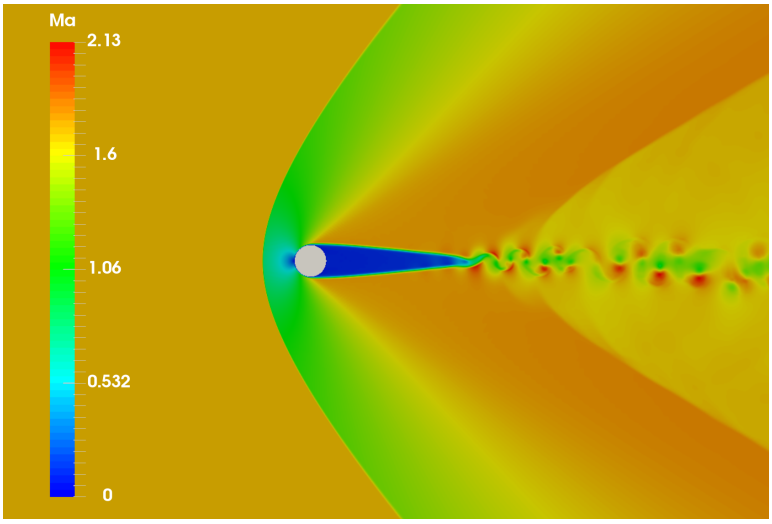
- Une étape de prédiction avec une première estimation des champs des vitesses, température, pression et masse volumique.
- Calcul des nouvelles positions des points Lagrangiens avec l'équation de mouvement imposé.
- Calcul des termes de forçage sur les nouvelles positions des points Lagrangiens.
- Une dernière étape avec la résolution des équations de Naviers-Stokes en rajoutant les termes de forçage

Par la suite, on passe à la validation des capacités de nos solveurs pour la simulation des écoulements autour d'obstacles en mouvement. Pour ce faire, nous nous concentrons sur 2 cas :

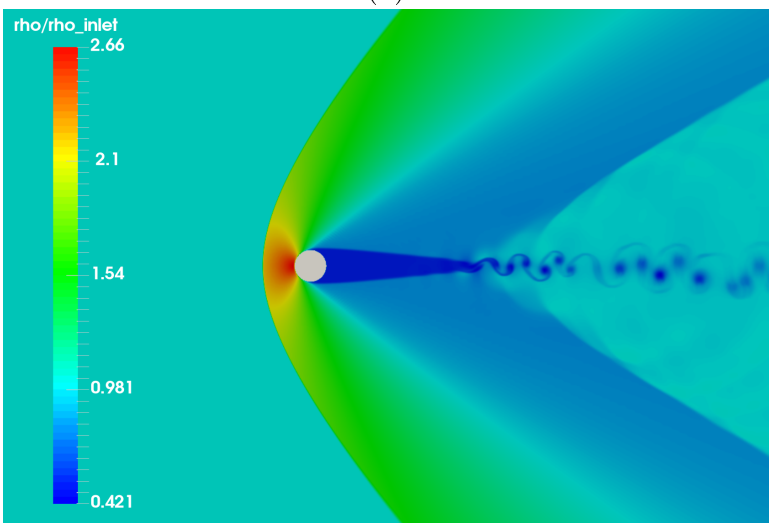
- Cylindre en oscillation forcée transversale
- Cylindre en oscillation forcée longitudinale

Oscillation forcée transversale ($Ma = 0.05, Re = 500$)

On étudie tout d'abord un écoulement incompressible autour d'un cylindre oscillant à $Ma = 0.05$ et $Re = 500$. Constant et al. [1] montrent que cet écoulement est bidimensionnel. L'objectif de ce cas test est la validation du solveur $IBM - sonicFOAM$ sur ce



(a)



(b)

FIGURE 3.12 – (a) Isocontours de Ma et (b) masse volumique sont représentés pour un écoulement autour d'un cylindre circulaire, $Ma = 1.7$, $Re = 200000$.

type de problématique. Le mouvement du cylindre est décrit par :

$$Y_c(t) = Acos(2\pi f_c t) \tag{3.2}$$

avec :

- Y_c : Évolution instantanée de la position du centre du cylindre
- A : Amplitude des oscillations
- f_c : Fréquence des oscillations

On choisit de reprendre les conditions utilisées par Constant et al. [1] avec une amplitude $A = 0.25 \times D$ et une fréquence $f_c = 0.975 f_0$ avec f_0 la fréquence de génération des structures instationnaires dans le cas d'un cylindre fixe avec le même Ma et Re.
Afin de déterminer la fréquence f_0 de notre système, on effectue un calcul préliminaire sur un cylindre fixe.
La figure 3.13 montre l'évolution du nombre de Mach et de la vorticité autour du cylindre sur une période pour un régime établi. On constate qu'on arrive bien à capter la dynamique de l'écoulement.
De plus, nos résultats se comparent bien avec les données disponibles dans la littérature et rapportées dans le tableau 3.4.
Finalement, on présente l'évolution temporelle du coefficient de portance (Figure 3.14)

Cas	C_D	C_l^{rms}	St
Present (Ma = 0.05,Re = 500)	1.486	1.42	0.23
Constant et al. [1]	1.515	1.41	0.228
Blackburn et Henderson [20]	1.445	1.27	0.228
Henderson. [21]	1.445	-	-
Norberg. [22]	-	-	0.205

TABLE 3.4 – Coefficient de traînée C_D, Valeur efficace du coefficient de portance C_l^{rms} et nombre de Strouhal St, calculés pour l'écoulement autour d'un cylindre circulaire oscillant pour $Ma = 0.05$ et $Re = 500$. Les résultats obtenus sont comparés aux données disponibles dans la littérature.

et on la compare aux résultats de Constant et al. [1](Figure 3.15).

Oscillation forcée longitudinale ($Ma = 0.05, Re = 100$)

Dans cette partie, on modifie l'orientation des oscillations du cylindre dans la même direction que l'écoulement. On change également le nombre de Mach par rapport au premier cas afin de tester le deuxième solveur $IBM - rhoCentralFOAM$. On choisit de simuler un écoulement à $Ma = 0.05$ et $Re = 100$ et on compare nos résultats avec les données de l'étude de Örley et al. [23].
Le mouvement du cylindre est décrit par :

$$X_c(t) = Asin(2\pi f_c t) \tag{3.3}$$

avec $A = 0.14 \times D$ et $f_c = 2 \times f_0$. Également, on effectue un calcul préliminaire sur un cylindre fixe afin de déterminer la fréquence f_0.

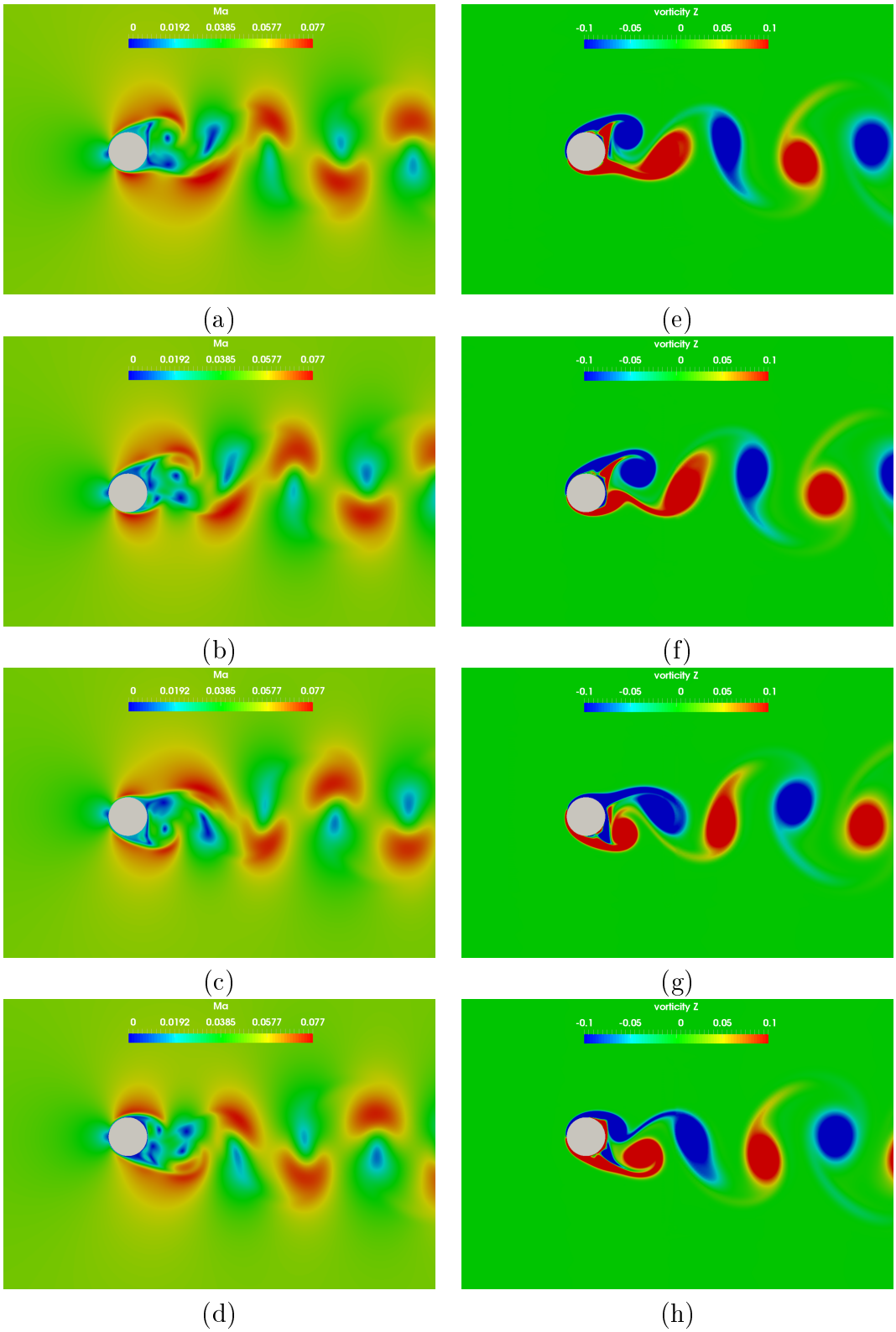


FIGURE 3.13 – Iso-contours du nombre de Mach (a)-(d) et vorticité (e)-(h) pour un écoulement autour d'un cylindre oscillant transversal $Ma = 0.05$: (a) et (e) : $t = 0.25T$; (b) et (f) : $t = 0.5T$;(c) et (g) : $t = 0.75T$;(d) et (h) : $t = 1.0T$ avec T : Temps de retournement des lâchers instationnaires.

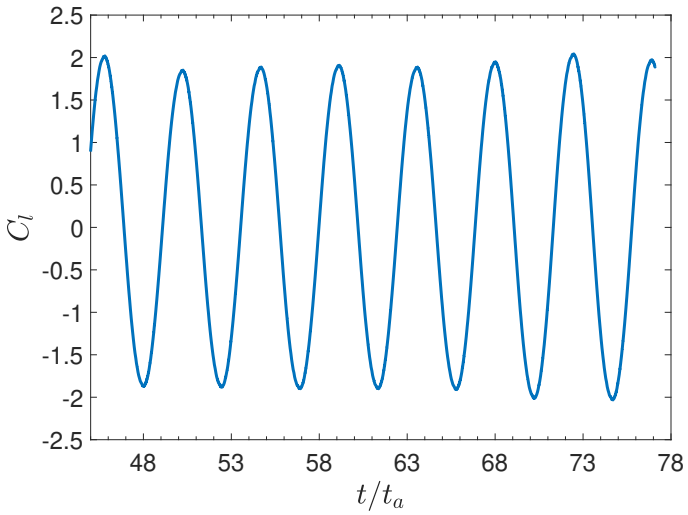


FIGURE 3.14 – Évolution temporelle du coefficient de portance C_l pour l'écoulement autour d'un cylindre circulaire oscillant(transversal)

La figure 3.16 montre l'évolution du Mach et de la vorticité autour du cylindre sur une période pour un régime établi. En comparant avec la référence, on constate qu'on arrive bien à capter la dynamique de l'écoulement.

De plus, la valeur du coefficient de traînée se compare bien avec les données disponibles dans la littérature et rapportées dans le tableau 3.5.

Cas	C_D	C_l^{max}
Present (Ma = 0.05,Re = 100)	1.65	0.85
Örley et al. [23]	1.73	0.93
Liao et al. [24]	1.71	0.95
Hurlbut et al. [25]	1.68	0.95
Su et al. [26]	1.7	0.97

TABLE 3.5 – Coefficient de traînée C_D et coefficient de portance C_l^{max}, calculés pour l'écoulement autour d'un cylindre circulaire oscillant pour $Ma = 0.05$ et $Re = 100$. Les résultats obtenus sont comparés aux données disponibles dans la littérature.

Finalement, on présente l'évolution temporelle de coefficient de portance C_l (Voir la Figure 3.17). Il faut noter ici que la différence entre les valeurs maximales du coefficient de portance, rapportées dans le tableau 3.5, peut s'expliquer par la différence dans le calcul de la fréquence f_0. Les références bibliographiques ne donnent pour ce cas ni le calcul ni la valeur de f_0.

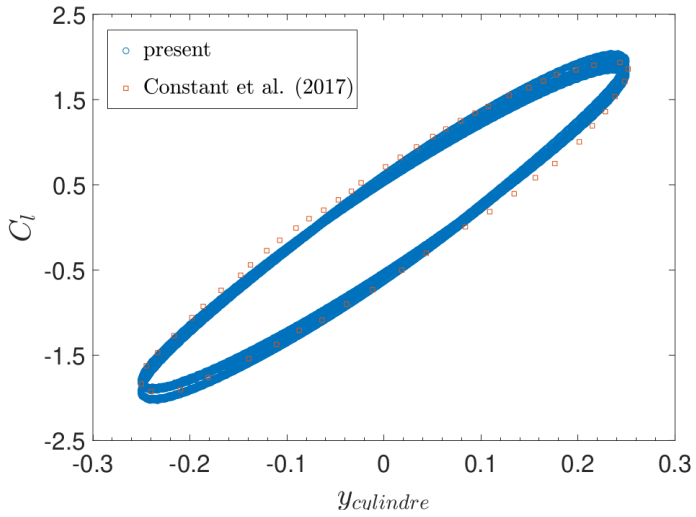


FIGURE 3.15 – Comparaison du coefficient de portance C_l avec les résultats de Constant et al. [1]

3.2 Écoulement compressible autour d'un cylindre circulaire chauffé 2D

On passe maintenant au test des solveurs IBM sur des écoulements autour d'un cylindre chauffé circulaire, fixe et mobile. Dans cette étape de validation, on utilise les deux termes sources pour l'équation de la quantité de mouvement et l'équation d'énergie. C'est également un cas test classique de validation bien documenté pour une large gamme des Re, Ma et rapports de température $r_\theta = \frac{\theta_{wall}}{\theta_{inlet}}$.

3.2.1 Domaine de calcul

Dans cette partie, on choisit de mailler le domaine de calcul avec 5 blocs comme indiqué sur la Figure 3.18. Les dimensions du domaine de calcul sont : $[-16D, 48D] \times [-16D, 16D]$ dans la direction longitudinale (x), transversale (y), respectivement. Le maillage est uniforme dans la zone centrale au voisinage du cylindre $x \times y \in [-D,\ D] \times [-D,\ D]$ et de taille $\Delta x = \Delta y = 0.01D$ et le centre du cylindre est à l'origine du domaine en $(0, 0)$. En dehors de cette région, le maillage est étiré avec un facteur de 2. Le nombre total d'éléments du maillage qui en résulte est égal à 1.1×10^5.
D'autre part, les conditions aux limites ont été choisies de la même façon que celles de la section précédente : Une condition d'entrée sur la vitesse est imposée en amont (côté gauche) et une condition de sortie de conservation de masse est imposée en aval et les conditions de glissement / non-réflexion sont choisies dans la direction verticale.
Pour l'analyse de la partie thermique, le nombre local de Nusselt sur la surface du cylindre est évalué par l'expression suivante :

- pour une température imposée :

$$Nu_\alpha = \frac{1}{\theta_{wall} - \theta_{inlet}} \times \frac{\partial \theta}{\partial n_s} \tag{3.4}$$

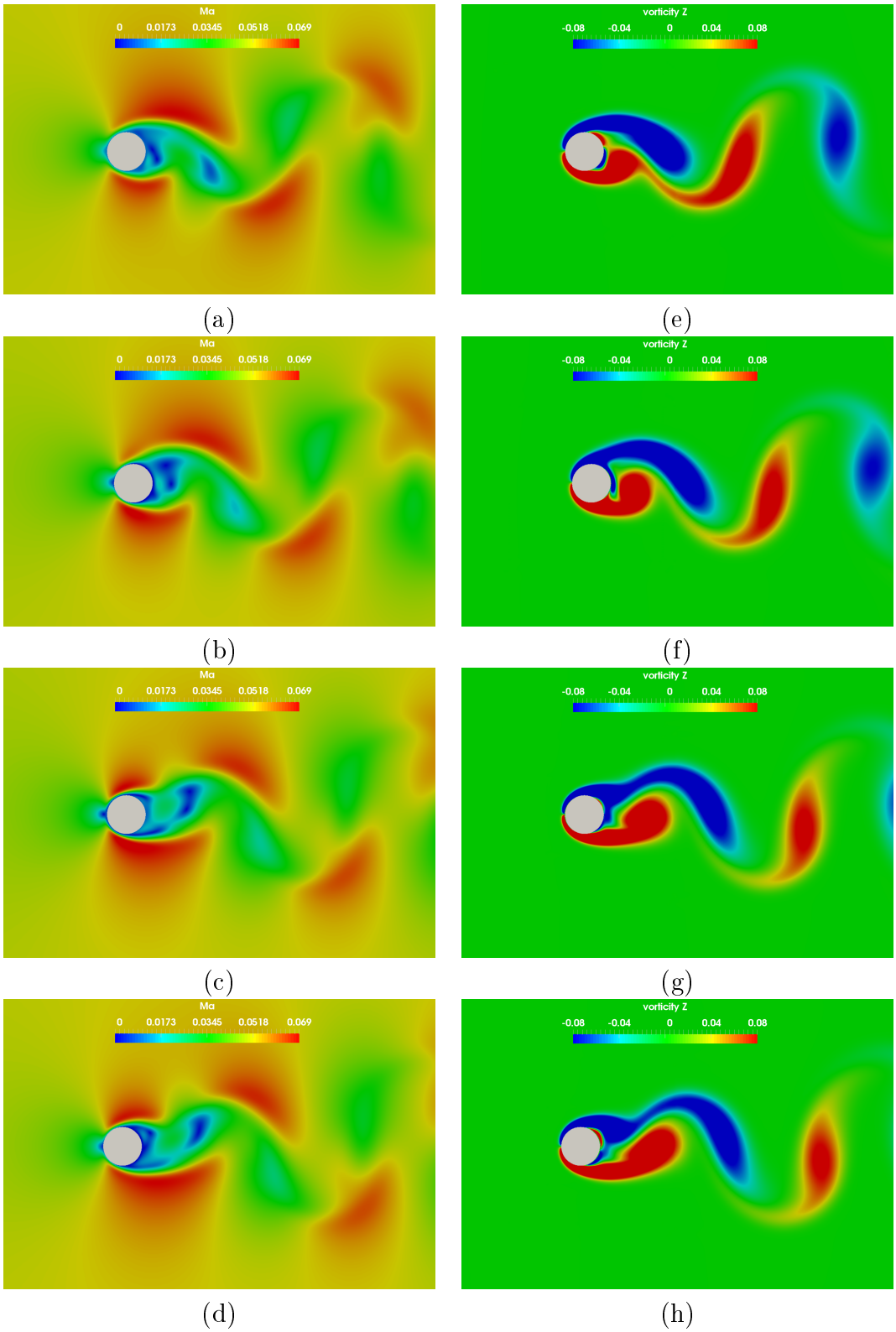


FIGURE 3.16 – Iso-contours du nombre de Mach (a)-(d) et vorticité (e)-(h) pour un écoulement autour d'un cylindre oscillant longitudinal $Ma = 0.05$: (a) et (e) : $t = 0.25T$; (b) et (f) : $t = 0.5T$;(c) et (g) : $t = 0.75T$;(d) et (h) : $t = 1.0T$ avec T : Temps de retournement des lâchers instationnaires.

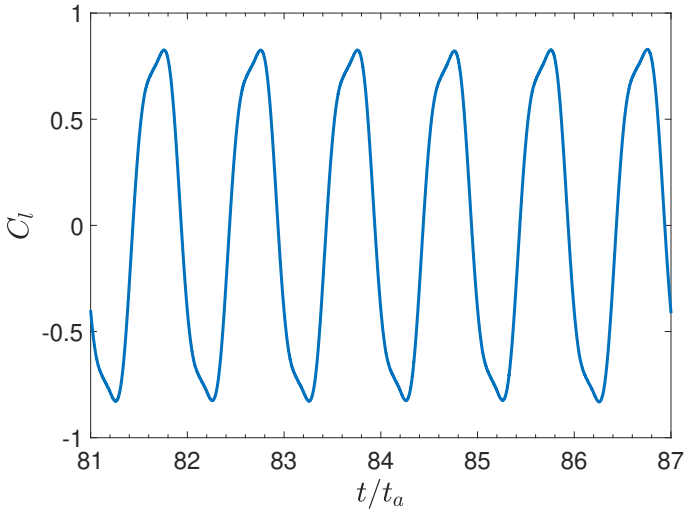


FIGURE 3.17 – Évolution temporelle du coefficient de portance C_l pour l'écoulement autour d'un cylindre circulaire oscillant(longitudinal)

- pour un flux imposé :

$$Nu_\alpha = \frac{\lambda}{q_{wall}D} \times \frac{\partial\theta}{\partial n_s} \tag{3.5}$$

avec :

  - λ : conductivité thermique
  - q_{wall} : flux thermique imposé
  - n_s : vecteur sortant normal à la surface du cylindre

Par la suite, ces valeurs locales sont intégrées sur l'ensemble du cylindre pour obtenir le nombre de Nusselt moyen. On reprend la définition de Luo et al. [27] :

$$Nu = \frac{1}{\sum \Delta s} \sum Nu_\alpha \times \Delta s \tag{3.6}$$

avec Δs le segment du cylindre relatif à l'angle α .
Le nombre moyen de Nusselt peut être utilisé dans le dimensionnement des nouvelles applications afin d'estimer le taux de transfert de chaleur du cylindre dans le cas de température de paroi imposée ou pour estimer la température moyenne de surface du cylindre pour le cas de flux thermique imposé.

3.2.2 Écoulement stationnaire

Les deux solveurs $IBM-sonicFoam$ et $IBM-rhoCentralFoam$ sont choisis pour cette investigation et trois configurations sont étudiées pour les trois types de conditions aux limites :

- Neutre "Pas de terme source dans l'équation d'énergie" : ($Ma = 0.05$, $Re = 20$ et $Re = 40$)

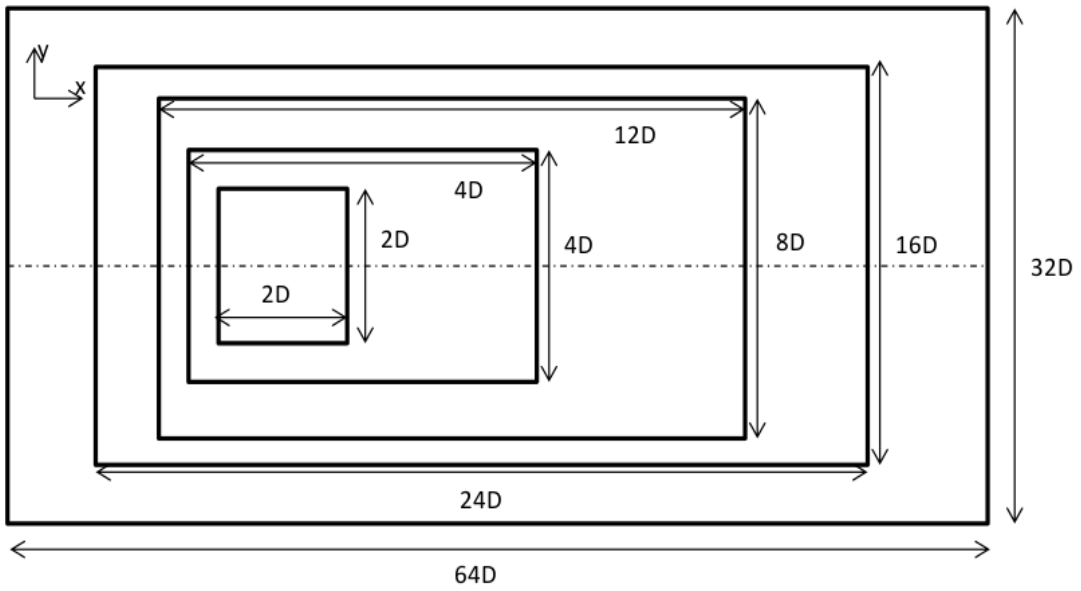


FIGURE 3.18 – Domaine de calcul 2D utilisé pour la validation IBM.

- Température imposée : ($Ma = 0.05$, $Re = 20$ et 40), $r_\theta = 2$
- Flux imposé : ($Ma = 0.4$ et $Re = 40$), $q_{paroi} = -0.2W/m^2$

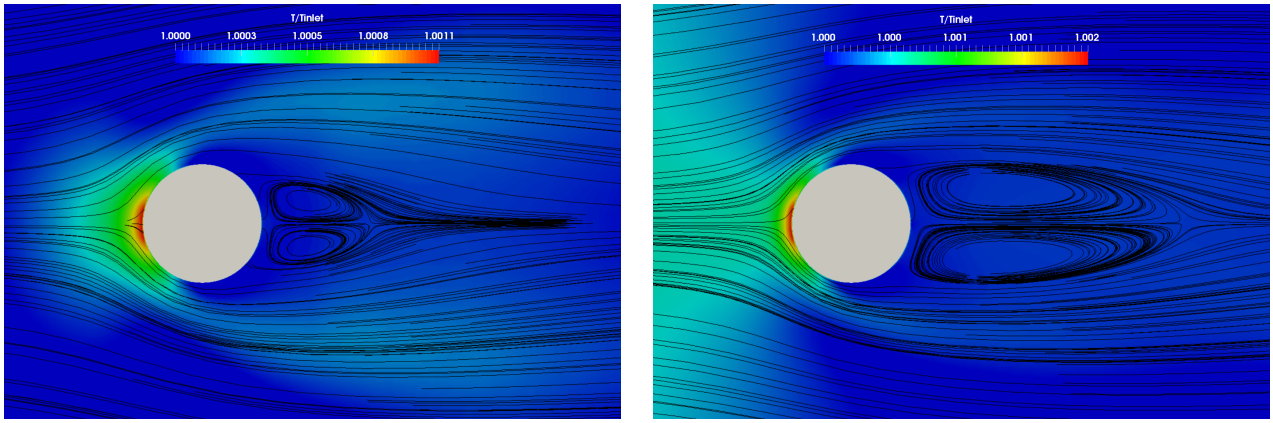
Les cas test ont été choisis en fonction de leur intérêt physique et des données disponibles dans la littérature.

Écoulement Neutre

Cette étude de validation est effectuée pour un cylindre à $Re = 20$ et $Re = 40$. Ce cas a été déjà analysé dans la section 3.1.2 mais on s'intéresse dans cette partie à une représentation qualitative du profil de la température (Voir Figure 3.19) pour donner une référence sans modèle thermique explicite. Seulement une condition aux limites de type Dirichlet pour la vitesse et une condition aux limites de type Neumann pour la pression sont appliquées sur le cylindre.

