Instabilités de poutres hyper-élastiques : du flambement étendu aux motifs localisés

Claire Lestringant

Université Pierre et Marie Curie

Thèse de Doctorat

École doctorale 391 - Sciences mécaniques, acoustique, électronique et robotique de Paris

Instabilités de poutres hyper-élastiques : du flambement étendu aux motifs localisés

Thèse présentée par **Claire Lestringant.**

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université Pierre et Marie Curie,

Spécialité **Mécanique**.

Soutenue publiquement le 13 juillet 2017 devant un Jury composé de

Lev Truskinovsky	Examinateur	DR CNRS - ESPCI
Patrick Ballard	Examinateur	DR CNRS - UPMC
Corrado Maurini	Examinateur	Professeur - UPMC
Pasquale Ciarletta	Rapporteur	Professeur - Politecnico di Milano
Michel Potier-Ferry	Rapporteur	Professeur - Université de Lorraine
Basile Audoly	Directeur de thèse	DR CNRS - École Polytechnique

Equipe MISES, Institut ∂'Alembert,
Université Pierre et Marie Curie,
75005 Paris, France.

It's not bad to say : My work is not what I really want, I'm capable of doing something bigger. Or I'm a person who needs love, and I'm doing without it. What's terrible is to pretend that the second-rate is the first-rate. To pretend that you don't need love when you do ; or you like your work when you know quite well you're capable of better.

Doris Lessing

The Golden Notebook (1962)

Résumé

Ce travail de thèse porte sur les instabilités dans les structures minces hyper-élastiques. Nous analysons les mécanismes de sélection du motif de flambement dans un solide prismatique fortement pré-contraint. Pour ce système, le modèle de poutre classique d'Euler-Bernoulli n'est pas pertinent du fait de cette forte pré-contrainte et il est nécessaire de recourir à une description 3-d pour expliquer l'apparition de modes instables de petite longueur d'onde. Notre analyse, fondée sur la théorie de l'élasticité finie incrémentale, montre que la longueur typique du motif de flambement est sélectionnée par l'importance relative de la pré-contrainte et du rapport d'aspect du solide prismatique. Nous nous interrogeons ainsi sur les limites du modèle classique et proposons une piste de réflexion pour la construction de nouveaux modèles. Celle-ci repose sur un développement à deux échelles combiné aux équations d'équilibre du système formulées sous forme faible. Il est alors facile de résoudre les équations exactes à chaque ordre, ce qui donne accès à la cinématique complète du système. Nous mettons en œuvre cette méthode pour l'exemple simple d'un barreau homogène en compression, ce qui nous permet d'établir le modèle classique d'Euler-Bernoulli à partir des équations de l'élasticité 3-d. La dernière partie de ce travail de thèse porte sur l'étude du flambement de systèmes invariants d'échelle : l'étude expérimentale et numérique de la compression d'un prisme à base triangulaire met en lumière une transition inédite d'un mode de flambement étendu vers des motifs localisés.

Mots-clés : élasticité, flambage, instabilités, solides élancés, modèles réduits, analyse de bifurcation

Abstract

This Ph.D. work deals with buckling instabilities arising in thin hyper-elastic structures. We focus on instabilities arising in a prismatic solid submitted to finite incompatible pre-strains. We observe that the traditional 1-d Euler-Bernoulli beam model is not applicable to such a system because of the finite inhomogeneous pre-stress. The latter triggers short-wavelength instabilities that are not described by the classical 1-d models. We rely on the 3-d elasticity theory and propose a quantitative criterion on the ratio between the pre-stress and the cross-sectional aspect-ratio of the prismatic solid, that predicts the typical wavelength of the buckling pattern. This work questions the validity of classical 1-d models and suggests that extensions of these models are possible. We propose a method for the systematic derivation of reduced models. It relies on asymptotic expansions of the variational formulation of the equilibrium equations, starting from the complete expression of the energy. In this framework, kinematics can be entirely determined by solving the exact equations, order by order. We successfully apply this method to a homogeneous and isotropic beam submitted to a homogeneous compression and recover the classical Euler-Bernoulli beam model. In a last part of the manuscript we investigate the transition from extended wrinkling to localized creasing in a scale-invariant system made of a prismatic solid with a triangular cross-section, both experimentally and numerically.

Remerciements

De très nombreux personnages ont contribué à façonner cette thèse par leur présence, encouragements, conseils, critiques, mises en garde, apports techniques, scientifiques et matériels en tout genre (y compris gîte et nourriture), remarques et réflexions diverses, formelles et informelles : tous méritent de figurer ici. Je m'en tiendrai cependant à ma première idée et ces remerciements resteront courts. À tous ceux que je viens d'évoquer et qui ne trouveront pas leur nom dans les lignes qui suivent j'adresse ici un immense merci. Ceci étant dit, je remercierai nommément quelques personnes.

D'abord Basile Audoly qui a partagé ses connaissances, son enthousiasme et suivi au quotidien mes questionnements et tâtonnements avec patience, bienveillance et optimisme ! Sa curiosité, sa grande disponibilité et sa rigueur intellectuelle ont énormément contribué à la réussite de ce travail de thèse. Je remercie aussi Corrado Maurini pour s'être fortement investi dans l'encadrement de cette thèse, particulièrement dans tous les aspects numériques où il a toujours fait preuve de patience envers des éléments parfois capricieux. Merci à Arnaud Lazarus, à qui je dois l'introduction dans ce travail de quelques aspects expérimentaux et qui a su prêter une oreille attentive aux récits de mes dernières avancées dans l'étude du "prisme" !

Un grand merci aux deux rapporteurs, Michel Potier-Ferry et Pasquale Ciarletta, qui ont accepté de se plonger dans le labyrinthe mes notation. Je remercie également les autres membres du jury, Patrick Ballard et Lev Truskinovsky, pour l'attention qu'ils ont apportée à ce travail et pour leurs retours, précis et instructifs.

Je remercie Catherine Dejancourt, Olivier Labbey et Simona Otarasanu pour leur précieuse aide dans mes démarches administratives, Djimédo Kondo, directeur de l'École Doctorale, pour sa disponibilité et son enthousiasme, Hélène Dumontet, Diana Baltean-Carles et Dominique Mertz, qui ont inspiré et guidé mes premiers pas d'enseignante.

Je remercie enfin tous mes collègues doctorants et post-doctorants pour avoir contribué par une phrase, un mot ou un sourire à l'équilibre de mes journées dans ce monde de liberté et de solitude studieuse. Je leur souhaite bon vent ainsi qu'à tous ceux se sont embarqués dans la même aventure !

Table des matières

Liste des principales notations

Constantes élastiques	E	Module de Young
	ν	Coefficient de Poisson
	$(\mu, \lambda_{\mathrm{L}})$	Coefficients de Lamé
Géométrie	$\mathcal{A}$	Aire d'une section
	(h, v)	Hauteur et largeur de la section
	L	Longueur
Analyse de bifurcation	$_{[0]}$ ou $^{[0]}$	Solution fondamentale
	$_{[1]}$ ou $^{[1]}$	Perturbation
	q	Nombre d'onde
Modèle de poutre 1-d	s	Coordonnée curviligne
	$\underline{r}(s)$	Vecteur position de la ligne centrale
	$(\underline{\mathrm{d}}_1(s), \underline{\mathrm{d}}_2(s), \underline{\mathrm{d}}_3(s))$	Repères locaux
	ϵ	Déformation axiale ($\pm$ en compression, selon la convention choisie)
	$\underline{\Omega}(s)$	Vecteur de Darboux
	$(\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2)$	Moments quadratiques principaux
	C	Module de flexion
	G	Module de traction
	J_τ	Constante de torsion
Modèle de plaque mince	w	Déflexion
	D	Module de flexion
Élasticité finie 3-d	$\underline{\varphi}$	Déplacement
	(X, Y, Z)	Coordonnées lagrangiennes
	(x, y, z)	Coordonnées actuelles
	$(\underline{e}_X, \underline{e}_Y, \underline{e}_Z)$	Repère associé à la configuration de référence
	$\underline{\underline{F}}$	Gradient de la transformation
	$\underline{\underline{C}}$	Tenseur de Cauchy
	$\underline{\underline{e}}$	Tenseur de Green-Lagrange
	$\underline{\underline{\Sigma}}$	Tenseur de Piola-Kirchhoff
	λ	Étirement axial
	$\underline{F}$	Densité d'efforts extérieurs
	W_{3D}	Densité d'énergie élastique
Réduction dimensionnelle	$\boldsymbol{\varphi}$	Déplacement sur une section
	$\boldsymbol{\Sigma}_0$	Contrainte de Piola-Kirchhoff sur une section
	∇	Opérateur gradient 2-d sur une section
	$\mathcal{Q}$	Opérateur de raideur tangente
	$\mathcal{S}$	Opérateur de pré-contrainte

$\mathrm{d}\boldsymbol{E}$	Déformation incrémentale
$\mathrm{d}_2\boldsymbol{E}$	Second incrément de déformation
$\boldsymbol{F}$	Densité d'efforts extérieurs
η	Paramètre d'élongation

Introduction

L'étude des instabilités est un problème très ancien qui suscite l'intérêt de plusieurs communautés scientifiques. Les applications à la mécanique des solides débutèrent avec l'étude du flambement d'une elastica par Bernoulli, puis Euler qui proposa en 1744 une solution complète s'appuyant sur un modèle unidimensionnel (LEVIEN, 2008). Les champs d'applications se sont multipliés depuis, envahissant les domaines du génie civil et de l'ingénierie : des films élastiques minces (BIOT, 1957 ; CAO et HUTCHINSON, 2012) à la morphogenèse (SAVIN et al., 2011 ; OSTERFIELD et al., 2013 ; TALLINEN et al., 2016), en passant par les matériaux à changement de phase, les méta-matériaux architecturés (BERTOLDI et al., 2008 ; COMBESCURE, HENRY et ELLIOTT, 2015) et la conception de matériaux actifs impliquant des couplages avec des champs magnétiques et/ou électriques (DANAS, KANKANALA et TRIANTAFYLLIDIS, 2012 ; DANAS et TRIANTAFYLLIDIS, 2014 ; AN et al., 2015).

Dans tous ces domaines, comprendre les mécanismes à l'œuvre derrière les instabilités élastiques est fondamental. Celles-ci concernent le plus souvent des objets minces ou élancés qui flambent facilement, y compris sous l'effet de forces modérées. Ces systèmes sont classiquement analysés à l'aide de modèles 1-d ou 2-d de poutres, de plaques, de membranes ou de coques minces. Ces modèles réduits permettent une étude rapide de ces problèmes non-linéaires pour lesquels une description 3-d complète requiert des calculs numériques longs et fastidieux. Les objets étudiés devenant de plus en plus complexes, des modèles plus raffinés ont progressivement été proposés. Ainsi, la cinématique initiale du modèle de poutre d'Euler-Bernoulli a été enrichie pour prendre en compte un gauchissement uniforme sous l'effet de la torsion (SAINT-VENANT, 1855), puis l'effet du cisaillement (TIMOSHENKO, 1921). Plus récemment, VLASSOV (1962) fut le premier à considérer des déformations internes particulières à chaque section dans le cadre de l'étude des structures en voiles minces, très utilisées dans les applications industrielles car elles allient rigidité et légèreté.

Le développement de la théorie des milieux continus et de sa formulation non-linéaire et incrémentale en élasticité finie (GREEN, RIVLIN et SHIELD, 1952 ; BIOT, 1965) fournit un cadre théorique général et systématique pour l'étude des instabilités de systèmes 2-d et 3-d plus complexes comme des films minces sur substrats (BIOT, 1965 ; CAI et FU, 1999 ; CAO et HUTCHINSON, 2012), des poutres à section quelconque (SCHERZINGER et TRIANTAFYLLIDIS, 1998) ou des systèmes présentant des gradients de propriétés élastiques (LEE et al., 2008a). L'utilisation d'une forme discrétisée de ces équations combinée à des méthodes numériques perfectionnées utilisées pour suivre les solutions par continuation (KELLER, 1977 ; COCHELIN, DAMIL et POTIER-FERRY, 2007) ouvre la voie au calcul de solutions pour des géométries complexes, parfois au prix d'un temps de calcul conséquent.

Les progrès mathématiques opérés dans l'étude des bifurcations depuis l'introduction de ce mot par Poincaré en 1885 fournissent aujourd'hui des outils théoriques permettant de calculer non seulement le seuil d'initiation d'une instabilité élastique, mais également d'en étudier les aspects faiblement non-linéaires au voisinage de ce seuil. Ainsi KOITER (1965) propose une théorie générale pour l'étude de l'initiation du flambement pour des corps élastiques soumis à un chargement statique et conservatif. Ce type d'approche analytique ou semi-analytique combinée à des modèles réduits adaptés peut constituer un outil très puissant pour l'analyse de problèmes variés.

Ainsi, malgré l'essor d'outils de calcul de plus en plus performants, le développement de modèles réduits permettant une analyse rapide des comportements ainsi qu'une compréhension des phénomènes physiques reste un sujet de recherche vivace parmi les ingénieurs, les mathématiciens et les mécaniciens comme l'attestent de nombreux travaux dans ces trois communautés, par exemple BERMUDEZ et VIANO (1984), TRABUCHO et VIAÑO (1996) et SANCHEZ-HUBERT et SANCHEZ PALENCIA (1999) ou encore plus récemment GUINOT et al. (2012), AUDOLY et SEFFEN (2015), FERRADI (2016), CICALESE, RUF et SOLOMBRINO (2016) et BHATTACHARYA, LEWICKA et SCHÄFFNER (2016). Certains des modèles réduits obtenus se fondent sur la théorie 3-d rigoureuse, d'autres s'appuient sur des hypothèses cinématiques *ad hoc*. Ces modèles sont adaptés à des situations particulières et le choix d'un modèle pertinent pour l'étude d'une instabilité donnée peut s'avérer délicat.

C'est dans ce cadre que s'inscrit ce travail de thèse. En nous fondant sur une description 3-d appuyée sur la théorie de l'élasticité finie incrémentale, nous revisitons l'étude des instabilités de flambement dans des solides prismatiques en compression axiale, en comparant les prédictions de cette description 3-d aux résultats fournis par les modèles réduits classiques. Nous avons ainsi identifié un problème impliquant une instabilité dans une poutre mince et qui n'est pas correctement décrit par les modèles actuels. Il s'agit du flambement en hélice d'un solide prismatique fortement pré-contraint (HUANG et al., 2012 ; LIU et al., 2014) qui constitue une situation courante pour l'étude de la croissance. Notre analyse, fondée sur une description 3-d et sur une modélisation classique de croissance, montre que le modèle d'Euler-Bernoulli est inapplicable à cause de la présence de cette forte pré-contrainte.

L'approche classique du flambement est également remise en cause lorsqu'une infinité de modes instables apparaissent au point de bifurcation, comme c'est le cas pour les systèmes invariants d'échelle, dont l'exemple emblématique est le demi-plan infini en compression (BIOT, 1963). Ce système est connu pour bifurquer vers une instabilité de plissement (en anglais *creasing*), localisée et fortement non-linéaire (HONG, ZHAO et SUO, 2009 ; HOHLFELD et MAHADEVAN, 2011). Notre travail met en lumière un système invariant d'échelle exhibant une transition inédite d'un flambement étendu vers un flambement localisé.

Nous abordons ces problèmes dans le cadre très général de l'élasticité finie 3-d. Notre analyse s'attache à décrire un système élancé, infini dans sa direction d'élancement, au voisinage d'une solution d'équilibre invariante et homogène dans cette direction. La forme variationnelle du problème de bifurcation, établie directement à partir de l'énergie 3-d et combinée à un développement à deux échelles nous permet de généraliser les modèles classiques et ouvre la voie vers une méthode rigoureuse et systématique permettant d'établir des modèles réduits adaptés aux problèmes pour lesquels les modèles existants sont inapplicables. C'est un cadre d'étude très naturel dans lequel la résolution des équations exactes à chaque ordre donne accès à la cinématique complète du système.

Le premier chapitre de ce mémoire présentera la formulation générale du problème de bifurcation pour un solide élancé. Nous rappellerons d'abord la méthode des équilibres adjacents en nous appuyant sur l'exemple classique de l'elastica en compression, puis nous appliquerons cette méthode dans le cadre de l'élasticité finie 3-d. Le problème de bifurcation, présenté sous forme faible pour un solide prismatique de section quelconque servira de point de départ aux chapitres suivants.

Nous traiterons de réduction dimensionnelle dans le chapitre II et montrerons comment un modèle 1-d général peut être construit à partir de ce problème 3-d. Par un choix d'hypothèses sur les ordres de grandeurs des efforts appliqués, nous identifierons ce dernier au modèle de poutre classique pour un solide prismatique néo-Hookéen à section homogène soumis à une compression axiale homogène.

Le chapitre III présentera une application des approches précédentes à un problème de flambement de poutre sous forte pré-contrainte inspiré des observations de (HUANG et al., 2012) sur un système expérimental constitué de deux rubans d'élastomère assemblés avec une pré-contrainte finie. Sous certaines conditions, le motif obtenu dans le régime post-flambé consiste en une série d'hélices présentant une inversion régulière de chiralité. La présence d'une forte pré-contrainte rend le modèle d'Euler-Bernoulli inapplicable à ce système. Ce chapitre analyse la sélection de la longueur d'onde au seuil de flambement en fonction du rapport entre la pré-contrainte et la raideur élastique. Les résultats de la formulation 3-d sont ici comparés à deux modèles réduits : une bi-poutre simplifiée et un modèle de plaque construit à partir des équations de von-Kármán. Enfin, un développement asymptotique aux faibles nombres d'onde sera proposé pour analyser rapidement la sélection de la longueur d'onde du motif de flambement.

Le chapitre IV traitera des systèmes invariants d'échelle et du cas particulier d'un prisme à section triangulaire dont l'une des faces est maintenue fixée à un substrat plus raide, imposant ainsi une compression axiale. Nous verrons comment les outils développés dans la première partie de ce mémoire permettent d'analyser la transition observée expérimentalement entre un motif de flambement étendu et des modes localisés.

Chapitre I

Analyse de bifurcation de solides élancés

Sommaire

L'analyse de bifurcation linéarisée est un outil fondamental pour l'étude des instabilités en mécanique. Elle consiste à rechercher des solutions aux équations d'équilibre linéarisées au voisinage d'une solution d'équilibre connue. Dans le présent chapitre nous commencerons par introduire cette méthode, aussi appelée *méthode des équilibres adjacents* en nous appuyant sur le cas simple d'une elastica plane. Les techniques élaborées depuis les travaux d'EULER (1744) permettent aujourd'hui d'aborder ce problème de manière systématique.

Nous présenterons ensuite une formulation générale du problème de bifurcation dans le cadre de l'élasticité finie 3-d. Nous nous intéresserons au cas d'un solide élancé de section quelconque et invariant dans sa direction d'élancement. Nous verrons comment il est possible de simplifier le problème de bifurcation 3-d et de le ré-écrire comme un problème aux valeurs propres généralisé écrit sur une section 2-d du solide prismatique.

I.1 Exemple de l'elastica plane 1-d

Dans cette section nous considérons une elastica plane et inextensible de longueur L et de section constante, contenue dans le plan (y, z) et repérée par l'angle $\theta(s)$ où s est la coordonnée curviligne. Cette elastica, initialement rectiligne ($\theta(s) = 0 \quad \forall s$) est soumise à une force horizontale F à l'une de ses extrémités, l'autre extrémité étant maintenue fixe, comme représenté sur la figure I.1(a). Les conditions limites imposées à cette elastica s'écrivent $\theta(0) = \theta(L) = 0$.

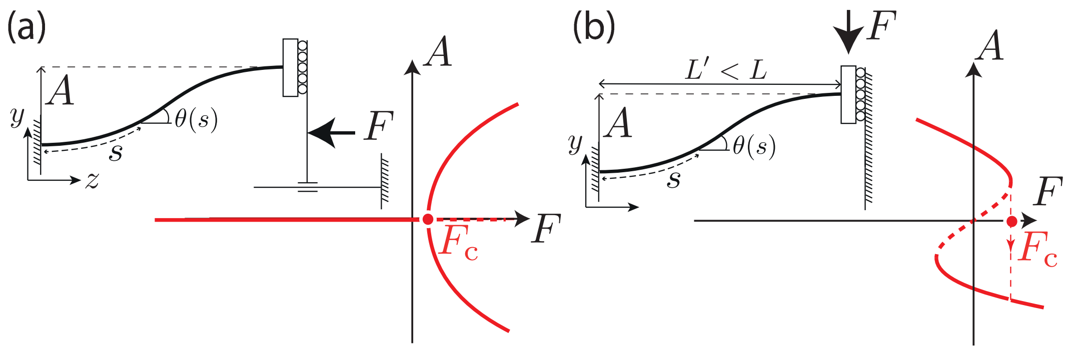

FIGURE I.1 – Instabilités d'une elastica plane. (a) Flambement d'Euler : bifurcation super-critique. (b) Claquage : perte de stabilité sans point de bifurcation.

I.1.1. Équation d'équilibre et solutions

L'équation d'équilibre pour le problème représenté figure I.1(a) sera d'abord énoncée sous forme générale en fonction de l'énergie totale du système $W(\theta)$ associée à la configuration $\theta(s)$.

Chaque position d'équilibre de l'elastica correspond à un point stationnaire de l'énergie. Celles-ci se calculent ainsi en annulant la *première variation de l'énergie* pour un déplacement virtuel infinitésimal quelconque $\hat{\theta}(s)$ vérifiant les conditions limites cinématiques, dans ce cas particulier $\hat{\theta}(0) = \hat{\theta}(L) = 0$,

$$\forall\, \hat{\theta}(s), \quad \mathrm{d}\, W(\theta, \hat{\theta}) = 0, \tag{I.1}$$

où $\mathrm{d}\,W(\theta,\hat{\theta}) = \frac{\mathrm{d}\,W(\theta+\tau\,\hat{\theta})}{\mathrm{d}\tau}|_{\tau=0}$. Cette équation est également connue sous le nom de *principe des travaux virtuels*. Examinons tout de suite sa forme explicite. L'énergie totale du système s'écrit

$$W(\theta) = \int_0^L \left[\frac{C}{2}\,(\theta'(s))^2 - F\left(1-\cos\theta(s)\right)\right] \mathrm{d}s, \tag{I.2}$$

où $C = E\mathcal{I}$ est le module de flexion. Le moment d'inertie d'une section est noté $\mathcal{I}$ et E désigne le module de Young. Le premier terme de l'équation I.2 correspond à l'énergie élastique de flexion, le second terme à l'énergie potentielle de la force compressive horizontale. Remarquons tout de suite la non-linéarité du second terme qui provient de la condition d'inextensibilité exprimée implicitement dans l'énergie potentielle associée à la force F

$$W_{\mathrm{p}}(\theta) = -F\,\delta l(\theta) \quad \text{avec} \quad \delta l(\theta) = L - \int_0^L \cos\theta(s)\mathrm{d}s.$$

L'équilibre non linéaire s'obtient en forme faible d'après l'équation I.1 en calculant la première variation de l'énergie. Nous obtenons

$$\forall\,\hat{\theta}(s), \quad \int_0^L \left[C\,\theta'(s)\,\hat{\theta}'(s) - F\,\sin\theta(s)\,\hat{\theta}(s)\right]\,\mathrm{d}s = 0, \tag{I.3}$$

avec $\hat{\theta}(0) = \hat{\theta}(L) = 0$. La forme forte de cet équilibre s'obtient après intégration par parties de l'équation I.3

$$C\,\theta''(s) + F\,\sin\theta(s) = 0, \tag{I.4a}$$

$$\theta(0) = 0 \quad \text{et} \quad \theta(L) = 0. \tag{I.4b}$$

Cette équation d'équilibre est non-linéaire pour le déplacement $\theta(s)$. Notons $A = y(L)$ l'amplitude maximale de la déflexion de l'elastica, l'allure du diagramme de bifurcation correspondant aux solutions du problème aux limites I.4 est tracé dans le plan (F, A) figure I.1(a).

En l'absence de compression imposée $F = 0$, l'unique solution de cet équilibre est la configuration rectiligne $\theta(s) = \theta_0 = 0$. Cette solution est invariante et homogène en s. Lorsque l'on augmente la valeur de F la configuration rectiligne $\theta(s) = 0$ reste l'unique solution de l'équation I.1 jusqu'à la valeur critique F_{c}, comme indiqué figure I.1(a). L'ensemble des solutions rectilignes forme la *branche fondamentale*. Pour $F > F_{\mathrm{c}}$, l'équation d'équilibre admet deux solutions non triviales symétriques en plus de la solution fondamentale θ_0 : F_{c} correspond à un *point de bifurcation* pour l'équilibre I.1. Nous ne considérons pas dans cette analyse la présence éventuelle de bifurcations successives et nous n'étudions que les branches issues de cette première bifurcation.

Il est possible de calculer la *stabilité* des différentes solutions de l'équation I.1. Celle-ci est donnée par le signe de la *seconde variation de l'énergie*. Ainsi pour une solution θ_i de l'équilibre non linéaire I.3 donnée et en notant θ_j une perturbation infinitésimale cinématiquement admissible,

$$\mathrm{d}_2\,W(\theta_i;\theta_j,\theta_j)\begin{cases} > 0\,\forall\theta_j \implies \theta_i & \text{est une solution d'équilibre stable,} \\ < 0\,\exists\theta_j \implies \theta_i & \text{est une solution d'équilibre instable,}\end{cases} \tag{I.5}$$

où $\mathrm{d}_2 W(\theta;\theta_1,\theta_2) = \frac{\mathrm{d}[\mathrm{d}W(\theta+\tau\,\theta_2,\theta_1)]}{\mathrm{d}\tau}|_{\tau=0}$. Pour une solution θ_i donnée, la seconde variation de l'énergie est une forme bilinéaire symétrique qui prend ici la forme

$$\mathrm{d}_2 W(\theta_i;\theta_j,\hat{\theta}) = \int_0^L \left[C\,\theta_j'\,\hat{\theta}' - F\,\cos\theta_i\,\theta_j\,\hat{\theta}\right]\mathrm{d}s,$$

pour une perturbation infinitésimale θ_j et un déplacement virtuel infinitésimal $\hat{\theta}$ quelconques. La bilinéarité en θ_j et $\hat{\theta}$ est immédiate. La solution $\theta_0 = 0$ est stable pour $F < F_\mathrm{c}$ et instable pour $F > F_\mathrm{c}$; les solutions bifurquées sont stables pour $F > F_\mathrm{c}$. Ceci est caractéristique d'une bifurcation en fourche à foin **super-critique**. Pour ce type de bifurcation la valeur F_c correspond à l'apparition d'une branche stable de faible amplitude $A \ll 1$. Nous verrons comment la méthode des équilibres adjacents permet de déterminer le point de bifurcation F_c et l'initiation de cette branche sans calculer l'ensemble des solutions de l'équation d'équilibre non-linéaire I.1.

Les instabilités peuvent être liées à l'existence d'un point singulier sans que celui-ci soit nécessairement associé à une bifurcation. C'est le cas pour un point limite comme l'illustre l'exemple du claquage figure I.1(b). Dans ce cas l'étude de stabilité I.5 de la branche fondamentale de solutions permet de conclure directement sur le comportement du système. Notons enfin que dans le cas d'une bifurcation en fourche à foin sous-critique l'analyse linéarisée ne permet pas de décrire la réponse du système au voisinage du chargement critique car une perturbation d'amplitude finie $A \sim 1$ peut apparaître avant le point de bifurcation. La réponse du système au passage du point de bifurcation est alors déterminée par des effets non-linéaires.

Il est souvent difficile de résoudre l'équation d'équilibre non linéaire pour caractériser la branche bifurquée lorsque $F > F_\mathrm{c}$. Ce n'est pas le cas pour l'elastica 2-d en compression : pour ce modèle le problème aux limites I.4 se résout facilement par la *méthode du tir* dont nous rappelons brièvement le principe. Cette méthode consiste à résoudre l'équation non-linéaire

$$\theta''(\overline{s}) + \overline{F}\,\sin\theta(\overline{s}) = 0,$$

où $\overline{F} = \frac{F\,L^2}{C}$ et $\overline{s} = \frac{s}{L}$ pour des conditions aux limites particulières en $s = 0$

$$\theta(0) = 0 \quad \theta'(0) = \kappa_0,$$

où κ_0 est un réel quelconque. Ce nouveau problème est un problème de Cauchy et peut être résolu numériquement par intégration progressive. La solution ainsi obtenue, notée θ_{κ_0}, doit vérifier la condition

$$\theta_{\kappa_0}(L) = 0.$$

Cette dernière équation peut être facilement résolue par une recherche numérique de racines pour différentes valeurs des paramètres κ_0 et $\overline{F}$. La mise en œuvre de cette méthode nous permet de tracer la solution du problème I.4 dans le plan $(\overline{F},\theta'(0))$, voir figure I.2(a).

Nous verrons par la suite des exemples, notamment dans le cadre de l'élasticité finie 3-d, où les méthodes numériques de résolution de l'équation I.1 s'avèrent délicates à mettre en œuvre. Il est alors très utile de bénéficier d'une méthode permettant de détecter les bifurcations de manière systématique.

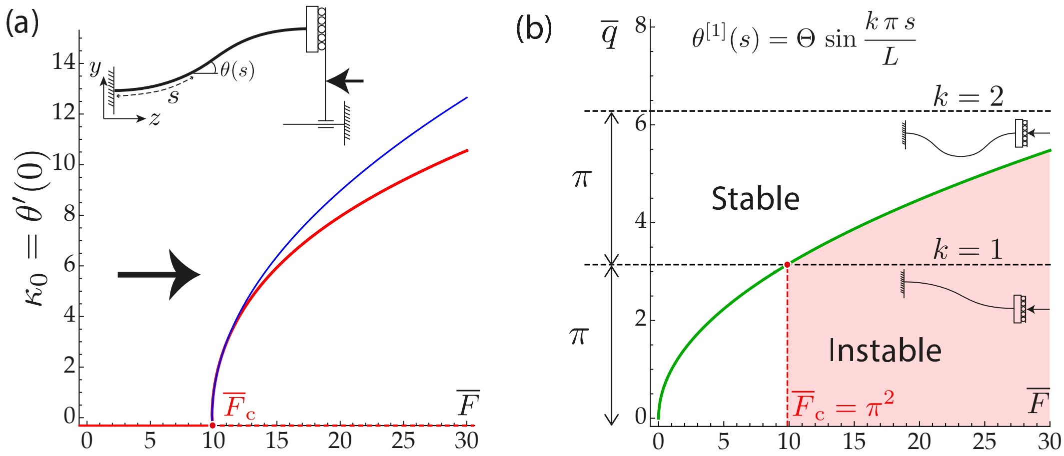

FIGURE I.2 – (a) Résultats de la résolution numérique (méthode du tir) de l'équilibre non-linéaire I.4 (en rouge) superposés à la prédiction de l'analyse faiblement non-linéaire I.13 (en bleu). La compression est comptée positivement et le trajet de chargement indiqué par une flèche noire. (b) Courbe de stabilité marginale dans le plan $(\overline{F}, \overline{q})$. La contrainte sur q imposée par les conditions aux bords pour une elastica de longueur finie L est représentée par les traits en pointillés : $L\,q = k\,\pi$. Celle-ci permet de définir le seuil $\overline{F}_c$ correspondant au point de bifurcation. La solution fondamentale rectiligne est en fait instable dans la zone hachurée en rouge.

I.1.2. Méthode des équilibres adjacents

La *méthode des équilibres adjacents* consiste à résoudre l'équation d'équilibre linéarisée au voisinage de la solution fondamentale θ_0, c'est à dire à rechercher des solutions de l'équilibre I.1 sous la forme $\theta(s) = \theta_0 + \eta\,\theta^{[1]}$ avec $\eta \ll 1$. Une telle solution est appelée équilibre adjacent si elle vérifie l'équilibre linéarisé qui s'écrit alors

$$\forall \hat{\theta}(s), \quad \mathrm{d}_2\, W(\theta_0; \theta^{[1]}, \hat{\theta}) = 0,$$

où le déplacement virtuel $\hat{\theta}$ vérifie les conditions aux limites cinématiques. Sous forme explicite cette dernière équation s'écrit

$$\forall \hat{\theta}(s), \quad \int_0^L \left[C\,\theta^{[1]\prime}(s)\,\hat{\theta}'(s) - F\,\theta^{[1]}(s)\,\hat{\theta}(s) \right] \mathrm{d}s = 0, \tag{I.6}$$

avec $\hat{\theta}(0) = \hat{\theta}(L) = 0$. Nous choisissons une perturbation harmonique $\theta^{[1]} = \Theta\, e^{i\,q\,s}$, ce qui revient à développer la perturbation en séries de Fourier. L'équation à résoudre peut alors s'écrire de manière formelle

$$\forall\, \widehat{\Theta}, \quad \mathrm{d}_2\, W(\theta_0; \Theta e^{i\,q\,s}, \widehat{\Theta} e^{i\,q\,s}) = 0. \tag{I.7}$$

Pour l'elastica en compression l'équation I.7 devient

$$\overline{q}^2 - \overline{F} = 0, \tag{I.8}$$

où $\overline{q} = q\,L$ et $\overline{F} = \frac{F\,L^2}{C}$. Les solutions de cette équation de dispersion sont tracées figure I.2(b), elles forment la courbe de *stabilité marginale*. La plus petite valeur de F pour laquelle l'équation I.7 admet une solution non nulle est associée à la plus petite solution réelle de cette équation de dispersion I.8. Nous obtenons ainsi $(F_c = 0, q_c = 0)$ dans le cas où $L = \infty$. Pour une elastica de longueur finie, c'est la longueur L qui détermine la valeur de $F_c > 0$ en introduisant une condition de quantification sur le nombre d'onde $\overline{q}$. Cette condition assure que les solutions satisfont les conditions limites en $s = 0$ et $s = L$

$$L\, q_c = k\,\pi \quad k \in \mathbb{N}, \tag{I.9}$$

et la plus petite solution non nulle de I.8 satisfaisant I.9 correspond à $k = 1$, ce qui implique

$$F_c = \frac{\pi^2\, C}{L^2}. \tag{I.10}$$

Cette contrainte I.9 est indiquée par les lignes noires en pointillés sur la figure I.2(b). Les modes harmoniques obtenus pour $F = F_c$ correspondent aux solutions bifurquées de l'équation I.3 au voisinage du chargement critique. Nous parlerons dans la suite de *modes critiques*. Notons finalement que la résolution de l'équilibre linéarisé I.7 ne donne pas d'information sur la stabilité des solutions.

Cette méthode ne permet pas de calculer l'amplitude η de la déformation obtenue pour $F > F_c$, celle-ci devra être évaluée dans un second temps, par un développement de l'équation d'équilibre I.1 aux ordres supérieurs en η. Ceci est l'objectif de la méthode développée par Koiter (1965) (voir aussi Heijden, 2008) qui permet en particulier de détecter une bifurcation sous-critique. Nous donnons dans la section suivante un bref aperçu du fonctionnement cette méthode, toujours pour le cas de l'elastica en compression.

I.1.3. Développement faiblement non-linéaire

Écrivons le développement de la perturbation et du paramètre de chargement aux ordres suivants en η. Par symétrie il vient

$$\theta = \theta_0 + \eta\,\theta^{[1]} + \eta^2\,\theta^{[2]} + \eta^3\,\theta^{[3]} + o(\eta^3), \tag{I.11a}$$

$$\overline{F} = \overline{F}_c + \eta^2\,\overline{F}^{[2]} + o(\eta^3). \tag{I.11b}$$

En insérant ce développement I.11a-I.11b dans l'équation d'équilibre non linéaire I.3 et en isolant les différents ordres en η, η^2 et η^3 nous obtenons

$$\forall\hat{\theta}(s), \quad \begin{cases} \int_0^1 \left[\theta^{[1]\prime}\,\hat{\theta}' - \overline{F}_c\,\theta^{[1]}\,\hat{\theta}\right] \mathrm{d}\overline{s} = 0, \\ \int_0^1 \left[\theta^{[2]\prime}\,\hat{\theta}' - \overline{F}_c\,\theta^{[2]}\,\hat{\theta}\right] \mathrm{d}\overline{s} = 0, \\ \int_0^1 \left[\theta^{[3]\prime}\,\hat{\theta}' - \overline{F}_c\,\theta^{[3]}\,\hat{\theta}\right] \mathrm{d}\overline{s} = \int_0^1 \left[\overline{F}^{[2]}\,\theta^{[1]}\,\hat{\theta} - \overline{F}_c\,\frac{(\theta^{[1]})^3\,\hat{\theta}}{6}\right] \mathrm{d}\overline{s}, \end{cases}$$

où le déplacement virtuel $\hat{\theta}$ vérifie les conditions aux limites cinématiques. Les deux premières équations sont similaires à I.6. L'opérateur bilinéaire défini par le membre de gauche dans chacune de ces équations est singulier au point de bifurcation puisque l'équation I.6 admet au moins une solution, par définition. C'est en écrivant la condition de solubilité pour la troisième équation, c'est à dire en choisissant $\hat{\theta}$ dans le noyau de cet opérateur singulier que nous calculons le premier terme du développement non-linéaire. La troisième équation s'écrit alors pour $\hat{\theta}(s) = \sin q_c\, s$ où q_c est définit par I.8,

$$\int_0^1 \left[\overline{F}^{[2]}\,\sin^2(\overline{q}_c\,\overline{s}) - \overline{F}_c\,\frac{\sin^4(\overline{q}_c\,\overline{s})}{6}\right] \mathrm{d}\overline{s} = 0 \implies \overline{F}^{[2]} = \frac{\pi^2}{8}. \tag{I.12}$$

La bifurcation est super-critique car $\overline{F}^{[2]} > 0$. Ce coefficient permet également de calculer l'amplitude de la courbure de l'elastica post-flambée en $s = 0$, $\kappa_0 = \theta'(0)$. On a en effet pour $\overline{F}$ proche de $\overline{F}_c$, d'après le développement I.11b,

$$\kappa_0 = \overline{q}_c\,\eta = \overline{q}_c\sqrt{\frac{\overline{F} - \overline{F}_c}{\overline{F}^{[2]}}}.$$

En combinant cette équation avec l'expression de $\overline{F}^{[2]}$ calculée par I.12 il vient

$$\kappa_0 = \sqrt{8(\overline{F} - \pi^2)}. \tag{I.13}$$

Cette solution approchée est tracée en bleu sur la figure I.1(a), superposée à la solution numérique de l'équation d'équilibre non-linéaire I.4 calculée par la méthode du tir et prédit correctement la courbure à l'origine au voisinage du point de bifurcation. Cette méthode repose sur un développement à faible amplitude de la solution de l'équation d'équilibre non linéaire, au voisinage du point de bifurcation. Il est possible de calculer les termes aux ordres supérieurs dans le développement I.11a-I.11b : la condition de solubilité I.12 une fois vérifiée, il suffit de résoudre l'équation à l'ordre 3 pour déterminer $\theta^{[3]}$, puis d'écrire le développement de l'équilibre non-linéaire aux ordres suivants et de le traiter de la même manière. Nous ne détaillerons pas cette analyse et renvoyons le lecteur aux travaux de KOITER (1965) pour des exemples détaillés.

Notons que le cas traité ici est simple car il n'existe qu'un seul mode propre solution de l'équilibre linéarisé I.6 au point de bifurcation. Lorsque plusieurs modes critiques sont simultanément solution de I.6, des termes non-linéaires de couplage entre les différents modes doivent être calculés (HUTCHINSON, 1967 ; CAO et HUTCHINSON, 2011). Nous reviendrons sur ce point dans le chapitre IV en nous intéressant au cas dégénéré où une infinité de modes critiques apparaissent au point de bifurcation.

Dans le chapitre III nous introduisons une méthode originale présentant des similarités avec le développement de Koiter. Il s'agit d'un développement faiblement non-linéaire de la relation de dispersion au voisinage du point de bifurcation. Cette nouvelle approche permet de caractériser la longueur du d'onde du motif de flambement au voisinage de la charge critique sans calculer l'ensemble de la courbe de stabilité marginale. Ce calcul peut en effet s'avérer fastidieux pour les modèles 3-d que nous abordons dans la suite de ce chapitre.

I.1.4. Conclusion

Nous avons présenté dans cette section quelques outils théoriques classiques pour l'analyse des instabilités en élasticité. Ceux-ci sont souvent utilisés en complément d'approches numériques permettant de calculer les branches de solutions par des méthodes de cheminement qui seront évoquées brièvement dans la prochaine section.

Le problème de flambement analysé dans cette section est décrit par un modèle 1-d classique caractérisé par une énergie de flexion (équation I.2). Ce modèle dit d'Euler-Bernoulli est adapté pour décrire le flambement en flexion de solides élancés homogènes isotropes pour une gamme de comportements linéaires et dans la limite de pré-contraintes faibles. La résolution de certains problèmes nécessite d'utiliser des modèles plus élaborés, présentant notamment une cinématique plus riche qui permet de prendre en compte toutes les non-linéarités géométriques qui entrent en jeu dans le phénomène de flambage. Ainsi les équations de Föppxl-von-Kármán permettent de modéliser le flambement en flexion d'objets 2-d minces. Nous verrons dans le chapitre III comment elles permettent de pallier les limites du modèle d'Euler-Bernoulli pour l'étude de poutres en voile mince fortement pré-contraintes.

Il existe enfin des systèmes où les non-linéarités de comportement jouent un rôle déterminant dans l'initiation et le développement des instabilités. C'est le cas en particulier pour le phénomène de striction d'une barre en traction étudié par CONSIDÈRE (1885) pour lequel les modèles réduits 1-d font appel à la déformation axiale ainsi qu'à son gradient (COLEMAN et NEWMAN, 1988).

Ainsi, si les modèles réduits présentent un intérêt certain pour l'étude des instabilités, il est souvent délicat de choisir le modèle le plus approprié pour résoudre un problème donné. Le choix peut être guidé par des hypothèses cinématiques ou une intuition des phénomènes physiques en jeu. Une approche complémentaire et systématique consiste à écrire les équations de l'élasticité en 3-d afin de décrire la géométrie du problème de manière exacte. Cette théorie 3-d permet également de prendre en compte les non-linéarités liées au comportement du matériau considéré. La prochaine section a pour objectif d'introduire les équations de l'élasticité finie 3-d et d'en déduire le problème de bifurcation général pour un solide élancé prismatique de section quelconque. Ce dernier peut s'écrire de manière simplifiée en mettant à profit des hypothèses d'invariance dans la direction axiale.

I.2 Formulation générale en élasticité finie 3-d

La théorie de l'élasticité non-linéaire (GREEN, RIVLIN et SHIELD, 1952 ; OGDEN, 1997) permet de traiter une très grande variété de problèmes et prend en compte non seulement les non-linéarités géométriques, mais aussi des déformations finies, des conditions aux limites étendues pouvant impliquer du contact et les non-linéarités liées au comportement du matériau considéré. Elle permet également de décrire des couplages avec la thermique et/ou des champs électriques ou mécaniques.

Les équations aux dérivées partielles résultant de cette théorie sont le plus souvent discrétisées par la méthode des éléments finis et résolues par des schémas numériques itératifs reposant sur l'algorithme de Newton-Raphson ou sur des algorithmes plus robustes de type prédicteur-correcteur (KELLER, 1977 ; WRIGGERS, 2008). Ces différents algorithmes permettent de suivre les branches de solutions des équations discrétisées : c'est une approche efficace pour un certain nombre de problèmes mais qui s'avère coûteuse en temps, particulièrement lorsque les systèmes étudiés sont étendus et/ou que l'on souhaite effectuer une étude paramétrique. L'amélioration des algorithmes de cheminement reste un domaine de recherche vivace, comme l'attestent par exemple les travaux de COCHELIN, DAMIL et POTIER-FERRY (2007) ou de FARRELL, BIRKISSON et FUNKE (2015).

L'étude systématique des bifurcations par la méthode des équilibres adjacents présentée dans la section précédente peut être appliquée aux équations de l'élasticité non-linéaire tridimensionnelle. Elle repose alors sur une formulation incrémentale de ces équations, couramment utilisée pour l'analyse des instabilités élastiques dans des solides 3-d (BIOT, 1965 ; DESTRADE et al., 2008 ; CIARLETTA, DESTRADE et GOWER, 2013 ; CIARLETTA et DESTRADE, 2014).

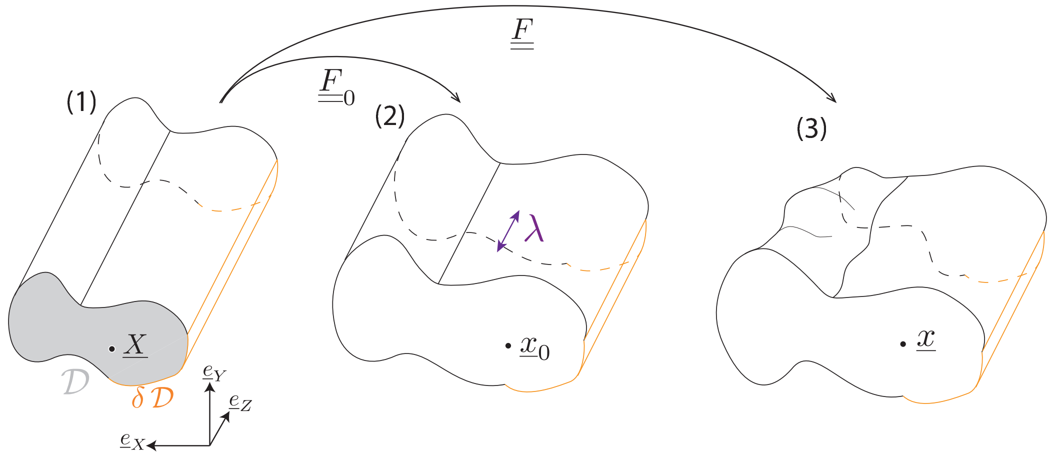

FIGURE I.3 – Modèle de solide prismatique 3-d : (1) configuration naturelle, (2) configuration homogène pour un étirement λ, (3) configuration flambée.

I.2.1. Équilibre non-linéaire d'un solide prismatique

Nous étudions dans cette section un solide prismatique de section quelconque schématisé figure I.3(1), comportant éventuellement des contrastes élastiques et pouvant être soumis à des conditions aux limites cinématiques quelconques dans le plan 2-d de sa section, noté $(\underline{e}_X, \underline{e}_Y)$. Par exemple, les déplacements dans le plan de la section peuvent être imposés le long de la surface $\delta\mathcal{D}$ dessinée en orange sur le solide de la figure I.3. Ce solide peut éventuellement être pré-contraint de manière hétérogène dans sa section, comme discuté dans le chapitre III.

Les propriétés géométriques et élastiques de la section, notée $\mathcal{D}$, ainsi que les conditions limites imposées dans son plan sont supposées invariantes par translation dans la direction $\underline{e}_Z$. Nous considérerons par la suite un chargement quelconque admettant une famille de solutions homogènes dans la direction Z et piloté par un paramètre λ. Il pourra s'agir par exemple d'une pression radiale, d'une torsion uniforme ou d'une compression axiale dans la direction $\underline{e}_Z$. Ce cas particulier où la solution homogène peut être repérée par un étirement axial λ est représenté figure I.3 et sera développé en détails dans la prochaine section.

La configuration de référence est décrite par le système de coordonnées $\underline{X} = (X, Y, Z)$ et la configuration finale est notée $\underline{x} = (x, y, z)$. Dans la suite, nous adopterons les notations standards de l'élasticité 3-d : les vecteurs seront soulignés une fois et les tenseurs soulignés deux fois. Le déplacement sera noté $\underline{\varphi}(\underline{X})$. Ainsi il vient $\underline{x} = \underline{X} + \underline{\varphi}(\underline{X})$ et le gradient de la transformation s'écrit $\underline{\underline{F}} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}} = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{\varphi}$. La configuration homogène sera notée $\underline{x}_0$ avec $\underline{x}_0 = \underline{X} + \underline{\varphi}_0^\lambda(\underline{X})$.

Énergie élastique

Nous considérons des matériaux hyper-élastiques : il s'agit de matériaux dont les déformations sous l'effet de sollicitations mécaniques sont réversibles et ne dépendent pas de l'histoire du chargement. C'est par exemple le cas des élastomères (TRELOAR, 1949) qui peuvent subir des déformations considérables sous l'effet de sollicitations relativement faibles. Certains tissus biologiques (FUNG, 1993), certains gels peuvent être également modélisés par ce type de lois lorsque les effets visco-élastiques sont négligés. Tous ces matériaux très déformables génèrent facilement des instabilités.

En l'absence d'effets thermiques, l'énergie interne stockée par des solides constitués de ces matériaux, appelée énergie élastique, dépend uniquement du gradient de la transformation $\underline{\underline{F}}$. Plus précisément, cette énergie est invariante lorsque des déplacements rigides sont imposés au solide et peut s'exprimer en fonction d'une mesure de déformation, par exemple du tenseur de Cauchy : $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}}$. Elle se caractérise par une densité d'énergie par unité de volume notée $W_{3D}(\underline{\underline{C}})$. Cette densité d'énergie peut prendre différentes formes suivant le matériau considéré et son organisation à l'échelle microscopique.

Dans le cas où ce matériau est incompressible, la contrainte de conservation du volume $J = \det \underline{\underline{F}} = 1$ est associée à une pression p qui agit comme un multiplicateur de Lagrange dans l'expression augmentée de l'énergie. Ainsi pour le modèle néo-Hookéen incompressible la densité d'énergie augmentée s'écrit

$$W_{3D}(\underline{\underline{C}}) = \frac{\mu}{2}\left(tr(\underline{\underline{C}}) - 3\right) - p\,(J-1),$$

où μ est le second coefficient de Lamé. Dans sa version compressible le modèle néo-Hookéen prend la forme

$$W_{3D}(\underline{\underline{C}}) = \frac{\mu}{2}\left(tr(\underline{\underline{C}}) - 3\right) - \mu \ln J + \frac{\lambda_{\mathrm{L}}}{2}\ln^2 J, \tag{I.14}$$

où λ_{L} est le premier coefficient de Lamé. Dans la plupart des applications numériques nous utiliserons le modèle de Gent réputé plus réaliste pour décrire le comportement des polymères

$$W_{3D}(\underline{\underline{C}}) = \frac{\mu}{2}\left[-J_{\mathrm{m}}\ \ln\left(1 - \frac{I_{\mathrm{c}} - 3}{J_{\mathrm{m}}}\right)\right] - \mu\ \ln J + \left(\frac{\lambda_{\mathrm{L}}}{2} - \frac{\mu}{J_{\mathrm{m}}}\right)\ (J-1)^2, \tag{I.15}$$

où J_{m} est une constante et $I_{\mathrm{c}} = tr(\underline{\underline{C}})$ le premier invariant du tenseur de Cauchy. La valeur du rapport λ_{L}/μ détermine le niveau de compressibilité : le module de Poisson équivalent vaut, dans la limite des petites déformations, $\nu = \frac{\lambda_{\mathrm{L}}}{2(\lambda_{\mathrm{L}}+\mu)}$. Par ailleurs le paramètre J_{m} fixe le niveau de déformations pour lequel l'écart au modèle néo-Hookéen devient significatif. Ainsi pour des valeurs d'étirement aussi élevées que $\sim \sqrt{J_{\mathrm{m}}}$ (extension) aussi basses que $\sim 1/\sqrt{J_{\mathrm{m}}}$ (compression), la loi I.15 est proche du modèle néo-Hookéen compressible I.14. La linéarisation de ces modèles fournit une loi d'élasticité linéaire couramment utilisée en petites déformations.

Une comparaison entre ces différents modèles est tracée figure I.4 pour un solide soumis à un étirement axial $z = \lambda Z$. La transformation associée s'écrit $\underline{\underline{F}} = \mathrm{Diag}(r, r, \lambda)$ où l'étirement transverse $r(\lambda)$ est solution de l'équation implicite $\frac{\partial W_{3D}(\lambda,r)}{\partial r} = 0$ qui assure que les contraintes sont nulles dans le plan orthogonal à la direction de chargement. Nous avons tracé figure I.4 la valeur de la contrainte axiale par unité de surface dans la configuration de référence : $n(\lambda) = \frac{\mathrm{d}W_{3D}(\lambda,r(\lambda))}{\mathrm{d}\lambda}$. La force résultante s'écrit alors $\mathcal{A}\,n(\lambda)$, où $\mathcal{A}$ est l'aire de la section dans la configuration de référence. La non-linéarité de ces lois apparaît très clairement sur ces courbes, de même que la proximité entre le modèle de Gent et le modèle néo-Hookéen sur une (relativement) large plage de déformations.

Il existe d'autres lois de comportement hyper-élastiques isotropes comme la loi de Mooney–Rivlin à trois paramètres, faisant apparaître des termes d'ordre 4. On peut également citer le modèle plus général d'Odgen à 6 paramètres. Les matériaux

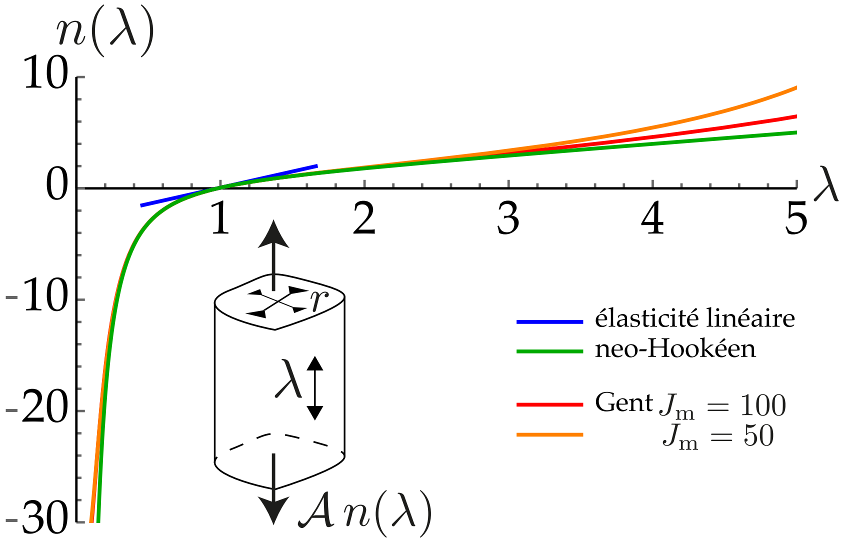

FIGURE I.4 – Réponse en étirement axial pour différents comportements : Gent (en rouge et orange), néo-Hookéen (en vert) et élasticité linéarisée (en bleu) pour les paramètres $(\lambda_{\mathrm{L}}, \mu, J_{\mathrm{m}}) = (10., 1., 100.)$.

biologiques, souvent anisotropes nécessitent l'introduction de modèles spécifiques comme celui de HOLZAPFEL, GASSER et OGDEN (2000) développé pour modéliser les parois artérielles. Ces derniers modèles font l'objet de recherches actives, comme l'attestent des travaux récents, voir par exemple NOLAN et al. (2014).

L'énergie moyenne par unité de longueur d'un solide prismatique de section $\mathcal{D}$ et de longueur L est donnée par l'intégrale de la densité d'énergie $W_{3D}\,\mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y\,\mathrm{d}Z$, elle s'écrit ainsi

$$\frac{1}{L}\int_0^L \left(\iint_{\mathcal{D}} W_{3D}(\underline{\underline{C}}(\underline{X}))\,\mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y \right) \mathrm{d}Z.$$

Équilibre non-linéaire

Comme dans le § I.1, les solutions de l'équation d'équilibre non-linéaire $\underline{\varphi}(\underline{X})$ sont obtenues en annulant la première variation de l'énergie totale pour n'importe quel déplacement virtuel $\underline{\widehat{\varphi}}$ vérifiant les conditions aux limites cinématiques

$$\forall \underline{\widehat{\varphi}}(X,Y,Z), \quad \int_0^L \left(\iint_{\mathcal{D}} \underline{\underline{\Sigma}}(\underline{\varphi}) : \left(\underline{\underline{F}}^T(\underline{\varphi}) \cdot \underline{\underline{\widehat{F}}}\right) \mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y \right) \mathrm{d}Z = \cdots$$
$$\int_0^L \iint_{\mathcal{D}} \underline{F} \cdot \underline{\widehat{\varphi}}(\underline{X}) \mathrm{d}X \mathrm{d}Y \mathrm{d}Z, \qquad \text{(I.16)}$$

où $\underline{\underline{\widehat{F}}} = \underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{\widehat{\varphi}}$ représente le gradient du déplacement virtuel $\underline{\widehat{\varphi}}$. Nous utilisons les deux-points pour noter le produit doublement contracté de deux tenseurs $\underline{\underline{A}}$ et $\underline{\underline{B}}$

$$\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{B}} = \mathrm{tr}\left(\underline{\underline{A}}^T \cdot \underline{\underline{B}}\right).$$

Dans l'équation I.16, le tenseur représentant la seconde contrainte de Piola-Kirchhoff s'écrit $\underline{\underline{\Sigma}} = \frac{\partial W_{3D}}{\partial \underline{\underline{e}}}$ où nous notons $\underline{\underline{e}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{C}} - 1)$ la déformation de Green-Lagrange. L'expression particulière de cette contrainte sera donnée plus loin dans cette section pour un modèle néo-Hookéen et dans le chapitre III pour un modèle de Gent. Dans le cas d'un chargement imposé uniquement en déplacement la densité de force appliquée $\underline{F}$ est nulle et le membre de droite de I.16 disparaît. Dans le cas d'une densité d'efforts surfaciques appliquée aux extrémités $Z = 0$ et $Z = L$ ce membre de droite devient

$$\iint_{\mathcal{D}} \underline{F} \cdot \underline{\widehat{\varphi}}(X, Y, Z = 0) \mathrm{d}X \mathrm{d}Y + \iint_{\mathcal{D}} \underline{F} \cdot \underline{\widehat{\varphi}}(X, Y, Z = L) \mathrm{d}X \mathrm{d}Y.$$

Il est possible de calculer des solutions de l'équation I.16 en la discrétisant par la méthode des éléments finis puis en calculant les solutions de proche en proche, par continuation. La valeur du paramètre de chargement λ est modifiée progressivement et à chaque pas il est nécessaire de résoudre l'équation non-linéaire. Cette résolution peut être effectuée par la méthode de Newton-Raphson, initiée par la solution obtenue au pas précédent. Il s'agit d'un schéma de cheminement élémentaire pour lequel le paramètre de chargement λ varie de manière monotone. Ce type de schéma ne permet pas de détecter un point de rebroussement pour lequel le paramètre de chargement varie de manière non monotone, comme c'est le cas pour l'instabilité de claquage illustrée au § I.1 figure I.1(b). Pour ce type de problème il est nécessaire de faire appel à des méthodes plus perfectionnées, par exemple à des algorithmes de cheminement paramétrés par longueur d'arc (KELLER, 1977).

Exemple d'un barreau 2-d en compression

Le résultat d'un calcul numérique pour un barreau 2-d en compression est tracé sur la figure I.5. Il s'agit du problème traité au § I.1 par un modèle 1-d et schématisé figure I.1(a). La tige a pour longueur $L = 1$, nous faisons varier son épaisseur $h \in \{0.1, 0.05, 0.02\}$ et considérons un matériau néo-Hookéen faiblement compressible : $\mu = 10.$ et $\lambda_{\mathrm{L}} = 200$. Nous utilisons des éléments de Lagrange linéaires implémentés dans la librairie FEniCS (ØLGAARD, LOGG et WELLS, 2009) et un maillage triangulaire non structuré généré avec le code Gmsh (GEUZAINE et REMACLE, 2009). La taille typique des éléments e est choisie de sorte à assurer la convergence des résultats, ainsi les résultats de la figure I.5 sont obtenus pour $\frac{e}{h} = 0.1$.

Dans l'attente de méthodes plus avancées, la solution bifurquée est capturée grâce à l'introduction d'une petite imperfection dans le maillage : celui-ci est initialement déformé par le champ de déplacement $\underline{u}_\delta(X) = \delta \sin \frac{\pi X}{2L} \underline{e}_Y$. La solution numérique est calculée pour différentes valeurs de δ. Nous utilisons un algorithme de Newton-Raphson pour calculer la solution de l'équilibre non-linéaire et augmentons à chaque pas l'amplitude du déplacement horizontal imposé $\varphi_x(L, \frac{h}{2}) = \underline{\varphi}(L, \frac{h}{2}) \cdot \underline{e}_X$.

Les solutions tracées dans la figure I.5 correspondent à $\frac{\delta}{h} = 5.10^{-4}$. Nous traçons l'amplitude maximale du déplacement vertical $\varphi_y(L, \frac{h}{2}) = \underline{\varphi}(L, \frac{h}{2}) \cdot \underline{e}_Y$ en fonction du déplacement horizontal imposé réajusté par la valeur critique théorique obtenue avec le modèle de poutre 1-d, d'après l'équation I.10 de la première section de ce chapitre (§ I.1),

$$\varphi_x(L, \frac{h}{2}) - \varphi_x^{\mathrm{c}} \quad \text{où} \quad \varphi_x^{\mathrm{c}} = \frac{\mathcal{I}\, \pi^2}{h\, L^2},$$

où $\mathcal{I} = \frac{h^3}{12}$. Nous vérifions ainsi que le déplacement horizontal au point de bifurcation calculé par ces simulations (courbes en vert, vert foncé et noir) est en bon accord avec la prédiction du modèle 1-d (courbe en pointillés en rouge). Les résultats numériques et la prédiction du modèle 1-d convergent également dans le régime post-flambé pour ces faibles valeurs de h.

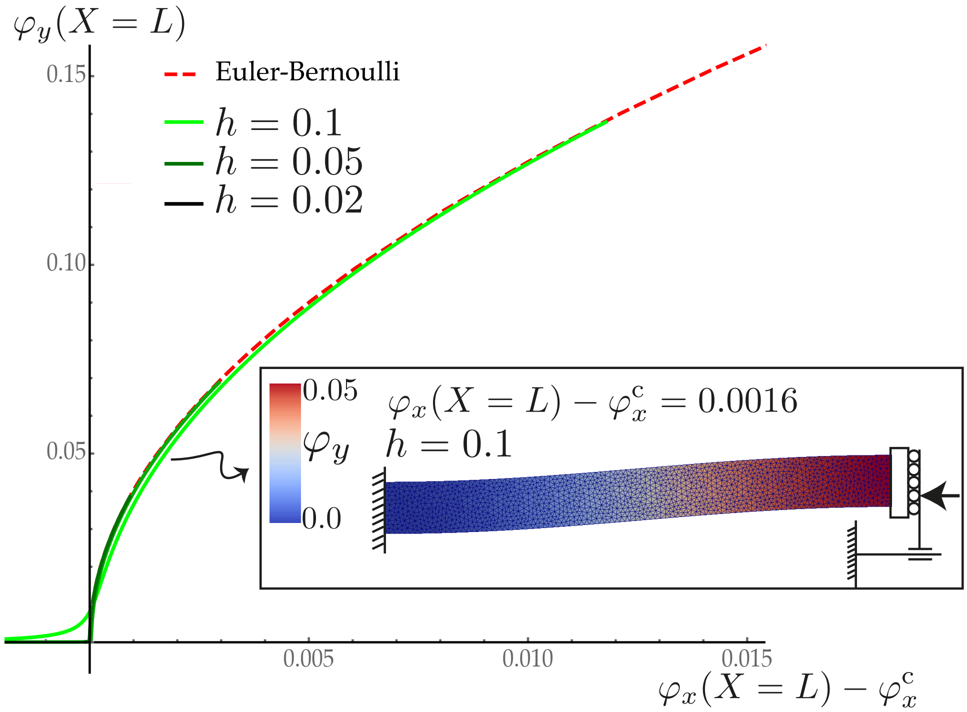

FIGURE I.5 – Elastica 2-d : flambement calculé par continuation et la méthode des éléments finis (taille de maille $\frac{e}{h} = 0.1$ et amplitude de l'imperfection initiale $\frac{\delta}{h} = 5.10^{-4}$). Amplitude maximale du déplacement vertical $\varphi_y(L, \frac{h}{2})$ en fonction du déplacement horizontal réajusté $\varphi_x(L, \frac{h}{2}) - \varphi_x^c$ et allure de la déformée pour $h = 0.1$ et $\varphi_x(L, \frac{h}{2}) - \varphi_x^c \approx 0.00162$.

On imagine aisément la lourdeur et la difficulté de mise en œuvre de la méthode présentée ici pour un problème 3-d, qui nécessite une étude détaillée de la convergence en fonction des paramètres e, δ et enfin h. L'intérêt des modèles 1-d tels que celui présenté § I.1, ainsi que d'approches systématiques par la méthode des équilibres adjacents apparaissent ici de manière flagrante. Nous mettrons en œuvre cette méthode pour l'équilibre non-linéaire 3-d I.16 dans les prochains paragraphes. La première étape consiste à calculer les solutions fondamentales homogènes $\underline{\varphi}^{\lambda}_{[0]}$. Examinons l'exemple d'un étirement axial.

I.2.2. Solutions homogènes : exemple de l'étirement axial

Pour un barreau composé d'un matériau au comportement orthotrope dans le repère $(\underline{e}_X, \underline{e}_Y, \underline{e}_Z)$ et soumis à un étirement axial $z = \lambda Z$ comme décrit à la figure I.3, la solution non-linéaire décrivant un étirement homogène est recherchée sous la forme

$$\underline{\varphi}^{\lambda}_{[0]}(\underline{X}) = \underline{\varphi}^{||}_{[0]}(\lambda; X, Y) + (\lambda - 1) Z\, \underline{e}_Z, \tag{I.17}$$

où $\underline{\varphi}^{||}_{[0]}$ désigne un déplacement dans le plan de la section, qu'il faut déterminer. Remarquons tout de suite que l'invariance selon Z de cette dernière forme implique une simplification d'écriture pour l'équilibre I.16. Le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff présente une forme diagonale par blocs

$$\underline{\underline{\Sigma}}(\underline{\varphi}^{\lambda}_{[0]}) = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\Sigma}}^{||}_0(\lambda; X, Y) & 0 \\ 0 & \Sigma^{\perp}_0(\lambda; X, Y) \end{pmatrix}, \tag{I.18}$$

où la matrice supérieure-gauche $\underline{\underline{\Sigma}}^{||}_0$ de dimensions 2×2 représente la contrainte dans la section, dans le plan $(\underline{e}_X, \underline{e}_Y)$, tandis que le scalaire inférieur-droit $\Sigma^{\perp}_0$ représente la contrainte axiale dans la direction Z. L'apparition de contraintes dans la section peut être liée à des incompatibilités géométriques associées à des conditions cinématiques imposées ou à des hétérogénéités de pré-contrainte. Ce dernier cas sera étudié dans le chapitre III. Le gradient de la transformation $\underline{\underline{F}}_{[0]}$ et le tenseur de Cauchy $\underline{\underline{C}}_0$ qui lui est associé présentent une décomposition par blocs similaire à celle de $\underline{\underline{\Sigma}}_0$.

L'invariance selon Z de cette solution fondamentale nous permet d'éliminer l'intégrale en Z dans l'équation d'équilibre I.16 qui s'écrit alors, avec les notations par blocs,

$$\forall \underline{\widehat{\varphi}}(X, Y), \qquad \iint_{\mathcal{D}} \underline{\underline{\Sigma}}^{||}_0 : \left((\underline{\underline{F}}^{||}_{[0]})^T \cdot \underline{\underline{\widehat{F}}}^{||} \right) \mathrm{d}X\, \mathrm{d}Y = 0. \tag{I.19}$$

Ainsi la recherche de la solution homogène se ramène à un problème 2-d. Ceci est valable pour une géométrie de section et une loi hyper-élastique orthotrope quelconques, y compris si le solide comporte des hétérogénéités de comportement dans sa section, ou s'il est soumis à une pré-contrainte hétérogène, comme nous le verrons en détails dans le chapitre III.

Dans le cas où les déformations dans le plan de la section sont libres et compatibles et pour un comportement isotrope, la solution homogène $\underline{\varphi}^{||}_0$ correspond alors à une dilatation/contraction par effet Poisson associée à une compression/traction simple

$$\underline{\varphi}^{||}_{[0]} = (r(\lambda) - 1)\left(\underline{e}_X + \underline{e}_Y\right)$$

et la pré-contrainte est nulle dans le plan de la section $\underline{\underline{\Sigma}}_0^{\parallel} = \underline{\underline{0}}$, comme c'est le cas dans les exemples de la figure I.4.

I.2.3. Analyse de bifurcation

Après avoir calculé la branche fondamentale $\underline{\varphi}^{\lambda}_{[0]}$ nous procédons à l'analyse de bifurcation en suivant la méthode présentée dans la section I.1. Nous présentons d'abord une forme très générale de cette approche incrémentale classique (BIOT, 1965), puis nous étudierons les conséquences de l'invariance et de l'homogénéité selon Z de la solution fondamentale pour simplifier ce problème de bifurcation linéarisé.

Notons $\underline{\varphi}_{[1]}(\underline{X})$ un petit incrément de déplacement. Nous cherchons des solutions de la forme

$$\underline{\varphi}(\underline{X}) = \underline{\varphi}^{\lambda}_{[0]}(\underline{X}) + \underline{\varphi}_{[1]}(\underline{X}) + \cdots .$$

L'équation d'équilibre I.16 s'écrit sous forme linéarisée, pour n'importe quel déplacement virtuel $\underline{\widehat{\varphi}}$ vérifiant les conditions aux limites cinématiques,

$$\forall \underline{\widehat{\varphi}}(\underline{X}), \quad \int_0^L \left(\iint_{\mathcal{D}} \left[\underline{\underline{\widehat{F}}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathcal{L}}}}}^{\lambda}_0 : \underline{\underline{F}}_{[1]} + \underline{\underline{\Sigma}}_0 : (\underline{\underline{\widehat{F}}}^T \cdot \underline{\underline{F}}_{[1]}) \right] \mathrm{d}X\, \mathrm{d}Y \right) \mathrm{d}Z = 0, \tag{I.20}$$

où $\underline{\underline{F}}_{[1]} = \underline{\underline{\mathrm{grad}}}\, \underline{\varphi}_{[1]}(\underline{X})$ est le gradient du déplacement incrémental et $\underline{\underline{\underline{\underline{\mathcal{L}}}}}_0$ est le tenseur des modules tangents évalué sur la solution fondamentale

$$(\mathcal{L}^{\lambda}_0)_{ijkl} = \left[F^{[0]}_{is} \frac{\partial \Sigma_{sj}}{\partial e_{rl}} F^{[0]}_{kr} \right]_{\underline{\varphi}^{\lambda}_{[0]}} . \tag{I.21}$$

Le premier terme de l'équation I.20 contient les modules tangents et correspond à la raideur élastique. C'est ce terme qui est à l'origine de l'énergie de flexion définie dans le modèle de l'elastica, comme nous le verrons dans le chapitre II. Par un jeu de ré-écriture combinant les équations I.20 et I.21, on montre que ce terme est une forme bilinéaire symétrique qui a pour arguments les déformations incrémentales réelle et virtuelle

$$\mathrm{d}\underline{\underline{e}}(\underline{\varphi}_{[1]}) = \mathrm{d}\underline{\underline{e}}_{[1]} = \left(\underline{\underline{F}}^T_{[1]} \cdot \underline{\underline{F}}_{[0]}\right)_{\mathrm{sym}} \quad \text{et} \quad \mathrm{d}\underline{\underline{e}}(\underline{\widehat{\varphi}}) = \mathrm{d}\underline{\underline{\widehat{e}}} = \left(\underline{\underline{\widehat{F}}}^T \cdot \underline{\underline{F}}_{[0]}\right)_{\mathrm{sym}},$$

où l'indice $_{\mathrm{sym}}$ désigne la partie symétrique d'un tenseur $\underline{\underline{T}}_{\mathrm{sym}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{T}} + \underline{\underline{T}}^T\right)$. Ce terme de raideur élastique prend une forme plus ou moins simple en fonction de l'énergie élastique W_{3D}. Pour un solide néo-Hookéen compressible dont l'énergie est définie par l'expression I.14 il vient

$$\underline{\underline{\widehat{F}}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathcal{L}}}}}^{\lambda}_0 : \underline{\underline{F}}_{[1]} = 2\,(\mu - \lambda_{\mathrm{L}} \ln J_0) \left[\mathrm{d}\underline{\underline{e}}_{[1]} \cdot \underline{\underline{C}}_0^{-1}\right] : \left[\mathrm{d}\underline{\underline{\widehat{e}}} \cdot \underline{\underline{C}}_0^{-1}\right] + \lambda_{\mathrm{L}} \left[\underline{\underline{C}}_0^{-1} : \mathrm{d}\underline{\underline{e}}_{[1]}\right] \left[\underline{\underline{C}}_0^{-1} : \mathrm{d}\underline{\underline{\widehat{e}}}\right], \tag{I.22}$$

où $J_0 = \det \underline{\underline{F}}_{[0]}$ et $\underline{\underline{C}}_0 = \underline{\underline{C}}(\underline{\varphi}^{\lambda}_{[0]})$ est le tenseur des déformations de Cauchy évalué sur la configuration fondamentale.

Le second terme de l'équation I.20 est un terme de pré-contrainte, à l'instar du second terme dans l'énergie de l'elastica I.2. Sa forme explicite dépend de l'énergie élastique, comme le terme de raideur élastique. Pour un solide néo-Hookéen compressible (expression I.14), il vient par exemple

$$\underline{\underline{\Sigma}}_0 = \mu\, \underline{\underline{1}} - \mu\, \underline{\underline{C}}_0^{-1} + \lambda_{\mathrm{L}} \, \ln J_0 \, \underline{\underline{C}}_0^{-1}. \tag{I.23}$$

Il est possible de ré-écrire le terme de précontrainte de manière compacte

$$\underline{\underline{\Sigma}}_0 : \left(\underline{\underline{\widehat{F}}}^T \cdot \underline{\underline{F}}_{[1]}\right) = \underline{\underline{\Sigma}}_0 : \mathrm{d}_2\underline{\underline{e}}(\underline{\varphi}_1, \underline{\hat{\varphi}}),$$

où $\mathrm{d}_2\underline{\underline{e}}$ désigne le second incrément de déformation,

$$\mathrm{d}_2\underline{\underline{e}}(\underline{\varphi}_1, \underline{\hat{\varphi}}) = \left(\underline{\underline{F}}_{[1]}^T \cdot \underline{\underline{\hat{F}}}\right)_{\mathrm{sym}}. \tag{I.24}$$

La forme explicite des termes de l'équation I.20 pour un modèle de Gent (dont l'énergie est décrite par l'expression I.15) est détaillée dans l'annexe du chapitre III.

Cette formulation générale I.20 permet de traiter le problème de flambement d'un barreau soumis à une pré-contrainte axiale et décrit figure I.3. Considérons pour cela un solide prismatique invariant dans sa direction axiale et intéressons-nous aux solutions existant au voisinage d'une solution fondamentale invariante et homogène dans cette direction. La géométrie de la section et le comportement hyper-élastique sont quelconques, ce dernier étant éventuellement hétérogène dans la section. La pré-contrainte peut être hétérogène dans la section du solide, ce qui sera discuté dans le chapitre III.

Pour ce problème, l'équation I.20 peut être formulée de manière réduite comme un problème aux valeurs propres 2-d sur une section du solide étudié, ce qui permet de diminuer la complexité des calculs numériques de manière considérable puisque le nombre de degrés de liberté est bien plus faible. Nous appliquerons ceci à l'étude de la compression axiale d'un barreau à section rectangulaire homogène et comparerons les résultats obtenus avec les prédictions du modèle 1-d d'Euler-Bernoulli. De manière plus générale, la formulation obtenue pourra être utilisée pour étudier la stabilité de problèmes variés, et en particulier dans des cas où le modèle 1-d classique est insuffisant.

I.3 Problème de bifurcation pour une solution homogène invariante en Z

Dans cette section nous utilisons les hypothèses d'invariance en Z introduites au § I.2.2. pour le cas de l'étirement axial dans un double objectif :

— écrire une forme simplifiée du problème d'équilibre linéarisé I.20 dépendant uniquement de la coordonnée axiale Z afin de préparer le travail de réduction dimensionnelle proposé dans le chapitre II,

— proposer une méthode de résolution du problème I.20 pour un solide infini dans la direction Z en introduisant une perturbation harmonique, l'invariance en Z permettant alors de se ramener à un problème aux valeurs propres 2-d sur une section du solide prismatique.

Commençons par isoler la dépendance en Z dans le problème I.20, en introduisant pour cela des notations simplifiées. Nous discuterons ensuite de la forme détaillée du problème ainsi obtenu dans le cas d'un solide orthotrope soumis à un étirement axial.

I.3.1. Ré-écriture du problème de bifurcation

La solution $\underline{\varphi}_{[0]}^{\lambda}$ définie par I.17 étant homogène et invariante en Z, la quantité

$$\iint_{\mathcal{D}} \left[\underline{\underline{\widehat{F}}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathcal{L}}}}}_0(\lambda) : \underline{\underline{F}}_{[1]} + \underline{\underline{\Sigma}}_0 : (\underline{\underline{\widehat{F}}}^T \cdot \underline{\underline{F}}_{[1]}) \right] \mathrm{d}X \, \mathrm{d}Y \tag{I.25}$$

dans le terme de gauche de I.20 peut s'écrire de manière identique sur chaque section du solide prismatique. Autrement dit, il est possible de définir un unique opérateur bilinéaire portant sur les degrés de liberté dans la section pour les déplacements réels et virtuels $\underline{\varphi}_{[1]}$ et $\underline{\widehat{\varphi}}$ et permettant de calculer la quantité I.25 sur n'importe quelle section. Dans la suite, les symboles en gras feront référence aux degrés de liberté sur une section repérée par la coordonnée Z :

$$\underline{\varphi}_{[1]}(X, Y, Z) = \boldsymbol{\varphi}(Z) \quad \text{et} \quad \underline{\widehat{\varphi}}(X, Y, Z) = \widehat{\boldsymbol{\varphi}}(Z).$$

Par ailleurs nous omettrons l'indice $_{[1]}$ sur les incréments de déplacements dans l'écriture de l'équilibre linéarisé afin de faciliter la lecture.

Avec ces notations, le problème de bifurcation I.20 peut s'écrire de manière compacte, en définissant un opérateur bilinéaire noté $\mathcal{Q} + \mathcal{S}$, indépendant de la coordonnée Z et qui permet de calculer la quantité I.25 sur chaque section

$$\forall \widehat{\boldsymbol{\varphi}}(Z) \quad \int_0^L \begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{\varphi}} \\ \widehat{\boldsymbol{\varphi}}_{,Z} \end{pmatrix} \cdot [\mathcal{Q} + \mathcal{S}] \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varphi} \\ \boldsymbol{\varphi}_{,Z} \end{pmatrix} \mathrm{d}Z = 0. \tag{I.26}$$

Dans cette expression simplifiée de l'équation I.20, l'opérateur bilinéaire $\mathcal{Q}$ définit le terme de raideur tangente et l'opérateur bilinéaire $\mathcal{S}$ définit le terme de précontrainte. Ces deux opérateurs définissent des intégrations sur la section $\mathcal{D}$ et s'identifient directement aux termes de l'expression I.25 : leurs formules explicites sont présentées dans la suite de cette section.

Nous utilisons, pour simplifier davantage l'écriture, la notation compacte par blocs

$$\Phi = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varphi} \\ \boldsymbol{\varphi}_{,Z} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \widehat{\Phi} = \begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{\varphi}} \\ \widehat{\boldsymbol{\varphi}}_{,Z} \end{pmatrix} \tag{I.27}$$

et nous notons $\boldsymbol{\Sigma}_0$ l'ensemble des valeurs de la contrainte $\underline{\underline{\Sigma}}_0$ sur la section. La solution fondamentale étant homogène et invariante en Z, ces valeurs sont identiques sur chacune des section et $\boldsymbol{\Sigma}_0$ ne dépend pas de la coordonnée Z. Alors que la forme explicite de l'opérateur $\mathcal{Q}$ dépend de la loi de comportement considérée, l'opérateur de précontrainte $\mathcal{S}$ est entièrement déterminé par $\boldsymbol{\Sigma}_0$ et peut ainsi s'écrire de manière générale (*i. e.* pour une loi de comportement hyper-élastique quelconque), par identification avec l'expression I.25,

$$\hat{\Phi} \cdot \mathcal{S} \cdot \Phi = \iint_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\Sigma}_0 : \mathrm{d}_2 \boldsymbol{E}(\widehat{\Phi}, \Phi) \, \mathrm{d}X \, \mathrm{d}\,Y, \tag{I.28}$$

où $\mathrm{d}_2\boldsymbol{E}$ représente les valeurs du second incrément de déformation $\mathrm{d}_2\underline{\underline{e}}$ sur une section. Cet opérateur s'écrit, avec nos nouvelles notations et d'après la définition I.24,

$$\mathrm{d}_2\boldsymbol{E}(\widehat{\Phi}, \Phi) = \left[\left(\nabla\widehat{\boldsymbol{\varphi}} \;\middle|\; \widehat{\boldsymbol{\varphi}}_{,Z} \right)^T \cdot \left(\nabla\boldsymbol{\varphi} \;\middle|\; \boldsymbol{\varphi}_{,Z} \right) \right]_{\text{sym}},$$

où ∇ représente le gradient par rapport aux coordonnées (X, Y) dans la section. De cette manière $\nabla\boldsymbol{\varphi}$ est une matrice 3×2 et $\left(\nabla\boldsymbol{\varphi} \;\middle|\; \boldsymbol{\varphi}_{,Z} \right)$ une matrice 3×3 qui correspond au gradient du déplacement linéarisé φ sur une section.

La formulation ainsi définie est générale. Notons qu'en restaurant un terme représentant un incrément de chargement dans cette formulation linéarisée I.26 nous obtenons

$$\forall\widehat{\varphi} \quad \int_0^L \hat{\Phi}\cdot\left[\mathcal{Q}+\mathcal{S}\right]\cdot\Phi\,\mathrm{d}Z = \int_0^L \mathcal{F}\cdot\widehat{\varphi}(Z)\mathrm{d}Z, \tag{I.29}$$

où $\mathcal{F}$ est une application linéaire qui définit l'effet d'un champ volumique d'efforts appliqués $\boldsymbol{F}$

$$\mathcal{F}\cdot\widehat{\varphi}(Z) = \iint_{\mathcal{D}} \boldsymbol{F}\cdot\widehat{\varphi}(Z)\,\mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y.$$

Ce problème d'équilibre linéarisé I.29 servira de point de départ à la réduction dimensionnelle abordée dans le chapitre II.

I.3.2. Forme détaillée du problème de bifurcation dans le cas d'une pré-contrainte axiale

Nous examinons maintenant la forme explicite des opérateurs bilinéaires $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{S}$ dans le cas d'une solution fondamentale représentant un étirement axial (voir § I.2.2.). En considérant l'écriture par blocs de Φ et $\hat{\Phi}$ (définis par I.27) ainsi que la symétrie des termes de raideur tangente et de pré-contrainte dans l'équation I.20, nous introduisons la décomposition par blocs des deux opérateurs $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{S}$

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} \mathcal{K}_e & \mathcal{C}_e \\ \mathcal{C}_e^T & \mathcal{M}_e \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{S} = \begin{pmatrix} \mathcal{K}_s & \mathcal{C}_s \\ \mathcal{C}_s^T & \mathcal{M}_s \end{pmatrix},$$

avec

$$\mathcal{Q}+\mathcal{S} = \begin{pmatrix} \mathcal{K} & \mathcal{C} \\ \mathcal{C}^T & \mathcal{M} \end{pmatrix}.$$

Le bloc $\mathcal{K}$ définit les couplages entre les gradients dans la section (*i.e.* par rapport aux coordonnées X et Y) des déplacements réel et virtuel alors que le bloc $\mathcal{M}$ définit les couplages entre les dérivées des déplacements réel et virtuel par rapport à la coordonnée Z. Enfin le bloc $\mathcal{C}^T$ couple les gradients dans la section des différentes composantes du déplacement réel aux dérivées selon Z des composantes du déplacement virtuel et vice-versa pour le bloc $\mathcal{C}$. Les formules explicites permettant de calculer chacun de ces blocs sont présentées ci-dessous pour un comportement néo-Hookéen.

Matériau orthotrope

Pour un barreau composé d'un matériau au comportement orthotrope dans le repère $(\underline{e}_X, \underline{e}_Y, \underline{e}_Z)$ et soumis à une compression axiale $z = \lambda Z$ comme décrit à la figure I.3, il vient, d'après la forme diagonale de $\underline{\underline{\Sigma}}_0$ définie par I.18 et l'expression du terme de pré-contrainte I.28,

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_s^\lambda(\widehat{\varphi},\varphi) &= (k_s^\lambda)^{\|}(\widehat{\varphi}^{\|},\varphi^{\|}) + (k_s^\lambda)^{\perp}(\widehat{\varphi}^{\perp},\varphi^{\perp}), \\ \mathcal{C}_s^\lambda(\widehat{\varphi},\varphi_{,Z}) &= 0, \\ \mathcal{M}_s^\lambda(\widehat{\varphi}_{,Z},\varphi_{,Z}) &= (m_s^\lambda)^{\|}(\widehat{\varphi}^{\|}_{,Z},\varphi^{\|}_{,Z}) + (m_s^\lambda)^{\perp}(\widehat{\varphi}^{\perp}_{,Z},\varphi^{\perp}_{,Z}), \end{aligned} \tag{I.30}$$

où $\varphi^{\|}$ et $\varphi^{\perp}$ désignent respectivement les composantes du déplacement φ dans le plan (X, Y) et selon l'axe Z. La même notation est utilisée pour le déplacement virtuel.

Il vient ensuite, pour le terme de raideur tangente,

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_e^{\lambda}(\widehat{\varphi}, \varphi) &= (k_e^{\lambda})^{\|}(\widehat{\varphi}^{\|}, \varphi^{\|}) + (k_e^{\lambda})^{\perp}(\widehat{\varphi}^{\perp}, \varphi^{\perp}),\\ \mathcal{C}_e^{\lambda}(\widehat{\varphi}, \varphi_{,Z}) &= c_{1,\lambda}(\widehat{\varphi}^{\perp}, \varphi^{\|}_{,Z}) + c_{2,\lambda}(\widehat{\varphi}^{\perp}_{,Z}, \varphi^{\|}),\\ \mathcal{M}_e^{\lambda}(\widehat{\varphi}_{,Z}, \varphi_{,Z}) &= (m_e^{\lambda})^{\|}(\widehat{\varphi}^{\|}_{,Z}, \varphi^{\|}_{,Z}) + (m_e^{\lambda})^{\perp}(\widehat{\varphi}^{\perp}_{,Z}, \varphi^{\perp}_{,Z}).\end{aligned} \tag{I.31}$$

Les opérateurs bilinéaires $(k_s^{\lambda})^{\|}, (k_s^{\lambda})^{\perp}, \cdots$ intervenant dans les formes I.30-I.31 sont définis ci-dessous de manière explicite pour un comportement néo-Hookéen. Ils dépendent du paramètre de chargement λ à travers la solution homogène $\underline{\varphi}^{\lambda}_{[0]}$ décrite par l'équation I.17. Cette dépendance est indiquée de manière explicite par les exposants $^{\lambda}$. Notons que pour un matériaux orthotrope, les opérateurs $\mathcal{K}$ et $\mathcal{M}$ sont diagonaux et couplent ainsi les composantes axiales des déplacements entre elles et les composantes dans le plan de la section (X, Y) entre elles. L'opérateur $\mathcal{C}$ est anti-diagonal et décrit ainsi le couplage entre composantes axiales et composantes dans le plan (X, Y).

