Savoirs et connaissances mathématiques spécifiques du professeur pour l'enseignement du nombre à l'école maternelle

Agnès Malet

▶ **To cite this version:**

Agnès Malet. Savoirs et connaissances mathématiques spécifiques du professeur pour l'enseignement du nombre à l'école maternelle. Education. Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II, 2016. Français. NNT : 2016CLF20029 . tel-01986215

HAL Id: tel-01986215

https://theses.hal.science/tel-01986215

Submitted on 18 Jan 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Blaise Pascal – Clermont-Université

UFR Psychologie, Sciences de L'éducation

École doctorale Lettres Langues et Sciences Humaines

Agnès Malet

Thèse de doctorat

SAVOIRS ET CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES SPÉCIFIQUES DU PROFESSEUR POUR L'ENSEIGNEMENT DU NOMBRE À L'ÉCOLE MATERNELLE

Thèse sous la direction de

Claire Margolinas, Maître de Conférences – Habilité à Diriger les Recherches, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand

Soutenance prévue le 9 décembre 2016

Jury

Jean-Luc Dorier, Professeur ordinaire, Université de Genève (Rapporteur)

Alain Bronner, Professeur des Universités, Université de Montpellier (Rapporteur)

Roland Goigoux, Professeur des Université, Université Blaise Pascal (Examinateur)

Stéphane Clivaz, Professeur, Haute École Pédagogique de Lausanne (Examinateur)

Floriane Wozniak, Maître de Conférences Habilitée à Diriger les Recherches, Université de Montpellier (Examinatrice)

REMERCIEMENTS

Tout au long de ces années, je ne me suis jamais sentie seule dans cette aventure pourtant très personnelle.

Toujours soutenue, accompagnée, épaulée, poussée… mes plus vifs et chaleureux remerciements vont à Claire Margolinas. Merci pour ces nombreuses journées à apprendre à tes côtés.

Un grand merci également aux dix enseignants qui ont partagé un bout de chemin avec moi. Merci Alexandre, Angeline, Annie, Odile, Olivier, Myriam, Sibylle, Stéphanie, Sylvie et Virginie pour votre participation, vous m'avez livré une partie de votre enseignement avec tant de générosité. Sachez que c'est toujours avec le même plaisir que j'ai travaillé sur vos données.

Je tiens à remercier vivement les inspecteurs d'académie pour leur soutien.

J'adresse mes remerciements aux inspecteurs de l'éducation nationale pour leur incroyable confiance et leurs encouragements.

Merci également au laboratoire de recherche, à l'école doctorale, à l'université pour m'avoir grandement facilité les démarches administratives.

Un grand merci à mes amies ; Francine pour ton soutien sans faille pour tes commentaires et tes nombreuses relectures. Sylvie pour ta relecture fine et tes observations précises tout cela en un minimum de temps. Andréa, Cécile, Sylvie et Sylvie pour votre incroyable patience.

Merci à mes parents, pour leur soutien absolu à distance et merci à Magali pour m'avoir montré la voie.

Enfin, un énorme merci à mes enfants, Fiona et Nicolas et à toi, Rémy pour vos encouragements permanents, votre compréhension et votre grande patience lors des derniers mois et des derniers jours.

SOMMAIRE

SOMMAIRE 5

INTRODUCTION - LES NOMBRES, ÇA COMPTE À LA MATERNELLE ! 23

1- D'un questionnement d'enseignante à l'école maternelle à l'élaboration d'un questionnement de chercheur… 24

2- D'un questionnement de conseillère pédagogique maternelle à l'élaboration d'un questionnement de chercheur… 24

3- Vers l'élaboration d'un questionnement de chercheur 25

PARTIE 1– LES CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES DU PROFESSEUR ET LES SAVOIRS MATHÉMATIQUES POUR L'ENSEIGNEMENT DU NOMBRE À L'ÉCOLE MATERNELLE 27

Chapitre 1- Les connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement du professeur 29

1- Les travaux de Shulman 29

1.1- La connaissance disciplinaire du contenu 31

1.2- La connaissance pédagogique du contenu 31

1.3- La connaissance du curriculum 31

2- Les travaux de Ball 32

2.1- Les connaissances mathématiques communes CMC (Common Content Knowledge-CCK) 33

2.2- Les connaissances mathématiques spécifiques CMS (Specialized Content Knowledge-SCK) 33

2.3- Les connaissances des élèves et de l'apprentissage du sujet CE (Knowledge of Content and Students-KCS) 33

2.4- Les connaissances du contenu et de l'enseignement du sujet CC (Knowledge of Content ans Teaching-KCT) 34

3- Les travaux de Margolinas 36

Conclusion 39

Chapitre 2- L'enseignement à l'école maternelle 41

1- L'histoire de l'école maternelle française contemporaine 41

1.1- L'école maternelle française 41

1.2- Historique de l'école maternelle française 42

2- Les pratiques de l'école maternelle contemporaine 48

2.1- Des ateliers 48

2.2- Des ateliers qui tournent sur la semaine 49

2.3- Des emplois du temps à l'école maternelle 50

Conclusion 50

Chapitre 3- Les savoirs mathématiques spécifiques à l'enseignement du nombre 53

1- Savoirs et institutions 53
2- Le nombre dans les programmes 54
3- Savoirs mathématiques 57
3.1- Le cardinal 58
3.2- L'ordinal 59
3.3- L'énumération 60
3.4- Les numérations 61
a- La numération orale 61
b- La numération écrite de position 62
c- La numération figurée 62
3.5- Le calcul 65
Conclusion 66
Chapitre 4- La théorie des situations didactiques et les savoirs mathématiques pour l'enseignement du nombre 67
1- Une distinction nécessaire entre savoirs et connaissances 67
1.1- Une distinction fondatrice pour la didactique des mathématiques 67
1.2- Un lien dialectique entre savoir et connaissance 68
2- Les situations fondamentales 70
2.1- Origine et organisation des situations 70
a- Situation générique 70
b- Situation significative 70
c- Une suite de situations 71
2.2- Définition d'une situation fondamentale 71
2.3- La description de situations fondamentales comme cadre d'analyse 71
3- La structuration des milieux 72
3.1- Le milieu 72
3.2- La structuration du milieu 73
3.3- La structuration des situations fondamentales 74
3.4- Deux logiques possibles dans l'emboîtement des situations 74
Conclusion 75
Chapitre 5- Une modélisation des savoirs mathématiques spécifiques à l'enseignement du nombre 77
1- Présentation des savoirs du nombre 77
1.1- Des savoirs pour l'enseignement du nombre 77
1.2- Présentation des savoirs cardinal et ordinal 78
1.3- Présentation du savoir énumération 78
1.4- Présentation du savoir calcul 79
1.5- Présentation du savoir numérations 79
2- Construction générale de l'arbre des savoirs 79

2.1- Représentation des emboîtements de situations fondamentales 80
2.2- Choix d'une structure hiérarchique 80
2.3- Principes de la représentation des situations fondamentales successives 81
3- Construction particulière d'une branche de l'arbre des savoirs : la branche cardinal 81
3.1- Construction de la situation 0 : CO collection 81
3.2- Deux branches au niveau 0 suivant l'orientation savoir/connaissance 82
3.3- Construction des connaissances de la quantité comme grandeur 82
a- Comparaison directe 82
b- Comparaison indirecte 84
c- Les situations de formulation : éloignement dans le temps 85
d- Situation de formulation à autrui 85
e- Situation de formulation collective 86
3.4- Étude des savoirs de la branche cardinal-relations 87
Conclusion 88
Chapitre 6- Les savoirs mathématiques spécifiques pour l'enseignement de la cardinalité à l'école maternelle 89
1- La branche cardinal-quantité et les connaissances en situation 89
1.1- Le nombre comme mémoire de la quantité 89
1.2- Situation fondamentale S_0 : Comparer des collections 90
a- Comparaison directe de collections 90
b- Comparaison indirecte de collections : éloignement dans l'espace 90
c- Situation avec éloignement dans le temps 92
d- Situation de formulation à autrui 92
e- Situation de formulation collective 93
1.3- Situation fondamentale S_1 : Construire des collections de même quantité 93
a- Situation fondamentale de S1 93
b- Situation d'anticipation de la quantité (situation d'action) 93
c- Empêcher l'action directe (situation avec éloignement dans l'espace) 94
d- Situation de formulation : éloignement dans le temps 97
e- Situation de formulation à autrui 98
f- Situation formulation collective 99
1.4- Situation fondamentale S_2 : Classer des collections 100
a- Situation de classement direct 100
b- Situation classement indirect 100
c- Situation de formulation à autrui 101
d- Situation de formulation collective 102
Conclusion de la branche cardinal-quantité 102
2- La branche cardinal-relations et les connaissances en situation 106
2.1- La visite de l'œuvre « nombre » 106

a- Cardinal-relations 106
b- Étude de « un » 107
2.2- Visite du savoir V_0 : Itération/Succession 108
a- Construire 2 comme 1 et 1 108
b- Construire 3 comme 2 et 1 108
2.3- Visite du savoir V_1 : Figuration/Dénomination 109
a- Figurer/Dénommer 2 109
b- Figurer/dénommer le long de la branche 109
2.4- Visite du savoir V_2 : Décomposition 110
a- Décomposer 3 110
b- Décomposer après cinq 110
2.5- Visite du savoir V_3 : Recomposition 111
a- Recomposer à partir des doubles 111
b- Recomposer à partir des triples 111
Conclusion de la branche cardinal-relations 112
Conclusion 114
Conclusion de la partie 1 117
PARTIE 2- UN ÉTAT DES LIEUX DES CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES SPÉCIFIQUES POUR L'ENSEIGNEMENT DU NOMBRE À L'ÉCOLE MATERNELLE 119
Chapitre 1- L'étude des connaissances mathématiques spécifiques ou méthodologie pour identifier les CMS 121
1- Comment déterminer les connaissances mathématiques spécifiques du professeur pour l'enseignement du nombre à l'école maternelle ? 121
1.1- Méthodologie des études antérieures sur les connaissances mathématiques spécifiques pour enseigner 121
a- Ball 121
b- Clivaz 122
1.2- Difficultés méthodologiques concernant l'étude des connaissances mathématiques spécifiques pour enseigner le nombre à l'école maternelle 122
1.3- Le choix d'un entretien 123
2- Le recueil et l'élaboration des données 124
2.1- Déroulement de l'entretien 124
a- Mise en place de l'entretien 124
b- Démarche de l'entretien 124
2.2- L'anonymat des enseignants 126
2.3- Les verbatim 126
2.4- Les enseignants interrogés 127
3- Le traitement des données avec le logiciel Transana 129
3.1- Présentation du logiciel Transana 129
3.2- La structure hiérarchique et les mots-clés dans Transana 130

3.3- Élaboration des mots-clés à partir de l'arbre des savoirs sur le nombre à la maternelle 130
Conclusion 131
Chapitre 2- Des choix méthodologiques pour présenter les résultats 133
1- Des choix dans les codages 133
1.1- Des connaissances mathématiques pour l'enseignement non codées 133
a- Les connaissances du contenu et des élèves (CC) 134
b- Les connaissances des élèves et de l'apprentissage du sujet (CE) 134
c- Les connaissances du programme et des moyens d'enseignement (CP) : 134
d- Les connaissances de l'horizon mathématique (CHM) : 135
e- Les connaissances mathématiques communes (CMC) 135
f- Les connaissances mathématiques spécifiques pour l'enseignement (CMS) 135
1.2- La recherche de situations fondamentales à coder 135
1.3- Coder des situations emboitées 136
1.4- Des niveaux d'activité codés en complément 136
2– Explication du codage et premières remarques concernant les branches 137
2.1- Des facilités et des obstacles pour le codage 138
a- Des savoirs clairement énoncés 138
b- Un lexique commun partagé 138
c- Connaissances partagées entre chercheur et enseignants interrogés 138
2.2– Des choix de codage pour les branches 139
a- Les frontières avec la branche calcul 139
b- Les frontières avec la branche numérations 140
Conclusion 142
Chapitre 3- Analyse globale des résultats à l'aide de l'arbre des savoirs du nombre 143
1- L'arbre des savoirs : un outil de lecture des programmes d'enseignement 143
1.1-Lecture des programmes de l'école maternelle de 1882 à nos jours 143
a- Programmes de la maternelle de 1882 143
b- Programmes maternelle - Note du 18 octobre 1945 144
c- Orientations pour l'école maternelle de 1986 144
d- Programmes maternelle 1991 (en termes de compétences) 145
e- Programmes de la maternelle 1995 145
f- Programmes de la maternelle de 2002 146
g- Programmes de la maternelle BO du 19 juin 2008 146
h- Programme de la maternelle BO du 26 mars 2015 147
2- L'arbre des savoirs : un outil d'analyse des branches 148
3- Analyse de la branche cardinal 151
3.1- La branche cardinal-quantité 152
3.2- La branche cardinal-relations 154

4- Analyse de la branche numérations 157
4.1- Numération orale 157
4.2- La numération figurée 160
4.3- Numération écrite 160
5- Analyse de la branche calcul 162
6- Analyse de la branche ordinal 165
6.1- La branche ordinal-relations 166
6.2- La branche ordinal-position 167
7- Énumération 168
Conclusion concernant l'analyse globale 172
Chapitre 4- Analyse détaillée des résultats par enseignant 173
1- L'enseignement de A 173
1.1- L'arbre des savoirs du nombre de A 173
a- Focus sur les cinq principaux savoirs de l'arbre du nombre 173
b- Durée des extraits codés 174
1.2- Quelles connaissances mathématiques spécifiques sont présentes dans chacune des branches ? 174
a- La branche cardinal 174
b- La branche numérations 176
c- La branche énumération 177
1.3- Dialectique savoir/connaissance à travers certaines activités décrites 178
a- Des savoirs vers les connaissances 178
b- Des connaissances vers les savoirs 179
1.4- Les niveaux d'activités de A 179
a- Niveau+3 : niveau noosphérien ou idéologique 179
b- Niveau+2 : situation de construction 180
c- Niveau +1 et niveau 0 : situation de projet de leçon (dans la séance) et situation didactique 180
d- Niveau -1 : niveau d'observation ou de dévolution 181
1.5- Conclusion concernant A 181
2- L'enseignement de B 182
2.1- L'arbre des savoirs du nombre de B 182
a- Focus sur les cinq principaux savoirs de l'arbre du nombre 182
b- Durée des extraits codés 183
2.2- Quelles connaissances mathématiques spécifiques sont présentes dans chacune des branches ? 183
a- La branche numérations 183
b- La branche cardinal 184
c- La branche ordinal 186
d- La branche calcul 187

e- La branche énumération 187
2.3- Dialectique savoir/connaissance à travers certaines activités décrites 188
a- Des savoirs vers les connaissances 188
b- Des connaissances vers les savoirs 188
2.4- Les niveaux d'activités de B 188
a- Niveau +3 : niveau noosphérien ou idéologique 188
b- Niveau+2 : situation de construction 189
c- Niveau +1 et niveau 0 : situation de projet de leçon (dans la séance) et situation didactique 189
d- Niveau -1 : niveau d'observation ou de dévolution 190
2.5- Conclusion concernant B 190
3- L'enseignement de C 191
3.1- L'arbre des savoirs du nombre de C 191
a- Focus sur les cinq branches de l'arbre des savoirs du nombre 191
b- Durée des extraits codés 191
3.2- Quelles connaissances mathématiques spécifiques sont présentes dans chacune des branches ? 192
a- La branche numérations 192
b- La branche calcul 193
c- La branche cardinal 194
d- La branche énumération 195
e- La branche ordinal 196
3.3- Les niveaux d'activités de C 196
a- Niveau+3 : niveau noosphérien ou idéologique 196
b- Niveau+2 : situation de construction ou de conception d'un thème 197
c- Niveau +1 et niveau 0 : situation de projet de leçon (dans la séance) et situation didactique 197
d- Niveau -1 : niveau d'observation ou de dévolution 197
3.4- Conclusion pour C 198
4- L'enseignement de D 199
4.1- L'arbre des savoirs du nombre de D 199
a- Focus sur les cinq branches de l'arbre des savoirs du nombre 199
b- Durée des extraits codés 199
4.2- Quelles connaissances mathématiques spécifiques sont présentes dans chacune des branches ? 200
a- La branche numérations 200
b- La branche cardinal 201
c- La branche calcul 203
d- La branche énumération 203
4.3- Les niveaux d'activités de D 203
a- Niveau+3 : niveau noosphérien ou idéologique 203

b- Niveau+2 : situation de construction 204
c- Niveau+1 et niveau 0 : situation de projet de leçon (dans la séance) et situation didactique 204
d- Niveau-1 : niveau d'observation ou de dévolution 205
4.4- Conclusion concernant D 205
5- L'enseignement de E 206
5.1- L'arbre des savoirs du nombre de E 206
a- Focus sur les cinq branches de l'arbre des savoirs du nombre 206
b- Durée des extraits codés 206
5.2- Quelles connaissances mathématiques spécifiques sont présentes dans chacune des branches ? 208
a- La branche numérations 208
b- La branche cardinal 210
c- La branche ordinal 212
d- La branche calcul 214
e- La branche énumération 217
5.3- Dialectique savoir/connaissance à travers certaines activités décrites 218
a- Des savoirs vers les connaissances 218
b- Des connaissances vers les savoirs 218
5.4- Les niveaux d'activités de E 218
a- Niveau +3 : niveau noosphérien ou idéologique 218
b- Niveau +2 : situation de construction 219
c- Niveau +1 et niveau 0 : situation de projet de leçon (dans la séance) et situation didactique 219
d- Niveau -1 : niveau d'observation ou de dévolution 220
5.5- Conclusion concernant E 220
6- L'enseignement de F 221
6.1- L'arbre des savoirs du nombre de F 221
a- Focus sur les cinq branches de l'arbre des savoirs du nombre 221
b- Durée des extraits codés 221
6.2- Quelles connaissances mathématiques spécifiques sont présentes dans chacune des branches ? 222
a- La branche numérations 222
b- La branche cardinal 224
c- La branche calcul 225
d- La branche ordinal 225
e- La branche énumération 226
6.3- Les niveaux d'activités de F 227
a- Niveau+3 : niveau noosphérien ou idéologique 227
b- Niveau+2 : situation de construction 227

c- Niveau +1 et niveau 0 : situation de projet de leçon (dans la séance) et situation didactique 228
d- Niveau -1 : niveau d'observation ou de dévolution 228
6.4- Conclusion concernant F 228
7- L'enseignement de G 230
7.1- L'arbre des savoirs du nombre de G 230
a- Focus sur les cinq branches de l'arbre des savoirs du nombre 230
b- Durée des extraits codés 230
7.2- Quelles connaissances mathématiques spécifiques sont présentes dans chacune des branches ? 231
a- La branche cardinal 231
b- La branche numérations 233
c- La branche ordinal 236
d- La branche énumération 236
7.3- Les niveaux d'activités de G 237
a- Niveau+3 : niveau noosphérien ou idéologique 237
b- Niveau+2 : situation de construction 238
c- Niveau+1 et niveau 0 : situation de projet de leçon (dans la séance) et situation didactique 238
d- Niveau-1 : niveau d'observation ou de dévolution 238
7.4- Conclusion concernant G 238
8- L'enseignement de H 240
8.1- L'arbre des savoirs du nombre de H 240
a- Focus sur les cinq branches de l'arbre des savoirs du nombre 240
b- Durée des extraits codées 240
8.2- Quelles connaissances mathématiques spécifiques sont présentes dans chacune des branches ? 241
a- La branche cardinal 241
b- La branche numérations 243
c- La branche calcul 244
d- La branche énumération 246
8.3- Dialectique savoir/connaissance à travers certaines activités décrites 246
a- Des savoirs vers les connaissances 246
b- Des connaissances vers les savoirs 246
8.4- Les niveaux d'activités de H 247
a- Niveau +3 : niveau noosphérien ou idéologique 247
b- Niveau +2 : situation de construction ou de conception d'un thème 247
c- Niveau +1 et niveau 0 : situation de projet de leçon (dans la séance) et situation didactique 248
d- Niveau -1 : niveau d'observation ou de dévolution 248
8.5- Conclusion concernant H 249

9- L'enseignement de I 250
9.1- L'arbre des savoirs du nombre de I 250
a- Focus sur les cinq branches de l'arbre des savoirs du nombre 250
b- Durée des extraits codés 250
9.2- Quelles connaissances mathématiques spécifiques sont présentes dans chacune des branches ? 250
a- La branche cardinal 250
b- La branche numérations 254
c- La branche énumération 255
d- La branche calcul 255
e- La branche ordinal 256
9.3- Dialectique savoir/connaissance à travers certaines activités décrites 256
a- Des savoirs vers les connaissances 256
b- Des connaissances vers les savoirs 257
9.4- Les niveaux d'activités de I 257
a- Niveau +3 : niveau noosphérien ou idéologique 257
b- Niveau +2 : situation de construction 258
c- Niveau +1 et niveau 0 : situation de projet de leçon (dans la séance) et situation didactique 258
d- Niveau -1 : niveau d'observation ou de dévolution 259
9.5- Conclusion concernant I 259
10- L'enseignement de J 260
10.1- L'arbre des savoirs du nombre de J 260
a- Focus sur les cinq branches de l'arbre des savoirs du nombre 260
b- Durée des extraits codés 261
10.2- Quelles connaissances mathématiques spécifiques sont présentes dans chacune des branches ? 261
a- La branche cardinal 261
c- La branche numérations 264
c- La branche calcul 265
d- La branche énumération 266
e- La branche ordinal 267
10.3- Dialectique savoir/connaissance à travers certaines activités décrites 268
a- Des savoirs vers les connaissances 268
b- Des connaissances vers les savoirs 268
10.4- Les niveaux d'activités de J 269
a- Niveau +3 : niveau noosphérien ou idéologique 269
b- Niveau +2 : situation de construction 269
c- Niveau +1 et niveau 0 : situation de projet de leçon (dans la séance) et situation didactique 270
d- Niveau -1 : niveau d'observation ou de dévolution 270

10.5- Conclusion concernant J 271
Conclusion de la partie 2 273
1- Une synthèse par branche 273
1.1- La banche numérations 273
1.2- La branche cardinal 273
a- La branche cardinal-relations 273
b- La branche cardinal-quantité 274
1.1- La branche calcul 276
1.2- La branche énumération 277
1.3- La branche position 277
2- Des différences importantes 278
PARTIE 3- PROLONGEMENT DE L'ÉTUDE : L'INFLUENCE DE NOUVEAUX SAVOIRS SUR LES CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES SPÉCIFIQUES DU PROFESSEUR 281
Chapitre 1- Méthodologie pour observer les connaissances mathématiques spécifiques en situation 283
1– Des propos déclarés aux pratiques de classe 283
1.1- Retour sur une difficulté méthodologique spécifique à l'enseignement du nombre à l'école maternelle 283
1.2- Le choix d'une institutionnalisation 284
1.3- Le choix d'un aspect du savoir sur le nombre 284
1.4- Le choix d'une formation à distance 284
1.5- Le choix des enseignants 285
2- La micro-formation 285
2.1- Le cours enregistré 286
2.2- La projection du cours 286
2.3- Le recueil des commentaires jouxtant la projection du cours 287
2.4- La poursuite dans le dispositif de recherche 287
3– Analyse du cours enregistré sur la quantité 288
3.1- L'ossature du cours 288
3.2- Enjeux de la formation : la diffusion de savoirs mathématiques spécifiques 292
3.3– Analyse du cours par rapport à la branche cardinal-quantité de l'arbre du nombre 292
3.4- Effet possible de la micro-formation sur les savoirs mathématiques spécifiques à l'enseignement des professeurs du corpus 297
4- Principes de l'analyse des cinq cas 297
4.1- Réactions « à chaud » 297
4.2– Observation des connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement du professeur en situation 297
conclusion 298

Chapitre 2- L'enseignant J 301
1- Réactions « à chaud » 301
1.1- Résumé des commentaires du cours 301
Point 2 : Subitizing 301
Point 3- Critères de validité 301
Point 5- TSD / Situation d'action 302
Point 6 : Introduction et installation du milieu Consigne 302
Point 7- Situation d'action en classe 302
Point 8- Rôle du professeur 303
Point 9- Situations de formulation 303
Point 10- Eloignement dans l'espace 303
Point 11- Eloignement dans le temps 303
Point 12- Communication à autrui 304
Point 13- Collection intermédiaire 304
Point 14- Du temps aux apprentissages 304
Point 16- Pas de hiérarchie dans les procédures 304
Point 17- Configurations 305
Synthèse des points abordés 305
1.2- Réactions par rapport à la conception de l'enseignement du nombre 305
2- Séquence élaborée par J 306
2.1- Présentation des séances montrées 307
a- Séance 1- Situation d'action 307
b- Séance 5– Situation avec éloignement dans l'espace 308
c- Séance 9– Situation avec éloignement dans l'espace, première partie d'une situation avec éloignement dans le temps 309
d- Séance 10- Situation avec éloignement dans l'espace, deuxième partie d'une situation avec éloignement dans le temps 309
e- Séance 12- Deuxième partie d'une situation avec éloignement dans le temps et situation de formulation à autrui 310
2.2- Analyse des consignes 310
a- Séance 1 310
b- Séance 5 311
c- Séance 9 312
d- Séance 10 313
e- Séance 12 314
3- Analyse des situations installées par J 314
3.1– Succession des situations par rapport à la micro-formation 314
3.2-Situation d'action et installation du milieu 316
3.3-Situations de formulation et collection intermédiaire 317
a- Collection intermédiaire orale 317
b- Collection intermédiaire matérielle 317

c)-Collection intermédiaire écrite 318
4- Conclusion pour J 319
4.1-Une répercussion sur la branche quantité 319
a)-La branche quantité se développe 319
b)-La branche quantité s'étoffe 320
4.2-Analyse des niveaux d'activité du professeur 321
Chapitre 3- L'enseignant D 323
1- Réactions « à chaud » 323
1.1- Résumé des commentaires du cours 323
Point 1– La suite orale des mots nombres 323
Point 7- Situation d'action en classe 323
Point 10- Eloignement dans l'espace 324
Point 13- Collection intermédiaire 324
Point 17- Configurations 325
Synthèse des points abordés 325
1.2- Réactions par rapport à la conception de l'enseignement du nombre 326
2- Séquence élaborée par D 327
2.1– Présentation des séances montrées 327
a-Séance 1 : le nombre 3 328
b- Séance 2 : situation avec éloignement dans l'espace 328
c- Séance 3 : l'arbre aux goûters 329
d- Séance 4 : évaluation. 329
2.2- Analyse des consignes 329
a- Séance 1: Situation pots-crayons, installation du milieu 329
b- Séance 2 : situation pots-crayons avec éloignement dans l'espace 331
c- Séance 3: l'arbre à goûters 332
d- Séance 4 : évaluation 333
3- Analyse des situations installées par D 333
3.1- Adoption d'un milieu matériel pour deux séances montrées 333
3.2- Situation d'action et anticipation 333
3.3- Situation d'éloignement dans l'espace 334
4- Conclusion pour D 334
4.1- Une répercussion sur la branche cardinal 334
a- La branche cardinal relations impactée 334
b- La branche cardinal-relations s'étoffe 335
4.2- Analyse des niveaux d'activité du professeur 337
Chapitre 4- L'enseignant E 339
1- Réactions « à chaud » 339
1.1- Résumé des commentaires du cours 339

Point 2- Subitizing 339
Point 3- Critères de validité 339
Point 4- Situation fondamentale : même quantité que 340
Point 5- TSD/ situation d'action 340
Point 8- rôle du professeur 340
Point 10- Eloignement dans l'espace 340
Point 11- Eloignement dans le temps 341
Point 13- Collection intermédiaire 341
Point 14- Du temps aux apprentissages 341
Point 16- Pas de hiérarchie dans les procédures 342
Point 17- Configuration 342
Point 18- Définition du cardinal 342
Synthèse des points abordés 343
1.2- Réactions par rapport à la conception de l'enseignement du nombre 343
2- Séquence élaborée par E 344
2.1- Présentation des séances montrées 344
a- PS-MS séance 2- « même quantité » installation du milieu et situation d'action 345
b- PS-MS séance 3- situation d'action et situation avec éloignement dans l'espace 346
c- PS-MS séance 4- situation avec éloignement dans l'espace 346
d- PS-MS séance 5- situation avec éloignement dans l'espace 347
e- GS séance 2- situation d'action et situation avec éloignement dans l'espace 347
f- GS séance 3- situation avec éloignement dans l'espace 348
g- GS séance 4- situation avec éloignement dans le temps 348
h- GS séance 5- situation avec éloignement dans le temps 349
2.2- Analyse des consignes 349
a- Séances 2 : Situations d'action 349
b- Séances 3 : Situation d'action et éloignement dans l'espace 350
c- Séances 4 : Situations de formulation 351
d- Séances 5 : éloignement dans l'espace et dans le temps 351
3- Analyse des situations installées par E 352
3.1- Installation du milieu 352
3.2- Institutionnalisation de différentes procédures 352
3.3- Situation d'éloignement dans le temps 352
3.4- Recherche des valeurs des variables 353
4- Conclusion pour E 353
4.1- Une répercussion sur la branche quantité 353
a- La branche quantité se développe 353
b- La branche quantité s'étoffe 354
4.2- Analyse des niveaux d'activité du professeur 354
Chapitre 5- L'enseignant F 357

1- Réactions « à chaud » 357
1.1- Résumé des commentaires du cours 357
Point 3- Critères de validité 357
Point 6- Introduction et installation du milieu 357
Point 8- Rôle du professeur 357
Point 9 - Situations de formulation 358
Point 10 - Eloignement dans l'espace 358
Point 11 - Eloignement dans le temps 358
Point 12 - Communication à autrui 358
Point 16- Pas de hiérarchie dans les procédures 358
Synthèse des points abordés 359
1.2- Réactions par rapport à la conception de l'enseignement du nombre 359
2- Séquence élaborée par F 360
2.1- Présentation des séances montrées 360
a-Séance 1 : situation avec communication à autrui et éloignement dans l'espace 360
b- Séance 2 : situation avec éloignement dans l'espace 361
c- Séance 3 : situation avec éloignement dans le temps 361
d- Séance 4 : situation avec éloignement dans le temps et formulation à autrui 362
2.2 Analyse des consignes 362
a- Séance 1 : Situation avec communication à autrui et situation avec éloignement dans l'espace 362
b- Séance 2: Situation avec éloignement dans l'espace 363
c- Séance 3 : Situation avec éloignement dans le temps 363
d- Séance 4 : Situation avec éloignement dans le temps et formulation à autrui 363
3- Analyse des situations installées par F 364
3.1- Installation du milieu 364
3.2- Situation de communication à autrui et situation d'éloignement dans le temps 364
4- Conclusion pour F 365
4.1- Une répercussion sur la branche quantité 365
a- La branche quantité se développe 365
b- La branche quantité s'étoffe 365
4.2-Analyse des niveaux d'activité du professeur 366
Chapitre 6- L'enseignant I 367
1- Réactions « à chaud » 367
1.1- Résumés des commentaires du cours 367
Point 2- Subitizing 367
Point 5-TSD / Situation d'action 367
Point 7-Situation d'action en classe 367
Point 10-Eloignement dans l'espace 368

Point 12-Communication à autrui 368
Point 11-Eloignement dans le temps 368
Synthèse des points abordés 368
1.2- Réactions par rapport à la conception de l'enseignement du nombre 369
2- Séquence élaborée par I 369
2.1- Présentation des séances montrées 369
a- Séance 1 : situation d'action et situation avec éloignement dans l'espace 369
b- Séance 2 : situation avec éloignement dans l'espace et situation avec éloignement dans le temps 370
c- Séance 3 : situation avec éloignement dans le temps 371
2.2 Analyse des consignes 371
a- Séance 1: Situation d'action et situation avec éloignement dans l'espace 371
b- Séance 2 filmée : Situation avec éloignement dans l'espace et situation avec éloignement dans le temps 372
c- Séance 3 filmée : Situation avec éloignement dans le temps 372
3- Analyse des situations installées par I 373
3.1- Installation du milieu 373
3.2- Valorisation d'une multiplicité des procédures 373
3.3- Situation d'éloignement dans le temps 373
4- Conclusion pour I 373
4.1- Une répercussion sur la branche quantité 373
a- La branche quantité se développe 373
b)-La branche quantité s'étoffe 374
4.2-Quelle analyse avec les niveaux d'activité du professeur ? 375
Conclusion de la partie 3 377
1- Effets de la micro-formation : Une synthèse 377
1.1- Les différents types de situations 377
1.2- Connaissances mathématiques spécifiques (CMS) 378
1.3- Effets de la micro-formation en fonction des CMS antérieures : lieu de greffe de la micro formation 378
2- Régularités et différences importantes des effets de la micro-formation 379
2.1- Installation du milieu : conformité apparente ou conformité sur le sens 379
2.2- Situation d'action et anticipation 380
2.3- Situation de formulation avec éloignement dans l'espace 380
2.4- Situation de formulation avec éloignement dans le temps 380
2.5- Situation de formulation avec communication à autrui 381
CONCLUSION RETOUR SUR LA FORMATION DES ENSEIGNANTS 383
1- Le nombre : un savoir problématique pour les enseignants de l'école maternelle ?..384
1.1- Incertitudes des enseignants de l'école maternelle en ce qui concerne le nombre 384

a- Des interrogations issues de l'analyse des entretiens E1 384
b- Notion de branche principale 385
1.2- L'arbre des savoirs du nombre 385
a- L'arbre des savoirs du nombre comme outil de lecture 386
Outil de lecture pour le chercheur ou le formateur 386
b- Comparaison des programmes de l'école maternelle 2008 et 2015 386
c- L'arbre des savoirs du nombre comme outil d'interprétation 387
Différents courants et prises de positions mathématiques 387
Complémentarité et non opposition 388
d- L'arbre des savoirs du nombre comme outil de programmation 388
Pour l'enseignant 388
Pour la formation 388
2- Des dispositifs de formation pour enrichir le niveau (+2) de savoirs mathématiques spécifiques 389
1- Les différents « profils » d'enseignants et la micro-formation 389
1.1- Profil des enseignants suivant les catégories de Chopin 389
1.2- Impact de la micro-formation en fonction des profils 391
2- De nouveaux dispositifs de formation ? 391
2.1- Micro-formation et formation m@gistère 391
2.2- Une ouverture vers les Lesson Study 392
BIBLIOGRAPHIE 393

INTRODUCTION - LES NOMBRES, ÇA COMPTE À LA MATERNELLE !

1- D'UN QUESTIONNEMENT D'ENSEIGNANTE À L'ÉCOLE MATERNELLE À L'ÉLABORATION D'UN QUESTIONNEMENT DE CHERCHEUR…

Enseignante à l'école maternelle pendant huit ans, j'ai entrainé les enfants à compter tout au long de la journée, car « toute situation est prétexte à compter[1] » : les enfants présents, les absents, les filles, les garçons, les boutons de la chemise, les paires de ciseaux pour l'atelier, les bonnets au porte-manteau, les perles du collier, etc. J'ai observé des écarts entre les connaissances d'élèves de moyenne section, certains comprenaient déjà le fonctionnement de la numération orale décimale et jouaient à réciter la suite orale des mots nombres en dépassant cent avec délice, alors que d'autres étaient plus éloignés d'un intérêt pour les nombres. Cette relative aisance des uns face à l'indifférence pour les nombres des autres si tôt dans la scolarité soulève de nombreuses questions :

Comment proposer des situations porteuses de sens ? Comment expliquer les nombres à un enfant de quatre ans ? Qu'est-ce que connaître les nombres ? Des pratiques différentes ne permettraient-elles pas un apprentissage des nombres accessible à tous ? Peut-on détailler et définir les étapes pour enseigner les nombres ? La profusion des chiffres, des nombres, des signes dans l'environnement de l'enfant à l'école maternelle ne renforce-t-elle pas la confusion ?

Ces points tous azimuts sont relatifs à l'enseignement à l'école maternelle, aux pratiques du professeur, aux situations de classe pour les élèves, aux connaissances et aux savoirs sur le nombre. Ces questions, professionnelles, interrogent les connaissances et le rôle du professeur dans l'enseignement du nombre à l'école maternelle.

2- D'UN QUESTIONNEMENT DE CONSEILLÈRE PÉDAGOGIQUE MATERNELLE[2] À L'ÉLABORATION D'UN QUESTIONNEMENT DE CHERCHEUR…

À ces questions d'enseignante à l'école maternelle, s'ajoutent des interrogations de conseillère pédagogique.

Mes questions sur l'enseignement de l'écriture cursive en grande section trouvèrent des réponses dans l'approche de la méthode de Danièle Dumont (Dumont, 2006; Dumont, 2013). Comment rendre cet enseignement moins difficile et fastidieux pour les élèves de GS et pour l'enseignant ? Quelles formes des lettres adopter et enseigner et pourquoi ? Quelle progression dans l'apprentissage des lettres ? Lors d'une journée de formation sur « le geste d'écriture cursive à la maternelle » avec Danièle Dumont, les enseignants eurent des réactions tranchées. Il y eut un débat sur la façon de tracer la lettre « a ». La suppression du trait d'attaque et la modification du lieu d'attaque des lettres de première unité (Dumont, 2006) offraient des résistances fortes chez certains enseignants et ébranlaient la conception de l'enseignement de l'écriture cursive.

[1] Expression d'un enseignant de l'école maternelle.
[2] CPD maternelle : conseillère pédagogique départementale maternelle

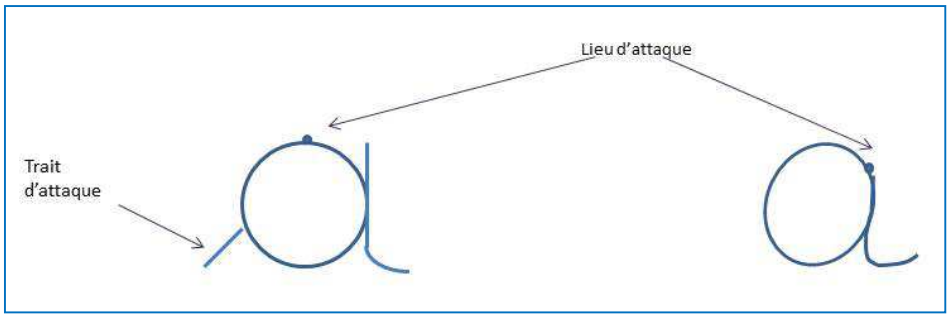


Figure 1 : Deux graphies différentes de la lettre « a » : une source de débat

Les réactions émises lors de cette animation pédagogique ciblée sur des savoirs pour l'enseignement du geste d'écriture cursive à l'école maternelle suscitent des questions :

Pourquoi les enseignants sont-ils déstabilisés ? Comment un même apport de savoirs, pour un même niveau à la maternelle, sur un même domaine provoque-t-il des réactions aussi éloignées, peut-il faire sens pour certains enseignants et être repoussé par d'autres ? Qu'est-ce qui motivent de telles différences ? Les représentations que les professeurs ont de l'enseignement du geste d'écriture cursive peuvent-elles être si différentes ? Que peut-on retenir pour la diffusion de savoirs pour l'enseignement à l'école maternelle ?

Ces questions, toujours professionnelles, interrogent la diffusion de savoirs en animation pédagogique. Les réactions de l'enseignant face à de nouveaux savoirs demandent de s'intéresser aux connaissances du professeur en situation d'apprentissage.

3- VERS L'ÉLABORATION D'UN QUESTIONNEMENT DE CHERCHEUR

Au départ de simples questions liées à la profession, à la pratique de la classe à l'école maternelle, déclenchées par l'observation d'élèves, particulièrement en mathématiques, suivies de questions relatives aux fonctions de conseillère pédagogique sur la diffusion de savoirs en animation pédagogique ont construit mon questionnement autour du travail du professeur et orientent mes recherches vers l'enseignement du nombre à l'école maternelle par le professeur.

Pour le professeur, existent-ils des connaissances particulières pour l'enseignement du nombre à l'école maternelle ? Ces connaissances peuvent-elles être différentes d'un enseignant à l'autre ? Qu'est-ce que l'enseignement du nombre à l'école maternelle ? Quels sont les savoirs à enseigner sur le nombre à l'école maternelle ?

Que se passe-t-il par rapport aux connaissances du professeur pendant la diffusion de nouveaux savoirs ? Comment ces savoirs se maillent-ils avec les savoirs et les connaissances existants du professeur ? Comment s'opère la diffusion de nouveaux savoirs spécifiques à l'enseignement à l'école maternelle et quels sont les effets de nouveaux savoirs sur les connaissances du professeur ? Quelles sont les conséquences pour la formation ?

La difficile construction d'une posture de chercheur

L'une des principales difficultés rencontrées pendant ces années de thèse fut d'accepter et d'endosser la posture de chercheur tout en demeurant conseillère pédagogique. Mais emprunter un changement de point de vue prit le plus de temps. Adopter un autre point de vue signifie comprendre, employer et appartenir à une communauté discursive différente de celle pour laquelle j'ai été formée professionnellement. Cette appartenance à une communauté discursive est marquée par un vocabulaire spécifique mais aussi un cadre

théorique qui oriente et légitime le point de vue. Il s'agissait alors pour moi de découvrir la didactique des mathématiques et le positionnement d'un chercheur. Je souhaite insister sur ma rencontre avec la didactique des mathématiques au bout d'une dizaine d'années d'enseignement. C'est une façon de mettre en valeur mon ignorance professionnelle mais surtout l'importance de cette approche dans la compréhension des savoirs et des connaissances qui s'imposa à moi comme une révélation en ouvrant des possibles pour mon enseignement, et l'enseignement à l'école maternelle en général.

La posture temporaire (bien que largement prolongée) ne facilite pas la rupture, le temps de la thèse est marqué par des points de vue et des questionnements différents et parfois divergents de ceux qui occupent mon quotidien professionnel. En effet, exerçant mon activité professionnelle à plein temps à côté de la thèse, cet ancrage si nécessaire dans la recherche fut pourtant une difficulté bien réelle. Un congé formation m'a toutefois permis de me rapprocher de cet enjeu. Au-delà de la difficulté à observer, analyser, questionner un objet connu mais d'une autre position, ce sont tout de même les facultés à envisager un autre point de vue, à analyser les données à partir d'un cadre qui demandent une rigueur permanente jusqu'au moment où elles deviennent presque naturelles. Le statut de chercheur est temporaire mais le cadre théorique qui sous-tend l'observation et l'analyse de l'objet d'étude modifie le regard de façon permanente.

La démarche de cette thèse

Le manque de visibilité globale des savoirs à enseigner m'amène à chercher une représentation visuelle de l'enseignement du nombre à l'école maternelle. Percevoir en un coup d'œil les différents savoirs principaux nécessaires pour l'enseignement du nombre me conduit à étudier les savoirs mathématiques rencontrés pour l'enseignement du nombre à l'école maternelle. Plus qu'une visibilité des savoirs, il s'agit également d'entrevoir le développement de chaque savoir, rendant compte de l'horizon mathématique des savoirs à l'école maternelle et de l'évolution des connaissances. Les connaissances mathématiques du professeur sont au cœur de l'enseignement du nombre à l'école maternelle. La première partie va traiter précisément des connaissances mathématiques du professeur et des savoirs mathématiques pour l'enseignement du nombre à l'école maternelle.

Dans la deuxième partie, la prise en compte d'une modélisation possible des savoirs offre un cadre d'analyse pour dresser un état des lieux des connaissances mathématiques spécifiques pour l'enseignement du nombre à l'école maternelle. L'analyse orientée sur les savoirs rencontrés dans l'enseignement du nombre, amène à interroger la diffusion de nouveaux savoirs mathématiques précis.

La troisième partie prolonge l'étude des connaissances et des savoirs pour l'enseignement du nombre, en décrivant un dispositif imaginé pour observer l'influence de nouveaux savoirs sur les connaissances mathématiques spécifiques du professeur.

Les connaissances et les savoirs pour l'enseignement du nombre à l'école maternelle sont d'abord analysés *a priori* et modélisés, pour être ensuite éprouvés au contact de la réalité de l'enseignement de certains professeurs. Enfin, une perturbation au niveau des savoirs est apportée et permet d'observer l'évolution des connaissances mathématiques spécifiques du professeur.

PARTIE 1– LES CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES DU PROFESSEUR ET LES SAVOIRS MATHÉMATIQUES POUR L'ENSEIGNEMENT DU NOMBRE À L'ÉCOLE MATERNELLE

Cette première partie souligne le prolongement de travaux qui s'inscrivent dans un courant de recherches internationales (Shulman, 2007; Ball, Thames, & Phelps, 2008; Hill, Ball, & Schilling, 2008) dans le domaine des connaissances du professeur. L'influence des connaissances mathématiques spécifiques pour l'enseignement sur les résultats des élèves a été synthétisée et analysée par Clivaz (Clivaz, 2011). Mon travail porte sur les connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement du professeur relatives à l'enseignement du nombre à l'école maternelle. Cette étude est focalisée sur l'enseignement du nombre à l'école maternelle, aussi, les deux composantes, école maternelle et enseignement du nombre sont analysées. Il s'agit de prendre en compte les connaissances mathématiques spécifiques du professeur pour les étudier dans le travail du professeur c'est-à-dire dans l'acte d'enseigner. Je m'appuie sur les travaux de Shulman (Shulman, 2007), Ball (Ball, Thames, & Phelps, 2008; Hill, Ball, & Schilling, 2008) Clivaz (Clivaz, 2011) qui sont déterminants pour cerner les connaissances et les savoirs mathématiques spécifiques à l'enseignement et ceux de Margolinas (Margolinas, 2002a) qui permettent de les identifier. Je retiens des travaux de Shulman l'opposition entre contenus pédagogiques et contenus mathématiques. Les travaux de Ball apportent une distinction fine et une clarification des connaissances mathématiques pour l'enseignement. Les travaux de Margolinas affinent l'activité du professeur en distinguant différents niveaux d'activité et par voie de conséquence, différents niveaux pour les connaissances mathématiques pour l'enseignement. Clivaz (Clivaz, 2011) utilise ces distinctions pour mettre en lumière l'influence des connaissances mathématiques spécifiques pour l'enseignement de la multiplication posée de nombres à deux chiffres des enseignants vaudois à l'école élémentaire.

Clivaz (Clivaz, 2011, p. 27) précise qu'il s'agit de « travaux inhérents à l'enseignement et non pas à l'enseignant ». En effet, plus que les connaissances de l'enseignant, ce sont des connaissances pour l'enseignement ; c'est-à-dire qu'il existe des connaissances mathématiques intrinsèques au métier, pour l'enseignement.

Cette partie met en lumière l'existence de connaissances mathématiques du professeur spécifiques à l'enseignement du nombre à l'école maternelle, précise l'enseignement du nombre à partir de l'évolution des programmes d'enseignement, et définit également les savoirs du nombre. Pour entrevoir ce que peut être l'enseignement du nombre à l'école maternelle, je dresse un arbre des savoirs du nombre qui offre une modélisation des savoirs,

une sorte de carte des possibles qui me servira, par la suite, à envisager un arbre des connaissances mathématiques spécifiques pour chaque enseignant. Enfin, l'étude détaillée d'un savoir particulier, le cardinal, est proposée en fin de partie.

L'enseignement du professeur est présenté (chapitre 1) en développant les connaissances mathématiques spécifiques pour l'enseignement avec les travaux de Shulman (Shulman, 2007) et de Ball (Ball, Thames, & Phelps, 2008; Hill, Ball, & Schilling, 2008) puis en exposant la structuration de l'activité du professeur envisagée à partir des travaux de Margolinas (Margolinas, 2002a; Laparra & Margolinas, 2010). L'école maternelle française depuis son origine est succinctement décrite (chapitre 2), école, qui, par sa spécificité, impose des pratiques et des gestes particuliers pour l'enseignement. Puis les savoirs mathématiques pour l'enseignement du nombre à l'école maternelle sont exposés (chapitre 3). Après avoir repéré les institutions dans lesquelles les savoirs sont légitimes, l'évolution de l'enseignement du nombre à partir des programmes de 1855 à nos jours est signifiée. Enfin, les savoirs mathématiques pour enseigner le nombre ainsi que leur interprétation courante faite à l'école maternelle sont développés. Les différents savoirs mathématiques rattachés à cet enseignement vont alors être explicités à partir de la théorie des situations didactiques (chapitre 4). La méthodologie utilisée pour construire une modélisation des savoirs du nombre sous forme d'arbre hiérarchique (chapitre 5) est soulignée avant de proposer une étude ciblée sur les savoirs mathématiques spécifiques à l'enseignement de la cardinalité à l'école maternelle (chapitre 6).

L'étude des connaissances spécifiques pour l'enseignement du professeur oriente mes travaux vers une exploitation de la distinction entre connaissances et savoirs. En effet, l'existence de connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement du professeur me conduit à étudier les savoirs mathématiques spécifiques à l'enseignement du nombre à l'école maternelle. La dialectique entre connaissances (mathématiques spécifiques à l'enseignement du professeur) et savoirs (mathématiques spécifiques à l'enseignement du nombre à l'école maternelle), présentée dans cette partie, constitue le cadre théorique de ma thèse.

CHAPITRE 1- LES CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES SPÉCIFIQUES À L'ENSEIGNEMENT DU PROFESSEUR

« Our project seeks to understand and measure mathematical knowledge for teaching - the mathematical knowledge that teachers use in classrooms to produce instruction and student growth. »(Hill, Ball, & Schilling, 2008, p. 374)

S'intéresser à l'enseignement du professeur dirige les recherches vers ses connaissances. À côté des connaissances mathématiques « communes » se trouvent des connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement. Elles vont faire l'objet d'une présentation à partir des travaux de Shulman (Shulman, 2007) (1.1- Les travaux de Shulman) puis de Ball (Ball, Thames, & Phelps, 2008) (1.2- Les travaux de Ball) et enfin de Margolinas (Margolinas, 2002b) (1.3- Les travaux de Margolinas). Pour apprécier les précisions dans les connaissances du professeur, j'indique le cheminement des travaux de la recherche.

1- LES TRAVAUX DE SHULMAN

Lee Shulman[3] est né à Chicago, après des études de psychologie et de philosophie, il intègre le département d'éducation de l'Université de Chicago. Il a été professeur de psychologie de l'éducation à l'Université du Michigan puis professeur d'éducation à l'Université de Stanford.
Lee Shulman a consacré sa carrière aux questions concernant l'éducation et l'enseignement. Il a été fondateur et co-directeur de l'Institut de recherche sur l'enseignement et l'apprentissage des enseignants (Michigan State University).
Il a été nommé à la tête de la Fondation Carnegie pour l'enseignement (Carnegie Foundation for the Advancement of Teaching) en 1996 et il a présidé cette fondation jusqu'à sa retraite en 2008.
Il a dirigé de nombreuses recherches sur les professeurs et a reçu le prix de l'AERA (American Educational Research Association) pour souligner sa contribution concernant la recherche en éducation et en psychologie de l'éducation. Il a également reçu en 2008 le prix de l'American Association of Colleges for Teacher Education pour l'ensemble de son œuvre.
Shulman a concentré ses recherches et ses écrits sur la qualité de l'enseignement de la maternelle à l'université. La psychologie de l'enseignement en sciences, particulièrement en mathématiques et en médecine ; la logique de la recherche en éducation et les politiques visant à accroître le professionnalisme dans l'enseignement sont d'autres domaines d'expertise de Shulman. Parmi ses nombreux travaux, « la connaissance du contenu pédagogique (PCK)» a rendu Shulman célèbre et a lancé de nouvelles pistes pour la recherche dans l'enseignement et la formation des enseignants.

> *"Within the category of pedagogical content knowledge, I include, for the most regularly taught topics in one's subject area, the most useful form of representation of those ideas, the most powerful analogies, illustrations, examples, explanations, and demonstrations—in a word, the ways of representing and formulating the subject that make it comprehensible to others." – Lee Shulman*

(Shulman, 1986; Shulman, 2007)

Shulman est l'un des premiers, dans sa communauté de recherche, à s'attacher aux connaissances du professeur nécessaires pour l'enseignement. Il s'intéresse aux conceptions

[3] http://www.leeshulman.net

du savoir professoral (Shulman, 2007, p. 97) et entreprend une étude visant à comparer les contenus des tests d'entrée pour devenir enseignant en 1875 et dans les années 80. En 1875, plus de 90% des questions portaient sur le contenu c'est à dire sur la matière à enseigner ou le savoir fondamental.

> *« La personne qui présume enseigner un contenu aux enfants doit démontrer une connaissance de ce contenu comme un prérequis à l'enseignement. Bien que la connaissance des théories et des méthodes d'enseignement soit importante, elle joue, de manière assumée, un rôle second dans la qualification des professeurs. » (Shulman, 2007, p. 100)*

Dans les années 1980, aux États-Unis la tendance s'inverse.

> *« Les tests d'habiletés de base sont souvent considérés comme des prérequis pour l'entrée dans un programme de formation des maitres plutôt qu'en tant que standards servant à définir les compétences nécessaires pour la pratique. » (Shulman, 2007, p. 100)*

Les compétences demandées au professeur ressortent uniquement du registre de la pédagogie afin d'apprécier leur capacité à enseigner, ce choix délibéré des responsables politiques est fondé sur des recherches focalisant sur l'efficacité professorale.

> *« Ce que les responsables politiques oublient c'est qu'il existe une contrainte inévitable sur toute recherche dans toute discipline. » (Shulman, 2007, p. 101)*

Shulman analyse les recherches qui identifient les « formes de comportement professoral » et regrette toutefois que « l'aspect central de la vie de la classe : la discipline » soit ignorée.

> *« Personne ne s'est demandé comment, à partir du savoir de l'enseignant, la discipline a été transformée en contenu d'enseignement. […] Mes collègues et moi-même considérons que l'absence de concentration sur le contenu, au sein des divers paradigmes de recherche sur l'étude de l'enseignement, renvoie au problème du "paradigme manquant". » (Shulman, 2007, p. 101)*

Son enquête, l'ayant conduit « de l'esprit des années 1870, où la pédagogie était essentiellement ignorée, à celui des années 1980, où le contenu est notablement absent » (Shulman, 2007, p. 102), le pousse à affirmer que cette opposition entre savoir et pédagogie « vient plutôt d'un développement plus récent » (Shulman, 2007, p. 104). Shulman identifie les manques dans les différentes recherches scientifiques, notamment « les questions relatives au contenu des questions enseignées, les questions posées aux élèves et les explications offertes » (Shulman, 2007, p. 104). Il constate que la psychologie cognitive a pris une large part de ces travaux du côté de l'élève, l'apprenant.

> *« Les recherches sur l'enseignement ont tendu à ignorer ces questions pour ce qui concerne les professeurs. Mes collègues et moi-même tentons de corriger ce déséquilibre avec notre programme de recherche "Le développement de la connaissance dans l'enseignement". » (Shulman, 2007, p. 104)*

Les travaux de Shulman interrogent les connaissances utiles au professeur pour enseigner « comment [le professeur] utilise-t-il sa connaissance du contenu pour produire de nouvelles explications, représentations, ou clarifications ? […] Comment le professeur […] se sert-il de son expertise disciplinaire lorsqu'il enseigne ? » (Shulman, 2007, p. 105). Il n'oppose plus les savoirs fondamentaux de la discipline et la pédagogie mais il catégorise les connaissances du contenu et cherche les liens qu'elles tissent avec les connaissances pédagogiques.

> *« Comment pouvons-nous réfléchir sur la connaissance qui se développe dans les esprits des professeurs, et plus particulièrement sur celle relative aux contenus ? Je suggère de distinguer parmi trois catégories de connaissances du contenu : a) la connaissance disciplinaire du contenu (subject matter content knowledge), b) la connaissance pédagogique du contenu (pedagogical*

content knowledge), et c) la connaissance du curriculum (curricular knowledge). »(Shulman, 2007, p. 106)

1.1- La connaissance disciplinaire du contenu

La connaissance disciplinaire du contenu fait référence aux savoirs de la discipline ainsi qu'à tous ses codes et référents. Au-delà de la compréhension des contenus, il s'agit bien pour le professeur d'en comprendre les tenants et les aboutissants.

> *« Nous attendons que la compréhension des contenus disciplinaires chez un professeur soit au moins égale à celle d'un de ses collègues, le simple spécialiste du domaine. Le professeur ne doit pas seulement comprendre que quelque chose est ainsi ; il doit comprendre, au-delà, pourquoi il est ainsi, sur quels fondements cela peut être garanti, et dans quelles circonstances notre croyance dans sa justification peut être affaiblie et même déniée. De plus, nous attendons qu'un professeur comprenne pourquoi un domaine donné est particulièrement central pour une discipline, là où un autre peut être d'une certaine manière périphérique. » (Shulman, 2007, p. 107)*

Les travaux de Shulman ne sont pas spécifiques aux professeurs du premier degré, or la particularité de l'enseignement à l'école primaire française est la polyvalence des enseignants, qui ne sont pas des spécialistes des disciplines qu'ils enseignent. En ce qui concerne les enseignants de l'école maternelle, ils ne sont pas non plus des spécialistes de la petite enfance puisque les professeurs sont recrutés pour enseigner aussi bien à l'école maternelle qu'à l'école élémentaire. Dans le cadre de l'enseignement du premier degré en France, les propos de Shulman sont donc à nuancer, le professeur des écoles ne pouvant comprendre les contenus disciplinaires comme un spécialiste du domaine.

1.2- La connaissance pédagogique du contenu

La connaissance pédagogique de contenu va au-delà de cette première connaissance disciplinaire car elle englobe « les aspects les plus liés à son enseignabilité » (Shulman, 2007, p. 107). C'est la dimension de la connaissance de la discipline pour l'enseignement qui est ici mise en lumière. L'enseignabilité englobe des connaissances précises liées à l'enseignement même du contenu. Cette finesse et cette précision lient le contenu mathématique pour l'enseignement.

> *« Une seconde sorte de connaissance de contenu est la connaissance pédagogique, qui va au-delà de la connaissance de la discipline per se, vers la dimension de connaissance de la discipline pour l'enseignement. Je parle encore de connaissance du contenu ici, mais de cette forme particulière de connaissance du contenu qui intègre (embodies) les aspects du contenu les plus liés à son enseignabilité ». (Shulman, 2007, p. 107)*

1.3- La connaissance du curriculum

Le curriculum intègre tous les documents en lien avec les programmes, des documents d'accompagnement aux différents outils existants pour faire la classe. Shulman différencie deux aspects pour ces connaissances, il les nomme des connaissances du curriculum latéral et des connaissances du curriculum vertical, prenant en compte d'une part la transversalité des apprentissages et d'autre part la longitudinalité des apprentissages. C'est-à-dire que l'enseignant doit avoir une idée précise de la façon dont les mathématiques se déclinent dans les différents niveaux de classe (connaissances du curriculum vertical), mais il doit également être capable de faire des ponts et des liens avec d'autres matières, disciplines, quand les occasions se présentent, c'est-à-dire quand les savoirs se mêlent (connaissances du curriculum latéral). Ici, les connaissances du curriculum latéral sont renforcées pour

l'enseignant du premier degré justement grâce à la polyvalence. De même, les connaissances du curriculum vertical sont intensifiées dans une classe multi-niveaux.

> *« J'attendrais d'un enseignant professionnel qu'il soit familier avec les aspects curriculaires des autres disciplines étudiées par ses élèves parallèlement à sa discipline. Cette connaissance du curriculum latéral […] sous-tend l'habileté professorale à relier le contenu d'un cours ou d'une leçon donnés à des domaines ou questions simultanément en discussion dans les autres disciplines. L'équivalent vertical de cette connaissance curriculaire est la familiarité avec les domaines et questions qui ont été et seront traités à l'école, dans le même domaine de connaissance (subject area), durant les années précédentes et les suivantes, et les moyens qui les actualisent. » (Shulman, 2007, p. 108)*

La connaissance des programmes antérieurs (Margolinas, 2002a) fait partie des connaissances du curriculum.

> *« On voit au passage que les rédacteurs des programmes supposent implicitement chez les professeurs la présence de connaissances (ici le programme antérieur) qui, quand elles font défaut (après plusieurs années de fonctionnement du programme), laisse la porte ouverte à des interprétations erronées. » (Margolinas, 2002a, p. 157)*

Pour Clivaz (Clivaz, 2011, p. 23) la connaissance pédagogique du contenu « fera le succès des propositions de Shulman » et elle sera parfois simplement traduite en français par « connaissance didactique ». Dès lors, ces connaissances pédagogiques du contenu (ou connaissances didactiques) vont faire l'objet de travaux approfondis, notamment par Ball.

2- LES TRAVAUX DE BALL

Deborah Loewenberg Ball[4] est professeur en éducation à l'Université du Michigan. Elle est actuellement doyen de l'École de l'éducation. Elle a enseigné en école primaire pendant quinze ans et continue à enseigner les mathématiques aux élèves du primaire chaque été.
Ses recherches portent sur la pratique de l'enseignement des mathématiques et sur l'amélioration de la formation et le développement des enseignants. Son domaine d'expertise est la formation des enseignants, avec un intérêt pour la formation professionnelle des enseignants débutants et en particulier la façon dont la formation professionnelle et l'expérience permettent aux étudiants débutants de développer les connaissances et des habiletés nécessaire pour enseigner.
Le programme Teaching Works qu'elle dirige vise à développer un curriculum de formation des professeurs durant les trois premières années d'enseignement.
Ses travaux ont été soulignés par plusieurs prix et distinctions. Elle siège dans de nombreuses commissions nationales et internationales, notamment le National adisory Panel.
(Ball, Thames, & Phelps, 2008)

Clivaz (Clivaz, 2011, p. 26) détaille les travaux de Ball qui est amenée à clarifier les catégories des connaissances des enseignants, à définir un cadre théorique et à affiner les connaissances mathématiques requises pour l'enseignement.

> *« Son effort tend à la fois à définir précisément les termes utilisés, à mieux catégoriser les connaissances des enseignants, à mieux les mesurer et à en déterminer l'effet sur les performances des élèves. » (Clivaz, 2011, p. 26)*

Ball (Ball, Thames, & Phelps, 2008, p. 399) approfondit les connaissances mathématiques nécessaires pour un enseignement efficace de la discipline. Elle définit quatre domaines distincts parmi ces connaissances.

[4] http://www-personal.umich.edu/~dball/

2.1- Les connaissances mathématiques communes CMC (Common Content Knowledge-CCK)

Il s'agit de connaissances mathématiques permettant à tout un chacun de résoudre des problèmes mathématiques courants, elles ne sont pas la caractéristique propre de l'enseignement, toutefois ces connaissances sont nécessaires, mais non suffisantes au professeur.

> *« Teachers need to know the material they teach; they must recognize when their students give wrong answers or when the textbook gives an inaccurate definition. » (Ball, Thames, & Phelps, 2008, p. 399)*

Les enseignants doivent en effet connaitre la matière qu'ils enseignent pour pouvoir valider ou infirmer les réponses des élèves, ou reconnaitre une définition incorrecte d'un manuel. Ces connaissances mathématiques communes du contenu ne sont pas susceptibles d'être exclusives aux enseignants. Elles peuvent être décrites comme des connaissances mathématiques communes au métier de l'enseignement mais aussi à d'autres professions qui emploient également les mathématiques. Pour Hill, ces connaissances peuvent être assimilées aux connaissances disciplinaires du contenu de Shulman.

> *« CCK [Common Content Knowledge] is what Shulman likely meant by his original subject matter knowledge. » (Hill, Ball, & Schilling, 2008, p. 378)*

2.2- Les connaissances mathématiques spécifiques CMS (Specialized Content Knowledge-SCK)

Ce sont des connaissances et des habiletés mathématiques uniques à l'enseignement. Dans les tâches quotidiennes de l'enseignement, « teachers have to do a kind of mathematical work that others do not» (Ball, Thames, & Phelps, 2008, p. 400). Ces connaissances entrent par exemple en jeu dans la recherche des raisons mathématiques des erreurs des élèves (exemple de la soustraction (Ball, Thames, & Phelps, 2008, p. 396)). Parmi ces connaissances, se trouve également l'utilisation explicite d'un langage mathématique, la sélection d'exemples avec des intentions mathématiques, la justification d'idées mathématiques. Ce sont à ces connaissances que Ball et son équipe s'intéressent tout particulièrement.

Les connaissances mathématiques spécifiques pour l'enseignement permettent au professeur de se représenter les mathématiques, de s'engager dans des tâches d'enseignement, de fournir des explications mathématiques aux procédures et aux règles, de comprendre et d'examiner des solutions particulières à des problèmes spécifiques. Ce sont des connaissances mathématiques d'une conception nouvelle car elles sont spécifiques au métier de l'enseignement.

> *« SKC [Specialized Content Knowledge] is a newer conceptualization. » (Hill, Ball, & Schilling, 2008, p. 378)*

2.3- Les connaissances des élèves et de l'apprentissage du sujet CE (Knowledge of Content and Students-KCS)

Ces connaissances combinent des connaissances sur les élèves et des connaissances mathématiques. Elles permettent au professeur d'anticiper les réactions des élèves face aux mathématiques, ce qu'ils peuvent trouver facile ou plus difficile. Les connaissances des élèves et de l'apprentissage sont liées à une connaissance fine des élèves en train

d'apprendre c'est-à-dire comment ils pensent, savent ou apprennent les mathématiques. Ce sont aussi des connaissances qui permettent à l'enseignant d'interpréter les difficultés des élèves.

2.4- Les connaissances du contenu et de l'enseignement du sujet CC (Knowledge of Content ans Teaching-KCT)

Ces connaissances conjuguent des connaissances sur l'enseignement et sur les mathématiques. L'enrichissement des connaissances pédagogiques liées à l'enseignement est rendu possible par les connaissances mathématiques. Les connaissances du contenu et de l'enseignement sont des connaissances de construction de l'enseignement des mathématiques qui s'appuient sur les acquis des élèves, sur la remédiation des erreurs, sur l'utilisation d'un matériel pédagogique adéquat, la gestion du groupe, etc.

Les travaux de Ball mettent l'accent sur les connaissances mathématiques nécessaires pour enseigner du professeur qui concernent des tâches spécifiques de l'enseignement. Pour représenter leurs hypothèses de travail, Ball (Ball, Thames, & Phelps, 2008, p. 402) propose un schéma qui prolonge les catégories de Shulman.

Le schéma qui suit (Figure 2 : Connaissances mathématiques pour l'enseignement (Clivaz, 2011, p. 28)) fait référence aux travaux et aux traductions de Clivaz (Clivaz, 2011, p. 28).

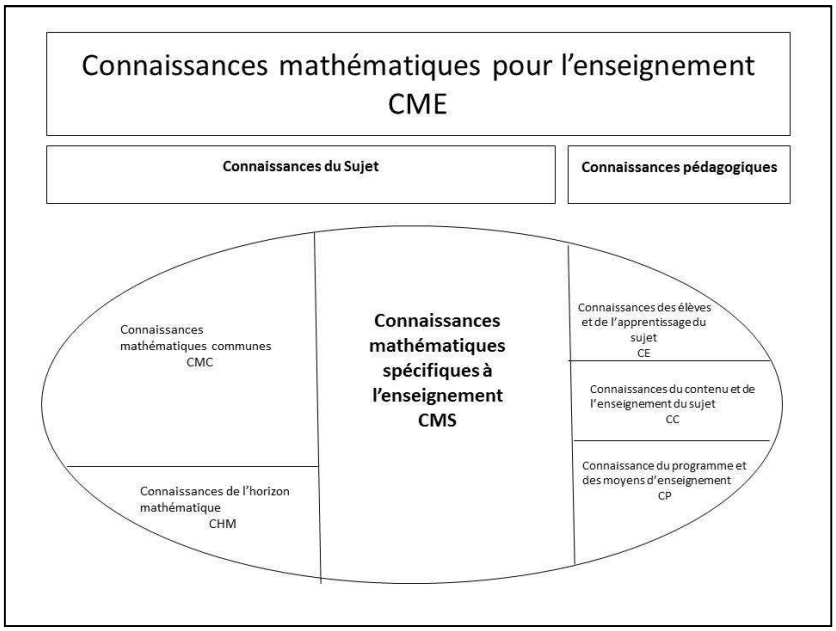


FIGURE 2 : CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES POUR L'ENSEIGNEMENT (CLIVAZ, 2011, P. 28)

Les connaissances mathématiques pour l'enseignement se décomposent en six catégories, regroupées sous deux pôles, les connaissances du sujet d'une part et les connaissances pédagogiques d'autre part.

Les connaissances du sujet se divisent en connaissances mathématiques communes, en connaissances de l'horizon mathématique et en connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement (apport fondamental de Ball).

Les connaissances pédagogiques contiennent les connaissances des élèves et leur façon d'apprendre, les connaissances du contenu et de l'enseignement du sujet et les connaissances du programme et des moyens d'enseignement.

Les connaissances du programme et des moyens d'enseignement sont exactement celles décrites par Shulman, elles englobent donc les connaissances des programmes, des documents d'accompagnement, des supports vidéo, d'outils divers dans la discipline pour l'année d'enseignement concernée, mais également pour les autres années replaçant l'élève et ses apprentissages dans un parcours fluide et cohérent prenant en compte aussi les autres disciplines.

Les connaissances de l'horizon mathématique s'appuient sur les liens entre différents objets mathématiques et offrent une lisibilité du savoir en termes d'évolution dans les différents niveaux d'enseignement. Ce que Shulman avait divisé en connaissances du curriculum latéral et vertical, prenant en compte la transversalité des apprentissages d'une part et la longitudinalité des apprentissages d'autre part, est différencié et précisé par Ball qui décline ce qui ressort des connaissances du contenu du sujet (les connaissances de l'horizon mathématique) et ce qui a trait aux connaissances pédagogiques (les connaissances du curriculum).

Pour Clivaz, les travaux et les apports de Ball et son équipe mettent en évidence les connaissances mathématiques spécifiques à l'acte d'enseignement.

> *«[Les travaux de Ball ont permis] une catégorisation des connaissances propre aux mathématiques et propre à l'enseignement. Elle permet de mettre en évidence les connaissances spécifiquement mathématiques dans des actes d'enseignement, évoqués ou réels […]. » (Clivaz, 2011, p. 37)*

Ces clarifications sont extrêmement précieuses pour distinguer les connaissances mathématiques pour l'enseignement du professeur. Les connaissances mathématiques spécifiques pour l'enseignement apparaissent comme une nouvelle catégorie, différentes des connaissances mathématiques communes, distinctes des connaissances pédagogiques et pouvant faire l'objet d'une formation professionnelle. Ces connaissances mathématiques spécifiques pour l'enseignement sont focalisées sur le contenu, c'est-à-dire la discipline, les mathématiques, qui sont nécessaires pour enseigner. La complémentarité de ces connaissances est au service des connaissances mathématiques pour l'enseignement. Parce que le professeur enseigne, en situation de classe il mobilise des connaissances spécifiques à l'enseignement, parce qu'il enseigne le nombre à l'école maternelle, il requiert des connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement du nombre et de surcroît, spécifiques à l'enseignement à l'école maternelle. Ce sont exactement ces connaissances qui sont recherchées et analysées tout au long de la thèse.

L'activité du professeur en exercice, c'est-à-dire dans toute sa dimension d'enseignement, est à présent à interroger à partir des niveaux d'activité de Margolinas (Margolinas, 2002a).

3- LES TRAVAUX DE MARGOLINAS

« Il est donc nécessaire d'envisager un modèle des situations dans lesquelles se développent les activités du professeur. C'est-à-dire décrire le professeur comme un sujet dont les connaissances lui permettent d'interagir avec un milieu, qui en retour permet de transformer ses connaissances, c'est-à-dire d'apprendre. » (Margolinas, 2002a, p. 145)

Claire Margolinas[5]

Mathématicienne et didacticienne de formation, Claire Margolinas est enseignant-chercheur, habilitée à diriger les recherches en sciences de l'éducation, membre du laboratoire ACTé (Activité, Connaissance, Transmission, éducation) à l'Université Blaise Pascal à Clermont Ferrand. Elle est également membre du bureau du Réseau RESEIDA (REcherches sur la Socialisation, l'Enseignement, les Inégalités et les Différenciations dans les Apprentissages).

Ses travaux sont centrés sur la didactique des mathématiques. Une partie de ses recherches portent sur l'analyse, le rôle et la situation du professeur. Elle précise les concepts de connaissance et savoir introduits par Brousseau en détaillant les processus de dévolution et d'institutionnalisation. Après des recherches spécifiques sur l'énumération et sur la place des documents dans l'enseignement du professeur, Margolinas a orienté une partie de ses travaux vers l'école maternelle, plus particulièrement sur le nombre et la position, mais aussi sur l'oralité et la littératie. (Margolinas, 2002) (Margolinas & Wozniak, 2012; Margolinas & Laparra, 2016)

La complexité et le foisonnement des connaissances mathématiques pour l'enseignement du professeur étant détaillés, la focale se déplace sur le fonctionnement des connaissances du professeur. Margolinas (Margolinas, 2002a, p. 141) envisage « le professeur comme un sujet dont on cherche à étudier l'activité » et décrit quatre niveaux d'activité du professeur liés les uns avec les autres.

Les niveaux d'activité du professeur sont exposés dans le tableau (Tableau 1 : Résumé des niveaux d'activité du professeur (Margolinas, 2002a, p. 143)) comme il suit :

Niveau noosphérien ou idéologique	+3
Niveau de construction ou de conception d'un thème	+2
Niveau de projet de leçon	+1
Niveau de la situation didactique	0
Niveau d'observation et de dévolution	-1

TABLEAU 1 : RÉSUMÉ DES NIVEAUX D'ACTIVITÉ DU PROFESSEUR (MARGOLINAS, 2002A, P. 143)

Niveau de la situation didactique (0) : Ce niveau décrit le déroulement en classe avec le professeur et les élèves. Il « caractérise l'action du professeur en classe » (Margolinas, 2002a, p. 142).

> *« Il s'agit du niveau de base dans lequel les élèves et le professeur interagissent es-qualité. »(Margolinas, 2002a, p. 142)*

[55] http://acte.univ-bpclermont.fr/article10.html

Niveau d'observation et de dévolution (-1) : Le professeur observe la dévolution de la situation ou l'activité des élèves sans que son observation n'interagisse sur et avec la production des élèves. Il est attentif aux procédures des élèves, aux difficultés.

Niveau de projet de leçon (+1) : Le professeur élabore le cours, il définit la leçon, la séance, il planifie le matériel, l'organisation des ateliers, les temps collectifs, individuels.

Niveau de construction ou de conception d'un thème (+2) : Le professeur planifie les grandes lignes d'un thème. Il entrevoit l'articulation des différentes séances d'une séquence d'apprentissage ou les différentes séquences pour un thème plus général. Il perçoit la progression et l'évolution des connaissances.

> *« C'est à ce niveau qu'intervient de façon caractéristique la recherche d'une situation fondamentale. » (Margolinas, 2002a, p. 142)*

Niveau noosphérien ou idéologique (+3) : Les perceptions de l'enseignement en général, l'enseignement des mathématiques en particulier influencent les connaissances du professeur, en (+3) l'activité du professeur n'est pas finalisée. Ces conceptions liées à l'enseignement enrichissent les connaissances du professeur comme une toile de fond à partir de laquelle il viendra élaborer et construire ses séquences et séances.

> *« Les connaissances du niveau +3 proviennent d'une relation avec la noosphère, dans un mouvement qui relève plus de l'importation que de l'interaction. » (Margolinas, 2002a, p. 155)*

Par exemple, l'articulation savoir/connaissance peut se concrétiser dans deux mouvements différents, qui correspondent à des conceptions d'enseignement différentes. Partir de la présentation des savoirs puis faire usage des savoirs transmis pour que ceux-ci deviennent des connaissances en situation ; ou bien partir de la construction des connaissances en situation puis institutionnaliser ces connaissances pour qu'elles acquièrent le statut de savoir.

Ces deux mouvements donnent lieu à des constructions différentes[6]pour l'enseignement du nombre à l'école maternelle. Le niveau idéologique ici a des répercussions directes sur le niveau de construction du thème.

L'interprétation de ces différents niveaux ne se résume pas à une lecture linéaire d'un modèle temporel où les niveaux seraient tour à tour investis par le professeur. Le modèle structurel décrit (Margolinas, 2002a) rend compte de l'imbrication des milieux[7], comme dans un oignon (Brousseau, 1998).

> *« Il ne s'agit pas d'une description de situations temporellement successives, mais des positions que les sujets peuvent prendre […]. La notion de " position " peut être complétée par celle de point de vue : comme dans un véritable oignon, les niveaux sont translucides. » (Margolinas, 1995, p. 96)*

Ces possibles positions de l'activité du professeur font apparaitre des tensions toujours présentes entre les différents niveaux dans les choix du professeur. Si les niveaux (-1), (+1) influencent fortement le niveau (0), les autres niveaux entrent toutefois en considération dans les décisions du professeur.

> *« D'une façon générale le professeur est ainsi pris entre des considérations qui le tirent en quelque sorte vers les élèves et d'autres qui proviennent de sa condition de professeur de mathématiques,*

[6] Elles seront détaillées dans le chapitre 5.

[7] L'imbrication des milieux sera développée dans le chapitre 4, à ce stade de la thèse, l'interaction entre les différents niveaux d'activité suffit pour comprendre ce qui se joue pour l'activité du professeur.

et comme tel fortement assujetti à l'institution scolaire et à l'institution mathématique. » (Margolinas, 2002a, p. 142)

Ce modèle offre une lecture plus fine des interactions et de l'interdépendance qui se jouent entre les différents niveaux. Il se centre sur l'activité du professeur c'est-à-dire l'enseignement dans toute sa complexité et offre une palette de possibilités pour l'interprétation des choix du professeur.

« During a classroom discussion, a teacher must decide when to pause for more clarification, when to use a student's remark to make a mathematical point, and when to ask a new question or pose a new task to further student's learning. Each of these decisions requires coordination between the mathematics at stake and the instructional options and purposes at play. » (Ball, Thames, & Phelps, 2008, p. 401)

Ball décrit ici des choix d'un enseignant au niveau (0), niveau de la situation didactique. L'interdépendance entre les niveaux (0) et (-1), le niveau de l'observation, est développée, le professeur décide d'apporter plus de précisions peut-être en observant ou bien les réactions des élèves ou bien les productions, c'est-à-dire les erreurs, les doutes, les questions des élèves. Mais il est également décrit des interactions entre le niveau (0) et les niveaux (+1) et (+2). En effet, proposer une nouvelle tâche pour poursuivre l'apprentissage des élèves et faire avancer le temps didactique (Chevallard & Mercier, 1987; Chopin, 2006) prévu dans l'élaboration de la leçon ressort du niveau (+1), de même utiliser une remarque d'un élève pour renforcer un point mathématique important peut être lié avec le niveau (+2) qui jalonne les savoirs mathématiques.

Grâce aux niveaux d'activité du professeur, la détermination des connaissances du contenu et des élèves est renforcée par la dévolution et l'observation, en effet l'enseignant en position d'observation sait ce qu'il observe, il se focalise sur les procédures et donc des connaissances des élèves en situation, la reconnaissance des différentes procédures et l'interprétation des erreurs possibles lui permettent d'intervenir au niveau (0) en facilitant l'évolution des connaissances de l'élève. Les connaissances du contenu et de l'enseignement prennent toute leur place au niveau (0), niveau de la situation didactique, largement influencées par le niveau (+1), qui guide l'intention et le temps didactique (Chevallard & Mercier, 1987; Chopin, 2006; Chopin, 2007) de la leçon.

Les connaissances communes du contenu, les connaissances spécifiques du contenu, les connaissances du curriculum et de l'horizon du contenu nourrissent et orientent les décisions et les choix pédagogiques et didactiques du professeur dans sa préparation des cours.

L'articulation des niveaux d'activité du professeur (Margolinas, 2002a) avec les connaissances mathématiques pour l'enseignement (Ball, Thames, & Phelps, 2008) peut être synthétisée dans le tableau suivant (Tableau 2: Articulation entre les niveaux d'activité du professeur et les connaissances mathématiques pour l'enseignement) :

Niveaux d'activités (Margolinas, 2002a)		Connaissances mathématiques pour l'enseignement (Ball, Thames, & Phelps, 2008)
Niveau noosphérien ou idéologique	+3	(CMC) : connaissances commune du contenu (CMS) : connaissance du contenu spécialisé (CHM) et (CP) : connaissance des programmes et de l'horizon mathématique
Niveau de construction ou de conception d'un thème	+2	
Niveau de projet de leçon	+1	
Niveau de la situation didactique	0	(CC) : connaissances du contenu et de l'enseignement
Niveau d'observation et de dévolution	-1	(CE) : connaissances du contenu et des élèves

TABLEAU 2: ARTICULATION ENTRE LES NIVEAUX D'ACTIVITÉ DU PROFESSEUR ET LES CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES POUR L'ENSEIGNEMENT

Ainsi, les connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement du professeur renforcent plutôt le niveau de construction (+2), pour distiller sur les autres niveaux. Cette modélisation de l'activité du professeur permet de « démêler des pratiques qui sont imbriquées » (Margolinas, 2002a, p. 142) et donc les connaissances imbriquées. Elle offre également une clarification des influences extérieures sur les niveaux visés et aide à comprendre d'où proviennent les répercussions sur le niveau de la situation didactique.

CONCLUSION

Étudier l'enseignement du nombre à l'école maternelle demande de s'attacher à l'observation du professeur à travers son activité, ses connaissances. L'articulation des niveaux d'activité du professeur (Margolinas, 2002a) et les connaissances mathématiques pour l'enseignement (Ball, Thames, & Phelps, 2008) servent de base au cadre théorique pour ce travail qui concerne le professeur et plus particulièrement l'enseignement du professeur. L'acte d'enseigner est étudié, c'est-à-dire les connaissances mathématiques spécifiques pour enseigner le nombre à l'école maternelle.

La présentation à venir de l'école maternelle dans le cadre théorique provient de la nécessaire prise en compte du niveau noosphérien ou idéologique. Les us et coutumes de l'école maternelle et la conception de l'enseignement à l'école maternelle influencent très largement le niveau de la situation didactique (0). Le chapitre 2 est dévolu à l'enseignement à l'école maternelle française avec son histoire et ses pratiques.

CHAPITRE 2- L'ENSEIGNEMENT À L'ÉCOLE MATERNELLE

« Parce que les savoirs enseignés à la maternelle se sont « naturalisés » au point qu'ils deviennent « transparents », il n'est pas toujours aisé de percevoir le rôle essentiel des premiers apprentissages dans la construction des connaissances numériques. » (Margolinas & Wozniak, 2012, p. 5)

Enseigner à l'école maternelle diffère de l'enseignement à l'école élémentaire, tout d'abord parce que l'âge des enfants de l'école maternelle peut être déconcertant. En effet, une classe de vingt enfants de deux ans soulève un questionnement sur le rôle du professeur, de l'enseignement et surtout des savoirs à enseigner. Ensuite parce que les méthodes d'enseignement ne sont pas identiques, par exemple dans le cas des manuels scolaires, même s'ils existent à l'école maternelle ils ne jouent pas le rôle tenu par le livre du maitre et les fichiers pour les élèves de l'école élémentaire. Cette école à part, a su s'affirmer pour être une école à part entière. Certains éléments de l'école maternelle française vont être à présent décrits pour comprendre son évolution au cours de l'histoire (1- L'histoire de l'école maternelle française contemporaine) car ils influencent directement le niveau noosphérien et idéologique du professeur. Les modalités de fonctionnement et les habitudes perpétuées à l'école maternelle (2- Les pratiques de l'école maternelle contemporaine) renforcent le niveau de la situation didactique.

1- L'HISTOIRE DE L'ÉCOLE MATERNELLE FRANÇAISE CONTEMPORAINE

S'intéresser au nombre à l'école maternelle nécessite une présentation sommaire de l'école maternelle française en focalisant sur sa spécificité et son histoire (Luc, 1997). L'ambivalence et l'opposition entre éducation et enseignement dès la naissance de l'école maternelle éclaire l'origine des conceptions générales de l'enseignement, niveau noosphérien du professeur qui a des répercussions sur le niveau de la situation didactique mais aussi sur le niveau de construction du thème.

1.1- L'école maternelle française

À la rentrée scolaire de 2013 (Men, 2014a), 2 580 900 enfants de deux à six ans étaient scolarisés dans l'enseignement préélémentaire en France métropolitaine et dans les DOM. L'enseignement préélémentaire concerne les enfants de deux à six ans. Les enfants sont accueillis soit dans des écoles maternelles, soit dans des écoles primaires comportant une classe maternelle ou une section maternelle au sein d'une classe à plusieurs niveaux, soit dans des écoles spécialisées. L'école maternelle scolarise les enfants de deux à six ans[8], l'école élémentaire les enfants de six à onze ans[9], les écoles primaires regroupent des enfants d'âge préélémentaire et élémentaire. En France, depuis une vingtaine d'année, pratiquement tous les enfants âgés de trois ans et plus sont scolarisés. L'évolution du nombre d'élèves de trois à cinq ans suit l'évolution démographique contrairement à celle

[8] Il existe quatre niveaux à l'école maternelle TPS, PS, MS et GS.
[9] Il existe cinq niveaux à l'école élémentaire CP, CE1, CE2, CM1 et CM2.

des enfants de moins de trois ans qui fluctue au gré des impulsions politiques. L'école maternelle offre trois ou quatre années d'enseignement non obligatoire qui se répartissent sur le cycle un, cycle des apprentissages premiers, cycle unique pour l'école maternelle depuis 2015[10].

> *« Le cycle des apprentissages premiers a une identité propre : centré sur le développement affectif, social, sensoriel, moteur et cognitif de l'enfant, il établit les fondements éducatifs et pédagogiques sur lesquels s'appuient et se développent les apprentissages de l'élève pour l'ensemble de sa scolarité. Il vise à prévenir les difficultés, réduire les inégalités et inscrire chaque enfant dans un parcours de réussite. »(Ministère De L'éducation Nationale, 2016, p. 1)*

Ces apprentissages premiers nécessitent du temps, de la répétition, de l'entraînement, du jeu, de l'action, des tâtonnements, des expériences premières, des expérimentations, des expériences individuelles et collectives, des explications, de l'accompagnement, des liens entre activités ; ils évoluent tout au long des trois ou quatre années de l'école maternelle. Une pédagogie spécifique pour l'enseignement à l'école maternelle est nécessaire car il existe peu de manuels scolaires, contrairement à l'élémentaire, pour guider le professeur.

Une association d'enseignants, l'AGEEM[11] (Association Générale des Enseignants des Écoles et des classes Maternelles publiques), se consacre à l'essor et à la promotion de l'enseignement à l'école maternelle et est un partenaire conventionné de l'éducation nationale.

Se plonger dans l'historique de l'école maternelle, aux sources même des salles d'asiles, permet de remonter aux origines de la création de cette école maternelle française où ambivalence et opposition entre éducation et enseignement sont très présentes. L'orientation des conceptions de l'enseignement à l'école maternelle y voit ici un éclairage. Quelques dates clés sont retenues pour mettre en lumière l'évolution historique de l'école maternelle illustrée par trois parcours de femmes qui ont marqué l'école maternelle française par leurs convictions et leurs engagements.

1.2- Historique de l'école maternelle française

Cette présentation historique est une lecture possible des liens entre différents dispositifs qui fondent l'école maternelle en tant qu'institution.

À partir de 1770 les écoles à tricoter du pasteur Oberlin voient le jour dans les Vosges. Il prend en compte les habitudes de tricotage ou de filage pour occuper les enfants pendant l'hiver et il va créer une école où il initie au français, à la lecture, à la cueillette des plantes et aux classements, à l'observation d'images, au dessin, à l'histoire et à la géographie sous forme de jeu.

En 1801, la marquise de Pastoret ouvre une salle d'hospitalité destinée aux petites filles délaissées et aux fillettes dont les mères travaillent.

En 1819, en Angleterre, les *infants schools* sont créés.

[10] BO spécial N°2 du 26 mars 2015. Avant 2015, les élèves de TPS-PS-MS appartenaient au cycle 1, les élèves de GS appartenaient au cycle 1 et au cycle 2. La GS jouait ainsi un rôle de pivot entre le cycle 1 et le cycle 2 et favorisait la transition, la liaison et la continuité entre les deux cycles.

[11] Depuis sa création, en 1921, l'AGEEM étudie des questions d'ordre pédagogique en vue du progrès et du perfectionnement de l'éducation dans les écoles maternelles publiques, en dehors de toute tendance d'ordre politique ou confessionnel ; défend et promeut les droits et intérêts généraux des enfants des écoles et classes maternelles publiques, en même temps que ceux de l'équipe éducative.

À Paris, il faudra attendre 1826 pour que s'ouvre la première salle d'asile à l'initiative de madame Emilie Mallet. Dès leur création, ces salles d'asile mêlent une double finalité : volonté de charité et enjeu éducatif.

> *«Les enfants de l'âge de dix-huit mois à six ans, […], sont réunis dans la salle au nombre de quatre-vingts ; plus de cent quarante noms sont inscrits. Les enfants sont amenés à l'asile à huit heures du matin, et apportent avec eux des aliments pour deux repas ; ils restent jusqu'à cinq heures en hiver, et jusqu'à sept en été. La journée est coupée par une alternative de jeux et d'études appropriés à l'âge et aux forces des enfants. Celles-ci consistent : à marcher en ordre et en mesure ; à lire de grosses lettres imprimées sur des tableaux suspendus aux murailles ; à entendre répéter l'explication d'images représentant des animaux et des métiers, sur lesquelles on provoque leurs petites réflexions ; à apprendre le catéchisme et quelques cantiques. On leur donne aussi les premiers éléments du calcul, au moyen d'un grand cadre renfermant des tringles sur lesquelles roulent des boules de couleur. Pendant les récréations, ils jouent avec des briques en bois qui leur servent à figurer différentes constructions, soit dans la salle, soit dans une cour sablée et plantée d'arbres. » (Dictionnaire de Ferdinand Buisson)*

Jean-Marie-Denys Cochin ouvrira la deuxième salle d'asile à Paris en 1827.

En 1829, Eugénie Millet propose à Jean-Marie-Denys Cochin d'observer les *infants schools* en Angleterre, il s'en suivra d'importantes publications de manuels et d'ouvrages. À partir de 1835 la publication de *L'ami de l'enfance*[12] offre un recueil d'expériences professionnelles expertes destiné à la formation du personnel des écoles maternelles et primaires.

> *« Notre ambition serait de mettre notre expérience professionnelle et, soit par nous-mêmes, soit par le concours de collaborateurs dévoués et compétents, tout ce que nous pouvons avoir de bonne volonté et de lumières, au service du personnel chargé, tant dans l'école maternelle que dans l'école primaire, d'élever les plus jeunes enfants. » (Pauline Kergomard, inspectrice générale des écoles maternelles, et Charles Defodon, rédacteur en chef du Manuel général de l'instruction primaire, octobre 1881).*

Ces structures se multiplient au début du 19e siècle sous le terme de « salles d'asile », elles ont une finalité de prévention sociale c'est-à-dire elles offrent un lieu de protection aux enfants des familles pauvres, afin de les soustraire aux dangers de leur milieu.

À partir des années 1830, elles prennent une orientation plus pédagogique ; un cours normal pour la formation des éducatrices est créé en 1831 sous l'impulsion d'Emilie Mallet.

Emilie Laure Oberkampf, Mallet (1794-1856)
Emilie Oberkampf est l'épouse du banquier protestant Jules Mallet. Elle est attentive à la misère ouvrière et est préoccupée par la détresse des enfants du peuple et par le manque de religion des classes populaires. Elle pense qu'il faut suppléer l'absence des femmes qui travaillent et créer des moments d'éducation hors de la famille, pour les enfants trop jeunes qui ne relèvent pas encore de l'école. Pour Emilie Mallet la salle d'asile est une œuvre de « foi », de « charité », d'« amour maternel » un lieu qui fournit des « mères d'adoption ». Emilie Mallet est un membre influent du Comité central de patronage des salles d'asile et n'aura de cesse de défendre les salles d'asile pour leur conférer une indépendance face à l'école élémentaire. Elle ouvrira plusieurs salles d'asile sur ses fonds privés. Emilie Mallet entretiendra une correspondance importante avec la haute société en Europe, ce qui lui permettra de tisser des liens et d'être une personne ressource en matière d'accueil du jeune enfant.

[12] La revue *L'ami de l'enfance* paraît par intervalles, en fonction de la conjoncture éducative et politique. http://www.inrp.fr/presse-education/revue.php?ide_rev=95

Jusqu'alors de statut privé en 1836 les salles d'asile sont gérées par les municipalités avec autorisation d'exercer délivrée par les Recteurs. Les surveillantes doivent posséder un diplôme de « bonnes mœurs et d'instruction ». La partie financière des salles d'asile est prise en charge par les municipalités, l'état reconnait l'utilité des salles d'asile et par une circulaire en assume une part financière.

En 1846 les directrices des salles d'asile sont formées et accompagnées dans leurs missions par Marie Pape Carpantier. En 1847 le premier centre de formation à la direction des salles d'asile, qui sera appelé école maternelle normale en 1848 et cours pratique en 1852, voit le jour. L'enseignement est expliqué ainsi que les premières leçons à donner par Marie Pape Carpantier.

En 1848 les salles d'asile deviennent des établissements d'instruction publique. Les décrets se succèdent alors pour les règlementer, pour imposer d'alléger le programme des salles d'asile. Marie Pape Carpantier donne des conférences, publie des aides pour les enseignants en 1867 et 1868.

Marie Joséphine Olinde Pape Carpantier (1815-1878)
Marie Pape-Carpantier est l'une des principales responsables du développement de la préscolarisation française du XIXe siècle. Après une formation autodidacte elle devient directrice de salle d'asile. En 1846, elle dirige l'école normale des salles d'asile à Paris jusqu'en 1874. Auteur d'une quarantaine d'ouvrages pédagogiques, Marie Pape-Carpantier est la première grande figure féminine de l'instruction publique française. Les apports de Marie Pape-Carpantier à la pédagogie enfantine sont conséquents : refus d'une morale fondée sur la crainte de Dieu, vulgarisation précoce du savoir à l'intention des enfants pauvres, promotion des leçons de choses, emprunts à la méthode Froebel[13]. Elle croit à un enseignement précoce qui permet d'accéder à une libre pensée, elle donne une place prépondérante aux savoirs.