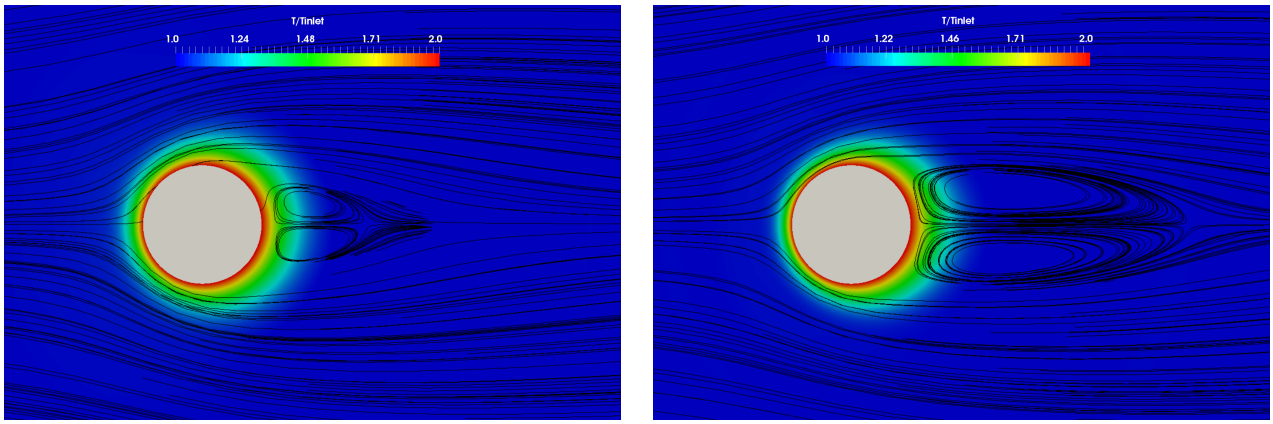
Température imposée $r_\theta = 2$

Nous nous intéressons maintenant à la validation de la méthode IBM proposée dans le cas d'une température imposée sur le cylindre circulaire. Les figures 3.20 (a) et (b) représentent les iso-contours de la température pour $Re = 20$ et 40. Ces iso-contours montrent que la présente méthode permet de capturer le transfert de chaleur et les lignes de courant autour du cylindre indique une bonne représentation de la région de recirculation.
De plus, le tableau 3.6 présente le nombre de Nusselt moyen Nu de la présente étude et des données de référence numériques et expérimentales. On remarque que notre approche



(a) (b)

FIGURE 3.19 – Iso-contours de température et lignes de courant pour un écoulement autour d'un cylindre circulaire neutre $Ma = 0.05$: (a) $Re = 20$ et (b) $Re = 40$.



(a) (b)

FIGURE 3.20 – Iso-contours de température et lignes de courant pour un écoulement autour d'un cylindre circulaire chauffé $Ma = 0.05$: (a) $Re = 20$ et (b) $Re = 40$.

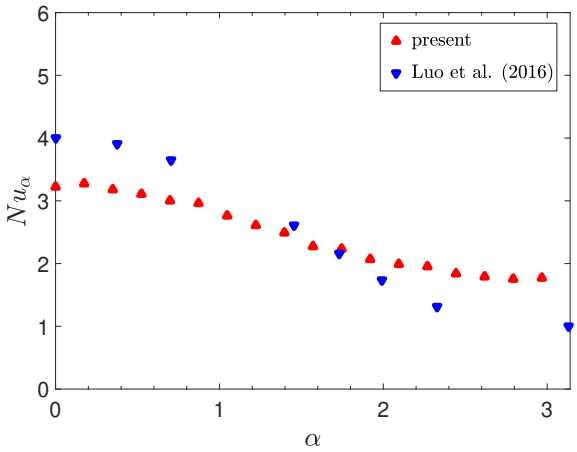


FIGURE 3.21 – Variation du Nusselt sur la surface du cylindre pour $Re = 20$

numérique montre un meilleur accord avec les résultats expérimentaux [28] en comparaison des autres modèles numériques([29] et [30]).

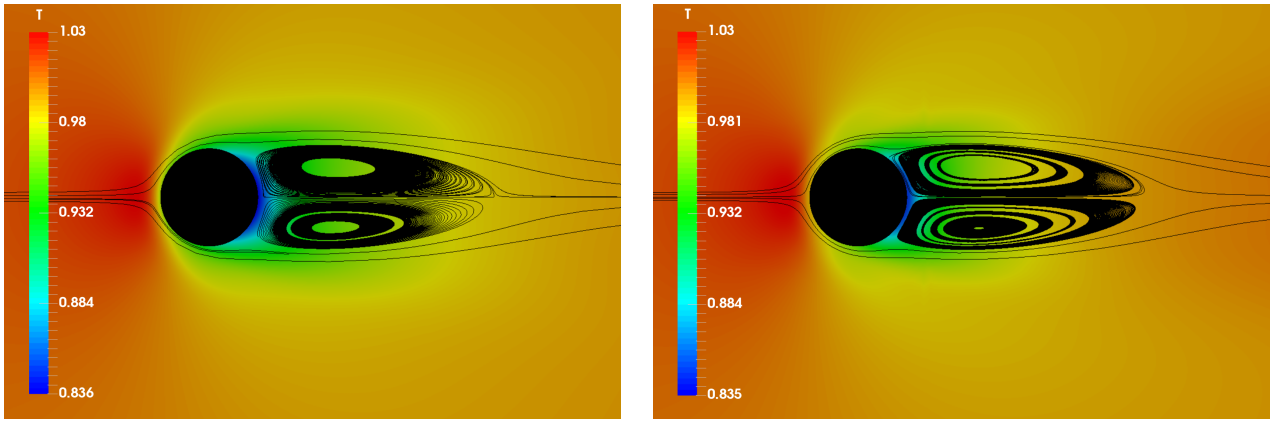
Study	$Re = 20$	$Re = 40$
Present results	2.42	2.8
Sparrow et al. [28] (Exp.)	2.21	3.08
Badr [31]	2.54	3.48
Dennis et al. [32]	2.52	3.43
Soares et al. [29] (Num.)	2.43	3.2
Bharti et al. [30] (Num.)	2.47	3.28

TABLE 3.6 – Comparaison du Nusselt moyen Nu sur la surface du cylindre pour $Re = 20$ et $Re = 40$

D'autre part, on trace sur la figure 3.21 l'évolution du nombre de Nusselt local Nu_α sur la surface du cylindre et on la compare au résultat de Luo et al. [27]. L'écart entre les deux courbes est dû aux effets de la diffusivité thermique : Luo et al. [27] ont choisit un coefficient de diffusivité thermique constant alors que dans notre cas on utilise un modèle de diffusivité thermique qui varie en fonction de la température.

Flux de chaleur imposé $q_{paroi} = -0.2W/m^2$

On s'intéresse maintenant à la simulation des écoulements compressibles avec un flux de chaleur imposé non nul. On choisit également de modifier le nombre de Mach afin d'introduire les effets de compressibilité. Ainsi on utilise le solveur $IBM - rhoCentralFoam$ pour l'investigation de ce cas. Les figures 3.22 montrent les isocontours de température d'un écoulement compressible autour d'un cylindre à $Ma = 0.4$, $Re = 40$ et un flux de chaleur $q_{paroi} = -0.2W/m^2$. La figure 3.22 (a) utilise notre approche IBM alors que la figure 3.22 (b) utilise un maillage conforme avec un solveur classique d'$OpenFoam$: $rhoCentralFoam$. On observe qu'on arrive à prédire l'écoulement autour du cylindre avec succès via notre solveur IBM. Les lignes de courant obtenues avec notre approche IBM



(a) (b)

FIGURE 3.22 – Iso-contours et lignes de courant pour un écoulement autour d'un cylindre circulaire à $Ma = 0.4$, $Re = 40$ et $q_{paroi} = -0.2W/m^2$: (a) approche IBM et (b) maillage conforme.

sont similaires aux ceux obtenus avec un solveur basé sur un maillage conforme. De plus, le coefficient de traînée C_d et les grandeurs caractéristiques de la boucle de recirculation : la longueur de recirculation et l'angle de séparation se comparent bien entre nos résultats IBM et les résultats obtenus avec $rhoCentralFoam$ (Table 3.7).

Résultats	C_D	x_s	α_s
IBM	1.68	2.42	132
$rhoCentralFoam$	1.74	2.5	130

TABLE 3.7 – Comparaison des quantités caractéristiques d'écoulement autour d'un cylindre circulaire avec un flux de chaleur imposé $q_{paroi} = -0.2W/m^2$. C_D est le coefficient de traînée, x_s la longueur de recirculation et α_s est l'angle de séparation.

3.2.3 Écoulement instationnaire($Ma = 0.025$)

Afin de valider l'expression proposée du terme source pour l'équation d'énergie, nous analysons un écoulement instationnaire autour d'un cylindre circulaire chauffé où le champ de température a une influence significative sur la topologie de l'écoulement, en particulier lorsque le rapport de température r_θ dépasse 1.1.
On choisit de simuler un écoulement instationnaire à $Ma = 0.025$, et avec deux rapports de température $r_\theta = \{1.8, 3\}$ et trois nombres de Reynolds $Re = \{100, 140, 260\}$.
Pour les différents cas, on observe un comportement instationnaire caractérisé par les allées de von Kármán périodiques. Les isocontours de température et les lignes de courant de l'écoulement sont représentés sur la figure 3.23 $(a)\&(b)$ et l'évolution temporelle du coefficient de portance est représentée sur la figure 3.23 $(c)\&(d)$.

Nous analysons aussi le nombre de Strouhal $S_t = \frac{fD}{U_\infty}$, où f est la fréquence de génération des structures tourbillonnaires calculée en utilisant l'évolution temporelle du coefficient de portance C_L. La comparaison montre un accord relativement bon avec les résultats

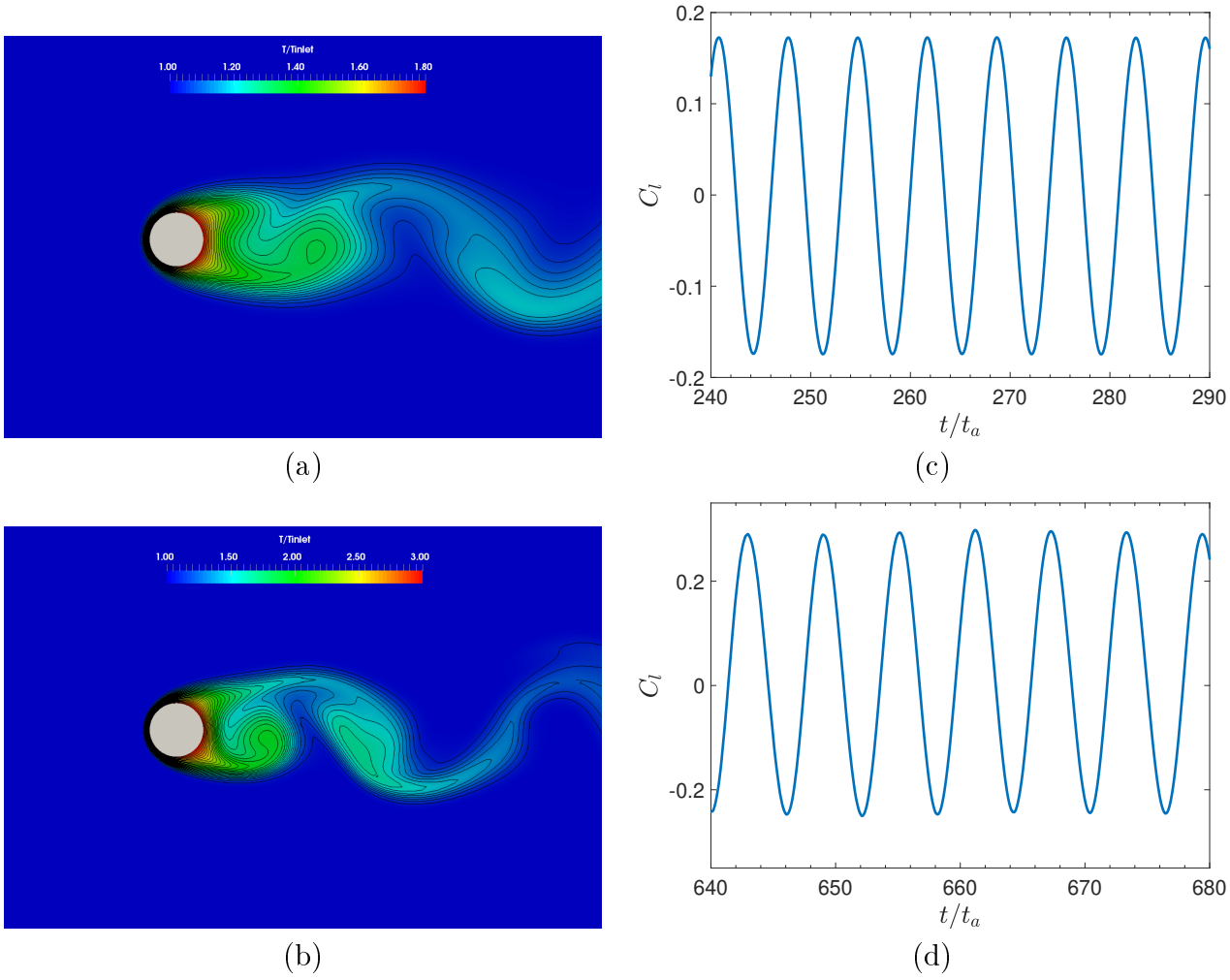


FIGURE 3.23 – Iso-contours et lignes de courant (à gauche) et évolution temporelle du coefficient de portance C_l (à droite) pour un écoulement autour d'un cylindre circulaire chauffé $Ma = 0.025$: (a) et (c) $Re = 100, r_\theta = 1.8$; (b) et (d) $Re = 260, r_\theta = 3$.

disponibles dans la littérature (un écart plus important est constaté pour des r_θ grands), voir Table 3.8.

Cas	$Re = 100$	$Re = 100$	$Re = 140$	$Re = 140$	$Re = 260$	$Re = 260$
	$\mathbf{r_\theta = 1.8}$	$\mathbf{r_\theta = 3}$	$\mathbf{r_\theta = 1.8}$	$\mathbf{r_\theta = 3}$	$\mathbf{r_\theta = 1.8}$	$\mathbf{r_\theta = 3}$
Present	0.142	0.122	0.155	0.133	0.18	0.165
De Palma et al. [33] (Num.)	0.143	-	0.161	0.14	0.187	0.178
Wang et al. [34] (Exp.)	0.144	-	0.159	-	0.185	-

TABLE 3.8 – Nombre de Strouhal S_t pour un écoulement instationnaire autour du cylindre circulaire chauffé à $Ma = 0.025$

Nous observons que le nombre de Strouhal St (de même pour la fréquence f) diminue pour les valeurs croissantes de r_θ pour un Re donné.
Enfin, le tableau 3.9 présente les quantités caractéristiques pour toutes les valeurs de r_θ et Re. On constate que la valeur moyenne du coefficient de traînée C_d est peu influencée par la température imposée. Par contre, la valeur maximale du coefficient de portance C_l^{max} varie d'une manière significative avec la valeur de la température imposée : elle diminue quand r_θ augmente.

Cas	$Re = 100$	$Re = 100$	$Re = 140$	$Re = 140$	$Re = 260$	$Re = 260$
	$\mathbf{r_\theta = 1.8}$	$\mathbf{r_\theta = 3}$	$\mathbf{r_\theta = 1.8}$	$\mathbf{r_\theta = 3}$	$\mathbf{r_\theta = 1.8}$	$\mathbf{r_\theta = 3}$
C_d	1.47	1.53	1.465	1.48	1.461	1.43
C_l^{max}	0.17	0.07	0.26	0.12	0.42	0.3

TABLE 3.9 – C_d et C_l^{max} pour un écoulement instationnaire autour du cylindre circulaire chauffé à $Ma = 0.025$

3.2.4 Sensibilité aux effets de compressibilité ($Re = 100$ et $r_\theta = 1.1$)

Dans ce paragraphe, nous analysons l'influence de la compressibilité sur la topologie de l'écoulement. Pour ce faire, nous étudions l'écoulement autour du cylindre chauffé pour plusieurs nombres de Mach $Ma = \{0.05, 0.3, 0.5, 0.7\}$. On utilise le solveur IBM _ sonicFOAM pour les nombres de Mach $Ma = \{0.05, 0.3\}$ et le solveur IBM _ rhoCentralFOAM pour les nombres de Mach $Ma = \{0.5, 0.7\}$. Afin de nous concentrer uniquement sur la compressibilité, nous choisissons la même valeur pour le nombre de Reynolds $Re = 100$ et le ratio de température $r_\theta = 1.1$.
Luo et al. [27] proposent d'analyser trois paramètres pour quantifier les effets de la compressibilité : coefficient de trainée, nombre de Strouhal et nombre de Nusselt.
En effet, dans ce cas, les effets de compressibilité ne sont plus négligeables et pilotent l'évolution de l'écoulement.
La figure 3.24 présente les iso-contours du nombre de Mach et de la température pour l'ensemble des simulations $Ma = \{0.05, 0.3, 0.5, 0.7\}$.
Les résultats obtenus pour les quantités caractéristiques sont indiqués dans le tableau 3.10 :

Study		C_d	C_l^{max}	St	Nu
Present	$Ma = 0.05$	1.42	0.17	0.17	5.4
Luo et al. [27]	$Ma = 0.05$	1.38	-	0.171	6
Present	$Ma = 0.3$	1.5	0.317	0.156	2.8
Luo et al. [27]	$Ma = 0.3$	1.44	-	0.172	3
Present	$Ma = 0.5$	1.637	0.236	0.16	1.6
Present	$Ma = 0.7$	1.89	0.0933	0.161	1.1

TABLE 3.10 – C_d , C_l^{max} et St pour l'ensemble des nombres de Mach ($\mathbf{r_\theta = 1.1}$ et $\mathbf{Re = 100}$)

- Pour le premier paramètre C_d, une augmentation de la compressibilité entraîne une augmentation de la masse volumique et de la température au niveau du cylindre et par conséquent une augmentation de la pression. Ainsi, augmenter la différence de ces quantités entre l'amont et l'aval du cylindre entraîne une augmentation de la traînée de pression et de la traînée visqueuse (parce que la viscosité $\mu(\theta)$ augmente) et donc une augmentation du coefficient de traînée totale.
- Pour le deuxième paramètre St, on retrouve les observations de Luo et al. [27] avec un nombre de Strouhal St qui augmente légèrement avec le nombre de Mach.
- Pour le dernier paramètre Nu, l'augmentation de la température, due à l'effet de compressibilité, limite le transfert de chaleur qui entraîne une diminution du nombre de Nusselt.

3.2.5 Écoulement autour d'un cylindre chauffé oscillant ($Ma = 0.05$, $Re = 100$)

Dans cette partie, on étudie un écoulement autour d'un cylindre oscillant dans la direction de l'écoulement à $Ma = 0.05$ et $Re = 100$. On effectue la simulation avec le solveur IBM _ sonicFOAM. Le mouvement du cylindre est décrit par :

$$X_c(t) = Asin(2\pi f_c t) \tag{3.7}$$

avec $A = 0.14 \times D$ et $f_c = 2 \times f_0$. On effectue un calcul préliminaire sur un cylindre fixe afin de déterminer la fréquence f_0.
La figure 3.25 montre l'évolution des iso-contours de la température et de la vorticité autour du cylindre sur une période pour un régime établi. En comparant avec la référence, on constate qu'on arrive bien à capter la dynamique de l'écoulement.
De plus, nos résultats se comparent bien avec les données de Luo et al.[27] rapportées dans le tableau 3.11.

Cas Test	C_d	C_l^{max}
$\mathbf{r_\theta = 1.1}$ et $\mathbf{Re = 100}$		
present	1.7	0.84
Luo et al.[27]	1.68	0.95

TABLE 3.11 – C_d , C_l^{max} et St pour le cas d'un cylindre oscillant chauffé

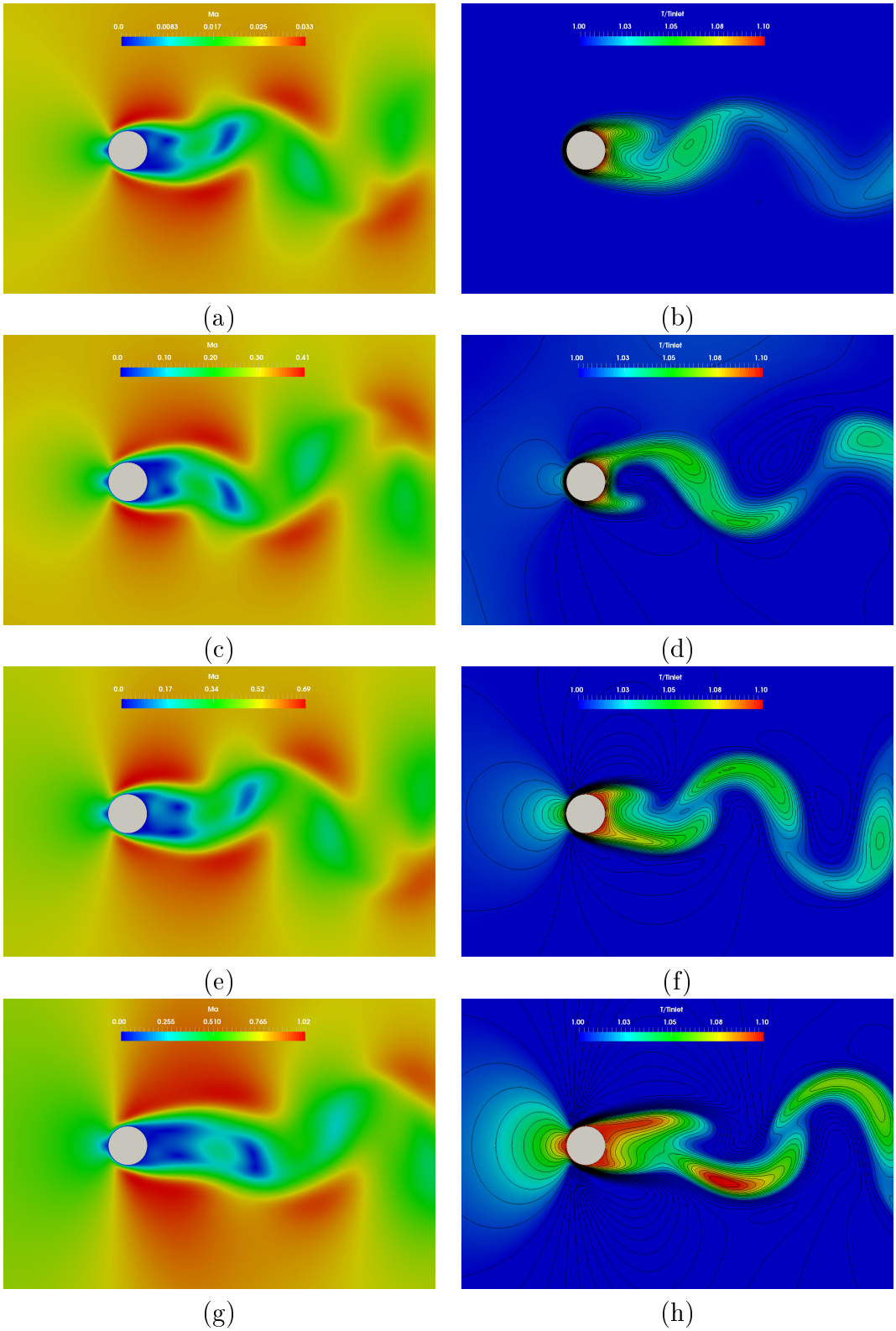


FIGURE 3.24 – Iso-contours du nombre de Mach et Température pour un écoulement autour d'un cylindre circulaire chauffé : (a)-(b) $Ma = 0.05$; (c)-(d) $Ma = 0.3$; (e)-(f) $Ma = 0.5$; (g)-(h) $Ma = 0.7$.

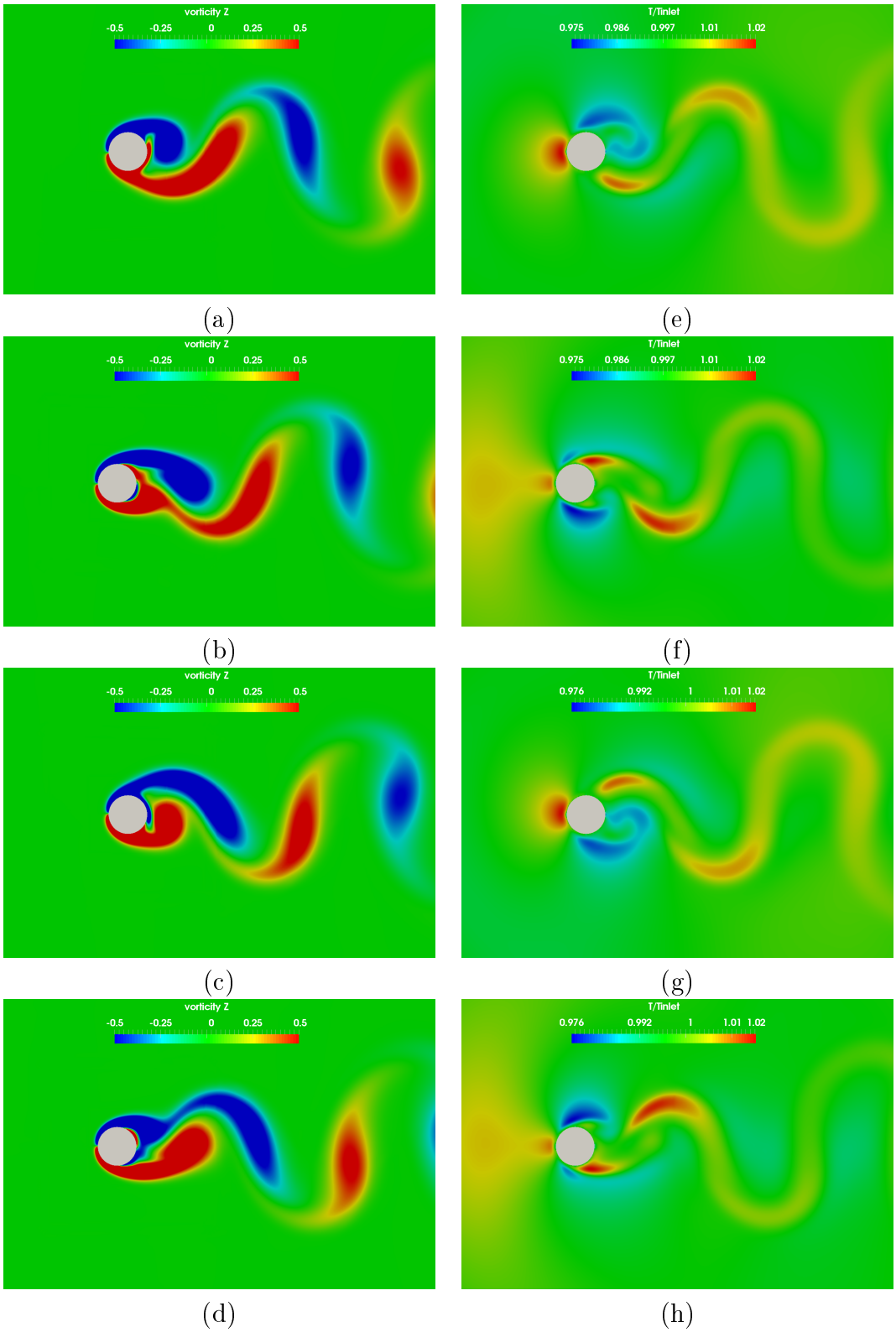


FIGURE 3.25 – Iso-contours de vorticité (a)-(d) et température (e)-(h) pour un écoulement autour d'un cylindre oscillant longitudinal $Ma = 0.05$: (a) et (e) : $t = 0.25T$; (b) et (f) : $t = 0.5T$;(c) et (g) : $t = 0.75T$;(d) et (h) : $t = 1.0T$ avec T : Temps de retournement des lâchers instationnaires.

Finalement, on présente l'évolution temporelle du coefficient de portance (Figure 3.26) (a) et on la compare aux résultats de Luo et al. [27](Figure 3.26) (b).

3.3 Écoulement compressible autour d'un profil d'aile 2D

Contrairement au cylindre circulaire, certains profils d'ailes présentent un angle aigu au niveau du bord de fuite difficilement représentable avec un maillage cartésien non conforme à la géométrie. Ainsi, ce cas test est un vrai challenge pour la validation de notre approche IBM et pour évaluer sa performance. Dans cette partie, on étudie l'écoulement autour de plusieurs profils NACA pour un large spectre de valeurs du nombre de Mach et du nombre de Reynolds.