Modèle néo-Hookéen

D'après l'expression de la densité d'énergie élastique I.22 il vient, pour les opérateurs intervenant dans la définition de la raideur tangente,

$$\begin{aligned}(k_e^{\lambda})^{\|}(\widehat{\varphi}^{\|}, \varphi^{\|}) &= \iint_{\mathcal{D}} \Bigg(\lambda_{\mathrm{L}} \left[(\mathbf{1} + \nabla \boldsymbol{\varphi}^{\lambda\,\|}_{[0]})^{-T} : \nabla \boldsymbol{\varphi}^{\|}) \right] \left[(\mathbf{1} + \nabla \boldsymbol{\varphi}^{\lambda\,\|}_{[0]})^{-T} : \nabla \widehat{\boldsymbol{\varphi}}^{\|}) \right] \cdots \\ &+ 2\,(\mu - \lambda_{\mathrm{L}} \ln J_0) \left[(\nabla \boldsymbol{\varphi}^{\|})^T \cdot (\mathbf{1} + \nabla \boldsymbol{\varphi}^{\lambda\,\|}_{[0]})^{-T} \right] : \left[(\nabla \widehat{\boldsymbol{\varphi}}^{\|})^T \cdot (\mathbf{1} + \nabla \boldsymbol{\varphi}^{\lambda\,\|}_{[0]})^{-T} \right] \Bigg) \mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y,\\ (k_e^{\lambda})^{\perp}(\widehat{\varphi}^{\perp}, \varphi^{\perp}) &= \iint_{\mathcal{D}} \left((\mu - \lambda_{\mathrm{L}} \ln J_0)\, \nabla \widehat{\varphi}^{\perp} \cdot \left[(\boldsymbol{C}_0^{\|})^{-1} \cdot \nabla \varphi^{\perp} \right] \right) \mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y,\\ c_{\lambda}^{1}(\widehat{\varphi}^{\perp}, \varphi^{\|}_{,Z}) &= \iint_{\mathcal{D}} \frac{(\mu - \lambda_{\mathrm{L}} \ln J_0)}{\lambda} \nabla \widehat{\varphi}^{\perp} \cdot ((\mathbf{1} + \nabla \boldsymbol{\varphi}^{\lambda\,\|}_{[0]})^{-1} \cdot \boldsymbol{\varphi}^{\|}_{,Z})\, \mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y,\\ c_{\lambda}^{2}(\widehat{\varphi}^{\|}, \varphi^{\perp}_{,Z}) &= \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\lambda_{\mathrm{L}}}{\lambda} (\mathbf{1} + \nabla \boldsymbol{\varphi}^{\lambda\,\|}_{[0]})^{-T} : (\varphi^{\perp}_{,Z} \cdot \nabla \widehat{\boldsymbol{\varphi}}^{\|}) \right) \mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y,\\ (m_e^{\lambda})^{\|}(\widehat{\varphi}^{\|}_{,Z}, \varphi^{\|}_{,Z}) &= \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{(\mu - \lambda_{\mathrm{L}} \ln J_0)}{\lambda^2} \boldsymbol{\varphi}^{\|}_{,Z} \cdot \widehat{\boldsymbol{\varphi}}^{\|}_{,Z} \right) \mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y,\\ (m_e^{\lambda})^{\perp}(\widehat{\varphi}^{\perp}_{,Z}, \varphi^{\perp}_{,Z}) &= \iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{2\,(\mu - \lambda_{\mathrm{L}} \ln J_0)}{\lambda^2} \varphi^{\perp}_{,Z} \cdot \widehat{\varphi}^{\perp}_{,Z} + \frac{\lambda_{\mathrm{L}}}{\lambda^2} \varphi^{\perp}_{,Z} \cdot \widehat{\varphi}^{\perp}_{,Z} \right) \mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y,\end{aligned} \tag{I.32a}$$

où $\mathbf{1}$ représente l'opérateur identité 2-d et ∇ représente le gradient par rapport aux coordonnées (X, Y), comme précédemment. De cette manière $\nabla \widehat{\boldsymbol{\varphi}}^{\|}$ est une matrice 2×2 et $\nabla \widehat{\varphi}^{\perp}$ est un vecteur à deux composantes. Une forme similaire est obtenue avec un modèle de Gent, celle-ci sera explicitée dans l'annexe du chapitre III pour un solide soumis à une pré-contrainte axiale hétérogène dans sa section.

L'expression de l'opérateur de pré-contrainte ne dépend de la loi de comportement qu'à travers l'expression particulière du tenseur $\underline{\underline{\Sigma}}_0$. Son expression générale s'écrit, d'après I.28,

$$
\begin{aligned}
(k_s^\lambda)^{\parallel}(\widehat{\boldsymbol{\varphi}}^{\parallel},\boldsymbol{\varphi}^{\parallel}) &= \iint_{\mathcal{D}} \left((\nabla\boldsymbol{\varphi}^{\parallel}\cdot\boldsymbol{\Sigma}_0^{\parallel}) : \nabla\widehat{\boldsymbol{\varphi}}^{\parallel} \right) \mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y,\\
(k_s^\lambda)^{\perp}(\widehat{\boldsymbol{\varphi}}^{\perp},\boldsymbol{\varphi}^{\perp}) &= \iint_{\mathcal{D}} \left(\left[\boldsymbol{\Sigma}_0^{\parallel}\cdot\nabla\boldsymbol{\varphi}^{\perp}\right].\nabla\widehat{\varphi}^{\perp} \right) \mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y,\\
(m_s^\lambda)^{\parallel}(\widehat{\boldsymbol{\varphi}}^{\parallel}_{,Z},\boldsymbol{\varphi}^{\parallel}_{,Z}) &= \iint_{\mathcal{D}} \left(\boldsymbol{\Sigma}_0^{\perp}\,\boldsymbol{\varphi}^{\parallel}_{,Z}\cdot\widehat{\boldsymbol{\varphi}}^{\parallel}_{,Z} \right) \mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y,\\
(m_s^\lambda)^{\perp}(\widehat{\boldsymbol{\varphi}}^{\perp}_{,Z},\boldsymbol{\varphi}^{\perp}_{,Z}) &= \iint_{\mathcal{D}} \left(\boldsymbol{\Sigma}_0^{\perp}\,\boldsymbol{\varphi}^{\perp}_{,Z}\cdot\widehat{\boldsymbol{\varphi}}^{\perp}_{,Z} \right) \mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y.
\end{aligned}
\tag{I.32b}
$$

Notons que l'opérateur $\mathcal{K}_s$ décrit la contribution de la pré-contrainte appartenant au plan de la section $\underline{\underline{\Sigma}}_0^{\parallel}$ alors que l'opérateur $\mathcal{M}_s$ décrit la contribution de la pré-contrainte axiale $\Sigma_0^{\perp}$. Ainsi lorsque la précontrainte est uni-axiale, *i.e.* $\underline{\underline{\Sigma}}_0 = \mathrm{Diag}(0,0,\Sigma_0^{\perp})$, l'opérateur $\mathcal{K}_\mathcal{S}$ est identiquement nul.

Les termes du problème de bifurcation I.26 et de l'équilibre linéarisé I.29 sont décrit explicitement et peuvent être évalués facilement avec les expressions I.32a-I.32b. Des expressions similaires pour les blocs de $\mathcal{Q}$ peuvent être obtenues pour une loi de comportement orthotrope quelconque. Les opérateurs $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{S}$ seront dans la suite manipulés comme des boîtes noires permettant de s'abstraire des détails du modèle, souvent fastidieux et techniques.

Mettons à présent de côté la forme générique de l'équilibre linéarisé I.29 qui sera très utile pour la réduction dimensionnelle dans le chapitre II et intéressons-nous à la résolution du problème de bifurcation I.26 qui constitue le second objectif de cette section. Dans le cas d'un solide infini, nous cherchons une solution à ce problème harmonique selon la direction d'invariance Z, comme dans l'étude de l'elastica 1-d présentée au § I.1. Le problème aux valeurs propres obtenu sera finalement résolu numériquement pour l'exemple d'un barreau homogène isotrope de section rectangulaire.

Le problème décrit par l'équation I.26 correspond à la recherche de vecteurs singuliers pour l'opérateur $\mathcal{Q}+\mathcal{S}$. De tels déplacements peuvent exister dans le cas d'une précontrainte compressive car alors le terme de pré-contrainte perd son caractère défini positif. Notons que de tels déplacements peuvent également exister lorsque les modules de raideur tangente s'annulent et deviennent négatifs : c'est alors la non-linéarité du comportement qui est à l'origine de l'instabilité.

I.3.3. Équilibres adjacents d'un solide prismatique infini : problème aux valeurs propres

Pour un solide de longueur infinie $L \to \infty$ l'équation I.26 peut s'écrire comme un problème aux valeurs propres 2-d sur la section $\mathcal{D}$ du solide prismatique. Notons que dans ce cas les déplacements virtuels $\hat{\varphi}$ doivent être choisis de moyenne nulle dans la direction axiale de manière à préserver la déformation axiale moyenne imposée par les conditions limites *à l'infini*. Nous considérons une perturbation harmonique dans la direction Z. Par invariance selon Z de la solution fondamentale $\underline{\varphi}^{\lambda}_{[0]}$, cette perturbation et les déplacements virtuels associés peuvent s'écrire sous la forme

$$\boldsymbol{\varphi}(Z) = \left(\boldsymbol{\xi}^{\parallel} + i\,\boldsymbol{\xi}^{\perp}\right) e^{i\,q\,Z},$$

$$\widehat{\varphi}(Z) = \left(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{\parallel} + i\,\hat{\boldsymbol{\xi}}^{\perp}\right) e^{i\,q\,Z},$$

où, comme précédemment, l'exposant ($^{\parallel}$) permet d'indiquer des déplacements dans le plan de la section et l'exposant ($^{\perp}$) indique des déplacements dans la direction $\underline{e}_Z$. Dans cette expression, les amplitudes des modes $\boldsymbol{\xi}^{\parallel}$, $\boldsymbol{\xi}^{\perp}$, $\hat{\boldsymbol{\xi}}^{\parallel}$ et $\hat{\boldsymbol{\xi}}^{\perp}$ ne dépendent pas de la coordonnée Z. Cette écriture a pour effet de transformer les gradients par rapport à Z dans I.26 en multiplications par $i\,q$.

Les propriétés de symétrie et d'invariance selon Z nous permettent de considérer que les amplitudes des modes $\boldsymbol{\xi}^{\parallel}$, $\boldsymbol{\xi}^{\perp}$, $\hat{\boldsymbol{\xi}}^{\parallel}$ et $\hat{\boldsymbol{\xi}}^{\perp}$ sont réelles. Nous définissons ainsi les vecteurs réels

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\xi}^{\parallel} \\ \boldsymbol{\xi}^{\perp} \end{pmatrix}, \qquad \hat{\boldsymbol{\xi}} = \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\xi}}^{\parallel} \\ \hat{\boldsymbol{\xi}}^{\perp} \end{pmatrix}.$$

La décomposition harmonique des modes dans l'équation des équilibres adjacents I.26 élimine la variable Z. En effet pour L grand les moyennes sur la variable axiale Z dans l'équation I.26 se simplifient par l'identité

$$\frac{1}{L}\int_0^L \Re\!\left(\mathcal{S}\,e^{i\,q\,\tilde{z}}\right) : \Re\!\left(\mathcal{T}\,e^{i\,q\,\tilde{z}}\right) \mathrm{d}\tilde{z} = \frac{1}{2}\,\Re\!\left(\mathcal{S} : \mathcal{T}^{\dagger}\right) \qquad \text{pour } q \neq 0,$$

pour n'importe quels tenseurs $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ d'amplitude complexe. Dans cette égalité, $\mathcal{T}^{\dagger}$ représente le complexe conjugué de du tenseur $\mathcal{T}$, et $\Re(\mathcal{T})$ sa partie réelle. Ainsi le problème de bifurcation I.26 se ré-écrit en fonction des amplitudes $\widehat{\boldsymbol{\xi}}$ et $\boldsymbol{\xi}$ comme un problème aux valeurs propres polynomial de la forme

$$\forall \widehat{\underline{\xi}}, \quad \widehat{\boldsymbol{\xi}} \cdot \left(K_\lambda + q\,C_\lambda + q^2\,M_\lambda\right) \cdot \boldsymbol{\xi} = 0, \tag{I.34}$$

où les opérateurs K_λ, C_λ et M_λ sont déduits des opérateurs $\mathcal{K}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{M}$. En effet K_λ et M_λ s'identifient directement aux opérateurs $\mathcal{K}_e^\lambda + \mathcal{K}_s^\lambda$ et $\mathcal{M}_e^\lambda + \mathcal{M}_s^\lambda$ définis par I.31 alors que C_λ est décrit par

$$C_\lambda(\hat{\boldsymbol{\xi}}, \boldsymbol{\xi}) = c_\lambda(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{\perp}, \boldsymbol{\xi}^{\parallel}) + c_\lambda^T(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{\parallel}, \boldsymbol{\xi}^{\perp}) \quad \text{où} \quad c_\lambda(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{\perp}, \boldsymbol{\xi}^{\parallel}) = c_\lambda^1(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{\perp}, \boldsymbol{\xi}^{\parallel}) - (c^2)_\lambda^T(\hat{\boldsymbol{\xi}}^{\perp}, \boldsymbol{\xi}^{\parallel}). \tag{I.35}$$

Le nombre d'onde q est la valeur propre du problème de bifurcation I.34 et $\boldsymbol{\xi}$ en est le vecteur propre. En utilisant la définition des opérateurs par blocs I.31 il vient

$$K_\lambda = \left(\begin{array}{c|c} k_\lambda^{\parallel} & 0 \\ \hline 0 & k_\lambda^{\perp} \end{array}\right), \quad C_\lambda = \left(\begin{array}{c|c} 0 & c_\lambda^T \\ \hline c_\lambda & 0 \end{array}\right),$$
$$M_\lambda = \left(\begin{array}{c|c} m_\lambda^{\parallel} & 0 \\ \hline 0 & m_\lambda^{\perp} \end{array}\right). \tag{I.36}$$

Pour un solide néo-Hookéen, les expressions détaillées fournies par les équations I.32a, combinées aux relations I.36 et I.35 permettent de calculer explicitement les sous-blocs des matrices K_λ, M_λ et C_λ intervenant dans le problème aux valeurs propres I.34.

Le problème de bifurcation I.34 est écrit sur une section 2-d du solide prismatique. Pour une loi de comportement donnée ce problème peut être résolu de manière numérique. Les amplitudes complexes des modes de bifurcation sont discrétisées par la méthode des éléments finis : $\boldsymbol{\xi}^{\parallel}$ et $\boldsymbol{\xi}^{\perp}$ font alors référence à des vecteurs réels représentant les degrés de liberté discrétisés sur la section et une discrétisation similaire est utilisée pour les déplacements virtuels. Ceci permet de remplacer l'intégration dans la section par des produits scalaires et les opérateurs K_λ, C_λ et M_λ deviennent des matrices réelles. Un exemple de résolution numérique de ce problème est détaillé dans le prochain paragraphe.

Notons ici que ce raisonnement est transposable à un solide prismatique soumis d'autres types de chargement et/ou un comportement anisotrope, modulo quelques changements dans la forme par blocs des opérateurs K_λ, M_λ et C_λ. La seule hypothèse indispensable pour mener un raisonnement similaire est l'existence d'une solution invariante et homogène en Z, c'est à dire dont la déformation associée est indépendante de Z.

I.3.4. Application au cas de l'elastica en compression

Étudions un exemple d'application de cette méthode pour un barreau à section rectangulaire en compression, paramétrée par $\epsilon = 1 - \lambda$. La solution homogène $\underline{\varphi}^{\parallel}_{[0]}(\lambda; X, Y)$ est d'abord calculée en résolvant le problème d'élasticité non-linéaire 2-d décrit par l'équation I.19. Nous utilisons la méthode des éléments finis : $\underline{\varphi}^{\parallel}_{[0]}$ est interpolé sur une base d'éléments de Lagrange linéaires implémentés dans la librairie FEniCS (ØLGAARD, LOGG et WELLS, 2009). L'équation d'équilibre non-linéaire est alors résolue par une méthode de Newton-Raphson standard. Notons que pour ce problème très simple la solution fondamentale peut être décrite analytiquement, comme expliqué au § I.2.2. ; cependant notre méthode de résolution numérique présente l'avantage d'être immédiatement généralisable à un problème plus complexe faisant intervenir un chargement hétérogène dans la section par exemple, comme c'est le cas dans le chapitre III.

Dans un second temps le déplacement incrémental $(\boldsymbol{\xi}^{\parallel}, \boldsymbol{\xi}^{\perp})$ est discrétisé : nous utilisons encore des éléments de Lagrange linéaires sur le domaine 2-d $\mathcal{D}$ implémentés dans la librairie FEniCS. La base de fonctions ainsi obtenue est utilisée, ainsi que le déplacement $\underline{\varphi}^{\parallel}_{[0]}$, pour remplir les matrices K_λ, C_λ et M_λ en utilisant les expressions de leurs sous-blocs définis par I.35 et I.36. Pour un modèle néo-Hookéen, l'expression explicite de ces sous-blocs est fournie par les équations I.32a et I.32b. Nous utilisons dans cette application numérique un modèle de Gent pour lequel l'expression détaillée de ces opérateurs est fournie à la fin du chapitre III.

La forme discrète du problème aux valeurs propres quadratique I.34 est alors résolue en faisant appel à la librairie SLEPc (HERNANDEZ, ROMAN et VIDAL, 2005). Une méthode d'Arnoldi à deux niveaux est utilisée, combinée à une méthode de décalage et d'inversion (en anglais *shift-and-invert*) afin de faciliter la recherche de valeurs propres de faible partie réelle (SAAD, 2011). Le lecteur intéressé par une revue des méthodes pour la résolution numérique de problèmes aux valeurs propres quadratiques pourra se référer par exemple à TISSEUR et MEERBERGEN (2001).

Les résultats numériques sont présentés figure I.6 pour une section d'épaisseur $h = 0.1$, de largeur $v = 0.2$ et d'aire $\mathcal{A} = h\,v$. Ce barreau est constitué d'un matériau de Gent avec $\mu = 1.$, $K = 10.$ et $J_m = 1000$. Pour les faibles valeurs de ϵ, la relation $q(\epsilon)$ obtenue numériquement par cette analyse de bifurcation linéaire est très proche

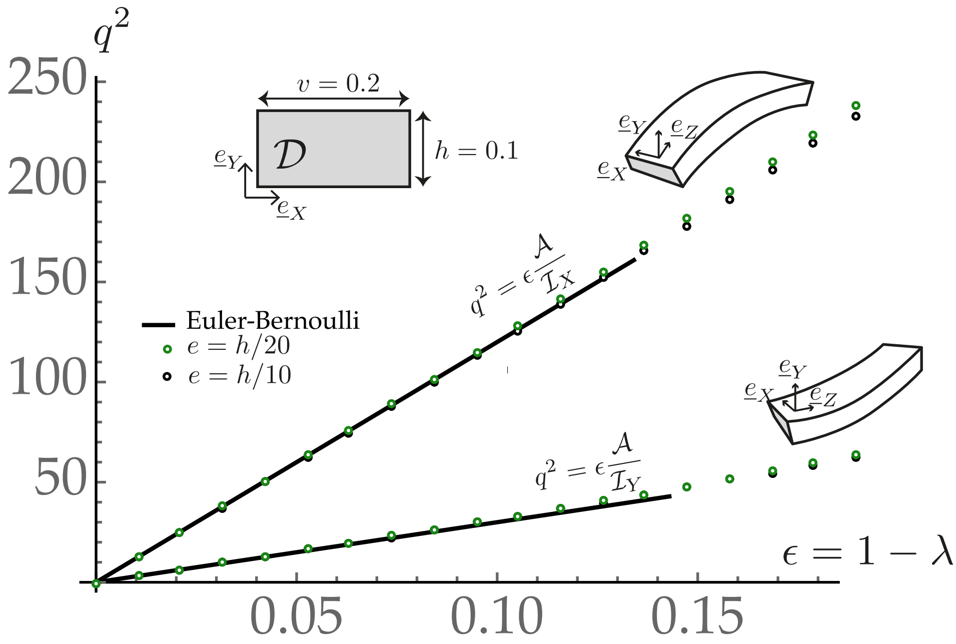

FIGURE I.6 – Elastica 3-d : courbe de stabilité marginale $q^2(\epsilon)$ calculée par la méthode des éléments finis (taille de maille e) et allure des modes critiques pour une section de largeur $v = 0.2$ et d'épaisseur $h = 0.1$.

des prédictions du modèle 1-d I.8 avec lequel nous obtenons $q^2 = \epsilon \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{I}}$, avec $\mathcal{I}_X = \frac{v\,h^3}{12}$ et $\mathcal{I}_Y = \frac{h\,v^3}{12}$. Ce calcul prédit $q_c = 0$ et $\epsilon_c = 0$, en accord avec l'hypothèse $L \to \infty$.

Cette méthode de calcul des équilibres adjacents est applicable à une grande variété de problèmes impliquant des solides de section à géométrie quelconque, pouvant présenter des hétérogénéités de comportement et de pré-contrainte, comme nous le verrons dans le chapitre III. Cette formulation complète les analyses existantes pour l'étude des bifurcations de solides prismatiques en 3-d, et en particulier celle de SCHERZINGER et TRIANTAFYLLIDIS (1998) dans laquelle les sections sont soumises à un chargement homogène.

Notre approche repose sur la réduction du problème de bifurcation 3-d à une équation formulée sur un domaine 2-d (équation I.34) en considérant le nombre d'onde q comme une inconnue du problème et généralise ainsi les travaux de LEE et al. (2008b) à une géométrie 3-d. Nous verrons dans le chapitre III comment l'utilisation de la forme faible facilite l'écriture et la résolution d'un développement asymptotique à faible q qui permet d'analyser la sélection du nombre d'onde au seuil de flambement sans résoudre le problème aux valeurs propres quadratique I.34.

I.4 Conclusion

La méthode d'analyse des bifurcations présentée dans ce chapitre est synthétisée dans le tableau I.1. Connaissant une branche fondamentale de solutions calculée en résolvant l'équilibre non-linéaire (équation I.3 pour le modèle 1-d et équation I.16 pour le modèle 3-d), cette méthode consiste à rechercher des solutions à l'équation d'équilibre linéarisé au voisinage de cette branche de solutions (équation I.6 pour le modèle 1-d et équation I.20 pour le modèle 3-d).

1-d	3-d	
I.3	I.16	équilibre non-linéaire : calcul de la branche fondamentale
I.6	I.20	équilibre linéarisé pour une petite perturbation : calcul des équilibres adjacents

TABLEAU I.1 – Résumé des principales équations de l'analyse de bifurcation : pour un modèle 1-d (§ I.2.1.) et dans le cadre de l'élasticité finie 3-d (§ I.2).

Si le problème étudié est infini et invariant dans une direction de l'espace et si une branche de solutions fondamentales invariantes et homogènes dans cette direction existe, nous introduisons une petite perturbation harmonique dans la direction d'invariance et nous ramenons à un problème aux valeurs propres formellement similaire à I.7. Dans le cadre de l'élasticité finie 3-d, pour un solide prismatique orthotrope et une solution fondamentale correspondant à un étirement axial, l'équation I.7 s'écrit sous la forme I.34 qui correspond à un problème aux valeurs propres généralisé 2-d formulé sur une section du solide prismatique, comme nous venons de le montrer. Ceci est une conséquence directe de **l'invariance du système dans sa direction axiale ainsi que de l'invariance et de l'homogénéité de la solution fondamentale dans cette direction** et peut être généralisé à de nombreux problèmes 3-d : pression radiale homogène, torsion uniforme. Le problème aux valeurs propres I.34, valable pour une pré-contrainte axiale quelconque de la forme I.17, permet de décrire des problèmes très variés, nous en présentons deux exemples dans ce mémoire.

Dans le chapitre III, nous étudierons le flambement d'un solide prismatique soumis à une forte pré-contrainte hétérogène dans sa section. Pour cela nous introduirons une transformation intermédiaire décrite par le tenseur $\underline{\underline{G}}$, hétérogène au sein de la section du solide prismatique. L'équation de bifurcation sera alors obtenue en remplaçant le gradient de la transformation $\underline{\underline{F}}$ par $\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{G}}$ dans l'expression de l'énergie, selon la méthode classiquement utilisée dans le cadre de la théorie élastique de la croissance (GORIELY et al., 2008). Le chapitre IV traitera de problèmes invariants d'échelle, pour lesquels le nombre d'onde q n'est pas défini au seuil de bifurcation. Dans un tel cas, nous verrons que la formulation I.34 permet de calculer la forme des modes propres ainsi que le chargement critique.

Avant d'aborder ces exemples, nous proposons de mettre à profit la forme I.29 de l'équilibre linéarisé pour proposer une démarche de réduction dimensionnelle. Nous montrerons en particulier comment il est possible de déduire le modèle d'Euler-Bernoulli classique à partir d'un choix adapté des ordres de grandeur des efforts appliqués, des déformations incrémentales et de la pré-contrainte dans l'équation I.29. Ces points seront traités dans le prochain chapitre, qui sera l'occasion d'une discussion plus générale sur la construction de modèles réduits.

Chapitre II

Vers un modèle réduit pour l'étude des solides élancés

Sommaire

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié l'instabilité de flambage d'une poutre en compression, d'abord en utilisant un modèle réduit 1-d puis dans le cadre de l'élasticité finie 3-d. Cette seconde approche nous permettra d'analyser, dans le chapitre III, des problèmes pour lesquels le modèle 1-d d'Euler-Bernoulli ne s'applique pas.

Mais avant de nous attaquer à de tels problèmes, nous nous proposons d'étudier les liens qui unissent la théorie 3-d et les modèles réduits classiques. En effet, si la théorie 3-d que nous venons de présenter permet de résoudre les problèmes d'instabilités élastiques de manière systématique, sa mise en œuvre reste lourde malgré le recours aux outils numériques. La résolution numérique s'avère particulièrement délicate dans le cas où les solides sont très élancés, ce qui implique des déformations importantes et donc une discrétisation fine. L'utilisation de modèles réduits est très avantageuse pour ce type de problèmes, comme nous l'avons constaté avec l'exemple du flambage d'Euler. Ce chapitre constitue un premier pas vers la dérivation systématique de modèles réduits. Nous considérons des solides prismatiques pour lesquels la longueur axiale typique $\mathcal{L}$ est très grande devant la dimension caractéristique de la section h. Pour de tels solides nous définissons la coordonnée étirée $\tilde{z} = \eta\, z$ où $\eta = \frac{h}{\mathcal{L}}$ est le rapport d'élancement du solide et nous écrivons ainsi un développement à deux échelles qui sera combiné à l'équation d'équilibre linéarisé sous forme faible I.29 formulée au chapitre précédent.

La combinaison d'un développement à deux échelles avec la forme faible des équations d'équilibre a déjà été utilisée à des fins de réduction dimensionnelle, en particulier dans les travaux de Bermudez et Viano (1984), Sanchez-Hubert et Sanchez-Palencia (1992) et Trabucho et Viaño (1996). Une telle approche permet d'établir les équations du modèle réduit à partir d'une résolution de la formulation exacte du problème dans le cadre de l'élasticité 3-d, en s'affranchissant de toute hypothèse cinématique *a priori*. Une démarche de ce type est également utilisée en mécanique des fluides pour réduire les dimensions de problèmes présentant une faible couche de liquide, voir par exemple Eggers et Dupont (1994).

Nous proposons de construire une méthode de réduction dimensionnelle systématique en partant de l'expression de l'équilibre linéarisé I.29 et en manipulant les opérateurs bilinéaires comme des boîtes noires. La cinématique du modèle réduit peut être calculée de manière exacte en résolvant les équation de l'élasticité finie incrémentale ordre par ordre, en fonction de la loi de comportement traitée. La construction de ce modèle ne reposera sur aucune hypothèse cinématique préalable, mais uniquement sur des considérations portant sur les ordres de grandeur des efforts appliqués au solide élancé. C'est une approche naturelle puisque le mode de déformation de ce solide dépend essentiellement de l'intensité des forces qui lui sont appliquées. Des hypothèses de ce type sont d'ailleurs utilisées dans les travaux de Marigo et Meunier (2006) pour établir une hiérarchie des modèles existants.

Cette méthode nous permettra de déduire le modèle réduit classique d'Euler-Bernoulli sous une forme très générale et pourrait être adaptée pour explorer des cas où ce modèle classique est inapplicable, comme lorsque le solide est soumis à une forte pré-contrainte hétérogène. Nous y reviendrons dans le chapitre III. La justification mathématique rigoureuse de la convergence de la solution 3-d vers la solution des modèles réduits lorsque le rapport d'extension tend vers zéro sort du cadre de ce mémoire. Celle-ci fait l'objet d'études faisant appel à la théorie des développements asymptotiques et plus récemment à la gamma-convergence (Bermudez et Viano, 1984 ; Sanchez-Hubert et Sanchez Palencia, 1999 ; Mora et Müller, 2008 ; Scardia, 2009).

Dans une première section de ce chapitre, nous présenterons le modèle de poutre 3-d non-linéaire classique d'Euler-Bernoulli et en particulier les équations de Kirchhoff (LOVE, 1927). Ces équations gouvernent les déplacements d'une ligne centrale tout en prenant en compte les rotations moyennes de la section. À grande échelle, les sections peuvent être considérées comme orthogonales à cette ligne centrale. Alors que le comportement élastique est linéarisé, les non-linéarités géométriques sont prises en compte à travers la cinématique de cette ligne qui décrit de grandes rotations. Nous introduirons ensuite une version linéarisée de ces équations au voisinage d'une configuration fondamentale rectiligne. C'est cette dernière version qui est classiquement utilisée par les ingénieurs en calcul des structures et de résistance des matériaux. Le problème de bifurcation décrivant le flambage d'Euler examiné au chapitre précédent en est un cas limite. Dans une seconde section, nous présenterons notre méthode de réduction dimensionnelle, fondée sur un développement à deux échelles combiné à la forme faible de l'équation d'équilibre linéarisé 3-d, puis nous l'appliquerons à des exemples classiques, et en particulier au cas du flambage d'Euler étudié dans le chapitre I.

Les exemples simples traités dans ce chapitre servent d'introduction à la problématique plus générale qui consiste à évaluer la pertinence d'un modèle réduit et à définir un modèle 1-d adapté à un problème donné à partir de la formulation 3-d. Cette problématique sera discutée plus avant dans le chapitre III à travers l'exemple d'un solide prismatique soumis à une forte pré-contrainte hétérogène dans sa section.

II.1 Modèle de poutre d'Euler-Bernoulli

Les équations de poutre classiques (KIRCHHOFF, 1859) sont souvent établies à partir d'hypothèses *a priori* portant sur la description cinématique d'un solide élancé à grande échelle. Le solide est décrit par le déplacement d'une ligne neutre à laquelle le plan moyen de chacune des sections est supposé rester orthogonal. Cette approche peut être justifiée par le calcul de la déformation locale dans cadre de l'élasticité 3-d, voir par exemple (BALLARD et MILLARD, 2009 ; AUDOLY et POMEAU, 2010). C'est aussi ce que nous ferons dans la dernière section de ce chapitre, en partant du point de vue 3-d énoncé au chapitre I.

Commençons par décrire ces équations 1-d. Nous les ré-écrirons ensuite sous une forme linéarisée, en nous plaçant au voisinage d'une configuration rectiligne. Nous verrons enfin que le problème de flambement de l'elastica 2-d présenté au chapitre I (voir l'équation I.2) en est un cas limite dans lequel seule une direction de flexion est considérée.

II.1.1. Géométrie non linéaire

Nous définissons d'abord la cinématique du modèle de poutre pour une géométrie non-linéaire, puis la relation entre l'énergie élastique et les déformations et enfin les équations d'équilibre sous forme faible puis forte. Tout ceci sera d'abord énoncé sans justification et nous verrons ensuite comment établir ces équations à partir du problème d'équilibre linéarisé 3-d introduit au chapitre I.

Cinématique

La position de la ligne centrale est décrite par le vecteur $\underline{r}(s)$. Les repères locaux $\big(\underline{\mathrm{d}}_1(s), \underline{\mathrm{d}}_2(s), \underline{\mathrm{d}}_3(s)\big)$ associés à chaque valeur de la coordonnée curviligne s décrivent

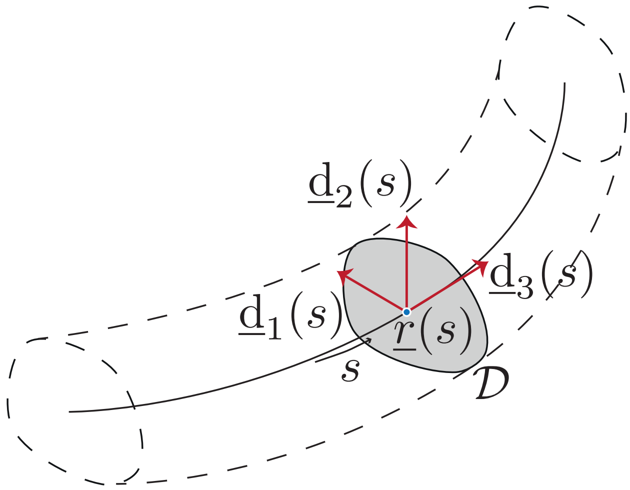

FIGURE II.1 – Modèle de poutre 3-d : Ligne centrale, coordonnée curviligne s et repère local associé à cette coordonnée.

la rotation moyenne des sections, comme schématisé sur la figure II.1. Ces repères sont orthonormés et orientés de manière à ce que que le vecteur $\underline{d}_3(s)$ soit aligné avec la tangente à la courbe centrale au point de coordonnée s. D'après les hypothèses cinématiques, le repère $\big(\underline{d}_1(s), \underline{d}_2(s)\big)$ appartient alors au plan moyen de la section $\mathcal{D}$ en s. Ceci est valable si les sections ne sont pas soumises au cisaillement, ce qui peut être justifié par le calcul 3-d. Il est naturel d'introduire le vecteur gradient de rotation $\underline{\Omega}(s)$ tel que

$$\forall i, \quad \underline{d}_i'(s) = \underline{\Omega}(s) \wedge \underline{d}_i(s) \quad \text{avec} \quad \underline{\Omega}(s) = \kappa_1(s)\,\underline{d}_1(s) + \kappa_2(s)\,\underline{d}_2(s) + \kappa_3(s)\,\underline{d}_3(s) \tag{II.1}$$

aussi connu sous le nom de vecteur de *Darboux*. Nous utilisons le symbole $\wedge$ pour représenter le produit vectoriel. Les quantités $\kappa_1(s)$ et $\kappa_2(s)$ correspondent aux courbures matérielles dans le plan moyen de la section (*i. e.* autour des axes $\underline{d}_1$ et $\underline{d}_2$) et $\kappa_3(s)$ mesure la torsion cinématique autour du vecteur tangent à la ligne centrale. La description cinématique est complète si l'on considère également une contrainte liant la tangente $\underline{r}'$ à la direction $\underline{d}_3$

$$\underline{r}'(s) = \big(1 + \epsilon(s)\big)\,\underline{d}_3(s), \tag{II.2}$$

où $\epsilon(s)$ mesure la déformation axiale et sera égale à 0 dans les modèles inextensibles.

Loi de comportement

Pour un matériau isotrope, linéaire élastique de module de Young E, l'énergie élastique s'écrit, pour une poutre de longueur L,

$$W = \int_0^L \left(\frac{1}{2}\,E\,\mathcal{A}\,\epsilon^2 + \frac{1}{2}\,E\,\mathcal{I}_\alpha(\kappa_\alpha - \kappa_\alpha^{\text{nat}})^2 + \frac{1}{2}\,\mu\,J_\tau\,\kappa_3^2 \right) \mathrm{d}s, \tag{II.3}$$

en utilisant la convention de sommation sur les indices répétés avec $\alpha \in \{1, 2\}$. Dans cette expression μ est le second coefficient de Lamé, $\mathcal{A}$ est l'aire de la section et J_τ la constante de torsion. Les constantes $\mathcal{I}_1$ et $\mathcal{I}_2$ représentent les moments quadratiques principaux de la section $\mathcal{D}$, en choisissant $\big(\underline{\mathrm{d}}_1(s), \underline{\mathrm{d}}_2(s)\big)$ alignés avec les directions principales qui leur sont associées. Ces trois dernières quantités dépendent de la géométrie de la section : leur expression détaillée sera discutée dans la troisième section de ce chapitre lorsque nous établirons ce modèle réduit à partir de l'élasticité finie 3-d.

Le premier terme de l'expression II.3 est lié à l'extension axiale de la poutre. Le second terme définit la contribution de la flexion. La constante $\kappa_\alpha^{\mathrm{nat}}$ modélise la courbure naturelle de l'objet dans la direction de flexion α. Il est possible de décrire une torsion naturelle de la même manière en remplaçant κ_3^2 par $(\kappa_3 - \kappa_3^{\mathrm{nat}})^2$ dans le troisième terme de II.3, qui décrit l'énergie de torsion. Cette courbure naturelle fut introduite par CLEBSCH (1862), puis par BASSET (1895) comme un complément à la théorie de Kirchhoff et permet de décrire des objets naturellement courbés. Nous montrerons dans le chapitre III que les modèles de poutre à courbure naturelle permettent de modéliser le flambement en hélice sous l'effet de pré-contraintes modérées et hétérogènes dans la section.

Forme faible des équations d'équilibre

L'équilibre de la poutre correspond à l'annulation de la somme des travaux virtuels des efforts intérieurs, des efforts extérieurs appliqués à l'objet ainsi que du travail virtuel associé à la contrainte de compatibilité cinématique II.2. Cette équation d'équilibre s'exprime en fonction d'une extension virtuelle infinitésimale $\hat{\epsilon}$ ainsi que d'une rotation virtuelle infinitésimale de la ligne centrale $\underline{\hat{\rho}}$. Cette rotation virtuelle est définie de telle manière que les repères locaux associés à ce mouvement virtuel sont perturbés de $\hat{\underline{\mathrm{d}}}_i = \underline{\hat{\rho}} \wedge \underline{\mathrm{d}}_i$. En définissant les composantes $\hat{\kappa}_i$ de la perturbation $\hat{\underline{\Omega}}$ du vecteur de Darboux dans la base $(\underline{\mathrm{d}}_1, \underline{\mathrm{d}}_2, \underline{\mathrm{d}}_3)$, et en remarquant

$$\hat{\underline{\mathrm{d}}}_i' = \hat{\underline{\Omega}} \wedge \underline{\mathrm{d}}_i + \underline{\Omega} \wedge \hat{\underline{\mathrm{d}}}_i = \underline{\hat{\rho}}' \wedge \underline{\mathrm{d}}_i + \underline{\hat{\rho}} \wedge \underline{\mathrm{d}}_i',$$

il est démontré classiquement que le gradient de la rotation virtuelle s'écrit

$$\underline{\hat{\rho}}' = \hat{\kappa}_i \, \underline{\mathrm{d}}_i. \tag{II.4}$$

Dans la suite nous noterons $\underline{\hat{r}}$ le déplacement virtuel infinitésimal de la ligne centrale associé à cette extension et à cette rotation tel que $\underline{r} + \underline{\hat{r}}$ satisfait la condition cinématique II.2, c'est à dire que $(\hat{\epsilon}, \underline{\hat{\rho}}, \underline{\hat{r}})$ vérifient la contrainte

$$\underline{\hat{r}}'(s) = \hat{\epsilon}(s) \, \underline{\mathrm{d}}_3(s) + \underline{\hat{\rho}}(s) \wedge \underline{r}'(s). \tag{II.5}$$

Les déplacements virtuels $(\hat{\epsilon}, \underline{\hat{\rho}}, \underline{\hat{r}})$ ainsi décrits doivent également vérifier les conditions aux limites cinématiques (déplacements imposés). L'équation d'équilibre s'écrit alors sous forme faible

$$\forall (\hat{\epsilon}, \underline{\hat{\rho}}, \underline{\hat{r}}) \quad \mathcal{W}_i + \mathcal{W}_e + \mathcal{W}_c = 0. \tag{II.6}$$

Le travail des efforts intérieurs $\mathcal{W}_i$ peut être obtenu à partir de la première variation de l'énergie W définie par l'équation II.3. Nous obtenons ainsi, pour une poutre de longueur L,

$$\mathcal{W}_i = -\int_0^L \left[n(s) \, \hat{\epsilon}(s) + \underline{m}(s) \cdot \big(\hat{\kappa}_i(s) \, \underline{d}_i(s) \big) \right] \mathrm{d}s. \tag{II.7}$$

Les déformations de la poutre sont ainsi à l'origine de deux efforts internes : un moment interne $\underline{m}(s)$ lié aux rotations du repère local et un effort normal $n(s)$ provoqué par l'extension. Ces efforts dépendent de la géométrie de la section $\mathcal{D}$ ainsi que du matériau constitutif. D'après l'expression de l'énergie élastique II.3, pour une poutre présentant une courbure naturelle κ^0 dans la direction 1, le moment interne s'écrit

$$\underline{m}(s) = C_1 \left(\kappa_1(s) - \kappa^0\right) \underline{\mathrm{d}}_1(s) + C_2\, \kappa_2(s)\, \underline{\mathrm{d}}_2(s) + \mu\, J_\tau\, \kappa_3(s)\, \underline{\mathrm{d}}_3(s), \tag{II.8}$$

où $C_1 = E\,\mathcal{I}_1$ et $C_2 = E\,\mathcal{I}_2$. L'effort normal s'écrit, toujours d'après II.3,

$$n(s) = E\,\mathcal{A}\,\epsilon(s). \tag{II.9}$$

La puissance des efforts extérieurs prend la forme

$$\mathcal{W}_e = \int_0^L \left[\underline{p}(s)\cdot\hat{\underline{r}}(s) + \underline{q}(s)\cdot\hat{\underline{\rho}}(s)\right]\,\mathrm{d}s + \sum_{\mathrm{ext}=0,L}\left[\underline{P}_{\mathrm{ext}}\cdot\hat{\underline{r}}_{\mathrm{ext}} + \underline{Q}_{\mathrm{ext}}\cdot\hat{\underline{\rho}}_{\mathrm{ext}}\right], \tag{II.10}$$

où $\underline{p}(s)$ et $\underline{q}(s)$ sont les champs linéiques de forces et de moments appliqués, $\underline{P}_{\mathrm{ext}}$ et $\underline{Q}_{\mathrm{ext}}$ les forces et les moments appliqués à chacune des extrémité $s = 0$ et $s = L$.

Enfin, la puissance associée à la contrainte de compatibilité II.2 s'obtient en écrivant la première variation cette contrainte. Il vient ainsi, d'après II.5,

$$\mathcal{W}_c = -\int_0^L \underline{f}(s)\cdot\left(\hat{\underline{r}}'(s) - \hat{\epsilon}(s)\,\underline{\mathrm{d}}_3(s) - \hat{\underline{\rho}}(s)\wedge\underline{r}'(s)\right)\mathrm{d}s, \tag{II.11}$$

où $\underline{f}(s)$ est le multiplicateur de Lagrange associé à cette contrainte. Cette dernière fonction vectorielle a la dimension d'une force et peut être interprétée comme la résultante des efforts internes sur chaque section du solide.

Forme forte des équations d'équilibre

Les équations II.6, II.7, II.10 et II.11 deviennent, après intégration par parties des termes faisant intervenir les gradients des déplacements virtuels,

$$\begin{aligned}\forall(\hat{\epsilon},\hat{\underline{r}},\hat{\underline{\rho}}),\quad \textstyle\int_0^L &\left(\left[\underline{f}\cdot\underline{d}_3 - n\right]\hat{\epsilon} + \left[\underline{m}' + \underline{r}'\wedge\underline{f} + \underline{q}\right]\cdot\hat{\underline{\rho}} + \left[\underline{p} + \underline{f}'\right]\cdot\hat{\underline{r}}\right)\mathrm{d}s\cdots\\ &-\left[\underline{f}\cdot\hat{\underline{r}} + \underline{m}\cdot\hat{\underline{\rho}}\right]_0^L + \textstyle\sum_{\mathrm{ext}=0,L}\left[\underline{P}_{\mathrm{ext}}\cdot\hat{\underline{r}} + \underline{Q}_{\mathrm{ext}}\cdot\hat{\underline{\rho}}\right] = 0.\end{aligned}$$

Les équations sous forme forte dans l'intérieur de l'objet sont alors directement obtenues en annulant les termes entre crochets dans l'intégrale de l'équation d'équilibre précédente, respectivement en facteur de $\hat{\epsilon}$, $\hat{\underline{r}}$ et $\hat{\underline{\rho}}$. Ainsi $\forall s \in [0, L]$,

$$\underline{f}(s)\cdot\underline{\mathrm{d}}_3(s) = n(s), \tag{II.12a}$$

$$\underline{m}'(s) + \underline{r}'(s)\wedge\underline{f}(s) + \underline{q}(s) = 0, \tag{II.12b}$$

$$\underline{p}(s) + \underline{f}'(s) = 0. \tag{II.12c}$$

Les termes de bord peuvent être déduits de cette équation de la même manière. Nous ne discuterons pas ici leur expression générale car ce travail s'intéresse principalement à des cas où les extrémités du solide prismatique ne jouent pas de rôle dans la sélection du mode de bifurcation, nous y reviendrons en discutant les exemples.

Remarquons que les équations II.12b et II.12c s'interprètent respectivement comme l'équilibre des moments et des résultantes sur une portion infinitésimale du solide. L'équation II.12a permet de définir l'effort normal n dans la poutre.

Les équations II.12b et II.12c, dites équations de Kirchhoff, sont non-linéaires. Elles peuvent être résolues analytiquement ou numériquement, comme nous l'avons fait pour décrire les solutions du problème de l'elastica 2-d en compression dans le premier chapitre, voir l'équation I.4. Ces équations sont très souvent utilisées sous forme linéarisée pour étudier la déformation de solides peu déformés ou peu flexibles, en génie civil par exemple, ou pour l'étude des bifurcation par la méthode des équilibres adjacents présentée au début de ce manuscrit.

II.1.2. Modèles linéarisé autour d'une configuration rectiligne

La forme linéarisée de l'équilibre sous forme faible II.6 peut être obtenue par la méthode présentée au chapitre I en considérant une petite variation au voisinage d'une configuration fondamentale connue. Nous considérons ici une configuration fondamentale rectiligne sans torsion, c'est à dire une solution

$$\left(\underline{\mathrm{d}}_{i,i\in 1,2,3}^{[0]}(s)\right) = \left(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z\right),$$

ce qui correspond aux problèmes étudiés dans le premier chapitre. Dans un premier temps nous présenterons la cinématique et les efforts intérieurs linéarisés. Nous examinerons ensuite l'équilibre linéarisé sous forme faible, d'abord dans le cas où la configuration fondamentale n'est pas pré-contrainte puis dans le cas d'une pré-contrainte axiale compressive. Cette dernière analyse sera l'occasion de retrouver l'équation utilisée au début de ce manuscrit pour étudier le flambage d'Euler. Un cas de poutre avec courbure naturelle sera discuté dans le chapitre III.

Nous considérons dans cette section un solide infini dans sa direction d'élongation $L \to \infty$ et ne décrivons pas les efforts appliqués aux extrémités.

Cinématique linéarisée

Introduisons une perturbation infinitésimale de l'extension $\epsilon^{[1]}$ ainsi qu'un incrément infinitésimal de rotation $\underline{\rho}^{[1]}$ tel que

$$\underline{\mathrm{d}}_i = \underline{\mathrm{d}}_i^{[0]} + \underline{\mathrm{d}}_i^{[1]} \quad \text{où} \quad \underline{\mathrm{d}}_i^{[1]} = \underline{\rho}^{[1]} \wedge \underline{\mathrm{d}}_i^{[0]}.$$

Dans la suite nous omettrons l'exposant $^{[0]}$ pour l'ordre 0 sur les $\underline{\mathrm{d}}_i$ de façon à éviter des lourdeurs inutiles dans l'écriture des équations. De cette façon, la position de la ligne centrale s'écrit

$$\underline{r} = \underline{r}^{[0]} + \underline{r}^{[1]}, \quad \text{où} \quad \underline{r}^{[1]\,\prime} = \epsilon^{[1]}\,\underline{\mathrm{d}}_3 + \left(1 + \epsilon^{[0]}\right)\underline{\rho}^{[1]} \wedge \underline{\mathrm{d}}_3$$

est la contrainte cinématique II.2 linéarisée. En supposant que l'étirement $\epsilon^{[0]}$ est nul dans la configuration fondamentale, cette dernière contrainte devient

$$\underline{r}^{[1]\,\prime}(s) = u'(z)\,\underline{e}_z + \underline{\rho}^{[1]}(z) \wedge \underline{e}_z \quad \text{où} \quad \underline{\rho}^{[1]}(z) = \begin{pmatrix} -w_y'(z) \\ w_x'(z) \\ \tau(z) \end{pmatrix}. \tag{II.13}$$

L'équation d'équilibre s'écrit ainsi en fonction des quatre déplacements 1-d linéarisés $\left(w_x(z), w_y(z), u(z), \tau(z)\right)$. Pour cette configuration fondamentale rectiligne le vecteur de Darboux s'écrit

$$\underline{\Omega} = \underline{\Omega}^{[1]}$$

où l'incrément $\underline{\Omega}^{[1]}$ s'identifie au gradient de l'incrément de rotation

$$\underline{\Omega}^{[1]} = k_i\,\underline{\mathrm{d}}_i \quad \text{où} \quad k_i = \underline{\rho}^{[1]\,\prime} \cdot \underline{\mathrm{d}}_i.$$

Efforts intérieurs

Les incréments d'efforts internes s'écrivent

$$n^{[1]} = E\,\mathcal{A}\,\epsilon^{[1]} = E\,\mathcal{A}\,u'(z), \tag{II.14a}$$

$$\underline{m}^{[1]} = -C_1\,w_y''(z)\,\underline{e}_x + C_2\,w_x''(z)\,\underline{e}_y + \mu\,J_\tau\,\tau'(z)\,\underline{e}_z + \underline{\rho}^{[1]}(z) \wedge \underline{m}^{[0]}, \tag{II.14b}$$

où $\underline{\rho}^{[1]}$ est décrit dans II.13 et $\underline{m}^{[0]}$ est le moment interne dans la configuration fondamentale rectiligne. Ce dernier est non nul si l'on considère une poutre naturellement courbée, comme nous le verrons dans le chapitre III.

Cas non pré-contraint

Dans le cas non pré-contraint les efforts internes dans la configuration fondamentale sont nuls $\underline{m}^{[0]} = 0$ et $\underline{f}^{[0]} = \underline{0}$. L'incrément de moment interne s'écrit alors, d'après II.14b

$$\underline{m}^{[1]} = -C_1\,w_y''(z)\,\underline{e}_x + C_2\,w_x''(z)\,\underline{e}_y + \mu\,J_\tau\,\tau'(z)\,\underline{e}_z,$$

et la puissance linéarisée des efforts intérieurs prend la forme, d'après II.7,

$$\mathcal{W}_i = -\frac{1}{L}\int_0^L \Big[n^{[1]}(z)\,\hat{\epsilon}(z) + \underline{m}^{[1]}(z)\cdot\big(\hat{\rho}_i'(z)\,\underline{d}_i\big)\Big]\,\mathrm{d}z.$$

D'après II.10, la puissance linéarisée des efforts extérieurs devient

$$\mathcal{W}_e = \frac{1}{L}\int_0^L \Big[\underline{p}^{[1]}(z)\cdot\hat{\underline{r}}(z) + \underline{q}^{[1]}(z)\cdot\hat{\underline{\rho}}(z)\Big]\,\mathrm{d}z,$$

avec $\underline{p}^{[1]}(z)$ et $\underline{q}^{[1]}(z)$ les incréments d'effort et de moment linéiques appliqués. Enfin, comme $\underline{f}^{[0]} = \underline{0}$, la puissance linéarisée associée à la contrainte de compatibilité II.11 s'écrit

$$\mathcal{W}_c = -\frac{1}{L}\int_0^L \underline{f}^{[1]}(z)\cdot\big(\hat{\underline{r}}'(z) - \hat{\epsilon}(z)\,\underline{e}_z(s) - \hat{\underline{\rho}}(z)\wedge\underline{e}_z\big)\mathrm{d}z.$$

Cette dernière puissance s'annule si nous nous restreignons aux déplacements virtuels cinématiquement compatibles, c'est à dire vérifiant la contrainte cinématique II.5

$$\hat{\underline{r}}(z) = \begin{pmatrix} \hat{w}_x(z) \\ \hat{w}_y(z) \\ \hat{u}(z) \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad \hat{\underline{\rho}}(z) = \begin{pmatrix} -\hat{w}_y'(z) \\ \hat{w}_x'(z) \\ \hat{\tau}(z) \end{pmatrix}. \tag{II.15}$$

Finalement, si l'on ne tient pas compte des efforts appliqués aux extrémités, l'équilibre linéarisé devient,

$$\forall(\hat{u}, \hat{w}_x, \hat{w}_y, \hat{\tau}) \quad \frac{1}{L}\int_0^L \left[E\,\mathcal{A}\,u'\hat{u}' + C_1\,w_y''\hat{w}_y'' + C_2\,w_x''\hat{w}_x'' + \mu\,J_\tau\,\tau'\,\hat{\tau}'\right]\mathrm{d}z\cdots$$
$$= \frac{1}{L}\int_0^L \left(\underline{p}_1\cdot\underline{\hat{r}}(z) + \underline{q}_1(z)\cdot\underline{\hat{\theta}}(z)\right)\mathrm{d}z. \qquad \text{(II.16)}$$

Cette formulation décrit la réponse d'une poutre rectiligne dans la limite de rotations infinitésimales. Dans la seconde section de ce chapitre, nous verrons comment déduire cette même équation à partir de l'équilibre linéarisé en élasticité finie 3-d. Étudions à présent la forme que prend cet equilibre linéarisé dans le cas d'une précontrainte compressive non nulle.

Cas précontraint : flambage d'Euler

Considérons le cas inextensible, $\epsilon = 0$ et une solution fondamentale rectiligne pré-contrainte avec $\underline{f}^{[0]} = N^{[0]}\,\underline{e}_z$. Dans le cadre de l'analyse de bifurcation linéarisée, nous supposons que les incréments de forces et de moments linéiques appliqués sont nuls, $\underline{p}^{[1]} = \underline{0}$ et $\underline{q}^{[1]} = \underline{0}$. Ainsi la puissance linéarisée des efforts extérieurs II.10 s'annule. L'expression de la puissance linéarisée des efforts intérieurs II.10 est semblable au cas non précontraint. Enfin la puissance associée à la contrainte cinématique II.11 devient

$$\mathcal{W}_c = -\frac{1}{L}\int_0^L N^{[0]}\left(w_x'(z)\,\hat{w}_x'(z) + w_y'(z)\,\hat{w}_y'(z)\right)\mathrm{d}z,$$

car le terme impliquant $\underline{f}^{[1]}$ s'annule de la même manière que précédemment grâce au choix d'une cinématique vérifiant II.5 pour le déplacement virtuel. Le problème de bifurcation linéarisé sous forme faible s'écrit alors

$$\forall \hat{w}_x, \hat{w}_y, \hat{\tau}) \quad -\frac{1}{L}\int_0^L \left[C_1\,w_y''\hat{w}_y'' + C_2\,w_x''\hat{w}_x'' + \mu\,J\,\tau'\,\hat{\tau}'\right]\mathrm{d}z\cdots$$
$$= \frac{1}{L}\int_0^L N^{[0]}\left(w_x'(z)\,\hat{w}_x'(z) + w_y'(z)\,\hat{w}_y'(z)\right)\mathrm{d}z. \qquad \text{(II.17)}$$

Nous retrouvons ainsi l'équation I.6 présentée au chapitre I pour l'étude du flambage en compression de l'elastica 2-d. L'identification est immédiate en posant $\tau(z) = 0$, $\theta(s) = \theta(z) = w_x'(z)$ et $w_y(z) = 0$ dans le cadre d'une cinématique uniquement 2-d ainsi qu'en inversant la convention pour l'effort interne de façon à considérer $N^{[0]} < 0$ en compression (dans le chapitre I nous avions compté $F > 0$ en compression).

II.1.3. Conclusion

Nous avons ainsi écrit l'équilibre linéarisé au voisinage d'une configuration rectiligne pour le modèle de poutre classique sans pré-contrainte, équation II.16. Dans le cas d'une pré-contrainte axiale compressive, nous établissons l'équation II.17 qui gouverne le flambage d'Euler, déjà introduite dans le chapitre I.

Ce modèle de poutre classique ne prend pas compte les non-linéarités de comportement du matériau, il ne s'applique pas au cas d'un fort cisaillement, ou lorsque les déformations dans la section sont importantes comme c'est le cas lorsque l'objet est soumis à de forte pré-contraintes incompatibles, voir le cas traité dans le chapitre III. La cinématique de ce modèle a été progressivement enrichie pour prendre en compte le cisaillement (TIMOSHENKO, 1921) ou des déformations internes particulières à chaque section qui apparaissent dans les structures en voiles minces (VLASSOV, 1962). Il en existe aujourd'hui de nombreuse variantes et le choix d'un modèle approprié peut s'avérer délicat pour l'ingénieur. Ainsi les approches visant à hiérarchiser ces différents modèles en s'appuyant sur les équations 3-d font encore aujourd'hui l'objet de recherches actives en mécanique (FERRADI, 2016). La méthode la plus naturelle et comportant le moins d'hypothèses ad hoc consiste à s'appuyer sur l'ordre de grandeur des efforts appliqués (MARIGO et MEUNIER, 2006).

Dans la prochaine section nous présentons une méthode permettant d'opérer une réduction dimensionnelle systématique et d'écrire l'équilibre linéarisé d'un modèle réduit 1-d en partant de la forme incrémentale des équations de l'élasticité finie 3-d. Nous appliquerons cette méthode à un solide néo-Hookéen en compression axiale. Ceci nous permettra de justifier les équations classiques II.16 et II.17 à partir de l'élasticité 3-d. La non-linéarité des équations de Kirchhoff étant purement géométrique, il est ensuite relativement facile de remonter à la forme non-linéaire de l'énergie II.3 à partir des équations linéarisées II.16 ou II.17 en combinant ces dernières avec une cinématique non-linéaire appropriée.

II.2 Réduction dimensionnelle à partir de l'élasticité 3-d

Notre méthode s'inscrit dans la continuité des approches existantes, et en particulier des travaux de SANCHEZ-HUBERT et SANCHEZ-PALENCIA (1992) qui traitent de réduction dimensionnelle par des méthodes asymptotiques. L'originalité de notre travail repose sur la manipulation formelle des équations de l'élasticité 3-d : nous nous appuyons sur la structure de ces équations et sur leurs propriétés générales sans rentrer dans le détail des expressions. Ainsi le modèle obtenu sera exprimé de manière suffisamment générale pour être décliné de manière systématique en différentes variantes en fonction de la géométrie, de la pré-contrainte et du comportement, y compris lorsque ces deux derniers sont hétérogènes.

Dans cette section nous présentons la méthodologie générale et les hypothèses nécessaires à la mise en œuvre de cette réduction dimensionnelle. Nous ne faisons aucune hypothèse cinématique *a priori* et nous appuyons uniquement sur l'ordre de grandeur des efforts appliqués. Celui-ci étant fixé, notre démarche s'articule en 4 étapes

— écriture de l'équilibre linéarisé pour l'élasticité finie en forme faible,
— injection d'un développement à deux échelles,
— résolution de l'équilibre linéarisé ordre par ordre,
— déduction du modèle 1-d en forme faible.

Nous mettrons en œuvre cette méthode pour établir le modèle classique d'Euler-Bernoulli dans la suite de cette section, à partir d'hypothèses adaptées sur les ordres de grandeur des efforts appliqués. Ce modèle sera d'abord introduit sous une forme très générale. Nous traiterons de son application au cas d'une poutre homogène en compression axiale dans la section suivante : notre objectif sera alors de retrouver la forme linéarisée des équations de poutre II.16 et II.17.

Commençons par un bref rappel du cadre de travail introduit dans le chapitre I.

II.2.1. Rappels d'élasticité finie 3-d

Considérons un solide prismatique de section $\mathcal{D}$. Nous avons établi dans le chapitre I que les propriétés d'invariance du système et l'existence d'une solution fondamentale $\boldsymbol{\varphi}_{[0]}$ homogène et invariante en Z permettent d'écrire le problème d'équilibre 3-d linéarisé au voisinage de cette solution en fonction de la coordonnée axiale Z, comme la somme d'un terme d'élasticité tangente et d'un terme de pré-contrainte

$$\forall \widehat{\boldsymbol{\varphi}} \quad \int_0^L \hat{\Phi} \cdot \left[\mathcal{Q} + \mathcal{S} \right] \cdot \Phi \, \mathrm{d}Z = \int_0^L \mathcal{F} \cdot \widehat{\boldsymbol{\varphi}}(Z) \mathrm{d}Z. \tag{II.18}$$

Dans cette expression

$$\Phi(Z) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varphi}(Z) \\ \boldsymbol{\varphi}_{,Z}(Z) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{\Phi}(Z) = \begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{\varphi}}(Z) \\ \widehat{\boldsymbol{\varphi}}_{,Z}(Z) \end{pmatrix}, \tag{II.19}$$

rassemblent les informations locales à une section repérée par la coordonnée Z et permettant de calculer les déformations dans cette section, ce qui nécessite les déplacements dans cette section, $\boldsymbol{\varphi}(Z)$ et $\widehat{\boldsymbol{\varphi}}(Z)$, ainsi que leurs gradients axiaux, $\boldsymbol{\varphi}_{,Z}(Z)$ et $\widehat{\boldsymbol{\varphi}}_{,Z}(Z)$. Les opérateurs $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{S}$ définissent deux formes bilinéaires, symétriques et se décomposent par blocs

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} \mathcal{K}_e & \mathcal{C}_e \\ \mathcal{C}_e^T & \mathcal{M}_e \end{pmatrix}, \quad \mathcal{S} = \begin{pmatrix} \mathcal{K}_s & \mathcal{C}_s \\ \mathcal{C}_s^T & \mathcal{M}_s \end{pmatrix}.$$

Leur expression explicite est présentée dans le chapitre I § I.3.2. pour un solide néo-Hookéen compressible et une solution fondamentale en étirement axial. Rappelons que le terme d'élasticité tangente défini par l'opérateur $\mathcal{Q}$ peut se ré-écrire comme une forme bilinéaire ayant pour arguments les déformations incrémentales réelle et virtuelle $\mathrm{d}\underline{\underline{e}}_{[1]}$ et $\mathrm{d}\hat{\underline{\underline{e}}}$.

Ainsi, il existe un opérateur bilinéaire $\mathcal{R}$ qui dépend de la loi de comportement considérée et de l'état de pré-contrainte à travers l'expression des modules tangents, tel que

$$\mathcal{Q} = \boldsymbol{\mathcal{E}}^T \cdot \mathcal{R} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}, \tag{II.20}$$

où $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ désigne l'application linéaire qui permet de calculer la déformation incrémentale sur une section. Ainsi, si l'on note $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ la déformation incrémentale sur une section, cette application linéaire est définie par

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E}(\Phi) = \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \Phi.$$

Avec notre notation par blocs, celle-ci s'écrit de manière explicite

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E}(\Phi) = \Big[\big(\; \nabla\boldsymbol{\varphi} \mid \boldsymbol{\varphi}_{,Z} \; \big)^T \cdot \big(\; \boldsymbol{I}^{\parallel} + \nabla\boldsymbol{\varphi}_{[0]} \mid \boldsymbol{I}^{\perp} + \boldsymbol{\varphi}_{[0],Z} \; \big) \Big]_{\text{sym}},$$

où ∇ est l'opérateur gradient 2-d dans le plan (X, Y). $\boldsymbol{I}^{\parallel}$, $\nabla\boldsymbol{\varphi}$ sont alors des matrices 3×2 et $\boldsymbol{I}^{\perp}$, $\boldsymbol{\varphi}_{,Z}$ des vecteurs à trois composantes. Ces deux opérateurs sont issus de la décomposition par blocs de l'opérateur gradient en 3-d, grad, et de l'opérateur identité 3-d, $\boldsymbol{I}$,

$$\boldsymbol{I} = \big(\; \boldsymbol{I}^{\parallel} \mid \boldsymbol{I}^{\perp} \; \big) \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{I}^{\parallel} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{I}^{\perp} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{grad}\boldsymbol{\varphi} = \left(\ \nabla\boldsymbol{\varphi} \mid \boldsymbol{\varphi}_{,Z}\ \right).$$

Il vient ainsi

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E}(\Phi) = \begin{pmatrix} \nabla\boldsymbol{\varphi}^T \cdot (\boldsymbol{I}^{\|} + \nabla\boldsymbol{\varphi}_{[0]}) & \nabla\boldsymbol{\varphi}^T \cdot (\boldsymbol{I}^{\perp} + \boldsymbol{\varphi}_{[0],Z}) \\ \boldsymbol{\varphi}_{,Z} \cdot (\boldsymbol{I}^{\|} + \nabla\boldsymbol{\varphi}_{[0]}) & \boldsymbol{\varphi}_{,Z} \cdot (\boldsymbol{I}^{\perp} + \boldsymbol{\varphi}_{[0],Z}) \end{pmatrix}_{\mathrm{sym}} = \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \Phi,$$

Le terme de précontrainte défini par l'opérateur $\mathcal{S}$ est quant à lui déterminé par les valeurs du tenseur de précontrainte 3-d $\boldsymbol{\Sigma}_0$,

$$\hat{\Phi} \cdot \mathcal{S} \cdot \Phi = \iint_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\Sigma}_0 : \mathrm{d}_2\boldsymbol{E}(\widehat{\Phi}, \Phi)\,\mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y, \tag{II.21}$$

où le second incrément de déformation sur une section s'écrit

$$\mathrm{d}_2\boldsymbol{E}(\widehat{\Phi}, \Phi) = \left[\left(\ \nabla\widehat{\boldsymbol{\varphi}} \mid \widehat{\boldsymbol{\varphi}}_{,Z}\ \right)^T \cdot \left(\ \nabla\boldsymbol{\varphi} \mid \boldsymbol{\varphi}_{,Z}\ \right)\right]_{\mathrm{sym}}. \tag{II.22}$$

Enfin $\mathcal{F}$ est une application linéaire qui définit l'effet d'un champ volumique d'efforts appliqués $\boldsymbol{F}$

$$\mathcal{F} \cdot \widehat{\boldsymbol{\varphi}}(Z) = \iint_{\mathcal{D}} \boldsymbol{F} \cdot \widehat{\boldsymbol{\varphi}}(Z)\,\mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y.$$

II.2.2. Développement à deux échelles

Nous considérons un solide prismatique élancé dont la longueur axiale typique $\mathcal{L}$ est telle $\mathcal{L} \gg h$, où h est la dimension caractéristique de la section $\mathcal{D}$. Les efforts appliqués à ce solide ainsi que les solutions de l'équilibre linéarisé II.18 varient lentement dans la direction Z et nous définissons la coordonnée étirée $\tilde{z} = Z\,\eta$, où $\eta \sim h/\mathcal{L}$ est le paramètre d'élancement. Nous supposons alors que le déplacement peut être développé selon la forme

$$\boldsymbol{\varphi}(\tilde{z}) = \boldsymbol{\varphi}_0(\tilde{z}) + \eta\,\boldsymbol{\varphi}_1(\tilde{z}) + \eta^2\,\boldsymbol{\varphi}_2(\tilde{z}) + \cdots$$

et

$$\Phi = \Phi_0 + \eta\,\Phi_1 + \eta^2\,\Phi_2 + \cdots$$

D'après la définition II.19 il vient $\Phi = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varphi}(\tilde{z}) \\ \eta\,\boldsymbol{\varphi}'(\tilde{z}) \end{pmatrix}$, où l'on note $\boldsymbol{\varphi}' = \boldsymbol{\varphi}_{,\tilde{z}}$. Notons que le choix de la coordonnée étirée décale les ordres des dérivées de $\boldsymbol{\varphi}$ et qu'ainsi

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varphi}_0 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \Phi_1 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varphi}_1 \\ \boldsymbol{\varphi}_0' \end{pmatrix} \quad \Phi_2 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varphi}_2 \\ \boldsymbol{\varphi}_1' \end{pmatrix} \quad \cdots \tag{II.23}$$

Enfin, le déplacement virtuel étant quelconque, il peut être choisi sous la forme

$$\hat{\Phi}(\tilde{z}) = \begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{\varphi}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \widehat{\boldsymbol{\varphi}}' \end{pmatrix}.$$

Pour établir le modèle standard d'Euler-Bernoulli, les hypothèses sur les ordres de grandeur sont

$$\boldsymbol{E} = \mathcal{O}(\eta^2), \quad \boldsymbol{\mathcal{F}}(Z) = \mathcal{O}(\eta^3) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\Sigma}_0 = \mathcal{O}(\eta^2). \tag{II.24}$$

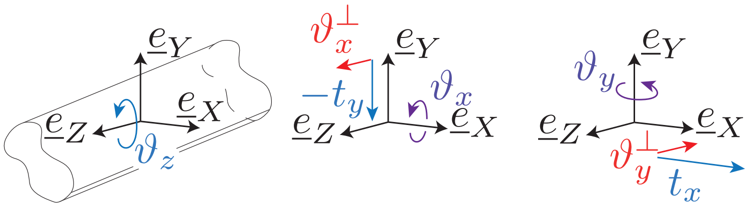

FIGURE II.2 – Rotations rigides autour des axes Z, X et Y, les déplacement d'ordre 0 en η sont représentés en bleu, les déplacements d'ordre 1 en η sont représentés en rouge. Les rotations autour des axes X et Y, représentées en violet, combinent des déplacements d'ordre 0 et 1.

Ces hypothèses sont essentielles car elles déterminent la nature du modèle réduit qui sera établi. Ainsi, dans le chapitre III, nous obtenons un modèle de poutre avec courbure naturelle en introduisant $\boldsymbol{\Sigma}_0$ à l'ordre η.

II.2.3. Mouvements rigides

Il est important de remarquer que l'opérateur $\mathcal{Q}$ est singulier. D'après la décomposition II.20 et en supposant que l'opérateur $\mathcal{R}$ qui rassemble les modules élastiques est défini positif, nous pouvons facilement calculer le noyau de $\mathcal{Q}$, formé par les mouvements de corps rigides $\Phi_{\text{rb}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varphi}_{\text{rb}} \\ \boldsymbol{\varphi}'_{\text{rb}} \end{pmatrix}$. Ces déplacements annulent les déformations incrémentales par définition

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \Phi_{\text{rb}} = \begin{pmatrix} \nabla\boldsymbol{\varphi}_{\text{rb}}^T \cdot (\boldsymbol{I}^{\parallel} + \nabla\boldsymbol{\varphi}_{[0]}) & \nabla\boldsymbol{\varphi}_{\text{rb}}^T \cdot (\boldsymbol{I}^{\perp} + \boldsymbol{\varphi}'_{[0]}) \\ \boldsymbol{\varphi}'_{\text{rb}} \cdot (\boldsymbol{I}^{\parallel} + \nabla\boldsymbol{\varphi}_{[0]}) & \boldsymbol{\varphi}'_{\text{rb}} \cdot (\boldsymbol{I}^{\perp} + \boldsymbol{\varphi}'_{[0]}) \end{pmatrix}_{\text{sym}} = 0. \tag{II.25}$$

Cette propriété est immédiatement vérifiée par les translations selon $\underline{e}_X$, $\underline{e}_Y$, $\underline{e}_Z$ que nous noterons dans la suite $\mathbf{t}_x, \mathbf{t}_y$ et $\mathbf{t}_z$. Par exemple si $\Phi_{\text{rb}} = \begin{pmatrix} \mathbf{t}_x \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ alors nous avons $\nabla\boldsymbol{\varphi}_{\text{rb}} = 0$, $\boldsymbol{\varphi}'_{\text{rb}} = 0$ et ainsi $\boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \Phi_{\text{rb}} = 0$. La propriété II.25 est également vérifiée par 3 rotations rigides. L'expression de ces rotations rigides en coordonnées lagrangiennes dépend de l'état de pré-contrainte, par le biais de la configuration fondamentale. Dans la configuration naturelle ou pour une pré-contrainte purement axiale associée à une configuration de la forme

$$\boldsymbol{\varphi}_{[0]} = (r(\lambda) - 1)(X\,\underline{e}_X + Y\underline{e}_Y) + (\lambda - 1)\,Z\,\underline{e}_Z,$$

nous vérifions facilement que les trois rotations rigides vérifiant II.25 s'écrivent

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\vartheta}_x &= -Z\,\underline{e}_Y + \boldsymbol{\vartheta}_x^\perp \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\vartheta}_x^\perp = Y\underline{e}_Z, \\ \boldsymbol{\vartheta}_y &= Z\,\underline{e}_Y + \boldsymbol{\vartheta}_y^\perp \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\vartheta}_y^\perp = -X\underline{e}_Z, \\ \boldsymbol{\vartheta}_z &= -Y\,\underline{e}_X + X\,\underline{e}_Y, \end{aligned}$$

qui s'identifient facilement avec la rotation autour de $\underline{e}_X$ et les rotations autour de $\underline{e}_Y$ et $\underline{e}_Z$ respectivement. Alors que la rotation autour de $\underline{e}_Z$ est d'ordre 0 en η, les rotations autour de $\underline{e}_X$ et $\underline{e}_Y$ comportent des termes axiaux d'ordre 1 en η, comme nous l'avons représenté sur la figure II.2.

Finalement, pour toute position $\tilde{z}$,

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \Phi = 0 \quad \Rightarrow \exists (w_\alpha, u, \tau, \gamma_\alpha) \quad \Phi = \begin{pmatrix} w_\alpha \mathbf{t}_\alpha + u \mathbf{t}_z + \tau \boldsymbol{\vartheta}_z + \gamma_\alpha \boldsymbol{\vartheta}_\alpha^\perp \\ -\gamma_\alpha \eta_{\alpha\beta} \mathbf{t}_\beta \end{pmatrix}. \tag{II.26}$$

Ceci signifie que tout déplacement qui annule les déformations incrémentales sur une section repérée par la coordonnée $\tilde{z}$ se décompose nécessairement sur cette section dans la base des 6 mouvements rigides. Finalement le noyau de l'opérateur $\mathcal{Q}$ est de dimension 6 et se définit comme l'espace des modes rigides $\boldsymbol{\varphi}_{\text{rb}} \in \text{Vect}\left(\mathbf{t}_\alpha, \mathbf{t}_z, \boldsymbol{\vartheta}_z, \boldsymbol{\vartheta}_\alpha^\perp - \tilde{z}\, \eta_{\alpha\beta} \mathbf{t}_\beta\right)$, c'est à dire

$$\Phi_{\text{rb}} \in \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} \mathbf{t}_\alpha \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{t}_z \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{\vartheta}_z \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{\vartheta}_\alpha^\perp \\ -\eta_{\alpha\beta} \mathbf{t}_\beta \end{pmatrix} \right). \tag{II.27}$$

Selon nos conventions, les indices en lettres grecques sont réservés aux directions dans la section, $\alpha, \beta \in \{x, y\}$. Par ailleurs, $\eta_{\alpha\beta} = (e_\alpha \times e_\beta) \cdot e_z$ désigne le symbole anti-symétrique, $\eta_{xx} = \eta_{yy} = 0$, $\eta_{xy} = 1$, $\eta_{yx} = -1$.

Pour une pré-contrainte quelconque, l'expression des rotations rigides dans II.27 peut être différente et doit être évaluée en résolvant l'équation II.25.

II.2.4. Résultats principaux

Le modèle réduit est calculé en injectant le développement introduit au § II.2.2. dans l'équilibre linéarisé II.18 puis en résolvant celui-ci ordre par ordre en faisant appel aux hypothèses II.24 et aux propriétés des modes rigides II.26, qui permettent de vérifier la solubilité des équations à chaque ordre. Les calculs détaillés ordre par ordre sont présenté dans l'annexe A.1. Nous proposons de discuter ici directement des résultats de cette analyse, en tâchant de restituer les points clé du raisonnement à chaque ordre.

D'après l'hypothèse II.24 sur l'ordre de grandeur de la déformation incrémentale $\boldsymbol{E} = \mathcal{O}(\eta^2)$, les déplacements rigides permettent de construire la solutions $\boldsymbol{\varphi}$ aux ordres 0 et 1 en η. Nous montrons ainsi dans l'annexe A.1

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}_0(\tilde{z}) &= w_\alpha(\tilde{z}) \mathbf{t}_\alpha, \\ \boldsymbol{\varphi}_1(\tilde{z}) &= u(\tilde{z}) \mathbf{t}_z + \tau(\tilde{z}) \boldsymbol{\vartheta}_z + \eta_{\alpha\beta} w'_\alpha(\tilde{z}) \boldsymbol{\vartheta}_\beta^\perp. \end{aligned} \tag{II.28}$$

Ici $w_\alpha(\tilde{z})$ représente la déflexion, c'est à dire le déplacement perpendiculaire à l'axe $\underline{e}_Z$ dans la direction α ; $u(\tilde{z})$ représente le déplacement axial et $\tau(\tilde{z})$ la rotation autour de l'axe $\underline{e}_Z$. Ces quatre composantes du déplacement définissent une cinématique 1-d qui s'identifie de manière immédiate aux composantes du déplacement linéarisé dans le modèle de poutre II.16 présenté à la fin de la section précédente. La démonstration du résultat II.28 repose essentiellement sur la propriété II.26.

En écrivant l'équation d'équilibre linéarisée II.18 à l'ordre η^2 nous pouvons démontrer que le déplacement à cet ordre s'écrit

$$\boldsymbol{\varphi}_2(\tilde{z}) = u'(\tilde{z}) \boldsymbol{\psi}_{\text{Ps}} + \tau'(\tilde{z}) \boldsymbol{\psi}_{\text{wr}} + w''_\alpha(\tilde{z}) \boldsymbol{\psi}_{\text{ac}}^\alpha. \tag{II.29}$$

où les quatre fonctions auxiliaires $\boldsymbol{\psi}_{\text{Ps}}$, $\boldsymbol{\psi}_{\text{wr}}$, $\boldsymbol{\psi}_{\text{ac}}^x$ et $\boldsymbol{\psi}_{\text{ac}}^y$ dépendent des coordonnées (X, Y) et représentent des déformations dans la section $\mathcal{D}$. Ces fonctions ne dépendent pas du déplacement à l'ordre 0 et 1 et peuvent ainsi être tabulées pour une poutre donnée. Elles correspondent respectivement à la contraction par effet

Poisson, au gauchissement et à la courbure anti-clastique, qui sont associés respectivement à l'extension, à la torsion et à la flexion. Chacune d'entre elles est la solution d'un problèmes d'élasticité 2-d formulé sur la section. Ces problèmes prennent la forme

$$\left\{\begin{array}{lll} \forall\widehat{\boldsymbol{\varphi}} & \widehat{\boldsymbol{\varphi}}\cdot(\mathcal{K}_e\cdot\boldsymbol{\psi}_{\mathrm{Ps}}+\mathcal{C}_e\cdot\mathbf{t}_z)=0 & \text{effet Poisson,}\\ \forall\widehat{\boldsymbol{\varphi}} & \widehat{\boldsymbol{\varphi}}\cdot(\mathcal{K}_e\cdot\boldsymbol{\psi}_{\mathrm{wr}}+\mathcal{C}_e\cdot\boldsymbol{\vartheta}_z)=0 & \text{gauchissement,}\\ \forall\widehat{\boldsymbol{\varphi}} & \widehat{\boldsymbol{\varphi}}\cdot\left(\mathcal{K}_e\cdot\boldsymbol{\psi}_{\mathrm{ac}}^{\alpha}+\eta_{\alpha\beta}\,\mathcal{C}_e\cdot\boldsymbol{\vartheta}_{\beta}^{\perp}\right)=0 & \text{courbure anticlastique.}\end{array}\right. \tag{II.30}$$

Les 6 déplacements rigides définis au paragraphe précédent jouent ainsi le rôle de terme source pour le calcul des modes de déformation de la section. Des solutions explicites des équations II.30 seront données dans la prochaine section, dans le cas particulier d'une poutre homogène formée d'un matériau néo-Hookéen.

L'écriture des conditions de solubilité pour l'équation d'équilibre linéarisée II.18 aux ordres η^3 et η^4 permet ensuite d'écrire le principe des travaux virtuels suivant, qui définit en fait le *modèle 1-d*

$$\forall(\hat{w}_\alpha,\hat{u},\hat{\tau})\quad -\int_0^L\begin{pmatrix}\hat{u}'\\ \hat{\tau}'\\ \hat{w}_x''\\ \hat{w}_y''\end{pmatrix}\cdot\mathcal{H}\cdot\begin{pmatrix}u'\\ \tau'\\ w_x''\\ w_y''\end{pmatrix}\mathrm{d}\tilde{z}\cdots$$
$$-\int_0^L\begin{pmatrix}\hat{\tau}\\ \hat{w}_x'\\ \hat{w}_y'\end{pmatrix}\cdot\mathcal{P}\cdot\begin{pmatrix}\tau\\ w_x'\\ w_y'\end{pmatrix}\mathrm{d}\tilde{z}+\int_0^L\mathcal{G}(\tilde{z})\cdot\begin{pmatrix}\hat{u}\\ \hat{\tau}\\ \hat{w}_x\\ \hat{w}_y\\ \hat{w}_x'\\ \hat{w}_y'\end{pmatrix}\mathrm{d}\tilde{z}=0, \tag{II.31}$$

où le chargement 1-d $\mathcal{G}(\tilde{z})$ a pour composantes

$$\mathcal{G}(\tilde{z})=\begin{pmatrix}p_z^{[3]}(\tilde{z})\\ q_z^{[3]}(\tilde{z})\\ p_x^{[4]}(\tilde{z})\\ p_y^{[4]}(\tilde{z})\\ q_y^{[3]}(\tilde{z})\\ -q_x^{[3]}(\tilde{z})\end{pmatrix}.$$

Dans cette expression les chargements extérieurs linéiques 1-d : l'effort (p_α, p_z) et le moment (q_α, q_z) sont définis sur chaque section $\tilde{z}$, par condensation de l'effort appliqué en 3-d,

$$\begin{aligned} p_\alpha(\tilde{z})&=\mathcal{F}_4\cdot\mathbf{t}_\alpha=\iint_{\mathcal{D}}\mathbf{F}_4\cdot\mathbf{t}_\alpha\mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y,\\ p_z(\tilde{z})&=\mathcal{F}_3\cdot\mathbf{t}_Z=\iint_{\mathcal{D}}\mathbf{F}_3\cdot\mathbf{t}_z\mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y,\\ q_\alpha(\tilde{z})&=\mathcal{F}_3\cdot\boldsymbol{\vartheta}_\alpha^{\perp}=\iint_{\mathcal{D}}\mathbf{F}_3\cdot\boldsymbol{\vartheta}_\alpha^{\perp}\mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y,\\ q_z(\tilde{z})&=\mathcal{F}_3\cdot\boldsymbol{\vartheta}_z=\iint_{\mathcal{D}}\mathbf{F}_3\cdot\boldsymbol{\vartheta}_z\mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y.\end{aligned}$$

Par ailleurs il est démontré dans l'annexe A.1 que le chargement doit satisfaire

$$\forall \tilde{z} \quad \mathcal{F}_3(\tilde{z}) \cdot \mathbf{t}_\alpha = 0,$$

de manière à être compatible avec les hypothèses sur les ordres de grandeur II.24. La matrice des modules $\mathcal{H}$ apparaissant dans le modèle 1-d décrit par l'équation II.31 a pour expression explicite

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{t}_z \cdot \mathcal{T} \cdot \mathbf{t}_z & \mathbf{t}_z \cdot \mathcal{T} \cdot \boldsymbol{\vartheta}_z & -\mathbf{t}_z \cdot \mathcal{T} \cdot \boldsymbol{\vartheta}_y^\perp & \mathbf{t}_z \cdot \mathcal{T} \cdot \boldsymbol{\vartheta}_x^\perp \\ \boldsymbol{\vartheta}_z \cdot \mathcal{T} \cdot \mathbf{t}_z & \boldsymbol{\vartheta}_z \cdot \mathcal{T} \cdot \boldsymbol{\vartheta}_z & -\boldsymbol{\vartheta}_z \cdot \mathcal{T} \boldsymbol{\vartheta}_y^\perp & \boldsymbol{\vartheta}_z \cdot \mathcal{T} \cdot \boldsymbol{\vartheta}_x^\perp \\ -\boldsymbol{\vartheta}_y^\perp \cdot \mathcal{T} \cdot \mathbf{t}_z & -\boldsymbol{\vartheta}_y^\perp \cdot \mathcal{T} \cdot \boldsymbol{\vartheta}_z & \boldsymbol{\vartheta}_y^\perp \cdot \mathcal{T} \cdot \boldsymbol{\vartheta}_y^\perp & -\boldsymbol{\vartheta}_y^\perp \cdot \mathcal{T} \cdot \boldsymbol{\vartheta}_x^\perp \\ \boldsymbol{\vartheta}_x^\perp \cdot \mathcal{T} \cdot \mathbf{t}_z & \boldsymbol{\vartheta}_x^\perp \cdot \mathcal{T} \cdot \boldsymbol{\vartheta}_z & -\boldsymbol{\vartheta}_x^\perp \cdot \mathcal{T} \cdot \boldsymbol{\vartheta}_y^\perp & \boldsymbol{\vartheta}_x^\perp \cdot \mathcal{T} \cdot \boldsymbol{\vartheta}_x^\perp \end{pmatrix}, \tag{II.32}$$

où $\mathcal{T}$ désigne l'opérateur symétrique

$$\mathcal{T} = \mathcal{M}_e - \mathcal{C}_e^T \cdot \mathcal{K}_e^{-1} \cdot \mathcal{C}_e,$$

et où $\mathcal{K}_e$, $\mathcal{C}_e$ et $\mathcal{M}_e$ sont les opérateurs qui définissent les sous-blocs de $\mathcal{Q}$ dont nous avons fourni une expression détaillée pour un solide prismatique néo-Hookéen en compression axiale dans le chapitre I § I.3.2. Ici $\mathcal{K}_e^{-1}$ désigne le pseudo-inverse de l'opérateur singulier $\mathcal{K}_e$. Ces opérateurs dépendent implicitement de la pré-contrainte éventuelle à travers la solution homogène, comme nous l'avons remarqué dans le chapitre I.

Enfin, l'opérateur de pré-contrainte $\mathcal{P}$ dans le modèle 1-d décrit par l'équation II.31 s'écrit

$$\mathcal{P}_{ij} = \iint_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\Sigma}_0 : \mathrm{d}_2 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{\Theta}_i, \boldsymbol{\Theta}_j) \, \mathrm{d}X \, \mathrm{d}Y, \tag{II.33}$$

où $\boldsymbol{\Sigma}_0$ est le tenseur des contraintes 3-d pour la solution homogène et $i \in \{1,2,3\}$ avec

$$\boldsymbol{\Theta}_1 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\vartheta}_z \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Theta}_2 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\vartheta}_x^\perp \\ \mathbf{t}_y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\Theta}_3 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\vartheta}_y^\perp \\ -\mathbf{t}_x \end{pmatrix}. \tag{II.34}$$

Cet opérateur de pré-contrainte agit uniquement sur les rotations.

Ainsi, pour une géométrie de poutre et un comportement hyper-élastique donné, il suffit d'écrire le problème d'équilibre linéarisé sous la forme II.18 en identifiant les opérateurs $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{S}$. Le modèle 1-d peut alors être obtenu facilement en appliquant l'équation II.31 puis en évaluant les matrices $\mathcal{H}$ et $\mathcal{P}$ par les expressions II.32 et II.33.

L'équation II.31 est similaire aux équations linéarisées II.16 et II.17 obtenues précédemment à partir du modèle de poutre en géométrie non-linéaire et en fournit une justification fondée sur l'élasticité 3-d. Nous verrons dans la prochaine section que ces deux formulations se correspondent exactement dans le cas d'un barreau néo-Hookéen homogène linéarisé au voisinage de sa configuration naturelle.

II.2.5. Conclusion

La méthode présentée ici s'appuie sur trois ingrédients principaux :

- les équations de l'élasticité finie 3-d sous forme incrémentale,
- l'existence d'une solution fondamentale $\varphi_{[0]}$ pour le problème 3-d, invariante et homogène en Z, ce qui permet d'écrire ces équations sous la forme II.18,
- des hypothèses sur les ordres de grandeur des efforts et des déformations, par exemple les hypothèses II.24 qui permettent de dériver le modèle classique présenté dans cette section.

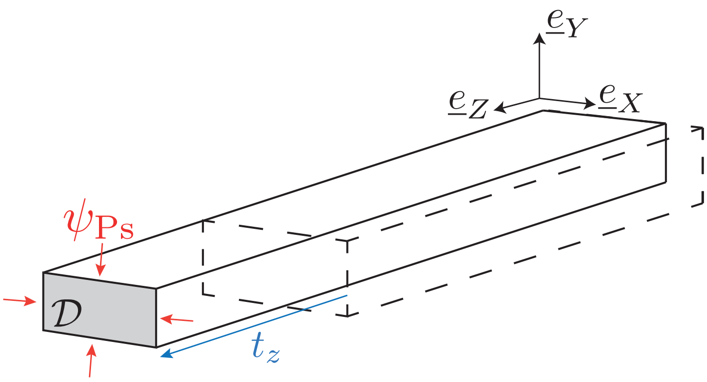

FIGURE II.3 – Solution de barre en traction.

Aucune hypothèse cinématique n'est a priori nécessaire et le calcul des solutions exactes est effectué dans le cadre général de l'élasticité finie 3-d. Ainsi des anisotropies partielles de comportement peuvent être prises en compte facilement, pouvant introduire des couplages entre torsion et flexion représentés par des termes non-diagonaux dans la matrice des modules $\mathcal{H}$.

Nous présentons pour finir une application du modèle II.31 à un barreau néo-Hookéen homogène soumis à une pré-contrainte axiale compressive.