Les années 1880 sont marquées par la laïcisation et l'institutionnalisation de l'enseignement préélémentaire.

En 1881, les lois Jules Ferry transforment les salles d'asile en «écoles maternelles». Ces écoles s'adressent aux enfants des milieux populaires, qu'elles prennent en charge à partir de l'âge de deux ans. Accueillant les enfants des deux sexes, elles constituent alors les seules écoles à pratiquer la mixité. Les enfants sont répartis en deux sections, la «section des enfants de deux à cinq ans» et la «section des enfants de cinq à sept ans». Les surveillantes d'asile deviennent des institutrices d'école maternelle. Sous l'impulsion de Pauline Kergomard, Inspectrice Générale, de profondes modifications transforment le fonctionnement de l'école maternelle et détermineront les grandes lignes de son orientation jusqu'en 1977 pour que l'école maternelle ne devienne «ni une petite caserne, ni une petite Sorbonne».

En 1882 la publication de la revue *L'école maternelle et enfantine* accompagne l'éducation.

[13] Cette méthode s'efforce de révéler l'individualité de chaque enfant en l'invitant à l'action, à la création personnelle, en référence au Dieu créateur. Susciter et encourager l'activité propre des enfants ; faire appel à l'initiative personnelle et provoquer l'essor libre des facultés sont les enjeux de cette méthode. L'enfant se développe par sa propre activité, il pense et agit de lui-même, en toute autonomie.

En 1887, les écoles maternelles sont définies comme des établissements de «première éducation». Mettant en place une pédagogie fondée sur la notion de centres d'intérêt, un programme détaillé organise la leçon de choses, le dessin, les jeux, les chants, la leçon de morale etc. Après cette période fondatrice, l'école maternelle est traversée par des interrogations sur ses finalités. Deux conceptions s'opposent : soit l'école maternelle constitue un lieu d'accueil et de protection ; soit elle constitue un lieu d'instruction.

Dans les années 1890 et jusqu'à la veille de la première guerre mondiale, la dimension scolaire de l'école maternelle est remise en cause. L'une des figures marquantes de ce courant de pensée est Pauline Kergomard. Elle affirme que la vocation de l'école maternelle n'est pas l'instruction prématurée et que les méthodes des institutrices doivent imiter « les procédures de la mère intelligente et dévouée ». Le ministère de l'instruction publique réoriente alors ses directives à la lumière de cette conception.

Marie Pauline Jeanne Reclus (Ducos), Kergomard (1838-1925)
Pauline Kergomard est née le 24 avril 1838 à Bordeaux. Elle est marquée par la pédagogie mise en œuvre dans l'école de sa tante, "une école sans programme et sans emploi du temps". Elle y apprendra les bases de la pédagogie qu'elle enseignera plus tard. Une fois à Paris, elle s'introduit petit à petit dans le milieu de l'édition où Hachette lui confie la direction de "L'ami de l'enfance", revue pour les salles d'asile. À 41 ans sur le conseil de Ferdinand Buisson, Directeur de l'instruction primaire, elle passe et réussit l'examen d'aptitude pour les salles d'asile en 1879. Elle publie de nombreux écrits sur l'éducation. Elle est nommée inspectrice des écoles maternelles*. En 1880 il existe 4655 salles d'asile et les deux tiers sont dirigées selon une méthode rigide où l'instruction religieuse et moraliste prime. Pauline Kergomard propose une méthode où la liberté de l'enfant est respectée. Elle forme les directrices et transforme les salles d'asile en école maternelle en dénonçant la "garde éducative" et le "dressage collectif" des salles d'asile, elle envisage une école maternelle plus stimulante pour l'évolution intellectuelle et physique de l'enfant.*

L'évolution des structures éducatives destinées à la petite enfance est en marche. La figure positive du jeune enfant de 2 à 6 ans (le terme de seconde enfance apparaît vers 1860) révélée par l'ambition éducative des salles d'asile prend toute son ampleur. La société porte un intérêt soudain à ce temps de l'enfance et les familles bourgeoises vont avoir un autre regard sur le jeune enfant. Ce qui, à l'origine, était une préoccupation d'assistance et de protection de l'enfant pauvre va contribuer à modifier le mode d'éducation à l'intérieur de la famille.

Une circulaire du 22 février 1905 constate que les programmes d'enseignement sont trop chargés. La dictée disparaît de la grande section et le calcul mental de la petite section. Le ministère insiste sur l'importance sociale et sanitaire de l'école maternelle.

En Italie en 1907 Maria Montessori (1870-1952) crée une méthode et du matériel pédagogique spécifiques. Ses recherches sur l'éducation des enfants « déficients », par l'observation des enfants et de leurs réactions, lui permettent d'élaborer une pédagogie et de créer la « *Casa dei Bambini* ».

En 1908 de nouvelles instructions et programmes de l'école maternelle sont publiés.

Le décret du 15 juillet 1921 marque un retour à la conception des années 1880, en soulignant que la première mission de l'école maternelle est l'instruction. Les institutrices

d'école maternelle doivent être titulaires d'un brevet supérieur avec option « pédagogie de l'école maternelle, puériculture, hygiène ». Cette formation spécialisée perdurera jusqu'en 1972, date à laquelle est mise en place une formation commune aux enseignants d'école maternelle et d'école élémentaire.

En 1921, l'Association Générale des Institutrices de l'École Maternelle (AGIEM) est créée.

À compter des années 1950, l'école maternelle, qui s'adressait jusqu'alors aux enfants des milieux modestes, s'ouvre progressivement à l'ensemble des couches sociales. Cette évolution est notamment liée au développement du travail féminin et à l'insuffisante capacité d'accueil des structures de garde de la petite enfance (crèche, halte-garderie). Du fait de l'élargissement du recrutement social de l'école maternelle, cette dernière doit alors répondre à de nouvelles attentes, liées notamment, au cours des années 1970, à la diffusion auprès du grand public d'études sur la psychologie enfantine. Ces études imprègnent alors fortement les orientations du ministère de l'éducation nationale. Les années entre deux et cinq ans sont alors conçues, non pas comme l'amorce des apprentissages scolaires, mais comme une phase de maturation physique, comportementale et psychique. L'école maternelle se centre sur le développement de l'enfant.

La loi du 11 juillet 1975 relative à l'éducation souligne que l'éducation de la petite enfance constitue un moyen de « prévenir les difficultés scolaires, de dépister les handicaps », mais également de « compenser les inégalités ».

Le décret du 28 décembre 1976 prévoit que l'école maternelle doit contribuer « au développement de la personnalité de l'enfant sous toutes ses formes, corporelles, intellectuelles, affectives » et « entraîner l'enfant à l'usage des différents moyens d'expression ». Cette orientation justifie une pédagogie fondée sur le jeu et l'expression.

La circulaire du 2 août 1977 donne à l'école maternelle un triple rôle : éducatif, propédeutique et de gardiennage et souligne que l'école maternelle doit proposer « une pédagogie du développement en vue d'une éducation globale de la personnalité ». Cette conception axée sur la psychologie de l'enfance se trouve progressivement modifiée par des préoccupations d'ordre social qui, par une sorte d'effet de balancier, tendent à réaffirmer la vocation de l'école maternelle à préparer la scolarité.

Au cours des années 1980, le ministère de l'éducation nationale met en exergue le rôle compensateur de l'école maternelle au regard des inégalités sociales et culturelles. Cette vocation sociale revient à affirmer que l'école maternelle constitue une école, qui doit tout à la fois, scolariser, socialiser et « faire apprendre et exercer », comme le précise la circulaire du 30 janvier 1986.

À compter de la fin des années 1990, une réflexion s'engage sur les compétences prioritaires à transmettre aux jeunes élèves de l'école maternelle. Cette conception, qui conduit à poser la question de la performance de l'enseignement préélémentaire, entend répondre à un public de plus en plus hétérogène, lié notamment à la prise en charge d'enfants d'origine étrangère. Les débats se focalisent progressivement sur la question de la maîtrise du langage, compétence estimée centrale pour la réussite des élèves au cours de leur scolarité obligatoire.

De nouveaux programmes sont publiés en 1995, en 2002, en 2008 et en 2015. Les programmes 2008 affirment la volonté d'une école maternelle fondatrice de la scolarisation ultérieure et lieu de la maîtrise du langage oral.

Les programmes de 2015, mettent à l'honneur la bienveillance de l'école maternelle sans toutefois alléger le programme d'enseignement.

Dans la frise suivante (Figure 3 : Dates clés de l'histoire de la maternelle), j'ai rassemblé quelques dates clés pour les salles d'asile et l'évolution de l'école maternelle (indiquées dans les rectangles blancs, en haut). Au-dessous, sont mentionnées Marie Pape Carpantier et Pauline Kergomard qui ont nettement contribué à l'évolution des pratiques des professeurs, tout comme l'association l'AGIEM qui œuvre pour la réflexion et l'évolution des pratiques à la maternelle. La formation prise en charge dans diverses publications et instituts de formation est matérialisée dans les rectangles grisés. Enfin sous la frise chronologique, les écoles en Angleterre « *infant school* » et celles d'Italie « *la casa dei bambini* », sont des repères importants qui ont influencé l'école maternelle française.

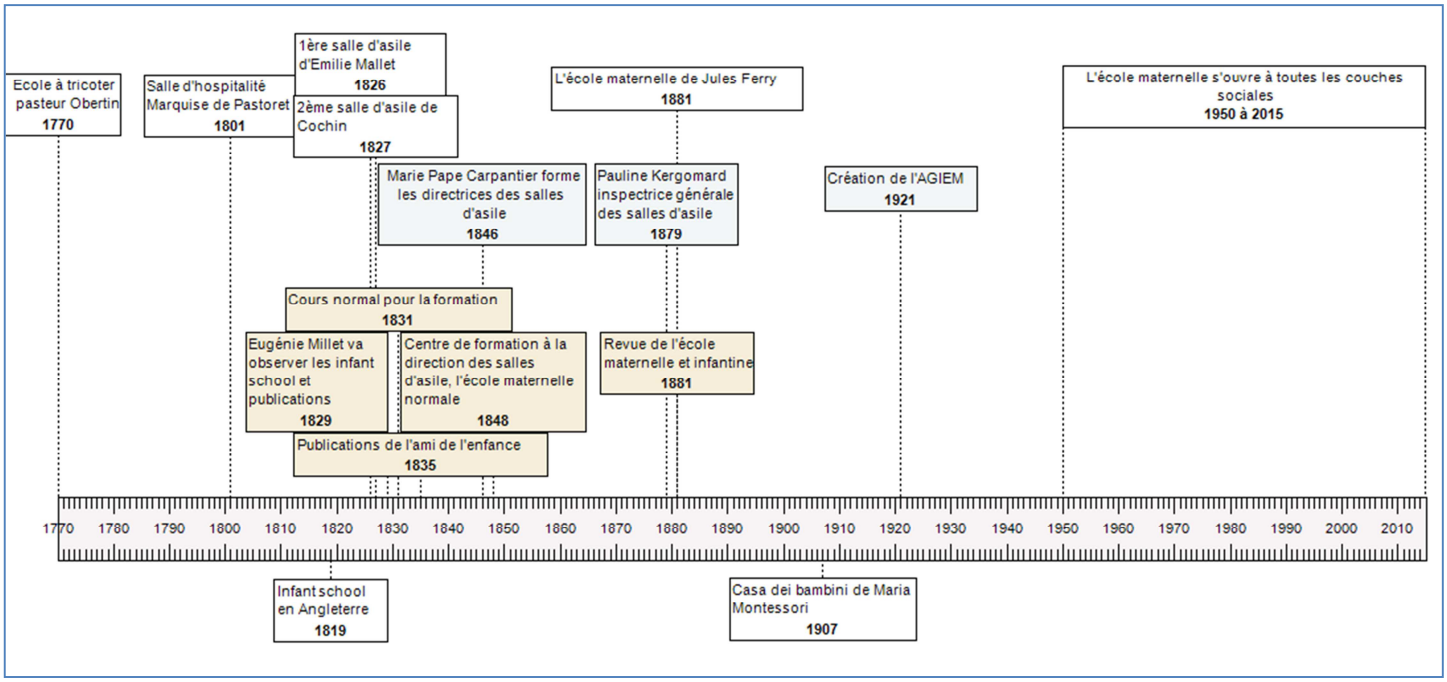


FIGURE 3 : DATES CLÉS DE L'HISTOIRE DE LA MATERNELLE

En définitive, l'école maternelle a toujours fait l'objet de conceptions partagées au cours de son histoire, tantôt protectrice et éducatrice, tantôt scolaire et instructrice, ce jeu de balancier est la caractéristique de l'évolution de l'âme de l'école maternelle française. Cette ambiguïté ou ambivalence apparait dès l'ouverture des salles d'asile où la recherche d'un équilibre entre protection et éducation est appréhendée. Dans « protection » il s'agit de tout ce qui est relatif au bien-être physique et psychique du jeune enfant (de la propreté aux exercices d'éducation physique, du rôle maternant à la sécurité affective) et dans « éducation » ce qui a trait à l'enseignement, à la transmission de savoirs et de connaissances en situations appropriées aux jeunes enfants.

On retrouve, à travers les trois regards de femmes détaillés, la bienveillance absolument nécessaire à l'école maternelle ainsi que le respect du jeune enfant et l'exigence quant à l'enseignement proposé aux jeunes élèves. Dès l'origine des salles d'asile cette pluralité a créé des tensions, des distorsions et des déséquilibres, tantôt trop d'un côté puis trop de l'autre tentant désespérément d'atteindre et de maintenir un équilibre optimal. Plus de cent quatre-vingt-neuf ans après la première salle d'asile cet équilibre et cette identité chère à l'école maternelle française sont toujours recherchés. À chaque « nouveau programme[14] » cette orientation éducation-protection est réexaminée. Cependant la donne change au fil des années car l'école maternelle révèle et produit des inégalités scolaires (Bautier, 2006). La culture de l'école maternelle est questionnée car elle n'est pas partagée par toutes les familles et cela creuse les écarts.

> *« Bien-être, développement, apprentissages, il n'y a pas à choisir. Un nouvel équilibre est à construire qui doit permettre de corriger ce qu'est devenue l'école maternelle avec sa « primarisation » qui fragilise sans doute les enfants les moins bien dotés du point de vue langagier et culturel ; son regard normatif qui pénalise les plus vulnérables (moindre maturité, langue parlée et comprise, usages du langage, écarts école / maison, etc.), qui les prive sans doute d'une part de confiance, d'estime de soi ; globalement, un mode d'action lié à un système d'attentes qui creuse les écarts. » (Bouysse, 2014)*

2- LES PRATIQUES DE L'ÉCOLE MATERNELLE CONTEMPORAINE

L'école maternelle est une école à part entière et entièrement à part qui nécessite un enseignement particulier. Certaines pratiques associées à des « coutumes » de travail, spécifiques à l'école maternelle, influencent directement le niveau (0), niveau de la situation didactique. Sans être exhaustives, les caractéristiques des ateliers tournants sur la semaine et d'un emploi du temps morcelé sont citées pour illustrer cette particularité.

2.1- Des ateliers

La surveillance de chaque enfant à chaque instant, impose d'avoir en permanence les enfants sous le regard de l'adulte. Cette « obsession de la surveillance » (Joigneaux, 2004, p. 140) est omniprésente.

> *« […] Faire disparaître le nombre en groupant partout les enfants de telle sorte qu'un seul coup d'œil du maître les embrasse tous et distingue chacun de façon qu'ils soient tous et toujours à portée de sa voix et de son regard. » (Joigneaux, 2004, p. 140)*

Le matériel proposé dans les classes et cette surveillance intensive conduisent à une répartition en ateliers. Le dispositif « gradin-banc » (Joigneaux, 2004, p. 143), que Pauline Kergomard dénonça, les jugeant inadaptées aux jeunes élèves, « contraint les élèves à réaliser non seulement les mêmes activités mais pratiquement les mêmes gestes aux mêmes moments ». Plus tard, les « tables-bancs fixes à deux places », ont pour effet de reproduire certaines pratiques de l'école élémentaire (mais toujours inadaptées aux élèves de l'école maternelle). Le dispositif centré sur l'enseignant qui montre et qui utilise seul le matériel laisse la place progressivement à un dispositif collectif où les élèves reproduisent individuellement, avec leur propre matériel, à leur table, le modèle réalisé par l'enseignant au tableau noir. Un mobilier spécifique avec des petites chaises et des tables libres est introduit (Joigneaux, 2004, p. 146) pour permettre qu'à tout instant l'élève puisse se lever et

[14] « Les programmes sont toujours nouveaux comme le Beaujolais » Brousseau, 2005a, p.24

s'assoir à sa guise mais aussi déambuler dans un espace imaginé et conçu spécifiquement pour lui, lui permettant alors de faire ses expériences au contact d'espaces, d'organisations, de matériels. Ce mobilier est largement réclamé par Pauline Kergomard.

Puis les ateliers voient le jour, passant d'élèves « libres de faire ce qu'ils veulent où et quand ils le veulent » à une organisation plus réfléchie. Joigneaux décrit le cas d'une école modèle la nouvelle école maternelle de Suresnes (Joigneaux, 2004, p. 147) où « les classes comprennent des coins (cuisine), des tables individuelles et des chaises mobiles et des casiers individuels. Mais les élèves ne peuvent pas les utiliser à leur guise. On apprend ainsi que, malgré leur mobilité, les tables sont groupées par deux et alignées. Si les élèves ne travaillent pas simultanément sur le même exercice (ou jeu), le nombre d'activités qu'ils peuvent choisir est limité : il s'étend entre «quatre sortes de travaux, et non pas cinq ». Et une fois ce choix fait, leur activité est « nettement dirigée » par le matériel qui est alors mis à leur disposition. Il s'agit d'élèves regroupés autour d'une même table et d'un même exercice ; les exercices proposés peuvent être différents d'un groupe à l'autre, d'une table à l'autre. Joigneaux (Joigneaux, 2004, p. 145) définit les ateliers-regroupement comme « le dispositif qui fait alterner régulièrement le mode d'organisation des activités des élèves entre éclatement en petits groupes et regroupement de tous les élèves dans un espace réduit de la classe (l'"aire", le "coin" de "regroupement") généralement autour de la maîtresse et face au tableau noir ». Cette alternance respecte également les rythmes du jeune enfant en proposant des temps individuels de concentration, des temps collectifs, des moments de stimulation individuelle et collective. Le fonctionnement par ateliers est préconisé par le ministère de l'éducation nationale.

> *« Le fonctionnement par ateliers est largement utilisé en maternelle. L'atelier est conçu comme une modalité de travail au service d'un projet d'apprentissage. Il tient compte des besoins spécifiques de l'enfant, et s'adosse à une pédagogie diversifiée et différenciée. Ce mode de travail permet de proposer de manière simultanée des activités nécessitant un niveau d'autonomie différent de la part des élèves, ou répondant à des besoins identifiés. Il doit favoriser la découverte, l'exploration active, le tâtonnement, les échanges, la coopération et l'entraide. Il peut prendre des formes variées (dirigée, accompagnée, libre, en autonomie...), selon les objectifs poursuivis, le type de tâche, les outils et supports utilisés, la modalité de fonctionnement souhaitée. » Eduscol*[15]

La scolarisation des moins de trois ans permet l'indispensable nécessité d'un mobilier adapté aux normes de sécurité pour les 24 mois (Bontant-Duchemin, Luquet, Quicray-Renard, Marot, & Rumin, 2013) ainsi que des espaces modulables et évolutifs[16]. La dimension "évolutive" répond aux besoins de l'enfant de moins de trois ans, ainsi la disposition du matériel et des espaces d'une classe en début et en fin d'année est supposée prendre en compte ses progrès et ses besoins.

2.2- Des ateliers qui tournent sur la semaine

La programmation minutieuse du temps tend à imposer une rotation de l'atelier dirigé. Il existe différentes sortes d'ateliers : atelier dirigé, atelier semi-dirigé, atelier autonome, atelier libre (des ateliers préparés et imposés par l'enseignant aux ateliers libres choisis par

[15] http://eduscol.education.fr/cid48445/la-classe-au-quotidien.html consulté le 5 février 2016.
[16] www.ac-montpellier.fr/sections/ia30/pilotage-ressources/maternelle/developpement-jeune/documents/amenagement-espace consulté le 24 janvier 2016

l'élève). Le rôle de chaque adulte, enseignant et ATSEM (Vasse, 2008) est défini pour chaque type d'atelier et chaque élève peut passer successivement dans les différents ateliers. Une pratique courante consiste à réaliser ce roulement sur la semaine. L'enseignant va proposer son atelier dirigé cinq fois dans la semaine, avec un groupe d'élèves différent, c'est également le cas pour l'ATSEM et son atelier. Ce fonctionnement permet de scinder le groupe classe en quatre ou cinq et de réduire ainsi le nombre d'élèves par atelier (entre cinq et sept), occasionnant une individualisation et des interactions langagières plus propices et facilitées.

De nouveaux dispositifs d'ateliers voient le jour, de nombreux espaces propices aux apprentissages sont proposés aux élèves qui les choisissent librement. L'enseignant observe, intervient, l'ATSEM surveille et encadre également les groupes.

Après les salles d'asile, où l'introduction d'un mobilier spécifique, petites chaises et petites tables, a permis un changement des pratiques à l'école maternelle (Joigneaux, 2004, p. 146), aujourd'hui, le même phénomène, inversé, est observé dans certaines classes. Une réflexion autour du nombre de tables et de chaises est engagée, les espaces surchargés favorisent la primarisation. Une autre conception des espaces à l'école maternelle, au service des apprentissages pour les enfants voit le jour[17] (Bossis, Dumas, Livérato, & Méjean, 2015) et est expérimentée et testée de plus en plus dans les classes maternelles.

L'école maternelle est en perpétuelle recherche notamment à travers des organisations de travail qui se situent entre la crèche et l'école élémentaire. Les dispositifs en ateliers ont des répercussions sur la façon de conduire l'enseignement, c'est aussi le cas pour l'enseignement du nombre.

2.3- Des emplois du temps à l'école maternelle

Joigneaux (Joigneaux, 2004, p. 140) relève qu'« il faut une programmation minutieuse du temps, de l'espace et du contenu (déroulement) de toutes les activités ». Les emplois du temps actuels de l'école maternelle font état de ce séquençage du temps et de l'espace. D'un côté les rythmes biologiques du jeune enfant doivent être respectés, occasionnant une alternance de temps soutenus/libres, d'un autre côté une alternance entre temps collectifs/individuels entraine un découpage du temps de classe réunissant ces conditions, en prenant également en compte les différents domaines d'apprentissage qui deviennent alors des contraintes pour l'enseignement. Enfin, une autre alternance reste à intégrer dans l'emploi du temps : les ateliers dirigés/en autonomie. Le niveau (+1), niveau de projet de leçon, est fortement impacté par les considérations organisationnelles, de temps et d'espace, mais également le niveau (+2).

CONCLUSION

Le cadre théorique de la thèse s'enrichit avec la connaissance de l'école maternelle française, son histoire et ses pratiques qui peuvent influencer le niveau idéologique et noosphérien du professeur et conditionnent alors les enseignements, y compris l'enseignement du nombre. Tantôt trop proche de l'école élémentaire ou trop proche de la crèche, l'école maternelle se cherche et tente de se construire une identité propre qui

[17] À l'école maternelle Barbacane à Carcassonne depuis 2011.

intègre à la fois les besoins de l'enfant et ses capacités cognitives avec la mission éducative de l'école maternelle.

> *« La formation dispensée dans les classes enfantines et les écoles maternelles favorise l'éveil de la personnalité des enfants, stimule leur développement sensoriel, moteur, cognitif et social, développe l'estime de soi et des autres et concourt à leur épanouissement affectif. Cette formation s'attache à développer chez chaque enfant l'envie et le plaisir d'apprendre afin de lui permettre, progressivement, de devenir élève. Elle est adaptée aux besoins des élèves en situation de handicap pour permettre leur scolarisation. Elle tend à prévenir des difficultés scolaires, à dépister les handicaps et à compenser les inégalités. La mission éducative de l'école maternelle comporte une première approche des outils de base de la connaissance, prépare les enfants aux apprentissages fondamentaux dispensés à l'école élémentaire et leur apprend les principes de la vie en société. » Site de l'éducation nationale, les objectifs de la formation à l'école maternelle rentrée scolaire 2016 ; http://eduscol.education.fr/cid103171/ecole-maternelle.html*

Cette école, non obligatoire, est une école à part entière qui dispose d'un programme d'enseignement spécifique, d'une association d'enseignants (l'AGEEM) exclusive, d'une légitimité propre.

Dans le chapitre suivant (chapitre 3), l'exposition de l'enseignement des mathématiques préconisé dans les programmes successifs permet d'entrevoir l'évolution et l'orientation de l'enseignement du nombre à l'école maternelle ainsi que le regard porté par les institutions. Les savoirs sur le nombre pour l'enseignement à l'école maternelle, qui enrichissent le niveau de construction du thème (+2), sont définis.

CHAPITRE 3- LES SAVOIRS MATHÉMATIQUES SPÉCIFIQUES À L'ENSEIGNEMENT DU NOMBRE

> *« Pour définir un savoir, il faut déterminer l'institution qui le produit et le légitime, ce qui conduit parfois à considérer plusieurs institutions et leurs éventuels conflits. » (Margolinas, 2015a, p. 5)*

Quels sont les savoirs mathématiques déterminés par les différentes institutions impliquées dans l'enseignement du nombre à l'école maternelle ? La question de l'enseignement du nombre à l'école maternelle fait appel à des savoirs mathématiques, à des connaissances, à des procédures mais également à des références sur l'enseignement en général et l'enseignement à l'école maternelle en particulier. Ces savoirs sont définis par rapport à l'institution qui les porte (1- Savoirs et institutions), puis à travers l'évolution des programmes de 1855 à nos jours (2- Le nombre dans les programmes) et enfin une clarification des savoirs mathématiques est utile pour entrevoir l'enseignement du nombre à l'école maternelle (3- Savoirs mathématiques).

1- SAVOIRS ET INSTITUTIONS

Pour l'enseignement du nombre, les programmes d'enseignement de l'éducation nationale jouent le rôle d'institution pour l'école maternelle. Ils sont incontestablement la première référence, mais ils ne sont pas suffisants, en effet, ils se réfèrent souvent, implicitement, à des courants de pensée, donc à des institutions différentes. Ces courants de pensée, existants par ailleurs dans des communautés de recherche distinctes, sont plus ou moins mis en avant par les décideurs politiques, justifiant régulièrement de "nouveaux" programmes. Les programmes d'enseignement regroupent différentes disciplines et différentes institutions qui s'enchevêtrent proposant ainsi une profusion et parfois une confusion entre savoirs, connaissances, compétences, et méthodes d'enseignement.

> *« Les programmes, même quand leur intention est d'unifier, ne peuvent reconfigurer les institutions porteuses du savoir. De ce fait, les savoirs à enseigner apparaissent fragmentés et les liens entre ceux-ci sont difficiles à faire. » (Margolinas, 2012a, p. 11)*

À l'heure actuelle les programmes d'enseignement sont rédigés en termes de compétences, d'attendus en fin de cycle (programmes de 2008[18] en vigueur au moment de l'étude mais également programmes de 2015[19]). Avec le socle commun de connaissances, de compétences, et de culture[20] les termes de connaissance et de compétence prennent une part importante. Il existe aussi un document d'accompagnement des programmes « le nombre au cycle 2 [21]» (Emprin & Emprin, 2010) qui joue le rôle d'institution pour l'enseignement du nombre à l'école maternelle. Les savoirs, quant à eux, ne sont pas énoncés comme tels dans les programmes d'enseignement. Une des premières difficultés dans l'analyse des programmes d'enseignement est donc de rechercher les savoirs à

[18] BO hors-série n°3 du 18 juin 2008
[19] BO spécial n°11 du 26 novembre 2015
[20] BO n°17 du 23 avril 2015
[21] Pour rappel, en 2010, la GS appartenait au cycle 1 et au cycle 2.

enseigner à travers les compétences à atteindre. Toutefois, les programmes, par le biais de l'institution qui les porte, ne sont pas les seuls à légitimer les savoirs (Joigneaux, 2009).

Les manuels scolaires[22], sans cesse réédités pour être conformes aux "nouveaux" programmes, entrent de plus en plus à l'école maternelle et jouent aussi le rôle d'institution. En effet, de nombreux enseignants utilisent « *Vers les maths* »[23] (Duprey, Duprey, & Sautenet, 2009).

La formation continue, via les animations pédagogiques, les stages école, les parcours m@gistère, légitime également certaines pratiques de classe, certaines connaissances et savoirs et tient lieu d'institution.

L'entretien d'inspection mené par l'inspecteur de l'éducation nationale joue également le rôle d'institution.

La liberté pédagogique étant un des principes fondateurs, chacun peut, légitimement, choisir n'importe quelle approche dans l'institution : mathématique, didactique, psychologique, etc.

2- LE NOMBRE DANS LES PROGRAMMES

Ce mouvement de balancier entre enseignement et éducation, décrit plus haut, est présent dans les programmes successifs pour l'enseignement du nombre. Depuis 1855, cet enseignement fait l'objet de nombreuses recommandations plus ou moins précises et explicites dans les programmes.

Des extraits de rapports d'inspection[24] de 1945, 1950 et 1957 donnent également de précieux renseignements sur la compréhension des programmes pour l'enseignement du nombre à l'école maternelle :

> *« Calcul. Étude du nombre 6. Puisqu'il s'agit d'une leçon de révision, il est inutile de se servir d'un matériel très concret (revoir les conseils insérés au BO n° 670 p.3/4 29) mais il est indispensable que chaque enfant, avec des jetons, des bûchettes ou des coquilles réalise les décompositions souhaitables : l'arithmétique est agie avant d'être pensée. » Rapport d'inspection de Madame O du 02/02/1945*

L'utilisation d'un matériel est précisée par l'inspecteur pour la leçon de révision concernant l'étude du nombre 6.

> *« Calcul. Le nombre 9. La maitresse insiste sur la décomposition caractéristique 3 fois 3 ou compare 9 à 6 (2 fois 3). » Rapport d'inspection de Madame O du 23/01/1950*

L'inspecteur met en avant les décompositions multiplicatives de 9 et de 6 observées dans la séance.

> *« Calcul. Quatre. Le matériel individuel est distribué, les élèves sont invités à trier les chiffres mobiles, les pièces de monnaies fictives, les jetons, les marrons, les cubes, les bâtonnets, puis à recomposer les collections déjà connues, l'exercice s'accomplit dans l'enthousiasme et la maitresse s'emploie avec succès à stimuler les moins actifs puis à l'aide de quilles et de briquettes*

[22] Manuels scolaires qui sont la caractéristique de l'école élémentaire.

[23] «*Vers les maths*» aux éditions Accès. Différents manuels sont disponibles en phonologie, en arts plastiques et en mathématiques. Extrait de l'introduction : « Comment programmer et concevoir des situations d'apprentissages mathématiques en petite section, en moyenne section et en grande section ? Comment amener les élèves à résoudre des problèmes dès l'école maternelle ? Comment automatiser les compétences numériques des élèves ? Comment associer la pratique du langage aux activités mathématiques ? Vers les maths […] répond concrètement et efficacement à ces problématiques ».

[24] Consignés aux archives départementales de Mende (Lozère) dans les dossiers des enseignants.

de couleurs l'étude de 3+1=4 est entreprise que la maitresse n'hésite pas à faire répéter de nombreuses fois et individuellement cet aspect nouveau de la formation de 4, sinon les esprits moins éveillés ne tireront guère profit de l'exercice. » Rapport d'inspection du 22/02/1957

L'inspecteur porte son attention sur « les esprits les moins éveillés » et conseille la répétition de l'aspect nouveau de la formation du quatre (l'itération de l'unité).

Ces trois extraits font apparaitre un enseignement des nombres basé sur l'étude successive des nombres les uns après les autres, les décompositions et l'itération de l'unité.

À partir des extraits de textes officiels le tableau ci-dessous (Tableau 3: Textes officiels et évolution de l'enseignement du nombre à la maternelle) met en avant l'évolution de l'enseignement du nombre à l'école maternelle.

Années	Extraits de textes officiels relatifs à l'enseignement du nombre	Évolution de l'enseignement
1855	« L'enseignement du calcul comprend la connaissance des nombres simples, leur représentation par les chiffres arabes, l'addition, la soustraction enseignées à l'aide du boulier-compteur, la table de multiplication apprise de mémoire à l'aide des chants »	Les mathématiques dispensées dans les salles d'asile sont regroupées sous la dénomination de « calcul ». Jusqu'en 1977 l'enseignement du calcul et des nombres repose sur la mémorisation et l'automatisation. Les opérations telles que l'addition et la soustraction sont introduites à l'aide du boulier-compteur en 1855. Dès 1881, il est précisé que ces opérations sont effectuées sur des nombres ne dépassant pas cent. À partir de 1908 les multiplications et les divisions rejoignent les deux précédentes opérations, mais ces quatre opérations sont au service du calcul mental. La mémorisation est entrainée pour la suite orale des mots nombres mais aussi pour les tables de multiplication. L'étude systématique des dix premiers nombres est mentionnée avec du comptage et des groupements jusqu'à dix, puis les dizaines jusqu'à cinquante.
1881 1882	Calcul (Art. 18 du décret) SECTION DES PETITS ENFANTS (ENFANTS DE 2 À 5 ANS) : Familiariser l'enfant avec les termes : un, deux, trois, quatre, cinq, moitié, demi ; l'exercer à compter jusqu'à 10. Calcul mental sur les dix premiers nombres. SECTION DES ENFANTS DE 5 À 7 ANS OU CLASSE ENFANTINE: Premiers éléments de la numération orale et écrite. Petits exercices de calcul mental. Addition et soustraction sur les nombres concrets et ne dépassant pas la première centaine. Étude des dix premiers nombres et des expressions demi, moitié, tiers, quart. Les quatre opérations sur les nombres de deux chiffres.	
1908 1945	Petite Section. Calcul. - Groupements très variés d'objets semblables: 2, 3,4, 5, jusqu'à 10; et compte de ces objets (sacs individuels de cailloux, bâtonnets, coquillages, etc.). Grande Section. Calcul. -Groupements d'objets: 20, 30, 40, jusqu'à 50 (sacs individuels). -Demi; moitié; tiers; quart. Petits exercices de calcul mental: additions, soustractions, multiplications, divisions. Représentation des nombres, de l'unité jusqu'à 50. Petits exercices écrits de calcul avec dessins correspondants.	
1986	Les activités scientifiques et techniques Progressivement, l'enfant découvre et construit le nombre. Il apprend et récite la comptine numérique; il établit des sériations, c'est-à-dire ordonne des collections en fonction de propriétés; il compare des collections terme à terme.	La circulaire de 1986 marque un revirement dans l'enseignement avec la disparition du calcul et la découverte et la construction du nombre.
1991	L'approche du nombre en Cycle1 L'enfant doit pouvoir : -mettre en œuvre une procédure numérique (dénombrement, reconnaissance globale de certaines quantités...) ou non numérique (correspondance terme à terme...) pour : réaliser une collection ayant le même nombre d'objets qu'une autre collection ; comparer des collections ; partager des collections ; réaliser une distribution ; résoudre des problèmes liés à l'augmentation et à la diminution de quantités ; dénombrer (exemple : compter le nombre de filles et le nombre de garçons dans la classe...)	À partir de 1991, le calcul est repoussé aux cycles 2 et 3 mais ne fait pas partie d'enseignements spécifiques à l'école maternelle. La résolution de problèmes additifs, soustractifs ; le partage, la distribution de collections prennent le relai dans l'enseignement. La quantité est enseignée à l'aide de procédures non numériques et

	Le Calcul En Cycle 1, même si l'enfant utilise parfois des procédures de calcul avec le seul recours aux nombres, cela ne relève pas de compétences réelles dans le domaine du calcul, au sens qui lui est donné dans ce texte pour les cycles 2 et 3.	numériques.
1995	Approche du nombre Pour le jeune enfant, la quantification du monde qui l'entoure n'est pas d'emblée numérique, les quantités à estimer ou à produire peuvent dépasser ses possibilités de dénombrement. Progressivement, il apprend à construire un certain nombre de procédures et d'outils pour dénombrer les collections d'objets: estimation relative et globale des quantités (plus, moins, pareil) ; dénombrement de petites collections par une perception instantanée ; comparaison de collections à des collections naturelles (doigts de la main) ou à des collections repères (nombre de places autour de la table...) ; fixation et extension de la comptine parlée ; dénombrement en utilisant la comptine. À travers la résolution de petits problèmes additifs ou soustractifs et de situations de distribution d'objets, l'enfant découvre les fonctions du nombre, en particulier comme représentation de la quantité. Le nombre permet aussi, par son aspect ordinal, de décrire des hiérarchies et des rangements. Les activités porteront sur : la hiérarchisation de séries en utilisant la comptine numérique, la comparaison de certaines dimensions des objets en utilisant un étalon	Dès 1995, l'aspect ordinal est introduit dans l'enseignement du nombre. L'estimation relative et globale des quantités fait également son apparition.
2002	Approche des quantités et des nombres Être capable de : comparer des quantités en utilisant des procédures non numériques ou numériques ; réaliser une collection qui comporte la même quantité d'objets qu'une autre collection (visible ou non, proche ou éloignée) en utilisant des procédures non numériques ou numériques, oralement ou avec l'aide de l'écrit; résoudre des problèmes portant sur les quantités (augmentation, diminution, réunion, distribution, partage) en utilisant les nombres connus, sans recourir aux opérations usuelles ; reconnaître globalement et exprimer de très petites quantités (de un à trois ou quatre) ; reconnaître globalement et exprimer des petites quantités organisées en configurations connues (doigts de la main, constellations du dé) ; connaître la comptine numérique orale au moins jusqu'à trente ; dénombrer une quantité en utilisant la suite orale des nombres connus ; associer le nom des nombres connus avec leur écriture chiffrée en se référant à une bande numérique.	À partir de 2002, les programmes deviennent plus précis quant aux attendus. La comptine numérique doit être sue jusqu'à trente, par exemple.
2008	Approcher les quantités et les nombres À la fin de l'école maternelle l'enfant est capable de : comparer des quantités, résoudre des problèmes portant sur les quantités ; mémoriser la suite des nombres au moins jusqu'à 30 ; dénombrer une quantité en utilisant la suite orale des nombres connus ; associer le nom de nombres connus avec leur écriture chiffrée;	Après la publication des programmes 2008, le document ressource, le nombre au cycle 2 détaille et décrit tous les savoirs à enseigner : l'aspect cardinal avec la quantité, l'aspect ordinal mais aussi l'énumération.

2015	DECOUVRIR LES NOMBRES ET LEURS UTILISATIONS Utiliser les nombres Évaluer et comparer des collections d'objets avec des procédures numériques ou non numériques. Réaliser une collection dont le cardinal est donné. Utiliser le dénombrement pour comparer deux quantités, pour constituer une collection d'une taille donnée ou pour réaliser une collection de quantité égale à la collection proposée. Utiliser le nombre pour exprimer la position d'un objet ou d'une personne dans un jeu, dans une situation organisée, sur un rang ou pour comparer des positions. Mobiliser des symboles analogiques, verbaux ou écrits, conventionnels ou non conventionnels pour communiquer des informations orales et écrites sur une quantité. Étudier les nombres Avoir compris que le cardinal ne change pas si on modifie la disposition spatiale ou la nature des éléments. Avoir compris que tout nombre s'obtient en ajoutant un au nombre précédent et que cela correspond à l'ajout d'une unité à la quantité précédente. Quantifier des collections jusqu'à dix au moins ; les composer et les décomposer par manipulations effectives puis mentales. Dire combien il faut ajouter ou enlever pour obtenir des quantités ne dépassant pas dix. Parler des nombres à l'aide de leur décomposition. Dire la suite des nombres jusqu'à trente. Lire les nombres écrits en chiffres jusqu'à dix.	Le programme 2015, intègre l'aspect ordinal avec le travail sur la position, et l'énumération, entre dans le programme 2015. Les relations entre les nombres, comme les décompositions-recompositions, l'itération de l'unité apparaissent dans le programme. L'étude des nombres jusqu'à dix au moins revient dans l'enseignement. La lecture des nombres écrits jusqu'à dix entre également dans le programme. Si les programmes ont été allégés en 1986, ils n'ont cessé de se préciser mais également de s'étoffer, la lecture des dix premiers nombres écrits en est un bel exemple.

TABLEAU 3: TEXTES OFFICIELS ET ÉVOLUTION DE L'ENSEIGNEMENT DU NOMBRE À LA MATERNELLE

3- SAVOIRS MATHÉMATIQUES

Les définitions des savoirs mathématiques liés au nombre sont à présents nécessaires. Qu'est-ce qu'un nombre ? Baruk (Baruk, 2003, p. 25) ayant posé la question en formation d'enseignants recense différentes réponses attestant de la complexité et de la confusion de la notion. La réponse donnée par l'auteur montre que la question pourtant très simple en apparence ne peut pas vraiment recevoir de réponse mathématique éclairante pour les enseignants de l'école maternelle.

> *« Un nombre est un élément d'un ensemble de nombres. » (Baruk, 2003, p. 25)*

Il faut donc, dans le cadre de l'enseignement des nombres à l'école maternelle, reformuler la question : « quels savoirs sont en jeu dans le nombre entier naturel » ? Cependant, par la suite le mot « nombre » sera retenu sans spécifier « nombre entier naturel », puisque ce sont les seuls nombres en jeu à l'école maternelle.

Le nombre entier se caractérise mathématiquement par ses deux aspects de cardinal et d'ordinal (voir ci-après).

Définir mathématiquement l'ensemble des nombres entiers naturels ne peut suffire à l'identification de ses éléments, il faut également les nommer (à l'oral) et les désigner (à l'écrit). Les différents systèmes de numération (orale, écrite) et de désignation sont donc partie prenante des savoirs concernant le nombre à l'école maternelle.

Par ailleurs, le nombre a essentiellement pour fonction à l'école maternelle de dénombrer les éléments de petites collections (aspect cardinal) et de désigner les positions des éléments d'une liste (aspect ordinal), ce qui implique d'énumérer ces éléments.

L'énumération, savoir peu identifié par l'institution scolaire mais bien connu des didacticiens des mathématiques (Briand, 1993; Briand, 1999; Briand, Lacave-Luciani, Harvouët, Bedere, & Goua De Baix, 2000; Briand, Loubet, & Salin, 2004; Margolinas, Wozniak, Canivenc, De Redon, & Rivière, 2007), intervient donc dans l'usage du nombre à l'école maternelle, même si ce n'est pas très explicite pour les enseignants.

Enfin, le nombre aura pour fonction, dès la fin de l'école maternelle mais surtout par la suite, de permettre des calculs, c'est-à-dire d'anticiper le nombre d'éléments de plusieurs collections ou la position d'un élément sur des listes combinées ou résultant de déplacement sur des pistes, le calcul fait donc partie des savoirs en jeu dès l'école maternelle.

Ces différents aspects sont résumés dans la figure suivante (Figure 4 : Les différents savoirs mathématiques pour l'enseignement du nombre à la maternelle).

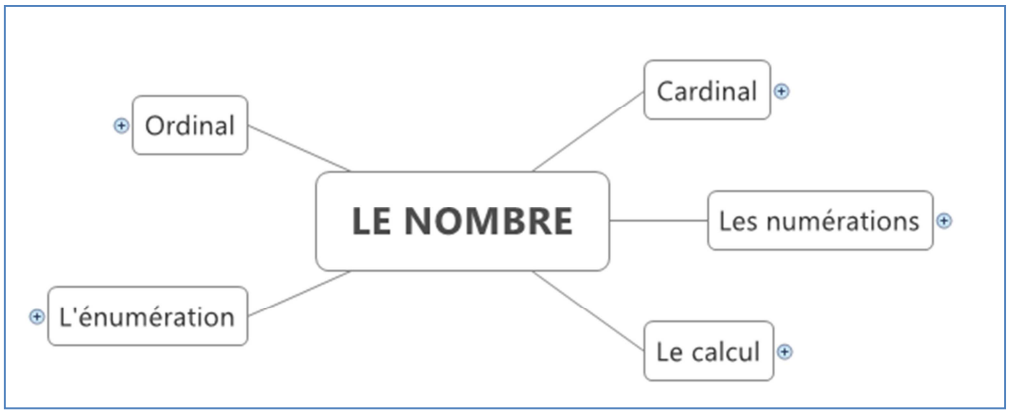


FIGURE 4 : LES DIFFÉRENTS SAVOIRS MATHÉMATIQUES POUR L'ENSEIGNEMENT DU NOMBRE À LA MATERNELLE

Les différents savoirs mathématiques liés à l'enseignement du nombre à l'école maternelle sont regroupés dans ce schéma[25] et vont être passés en revue et définis mathématiquement.

3.1- Le cardinal

De façon générale, la cardinalité fait référence à la quantité et l'ordinalité à la position, cependant, cardinalité et ordinalité sont intimement liés et définir mathématiquement l'un des deux conduit à la définition de l'autre et inversement.

> *« De manière générale, si un objet est en position n dans une liste, il est nécessaire de passer en revue n éléments de la liste pour atteindre cette n-ième position depuis l'origine du repère. Le nombre qui représente la position dans la liste est le nombre qui représente la quantité de places successivement occupées avant d'atteindre cette position. Le numéro de la case, sur une piste par exemple, n'est autre que le nombre de cases à parcourir pour rejoindre sa position… Le nombre cardinal qui exprime la quantité d'objets de la collection correspond au nombre ordinal qui exprime la position du dernier objet dans la liste… La comptine numérique nait donc du besoin de recourir à une liste ordonnée et immuable pour dénombrer, repérer. La quantité caractérise une collection, un ensemble d'objets et le dénombrement permet d'associer le nombre cardinal à une collection. La position caractérise un élément d'une liste et le repérage permet de lui associer le nombre ordinal. » (Margolinas & Wozniak, 2014)*

D'après le dictionnaire des mathématiques (Bouvier, George, & Le Lionnais, 2013, p. 113):

[25] Ce schéma sera développé dans les chapitres 5 et 6.

> *« Le cardinal d'un ensemble fini est le nombre de ses éléments » (Bouvier, George, & Le Lionnais, 2013, p. 113)*

À l'école maternelle les collections sont toujours des ensembles finis d'éléments, le cardinal se définit donc comme le nombre d'éléments présents dans la collection. Cependant, cette définition suppose que « le nombre » a déjà été défini et que le cardinal s'en déduit. En effet, dans la définition de Bouvier *et al.* l'ordinal est une suite d'ensembles (voir ci-dessous).

> *« Étant donné un ensemble E, on appelle cardinal de E le plus petit ordinal équipotent à E. (Un cardinal est donc un ordinal particulier). » (Bouvier, George, & Le Lionnais, 2013, p. 113)*

Mathématiquement il est intéressant de voir que la définition de Bouvier *et al.* renvoie côte à côte cardinal et ordinal. Le cardinal est défini ici à l'aide de l'ordinal.

Le cardinal peut aussi être défini comme classe d'équivalence de la relation d'équipotence. Dans ce cas, le « cardinal » pourrait en théorie être nommé d'une manière quelconque, comme les noms des couleurs qui représentent les classes d'équivalence de la relation « même couleur que ».

Cependant, faire usage d'une suite ordonnée et plus particulièrement de la même suite ordonnée que celle qui sert à nommer les ordinaux va permettre une unification du lexique et une clarification des relations entre les cardinaux. En rajoutant un élément à une collection de cardinal *n* donné, on obtient alors comme nom du cardinal celui du successeur de *n.*

À l'école maternelle, quelle est l'interprétation courante du cardinal ?

Dénombrer par comptage tous les éléments d'une collection (c'est-à-dire synchroniser la suite orale des mots nombres et le pointage de chaque élément de la collection, et fournir le cardinal de la collection, le dernier mot nombre de la suite orale des mots nombres énoncé). En effet, le dernier mot nombre énoncé englobe la caractéristique liée à la quantité de l'ensemble de la collection. Le cardinal peut aussi être donné par *subitizing*, par reconnaissance perceptive immédiate globale. La question de la relation entre cardinal et ordinal n'est pas couramment abordée à l'école maternelle, et la relation entre cardinal et quantité n'est pas toujours clarifiée (voir ci-après).

3.2- L'ordinal

Dans le dictionnaire de Bouvier *et al.* l'ordinal est défini comme une suite d'ensembles emboîtés, ce qui correspond mathématiquement à la notion de successeur. Les ensembles ordinaux sont ordonnés par construction. L'ordre est ainsi au cœur de la notion d'ordinal et donc de celle du nombre.

> *« Extension de la notion de nombre qui traduit l'ordre, le rang d'un élément considéré dans un ensemble bien ordonné. »(Bouvier, George, & Le Lionnais, 2013, p. 650)*

Cette définition de la notion de nombre a été permise, car

> *« Chez les Grecs, un nombre s'identifiait à une quantité (nombres entiers), à la mesure d'un segment, d'une aire ou d'un volume et à leurs rapports. Aujourd'hui, on définit un nombre comme élément d'un ensemble particulier satisfaisant certains axiomes précis. »(Bouvier, George, & Le Lionnais, 2013, p. 625).*

Un nombre ordinal se rapporte à la position, au rang dans une liste (ordonnée).

« Le nombre ordinal est ainsi l'expression de la mémoire de la position d'un élément singulier au sein d'une liste. Il est associé au contexte de suite ordonnée, nécessite le recours à la comptine numérique, repose sur une mise en correspondance biunivoque et use d'un vocabulaire spécifique les adjectifs ordinaux, premier(e), deuxième, etc. » (Margolinas & Wozniak, 2014).

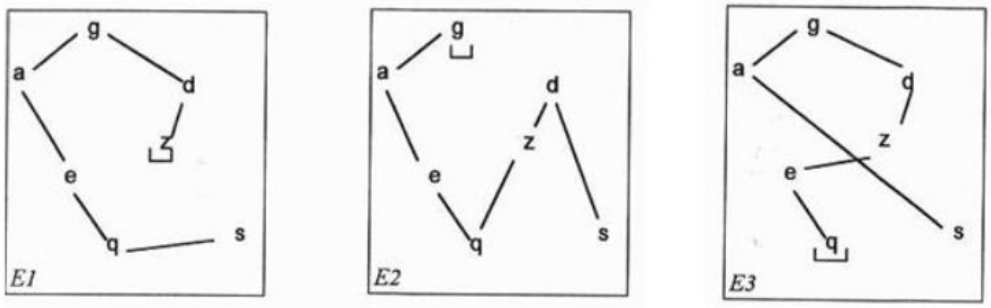
À l'école maternelle, quelle est l'interprétation courante de l'ordinal ?

La langue distingue les mots-nombres ordinaux : premier, deuxième, troisième, etc. Cependant, ces mots-nombres ordinaux ne sont pas d'usage systématique en français : par exemple, on parle du « premier janvier » mais on dit « deux janvier » et non pas « deuxième janvier », alors que c'est l'usage en anglais. À l'école maternelle, ces mots-nombres ordinaux sont utilisés en particulier dans les jeux de déplacement sur une piste : « place-toi sur la troisième case », ce qui implique l'existence d'un repère : l'origine et l'orientation.

3.3- L'énumération

L'énumération est un savoir mathématique (Briand, 1993) qui permet de considérer le mode de traitement de tous les éléments d'une collection ou d'une liste, une et une seule fois.

« Nous distinguerons trois significations du mot énumération. Pour illustrer notre propos, nous nous servons des trois schémas suivants :



Soit l'ensemble E = et une première énumération E1. Si nous étudions ce travail d'un point de vue mathématique, nous y repérons une permutation de l'ensemble E. Donc,

- Du point de vue mathématique (le résultat) : tout ordre total sur un ensemble fini détermine une permutation. Les concepts existent ; il n'est pas nécessaire d'introduire d'autres mots.

- Si nous étudions ce travail d'un point de vue mathématique, mais cette fois ci pour tenter de modéliser l'algorithme producteur de cette permutation, nous devons faire une hypothèse sur ce qui a conduit le sujet à passer d'un élément au suivant. Ici, c'est la distance qui conditionne le choix du successeur (l'algorithme) : Nous disons qu'une énumération d'un ensemble fini est un algorithme producteur d'une permutation de cet ensemble.

- Du point de vue didactique : (l'activité) : l'énumération est une description d'une activité de l'élève. (Ce qu'il fait quand il énumère).

-Du point de vue des connaissances en jeu :(les connaissances): L'énumération est alors une connaissance productrice d'énumérations effectives. C'est un modèle implicite d'action, un ensemble de procédés locaux mis en œuvre par l'élève pour réaliser concrètement une énumération.

Le schéma E1 montre un modèle de résultat d'un travail d'enfant. Du point de vue mathématique ce schéma montre une permutation E1 de l'ensemble E. Si nous nous intéressons cette fois ci à la construction de ces permutations, l'algorithme repéré est : choix d'un premier élément et passage d'un élément au suivant par la fonction "le plus proche de". Pour pouvoir conclure que cet algorithme est le modèle de l'activité du sujet, il suffit de faire recommencer à partir d'un autre élément et s'assurer si le même algorithme (qui produit une autre permutation) est, ou non, mis en œuvre. Par exemple, pour produire E2 et E3, le sujet n'est pas parti du même premier élément, mais utilise toujours la même fonction successeur "...est le plus proche de..". Ainsi, E1, E2 et E3 sont trois énumérations différentes du point de vue de la réalisation effectuée, mais constituent une seule énumération du point de vue de la connaissance en jeu. » (Briand, 1993, p. 29)

À l'école maternelle, quelle est l'interprétation courante de l'énumération ?

Choisir un élément parmi l'ensemble des éléments disponibles dans la collection, puis un deuxième sachant que le premier a déjà été traité et ainsi de suite jusqu'au dernier élément de la collection. Que les configurations soient déplaçables ou pas, il s'agit de traiter tous les éléments de la collection ou de la liste, une et une seule fois. Lorsqu'est associée à ce passage en revue des éléments de la collection (ou liste), la suite orale des mots nombres (ou suite orale des mots nombres ordinaux), la synchronisation entre le mot nombre et le pointage est nécessaire pour obtenir le cardinal ou l'ordinal.

Jusqu'à une période très récente[26], l'énumération n'était pas considérée comme un savoir dans l'institution scolaire de l'école primaire (ni à l'école maternelle, ni à l'école élémentaire). Cependant, les connaissances en situation relatives à l'énumération sont mises en jeu constamment à l'école maternelle, où elles sont souvent sources de difficultés pour les élèves (Margolinas, Wozniak, Canivenc, De Redon, & Rivière, 2007; Margolinas & Laparra, 2009; Margolinas, 2012b).

En particulier, l'énumération est nécessaire au dénombrement, puisque pour dénombrer, il faut choisir un élément parmi l'ensemble des éléments disponibles dans la collection, puis un deuxième sachant que le premier a déjà été traité et ainsi de suite jusqu'au dernier élément de la collection.

3.4- Les numérations

La numération est un système permettant de désigner, à l'oral (numération orale) ou à l'écrit (numération écrite) une liste ordonnée régulière infinie. Les systèmes de numération sont construits en s'appuyant sur une base plus ou moins régulièrement utilisée. Notre système de numération, autant à l'oral qu'à l'écrit, peut être considéré comme étant un système de numération à base dix (même s'il y a des irrégularités sur ce point dans la numération orale).

À l'école maternelle, la numération orale a une très grande importance et il existe plusieurs types de numérations écrites : la numération de position et des numérations « figurées ».

a- La numération orale

Il s'agit ici de faire référence à la suite orale des mots nombres. Savoir réciter la chaine orale, énoncer les mots nombres les uns après les autres, toujours dans le même ordre, constitue, à l'école maternelle, un apprentissage essentiel. D'autant plus que les seize premiers mots nombres sont tous différents lexicalement et que la régularité, liée à notre système décimal, ne se perçoit qu'à partir de dix-sept. Cependant, une telle régularité ne peut être construite qu'avec une connaissance de la suite orale au-delà de vingt voire même de trente : dix-sept comme vingt-sept et trente-sept.

À l'école maternelle, quelle est l'interprétation courante de la numération orale ?

La langue distingue les mots-nombres cardinaux : un, deux, trois, etc. En français, « un » est confondu avec l'article indéfini, ce qui n'est pas le cas en anglais. À l'école maternelle, ces mots-nombres cardinaux sont répétés pour être mémorisés.

[26] En 2010 avec le nombre au cycle 2 puis dans le programme de la maternelle en 2015.

b- La numération écrite de position

La numération écrite de position renvoie au système de position chiffrée. Ce système est purement symbolique, même pour les premiers chiffres, contrairement, par exemple au système de numération romaine dans lequel les trois premiers chiffres comportent un signe de base répété 1 : I, 2 : II, 3 : III. Le système symbolique implique de connaître d'une part les dix signes de base : les chiffres, puis de comprendre la combinaison de ces signes de base pour écrire tous les nombres.

À l'école maternelle, quelle est l'interprétation courante de la numération écrite chiffrée ?

Les dix signes de base sont nommés, présentés et entrainés afin qu'ils soient lus et écrits. La lecture et l'écriture (différente du geste d'écriture cursive (Dumont, 2013)) pour chacun des neuf chiffres de 1 à 9, associés aux quantités et parfois aux positions que ces nombres désignent sont travaillées systématiquement à l'école maternelle. Les nombres à deux chiffres sont plus ou moins enseignés selon les professeurs, de 10 à 30 suivant les programmes. L'écriture de la date faisant partie des rituels quotidiens, les élèves rencontrent des écritures chiffrées jusqu'à 31, mais le plus souvent, le professeur n'enseigne pas que dans 31 il y a 3 dizaines et 1 unité, ni la raison pour laquelle 31 et 13 ne représentent pas le même nombre, ce qui sera l'objet du travail de l'école élémentaire. De ce point de vue, la lecture et l'écriture des écritures chiffrées et des écritures linguistiques sont dans une position similaire : l'élève sait que CLARA représente le prénom d'une camarade de classe et peut le prononcer, cependant le professeur ne cherche pas avant l'école élémentaire à faire produire la correspondance phonographique[27] systématique.

c- La numération figurée

À l'école maternelle, la numération chiffrée n'est pas la seule représentation écrite des nombres. En effet, le caractère purement symbolique des chiffres usuels ne rend pas compte des possibilités de l'écrit pour représenter des quantités.

Les schématisations

Dans certaines situations, les élèves peuvent être conduits à faire usage de l'écrit pour représenter des quantités ou des positions. Il s'agit d'un des premiers passages du dessin au schéma, ainsi d'un :

> *« dessin d'une quantité quelconque [d'objets de la collection], [à un dessin] de la bonne quantité […] [mais où] l'élève reste attaché à la représentation la plus exacte possible de l'objet, [à une] représentation schématique de la quantité [où] l'élève se détache d'une représentation iconique et représente la quantité de la façon la plus simple possible avec les outils de l'écrit en utilisant des petits traits par exemple ». (Margolinas & Wozniak, 2012)*

La faculté d'extraire la caractéristique mathématique commune aux collections ou aux listes, en l'occurrence la quantité ou la position, importe ici. En effet, à l'école maternelle, tout dessin qui comporte cette caractéristique est considéré comme un schéma quand bien même il peut *« rester attaché à la représentation »* fidèle des objets de la collection ou de la liste. L'abstraction, la figuration des éléments de la collection est *« le fruit d'un apprentissage progressif »* (Margolinas & Wozniak, 2012, p. 106).

[27] Depuis le programme 2015, l'encodage de mots simples est recherché à l'école maternelle.

« le schéma doit être considéré comme un écrit nécessitant, comme tous les écrits, un apprentissage spécifique. »(Laparra & Margolinas, 2009)

À l'école maternelle, l'élève découvre l'univers de l'écrit (Men, 2008), cela concerne également l'entrée dans l'écrit mathématique.

« L'écrit est un moyen de retenir dans ce qu'on voit d'un objet du monde seulement ce qui est pertinent pour la résolution du problème. Dans un schéma, l'objet du monde n'a pas à être reproduit fidèlement. Seuls doivent être représentés les traits pertinents […]. » (Laparra & Margolinas, 2009)

À l'école maternelle, quelle est l'interprétation courante de la schématisation des quantités et des positions ?

Les représentations symboliques, sociales ou scolaires

Certaines représentations gestuelles ou écrites des quantités présentent un caractère social. Le rôle important qu'elles jouent à l'école maternelle tient sans doute à la représentation d'un cardinal par une collection représentant ce cardinal. Socialement, ces représentations ont le plus souvent pour fonction de désigner un cardinal inférieur ou égal à six, ce qui correspond aux cardinaux qu'il est possible de reconnaître « directement, indépendamment de tout comptage » (Brissiaud, 2003, p. 110).

Le subitizing

Pour de très petites quantités cette reconnaissance immédiate est rendue possible par le *subitizing* qui est la faculté de reconnaitre immédiatement de petites quantités. Reconnaitre signifie ici percevoir la quantité sans dénombrer ou compter les éléments des collections.

Les limites du *subitizing* restent controversées dans la communauté des psychologues. Mandler et Shebo (1982) ont montré que pour des collections de un à trois objets les temps de réponses étaient brefs et n'augmentaient que très légèrement avec le nombre d'objets. Par contre, entre quatre et six objets, les temps de réponses augmentent de façon linéaire. Au-delà de sept objets, les temps de réponses sont sensiblement constants mais les réponses fausses augmentent fortement. Ces résultats conduisent à conclure que le *subitizing* est un processus perceptif rapide et sûr d'appréhension immédiate de la numérosité (Kaufman et al., 1949) pour les quantités de un à trois, que le dénombrement est utilisé pour les collections de quatre à six objets et enfin qu'une estimation est utilisée pour traiter les plus grandes quantités (au-delà de sept objets). Pour Gallistel et Gelman (1992), le *subitizing* ne serait qu'un dénombrement très rapide car les temps de réponses augmentent très légèrement, certes, mais ils augmentent de un à deux et de deux à trois. Mandler et Shebo (1982) expliquent le *subitizing* par une reconnaissance de configurations canoniques, un c'est le point, deux une ligne, trois un triangle. Mais cette conception est également remise en cause car le *subitizing* est observé même avec des objets alignés. Pour Trick et Pylyshyn (1994) le *subitizing* et le dénombrement sont deux effets de la construction du système visuel, il existerait des index spatiaux qui s'attacheraient automatiquement à chaque objet mettant en marche simultanément une étape pré-attentive : le *subitizing* et une étape attentionnelle le dénombrement. Enfin, certains préfèrent parler de processus général d'estimation.

La question du *subitizing* et de son domaine de validité reste entière. Cependant, pour mes travaux, considérer qu'il existe une reconnaissance perceptive, visuelle, en dehors du dénombrement, pour les très petites quantités est suffisant.

Les doigts de la main

Les doigts de la main permettent de représenter les petites quantités (inférieures ou égales à dix), cette représentation présente un caractère historique, culturel et kinesthésique. Suivant les cultures, il peut s'agir d'une représentation plus ou moins strictement conventionnelle. Par exemple, le fait de lever l'index et le majeur de la main droite ou bien le pouce et l'index de la main gauche n'est pas nécessairement reconnu comme une façon équivalente de représenter la quantité « deux » suivant les cultures.

À l'école maternelle, quelle est l'interprétation courante de la représentation des quantités à l'aide des doigts de la main ?

Le premier usage de la représentation de la quantité à l'aide des doigts concerne l'âge de l'enfant, deux ou trois ans. Les décompositions sont souvent représentées par les doigts de la main. La reconnaissance quasi immédiate de la quantité représentée par le nombre de doigts levés est très couramment recherchée et entrainée :

> *« Il est donc important de développer la capacité des enfants à « sentir » les quantités sur les doigts de façon quasi immédiate, sans compter […]. Les doigts ne sont pas des objets comme les autres : ils sont le lieu de sensations kinesthésiques […], et ces sensations permettent d'en contrôler la quantité indépendamment de toute vision. » (Brissiaud, 2003, pp. 110-116)*

Dans la plupart des classes, cette reconnaissance « kinesthésique » de la quantité se double de l'usage de représentation écrite des doigts des deux mains sur des affiches, associées aux écritures chiffrées des nombres de 1 à 10. La reconnaissance visuelle permet d'associer le mot nombre à la quantité de doigts levés, ici les doigts sont associés à une image des doigts.

Baruk (Baruk, 2003, pp. 243-245) introduit des représentations avec des « dessins de barres organisées en doigts » (Figure 5 : représentation de neuf avec les cartes de Baruk) permettant des reconnaissances immédiates.

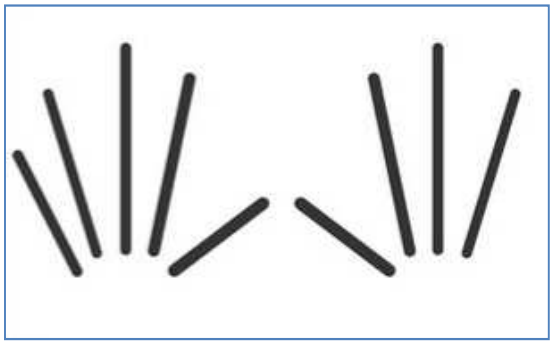


FIGURE 5 : REPRÉSENTATION DE NEUF AVEC LES CARTES DE BARUK

De nombreuses constellations sont en usage dans la société, en particulier les dés et la représentation des points sur les cartes à jouer. La disposition spatiale fixe permet une mémorisation de la quantité présente, ce qui est utile pour jouer rapidement. À l'école, ces constellations sociales servent à la fois dans des jeux qui présentent une dimension éducative mais aussi pour servir de représentation figurée du nombre.

Cependant, ces représentations obéissent à des normes qui n'ont pas pour fonction de construire le nombre, par exemple le dé ayant six faces doit avoir six constellations très rapidement identifiables, alors que la base dix de numération conduirait plutôt à privilégier la représentation jusqu'à cinq et non pas six. Certains éditeurs proposent ainsi du matériel scolaire dans lequel les quantités sont représentées par cinq[28] (Figure 6 : représentation de neuf avec la boîte picbille de Brissiaud).

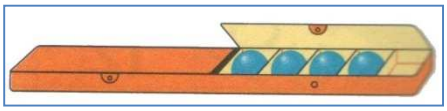


FIGURE 6 : REPRÉSENTATION DE NEUF AVEC LA BOÎTE PICBILLE DE BRISSIAUD

De plus, représenter les quantités peut permettre d'en percevoir directement certaines propriétés. C'est le cas des cartes à points[29] (Figure 7 : représentation de neuf avec la carte à points de Brégeon) qui permettent de visualiser notamment le caractère pair ou impair et les compléments à dix.

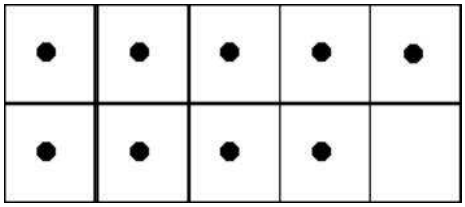


FIGURE 7 : REPRÉSENTATION DE NEUF AVEC LA CARTE À POINTS DE BRÉGEON

3.5- Le calcul

> *« À l'origine synonyme d'utilisation des opérations sur les nombres, aujourd'hui, le mot calcul s'emploie pour désigner toute manipulation de règles opératoires (abstraites ou non), la démonstration de formules, les applications numériques de résultats théoriques, par opposition aux démonstrations qui s'obtiennent à l'aide de raisonnements purement logiques et abstraits ; » (Bouvier, George, & Le Lionnais, 2013, p. 117)*

À l'école maternelle, nous restons proche de la définition originelle, c'est-à-dire le calcul peut être synonyme d'opérations sur les nombres, sans toutefois formaliser ces opérations à l'écrit. Il s'agit juste d'opérations mentales, de manipulations mentales des nombres qui subissent des transformations, des compositions, des comparaisons, des partages, ce qui amène à effleurer les problèmes à structures additives et les structures multiplicatives.

> *« Le paysage des structures additives est beaucoup plus complexe qu'on ne s'y attend après un premier coup d'œil. Il en va de même pour les structures multiplicatives. » (Vergnaud, 1986)*

Plus exactement, nous allons situer l'enseignement du calcul à l'école maternelle par rapport au "paysage" des structures additives (Tableau 4- Catégorisation (Calmelet, Graff, & Valzan, 2010) selon la typologie des structures additives de G. Vergnaud.

Problèmes de transformation	Problèmes de composition	Problèmes de comparaison
1. Recherche de l'état final connaissant la transformation positive et l'état initial. 2. Recherche de l'état final connaissant la transformation négative et l'état initial. 3. Recherche de l'état initial connaissant la	7. Recherche de la composée de deux états. 8. Recherche d'un état connaissant un second état et la composée des deux états.	9. Recherche de l'état à comparer connaissant l'état comparé et la comparaison positive. 10. Recherche de l'état à comparer connaissant l'état comparé et la comparaison négative.

[28] Les boîtes picbille J'apprends les maths CP, Rémi Brissiaud, éditions RETZ

[29] http://jean-luc.bregeon.pagesperso-orange.fr, consulté le 21 janvier 2016.

transformation positive et l'état Final 4. Recherche de l'état initial connaissant la transformation négative et l'état final. 5. Recherche de la transformation positive connaissant l'état initial et l'état final. 6. Recherche de la transformation négative connaissant l'état initial et l'état final		11. Recherche de l'état comparé connaissant l'état à comparer et la comparaison positive. 12. Recherche de l'état comparé connaissant l'état à comparer et la comparaison négative. 13. Recherche de la comparaison positive connaissant les deux états. 14. Recherche de la comparaison négative connaissance les deux états.

TABLEAU 4- CATÉGORISATION (CALMELET, GRAFF, & VALZAN, 2010) SELON LA TYPOLOGIE DES STRUCTURES ADDITIVES DE G. VERGNAUD

À l'école maternelle, quelle est l'interprétation courante du calcul additif ?

Le sens de l'addition (et de la soustraction) est favorisé à partir de problèmes de transformation. Les problèmes de comparaison sont également présents à l'école maternelle. Par contre, les problèmes de composition sont moins proposés.

Les structures multiplicatives peuvent être à présent énoncées succinctement (Tableau 5- Classification des structures multiplicatives (Levain & Vergnaud, 1994, p. 57)).

> *« le champ conceptuel des structures multiplicatives consiste en "l'ensemble des situations dont le traitement implique une ou plusieurs multiplications ou divisions et l'ensemble des concepts et théorèmes qui permettent d'analyser ces situations : proportion simple et proportion multiple, fonction linéaire et n-linéaire, rapport scalaire, quotient et produit de dimensions, fraction, rapport, nombre rationnel, multiple et diviseur, etc." » (Levain & Vergnaud, 1994, p. 56)*

Structure de proportion simple	Structure de proportion simple composée	Structure du produit de mesure	Structure de proportion double
Quatre quantités et deux espaces de mesure différents.	Composition de deux ou plusieurs proportions simples.	Composition cartésienne de deux espaces de mesure en un troisième.	Proche du produit de mesure.

TABLEAU 5- CLASSIFICATION DES STRUCTURES MULTIPLICATIVES (LEVAIN & VERGNAUD, 1994, P. 57)

À l'école maternelle, le travail sur les grandeurs n'est pas assez avancé pour que les proportions, qui impliquent des mesures, soient envisagées.

CONCLUSION

Entre un mode de garde et une primarisation des enseignements, l'école maternelle n'a cessé d'évoluer. Les mouvements de balancier ont été nombreux toujours à la recherche d'un équilibre. De plus, les habitus de fonctionnement en lien avec les organisations de classe (atelier, regroupement, etc.) ont aussi une influence contraignant les enseignements. À elle seule, l'école maternelle constitue une institution où des savoirs spécifiques sont légitimés. L'évolution des programmes de l'école maternelle sur l'enseignement du nombre montre des orientations et des choix en termes de savoirs assumés par les décideurs politiques. Le calcul, largement représenté dès les années 1855 et pratiquement inexistant en 2015, est l'exemple même de choix et d'influences politiques sur l'enseignement des savoirs mathématiques. Pour toutes ces raisons, l'école maternelle autant que les savoirs mathématiques sont pris en compte dans le cadre de la thèse. Il s'agit à présent, de mobiliser la théorie des situations didactiques pour comprendre l'enseignement du nombre à l'école maternelle (chapitre 4).

CHAPITRE 4- LA THÉORIE DES SITUATIONS DIDACTIQUES ET LES SAVOIRS MATHÉMATIQUES POUR L'ENSEIGNEMENT DU NOMBRE

« La théorie des situations didactiques est ici considérée comme un paradigme d'analyse de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques, à la fois pour l'analyse des interactions entre le sujet et le milieu en situation, mais aussi pour l'analyse de l'acculturation d'un sujet avec un corpus culturel de savoirs : les mathématiques. » (Margolinas, 2015b, p. 33)

Il convient maintenant de préciser et de prolonger le travail sur les connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement, de clarifier la distinction fondamentale entre savoirs et connaissances (1- Une distinction nécessaire entre savoir et connaissance). Les travaux de Ball (Ball, Thames, & Phelps, 2008) sont en anglais et ne permettent pas la nuance entre savoir et connaissance avec le terme *knowlegde (Margolinas, 2015b, p. 35)*, par ailleurs, Clivaz (Clivaz, 2011) relève également la nécessité de cette distinction mais ne l'a pas développée dans sa thèse. La théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) définit et théorise les conditions d'évolution des connaissances en situation à partir des situations fondamentales (2- Les situations fondamentales) et de l'imbrication des milieux (3- La structuration des milieux) qui vont enrichir le cadre théorique.

1- UNE DISTINCTION NÉCESSAIRE ENTRE SAVOIRS ET CONNAISSANCES

« Si la didactique des mathématiques fait usage de cette distinction [entre savoir et connaissance], c'est parce que celle-ci est fondatrice du projet de transmission. » (Laparra & Margolinas, 2010, p. 145)

1.1- Une distinction fondatrice pour la didactique des mathématiques

La didactique des mathématiques voit le jour en 1950 avec la création de la Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques, mais est surtout renforcée et développée à partir des travaux de Brousseau dans les années 1970. Elle repose à l'origine sur une hypothèse constructiviste et une hypothèse épistémologique. Piaget, à l'origine du constructivisme en psychologie cognitive, considère que l'apprentissage est le résultat d'une interaction entre le sujet et le milieu. Le sujet apprend en s'adaptant à un milieu. L'adaptation est la recherche d'un équilibre entre le milieu et le sujet, elle se fait par assimilation et accommodation. L'assimilation consiste à intégrer de nouvelles expériences ou connaissances sans modifier la structure de fonctionnement de l'apprenant. L'accommodation nécessite une réorganisation de la structure du sujet, cela implique une modification des schémas de fonctionnement. Cette hypothèse constructiviste de la connaissance est reprise dans la théorie des situations, sans qu'elle soit considérée comme le seul moteur de l'apprentissage (Bessot, 2011).

L'hypothèse épistémologique repose sur les problèmes et les situations issus des mathématiques qui sont à l'origine des connaissances mathématiques, elle porte la dimension d'acculturation de l'apprentissage.

À travers les situations qu'elle propose d'étudier, la didactique des mathématiques modélise une genèse des connaissances mathématiques.

> *« La détermination d'une connaissance mathématique par un problème dont cette connaissance est la solution est un procédé aussi ancien que les mathématiques. » (Brousseau, 2010, p. 2)*

La théorie des situations didactiques s'intéresse aux connaissances comme solutions optimales en situation, et à leur évolution.

> *« Il s'agit de rechercher les conditions qui permettent en théorie de faire évoluer les connaissances des élèves et non pas seulement qui améliorent de fait l'enseignement. » (Margolinas, 2012a, p. 4 dans la version déposée sur HAL)*

Pour Brousseau la théorie des situations didactiques se cristallise autour des connaissances mathématiques. Brousseau n'a de cesse de décrire, de créer et de classer les situations dans lesquelles se manifestent les connaissances mathématiques.

> *« Un des objets de la théorie des situations didactiques en mathématiques (T.S.D.M) est de classer les situations et par conséquent les connaissances en fonction de leurs rapports et des possibilités d'apprentissage et d'enseignement qu'elles offrent. La théorie classe les situations selon leur structure (action, formulation, validation, institutionnalisation etc.) lesquelles déterminent des types de connaissances (modèles implicites d'action, langages, théorèmes…) différents. » (Brousseau, 2010, p. 2)*

À chaque type de structure de situations[30] correspond, en réponse, certaines connaissances spécifiques différentes. La succession des situations détermine l'évolution des connaissances et le passage de l'une à l'autre.

1.2- Un lien dialectique entre savoir et connaissance

Toutefois, connaissances et savoirs sont liés, il existe « un lien dialectique et complexe » (Margolinas, 2015b, p. 8 dans la version déposée sur HAL). Il est temps, à présent de les définir :

> *« Une connaissance est ce qui réalise l'équilibre entre le sujet et le milieu, ce que le sujet met en jeu quand il investit une situation. Il s'agit d'un concept très large, qui inclut à la fois des connaissances du corps, des connaissances dans l'action, des connaissances de l'interaction, des connaissances mémorisées, etc.*
> *Un savoir est d'une autre nature, il s'agit d'une construction sociale et culturelle, qui vit dans une institution (Douglas, 2004) et qui est par nature un texte (ce qui ne veut pas dire qu'il soit toujours matériellement écrit). Le savoir est dépersonnalisé, décontextualisé, détemporalisé. Il est formulé, validé et mémorisé. Il peut être linéarisé, ce qui correspond à sa nature textuelle. »(Laparra & Margolinas, 2010, p. 145)*

Pour Margolinas le savoir est issu d'une institution, alors que la connaissance vit dans une situation. Savoir et connaissance n'ont pas le même statut. Les connaissances sont personnelles et se rencontrent en situation, alors que le savoir est universel et légitime dans l'institution qui le porte. Une difficulté peut provenir lorsque plusieurs institutions définissent un même savoir avec des points de vue différents.

[30] Les situations d'action et de formulation sont définies dans le paragraphe (2- Les situations fondamentales) et décrites plus longuement dans le chapitre 6.

« Une connaissance personnelle est identifiée comme ayant une valeur culturelle pour une communauté, (reconnue valide, réutilisable, communicable ou mise en relation avec un savoir…). Elle devient « savoir » pour le joueur. » (Brousseau, 1990, p. 318)

La figure suivante (Figure 8 : Savoir et connaissance (Laparra & Margolinas, 2010, p. 146)), schématise la transformation de connaissance en savoir et du savoir en connaissance, c'est-à-dire le changement de statut des connaissances pour devenir des savoirs, par les processus de dévolution et d'institutionnalisation qui vont être développés à présent. L'enjeu est précisément de légitimer les connaissances en situation en les reconnaissant culturellement dans une institution et en permettant le changement de statut des connaissances en savoir et de savoir en connaissances par un va et vient incessant rendu possible par les processus de dévolution et d'institutionnalisation.

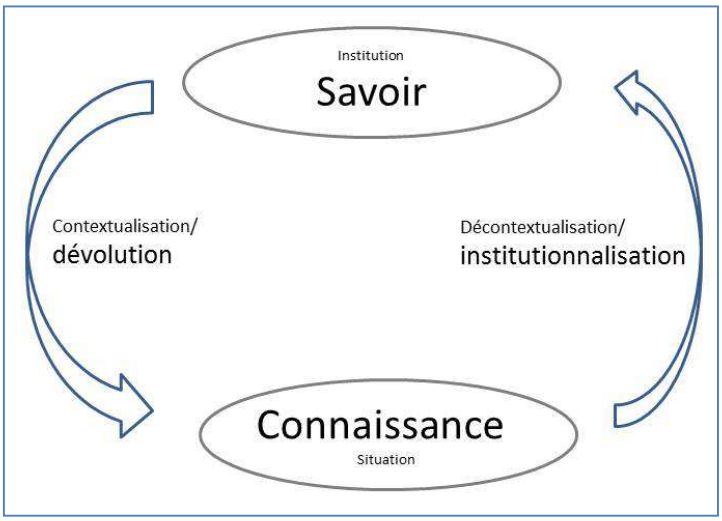


FIGURE 8 : SAVOIR ET CONNAISSANCE (LAPARRA & MARGOLINAS, 2010, P. 146)

Les définitions de la dévolution et de l'institutionnalisation retenues sont les suivantes.

Le professeur déconstruit le savoir pour le mettre en contexte en proposant des situations dans lesquelles les connaissances apparaitront comme des réponses optimales qui correspondent au savoir. L'élève doit accepter cette situation comme étant la sienne, c'est-à-dire s'investir et prendre à bras-le-corps la recherche de la solution en mobilisant ses connaissances antérieures, en construisant de nouvelles connaissances, en faisant des hypothèses pour produire une réponse adaptée et pouvoir en constater les effets (Margolinas, 2005a). Il endosse et accepte la responsabilité de la recherche d'une solution en mobilisant ses connaissances.

« Ces problèmes, choisis de façon à ce que l'élève puisse les accepter doivent le faire agir, parler, réfléchir, évoluer de son propre mouvement. Entre le moment où l'élève accepte le problème comme sien et celui où il produit sa réponse, le maitre se refuse à intervenir comme proposeur des connaissances qu'il veut voir apparaitre. » (Brousseau, 1998, p. 59)

Le processus d'institutionnalisation « gère la finalité didactique » (Laparra & Margolinas, 2008, p. 7), c'est-à-dire « l'intention d'enseigner des savoirs » et le fait de « faire la relation entre les connaissances [qu'il a] rencontrées et des savoirs mathématiques » (Margolinas, 2015b, p. 35). Le professeur, par le processus d'institutionnalisation, « sort » les connaissances du contexte de la situation pour les rendre légitimes en tant que savoir mathématique reconnu et validé pour l'ensemble.

« Le processus qui fait changer de statut la connaissance en la faisant évoluer graduellement vers un régime de savoir est le processus d'institutionnalisation, qui passe par des formulations, des

validations, une décontextualisation, une mémorisation, etc. » (Laparra & Margolinas, 2010, p. 146)

Dans un « projet de transmission » (Laparra & Margolinas, 2010, p. 145), l'enseignant prend à sa charge la mise en place de la transformation du savoir en connaissance pour l'élève, il crée les conditions favorables à la dévolution puis, dans un processus inverse, doit permettre le changement de statut de la connaissance en savoir dans un processus d'institutionnalisation.

« Il [y] a ainsi une circulation entre connaissance et savoir, et une complémentarité entre processus d'institutionnalisation et de dévolution. » (Laparra & Margolinas, 2010, p. 145)

Enseigner c'est identifier les raisons d'être du savoir pour créer des situations favorisant l'émergence de connaissances comme réponse optimale, permettre la dévolution des situations, repérer les connaissances des élèves dans les situations, encourager l'évolution de ces connaissances et provoquer le changement de statut des connaissances en savoir dans un processus d'institutionnalisation. Cette dialectique entre savoir et connaissance est à la charge du professeur.

2- LES SITUATIONS FONDAMENTALES

« La recherche des situations fondamentales des connaissances mathématiques, […] est ainsi le cœur de la théorie des situations. » (Laparra & Margolinas, 2008, p. 7)

2.1- Origine et organisation des situations

Dans la théorie des situations didactiques, les situations sont le concept emblématique de ce courant. Brousseau définit et précise différentes situations, génériques, significatives, fondamentales.

Il définit également des situations avec différentes structures, comme les situations d'action et de formulation qui ne sont pas de même nature[31]. Il s'agit ici de s'intéresser au concept de situation, qui regroupe différentes définitions.

a- Situation générique

La situation « détermine un champ » (Brousseau, 2005, p. 17) de connaissances spécifiques à un objet mathématique donné. Elle donne un modèle utilisable par toutes situations visant la notion mathématique déterminée, c'est-à-dire le savoir. Cette définition permet d'appréhender la situation comme le moyen possible de mettre en relation le savoir avec un champ de connaissances rattachées au savoir mathématique visé.

b- Situation significative

Cette situation permet de « justifier d'un coup l'ensemble des stratégies et des concepts caractéristiques » (Brousseau, 2005, p. 18) à un objet mathématique. Elle sert de référence pour un savoir mathématique visé.

[31] Elles seront décrites au chapitre 6.

c- Une suite de situations

Au cours d'une série de questions-réponses, d'interactions, de modifications, d'adaptations, la proposition de situations nouvelles va entrainer un enchevêtrement, « un réseau par lequel les connaissances se sont développées, transformées modifiées » (Brousseau, 2005, p. 18). La notion d'évolution des connaissances ressort de cette définition.

Une situation fondamentale :

> *« se présente comme la dernière d'une suite de situations telle que chacune résulte de la précédente et prépare la suivante avec le minimum d'apports extérieurs engendre un « processus qui aboutit à la connaissance de la notion. » (Brousseau, 2005, pp. 18-19)*

Ce processus naît dans l'imbrication des milieux des situations précédentes et suivantes.

2.2- Définition d'une situation fondamentale

> *« C'est un schéma de situation capable d'engendrer par le jeu des variables didactiques qui la déterminent, l'ensemble des situations correspondant à un savoir déterminé. Une telle situation, lorsqu'on peut l'identifier, offre des possibilités d'enseignement mais surtout une représentation du savoir par les problèmes où il intervient permettant de restituer le sens du savoir à enseigner. » (Brousseau, 2010, p. 3)*

Les situations fondamentales visent les savoirs mathématiques et permettent d'observer et donc de décrire les connaissances en situation. En jouant sur les variables didactiques de la situation, les connaissances évoluent et se développent toujours en référence avec le savoir mathématique.

> *« On peut imaginer la situation « fondamentale » comme un modèle général-une situation avec de nombreux paramètres pouvant prendre toutes sortes de valeurs et sur chaque variable des valeurs […]. Mais on peut l'imaginer aussi comme une situation plus particulière, où le choix des paramètres et de leurs valeurs est beaucoup plus restreint de manière à ne plus modéliser que l'essence même de la notion mathématique. » (Brousseau, 2005, p. 11)*

La situation fondamentale est intrinsèquement liée à la notion mathématique c'est-à-dire au savoir, et en même temps elle est l'essence même de l'émergence des connaissances. C'est pour cette raison qu'elle m'intéresse particulièrement. Pour Laparra et Margolinas (Laparra & Margolinas, 2008, p. 10) l'enchainement des situations et leur imbrication déterminent le savoir mathématique visé, les auteures insistent sur « une programmation des notions rencontrées et une programmation des connaissances et des savoirs construits articulés ». L'articulation entre savoirs et connaissances est la caractéristique même des situations fondamentales et constitue un point clé de la recherche sur les savoirs mathématiques pour l'enseignement du nombre à l'école maternelle.

> *« Admettons que le sens d'une connaissance provient en bonne partie du fait que l'élève acquiert celle-ci en s'adaptant aux situations spécifiques qui lui sont proposées (dévolues). Nous admettrons aussi qu'il existe, pour toute connaissance, une famille de situations susceptible de lui donner un sens correct. […] Ces situations fondamentales lui permettent de fabriquer assez vite une conception correcte de la connaissance qui pourra s'insérer, le moment venu, sans modifications radicales, dans la construction de nouvelles connaissances. » (Brousseau, 1986, p. 67)*

2.3- La description de situations fondamentales comme cadre d'analyse

Le concept de situations fondamentales renvoie à une description des connaissances en mouvement, qui vise précisément l'évolution des connaissances. L'articulation entre savoirs

et connaissances inhérente aux situations fondamentales permet également de rendre compte des savoirs mathématiques par le biais des variables didactiques qui la caractérisent.

Les situations fondamentales « permettent de distinguer : la situation projetée par le professeur ; les situations effectives qu'il installe ; les situations investies par les élèves » (Laparra & Margolinas, 2010, p. 142) en se focalisant sur les connaissances et les savoirs mathématiques visés. L'usage des connaissances en situation (Margolinas & Wozniak, 2012, p. 6), permet de décrire les connaissances mathématiques spécifiques du professeur en situation d'enseignement du nombre à l'école maternelle.

Le travail de description « de situations articulées par les situations fondamentales des savoirs correspondant est donc un parti pris méthodologique permettant » (Margolinas, 2015b, p. 32) de modéliser les savoirs mathématiques pour l'enseignement (inhérent au professeur) du nombre à l'école maternelle.

La question des situations fondamentales se pose dans le mouvement des connaissances vers le savoir en tant qu'évolution des connaissances. La structuration du milieu, par l'imbrication des connaissances de la situation précédente qui se retrouvent dans le milieu de la situation suivante comme connaissances naturalisées (Margolinas, 1985), est la ligne directrice sur laquelle le principe organisateur est fondé. L'enchainement des situations prenant en compte les connaissances antérieures détermine mon analyse. Je m'intéresse aux connaissances (donc aux situations fondamentales qui permettent ces connaissances) et plus particulièrement à l'évolution des connaissances relatives aux savoirs mathématiques sur le nombre. Cibler l'évolution des connaissances c'est prendre en considération les connaissances antérieures et les connaissances futures. Les situations fondamentales sont analysées à partir du modèle d'emboîtement des milieux décrit à présent.

3- LA STRUCTURATION DES MILIEUX

> *« Le concept de milieu et sa structuration sont centraux dans la théorie des situations didactiques. » (Laparra & Margolinas, 2010, p. 142)*

Pour que les situations soient dévolues aux élèves, le milieu de la situation joue un rôle déterminant, il doit être installé avec toute l'attention qu'il requiert. Un milieu choisi avec précision permet l'émergence de connaissances.

> *« Pour comprendre comment les élèves peuvent investir les situations installées par le professeur, il faut déterminer le milieu avec lequel l'élève entre en interaction, et pour cela : examiner avec le plus grand soin les objets matériels […] déterminer les connaissances qui sont associées à ces objets, déterminer les connaissances […] « naturalisées. » (Laparra & Margolinas, 2010, p. 143)*

3.1- Le milieu

Le milieu est un concept qui est spécifié en didactique des mathématiques. Le milieu est intiment lié à la situation, dans la théorie des situations didactiques, le milieu correspond aux éléments de la situation qui interagissent non intentionnellement avec le sujet, c'est-à-dire, le matériel, les consignes, les connaissances naturalisées. Le milieu peut être modifié par les interactions entre pairs ou avec le professeur.

> *« […] On appelle "milieu" tout ce qui agit sur l'élève ou / et ce sur quoi l'élève agit. » (Brousseau, 2010)*

Les connaissances intrinsèques au milieu peuvent ainsi être observées et déterminées.

> *« Brousseau propose alors un modèle d'emboîtement des milieux pour l'analyse de situations effectives. » (Clivaz, 2011, p. 49)*

3.2- La structuration du milieu

La définition donnée par Brousseau et réutilisée par Margolinas (Margolinas, 2002a) est la suivante :

> *« Brousseau[32] caractérise le milieu comme un « oignon », dans une structure récursive dans laquelle la situation de niveau n devient le milieu de la situation de niveau n+1, on peut donc écrire en première approche que, dans le schéma de Brousseau, $M_n=S_{n+1}$. Ce schéma permet de voir l'imbrication des milieux, comme dans un oignon […]. Dans mes écrits, j'ai considéré qu'on avait toujours $S_{n-1}=M_n$ (Margolinas, 1995), ce qui peut aussi s'écrire formellement $S_n=M_{n+1}$. Ce point de vue correspond à une extension directe de l'égalité obtenue à partir du modèle de Brousseau.*

Il y a un emboîtement des situations S_{n-1} avec le milieu suivant M_n (Figure 9 : cas d'une situation d'action : Emboîtement des milieux et des situations : $S_{n-1}=M_n$) :

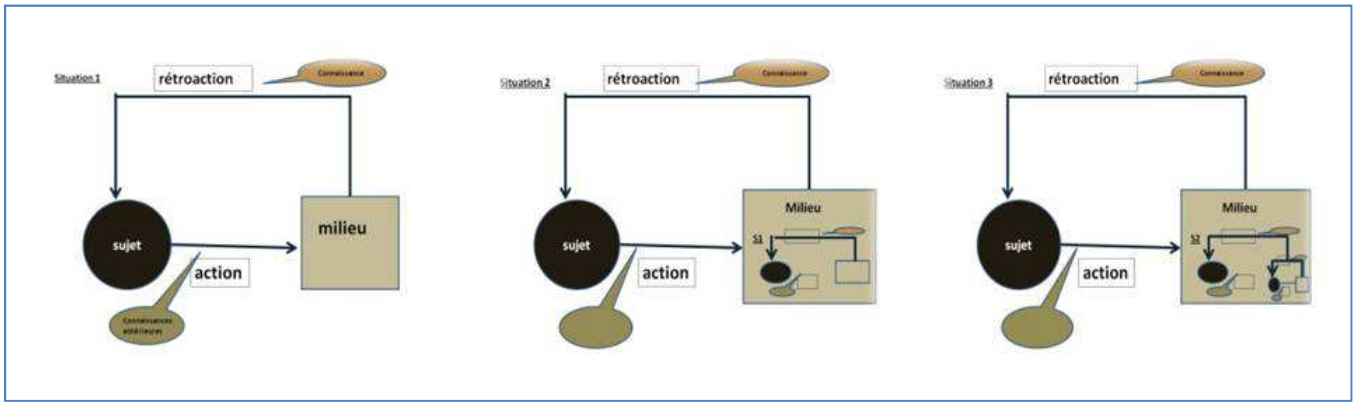


FIGURE 9 : CAS D'UNE SITUATION D'ACTION : EMBOÎTEMENT DES MILIEUX ET DES SITUATIONS : $S_{N-1}=M_N$

Dans une situation d'action, sur l'image de gauche, tous les éléments de la situation se trouvent intégrés dans le milieu de la deuxième situation (l'image au milieu). Cette situation particulière intègre tous les constituants de la première situation et se trouve à son tour incluse dans le milieu de la troisième situation. Parler de S_{n-1} c'est prendre en compte les connaissances en situation, mais aussi les critères de validité[33] (Margolinas, 1993, p. 130), les connaissances naturalisées, le milieu, les interactions de l'actant sur ce milieu. La situation a été introduite avec certains éléments du milieu, qui vont façonner, conditionner le déroulement des situations suivantes. Il y a une mémorisation, une intériorisation, une mémoire kinesthésique même de la situation précédente qui non seulement ne s'oublie pas, mais qui détermine l'accroche et de développement des situations suivantes. Ainsi, une succession de situations se déroulent, entrainant une progression et une évolution des connaissances.