3.3.1 Domaine de calcul

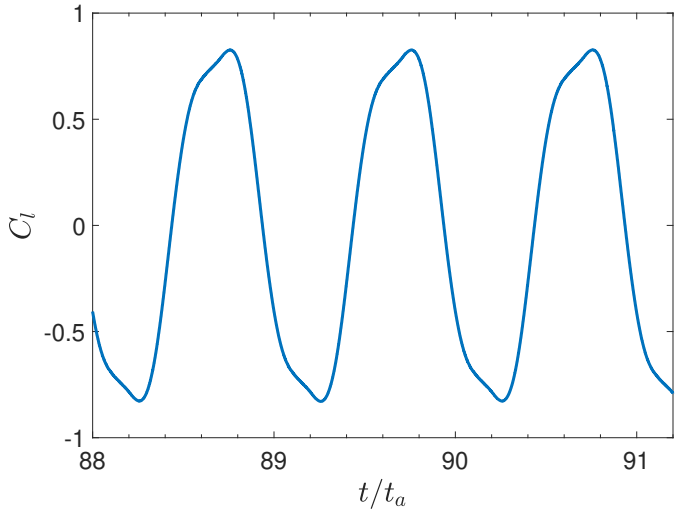
La taille du domaine de calcul est choisie pour être égale à $[-10L_c, 18L_c]$ dans la direction de l'écoulement (x) et $[-10L_c, 10L_c]$ dans la direction verticale (y) où L_c est la longueur de la corde. Le centre de la corde est choisi pour être à l'origine du référentiel (Figure 3.27). Des éléments du maillage hexaédrique ont été choisis pour la discrétisation. Le domaine physique dans la zone centrale $x \times y \in [-L_c, L_c] \times [-L_c, L_c]$ est discrétisé en éléments homogènes de taille $\Delta x = \Delta y = 0.002D$. En dehors de cette région centrale, un déraffinement des éléments du maillage est imposé (rapport entre les éléments voisins $r = 1.05$) dans les deux directions x et y. Le nombre total d'éléments du maillage qui en résulte est égal à 1.6×10^5. D'autre part, des conditions aux limites similaires aux cas précédents ont été choisies : une condition d'entrée sur la vitesse est imposée en amont (côté gauche), une condition de sortie de conservation de masse est imposée en aval et les conditions de glissement / non-réflexion sont choisies dans la direction verticale.
Pour chaque cas analysé, les principales quantités physiques d'intérêt sont comparées aux données disponibles de la littérature. Les coefficients de traînée et de portance, pour un profil d'aile, sont définis par rapport à la longueur de la corde L_c :

$$C_D = \frac{2F_x}{\rho_\infty L_c U_\infty^2}, \qquad C_L = \frac{2F_y}{\rho_\infty L_c U_\infty^2} \tag{3.8}$$

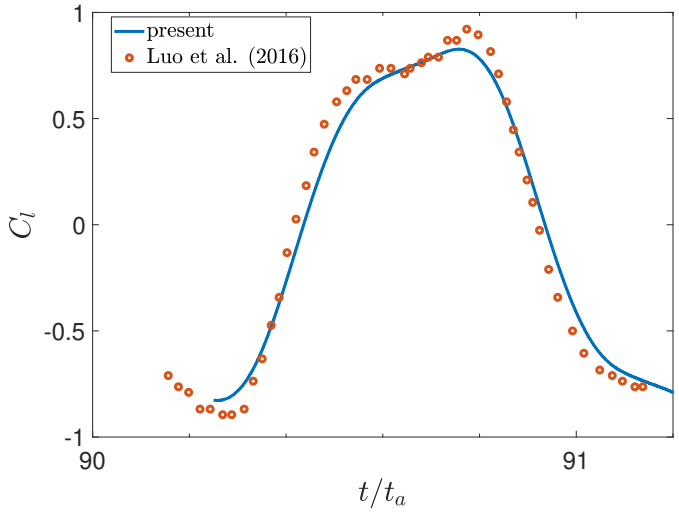
3.3.2 Écoulement incompressible ($Ma = 0.05$)

Comme pour les autres cas test de validation, on commence par un cas incompressible avec le solveur $IBM - sonicFoam$. On reprend les travaux de Al-Maarouf et al. [17] avec deux configurations :

(a) Une première configuration est étudiée pour un écoulement autour d'un $NACA$ 0008 à un angle d'attaque de 4° et à $Ma = 0.05$ et $Re = 2 \times 10^3$. Cet écoulement est caractérisé par un régime laminaire stationnaire. La figure 3.28 représente les



(a)



(b)

FIGURE 3.26 – (a) Évolution temporelle du coefficient de portance C_l pour l'écoulement autour d'un cylindre circulaire oscillant(longitudinal) et (b) comparaison du coefficient de portance C_l avec les résultats de Luo et al. [27].

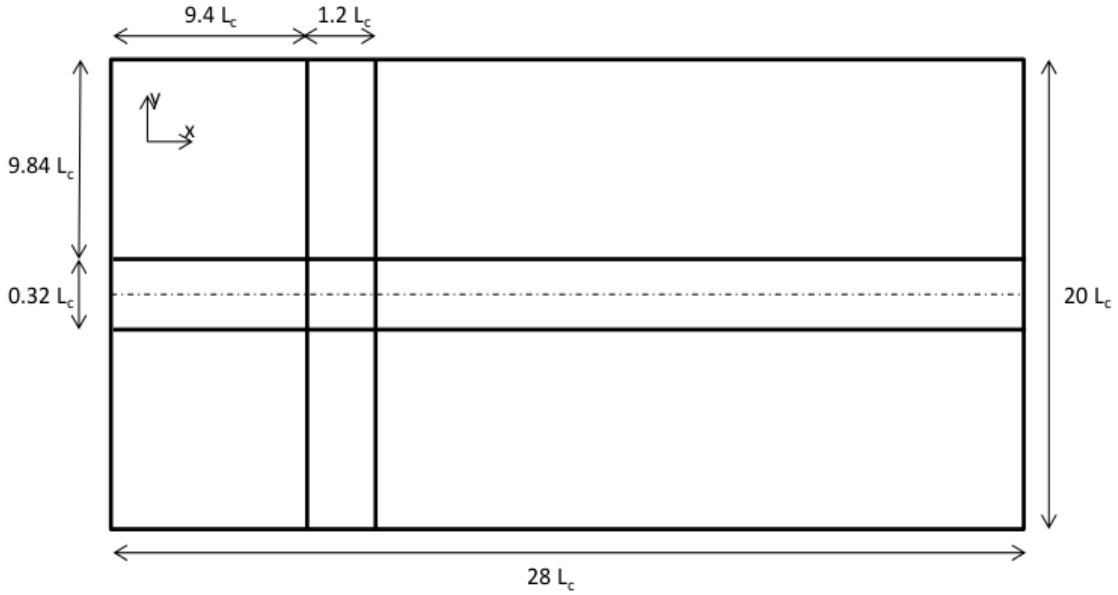


FIGURE 3.27 – Domaine de calcul 2D utilisé pour la validation IBM.

iso-contours du nombre de Mach et les lignes de courant autour du profil d'aile et notamment la zone de recirculation stationnaire.

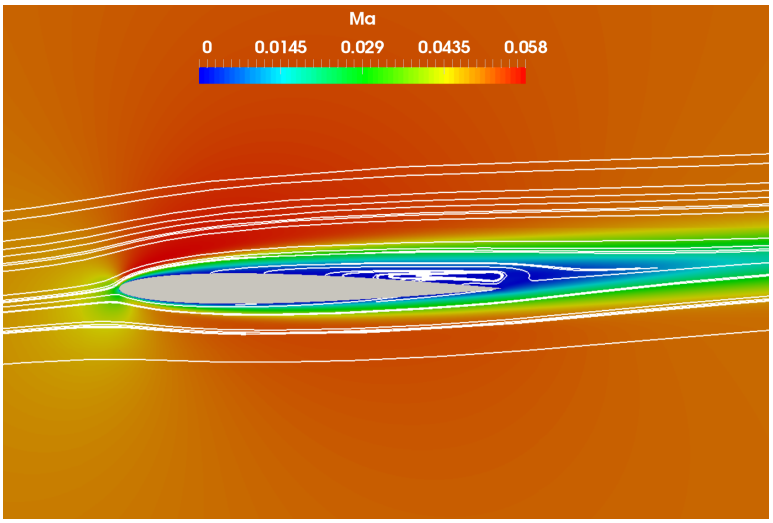


FIGURE 3.28 – Les iso-contours du nombre de Mach et les lignes de courant autour d'un $NACA0008$ ($Ma = 0.05$; $Re = 2 \times 10^3$ et un angle d'attaque de 4°).

(b) Une deuxième configuration est étudiée pour un écoulement autour d'un $NACA$ 0018 à un angle d'attaque de 10° et à $Ma = 0.05$ et $Re = 10^4$. Cet écoulement est caractérisé par un régime laminaire instationnaire. La figure 3.29 représente les iso-contours du nombre de Mach et les lignes de courant autour du profil d'aile. On identifie bien les allées de von Kàrman caractéristiques de ce régime d'écoulement.

De plus, la figure 3.30 montre l'évolution des iso-contours de Ma et de la vorticité autour du profil d'aile sur une période pour un régime établi.

Les coefficients de traînée, de portance et le nombre de Strouhal St sont comparés aux résultats de simulations conformes au corps et à d'autres approches des frontières immergées dans le tableau 3.12. Pour une résolution similaire (h la taille des éléments du maillage proche du corps immergé) avec celle de Al-Maarouf et al. [17], on montre un bon accord pour le coefficient de traînée. Pour le coefficient de portance C_L, on trouve une valeur intermédiaire entre les résultats de Al-Marouf et al.[17] et Zhang et Samtaney [35]. D'autre part, on trace le coefficient de portance sur l'extrados et l'intrados du profil

Cas test	C_D	C_l	S_t
Present ($NACA$ 0008) $h = 1/128$	0.074	0.21	
Al-Maarouf et al. [17] ($h = 1/1024$)	0.078	0.273	-
Kunz et Kroo [36] ($h = 1/1024$)	0.08	0.272	-
Mittal et al. [37] ($h = 1/1024$)	0.081	0.273	-
Present ($NACA$ 0018) $h = 1/128$	0.142	0.44	0.723
Al-Maarouf et al. [17] ($h = 1/128$)	0.146	0.248	0.726
Al-Maarouf et al. [17] ($h = 1/1024$)	0.223	0.86	0.698
Zhang et Samtaney [35] ($h = 1/1024$)	0.22	0.798	0.653

TABLE 3.12 – Comparaison des quantités caractéristiques d'écoulement autour d'un profil d'aile avec les données disponibles dans la littérature pour $Ma = 0.05$. C_D est le coefficient de traînée, C_L est le coefficient de portance, S_t le nombre de Strouhal. Les données sont fournies pour $NACA$ 0008 à un angle d'attaque de 4° et $Re = 2 \times 10^3$ (en haut) et $NACA$ 0018 à un angle d'attaque de 10° et $Re = 10^4$ (en bas), respectivement.

de l'aile. La figure 3.31 montre un contour similaire avec les travaux de Al-Maarouf et al.[17].

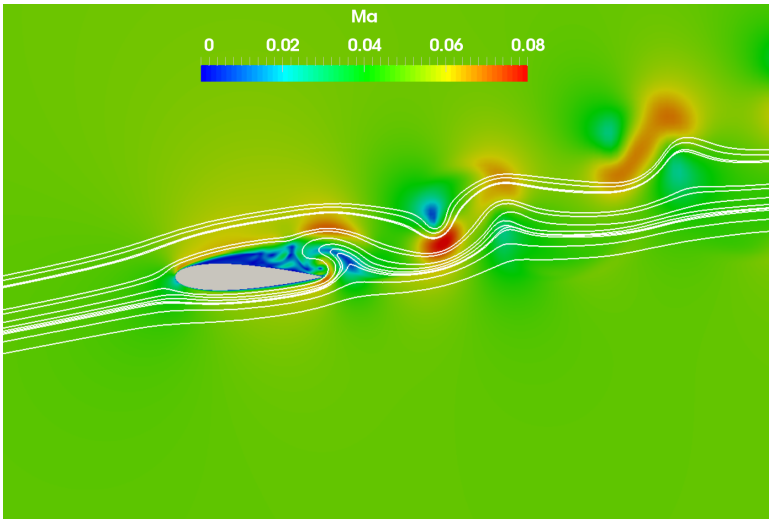


FIGURE 3.29 – Les iso-contours du nombre de Mach et les lignes de courant autour d'un $NACA0018$ ($Ma = 0.05$; $Re = 10^4$ et un angle d'attaque de 10°).

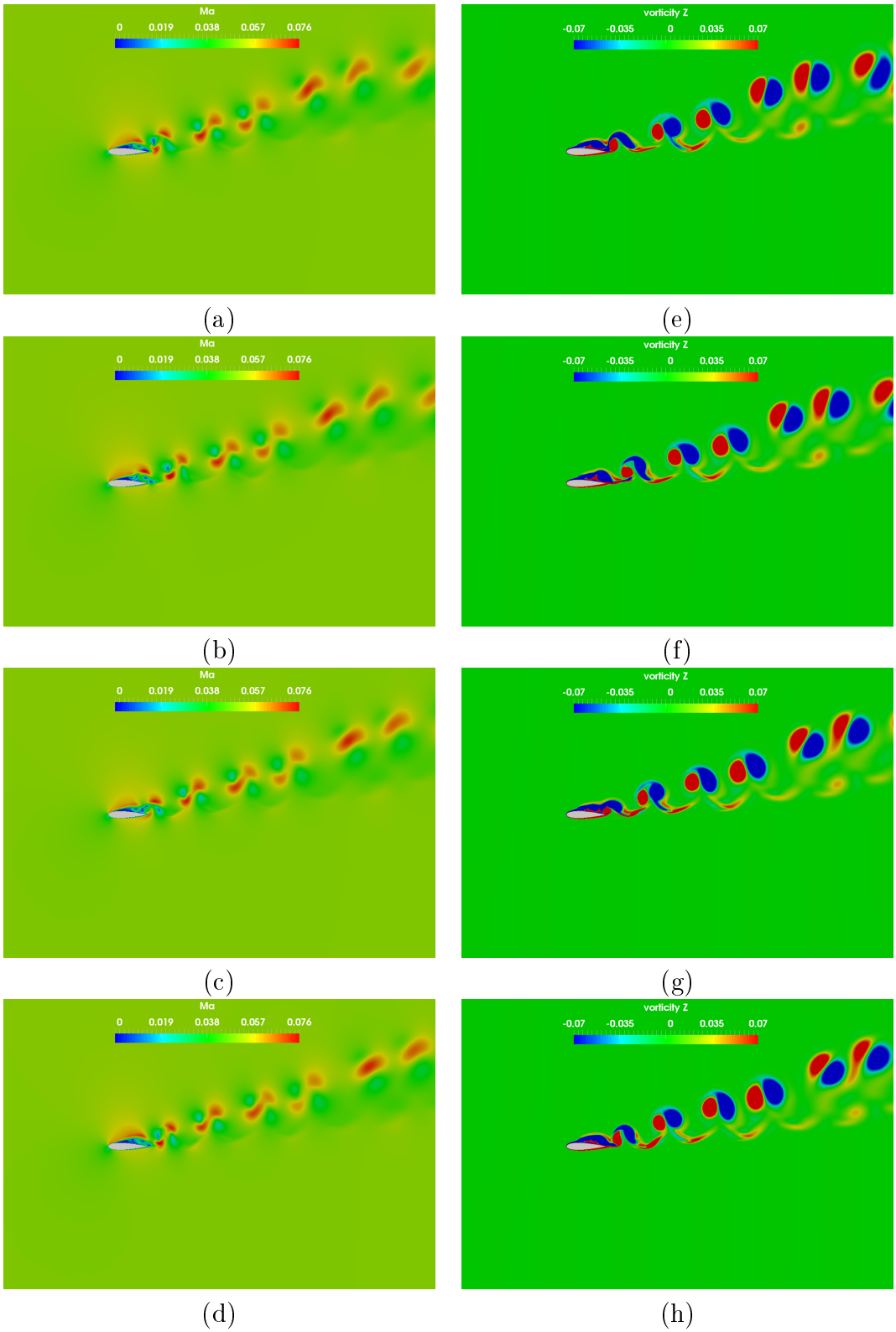


FIGURE 3.30 – Iso-contours du nombre de Mach (a)-(d) et vorticité (e)-(h) pour un écoulement autour d'un $NACA0018$ ($Ma = 0.05$; $Re = 10^4$ et un angle d'attaque de 10°) : (a) et (e) : $t = 0.25T$; (b) et (f) : $t = 0.5T$;(c) et (g) : $t = 0.75T$;(d) et (h) : $t = 1.0T$ avec T : Temps de retournement des lâchers instationnaires.

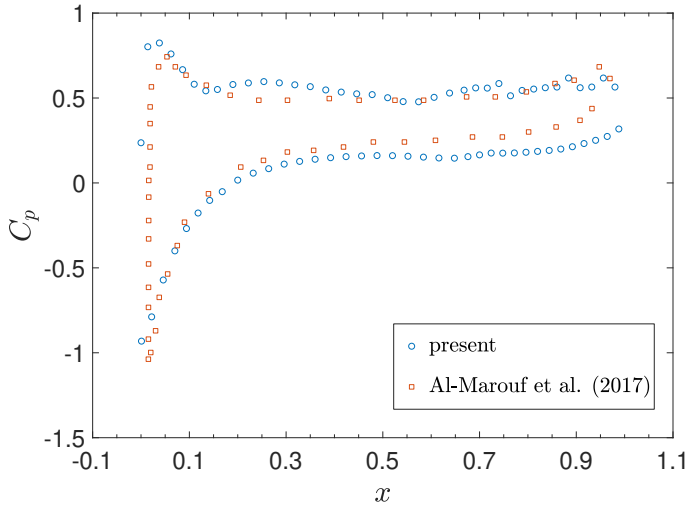
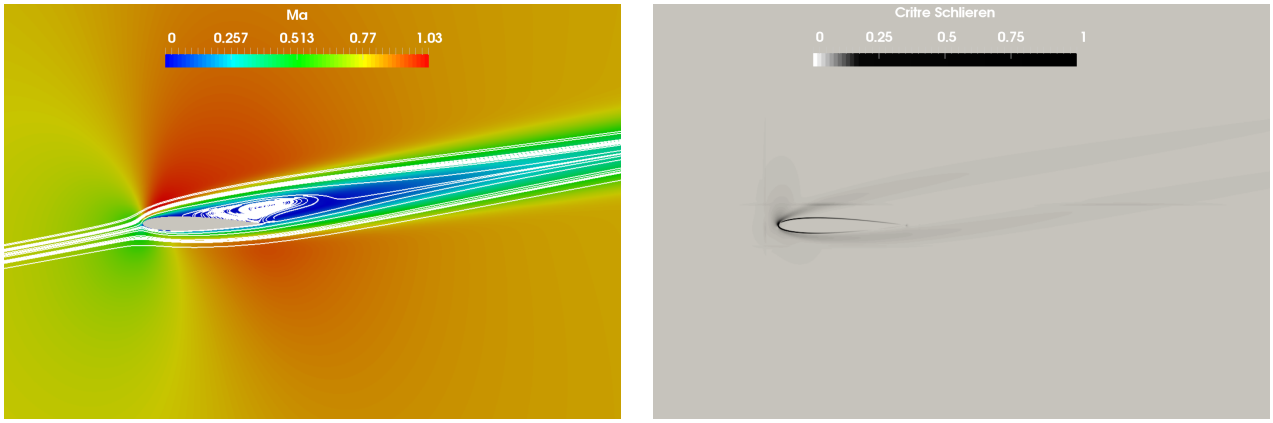


FIGURE 3.31 – Coefficient de pression C_p le long de la surface de l'aile, pour l'abscisse $\in [0, 1]$ de la corde. Les résultats d'IBM sont comparés aux données disponibles dans la littérature [17].



(a) (b)

FIGURE 3.32 – (a) Les iso-contours du nombre de Mach et les lignes de courant et (b) le critère Schlieren autour d'un $NACA0012$ ($Ma = 0.8$; $Re = 500$ et un angle d'attaque de 10°).

3.3.3 Écoulement transsonique ($Ma = 0.8$, $Re = 500$)

On étudie dans ce paragraphe le cas d'un écoulement transsonique laminaire et stationnaire autour d'un profil d'aile $NACA$ 0012 avec un $Ma = 0.8$, $Re = 500$ et un angle d'attaque $\alpha = 10°$. La figure 3.32 (a) montre les lignes de courant autour du profil d'aile. On constate qu'une grande région de séparation apparaît sur la surface supérieure du profil aérodynamique et cette zone de recirculation s'étend sur 50% de la corde sur la surface supérieure ce qui correspond bien à l'observation de la littérature [38].
De plus, on trace le critère Schlieren autour du profil $NACA$(Voir figure 3.32 (b)). On détermine via cette visualisation la forme et la position du choc qui se trouve sur l'extrados du profil. Ceci prouve encore une fois la capacité de notre approche à capturer les ondes de choc au niveau des points Lagrangiens.

Les coefficients de traînée et de portance sont comparés aux résultats disponibles dans la littérature et rapportés dans le tableau 3.13. Ils sont proches notamment de la fourchette définie par GAMM [39]. Ce petit décalage est dû à une résolution moins fine que celle utilisée dans les références bibliographiques.

Cas test	C_D	C_l
Present ($NACA$ 0012)	0.22	0.402
Qiu et al. [38]	0.2822	0.4323
Jawahar et Kamath [40]	0.27216	0.49394
GAMM [39]	0.243-0.2868	0.4145-0.517

TABLE 3.13 – Comparaison des quantités caractéristiques d'écoulement autour d'un profil d'aile avec les données disponibles dans la littérature pour $Ma = 0.8$, $Re = 500$ et un angle d'attaque $\alpha = 10°$. C_D est le coefficient de traînée, C_L est le coefficient de portance

De plus, la figure 3.33 montre la répartition du coefficient de pression sur l'extrados et l'intrados du profil. Elle se compare bien avec celle obtenue en utilisant une méthode du maillage conforme [40] et une méthode des frontières immergées [38].

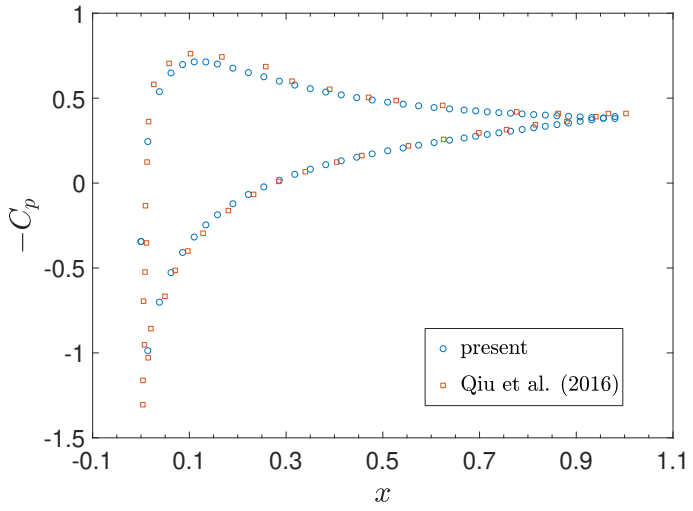
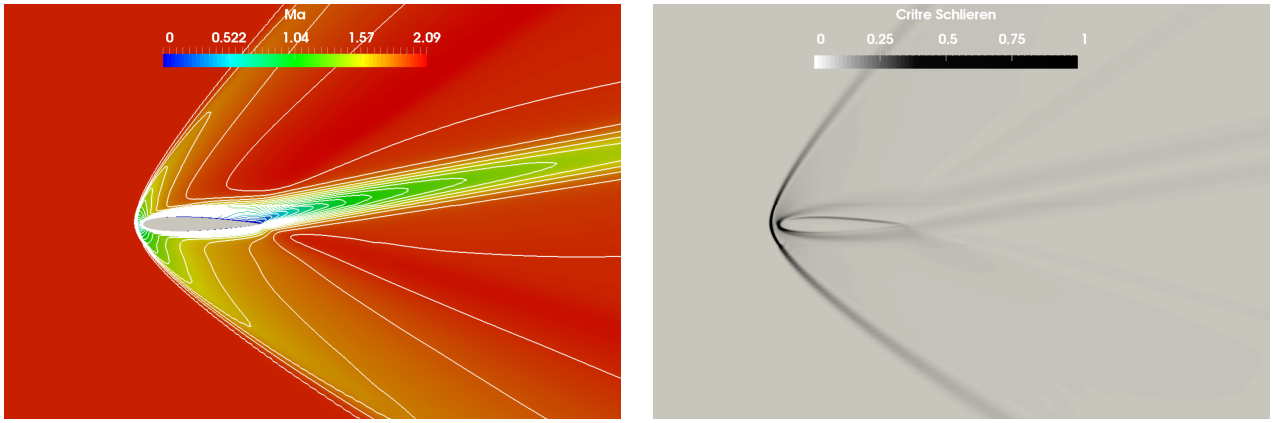


FIGURE 3.33 – Coefficient de pression C_p le long de la surface de l'aile, pour l'abscisse $\in [0, 1]$ de la corde. Les résultats d'IBM sont comparés aux données disponibles dans la littérature [38].

3.3.4 Écoulement supersonique ($Ma = 2$, $Re = 1000$)

On analyse dans ce paragraphe un écoulement supersonique laminaire stationnaire autour d'un profil d'aile $NACA$ 0012 avec $Ma = 2$, $Re = 1000$ et un angle d'attaque $\alpha = 10°$. La figure 3.34 (a) montre les lignes de courant autour du profil d'aile. On note la formation d'un choc détaché en amont de l'obstacle.



(a) (b)

FIGURE 3.34 – (a) Les iso-contours du nombre de Mach et les lignes de courant et (b) le critère Schlieren autour d'un $NACA0012$ ($Ma = 2$; $Re = 1000$ et un angle d'attaque de 10°).

De plus, on trace le critère Schlieren autour du profil afin de déterminer la position et la forme du choc (Voir figure 3.34 (b)).

Les distributions des coefficients de pression le long du profil sont données sur la figure 3.35 où nos résultats coïncident bien avec la référence [33].

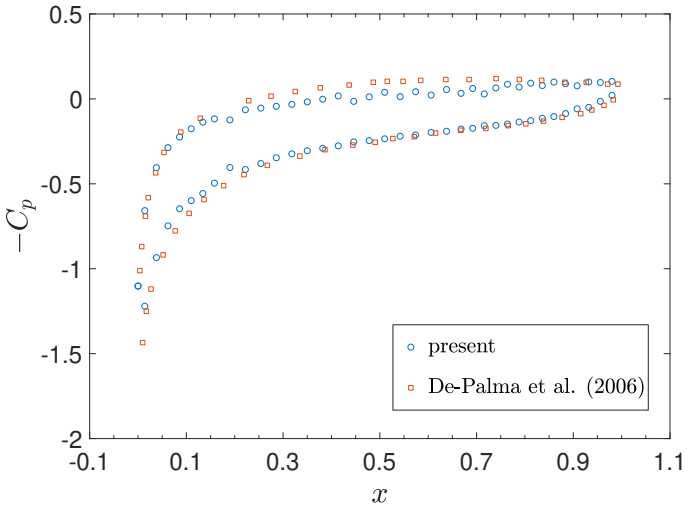


FIGURE 3.35 – Coefficient de pression C_p le long de la surface de l'aile, pour l'abscisse $\in [0, 1]$ de la corde. Les résultats d'IBM sont comparés aux données disponibles dans la littérature [33].

Les coefficients de traînée et de portance et l'emplacement du choc se comparent bien avec les résultats de De palma et al. [33] rapportés dans le tableau 3.14.

Cas test	C_D	C_l	$\triangle_{choc}$
Present ($NACA$ 0012)	0.2	0.32	0.06
De Palma et al. [33]	0.24	0.33	0.0625

TABLE 3.14 – Comparaison des quantités caractéristiques d'écoulement autour d'un profil d'aile avec les données disponibles dans la littérature pour $Ma = 2$, $Re = 1000$ et un angle d'attaque $\alpha = 10°$. C_D est le coefficient de traînée, C_L est le coefficient de portance et $\triangle_{choc}$ est l'emplacement du choc

3.3.5 Écoulement autour d'un profil d'aile en mouvement ($Ma = 0.05$)

Pour finir avec ces cas de validation 2D, on étudie un écoulement autour d'un profil NACA 0012 en mouvement de tangage à $Ma = 0.05$ et $Re = 1.2 \times 10^4$. Ainsi on utilise le solveur $IBM-sonicFOAM$ pour l'investigation de ce cas test. Le mouvement de tangage par rapport au foyer du profil d'aile (qui se situe à un quart de corde derrière le bord d'attaque), est décrit par :

$$\theta_{NACA}(t) = \theta_e sin(2\pi f_e t) \tag{3.9}$$

avec :

- θ_{NACA} : l'angle de l'oscillation du profil de l'aile avec un centre au quart-avant de la corde
- θ_e : Amplitude des oscillations
- f_e : Fréquence des oscillations de tangage

On choisit de reprendre les conditions utilisées par Al-Maarouf et al. [17] avec une amplitude $\theta_e = 2°$ et une fréquence réduite $f_{reduite} = \dfrac{\pi L_c f_e}{U_\infty} = \pi/2$.
La figure 3.36 montre l'évolution du nombre de Mach et de la vorticité autour du profil $NACA$ 0012 sur une période pour un régime établi. On constate qu'on arrive à bien capter la dynamique de l'écoulement.
De plus, on compare la valeur moyenne du coefficient de poussée $C_T = -C_D$ aux résultats disponibles dans la littérature. (Tableau 3.15).