II.3 Exemple : barreau élastique néo-Hookéen

Dans cette section nous considérons un barreau néo-Hookéen homogène et appliquons le résultat II.31. Nous examinons séparément les modes de déformation en traction, torsion et flexion et montrons que les équations d'équilibre obtenues sont similaires à celles du modèle de poutre linéarisé II.16 présentées dans la première section de ce chapitre, en l'absence de pré-contrainte. Pour le mode de flexion, nous vérifierons que les équations obtenues dans le cas d'une pré-contrainte axiale compressive sont identiques à celles décrivant le flambement d'Euler II.17. Ceci nous permettra de justifier *a posteriori* la version 1-d de notre analyse de bifurcation linéarisée présentée dans le chapitre I.

II.3.1. Équation d'une barre en traction

Examinons d'abord le cas sans pré-contrainte. Pour le mode d'extension axiale, le déplacement à l'ordre dominant est obtenu par projection sur $\underline{e}_Z$ de la solution φ décrite par l'équation II.28. Nous obtenons ainsi

$$\boldsymbol{\varphi} = \eta\, u(\tilde{z})\, \underline{e}_Z + \cdots .$$

D'après II.29, le déplacement à l'ordre η^2 s'écrit alors $\boldsymbol{\varphi}_2 = u'(\tilde{z})\, \boldsymbol{\psi}_{\mathrm{Ps}}(\tilde{z})$, il est associé à l'effet Poisson. Dans cet exemple $\boldsymbol{\psi}_{\mathrm{Ps}}$ est contenu dans le plan de la section (*i.e.* $\boldsymbol{\varphi}_2 = \boldsymbol{\varphi}_2^{\|}$) comme représenté sur la figure II.3 et vérifie le problème d'élasticité 2-d suivant sur la section $\mathcal{D}$, d'après II.30,

$$\forall \widehat{\boldsymbol{\varphi}}^{\|} \quad \widehat{\boldsymbol{\varphi}}^{\|} \cdot (\mathcal{K}_e \cdot \boldsymbol{\psi}_{\mathrm{Ps}} + \mathcal{C}_e \cdot \mathbf{t}_z) = 0. \tag{II.35}$$

Il vient ensuite, d'après les expressions détaillées dans le chapitre I § I.3.2.,

$$\widehat{\boldsymbol{\varphi}}^{\|} \cdot \mathcal{K}_e \cdot \boldsymbol{\psi}_{\mathrm{Ps}} = \iint_{\mathcal{D}} \left(\lambda_{\mathrm{L}} \ \mathrm{tr}\, \nabla \boldsymbol{\psi}_{\mathrm{Ps}} \ \mathrm{tr}\, \nabla \widehat{\boldsymbol{\varphi}}^{\|} + 2\mu \left[\nabla \boldsymbol{\psi}_{\mathrm{Ps}} : \nabla \widehat{\boldsymbol{\varphi}}^{\|} \right] \right) \mathrm{d}X \, \mathrm{d}Y,$$
$$\widehat{\boldsymbol{\varphi}}^{\|} \cdot \mathcal{C}_e \cdot \mathbf{t}_z = \lambda_{\mathrm{L}} \iint_{\mathcal{D}} \mathrm{tr}\, \nabla \widehat{\boldsymbol{\varphi}}^{\|} \mathrm{d}X \, \mathrm{d}Y,$$

où $(\lambda_{\mathrm{L}}, \mu)$ sont les coefficients de Lamé. En remplaçant ces expressions dans l'équation II.35 il vient alors $\nabla \boldsymbol{\psi}_{\mathrm{Ps}} = \mathrm{Diag}(-\nu, -\nu)$ où nous reconnaissons le coefficient de Poisson $\nu = \frac{\lambda_{\mathrm{L}}}{2(\lambda_{\mathrm{L}}+\mu)}$.

En appliquant l'équation II.31 et en utilisant la définition des modules tangents II.32, le principe des travaux virtuels pour le modèle 1-d s'écrit finalement

$$\forall \hat{u} \quad -\int_0^L \hat{u}' \, u' \, \mathbf{t}_z \cdot \left[\mathcal{C}_e^T \cdot \boldsymbol{\psi}_{\mathrm{Ps}} + \mathcal{M}_e \cdot \mathbf{t}_z \right] \, \mathrm{d}\tilde{z} + \int_0^L p_z(\tilde{z}) \, \hat{u} \, \mathrm{d}\tilde{z} = 0. \tag{II.36}$$

L'expression des opérateurs $\mathcal{C}_e$ et $\mathcal{M}_e$ est détaillée dans le chapitre I, ainsi

$$\mathbf{t}_z \cdot \mathcal{C}_e^T \cdot \boldsymbol{\psi}_{\mathrm{Ps}} = \lambda_{\mathrm{L}} \iint_{\mathcal{D}} \mathrm{tr}\, \nabla \boldsymbol{\psi}_{\mathrm{Ps}} \, \mathrm{d}X \, \mathrm{d}Y = -2 \, \nu \, \lambda_{\mathrm{L}} \, \mathcal{A},$$
$$\mathbf{t}_z \cdot \mathcal{M}_e \cdot \mathbf{t}_z = \left(2 \, \mu + \lambda_{\mathrm{L}}\right) \iint_{\mathcal{D}} \mathbf{t}_z \cdot \mathbf{t}_z \mathrm{d}X \, \mathrm{d}Y = \left(2 \, \mu + \lambda_{\mathrm{L}}\right) \mathcal{A},$$

où $\mathcal{A}$ est l'aire de la section. L'équation II.36 s'identifie ainsi à l'équation d'équilibre d'une barre en traction axiale II.16,

$$\forall \hat{u} \quad -\int_0^L \mathcal{A} \, E \, \hat{u}' \, u' \, \mathrm{d}\tilde{z} + \int_0^L p_z \, \hat{u} \, \mathrm{d}\tilde{z} = 0.$$

où $E = \left[\lambda_{\mathrm{L}}(1 - 2\nu) + 2\mu\right]$ est le module de Young. Notons que le premier terme de II.36 correspond à une correction induite par l'effet Poisson : les modèles 1-d construits sur une cinématique de section indéformable négligent ce terme et surestiment ainsi le module de traction.

Effet d'une pré-contrainte en compression uni-axiale

Considérons à présent le cas d'une solution fondamentale en étirement axial $z_{[0]} = \lambda_{[0]} \, Z$. Deux modifications doivent être considérées pour l'écriture du modèle réduit : les modules tangents sont modifiés et un terme supplémentaire de raideur géométrique apparaît éventuellement dans l'expression générale du principe des travaux virtuels II.31. Ce terme est nul pour ce mode d'extension pure car la pré-contrainte n'agit que sur les rotations, d'après l'expression II.21.

Ainsi seuls les opérateurs d'élasticité tangente $\mathcal{K}_e$, $\mathcal{C}_e$ et $\mathcal{M}_e$ sont modifiés dans le principe des travaux virtuels II.31. Ces opérateurs dépendent en effet du gradient du déplacement associé à la solution fondamentale qui s'écrit, pour l'étirement uni-axial $z_{[0]} = \lambda_{[0]} \, Z$,

$$\nabla \boldsymbol{\varphi}_{[0]}^{\lambda_{[0]}} = \mathrm{Diag}\big(r(\lambda_{[0]}), r(\lambda_{[0]}), \lambda_{[0]}\big).$$

Si le matériau est quasiment incompressible nous avons par exemple $r(\lambda_{[0]}) \approx \frac{1}{\sqrt{\lambda_{[0]}}}$. D'après les expressions détaillées dans le chapitre I § I.3.2. il vient alors, avec $J_0 \approx 1$,

$$\begin{aligned}
\widehat{\boldsymbol{\varphi}}^{\|} \cdot \mathcal{K}_e \cdot \boldsymbol{\psi}_{\mathrm{Ps}} &= \frac{1}{r(\lambda_{[0]})^2} \iint_{\mathcal{D}} \left(\lambda_{\mathrm{L}} \ \mathrm{tr}\, \nabla \boldsymbol{\psi}_{\mathrm{Ps}} \ \mathrm{tr}\, \nabla \widehat{\boldsymbol{\varphi}}^{\|} + 2\mu \left[\nabla \boldsymbol{\psi}_{\mathrm{Ps}} : \nabla \widehat{\boldsymbol{\varphi}}^{\|} \right] \right) \mathrm{d}X \, \mathrm{d}Y, \\
\widehat{\boldsymbol{\varphi}}^{\|} \cdot \mathcal{C}_e \cdot \mathbf{t}_z &= \frac{\lambda_{\mathrm{L}}}{\lambda_{[0]} \, r(\lambda_{[0]})} \iint_{\mathcal{D}} \mathrm{tr}\, \nabla \widehat{\boldsymbol{\varphi}}^{\|} \mathrm{d}X \, \mathrm{d}Y.
\end{aligned}$$

En remplaçant ces expressions dans l'équation II.35, nous obtenons une équation pour la fonction $\boldsymbol{\psi}_{\mathrm{Ps}}$ et finalement $\nabla \boldsymbol{\psi}_{\mathrm{Ps}} = \mathrm{Diag}(-\frac{r(\lambda_{[0]})}{\lambda_{[0]}}\,\nu, -\frac{r(\lambda_{[0]})}{\lambda_{[0]}}\,\nu)$ avec $\frac{r(\lambda_{[0]})}{\lambda_{[0]}} \approx \frac{1}{\lambda_{[0]}^{3/2}}$ dans le cas quasiment incompressible. Toujours en remplaçant avec les expressions explicites détaillées dans le chapitre I § I.3.2., nous avons ensuite

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}_z \cdot \mathcal{C}_e^T \cdot \boldsymbol{\psi}_{\mathrm{Ps}} &= \frac{\lambda_{\mathrm{L}}}{\lambda_{[0]} \, r(\lambda_{[0]})} \iint_{\mathcal{D}} \mathrm{tr}\, \nabla \boldsymbol{\psi}_{\mathrm{Ps}} \, \mathrm{d}X \, \mathrm{d}Y = \frac{-2\,\nu\,\lambda_{\mathrm{L}}\,\mathcal{A}}{\lambda_{[0]}^2}, \\
\mathbf{t}_z \cdot \mathcal{M}_e \cdot \mathbf{t}_z &= \frac{2\,\mu + \lambda_{\mathrm{L}}}{\lambda_{[0]}^2} \iint_{\mathcal{D}} \mathbf{t}_z \cdot \mathbf{t}_z \mathrm{d}X \, \mathrm{d}Y = \frac{(2\,\mu + \lambda_{\mathrm{L}})\,\mathcal{A}}{\lambda_{[0]}^2},
\end{aligned}$$

où $\mathcal{A}$ est l'aire dans la configuration de référence. En remplaçant ces expressions dans le principe des travaux virtuels II.36 nous obtenons une nouvelle équation pour le modèle réduit

$$\forall \hat{u} \quad -\int_0^L K_t \, \hat{u}' \, u' \, \mathrm{d}\tilde{z} + \int_0^L p_z \, \hat{u} \, \mathrm{d}\tilde{z} = 0,$$

où le module tangent du nouveau modèle réduit s'écrit

$$K_t = \frac{E}{\lambda_{[0]}^2} \mathcal{A},$$

où E est le module de Young précédemment défini en fonction des paramètres λ_{L} et μ. Nous avons tracé la réponse linéaire correspondant à ce nouveau modèle réduit en bleu sur la figure II.4 pour $\lambda_{[0]} = 0.6$ et nous vérifions ainsi que $\frac{K_t}{\mathcal{A}} = \frac{\mathrm{d}n(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}^2 W_{3D}(\lambda, r(\lambda))}{\mathrm{d}\lambda^2}$. Ce module corrigé varie faiblement lorsque $\lambda_{[0]}$ reste proche de 1.

Dans ce modèle de barre, la raideur géométrique ne joue aucun rôle et les bifurcations éventuelles ne peuvent survenir que du fait des non-linéarités de la loi de comportement.

II.3.2. Équation d'une barre en torsion

D'après l'équation II.28, le déplacement donnant lieu à la torsion s'écrit, à l'ordre dominant,

$$\boldsymbol{\varphi}(\tilde{z}) = \eta \, \tau(\tilde{z}) \boldsymbol{\vartheta}_Z + \cdots$$

Le terme à l'ordre η^2 s'écrit, d'après II.29, $\boldsymbol{\varphi}_2 = \tau'(\tilde{z}) \, \boldsymbol{\psi}_{\mathrm{wr}}$ où $\boldsymbol{\psi}_{\mathrm{wr}}$ décrit le gauchissement induit par la torsion. Le comportement étant isotrope, $\boldsymbol{\psi}_{\mathrm{wr}}$ est purement axial dans cet exemple (*i.e.* $\boldsymbol{\varphi}_2 = \boldsymbol{\varphi}_2^{\perp}$) comme représenté sur la figure II.5. D'après II.30, $\boldsymbol{\psi}_{\mathrm{wr}}$ vérifie le problème d'élasticité 2-d suivant sur la section $\mathcal{D}$

$$\forall \widehat{\boldsymbol{\varphi}}^{\perp} \quad \widehat{\boldsymbol{\varphi}}^{\perp} \cdot (\mathcal{K}_e \cdot \boldsymbol{\psi}_{\mathrm{wr}} + \mathcal{C}_e \cdot \boldsymbol{\vartheta}_z) = 0. \tag{II.37}$$

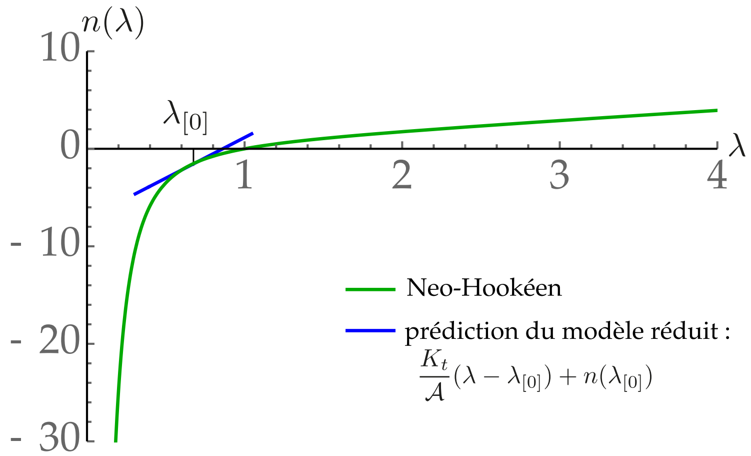

FIGURE II.4 – Réponse en étirement axial pour un solide néo-Hookéen (quasiment incompressible, $\lambda_{\mathrm{L}}/\mu = 5.10^4$) et prédiction du modèle réduit pour $\lambda_{[0]} = 0.6$.

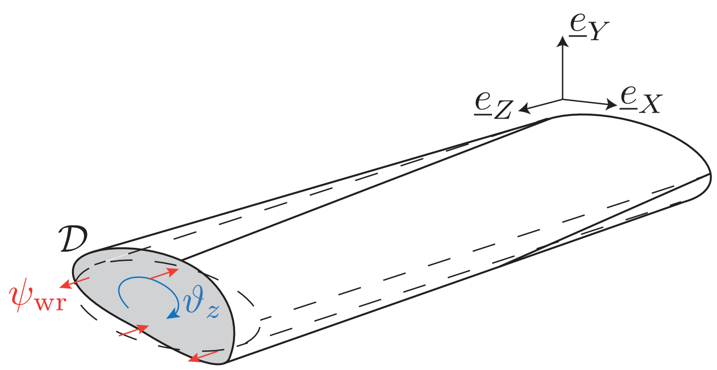

FIGURE II.5 – Solution de poutre en torsion.

Pour un matériau néo-Hookéen compressible il vient, d'après les expressions détaillées dans le chapitre I § I.3.2.,

$$\widehat{\boldsymbol{\varphi}}^{\perp} \cdot \mathcal{K}_e \cdot \boldsymbol{\psi}_{\mathrm{wr}} = \mu \iint_{\mathcal{D}} \nabla \widehat{\boldsymbol{\varphi}}^{\perp} \cdot \nabla \boldsymbol{\psi}_{\mathrm{wr}} \, \mathrm{d}X \, \mathrm{d}Y,$$
$$\widehat{\boldsymbol{\varphi}}^{\perp} \cdot \mathcal{C}_e \cdot \boldsymbol{\vartheta}_Z = \mu \iint_{\mathcal{D}} \nabla \widehat{\boldsymbol{\varphi}}^{\perp} \cdot \boldsymbol{\vartheta}_Z \, \mathrm{d}X \, \mathrm{d}Y.$$

Après intégration par partie de l'équation II.37 nous obtenons

$$\Delta \boldsymbol{\psi}_{\mathrm{wr}} = 0 \quad \text{sur} \quad \mathcal{D}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_{\mathrm{wr}}}{\partial \boldsymbol{n}} + \boldsymbol{\vartheta}_z \cdot \boldsymbol{n} = 0 \quad \text{sur} \quad \delta\mathcal{D},$$

où $\boldsymbol{n}$ est la normale unitaire à la frontière de la section $\delta\mathcal{D}$ dans son plan. Cette équation permet de calculer la déformation de gauchissement en fonction de la géométrie de la section. Il s'agit d'un problème Laplacien avec une condition au bord de von Neumann, identique au résultat classique (voir par exemple AUDOLY (2015)). Comme pour la traction, nous pouvons finalement écrire le principe des travaux virtuels 1-d pour la torsion seule, d'après l'équation II.31 et avec la définition II.32 pour les modules tangents,

$$\forall\widehat{\tau} \quad -\int_0^L \widehat{\tau}'\,\tau'\,\boldsymbol{\vartheta}_z\cdot\left[\mathcal{C}_e^T\cdot\boldsymbol{\psi}_{\mathrm{wr}}+\mathcal{M}_e\cdot\boldsymbol{\vartheta}_z\right]\,\mathrm{d}\tilde{z}+\int_0^L \hat{\tau}\,q_z^{[3]}\,\mathrm{d}\tilde{z}=0. \tag{II.38}$$

En remplaçant les expressions explicites des opérateurs détaillées dans le chapitre I § I.3.2. pour un matériau néo-Hookéen et l'expression de la rotation rigide $\boldsymbol{\vartheta}_z = -Y\,\underline{e}_X + X\,\underline{e}_Y$ il vient,

$$\boldsymbol{\vartheta}_z\cdot\mathcal{C}_e^T\cdot\boldsymbol{\psi}_{\mathrm{wr}} = \mu\iint_{\mathcal{D}}\nabla\boldsymbol{\psi}_{\mathrm{wr}}\cdot\boldsymbol{\vartheta}_z\,\mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y = \mu\iint_{\mathcal{D}}\big(-Y\,\boldsymbol{\psi}_{\mathrm{wr},X}+X\boldsymbol{\psi}_{\mathrm{wr},Y}\big)\,\mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y,$$
$$\boldsymbol{\vartheta}_z\cdot\mathcal{M}_e\cdot\boldsymbol{\vartheta}_z = \mu\iint_{\mathcal{D}}\boldsymbol{\vartheta}_z\cdot\boldsymbol{\vartheta}_z\,\mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y = \mu\iint_{\mathcal{D}}\big(X^2+Y^2\big)\,\mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y.$$

Nous reconnaissons l'équation classique d'une poutre en torsion,

$$\forall\widehat{\tau} \quad -\int_0^L \mu\,J_\tau\,\widehat{\tau}'\,\tau'\,\mathrm{d}\tilde{z}+\int_0^L \hat{\tau}\,q_z^{[3]}\,\mathrm{d}\tilde{z}=0,$$

où le moment en torsion s'écrit

$$J_\tau = \iint\big[-Y\,(\boldsymbol{\psi}_{\mathrm{wr},X}-Y)+X\,(\boldsymbol{\psi}_{\mathrm{wr},Y}+X)\big]\mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y.$$

Notons que le premier terme de l'équation II.38 correspond à une correction due au gauchissement qui n'est pas prise en compte dans les modèles fondés sur une cinématique de déplacement rigide des sections. Le moment en torsion ainsi identifié correspond au résultat classique : le lecteur pourra par exemple se référer à BALLARD et MILLARD, 2009 (pages 209-210), où il est démontré que J_τ se met également sous la forme

$$J_\tau = \iint\big[(\boldsymbol{\psi}_{\mathrm{wr},X}-Y)^2+(\boldsymbol{\psi}_{\mathrm{wr},Y}+X)^2\big]\mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y,$$

d'où l'on déduit immédiatement $J_\tau > 0$. Par exemple, pour une section elliptique de coefficients $(\frac{a}{2},\frac{b}{2})$ nous obtenons $\psi_{\mathrm{wr}}(X,Y) = c\,X\,Y$ avec $c = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ et enfin $J_\tau = \frac{\pi a^3 b^3}{16(a^2+b^2)}$.

Nous ne détaillerons pas ici d'exemple pour une pré-contrainte non nulle. Les cas pouvant donner lieu à du flambement en torsion sortent en effet du cadre de la compression axiale que nous considérons dans ce mémoire. Notons cependant que de tels problèmes pourraient être traités en adaptant la méthode générale.

II.3.3. Équations d'une poutre en flexion

Le déplacement à l'origine de la flexion autour de l'axe X (respectivement Y) est obtenu à l'ordre dominant en projetant l'expression générale II.28 sur l'axe Y (respectivement X). Nous obtenons ainsi

$$\boldsymbol{\varphi}(\tilde{z}) = w_\alpha(\tilde{z})\mathbf{t}_\alpha + \eta\,\eta_{\alpha\beta}w'_\alpha(\tilde{z})\boldsymbol{\vartheta}_\beta^\perp + \cdots,$$

pour $(\alpha,\beta)=(y,x)$ (respectivement $(\alpha,\beta)=(x,y)$). D'après II.29, le déplacement à l'ordre η^2 s'écrit $\boldsymbol{\varphi}_2 = w'_\alpha(\tilde{z})\,\boldsymbol{\psi}_{\mathrm{ac}}^\alpha$ pour $\alpha = y$ (respectivement $\alpha = x$) où $\psi_{\mathrm{ac}}^\alpha$ décrit la courbure anticlastique de la section induite par la flexion et appartient au plan de la section pour ce comportement isotrope (*i.e.* $\boldsymbol{\varphi}_2 = \boldsymbol{\varphi}_2^{\|}$), comme représenté sur la

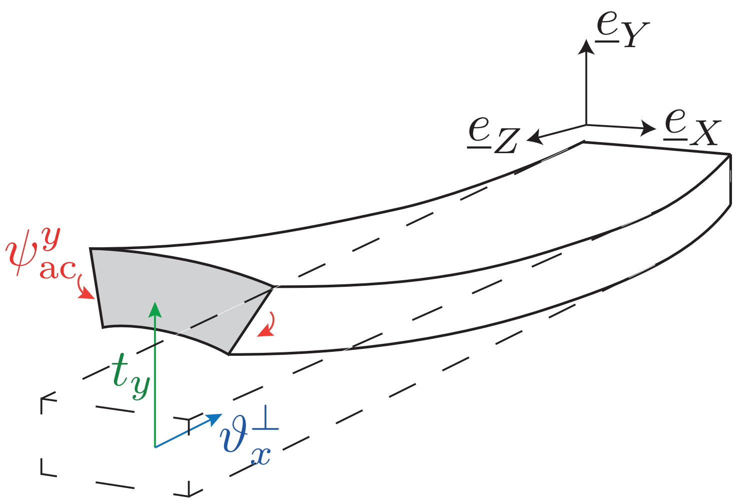

FIGURE II.6 – Solution de poutre en flexion autour de l'axe X.

figure II.6. Ce déplacement est décrit par l'équation 2-d suivante, comme établi plus haut (voir les relations II.30),

$$\forall \widehat{\boldsymbol{\varphi}}^{\parallel} \quad \widehat{\boldsymbol{\varphi}}^{\parallel} \cdot \left(\mathcal{K}_e \cdot \boldsymbol{\psi}^{\alpha}_{\text{ac}} + \eta_{\alpha\beta}\, \mathcal{C}_e \cdot \boldsymbol{\vartheta}^{\perp}_{\beta} \right) = 0. \tag{II.39}$$

Nous obtenons alors, d'après les expressions explicites détaillées dans le chapitre I § I.3.2.,

$$\widehat{\boldsymbol{\varphi}}^{\parallel} \cdot \mathcal{K}_e \cdot \boldsymbol{\psi}^{\alpha}_{\text{ac}} = \iint_{\mathcal{D}} \left(\lambda_{\text{L}}\ \text{tr}\, \nabla \boldsymbol{\psi}^{\alpha}_{\text{ac}}\ \text{tr}\, \nabla \widehat{\boldsymbol{\varphi}}^{\parallel} + 2\mu \left[\nabla \widehat{\boldsymbol{\varphi}}^{\parallel} : \nabla \boldsymbol{\psi}^{\alpha}_{\text{ac}} \right] \right) \mathrm{d}X\, \mathrm{d}Y,$$

$$\eta_{\alpha\beta}\, \widehat{\boldsymbol{\varphi}}^{\parallel} \cdot \mathcal{C}_e \cdot \boldsymbol{\vartheta}^{\perp}_{\beta} = \lambda_{\text{L}} \iint_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\vartheta}^{\perp}_{\beta}\ \text{tr}\, \nabla \widehat{\boldsymbol{\varphi}}^{\parallel}\, \mathrm{d}X\, \mathrm{d}Y.$$

La solution de ce problème est connue, voir par exemple AUDOLY (2015) (page 34),

$$\boldsymbol{\psi}^{y}_{\text{ac}} = \nu\, X\, Y\, \underline{e}_X + \nu \frac{Y^2 - X^2}{2}\, \underline{e}_Y \quad \boldsymbol{\psi}^{x}_{\text{ac}} = \nu \frac{X^2 - Y^2}{2}\, \underline{e}_X + \nu\, X\, Y\, \underline{e}_Y,$$

où $\nu = \frac{\lambda_{\text{L}}}{2(\lambda_{\text{L}} + \mu)}$.

Nous pouvons finalement écrire le principe des travaux virtuels pour le modèle 1-d, d'après l'équation II.31 et avec la définition II.32 pour les modules tangents. Il vient ainsi, en remplaçant les expressions détaillées des opérateurs introduites dans le chapitre I § I.3.2.,

$$\forall (\hat{w}_y, \hat{w}_x) \quad - E \int_0^L \begin{pmatrix} \hat{w}''_x \\ \hat{w}''_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{I}_y & \mathcal{I}_{xy} \\ \mathcal{I}_{xy} & \mathcal{I}_x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w''_x \\ w''_y \end{pmatrix} \mathrm{d}\tilde{z} \cdots$$

$$+ \int_0^L \mathcal{G}(\tilde{z}) \cdot \begin{pmatrix} \hat{w}_x \\ \hat{w}_y \\ \hat{w}'_x \\ \hat{w}'_y \end{pmatrix} \mathrm{d}\tilde{z} = 0,$$

où $\mathcal{I}_x = \iint_{\mathcal{D}} Y^2\, \mathrm{d}X\, \mathrm{d}Y$, $\mathcal{I}_y = \iint_{\mathcal{D}} X^2\, \mathrm{d}X\, \mathrm{d}Y$ et $\mathcal{I}_{xy} = \iint_{\mathcal{D}} X\, Y\, \mathrm{d}X\, \mathrm{d}Y$ sont les moments de flexion classiques et E est le module de Young introduit pour l'étude de l'extension. Nous avons par exemple, pour le calcul de $\mathcal{I}_x$, d'après II.32,

$$E\,\mathcal{I}_x = \boldsymbol{\vartheta}_x^\perp \cdot \Big(\mathcal{M}_e \cdot \boldsymbol{\vartheta}_x^\perp - \mathcal{C}_e^T \cdot \boldsymbol{\psi}_{\text{ac}}^y\Big)$$

avec

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\vartheta}_x^\perp \cdot \mathcal{C}_e^T \cdot \boldsymbol{\psi}_{\text{ac}}^y &= \lambda_{\text{L}} \iint_{\mathcal{D}} Y \ \operatorname{tr} \nabla \boldsymbol{\psi}_{\text{ac}}^y \, \mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y = 2\,\lambda_{\text{L}}\,\nu \iint_{\mathcal{D}} Y^2\,\mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y,\\
\boldsymbol{\vartheta}_x^\perp \cdot \mathcal{M}_e \cdot \boldsymbol{\vartheta}_x^\perp &= \big(2\,\mu + \lambda_{\text{L}}\big) \iint_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\vartheta}_x^\perp \cdot \boldsymbol{\vartheta}_x^\perp \,\mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y = \big(2\,\mu + \lambda_{\text{L}}\big) \iint_{\mathcal{D}} Y^2\,\mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y,
\end{aligned}$$

et ainsi

$$E\,\mathcal{I}_x = E \iint_{\mathcal{D}} Y^2\,\mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y.$$

Le calcul des autres moments de flexion s'effectue de la même manière.

Avec une pré-contrainte uni-axiale compressive

Nous avons vu que pour une telle pré-contrainte, l'expression des déplacements rigides est identique au cas naturel et l'expression II.33 du terme de pré-contrainte dans l'équation II.31 se simplifie en remarquant qu'alors

$$\mathrm{d}_2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\Theta}_i, \boldsymbol{\Theta}_j) = \mathbf{1}\,\delta_{ij} - (\mathbf{t}_i \otimes \mathbf{t}_j)_{\text{sym}}\,.$$

Cette expression peut se démontrer facilement en remplaçant l'expression II.34 des rotations rigides $\boldsymbol{\Theta}_i$ dans la définition II.22 du second incrément de déformation.

Les modules d'élasticité intervenant dans la définition du modèle réduit sont modifiés, de la même manière que lorsque nous ne considérions que les modes d'extension. Cependant, le flambement intervenant à une faible valeur de pré-contrainte, les modules tangents associés à la configuration naturelle peuvent être utilisés en première approximation. Autrement dit, la linéarisation est envisagée au voisinage d'un $\lambda_{[0]} \approx 1$. La problème de bifurcation s'écrit alors, pour le modèle 1-d,

$$\begin{aligned}
\forall(\hat{w}_y, \hat{w}_x) \qquad - E \int_0^L \begin{pmatrix} \hat{w}_x'' \\ \hat{w}_y'' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{I}_y & \mathcal{I}_{xy} \\ \mathcal{I}_{xy} & \mathcal{I}_x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_x'' \\ w_y'' \end{pmatrix} \mathrm{d}\tilde{z} \cdots \\
- \int_0^L \begin{pmatrix} \hat{w}_x' \\ \hat{w}_y' \end{pmatrix} \cdot \mathcal{P} \cdot \begin{pmatrix} w_x' \\ w_y' \end{pmatrix} \mathrm{d}\tilde{z} = 0,
\end{aligned}$$

où

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_0^\perp\,\mathcal{A} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Sigma}_0^\perp\,\mathcal{A} \end{pmatrix},$$

pour une pré-contrainte purement axiale $\boldsymbol{\Sigma}_0^\parallel = 0$. Nous pouvons calculer, avec l'expression détaillée I.23 pour $\underline{\underline{\Sigma}}_0$ donnée dans le chapitre I et pour un matériau quasiment incompressible,

$$\boldsymbol{\Sigma}_0^\perp = \mu(1 - \frac{1}{\lambda_{[0]}^2}).$$

Ainsi pour $\lambda_{[0]} \sim 1$ il vient $\boldsymbol{\Sigma}_0^\perp \sim 2\,\mu\,(\lambda_{[0]} - 1)$ et nous retrouvons ainsi l'équation de bifurcation présentée au § II.17 avec $E = 2\,\mu$.

Il est envisageable d'adapter cette méthode pour étudier une précontrainte couplant compression et torsion et d'obtenir ainsi des modes de flambement impliquant un couplage entre les modes de flexion et les modes de torsion étudiés dans le paragraphe précédent, dans les cas où les symétries du matériau le permettent.

II.4 Conclusion

La méthode de réduction dimensionnelle présentée dans ce chapitre répond à un double objectif :

— justifier le modèle 1-d de poutre classique par un raisonnement fondé uniquement sur des hypothèses portant sur les ordres de grandeur des efforts appliqués ainsi que des déformations dans la section,

— proposer un formalisme suffisamment général pour ouvrir la voie à la déduction systématique de modèles réduits adaptés à une grande variété de situations.

Nous verrons dans le chapitre III comment établir un modèle de poutre à courbure naturelle par cette méthode en remplaçant l'ordre de grandeur postulé pour la pré-contrainte par $\mathbf{\Sigma}_0 = \mathcal{O}(\eta)$ dans les hypothèses II.24. Nous montrerons que ce modèle est pertinent pour décrire le comportement d'un objet soumis à une précontrainte axiale hétérogène dans sa section, dans la limite d'une pré-contrainte modérée.

Notons que cette démarche peut être généralisée au cas où la solution fondamentale $\underline{\varphi}_0$ est lentement variable suivant la coordonnée axiale Z et/ou si l'on considère que la géométrie de la section, les propriétés d'élasticité tangente varient lentement dans cette direction. Les fonctions $\boldsymbol{\psi}^x_{\mathrm{ac}}$, $\boldsymbol{\psi}^y_{\mathrm{ac}}$, $\boldsymbol{\psi}_{\mathrm{Ps}}$ et $\boldsymbol{\psi}_{\mathrm{wr}}$ dépendent alors de Z et doivent être calculées sur chaque section, les opérateurs $\mathcal{H}$ et $\mathcal{P}$ également.

Dans le cas d'une poutre en voile mince dont la section possède deux échelles de longueur caractéristiques qui ne sont pas du même ordre de grandeur $h \ll v$, il est nécessaire de revenir sur la définition des coordonnées adimensionnées.

Enfin, on peut imaginer utiliser comme point de départ à cette réduction dimensionnelle non pas l'élasticité finie 3-d comme nous l'avons fait ici, mais une énergie de plaque et/ou de membrane pour établir des modèles réduits 1-d. Il suffirait alors d'écrire l'équivalent de l'équilibre linéarisé II.18 au voisinage d'une solution homogène, puis de définir les mouvements rigides annulant les déformations incrémentales pour cette énergie. C'est cette dernière piste qui a guidé la mise au point de notre formalisme général pour la réduction dimensionnelle et nous envisageons de la poursuivre dans un proche futur.

Chapitre III

Poutre hyperélastique sous forte pré-contrainte : sélection de la longueur d'onde du mode de bifurcation

Sommaire

Dans ce chapitre, nous étudions le flambage provoqué par des déformations incompatibles induites au sein d'un solide par la croissance ou des effets thermiques par exemple. De telles instabilités apparaissent lors de la morphogenèse (YIN et al., 2008 ; SAVIN et al., 2011 ; OSTERFIELD et al., 2013 ; TALLINEN et al., 2016), lors laminage et du planage des tôles métalliques (TOMITA et SHAO, 1993 ; KOMORI, 1997 ; FISCHER et al., 2000 ; RAMMERSTORFER, FISCHER et FRIEDL, 2001 ; ABDELKHALEK et al., 2015) ou du dépôt de films minces (MOON et al., 2007 ; FAOU, 2013) ; dans ces deux derniers cas les instabilités peuvent être à l'origine de défauts indésirables liés au gondolage ou à la délamination.

Il est de nombreux cas où les instabilités déclenchées par des pré-contraintes résiduelles induites par des incompatibilités géométriques génèrent des motifs localisés dont la longueur d'onde est sélectionnée par les déformations internes à la section de l'objet. Pour un solide prismatique élancé, nous parlerons alors de modes *microscopiques*, par opposition aux modes *macroscopiques* qui s'expriment sous la forme d'une déformation dont la longueur d'onde est comparable à la longueur du solide, à l'instar du flambage d'Euler.

Nous étudions plus particulièrement les mécanismes de sélection de la longueur d'onde des motifs de flambement d'une poutre hyper-élastique lorsque celle-ci est soumise à une forte pré-contrainte axiale inhomogène. Notre analyse est motivée par une expérience récente effectuée par une équipe de Harvard (HUANG et al., 2012 ; LIU et al., 2014). Ce système expérimental est remarquable car il fait apparaître une transition entre des modes de flambement *macroscopiques* et des modes de flambement *microscopiques* suivant l'importance relative de l'hétérogénéité de pré-contrainte et du rapport d'aspect de la section de la poutre. En dépit de sa ressemblance avec une poutre mince, ce système n'est pas décrit de manière satisfaisante par le modèle classique d'Euler-Bernoulli qui ne permet pas rendre compte de l'apparition des modes *microscopiques*, en particulier.

Après avoir présenté brièvement les résultats expérimentaux de (HUANG et al., 2012 ; LIU et al., 2014), nous rappelons les résultats de l'analyse classique de ce problème par le modèle de poutre d'Euler-Bernoulli à courbure naturelle. Cette présentation nous donne l'occasion d'examiner les liens entre ce modèle 1-d et les équations de l'élasticité 3-d en utilisant la méthode générale de réduction dimensionnelle développée dans le chapitre II, qui constitue une démarche alternative aux approches existantes et en particulier aux travaux récents de CICALESE, RUF et SOLOMBRINO (2016).

Dans une troisième section, nous discutons les caractéristiques du mode de flambement à petite longueur d'onde (ou mode *microscopique*) par analogie avec l'exemple classique du flambement d'une poutre sur fondation élastique. Nous proposons un modèle original de bi-poutre, permettant de décrire qualitativement la compétition entre modes *macroscopiques* et modes *microscopiques* observée dans l'expérience de HUANG et al. (2012) et LIU et al. (2014). Des modèles plus rigoureux seront abordés dans une quatrième section : un modèle de bi-plaque et des résultats faisant appel à la théorie de l'élasticité 3-d présentée dans le chapitre I.

Enfin, nous introduirons un développement asymptotique à faible nombre d'onde inspiré de l'approche de KOITER (1965). L'idée est de s'affranchir des calculs fastidieux imposés par l'analyse linéaire de bifurcation, en particulier pour le traitement du modèle 3-d, et d'utiliser des outils classiques d'algèbre linéaire pour capturer de manière directe la transition *micro-macro*. Cette approche est appliquée avec succès aux trois modèles présentés dans ce chapitre : bi-poutre, plaque mince et élasticité 3-d. Nous discuterons l'application au modèle de plaque mince en détails :

les résultats complets de l'application de cette méthode aux autres modèles sont présentés dans LESTRINGANT et AUDOLY (2016), reproduit à la fin de ce chapitre.

III.1 Motivation expérimentale

Dans cette section nous présentons les principaux résultats de l'expérience effectuée par HUANG et al. (2012) et LIU et al. (2014) et présentée schématiquement figure III.1. La portion II d'un ruban d'élastomère de section rectangulaire est pré-

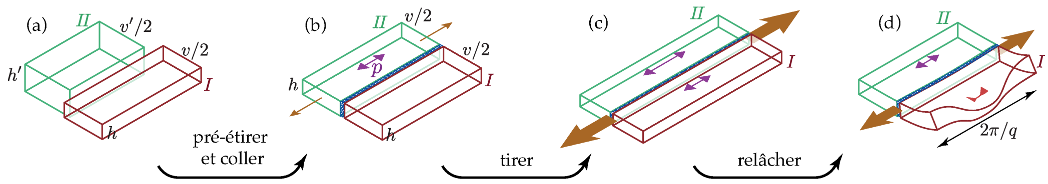

FIGURE III.1 – Schéma de l'expérience de HUANG et al. (2012) et LIU et al. (2014)

étirée jusqu'à une longueur $L = p\,L'$ où L' est la longueur initiale de cette portion et p un paramètre d'étirement, comme représenté sur la figure III.1(b). La portion II est alors assemblée avec la portion I et le ruban ainsi formé est soumis à un étirement global λ, figure III.1(c). Cet étirement est finalement progressivement relâché jusqu'à l'apparition d'un motif de flambage, figure III.1(d). La longueur d'onde de ce motif présente une très grande variation d'une expérience à l'autre, typiquement de la taille caractéristique de la section jusqu'à la longueur du ruban. Cette variation est pilotée par le rapport d'aspect de la section du ruban et la valeur de la pré-contrainte.

Nous définissons le rapport d'aspect de la section comme la quantité $\frac{h}{v}$ où h et v sont les dimensions de la section après assemblage, comme représenté sur la figure III.1(b). Pour des faibles valeurs de $\frac{h}{v}$ le système exhibe, dans son état post-flambé, une alternance entre des portions d'hélice de chiralité opposée, raccordées entre elles par des défauts appelés couramment *perversions*. La figure III.2(a) reproduit les motifs de flambement obtenus pour différents rapports d'aspect : le flambement en hélice induit une déformation modérée des sections du ruban alors que le motif à perversions multiples implique d'importantes déformations des sections, localisées au voisinage des perversions, comme souligné par LIU et al. (2016). L'es-

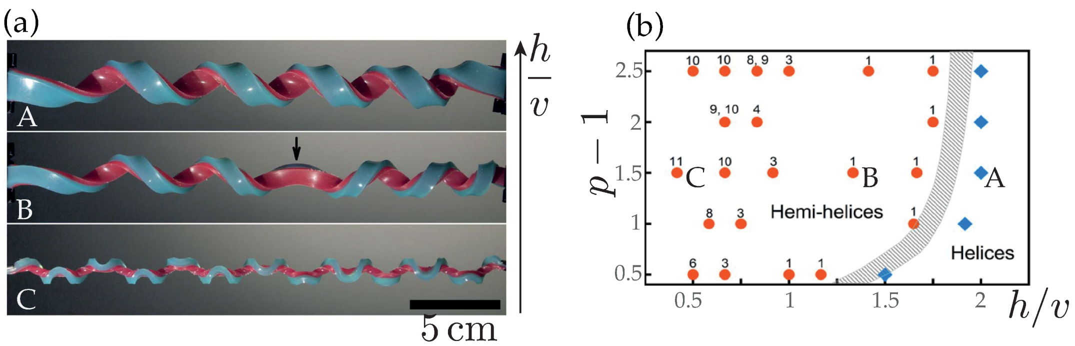

FIGURE III.2 – (a) Motif de flambement pour $p = 2.5$ et pour différentes valeurs du rapport d'aspect de la section (de bas en haut $\frac{h}{v} = 0.4, 1.3, 2$). (b) Nombre de perversions en fonction de la pré-contrainte et du rapport d'aspect. Source LIU et al. (2014).

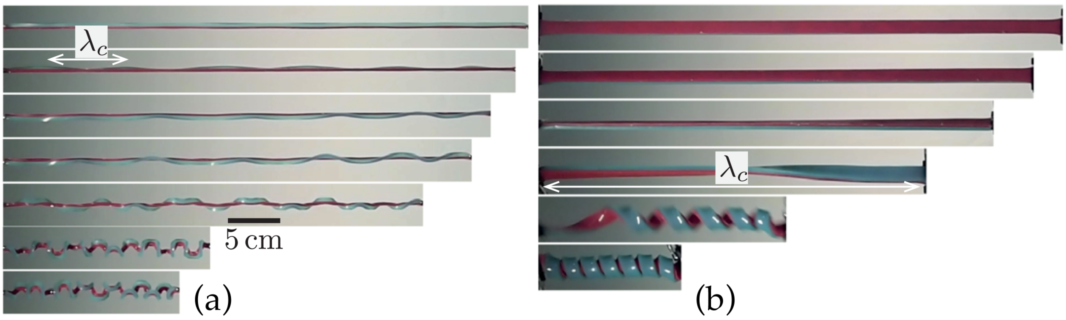

FIGURE III.3 – Photographies de l'expérience de flambement pour un pré-étirement $p = 2.5$ et (a) $\frac{h}{v} = 0.4$: flambement *micro*, (b) $\frac{h}{v} = 2.$: flambement *macro*, d'après LIU et al. (2014)

pacement entre ces perversions grandit lorsque le rapport $\frac{h}{v}$ augmente comme on peut le voir sur la figure III.2(b). Pour les grands rapports d'aspect le système exhibe une perversion unique, voire un motif formé d'une seule hélice.

La figure III.3 reproduit les clichés expérimentaux de LIU et al. (2014) au cours du relâchement de l'étirement global. La longueur d'onde critique λ_c est symbolisée par une flèche blanche. Nous observons que la longueur d'onde du motif de flambement est sélectionnée dès le seuil de l'instabilité, sans que d'autres bifurcations secondaires n'interviennent. Dans le cas d'un mode *microscopique*, figure III.3(a), la longueur d'onde critique est petite devant la longueur du système et le motif évolue ensuite vers une forme à perversions multiples. Dans le cas d'un mode de flambement *macroscopique*, figure III.3(b), la longueur d'onde du mode instable est déterminée par la taille du système et le motif évolue vers une forme en hélice. L'analyse de bifurcation linéaire semble ainsi être un outil à adapté pour analyser la transition *micro-macro* dans ce système.

En identifiant une courbure naturelle équivalente à la pré-contrainte inhomogène appliquée dans l'expérience, HUANG et al. (2012) et LIU et al. (2014) décrivent l'apparition du flambement *macroscopique* et son évolution vers des motifs en hélice en utilisant un modèle de poutre classique, naturellement courbée dans l'une de ses deux directions de flexion et initialement pré-étirée. Ce flambement en hélice est décrit dans les travaux de (GORIELY et TABOR, 1998 ; MCMILLEN et GORIELY, 2002 ; DOMOKOS et HEALEY, 2005), également fondés sur des modèles de poutre classiques avec courbure naturelle.

Cependant ces analyses classiques appuyées sur des modèles de poutre n'expliquent ni l'apparition simultanée de plusieurs perversions, ni la sélection de leur nombre en fonction de la valeur du rapport d'aspect et de la pré-contrainte. Une explication fondée sur des arguments dynamiques est proposée par LIU et al. (2014), mais les échelles de temps à l'œuvre dans les expériences sont trop grandes pour qu'une telle approche soit justifiée.

De nombreux travaux se sont intéressés à la convergence des équations de l'élasticité 3-d vers des modèles réduits 1-d ou 2-d dans le cas de solides soumis à des pré-contraintes incompatibles, telles celles qui génèrent le flambement dans cette expérience. Ainsi pour les faibles rapports d'aspect (LEWICKA, MAHADEVAN et PAKZAD, 2011 ; BHATTACHARYA, LEWICKA et SCHÄFFNER, 2016 ; DERVAUX, CIARLETTA et BEN AMAR, 2009) établissent des modèles de plaques minces dont la métrique de référence est modifiée par la présence de cette pré-contrainte. Ces modèles permettent en particulier d'analyser des problèmes de croissance (KLEIN, EFRATI et

SHARON, 2007; LIANG et MAHADEVAN, 2011). Une approche similaire est proposée par CICALESE, RUF et SOLOMBRINO (2016) pour des poutres soumises à une pré-contrainte inhomogène. Cette démonstration repose sur l'hypothèse d'hétérogénéités de pré-contrainte faibles et se ramène au modèle classique de poutre naturellement courbée, ce qui ne permet pas de faire état des modes de flambement *microscopiques* à perversions multiples observés dans l'expérience.

Pourquoi les modèles classiques ne sont-ils pas pertinents pour décrire l'expérience de LIU et al. (2014), et de manière générale les instabilités générées dans des solides élancés soumis à des pré-contraintes incompatibles ? Peut-on proposer des modèles alternatifs adaptés à l'étude de tels systèmes ? Ce double objectif constitue la feuille de route de ce chapitre.

III.2 Analyse de bifurcation fondée sur un modèle de poutre classique

Présentons d'abord les résultats de l'analyse de stabilité linéaire pour une poutre classique d'Euler-Bernoulli naturellement courbée. Nous verrons ensuite comment ces équations peuvent être déduites de l'élasticité 3-d sous l'hypothèse de pré-contraintes modérées et ferons ainsi le lien entre les hétérogénéités de pré-contrainte dans le système étudié et la courbure naturelle introduite dans le modèle de poutre, reproduisant ainsi les résultats de l'analyse menée par HUANG et al. (2012) et LIU et al. (2014).

Pour cela nous considérons un objet infini dans sa direction d'élancement $L \to \infty$. Le mode de flambement obtenu avec ce modèle, de grande longueur d'onde, est alors caractérisé par un nombre d'onde nul, c'est à dire $q_c = 0$. La cas d'un système fini peut éventuellement être traité dans un second temps. Pour certaines conditions aux limites simples, celui-ci est résolu simplement en imposant une quantification sur le nombre d'onde q_c, comme pour l'étude du flambement d'Euler présentée dans le chapitre I. Dans le cas général, il est nécessaire de combiner les différents modes harmoniques obtenus pour satisfaire les conditions aux limites.

III.2.1. Analyse linéaire de bifurcation

Nous faisons ici appel au formalisme introduit dans la première section du chapitre II. À partir des équations de Kirchhoff II.12b et II.12c énoncées au chapitre II, nous obtenons l'équilibre linéarisé d'une poutre à courbure naturelle κ_{nat} non nulle dans la direction matérielle alignée avec l'axe y dans la configuration de référence (repérée par l'indice 2).

Le déplacement des extrémités le long de la direction axiale permet de contrôler l'extension axiale de la poutre, comme représenté sur le dessin de la figure III.4(a). La solution fondamentale est rectiligne et nous considérons une pré-contrainte $\underline{f}^{[0]} = N^{[0]}\,\underline{e}_z$. Le moment interne, non nul dans la configuration fondamentale, est lié à la courbure naturelle

$$\underline{m}^{[0]}(z) = m^{[0]}\,\underline{e}_y \quad \text{où} \quad m^{[0]} = -C_2\,\kappa_{\text{nat}}.$$

L'équilibre linéarisé sous forme forte devient

$$\underline{f}^{[1]\,\prime} = \underline{0}, \tag{III.1a}$$

$$\underline{f}^{[1]} \cdot \underline{e}_z = N^{[1]}, \tag{III.1b}$$

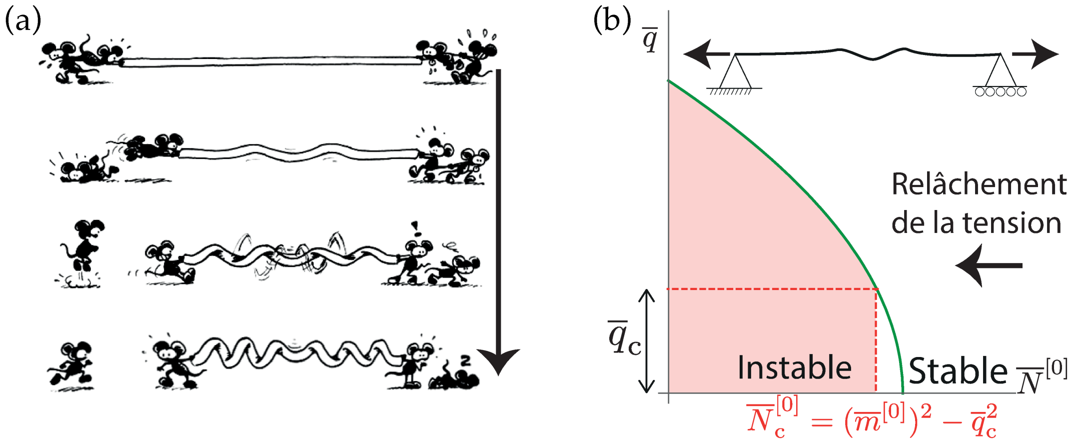

FIGURE III.4 – Flambement d'une poutre naturellement courbée. (a) Expérience de pensée, d'après MCMILLEN et GORIELY (2002). (b) Courbe de stabilité marginale, le trajet de déchargement est indiqué par une flèche.

$$\underline{m}^{[1]\prime} + \underline{r}^{[1]\prime} \wedge \underline{f}^{[0]} + \underline{r}^{[0]\prime} \wedge \underline{f}^{[1]} = 0. \tag{III.1c}$$

Rappelons que les conditions de bord seront prises en compte dans un second temps. Dans le cadre de la méthode des équilibres adjacents les incréments d'efforts appliqués aux extrémités sont nuls et ainsi $\underline{f}^{[1]} = \underline{0}$ d'après III.1a et le dernier terme de III.1c s'annule. L'incrément de moment interne s'écrit, suivant l'expression établie dans le chapitre II,

$$\underline{m}^{[1]} = \begin{pmatrix} -C_1\, w_y''(z) \\ C_2\, w_x''(z) \\ \mu\, J_\tau\, \tau'(z) \end{pmatrix} + \underline{\rho}^{[1]} \wedge \underline{m}^{[0]}, \quad \text{avec} \quad \underline{\rho}^{[1]} = \begin{pmatrix} -w_y'(z) \\ w_x'(z) \\ \tau(z) \end{pmatrix}.$$

En substituant cette expression dans l'équation III.1c il vient

$$\begin{pmatrix} -C_1\, w_y'''(z) \\ C_2\, w_x'''(z) \\ \mu\, J_\tau\, \tau''(z) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N^{[0]}\, w_y'(z) \\ -N^{[0]}\, w_x'(z) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\tau'(z)\, m^{[0]} \\ 0 \\ -w_y''(z)\, m^{[0]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{III.2}$$

Si l'on cherche une solution harmonique dans la direction axiale sous la forme

$$(w_x, w_y, \tau) = (W_x, W_y, T)e^{i\,q\,Z},$$

la seconde équation de III.2 donne le seuil de flambage d'Euler. Les deux équations restantes constituent un système linéaire. L'existence de solutions non nulles est associée à la charge critique

$$N^{[0]} = \frac{(m^{[0]})^2}{J_\tau\, \mu} - C_2\, q^2, \tag{III.3}$$

c'est dire, sous forme adimensionnée,

$$\overline{N}^{[0]} = (\overline{m}^{[0]})^2 - \overline{q}^2,$$

où $\overline{N} = \frac{N\,L^2}{C_2}$, $\overline{q} = L\,q$ et $\overline{m}^{[0]} = \frac{L\,m^{[0]}}{\sqrt{C_2\,J_\tau \mu}}$. Cette relation de dispersion, identique à celle obtenue par GORIELY et TABOR (1998), est tracé sur la figure III.4(b). Pour des conditions aux limites simples il vient $q_c \sim \frac{2\pi}{L}$. Le seuil de flambement associé

$$N_c^{[0]} \sim \frac{(m^{[0]})^2}{J_\tau\,\mu} - \frac{4\,C_2\,\pi^2}{G\,L^2},$$

est positif lorsque $L > L^\star$ avec $L^\star \sim \frac{2\pi}{m^{[0]}}\sqrt{C_2\,J_\tau\,\mu}$. Ce seuil correspond alors à une instabilité qui apparaît en traction, et donc avant le flambage d'Euler généré en compression. Pour une poutre de longueur infinie $q_c = 0$ et nous retrouvons le seuil annoncé par Liu et al. (2014)

$$N_c^{[0]} = \frac{(m^{[0]})^2}{J_\tau \mu}. \tag{III.4}$$

Dans ce modèle, l'instabilité apparaît à grande longueur d'onde ($q_c = 0$) : la longueur d'onde des modes critiques est en pratique uniquement déterminée par la longueur du système. Ce modèle est donc pertinent pour expliquer le flambage *macroscopique* mais ne permet pas de décrire l'apparition de perversions multiples observée lors de l'expérience, figure III.2(a).

III.2.2. Justification du modèle de poutre par réduction dimensionnelle

L'équilibre linéarisé pour une poutre à courbure naturelle décrit ci-dessus peut être obtenu à partir des équations de l'élasticité 3-d, en suivant la démarche introduite dans le chapitre II et fondée sur un développement asymptotique à faible $\eta = \frac{h}{\mathcal{L}}$ où h désigne la dimension typique de la section et $\mathcal{L}$ une longueur axiale typique. Pour cela nous considérons une solide prismatique homogène isotrope soumis à une pré-contrainte purement axiale, hétérogène sur la section $\mathcal{D}$. Le tenseur de pré-contrainte 3-d sur une section est alors de la forme $\boldsymbol{\Sigma}_0^{\text{het}} = \text{Diag}(0, 0, \boldsymbol{\Sigma}_0^{\text{het}\,\perp}(X, Y))$. Quitte à introduire une pré-contrainte homogène supplémentaire $\boldsymbol{\Sigma}_0^{\text{hom}}$, on peut supposer que $\iint_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\Sigma}_0^{\text{het}\,\perp}\,\mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y = 0$.

En introduisant cette pré-contrainte à l'ordre η dans le développement asymptotique introduit dans le chapitre II, c'est à dire en supposant $\boldsymbol{\Sigma}_0^{\text{het}} = \mathcal{O}(\eta)$, nous obtenons une nouvelle forme pour le modèle réduit décrivant les équilibres au voisinage de la configuration étirée. Les détails du raisonnement sont présentés dans l'annexe A.2. Par une démarche en tout point similaire à celle utilisée pour établir le modèle standard II.31 présenté dans le chapitre II, il vient, dans le cas inextensible

$$\begin{aligned}\forall(\hat{w}_\alpha, \hat{u}, \hat{\tau}) \quad & -\int_0^L \begin{pmatrix} \hat{\tau}' \\ \hat{w}_x'' \\ \hat{w}_y'' \end{pmatrix} \cdot \mathcal{H} \cdot \begin{pmatrix} \tau' \\ w_x'' \\ w_y'' \end{pmatrix} \mathrm{d}Z - \int_0^L \begin{pmatrix} \hat{\tau}' \\ \hat{w}_x' \\ \hat{w}_y' \end{pmatrix} \cdot \mathcal{N} \cdot \begin{pmatrix} \tau' \\ w_x' \\ w_y' \end{pmatrix} \mathrm{d}Z \cdots \\ & - \int_0^L \begin{pmatrix} \hat{\tau} \\ \hat{w}_x' \\ \hat{w}_y' \end{pmatrix} \cdot \mathcal{S} \cdot \begin{pmatrix} \tau \\ w_x' \\ w_y' \end{pmatrix} \mathrm{d}Z + \int_0^L \mathcal{G} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\tau} \\ \hat{w}_x \\ \hat{w}_y \\ \hat{w}_x' \\ \hat{w}_y' \end{pmatrix} \mathrm{d}Z = 0, \end{aligned} \tag{III.5}$$

où les opérateurs $\mathcal{H}$, $\mathcal{S}$ et $\mathcal{G}$ introduits dans le chapitre II décrivent les effets respectifs de l'élasticité tangente, de la précontrainte axiale homogène $\boldsymbol{\Sigma}_0^{\text{hom}}$ (d'ordre η^2 comme dans le modèle classique, à l'origine du flambement d'Euler) et du chargement extérieur. Les fonctions τ, w_x et w_y décrivent respectivement les amplitudes des modes de déformation en torsion et flexion autour des axes y (respectivement x). Le nouvel opérateur $\mathcal{N}$ est anti-symétrique et décrit l'effet des hétérogénéités de pré-contrainte. Nous démontrons dans l'annexe A.2 qu'il prend la forme

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\vartheta}_z \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{S}}^{\text{het}} \cdot \mathbf{t}_x & \boldsymbol{\vartheta}_z \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{S}}^{\text{het}} \cdot \mathbf{t}_y \\ \mathbf{t}_x \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{S}}^{\text{het}} \cdot \boldsymbol{\vartheta}_z & 0 & 0 \\ \mathbf{t}_y \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{S}}^{\text{het}} \cdot \boldsymbol{\vartheta}_z & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$ désigne le sous-bloc non nul de l'opérateur $\mathcal{S}$, d'après l'annexe A.2,

$$\mathcal{S}^{\text{het}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{M}_s^{\text{het}} \end{pmatrix}.$$

Enfin $\mathbf{t}_x$ et $\mathbf{t}_y$ représentent les deux translations rigides dans les directions x et y et $\boldsymbol{\vartheta}_z$ la rotation rigide autour de l'axe z, comme dans le chapitre II.

Considérons le cas particulier d'une pré-contrainte hétérogène constante par morceaux dans la section comme dans l'expérience de Liu et al. (2014) schématisée dans la figure III.1(b). Ainsi la portion *II* du ruban est soumise à un étirement $p\,\lambda$ alors que la portion I est soumise à un étirement λ, où λ représente un paramètre d'étirement global. Pour un solide néo-Hookéen quasiment incompressible de section rectangulaire $\mathcal{D} = [-\frac{v}{2}, \frac{v}{2}] \times [-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$, il vient alors, d'après l'expression I.23 du tenseur de pré-contrainte donnée dans le chapitre I,

$$\boldsymbol{\Sigma}_0^{\text{het}\,\perp}(X,Y) = \begin{cases} \mu\,(1 - \frac{1}{\lambda^2\,p^2}) & \text{pour } X < 0 \text{ (portion } II\text{)}, \\ \mu\,(1 - \frac{1}{\lambda^2}) & \text{pour } X > 0 \text{ (portion } I\text{)}. \end{cases} \tag{III.6}$$

Choisissons λ tel que $\iint_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\Sigma}_0^{\text{het}\,\perp}(X,Y)\,\mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y = 0$, c'est à dire $\lambda = \frac{\sqrt{1+p^2}}{p\,\sqrt{2}}$. Avec l'expression II.21 du terme de précontrainte introduite dans le chapitre I,

$$\hat{\Phi} \cdot \mathcal{S} \cdot \Phi = \iint_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\Sigma}_0 : \mathrm{d}_2\boldsymbol{E}(\widehat{\Phi}, \Phi)\,\mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y,$$

où $\mathrm{d}_2\boldsymbol{E}$ est le second incrément de déformation. En injectant l'expression de la rotation rigide $\boldsymbol{\vartheta}_Z = -Y\,\underline{e}_X + X\,\underline{e}_Y$ il vient alors

$$\boldsymbol{\vartheta}_z \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{S}} \cdot \mathbf{t}_x = \mathbf{t}_x \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{S}} \cdot \boldsymbol{\vartheta}_z = \iint_{\mathcal{D}} -Y\,\boldsymbol{\Sigma}_0^{\text{het}\,\perp}\mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y,$$

$$\boldsymbol{\vartheta}_z \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{S}} \cdot \mathbf{t}_y = \mathbf{t}_y \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{S}} \cdot \boldsymbol{\vartheta}_z = \iint_{\mathcal{D}} X\,\boldsymbol{\Sigma}_0^{\text{het}\,\perp}\mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y.$$

Finalement, en remplaçant l'expression III.6 pour $\boldsymbol{\Sigma}_0^{\text{het}\,\perp}$ et l'expression particulière de λ, il vient

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{\mu\,h\,v^2\,(p-1)}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu\,h\,v^2\,(p-1)}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En injectant cette dernière expression dans l'équation III.5 et après intégration par parties nous retrouvons l'équation linéarisée III.2 obtenue à la section précédente à partir d'une modèle de poutre naturellement courbée avec $m^{[0]} = \frac{\mu\,h\,v^2\,(p-1)}{4}$. En identifiant $C_2 = \frac{E\,h\,v^3}{12}$ et $\frac{\mu}{E} = \frac{1}{2}$ (cas quasi-incompressible) il vient

$$\kappa_{\text{nat}} = \frac{3(p-1)}{2\,v}.$$

Nous retrouvons ainsi le résultat de LIU et al. (2014) dans la limite $p \sim 1$.

Notre réduction dimensionnelle fait apparaître deux cas distincts pour une poutre soumise à une contrainte uni-axiale de la forme $\mathbf{\Sigma}_0 = \mathrm{Diag}(0, 0, \mathbf{\Sigma}_0^\perp(X, Y))$,

— si la pré-contrainte est homogène, $\Sigma_0^{\text{hom}} = \mathcal{O}(\epsilon^2)$, $\kappa_{\text{nat}} = 0$ et l'instabilité dominante est le flambement d'Euler,

— si la pré-contrainte est hétérogène, $\Sigma_0^{\text{het}} = \mathcal{O}(\epsilon)$, $\kappa_{\text{nat}} \neq 0$ et l'instabilité dominante est le flambement en hélice.

Dans ce second cas, le modèle réduit obtenu ne permet de décrire les résultats expérimentaux que pour des pré-contraintes d'amplitude modérée (motifs de flambement en hélice).

III.2.3. Conclusion

Le modèle de poutre à courbure naturelle est adapté pour décrire le flambement *macroscopique* en hélice pour une poutre soumise à une pré-contrainte hétérogène. Ce modèle ne fait pas apparaître la petite longueur d'onde au seuil de flambement qui caractérise le mode *microscopique* à perversion multiples. Les résultats sont présentés ici pour la stabilité linéaire. Des solutions non-linéaires sont calculées dans la littérature en utilisant le modèle de poutre : elles correspondent à des modes de grande longueur d'onde, en hélice ou présentant une perversion unique (MCMILLEN et GORIELY, 2002). DOMOKOS et HEALEY (2005) font état de solutions à perversions multiples dans le régime non-linéaire, mais sans relier ces solutions à la branche fondamentale rectiligne.

Le modèle de poutre d'Euler-Bernoulli ne semble pas pertinent lorsque l'amplitude des hétérogénéités de pré-contrainte dans la section devient trop importante. Nous cherchons dans la suite de ce chapitre à préciser les conditions de la transition d'un mode *macroscopique* de grande longueur d'onde vers un mode *microscopique* à petite longueur d'onde, en sortant du cadre du modèle d'Euler.

Les résultats que nous présentons dans les sections suivantes sous forme résumée sont détaillés dans l'article reproduit à la fin de ce chapitre. Nous décrivons les principaux résultats et leurs implications sans rentrer dans le détail des calculs et des démonstrations et faisons référence à cet article lorsque cela est nécessaire.

III.3 Un premier modèle naïf

Le problème classique d'une poutre attachée à une fondation élastique (TIMOSHENKO et GERE, 1961) fait apparaître une petite longueur au seuil de stabilité linéaire. Nous en rappelons d'abord brièvement les principaux résultats. Nous examinons ensuite un premier modèle simple qui reproduit qualitativement la compétition entre modes *microscopiques* et modes *macroscopiques* observée dans l'expérience de HUANG et al. (2012) et LIU et al. (2014). Il s'agit d'une bi-poutre 2-d assemblée avec pré-contrainte. Le cas de la poutre sur fondation et du flambement d'Euler apparaissent alors comme deux limites de ce premier modèle.

III.3.1. Modèle classique de poutre sur fondation

Nous rappelons les résultats de ce modèle classique à titre d'exemple d'un système faisant apparaître une petite longueur d'onde au seuil de bifurcation. Nous verrons par la suite que ce modèle correspond à la limite de notre modèle naïf lorsque la pré-contrainte dans la bi-poutre devient infinie.

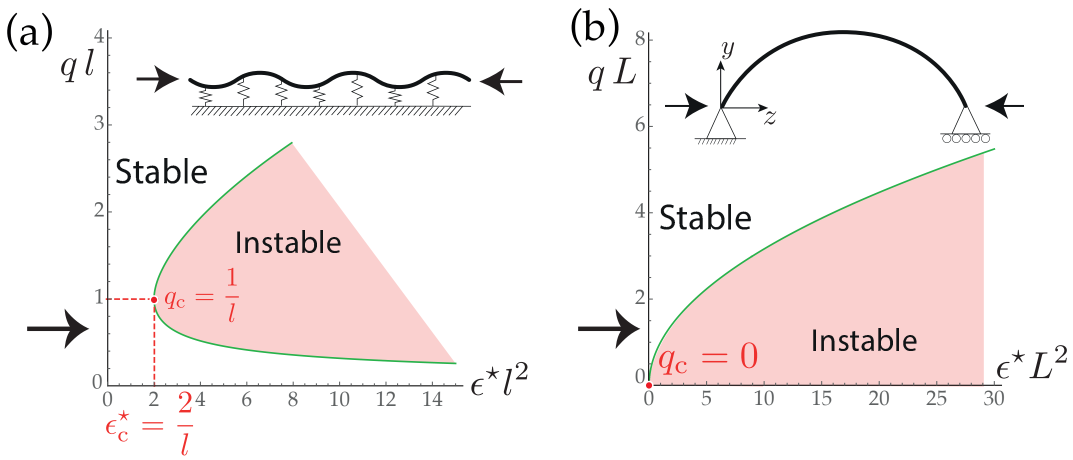

FIGURE III.5 – Courbe de stabilité marginale et sélection du nombre d'onde critique (a) pour la poutre sur fondation : instabilité *microscopique* ; (b) pour l'elastica d'Euler : instabilité *macroscopique*.

Considérons une poutre plane liée à une fondation fixe par un continuum de ressorts linéaires de raideur linéique R. Cette poutre est soumise à une compression axiale, comme schématisé figure III.5(a). L'énergie d'une configuration $y(z)$ s'écrit, à l'ordre 2 en $y(z)$,

$$W(y) = \int_0^L \left[\frac{C}{2}\,(y''(z))^2 - \frac{G\,\epsilon}{2}(y'(z))^2 + \frac{R}{2}(y(z))^2\right] \mathrm{d}z, \tag{III.7}$$

où C et G sont les modules de flexion et de traction définis dans le chapitre II. Dans cet exemple le flambement a lieu en compression, comme pour le flambage d'Euler. Nous utilisons la même convention que dans le chapitre I et considérons que la précontrainte est positive, $G\,\epsilon > 0$ en compression, selon la convention du chapitre I § I.1. Les deux premiers termes de cette énergie sont identiques à l'énergie d'une poutre simple en compression axiale. Le dernier terme correspond à l'énergie potentielle associée aux ressorts. Ce terme a un effet stabilisateur et pénalise les configurations en flexion. La solution fondamentale est la solution triviale rectiligne $y = 0$ et l'équation d'équilibre linéarisé s'écrit, pour tout déplacement virtuel $\hat{y}$ vérifiant les conditions cinématiques imposées aux extrémités,

$$\int_0^L \left[C\,y''(z)\,\hat{y}''(z) - G\,\epsilon\,y'(z)\,\hat{y}'(z) + R\,y(z)\,\hat{y}(z)\right] \mathrm{d}z = 0.$$

Le problème étant linéaire et invariant dans la direction z, nous cherchons une solution harmonique $y(z) = Y\,e^{i\,q\,z}$. La relation de dispersion s'écrit

$$\overline{q}^2\left(\overline{q}^2 - \overline{\epsilon}\right) + 1 = 0 \tag{III.8}$$

où $\overline{\epsilon} = \frac{\epsilon\,G\,l^2}{C} = \epsilon^\star\,l^2$ et $\overline{q} = l\,q$ avec $l = \left(\frac{C}{R}\right)^{\frac{1}{4}}$. Nous définissons ici une longueur naturelle l qui dépend du rapport entre le module de flexion de la poutre et l'élasticité de la fondation. Les racines réelles de la relation de dispersion III.8 sont tracées figure III.5(a).

Lorsque la longueur de la poutre est infinie le nombre d'onde critique et la compression critique associée tendent vers $\lim_{L\to\infty} q_c = \frac{1}{l}$ et $\lim_{L\to\infty} \epsilon_c = \frac{2\,C}{l^2\,G}$. Le nombre d'onde critique est ainsi déterminé par la longueur naturelle l : une raideur

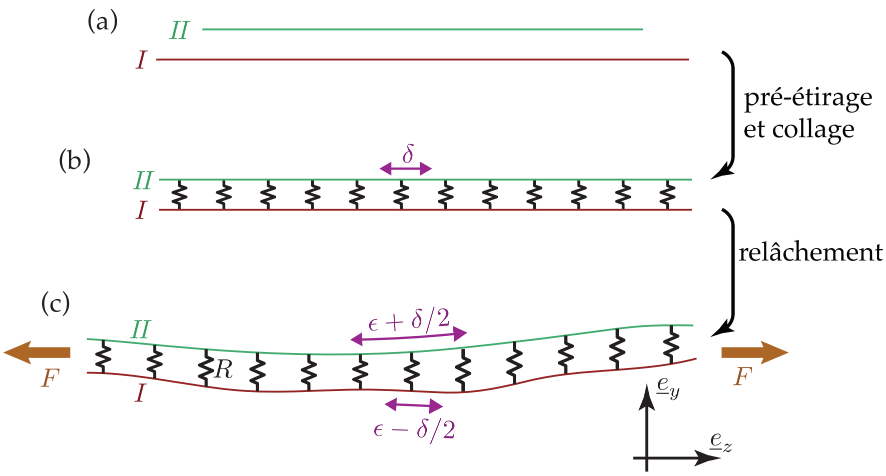

FIGURE III.6 – Modèle de bi-poutre : δ est l'écart de pré-contrainte et ϵ est l'extension moyenne imposée (en contrôlant la force F ou le déplacement des extrémités). Une pré-contrainte en extension est représentée pour faciliter la lecture $\epsilon+\delta/2 > \epsilon-\delta/2 > 0$ mais en réalité la structure devient instable lorsque la pré-contrainte est compressive dans la poutre I, $\epsilon - \delta/2 < 0$.

R élevée diminue la valeur de l pénalisant ainsi les grandes longueurs d'ondes. Avec ce modèle, le nombre d'onde obtenu est non nul et le mode critique est de type *microscopique*, par opposition au cas du flambement d'Euler représenté figure III.5(b) et pour lequel $\lim_{L\to\infty} q_c = 0$.

Dans la suite nous adopterons la convention d'une contrainte négative en compression car l'instabilité générée dans l'expérience de HUANG et al. (2012) et LIU et al. (2014) a lieu pour une contrainte globale en traction.

III.3.2. Un modèle de bi-poutre pour analyser l'expérience

Nous introduisons dans cette section un premier modèle simple qui présente une transition entre les deux types de flambement *microscopique* et *macroscopique*. Il s'agit d'une représentation simplifiée du système expérimental de HUANG et al. (2012) et LIU et al. (2014) où les deux rubans sont modélisés comme des poutres planes assemblées par un continuum de ressorts linéaires de raideur R, représentant l'élasticité des sections. Dans cet assemblage, représenté figure III.6, la poutre II est soumise à une traction δ préalablement à l'assemblage. Une traction moyenne ϵ est imposée au système après l'assemblage : la poutre pré-étirée est ainsi soumise à une pré-contrainte totale $\epsilon + \delta/2$ alors que la poutre I est soumise à une pré-contrainte totale $\epsilon - \delta/2$. Le paramètre δ mesure l'écart de pré-contrainte entre les deux poutres alors qu'ϵ mesure la pré-contrainte moyenne ($\delta \sim p - 1$ dans la limite d'une faible extension p).

Modèle

L'énergie de ce système s'écrit, par unité de longueur,

$$W(y_I, y_{II}) = \frac{1}{L}\int_0^L \frac{1}{2}\left[\sum_{i=I,II}\left(C\,y_i''^2 + G\left(\epsilon + \frac{\chi_i\,\delta}{2}\right)\,y_i'^2\right) + R\,(y_I - y_{II})^2\right]\,\mathrm{d}z, \tag{III.9}$$

où

$$\chi_i = \begin{cases} -1 & \text{pour la poutre } i = I, \\ +1 & \text{pour la poutre } i = II. \end{cases}$$

Cette expression est similaire à l'énergie de deux poutres y_I et y_{II} sur fondation, voir l'équation III.7, à l'exception d'un terme de couplage lié au travail des ressorts qui dépend maintenant de l'écartement entre les deux moitiés de la bi-poutre $y_I - y_{II}$. Par ailleurs, du fait de la dépendance en $\chi_i = \mp 1$, le second terme de pré-contrainte dans III.9 n'a pas nécessairement le même signe dans ces deux moitiés. Il reste stabilisant dans la poutre II mais devient déstabilisant dans la poutre I dès que $\epsilon - \delta/2$ devient négatif. La poutre II joue ainsi le rôle d'une fondation elle-même déformable et susceptible de flamber.

Nous pouvons utiliser la longueur $l = \left(\frac{C}{R}\right)^{\frac{1}{4}}$ introduite dans le paragraphe précédent de manière à faire apparaître les quantités adimensionnées suivantes : le nombre d'onde $\overline{q}$, la coordonnée axiale $\overline{z}$, l'écart de pré-contrainte $\overline{\delta}$ et la pré-contrainte moyenne $\overline{\epsilon}$

$$\overline{q} = q\,l, \quad \overline{z} = \frac{z}{l}, \quad \overline{\delta} = \frac{\delta\,G\,l^2}{C}, \quad \overline{\epsilon} = \frac{\epsilon\,G\,l^2}{C}. \tag{III.10}$$

L'énergie redimensionnée par unité de longueur $\overline{W} = W/R$ s'écrit alors, d'après III.9,

$$\overline{W}(\overline{\varphi}) = \frac{1}{\overline{L}} \int_0^{\overline{L}} \frac{1}{2} \Big[\overline{\varphi}''(\overline{z}) \cdot c \cdot \overline{\varphi}''(\overline{z}) + \overline{\varphi}'(\overline{z}) \cdot b_{\overline{\epsilon}} \cdot \overline{\varphi}'(\overline{z}) + \overline{\varphi}(\overline{z}) \cdot a \cdot \overline{\varphi}(\overline{z}) \Big]\, \mathrm{d}\overline{z},$$

où $\overline{\varphi}(\overline{z}) = \big(\overline{y}_1(\overline{z}), \overline{y}_{II}(\overline{z})\big)$ décrit la configuration de la bi-poutre de longueur adimensionnée $\overline{L} = \frac{L}{l} \to \infty$. Nous avons introduit ici des matrices 2×2 symétriques

$$a = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b_{\overline{\epsilon}} = \begin{pmatrix} \overline{\epsilon} - \frac{\overline{\delta}}{2} & 0 \\ 0 & \overline{\epsilon} + \frac{\overline{\delta}}{2} \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'expression de l'équilibre linéarisé se déduit très simplement de cette formulation adimensionnée, voir l'article reproduit à la fin de ce chapitre.

Analyse linéaire de bifurcation

La solution homogène est rectiligne, $(y_I, y_{II})_{[0]} = (0, 0)$. Nous cherchons des équilibres adjacents de la forme $\overline{y}_j(\overline{z}) = 0 + \overline{y}^j_{[1]}\, e^{i\,\overline{q}\,\overline{z}} \quad (j = I, II)$, où les $\overline{y}^j_{[1]}$ sont les amplitudes à déterminer. Ceux-ci vérifient la relation de dispersion $\det\big(a + \overline{q}^2\, b_{\overline{\epsilon}} + \overline{q}^4\, c\big) = 0$ qui s'écrit

$$\left(\overline{q}^4 + \overline{\epsilon}\,\overline{q}^2 + 1\right)^2 - \left(\frac{\overline{\delta}^2\,\overline{q}^4}{4} + 1\right) = 0. \tag{III.11}$$

Les calculs sont détaillés dans l'article reproduit à la fin de ce chapitre. Les racines réelles de l'équation III.11 sont tracées sur la figure III.7(a) : le nombre d'onde $\overline{q}$ est représenté en fonction de la pré-contrainte moyenne imposée $\overline{\epsilon}$. Les valeurs de la pré-contrainte moyenne au seuil $\overline{\epsilon}_c$ et leurs nombres d'ondes associés $\overline{q}_c$ sont représentés par des disques noirs.

Deux régimes apparaissent en fonction de la valeur de $\overline{\delta}$, comme on peut le voir sur la figure III.7(b)(c). Nous identifions une valeur critique $\overline{\delta}^\star$ pour ce paramètre :

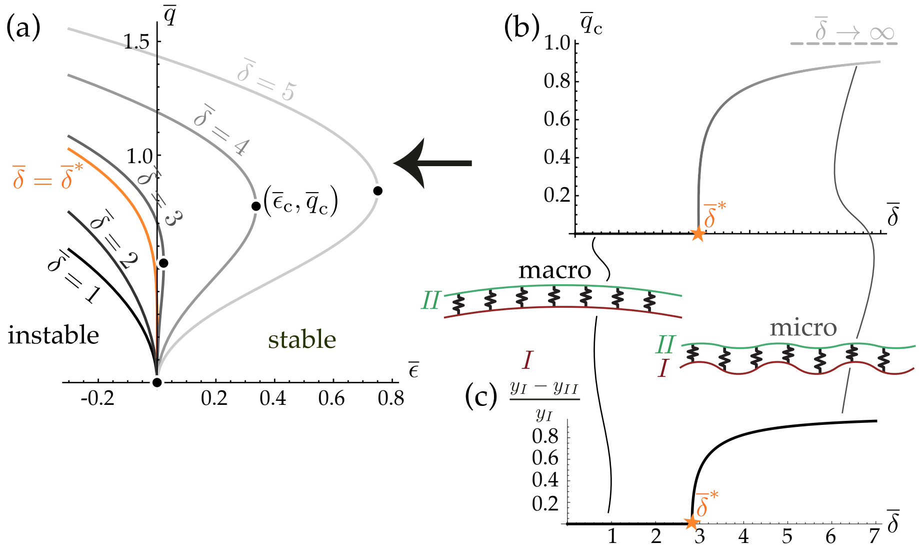

FIGURE III.7 – Analyse de bifurcation de la bi-poutre. (a) Courbes de stabilité marginale en fonction de la pré-contrainte moyenne imposée $\bar{\epsilon}$ pour différentes valeurs de la l'écart de pré-contrainte $\bar{\delta} = 1, 2, \sqrt{8}, 3, 4, 5$ (le trajet de déchargement est indiqué par une flèche). (b) Nombre d'onde du premier mode instable $\bar{q}_c$ en fonction de l'écart de pré-contrainte $\bar{\delta}$. (c) Déformation de la "section", $\frac{y_I - y_{II}}{y_I}$, en fonction de l'écart de pré-contrainte $\bar{\delta}$.

— lorsque $\bar{\delta} < \bar{\delta}^\star$ le nombre d'onde au seuil q_c est nul et les sections de la bi-poutre ne se déforment pas ($\bar{y}_1^I = \bar{y}_1^{II}$), c'est un régime de flambement *macroscopique*,

— lorsque l'écart de pré-contrainte adimensionné est grand ($\bar{\delta} > \bar{\delta}^\star$), q_c est non nul et les sections se déforment, c'est un régime de flambement *microscopique*.

La courbe orange sur la figure III.7(a) correspond à $\bar{\delta} = \bar{\delta}^\star = \sqrt{8}$ qui sépare le régime de flambage *microscopique* du régime de flambage *macroscopique*. Cette valeur critique peut être déterminée en écrivant le développement de l'équation III.11 pour des petites valeurs de $\bar{\epsilon}$. On a alors

$$\bar{q}^4 \left(\bar{q}^4 + 2\,(1 - \bar{\delta}^2/8)\right) \approx 0,$$

et il vient $\bar{\delta}^\star = \sqrt{8}$.

Lorsque l'écart de pré-contrainte est nul, $\delta = 0$, ou pour des ressorts très raides, $R \to \infty$, l'énergie est minimale si $y_I(z) = y_{II}(z)$, c'est à dire si les deux poutres se déplacent ensemble afin d'éviter le coût énergétique associé à la déformation des ressorts. Le modèle est alors équivalent à une poutre unique soumise à une compression $G\,\epsilon$ et l'instabilité obtenue correspond au flambement d'Euler étudié dans le chapitre I.

A l'inverse, si $\epsilon \to +\infty$ et $\delta \to +\infty$ alors que $\epsilon - \delta/2$ reste fini, la poutre II reste droite ($y_{II}(z)$ est constant) afin d'éviter le coût énergétique du terme alors fortement stabilisant $G\,(\epsilon + \delta/2)\,{y'_{II}}^2/2$. Le modèle classique d'une poutre sur fondation, présenté dans la section précédente, décrit alors le comportement de la poutre I, soumise à la pré-contrainte $G\,(\epsilon - \delta/2)$. Ceci correspond en terme de variables adimensionnées à $\bar{\epsilon} \to \infty$ et $\bar{\delta} \to \infty$, avec $\bar{\epsilon} - \bar{\delta}/2$ restant fini. La courbe en gris clair pointillé sur la figure III.7(b) représente cette limite. La convergence du modèle de

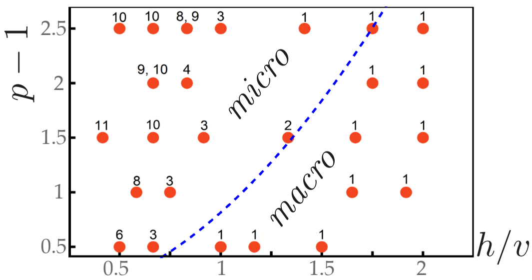

FIGURE III.8 – Nombre de perversions en fonction de la pré-contrainte et du rapport d'aspect, d'après LIU et al. (2014), superposé à transition *micro-macro* prédite par le modèle de bi-poutre (trait bleu pointillé).

bi-poutre vers ces deux cas limites est illustrée dans l'article reproduit à la fin de ce chapitre.

III.3.3. Retour aux résultats expérimentaux

Nous venons de présenter deux modèles de structures élancées produisant des instabilités *microscopiques*. Le second modèle reproduit le comportement expérimental de manière qualitative. Il fait apparaître un nombre sans dimension $\overline{\delta}$, lié au rapport entre l'écart de pré-contrainte et la longueur naturelle l, qui contrôle la transition entre un flambement *macroscopique* (pour $\overline{\delta} < \overline{\delta}^\star$) et un flambement *microscopique* (pour $\overline{\delta} > \overline{\delta}^\star$). Afin de confronter ce modèle aux résultats expérimentaux de HUANG et al. (2012) et LIU et al. (2014), nous proposons ici une analogie avec un modèle de plaque pour proposer une expression approchée du paramètre $\overline{\delta}$ en fonction des paramètres de l'expérience : le rapport d'aspect de la section $\frac{h}{v}$ et le pré-étirement p.

Nous identifions ainsi l'énergie par unité de longueur associée au travail des ressorts dans le modèle de bi-poutre III.9 avec l'énergie de flexion par unité de longueur d'une plaque mince d'épaisseur h et de largeur v, contenue dans le plan (x, z) et soumise à une déflexion $y_{II} - y_I$,

$$W_f \sim \int_0^v E\, h^3 \left(\frac{y_{II} - y_I}{v^2}\right)^2 \mathrm{d}y.$$

Cette identification nous suggère $R \sim E\left(\frac{h}{v}\right)^3$. Pour des faibles pré-contraintes $\delta \approx p-1$, la valeur critique du paramètre de pré-étirement p correspondant à la transition *micro-macro* est ainsi identifiée comme $p^\star - 1 = \delta^\star = \frac{\overline{\delta}^\star\, C}{G\, l^2}$ et ainsi

$$p^\star - 1 \sim \sqrt{2/3}\left(\frac{h}{v}\right)^2. \tag{III.12}$$

La loi d'échelle ainsi obtenue est tracée sur la figure III.8 en trait pointillé bleu et superposée aux résultats de LIU et al. (2014). Malgré une cinématique très approchée, ce modèle naïf de bi-poutre prédit remarquablement bien la transition *micro-macro* observée dans les expériences : les observations expérimentales de motifs à perversions multiples apparaissent dans la plage de paramètres correspondant au régime *microscopique* identifié par ce modèle simple. Cependant, les valeurs d'extension en œuvre dans les expériences dépassent le cadre de l'élasticité linéaire dans lequel

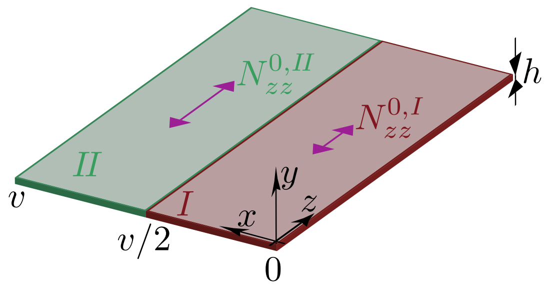

FIGURE III.9 – Plaque mince soumise à une pré-contrainte constante par morceaux : solution homogène plane.

s'inscrit ce modèle, qui reste très élémentaire. En particulier il ne prend pas précisément en compte la distribution des hétérogénéités de pré-contrainte au sein de la section.

Nous proposons dans la suite de modéliser l'expérience de HUANG et al. (2012) et LIU et al. (2014) au moyen de modèles à la cinématique plus riche. D'abord un modèle de plaque mince valable pour des faibles valeurs du rapport d'aspect, $\frac{h}{v} \ll 1$, puis une formulation fondée sur les équations de l'élasticité finie 3-d.

III.4 Modèles plus avancés

III.4.1. Plaque mince

Les équations de Föppl-von-Kármán (CIARLET, 1980) sont couramment utilisées pour modéliser le flambement des tôles métalliques soumises à des contraintes résiduelles hétérogènes induites par des effets thermiques lors des procédés de laminage ou de planage, voir par exemple KPOGAN (2014). Ces travaux font état de motifs de flambement de faible longueur d'onde dont l'apparition est pilotée par la distribution et l'amplitude de la pré-contrainte.