Soit une situation S1 avec son milieu de S1 (zone claire), elle deviendra le milieu de la situation S2 (zone plus foncée) qui deviendra à son tour le milieu de la situation S3 et ainsi de suite (Figure 10 : Emboîtement des milieux et des situations).

[32] (Brousseau, 1990) repris dans (Brousseau, 1998).
[33] Voir page 52.

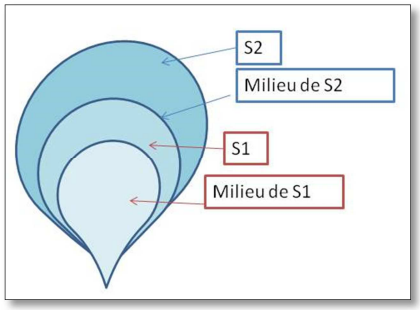


FIGURE 10 : EMBOÎTEMENT DES MILIEUX ET DES SITUATIONS

> *« La structuration du milieu didactique de l'élève fait apparaître un emboîtement de situations correspondant à des projets distincts et dont chacune sert de milieu à la suivante. » (Brousseau, 2010, p. 3)*

L'emboîtement des milieux ordonne les situations (d'où des connaissances minimales au départ).

3.3- La structuration des situations fondamentales

La structuration du milieu est souvent utilisée pour analyser finement de situations didactiques, voire des épisodes de situations (Margolinas & Steinbring, 1994; Margolinas, 1995; Bloch, 1999; Bloch, 2002; Margolinas, 2002a; Margolinas, 2005b; Margolinas & Goigoux, 2005; Clivaz, 2011), entre autres. Comme l'avait proposé Brousseau dès 1986, je m'appuie sur la structuration du milieu pour expliquer un niveau plus global : celui de l'enchaînement des situations les unes par rapport aux autres dans un processus didactique.

Les critères de validité, qui sont des connaissances antérieures naturalisées, servent à la validation des situations suivantes. Ils alimentent les connaissances du milieu de la situation suivante et permettent de préciser ce qui est transféré de la situation n-1 dans le milieu n.

> *« Nous appellerons critère de validité une connaissance donnée quand elle sert à l'élève pour la validation dans une phase de conclusion. » (Margolinas, 1993, p. 130)*

3.4- Deux logiques possibles dans l'emboîtement des situations

Les processus de dévolution et d'institutionnalisation sont aussi vus comme des analyseurs de phases dans les situations. Dans l'enseignement, le professeur part des savoirs qui légitiment la raison d'être de son enseignement. Soit il fait la dévolution de situations dans lesquelles les élèves vont pouvoir d'abord construire des connaissances puis des savoirs, dans une progression définie et orchestrée par le professeur dans un mouvement d'institutionnalisation : en modifiant progressivement les situations et en acculturant les élèves à des savoirs sociaux. Soit il choisit de faire visiter les savoirs directement à l'élève (Chevallard, 2010a) en découpant les savoirs de manière à ce qu'ils puissent s'enchaîner d'une façon logique, tout en aménageant ensuite des situations dans lesquelles l'élève pourra s'exercer. Il peut y avoir dans la noosphère des affrontements idéologiques considérant ces deux mouvements comme des « méthodes » incompatibles. Sans prendre parti, les deux enseignements ont sans doute leur logique et leur domaine de validité, mais ils sont complémentaires.

CONCLUSION

La théorie des situations didactiques offre une conceptualisation de l'acte d'enseigner. L'enseignement devient un objet d'étude à part entière en focalisant sur le changement de statut des savoirs en connaissances et des connaissances en savoirs.

> *« Selon nous, la didactique des mathématiques doit permettre de mieux comprendre les mécanismes de la relation enseignement/apprentissages relativement à cette discipline. » (Chesnais, 2009, p. 11)*

Les mécanismes de la relation enseignement/apprentissage font référence à la dialectique savoir/connaissance. Les processus de dévolution et d'institutionnalisation sont au cœur de cette dialectique entre savoirs et connaissances et permettent le changement de statut des connaissances en savoirs. La structuration des milieux joue un rôle prépondérant dans l'évolution des connaissances en situation. Cette vision didactique de l'enseignement, spécifique à la théorie des situations didactiques, va façonner ma recherche en définissant mon cadre théorique. Il s'agit à présent, de rendre compte de la description des situations fondamentales ainsi que de l'imbrication des milieux dans une modélisation des savoirs mathématiques spécifiques à l'enseignement du nombre à l'école maternelle (chapitre 5).

CHAPITRE 5- UNE MODÉLISATION DES SAVOIRS MATHÉMATIQUES SPÉCIFIQUES À L'ENSEIGNEMENT DU NOMBRE

Le chapitre 5 présente la mise en place d'une modélisation des savoirs pour l'enseignement du nombre, sous la forme d'un arbre des savoirs du nombre. Elle a pour but de référencer les savoirs mathématiques spécifiques à l'enseignement du nombre à l'école maternelle d'une part, et d'autre part de servir de référence pour illustrer les connaissances mathématiques spécifiques du professeur pour l'enseignement du nombre à l'école maternelle. Cette représentation en arbre fait apparaitre à la fois le raisonnement des savoirs mathématiques eux-mêmes (qui conduisent aux savoirs mathématiques spécifiques à l'enseignement du nombre) mais aussi l'anticipation qu'il est possible de faire sur les connaissances mathématiques spécifiques dans l'enseignement du professeur.

L'arbre complet détaille les savoirs mathématiques spécifiques pour l'enseignement du nombre.

La présentation générale de la structure de l'arbre ainsi que des branches qui le composent (1- Présentation des savoirs du nombre) est suivie par l'exposition des concepts théoriques qui sous-tendent sa construction (2- Construction générale de l'arbre des savoirs). Enfin, je présente la méthodologie qui m'a permis d'obtenir la branche cardinal (3- Construction particulière d'une branche de l'arbre des savoirs : la branche cardinal), en m'appuyant sur l'imbrication des milieux et les situations fondamentales.

1- PRÉSENTATION DES SAVOIRS DU NOMBRE

1.1- Des savoirs pour l'enseignement du nombre

Les différents savoirs mathématiques liés à l'enseignement du nombre à l'école maternelle : cardinal, ordinal, énumération, calcul et numérations sont regroupés dans le schéma suivant (Figure 11 : Les différents savoirs mathématiques pour l'enseignement du nombre à l'école maternelle) et vont être maintenant développés.

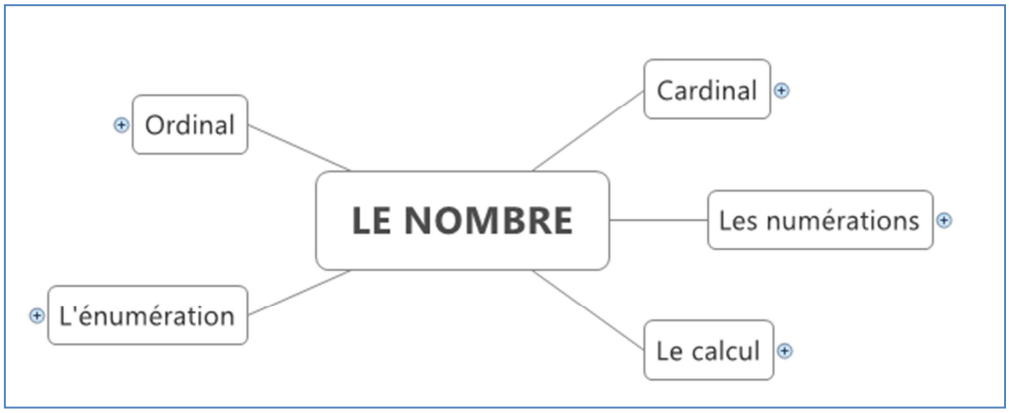


FIGURE 11 : LES DIFFÉRENTS SAVOIRS MATHÉMATIQUES POUR L'ENSEIGNEMENT DU NOMBRE À L'ÉCOLE MATERNELLE

Cette schématisation modélise les savoirs mathématiques pour l'enseignement du nombre par le professeur. L'image d'un arbre hiérarchique est utilisée pour visualiser l'enseignement du nombre, aussi, l'emploi d'un vocabulaire appartenant au champ lexical de l'arbre (branche, greffe…) est présent dans la suite du texte. Il y a cinq branches principales à l'arbre des savoirs pour l'enseignement du nombre à l'école maternelle, et je vais décrire, sur chaque branche, les connaissances qui se rattachent au savoir de la branche à l'aide de situations fondamentales (Margolinas & Wozniak, 2012).

Chaque savoir est isolé sur une branche pour être étudié à part, indépendamment des autres savoirs. Il ne s'agit pas alors de modéliser la réalité d'enseignement, les savoirs étant en fait plus ou moins dépendants les uns des autres, plus ou moins liés entre eux. Cette répartition en branches constitue une proposition de modélisation des savoirs mathématiques spécifiques pour l'enseignement du nombre à l'école maternelle qui prend en compte chaque savoir dans sa singularité et sa particularité.

1.2- Présentation des savoirs cardinal et ordinal

L'aspect cardinal va faire l'objet d'un développement détaillé[34]. L'aspect ordinal aurait pu faire l'objet d'un même développement suivant un schéma rigoureusement identique, mais le fait qu'il soit peu présent dans les classes ne légitime pas ce choix. L'ordinalité est identifiée en tant que savoir mathématique, cependant, peu de situations identifiées sont proposées en classe. Le cardinal est un savoir très présent dans l'institution scolaire, par contre, l'ordinal est un savoir moins visible. Les connaissances en situation, notamment de dénombrement pour le cardinal et de mémorisation d'une position pour l'ordinal seront développées. La dialectique savoir/connaissance et les deux logiques de construction d'une suite de situations vont être développées, dans le cas du cardinal. L'enseignement de l'aspect cardinal du nombre se prête donc à la fois à une construction de la quantité et à une ostension de la cardinalité, ces deux possibilités sont envisagées par la suite.

1.3- Présentation du savoir énumération

En contraste, les travaux sur l'énumération (Margolinas & Laparra, 2009; Margolinas, 2012b) montrent qu'il s'agit d'un savoir le plus souvent transparent pour le professeur, et de fait, il n'est pas enseigné d'ordinaire comme tel aux élèves. Autrement dit, l'énumération comme savoir n'apparaît pas au professeur, alors que l'énumération comme connaissance est présente massivement dans l'activité des élèves (Margolinas & Laparra, 2009). Il n'est donc pas possible d'envisager une logique de visite des savoirs puisqu'il n'y a pas de savoir identifié par la profession, pour l'instant. Il n'y a pas vraiment non plus de logique de dévolution systématique car les situations d'énumération ne sont pas nécessairement construites en tant que telles (Margolinas, Rivière, & Wozniak, 2015). Autrement dit, pour faire une cartographie des savoirs, l'entrée « énumération » suffit *a priori*. L'énumération étant un savoir transparent, seul l'aspect connaissance en situation est pris en compte ici, aussi la branche énumération se dédouble en deux sous-branches relatives à des connaissances spécifiques à des situations fondamentales liées aux configurations déplaçables et aux configurations non déplaçables.

[34] dans le chapitre 6

1.4- Présentation du savoir calcul

Le calcul en tant que savoir fera l'objet d'une étude et d'une construction systématiques à l'école élémentaire mais, à l'école maternelle, les aspects abordés sont limités aux grands champs conceptuels : les structures additives (essentiellement) d'une part et des connaissances pour les structures multiplicatives et distributives d'autre part.

1.5- Présentation du savoir numérations

Les numérations orales et écrites font l'objet d'un apprentissage systématique pour la connaissance des premiers mots-nombres et de certaines écritures. Cependant, s'agissant de l'apprentissage des premiers nombres, les mots utilisés ainsi que les symboles sont majoritairement arbitraires (jusqu'à seize pour la numération orale et jusqu'à dix pour la numération écrite). Le caractère systématique de la numération (production de la suite orale, écriture de position chiffrée) n'est en effet pas visé par l'école maternelle. L'apprentissage des premiers mots-nombres ne peut donc être qu'un apprentissage systématique de mémorisation de la suite orale, qui peut prendre différentes formes (démarrage systématique à un ou bien à partir d'autres nombres, etc.) mais ne peut faire l'objet d'une construction. Il s'agit ici d'une position inverse à celle de l'énumération.

Le savoir numération ne peut que se visiter à l'école maternelle, puisque sa construction comme connaissance interviendra plus tard. La branche numérations, se partage en trois sous-branches relatives à des savoirs et des connaissances sur la numération orale, la numération figurée et la numération écrite.

La figure suivante (Figure 12 : L'arbre des savoirs mobilisables du nombre) détaille les ramifications des branches pour le calcul, les numérations et l'énumération ; la branche cardinal et par symétrie, la branche ordinal, étant étudiées en détail dans le chapitre 6.

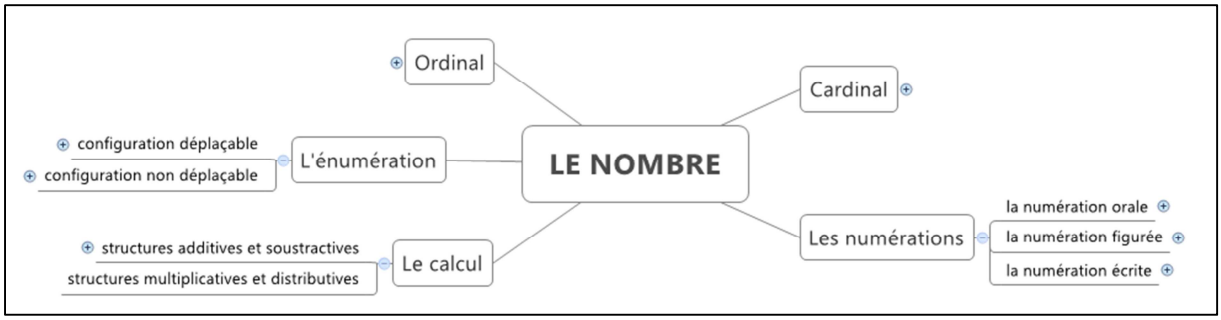


FIGURE 12 : L'ARBRE DES SAVOIRS MOBILISABLES DU NOMBRE

2- CONSTRUCTION GÉNÉRALE DE L'ARBRE DES SAVOIRS

Je cherche à modéliser les savoirs mathématiques visés dans l'enseignement du nombre par le professeur à partir des connaissances mises en jeu dans des situations générées par les situations fondamentales. Pour représenter l'emboîtement des situations fondamentales mobilisant les connaissances en rapport avec les savoirs mathématiques pour l'enseignement du nombre (2.1- Représentation des emboîtements de situations fondamentales), j'ai choisi le logiciel XMind[35] qui permet de donner corps aux situations fondamentales à l'aide d'une structure hiérarchique d'arbre et de branches (2.2- Choix d'une

[35] Copyright(C) 2006, 2014, XMind Ltd. All rights reserved. Visit http://www.xmind.net/

structure hiérarchique). Enfin, l'explication des choix de numérotations, des principes de la représentation des situations fondamentales successives est proposée à la fin du chapitre (2.3- Principes de la représentation des situations fondamentales successives).

2.1- Représentation des emboîtements de situations fondamentales

L'enseignement du professeur appelle une activité qui peut être liée au niveau noosphérien ou idéologique, au niveau de la construction ou de la conception d'un thème, au niveau du projet de leçon, au niveau de la situation didactique, au niveau d'observation ou de dévolution (Margolinas, 2002a, p. 143).

> *« Quand nous parlons de professeur ou d'élève, c'est en fait des connaissances de ces sujets que nous parlons. Ce sont les connaissances du sujet qui lui permettent d'agir sur un milieu, la rétroaction du milieu pouvant conduire à une modification de ces connaissances (l'apprentissage). Comme tout sujet, dans l'interaction avec un milieu, le professeur utilise et produit des connaissances. Ce sont ces connaissances qui vont nous intéresser ici. » (Margolinas, 2002a, p. 153)*

Les connaissances de l'élève en situation d'apprentissage font partie du milieu du professeur, tout comme les procédures disponibles de l'élève.

> *« Le professeur prend des décisions à tous les niveaux de son activité, mais il peut aussi transformer son point de vue dans l'activité réflexive dont nous venons de parler : le professeur apprend dans son activité professionnelle. Il est donc nécessaire d'envisager un modèle des situations dans lesquelles se développent les activités du professeur. C'est à dire décrire le professeur comme un sujet dont les connaissances lui permettent d'interagir avec un milieu, qui en retour permet de transformer ses connaissances, c'est à dire d'apprendre. » (Margolinas, 2002a, p. 145)*

Je vais décrire et mettre en forme les situations fondamentales concernant les savoirs ainsi que les connaissances et procédures possibles développées et mobilisées en situation.

S'intéresser aux connaissances implique d'étudier les situations et peut donner l'impression inévitable de modèle de progression (Margolinas & Wozniak, 2012). En partant des situations, je décris ce que pourraient être les savoirs mathématiques spécifiques pour l'enseignement du nombre à l'école maternelle du professeur s'il pouvait détailler les situations correspondant aux différents savoirs. Je développerai ici la branche qui concerne le savoir cardinal.

Il s'agit d'une proposition de modélisation de situations possibles.

2.2- Choix d'une structure hiérarchique

La structure choisie ne fait pas ressortir l'emboîtement des milieux mais plutôt la succession des situations. Une structure hiérarchique met en forme l'idée d'une situation fondamentale qui génère, qui produit une succession de situations. Aussi le choix d'un logiciel de carte mentale (*mind mapping*) XMind, correspond à cette volonté. Il existe des situations d'un niveau hiérarchique supérieur desquelles découlent différentes situations.

La présentation avec XMind propose une structure hiérarchique particulièrement intéressante pour visualiser l'évolution des connaissances. La représentation sous forme d'arbre hiérarchique combine à la fois les savoirs et les connaissances mathématiques. Cet arbre modélise les savoirs mathématiques spécifiques à l'enseignement du nombre à l'école maternelle du professeur et parfois l'apprentissage du nombre à l'école maternelle via les connaissances et les procédures de l'élève. Le professeur cherche à favoriser l'évolution des

connaissances de l'élève en jouant sur les variables didactiques disponibles dans les situations. Parfois je décrirai les connaissances et les procédures des élèves pour comprendre les choix didactiques et/ou pédagogiques du professeur en situation générale d'enseignement.

2.3- Principes de la représentation des situations fondamentales successives

Les situations fondamentales sont numérotées : S0, S1, S2 pour être facilement repérables mais surtout pour faire apparaitre l'emboîtement des situations. Les indices respectent la succession des situations S0 puis S1 et S2, sans être toutefois systématique entre S1 et S2. La cohérence de la situation fondamentale S0 a été recherchée et expliquée à la lumière de la structuration des milieux, comme faisant partie du milieu des situations fondamentales S1 et S2. Afin de mettre en valeur l'enchainement et l'imbrication des milieux à partir des critères de validité, les différentes situations fondamentales qui s'emboîtent sont numérotées.

3- CONSTRUCTION PARTICULIÈRE D'UNE BRANCHE DE L'ARBRE DES SAVOIRS : LA BRANCHE CARDINAL

Il s'agit à présent de proposer une modélisation possible des savoirs mathématiques spécifiques pour l'enseignement du nombre cardinal à l'école maternelle.

3.1- Construction de la situation 0 : C0 collection

Le départ de la branche cardinal fait l'objet d'une attention particulière. Cet intérêt se porte sur les connaissances minimales indispensables au milieu de la situation fondamentale de base. Au départ de la branche cardinal, dans la situation 0, se trouvent des connaissances sur la collection : C (cardinal) 0 (situation 0). Cette situation 0 représente l'origine du développement des situations fondamentales.

La situation de base va fournir les premiers critères de validité permettant une avancée dans les situations et donc dans les connaissances pour le cardinal.

Situation 0 : C0 collection / Une collection est un rassemblement d'objets.

> *« Comprendre la quantité implique donc de concevoir ce que peut être une collection qui unifie plusieurs objets distincts et conduit à regarder la pluralité comme une entité ; elle réunit des unités éparses en un tout pour former, ensemble, un nouvel objet. » (Margolinas & Wozniak, 2012, p. 13)*

Une collection est constituée d'unités éparses qui forment un nouvel objet. Comme le soulignent Margolinas et Wozniak (Margolinas & Wozniak, 2012, pp. 12-13) il y a une différence entre une caractéristique propre à un objet comme par exemple la couleur et la caractéristique propre à la collection d'objets. La caractéristique commune « avoir la même quantité » s'entend sur des collections finalisées et non en cours de traitement où chacun des éléments constitutifs de la collection n'a de valeur qu'agrégé aux autres.

> *«[…] La quantité est une propriété de la collection, donc indépendante de la nature des objets qui la constituent. » (Margolinas & Wozniak, 2012, p. 37)*

Les connaissances mobilisées en situation d'exploration et d'exploitation de collections sont des connaissances minimales indispensables pour le milieu des situations fondamentales suivantes.

3.2- Deux branches au niveau 0 suivant l'orientation savoir/connaissance

Le prolongement de la branche cardinal, au niveau 0, amène à distinguer rapidement un dédoublement de la branche. Deux approches sont possibles pour décrire l'évolution des connaissances, un mouvement qui entend partir des connaissances vers le savoir et une progression des savoirs dans le cas de la « visite du savoir » (Chevallard, 2010a). Pour montrer la légitimité de ces points de départ, je caractérise ces progressions par un mot-clé : cardinal-quantité et cardinal-relations notées C1 et C2 dans la figure suivante (Figure 13 : Dédoublement de la branche cardinal) :

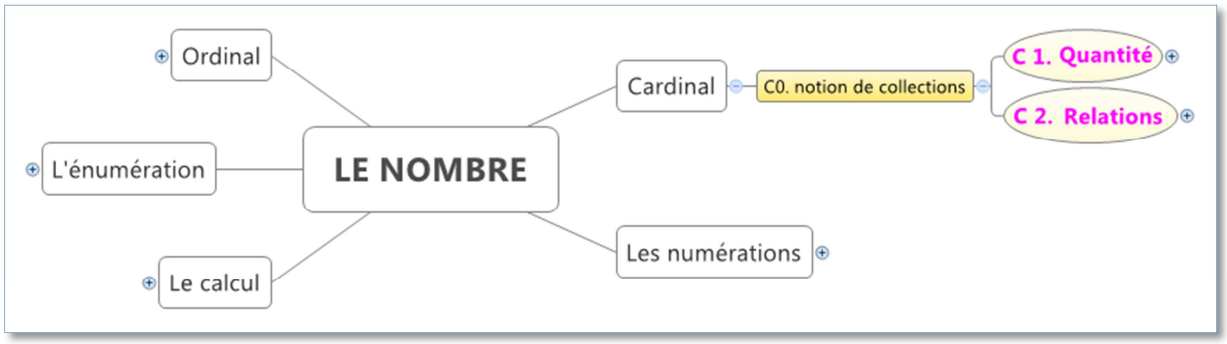


FIGURE 13 : DÉDOUBLEMENT DE LA BRANCHE CARDINAL

Les branches cardinal-quantité et cardinal-relations sont au même niveau de construction de la branche, les savoirs empruntent deux voies possibles à partir du dédoublement de la branche cardinal.

3.3- Construction des connaissances de la quantité comme grandeur

La quantité peut être considérée comme une grandeur particulière. Comparer des collections suivant la quantité est la façon la plus générale de décrire une situation fondamentale. Comme pour toutes les grandeurs, la première comparaison possible est la comparaison directe entre deux collections distinctes. Cette comparaison simple conduit à déclarer si les deux collections ont la même quantité.

a- Comparaison directe

Pour comparer deux collections et conclure si deux collections ont le même cardinal les procédures d'appariement et de correspondance terme à terme sont utiles.

Soit un milieu matériel (au sens de la structuration du milieu) et une situation objective dans laquelle l'élève manipule des objets dans un milieu aidant, facilitant, incitatif à l'instar « du milieu matériel œufs-coquetiers [qui] oblige et valide l'appariement » (Margolinas & Wozniak, 2012, p. 15).

Toutefois, par milieu aidant, tout « *langage associé à des actions sur des objets* » (Margolinas & Wozniak, 2012, p. 15) est également inclus. Il s'agit juste de différencier œuf et coquetier, ou tête et chapeau, capuchon et feutre pas nécessairement de savoir les nommer, mais aussi d'entendre des mots décrivant l'action mettre un œuf dans un coquetier, poser le chapeau sur la tête, boucher le feutre avec le capuchon, l'œuf dans ou à côté du coquetier. Ce qui est attendu à ce niveau-là est une familiarisation avec le matériel

et sa manipulation permet la compréhension de ce vocabulaire en réception. Donc, parler de manipulation des éléments du milieu veut dire prendre en compte les objets matériels mais également les objets du langage qui y sont associés ainsi que la gestuelle qui permet l'appariement. Il n'y a pas de consigne particulière, le couple d'objets proposé à apparier étant suffisamment implicite. L'élève accumule une expérience qui lui permet une utilisation correcte de l'œuf et du coquetier en situation.

Toute situation qui consiste à rassembler, à rapprocher physiquement, à encastrer deux objets qui vont bien ensemble, convoque l'appariement (tête-chapeau/bouchon-feutre/chaussure-pied, etc.). Ces appariements obligés et validés de fait, sont les prémices de la correspondance terme à terme. La correspondance terme à terme est donc une procédure en situation, dans laquelle l'appariement joue le rôle de connaissance utile.

> *« Nous dirons que deux collections d'objets ont même quantité si à chaque objet d'une collection on peut associer exactement un objet de l'autre collection et réciproquement. Cette association est appelée la correspondance terme à terme.»(Margolinas & Wozniak, 2012, pp. 12-13)*

Tous les éléments de la collection sont pris en compte et traités à tour de rôle. Dans l'exemple détaillé par Margolinas et Wozniak (Margolinas & Wozniak, 2012, pp. 11-36) tous les coquetiers posés sur le plateau doivent avoir un œuf et un seul ; comme deux œufs ne peuvent pas contenir dans un coquetier, ici le milieu matériel choisi prend cela en charge et empêche cette éventualité, de plus, aucun coquetier ne doit être vide. L'actant, grâce à des connaissances minimales de différence entre un et rien (critère de validité) peut reconduire son appariement autant que nécessaire, c'est-à-dire sur tous les éléments de la collection. Des connaissances d'énumération entrent ici en jeu. Cette intervention de connaissances situées dans une autre « branche » des savoirs sur le nombre pose un problème méthodologique de présentation des savoirs, mais reflète aussi la complexité de la réalité de l'enseignement sur le nombre : les différents savoirs et les différentes connaissances s'emmêlent. Il n'y a en effet pas de dénombrement, ni de correspondance terme à terme, sans énumération (Briand, 1999).

Il s'agit de traiter tous les éléments de la collection une, et une seule fois. Seules les connaissances " différence entre un et plusieurs" et "différence entre un et rien" (critères de validité) constituent un préalable nécessaire pour réaliser le traitement de la collection (pas besoin de connaître la suite orale des mots nombres, ni de savoir compter ou dénombrer pour traiter l'ensemble des éléments de la collection). La correspondance terme à terme est une procédure d'action, qui déplace physiquement les objets pour les apparier les uns avec les autres et qui s'appuie sur la gestion des espaces de travail (Margolinas, Wozniak, Canivenc, De Redon, & Rivière, 2007) et permet la partition de la collection en trois espaces de travail distincts : les objets déjà traités, ceux étant en train d'être traités et les objets restant à traiter (balayage de l'intégralité de la collection).

Deux collections proches mais distinctes ont-elles même quantité ? Une correspondance terme à terme sur l'ensemble des éléments des deux collections permet de valider. Il n'est pas nécessaire de recourir à un dénombrement ou un comptage. Le fait que tous les éléments de la première collection soient appariés aux éléments de la seconde collection suffit pour conclure. Les deux collections ont alors la même quantité.

b- Comparaison indirecte

Ici, la comparaison de collections directe est empêchée, par exemple, les deux collections, de quantités différentes, sont aux deux extrémités d'une salle de classe. Ces collections ne peuvent pas être déplacées. Il convient alors de constater si les deux collections ont la même quantité d'objets.

Cela implique un transport d'information de la quantité de la première collection vers la seconde collection (ou vice versa).

> *« Un passage déterminant dans l'apprentissage […] est provoqué par la nécessité de communiquer (à soi-même ou à autrui) des informations dans une situation de formulation. » (Margolinas & Wozniak, 2012, p. 53)*

L'organisation spatiale des éléments de la collection (par exemple les disposer comme les constellations des dés), les reconnaitre visuellement (*subitizing*), les dénombrer par comptage, ou associer à chaque élément de la collection un mot nombre de la suite orale des mots nombres, mais également dessiner les éléments de la collection, utiliser une autre collection de jetons, une collection intermédiaire qu'elle soit orale, matérielle ou écrite favorise l'émergence de connaissances particulières. L'usage d'une collection intermédiaire en réponse à la situation est une connaissance.

Collection intermédiaire orale

Connaître la suite orale des mots-nombres comme une chanson, savoir compter en énumérant et en synchronisant la suite orale des mots nombres et les éléments de la collection, savoir dénombrer par comptage ou par *subitizing* en énonçant le cardinal ou à l'aide des décompositions (trois et encore trois), permet de transporter l'information relative à la quantité de la première collection pour pouvoir la comparer avec celle de la seconde collection. Une collection intermédiaire orale utilisée pour comparer deux collections éloignées est bâtie sur des connaissances peut-être encore fragiles pour de jeunes élèves de l'école maternelle c'est pourquoi elle mobilise un effort conséquent de mémorisation. En effet, retenir, mémoriser le cardinal de la première collection (ou la suite orale des mots nombres correspondant à la totalité des éléments de la collection) puis se diriger vers la seconde collection, garder toujours en tête ce nombre (ou la chanson), commencer l'énumération de la seconde collection en ayant toujours à l'esprit le premier résultat et s'arrêter lorsque le nombre cible est atteint pour pouvoir conclure sur la quantité des deux collections, demande une capacité de mémorisation et de concentration importante.

Collection intermédiaire matérielle

Une collection matérielle de même nature ou bien de nature différente (qui participe à l'abstraction) dégage tout effort de mémorisation. Elle rejoint la situation de comparaison directe de deux collections en utilisant des procédures de correspondance terme à terme sur la collection A avec la nouvelle collection matérielle puis une nouvelle fois sur la collection B. Toutefois, la connaissance principale est celle qui consiste à prendre une collection intermédiaire pour transporter l'information de la quantité. Ce transport d'information de la quantité grâce à une collection intermédiaire matérielle dans la main de l'élève est une connaissance.

Collection intermédiaire écrite

Une autre possibilité pour transporter l'information de la quantité, afin de libérer la mémoire à court terme, est de faire usage d'un écrit. Schématiser les éléments de la collection A par une série de traits (ou autres points, croix), ou bien, par la suite des mots nombre écrits soulage la mémoire rendant alors accessibles des procédures plus complexes. Ces différentes connaissances possibles des élèves observées en situation renseignent le professeur sur leur niveau de conceptualisation et de compréhension des nombres.

c- Les situations de formulation : éloignement dans le temps

Seule la première collection est disponible à l'instant (t), en (t+1) la seconde collection est présente alors que la première collection est cachée. Il s'agit de comparer les deux collections bien qu'elles ne soient jamais présentes en même temps et de signifier si les deux collections ont même quantité ou pas. Pour la phase de validation, les deux collections sont rassemblées, en même temps et au même endroit.

Il importe ici de se souvenir de l'information sur la première quantité pour la comparer avec la seconde collection. Cet effort de mémoire est allégé en fonction des collections intermédiaires choisies.

Collection intermédiaire orale

Retenir le cardinal de la collection quelques heures, quelques jours, quelques semaines obstrue et surcharge la mémoire. En situation avec éloignement dans le temps, bien que toujours possible, recourir à une collection intermédiaire orale n'est pas la procédure la plus efficace, *a priori*.

Collection intermédiaire matérielle

Construire une collection intermédiaire de même nature ou de nature différente équipotente à la première collection, permet le jour voulu, d'effectuer une correspondance terme à terme avec la seconde collection ou bien de se souvenir du cardinal de la première collection, en dénombrant les éléments de la collection intermédiaire matérielle. Utiliser une collection intermédiaire matérielle permet de se souvenir de l'information sur la quantité de la première collection.

Collection intermédiaire écrite

Comme l'une des fonctions de l'écrit est de se souvenir, une collection intermédiaire écrite est parfaitement adaptée dans une situation avec éloignement dans le temps. Cet écrit rappelle la quantité de la première collection lorsque la seconde collection est disponible (et la première collection absente). Cet écrit peut prendre différentes formes pour peu que la quantité soit mentionnée par un dessin ou une écriture chiffrée.

d- Situation de formulation à autrui

> *« Pour permettre une nouvelle évolution des connaissances concernant [la quantité], plaçons les élèves en situation de formulation à autrui. » (Margolinas & Wozniak, 2012, p. 56)*

Dans cette situation particulière, deux protagonistes sont nécessaires. Émetteur et récepteur ont chacun une collection. L'émetteur formule un message sur la quantité de sa collection.

Le récepteur doit conclure si les deux collections (la sienne et celle de l'émetteur) ont la même quantité ou pas.

Ce n'est plus un message pour soi, le message de l'émetteur intègre les connaissances et les procédures du récepteur. L'information sur la quantité est transmise à l'aide d'un message oral, d'une collection intermédiaire matérielle ou bien d'un écrit.

Collection intermédiaire orale

L'émetteur énonce le dernier mot-nombre qui représente le cardinal de la collection (éventuellement, la suite orale des mots nombres employée pour le comptage, l'émetteur énonce « un deux trois quatre cinq six sept huit » ou bien « cinq et encore trois » ou « quatre et encore quatre »).

Collection intermédiaire matérielle

L'émetteur transmet une collection de jetons équipotente à sa collection. Le récepteur peut réaliser une correspondance terme à terme avec sa collection ou bien dénombrer par comptage la collection de jetons et la comparer avec sa collection avant de conclure.

Collection intermédiaire écrite

L'émetteur remet un papier sur lequel il a indiqué l'information de la quantité de sa collection avec un schéma représentant la quantité d'éléments de sa collection. Le récepteur décode ce message et conclut si les deux collections ont ou pas la même quantité.

e- Situation de formulation collective

> *« Quand les situations de communication se répètent et qu'elles engagent un collectif, comme la classe, il est nécessaire de recourir à un code commun. Cela est d'autant plus utile que la communication s'opère dans un temps relativement court, durant lequel émetteur et récepteur ne peuvent réfléchir aux procédures à adopter à la fois pour coder la quantité et pour décoder l'information. » (Margolinas & Wozniak, 2012, p. 33)*

Deux équipes disposent chacune d'une collection différente. Il convient de les comparer pour savoir si elles ont la même quantité ou pas. Dans le groupe, il faut créer un message et se mettre d'accord sur « une façon à la fois rapide et fiable de communiquer une quantité » (Margolinas & Wozniak, 2012, p. 33). Lorsque les équipes reçoivent le message, elles le décodent et donnent une conclusion sur les deux collections. Pour la validation, les équipes échangent leur résultat et rassemblent les collections, si nécessaire. Le jeu peut prendre la forme d'un challenge ; chaque équipe détient une série de collections d'objets différents (par exemple, une collection d'animaux, une collection de poupées, une de cubes…) qu'il faudra comparer avec les collections de même nature de l'autre équipe.

Dans un premier temps, les équipes produisent un message en temps limité, pour communiquer la quantité de leurs collections, dans un second temps, elles décodent l'information relative à la quantité des autres collections pour conclure à l'équipotence ou non des collections.

Si toutes les procédures et stratégies semblent possibles *a priori*, l'usage d'une collection intermédiaire orale et matérielle peut être dépassé au profit d'un écrit porteur de code commun. C'est pourquoi seule cette stratégie est développée.

Collection intermédiaire écrite

Dans chaque équipe, l'information sur la quantité est partagée par tous et il faut se mettre d'accord sur le message à communiquer.

> *« Elle vise à la constitution et au partage d'un code commun ainsi qu'à la stabilisation des procédures de communication de la quantité. » (Margolinas & Wozniak, 2012, p. 34)*

Chaque équipe est à la fois émettrice et réceptrice, c'est-à-dire, que les deux messages concernant la quantité sont envoyés et reçus simultanément, les équipiers doivent alors garder en mémoire le cardinal de leur collection pour le comparer au cardinal reçu et conclure collectivement.

Ce déroulement est légitime pour chaque situation fondamentale qui favorise l'évolution des connaissances dans un mouvement des connaissances vers les savoirs.

3.4- Étude des savoirs de la branche cardinal-relations

Le savoir sur le nombre se cristallise autour de la dénomination et de la description ordonnée des premiers nombres. Les nombres se découvrent et se comprennent les uns après les autres, dans l'ordre de la suite des nombres, donnant au "un" un statut tout à fait particulier : à la fois le premier mot-nombre rencontré et l'unité qui va être ajoutée pour caractériser les nombres suivants.

Cette étude progressive des nombres peut conduire à une progression linéaire dans laquelle les nombres sont étudiés chronologiquement, les uns après les autres, notamment de un à dix (principalement) et cette étude peut être répartie en fonction des niveaux de l'école maternelle, très souvent : de un à trois en petite section, de un jusqu'à cinq en moyenne section et jusqu'à dix en grande section (Brissiaud, 2014b).

> *« Concernant la PS, l'idéal serait que chacun des enfants quitte ce niveau en ayant compris les 3 premiers nombres. […] Concernant la MS, l'idéal serait que chacun des enfants quitte ce niveau en ayant compris les 5 premiers nombres […]. »(Brissiaud, 2014b, pp. 1-2)*

L'étude « complète » de chacun des nombres[36] (l'étude du "un", du "deux") consiste à nommer, à étudier les relations que les nombres entretiennent les uns avec les autres (successeur, précédent, décomposition, recomposition) ainsi que des opérations mentales liées au calcul se rapportant à ces petits nombres : ajouter, retirer, compléter.

> *« En effet, les nombres se découvrent à travers la construction des relations qu'ils entretiennent entre eux […]. » (Brissiaud, 2014b, p. 1)*

De façon tout à fait symétrique, une même approche peut être envisagée pour les nombres ordinaux – même si elle est moins fréquemment rencontrée.

Cette étude des nombres correspond à la description d'un savoir existant dans la société dont il s'agit de rencontrer les caractéristiques, on « visite » alors le savoir (Chevallard, 2010b).

[36] À l'image de l'étude de la lettre A dans l'album de Claude Ponti « Le A » où Tromboline et Foulbazar nous proposent une « étude complète » et humoristique de la lettre A.

CONCLUSION

La modélisation des savoirs mathématiques spécifiques pour l'enseignement du nombre à l'école maternelle en arbre hiérarchique permet de visualiser les savoirs mathématiques de façon indépendante et de comprendre l'articulation et le cheminement des connaissances en situation à partir de la présentation détaillée d'une branche de l'arbre en particulier. La description de situations possibles pour les branches cardinal-quantité et cardinal-relations est à présent développée (chapitre 6).

Cette modélisation des savoirs mathématiques spécifiques pour l'enseignement du nombre à l'école maternelle offre aussi un cadre pour identifier les connaissances mathématiques spécifiques pour l'enseignement du nombre des professeurs de l'école maternelle. En effet, lors de l'analyse à venir, l'arbre hiérarchique sera mobilisé pour coder les connaissances mathématiques spécifiques des professeurs identifiées à partir d'entretiens (Partie 2).

CHAPITRE 6- LES SAVOIRS MATHÉMATIQUES SPÉCIFIQUES POUR L'ENSEIGNEMENT DE LA CARDINALITÉ À L'ÉCOLE MATERNELLE

La succession des situations sur la branche cardinal est développée en détaillant les connaissances minimales indispensables sur cette branche, les critères de validité nécessaires pour la validation des connaissances en situations qui participent à l'imbrication des milieux pour expliquer l'enchainement des situations et par conséquent, l'évolution des connaissances. Cette étude ciblée sur un aspect du nombre s'intéresse exclusivement à ce savoir à partir de situations fondamentales. La description des situations successives possibles favorisant l'évolution des connaissances sur cette branche est exposée en mettant en avant le dédoublement de la branche cardinal en deux sous-branches de même niveau cardinal-quantité (1- La branche cardinal-quantité et les connaissances en situation) et cardinal-relations (2- La branche cardinal-relations et les connaissances en situation).

1- LA BRANCHE CARDINAL-QUANTITÉ ET LES CONNAISSANCES EN SITUATION

Pour construire le nombre comme représentant de la quantité, il est nécessaire de rencontrer « une question jugée utile sur laquelle on enquête pour lui apporter une réponse à laquelle on tiendra pour son utilité » (Chevallard, 2010b, p. 141). Suivant la méthode construite par Guy Brousseau, il s'agit donc de rencontrer une suite de situations générées par une situation fondamentale (Brousseau, 1986; Bessot, 2011). Après avoir décrit le nombre comme mémoire de la quantité, je vais développer dans ce paragraphe, les situations fondamentales « comparer deux quantités », « construire deux collections de même quantité » et « classer des quantités ».

1.1- Le nombre comme mémoire de la quantité

Il s'agit d'élaborer la notion de quantité de manière à ce que le nombre désigné à l'oral ou à l'écrit soit *in fine* le savoir institutionnalisé comme une connaissance utile dans différentes situations. Il faut donc, dans cette logique, construire la quantité indépendamment des « nombres », l'utilisation du dénombrement apparaissant alors comme réponse optimale en situation. C'est le transport de l'information sur la quantité qui favorise, à terme, l'utilisation du nombre à l'oral ou à l'écrit.

Les premiers apprentissages sur la quantité sont analysés à partir de la détermination des milieux et des situations. La volonté de décrire une situation fondamentale sur la quantité et de l'examiner à travers les situations particulières d'action, de formulation, de validation est mise en avant pour voir quelles sont les connaissances qui apparaissent comme solutions optimales.

Les situations fondamentales de la branche cardinal-quantité sont : comparer plusieurs collections existantes du point de vue de leur quantité (S0), construire deux collections de même quantité (S1) et classer des collections selon la quantité (S2).

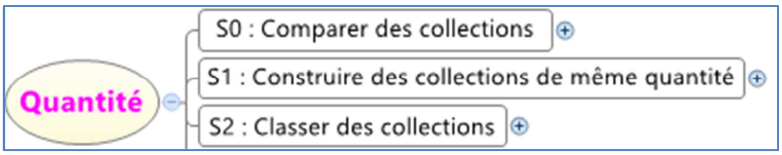


FIGURE 14 : LES SITUATIONS FONDAMENTALES SUR LA BRANCHE CARDINAL-QUANTITÉ

1.2- Situation fondamentale S_0 : Comparer des collections

Il s'agit ici de la première situation fondamentale de la quantité notée S_0. Cette situation, et donc toutes les connaissances qui s'y rapportent, se trouve dans le milieu de la situation suivante ; S1 : "construire une collection équipotente à une autre" ; et S2 : "classer des collections".

a- Comparaison directe de collections

Soient deux collections proches distinctes, une collection de carottes et une collection de lapins, ont-elles même quantité, chaque lapin peut-il avoir une carotte ?

La correspondance terme à terme directe et le fait de différencier un et rien, permettent de conclure si les deux collections ont la même quantité. À partir de là, lorsque la correspondance terme à terme est naturalisée, elle vient enrichir le milieu des situations de construction de collections équipotentes et celui des situations de comparaison de collections.

Connaissances K_{S0} de cette situation fondamentale S_0

K_{S0} DE LA COMPARAISON : MÊME QUANTITÉ OU PAS

Critères de validité CV

CV DISTINGUER UN OBJET ET PAS D'OBJET (DIFFÉRENCE ENTRE UN ET RIEN)

CV USAGE DE LA CORRESPONDANCE TERME À TERME

Il y a deux cas possibles : les collections à comparer sont équipotentes ou elles ne le sont pas. Si tous les éléments ne peuvent pas être mis exactement en correspondance terme à terme, alors les deux collections ne sont pas équipotentes.

La poursuite de la comparaison et l'identification du (ou des) élément(s) restant(s) de la collection n'est pas nécessaire pour conclure à un ordre, la plus grande la plus petite quantité en comparaison avec l'autre collection. Cette notion "plus grande quantité-plus petite quantité" « s'inscrit dans le processus de construction du concept de grandeur et de sa mesure » (Margolinas & Wozniak, 2012, p. 43). La collection qui a la plus grande quantité ne l'est que relativement à une autre collection, « il s'agit d'une caractéristique de la relation d'ordre » (Margolinas & Wozniak, 2012, p. 51). Les collections sont différenciées par leur quantité.

b- Comparaison indirecte de collections : éloignement dans l'espace

La collection de lapins se trouve sur une table, la collection de carottes à l'autre bout de la classe. Chaque lapin peut-il manger une carotte ?

Connaissances $K_{S0\text{-éloignement espace}}$ de cette situation fondamentale S0.

K S0-ÉLOIGNEMENT ESPACE TRANSPORT DE L'INFORMATION DE LA QUANTITÉ À L'AIDE D'UNE SUITE ORALE

K S0-ÉLOIGNEMENT ESPACE PRÉCÉDENT ET SUCCESSEUR DANS LA SUITE ORALE DES MOTS NOMBRE

K S0-ÉLOIGNEMENT ESPACE TRANSPORT DE L'INFORMATION DE LA QUANTITÉ À L'AIDE D'UNE COLLECTION MATÉRIELLE

K S0-ÉLOIGNEMENT ESPACE TRANSPORT DE L'INFORMATION DE LA QUANTITÉ À L'AIDE D'UN MESSAGE ÉCRIT

Critères de validité CV

CV USAGE DE LA COMPARAISON DIRECTE

La figure suivante (Figure 15 : Correspondance terme à terme directe (appariement) avec les carottes sur la collection intermédiaire écrite référant à la quantité de lapin), montre qu'une correspondance terme à terme est toujours possible. Chacun des traits représente un lapin et est apparié avec une carotte. Enfin, faire la différence entre un et rien suffit pour conclure que ces deux collections ont ou n'ont pas la même quantité. L'usage de la correspondance terme à terme, de l'appariement et de distinction entre un et rien sont des connaissances déjà naturalisées dans le milieu des situations précédentes.

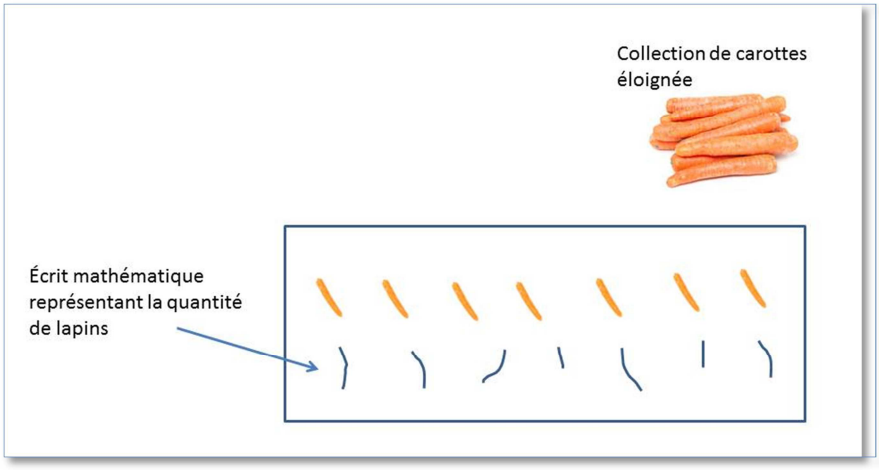


FIGURE 15 : CORRESPONDANCE TERME À TERME DIRECTE (APPARIEMENT) AVEC LES CAROTTES SUR LA COLLECTION INTERMÉDIAIRE ÉCRITE RÉFÉRANT À LA QUANTITÉ DE LAPINS

Un écrit mathématique par le biais d'une écriture chiffrée convoque d'autres procédures et connaissances. L'actant peut contrôler au fur et à mesure qu'il égrène la seconde collection, le nombre cible à atteindre ou à dépasser, ou bien il peut compter les éléments de la seconde collection et raisonner sur les cardinaux des deux collections pour conclure si les deux collections ont la même quantité d'objets.

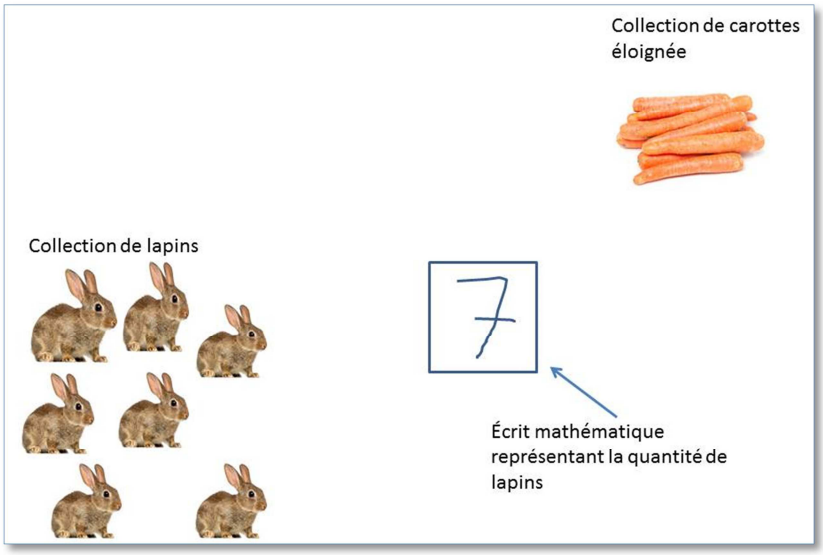


FIGURE 16 : UTILISATION D'UNE COLLECTION INTERMÉDIAIRE ÉCRITE

c- Situation avec éloignement dans le temps

La collection de lapins est visible maintenant, la collection de carottes sera visible demain alors que les lapins seront cachés. Y a-t-il une carotte pour chaque lapin ?

Connaissances : $K_{S0\text{-éloignement temps}}$ de cette situation fondamentale S0.

$K_{S0\text{-ÉLOIGNEMENT TEMPS}}$ MÉMOIRE DE L'INFORMATION SUR LA QUANTITÉ À L'AIDE D'UNE SUITE ORALE

$K_{S0\text{-ÉLOIGNEMENT TEMPS}}$ MÉMOIRE DE L'INFORMATION SUR LA QUANTITÉ À L'AIDE D'UNE COLLECTION MATÉRIELLE

$K_{S0\text{-ÉLOIGNEMENT TEMPS}}$ MÉMOIRE DE L'INFORMATION SUR LA QUANTITÉ À L'AIDE D'UN MESSAGE ÉCRIT

Critères de validités CV:

CV USAGE DU TRANSPORT DE L'INFORMATION SUR LA QUANTITÉ

d- Situation de formulation à autrui

Un élève détient uniquement la collection de lapins, un autre élève voit seulement la collection de carottes, chaque lapin peut-il manger une carotte ?

Connaissances : $K_{S0\text{-formulation à autrui}}$ de cette situation fondamentale S0.

$K_{S0\text{- FORMULATION À AUTRUI}}$ FORMULER ET RECEVOIR UN MESSAGE SUR LA QUANTITÉ À L'AIDE D'UNE SUITE ORALE

$K_{S0\text{- FORMULATION À AUTRUI}}$ FORMULER ET RECEVOIR UN MESSAGE SUR LA QUANTITÉ À L'AIDE D'UNE COLLECTION MATÉRIELLE

$K_{S0\text{- FORMULATION À AUTRUI}}$ FORMULER ET RECEVOIR UN MESSAGE SUR LA QUANTITÉ À L'AIDE D'UN MESSAGE ÉCRIT

e- Situation de formulation collective

Une équipe donne l'information de la quantité de carottes à une autre équipe qui détient la collection de lapins.

Connaissances : $K_{S0\text{-formulation collective}}$ de cette situation fondamentale S0.

K S0- FORMULATION COLLECTIVE FORMULER ET RECEVOIR COLLECTIVEMENT UN MESSAGE SUR LA QUANTITÉ À L'AIDE D'UN MESSAGE ÉCRIT

K S0- FORMULATION COLLECTIVE ÉLABORATION D'UN CODE COMMUN DE DÉSIGNATION

Critères de validité CV:

CV USAGE DE L'ÉMISSION ET DE LA RÉCEPTION D'UN MESSAGE SUR LA QUANTITÉ

CV USAGE DE L'ÉCRIT MATHÉMATIQUE

FIGURE 17 : SITUATION FONDAMENTALE S0 ET SON DÉROULEMENT SUR LA BRANCHE

1.3- Situation fondamentale S_1 : Construire des collections de même quantité

a- Situation fondamentale de S1

> *« L'élève doit ici prendre en charge lui-même la construction de deux collections de même quantité, dans une situation dont l'enseignant lui fait dévolution : il s'agit d'une situation dans laquelle l'élève investit des connaissances. Plusieurs situations sont possibles, mais elles sont toutes du même type : construire une collection équipotente à une collection donnée. » (Margolinas & Wozniak, 2012, p. 18)*

La question de l'anticipation apparaît ici et a un rôle crucial dans l'évolution des connaissances.

b- Situation d'anticipation de la quantité (situation d'action)

Il s'agit de construire une collection de carottes de même quantité que la collection de lapins sachant que les collections de carottes et de lapins sont disponibles en même temps et sont proches.

La situation fondamentale se développe et progresse à l'aide de situations particulières : situation d'action puis situation de formulation. Empêcher l'action directe favorise l'évolution des connaissances. Les connaissances qui permettent d'agir en situation, se trouvent ensuite dans le milieu de la situation suivante en tant que connaissances naturalisées, jouant le rôle de critères de validité. Le processus d'institutionnalisation complète l'évolution des connaissances en rendant possible le changement de statut de la connaissance en savoir.

La collection de carottes est effectuée sur un plateau, c'est-à-dire que les éléments des collections ne sont pas directement associés entre eux. L'apparition du plateau introduit l'anticipation : il faut anticiper que la quantité de carottes sur le plateau est bien la même que celle des lapins.

La collection de carottes construite est d'abord déposée sur le plateau (ou tout autre contenant pour peu qu'il n'autorise pas la correspondance terme à terme directe avec la collection de lapins) avant de pouvoir être rapprochée de la collection de lapins et de réaliser une correspondance terme à terme directe uniquement pour valider l'action.

> *« C'est une situation où la connaissance du sujet se manifeste seulement par des décisions, par des actions régulières et efficaces sur le milieu et où il est sans importance pour l'évolution des interactions avec le milieu que l'actant puisse ou non identifier, expliciter ou expliquer la connaissance nécessaire. » (Brousseau, 2010, p. 3)*

Une correspondance terme à terme appuyée sur la disposition des éléments de la collection de lapins ou bien une correspondance terme à terme oralisée lorsque chaque lapin est passé en revue sont possibles. C'est-à-dire que l'appariement s'opère entre une carotte qui est déposée sur le plateau et un lapin choisi, repéré visuellement, énoncé oralement, touché physiquement. Une autre procédure consiste à dénombrer par comptage ou dénombrer les lapins et à construire la collection de carottes ayant le même cardinal. Cette procédure "maximale" ou "experte" est toujours possible, mais nous souhaitons également décrire les procédures minimales qui permettent toutefois une solution optimale en situation.

Connaissances $K_{S1\text{-anticipation}}$ de cette situation fondamentale S_1:

Les connaissances liées à l'énumération (chemin mental permettant de balayer et de prendre en compte tous les lapins) ainsi que les connaissances "même quantité" sont présentes.

$K_{S1\text{-ANTICIPATION}}$ CONSTRUIRE LA MÊME QUANTITÉ

$K_{S1\text{-ANTICIPATION}}$ TRAITER TOUS LES ÉLÉMENTS DE LA COLLECTION TÉMOIN

Critères de validité CV

CV USAGE DE LA CORRESPONDANCE TERME À TERME

CV USAGE DE LA COMPARAISON DE DEUX COLLECTIONS

c- Empêcher l'action directe (situation avec éloignement dans l'espace)

> *« Pour permettre l'acquisition de nouvelles connaissances, sans modifier tout à fait la nature de la situation, nous allons empêcher ces procédures de correspondance terme à terme quasi-directes pour contraindre l'élève à construire les premières collections intermédiaires. » (Margolinas & Wozniak, 2012, p. 26)*

Dans cette situation, l'action directe (correspondance terme à terme) ou « quasi-directe » (anticipation) est empêchée.

La collection de lapins est visible dans un espace de la classe. Les carottes sont accessibles dans un autre espace, éloigné, de la classe.

Description des collections intermédiaires possibles qui sont des procédures probables.

> *« Pour transporter l'information d'une collection à l'autre, l'élève utilisera les moyens disponibles dans la situation : mémorisation, formulation orale ou écrite, gestes, matériel permettant la transmission, etc. » (Margolinas & Wozniak, 2012, p. 26)*

À l'aide d'une collection intermédiaire (qui peut avoir des natures différentes) l'information sur la quantité va transiter de la collection des lapins vers la collection de carottes. L'actant va agir en conséquence, faire ses choix et revenir vers la collection de lapins pour valider son action. La collection intermédiaire est choisie pour répondre au transport de cette information sur la quantité.

Collection intermédiaire matérielle

Le transport de l'information sur la quantité est réalisé via une autre collection matérielle symbolisée par des cailloux.

> *« Le mot latin calculus qui désigne caillou, est à l'origine du mot calcul, les cailloux et leur usage comme collection intermédiaire organisée ou non, étant à l'origine du travail sur la quantité. Citons à titre d'exemple, l'usage des cailloux comme collection intermédiaire en Abyssinie (l'actuelle Éthiopie) : au départ, chaque soldat déposait un caillou sur un tas et, au retour, chaque survivant en ôtait un. Grâce aux pierres restantes, on pouvait connaître le nombre exact de pertes subies au combat (Ifrah (1994, p.234). » (Margolinas & Wozniak, 2012, p. 27)*

Cette collection matérielle permet une correspondance terme à terme intermédiaire entre les collections de lapins et de carottes qui sont éloignées.

Collection intermédiaire orale

Toute suite orale de mots qui permet de garder en mémoire chacun des lapins joue le rôle de collection intermédiaire orale. Il suffit de réciter cette suite orale de mots et d'apparier chacun des mots avec une carotte. Avec de petites quantités cette suite orale de mots peut ne pas être ordonnée (gris-blanc-noir puis noir-blanc gris ou bien Pierre Paul Jacques) mais avec des quantités plus importantes la mémoire à court terme sera saturée et seule une suite orale de mots ordonnée permettra le transport de l'information sur la quantité. La suite orale des mots nombres ordonnée facilite cette mémorisation.

Collection intermédiaire écrite

Une collection intermédiaire écrite permet de rendre compte de la quantité d'objets d'une collection au moyen d'un dessin ou d'une schématisation avec des difficultés d'énumération possibles pour la collection écrite car elle est constituée d'éléments non déplaçables.

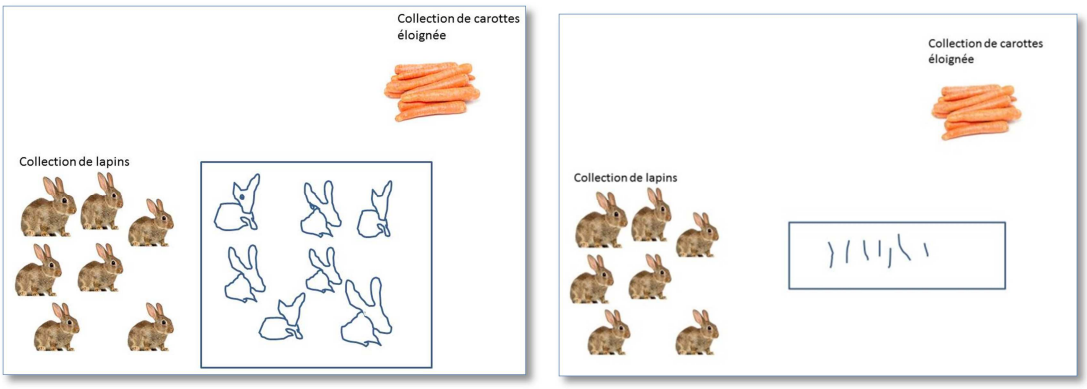


FIGURE 18 : DESSIN ET SCHÉMATISATION

Quid du milieu du "dessin" ? À l'école maternelle, le dessin occupe une belle place dans les apprentissages. Il est le premier écrit disponible de l'élève. Il demande une motricité fine exercée, une tenue de l'outil scripteur adéquate et la faculté de représenter le monde. Dans le cas de la collection intermédiaire écrite il s'agit plus d'une sorte de photographie des lapins qui serait transportée près des carottes.

Le milieu de "l'écrit", quant à lui, englobe celui du dessin mais prend en compte aussi les connaissances des lettres, des chiffres, des schématisations qui demandent une abstraction plus importante, et aussi des connaissances sur l'usage de l'écrit. Il est possible de trouver des écrits incluant des lettres isolées et des chiffres, il s'agit alors d'un écrit prenant en compte « des choses qui relèvent de la quantité » ou de l'écriture, des mots. Tracer un chiffre est un écrit mathématique, écrire le nombre de (Baruk, 2003) mais aussi dessiner la même quantité de lapins ou tracer le même nombre de traits que de lapins sont des façons d'entrer dans l'usage d'un écrit mathématique.

Les connaissances de l'écrit se nourrissent des connaissances de l'usage du dessin et des connaissances intégrant l'usage de la schématisation.

Connaissances

K_{DESSIN} REPRÉSENTER LA QUANTITÉ PAR UN DESSIN

$K_{SCHÉMATISATION}$ UTILISER UNE SCHÉMATISATION POUR REPRÉSENTER LA QUANTITÉ

$K_{ÉCRIT}$ UTILISER UN ÉCRIT MATHÉMATIQUE POUR REPRÉSENTER LA QUANTITÉ

Critères de validité CV

CV USAGE DE LA QUANTITÉ

Connaissances $K_{S1\text{-éloignement espace}}$ de cette situation fondamentale S_1.:

« Dans les situations de formulation, la fonction de la connaissance est de transporter de l'information pour soi-même (auto-formulation), pour autrui (communication) ou encore pour un groupe social (convention), en utilisant les moyens disponibles dans la situation : mémorisation, formulation orale ou écrite, gestes, matériel permettant la transmission, etc. »(Margolinas & Wozniak, 2012, p. 24)

$K_{S1\text{-ÉLOIGNEMENT ESPACE}}$ TRANSPORT DE L'INFORMATION DE LA QUANTITÉ À L'AIDE D'UNE SUITE ORALE

$K_{S1\text{-ÉLOIGNEMENT ESPACE}}$ TRANSPORT DE L'INFORMATION DE LA QUANTITÉ À L'AIDE D'UNE COLLECTION MATÉRIELLE

$K_{S1\text{-ÉLOIGNEMENT ESPACE}}$ TRANSPORT DE L'INFORMATION DE LA QUANTITÉ À L'AIDE D'UN MESSAGE ÉCRIT

Critères de validité

CV USAGE DE LA CORRESPONDANCE TERME À TERME (QUI INTÈGRE L'USAGE DE L'APPARIEMENT)

CV USAGE DE LA MÊME QUANTITÉ (QUI ENGLOBE L'USAGE DE LA COMPARAISON)

CV USAGE DE L'ÉNUMÉRATION (COMPARER UNE COLLECTION DÉPLAÇABLE AVEC UNE QUI NE L'EST PAS)

d- Situation de formulation : éloignement dans le temps

Dans une situation de formulation, la conservation et le transport de l'information peuvent être déclenchés par un décalage dans le temps, l'information sur la quantité n'est pas utile maintenant, en revanche elle le sera dans quelques jours. Seule la collection de lapins est accessible aujourd'hui, les carottes seront disponibles demain, sans aucune possibilité d'examiner alors les lapins.

> *« D'une façon générale, c'est l'éloignement dans le temps qui contraint à élaborer des connaissances faisant usage des ressources de l'écrit. En effet, dans les sociétés humaines, c'est l'entrée dans l'écrit qui permet généralement cet enregistrement, la liste étant une procédure essentielle dans ce cadre » (Goody, 1979)*

Collection intermédiaire écrite

> *« Dans une situation où la mémorisation à long terme est nécessaire, l'écrit intervient donc comme une ressource, une connaissance en situation. Ceci conduit à une évolution des écrits au fil des modifications des procédures qu'ils représentent. »(Margolinas & Wozniak, 2012, p. 32)*

Dans une situation de formulation avec éloignement dans le temps la collection intermédiaire écrite prend toute son étendue. Ce premier écrit peut d'abord prendre la forme d'un dessin. Dans le dessin, on peut alors retrouver un ou plusieurs éléments de la situation, souvent avec les mêmes couleurs, parfois avec les mêmes dispositions. Il est possible que la quantité ne soit pas encore perçue comme la seule information pertinente à transporter, c'est-à-dire comme la caractéristique commune aux deux collections.

> *« Quand l'élève est capable de produire un schéma dans lequel n'apparaît que la bonne quantité de signes arbitraires, une étape importante dans la symbolisation de la quantité est franchie. » (Margolinas & Wozniak, 2012, p. 30)*

La représentation est une étape intermédiaire entre le dessin et le schéma. La schématisation requiert une abstraction plus grande et représenter les objets par une forme approchante mais simplifiée permet un passage progressif vers cette abstraction. Dans l'exemple des œufs et des coquetiers de Margolinas et Wozniak (Margolinas & Wozniak, 2012, p. 19), un œuf ovale pourrait d'abord être dessiné (à peu près de la même taille que l'original d'ailleurs car l'œuf peut aussi servir de gabarit), puis un « gros rond » et enfin seulement un point (ou toute autre marque : trait, croix).

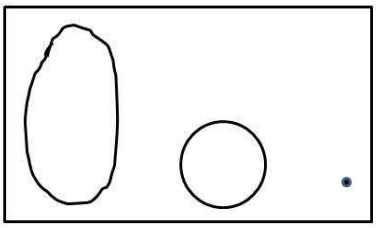


FIGURE 19 : DESSIN, REPRÉSENTATION, SCHÉMATISATION

Quoiqu'il en soit, c'est l'évolution et la progression des connaissances de l'usage de ces écrits en situation qui sont visées.

Collection intermédiaire matérielle

Une collection intermédiaire matérielle peut être construite avec des jetons à l'aide d'une simple correspondance terme à terme avec les lapins, puis stockée et utilisée le jour où les carottes sont présentes.

Collection intermédiaire orale

En revanche, la collection intermédiaire orale, bien que possible ici, peut rencontrer, en situation, des problèmes liés à la mémorisation. Dans cette situation, les lapins sont disponibles à l'instant (t) puis ils sont cachés. Les informations recueillies sur cette collection devront être oralisées et mémorisées de façon à pouvoir être réutilisées en (t+1) en présence des carottes. Un décalage dans le temps d'une semaine de plus, augmente les difficultés de mémorisation et de restitution.

Connaissances : $K_{S1\text{-éloignement temps}}$ de cette situation fondamentale S_1.

$K_{S1\text{-ÉLOIGNEMENT TEMPS}}$ SOUVENIR DE L'INFORMATION DE LA QUANTITÉ À L'AIDE D'UNE SUITE ORALE

$K_{S1\text{-ÉLOIGNEMENT TEMPS}}$ SOUVENIR DE L'INFORMATION DE LA QUANTITÉ À L'AIDE D'UNE COLLECTION MATÉRIELLE

$K_{S1\text{-ÉLOIGNEMENT TEMPS}}$ SOUVENIR DE L'INFORMATION DE LA QUANTITÉ À L'AIDE D'UN MESSAGE ÉCRIT

e- Situation de formulation à autrui

> *« C'est une situation qui met en rapport au moins deux actants avec un milieu. Leur succès commun exige que l'un formule la connaissance en question (sous une forme quelconque) à l'intention de l'autre qui en a besoin pour la convertir en décision efficace sur le milieu. »(Brousseau, 2010, p. 3)*

L'émetteur communique au récepteur l'information sur la quantité de lapins. Le récepteur devra alors agir sur la collection de carottes de façon à avoir la même quantité de carottes que de lapins.

Collection intermédiaire orale

Dans cette situation « qui oblige à communiquer à autrui » (Margolinas & Wozniak, 2012, p. 32) l'information peut être donnée par l'intermédiaire d'une collection orale, vraisemblablement avec le mot nombre correspondant au cardinal de la collection (mais tout autre message est également possible, par exemple « cinq et encore quatre »).

Collection intermédiaire matérielle

La quantité peut également être communiquée en proposant une collection intermédiaire matérielle, l'émetteur transmet au récepteur une collection de jetons de même quantité que celle des lapins. Une collection intermédiaire matérielle peut être composée des doigts de la main de l'émetteur (collection intermédiaire matérielle de nature différente si la quantité le permet) qui les montre au récepteur du message.

Collection intermédiaire écrite

Enfin une collection intermédiaire écrite peut être utilisée par l'émetteur pour indiquer la quantité voulue à l'aide d'un dessin, d'une représentation, d'un schéma fournis au récepteur.

> *« Nous supposerons ici que l'objet de ces messages n'est pas d'agir sur le récepteur (de le changer, de prendre du pouvoir sur lui, de le contraindre, etc.) mais d'agir par son intermédiaire sur le dispositif "milieu ".» (Brousseau, 1998, p. 106)*

La principale difficulté ici et d'adapter ses messages, sa communication aux connaissances du récepteur. Passer du rôle d'émetteur d'informations au rôle de récepteur et décodeur d'informations aide à prendre conscience des adaptations nécessaires.

Connaissances : $K_{S1\text{-formulation autrui}}$ de cette situation fondamentale S_1.

$K_{S1\text{- FORMULATION AUTRUI}}$ FORMULER ET RECEVOIR UN MESSAGE SUR LA QUANTITÉ À L'AIDE D'UNE SUITE ORALE

$K_{S1\text{- FORMULATION AUTRUI}}$ FORMULER ET RECEVOIR UN MESSAGE SUR LA QUANTITÉ À L'AIDE D'UNE COLLECTION MATÉRIELLE

$K_{S1\text{- FORMULATION AUTRUI}}$ FORMULER ET RECEVOIR UN MESSAGE SUR LA QUANTITÉ À L'AIDE D'UN MESSAGE ÉCRIT

f- Situation formulation collective

Un groupe doit chercher collectivement à énoncer un message à un autre groupe en vue de leur faire construire une collection de carottes équipotente à la collection de lapins. Ce message concerne la quantité de lapins. Dans cette situation il faut se mettre d'accord à plusieurs sur l'information à communiquer.

La notion de rapidité du jeu élimine des messages trop personnels difficiles et longs à déchiffrer (tels les dessins) et incite le passage d'une schématisation vers un code commun de désignation (Jousson, Peres, Loubet, Naura, & Rémy, 1987).

Connaissances : $K_{S1\text{-formulation collective}}$ de cette situation fondamentale S_1.

$K_{S1\text{- FORMULATION COLLECTIVE}}$ FORMULER ET RECEVOIR UN MESSAGE COLLECTIF SUR LA QUANTITÉ À L'AIDE D'UNE SUITE ORALE

$K_{S1\text{- FORMULATION COLLECTIVE}}$ FORMULER ET RECEVOIR UN MESSAGE COLLECTIF SUR LA QUANTITÉ À L'AIDE D'UNE COLLECTION MATÉRIELLE

$K_{S1\text{- FORMULATION COLLECTIVE}}$ FORMULER ET RECEVOIR UN MESSAGE COLLECTIF SUR LA QUANTITÉ À L'AIDE D'UN MESSAGE ÉCRIT

Les connaissances issues de la situation fondamentale générique S1 : "construire une collection équipotente à une autre" viennent d'être décrites à l'aide de situations particulières, en s'attachant à détailler pour chacune, la situation, les procédures et les stratégies ainsi que les connaissances. La description linéaire, le long de la branche permet de rendre compte de la structuration des milieux des situations par l'imbrication des connaissances en situation et des critères de validité. Les connaissances sont au cœur de notre présentation.

La figure suivante (Figure 20 : Situation fondamentale S1 et son déroulement sur la branche) décrit la situation fondamentale S1 et la succession possible des situations.

FIGURE 20 : SITUATION FONDAMENTALE S1 ET SON DÉROULEMENT SUR LA BRANCHE

1.4- Situation fondamentale S_2 : Classer des collections

> *« Supposons que l'on dispose de plusieurs collections de différentes quantités : petits sachets transparents d'œufs, de voitures, de bâtonnets, de jetons, etc. les sachets sont transparents pour permettre à chacun de s'assurer de la quantité des collections et contiennent des objets différents d'un sachet à l'autre, pour rendre tangible le fait que la quantité est une propriété de la collection, donc indépendante de la nature des objets qui la constituent. »(Margolinas & Wozniak, 2012, p. 37)*

Dans cette situation, il faut classer différentes collections en fonction de leur quantité. C'est-à-dire que toutes les collections de même quantité sont rangées ensemble dans une même boîte. Les collections elles-mêmes sont l'objet de ce classement, ce qui implique de les matérialiser (réunir des objets dans un sachet). À la fin du classement, toutes les collections sont réparties dans différentes boîtes selon leur quantité.

a- Situation de classement direct

Les boîtes n'ont pas de couvercle, à tout moment les collections peuvent être sorties du sachet pour être dénombrées par comptage, être mises en correspondance terme à terme pour effectuer le classement.

En réalisant des correspondances terme à terme entre les collections, deux à deux, si la collection du deuxième sachet a la même quantité que la première elles se retrouvent dans la même boîte, si elle est différente, une nouvelle boîte est ajoutée pour prolonger le classement. Pour la troisième collection, une comparaison est nécessaire avec la collection de la première boîte puis avec celle de la seconde boîte avant de pouvoir conclure sur la nécessité ou non de créer une nouvelle boîte. Et ainsi de suite, cette comparaison longue et répétitive, permet d'éprouver « la propriété de la transitivité de la relation "même quantité que" » (Margolinas & Wozniak, 2012, p. 39), en prenant conscience qu'il est inutile de comparer un nouveau sachet avec toutes les collections d'une même boîte.

À ce stade-là, les connaissances pour comparer des collections équipotentes sont naturalisées et font partie du milieu en tant que critères de validité. Il n'y a pas de connaissances nouvelles en situation de classement direct.

b- Situation classement indirect

À présent, les boîtes sont fermées par un couvercle où seule une ouverture permet le passage d'un sachet. Une fois que la collection est dans la boîte, elle n'est plus accessible pour une correspondance terme à terme directe avec une autre collection.

> *« Il faut trouver un moyen de représenter la quantité de jetons, […] de manière à savoir, sans ouvrir la boîte, si l'on peut y déposer un nouveau sachet. » (Margolinas & Wozniak, 2012, p. 39)*

Il faut se rappeler la quantité de la collection déposée dans la boîte et avoir cette information directement disponible sur celle-ci pour prolonger le classement avec les autres collections. Cette situation incite à représenter sur le couvercle de chaque boîte ou à côté, ou devant chacune d'elle, la quantité des collections déjà classées.

Collection intermédiaire matérielle

Cette indication sur la quantité peut être possible avec une collection de jetons, de cailloux déposée sur le couvercle de la boîte. Le recours à une collection intermédiaire matérielle atteint ses limites avec des quantités de plus en plus importantes. Il faut suffisamment de

place sur le couvercle pour déposer la collection de jetons, pour l'organiser de façon optimale.

Collection intermédiaire écrite

> *« Puisque toutes ces quantités sont égales, on peut les représenter par un seul écrit : collection intermédiaire de la même quantité de traits que celle des sachets déposés dans la boîte ; dessin d'une constellation (dé, carte, domino), [écriture chiffrée du cardinal des collections], etc. » (Margolinas & Wozniak, 2012, p. 39)*

Cet écrit mathématique véhicule la notion de quantité équipotente, caractéristique de l'ensemble des collections appartenant à une même boîte. Une seule quantité, identique à celles qui sont à l'intérieur de la boîte, présente sur le couvercle dessus, résume la caractéristique des collections de la boîte.

Connaissances : $K_{S2\text{-classement}}$ de cette situation fondamentale S2.

$K_{S0\text{-CLASSEMENT}}$ REPRÉSENTER LA QUANTITÉ À L'AIDE D'UNE COLLECTION INTERMÉDIAIRE MATÉRIELLE

$K_{S0\text{-CLASSEMENT}}$ REPRÉSENTER LA QUANTITÉ À L'AIDE D'UNE COLLECTION INTERMÉDIAIRE ÉCRITE

$K_{S0\text{- CLASSEMENT}}$ DÉCODER UN MESSAGE ÉCRIT SUR LA QUANTITÉ

Critères de validité CV :

CV USAGE DE LA COMPARAISON DIRECTE

c- Situation de formulation à autrui

L'émetteur produit un message relatif au cardinal de la collection qu'il a en sa possession. Le récepteur traite le message et apporte la boîte correspondante à l'émetteur. Le message de l'émetteur tient compte des connaissances et des procédures du récepteur.

Collection intermédiaire orale

L'émetteur énonce à l'oral un message sur la quantité par le biais de la suite orale des mots nombres (bloc de mots nombres, dernier mot nombre, décomposition). Le récepteur doit traiter cette information relative à la quantité en récupérant la boîte correspondante.

Collection intermédiaire matérielle

L'émetteur donne au récepteur une collection matérielle de jetons. Celui-ci pourra effectuer une correspondance terme à terme avec celle représentée sur le couvercle de la boîte, ou bien la dénombrer.

Collection matérielle écrite

L'émetteur confectionne un message écrit sur la quantité. Le récepteur décode cet écrit pour chercher la boîte correspondante.

Connaissances : $K_{S2\text{- formulation à autrui}}$ de cette situation.

$K_{S2\text{- FORMULATION À AUTRUI}}$ FORMULER ET RECEVOIR UN MESSAGE SUR LA QUANTITÉ À L'AIDE D'UNE SUITE ORALE

K S2- FORMULATION À AUTRUI FORMULER ET RECEVOIR UN MESSAGE SUR LA QUANTITÉ À L'AIDE D'UNE COLLECTION MATÉRIELLE

K S2- FORMULATION À AUTRUI FORMULER ET RECEVOIR UN MESSAGE SUR LA QUANTITÉ À L'AIDE D'UN MESSAGE ÉCRIT

d- Situation de formulation collective

Deux équipes sont à la fois émettrices d'un message écrit sur la quantité de différentes collections et réceptrices du message de l'autre équipe. Par équipe, un maximum de messages sur la quantité correspondant à un maximum de collections est à produire en un minimum de temps. Ensuite le même nombre de messages est distribué à chaque équipe et il s'agit de classer un maximum de messages dans les boîtes en un minimum de temps. Il faut adopter un code commun de désignation qui permette à chaque équipe d'effectuer un message et le classement des différentes collections. Réaliser un classement de différentes collections en un minimum de temps permet d'introduire aussi une organisation optimale des boîtes.

L'évolution des connaissances est recherchée, c'est pourquoi seule une collection intermédiaire écrite sera proposée, d'une part pour approcher un code commun de désignation et d'autre part pour aborder la nécessité d'ordonner les boîtes en fonction de la quantité (ordre croissant ou décroissant).

Collection matérielle écrite

Le choix du code commun prend en compte les connaissances et procédures de tous les élèves de la classe afin que collectivement ils puissent réaliser un classement efficace et rapide.

Connaissances : K S2- formulation collective de cette situation.

K S2- FORMULATION COLLECTIVE FORMULER ET RECEVOIR UN MESSAGE COLLECTIF SUR LA QUANTITÉ À L'AIDE D'UN MESSAGE ÉCRIT

K S2- FORMULATION COLLECTIVE NOTION D'ORDRE (SUCCESSEUR, PRÉCÉDENT)

Critères de validité CV :

CV USAGE EN PRODUCTION ET EN RÉCEPTION D'UN MESSAGE ÉCRIT SUR LA QUANTITÉ

La figure suivante rend compte de la suite de situations générée par la situation fondamentale S2 : Classer des collections.

FIGURE 21 : SITUATION FONDAMENTALE S2 ET SON DÉROULEMENT SUR LA BRANCHE

Conclusion de la branche cardinal-quantité

Pour conclure, je présente les différentes situations telles qu'elles sont organisées dans l'arbre. La première figure (Figure 22 : Situations fondamentales S0, S1, S2 de la branche cardinal-quantité) est générale et présente l'ensemble des situations fondamentales liées à la branche cardinal-quantité. Les figures suivantes (Figure 23 : Situation fondamentale S0 ;

Figure 24 : Situation fondamentale S1 ; Figure 25 : Situation fondamentale S2) détaillent et font apparaitre la succession et l'enchainement des situations possibles générées à partir de chacune des situations fondamentales.

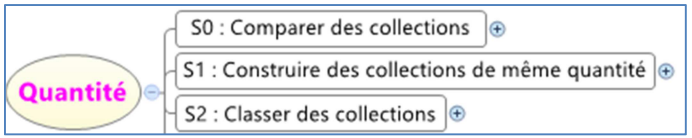


FIGURE 22 : SITUATIONS FONDAMENTALES S0, S1, S2 DE LA BRANCHE CARDINAL-QUANTITÉ

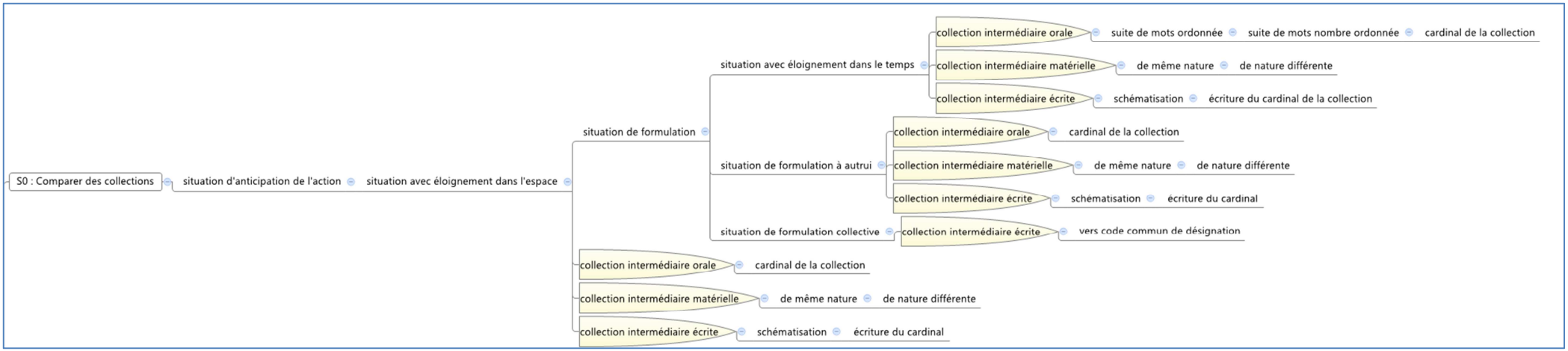


FIGURE 23 : SITUATION FONDAMENTALE S0

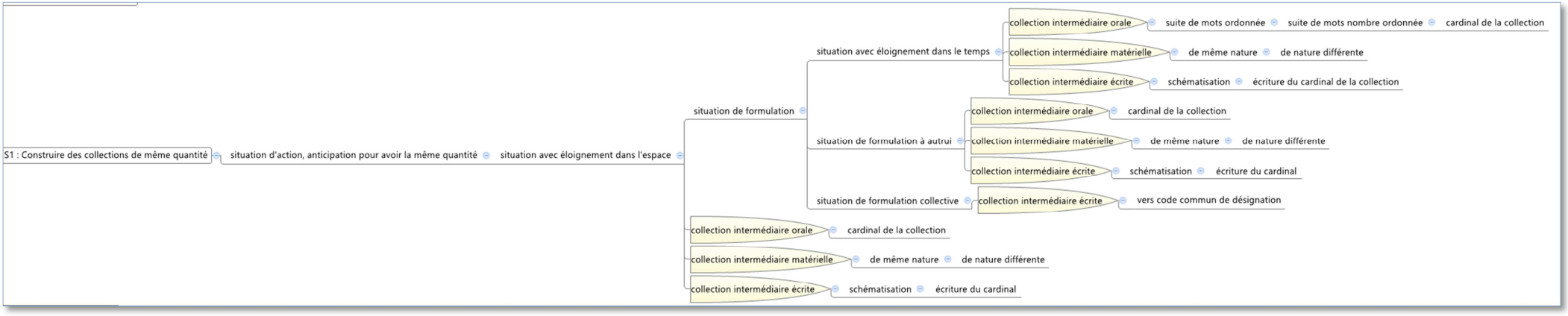


FIGURE 24 : SITUATION FONDAMENTALE S1

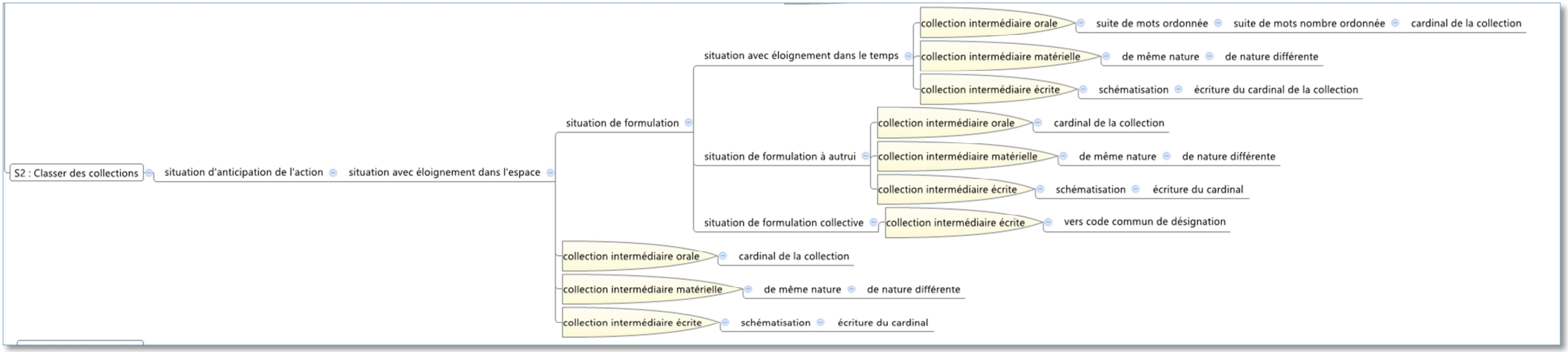


FIGURE 25 : SITUATION FONDAMENTALE S2

2- LA BRANCHE CARDINAL-RELATIONS ET LES CONNAISSANCES EN SITUATION

L'imbrication des milieux et surtout la conception de l'enseignement via la visite des savoirs permettent de structurer le développement des savoirs sur la branche cardinal-relations. Les connaissances mises en jeu dans la situation S_{n-1} se retrouvent dans le milieu de la situation *n*.

Qu'est-ce que « visiter » le nombre cardinal ?

2.1- La visite de l'œuvre « nombre »

Cette visite s'accompagne d'une démonstration d'un usage du nombre dans le comptage : on compte les boutons de son vêtement, les cartons représentant les élèves absents, etc. Cet apprentissage systématique du comptage par ostension est une conséquence de la rencontre des nombres comme un savoir constitué, dont la visite ne révèle pas l'usage (lien entre démonstration et dévolution (Sarrazy, 2007)). En partant du savoir, il faut pouvoir rencontrer des connaissances en situation et tout particulièrement en situation de dénombrement. Cette visite s'accompagne d'un entraînement à reconnaître le nombre en lui associant un grand nombre de collections suivant la quantité mais aussi en lui associant, plus ou moins précocement, un dénombrement qui justifie l'étude des nombres et constitue le débouché de la visite en termes de connaissances en situation. Dans cette visite, la quantité reste implicite parce qu'elle ne fait pas partie des savoirs sociaux sur le nombre : on demande d'ailleurs plutôt « combien » et pas « quelle quantité », sauf dans des situations bien particulières.

a- Cardinal-relations

Comment un[37] est-il en relation avec le mot-nombre suivant deux ? On observe que 1 et encore 1 correspondent à la quantité 2. Mais aussi que 2 peut se décrire comme 1 et 1.

Les relations entre les nombres, sont de plus en plus nombreuses.

> *« Si l'on fait le calcul du nombre de décompositions qu'il faut savoir utiliser pour connaitre de manière approfondie les 10 premiers nombres, on en trouve 45, toujours en se cantonnant aux décompositions en deux nombres seulement. » (Brissiaud, 2014b, p. 3)*

Les relations entre les nombres, par exemple 3 c'est 2 et encore 1 mais c'est aussi 1 et encore 1 et encore 1, etc., sont l'objet de cette visite du savoir « nombre ».

Dans cette branche tous les nombres sont construits, étudiés les uns après les autres, comme étant le précédent auquel on ajoute une unité. Les connaissances se construisent implicitement sur le (1), l'unité.

> *« Le comptage constitue une forme de totalisation des unités. » (Brissiaud, 2007, p. 45)*

Brissiaud (Brissiaud, 2003, p. 9) expose la conceptualisation des premiers nombres qui permet d'« abstraire les unités numériques et [de] savoir les énumérer de différentes façons » (Brissiaud, 2003, p. 25)

[37] Quand les mot-nombres à l'oral sont évoqués ils sont écrits en toutes lettres dans le texte, lorsqu'il s'agit du nombre dans toutes ses dimensions, il est écrit en chiffres. Enfin l'écriture chiffrée entre parenthèse est réservée au rôle particulier du (1) sur cette branche.

« Conceptualiser les premiers nombres nécessite ainsi d'être capable d'abstraire les unités numériques des collections correspondantes pour rendre compte de leur totalité […]. » (Brissiaud, 2003, pp. 25-26)

Le (1) est étudié, montré, pour pouvoir être reconnu ensuite et retrouvé dans une collection : « un et encore un et encore un » car la collection est formée de plusieurs unités numériques.

Cette branche se développe et se cristallise sur la conceptualisation des trois premiers nombres :

« L'enjeu essentiel du progrès vers le nombre n'est pas d'apprendre à compter le plus loin possible, mais plutôt de conceptualiser les trois premiers nombres […]. [Ainsi] "Donne-moi deux objets" et "Donne-moi trois objets" dépend plus de la conceptualisation des nombres un, deux, trois et, donc, des relations qu'ils entretiennent, que d'un simple perfectionnement de la procédure de comptage. Cette réussite dépend de l'appropriation d'un système : le système numérique des trois premiers nombres. » (Brissiaud, 2003, p. 28).

Il s'agit bien de décrire les relations entretenues par les premiers nombres, voilà pourquoi cette branche s'intitule relations, cardinal-relations.

b- Étude de « un »

La branche débute donc par la connaissance et la reconnaissance de (1) :

« Plus généralement, pour procéder à un comptage, il faut que la première entité comptée, comme les suivantes, puisse être appariée au mot-nombre (un) : on peut donc compter tout ce que nos sens et notre raison nous permettent de considérer de manière unifiée, c'est-à-dire comme étant " un ". » (Brissiaud, 2003, p. 105)

La branche cardinal-relations englobe des savoirs sur l'itération/succession, la figuration/dénomination, la décomposition et la recomposition. Sur cette branche, il s'agit de savoirs qui s'intègrent dans le mouvement des savoirs vers les connaissances, en tant que connaissances entraînées, appliquées. Le savoir est énoncé, donné, transmis, puis les situations sont mises en place après et permettent d'appliquer, de tester des connaissances en situation.

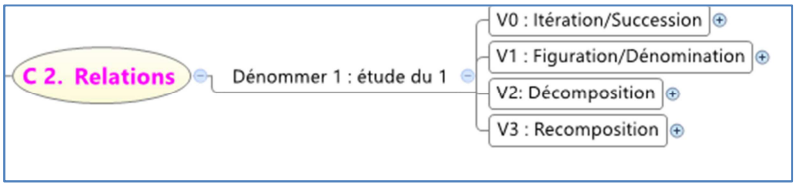


FIGURE 26 : SITUATIONS FONDAMENTALES PERMETTANT LA VISITE DU SAVOIR SUR LA BRANCHE CARDINAL-RELATIONS

Sur cette branche cardinal-relations, la construction du (1) au sens de conceptualisation de (1) revêt une importance capitale pour la suite. Il s'agit d'une connaissance indispensable et nécessaire qui doit être naturalisée et présente dans les milieux suivants en tant que telle. Cet investissement autour du (1) va conditionner toute la branche. Ne pas naturaliser (1) bloquerait la progression sur cette branche. Sans cette connaissance minimale du (1) pour construire ensuite « un ; un et encore un, deux ; deux et encore un, trois» il n'y a pas de cheminement possible ni d'exploration des trois subdivisions de la branche relations : itération, décomposition et recomposition, qui vont continuer à se dérouler sur la chronologie des nombres, en parallèle et à la même vitesse.

2.2- Visite du savoir V_0 : Itération/Succession

Il s'agit ici d'une première visite du savoir notée V_0 où il est montré que les nombres sont construits les uns après les autres en ajoutant un, l'unité, et en s'appuyant sur le nombre antécédent par un procédé récurrent. La conceptualisation de (1) est une connaissance naturalisée, (1) est su, connu et reconnu, « les enfants connaissent la signification cardinale exacte de un » (Brissiaud, 2003, p. 28). Alors, (2) peut être construit comme étant « un et encore un ».

a- Construire 2 comme 1 et 1

Il va être montré à l'élève, qu'en itérant l'unité, un nouveau nombre est obtenu et qu'il se nomme deux ; (2) est construit comme étant (1) et encore (1).

N_1 est su, connu et reconnu, $N_1=1$

Alors $N_1+1=N_2$

Cette situation s'itère indéfiniment (on peut toujours trouver le successeur d'un nombre en ajoutant un).

b- Construire 3 comme 2 et 1

$N_3=N_2+1$

Avec ($N_2=N_1+1$ et $N_{1=}1$)

Le nombre (3), par exemple, est défini grâce au nombre antécédent (2) augmenté d'une unité. Cela peut être renforcé par l'apprentissage en parallèle de la suite orale des mots-nombres où le « trois » s'énonce après le « deux » et confirme bien le caractère successif, un à un des nombres. La connaissance du (1) étant naturalisée, la mémorisation et donc la connaissance de nouveaux mots-nombres pour nommer la nouvelle quantité obtenue (deux, trois, quatre…) est recherchée mais elle n'est pas forcément nécessaire au début. En effet, même avec des connaissances verbales minimes, un jeune élève peut dire devant une collection voitures « une, une et encore une » ; la connaissance du mot-nombre « trois » n'est pas nécessaire ici, car la succession et l'identification de (1) comme unité suffit. Toutefois il est compréhensible que l'utilisation et la connaissance des mots-nombres deux, trois, arrivent rapidement au risque de se perdre dans l'énumération de la collection lorsque les unités s'ajoutent « un, et encore un, et encore un, et encore un », dès quatre il n'est plus vraiment confortable d'utiliser la succession de l'itération sans pouvoir prendre appui sur des mots-nombres (d'où l'intérêt des décompositions).