Cas test	C_T
Present ($NACA$ 0012)	- 0.042
Al-Maarouf et al. [17]	- 0.038
Koochesfahani [36]	- 0.039
Ramamurti et Sandberg [37]	- 0.041
Young et Lai [37]	- 0.039

TABLE 3.15 – Comparaison du coefficient de Poussée C_T pour l'écoulement autour d'un profil $NACA$ 0012 en mouvement de tangage.

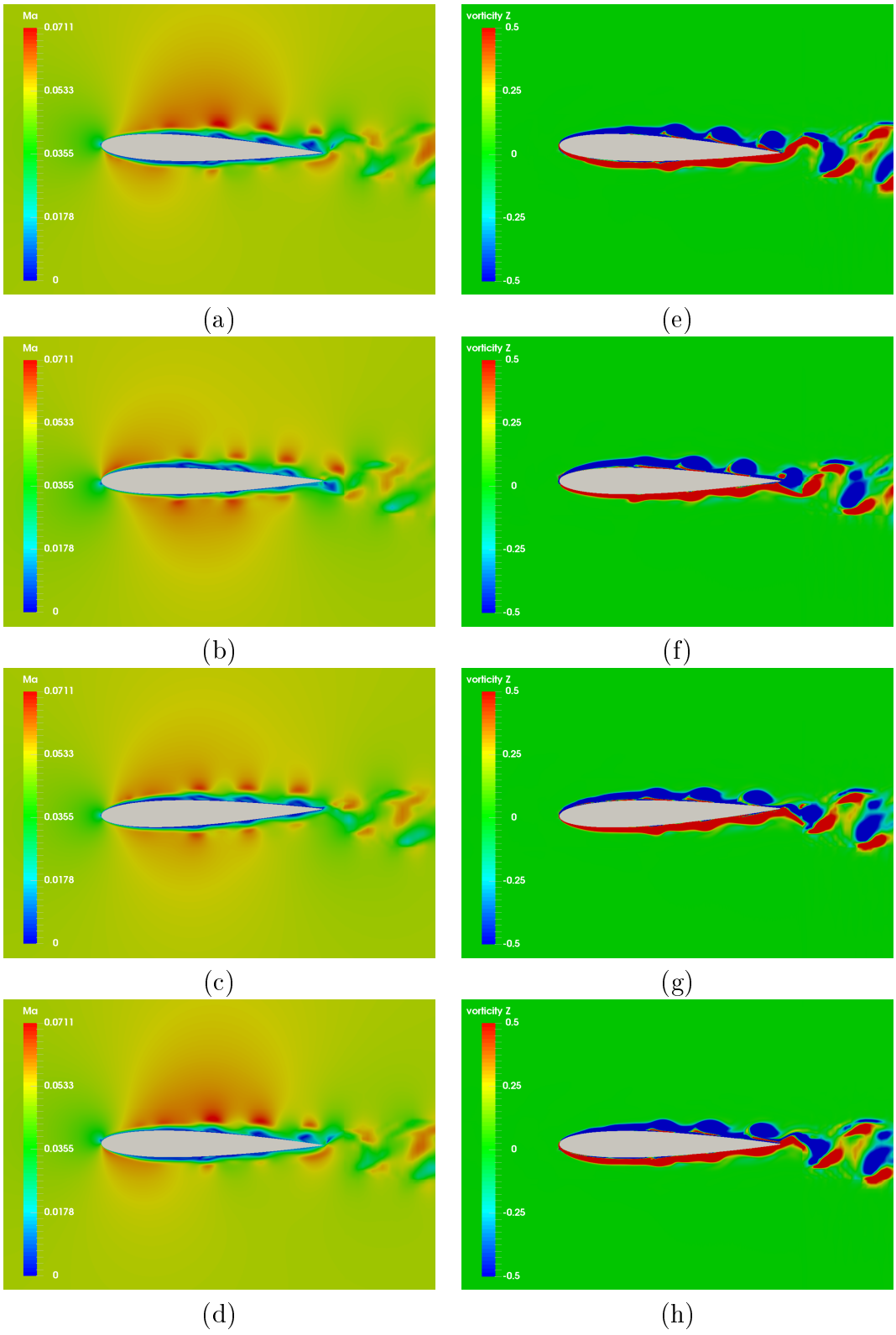


FIGURE 3.36 – Iso-contours du nombre de Mach (a)-(d) et vorticité (e)-(h) pour un écoulement autour d'un profil NACA 0012 oscillant $Ma = 0.05$: (a) et (e) : $t = 0.25T$; (b) et (f) : $t = 0.5T$;(c) et (g) : $t = 0.75T$;(d) et (h) : $t = 1.0T$ avec T : Temps de retournement des lâchers instationnaires.

Bibliographie

[1] E. Constant, J. Favier, M. Meldi, P. Meliga, and E. Serre. An immersed boundary method in openfoam : verification and validation. *Computers & Fluids*, 157 :55–72, 2017.

[2] E. Stålberg, A. Brüger, P. Lötstedt, A. Johansson, and D. Henningson. High order accurate solution of flow past a circular cylinder. *Journal of Scientific Computing*, 27 :431–441, 2006.

[3] D. Tritton. Experiments on the flow past a circular cylinder at low reynolds numbers. *Journal Fluid Mechanics*, 6 :547–567, 1959.

[4] D. Le, B. Khoo, and J. Peraire. An immersed interface method for viscous incompressible flows involving rigid and flexible boundaries. *Journal of Computational Physics*, 220 :109–138, 2006.

[5] S. Dennis and G.-Z. Chang. Numerical solutions for steady flow past a circular cylinder at reynolds numbers up to 100. *Journal Fluid Mechanics*, 42 :471–489, 1970.

[6] M. Coutanceau and R. Bouard. Experimental determination of the main features of the viscous flow in the wake of a circular cylinder in uniform translation. i. steady flow. *Journal Fluid Mechanics*, 79 :231–256, 1977.

[7] R. Gautier, D. Biau, and E. Lamballais. A reference solution of the flow over a circular cylinder at re=40. *Computers & Fluids*, 75 :103–111, 2013.

[8] P. Chiu, R. Lin, and T.W. Sheu. A differentially interpolated direct forcing immersed boundary method for predicting incompressible navier stokes equations in time-varying complex geometries. *Journal of Scientific Computing*, 12 :4476–4500, 2010.

[9] K. Taira and T. Colonius. The immersed boundary method : A projection approach. *Journal of Computational Physics*, 225 :2118–2137, 2007.

[10] C. Brehm, C. Hader, and H. Fasel. A locally stabilized immersed boundary method for the compressible navier stokes equations. *Journal of Computational Physics*, 295 :475–504, 2015.

[11] E. Berger and R. Wille. Periodic flow phenomena. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 4 :313–340, 1972.

[12] F. White. Viscous fluid flow. *(3rd edition), McGraw–Hill, New York*, 1991.

[13] D. Russell and Z. Wang. A cartesian grid method for modeling multiple moving objects in 2d incompressible viscous flow. *Journal of Computational Physics*, 191 :177–205, 2003.

[14] C. Liu, X. Zheng, and C. Sung. Preconditioned multigrid methods for unsteady incompressible flows. *Journal of Computational Physics*, 139 :35–57, 1998.

[15] S. Takahashi, T. Nonomura, and K. Fukuda. A numerical scheme based on an immersed boundary method for compressible turbulent flows with shocks applications to two-dimensional flows around cylinders. *Journal of Applied Mathematics*, 1–21 :2014, 2014.

[16] F. Billig. Shock-wave shapes around spherical and cylindrical-nosed bodies. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 4 :822–823, 1967.

[17] M. Al-Marouf and R. Samtaney. A versatile embedded boundary adaptive mesh method for compressible flow in complex geometry. *Journal of Computational Physics*, 337 :339–378, 2017.

[18] M. de Tullio, P. Palma, G. Iaccarino, G. Pascazio, and M. Napolitano. An immersed boundary method for compressible flows using local grid refinement. *Journal of Computational Physics*, 225 :2098–2117, 2007.

[19] V. Bashkin, A. Vaganov, I. Egorov, D. Ivanov, and G. Ignatova. Comparison of calculated and experimental data on supersonic flow past a circular cylinder. *Fluid Dynamics*, 37 :473–483, 2002.

[20] H.M. Blackburn and R.D. Henderson. A study of two-dimensional flow past an oscillating cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, 385 :255–286, 1999.

[21] R.D. Henderson. Details of the drag curve near the onset of vortex shedding. *Physics of Fluids*, 79 :2102–2104, 1995.

[22] C. Norberg. An experimental investigation of the flow around a circular cylinder : influence of aspect ratio. *Journal of Fluid Mechanics*, 258 :287–316, 1994.

[23] F. Örley, V. Pasquariello, S. Hickel, and N.A. Adams. Cut-element based immersed boundary method for moving geometries in compressible liquid flows with cavitation. *Journal of Computational Physics*, 283 :1–22, 2015.

[24] C.-C. Liao, Y.-W. Chang, C.-A. Lin, and J.M. McDonough. Simulating flows with moving rigid boundary using immersed-boundary method. *Computers and Fluids*, 39 :152–167, 2010.

[25] S.E. Hurlbut, M.L. Spaulding, and F.M. White. Numerical solution for laminar two dimensional flow about a cylinder oscillating in a uniform stream. *Journal of Fluids Engineering*, 104 :214–220, 2015.

[26] S.-W. Su, M.-C. Lai, and C.-A. Lin. An immersed boundary technique for simulating complex flows with rigid boundary. *Computers and Fluids*, 36 :313–324, 2007.

[27] K. Luo et al. A ghost-cell immersed boundary method for simulations of heat transfer in compressible flows under different boundary conditions. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 92 :708–717, 2016.

[28] E.M. Sparrow, J.P. Abraham, and J.C.K. Tong. Archival correlations for average heat transfer coecientsfor non-circular and circular cylinders andfor spheres in cross-ow. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 47 :5285–5296, 2004.

[29] A.A. Soares, J.M. Ferreira, and R.P. Chhabra. Flow and forced convection heat transfer in crossflow of non-newtonian fluids over a circular cylinder. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 44 :5815–5827, 2005.

[30] R.P. Bharti, R.P. Chhabra, and V. Eswaran. Steady flow of power-law fluids across a circular cylinder. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, 84 :406–421, 2006.

[31] H.M. Badr. A theoretical study of laminar mixed convection from a horizontal cylinder in a cross stream. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 26 :639–653, 1983.

[32] S.C.R. Dennis, J.D. Hudson, and N. Smith. Steady laminar forced convection from a circular cylinder at low reynolds numbers. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 11 :933–940, 1968.

[33] P. De Palma, M.D. de Tullio, G. Pascazio, and M. Napolitano. An immersed-boundary method for compressible viscous flows. *Computers and Fluids*, 35 :693–702, 2006.

[34] A-B. Wang, Z. Travnicek, and K-C. Chia. On the relationship of effective reynolds number and strouhal number for the laminar vortex shedding of a heated circular cylinder. *Physics of Fluids*, 12 :1401–1410, 2000.

[35] W. Zhang and R. Samtaney. A direct numerical simulation investigation of the synthetic jet frequency effects on separation control of low-re flow past an airfoil. *Physics of Fluids*, 27 :055101, 2015.

[36] P. Kunz and I. Kroo. Analysis, design and testing of airfoils for use at ultra-low reynolds numbers. *Proceedings of a Workshop on Fixed and Flapping Flight at Low Reynolds Numbers, Notre Dame*, 2000.

[37] R. Mittal, H. Dong, M. Bozkurttas, F.M. Najjar, A. Vargas, and A. von Loebbecke. A versatile sharp interface immersed boundary method for incompressible flows with complex boundaries. *Journal of Computational Physics*, 227 :4825–4852, 2008.

[38] Y.L. Qiu, C. Shu, J. Wu, Y. Sun, L.M. Yang, and T.Q. Guo. A boundary condition-enforced immersed boundary method for compressible viscous flows. *Computers and Fluids*, 136 :104–113, 2016.

[39] A. Dervieux, B. van Leer, J. Periaux, and A. Rizzi. Numerical simulation of compressible euler flows :a gamm workshop. *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, 26, 1989.

[40] P. Jawahar and H. Kamath. A high-resolution procedure for euler and naviar–stokes computations on unstructured grids. *Journal of Computational Physics*, 164 :165–203, 2016.

Chapitre 4

Application : Étude d'écoulement compressible autour d'une sphère

Sommaire

4.1 Introduction 130
4.2 Domaine de calcul 130
4.3 Les régimes d'écoulement autour d'une sphère pour des Reynolds laminaires 131
4.4 Émergence des régimes caractéristiques des écoulements laminaires compressibles : une étude paramétrique 134
4.5 Investigation de l'écoulement subsonique instationnaire autour d'une sphère 136
4.6 Analyse plus fine des régimes transoniques 137
4.7 Investigation de l'écoulement supersonique autour d'une sphère 138
4.8 Écoulement autour d'une sphère en rotation 139
4.9 Transfert de chaleur 141
4.9.1 Domaine de calcul 141
4.9.2 L'influence de r_θ sur le régime de l'écoulement($Ma = 0.8$, $Re = 300$) 141
4.9.3 Investigation d'écoulement supersonique autour d'une sphère chauffée 146
Bibliographie 149

4.1 Introduction

Dans le chapitre 3, on a présenté la validation de la nouvelle méthode des frontières immergées pour l'analyse des écoulements compressibles avec des cas 2D pour une large gamme de nombres de Mach (faiblement compressible, transsonique et supersonique) et pour des nombres de Reynolds faibles et modérés. Nous proposons dans la suite des chapitres l'analyse physique des applications tridimensionnelles. Dans ce chapitre, on choisit d'étudier l'écoulement autour d'une sphère pour des nombres de Mach entre $Ma = 0.3$ et $Ma = 2$ et des nombres de Reynolds entre $Re = 50$ et $Re = 600$. En fait, la sphère est une géométrie de modélisation importante dans la prédiction des écoulements compressibles tridimensionnels réels. L'outil numérique présente plusieurs avantages par rapport à l'approche expérimentale, non seulement en terme de coût financier, mais surtout pour sa capacité à modéliser des situations réalistes industrielles comme par exemple les effets de la forme de la rampe de lancement sur les gaz d'échappement d'un moteur-fusée. Pour l'analyse de cet écoulement, on constate la présence de plusieurs phénomènes acoustiques, thermiques et dynamiques générés par l'interaction entre l'écoulement et les particules solides. Également, cette modélisation est importante dans les études de contrôle des écoulements supersoniques dans le domaine de l'ingénierie spatiale (réduire le flux de chaleur et la traînée d'onde), dans le contrôle des missiles par rotation et dans des applications en combustion.

4.2 Domaine de calcul

Le domaine de calcul utilisé pour cette simulation est : $x \times y \times z = [-16D,\, 48D] \times [-16D,\, 16D] \times [-16D,\, 16D]$ avec D le diamètre de la sphère. Également, le centre de la sphère et l'origine du domaine de calcul sont confondus. Deux maillages sont utilisés pour l'analyse de cet écoulement. Un premier maillage moins raffiné, noté $sphereA$, est composé par des éléments uniformes hexaédriques qui sont progressivement affinés à l'approche de la région de la sphère (Voir figure 4.1). La taille des éléments est raffinée d'un facteur 2 dans chaque direction de l'espace aux interfaces entre les régions à différentes résolutions. La région centrale la plus raffinée est définie par les coordonnées $x \times y \times z = [-1.25D,\, 1.25D] \times [-1.25D,\, 1.25D] \times [-1.25D,\, 1.25D]$. Dans cette région, la résolution du maillage est $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 1/64D$. Ainsi, ce maillage est composé au total de 5×10^6 éléments.

Un deuxième maillage plus raffiné, noté $sphereB$, a été utilisé pour effectuer une analyse plus précise des caractéristiques de la région proche paroi pour un nombre limité de valeurs de Ma, Re. Le maillage est presque identique à $sphereA$, mais une région de résolution plus élevée est introduite avec les coordonnées $x \times y \times z = [-D,\, D] \times [-D,\, D] \times [-D,\, D]$. Dans cette région, la résolution $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 1/128D$ est imposée. Le nombre total des éléments de maillage dans ce cas est 16×10^6.

La taille des éléments de maillage dans la région de proche paroi a été sélectionnée con-

formément aux recommandations de Johnson et Patel [1] :

$$\Delta x_{min} = \Delta y_{min} = \Delta z_{min} \approx \frac{1.13}{\sqrt{Re} \times 10.0} \tag{4.1}$$

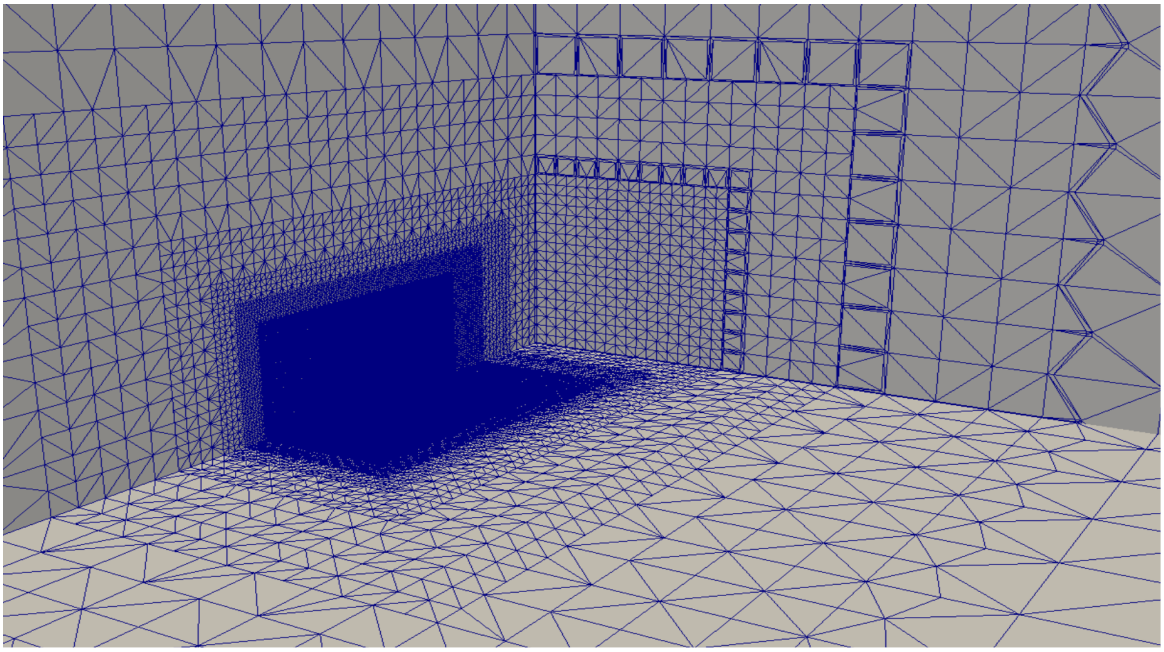


FIGURE 4.1 – Visualisation des plans du maillage cartésien 3D utilisé pour le calcul de l'écoulement autour d'une sphère.

Afin de fournir une représentation adéquate des caractéristiques physiques de l'écoulement, le solveur *IBM-sonicFoam* est utilisé pour les $Ma \leq 0.3$ et inversement le solveur *IBM-rhoCentralFoam* est utilisé pour les $Ma > 0.3$.

Les simulations numériques ont été effectuées en utilisant la librairie de parallélisation mpi disponible dans OpenFOAM et le domaine physique a été décomposé en 40 et 64 sous-domaines pour *SphereA* et *SphereB*, respectivement. Pour la simulation des régimes stationnaires, la convergence des écoulements est obtenue après environ 90 heures pour les simulations en utilisant le maillage *SphereA* et 150 heures pour les simulations en utilisant le maillage *SphereB*. Pour les simulations instationnaires, le nombre CFL a été fixé à 0.1. Les ressources de calcul requises pour effectuer un cycle complet de structure instationnaire dans un régime établi sont en moyenne égales à 48 - 84 heures pour le maillage *SphereA* et pour le maillage *SphereB*, respectivement.

4.3 Les régimes d'écoulement autour d'une sphère pour des Reynolds laminaires

Pour les écoulements incompressibles, Johnson et Patel [1] ont étudié numériquement et expérimentalement les structures d'écoulement autour d'une sphère à des nombres de Reynolds allant jusqu'à 300. Trois régimes avec des bifurcations nettes ont été observés :

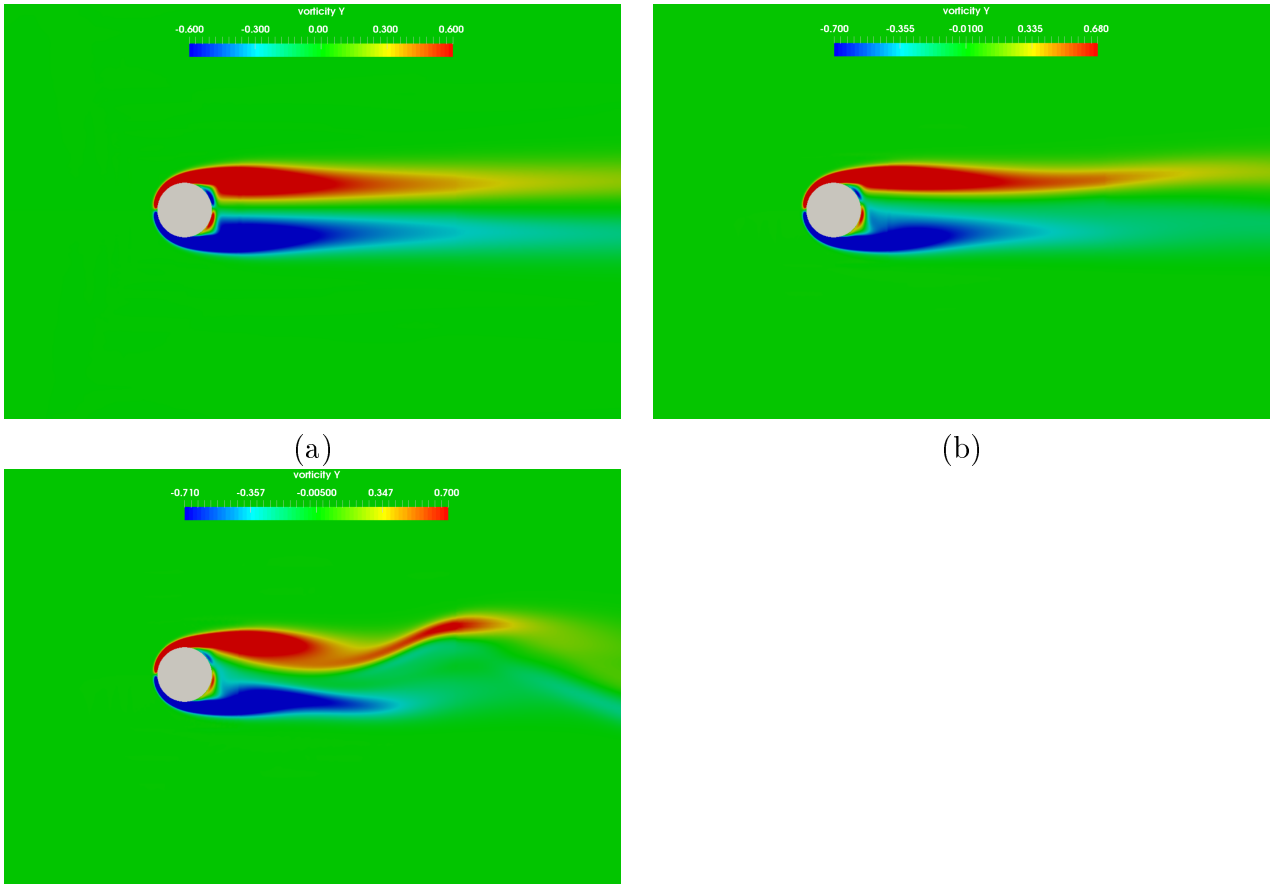


FIGURE 4.2 – Vorticité d'un écoulement autour de la sphère pour $Ma = 0.4$, (a) $Re = 205$ (État axisymétrique stationnaire), (b) $Re = 250$ (État planaire-symétrique stationnaire) et (c) $Re = 300$ (État instationnaire). La composante de vorticité autour de l'axe y est tracée.

(a) Pour des nombres de Reynolds allant jusqu'à 200, le régime de l'écoulement est axisymétrique.

(b) Le régime de l'écoulement devient stationnaire non axisymétrique (planaire-symétrique) à des nombres de Reynolds entre 210 et 270.

(c) Un écoulement instable a été observé à des nombres de Reynolds supérieur à 270, et les structures tourbillonnaires apparaissent d'une manière temporellement périodique.

Ainsi, pour ces écoulements incompressibles, le nombre de Reynolds Re est le seul paramètre dont dépend la structure de l'écoulement.
En revanche, pour les écoulements compressibles, on doit prendre en compte les deux paramètres : le nombre de Mach Ma et le nombre de Reynolds Re.
Pour un Ma progressivement plus élevé, les deux valeurs de Re de transition augmentent par rapport à l'écoulent incompressible. Une représentation des caractéristiques qualitatives de ces trois régimes ($Ma = 0,4$) est présentée sur la figure 4.2 en utilisant les isocontours de vorticité.

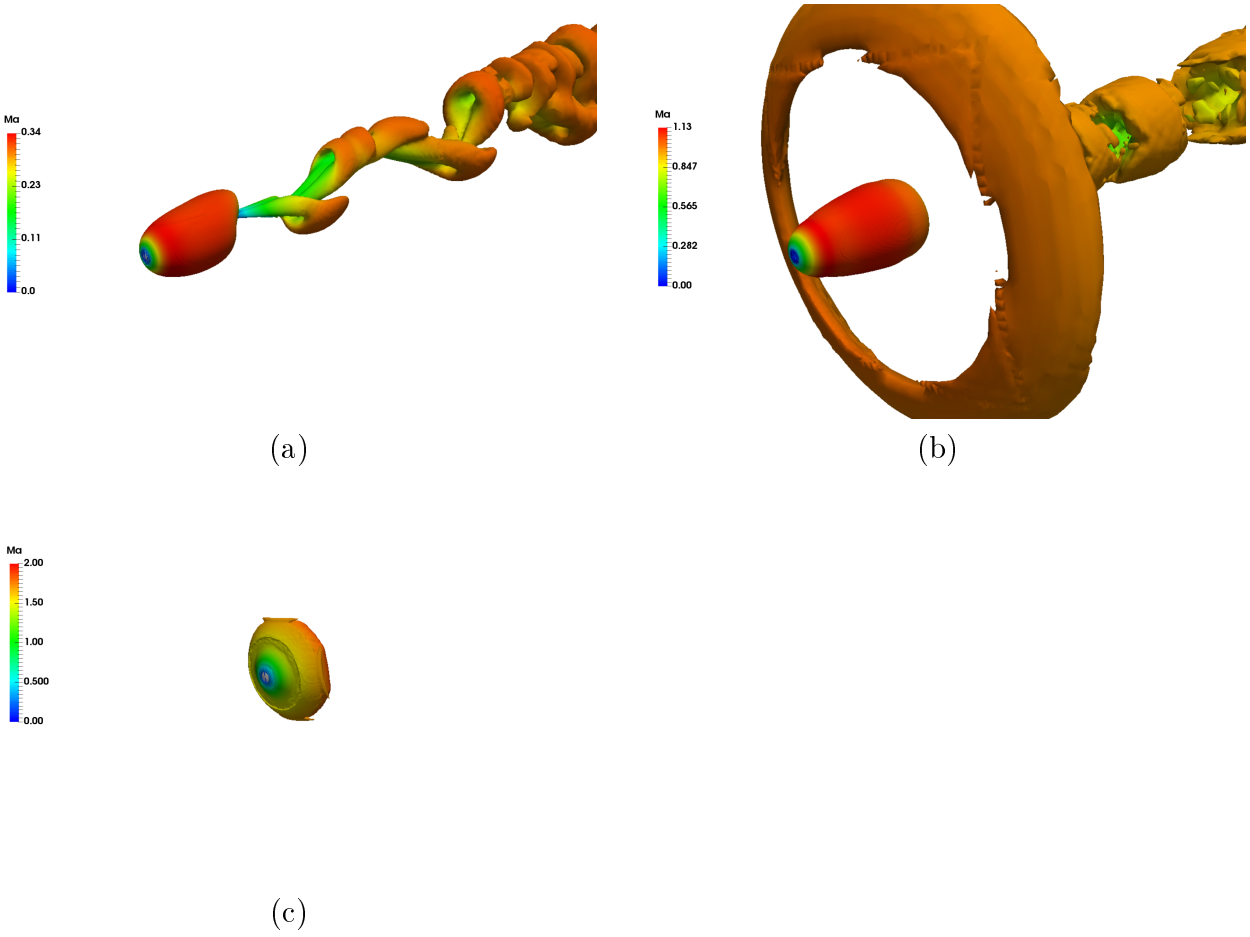


FIGURE 4.3 – Critère Q d'un écoulement autour d'une sphère pour Re=300, (a) $Ma = 0.3$ (Configuration instationnaire), (b) $Ma = 0.95$ (Configuration stationnaire) et (c) $Ma = 2$ (Configuration stationnaire).