Nous adoptons une approche similaire dans cette section pour modéliser l'expérience de HUANG et al. (2012) et LIU et al. (2014) dans la limite de sections très plates, $h \ll v$. Nous considérons une plaque mince élastique de largeur v, d'épaisseur h et de longueur infinie $L \to \infty$ soumise à une pré-contrainte axiale constante par morceaux, comme représenté figure III.9. La pré-contrainte est alignée avec la direction z,

$$N_{zz}^0(\epsilon; x) = Eh\left(\epsilon + \chi(x)\,\frac{\delta}{2}\right), \tag{III.13a}$$

où $\chi(x) = \pm 1$ désigne la fonction constante par morceaux,

$$\chi(x) = \begin{cases} -1 & \text{dans la demi-plaque } I,\, 0 < x < v/2, \\ +1 & \text{dans la demi-plaque } II,\, v/2 < x < v. \end{cases} \tag{III.13b}$$

Comme pour la bi-poutre, l'écart de pré-contrainte $N_{zz}^{0,II} - N_{zz}^{0,I} = Eh\,\delta$ est généré par la pré-contrainte δ imposée à la moitié II avant l'assemblage avec la moitié I. La pré-contrainte moyenne $(N_{zz}^{0,I} + N_{zz}^{0,II})/2 = Eh\,\epsilon$ est générée par l'extension moyenne ϵ, imposée par le déplacement des extrémités de la plaque après assemblage.

La solution fondamentale est la solution plane représentée sur la figure III.9. Une petite perturbation transverse $w(x, y)$ vérifie les équations de Föppl-von-Kármán linéarisées, voir par exemple AUDOLY (2015),

$$-D\,\Delta^2 w(x,z) + \frac{\partial\big(N^0_{zz}(\epsilon;x)\,w_{,z}(x,z)\big)}{\partial z} = 0,$$

où $D = \frac{E\,h^3}{12\,(1-\nu^2)}$ est le module de flexion de la plaque, E désigne le module de Young et ν le coefficient de Poisson. Les conditions limites en $x = 0$ et $x = v$ sont des conditions de bord libre qui s'écrivent classiquement

$$w_{,xx} + \nu\, w_{,zz} = 0 \quad \text{et} \quad w_{,xxx} + \big(2-\nu\big)\, w_{,xzz} = 0,$$

comme établi par exemple par LANDAU et LIFSHITZ (1970).

Ces équations s'écrivent sous forme adimensionnée en utilisant

$$\overline{\delta} = \frac{\delta}{\delta^\dagger}, \quad \overline{\epsilon} = \frac{\epsilon}{\delta^\dagger}, \qquad \text{où} \quad \delta^\dagger = \frac{1}{12\,(1-\nu^2)}\,\frac{h^2}{v^2}. \tag{III.14}$$

Si l'on considère alors une perturbation harmonique en fonction de la coordonnée axiale adimensionnée,

$$w(x,\overline{z}) = \xi_1\left(\frac{x}{v}\right)\, e^{i\,\overline{q}\,\overline{z}}, \tag{III.15}$$

le problème peut s'écrire comme une équation différentielle d'ordre 4 pour une fonction à une seule variable $\xi_1\left(\frac{x}{v}\right)$ qui ne dépend plus que du module de Poisson ν. Ce problème aux valeurs propres pour $\xi_1\left(\frac{x}{v}\right)$ est soluble numériquement, par exemple par la méthode du tir présentée dans le chapitre I. L'expression détaillée de cette équation et la méthode de résolution utilisée sont présentées dans l'article reproduit à la fin de ce chapitre.

Les résultats sont représentés dans la figure III.10 pour une plaque faite d'un matériau incompressible ($\nu = 0.5$). Les valeurs de la pré-contrainte moyenne imposée au seuil $\overline{\epsilon}_c$ et leurs nombres d'onde associés $\overline{q}_c$ sont représentés par des disques noirs (voir figure III.10(a)). Il existe une valeur critique $\overline{\delta}^\star$ permettant de définir deux régimes.

— Pour les faibles valeurs de l'écart de pré-contrainte, $\overline{\delta} < \overline{\delta}^\star$, le premier nombre d'onde critique $\overline{q}_c$ est nul. Les modes critiques associés correspondent à des déplacements rigides de la section, c'est à dire à des fonctions ξ_1 affines, comme c'est le cas pour $\overline{\delta} = 50$ figure III.10(c)(d).

— Pour les fortes valeurs de l'écart de pré-contrainte, $\overline{\delta} > \overline{\delta}^\star$, le nombre d'onde $\overline{q}_c$ n'est pas nul et augmente avec la valeur de $\overline{\delta}$. Les modes critiques associés correspondent à une courbure de la section $\frac{\xi_1''}{\xi_1}$ localisée dans la zone de plus forte pré-contrainte compressive, c'est à dire pour $\overline{x} < \frac{1}{2}$. C'est le cas pour $\overline{\delta} = 100$ et $\overline{\delta} = 200$ figure III.10(c)(d).

Ainsi ce modèle de plaque reproduit la transition entre des modes de flambement *macroscopiques* pour des faibles valeurs de $\overline{\delta}$ et des modes de flambements *microscopiques* pour les valeurs élevées de $\overline{\delta}$. Ce paramètre adimensionnel mesure le rapport entre l'écart de pré-contrainte et la rigidité en flexion de la section de la plaque. Sa valeur critique est estimée numériquement $\overline{\delta}^\star \approx 90$ (voir figure III.10(b)), c'est à dire $\delta \approx 10\left(\frac{h}{v}\right)^2$ lorsque $\nu = 0.5$. Cette loi d'échelle est similaire à la prédiction du modèle de bi-poutre présenté à la section précédente , voir III.12 mais le facteur numérique

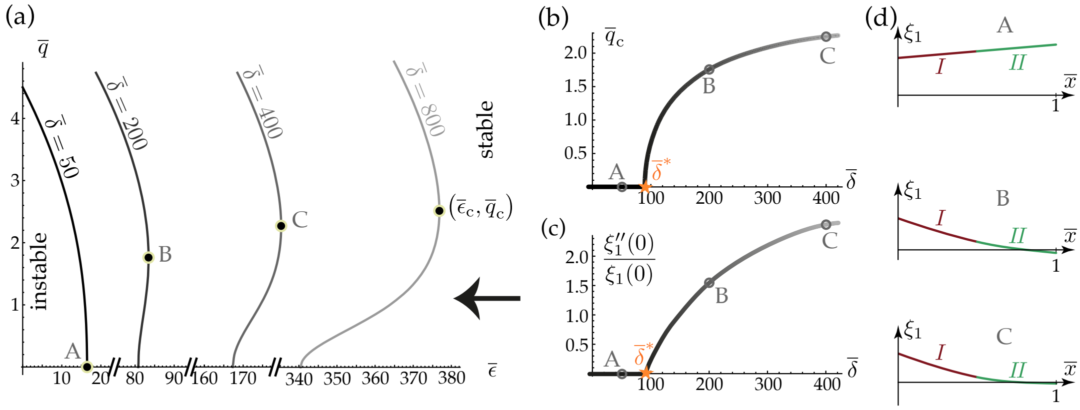

FIGURE III.10 – Analyse de bifurcation linéaire de la solution plane du modèle de plaque avec $\nu = .5$. (a) Courbe de stabilité marginale $(\bar{\epsilon}, \bar{q})$ pour différentes valeurs de l'écart de pré-contrainte $\bar{\delta}$ (le trajet de déchargement est indiqué par une flèche). (b) Nombre d'onde, (c) mesure de la courbure de la section, et (d) déplacement correspondant au premier mode critique $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}_c$, pour différentes valeurs de $\bar{\delta}$. Les points numérotés A, B et C correspondent respectivement à $\bar{\delta} = 50, 200, 400$.

diffère d'un ordre de grandeur. Cet écart s'explique par le détail de la déformation des sections qui n'est pas pris en compte par le modèle de bi-poutre.

Remarquons enfin que $\lim_{\frac{h}{v} \to 0} \delta^\dagger = 0$, ce qui implique des pré-contraintes faibles pour les faibles valeurs du rapport d'aspect. Ainsi, l'utilisation d'un comportement linéaire élastique est justifiée dans le domaine de validité des équations de plaques minces, $\frac{h}{v} \to 0$.

Examinons à présent un modèle rigoureux appuyé sur les équations de l'élasticité 3-d introduites au chapitre I.

III.4.2. Modèle 3-d

Dans cette section, le ruban pré-contraint de l'expérience de HUANG et al. (2012) et LIU et al. (2014) est modélisé par un solide prismatique de section rectangulaire, infiniment long dans sa direction axiale et constitué d'un matériau de Gent hyperélastique faiblement compressible, réputé plus réaliste pour décrire le comportement des polymères. Les différentes configurations de ce solide prismatique sont représentées sur la figure III.11.

— Dans leur configuration naturelle (1) les deux rubans numérotés I et II sont des parallélépipèdes rectangles de section $h \times (v/2)$ et $h' \times (v'/2)$ respectivement.

— Dans la configuration (2), le ruban II est pré-étiré d'un étirement $p \geq 1$ puis les deux ruban sont assemblés. Les dimensions originales h' et $v'/2$ ont été choisies de telle sorte que les deux rubans ont les mêmes dimensions $h \times (v/2)$ dans cette configuration (2). Les coordonnées $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ dans cette configuration sont utilisées comme coordonnées lagrangiennes dans la suite et nous notons $\mathcal{D}$ la section de référence $\mathcal{D} = (0, v) \times (0, h) : (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathcal{D}$.

— Les deux extrémités de la poutre assemblée sont progressivement relâchées et l'étirement global résultant est noté $\lambda \leq 1$. L'extension par rapport à la configuration naturelle (1) dans les deux moitiés de ruban sont respectivement λ

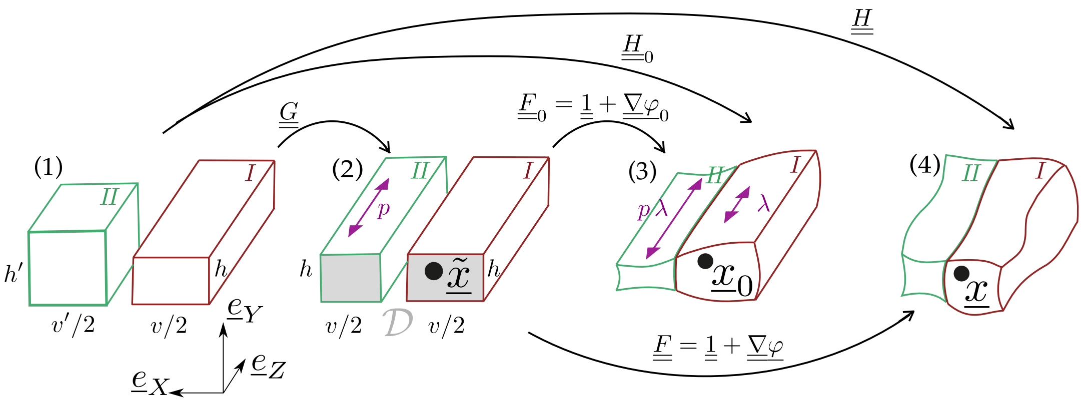

FIGURE III.11 – Modèle 3-d : (1) configuration naturelle, (2) configuration pré-contrainte (configuration de référence), (3) solution homogène pour une pré-contrainte p et une extension globale imposée λ, (4) configuration finale après bifurcation.

dans la moitié I et $p\,\lambda$ dans la moitié II. La solution homogène invariante (3) ainsi obtenue peut être stable ou instable.

— Une configuration flambée non-invariante et non-symétrique (4) apparaît éventuellement lors d'une bifurcation.

Le lien avec les paramètres de chargement ϵ et δ définis dans les deux modèles précédents est obtenu par identification de la pré-contrainte dans chacune des deux moitiés du ruban, ainsi

$$1+\epsilon+\frac{\delta}{2}=\lambda\,p \quad \text{dans la moitié } II,$$
$$1+\epsilon-\frac{\delta}{2}=\lambda \quad \text{dans la moitié } I. \qquad \text{(III.16)}$$

Ainsi lorsque les extensions sont faibles, c'est à dire lorsque $p\sim 1$ et $\lambda\sim 1$, il vient $\epsilon\sim\lambda-1$ et $\delta\sim p-1$.

La configuration (3) étant homogène en Z, il est possible d'utiliser le formalisme introduit dans le chapitre I pour rechercher les équilibres adjacents au voisinage de cette solution. Il suffit pour cela de remplacer le gradient de la transformation $\underline{\underline{F}}$ par le tenseur $\underline{\underline{H}}=\underline{\underline{F}}\cdot\underline{\underline{G}}$ dans l'expression de l'énergie élastique, selon la décomposition multiplicative classiquement utilisée en théorie de la croissance, voir par exemple GORIELY et al. (2008).

Solution fondamentale invariante et homogène

Le système étant invariant dans la direction axiale, la solution homogène s'écrit

$$\underline{\varphi}_0^{\lambda}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})=\underline{\varphi}_0^{||}(\lambda;\tilde{x},\tilde{y})+(\lambda-1)\,\tilde{z}\,\underline{e}_Z,$$

où $\underline{\varphi}_0^{||}(\lambda;\tilde{x},\tilde{y})$ peut être calculé numériquement en fonction du paramètre λ en résolvant un problème d'élasticité 2-d non-linéaire sur la section $\mathcal{D}$. Ce problème s'écrit de la même manière que dans le chapitre I § I.2.2., pour tout champ virtuel 2-d $\underline{\widehat{\varphi}}(\tilde{x},\tilde{y})$ vérifiant les conditions aux limites sur la section,

$$\iint_{\mathcal{D}}\underline{\underline{\Sigma}}(\underline{\varphi}_0^{||}):\left(\underline{\underline{H}}^T(\underline{\varphi}_0^{||})\cdot\underline{\underline{\widehat{H}}}\right)\,\mathrm{d}\tilde{x}\,\mathrm{d}\tilde{y}=0,$$

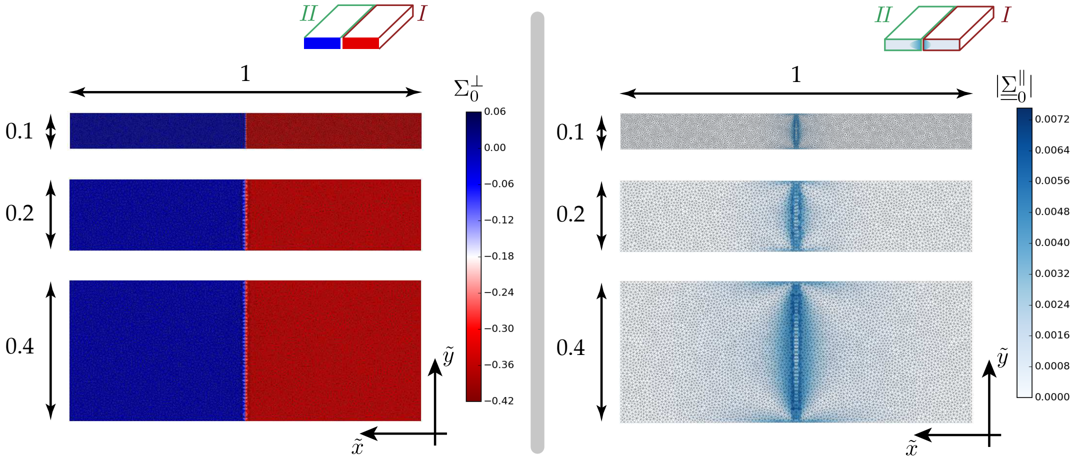

FIGURE III.12 – Pré-contrainte associée à la solution homogène pour le barreau hétérogène sous étirement λ constant : pré-contrainte axiale $\Sigma_0^\perp(\lambda;\tilde{x},\tilde{y})$ (à gauche) et norme de la pré-contrainte dans le plan de la section $|\underline{\underline{\Sigma}}_0^{\parallel}(\lambda;\tilde{x},\tilde{y}))|$ (à droite) pour les rapports d'aspect $h/v = 0.1, 0.2, 0.4$ (de haut en bas) ; paramètres matériau : $\mu = 1$, $K = 10$, $J_{\mathrm{m}} = 100$ (voir loi de comportement I.15 dans le chapitre I) ; pré-étirement $p = 1.11$; extension globale imposée $\lambda = 0.9$.

où $\widehat{\underline{\underline{H}}} = \widehat{\underline{\underline{F}}} \cdot \underline{\underline{G}}$. L'expression générale de $\underline{\underline{\Sigma}}$ pour le modèle de Gent utilisé dans ce chapitre ainsi que les détails de l'implémentation sont exposés dans l'article reproduit à la fin de ce chapitre. Comme signalé au chapitre I, le tenseur de pré-contrainte de Piola-Kirchhoff pour cette solution présente une forme diagonale par blocs

$$\underline{\underline{\Sigma}}(\underline{\varphi}_{[0]}^{\lambda}) = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\Sigma}}_0^{\parallel}(\lambda;\tilde{x},\tilde{y}) & 0 \\ 0 & \Sigma_0^\perp(\lambda;\tilde{x},\tilde{y}) \end{pmatrix}. \tag{III.17}$$

Cette dernière propriété est une conséquence directe de l'invariance de la solution fondamentale dans la direction axiale Z. Notons que la dépendance par rapport au paramètre de pré-étirement p est une nouveauté par rapport au formalisme du chapitre I § I.2.2. et reste implicite dans nos notations. Les cartographies des valeurs prises par ce tenseur de pré-contrainte sont tracées figure III.12 pour différents rapports d'aspect (la valeur de h varie alors que $v = 1$). La contrainte axiale (à gauche) est quasiment uniforme sur chacune des deux moitiés de la section : le solide est en compression dans la région I et en tension dans la région II pour ces valeurs des paramètres de chargement. C'est cette pré-contrainte compressive qui peut rendre instable la configuration homogène, comme nous le verrons plus loin.

Les composantes non-axiales du tenseur des contraintes (à droite) prennent des valeurs non nulles du fait d'incompatibilités géométriques entre les deux domaines, voir figure III.12(b). Celles-ci sont localisées au voisinage de l'interface et proviennent des écarts entre les modules d'élasticité tangente du matériau dans ces deux zones. Les modules d'élasticité tangente sont en effet affectés par l'état de pré-contrainte du matériau, ainsi que nous l'avons remarqué dans les chapitres I et II. Ces composantes non-axiales restent néanmoins très faibles devant la pré-contrainte axiale, comme l'attestent les échelles sur la figure III.12.

Analyse de bifurcation

L'analyse de bifurcation de la solution homogène s'appuie sur les résultats du chapitre I § I.3.3. où nous avions montré que pour une perturbation harmonique en $\tilde{z}$ associée au nombre d'onde q le problème de bifurcation peut s'écrire comme un problème aux valeurs propres quadratique

$$\forall \widehat{\underline{\xi}}, \quad \widehat{\underline{\xi}} \cdot \left(K_\lambda + q\, C_\lambda + q^2\, M_\lambda\right) \cdot \underline{\xi} = 0, \tag{III.18}$$

où le vecteur propre $\underline{\xi}$ contient l'amplitude complexe des degrés de libertés réels et virtuels discrétisés sur la section $\mathcal{D}$. Ici avec des notations continues, le déplacement est recherché sous une forme harmonique en $\tilde{z}$

$$\underline{\varphi}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \left(\underline{\xi}^{\parallel}(\tilde{x}, \tilde{y}) + i\, \underline{\xi}^{\perp}(\tilde{x}, \tilde{y})\right) e^{i\, q\, \tilde{z}},$$

$$\widehat{\underline{\varphi}}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \left(\hat{\underline{\xi}}^{\parallel}(\tilde{x}, \tilde{y}) + i\, \hat{\underline{\xi}}^{\perp}(\tilde{x}, \tilde{y})\right) e^{i\, q\, \tilde{z}}.$$

Cette formulation est une conséquence directe de l'invariance de la solution fondamentale et de l'hypothèse $L \to \infty$. Les matrices K_λ, C_λ et M_λ dépendent de la solution homogène via les paramètres λ et p, des caractéristiques de la section et du matériau considéré. L'expression détaillée de ces matrices diffère ici de celle présentée au chapitre I car la solution homogène dépend maintenant du paramètre de pré-étirement incompatible p. Elle est donnée dans l'article reproduit à la fin de ce chapitre pour un matériau de Gent.

L'implémentation numérique par éléments finis de la résolution du problème aux valeurs propres III.18, similaire à celle utilisée dans le chapitre I § I.3.3. pour résoudre le problème de bifurcation linéaire du barreau en compression, est détaillée dans ce même article.

Les solutions numériques du problème aux valeurs propres III.18 sont tracées figure III.13(a) pour $\frac{h}{v} = 0.1$ et pour différentes valeurs de la précontrainte p. Les valeurs de l'étirement global au seuil λ_c et les nombres d'onde associés q_c sont représentés par des disques noirs. Dans les calculs par éléments finis, la taille de maille caractéristique ainsi que le pas $\Delta\lambda$ entre deux calculs ont été choisis de telle sorte que l'erreur numérique sur la valeur de q_c reste inférieure à 0.05 en valeur absolue. Comme avec les modèles précédents, nous observons une transition d'un flambement *macroscopique* de grande longueur d'onde ($q_c = 0$ si $p \leq p^\star$) vers un flambement *microscopique* à petite longueur d'onde ($q_c > 0$ si $p > p^\star$) lorsque la valeur du pré-étirement p augmente. La valeur critique correspondant à la transition entre ces deux régimes est estimée numériquement à $p^\star \approx 1.1$ pour $\frac{h}{v} = 0.1$.

La figure III.13(b) présente une comparaison des résultats du modèle 3-d avec le modèle de plaque introduit au § III.4.1. Le nombre d'onde critique q_c est tracé en fonction de l'écart de pré-contrainte adimensionné $\overline{\delta}$ (calculé à partir de la valeur du pré-étirement p et en utilisant les relations III.16) pour différentes valeurs du rapport d'aspect. Cette prédiction du modèle 3-d converge vers la prédiction du modèle de plaque dans la limite des faibles rapports d'aspects, comme attendu. Pour $\frac{h}{v} = 0.1$ et $p = 1.11$ le premier mode instable, tracé en figure III.13(c), se déforme essentiellement en flexion et le déplacement associé est principalement vertical. Cette cinématique est similaire à celle qui sous-tend le modèle de plaque, voir figure III.10(c).

Cette approche 3-d est rigoureuse car elle s'appuie sur les équations exactes de l'élasticité finie. Elle prend non seulement en compte une cinématique complète, mais également les non-linéarités de comportement qui ne sont pas négligeables lorsque la pré-contrainte atteint une valeur élevée. La formulation utilisée dans ce

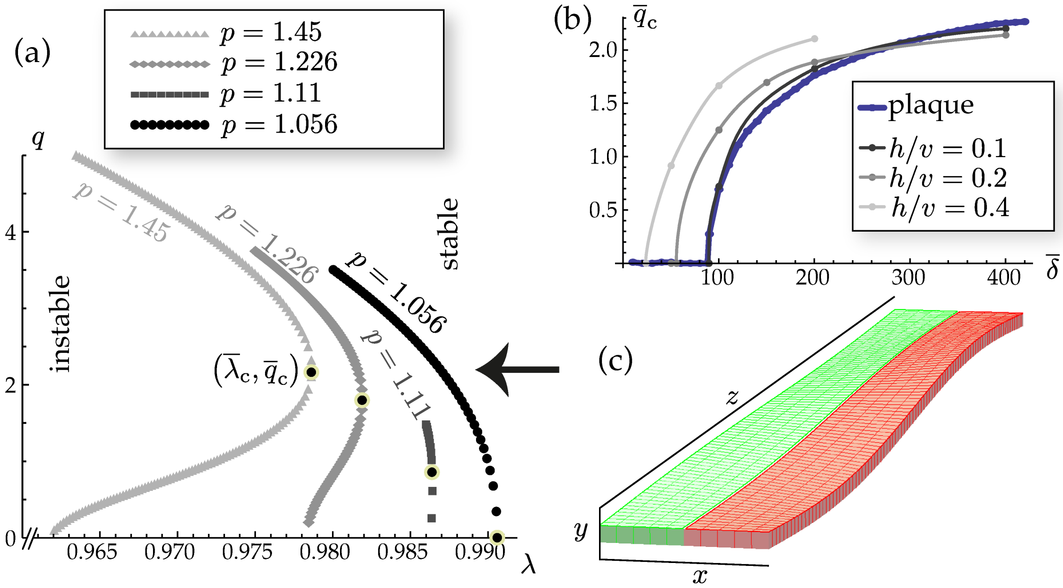

FIGURE III.13 – Analyse de bifurcation pour le modèle 3-d hyper-élastique avec $\mu = 1$, $K = 10$, $J_{\mathrm{m}} = 100$ et la taille de maille typique $e = 0.02$. (a) Courbe de stabilité marginale pour $h/v = 0.1$ et différentes valeurs du pré-étirement p. Le trajet de déchargement est indiqué par une flèche. Premier mode critique. (b) Test de numérique de convergence vers le modèle de plaque dans la limite d'un faible rapport d'aspect $h/v \to 0$: le nombre d'onde critique prédit par le modèle 3-d (points connectés par des traits fins) converge vers le nombre d'onde prédit par le modèle de plaque (traits épais). (c) Premier mode critique pour $p = 1.11$ et $h/v = 0.1$, tracé pour une petite amplitude arbitraire.

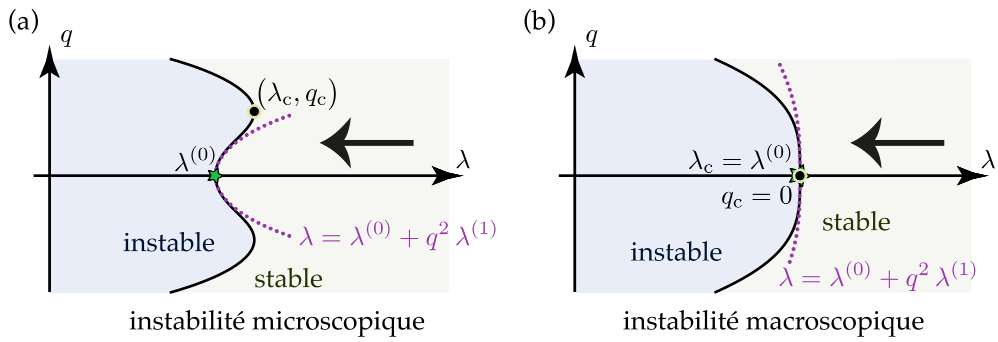

FIGURE III.14 – Courbes de stabilité marginale pour deux solides prismatiques soumis à une pré-contrainte hétérogène (version stylisée de la figure III.13). Le trajet de déchargement est indiqué par une flèche. (a) : Cas d'une instabilité *microscopique* : le système bifurque pour $\lambda = \lambda_c$ et un nombre d'onde $q_c \neq 0$ est sélectionné. (b) Cas d'une instabilité *macroscopique* : un nombre d'onde nul est sélectionné, $q_c = 0$, et $\lambda^{(0)} = \lambda_c$.

paragraphe est une variante des équations introduites au chapitre I qui permet de traiter une distribution arbitraire de pré-contrainte dans la section.

Cependant, ce dernier modèle implique des calculs numériques fastidieux, surtout lorsqu'il s'agit de réaliser une étude paramétrique et de déterminer la valeur de pré-contrainte $p^\star$ correspondant à la transition entre flambement *macroscopique* et flambement *microscopique*. En effet, il faut alors résoudre le problème aux valeurs propres quadratique III.18 pour chaque valeur de l'extension globale λ afin de déterminer λ_c de manière suffisamment précise et estimer ainsi la valeur de q_c. Il est ensuite nécessaire d'itérer cette opération pour plusieurs valeurs de la pré-contrainte p afin d'encadrer la valeur de $p^\star$. Nous présentons dans la prochaine section une méthode originale permettant de contourner cette difficulté.

III.5 Développement à faible nombre d'onde

III.5.1. Principe

Les courbes de stabilité marginale stylisées sont tracées figure III.14 pour les deux scénarios de flambement d'un solide prismatique soumis à une pré-contrainte inhomogène. L'étirement global imposé λ est progressivement réduit (comme indiqué par la flèche) et la solution homogène bifurque à la valeur critique λ_c. Nous notons $\lambda^{(0)}$ l'étirement correspondant à l'existence d'un mode linéaire de longueur d'onde infinie au voisinage de la branche fondamentale. Noter que pour le flambement *microscopique* $\lambda^{(0)} < \lambda_c$ alors que $\lambda^{(0)} = \lambda_c$ pour le flambement *macroscopique*.

Au voisinage du point $\left(\lambda^{(0)}, 0\right)$ où elle intersecte l'axe λ, la courbe de stabilité marginale peut être approchée par une parabole telle que $\lambda = \lambda^{(0)} + q^2\,\lambda^{(1)}$ (lignes en pointillés sur les deux parties figure III.14). Le développement asymptotique que l'on se propose de présenter dans cette section a pour objectif de calculer le coefficient $\lambda^{(1)}$ directement à partir de la solution fondamentale. Le signe de $\lambda^{(1)}$ détermine la courbure de la courbe de stabilité marginale au voisinage de $\left(\lambda^{(0)}, 0\right)$. Comme représenté sur la figure III.14, une longueur d'onde infinie correspond à $\lambda^{(1)} < 0$, alors qu'une petite longueur d'onde correspond à $\lambda^{(1)} > 0$. La méthode présentée ici permet ainsi de déterminer si la bifurcation est *microscopique* ou *macroscopique* sans résoudre le problème de bifurcation complet. Elle peut être appliquée à chacun des trois modèles présentés dans les sections précédentes : bi-poutre, plaque mince ou modèle 3-d. Nous en présentons d'abord une formulation générale, puis nous détaillerons son application au modèle de plaque.

Forme générale du problème de bifurcation

Pour les trois modèles étudiés dans cette section (bi-poutre, plaque mince et modèle 3-d), l'invariance de la solution fondamentale dans la direction axiale permet d'écrire la forme faible de l'équilibre linéarisé comme un problème aux valeurs propres polynomial en q

$$\forall \hat{\xi}, \quad \hat{\xi} \cdot d_\lambda^0 \cdot \xi_1 + q\, \hat{\xi} \cdot d_\lambda^1 \cdot \xi_1 + \cdots + q^n\, \hat{\xi} \cdot d_\lambda^n \cdot \xi_1 = 0, \tag{III.20}$$

où le vecteur ξ_1 rassemble les degrés de liberté sur la section, associés à une perturbation harmonique $\varphi_1 = \xi_1 e^{i\,q\,z}$ dans la direction axiale.

Dans le cas du modèle de bi-poutre présenté § III.3.2., le vecteur ξ_1 est un vecteur réel à deux composantes $(\overline{y}^I, \overline{y}^{II})$. Les opérateurs d_λ^j sont alors des matrices réelles et le vecteur des déplacements virtuels $\hat{\xi}$ peut être directement éliminé de III.20. Pour les modèles plus raffinés de type plaque mince ou élasticité 3-d, voir § III.4.1. et § III.4.2., les sections possèdent un nombre infini de degrés de liberté et ξ_1 est une collection de fonctions définies sur chaque section : fonctions scalaires d'une seule variable dans le cas de la bi-plaque ou fonctions vectorielles 3-d de deux variables dans le modèle 3-d. Dans ces deux cas les produits scalaires dans l'équation III.20 impliquent des intégrations sur la section et l'élimination des déplacements virtuels $\hat{\xi}$ n'est pas toujours souhaitable.

L'ordre n et les opérateurs bilinéaires d_λ^0, ..., d_λ^n dépendent du modèle considéré (poutre, plaque, élasticité 3-d, ...). Leur expression explicite dépend de la solution fondamentale que l'on suppose ici connue ; elle est détaillée dans LESTRINGANT et AUDOLY (2016) pour chacun des modèles étudiés dans cette section. Pour le modèle 3-d, la forme III.20 s'identifie directement avec l'équation III.18 pour $n = 2$ en posant $d_\lambda^0 = K_\lambda$, $d_\lambda^1 = C_\lambda$ et $d_\lambda^2 = M_\lambda$.

Comme l'ordre n du problème aux valeurs propres polynomial III.20 dépend du modèle utilisé, nous choisissons d'unifier la présentation des différents modèles en observant que pour n'importe quelle valeur de n, l'équation III.20 peut se récrire sous la forme d'un problème aux valeurs propres *quadratique* sans terme linéaire en q

$$\forall \widehat{\Xi}, \quad \widehat{\Xi} \cdot A_\lambda \cdot \Xi + q^2\, \widehat{\Xi} \cdot B_\lambda \cdot \Xi = 0, \tag{III.21a}$$

où A_λ et B_λ sont deux opérateurs symétriques. Le vecteur propre généralisé Ξ est défini par la somme directe des vecteurs propres de l'équation d'origine ξ_1 et de vecteurs de la forme $q^k\, \xi_1$ pour certaines puissances k bien choisies. Ces vecteurs se notent par blocs

$$\Xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ q^k\, \xi_1 \\ \cdots \end{pmatrix}. \tag{III.21b}$$

Dans l'équation III.21a, le déplacement virtuel $\widehat{\Xi}$ est un vecteur arbitraire de même longueur que Ξ mais pas nécessairement de la forme III.21b. Une propriété importante de cette équation est que le noyau de A_λ est indépendant de l'étirement global λ. Ces différentes propriétés peuvent être vérifiées pour chacun des modèles comme nous le montrons dans LESTRINGANT et AUDOLY (2016). Le lecteur intéressé est invité à se référer cet article reproduit à la fin de ce chapitre et qui présente les expressions détaillées de l'équation III.21a pour les différents modèles étudiés.

Développement asymptotique

Nous utilisons le nombre d'onde q comme un paramètre de développement et cherchons une solution à l'équilibre linéarisé III.21a sous la forme

$$\Xi = \Xi^{(0)} + q^2\,\Xi^{(1)} + q^4\,\Xi^{(2)} + \cdots \tag{III.22a}$$

$$\lambda = \lambda^{(0)} + q^2\,\lambda^{(1)} + q^4\,\lambda^{(2)} + \cdots \tag{III.22b}$$

L'absence de puissances impaires de q dans ces développements est imposée par la symétrie $q \to -q$ dans l'équation III.21a. Cette symétrie est elle-même une conséquence de la symétrie de la solution homogène par réflexion par rapport au plan (x, y).

Les opérateurs A_λ et B_λ dépendent de λ et peuvent être développés en utilisant III.22b

$$A_\lambda = A_{(0)} + q^2\,\lambda^{(1)}\,A'_{(0)} + \cdots \tag{III.23a}$$

$$B_\lambda = B_{(0)} + q^2\,\lambda^{(1)}\,B'_{(0)} + \cdots \tag{III.23b}$$

où nous notons $A_{(0)} = A_{\lambda=\lambda^{(0)}}$, $B_{(0)} = B_{\lambda=\lambda^{(0)}}$ et

$$A'_{(0)} = \left.\frac{\mathrm{d}A_\lambda}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=\lambda^{(0)}}, \qquad A''_{(0)} = \left.\frac{\mathrm{d}^2 A_\lambda}{\mathrm{d}\lambda^2}\right|_{\lambda=\lambda^{(0)}}, \qquad B'_{(0)} = \left.\frac{\mathrm{d}B_\lambda}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=\lambda^{(0)}}.$$

Résumé formel de la méthode

Dans un souci de concision nous ne présenterons pas ici les détails de la résolution de l'équation III.21a ordre par ordre grâce au développement introduit ci-dessus. Celle-ci consiste à caractériser le noyau de l'opérateur A_λ, constitué des modes dits *rigides*, puis à écrire l'alternative de Fredholm pour cet opérateur à chaque ordre. Nous déterminons ainsi une condition de solubilité qui doit être vérifiée à chaque ordre préalablement à la résolution des équations. Le lecteur est invité à se référer à l'article reproduit à la fin de ce chapitre où une présentation complète de la mise en œuvre de ce développement est proposée.

Les principales étapes en sont résumées ci-dessous.

1. Vérification des propriétés requises pour les opérateurs : A_λ et B_λ sont symétriques et $\ker A_\lambda$ ne dépend pas de λ ;
2. Condition de solubilité à l'ordre 2. Calculer la restriction B^* de l'opérateur B_λ à $\ker A$ et déterminer l'étirement $\lambda^{(0)}$ en résolvant l'équation implicite
$$\det B^*(\lambda^{(0)}) = 0; \tag{III.24}$$
3. Résolution à l'ordre 2. Déterminer la dimension n^* de $\ker B^*(\lambda^{(0)})$ et introduire les n^* composantes inconnues de $\Xi^{(0)}$ dans une base de $\ker B^*(\lambda^{(0)})$,
$$\Xi^{(0)} \in \ker B^*(\lambda^{(0)}), \tag{III.25}$$
$$n^* = \dim \ker B^*(\lambda^{(0)}); \tag{III.26}$$

4. Résolution à l'ordre 2. Trouver une solution particulière $\Xi_{\mathrm{p}}^{(1)}$ du problème aux valeurs propres à l'ordre q^2 :

$$\forall \widehat{\Xi}, \quad \widehat{\Xi} \cdot A_{(0)} \cdot \Xi^{(1)} + \widehat{\Xi} \cdot B_{(0)} \cdot \Xi^{(0)} = 0 \tag{III.27}$$

en fonction des n^* composantes de $\Xi^{(0)}$;

5. Condition de solubilité à l'ordre 4. Utiliser l'équation

$$\forall \widehat{\Xi} \in \ker B^*(\lambda^{(0)}), \quad \widehat{\Xi} \cdot B_{(0)} \cdot \Xi_{\mathrm{p}}^{(1)} + \lambda^{(1)} \widehat{\Xi} \cdot B'_{(0)} \cdot \Xi^{(0)} = 0 \tag{III.28}$$

pour écrire n^* équations pour les n^* composantes de $\Xi^{(0)}$ et pour $\lambda^{(1)}$;

6. Condition de solubilité à l'ordre 4. Résoudre ces n^* équations pour $\lambda^{(1)}$ et pour $\Xi^{(0)}$ à une constante multiplicative près.

Comme annoncé, cette méthode permet de calculer $\lambda^{(1)}$ et de déduire ainsi le type de bifurcation : flambement *microscopique* si $\lambda^{(1)} > 0$ et flambement *macroscopique* si $\lambda^{(1)} < 0$.

Pour les modèles de bi-poutre et de plaque mince, définis dans le cadre de l'élasticité linéaire (*i. e.* dans la limite des faibles λ), le paramètre de chargement n'est pas l'étirement global λ mais l'extension moyenne $\epsilon \sim 1 - \lambda$.

Cette méthode présente de nombreuses similarités formelles avec le développement faiblement non-linéaire brièvement présenté dans le cadre du flambement d'Euler dans le chapitre I § I.1. Ce dernier, connu sous le nom de Lyapunov-Schmidt-Koiter (KOITER, 1965 ; HEIJDEN, 2008) fait également intervenir des opérateurs singuliers et implique pour cela l'écriture d'une condition de solubilité à chaque ordre. Il y a cependant une différence fondamentale entre ces deux méthodes. La méthode de Lyapunov-Schmidt-Koiter consiste en un développement *non-linéaire* de l'*amplitude* du déplacement en fonction du chargement alors que dans notre méthode un développement de la *longueur d'onde critique* en fonction du chargement est résolu à partir de l'équation d'équilibre *linéarisée* par rapport au déplacement (qui est non-linéaire par rapport au nombre d'onde q).

L'article reproduit à la fin de ce chapitre présente des applications détaillées de cette procédure générale aux trois modèles étudiés dans ce chapitre, § III.3.2., III.4.1. et III.4.2.. Nous discuterons les résultats ainsi obtenus pour le modèle de plaque dans la prochaine section. Pour ce modèle, le développement à faible nombre d'onde peut être mené de manière analytique et les résultats sont exprimés de manière explicite.

III.5.2. Application au modèle de plaque mince

Les détails techniques de la mise en œuvre du développement asymptotique à faible q présenté ci-dessus étant présentés en détails dans l'article reproduit à la fin de ce chapitre, nous nous contentons d'en commenter ici les principaux résultats pour le problème de la plaque mince soumise à une pré-contrainte hétérogène constante par morceaux, décrit § III.4.1. et schématisé figure III.9. Notons que l'extension est notée ϵ dans le cadre de l'élasticité linéarisée, ce paramètre remplacera donc λ dans le développement précédent.

Pour ce modèle, le vecteur ξ des degrés de liberté sur une section est une fonction scalaire de la variable transverse x qui correspond à la restriction de la déflexion $w(x, z)$. L'opérateur A dérive d'une énergie de flexion et son noyau est de dimension 2. Il est défini comme l'ensemble des déplacements affines en x et des déplacements uniformes sur la section : $\xi(x) = \alpha\, x + \beta$ pour $(\alpha, \beta) \in \Re^2$, ce qui correspond aux

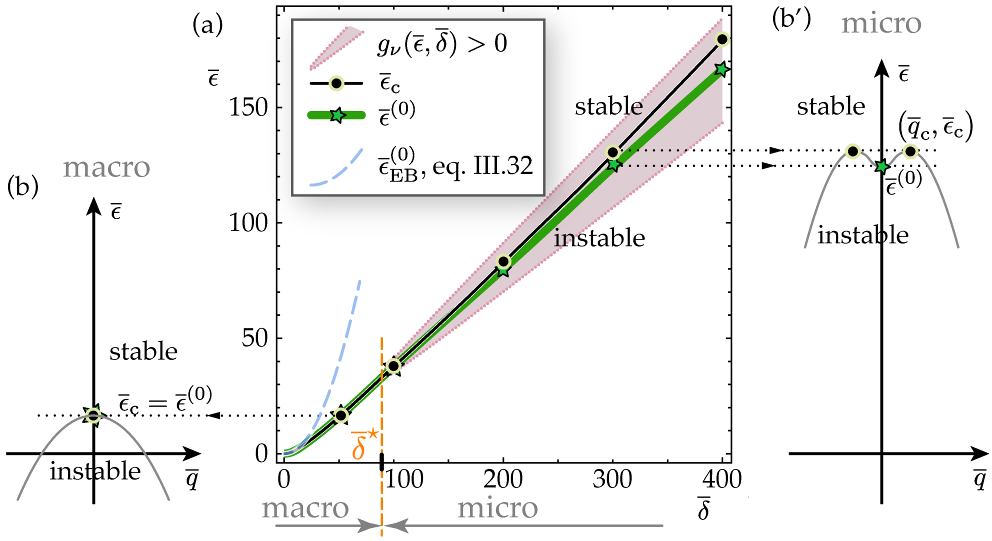

FIGURE III.15 – Diagramme de bifurcation pour le modèle de plaque, pour $\nu = .5$. (a) Diagramme de phase : résultats par la méthode du tir présentée § III.4.1. (étoiles, disques et trait noir fin), prédictions du développement à faible nombre d'onde d'après les équations III.29a et III.29b (trait épais vert et domaine en rouge clair) et prédiction $\bar\epsilon^{(0)}_{EB}$ du modèle de poutre d'après l'équation III.34 (trait pointillé bleu). (b,b′) Allure des courbes de stabilité marginale dans le plan $(\bar q, \bar\epsilon)$ correspondant respectivement aux cas *macro* et *micro*.

rotations rigides. L'extension à l'ordre 0 en q, $\bar\epsilon^{(0)}(\nu,\bar\delta)$ est déterminée à l'étape 2 par l'équation quadratique III.24 qui s'écrit pour ce modèle

$$\bar\epsilon^{(0)^2} + 24\,(1-\nu)\,\bar\epsilon^{(0)} - \frac{3}{16}\bar\delta^2 = 0. \tag{III.29a}$$

Les détails d'implémentation des étapes 3 à 5 du développement à faible nombre d'onde sont décrits dans l'article reproduit à la fin de ce chapitre. Le coefficient $\bar\epsilon^{(1)}$ mesurant la courbure de la courbe de stabilité marginale aux faibles nombres d'onde est calculé à l'étape 6 et prend la forme

$$\bar\epsilon^{(1)} = g_\nu(\bar\epsilon^{(0)},\bar\delta),$$

où l'expression explicite de la fonction g_ν dépend du coefficient de Poisson ν. Ainsi pour $\nu = 0.5$ il vient

$$g_{\nu=.5}(\bar\epsilon,\bar\delta) = \frac{-49\,\bar\delta^4 + 8\,\bar\delta^2\left(71\,\bar\epsilon^2 + 700\,\bar\epsilon - 2520\right) - 512\,\bar\epsilon^2\,\left(3\,\bar\epsilon^2 + 56\,\bar\epsilon + 490\right)}{8960\left(3\,\bar\delta^2 + 16\,\bar\epsilon^2\right)}. \tag{III.29b}$$

Ces deux quantités sont présentées dans la figure III.15 : valeur de $\bar\epsilon^{(0)}(\nu = 0.5,\bar\delta)$ calculé d'après l'équation III.29a (courbe verte) et signe de $\bar\epsilon^{(1)} = g_\nu(\bar\epsilon^{(0)},\bar\delta)$ d'après l'expression explicite III.29b ($\bar\epsilon^{(1)} = g_\nu(\bar\epsilon^{(0)},\bar\delta) > 0$ correspond au domaine en rouge clair). Le mode de bifurcation est *macroscopique* lorsque les courbes en noir (extension critique calculée par la résolution directe § III.4.1.) et en vert ($\bar\epsilon^{(0)}$ calculé par le développement à faible nombre d'onde) coïncident. Ceci correspond également au cas où la courbe verte est en dehors de la zone en rouge clair ($\bar\epsilon^{(1)} = g_\nu(\bar\epsilon^{(0)},\bar\delta) < 0$).

Le mode de bifurcation est macroscopique dans les autres cas ($\bar{\epsilon}^{(1)} = g_\nu(\bar{\epsilon}^{(0)}, \bar{\delta}) > 0$).

Ainsi le développement à faible nombre d'onde prédit que

$$\text{le premier mode de bifurcation est} \begin{cases} \textit{macroscopique} & \text{si } |\bar{\delta}| < \bar{\delta}^\star(\nu), \\ \textit{microscopique} & \text{si } |\bar{\delta}| > \bar{\delta}^\star(\nu), \end{cases} \tag{III.30}$$

en bon accord avec les prédictions de la méthode directe discutée au § III.4.1. (voir aussi l'article reproduit à la fin de ce chapitre pour une comparaison détaillée des courbes de stabilité marginales et des asymptotes obtenues par le développement à faible q).

La valeur critique $\bar{\delta}^\star(\nu)$ peut être obtenue analytiquement en résolvant simultanément III.29a et $g_\nu(\bar{\epsilon}^{(0)}, \bar{\delta}) = 0$ pour les deux inconnues $\bar{\delta}$ et $\bar{\epsilon}^{(0)}$. Ceci fait apparaître une équation polynomiale dont nous ne présentons pas l'expression ici, dans un souci de concision. La solution réelle de cette équation peut être évaluée avec une précision arbitraire. Ainsi pour $\nu = 0.5$ nous obtenons

$$\bar{\delta}^\star(\nu = 0.5) = 88.247 \tag{III.31}$$

Cette valeur exacte est proche de l'estimation obtenue par la résolution directe, $\bar{\delta}^\star \approx 90$, voir § III.4.1.

Cette méthode est très rapide à mettre en œuvre et permet de tracer directement le diagramme de phase pour la transition *micro-macro* sans avoir à résoudre le problème de bifurcation linéarisé pour chaque valeur du paramètre $\bar{\delta}$ et/ou pour chaque forme de la distribution de pré-contrainte. Elle peut être appliquée de manière immédiate à une distribution quelconque de pré-contrainte dans la section de la plaque.

Cas d'une distribution linéaire de pré-contrainte

Afin d'illustrer la généralité de cette méthode et de s'assurer que la transition *micro-macro* n'est pas spécifique à une pré-contrainte constante par morceaux, nous considérons par exemple une pré-contrainte dépendant linéairement de la coordonnée transverse x. Nous remplaçons alors la définition III.13a par

$$N^0_{zz}(\epsilon; x) = Eh\left(\epsilon + \frac{3}{2}\left(\frac{x}{L} - \frac{1}{2}\right)\delta\right).$$

Dans cette formule le facteur numérique $3/2$ a été choisi de manière à ce que le moment fléchissant induit par la pré-contrainte soit identique au chargement précédent, c'est à dire,

$$m^0_y = \int_0^v N^0_{zz}(\epsilon; x)\left(x - \frac{L}{2}\right) \mathrm{d}x = \frac{E\,h\,v^2\,\delta}{8}. \tag{III.32}$$

Ceci permet de comparer l'effet du paramètre δ mesurant l'écart de la nouvelle distribution (linéaire) de pré-contrainte avec celui de la distribution précédente (constante par morceaux). Avec cette nouvelle distribution, l'équation III.29a est inchangée. La pré-contrainte apparaît en effet dans cette équation à travers le seul moment résiduel m^0_y qui est préservé par construction. Par ailleurs la quantité $\bar{\epsilon}^{(1)} = g_\nu(\bar{\epsilon}^{(0)}, \bar{\delta})$ dans III.29b devient

$$g_\nu(\bar{\epsilon}^{(0)}, \bar{\delta}) = \frac{\bar{\epsilon}^{(0)^2}}{1260} + \frac{5\nu + 2}{210}\,\bar{\epsilon}^{(0)} - (1 - \nu^2).$$

Une transition *micro-macro* apparaît pour la valeur critique $\overline{\delta}^{\star}$ obtenue en résolvant $\epsilon^{(1)} = g_\nu = 0$. Avec l'expression de g_ν donnée ci-dessus nous obtenons $\overline{\epsilon}^{(0)} = 20.1$ dans le cas incompressible ($\nu = 0.5$). Ceci correspond à $\overline{\delta}^{\star} = 63.8$ d'après III.29a, ce qui est significativement moins élevé que la valeur critique obtenue pour une distribution constante par morceaux, voir III.31.

Limite de faible pré-contrainte : équivalence avec le modèle de poutre à courbure naturelle

Utilisons à présent le développement asymptotique pour montrer que les prédictions du modèle de plaque sont asymptotiquement en accord avec les prédictions du modèle de poutre naturellement courbée. L'analyse linéaire de bifurcation d'un modèle de poutre naturellement courbée fait apparaître la valeur critique de l'extension moyenne ϵ comme

$$\epsilon_{\mathrm{c}}^{\mathrm{EB}} = \frac{(m_y^0)^2}{\mu\, J_\tau\, E\, h\, v}, \tag{III.33}$$

comme établi au début de ce chapitre, voir l'équation III.3. Calculons le module de torsion équivalent en identifiant l'énergie élastique associée, par unité de longueur, à une déformation de torsion $w(x, z) = \tau\,(x - L/2)\, z$, avec l'énergie de torsion d'une poutre, $\frac{1}{2}\,\mu J_\tau\, \tau^2$. Nous obtenons ainsi

$$\mu J_\tau = 2\, D\,(1-\nu)\, v = \frac{E\, h^3\, v}{6(1+\nu)}.$$

En combinant III.33, III.32 et l'expression ci-dessus, nous obtenons la valeur de l'extension moyenne critique prédite par le modèle de poutre d'Euler-Bernoulli

$$\epsilon_{\mathrm{c}}^{\mathrm{EB}} = \epsilon_{\mathrm{EB}}^{(0)} = \frac{(1+\nu)}{2}\,\left(\frac{v}{h}\right)^2\,\frac{3\,\delta^2}{16}.$$

Cette expression peut être récrite en utilisant les variables adimensionnées introduites par III.14, il vient alors

$$24\,(1-\nu)\,\overline{\epsilon}_{\mathrm{EB}}^{(0)} = \frac{3}{16}\,\overline{\delta}^2. \tag{III.34}$$

Cette prédiction, tracée sur la figure III.15(a), est asymptotiquement équivalente avec l'expression obtenue précédemment par l'équation III.29a à partir du modèle de plaque, dans la limite $\overline{\delta} \to 0$. Le terme ${\overline{\epsilon}^{(0)}}^2$ présent dans l'équation III.29a et absent du terme de de gauche de III.34 est en effet négligeable si $\overline{\delta}$ et $\overline{\epsilon}^{(0)}$ sont tous les deux petits.

La prédiction du modèle de poutre d'Euler-Bernoulli devient mauvaise lorsque $\overline{\delta}$ atteint ~ 10, c'est à dire pour un écart de pré-contrainte qui reste largement inférieur à la valeur critique $\overline{\delta}^{\star} \approx 90$ à laquelle les modes microscopiques apparaissent. Ceci montre que le modèle de poutre naturellement courbée est d'un intérêt limité pour l'étude des structures soumises à des pré-contraintes inhomogènes, y compris pour l'analyse des modes *macroscopiques*.

III.5.3. Application au 3-d

Le développement à faible nombre d'onde décrit § III.5.1. peut être appliqué au modèle 3-d présenté § III.4.2. Le détails de l'équation III.21b et du développement

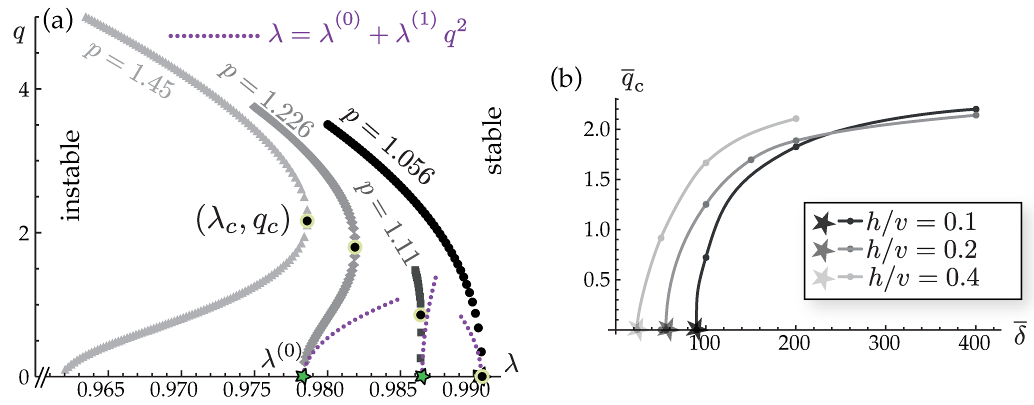

FIGURE III.16 – Prédiction du développement à faible nombre d'onde pour le modèle 3-d. (a) Asymptotes $\lambda = \lambda^{(0)} + q^2\,\lambda^{(1)}$ calculées par le développement à faible nombre d'onde (§ III.5.1.) pour différentes valeurs du pré-étirement p (traits pointillés en violet) superposées aux courbes de la figure III.13(a). (b) Valeurs de l'étirement critique $p^\star$ obtenu par interpolation linéaire des valeurs de $\lambda^{(1)}$ pour différents rapports d'aspect (étoiles) superposées aux courbes de la figure III.13(b).

pour ce modèle est décrit en détails dans l'article reproduit à la fin de ce chapitre.

Pour le cas traité figure III.13(a), c'est à dire pour un rapport d'aspect $h/v = 0.1$ et $\mu = 1$, $K = 10$, $J_\mathrm{m} = 100$, les prédictions du développement à faible nombre d'onde sont tracées figure III.16(a) en traits pointillés. Il s'agit des paraboles $\lambda = \lambda^{(0)} + q^2\,\lambda^{(1)}$, où les coefficients $\lambda^{(0)}$ et $\lambda^{(1)}$ sont calculés pour les différentes valeurs du pré-étirement p suivant la méthode synthétisée § III.5.1. en utilisant en particulier les équations III.24 et III.28. Au voisinage de leur intersection avec l'axe $q = 0$ les paraboles fournissent une bonne approximation des courbes de stabilité marginale calculées en résolvant le problème de bifurcation complet, équation III.20 § III.4.2. Pour cet exemple, $\lambda^{(1)}$ est positif pour $p = 1.11$ et négatif pour $p = 1.056$ ce qui est en accord avec la prédiction $p^\star \approx 1.1$, voir § III.4.2.

En faisant l'interpolation linéaire des valeurs de $\lambda^{(1)}$ calculées pour $p = 1.056$ et $p = 1.11$ nous obtenons l'estimation

$$p^\star = 1.090. \tag{III.35}$$

Cette valeur peut être exprimée en terme d'écart de pré-contrainte adimensionné et correspond à $\overline{\delta} = 89.6$ ce qui est proche de la valeur $\overline{\delta} = 88.25$ calculée pour le modèle de plaque au § III.4.1. Ceci confirme l'accord entre le modèle de plaque et les équations de l'élasticité finie 3-d à la limite des faibles rapports d'aspects, $h/v \to 0$; le petit écart entre les deux valeurs s'explique par le fait que le rapport d'aspect considéré ici est fini ($h/v = 0.1$).

Cette procédure pour calculer le pré-étirement critique $p^\star$ peut être appliquée pour différentes valeurs du rapport d'aspect h/v. Les valeurs de $p^\star$ sont ensuite converties en valeurs de $\overline{\delta}$ et représentées par des étoiles sur la figure III.13(b). Chacune de ces étoiles correspond bien à la plus petite valeur de $\overline{\delta}$ pour laquelle la résolution du problème de bifurcation linéarisé § III.4.2. prédit $\overline{q}_c = 0$, ce qui confirme la validité du développement à faible nombre d'onde pour ce modèle 3-d.

III.6 Conclusion

Bien que le système expérimental de HUANG et al. (2012) et LIU et al. (2014) formé d'un ruban assemblé avec pré-contrainte ressemble à une poutre mince, le modèle classique d'Euler-Bernoulli est inapplicable parce que cette pré-contrainte est finie. Notre analyse se fonde sur 3 modèles alternatifs : un modèle simple de bi-poutre, un modèle de plaque mince valable dans la limite des sections très plates et une description 3-d rigoureuse appuyée sur la théorie de l'élasticité finie incrémentale. L'étude de ces trois modèles révèle que la longueur typique du motif de flambement est sélectionnée par l'importance relative de la pré-contrainte et du rapport d'aspect des rubans. Elle permet d'expliquer les étonnantes observations expérimentales, et en particulier la transition des motifs de flambement *microscopiques* vers des motifs *macroscopiques* de grande longueur d'onde semblables à ceux prédits par les modèles classiques. Nous proposons enfin une méthode semi-analytique inspirée du développement faiblement non-linéaire de KOITER (1965) et permettant de déduire le régime de longueur d'onde des modes critiques en détectant la transition *micro-macro* directement à partir de la solution fondamentale.

Les modèles classiques étant insuffisants pour décrire ce problème de manière pertinente, nous pensons qu'il serait intéressant d'établir un modèle réduit amélioré permettant de décrire la transition *micro-macro* observée sur le système expérimental plus simplement qu'en ayant recours au modèle 3-d. Un tel modèle 1-d permettrait de décrire fidèlement les résultats de l'expérience de HUANG et al. (2012) et LIU et al. (2014) et plus généralement d'analyser certaines instabilités provoquées par la croissance différentielle, par exemple dans des systèmes biologiques. La démarche de réduction dimensionnelle présentée dans le chapitre II revêt à cet égard un intérêt certain puisqu'elle fournit une méthode qui pourrait permettre de construire un tel modèle : il s'agit là d'une piste que nous souhaiterions explorer dans le futur.

Article paru dans J. Mech. Phys. Solids *Elastic rods with incompatible strain : macroscopic versus microscopic buckling*

Journal of the Mechanics and Physics of Solids 103 (2017) 40–71

Contents lists available at ScienceDirect

Journal of the Mechanics and Physics of Solids

journal homepage: www.elsevier.com/locate/jmps

Elastic rods with incompatible strain: Macroscopic versus microscopic buckling

Claire Lestringant[a,b,*], Basile Audoly[a,b,c]

[a] Sorbonne Universités, UPMC Univ Paris 06, UMR 7190, Institut Jean Le Rond d'Alembert, F-75005 Paris, France
[b] CNRS, UMR 7190, Institut Jean Le Rond d'Alembert, F-75005 Paris, France
[c] Laboratoire de Mécanique des Solides, CNRS, UMR 7649, Département de Mécanique, École Polytechnique, 91128 Palaiseau CEDEX, France

ARTICLE INFO

Article history:
Received 23 September 2016
Revised 29 November 2016
Accepted 1 December 2016
Available online 6 December 2016

Keywords:
Beams and columns
Stability and bifurcation
Asymptotic analysis

ABSTRACT

We consider the buckling of a long prismatic elastic solid under the combined effect of a pre-stress that is inhomogeneous in the cross-section, and of a prescribed displacement of its endpoints. A linear bifurcation analysis is carried out using different structural models (namely a double beam, a rectangular thin plate, and a hyper-elastic prismatic solid in 3-d): it yields the buckling mode and the wavenumber q_c that are first encountered when the end-to-end displacement is progressively decreased with fixed pre-stress. For all three structural models, we find a transition from a long-wavelength ($q_c = 0$) to a short-wavelength first buckling mode ($q_c \neq 0$) when the inhomogeneous pre-stress is increased past a critical value. A method for calculating the critical inhomogeneous pre-stress is proposed based on a small-wavenumber expansion of the buckling mode. Overall, our findings explain the formation of multiple perversions in elastomer strips, as well as the large variations in the number of perversions as a function of pre-stress and cross-sectional geometry, as reported by Liu et al. (2014).

1. Introduction

By pre-stressing a thin or slender elastic body, it is possible to prevent the propagation of cracks associated with tensile stress, as in the classical examples of tempered glass (Aben and Guillemet, 1992) and pre-stressed concrete (Freyssinet, 1966). When it is compressive, the pre-stress can lead to instabilities: the analysis of structures with incompatible strain, arising *e.g.* from growth or thermal effects, has applications ranging from morphogenesis (Osterfield et al., 2013; Savin et al., 2011) and the delamination of thin films (Moon et al., 2007) to the rolling and levelling of thin metal sheets (Abdelkhalek et al., 2015; Fischer et al., 2000; Komori, 1997; Tomita and Shao, 1993). These instabilities fall in two classes: they are either macroscopic, meaning that the wavelength of the buckling mode is set by the size L of the structure, or microscopic, when the wavelength is instead set by the dimension $h \ll L$ of the cross-section. In recent experiments, a pre-stressed elastomer strip has been shown to display both types of behaviors (Huang et al., 2012): depending on the geometry and of the pre-strain profile, wavelengths ranging from the microscopic scale h to the macroscopic scale L have been reported. The present work aims at explaining these unusually large variations of the buckling wavelength which, as we will see, are typical of slender elastic bodies subject to large and inhomogeneous pre-stress.

* Corresponding author at: Sorbonne Universités, UPMC Univ Paris 06, UMR 7190, Institut Jean Le Rond d'Alembert, F-75005 Paris, France.
E-mail address: claire.lestringant@gmail.com (C. Lestringant).

http://dx.doi.org/10.1016/j.jmps.2016.12.001

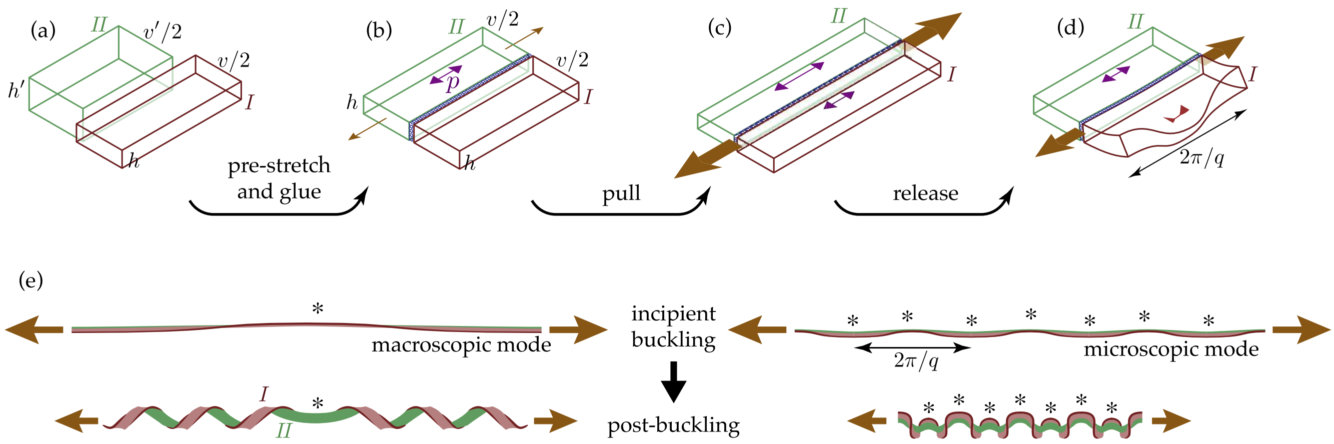

Fig. 1. Principle of the experiment, and sketch of the main experimental and numerical findings of Huang et al. (2012); Liu et al. (2014). (a–c) Preparation of the bistrip with inhomogeneous pre-stress in the cross-section; (d) the terminal tensile load is decreased and the bistrip buckles. (e) Incipient buckling mode (top) and post-buckled solution (bottom), for macroscopic (left) and microscopic (right) buckling. The position of the perversions in the post-buckled solutions is determined by the crests and valleys of the incipient buckling pattern (star symbols): a macroscopic buckling mode yields at most one perversion in the entire strip (left) while a microscopic buckling mode yields two perversions per wavelength (right).

In the experiments of Huang et al. (2012), two long elastomer strips *I* and *II* are used. The strip *II* is first subjected to a pre-stretch $p > 1$, see Fig. 1a and b; then the strips are glued and held by terminal forces, which are then released progressively, see Fig. 1c and d. An instability takes place during unloading as the stress eventually becomes compressive in strip *I*. In the post-buckled regime, the shape of the strip is made up of pieces of helices having alternate chiralities (Huang et al., 2012), that are connected by localized defects termed 'perversions' in prior work (Goriely and Tabor, 1998; McMillen and Goriely, 2002). A striking feature of the experiment, which has not been explained to date, is that the number of perversions varies greatly as a function of the amount of pre-stretch p and of the aspect ratio of the cross-section, as documented by Liu et al. (2014). For small pre-stretch p and a stubby cross-section (*i.e.* a large aspect-ratio h/v, where h is the thickness and v the width, see figure), there is at most one perversion over the entire length L of the strip and the instability is macroscopic; conversely, for large pre-stretch and a flat cross-section (small h/v), a large number of perversions is obtained, their spacing being comparable to the cross-sectional dimension h: the instability is then microscopic. Even though perversions appear progressively in the post-buckled range, we observe that the selection of the *number* of perversions is entirely determined by the wavelength of the incipient buckling mode, when the planar solution first becomes unstable. Indeed, the experimental results sketched in Fig. 1e show that the perversions form at the points where the deflection of the incipient buckling mode is maximal; upon releasing the endpoints further, the distance between successive perversions remains close to half the wavelength of the incipient buckling mode, in material coordinates. Accordingly, we address in this paper the wavelength selection of the first buckling mode, as sketched in Fig. 1c and d. Our goal is to account for the large variations of the wavelength, from the macroscopic scale $\sim L$ down to the microscopic scale $\sim h$ depending on the amount of pre-stretch and of the aspect-ratio h/v. In their paper, Liu et al. (2014) successfully compare their experiments with finite-element simulations; we complement their approach by deriving analytical models based on the same set of mathematical equations as their simulations, thereby providing an interpretation of their results.

In view of the slender geometry of the bistrip, it is tempting to model it as a thin elastic rod. Thin rod models, however, do not correctly account for the wavelength selection in this particular system: they systematically favor long-wavelength instabilities and fail to predict the microscopic buckling mode seen in the experiments. This has not been fully appreciated, and a discussion of the selection of the number of perversions has remained elusive so far in the literature. Goriely and Tabor (1998); McMillen and Goriely (2002) have described an *isolated* perversion mathematically, by deriving a localized non-linear solution to the equilibrium equations for a naturally curved thin elastic rod. Using the same model of a naturally curved thin elastic rod, Domokos and Healey (2005) have identified numerical solutions comprising multiple perversions but they report that these solutions live on a branch of equilibria that is not connected to the fundamental (unbuckled) branch: this confirms that thin rod models cannot account for the experimental sequence sketched in the right-hand side column of Fig. 1e, where the origin of multiple perversions can be traced back to a microscopic buckling mode. Recently, Liu et al. (2014) have suggested that a microscopic wavelength can be selected by inertial effects using a thin rod model, but inertia is associated with time scales much shorter than the inverse loading rate of the experiments, and is therefore likely irrelevant. As we show in this paper, the classical Euler-Bernoulli rod model cannot account for the wavelength selection in the bistrip, as the microscopic bucking mode deforms the cross-sections in a way that is incompatible with the kinematic assumptions underlying the Euler-Bernoulli rod model.

Having ruled out the possibility to use an Euler-Bernoulli rod model, one might hope that an alternative, more sophisticated 1-d model may be identified in the vast literature concerned with the justification of rod and plate models from 3-d elasticity—see for instance the seminal works of Le Dret and Raoult (1995) and Friesecke et al. (2006) in this area. This is not the case: the experiments of Huang et al. (2012) involve a finite pre-stress with significant variations across the cross-section, while available convergence results are limited to the case of a weak pre-stress (*i.e.* which vanishes for $h \to 0$) and/or to the case of a pre-stress that is homogeneous through the thickness. The bistrip experiment therefore challenges known results on dimension reduction for elastic rods. The main results available in the literature can be summarized as follows. For thin elastic bodies, the convergence of the solutions of 3-d elasticity has been established towards variants of the classical plate, shell and membrane models in the limit $h \to 0$. In the plate or shell models thus obtained, the pre-stress modifies the reference metric and/or the reference curvature (Bhattacharya et al., 2016; Dervaux et al., 2009; Efrati et al., 2009; Lewicka et al., 2011); these thin plate or shell models have been applied to a variety of problem involving growth (Audoly and Boudaoud, 2003; Dervaux and Ben Amar, 2008; Klein et al., 2007; Liang and Mahadevan, 2011; Marder et al., 2003). For slender elastic bodies, a convergence result has been established by Cicalese et al. (2016), whereby the equilibrium solutions for a long prismatic 3-d hyper-elastic solid are shown to converge asymptotically to the solutions of a thin elastic rod model with natural curvature: this result, which holds under the assumption of weak pre-stress, brings us back to the Euler-Bernoulli rod model, and therefore cannot account for microscopic buckling. In the absence of an applicable 1-d, we shall resort to 3-d finite elasticity theory to analyze the perversions in the bistrip experiment, see Section 5 of this paper.

This paper builds on important previous works. Euler buckling has been approached by Scherzinger and Triantafyllidis (1998) based on the 3-d bifurcation analysis of a prismatic hyper-elastic solid with an arbitrary cross-section: this instability is macroscopic, and the critical load was found to be asymptotically consistent with the Euler-Bernoulli rod model in the limit of a small aspect-ratio h/L; here, we extend this analysis to include the effect of pre-stress and arrive at a different conclusion. The pre-stressed strut on an elastic foundation (Timoshenko and Gere, 1961) is a textbook example of a microscopic instability, of which a number of variants and extensions have been discussed (Lee et al., 2008; Savin et al., 2011); here, we revisit this example, with the first strip *I* and the second strip *II* playing the roles of the strut and of the foundation, respectively: unlike a normal elastic foundation, the second strip *II* is not anchored to a fixed base and can be carried away by the strut, thereby opening the possibility of a long-wavelength instability as well, as we shall show. In the context of the rolling of thin metal sheets (Abdelkhalek et al., 2015; Fischer et al., 2000), buckling modes that are sometimes macroscopic and sometimes microscopic have appeared in numerical simulations of pre-stressed elastic plates (Kpogan, 2014; Rammerstorfer et al., 2001); here, we propose a systematic analysis of the macroscopic-to-microscopic transition, beyond the limited framework of elastic plates.

In this paper, the buckling of a pre-stressed prismatic solid is analyzed as follows. We carry out a linear bifurcation analysis of the cylindrically invariant solution as a mean to predict the distance between perversions, see Fig. 1e: we seek the first critical wavenumber q_c when the average imposed stretch λ is progressively decreased. We consider an infinitely long prismatic solid, $L \to \infty$, with a cross-section having fixed dimensions $h \times v$: in this framework, a macroscopic buckling mode corresponds to a vanishing first critical wavenumber, $q_c = 0$, while a microscopic one corresponds to a non-zero wavenumber, $q_c \neq 0$. The pre-stress distribution in the solid is assumed to be inhomogeneous in the plane (xy) of the cross-section, but independent of the axial coordinate z: with suitable assumptions on the material symmetry (see below), this allows us to use Fourier analysis with respect to z. The pre-stress is finite, *i.e.* it is not assumed to depend in any way on a small parameter—incidentally, note that the aspect-ratio parameter v/L is zero (and not a small parameter) as we work with $L = \infty$. We use different structural models for the solid, all of which allow the cross-section to deform: as mentioned earlier, this is a necessary condition for the existence of microscopic buckling modes.

Three models are considered in this paper. Starting at a qualitative level, a double-beam model is considered in Section 3; its mathematical formulation is relatively straightforward and it successfully captures the salient features of the bistrip experiment, including the macroscopic-to-microscopic transition. Gradually increasing the level of the detail (and of technicality), we analyze a non-linear plate with inhomogeneous pre-stress in Section 4. Finally, we turn in Section 5 to a bifurcation analysis of a full 3-d, hyper-elastic model. In addition, an expansion method inspired by Koiter's weakly non-linear expansion is proposed to characterize the critical pre-stress the macroscopic-to-microscopic transition. This method is first derived in an abstract setting in Section 2, and then applied to the three structural models successively.

The sections of the paper are largely independent. In Sections 3 and 5, different model requiring different levels of sophistication are used to derive results that all agree qualitatively. Possible reading paths can be suggested as follows. In a first reading, one can focus on the double-beam model in Section 3, skipping the discussion of the expansion method in Section 3.6. The plate model in Section 4 offers an intermediate option: it presents all the main ideas of the papers in a mostly analytical setting. The plate model can also serve as a first illustration of the expansion method: the interested reader is advised to read Section 2 and then Section 4.4. The most complete results are presented in Section 5, where we make use of finite elasticity and of finite-element simulations.

2. Small-wavenumber expansion of the bifurcation modes

We consider a long prismatic solid having inhomogeneous pre-stress in its cross-section. The displacement of its endpoints is prescribed and the a mean imposed stretch is denoted by λ. In this section we propose a generic bifurcation analysis of the configuration that is invariant along the axis z, towards a buckled configuration characterized by an axial wavenumber q. The first critical wavenumber encountered when the imposed stretch λ is decreased is denoted by q_c. As we consider an infinitely long solid, $L = \infty$, the bifurcation mode is macroscopic (long-wavelength) when $q_c = 0$, and mi-

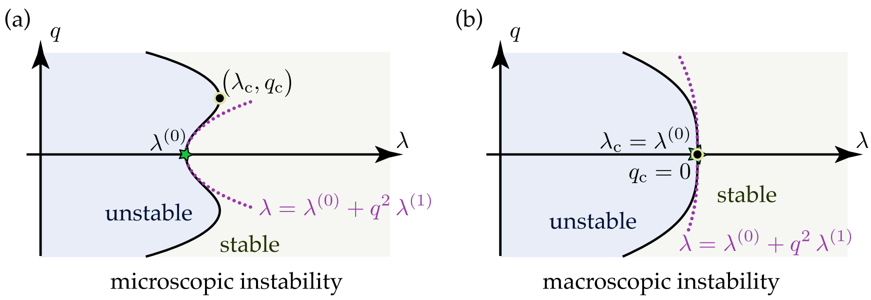

Fig. 2. Two buckling scenarios for a prismatic solid with non-uniform pre-stress in the cross-section: typical curves of marginal stability predicted by the generic equation (2.3a). The mean imposed stretch λ is progressively decreased (meaning that the diagram has to be read from right to left) and the homogeneous solution bifurcates along the solid curve. (a) Case of a microscopic buckling instability: the system first bifurcates at $\lambda = \lambda_c$ and a wavenumber $q_c \neq 0$ is selected. We denote by $\lambda^{(0)}$ the stretch such that a linear mode with an infinite wavelength is available near the fundamental branch: $\lambda^{(0)} < \lambda_c$ for microscopic buckling. (b) Case of a macroscopic buckling instability: a zero wavenumber is selected, $q_c = 0$, and $\lambda^{(0)} = \lambda_c$.

croscopic (short-wavelength) when $q_c > 0$. The bifurcation occurs along the so-called 'curve of marginal stability' that is traced out in the (λ, q) plane, see Fig. 2. This curve is obtained by solving the equations for adjacent equilibria near the cylindrically invariant solution.

Near the point $\left(\lambda^{(0)}, 0\right)$ where it intersects the λ-axis, the curve of marginal stability can be fitted by a parabola as $\lambda = \lambda^{(0)} + q^2\,\lambda^{(1)}$ (dotted curve in the figure). In this section we propose an expansion method that allows one to calculate the coefficient $\lambda^{(1)}$. The sign of $\lambda^{(1)}$ determines the direction in which the curve of marginal stability is curved near $\left(\lambda^{(0)}, 0\right)$: as illustrated in Fig. 2, a long-wavelength instability corresponds in general to $\lambda^{(1)} < 0$, while a short-wavelength instability corresponds to $\lambda^{(1)} > 0$. By allowing one to calculate $\lambda^{(1)}$, the proposed expansion method can therefore predict whether the bifurcation mode is microscopic or macroscopic.

In this section, the expansion method is established in a general and formal setting. The method will be applied later to specific structural models, namely a double-beam (Section 3.6), a plate (Section 4.4), and a 3-d elasticity model (Section 5.7). The forthcoming section is technical in some places. In a first reading, it is sufficient to read Section 2.1 (geometry), Section 2.3 (canonical form of the eigenvalue problem), Section 2.4 (form of the expansion) and Section 2.11 (summary of steps required to calculate $\lambda^{(1)}$).

2.1. Geometry, invariant solutions

We use a cylindrically invariant configuration of the solid as the reference configuration. Let (x, y, z) be a set of Lagrangian variables, such that the axis z is parallel to the axis of the solid in this reference configuration. We use (x, y, z) as Lagrangian variables to track the subsequent deformation of the solid, with (x, y, z) denoting the position of a material point in the reference configuration. In its reference configuration, the solid is pre-stressed. The pre-stress may be inhomogeneous in the cross-section (x, y) but is independent of z. More specifically, we assume that both the pre-stress distribution and the material properties of the solid are invariant both by a translation along the axis z $(z \to z + \tau)$ and by reflections about the plane of the cross-section $(z \to -z)$.

The solid is deformed by prescribing the displacement of its remote ends, which impose a mean stretch λ. Let $\varphi(z)$ denote the collection of degrees of freedom that characterize the configuration of the cross-section with Lagrangian coordinate z. In a finite-element discretization, for instance, $\varphi(z)$ is the vector collecting the degrees of freedom of the nodes that belong to the cross-section z.

For any value of the stretch λ there exists an equilibrium solution which is invariant both by translation along z and by reflection about a cross-section. This invariant solution is of the form $\varphi(z) = \varphi_0^\lambda$: the degrees of freedom depends on the mean imposed stretch λ and on the cross-sectional coordinate, but not on the axial coordinate z.

2.2. Initial form of the polynomial eigenvalue problem

We analyze the bifurcations that can take place when the mean imposed stretch λ is decreased: such bifurcations give rise to another family of solutions that are not invariant in the axial direction. The bifurcation analysis starts by introducing perturbations that depend harmonically on the axial coordinate z, as imposed by the invariance of the base solution: in complex notation,

$$\varphi(z) = \varphi_0^\lambda + \xi_1\, e^{i\,q\,z} + \cdots \tag{2.1}$$

Here, q is the wavenumber and ξ_1 is a vector collecting the complex amplitudes associated with each one of the degrees of freedom on a particular cross-section. As we shall show in the different illustrations, ξ_1 can be taken to be a *real* vector as this amounts to impose the phase of the buckling mode.

Next, the perturbation (2.1) is inserted into the equations of equilibrium, and the latter are linearized with respect to the amplitude ξ_1. The form of the equations of equilibrium depend on which particular structural model is used, and they will be specified later. We work with the weak form of the equilibrium equations, as obtained by the principle of virtual work. For an infinitely long solid, the only virtual motions that produce non-zero virtual work with the particular family of perturbations (2.1) are those that depend harmonically on the axial variable z as well, and have the same wavenumber q: we consider virtual motions of the form $\widetilde{\varphi}(z) = \hat{\xi}\, e^{i\,q\,z}$. In weak form, the linearized equilibrium equations take the generic form:

$$\forall \hat{\xi}, \quad \hat{\xi} \cdot d_\lambda^0 \cdot \xi_1 + q\, \hat{\xi} \cdot d_\lambda^1 \cdot \xi_1 + \cdots + q^n\, \hat{\xi} \cdot d_\lambda^n \cdot \xi_1 = 0, \tag{2.2}$$

as we will check later. This defines an eigenvalue problem having the wavenumber q as the eigenvalue and the mode shape ξ_1 as the eigenvector. As we have used Fourier analysis, the coordinate z has been replaced by the wavenumber q: the eigenvalue problem (2.2) is formulated on the cross-section, which is a 2-d domain.

The order n and the bilinear operators d_λ^0, ..., d_λ^n depend on the particular structural model chosen (beam, plate, or 3D elasticity): they will be calculated explicitly in the applications in Sections 3–5. In a context of finite elasticity, these operators may depend on the mean imposed stretch λ through the base solution φ_0^λ. They also depend on the distribution of inhomogeneous pre-stretch, although this is implicit in our notation. These operators satisfy symmetry properties, as a consequence of the invariance of the solid by reflection about cross-sections ($z \to -z$): if, for instance, all the degrees of freedom are displacements in the plane of the cross-section (and are therefore unaffected by the reflection symmetry), the invariance $q \to -q$ dictates that the eigenvalue problem (2.2) contains only even powers of q. The detailed symmetry properties of the operators will be discussed later in Sections 3–5.

For simple structural models such as beams (Section 3), there is a finite number of degrees of freedom in each cross-section: then, ξ_1 is truly a vector, the operators d_λ^j can be represented as matrices and the virtual vector $\hat{\xi}$ can be readily eliminated from (2.2). For more complex structural models (Sections 4 and 5), however, a cross-section has infinitely many degrees of freedom, and ξ_1 is typically a collection of functions defined over the cross-sections. In the latter case, the dot products in (2.2) are meant to involve integrals over the cross-section, and the elimination of the virtual displacement $\hat{\xi}$ is not always desirable: this is why we retain the virtual displacement $\hat{\xi}$ in (2.2).

By repeatedly solving the eigenvalue problem (2.2) for different values of λ, one can plot the curves of marginal stability in the (λ, q) plane for a given distribution of pre-stress. This approach will be referred to as the *direct method* later on. The curves of marginal stability obtained in this way (see Sections 3 and 5) are typically similar to those sketched in Fig. 2.

Solving polynomial eigenvalue problems is a numerically intensive task. In the rest of this section, we propose an expansion method that yields directly the 'initial curvature' $\lambda^{(1)}$ of the curve of marginal stability: this allows one to predict whether the first bifurcation mode is macroscopic or microscopic, without the need for an extensive eigenvalue analysis.

2.3. Canonical form of the eigenvalue problem

As mentioned above, the order n of the polynomial eigenvalue problems (2.2) depends on which structural model is used to represent the solid body. To unify the rest of the presentation, we start by observing that for, any value of n, Eq. (2.2) can be rewritten as a *quadratic* eigenvalue problem containing no linear term in q:

$$\forall \widehat{\Xi}, \quad \widehat{\Xi} \cdot A_\lambda \cdot \Xi + q^2\, \widehat{\Xi} \cdot B_\lambda \cdot \Xi = 0, \tag{2.3a}$$

where A_λ and B_λ are symmetric operators, and the null space of A_λ is independent of λ (these important properties are recapitulated in Section 2.5 below). In this equation, we have introduced a generalized eigenvector Ξ, by concatenation (direct sum) of the original eigenmode ξ_1 and of vectors of the form $q^k\, \xi_1$ for some well-chosen powers k: in block-vector notation,

$$\Xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ q^k\, \xi_1 \\ \cdots \end{pmatrix} \tag{2.3b}$$

In (2.3a), the virtual motion $\widehat{\Xi}$ is an arbitrary vector having the same length as Ξ: it is *not* necessarily of the special form (2.3b).

To avoid a overly formal proof, we will admit the canonical form (2.3) of the eigenvalue problem, without attempting to derive it from its original form (2.2): this will be done later for each of the particular structural model, see Sections 3–5. Doing so, we will obtain an explicit construction of the generalized eigenvector Ξ, as well as an explicit definition of the operators A_λ and B_λ appearing in (2.3a).

2.4. Expansion

At this point, we have outlined the derivation of the eigenvalue problem (2.3a) governing the linear bifurcation analysis. We can proceed to identify solutions in the vicinity of the bifurcation point $\left(\lambda, q\right) = \left(\lambda^{(0)}, q = 0\right)$ depicted in Fig. 2.

To to so, we use q as an expansion parameter and seek a solution in the form

$$\Xi = \Xi^{(0)} + q^2\, \Xi^{(1)} + q^4\, \Xi^{(2)} + \cdots \tag{2.4a}$$

$$\lambda = \lambda^{(0)} + q^2\, \lambda^{(1)} + q^4\, \lambda^{(2)} + \cdots \tag{2.4b}$$

The absence of odd powers of q in these expansions is imposed by the symmetry $q \to -q$ of (2.3a), which is itself a consequence of the symmetry of the homogeneous solution by a reflection about the plane (x, y).

We will need an expansion of the operators A_λ and B_λ as well. They are known in terms of the load λ; in view of (2.4b), their expansion can be calculated as

$$A_\lambda = A_{(0)} + q^2\, \lambda^{(1)}\, A'_{(0)} + \cdots \tag{2.5a}$$

$$B_\lambda = B_{(0)} + q^2\, \lambda^{(1)}\, B'_{(0)} + \cdots \tag{2.5b}$$

where we use the notation $A_{(0)} = A_{\lambda=\lambda^{(0)}}$, $B_{(0)} = B_{\lambda=\lambda^{(0)}}$ and

$$A'_{(0)} = \left.\frac{\mathrm{d}A_\lambda}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=\lambda^{(0)}}, \qquad A''_{(0)} = \left.\frac{\mathrm{d}^2A_\lambda}{\mathrm{d}\lambda^2}\right|_{\lambda=\lambda^{(0)}}, \qquad B'_{(0)} = \left.\frac{\mathrm{d}B_\lambda}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=\lambda^{(0)}}.$$

The notation $A''_{(0)}$ will turn out to be useful later on.

2.5. Properties of the operators

As a preliminary step, one should check the properties of A_λ and B_λ announced below Eq. (2.3a):

$$A_\lambda = {A_\lambda}^T, \quad B_\lambda = {B_\lambda}^T, \quad \ker A_\lambda \text{ is independent of } \lambda. \tag{2.6*}$$

In the absence of ambiguity, the null space will then be denoted as $\ker A$, omitting the subscript λ.

For any null vector Ξ in $\ker A$, the equality $A_\lambda \cdot \Xi = 0$ holds for any λ: by differentiating successively with respect to λ, this yields a useful property,

$$\forall \Xi \in \ker A, \quad A_{(0)} \cdot \Xi = 0, \quad A'_{(0)} \cdot \Xi = 0, \quad A''_{(0)} \cdot \Xi = 0, \quad \cdots \tag{2.7}$$

2.6. Solution at order 0

We are now ready to start the proper expansion procedure. Inserting the expansions (2.4) and (2.5) into the eigenvalue problem (2.3a) and reading off the result at order $q^0 = 1$, we find $\widehat{\Xi} \cdot A_{(0)} \cdot \Xi^{(0)} = 0$ for any $\widehat{\Xi}$. In different words, $\Xi^{(0)}$ is in the kernel of A_λ,

$$\Xi^{(0)} \in \ker A. \tag{2.8}$$

As we shall show later, $\ker A$ contains rigid-body modes of deformation, so we have just shown that the buckling modes living on the curve of marginal stability tend to rigid-body modes when the curve of marginal stability meets with the λ-axis, *i.e.* for $q \to 0$.

2.7. Eigenproblem at order 2

Reading off the eigenvalue problem (2.3a) now to order q^2, and noting that the term $A'_{(0)} \cdot \Xi^{(0)} = 0$ by Eqs. (2.7) and (2.8), we obtain

$$\forall \widehat{\Xi}, \quad \widehat{\Xi} \cdot A_{(0)} \cdot \Xi^{(1)} + \widehat{\Xi} \cdot B_{(0)} \cdot \Xi^{(0)} = 0. \tag{2.9*}$$

This equation is considered in the two following sections: a solvability condition is derived in Section 2.8, which provides an implicit equation for the stretch $\lambda^{(0)}$, and the equation is solved in Section 2.9 for the linear bifurcation mode $\Xi^{(1)}$.

2.8. Solvability condition at order 2

This linear equation for $\Xi^{(1)}$ involves the matrix $A_{(0)}$ which is singular by Eq. (2.8). Before attempting to solve it for $\Xi^{(1)}$, one must therefore enforce a solvability condition (Fredholm alternative); this condition is derived by considering virtual motions $\widehat{\Xi}$ belonging to $\ker A_\lambda = \ker {A_\lambda}^T$ which we denote by $\ker A$ (see (2.6)): from (2.9), this yields

$$\forall \widehat{\Xi} \in \ker A, \quad \widehat{\Xi} \cdot B_{(0)} \cdot \Xi^{(0)} = 0. \tag{2.10}$$

Let $B^*(\lambda)$ denote the restriction of the operator B_λ to the subspace $\ker A$. By Eq. (2.10), $\Xi^{(0)}$ is a null vector of $B^*(\lambda^{(0)})$, implying that $B^*(\lambda)$ a singular operator when $\lambda = \lambda^{(0)}$. In all the examples analyzed later, the dimension of the vector space $\ker A$ is small (at most 8 in our particular examples) even when the original eigenvalue problem is infinite-dimensional:

it will be convenient to represent the operator $B^*(\lambda)$ as a square, symmetric matrix. The condition that $B^*(\lambda^{(0)})$ is singular reads

$$\det B^*(\lambda^{(0)}) = 0. \tag{2.11*}$$

This is an implicit equation for the load $\lambda^{(0)}$ at which the branch of marginal stability meets with the λ-axis in Fig. 2.