FIGURE 27 : SITUATION FONDAMENTALE V0 ITÉRATION/SUCCESSION[38] ET DÉROULEMENT SUR LA BRANCHE

De façon assez raisonnable à l'école maternelle, on peut envisager le renouvellement de ces situations jusqu'à dix.

$N_4=N_3+1$

[38] Pour des raisons de lisibilité de la figure la branche V0 Itération/Succession est développée jusqu'à cinq, en réalité elle se poursuit jusqu'à dix.

$N_5=N_4+1$

$N_6=N_5+1$

$N_7=N_6+1$

$N_8=N_7+1$

$N_9=N_8+1$

$N_{10}=N_9+1$

Avec ($N_2=N_1+1$ et $N_{1=}1$)

2.3- Visite du savoir V_1 : Figuration/Dénomination

Il s'agit ici d'une visite du savoir notée V_1 où les nombres peuvent être nommés par le mot nombre, représentés par les doigts, les constellations du dé, ou autres représentations non conventionnelles. La dénomination choisie renvoie aux « nombres figuraux » (Brissiaud, 2014a), à la numération figurée.

a- Figurer/Dénommer 2

Figurer (2) c'est montrer « deux » c'est-à-dire que cela suppose une première représentation mentale des petits nombres ou perception globale des petites quantités (Brissiaud, 2003, p. 109)

En entrant à l'école maternelle, l'élève sait différencier de façon quasi immédiate (par *subitizing*[39]) des collections de un, deux ou trois éléments sans pour autant savoir les nommer, ni les dénombrer.

> *« D'une façon générale, tous les auteurs s'accordent à dire que les très petites quantités (de 1 à 3 en tout cas) sont discriminées par les enfants avant leur arrivée à l'école maternelle. » (Margolinas & Wozniak, 2012, p. 12)*

En s'appuyant sur le *subitizing*, il s'agit ici de favoriser toutes les familiarisations avec un, deux, trois : constellations, doigts, dés, écriture chiffrée. On voit toutes sortes de représentations mentales de un, deux, trois, on les différencie, on les reconnaît et on y associe le mot-nombre, c'est-à-dire savoir nommer un, deux, trois. La suite orale des mots-nombres « un-deux-trois » étant acquise au sens de connaissance naturalisée, la branche se développe en commençant l'étude des petites quantités de façon chronologique. Toutes les situations où il faut compter un, aller chercher un objet, associer l'oral (c'est-à-dire le nom du nombre) à la quantité sont ici privilégiées. L'élève mémorise la suite orale des mots-nombres un-deux-trois, se familiarise avec différentes représentations du nombre, met en correspondance « y'en a comme ça » (en montrant deux doigts, par exemple) avec le cardinal (c'est-à-dire « il y a deux stylos », « un et encore un »).

> *« Jusqu'à trois, les enfants peuvent s'approprier aisément à la fois l'idée et le nom des premiers nombres. » (Brissiaud, 2007, p. 57)*

b- Figurer/dénommer le long de la branche

On trouve tout au long de cette branche, des situations identiques qui se différencient par rapport au domaine numérique (qui augmente progressivement de un en un). Cependant,

[39] du latin *subitus*, qui signifie soudain

l'étude systématique de chaque nombre les uns après les autres est impossible indéfiniment. Elle ne se réalise donc que jusqu'à un nombre qui sert de groupement de base (dix) ou bien de nombre d'appui pour les calculs (cinq ou dix, parfois deux). À partir d'un nombre d'appui, on considère les nouveaux nombres à partir de celui-ci : par exemple six comme cinq et encore un ou bien onze comme dix et encore un.

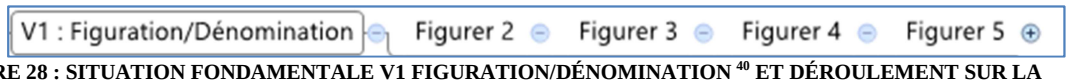


FIGURE 28 : SITUATION FONDAMENTALE V1 FIGURATION/DÉNOMINATION [40] ET DÉROULEMENT SUR LA BRANCHE

2.4- Visite du savoir V_2 : Décomposition

Il s'agit d'une visite du savoir notée V_2 où les décompositions des nombres sont recherchées et entrainées.

a- Décomposer 3

> *« C'est ainsi qu'avoir conceptualisé « trois », ce n'est pas seulement savoir compter jusqu'à trois, c'est savoir qu'une collection de 3 objets est formée d'un objet, d'un autre et encore d'un autre, ou bien qu'une telle collection s'obtient aussi en réunissant deux objets et encore un. » (Brissiaud, 2003, p. 28)*

Ce faisant, il est important de privilégier les situations qui, grâce à un milieu particulièrement choisi, favorise les décompositions.

FIGURE 29 : SITUATION FONDAMENTALE V2 DÉCOMPOSITION ET DÉROULEMENT SUR LA BRANCHE

La branche décomposition renforce, complète et est alimentée par les autres branches. Elle devient même centrale pour la branche cardinal-relations. Les autres branches sont presque au service de celle-ci.

> *« Les nombres forment un système et on ne peut pas comprendre le nombre six sans le comparer à ceux qui le précèdent. Autrement dit, on ne peut pas comprendre le nombre six sans s'intéresser à ses décompositions. « 8 bouchons, c'est 7 bouchons […] et encore un tout seul. Comme le mot huit est juste après sept dans la récitation de la suite verbale […] prononcer un mot de plus revient à ajouter une unité supplémentaire […] cette connaissance est fondamentale parce qu'elle permet aux enfants de commencer à réfléchir leurs comptages en termes de décompositions. »(Brissiaud, 2007, pp. 51-52)*

b- Décomposer après cinq

Il y a une ramification de la branche à partir de cinq. Toujours en respectant un apprentissage linéaire et chronologique des nombres il convient de privilégier les groupements par cinq (en bas sur la Figure 30). La numération étant décimale, les paquets de deux ou les groupements à cinq sont privilégiés.

> *« Les constellations utilisées à l'école maternelle sont de deux sortes, qui privilégient respectivement le groupement par 2 et par 5. »(Brissiaud, 2007, p. 46)*

Les groupements par deux peuvent s'avérer compliqués, en effet, la ramification interviendrait beaucoup trop tôt sur la branche, juste après deux, et peu de connaissances seraient naturalisées mais surtout les paquets de deux susciteraient des problèmes

[40] Pour des raisons de lisibilité de la figure la branche V1 Figuration/Dénomination est développée jusqu'à cinq, en réalité elle se poursuit jusqu'à dix.

d'énumération. Par contre, les groupements à cinq arrivent bien après « un-deux-trois » (ciment de la branche cardinal-relations) et offrent également un autre avantage, celui de pouvoir prendre appui sur les cinq doigts de la main. Plus tard, au cycle deux, les groupements par dix pourront être introduits comme cinq et encore cinq avec les boîtes picbille par exemple (Brissiaud, Clerc, & Ouzoulias, 2001).

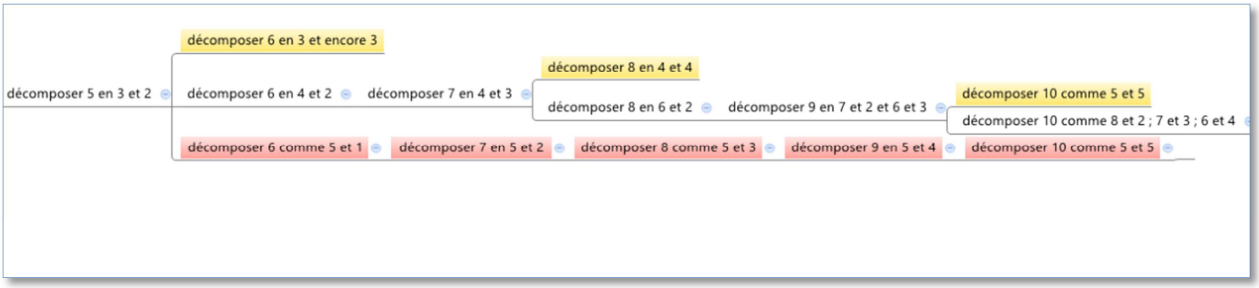


FIGURE 30 : SITUATION FONDAMENTALE V2 ET DÉCOMPOSITION À PARTIR DE 5

Les situations de décompositions du nombre six, permettent avec celle du nombre quatre, huit et dix d'introduire les connaissances sur les doubles et moitiés des nombres inférieurs à dix (en haut sur la Figure 30).

2.5- Visite du savoir V_3 : Recomposition

Il s'agit d'une visite du savoir notée V_3 où les recompositions des nombres sont recherchées et entrainées.

a- Recomposer à partir des doubles

La branche étudie et propose progressivement les recompositions possibles avec un, deux, trois etc. Ainsi les situations vont proposer des recompositions à partir des doubles (deux et encore deux, trois et encore trois). De façon raisonnable, à l'école maternelle, les recompositions à partir des doubles s'effectuent jusqu'à six (six et encore six), se justifiant par rapport à l'utilisation du dé.

b- Recomposer à partir des triples

Les recompositions à partir des triples (deux, deux et encore deux ; trois, trois et encore trois) sont également envisagées. Elles peuvent s'envisager jusqu'à cinq : cinq, cinq et encore cinq, s'appuyant alors sur des configurations spatiales conventionnelles ou non conventionnelles.

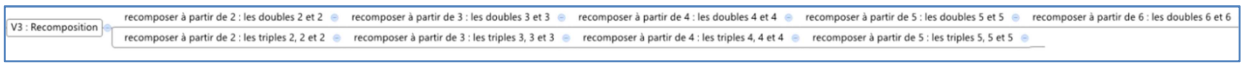


FIGURE 31 : SITUATION FONDAMENTALE V3 RECOMPOSITION

Les connaissances pour dénommer deux enrichies par les « nombres figuraux » de deux, pour construire deux comme étant un et encore un, pour décomposer deux en un et un ou pour recomposer à partir de deux, de chacune des sous-branches sont assez proches et complémentaires ; elles complètent et enrichissent les milieux. Dénommer des collections de trois objets peut être renforcé par les décompositions de trois : il y a deux et encore un par exemple. Quatre peut être construit comme étant une collection de trois et encore un, ce nouveau nombre se nommant quatre. Une fois que la connaissance du (1) est naturalisée, il n'y a pas de hiérarchie, d'ordre dans les situations des quatre sous-branches.

L’imbrication des milieux joue à deux niveaux :

- « horizontalement » c'est-à-dire que pour une situation fondamentale sur l’itération, les connaissances en situation se retrouvent dans le milieu de la situation suivante

- « verticalement » c'est-à-dire que les connaissances en situation de la branche itération vont se trouver également dans le milieu de la situation fondamentale sur la figuration, ainsi que dans le milieu de la situation fondamentale sur la décomposition et dans le milieu de la situation fondamentale sur la recomposition.

Conclusion de la branche cardinal-relations

En conclusion, j’expose les différentes situations telles qu’elles sont organisées dans la branche cardinal-relations. La première figure, plus générale (Figure 32 : Situations fondamentales permettant la visite du savoir sur la branche Cardinal-relations) reprend l’ensemble des situations fondamentales liées à la branche cardinal-relations. Les figures suivantes (Figure 33 : Situation fondamentale V0 Itération/Succession et déroulement sur la branche ; Figure 34 : Situation fondamentale V1 Figuration/Dénomination et déroulement sur la branche ; Figure 35 : Situation fondamentale V2 Décomposition et déroulement sur la branche ; Figure 36 : Situation fondamentale V3 Recomposition) révèlent l’avancée et l’enchainement des situations possibles générées à partir de chacune des situations fondamentales.

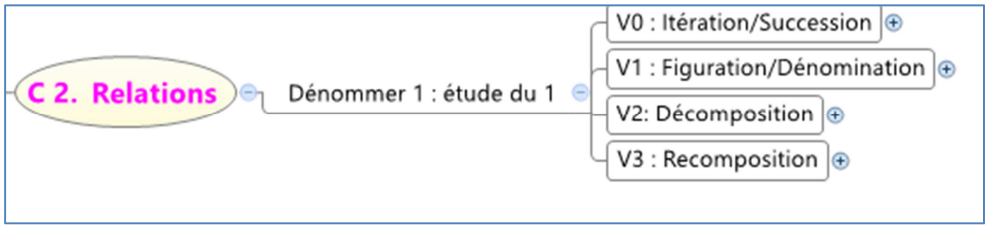


FIGURE 32 : SITUATIONS FONDAMENTALES PERMETTANT LA VISITE DU SAVOIR SUR LA BRANCHE CARDINAL-RELATIONS

FIGURE 33 : SITUATION FONDAMENTALE V0 ITÉRATION/SUCCESSION ET DÉROULEMENT SUR LA BRANCHE

FIGURE 34 : SITUATION FONDAMENTALE V1 FIGURATION/DÉNOMINATION ET DÉROULEMENT SUR LA BRANCHE

FIGURE 35 : SITUATION FONDAMENTALE V2 DÉCOMPOSITION ET DÉROULEMENT SUR LA BRANCHE

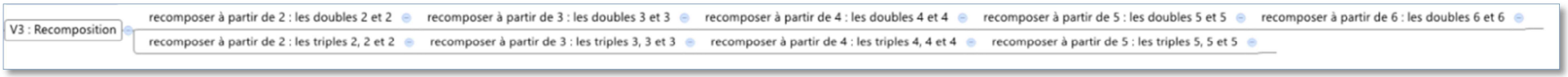


FIGURE 36 : SITUATION FONDAMENTALE V3 RECOMPOSITION

CONCLUSION

Cette présentation à partir de l'arbre hiérarchique montre la succession des situations sur la branche cardinal par l'imbrication des milieux. Le concept de collection, présent pour les deux sous-branches cardinal-quantité et cardinal-relations, met en avant les connaissances minimales indispensables sur cette branche. Les critères de validité, nécessaires pour la validation des connaissances en situations participent à l'imbrication des milieux pour expliquer l'enchainement des situations et par conséquent, l'évolution des connaissances.

De façon tout à fait analogue et symétrique à la description de l'enchainement des situations de la branche cardinal, le même déroulement de situations est construit pour la branche ordinal. La branche ordinal est envisagée avec le même cadre ; la construction de la situation 0 : O0 liste (ou piste) et le dédoublement en deux sous-branches de même niveau, ordinal-position et ordinal-relations. Les deux grandeurs quantité et position sont exploitées à l'aide des situations fondamentales : « comparer » deux quantités, deux positions ; « construire la même » quantité, la même position et « classer » différentes quantités, différentes positions. La même succession des situations (action, éloignement dans l'espace, dans le temps, formulation à autrui et formulation collective) est envisagée. Et de façon tout à fait identique la branche ordinal-relations met en avant les relations entre les nombres ordinaux à partir des situations fondamentales succession, dénomination, décomposition et recomposition. La figure suivante (Figure 37 : Dédoublement des branches cardinal et ordinal) fait apparaitre la symétrie au départ des branches cardinal et ordinal.

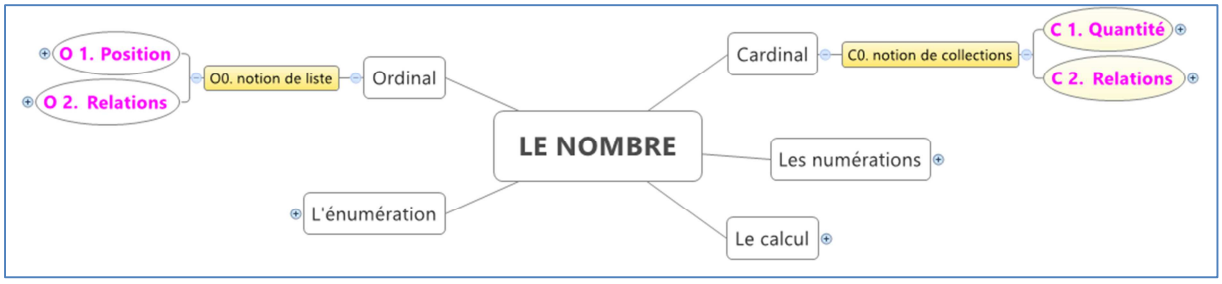


FIGURE 37 : DÉDOUBLEMENT DES BRANCHES CARDINAL ET ORDINAL

La figure suivante (Figure 38 : Symétrie des situations fondamentales sur les branches cardinal et ordinal) précise les similarités des situations fondamentales pour les deux savoirs cardinal et ordinal.

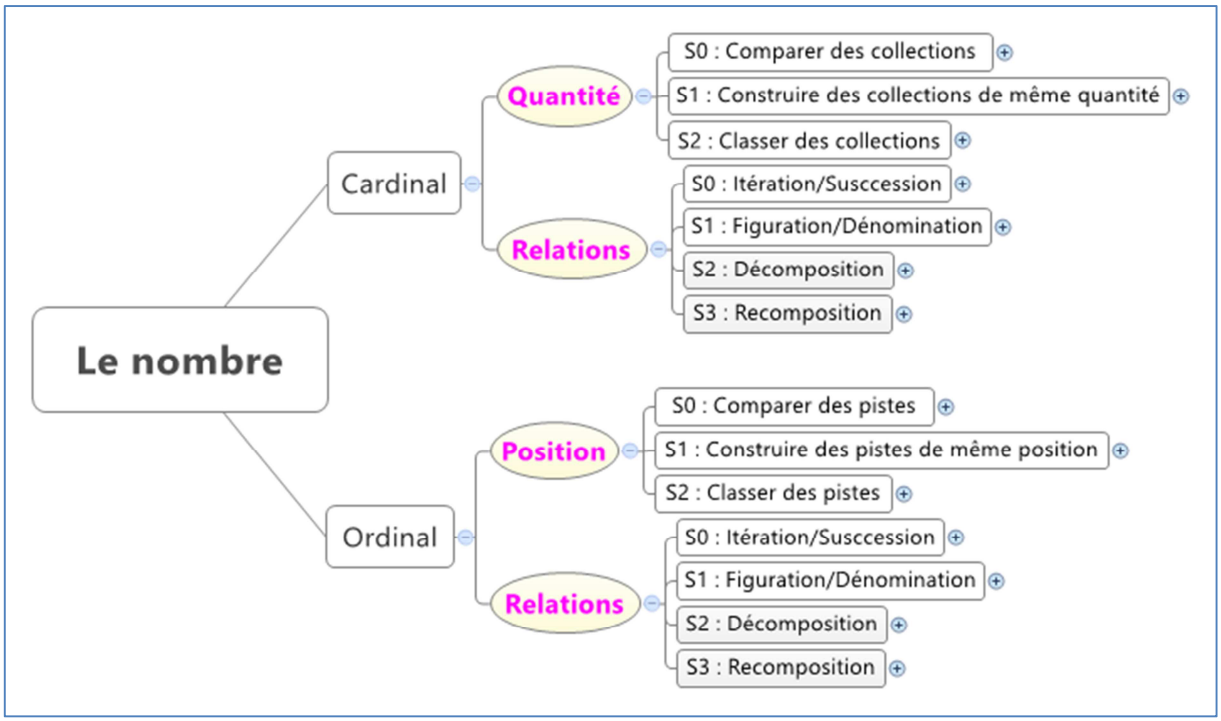


FIGURE 38 : SYMÉTRIE DES SITUATIONS FONDAMENTALES SUR LES BRANCHES CARDINAL ET ORDINAL

CONCLUSION DE LA PARTIE 1

L'étude et le travail d'analyse des recherches internationales de Clivaz (Clivaz, 2011) montrent que l'influence des connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement du professeur sur les résultats des élèves est réelle. Le concept de « connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement » de Ball est retenu pour qualifier, rechercher et focaliser mes travaux sur les connaissances du professeur. Cibler les connaissances spécifiques à la profession permet une description des connaissances pour en avoir une plus grande compréhension et débouche sur l'observation des conditions d'évolution des connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement du professeur.

Les apports de « la structuration des niveaux d'activité » de Margolinas enrichissent et renforcent la définition des connaissances pour l'enseignement des mathématiques dans un premier temps mais précisent et éclairent également les interactions et les répercussions des différents niveaux d'activités du professeur sur ses connaissances en situation. Ces travaux permettent aussi d'entrevoir les spécificités propres de chacun des cinq niveaux de façon indépendante mais fortement dépendants les uns des autres.

Les connaissances mathématiques pour l'enseignement du professeur et la structuration des niveaux d'activité du professeur étant posées comme cadre de la thèse, il convient d'y ajouter la spécificité de l'école maternelle dans ses contraintes d'enseignement. Les différents savoirs en lien avec l'enseignement du nombre à l'école maternelle, au service des programmes, viennent d'être exposés. Cet enseignement touche plusieurs savoirs mis en lumière au gré des programmes de l'éducation nationale. Au fil du temps, l'enseignement du nombre à l'école maternelle dans les programmes propose une exposition variée avec les savoirs mathématiques : cardinal, ordinal, numérations, énumération et calcul.

La dialectique entre connaissances et savoirs me permet d'opérer cette distinction entre connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement du professeur et savoirs mathématiques spécifiques pour l'enseignement du nombre à l'école maternelle et constitue un autre appui pour le cadre théorique de ma thèse.

Ces savoirs mathématiques spécifiques à l'enseignement du nombre à l'école maternelle sont modélisés afin d'envisager les possibilités et l'étendue des savoirs dans l'enseignement du nombre. L'étude se focalise maintenant sur ce que peut être un enseignement du nombre à l'école maternelle qui prend en compte différents savoirs. Plusieurs questions se posent alors.

En quoi les connaissances mathématiques spécifiques du professeur témoignent-elles de son enseignement du nombre ?

Comment l'enseignement du nombre à l'école maternelle est-il décrit par les professeurs ?

Quelles sont les connaissances mathématiques spécifiques du professeur mobilisées pour l'enseignement du nombre à l'école maternelle ?

Les savoirs mathématiques spécifiques à l'enseignement du nombre à l'école maternelle sont-ils tous enseignés, légitimés par les professeurs ?

PARTIE 2- UN ÉTAT DES LIEUX DES CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES SPÉCIFIQUES POUR L'ENSEIGNEMENT DU NOMBRE À L'ÉCOLE MATERNELLE

L'élaboration du cadre théorique de la thèse dans la première partie a conduit à une modélisation des savoirs mathématiques spécifiques à l'enseignement du nombre à l'école maternelle sous forme d'arbre hiérarchique, en proposant la description complète d'un savoir en particulier : la cardinalité. Les savoirs mathématiques spécifiques pour l'enseignement du nombre à l'école maternelle étant identifiés sur l'arbre, il s'agit à présent de s'intéresser aux connaissances mathématiques spécifiques pour l'enseignement du nombre que les professeurs investissent. Pour cela, des données sont recueillies auprès d'enseignants de l'école maternelle.

La deuxième partie présente l'analyse des données à partir d'entretiens d'enseignants de l'école maternelle, interrogés afin d'étudier les connaissances mathématiques spécifiques pour l'enseignement du nombre. Dans un premier temps, les choix méthodologiques inhérents à l'entretien sont justifiés ainsi que le protocole mis en place (chapitre 1), puis vient l'explication du traitement des données avec les choix de codages retenus afin de déterminer les connaissances mathématiques spécifiques dans chaque branche (chapitre 2). À l'issue de ces précisions, des connaissances générales sur l'enseignement du nombre à l'école maternelle sont dégagées (chapitre 3) avant d'établir, pour chacun des enseignants une cartographie de leurs connaissances mathématiques spécifiques pour l'enseignement du nombre à partir de la modélisation sous forme d'arbre des savoirs du nombre (chapitre 4).

Les questions qui se posent ici sont relatives aux connaissances mathématiques spécifiques du professeur :

Comment repérer les connaissances mathématiques spécifiques du professeur ?
Quelles sont les connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement du nombre des professeurs de l'école maternelle ?

CHAPITRE 1- L'ÉTUDE DES CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES SPÉCIFIQUES OU MÉTHODOLOGIE POUR IDENTIFIER LES CMS

Pour étudier les connaissances mathématiques spécifiques du professeur il est nécessaire de pouvoir d'abord les repérer. La question de leur détermination va être abordée en présentant la méthodologie choisie (1- Comment déterminer les connaissances mathématiques spécifiques du professeur pour l'enseignement du nombre à l'école maternelle ?). La constitution du recueil des données et les conditions de passation sont proposées par la suite (2- Le recueil et l'élaboration des données) avant d'exposer l'utilisation du logiciel Transana dans l'exploitation des données (3- Le traitement des données avec le logiciel Transana).

1- COMMENT DÉTERMINER LES CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES SPÉCIFIQUES DU PROFESSEUR POUR L'ENSEIGNEMENT DU NOMBRE À L'ÉCOLE MATERNELLE ?

1.1- Méthodologie des études antérieures sur les connaissances mathématiques spécifiques pour enseigner

Dans ses travaux, Ball a mis au point une méthodologie propre à l'identification des connaissances mathématiques spécifiques pour la soustraction (Ball, 1988). Clivaz, dans sa thèse, présente une méthodologie pour l'étude des connaissances mathématiques spécifiques pour la multiplication à deux chiffres (Clivaz, 2011). Ces deux procédés méthodologiques sont tour à tour présentés.

a- Ball

Ball a interrogé dix-neuf enseignants débutants en élaborant un questionnaire en deux parties (Ball, 1988, pp. 232-257). Dans la première partie, Ball questionne l'histoire personnelle de l'enseignant pour connaitre les raisons qui l'ont poussé à choisir l'enseignement ainsi que son expérience personnelle en tant qu'élève, et particulièrement son expérience avec les mathématiques. Toujours dans cette première partie, une autre série de questions concerne l'idée que l'enseignant se fait des mathématiques à enseigner, pour les élèves et pour lui-même. Ball recherche la façon dont les croyances s'articulent et comment le professeur les assume. La seconde partie du questionnaire est relative aux connaissances des mathématiques et aux idées sur l'enseignement et l'apprentissage. Pour Ball, ces questions permettent de cibler la compréhension de concepts mathématiques du professeur et d'explorer la vision des mathématiques, de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques qu'il a. Dans la suite de l'interview Ball suggère des réflexions, des questions d'élèves auxquelles l'enseignant doit faire face. Ball souhaite recueillir ce que les enseignants pensent, ce qu'ils devraient faire ou dire et pourquoi ils agiraient ainsi. Elle invente des questions, qui impliquent des mathématiques pour enseigner, par le biais de réponse à donner aux idées des élèves.

« RESPONDING TO STUDENT IDEAS: GEOMETRY
Something that is often taught in kindergarten and first grade is the names of geometric shapes. Suppose you are teaching first grade and you notice that one of your students has labeled a picture of a square with an R (for rectangle). What would you want to do or say?". (Ball, 1988, p. 233)

Enfin, les dernières questions visent à approfondir un thème pour apprécier comment le professeur voit le concept à travers les yeux d'un apprenant mais aussi pour concevoir quelles sont les tâches qu'il utiliserait, quelles explications il donnerait. Ball utilise une page d'un manuel mathématique comme base de réflexion. Les professeurs de l'élémentaire sont interrogés sur la soustraction avec regroupement. Les professeurs du secondaire sur de l'algèbre.

Dans son interview, Ball a inclus des questions sur l'expérience personnelle du professeur avec les mathématiques à l'école, sur ce qui fait qu'une personne est qualifiée de « bonne en mathématiques », sur ce que le professeur pense qu'il faut apprendre pour enseigner les mathématiques. Elle a également construit des scénarios à partir de tâches courantes de l'enseignement des mathématiques : répondre à des questions d'élèves, aider un élève à apprendre un sujet en particulier, analyser du matériel scolaire. Ces tâches proposées incorporaient des sujets mathématiques particuliers. En ciblant ainsi des mathématiques spécifiques pour l'enseignement, Ball a repéré les connaissances mathématiques spécifiques du professeur.

b- Clivaz

Dans sa thèse Clivaz a d'abord interrogé seize enseignants en suivant le canevas de Ma (1999), c'est-à-dire en proposant quatre questions portant sur : les soustractions avec retenues, la multiplication de nombres à plusieurs chiffres, la division par une fraction et la relation entre périmètre et aire. Cet entretien a duré une quarantaine de minutes avec un questionnaire qu'il a adapté en fonction des réponses données par l'enseignant et prévues par le canevas d'entretien. Ce premier temps d'interview lui a permis « de donner une caractérisation des connaissances de mathématiques élémentaires des enseignants vaudois » afin « de les situer par rapport à celles des enseignants chinois et états-uniens selon l'étude de Ma (Ma, 1999) » (Clivaz, 2011, p. 61). Puis, il a poursuivi son analyse pour affiner le type de connaissances mathématiques pour l'enseignement, en se focalisant sur l'algorithme de la multiplication par un nombre à deux chiffres chez quatre enseignants de l'école élémentaire. Pour cela, il a filmé toutes les leçons proposées par les enseignants. Un entretien *ante* et un entretien *post* ont été proposés avant et après la séquence en classe. L'entretien *ante* « visait à expliciter la manière dont l'enseignant envisageait la séquence » (Clivaz, 2011, p. 138). L'entretien *post*, permettait, quant à lui, de recueillir la perception de l'enseignant et de déterminer ses connaissances mathématiques.

1.2- Difficultés méthodologiques concernant l'étude des connaissances mathématiques spécifiques pour enseigner le nombre à l'école maternelle

S'intéresser aux connaissances mathématiques spécifiques du professeur conduit à étudier le professeur en situation et à déterminer les connaissances qu'il investit. Cette observation en classe est problématique à l'école maternelle pour le chercheur. En effet, le professeur ne peut pas anticiper tous les moments où le nombre est travaillé car en prononçant les mots-

nombres, à quelque occasion que ce soit, le nombre est alors rencontré, entrainé, travaillé, contrairement à l'école élémentaire où l'enseignant prévoit des séances planifiées, comme pour Clivaz et l'algorithme de la multiplication par un nombre à deux chiffres (Clivaz, 2011). Une solution aurait pu être de suivre un professeur pendant des temps très longs, en observant les connaissances mathématiques spécifiques en situation, mais cette proposition m'aurait privée d'une variété de cartographies possibles des connaissances mathématiques spécifiques pour l'enseignement du nombre, alors que ma position d'observatrice de l'institution me laissait penser qu'il pourrait y avoir des variations importantes entre les professeurs.

L'idée de la passation d'un entretien est retenue, sans pour autant interroger les professeurs sur les savoirs concernant l'enseignement du nombre à la maternelle. En effet, il est difficile de parler des connaissances mathématiques des élèves à l'école maternelle car, paradoxalement, cela demande des connaissances mathématiques assez théoriques : par exemple celle de cardinal et d'ordinal, celle de relation d'équivalence, celle de successeur, etc. Par contre, tous les enseignants savent réaliser très facilement les tâches proposées à leurs élèves, il n'est donc pas vraiment possible de trouver des questions mathématiques qui pourraient révéler des difficultés mathématiques (comme les questions de Ball et ses scénarios pour répondre aux idées des élèves). De plus, le travail entrepris avec les élèves à l'école maternelle ne ressemble pas à une leçon de l'école élémentaire ou à un cours du secondaire. La particularité liée à l'école maternelle m'oblige à procéder différemment de Clivaz (Clivaz, 2011), car les enseignants ne peuvent pas planifier une séquence d'apprentissage sur l'enseignement du nombre à l'école maternelle.

1.3- Le choix d'un entretien

Les connaissances mathématiques spécifiques des professeurs sont repérées dans les situations reconnues comme des situations mathématiques, que l'enseignant propose à ses élèves. L'enjeu de l'entretien est donc de faire évoquer des situations aux différents niveaux d'activités. Je ne fais pas l'hypothèse que les propos du professeur reflètent réellement son enseignement, ni même que les situations évoquées sont vraiment significatives de sa façon d'enseigner. En ce sens il n'y a pas d'amalgame entre les pratiques déclarées et les pratiques effectives. Par contre, les situations évoquées par l'enseignant, dans cet entretien, sont significatives de ses connaissances et même, sans doute, significatives de ce qu'il considère comme le plus légitime, puisqu'il est interrogé par quelqu'un qu'il ne peut pas penser seulement comme un chercheur. C'est-à-dire que les enseignants interrogés dévoilent les connaissances qu'ils supposent être les plus proches des savoirs attendus pour enseigner. La méthodologie choisie est assez semblable de celle de Margolinas et Wozniak (Margolinas & Wozniak, 2009b, p. 65) qui utilisent des entretiens d'une heure dans la salle de classe de l'enseignant, sans la présence des élèves, basés sur les différents niveaux d'activité pour accéder au travail documentaire des enseignants de l'école primaire.

2- LE RECUEIL ET L'ÉLABORATION DES DONNÉES

2.1- Déroulement de l'entretien

a- Mise en place de l'entretien

Une explication orale de mon projet de thèse et plus particulièrement de mon questionnement de recherche (alors en construction) sur l'enseignement du nombre à l'école maternelle a été donnée à chaque enseignant. Je leur ai fourni des précisions sur mes motivations à m'inscrire en thèse, sur ma rencontre avec la didactique des mathématiques et enfin sur mon besoin de comprendre comment le professeur enseigne le nombre à l'école maternelle au quotidien dans sa classe. Cette présentation était suivie d'une demande de participation à mes recherches, elle concernerait une dizaine d'enseignants sur le département. Un délai de réflexion leur était proposé. S'ils étaient d'accord ils étaient invités à me contacter par téléphone afin de prendre rendez-vous pour l'entretien. Tous les enseignants me connaissaient en tant que CPD maternelle[41] et ont accueilli avec sympathie mon projet de recherche.

Ces entretiens ont débuté en 2012. Quatre entretiens se sont déroulés sur le temps méridien, dans la classe de l'enseignant, un sur le temps de sieste des élèves de PS, dans la classe des CM2 alors sans élève, un après le temps scolaire, dans la classe de l'enseignant ; un sur un jour de congé (enseignant à mi-temps) chez l'enseignant, et enfin sur deux mercredis après-midi, dans la classe de l'enseignant pour l'un, chez le chercheur pour l'autre, et le dernier, un samedi matin dans la salle des maitres.

b- Démarche de l'entretien

Je souhaitais une intervention minimum de ma part, pour différentes raisons. Tout d'abord pour offrir du temps aux professeurs pour parler de leur enseignement, en effet, il n'existe pas ou peu de temps dans l'institution scolaire consacré à l'exposition de ses choix d'enseignement. Mais aussi et surtout pour séparer ma fonction de CPD et mon statut de chercheur. En effet, en allumant le dictaphone, en m'appuyant sur quelques questions écrites sur une feuille au début de l'entretien et en prenant des notes sur une page blanche afin de ne pas influencer mon interlocuteur du regard, je mets en place un dispositif vraiment différent des pratiques du conseiller. Je décide également de ne pas déterminer à l'avance l'orientation de l'entretien. C'est-à-dire que j'opte pour une intervention minimaliste de ma part afin de recevoir les propositions et de suivre alors la direction prise par l'enseignant. Enfin, le fait que ces passations d'entretiens se soient déroulées assez tôt dans mon travail de recherche a également joué sur la prise de décision d'un entretien ouvert où les propos des enseignants étaient plus accueillis que dirigés.

Pour ces raisons, je m'inscris dans le cadre d'un entretien semi-dirigé ou semi-directif (Quivy & Van Campenhoudt, 2007, p. 174) utilisé également par Clivaz (Clivaz, 2011, p. 68) et Margolinas et Wozniak (Margolinas & Wozniak, 2009b, p. 65) entre autres.

> *« [L'entretien] Il est semi-directif en ce sens qu'il n'est ni entièrement ouvert, ni canalisé par un grand nombre de questions précises. Généralement, le chercheur dispose d'une série de questions-guides, relativement ouvertes, à propos desquelles il est impératif qu'il reçoive une*

[41] Conseillère pédagogique départementale mission maternelle

information de la part de l'interviewé. Mais il ne posera pas forcément toutes les questions dans l'ordre où il les a notées et sous la formulation prévue. Autant que possible, il « laissera venir » l'interviewé afin que celui-ci puisse parler ouvertement, dans les mots qu'il souhaite et dans l'ordre qui lui convient. Le chercheur s'efforcera simplement de recentrer l'entretien sur les objectifs chaque fois qu'il s'en écarte et de poser les questions auxquelles l'interviewé ne vient pas par lui-même, au moment le plus approprié et de manière aussi naturelle que possible. » (Quivy & Van Campenhoudt, 2007, p. 174)

À titre d'exemple, voici mes demandes et questions introductives à l'entretien avec G :

« je voudrais qu'on parle de mathématiques qu'on parle de nombre plus précisément en maternelle et ce qui m'intéresse c'est vraiment le côté pratique de classe concrètement comment tu fais en classe pour enseigner les nombres en maternelle donc dans ton niveau de TPS PS l'apprentissage du nombre et ce que ça implique toi en tant que préparation comment tu fais pour préparer une séance heu est ce que tu as des ressources particulières des des jeux sur lesquels tu t'appuies des outils que tu aimes bien et ce que j'aimerais aussi connaitre c'est heu la pratique régulière tu vois comment tu le fais quand tu le fais comment tu le fais voilà donc d'abord on va partir comme ça de façon globale et puis après si tu veux petit à petit on affinera on affinera un peu si y'a des choses que je comprends pas je je te redemanderai pour heu pour voir et aussi si tu as des documents de référence voilà si tu as des choses toi pour préparer heu une séance type voilà on pourrait dire quelque chose d'ordinaire quelque chose de voilà que tu fais régulièrement comment tu le mènes en classe et est-ce que tu le prépares de façon particulière à la maison en amont »

Et celles introductives à l'entretien avec J :

« voilà donc c'est vrai que ça part tu vas voir c'est très ouvert donc comment enseignes-tu le nombre en maternelle par rapport aux nombres donc je souhaiterais comprendre oui qu'est ce qui fait le cœur de ta pratique vraiment ce que je veux c'est l'ordinaire le quotidien sur quoi tu t'appuies toi à quoi tu te réfères et qui vient souvent qui pourrait être souvent heu après sur quels points insistes-tu particulièrement et est-ce que tu as du matériel spécifique pour ça je pense notamment à des jeux »

Plusieurs questions sont donc annoncées au début de l'entretien pour tenter de comprendre l'enseignement du nombre à l'école maternelle, quelques demandes de précisions permettant de cerner les conditions de déroulement de l'activité ou quelques commentaires ou relances par la suite (notamment par rapport aux niveaux d'activité) viennent compléter les questions initiales. Le but annoncé est d'être au plus près de la pratique de classe, c'est-à-dire des connaissances mathématiques spécifiques du professeur à partir d'exemples précis d'activités ou de situations. Certains enseignants se sont appuyés sur du matériel, comme des jeux disponibles dans la classe, d'autres y ont fait référence car les entretiens se déroulaient hors de la classe. L'enseignant organisait son argumentation et ses propos. Quand le temps a permis de prolonger l'entretien, des questions concernant la formation initiale maternelle reçue, la formation de terrain rencontrée ainsi que leur sentiment sur la maternelle ont été abordées.

Voici un exemple de relance concernant la formation :

« et donc au niveau de la formation que tu aurais pu avoir pour la maternelle »

Et un exemple pour clore l'entretien :

« et la ma dernière question on est en année d'élection ça tombe bien on va dire qu'il va y avoir heu tu as la possibilité de modifier les choses sur l'enseignement en maternelle qu'est-ce que tu voudrais changer qu'est-ce que tu voudrais garder pour toi heu la maternelle qu'est ce qui est important qu'est-ce que si tu avais un un souhait un vœu un souhait à formuler au niveau de la maternelle »

2.2- L'anonymat des enseignants

Afin de lever toute confusion par apport au changement des pratiques préconisé par le ministère de l'éducation nationale (Men, 2014b, pp. 1-2), l'anonymat des enseignants a représenté dès le départ un enjeu éthique particulièrement important. C'est avec beaucoup d'hésitations que je livre les matériaux qui étaient pourtant dès le départ recueillis pour faire partie du corpus de la thèse. Mais l'anonymat représentait aussi un enjeu pour mon positionnement en tant que chercheur : pour analyser, j'avais besoin d'oublier autant qu'il était possible qui étaient les enseignants interrogés pour ne me concentrer que sur les données recueillies.

Pour satisfaire à ces deux exigences, je parlerai de tous les enseignants au masculin, utilisant d'une certaine façon le masculin à titre épicène. Cette mise à distance constitue une aide par rapport à la personnalité de chacun. De plus, chaque enseignant est renommé par une lettre de l'alphabet choisie au hasard parmi les dix premières lettres. Des corrections orthographiques sont apportées aux transcriptions pour supprimer les marques du féminin. Les prénoms des ATSEM[42], des enseignants de l'école, des étudiants fonctionnaires stagiaires ainsi que des élèves cités dans les entretiens sont également modifiés.

2.3- Les verbatim

Les entretiens ont été enregistrés avec un dictaphone et les bandes audio traitées avec Transana (voir chapitre 3). La transcription des propos des enseignants est fidèle au discours oral entendu et tient compte des hésitations marquées par des onomatopées (heu, hum) ou des débuts de mots (les jet, le mê, la peti). Toutefois, il n'y a pas de signe renforçant les intonations, les silences, les rires, les questions. Le *verbatim* extrait de la transcription de l'entretien est présenté sous forme de tableau précisant les tours de parole dans la colonne de gauche ainsi que la transcription écrite des propos oraux de l'enseignant, sans ponctuation.

87	Chercheur- d'accord donc c'est ou les animaux
88	A- oui
89	Chercheur- ou les jetons
90	A- oui
991	Chercheur- d'accord et
992	A- mais tu peux mettre aussi les jet le mê
93	Chercheur- des animaux et des jetons aussi
94	A- heu non enfin dans la peti dans la petite caissette oui tu peux mettre au lieu de mettre des animaux tu mets des jetons
95	Chercheur- des jetons hum
96	A- le même nombre
97	Chercheur- d'accord

Je vais utiliser certains *verbatim*, avec cette présentation, dès maintenant, à titre d'exemples, afin d'illustrer mes propos et j'userai plus systématiquement de *verbatim* par la suite[43].

[42] ATSEM : Agents Territoriaux Spécialisés des Écoles Maternelles
[43] Chapitre 3 et chapitre 4.

2.4- Les enseignants interrogés

L'échantillon est composé de dix enseignants, huit femmes et deux hommes. Ils ont entre sept et vingt-neuf ans d'expérience dans la profession. Deux enseignants n'ont enseigné qu'en maternelle, les huit autres ont connu au moins une expérience à l'école élémentaire. Trois enseignants sont directeurs d'école, deux d'école maternelle, un d'école primaire. Deux enseignants ont le CAFIPEMF[44] et l'un d'entre eux est maitre formateur en maternelle depuis moins de trois ans.

Sexe-âge	Ancienneté en 2012	Statut / Fonction
Femme 1	29 ans	PE, enseignante
Homme 2	25 ans	PE[45], enseignant, Directeur d'école maternelle
Femme 3	17 ans	PE, enseignante
Femme 4	15 ans	PE, enseignante, CAFIPEMF
Femme 5	11 ans	PE, enseignante
Femme 6	11 ans	PEMF[46], enseignante
Femme 7	11 ans	PE, enseignante, Directrice d'école maternelle
Femme 8	11 ans	PE, enseignante
Femme 9	7 ans	PE, enseignante
Homme 10	8 ans	PE, enseignant, Directeur d'école primaire

TABLEAU 6 : PRÉSENTATION DE L'ÉCHANTILLON (PAR ANCIENNETÉ DÉCROISSANTE)

L'école maternelle est représentée dans sa globalité, tous les niveaux sont pris en compte, de la petite section à la grande section.

Niveaux par classe	Effectif en 2012	École maternelle/école primaire
TPS[47]/PS[48]	16	École maternelle de ville
TPS/PS	15	École primaire de petite ville
TPS/PS	18	École maternelle de ville
TPS/PS	15	École maternelle de ville
TPS/PS/MS	17	École primaire de village
MS[49]/GS	18	École primaire de petite ville
GS/CP	16	École primaire de petite ville
GS[50]	27	École maternelle en ville
GS	16	École maternelle en ville
TPS/PS/MS/GS/CP[51]	17	École primaire de village

TABLEAU 7 : EFFECTIF L'ANNÉE DE L'ENTRETIEN

Certains enseignants sont dans des écoles maternelles qui ne scolarisent que des élèves d'âge pré-élémentaire, en ville (16 500 habitants pour la plus grande et 3 000 habitants pour l'autre), les autres sont dans des écoles primaires de petites villes ou de villages dans des

44 CAFIPEMF : Certificat d'Aptitude aux Fonctions d'Instituteur ou de Professeur des Écoles Maître Formateur
45 PE : professeur d'école
46 PEMF : professeur des écoles maitre formateur
47 TPS classe de très petite section accueillant des enfants de deux à trois ans, on peut également l'appeler la classe de PS1, de petite section première année. Les programmes de 2015 utilisent le terme de scolarisation des moins de trois ans dans des classes de petites sections.
48 PS classe de petite section accueillant des enfants de trois à quatre ans, on peut également l'appeler la classe de PS2, de petite section deuxième année.
49 MS classe de moyenne section accueillant des enfants de quatre à cinq ans.
50 GS classe de grande section accueillant des enfants de cinq à six ans.
51 CP cours préparatoire, première année de la scolarisation obligatoire accueillant des élèves de six à sept ans.

classes de cycle un ou de cycle un et deux. Il ne s'agit pas de chercher une représentativité systématique du terrain. Ne réalisant pas non plus, une étude quantitative, aucune contrainte géographique, de sexe, d'ancienneté d'âge ou autre n'est imposée. Il s'agit d'un corpus de dix enseignants d'école maternelle volontaires, dispersés dans trois circonscriptions d'un petit département rural.

Du fait des effectifs de certaines classes rurales et en fonction des cohortes d'enfants qui peuvent être très différentes d'une année à l'autre, les répartitions par classe en différents niveaux évoluent régulièrement. En effet, il s'agit de proposer une cohérence en termes d'effectif et parfois de cycles quand cela est possible entre toutes les classes de l'école. Des décloisonnements sont pratiqués, c'est-à-dire que l'enseignant qui a des élèves à la sieste l'après-midi prend un groupe d'élèves d'une autre classe pendant un temps déterminé (jusqu'au moment du lever de la sieste). Dans les entretiens certains enseignants font référence à des expériences ou bien des exemples de pratiques ou à des comparaisons relevant d'années antérieures ou d'autres niveaux.

Dans le *verbatim* suivant, I est en GS au moment de l'entretien pourtant il relate son expérience avec les enfants de TPS qui lui a permis de s'interroger sur l'approche du nombre :

2	I- ah donc sur les nombres ouais du coup là je travaille en GS j'ai longtemps travaillé avec des MS quatre ans avec les MS en plus quatre ans d'affilé donc ça ça alors que les GS c'est que ma troisième année cette année
3	Chercheur- d'accord
4	I- heu j'ai fait un petit peu de toute petite section dans une classe de toute petite section et donc là j'ai vraiment découvert amorcé l'approche du nombre et du coup ça à quand je travaillais sur ce niveau-là je me suis posé beaucoup de questions sur ben comment on aborde le nombre

G est en TPS-PS au moment de l'entretien et il décrit des jeux pratiqués avec les MS GS :

419	G- je mais je réfléchis mais je le fais p je l'ai je l'ai pas fait en petit parce que je le faisais à en je confonds un peu chez les moyens grands après je travaille sur la bataille je travaille avec des cartes j'aime bien travailler à partir des cartes aussi
420	Chercheur- hum ça c'était quand tu avais les
421	G- les moyens grands

A est en TPS-PS au moment de l'entretien et fait des liens avec son expérience en MS GS :

4	A- ouais des deux ans et trois ans ouais alors moi je vais essayer pour pas trop en oublier hein parce que ça va être un peu comme ça là tu vois donc heu mes activités au niveau de la journée elle est et comment j'aborde le nombre dans mes activités quotidiennes je l'aborde chaque matin dans les rituels déjà ça c'est un passage on va dire presque obligé et c'est un bon passage tu vois pour la pour le prem surtout avec les TPS-PS tu vois maintenant je l'ai remarqué en là peut-être même en ayant fait avant tu sais les MS les GS

Cette adaptabilité annuelle par rapport aux quatre niveaux de l'école maternelle, spécifique à un département rural, confère aux enseignants une visibilité plus large quant à l'enseignement du nombre à l'école maternelle et à l'évolution des savoirs à enseigner sur les niveaux de l'école maternelle.

3- LE TRAITEMENT DES DONNÉES AVEC LE LOGICIEL TRANSANA

3.1- Présentation du logiciel Transana

Les transcriptions des entretiens ont été réalisées à l'aide du logiciel Transana. Ce logiciel de transcription et d'analyse a été conçu et développé par David Woods[52] à l'université du Wisconsin-Madison. Quatre fenêtres sont directement accessibles : la bande audio, le codage, la transcription ainsi que la base de données.

FIGURE 39 : INTERFACES DE TRANSANA

Cette disposition privilégie la fluidité des transcriptions en ayant sur un même écran le son (ou la vidéo) et le texte. Les transcriptions sont facilitées grâce à des raccourcis-clavier qui rendent la saisie plus rapide ; la possibilité de moduler la vitesse de la bande son est aussi une aide précieuse. L'analyse qualitative des données audio et vidéo est très facilement générée à partir de repères temporels.

La particularité de Transana demeure dans la présence des repères temporels (time-code) à insérer dans le texte en fonction de l'analyse souhaitée. Ces repères temporels unissent la bande vidéo ou la bande son avec le texte. Pour cela il suffit d'encadrer les passages voulus par deux repères temporels. L'entretien se trouve alors découpé par une succession de repères temporels. La correspondance entre l'oral (la bande son ou vidéo) et l'écrit (la transcription) est facilitée. En effet, il est parfois utile de réécouter un extrait et de disposer immédiatement de sa localisation dans la transcription.

[52] David Woods que je remercie encore pour son incroyable accessibilité et sa grande disponibilité.

FIGURE 40 : CONCORDANCE ENTRE LA BANDE-SON ET LA TRANSCRIPTION (ENTRE DEUX REPÈRES TEMPORELS)

3.2- La structure hiérarchique et les mots-clés dans Transana

La structure de Transana est hiérarchique, il faut créer en premier lieu une base de données puis une série est ajoutée à l'intérieur de laquelle se trouvent des épisodes. À chaque épisode, une transcription est attachée. Des repères temporels sont intercalés dans les transcriptions afin de lier l'écrit et l'oral d'une part mais surtout afin de définir des extraits du verbatim à qui on attribue des mots clés qui donneront lieu à l'analyse qualitative. Un extrait est un passage choisi dans la transcription consigné entre deux repères temporels. Ces extraits sont regroupés dans des collections. Le passage souhaité de la transcription est mis en surbrillance, ajouté à la collection à laquelle il se rapporte et spécifié par un ou plusieurs mots clés. Ces mots-clés qui définissent la partie des propos transcris sélectionnée entre deux repères temporels constituent le cœur de l'analyse avec Transana. Ce logiciel permet également de concaténer les données en proposant des rapports sur la collection en listant et en regroupant les données.

3.3- Élaboration des mots-clés à partir de l'arbre des savoirs sur le nombre à la maternelle

La base de données intitulée « E1 » est créée ainsi que la série « Entretien » à l'intérieur de laquelle se trouveront les épisodes pour les dix enseignants A, B, C, D, E, F, G, H, I, J avec, pour chaque épisode la transcription des propos de l'enseignant. Les extraits encadrés par les repères temporels sont regroupés dans six collections (calcul, cardinal-quantité, cardinal-relations, énumération, numérations et ordinal). Les extraits sont nommés par la lettre de l'alphabet attribuée à l'enseignant suivi d'un numéro (A1, A2, etc.). Des mots-clés peuvent affiner le codage en s'attachant aux extraits sélectionnés. Toutefois, le choix minimaliste des collections et des mots-clés est suffisant pour situer les activités décrites par les enseignants sur les branches. Des collections et des mots-clés, excessivement généraux, permettent d'identifier les connaissances mathématiques spécifiques en jeux dans les savoirs. Au départ, j'envisageais un codage pour chaque sous-branche et chaque situation, par exemple pour la branche cardinal-quantité, les situations d'action, les situations de formulation, etc. à partir des mots-clés. Finalement je n'ai pas procédé ainsi car l'identification des connaissances mathématiques spécifiques ne requiert pas un tel grain d'analyse. De plus les données, parfois très générales, ne me permettaient pas de les coder sur les sous-branches dans les situations particulières.

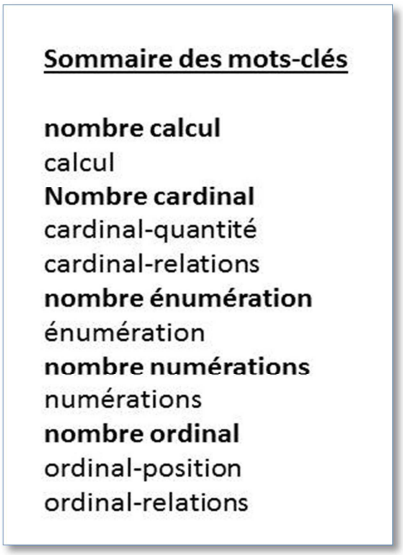


FIGURE 41 : SOMMAIRE DES MOTS CLÉS

CONCLUSION

Le choix d'un recueil de données assez tôt dans mon travail de thèse a conditionné le format de l'entretien réalisé avec les dix enseignants. La particularité liée à l'enseignement du nombre à l'école maternelle ne permet pas un questionnaire relatif aux savoirs mathématiques spécifiques. Aussi, l'interprétation des activités réalisées en classe en situations fondamentales est recherchée pour déterminer les connaissances mathématiques spécifiques du professeur. L'entretien sera centré sur les pratiques de classe des professeurs et l'explication de l'enseignement du nombre. Il visera alors à mettre en évidence les connaissances mathématiques spécifiques du professeur par le biais des situations qu'il décrit.

Le chapitre suivant rend compte de l'exploitation des données, des choix retenus pour le codage afin de déterminer les connaissances mathématiques spécifiques dans chaque branche de l'arbre.

CHAPITRE 2- DES CHOIX MÉTHODOLOGIQUES POUR PRÉSENTER LES RÉSULTATS

Pour identifier les connaissances mathématiques spécifiques, j'ai donc interviewé dix enseignants de maternelle. Je dispose d'un peu plus de huit heures trente d'enregistrements audio composés de dix entretiens d'une trentaine de minutes à environ une heure dix. Ces dix entretiens constituent mes premières données et sont nommées E1. Les transcriptions étant effectuées comme décrit précédemment, le choix des codages des données va être à présent développé (1- Des choix dans les codages) ainsi que les explications concernant le codage dans les branches de l'arbre (2– Explication du codage et premières remarques concernant les branches).

1- DES CHOIX DANS LES CODAGES

En s'intéressant uniquement aux connaissances mathématiques spécifiques, 43,5% des entretiens sont codés ; laissant ainsi une proportion importante de verbatim non codé. Toutefois, les propos non traités pourraient l'être en connaissances des élèves, en connaissances de l'apprentissage du sujet, bref, en connaissances mathématiques pour l'enseignement de façon plus large (Ball, Thames, & Phelps, 2008). Certains enseignants ont une aisance et une facilité à décrire des connaissances des élèves et de l'apprentissage du sujet, par exemple. La catégorisation complète de Ball sur les connaissances mathématiques pour l'enseignement ne se retrouve pas dans l'analyse des données car je décris uniquement les connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement dans les entretiens des dix professeurs. Comme les questions de l'entretien sont orientées sur l'enseignement du nombre et non pas sur des savoirs mathématiques spécifiques je rencontre effectivement d'autres connaissances, qui vont être signalées maintenant, à titre d'exemple.

1.1- Des connaissances mathématiques pour l'enseignement non codées

Les travaux de Ball opèrent une distinction et apportent une précision dans les connaissances mathématiques pour l'enseignement.

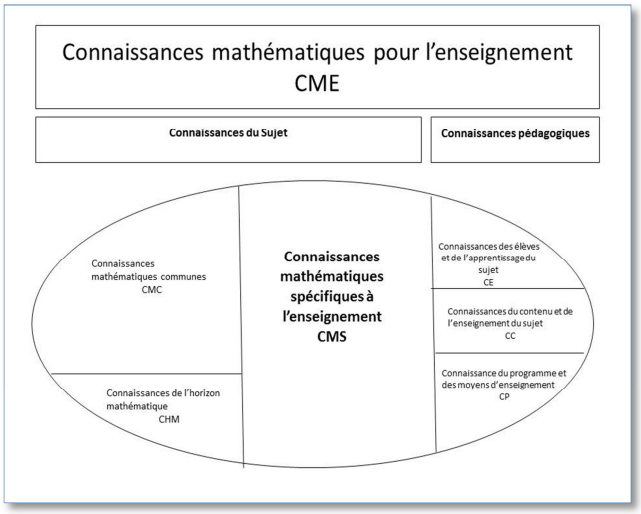


FIGURE 42 : CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES POUR L'ENSEIGNEMENT (CLIVAZ, 2011, P. 26)

a- Les connaissances du contenu et des élèves (CC)

Les connaissances du contenu mathématique permettent au professeur des ajustements face aux questions des élèves. À l'école maternelle, les questions mathématiques des élèves sont parfois surprenantes comme l'évoque E : « *moins c'est plus* » ?

120	E- souvent ils disent moins c'est plus

b- Les connaissances des élèves et de l'apprentissage du sujet (CE)

Avec ces connaissances CE, le professeur apprécie les difficultés d'apprentissage des élèves. Ici I décortique les connaissances d'une élève : la mémorisation de la suite orale des mots nombres, la synchronisation de la récitation de la suite orale sur la frise numérique, pour identifier où sont ses difficultés : « elle a déjà oublié comment il s'appelait », l'élève ne sait pas encore lire et écrire les nombres de cinq à dix.

26	I- et puis après la mémorisation d'écriture des nombres et alors moi ce qui me pose le plus de difficultés c'est quand après tous ces rituels tous les jeux qu'on peut faire sur la reconnaissance des nombres l'ordre etc. les élèves arrivent pas à mémoriser l'écriture du heu du chiffre parce que là en l'occurrence si on travaille jusqu'à jusqu'à neuf l'écriture du chiffre et là en l'occurrence cette année j'en ai une cette année six huit et neuf ça rentre pas on a beau faire cinquante mille jeux on a beau heu heu l'amener à se référer chaque fois sur la bon elle connait la suite donc elle va re pointer elle va retrouver comment il s'écrit elle revient s'assoir à sa place hop là elle a déjà oublié comment il s'appelait et alors ça je vois je sais plus comment faire on a fait plein de jeux plein de manipulation bon les lotos évidement l'associer avec le le geste les écrire en parlant en mettant un bruit et heu ça a enfin voilà j'en ai elle en particulier ça a du mal à rentrer là j'ai l'impression que ça commence à venir un peu plus mais bon on y est depuis septembre quoi bon et heu

Il s'agit aussi de connaissances pour identifier des points délicats dans l'enseignement du nombre. E constate que pour les comparaisons de quantités, le langage mathématique « moins que » fait obstacle à la compréhension.

120	E- et moins que c'est très difficile parce que bon c'est toujours plus difficile mais moins que c'est et puis ce ce truc de moins je c'est pas un mot qui ils y arrivent pas quoi parce que souvent ils disent moins c'est plus

Je relance presque systématiquement l'entretien avec des questions sur les difficultés repérées des élèves vers les connaissances des élèves et de l'enseignement pour revenir ensuite vers des activités de classe. Voici l'exemple d'une relance pour D.

251	Chercheur- justement par rapport aux difficultés est-ce que tu en as repérées des difficultés particulières par rapport aux nombres

c- Les connaissances du programme et des moyens d'enseignement (CP) :

Ces connaissances font référence aux progressions, programmations, aux items des évaluations.

6	B- sur les textes on va jusqu'à trois après heu moi trois là ils y sont et comme ils vont avoir quatre ans on passe à quatre

d- Les connaissances de l'horizon mathématique (CHM) :

Les connaissances des mathématiques au cours préparatoire (le CP) sont prises en compte surtout pour les enseignants ayant aussi ce niveau en classe. Les enseignants intègrent comme connaissances de l'horizon mathématique la difficulté de ne plus compter sur les doigts pour les élèves de l'école élémentaire.

162	J- pour la suite parce que je m'aperçois en ayant les CP que ils ont parfois du mal après à se décrocher des doigts parce que justement les doigts à la fois c'est quelque chose de familier donc qui leur est peut-être plus facile plus on les touche quoi les doigts on les vit on les mais du coup le fait qu'on les ait toujours sur soi et qu'ils soient familiers c'est aussi le problème après on peut pas les enlever

e- Les connaissances mathématiques communes (CMC)

Ces connaissances sont communes à tous ceux qui utilisent les mathématiques (ici l'aspect ordinal et cardinal des entiers).

4	G- alors bon je suis pas pro de mathématiques mais heu je je sépare quand même dans ma dans ma pratique ce qui est de l'ordre de l'apprentissage de la comptine numérique de l'ordre de l'apprentissage du nombre en tant que ordinal ou en tant que cardinal

f- Les connaissances mathématiques spécifiques pour l'enseignement (CMS)

Elles sont liées aux connaissances mathématiques communes sur l'ordinal, le cardinal, les numérations, l'énumération et le calcul mais elles sont spécifiques à l'enseignement du nombre et particulièrement à l'école maternelle. Ce sont des connaissances mathématiques spécifiques pour l'enseignement du professeur qui se révèlent en situation. Aussi la recherche des situations fondamentales dans les propos des enseignants fait l'objet de la méthodologie employée pour le codage.

1.2- La recherche de situations fondamentales à coder

Certains enseignants énoncent des compétences (l'institution incite à travailler par compétences, à l'image du socle commun de connaissances de compétences et de cultures[53]).

142	I- quand je suis lancé sur en fait je travaille par compétences alors soit heu c'est y'en a au moins c'est très variable je peux très bien en faire une chaque jour pendant pendant deux semaines et puis après peut-être moins mais enfin quand on travaille en mathématiques le nombre on le travaille quasiment tout le temps c'est soit de la comparaison soit de la construction du nombre soit là ben je travaille la suite des nombres à l'écrit mais c'est aussi travailler sur les nombres donc y'en a quasiment tous les jours ça n'empêche qu'après on peut travailler sur la logique là je travaille sur se servir comment on utilise la règle enfin voilà mais c'est pareil ça je vais faire pendant quinze jours puis après je vais pas en faire pendant un certain temps en général y'en a quasiment tous les jours

[53] « Objectifs de connaissances et de compétences pour la maîtrise du socle commun ; Démarches scientifiques : L'élève pratique le calcul, mental et écrit, exact et approché, il estime et contrôle les résultats, notamment en utilisant les ordres de grandeur. » Extrait du Bulletin officiel n°17 du 23 avril 2015.

Dans l'exemple précédent, I énonce pour son enseignement du nombre : la comparaison (sans doute de quantités différentes), la construction (peut-être les décompositions des nombres, compte tenu de l'ensemble de son entretien), la suite des nombres à l'écrit (qu'il travaille en mettant en valeur la position des chiffres dans la suite des nombres à l'écrit), puis il relate un travail sur la logique et l'utilisation de la règle (apprendre à tenir la règle pour tracer des droites).

Mais de façon spontanée, les enseignants de l'école maternelle entrent en propos en décrivant des exemples d'activités. Le premier travail consiste à interpréter les propos des enseignants en situations fondamentales, quand cela est possible. Il s'agit de comprendre l'activité, d'analyser le milieu de la situation par rapport aux connaissances naturalisées et d'anticiper sur l'évolution des connaissances visées et pressenties par l'activité. Parfois l'enseignant déroule l'activité au sens de description de l'évolution des connaissances, mais parfois il donne juste des exemples d'activités en feuilletant un cahier d'élève.

Le premier raisonnement sur les données est produit en termes de situations : identifier les situations et repérer leur position dans les branches décrites dans l'arbre des savoirs.

1.3- Coder des situations emboitées

Les situations sont emboîtées et, de ce fait, elles sont ordonnées[54]. Le travail réalisé précédemment sur les situations fondamentales et l'imbrication des milieux définit un ordre. Par conséquent, je considère que les situations visibles pour le professeur (et décrites à partir d'activités) sont des représentants de situations qui sont plus ou moins avancées sur une branche (au sens de l'ordre des situations emboîtées). Cette analyse à partir des situations emboitées me permet d'opérer des choix pour légitimer la branche. Toutefois, le codage choisi ne rend pas compte de l'emboîtement des situations. C'est à dire que les extraits sont seulement codés sur une branche. Alors que l'identification des branches se fait par les situations emboitées, les extraits codés ne reflètent pas le niveau des situations sur la branche. Une analyse qualitative des extraits codés, branche par branche, me permettra de positionner les situations.

1.4- Des niveaux d'activité codés en complément

Afin de compléter l'analyse des entretiens des professeurs, le recours au modèle des niveaux caractéristiques de l'activité du professeur offre un autre regard et une autre grille de lecture des entretiens qui enrichit les observations. Pour rappel, l'activité du professeur est détaillée en niveaux afin de « démêler les pratiques qui sont imbriquées » (Margolinas, 2002a, p. 142).

Niveau noosphérien ou idéologique	+ 3
Niveau de construction ou de conception d'un thème	+ 2
Niveau de projet de leçon	+ 1
Niveau de la situation didactique	0
Niveau d'observation ou de dévolution	- 1

FIGURE 43 : RÉSUMÉ DES NIVEAUX D'ACTIVITÉ DU PROFESSEUR (MARGOLINAS, 2002, P. 143)

[54] Un peu comme avec des cubes emboîtés : le plus petit est celui qui rentre dans tous les autres, puis etc.

Par rapport à mes données, je suis amenée à considérer le niveau de projet de leçon et le niveau de la situation didactique ensemble, en effet, n'assistant pas à la séance en classe il ne m'est pas possible de "démêler les pratiques" relevant du niveau (+1) de celles du niveau didactique, niveau (0) & (+1). La distinction des propos déclarés par rapport au niveau idéologique, à la conception du thème sur le nombre, au projet de la leçon avec la situation didactique et à l'observation des élèves permet de constater les va-et-vient entre ces différents niveaux d'activités et de percevoir notamment comment l'observation des élèves entre en considération dans le projet de leçon ou bien encore dans la conception du thème. Ce modèle complète et offre un autre regard dans l'analyse des entretiens des cinq enseignants principalement orientée sur les cinq savoirs (chapitre 4).

Les transcriptions sont reprises et interprétées à la lumière des quatre niveaux d'activité définis pour cet entretien (selon un style spécifique mis en lumière par un code couleur). Par la suite, je relate les indications des enseignants pour chacun des niveaux afin de compléter l'analyse par enseignant (chapitre 4).

FIGURE 44 : EXTRAIT DE TRANSCRIPTION DE A ANALYSÉE EN NIVEAUX D'ACTIVITÉ

2– EXPLICATION DU CODAGE ET PREMIÈRES REMARQUES CONCERNANT LES BRANCHES

Pour identifier les connaissances mathématiques spécifiques du professeur l'utilisation d'un seul mot-clé est recherchée. En effet, repérer la branche de l'arbre des savoirs est suffisant pour obtenir une cartographie des connaissances mathématiques spécifiques du professeur. Certains arbitrages ont été nécessaires pour décider du codage des extraits (2.1- Des facilités et des obstacles pour le codage) et de la branche sur laquelle coder les extraits. En effet, parfois la frontière entre deux branches est très étroite (2.2- Des choix pour le codage spécifique à chaque branche).

2.1- Des facilités et des obstacles pour le codage

a- Des savoirs clairement énoncés

Parfois, il n'y a pas d'ambiguïté, l'enseignant énonce clairement le savoir enseigné. C'est le cas avec E qui expose un travail sur l'ordinalité.

192	E- pour heu pour les animaux qui passent là [le directeur de l'école entre dans la classe et transmet une information] oui donc allo docteur le premier le deuxième et ça du coup grâce à ce livre et ben on a pu heu travailler toute toute l'ordinalité là ça a été fait en quelques séances super ouais

E fait référence à l'album de littérature de jeunesse (Junge & Jandl, 2000) où les personnages installés sur une chaise dans la salle d'attente, se rendent chez le docteur à tour de rôle, le premier, le deuxième, etc. E exploite cet album pour diriger son enseignement sur les mots nombres ordinaux : le premier, le deuxième, le troisième, le quatrième et le cinquième. Il s'agit ici de l'aspect ordinal du nombre qui est décrit à travers l'apprentissage de la suite des mots nombres ordinaux à partir de l'histoire de l'album.

b- Un lexique commun partagé

La difficulté parfois à trouver les mots qui désignent le concept atteste d'une certaine incertitude des enseignants. Un répertoire commun de définitions partagées n'est pas toujours disponible pour évoquer les savoirs.

70	D- je trouve que c'est c'est très dur de de passer à cette abstraction d'un d'un d'une globalité à une extraction d'un nombre j'ai pas les termes peut être bien corrects c'est beaucoup plus facile par exemple pour eux de dénombrer une petite quantité

D pense qu'il n'a « pas les termes peut être bien corrects ».

15	J- la notion de quantité qui est difficile à enfin qui pour moi est difficile à aborder et puis après y'a l'aspect ordinal donc avec la comptine numérique qui me parait l'aspect plus facile à aborder

J annonce l'aspect ordinal pour la comptine numérique, alors qu'elle sera codée en numérations et fait référence plus particulièrement à la numération orale à travers la mémorisation de la suite orale des mots nombres. L'aspect ordinal du nombre reste flou pour J (Margolinas & Wozniak, 2015).

c- Connaissances partagées entre chercheur et enseignants interrogés

Mon expérience de CPD maternelle et d'enseignante en école maternelle fait que nous partageons, avec les enseignants interrogés, des connaissances implicites sur l'école maternelle, parfois même des références communes (animations pédagogiques, conférences). De ce fait, ils font parfois allusion de façon très succincte à des situations dont ils savent qu'elles sont partagées. Je m'appuie sur cette connaissance implicite de terrain pour interpréter au mieux les références de l'enseignant, quand pour moi, en tant que récepteur, il n'y a pas d'ambiguïté.

Dans l'exemple suivant, A fait référence aux propos de Jean-François Favrat[55] sur la quantité tenus lors d'une conférence donnée dans le cadre de l'AGEEM[56] "Les mathématiques à la maternelle" en 2011, à laquelle nous avions participé, A et moi.

12	A- à qui ça correspond et si ça correspond à la photo bien entendu de l'enfant qui n'est pas accrochée à mon arbre heu du matin donc on fait là aussi et ça je l'ai appris heu avec l'année dernière dernière le truc heu la dernière conférence à laquelle on a assisté où il en a parlé des rap de des rapports de de quantité donc là j'aborde le rapport avec la quantité tu forma formila formaliseras davantage hein mes propos d'accord hein donc hein

Ces trois exemples donnent un aperçu des facilités, des difficultés et de l'implicite rencontrés lors du codage des extraits.

2.2– Des choix de codage pour les branches

Situer la situation, en fonction de l'activité décrite par l'enseignant, dans le cadre des situations emboitées me permet d'identifier la branche des savoirs visée. Je suis amenée parfois à analyser le milieu de la situation à la recherche des connaissances naturalisées pour déterminer la branche qui la porte. En effet, une même activité peut parfois s'imaginer sur deux branches différentes. La frontière entre les branches est parfois très fine, c'est pourquoi, en fonction du contexte de la situation, certains choix pour le codage sont assumés afin d'offrir une régularité de traitement pour les situations. Les frontières entre les branches sont présentées.

a- Les frontières avec la branche calcul

Les frontières entre calcul et cardinal-relations ou entre calcul et cardinal-quantité ainsi que calcul et numération figurée et calcul et ordinal sont parfois très étroites.

Sur la branche calcul sont codées toutes les situations concernant une utilisation des nombres en vue de réaliser une addition, une soustraction, une distribution ou un partage. Cette branche pourrait se prolonger au-delà de l'école maternelle et se retrouver au CP avec l'enseignement des opérations. Cette vision des connaissances à long terme possible sur cette branche constitue une aide considérable pour coder les extraits en se demandant « cette activité pourrait-elle se prolonger au CP ? ». Cette possibilité d'activité en devenir représente l'évolution des connaissances le long de la branche, l'année suivante, année plus légitime pour le calcul et les opérations.

Toutes les situations qui permettent de trouver un résultat à l'aide des doigts sont également codées dans calcul. J'opère une distinction entre montrer trois avec les doigts pour entrainer la reconnaissance d'une configuration particulière, au sens des nombres figuraux (Brissiaud, 2014a), se souvenir de la quantité en réalisant une collection intermédiaire matérielle avec trois doigts et réaliser un calcul à l'aide des doigts. Ce dernier cas sera codé dans calcul, le précédent (se souvenir de la quantité) dans cardinal-quantité et le premier exemple dans numérations.

Pour la frontière entre calcul et cardinal-relations, l'activité « combien il lui manque de bougies pour aller jusqu'à dix », décrite par J, est codée dans calcul comme situation de complément (Vergnaud). Elle demande entre autre des connaissances pour surcompter,

[55] Jean-François Favrat était maitre de conférences en didactique des mathématiques à l'IUFM de Montpellier.

[56] Association Générale des Enseignants des Écoles et classes Maternelles publique

ajouter un et encore un, et encore un, réciter la suite orale des mots nombre à partir de l'âge de l'enfant, s'arrêter à dix, s'aider à l'aide des doigts, des jetons (collection intermédiaire matérielle). La connaissance des décompositions du nombre dix va évidemment aider l'élève, mais en GS, les connaissances des décompositions du nombre dix ne sont pas des connaissances naturalisées faisant partie du milieu de la situation des compléments à dix.

Les branches cardinal-relations et calcul sont très proches aussi par rapport à la succession qui correspond à plus ou moins un, celle-ci est fortement liée à l'addition et à la soustraction mais aussi aux décompositions qui sont proches des compléments à dix, des paires numériques, ou des additions à trou. Le passage par le cinq puis plus tard par le dix est très proche de la numération décimale de position. Une fois encore, si les connaissances du nombre quatre se retrouvent dans la situation du cinq et si la situation suivante porte sur l'étude du six, alors les connaissances évoluent au fur et à mesure de l'avancée dans les nombres sur la branche cardinal-relations. Les connaissances utiles pour réussir orientent également mes choix pour le codage.

166	H- voilà et plusieurs fois donc on va tous passer mais non alors elle est jamais contente ça les amuse parce qu'elle est exaspérante mais non elle en veut pas cinq elle en veut sept maintenant mais non elle en veut pas sept elle en veut trois voilà
167	Chercheur- et des fois tu fais des retours là comme ça
168	H- ah oui oui et c'est finalement plus simple presque parce que elle en veut trois et il suffit que parmi les neuf je vois trois et j'écarte tous les autres
169	Chercheur- d'accord
170	H- finalement que
171	Chercheur- ouais ouais
172	H- voilà là ça serait plus compliqué de d'en rajouter que d'enlever

H fait référence à l'album de littérature de jeunesse (Carle, 2001). Tout au long de la journée, H va jouer avec la coccinelle qui n'est jamais contente du nombre de points qu'elle a sur le dos, proposant des nombres de points tantôt plus élevés, tantôt plus petits et compris entre zéro et dix. Alors que les connaissances sont plus élémentaires, comme le précise H, et portent finalement sur les connaissances de la collection demandée, c'est-à-dire sur le cardinal de la collection trois ici, je décide toutefois de privilégier cette activité dans la branche calcul. Il y a la partition d'une collection en deux sous-ensembles, mais il s'agit ici plus d'une cohérence par rapport à la situation que d'une prise en compte des connaissances de l'élève. En effet, l'élève s'appuie sur des connaissances naturalisées de la quantité trois (qu'il peut avoir d'ailleurs simplement par *subitizing*) pour comprendre le sens de la soustraction. C'est pourquoi je code cet extrait dans calcul. Pour les mêmes raisons, je ne code pas cet extrait dans les décompositions du nombre neuf où l'on voit trois et encore six, car H ne présente pas cette activité en ce sens.

Pour la frontière entre calcul et ordinal, les déplacements sur une piste mobilisent des connaissances d'ordinalité, avec l'orientation, le sens du déplacement, la prise en compte de la case d'origine, par contre les sauts de deux cases ajoutés ou retirés sur une piste sont pris en compte dans calcul.

b- Les frontières avec la branche numérations

Dans cette branche, sont regroupées la numération orale, la numération écrite et la numération figurée. Très généralement, la numération orale concerne la suite orale des

mots nombres. Quant aux numérations écrite et figurée, il s'agit de tout ce qui touche à la lecture et l'écriture des chiffres, des nombres, des constellations de doigts, de dés ou autres représentations conventionnelles ou pas. Le travail de lecture prend appui sur la lecture globale, que les enseignants nomment indifféremment reconnaissance globale, reconnaissance visuelle, discrimination visuelle. Le travail sur l'oral et l'écrit repose également sur les spécificités du système décimal de position et les connaissances sur cette branche peuvent aller jusqu'à des connaissances comme le tableau des nombres, le passage des dizaines, les régularités, mais ceci est une possibilité à l'horizon de la branche. Voilà pourquoi numérations, tout comme calcul d'ailleurs, sont des dénominations de branche qui permettent d'appréhender les connaissances dans un *continuum* avec le cycle 2, avec une vision à plus long terme des connaissances à venir.

Toutes situations qui entrainent la mémorisation de la suite orale des mots nombres sont codées dans numérations. Se pose alors la question de situations pour compter, compter les présents, compter les filles, les garçons, les enfants qui prennent le car ; compter ici c'est l'action d'associer la suite orale des mots nombres et l'énumération d'une collection. Cette suite orale des mots nombres n'est donc plus chantée ou récitée sans support puisqu'à chacun des éléments de la collection est associé un mot nombre. Quand l'enseignant propose de compter les présents, tous les matins en collectif, au moment du rituel, souvent l'enfant de service compte alors les enfants assis sur les bancs. Parfois, l'enseignant prend en charge l'énumération en touchant la tête des élèves un par un avec la main de l'enfant de service en régulant le toucher des têtes ou en récitant la suite orale des mots nombres.

Le comptage décrit ici sert plus à entrainer la récitation de la suite orale des mots nombres et l'énumération de la collection qu'à accéder au dénombrement. C'est pourquoi ces extraits sont codés dans numération orale pour renforcer les connaissances de la suite orale des mots nombres.

Ces activités-là, très courantes à l'école maternelle, sont ritualisées tous les jours pour favoriser la mémorisation de la suite orale des mots nombres.

La proximité avec la branche cardinal-quantité est également questionnée. En effet, quelle différence pour de petites quantités entre une collection de trois jetons bleus disposés sur la table en diagonale et une étiquette de la face trois d'un dé ?

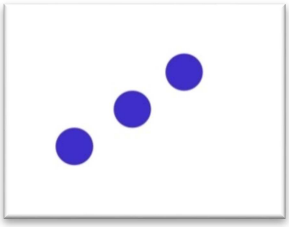


FIGURE 45 : TROIS JETONS BLEUS SUR UNE TABLE

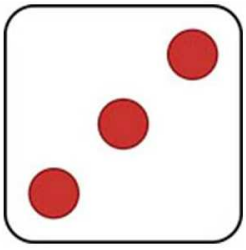


FIGURE 46 : LA FACE TROIS D'UN DÉ

Les enseignants exercent la connaissance des constellations, en entrainant le regard à la reconnaissance visuelle globale, cette perception globale permet de lire, d'associer le mot nombre avec la configuration spatiale des constellations du dé. L'appui sur le *subitizing* est de mise ici. Cet arbitrage entre quantité, reconnaissance globale et *subitizing* sera alors toujours recherché quand il y aura un doute autour du codage de l'activité. La difficulté rencontrée dans le codage est soutenue par le questionnement de certains psychologues cognitifs :

« Une question reste mal résolue, concernant la continuité ou la discontinuité entre le subitizing et l'estimation approximative, voire la quantification précise : reposent-ils sur les mêmes processus ou sur des processus différents ? » (Fayol, 2013, p. 40)

Les jeux de société tels les dominos ou memory et autres jeux avec les dés entrainent à cette lecture rapide de ces configurations et sont codés dans numérations. Là encore en se projetant au CP les images mentales des constellations du dé pourront être des connaissances naturalisées qui enrichiront le milieu des situations de calcul.

CONCLUSION

Les choix méthodologiques présentés ont façonné le codage des propos des enseignants. L'imbrication des milieux, les situations emboitées, les connaissances naturalisées ont joué un rôle déterminant pour identifier les situations et les coder sur les branches des savoirs correspondants.

Plusieurs codages par transcription ont été nécessaires, un test comparatif sur une transcription a été réalisé avec ma directrice de thèse ce qui a eu pour effet de réajuster et de préciser les explications données sur les branches. Un travail d'harmonisation des extraits des dix enseignants a été entrepris à partir des rapports sur les collections issus de Transana, la vérification des codages sur l'ensemble des transcriptions a été menée grâce aux rapports sur les séries. Enfin, le travail approfondi par enseignant a permis de déplacer quelques extraits d'une collection à l'autre. Après la description des précautions méthodologiques engagées dans ce travail, l'analyse des données peut livrer ses résultats (chapitre 3 et chapitre 4).

CHAPITRE 3- ANALYSE GLOBALE DES RÉSULTATS À L'AIDE DE L'ARBRE DES SAVOIRS DU NOMBRE

Il s'agit de comprendre ce que peut être l'enseignement du nombre à l'école maternelle des professeurs grâce à leurs connaissances mathématiques spécifiques obtenues à l'aide de l'arbre des savoirs du nombre. Il sert de modèle à l'analyse des données mais aussi à l'analyse des programmes d'enseignement. Les programmes sont d'abord analysés, à la fois pour éprouver l'arbre des savoirs des nombres comme modèle, mais aussi pour pouvoir situer les propos des enseignants (1- Un outil de lecture des programmes d'enseignement). Le programme de 2015, qui n'était pas encore en discussion au moment des entretiens, est tout de même traité ici. Ensuite, les résultats sont analysés globalement, branche par branche (2- Un outil d'analyse des branches), l'analyse enseignant par enseignant étant l'objet du chapitre suivant (chapitre 4).

La question posée est donc :

Quelles connaissances mathématiques spécifiques pour l'enseignement du nombre à l'école maternelle se dégagent de l'analyse des entretiens ?

1- L'ARBRE DES SAVOIRS : UN OUTIL DE LECTURE DES PROGRAMMES D'ENSEIGNEMENT

Les programmes d'enseignement sont le fruit de volonté et d'orientations politiques, l'arbre des savoirs du nombre offre une lecture mathématique des savoirs. Aussi, la lecture des programmes avec le filtre de l'arbre des savoirs met en lumière les directions politiques portées par les programmes en identifiant les savoirs mis à l'honneur ou les savoirs abandonnés.

1.1-Lecture des programmes de l'école maternelle de 1882 à nos jours

a- Programmes de la maternelle de 1882

La partie qui est relative au nombre dans les programmes 1882 s'intitule « Calcul », le calcul mental est présent dès la section des petits enfants (de deux à cinq ans) ; des « additions et des soustractions sur les nombres concrets et ne dépassant pas la première centaine » sont également prévues pour la section des enfants de cinq à sept ans. En classant ces recommandations de 1882 dans les branches de l'arbre des savoirs du nombre correspondantes, les branches énumération et ordinal ne sont pas du tout renseignées. Au-delà de l'orientation « calcul » très nette impulsée par ces programmes 1882, l'étude des dix premiers nombres et des relations entre les nombres à partir des expressions comme demi, moitié, tiers, quart est renforcée par le calcul mental sur les dix premiers nombres. Les branches cardinal-relations et calcul sont imbriquées. Pour les plus jeunes la familiarisation avec les cinq premiers mots nombres ainsi que moitié et demi est plutôt appréhendée comme la mémorisation d'une chanson (numération orale) ou avec l'appui des configurations conventionnelles ou pas (numération figurée) et se trouve donc sur la branche numérations. Bien plus que cette simple mémorisation, les programmes 1882 décrivent les « premiers éléments de la numération orale et écrite ». Étant donné que les

additions et soustractions sont réalisées sur des nombres ne dépassant pas la centaine et que les quatre opérations sont entrainées sur des nombres à deux chiffres, la numération orale et écrite doit poser les fondements du système de numération décimale de position.

Analyse des savoirs des programmes de 1882 à partir des cinq branches de l'arbre des savoirs du nombre				
Cardinal	Ordinal	Calcul	Numérations	Énumération
Étude des dix premiers nombres et des expressions demi, moitié, tiers, quart.		Calcul mental sur les dix premiers nombres. Petits exercices de calcul mental. Addition et soustraction sur les nombres concrets et ne dépassant pas la première centaine. Les quatre opérations sur les nombres de deux chiffres.	Familiariser l'enfant avec les termes : un, deux, trois, quatre, cinq, moitié, demi ; l'exercer à compter jusqu'à 10. Premiers éléments de la numération orale et écrite.	

b- Programmes maternelle - Note du 18 octobre 1945

Dans ces programmes, les groupements d'objets sont systématiquement réalisés avec tous les nombres de deux à dix, ce qui permet l'étude et l'entrainement des dix premiers nombres, successivement ; les groupements se trouvent sur la branche cardinal-relations. Pour la GS ces groupements sont focalisés sur les cinq premières dizaines mais dans une étude systématique, ce n'est pas la numération décimale qui est visée. La représentation des nombres de l'unité jusqu'à cinquante peut être pensée sur la branche cardinal-relations par son caractère systématique et successif. Mais cela pourrait aussi être entendu sur la branche numérations et par représentation des nombres il s'agirait de l'écriture chiffrée, de configurations conventionnelles ou pas. La branche calcul est focalisée sur des exercices de calcul mental sur les quatre opérations et des exercices écrits de calcul avec dessins correspondants. Rien n'est dit sur l'aspect ordinal et l'énumération. Pour la suite orale des mots nombres celle-ci est implicitement traitée et entrainée à partir des exercices de groupements systématiques et successifs.

Analyse des savoirs des programmes de 1945 à partir des cinq branches de l'arbre des savoirs du nombre				
Cardinal	Ordinal	Calcul	Numérations	Énumération
Groupements très variés d'objets semblables : 2, 3, 4, 5, jusqu'à 10 ; et compte de ces objets (sacs individuels de cailloux, bâtonnets, coquillages, etc.). Groupements d'objets : 20, 30, 40, jusqu'à 50 (sacs individuels). Demi ; moitié ; tiers ; quart. Représentation des nombres, de l'unité jusqu'à 50.		Petits exercices de calcul mental : additions, soustractions, multiplications, divisions. Petits exercices écrits de calcul avec dessins correspondants.		

c- Orientations pour l'école maternelle de 1986

Les orientations préconisées en 1986 marquent un changement profond de conception de l'enseignement à l'école maternelle. À partir de 1986 les orientations pour l'école maternelle allègent sensiblement les contenus d'enseignement. Le calcul disparait, l'enfant découvre et construit le nombre. L'apprentissage de la comptine numérique fait son apparition, la correspondance terme à terme est énoncée. Il ne s'agit là que d'orientations pour l'école maternelle qui préfigurent l'abandon de certains savoirs (comme le calcul et l'enseignement des dix premiers nombres) au profit de nouveaux savoirs (comme la mémorisation de la suite orale des mots nombres). L'ordinalité et l'énumération ne sont toujours pas traitées en tant que savoirs à enseigner en 1986.

Analyse des savoirs des orientations de 1986 à partir des cinq branches de l'arbre des savoirs du nombre				
Cardinal	Ordinal	Calcul	Numérations	Énumération
Il établit des sériations, c'est-à-dire ordonne des collections en fonction de propriétés ; Il compare des collections terme à terme.			Il apprend et récite la comptine numérique.	

d- Programmes maternelle 1991 (en termes de compétences)

Dès 1989 avec la mise en place des cycles et à partir de 1991 avec les programmes rédigés en compétences, les compétences d'ordre mathématiques sont partagées en résolution de problèmes, approche du nombre et calcul. Toujours aucun savoir sur l'ordinalité ou l'énumération. La suite orale des mots nombres est utilisée pour dénombrer. Les procédures non numériques et numériques sont décrites avec la même importance. Le calcul reprend de l'importance.

Analyse des savoirs des programmes de 1991 à partir des cinq branches de l'arbre des savoirs du nombre				
Cardinal	Ordinal	Calcul	Numérations	Énumération
L'enfant doit pouvoir identifier certaines propriétés des objets en vue de les comparer ; les trier ; les classer ; les ordonner ; Mettre en œuvre une procédure numérique (dénombrement, reconnaissance globale de certaines quantités...) ou non numérique (correspondance terme à terme...) pour réaliser une collection ayant le même nombre d'objets qu'une autre collection ; Comparer des collections.		Partager des collections ; Réaliser une distribution ; Résoudre des problèmes liés à l'augmentation et à la diminution de quantités.	Étendre la suite des nombres connus et savoir l'utiliser pour dénombrer (exemple : compter le nombre de filles et le nombre de garçons dans la classe...).	

e- Programmes de la maternelle 1995

Dans les programmes de 1995, les procédures non numériques priment sur les procédures numériques. L'estimation des quantités apparait dans les programmes. Le calcul est toujours présent grâce à la résolution de petits problèmes additifs et soustractifs et de distribution. L'aspect ordinal du nombre fait son entrée dans les programmes 1995 pour décrire des hiérarchies et des rangements. Le recours à la suite orale des mots nombres est préconisé pour la hiérarchisation de séries, les rangements seront traités par le biais de situations de comparaison de dimensions des objets à l'aide d'un étalon.

Analyse des savoirs des programmes de 1995 à partir des cinq branches de l'arbre des savoirs du nombre				
Cardinal	Ordinal	Calcul	Numérations	Énumération
Les quantités à estimer ou à produire peuvent dépasser ses possibilités de dénombrement. Progressivement, il apprend à construire un certain nombre de procédures et d'outils pour dénombrer les collections d'objets : estimation relative et globale des quantités (plus, moins, pareil)	Le nombre permet aussi, par son aspect ordinal, de décrire des hiérarchies et des rangements. Les activités porteront sur : la hiérarchisation de séries en utilisant la comptine numérique la comparaison de certaines dimensions des objets en utilisant un étalon.	À travers la résolution de petits problèmes additifs ou soustractifs et de situations de distribution d'objets, l'enfant découvre les fonctions du nombre, en particulier comme représentation de la quantité.	Comparaison de collections à des collections naturelles (doigts de la main) ou à des collections repères (nombre de places autour de la table...) ; Fixation et extension de la comptine parlée ; Dénombrement de petites collections par une perception instantanée dénombrement en utilisant la comptine.	

f- Programmes de la maternelle de 2002

Pour construire des collections équipotentes les situations développées ouvrent la possibilité à des situations d'action (avec l'anticipation) et avec éloignement dans l'espace ainsi que des collections intermédiaires orales et écrites. Une part belle de l'enseignement de la quantité est donnée aux procédures non numériques. L'aspect ordinal du nombre est à présent au service du repérage de positions dans une liste ordonnée d'objets. Les déplacements sur les positions relèvent de l'aspect ordinal du nombre plus que du calcul puisqu'il est fait référence à des positions « juste avant » ou « juste après » la position de base. Ces notions d'antécédent ou de successeur permettent l'étude des relations au voisinage des positions. L'orientation « en avant » ou « en arrière » est également une des caractéristiques de l'ordinalité. La branche calcul est toujours abondée par des problèmes additifs et soustractifs, mais aussi de réunion, de partage et de distribution. Les opérations usuelles ne sont pas utilisées. La reconnaissance globale de très petites quantités notamment organisées en configurations conventionnelles est préconisée dans ces programmes 2002. La suite orale des mots nombres jusqu'à trente est à présent énoncée. La lecture de l'écriture chiffrée est également proposée. Il n'est rien précisé quant à l'énumération.

Analyse des savoirs des programmes de 2002 à partir des cinq branches de l'arbre des savoirs du nombre				
Cardinal	Ordinal	Calcul	Numérations	Énumération
Comparer des quantités en utilisant des procédures non numériques ou numériques ; Réaliser une collection qui comporte la même quantité d'objets qu'une autre collection (visible ou non, proche ou éloignée) en utilisant des procédures non numériques ou numériques, oralement ou avec l'aide de l'écrit.	Repérer des positions dans une liste ordonnée d'objets. Les nombres peuvent être utilisés pour anticiper le résultat d'une action sur positions (déplacements en avant ou en arrière).	Résoudre des problèmes portant sur les quantités (augmentation, diminution, réunion, distribution, partage) en utilisant les nombres connus, sans recourir aux opérations usuelles.	Reconnaître globalement et exprimer de très petites quantités (de un à trois ou quatre). Reconnaître globalement et exprimer des petites quantités organisées en configurations connues (doigts de la main, constellations du dé) ; Connaître la comptine numérique orale au moins jusqu'à trente ; Dénombrer une quantité en utilisant la suite orale des nombres connus ; Associer le nom des nombres connus avec leur écriture chiffrée en se référant à une bande numérique.	

g- Programmes de la maternelle BO du 19 juin 2008

Dans les programmes de 2008, les situations proposées conduisent à dépasser l'approche perceptive globale des collections. Le rôle de l'enseignement est précisé ainsi que quelques variables des situations. La quantité est représentée, travaillée à partir de comparaison et de résolution problème. L'ordinalité est recentrée sur le repérage des positions dans une liste ordonnée. Une première entrée dans le calcul est préconisée pour l'école maternelle en insistant sur le sens des opérations. Il est fait mention des savoirs qui incombent au CP concernant la technique opératoire. Le travail sur la suite écrite est renforcé, à partir du calendrier, des jeux de déplacements sur une piste, du tracé des chiffres qui fait son apparition dans les programmes 2008.