D'autre part, en fixant le même nombre de Reynolds pour un régime instationnaire à faible nombre de Mach, on observe, en traçant le critère Q (voir Figure 4.3), des structures tourbillonnaires en forme de structure hairpin pour les écoulements subsoniques et qui disparaissent à mesure que le nombre de Mach augmente. Ces structures hairpin disparaissent totalement pour le nombre de Mach de 0,95. De plus, à ce nombre de Mach, une onde de choc est formée en aval de la sphère.

Afin d'effectuer une étude rigoureuse de cette configuration, on a eu recours à des simulations numériques directes (DNS) de l'écoulement autour de la sphère avec une base de données de 120 simulations numériques dans l'espace paramétrique $[Ma] \times [Re] = [0.3, 2] \times [50, 600]$. Les résultats sont comparés avec les données récentes rapportées dans la littérature pour des simulations numériques avec un maillage conforme à la sphère et des schémas numériques d'ordre élevé. Dans cette étude, nous clarifions l'effet du Mach et du Reynolds sur le régime de l'écoulement, les grandeurs caractéristiques de l'écoulement et les coefficients aérodynamiques.

4.4 Émergence des régimes caractéristiques des écoulements laminaires compressibles : une étude paramétrique

On commence notre analyse par l'étude de cartographie de différents régimes d'écoulement avec la variation des valeurs de Ma et Re. Les différents régimes observés via l'analyse de la base de données de 120 simulations effectuées à l'aide du maillage *SphereA* sont résumées sur la figure 4.4.
Les écoulements axisymétriques et planaire-symétriques sont identifiés par la forme de la boucle de recirculation autour de l'axe des **x**. Par ailleurs, les écoulements deviennent instationnaires lorsqu'une évolution périodique du coefficient de portance est observée.
Pour les écoulements subsoniques faiblement compressibles, les Reynolds de transition sont similaires aux écoulements incompressibles. L'écoulement devient instationnaire pour les nombres de Mach subsoniques aux nombres de Reynolds compris entre 280 et 300. Par contre, l'écoulement est stationnaire pour les régimes transsoniques et supersoniques à cette plage des nombres de Reynolds. Par conséquent, on constate que la topologie de l'écoulement devient plus stable et axisymétrique lorsque le nombre de Mach augmente : les deux Reynolds de transition se rapprochent avec le Mach en finissant par se superposer en régime transsonique avec $Ma \approx 0.95$. Pour des valeurs de Mach plus élevées, un régime axisymétrique stationnaire est uniquement observé.
Finalement, il est important de noter que le plan de symétrie dans le régime stationnaire planaire-symétrique résulte des phénomènes purement numériques.
La comparaison avec les données de haute précision réalisées par Sansica et al. [2] indique que les nombres de Reynolds critiques de transition sont très similaires comme le montre la figure 4.5. Les différences maximales observées sont de l'ordre de $\approx 8\%$ du nombre de Reynolds. Ces différences maximales sont observées pour $Ma \approx 0.8$, $Re \approx 250$ où Sansica et al. [2] ont fait l'hypothèse d'une évolution linéaire de la valeur seuil de transition déterminée par l'analyse de stabilité à partir d'un nombre limité de simulations. Ceci peut expliquer cette différence relativement faible dans les résultats. D'autre part, le très grand nombre de simulations numériques d'IBM effectuées ici autour de la valeur du paramètre $Ma \approx 1$ montre que la disparition du régime planaire-symétrique est plutôt brusque et non pas linéairement progressive.

Les résultats de la base de données ont été utilisés pour effectuer des analyses quantitatives des principales quantités physiques caractérisant les régimes d'écoulement.
On commence par l'analyse de l'angle de séparation α_s et la longueur de recirculation x_s. L'angle α_s est défini par la position de changement de signe du gradient de vitesse sur la surface de la sphère. Il est exprimé sous la forme d'un angle à partir du point d'arrêt du côté amont de la sphère.D'autre part, la longueur de recirculation x_s est exprimée comme la distance entre la surface de la sphère et l'extrémité de la zone de recirculation. Dans ce paragraphe, cette grandeur est normalisée par le diamètre de la sphère. La longueur de séparation est déterminée à partir de la composante dans la direction **x** de la vitesse d'écoulement du côté aval de la sphère. L'extrémité de la région de séparation est définie par la position pour laquelle le signe de la composante x de la vitesse passe du négatif au positif.
Des cartes de l'angle de séparation α_s et de la longueur de recirculation x_s en fonction de Re et Ma sont montrées sur les figures 4.6(b) et 4.6(c).

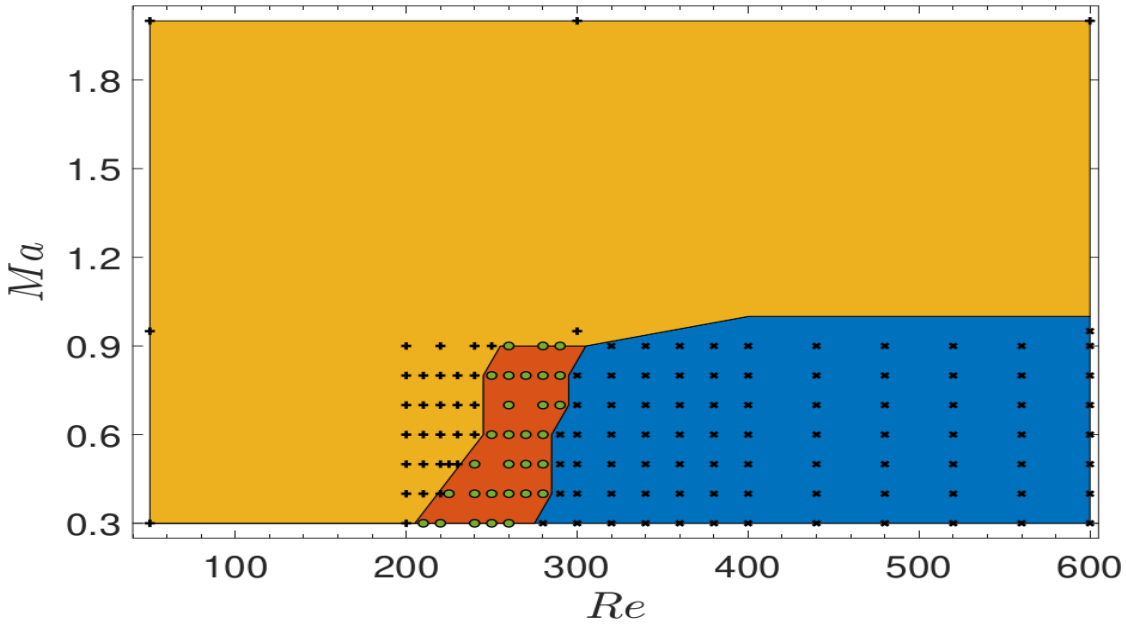


FIGURE 4.4 – Émergence de différents régimes caractéristiques pour l'écoulement autour d'une sphère, en fonction de Re et Ma : (+) écoulement axisymétrique stationnaire, (•) écoulement planaire-symétrique stationnaire, (×) Écoulement instationnaire périodique.

On observe que pour un même nombre de Reynolds, l'angle de séparation et la longueur de recirculation changent de manière significative en passant la région transsonique. Lorsqu'on augmente le nombre de Mach, l'angle de séparation se déplace vers l'amont dans le régime subsonique et vers l'aval pour les écoulements supersoniques. De plus, on note un faible changement de l'angle de séparation dans le régime subsonique qui devient plus important avec l'apparition de l'onde de choc. On peut expliquer ce comportement par le confinement imposé par la forme du choc sur l'écoulement derrière la sphère.
En revanche, la longueur de recirculation se déplace vers l'aval de la sphère pour les écoulements subsoniques et se déplace vers l'amont pour les écoulements supersoniques. De plus, on note un changement considérable de la longueur de recirculation pour l'ensemble des nombres de Mach analysés et avec une augmentation importante dans le régime transsonique.

La comparaison des résultats présents avec les données de Nagata et al. [3] montre d'avantage l'efficacité de la méthode IBM proposée (Voir la table 4.1).

D'autre part, la figure 4.6(a) montre que le coefficient de traînée totale (avec deux composantes : la première est due à l'effet de viscosité et la deuxième est due à l'effet de pression) augmente avec le nombre de Mach et diminue avec le nombre de Reynolds. Pour un nombre de Reynolds donné, on observe une augmentation rapide du C_d en fonction du nombre de Mach en passant du régime subsonique au régime transsonique et une diminution également rapide du C_d en passant du régime transsonique au régime supersonique. D'après l'étude faite par Nagata et al. [3], le coefficient de traînée de frottement augmente légèrement avec le Mach à cause du "chauffage aérodynamique". Ainsi, l'évolution de la traînée totale est principalement due à la traînée de pression. On explique

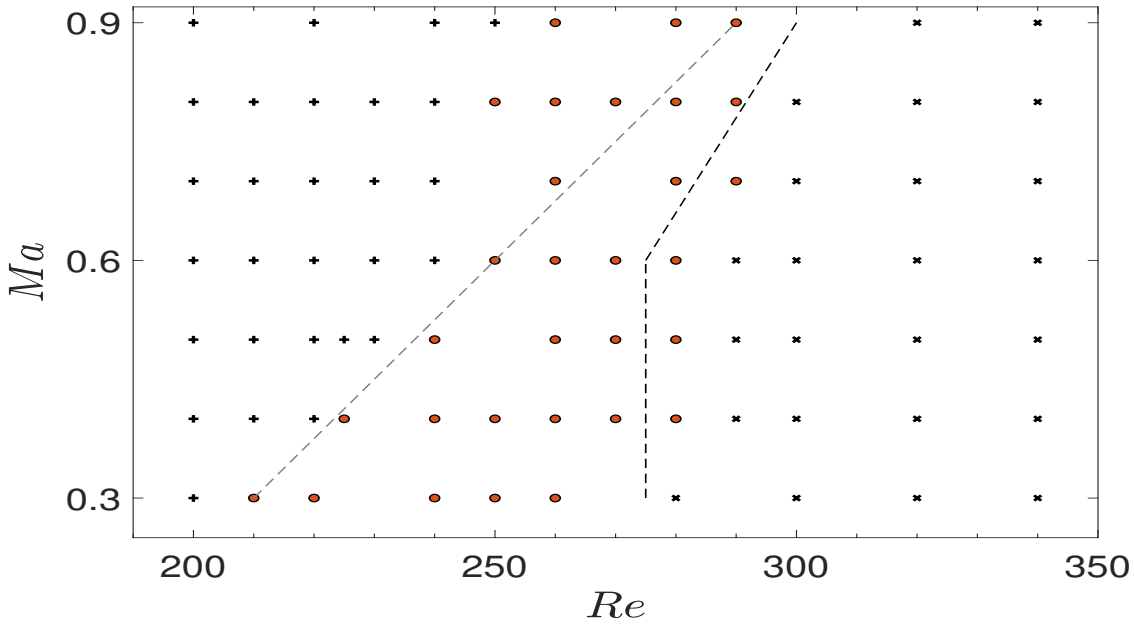


FIGURE 4.5 – Type de topologie d'écoulement subsonique : (+) écoulement axisymétrique stationnaire, (•) écoulement planaire-symétrique stationnaire, (×) Écoulement instationnaire périodique. Les lignes pointillées représentent les valeurs de seuil pour le changement de régime d'écoulement, calculées par l'analyse de stabilité par Sansica et al. [2].

cette tendance d'évolution de C_d en fonction du Mach pour chaque régime d'écoulement de la façon suivante :

- Pour l'écoulement subsonique, l'augmentation du Mach entraîne une augmentation de la compression dans la partie amont de la sphère et par la suite le coefficient C_d.
- Pour l'écoulement transsonique, l'apparition de l'onde de choc génère une nouvelle composante de traînée dite "traînée d'onde" ce qui entraîne une augmentation brutale de C_d dans ce régime.
- Pour l'écoulement supersonique, l'effet de la pression diminue parce que l'écoulement décélère derrière le choc. En revanche, cette légère diminution du coefficient de traînée de pression est compensée par une légère augmentation du coefficient de traînée de frottement.

4.5 Investigation de l'écoulement subsonique instationnaire autour d'une sphère

Les configurations d'écoulement instationnaire sont analysées en utilisant le maillage le plus raffiné *SphereB* pour les deux ensembles de paramètres (Ma, Re) = (0.3, 300) et (0.3, 600) afin de mieux analyser les grandeurs caractéristiques de ce régime. Pour ces deux cas, on obtient un comportement instationnaire comme le montre l'évolution dans le temps du coefficient de portance C_l représentée sur la figure 4.7. La génération des tourbillons

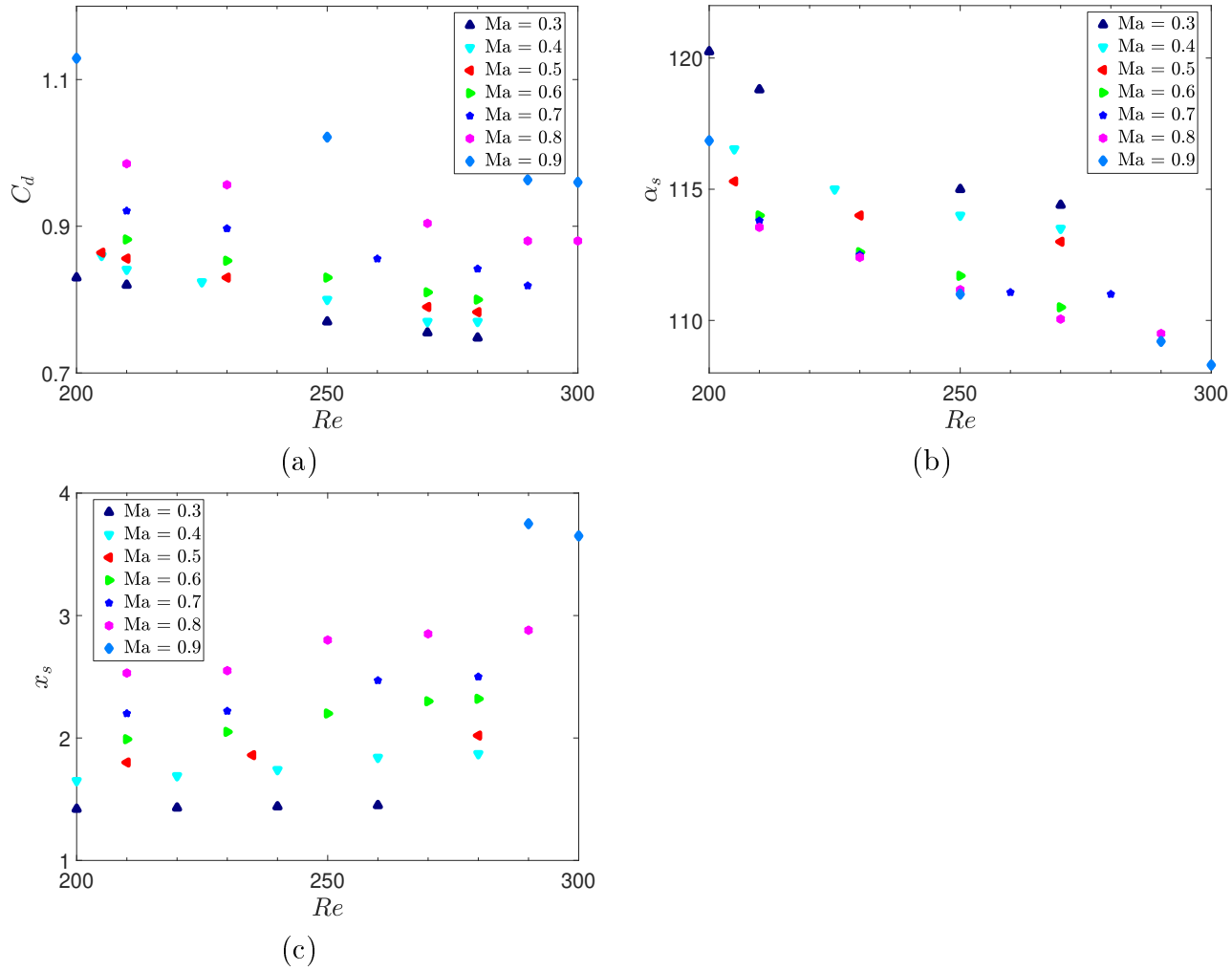


FIGURE 4.6 – (a) Coefficient de trainée C_d, (b) l'angle de séparation α_s et (c) la longueur de recirculation x_s en fonction de Re et Ma. Les données sont échantillonnées à partir d'une base de données de 120 simulations.

se produit d'une manière périodique dans ce cas. Le coefficient de traînée C_d et le nombre de Strouhal St sont reportés dans la table 4.1. La comparaison de ces grandeurs avec les données de la littérature numérique [3] et expérimentale [4] prouve le haut niveau de performance du solveur IBM proposé.

4.6 Analyse plus fine des régimes transoniques

Un nombre limité de simulations numériques ont été effectuées en utilisant le maillage *SphereB* pour étudier plus en profondeur l'émergence de différents régimes de l'écoulement transsonique avec $Ma = 0.95$. Nous rappelons que pour ce régime d'écoulement, la transition du régime axisymétrique au régime instationnaire est brutale et se fait sans le passage par un état stationnaire non axisymétrique. Deux simulations numériques à une résolution élevée sont effectuées pour $Re = 50$ et $Re = 600$. Les isocontours de Mach sont représentés sur la figure 4.8 (a-b) pour les deux cas. Pour ce dernier, un choc en

	Cas Test	$\overline{C_D}$	x_s	St	Δ_{shock}
Ma=0.3	**Present (Re=300)**	0.703	2.05	0.123	-
	Nagata et al. [3] (Num.)	0.68	2	0.128	-
	Present (Re=600)	0.58	2.1	0.143	-
	Krumins [4] (Exp.)	0.54	-	-	-
Ma=0.95	**Present. (Re=50)**	2.116	1.15	-	-
	Present (Re=600)	0.91	4.1	0.138	2.75 (choc en aval)
	Krumins [4] (Exp.)	0.9	-	-	-
Ma=2	**Present (Re=300)**	1.39	1	-	0.2
	Nagata et al. [3] (Num.)	1.41	1	-	0.2
	Sugimoto et al. [5] ($Ma = 2.1$)	1.41	1	-	0.18
	Heberle et al.[6] ($Ma = 1.8$)	1.41	1	-	0.2
	Ambrosio et Wortman [7]	1.41	1	-	0.195
	Present (Re=600)	1.27	1.1	-	0.18
	Krumins [4] (Expe.)	1.17	-	-	-

TABLE 4.1 – Les quantités caractéristiques de l'écoulement autour de la sphère, obtenues avec la simulation IBM et en utilisant la grille raffinée *sphereB*. Les résultats sont comparés aux données disponibles dans la littérature. C_D est le coefficient de traînée moyen, x_s est la longueur de recirculation, S_t est le nombre de Strouhal et Δ_{shock} est l'emplacement de choc.

aval de la sphère (la fermeture de la poche supersonique) peut être clairement observé via le critère Q et le critère de Schlieren, qui sont rapportés sur la figure 4.8 (c-d). De plus, la comparaison des paramètres caractéristiques de l'écoulement avec les données de la littérature [3, 4], qui sont rapportées dans la table 4.1, prouve à nouveau l'efficacité de la méthode IBM proposée.

4.7 Investigation de l'écoulement supersonique autour d'une sphère

L'écoulement supersonique à $Ma = 2$ est étudié dans ce paragraphe en utilisant le maillage raffiné. Dans ce cas, les simulations numériques sont effectuées pour $Re = 50$, $Re = 300$ et $Re = 600$, où les effets de compressibilité sont très forts et une configuration axisymétrique régulière est observée dans les trois cas.
L'analyse des principaux paramètres caractéristiques de l'écoulement, rapportés dans le tableau 4.1, indique que toutes les quantités physiques se comparent bien avec les données de la littérature [4, 3]. Les isocontours du nombre de Mach et le critère de Schlieren sont tracés sur la figure 4.16.

Le tableau 4.1 présente une comparaison de l'emplacement du choc avec les études précédentes. Cet emplacement est défini comme la distance entre le front l'onde de choc détachée et la surface de la sphère au point d'arrêt. Les présents résultats montrent que l'onde du choc s'éloigne à mesure que le nombre de Reynolds diminue.On montre que les résultats obtenus avec notre approche IBM au nombre de Reynolds de 300 concordent

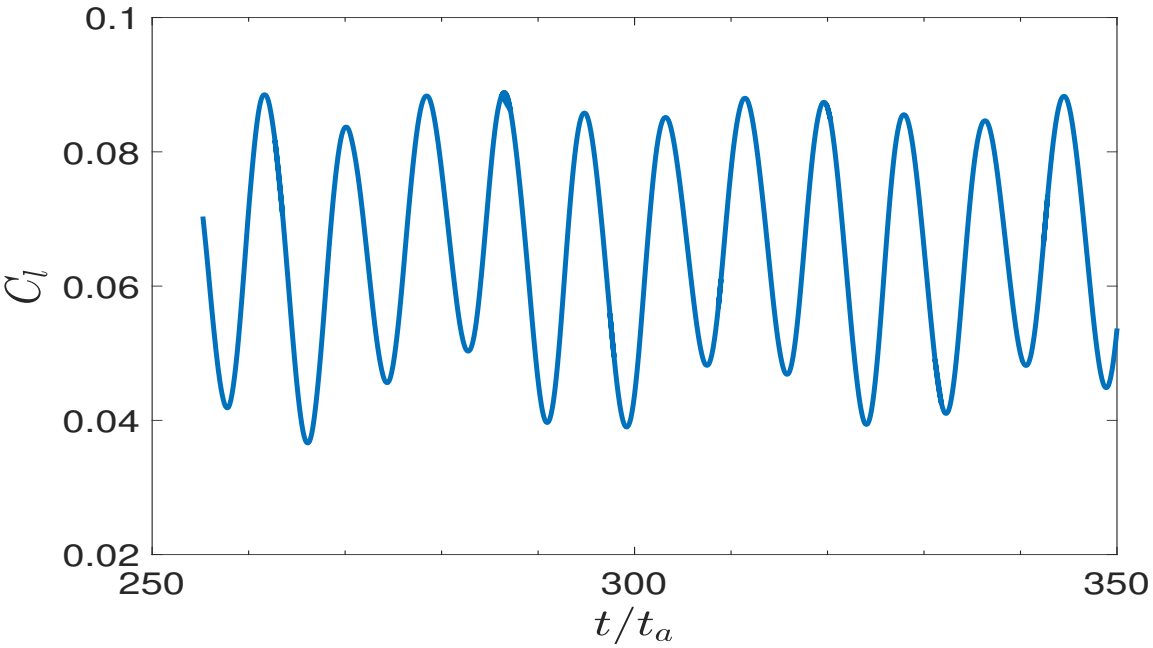


FIGURE 4.7 – Évolution temporelle de coefficient de portance C_l de l'écoulement autour de la sphère pour $Ma = 0.3$ et $Re = 300$.

bien avec les résultats expérimentaux de Sugimoto et al. [5] et Heberle et al.[6] et avec le modèle semi-empirique de Ambrosio et Wortman [7].

4.8 Écoulement autour d'une sphère en rotation

Dans cette section, on étudie un écoulement subsonique autour d'une sphère en rotation. La sphère tourne avec une vitesse angulaire constante ω autour de l'axe z. Le nombre de Mach asymptotique en amont Ma_∞ de la sphère dans le sens x et le nombre de Mach de rotation $Ma_\omega = \omega D/2$ caractérisant cet écoulement sont :

$$Ma_\infty = 0.5 \tag{4.2}$$
$$Ma_\omega = 0.5 \tag{4.3}$$

Deux simulations sont effectuées pour $Re = 200$ et $Re = 300$, respectivement. Elles sont comparées aux simulations IBM correspondant à l'écoulement autour d'une sphère fixe, c'est-à-dire $Ma_\omega = 0$. La comparaison entre les quatre simulations est présentée sur les figures 4.10, 4.11 et 4.12 en utilisant le critère Q, les lignes de courant et les isocontours de Ma. Pour le cas $Re = 200$, l'écoulement sans rotation imposée est stationnaire. En revanche, la rotation de la sphère déclenche l'émergence d'un régime instationnaire, où des structures tourbillonnaires sont périodiquement générées en aval. De plus, les lignes de courant derrière la sphère perdent leur comportement symétrique.
Pour $Re = 300$, les deux configurations de l'écoulement sont instationnaires. Cependant, l'effet de la rotation est clairement visible dans l'évolution des quantités caractéristiques

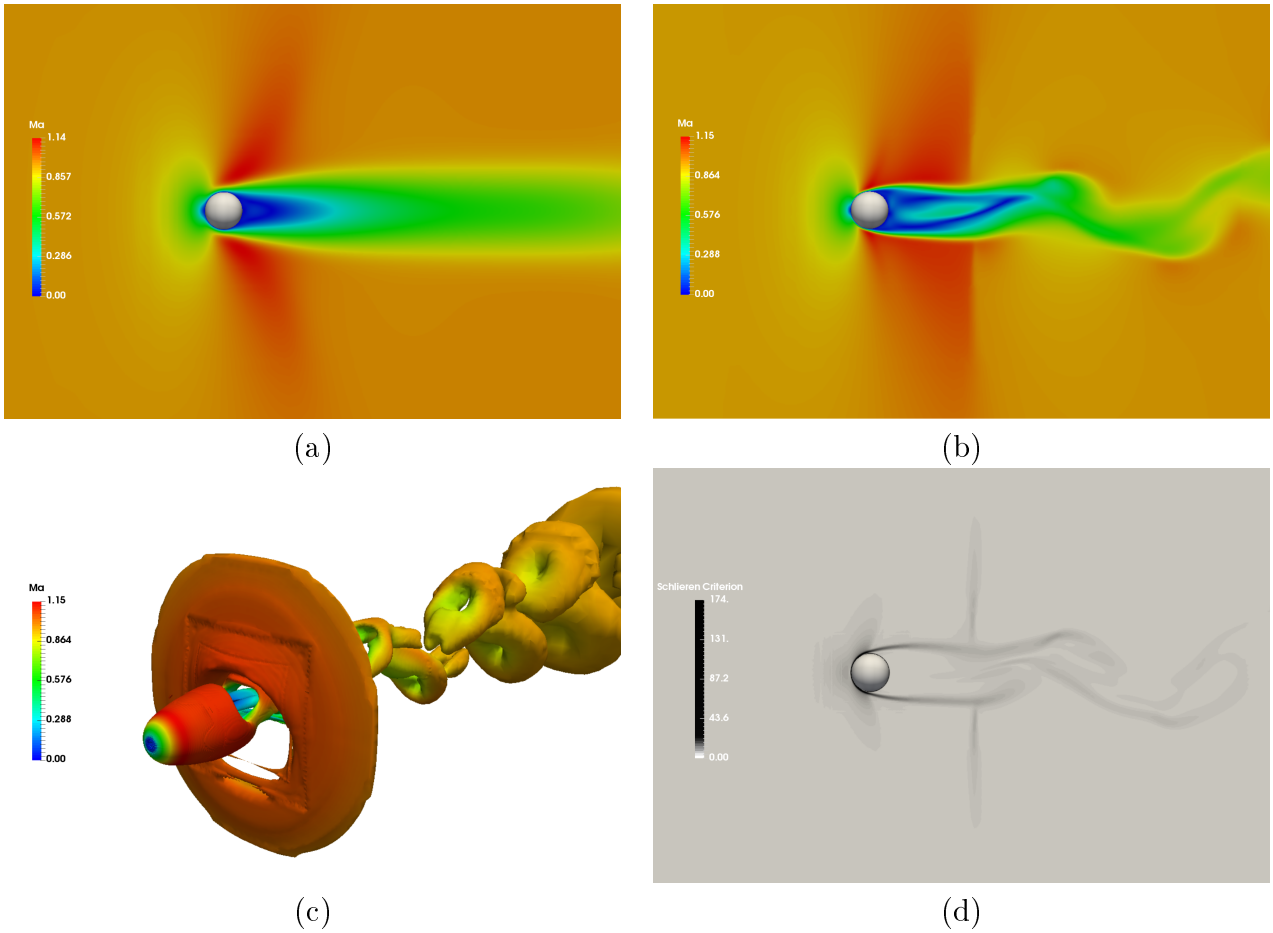


FIGURE 4.8 – Simulation numérique d'un écoulement transsonique autour de la sphère pour $Ma = 0.95$, en utilisant le maillage haute résolution *sphereB*. Les isocontours du nombre de Mach Ma sont tracés pour (a) $Re = 50$ et (b) $Re = 600$, respectivement. Pour le deuxième cas, un choc en aval est observé via (c) le critère Q et (d) le critère Schlieren.