Eq. (2.10) can be rewritten as

$$\Xi^{(0)} \in \ker B^*(\lambda^{(0)}), \tag{2.12a*}$$

which is a stronger statement than (2.8) as $\ker B^*(\lambda) \subset \ker A$.

Let $n^* \geq 1$ denote the dimension of $\ker B^*(\lambda^{(0)})$,

$$n^* = \dim \ker B^*(\lambda^{(0)}). \tag{2.12b*}$$

As $\Xi^{(0)}$ lives in $\ker B^*(\lambda^{(0)})$ by (2.12a), it is defined by its n^* coordinates in a basis of $B^*(\lambda^{(0)})$. We will determine these coordinates later on in the expansion, up to a global scaling factor.

2.9. Solution at order 2

Having imposed the solvability condition for Eq. (2.9), we can proceed to solve this equation. Let $\Xi_{\mathrm{p}}^{(1)}$ denote a particular solution, which can typically be found by solving a linear algebra problem (discrete case, see Section 5.7), or by rewriting Eq. (2.9) in strong form and solving the resulting differential equations (continuous case, see Section 4.4)—here, by 'discrete' or 'continuous' cases, we mean that there are finitely many, or infinitely many degrees of freedom in the cross-section, respectively.

The general solution of (2.9) is then the sum of this particular solution and a solution of the homogeneous problem,

$$\Xi^{(1)} = \Xi_{\mathrm{p}}^{(1)} + \Xi_{\mathrm{h}}^{(1)}, \quad \text{with } \Xi_{\mathrm{h}}^{(1)} \in \ker A.$$

2.10. Solvability condition at order 4

When expanded to order q^4, Eq. (2.3a) yields a linear equation for $\Xi^{(2)}$. As earlier, it involves the singular operator $A_{(0)}$ and a solvability condition must be enforced before one attempts to solve for $\Xi^{(2)}$. The solvability condition is found again by taking the virtual motion $\widehat{\Xi}$ in $\ker A$: this cancels the term involving the unknown $\Xi^{(2)}$, as well as other terms containing the dot products $\widehat{\Xi} \cdot A'_{(0)} = 0$ and $\widehat{\Xi} \cdot A''_{(0)} = 0$, see (2.7). The result is

$$\forall \widehat{\Xi} \in \ker A, \quad \widehat{\Xi} \cdot B_{(0)} \cdot \Xi_{\mathrm{p}}^{(1)} + \widehat{\Xi} \cdot B_{(0)} \cdot \Xi_{\mathrm{h}}^{(1)} + \lambda^{(1)}\, \widehat{\Xi} \cdot B'_{(0)} \cdot \Xi^{(0)} = 0.$$

Consider the special case $\widehat{\Xi} \in \ker B^*(\lambda^{(0)})$ and recall $\ker B^*(\lambda^{(0)}) \subset \ker A$: the second term in the left-hand side then cancels, as $\widehat{\Xi} \cdot B_{(0)} \cdot \Xi_{\mathrm{h}}^{(1)} = \Xi_{\mathrm{h}}^{(1)} \cdot B_{(0)} \cdot \widehat{\Xi} = \Xi_{\mathrm{h}}^{(1)} \cdot B^*(\lambda^{(0)}) \cdot \widehat{\Xi} = \Xi_{\mathrm{h}}^{(1)} \cdot 0 = 0$. The solvability condition takes the simple form

$$\forall \widehat{\Xi} \in \ker B^*(\lambda^{(0)}), \quad \widehat{\Xi} \cdot B_{(0)} \cdot \Xi_{\mathrm{p}}^{(1)} + \lambda^{(1)}\, \widehat{\Xi} \cdot B'_{(0)} \cdot \Xi^{(0)} = 0. \tag{2.13*}$$

Eq. (2.13) yields n^* equations when $\widehat{\Xi}$ is successively replaced by n^* independent vectors in $\ker B^*(\lambda^{(0)})$. As we shall check later, these n^* equations yield (*i*) the value of $\lambda^{(1)}$ and (*ii*) the value of the n^* unknown coefficients in $\Xi^{(0)}$, see Eq. (2.12a), *up to a global scaling factor*. In other words, the expansion method presented here allows one to calculate the 'initial curvature' $\lambda^{(1)}$ of the curve of marginal stability, as announced earlier, as well as the direction of the vector $\Xi^{(0)}$. The magnitude of $\Xi^{(0)}$ remains undetermined, as the initial eigenvalue problem (2.3a) is linear with respect to Ξ.

In the case $n^* = 1$, for instance, $\ker B^*(\lambda^{(0)})$ is spanned by $\Xi^{(0)}$: setting $\widehat{\Xi} = \Xi^{(0)}$ in Eq. (2.13), we find

$$\lambda^{(1)} = -\frac{\Xi^{(0)} \cdot B_{(0)} \cdot \Xi_{\mathrm{p}}^{(1)}}{\Xi^{(0)} \cdot B'_{(0)} \cdot \Xi^{(0)}} \qquad (n^* = 1). \tag{2.14}$$

Note that this value of $\lambda^{(1)}$ is independent of both the arbitrary norm of $\Xi^{(0)} \in \ker B^*\left(\lambda^{(0)}\right)$—as $\Xi_{\mathrm{p}}^{(1)}$ scales proportionally with this norm—, and of which particular solution $\Xi_{\mathrm{p}}^{(1)}$ of (2.9) has been chosen.

The case $n^* > 1$ is treated similarly: an example is worked out in Section 5.7.

2.11. Summary

Among the equations listed above, only those marked by a star need to be considered for the purpose of applying the method: the other equations are required for the proof only. Practically, the expansion is carried out by the following sequence of steps:

1. given the operators A_λ and B_λ, check the properties (2.6*);
2. calculate the restriction B^* of B_λ to $\ker A$ and determine the critical load $\lambda^{(0)}$ by solving the implicit Eq. (2.11*);

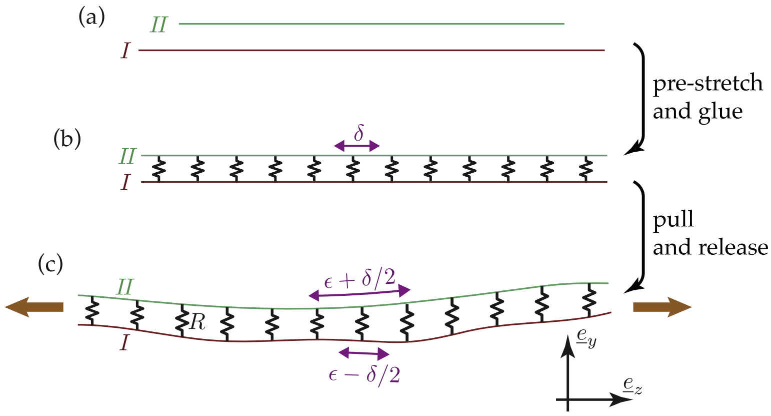

Fig. 3. The double-beam model: δ is a mismatch strain, and ϵ an imposed mean strain (imposed by the displacement of the remote endpoints). For the sake of legibility, an extensional pre-stretch is shown, $\epsilon + \delta/2 > \epsilon - \delta/2 > 0$; in reality the structure does not becomes unstable unless of the pre-stretch is compressive, $\epsilon - \delta/2 < 0$.

3. determine the dimension n^* of $\ker B^*(\lambda^{(0)})$ and introduce the n^* unknown components of $\Xi^{(0)}$ in a basis of $\ker B^*(\lambda^{(0)})$, see (2.12a*)–(2.12b*);
4. find a particular solution $\Xi_p^{(1)}$ of the eigenvalue problem (2.9*) at order q^2 in terms of the n^* components of $\Xi^{(0)}$;
5. using Eq. (2.13*), derive n^* equations for the n^* components of $\Xi^{(0)}$ and for $\lambda^{(1)}$;
6. solve these equations for the value of $\lambda^{(1)}$ and for the direction of the eigenmode $\Xi^{(0)}$ (its magnitude remains undetermined).

This general procedure is implemented in Sections 3.6, 4.4 and 5.7: in each case we start by deriving the expressions of the operators A_λ and B_λ, which vary from one structural model to the other (double-beam, plate or 3-d prismatic solid).

2.12. Comment: similarities and differences with a Koiter expansion

The expansion method proposed above has some similarities with the well-known Lyapunov-Schmidt-Koiter method (van der Heijden, 2008) that provides a weakly non-linear expansion of bifurcated branches near a bifurcation point. Both methods deal with singular operators and therefore involve solvability conditions. Eq. (2.11) is similar to the condition that the total stiffness operator is singular at the critical load; Eq. (2.12a) is similar to the condition that the linear mode is a null vector of the total stiffness operator; Eq. (2.12b) defines the multiplicity of the mode; Eq. (2.13) is similar to the amplitude equation, that sets the amplitude of the perturbation as a function of the increment of load.

There is an important difference, however: the Lyapunov-Schmidt-Koiter is a *non-linear* expansion of the *amplitude* as a function of the load, while in our method an expansion of the *critical wavelength* as a function of the load is sought based on *linearized* equations of equilibrium—those equation are still non-linear with respect to the wavenumber q.

3. A double-beam model

In this section, we analyze the bistrip experiment sketched in Fig. 1 based on a simple double-beam model. It captures the important features of the instability at a qualitative level, as we shall see. Using this double-beam model, we calculate the first critical load and the corresponding wavenumber that govern the bifurcation away from the homogeneous solution (direct method), and discuss in particular whether the bifurcation mode is macroscopic or microscopic.

3.1. Formulation

In the double-beam model, each half of the bistrip used in the original experiment in Fig. 1 is represented by a different beam: the beams are denoted by I and II, consistent with the notation in Fig. 1: the beam II represents the strip that has been pre-stretched prior to gluing with I as sketched on Fig. 3, and a more tensile (less compressive) pre-stress is assigned to beam II than to beam I, see below. The two beams are coupled by an elastic layer of springs. In the original experiment, the instability is truly three-dimensional. By contrast, the double-beam model proposes a simplified two-dimensional representation, whereby the centerlines of each half of the original bistrip have been projected onto a common plane (Oyz). The projection takes place along the direction x initially parallel to the width of the bistrip.

Let z denote the axial coordinate and $y_I(z)$ and $y_{II}(z)$ the deflection of each beam. According to the notation introduced in Section 2.1, the configuration of a cross-section of the double-beam is denoted by

$$\varphi(z) = \big(y_I(z), y_{II}(z)\big).$$

The strain energy of the double-beam per unit length is

$$W(\varphi) = \frac{1}{L}\int_0^L \frac{1}{2}\left[\sum_{i=I,II}\left(C\,y_i''^2 + G\left(\epsilon + \frac{\chi_i\,\delta}{2}\right)y_i'^2\right) + R\,(y_1 - y_2)^2\right]\mathrm{d}z, \tag{3.1}$$

where $\chi_i = \pm 1$ is a sign,

$$\chi_i = \begin{cases} -1 & \text{for beam } i = I, \\ +1 & \text{for beam } i = II. \end{cases}$$

In Eq. (3.1), $C = E\,\mathcal{I}$ is the bending modulus of the beams (where E is the Young's modulus and $\mathcal{I}$ the geometric moment of inertia of the cross-section), $G = E\,\mathcal{A}$ is their traction modulus (where $\mathcal{A}$ is the area of the cross-section of one beam), and R is the modulus of the elastic layer of springs connecting the two beams, see Fig. 3. For each beam, the first term $C\,y_i''^2/2$ is the bending energy, and the second term is the energy associated with the pre-strain $\epsilon \pm \delta/2$ corresponding to a *pre-stress* $G(\epsilon \pm \delta/2)$). The beams are subjected to different amount of pre-strain: the mean imposed pre-strain[1] ϵ is the result of the displacement applied at the remote endpoints, while the difference in pre-strain δ arises from the mismatch strain prior to gluing the two strips, see Fig. 3b. The last term in Eq. (3.1) captures in a qualitative way the strain energy associated with the deformation of the cross-section in the original experimental set-up. For a general discussion of mechanical models obtained by assembling two elastic rods, including the extension to three dimensions and to general constitutive laws, see the work of Lessines et al. (2015).

As in Euler buckling, the pre-strain δ and the mean imposed strain ϵ can make the homogeneous solution $\varphi(z) = (0, 0)$ unstable. The corresponding bifurcation problem is studied in the rest of this section. To ease the discussion, we first reformulate the model in terms of dimensionless quantities.

3.2. Dimensionless variables

In terms of the model parameters, one can define a typical mismatch strain $\delta^\dagger$ and a typical wavenumber $q^\dagger$ as

$$\delta^\dagger = \frac{\sqrt{C\,R}}{G}, \quad q^\dagger = \left(\frac{R}{C}\right)^{1/4},$$

as well as the following dimensionless quantities: wavenumber $\overline{q}$, axial coordinate $\overline{z}$, mismatch strain $\overline{\delta}$, average strain $\overline{\epsilon}$, and deflection $\overline{y}_i(\overline{z})$

$$\overline{q} = \frac{q}{q^\dagger}, \quad \overline{z} = z\,q^\dagger, \quad \overline{\delta} = \frac{\delta}{\delta^\dagger}, \quad \overline{\epsilon} = \frac{\epsilon}{\delta^\dagger}, \qquad \overline{y}_i(\overline{z}) = y_i(z = \overline{z}/q^\dagger). \tag{3.2}$$

With $\overline{W} = W/R$ denoting the rescaled strain energy per unit length and $\overline{\varphi}(\overline{z}) = \left(\overline{y}_1(\overline{z}), \overline{y}_{II}(\overline{z})\right)$ the configuration of the centerline, the energy (3.1) of the double-beam can be written in dimensionless form as

$$\overline{W}(\overline{\varphi}) = \frac{1}{\overline{L}}\int_0^{\overline{L}} \frac{1}{2}\left[\overline{\varphi}''(\overline{z})\cdot c\cdot\overline{\varphi}''(\overline{z}) + \overline{\varphi}'(\overline{z})\cdot b_{\overline{\epsilon}}\cdot\overline{\varphi}'(\overline{z}) + \overline{\varphi}(\overline{z})\cdot a\cdot\overline{\varphi}(\overline{z})\right]\mathrm{d}\overline{z}, \tag{3.3a}$$

where the dimensionless length is again infinite, $\overline{L} = q^\dagger L \to \infty$, and we have introduced the 2×2 symmetric matrices

$$a = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b_{\overline{\epsilon}} = \begin{pmatrix} \overline{\epsilon} - \frac{\overline{\delta}}{2} & 0 \\ 0 & \overline{\epsilon} + \frac{\overline{\delta}}{2} \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.3b}$$

Note that the operator $b_{\overline{\epsilon}}$ acting on the first gradient $\overline{\varphi}'$ depends on both the mismatch strain $\overline{\delta}$ and on the mean strain $\overline{\epsilon}$, but the dependence on $\overline{\delta}$ is implicit in our notation.

3.3. Eigenvalue problem governing bifurcation

The homogeneous, unbuckled solution corresponds to $\overline{\varphi}_0^{\overline{\epsilon}} = (0, 0)$. We consider bifurcations from the homogeneous solution by seeking perturbed equilibria in the form

$$\overline{y}_j(\overline{z}) = 0 + \overline{y}_1^j\,e^{i\,\overline{q}\,\overline{z}} \quad (j = I, II).$$

To match up with the generic expansion $\overline{\varphi}(\overline{z}) = \overline{\varphi}_0^{\overline{\epsilon}} + \overline{\xi}_1\,e^{i\,\overline{q}\,\overline{z}}$ introduced earlier in (2.1), we collect the complex amplitudes into a vector $\overline{\xi}_1 = \left(\overline{y}_1^I, \overline{y}_1^{II}\right)$. It can be checked easily that the real part of $\overline{y}_1^I$ is uncoupled with the imaginary part of $\overline{y}_1^{II}$ and vice versa: as a result, one can assume without loss of generality that the complex amplitudes are real.

[1] As the double-beam model is formulated in small-strain context, the mean imposed strain ϵ is a loading parameter; it replaces the mean imposed stretch λ used in the rest of the paper, $\epsilon = \frac{\lambda\,(p+1)}{2} - 1 \approx \lambda - 1$ (when the pre-stretch is small: $p \approx 1$).

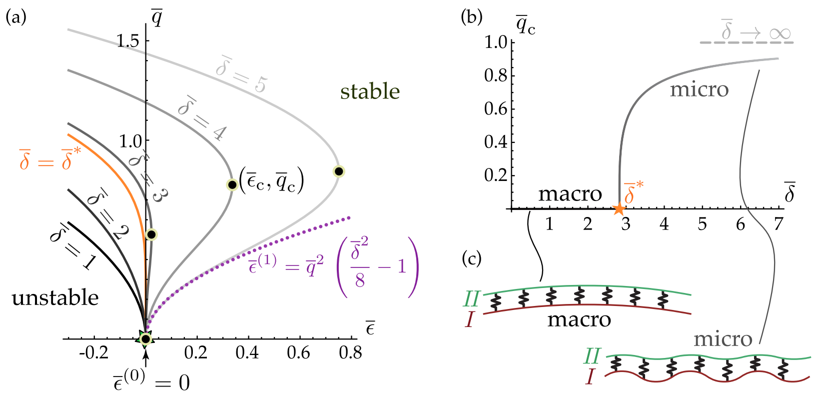

Fig. 4. Bifurcation analysis of the double-beam. (a) Curves of marginal stability as a function of the imposed average strain $\overline{\epsilon}$ for different values of the dimensionless mismatch strain $\overline{\delta} = 1, 2, \sqrt{8}, 3, 4, 5$ (from dark to bright). The orange curve for $\overline{\delta} = \overline{\delta}^* = \sqrt{8}$ separates the regime of macroscopic buckling from the regime microscopic buckling. The dotted parabola is the result of the asymptotic analysis in Eq. (3.9) for $\overline{\delta} = 5$ and is checked to be consistent with the direct method (grey curve). The 'stable' and 'unstable' keywords indicate the expected region of stability and instability of the unbuckled solution. The critical values for the imposed average strain $\overline{\epsilon}_c$ and the associated wavenumber $\overline{q}_c$ are denoted by black disks. (b) Wavenumber $\overline{q}_c$ of the first unstable mode as functions of dimensionless mismatch strain $\overline{\delta}$, featuring the macroscopic to microscopic transition at the critical value of $\overline{\delta}^*$. The dashed grey line represents the limit value of $\overline{q}_c$ when $\overline{\delta} \to \infty$; this corresponds to the classical model of a strut on a linear foundation. (c) The first unstable mode is an Euler-type of mode in the macroccopic regime ($\overline{y}_1^I = \overline{y}_1^{II}$ for $\overline{\delta} < \overline{\delta}^*$), and a strut-on-foundation-type of mode for large dimensionless mismatch strain ($|\overline{y}_1^{II}| \ll |\overline{y}_1^I|$ when $\overline{\delta} \gg \overline{\delta}^*$). (For interpretation of the references to color in this figure legend, the reader is referred to the web version of this article.)

The linearized equations of equilibrium are obtained in weak form from (3.3a) as

$$\forall \hat{\xi}, \quad \hat{\xi} \cdot a \cdot \overline{\xi}_1 + \overline{q}^2\, \hat{\xi} \cdot b_{\overline{\epsilon}} \cdot \overline{\xi}_1 + \overline{q}^4\, \hat{\xi} \cdot c \cdot \overline{\xi}_1 = 0. \tag{3.4a}$$

This equation appears to be a special case of the general Eq. (2.2) derived earlier, when the operators are identified as $d_\lambda^0 = a$, $d_\lambda^2 = b_{\overline{\epsilon}}$ and $d_\lambda^4 = c$, and $d_\lambda^1 = d_\lambda^3 = 0$ by symmetry (recall that the mean imposed stretch λ is replaced by the mean imposed strain $\overline{\epsilon}$ in the current context of linear elasticity).

As there is a finite number of degrees of freedom, the strong form of the polynomial eigenvalue problem (3.4a) is found directly by eliminating $\hat{\xi}$ as

$$\left(a + \overline{q}^2\, b_{\overline{\epsilon}} + \overline{q}^4\, c\right) \cdot \overline{\xi}_1 = 0. \tag{3.4b}$$

This equation has both the eigenvector $\overline{\xi}_1$ and the eigenvalue $\overline{q}$ as unknowns.

3.4. Direct solution: macroscopic versus microscopic buckling

In view of (3.4b), the bifurcation condition is $\det\left(a + \overline{q}^2\, b_{\overline{\epsilon}} + \overline{q}^4\, c\right) = 0$. Inserting the special form of the operators (3.3b), this yields

$$\left(\overline{q}^4 + \overline{\epsilon}\,\overline{q}^2 + 1\right)^2 - \left(\frac{\overline{\delta}^2\,\overline{q}^4}{4} + 1\right) = 0. \tag{3.5}$$

The curves of marginal stability are obtained by solving this implicit equation in the plane $(\overline{\epsilon}, \overline{q})$ for different values of the dimensionless mismatch strain $\overline{\delta}$, see Fig. 4a. The variable on the horizontal axis is the dimensionless average strain $\overline{\epsilon}$.

The sequence of experimental steps depicted in Fig. 3 are as follows: the value of the dimensionless mismatch strain $\overline{\delta}$ is fixed when the two rods are glued together; the bistrip is stretched (large positive $\overline{\epsilon}$, homogeneous solution is stable); the ends are then brought closer to one another (decreasing $\overline{\epsilon}$) until a bifurcation is observed. This corresponds to the point $(\overline{\epsilon}_c, \overline{q}_c)$ denoted by a black disk in Fig. 4.

In Fig. 4a, all the curves of marginal stability meet with the horizontal axis at

$$\overline{\epsilon}^{(0)} = 0, \tag{3.6}$$

consistent with the fact that the buckling threshold of an Euler beam goes to zero as its length goes to infinity. Note that this $\overline{\epsilon}^{(0)} = 0$ is not the first critical train $\overline{\epsilon}_c$ when the bifurcation mode is microscopic (see below).

As shown in Fig. 4, the double-beam model predicts a bifurcation from a macroscopic instability ($\overline{q}_c = 0$) at low values of the mismatch strain $\overline{\delta} < \overline{\delta}^*$, to a microscopic instability ($\overline{q}_c > 0$) at large values of the mismatch strain $\overline{\delta} > \overline{\delta}^*$: the double-beam model successfully reproduces the macroscopic-to-microscopic transition reported in the experiments of Huang et al. (2012) and Liu et al. (2014) and in their stability analysis based on a 3-d finite-element model.

The critical value of the dimensionless mismatch strain can be found by expanding (3.5) for small $\overline{\epsilon}$ as $\overline{q}^4\left(\overline{q}^4 + 2\left(1 - \overline{\delta}^2/8\right)\right) \approx 0$, which leads to

$$\overline{\delta}^* = \sqrt{8}. \tag{3.7}$$

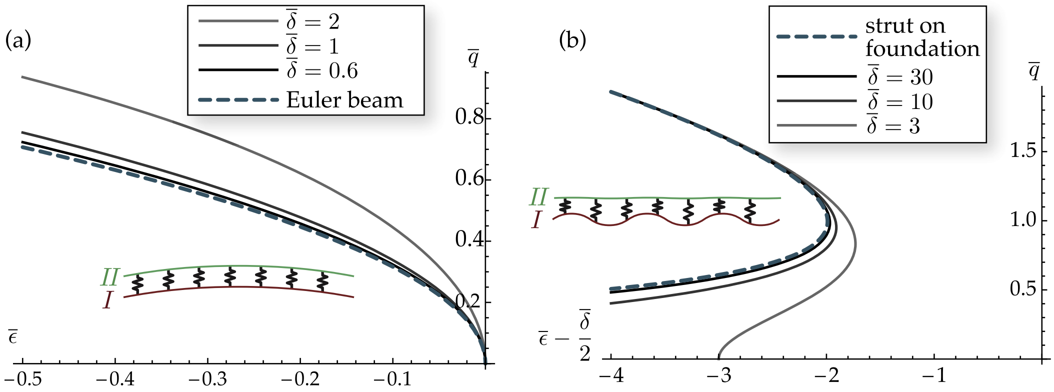

Fig. 5. Convergence of the bifurcation modes of the bi-rod model. (a) Equivalence with the Euler beam in the limit where the dimensionless mismatch strain is small, $\overline{\delta} \ll \overline{\delta}^*$: the curves of marginal stability in the plane $(\overline{\epsilon}, \overline{q})$ collapse onto the master curve corresponding to the Euler beam model, for which $\overline{q}^2 + \overline{\epsilon} = 0$ (dashed curve). (b) Equivalence with the strut-on-a-foundation in the limit where the mismatch strain is large, $\overline{\delta} \to \infty$: bifurcation curves in the plane $(\overline{\epsilon} - \overline{\delta}/2, \overline{q})$ collapse onto the master curve corresponding to the strut on a foundation, for which $\overline{q}^4 + (\overline{\epsilon} - \frac{\overline{\delta}}{2})\,\overline{q}^2 + 1 = 0$ (dashed curve).

3.5. Limiting cases

The double-beam model has two interesting limits.

In the absence of mismatch stress, $\delta = 0$, or for stiff springs, $R \to \infty$, a condition for the energy to be minimum is that $y_I(z) = y_{II}(z)$: in the double-beam model, the two beams move together to avoid the energy penalty associated with the springs. The model is then equivalent to a single Euler beam with the pre-stress $G\epsilon$. In dimensionless variables, this limit corresponds to $\overline{\delta} = 0$.

The other limit is when both $\epsilon \to +\infty$ and $\delta \to +\infty$ but with $\epsilon - \delta/2$ remaining finite: then beam II remains straight ($y_{II}(z)$ is constant) to avoid the penalty associated with the strongly stabilizing term $G\,(\epsilon + \delta/2)\, {y'_{II}}^2/2$; the classical model of a strut on a linear foundation is then recovered for the other beam I, with pre-stress $G\,(\epsilon - \delta/2)$. In dimensionless variables, this corresponds to both $\overline{\epsilon} \to \infty$ and $\overline{\delta} \to \infty$, with $\overline{\epsilon} - \overline{\delta}/2$ remaining finite.

The convergence of the solutions of the double-beam model is confirmed in Fig. 5, where the curves of marginal stability are shown to collapse onto a master curve corresponding to an Euler beam for small $\overline{\delta}$, and to a strut on a foundation for large $\overline{\delta}$.

The Euler beam model and the strut on an elastic foundation are the textbook examples of elastic continua featuring a macroscopic or a microscopic instability, respectively. Interestingly, the double beam model 'interpolates' between them using the dimensionless pre-strain parameter $\overline{\delta}$.

3.6. A first application of the small-wavenumber expansion

In this section, we recover the existence of a macroscopic-to-microscopic transition based on the general small-wavenumber expansion presented in Section 2 and summarized in Section 2.11. For a simple model such as the double beam, this approach turns out to be more complicated than the direct method carried out in Section 3.4. Still, this first example of application of the small-wavenumber expansion is instructive; it allows us to warm up before we move on to more accurate (and difficult) structural models—where the real power of expansion method will become fully apparent.

We need to first rewrite the quartic eigenvalue problem (3.4a) as a quadratic one to match with Eq. (2.3a). The trick is to consider a new eigenvector Ξ of dimension $2 + 2 = 4$ obtained by the direct sum (concatenation) of the original eigenvector $\overline{\xi}_1$ and of $\overline{q}^2\,\overline{\xi}_1$:

$$\Xi = \begin{pmatrix} [\overline{\xi}_1] \\ [\overline{q}^2\,\overline{\xi}_1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \overline{y}_1^I \\ \overline{y}_1^{II} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \overline{q}^2\,\overline{y}_1^I \\ \overline{q}^2\,\overline{y}_1^{II} \end{bmatrix} \end{pmatrix}. \tag{3.8a}$$

Using block-matrix notation, we define two 4×4 matrices by assembling the 2×2 operators a, $b_{\overline{\epsilon}}$ and c as follows,

$$A = \begin{pmatrix} [a] & [0] \\ [0] & [-c] \end{pmatrix}, \quad B_{\overline{\epsilon}} = \begin{pmatrix} [b_{\overline{\epsilon}}] & [c] \\ [c] & [0] \end{pmatrix}. \tag{3.8b}$$

The quartic eigenvalue problem (3.4a) can then be rewritten as a quadratic one,

$$A \cdot \Xi + \overline{q}^2\, B_{\overline{\epsilon}} \cdot \Xi = 0. \tag{3.8c}$$

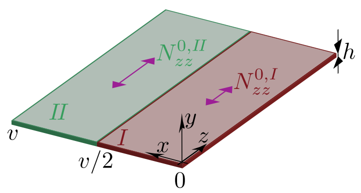

Fig. 6. A plate model with piecewise constant pre-strain: the homogeneous solution shown here can become unstable when the lowest pre-stress $N_{zz}^{0,I}$ is compressive enough.

Indeed, one can check easily that to any set of eigenvector $\overline{\xi}_1$ and eigenvalue $\overline{q}$ of the original problem (3.4a) corresponds an eigenvector Ξ and an eigenvalue $\overline{q}$ of (3.8c). The converse is also true. Let $\Xi = \begin{pmatrix} [\Xi_1] \\ [\Xi_2] \end{pmatrix}$ and $\overline{q}$ denote an eigenpair of (3.8c): expanding the blocks in (3.8c) we find two equations, $a \cdot \Xi_1 + \overline{q}^2\,(b_{\overline{\epsilon}} \cdot \Xi_1 + c \cdot \Xi_2) = 0$ and $-c \cdot \Xi_2 + \overline{q}^2\, c \cdot \Xi_1 = 0$, which indeed yield equation (3.4b) upon elimination of $\Xi_2 = \overline{q}^2\, \Xi_1$ (observe that c is invertible).

We can now proceed to carry out the steps listed in Section 2.11, replacing the imposed axial stretch λ by the dimensionless mean strain $\overline{\epsilon}$:

1. A and $B_{\overline{\epsilon}}$ are symmetric and $\ker A$, which is the line spanned by $\Xi = (1, 1, 0, 0)$ is indeed independent of $\overline{\epsilon}$ (note that $\ker A$ corresponds to rigid-body translations, $\overline{y}_1^I = \overline{y}_1^{II}$, as announced earlier);
2. $B^*(\overline{\epsilon})$ is the restriction of $B_{\overline{\epsilon}}$ to $\ker A$: it is a 1×1 matrix, *i.e.* a scalar whose value is calculated as $B^*(\overline{\epsilon}) = (1, 1, 0, 0) \cdot B_{\overline{\epsilon}} \cdot (1, 1, 0, 0) = 2\,\overline{\epsilon}$. The condition $\det B^* = 0$ yields the load $\overline{\epsilon}^{(0)}$ as $\overline{\epsilon}^{(0)} = 0$ and we recover Eq. (3.6);
3. at $\overline{\epsilon} = \overline{\epsilon}^{(0)}$, the kernel of $B^*(\overline{\epsilon}^{(0)}) = \big(0\big)$ is of dimension 1, so $n^* = 1$. A general element $\Xi^{(0)}$ of $\ker B^*(0) = \ker A$ is the rigid-body translation $\Xi^{(0)} = \alpha^{(0)}\,(1, 1, 0, 0)$ where the magnitude $\alpha^{(0)} \in \mathbb{R}$ of the mode will remain undetermined;
4. a particular solution of the problem (2.9) at order q^2 is found in terms of $\alpha^{(0)}$ as $\Xi_{\mathrm{p}}^{(1)} = \alpha^{(0)}\,(\frac{\overline{\delta}}{4}, -\frac{\overline{\delta}}{4}, 1, 1)$;
5. with $B'_{(0)}$ the block matrix $B'_{(0)} = \begin{pmatrix} [b'_{(0)}] & [0] \\ [0] & [0] \end{pmatrix}$ and $b'_{(0)}$ the upper-left block $b'_{(0)} = \frac{\mathrm{d}b_{\overline{\epsilon}}}{\mathrm{d}\overline{\epsilon}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, we have from Eq. (2.14), $\overline{\epsilon}^{(1)} = \frac{\overline{\delta}^2}{8} - 1$.

With $\overline{\epsilon}^{(0)} = 0$, the osculating parabola $\overline{\epsilon} = \overline{\epsilon}^{(0)} + \overline{\epsilon}^{(1)}\,\overline{q}^2$ to the curve of marginal stability at the point of intersection with the $\overline{\epsilon}$-axis is therefore

$$\overline{\epsilon} = \overline{q}^2 \left(\frac{\overline{\delta}^2}{8} - 1 \right) \quad \text{(osculating parabola).} \tag{3.9}$$

These results are fully consistent with the direct method of Section 3.4. First, the dotted parabola in Fig. 4 fits the curve of marginal stability accurately for $\overline{\delta} = 5$ near its intersection with the $\overline{\epsilon}$-axis. Second, Eq. (3.9) predicts the correct critical dimensionless mismatch strain $\overline{\delta}^* = \sqrt{8}$ corresponding to the microscopic-to-macroscopic transition, as obtained in Eq. (3.7) by a direct method.

3.7. Discussion

The double-beam model does not aim at reproducing the experiments accurately. Nevertheless it successfully captures the transition from a macroscopic buckling mode for low mismatch strain δ, to a microscopic buckling mode for higher mismatch strain δ. The nature of the instability is governed by a dimensionless parameter $\overline{\delta} = \frac{G\,\delta}{\sqrt{C\,R}}$, showing that there is a competition between the stiffness R of the springs, favoring long wavelength, and the mismatch strain δ, favoring short wavelength. The spring constant R is itself meant to represent the deformability of the cross-sections in the 3-d bistrip.

For non-deformable cross-sections, $R \to \infty$ or $\overline{\delta} \to 0$, the Euler-Bernoulli beam model is recovered. The latter always predict a macroscopic instability, as is well known: $\overline{\epsilon}^{(1)} = -1 < 0$ for $\overline{\delta} = 0$. This confirms that microscopic buckling cannot be explained by the classical Euler-Bernoulli beam model: the deformability of the cross-sections is a key ingredient.

The critical mismatch strain $\overline{\delta}^*$ has been calculated by two methods. As a closed-form equation for the curves of marginal stability are available for this particular model, a direct method was possible. The general small-wavenumber expansion yields the same results.

4. A plate model with inhomogeneous pre-stress

In this section, the bistrip experiment sketched earlier in Fig. 1 is revisited based on a plate model. An elastic plate with width v, thickness h, infinite length L, Young's modulus E and Poisson's ratio ν is subject to an inhomogeneous pre-stress, see Fig. 6. The plate model is accurate when the bistrip is thin, in the limit $h \ll v$. Its predictions will be quantitatively correct in this limit, which is an improvement over the qualitative double-beam model.

The uniaxial membrane pre-stress is inhomogeneous and aligned with the direction z:

$$N_{zz}^{0}(\epsilon; x) = Eh\left(\epsilon + \chi(x)\,\frac{\delta}{2}\right), \tag{4.1a}$$

where $\chi(x) = \pm 1$ is now the piecewise continuous function

$$\chi(x) = \begin{cases} -1 & \text{in half-plate } I,\ 0 < x < v/2, \\ +1 & \text{in half-plate } II,\ v/2 < x < v. \end{cases} \tag{4.1b}$$

The difference membrane pre-stress $N_{zz}^{0,II} - N_{zz}^{0,I} = Eh\,\delta$ comes from the mismatch strain δ, *i.e.* from the strain δ imposed to *II* prior to gluing with *I*. By contrast, the average membrane pre-stress $(N_{zz}^{0,I} + N_{zz}^{0,II})/2 = Eh\,\epsilon$ arises from the mean strain ϵ, as imposed the prescribed distance between the remote ends of the plate. During the experiment, the mismatch strain δ remains fixed; the imposed mean strain ϵ is initially positive, and then decreases as the ends are brought closer to one another, until a bifurcation is observed.

4.1. Plate model

As a thin plate buckles with infinitesimal strain, the mean strain ϵ, the mismatch strain δ, and the in-plane displacements will all remain small. The buckling bifurcation is described using the Föppl-von Kármán plate model, linearized near the planar pre-stressed configuration. Near any planar configuration, the buckling mode is purely transverse and we denote by $w(x, y)$ the deflection and by $\hat{w}(x, y)$ a transverse virtual displacement. In weak form, the linearized equilibrium equation of the plate reads, see for instance (Audoly and Pomeau, 2010),

$$\forall \hat{w}(x, y), \quad \frac{1}{L}\int_0^L \int_0^v \left(\hat{w}_{,\alpha\beta}(x, y)\, m_{\alpha\beta}(x, y) + N_{zz}^{0}(\epsilon; x)\, \hat{w}_{,z}(x, y)\, w_{,z}(x, y)\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}z = 0, \tag{4.2a}$$

where $L \to \infty$ is the length of the plate, a comma in subscript denotes a partial derivative, Greek indices such as α and β are restricted to the in-plane directions (they can take on the values x or y) and an implicit summation is implied over repeated indices according to Einstein's summation convention.

In Eq. (4.2a), $m_{\alpha\beta}$ denotes the bending stress. For a homogeneous isotropic material, it is given by the constitutive relations

$$m_{\alpha\beta} = D\left((1-\nu)\, w_{,\alpha\beta} + \nu\, \delta_{\alpha\beta}\, w_{,\gamma\gamma}\right). \tag{4.2b}$$

Here, $D = \frac{E\,h^3}{12\,(1-\nu^2)}$ denotes the plate's bending modulus and $\delta_{\alpha\beta}$ is Kronecker's symbol.

The next step is to consider perturbations that are harmonic in the axial direction z. At the same time, we move to dimensionless quantities and use the width v as the natural scale for in-plane coordinates. In terms of the rescaled axial wavenumber $\overline{q} = q\,v$ and of the rescaled axial coordinate $\overline{z} = z/v$, we denote by $\xi_1(\overline{x})$ and $\hat{\xi}(\overline{x})$ the complex amplitudes corresponding to the real and virtual deflections, respectively,

$$w(x, y) = \xi_1\left(\frac{x}{v}\right) e^{i\,\overline{q}\,\overline{z}} \tag{4.3a}$$

$$\hat{w}(x, y) = \hat{\xi}\left(\frac{x}{v}\right) e^{i\,\overline{q}\,\overline{z}}. \tag{4.3b}$$

By the same argument as earlier, the complex amplitudes can be assumed to be real without any loss of generality, as this amounts to set the phase of the bifurcating mode.

When the harmonic deflections are inserted into (4.2a) and the integration over $\overline{z}$ is carried out, one obtains the equation for the critical mode as a quartic eigenvalue problem,

$$\forall \hat{\xi}(\overline{x}), \quad a(\hat{\xi}, \xi_1) + \overline{q}^2\, b_{\overline{\epsilon}}(\hat{\xi}, \xi_1) + \overline{q}^4\, c(\hat{\xi}, \xi_1) = 0. \tag{4.4a}$$

The plate model has infinitely many degrees of freedom: in the eigenvalue problem, the eigenvector is now the *function* $\xi_1(\overline{x})$. The bilinear operators are found as

$$a(\hat{\xi}, \xi_1) = \int_0^1 \hat{\xi}''\, \xi_1''\, \mathrm{d}\overline{x} \tag{4.4b}$$

$$b_{\overline{\epsilon}}(\hat{\xi}, \xi_1) = \int_0^1 \left[2\,\hat{\xi}'\,\xi_1' + \left(\overline{\epsilon} + \frac{\overline{\chi}(\overline{x})}{2}\overline{\delta}\right)\hat{\xi}\,\xi_1 - \nu\,\frac{\mathrm{d}^2(\hat{\xi}\,\xi_1)}{\mathrm{d}\overline{x}^2}\right] \mathrm{d}\overline{x} \tag{4.4c}$$

$$c(\hat{\xi}, \xi_1) = \int_0^1 \hat{\xi}\,\xi_1\, \mathrm{d}\overline{x}, \tag{4.4d}$$

where $\overline{\chi}(\overline{x}) = \chi(\nu\,\overline{x})$ has, like the original $\chi(x)$, the value −1 in the half-plate labeled *I* ($0 < \overline{x} < 1/2$) and +1 in the half-plate labeled *II* ($1/2 < \overline{x} < 1$). The dimensionless mismatch strain $\overline{\delta}$ and mean imposed strain $\overline{\epsilon}$ have been identified as

$$\overline{\delta} = \frac{\delta}{\delta^\dagger}, \quad \overline{\epsilon} = \frac{\epsilon}{\delta^\dagger}, \qquad \text{where } \delta^\dagger = \frac{1}{12\,(1-\nu^2)}\,\frac{h^2}{\nu^2}. \tag{4.4e}$$

Eq. (4.4a) is an eigenvalue problem of the general type (2.2) when the operators are identified as $d_\lambda^0 = a$, $d_\lambda^2 = b_{\overline{\epsilon}}$ and $d_\lambda^4 = c$, and $d_\lambda^1 = d_\lambda^3 = 0$ by symmetry. As with the double-beam, we work with infinitesimal strain, and the mean imposed axial stretch λ has been replaced by the mean imposed dimensionless strain $\overline{\epsilon}$. In addition, we are now working in an infinite-dimensional setting, with ξ_1 being a function and not a vector: the dot notation used earlier for the evaluation of operators, such as $\hat{\xi}\cdot a\cdot\xi_1$, has been replaced by the parentheses notation $a(\hat{\xi},\xi_1)$, which involves an integral over the cross-section, see Eqs. (4.4b)–(4.4d).

4.2. Direct approach: numerical shooting method

To analyze the solutions of the eigenvalue problem (4.4a), we start by integrating by parts so as to eliminate the virtual deflection $\hat{\xi}(\overline{x})$. This yields an equilibrium equation in the interior,

$$-\xi_1''''(\overline{x}) + 2\,\overline{q}^2\,\xi_1''(\overline{x}) - \left(\overline{q}^4 + \overline{q}^2\left(\overline{\epsilon} + \overline{\chi}(\overline{x})\,\frac{\overline{\delta}}{2}\right)\right)\xi_1(\overline{x}) = 0 \qquad (0 \le \overline{x} \le 1), \tag{4.5a}$$

the stress – free noudary conditions, (4.5b)

$$\left(\xi_1'' - \nu\,\overline{q}^2\,\xi_1\right)_{\overline{x}_0^i} = 0 \tag{4.5c}$$

$$\left(\xi_1''' - \overline{q}^2\left(2-\nu\right)\xi_1'\right)_{\overline{x}_0^i} = 0, \tag{4.5d}$$

as well as the kinematic and dynamical conditions at the interface,

$$\xi_1, \xi_1', \xi_1'', \xi_1''' \text{ are continuous at } \overline{x} = 1/2. \tag{4.5e}$$

In (4.5c) and (4.5d), $\overline{x}_0^I = 0$ and $\overline{x}_0^{II} = 1$ denote the dimensionless coordinates of the stress-free edges.

An alternative derivation of the linearized equilibrium (4.5a) is to combine the harmonic Ansatz (4.3a) for the deflection with the linearized von Kármán equation,

$$-D\,\Delta^2 w(x,z) + \frac{\partial\left(N_{zz}^0(\epsilon;x)\,w_{,z}(x,z)\right)}{\partial z} = 0,$$

and by using dimensionless variables: this yields the same result. Eqs. (4.5c) and (4.5d) can also be obtained similarly from the boundary conditions at the stress-free edge of an elastic plate, $w_{,xx} + \nu\,w_{,zz} = 0$ and $w_{,xxx} + \left(2-\nu\right)w_{,xzz} = 0$, as derived for instance by Landau and Lifshitz (1970).

To solve the eigenvalue problem (4.5a)–(4.5e), we used a numerical shooting method. For any value of the parameters (Poisson's ratio ν, mismatch strain $\overline{\delta}$, mean imposed strain $\overline{\epsilon}$, wavenumber $\overline{q}$), a 4×4 matrix $\mathcal{S}(\nu,\overline{\delta},\overline{\epsilon},\overline{q})$, called the shooting matrix, is filled in, based on the numerical integration of the differential equation (4.5a) with particular initial conditions. For fixed values of ν and $\overline{\delta}$, the curves of marginal stability in the plane $(\overline{\epsilon},\overline{q})$ are then found by solving numerically the implicit equation

$$\det\mathcal{S}(\nu,\overline{\delta},\overline{\epsilon},\overline{q}) = 0. \tag{4.6}$$

Further details on the construction of the shooting matrix $\mathcal{S}$ are given in Appendix A.

4.3. Results

In the following, we consider an incompressible material, $\nu = .5$. Curves of marginal stability corresponding to various values of $\overline{\delta}$ are plotted in Fig. 7a based on the shooting method in (4.6). The phase diagrams are similar to those obtained for the double-beam model, and must be read in the same way. The plate is initially stretched ($\overline{\epsilon} > 0$) and the imposed mean dimensionless strain $\overline{\epsilon}$ is progressively decreased until a bifurcation to a non-planar solution is observed. The first bifurcation takes place at $(\overline{\epsilon}_c,\overline{q}_c)$, as denoted by the black disks in the figure. Again, we find that the first bifurcation mode is macroscopic when the mismatch strain is less than a critical value, $\overline{\delta} < \overline{\delta}^*(\nu)$, and microscopic when it is greater, $\overline{\delta} > \overline{\delta}^*(\nu)$. The numerical results suggest that the critical value is $\delta^*(\nu = .5) \approx 90$. A closed-form expression for this $\overline{\delta}^*$ will be obtained later based on the small-wavenumber expansion, see Section 4.4.

In Fig. 7b, the critical wavenumber is plotted as a function of the mismatch strain. In Fig. 7c, a measure of the curvature of the cross-section, $\overline{\xi}_1''(0)/\xi_1(0)$ is plotted as a function of $\overline{\delta}$: the cross-section undergoes a rigid-body displacement when

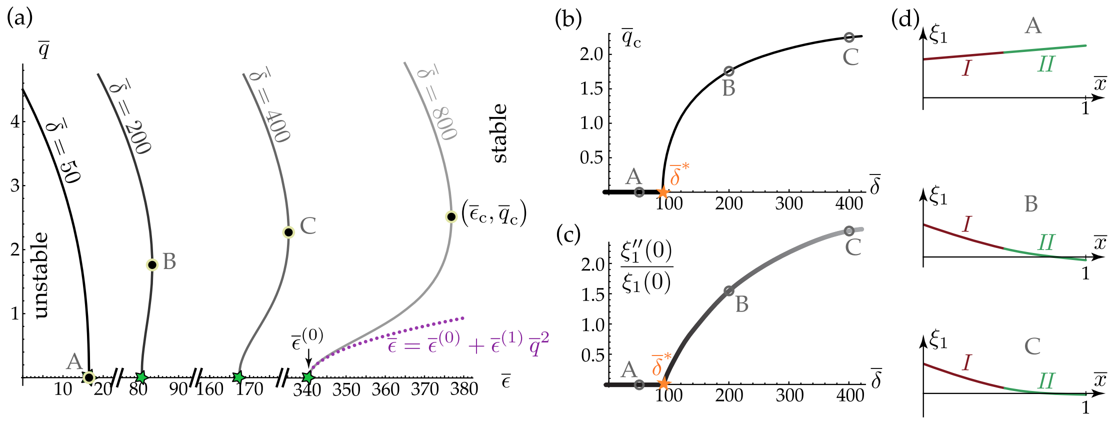

Fig. 7. Bifurcation from the planar solution of the plate model, with $\nu = .5$. (a) Critical wavenumber as a function of mean imposed dimensionless strain $\bar{\epsilon}$ for different values of the dimensionless mismatch strain $\bar{\delta}$. The solid curves are the predictions of the direct method (4.6); the dotted curve is the prediction of the small-wavenumber expansion (4.10b) for $\bar{\delta} = 800$. The labels 'stable' and 'unstable' indicate the expected region of stability and instability of the planar solution: this would need to be confirmed by a proper stability analysis. The critical values for the imposed average strain $\bar{\epsilon}_c$ and the associated wavenumber $\bar{q}_c$ are denoted by black disks. (b) Wavenumber, (c) measure of the curvature of the cross-section, and (d) eigenvector corresponding to the first bifurcating mode $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}_c$, for different values of the dimensionless mismatch strain $\bar{\delta}$. The points labeled A, B and C in different plots correspond to different levels of mismatch strain, $\bar{\delta} = 50, 200, 400$, respectively.

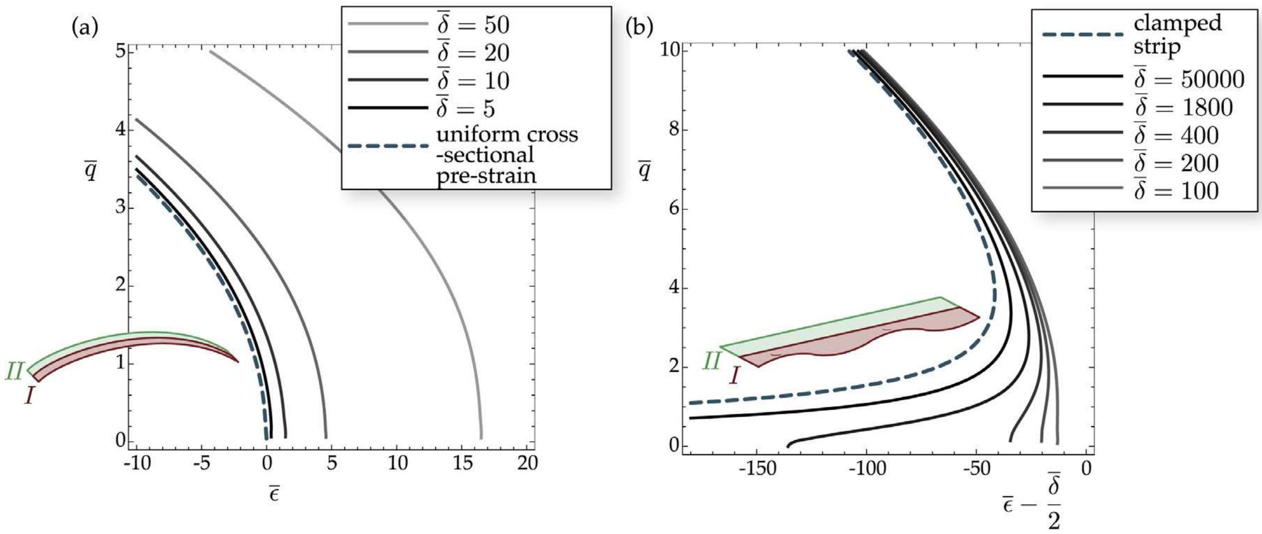

Fig. 8. Convergence of the bifurcation modes of the plate model for small and large dimensionless mismatch strain $\bar{\delta}$, with $\nu = .5$. (a) The case of small mismatch strain ($\bar{\delta} \ll \delta^*$) is equivalent to a rectangular plate with uniform pre-stress. (b) The case of large mismatch strain ($\bar{\delta} \gg \delta^*$) is equivalent to a half-plate (I) with one free and one clamped edge.

the mode is macroscopic (ξ_1 is a linear function of $\bar{x}$, corresponding to an infinitesimal translation and an infinitesimal rotation, as in configuration labeled 'A' in the figure), and it bends in its own plane when the mode is macroscopic ($\xi_1''(\bar{x}) \neq 0$, configurations 'B' and 'C').

The limits of small and large dimensionless mismatch strain $\bar{\delta}$ are shown in Fig. 8. For small mismatch strain, $\bar{\delta} \ll \bar{\delta}^*$, the pre-stress is homogeneous and comes exclusively from the mean imposed strain $\bar{\epsilon}$: the limit curve has been found by setting[2] directly $\bar{\delta} = 0$ in (4.6) (dashed curve in Fig. 8a). In the opposite limit $\bar{\delta} \gg \bar{\delta}^*$, the plate II is under large tensile stress $N_{zz}^{0,II}$ and the buckling mode is limited to region I: this is equivalent to a homogeneous half-plate I subject to pre-stress $N_{zz}^{0,I} = \epsilon - \delta/2$ having clamped boundary conditions at the interface $\bar{x} = 1/2$ (dashed curve in Fig. 8b); the corresponding asymptotic value of the wavenumber is $\bar{q}_c = 3.9$ for $\nu = .5$ ($\bar{\delta} \gg \delta^*$).

4.4. Small-wavenumber expansion

With the aim to calculate analytically the critical mismatch strain at the macroscopic to microscopic transition, we apply the small-wavenumber expansion of Section 2.11.

[2] For $\nu \neq 0$, the corresponding solution ξ_1 is not constant in this case, even though the differential equation has constant coefficients, see Section 3.5D in the book by Love (1927).

The quartic eigenvalue problem (4.4a) has exactly the same form as that of the double-beam model, compare with (3.4a): it can be cast into a quadratic eigenvalue problem exactly in the same way. Therefore, we define two new operators as earlier,

$$A = \begin{pmatrix} [a] & [0] \\ [0] & [-c] \end{pmatrix}, \quad B_{\overline{\epsilon}} = \begin{pmatrix} [b_{\overline{\epsilon}}] & [c] \\ [c] & [0] \end{pmatrix}. \tag{4.7a}$$

Unlike the original operators a, $b_{\overline{\epsilon}}$, c which act on two functions (a virtual one $\hat{\xi}$ and an increment ξ_1), the operators A and $B_{\overline{\epsilon}}$ act on two *pairs* of functions, the virtual pair $\widehat{\Xi}$ and the pair of increments Ξ. The pair of increments, for instance, reads as earlier in (3.8a):

$$\Xi = \begin{pmatrix} [\xi_1] \\ [\overline{q}^2\,\xi_1] \end{pmatrix}. \tag{4.7b}$$

Here is an example of how the block notation in (4.7a) must be understood: for two virtual functions $\tilde{\xi}$ and $\tilde{\xi}^\dagger$,

$$\begin{pmatrix} [\tilde{\xi}] \\ [\tilde{\xi}^\dagger] \end{pmatrix} \cdot B_{\overline{\epsilon}} \cdot \begin{pmatrix} [\xi_1] \\ [\overline{q}^2\,\xi_1] \end{pmatrix} = b_{\overline{\epsilon}}\big(\tilde{\xi}, \xi_1\big) + c\big(\tilde{\xi}, \overline{q}^2\,\xi_1\big) + c\big(\tilde{\xi}^\dagger, \xi_1\big).$$

With these notations, the eigenvalue problem (4.4a) governing the bifurcation of the plate is rewritten as a quadratic eigenvalue problem that matches up with the general form (2.3a):

$$\forall \widehat{\Xi}, \quad \widehat{\Xi} \cdot A \cdot \Xi + \overline{q}^2\,\widehat{\Xi} \cdot B_{\overline{\epsilon}} \cdot \Xi = 0.$$

This is a two-way equivalence: by the same argument as earlier, any eigenvector Ξ of the equation above can be shown to be of the special form (4.7b) and to correspond to a solution of the original problem (4.4a).

We are now ready to calculate the critical value of the mismatch strain by the recipe given in Section 2.11:

1. A and $B_{\overline{\epsilon}}$ are symmetric. The kernel $\ker A$ has dimension 2 and it is spanned by pairs of real function $(\varphi_1, 0)$ such that the first function is an affine function of $\overline{x}$ and the second function is identically 0. Like A, $\ker A$ is independent of $\overline{\epsilon}$;
2. the restriction $B^*_{\overline{\epsilon}}$ of $B_{\overline{\epsilon}}$ to $\ker A$ is calculated as

   $$B^*_{\overline{\epsilon}} = \begin{pmatrix} \overline{\epsilon} & \frac{1}{8}\big(\overline{\delta} + 4\,\overline{\epsilon}\big) \\ \frac{1}{8}\big(\overline{\delta} + 4\,\overline{\epsilon}\big) & \frac{1}{24}\big(3\,\overline{\delta} + 8\,(6 + \epsilon - 6\nu)\big) \end{pmatrix},$$

   where we use the basis vectors $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} \overline{x} \\ 0 \end{pmatrix}$ in $\ker A$ (remember that each vector in the basis is a pair of functions). The first entry of $B^*_{\overline{\epsilon}}$, for instance, is calculated as

   $$(B^*_{\overline{\epsilon}})_{11} = B_{\overline{\epsilon}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = b_\epsilon\big((1), (1)\big) = \int_0^1 \left(\overline{\epsilon} + \frac{\overline{\chi}(\overline{x})}{2}\,\overline{\delta}\right) \mathrm{d}\overline{x} = \overline{\epsilon}.$$

   Next, $\overline{\epsilon}^{(0)}(\nu, \overline{\delta})$ is found by solving $\det B^*_{\overline{\epsilon}} = 0$ which yields the quadratic equation,

   $$\overline{\epsilon}^{(0)\,2} + 24\,(1 - \nu)\,\overline{\epsilon}^{(0)} - \frac{3}{16}\,\overline{\delta}^2 = 0. \tag{4.8}$$

   To avoid cumbersome expressions, we will not attempt to solve this equation for $\overline{\epsilon}^{(0)}$ in closed-form; instead, we view it as an implicit equation for $\overline{\epsilon}^{(0)}$. The first critical load is given by the positive root $\overline{\epsilon}^{(0)} > 0$. The other root is negative and therefore corresponds to a secondary critical load;
3. the null space of $B^*_{\overline{\epsilon}}$ at $\overline{\epsilon}^{(0)}$ is of dimension $n^* = 1$, and is made up of pairs of functions of the form

   $$\Xi^{(0)} = \left(\left[\alpha^{(0)}\,\xi_1^{(0)}\right][0]\right), \qquad \text{where } \xi_1^{(0)}(\overline{x}) = 1 + \beta\,\overline{x} \quad \text{and} \quad \beta = -\frac{8\,\overline{\epsilon}^{(0)}}{\overline{\delta} + 4\,\overline{\epsilon}^{(0)}}. \tag{4.9}$$

   At this point, we have found the bifurcating mode, up to a factor $\alpha^{(0)}$ which will remain undetermined;
4. a particular solution $\Xi_\mathrm{p}^{(1)}$ of the eigenproblem (2.9) at order $\overline{q}^2$ is found as $\Xi_\mathrm{p}^{(1)} = \begin{pmatrix} [\alpha^{(0)}\,f(\overline{x})] \\ [0] \end{pmatrix}$ where f satisfies the linear initial-value problem,

   $$\begin{aligned} -f''''(\overline{x}) &= \left(\overline{\epsilon}^{(0)} + \chi\,(\overline{x})\right)\frac{\overline{\delta}}{2}\Big)\,\big(1 + \beta\,\overline{x}\big) \qquad (0 \le \overline{x} \le 1) \\ f(0) &= 0 \\ f'(0) &= 0 \\ f''(0) &= \nu \\ f'''(0) &= (2 - \nu)\,\beta. \end{aligned}$$

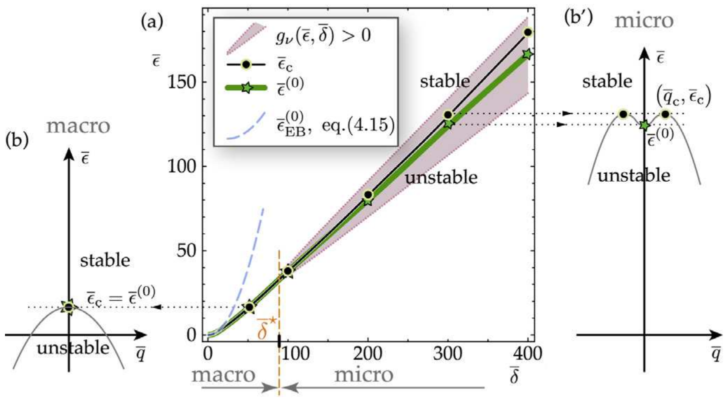

Fig. 9. Bifurcation diagram for the planar solution of the plate model, for $\nu = .5$. (a) Phase diagram: results of the shooting method from Fig. 7a (stars, disks and thin black curve) and predictions of the small-wavenumber expansion (thick green curve and red domain). The bifurcation mode is macroscopic when the green and black curves coincide, which is also when the green curve is outside the red region; it is microscopic otherwise. The prediction $\bar\epsilon^{(0)}_{\mathrm{EB}}$ of the Euler-Bernoulli rod model (dashed blue curve) is asymptotically consistent with that of the plate model in the limit of weak pre-stress, $\bar\delta \to 0$. (b,b′) Sketch of the curves of marginal stability in the $(\bar q, \bar\epsilon)$ plane corresponding to the macroscopic and microscopic cases, respectively. The expected domain of stability of the planar solution, as indicated by the 'stable' and 'unstable' labels, could be confirmed by a proper stability analysis. (For interpretation of the references to color in this figure legend, the reader is referred to the web version of this article.)

Note that the initial conditions $f(0) = f'(0) = 0$ have been chosen arbitrarily to specify a particular solution. The solution is:

$$f(\bar x) = \frac{1}{1920}\left[\frac{1-\chi(\bar x)}{2}(1-2\bar x)^4\left(\beta\,\bar x + 2\,\beta + 5\right)\bar\delta - 8\beta\left(\bar\delta + 2\bar\epsilon^{(0)}\right)\bar x^5 - 40\left(\bar\delta + 2\bar\epsilon^{(0)}\right)\bar x^4 \cdots \right.$$
$$\left. + 40\left(\beta(\bar\delta - 8\nu + 16) + 4\bar\delta\right)\bar x^3 - 40\left((\beta+3)\bar\delta - 24\nu\right)\bar x^2 + 5\,\bar\delta\,(3\beta+8)\,\bar x + (-2\beta - 5)\bar\delta\right];$$

5. with $n^* = 1$, the coefficient $\bar\epsilon^{(1)}$ yielding the curvature of the bifurcated branch in the phase diagram is given directly by (2.14) as

$$\bar\epsilon^{(1)} = g_\nu(\bar\epsilon^{(0)}, \bar\delta), \tag{4.10a}$$

where the function g_ν is available in closed form: for $\nu = .5$,

$$g_{\nu=.5}(\bar\epsilon, \bar\delta) = \frac{-49\,\bar\delta^4 + 8\,\bar\delta^2\left(71\,\bar\epsilon^2 + 700\,\bar\epsilon - 2520\right) - 512\,\bar\epsilon^2\left(3\,\bar\epsilon^2 + 56\,\bar\epsilon + 490\right)}{8960\left(3\,\bar\delta^2 + 16\,\bar\epsilon^2\right)}. \tag{4.10b}$$

To evaluate the denominator in (2.14), we have used $B'_{(0)}\left(\Xi^{(0)}, \Xi^{(0)}\right) = b'_{(0)}\left(\alpha^{(0)}\xi_1^{(0)}, \alpha^{(0)}\xi_1^{(0)}\right) = \alpha^{(0)\,2}\int_0^1 \left(1 + \beta\,\bar x\right)^2 \mathrm{d}\bar x$, and have used the value of β found in (4.9).

In Fig. 9, we have plotted both $\bar\epsilon^{(0)}(\nu = 0.5, \bar\delta)$ as given by the implicit equation(4.8) (green curve), and the sign of $\bar\epsilon^{(1)} = g_\nu(\bar\epsilon^{(0)}, \bar\delta)$ from Eq. (4.10b) ($\bar\epsilon^{(1)} = g_\nu(\bar\epsilon^{(0)}, \bar\delta) > 0$ in the light red domain). As explained in the introductory paragraph of Section 2, the small-wavenumber expansion predicts that the first unstable mode is macroscopic whenever the green curve lies outside the light red domain ($\bar\epsilon^{(1)} = g_\nu(\bar\epsilon^{(0)}, \bar\delta) < 0$) and microscopic whenever it lies inside the light red domain ($\bar\epsilon^{(1)} = g_\nu(\bar\epsilon^{(0)}, \bar\delta) > 0$). For a graphical interpretation of $\epsilon^{(1)}$, see the dotted curve in Fig. 7a. The corresponding ranges of the mismatch parameter $\bar\delta$ are denoted by the keywords 'macro' and 'micro' below the phase diagram in Fig. 9a: the small-wavenumber expansion predicts that the

$$\text{first bifurcation mode is } \begin{cases} \text{macroscopic} & \text{if } |\bar\delta| < \bar\delta^*(\nu) \\ \text{microscopic} & \text{if } |\bar\delta| > \bar\delta^*(\nu). \end{cases} \tag{4.11}$$

The critical dimensionless mismatch strain $\bar\delta^*(\nu)$ at which the macroscopic to microscopic transition occurs can be found analytically by solving the two Eq. (4.8) and $g_\nu(\bar\epsilon^{(0)}, \bar\delta) = 0$ for the two unknowns $\bar\delta$ and $\bar\epsilon^{(0)}$. This yields a polynomial equation (not included here, for the sake of brevity) whose relevant root can be calculated to any desired accuracy. For $\nu = .5$, we find:

$$\bar\delta^*(\nu = .5) = 88.247 \tag{4.12}$$

All these results are in good agreement with those obtained earlier by the direct method. The bifurcation is indeed macroscopic for low values of the mismatch strain $\bar\delta$, and microscopic for high values of $\bar\delta$. Moreover, the estimate $\bar\delta^* \approx 90$ found by the shooting method is close to the exact value (4.12) obtained by the small-wavenumber expansion. Finally, in Fig. 2a the curve passing through the black disks ($\bar\epsilon_c$) indeed splits off from the curve passing through the green stars ($\bar\epsilon^{(0)}$) at the critical value $\bar\delta^*$ predicted by (4.12).

4.5. Equivalence with a naturally curved rod model in the limit of a small pre-strain

As discussed in the introduction, the naturally curved Euler-Bernoulli rod model has been shown to be applicable to the bistrip in the limit of a weak pre-stress using rigorous arguments (Cicalese et al., 2016). In line with this result, we show here that the predictions of the plate model are indeed asymptotically consistent with those of an Euler-Bernoulli rod model in the limit of small pre-stress.

A linear bifurcation analysis of the naturally curved Euler-Bernoulli rod yields the critical value of the mean strain ϵ as

$$\epsilon_c^{\mathrm{EB}} = \frac{(M_y^0)^2}{\mu J\, E\, h\, v}, \tag{4.13}$$

as derived by Goriely and Tabor (1998); Liu et al. (2014). At this critical value ϵ_c^{EB}, long-wavelength helical solutions appear by a bifurcation from the straight solution. In equation above, M_y^0 is the residual bending moment arising from the pre-stress,

$$M_y^0 = \int_0^v N_{zz}^0(\epsilon; x)\left(x - \frac{L}{2}\right) \mathrm{d}x = \frac{E\, h\, v^2\, \delta}{8}, \tag{4.14}$$

and (μJ) is the effective twisting modulus of the plate. The latter be found by identifying the bending energy per unit length associated with a twisting deformation, $w(x, z) = \tau\,(x - L/2)\, z$, with $\frac{1}{2}\,\mu J\, \tau^2$: the result is $\mu J = 2\, D\,(1-\nu)\, v = \frac{E\, h^3\, v}{6(1+\nu)}$.

Combining (4.13), (4.14) and the above expression of μJ, we obtain the critical mean imposed strain predicted by the Euler-Bernoulli model as $\epsilon_c^{\mathrm{EB}} = \epsilon_{\mathrm{EB}}^{(0)} = \frac{(1+\nu)}{2}\left(\frac{v}{h}\right)^2 \frac{3\,\delta^2}{16}$. In terms of the dimensionless parameters introduced in (4.4e), this can be rewritten as

$$24\,(1-\nu)\, \overline{\epsilon}_{\mathrm{EB}}^{(0)} = \frac{3}{16}\, \overline{\delta}^2. \tag{4.15}$$

This prediction is asymptotically equivalent with that derived earlier in (4.8) from the plate model: the only difference is that the term $\overline{\epsilon}^{(0)2}$ is absent from the left-hand side of (4.15); this term is indeed negligible in the limit of a weak pre-strain, as both $\overline{\delta}$ and $\overline{\epsilon}^{(0)}$ are then small.

The Euler-Bernoulli prediction (4.15) for macroscopic buckling is shown in Fig. 9 using a blue dashed curve: the agreement with the plate model is good for asymptotically small $\overline{\delta}$, but becomes poor as soon as $\overline{\delta}$ reaches $\sim$ 10, *i.e.* for a pre-strain that is still much below the critical pre-strain $\overline{\delta}^* \approx 90$ at which microscopic modes appear. This shows that the Euler-Bernoulli model is of limited interest for pre-strained structures, even for the analysis of macroscopic modes.

4.6. Discussion

The plate model displays the same type of behavior as the double-beam model, with the advantage that it is expected to be quantitatively correct for slender bistrips, $h \ll v$. We have identified a dimensionless mismatch strain $\overline{\delta}$ that governs the nature of the first bifurcation mode: it is macroscopic for small mismatch strain $\overline{\delta}$ and microscopic for large mismatch strain. The parameter $\overline{\delta}$ measures the antagonistic effects of the mismatch strain (shorter wavelengths are preferred for larger mismatch strain) and of the bending rigidity of the cross-sections (longer wavelengths are preferred for more rigid cross-sections). The buckling behavior of the plate has been analyzed by a numerical shooting method, and the critical mismatch strain $\overline{\delta}^*$ corresponding to the macroscopic-to-microscopic transition has been obtained analytically using the small-wavenumber expansion, see (4.12).

As a final note concerning the plate model, observe that the strain has been rescaled by the quantity $\delta^\dagger$ which goes to zero in the limit of a small aspect-ratio $h \ll v$ by Eq. (4.4e). As a result, the finite values of $\overline{\epsilon}$ and $\overline{\delta}$ calculated above correspond to infinitesimal values of the physical mean strain ϵ and strain mismatch δ: this confirms that it is sufficient to consider a small-strain plate model with linear constitutive assumptions.

5. A 3-d hyper-elastic model with inhomogeneous pre-stress

In this section, the experimental bistrip of Huang et al. (2012); Liu et al. (2014) is approached based an hyper-elastic, infinitely long, rectangular cuboid made of a Gent material. By using Fourier analysis in the axial direction, the bifurcation problem is formulated as an eigenvalue problem in the cross-section. The bifurcations from the cylindrically invariant solutions are first analyzed by the direct method, which combines the finite-element method with numerical eigenvalue analysis: qualitatively, this yields similar results as with the simpler double-beam and plate models. This direct method is however computationally intensive. The small-wavenumber expansion is presented next, and provides an efficient and accurate method for characterizing the macroscopic-to-microscopic transition.

5.1. Model

Different configurations of the bistrips are shown in Fig. 10:

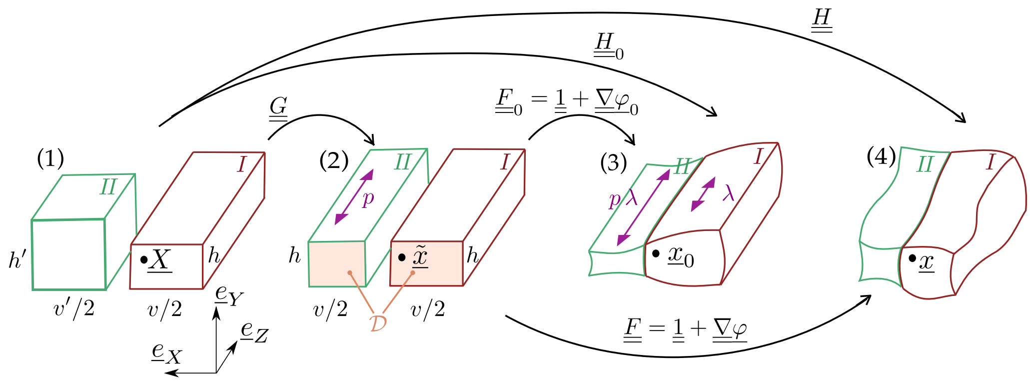

Fig. 10. The 3D hyper-elastic model: (1) natural configuration, (2) pre-stretched configuration, (3) cylindrically invariant solution with mismatch stretch p and mean imposed stretch λ, (4) buckled configuration.

- In their natural configuration (1), the strips, labeled I and II, are rectangle cuboids with different cross-section dimensions $h \times (v/2)$ and $h' \times (v'/2)$, respectively.
- In configuration (2), the strip II is pre-stretched with axial stretch p and the strips are glued together. The original dimensions h' and $v'/2$ have been chosen such that both strips have the same dimensions $h \times (v/2)$ in this configuration (2). The coordinates $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ in this pre-stretched configuration are used as Lagrangian coordinates, and we denote by $\mathcal{D}$ the cross-section $\mathcal{D} = (0, v) \times (0, h)$: $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathcal{D}$.
- The remote ends are moved towards one another and as a result an additional stretch λ is imposed (with $\lambda < 1$ as the bistrip is released). This yields the cylindrically invariant configuration (3), which may be stable or unstable: with respect to their natural configuration (1), the stretch is λ in the first strip I and $p\lambda$ in the second strip II.
- A buckled, non-cylindrically symmetric, configuration (4) can appear through a bifurcation.

Different sets of coordinates are associated with each of these configurations: $\underline{X} = (X, Y, Z)$ for the natural configuration (1), $\underline{\tilde{x}} = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ for the pre-stretched configuration (2), $\underline{x} = (x, y, z)$ for the equilibrium (unbuckled or buckled) configurations (3–4). Consistent with standard notations for 3-d elasticity, we denote vectors by a simple underline and matrices by a double underline in this section. We further denote by $\underline{e}_X, \underline{e}_Y$ and $\underline{e}_Z$ the vectors of the Cartesian basis which remain unchanged in natural and pre-stretched configurations (1) and (2).

By contrast with the previous double-beam and plate models, we now work with finite strain. The pre-stretch p plays the role formerly assigned to the mismatch strain δ, and the stretch λ imposed by the displacements of the remote ends plays the role formerly assigned to the average strain ϵ. In the following, we refer to λ as the 'mean imposed stretch', using configuration (2) as a reference.

Let $\underline{\underline{G}}$ denote the transformation gradient from configuration (1) to configuration (2):

$$\underline{\underline{G}} = \begin{cases} \underline{\underline{1}} & \text{in region } I,\ 0 < \tilde{x} < v/2, \\ r(p)\left(\underline{e}_X \otimes \underline{e}_X + \underline{e}_Y \otimes \underline{e}_Y\right) + p\,\underline{e}_Z \otimes \underline{e}_Z & \text{in region } II,\ v/2 < \tilde{x} < v. \end{cases} \tag{5.1}$$

Here, $r(p)$ denotes the transverse stretch associated with the axial stretch p under simple traction for the particular material law considered: denoting by $W_{3D}(r, p)$ the strain energy per unit reference volume for an equi-biaxial stretch, $r(p)$ is defined by the implicit equation $\frac{\partial W_{3D}}{\partial r}\left(r(p), p\right) = 0$. As we use a nearly incompressible Gent model (see below), $\det \underline{\underline{G}} \approx 1$ and $r(p)$ is close to $p^{-1/2}$.

We denote by $\underline{\varphi}(\underline{\tilde{x}})$ the displacement from the pre-stretched configuration (2) to the final one (4): the final position reads[3] $\underline{x} = \underline{\tilde{x}} + \underline{\varphi}(\underline{\tilde{x}})$ and the transformation gradient is $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\nabla\varphi}}(\underline{\tilde{x}})$. With reference to the natural configuration (1), the total transformation gradient reads:

$$\underline{\underline{H}}(\underline{\tilde{x}}) = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{G}}. \tag{5.2a}$$

This multiplicative decomposition is classical in the elastic theory of growth.

A Gent hyper-elastic material model is used and the strain energy per unit reference volume has the form

$$W_{3D}(\underline{\underline{H}}) = \frac{\mu}{2}\left[-J_m \ln\left(1 - \frac{I_c - 3}{J_m}\right)\right] - \mu \ln J + \left(\frac{K}{2} - \frac{\mu}{J_m}\right)(J - 1)^2 \tag{5.2b}$$

where K, μ, J_m are material constants and I_c and J are the invariants of the total transformation gradient,

$$I_c = \underline{\underline{H}} : \underline{\underline{H}}, \quad J = \det \underline{\underline{H}}. \tag{5.2c}$$

[3] Recall that $\underline{\varphi}$ denotes the displacement, consistent with the fact the transformation is written as $\underline{x} = \underline{\tilde{x}} + \underline{\varphi}(\underline{\tilde{x}})$ and the transformation gradient as $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\nabla\varphi}}(\underline{\tilde{x}})$. Even though this decomposition $\underline{x} = \underline{\tilde{x}} + \underline{\varphi}(\underline{\tilde{x}})$ is most often used in linearized or incremental elasticity, we stress that we are in the framework of *finite elasticity* for the moment, *i.e.* we retain all nonlinearities with respect to φ.

We use the standard semi-column notation for the doubly contracted product, $\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{B}} = \mathrm{tr}(\underline{\underline{A}}^T \cdot \underline{\underline{B}})$.

In all the forthcoming numerical simulations, we used the following set of material constants: shear modulus $\mu = 1$, bulk modulus $K = 10$ and $J_\mathrm{m} = 100$. The relatively large ratio $K/\mu = 10$ implies that the material is weakly compressible: the initial Poisson's ratio can be calculated as $\nu = 0.45$. In addition, the large value $J_\mathrm{m} = 100$ makes the constitutive law practically equivalent to a neo-Hookean model, up to values of the principal stretches as large as $\sim \sqrt{J_\mathrm{m}} = 10$, or as small as $\sim 1/\sqrt{J_\mathrm{m}} = 0.1$. These values of the material parameters are not meant to match exactly those relevant to the experiments. All the methods, models and conclusions presented in this paper are to some extent independent of the choice of material parameters. In particular, all our results remain virtually unchanged if we use an incompressible neo-Hookean instead.

5.2. General equations for equilibrium

The average strain energy per unit length is given by the integral of the strain energy $W_{3D}\,\mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y\,\mathrm{d}Z = \frac{W_{3D}}{\det \underline{\underline{G}}}\,\mathrm{d}\tilde{x}\,\mathrm{d}\tilde{y}\,\mathrm{d}\tilde{z}$ as

$$\frac{1}{L}\int_0^L \left(\iint_{\mathcal{D}} \frac{W_{3D}(\underline{\underline{H}}(\underline{\tilde{x}}))}{\det \underline{\underline{G}}}\,\mathrm{d}\tilde{x}\,\mathrm{d}\tilde{y} \right) \mathrm{d}\tilde{z}, \tag{5.3}$$

where we consider the limit of an infinitely long solid, $L \to \infty$. The energy has to be minimized under the constraint that the displacement is prescribed at the remote ends, *i.e.* that the mean stretch matches the imposed one λ.

For any particular solution $\underline{\varphi}(\underline{\tilde{x}})$, consider the Green-Lagrange strain, $\underline{\underline{e}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{H}}^T \cdot \underline{\underline{H}} - 1)$, and the second Piola-Kirchhoff stress $\underline{\underline{\Sigma}} = \frac{1}{\det \underline{\underline{G}}} \frac{\partial W_{3D}}{\partial \underline{\underline{e}}}$, which are both symmetric. For any virtual motion $\underline{\widehat{\varphi}}(\underline{\tilde{x}})$, define the virtual increment $\underline{\underline{\widehat{e}}}$ of the Green-Lagrange strain as the symmetric part of $\underline{\underline{H}}^T \cdot \underline{\underline{\widehat{H}}}$, where $\underline{\underline{\widehat{H}}} = \underline{\underline{\widehat{F}}} \cdot \underline{\underline{G}} = \underline{\underline{\nabla \widehat{\varphi}}}(\underline{\tilde{x}}) \cdot \underline{\underline{G}}$. The non-linear equilibrium solutions $\underline{\varphi}(\underline{\tilde{x}})$ are found by cancelling the first variation of the total energy for any admissible virtual displacement:

$$\forall \underline{\widehat{\varphi}}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}), \quad \frac{1}{L}\int_0^L \left(\iint_{\mathcal{D}} \underline{\underline{\Sigma}}(\underline{\varphi}) : \left(\underline{\underline{H}}^T(\underline{\varphi}) \cdot \underline{\underline{\widehat{H}}}\right) \mathrm{d}\tilde{x}\,\mathrm{d}\tilde{y} \right) \mathrm{d}\tilde{z} = 0. \tag{5.4}$$

As the endpoint positions are fixed, we consider admissible virtual displacements that have a zero average axial strain.

5.3. Fundamental branch: cylindrically invariant solutions

We will first compute the fundamental branch of solutions: for any value of the mismatch stretch p and of the stretch λ imposed by the loading, we seek a cylindrically invariant solution of the nonlinear equilibrium equation (5.4) in the form

$$\underline{\varphi}_0^\lambda(\underline{\tilde{x}}) = \underline{\varphi}_0^\parallel(\lambda; \tilde{x}, \tilde{y}) + (\lambda - 1)\,\tilde{z}\,\underline{e}_Z. \tag{5.5}$$

The associated transformation gradients read $\underline{\underline{F}}_0 = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\nabla \varphi}}_0^\lambda(\underline{\tilde{x}})$ and $\underline{\underline{H}}_0 = \underline{\underline{F}}_0 \cdot \underline{\underline{G}}$, see Fig. 10. The second Piola-Kirchhoff stress tensor has a block-diagonal form imposed by the symmetry of the homogeneous solution $\underline{\underline{\Sigma}}_0 = \underline{\underline{\Sigma}}(\underline{\varphi}_0^\lambda)$ with:

$$\underline{\underline{\Sigma}}(\underline{\varphi}_0^\lambda) = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\Sigma}}_0^\parallel(\lambda; \tilde{x}, \tilde{y}) & 0 \\ 0 & \Sigma_0^\perp(\lambda; \tilde{x}, \tilde{y}) \end{pmatrix}, \tag{5.6}$$

where the upper-left 2×2 block $\underline{\underline{\Sigma}}_0^\parallel$ denotes the cross-sectional stress in the $(\tilde{x}, \tilde{y})$ plane, and the lower-right scalar $\Sigma_0^\perp$ denotes the stress along the $\tilde{z}$-axis. Both transformation gradients $\underline{\underline{F}}_0$ and $\underline{\underline{H}}_0$ have a similar block decomposition.

When this particular form of solution is inserted into the general equilibrium equilibrium (5.4), one obtains a 2-d problem of non-linear elasticity whose main unknown is the cross-sectional displacement $\underline{\varphi}_0^\parallel(\lambda; \tilde{x}, \tilde{y})$. The axial direction $\tilde{z}$ is absent from this problem, except for the imposed axial stretch λ which enters as a parameter. A numerical approximation of the solution $\varphi_0^\parallel(\lambda; \tilde{x}, \tilde{y})$ can be obtained by the non-linear finite-element method, for any set of values of the load parameters p and λ, see Section 5.5 below for the details of the implementation. Note that the dependence of the solution $\underline{\varphi}_0^\parallel(\lambda; \tilde{x}, \tilde{y})$ on the mismatch stretch p is implicit in our notation. We work in units such that the width is $v = 1$. The domain $\mathcal{D} = (0, 1) \times (0, h)$ is rectangular, see configuration (2) in Fig. 10. Typical pre-stress distributions $\underline{\underline{\Sigma}}_0^\parallel$ (cross-sectional) and $\Sigma_0^\perp$ (axial) are plotted in Fig. 11. The axial stress is nearly constant in each domain *I* and *II* and the solid is in a stress state close to simple traction. In the present context of finite elasticity, Poisson's ratio depends on the pre-stretch and is therefore slightly different in the domains *I* and *II*. As a result, the simple-traction solution is (slightly) geometrically incompatible and a small amount of cross-sectional stress appears near the interface, see Fig. 11b.

5.4. Bifurcation analysis: direct approach using the finite-element method

The invariant solution $\underline{\varphi}_0^\lambda$ is available numerically, and we proceed to the bifurcation analysis. We start with the direct method: Fourier analysis is used in the axial direction $\tilde{z}$, and the existence of an adjacent equilibrium is formulated as a quartic eigenvalue problem and then solved numerically using the finite element method.

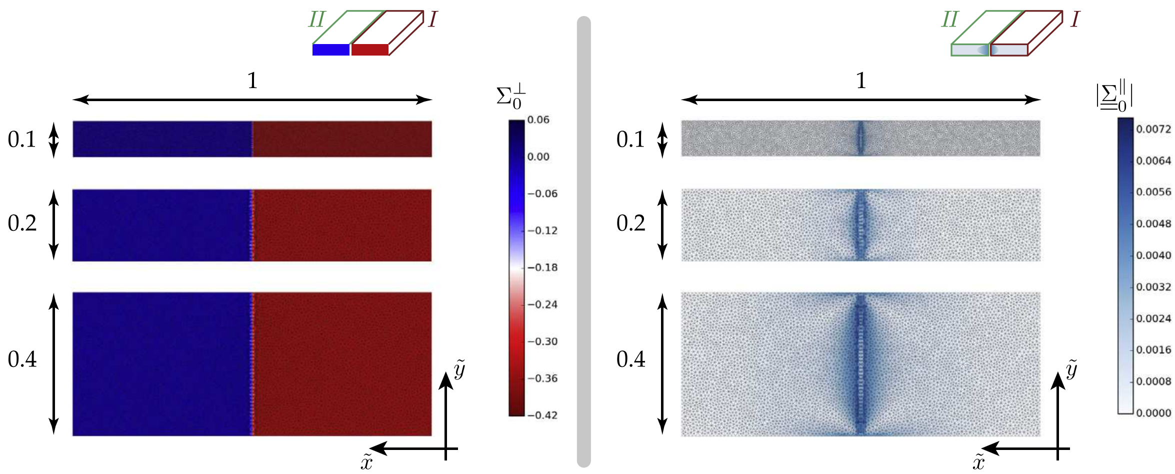

Fig. 11. Pre-stress in the homogeneous solution: axial pre-stress $\Sigma_0^\perp(\lambda;\tilde{x},\tilde{y})$ (left) and norm of cross-sectional stress $|\underline{\underline{\Sigma}}_0^\parallel(\lambda;\tilde{x},\tilde{y}))|$ (right), see Eq. (5.6). Aspect ratios $h/v = 0.1, 0.2, 0.4$ (from top to bottom); material parameters: $\mu = 1$, $K = 10$, $J_m = 100$; mismatch stretch $p = 1.11$; mean imposed stretch $\lambda = .9$. The axial stress (left) is nearly uniform in each half of the cross-section: it is compressive in region *I* and tensile in region *II* (because of the compressive axial stress, this cylindrically invariant configuration is actually unstable, see Fig. 12a). The cross-sectional stress (right) arises from geometric incompatibility between the two domains, and is limited to a neighborhood of their interface; it is much smaller than the axial stress (note the widely different scales in the color bars).

Let $\underline{\varphi}_1(\underline{\tilde{x}})$ denote a small increment of displacement adding up to an invariant solution: the displacement is expanded as $\underline{\varphi}(\underline{\tilde{x}}) = \underline{\varphi}_0^\lambda(\underline{\tilde{x}}) + \underline{\varphi}_1(\underline{\tilde{x}}) + \cdots$ When linearized, the equilibrium equation (5.4) takes the classical form

$$\forall \underline{\widehat{\varphi}}(\underline{\tilde{x}}),\quad \frac{1}{L}\int_0^L \left(\iint_{\mathcal{D}} \left[\underline{\underline{\widehat{H}}} : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathcal{L}}}}}_0(\lambda) : \underline{\underline{H}}_1 + \underline{\underline{\Sigma}}_0 : \left(\underline{\underline{\widehat{H}}}^T \cdot \underline{\underline{H}}_1\right) \right] \mathrm{d}\tilde{x}\,\mathrm{d}\tilde{y} \right) \mathrm{d}\tilde{z} = 0. \tag{5.7}$$

Here, $\underline{\underline{H}}_1 = \underline{\nabla}\underline{\varphi}_1(\underline{\tilde{x}}) \cdot \underline{\underline{G}}$ is the incremental transformation gradient and $\underline{\underline{\underline{\underline{\mathcal{L}}}}}_0$ is the tensor of tangent moduli evaluated in the invariant solution,

$$(\mathcal{L}_0)_{ijkl}(\lambda) = \left(H_{is}^0 \,\frac{\partial \Sigma_{sj}}{\partial e_{rl}}\, H_{kr}^0 \right)_{\underline{\varphi}_0^\lambda}, \tag{5.8}$$

where H_{is}^0 denote the components of $\underline{\underline{H}}_0$ in the Cartesian frame. The complete expressions of $\underline{\underline{\underline{\underline{\mathcal{L}}}}}$ and $\underline{\underline{\Sigma}}$ are given in Appendix B.1 for the Gent model.