Analyse des savoirs des programmes de 2008 à partir des cinq branches de l'arbre des savoirs du nombre				
Cardinal	Ordinal	Calcul	Numérations	Énumération
Représentation de la quantité. Les situations proposées aux plus jeunes enfants (distributions, comparaisons, appariements...) les conduisent à dépasser une approche perceptive globale des collections. L'accompagnement qu'assure l'enseignant en questionnant (comment, pourquoi, etc.) et en commentant ce qui est réalisé avec des mots justes, dont les mots-nombres, aide à la prise de conscience. La taille des collections, le fait de pouvoir agir ou non sur les objets sont des variables importantes que l'enseignant utilise pour adapter les situations aux capacités de chacun. Comparer des quantités, résoudre des problèmes portant sur les quantités.	Moyen de repérer des positions dans une liste ordonnée d'objets.	Dès le début, les nombres sont utilisés dans des situations où ils ont un sens et constituent le moyen le plus efficace pour parvenir au but : jeux, activités de la classe, problèmes posés par l'enseignant de comparaison, d'augmentation, de réunion, de distribution, de partage. À la fin de l'école maternelle, les problèmes constituent une première entrée dans l'univers du calcul mais c'est le cours préparatoire qui installera le symbolisme (signes des opérations, signe "égal") et les techniques.	L'acquisition de la suite des nombres (chaîne numérique) et de son utilisation dans les procédures de quantification. Progressivement, les enfants acquièrent la suite des nombres au moins jusqu'à 30 et apprennent à l'utiliser pour dénombrer. La suite écrite des nombres est introduite dans des situations concrètes (avec le calendrier par exemple) ou des jeux (déplacements sur une piste portant des indications chiffrées). Les enfants établissent une première correspondance entre la désignation orale et l'écriture chiffrée. L'apprentissage du tracé des chiffres. Mémoriser la suite des nombres au moins jusqu'à 30. Dénombrer une quantité en utilisant la suite orale des nombres connus. Associer le nom de nombres connus avec leur écriture chiffrée.	

h- Programme de la maternelle BO du 26 mars 2015

Le[57] programme de la maternelle publié au BO en mars 2015 précède les programmes pour les cycles deux, trois et quatre (du CP à la troisième). La branche cardinal-relations est renforcée par les décompositions-recompositions des nombres et l'itération de l'unité pour construire les nombres les uns après les autres. La lecture de l'écriture chiffrée jusqu'à dix est à présent précisée. Les configurations des dés, des doigts n'apparaissent plus dans la numération figurée (et donc sur la branche numérations) mais sur la branche cardinal, comme des « symboles analogiques, verbaux ou écrits, conventionnels ou non conventionnels pour communiquer des informations orales et écrites sur une quantité ». L'énumération entre dans le programme 2015 comme une capacité qui doit être enseignée. La branche calcul se centre sur les compléments à dix additifs et soustractifs.

[57] Le programme de 2015 ne concerne que l'école maternelle, le cycle 1, on ne parle plus alors « des programmes » mais du programme.

Analyse des savoirs des programmes de 2015 à partir des cinq branches de l'arbre des savoirs du nombre				
Cardinal	Ordinal	Calcul	Numérations	Énumération
Évaluer et comparer des collections d'objets avec des procédures numériques ou non numériques. Réaliser une collection dont le cardinal est donné. Utiliser le dénombrement pour comparer deux quantités, pour constituer une collection d'une taille donnée ou pour réaliser une collection de quantité égale à la collection proposée. Mobiliser des symboles analogiques, verbaux ou écrits, conventionnels ou non conventionnels pour communiquer des informations orales et écrites sur une quantité. Avoir compris que le cardinal ne change pas si on modifie la disposition spatiale ou la nature des éléments. Avoir compris que tout nombre s'obtient en ajoutant un au nombre précédent et que cela correspond à l'ajout d'une unité à la quantité précédente. Quantifier des collections jusqu'à dix au moins ; les composer et les décomposer par manipulations effectives puis mentales. Parler des nombres à l'aide de leur décomposition.	Utiliser le nombre pour exprimer la position d'un objet ou d'une personne dans un jeu, dans une situation organisée, sur un rang ou pour comparer des positions.	Dire combien il faut ajouter ou enlever pour obtenir des quantités ne dépassant pas dix.	Dire la suite des nombres jusqu'à trente. Lire les nombres écrits en chiffres jusqu'à dix.	Cette capacité doit être enseignée selon différentes modalités en faisant varier la nature des collections et leur organisation spatiale car les stratégies ne sont pas les mêmes selon que les objets sont déplaçables ou non (mettre dans une boîte, poser sur une autre table), et selon leur disposition (collection organisée dans l'espace ou non, collection organisée-alignée sur une feuille ou pas).

2- L'ARBRE DES SAVOIRS : UN OUTIL D'ANALYSE DES BRANCHES

Dans ce paragraphe, les résultats tentent de faire apparaitre ce qui est partagé par plusieurs enseignants, au-delà de la spécificité de chacun qui fera l'objet du chapitre suivant. Il s'agit de recenser et de présenter globalement les différentes connaissances mathématiques spécifiques des enseignants mais aussi d'identifier les situations qui n'apparaissent pas dans les résultats par rapport à l'analyse *a priori* initiée à partir de l'arbre des savoirs.

Le tableau suivant (Tableau 8: Nombre d'épisodes extraits de Transana) rapporte le nombre d'extraits codés par branche ainsi que la durée totale des propos codés relatifs aux savoirs : numérations, cardinal, calcul, ordinal et énumération.

Branche	Nombre d'extraits	Durée totale
Cardinal	363	1heure 28 minutes et 15 secondes
Numérations	341	1 heure 28 minutes et 4 secondes
Calcul	76	23 minutes et 1 seconde
Ordinal	55	9 minutes et 3 secondes
Énumération	43	9 minutes et 36 secondes

TABLEAU 8: NOMBRE D'ÉPISODES EXTRAITS DE TRANSANA

Un premier regard sur le nombre d'extraits révèle la présence des cinq branches principales de l'arbre des savoirs, c'est-à-dire des cinq savoirs pour l'enseignement du nombre à l'école maternelle.

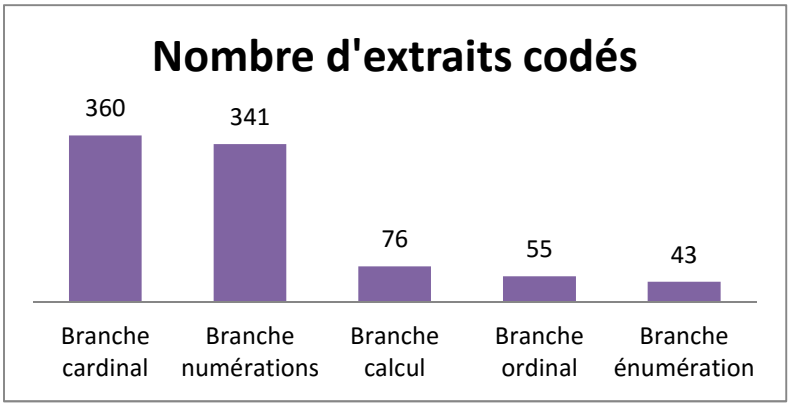


FIGURE 47 : NOMBRES D'EXTRAITS PAR BRANCHES

Même si l'énumération et l'ordinal ne représentent que, respectivement 5% et 6,3% des extraits traités, la présence de tous les savoirs légitime la pertinence de chacune des cinq branches.

Deux blocs sont également mis en lumière : cardinal et numérations d'une part (avec respectivement 41,5% et 39% d'extraits codés), ordinal et énumération de l'autre et la branche calcul, avec 8,7% des extraits traités, qui se trouve dans une position intermédiaire.

La figure suivante (Figure 48 : Durée totale des épisodes par branche) fait apparaitre la durée totale des extraits codés sur la branche cardinal, numérations, calcul, ordinal et énumération.

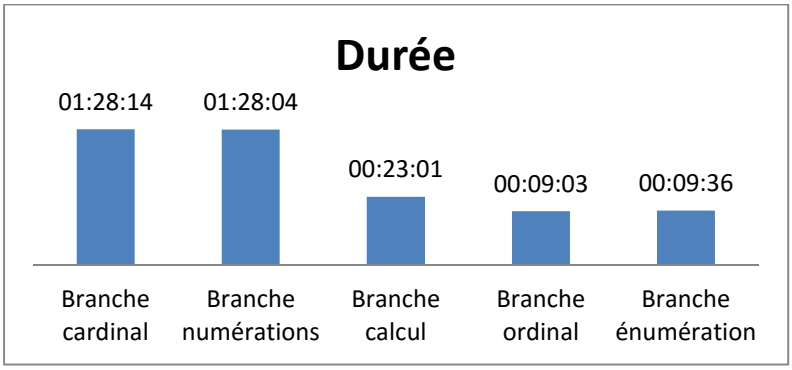


FIGURE 48 : DURÉE TOTALE DES ÉPISODES PAR BRANCHE

Les enseignants parlent plus souvent et plus longtemps du cardinal et des numérations. Il y a une très nette domination des connaissances des professeurs en cardinal et en numérations sur tout le reste. L'enseignement du nombre à l'école maternelle est principalement décrit à partir de savoirs relatifs à l'aspect cardinal du nombre, la numération orale, écrite et figurée.

Ces résultats montrent également une supériorité des connaissances mathématiques spécifiques des professeurs pour l'enseignement du cardinal sur l'ordinal. Cette tendance, plutôt prévisible (Margolinas & Wozniak, 2014), est accentuée ici par l'écart très net entre les deux branches. En effet, les dix enseignants font part de connaissances sur le cardinal, alors qu'ils ne sont plus que six à proposer des exemples d'activités relatifs à l'ordinal. Il ne s'agit pas d'une question de niveau de classe, puisque les enseignants ne relatant pas d'activités sur l'ordinal sont en TPS-PS pour deux d'entre eux, en TPS-PS-MS et aussi en MS-GS. De même, ceux exposant des connaissances mathématiques spécifiques pour l'enseignement de l'ordinal, se retrouvent dans tous les niveaux : TPS-PS, MS et GS. Les enseignants décrivent des connaissances qui existent dans des situations particulières, notamment les jeux de plateau.

L'importance de la branche numérations est le reflet d'un enseignement chronophage. Le nombre d'extraits mentionne l'importance donnée par les enseignants qui peuvent exposer plusieurs fois une même activité, correspondant alors à plusieurs extraits. De la même façon, la durée totale donne une indication globale de temps, certains enseignants nomment succinctement les activités en y associant les connaissances et les savoirs, alors que d'autres décrivent précisément et dans le détail les conditions de l'activité, le dispositif, l'organisation matérielle. Cependant, les résultats sont suffisamment nets pour affirmer la domination de deux aspects du nombre : cardinal et numérations, sur les autres.

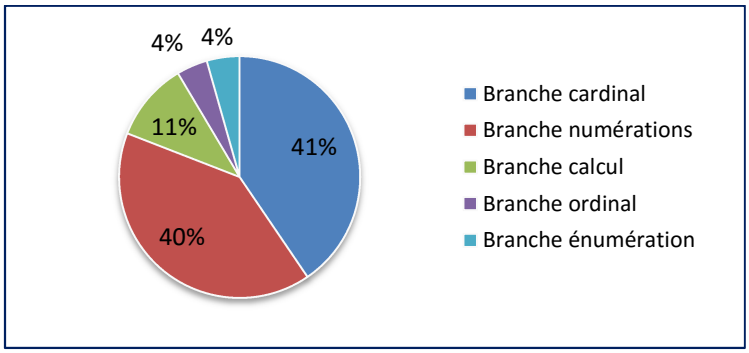


FIGURE 49 : POURCENTAGE DES DURÉES DES EXTRAITS CODÉS

Le calcul apparaît comme une anomalie : il est présent chez huit enseignants sur dix et représente 11% des extraits retenus. Les deux enseignants qui n'exposent pas d'activité sur le calcul, sont en TPS-PS, par ailleurs les deux autres enseignants de TPS-PS relatent des activités portant sur le calcul. Les programmes de 2008 énoncent clairement le calcul, justifiant alors la présence du calcul dans l'enseignement du nombre à l'école maternelle. De plus, depuis 1991, les programmes d'enseignement de l'école maternelle préconisent l'enseignement du calcul. Toutefois, comme il s'agit d'une « première entrée » dans les programmes 2008, l'enseignement évoqué reste minime, 11% de la durée totale.

> *« À la fin de l'école maternelle, les problèmes constituent une première entrée dans l'univers du calcul […]» programme 2008*

En se référant au programme 2008 de l'élémentaire, les connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement du calcul développées par les professeurs relèvent parfois de connaissances du CP, avec par exemple les compléments à dix (Produire et reconnaître les décompositions additives des nombres inférieurs à 20 ("table d'addition")), les additions à trous (Calculer en ligne des sommes, des différences, des opérations à trous), le tableau des nombres jusqu'à cent (Connaître (savoir écrire et nommer) les nombres entiers naturels inférieurs à 100).

> *Nombres et calcul (cours préparatoire)*
> *- Connaître (savoir écrire et nommer) les nombres entiers naturels inférieurs à 100.*
> *- Produire et reconnaître les décompositions additives des nombres inférieurs à 20 ("table d'addition").*
> *- Comparer, ranger, encadrer ces nombres.*
> *- Écrire une suite de nombres dans l'ordre croissant ou décroissant.*
> *- Connaître les doubles des nombres inférieurs à 10 et les moitiés des nombres pairs inférieurs à 20.*
> *- Connaître la table de multiplication par 2.*
> *- Calculer mentalement des sommes et des différences.*
> *- Calculer en ligne des sommes, des différences, des opérations à trous.*
> *- Connaître et utiliser les techniques opératoires de l'addition et commencer à utiliser celles de la soustraction (sur les nombres inférieurs à 100).*

- Résoudre des problèmes simples à une opération.
(Men, 2008, p. 33)

Il faut rappeler qu'en 2008, la GS appartient aussi bien au cycle 1 qu'au cycle 2, ce qui a pour conséquence de pouvoir prolonger l'enseignement de l'école maternelle et de commencer à proposer les notions du début du cycle 2 c'est-à-dire le CP.

Pour l'énumération, le nombre d'extraits ainsi que la durée totale font apparaitre des savoirs dominés par les autres. Il peut s'agir d'une difficulté due à la reconnaissance progressive de ce savoir dans la profession, l'énumération n'apparait qu'en 2015 dans le programme maternelle (et en 2010 dans un document d'accompagnement des programmes 2008). Les enseignants décrivent des connaissances qui existent en situation et qui émergent du fait de la difficulté des élèves.

Les trois branches cardinal, énumération et numérations sont communes aux dix enseignants.

Ces premiers résultats offrent une vision globale de l'enseignement du nombre à l'école maternelle. L'analyse branche par branche, va préciser les connaissances mathématiques spécifiques des professeurs. Les branches sont considérées dans l'ordre de leur importance quantitative respective.

3- ANALYSE DE LA BRANCHE CARDINAL

Le tableau suivant (Tableau 9 : Extraits recensés dans les branches cardinal-quantité et cardinal-relations) prend en compte le dédoublement de la branche cardinal et indique le nombre d'extraits sur la branche cardinal-quantité et cardinal-relations ainsi que la durée totale des extraits.

Branche	Nombre d'extraits	Durée totale
Cardinal-quantité	188	48 minutes et 41 secondes
Cardinal-relations	175	39 minutes et 34 secondes

TABLEAU 9 : EXTRAITS RECENSÉS DANS LES BRANCHES CARDINAL-QUANTITÉ ET CARDINAL-RELATIONS

La branche cardinal-quantité est un peu plus renseignée que la branche cardinal-relations, toutefois il n'y a pas de déséquilibre notoire entre ces deux branches, ni en nombre d'extraits ni en durée totale.

La figure suivante (Figure 50 : Physionomie de la branche cardinal) donne un aperçu des connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement du cardinal obtenues à l'issue du traitement des entretiens.

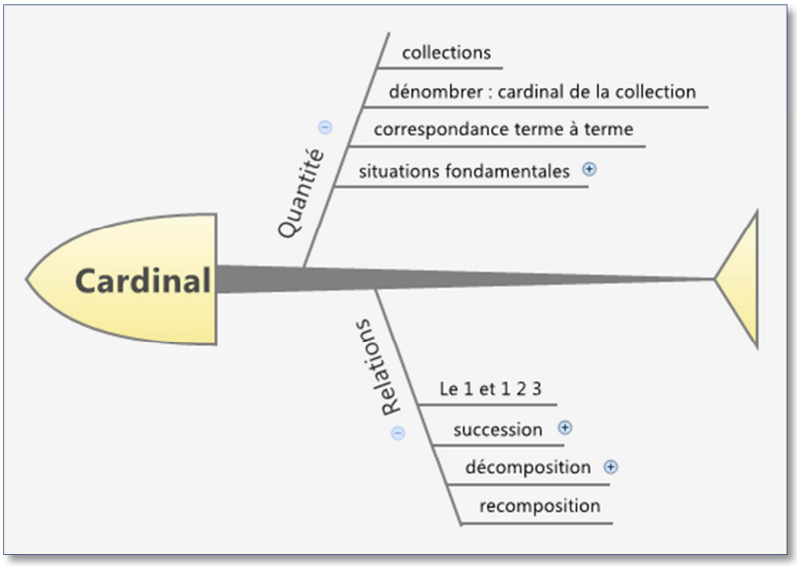


FIGURE 50 : PHYSIONOMIE DE LA BRANCHE CARDINAL

Les activités sur la branche cardinal concernent essentiellement la recherche du cardinal de collections jusqu'à dix impulsée par l'adverbe interrogatif « combien ».

10	E- je finis toujours quand même en disant alors y'en a combien pour pour travailler le le la toujours la quantité

E termine ses activités de comptage en demandant toujours « combien », la prise en compte d'une collection d'objets impose pour E un passage obligé à la cardinalité.

28	A- là c'est moi qui qui qui qui qui qui prend le et on va dire le nombre au passage en disant tiens et là je les fais intervenir en les faisant dénombrer ou reconnaitre tiens combien y'a de

À partir d'albums de jeunesse A se saisit des personnages de l'histoire pour poser des questions du style : « combien il y a de petits cochons ? »

6	B- voilà dans mon domaine on alors les absents je les affiche combien on a d'affiches on les compte un deux […] au lever de la sieste je les habille tiens y'a deux boutons va chercher tes chaussures combien tu en as deux

B recherche toutes situations prétexte à dénombrer et demande régulièrement « combien » d'affiches, de chaussures.

3.1- La branche cardinal-quantité

La notion de collection est visée. H recherche la manipulation de collections.

8	H- donc dès la TPS heu le premier travail qui va prendre bien deux trimestres c'est de manipuler des quantités premier aspect voilà sans parler évidemment avec eux de de de tous ces concepts là mais voilà c'est de manipuler des collections heu de jouer heu avec donc au départ ce n'est pas forcément lié à un objectif de sur les nombres enfin ça peut être trier des objets jouer seul simplement avec des avec de grandes quantit ouais voilà de de grandes collections collections de les manipuler et on fait tout un travail finalement sur d'autres domaines du langage ou autre mais voilà ce support là c'est la première occasion
9	Chercheur- tu as un exemple de collection
10	H- ça peut être les bouchons on a collecté depuis pas mal d'années je collecte des bouchons de formes de tailles alors les tailles pas vraiment mais c'est toujours plus ou moins arrondis mais y'a différentes hauteurs il y a différentes

Ensuite en agissant sur les éléments de la collection, la correspondance terme à terme vient peu à peu prendre le devant de la scène. Aussi, toutes les situations qui favorisent la correspondance terme à terme sans avoir recours aux nombres sont codées dans cardinal-quantité. E évoque la correspondance terme à terme comme procédure pour réussir dans des situations d'appariement.

118	E- donc ils posent une gommette ils touchent une fleur ils posent une gommette ils touchent une autre fleur mais ils se trompent pas donc c'est la correspondance terme à terme

Dans presque toutes les classes, tous les jours, il est fait référence au dénombrement par comptage des présents. En effet, alors que les enseignants considèrent que le travail sur le nombre dans le cadre d'une progression implique souvent des petits nombres (jusqu'à dix), le dénombrement par comptage des présents dépasse largement dix et vingt. Il y a donc une anomalie en termes de temps didactique. Les enseignants considèrent ce moment-là comme une façon de travailler sur la comptine et parfois sur les aspects techniques du dénombrement (énumération) et non pas comme une partie intégrante du travail sur le nombre dans ses aspects cardinal et ordinal.

70	H- donc c'est vrai que en première période de l'année heu au moment où je leur dis alors combien il y a de combien tu as de bonnets alors on va dire bonnets et ben parfois ils ont besoin de re de repartir au début et ça peu durer longtemps là comme ça hein pour certains alors c'est petit à petit ben moi je vais leur je vais comme on est comme on étaye dans le en langage dire ben voilà tu en as compté cinq quand tu as terminé tu as dit cinq alors y'en a cinq et en répétant comme ça mais ça arrive assez y'a pas vraiment de blocage hein sur ce sur ce sur cette sur ce point là

Dans cet extrait H met l'accent sur le dernier mot nombre énoncé « quand tu as terminé tu as dit cinq alors y'en a cinq ». Pour dénombrer, les élèves ont compté cinq et répété le dernier mot nombre cinq pour énoncer le cardinal de la collection.

182	G- heu c'est c'est hétérogène je veux dire y'a des enfants pour lesquels je sais que je vais pas m'éterniser dessus et que je vais passer à autre chose y'en a certains pour lesquels c'est pas forcément évident heu jusqu'à trois en plus y'en a certains ils vont arriver enfin y'a toujours ce côté affectif où ils te mettent un nombre hamham et puis y'en a d'autres heu ils regardent sur le voisin ils mettent pareil alors là c'est correspondance terme à terme mais ils sont pas passés par le dénombrement parce que moi ce que je veux absolument c'est qu'ils passent par le dénombrement

Ici G valorise et considère le dénombrement comme procédure experte « moi ce que je veux absolument c'est qu'ils passent par le dénombrement ».

La quantité est souvent abordée par le biais de la suite orale des mots nombres, très peu finalement avec la correspondance terme à terme puisque les collections sont choisies de telle sorte que le cardinal de la collection soit donné uniquement avec le mot nombre. Même lors des situations de formulation avec éloignement dans l'espace c'est la collection intermédiaire orale avec le cardinal de la quantité qui est recherchée et légitimée par le professeur. La correspondance terme à terme n'est pas développée, elle est repérée comme procédure d'élèves, en situation, par exemple par E.

116	E- donc heu en général oui on va quatre cinq oui je vais pas plus loin et parce que y'en a je me suis rendue compte ils comptent pas encore ils font la correspondance en touchant

E considère que le dénombrement est une procédure supérieure par rapport à la correspondance terme à terme, « ils comptent pas encore ils font la correspondance terme à terme ».

234	G- les PS les TPS j'ai essayé heu beaucoup pas beaucoup y'en a qui enfin ils sont vraiment dans la manipulation là ou remplir les alvéoles une déjà ça ça a été très difficile pour certains déjà ça en mettre qu'un seul ours par alvéole correspondance terme à terme ça ça a été difficile pour certains alors après je fa j'ai deux TPS qui sont dans les groupes de PS parce qu'elles sont extrêmement performantes et donc elles font ça

G constate pour autant, que la correspondance terme à terme, un ours-une alvéole « a été très difficile pour certains ». Il identifie la correspondance terme à terme comme étant une procédure première « déjà ça ».

Les situations fondamentales du type "construire une collection ayant la même quantité que" ou bien "comparer deux collections" se trouvent sur cette branche. L'éloignement dans l'espace et dans le temps jouant un rôle fondamental sur cette branche, une attention particulière aux situations proposées qui permettent de garder en mémoire la quantité est apportée.

378	F- Il fallait savoir si y'avait assez de places donc fallait comparer en fait le nombre de places y'en a qui ont fait des traits

F décrit un exemple d'activité liée à la situation fondamentale « comparer deux collections » et fait part de l'utilisation d'une collection intermédiaire écrite « y'en a qui ont fait des traits ».

Enfin, par définition du cardinal, le dernier mot-nombre énoncé regroupe à lui seul la caractéristique de la collection sur la quantité. Lorsque cette caractéristique est repérée et décrite par les enseignants, les propos sont codés sur cette branche. Les activités de dénombrement qui utilisent les connaissances de mémorisation de la suite orale des mots nombres, les connaissances de synchronisation et d'organisation de l'énumération et des connaissances de cardinalité sur le dernier mot nombre énoncé sont analysées par rapport à l'évolution des connaissances, au contexte de la situation et surtout à la nature des connaissances utiles pour réaliser le dénombrement.

Par rapport à l'analyse *a priori,* les situations fondamentales S0 : construire des collections de même quantité et S1 : comparer deux collections de quantités différentes sont présentes dans les extraits codés. Par contre la situation S3 : classer des collections de quantités différentes n'a pas été développée dans les propos recueillis. Par ailleurs, l'enchainement des situations d'action et de formulations n'est pas décrit de la sorte. Le dénombrement qui est, en situation, une collection intermédiaire orale, au même titre qu'une autre collection intermédiaire, fait l'objet, dans les pratiques décrites, d'un enseignement particulièrement investi par les professeurs au point même qu'il surclasse tout autre savoir et connaissance. La focalisation sur le dénombrement est telle qu'il devient un savoir premier sur cette branche. Les connaissances mathématiques spécifiques des professeurs se rapportant au dénombrement sont exposées et décrites par les enseignants.

3.2- La branche cardinal-relations

Cette branche privilégie les relations entretenues entre les nombres, tels que des repères et des constructions les uns par rapport aux autres. Trois c'est deux et encore un, mais c'est aussi un, et encore un et encore un. Le fait de choisir un domaine numérique inférieur à cinq et demander « combien ? » déclenche chez l'élève une procédure de comptage. Le professeur, du fait de cette connaissance indispensable des petits nombres, aborde progressivement les nombres les uns après les autres, insistant sur les relations existantes entre eux, trois c'est deux et encore un.

4	I- et ben on faisait comme quand on fait quand on est parent quand on s'est pas posé de question qu'on enfin voilà ou même quand on est enseignant et qu'on s'est pas posé de question sur le le nombre ben un deux trois en pointant heu un un objet deux un autre objet trois un autre objet et puis on se rend compte que ben effectivement ça peut induire des enfants en erreur et que c'est pas un deux trois mais c'est un et encore un et encore un et que ça fait trois ou un et deux on englobe les deux et trois et du coup heu et ben ça ça m'a le fait d'avoir pointer ce genre de ben de manière de faire ça m'a fait réfléchir et comprendre qu'effectivement la façon dont on montre et on parle les nombres et ben ça peut heu induire des mauvaises compréhensions du nombre et du coup depuis et ben je fais très attention à ne plus pointer un deux trois et à dire un encore un et encore un pour qui ait non plus que la suite la comptine numérique qui soit comprise mais la notion de nombre de quantité

Cette branche a la particularité de trouver sa justification dans une approche du nombre partant des savoirs vers les connaissances, telle une visite des savoirs (Chevallard, 2010a, p. 144). Dans cette branche, toutes les activités qui permettent la rencontre avec le nombre un, puis le nombre deux, puis le nombre trois, etc. sont codées ici. Les nombres sont rencontrés et étudiés les uns après les autres, ce qui a pour conséquence d'avoir les connaissances du trois, du deux et du un naturalisées dans le milieu de la rencontre du nombre quatre. L'évolution des connaissances sur cette branche est liée à la croissance des nombres. La question se pose avec les activités décrites sur des petites quantités, il semblerait que les enseignants adoptent la progression suivante : de un à trois en petite section, de un à cinq en moyenne section et jusqu'à dix en grande section.

5	D- ensuite heu après de façon très formelle je dirai le nombre en tant que voilà nombre quantité heu après avec des termes mathématiques je sais pas comment on dit quantité mathématique voilà donc on a travaillé le nombre un le nombre deux le nombre trois toujours de la même façon en manipulant alors soit avec des jeux de dinette des jeux de distribution les constellations des dès heu voilà beaucoup de jeux de manipulation avec les assiettes avec les clippos apporte moi un clippo apporte voilà alors c'est vrai que ça peut paraitre très facile le nombre un mais bon c'est vrai qu'en tout début d'année ils ont un peu de mal et je vais essayer normalement d'aller jusqu'au nombre quatre voilà en PS normalement on devrait s'arrêter au nombre trois je vais essayer déjà pour embrayer un peu après chez les MS je vais essayer d'aller jusqu'au nombre quatre avec certains enfants pas tous peut être mais avec certains du moins qui auront les capacités voilà

D considère que « apporte-moi un clippo » veut dire « un et un seul » alors qu'en français, apporte-moi un clippo veut dire au moins un, le mot important étant clippo (c'est-à-dire un clippo et non pas un lego). Dans une situation dans laquelle le nombre de clippo n'a pas d'importance particulière, l'interprétation normale de l'élève est l'interprétation linguistique et non pas l'interprétation numérique. Par exemple en anglais le problème ne se pose pas car il existe des mots distincts « *one* » et « *a* ».

En règle générale, lorsqu'une activité est décrite par un enseignant pour le nombre *n*, si l'activité est similaire pour le nombre suivant *n+1*, alors l'extrait est codé dans cardinal-relations.

318	C- après je continue petit à petit après on prend chaque chiffre par contre
319	Chercheur- d'accord
320	C- donc le six on travaille sur le six
321	Chercheur- oui
322	C- dénombrer heu écrire lire connaitre la constellation compléter des collections barrer si y'en a trop tu vois voilà jusqu'à cinq on fait un peu mélangé quoi
323	Chercheur- oui et après c'est bien
324	C- après c'est chaque chiffre

325	Chercheur- d'accord et ça chrono chronologiquement
326	C- voilà au fur et à mesure de l'année quoi
327	Chercheur- d'accord et du coup tu vas jusqu'à combien
328	C- jusqu'à 10

S'il n'y a aucune raison *a priori* de trouver une activité sur le quatre après l'activité sur le trois et avant celle du cinq, alors les connaissances ne sont pas celles de la branche cardinal-relations. Dans cette étude complète des petits nombres, les exemples donnés par les enseignants sur le statut particulier du un sont codés ici aussi. Enfin, c'est également le cas pour les activités portant sur les décompositions des premiers nombres.

Les comparaisons de collections très proches jouant sur ces relations de voisinage sont aussi codées dans cette branche, comme le précise C.

518	C- donc quand je quand on compare c'est pareil si on en est au huit on va comparer avec des quantités jusqu'à huit

Enfin, le passage par le cinq dans cette rencontre des savoirs est également une étape très utile pour visiter les autres savoirs et permet d'alléger la visite du savoir, mais est aussi un repère pour la base décimale. Lorsqu'elles sont clairement formalisées ainsi, les activités orientant un passage par le cinq sont codées ici, c'est également le cas des paquets de cinq. J indique le passage par le cinq.

101	J- dans ma classe ce que j'ai observé après est-ce que c'est lié au fait qu'on a pas mal travaillé ces nombres-là je sais pas le passage par le cinq aussi les cinq doigts de la main constellation un peu repère je sais pas

I va encore plus loin dans ce passage par le cinq, en le recherchant « alors évidemment je travaille plus sur la décomposition du cinq plus ».

12	I- je vais jusqu'en GS et en GS après on va se servir ben de de cette mémorisation des décompositions pour les nombres plus grands et du coup on va se rendre compte que ben cinq c'est trois et deux heu que c'est quatre et un qu'on le reconnait comme ça et et voilà je travaille surtout heu surtout sur ça et heu et et voilà jusqu'à dix donc par exemple quand on construit huit ça peut être le plus traditionnel c'est cinq et trois évidemment mais après ben on va se rendre compte que ça peut être quatre et quatre que enfin voilà alors évidemment je travaille plus sur la décomposition du cinq plus heu sur la décomposition du dix et heu surtout des nombres entre cinq et dix et surtout le cinq plus

I décrit des activités sur les décompositions.

12	I- y'en a pour qui ben c'est compliqué donc du coup et ben si on a quatre points et qu'on les voit pas qui en a quatre et ben on essaie de décomposer l'autre il a reconnu quatre comment tu as reconnu quatre ben moi je vois que là en a trois et y'en a encore un ah oui alors toi tu sais que trois et encore un alors ça fait quatre et donc du coup et ben on parle les nombres deux on ben moi j'ai vu qui en a quatre j'en vois deux et encore deux ah donc toi tu sais que c'est quatre parce que tu sais deux et deux et on va travailler comme ça sur les nombres jusqu'à quatre les en les décomposant y'en a trois et y'en a qui voit de suite trois y'en a qui vont voir un un et encore un donc et ben on chacun va dire comment il les reconnait sans sans les dénombrer sans les pointer et on va s'imprégner de ce que chacun voit et du coup heu ça je le travaille heu je vais jusqu'en GS

Par rapport à l'analyse *a priori*, les situations fondamentales V0 : itération / succession ; V1 : figuration / dénomination et V2 : décomposition sont présentes dans les extraits codées. Seule la situation V3 : recomposition n'est pas mentionnée dans les propos des enseignants. L'enseignement chronologique des nombres les uns après les autres, c'est-à-dire la situation fondamentale V0, prend le dessus sur les autres, oriente et conduit l'enseignement sur cette branche et parfois même sur les autres branches de l'arbre du nombre. Les connaissances

mathématiques spécifiques du professeur pour l'itération et la succession sont tellement ancrées qu'elles conditionnent l'enseignement du nombre à l'école maternelle et imposent le déroulement chronologique des autres branches.

4- ANALYSE DE LA BRANCHE NUMÉRATIONS

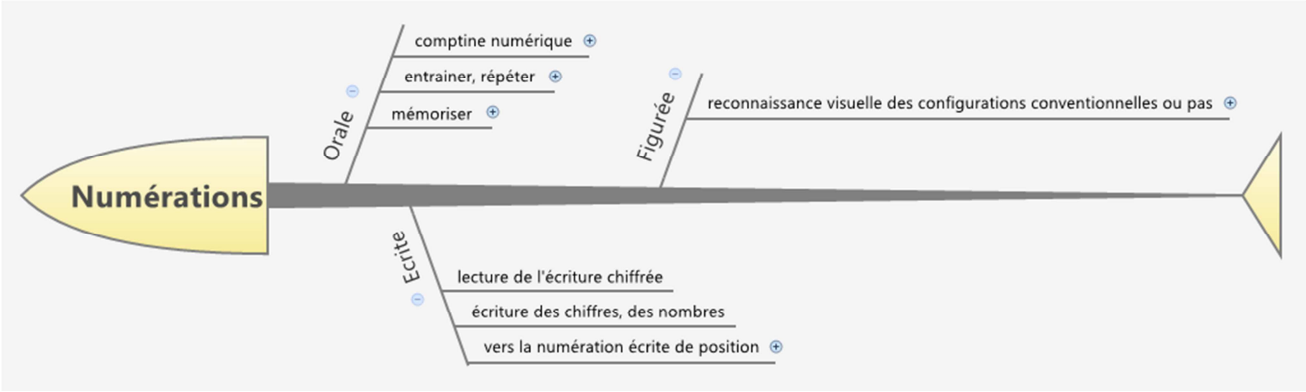


FIGURE 51 : PHYSIONOMIE DE LA BRANCHE NUMÉRATIONS

4.1- Numération orale

La numération orale est consacrée à la mémorisation de la suite orale des mots nombres. L'utilisation de comptines numériques, l'entrainement, la répétition ou bien des situations de mémorisation sont évoqués par les enseignants.

Les situations sont parfois spécifiquement dédiées à l'étude de la suite orale des mots nombres, qui a alors sa propre progression, ou bien il s'agit d'occasions apportées par les situations concernant le cardinal, la progression étant alors celle que le professeur considère comme la plus importante : le dénombrement qui permet d'aboutir à un cardinal. Cette question concerne essentiellement l'enseignement en PS car pour les MS et les GS, les connaissances de la suite orale des premiers mots nombres sont déjà transformées en savoirs. Ce sont les répétitions, les multiples occasions d'entendre les mots nombres qui prévalent ici. Toutes les situations sont prétextes à « compter », c'est-à-dire presque indifféremment à réciter la suite des mots-nombres et à se servir de cette suite pour dénombrer.

Il y a une distinction nette entre les enseignants de TPS-PS et les enseignants de MS, GS ou TPS-PS-MS-GS. En effet, l'enseignement de la suite orale des mots nombres, pour les TPS-PS est plutôt concentré sur les cinq premiers mots nombres demandant alors une focalisation importante de l'enseignant. En revanche, avec les niveaux suivants, MS, GS ou bien dans une classe multi-niveaux TPS PS MS GS, la mémorisation de la suite orale des mots nombres est plutôt privilégiée à partir de répétitions quotidiennes rituelles. Autrement dit, il y a une prise en charge vraiment spécifique de la numération orale pour certains enseignants de TPS-PS. Pour autant, les situations proposées s'accrochent à d'autres comme l'appel, le dénombrement des présents et des absents. Certains enseignants font toutefois état de connaissances mathématiques spécifiques pour l'enseignement de la suite orale des mots-nombres. En tant que telle, la suite orale des mots nombres est connue par tous les adultes, il s'agit de connaissances communes (au sens de Ball), or pour ce qui concerne les connaissances mathématiques spécifiques, par exemple la régularité et l'irrégularité de la suite orale (que les non-enseignants ne connaissent pas), la possibilité de progressions spécifiques en particulier pour segmenter la suite orale (un/ tap/ deux/ tap etc.), ou compter

de deux en deux, ou bien compter à rebours n'est pas toujours évoquée. Ces connaissances mathématiques spécifiques pour l'enseignement de la suite orale des mots nombres existent mais sont finalement plus particulières à certains enseignants que générales.

Tous les aspects de la mémorisation de la suite orale des mots nombres se trouvent sur la branche, à partir de petites comptines numériques, comme ici relatés par G.

4	G- on fait la comptine numérique dans les comptines justement alors pour l'instant on a fait monsieur l'ours un deux trois on a fait heu heu ma tête mes deux bras mes deux pieds un deux je sais pas si tu la connais celle-ci une main deux mains frappe des mains un pied deux pieds tape des pieds une tête enfin bon voilà

Et jusqu'aux tables d'addition, comme le mentionne F.

336	F- voilà mais c'est plus après de mémoriser la la table d'addition que

Et ce en passant par toutes les étapes de la progression pour faciliter la mémorisation, comme le précise J.

233	J- ils le voilà ils le sautent ouais ouais ouais assez fréquemment alors après la comptine numérique bon bé c'est un apprentissage heu d'une suite de mots après la comptine on la on la varie comme je te disais un stylo deux stylos etc. pour essayer de la d'intercaler quelque chose entre ces mots après on fait le jeu du furet on se met tous ensemble et ça les GS et les CP on le fait ensemble tu vois ça c'est une chose qu'ils peuvent bien aller ça c'est quelque chose que je fais soit en début de séance parfois soit sinon ça peut être au moment du rituel aussi tu vois ça fait partie d'activité qui peuvent être dans les dans les deux après y'a le passage sous le tunnel
234	Chercheur- alors qu'est-ce que c'est ça le passage sous le tunnel
235	J- en fait on va volontairement sauter des nombres
243	J- donc ça c'est quelque chose qu'on peut partager tu vois entre les deux classes qui est intéressant après au niveau de la comptine y a aussi heu le furet ça je te l'ai dit on part d'un certain nombre et on arrive à un autre nombre tu vois pas partir spécialement de zéro et puis s'arrêter à tel nombre y'a le jeu du filet avec les pêcheurs
244	Chercheur- oui oui oui
245	J- au niveau de la comptine qui fonctionne et après heu la fusée ça c'est à l'envers bon avec les GS on part uniquement de dix

J décrit des exemples d'activités proposés dans (Emprin & Emprin, 2010, p. 33). La suite orale des mots nombres doit constituer à terme un réservoir de connaissances (naturalisées) qui permettra parfois, en situation, le dénombrement par comptage. Elle est entrainée à partir d'activités de dénombrement ou de comptage, la suite orale des mots nombres à rebours permet des activités liées à la soustraction, elle est également utile pour apprendre les mots nombres des dizaines pour les activités liées à la découverte de la numération décimale de position.

631	H- c'était petit ours est très malade ça allait jusqu'à dix je crois il a mangé un machin deux trucs trois quatre cinq dix j'ai fait je suis parti de dix il a mangé dix radis vingt salades trente heu heu haricots cent et cent radis c'est la faute aux cent radis

Cette connaissance de la suite orale des mots nombres est sujette à des évaluations par les enseignants, comme ici avec E.

78	E- alors là je les ai évalué heu les PS ils vont tous au-delà de cinq largement heu je pense que le plus bas doit s'arrêter à sept ou huit et après ils passent à dix
79	Chercheur- oui
80	E- enfin y'a très peu de c'est stable en tout cas
81	Chercheur- oui oui d'accord
82	E- parce qu'ils passent je les fais compter deux fois à cinq minutes

	d'intervalle et c'est stable
83	Chercheur- oui d'accord
84	E- ils passent toujours voilà et les MS ben j'en ai un qui compte enfin que j'ai même arrêté parce qu'il en était à trente-neuf donc heu voilà
85	Chercheur- oui
86	E- alors il savait plus trop après trente-neuf je lui dis mais ça me suffit et là j'ai ce matin par exemple il a compté quinze et deux fois il est allé de quinze à vingt

E présente ses activités de comptage pour entrainer la mémorisation de la suite orale des mots nombres, mais aussi l'énumération de la collection.

6	E- ça commence par se compter donc pour le là c'est vraiment pour connaitre la chanson
7	Chercheur- alors comment ils font pour se compter
8	E- alors ils touchent la tête donc ils commencent à un endroit on essaye de se rappeler où on commence pour pas recompter des enfants déjà comptés et après on pose la main sur la tête et à chaque fois qu'on touche on doit prononcer un associer le geste à la parole
9	Chercheur- d'accord
10	E- heu donc voilà les plus petits heu ils répètent après moi ou après un copain plus grand heu et après si on se trompe les PS les MS s'ils se trompent souvent les autres les reprennent avant que moi j'ai même le temps de le faire donc heu voilà donc là c'est vraiment pour l'apprentissage de la de la chanson

La question se pose aussi avec le *subitizing* qui offre une reconnaissance visuelle immédiate. B insiste sur les premiers mots nombres un-deux-trois, qui constitue le domaine numérique pour son enseignement.

6	B- voilà dans mon domaine on alors les absents je les affiche combien on a d'affiches on les compte un deux je dessine mes deux bonhommes dans la maison je matérialise ils sont restés à la maison

Ici cet extrait est codé dans numérations, la mémorisation de la suite orale des mots nombres commence aussi par la mémorisation des premiers mots nombres, d'autant plus que certains enseignants de TPS/PS ne privilégient souvent que l'enseignement de la suite orale des cinq premiers mots nombres, il leur appartient donc de multiplier les occasions de compter et toutes les occasions sont prétextes à compter[58]. G fait part de son domaine numérique, jusqu'à cinq.

4	G- là je pensais aller un petit peu plus loin jusqu'à cinq alors je sais pas si c'est ce qu'il faut faire ou pas parce que bon je veux pas aller trop loin parce que je veux pas que ce soit une bouillie verbale je veux bien qu'ils séparent les nombres un deux trois et pas qu'ils enfin voilà j'ai peur enf de voilà on y va petit à petit déjà c'est difficile pour eux ils dénombrent pas tous jusqu'à trois ils connaissent y'en a qui font un deux quatre encore maintenant chez les PS y'en a qui parlent pas du tout ça c'est un autre problème heu donc ça en grand groupe

Le fait que l'élève récite « un deux quatre » met l'accent sur la méconnaissance de la suite orale des premiers mots nombres, identifiée comme telle par G qui préfère ne pas aller plus loin que cinq. Il refuse cette imprégnation d'une suite orale des mots nombres assimilée à de « la bouillie verbale ». Enfin, G prend bien en compte la segmentation des mots quand il dit « je veux bien qu'ils séparent les nombres un deux trois » qui lui servira pour le dénombrement des collections (énumération).

[58] Le nombre : ça compte à la maternelle ! En débutant ce travail de thèse, ce titre initial me semblait bien décrire une réalité à l'école maternelle.

Au final pour la numération orale, il s'agit bien de connaissances de mémorisation des noms des nombres, comme le souligne I.

74	I- ben c'est juste de la mémoire le mot nombre et ça finit par arriver de toute façon à un moment donné

4.2- La numération figurée

Elle est abordée à partir de la reconnaissance visuelle des configurations conventionnelles ou non conventionnelles. Le professeur de l'école maternelle consacre une grande partie du temps d'enseignement à la reconnaissance visuelle des configurations conventionnelles et non conventionnelles. Il s'agit d'associer immédiatement les mots nombres aux configurations mais également d'y associer la quantité. Cette reconnaissance est recherchée pour les premiers nombres (jusqu'à dix) et demande de nombreuses séances d'entrainement.

4.3- Numération écrite

La numération écrite recouvre essentiellement, à l'école maternelle, l'écriture et la lecture des chiffres et des nombres écrits. Pour la lecture des nombres écrits F identifie des connaissances relatives à la discrimination visuelle qui permettent à l'enfant d'associer deux écritures identiques « au moins visuellement ils me disent c'est lui ». Puis ils trouvent le mot nombre associé à l'écriture en synchronisant la suite orale des mots nombres et le pointage sur la file numérique.

158	F- parce que j'en ai encore hein qui qui qui jusque-là ça va mais qui ne les lisent toujours pas
159	Chercheur- D'accord
160	F- donc au moins visuellement ils me disent c'est lui et après donc ils comptent ils me disent ben du coup là c'est le 4

E différencie « tout ce qui est écriture des nombres qu'on fait à part ». En effet, son enseignement de l'écriture des nombres suit la progression de celui des « lettres bâton », il signale que pour lui « c'est plutôt de l'écriture » et il décrit alors des connaissances spécifiques à l'enseignement de l'écriture en capitale d'imprimerie.

50	E- donc voilà mais c'est vrai que après y'a tout ce qui est écriture des nombres qu'on fait par contre à part
51	Chercheur- oui oui
52	E- donc le geste on les laisse pas écrire les chiffres tout seuls n'importe comment voilà c'est c'est pour moi c'est plutôt de l'écriture du coup là comme les lettres bâton comme après la cursive on est avec eux donc voilà on explique ça vient avec la date au début donc on explique la date comment on l'écrit je monte je descends on explique les gestes au début on vérifie et puis du coup une fois que c'est à peu près parti ils font la date ils écri ils recopient la date en autonomie

Là encore il s'agit d'un entrainement et d'une répétition d'activités qui sollicitent un temps conséquent d'enseignement. F couple écriture et lecture de l'écriture chiffrée en exposant l'aide de l'écriture pour « la mémoire visuelle ».

260	F- ben moi je pense aussi que pour ceux qui ont une mémoire visuelle de le fait de l'écrire ils le mémorisent mieux bon sachant qu'au niveau graphisme c'est encore très dur bon là ça tombe bien c'en est un qui a du mal en graphisme donc

Certains enseignants de GS abordent la numération écrite via la numération décimale de position à partir du tableau des nombres jusqu'à cent.

96	I- et en fonction des compétences des enfants je vais au-delà donc ça peut aller jusqu'à vingt jusqu'à trente après quand ils ont compris heu ça roule mais c'est vrai que je ré-insiste beaucoup jusqu'à dix et après là en fin d'année là maintenant maintenant je commence on travaille sur de dix à vingt et on se rend compte que ben parce que pareil aussi je travaille sur l'écrit j'ai affiché récemment dans la classe alors c'est la première fois que je le fais je l'avais jamais fait heu c'est le tableau des nombres en colonnes avec jusqu'à quatre-vingt-dix-neuf alors que normalement on travaille que jusqu'à trente et je me suis dit cette année je l'affiche jusqu'à quatre-vingt-dix-neuf parce que j'en avais qui avait la comptine enfin jusqu'à quatre-vingt souvent souvent ça bloque au soixante enfin au passage à soixante-dix mais je me suis dit je l'affiche et du coup comme on joue dans la classe dans les rituels on fait un furet chacun dit un nombre et bé on va on peut aller très loin et donc il fallait qu'on retienne jusqu'à où on avait été pour essayer de faire mieux la fois d'après et donc il fallait trouver comment il s'écrivait ce nombre là et du coup j'ai mon tableau avec mes nombres jusqu'à quatre-vingt-dix-neuf et j'ai en rouge les dizaines et donc on parle de familles dans la famille des dix et bon on voit que tous les nombres ils sont écrits avec un un devant parce que dix ça s'écrit avec un un et etc. alors je j'insiste pas pour qu'ils les mémorisent y'en a qui les mémorisent qui les savent déjà parce qu'ils les ont vu à la maison pour x raisons ou parce qu'ils ont une telle mémoire que de suite mais j'insiste jusqu'à trente vu que c'est quand même le domaine numérique qu'ils sont censés connaitre et donc y'a la famille des dix la famille des vingt et y'a trente et on et du coup quand j'essaie de leur donner des repères parce que ben ils savent les dire vingt-trois et ben comment ça va s'écrire vingt-trois et ben on va regarder notre tableau alors vingt-trois qu'est-ce qu'on entend c'est dans quelle famille ah c'est dans la famille des vingt alors on se met dans la famille des vingt puis qu'est-ce qu'on entend à la fin vingt-trois on entend trois ok on va au trois donc on sait que vingt-trois ça s'écrit le deux et trois et ensuite pour ceux qui ont la comptine vachement loin bon on s'est rendu compte les familles la famille dix ça commence par un un la famille vingt par un deux etc. et pour essayer de mémoriser comment enfin le nom de la famille et ben on s'est rendu compte que trente ça commence comme trois que quarante ça comme comme quatre etc. alors ça marche pas pour tous vingt ça marche pas mais y'en a certains pour lesquels ça marche et donc on essaie de prendre des repères là-dessus donc voilà et ça c'est la première année que je le fais heu et du coup même la petite fille qui avait du mal à mémoriser le six le neuf etc. et ben dix-sept celui-là elle sait le reconnaitre parce que ben dix elle sait que c'est le un et le zéro et que ben dix-sept forcément c'est le un et le sept et là c'est sur quoi je suis en train de travailler actuellement donc avec ça pendant les rituels et après on a fait des jeux on a fait des jeux heu alors c'est pareil je me sers cette année pas mal du bouquin qui est sorti aux éditions scéren vers les maths en GS ils ont sorti toute une collection y'a celui pour la PS et MS

I décrit précisément son enseignement, et justifie les raisons de son choix. La régularité est signalée à plusieurs reprises comme étant des connaissances mathématiques spécifiques pour l'enseignement du nombre.

Les exemples des tableaux de nombres, des régularités des dizaines, des familles des dizaines témoignent de cette volonté d'aborder, en tout cas d'initier plus que préparer les élèves de GS à la numération décimale de position, c'est le cas pour I, pour C et pour F.

Ces activités, très chronophages, sont l'occasion aussi d'insister sur les connaissances des premiers nombres (jusqu'à dix). Les mêmes situations reviennent, au point que j'éprouve des difficultés à les classer, notamment pour numérations et cardinal. La frontière entre numérations et cardinal est floue, non seulement au niveau du codage, mais tout simplement au niveau des enseignants eux-mêmes. Les connaissances mathématiques spécifiques pour l'enseignement du cardinal et des numérations sont parfois très proches au point même, parfois, d'être tellement imbriquées qu'elles sont difficilement dissociables. Cela renvoie à des savoirs mathématiques spécifiques, cardinal et numérations mal

différenciés par les enseignants, à des raisons d'être des savoirs pas assez distinctes. Les enseignants ne semblent pas repérer les connaissances mathématiques spécifiques nécessaires pour édifier des progressions en termes de temps didactique.

Par rapport à l'analyse *a priori*, la numération orale, la numération écrite et la numération figurée sont bien distinguées dans les extraits codés. La suite orale des mots nombres est quotidienne, plusieurs fois par jours, pour tous les enseignants, la reconnaissance visuelle des configurations conventionnelles est largement exercée dès la PS et est identifiée comme source de difficulté pour certains élèves. La lecture-écriture des chiffres et des nombres est modulée en fonction du niveau des élèves et des choix des enseignants.

5- ANALYSE DE LA BRANCHE CALCUL

Les activités énoncées par les enseignants, codées dans la collection calcul sont regroupées et représentées dans la figure suivante (Figure 52 : Physionomie de la branche calcul). Majoritairement, ce sont des activités liées aux opérations : addition, soustraction, division.

234	F- donc connaitre le chiffre faut connaître le chiffre là celui-là tu le connais donc pareil hein toujours là c'est pareil avec les MS j'essaye aussi de faire addition soustraction alors toujours pareil à travers les jeux

Les compléments à dix sont également travaillés à partir de la GS. Enfin, certains enseignants développent leur volonté d'aller vers la numération décimale en abordant la base dix et les groupements ainsi qu'une première approche dizaine-unité à partir du tableau des nombres jusqu'à cent.

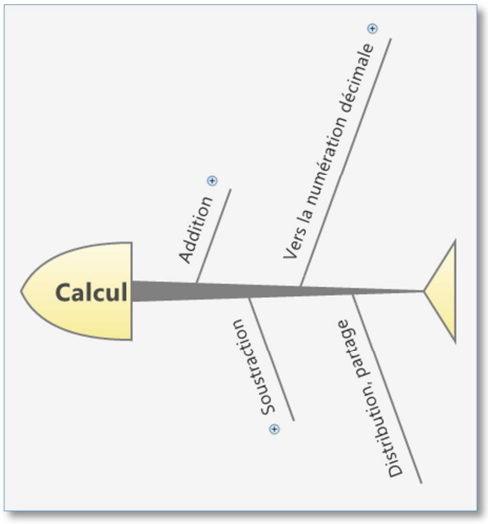


FIGURE 52 : PHYSIONOMIE DE LA BRANCHE CALCUL

Sur cette branche se trouvent des activités consacrées aux opérations : additions, soustractions, distribution et partage.

328	J- tu vois il va y avoir les problèmes de d'ajout de diminution de complément de partage aussi de distribution

Je prends également en compte les activités décrites autour des compléments à dix dans cette branche. Une distinction est opérée entre les compléments à dix assimilés à une addition à trou et les décompositions de dix (qui seront codées dans cardinal-relations). Les compléments à dix et les additions à trou se trouvent sur cette branche calcul.

322	J- alors le dix tu vois le dix là les CP ça les travaille on a les paquets de dix donc combien y'en a pour arriver à dix parce qu'une fois quand les

	grands ont fêté leur anniversaire j'ai eu le malheur ou le bonheur de dire à bien là ils viennent amener leur morceau de gâteau tu vois aux autres maitres des petites classes ah tu as passé la dizaine je disais à un grand alors ah le dix ce dix c'est un nombre dix est symbolique combien il lui manque de bougies pour aller jusqu'à dix ça c'est des situations où c'est pas prévu

J décrit ici une situation de complément (Vergnaud). Idem pour C qui développe la procédure du surcomptage.

246	C- non maintenant ils y arrivent sans problème même assez vite quand même hein donc on compte les présents après on surcompte jusqu'à vingt-sept pour compter les absents
247	Chercheur- d'accord
248	C- donc on est vingt-quatre et d'habitude on est vingt-sept alors après vingt-quatre qu'est-ce qu'il y a alors moi avec les doigts je fais vingt-cinq vingt-six vingt-sept je montre les doigts combien il en manque trois du coup on cherche qui c'est qui manque et puis après petit à petit c'est eux qui me remplacent pour compter tu vois
249	Chercheur- d'accord
250	C- donc là on commence celui qui compte et qui surcompte

E propose « des choses d'ajustement », c'est-à-dire un problème de transformation (Vergnaud) et demande de dessiner (collection intermédiaire écrite).

126	E- ah eux c'est très très facile du coup on a fait plutôt des choses de d'ajustement c'est à dire heu le jongleur il a trois balles il en veut huit en tout dessine ce qu'il manque et ça ça marche super bien ah ouais heu barrer ce qui est en trop et rajouter ce qui manque parfait aussi jusqu'à dix largement

De la même façon les activités où il faut barrer des éléments en trop dans une collection, comme le précise C, sont codées dans calcul.

302	C- voilà ou barrer si y'en a trop

Enfin dans cette branche calcul, les activités visant la numération décimale, la base dix, à travers les activités de groupements puis les échanges sont également incluses ici.

F a installé dans sa classe un principe de bon point de bonne conduite, il distribue tous les jours quand les conditions sont réunies, un bon point que chaque élève range dans une petite boîte, au bout de dix, les élèves les échangent contre une image.

456	F- bon les MS ont besoin d'être rassurés les GS les aident à côté hier on a eu le cas alors c'est la première fois j'ai un élève de GS qui me dit mais maitre regarde l'élève Z tout ce qu'il a j'ai compté je crois bien qu'il y en a vingt-et-un et effectivement il y en avait vingt-et-un
457	Chercheur- d'accord
458	F- voilà donc du coup combien ah oui mais alors combien d'images
459	Chercheur- qu'est-ce qu'on peut échanger voilà
460	F- on va laisser le un et puis combien on va mettre d'images et ben voilà j'ai les GS tout de suite qui m'ont dit ben il lui faut deux images

Les activités se rapportant à la branche calcul peuvent aller très loin (c'est-à-dire très proches des contenus du CP) vers les opérations et vers la numération décimale de position.

Pour l'addition, les situations « a+1 » sont proposées, elles permettent de renforcer la mémorisation de la suite orale des mots nombres mais aussi la compréhension de la notion d'itération de l'ajout de un « trois, c'est deux et un », qui correspond aussi à la succession.

Les situations « a+b », avec a et b < 10 mais surtout a et b < 5 sont également utilisées pour entrainer la récitation de la suite orale des mots nombres en recomptant le tout, la collection "a" puis sans s'arrêter les éléments de la collection "b". Lorsque a et b ne sont plus

des collections matérielles, l'enseignant propose l'utilisation des doigts en matérialisant quatre sur la main droite, trois sur la main gauche et en recomptant le tout à l'aide de la suite orale des mots nombres. Le surcomptage est abordé ensuite en « mettant "a" dans la tête » et en prolongeant la suite orale des mots nombres à partir des éléments de la collection "b".

Les calculs de la forme « a+…= c » sont souvent abordés à partir de fiches et font apparaitre des difficultés pour les élèves. Les problèmes posés sont de la forme « complète pour avoir "c" éléments » en ayant déjà "a" connu. Ce type d'activité complète l'étude systématique du nombre "c".

Pour les compléments à dix, il s'agit de calculs très proches de la forme « a+…=c » puisque ici c=10 ; « a+…=10 »

Les calculs « a+1 », « a+b » et « a+…=10 » sont souvent réalisées à l'oral, en collectif, alors que les calculs « a+…=c » sont plutôt exécutés en individuel sur fiche.

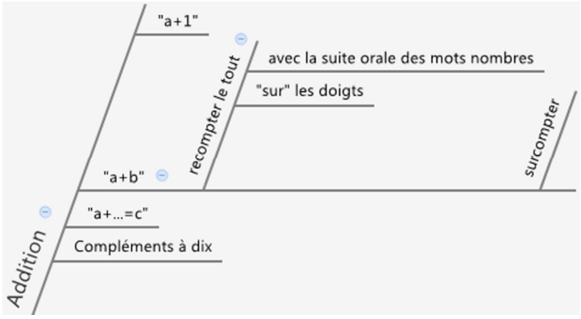


FIGURE 53 : LES PRATIQUES POUR L'ADDITION

Pour la soustraction, de la même manière les calculs « a-1 » sont utilisés pour entrainer l'automatisme de la récitation de la suite orale à rebours, mais ils visent aussi et surtout le sens de l'opération, ôter, enlever, retirer un élément. Ils renforcent également la compréhension des liens existants entre les nombres, précédent-successeur. Les calculs « a-b » sont plus rares et sollicitent un domaine numérique inférieur à celui des additions (autour de cinq). Enfin, comme pour les additions, ces calculs se font plutôt en collectif à l'oral, alors que les activités où il faut barrer ce qui est en trop sont formalisées à l'écrit et individuellement.

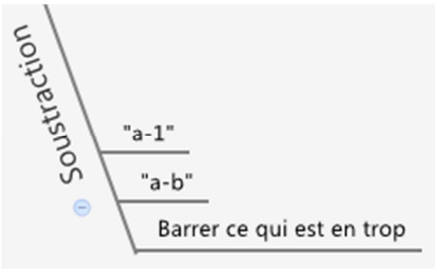


FIGURE 54 : LES PRATIQUES POUR LA SOUSTRACTION

La distribution, le partage sont parfois évoqués, il s'agit alors d'activités entrainant la correspondance terme à terme un-un en situation, ou bien deux-un, ou bien dix-un. Toutes les situations décrites sont des situations où le milieu est installé, la compréhension des termes distribuer et partager est traduite en correspondance terme à terme, mais il n'y a pas de situation d'action. L'anticipation du résultat est repoussée au cycle deux. Par contre la rencontre du milieu de situations de partage a bien lieu à l'école maternelle.

En favorisant l'approche de la numération décimale avec les groupements par cinq puis par dix ainsi que les échanges dix-contre un, les savoirs et connaissances mobilisés sont très proches de ceux du cycle 2. Il s'agit de situations en contexte et par choix, l'enseignant décide qu'il n'y a pas d'institutionnalisation. C'est une première approche qui sert à initier, à préparer aux futurs savoirs du cycle 2. Elle est proposée comme un bonus, un plus, où « prend qui peut ».

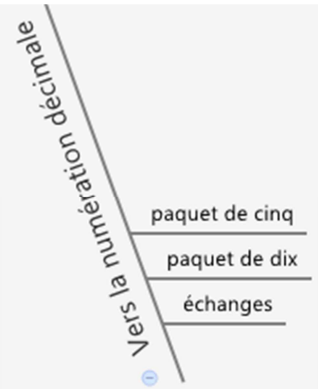


FIGURE 55 : LES PRATIQUES POUR LA NUMÉRATION DÉCIMALE

Par rapport à l'analyse *a priori*, les structures additives et soustractives sont nettement développées et précisées. Les structures multiplicatives et distributives sont plus évoquées que détaillées, mais elles sont présentes dans les extraits codés. Certaines connaissances mathématiques spécifiques évoquées sont le fruit de plus de dix-neuf ans de préconisations dans les programmes de l'école maternelle (depuis 1991). Elles influencent directement l'enseignement des professeurs, donc leurs connaissances mathématiques spécifiques.

Toutefois, certaines connaissances mentionnées relèvent directement de connaissances préélémentaires, notamment celles sur la numération décimale (les paquets de cinq, de dix, et les échanges) ainsi que les compléments à dix. Ces connaissances du calcul se rapprochent de connaissances mathématiques communes, et sont alors plus connues et maitrisées par les enseignants. Aussi nous pouvons nous demander si en termes de connaissances de l'enseignant, les connaissances du calcul, mieux connues, n'occultent pas les autres connaissances ?

6- ANALYSE DE LA BRANCHE ORDINAL

Le tableau suivant (Tableau 10 : Extraits recensés dans les branches ordinal-position et ordinal-relations) prend en compte le partage de la branche ordinal et mentionne le nombre d'extraits sur la branche ordinal-position et ordinal-relations ainsi que la durée totale des extraits.

Branche	Nombre d'extraits	Durée totale
Ordinal-position	32	5 minutes et 21 secondes
Ordinal-relations	23	3 minutes et 42 secondes

TABLEAU 10 : EXTRAITS RECENSÉS DANS LES BRANCHES ORDINAL-POSITION ET ORDINAL-RELATIONS

La branche ordinal-position laisse apparaitre plus d'extraits que la branche ordinal-relations, 32 extraits contre 23 ; la différence des durées est moins significative. Toutefois, la répartition sur ces deux branches n'est pas déséquilibrée. Dans les programmes 2008, la position est simplement évoquée.

« repérer des positions dans une liste ordonnée d'objets » (Men, 2008)

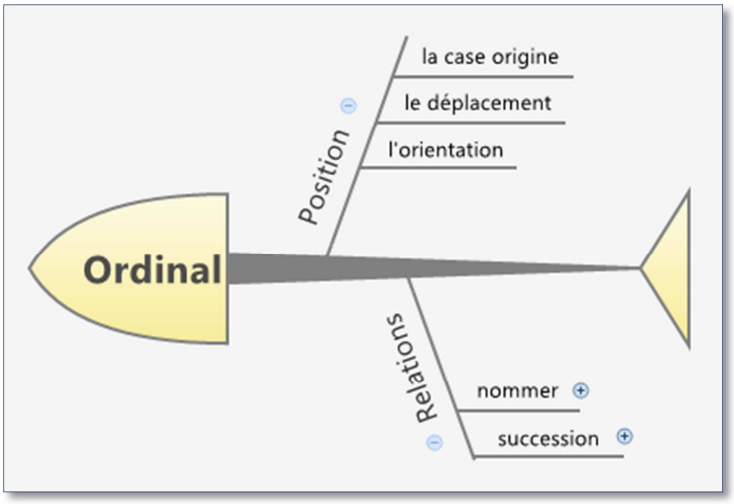


FIGURE 56 : PHYSIONOMIE DE LA BRANCHE ORDINAL

Comme nous l'avons évoqué précédemment, l'ordinalité va se scinder en deux branches, ordinal-relations et ordinal-position. Ce qui caractérise la branche ordinal-relations c'est l'étude d'un système de désignation des positions successives dans un mouvement des savoirs vers les connaissances. Ce qui caractérise la branche ordinal-position c'est l'installation de situations conduisant à désigner la position de diverses façons dans un mouvement des connaissances vers les savoirs.

6.1- La branche ordinal-relations

Sur cette branche, sont codés les propos des enseignants relatifs à la dénomination des premiers mots nombres ordinaux. Ils ne sont pas codés dans la numération orale comme la suite orale des mots nombres cardinaux, car bien plus que la mémorisation des mots le premier, le deuxième, le troisième, c'est l'identification de l'ordinalité en tant que savoir qui est mise en lumière. La notion de succession, juste avant, et juste après, est ici retenue. La particularité de cette branche est la notion de succession, derrière le premier il y a le deuxième, derrière le deuxième il y a le troisième, devant le quatrième il y a le troisième. Toutes les activités faisant référence au suivant au précédent seront codées dans ordinal-relations. B met en lumière la chronologie et fait référence à un album de littérature de jeunesse (Vidal & Nouhen, 2009).

106	B- ça a pas d'intérêt si y'a pas quelque chose de bien construit derrière et après qui permet de s'y référer quand on veut faire autre chose tu te souviens là c'était qu'est-ce qu'on fait en premier dans une histoire on travaille sur les albums bon alors je prends toujours des albums en randonnée59 de façon ça aide beaucoup là on vient de travailler sur la grenouille à grande bouche qui elle rencontre en premier qui c'est en deuxième en troisième après on élude les autres voilà mais un-deux-trois voilà

G souligne cette idée de succession des positions.

44	G- voilà ce que je travaille sur le nombre après sur le cardinal j'ai beaucoup de mal à travailler avec les enfants en PS je trav le premier ça pose pas de souci ça ils en ont une très bonne notion heu surtout qu'il y a un chef de tain à chaque fois qu'on fait le petit train tu es le premier de derrière voilà tu te mets derrière celui qui est le premier etc. voilà mais

[59] Un album en randonnée décrit un personnage central qui enchaîne des péripéties par répétition. La structure narrative du récit est alors toujours la même, ce qui facilite la compréhension de la chronologie.

	après j'ai du mal à travailler heu sur heu il est juste derrière il est en second troisième quatrième etc.

E décrit également les positions relatives.

32	E- on a fait beaucoup celui d'avant celui d'après heu deux avant deux après on a déplacé avec une pince à linge sur une bande numérique plastifiée qu'ils avaient

Là encore, le support de la file numérique peut induire en erreur et faire opter pour un codage en numérations (numération écrite). Les connaissances utiles pour l'élève sont de l'ordre de l'ordinalité. Il y a la lecture des nombres, mais pour un élève qui ne lit pas encore tous les nombres, énoncer au maitre des mots nombres qu'il ne sait pas nommer, reviendrait à lui demander de montrer sur la file numérique celui qui est placé juste avant le nombre repère dans l'ordre de l'écriture.

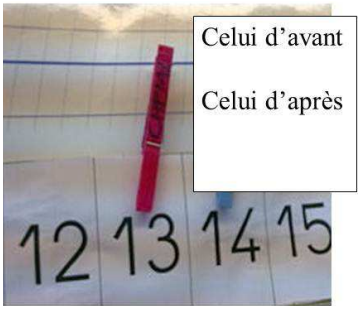


FIGURE 57 : FILE NUMÉRIQUE ET PINCE À LINGE UTILISÉES PAR E

Ce sont donc les connaissances sur la position relative au nombre cible (à atteindre), un déplacement de plus, un déplacement de moins qui orientent le codage de cette activité en ordinal-relations. Il s'agit de s'intéresser à l'ordre de la succession des nombres treize, douze et quatorze.

Dans cette branche, il n'y a pas de construction du repère permettant d'exprimer la position, il s'agit donc de repères implicites donnés soit par la succession temporelle, soit par la succession spatiale ordonnée par la raison graphique (Goody, 1979).

Par rapport à l'analyse *a priori*, contrairement à cardinal-relations, l'étude exhaustive de toutes les positions de façon chronologique, n'est pas envisagée. Les enseignants ne considèrent pas la quatrième case comme étant la troisième case et on avance encore d'une case, etc. (qui serait l'équivalent de trois et encore un pour quatre). Finalement les situations fondamentales S0 : itération / succession et S1 : figuration /dénomination sont détaillées par les enseignants à travers la succession des positions dans un rang, derrière le premier, se trouve le deuxième, etc. et à partir de la suite orale des mots nombres ordinaux. Les connaissances et savoirs relatifs à la branche ordinal-relations dans sa partie nom des mots nombres ordinaux, pour dénommer, sont bien identifiés et font souvent l'objet d'un enseignement spécifique.

6.2- La branche ordinal-position

Se trouvent ici les situations décrivant des connaissances relatives à la construction d'un repère sur une ligne : origine et/ou sens. Sur les jeux de pistes, cela correspond au travail sur la case origine du déplacement, c'est-à-dire savoir quelle est la case de départ ou plutôt à partir de laquelle la désignation des positions par comptage débute. La position est abordée à partir de déplacements à l'aide de jeux de plateaux. L'origine, l'orientation ainsi que le

déplacement sont décrits comme des connaissances nécessaires au jeu plus que comme des connaissances utiles pour la position. E commente le jeu des petits chevaux.

60	E- heu celui qui est après heu celui qui est deux cases après donc là voilà et en parallèle on joue heu dans des ateliers de jeux mathématiques souvent je fais jouer aux petits chevaux des choses comme ça pour apprendre à se déplacer et à compter pas un de là où on part

On remarque ici que E connaît la difficulté (compter « un » pour la case d'origine) mais n'identifie pas le savoir mathématique (l'origine et sa désignation par zéro). Il y a ensuite des connaissances liées au déplacement, c'est-à-dire pour de jeunes enfants se déplacer régulièrement dans des cases, une case après l'autre.

G utilise un dé de couleur pour le déplacement. Dans sa situation, aucun nombre n'est en jeu : le pion se déplace d'une couleur à l'autre, mais la connaissance de la succession des positions est bien en jeu (on ne se déplace pas sur n'importe quelle case de la couleur désignée mais sur la suivante dans le repère), ce qui justifie le codage de cette situation dans la branche ordinal-position.

393	G- c'est la couleur pour l'instant y'a un dé de couleur et un animal qu'on déplace et on doit le déplacer jusqu'à la bonne couleur

Enfin il y a aussi toutes les activités travaillant l'orientation qui seront codées dans ordinal-position, comme le propose E.

164	E- si on se tourne vers la porte qui c'est qui est deuxième et si maintenant on se tourne vers la fenêtre ben c'est plus lui qui est deuxième donc on a fait tout ça heu

Sur cette branche également, se trouvent les situations avec éloignement dans l'espace pour reconstituer une piste. F demande aux élèves de GS de reconstituer la file numérique qui est affichée au tableau à partir de petites étiquettes disposées sur leur table. Ils peuvent se lever pour aller voir le modèle.

346	F- et ils ont droit alors voilà comme aide un certain nombre de fois en général de se lever et d'aller voir la voilà par contre du coup je préfère qu'ils l'ai pas sous les yeux pour qu'ils soient obligés d'abord de regarder leur feuille qu'est-ce qu'il me faut ils se lèvent ils vont voir il faut qu'ils s'en souviennent et qu'ils reviennent ben c'est une gymnastique qui marche bien en général ouais après si je m'en rends compte selon les équipes que j'ai hein heu si je m'en rends compte qui s'y arrivent pas ben à ce moment-là je leur sors mes

Par rapport à l'analyse *a priori*, la situation fondamentale S1 : construire des pistes de même position est développée dans les extraits codés. Par contre, les situations fondamentales S0 : comparer des pistes et S2 : classer des pistes ne sont pas détaillées dans les propos des enseignants. Les connaissances relatives à la position sont rencontrées en situation de jeux de plateau mais elles ne sont pas identifiées par le professeur pour la branche ordinal-position et ne sont pas institutionnalisées comme telles.

Le caractère assez pauvre des situations proposées est sans doute lié aux recommandations épurées sur l'ordinalité proposées dans les programmes 2008, mais aussi, et sans doute surtout, à l'opacité des savoirs sur l'ordinalité à enseigner pour le professeur.

7- ÉNUMÉRATION

Aucun enseignant ne propose d'activités ou de situations pour enseigner l'énumération. Dans cette branche sont davantage codées les connaissances mathématiques spécifiques des professeurs en situation d'observation des difficultés des élèves relatives à l'énumération que des exemples de situations proposés aux élèves par les enseignants. En

effet, l'énumération est un savoir transparent pour les professeurs (Margolinas & Laparra, 2009; Margolinas, Rivière, & Wozniak, 2015), aussi il ne peut pas être reconnu comme un savoir légitime à enseigner. Seul H nomme ce savoir et décrit les « compétences à mettre en place », mais il ne donne pas d'exemple de classe.

66	H- PS voilà PS heu donc évidemment avec eux on va voir ce que veut dire enfin je vais pas leur expliquer comme ça mais qui toutes y'a pleins de compétences à mettre en place t'as le moment où on compte l'énumé l'énumération heu bon le fait d'associer un geste et un mot nombre à un élément de la collection heu savoir qu'à la fin qu'on a dénom au moment où on a dénombré où finissent de dénombrer la collection et bien le dernier mot que l'on a nommé il qualifie toute la collection qu'on parte dans un sens ou dans l'autre c'est la même chose

Sans toutefois nommer ce savoir tous les enseignants identifient et repèrent certaines connaissances qui y sont attachées. Cette observation fine des élèves en situation leur permet de lister certains points relatifs à l'énumération. Ce sont ces points-là que je code sous cette rubrique et que je vais présenter comme exemples des trois sous-branches (Figure 58 : Physionomie de la branche énumération).

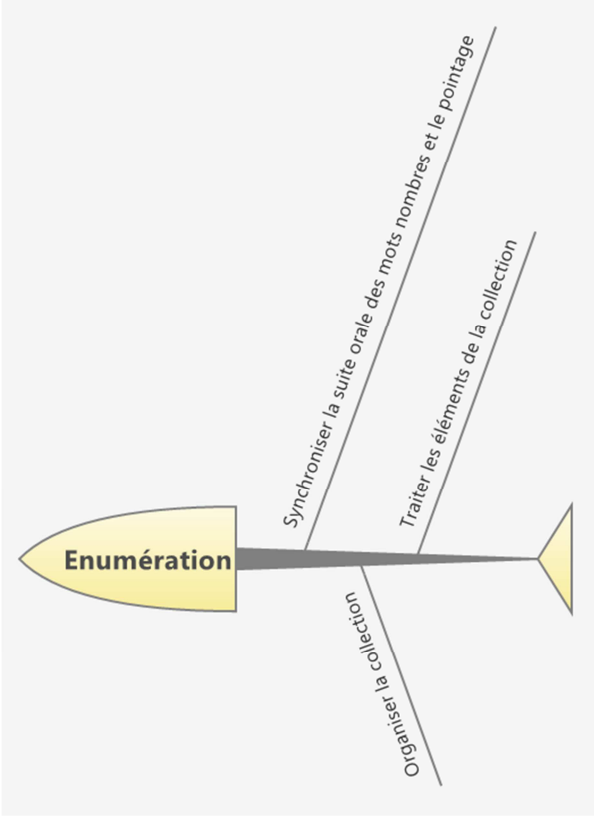


FIGURE 58 : PHYSIONOMIE DE LA BRANCHE ÉNUMÉRATION

Les enseignants font référence à la synchronisation entre la suite orale des mots nombres et le pointage des éléments de la collection. I développe et précise cette synchronisation.

62	I- alors maintenant en début d'année il l'avait pas encore ou c'était pas stable maintenant il l'a et c'est pareil c'est un petit garçon qui a mis beaucoup de temps à construire des collections et à les dénombrer parce que il associait pas le geste heu au mot nombre heu soit il allait plus vite dans dans son geste soit heu quand soit ben comme il avait pas la comptine stable ben forcément c'était c'était pas possible mais pendant longtemps il avait pas le geste heu qui était à qui était en phase avec avec ce qu'il était en train de dire donc du coup là soit je tenais le doigt avec lui en lui disant attention tu vas pas trop vite recommence parce que tu as vu tu as parlé plus vite que ce que tu n'as montré avec ton doigt ou tu as avancé

	le doigt plus vite que ce que tu n'as parlé donc on recommence donc soit ou sinon après c'était moi qui disais la comptine c'était lui qui devait pointer et inversement voilà et pas mal de jeux comme ça où au lieu qu'il ait les deux tâches à faire qui étaient compliquées à gérer on en faisait une chacun une donc là maintenant ça y est c'est bon il arrive à construire des collections même si c'est pas toujours parfaitement réussi il faut faire en sorte que ce soit pas des collections trop grandes non plus

Avec cet élève I prend à sa charge soit le pointage soit la récitation de la suite orale des mots nombres de sorte qu'il y ait parfaite concordance entre les deux.

Ce pointage passe par toucher l'objet compter (un autre enfant), pour ne pas en oublier comme le souligne C.

242	C- on touche l'enfant qu'on compte parce que sinon ils vont en sauter ou ils vont aller trop vite donc vraiment on fait il faut surveiller quoi il faut être attentif mais après bon une fois qu'ils ont bien compris ça marche tout seul quoi

Ou bien on touche la tête des enfants lors des rituels de E.

7	Chercheur- alors comment ils font pour se compter
8	E- alors ils touchent la tête donc ils commencent à un endroit on essaye de se rappeler où on commence pour pas recompter des enfants déjà comptés et après on pose la main sur la tête et à chaque fois qu'on touche on doit prononcer un associer le geste à la parole

En passant en revue tous les éléments, le doigt qui touche se déplace. Ce déplacement dans la collection, ce balayage des éléments induit une organisation dans le traitement des éléments déjà pris en compte et de ceux restant à prendre en considération. Lorsque la collection n'est pas déplaçable, certains enseignants, comme C, « donnent le truc » c'est-à-dire mettent à disposition des élèves une pratique pour voir rapidement les éléments déjà pris en compte (mettre un petit rond ou un petit trait ou point sur l'élément qui est en train d'être traité).

331	Chercheur- d'accord et quand tu disais tiens là je vois des petits ronds dans les champignons donc c'était ce que tu oui
332	C- pour pointer
333	Chercheur- d'accord et ça c'est toi qui leur donnes
334	C- c'est moi qui leur ai donné le truc on va dire
335	Chercheur- oui
336	C- du pointage

Ce point précis n'est pas un enseignement mais plutôt un « truc » contextualisé.

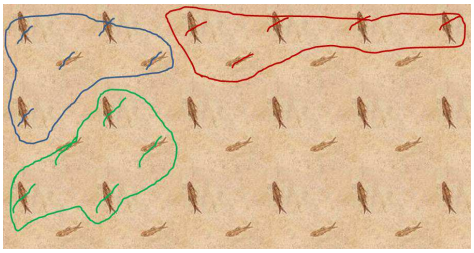


FIGURE : 59 GROUPEMENTS PAR CINQ FICHE GS

268	F- là faire des paquets donc là c'est pareil c'est changer de couleur sinon on oublie on se trompe et puis quand on et puis le fait de changer de couleur du coup on voit bien que on peut aller chercher le voilà toujours pareil donc là c'était l'évaluation

Ici dans l'exemple de F les élèves doivent changer de couleur pour chaque paquet, cette activité est codée dans la branche énumération. Quelles sont les connaissances utiles dans cette situation ? L'élève peut compter un deux trois quatre cinq, ce sont des connaissances

de la suite orale des mots nombres, qui sont des connaissances naturalisées car cette activité est proposée à des élèves de GS ; ou bien il peut compter deux et encore trois, ou bien quatre et encore un, pour faire les paquets de cinq. Ensuite il aborde des connaissances de synchronisation entre le un énoncé à voix haute ou intériorisé et la marque sur le premier poisson choisi, arrivé à cinq le nombre cible (à ne pas dépasser), l'élève entoure avec le feutre bleu les cinq poissons marqués d'un trait bleu. Il choisit une autre couleur et recommence cela pour tous les poissons. Ce travail répétitif entraine l'organisation du balayage de la collection en s'appuyant sur des connaissances déjà naturalisées, alors s'agit-il de connaissances de la quantité cinq ? De la suite orale des mots nombres jusqu'à cinq ? Peu importe en fait, la connaissance minimale de la suite orale des mots nombre jusqu'à cinq suffit dans cette activité. Ces activités seront donc codées dans énumération.

B décrit une organisation où il recueille des vignettes déjà découpées dans des petites assiettes pour leur apprendre à ordonner. C'est-à-dire mettre de l'ordre sur la table entre les vignettes déjà découpées, les papiers à mettre à la poubelle, les vignettes qu'il reste à découper.

8	B- quand les enfants travaillent ils ont l'habitude quand ils découpent je recueille toujours les vignettes dans des petites assiettes de la dinette pour leur apprendre à ordonner

Il associe cet apprentissage à « apprendre à ordonner » à de l'autonomie future pour les élèves « dans toutes leurs pratiques de travail dans leurs méthodes de travail »

60	B- parce que heu je veux leur inculquer toutes les bonnes façons de faire mais pour tout pour découper pour coller pour collecter les vignettes donc je les donc je les prends de façon à ce qu'après au troisième trimestre j'arrive à les mettre à travailler quatre par quatre cinq par cinq pour qu'après la collègue l'an prochain en MS comme elle a les GS ils soient assez autonomes dans toutes leurs pratiques de travail dans leurs méthodes de travail et tout ça en même temps

Certaines connaissances en situation sont identifiées à partir des difficultés des élèves. C'est le cas de la synchronisation de la suite orale des mots nombres avec le pointage des éléments de la collection qui est souvent repérée. Le professeur décide parfois de prendre à sa charge une partie de la synchronisation, soit le pointage, soit la suite orale des mots nombres. L'inorganisation de la collection pour traiter tous les éléments est également observée chez les élèves, là encore le professeur prend à sa charge cette organisation, soit de façon implicite, il le fait lui-même de façon spontanée et naturelle, comme un automatisme et ne le rend pas explicite pour l'élève. Ou bien il impose à l'élève son organisation. Les exemples proposés sont inhérents au dénombrement, toutefois B étend ces connaissances à l'organisation de collections à traiter et restant à traiter de façon générale (pas seulement au domaine mathématique). L'énumération est peut-être un savoir transparent pour le professeur mais en situation d'observation de la difficulté des élèves, les connaissances issues de l'énumération sont parfois nommées et décrites et même analysées comme des connaissances transversales.

Tout comme la branche ordinal-position, les savoirs liés à l'énumération ne sont pas identifiés par le professeur.

Par rapport à l'analyse *a priori*, l'entrée par les configurations déplaçables ou non déplaçables n'est pas proposée comme telle dans les propos des enseignants. Même si, encore une fois, plusieurs enseignants relèvent plus de facilités pour les élèves avec des collections déplaçables. L'enseignement de l'énumération n'est pas pris en charge par le professeur car il n'identifie pas les savoirs transparents (transparents aussi dans les

programmes 2008). Les connaissances mathématiques spécifiques pour l'enseignement de l'énumération du professeur ne sont pas dégagées. Seule l'observation fine de la difficulté des élèves lui permet de les repérer.

CONCLUSION CONCERNANT L'ANALYSE GLOBALE

Le domaine numérique exploité par le professeur conditionne l'enseignement du nombre à l'école maternelle. Parfois ressenti comme étriqué ou limitatif, celui-ci s'étend et s'élargit lorsque les élèves grandissent, coïncidant même parfaitement en PS et MS avec leur âge (trois ans et cinq ans). En dessous de cinq, les connaissances se mêlent entre récitation de la suite orale des mots nombres, cardinal, reconnaissance immédiate, *subitizing*, itération, décomposition… Les petites quantités sont systématiquement comptées ou dénombrées. La quantité n'est pas toujours reconnue comme un savoir à part entière, sauf dans sa première approche avec beaucoup-pas beaucoup (prévue dans le manuel *Vers les maths* des éditions Accès). La préoccupation continue liée à la reconnaissance visuelle immédiate de petites quantités est commune aux dix enseignants interrogés. Cela débouche sur un surinvestissement, en temps, d'activités prévues à cet effet, auxquelles s'ajouteront celles initiant la lecture de l'écriture chiffrée. C'est-à-dire, lire le nom du chiffre ou du nombre mais savoir également à quelle quantité il se réfère. Le calcul est nettement représenté dans les propos de certains enseignants, bien au-delà de la simple approche. Tous les enseignants de GS décrivent des activités liées à la branche calcul, pour les autres niveaux, il n'y a pas de généralité qui se dégage.

Pour la branche ordinal, il n'y a pas de règle non plus à partir de ces dix entretiens. Il ressort toutefois, dans la plupart des exemples exposés, que l'enseignement n'est pas explicite, notamment celui pour la position. Le déplacement, l'orientation et la case « origine » sont abordés en situation, avec les jeux de plateaux.

L'énumération n'est pas reconnue comme un savoir à part entière et n'occasionne donc pas un enseignement spécifique. Toutefois, tous les enseignants reconnaissent, en situation d'observation des difficultés des élèves, des variables inhérentes au savoir et les décrivent parfaitement. L'observation fine de la difficulté des élèves permet de nommer et d'identifier les variables mais pas pour autant de les rattacher au savoir énumération. H cependant nomme l'énumération comme un savoir, mais ne propose pas d'activités pour l'énumération dans son enseignement, il ne donne rien à voir quant à ses connaissances mathématiques spécifiques. L'explication précise du dénombrement, due à une imposante domination en pratique, fait part de connaissances mathématiques spécifiques du professeur.

L'analyse *a priori* dégage des directions pour les savoirs assez générales, les résultats de l'analyse des entretiens des enseignants font apparaitre des différences notables pour certaines branches. Autant les branches numérations, calcul, cardinal-relations sont assez proches de l'analyse *a priori*, autant les branches cardinal-quantité, ordinal et énumération sont plus floues. Les résultats dévoilent des connaissances mathématiques spécifiques très détaillées et précises dans les branches numérations, calcul, et cardinal-relations.

Cette tendance générale va à présent s'affiner avec l'étude particulière de chaque enseignant. Les possibilités d'enseignement sur le nombre à l'école maternelle évoquées ci-dessus sont en quelque sorte une extrapolation de la somme des possibles à partir des dix entretiens. L'étude par enseignant replace ces possibles dans un contexte de cohérence d'enseignement prenant en compte le parcours de chaque professeur.

CHAPITRE 4- ANALYSE DÉTAILLÉE DES RÉSULTATS PAR ENSEIGNANT

Tour à tour, pour chaque enseignant, les connaissances mathématiques spécifiques sont exposées à partir de l'arbre des savoirs du nombre, d'exemples d'activités et de situations décrivant l'enseignement du nombre. Les niveaux d'activité du professeur viennent compléter l'analyse, ce qui aura pour conséquence de définir une caractérisation de l'enseignement du nombre pour chaque enseignant.

Je choisis d'exposer la présentation des branches de l'arbre en respectant l'ordre d'importance pour l'enseignant au vu du nombre d'épisodes codés.

Plusieurs questions se posent :

Quels savoirs sont enseignés par le professeur ?

Comment explique-t-il son enseignement du nombre ?

Quelles sont les connaissances mathématiques spécifiques pour l'enseignement du nombre investies par l'enseignant ?

1- L'ENSEIGNEMENT DE A

Au moment de l'entretien, A enseigne dans une classe de TPS-PS.

1.1- L'arbre des savoirs du nombre de A

Il s'agit d'abord, pour chaque enseignant, en commençant par A, de relever dans les propos du professeur les éléments caractéristiques des situations relatées dans l'entretien et de les répartir ensuite dans chacune des branches de l'arbre des savoirs du nombre, ce qui permet d'obtenir une silhouette individualisée d'un arbre des connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement du nombre.

a- Focus sur les cinq principaux savoirs de l'arbre du nombre

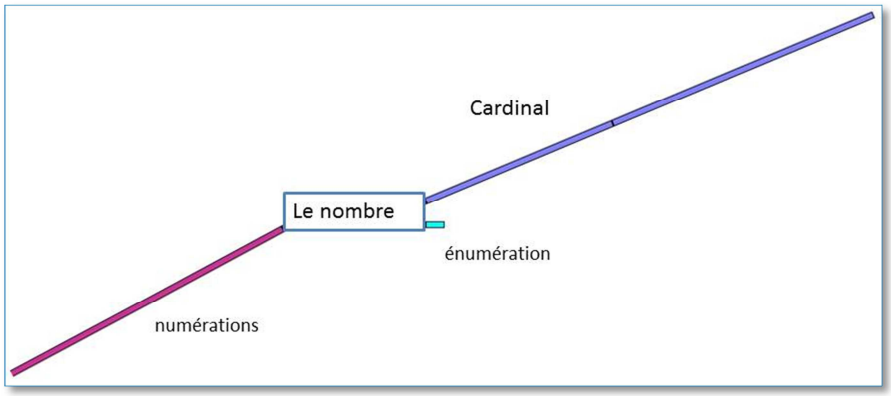


FIGURE 60 : L'ARBRE DES CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES SPÉCIFIQUES DE A

Cette figure (Figure 60 : L'arbre des connaissances mathématiques spécifiques de A) est obtenue à partir de la représentation générale des cinq branches de l'arbre des savoirs du

nombre, cardinal, ordinal, calcul, énumération, numérations et du graphe en pourcentage pour les mots-clés obtenus dans transana. Sans tenir compte précisément de la longueur des branches, c'est-à-dire du temps accordé par A pour décrire la ou les activités, qui sont analysées en situations fondamentales, A consacre une part très importante de son enseignement à explorer l'aspect cardinal du nombre. L'enseignement des numérations orales, figurées et écrites sont également largement représentées dans ses propos. Enfin l'énumération est appréhendée par l'observation de difficultés des enfants. L'ordinalité ainsi que le calcul ne sont pas évoqués par A dans cet entretien.

b- Durée des extraits codés

La figure 24 (Figure 61 : Histogramme des extraits codés en minute pour A) fait apparaitre une domination dans ses propos de l'aspect cardinal avec plus de quatorze minutes relatives à des situations sur le cardinal ; suivi par des situations sur l'enseignement des numérations avec plus de neuf minutes et des extraits issus d'une observation de difficulté d'élève relative à l'énumération en situation.

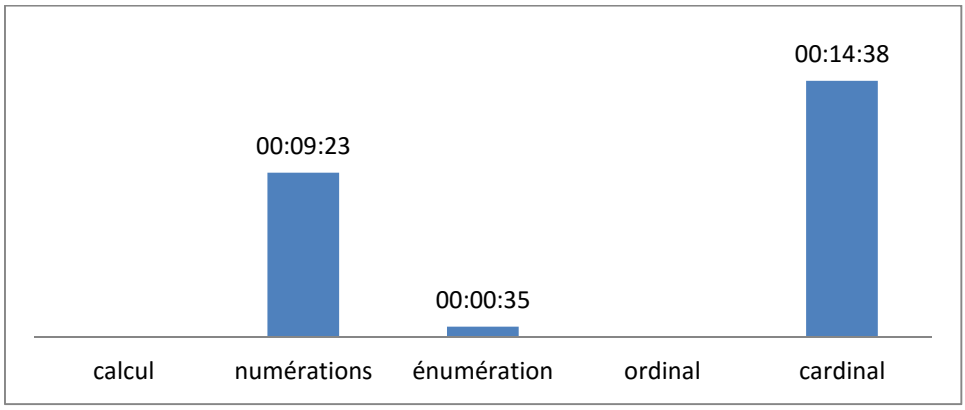


FIGURE 61 : HISTOGRAMME DES EXTRAITS CODÉS EN MINUTE POUR A

1.2- Quelles connaissances mathématiques spécifiques sont présentes dans chacune des branches ?

a- La branche cardinal

La branche cardinal-relations

Lors de son rituel, A, après avoir entrainé la suite orale des mots nombres, instaure un jeu avec les étiquettes des absents. Il aborde la cardinalité à partir de toutes petites collections, trois, deux, un et estime être dans le « truc ».

6	A– je commence à à jouer par rapport aux absents où généralement on a heu les absents deux trois un un deux trois donc TPS-PS on en dans dedans le truc

« On est dans le truc » fait référence à une progression souvent évoquée par les enseignants dans les entretiens, de un à trois en petite section, jusqu'à cinq en moyenne section et jusqu'à dix en grande section. A insiste sur la connaissance des petites quantités un deux trois qu'il nomme « seuil » ou « base » ensuite il déclare pouvoir « s'amuser avec le quatre cinq ». Il choisit des albums de littérature de jeunesse comme les trois petits cochons ou autres pour renforcer un deux et trois.

28	A– si tu veux toute activité de lecture d'albums au travers des albums alors c'est moins ritualisé ça mais dans tous les albums c'est vrai que je m'amuse c'est le cas de le dire à leur faire trouver et généralement vu que je choisis des albums où il y a un deux trois où il y a trois petits cochons où il y a trois petits loups où il y a trois maisons où on fait donc là c'est vrai que là c'est moi qui qui qui qui qui prend le et on va dire le nombre au passage en disant tiens et là je les fais intervenir en les faisant dénombrer ou reconnaitre tiens combien y'a de première question aussi des petites questions

Montrer deux, se mettre par deux en insistant « un et toi ça fait deux » sont autant d'exemples décrits par A.