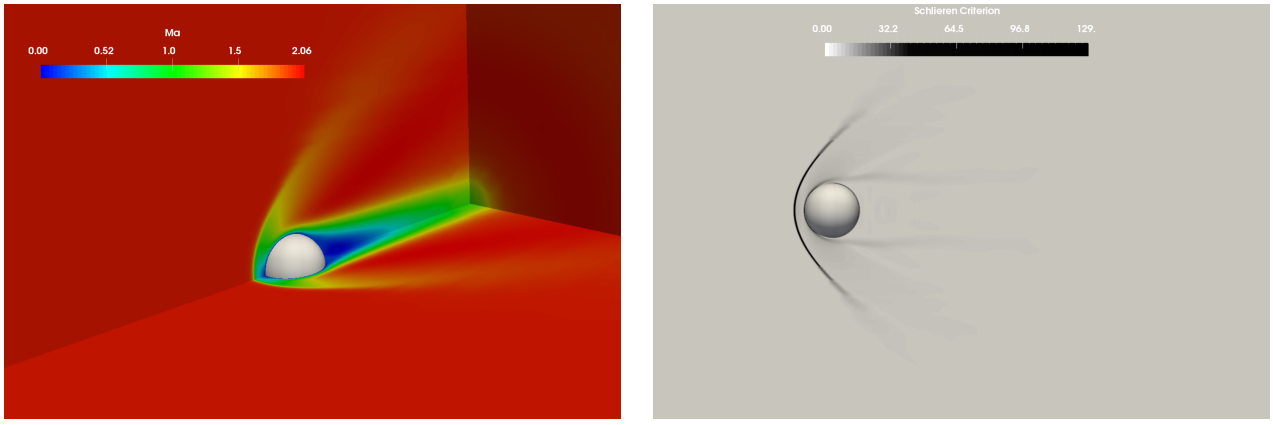


FIGURE 4.9 – Simulation numérique d'un écoulement supersonique autour de la sphère pour $Ma = 2$, en utilisant le maillage haute résolution *sphereB*. (a) Les isocontours du nombre de Mach Ma sont tracés pour $Re = 300$ et (b) le critère Schlieren pour $Re = 600$.

de l'écoulement. En particulier, la boucle de recirculation n'est plus symétrique et un effet de portance est obtenu. Des caractéristiques plus intéressantes peuvent être déduites par l'analyse des coefficients aérodynamiques globaux reportés dans le tableau 4.2. D'une manière générale, la rotation est responsable d'une augmentation de la valeur du coefficient de traînée C_D et du nombre de Strouhal S_t. De plus, la génération d'une force de portance est également observée, ce que l'on appelle habituellement **l'effet Magnus**.
L'analyse des résultats montre que le modèle IBM capture avec succès ce phénomène physique.

Studies	C_D	C_l	C_l^{rms}	S_t
Re = 200				
$Ma_\omega = 0$	0.87	0	-	-
$Ma_\omega = 0.5$	1.02	0.5	0.46	0.17
Re = 300				
$Ma_\omega = 0$	0.77	0.08	0.068	0.12
$Ma_\omega = 0.5$	0.92	0.47	0.45	0.22

TABLE 4.2 – Quantités physiques caractéristiques de l'écoulement autour d'une sphère en rotation.

4.9 Transfert de chaleur

Nous étudions maintenant le cas d'un écoulement compressible autour d'une sphère avec un transfert de chaleur avec le fluide.

4.9.1 Domaine de calcul

Dans ce chapitre, on utilise le maillage *sphereA* présenté dans le paragraphe 4.2 et en prenant en compte les propriétés de l'écoulement étudié, on choisit le solveur *IBMrhoCentralFoam* pour cette étude.
De la même façon que le chapitre précédent, les simulations numériques ont été réalisées en utilisant les librairies de parallélisation disponible dans *OpenFOAM* et le domaine physique a été partitionné en 40 sous-domaines. Le temps de calcul est plus grand que le chapitre précédent à cause des termes sources supplémentaires. Pour la simulation des cas stationnaires, la convergence de l'écoulement est obtenue après environ 110 heures de calcul. Pour les simulations instationnaires, le nombre CFL a été fixé à 0,1. Les ressources de calcul requises pour effectuer une période complète dans un régime établi sont en moyenne égales à 55 heures de calcul.

4.9.2 L'influence de r_θ sur le régime de l'écoulement($Ma = 0.8$, $Re = 300$)

Nous avons choisi d'étudier un écoulement autour d'une sphère chauffée pour $Ma = 0.8$ et $Re = 300$. Ce cas de test a été choisi en raison de l'émergence de l'ensemble des régimes

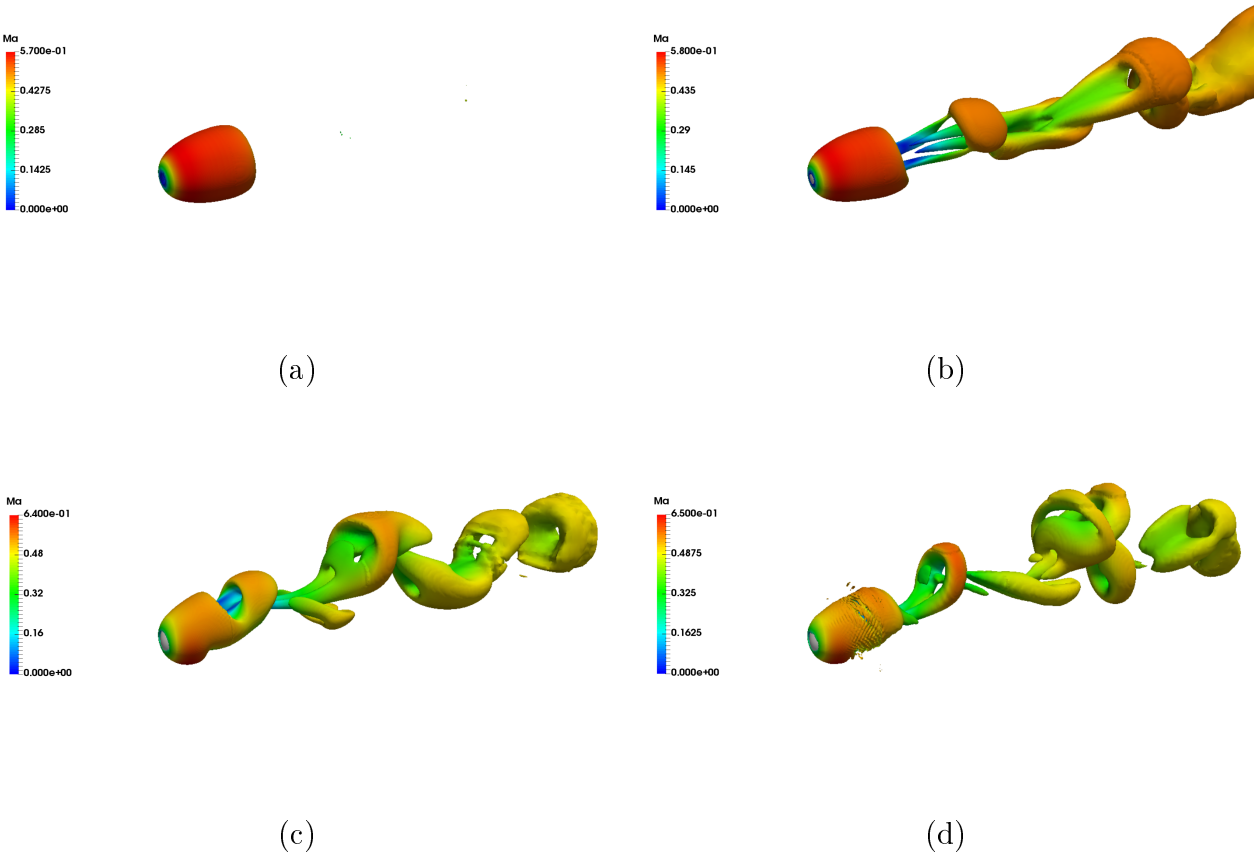


FIGURE 4.10 – Les structures tourbillonnaires pour un écoulement autour d'une sphère en rotation pour $Ma_\infty = 0.5$. Les configurations (a) $Ma_\omega = 0$, $Re = 200$, (b) $Ma_\omega = 0$, $Re = 300$, (c) $Ma_\omega = 0.5$, $Re = 200$ et (d) $Ma_\omega = 0.5$, $Re = 300$ sont représentées, respectivement.

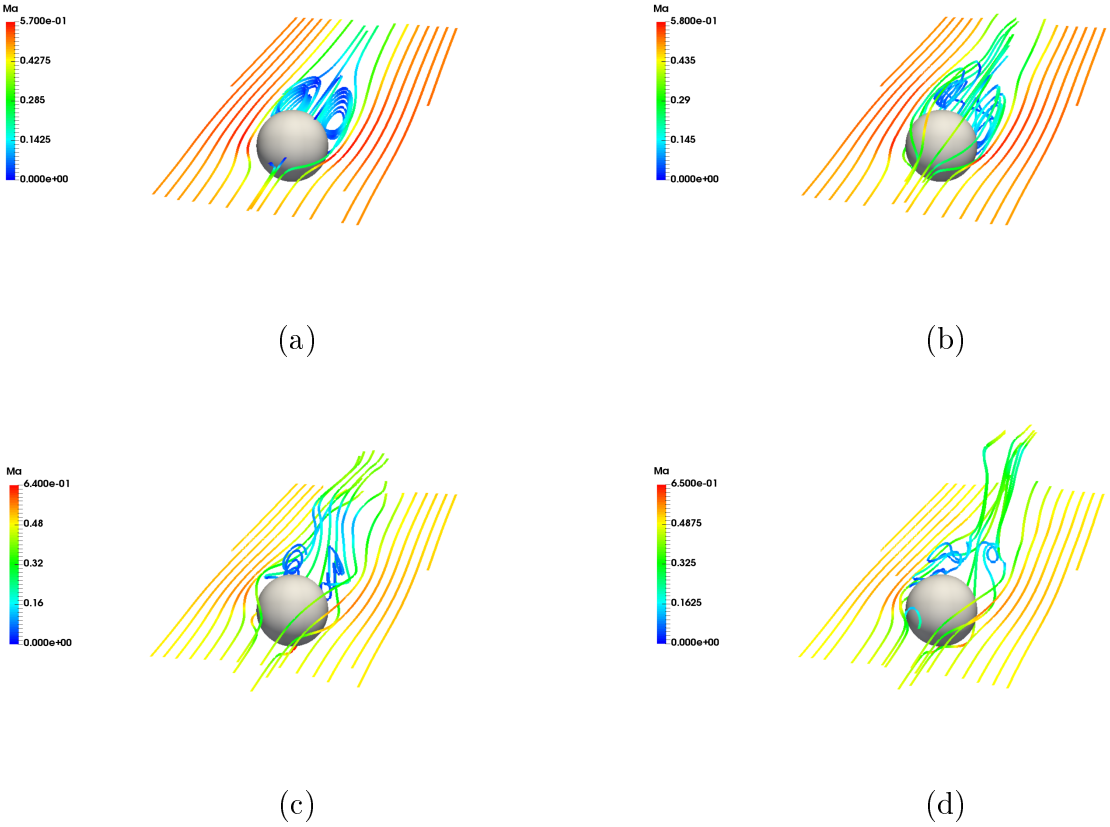


FIGURE 4.11 – Les lignes de courants d'un écoulement autour d'une sphère en rotation pour $Ma_\infty = 0.5$. Les configurations (a) $Ma_\omega = 0$, $Re = 200$, (b) $Ma_\omega = 0$, $Re = 300$, (c) $Ma_\omega = 0.5$, $Re = 200$ et (d) $Ma_\omega = 0.5$, $Re = 300$ sont représentées, respectivement.

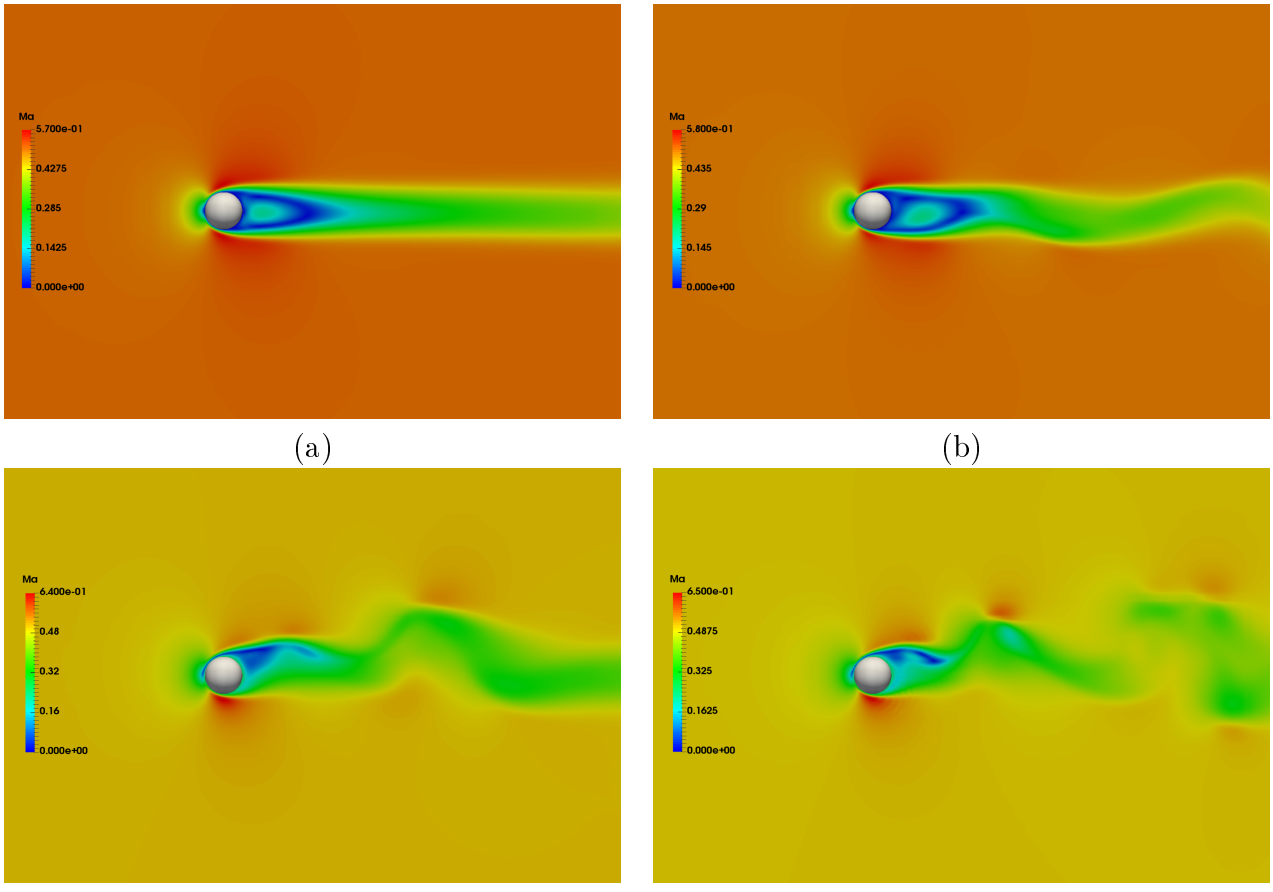


FIGURE 4.12 – Les isocontours du nombre de Mach d'un écoulement autour d'une sphère en rotation pour $Ma_\infty = 0.5$. Les configurations (a) $Ma_\omega = 0$, $Re = 200$, (b) $Ma_\omega = 0$, $Re = 300$, (c) $Ma_\omega = 0.5$, $Re = 200$ et (d) $Ma_\omega = 0.5$, $Re = 300$ sont représentées, respectivement.

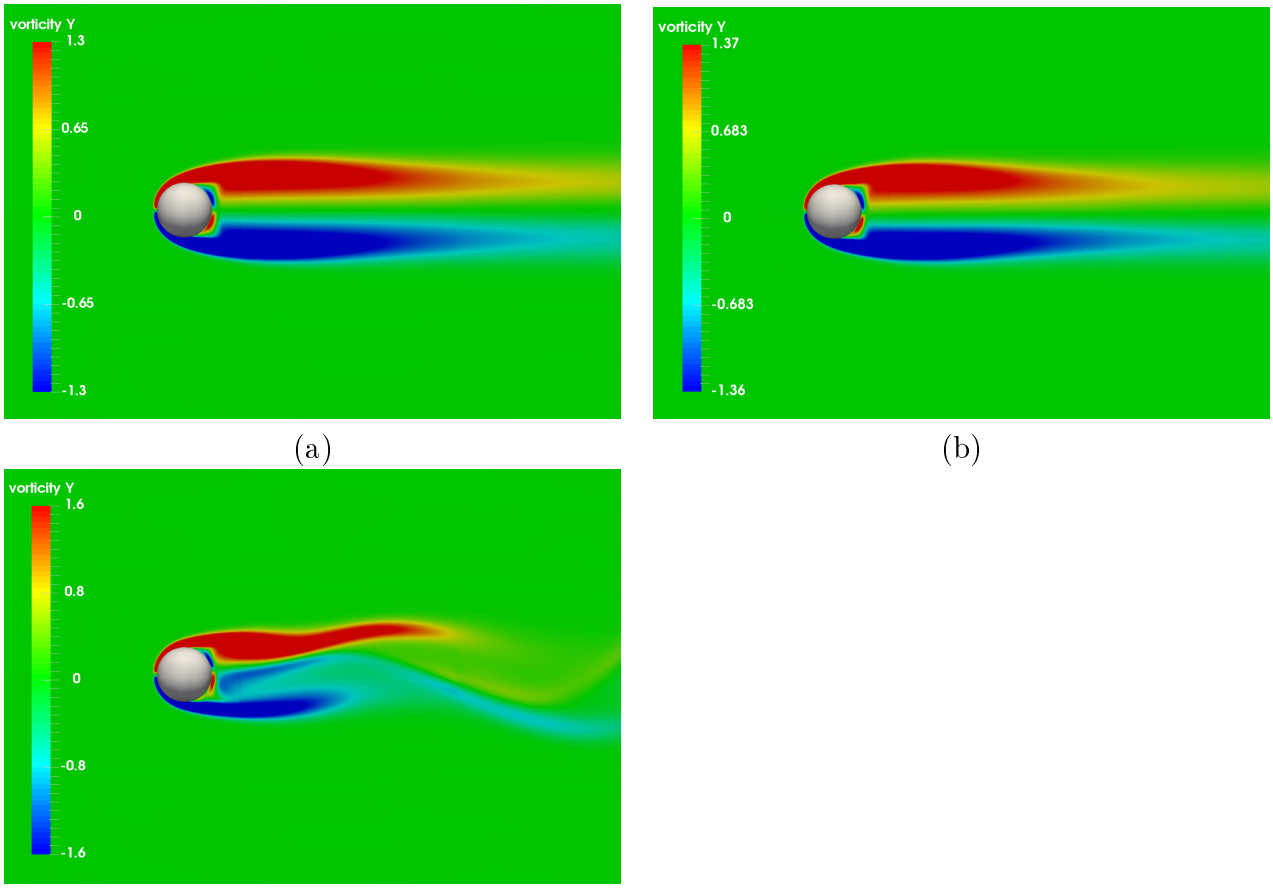


FIGURE 4.13 – Iso-contours de vorticité de l'écoulement autour de la sphère à $Ma = 0.8$ et $Re = 300$, (a) $r_\theta = 2$ (État stationnaire axisymétrique), (b) $r_\theta = 1.5$ (État stationnaire planaire-symétrique) et (c) $r_\theta = 0.5$ (Régime instationnaire). Seulement la composante suivant z de vorticité est représentée.

d'écoulement possibles en fonction du rapport de température $r_\theta = \frac{\theta_{wall}}{\theta_{inlet}}$, ce qui représente un cas de test de validation difficile.
Dans ce cas, l'écoulement subit une transition d'un état axisymétrique stationnaire à une configuration planaire symétrique stationnaire et finalement un régime instationnaire. La figure 4.13 représente les caractéristiques qualitatives de ces trois régimes en utilisant les isocontours de vorticité.

Les isocontours du nombre de Mach Ma et de température sont représentés sur la figure 4.14 pour 4 valeurs de $r_\theta = \{0.5; 1.1; 1.5; 2\}$.
Les résultats sont comparés avec des données récentes rapportées dans la littérature pour des simulations numériques avec un maillage conforme et des schémas de discrétisation d'ordre élevé [3] (Table 4.3) et avec les modèles de corrélations de :

- Henderson [8] :

$$\begin{aligned} C_d = 24[Re + Ma\sqrt{\frac{\gamma}{2}}\{4.33 + (\frac{3.65 - 1.53r_\theta}{1 + 0.353r_\theta})exp(\frac{-0.247Re}{Ma\sqrt{\frac{\gamma}{2}}})\}]^{-1} \\ + exp(\frac{-0.5Ma}{\sqrt{Re}})[0.2Ma^8 + 0.1Ma^2 + \frac{4.5 + 0.38(0.03Re + 0.48\sqrt{Re})}{1 + 0.03Re + 0.48\sqrt{Re}}] \\ + 0.6Ma\sqrt{\frac{\gamma}{2}}[1 - exp(\frac{-Ma}{Re})] \end{aligned} \tag{4.4}$$

- Hermsen [9] :

$$\begin{aligned} C_d = 2 + (C_{d0} - 2)exp(-0.37\sqrt{\gamma}\frac{Ma}{Re}\frac{1 + Re(12.278 + 0.548Re)}{1 + 11.275Re}) \\ + \frac{\frac{5.6}{1 + Ma} + 1.7\sqrt{r_\theta}}{Ma\sqrt{\gamma}}exp(\frac{-Re}{2Ma}) \end{aligned} \tag{4.5}$$

avec C_{d0} le coefficient de traînée incompressible.

A priori, les modèles de corrélations prennent en compte les effets de la température imposée mais après investigation, il s'avère que les termes relatifs aux effets de la température sont négligeables devant les autres termes. Nagata et al. [3] expliquent ces constatations par la manière dont ces relations ont été établies : Pour des Ma élevés et des Re bas, les essais en soufflerie sont difficiles, ainsi, les relations ont été construites en combinant des données expérimentales, des formules théoriques et des corrections empiriques.

D'autre part, la figure 4.15 montre la variation du nombre de Nusselt avec le paramètre r_θ. Nos résultats sont comparés avec les donnés disponibles de la littérature : [11], [12] et [10]. On remarque que nos résultats se placent entre les derniers résultats numériques de Nagata et al. et les modèles de Sauer [11] et de Fox et al. [12]. L'écart important entre nos résultats et les modèles de Sauer [11] et Fox et al. [12] s'explique par le fait que ces modèles empiriques négligent les effets de la température imposée.

4.9.3 Investigation d'écoulement supersonique autour d'une sphère chauffée

Un cas d'écoulement supersonique à $Ma = 2$, $Re = 300$ et $r_\theta = 2$ est étudié dans ce paragraphe. Dans ce cas, les effets de compressibilité sont très forts et une configuration axisymétrique régulière est observée. L'analyse des grandeurs caractéristiques de l'écoulement rapportées dans le tableau 4.1, indique que toutes les quantités physiques se comparent bien avec les données de la littérature [3]. L'écart entre les valeurs de nombres de Nusselt s'explique par les mêmes raisons détaillées dans le paragraphe précédent.
D'autre part, une représentation qualitative via les isocontours du nombre de Mach Ma, de température et de critère Schlieren est tracé sur la figure 4.16.

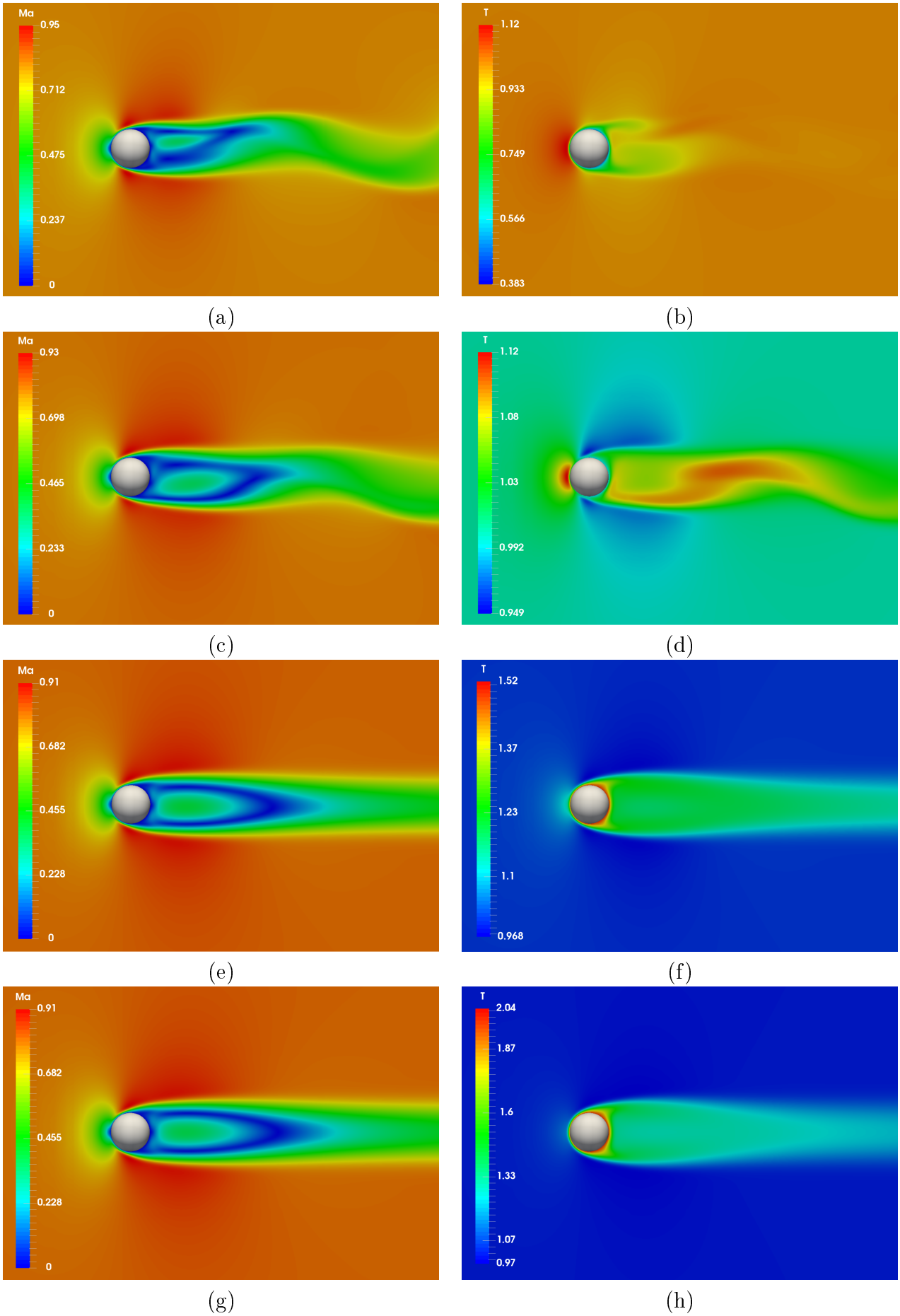


FIGURE 4.14 – Les isocontours du Ma et de température pour $Ma = 0.8$ et $Re = 300$: (a) $r_\theta = 0.5$;(b) $r_\theta = 1$;(c) $r_\theta = 1.5$;(d) $r_\theta = 2$

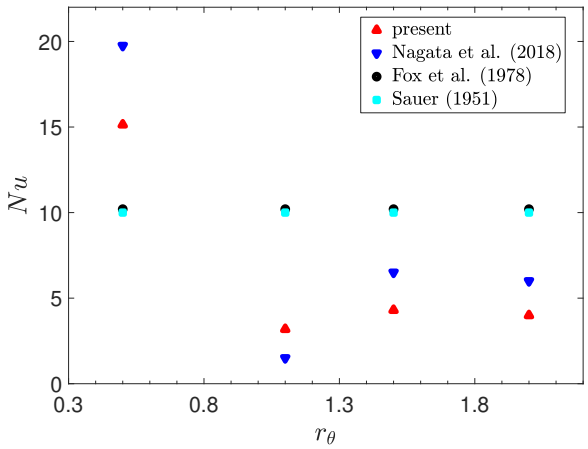
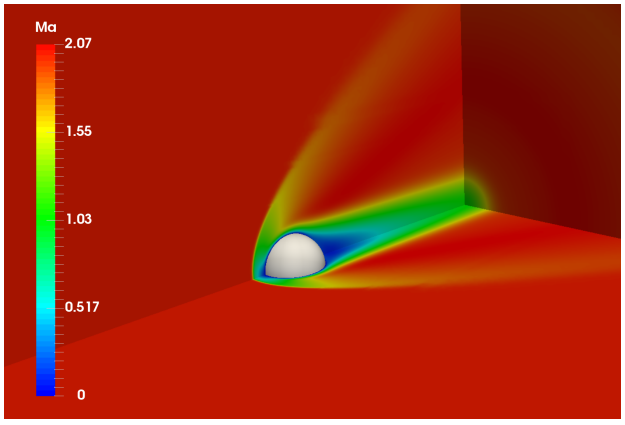
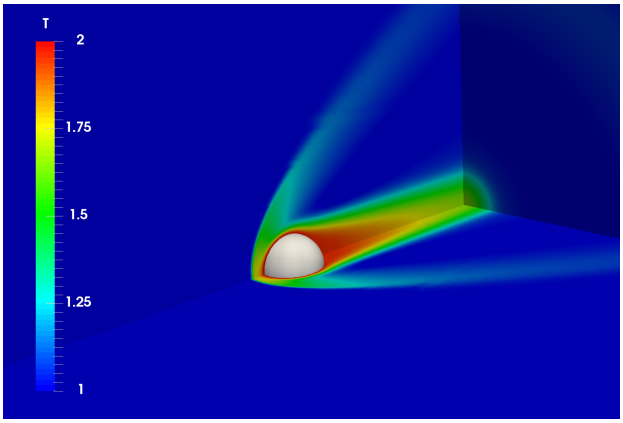


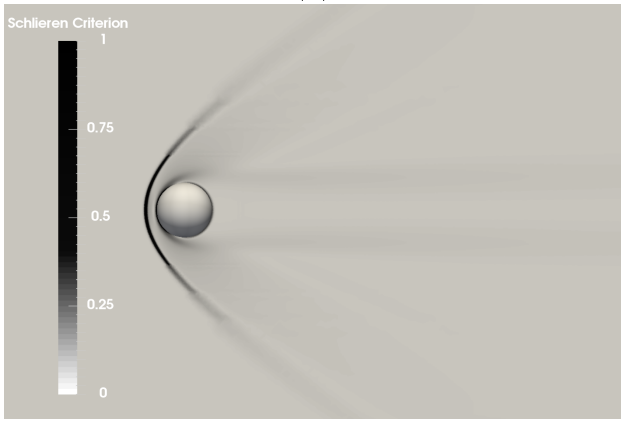
FIGURE 4.15 – Variation du nombre de Nusselt en fonction de r_θ pour $Ma = 0.8$



(a)



(b)



(c)

FIGURE 4.16 – Simulation numérique d'un écoulement supersonique autour d'une sphère chauffée à $Ma = 2$, $Re = 300$ et $r_\theta = 2$: (a) Les isocontours du nombre de Mach (b) Les isocontours de la température et (c) Le critère Schlieren.