In view of the symmetry of the base solution $\underline{\varphi}_0^\lambda$, we consider bifurcation modes $\underline{\varphi}_1$ that are harmonic in the axial variable $\tilde{z}$ with a wavenumber q; such modes are coupled to virtual displacements that are harmonic and have the same wavenumber q:

$$\underline{\varphi}_1(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = \left(\underline{\xi}^\parallel(\tilde{x},\tilde{y}) + i\,\xi^\perp(\tilde{x},\tilde{y})\,\underline{e}_z\right) e^{i\,q\,\tilde{z}}, \qquad \underline{\widehat{\varphi}}(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = \left(\underline{\widehat{\xi}}^\parallel(\tilde{x},\tilde{y}) + i\,\widehat{\xi}^\perp(\tilde{x},\tilde{y})\,\underline{e}_z\right) e^{i\,q\,\tilde{z}}. \tag{5.9}$$

Here, $\underline{\xi}^\parallel(\tilde{x},\tilde{y})$ is a vector-valued function defined on the reference cross-section $\mathcal{D}$ which yields the complex amplitude of the cross-sectional displacement; $\xi^\perp(\tilde{x},\tilde{y})$ is a complex function defined on $\mathcal{D}$ which yields the complex amplitude of the axial displacement. Their virtual counterparts are $\underline{\widehat{\xi}}^\parallel(\tilde{x},\tilde{y})$ and $\widehat{\xi}^\perp(\tilde{x},\tilde{y})$. In equation above, the imaginary unit number i that multiplies the axial displacements introduces a convenient phase shift, such that the real parts are entirely decoupled from the imaginary parts. As a result, we can assume all functions to be real, without loss of generality.

The incremental and virtual displacements are discretized by the finite-element method on the 2-d domain $\mathcal{D} = (0,1) \times (0,h)$. By convention, degrees of freedom corresponding to displacement in the cross-section $(\tilde{x},\tilde{y})$ are listed first, while degrees of freedom corresponding to axial displacement appear last: in the discrete setting, the complex amplitudes are represented by vectors (using block notation)

$$\underline{\xi}_1 = \begin{pmatrix} \underline{\xi}^\parallel \\ \underline{\xi}^\perp \end{pmatrix}, \qquad \underline{\widehat{\xi}} = \begin{pmatrix} \underline{\widehat{\xi}}^\parallel \\ \underline{\widehat{\xi}}^\perp \end{pmatrix}. \tag{5.10a}$$

Here, $\underline{\xi}^{\parallel}$ and $\underline{\xi}^{\perp}$ represent the degrees of freedom of the functions $\underline{\xi}^\parallel(\tilde{x},\tilde{y})$ and $\xi^\perp(\tilde{x},\tilde{y})$, respectively, and a similar convention is used for the virtual displacements. The column-vectors representing cross-sectional displacement ($^\parallel$) contain twice as many degrees of freedom as those representing axial displacement ($^\perp$).

In Eq. (5.7) for the adjacent equilibria, the Fourier analysis effectively removes the integration over $\tilde{z}$, and transforms any gradient with respect to $\tilde{z}$ into a multiplication by $i\,q$. In addition, the discretization replaces the cross-sectional integration by dot products. This transforms the equation into a polynomial eigenvalue problem of the form

$$\forall \widehat{\underline{\xi}}, \quad \widehat{\underline{\xi}} \cdot \left(\underline{\underline{K}}_\lambda + q\,\underline{\underline{C}}_\lambda + q^2\,\underline{\underline{M}}_\lambda\right) \cdot \underline{\xi}_1 = 0, \tag{5.10b}$$

where the discretized operators $\underline{\underline{K}}_\lambda$, $\underline{\underline{C}}_\lambda$ and $\underline{\underline{M}}_\lambda$ can be found by identification with (5.7). A complete definition of these operators is given in Appendix B.2. As shown there, the symmetry of the base solution warrants that the operators $\underline{\underline{K}}_\lambda$ and $\underline{\underline{M}}_\lambda$ associated with even powers of q are block-diagonal while operator $\underline{\underline{C}}_\lambda$ associated with the odd power q is block 'anti-diagonal',

$$\underline{\underline{K}}_\lambda = \begin{pmatrix} \underline{\underline{k}}^{\parallel}_\lambda & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{k}}^{\perp}_\lambda \end{pmatrix}, \qquad \underline{\underline{C}}_\lambda = \begin{pmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{c}}^{T}_\lambda \\ \underline{\underline{c}}_\lambda & \underline{\underline{0}} \end{pmatrix}, \qquad \underline{\underline{M}}_\lambda = \begin{pmatrix} \underline{\underline{m}}^{\parallel}_\lambda & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{m}}^{\perp}_\lambda \end{pmatrix}. \tag{5.11}$$

In addition, the square blocks $\underline{\underline{k}}^{\parallel}_\lambda$, $\underline{\underline{k}}^{\perp}_\lambda$, $\underline{\underline{m}}^{\parallel}_\lambda$ and $\underline{\underline{m}}^{\perp}_\lambda$ are all symmetric. The larger square blocks $\underline{\underline{k}}^{\parallel}_\lambda$ and $\underline{\underline{m}}^{\parallel}_\lambda$ act on cross-sectional displacements, in accord with the ordering conventions used in (5.10a); the smaller square blocks $\underline{\underline{k}}^{\perp}_\lambda$ and $\underline{\underline{m}}^{\perp}_\lambda$ act on axial displacement; the rectangular block $\underline{\underline{c}}_\lambda$ couples cross-sectional and axial displacements. All these matrices can readily be calculated in terms of the base solution $\underline{\varphi}^{\parallel}_0(\lambda, \tilde{x}, \tilde{y})$, as explained in the appendix; they encode information about both the pre-stress $\underline{\underline{\Sigma}}_0(\lambda, \tilde{x}, \tilde{y})$ that drives the bifurcation, and the tangent moduli $\underline{\underline{\underline{\underline{\mathcal{L}}}}}_0(\lambda)$.

Note that the eigenvalue problem (5.10b) matches the generic form (2.2) announced earlier.

5.5. Numerical implementation

For given loading parameters (p, λ), the invariant solution $\underline{\varphi}^{\parallel}_0(\lambda; \tilde{x}, \tilde{y})$ is first computed by solving the 2-d non-linear elasticity problem described in Section 5.3. To this end, the finite-element method is used and the displacement $\underline{\varphi}^{\parallel}_0$ is interpolated using linear Lagrange elements. Convergence is obtained by a standard Newton–Raphson method. Our implementation makes use of the finite-element library FEniCS (Ølgaard et al., 2009).

In a second step, the incremental displacement $(\underline{\xi}^{\parallel}, \xi^{\perp})$ is discretized: we use again a finite-element discretization of the 2-d domain $\mathcal{D}$ using linear Lagrange elements and the FEniCS library. The corresponding basis of functions are used, together with the known invariant solution $\underline{\varphi}^{\parallel}_0$, to fill in the matrices $\underline{\underline{K}}_\lambda$, $\underline{\underline{C}}_\lambda$ and $\underline{\underline{M}}_\lambda$, as explained in Appendix B.2.

The discrete form of the quadratic eigenvalue problem (5.10b) is then solved using the SLEPc library (Hernandez et al., 2005). A two-level orthogonal Arnoldi method is used, see Tisseur and Meerbergen (2001) for a review on numerical solution of quadratic eigenvalue problems; it is combined with shift-and-invert preconditioning, allowing one to compute eigenpairs corresponding to small real eigenvalues q more efficiently (Saad, 2011). To remove eigenpairs that correspond to rigid-body modes, the symmetric part of $\left(\underline{\underline{H}}^{T}_1 \cdot \underline{\underline{H}}_0\right)$, which is a measure of the linearized strain, is calculated for each solution $(q, \underline{\xi}_1)$ of (5.10b): whenever the norm of the linearized strain is below a small threshold, the solution is identified as a rigid-body mode and eliminated.

5.6. Results

The numerical results are shown in Fig. 12a. The bifurcation diagram must be read like those in Figs. 2 (generic model), Fig. 4a (double-beam model) and 7 (plate model). In the experiment, the value of the mismatch stretch p is first fixed upon gluing the two strips. Next, the tension is released: the mean stretch λ imposed by the position of the remote ends decreases progressively from its initial value $\lambda = 1$, with a given step-size[4] $\delta\lambda$. A bifurcation takes place at the point of the curve of marginal stability corresponding to the largest abscissa λ: this yields a macroscopic instability if the corresponding wavenumber q_c is zero, and a microscopic instability otherwise.

As seen in the figure, the 3-d hyper-elastic model features both macroscopic and microscopic buckling, depending on the amount of pre-stretch p. As with the double-beam and plate models, a smaller pre-stretch favors macroscopic buckling (consistent with the Euler-Bernoulli beam model) while a larger pre-stretch favors microscopic buckling (consistent with a strut-on-elastic-foundation model). With the particular aspect-ratio $h/v = 0.1$ and material parameters chosen in this example (see legend), the transition occurs at the critical value of the mismatch stretch

$$p^* \approx 1.1. \tag{5.12}$$

The results of the 3-d hyper-elastic model are therefore qualitatively similar to those of the simpler double-beam and plate models (Sections 3 and 4). The critical modes predicted by the 3-d model are visually similar to a plate buckling mode

[4] As seen in the figure, the numerical error on q_c is larger (for fixed $\delta\lambda$) when p is close to p^*, as the curvature of the curve of marginal stability approaches zero; accordingly, we refined the step size $\delta\lambda$ to keep the numerical error on q_c below ± .05. By running a convergence test, we have also checked that our typical mesh size, $e = .02$ (in units such that the width is $v = 1$), warrants that the error on q_c due to discretization remains below this threshold.

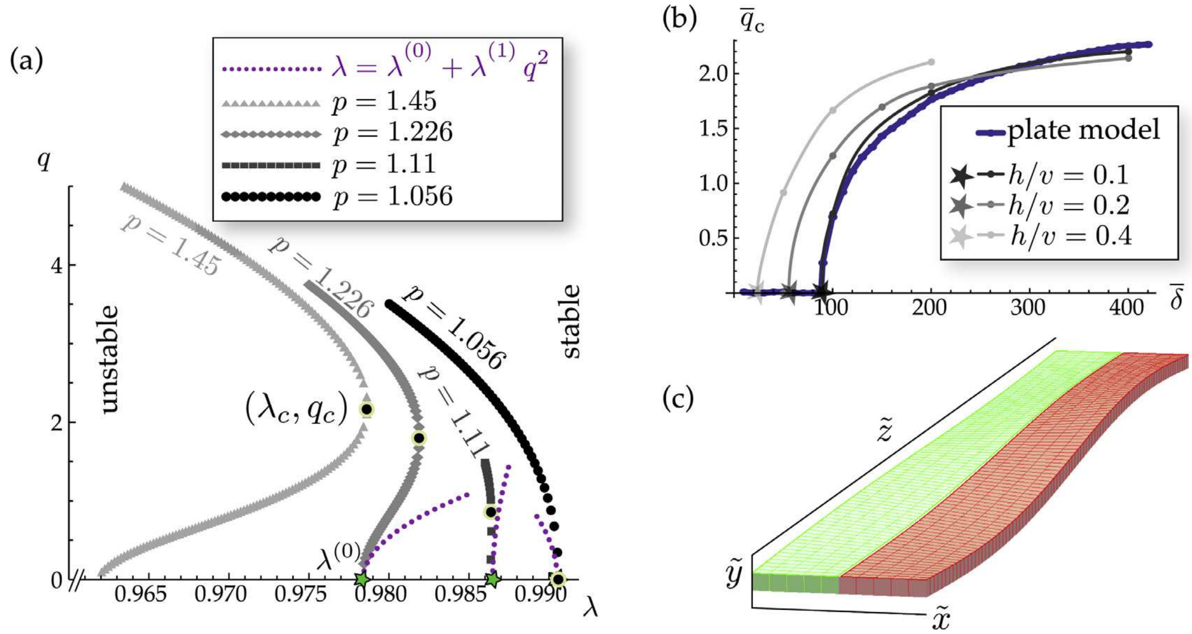

Fig. 12. Bifurcation analysis of the 3-d hyper-elastic model, for material parameters $\mu = 1$, $K = 10$, $J_m = 100$ and typical mesh size $e = 0.02$. (a) Curves of marginal stability for an aspect ratio $h/v = 0.1$ and for different values of the mismatch stretch p: results of the eigenvalue analysis (direct method, Sections 5.4 and 5.5, symbols) and comparison with the small-wavenumber expansion (dotted parabolas, Section 5.7). The critical values for the mean stretch λ_c and the associated wavenumber q_c are denoted by black disks. (b) Numerical test of convergence towards the plate model in the limit of a small aspect-ratio $h/v \to 0$: the critical wavenumber predicted by the 3D model using the direct method (dots connected by thin curves) converges to that predicted by the plate model (thick curve). For all aspect-ratios, the small-wavenumber expansion (star symbols on the horizontal axis) correctly predicts the critical mismatch strain $\bar{\delta}^*$ at which the bifurcation mode switches from macroscopic to microscopic. (c) First critical mode corresponding to $p = 1.11$ with $h/v = 0.1$, shown with an arbitrary amplitude.

when the aspect-ratio is small (see Fig. 12c for $h/v = .1$): the bistrips deforms essentially by bending and the displacement is mainly out-of-plane.

A quantitative agreement between the plate and the 3-d models can in fact be obtained: in Fig. 12b, we check that the results of the 3-d hyper-elastic model converge towards the predictions of the plate model in the limit of a small aspect-ratio, $h/v \to 0$. The reference curve shows the critical wavenumber of the plate as a function of the mismatch strain (thick curve): this plot uses the natural variables of the plate model, namely the dimensionless mismatch strain $\bar{\delta}$ and the rescaled wavenumber $\bar{q}_c$ defined in Section 4. The thin curves correspond to the results of the 3-d Gent model, for different aspect-ratios. The latter set of curves are plotted as follows. First, the eigenvalue analysis of Section 5.4 yields data-points (p, λ, q_c). Second, the stretches (p, λ) characterizing the loading in a finite-elasticity context are converted into strains (δ, ϵ) relevant to the small-strain limit by identifying the stretches in Figs. 6 and 10(3) as $1 + \epsilon + \frac{\delta}{2} = \lambda\, p$ and $1 + \epsilon - \frac{\delta}{2} = \lambda$. Third, the dimensionless mismatch strain $\bar{\delta}$ and mean imposed strain $\bar{\epsilon}$ are calculated using (4.4e). As we work in units such that $v = 1$, the dimensionless wavenumber $\bar{q}_c = q\, v$ is identical to the wavenumber q_c predicted by the 3-d model. We use an incompressible plate model ($\nu = .5$) for comparison, consistent with the fact that we use an almost incompressible Gent model.

5.7. Small-wavenumber expansion

We now apply the small-wavenumber expansion presented in Section 2.11 to the 3-d hyper-elastic model: this will allow us to predict whether the buckling mode is macroscopic or microscopic without carrying out a computationally intensive eigenvalue analysis, and will provide a more accurate value for the critical mismatch strain at the macroscopic to microscopic transition. This section is independent from the previous ones, and can be skipped in a first reading.

The first step is to cast the bifurcation equation (5.10b) into the canonical form (2.3a) that has no linear term in q. This is a tricky step. The idea is to duplicate and arrange the degrees of freedom into a new unknown vector $\underline{\Xi}$: in block notation,

$$\underline{\Xi} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^{-1}\, \underline{\xi}^{\parallel} \\ q^{-1}\, \underline{\xi}^{\perp} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \underline{\xi}^{\parallel} \\ q\, \lambda^{-1}\, \underline{\xi}^{\perp} \end{bmatrix} \end{pmatrix}. \tag{5.13a}$$

Each half of the vector $\underline{\Xi}$ obeys the ordering convention in (5.10a), *i.e.* the first two thirds of each half encodes cross-sectional displacements and the last third of each half encodes axial displacement. In this block-vector notation, the square brackets group splits the generalized degrees of freedom into two halves, while the separate lines inside the square brackets correspond to the cross-sectional and the axial degrees of freedom respectively. We carry on with this convention in the following.

With the block matrices $\underline{\underline{A}}_\lambda$ and $\underline{\underline{B}}_\lambda$ defined as

$$\underline{\underline{A}}_\lambda = \begin{pmatrix} [\underline{\underline{0}}] & [\underline{\underline{\mathcal{A}}}_\lambda] \\ [\underline{\underline{\mathcal{A}}}_\lambda^T] & [\underline{\underline{0}}] \end{pmatrix}, \qquad \underline{\underline{B}}_\lambda = \begin{pmatrix} [\underline{\underline{0}}] & [\underline{\underline{\mathcal{B}}}_\lambda] \\ [\underline{\underline{\mathcal{B}}}_\lambda^T] & [\underline{\underline{0}}] \end{pmatrix}, \tag{5.13b}$$

and the sub-blocks defined themselves using block notation as

$$[\underline{\underline{\mathcal{A}}}_\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda\, \underline{\underline{k}}_\lambda^{\parallel} & \lambda^2\, \underline{\underline{c}}_\lambda^T \\ \underline{\underline{0}} & \lambda\, \underline{\underline{k}}_\lambda^{\perp} \end{bmatrix}, \qquad [\underline{\underline{\mathcal{B}}}_\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda\, \underline{\underline{m}}_\lambda^{\parallel} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{c}}_\lambda & \lambda\, \underline{\underline{m}}_\lambda^{\perp} \end{bmatrix}, \tag{5.13c}$$

one can cast the eigenvalue problem (5.10b) governing bifurcation into an equivalent form that matches up the canonical form proposed earlier in (2.3a),

$$\forall \widehat{\underline{\Xi}}, \quad \widehat{\underline{\Xi}} \cdot \underline{\underline{A}}_\lambda \cdot \underline{\Xi} + q^2\, \widehat{\underline{\Xi}} \cdot \underline{\underline{B}}_\lambda \cdot \underline{\Xi} = \underline{0}. \tag{5.13d}$$

Here, $\widehat{\underline{\Xi}}$ is an arbitrary vector having the same dimension as $\underline{\Xi}$ in (5.13a). Note that it is straightforward to assemble the block matrices $\underline{\underline{A}}_\lambda$ and $\underline{\underline{B}}_\lambda$ once the base solution $\underline{\varphi}_0^\lambda$ is known, as this involves rearranging the blocks $\underline{\underline{k}}_\lambda^{\parallel}$, ... , $\underline{\underline{m}}_\lambda^{\perp}$ calculated earlier in (5.11).

The small-wavenumber expansion can now be carried out by applying the recipe of Section 2.11 to (5.13d):

1. the matrices $\underline{\underline{A}}_\lambda$ and $\underline{\underline{B}}_\lambda$ are obviously symmetric. The null space $\ker \underline{\underline{A}}_\lambda$ is worked out in Appendix C: it is spanned by the 8 following vectors,

$$\begin{pmatrix} [\underline{0}] \\ [\underline{T}_1^*] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} [\underline{0}] \\ [\underline{T}_2^*] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} [\underline{0}] \\ [\underline{T}_3^*] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} [\underline{0}] \\ [\underline{T}_4^*] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} [\underline{T}_1] \\ [\underline{0}] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} [\underline{T}_2] \\ [\underline{0}] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} [\underline{T}_3] \\ [\underline{0}] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} [\underline{T}_4] \\ [\underline{0}] \end{pmatrix}. \tag{5.14}$$

   Each of these vectors has the same length and ordering convention as the vector $\underline{\Xi}$ in (5.13a). The eight vectors represent special types of adjacent equilibria: six of them are rigid-body modes (3 translations: $\underline{T}_1^*$, $\underline{T}_2^*$, and $\underline{T}_4$; and 3 rotations: $\underline{T}_3^*$, $\underline{T}_1$, $\underline{T}_2$), and two are homogeneous infinitesimal transformations: a stretching mode ($\underline{T}_4^*$) and a twisting mode ($\underline{T}_3$), see the appendix for details. As a result, $\ker \underline{\underline{A}}_\lambda$ is of dimension 8, and is indeed independent of λ;
2. in the basis (5.14), the restriction $\underline{\underline{B}}^*(\lambda)$ of $\underline{\underline{B}}_\lambda$ to $\ker \underline{\underline{A}}_\lambda$ is a symmetric 8×8 matrix which is anti-diagonal: using block-matrix notation,

$$\underline{\underline{B}}^*(\lambda) = \begin{pmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{b}}_\lambda \\ \underline{\underline{b}}_\lambda^T & \underline{\underline{0}} \end{pmatrix}. \tag{5.15}$$

   The entries of $\underline{\underline{b}}_\lambda$ can be calculated as, for instance, $\left(b_\lambda\right)_{14} = B_{15}^*(\lambda) = \underline{T}_1^* \cdot \underline{\underline{\mathcal{B}}}_\lambda^T \cdot \underline{T}_4$. Note that the 4×4 matrix $\underline{\underline{b}}_\lambda$ is non-symmetric. The critical load $\lambda^{(0)}$ is found by solving $\det \underline{\underline{B}}^*(\lambda^{(0)}) = 0$: in view of the block form of $\underline{\underline{B}}^*$, this is equivalent to finding the root $\lambda = \lambda^{(0)}$ of the (simpler) equation $\det \underline{\underline{b}}_\lambda = 0$;
3. at the critical value $\lambda = \lambda^{(0)}$, the non-symmetric matrix $\underline{\underline{b}}_\lambda = \underline{\underline{b}}_{(0)}$ is singular. Let $\underline{\beta} = \left(\beta_1, \ldots, \beta_4\right)$ denote a null vector of $\underline{\underline{b}}_{(0)}$, and $\underline{\beta}^\dagger = \left(\beta_1^\dagger, \ldots, \beta_4^\dagger\right)$ a null vector of its transpose $\underline{\underline{b}}_{(0)}^T$. In view of (5.15), the null space of $\underline{\underline{B}}^*(\lambda^{(0)})$ is of dimension $n^* = 2$ and is spanned by $\left(\begin{smallmatrix} \underline{0} \\ \underline{\beta} \end{smallmatrix}\right)$ and $\left(\begin{smallmatrix} \underline{\beta}^\dagger \\ \underline{0} \end{smallmatrix}\right)$. Each of these vectors has eight entries, which are the coordinates of a null vector in the basis (5.14): the null vectors can be spelled out in the original space by multiplying the coordinates by the basis vectors. This shows that the following two vectors form a basis of $\ker \underline{\underline{B}}^*(\lambda^{(0)})$:

$$\begin{pmatrix} [\underline{V}] \\ [\underline{0}] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} [\underline{0}] \\ [\underline{V}^*] \end{pmatrix}, \tag{5.16}$$

   where $\underline{V} = \sum_{i=1}^4 \beta_i\, \underline{T}_i$ and $\underline{V}^* = \sum_{i=1}^4 \beta_i^*\, \underline{T}_i^*$. By Eq. (2.12a), the limit $\underline{\Xi}^{(0)}$ of the bifurcation mode for $q \to 0$ lives in the null space of $\underline{\underline{B}}^*(\lambda^{(0)})$: for some coefficients $\alpha_1^{(0)}$ and $\alpha_2^{(0)}$,

$$\underline{\Xi}^{(0)} = \alpha_1^{(0)} \begin{pmatrix} [\underline{V}] \\ [\underline{0}] \end{pmatrix} + \alpha_2^{(0)} \begin{pmatrix} [\underline{0}] \\ [\underline{V}^*] \end{pmatrix}. \tag{5.17}$$

4. a particular solution solution $\underline{\Xi}_{\mathrm{p}}^{(1)}$ of the eigenvalue problem (2.9*) at order q^2 is found as $\underline{\Xi}_{\mathrm{p}}^{(1)} = -\underline{\underline{A}}_{(0)}^{-1} \cdot \underline{\underline{B}}_{(0)} \cdot \underline{\Xi}^{(0)}$, where $\underline{\underline{A}}_{(0)}^{-1}$ is a pseudo-inverse of the singular operator $\underline{\underline{A}}_{(0)}$;
5. the solvability condition (2.13) at order q^4 can then be written as

$$\forall \left(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2\right), \quad \begin{pmatrix} [\hat{\alpha}_1\, \underline{V}] \\ [\hat{\alpha}_2\, \underline{V}^*] \end{pmatrix} \cdot \left(-\underline{\underline{B}}_{(0)} \cdot \underline{\underline{A}}_{(0)}^{-1} \cdot \underline{\underline{B}}_{(0)} + \lambda^{(1)}\, \underline{\underline{B}}_{(0)}' \right) \cdot \begin{pmatrix} [\alpha_1^{(0)}\, \underline{V}] \\ [\alpha_2^{(0)}\, \underline{V}^*] \end{pmatrix} = 0.$$

Expanding the matrices inside the square brackets using their block form, this can be rewritten as

$$\forall(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2), \quad \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_2 \end{pmatrix} \cdot \left(\left(-a_1 + a_2\, \lambda^{(1)} \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1^{(0)} \\ \alpha_2^{(0)} \end{pmatrix} = 0,$$

where $a_1 = \underline{V} \cdot \underline{\underline{\mathcal{B}}}_{(0)} \cdot \underline{\underline{\mathcal{A}}}_{(0)}^{-1} \cdot \underline{\underline{\mathcal{B}}}_{(0)} \cdot \underline{V}^*$, $a_2 = \underline{V} \cdot \underline{\underline{\mathcal{B}}}'_{(0)} \cdot \underline{V}^*$ and $\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{(0)}^{-1}$ denotes a pseudo-inverse of the block $\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{(0)}$ in (5.13b);

6. the value of $\lambda^{(1)}$ is found by the condition that the matrix in square brackets in the equation above is singular, *viz.* $\lambda^{(1)} = a_1/a_2$:

$$\lambda^{(1)} = \frac{\underline{V} \cdot \underline{\underline{\mathcal{B}}}_{(0)} \cdot \underline{\underline{\mathcal{A}}}_{(0)}^{-1} \cdot \underline{\underline{\mathcal{B}}}_{(0)} \cdot \underline{V}^*}{\underline{V} \cdot \underline{\underline{\mathcal{B}}}'_{(0)} \cdot \underline{V}^*}. \tag{5.18}$$

Note the similarity with Eq. (2.14) valid for $n^* = 1$ (which is not directly applicable as $n^* = 2$ here).

Practically, the quantities $\lambda^{(0)}$ and $\lambda^{(1)}$ are calculated as follows. For any value of the mean applied stretch λ, the homogeneous solution $\underline{\varphi}_0^{\parallel}(\lambda; \tilde{x}, \tilde{y})$ is calculated by solving a 2-d non-linear elasticity problem using the finite-element method, as explained in Section 5.3. The matrices $\underline{\underline{k}}_{\lambda}^{\parallel}$, ..., $\underline{\underline{m}}_{\lambda}^{\perp}$ appearing in (5.11) are assembled as described in Appendix B.2. These blocks are arranged into the matrices $\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{\lambda}$ and $\underline{\underline{\mathcal{B}}}_{\lambda}$, see Eq. (5.13c). The 4×4 matrix $\underline{\underline{b}}_{\lambda}$ is calculated as explained below Eq. (5.15). Iterating over λ, numerical root-finding is used to find the root $\lambda = \lambda^{(0)}$ of $\det \underline{\underline{b}}_{\lambda} = 0$. The corresponding right and left null vectors $\underline{\beta}$ and $\underline{\delta}^{\dagger}$ are calculated numerically, as well as $\underline{V}$ and $\underline{V}^*$ appearing immediately after Eq. (5.16). A pseudo-inverse $\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{(0)}^{-1}$ of $\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{(0)}$ is calculated. The operator $\underline{\underline{\mathcal{B}}}'_{(0)} = \frac{\mathrm{d}\underline{\underline{\mathcal{B}}}_{\lambda}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\lambda^{(0)}\right)$ appearing in the denominator of (5.18) is estimated numerically using finite differences in λ. Finally, $\lambda^{(1)}$ is calculated from Eq. (5.18).

This method is first applied to the example problem from Fig. 12a, using the same aspect-ratio $h/v = 0.1$ and the same set of material parameters as for the direct method: in the figure, the dotted parabolas $\lambda = \lambda^{(0)} + q^2\, \lambda^{(1)}$ are the prediction of the small-wavenumber expansion, for different values of the mismatch strain p. In the neighborhood of their intersection with the $q = 0$ axis, the parabolas provide a good approximation of the complete curves of marginal stability obtained earlier by the direct method. For this particular example, $\lambda^{(1)}$, as calculated by (5.18), goes from positive for $p = 1.11$ to negative for $p = 1.056$: this is in accord with the macroscopic to microscopic transition observed at $p^* \approx 1.1$ using the full eigenvalue analysis (direct method), see Eq. (5.12). By doing a linear interpolation of the values of $\lambda^{(1)}$ just calculated from (5.18) at $p = 1.056$ and $p = 1.11$, one can obtain an accurate estimate of p^* as

$$p^* = 1.090. \tag{5.19}$$

When converted into the dimensionless mismatch strain of the plate model, as explained as the end of Section 5.6, this yields $\overline{\delta} = 89.6$. This is close to the value $\overline{\delta} = 88.25$ calculated by the plate model in (4.12): this confirms that the plate model agrees with the 3-d model in the limit $h/v \to 0$; the small difference between the two values is due to the fact that the aspect-ratio is small but finite in the 3-d model ($h/v = 0.1$).

This procedure for calculating the critical value of the mismatch stretch p^* was repeated for different aspect-ratios: these values of p^* were converted into values of $\overline{\delta}$, and then displayed as the grey stars in Fig. 12b. Each of these stars falls exactly at the point where the curve of marginal stability found by the direct method merges with the axis $\overline{q}_c = 0$. This confirms that the predictions of the small-wavelength expansion are valid.

5.8. Summary

In this section, we modeled the bistrip experiment using a 3-d hyper-elastic model. By solving a non-linear elasticity problem in 2-d using the finite-element method, we calculated a family of base solutions that are cylindrically invariant. Using numerical eigenvalue analysis, we obtained the curves of marginal stability for different values of the mismatch stretch p (direct method); we reached the same conclusion as with the double-beam and plate models: the first bifurcation mode goes from macroscopic to microscopic when the mismatch stretch goes beyond a critical value, $p = p^*$. The predictions of the 3-d hyper-elastic model agree with those of the plate model when the aspect ratio is small, $h \ll v$.

We also applied the general small-wavelength expansion to calculate the critical mismatch strain p^* corresponding to the macroscopic-to-microscopic transition, for different values of the aspect-ratio h/v. The values of p^* obtained in this way agree with those calculated by the direct method. The small-wavelength expansion has two important benefits over the direct method. It provides more accurate values of p^*, and it is much less intensive computationally: it requires only standard linear algebra operations on the matrices $\underline{\underline{K}}_{\lambda}$, $\underline{\underline{C}}_{\lambda}$, $\underline{\underline{M}}_{\lambda}$ that are known in terms of the invariant solution $\underline{\varphi}_0^{\parallel}$. By contrast, the direct method requires solving a polynomial eigenvalue problem for each value of λ, and then iterating over λ to bracket the critical stretch λ_c and the wavenumber of the first bifurcating mode q_c. This determines whether the system bifurcates towards a microscopic or a macroscopic mode. Then a second level of iteration over the pre-stretch p is required to bracket the critical value p^* for a particular value of the aspect-ratio h/v.

In the limit of a weak pre-strain, $p \to 1$, the predictions of the 3-d model studied in this section are equivalent with those of an Euler-Bernoulli rod model having a natural curvature consistent with the pre-strain distribution. This can be shown by an argument similar to that given earlier in Section 4.5 for a plate; it is more technical, however, and is not given here.

6. Discussion, conclusion and perspectives

In previous work on thin elastic structures, a weakly inhomogeneous pre-strain has been taken into account by modifying the reference metric or the natural curvature of classical rod or plate models (Goriely and Tabor, 1998; Liu et al., 2014). The present work shows that this is not possible in the general case of a finite, non-uniform pre-strain: as evident from the analysis of bistrips, large pre-strain can lead to buckling modes that violate the kinematic assumptions underlying classical rod models. Accordingly, we have approached the stability of a pre-strained rod-like elastic solids based on structural models with deformable cross-sections: we used different structural models featuring different degrees of sophistication, all of which yielded qualitatively similar results. We found that the first bifurcation mode switches from long-wavelength for weak pre-stress ($q_c = 0$), to short-wavelength for larger pre-stress ($q_c \neq 0$). The transition is governed by a dimensionless parameter comparing the antagonistic effects of pre-stress (which favors short wavelengths) and of the stiffness of the cross-section (which favors long wavelengths). For large or small pre-stress, our models are asymptotically equivalent with the buckling of an Euler-Bernoulli beam with natural curvature, and with a strut on an elastic foundation, respectively. Drawing an analogy with Koiter's post-bifurcation analysis, we have proposed a small-wavenumber expansion that captures the long-wavelength to short-wavelength transition. This method is especially powerful when applied to the full 3-d model (Section 5): it involves elementary linear algebra in terms of the unbuckled solution, and removes the need for a computationally extensive eigenvalue analysis.

Our initial motivation for this work was to explain the selection of the number of perversions in a pre-stressed bistrip based on a static, linear bifurcation analysis; this goal has been achieved. The 3-d model studied in Section 5 makes use of the same constitutive law and modeling assumptions as the finite-element simulations of Liu et al. (2014), which they already compared to the bistrip experiments: there is no need for us to carry out a detailed comparison with the experiments again. We simply note here that we found the critical wavenumber $\overline{q}_c$ to be an increasing function of the dimensionless pre-strain, and that this accounts for the increase of the number of perversions with the amount of pre-strain and with the inverse cross-section aspect-ratio v/h, as seen in the experiments. As our approach makes uses of Fourier analysis in the axial direction, the macroscopic-to-microscopic transition manifests itself as a bifurcation on the critical wavenumber q_c. To extend our work to a finite length L, the dispersion relation derived in this paper needs be combined with the relevant boundary conditions which, typically, provide a quantification condition on the wavenumber q. For very slender rods, $L \gg h$ and $L \gg v$, the wavenumber is quantified in vanishingly small increments and this warrants consistency with the case $L = \infty$ addressed in the present work.

We emphasize that the present work is concerned with a linear bifurcation analysis, *i.e.* our equations are *linear* with respect to the amplitude of buckling but *non-linear* with respect to the wavenumber q. In future work, it would be interesting to consider the case of a finite buckling amplitude as well: this would allow one to confirm that the bifurcation is super-critical, and to compute the amplitude along the post-bifurcated branch; other typically non-linear effects such as the coalescence and subdivision of perversions may also be addressed (Liu et al., 2016). Another interesting extension would be to push the small-wavelength extension of Section 2 to the next order: this would allow one to derive an 'amplitude equation' for the critical wavenumber of the form $q_c^4 - \alpha\,(p - p^*)\,q_c^2 = 0$ near the critical pre-strain p^*, corresponding to the asymptotic law $q_c \propto (p - p^*)^{1/2}$ seen *e.g.* in the numerical results of Fig. 12b at the transition.

In our work, the macroscopic and the microscopic buckling modes originate from a single mode whose wavenumber bifurcates: this is entirely different from the problem of mode jumping where *different* buckling modes interact non-linearly (Chien et al., 2000; Everall and Hunt, 2000; Holder and Schaeffer, 1984; Schaeffer and Golubitsky, 1979; Stein, 1959), and from other problems involving an interaction between different macroscopic and microscopic modes (Bai and Wadee, 2015).

In the small-wavenumber expansion we assumed that the curves of marginal stability are always of one of the two types shown in Fig. 2. This assumption turned out to be correct for all the examples that we studied and, as a result, the criterion $\lambda^{(1)} = 0$ (or $\epsilon^{(1)} = 0$ in Section 3–4) successfully captured the macroscopic-to-microscopic transition. If, however, the marginal curves have at least three critical points (λ_c, q_c) where $\mathrm{d}\lambda/\mathrm{d}q = 0$, different types of bifurcations may take place and the criterion $\lambda^{(1)} = 0$ may not be applicable (this is similar to the well-known limitation of a linear bifurcation analysis, which overestimates the load at which buckled solutions can appear by a sub-critical pitchfork bifurcation).

Motivated by the bistrip experiments, we have considered a piecewise constant pre-strain, see (4.1a) and (5.1). It is straightforward to extend the present work to an arbitrary distribution of pre-strain in the cross-section. As an illustration, let us consider the plate model, now with a pre-stress depending linearly on the transverse coordinate x: we replace (4.1a) with $N_{zz}^0(\epsilon\,; x) = Eh\left(\epsilon + \frac{3}{2}\left(\frac{x}{L} - \frac{1}{2}\right)\delta\right)$. In this formula, the numerical factor 3/2 has been chosen such that the residual bending moment is still given by Eq. (4.14): this warrants that the mismatch parameter δ of the new (linear) pre-stress distribution is directly comparable with that of the older (piecewise constant) pre-stress distribution. Instead of carrying out the buckling analysis by the direct method (shooting method, Section 4.2), we use the small-wavenumber expansion: it gives the same results more easily. Adapting the analysis of Section 4.4, we find that Eq. (4.8) is unmodified[5], while the quantity $\overline{\epsilon}^{(1)} = g_\nu(\overline{\epsilon}^{(0)}, \overline{\delta})$ in (4.10b) becomes $g_\nu(\overline{\epsilon}^{(0)}, \overline{\delta}) = \frac{\overline{\epsilon}^{(0)^2}}{1260} + \frac{5\nu+2}{210}\,\overline{\epsilon}^{(0)} - (1 - \nu^2)$. Since Eq. (4.8) still holds, the thick green curve in the phase diagram in Fig. 9 remains unchanged. With a linear pre-strain distribution, we find that a macroscopic to microscopic transition still takes place but the critical pre-stress $\overline{\delta}^*$ is different: solving $\epsilon^{(1)} = g_\nu = 0$ with the expression of

[5] This is because the pre-stress enter into this equation through the residual moment M_y^0 only (see Section 4.5), which has been preserved by design.

g_ν just given yields $\overline{\epsilon}^{(0)} = 20.1$ in the incompressible case ($\nu = .5$), which by Eq. (4.8) corresponds to $\overline{\delta}^* = 63.8$. This is significantly less than the value found earlier for a piecewise constant pre-strain, compare with (4.12). All the results presented in this paper can be similarly extended to an arbitrary pre-stress distribution.

Thin elastic structures comprising incompatible strain are a relatively new topic which is still imperfectly understood. The thin rod model with natural curvature has been used to model these structures but the recent work of Cicalese et al. (2016) and our own results show that it is applicable only when the pre-strain is infinitesimal, *i.e.* for $|p-1| \ll 1$ or $\overline{\delta} \ll 1$ in our notation. Still, our results show that for a pre-strain as large as p^* or $\overline{\delta}^*$ (which are both of order 1), and even slightly above, the wavelength of the buckling modes $\sim 1/q_c$ is much larger than the cross-section dimension $\sim v \sim h$. This suggests that it must be possible to derive 1-d models governing thin structures with finite pre-strain, even though such models have not been established to date (they are certainly not of the Euler-Bernoulli type). In future work, we will address this question, using the analysis of a prismatic solid presented in Section 5 as a starting point.

Appendix A. Numerical shooting method for the plate model

Here, we describe a numerical solution of the eigenvalue problem (4.5a)–(4.5e) for the elastic plate with non-uniform pre-stress, that governs the initial buckling bifurcation. The eigenvalue problem depends on Poisson's ratio ν, on the mismatch strain $\overline{\delta}$ and on the mean imposed strain $\overline{\epsilon}$; its eigenvector is the complex deflection amplitude $\xi_1(\overline{x})$, and its eigenvector is the wavenumber $\overline{q}$.

The eigenproblem can be solved by a shooting method as follows. In each half-plate $j = I, II$, and for a given value of $\overline{q}$, the solutions $\xi_1^j(\overline{x})$ that satisfy both the differential equation (4.5) and the boundary conditions (4.5c) and (4.5d) is of dimension $4-2=2$. Two particular solutions $\xi_1^{j,1}$ and $\xi_1^{j,2}$ spanning this space are found by integrating the differential equation with initial conditions

$$\left((\xi_1^{j,k}), (\xi_1^{j,k})', (\xi_1^{j,k})'', (\xi_1^{j,k})'''\right)_{\overline{x}_0^j} = \begin{cases} \left(1, 0, \nu\overline{q}^2, 0\right) & \text{for first function, } k=1 \\ \left(0, 1, 0, \overline{q}^2(2-\nu)\right) & \text{for second function, } k=2. \end{cases} \tag{A.1}$$

Here $\overline{x}_0^I$ and $\overline{x}_0^{II}$ denote the starting point of the progressive integration, which takes place in either half of the plate: $\overline{x}_0^I = 0$ and $\overline{x}_0^{II} = 1$. For each half-plate $j = I, II$, one can define a 4×2 shooting matrix $\mathcal{S}_j(\nu, \overline{\delta}, \overline{\epsilon}, \overline{q})$ by filling with the values at the interface of the successive derivatives of the numerical solution $\xi_1^{j,k}$,

$$\left(\mathcal{S}_j(\nu, \overline{\delta}, \overline{\epsilon}, \overline{q})\right)_{ik} = \frac{\mathrm{d}^i \xi_1^{j,k}}{\mathrm{d}\overline{x}^i}(1/2).$$

By construction, this matrix yields ξ_1 and its successive derivatives at the interface $\overline{x} = 1/2$ in terms of the initial values $\xi_1(\overline{x}_0^j)$ and $\xi_1'(\overline{x}_0^j)$ on the stress-free edge:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_1' \\ \xi_1'' \\ \xi_1''' \end{pmatrix}_{\overline{x}=\frac{1}{2}} = \mathcal{S}_j(\nu, \overline{\delta}, \overline{\epsilon}, \overline{q}) \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_1' \end{pmatrix}_{\overline{x}_0^j}.$$

Finally, the continuity conditions (4.5e) can be expressed as:

$$\det \mathcal{S}(\nu, \overline{\delta}, \overline{\epsilon}, \overline{q}) = 0, \tag{A.2a}$$

where the 4×4 shooting matrix $\mathcal{S}$ is obtained by assembling the 4×2 matrices $\mathcal{S}_I$ and $\mathcal{S}_{II}$ from either half-plate: in block-matrix notation,

$$\mathcal{S}(\nu, \overline{\delta}, \overline{\epsilon}, \overline{q}) = \left(\mathcal{S}_I(\nu, \overline{\delta}, \overline{\epsilon}, \overline{q}) \;\middle|\; -\mathcal{S}_{II}(\nu, \overline{\delta}, \overline{\epsilon}, \overline{q})\right). \tag{A.2b}$$

Appendix B. Linearized equilibrium of the Gent model

In this section, we give the detailed expressions of the tensors appearing in the non-linear equilibrium (5.4) and in the linearized equilibrium (5.7) of the 3-d hyper-elastic model analyzed in Section 5.

B.1. Pre-stress and tangent moduli

We start from the strain energy per unit reference volume W_{3D} of a Gent material, as defined in (5.2b). The second Piola-Kirchhoff stress tensor $\underline{\underline{\Sigma}} = \frac{1}{\det \underline{\underline{G}}} \frac{\partial W_{3D}}{\partial \underline{\underline{e}}}$ reads

$$\underline{\underline{\Sigma}}(\varphi) = \frac{1}{\det \underline{\underline{G}}} \left(\frac{\mu J_{\mathrm{m}}}{J_{\mathrm{m}} - I_{\mathrm{c}} + 3} \underline{\underline{1}} - \mu \underline{\underline{C}}^{-1} + \left(K - \frac{2\mu}{J_{\mathrm{m}}}\right) J (J-1) \underline{\underline{C}}^{-1} \right), \tag{B.1}$$

where $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{H}}^T \cdot \underline{\underline{H}}$ is the Cauchy–Green deformation tensor.

We rewrite the definition (5.1) of the transformation gradient associated with pre-stretch $\underline{\underline{G}}$ in compact form as follows:

$$\underline{\underline{G}} = \tilde{r}\left(\underline{e}_X \otimes \underline{e}_X + \underline{e}_Y \otimes \underline{e}_Y\right) + \tilde{p}\,\underline{e}_Z \otimes \underline{e}_Z,$$

where $\tilde{r}$ and $\tilde{p}$ denote the piecewise constant principal stretches

$$\tilde{r} = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad 0 < x < v/2, \\ r & \text{if} \quad v/2 < x < v. \end{cases} \quad \text{and} \quad \tilde{p} = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad 0 < x < v/2, \\ p & \text{if} \quad v/2 < x < v. \end{cases}$$

For the special case of an invariant solution $\underline{\varphi}_0^\lambda(\underline{\tilde{x}})$, as defined in (5.5), the transformation gradients take the block-diagonal form

$$\underline{\underline{F}}_0 = \begin{pmatrix} \underline{\underline{F}}_0^\parallel & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{H}}_0 = \begin{pmatrix} \tilde{r}\,\underline{\underline{F}}_0^\parallel & 00 \\ 0 & \tilde{p}\lambda \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{C}}_0 = \begin{pmatrix} \underline{\underline{C}}_0^\parallel & 0 \\ 0 & \tilde{p}^2\lambda^2 \end{pmatrix}$$

where the first two rows and columns correspond to the cross-sectional direction $\tilde{x}$ and $\tilde{y}$, and the last row and column correspond the axial direction $\tilde{z}$. The cross-sectional blocks $\underline{\underline{F}}_0^\parallel = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\mathrm{grad}}}\,\underline{\varphi}_0^\parallel$ and $\underline{\underline{C}}_0^\parallel = \tilde{r}^2\,(\underline{\underline{F}}_0^\parallel)^T \cdot \underline{\underline{F}}_0^\parallel$ depend on the gradients of the cross-sectional displacement $\underline{\varphi}_0^\parallel(\lambda; \tilde{x}, \tilde{y})$. We denote by grad the gradient with respect to the coordinates within the cross-section $(\tilde{x}, \tilde{y})$, for instance for a scalar field $v(\tilde{x}, \tilde{y})$: $\underline{\mathrm{grad}}\, v = \left(\frac{\partial v}{\partial \tilde{x}}, \frac{\partial v}{\partial \tilde{y}}\right)$. As mentioned in Eq. (5.6), the pre-stress $\underline{\underline{\Sigma}}_0 = \underline{\underline{\Sigma}}(\underline{\varphi}_0^\lambda)$ in the invariant configuration $\underline{\varphi}_0^\lambda$ splits up into similar blocks,

$$\underline{\underline{\Sigma}}_0 = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\Sigma}}_0^\parallel & 0 \\ 0 & \Sigma_0^\perp \end{pmatrix}.$$

The tensor of tangent moduli appearing in (5.8) reads, when evaluated in the invariant solution,

$$\begin{aligned} \underline{\underline{H}}_1 : \underline{\underline{\underline{\underline{\mathcal{L}}}}}_0(\lambda) : \underline{\underline{\widehat{H}}} = {} & \mathcal{B}_1 \ \mathrm{tr}\ (\underline{\underline{H}}_1^T \cdot \underline{\underline{H}}_0)\ \mathrm{tr}\ (\underline{\underline{\widehat{H}}}^T \cdot \underline{\underline{H}}_0) \cdots \\ & + \mathcal{B}_2 (\underline{\underline{H}}_1^T \cdot \underline{\underline{H}}_0 \cdot \underline{\underline{C}}_0^{-1}) : (\underline{\underline{\widehat{H}}}^T \cdot \underline{\underline{H}}_0 \cdot \underline{\underline{C}}_0^{-1}) \cdots \\ & + \mathcal{B}_3 \left(\underline{\underline{C}}_0^{-1} : (\underline{\underline{H}}_1^T \cdot \underline{\underline{H}}_0)\right) \left(\underline{\underline{C}}_0^{-1} : (\underline{\underline{\widehat{H}}}^T \cdot \underline{\underline{H}}_0)\right) \end{aligned}$$

where $\underline{\underline{H}}_1$ is the incremental transformation gradient defined below (5.7). For the Gent model, the full expression of the moduli $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ and $\mathcal{B}_3$ is

$$\mathcal{B}_1 = \frac{2\,\mu J_\mathrm{m}}{\det \underline{\underline{G}}\,(J_\mathrm{m} - I_\mathrm{c}^0 + 3)^2} \quad \mathcal{B}_2 = \frac{2\left(\mu - (K - \frac{2\mu}{J_\mathrm{m}})J^0(J^0 - 1)\right)}{\det \underline{\underline{G}}} \quad \mathcal{B}_3 = \frac{\left(K - \frac{2\mu}{J_\mathrm{m}}\right)J^0\left(2J^0 - 1\right)}{\det \underline{\underline{G}}},$$

where $I_\mathrm{c}^0 = \ \mathrm{tr}\ \underline{\underline{C}}_0$ and $J^0 = \sqrt{\det \underline{\underline{C}}_0}$ are the deformation invariants evaluated in the invariant solution $\underline{\varphi}_0^\lambda$.

B.2. Quadratic forms entering in the eigenvalue problem

Let us return to the weak form of the linearized equilibrium (5.7). We do not assume that the real and virtual displacements $\underline{\varphi}_1(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ and $\underline{\widehat{\varphi}}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ are harmonic in the axial coordinate $\tilde{z}$, as we did earlier in (5.9); instead, we consider an arbitrary dependence on $\tilde{z}$. This will allow us to derive the representation of rigid-body motions in Appendix C below. The linearized equilibrium (5.9) depends on the first gradients of $\underline{\varphi}_1$ and $\underline{\widehat{\varphi}}$ along both the cross-sectional directions $\tilde{x}$ and $\tilde{y}$ and along the axial direction $\tilde{z}$. By grouping the terms depending on the total order of derivation with respect to $\tilde{z}$, one can rewrite the linearized equilibrium as

$$\forall \underline{\widehat{\varphi}}, \quad \frac{1}{L}\int_0^L \left(K_\lambda(\underline{\widehat{\varphi}}, \underline{\varphi}_1) + \mathcal{C}_\lambda(\underline{\widehat{\varphi}}, \underline{\varphi}_{1,\tilde{z}}) + \mathcal{C}_\lambda(\underline{\varphi}_1, \underline{\widehat{\varphi}}_{,\tilde{z}}) + M_\lambda(\underline{\widehat{\varphi}}_{,\tilde{z}}, \underline{\varphi}_{1,\tilde{z}})\right) \mathrm{d}\tilde{z} = 0, \tag{B.2a}$$

where the symbol $\tilde{z}$ appearing in a subscript after a comma denotes an axial derivative $\partial/\partial\tilde{z}$. The bilinear forms K_λ, $\mathcal{C}_\lambda$ and M_λ, which are spelled out below, depend on the pre-stretch λ through the base solution $\underline{\varphi}_0^\lambda$, and contain gradients of the displacement with respect to the cross-sectional directions $\tilde{x}$ and $\tilde{y}$, noted as grad, but *not* with respect to the axial direction $\tilde{z}$. Stated differently, cross-sectional gradients $\partial/\partial\tilde{x}$ and $\partial/\partial\tilde{y}$ (denoted by grad) are implicitly contained in the operators in equation above, but the axial gradients $\partial/\partial\tilde{z}$ appear explicitly in the arguments of the operators.

Next, the real and virtual displacements are decomposed into a cross-sectional projection $\underline{\varphi}_1^\parallel$ and $\underline{\widehat{\varphi}}^\parallel$ belonging to the (xy) plane, and an axial component as

$$\underline{\varphi}_1(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \underline{\varphi}_1^\parallel(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) + \varphi_1^\perp(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})\,\underline{e}_Z, \qquad \underline{\widehat{\varphi}}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \underline{\widehat{\varphi}}^\parallel(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) + \widehat{\varphi}^\perp(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})\,\underline{e}_Z.$$

The operators in (B.2a) are found by identification with (5.7): the way they couple the cross-sectional and axial components is dictated by the symmetry of the invariant solution as follows,

$$K_\lambda(\underline{\widehat{\varphi}}, \underline{\varphi}_1) = k_\lambda^\parallel(\underline{\widehat{\varphi}}^\parallel, \underline{\varphi}_1^\parallel) + k_\lambda^\perp(\widehat{\varphi}^\perp, \varphi_1^\perp), \tag{B.2b}$$

$$\mathcal{C}_\lambda(\underline{\widehat{\varphi}}, \underline{\varphi}_{1,\tilde{z}}) = c^1_\lambda(\widehat{\varphi}^\perp, \underline{\varphi}^\parallel_{1,\tilde{z}}) + c^2_\lambda(\underline{\widehat{\varphi}}^\parallel, \varphi^\perp_{1,\tilde{z}}), \tag{B.2c}$$

$$M_\lambda(\underline{\widehat{\varphi}}_{,\tilde{z}}, \underline{\varphi}_{1,\tilde{z}}) = m^\parallel_\lambda(\underline{\widehat{\varphi}}^\parallel_{,\tilde{z}}, \underline{\varphi}^\parallel_{1,\tilde{z}}) + m^\perp_\lambda(\widehat{\varphi}^\perp_{,\tilde{z}}, \varphi^\perp_{1,\tilde{z}}). \tag{B.2d}$$

From Appendix B.1, the detailed expressions of the different 'blocks' are, for the Gent model,

$$\begin{aligned} k^\parallel_\lambda(\underline{\widehat{\varphi}}^\parallel, \underline{\varphi}^\parallel_1) = \iint_{\mathcal{D}} \Big(&\tilde{r}^2\Big[(\underline{\underline{\mathrm{grad}\varphi}}^\parallel_1\cdot\underline{\underline{\Sigma}}^\parallel_0) : \underline{\underline{\mathrm{grad}\widehat{\varphi}}}^\parallel\Big] + \tilde{r}^4\mathcal{B}_1\Big[\underline{\underline{F}}^\parallel_0 : \underline{\underline{\mathrm{grad}\varphi}}^\parallel_1\Big]\Big[\underline{\underline{F}}^\parallel_0 : \underline{\underline{\mathrm{grad}\widehat{\varphi}}}^\parallel\Big]\cdots \\ &+ \tilde{r}^4\mathcal{B}_2\Big[(\underline{\underline{F}}^\parallel_0)^T\cdot\underline{\underline{\mathrm{grad}\varphi}}^\parallel_1\cdot(\underline{\underline{C}}^\parallel_0)^{-1}\Big] : \Big[(\underline{\underline{F}}^\parallel_0)^T\cdot\underline{\underline{\mathrm{grad}\widehat{\varphi}}}^\parallel\cdot(\underline{\underline{C}}^\parallel_0)^{-1}\Big]\cdots \\ &+ \tilde{r}^4\mathcal{B}_3\Big[(\underline{\underline{C}}^\parallel_0)^{-1} : ((\underline{\underline{F}}^\parallel_0)^T\cdot\underline{\underline{\mathrm{grad}\varphi}}^\parallel_1)\Big]\Big[(\underline{\underline{C}}^\parallel_0)^{-1} : ((\underline{\underline{F}}^\parallel_0)^T\cdot\underline{\underline{\mathrm{grad}\widehat{\varphi}}}^\parallel)\Big]\Big)\mathrm{d}\tilde{x}\,\mathrm{d}\tilde{y}, \end{aligned} \tag{B.2e}$$

$$k^\perp_\lambda(\widehat{\varphi}^\perp, \varphi^\perp_1) = \iint_{\mathcal{D}} \Big(\tilde{r}^2\big[\underline{\underline{\Sigma}}^\parallel_0\cdot\underline{\mathrm{grad}\varphi}^\perp_1\big].\underline{\mathrm{grad}\widehat{\varphi}}^\perp + \tilde{r}^2\frac{\mathcal{B}_2}{2}\underline{\mathrm{grad}\widehat{\varphi}}^\perp.\big[(\underline{\underline{C}}^\parallel_0)^{-1}\cdot\underline{\mathrm{grad}\varphi}^\perp_1\big]\Big)\mathrm{d}\tilde{x}\,\mathrm{d}\tilde{y}, \tag{B.2f}$$

$$c^1_\lambda(\widehat{\varphi}^\perp, \underline{\varphi}^\parallel_{1,\tilde{z}}) = \iint_{\mathcal{D}} \tilde{r}^2\frac{\mathcal{B}_2}{2\lambda}\,\underline{\mathrm{grad}\widehat{\varphi}}^\perp.((\underline{\underline{F}}^\parallel_0)^{-1}\cdot\underline{\varphi}^\parallel_{1,\tilde{z}})\,\mathrm{d}\tilde{x}\,\mathrm{d}\tilde{y}, \tag{B.2g}$$

$$c^2_\lambda(\underline{\widehat{\varphi}}^\parallel, \varphi^\perp_{1,\tilde{z}}) = \iint_{\mathcal{D}} \Big(\tilde{r}^2\,\tilde{p}^2\mathcal{B}_1\lambda\,\underline{\underline{F}}^\parallel_0 : \big(\varphi^\perp_{,1\tilde{z}}\,\underline{\underline{\mathrm{grad}\widehat{\varphi}}}^\parallel\big) + \tilde{r}^2\frac{\mathcal{B}_3}{\lambda}(\underline{\underline{F}}^\parallel_0)^{-T} : \big(\varphi^\perp_{1,\tilde{z}}\,\underline{\underline{\mathrm{grad}\widehat{\varphi}}}^\parallel_1\big)\Big)\mathrm{d}\tilde{x}\,\mathrm{d}\tilde{y}, \tag{B.2h}$$

$$m^\parallel_\lambda(\underline{\widehat{\varphi}}^\parallel_{,\tilde{z}}, \underline{\varphi}^\parallel_{1,\tilde{z}}) = \iint_{\mathcal{D}} \Big(\tilde{p}^2\,\Sigma^\perp_0\,\underline{\varphi}^\parallel_{1,\tilde{z}}.\underline{\widehat{\varphi}}^\parallel_{,\tilde{z}} + \frac{\mathcal{B}_2}{\lambda^2}\frac{1}{2}\underline{\varphi}^\parallel_{1,\tilde{z}}\cdot\underline{\widehat{\varphi}}^\parallel_{,\tilde{z}}\Big)\mathrm{d}\tilde{x}\,\mathrm{d}\tilde{y}, \tag{B.2i}$$

$$m^\perp_\lambda(\widehat{\varphi}^\perp_{,\tilde{z}}, \varphi^\perp_{1,\tilde{z}}) = \iint_{\mathcal{D}} \Big(\tilde{p}^2\,\Sigma^\perp_0\,\varphi^\perp_{1,\tilde{z}}\widehat{\varphi}^\perp_{\tilde{z}} + \tilde{p}^4\mathcal{B}_1\lambda^2\,\varphi^\perp_{1,\tilde{z}}\widehat{\varphi}^\perp_{,\tilde{z}} + \frac{\mathcal{B}_2}{\lambda^2}\,\varphi^\perp_{1,\tilde{z}}\widehat{\varphi}^\perp_{,\tilde{z}} + \frac{\mathcal{B}_3}{\lambda^2}\varphi^\perp_{1,\tilde{z}}\widehat{\varphi}^\perp_{,\tilde{z}}\Big)\mathrm{d}\tilde{x}\,\mathrm{d}\tilde{y}. \tag{B.2j}$$

Note that the operators K_λ and M_λ, which are associated with an even total order of axial differentiation $\partial/\partial\tilde{z}$, couple cross-sectional real and virtual displacements on one hand, and axial real and virtual displacement on the other hand; by contrast, the operator $\mathcal{C}_\lambda$ which is associated with a total order of axial differentiation $\partial/\partial\tilde{z}$ equal to one (odd order), couples a cross-sectional virtual displacement with an axial real displacement and *vice versa*.

As we work with a set of material parameters that make the solid nearly incompressible, we approximate $\det\underline{\underline{G}}\approx 1$ in the linear bifurcation analysis.

B.3. Connection with the Fourier form of the operators

With the aim to derive the Fourier form of the eigenvalue problem announced in (5.11), we now consider displacements that are pure Fourier modes, *i.e.* that depend harmonically on $\tilde{z}$, as in (5.9):

$$\begin{aligned} \underline{\varphi}^\parallel_1(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) &= \underline{\xi}^\parallel(\tilde{x},\tilde{y})\,e^{iq\tilde{z}} \\ \varphi^\perp_1(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) &= i\,\xi^\perp(\tilde{x},\tilde{y})\,e^{iq\tilde{z}} \\ \underline{\widehat{\varphi}}^\parallel(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) &= \underline{\widehat{\xi}}^\parallel(\tilde{x},\tilde{y})\,e^{iq\tilde{z}} \\ \widehat{\varphi}^\perp(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) &= i\,\widehat{\xi}^\perp(\tilde{x},\tilde{y})\,e^{iq\tilde{z}} \end{aligned}$$

For large L, the averages over the axial variable $\tilde{z}$ in Eq. (B.2a) can be simplified with the help of the identity

$$\frac{1}{L}\int_0^L \Re\big(\underline{\underline{S}}\,e^{iq\tilde{z}}\big) : \Re\big(\underline{\underline{T}}\,e^{iq\tilde{z}}\big)\,\mathrm{d}\tilde{z} = \frac{1}{2}\Re\big(\underline{\underline{S}} : \underline{\underline{T}}^\dagger\big) \qquad (\text{for } q\neq 0)$$

for any tensors $\underline{\underline{S}}$ and $\underline{\underline{T}}$ of complex amplitudes. Here, $\Re$ denotes the real part, and $\underline{\underline{T}}^\dagger$ is the complex conjugate of $\underline{\underline{T}}$. When this identity is applied to (B.2a), the variable $\tilde{z}$ disappears, the wavenumber q appears, and one arrives at the eigenproblem announced in (5.10b): $\forall\widehat{\underline{\xi}},\ \widehat{\underline{\xi}}\cdot\big(\underline{\underline{K}}_\lambda + q\,\underline{\underline{C}}_\lambda + q^2\,\underline{\underline{M}}_\lambda\big)\cdot\underline{\xi}_1 = 0$, using the block notations of Section 5.4. In this equation, the operators $\underline{\underline{K}}_\lambda$ and $\underline{\underline{M}}_\lambda$ are the discrete form of the operators K_λ and M_λ that appeared in (B.2b) and (B.2d), while $\underline{\underline{C}}_\lambda$ is a discrete symmetric matrix coupling cross-sectional and axial displacements: $\underline{\underline{C}}_\lambda$ is obtained by discretizing the operator

$$C_\lambda(\widehat{\xi},\xi) = c^1_\lambda(\widehat{\xi}^\perp,\xi^\parallel) - (c^2)^T_\lambda(\widehat{\xi}^\perp,\xi^\parallel) + (c^1)^T_\lambda(\widehat{\xi}^\parallel,\xi^\perp) - c^2_\lambda(\widehat{\xi}^\parallel,\xi^\perp). \tag{B.3}$$

Therefore, the lower-left block $\underline{\underline{c}}_\lambda$ appearing in (5.11) is associated with the continuous operator $c_\lambda = c^1_\lambda - (c^2_\lambda)^T$.

The symmetry and the diagonal or anti-diagonal block-structure of the operators stated in Eq. (5.11) are a consequence of their definitions (B.2b)–(B.2j).

Appendix C. Rigid and neutral modes of the 3-d operators

For the 3-d prismatic solid, the linearized equilibrium equations (5.7) have obvious solutions corresponding to rigid-body displacements, as well as to uniform twist and uniform (increment of) axial stretching. Here, we seek a representation of these modes in our notation. As we shall show, all these modes turn out to be null vectors of the stiffness matrix $\underline{\underline{A}}_\lambda$, and as such they play a key role in the bifurcation analysis. By analyzing these special modes, our goal is to derive the expressions of the eight vectors forming a basis of $\underline{\underline{A}}_\lambda$, see Eq. (5.14).

We consider a base solution $\underline{x}_0 = \underline{\tilde{x}} + \underline{\varphi}_0(\tilde{x}, \tilde{y})$ that is invariant in the axial direction. We start from the linearized equilibrium in (B.2a), which is equivalent to (5.7): using the block structure of the operators given in (B.2b)–(B.2d), and carrying out an integration by part, we write the linearized equilibrium as

$$\forall\big(\underline{\widehat{\varphi}}^\parallel(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}), \widehat{\varphi}^\perp(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})\big),\quad \frac{1}{L}\int_0^L k_\lambda^\parallel(\underline{\widehat{\varphi}}^\parallel, \underline{\varphi}_1^\parallel) + k_\lambda^\perp(\widehat{\varphi}^\perp, \varphi_1^\perp) - m_\lambda^\parallel(\underline{\widehat{\varphi}}^\parallel, \underline{\varphi}^\parallel_{1,\tilde{z}\tilde{z}}) - m_\lambda^\perp(\widehat{\varphi}^\perp, \varphi^\perp_{1,\tilde{z}\tilde{z}})$$
$$- \left((c_\lambda^1)^T - c_\lambda^2\right)(\underline{\widehat{\varphi}}^\parallel, \varphi^\perp_{1,\tilde{z}}) + \left(c_\lambda^1 - (c_\lambda^2)^T\right)(\widehat{\varphi}^\perp, \underline{\varphi}^\parallel_{1,\tilde{z}})\,\mathrm{d}\tilde{z} = 0.$$

The boundary terms coming from the integration by parts have been ignored as the prismatic solid is considered infinite, $L \to \infty$.

Thanks to the integration by part, the derivatives of the virtual displacement with respect to the axial variable $\tilde{z}$ have been eliminated in equation above. This allows one to remove both the integral and the virtual displacement: we arrive at the linearized equilibrium in strong form,

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{k}}_\lambda^\parallel & 0 \\ 0 & \underline{\underline{k}}_\lambda^\perp \end{pmatrix} \cdot \underline{\varphi}_1 + \begin{pmatrix} 0 & -\underline{\underline{c}}_\lambda^T \\ \underline{\underline{c}}_\lambda & 0 \end{pmatrix} \cdot \underline{\varphi}_{1,\tilde{z}} - \begin{pmatrix} \underline{\underline{m}}_\lambda^\parallel & 0 \\ 0 & \underline{\underline{m}}_\lambda^\perp \end{pmatrix} \cdot \underline{\varphi}_{1,\tilde{z}\tilde{z}} = 0 \tag{C.1}$$

where we have defined the operator $c_\lambda = c_\lambda^1 - (c_\lambda^2)^T$ defined below (B.3).

In the following, we review 8 particular solutions $\underline{\varphi}_1$ to this equation, namely 3 rigid-body translations, 3 rigid-body rotations, and 2 non-rigid modes (corresponding to uniform stretching, and to uniform twisting, respectively).

C.1. Modes having a cross-sectional displacement independent of $\tilde{z}$

The modes whose cross-sectional displacement is independent of $\tilde{z}$ are analyzed first.

- A *rigid-body translation along the axis x* corresponds to an incremental displacement $\underline{\varphi}_1(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = \underline{e}_X$. This $\underline{\varphi}_1$ has to be a solution of (C.1): inserting into this equation, we find

  $$\underline{\underline{k}}_\lambda^\parallel \cdot \underline{e}_X = 0,$$

  where we have identified the unit vector $\underline{e}_X$ with the constant function that takes on the value $\underline{e}_X$. Using the block-vector notations introduced in Section 5.7, see Eq. (5.13c) we rewrite this as:

  $$\underline{\underline{A}}_\lambda \cdot \underline{T}_1^* = 0, \quad \text{where } \underline{T}_1^* = \begin{pmatrix} \underline{e}_X \\ \underline{0} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} [\underline{0}] \\ [\underline{T}_1^*] \end{pmatrix} \in \ker \underline{\underline{A}}_\lambda.$$

  The block matrix $\underline{\underline{A}}_\lambda$ has been defined in (5.13b). We have just shown that the first vector listed in Eq. (5.14) is indeed a null vector of $\underline{\underline{A}}_\lambda$.
- A similar argument shows that the *rigid-body translation along the axis Y*, $\underline{\varphi}_1(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = \underline{e}_Y$, is represented by the second null vector of $\underline{\underline{A}}_\lambda$ listed in Eq. (5.14),

  $$\begin{pmatrix} [\underline{0}] \\ [\underline{T}_2^*] \end{pmatrix} \in \ker \underline{\underline{A}}_\lambda, \quad \text{where } \underline{T}_2^* = \begin{pmatrix} \underline{e}_Y \\ \underline{0} \end{pmatrix}.$$

  Here again, the vector $\underline{e}_Y$ appearing in the first block of $\underline{T}_2^*$ is the function taking on the constant value $\underline{e}_Y$, by a slight abuse of notation.
- Let us consider *an infinitesimal rotation about the axis Z*. The displacement corresponding to this infinitesimal rotation is contained in the plane of the cross-section. Using an arbitrary normalization, it writes $\underline{\varphi}_1(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = \underline{e}_Z \times \underline{x}_0^\parallel(\tilde{x},\tilde{y})$, where $\times$ denotes the cross product of two vectors and $\underline{x}_0^\parallel = (\tilde{x},\tilde{y}) + \underline{\varphi}_0^\parallel(\lambda; \tilde{x},\tilde{y})$ is the projection onto the cross-section of a material point in the invariant solution labeled (3) in Fig. 10: note that the rotation operates on this configuration and not on (1) or (2). Introducing the notation $\underline{\rho}_z^\parallel(\tilde{x},\tilde{y}) = \underline{e}_Z \times \underline{x}_0^\parallel(\tilde{x},\tilde{y})$, and repeating the same argument as earlier, we find that the rigid-body rotation is represented by a vector that lives in the null space of $\underline{\underline{A}}_\lambda$,

  $$\underline{T}_3^* = \begin{pmatrix} \underline{\rho}_z^\parallel(\tilde{x},\tilde{y}) \\ \underline{0} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} [\underline{0}] \\ [\underline{T}_3^*] \end{pmatrix} \in \ker \underline{\underline{A}}_\lambda.$$

- Finally, we consider a *uniform increment of stretch along the axis Z*. Differentiating the invariant solution with respect to the stretch λ and multiplying by a conventional factor λ, we find the corresponding mode as $\underline{\varphi}_1(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = \underline{u}^{\parallel}_{\mathrm{str}}(\tilde{x},\tilde{y}) + \lambda\,\tilde{z}\,\underline{e}_Z$, where the increment of cross-sectional displacement reads $\underline{u}^{\parallel}_{\mathrm{str}}(\tilde{x},\tilde{y}) = \lambda\,\frac{\mathrm{d}\underline{\varphi}^{\parallel}_0(\lambda;\tilde{x},\tilde{y})}{\mathrm{d}\lambda}$. Inserting into (C.1), this yields

  $$\underline{\underline{k}}^{\parallel}_{\lambda}\cdot\underline{u}^{\parallel}_{\mathrm{str}}(\tilde{x},\tilde{y}) - \lambda\,\underline{\underline{c}}^{T}_{\lambda}\cdot\underline{e}_Z = 0.$$

  This equation is well-known in the analysis of the stretching of thin rods: this is the partial differential equation in the 2-d cross-section, which must be solved for the cross-sectional displacement $\underline{u}_{\mathrm{str}}$ to capture the incremental deformation of the cross-sections by Poisson's effect. Using notations introduced in Eq. (5.13c), Section 5.7, and observing that $\underline{\underline{k}}^{\perp}_{\lambda}\cdot\underline{e}_Z = 0$ as a consequence of the symmetries—as confirmed by the detailed expression of $\underline{\underline{k}}^{\perp}_{\lambda}$ in (B.2f)—, we rewrite this as

  $$\underline{\underline{A}}_{\lambda}\cdot\underline{T}^{*}_{4} = 0,\quad \text{where } \underline{T}^{*}_{4} = \begin{pmatrix} -\underline{u}^{\parallel}_{\mathrm{str}}(\tilde{x},\tilde{y}) \\ \underline{e}_Z \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix} [\underline{0}] \\ [\underline{T}^{*}_{4}] \end{pmatrix} \in \ker\underline{\underline{A}}_{\lambda}.$$

C.2. Modes having an axial displacement independent of $\tilde{z}$

We review the four remaining modes. Their axial displacement happens to be independent of $\tilde{z}$.

- The *rigid-body translation along Z* is described by a constant perturbation along the axis, $\underline{\varphi}_1(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = \underline{e}_Z$. Inserting into (C.1), we rewrite this as

  $$\underline{\underline{k}}^{\perp}_{\lambda}\cdot\underline{e}_Z = 0,$$

  which we can rewrite using the notation of Section 5.7 as

  $$\underline{\underline{A}}^{T}_{\lambda}\cdot\underline{T}_1 = \underline{0},\quad \text{where } \underline{T}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \underline{e}_Z \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix} [\underline{T}_1] \\ [\underline{0}] \end{pmatrix} \in \ker\underline{\underline{A}}_{\lambda}.$$

- The *infinitesimal rigid-body rotation about the transverse axis X* writes $\underline{\varphi}_1(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = \underline{e}_X\times\underline{x}_0(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = -\lambda\,\tilde{z}\,\underline{e}_Y + \rho^{\perp}_{x}(\tilde{x},\tilde{y})\,\underline{e}_Z$ where $\rho^{\perp}_{x}(\tilde{x},\tilde{y}) = \left(\underline{e}_X\times\underline{x}^{\parallel}_0(\tilde{x},\tilde{y})\right)\cdot\underline{e}_Z = \underline{e}_Y\cdot\underline{x}^{\parallel}_0(\tilde{x},\tilde{y})$. Inserting into (C.1) and observing that $\underline{\underline{k}}^{\parallel}_{\lambda}\cdot\underline{e}_Y = 0$, we have

  $$-\lambda\,\underline{\underline{c}}_{\lambda}\cdot\underline{e}_Y + \underline{\underline{k}}^{\perp}_{\lambda}\cdot\underline{\rho}^{\perp}_{x} = \underline{0}.$$

  Using the notation of Section 5.7, we rewrite this as

  $$\underline{\underline{A}}^{T}_{\lambda}\cdot\underline{T}_2 = \underline{0},\quad \text{where } \underline{T}_2 = \begin{pmatrix} \underline{e}_Y \\ -\underline{\rho}^{\perp}_{x} \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix} [\underline{T}_2] \\ [\underline{0}] \end{pmatrix} \in \ker\underline{\underline{A}}_{\lambda}.$$

- An *infinitesimal rigid-body rotation about the second transverse axis Y* is treated similarly: with $\underline{\varphi}_1(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = \underline{e}_Y\times\underline{x}_0(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = \lambda\,\tilde{z}\,\underline{e}_Y + \rho^{\perp}_{y}(\tilde{x},\tilde{y})\,\underline{e}_Z$ and $\rho^{\perp}_{y}(\tilde{x},\tilde{y}) = \left(\underline{e}_Y\times\underline{x}^{\parallel}_0(\tilde{x},\tilde{y})\right)\cdot\underline{e}_Z = -\underline{e}_X\cdot\underline{x}^{\parallel}_0(\tilde{x},\tilde{y})$, one has

  $$\underline{\underline{A}}^{T}_{\lambda}\cdot\underline{T}_3 = \underline{0},\quad \text{where } \underline{T}_3 = \begin{pmatrix} \underline{e}_X \\ \underline{\rho}^{\perp}_{y} \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix} [\underline{T}_3] \\ [\underline{0}] \end{pmatrix} \in \ker\underline{\underline{A}}_{\lambda}.$$

- Finally, the mode corresponding to a *uniform increment of twist* writes $\underline{\varphi}_1(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}) = \lambda\,\tilde{z}\,\underline{\rho}^{\parallel}_{z}(\tilde{x},\tilde{y}) + u^{\perp}_{\mathrm{warp}}(\tilde{x},\tilde{y})\,\underline{e}_Z$, where $u^{\perp}_{\mathrm{warp}}$ is known as the warping function and $\underline{\rho}^{\parallel}_{z}$ is the infinitesimal rotation about the axis introduced earlier in the analysis of rigid-body rotations. Note that the rotation about the axis $\tilde{z}$ is now multiplied by an angle $\lambda\,\tilde{z}$ proportional to the axial coordinate (uniform twist). Inserting the expression of $\underline{\varphi}_1$ into (C.1) , we obtain $\underline{\underline{k}}^{\perp}_{\lambda}\cdot\underline{u}^{\perp}_{\mathrm{warp}} + \lambda\,\underline{\underline{c}}_{\lambda}\cdot\underline{\rho}^{\parallel}_{z} = \underline{0}$, which is the discrete version of the classical partial differential equation that yields the warping function $u^{\perp}_{\mathrm{warp}}$ in the theory of thin elastic rods. Adapting the argument used for the analysis of rigid-body rotations about the axes X and Y, this can rewritten be as

  $$\begin{pmatrix} [\underline{T}_4] \\ [\underline{0}] \end{pmatrix} \in \ker\underline{\underline{A}}_{\lambda},\quad \text{where } \underline{T}_4 = \begin{pmatrix} \underline{\rho}^{\parallel}_{z} \\ \underline{u}^{\perp}_{\mathrm{warp}} \end{pmatrix}\underline{\underline{A}}_{\lambda}.$$

In total, we have found eight infinitesimal modes in the null space of $\underline{\underline{A}}_{\lambda}$. We can offer no proof for the fact that these eight vectors span the entire null space of $\underline{\underline{A}}_{\lambda}$, but we have checked numerically that $\ker\underline{\underline{A}}_{\lambda}$ is indeed of dimension eight in our numerical examples.

References

Abdelkhalek, S., Zahrouni, H., Legrand, N., Potier-Ferry, M., 2015. Post-buckling modeling for strips under tension and residual stresses using asymptotic numerical method. Int. J. Mech. Sci. 104, 126–137.
Aben, H., Guillemet, C., 1992. Photoelasticity of Glass. Springer-Verlag, Berlin.
Audoly, B., Boudaoud, A., 2003. Self-similar structures near boundaries in strained systems. Phys. Rev. Lett. 91 (8), 086105.
Audoly, B., Pomeau, Y., 2010. Elasticity and Geometry: From hair Curls to the Nonlinear Response of Shells. Oxford University Press.

Bai, L., Wadee, M.A., 2015. Mode interaction in thin-walled I-section struts with semi-rigid flange-web joints. Int. J. Non-Linear Mech. 69, 71–83.
Bhattacharya, K., Lewicka, M., Schäffner, M., 2016. Plates with incompatible prestrain. Archive Rat. Mech. Anal. 221 (1), 143–181.
Chien, C.-S., Gong, S.-Y., Mei, Z., 2000. Mode jumping in the von Kármán equations. SIAM J. Sci. Comput. 22 (4), 1354–1385.
Cicalese, M., Ruf, M., Solombrino, F., 2016. On local and global minimizers of prestrained thin elastic rods, arXiv:1606.04524.
Dervaux, J., Ben Amar, M., 2008. Morphogenesis of growing soft tissues. Phys. Rev. Lett. 101 (6), 068101.
Dervaux, J., Ciarletta, P., Ben Amar, M., 2009. Morphogenesis of thin hyperelastic plates: a constitutive theory of biological growth in the Föppl–von Kármán limit. J. Mech. Phys. Solids 57 (3), 458–471.
Domokos, G., Healey, T.J., 2005. Multiple helical perversions of finite, intrinsically curved rods. Int. J. Bifurc. Chaos 15 (3), 871–890.
Efrati, E., Sharon, E., Kupferman, R., 2009. Elastic theory of unconstrained non-euclidean plates. J. Mech. Phys. Solids 57 (4), 762–775.
Everall, P.R., Hunt, G.W., 2000. Mode jumping in the buckling of struts and plates: a comparative study. Int. J. Non-Linear Mech. 35, 1067–1079.
Fischer, F.D., Rammerstorfer, F.G., Friedl, N., Wieser, W., 2000. Buckling phenomena related to rolling and levelling of sheet metal. Int. J. Mech. Sci. 42, 1887–1910.
Freyssinet, E., 1966. Exposé sur l'idée de précontrainte. Travaux 375.
Friesecke, G., James, R.D., Müller, S., 2006. A hierarchy of plate models derived from nonlinear elasticity by Gamma-convergence. Arch. Rat. Mech. Anal. 180, 183–236.
Goriely, A., Tabor, M., 1998. Spontaneous helix hand reversal and tendril perversion in climbing plants. Phys. Rev. Lett. 80 (7), 1564–1567.
van der Heijden, A.M.A., 2008. W. T. Koiter's Elastic Stability of Solids and Structures. Cambridge University Press, Cambridge (UK).
Hernandez, V., Roman, J.E., Vidal, V., 2005. SLEPc: A scalable and flexible toolkit for the solution of eigenvalue problems. ACM Trans. Math. Softw. 31 (3), 351–362.
Holder, E.J., Schaeffer, D., 1984. Boundary conditions and mode jumping in the von Kármán equations. SIAM J. Math. Anal. 15 (3), 446–458.
Huang, J., Liu, J., Kroll, B., Bertoldi, K., Clarke, D.R., 2012. Spontaneous and deterministic three-dimensional curling of pre-strained elastomeric bi-strips. Soft Matter 8, 6291–6300.
Klein, Y., Efrati, E., Sharon, E., 2007. Shaping of elastic sheets by prescription of non-euclidean metrics. Science 315 (5815), 1116–1120.
Komori, K., 1997. Analysis of cross and vertical buckling in sheet metal rolling. Int. J. Mech. Sci. 40 (12), 1235–1246.
Kpogan, K., 2014. Simulation numérique de la planéité des tôles métalliques formées par laminage. Université de Lorraine Ph.d. thesis.
Landau, L.D., Lifshitz, E.M., 1970. Theory of Elasticity (Course of Theoretical Physics), 2nd Pergamon Press, New-York.
Le Dret, H., Raoult, A., 1995. The nonlinear membrane model as variational limit of three-dimensional nonlinear elasticity. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 75, 551–580.
Lee, D., Triantafyllidis, N., Barber, J.R., Thouless, M.D., 2008. Surface instability of an elastic half space with material properties varying with depth. J. Mech. Phys. Solids 56 (3), 858–868.
Lessines, T., Moulton, D.E., Goriely, A., 2015. Morphoelastic rods. part II: Growing birods. J. Mech. Phys. Solids.
Lewicka, M., Mahadevan, L., Pakzad, M., 2011. The föppl-von kármán equations for plates with incompatible strains. Proce. R. Soc. A 467, 402–426.
Liang, H., Mahadevan, L., 2011. Growth, geometry, and mechanics of a blooming lily. Proc. Nat. Acad. Sci. 108 (14), 5516–5521.
Liu, J., Huang, J., Su, T., Bertoldi, K., Clarke, D., 2014. Structural transition from helices to hemihelices. PLoS ONE 9 (4), e93183.
Liu, S., Yao, Z., Chiou, K., Stupp, S.I., Olvera de la Cruz, M., 2016. Emergent perversions in the buckling of heterogeneous elastic strips. Proc. Nat. Acad. Sci. 113 (26), 7100–7105.
Love, A.E.H., 1927. A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. Cambridge University Press. (Reprinted by Dover, New York, 1944)
Marder, M., Sharon, E., Smith, S., Roman, B., 2003. Theory of edges of leaves. Europhys. Lett. 62 (4), 498–504.
McMillen, T., Goriely, A., 2002. Tendril perversion in intrinsically curved rods. J. Nonlinear Sci. 12 (3), 241–281.
Moon, M.-W., Chung, S., Lee, K.-R., Oh, K.H., Stone, H.A., Hutchinson, J.W., 2007. Directed assembly of fluidic networks by buckle delamination of films on patterned substrates. Int. J. Mater. Res. 98 (12).
Ølgaard, K., Logg, A., Wells, G., 2009. Automated code generation for discontinuous Galerkin methods. SIAM J. Sci. Comput. 31 (2), 849–864 http://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/070710032.
Osterfield, M., Du, X., Schüpbach, T., Wieschaus, E., Shvartsman, S.Y., 2013. Three-dimensional epithelial morphogenesis in the developing Drosophila egg. Dev. Cell 24, 400–410.
Rammerstorfer, F.G., Fischer, F.D., Friedl, N., 2001. Buckling of free infinite strips under residual stresses and global tension. J. Appl. Mech. 68, 399–404.
Saad, Y., 2011. Numerical methods for large eigenvalue problems. SIAM, Philadelphia.
Savin, T., Kurpios, N.A., Shyer, A.E., Florescu, P., Liang, H., Mahadevan, L., Tabin, C.J., 2011. On the growth and form of the gut. Nature 476, 57–63.
Schaeffer, D., Golubitsky, M., 1979. Boundary conditions and mode jumping in the buckling of a rectangular plate. Commun. Math. Phys. 69, 209–236.
Scherzinger, W., Triantafyllidis, N., 1998. Asymptotic analysis of stability for prismatic solids under axial loads. J. Mech. Phys. Solids 46 (6), 955–1007.
Stein, M., 1959. The Phenomenon of Change in Buckle Pattern in Elastic Structures. Technical Report R39. NASA.
Timoshenko, S., Gere, J.M., 1961. Theory of Elastic Stability, 2nd MacGraw Hill, New York.
Tisseur, F., Meerbergen, K., 2001. The quadratic eigenvalue problem. SIAM Review 43 (2), 235–286.
Tomita, Y., Shao, H., 1993. Buckling behavior in thin sheet metal subjected to nonuniform membrane-type deformation. Adv. Eng. Plast. Appl. 923–930.

Chapitre IV

Systèmes invariants d'échelle : prisme triangulaire en compression

Sommaire

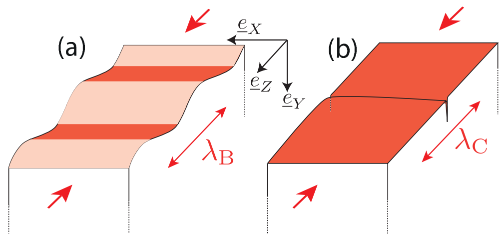

FIGURE IV.1 – Instabilité d'un bloc élastique en compression. (a) Prédiction de l'analyse de stabilité linéaire pour un nombre d'onde arbitraire. (b) Flambement non linéaire : apparition d'un sillon.

Dans les chapitres précédents, nous analysons plusieurs systèmes élancés sujets à des instabilités élastiques associées à des modes dont la longueur d'onde, bien définie, peut être obtenue à partir d'une analyse de bifurcation linéarisée. C'est le cas du flambement d'Euler (chapitre I), des couches minces sur une fondation élastique (chapitre III) ou encore d'une poutre soumise à une pré-contrainte hétérogène (chapitre III). Un point commun entre tous ces systèmes est qu'ils expriment une échelle de longueur caractéristique : la longueur de l'objet dans le cas du flambement d'Euler, ou une petite échelle associée à l'élasticité de la section et/ou aux hétérogénéités de pré-contrainte.

Nous étudions dans ce chapitre le comportement en flambement de systèmes dépourvus d'échelle de longueur intrinsèque. Pour de tels systèmes, l'analyse de bifurcation linéarisée prédit l'apparition au point de bifurcation d'un continuum de modes associés à toutes les longueurs d'onde possibles. Ceci est une conséquence directe de la propriété d'invariance d'échelle de ces systèmes. La compression axiale d'un bloc élastique d'épaisseur infinie en est l'exemple le plus classique. Ce problème, schématisé sur la figure IV.1, est connu sous le nom de *problème de Biot* car sa formulation remonte aux travaux de BIOT (1963) et BIOT (1965). Ceux-ci montrent, par une analyse de stabilité linéaire du problème formulé en élasticité finie, qu'une instabilité de surface apparaît pour une valeur critique de l'étirement $\lambda_{\mathrm{B}} < 1$, sous la forme d'un continuum d'ondulations régulières de la surface (figure IV.1(a)) associées à toutes les longueurs d'onde possibles. De nombreuses études expérimentales et numériques se sont récemment intéressées au comportement non-linéaire de ce problème invariant d'échelle (TRUJILLO, KIM et HAYWARD, 2008 ; HONG, ZHAO et SUO, 2009 ; MORA et al., 2011 ; HOHLFELD et MAHADEVAN, 2011 ; HOHLFELD et MAHADEVAN, 2012 ; CAI et al., 2012 ; JIN et al., 2015 ; JIN et SUO, 2015). Celles-ci décrivent l'apparition brutale à la surface du bloc comprimé de plis (ou sillons) très localisés et orthogonaux à la direction de compression, voir figure IV.1(b), pour $\lambda_{\mathrm{C}} < 1$ avec $\lambda_{\mathrm{C}} > \lambda_{\mathrm{B}}$, donc pour une déformation plus faible que celle prédite par l'analyse de stabilité linéaire. Ces sillons, appelés en anglais *creases*, apparaissent à la surface de nombreux matériaux, voir figure IV.2, et leur apparition reste aujourd'hui difficile à expliquer de façon précise et par des arguments théoriques.