Mais il repère déjà des difficultés pour certains enfants avec un deux trois. En parallèle, il travaille la reconnaissance globale sur ces petites quantités, le *subitizing* qui s'avère être une aide lors de petits dénombrements par les enfants qui n'ont pas encore mémorisé la suite orale des mots nombres. Il utilise parfois « l'album 1 2 et 3 j'apprends les maths PS, RETZ », mais en fin d'année seulement. Il souhaite mentionner cet outil sans en avoir une réelle utilisation dans sa pratique de classe.

Avec les TPS–PS A prend le temps d'installer le milieu des situations V0 : itération/succession en insistant sur les trois premiers nombres, un, deux, trois. La situation fondamentale V1 : figurer/dénommer est également appréhendée en montrant deux, et en insistant « un et toi ça fait deux ». A expose le début de la branche cardinal-relations pour V0 et V1.

<u>La branche cardinal-quantité</u>

A profite du rituel pour dénombrer les absents, ce qui lui permet d'appréhender les petites quantités, un deux trois et parfois quatre cinq. Il détaille des activités relatives à la situation fondamentale « construire la même quantité que ». En séance de motricité, il utilise des cerceaux qu'il dispose au sol deux par deux et demande aux enfants de se mettre par deux pour qu'il y ait un enfant dans chaque cerceau, la même quantité d'enfant que de cerceau.

44	A- c'est à dire là maintenant en début d'année je n'arrivais pas trop en tout cas avec mes TPS je sais que les PS mais vu que j'ai un mélange de PS-TPS je le fais parfois je pousse un peu mais là pour certaines structures d'act heu structures de d'ateliers là maintenant je fais des ateliers de lancers de ballons et de réception par deux donc je dis on se met par deux donc deux cerceaux des enfants dans chaque cerceau et on se lance par deux et ça là déjà je sais que tu vois on est au mois de janv heu févri

Il utilise le matériel de « l'Atelier Boîtes à compter 1, Nathan ». Cette boîte de jeu propose différents supports : une bandelette avec des collections d'animaux dessinés et les figurines correspondantes, une bandelette avec les constellations du dé et une bandelette avec l'écriture chiffrée. Les deux premières bandes permettent de construire des collections de même quantité en favorisant la correspondance terme à terme. Ce matériel implique typiquement une situation d'action, les petites cases favorisent l'anticipation. Une collection de jetons est disponible, elle permet une abstraction plus importante en s'éloignant du modèle. La collection intermédiaire matérielle (les jetons) imposée dans ce jeu, permet de représenter la caractéristique d'une collection d'animaux dessinés par une collection de jetons.

Comme pour ce jeu, A utilise de petites quantités dans les activités qu'il propose (même s'il constate l'utilisation de la correspondance terme à terme comme procédure).

318	A- parce que je trouve qu'ils se noient vite dans le dans le nombre dans la quantité la quantité j'entends

Il privilégie le recours à la suite orale des mots nombres ou au cardinal de la collection pour remplir les cases de la boîte à compter quand les élèves se sont trompés.

À sa surprise, il rencontre certains élèves qui réussissent sans dénombrer ni compter.

226	A- et ceux qui l'ont intégré même si ils n'ont ils ont encore du mal à à à dénombrer oui à dénombrer et même parfois à à me réciter la comptine numérique ils vont arriver à me retrouver le même nombre ce qui est parfois un peu surprenant mais tu mais c'est possible

b- La branche numérations

A débute l'entretien en exposant la prépondérance de la suite orale des mots nombres qu'il nomme la comptine. Il associe également le comptage des présents, au moment du rituel, à l'entrainement de la mémorisation de la suite orale des mots nombres. Répéter tous les jours cette comptine favorise l'imprégnation et la mémorisation de celle-ci.

6	A- où j'ai remarqué que bien sûr on on on le on le on le traite d'une autre façon mais chez les petits j'ai remarqué que c'était c'était super donc déjà pour d'abord par rapport à la comptine tout simplement la comptine alors là en pratique et dans l'activité c'est par le l'appel dès le matin des enfants combien nous sommes ça déjà c'est le donc c'est la comptine

Il s'agit de l'apprentissage de la suite orale des mots nombres, comme une chanson.

276	A- moi j'aborde j'aborde par les par les com par les comptines ouais par les cert différentes comptines que j'ai pas en tête mais par la comptine heu enfin les les
277	Chercheur- les petites comptines
278	A- les comptines chant hein chant heu ensuite heu à tout est bon quand même comme je te le disais par rapport à à la à l'appel du matin de compter tout seul

La suite orale des mots nombre est aussi mise en avant dans les situations de dénombrement de petites collections, toujours pour favoriser la mémorisation. A repère des difficultés de mémorisation chez les élèves.

216	A- mais qu'est-ce que tu veux tu veux tous les stades parce que alors heu on va prendre le stade le plus commun c'est que l'enfant déjà a du mal à intégrer la comptine numérique

A développe précisément son enseignement de la suite orale des mots nombres, en appuyant sur la difficulté de l'évaluation.

294	A- alors c'est là où on se dit que la comptine même si c'est pas du comment te dire heu si c'est pas heu un apprentissage vraiment heu comme je dis formalisé c'est à dire où on va évaluer voir un peu où en est l'enfant où sont les enfants même hein globalement on sait que ils impriment quand même et ils mémorisent énormément beaucoup de choses et c'est vrai que voilà c'est pas facile je te dirai c'est vrai que c'est pas facile mais je parle surtout chez les TPS chez les mais chez certaines même PS parfois j'ai du mal des fois à les à leur dire bon ça va mieux déjà au mois de mars déjà ça va un peu mieux mais mais c'est surtout le début de l'année quand même qui est assez heu compliqué

La progression est également abordée sous l'aspect de l'autonomie dans la récitation.

284	A- et donc au niveau de la progression donc petit à petit j'amène enfin j'amène oui c'est moi qui les amène à leur demander ah et oui on en était à dire que vu que j'en avais vingt que j'insistais bien sûr sur l'apprentissage jusqu'à cinq et jusqu'à dix bien entendu pour les PS les les TPS alors c'est vrai que là on est toujours par rapport à l'apprentissage de la comptine dans le le mimétisme bien entendu alors à à fond avec les TPS en début d'année où ils ils ne n'osent pas le dire ils écoutent mais j'ai

	remarqué alors c'est là où tu as un retour par rapport à cet apprentissage parce qu'en classe c'est quand même assez compliqué parce que bien entendu tu le sais bien les PS y'en a qui n'osent pas parler devant le groupe qui veulent pas tel jour mais qui voudraient bien un autre qui veulent mais quand c'est pas le moment quand c'est le moment c'est plus le moment donc c'est assez délicat de faire une évaluation de la comptine numérique mais mais on y arrive avec certains donc l'essentiel c'est d'arriver quand même à les entendre pratiquement tous mais on verra à la fin de l'année pour l'instant c'est un peu difficile mais là c'est le matin la la comptine numérique j'essaye de les avoir heu par un autre biais en activités d'exercices en petits groupes ou tout seul et là là y'a ça va mieux

La suite orale des mots nombres doit être naturalisée pour que les situations de comptage et de dénombrement très sollicitées à l'école maternelle, soient possibles. A insiste sur la difficulté de la mémorisation mais aussi sur sa restitution pour de jeunes élèves, ou le groupe peut bloquer la parole de certains. Il pointe par là même la difficulté d'évaluer dans de telles conditions. A compte sur le retour des parents qui font souvent écho des progrès de leur enfant en matière d'apprentissage de la suite orale des mots nombres. Il est à l'affut de toutes situations ou tout prétexte pour entrainer cette suite orale des mots nombres en comptant ou en dénombrant.

Il développe et entraine en parallèle la reconnaissance de petites quantités (un, deux, trois) à partir des constellations du dé ou des doigts afin d'automatiser la perception globale.

248	A- comment ils abordent les nombres y'en a qui ont quand même comment on dit une perception globale

Quant à l'écriture chiffrée, il l'enseigne au gré des rencontres et des besoins, sans pour autant proposer un enseignement systématique des chiffres. A a à sa disposition, dans sa classe, de grands chiffres en plastique affichés au mur (de cinquante centimètres de hauteur). Ce format permet d'en faire le contour en grand, de les regarder, de les porter, de les retourner, de les mettre à l'envers[60]…

138	A- oh ben je alors là je présente souvent l'écriture ben tiens ben ce matin par exemple je dis tiens y'a deux mais j'ai quand même des représentations au-dessus du tableau des écritures chiffrées quand même hein et donc de temps en temps selon l'activité je dis tiens ça c'est un ah tiens aujourd'hui on a deux je l'ai sorti ce matin je l'ai descendu ce matin j'ai dit tiens on a deux donc on a regardé un peu je j'ai fait le tracé comme ça parce qu'on a des grands deux

c- La branche énumération

218	A– mais c'est vrai que la difficulté que rencontre l'enfant c'est que peut être mais là je suis pas dans sa tête donc là pour trouver le le le hiatus c'est difficile donc je me dis l'enfant va peut-être arriver à à dé à dénombrer en faisant la petite comptine bon mais c'est vrai que c'est pas systématique quand même ça et donc s'il commence à passer et qu'il a pas intégré la comptine s'il veut passer dans le on va dire la correspondance terme à terme il va avoir du mal il va se perdre généralement c'est un peu ce que j'ai remarqué

Ici A décrit une difficulté liée au passage en revue des éléments de la collection, une et une seule fois. Même avec de petites quantités, les enfants « se perdent ». Je pense que A fait référence, de façon implicite, à l'organisation de la collection en espaces de traitement des éléments déjà traités et ceux qui restent à traiter. A décrit la procédure de l'enfant « s'il commence à passer » en revue les éléments de la collection « il va avoir du mal (à organiser

[60] Encore une fois un clin d'œil à l'album « A » de Claude Ponti.

le traitement des éléments de la collection) il va se perdre (en oublier, en traiter un plusieurs fois) », mais sans être formulé explicitement par A.

A utilise un « collier de perles » au moment des rituels avec autant de perles que d'enfants inscrits dans la classe. Sur un fil noué, se trouve la même quantité de perles que d'élèves dans la classe. Une longueur de fil sans perle est prévue à l'autre extrémité. Ainsi, lorsqu'il commence le rituel avec l'énumération des élèves assis sur les bancs en correspondance avec les perles du collier, il laisse passer une perle après l'autre de l'autre côté du fil. Au final, s'il y a des enfants absents, il restera quelques perles proches du nœud initial. Il accroche alors ce « collier » à un crochet sur le tableau laissant apparaitre d'un côté la quantité de perles correspondant aux enfants présents en classe, et de l'autre côté, les perles symbolisant les enfants absents. Ici, sur la figure suivante (Figure 62 : Collier utilisé par A au rituel) il y a deux absents.

FIGURE 62 : COLLIER UTILISÉ PAR A AU RITUEL

Il s'agit pour les enfants de synchroniser la suite orale des mots nombres et le déplacement de la perle provoqué par A. Il observe des difficultés de synchronisation entre la suite orale des mots nombres et le glissement des perles une à une. Le savoir relatif à la mémorisation de la suite orale des mots nombres est bien identifié, le savoir inhérent à l'énumération l'est seulement par rapport à la difficulté des élèves.

290	A- tu vois y'a les deux hein là donc mais ils vont arriver à compter sans faire de correspondance avec le petit sur le collier la petite perle correspond à chaque enfant

1.3- Dialectique savoir/connaissance à travers certaines activités décrites

a- Des savoirs vers les connaissances

Le savoir est montré par le professeur comme une œuvre à découvrir et à visiter en groupe. Peu à peu A cède sa place pour permettre aux élèves d'occuper le devant de la scène.

278	A– bon ben lorsque je vais moi quand je suis en déplacement d'un lieu à un autre dans l'école je compte et je compte à haute voix tu vois alors c'est vrai que par rapport à la comptine quand ils faisaient systématique ça j'en ai pas parlé tout à l'heure c'est que heu bien entendu moi je compte avec le collier mais bien entendu je fais participer et c'est là où tu vois et si y'a une progression là il va y avoir une quand même c'est que je fais j'essaye dans le courant dans dans l'année de suivre une progression en faisant participer soit collectivement les enfants soit on dit avec moi soit après moi soit je prends les enfants et c'est eux qui comptent à ma place

Dans cette description, la première étape est soulignée par l'enseignement du professeur qui montre le savoir en collectif, puis progressivement il va rechercher et laisser de plus en plus de place à la participation des élèves, en collectif, les élèves répètent le modèle avec le professeur, puis ils répètent juste après A pour finir en s'assurant individuellement des connaissances minimales de chacun et à ce stade les élèves font à la « place » du professeur.

b- Des connaissances vers les savoirs

A relate une situation d'action où il observe une procédure de correspondance terme à terme. En contrôlant sa consigne il ne dit pas « y'a deux animaux dans le pré je veux qu'y en ait deux dans le » mais préfère « je veux le même nombre » ce qui autorise certains élèves à travailler sur la quantité en correspondance terme à terme.

222	A- y'a deux animaux dans le pré je veux qu'y en ait deux dans le le même nombre enfin je dis rien pardon
223	Chercheur- oui
224	A- mais je dis je veux le même nombre le même nombre voilà alors par différents jeux ou alors ils se déplacent et on retrouve les mêmes nombres dans l'autre pré voilà mais alors y'en a qui intègre ça alors ils le verbalisent pas je l'évalue pas heu comme ça
225	Chercheur- oui oui
226	A- et ceux qui l'ont intégré même si ils n'ont ils ont encore du mal à à à dénombrer oui à dénombrer et même parfois à à me réciter la comptine numérique ils vont arriver à me retrouver le même nombre ce qui est parfois un peu surprenant mais tu mais c'est possible

Selon la branche sur laquelle il se situe, cardinal-quantité et cardinal-relations, A propose une approche tantôt des connaissances vers les savoirs et des savoirs vers les connaissances en modulant alors son rôle.

1.4- Les niveaux d'activités de A

a- Niveau+3 : niveau noosphérien ou idéologique

+3		Évaluation		Apprentissage		Méthodes actuelles

PA_{+3} revient fréquemment sur l'évaluation en justifiant ses choix de ne pas évaluer certaines fois de façon "formelle". Face à des enfants parfois silencieux il apprécie le retour des parents qui lui précisent que l'enfant compte à la maison, c'est-à-dire récite la suite orale des mots nombres. Conscient de cet enjeu par rapport à l'évaluation, il consacre du temps à installer les conditions favorables pour chaque enfant. Cela peut passer par la gestion du groupe, du collectif aux petits groupes pour finir en individuel. Le but étant que l'enfant se sente suffisamment en confiance pour agir et oser parler. Il détourne parfois la finalité de la tâche par exemple en situation de lecture d'album il interroge l'enfant sur le nombre de petits cochons.

PA_{+3} attache de l'importance à l'apprentissage par mimétisme, l'élève écoute, répète, c'est le cas pour la suite orale des mots nombres, pour le collier au rituel, pour des jeux collectifs. Il endosse le rôle du professeur qui montre le savoir et il accompagne peu à peu les élèves à prendre sa place en respectant toute une progression du collectif aux petits groupes et en individuel pour ceux qui ont plus de difficultés. Cette étape en individuel lui permet de « captiver » l'attention de l'enfant. PA_{+3} trouve que les mathématiques et la construction du

nombre en particulier, plus que tout autre domaine à la maternelle, demandent des compétences et une abstraction à la hauteur de l'intensité cognitive demandée aux élèves de CP en lecture.

PA_{+3} se réjouit des méthodes d'enseignement actuelles qui sont d'une « joyeuseté incomparable », cette réflexion fait écho à son propre parcours scolaire.

b- Niveau+2 : situation de construction

+2		Apprendre la suite orale des mots nombres en multipliant les situations de comptage, de dénombrement L'écriture chiffrée		Consolider les premiers nombres : un deux trois		Construire des collections de même quantité

PA_{+2} organise l'enseignement de la suite orale des mots nombres en favorisant les situations de comptage ou de dénombrement qui permettent un entrainement à la mémorisation de la suite orale. Dès qu'il peut, il compte à voix haute devant le groupe, lors de déplacements lorsqu'il dénombre les enfants.

PA_{+2} aborde l'écriture chiffrée en contexte, au gré des besoins, qui sont minimes en PS. Il ne propose pas un enseignement systématique ni un travail de reconnaissance de l'écriture chiffrée. Tout au plus il montre les chiffres écrits et des essais d'écriture dans la semoule sont alors proposés.

PA_{+2} « travaille énormément le un deux trois », la reconnaissance des premières petites quantités, savoir dénombrer de petites collections sont autant de situations qu'il développe. Tout contexte favorable est immédiatement détourné pour amener les élèves à fixer et consolider l'étude des premiers nombres. PA_{+2} consacre alors du temps à ces premiers apprentissages qui sont la « base » et le « socle » pour la suite de son enseignement.

PA_{+2} développe des situations d'action en partant de la situation fondamentale « construire des collections de même quantité ». Il possède dans sa classe un jeu éducatif sur lequel il s'appuie pour ensuite proposer le même type d'activité au tableau en dessinant des prés avec des animaux aimantés.

c- Niveau +1 et niveau 0 : situation de projet de leçon (dans la séance) et situation didactique

+1 & 0		Détail des activités quotidiennes		Exemples d'activités

$PA_{+1\&0}$ détaille ses activités quotidiennes concernant l'enseignement du nombre. Le rituel qu'il propose est un « passage obligé », que ce soit pour compter les présents, dénombrer les absents et utiliser le collier. PA_{-1} décrit aussi « des activités plus systématiques » concernant le nombre, avec notamment l'utilisation d'un matériel spécifique, mais aussi en motricité.

$PA_{+1\&0}$ relate quelques exemples comme les boîtes à compter, les deux prés et les animaux au tableau, la recette de cuisine et les ingrédients nécessaires pour faire des crêpes, les jeux de lancers de ballons par deux, des jeux de manipulation d'instruments avec des questions liées aux nombres, ou à partir d'une histoire lue, des jeux collectifs.

d- Niveau -1 : niveau d'observation ou de dévolution

- 1		Facilités et difficultés observées		Évaluations

PA_{-1} observe et voit les aptitudes des élèves en mathématiques, il observe des difficultés parfois très tôt sur l'étude des premiers nombres, un deux et trois. La suite orale des mots nombres est source de difficultés pour certains enfants, la mémorisation semble délicate et nécessite alors plus de temps. Lorsque la suite orale des mots nombres n'est pas mémorisée, le dénombrement de petites collections n'est pas possible. PA_{-1} décrit également des difficultés liées à l'énumération avec des enfants qui se « perdent » ou qui « se noient vite dans la quantité ». PA_{-1} est vigilant à la constitution des groupes, à éclater le grand groupe et à favoriser les petites interactions afin de préserver et consolider la sécurité affective nécessaire aux jeunes élèves pour pouvoir prendre place au sein d'un groupe et oser s'exprimer devant tout le monde.

PA_{-1} conçoit des évaluations formelles mais aussi des évaluations sous des formes plus souples ou au détour de questions impromptues il évalue les connaissances des élèves sur les petits nombres.

1.5- Conclusion concernant A

A détermine ses séances en tenant compte des interactions avec les élèves relevées au niveau de la situation didactique. Il fait part de son expérience dans les différents niveaux de l'école maternelle PS MS et GS pour envisager une progression des apprentissages en s'adaptant aux élèves. Les observations des difficultés des élèves modifient son niveau de construction de séquence voire même sa conception idéologique et se retrouvent au niveau de la situation didactique. Le schéma suivant (Tableau 11 : Activité réflexive de A) fait apparaitre le niveau qui caractérise le plus l'activité du professeur.

Niveau noosphérien ou idéologique	+3
Niveau de construction ou de conception d'un thème	+2
Niveau de projet de leçon et niveau de la situation didactique	+1 & 0
Niveau d'observation ou de dévolution	-1

TABLEAU 11 : ACTIVITÉ RÉFLEXIVE DE A

A insiste sur la mémorisation de la suite orale des mots nombres bien qu'il pense que la comptine numérique ne fasse pas l'objet d'un enseignement formalisé devant être évalué. Il propose un entrainement pour la mémorisation de la suite orale en deux étapes, d'abord centré sur cinq, puis jusqu'à dix avec les TPS-PS. A propose de nombreuses situations impliquant le dénombrement par comptage de petites collections justifiant ainsi la suite orale des mots nombres comme connaissances naturalisées. Pour autant, il propose un travail sur la branche cardinal avec des collections de petites quantités, jusqu'à cinq avec une insistance particulière sur un, deux et trois. A n'est pas tenté de proposer des collections plus importantes car il remarque généralement que les élèves se perdent dans l'énumération de la collection. La figure suivante (Figure 63 : Connaissances Mathématiques Spécifiques de A) résume les connaissances mathématiques spécifiques pour l'enseignement du nombre en TPS-PS de A.

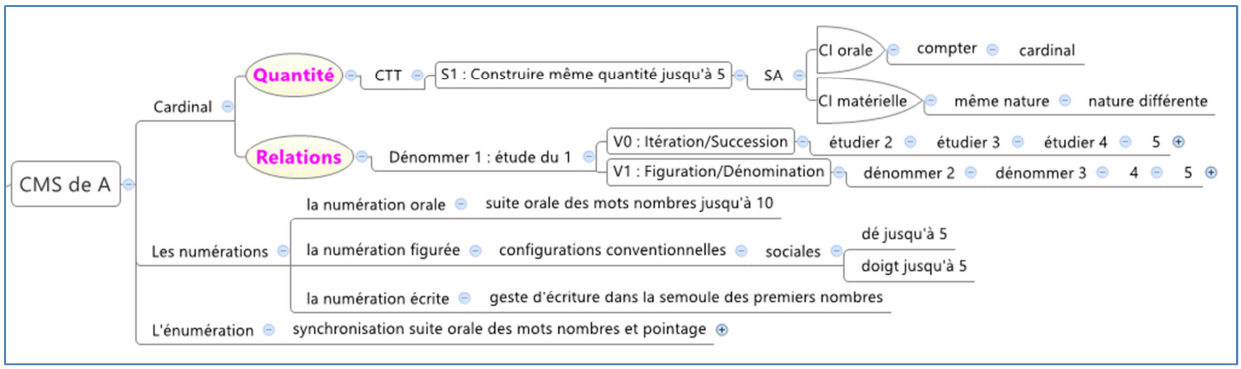


FIGURE 63 : CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES SPÉCIFIQUES DE A

2- L'ENSEIGNEMENT DE B

B a des TPS PS au moment de l'entretien.

2.1- L'arbre des savoirs du nombre de B

a- Focus sur les cinq principaux savoirs de l'arbre du nombre

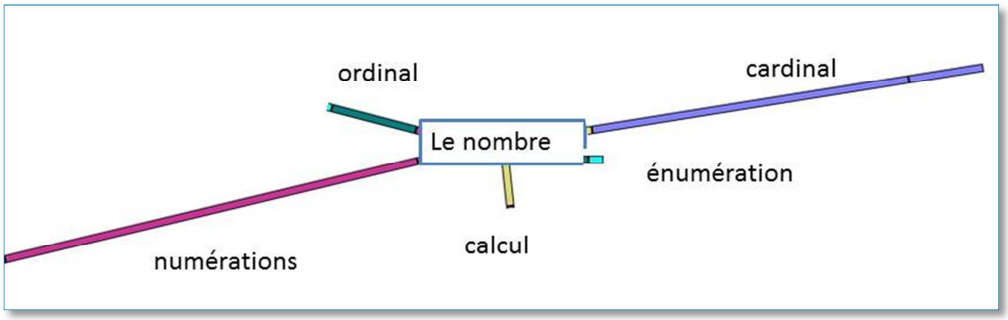


FIGURE 64 : L'ARBRE DES SAVOIRS MATHÉMATIQUES SPÉCIFIQUES À L'ENSEIGNEMENT DU NOMBRE DE B EN NOMBRE D'EXTRAITS CODÉS

B décrit des activités liées aux cinq savoirs mathématiques spécifiques pour l'enseignement du nombre. Son enseignement est nettement orienté sur la cardinalité ainsi que sur les numérations. Viennent ensuite l'ordinalité, le calcul et l'énumération avec des connaissances mathématiques spécifiques interprétées à partir des propos déclarés de l'enseignant.

Dix-neuf extraits sont codés sur la branche cardinal, dix-huit extraits sont notés dans la branche des numérations. Quatre extraits sont relevés pour la branche ordinal, deux pour le calcul et un extrait pour l'énumération. Les durées des extraits codés apparaissent dans le diagramme suivant.

b- Durée des extraits codés

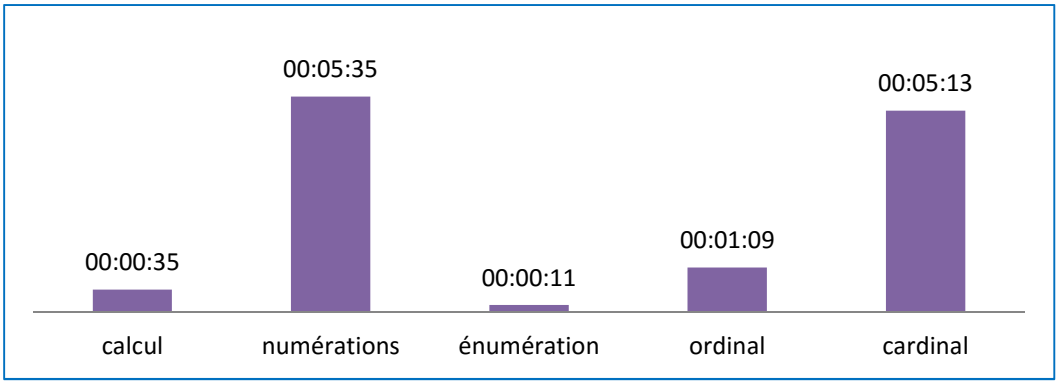


FIGURE 65 : HISTOGRAMME DES EXTRAITS CODÉS EN MINUTE POUR B

2.2- Quelles connaissances mathématiques spécifiques sont présentes dans chacune des branches ?

a- La branche numérations

B entraine la suite orale des mots nombres avec des activités de comptage : compter les absents « un deux », les bougies, et compter jusqu'à cinq.

32	B- alors tous les matins heu on compte on va jusqu'à cinq et c'est toute la classe
33	Chercheur- d'accord
34	B- alors je leur fais compter un deux trois quatre cinq
35	Chercheur- avec les doigts
36	B- puis avec les doigts mais aussi dans le désordre un deux trois quatre cinq y'en a toujours cinq l'autre main un deux trois quatre cinq un deux trois quatre cinq voilà et tous les matins on le fait
37	Chercheur- ouais
38	B- et bon je montre les mains ils savent on va compter on le fait ensemble ça c'est pour avoir la suite numérique

Il n'utilise pas vraiment les comptines numériques pour aider à mémoriser la suite orale des mots nombres, une fois il en a proposé une avec petit ours brun.

46	B- mais peuf non pas forcément c'est pas systématique tous les ans

Par contre il est à l'affut de la moindre petite collection à compter pour entrainer « un deux trois » et il est entrainé à débusquer les petites occasions.

6	B- au lever de la sieste je les habille tiens y'a deux boutons va chercher tes chaussures combien tu en as deux

B propose l'écriture chiffrée de un deux ou trois dès qu'il peut en l'inscrivant au tableau pour imprégnation. Son enseignement de l'écriture chiffrée consiste également à discriminer les chiffres : entourer les 1 parmi les quatre premiers chiffres, reconnaitre et entourer les chiffres parmi les lettres. Ce travail est proposé sur fiche jusqu'à trois.

78	B- alors jusqu'à trois je la fais l'écriture chiffrée dans des dans un travail spécifique sur fiche
79	Chercheur- d'accord
80	B- on a entouré les un
81	Chercheur- ah
82	B- alors le un ça je sais qu'on l'a fait le deux je sais plus si on l'a fait
83	Chercheur- alors tu veux dire reconnaitre le chiffre un parmi d'autres des

	lettres des symboles
84	B- parmi jusqu'à quatre ouais parmi des chiffres parmi que des chiffres je leur fais aussi entourer les chiffres par rapport aux lettres
85	Chercheur- ah oui quand même
86	B- mais alors là j'avais je l'avais pas travaillé par contre on travaille beaucoup les lettres on travaille les lettres et tout on les connait on les a apprises ils les à peu près ils sont OK sur les lettres heu un jour je leur ai demandé d'entourer les chiffres j'ai pas eu de surprise les chiffres étaient bien voilà
87	Chercheur- ah oui et alors un-deux-trois quand tu dis les chiffres
88	B- oui enfin non j'avais mis d'autres chiffres j'avais mis des chiffres ils ont entouré des chiffres en fait c'était ne pas entourer les lettres c'était entourer les chiffres ce sont des chiffres voilà par déduction mais là j'étais surprise parce que et cette année j'ai pas un groupe extraordinaire ils sont petits ils sont
89	Chercheur- et ils y sont tous arrivés
90	B- ben oui
91	Chercheur- ah
92	B- y'a pas eu de de de de surprise grave heu et je sais qu'on a entouré le un je crois et même qu'on a entouré le deux et que le trois j'attends un peu parce que là on le construit bien et on l'assoit bien oui on fait aussi l'écriture du chiffre l'écriture
93	Chercheur- et l'écriture aussi
94	B- ouais mais eux ils l'écrivent pas ils le tracent pas ils le tracent pas on en est là je commence tout juste avec le prénom donc le chiffre c'est quand même un peu plus compliqué puis y'a le sens où on le trace donc ça bon c'est la première année hein y'a encore il faut en laisser derrière et

B propose quasi systématiquement la représentation avec les doigts et les points de la constellation du dé avec l'écriture chiffrée et la quantité. Pour les doigts il reconnait que « des fois ils s'emmêlent un peu dessus ».

64	B- non c'est moi enfin je le dis à l'oral j'ai la j'ai les les vignettes avec les doigts qui montre trois et la constellation voilà comme nous déjà tous les jours on travaille sur les doigts la constellation on l'aborde tout le temps parce que c'est vrai qu'avec mes absents je fais toujours la constellation et c'est vrai que cette année ça tombe bien j'ai jamais eu plus de trois heu donc voilà ça on l'a vu les trois bonhommes dans la maison les trois petits points qui correspondent à chaque bonhomme j'écris le chiffre trois

Le fait de ne proposer que les trois premiers nombres favorise l'appui sur le *subitizing,* la reconnaissance visuelle immédiate.

68	B- y'en a qui ont découpé que trois je me souviens y'a eu des années où j'avais un petit il est en CP maintenant tout en discutant avec moi il me racontait il coupait ses trois mais voilà il fallait coller un couronne deux couronnes trois couronnes il m'avait découpé toutes ses couronnes en discutant il me collait mais alors tip top sans sans les compter voilà c'était visuel voilà

b- La branche cardinal

La branche cardinal-relations

B débute le rituel avec les absents et « c'est très bien » car le nombre d'absents ne dépasse pas trois ; ce qui lui permet d'être dans son domaine du un deux trois.

4	B- voilà alors je dessine une maison on colle la photo en dessous de ceux qui sont absents donc ils sont restés à la maison ça se trouve cette année c'est très bien parce que j'ai pas beaucoup d'absents donc ça reste dans mes un deux trois

Il justifie ce domaine en s'appuyant « sur les textes ».

6	B- alors jusqu'où je vais sur les textes on va jusqu'à trois après heu moi trois là ils y sont et comme ils vont avoir quatre ans on passe à quatre

Il ne précise pas de quels textes il s'agit ; puis il fait référence aux progressions de l'enseignant des MS-GS.

7	Chercheur- d'accord et tu dis sur les textes donc c'est par rapport à quel texte
8	B- par rapport à quel texte par rapport à ce qu'on nous demande dans les pré requis de la maternelle heu moi [l'enseignant des MS GS] me dit je vais jusqu'à six en MS moi je dis je vais sûr jusqu'à trois tu peux compter sur trois si on arrive à aller à quatre […]

Il met en relation ce domaine numérique « un deux trois »avec l'âge des enfants.

8	B- […] si on arrive à aller à quatre aller parce que bon aller jusqu'à quatre c'est pas compliqué ils ont quatre ans donc là là j'ai une gamine qui a fêté quatre ans la semaine dernière

Il va même plus loin dans ses propos et pense que « c'est difficile pour un enfant de compter de réaliser au-delà de son âge ».

20	B- ouais ouais même j'ai des tout petits des TPS aussi qui ben ceux qui ont trois ans hein ils sont arrivés à trois aussi de toute façon heu c'est difficile pour un enfant de compter de réaliser au-delà de son âge

B développe des petits jeux au moment du rituel sur le modèle « va me chercher deux…, trois…, un… ».

8	B- alors parfois on fait des jeux aussi le matin au rituel je leur demande tu vas me chercher heu une voiture alors ça c'est en même temps pour aller leur faire chercher les choses et les après les ranger là où ils les ont pris les les où ils les ont prises mais en même temps je leur demande bon les tout petits vont m'en chercher un vas me chercher deux briques vas me chercher trois bon là ben des fois y'en a qui arrivent ils en emmène une poignée ils posent sur la table et je demande ben combien je lui en avais demandé et ben trois et combien il en a amené ah ben beaucoup voilà mais heu on a l'utilisation de ce qu'on fait je construis pas le nombre dans le vide

Les activités de prédilection pour étudier le un puis le deux et le trois sont du style « découper coller j'en veux trois » mais aussi en mettre trois, colorier trois.

62	B- on avait fait avec un avec deux avec trois alors on en met trois après heu je colorie trois heu je colorie le chiffre trois la constellation trois et je le relie au paquet de trois donc quand on est arrivé à trois ben on avait fait deux et un avant donc y'a aussi le deux et le un je colorie en en rouge en bleu enfin je change de couleur tout ce qui est trois tout ce qui est deux tout ce qui est un je fais plusieurs exercices plusieurs façons d'aborder le le la quantité le ch le nombre quoi trois

Il s'agit de l'étude complète du trois, quantité, écriture chiffrée. Tout tourne autour de un deux trois, B cherche aussi des jeux de société « mais des jeux pour compter jusqu'à trois y'en a pas hein finalement ». B justifie l'importance des trois premiers nombres pour « déjà s'assoir sur trois » car « si on a en bouée de secours le un le deux le trois » alors l'enseignant dispose d'une palette d'activités possibles.

<u>La branche cardinal-quantité</u>

B prend soin de mettre en lumière la correspondance entre des collections du point de vue de la quantité.

6	B- on a un tableau sur lequel j'ai une fraise deux bourgeons trois chats et chaque fois on se reporte un absent c'est comme la fraise deux absents alors

	c'est des bourgeons l'an dernier y'en a un qui m'a appelé ça des glands un jour il m'a dit c'est les deux glands qui sont absents[61]

Il favorise la correspondance terme à terme pour la validation de l'action dans une situation avec éloignement dans l'espace adaptée.

8	B- alors je lui dis tu vas me chercher trois assiettes tu vas me chercher deux assiettes va me prendre deux ciseaux deux paires de ciseaux bon c'est naturel j'ai et il arrive avec ses s'il se trompe on est trois il amène que deux donc il va les donner il va bien voir qu'il en manque un donc il va aller en chercher là je dis ben tu vois là y'en a trois on le construit par rapport à l'usage qu'on en fait par rapport à ce l'utilisation par rapport au besoin

B différencie la suite orale des mots nombres et la quantité mais également la reconnaissance des constellations et la quantité. Lire les constellations du dé ne suffit pas à « conceptualiser la quantité ».

72	B- parce que même pour les parents compter jusqu'à trois ben oui c'est compter jusqu'à trois il va dire un-deux-trois mais bon conceptualiser la quantité raccorder au nombre à la constellation c'est autre chose

Il souhaite appuyer sur les correspondances avec les quantités le plus possible.

100	B- la quantité qui va avec voilà ça serait bien

Il propose des situations « construire des quantités de un, deux ou trois éléments » pour entrainer les premières petites quantités. « J'utilise le nombre pour arriver à le construire »

c- La branche ordinal

Les activités décrites par B relèvent du même savoir, ordinal-relations. Il insiste sur la mémorisation des mots nombres ordinaux mais aussi sur « l'ordre », « la chronologie » toujours autour des trois premiers nombres, ordinaux ici. L'exemple donné avec le calendrier permet d'entendre le premier en tant que nombre ordinal, puis les autres mots-nombres dont le caractère ordinal n'est pas déterminé : « le premier, le deux et le trois », B prolonge en leur faisant « reconnaitre » le un le deux et le trois écrit il s'agit alors de la lecture de l'écriture chiffrée.

64	B- heu le le calendrier bon bé là quand ça tombe bien quand on est à l'école le premier le deux et le trois je leur fais reconnaitre bon là aujourd'hui y'a encore une gamine qui m'a reconnu bon y'en a y'en qui qui l'ont vu y'a a aussi le vécu à la maison ce que les parents leur apportent ce que ce qu'ils voient heu

Toujours à partir des mots nombres ordinaux, B insiste sur la « chronologie » ; avant-pendant-après lors d'un projet.

100	B- heu aussi quand on travaille dans la chronologie qu'est-ce qui vient en premier qu'est-ce qui vient en second qu'est-ce qui vient en trois ça aussi on le
101	Chercheur- c'est quelque chose que tu fais aussi
102	B- ouais je sais que l'an dernier j'avais travaillé sur les trois petits cochons là aussi c'était heu l'an dernier j'avais un groupe un peu plus performant on avait fait une heu un comment dire un projet poney et alors là ça avait été les lettres et les chiffres ouha ça ça avait été du acquis très vite fait parce que ben il fallait passer heu le le poney il fallait y'avait trois choses à faire l'étrier le bouchonner faire récurer les sabots donc le trois on l'a construit très vite l'ordre la chronologie et quand tu as un support et quelque chose qui les motive c'est vrai que

[61] « c'est les deux glands qui sont absents », est du même ordre que les jours de la semaine en couleur : « on est lundi gris » (Margolinas & Laparra, 2016).

B utilise aussi le support d'album de littérature (Vidal & Nouhen, 2009) comme support de chronologie.

106	B- ça a pas d'intérêt si y'a pas quelque chose de bien construit derrière et après qui permet de s'y référer quand on veut faire autre chose tu te souviens là c'était qu'est-ce qu'on fait en premier dans une histoire on travaille sur les albums bon alors je prends toujours des albums en randonnée de façon ça aide beaucoup là on vient de travailler sur la grenouille à grande bouche qui elle rencontre en premier qui c'est en deuxième en troisième après on élude les autres voilà mais un-deux-trois voilà

En restant fidèle à son domaine d'étude un deux trois, B « élude les autres » mots nombres ordinaux pour vraiment focaliser sur le premier, le deuxième et le troisième.

d- La branche calcul

Dans la classe de B, cette année-là, il y a deux fois deux élèves qui ont le même prénom. Il se saisit de cette opportunité pour installer le lexique du calcul au moment du rituel « il nous en manque », « il en reste ». Il s'empare de l'occasion d'une absence pour jouer et proposer différentes formulations.

6	B- cette année aussi dans l'appel j'ai l'immense chance d'avoir deux élèves A et deux élèves B donc ça aide combien y'en a y'en a deux ah ben on est riche on en a deux ah ben on en a deux tiens il nous en manque un combien y'en même des fois ben il nous en manque un il en reste qu'un il en reste il reste une élève A c'est laquelle qu'il reste c'est qu'elle élève A qui est là l'autre qui n'est pas là

B décrit une activité sur fiche où l'enfant doit coller trois cadeaux dans la hotte du Père-Noël. Ces cadeaux sont à découper dans une planche de cinq jouets. Dans cette activité l'enfant est amené à choisir et coller trois images parmi les cinq proposées. Il s'agit de retirer trois jouets à la collection de cinq proposée.

62	B- le Père-Noël avait apporté trois jouets ils en avaient cinq ils devaient en coller que trois bon y'en a qui avait collé les cinq bon après y'a l'affectif qui prend le dessus aussi hein et pourquoi tu as collé ben je veux l'ours et pourquoi tu je veux le camion aussi bon il voulait tout donc voilà

La remarque de B sur le rôle de l'affectif dans la réussite de cette activité pose une fois encore la question de l'habillage des situations (Goigoux, 1998). Au-delà de l'attirance pour tous les cadeaux, B constate que les élèves qui ont tout découpé ont eu tendance à tout coller. L'implication des élèves dans la tâche de découpe des vignettes parasite l'objectif de l'activité telle qu'envisagée par B. Les connaissances en jeu pour découper les étiquettes sont, pour les élèves, suffisamment légitimes et importantes pour ne pas en rajouter d'autres sur les nombres.

e- La branche énumération

Dans l'extrait codé, B identifie l'importance d'organiser les espaces de traitement des éléments de la collection découpés par rapport aux vignettes à découper. C'est lui qui recueille les vignettes et qui « ordonne » les espaces en introduisant « des petites assiettes de la dinette ». Il ne dit rien sur ce qu'il explique aux enfants mais sa démarche est systématique, ce qui lui fait dire que « quand les enfants travaillent ils ont l'habitude ». Les enfants ont l'habitude que l'enseignant recueille systématiquement les vignettes découpées dans des assiettes.

8	B- quand les enfants travaillent ils ont l'habitude quand ils découpent je recueille toujours les vignettes dans des petites assiettes de la dinette pour leur apprendre à ordonner

Plus loin dans l'entretien, il comparera ces bonnes méthodes à de l'autonomie.

60	B- parce que heu je veux leur inculquer toutes les bonnes façons de faire mais pour tout pour découper pour coller pour collecter les vignettes donc je les donc je les prends de façon à ce qu'après au troisième trimestre j'arrive à les mettre à travailler quatre par quatre cinq par cinq pour qu'après [l'enseignant de MS] l'an prochain en MS comme il a les GS ils soient assez autonomes dans toutes leurs pratiques de travail dans leurs méthodes de travail

2.3- Dialectique savoir/connaissance à travers certaines activités décrites

a- Des savoirs vers les connaissances

Le grand groupe favorise la visite d'œuvres collectivement, lorsque B se réfère au travail d'imprégnation, il s'agit d'une exposition au savoir qui n'est pas encore accessible pour les TPS, mais qui le deviendra à force d'y être en contact « ça rentrera dans leurs pratiques ».

58	B- tous les jeux enfin tout ce qu'on fait sur les nombres je le fais en grand groupe avec tout le monde même avec les TPS qui ça leur fait du travail d'imprégnation sur du long terme pour pour l'année prochaine quand ça ça rentrera dans leurs dans leurs pratiques

b- Des connaissances vers les savoirs

42	B- de toute façon le travail d'imprégnation pour moi est très très important c'est à force de faire de refaire se tromper de rectifier de que qu'on le construit et que on on l'assoit correctement

Dans ces propos B accorde du temps aux connaissances pour qu'elles se consolident dans des situations diverses, il donne un statut constructif à l'erreur et envisage les rétroactions pour « rectifier » les actions. Les connaissances se construisent dans des situations multiples et variées. J'assimile « assoit correctement » au savoir, c'est-à-dire des connaissances suffisamment stables, solides, sûres dans toutes les situations, c'est-à-dire des connaissances institutionnalisées, donc le savoir. B décrit un processus long de conversion des connaissances en savoir.

2.4- Les niveaux d'activités de B

a- Niveau +3 : niveau noosphérien ou idéologique

+3		L'utilisation des nombres		Travail d'imprégnation		Travail sur fiche et les bonnes façons de faire		Domaine numérique lié à l'âge		Parents		Détecter les prédispositions

PB_{+3} utilise le nombre tout le temps dans des situations qu'il veut concrètes, palpables. PB_{+3} ne travaille pas le nombre mais l'utilise.

PB_{+3} pense que le travail d'imprégnation est très important, il l'envisage en collectif avec ses deux niveaux, les TPS et le PS. Il considère que les enfants les plus jeunes (TPS) doivent être

en contact avec le savoir la première année pour pouvoir l'appréhender en termes de connaissances l'année suivante (PS).

PB_{+3} prône l'usage de fiches écrites pour un accompagnement individualisé de sa part. Cela lui permet de pouvoir « inculquer toutes les bonnes façons de faire » et de pouvoir « construire autre chose en même temps », comme l'énumération et le rangement par exemple.

PB_{+3} considère que compter au-delà de son âge est difficile ce qui justifie alors son choix d'étudier exclusivement un deux trois et quatre pour certains en fin d'année (ceux qui auront quatre ans).

PB_{+3} est conscient du poids du vécu à la maison sur les écarts entre enfants à l'entrée de l'école maternelle. Il réalise également que les parents ont une vision différente de la sienne des attendus et des enjeux qui se cachent derrière le verbe « compter ».

PB_{+3} est sensible au fait qu'il détecte très tôt des prédispositions en mathématiques chez les élèves, des facilités repérées sur les nombres impliquent des facilités « partout ».

b- Niveau+2 : situation de construction

+2		La suite orale des mots nombres pour compter L'écriture chiffrée Les constellations, les doigts		Un puis attendre Deux et attendre Trois		Construire des collections de un, deux et trois		Progressions harmonisées

PB_{+2} entraine la suite orale des premiers mots nombres dans des activités de comptage. L'écriture chiffrée est envisagée à travers la reconnaissance des chiffres et la lecture du un, du deux et du trois. Les constellations du dé, les représentations par les doigts sont exercées en correspondance avec les petites quantités.

PB_{+2} organise l'étude du un, deux et trois sur l'année scolaire. Aussi il y a du temps entre l'étude du un et du deux et entre l'étude du deux et du trois. Pour PB_{+2} le temps est un gage de consolidation des connaissances et d'accès au savoir.

PB_{+2} conçoit et exploite toutes situations permettant de construire des collections données de un, deux et trois éléments successivement.

PB_{+2} tient compte des progressions du professeur de la classe suivante afin d'affiner les siennes pour proposer une cohérence et une continuité dans les apprentissages d'une classe à l'autre.

c- Niveau +1 et niveau 0 : situation de projet de leçon (dans la séance) et situation didactique

+1 & 0		Au rituel		Activités en atelier

$PB_{+1\&0}$ décrit le rituel du matin en détaillant précisément ce qu'il propose, comment il le mène en mettant en valeur les différentes utilisations des nombres un deux et trois.

$PB_{+1\&0}$ expose plusieurs exemples d'activités sur fiche qui permettent de travailler un deux et trois successivement, les activités proposées en atelier pour le un se retrouveront pour

l'étude du deux et du trois. $PB_{+1\&0}$ énonce également des jeux ou enseignement réalisés en collectif en grand groupe.

d- Niveau -1 : niveau d'observation ou de dévolution

- 1		Facilités et difficultés observées		Cas d'élèves en particulier

PB_{-1} observe de gros écarts dès l'entrée dans sa classe par rapport aux connaissances sur les nombres. La scolarisation directe en PS prive l'enfant d'une année d'imprégnation facilitante en TPS pour les apprentissages futurs. PB_{-1} ne constate pas de difficulté spécifique aux nombres, quand la difficulté existe elle est présente aussi dans d'autres domaines.

PB_{-1} relate quelques exemples particuliers d'enfants, plutôt des cas d'enfants précoces avec des programmes aménagés pour leur permettre d'avancer plus vite.

2.5- Conclusion concernant B

B base son enseignement sur l'étude des trois premiers nombres. Il décline cette progression dans toutes les activités qui ont du sens pour de jeunes élèves. Une alternance de moment d'imprégnation en grand groupe et d'atelier pratiquement en individuel lui assure une observation privilégiée des connaissances des élèves. Son enseignement s'inscrit dans la durée en favorisant des temps pour l'imprégnation et des temps individuels où il fait avancer le temps des apprentissages en s'adaptant au plus près des connaissances des élèves. Son enseignement est caractérisé par des interactions importantes élèves-enseignant au niveau de la situation didactique ainsi qu'une alternance entre les temps collectifs de visite du savoir et les temps individuels où son accompagnement est très fort.

Niveau noosphérien ou idéologique	+3
Niveau de construction ou de conception d'un thème	+2
Niveau de projet de leçon et niveau de la situation didactique	+1 & 0
Niveau d'observation ou de dévolution	-1

TABLEAU 12 : ACTIVITÉ RÉFLEXIVE DE B

Concernant l'enseignement du nombre, mise à part la suite orale des mots nombres qui est entrainée jusqu'à cinq, toutes les autres branches sont dirigées par la progression de la branche cardinal-relations, un deux et trois. La branche calcul, par la particularité offerte par la configuration de la classe de TPS-PS cette année-là, propose des situations additives et soustractives avec un et deux.

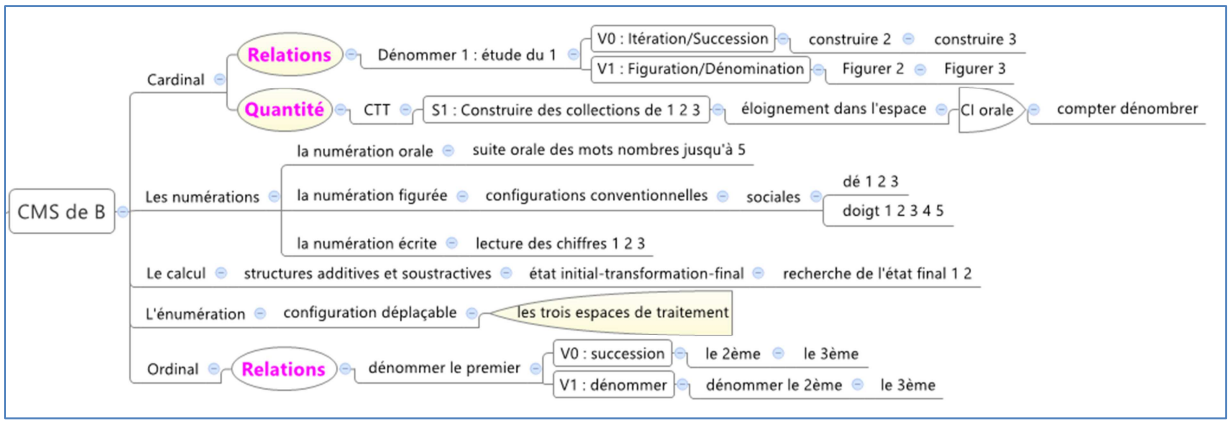


FIGURE 66 : CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES SPÉCIFIQUES DE B

3- L'ENSEIGNEMENT DE C

Au moment de l'entretien, C enseigne en GS.

3.1- L'arbre des savoirs du nombre de C

a- Focus sur les cinq branches de l'arbre des savoirs du nombre

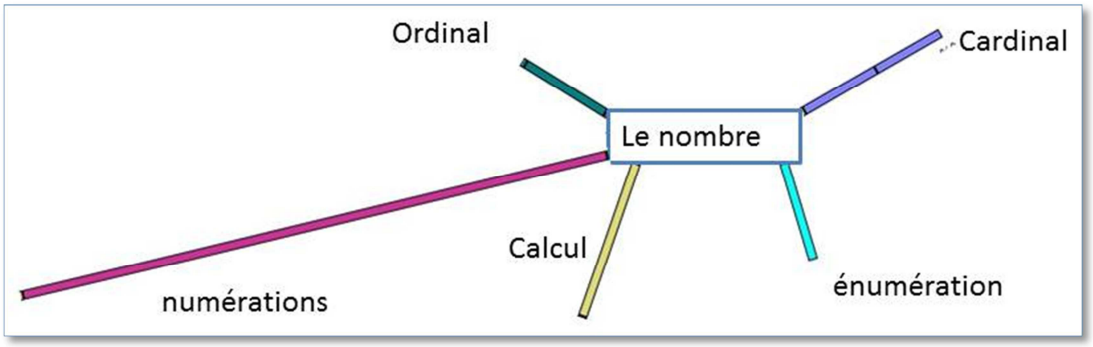


FIGURE 67 : L'ARBRE DU NOMBRE DE C

C relate de nombreuses activités concernant les numérations écrites et figurées à partir de jeux. Ensuite, il privilégie le cardinal, le calcul, puis, de façon à peu près égale, l'ordinal et l'énumération. Il énonce des connaissances mathématiques spécifiques pour les cinq branches de l'arbre des savoirs.

b- Durée des extraits codés

Quarante-et-un extraits sont codés dans numérations, trente-et-un sont issus de la branche cardinal, vingt dans la branche calcul, douze extraits pour l'ordinal et enfin, l'énumération recueille quatorze extraits relatifs à la difficulté d'élèves repérée par C.

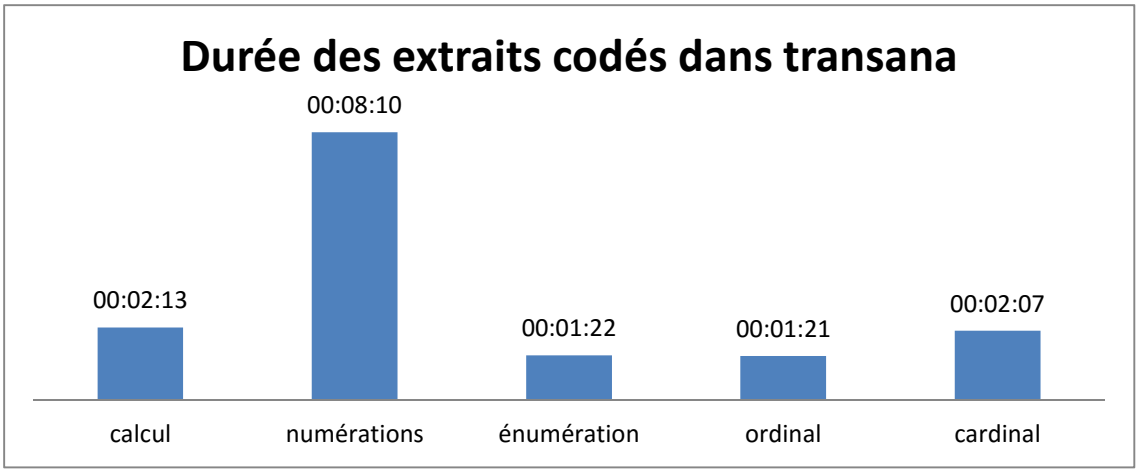


FIGURE 68 : HISTOGRAMME DES EXTRAITS CODÉS EN MINUTE POUR C

3.2- Quelles connaissances mathématiques spécifiques sont présentes dans chacune des branches ?

a- La branche numérations

C consacre une grande partie de son enseignement à la lecture des chiffres et des nombres à partir de puzzles, de dominos, de chiffres aimantés, de files numériques.

4	C- donc tu vois t'as les tu mélanges tu sors tout tu mélanges et après il faut qu'ils associent le un jusqu'à dix voilà donc ça c'est en autonomie en principe donc voilà c'est pour la lecture des chiffres le dénombrement

À partir de ce jeu en autonomie, C vise « la lecture des chiffres » et « le dénombrement ».

C différencie la lecture et l'écriture des chiffres, ici, avec les chiffres aimantés il ne travaille que la lecture des chiffres.

26	C- voilà reformer les dominos ensuite qu'est-ce que j'ai j'ai tout simplement des chiffres aimantés donc ça soit en utilisation libre soit je leur dis par exemple de sortir le cinq sortir le sept on on le le mon on le met sur l'ardoise on le montre ça évite de l'écrire quand ils ont du mal à l'écrire tu vois au début voilà après on peut passer à l'écriture mais au début je trouve que c'est

La lecture des constellations est aussi recherchée et entrainée.

58	C- et ben en fait pour heu le dé toujours pareil reconnaître les constellations parce que c'est plus t'en fait et mieux ça rentre je trouve et ils préfèrent faire ça sous forme de jeux et j'ai pas trouvé vraiment de jeux autres que les déplacements sur pistes avec les constellations pour apprendre les constellations

La correspondance entre les doigts, l'écriture chiffrée et la constellation du dé est également entrainée.

374	C- d'accord associer les doigts les dés les chiffres les collections c'était un peu brouillon les écrire

L'écriture chiffrée est enseignée par C mais il éprouve des difficultés avec l'écriture de certains chiffres à l'envers.

32	C- et souvent ils font les chiffres à l'envers alors je sais pas si c'est dû à l'âge tu vois à la latéralisation mais alors ça c'est un truc c'est vraiment pas rare et c'est dur à faire passer donc
33	Chercheur- ça veut dire qu'ils arrivent déjà de MS avec des chiffres à l'envers
34	C- des chiffres à l'envers alors ça c'est vachement difficile donc en fait

	je pense que c'est la répétition répéter répéter répéter répéter

Pour C, la suite orale des mots nombres est relativement connue par tous les élèves lorsque ils arrivent en GS « ils savent compter quand même assez loin », aussi un entrainement quotidien de la suite orale jusqu'à vingt-sept lors des rituels pour dénombrer les présents est suffisant.

238	C- donc ils savent compter ouais la plupart ils savent compter quand même assez loin

C utilise le dénombrement des présents pour entrainer la mémorisation de la suite orale des mots nombres.

234	C- Ben déjà on se dénombre tous les matins on compte les présents

Enfin, dans la branche numérations, C aborde également les prémices de la numération de position avec les nombres rangés en colonnes des dizaines.

258	C- ouais si si ça c'est la la colonne des six la colonne des sept ben non c'est dans la colonne des huit parce qu'après on cherche le nombre le chiffre oui enfin le nombre donc ils ont compté admettons aujourd'hui on est le trente donc on doit aller chercher l'étiquette trente pour la mettre pour écrire la date voilà donc s'ils hésitent c'est vrai qu'il y en a qui vont dire ben vingt-deux c'est dans la colonne du deux

C se questionne sur les pratiques dans les autres classes par rapport au tableau des nombres et à son enseignement dès la grande section.

550	C- je sais pas si dans les autres classes de grands ils vont plus loin si y'a des tableaux si y'a des tu vois je sais pas j'ai pas l'occasion de

b- La branche calcul

Majoritairement C décrit des activités qui permettent de surcompter.

142	C- surcompte on essaie de surcompter en ce moment ça aussi je le fais pas en début d'année en début d'année où on compte voilà et là on surcompte donc on regarde le plus grand comme ça ils commencent quand même à reconnaitre jusqu'à six les constellations c'est bon hein donc le plus grand lequel c'est c'est celui-là c'est six bon bé je cache je cache le six et après après six on continue à compter alors là par contre ils pointent

Il explique aux élèves, il énonce la procédure, les moyens pour parvenir au résultat.

146	C- voilà donc on met six et après six qu'est-ce qu'on a sept huit et et ça rentre ça rentre

Il enseigne le surcomptage à l'aide de deux dés, puis avec l'effectif des présents pour trouver le nombre d'absents.

246	C- non maintenant ils y arrivent sans problème même assez vite quand même hein donc on compte les présents après on surcompte jusqu'à vingt-sept pour compter les absents
247	Chercheur- d'accord
248	C- donc on est vingt-quatre et d'habitude on est vingt-sept alors après vingt-quatre qu'est-ce qu'il y a alors moi avec les doigts je fais vingt-cinq vingt-six vingt-sept je montre les doigts combien il en manque trois du coup on cherche qui c'est qui manque et puis après petit à petit c'est eux qui me remplacent pour compter tu vois

L'addition et la soustraction sont entrainées à partir de jeux de plateaux avec des dés comme de jeu de l'arbre où il s'agit d'ajouter ou de retirer des pommes dans le pommier.

170	C- ouais alors là tu as un dé avec les chiffres où ils sont passés voilà les chiffres alors avec moins et plus mais y'a pas écrit le plus c'est embêtant mais bon voilà t'as les moins et t'as les couleurs donc et tu lances un tour chacun les dés

Pour C la répétition, « à force de jouer » leur permet d'accéder au sens de l'addition et de la soustraction « moins t'enlèves et plus t'ajoutes ».

188	C- oui à force de jouer ouais ils comprennent que moins t'enlèves et plus t'ajoutes c'est un un code quoi donc heu ils aiment bien aussi celui-là

C propose dans son enseignement des fiches écrites où les élèves ont à ajouter ce qu'il manque, c'est-à-dire compléter des éléments d'une collection jusqu'à un certain nombre.

292	C- là c'est pareil voilà là tu comptes il est à l'envers donc tu dois compléter aussi je fais aussi des fiches comme ça où tu complètes et ça aussi c'est pas évident au début

Ils doivent également barrer ce qui est en trop dans une collection pour obtenir un certain nombre d'éléments.

302	C- voilà ou barrer si y'en a trop

c- La branche cardinal

La branche cardinal-relations

Ici sur cette branche, C décrit son enseignement des nombres de un à dix.

42	C- je m'arrête à dix en général sauf en fin d'année suivant comment ils en sont tu vois s'ils arrivent bien je je continue mais heu

En début d'année, il reprend jusqu'à cinq, c'est-à-dire ce qui a été enseigné l'année précédente en MS.

274	C- je commence je reprends jusqu'à cinq en début d'année parce que chez les MS ils s'arrêtent à cinq

Puis il propose l'étude systématique jusqu'à dix « tout doucement on progresse jusqu'à dix ».

318	C- après je continue petit à petit après on prend chaque chiffre par contre
319	Chercheur -d'accord
320	C- donc le six on travaille sur le six
321	Chercheur -oui
322	C- dénombrer heu écrire lire connaitre la constellation compléter des collections barrer si y'en a trop tu vois voilà jusqu'à cinq on fait un peu mélangé quoi
323	Chercheur -oui et après c'est bien
324	C- après c'est chaque chiffre
325	Chercheur - d'accord et ça chrono chronologiquement
326	C- voilà au fur et à mesure de l'année quoi
327	Chercheur - d'accord et du coup tu vas jusqu'à combien
328	C- jusqu'à 10

Toutes ses activités sont orientées par cette progression « on va au fur et à mesure qu'on progresse dans le chiffre ». Des activités de regroupements sont proposées.

308	C- voilà faire des groupements aussi des groupements par deux par trois par quatre par cinq on va au fur et à mesure qu'on progresse
309	Chercheur -d'accord
310	C- dans le chiffre

La branche cardinal-quantité

C développe des activités liées au dénombrement de collections pour appréhender la cardinalité.

Il évoque des situations de comparaison de deux collections et travaille le plus ou le moins, c'est-à-dire la collection qui a la plus grande quantité et celle qui a la moins grande quantité.

74	C- tout simple hein comme ça là mais ça c'est après plus tard dans l'année donc si tu arrives là tu prends un champignon si tu arrives sur cette case tu en prends cinq donc il faut lire les les nombres en plus et dénombrer et à l'arrivée on compte qui en a le plus

Les situations de comparaison sont réalisées à partir du nombre étudié selon la progression de la branche cardinal-relations.

518	C- donc quand je quand on compare c'est pareil si on en est au huit on va comparer avec des quantités jusqu'à huit

d- La branche énumération

C précise que le pointage « s'apprend », d'ailleurs, il « donne le truc » de façon directive ; les élèves appliquent ensuite ce que le maitre leur a dit, leur a montré dans des activités à l'écrit avec des collections non déplaçables.

284	C- parce que là aussi c'est un apprentissage eux ils te comptent ça avec les doigts et puis ils savent plus où ils en sont donc voilà on apprend à pointer

Il leur apprend à pointer en marquant d'un petit trait les éléments sur la feuille déjà dénombrés.

331	Chercheur- d'accord et quand tu disais tiens là je vois des petits ronds dans les champignons donc c'était ce que tu oui
332	C- pour pointer
333	Chercheur- d'accord et ça c'est toi qui leur donne
334	C- c'est moi qui leur ai donné le truc on va dire
335	Chercheur- oui
336	C- du pointage
337	Chercheur- parce que sinon
338	C- directif

Ce signe graphique montre les éléments qui ont déjà été traités et ceux qu'il reste à traiter et est utile dans les exercices sur fiche lors de la réalisation de paquets, ce à quoi C réfère comme « le truc ».

351	Chercheur- faire comme ça oui oui et du coup tu leur demande aussi de changer de couleur aussi
352	C- oui
353	Chercheur- pour les aider pour faire les paquets
354	C- voilà parce que c'est vrai que sinon ils ont un peu de mal c'est difficile de

C insiste aussi sur l'importance entre la synchronisation de la suite orale des mots nombres et le pointage de chaque élément de la collection. Lors du rituel il demande aux élèves de toucher les enfants au fur et à mesure, « sinon ils vont en sauter ». À partir de quinze, C constate des problèmes liés à l'énumération de la collection d'élèves, ils oublient des élèves, ils ne synchronisent pas la suite orale des mots nombres et le pointage.

240	C- jusqu'à quinze bon ça accroche souvent à partir de quinze là ça coince un peu mais bon petit à petit ça vient tous les jours tous les jours on se on

	compte donc là c'est pareil on associe le geste à la comptine
241	Chercheur -d'accord oui
242	C- on touche l'enfant qu'on compte parce que sinon ils vont en sauter ou ils vont aller trop vite donc vraiment on fait il faut surveiller quoi il faut être attentif mais après bon une fois qu'ils ont bien compris ça marche tout seul quoi

Pour C il s'agit d'un enseignement collectif « qui se fait ensemble ».

e- La branche ordinal

C utilise de nombreux jeux de pistes, différents d'une période à l'autre.

56	C- ouais les jeux de pistes j'en ai plein j'en ai plein d'autres je te montrerai

Il relève là aussi, comme pour l'énumération, des difficultés d'élèves relatives aux savoirs à enseigner. Les élèves manifestent des difficultés face à la case origine « ils comptent un de là où ils sont ».

60	C- alors y'en a qui évidemment au lieu de compter un en déplaçant ils attaquent un là où ils sont tu vois donc ça c'est

Des difficultés aussi par rapport à l'orientation, le déplacement.

64	C- ouais voilà y'en a aussi qui vont dans le mauvais sens

Souvent C fait tracer le « chemin » à emprunter avec le doigt avant de commencer à jouer.

68	C- ils peuvent repartir à l'envers donc une fois qu'on a bien il faut bien le faire le tracer d'abord avec le doigt on voit bien où on va et après normalement c'est bon ça arrive qu'y en a qui se trompe mais c'est quand même pas très courant

Le déplacement est entrainé à l'aide des jeux de pistes et de dé.

108	C- chacun son circuit donc il faut suivre le bon chemin et être bien concentré voilà les jeux de pistes

C propose aussi d'explorer les déplacements et les relations autour d'un nombre repère, plus ou moins un, plus ou moins deux. Je fais le choix de considérer ces activités dans ordinal-relations plutôt que dans le calcul, car elles enrichissent les connaissances autour des relations à plus ou moins un, plus ou moins deux entre les nombres ordinaux à l'aide de petits déplacements.

210	C- voilà et comme ils savent déjà se déplacer sur les cases
211	Chercheur- et oui ça pose pas de problème
212	C- voilà ils y arrivent ils savent que moins on recule et plus on avance

3.3- Les niveaux d'activités de C

a- Niveau+3 : niveau noosphérien ou idéologique

+3		Répétition		Travail à l'écrit sur fiche		Manipulation et jeux de plateaux, de société

PC_{+3} décrit un enseignement bâti sur la répétition.

PC_{+3} propose un travail systématique sur fiche.

PC_{+3} considère la place des jeux et des manipulations comme fondamentale dans sa classe.

b- Niveau+2 : situation de construction ou de conception d'un thème

+2		Lecture des constellations Suite orale des mots nombres Écriture chiffrée des nombre s		Additions soustractions		Déplacements sur pites, orientation		Dénombrement jusqu'à dix Questionnement sur la numération décimale de position

PC_{+2} consacre une part importante de son enseignement à l'utilisation des constellations pour permettre la lecture et une reconnaissance immédiate des constellations. L'enseignement de la suite orale des mots nombres est prévu par répétition au rituel les matins. L'écriture chiffrée est programmée par PC_{+2} qui lui consacre du temps compte tenu des difficultés en écriture miroir constatée.

PC_{+2} traite les problèmes additifs et soustractifs à partir des jeux avec les dés.

PC_{+2} organise sa progression des enseignements par période et par thème et il dispose de jeux de plateau pour chacun d'entre eux. Il aborde en situation de jeu les déplacements sur piste et l'orientation ainsi que la case origine dans ces déplacements.

PC_{+2} prévoit un enseignement bâti sur l'étude systématique des nombres de un à dix et plus particulièrement de six à dix notamment en proposant des dénombrements de collections jusqu'à dix, il découpe alors l'enseignement systématique des nombres de un à dix sur les cinq périodes de l'année.

PC_{+2} se questionne sur la numération décimale de position et souhaiterait savoir comment elle est abordée dans les autres classes de GS ; PC_{+2} pense peut-être ne pas aller assez loin.

c- Niveau +1 et niveau 0 : situation de projet de leçon (dans la séance) et situation didactique

+1 & 0		Exemples, jeux de plateaux		Organisation de la classe : groupe, atelier autonome, validation collective

$PC_{+1\&0}$ utilise les jeux de plateaux pour chaque thème avec un ou deux dés, il change de plateau pour varier et pour renforcer les connaissances sur les nombres, la lecture des constellations du dé, les déplacements sur piste. $PC_{+1\&0}$ décrit différents jeux de société ou jeux collectifs avec des dés.

$PC_{+1\&0}$ fonctionne avec des ateliers autonomes ce qui justifie l'utilisation de multiples jeux. Les jeux sont d'abord introduits par $PC_{+1\&0}$ en petits groupes, puis entrainés par l'ATSEM et enfin laissés en autonomie lorsque les règles du jeu sont bien intégrées. $PC_{+1\&0}$ favorise un enseignement en groupe avec des validations collectives s'appuyant sur les propositions des uns et des autres qui sont discutées en commun.

d- Niveau -1 : niveau d'observation ou de dévolution

- 1		Difficultés		Attirance pour les jeux		Questionnements sur l'écriture chiffrée en miroir

PC_{-1} observe des difficultés relatives à l'écriture des chiffres à l'envers. Il propose des chiffres aimantés et remarque que certains élèves les placent également en miroir, il ne s'agit donc pas d'une difficulté inhérente au geste d'écriture mais bien à la représentation mentale de l'écriture chiffrée. PC_{-1} rend compte également de difficultés relatives à l'énumération et à l'inorganisation de certains élèves à gérer une collection non déplaçable.

PC_{-1} fait part de l'attrait des élèves pour les jeux, quels qu'ils soient, de leur gout de manipulation.

PC_{-1} est en questionnement sur l'écriture en miroir des chiffres. Il la constate chaque année et est impuissant face à cette difficulté. PC_{-1} se demande si cette écriture miroir est due au manque de maturité des élèves.

3.4- Conclusion pour C

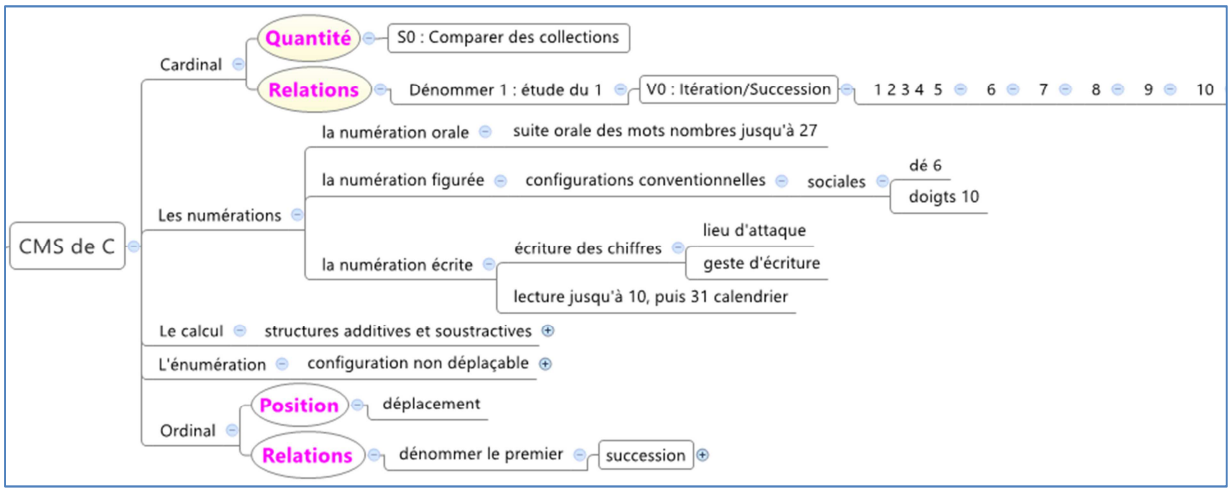
C expose de nombreux jeux de plateaux, jeux collectifs à base de dés, il relate une pratique de classe basée sur des temps de jeux qui conditionnent son niveau de projet de leçon (+1). Des questionnements persistants sur l'écriture chiffrée en miroir et l'enseignement de la numération décimale de position le poussent à adopter une observation précise du niveau d'observation (-1).

Niveau noosphérien ou idéologique	+3
Niveau de construction ou de conception d'un thème	+2
Niveau de projet de leçon et niveau de la situation didactique	+1 & 0
Niveau d'observation ou de dévolution	-1

TABLEAU 13 : ACTIVITÉ RÉFLEXIVE DE C

Pour résumer, en GS, C consacre une grande partie de son enseignement à la numération orale, figurée et écrite. Pour la suite orale des mots nombres, il constate que ses élèves arrivent de MS en sachant la réciter jusqu'à quinze. Aussi les activités qu'il propose lors des rituels, entre autre dénombrer les présents jusqu'à vingt-sept et faire la date, suffit pour mémoriser la suite orale des mots nombres jusqu'à trente (comme il est demandé dans les programmes). Toutefois, si la récitation ne pose pas de difficulté notable, il relève à partir de quinze des problèmes liés à l'énumération de la collection, qu'il résout à force de « répéter répéter répéter ». C entraine également la mémorisation et la reconnaissance des configurations des dés et des doigts à partir de jeux de plateaux avec des dés. Pour chaque période, il détient une série de jeux, en lien avec les périodes (la rentrée, l'automne, noël, etc.). Pour l'écriture chiffrée, C est intrigué par une difficulté récurrente des élèves : l'écriture chiffrée en miroir. Concernant la branche cardinal, C propose l'étude successive des nombres les uns après les autres à partir de cinq. Il reprend l'étude de un à cinq ensemble, puis l'étude du six, celle du sept, etc. Cette progression impose son rythme à la branche cardinal-quantité (lorsqu'il s'agit de situation de comparaison par rapport au nombre étudié) et à la branche numérations pour la numération figurée et écrite. Toutefois, de nombreux exemples en situation de jeux de société imposent de sortir de cette progression linéaire des nombres. Les jeux de plateaux sont choisis par C pour entrainer la mémorisation des configurations du dé et la lecture de l'écriture chiffrée. Les savoirs liés à l'ordinalité et à l'énumération ne sont pas identifiés comme tels et donc pas enseignés mais rencontrés en situation d'observation des élèves. La rencontre régulière avec les déplacements sur piste conduit C à donner des astuces pour réussir (case origine, sens

d'orientation). De la même façon, il donne des astuces pour réussir l'énumération d'une collection non déplaçable.



4- L'ENSEIGNEMENT DE D

Au moment de l'entretien, D a une classe de TPS-PS.

4.1- L'arbre des savoirs du nombre de D

a- Focus sur les cinq branches de l'arbre des savoirs du nombre

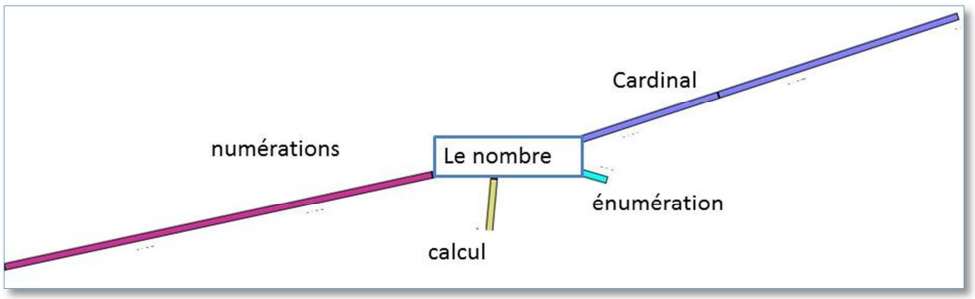


FIGURE 69 : L'ARBRE DU NOMBRE DE D

De nombreux exemples en numérations et pour le cardinal sont donnés par D. Puis il décrit des activités de calcul et enfin la branche énumération est exposée à partir des difficultés d'organisation repérées chez les élèves. Au cours de l'entretien D n'expose pas d'activité liée à l'ordinalité.

b- Durée des extraits codés

Trente-six extraits sont codés dans la branche numérations, trente-et-un dans la branche cardinal, trois extraits pour le calcul et deux pour la branche énumération.

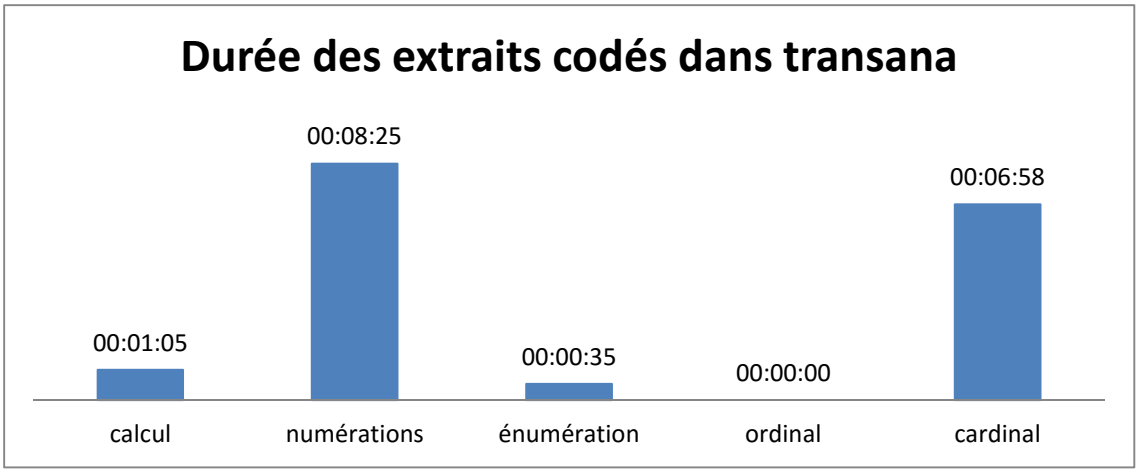


FIGURE 70 : HISTOGRAMME DES EXTRAITS CODÉS EN MINUTE POUR D

4.2- Quelles connaissances mathématiques spécifiques sont présentes dans chacune des branches ?

a- La branche numérations

La suite orale des mots nombres est impulsée à partir de comptines et de jeux de doigts, puis par entrainement au quotidien à l'aide d'activités de comptage des présents le matin au rituel.

193	D- alors la comptine numérique on la travaille aussi sous forme de comptines de comptines ou de jeux de doigts voilà ça j'avais oublié de te le dire

L'irrégularité des seize premiers mots nombres est signalée par D.

205	D- mais après y'en a oui à partir de six sept ça commence à perdre les pédales voilà alors après ça dépend tout dépend aussi la heu c'est plus facile de dire dix-sept que quinze par exemple voilà parce qu'ils savent qu'après dix-sept comme y'a le sept y'a le huit après qui suit ou le neuf voilà

La stabilité de la suite orale des premiers mots nombres n'est pas acquise pour tous les élèves.

159	D- y'en a que c'est un peu anarchique oui ils vont commencer par deux heu ils ont pas cette heu cette cette cette habitude pourtant on le fait on compte tous les jours mais certains vont commencer par deux ou alors ils font deux un voilà c'est encore un peu anarchique

D profite de ce moment collectif de rituel pour dénombrer les présents, travailler sur la cardinalité, sur l'écrit à l'aide d'étiquette, mais il n'en reste pas moins que c'est aussi une imprégnation de la suite orale des mots nombres.

2	D- alors les nombres bon moi je dirai que ça se travaille pas de façon heu vraiment ciblée heu le domaine vraiment numérique parce que quand notamment quand tu fais les rituels tu travailles le nombre nous on a le comptage le rituel très traditionnel le comptage donc moi je me sers de petites donc un enfant par jour compte dénombre hein les enfants puisqu'on est bien dans le dénombrement dénombre les enfants

L'écrit est très présent chez D, il multiplie les activités permettant la reconnaissance des chiffres et de fait il constate de réels progrès chez les élèves.

43	D- ah oui ils ont beaucoup progressé et pour la reconnaissance des chiffres heu heu là on n'est pas dans le quantitatif hein mais la reconnaissance des chiffres ils ont fait énormément de progrès les PS ont beaucoup progressé

D associe l'oral et l'écrit aussi souvent qu'il peut à partir d'étiquettes avec l'écriture chiffrée dans de multiples occasions.

53	D- ah toujours présente mais alors dès le début hein dès qu'ils ont dès qu'ils ont le support étiquettes

Il souhaite donner aux élèves « une image sur un nombre », et travaille sur la reconnaissance visuelle pour qu'elle soit parfaitement intégrée au point de ne pas avoir à « compter sur les doigts ».

61	D- ah oui oui parce que c'est quand même important qu'on arrive à mettre une une une une image sur un nombre voilà trois pas être obligé de compter sur les doigts on sait que voilà le nombre trois ça s'écrit comme ça et le nombre deux

Pour cela, il ritualise un travail sur l'écrit. Une fois les élèves dénombrés, il inscrit le cardinal au tableau, il le nomme, nomme également le nom des chiffres qui le compose et ensuite demande à l'élève de lui montrer sur la frise numérique « le même nombre », c'est-à-dire la même écriture chiffrée sur la frise ou bien sur de petites étiquettes. La comparaison de l'écriture chiffrée se fait méthodiquement en appliquant l'affiche à côté du modèle et en comparant « le chiffre à droite et à gauche ».

2	D- je le dis explicitement je le dis et il y en a très bien qui te diront c'est le nombre vingt il est fait avec le chiffre deux et le chiffre zéro voilà l'élève S l'élève L de bons élèves et donc après je lui dis voilà je te l'écris je t'écris le nombre et tu vas essayer soit au travers de la file numérique qui est en bas ce que je faisais l'année dernière soit à partir des affichettes tu vas me trouver le même nombre alors je donne des des des pistes mais je leur donne aussi des leurres c'est à dire par exemple si c'est le nombre dix-neuf je leur donne le nombre seize ou j'ai un petit trait en bas qui montre de le nombre six il a la tête en bas le nombre neuf voilà des éléments mnémotechniques et donc voilà après trois quatre essais je leur dis ben voilà est ce que c'est ça dis-moi pourquoi c'est ça dis-moi pourquoi c'est pas ça et il vient ensuite appliquer sa petite carte contre le nombre c'est le même on a le même chiffre à droite et à gauche et ensuite il vient le mettre heu sur le tableau des présents

L'écriture des premiers nombres est également enseignée avec la peinture à doigt, en montrant et en expliquant le sens du tracé.

67	D- attends voilà au début on a commencé par de la peinture à doigt tu vois et je montre le sens […] voilà donc on commence par en bas et voilà c'est aussi une première écriture du sens et de l'espace aussi contenu dans le nombre un voilà on monte et je descends et certains savent l'écrire on commence un peu à l'écrire le nombre un au tableau

D s'appuie fortement sur les constellations du dé dans ses affichages, il propose des jeux avec le dé (dé qu'il fabrique pour qu'apparaissent l'écriture chiffrée et la constellation du dé). Aussi lorsqu'ils se répartissent les attendus par niveaux, D imagine « pousser jusqu'au six » en donnant une justification par rapport aux dés.

289	D- alors [l'enseignant de MS] travaille jusqu'au quatre heu je j'essaierai d'aller jusqu'au cinq cinq six non jusqu'au cinq il travaille moi je je voulais pousser jusqu'au six voilà parce que je trouve que pour une reconnaissance notamment sur les dés c'est très facile

b- La branche cardinal

La branche cardinal-relations

D décrit un enseignement basé sur la succession des nombres les uns après les autres « toujours de la même façon ». L'étude successive des nombres leur confère un statut tout à

fait particulier « le nombre un le nombre deux le nombre trois » qui s'appuie sur la visite du savoir, le un, le deux, le trois et le quatre qui seront abordés telles des œuvres à visiter.

4	D- ensuite heu après de façon très formelle je dirai le nombre en tant que voilà nombre quantité heu après avec des termes mathématiques je sais pas comment on dit quantité mathématique voilà donc on a travaillé le nombre un le nombre deux le nombre trois toujours de la même façon en manipulant alors soit avec des jeux de dinette des jeux de distribution les constellations des dès heu voilà beaucoup de jeux de manipulation avec les assiettes avec les clippos apporte moi un clippo apporte voilà alors c'est vrai que ça peut paraitre très facile le nombre un mais bon c'est vrai qu'en tout début d'année ils ont un peu de mal et je vais essayer normalement d'aller jusqu'au nombre quatre voilà en PS normalement on devrait s'arrêter au nombre trois je vais essayer déjà pour embrayer un peu après chez les MS je vais essayer d'aller jusqu'au nombre quatre avec certains enfants pas tous peut être mais avec certains du moins qui auront les capacités voilà

« Apporte-moi », mais aussi donner, montrer, nommer, dénombrer sont autant d'actions demandées aux enfants pour chacun des premiers nombres. La connaissance des premiers nombres lui parait capitale, au point qu'il focalise tout son enseignement sur l'étude du un, du deux et du trois, et pour ceux « qui auront les capacités », du quatre.

129	D- je reste sur les nombres étudiés

Sauf dans les jeux avec le dé ou le cinq et le six peuvent être tirés.

8	D- chaque enfant lance le dé à son tour et va tomber sur par exemple la face alors six c'est vrai que bon je les aide quand même parce que bon en général bon ça tombe sur des petites sur des petites sur des petits nombres

D différencie bien le fait que les élèves ne connaissent pas le six pour le dénombrer de la lecture de l'écriture du six qu'ils rencontrent le matin à partir des étiquettes.

133	D- à part si c'est de façon implicite là tu vois bon là on tombe sur le six c'est un grand nombre on le connait pas ils le connaissent puisque sur les cartes je leur fais le petit signe en bas ils savent que c'est un six mais après le dénombrer non on n'a jamais fait

Lorsque D explique que « six c'est un grand nombre on le connait pas », il sous-entend que l'étude complète du nombre six n'a pas été entreprise, en revanche lorsqu'il prolonge en disant qu'« ils le connaissent » il fait bien référence ici à la lecture de l'écriture chiffrée.

<u>La branche cardinal-quantité</u>

D privilégie la correspondance entre l'écriture chiffrée et la quantité en dessinant le bon « nombre d'éléments ».

75	D- et chaque fois à côté je sais pas si tu as vu je dessine un nombre d'éléments correspondant toujours pour qu'il y ait une

Dans les situations où il faut construire la même quantité, D propose des collections de petite quantité pour favoriser le passage par le dénombrement. En demandant systématiquement « combien tu as de pions, combien tu vas en prendre » et en proposant explicitement une procédure : « voilà le nombre que tu as ici doit correspondre ».

81	D- non on est obli non pas du tout donc je cache et je lui dis voilà alors ici combien tu as de de de pions sur le dé donc j'y dis combien tu vas en prendre de crêpes combien tu vas prendre de de de poêles avec les crêpes il me dit deux j'y dis voilà le nombre que tu as ici doit correspondre alors autant que ce c'est po autant que

La situation fondamentale « autant que » est abordée à travers des fiches à partir de gommettes. Ici la collection de gommettes est fixe, les élèves doivent dessiner autant de ronds (œufs de pâques) que de gommettes, il s'agit d'une situation d'action.

123	D- voilà je dessine autant d'œufs de pâques que de gommettes collées dans les cases et donc là l'année dernière ils comme on avait appris le rond ils dessinaient des ronds des œufs voilà

D liste les différentes procédures observées dans sa classe. Le fait de proposer de petites quantités permet à certains enfants de reconnaitre par *subitizing* la quantité de trois éléments « de façon visuelle globale ». D'autres enfants utilisent une collection intermédiaire orale, la suite orale des mots nombres en comptant la collection de gommettes « un deux trois » et en répétant « un deux trois » en dessinant les ronds. Enfin certains utilisent une collection intermédiaire matérielle, les doigts, pour se rappeler de la quantité de ronds à dessiner. D a souvent besoin d'intervenir pour aider à l'énumération de la collection et passer en revue toutes les gommettes en leur faisant correspondre un doigt de la main.

125	D- certains enfants qui d'une façon globale visuelle globale vont reconnaitre le trois comme ça ou comme ça et qui vont te dire là ça c'est pour les meilleurs qui vont te dire bon ben voilà j'en ai trois il y en a d'autre qui vont passer par le dénombrement qui vont oral qui vont te dire un deux trois et y'en a d'autres qui vont passer par le doigt ou alors quand je vois que c'est la panique à bord je leur prends le doigt je leur dis on va le compter ensemble un deux trois donc là on voit qu'il y a plusieurs stratégies heu

c- La branche calcul

D évoque « des jeux de distribution » sans donner plus de renseignements ou d'exemples. Même si la correspondance terme à terme en TPS-PS permet la résolution de situation de distribution, ce sont avant tout des savoirs liés au partage qui sont ici supposés être mis en avant.

30	D- soit des jeux de distribution

d- La branche énumération

D constate des difficultés par rapport au dénombrement de petite quantité, il est amené à les aider « physiquement », c'est-à-dire à prendre en charge l'énumération de la collection en touchant avec le doigt de l'élève, « à vraiment toucher le l'élément » c'est-à-dire à passer en revue tous les éléments de la collection une et une seule fois. De plus, il pointe le pouce sur le premier élément, l'index sur le deuxième et le majeur sur le dernier élément sur la table, puis en relavant la main, alors que les doigts sont restés face à l'élément pointé, il obtient la correspondance avec les doigts.

36	D- donc ils ont la quantité et ils comptent un deux trois j'aide physiquement souvent ceux qui sont comme Clémentine qui sont de fin d'année comme l'élève P qui est de fin d'année j'aide physiquement j'essaie de les aider à toucher à vraiment toucher le l'élément voilà pour leur permettre de le dénombrer une fois que je l'ai touché je passe à autre chose c'est une gymnastique que je leur apprends que je leur apprends à faire pour pouvoir dénombrer ils se détacheront après en élémentaire parce que les profs veulent pas qu'on compte sur les doigts

4.3- Les niveaux d'activités de D

a- Niveau+3 : niveau noosphérien ou idéologique

+3		Manipulation		Fiches		Compter sur les doigts à l'élémentaire		Compétence dans le livret

PD_{+3} décrit une séance de classe avec un temps de manipulation au départ. Ce temps de manipulation est l'installation du milieu de la situation du nombre un, du nombre deux, du nombre trois. Les activités sur fiche sont précédées d'un temps de contact avec des objets, distribuer deux assiettes, prendre deux cubes, apporter deux feutres…

PD_{+3} consacre du temps à la réalisation de ses fiches ainsi qu'à la recherche de fiches sur différents sites internet. Il les range par période dans de gros classeurs et les compile sur plusieurs années, ce qui lui permet d'avoir une banque de fiches conséquentes exploitables par périodes.

Même si PD_{+3} considère que les enseignants de l'élémentaire ne souhaitent pas que les enfants comptent sur les doigts, il insiste et aide les enfants à toucher un à un les éléments de la collection avec les doigts de la main. Cette procédure qui passe par le corps est donnée aux enfants mais aussi à l'enseignant débutant qui enseigne à temps partiel dans la classe.

PD_{+3} assume le parti pris de travailler une compétence ne relevant pas du niveau de PS établit en équipe dans le livret d'évaluation[62]. Il lui semble tout à fait important en effet, de privilégier la correspondance oral/écrit à partir de la lecture de l'écriture chiffrée pour les premiers nombres et ce dès la PS.

b- Niveau+2 : situation de construction

+2		Quantité		Correspondance écrit/oral Écriture chiffrée Frise numérique Constellations des dés		La suite orale des mots nombres Comptines numériques Jeux de doigts

PD_{+2} définit le travail sur la quantité autour du un, du deux et du trois. Autant que possible PD_{+2} mentionne, dès qu'il le peut, la correspondance entre la quantité avec l'écriture chiffrée.

PD_{+2} insiste sur la reconnaissance visuelle, que ce soit à partir de l'écriture chiffrée ou des constellations. Il souhaite qu'à partir d'exemples divers et fréquents les enfants acquièrent une image des nombres pour ne pas avoir à compter. Les premiers nombres sont abordés à partir de la quantité et de leur désignation : l'écriture chiffrée, les constellations en s'appuyant sur *le subitizing*.

La suite orale des mots nombres est enseignée à partir de jeux de doigts et de comptines numériques. PD_{+2} se fixe la mémorisation de la suite orale jusqu'à dix, sachant que vers sept-huit PD_{+2} constate déjà des difficultés.

c- Niveau+1 et niveau 0 : situation de projet de leçon (dans la séance) et situation didactique

+1 & 0		Rituel		Exemples

$PD_{+1\&0}$ détaille précisément son rituel pas à pas, comme si un enfant était en train de le réaliser. Tour à tour sont passés en revue le dénombrement des présents, le travail sur

[62] Dans l'école de D, les enseignants ont mis au point un livret d'école d'évaluations par compétences par niveaux. La compétence lire l'écriture chiffrée des premiers nombres est à renseigner pour les MS et GS, pour autant, D l'enseigne et l'entraine dans sa classe de TPS-PS.

l'écriture chiffrée du cardinal avec les chiffres qui le composent, la discrimination visuelle de l'écriture chiffrée à partir des petites cartes fabriquées par D ; puis le dénombrement des absents avec d'autres étiquettes.

$PD_{+1\&0}$ décrit des exemples d'activité par rapport aux anniversaires, avec les deux ou trois bougies sur le gâteau et son support mural. $PD_{+1\&0}$ insiste sur sa volonté de montrer la bonne désignation des doigts. $PD_{+1\&0}$ présente le jeu de la galette, sa règle du jeu et la composition de l'atelier.

d- Niveau-1 : niveau d'observation ou de dévolution

- 1		Facilités et difficultés observées		Dévolution

PD_{-1} observe des facilités relatives à la lecture de l'écriture chiffrée du un et du deux, mais des difficultés à partir du trois. Cette « reconnaissance visuelle globale » est délicate à partir de trois également pour les constellations du dé. La suite orale des mots nombres n'est pas toujours stable même un-deux-trois où parfois certains élèves commencent par deux-un. PD_{-1} n'hésite pas à employer les termes « c'est dur », « c'est très dur », « c'était compliqué », « ils ont du mal» pour analyser le résultat des activités menées.