	Studies	$\overline{C_D}$	x_s	St
Ma=0.8	**Present** ($r_\theta = 0.5$)	0.834	2.41	0.115
Re=300	Nagata et al. [10] (Num.)	0.75	2.35	0.11
	Modèle de Henderson [8]	0.77	-	-
	Modèle de Hermsen [9]	0.87	-	-
	Present ($r_\theta = 1.1$)	0.895	2.9	0.104
	Nagata et al. [10] (Num.)	0.81	2.8	0.105
	Modèle de Hendersonl [8]	0.77	-	-
	Modèle de Hermsen [9]	0.87	-	-
	Present ($r_\theta = 1.5$)	0.93	3.18	0
	Nagata et al. [10] (Num.)	0.85	3.1	0
	Modèle de Henderson [8]	0.77	-	-
	Modèle de Hermsen [9]	0.87	-	-
	Present ($r_\theta = 2$)	0.99	3.4	0
	Nagata et al. [10] (Num.)	0.91	3.35	0
	Modèle de Henderson [8]	0.77	-	-
	Modèle de Hermsen [9]	0.87	-	-

TABLE 4.3 – Grandeurs caractéristiques d'un écoulement compressible autour d'une sphère chauffée. Les résultats actuels sont comparés avec les données disponibles dans la littérature. C_D est le coefficient de traînée moyen, x_s est la longueur de recirculation et S_t est le nombre de Strouhal.

	Studies	$\overline{C_D}$	x_s	Nu	Δ_{choc}
Ma=2	**Present** ($r_\theta = 2$)	1.48	0.85	2.17	0.23
Re=300	Nagata [10] (Num.)	1.41	0.85	4.55	0.25
	Fox et al.	-	-	14.133	-
	Henderson Model	1.49	-	-	-

TABLE 4.4 – Grandeurs caractéristiques d'un écoulement supersonique autour d'une sphère chauffée.Les résultats actuels sont comparés avec les données disponibles dans la littérature. C_D est le coefficient de traînée moyen, x_s est la longueur de recirculation , Nu est le nombre de Nusselt et Δ_{choc} est l'emplacement du choc.

Bibliographie

[1] T. Johnson and V. Patel. Flow past a sphere up to a reynolds number of 300. *Journal Fluid Mechanics*, 378 :19–70, 1999.

[2] A. Sansica, J.Ch. Robinet, F. Alizard, and E. Goncalves. Three-dimensional instability of the flow around a sphere : Mach evolution of the first and second bifurcations. *Submitted to Journal of Fluid Mechanics*, 2018.

[3] T. Nagata, T. Nonomura, S. Takahashi, Y. Mizuno, and K. Fukuda. Investigation on subsonic to supersonic flow around a sphere at low reynolds number of between 50 and 300 by direct numerical simulation. *Physics of Fluids*, 056101-1–056101-20 :2016, 28.

[4] V. Krumins. A review of sphere drag coefficients applicable to atmospheric density sensing. *Naval Ordance Laboratory*, 1972.

[5] K. Hida. An approximate study on the detached shock wave in front of a circular cylinder and a sphere. *Journal of the Physical Society of Japan*, 8 :740–745, 1953.

[6] J. W. Heberle, G. P. Wood, and P. B. Gooderum. Data on sphere and location of detached shock waves on cones and spheres. *NACA Technical Note 2000*, 1950.

[7] A. Ambrosio and A. Wortman. Stagnation point shock detachment distance for flow around spheres and cylinders. *Journal of the Aerospace Sciences*, 32 :875–875, 1962.

[8] C. B. Henderson. Drag coefficients of spheres in continuum and rarefied flows. *AIAA Journal*, 6 :707–708, 1976.

[9] R.W. Hermsen. Review of particle drag models. *JANAF Performance Standardization Subcommittee 12th Meeting Minutes, Chemical Propulsion Information Agency, Columbia, MD*, pages 113–133, 1979.

[10] T. Nagata, T. Nonomura, S. Takahashi, Y. Mizuno, and K. Fukuda. Direct numerical simulation of flow around a heated/cooled isolated sphere up to a reynolds number of 300 under subsonic to supersonic conditions. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 120 :284–299, 2018.

[11] F. M. Sauer. Convective heat transfer from spheres in a free-molecule flow. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 18 :353–354, 1951.

[12] T.W. Fox, C.W. Rackett, and J.A. Nicholls. Shock wave ignition of magnesium powders. *Proceedings of 11th International Symposium on Shock Tubes and Wave, Seattle : University of Washington Press*, pages 262–268, 1978.

Chapitre 5

Application 2 : Écoulement compressible autour d'un drone

Sommaire

5.1 Introduction 152
5.2 Domaine de calcul 152
5.3 Investigation de l'écoulement subsonique instationnaire autour d'un drone 153

5.1 Introduction

Dans ce dernier chapitre, on étudie l'écoulement compressible autour d'un drone. On applique notre approche IBM sur une géométrie complexe et réaliste afin d'analyser la physique de l'écoulement autour du drone et de montrer la capacité de notre méthode à traiter ces géométries.
Il faut bien noter que pour cette étude, on ajoute un modèle de paroi poreuse à notre approche IBM afin de contourner les problèmes générés par le fait que la génération du maillage et des points Lagrangiens n'est pas couplée. OpenFOAM utilise la loi de Darcy-Forchheimer où le terme source relatif au modèle de porosité $\mathbf{f}_{porosity}$ s'écrit :

$$\mathbf{f}_{porosity} = -[\nu\kappa^{'} + 0.5 \parallel \mathbf{u} \parallel \kappa^{''}]\,\mathbf{u} \tag{5.1}$$

avec $\kappa^{'}$ et $\kappa^{''}$ les coefficients du modèle de Darcy-Forchheimer. Dans ce cas, on choisit des valeurs de $\kappa^{'}$ très grandes par rapport à 1 et des valeurs nulles de $\kappa^{''}$.
Avec l'utilisation des deux approches, on évite les points de singularité associés aux conditions initiales.

5.2 Domaine de calcul

Le domaine de calcul utilisé pour cette simulation est : $x \times y \times z = [0, 20.48m] \times [-2.56m, 2.56m] \times [2.72m, 5.28m]$ et le drone se situe dans le bloc défini par : $x \times y \times z = [1.65, 2.66m] \times [-1.05m, 1.05m] \times [4m, 4.17m]$. Cette région centrale est la plus raffinée et la taille d'un élément du maillage dans cette zone est : $\Delta x = 0.0046m$ et $\Delta y = \Delta z = 0.0023m$. A partir de cette région, on construit 5 blocs avec un dé-raffinement d'un facteur de 2 à chaque passage d'une région à une autre (Voir Figures 5.1 et 5.2).

Le nombre total d'éléments du maillage est 17×10^6 et le nombre des points Lagrangiens est 21857.
Comme dans le cas de la sphère, les simulations numériques ont été effectuées en utilisant la librairie de parallélisation mpi disponible dans OpenFOAM et le domaine physique a été décomposé en 256 sous-domaines. On choisit un nombre CFL égal à 0.25 pour cette simulation ce qui permet d'effectuer un cycle complet de lâchers instationnaires en régime établi en 12 heures.
Les principales quantités physiques analysées dans ce chapitre sont les coefficients aérodynamiques de traînée et de portance :

$$C_D = \frac{2F_x}{\rho_\infty S_{alaire} U_\infty^2}\,, \qquad C_L = \frac{2F_z}{\rho_\infty S_{alaire} U_\infty^2} \tag{5.2}$$

où les forces F_x et F_z sont directement calculées sur les points Lagrangiens et projetées dans la direction de l'écoulement x et la direction verticale z, respectivement et S_{alaire} est la surface alaire du drone.
De plus, on définit le coefficient de pression par :

$$C_p = \frac{2 \times (p - p_\infty)}{\rho_\infty \times \mathbf{U}_\infty^2} \tag{5.3}$$

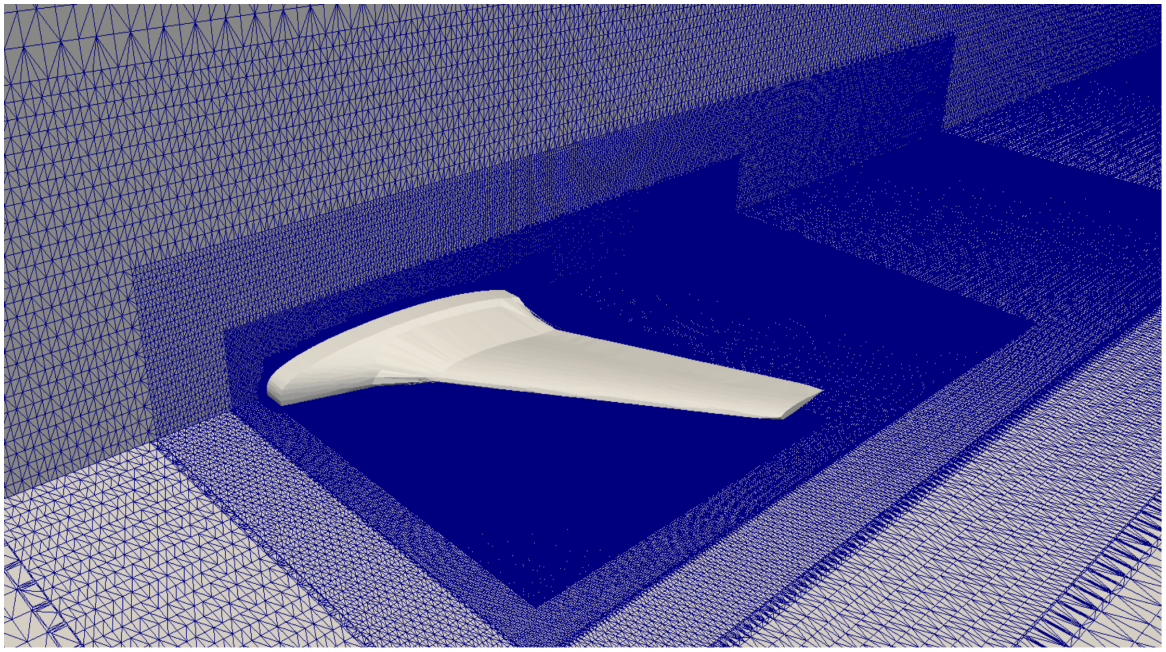


FIGURE 5.1 – Visualisation des plans du maillage dans les directions (y) et (z) utilisés pour le calcul de l'écoulement autour d'un drone.

5.3 Investigation de l'écoulement subsonique instationnaire autour d'un drone

On étudie un écoulement subsonique autour de ce drone à $Ma = 0.4$ et $Re = 10^5$. Le calcul de nombre de Reynolds dans ce cas est basé sur une valeur moyenne de la corde de l'aile. On trace la vorticité (Figure 5.3), le coefficient de pression (Figure 5.4) et les isocontours du nombre de Mach (Figure 5.5) autour des profils d'aile correspondants aux $y = 0m; 0.3m; 0.6m; 0.9m$. On observe un écoulement instationnaire derrière les ailes du drone et on arrive à bien visualiser les allées de Von Karman caractéristiques de ce régime d'écoulement. Le dé-raffinement du maillage derrière l'aile du drone est la cause de la disparition de ces structures instationnaires à la sortie du domaine de calcul.

D'autre part, le fuselage présente une forme rectangulaire à son extrémité arrière et non pas une géométrie profilée comme les ailes. On trace les isocontours du nombre de Mach (Figure 5.6) et les isocontours de vorticité (Figure 5.7) sur le plan $z = 4.07$. On observe également un déclenchement des structures fortement instationnaires derrière le fuselage.

De plus, on trace le critère Q (Figure 5.8) et les lignes de courants (Figure 5.9) autour du drone afin de visualiser le comportement tridimensionnel des structures instationnaires derrière le drone.

Finalement, on calcule les valeurs moyennes des coefficients aérodynamiques de l'écoulement en utilisant les formules 5.2 : $C_D = 0.04$ et $C_L = 0.005$. Le coefficient C_D correspond à l'ordre du grandeur des valeurs de la littérature par contre le coefficient C_L est très faible. Ainsi, on conclut qu'il faut continuer la simulation afin de permettre l'établissement d'un régime permanent autour du drone et bien évaluer les efforts mécaniques.

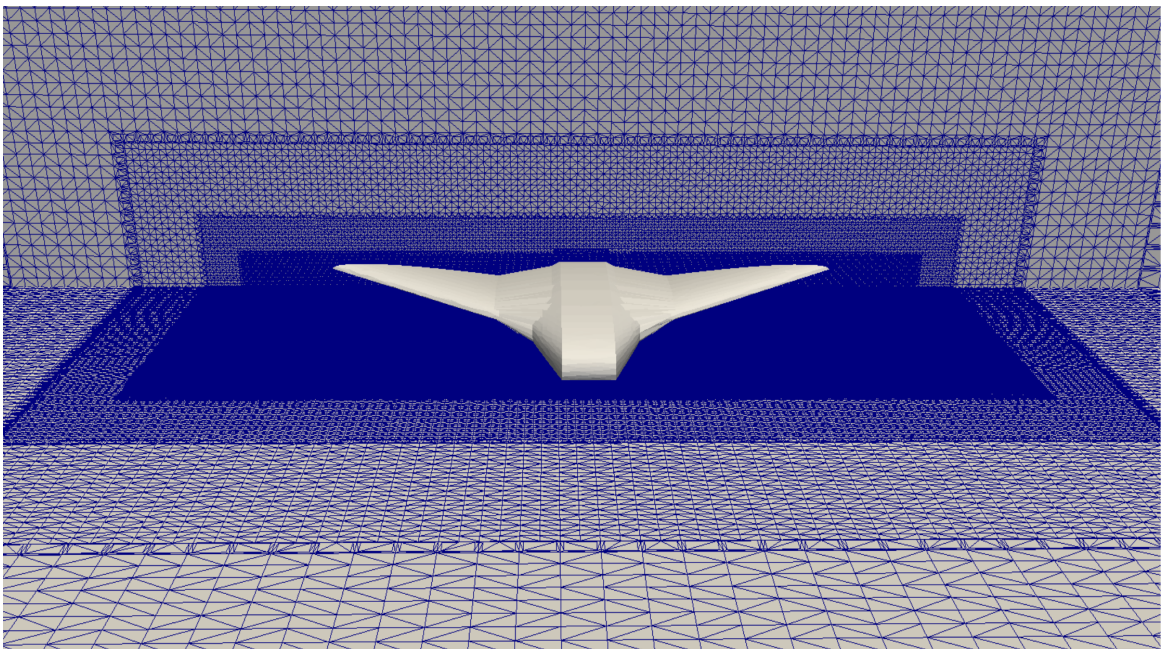


FIGURE 5.2 – Visualisation des plans du maillage dans les directions (x) et (z) utilisés pour le calcul de l'écoulement autour d'un drone.

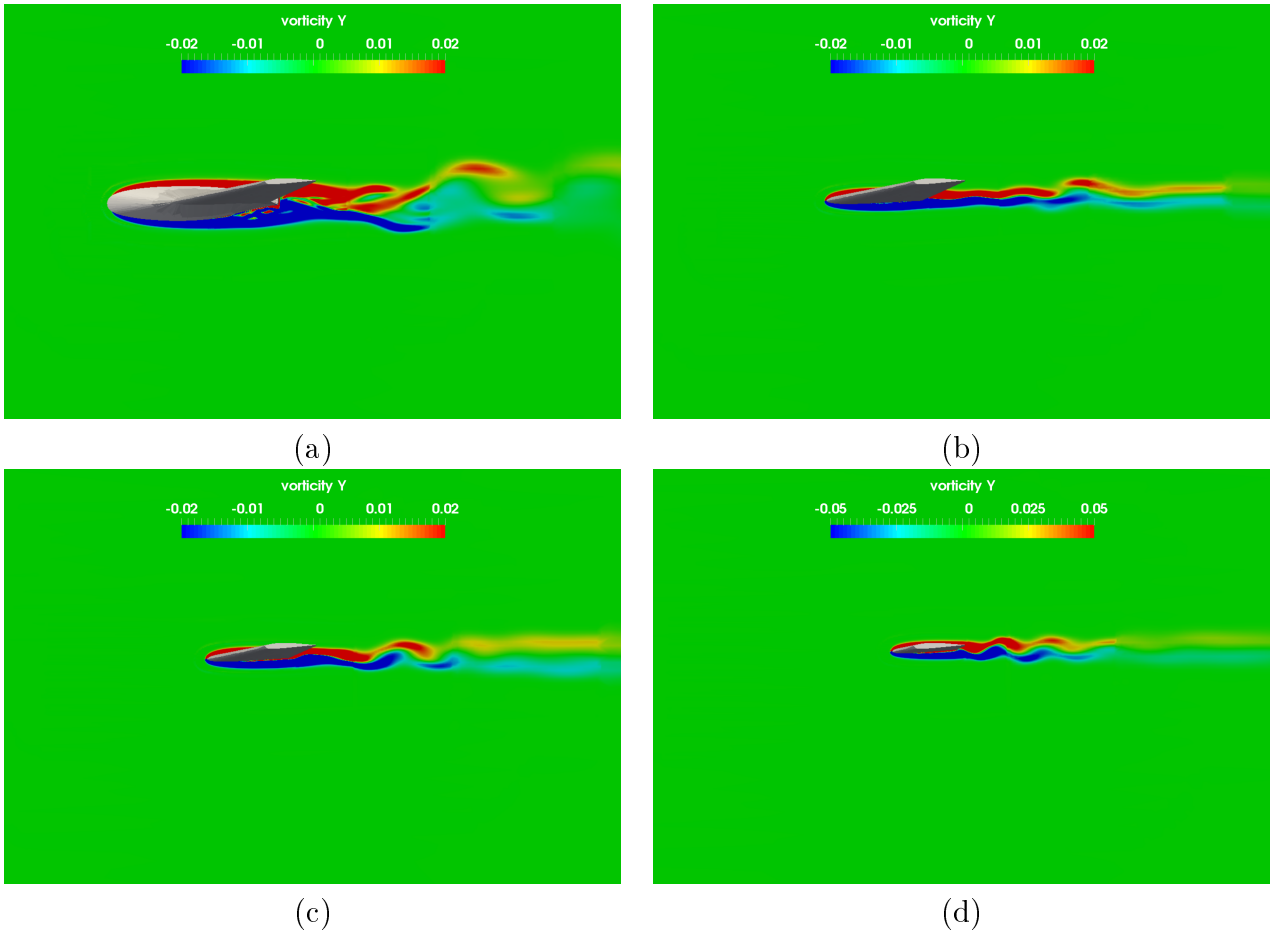


FIGURE 5.3 – Isocontours de vorticité (y) de l'écoulement autour des profils d'aile d'un drone, $Ma = 0.4$ et $Re = 10^5$: (a) $y = 0m$; (b) $y = 0.3m$; (c) $y = 0.6m$; (d) $y = 0.9m$.

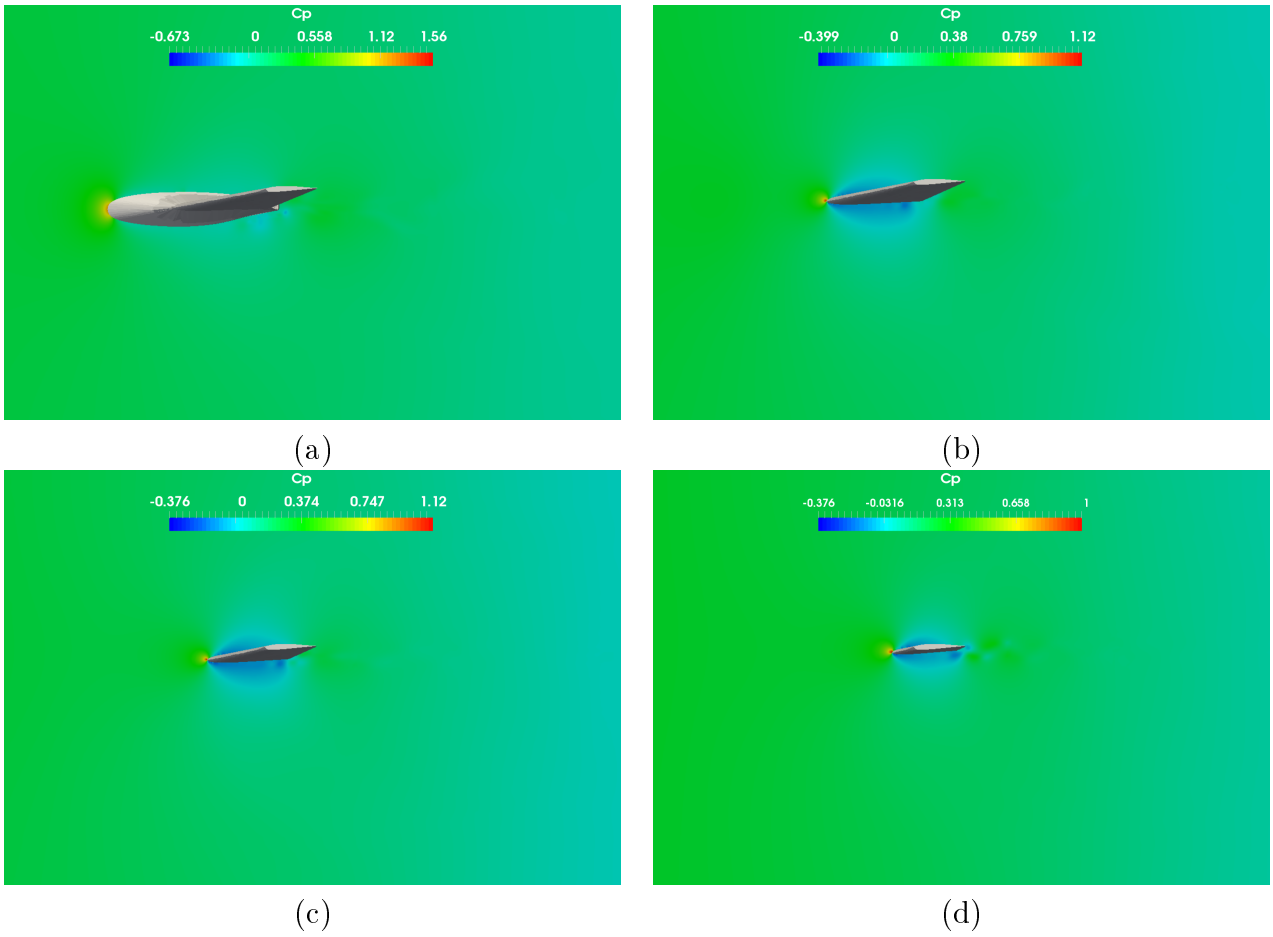


FIGURE 5.4 – Coefficient de pression de l'écoulement autour des profils d'aile d'un drone, $Ma = 0.4$ et $Re = 10^5$: (a) $y = 0m$; (b) $y = 0.3m$; (c) $y = 0.6m$; (d) $y = 0.9m$.

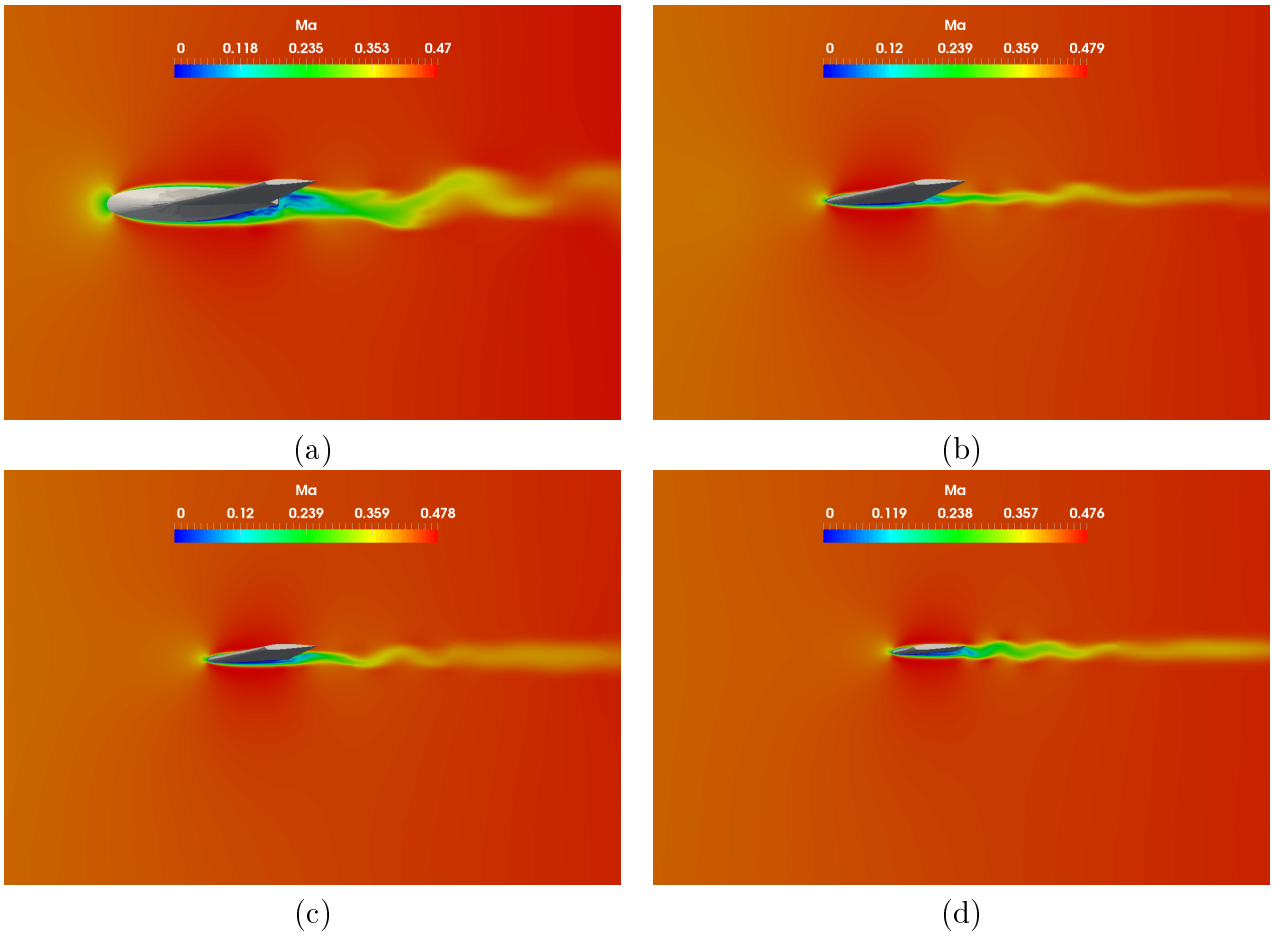


FIGURE 5.5 – Isocontours de nombre de Mach de l'écoulement autour des profils d'aile d'un drone, $Ma = 0.4$ et $Re = 10^5$: (a) $y = 0m$; (b) $y = 0.3m$; (c) $y = 0.6m$; (d) $y = 0.9m$.