Ces sillons sont l'expression d'une instabilité dite de plissement, en anglais *creasing*, connue pour être sous-critique, essentiellement non-linéaire et très sensible aux imperfections, à l'instar du flambement d'une coque cylindrique en compression (YAMAKI, 1984). Contrairement à cette dernière instabilité qui génère des motifs réguliers à la longueur d'onde bien définie, les sillons créés lors de l'instabilité de plissement sont très localisés et irrégulièrement espacés. L'invariance d'échelle du problème de Biot semble jouer un rôle déterminant dans le déclenchement de cette

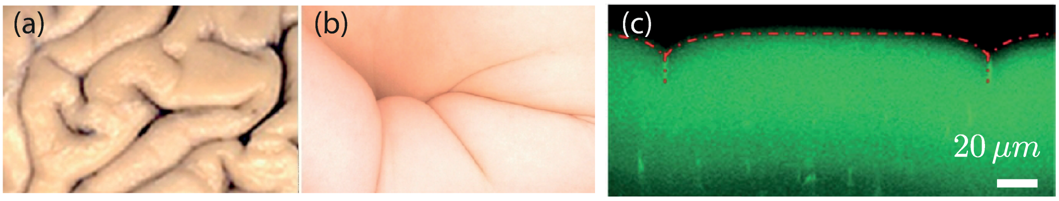

FIGURE IV.2 – Instabilité de surface libre. (a) Circonvolutions du cerveau, (b) plis de la peau, d'après HOHLFELD et MAHADEVAN, 2011 ; (c) sillons à la surface d'une couche de polydimethylsiloxane, d'après CAI et al., 2012.

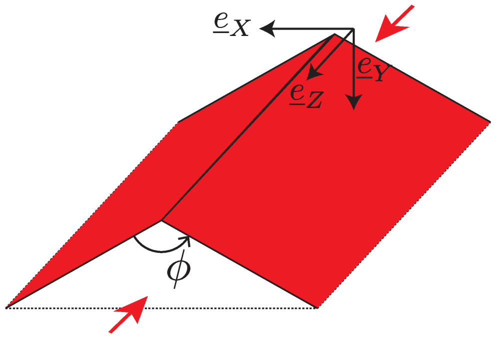

FIGURE IV.3 – Principe de l'expérience étudiée dans ce chapitre : prisme à section triangulaire en compression.

instabilité. C'est en tout cas ce que suggèrent des analyses récentes (CAO et HUTCHINSON, 2011 ; HOHLFELD, 2013 ; CIARLETTA et FU, 2015 ; FU et CIARLETTA, 2015) qui relient qualitativement l'apparition de ces sillons à la présence d'une infinité de longueurs d'ondes au seuil de stabilité linéaire et à leurs interactions non-linéaires. Les liens de cause à effet entre l'absence de longueur intrinsèque dans le problème initial et la localisation du motif de flambement restent cependant incertains.

L'étude de la stabilité en compression d'un solide prismatique dont la section est un triangle isocèle, schématisé en figure IV.3, constitue une variante du problème de Biot. Celle-ci apporte un nouvel éclairage sur les liens entre invariance d'échelle et localisation, comme nous le verrons dans ce chapitre. Les déplacements de l'arête sont bloqués à sa base et l'angle d'ouverture de l'arête ϕ est un paramètre variable permettant d'identifier ce système avec le problème de Biot lorsque $\phi \to 180°$. Ce nouveau problème est invariant d'échelle au voisinage de l'arête et admet ainsi une infinité de modes de flambement au seuil de stabilité linéaire. L'étude expérimentale de ce système fait apparaître un flambement linéaire associée à une ondulation sinusoïdale de l'arête lorsque $\phi < \phi^\star$ où $\phi^\star \approx 90°$ et une transition vers des plis localisés pour $\phi > \phi^\star$. Une analyse de stabilité linéaire numérique, menée en suivant la méthode introduite au chapitre I et combinée aux connaissances actuelles sur l'instabilité de plissement permet d'expliquer cette transition et de prédire la valeur de $\phi^\star$. Ce système peut flamber de façon localisée ou étendue, selon la valeur du paramètre ϕ, alors qu'il reste invariant d'échelle quelle que soit la valeur de ϕ. Cette étude soulève ainsi la question des conditions nécessaires à l'apparition du flambement localisé au sein d'un système invariant d'échelle.

Dans une première section, nous présentons brièvement l'analyse de stabilité linéaire du problème de Biot et discutons des conséquences de l'invariance d'échelle

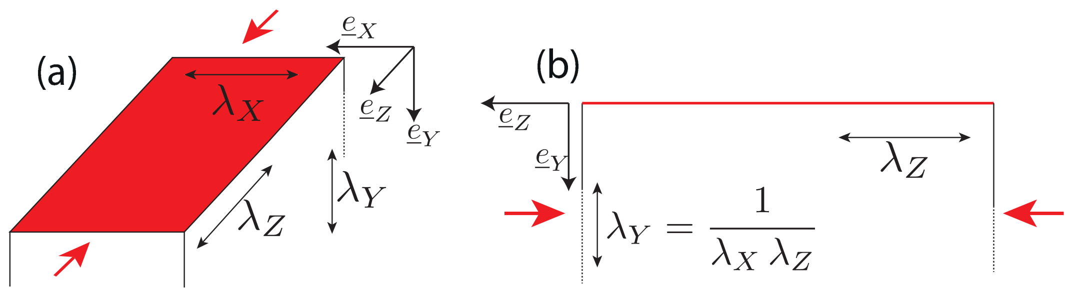

FIGURE IV.4 – Instabilité d'un bloc élastique en compression. (a) Schéma 3-d. (b) Schéma 2-d.

de ce problème. Dans une seconde section, nous décrivons les observations expérimentales effectuées sur le prisme à section triangulaire en compression. Nous proposons finalement une analyse de ces observations appuyée sur l'étude numérique de la stabilité linéaire de ce système. Dans la limite des faibles angles, nous proposons une version semi-analytique de l'analyse de bifurcation fondée sur les équations pour une plaque mince d'épaisseur variable. L'ensemble de ces résultats sur l'instabilité d'un prisme à section triangulaire en compression est également présenté dans LESTRINGANT et al. (2017), reproduit dans l'annexe B.

IV.1 Motivation : stabilité linéaire d'un bloc hyper-élastique en compression

Nous reprenons dans cette section l'analyse de stabilité linéaire effectuée par BIOT (1963) et BIOT (1965) et plus récemment par CAO et HUTCHINSON (2011) pour un demi-plan ($Y < 0$) néo-Hookéen incompressible de hauteur infinie et soumis à une compression dans la direction Z paramétrée par l'étirement λ_Z, comme schématisé figure IV.4. Ce bloc est également supposé infini dans la direction transverse X. La valeur de l'étirement λ_X étant supposée fixée, le problème d'équilibre linéarisé au voisinage de la solution homogène $(\lambda_X, \lambda_Y, \lambda_Z)$ peut être traité comme un problème 2-d schématisé sur la figure IV.4(b), sous l'hypothèse de déformations planes.

Nous montrons, par une analyse de bifurcation similaire à celle de CAO et HUTCHINSON (2011), que le problème de bifurcation linéarisé admet un continuum de solutions associées à un nombre infini de longueurs d'onde, pour une valeur critique de la compression correspondant au *seuil de Biot* $\lambda_Z = \lambda_B$ avec par exemple $\lambda_B \approx 0.54$ si $\lambda_X = 1$. Nous discutons ensuite d'une version régularisée du problème de Biot, dans laquelle une petite échelle de longueur est introduite par le biais d'une tension de surface.

IV.1.1. Problème de Biot

Solution fondamentale

La solution fondamentale, homogène en X, en Y et en Z est représentée sur la figure IV.4(b). Elle dépend du chargement axial compressif, paramétré par l'étirement λ_Z et des conditions de bords appliqués dans la direction X et permettant de fixer la valeur de l'étirement transverse λ_X. Pour une valeur de λ_Z donnée, le gradient de la transformation associée à la solution fondamentale s'écrit

$$\underline{\underline{F}}_{[0]} = \mathrm{Diag}(\lambda_X, \frac{1}{\lambda_X\,\lambda_Z}, \lambda_Z).$$

Cette solution vérifie l'équation d'équilibre non-linéaire qui s'écrit

$$\forall \underline{\widehat{\varphi}}(X,Y,Z), \quad \frac{1}{L\,H\,V}\int_0^V\int_0^H\int_0^L \underline{\underline{\Sigma}}(\underline{\varphi}) : \left(\underline{\underline{F}}^T(\underline{\varphi})\cdot\underline{\underline{\widehat{F}}}\right)\mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y\,\mathrm{d}Z = 0, \tag{IV.1}$$

pour un bloc de largeur V, d'épaisseur $H \to \infty$, de longueur $L \to \infty$. Dans cette équation, les déplacements virtuels sont choisis de telle manière que leur moyenne dans la direction axiale est égale à 0 de manière à préserver la déformation axiale moyenne imposée par les conditions limites *à l'infini*. La contrainte de Piola-Kirchhoff $\underline{\underline{\Sigma}}$ s'écrit comme une contrainte augmentée

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \mu\underline{\underline{1}} - p\,\underline{\underline{C}}^{-1},$$

avec p le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte d'incompressibilité. Par la condition de bord libre en $Y=0$ nous obtenons $p = p_{[0]} = \frac{\mu}{\lambda_X^2\,\lambda_Z^2}$.

Analyse de stabilité linéaire

Sous l'hypothèse de déformations planes, l'analyse de stabilité linéaire peut être traitée comme un problème 2-d dans le plan (Y,Z), voir par exemple CAO et HUTCHINSON (2011). Nous cherchons une perturbation sous la forme d'un déplacement 2-d dans ce plan

$$\underline{\varphi}_{[1]}(Y,Z) = \varphi_{[1]\,Y}(Y,Z)\,\underline{e}_Y + \varphi_{[1]\,Z}(Y,Z)\,\underline{e}_Z.$$

Cette perturbation décrit un équilibre adjacent si elle vérifie l'équation d'équilibre IV.1 linéarisée au voisinage de la solution fondamentale homogène $\underline{\underline{F}}_{[0]}$. Cette équation est indépendant de la coordonnée X et peut s'écrire

$$\forall \underline{\widehat{\varphi}}(Y,Z), \quad \frac{1}{L\,H}\int_0^L\left(\int_0^H \underline{\underline{\widehat{F}}} : \underline{\underline{N}}_1\,\mathrm{d}Y\right)\mathrm{d}Z = 0, \tag{IV.2}$$

avec

$$\underline{\underline{N}}_1 = \underline{\underline{F}}_{[1]}\cdot\underline{\underline{\Sigma}}_{[0]} + \underline{\underline{F}}_{[0]}\cdot\left(2\,p_{[0]}\,\underline{\underline{C}}_{[0]}^{-1}\cdot\left(\underline{\underline{F}}_{[0]}^T\cdot\underline{\underline{F}}_{[1]}\right)_{\mathrm{sym}}\cdot\underline{\underline{C}}_{[0]}^{-1} - p_{[1]}\,\underline{\underline{C}}_{[0]}^{-1}\right), \tag{IV.3}$$

où $p_{[1]}$ est un champ scalaire qui correspond à la perturbation du multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte d'incompressibilité. Le premier terme de l'expression IV.3 correspond à la pré-contrainte, le second terme à l'élasticité tangente. Le déplacement inconnu $\underline{\varphi}_{[1]}(Y,Z)$ doit vérifier la condition d'incompressibilité

$$\det\left(\underline{\underline{F}}_{[0]} + \underline{\underline{F}}_{[1]}\right) = 0. \tag{IV.4}$$

Le problème de bifurcation linéarisé IV.2 s'écrit alors sous la forme de 3 équations différentielles linéaires à coefficients constants

$$\mathrm{div}\,\underline{\underline{N}}_1 = 0, \tag{IV.5}$$

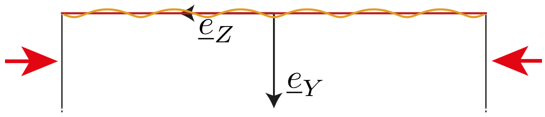

FIGURE IV.5 – Premier mode critique pour $r = r_{\text{B}}$: tracé de la déformation de la surface pour une amplitude et un nombre d'onde arbitraires.

avec la condition de bord libre en $Y = 0$,

$$\underline{\underline{N}}_1 \cdot \underline{e}_Y = \underline{0}, \tag{IV.6}$$

et la contrainte d'incompressibilité IV.4 linéarisée

$$\varphi_{[1]Z,Z} + \lambda_Z^2\,\lambda_X \varphi_{[1]Y,Y} = 0. \tag{IV.7}$$

Nous cherchons une famille de modes symétriques par la symétrie $Z \to -Z$. Ces modes sont décrits par les trois fonctions scalaires inconnues $\varphi_{[1]Y}, \varphi_{[1]Z}$ et $p_{[1]}$

$$(\varphi_{[1]Y}, \varphi_{[1]Z}, p_{[1]}) = (A_1\, \cos qX, A_2\, \sin qX, \frac{A_3\, q\, \cos qX}{\lambda_Z})\, e^{q\, sY}, \tag{IV.8}$$

où q est le nombre d'onde et s un amortissement vertical. Il existe également une famille de modes antisymétriques par la symétrie $Z \to -Z$ qui vérifient rigoureusement les mêmes équations. Les équations locales IV.5 et IV.7 imposent alors la relation de dispersion

$$\frac{(r^2 - s^2)(s^2 - 1)}{r\,\lambda_Z^2} = 0,$$

où le nombre d'onde q n'intervient pas, avec

$$r = \frac{1}{\lambda_X\,\lambda_Z^2}. \tag{IV.9}$$

Cette équation de dispersion admet 4 solutions $s \in \{-1, 1, -r, r\}$. La condition limite $\underline{\varphi}_{[1]} = \underline{0}$ en $H \to \infty$ impose $s \in \{1, r\}$ afin d'assurer la décroissance des exponentielles en $Y \to \infty$. La condition de bord libre IV.6 implique finalement

$$1 + r + 3\, r^2 - r^3 = 0,$$

dont la seule solution réelle est $r \approx 3.3829$.

Ainsi si $\lambda_X = 1$ il vient, d'après IV.9, $\lambda_{\text{B}} \approx 0.54$ et si $\lambda_X = \frac{1}{\sqrt{\lambda_Z}}$ alors $\lambda_{\text{B}} \approx 0.44$. Nous retrouvons ainsi les résultats de BIOT (1963) et CAO et HUTCHINSON (2011). La solution IV.8 est définie à une constante multiplicative près et pour tout $q \in \Re$. Le déplacement de la surface libre associé au mode critique IV.8 est tracé figure IV.5 pour un nombre d'onde et une amplitude arbitraires : il s'agit principalement d'un déplacement vertical.

IV.1.2. Problème de Biot régularisé

Il est possible de traiter ce problème dans une version régularisée, c'est à dire ne présentant pas d'invariance d'échelle, voir par exemple (CIARLETTA et FU, 2015). Un exemple d'une telle régularisation consiste à considérer une épaisseur H finie

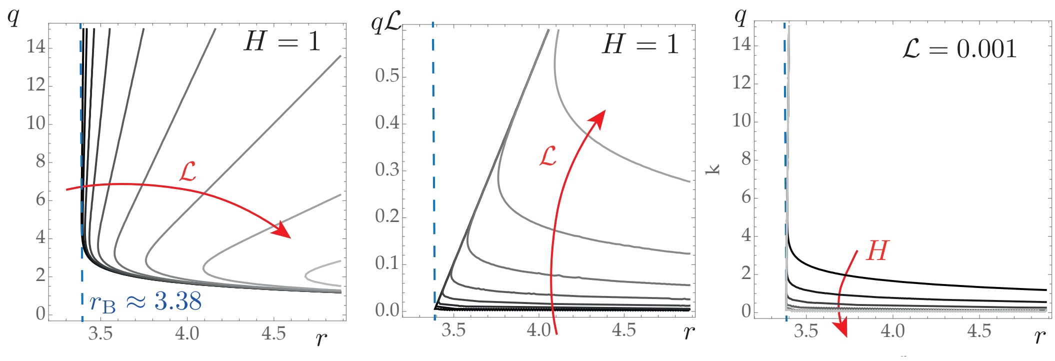

FIGURE IV.6 – Courbes de stabilité marginale $q(r)$ pour le problème de Biot régularisé par une tension de surface avec la hauteur du bloc $H = 1$ et la longueur caractéristique associée à la tension de surface $\mathcal{L} \in [0.001, 1]$ (à gauche et au milieu) et avec $\mathcal{L} = 0.01$ et $H \in [1, 100]$ (à droite).

ainsi qu'une tension de surface $\gamma = \mu\,\mathcal{L}$ sur l'interface en $Y = 0$, où $\mathcal{L}$ a la dimension d'une longueur. Les équations IV.5 et IV.7 sont inchangées, l'équation IV.6 devient

$$- \underline{\underline{N}}_{[1]} \cdot \underline{e}_Y + \mu\,\mathcal{L} \left(\underline{\varphi}_{[1],ZZ} \cdot \underline{e}_Y \right) \underline{e}_Y = \underline{0} \quad \text{pour} \quad Y = 0, \tag{IV.10}$$

et l'on remplace la condition $\underline{\varphi}_{[1]} = \underline{0}$ lorsque $Y \to \infty$ par l'équation

$$\underline{\varphi}_{[1]} = \underline{0} \quad \text{pour} \quad Y = H.$$

Le terme de tension de surface dans l'équation IV.10 s'identifie facilement à la loi de Laplace en remarquant que $\underline{\varphi}_{[1],ZZ}(Y = 0, Z) \cdot \underline{e}_Y$ mesure la courbure linéarisée.

Les courbes de stabilité marginale pour ce problème régularisé sont tracées figure IV.6. Celles-ci correspondent asymptotiquement aux résultats obtenus précédemment pour le problème non régularisé dans la limite où la tension de surface est négligeable, $\mathcal{L} \to 0$, et la profondeur est infinie, $H \to \infty$ (graphique de droite et de gauche respectivement). L'effet de l'introduction d'une hauteur finie pour le bloc est faible dans la mesure où celle-ci n'agit pas sur la sélection des grands nombres d'onde et où la courbe de stabilité marginale présente une asymptote verticale pour $r = r_\mathrm{B}$ lorsque $\mathcal{L} \to 0$, comme on peut le voir sur le graphique de droite figure IV.6.

Pour les modes de petite longueur d'onde localisées à la surface du bloc, les solutions obtenues pour les différentes valeurs de $\mathcal{L}$, à H fixé, se déduisent les unes des autres par homothétie et l'on observe de ce fait une convergence dans le plan $(r, q\mathcal{L})$ lorsque $\mathcal{L} \to 0$ sur le graphique central de la figure IV.6.

Une régularisation similaire par ajout d'une énergie de courbure à la surface est adoptée par HOHLFELD et MAHADEVAN (2011). Celle-ci permet en particulier de surmonter les difficultés de convergence des schémas numériques liées à l'absence de longueur intrinsèque dans le problème initial, comme nous le verrons dans la suite de ce chapitre.

IV.1.3. Cas d'un contraste élastique

L'analyse 2-d introduite dans cette section peut être appliquée au cas d'un bloc infini constitué de deux matériaux incompressibles de modules différents $\mu_1 \neq \mu_2$ superposés dans son épaisseur : μ_1 pour $Y < 0$ et μ_2 pour $Y > 0$. Une instabilité de plissement associée à des sillons localisés est alors générée à l'interface entre les deux matériaux (JIN et al., 2014).

La forme de la solution fondamentale est inchangée par rapport au § IV.1.1. Il suffit d'écrire les équations locales du problème de bifurcation IV.5 et IV.7 et leurs solutions de la forme IV.8 dans chacun des deux domaines. La condition de raccord en $Y = 0$ remplace alors la condition de bord libre et donne la valeur du seuil, qui correspond à une compression plus élevée que le seuil de Biot et dont la valeur est fonction du contraste élastique $\frac{\mu_1}{\mu_2}$. Le problème de bifurcation admet à ce seuil une infinité de solutions qui correspondent à une ondulation de l'interface et les travaux expérimentaux et numériques de JIN et al. (2014) font état de sillons fortement non-linéaires.

Dans le cas où l'un des deux matériaux forme une couche d'épaisseur finie (BIOT, 1957 ; CAI et al., 2011 ; CAO et HUTCHINSON, 2012 ; HUTCHINSON, 2013) deux cas de figure apparaissent. Lorsque la couche est plus rigide que le substrat, c'est l'épaisseur de cette couche et le contraste élastique qui déterminent le nombre d'onde q de l'équilibre adjacent au seuil de bifurcation. Le mode critique correspondant est alors associé à l'ondulation de la couche toute entière. Le problème est en effet similaire au flambement d'une poutre sur une fondation élastique étudié au chapitre III, voir par exemple SULTAN et BOUDAOUD (2008). Plusieurs travaux théoriques, expérimentaux et numériques font alors état de motifs périodiques (HUANG, HONG et SUO, 2005 ; LEE et al., 2008b ; CAI et al., 2011 ; ZANG et al., 2012).

Dans le cas d'une couche molle sur un substrat dur, l'instabilité de plissement localisé prédomine (CAI et FU, 1999 ; TRUJILLO, KIM et HAYWARD, 2008 ; YOON, KIM et HAYWARD, 2010) et l'invariance d'échelle du système au voisinage de la surface résulte en une infinité de modes critiques au seuil de bifurcation (CAI et FU, 1999). Ces travaux (CAI et FU, 1999) font état d'une forte sensibilité aux imperfections dans ce second cas, ce qui alimente l'hypothèse d'une instabilité sous-critique fortement localisante du même type que le plissement observé dans le problème de Biot.

Les travaux récents de JIN et al., 2015 ; FU et CIARLETTA, 2015 explorent la limite de ce problème lorsque le rapport entre le module de la couche et celui du substrat tend vers 1. L'instabilité est sous critique, très sensible aux imperfections et l'approche faiblement non-linéaire met en avant un phénomène de localisation susceptible de donner lieu à une instabilité de plissement (FU et CIARLETTA, 2015). Cependant, la forte non-linéarité de cette instabilité limite la portée de cette approche semi-analytique faiblement non-linéaire.

IV.1.4. Bilan et motivations

L'objectif de cette section était d'introduire quelques systèmes invariants d'échelle produisant une instabilité à une interface libre. L'analyse de stabilité linéaire prédit pour ces problèmes une infinité de modes critiques apparaissant au seuil et correspondant à une ondulation, ou à un ridage de l'interface. Les nombreux résultats d'expériences et de simulations numériques décrits dans la littérature font état de motifs de plissement non-linéaires, fortement localisés et associés à un étirement critique λ_C supérieur à l'étirement critique des modes linéaires, ce qui correspond à une déformation plus faible. Cet écart s'explique par la nature sous-critique de la bifurcation détectée par l'analyse de stabilité linéaire.

Les travaux actuels ne permettent pas d'élucider le lien entre l'absence d'échelle de longueur et l'apparition de ces motifs localisés. Il est en effet difficile d'appliquer à de tels systèmes le développement faiblement non-linéaire (voir chapitre I § I.1 et KOITER, 1965) de manière rigoureuse. La condition de solubilité fait apparaître un système linéaire de dimension infinie qu'il est nécessaire de tronquer et dont la convergence dans le cas du problème de Biot semble délicate à établir (Cao et Hutchinson, 2011).

Une approche alternative consiste à régulariser le problème. Ainsi Hohlfeld et Mahadevan (2011) proposent d'introduire une énergie liée à la courbure de la surface, Ciarletta et Fu (2015) remplacent l'énergie élastique du modèle néo-Hookéen par un modèle à gradient comportant une longueur microscopique. L'analyse faiblement non-linéaire est alors possible et ces différentes études permettent de détecter l'apparition d'une bifurcation sous-critique très sensible aux imperfections. Ainsi cette instabilité de plissement, même dans sa version régularisée, est dominée par des effets fortement non-linéaires inaccessibles aux approches analytiques abordées dans ce manuscrit.

Nous proposons dans la suite de ce chapitre d'étudier une variante du problème de Biot. Il s'agit du flambage en compression d'un solide prismatique à section triangulaire. La section de ce solide est formée d'un triangle isocèle, encastré en sa base et dont l'angle d'ouverture ϕ varie. Ce système s'identifie avec le problème de Biot lorsque $\phi \to 180°$ et présente une transition, lorsque ϕ diminue, d'une instabilité de plissements localisés vers des motifs linéaires et périodiques.

IV.2 Étude expérimentale d'une arête en compression

IV.2.1. Protocole

Nous étudions le flambement d'un solide prismatique à section triangulaire constitué d'un élastomère silicone (vinylpolysiloxane de la marque Ecoflex) et soumis à une compression axiale. Dans nos expériences, le prisme est collé à un bloc parallélépipédique constitué d'un matériau similaire mais de module de Young 10 fois supérieur ($E \approx 1.3\text{MPa}$ pour le bloc et $E < 100\text{kPa}$ pour le prisme).

Le silicone liquide est d'abord coulé dans des moules en PMMA réalisés par découpe laser, puis réticulé 24h à température ambiante. Nous pré-étirons le bloc avant de coller le prisme à sa surface, selon le protocole représenté sur la figure IV.7(a)-(c). Nous relâchons ensuite progressivement la tension imposée au bloc, ce qui induit une compression ϵ dans le prisme, voir figure IV.7(d). Cette compression axiale s'écrit

$$\epsilon = \frac{L_0 - L}{L_0}$$

où L_0 est la longueur initiale du prisme (avant collage) et L sa longueur courante mesurée au cours de l'expérience. Plusieurs essais sont ainsi réalisés en faisant varier l'angle ϕ et la hauteur h de la section. La longueur du prisme L_0 est maintenue constante dans les expériences et suffisante pour assurer $L_0 \gg h$ de manière à négliger les effets de bord dans l'analyse.

IV.2.2. Observations

Au delà d'une valeur critique de la compression ϵ le prisme flambe au voisinage de l'arête. Cette compression critique est notée ϵ_c.

Lorsque ϕ est inférieur à $\phi^\star \approx 90°$ nous observons un motif régulier associé à des déformations latérales de la crête, harmoniques dans la direction axiale Z et faisant fléchir l'arête hors du plan de symétrie du prisme, voir figure IV.8 (a). Ce mode sera appelé *mode de ridage antisymétrique* (RA) dans la suite de ce chapitre. L'amplitude de ce mode croit progressivement avec ϵ et la valeur de sa longueur d'onde λ_c pour

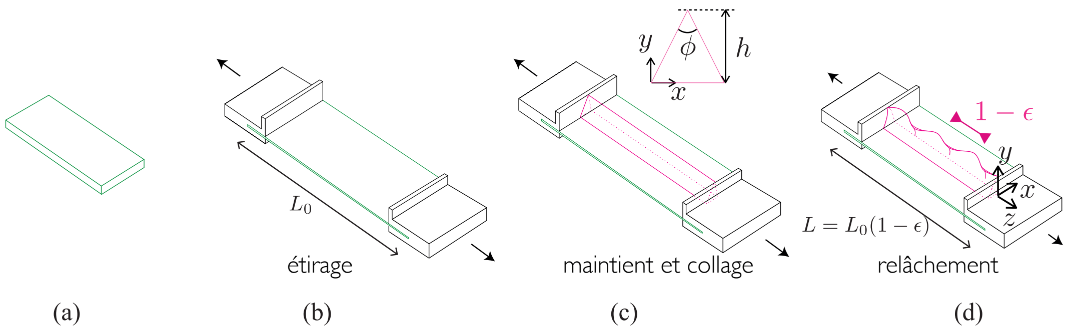

FIGURE IV.7 – Schéma du protocole expérimental. (a)-(b) Étirage du bloc parallélépipédique raide (substrat), (c) collage du prisme mou sur le substrat tout en maintenant la tension dans le substrat, (d) relâchement de la tension dans le substrat, qui induit une compression du prisme.

un angle ϕ donné augmente linéairement avec la hauteur h de la section pour les gammes de hauteur testées dans les expériences, voir figure IV.8(b).

Lorsque ϕ est supérieur à $\phi^\star \approx 90°$ des modes de forme très différente apparaissent : des plis localisés se développent de part et d'autre de l'arête, envahissant progressivement les faces, voir figure IV.8(a). Leur nombre augmente lorsque l'on augmente ϵ au-delà de ϵ_c. A la différence des modes RA dont la longueur d'onde est bien caractérisée, ces modes localisés n'ont pas d'échelle de longueur et apparaissant de manière erratique le long de l'arête, ce qui suggère que l'instabilité est alors très sensibles aux défauts présents le long de l'arête. Ces modes seront appelés *modes de plissement de surface* (PS). Si le comportement du prisme pour $\phi < \phi^\star$ est tout à fait réversible, il semble que le développement des modes PS soit sujet à une légère hystérésis. L'estimation de cet effet est difficile à évaluer de manière quantitative et peut être l'expression de la nature sous critique de l'instabilité ainsi que de déformations irréversibles causées à la surface de l'arête par la très forte concentration de contrainte en pointe des plis. Ce dernier effet est mentionné dans des expériences de plissement à la surface d'un bloc élastique dans les travaux de TRUJILLO, KIM et HAYWARD, 2008.

Dans nos expériences, ϵ_c ne dépend pas de la hauteur h du prisme. La valeur de ϵ_c augmente régulièrement avec l'angle ϕ jusqu'à atteindre un plateau autour de $\epsilon_c \approx 0.42$ lorsque $\phi = \phi^\star \approx 90°$, ce qui correspond à l'angle critique pour lequel la nature du mode de flambement change, voir figure IV.8(b).

Nous étudions le problème de bifurcation linéarisé pour comprendre la transition observée dans les expériences. Cette étude numérique est menée en considérant un prisme de longueur infinie et en utilisant les outils et le formalisme introduits au chapitre I. Une difficulté supplémentaire apparaît ici du fait de l'invariance d'échelle du problème au voisinage de la crête : nous en discutons dans la prochaine section.

IV.3 Étude numérique d'une arête en compression : solutions singulières et problème régularisé

La géométrie du problème ne permet pas de travailler en 2-d dans le plan (Y, Z) comme pour le problème de Biot car la forme flambée n'est plus invariante selon l'axe X. Nous utilisons donc les outils pour l'analyse de stabilité linéaire d'un solide

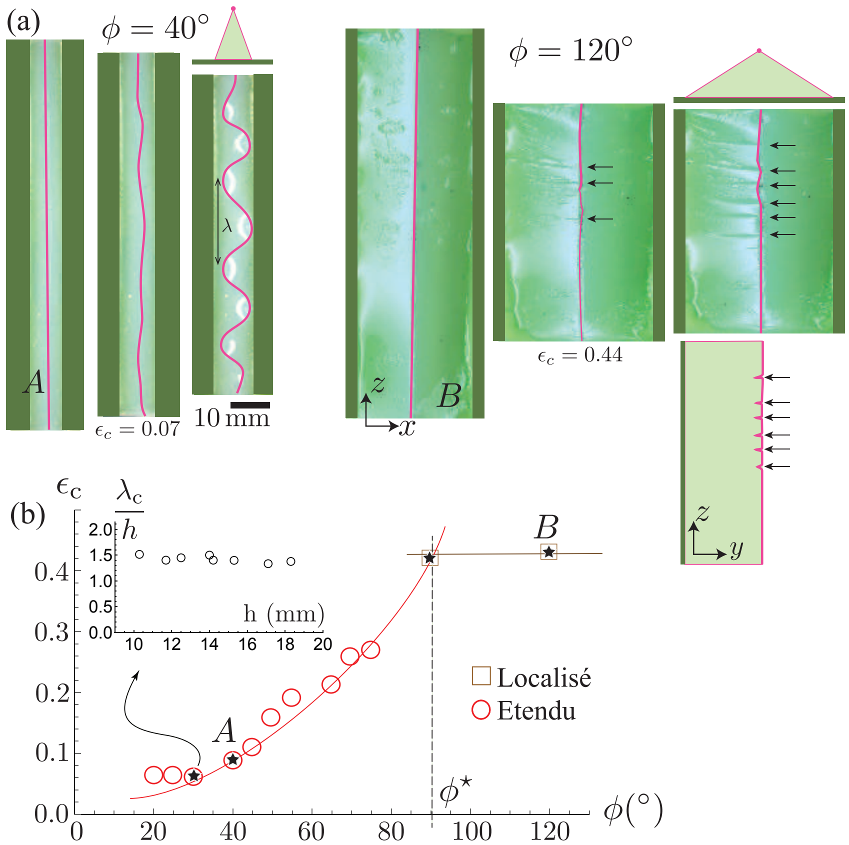

FIGURE IV.8 – Résultats expérimentaux. (a) Vues du dessus dans le plan (x, z). Chaque série d'images correspond à l'augmentation progressive de la compression ϵ (de gauche à droite). A : $\phi = 40°$, $h \approx 10\,\text{mm}$ et $L_0 = 100\,\text{mm}$. B : $\phi = 120°$, $h \approx 10\,\text{mm}$ et $L_0 = 100\,\text{mm}$. Les flèches noires indiquent les plis près de l'arête. (b) Mesures expérimentales de ϵ_c en fonction de ϕ (en °) : les modes étendus sont symbolisés par des cercles rouges et les modes localisés par des carrés marrons. Les tendances sont tracées à main levée (courbes continues). Insert : longueur d'onde adimensionnée du mode étendu $\frac{\lambda_c}{h}$, montrant que λ_c est directement proportionnel à la hauteur.

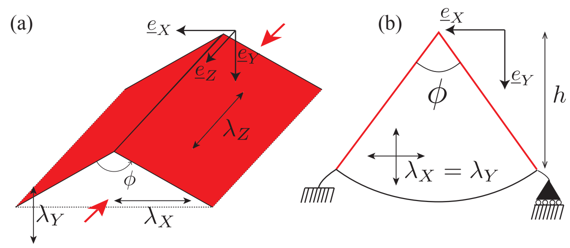

FIGURE IV.9 – Solution fondamentale pour le prisme en compression.
(a) en 3-d ; (b) en 2-d.

prismatique 3-d développés dans le chapitre I. Nous considérons un prisme de longueur infinie et écrivons le problème de bifurcation comme une équation aux valeurs propres sur une section du prisme dans le plan (X, Y), voir figure IV.9. Ce problème aux valeurs propres correspond à l'équation I.34 introduite dans le chapitre I § I.2.3.

Nous considérons que l'effet Poisson est identique dans le substrat et dans le prisme. En conséquence, le prisme est libre de se déformer dans le plan de sa section et $\lambda_X = \lambda_Y$, comme indiqué figure IV.9(a). Ainsi la solution fondamentale peut être obtenue en remplaçant la condition de collage avec le substrat par des conditions aux limites simplifiées imposées à la base du prisme : les translations verticales sont bloquées en deux points de la base alors que la dilatation horizontale est autorisée, voir figure IV.9(b). Ceci nous permet d'obtenir une solution fondamentale homogène de la forme

$$\underline{\varphi}_{[0]} = (\lambda_X - 1)X\,\underline{e}_x + (\lambda_Y - 1)Y\,\underline{e}_y + (\lambda_Z - 1)\,Z\,\underline{e}_z.$$

La compression, positive par convention, s'écrit $\epsilon = (1 - \lambda_Z)$.

L'implémentation du problème de bifurcation I.34 est identique au chapitre I § I.3.3. Nous utilisons un maillage triangulaire non structuré raffiné près de la pointe généré avec le code Gmsh (GEUZAINE et REMACLE, 2009) et un modèle de Gent hyper-élastique avec $\mu = 1.$, $K = 10.$, $J_m = 100$, ce qui correspond à un comportement faiblement compressible. Comme nous recherchons des motifs de flambement localisés au voisinage la crête, les solutions $\underline{\varphi}_{[1]}$ du problème de bifurcation linéarisé sont recherchées telles que $\underline{\varphi}_{[1]} = \underline{0}$ le long de la calotte hémisphérique à la base du prisme, ce qui permet d'éliminer d'éventuels modes de ridage indésirables au voisinage des deux sommets définissant la base.

Les résultats numériques sont tracés sur la figure IV.10 pour un angle $\phi = 60°$. Nous choisissons la taille de maille typique près de la pointe de manière à nous assurer que $h \gg e$ où $h \approx 1$ est hauteur du triangle isocèle formant la base. Au delà de ϵ_c, chaque valeur de ϵ est associée à deux valeurs du nombre d'onde q sur la courbe de stabilité marginale figure IV.10(a). Les configurations déformées correspondant à ces deux modes sont tracées sur la figure IV.10(b). Les déformations sont localisées au voisinage de l'arête dans les deux cas et la profondeur sur laquelle se produit la déformation est comparable à la longueur d'onde $\frac{2\pi}{q}$ associée à chaque mode. Le problème singulier que nous résolvons numériquement est automatiquement régularisé par la discrétisation qui introduit une échelle de longueur e (taille de maille). L'échelle de longueur du mode correspondant au petit nombre d'onde est déterminée par la hauteur h comme dans le cas du problème de Biot pour un demi-plan de hauteur finie décrit § IV.1.2. alors que l'échelle de longueur naturelle pour le mode à grand nombre d'onde est la taille de maille caractéristique e.

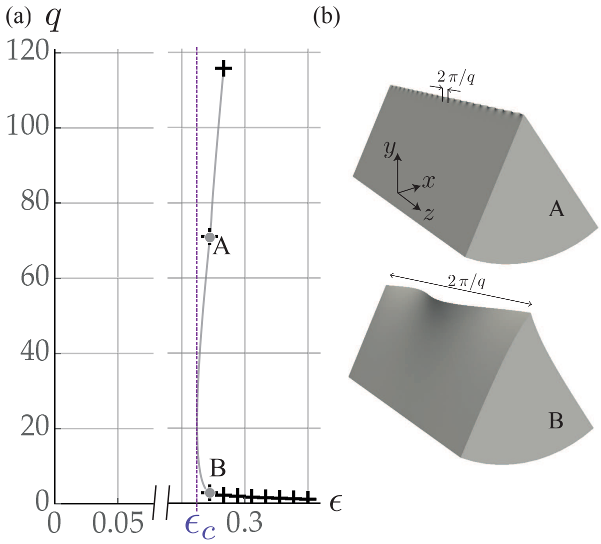

FIGURE IV.10 – Résultats de l'analyse de stabilité linéaire pour $\phi = 60°$ et $h = 0.866$. La taille de maille typique près de la pointe est $e = 0.002$. (a) Courbe de stabilité marginale. (b) Modes critiques correspondant aux valeurs A et B du nombre d'onde ($\epsilon = 0.272 \simeq \epsilon_c$).

Afin de restaurer une convergence des résultats en fonction du maillage, nous introduisons une régularisation physique en modifiant la géométrie du domaine près de la pointe, voir l'insert de la figure IV.11. Cette régularisation est caractérisée par la longueur r dont nous diminuons progressivement la valeur tout en conservant le rapport $r/e = 10$ constant. Les résultats de cette étude sont présentés figure IV.11. La courbe de stabilité marginale tend vers une asymptote verticale lorsque le paramètre de régularisation $r \to 0$, comme on peut le voir figure IV.11(a). Les modes critiques associés aux grandes valeurs de q sur cette courbe se déduisent alors les uns des autres par homothétie. Nous observons en effet une convergence des courbes de stabilité marginale qui leur sont associées dans le plan $(\epsilon, r\,q)$, figure IV.10(a'). Les cartographies figure IV.11(b) illustrent cette homothétie : pour les deux modes notés $\mathrm{A}(r_1, q_1)$ et $\mathrm{B}(r_2, q_2)$ figure IV.10(a), nous vérifions que $r_1\,q_1 = r_2\,q_2$ et que $f(\xi_x(r_1)) = \xi_x(r_2)$ où ξ_x est le déplacement horizontal du mode critique et f est la transformation homothétique de rapport $q_2/q_1 = r_1/r_2$ centrée sur la pointe du triangle isocèle figure IV.11(c).

Ces résultats, similaires à ceux obtenus pour le problème de Biot régularisé section IV.1.2., sont une conséquence directe de l'absence d'échelle de longueur intrinsèque du problème près de la pointe. Afin de limiter la lourdeur des calculs numériques, ceux-ci sont, dans toute la suite, effectués sur la géométrie non-régularisée. Ceci n'a pas d'incidence sur la précision des résultats, sous réserve de vérifier $h \gg e$: les solutions à grand nombre d'onde pour $e \to 0$ se déduisent alors les uns des autres par homothétie, tout comme les modes critiques du problème régularisé. Notons enfin que le choix du comportement hyper-élastique, et en particulier de sa compressibilité, n'a qu'une influence *a priori* marginale sur ces résultats. Ceci sera vérifié quantitativement avec le modèle de plaque mince à épaisseur variable présenté dans la suite.

Finalement, bien que la longueur d'onde des modes et leur échelle caractéristique soient mal définies dans ce problème de bifurcation linéarisé, la forme de ces modes ainsi que la compression critique ϵ_c sont bien définies et nous pouvons les comparer aux résultats expérimentaux.

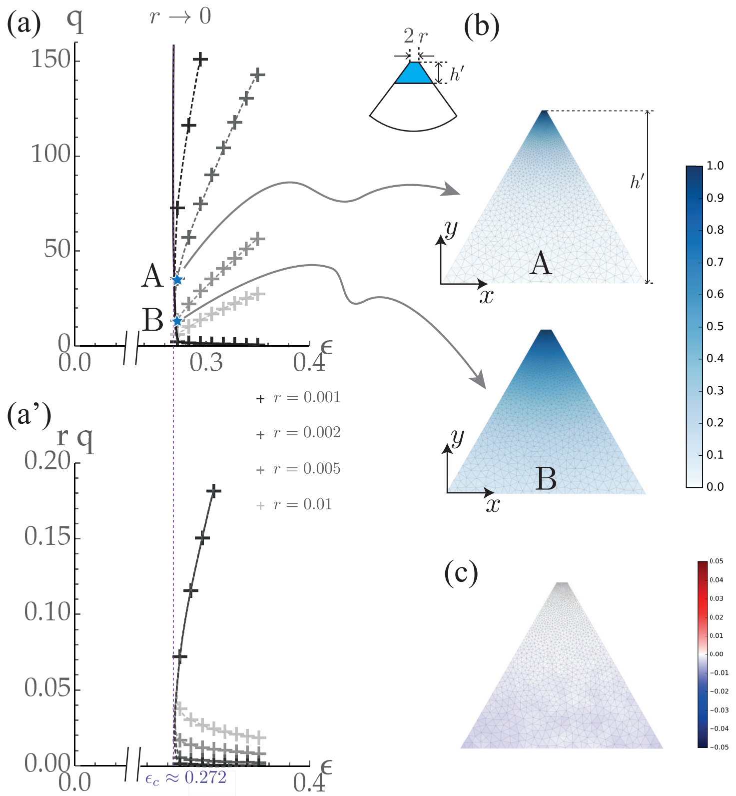

FIGURE IV.11 – Résultats de l'analyse de stabilité linéaire du problème sur un domaine régularisé pour $\phi = 60°$ et $h = 0.866$: convergence vis-à-vis du paramètre de régularisation r. (a) Courbes de stabilité marginale pour différentes valeurs de r. (a') Courbes stabilité marginale pour le nombre d'onde adimensionné $(r\,q, \epsilon)$: la convergence de la branche supérieure traduit le fait que les modes localisés près de la pointe sont homothétiques les uns aux autres. (b) Cartographie des valeurs du déplacement horizontal ξ_x associé au premier mode critique pour deux valeurs de r, resp. A : $r_1 = 0.01$ et B : $r_2 = 0.005$, tracée sur une petite zone près de la pointe avec $h' = 0.166$. Insert : schéma du problème régularisé. (c) Illustration du fait que les modes associés à A et B se déduisent l'un de l'autre par homothétie : cartographie de la norme de l'erreur relative : $\big(f(\xi_x(r_1)) - \xi_x(r_2)\big)/\xi_x(r_2)$ où f est la transformation homothétique de rapport $q_2/q_1 = r_1/r_2$ et centrée sur la pointe (tracée sur une petite zone près de la pointe).

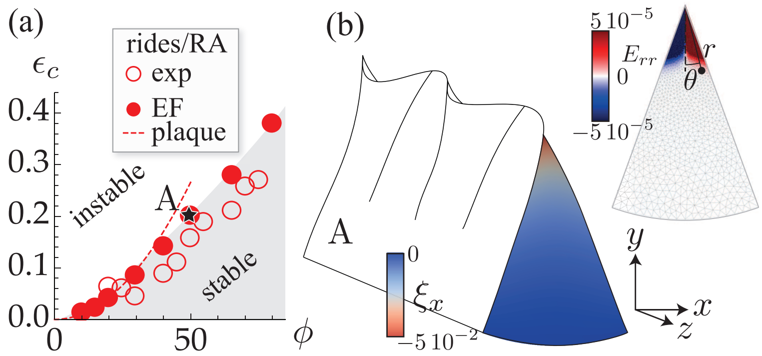

FIGURE IV.12 – Modes de *ridage antisymétrique* (RA). (a) Diagramme de phase : $\epsilon_c(\phi)$ mesuré dans les expériences (cercles), calculé par les simulations (disques pleins) et par le modèle de plaque mince (trait pointillé). (b) Mode critique numérique pour $\phi = 40°$, $h = 0.5$ tracé pour une amplitude arbitraire. Les deux cartographies représentent l'amplitude des déplacements latéraux (à gauche) et la déformation incrémentale radiale E_{rr} (à droite).

IV.4 Modes antisymétriques de ridage

L'analyse de bifurcation linéarisée numérique fait apparaître deux types de modes critiques, à la morphologie très distincte. Une première catégorie de modes critiques s'expriment par une oscillation latérale de l'arête du prisme, voir figure IV.10(b) : nous parlerons par la suite de modes de *ridage antisymétriques* (RA).

IV.4.1. Résultats des simulations

Nous effectuons l'analyse de stabilité linéaire numérique en augmentant progressivement la valeur de la compression imposée ϵ. Lorsque ϕ est inférieur à $105°$ le premier mode critique obtenu par cette analyse numérique (c'est à dire le mode critique correspondant à la plus petite valeur de compression imposée) se caractérise par des ondulations horizontales du sommet de l'arête, représentées figure IV.12(b). Cette cinématique est similaire à celle des modes étendus observés dans les expériences, voir figure IV.8(a). Par ailleurs la compression critique associée à ces modes numériques augmente régulièrement avec la valeur de ϕ, en bon accord avec les mesures expérimentales comme indiqué figure IV.12(a).

Ainsi, les modes de *ridage antisymétriques* observés dans les expériences pour $\phi < 90°$ sont bien décrits par l'analyse de stabilité linéaire numérique. Les valeurs de compression critique obtenues numériquement (disques rouges figure IV.12(a)) coïncident avec les mesures expérimentales (cercles rouges figure IV.12(a)) ce qui laisse penser que ces modes sont l'expression d'une instabilité super-critique. Ainsi, ce système invariant d'échelle au voisinage de la pointe admet une infinité de modes instables au seuil de stabilité linéaire mais génère des motifs de flambement réguliers. Ceci montre que l'absence de longueur intrinsèque n'implique pas toujours le déclenchement d'une instabilité localisée.

Dans la prochaine section, l'analyse de stabilité linéaire 3-d qui précède est revisitée avec un modèle de plaque mince d'épaisseur variable. Les prédictions qui découlent de ce nouveau modèle sont asymptotiquement en accord avec les résultats du modèle 3-d lorsque $\phi \to 0$, comme nous allons le voir.

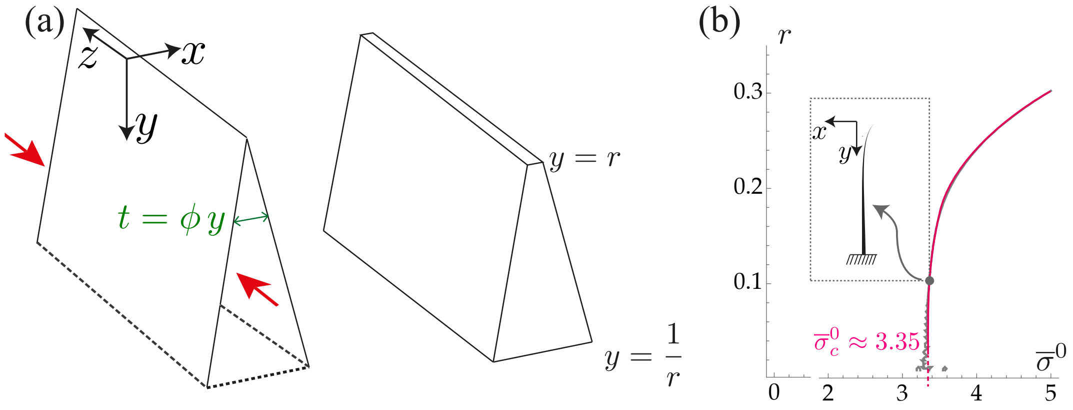

FIGURE IV.13 – Modèle de plaque à épaisseur variable. (a) Problème original (à gauche) et problème régularisé (à droite). (b) Contrainte critique pour le problème régularisé calculée par la méthode du tir (équation IV.14), et limite lorsque $r \to 0$ (en rose). Insert : déformation dans la section de la plaque pour le premier mode critique lorsque $r = 0.1$, tracé pour une amplitude arbitraire.

IV.4.2. Modèle de plaque à épaisseur variable

Considérons une plaque d'épaisseur variable t contenue dans le plan (y, z). L'épaisseur t varie linéairement dans la direction y, $t = \phi\, y$ et la plaque est soumise à une compression axiale dans la direction z, comme représenté par les flèches en rouge sur la figure IV.13(a). L'équilibre linéarisé au voisinage de la solution plane s'écrit, avec le formalisme introduit au chapitre III et sous forme adimensionnée,

$$-\,(m_{\alpha\beta})_{,\alpha\beta} - h(y)\sigma^0 w_{,zz} = 0, \tag{IV.11a}$$

où $w(x, y)$ est la déflexion selon x, $m_{\alpha\beta} = D(y)\big((1-\nu)w_{,\alpha\,\beta} + \nu\delta_{\alpha\,\beta}w_{,\gamma\,\gamma}\big)$ le moment de flexion et où le module de flexion varie avec la coordonnée verticale, $D(y) = \frac{E\,t(y)^3}{12(1-\nu^2)}$. Ici la compression $\epsilon^0 = \frac{\sigma^0}{E}$ est comptée positivement, comme précédemment dans ce chapitre. Rappelons que les indices grecs désignent les degrés de liberté dans le plan de la plaque (y, z) et que l'on applique la convention de sommation d'Einstein sur les indices répétés.

Le problème étant infini dans la direction y et singulier en $y = 0$, nous introduisons une régularisation géométrique contrôlée par le paramètre r, voir figure IV.13(a). Dans le problème régularisé la plaque est contenue dans le domaine $r < y < \frac{1}{r}$. Les conditions limites de bord libre en $y = r$, introduites au chapitre III, font ici intervenir la variation du module de flexion en fonction de la coordonnée y

$$w_{,yy} + \nu w_{,zz} = 0, \quad 3\,y^2 w_{,yy} + y^3 w_{,yyy} + 3\nu y^2 w_{,zz} + (2-\nu)y^3 w_{,zzy} = 0. \tag{IV.11b}$$

Les conditions d'encastrement en $y = \frac{1}{r}$ s'écrivent

$$w = 0, \quad w_{,y} = 0. \tag{IV.11c}$$

Nous opérons le changement de variable $Y = q\,y$ et cherchons alors la déflexion sous la forme d'une série de Fourier $w(y) = W(Y)\,e^{i\,q\,z}$. En insérant cette expression dans les équations IV.11a, IV.11b et IV.11c nous obtenons un problème aux limites pour l'amplitude $W(Y)$ qui dépend du nombre d'onde q, du module de Poisson ν

et du paramètre de régularisation r,

$$-Y^3\, W^{(IV)}(Y) - 6\,Y^2 W^{(III)}(Y) + (2\,Y^3 - 6Y)\,W''(Y) + 6\,Y^2\,W'(Y) \cdots \\ +(Y(6\,\nu + \overline{\sigma}^0) - Y^3)W(Y) = 0, \tag{IV.12a}$$

avec les conditions aux limites lorsque $Y = q\,r$,

$$W'' - \nu W = 0, \quad \epsilon W''' + (2-\nu)\eta W' = 0, \tag{IV.12b}$$

et lorsque $Y = \frac{q}{r}$,

$$W = 0, \quad W' = 0. \tag{IV.12c}$$

Dans ce problème, nous définissons le paramètre de chargement adimensionné

$$\overline{\sigma}^0 = \frac{12\,(1-\nu^2)\,\sigma^0}{\phi^2\,E}. \tag{IV.13}$$

Le problème aux limites décrit par les équations IV.12a, IV.12b et IV.12c peut être résolu numériquement par la méthode du tir. Nous construisons une matrice 4×4 dépendant des paramètres ν, r, q et $\overline{\sigma}^0$. Cette matrice, appelée matrice de tir et notée $\mathcal{S}(\nu, r, q, \overline{\sigma}^0)$, est remplie par intégration de l'équation différentielle IV.12a pour certaines valeurs des conditions initiales (voir chapitre I § I.1). Pour une valeur fixée de ν, q et r, nous cherchons la plus petite valeur de la contrainte adimensionnée $\overline{\sigma}^0_{\mathrm{c}}$ solution de l'équation implicite

$$\det \mathcal{S}(\nu, r, q, \overline{\sigma}^0) = 0. \tag{IV.14}$$

La solution du problème non régularisé est ensuite obtenue en évaluant la limite $r \to 0$. Pour $q = 1$, $\nu = 0.45$ et $r = 0.01$ nous obtenons $\overline{\sigma}^0_{\mathrm{c}} \approx 3.35$, comme représenté sur la figure IV.13(b).

Le problème régularisé dépend du nombre d'onde q alors que le problème original n'en dépend pas. Comme pour le problème de Biot présenté dans la première section, la régularisation fait disparaître l'invariance d'échelle. Cependant, lorsque $r \to 0$ cette invariance d'échelle est restaurée et la courbe de stabilité marginale ne dépend plus de q. Tous les nombres d'onde correspondent à des solutions homothétiques qui apparaissent simultanément pour $\overline{\sigma}^0 = \overline{\sigma}^0_{\mathrm{c}}$. Notre analyse effectuée pour $q = 1$ donne ainsi un résultat identique pour n'importe quelle valeur de q, à la limite $r \to 0$.

La relation IV.13 fait apparaître une loi d'échelle pour la contrainte critique ϵ_{c} pour le problème non régularisé

$$\epsilon_c = \alpha\,\phi^2 \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{\overline{\sigma}^0_c}{12\,(1-\nu^2)}.$$

Cette loi ne contient pas de paramètres ajustables car $\overline{\sigma}^0_{\mathrm{c}}$ est calculé en résolvant le problème aux limites IV.12a-IV.12c. Nous obtenons numériquement

$$\alpha \approx 0.35 \quad \text{pour} \quad \nu = 0.45. \tag{IV.15}$$

Ce résultat, tracé en pointillés figure IV.12(a)), est en très bon accord avec les mesures expérimentales et avec les calculs numériques prenant en compte la cinématique 3-d, dans la limite $\phi \to 0$. Les modes critiques associés à ce seuil correspondent à une flexion localisée au voisinage du bord libre de la plaque, voir l'insert figure IV.13(b), ce qui est également en accord avec les résultats précédents. Notons que l'influence de la valeur du module de Poisson est relativement mineure, nous obtenons $\epsilon_c(\nu = 0.50) \approx 0.33\,\phi^2$ dans le cas incompressible, ce qui est très proche de la valeur obtenue pour $\nu = 0.45$ (équation IV.15).

Remarquons enfin que l'évolution de la compression critique en $\sim \phi^2$ implique $\epsilon_c \ll 1$ lorsque $\phi \ll 1$ ce qui justifie l'utilisation d'un modèle reposant sur l'élasticité linéarisée. Pour des valeurs de ϕ plus importantes, il est nécessaire de prendre non seulement en compte les non-linéarités de comportement mais aussi une cinématique 3-d, plus riche que celle du modèle de plaque. Les résultats expérimentaux et numériques 3-d s'écartent ainsi sensiblement des résultats du modèle de plaque mince pour $\phi > 25°$.

IV.5 Modes de surface : modes de ridage symétriques et modes de plissement

Le second type de modes critiques obtenus par l'analyse de bifurcation linéarisée présente une morphologie très différente de celle des modes de *ridage antisymétriques* décrits dans la section précédente : il s'agit d'ondulations verticales de la pointe ainsi que des faces latérales de l'arête. Nous parlerons par la suite de modes de *ridage symétriques* (RS). Des modes critiques de ce type apparaissent au seuil de bifurcation lorsque $\phi > 105°$, comme nous allons le voir dans cette section.

IV.5.1. Résultats de l'analyse numérique linéaire

Ces modes s'étendent le long des faces latérales de l'arête et correspondent à une ondulation verticale dans le plan (Y, Z), comme représenté figure IV.14(b). Les premiers modes RS apparaissent pour une compression critique $\epsilon_c \approx 0.55$, quelle que soit la valeur de l'angle, voir figure IV.14(a). Cette valeur est identique au seuil de Biot $\epsilon_B = 0.55$ calculé dans la première section de ce chapitre pour le cas d'un bloc infini en compression. Ceci est cohérent dans la limite $\phi \to 180°$ puisque notre problème correspond alors rigoureusement au problème de Biot.

Lorsque ϕ dépasse $\approx 105°$, la compression critique associée aux modes RA, représentée par les disques rouges sur le graphique de la figure IV.14(a), devient supérieure à la valeur ϵ_B qui correspond à la compression critique associée aux modes RS, représentée par les carrés bleus. Notre analyse numérique prédit alors une transition d'un mode antisymétrique (AR) vers un mode symétrique (RS).

Cette analyse linéaire prédit ainsi un mode de surface sinusoïdal et étendu, en contradiction apparente avec les observations expérimentales, figure IV.14(c). La compression critique des modes expérimentaux de plissement de surface (PS) est identique au seuil de l'instabilité de plissement non-linéaire ϵ_C identifié pour le problème de Biot dans la première section de ce chapitre. Ainsi, cette instabilité semble se comporter de la même manière que l'instabilité de surface qui apparaît dans le problème de Biot. Nous supposons qu'il s'agit d'une instabilité sous-critique, comme représenté figure IV.14(d). Cette hypothèse permet de corriger notre analyse et de prédire la valeur correcte pour l'angle de transition $\phi^\star$ en combinant les résultats de l'analyse de stabilité linéaire numérique pour les modes de *ridage antisymétriques* (disques en rouge sur la figure IV.14(a)) avec la compression critique ϵ_C associée à l'instabilité de plissement (trait pointillé en marron sur la figure IV.14(a)). La vérification rigoureuse de cette hypothèse nécessiterait une analyse non-linéaire.

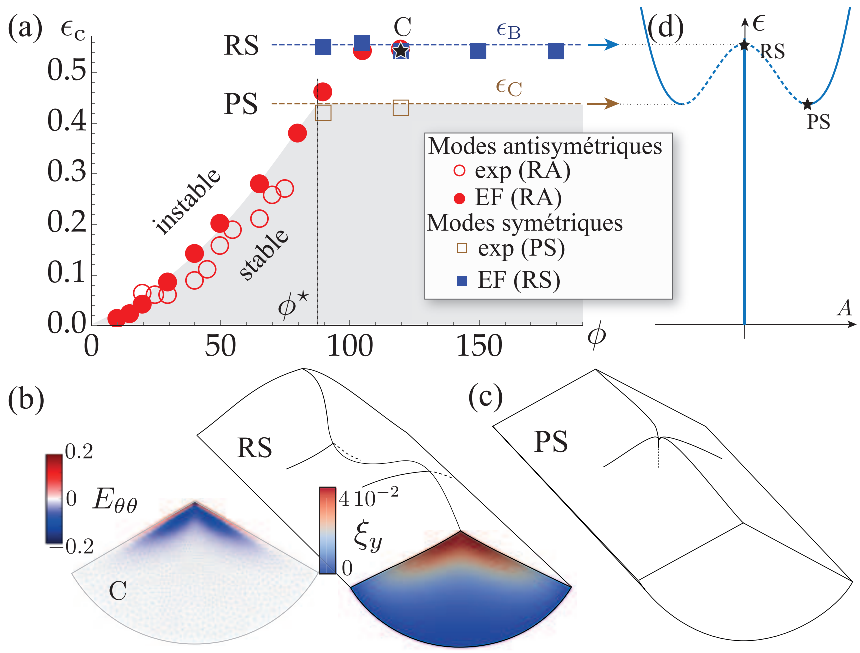

FIGURE IV.14 – (a) Diagramme de de bifurcation linéaire complet. Comparaison des compressions critiques prédites par l'analyse numérique par éléments finis : modes de *ridage antisymétriques* (RA) et modes de *ridage symétriques* (RS), seuil de Biot ϵ_B, seuil de plissement non-linéaire ϵ_C et résultats expérimentaux. (b) Mode critique numérique pour $\phi = 120°$, $h = 0.5$ tracé pour une amplitude arbitraire. Les deux cartographies représentent l'amplitude des déplacements verticaux (à droite) et la déformation incrémentale azimutale $E_{\theta\theta}$ (à gauche). (c) Dessin du mode de plissement de surface (PS) observé dans les expériences. (d) Allure de l'amplitude du mode de bifurcation sous-critique $A(\epsilon)$ attendu pour le mode de surface.

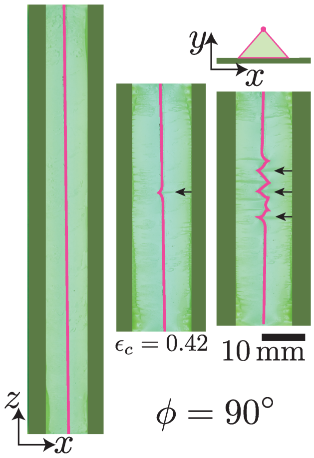

FIGURE IV.15 – Résultats expérimentaux. Vues du dessus dans le plan (x, z) pour $\phi = 90°$, $h \approx 5\,\mathrm{mm}$ et $L_0 = 100\,\mathrm{mm}$. Les flèches noires indiquent les plis à la surface des faces latérales. La valeur de $\phi^\star$ correspond à la transition entre modes étendus et modes localisés, voir figure IV.14(a).

Lorsque $\phi = 90°$, nous observons dans les expériences un mode de flambement mixte composé d'ondulations latérales de la pointe (similaires aux modes RA) superposées à des plis localisés (similaires aux modes PS) situés au niveau des points correspondants aux maxima de la déformation sinusoïdale, voir figure IV.15. Ces observations suggèrent un couplage non-linéaire entre les modes symétriques et les modes antisymétriques pour cette valeur critique de l'angle d'ouverture.

IV.5.2. Éléments d'analyse numérique non-linéaire

Afin d'approfondir notre analyse, nous étudions le problème de la compression de l'arête hyper-élastique numériquement, dans le cadre de l'élasticité finie 3-d non-linéaire, en utilisant un algorithme de continuation par longueur d'arc (KELLER, 1977) combiné à la méthode des éléments finis. Nous examinons le comportement pour deux valeurs de l'angle d'ouverture, $\phi = 40°$ et $\phi = 120°$. Les maillages non structurés sont générés avec la librairie Gmsh : il s'agit de portions d'arête de longueur $L = 1$ et dont la hauteur h et la base b sont ajustées de telle manière que la largeur des faces est égale à 1. Ainsi $h = 0.5$ pour $\phi = 120°$ et $h = 0.93$ pour $\phi = 40°$ ($b = 2\sin\frac{\phi}{2}$ et $h = \cos\frac{\phi}{2}$). La taille typique de maille est $e = 0.005$ près de la pointe et $e = 0.1$ le long de la base. Les résultats de cette étude numérique sont présentés figure IV.16.

Nous introduisons un petit défaut en déformant le maillage par le champ de déplacement initial

$$\underline{u}_\delta(\underline{X}) = \delta\, e^{-\left(\frac{\underline{X}-\underline{X}_0}{\delta}\right)^2} (\underline{e}_X + \underline{e}_Y),$$

où $\underline{X}_0 = (\frac{b}{2}, h, \frac{L}{2})$ repère le centre de l'arête. Dans les simulations nous choisissons $\delta = 0.01$.

Nous utilisons un modèle de Gent faiblement compressible avec $\mu = 1$, $\lambda_\mathrm{L} = 10$ et $J_m = 100$, comme pour l'analyse de stabilité linéaire. Le paramètre de continuation est la compression axiale ϵ, imposée par un déplacement contrôlé en $Z = L$. Afin de pouvoir utiliser ϵ comme un paramètre de continuation dans l'algorithme par longueur d'arc, cette contrainte cinématique est introduite dans le modèle via

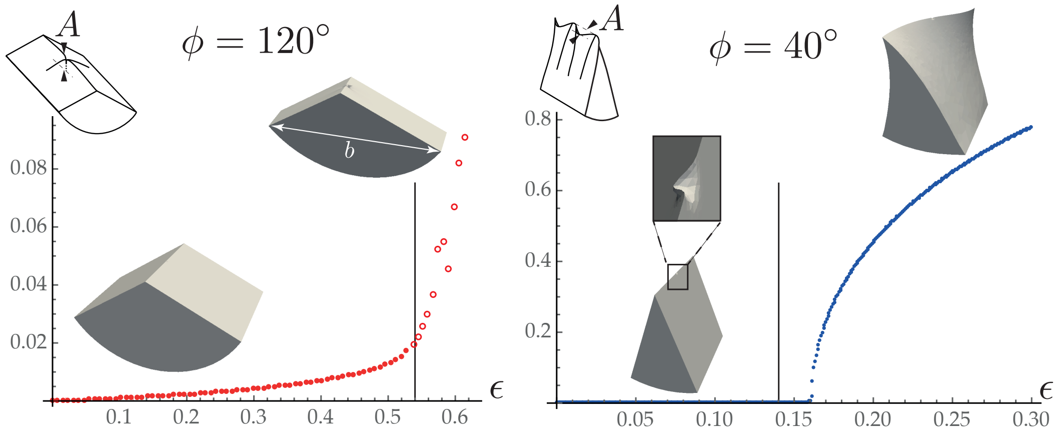

FIGURE IV.16 – Résultats numériques. Amplitude maximale de la déformation verticale (en rouge, à gauche, pour $\phi = 120°$) et horizontale (en bleu, à droite, pour $\phi = 40°$) en fonction de la compression imposée, et allure des modes déformés. Les solutions instables sont indiquées par des cercles et les solutions stables par des disques pleins. Les seuils obtenus précédemment par l'analyse de stabilité linéaire sont représentés par les traits verticaux noirs. Insert : géométrie du défaut initial.

un terme supplémentaire dans l'énergie, associé à un multiplicateur de Lagrange défini sur la face $Z = L$. Une telle contrainte peut également être imposée par pénalisation, voir par exemple WRIGGERS (2008).

Dans ces calculs, la stabilité des solutions est évaluée en examinant le signe des valeurs propres de la matrice hessienne de l'énergie. Les solutions pour lesquelles cette matrice possède des valeurs propres négatives sont considérées comme instables et représentées par des cercles figure IV.16.

Pour l'angle $\phi = 120°$, le système bifurque au voisinage de $\epsilon \approx 0.55$ vers un sillon localisé à l'emplacement du défaut initial, voir figure IV.16. Les solutions calculées sont alors instables et divergent rapidement du fait de l'importante localisation des déformations. Nous avons tenté de régulariser le problème afin de pallier cette difficulté, en ajoutant pour cela une énergie de surface (voir MORA et al. (2013) pour les détails de l'implémentation). Notre idée consistait à suivre la solution vers un état bifurqué d'amplitude finie pour une petite valeur de la tension de surface, suffisante pour empêcher la divergence des solutions, puis de faire tendre cette tension de surface vers 0. Cette approche ne nous a cependant pas permis d'obtenir des solutions non-linéaires de grande amplitude.

Pour $\phi = 40°$, la solution numérique bifurque au voisinage de $\epsilon \approx 0.16$ vers un motif étendu associé à des ondulations latérales de l'arête, voir figure IV.16. Cette valeur est légèrement supérieure au résultat de l'analyse de stabilité linéaire $\epsilon_c \approx 0.14$. Un meilleur accord avec la prédiction linéaire pourrait être obtenu en raffinant encore le maillage.

Cette première étude non-linéaire semble aller dans le sens de notre analyse précédente : les motifs générés pour $\phi = 40°$ sont étendus et associés à une instabilité super-critique alors que les motifs générés pour $\phi = 120°$ sont localisés et instables, ce qui laisse penser qu'ils pourraient être associés à une instabilité sous-critique. Cependant, l'étude des motifs localisés se révèle très délicate du fait de la localisation extrême des déformations, associée à une grande distorsion du maillage à la pointe du sillon ainsi qu'à de l'auto-contact. Par ailleurs les temps de calculs pour la géométrie 3-d, très importants, constituent une difficulté supplémentaire, et la nature tridimensionnelle des motifs obtenus dans les deux cas rend une modélisation 2-d de ce problème inenvisageable.

IV.6 Conclusion

Notre analyse de stabilité linéaire numérique décrit l'évolution de la compression critique ϵ_c du prisme à section triangulaire en fonction de l'angle d'ouverture ϕ, ainsi que la forme des modes pour l'instabilité de *ridage antisymétrique*, en bon accord avec les résultats expérimentaux. La prédiction de la longueur d'onde pour ces modes n'est pas accessible à notre analyse et nécessiterait d'ajouter des éléments de régularisation au modèle : un terme de gradient dans la loi de comportement, associé à une petite échelle de longueur (CIARLETTA et FU, 2015) ou une petite imperfection géométrique.

Pour les modes symétriques, l'analyse linéaire numérique prédit l'apparition d'un mode d'ondulations harmoniques qui n'apparaît pas dans les expériences. L'instabilité associée à ce mode donne naissance à des plis localisés par des effets non-linéaires, à l'instar de l'instabilité de plissement observée dans le problème de Biot.

Une combinaison de ces deux analyses permet cependant de prédire la valeur de l'angle critique $\phi^\star \approx 90°$ correspondant au changement du type de mode de flambement observé dans les expériences.

La localisation des modes de plissement a été analysée pour ce type de problème invariant d'échelle en invoquant les couplages non-linéaires au sein du continuum de modes critiques apparaissant au seuil de bifurcation (CAO et HUTCHINSON, 2011 ; FU et CIARLETTA, 2015). Cependant, notre étude expérimentale et numérique décrit un système invariant d'échelle exprimant à la fois des motifs périodiques étendus et des plis localisés. Ainsi, le couplage entre modes donne bien lieu à de la localisation dans le cas des modes symétriques, mais pas pour les modes antisymétriques. L'invariance d'échelle n'est donc pas une condition suffisante pour faire apparaître de la localisation et les conditions précises dans lesquelles s'initie la coopération entre les différents modes critiques reste à élucider.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié quelques problèmes impliquant le flambement de poutres minces hyper-élastiques. Notre travail s'est appuyé sur les équations exactes de l'élasticité 3-d et plus particulièrement sur le problème d'équilibre linéarisé exprimé sous une forme compacte, ce qui nous permet de tirer parti des propriétés d'invariance des problèmes étudiés dans la direction axiale.

L'un de nos fils conducteurs était d'interroger le lien entre cette formulation 3-d et les modèles réduits classiques. L'étude du ruban assemblé avec une forte précontrainte a été l'occasion de mettre en avant les limites du modèle de poutre classique d'Euler-Bernoulli. En effet, la déformation localisée des sections du ruban dans ce problème n'est pas prise en compte par la cinématique qui sous-tend le modèle classique et celui-ci prédit un mode de flambement *macroscopique* à grande longueur d'onde pour lequel les sections sont très peu déformées.

Nous nous sommes appuyés sur cette analyse pour proposer plusieurs modèles alternatifs permettant de traiter ce problème : un modèle naïf construit par combinaison de deux poutres classiques assemblées par un continuum de ressorts linéaires, un modèle de plaque mince et enfin une formulation 3-d rigoureuse. L'étude de ces différents modèles nous a permis de montrer que la longueur typique du motif de flambement est sélectionnée par l'importance relative de la pré-contrainte et du rapport d'aspect des rubans, ce qui explique les étonnantes observations expérimentales et en particulier les modes de flambement *microscopiques* à perversions multiples.

La sélection de la longueur d'onde du motif de flambement a été un point central pour l'étude de ce problème. La transition entre les modes *microscopiques* à perversions multiples et les modes *microscopiques* en hélice se caractérise en effet, pour un système infini, par le moment où le nombre d'onde au seuil de bifurcation prend la valeur 0. Inspirés par le développement faiblement non-linéaire de KOITER (1965), nous avons proposé une méthode de détection de la transition *micro-macro* fondée sur un développement à faible nombre d'onde de l'équation d'équilibre linéarisée. Cette méthode, que nous avons formulée sous une forme très générale, a été appliquée avec succès aux différents modèles utilisés pour étudier le ruban pré-contraint.

Nous avons également étudié des systèmes pour lesquels l'analyse linéaire prédit l'apparition d'une infinité de nombres d'onde au seuil de bifurcation. Au sein de ces systèmes invariants d'échelle et connus pour générer une instabilité de plissement fortement localisée, nous avons mis en lumière, avec l'étude de l'arête en compression, un exemple pour lequel un flambement sinusoïdal apparaît. Ce système admet en effet deux types de modes critiques : un mode de flexion de l'arête, étendu et régulier, généré par une instabilité super-critique et un mode de plissement des faces, localisé et généré par une instabilité sous-critique. L'arête flambe suivant le mode associé à la déformation critique la plus faible, générant ainsi des motifs réguliers aux faibles angles et des motifs localisés aux grands angles, ce qui interroge le lien entre invariance d'échelle et localisation.

Enfin, en nous appuyant sur un développement asymptotique des équations d'équilibre linéarisé 3-d formulées sous forme faible, nous avons proposé une méthode rigoureuse et systématique qui ouvre la voie vers la dérivation de nouveaux modèles réduits, qui pourraient permettre de décrire des problèmes pour lesquels les modèles existants sont inapplicables. Alors que le choix d'une cinématique ad hoc, souvent sujet à des hypothèses restrictives ou injustifiées, constitue l'un des challenges pour la définition de modèles réduits, cette approche donne accès à la cinématique complète du système par la résolution des équations 3-d ordre par ordre. Nous l'avons appliquée avec succès au cas d'un barreau néo-Hookéen soumis à une compression axiale, ce qui nous a permis d'établir de façon rigoureuse les équations du modèle classique d'Euler-Bernoulli dans un cadre très général.

Nous souhaiterions poursuivre le développement de cette méthode afin d'écrire un modèle réduit 1-d permettant de décrire fidèlement les résultats de l'expérience de HUANG et al. (2012) et LIU et al. (2014). C'est une piste de recherche que nous n'avons pas eu le temps de mener à bien dans le temps imparti, mais qui, nous l'espérons, pourra donner des résultats dans un proche futur. Un tel modèle serait utile, entre autres, pour analyser les instabilités provoquées par la croissance différentielle dans les systèmes biologiques.

Une seconde application possible de cette méthode serait d'étudier les instabilités dans des matériaux actifs, c'est à dire dont le comportement mécanique est affecté par des champs électriques et/ou magnétiques, comme par exemple les élastomères magnéto-rhéologiques. À notre connaissance, les travaux de modélisation de ces problèmes multi-physiques reposent aujourd'hui principalement sur des descriptions 3-d et la dérivation de modèles réduits pour de tels systèmes est un champ de recherches encore peu exploré, bien que de nombreux travaux fassent état d'instabilités élastiques dans ces systèmes.

Annexe A

Réduction dimensionnelle à partir de l'élasticité finie 3-d

Sommaire

Cette annexe présente le détail des démonstrations et des calculs qui permettent d'aboutir aux résultats de réduction dimensionnelle présentés dans les chapitres II et III. Ces calculs reposent sur la résolution des équations exactes de l'élasticité finie incrémentale pour un solide prismatique établies dans le chapitre I, équations I.26 et I.29. Cette résolution est effectuée ordre par ordre dans le développement asymptotique à faible η introduit dans le chapitre II , où $\frac{1}{\eta}$ est l'échelle caractéristique associée aux variations axiales.

Ce formalisme est général et permet de traiter différents cas de réduction dimensionnelle. Ainsi, le modèle de poutre classique sera établi dans une première section à partir des hypothèses d'ordre de grandeur postulées au chapitre II. La forme obtenue est valable pour un comportement hyper-élastique et une pré-contrainte quelconques, pourvu que le problème 3-d admette une solution homogène et invariante dans la direction axiale. Une version du modèle classique étendue aux poutres à courbure naturelle sera ensuite développée pour traiter les cas faisant intervenir des hétérogénéités de pré-contrainte modérées dans la section. Ces cas sont discutés dans le chapitre III.

A.1 Modèle de poutre classique

Dans le chapitre I, il est établi que les propriétés d'invariance et l'existence d'une solution fondamentale homogène et invariante permettent d'écrire le problème d'équilibre linéarisé 3-d en fonction de la coordonnée axiale Z, comme la somme d'un terme d'élasticité tangente et d'un terme de pré-contrainte (équation I.26). Rappelons la forme cette équation

$$\forall \widehat{\varphi} \quad \int_0^L \hat{\Phi} \cdot \left[\mathcal{Q} + \mathcal{S} \right] \cdot \Phi \, \mathrm{d}Z = \int_0^L \mathcal{F} \cdot \widehat{\varphi}(Z) \mathrm{d}Z, \tag{A.1}$$

où

$$\Phi(Z) = \begin{pmatrix} \varphi(Z) \\ \varphi_{,Z}(Z) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{\Phi}(Z) = \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}(Z) \\ \widehat{\varphi}_{,Z}(Z) \end{pmatrix}. \tag{A.2}$$

Les expressions explicites des opérateurs $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{S}$ sont présentées dans le chapitre I § I.3.2. pour un matériau néo-Hookéen. Rappelons que le terme d'élasticité tangente s'exprime en fonction de la déformation incrémentale

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E}(\Phi) = \begin{pmatrix} \nabla\boldsymbol{\varphi}^T \cdot (\boldsymbol{I}^{\parallel} + \nabla\boldsymbol{\varphi}_{[0]}) & \nabla\boldsymbol{\varphi}^T \cdot (\boldsymbol{I}^{\perp} + \boldsymbol{\varphi}_{[0],Z}) \\ \boldsymbol{\varphi}_{,Z} \cdot (\boldsymbol{I}^{\parallel} + \nabla\boldsymbol{\varphi}_{[0]}) & \boldsymbol{\varphi}_{,Z} \cdot (\boldsymbol{I}^{\perp} + \boldsymbol{\varphi}_{[0],Z}) \end{pmatrix}_{\text{sym}} = \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \Phi,$$

avec

$$\boldsymbol{I} = \left(\boldsymbol{I}^{\parallel} \mid \boldsymbol{I}^{\perp} \right) \quad \text{et} \quad \mathrm{grad}\, \boldsymbol{\varphi} = \left(\nabla\boldsymbol{\varphi} \mid \boldsymbol{\varphi}_{,Z} \right),$$

où grad est l'opérateur gradient en 3-d, $\boldsymbol{I}$ l'opérateur identité 3-d et ∇ l'opérateur gradient 2-d dans le plan (X, Y). Ainsi il existe un opérateur $\mathcal{R}$ tel que

$$\mathcal{Q} = \boldsymbol{\mathcal{E}}^T \cdot \mathcal{R} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}. \tag{A.3}$$

Le terme de précontrainte est quant à lui déterminé par les valeurs du tenseur de précontrainte 3-d $\boldsymbol{\Sigma}_0$

$$\hat{\Phi} \cdot \mathcal{S} \cdot \Phi = \iint_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\Sigma}_0 : \mathrm{d}_2\boldsymbol{E}(\widehat{\Phi}, \Phi) \, \mathrm{d}X \, \mathrm{d}Y, \tag{A.4}$$

où le second incrément de déformation s'écrit

$$\mathrm{d}_2\boldsymbol{E}(\widehat{\Phi},\Phi)=\begin{pmatrix}\nabla\widehat{\boldsymbol{\varphi}}^T\cdot\boldsymbol{\varphi} & \nabla\widehat{\boldsymbol{\varphi}}^T\cdot\boldsymbol{\varphi}_{,Z}\\ \widehat{\boldsymbol{\varphi}}_{,Z}\cdot\nabla\boldsymbol{\varphi} & \widehat{\boldsymbol{\varphi}}_{,Z}\cdot\boldsymbol{\varphi}_{,Z}\end{pmatrix}_{\mathrm{sym}}.$$

Rappelons enfin la décomposition par blocs des opérateurs $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{S}$, introduite dans le chapitre II

$$\mathcal{Q}=\begin{pmatrix}\mathcal{K}_e & \mathcal{C}_e\\ \mathcal{C}_e^T & \mathcal{M}_e\end{pmatrix},\quad \mathcal{S}=\begin{pmatrix}\mathcal{K}_s & \mathcal{C}_s\\ \mathcal{C}_s^T & \mathcal{M}_s\end{pmatrix}.$$

A.1.1. Développement à deux échelles

Nous définissons la coordonnée lente, $\tilde{z}=Z\,\eta$, et développons le déplacement selon la forme

$$\boldsymbol{\varphi}(\tilde{z})=\boldsymbol{\varphi}_0(\tilde{z})+\eta\,\boldsymbol{\varphi}_1(\tilde{z})+\eta^2\,\boldsymbol{\varphi}_2(\tilde{z})+\cdots$$

et ainsi

$$\Phi=\Phi_0+\eta\,\Phi_1+\eta^2\,\Phi_2+\cdots$$

D'après la définition A.2 il vient $\Phi=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\varphi}(\tilde{z})\\ \eta\,\boldsymbol{\varphi}'(\tilde{z})\end{pmatrix}$, où l'on note $\boldsymbol{\varphi}'=\boldsymbol{\varphi}_{,\tilde{z}}$, et finalement

$$\Phi_0=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\varphi}_0\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}\quad \Phi_1=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\varphi}_1\\ \boldsymbol{\varphi}_0'\end{pmatrix}\quad \Phi_2=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\varphi}_2\\ \boldsymbol{\varphi}_1'\end{pmatrix}\quad\cdots \tag{A.5}$$

Notre méthode de réduction dimensionnelle se fonde sur la résolution de l'équation A.1 ordre par ordre. Les opérateurs $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{S}$ définissant respectivement les modules tangents et la pré-contrainte sont singuliers. Il est ainsi nécessaire d'écrire une alternative de Fredholm pour ces opérateurs en vérifiant une condition de solubilité avant de procéder à la résolution de l'équation A.1 à chaque ordre. Nous commencerons par établir des propriétés relatives aux noyaux des opérateurs $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{S}$, liées à l'existence de 6 déplacements rigides : trois translations et trois rotations. Ces propriétés sont cruciales pour identifier les conditions de solubilité aux différents ordres.

A.1.2. Noyaux des opérateurs singuliers

Les 6 déplacements rigides introduits dans le chapitre II s'écrivent, avec notre formalisme,

$$\begin{pmatrix}\mathbf{t}_\alpha\\ \mathbf{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\mathbf{t}_z\\ \mathbf{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\boldsymbol{\vartheta}_z\\ \mathbf{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\boldsymbol{\vartheta}_\alpha^\perp\\ -\eta_{\alpha\beta}\mathbf{t}_\beta\end{pmatrix}.$$

Selon nos conventions, les indices en lettres grecques sont réservés aux directions dans la section, $(\alpha,\beta)=(x,y)$ (respectivement $(\alpha,\beta)=(y,x)$) et $\eta_{xx}=\eta_{yy}=0$, $\eta_{xy}=1$, $\eta_{yx}=-1$. Les 6 déplacements ainsi définis s'identifient aux translations selon $\underline{e}_X$, $\underline{e}_Y$, $\underline{e}_Z$, à la rotation autour de $\underline{e}_Z$ et aux rotations autour de $\underline{e}_Y$ et $\underline{e}_X$ respectivement. Par définition, les déplacements rigides annulent la déformation incrémentale

$$\Phi_{\mathrm{rb}}\in\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}\mathbf{t}_\alpha\\ \mathbf{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\mathbf{t}_z\\ \mathbf{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\boldsymbol{\vartheta}_z\\ \mathbf{0}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\boldsymbol{\vartheta}_\alpha^\perp\\ -\eta_{\alpha\beta}\mathbf{t}_\beta\end{pmatrix}\right)\implies \boldsymbol{\mathcal{E}}\cdot\Phi_{\mathrm{rb}}=0. \tag{A.6}$$

Propriété 1 : noyau de $\mathcal{K}_e$

Nous nous plaçons ici dans l'hypothèse où les modules élastiques tangents du modèle 3-d décrits par l'opérateur $\mathcal{R}$ sont strictement positifs, *i.e.* où il n'existe pas de mode mou. Cette hypothèse pourrait être remise en cause dans le cas d'une poutre en voile mince ou d'un contraste élastique important dans la section.

Si une configuration particulière de la section $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{\varphi}(\tilde{z})$ pour $\tilde{z}$ fixé appartient à $\ker \mathcal{K}_e$, c'est à dire si $(\forall \widehat{\boldsymbol{f}}) \quad \widehat{\boldsymbol{f}} \cdot \mathcal{K}_e \cdot \boldsymbol{f} = 0$, nous avons alors, avec $\widehat{\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{f}$ et d'après A.3,

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{f}) \cdot \mathcal{R} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{f}) = 0.$$

Ceci signifie par hypothèse ($\mathcal{R}$ étant supposé positif) que $\boldsymbol{f}$ annule la déformation incrémentale, $\mathrm{d}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{f}) = 0$, et ainsi que $\boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} = 0$. D'après l'hypothèse II.26 énoncée dans le chapitre II sur la mesure de déformation, $\boldsymbol{f}$ est une combinaison linéaire de modes rigides indépendants de $\tilde{z}$. Nous venons de montrer que

$$\ker \mathcal{K}_e = \left\{ w_\alpha \mathbf{t}_\alpha + u \mathbf{t}_z + \tau \boldsymbol{\vartheta}_z \middle| (w_x, w_y, u, \tau) \in \mathbb{R}^4 \right\}. \tag{A.7}$$

Ainsi le noyau de $\mathcal{K}_e$ est formé par les trois translations selon X, Y et Z et par la rotation autour de l'axe Z. Cette propriété sera utile pour résoudre les équations ordre par ordre dans le développement qui suit.

Propriété 2 : noyau de $\mathcal{K}_s$

Nous utiliserons également la propriété suivante, qui se déduit immédiatement de la définition A.4 pour l'opérateur $\mathcal{S}$,

$$\left\{ w_\alpha \mathbf{t}_\alpha + u \mathbf{t}_z \middle| (w_x, w_y, u) \in \mathbb{R}^3 \right\} \subset \ker \mathcal{K}_s. \tag{A.8}$$

Le noyau de $\mathcal{K}_s$ contient les trois translations selon X, Y et Z, car ces déplacements annulent le second incrément de déformation $\mathrm{d}_2\boldsymbol{E}$.

A.1.3. Développement aux ordres 0 et 1

D'après nos hypothèses II.24 sur les ordres de grandeur, la mesure de déformation s'annule à l'ordre η. Ainsi $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \Phi_1 = 0$. Ceci implique, d'après l'hypothèse II.26, qu'il existe $(\tilde{w}_\alpha(\tilde{z}), u(\tilde{z}), \tau(\tilde{z}), \gamma_\alpha(\tilde{z}))$ tels que

$$\Phi_1(\tilde{z}) = \begin{pmatrix} \tilde{w}_\alpha(\tilde{z}) \mathbf{t}_\alpha + u(\tilde{z}) \mathbf{t}_z + \tau(\tilde{z}) \boldsymbol{\vartheta}_z + \gamma_\alpha(\tilde{z}) \boldsymbol{\vartheta}_\alpha^\perp \\ -\gamma_\alpha(\tilde{z}) \eta_{\alpha\beta} \mathbf{t}_\beta \end{pmatrix}.$$

De manière similaire, nos hypothèses II.24 impliquent $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \Phi_0 = 0$, il existe donc six fonctions $(w_\alpha(Z), \underset{\sim}{u}(\tilde{z}), \underset{\sim}{\tau}(\tilde{z}), \underset{\sim}{\gamma}_\alpha(\tilde{z}))$ telles que

$$\Phi_0(\tilde{z}) = \begin{pmatrix} w_\alpha(\tilde{z}) \mathbf{t}_\alpha + \underset{\sim}{u}(\tilde{z}) \mathbf{t}_z + \underset{\sim}{\tau}(\tilde{z}) \boldsymbol{\vartheta}_z + \underset{\sim}{\gamma}_\alpha(\tilde{z}) \boldsymbol{\vartheta}_\alpha^\perp \\ -\underset{\sim}{\gamma}_\alpha(\tilde{z}) \eta_{\alpha\beta} \mathbf{t}_\beta \end{pmatrix}.$$

Ces deux expressions doivent être compatibles. Ainsi, en identifiant avec les définitions A.5 de Φ_0 et Φ_1, il vient

$$\underset{\sim}{\gamma}_\alpha(\tilde{z}) = 0 \quad -\gamma_\alpha(\tilde{z}) \eta_{\alpha\beta} = w'_\beta(\tilde{z}) \quad 0 = \underset{\sim}{u}'(\tilde{z}) \quad 0 = \underset{\sim}{\tau}'(\tilde{z}) \quad 0 = \underset{\sim}{\gamma}_\alpha{}'(\tilde{z}).$$

Comme les coefficients $(\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{\tau}, \underset{\sim}{\gamma_\alpha})$ sont des constantes, il représentent des mouvements de corps rigides qui peuvent être négligés. La solution pour $\gamma_\alpha(\tilde{z})$ est alors $\gamma_\alpha(\tilde{z}) = -\eta_{\alpha\beta} w'_\beta(\tilde{z})$.