PD_{-1} choisit d'aider certains élèves au plus près de la solution, c'est le cas pour l'énumération où physiquement il prend les doigts de l'élève et les place les uns après les autres sur chaque élément de la collection. C'est également le cas aussi dans des situations de construction de collections de même quantité où PD_{-1} demande « combien tu en as » puis prolonge par « combien tu vas en prendre ».

4.4- Conclusion concernant D

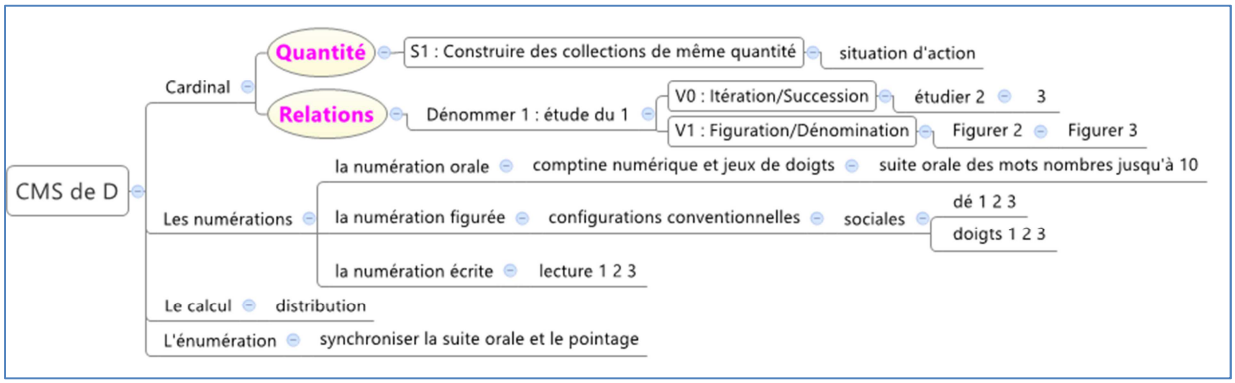
Dans ses propos, D se situe plutôt au niveau de projet de leçon et de la situation didactique. Il se réfère assez peu aux difficultés des élèves et préfère plutôt qualifier les activités de façon générale (dures, compliquées, faciles). Il s'appuie néanmoins sur quelques élèves de fin d'année ou ceux qui ne parlent pas pour énoncer la difficulté. Le niveau idéologique interfère dans le niveau de construction du thème qui renforce sa pratique de classe et qui justifie ainsi le temps conséquent consacré à l'enseignement de la reconnaissance visuelle des chiffres et des constellations.

Niveau noosphérien ou idéologique	+3
Niveau de construction ou de conception d'un thème	+2
Niveau de projet de leçon et niveau de la situation didactique	+1 & 0
Niveau d'observation ou de dévolution	-1

TABLEAU 14 : ACTIVITÉ RÉFLEXIVE DE D

Pour résumer, en TPS-PS, D oriente son enseignement sur l'étude du un, du deux et du trois, autant que possible. Il essaie de rester dans ce domaine numérique pour la branche quantité ainsi que pour la numération figurée. La suite orale des mots nombres est entrainée jusqu'à dix, à partir de nombreux jeux de doigts et de comptines. Dans son rituel D propose la lecture et l'écriture de la date à partir d'étiquettes. D confectionne différents matériels en fonction de ses intentions pédagogiques. Il construit des dés avec seulement un-deux et trois, mais également pour avoir l'écriture chiffrée 1 2 3. D se projette dans le niveau des MS

et envisage d'étudier les nombres jusqu'à six plutôt que cinq comme il a été décidé dans l'école, pour être en accord avec les besoins de lecture du dé. Il interroge sa progression future en fonction de ses intentions liées ici à une utilisation régulière du dé. D compile de nombreuses fiches inventée, fabriquées, ou bien tirées d'internet, il se constitue une banque de ressources par période. La branche calcul n'est pas expliquée, juste énoncée. D repère différentes stratégies utilisées par les élèves en situation. Il observe également de grandes différences pour les élèves de fin d'année à qui il apporte une attention particulière.



5- L'ENSEIGNEMENT DE E

Au moment de l'entretien E a des TPS PS MS GS et CP dans sa classe.

5.1- L'arbre des savoirs du nombre de E

a- Focus sur les cinq branches de l'arbre des savoirs du nombre

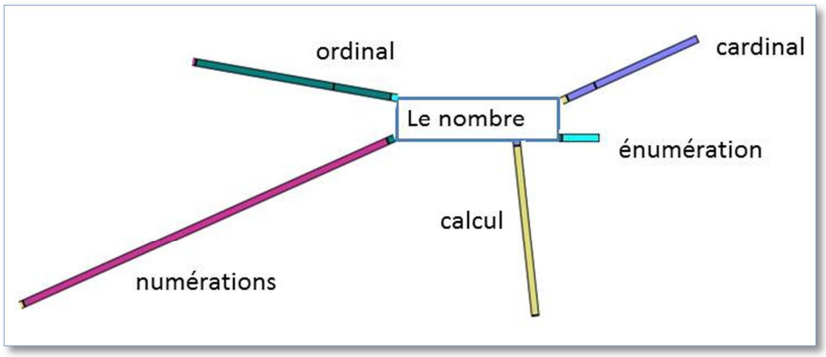


FIGURE 71 : L'ARBRE DU NOMBRE DE E

E évoque des situations ou activités se rapportant aux cinq savoirs du nombre à la maternelle : cardinal, ordinal, calcul, numérations et énumération. La branche numérations est fortement représentée suivie des branches ordinal, calcul et cardinal dans une même proportion, puis de la branche énumération.

b- Durée des extraits codés

Avec vingt-six extraits codés pour la branche numérations, dix-neuf pour la branche ordinal, seize pour la branche cardinal et douze pour la branche calcul, l'enseignement de E est assez uniforme sur ces quatre branches. Sur la branche énumération quatre extraits sont codés qui relèvent de l'observation de la difficulté des élèves.

Les savoirs relatifs aux numérations, à l'ordinalité, au calcul, et à la cardinalité sont enseignés par E et les durées des extraits codés sont représentés sur le diagramme suivant, avec une dominance pour la branche numérations. L'énumération est évoquée par le biais des difficultés des élèves.

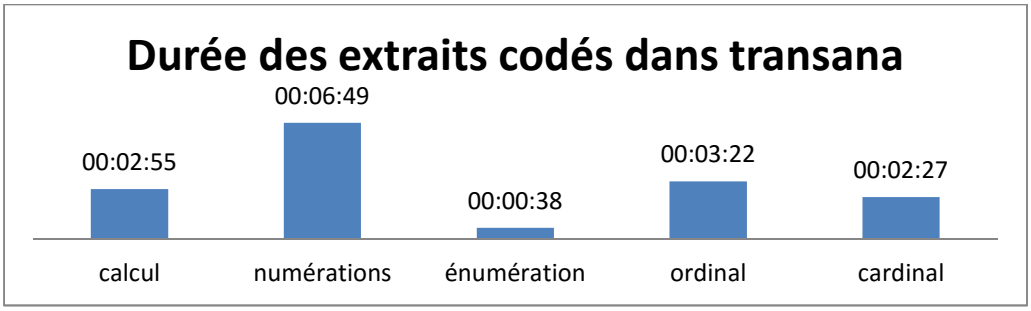


FIGURE 72 : HISTOGRAMME DES EXTRAITS CODÉS EN MINUTE POUR E

E utilise un fichier pour les élèves de GS, « pour comprendre les maths GS[63] ». Il s'agit d'un choix d'équipe pour une cohérence d'école, qui permet toutefois à E d'être guidé et rassuré.

40	E- donc voilà et du coup les GS on a manipulé comme ça beaucoup avec les MS et par contre après moi j'ai un fichier pour les GS donc heu donc heu je fais des activités heu en fonction aussi des pages on fait toujours une activité de manipulation avant mais voilà le nombre
41	Chercheur- c'est quoi comme fichier
42	E- c'est pour comprendre les maths GS
43	Chercheur- c'est heu
44	E- heu hachette éducation
45	Chercheur- d'accord
46	E- parce que nous dans l'école on a tous pour comprendre les maths donc du coup j'avais j'ai essayé depuis quelques années de prendre le fichier
47	Chercheur- de l'anticiper aussi pour les GS
48	E- ouais disons moi j'ai l'impression que ça me structure que j'oublie rien même si je rajoute beaucoup de choses et qu'on fait pas tous les jours du fichier mais voilà j'ai l'impression de bien passer partout

Ce fichier « structure » l'enseignement de E, il se laisse conduire par son utilisation qui lui permet de ne rien oublier, c'est-à-dire que tous les savoirs sont visés à partir d'« une activité de manipulation avant » puis d'une page du fichier. E a alors toute la liberté de rajouter « beaucoup de choses » puisqu'il n'utilise pas le fichier quotidiennement. « L'impression de bien passer partout » renvoie aux différents savoirs mathématiques spécifiques à l'enseignement du nombre à l'école maternelle. Peut-être alors que cette tendance assez uniforme des résultats en durée des extraits codés est la conséquence de l'utilisation du fichier. L'analyse des pages du fichier par rapport à l'arbre des savoirs du nombre donne une indication générale des savoirs visés.

	Calcul	Cardinal	Ordinal	Numérations	Énumération
Nombre de pages du fichier consacré aux savoirs	6	19	8	2	0

TABLEAU 15: ANALYSE DU FICHIER GS, UTILISÉ PAR E À PARTIR DES CINQ PRINCIPAUX SAVOIRS

Ces nombres de pages ne donnent qu'une indication globale car plusieurs savoirs sont parfois liés et mêlés notamment entre cardinal et numérations et cardinal et calcul. Il n'y a pas de proposition d'activités spécifiques concernant l'énumération. .

[63] Pour comprendre les mathématiques Grande Section - Fichier de l'élève - Fichiers d'activité Auteur(s) : Jean-Paul Blanc, Nathalie Blanc, Paul Bramand, Éric Lafont, Claude Maurin, Daniel Peynichou, Antoine Vargas

5.2- Quelles connaissances mathématiques spécifiques sont présentes dans chacune des branches ?

L'étude systématique de chaque branche permet d'observer les connaissances et les savoirs mathématiques spécifiques à l'enseignement du nombre à la maternelle, il convient à présent de les développer et de les illustrer d'exemples donnés par le professeur.

a- La branche numérations

E débute l'entretien en se référant à la suite orale des mots nombres « la chanson des nombres c'est-à-dire connaitre leurs noms ».

2	E- d'accord heu donc en fait heu moi pour moi y'a plusieurs façons heu d'aborder le nombre y'a d'abord heu connaitre la chanson des nombres c'est à dire connaitre leurs noms petit à petit y associer l'écriture chiffrée la constellation du dé et la constellation des doigts

Il va privilégier toutes les occasions pour compter, c'est-à-dire énoncer les mots nombres de la suite orale en même temps que le pointage des éléments de la collection.

6	E- ça commence par se compter donc pour le là c'est vraiment pour connaitre la chanson

E livre ensuite les différentes façons qu'ont les élèves pour mémoriser cette suite orale des mots nombres. Ils répètent, ils imitent et finalement « il y a des choses voilà qui rentrent comme ça ».

10	E- heu donc voilà les plus petits heu ils répètent après moi ou après un copain plus grand heu et après si on se trompe les PS les MS s'ils se trompent souvent les autres les reprennent avant que moi j'ai même le temps de le faire donc heu voilà donc là c'est vraiment pour l'apprentissage de la de la chanson

E observe même un tutorat pour les MS et les PS qui sont immédiatement repris par les GS pour corriger les erreurs. Ce premier apprentissage de la suite des mots nombres comme une chanson est souligné par E.

12	E– tout le monde le fait dans l'imitation quoi les plus petits imitent au début et puis et puis y'a des choses voilà qui rentre comme ça

Il multiplie les occasions pour entrainer cette « chanson », faire la course, c'est-à-dire compter le plus vite possible sans s'arrêter (ici c'est juste la récitation, aucun élément n'est compté), compter les présents, compter les garçons, les filles, ceux qui mangent à la cantine, ceux qui prennent le car. Mais E n'a pas l'impression d'enseigner spécifiquement cette suite orale numérique, il met en place quelques comptines numériques à segmentation pour les PS, mais pour les MS et les GS, il les corrige et les reprend quand il y a des erreurs, il développe les occasions pour l'entrainer, mais ne « la travaille pas spécifiquement », Il constate notamment en MS et GS que la suite orale des mots nombres est sue et que ces savoirs viennent « de la maison ».

96	E- ouais ben cette année j'ai introduit les comptines à segmentations-là qui ont un peu aidé je pense pour les PS en tout cas c'est sûr après les GS je dois dire que c'est de la maison ouais parce que c'est en fait aussi heu dans la vie quotidienne je pense et j'ai pas vraiment heu les GS j'ai pas du tout travaillé la comptine numérique je les corrige quand ils se trompent

E évalue régulièrement « je les fais compter deux fois à cinq minutes d'intervalle », il vérifie si la suite orale est stable et si elle progresse. Avec les GS, il relève des connaissances de numération décimale écrite, à l'image de celles des élèves de CP.

104	E- oui oui oui tout tout ce qu'on a fait là jusqu'à cinquante-neuf en tout cas c'est sûr qu'ils ont ils ont percuté après les soixante-deux soixante-dix je pense pas mais jusqu'à cinquante-neuf ils ont bien compris parce que des fois quand ils cherchent vingt-et-un ou quoi que ce soit ils expliquent comme moi j'explique au CP en disant c'est la famille des vingt elle commence par deux ou des choses comme ça et ça c'est moi qui le dit au CP donc je pense qu'ils ont ouais ouais

E consacre du temps aux jeux mathématiques qui figurent dans son emploi du temps, au moins pour les PS et MS. Aussi de nombreux jeux avec les dés sont exploités, et cette année il ne relève pas de difficultés avec les configurations du dé ou des doigts. Par contre il se heurte à la reconnaissance, à la lecture de l'écriture chiffrée qui est difficile pour certains élèves.

196	E- heu ben cette année la reconnaissance des chiffres écrits hein c'est très difficile ça on trouve que ça rentre pas trop heu alors que les doigts et les dés alors que d'autres années j'avais trouvé que c'était difficile les dés par exemple et là cette année ils vont très bien reconnaitre les quantités globalement donc un trois un deux un quatre mais alors associer le chiffre écrit heu très difficile cette année

« On trouve », il s'agit de l'enseignant et de l'ATSEM qui a régulièrement les élèves en atelier et qui est associée pleinement[64] à l'enseignement « parce que nous enfin moi je pense ».

26	E- alors elle fait d'abord avec les là c'est ce qu'on a fait la semaine dernière avec les chiffres écrits et ensuite quand tout le monde a joué elle reprend et elle dit alors ben là tu avais trouvé trois alors comment on fait trois avec les mains et puis on regarde derrière la carte y'a le dé donc on regarde le dé enfin elle associe toujours à la quantité parce que nous enfin moi je pense que c'est quand même ça donne du sens

Dans cet atelier, l'élève doit lire les étiquettes avec l'écriture chiffrée, ensuite il matérialise le nombre lu avec ses doigts. Il ne s'agit pas ici d'avoir la même quantité, puisque la lecture de l'étiquette en soi ne donne pas d'indication sur la quantité. Énoncer le mot nombre lu permet, en récitant la suite orale des mots nombres de lever les doigts au fur et à mesure, de trouver et de s'arrêter sur le même mot nombre. C'est alors que le nombre de doigts levés correspond à la quantité évoquée par le mot nombre. Derrière la carte se trouve la constellation du dé, qui permet une correspondance terme à terme, si besoin, avec la collection de doigts trouvée. Ici toutefois, il est fait mention de regarder le dé, c'est donc la reconnaissance visuelle qui est entrainée.

Enfin, E développe aussi le geste d'écriture pour les chiffres. Il enseigne l'écriture des chiffres avec la même rigueur que les gestes d'écriture cursive (Dumont, 2006; Dumont, 2013).

52	E- donc le geste on les laisse pas écrire les chiffres tout seul n'importe comment voilà c'est c'est pour moi c'est plutôt de l'écriture du coup là comme les lettres bâton comme après la cursive on est avec eux donc voilà on explique ça vient avec la date au début donc on explique la date comment on l'écrit je monte je descends on explique les gestes au début on vérifie et puis du coup une fois que c'est à peu près parti ils font la date ils écri ils recopient la date en autonomie

L'enseignement des numérations orale, écrite et figurée occupe une place importante pour E, c'est en effet, la première entrée qu'il choisit de donner dans l'entretien. Un bon nombre d'activités décrites sont ritualisées tous les matins et lui permettent d'entrainer et de répéter les connaissances en jeu.

[64] Avec cinq niveaux dans la classe, le rôle de l'ATSEM dans une classe multi-niveaux est sensiblement différent de celui d'une ATSEM de classe maternelle à un niveau. Une connivence forte avec l'enseignant est indispensable pour harmoniser les rotations des adultes sur les groupes et pour assurer la continuité dans les apprentissages.

b- La branche cardinal

Après avoir énoncé les savoirs liés à la branche numérations et avant d'indiquer ceux sur le calcul, l'enseignant E formule des savoirs relatifs au nombre cardinal.

2	E– après y'a tout ce qui est autour de dénombrer fabriquer des des collections

La branche cardinal-relations

E fait part d'activités renforçant la compréhension de relations unissant le nombre, son successeur, son précédent, c'est-à-dire l'itération, plus un, moins un. Cette succession chronologique dans l'enseignement du nombre est évoquée lors de construction de collections.

110	E- alors on a on commence par construire des collections de deux donc pareil en atelier avec des legos avec des jouets donc heu on construit des collections de jusqu'à cinq suivant jusqu'où ils en sont dans la comptine

Les collections, de deux à cinq, sont construites avec du petit matériel de classe, en fonction de la connaissance de la suite orale des mots nombres. Ces collections sont réalisées avec la collection intermédiaire orale, par comptage avec la suite orale des mots nombres, E demande deux voitures, l'élève compte un-deux. Plus tard E demandera trois briques de lego, l'élève réalisera une collection avec un-deux-trois petites briques etc. et cela jusqu'à cinq de façon systématique.

Enfin E décrit une situation de comparaison qui s'appuie sur la relation entre suite orale des mots nombres et quantité.

120	E- et puis après on fait heu on essaye de faire plus que donc est-ce que y'en a plus quand on compte six est-ce qu'il y en a plus que quand on compte trois

Réciter la suite orale des mots nombres jusqu'à six va plus loin que celle jusqu'à trois, cela implique une quantité plus importante. Pour corroborer et appuyer cela E propose le support de la frise numérique « regardez sur la bande le six il est écrit après » (que je code dans ordinal-relations) en mettant en lumière « le sens de lecture ».

120	E- alors on dit voilà suivant ce qu'ils répondent après on dit ben oui parce que regardez sur la bande le six il est écrit après donc on essaye d'introduire aussi le sens de lecture bon ça c'est moins facile et moins que c'est très difficile parce que bon c'est toujours plus difficile mais moins que c'est et puis ce ce truc de moins je c'est pas un mot qui ils y arrivent pas quoi parce que souvent ils disent moins c'est plus

E souligne la difficulté liée au lexique, « au mot » moins que, qui crée des confusions « moins c'est plus ».

La branche cardinal -quantité

Après avoir énoncé des savoirs relatifs à la branche numérations, E indique ceux « autour de dénombrer fabriquer des collections » qui sont intimement liés à la quantité.

2	E– donc y'a à la fois le nombre et la que moi je différencie pas de la de la quantité on essaye d'associer le plus possible à tout ce qui est voilà quantité

Cette quantité est appréhendée systématiquement par le pronom interrogatif « combien ».

10	E– mais je finis toujours quand même en disant alors y'en a combien pour pour travailler le le la toujours la quantité et tout ça

À la fin de chaque activité de « comptage » E « finit toujours » en demandant « combien », pour matérialiser le cardinal de la collection.

E développe ensuite deux situations fondamentales. Il commence par « autant que » suivie de la comparaison de collections « plus que » et plus tard « moins que ».

14	E– et puis petit à petit avec ce genre de truc j'introduis y'en a plus y'en a moins y'en a autant

Construire des collections de même quantité

112	E– on fait voilà autant que en premier donc pareil heu et là aux évaluations y'avait un exercice où il fallait coller autant de gommettes que de fleurs et ça a très bien marché pour tout le monde

À partir de cet exemple décrit pour des évaluations « colle autant de gommettes que de fleurs », avec quatre fleurs, E constate une procédure de correspondance terme à terme. il s'agit d'une situation d'action, car il ne s'agit pas de coller les gommettes sur les fleurs, mais dans une case à côté de la case modèle des fleurs.

116	E- donc heu en général oui on va quatre cinq oui je vais pas plus loin et parce que y'en a je me suis rendu compte ils comptent pas encore ils font la correspondance en touchant
117	Chercheur- d'accord
118	E- donc ils posent une gommette ils touchent une fleur ils posent une gommette ils touchent une autre fleur mais ils se trompent pas donc c'est la correspondance terme à terme

E insiste sur l'installation du milieu, notamment la mise en place des mots.

260	E- oui on revient sur le autant parce que de toute façon y'a besoin là on vient de faire l'évaluation de fin d'année de GS heu au moment où j'ai donné la consigne autant que ils ont dit c'est quoi déjà c'est pareil ou c'est plus j'ai dit c'est autant que réfléchissez et bon ils ont retrouvé mais on sent que c'est encore fragile même en GS où je pensais que moi ça y est c'était bon quoi et on sent que c'est encore fragile ce mot autant que donc on le met dans plein de contexte de phrases aussi
261	Chercheur- d'accord pour essayer de
262	E- heu nous même quand on ne serait-ce qu'à la cantine hein des fois voilà pour le plus possible on l'utilise heu donc heu ouais c'est encore pas acquis complètement je dirai
263	Chercheur- d'accord
264	E- il faut disons qu'ils se rassurent très longtemps même les CP encore des fois ils disent autant c'est pareil hein donc je pense que ça les rassure de se le dire
265	Chercheur- et oui oui oui comme quoi voilà c'est quelque chose qui est

E souhaite que les élèves utilisent la suite orale des mots nombres dans le dénombrement pour construire les collections, c'est pourquoi, il observe finement les stratégies des élèves qui le renseigne sur le domaine numérique qu'il peut proposer.

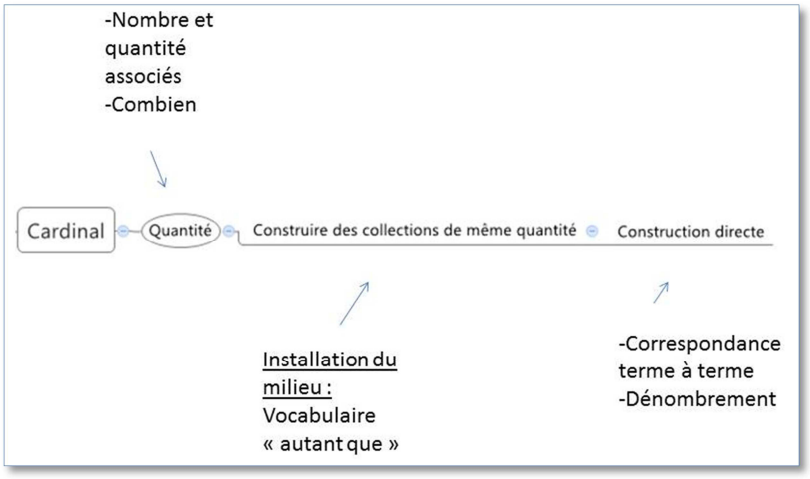


FIGURE 73 : BRANCHE CARDINAL-QUANTITÉ DE L'ENSEIGNANT E

Comparer des collections :

Là encore E consacre du temps à l'installation du milieu par rapport « au langage ».

18	E- et je fais aussi du langage parce qu'on apprend à dire il y a plus de filles que de garçons enfin voilà

Il s'agit d'une constatation générale, non spécifique à un domaine en particulier mais vraie aussi pour les mathématiques.

266	E- oui puis c'est tout cette histoire aussi de de lexique et de vocabulaire ici dans cette école y'a quand même enfin je trouve dans le y'a plein de choses moi avec les CP où je me heurte à des problèmes de vocabulaire quoi de manque de mots manque de synonyme tout ça donc heu ça fait partie aussi je pense donc voilà on répète tout le temps autant pareil la même chose avec plein plein de mots différents

E commence par introduire « plus que » en utilisant la suite orale des mots nombres ainsi que la frise numérique « est-ce qu'il y en a plus quand on compte six est-ce qu'il y en a plus que quand on compte trois ». Compter, c'est égrener la suite orale des mots nombres une première fois jusqu'à six, puis recommencer jusqu'à trois et remarquer que la suite orale des mots nombre va plus loin avec six qu'avec trois, c'est aussi constater que six est écrit après le trois sur la frise numérique. Mais E se « heurte » à ce savoir et ne sait pas comment expliquer « cette notion de comparer deux nombres » qui « reste difficile longtemps ».

268	E- voilà et après moi là où je me heurte le plus ça va être co comment expliquer que sur la bande numérique ben si on a six et qu'on a trois ben trois il est plus petit parce qu'il est écrit avant ça c'est très difficile parce que j'ai beau leur dire quand on mange trois pommes on en a moins mangé que si on en mange six tout ça ben c'est c'est voilà cette notion de comparer deux nombres ça reste difficile longtemps

Le fait que E mentionne la comparaison de deux nombres sur la frise numérique ou à l'oral, ou bien qu'il prenne l'exemple de pommes ayant été mangées, cela ne permet pas de comparaison directe des collections. Aussi la comparaison décrite ici s'apparente plutôt à une visite du savoir qui va être développée à présent.

c- La branche ordinal

J'opère une distinction dans les activités décrites par E entre ordinal-relations et ordinal-position. E aborde les mots nombres ordinaux à partir du tableau des métiers de la semaine car il y a « un premier du rang y'a un dernier du rang », il s'agit en quelque sorte de

responsabilités qu'endosse l'enfant de service, dans différents domaines, qui sont nommées les métiers de l'élève par E : distribution de matériel, chef de rang dans les déplacements, etc.

180	E- voilà donc chaque semaine ça change donc pour la semaine y'a un premier du rang donc chaque fois qu'on se promène en rang ben y'a un premier y'a un dernier et du coup ils prennent comme ils prennent leur métier à cœur

Cette ritualisation quotidienne et l'implication des élèves dans les métiers fait dire à E que « du coup les PS déjà premier dernier c'est bon je crois », « premier dernier du coup ça y est je crois qu'ils ont ». Les mots repères premier et dernier étant acquis, E s'appuie sur un album de littérature pour aborder d'autres mots nombres ordinaux.

188	E- et voilà et du coup on est allé un peu loin là ça a pas mal marché ouais ouais ouais parce qu'on a travaillé sur heu bonjour docteur
189	Chercheur- oui
190	E- où il y a le premier le deuxième
191	Chercheur- oui
192	E- pour heu pour les animaux qui passent là () oui donc allo docteur le premier le deuxième et ça du coup grâce à ce livre et ben on a pu heu travailler toute toute l'ordinalité là ça a été fait en quelques séances super ouais

Sur la frise numérique, avec une pince à linge E propose une illustration de la branche ordinal-relations et "succession".

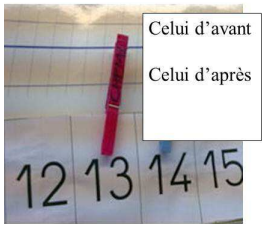


FIGURE 74 : FILE NUMÉRIQUE ET PINCE À LINGE UTILISÉES PAR E

En effet, cette matérialisation frise-pince à linge rend visible le précédent et le suivant, une case avant, une case après, un bond avant, un bond après. Contrairement aux activités plus ou moins deux décrites dans la branche calcul et non dans cardinal-relations, je code dans ordinal-relations « heu celui qui est deux cases après », car avec les élèves de la maternelle, ce déplacement de la pince sera majoritairement effectué avec un premier déplacement et encore un autre déplacement, plutôt qu'un saut de deux cases directement. En effet, le déplacement sur piste, une case après l'autre, fait partie de l'enseignement sur le nombre ordinal-position de E. Cet enseignement appuyé par le jeu des petits chevaux, prend en compte le déplacement mais aussi la case « origine », la case à partir de laquelle commence le déplacement.

60	E– en parallèle on joue heu dans des ateliers de jeux mathématiques souvent je fais jouer aux petits chevaux des choses comme ça pour apprendre à se déplacer et à compter pas un de là où on part

E met le doigt sur l'ambiguïté de l'origine, du départ, il conçoit qu'il apprend « à compter pas un de là où on part », cependant le zéro comme nombre origine n'est pas évoqué. Il considère que le déplacement ainsi que l'origine du déplacement s'enseignent. Là encore, l'observation précise des erreurs ou difficultés des élèves lui permet cet apprentissage.

62	E- parce que les CP je me suis rendu compte cette année qu'on n'avait surement pas assez joué et du coup avant de déplacer le cheval ils comptent un

Ce déplacement sur plateau est prolongé par un travail sur fiche à partir du fichier, où les élèves matérialisent le déplacement de case en case d'abord avec du matériel, le petit cheval, puis par des arcs, des « bonds » dessinés au crayon à papier.

74	E- et je me rends compte que les MS les GS qui ont aussi des choses comme ça dans leur fichier du coup à faire sur papier et ben ils ont compris qu'avec le crayon à papier on dessine les bonds et du coup ils le matérialisent comme ça au début de l'année ils allaient chercher un petit cheval là dans le placard et puis heu un jour ils m'ont dit on est obligé de le prendre le petit cheval alors j'ai dit mais si tu penses savoir faire avec ton crayon heu ou avec tes doigts ou et donc ça y est on a abandonné le le petit cheval

L'orientation est également évoquée par E, avant il installe le milieu, les mots nombres ordinaux.

162	E– sur on avait fait aussi l'ordinalité là donc c'est le premier le deuxième
163	Chercheur- oui
164	E- si on se tourne vers la porte qui c'est qui est deuxième et si maintenant on se tourne vers la fenêtre ben c'est plus lui qui est deuxième donc on a fait tout ça heu la topologie aussi ça je le mets dans le créneau mathématique quoi

Et également le lexique « avant/après », « devant/derrière ».

182	E- et ben ils le disent met toi devant moi je suis le dernier du rang et donc on travaille tout ça devant derrière heu

Il insiste aussi sur la correspondance à l'oral de deuxième et deux.

172	E- donc du coup il reste plus qu'à montrer
173	Chercheur- oui
174	E- heu que on dit deuxième et que on entend deux tout ça et puis montrer après la l'orientation du rang

E investit et développe l'orientation « on le formalise un peu plus », en s'appuyant sur des activités sportives dans la cour, puis sur fiche.

186	E- voilà là on le formalise un peu plus on va après je leur mets aussi avec des pièges donc heu donc on le fait avec eux dans la cour on le fait en sport et puis après quand on passe à la fiche ben je mets des images ou ça regarde à droite ou ça regarde à gauche et donc on cherche ou on avance donc qui c'est qui est le premier

Ce travail permet de traiter les positions relatives.

d- La branche calcul

Pour E la branche calcul est focalisée sur l'addition et la soustraction : quatre activités différentes sont présentes : surcompter, plus ou moins deux, l'addition à trou et l'utilisation des doigts comme outil de calcul. L'addition à trou est longuement détaillée par E, plus exactement, E revient plusieurs fois sur ces activités.

2	E– et puis après vers la GS ajuster des collections à une quantité

Pour ajuster des collections à une quantité, c'est-à-dire ajouter ce qu'il manque pour obtenir une quantité donnée, E développe l'exemple du jongleur et des balles à jongler.

126	E- ah eux c'est très très facile du coup on a fait plutôt des choses de d'ajustement c'est à dire heu le jongleur il a trois balles il en veut huit en tout dessine ce qu'il manque et ça ça marche super bien ah ouais heu barrer ce qui est en trop et rajouter ce qui manque parfait aussi jusqu'à dix largement

E souligne la réussite des élèves dans cette activité du jongleur. Il s'agit d'une fiche avec un jongleur et trois balles déjà dessinées, l'élève doit compléter la collection de balles pour que le jongleur ait huit balles en tout. Dans cette situation, il est possible de réussir la tâche en recomptant le nombre total obtenu après chaque dessin.

FIGURE 75 : EXEMPLE DE FICHE POSSIBLE DU JONGLEUR

Par contre, un peu plus loin dans l'entretien, E qualifie l'activité d'ajustement de « très difficile », quand il n'est plus possible de recompter.

206	E- après là heu GS ce qui est très difficile enfin GS ce qui est très difficile c'est ajuster se dire combien j'en rajoute ne pas recompter parce qu'ils y arrivent au final mais ils recomptent chaque fois qu'ils dessinent un truc ils recomptent du début alors si on ajuste à douze c'est voilà ils arrivent pas à se simplifier le travail en fait donc heu bon petit à petit on met en place des techniques mais je vois qu'en CP c'est encore difficile de compléter de faire des additions à trous donc je me dis heu c'est normal que

E constate que les élèves dessinent une balle et recomptent l'ensemble, dessinent une autre balle, recomptent à nouveau toute la collection alors qu'il souhaiterait qu'ils se « simplifient le travail » et aillent vers « les techniques » opératoires, car « ajuster [c'est] se dire combien j'en rajoute [et] pas recompter » le tout à chaque élément nouveau dessiné.

E relate également le cas des évaluations GS[65] (Men/Degesco, 2010, p. 60)

[65] http://cache.media.eduscol.education.fr/file/evaluation/36/1/aide_evaluation_GS_maternelle_136361.pdf Consignes pour les élèves : Dire aux élèves : «Il y a 6 fées. Le nombre de fées est écrit en haut de la fiche Nous allons donner à chacune une robe, une baguette magique et enfin un chapeau. S'il y a trop d'objets d'une catégorie, il faudra les barrer et indiquer le nombre des objets barrés dans la case. S'il n'y a pas assez d'objets, il faudra écrire le nombre d'objets qui manquent dans la case.» S'assurer que la situation est comprise. « Vous commencez par les robes. Vous continuez par les baguettes, puis par les chapeaux. Allez-y. »

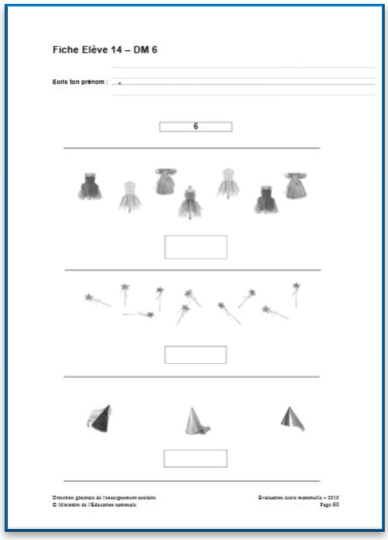


FIGURE 76: EVALUATION GS ÉDUSCOL

214	E- hier y'a eu le problème là en évaluations donc ils avaient c'est dans les évaluations GS
215	Chercheur- oui oui
216	E- donc ils avaient six fées il fallait une robe pour chacune une ba
217	Chercheur- baguette
218	E- une baguette et un chapeau et ben ils ont très bien su barrer ce qui était en trop
219	Chercheur- oui
220	E- et ils ont compris maintenant que si on veut six on s'arrête à six et pas la peine de compter jusqu'au bout on barre ce qu'il reste
221	Chercheur- ouais
222	E- ça c'était très difficile aussi et par contre les chapeaux ils en ont dessinés six quoi alors qu'il y en avait trois de dessinés
223	Chercheur- et oui
224	E- et donc ben là j'ai fait recommencer on a sorti des jetons on a fait avec les doigts donc bon c'est un peu fausser l'évaluation mais je préférais pas les laisser faire heu
225	Chercheur- oui oui bien sûr
226	E- n'importe quoi et mais ouais ajuster la collection c'est le plus dur hein je pense enfin mais je trouve que là ça peine un peu et même les CP sur heu
227	Chercheur- d'accord
228	E- compléter à un nombre donné
229	Chercheur- ouais
230	E- ils se perdent en fait entre l'addition à trous l'addition normale heu là
231	Chercheur- et du coup là les chapeaux qu'il y avait avant heu
232	E- voilà
233	Chercheur- ils les considèrent pas comme finalement
234	E- oui c'est ça eux ils habillent pas eux ils ont six en fait je pense qu'ils ont le nombre six dans la tête et ils arrivent pas à s'en détacher donc même si y'en a trois il va falloir quand même qu'à un moment ils mettent six quelque part donc c'est comme quand après chez les grands ils font un problème et que toutes les données ils les utilisent parce que il faut les mettre dans les opérations quoi ben je trouve que c'est un peu ce raisonnement là c'est à dire moi on m'a dit six fées heu il faut que j'utilise ce nombre six quoi je pense que c'est un peu aussi du un peu comme du formatage c'est à dire que le maitre il a dit six donc heu voilà
235	Chercheur- et du coup
236	E- c'est le contrat didactique un peu c'est voilà j'utilise ce six là parce qu'il est écrit en haut de la page le maitre l'a dit trois fois donc ouais

Pour l'exemple des baguettes, où il faut barrer ce qui est en trop, E insiste sur le caractère « très difficile » de l'activité. Il laisse supposer que la difficulté provient de la formulation, de la compréhension de la consigne : barrer ce qui est en trop. Une fois que les connaissances sont institutionnalisées ou bien que le savoir est donné, montré, « si on veut six on s'arrête à six et pas la peine de compter jusqu'au bout on barre ce qu'il reste » alors les élèves « ont compris maintenant » et « ils ont très bien su barrer ce qui était en trop ».

Pour l'exemple des chapeaux, les élèves, ici, dessinent six chapeaux sans tenir compte des trois déjà imprimés sur la fiche. E avance l'hypothèse du contrat didactique unissant l'élève et le professeur « j'utilise ce six là parce qu'il est écrit en haut de la page le maitre l'a dit trois fois ». Dans ces exemples présentés, E se réfère également à la difficulté des élèves de CP notamment dans les additions à trou. Peut-être est-ce pour cela qu'il entrevoit ces « choses d'ajustement » comme un point important de son enseignement, qui va demander du temps et dont il sait, par expérience, que la difficulté pourra subsister jusqu'au CP. Même si la difficulté existe et est bien présente encore au CP, pour l'évaluation des GS, E choisit de ne pas laisser apparaitre cette difficulté, il propose de « recommencer », et reconnait que « c'est un peu fausser l'évaluation ». Il sort du matériel qui permet de se représenter la situation, le recours aux doigts et aux jetons, contextualise la situation. Les doigts sont ici utilisés comme outil d'aide au calcul. En dépliant trois doigts et en ajoutant un doigt au fur et à mesure pour obtenir six. Ou bien en comptant six avec les doigts et progressivement en otant, un, deux, trois doigts pour voir directement le nombre de trois doigts levés restant.

E évoque une fois, le fait de surcompter ; mais aussi d'ajouter ou d'enlever deux, à cette occasion, il aborde la soustraction.

Sa branche calcul est presque exclusivement orientée sur l'addition et la soustraction, dans différentes formes.

e- La branche énumération

L'énumération est identifiée en tant que connaissance en situation, E repère à partir de difficultés d'élèves « le pointage » c'est-à-dire le fait de passer en revue tous les éléments de la collection une et une seule fois ainsi que la synchronisation entre ce pointage et la suite orale des mots nombres.

194	E- heu le plus difficile c'est arriver à dénombrer en pointant
195	Chercheur- d'accord
196	E- ça c'est très difficile pour les petits de heu de bien associer son geste heu avec la comptine

Cette difficulté étant observée et décelée, E en parlera à trois reprises.

Il prend le temps d'expliquer comment le rituel des présents se déroule, il insiste sur « toucher la tête » et prononcer le mot nombre associé, mais aussi se souvenir de l'endroit où a débuté le comptage ou le dénombrement.

8	E- alors y touchent la tête donc ils commencent à un endroit on essaye de se rappeler où on commence pour pas recompter des enfants déjà comptés et après on pose la main sur la tête et à chaque fois qu'on touche on doit prononcer un associer le geste à la parole

Toujours au moment du rituel, lors du comptage ou dénombrement des étiquettes pour savoir qui prend le car, qui mange à la cantine, il insiste sur le déplacement du doigt « sur chaque étiquette », il ne dit rien quant à un éventuel déplacement des étiquettes déjà comptées et celles restant à compter.

10	E– donc pareil on déplace son doigt sur chaque étiquette on compte le car

Dans l'exemple qui suit, E précise l'évolution du pointage et de la synchronisation avec la suite orale des mots nombres qui, jusqu'à présent, permettait de dénombrer tous les éléments d'une collection, il relate maintenant le rôle de l'énumération dans la construction de collection où il ne s'agit plus de pointer, de montrer l'étiquette ou toucher la tête, mais de « prendre au moment où ils disent » la suite orale des mots nombres. Lorsque l'enseignant E déclare « après quand ça marche bien », le « ça » est relatif à l'énumération.

110	E- alors on a on commence par construire des collections de deux donc pareil en atelier avec des legos avec des jouets donc heu on construit des collections de jusqu'à cinq suivant jusqu'où ils en sont dans la comptine et puis après quand ça ça marche bien qu'ils arrivent bien à construire et à surtout pas à pointer mais à prendre au moment où ils disent
111	Chercheur- oui
112	E- donc associer toujours le geste

L'expérience et l'observation fine des élèves permettent à E de repérer les connaissances d'énumération comme indispensables dans son enseignement du nombre. Toutefois, ce savoir n'est pas clairement nommé, E n'accompagne pas ces connaissances d'explications explicitent par rapport au savoir et ne les institutionnalisent donc pas. Toutefois la rencontre régulière de ces connaissances en situation montre que E les intègre à son enseignement en reconnaissant une place à l'énumération dans les situations de dénombrement.

5.3- Dialectique savoir/connaissance à travers certaines activités décrites

a- Des savoirs vers les connaissances

Dans la situation de comparaison de deux nombres, E montre le savoir, sur la frise numérique à droite du trois les nombres sont plus grands à gauche, ils sont plus petits, avec la suite orale des mots nombres quand le nombre cible trois est dépassé, le nombre est plus grand, s'il n'est pas atteint le nombre est plus petit. Ce savoir difficile pour de jeunes élèves, mêle en effet cardinalité et ordinalité. E tente d'exposer le plus possible les élèves à ce savoir afin qu'ils puissent développer des connaissances. Mais aux dires de l'enseignant, « c'est difficile ».

b- Des connaissances vers les savoirs

E décrit un travail sur fiche au sujet d'un déplacement sur une piste initié par le jeu des petits chevaux. Ici la matérialisation du déplacement avec le petit cheval laisse place progressivement à un « savoir-faire » avec le « crayon » ou avec les « doigts ». En situation de jeu des petits chevaux, l'élève a testé des déplacements possibles avec son cheval sur les cases (case origine et orientation) et sur la fiche il utilise encore le cheval pour progressivement transformer ses connaissances et dessiner des bonds avec son crayon à papier.

5.4- Les niveaux d'activités de E

a- Niveau +3 : niveau noosphérien ou idéologique

+3		Répéter		Manipuler		Avancer sur les apprentissages du CP

PE_{+3} expose la façon dont les PS apprennent la suite orale des mots nombres, en répétant après le maitre, après des plus grands. À cet égard, un système de tutorat apparait naturellement dans sa classe multi-niveaux entre les PS et les MS ou GS au sujet des erreurs et des reprises par rapport à la mémorisation de la suite orale des mots nombres. PE_{+3} répète pour favoriser un bain linguistique mais aussi pour permettre aux élèves de s'approprier également le vocabulaire comme autant que.

PE_{+3} prévoit du temps pour la manipulation avant une page du fichier. Cette exploitation d'un fichier pour les GS est le fruit d'une décision commune d'école, mais PE_{+3} trouve que l'utilisation d'un fichier « le structure » et lui permet « de bien passer partout ». Il prévoit de consacrer plus de temps de manipulation l'année scolaire suivante avec les élève de l'école maternelle, ainsi que de montrer plus le geste d'écriture chiffrée au tableau et de penser à proposer quelques problèmes.

Ayant aussi des CP dans la classe, PE_{+3} s'autorise à prendre de l'avance sur les apprentissages du CP quand cela est possible. Il reconnait également lorsque les connaissances viennent de la maison, et non de son enseignement, puisqu'en l'occurrence pour la suite orale des mots nombres, les élèves la connaissent déjà.

b- Niveau +2 : situation de construction

+2		Suite orale des mots nombres, associer l'écriture chiffrée, les dés, les doigts		Déplacement, orientation, case origine Mots nombres ordinaux		Dénombrer, fabriquer des collections de même quantité Comparer des nombres		Ajuster des collections

PE_{+2} structure son enseignement autour de la suite orale des mots nombres et des associations avec l'écriture chiffrée, les configurations des dés ainsi que celles des doigts. La lecture des écritures chiffrée requiert son attention et celle de l'ATSEM.

PE_{+2} entrevoit également la nécessité d'un travail sur l'ordinalité prenant en compte les déplacements sur pistes avec l'orientation et la case origine, mais aussi les mots nombres ordinaux.

PE_{+2} associe les nombres et la quantité en posant toujours la question « combien ». Des situations de comparaison de deux nombres à l'aide de la frise numérique sont envisagées. De même la construction de collections de même quantité est aussi abordée par PE_{+2}.

PE_{+2} enfin, prend appui sur des ajustements de collections pour aborder le calcul.

c- Niveau +1 et niveau 0 : situation de projet de leçon (dans la séance) et situation didactique

+1 & 0		Exemples d'activités		Fonctionnement de la journée, des ateliers

$PE_{+1\&0}$ expose des exemples d'activités qu'il mène ou bien menées par l'ATSEM.

$PE_{+1\&0}$ décrit aussi le fonctionnement de la journée avec les différents temps dévolus à l'enseignement des mathématiques dans sa classe à plusieurs niveaux.

d- Niveau -1 : niveau d'observation ou de dévolution

- 1		Réussites et difficultés observées		Cas d'élèves en particulier		Évaluations

PE_{-1} fait part des réussites des élèves en ce qui concerne la récitation de la suite orale des mots nombres, les mots nombres ordinaux le premier et le dernier, la procédure de correspondance terme à terme, mais aussi lorsqu'il faut barrer ce qui est en trop, ou bien dans des situations « autant que ». De la même façon PE_{-1} livre les difficultés d'élèves qui concernent la lecture de l'écriture chiffrée, le repérage de la case origine lors de déplacements, la synchronisation du pointage avec la suite orale des mots nombres, les activités « plus que, moins que » et ajuster des collections, mais aussi comparer deux nombres.

PE_{-1} développe rapidement deux exemples d'élèves sur deux difficultés en particulier.

Enfin, PE_{-1} relate comment il évalue la suite orale des mots nombres ainsi que l'utilisation des évaluations nationales GS.

5.5- Conclusion concernant E

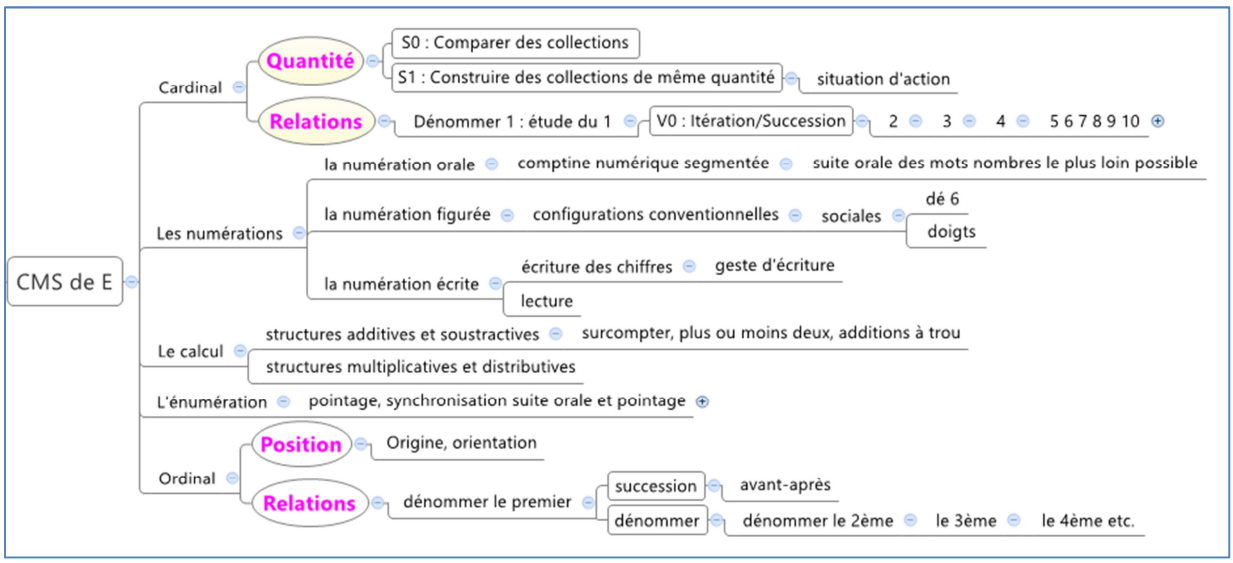
E suit un fichier en GS, ce qui lui permet d'harmoniser la fluidité des parcours avec les cycles 2 et 3 de l'école, niveau noosphérien (+3). Mais cela lui donne surtout des repères par rapport aux savoirs à enseigner et aux connaissances à rencontrer au niveau de construction du thème (+2). Une grande connivence avec l'ATSEM permet une continuité des apprentissages et un retour sur les difficultés des élèves en situation. Une analyse par rapport aux difficultés des élèves au niveau d'observation (-1) lui permet de planifier les adaptations et les changements de son enseignement au niveau de construction du thème (+2). En effet E énonce volontiers son niveau de construction d'un thème (+2) en passant en revue les différents savoirs enseignés.

Niveau noosphérien ou idéologique	+3
Niveau de construction ou de conception d'un thème	+2
Niveau de projet de leçon et niveau de la situation didactique	+1 & 0
Niveau d'observation ou de dévolution	-1

FIGURE 77 : NIVEAU D'ACIVITÉ DE E

Pour résumer, E suit la progression d'un fichier de mathématiques pour les GS ce qui lui confère une assurance dans son enseignement. Le fichier lui offre un cadre, une base pour son enseignement qu'il complète avec de la manipulation. La progression du fichier conditionne la planification de ses séances. À chaque nouvelle activité correspond une séance de manipulation en lien avec la proposition du fichier. Si E suit le fichier il se donne toutefois la liberté de le compléter à sa guise, sans contrainte. L'existence d'un manuel modifie la certitude de E. Dans ses propos une incertitude est relevée même si elle est formulée sous forme d'affirmation. Il ne différencie pas le nombre et la quantité ou formulé autrement, E n'enseigne pas la quantité indépendamment des nombres. L'association permanente du nombre et de la quantité fait qu'il énoncera sa difficulté dans son enseignement relative à la comparaison de quantités sur la bande numérique. E entrevoit l'enseignement de la suite orale des mots nombres comme la mémorisation d'une chanson, il considère qu'il ne la travaille pas spécifiquement avec les MS GS alors qu'il fournit une

multitude d'exemples en situation. Toutefois, il reconnait l'enseigner en PS mais à partir de la MS, il corrige parfois certains élèves et pense même qu'elle s'apprend à la maison. E décrit un enseignement sur l'ordinalité basé sur les positions relatives, et l'orientation.



6- L'ENSEIGNEMENT DE F

F enseigne en MS et GS au moment de l'entretien.

6.1- L'arbre des savoirs du nombre de F

a- Focus sur les cinq branches de l'arbre des savoirs du nombre

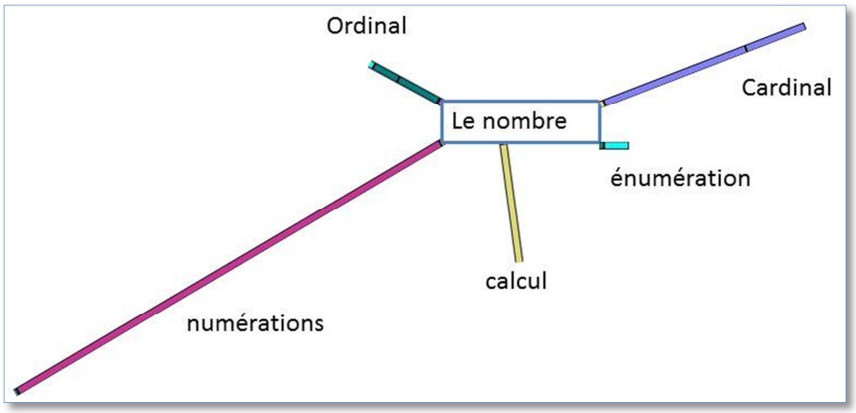


FIGURE 78 : L'ARBRE DU NOMBRE DE F

Les cinq branches de l'arbre du nombre sont décrites par F, de façon conséquente pour la branche numérations, suivie par la branche cardinal, puis la branche calcul, l'ordinal et enfin l'énumération.

b- Durée des extraits codés

Cinquante-cinq extraits sont codés dans la branche numérations, vingt-sept dans la branche cardinal, douze dans le calcul, sept dans la branche ordinal et enfin trois dans l'énumération.

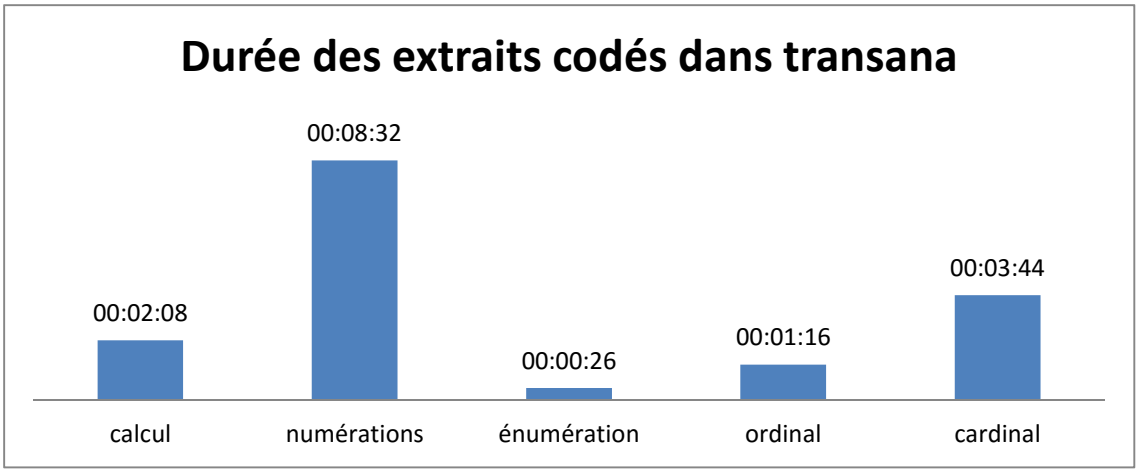


FIGURE 79 : HISTOGRAMME DES EXTRAITS CODÉS EN MINUTE POUR F

6.2- Quelles connaissances mathématiques spécifiques sont présentes dans chacune des branches ?

a- La branche numérations

Grâce à sa boîte de jeux, F adapte les supports et le matériel à ses objectifs. Pour entrainer la lecture de l'écriture chiffrée, il a construit un dé « un peu spécial ».

88	F- oui selon après je recompose mes jeux après après quand je veux qu'ils apprennent à le lire j'ai un dé j'ai un dé un peu spécial où il y a que le chiffre et donc là y'a tous les jeux on peut faire autour du

Sa panoplie pour la lecture de l'écriture chiffrée est complétée par « des dominos avec les chiffres ».

148	F- voilà donc après j'ai j'ai des des dominos avec les chiffres

Pour trouver le nombre tiré par le dé, à l'aide d'une frise numérique, les élèves identifient le même signe graphique, c'est-à-dire la même écriture chiffrée, et recomptent, depuis le début, en récitant la suite orale des mots nombres jusqu'au nombre cible pour pouvoir le nommer.

160	F- donc au moins visuellement ils me disent c'est lui et après donc ils comptent ils me disent ben du coup-là c'est le quatre

Il propose des activités de discrimination visuelle entre les chiffres et les lettres.

264	F- en numération là quelque chose que j'avais pris de très très simple et même ça certains ont eu du mal voilà reco savoir alors là c'est pour faire la différence entre chiffre et lettre

Si F est vigilant à la lecture de l'écriture chiffrée, il relativise toutefois ce savoir par rapport à d'autres qui lui semblent plus importants, comme compter ou reconnaitre les constellations des dés.

210	F- ni pour lire enfin bon lire encore y'aurait eu que ça c'était pas ça qui me chiffonnait le plus mais ni pour compter ni pour reconnaitre la constellation ni rien quoi

En MS « au niveau du graphisme », F n'a pas d'exigence. Les activités proposées sollicitent déjà cet écrit mais sans toutefois avoir des attendus d'évaluation (comme l'écriture de la date par exemple).

278	F- voilà ben là au niveau graphisme le trois il l'a pas du tout j'ai pris sa

	main là il a la silhouette bon ça vient c'est pas d'ailleurs c'est pas là-dessus que

L'écriture des chiffres est enseignée systématiquement chez les GS.

260	F- ben moi je pense aussi que pour ceux qui ont une mémoire visuelle de le fait de l'écrire ils le mémorisent mieux bon sachant qu'au niveau graphisme c'est encore très dur

Enfin, la suite orale des mots nombres est entrainée à l'aide des paquets, paquets de deux, de trois, de quatre « un-deux-trois-quatre, un-deux-trois-quatre, un-deux-trois-quatre ».

266	F- voilà pareil compter compter là faire des paquets

F décrit également certaines activités spécifiques à la suite orale des mots nombres, comme le jeu du furet ou bien compter les bruits de jetons qui tombent dans une poubelle. F « pioche » dans « Vers les maths » (Duprey, Duprey, & Sautenet, 2009), qui est « une mine d'idées ».

Mais ce n'est pas la suite orale des mots nombres qui retient l'attention de F car elle est déjà connue et maitrisée en majorité par le groupe des GS.

408	F- donc la comptine heu en fait mon groupe de GS à part un ils étaient déjà au-delà de ce que j'avais à leur apprendre

F montre ses progressions, et en fin d'année, pour la suite orale des mots nombres il note « trente et plus ». F propose un enseignement sur le nom des dizaines « qu'ils apprennent au moins comme une poésie ».

412	F- trente et plus parce qu'après je leur apprends les dizaines mais je le marque pas mais
413	Chercheur - donc le plus c'est là tu sautes
414	F- ben disons qu'après ils ont compris hein à chaque fois je monte d'un dix et puis après je remets les mains donc ils savent qu'on fait plus et après ils l'apprennent au moins comme une poésie

Le travail conséquent réalisé sur l'addition dans la branche calcul débouche sur la mémorisation de certains résultats des tables d'addition.

334	F- voilà mais c'est plus après de mémoriser la la table d'addition que

Enfin F présente le cahier des chiffres, où chaque chiffre est exposé sur une double feuille, avec les configurations du dé, des doigts, la représentation de la boîte picbille[66], l'écriture chiffrée et du mot nombre, la quantité sous une forme spatiale dans la feuille définie par l'enseignant.

296	F- ah si tiens y'a un truc que j'ai pas sorti pour la numération c'est qu'à partir des GS y'a un cahier des nombres j'allais te l'oublier ça des chiffres enfin des chiffres parce que je m'arrête à 9 mais donc en fait en début d'année je sais pas à qui je vais le mettre bon on verra bien alors en fait en début d'année je leur donne une pochette où y'a tout ce qui faut pour l'année et avec tous les nombres sous toutes les sous toutes ses formes

Une fois encore, le support riche et varié des jeux construits par F entraine la lecture des configurations du dé, des doigts ou bien de l'écriture chiffrée en fonction des objectifs du maitre, de plus, il peut également le croiser avec l'entrainement de la suite orale des mots nombres pour associer lecture des configurations et nom des mots nombres.

[66] La boîte picbille n'est pas un outil conçu pour les GS, F l'emprunte à l'enseignant de CP et l'utilise dans sa classe.

b- La branche cardinal

La branche cardinal-relations

F décrit les premiers savoirs de la branche cardinal-relations, les trois premiers nombres à partir d'élèves qui n'« avaient pas les un-deux-trois » en arrivant en MS.

170	F- ils avaient pas le un deux trois

Ceci a une incidence sur la suite des apprentissages des élèves.

222	F- parce qu'en fait j'ai remarqué que ceux qui arrivaient pas à cinq cinq six en MS ils rament après en GS ils ont du mal ils ont du mal et pourtant je reprends à un en GS je reprends à un alors d'une autre façon mais heu et malgré tout heu après j'ai du mal à les faire grimper jusqu'à dix (…)

F détaille son enseignement de "un" à "dix" en GS en insistant bien sur les trois premiers nombres. Le « mélange » consiste à rencontrer tous les nombres jusqu'à celui étudié et plus exclusivement un par un.

270	F- voilà donc en fait j'avance j'avance sur l'année en faisant bien le un le deux le trois je préfère faire comme ça et à partir d'un certain stade je mélange

Appuyer sur les trois premiers nombres lui permet également d'introduire des notions telles que l'addition et la soustraction. La reconnaissance des petits nombres (par *subitizing* d'ailleurs) permet d'attirer l'attention sur le sens des opérations et non sur la résolution. Plus tard, F propose des calculs sur des nombres plus importants.

Enfin, F énonce la possibilité de manipuler les petits doubles, il s'agit de recomposition à partir des premiers nombres pour aborder la notion de double.

332	F- deux plus deux trois plus trois six plus six voilà je

La branche cardinal-quantité

F décrit une situation fondamentale ayant trait à la comparaison de collections, une collection de personnes, une collection de places disponibles dans un bus, y'a-t-il assez de places pour toutes les personnes ? La situation est proposée sur fiche ce qui a pour conséquence de fixer les collections, elles ne sont pas déplaçables. La correspondance terme à terme directe est de fait empêchée. Une procédure observée par F consiste à utiliser, à l'aide d'un écrit mathématique, « les traits » qui symbolisent chacun un personnage, la correspondance terme à terme entre les personnes et les places libres.

378	F- Il fallait savoir si y'avait assez de places donc fallait comparer en fait le nombre de places y'en a qui ont fait des traits
379	Chercheur- oui
380	F- pour mettre chaque bonhomme
381	Chercheur- d'accord
382	F- dans dans sa place et là la difficulté qu'ils ont eu certains et elle en fait partie c'est qu'elle m'a fait tout juste sauf qu'elle m'a répondu non y'a pas assez de place parce qu'il reste une place
383	Chercheur- ah d'accord
384	F- et comme il reste une place c'était pas égal

La difficulté, pour de jeunes élèves, réside dans l'ambiguïté relative à la place libre dans le bus.

Une situation du banquier avec un système de commandes est annoncée par F, mais elle n'est pas précisée.

Dans les propos de F, les situations fondamentales de comparaison et de construction de collections sont abordées.

c- La branche calcul

F présente de nombreux jeux de plateau, de jeux de société, de jeux traditionnels utilisant l'addition et la soustraction. Comme F privilégie ces temps de jeux en autonomie, dans son enseignement il consacre dès la MS des temps à l'introduction de l'addition et de la soustraction. Il matérialise alors le sens de l'opération avec ici un paquet de pions encerclés avec un morceau de laine qui s'ouvre pour faire entrer ou pour retirer un jeton. La justification de démarrer « avec les tout petits nombres » est donnée dans cardinal-relations.

250	F- hein mais quand on le démarre en fait avec les tout petits nombres ils comprennent vite et ils comprennent bien sachant qu'avant avant on le matérialise en faisant heu de la laine et un paquet par exemple et on met et on enlève avec des pions on joue ou ou alors c'est la l'adulte qui fait tourner on le voilà on le comprend avant ce qui fait qu'en général ça marche bien

F complète le travail sur l'addition avec des additions à trou et des compléments à dix. Pour cela depuis peu il a mis au point un système de bon point avec une distribution quotidienne et l'échange de dix bons points contre une image.

450	F- et tous les jours ils comptent pour avoir leur bon point voilà où j'en suis les GS et certains MS ah maitre alors si je suis sage jeudi et vendredi vendredi soir j'aurai mon bon point
451	Chercheur- ah oui
452	F- voilà alors ils commencent à compter et à voir ce qui manque pour pouvoir avoir dix donc pour compléter à dix

Plus que les compléments à dix, ce système de bon point favorise aussi l'anticipation et les relations de cause à effet par rapport à leur comportement « si je suis sage ». Visuellement une collection de dix bons points dans une petite boîte se « voit » et ici l'élève P est attiré par la collection de bons points de l'élève R « tout ce qu'il a ». Alors que certains élèves attendent le dixième bon point pour avoir l'image, certains élèves en revanche, stockent les bons points sans rien en attendre.

454	F- j'ai un GS élève P qui me dit mais maitre regarde élève R tout ce qu'il a j'ai compté je crois bien qu'il y en a vingt-et-un et effectivement il y en avait vingt-et-un
455	Chercheur- d'accord
456	F- voilà donc du coup combien ah oui mais alors combien d'images
457	Chercheur- qu'est-ce qu'on peut échanger voilà
458	F- on va laisser le un et puis combien on va mettre d'images et ben voilà j'ai les GS tout de suite qui m'ont dit ben il lui faut deux images

La multiplicité des jeux construits par F lui permet d'aborder l'addition et la soustraction en situation de jeu. Les compléments à dix et les échanges dix contre un sont également travaillés quotidiennement à partir de la distribution des bons points.

d- La branche ordinal

Des activités à partir du calendrier sont énoncées pour aborder l'ordinalité. Puis, à partir d'un travail sur les grandeurs, F « retravaille les chiffres pour l'ordre » à travers les mots

nombres ordinaux mais surtout les positions qu'ils occupent dans le rangement du plus grand au plus petit.

336	F- heu bon là *a priori* c'était plus pour travailler grand petit mais du coup on retravaille les chiffres pour l'ordre c'est le premier parce qu'il a un il est le plus long heu second parce qu'il est le plus petit donc

L'orientation est matérialisée ici par la flèche qui indique le sens du déplacement dans la suite orientée.

342	F- on a bien dit hein le plus grand c'est le premier donc le dernier vu qu'il y a cette flèche combien ça va être heu

F demande de reconstituer la frise numérique sur leur table afin que toutes les étiquettes des nombres soient dans le bon ordre. Il existe une frise numérique au coin regroupement ainsi que des sous-mains individuels pour les aider. Ici F décrit une situation avec éloignement dans l'espace, les sous-mains qui permettent de reconstituer la frise par correspondance terme à terme ne sont pas distribués. F met l'accent sur la fonction de la situation avec éloignement, se souvenir. « Regarder leur feuille » pour prendre des indices par rapport à la dernière étiquette posée, la retrouver sur la frise modèle et observer la suite, s'en rappeler pour prolonger son travail sur table, tels sont les procédures d'élèves décrites par F.

344	F- et ils ont droit alors voilà comme aide un certain nombre de fois en général de se lever et d'aller voir la voilà par contre du coup je préfère qu'ils l'ai pas sous les yeux pour qu'ils soient obligés d'abord de regarder leur feuille qu'est-ce qu'il me faut ils se lèvent ils vont voir il faut qu'ils s'en souviennent et qu'ils reviennent ben c'est une gymnastique qui marche bien en général ouais après si je m'en rends compte selon les équipes que j'ai hein heu si je m'en rends compte qui s'y arrivent pas ben à ce moment-là je leur sors mes

À l'occasion des rituels, F par le biais de l'écriture de la date, parle du « sens du calendrier » qu'il différencie du « sens de la numération ». Cardinal et ordinal sont ici formulés.

292	F- et puis après à partir de la MS assez rapidement on écrit la date donc les chiffres on les reprend tout le temps on le reprend tout le temps alors c'est vrai qui y'a peut-être pas le sens de la numération derrière puisqu'on n'a pas compté le sept mais bon y'a le sens du calendrier qu'on a vu

e- La branche énumération

Lorsque F propose de constituer des paquets (de quatre, par exemple) sur fiche, afin que les élèves ne se trouvent pas confrontés à des difficultés liées à l'énumération, il leur demande de changer de couleur à chaque paquet. Ainsi les éléments comptés sont marqués d'un trait de couleur puis, lorsque la collection est complète l'élève peut faire le paquet de la même couleur.

266	F- là faire des paquets donc là c'est pareil c'est changer de couleur sinon on oublie on se trompe et puis quand on et puis le fait de changer de couleur du coup on voit bien que on peut aller chercher le

Certains élèves oublient « entre temps », une élève, au contraire, « a dû bien écouter ». Le changement de couleur est donné et imposé par F pour traiter tous les éléments de la collection une et une seule fois, sans en oublier, mais sans faire l'objet toutefois d'un enseignement explicite en termes de savoirs sur l'énumération.

282	F- et voilà y'en a qui ont oublié entre temps qu'il fallait changer de couleur donc on reprend on reprend les paquets donc là ça va vite fin septembre on est déjà au trois donc là elle a dû bien écouter qu'il fallait changer de couleurs

6.3- Les niveaux d'activités de F

a- Niveau+3 : niveau noosphérien ou idéologique

+3		Organisation		Progressions partagées		Construire ses outils		Primarisation		Communication aux parents

PF_{+3} organise et alterne les temps en collectif ou en groupe, les jeux et le travail sur fiche. Cette modalité d'apprentissage tient aussi au niveau des élèves, en MS il y a plus de jeux mathématiques et en GS, sans occulter les temps de jeux mathématiques, le passage sur fiche, travail à l'écrit, revêt une importance significative.

PF_{+3} confectionne des progressions et des programmations pour sa classe de MS et GS mais aussi pour la classe des TPS PS en fonction de celles données par l'enseignant des CP. Les progressions sont ensuite commentées entre les trois enseignants, celui des TPS-PS, celui des CP et lui avec les MS-GS. La répartition et les découpages ainsi réalisés conviennent à l'ensemble de l'équipe.

Durant quatre années, PF_{+3} a sans cesse réalisé de nouveaux jeux, ce qui lui permet à présent d'exploiter cette boîte de jeux sans être dans la production de nouveaux jeux. Maintenant, il consacre moins de temps à la construction de jeux.

PF_{+3} « tire » ses « MS vers les GS ». Des dispositifs, plutôt spécifiques à l'élémentaire voient le jour dans la classe : les élèves ont un cahier de mathématiques et un cahier brouillon, un système de bon point est aussi mis en place, et l'utilisation des boîtes picbille normalement conçues pour le CP en complément du fichier de l'élève.

PF_{+3} relève des étonnements de la part des parents concernant le cahier de mathématiques et de français. Il communique également sur l'utilité de jeux mathématiques élémentaires en essayant « de donner l'idée aux parents » des jeux de dé, de cartes, intimement persuadé de l'aide considérable pour les élèves entre la mutualisation des apports de la maison et de l'école. La co-éducation est importante pour PF_{+3} et lorsqu'il remarque des difficultés chez certains élèves, il n'hésite pas à associer les parents en leur soufflant des idées.

b- Niveau+2 : situation de construction

+2		La suite orale des mots nombres, les dizaines, les tables d'addition comme une poésie Le cahier des chiffres, l'écriture chiffrée, l'écriture de la date, la lecture des chiffres, des constellations.		Le sens du calendrier L'ordre		L'étude des nombres de 1 à 10		Ajout, retrait,

PF_{+2} s'appuie sur une suite orale des mots nombres pratiquement maitrisée pour aller vers les noms des dizaines et quelques résultats des tables d'addition qui sont mémorisés comme une « poésie ». Le cahier des chiffres permet de condenser en une page les différentes écritures de chaque nombre, écriture chiffrée, les constellations conventionnelles ou pas, la quantité, l'écriture du mot nombre en lettre. PF_{+2} favorise de nombreux contacts et essais avec la lecture et l'écriture des chiffres.

PF_{+2} développe aussi les nombres avec « le sens du calendrier » ainsi que l'ordre notamment à base de comparaison de mesures, mais aussi en construisant la frise numérique sans le modèle sous les yeux, c'est-à-dire une situation « construire la même position » avec éloignement dans l'espace.

PF_{+2} décrit et précise l'étude systématique des nombres de un à dix avec toutes les activités possibles qui sont reprises pour chaque nombre.

PF_{+2} insiste sur l'addition et la soustraction que ce soit à travers les jeux de plateau ou les autres jeux mathématiques, mais aussi à partir d'activités plus structurées sur fiche.

c- Niveau +1 et niveau 0 : situation de projet de leçon (dans la séance) et situation didactique

+1 & 0		Détail du fonctionnement de la journée		Exemples de jeux, d'activités

$PF_{+1\&0}$ décrit longuement l'organisation d'une journée type afin de repérer et de baliser les moments clé par rapport à un enseignement des mathématiques en général et à l'enseignement du nombre en particulier. Pour cela il s'appuie sur son emploi du temps puis sur ses progressions.

$PF_{+1\&0}$ énumère ensuite une bonne partie des jeux construits depuis quatre années. Il explique les règles des jeux, les adaptations ainsi que les possibilités offertes grâce aux variables et au matériel.

d- Niveau -1 : niveau d'observation ou de dévolution

- 1		Facilités et difficultés observées		Cas d'élèves en particulier		Évaluations

PF_{-1} expose des difficultés récurrentes par rapport à la lecture de l'écriture chiffrée ainsi qu'à la lecture des constellations des premiers nombres (jusqu'à trois). Il mentionne également des erreurs relatives à l'écriture des chiffres en MS mais pour F elles font partie des étapes de l'apprentissage, « il a du mal en graphisme mais bon ils ont la silhouette ».

PF_{-1} relate deux exemples particuliers d'élèves, mais pas particulièrement sur des situations mathématiques.

PF_{-1} indique des évaluations sur la suite orale des mots nombres ainsi que par rapport à l'écriture chiffrée. En effet, il considère que les élèves de PS peuvent arriver avec des connaissances sur l'écriture chiffrée, il les prend donc en compte dans son évaluation et en considération dans son enseignement.

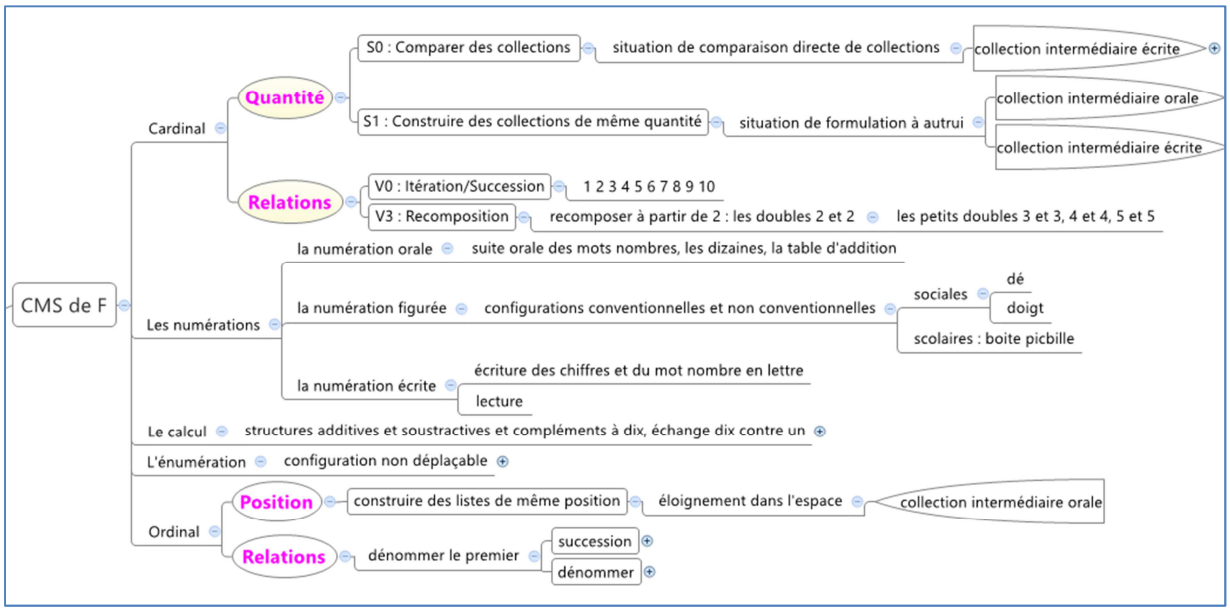
6.4- Conclusion concernant F

F se situe, dans cet entretien, essentiellement au niveau de projet de leçon et au niveau de la situation didactique. En effet, le fait de partir de l'emploi du temps, de la boîte très fournie de jeux mathématiques, puis du cahier de mathématiques, les entrées choisies par F le maintiennent forcément dans ces niveaux (+1) et (0). Toutefois, l'observation des réussites ou des difficultés influence grandement les niveaux supérieurs, l'observation précise conditionne son niveau de projet de leçon (+1) et le niveau de la situation didactique (0). L'idéologie qu'il a de l'enseignement à l'école maternelle joue aussi sur les niveaux inférieurs.

Niveau noosphérien ou idéologique	+3
Niveau de construction ou de conception d'un thème	+2
Niveau de projet de leçon et niveau de la situation didactique	+1 & 0
Niveau d'observation ou de dévolution	-1

TABLEAU 16 : ACTIVITÉ RÉFLEXIVE DE F

Pour résumer, F dispose pour son enseignement du nombre en MS-GS, d'une boîte de jeux construite progressivement sur trois années scolaires correspondant alors parfaitement à ses intentions ainsi qu'à sa progression. Ces jeux à base de dés, de déplacements sur des plateaux, visent la lecture des configurations des dés mais aussi de l'écriture chiffrée associée au dénombrement. F est conscient de la nature de la numération orale et l'enseigne comme une poésie, tout comme les dizaines et la table d'addition du un. Pour la branche cardinal, F insiste bien sur un deux trois et propose une étude systématique des nombre de un à dix en GS et jusqu'à cinq en MS. Dans ses propos F donne des traces du temps didactique par rapport à l'ordre des nombres (en septembre il enseigne le trois). F énonce également un travail de recomposition à partir des petits doubles. F prend en compte la comparaison et la construction de collections, avec la description de collections intermédiaires écrites et une communication à autrui par l'intermédiaire du jeu du banquier. F propose aussi un enseignement élémentarisé, qui s'appuie sur des signes forts comme la mise en place d'un cahier de mathématiques et d'un cahier brouillon, mais aussi par un système de bon point, l'enseignement des dizaines et l'utilisation d'outils dévolus au CP. Concernant la branche ordinal, F décrit une situation avec éloignement dans l'espace sans interpréter ses choix en termes de connaissances mathématiques spécifiques, il parle de « gymnastique » pour garder la mémoire de positions.



7- L'ENSEIGNEMENT DE G

G a des TPS PS au moment de l'entretien.

7.1- L'arbre des savoirs du nombre de G

a- Focus sur les cinq branches de l'arbre des savoirs du nombre

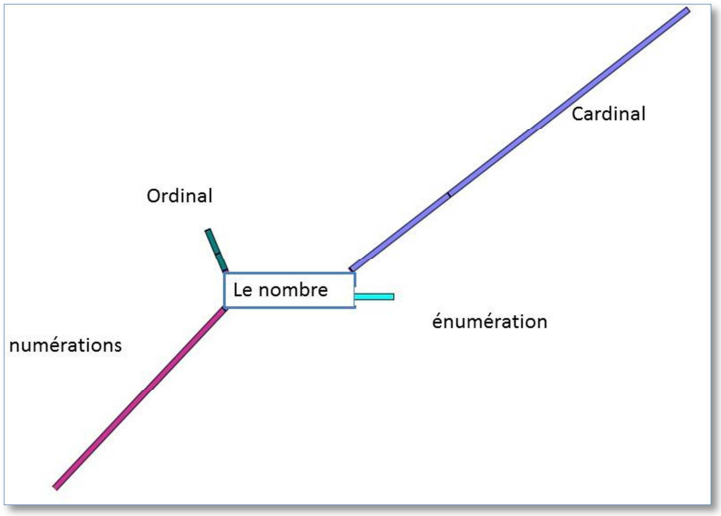


FIGURE 80 : L'ARBRE DU NOMBRE DE G

G oriente essentiellement son enseignement vers des savoirs relatifs à la cardinalité et aux numérations puis à l'ordinalité. L'énumération est repérée à partir des difficultés des élèves. Il ne mentionne pas de situation visant le calcul. Compte tenu de l'argumentation avancée par rapport à l'enseignement de la suite orale des mots nombres, je pense qu'il s'agit d'une volonté affirmée de G de ne pas aborder la branche calcul avec les TPS-PS.

b- Durée des extraits codés

Cinquante-cinq extraits sont codés dans la branche cardinal, vingt-sept extraits sont codés dans la branche numérations, cinq dans la branche ordinal et six extraits sont codés dans la branche énumération.

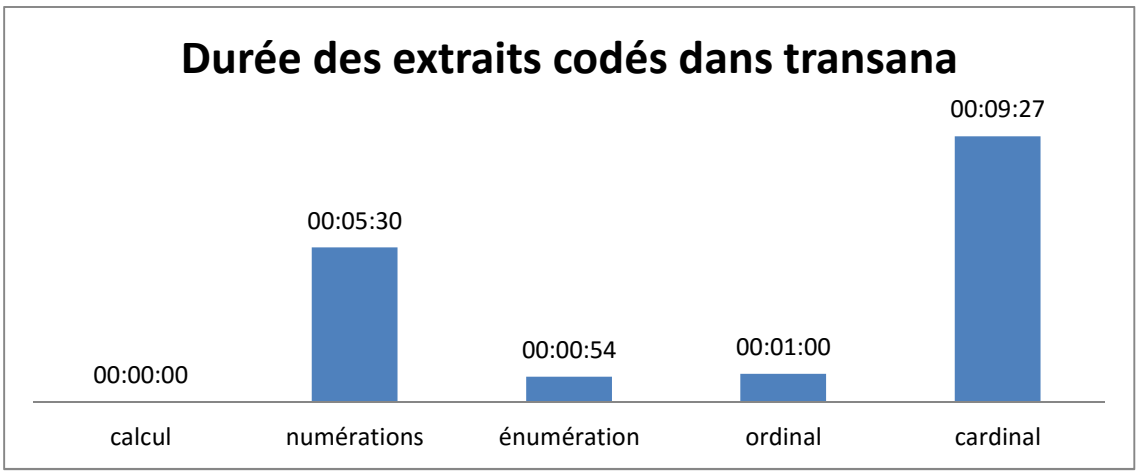


FIGURE 81 : HISTOGRAMME DES EXTRAITS CODÉS EN MINUTE POUR G

7.2- Quelles connaissances mathématiques spécifiques sont présentes dans chacune des branches ?

a- La branche cardinal

La branche cardinal-relations

G décrit l'enseignement des trois premiers nombres. Toutes les activités tournent autour de un deux et trois.

38	G– après je fais aussi dans Acces ils le proposent aussi je l'avais fait l'année dernière je le ferai là après heu on met on fait des des sacs des collections des collections de trois des collections de deux des collec alors moi je m'arrête au trois

Il s'arrête volontairement « au trois ».

100	G- pourquoi jusqu'à trois au fait je sais pas dans Accès ils vont jusqu'à cinq hein en PS

Quand l'occasion se présente « à la rigueur », c'est-à-dire quand le domaine numérique est un deux ou trois G peut proposer d'explorer d'autres connaissances, ici « combien il en manque » qui est codé dans cardinal-relations pour ses relations existantes au voisinage de un deux ou trois.

32	G- déjà se rendre compte si y'en a trop ou pas assez et à la rigueur à la rigueur combien il en manque parce que des fois que il en manque un ou deux

Sur une collection maximale de trois objets il ne peut en manquer qu'un ou deux effectivement. Il s'agit bien pour G de faire remarquer que pour avoir trois on ajoute encore un.

138	G– le petit va passer à trois ans donc heu moi souvent ce que je fais aussi c'est que j'enlève une bougie je dis ben avant il avait ça je rajoute la bougie je dis maintenant on peut la rajouter tu as trois ans

G pense essayer, cette année, les décompositions avec les doigts.

40	G– je pense que je vais essayer de travailler cette année heu je sais pas si ça va marcher sur les décompositions
41	Chercheur- d'accord
42	G- je sais pas si c'est pas un peu tôt je vais tester toujours avec mes doigts là deux et un ça fait trois heu bon jusqu'à trois c'est y'a pas beaucoup de choix mais bon je sais pas si c'est une bonne idée ou pas je sais pas je te dirai je me dis voilà pour préparer après le travail sur le quatre le travail sur le cinq qu'ils aient l'habitude de décomposer bon y'a pas beaucoup de décompositions pour trois un un un deux et un bon mais c'est déjà ça

La branche cardinal-quantité

G consacre du temps et de l'énergie à faire en sorte que les élèves dénombrent de petites quantités, de un à trois, comme les absents par exemple.

182	G– parce que moi ce que je veux absolument c'est qu'ils passent par le dénombrement

Durant l'entretien G analyse sa pratique et trouve qu'il induit trop rapidement le dénombrement sans laisser le temps à différentes procédures de voir le jour. Il prend conscience de l'« étape » de la « correspondance terme à terme ».

176	G- là où moi je me suis rendu compte qu'il faudrait peut- être que je travaille un petit peu plus c'est que souvent c'est moi qui induis le

	comptage et je passe pas par la correspondance terme à terme
177	Chercheur- d'accord
178	G- je saute peut-être une étape ou ou je permets enfin très rapidement je leur dis mais recompte combien tu en as sur ton gât tu vois je j'induis de façon et pourtant c'est v j'ai je le le dénombrement quoi hum j'ai pas encore préparé ma séance là mais il faudra que j'y pense de façon très réfléchie de faire peut-être un gâteau témoin ou quelque chose qui puisse permettre aux enfants de faire correspondance terme à terme quoi ah tiens le gâteau heu voilà le gâteau de Nestor et main maintenant petit ours on va lui faire son gâteau tu vois peut-être il faudrait que je passe par ça je sais pas

G envisage alors la situation fondamentale "construire la même quantité" en prévoyant « un gâteau témoin » pour rappeler la quantité et permettre la correspondance terme à terme. Cela diffère de sa pratique usuelle où il demande habituellement à l'oral un gâteau avec trois bougies. Une situation d'action est décrite, l'anticipation est matérialisée par « un petit panier » les enfants doivent remplir le panier avec autant d'œufs que d'alvéoles dans la boîte à œufs, G prévoit cette activité pour entrainer « trop pas assez », en quelque sorte il installe le milieu et cela lui permet de vérifier que les connaissances pour la rétroaction sont bien présentes chez tous les élèves.

24	G- donc heu ils avaient un petit panier donc ils prenaient dans leur panier puis ils mettaient puis après j'ai éloigné ils avaient leur panier il fallait qu'ils aillent chercher pour remplir la boîte et on regardait est ce que j'en ai pris trop
25	Chercheur- d'accord
26	G- est-ce que j'en ai pris pas assez est-ce qu'il faut que j'aille retourner pour aller en chercher voilà trop pas assez

En situation d'action il insiste sur trop, pas assez pour s'assurer des critères de validité qui permettent la rétroaction de l'action.

12	G- voilà avec les noix beaucoup pas beaucoup et je fais aussi après heu de remplir dans des boîtes à œufs petites boîtes à œufs grandes boîtes à œufs une noix par alvéole et pour décomposer enfin je sais pas comment expliquer ça une noix une alvéole pour faire correspondance terme à terme voilà après je travaille aussi sur heu la dinette par exemple y'a deux poupées à table et on va essayer de placer la table pour les deux poupées après heu je vais aussi heu j'ai travaillé aussi heu dans cette activité là sur heu d'abord correspondance terme à terme puis après il faut aller chercher est-ce que j'en ai pris trop est-ce que j'en ai pas pris assez comment je peux faire pour pour qu'ils passent par le dénombrement pour pouvoir remplir leur

G utilise également les boîtes à compter pour les situations d'action, le boitier favorise l'anticipation. Il décrit une situation de formulation avec éloignement dans l'espace avec la dinette et les poupées.

184	G- donc c'est pour ça qu'après je passe par aussi on va placer la table pour les poupées
185	Chercheur- hum hum
186	G- parce que à un moment donné je leur dis qu'ils ont qu'une fois pour aller chercher le le
187	Chercheur- matériel
188	G- le matériel
189	Chercheur- la dinette d'accord
190	G- je veux arriver à ce qu'ils dénombrent

G privilégie autant que possible la collection intermédiaire orale en imposant souvent le dénombrement de la collection.

226	G- et donc en fait c'est toujours moi qui dois dire mais attention là regarde est-ce que tu crois que c'est difficile le rôle de l'erreur et je veux pas laisser l'erreur donc en fait je corrige après mais je je sais pas

	si si c'est vraiment bien intégré après après je me dis peut être aussi les procédures c'est nous qui devons leur montrer à un moment donné pour qu'ils sachent comment on peut faire moi ce qui m'embête un peu c'est des fois je me dis que j'utilise pas toutes les procédures et peut-être que je veux passer par la procédure la plus compliquée dès le départ
227	Chercheur- c'est ce que tu disais par rapport heu
228	G- au dénombrement
229	Chercheur- au dénombrement et à la correspondance terme à terme que peut-être tu
230	G -parce que c'est ce vers quoi je je veux arriver et peut-être je suis trop modélisant par rapport à ça c'est ce oui c'est comme ça qu'on fait quoi

Il effleure la situation fondamentale " comparer des quantités ", avec au début de la branche « beaucoup-pas beaucoup ».

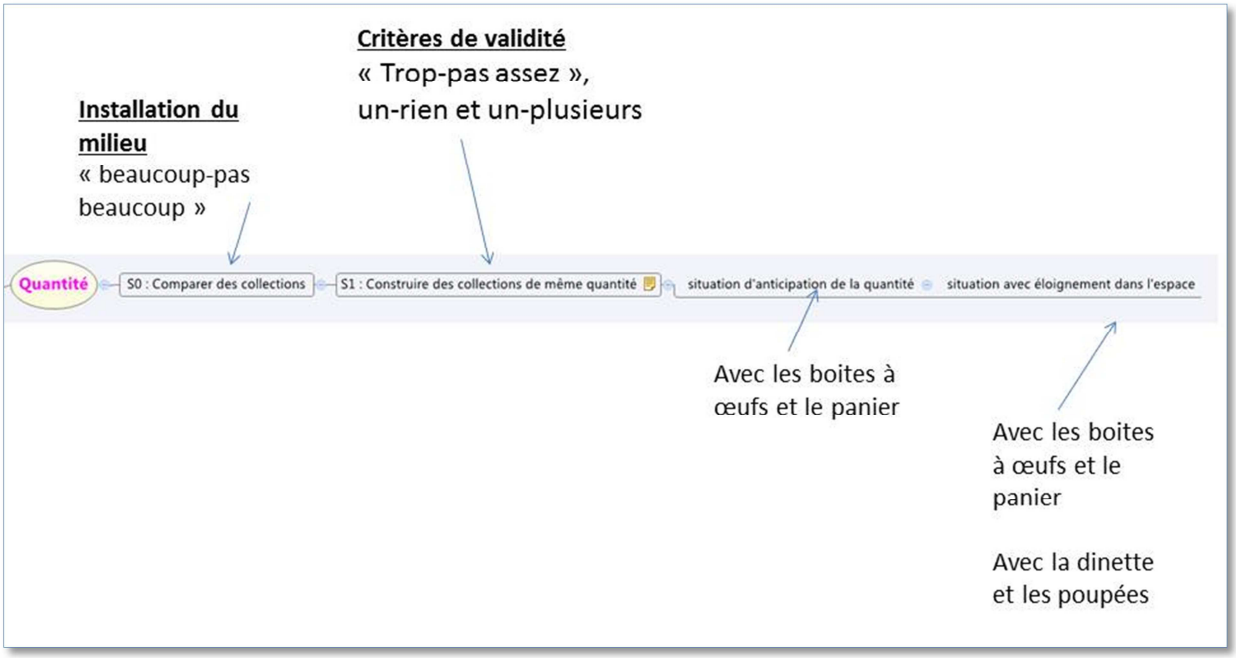


FIGURE 82 : BRANCHE CARDINAL-QUANTITÉ DE L'ENSEIGNANT G

En considérant la situation fondamentale S1 : construire des collections de même quantité, G propose des situations d'action et des situations avec éloignement dans l'espace.

G privilégie essentiellement la collection intermédiaire orale donnant le cardinal de la collection. Il se rend compte dans l'entretien qu'il ne favorise guère des collections intermédiaires matérielles utilisant, par exemple la correspondance terme à terme.

b- La branche numérations

G distingue, dans son enseignement, l'apprentissage de la suite orale des mots nombres à part.

4	G- alors bon je suis pas pro de mathématiques mais heu je je sépare quand même dans ma dans ma pratique ce qui est de l'ordre de l'apprentissage de la comptine numérique de l'ordre de l'apprentissage du nombre en tant que ordinal ou en tant que cardinal

Il a recours aux comptines numériques pour mémoriser la suite orale des premiers mots nombres, comme « Monsieur l'ours 123[67] », ou « Une main »[68]. La mémorisation de ces petites comptines numériques fait partie d'un projet d'harmonisation avec la crèche pour favoriser l'accueil des enfants de moins de trois ans et partager un répertoire commun de comptines numériques. Ce moment de comptines numériques est particulièrement apprécié par G.

245	G- ah ça c'est évident parce que y'a un côté affectif alors bon très simplement les comptines c'est un moment que j'aime beaucoup parce qu'y a c'est vraiment un moment qui pour eux est hyper important en PS c'est un moment où déjà ils sont tous attentifs alors que forcément sur une lecture d'album y'en a qui décrochent heu par exemple quand tu fais des albums à compter y'en a qui beaucoup regardent à côté alors que la comptine ça ça regroupe tout le monde c'est rare qu'il y ait un enfant qui se mette à part et heu la comptine numérique par exemple sur monsieur l'ours est ce que tu dors ou tu sors c'était aussi un lien avec la crèche c'est à dire qu'à la crèche ils l'ont vue

G est vigilant à cet enseignement car il ne souhaite pas que ses élèves l'apprennent comme « une bouillie verbale ».