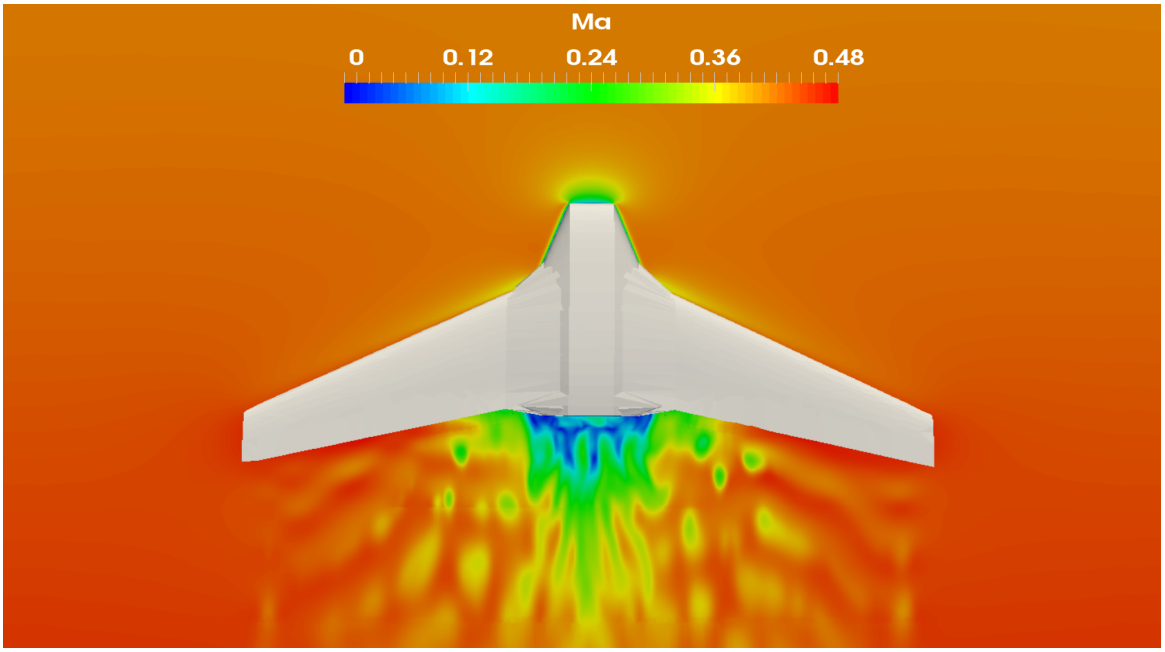


FIGURE 5.6 – Isocontours de nombre de Mach de l'écoulement autour d'un drone à un plan défini par $z = 4.07$, $Ma = 0.4$ et $Re = 10^5$.

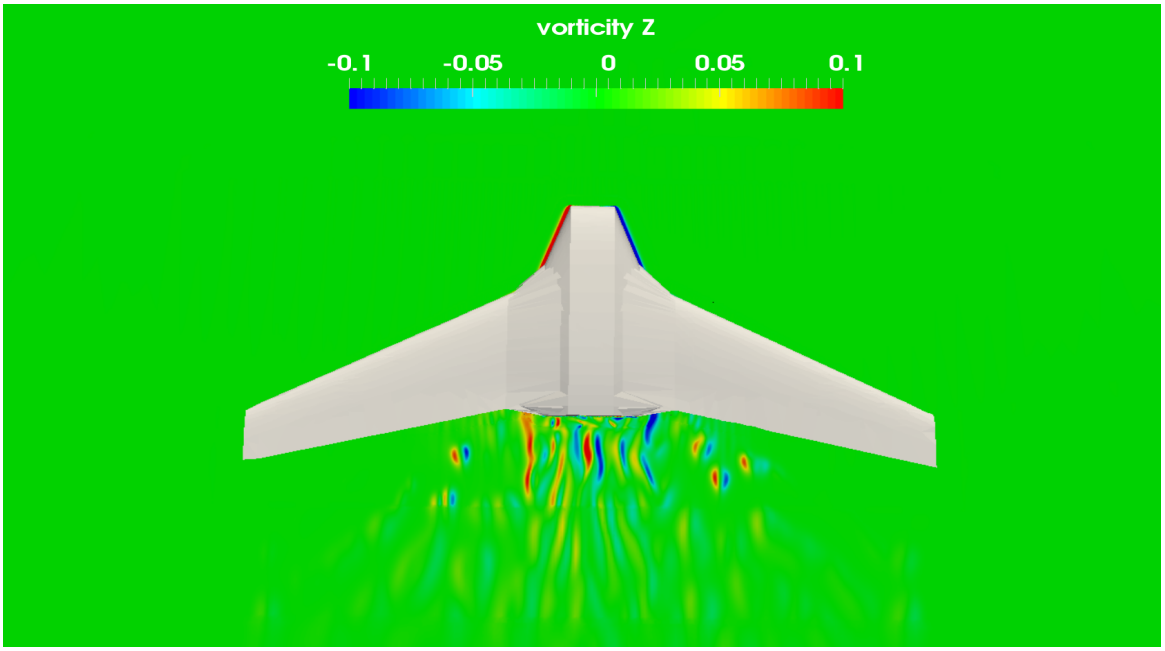


FIGURE 5.7 – Isocontours de vorticité de l'écoulement autour d'un drone à un plan défini par $z = 4.07$, $Ma = 0.4$ et $Re = 10^5$.

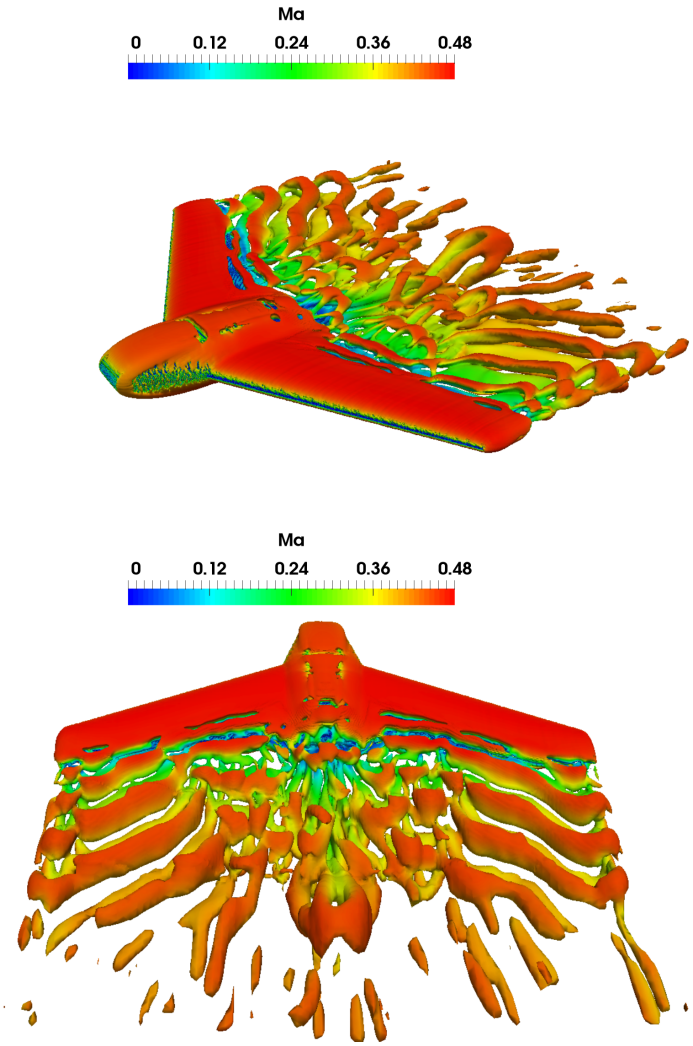


FIGURE 5.8 – Critère Q d'un écoulement autour d'un drone, $Ma = 0.4$ et $Re = 10^5$.

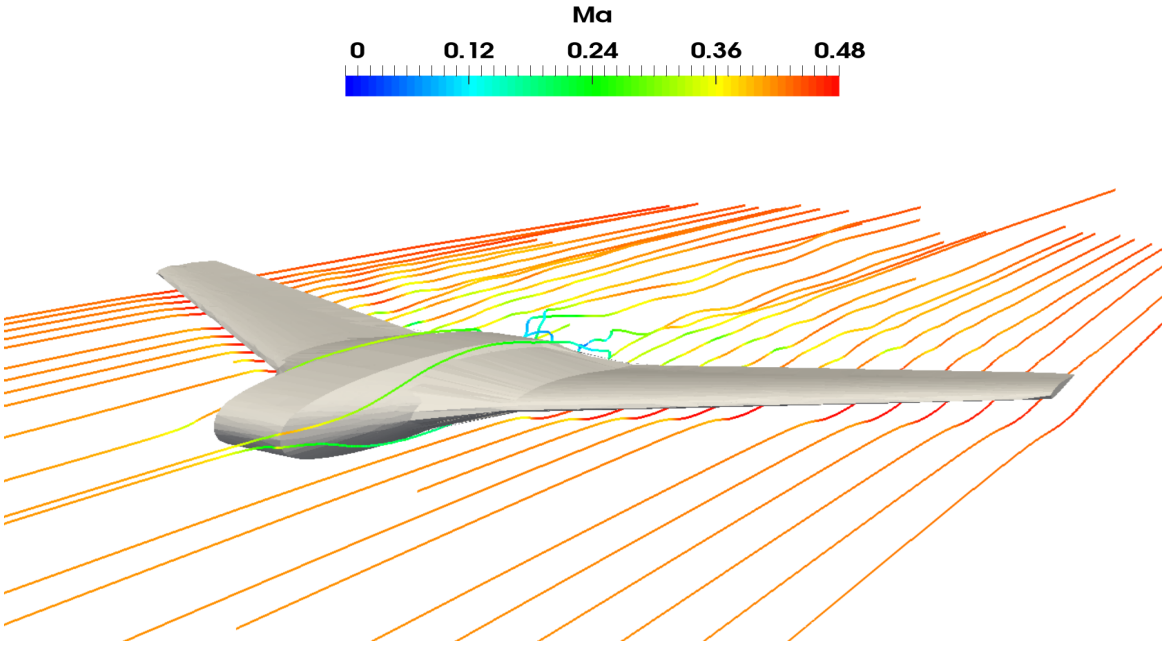


FIGURE 5.9 – Les lignes de courants d'un écoulement autour d'un drone, $Ma = 0.4$ et $Re = 10^5$.

Conclusion & perspectives

Dans cette thèse, nous avons proposé une nouvelle méthode des frontières immergées pour l'analyse et le contrôle des écoulements compressibles. Les validations effectuées sur plusieurs configurations ont montré les avantages en terme de précision, flexibilité et gain en coût de calcul CPU de la méthode. Les applications effectuées montrent la capacité de la méthode à traiter des configurations complexes et ouvrent des perspectives intéressantes pour de futures applications académiques et industrielles.

Après avoir introduit quelques notions relatives aux écoulements compressibles et détailler les solveurs compressibles d'OpenFOAM, nous avons présenté les approches numériques les plus utilisées pour l'analyse de l'aérodynamique externe autour de géométrie complexe et mobile et nous avons choisi la méthode des frontières immergées qui correspond le mieux à nos critères. Par la suite, nous avons effectué un état de l'art des différentes approches IBM pour les écoulements incompressibles et compressibles. Nous avons détaillé la formulation originale de Peskin, les approches continues directes, les approches discrètes (Ghost-Cell et Cut-Cell) et les approches discrètes directes. Cette description nous a permis de bien comprendre chaque méthode et choisir celle qui convient à nos objectifs et aux contraintes d'implémentation.

Nous avons détaillé ensuite la méthode des frontières immergées, initialement proposée par Constant et al. pour la simulation des écoulements incompressibles et basée sur les travaux de Pinelli et al, que nous avons étendue au traitement des écoulements compressibles. Nous avons implémenté notre nouvelle IBM dans les solveurs compressibles d'OpenFOAM : *sonicFOAM* et *rhoCentralFOAM*. Les deux principales caractéristiques de la méthode proposée sont :

- Un nouveau terme source de l'équation de la quantité de mouvement qui prend en compte les effets du champ de pression.
- Un nouveau terme source de l'équation d'énergie.

Afin de valider l'approche IBM proposée et vérifier l'efficacité de notre nouvelle méthode, une étude de validation a été menée sur des cas test 2D avec une large gamme de nombres de Mach et nombres de Reynolds et avec les différents types de conditions aux limites sur la température.
Dans un premier temps, nous avons effectué une étude de l'écoulement compressible autour d'un cylindre circulaire 2D fixe et mobile afin de valider le terme source pour l'équation de quantité de mouvement.

Dans un deuxième temps, on étudie l'écoulement autour d'un cylindre circulaire chauffé 2D avec deux types de conditions aux limites pour la température pour valider les deux formulations de terme source pour l'équation d'énergie.
Par la suite, les tests de validation ont été étendus aux écoulements compressibles autour de plusieurs profils d'ailes fixes et en mouvement.
L'analyse met en évidence de nombreuses caractéristiques favorables de la méthode IBM :

- Efficacité : Pour chaque cas étudié, la simulation IBM a prédi avec succès la topologie de l'écoulement et a montré un bon accord des quantités physiques étudiées avec les résultats numériques et expérimentaux disponibles de la littérature. Ce niveau de performance est intimement lié au terme de correction de la pression, qui permet de prescrire des conditions plus sophistiquées dans la région de proche paroi. Malgré le choix des cas classiques dans le présent travail de recherche, cette observation ouvre de nouvelles voies de recherche pour le développement des approches frontières immergées.
- Flexibilité : la méthode IBM s'est avérée très efficace lorsqu'elle est implémentée dans deux solveurs compressibles avec des architectures complètement différentes. Cet aspect indique qu'une bonne performance devrait être obtenue avec notre librairie IBM même si elle est implémentée dans d'autres codes numériques.
- Coûts de calcul : La détermination du forçage IBM exploite les fonctionnalités de calcul récursif des algorithmes numériques, de sorte qu'une étape de prédiction complète sans forçage IBM n'est plus nécessaire. Cet aspect offre un progrès en matière du coût de calcul par rapport aux précédentes approches IBM similaires.

Par la suite, une première application a été effectuée sur un écoulement compressible autour d'une sphère. On a étudié notamment l'émergence des différents régimes d'écoulements compressibles laminaires. On a établi une relation entre le nombre de Mach, le nombre de Reynolds et le régime d'écoulement (axisymétrique stationnaire, planaire-symétrique stationnaire, instationnaire). De plus, on a également analysé, avec un maillage plus fin, les grandeurs caractéristiques de l'écoulement (C_d, α_s , x_s) pour les régimes subsonique, transsonique et supersonique. D'autre part, on a étudié l'influence des effets de chauffage / refroidissement de la sphère sur le régime de l'écoulement.
Enfin, une simulation d'un écoulement compressible instationnaire autour d'un drone a été effectuée. On a analysé la performance aérodynamique de la conception du drone à travers les outils de post-traitement et les coefficients de traînée et de portance. On a montré également la capacité de notre méthode à traiter ce type de géométrie complexe. Ainsi, on considère que notre approche peut être utilisée prochainement comme un outil d'étude avant-projet pour des applications industrielles.
Finalement, il serait intéressant par la suite de développer plusieurs axes :

- Implémentation d'un modèle de turbulence dans les fonctions de notre méthode des frontières immergées.
- L'optimisation du maillage à l'intérieur des corps immergés afin de minimiser les pertes en coût de calcul.
- Le couplage et l'automatisation de la génération du maillage et les points Lagrangiens.

- La création d'une librairie commune pour les fonctions IBM compressibles et incompressibles et capable de s'intégrer dans toute architecture de solveur.

Annexe A

Ordre de précision de la méthode

L'ordre de précision de la méthode IBM proposée est évalué via l'analyse d'un écoulement autour d'un cylindre circulaire avec $Ma = 0.05$ et $Re = 300$. Les détails de calcul de ce cas sont déjà présentés dans la section 3.1. Les données des travaux de Gautier et al. [1] sont utilisées comme la solution de référence. L'ordre de précision de la méthode IBM est étudié en utilisant les normes L_2 et L_∞. Les erreurs relatives à chacune de ces deux normes s'écrivent pour une quantité physique ϕ :

$$e_{\phi_{L_2}} = \| \phi - \phi_G \|_2 \tag{A.1}$$

$$e_{\phi_{L_\infty}} = \| \phi - \phi_G \|_\infty \tag{A.2}$$

où ϕ_G est la solution de référence [1].
L'analyse est effectuée en évaluant les résultats de quatre grilles du maillage différentes. La résolution du maillage dans la région proche du cylindre est : $\Delta x = \Delta y = \{\frac{D}{80}; \frac{D}{96}; \frac{D}{112}; \frac{D}{128}\}$ où D est le diamètre du cylindre. Le nombre correspondant de points Lagrangiens utilisés est $\{252; 302; 352; 402\}$, respectivement.

Les résultats pour la composante de la vitesse u_x sont présentés dans la figure A.1. L'erreur est calculée en sélectionnant des points à une distance de $0.52\,D$ du centre du cylindre. On peut observer que l'ordre de précision est presque 2 pour la norme L_2 et 1 pour la norme L_∞ . Ces résultats indiquent que la précision de la méthode originale [2] est conservée via l'implémentation actuelle.

D'autre part, l'erreur sur le coefficient de traînée C_D est tracée dans la figure A.2. Pour notre méthode IBM, le coefficient de traînée est directement calculé à l'aide des informations disponibles sur les points Lagrangiens. Pour cette quantité, l'ordre de précision est légèrement supérieur à 1.

Bibliographie

[1] R. Gautier, D. Biau, and E. Lamballais. A reference solution of the flow over a circular cylinder at $re = 40$. *Computers & Fluids*, 75 :103–111, 2013.

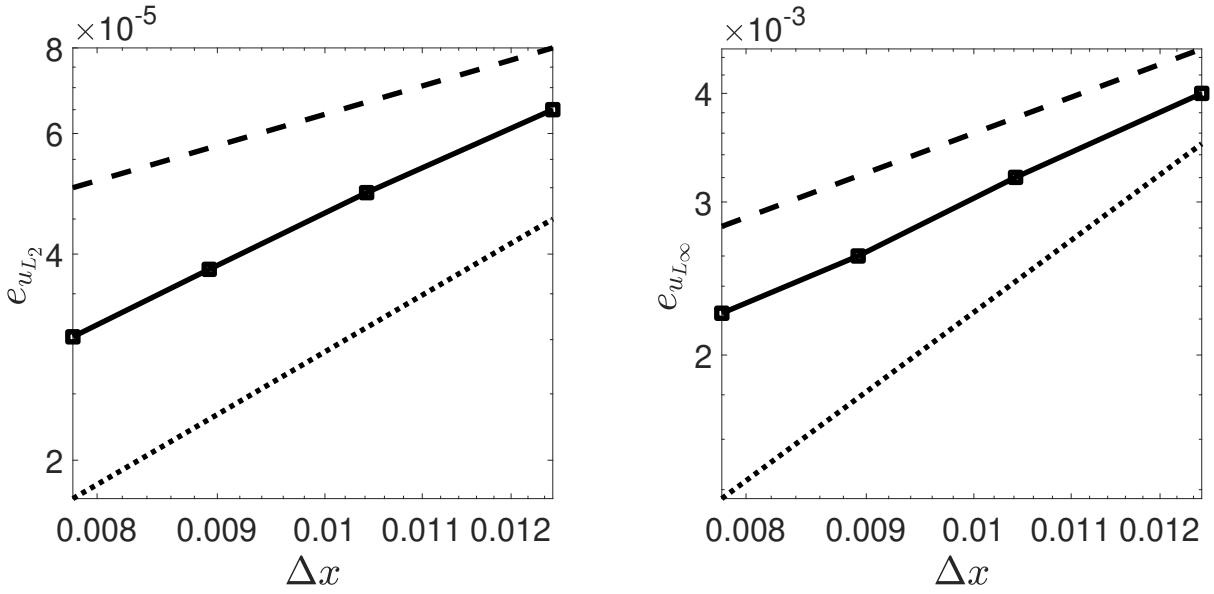


FIGURE A.1 – Courbes d'ordre en norme L_2 (a) et en norme L_∞ (b) pour la composante de la vitesse u_x en fonction de la taille de l'élément du maillage. La ligne "- - -" (précision du premier ordre) et la ligne "..." (précision du second ordre) sont incluses afin d'estimer l'ordre de précision de la méthode.

[2] A. Pinelli, I. Naqavi, U. Piomelli, and J. Favier. Immersed-boundary methods for general finite-difference and finite-volume navier–stokes solvers. *Journal of Computational Physics*, 229 :9073–9091, 2010.

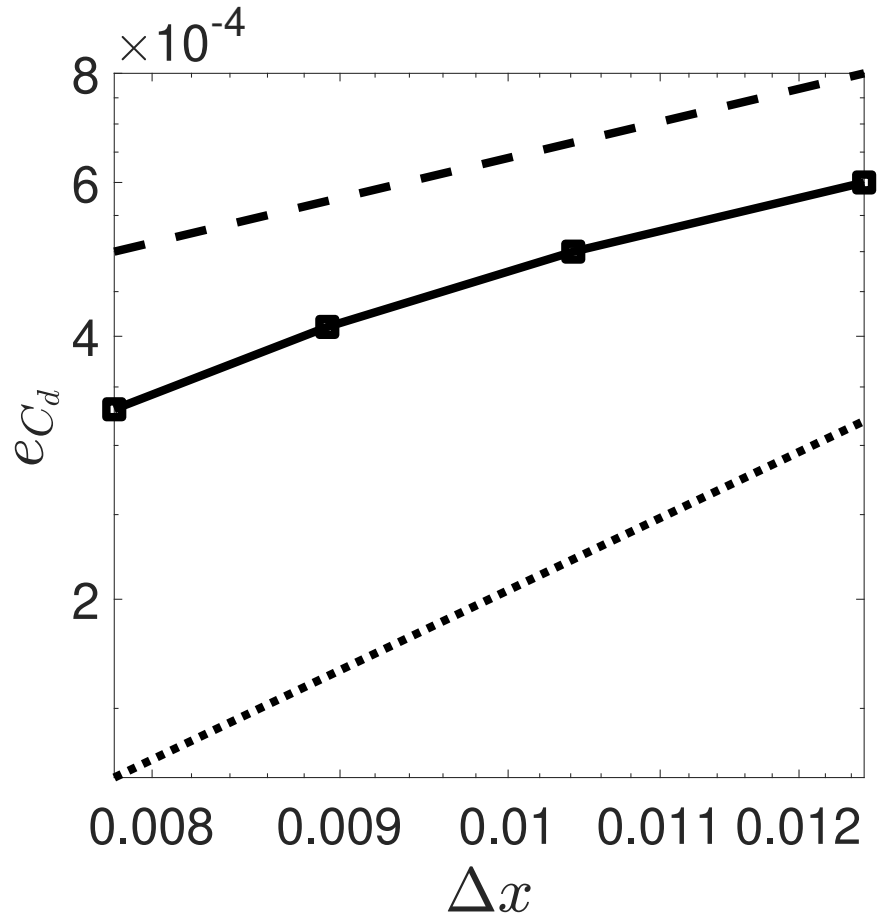


FIGURE A.2 – Courbe d'ordre pour le coefficient de traînée C_D. La ligne "- - -" (précision du premier ordre) et la ligne "..." (précision du second ordre) sont incluses afin d'estimer l'ordre de précision de la méthode.

DÉVELOPPEMENT D'UNE MÉTHODE DES FRONTIÈRES IMMERGÉES POUR L'ANALYSE ET LE CONTRÔLE DES ÉCOULEMENTS COMPRESSIBLES

Résumé :
Cette thèse s'inscrit dans le contexte de la simulation numérique et l'analyse des écoulements compressibles, notamment en géométrie complexe ou mobile. Dans ces situations, la mise en place d'un maillage représentant correctement le solide sans perte de précision des méthodes de discrétisation s'avère difficile. Une alternative est de travailler en maillage cartésien quelque que soit la géométrie du domaine d'écoulement en introduisant une approche aux frontières immergées.
Dans ce contexte, on propose une amélioration et extension d'une méthode formulée pour la simulation des écoulements incompressibles. Les deux principales caractéristiques du modèle proposé sont d'une part l'intégration d'un nouveau terme de forçage des vitesses qui prend en compte les effets de pression et d'autre part l'intégration d'un nouveau terme de correction de température dans le traitement de l'équation de l'énergie.
Cette méthode a été intégrée dans deux solveurs compressibles du code OpenFOAM : SonicFOAM et RhoCentralFOAM. La validation a été effectuée en considérant différents cas de complexité croissante sur des corps 2D fixes et mobiles, pour lesquels on a fait varier les nombres de Mach et de Reynolds. De plus, des cas mettant en jeu des transferts de chaleur pariétaux ont été étudiés. Les résultats ont été comparés à un grand nombre de données numériques et expérimentales issues de la littérature.
Enfin, des études sur des configurations plus complexes tridimensionnelles ont été mises en place. Les bifurcations de régime d'écoulement de la sphère ont été investiguées quand le nombre de Mach augmente. Une sphère avec des parois non-adiabatiques a été également analysée. Une géométrie réaliste de drone a été simulée en régime compressible.
Ces analyses mettent en évidence de nombreuses caractéristiques favorables de la méthode des frontières immergées en termes de précision, de flexibilité et de coût de calcul.

Mots clés :
Compressibilité ; Fluides, Dynamique des ; Méthodes des frontières immergées ; Navier-Stokes, Équations de ; Transfert de chaleur ; Mach, Nombre de ; Reynolds, Nombre de ; Code OpenFOAM.

DEVELOPMENT OF AN IMMERSED BOUNDARY METHOD FOR THE ANALYSIS AND CONTROL OF COMPRESSIBLES FLOWS

Abstract:
This thesis is related to the numerical simulation and the analysis of compressible flows, especially in complex or mobile geometry. In these situations, the establishment of a mesh correctly representing the solid without loss of precision of discretization methods is difficult. An alternative is to use Cartesian mesh independently of the geometry of the flow domain by introducing an immersed boundary approach.
In this context, we propose an improvement and extension of a method formulated for the simulation of incompressible flows. The two main characteristics of the proposed model are on the one hand the integration of a new velocity forcing term which takes into account the effects of pressure and on the other hand the integration of a new term of temperature correction in the treatment of the energy equation.
This method has been integrated in two compressible solvers of OpenFOAM code: SonicFOAM and RhoCentralFOAM. The validation was carried out by considering different cases of increasing complexity on fixed and mobile 2D bodies, for which the Mach and Reynolds numbers were varied. In addition, cases involving parietal heat transfer have been studied. The results were compared to a large number of numerical and experimental data from the literature.
Finally, studies on more complex three-dimensional configurations have been done. The flow regime bifurcations of the sphere have been investigated as the Mach number increases. A sphere with non-adiabatic walls was also analyzed. A realistic drone geometry was simulated in a compressible regime.
These analyzes highlight many favorable features of the immersed boundary method in terms of accuracy, flexibility and computational cost.

Keywords:
Compressibility ; Fluid dynamics ; Immersed Boundary Methods ; Navier-Stokes equations; Heat transfer ; Mach number ; Reynolds number ; OpenFOAM Code.