Nous avons ainsi déterminé le déplacement à l'ordre 1 en η

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}_0(\tilde{z}) &= w_\alpha(\tilde{z})\mathbf{t}_\alpha \\ \boldsymbol{\varphi}_1(\tilde{z}) &= \left\{ \begin{array}{l} u(\tilde{z})\mathbf{t}_z + \tau(\tilde{z})\boldsymbol{\vartheta}_z + \eta_{\alpha\beta} w'_\alpha(\tilde{z})\boldsymbol{\vartheta}_\beta^\perp + \cdots \\ \quad + \tilde{w}_\alpha(\tilde{z})\mathbf{t}_\alpha \end{array} \right. \end{aligned} \tag{A.9}$$

Notons que $\tilde{w}_\alpha(\tilde{z})\mathbf{t}_\alpha$ ne joue aucun rôle dans le développement car il s'agit d'un terme sous-dominant dont nous montrerons qu'il ne contribue pas à l'énergie à l'ordre principal. Ce terme sera négligé dans un premier temps. Ainsi, la solution décrite par l'équation A.9 est la somme d'une extension axiale $u(\tilde{z})\mathbf{t}_z$, d'une torsion axiale $\tau(\tilde{z})\boldsymbol{\vartheta}_z$ et de deux mouvements de flexion autour de l'axe X (respectivement Y) $w_y(\tilde{z})\mathbf{t}_y - \eta\, w'_y(\tilde{z})\boldsymbol{\vartheta}_x^\perp$ (respectivement $w_x(\tilde{z})\mathbf{t}_x + \eta\, w'_x(\tilde{z})\boldsymbol{\vartheta}_y^\perp$).

Avec $\mathrm{d}\boldsymbol{E}_0 = \mathrm{d}\boldsymbol{E}_1 = 0$, nous avons $\mathcal{Q} \cdot \Phi_0 = \boldsymbol{\mathcal{E}}^T \cdot \mathcal{R} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{E}_0 = 0$ et de manière similaire $\mathcal{Q} \cdot \Phi_1 = 0$. Ainsi, le terme d'élasticité tangente dans le développement de l'expression des travaux virtuels commence à l'ordre η^2

$$\hat{\Phi}(\tilde{z}) \cdot \mathcal{Q} \cdot \Phi(\tilde{z}) = \eta^2 \hat{\Phi}(\tilde{z}) \cdot \mathcal{Q} \cdot (\Phi_2(\tilde{z}) + \eta\, \Phi_3(\tilde{z}) + \cdots).$$

Par ailleurs le terme de pré-contrainte n'apparaît pas aux ordres 0 et 1 en raison des hypothèses sur les ordres de grandeur II.24.

A.1.4. Développement à l'ordre 2

Si nous écrivons l'équilibre linéarisé 3-d A.1 à l'ordre η^2, il vient

$$\forall \hat{\boldsymbol{\varphi}} \quad \int_0^L \left[\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\varphi}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \cdot \mathcal{Q} \cdot \Phi_2(\tilde{z}) + \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\varphi}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \cdot \mathcal{S} \cdot \Phi_0(\tilde{z}) \right] \mathrm{d}\tilde{z} = 0. \tag{A.10}$$

Le second terme s'annule par la propriété A.8. Nous obtenons ainsi, sous une forme plus explicite

$$\forall \hat{\boldsymbol{\varphi}} \quad \int_0^L \hat{\boldsymbol{\varphi}} \cdot (\mathcal{K}_e \cdot \boldsymbol{\varphi}_2(\tilde{z}) + \mathcal{C}_e \cdot \boldsymbol{\varphi}'_1(\tilde{z}))\mathrm{d}\tilde{z} = 0. \tag{A.11}$$

Résolution

Pour une section $\mathcal{D}$ donnée, repérée par la coordonnée $\tilde{z}$, considérons les quatre fonctions vectorielles auxiliaires $\boldsymbol{\psi}_{\mathrm{ac}}^\alpha$ ($\alpha \in \{x, y\}$), $\boldsymbol{\psi}_{\mathrm{Ps}}$ et $\boldsymbol{\psi}_{\mathrm{wr}}$. Chacune d'entre elles est définie par le problème d'élasticité 2-d suivant, défini sur $\mathcal{D}$,

$$\left\{ \begin{array}{lll} \forall \hat{\boldsymbol{\varphi}} & \hat{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \left(\mathcal{K}_e \cdot \boldsymbol{\psi}_{\mathrm{ac}}^\alpha + \eta_{\alpha\beta}\, \mathcal{C}_e \cdot \boldsymbol{\vartheta}_\beta^\perp\right) = 0 & \text{courbure anticlastique,} \\ \forall \hat{\boldsymbol{\varphi}} & \hat{\boldsymbol{\varphi}} \cdot (\mathcal{K}_e \cdot \boldsymbol{\psi}_{\mathrm{Ps}} + \mathcal{C}_e \cdot \mathbf{t}_z) = 0 & \text{effet Poisson,} \\ \forall \hat{\boldsymbol{\varphi}} & \hat{\boldsymbol{\varphi}} \cdot (\mathcal{K}_e \cdot \boldsymbol{\psi}_{\mathrm{wr}} + \mathcal{C}_e \cdot \boldsymbol{\vartheta}_z)\,\mathrm{d} = 0 & \text{gauchissement.} \end{array} \right. \tag{A.12}$$

Ces fonctions représentent la courbure anti-clastique (associée à la flexion), la contraction par effet Poisson (associée à l'extension) et le gauchissement (associé à la torsion). Notons que par invariance selon $\tilde{z}$ de l'opérateur $\mathcal{Q}$, ces quatre problèmes ne dépendent pas de la coordonnée axiale. L'équation A.12 ne contient pas de dérivée selon $\tilde{z}$, ainsi les solutions $\boldsymbol{\psi}_{\mathrm{ac}}^\alpha$, $\boldsymbol{\psi}_{\mathrm{Ps}}$ et $\boldsymbol{\psi}_{\mathrm{wr}}$ sont identiques sur chaque section.

Finalement, bien que l'opérateur $\mathcal{K}_e$ soit singulier, les équations A.12 sont toujours solubles. En effet, la condition de solubilité pour $\mathcal{K}_e$ consiste à considérer un déplacement virtuel $\widehat{\varphi}$ tel que $\widehat{\varphi} \in \ker \mathcal{K}_e$. Alors, d'après A.7, un tel $\widehat{\varphi}$ est une superposition de déplacements rigides sur chaque section et $\boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \begin{pmatrix} \widehat{\varphi} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = 0$. Par conséquent, d'après la propriété A.3 de l'opérateur $\mathcal{Q}$,

$$\widehat{\varphi} \cdot (\mathcal{K} \cdot \boldsymbol{\psi}_{\mathrm{Ps}} + \mathcal{C} \cdot \mathbf{t}_z) = \left(\boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \begin{pmatrix} \widehat{\varphi} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}\right) \cdot \mathcal{R} \cdot \left(\boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi}_{\mathrm{Ps}} \\ \mathbf{t}_z \end{pmatrix}\right) = 0,$$

ce qui signifie que la condition de solubilité est satisfaite. En utilisant les relations A.12, il est possible de ré-écrire le problème A.11 sous la forme

$$\forall \widehat{\varphi} \quad \int_0^L \widehat{\varphi} \cdot \mathcal{K}_e \cdot \left(\boldsymbol{\varphi}_2(\tilde{z}) - \left(u'(\tilde{z})\boldsymbol{\psi}_{\mathrm{Ps}} + \tau'(\tilde{z})\boldsymbol{\psi}_{\mathrm{wr}} + w''_\alpha(\tilde{z})\boldsymbol{\psi}^\alpha_{\mathrm{ac}} + \tilde{w}'_\alpha(\tilde{z})\mathbf{t}_\alpha\right)\right) \mathrm{d}\tilde{z} = 0.$$

D'après la propriété A.7, la solution de ce dernier problème s'écrit

$$\boldsymbol{\varphi}_2(\tilde{z}) = \left\{ \begin{array}{l} u'(\tilde{z})\boldsymbol{\psi}_{\mathrm{Ps}} + \tau'(\tilde{z})\boldsymbol{\psi}_{\mathrm{wr}} + w''_\alpha(\tilde{z})\boldsymbol{\psi}^\alpha_{\mathrm{ac}} + \cdots \\ \quad + \tilde{u}(\tilde{z})\mathbf{t}_z + \tilde{\tau}(\tilde{z})\boldsymbol{\vartheta}_z + \tilde{\gamma}_\alpha(\tilde{z})\boldsymbol{\vartheta}^\perp_\alpha \cdots \\ \quad + \tilde{\tilde{w}}_\alpha(\tilde{z})\mathbf{t}_\alpha \end{array} \right. \tag{A.13}$$

Le première ligne de cette expression correspond à de petites corrections en déplacement, importantes pour le calcul de l'énergie du modèle 1-d car elles correspondent à des déformations de la section. Les deux lignes suivantes correspondent à des déplacements rigides sur chaque section et ne contribuent pas à l'énergie du modèle 1-d car les déformations incrémentales qui leur sont associées sont nulles.

Remarquons enfin qu'avec les hypothèses II.24 sur les ordres de grandeur, le terme de pré-contrainte associé à l'opérateur $\mathcal{S}$ dans l'équilibre linéarisé A.1 ne change pas la résolution des équations à cet ordre.

A.1.5. Développement à l'ordre 3

L'équilibre linéarisé 3-d A.1 s'écrit, à l'ordre η^3,

$$\int_0^L \left[\begin{pmatrix} \widehat{\varphi} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \cdot \mathcal{Q} \cdot \Phi_3 + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \widehat{\varphi}' \end{pmatrix} \cdot \mathcal{Q} \cdot \Phi_2 + \begin{pmatrix} \widehat{\varphi} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \cdot \mathcal{S} \cdot \Phi_1 + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \widehat{\varphi}' \end{pmatrix} \cdot \mathcal{S} \cdot \Phi_0\right] \mathrm{d}\tilde{z} \cdots$$
$$= \int_0^L \mathcal{F}_3 \cdot \widehat{\boldsymbol{\varphi}}(\tilde{z}) \mathrm{d}\tilde{z}, \tag{A.14}$$

où $\Phi_3 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varphi}_3 \\ \boldsymbol{\varphi}'_2 \end{pmatrix}$ d'après A.5. Le terme en Φ_0 s'annule immédiatement d'après la propriété A.8. La condition de solubilité pour l'inconnue $\boldsymbol{\varphi}_3$ s'exprime en considérant les déplacements virtuels $\widehat{\varphi}$ tels que $\widehat{\boldsymbol{\varphi}}(\tilde{z}) \in \ker \mathcal{K}_e$ pour tout $\tilde{z}$. Nous considérons donc des déplacements virtuels de la forme

$$\widehat{\boldsymbol{\varphi}}(\tilde{z}) = \hat{w}_\alpha(\tilde{z})\mathbf{t}_\alpha + \hat{u}(\tilde{z})\mathbf{t}_z + \hat{\tau}(\tilde{z})\boldsymbol{\vartheta}_z.$$

Le terme $\begin{pmatrix} \widehat{\varphi} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \cdot \mathcal{Q} \cdot \Phi_3$ s'annule alors entièrement et le terme $\begin{pmatrix} \widehat{\varphi} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \cdot \mathcal{S} \cdot \Phi_1$ s'annule en partie d'après A.8. Nous en déduisons alors la condition de solubilité suivante, pour tous déplacements virtuels $(\hat{w}_\alpha, \hat{u}, \hat{\tau})$

$$-\int_0^L \left[\hat{w}'_\alpha(\tilde{z})\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{t}_\alpha\end{pmatrix}\cdot\mathcal{Q}\cdot\Phi_2 + \hat{u}'(\tilde{z})\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{t}_z\end{pmatrix}\cdot\mathcal{Q}\cdot\Phi_2 + \hat{\tau}'(\tilde{z})\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \boldsymbol{\vartheta}_z\end{pmatrix}\cdot\mathcal{Q}\cdot\Phi_2\right]\mathrm{d}\tilde{z}\cdots$$
$$-\int_0^L \left[\hat{\tau}(\tilde{z})\begin{pmatrix}\boldsymbol{\vartheta}_z\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}\cdot\mathcal{S}\cdot\begin{pmatrix}\tau(\tilde{z})\boldsymbol{\vartheta}_z + \eta_{a\beta}w'_\alpha(\tilde{z})\boldsymbol{\vartheta}^\perp_\beta\\ w'_\alpha(\tilde{z})\mathbf{t}_\alpha\end{pmatrix}\right]\mathrm{d}\tilde{z}\cdots$$
$$+\int_0^L [\hat{w}_\alpha(\tilde{z})p^{[3]}_\alpha(\tilde{z}) + \hat{u}(\tilde{z})p^{[3]}_z(\tilde{z}) + \hat{\tau}(\tilde{z})q^{[3]}_z(\tilde{z})]\mathrm{d}\tilde{z} = 0, \tag{A.15}$$

où nous avons introduit la résultante des forces et des moments sur chaque section à l'ordre k,

$$\begin{aligned}
p^{[k]}_\alpha(\tilde{z}) &= \mathcal{F}_k(\tilde{z})\cdot\mathbf{t}_\alpha,\\
p^{[k]}_z(\tilde{z}) &= \mathcal{F}_k(\tilde{z})\cdot\mathbf{t}_z,\\
q^{[k]}_\alpha(\tilde{z}) &= \mathcal{F}_k(\tilde{z})\cdot\boldsymbol{\vartheta}^\perp_\alpha,\\
q^{[k]}_z(\tilde{z}) &= \mathcal{F}_k(\tilde{z})\cdot\boldsymbol{\vartheta}_z.
\end{aligned}$$

Pour $i\in\{X,Y,Z\}$, $\mathcal{F}_k(\tilde{z})\cdot\mathbf{t}_i = \iint_{\mathcal{D}} \boldsymbol{F}_k(\tilde{z})\cdot\mathbf{t}_i\,\mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y$ est l'effort résultant sur chaque section obtenu par l'intégration sur la section $\mathcal{D}$ de la densité d'efforts appliqués $\boldsymbol{F}_k(\tilde{z})$. Les trois dernières équations définissent le moment résultant sur chaque section, pour $i\in\{X,Y,Z\}$, $\mathcal{F}_k(\tilde{z})\cdot\boldsymbol{\vartheta}_i = \iint_{\mathcal{D}} \boldsymbol{F}_k(\tilde{z})\cdot\boldsymbol{\vartheta}_i\,\mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y$.

Le premier terme de la condition de solubilité A.15 s'annule. Remarquons en effet que l'on peut ré-écrire ce terme

$$\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{t}_\alpha\end{pmatrix}\cdot\mathcal{Q}\cdot\Phi_2 = \Phi_2\cdot\mathcal{Q}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{t}_\alpha\end{pmatrix} = \Phi_2\cdot\mathcal{Q}\cdot\begin{pmatrix}\eta_{\alpha\beta}\boldsymbol{\vartheta}^\perp_\beta\\ \mathbf{t}_\alpha\end{pmatrix} - \Phi_2\cdot\mathcal{Q}\cdot\begin{pmatrix}\eta_{\alpha\beta}\boldsymbol{\vartheta}^\perp_\beta\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}.$$

Dans l'équation ci-dessus, le premier terme du membre de droite s'annule car $\begin{pmatrix}\eta_{\alpha\beta}\boldsymbol{\vartheta}^\perp_\beta\\ \mathbf{t}_\alpha\end{pmatrix}$ est un mouvement rigide d'après la définition A.6, et le second terme s'annule grâce à l'équation A.10. Ainsi, en considérant le facteur de $\hat{w}_\alpha$ dans la condition de solubilité A.15, il vient

$$\forall\tilde{z}\quad p^{[3]}_\alpha(\tilde{z}) = 0.$$

Les termes restants dans la condition de solubilité A.15 s'écrivent alors

$$\forall(\hat{u},\hat{\tau})\quad -\int_0^L \left[\hat{u}'(\tilde{z})\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{t}_z\end{pmatrix}\cdot\mathcal{Q}\cdot\Phi_2(\tilde{z}) + \hat{\tau}'(\tilde{z})\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \boldsymbol{\vartheta}_z\end{pmatrix}\cdot\mathcal{Q}\cdot\Phi_2(\tilde{z})\right]\mathrm{d}\tilde{z}\cdots$$
$$-\int_0^L \left[\hat{\tau}(\tilde{z})\begin{pmatrix}\boldsymbol{\vartheta}_z\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}\cdot\mathcal{S}\cdot\begin{pmatrix}\tau(\tilde{z})\boldsymbol{\vartheta}_z + \eta_{a\beta}w'_\alpha(\tilde{z})\boldsymbol{\vartheta}^\perp_\beta\\ w'_\alpha(\tilde{z})\mathbf{t}_\alpha\end{pmatrix}\right]\mathrm{d}\tilde{z}\cdots$$
$$+\int_0^L [\hat{u}(\tilde{z})p^{[3]}_z(\tilde{z}) + \hat{\tau}(\tilde{z})q^{[3]}_z(\tilde{z})]\mathrm{d}\tilde{z} = 0. \tag{A.16}$$

Cette dernière équation définit les deux premières lignes de la matrice $\mathcal{H}$ et la première ligne de la matrice $\mathcal{P}$ dans l'expression générale du modèle réduit II.31 énoncée au chapitre II. Les deux dernières lignes de la matrice $\mathcal{H}$ et de la matrice $\mathcal{P}$ s'obtiennent en considérant l'équilibre linéarisé A.1 à l'ordre 4 en η.

A.1.6. Développement à l'ordre 4

L'équilibre linéarisé A.1 s'écrit, à l'ordre η^4,

$$\int_0^L \left[\begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{\varphi}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \cdot \mathcal{Q} \cdot \Phi_4 + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \widehat{\boldsymbol{\varphi}}' \end{pmatrix} \cdot \mathcal{Q} \cdot \Phi_3 + \begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{\varphi}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \cdot \mathcal{S} \cdot \Phi_2 + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \widehat{\boldsymbol{\varphi}}' \end{pmatrix} \cdot \mathcal{S} \cdot \Phi_1 \right] \mathrm{d}\tilde{z} \cdots = \int_0^L \mathcal{F}_4 \cdot \widehat{\boldsymbol{\varphi}}(\tilde{z}) \mathrm{d}\tilde{z}, \tag{A.17}$$

où $\Phi_4 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varphi}_4 \\ \boldsymbol{\varphi}_3' \end{pmatrix}$. La condition de solubilité pour l'inconnue $\boldsymbol{\varphi}_4$ est alors obtenue en considérant une famille particulière de déplacements virtuels

$$\widehat{\boldsymbol{\varphi}}(\tilde{z}) = \hat{w}_\alpha(\tilde{z}) \mathbf{t}_\alpha.$$

Pour un tel déplacement virtuel, le premier et le troisième terme dans l'intégrale précédente s'annulent, d'après les propriétés A.7 et A.8, et il reste ainsi

$$(\forall \hat{w}_\alpha) \quad -\int_0^L \left[\hat{w}_\alpha'(\tilde{z}) \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{t}_\alpha \end{pmatrix} \cdot \mathcal{Q} \cdot \Phi_3(\tilde{z}) + \hat{w}_\alpha'(\tilde{z}) \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{t}_\alpha \end{pmatrix} \cdot \mathcal{S} \cdot \Phi_1(\tilde{z}) \right] \mathrm{d}\tilde{z} \cdots + \int_0^L \hat{w}_\alpha(\tilde{z}) p_\alpha^{[4]}(\tilde{z}) \mathrm{d}\tilde{z} = 0.$$

Afin d'éviter le calcul de Φ_3, nous combinons cette équation avec l'équation obtenue en remplaçant $\widehat{\boldsymbol{\varphi}}(\tilde{z}) = \hat{w}_\alpha'(\tilde{z}) \eta_{\alpha\beta} \boldsymbol{\vartheta}_\beta^\perp$ dans A.14. Il vient ainsi

$$-\int_0^L \left[\hat{w}_\alpha'(\tilde{z}) \begin{pmatrix} \eta_{\alpha\beta} \boldsymbol{\vartheta}_\beta \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \cdot \mathcal{Q} \cdot \Phi_3 + \hat{w}_\alpha''(\tilde{z}) \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \eta_{\alpha\beta} \boldsymbol{\vartheta}_\beta^\perp \end{pmatrix} \cdot \mathcal{Q} \cdot \Phi_2 \right] \mathrm{d}\tilde{z} \cdots - \int_0^L \left[\hat{w}_\alpha'(\tilde{z}) \begin{pmatrix} \eta_{\alpha\beta} \boldsymbol{\vartheta}_\beta^\perp \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \cdot \mathcal{S} \cdot \Phi_1 \right] \mathrm{d}\tilde{z} + \int_0^L \hat{w}_\alpha'(\tilde{z}) \eta_{\alpha\beta} q_\beta^{[3]}(\tilde{z}) \mathrm{d}\tilde{z} = 0. \tag{A.18}$$

Notons que $\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{t}_\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_{\alpha\beta} \boldsymbol{\vartheta}_\beta \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ est un mouvement de corps rigide vérifiant la propriété A.6 et que $\begin{pmatrix} \mathbf{t}_z \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ est dans le noyau de $\mathcal{S}$, d'après la propriété A.8. Il vient ainsi

$$(\forall \hat{w}_\alpha) \quad -\int_0^L \left[\hat{w}_\alpha''(\tilde{z}) \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \eta_{\alpha\beta} \boldsymbol{\vartheta}_\beta^\perp \end{pmatrix} \cdot \mathcal{Q} \cdot \Phi_2 \right] \mathrm{d}\tilde{z} \cdots - \int_0^L \left[\hat{w}_\alpha'(\tilde{z}) \begin{pmatrix} \eta_{\alpha\beta} \boldsymbol{\vartheta}_\beta^\perp \\ \mathbf{t}_\alpha \end{pmatrix} \cdot \mathcal{S} \cdot \begin{pmatrix} \tau(Z) \boldsymbol{\vartheta}_Z + \eta_{\alpha\beta} w_\alpha'(\tilde{z}) \boldsymbol{\vartheta}_\beta^\perp \\ w_\alpha'(\tilde{z}) \mathbf{t}_\alpha \end{pmatrix} \right] \mathrm{d}\tilde{z} \cdots + \int_0^L (\hat{w}_\alpha(\tilde{z}) p_\alpha^{[4]}(\tilde{z}) + \hat{w}_\alpha'(\tilde{z}) \eta_{\alpha\beta} q_\beta^{[3]}(\tilde{z})) \mathrm{d}\tilde{z} = 0. \tag{A.19}$$

Il est facile de vérifier *a posteriori* que les termes sous-dominants en $\tilde{w}_\alpha$, $\tilde{u}$, $\tilde{\tau}$, $\tilde{\gamma}_\alpha$ et $\tilde{\tilde{w}}_\alpha$ que nous avions négligés dans les équations A.9 et A.13 ne jouent pas de rôle dans les équations à ces ordres.

A.1.7. Modèle 1-d

Les équations A.16 et A.19 définissent le modèle 1-d suivant, énoncé dans le chapitre II,

$$\forall(\hat{w}_\alpha,\hat{u},\hat{\tau}) \quad -\int_0^L \begin{pmatrix}\hat{u}'\\ \hat{\tau}'\\ \hat{w}_x''\\ \hat{w}_y''\end{pmatrix}\cdot\mathcal{H}\cdot\begin{pmatrix}u'\\ \tau'\\ w_x''\\ w_y''\end{pmatrix}\mathrm{d}\tilde{z}\cdots$$
$$-\int_0^L \begin{pmatrix}\hat{\tau}\\ \hat{w}_x'\\ \hat{w}_y'\end{pmatrix}\cdot\mathcal{P}\cdot\begin{pmatrix}\tau\\ w_x'\\ w_y'\end{pmatrix}\mathrm{d}\tilde{z}+\int_0^L \mathcal{G}(\tilde{z})\cdot\begin{pmatrix}\hat{u}\\ \hat{\tau}\\ \hat{w}_x\\ \hat{w}_y\\ \hat{w}_x'\\ \hat{w}_y'\end{pmatrix}\mathrm{d}\tilde{z}=0. \tag{A.20}$$

Dans cette équation le chargement 1-d $\mathcal{G}(\tilde{z})$ se calcule avec

$$\mathcal{G}(\tilde{z})=\begin{pmatrix}p_z^{[3]}(\tilde{z})\\ q_z^{[3]}(\tilde{z})\\ p_x^{[4]}(\tilde{z})\\ p_y^{[4]}(\tilde{z})\\ q_y^{[3]}(\tilde{z})\\ -q_x^{[3]}(\tilde{z})\end{pmatrix}, \tag{A.21}$$

et la matrice des modules élastiques $\mathcal{H}$ est obtenue par identification

$$\mathcal{H}=\begin{pmatrix}\mathbf{t}_z\cdot\mathcal{T}\cdot\mathbf{t}_z & \mathbf{t}_z\cdot\mathcal{T}\cdot\boldsymbol{\vartheta}_z & -\mathbf{t}_z\cdot\mathcal{T}\cdot\boldsymbol{\vartheta}_y^\perp & \mathbf{t}_z\cdot\mathcal{T}\cdot\boldsymbol{\vartheta}_x^\perp\\ \boldsymbol{\vartheta}_z\cdot\mathcal{T}\cdot\mathbf{t}_z & \boldsymbol{\vartheta}_z\cdot\mathcal{T}\cdot\boldsymbol{\vartheta}_z & -\boldsymbol{\vartheta}_z\cdot\mathcal{T}\boldsymbol{\vartheta}_y^\perp & \boldsymbol{\vartheta}_z\cdot\mathcal{T}\cdot\boldsymbol{\vartheta}_x^\perp\\ -\boldsymbol{\vartheta}_y^\perp\cdot\mathcal{T}\cdot\mathbf{t}_z & -\boldsymbol{\vartheta}_y^\perp\cdot\mathcal{T}\cdot\boldsymbol{\vartheta}_z & \boldsymbol{\vartheta}_y^\perp\cdot\mathcal{T}\cdot\boldsymbol{\vartheta}_y^\perp & -\boldsymbol{\vartheta}_y^\perp\cdot\mathcal{T}\cdot\boldsymbol{\vartheta}_x^\perp\\ \boldsymbol{\vartheta}_x^\perp\cdot\mathcal{T}\cdot\mathbf{t}_z & \boldsymbol{\vartheta}_x^\perp\cdot\mathcal{T}\cdot\boldsymbol{\vartheta}_z & -\boldsymbol{\vartheta}_x^\perp\cdot\mathcal{T}\cdot\boldsymbol{\vartheta}_y^\perp & \boldsymbol{\vartheta}_x^\perp\cdot\mathcal{T}\cdot\boldsymbol{\vartheta}_x^\perp\end{pmatrix}, \tag{A.22}$$

où $\mathcal{T}$ représente l'opérateur bilinéaire symétrique

$$\mathcal{T}=\mathcal{M}_e-\mathcal{C}_e^T\cdot\mathcal{K}_e^{-1}\cdot\mathcal{C}_e. \tag{A.23}$$

Finalement, la matrice des pré-contraintes $\mathcal{P}$ s'écrit, d'après la définition A.4 de l'opérateur $\mathcal{S}$,

$$\mathcal{P}_{ij}=\iint_{\mathcal{D}}\boldsymbol{\Sigma}_0:\mathrm{d}_2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\Theta}_i,\boldsymbol{\Theta}_j)\,\mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y, \tag{A.24}$$

où $\boldsymbol{\Sigma}_0$ est le tenseur des contraintes 3-d pour la solution homogène et $i\in\{1,2,3\}$ avec $\boldsymbol{\Theta}_1=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\vartheta}_z\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\Theta}_2=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\vartheta}_x^\perp\\ \mathbf{t}_y\end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{\Theta}_3=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\vartheta}_y^\perp\\ -\mathbf{t}_x\end{pmatrix}$.

L'équation A.20 permet de calculer le modèle 1-d. Les relations A.21, A.22, A.23 et A.24 permettent de calculer tous les termes intervenant dans ce modèle (correspondant respectivement aux efforts appliqués, aux modules tangents et au terme de pré-contrainte).

Dans l'expression A.23, $\mathcal{K}_e^{-1}$ désigne le pseudo-inverse de l'opérateur singulier $\mathcal{K}_e$. D'après la propriété A.7, les valeurs prises par l'opérateur $\mathcal{K}_e^{-1}$ sont déterminées à un déplacement de corps rigide près : $\mathbf{t}_\alpha$, $\mathbf{t}_z$ et $\boldsymbol{\vartheta}_z$; ceci est sans importance étant donné que ces déplacements de corps rigide s'annulent une fois multipliés à gauche par $\mathcal{C}_e^T$ dans la définition de $\mathcal{T}$ ci-dessus.

Ainsi, en partant de l'équilibre linéarisé 3-d A.1 et des hypothèses II.24 sur les ordres de grandeur, nous obtenons un modèle réduit applicable à une grande variété de situations pratiques suivant la géométrie, le comportement du matériau et/ou la pré-contrainte imposée. Ce raisonnement peut être généralisé au cas où il existe une solution homogène lentement variable suivant la coordonnée axiale ou si la géométrie de la section ou les propriété d'élasticité tangente varient lentement suivant cette coordonnée. Les opérateurs $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{S}$ définissant l'équilibre linéarisé 3-d A.1 dépendent alors de Z. Les fonctions auxiliaires $\psi_{\mathrm{ac}}^{\alpha}$ $(\alpha \in \{x, y\})$, ψ_{Ps} doivent être calculées pour chaque $\tilde{z}$ et les opérateurs $\mathcal{H}$ et $\mathcal{P}$ dépendent alors de la coordonnée axiale.

Une application détaillée de ce modèle dans le cas d'un solide prismatique homogène formé d'un matériau néo-Hookéen est présentée dans le chapitre I § II.3. La dernière section de cette annexe est dédiée à l'étude d'une situation pour laquelle les hypothèses II.24 sont différentes, ce qui donne lieu à la dérivation d'un modèle de poutre à courbure naturelle, dont l'utilisation est discutée dans le chapitre III.

Le lecteur est invité à se référer à cette annexe pour compléter la lecture du chapitre concerné.

A.2 Modèle de poutre avec courbure naturelle

Dans cette section, nous dérivons un modèle de poutre à courbure naturelle utilisé pour décrire une poutre soumise à une forte pré-contrainte axiale, hétérogène dans sa section, ce qui correspond au problème étudié dans le chapitre III. Ce nouveau modèle est construit en introduisant la pré-contrainte à l'ordre η dans les hypothèses II.24.

Nous étudions ici l'effet d'une pré-contrainte uni-axiale hétérogène dans la section $\mathbf{\Sigma}_0^{\mathrm{het}} = \mathrm{Diag}(0, 0, \mathbf{\Sigma}_0^{\mathrm{het}\perp}(X, Y))$, telle que $\iint_{\mathcal{D}} \mathbf{\Sigma}_0^{\mathrm{het}}(X, Y)\mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y = 0$, d'ordre η c'est à dire $\mathbf{\Sigma}_0^{\mathrm{het}\perp} = \mathcal{O}(\eta)$. La partie homogène de la pré-contrainte est supposée d'ordre $\mathbf{\Sigma}_0^{\mathrm{hom}} = \mathcal{O}(\eta^2)$ selon l'hypothèse classique énoncée au § A.1. Dans la suite de cette section, nous utiliserons les simplifications et les arguments présentés au § A.1 et nous ne discuterons que les modifications apportées par l'introduction de $\mathbf{\Sigma}_0^{\mathrm{het}\perp} = \mathcal{O}(\eta)$.

D'après la définition A.4, la pré-contrainte hétérogène étant purement axiale, l'opérateur $\mathcal{S}^{\mathrm{het}}$ est diagonal par blocs et sa composante $\mathcal{K}_{\mathcal{S}}^{\mathrm{het}}$ dans cette décomposition est identiquement nulle

$$\mathcal{S}^{\mathrm{het}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{M}_s^{\mathrm{het}} \end{pmatrix}. \tag{A.25}$$

À l'ordre 0 en η la résolution est identique au § A.1 et la solution $\boldsymbol{\varphi}_0$ est décrite par l'équation A.9. Un terme supplémentaire apparaît par rapport aux équations § A.1 à l'ordre η

$$\begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{\varphi}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \cdot \mathcal{S}^{\mathrm{het}} \cdot \Phi_0(\tilde{z}).$$

Ce terme s'annule par la propriété A.8 et la solution $\boldsymbol{\varphi}_1$ est décrite par l'équation A.9 comme dans le cas classique.

A.2.1. Développement à l'ordre 2

Le principe des travaux virtuels à l'ordre 2 s'écrit, en négligeant le terme en $\mathcal{S}^{\text{hom}}$ déjà traité au § A.1,

$$\forall\hat{\varphi} \quad \int_0^L \begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{\varphi}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \cdot \mathcal{Q} \cdot \Phi_2(\tilde{z}) + \begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{\varphi}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \cdot \mathcal{S}^{\text{het}} \cdot \Phi_1(\tilde{z}) + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \widehat{\boldsymbol{\varphi}}' \end{pmatrix} \cdot \mathcal{S}^{\text{het}} \cdot \Phi_0(\tilde{z})\,\mathrm{d}\tilde{z} = 0,$$

où le dernier terme s'annule par la propriété A.8. Le second terme s'annule également d'après la forme de $\mathcal{S}^{\text{het}}$, voir équation A.25. La résolution à l'ordre η^2 est donc identique au § A.1.

A.2.2. Développement à l'ordre 3

Deux termes supplémentaires apparaissent dans le membre de gauche de l'expression A.14 du principe des travaux virtuels à l'ordre η^3

$$\int_0^L \left[\begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{\varphi}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \cdot \mathcal{S}^{\text{het}} \cdot \Phi_2 + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \widehat{\boldsymbol{\varphi}}' \end{pmatrix} \cdot \mathcal{S}^{\text{het}} \cdot \Phi_1 \right] \mathrm{d}\tilde{z}. \tag{A.26}$$

Le premier terme de l'expression ci-dessus s'annule d'après A.25. La condition de solubilité s'exprime en considérant les déplacements virtuels de la forme

$$\widehat{\boldsymbol{\varphi}}(\mathrm{d}\tilde{z}) = \hat{w}_\alpha(\mathrm{d}\tilde{z})\mathbf{t}_\alpha + \hat{u}(\mathrm{d}\tilde{z})\mathbf{t}_z + \hat{\tau}(\mathrm{d}\tilde{z})\boldsymbol{\vartheta}_z,$$

dans le principe des travaux virtuels à l'ordre η^3 (équations A.14+A.26). Il vient ainsi, en rassemblant tous les termes des équations A.14+A.26 dans un seul membre et en considérant uniquement les termes associés à la pré-contrainte inhomogène,

$$\begin{aligned} -\int_0^L \left[\hat{w}'_\alpha(\tilde{z}) \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{t}_\alpha \end{pmatrix} \cdot \mathcal{S}^{\text{het}} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varphi}_1(\tilde{z}) \\ \boldsymbol{\varphi}'_0(\tilde{z}) \end{pmatrix} \right] \mathrm{d}\tilde{z} \cdots \\ -\int_0^L \left[\hat{u}'(\tilde{z}) \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{t}_z \end{pmatrix} \cdot \mathcal{S}^{\text{het}} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varphi}_1(\tilde{z}) \\ \boldsymbol{\varphi}'_0(\tilde{z}) \end{pmatrix} + \hat{\tau}'(\tilde{z}) \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\vartheta}_z \end{pmatrix} \cdot \mathcal{S}^{\text{het}} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varphi}_1(\tilde{z}) \\ \boldsymbol{\varphi}'_0(\tilde{z}) \end{pmatrix} \right] \mathrm{d}\tilde{z}. \end{aligned} \tag{A.27}$$

Les autres termes restent inchangés par rapport à l'équation A.16 obtenue avec les hypothèses classiques dans la première section de cette annexe. Les deux premiers termes de l'expression A.27 s'annulent en remarquant que l'on a, d'après la définition générale A.4 de l'opérateur $\mathcal{S}$,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{t}_i \end{pmatrix} \cdot \mathcal{S}^{\text{het}} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{t}_j \end{pmatrix} = \iint_{\mathcal{D}} \mathbf{t}_j \cdot \mathbf{t}_i \,\boldsymbol{\Sigma}_0^{\perp} \mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y, \tag{A.28}$$

pour tout $(i,j) \in \{x,y,z\}$. Finalement l'expression A.27 se réduit à

$$-\int_0^L \left[\hat{\tau}'\, w'_\alpha(\tilde{z})\, \boldsymbol{\vartheta}_z \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{S}}^{\text{het}} \cdot \mathbf{t}_\alpha \right] \mathrm{d}\tilde{z}. \tag{A.29}$$

Ce terme définit une correction à l'équation A.16 et modifie ainsi la seconde ligne de l'expression générale du modèle réduit A.20. Les deux dernières lignes de l'expression A.20 sont corrigées par une contribution de la pré-contrainte hétérogène $\mathcal{S}^{\text{het}}$ que nous obtenons en considérant l'équilibre linéarisé A.1 à l'ordre 4 en η.

Ces corrections sont finalement rassemblées dans une nouvelle matrice $\mathcal{N}$ qui entrera dans la définition du nouveau modèle réduit III.5 que nous énoncerons plus bas.

A.2.3. Développement à l'ordre 4

Deux termes supplémentaires apparaissent dans le membre de gauche de l'équation A.17 du principe des travaux virtuels à l'ordre η^4

$$\int_0^L \left[\left(\begin{array}{c} \widehat{\boldsymbol{\varphi}} \\ \mathbf{0} \end{array} \right) \cdot \mathcal{S}^{\text{het}} \cdot \Phi_3 + \left(\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \widehat{\boldsymbol{\varphi}}' \end{array} \right) \cdot \mathcal{S}^{\text{het}} \cdot \Phi_2 \right] \mathrm{d}\tilde{z}. \tag{A.30}$$

Le second terme s'annule automatiquement d'après A.25. Considérons la famille de déplacements virtuels $\widehat{\boldsymbol{\varphi}}(\tilde{z}) = \hat{w}_\alpha(\tilde{z})\mathbf{t}_\alpha$. Si l'on rassemble tous les termes de A.17+A.30 dans un seul membre il vient, en considérant uniquement les termes issus de A.30 associés à la pré-contrainte inhomogène,

$$-\int_0^L \hat{w}'_\alpha(\tilde{z}) \left(\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{t}_\alpha \end{array} \right) \cdot \mathcal{S}^{\text{het}} \cdot \left(\begin{array}{c} \boldsymbol{\varphi}_2(\tilde{z}) \\ \boldsymbol{\varphi}'_1(\tilde{z}) \end{array} \right) \mathrm{d}\tilde{z}.$$

Les autres termes de l'équation A.17 restent inchangés. D'après l'expression A.4 de l'opérateur $\mathcal{S}$, voir équation A.28, la plupart des termes de cette dernière expression s'annulent et il reste finalement

$$-\int_0^L \hat{w}'_\alpha(\tilde{z})\, \tau'(\tilde{z})\, \mathbf{t}_\alpha \cdot \mathcal{M}^{\text{het}}_{\mathcal{S}} \cdot \boldsymbol{\vartheta}_z \,\mathrm{d}\tilde{z}. \tag{A.31}$$

Afin d'éviter le calcul de Φ_3 dans A.17+A.31, nous combinons cette équation avec l'équation obtenue en remplaçant $\widehat{\boldsymbol{\varphi}}(\tilde{z}) = \hat{w}'_\alpha(\tilde{z})\eta_{\alpha\beta}\boldsymbol{\vartheta}^\perp_\beta$ dans A.14+A.29, comme précédemment. Un terme supplémentaire apparaît par rapport à l'équation A.18, lié à la pré-contrainte hétérogène $\mathcal{S}^{\text{het}}$,

$$-\int_0^L \left[\hat{w}''_\alpha(\tilde{z}) \left(\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \eta_{\alpha\beta}\boldsymbol{\vartheta}^\perp_\beta \end{array} \right) \cdot \mathcal{S}^{\text{het}} \cdot \Phi_1 \right] \mathrm{d}\tilde{z}.$$

En combinant la définition A.4 de $\mathcal{S}$ et la forme de la pré-contrainte $\boldsymbol{\Sigma}_0^{\text{het}} = \mathrm{Diag}(0, 0, \boldsymbol{\Sigma}_0^{\text{het}\perp}(X, Y))$, ce terme se ré-écrit

$$\left(\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \eta_{\alpha\beta}\boldsymbol{\vartheta}^\perp_\beta \end{array} \right) \cdot \mathcal{S}^{\text{het}} \cdot \left(\begin{array}{c} \boldsymbol{\varphi}_1 \\ \boldsymbol{\varphi}'_0 \end{array} \right) = \iint_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\Sigma}_0^{\text{het}\perp} \eta_{\alpha\beta}\boldsymbol{\vartheta}^\perp_\beta \cdot \boldsymbol{\varphi}'_0 \,\mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y.$$

Enfin, avec la forme de la solution $\boldsymbol{\varphi}_0$ décrite par A.9, $\boldsymbol{\varphi}_0(\tilde{z}) = w_\alpha(\tilde{z})\mathbf{t}_\alpha$, le produit scalaire s'annule dans l'expression précédente.

Finalement les équations A.16 et A.19 corrigées par les termes associés à la pré-contrainte hétérogène A.29 et A.31 définissent le modèle 1-d suivant, énoncé dans le chapitre III,

$$\forall(\hat{w}_\alpha, \hat{u}, \hat{\tau}) \quad -\int_0^L \begin{pmatrix} \hat{u}' \\ \hat{\tau}' \\ \hat{w}_x'' \\ \hat{w}_y'' \end{pmatrix} \cdot \mathcal{H} \cdot \begin{pmatrix} u' \\ \tau' \\ w_x'' \\ w_y'' \end{pmatrix} \mathrm{d}\tilde{z} - \int_0^L \begin{pmatrix} \hat{\tau}' \\ \hat{w}_x' \\ \hat{w}_y' \end{pmatrix} \cdot \mathcal{N} \cdot \begin{pmatrix} \tau' \\ w_x' \\ w_y' \end{pmatrix} \mathrm{d}\tilde{z} \cdots$$

$$- \int_0^L \begin{pmatrix} \hat{\tau} \\ \hat{w}_x' \\ \hat{w}_y' \end{pmatrix} \cdot \mathcal{P} \cdot \begin{pmatrix} \tau \\ w_x' \\ w_y' \end{pmatrix} \mathrm{d}\tilde{z} + \int_0^L \mathcal{G} \cdot \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{\tau} \\ \hat{w}_x \\ \hat{w}_y \\ \hat{w}_x' \\ \hat{w}_y' \end{pmatrix} \mathrm{d}\tilde{z} = 0,$$

où les opérateurs $\mathcal{H}$, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{G}$ introduits au § A.1 décrivent les effets respectifs de l'élasticité tangente, de la précontrainte axiale homogène (d'ordre η^2) et du chargement extérieur. Le nouvel opérateur $\mathcal{N}$ est antisymétrique et décrit l'effet de la pré-contrainte hétérogène $\mathcal{S}^{\text{het}}$. Cet opérateur prend la forme

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\vartheta}_z \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{S}}^{\text{het}} \cdot \mathbf{t}_x & \boldsymbol{\vartheta}_z \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{S}}^{\text{het}} \cdot \mathbf{t}_y \\ \mathbf{t}_x \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{S}}^{\text{het}} \cdot \boldsymbol{\vartheta}_z & 0 & 0 \\ \mathbf{t}_y \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{S}}^{\text{het}} \cdot \boldsymbol{\vartheta}_z & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notons qu'il terme introduit un couplage entre la torsion virtuelle et la courbure réelle (respectivement entre la courbure virtuelle et la torsion réelle), susceptible de donner lieu à un mode de flambement en hélice.

Une application de ce modèle au cas du flambement en hélice est proposée dans le chapitre III. Nous montrons que pour un barreau néo-Hookéen homogène soumis à une pré-contrainte axiale constante par morceaux dans sa section, l'équation obtenue avec ce modèle est identique à celle que l'on dérive couramment avec un modèle de poutre 1-d à courbure naturelle.

Annexe B

Article paru dans Phys. Rev. Lett. *Buckling of an elastic ridge : competition between wrinkles and creases*

Buckling of an Elastic Ridge: Competition between Wrinkles and Creases

C. Lestringant,[1] C. Maurini,[1] A. Lazarus,[1] and B. Audoly[2]
[1]Sorbonne Universités, UPMC Univ Paris 06, CNRS, UMR 7190, Institut d'Alembert, F-75005 Paris, France
[2]Laboratoire de Mécanique des Solides, CNRS, UMR 7649, Département de Mécanique, École Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, France

(Received 25 January 2017; published 21 April 2017)

We investigate the elastic buckling of a triangular prism made of a soft elastomer. A face of the prism is bonded to a stiff slab that imposes an average axial compression. We observe two possible buckling modes which are localized along the free ridge. For ridge angles ϕ below a critical value $\phi^\star \approx 90°$, experiments reveal an extended sinusoidal mode, while for ϕ above $\phi^\star$, we observe a series of creases progressively invading the lateral faces starting from the ridge. A numerical linear stability analysis is set up using the finite-element method and correctly predicts the sinusoidal mode for $\phi \leq \phi^\star$, as well as the associated critical strain $\epsilon_c(\phi)$. The experimental transition at $\phi^\star$ is found to occur when this critical strain $\epsilon_c(\phi)$ attains the value $\epsilon_c(\phi^\star) = 0.44$ corresponding to the threshold of the subcritical surface creasing instability. Previous analyses have focused on elastic crease patterns appearing on planar surfaces, where the role of scale invariance has been emphasized; our analysis of the elastic ridge provides a different perspective, and reveals that scale invariance is not a sufficient condition for localization.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.118.165501

In extended systems, elastic instabilities generally produce smooth patterns having a well-defined wavelength. There are numerous examples involving an elastic beam [1] or a thin film [2–4] on an elastic foundation, a bulk elastic material with inhomogeneous elastic properties [5], or rodlike solids with large incompatible strain [6–8], with applications ranging from morphogenesis [1] to the active control of surface properties [9]. An important exception to this rule is when the bifurcation problem has no intrinsic length scale, as happens for a compressed hyperelastic block, a problem considered by Biot [10,11]: a continuum of linear modes appears simultaneously at the bifurcation threshold with all possible wavelengths. This free-surface instability has been characterized numerically and experimentally only recently, and was found to be subcritical, localized, and nonlinear in essence [12–20]. In spite of recent progress [21,22], there is no simple and systematic theoretical argument that explains why and in what circumstances localized creasing patterns are to be observed, nor whether scale invariance is a sufficient condition for localization.

Here, we analyze a variant of Biot's compressed elastic block, in which we replace the half-space geometry by a prism. The ridge angle ϕ brings in an additional parameter. Experimentally, we find buckling patterns reminiscent of creasing when the prism is flat enough (ϕ close to 180°), consistent with prior work [12–20]. For acute enough ridge angles, however, a smooth buckling mode develops near the ridge, with a well-defined wavelength. We carry out a linear stability analysis of the compressed hyperelastic prism and investigate the competition between smooth and localizing buckling modes.

In our experiments, we use an isosceles triangular prism made of a silicon elastomer (Ecoflex). This elastomer is nearly incompressible with Young's modulus $E_p \approx 0.06 \pm 0.02$ MPa. Its lower face is bonded to a parallepipedic silicone block made of vinylpolysiloxane whose Young's modulus is ~20 times larger, $E_b \approx 1.3 \pm 0.05$ MPa. Both the prism and the base are obtained by casting liquid polymer into molds made of PMMA obtained by laser cutting. We stretch the base to a length L_0 prior to gluing the prism onto it; see Fig. 1. By bringing the ends of the base closer to one another, we induce a

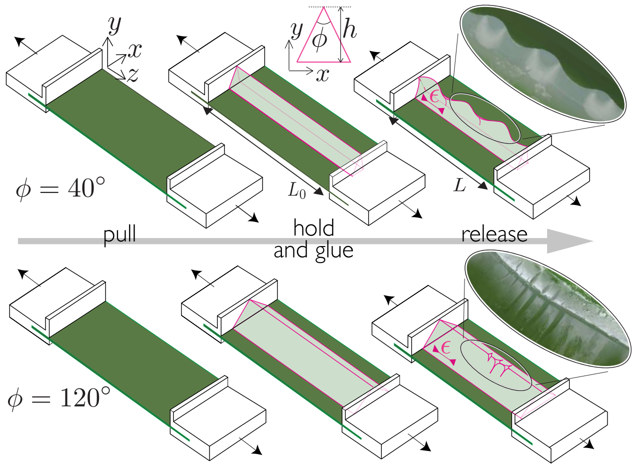

FIG. 1. Sketch of the experimental setup. To set the prism in axial compression, we first stretch the substrate, then glue the prism to the substrate while keeping the substrate in tension, and finally release the substrate. This induces buckling of the prism: extended wrinkling (top row, $\phi = 40°$) and localized creasing (bottom row, $\phi = 120°$) are observed, depending on the value of ϕ. Insets: Experimental pictures.

compressive axial strain $\epsilon = L_0 - L/L_0$ in the prism that depends on the current length $L < L_0$ of the base. At a critical value of the strain ϵ_c, an instability is observed which is localized along the free ridge of the prism, opposite to the base. Using different molds we repeat the buckling experiment for different ridge angles ϕ in the range 20°–120°. The height h of the triangular prism is chosen at least 10 times smaller than L_0, so we can ignore finite-length effects in the analysis.

For ϕ smaller than a critical value $\phi^\star \approx 90°$, we observe a smooth, extended buckling mode whereby the ridge bends out of the plane of symmetry of the prism [see Fig. 2(a)]; we will refer to this as antisymmetric wrinkling (AW). For a given angle $\phi \leq \phi^\star$, the wavelength λ scales close to linearly with the height of the prism h for the range of heights tested in the experiments; see the inset of Fig. 2.

For $\phi \geq \phi^\star$ the buckling mode is entirely different [see Fig. 2(c)]: localized creases are initiated at the ridge. As the strain is increased beyond ϵ_c, more creases are formed and they spread along the lateral faces toward the base. The gap between successive creases does not appear to be regular. This buckling mode will be referred to as surface creasing (SC).

Overall, ϵ_c increases steadily with the ridge angle ϕ until it reaches a plateau at $\epsilon_c \approx 0.42$ for $\phi = \phi^\star$, where the nature of the buckling mode changes; see Fig. 2(d). This value is lower than the critical Biot strain, $\epsilon_{\rm Biot} = 0.55$, calculated by Biot [10,11] for the surface instability, as explained below.

We set up a bifurcation analysis, with the aim of characterizing the instabilities and explaining the competition between the localized and extended buckling modes. The system is modeled as an infinitely long prism with triangular cross section $\mathcal{D}$ made of a hyperelastic material. Its elastic energy density is denoted by $W_{3D}(\boldsymbol{E})$, where $\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{F}^T \cdot \boldsymbol{F} - 1)$ is the strain tensor, $\boldsymbol{F} = \partial(x,y,z)/\partial(X,Y,Z)$ is the transformation gradient, (X, Y, Z) are the coordinates in reference configuration with Z aligned with the prism axis and Y along the axis of symmetry of the triangular cross section $\mathcal{D}$, and (x, y, z) are the coordinates in deformed configuration. The expression of $W_{3D}(\boldsymbol{E})$ reflects the choice of a material law; we use a Gent model, as described in the Supplemental Material (SM) [23], with a choice of material parameters that makes this constitutive law practically equivalent to an incompressible neo-Hookean model. Working in the framework of finite elasticity, we denote by $\boldsymbol{\varphi}(X,Y,Z) = (x,y,z) - (X,Y,Z)$ the displacement. The nonlinear equilibrium is obtained by the principle of virtual work as

$$\forall \hat{\boldsymbol{\varphi}}(X,Y,Z), \quad \int_0^{L_0} \iint_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\Sigma} : (\boldsymbol{F}^T \cdot \hat{\boldsymbol{F}}) dX dY dZ = 0, \tag{1}$$

where $\boldsymbol{\Sigma} = \partial W_{3D}/\partial \boldsymbol{E}$ denotes the stress and $\hat{\boldsymbol{F}} = \partial\hat{\boldsymbol{\varphi}}/\partial(X,Y,Z)$ the virtual increment of deformation

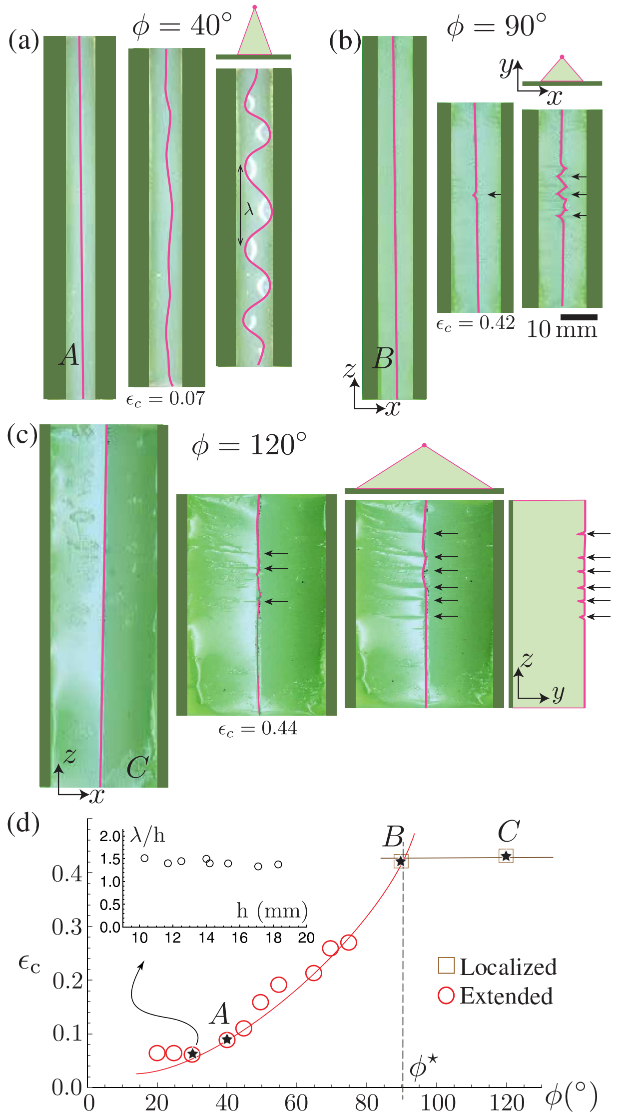

FIG. 2. Experimental results. (a)–(c) Top views in the (x, z) plane. Each set of pictures is for increasing axial strain ϵ. (a) $\phi = 40°$, $h = 10$ mm, and $L_0 = 100$ mm; (b) $\phi = 90°$, $h = 5$ mm, and $L_0 = 100$ mm; (c) $\phi = 120°$, $h = 10$ mm, and $L_0 = 100$ mm. Black arrows highlight the creases visible on the faces. (d) Critical strain $\epsilon_c(\phi)$. The thin, hand-drawn curves reveal the trend of the experimental data points. Inset: Rescaled wavelength of the extended mode λ/h for $\phi = 30°$.

gradient. As the average strain ϵ is imposed by the base, we consider only admissible virtual displacements $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ whose incremental axial strain is zero on average. Taking advantage of the fact that the buckling patterns are localized near the ridge in the experiments, we simplify the boundary conditions at the interface with the base, which we replace by a free boundary.

The unbuckled solution is in a state of homogeneous "simple" compression, as described by $\boldsymbol{\varphi}_0^\epsilon = \eta(\epsilon)(X\mathbf{e}_x + Y\mathbf{e}_y) - \epsilon Z \mathbf{e}_z$. Here, $\eta(\epsilon)$ captures the dilation of the cross section by Poisson's effect and is found from the constitutive law by solving $(\partial W_{3D}/\partial\eta)(\epsilon,\eta(\epsilon)) = 0$. We consider a small perturbation $\boldsymbol{\varphi}_1$, to this invariant solution $\boldsymbol{\varphi}_1 = [\xi_x(X,Y)\mathbf{e}_x + \xi_y(X,Y)\mathbf{e}_y + i\xi_z(X,Y)\mathbf{e}_z]e^{iqZ}$ in the form of a pure Fourier mode with wave number q. The virtual displacement $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ is sought in a similar form. Upon linearization and discretization using the finite-element method, the equation of equilibrium [Eq. (1)] takes the form

$$\forall\hat{\boldsymbol{\xi}},\qquad \hat{\boldsymbol{\xi}}\cdot(K_\epsilon + qC_\epsilon + q^2 M_\epsilon)\cdot\boldsymbol{\xi}_1 = 0, \tag{2}$$

where $\boldsymbol{\xi}_1 = (\xi_x,\xi_y,\xi_z)$ and $\hat{\boldsymbol{\xi}} = (\hat{\xi}_x,\hat{\xi}_y,\hat{\xi}_z)$ are two vectors collecting the Fourier amplitudes of the real and virtual nodal displacements on the cross section $\mathcal{D}$. The Fourier analysis thus yields a 2D eigenvalue problem in which the third dimension enters through the wave number q only. For details of this 2D formulation and of its implementation, see SM [23] and Ref. [8]. To discretize and solve the eigenvalue problem, we make use of the finite-element library FENICS [26] and the SLEPC library [27].

Equation (2) is invariant when a homothety is applied to both the solution and the wavelength $2\pi/q$; in addition, the domain $\mathcal{D}$ is scale invariant near the tip (ridge). As a result, an infinite number of modes that are homothetic one to another appear concurrently at the critical strain ϵ_c. These modes are localized near the ridge and are associated with all possible wave numbers: there is no selection of the wave number in this scale-invariant linear bifurcation analysis, see SM for details [23]. By contrast, the critical strain ϵ_c and the shape of the buckling mode (up to a dilation) are selected as a function of ϕ.

As the unbuckled configuration is mirror symmetric with respect to the (yz) plane, the buckling modes can be either symmetric or antisymmetric. When ϕ is smaller than $\approx 105°$, the first critical buckling mode predicted by the FEM analysis is an AW mode; see Fig. 4(a). It involves lateral undulations of the ridge, see Fig. 3(b), similar to the buckling mode seen in the experiments. The corresponding critical strain ϵ_c is plotted in Fig. 3(a) (disks) and compared to experimental results (open circles): $\epsilon_c(\phi)$ is in good agreement with the experiments, and increases with ϕ.

In the limit of an acute ridge angle, $\phi \to 0$, the prism can be modeled as a thin, infinitely long plate whose thickness $t(y)$ varies linearly with the distance to the ridge, $t = \phi|h - y|$. For the unbuckled solution, the mid-surface of the plate is contained in the (yz) plane and has an axial prestress $\sigma^0 = E\epsilon$. When linearized about this solution, the Föppl–Von Kármán equations for elastic plates yield, see, for instance, Ref. [28],

$$(m_{\alpha\beta})_{,\alpha\beta} + t(y)\sigma^0 w_{,zz} = 0, \tag{3}$$

where $w(x,y)$ is the (horizontal) deflection, $m_{\alpha\beta} = D(y)[(1-\nu)w_{,\alpha\beta} + \nu\delta_{\alpha\beta}w_{,\gamma\gamma}]$ denotes the bending moment,

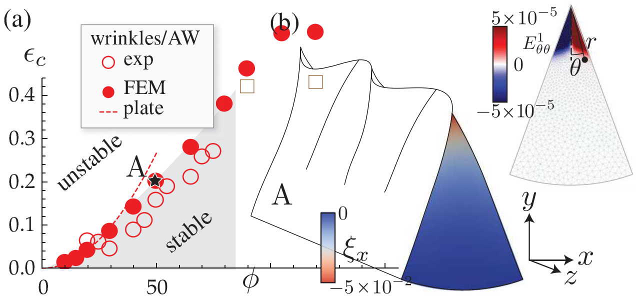

FIG. 3. Antisymmetric wrinkling (AW). (a) Phase diagram $\epsilon_c(\phi)$ from experiments (open circles), simulations (disks), and analytical model (dashed curve). (b) Numerical buckling mode for $\phi = 40°$, $h = 5$ mm, shown with an arbitrary amplitude. The two color maps show the amplitude of the lateral displacement (left) and of the incremental hoop strain $E^1_{\theta\theta}$ (right).

$D(y) = Et(y)^3/12(1-\nu^2)$ is the bending modulus of the plate, E is Young's modulus, and ν is Poisson's ratio. A comma in subscript denotes a partial derivative, and greek symbols are restricted to in-plane directions, $\alpha,\beta \in \{y,z\}$. We use Einstein's convention for implicit summation on repeated indices.

In the plate model, we consider perturbations that are harmonic in the axial direction and rescale the vertical coordinate using the wavelength $w(y) = \bar{w}(qy)e^{iqz}$. When expressed in terms of $\bar{w}$ and q, the boundary value problem [Eq. (3)] and the associated boundary conditions depend on the two dimensionless parameters ν and

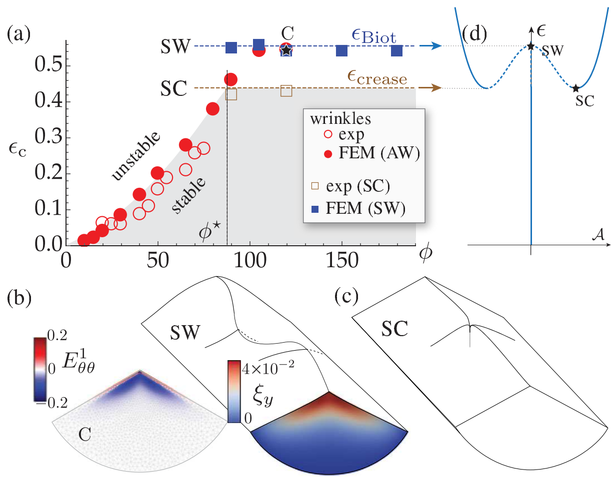

FIG. 4. (a) Full bifurcation diagram, comparing the modes predicted by the linear bifurcation analysis (AW and SW), Biot's threshold, the nonlinear creasing threshold, and experiments. (b) Numerical linear buckling mode for $\phi = 120°$, $h = 0.5$. Sketch of the deformed prism superimposed with a color map of the amplitude of the vertical displacement ξ_y. Color map of the amplitude of the hoop strain $E^1_{\theta\theta}$. (c) Sketch of the experimental surface creasing (SC) mode for $\phi = 120°$. (d) Sketch of the subcritical bifurcation curve $\mathcal{A}(\epsilon)$ for creasing.

$\bar{\sigma}^0 = 12(1-\nu^2)\sigma^0/E\phi^2$. A numerical solution based on a shooting method yields the critical value $\bar{\sigma}_c^0(\nu)$; see SM for details [23]. The corresponding critical strain is $\epsilon_c = [\bar{\sigma}_c^0(\nu)/12(1-\nu^2)]\phi^2$. For our particular 3D constitutive law, $\nu = 0.45$, and we obtain $\epsilon_c(0.45) \approx 0.35\phi^2$; the dependence on Poisson's ratio is mild, $\epsilon_c(0.50) \approx 0.33\phi^2$ in the incompressible case. This prediction has no adjustable parameter and is plotted in Fig. 3(a) (red dashed line): it agrees asymptotically with the finite element analysis for $\phi \to 0$. Note that $\epsilon_c \sim \phi^2$ is small when $\phi \to 0$, which is consistent with the linear elastic behavior assumed in the plate model.

Symmetric wrinkling (SW) modes are also found in the numerical bifurcation analysis. They extend on the adjacent faces on both sides of the ridge and involve an undulation of the ridge in the plane of symmetry (yz); see Fig. 4(b). The strain at which the first symmetric mode appears is $\epsilon \approx 0.55$, a value that hardly depends on the ridge angle ϕ; see Fig. 4(a). This value is consistent with the critical Biot strain $\epsilon_{\mathrm{Biot}} = 0.55$ corresponding to the existence of a marginally stable surface mode in a prestressed neo-Hookean half-space [10,11]. This is consistent with the fact that the SW mode is localized just beneath the faces of the prism; see Fig. 4(b). When ϕ reaches $\approx 105°$, the critical strain ϵ_c of the AW mode becomes larger than $\epsilon_{\mathrm{Biot}} = 0.55$: the numerical analysis then predicts that the first buckling mode switches from an AW mode to a SW mode; see Fig. 4(a).

This *linear* analysis therefore predicts a SW mode that is smooth and sinusoidal, in apparent contradiction with the localized pattern observed in the experiments. When this mode becomes unstable, all wavelengths appear concurrently: it is known that the nonlinear coupling between the different wavelengths gives rise to a creasing instability through a subcritical bifurcation [14,21]. The buckling strain for the creasing instability in a neo-Hookean half-plane $\epsilon_{\mathrm{crease}} \approx 0.44$ is, therefore, lower than that predicted by the linear analysis $\epsilon_{\mathrm{Biot}} \approx 0.55$; see Refs. [14,17]. Extrapolating to our problem, this suggests that our SW modes are subcritical as well, and that the critical strain ϵ_{Biot} predicted by the linear analysis needs to be corrected: the value $\epsilon_{\mathrm{crease}}$ has been included in Fig. 4(a) and indeed corresponds to the plateau observed in the experiments; see Fig. 4. Accordingly, the critical ridge angle $\phi^\star$ can be found by equating the critical strain for antisymmetric modes $\epsilon_c(\phi)$ with the creasing strain $\epsilon_{\mathrm{crease}}$: this yields $\phi^\star = 88°$, see Fig. 4, which accurately matches the experimental value $\phi^\star \approx 90°$.

Our linear stability analysis correctly captures the dependence of the critical strain on the ridge angle $\epsilon_c(\phi)$ as well as the shape of the antisymmetric mode. In our scale-free formulation, there is no selection of the wavelength. To account for the wavelength of the antisymmetric mode, one would need to consider additional ingredients in the analysis, such as subtle nonlinear effects and/or small-scale regularization. By contrast with the antisymmetric mode, the symmetric mode predicted by the linear stability analysis is not observed, as it gives rise to creasing by a subcritical bifurcation. Combining our linear analysis with the nonlinear threshold for creasing, we have explained the critical value of the ridge angle $\phi^\star \approx 90°$ at which the pattern changes. Interestingly, close to $\phi^\star$, the system displays a mix of the two behaviors: creases superimposed onto the smooth antisymmetric mode are shown in Fig. 2(b), probably resulting from the nonlinear interaction between the symmetric and antisymmetric modes.

The creasing localization has been explained in earlier work by nonlinear coupling of the buckling modes. A remarkable finding of our experiments is that our system features both localized creases and a smooth extended buckling pattern: the coupling between modes of different wavelengths is effective for the symmetric mode (leading to creases), but it is not effective for the antisymmetric mode, surprisingly. Therefore, scale invariance in not a sufficient condition for localization, and the exact conditions in which modes of different wavelengths can cooperate remain to be elucidated: the compressed hyperelastic prism provides a workbench for future nonlinear analyses of creasing.

We thank A. El Ouardy for his contribution to the experiments. C. M. acknowledges the financial support of Project No. ANR-13-JS09-0009 (Agence Nationale de la Recherche).

[1] T. Savin, N. A. Kurpios, A. E. Shyer, P. Florescu, H. Liang, L. Mahadevan, and C. J. Tabin, Nature (London) **476**, 57 (2011).
[2] M. A. Biot, Proc. R. Soc. A **242**, 444 (1957).
[3] E. Sultan and A. Boudaoud, J. Appl. Mech. **75**, 051002 (2008).
[4] Y. Cao and J. W. Hutchinson, J. Appl. Mech. **79**, 031019 (2012).
[5] D. Lee, N. Triantafyllidis, J. R. Barber, and M. D. Thouless, J. Mech. Phys. Solids **56**, 858 (2008).
[6] J. Huang, J. Liu, B. Kroll, K. Bertoldi, and D. R. Clarke, Soft Matter **8**, 6291 (2012).
[7] J. Liu, J. Huang, T. Su, K. Bertoldi, and D. Clarke, PLoS One **9**, e93183 (2014).
[8] C. Lestringant and B. Audoly, J. Mech. Phys. Solids **103**, 40 (2016).
[9] D. Terwagne, M. Brojan, and P. M. Reis, Adv. Mater. **26**, 6608 (2014).
[10] M. A. Biot, Proc. R. Soc. A **273**, 329 (1963).
[11] M. A. Biot, *Mechanics of Incremental Deformations* (Wiley, New York, 1965).
[12] W. Hong, X. Zhao, and Z. Suo, Appl. Phys. Lett. **95**, 11901 (2009).
[13] J. Yoon, J. Kim, and R. C. Hayward, Soft Matter **6**, 5807 (2010).

[14] E. Hohlfeld and L. Mahadevan, Phys. Rev. Lett. **106**, 105702 (2011).
[15] S. Mora, M. Abkarian, H. Tabuteau, and Y. Pomeau, Soft Matter **7**, 10612 (2011).
[16] E. Hohlfeld and L. Mahadevan, Phys. Rev. Lett. **109**, 025701 (2012).
[17] S. Cai, D. Chen, Z. Suo, and R. C. Hayward, Soft Matter **8**, 1301 (2012).
[18] L. Jin, D. Chen, R. C. Hayward, and Z. Suo, Soft Matter **10**, 303 (2014).
[19] L. Jin, A. Auguste, R. C. Hayward, and Z. Suo, J. Appl. Mech. **82**, 061008 (2015).
[20] L. Jin and Z. Suo, J. Mech. Phys. Solids **74**, 68 (2015).
[21] Y. Cao and J. W. Hutchinson, Proc. R. Soc. A **468**, 94 (2011).
[22] Y. B. Fu and P. Ciarletta, Proc. R. Soc. A **471**, 979 (2015).
[23] See Supplemental Material at http://link.aps.org/supplemental/10.1103/PhysRevLett.118.165501, which includes Refs. [24,25], for details on the implementation of the numerical FE method, numerical results obtained on a regularized domain and numerical resolution of the plate model.
[24] F. Tisseur and K. Meerbergen, SIAM Rev. **43**, 235 (2001).
[25] Y. Saad, *Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems* (SIAM, Philadelphia, 2011).
[26] K. Ølgaard, A. Logg, and G. Wells, SIAM J. Sci. Comput. **31**, 849 (2009).
[27] V. Hernandez, J. E. Roman, and V. Vidal, ACM Trans. Math. Softw. **31**, 351 (2005).
[28] B. Audoly and Y. Pomeau, *Elasticity and Geometry: From Hair Curls to the Nonlinear Response of Shells* (Oxford University Press, Oxford, 2010).

Bibliographie

ABDELKHALEK, S. et al. (2015). « Post-buckling modeling for strips under tension and residual stresses using asymptotic numerical method ». In : *Int. J. Mech. Sciences* 104, p. 126.

AN, Le et al. (2015). « Experimental investigation of the electromechanical phase transition in a dielectric elastomer tube ». In : *Smart Materials and Structures* 24, p. 035006.

AUDOLY, B. (2015). « Thin structures ». Cours polytechnique, p. 152–154.

AUDOLY, B. et Y. POMEAU (2010). *Elasticity and geometry : from hair curls to the nonlinear response of shells*. Oxford University Press.

AUDOLY, B. et K. A. SEFFEN (2015). « Buckling of naturally curved elastic strips : the ribbon model makes a difference ». In : *J. Elasticity* 119, p. 293.

BALLARD, P. et A. MILLARD (2009). *Poutres et arcs élastiques*. Ecole Polytechnique.

BASSET, A. B. (1895). « On the Deformation of Thin Elastic Wires. » In : *American Journal of Mathematics* 17, p. 281.

BERMUDEZ, A. et J. M. VIANO (1984). « Une justification des équations de la thermoélasticité des poutres à section variable par des méthodes asymptotiques ». In : *Modélisation Mathématqiue et Analyse Numérique* 18, p. 347.

BERTOLDI, K. et al. (2008). « Mechanics of deformation-triggered pattern transformations and superelastic behavior in periodic elastomeric structures ». In : *J. Mech. Phys. Solids* 56, p. 2642.

BHATTACHARYA, K., M. LEWICKA et M. SCHÄFFNER (2016). « Plates with incompatible prestrain ». In : *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 221, p. 143.

BIOT, M. A. (1957). « Folding Instability of a Layered Viscoelastic Medium under Compression ». In : *Proc. R. Soc. A* 242.1231, p. 444–454.

— (1963). « Surface Instability in Finite Anisotropic Elasticity Under Initial Stress ». In : *Proc. R. Soc. A* 273, p. 329.

— (1965). *Mechanics of Incremental Deformations*. Wiley (New-York).

CAI, S. et al. (2011). « Periodic patterns and energy states of buckled films on compliant substrates ». In : *J. Mech. Phys. Solids* 59.5, p. 1094.

CAI, S. et al. (2012). « Creasing instability of elastomer films ». In : *Soft Matter* 8, p. 1301.

CAI, ZX. et YB. FU (1999). « On the imperfection sensitivity of a coated elastic half-space. » In : *Proc. R. Soc. A* 455.1989, p. 3285–3309.

CAO, Y. et J. W. HUTCHINSON (2011). « From wrinkles to creases in elastomers : the instability and imperfection-sensitivity of wrinkling ». In : *Proc. R. Soc. A* 468, p. 94.

— (2012). « Wrinkling Phenomena in Neo-Hookean Film/Substrate Bilayers ». In : *J. Appl. Mech.* 79, p. 1019.

CIARLET, P. G. (1980). « A justification of the von Kármán equations. » In : *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 73, p. 349.

CIARLETTA, P. et M. DESTRADE (2014). « Torsion instability of soft solid cylinders ». In : *IMA Journal of Applied Mathematics* 79, p. 804.

CIARLETTA, P., M. DESTRADE et A. L. GOWER (2013). « Shear instability in skin tissue ». In : *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* 273, p. 66.

CIARLETTA, P. et Y. B. FU (2015). « A semi-analytical approach to Biot instability in a growing layer : Strain gradient correction, weakly non-linear analysis and imperfection sensitivity ». In : *Int. J. Non-Linear Mechanics* 75, p. 38.

CICALESE, M., M. RUF et F. SOLOMBRINO (2016). « On local and global minimizers of prestrained thin elastic rods ». arXiv :1606.04524.

CLEBSCH, A. (1862). *Theorie der Elasticität fester Körper*. B. G. Teubner (Leipzig).

COCHELIN, B., N. DAMIL et M. POTIER-FERRY (2007). *Méthode Asymptotique Numérique*. Sous la dir. de LAVOISIER. Taylor Francis.

COLEMAN, B. D. et D. C. NEWMAN (1988). « On the Rheology of Cold Drawing. I. Elastic Materials ». In : *J. Polymer Science B : Polymer Physics* 26, p. 1801.

COMBESCURE, C., P. HENRY et R. S. ELLIOTT (2015). « Post-bifurcation and stability of a finitely strained hexagonal honeycomb subjected to equi-biaxial in-plane loading ». In : *Int. J. Solids and Structures* 88-89, p. 296.

CONSIDÈRE, A. (1885). « Mémoire sur l'emploi du fer et de l'acier dans les constructions ». In : *Annales des Ponts et Chaussées, Série 6* 9, p. 574.

DANAS, K., S.V. KANKANALA et N. TRIANTAFYLLIDIS (2012). « Experiments and modeling of iron-particle-filled magnetorheological elastomers ». In : *J. Mech. Phys. Solids* 60, p. 120.

DANAS, K. et N. TRIANTAFYLLIDIS (2014). « Instability of a magnetoelastic layer resting on a non-magnetic substrate ». In : *J. Mech. Phys. Solids* 69, p. 67.

DERVAUX, J., P. CIARLETTA et M. BEN AMAR (2009). « Morphogenesis of thin hyperelastic plates : A constitutive theory of biological growth in the Föppl–von Kármán limit ». In : *J. Mech. Phys. Solids* 57, p. 458.

DESTRADE, M. et al. (2008). « Surface Instability of Sheared Soft Tissues ». In : *J. Biomechanical Engineering* 130, p. 061007.

DOMOKOS, G. et T. J. HEALEY (2005). « Multiple helical perversions of finite, intrinsically curved rods ». In : *Int. J. Bifurcation and Chaos* 15, p. 871.

EGGERS, J. et T. F. DUPONT (1994). « Drop formation in a one-dimensional approximation of the Navier–Stokes equation ». In : *J. Fluid Mech.* 262, p. 205.

EULER, L. (1744). *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici lattissimo sensu accepti*. eulerarchive.org.

FAOU, J-Y. (2013). « Mécanique des couches minces fonctionnelles : instabilité et adhésion ». Thèse de doct. Université Pierre et Marie Curie.

FARRELL, P. E., Á. BIRKISSON et S. W. FUNKE (2015). « Deflation techniques for finding distinct solutions of nonlinear partial differential equations ». In : *SIAM Journal on Scientific Computing* 37, A2026.

FERRADI, MK. (2016). « Nouveaux modeles d'elements finis de poutres enrichies ». Thèse de doct. Université Paris Est.

FISCHER, F. D. et al. (2000). « Buckling phenomena related to rolling and levelling of sheet metal ». In : *Int. J. Mech. Sciences* 42, p. 1887.

FU, Y. B. et P. CIARLETTA (2015). « Buckling of a coated elastic half-space when the coating and substrate have similar material properties ». In : *Proc. R. Soc. A* 471.2178.

FUNG, Y-C. (1993). *Biomechanics : Material Properties of Living Tissues*. Springer (New York).

GEUZAINE, C. et J.-F. REMACLE (2009). « Gmsh : a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities ». In : *Int. J. for Numerical Methods in Engineering* 79.11, p. 1309.

GORIELY, A. et M. TABOR (1998). « Spontaneous Helix Hand Reversal and Tendril Perversion in Climbing Plants ». In : *Phys. Rev. Lett.* 80, p. 1564.

GORIELY, A. et al. (2008). « Elastic Growth Models ». In : *Mathematical Modelling of Biosystems*. T. 102. Applied Optimization. Springer-Verlag (Berlin), p. 1.

GREEN, A. E., R. S. RIVLIN et R. T. SHIELD (1952). « General theory of small elastic deformations superimposed on large elastic deformations ». In : *Proc. R. Soc. A* 211, p. 128–154.

GUINOT, F. et al. (2012). « A planar rod model with flexible thin-walled cross-sections. Application to the folding of tape springs ». In : *Int. J. Solids and Structures* 49, p. 73.

HEIJDEN, A. M. A. van der (2008). *W. T. Koiter's Elastic stability of solids and structures*. Cambridge (UK) : Cambridge University Press.

HERNANDEZ, V., J. E. ROMAN et V. VIDAL (2005). « SLEPc : A scalable and flexible toolkit for the solution of eigenvalue problems ». In : *ACM Trans. Math. Software* 31, p. 351.

HOHLFELD, E. (2013). « Coexistence of scale invariant states in a scale free system ». In : *Phys. Rev. Lett.* 111, p. 185701.

HOHLFELD, E. et L. MAHADEVAN (2011). « Unfolding the sulcus ». In : *Phys. Rev. Lett.* 106, p. 105702.

— (2012). « Scale and Nature of Sulcification Patterns ». In : *Phys. Rev. Lett.* 109, p. 025701.

HOLZAPFEL, G. A., T. GASSER et R. W. OGDEN (2000). « A New Constitutive Framework for Arterial Wall Mechanics and a Comparative Study of Material Models ». In : *J. Elasticity* 61, p. 1.

HONG, W., X. ZHAO et Z. SUO (2009). « Formation of creases on the surfaces of elastomers and gels ». In : *Appl. Phys. Lett.* 95, p. 1901.

HUANG, Jiangshui et al. (2012). « Spontaneous and deterministic three-dimensional curling of pre-strained elastomeric bi-strips ». In : *Soft Matter* 8, p. 6291.

HUANG, Z. Y., W. HONG et Z. SUO (2005). « Nonlinear analyses of wrinkles in a film bonded to a compliant substrate ». In : *J. Mech. Phys. Solids* 53, p. 2101.

HUTCHINSON, J. W. (1967). « Imperfection Sensitivity of Externally Pressurized Spherical Shells ». In : *J. Appl. Mech* 34, p. 49.

— (2013). « The role of nonlinear substrate elasticity in the wrinkling of thin films ». In : *Proc. R. Soc. A* 371.1993, p. 20120422.

JIN, L. et Z. SUO (2015). « Smoothening creases on surfaces of strain-Stiffening materials ». In : *J. Mech. Phys. Solids* 74, p. 68.

JIN, L. et al. (2014). « Creases on the interface between two soft materials ». In : *Soft Matter* 10, p. 303.

JIN, L. et al. (2015). « Bifurcation diagrams for the formation of wrinkles or creases in soft bilayers ». In : *J. Appl. Mech.* 82, p. 061008.

KELLER, H. B. (1977). « Numerical solution of bifurcation and nonlinear eigenvalue problems ». In : *Applications of Bifurcation Theory*. Sous la dir. de P. H. RABINOWITZ. Academic Press, p. 359.

KIRCHHOFF, G. (1859). « Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich duennen elastischen States ». In : *J. reine. angew. Math. (Crelle)* 56, p. 285.

KLEIN, Yael, Efi EFRATI et Eran SHARON (2007). « Shaping of Elastic Sheets by Prescription of Non-Euclidean Metrics ». In : *Science* 315, p. 1116.

KOITER, W. T. (1965). « On the stability of elastic equilibrium ». Thèse de doct. Holland : Delft.

KOMORI, K. (1997). « Analysis of cross and vertical buckling in sheet metal rolling ». In : *Int. J. Mech. Sciences* 40, p. 1235.

KPOGAN, K. (2014). « Simulation numérique de la planéité des tôles métalliques formées par laminage ». Thèse de doct. Université de Lorraine.

LANDAU, L. D. et E. M. LIFSHITZ (1970). *Theory of Elasticity (Course of Theoretical Physics)*. 2^{nd}. Pergamon Press (New York).

LEE, D. et al. (2008a). « Surface instability of an elastic half space with material properties varying with depth ». In : *J. Mech. Phys. Solids* 56, p. 858.

— (2008b). « Surface instability of an elastic half space with material properties varying with depth ». In : *J. Mech. Phys. Solids* 56, p. 858.

LESTRINGANT, C. et B. AUDOLY (2016). « Elastic rods with incompatible strain : Macroscopic versus microscopic buckling ». In : *J. Mech. Phys. Solids* 103, p. 40.

LESTRINGANT, C. et al. (2017). « Buckling of an elastic ridge : competition between wrinkles and creases ». In : *Phys. Rev. Lett.* in press.

LEVIEN, R. (2008). *The elastica : a mathematical history*. Tech. Report 103. University of California, Berkeley.

LEWICKA, M., L. MAHADEVAN et M. PAKZAD (2011). « The Föppl-von Kármán equations for plates with incompatible strains ». In : *Proc. R. Soc. A* 467, p. 402.

LIANG, H. et L. MAHADEVAN (2011). « Growth, geometry, and mechanics of a blooming lily ». In : *Proc. Natl. Acad. Sci.* 108, p. 5516.

LIU, J. et al. (2014). « Structural Transition from Helices to Hemihelices ». In : *PLoS ONE* 9, e93183.

LIU, Shuangping et al. (2016). « Emergent perversions in the buckling of heterogeneous elastic strips ». In : *Proc. Natl. Acad. Sci.* 113, p. 7100.

LOVE, A. E. H (1927). *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. (Reprinted by Dover, New York, 1944). Cambridge University Press.

MARIGO, J.-J. et N. MEUNIER (2006). « Hierarchy of One-Dimensional Models in Nonlinear Elasticity ». In : *J. Elasticity* 83, p. 1.

MCMILLEN, T. et A. GORIELY (2002). « Tendril Perversion in Intrinsically Curved Rods ». In : *J. Nonlinear Science* 12, p. 241.

MOON, Myoung-Woon et al. (2007). « Directed assembly of fluidic networks by buckle delamination of films on patterned substrates ». In : *Int. J. Materials Research* 98.

MORA, M. G. et S. MÜLLER (2008). « Convergence of equilibria of three-dimensional thin elastic beams ». In : *Proc. R. Soc. Edinburgh A* 138, p. 873.

MORA, S. et al. (2011). « Surface instability of soft solids under strain ». In : *Soft Matter* 7, p. 10612.

MORA, S. et al. (2013). « Solid Drops : Large Capillary Deformations of Immersed Elastic Rods ». In : *Phys. Rev. Lett.* 111, p. 114301.

NOLAN, D. R. et al. (2014). « A robust anisotropic hyperelastic formulation for the modelling of soft tissue ». In : *J. mechanical behavior of biomedical materials* 39, p. 48.

OGDEN, R. W. (1997). *Non-Linear Elastic Deformations*. Dover (New-York).

ØLGAARD, K., A. LOGG et G. WELLS (2009). « Automated Code Generation for Discontinuous Galerkin Methods ». In : *SIAM Journal of scientific computing* 31, p. 849.

OSTERFIELD, M. et al. (2013). « Three-dimensional epithelial morphogenesis in the developing Drosophila egg ». In : *Developmental Cell* 24, p. 400.

RAMMERSTORFER, F. G., F. D. FISCHER et N. FRIEDL (2001). « Buckling of free infinite strips under residual stresses and global tension ». In : *J. Appl. Mech.* 68, p. 399.

SAAD, Y. (2011). « Numerical methods for large eigenvalue problems ». In : *SIAM (Philadelphia)*, p. 193.

SAINT-VENANT, A. B. (1855). « Mémoire sur la torsion des prismes ». In : *Mémoires de l'Academie des Sciences des Savants Etrangers* 14, p. 233.

SANCHEZ-HUBERT, J. et E. SANCHEZ-PALENCIA (1992). *Introduction aux méthodes asymptotiques et à l'homogénéisation*. Sous la dir. de Masson (PARIS).

SANCHEZ-HUBERT, J. et É. SANCHEZ PALENCIA (1999). « Statics of curved rods on account of torsion and flexion ». In : *European Journal of Mechanics. A. Solids* 18, p. 365.

SAVIN, T. et al. (2011). « On the growth and form of the gut ». In : *Nature* 476, p. 57.

SCARDIA, L. (2009). « Asymptotic models for curved rods derived from nonlinear elasticity by Gamma-convergence. » In : *Proc. R. Soc. Edinburgh A* 139, p. 1037.

SCHERZINGER, W. et N. TRIANTAFYLLIDIS (1998). « Asymptotic analysis of stability for prismatic solids under axial loads ». In : *J. Mech. Phys. Solids* 46, p. 955.

SULTAN, E. et A. BOUDAOUD (2008). « The buckling of a swollen thin gel layer bound to a compliant substrate ». In : *J. Appl. Mech.* 75, p. 051002.

TALLINEN, Tuomas et al. (2016). « On the growth and form of cortical convolutions ». In : *Nat. Phys.* 12, p. 588.

TIMOSHENKO, S. (1921). « On the correction for shear of the differential equation for transverse vibration of prismatic bars ». In : *Philosophical Magazine* 6, p. 744.

TIMOSHENKO, S. et J. M. GERE (1961). *Theory of elastic stability*. 2$^{\mathrm{nd}}$. MacGraw Hill (New-York).

TISSEUR, F. et K. MEERBERGEN (2001). « The Quadratic Eigenvalue Problem ». In : *SIAM Review* 43, p. 235.

TOMITA, Y. et H. SHAO (1993). « Advances in Engineering Plasticity and its applications ». In : sous la dir. de W. B. LEE. Elsevier. Chap. Buckling behavior in thin sheet metal subjected to nonuniform mebrane-type deformation, p. 923.

TRABUCHO, L. et J. M. VIAÑO (1996). « Mathematical modelling of rods ». In : *Handbook of numerical analysis* 4, p. 487.

TRELOAR, L. R. G. (1949). *The physics of rubber elasticity*. Oxford University Press (Oxford).

TRUJILLO, V., J. KIM et R. C. HAYWARD (2008). « Creasing instability of surface-attached hydrogels ». In : *Soft Matter* 4, p. 564.

VLASSOV, B. Z. (1962). *Pieces Longues en Voiles Minces*. Eyrolles (Paris).

WRIGGERS, P. (2008). *Nonlinear Finite Elements Methods*. Springer (Berlin).

YAMAKI, N. (1984). *Elastic stability of circular cylindrical shells*. Sous la dir. d'E. BECKER et al. T. 27. North-Holland series in applied mathematics and mechanics. North Holland.

YIN, J. et al. (2008). « Stress-driven buckling patterns in spheroidal core/shell structures ». In : *Proc. Natl. Acad. Sci.* 105, p. 19132.

YOON, J., J. KIM et R. C. HAYWARD (2010). « Nucleation, growth, and hysteresis of surface creases on swelled polymer gels ». In : *Soft Matter* 6, p. 5807.

ZANG, J. et al. (2012). « Localized ridge wrinkling of stiff films on compliant substrates ». In : *J. Mech. Phys. Solids* 60.7, p. 1265–1279.