4	G– je veux pas aller trop loin parce que je veux pas que ce soit une bouillie verbale je veux bien qu'ils séparent les nombres un deux trois

Pour cela il ne va pas « trop loin » et se concentre surtout sur la suite des trois premiers mots nombres.

76	G- heu et tu vois je m'arrête à trois parce que parce que je me dis que heu c'est pas la peine d'aller au-delà parce que déjà si on a jusqu'à trois alors peut-être que c'est une erreur parce que je sais que [l'enseignant d'une autre classe de TPS-PS de l'école] fonctionne pas comme moi du tout déjà il heu bon après on fait comme on veut hein la comptine numérique il me dit qu'il a certains de ses élèves qui l'ont pratiquement jusqu'à vingt moi moi j'ai pas travaillé autant quoi c'est sûr et cert moi pour moi ça ça m'intéresse pas peut-être que je me trompe c'est possible hein je me dis ils auront le temps de l'apprendre

Il ne souhaite pas favoriser l'apprentissage de la suite orale des mots nombres comme une chanson, tel un « ron-ron » en commençant par des mots blocs comme « un deux trois nous irons au bois », mais il préfère bien séparer les mots nombres dans des situations de dénombrement où les savoirs d'énumération se mêlent.

257	G- je sais pas si c'est si je fais ça instinctif chez moi je sais pas si y'a une explication c'est en fait l'enfant qui sépare pas les nombres quoi tu vois qui si un deux trois ben après c'est et et qua-cin-si-sé-hui-neu peuf bloc y'a y'a comme une un leitmotiv derrière tu sais un quelque chose qui fait que c'est a e i o u heu voilà enfin je sais pas comment dire c'est c'est c'est c'est un bloc
258	Chercheur- hum je comprends
259	G- c'est comme quand tu apprends l'alphabet au départ aux enfants quoi
260	Chercheur- oui
261	G- ils te mettent ABCD enfin ils voient pas que c'est des lettres séparées quoi d'ailleurs heu sur H I J K L souvent c'est HI c'est la lettre HIJ enfin bon c'est c'est assez hallucinent ben les les nombres c'est pareil et moi ça je me dis si je vais trop loin toute façon ça les dépasse un moment donné est-ce qu'il faut aller plus loin est-ce qu'il faut qu'ils l'entendent est-ce que mais je veux pas que ce soit un ron-ron

[67] « Monsieur l'ours, réveille-toi ; tu as bien trop dormi comme ça ! Au bout de trois, réveille-toi ! Un, deux, trois ! Monsieur l'ours, tu dors ou tu sors ? zzZZZzzZZZzz je dors ! Monsieur l'ours, réveille-toi ; tu as bien trop dormi comme ça ! Au bout de trois, réveille-toi ! Un, deux, trois ! Monsieur l'ours, tu dors ou tu sors ? Grrrrrrr, je sors »

[68] « Une main, deux mains ; frappe des mains, un pied, deux pieds ; tape des pieds »

G se questionne « est-ce qu'il faut aller plus loin, est-ce qu'il faut qu'ils l'entendent » tout en ayant des certitudes « je veux pas que ce soit un ron-ron ». G déclare ne pas avoir « forcément d'objectif ».

80	G- j'ai pas forcément d'objectif parce qu'ils sont tellement hétérogènes mes élèves que déjà s'ils savent compter jusqu'à connaitre la comptine numérique jusqu'à trois sans se tromper c'est déjà pas mal parce qu'il y en a qui font un deux quatre y'en a qui parlent pas du tout donc je me dis bon voilà je dirai que jusqu'à cinq ou six en PS ça serait très bien un deux trois quatre cinq six

Toutes les situations de comptage ou dénombrement vont permettre alors d'entrainer cette suite orale des premiers mots nombres.

132	G– enfin moi au départ c'était ça on va compter jusqu'à trois allez on compte on compte on compte et heu aussi ressentir parfois la nécessité de compter quoi ben petit ours il a trois ans ben s'il a trois ans il faut qu'on compte heu en plus

G enseigne aussi l'écriture et la lecture de l'écriture chiffrée des premiers nombres. La lecture des chiffres est proposée avec des étiquettes et sous forme de devinette les élèves doivent trouver « le trois », celui qui a « deux gros ventres ».

62	G- il est toujours en premier et moi après le l'écris au tableau parce que ça ça les aide ils reconnaissent alors je mets les toutes les étiquettes plusieurs au moins jusqu'à quatre et puis alors où est le trois est-ce qu'on va essayer de retrouver le trois bon donc ça les aide ça c'est le trois oui regardez le trois et je l'écris au tableau et je dis ça c'est le trois alors des fois je fais quelque chose qui se fait pas je dis y'a deux gros ventres pour le trois tu me disais que dans l'écriture il fallait pas il fallait rester très donc voilà donc voilà ou le un voilà et je leur écris

Les étiquettes proposées ont « les trois écritures », c'est-à-dire, la constellation du dé, les doigts et l'écriture chiffrée qui est « toujours en premier ».

52	G- l'étiquette elles sont faites comme ça elles ont les trois écritures

G privilégie l'écriture chiffrée.

60	G- mais j'insiste sur le chiffre après moi

Cette discrimination visuelle de l'écriture chiffrée lui permet de proposer des activités d'écriture des premiers chiffres d'abord en pâte à modeler puis avec des feutres effaçables pour s'entrainer au geste d'écriture.

G insiste sur la façon de montrer la quantité avec les doigts et souhaite amener les élèves à une lecture immédiate des configurations des doigts. Après avoir proposé différentes possibilités pour faire deux avec les doigts (pas seulement le pouce et l'index levés) et même avec deux mains, G est vite revenu à la façon la plus courante en France (pouce et index levés).

4	G– pour l'instant je montre je me suis vu je me suis rendu compte que je m'étais trompé par exemple sur deux je leur montrais comme ça puis après je dis on peut faire deux comme ça aussi etc. et en fait ça les mélange alors pour l'instant je reste sur une seule parce que je me je me dis parce qu'après ils disent et ben deux c'est comme ça ah ben non deux c'est comme ça donc ils y sont pas encore si tu veux de vraiment arriver à compter sur les doigts dénombrer voir la quantité quoi

Pouvoir voir la quantité directement à l'aide des doigts, lire deux sur les doigts, tel est l'objectif de G.

Il part aussi volontiers de l'âge des enfants à montrer sur les doigts car « les enfants aiment bien montrer leur âge avec les doigts ».

140	G- voilà et heu et de voir ceux qui sont plus grands aussi qui ont quatre ans alors on en parle on montre avec les doigts les enfants aiment bien montrer leur âge avec les doigts donc quatre ans

Les constellations du dé sont aussi évoquées par G.

c- La branche ordinal

G prend en compte « l'apprentissage du nombre en tant que ordinal ». Après une erreur de lexique entre cardinal et ordinal, G précise sa difficulté à enseigner la suite des mots nombres ordinaux dans ses relations entre le premier et le deuxième, le deuxième et le troisième. Le chef de train[69] facilite grandement et matérialise la notion de premier. G décrit comment il verbalise cela aux enfants en insistant derrière le premier il y a le second « il est juste derrière » le troisième, il est alors quatrième. Mais il évoque également sa difficulté à enseigner ces savoirs avec « les enfants de PS ».

44	G- voilà ce que je travaille sur le nombre après sur le cardinal j'ai beaucoup de mal à travailler avec les enfants en PS je trav le premier ça pose pas de souci ça ils en ont une très bonne notion heu surtout qu'il y a un chef de tain à chaque fois qu'on fait le petit train tu es le premier de derrière voilà tu te mets derrière celui qui est le premier etc. voilà mais après j'ai du mal à travailler heu sur heu il est juste derrière il est en second troisième quatrième etc.

G expose un jeu de déplacement avec un animal et un dé de couleur, il s'agit d'un jeu avec un code de couleurs différentes pour apprendre aux enfants à se déplacer en respectant une contrainte.

393	G- c'est la couleur pour l'instant y'a un dé de couleur et un animal qu'on déplace et on doit le déplacer jusqu'à la bonne couleur

Il identifie le début du chemin, l'origine donc, et l'orientation comme étant des savoirs à enseigner.

407	G- le début du chemin la fin du chemin l'orientation déjà on commence là on finit là on passe sur chaque plot si y'a déjà un animal sur le plot on se met où on se met quand même ou on saute l'animal mais bon heu voilà

Il minimise peut-être un peu ces savoirs compte tenu du niveau de classe de PS en finissant ses propos par « mais bon heu voilà ».

d- La branche énumération

Les deux premiers extraits montrent comment G prend en charge une part de l'énumération.

267	G- je me lève et je mets sur la ma main sur la tête de l'enfant que je compte

Mettre lui-même la main sur la tête de l'enfant qui est en train d'être compté lui permet d'organiser le dénombrement par comptage.

263	G- heu et je les détache bien je mets ma main à chaque fois et je les détache bien des nombres parce que je me dis que c'est c'est important pourquoi je sais pas mais bon

[69] À l'école maternelle il est fréquent d'observer les déplacements d'élèves dans les couloirs de l'école les uns derrière les autres tenus souvent par les épaules en faisant un petit train, souvent rythmé par différentes comptines. Quotidiennement, l'enfant de service endosse le rôle de chef de train.

De plus, G insiste sur la synchronisation entre la suite orale des mots nombres et le pointage des éléments de la collection, ici la main sur la tête de l'enfant marque le pointage d'un élément de la collection et pour renforcer la prise en compte d'un élément après l'autre, G « détache bien les nombres ». Ce sont des connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement de l'énumération du professeur qui sont décrites en situation d'action, G ne les identifie pas comme savoir, il se dit « que c'est important » mais « pourquoi je ne sais pas mais bon ». Dans « pourquoi » ce sont les raisons d'être du savoir qui sont interrogées et ici G n'a pas les réponses « je ne sais pas », mais il se fie à une conviction bâtie sur ses connaissances en situation « je me dis que c'est important », et ces connaissances suffisent à G pour continuer à procéder ainsi, les raisons d'être du savoir ne sont pas nécessaires à sa pratique « mais bon ». Les autres extraits sont appuyés sur des difficultés d'élèves.

275	G- y'en a qui heu c'est très marrant ils comptent un deux trois quatre cinq six et et ils sont quatre et ils sont déjà à l'enfant suivant mais à la fin ils ont le bon résultat

G évoque des difficultés liées à la synchronisation suite orale des mots nombres et pointage des éléments de la collection.

279	G- ça m'est arrivé je dis oui mais là t'as sauté un truc heu t'as le bon résultat mais on recommence

Il constate aussi des erreurs relatives au traitement de tous les éléments une et une seule fois.

287	G- hum à les erreurs aussi c'est oublier un enfant sait pas c'est dire la comptine numérique plus vite qu'on ne pointe et donc forcément ils se enfin dire la comptine numérique plus vite qu'ils ne le pointent y'en a qui le font parce qu'ils sont dans l'anticipation mais y'en a qui le font parce que ils récitent ils récitent ils récitent et en fait

7.3- Les niveaux d'activités de G

a- Niveau+3 : niveau noosphérien ou idéologique

+3		Fiches		Manuel de référence		Du temps pour apprendre

PG_{+3} ne conçoit pas son enseignement du nombre autour d'un travail à l'écrit à partir de fiches. Pour PG_{+3} ce passage à l'écrit demande une abstraction trop importante pour des élèves de PS. De plus elles ne laissent pas de place au tâtonnement, à la correction, à l'erreur car l'écrit fige et enferme le résultat de l'élève. PG_{+3} adopte toutefois un système d'énoncé récapitulatif des jeux et des manipulations effectuées par période à destination des parents pour communiquer sur le travail réalisé en classe. PG_{+3} a trouvé un jeu à exploiter car il se situe entre la manipulation et la fiche.

PG_{+3} utilise vers les maths PS des éditions Accès qui s'apparente à un « livre du maitre » plus qu'à un manuel. Il ne fait pas forcément toutes les activités proposées mais cela lui donne un cadrage dont il dit avoir besoin. Ce manuel insiste sur la manipulation, ce qui lui convient parfaitement. PG_{+3} ne travaille jamais en grand groupe, il choisit donc de réaliser les activités en ateliers.

PG_{+3} pensent que les élèves de PS ont le temps d'apprendre, aussi il ne se focalise pas sur la mémorisation de la suite orale des mots nombres. PG_{+3} prend le temps d'apprécier les moments partagés autour des comptines numériques qu'il affectionne particulièrement. PG_{+3} s'interroge sur le temps qu'il doit laisser aux élèves pour la recherche de solution, il se

questionne sur son intervention au plus près de la réponse et sur la place accordée à l'erreur. PG_{+3} pense être trop modélisant et montrer trop près du résultat. PG_{+3} accorde plus de temps aux TPS et n'entre pas dans les apprentissages à proprement parler.

b- Niveau+2 : situation de construction

+2		La suite orale des mots nombres		L'aspect ordinal du nombre		L'aspect cardinal du nombre

PG_{+2} sépare dans son enseignement ce qui a trait à la suite orale des mots nombres de l'aspect ordinal et de l'aspect cardinal du nombre. PG_{+2} développe également des activités permettant de rencontrer des connaissances sur l'écriture chiffrée que ce soit pour la lecture mais aussi pour l'écriture.

PG_{+2} construit l'aspect ordinal, le repérage à partir d'un jeu de plateau avec un dé de couleur et des déplacements sur piste. PG_{+2} envisage aussi les premiers mots nombres ordinaux.

PG_{+2} prévoit l'aspect cardinal du nombre à partir de situations de dénombrement de petites collections pour rester dans son domaine numérique : un deux et trois. PG_{+2} envisage l'évolution des connaissances des élèves à partir de situations d'action et de formulation avec éloignement dans l'espace.

c- Niveau+1 et niveau 0 : situation de projet de leçon (dans la séance) et situation didactique

+1 & 0		Situations de classe		Description de jeux		Intervention du professeur

$PG_{+1\&0}$ décrit des exemples en classe dans son rituel ou dans les ateliers.

$PG_{+1\&0}$ détaille certains jeux qu'il utilise régulièrement.

$PG_{+1\&0}$ développe ses interventions auprès des élèves.

d- Niveau-1 : niveau d'observation ou de dévolution

- 1		Difficultés et réussites		Adaptation aux connaissances des élèves		Procédures observées

PG_{-1} insiste sur certaines difficultés repérées relatives à la mémorisation de la suite orale des mots nombres comme un deux quatre, au dénombrement avec des difficultés liées à l'énumération, au fait de compter sur les doigts.

PG_{-1} s'adapte aux connaissances des élèves et prévoit en fonction des besoins un domaine numérique plus conséquent quand les élèves sont en réussite.

PG_{-1} décrit des procédures d'élèves observées en situation.

7.4- Conclusion concernant G

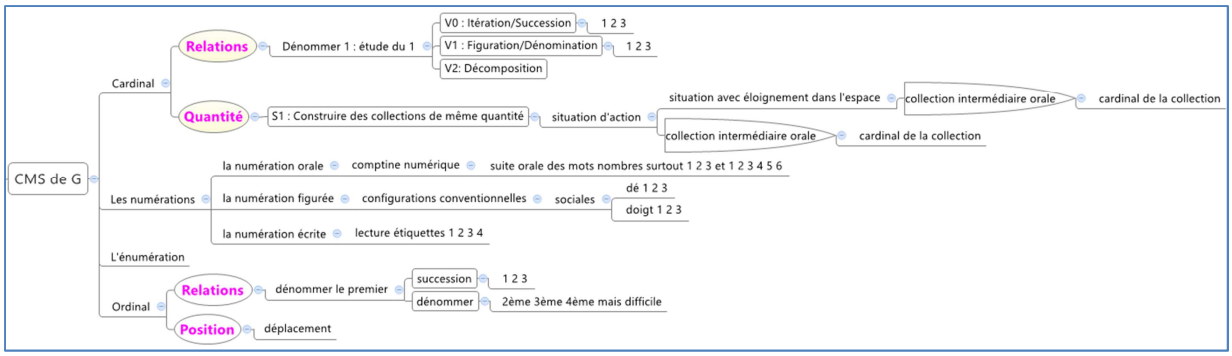
G est en réflexion sur sa pratique, sur ses choix ce qui a pour conséquence de modifier le niveau noosphérien ou idéologique (+3) qui se répercute immédiatement dans le niveau de construction et celui du projet de leçon. Les difficultés des élèves observées au niveau (-1) ainsi que l'aide et l'intervention du professeur au niveau de la situation didactique (0) le confortent dans ses questionnements. Lors de l'entretien, G remet en question sa pratique

c'est-à-dire les niveaux (+1) et (0). Immédiatement il questionne le niveau idéologique (+ 3) et conçoit de modifier le niveau de construction et propose dans la foulée une leçon possible pour la prochaine séance (+1). Il montre une aisance et une facilité à se situer au niveau (+1).

Niveau noosphérien ou idéologique	+3
Niveau de construction ou de conception d'un thème	+2
Niveau de projet de leçon et niveau de la situation didactique	+1 & 0
Niveau d'observation ou de dévolution	-1

TABLEAU 17 : ACTIVITÉ RÉFLEXIVE DE G

En résumé, G enseigne le nombre dans sa classe de TPS PS en prenant appui sur un manuel qui s'apparente à un livre du maitre. Il suit plus ou moins la progression mais est en conflit avec la progression proposé par cet ouvrage et celle qu'il légitime, à savoir l'étude de un deux trois, et non pas jusqu'à cinq comme proposé dans le livre. G estime que les trois premiers nombres offrent une base solide et suffisante pour les TPS PS. De la même façon G propose un enseignement de la suite orale des mots nombres concentré sur les trois premiers mots nombres. À ce sujet il est en questionnement par rapport à l'autre enseignant de TPS PS qui entraine la suite orale des mots nombres jusqu'à vingt. Même s'il se rend compte que certains élèves la connaissent bien au-delà de trois. Les raisons d'être du savoir par rapport à la suite orale des mots nombres ne sont pas pour autant remises en question, c'est la façon d'arriver au savoir qui est plus confuse. Les connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement de la suite orale des mots nombres du professeur ne sont pas au service d'une progression fondée sur l'évolution des connaissances des élèves. Quoiqu'il en soit G ne considère pas les savoirs et les connaissances relatifs à la suite orale des mots nombres de même nature que ceux pour l'ordinal et le cardinal des nombres. Il opère cette distinction. G fait part également d'incertitudes concernant le rôle de l'enseignant et sa place dans l'évolution des connaissances des élèves. G a une position réflexive sur sa pratique, il a des certitudes qu'il contre balance en questionnements. Le dénombrement tient une place capitale dans son enseignement il est central dans ses séances sur le nombre. Ainsi lorsqu'il décrit une situation d'action ou une situation avec éloignement dans l'espace, le but avoué, recherché, est le dénombrement. L'ordinalité est traité à partir des mots nombre ordinaux, avec une difficulté avérée par G pour cet enseignement. G constate que la position repère du premier est facile à enseigner compte tenu de l'usage des déplacements à l'école maternelle avec un petit train et le chef de file. Pour le reste, il fait part de sa difficulté. Pour les déplacements, G utilise un jeu de déplacement par rapport à des chemins en couleur. L'énumération est observée par rapport aux difficultés des élèves lors des rituels, par exemple, G met lui-même la main sur la tête de l'élève qu'il est en train de compter, il prend à sa charge l'organisation du dénombrement par comptage. Pendant l'entretien, G imagine de nouvelles situations permettant de construire la même quantité en intégrant la correspondance terme à terme, il envisage également travailler sur les décompositions. Ainsi la correspondance terme à terme et les décompositions sont perçues comme des connaissances mathématiques spécifiques pour l'enseignement du nombre par G sans pour autant relever d'une pratique et donc de connaissances en situation. G ne donne aucune indication sur la branche calcul. Plusieurs fois dans l'entretien G indique que les élèves ont le temps d'apprendre, on peut imaginer que la branche calcul, plus proche des savoirs du cycle 2 ne retient pas l'attention de G et qu'avec les TPS PS il ne se sent pas concerné par cet enseignement.



8- L'ENSEIGNEMENT DE H

H enseigne en TPS PS MS au moment de l'entretien.

8.1- L'arbre des savoirs du nombre de H

a- Focus sur les cinq branches de l'arbre des savoirs du nombre

H décrit majoritairement des activités relevant de la branche cardinal. Puis ce sont les branches numérations et calcul qui sont abondées d'exemples. Enfin les savoirs liés à l'énumération sont également cités et évoqués. Rien n'est exposé sur l'ordinalité dans cet entretien.

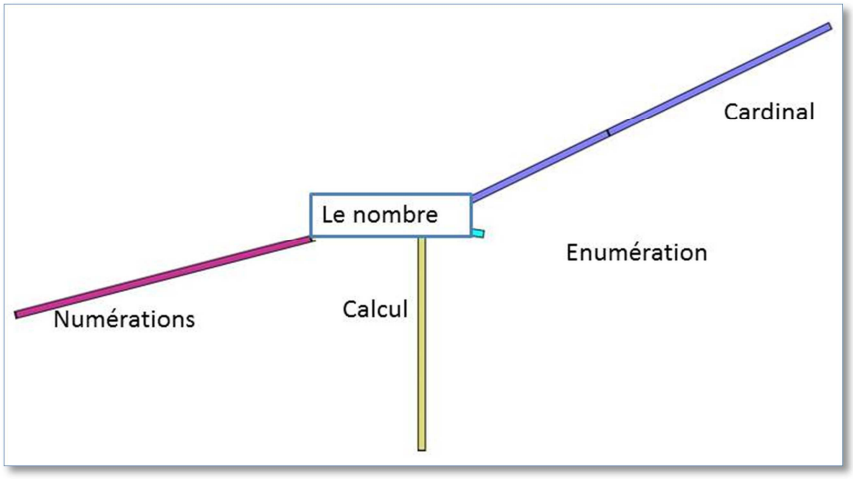


FIGURE 83 : L'ARBRE DU NOMBRE DE H

b- Durée des extraits codées

Cinquante extraits sont codés dans la branche cardinal, quarante-sept extraits codés pour la branche numérations, dix-neuf extraits sont consacrés à la branche calcul et enfin deux extraits sont inscrits dans la branche énumération.

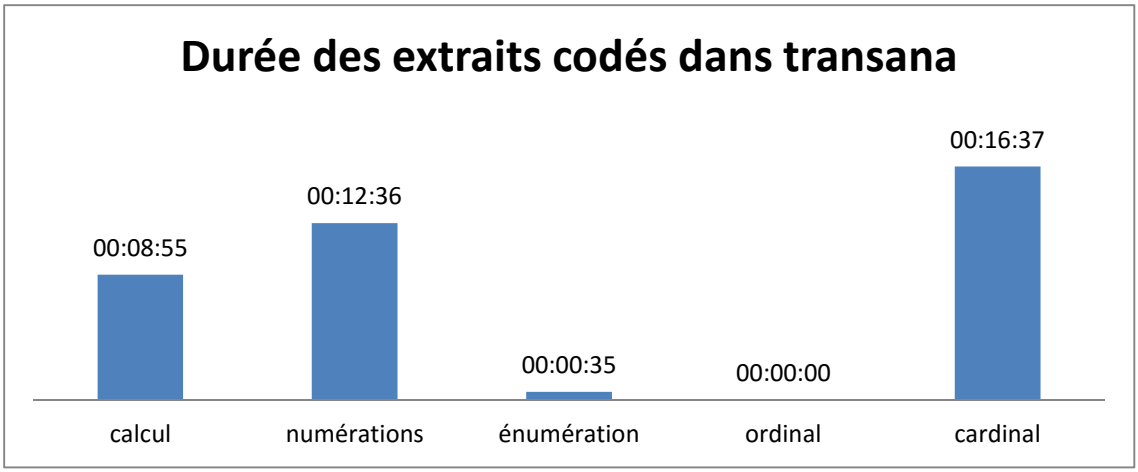


FIGURE 84 : HISTOGRAMME DES EXTRAITS CODÉS EN MINUTE POUR H

8.2- Quelles connaissances mathématiques spécifiques sont présentes dans chacune des branches ?

a- La branche cardinal

La branche cardinal-relations

H insiste sur les trois premiers nombres un deux et trois, avec une attention particulière pour le un.

20	H– et puis accessoirement un le un arrive assez rapidement aussi quand même parce que le un voilà il est on l'utilise tous les jours et plusieurs fois par jour heu donc le un est bien identifié heu voilà

Il propose toutes sortes d'activités d'entrainement à partir d'album (Boujon, 1985).

48	H- alors ça passe par les bonnets ça peut aller passer par pleins d'autres trucs si je leur lis bon appétit monsieur lapin on va prendre des lapins des assiettes des carottes et voilà il va falloir donner des carottes à tel lapin en voudra deux lui en voudra trois

Il ne s'agit pas ici de travailler la quantité en donnant une carotte à chaque lapin pour qu'il y ait la même quantité de carottes que de lapins, mais plutôt d'entrainer un deux trois. Les assiettes sont disposées devant les lapins, et tantôt l'enseignant va demander deux carottes pour un lapin, puis trois carottes pour le suivant, une carotte pour celui d'après. Avec les mascottes de la classe, il se sert du gouter collectif pour renforcer la connaissance des trois premiers nombres.

50	H– avec nos mascottes heu Chatouille et Souricette je l'ai pas encore introduit je le faisais les années précédentes quand on goûtait le matin quand on part en récréation et qu'on va goûter avec eux enfin qu'on va goûter on va les prendre avec nous il y aura une boîte avec de des biscuits factices et Chatouille demandera aux TPS un ou deux ou trois gâteaux

Il détourne le matériel de la situation des bonnets de doigts pour demander « donne-moi trois ».

46	H– je les remets dans la boîte et là je dis voilà j'en veux combien j'en veux tu en veux trois donne-moi trois mais là ça serait ça serait les objectifs finaux quoi les la fin de la progression

Il s'intéresse, à partir de la suite orale des mots nombres, aux mots nombres qui précèdent et qui suivent.

Enfin il propose de nombreuses situations sur les décompositions, ici avec le jeu du dortoir (Valentin, 2004).

244	H- alors y'a une boîte c'est le dortoir j'ai dix morceaux de moquettes ce sont les lits et puis les dix playmobils donc heu heu y'a des petites phases d'appropriation de manipulation mais là qui est pas très importante
245	Chercheur- oui
246	H- je leur explique la petite histoire donc les dix petits dorment on met les tapis on met chaque petit à son lit on les met voilà et puis je vais heu des petits vont se lever ils vont se réveiller et la première étape c'est donc je retire des de un à trois petits et il faut juste dire ils ne les voient pas cela et en uniquement en observant le l'intérieur de le la salle des siestes heu déterminer combien de petits se sont levés en voyant les lits vides ça c'est pas compliqué et on y passe très rapidement et puis après je leur dis maintenant on va faire je vais vous donner quelque chose d'un peu plus compliqué ça va être l'inverse les petits qui tout à l'heure se levaient qu'on ne voyait pas vous allez les voir et vous n'aurez pas le droit de regarder dans la dans le dortoir et vous allez me dire combien dorment encore

La branche cardinal-quantité

H débute son enseignement en explorant le concept de collection, pour cela il utilise de grandes quantités qui permettent la manipulation.

8	H– donc dès la TPS heu le premier travail qui va prendre bien deux trimestres c'est de manipuler des quantités premier aspect voilà sans parler évidemment avec eux de de de tous ces concepts là mais voilà c'est de manipuler des collections heu de jouer heu avec donc au départ ce n'est pas forcément lié à un objectif de sur les nombres enfin ça peut être trier des objets jouer seul simplement avec des avec de grandes quantit ouais voilà de de grandes collections collections de les manipuler et on fait tout un travail finalement sur d'autres domaines du langage ou autre mais voilà ce support là c'est la première occasion

Il expose ensuite les situations fondamentales "comparer des collections" et "construire des collections identiques". La comparaison de collections lui permet d'introduire quantitativement les notions beaucoup-pas beaucoup-rien.

20	H- et puis comme ça on commence à glisser petit à petit vers des observations liées aux quantités heu et on introduit les notions beaucoup pas beaucoup rien du tout […] étant donné que c'est quelque chose de très relatif forcément beaucoup pas beaucoup et donc il faut avoir deux collections au moins une seule ça se suffit pas

Il profite de la rencontre de "rien" en situation pour placer le zéro.

364	H- voilà y'a rien je peux pas faire l'action voilà je peux pas faire l'action je peux rien prendre je peux pas donner je peux rien faire les MS on le le le mot a été introduit et et indiqué et reconnu heu pour les zéros absents y'a le zéro par exemple quand y'a zéro absent il faut le zéro

H expose un exemple de situation pour la même quantité à partir de bonnets de doigts. Il explique l'installation du milieu, prend en compte la difficulté inhérente aux mots et décrit la correspondance terme à terme comme procédure permettant de résoudre le problème. Puis il introduit des collections de bonnets sur différents plateaux que les élèves doivent choisir pour habiller les doigts levés.

42	H- alors au départ heu c'était ça peut être moi l'adulte je bon déjà première chose on découvre le bon pour cette séan séquence là découverte de du matériel des objets donc bé évidemment à quoi ça sert et ben voilà ça ressemble à des bonnets c'est pour nos doigts alors les premières séances c'était uniquement mettre les bonnets aux doigts voilà
43	Chercheur- bien sûr
44	H- ils en mettaient autant qu'ils voulaient tous leurs doigts ou voilà et

	puis après petit à petit je leur ai demandé moi ou l'ATSEM j'ai je c'est moi même qui est pointé des une certaine quantité de un à trois et il fallait habiller les les doigts voilà alors heu bien sûr soit ils les prenaient de la boîte ils les enfilaient ils voyaient qui en avait trop ils les replaçaient j'insistais pas trop heu ou ils faisaient de un à un mais bon voilà j'observai les les stratégies et là les mots n'intervenaient pas c'était juste pour différencier les quantités ces petites quantités là et puis petit à petit bon là on est encore quand même pas mal à ça je peux proposer aussi un petit peu je je fais des des piles je peux les mettre dans des petites boîtes ou sur des petits plateaux quatre trois deux et puis un et puis pourquoi pas aussi une boîte ou un plateau avec rien du tout et puis je tends de un à trois doigts et je leur demande de choisir est ce qu'on prend les bonnets de cette boîte là ou ceux qui sont dans celle-là ou celle-là voilà là aussi les le mot nombre n'intervient pas encore et puis là petit à petit au bout d'un moment heu par mes commentaires j'ai ah tu m'as donné trois heu trois bonnets là tu m'en as donné deux heu voilà ils interviennent comme ça eux s'ils les ressortent après très bien mais c'est pas non plus encore le l'objectif il est c'est c'est l'objectif final quoi on reprend les mêmes situations et puis là je leur demande de me dire combien ils m'en ont donné en plus

H prend le temps, d'observer les connaissances des élèves en situation, il joue sur les variables didactiques (empêche l'action directe) pour faire évoluer progressivement les connaissances des élèves. Il décrit une situation d'action, en introduisant le plateau, il introduit l'anticipation. Cette anticipation est recherchée, la correspondance terme à terme directe est empêchée.

90	H– ou alors des quantités qu'on peut plus déplacer pour éviter les correspondances terme à terme heu anticiper

H enseigne la définition du cardinal en permettant aux élèves de répéter le dernier mot nombre.

70	H- donc c'est vrai que en première période de l'année heu au moment où je leur dis alors combien il y a de combien tu as de bonnets alors on va dire bonnets et ben parfois ils ont besoin de re de repartir au début et ça peu durer longtemps là comme ça hein pour certains alors c'est petit à petit ben moi je vais leur je vais comme on est comme on étaye dans le en langage dire ben voilà tu en as compté cinq quand tu as terminé tu as dit cinq alors y'en a cinq et en répétant comme ça mais ça arrive assez y'a pas vraiment de blocage hein sur ce sur ce sur cette sur ce point là

Il identifie la collection intermédiaire orale pour « se rappeler une quantité » comme étant une connaissance à obtenir à la fin du processus d'apprentissage, à la fin de la branche cardinal quantité.

78	H– on va dénombrer pour se rappeler une quantité pour comparer fin de PS on va essayer de passer à alors y'a d'autres procédures pour y parvenir avant mais à la fin de la PS j'essaie quand même de d'aller vers ce vers-là quoi

Il précise bien qu'il y a d'autres procédures avant cela. Il décrit alors l'évolution des connaissances avec l'introduction de l'anticipation.

b- La branche numérations

H désigne les nombres par les mots nombres. Il enseigne la suite orale des mots nombres avec des comptines numériques, en comptant les élèves au rituel pour entrainer la mémorisation.

86	H– donc la comptine là minimum jusqu'à dix mais heu écoutant là aussi les MS qui la disent jusqu'à minimum vingt ils vont pouvoir les dire réciter c'est réciter pas forcément dénombrer réciter jusqu'à vingt sans trop de problème voire dénombrer jusqu'à vingt parce que par ce biais-là du comptage du matin ils arrivent assez facilement jusqu'à quinze

Cet apprentissage se fait par répétition mais aussi à force d'entendre les plus grands (les MS) la réciter.

52	H– étant donné que j'ai trois niveaux heu au moment où on les revoit avec les PS et MS et bien ils les entendent hein avec les au moins jusqu'à cinq et ils font les mêmes gestes donc jusqu'à cinq ça se ils connaitront la suite

Il propose la suite orale des mots nombres au-delà de cent.

90	H– la comptine numérique on je au moins trente mais c'est un minimum finalement pour moi c'est un minimum parce que on va bien au-delà quoi on va jusqu'à cent

Pour cela il invente et ajuste des comptines numériques pour les dizaines.

631	H- c'était petit ours est très malade ça allait jusqu'à dix je crois il a mangé un machin deux trucs trois quatre cinq dix j'ai fait je suis parti de dix il a mangé dix radis vingt salades trente heu heu haricots cent et cent radis c'est la faute aux cent radis

En fonction des années et des cohortes d'élèves, il propose la suite orale de deux en deux. Il enseigne également la suite orale des mots nombres à rebours de dix à zéro. H observe des difficultés dans l'apprentissage de la suite orale des mots nombres, parfois la suite n'est pas conventionnelle, mais elle est stable dans les erreurs.

72	H– ils sont stables dans leurs oublis ils sont pas stables dans la comptine de l'un à l'autre dans la dans la récitation mais ils sont stables dans ces ces mots là comme ça qui les les qui leur échappent

H entraine la reconnaissance globale des petites quantités un deux et trois, pour aller progressivement vers la procédure de comptage. Les constellations du dé mais surtout les doigts de la main sont montrés et entrainés pour renforcer la reconnaissance de petites quantités.

32	H- on passe aux doigts levés dé pas vraiment encore bien que je peux fa je puisse créer des petits jeux où y'a un gros dé ou y'a de un deux à trois points mais quand même la collection c'est les doigts

H enseigne l'écriture chiffrée que ce soit avec le geste d'écriture mais aussi la lecture, à partir notamment de jeux de loto ou bien de bataille. Il utilise fréquemment la frise numérique comme support visuel, et construit un livre à compter pour rassembler les différentes correspondances. Il prolonge cet enseignement vers la numération décimale de position en observant les régularités de l'écriture chiffrée, les unités, les dizaines.

112	H- et là ils voyaient un peu la colonne tac ça coïncidait la dizaine et puis chaque fois un deux on toujours dans le même ordre mais c'était
113	Chercheur- oui ça dépend
114	H- quelque chose que voilà que j'introduis un peu pour tester puis sans pas quelque chose de systématique et automatique mais enfin voilà ils commencent déjà à à percevoir des régularités quoi hein

H désire donner les raisons d'être du savoir, en effet, à l'école maternelle, la régularité, évoquée ici, qui fonde le système de numération décimale de position n'est pas enseignée aux élèves de MS. Il essaie cependant de susciter les conditions favorables pour qu'ils puissent commencer à percevoir ces régularités.

c- La branche calcul

H évoque des activités liées au partage et à la distribution, qu'il différencie, il propose aux élèves de distribuer une grande quantité de cubes pour inciter la distribution par paquets.

80	H- distribuer alors bon distribuer on n'a pas réellement heu besoin

	finalement du nombre partager c'est autre chose mais distribuer heu il suffit faire à tour de rôle sauf quand les quantités sont importantes où là on va faire par paquets ça ira plus vite

Il a en tête les savoirs futurs du CP sur les groupements et le système de numération décimale, « la base dix ».

220	H– puis voilà y'a certains travaux certains savoirs qui ne qu'on peut réellement travailler que si on va raisonne un peu au-delà de dix pour comprendre comment ça fonctionne notre système si on s'arrête à dix

Il entraine également le surcomptage, l'addition, la soustraction et la réunion de deux collections.

148	H- je prends cinq de un à cinq heu éléments dans ma main je montre heu j'ouvre la main l'enfant dénombre je prends une seconde poignée de un à cinq également je je montre ils dénombrent je réunis greli grelo combien j'ai de cailloux dans mon chapeau je j'en lance le chapeau et ils doivent me dire et alors on passe par heu là c'est pareil y'a pas à anticiper mais on passe parce que c'est plus présent donc soit en utilisant une autre collection référente les mains soit y'en a certains je les vois s'imaginer les quantités qui sont pas impor très importantes donc du coup ils peuv je pense qu'ils y arri ils y arrivent bien ils se les imaginent alors j'ai réfléchi quand je leur dis comment tu as fait j'ai réfléchi

H décrit une collection intermédiaire matérielle, les doigts de la main. H détaille la situation fondamentale de la boîte avec des situations d'action où il privilégie l'anticipation du résultat. Un coffre à trésor contient cinq pierres précieuses en début de semaine, l'élève lance le dé « +/- » pour savoir s'il va gagner ou perdre des pierres puis lance le dé avec un, deux et trois. L'élève devra donner le résultat au maitre pour modifier le contenu de son coffre au trésor.

497	H– donc on lance ce dé ce dé là pour savoir si on va en gagner ou en perdre et puis heu le dé qui indique un deux ou trois pas plus et voilà et ils doivent il faut dire voilà je vais en perdre trois d'accord tu en avais combien j'en avais cinq donc à l'issue de une fois que tu les auras rendu t'en auras combien j'en aurais deux là on est vraiment à l'anticipation rien ne se fait on n'a pas les quantités en plus les les cinq sont dans la boîte la boîte est fermée et on n'a pas le droit d'y en plus de de l'ouvrir enfin idéalement on n'a pas le droit de l'ouvrir

Comme ce jeu du trésor se déroule sur la semaine, l'élève doit se souvenir de la quantité de pierreries qui se trouve dans son coffre pour le lendemain, car le coffre n'est pas ouvert en début de séance, seulement à la fin pour réaliser l'action, il introduit donc une situation avec éloignement dans le temps.

551	H- et puis on ferme la boîte et on s'en rappelle pour demain rappelez-vous comptez une dernière fois j'en ai d j'en ai deux bon et demain faudra me dire

H propose une collection intermédiaire écrite pour les élèves qui ont du mal à se souvenir de la quantité de pierres.

555	H- et pour les et pourquoi pas alors si je vois que si je vois qu'ils s'en rappellent très bien si je vois que certains ont des difficultés ben on va le noter on va l'écrire et on va mettre la feuille sur la boîte

Enfin il enseigne également l'utilisation des doigts pour pouvoir calculer.

433	H– je leur dit utilise tes doigts et je leur dit comment parce qu'utilise tes doigts des fois d'accord mais pour faire quoi et ben voilà quand j'en prends trois dans ma main tu fais trois avec la première main si j'en prends deux avec dans ma deuxième main tu fais deux avec les doigts de ta deuxième main et puis tu recomptes tout et après voilà l'exercice fait que la répétition l'entraînement voilà le voir avec dans d'autres supports d'autres situations font qu'après voilà ils transfèrent

d- La branche énumération

H identifie de nombreuses « compétences à mettre en place » dont l'énumération.

66	H- PS voilà PS heu donc évidemment avec eux on va voir ce que veut dire enfin je vais pas leur expliquer comme ça mais qui toutes y'a pleins de compétences à mettre en place t'as le moment où on compte l'énumé l'énumération heu bon le fait d'associer un geste et un mot nombre à un élément de la collection heu savoir qu'à la fin qu'on a dénom au moment où on a dénombré où finissent de dénombrer la collection et bien le dernier mot que l'on a nommé il qualifie toute la collection qu'on parte dans un sens ou dans l'autre c'est la même chose
67	Chercheur- lors heu tu disais par rapport aux compétences qui sont derrière que tu vas pas le dire comme ça tu leur dis pas comme ça et du coup comment ça se passe
68	H- c'est un peu dans l'implicite et la répétition

Il ne donne toutefois pas d'exemples de situations mises en place en classe pour travailler ce savoir. Il remarque parfois des difficultés de synchronisation entre la suite orale des mots nombres et le pointage de chaque élément de la collection.

8.3- Dialectique savoir/connaissance à travers certaines activités décrites

a- Des savoirs vers les connaissances

H choisit d'enseigner le savoir « plus on avance dans la dans la suite des nombres et plus les nombres ils représentent les quantités importantes », pour cela il utilise les doigts de la main et montre aux élèves un doigt levé et neuf doigts levés « ils voient bien quand même que un c'est plus petit ».

413	H– c'est compliqué de comprendre ça que plus on avance dans le là aussi y'a un gros enfin y'a un gros saut à faire heu un bond important de comprendre que plus on avance dans la dans la suite des nombres et plus les nombres ils représentent les quantités importantes alors que voilà on aura pu les représenter avec les doigts ils voient bien quand même que un c'est plus petit que que que un doigt levé heu c'est moins important que neuf doigts levés mais savoir enfin dire que le un c'est plus petit que le neuf hop y'a un bond quand même

Par contre H rencontre des difficultés « mais savoir enfin dire que le un c'est plus petit que le neuf hop y'a un bond quand même ». Il part d'un savoir qu'il montre avec ses doigts pour que les élèves voient, ensuite il récitera sur la suite orale des mots nombres en insistant sur un et neuf, puis en le répétant à chaque occasion, il permettra aux élèves d'appliquer ce savoir et de mobiliser des connaissances en situation.

b- Des connaissances vers les savoirs

H recherche et favorise l'évolution des connaissances à travers les situations d'action. Il observe les connaissances des élèves en situation, pour repérer leurs stratégies et adapte ses propositions de situations.

138	H- après la une autre étape la la collection n'est plus elle est présente mais plus sous leurs yeux dans une boîte mais l'action quand même est réalisée donc y'a pas à anticiper y'a uniquement à conclure et après par contre on va et l'action ne sera pas réalisée il faudra anticiper

H prévoit des situations qui permettent l'émergence des connaissances en situation, il les observe et construit des prolongements qui suscitent l'évolution des connaissances. Il parle

parfois de « saut » ou de « bond », mais aussi « d'étape » pour indiquer l'évolution des connaissances ou bien le passage des connaissances au savoir.

8.4- Les niveaux d'activités de H

a- Niveau +3 : niveau noosphérien ou idéologique

+3		Les nombres sont des outils		Anticiper les savoirs		Anticipation recherchée		Utiliser les doigts pour calculer		Référence à un ouvrage

Pour PH_{+3} les nombres sont des outils, de fait, « il faut les enseigner comme des outils ». Cette vision des nombres implique un enseignement basé sur la recherche de situations permettant l'utilisation d'outils : les nombres.

PH_{+3} anticipe sur les savoirs futurs à enseigner, la suite orale des mots nombres est exprimée jusqu'à cent, les décompositions sont travaillées jusqu'à dix en MS, les situations d'action et d'éloignement dans le temps sont proposées pour le calcul. PH_{+3} donne des justifications en termes de raison d'être du savoir. Comment apprendre et comprendre la suite des mots nombres à l'orale et à l'écrit si on ne peut pas s'appuyer sur les régularités du système décimal de position ? PH_{+3} choisit de proposer ces enseignements quand cela est possible. PH_{+3} reconnait qu'il s'agit aussi d'un plus pour lui, car il considère ces savoirs plus intéressants à enseigner.

PH_{+3} privilégie l'anticipation, que ce soit des situations d'action, mais aussi des opérations mentales pour le calcul. PH_{+3} identifie l'anticipation comme une étape particulièrement importante pour l'évolution des connaissances des élèves.

605	H- mais c'est vrai parce que puis bon aussi c'est parti un peu de de quelque chose heu enfin c'était aussi un peu pour moi parce que je me dis si en MS tu restes heu sur sur des situations de dénombrement de jusqu'à dix tu vas te heu c'était aussi un peu pour moi tu vas te fa tu vas t'embêter quoi pfeu même si tu peux un peu travailler les com comparaisons pfeu c'est vite acquis les dénombrements les partages les distributions heu alors voilà c'est le le le plus intéressant je trouve c'est là à partir du moment où l'on raisonne un peu sur ça sur l'anticipation le reste ça part ça se fait rapidement dans l'année on le revoit parce qu'on en a besoin et puis les situations le heu le nécessitent mais

PH_{+3} développe l'ambiguïté existante avec l'utilisation des doigts pour calculer, les enseignants de l'élémentaire ont des difficultés pour limiter leur utilisation, et les élèves de maternelle ne sont pas tous efficaces pour une utilisation adéquate. PH_{+3} penche alors pour un enseignement explicite de l'utilisation des doigts pour le calcul.

PH_{+3} fait référence plusieurs fois à un manuel (Colomb, Charnay, Douaire, Valentin, & Guillaume, 2005) qu'il a rencontré au début de sa carrière et qui a façonné sa conception de l'enseignement des mathématiques.

b- Niveau +2 : situation de construction ou de conception d'un thème

+2	Comptines numériques Frise numérique Reconnaissance globale des doigts		Les trois premiers nombres, décompositions, succession		Beaucoup pas beaucoup rien du tout Situations fondamentales : construire la même		Ajout, retrait, compléments, partage, distribution

		Lecture de l'écriture chiffrée				quantité et comparer des collections		

PH_{+2} identifie différents savoirs pour enseigner le nombre et il construit une progression alliant ces différents savoirs. Il prend en compte l'enseignement des comptines numériques pour entrainer la mémorisation de la suite orale des mots nombres, de même que les activités de comptage. La frise numérique écrite est un support intégré dans son enseignement. PH_{+2} élabore un enseignement sur la reconnaissance des petites quantités surtout à partir des représentations des doigts de la main. L'écriture chiffrée est intégrée également à ses progressions, tant en lecture qu'en écriture.

PH_{+2} conçoit des activités qui permettent de renforcer la connaissance des trois premiers nombres. PH_{+2} prévoit l'enseignement des décompositions des nombres et s'intéresse aux notions de prédécesseur et successeur d'un nombre.

PH_{+2} envisage les nombres à travers la comparaison et la construction de collections d'abord à partir d'approximations globales puis progressivement en allant vers des procédures de dénombrement.

PH_{+2} favorise l'enseignement du calcul par choix. Il trouve un réel intérêt dans l'enseignement du calcul et propose tout au long de la journée de petits problèmes, il élabore des situations qu'il développe jusqu'aux situations avec éloignement dans le temps pour les MS.

c- Niveau +1 et niveau 0 : situation de projet de leçon (dans la séance) et situation didactique

+1 & 0		Exemples d'activités		Créer et inventer des situations, des comptines		Installation du milieu

$PH_{+1\&0}$ décrit des exemples d'activités, de situations, de jeux, il fait référence aux situations d'Ermel.

$PH_{+1\&0}$ détourne ou invente des situations ou bien des comptines numériques lorsqu'il ne les trouve pas suffisamment adaptées à ses objectifs.

$PH_{+1\&0}$ consacre un temps conséquent à l'installation du milieu des situations.

d- Niveau -1 : niveau d'observation ou de dévolution

- 1		Aisances et difficultés observées		Évaluations et observation des connaissances des élèves

PH_{-1} observe des difficultés d'élèves liées à la mémorisation de la suite orale des mots nombres, à l'énumération, par exemple compter une et une seule fois tous les éléments de la collection sans en oublier, mais aussi à la comparaison de quantités. PH_{-1} constate des facilités et une aisance avec les décompositions, qui sont très entrainées, avec la suite orale des mots nombres, qui va jusqu'à cent.

PH_{-1} évalue et observe les connaissances des élèves, il est attentif à leur évolution et repère, à partir des procédures mises en place par chaque élève, les étapes à franchir.

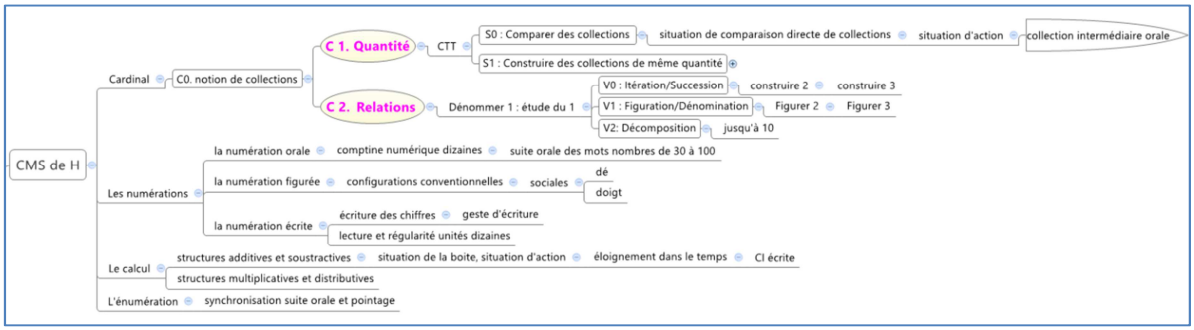
8.5- Conclusion concernant H

H est en accord avec ce qu'il considère être l'enseignement du nombre à la maternelle (+2). Il s'appuie sur un ouvrage didactique (Colomb, Charnay, Douaire, Valentin, & Guillaume, 2005) pour construire des séquences et des séances sur le nombre. Cet ouvrage lui donne une grande assurance pour son niveau de construction ou de conception d'un thème (+2). Il adapte ou invente des situations ou des jeux en fonction des objectifs en termes de savoirs qu'il se fixe (+1). Les observations des connaissances des élèves en situation lui permettent d'adapter et de jouer sur les variables didactiques des situations pour faire évoluer les connaissances des élèves.

Niveau noosphérien ou idéologique	+3
Niveau de construction ou de conception d'un thème	+2
Niveau de projet de leçon et niveau de la situation didactique	+1 & 0
Niveau d'observation ou de dévolution	-1

TABLEAU 18 : ACTIVITÉ RÉFLEXIVE DE H

Pour résumer, H a construit son enseignement du nombre en TPS-PS-MS, sur la base d'un document générateur (Margolinas & Wozniak, 2009a; Margolinas & Wozniak, 2009b) rencontré au début de sa carrière (Colomb, Charnay, Douaire, Valentin, & Guillaume, 2005). H expose une progression très détaillée pour la numération orale, de l'invention de comptines numériques pour apprendre le nom des dizaines, à la récitation de la suite orale des mots nombres de deux en deux, au comptage à rebours de dix à zéro. Il ne rencontre pas de difficulté particulière dans son enseignement de la suite orale numérique. Chaque année, les élèves la mémorisent et sont capables de la réciter au moins jusqu'à trente. H l'entraine jusqu'à cent en MS, pour lui les attendus de fin de cycle 1 sont très facilement atteignables. Lorsqu'il prévoit un travail sur la quantité, il n'est pas en attente du mot nombre. L'objectif des situations d'action qu'il élabore est orienté sur la quantité et non pas sur le dénombrement. H aborde d'abord la quantité sans les nombres. Il propose également une référence au zéro lorsqu'il emploie "rien". H fabrique et met en place des situations avec éloignement dans le temps et observe, en situation, l'usage de l'écrit chez certains élèves pour se souvenir de la quantité. Toutefois, il n'associe pas la nécessité de l'écrit à l'éloignement dans le temps, puisqu'il attribue le passage à l'écrit à de la difficulté. H s'engage particulièrement dans l'enseignement du calcul, il y retire une satisfaction et un intérêt réel. Il propose alors des situations problème qu'il fait vivre tout au long de la journée voire de la semaine, tels des rendez-vous quotidiens. H attribue des compétences liées à l'énumération des collections, mais pour autant, il ne donne aucun exemple. Il identifie des compétences, mais ne repère pas l'énumération comme un savoir à part entière qui s'enseigne. Enfin, H ne décrit aucune situation ou activité relative à l'ordinalité.



9- L'ENSEIGNEMENT DE I

I a une classe de GS au moment de l'entretien.

9.1- L'arbre des savoirs du nombre de I

a- Focus sur les cinq branches de l'arbre des savoirs du nombre

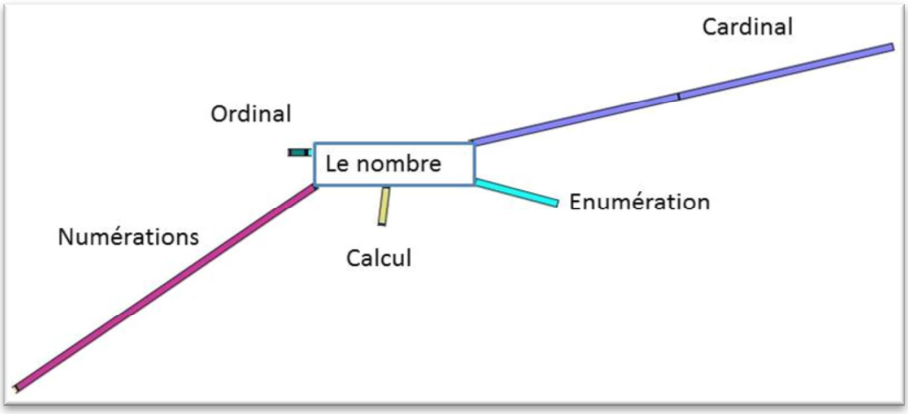


FIGURE 85 : L'ARBRE DU NOMBRE DE I

Les branches cardinal et numérations sont largement représentées dans l'enseignement de I. Puis la branche énumération, calcul et enfin la branche ordinal viennent compléter l'arbre.

b- Durée des extraits codés

Trente-sept extraits sont codés dans la branche cardinal, vingt-huit extraits dans la branche numérations. Puis sept extraits codés dans la branche énumération, six extraits dans la branche ordinal et enfin deux extraits pour le calcul.

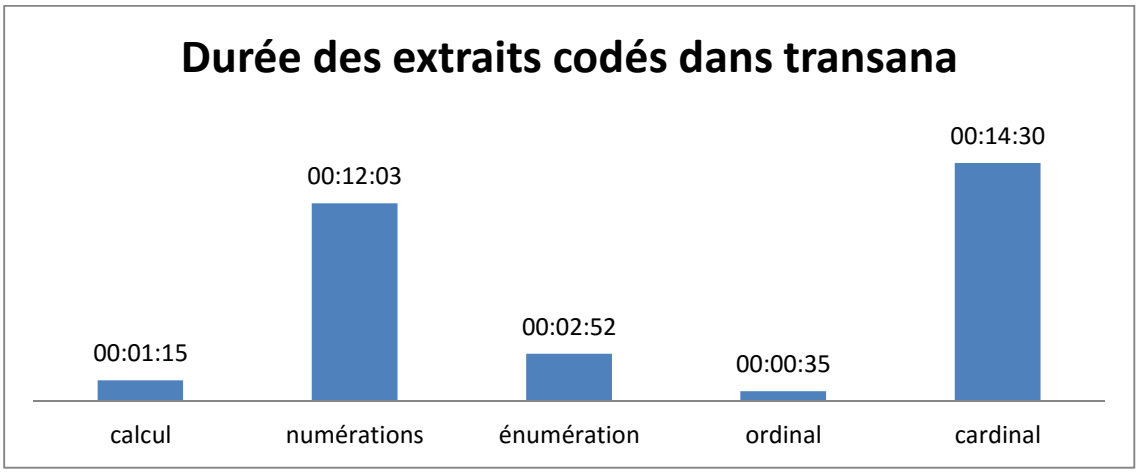


FIGURE 86 : HISTOGRAMME DES EXTRAITS CODÉS EN MINUTE POUR I

9.2- Quelles connaissances mathématiques spécifiques sont présentes dans chacune des branches ?

a- La branche cardinal

La branche cardinal-relations

I explique sa rencontre avec l'ouvrage de Brissiaud (Brissiaud, 2007) qui l'a fait évoluer sur sa représentation de l'enseignement du nombre avec les jeunes élèves. Il dénomme les nombres et fait apparaitre l'itération, la succession « et encore un ». I modifie aussi sa façon de « parler les nombres ».

4	I- quand on est enseignant et qu'on s'est pas posé de question sur le le nombre ben un deux trois en pointant heu un un objet deux un autre objet trois un autre objet et puis on se rend compte que ben effectivement ça peut induire des enfants en erreur et que c'est pas un deux trois mais c'est un et encore un et encore un et que ça fait trois ou un et deux on englobe les deux et trois et du coup heu et ben ça ça m'a le fait d'avoir pointer ce genre de ben de manière de faire ça m'a fait réfléchir et comprendre qu'effectivement la façon dont on montre et on parle les nombres et ben ça peut heu induire des mauvaises compréhensions du nombre et du coup depuis et ben je fais très attention à ne plus pointer un deux trois et à dire un encore un et encore un pour qui ait non plus que la suite la comptine numérique qui soit comprise mais la notion de nombre de quantité alors qu'avant je me posais pas la question enfin pour moi c'était tellement évident que voilà je me posais pas la question

I consacre les deux tiers de l'année à l'étude des nombres jusqu'à dix, dans l'idée de succession, d'itération de l'unité pour construire le nombre suivant.

118	I- je commence à bien travailler sur heu au-delà de dix heu alors que jusqu'à présent j'avais vraiment travaillé les deux tiers de l'année que jusqu'à dix la construction jusqu'à dix

Il s'appuie souvent sur les décompositions, en utilisant « les repères » vécus « à la maison » comme la fratrie « toi tu as un grand frère y'a la t'as la petite sœur et puis y'a toi », mais aussi le corps « deux yeux et le nez ».

84	I- et ça fonctionnait très bien mais c'est pareil voilà je des quand on voyait trois c'était un encore un et encore un alors après y'a tous les repères ah ben oui nous à la maison on est trois enfants ah ben oui toi tu as un grand frère y'a la t'as la petite sœur et puis y'a toi oui et c'est vrai que c'est souvent par rapport à leur vécu ou alors ça aussi c'est ce qu'on utilisait souvent trois c'était les deux yeux et le nez donc voilà y'avait les repères avec les

I utilise le jeu Halli Galli dans l'anticipation en demandant aux enfants le complément à cinq avant de retourner la carte.

22	I- et puis on amène les enfants à anticiper parce que c'est pareil on on joue en le en le parlant donc té toi t'as trois trois bananes sur ta carte alors il faut que tu fasses attention qu'il y ait quoi comme carte qui sorte pour pouvoir appuyer ah toi il faut que tu attendes qu'il y ait deux bananes qui sortent ok

I « parle les nombres » à l'aide des décompositions, il décrit les décompositions comme une collection intermédiaire orale possible pour les élèves qui ne connaissent pas la suite orale des mots nombres. Il s'attarde et insiste sur la discrimination visuelle et l'organisation spatiale des petites collections.

12	I- si on a quatre points et qu'on les voit pas qui en a quatre et ben on essaie de décomposer l'autre il a reconnu quatre comment tu as reconnu quatre ben moi je vois que là en a trois et y'en a encore un ah oui alors toi tu sais que trois et encore un alors ça fait quatre et donc du coup et ben on parle les nombres deux on ben moi j'ai vu qui en a quatre j'en vois deux et encore deux ah donc toi tu sais que c'est quatre parce que tu sais deux et deux et on va travailler comme ça sur les nombres jusqu'à quatre les en les décomposant y'en a trois et y'en a qui voit de suite trois y'en a qui vont voir un un et encore un donc et bé on chacun va dire comment il les reconnait sans sans les dénombrer sans les pointer et on va s'imprégner de ce que chacun voit et du coup heu ça je le travaille heu je vais jusqu'en GS et en GS après on va se servir ben de de cette mémorisation des décompositions pour les nombres plus grands et du coup on va se rendre

	compte que ben cinq c'est trois et deux heu que c'est quatre et un qu'on le reconnait comme ça et et voilà je travaille surtout heu surtout sur ça et heu et et voilà jusqu'à dix donc par exemple quand on construit huit ça peut être le plus traditionnel c'est cinq et trois évidemment mais après ben on va se rendre compte que ça peut être quatre et quatre que enfin voilà alors évidemment je travaille plus sur la décomposition du cinq plus heu sur la décomposition du dix et heu surtout des nombres entre cinq et dix et surtout le cinq plus

Ce travail sur les décompositions renforce le passage par cinq puis en fin d'année le passage possible par la dizaine. Mais I précise qu'il favorise « surtout le cinq plus ». Toutes les décompositions peuvent être observées ou parlées, mais celle du « cinq plus » sera recherchée et valorisée. I aborde aussi les doubles quand cela se présente au cours des décompositions. Il ne s'agit pas de recompositions au sens où il ne propose pas : quatre et encore quatre c'est huit.

14	I- voilà après après si le double huit c'est quatre et quatre six c'est trois et trois mais on va je rentre pas dans tous les détails à part si eux ben évidemment ils me le disent

La branche cardinal-quantité

I sépare les savoirs sur le nombre et distingue la suite orale des mots nombres de la « notion de nombre » au sens de la construction du nombre. Il s'agit, pour I, de la quantité qui se trouve « derrière ».

74	I- maintenant j'ai vraiment changé ma façon de faire et je m'appuie beaucoup plus sur qu'est-ce que c'est le nombre c'est le construire cette notion de nombre ce qu'il y a derrière finalement et pas que le mot

I propose des exemples de situations comme la situation fondamentale « construire la même quantité que » et « comparer des quantités ».

I propose à partir de la TPS des situations avec éloignement dans l'espace, pour mettre la table ou bien en PS pour habiller des poupées. Il choisit trois poupées et trois couverts et il joue sur les variables didactiques notamment sur la couleur des assiettes et des verres en plastique afin de permettre, de favoriser et d'encourager la suite orale des mots couleurs comme collection intermédiaire orale. Il donne plusieurs exemples de reformulation de la consigne. Il autorise plusieurs voyages si nécessaire.

78	I- chez les PS aussi c'était par exemple ben j'avais trois poupées va me chercher juste ce qu'il faut de vêtements pour habiller les trois poupées je veux une robe à chaque poupée prends juste ce qu'il faut alors donc il allait dans le coin poupée et il fallait qu'il revienne alors bon on essayait si y'en avait trop y'en avait trop il en restait ou si y'en avait pas assez ben il fallait retourner les chercher si j'avais à peu près la même alors c'était pas fait dans les mêmes situations mais heu j'avais quand même ce travail de construction de collections même avec les TPS mais voilà c'était par le jeu on on mettait la table pour heu pour la dinette j'avais mis les trois assiettes il fallait aller chercher juste ce qu'il fallait heu de heu fourchettes de verres etc.

Une couleur différente pour chaque assiette est identifiée comme une aide à la correspondance terme à terme assiette éloignée-répétition des couleurs.

80	I- les TPS aussi et pareil avec on essaie on voit qu'on se trompe et après après avec les petits on se servait aussi par exemple si c'était plus compliqué de voir qui y'avait trois assiettes de la même couleur ben je mettais une assiette rouge une assiette bleue une assiette jaune il fallait aller chercher des verres ben dans la dinette on avait juste un verre bleu un verre rouge un verre jaune enfin voilà et donc du coup c'était plus du terme à terme mais c'était quand même la construction du nombre avec le terme à terme et et ça là effectivement c'était c'était la première étape

	après quand ils avaient bien compris avec les couleurs on passait avec les trois de la même couleur mais et c'est pareil la reconnaissance des des quantité sur les petites cartes je le faisais dès la TPS

I identifie les premières connaissances des élèves sur la quantité « c'était plus du terme à terme mais c'était quand même la construction du nombre avec le terme à terme et et ça là effectivement c'était c'était la première étape ». Ce sont des connaissances premières de la branche cardinal quantité, en effet la correspondance terme à terme permet de définir "la même quantité". Il utilise un matériel disponible dans sa classe, les mathœufs.

128	I- y'a quand même la notion de autant et donc du coup les mathœufs pour la notion de autant et ben quand on a le mathœuf on peut manipuler plein de fois parce que y'a les nœuds papillon parce qu'il y'a les cheveux alors j'essayais de pas trop utiliser la paire de chaussures parce que ben bon ils sont même si c'est qu'une paire parce qu'elles sont mais j'utilisais plus oui voilà le nœud papillon le pantalon et les cheveux et du coup si y'en a pas autant c'est qu'il y en a plus ou qui en a moins si on s'est trompé dans le autant et là effectivement en fonction des enfants je pouvais aller jusqu'à seize dix-sept mathœufs mais bon voilà du coup on est obli ils sont obligés de passer par le dénombrement parce que là ils construisaient la collection pour pouvoir la comparer c'était c'était pas deux collections qui étaient données c'était il fallait construire une collection au départ la consigne c'était faire autant et donc du coup pour faire la collection autant et ben heu quand on arrive à ce enfin quand on a de petites collections ça va on arrive de visu on estime on voit que c'est trois et deux mais quand on en a seize et ben on arrive plus de visu à se à à fabriquer la collection identique donc ils sont obligés à un moment donné de passer par le dénombrement et après on se rend compte quand on les place du coup on a le enfin on a le résultat immédiat quoi soit y'en a juste ce qu'il fallait y'en a autant soit y'en a plus et ben il m'en reste ils me servent à rien et soit il m'en manque et donc y'en a moins ça j'ai pas mal travaillé avec les mathœufs cette année par rapport à la comparaison et par rapport à la construction de collections

I se sert de ce matériel, qui permet la validation et une rétroaction immédiate de l'action, pour travailler aussi la comparaison, il y en a trop ou pas assez. Il introduit en situation, quand ce n'est pas la même quantité, les mots « y'en a plus, il m'en reste, il m'en manque, y'en a moins ». I recherche d'abord la reconnaissance visuelle de petites quantités, puis il augmente les collections pour obliger le passage par le dénombrement, c'est-à-dire la collection intermédiaire orale des mots nombres ou du cardinal.

4	I- enfin voilà et je me suis rendu compte pareil de l'importance de cette notion de comparaison de repère les uns par rapport aux autres sans forcément nommer la quantité mais arriver à dire que là ben y'en a plus et que là y'en a moins ou inversement

I précise la définition de "même quantité" et « sans forcément nommer la quantité » l'élève peut observer qu'il n'y a pas la même quantité avec la correspondance terme à terme.

I fait part de son enseignement de la comparaison à partir d'une approche où le savoir est montré aux élèves, « ceux qui sont à droite et ben c'est qu'ils sont plus grands que ceux qui sont à gauche qui sont plus petits ».

4	I- j'ai beaucoup plus travaillé sur cette comparaison des nombres et et à comprendre que quand on a une suite numérique et ben ceux qui sont à droite et ben c'est qu'ils sont plus grands que ceux qui sont à gauche qui sont plus petits et et donc voilà j'ai j'ai essayé de voilà de réfléchir autrement et de travailler différemment par rapport à cette comparaison

Il décrit également un travail de correspondance terme à terme à l'écrit, sur fiche, d'abord en utilisant du matériel pour comparer (Brissiaud, 2010), puis en fabriquant des fiches en fonction du thème qu'il choisit.

8	I- il parle dans le bouquin de Brissiaud il en fait il passe par la

	comparaison au départ terme à terme et du coup j'ai fabriqué des obj des des supports de comparaison au début heu heu où on a des heu c'est alors là bon lui il donne l'exemple avec des poules et des poussins donc sur la page y'a des poules alignées et des poussins alignés savoir est-ce que y'en a autant est ce qu'il y a plus de poules ou est-ce qu'il y a plus de poussins etc. au début on passe avec le feutre Velléda et puis on fait le terme à terme et puis on voit et puis après au fur et à mesure ben on passe par le on dénombre le nombre de poules on dénombre le nombre de poussins puis on compte y'a sept poules et six poussins ben si on on connait la suite des nombres on arrive à à savoir que quand c'est sept et ben c'est quand on dit la suite c'est après six donc forcément y'en a plus etc. et et donc j'ai ouais j'ai créé des outils comme ça alors là en fonction du thème du thème sur lequel on travaillait donc des fois c'était des feuilles et des papillons voilà ça pouvait être et relier et donc je leur raconte une histoire en fait heu je dis voilà enfin pour les poules c'était y'a une maman poule leur poussin est sorti de l'œuf et je on sait pas si chaque poule a un poussin ou pas ou si y'en a un qui s'est enfuit est ce que la maman va le trouver enfin voilà on raconte une histoire autour et on essaie de savoir si toutes les mamans ont un poussin ou si y'a pas un poussin qui s'enfuit ou si y'a pas un petit poussin qui a perdu sa maman qui cherche sa maman enfin voilà c'est là autour de ça et là du coup on essaie de comparer pour savoir si chacun a a enfin voilà si y'en a autant si y'en a plus ou si y'en a moins

I garde en tête le bout de la branche « au final », il conçoit le dénombrement comme une connaissance utile.

126	I- et puis après pour arriver au final à se rendre compte que ben la façon la plus efficace c'est quand même le dénombrement quoi

b- La branche numérations

I entraine la suite orale des mots nombres dans ses rituels à partir de différents jeux, jeu du furet, réciter la suite orale le plus loin possible à tour de rôle par exemple.

24	I- après effectivement y'a tous les rituels sur l'apprentissage de la comptine numérique

I entraine la mémorisation des mots nombres sans toutefois y consacrer beaucoup d'intérêt dans son enseignement du nombre, car au final, il constate que cet apprentissage se fait, même s'il nécessite parfois du temps.

74	I- ben c'est juste de la mémoire le mot nombre et ça fini par arriver de toute façon à un moment donné […] ben parce que le mot ben voilà enfin s'ils mettent du temps à l'acquérir ben ils mettront du temps à l'acquérir

I insiste sur la lecture de l'écriture chiffrée, il consacre de nombreux jeux à la lecture des chiffres et des nombres. Mais il se trouve confronté à la difficulté de certains élèves pour qui ces nombreux jeux ne permettent pas l'évolution des connaissances.

26	I- et puis après la mémorisation d'écriture des nombres et alors moi ce qui me pose le plus de difficultés c'est quand après tous ces rituels tous les jeux qu'on peut faire sur la reconnaissance des nombres l'ordre etc. les élèves arrivent pas à mémoriser l'écriture du heu du chiffre

Par exemple, une élève ne lit pas l'écriture chiffrée du six par exemple, elle doit aller le retrouver sur la file numérique, réciter la suite orale des mots nombres jusqu'au six, mémoriser et garder en mémoire le mot-nombre six, revenir à sa place et utiliser ce mot nombre pour prendre la même quantité.

I développe également depuis cette année « le tableau des nombres en colonnes » il décide de l'afficher d'une part en support à la suite orale des mots nombres, parfois jusqu'à quatre-vingt, mais aussi pour aller vers la numération décimale de position en travaillant les dizaines, les unités.

96	I- j'ai affiché récemment dans la classe alors c'est la première fois que je le fais je l'avais jamais fait heu c'est le tableau des nombres en colonnes avec jusqu'à quatre-vingt-dix-neuf alors que normalement on travaille que jusqu'à trente et je me suis dit cette année je l'affiche jusqu'à quatre-vingt-dix-neuf parce que j'en avais qui avait la comptine enfin jusqu'à quatre-vingt souvent souvent ça bloque au soixante enfin au passage à soixante-dix mais je me suis dit je l'affiche

c- La branche énumération

I observe la difficulté d'une élève. Il met en exergue la synchronisation entre la récitation de la suite orale des mots nombres et le pointage des éléments de la collection. Il prend alors à sa charge une partie de l'énumération, soit le pointage qu'il accorde à la récitation de la suite orale de l'élève, soit la récitation de la suite orale des mots nombres qu'il adapte au pointage de l'enfant.

62	I- pendant longtemps elle avait pas le geste heu qui était à qui était en phase avec avec ce qu'elle était en train de dire donc du coup là soit je tenais le doigt avec elle en lui disant attention tu vas pas trop vite recommence parce que tu as vu tu as parlé plus vite que ce que tu n'as montré avec ton doigt ou tu as avancé le doigt plus vite que ce que tu n'as parlé donc on recommence donc soit ou sinon après c'était moi qui disais la comptine c'était elle qui devait pointer et inversement voilà et pas mal de jeux comme ça où au lieu qu'elle ait les deux tâches à faire qui étaient compliquées à gérer on en faisait une chacun

I sépare bien la récitation de la suite orale des mots nombres du « geste stable » qui consiste à « pointer » tous les éléments de la collection une et une seule fois. Ce pointage est repéré comme un savoir à part entière au même titre que la suite orale des mots nombres.

66	I- enfin quand quand la comptine numérique est sue et que le geste est stable enfin est en place on va jusqu'à seize dix-sept

Il identifie également une progression et une évolution dans les connaissances lorsque les éléments de la collection sont déplaçables ou pas.

66	I- c'est à dire que dénombrer une grande collection si on peut pas déplacer les objets c'est super compliqué parce qu'il faut être super organisé il faut avoir une stratégie alors que la construire ben ils les déplacent les objets donc ben c'est plus facile

I associe l'organisation de l'élève aux procédures qu'il met en place, organiser la collection en mettant les éléments en ligne offre une organisation spatiale plus simple à traiter. Déplacer les éléments de la collection d'un côté à l'autre lorsqu'ils sont déjà traités organise également les espaces de traitement.

70	I- bon bé y'a ceux qui mettent tout en ligne et puis après dénombre en déplaçant le doigt après y'a ceux qui mettent tout d'un côté et qui déplacent en en parlant enfin y'a vraiment des stratégies différentes et après du coup le fait de voir comment font les autres chacun arrive à à prendre la stratégie d'un autre et de la mais le plus fréquent c'est quand même ils mettent tout d'un côté et ils déplacent et ils pour reconstruire la collection de l'autre côté mais j'ai déjà vu plusieurs fois des enfants qui alignent pour être sûr de pas en recomp de pas compter deux fois le même et qui ensuite pointent un par un en récitant

d- La branche calcul

I utilise le jeu Halli Galli pour travailler les décompositions du cinq. Ce jeu consiste à appuyer sur une sonnette lorsque l'enfant arrive à avoir cinq fruits identiques. Il faut parfois plusieurs cartes pour arriver à cinq fruits ce qui nécessite des additions successives, comme par exemple un et encore deux, trois et encore un, quatre puis encore un et l'enfant sonne. C'est

l'enchainement successif d'additions qui est décrit ici dans la règle du jeu et qui est alors codé dans la branche calcul.

20	I- donc y'a des fruits différents je sais plus y'a des bananes des prunes plein de fruits et quand y'a il faut appuyer sur la sonnette quand on a cinq fruits identiques avec deux trois ou une seule carte dès qu'il y a cinq fruits on appuie

e- La branche ordinal

I expose un jeu de plateau avec « un départ une arrivée » et des déplacements sur des cailloux ou des nénuphars en lisant l'écriture chiffrée sur les cailloux.

104	I- vraiment la suite des nombres à l'écrit y'a le jeu de plouf dans l'eau avec la petite grenouille là et je sais pas bien enfin t'as t'as des jetons et des petits ronds de deux couleurs un côté gris qui c'est représente la pierre le côté vert qui représente le nénuphar ils sont posés sur la mare y'a un départ une arrivée donc quand c'est gris ben la grenouille elle saute elle peut dire le nombre enfin le nombre ou le chiffre qui est écrit quand c'est vert c'est le nénuphar faut pas être dessus sinon elle tombe dans l'eau

Sur l'autre face du jeu il faut remettre les nombres écrits dans le bon ordre, c'est-à-dire dans la même position que la frise numérique. Il s'agit d'une situation de formulation avec éloignement dans l'espace pour les élèves qui ne savent pas lire l'écriture chiffrée. Pour ceux qui connaissent la suite orale des mots nombres à l'oral et qui savent lire l'écriture chiffrée, il s'agit d'un exercice de récitation et de lecture.

112	I- j'avais fait donc une face où y'avait pour positionner ces nénuphars parce que je leur demande de les positionner j'ai laissé des ronds avec le la constel enfin les nombres écrits dans la la le bon ordre pour qu'ils les placent au départ comme ça et dans le verso j'ai mis juste le départ et l'arrivée et j'ai plus mis

9.3- Dialectique savoir/connaissance à travers certaines activités décrites

a- Des savoirs vers les connaissances

4	I- tout le travail sur la comparaison des nombres heu que je travaillais sans plus enfin voilà et je me suis rendu compte pareil de l'importance de cette notion de comparaison de repère les uns par rapport aux autres sans forcément nommer la quantité mais arriver à dire que là ben y'en a plus et que là y'en a moins ou inversement et donc du coup continuer à à justement parler ces nombres donc ça c'est pareil ce bouquin là ça m'a fait réfléchir là-dessus du coup j'ai beaucoup plus travaillé sur cette comparaison des nombres et et à comprendre que quand on a une suite numérique et ben ceux qui sont à droite et ben c'est qu'ils sont plus grands que ceux qui sont à gauche qui sont plus petits et et donc voilà j'ai j'ai essayé de voilà de réfléchir autrement et de travailler différemment par rapport à cette comparaison

I s'appuie sur la suite orale des mots nombres à l'oral et la frise numérique à l'écrit pour montrer que ce qui se situe à droite du nombre cible est plus grand et ce qui se situe à gauche est plus petit, ou bien lorsque la suite orale des mots nombres est dépassée alors la collection est plus grande. Les savoirs sont montrés, énoncés par l'enseignant, puis entrainés répétés autant que nécessaire pour être réinvestis en situation par les élèves.

8	I- il parle dans le bouquin de Brissiaud il en fait il passe par la comparaison au départ terme à terme et du coup j'ai fabriqué des obj des des supports de comparaison au début heu heu où on a des heu c'est alors là bon

	lui il donne l'exemple avec des poules et des poussins donc sur la page y'a des poules alignées et des poussins alignés savoir est-ce que y'en a autant est ce qu'il y a plus de poules ou est-ce qu'il y a plus de poussins etc. au début on passe avec le feutre Velléda et puis on fait le terme à terme et puis on voit et puis après au fur et à mesure ben on passe par le on dénombre le nombre de poules on dénombre le nombre de poussins puis on compte y'a sept poules et six poussins ben si on on connait la suite des nombres on arrive à à savoir que quand c'est sept et ben c'est quand on dit la suite c'est après six donc forcément y'en a plus etc.

I décrit un travail de comparaison de quantités, sans dénombrer les collections, où la correspondance terme à terme est montrée : avec le feutre, la poule est reliée au poussin (juste en dessous). Puis l'enseignant décrit le passage de la correspondance terme à terme au dénombrement.

b- Des connaissances vers les savoirs

Dans cet exemple où les élèves construisent une collection importante d'objets donnée, I permet l'émergence de procédures différentes et il favorise la diffusion des stratégies possibles.

66	I- alors après y'a la construire une collection puis y'a la dénombrer ce qui est pas pareil non plus heu souvent la construire elle est enfin moi j'ai constaté que plus c'est les les collections sont importantes plus l'écart entre savoir la dénombrer et savoir la construire est di est grand c'est à dire que dénombrer une grande collection si on peut pas déplacer les objets c'est super compliqué parce qu'il faut être super organisé il faut avoir une stratégie alors que la construire ben ils les déplacent les objets donc ben c'est plus facile
67	Chercheur- donc avec des objets déplaçables ça ça se passe plutôt mieux
68	I- et puis alors c'est pour certains y'a pas de stratégie immédiate heu ils vont ben on a beau leur donner des jetons des crayons enfin ce qu'on veut qu'ils vont pouvoir déplacer heu ils vont pas forcément tous avoir l'idée d'organiser leur dénombrement et c'est vrai que là le fait de faire ça en groupe enfin ils sont chacun en individuel mais après de parler comment tu as fait montre nous ah ben oui toi tu t'es pas trompé comment il a fait pour pas se tromper enfin que chacun arrive à expliquer sa stratégie ben ça sert aux autres aussi quoi

Il recherche aussi parfois l'utilisation de collections intermédiaires orales basées sur la reconnaissance visuelle des quantités en utilisant les décompositions. I favorise l'évolution des connaissances.

9.4- Les niveaux d'activités de I

a- Niveau +3 : niveau noosphérien ou idéologique

+3		Questions		Ouvrage		Fiches		Compétences

PI_{+3} s'est posé beaucoup de questions pour savoir comment aborder le nombre avec les PS. Il s'est interrogé aussi sur la manière de parler les nombres dans une classe de TPS et PS.

PI_{+3} a trouvé des réponses dans Brissiaud (Brissiaud, 2007) qu'un stagiaire sortant de l'IUFM[70], lui a présenté. Ce petit ouvrage, qu'il a pu lire rapidement, a modifié sa pratique et sa façon de concevoir l'enseignement du nombre et les priorités à lui donner.

[70] Institut Universitaire de Formation des Maitres 1990-2013 remplacés par les ESPE (École Supérieure du Professorat de l'Éducation).

PI_{+3} a un fonctionnement de classe lui permettant d'avoir sa classe en demi-groupe par demi-journée, ce qui lui permet de privilégier la manipulation et le jeu. De façon occasionnelle il utilise des fiches pour un travail en autonomie. Toutefois PI_{+3} propose toujours une fiche, comme trace écrite pour les cahiers des élèves, cela peut être une fiche collective à partir d'un défi de classe ou bien une règle d'un jeu.

PI_{+3} travaille par compétences ce qui lui permet de prendre le temps en fonction des compétences enseignées.

b- Niveau +2 : situation de construction

+2		Situations fondamentales		Dénommer Décomposer Dénombrer jusqu'à dix		Reconnaissance globale Suite orale des mots nombres Numération écrite		Position Remettre dans l'ordre		Énumération

PI_{+2} intègre deux situations fondamentales dans son enseignement de la quantité : la comparaison et la construction de collections identiques.

PI_{+2} consacre une part importante de son enseignement à parler les nombres, c'est à dire à les dénommer et à éviter le comptage-numérotage (Brissiaud, 2003, p. 105). PI_{+2} s'appuie sur les décompositions qui sont toujours présentes dans son enseignement. PI_{+2} construit une progression autour du dénombrement des petites quantités jusqu'à dix.

PI_{+2} envisage l'enseignement de la reconnaissance globale des petites quantités comme fondamental pour le travail autour des décompositions. Il prend en compte l'enseignement de la suite orale des mots nombres ainsi que la suite écrite. PI_{+2} oriente aussi cet enseignement vers la numération écrite décimale de position avec l'introduction du tableau des nombres jusqu'à quatre-vingt-dix-neuf.

PI_{+2} prend en compte l'enseignement de la position notamment avec la suite écrite à remettre dans l'ordre.

PI_{+2} use des variables didactiques liées aux collections déplaçables ou non pour les intégrer dans son enseignement du dénombrement.

c- Niveau +1 et niveau 0 : situation de projet de leçon (dans la séance) et situation didactique

+1 & 0		Exemples d'activités de classe		Fabrication d'outils		Comptage numérotage		Diffusion des stratégies

$PI_{+1\&0}$ présente le jeu Halli Galli qu'il utilise dans la classe, il expose des situations avec éloignement dans l'espace à partir de poupées à habiller ou de table à dresser avec des assiettes et des gobelets en plastique. Il énonce des décompositions qu'il cherche dans les repères quotidiens des élèves, comme « deux yeux et un nez ou ton frère, ta sœur et toi ».

$PI_{+1\&0}$ fabrique des outils pour les activités de comparaison de quantité en s'appuyant sur un modèle de fiche existante[71] ainsi que sur l'ordre de la suite écrite des nombres en prolongeant un jeu existant.

$PI_{+1\&0}$ est conscient que le comptage numérotage introduit des erreurs et s'efforce, au prix d'une attention permanente en situation didactique, de toujours s'exprimer de façon adéquate.

$PI_{+1\&0}$ diffuse les stratégies des élèves, il les met en mots, les montre et permet aux élèves de s'en saisir.

d- Niveau -1 : niveau d'observation ou de dévolution

- 1		Exemples d'élèves		Réussites

PI_{-1} relate des exemples d'élèves en difficulté face à la mémorisation de l'écriture chiffrée ciblée exclusivement sur le six, huit et neuf, mais aussi des difficultés de mémorisation de la suite orale des mots nombres. PI_{-1} observe aussi des difficultés relatives à l'énumération, l'élève compte deux fois le même élément.

PI_{-1} observe des connaissances sur les décompositions lorsque l'élève utilise des collections intermédiaires orales pour construire des collections de même quantité.

9.5- Conclusion concernant I

I est marqué par la rencontre avec un ouvrage (Brissiaud, 2007) qui a modifié sa conception de l'enseignement du nombre à l'école maternelle, le niveau de construction ou de conception d'un thème (+2). Il intègre instantanément ces découvertes dans les niveaux de construction du thème et de leçon (+2) et (+1). Il s'astreint à une rigueur langagière et gestuelle pour « parler les nombres » au niveau de la situation didactique (0). Son observation fine des procédures des élèves et des difficultés le renseigne sur les savoirs et les connaissances mathématiques spécifiques (+2) pour enseigner le nombre.

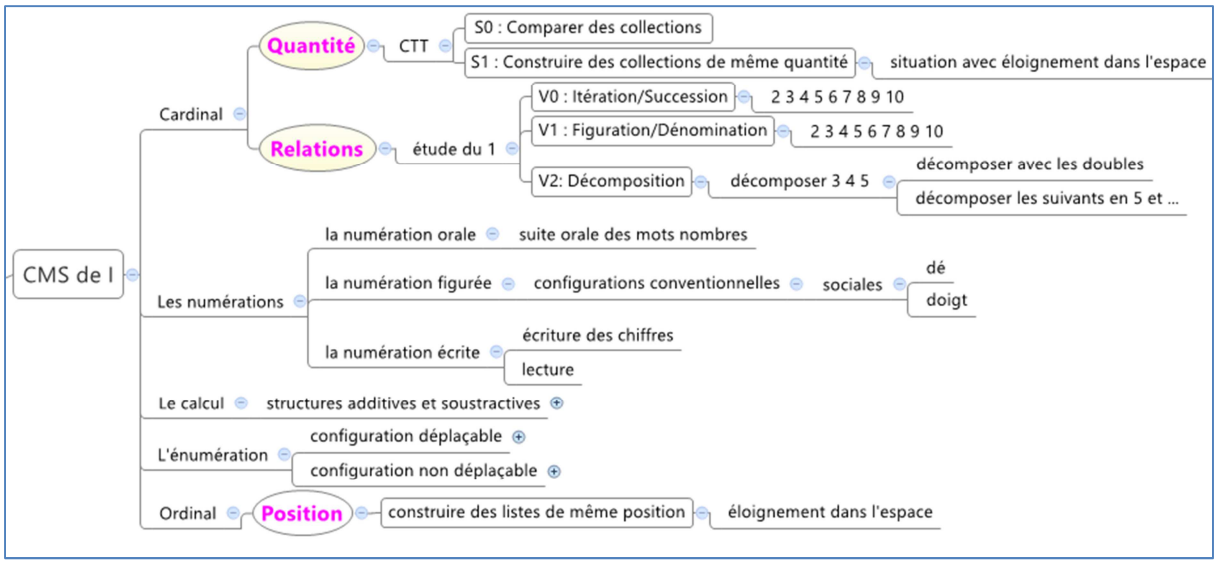
Niveau noosphérien ou idéologique	+3
Niveau de construction ou de conception d'un thème	+2
Niveau de projet de leçon et niveau de la situation didactique	+1 & 0
Niveau d'observation ou de dévolution	-1

TABLEAU 19 : ACTIVITÉ RÉFLEXIVE DE I

Pour résumer, I fait part de sa volonté d'acquérir de nouveaux savoirs professionnels. La lecture de l'ouvrage (Brissiaud, 2004) est une vraie révélation pour I qui lui permet une analyse de sa pratique et lui offre de nouvelles possibilités d'enseignement car il découvre de nouveaux savoirs mathématiques spécifiques à l'enseignement du nombre, comme « parler les nombres : un et encore un ». Cet ouvrage, qui répond parfaitement à ses besoins, a modifié son enseignement, ses connaissances mathématiques spécifiques. Pour I le nombre doit se construire, il identifie la correspondance terme à terme comme une première étape de la construction du nombre. Pour cela, il utilise un lexique spécifique « juste ce qu'il faut » dans ses consignes. I insiste sur les trois premiers nombres puis sur

[71] J'apprends les maths je compte…tu compares, Rémi Brissiaud, Retz.

l'étude successive des nombres jusqu'à dix. Il utilise régulièrement les décompositions avec les GS pour parler les nombres et propose des situations pour entrainer les décompositions. I entraine également la reconnaissance des constellations du dé, des doigts, mais aussi l'écriture chiffrée ainsi que l'écriture des chiffres et des nombres. I a introduit, dans son enseignement, le tableau des nombres qui note une élémentarisation de la GS. Pour la suite orale des mots nombres, I n'accorde pas beaucoup de temps à son enseignement car, quoiqu'il en soit, il considère que les élèves finissent par l'apprendre. I reste confronté à la difficulté persistante d'élèves qui suscite, de sa part, de nombreuses questions. I questionne le poids de la mémoire dans le processus d'apprentissage où finalement l'enseignant n'a que peu d'influence. I considère implicitement que ce qui se mémorise n'est pas de sa responsabilité. L'organisation particulière de l'école (en demi-groupe classe par demi-journée) confère à I des conditions optimales pour observer les élèves en mathématiques. Aussi, cette observation détaillée, précise et fine des procédures des élèves en situation lui permet d'identifier des macro-variables de l'énumération, à savoir le caractère déplaçable ou pas des collections, et de dresser une liste des stratégies possibles des élèves.



10- L'ENSEIGNEMENT DE J

Au moment de l'entretien J a des GS et CP.

10.1- L'arbre des savoirs du nombre de J

a- Focus sur les cinq branches de l'arbre des savoirs du nombre

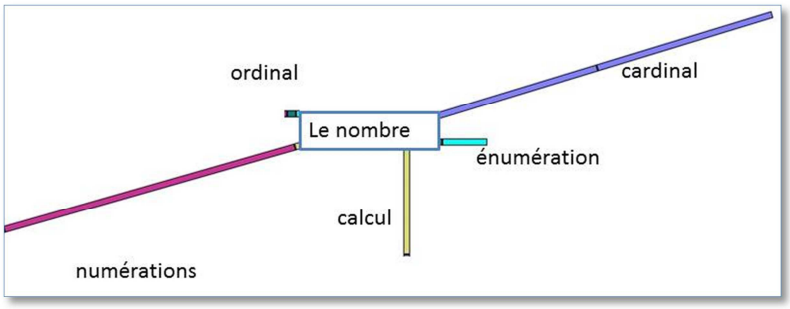


FIGURE 87 : L'ARBRE DU NOMBRE DE J

L'arbre du nombre de J est largement représenté par des enseignements sur les numérations et le cardinal, suivis par le calcul puis l'énumération et l'ordinal. Tous les savoirs sont représentés.

b- Durée des extraits codés

Cinquante-et-un extraits sont codés dans la branche cardinal et quarante-deux dans la branche numérations. Ensuite, six extraits sont codés dans la branche calcul ; deux extraits dans ordinal et deux extraits dans énumération.

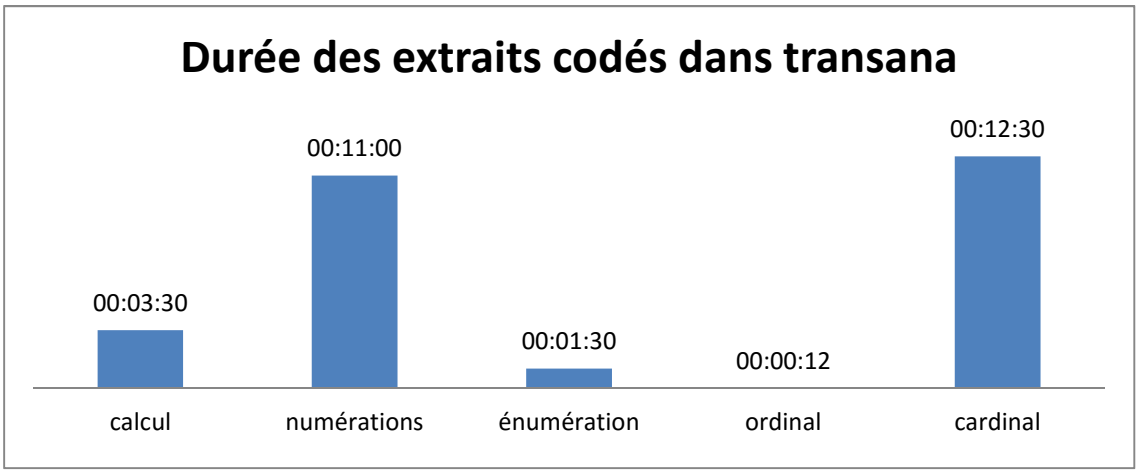


FIGURE 88 : HISTOGRAMME DES EXTRAITS CODÉS EN MINUTE POUR J

10.2- Quelles connaissances mathématiques spécifiques sont présentes dans chacune des branches ?

a- La branche cardinal

La branche cardinal-relations

Sur cette branche, J décrit des activités où il s'attache à travailler les premiers nombres un deux trois. La notion de succession, c'est-à-dire d'itération de l'unité pour construire le nombre suivant est présente en filigrane dans les propos de J.

21	J- et puis après j'allais sur les nombres un deux trois au début pour la PS et en fait après heu je me suis aperçu que ça fonctionnait pas forcément très très très très bien parce que y'avait ce souci là justement un deux trois tu vois c'était difficile à passer donc au lieu de partir de là je suis parti sur ben y'a trois objets je disais y a trois objets on voyait les trois objets et après de là on redescendait vers le deux et puis vers le un on a aussi le problème du un qui pose souci parce que nous un c'est à la fois ben y'a une table heu voilà tu vois là-bas une table et puis une table ce cet aspect chiffre quoi et je lisais que justement ça ça posait moins souci aux enfants anglophones parce que eux ils ont a et one

J identifie l'ambiguïté du « un », en français, et contourne la difficulté rencontrée en commençant par trois puis deux et un.

Ensuite, J décrit toutes sortes d'activités liées à la décomposition des sept premiers nombres.

39	J- moi au niveau des décompositions de nombres par exemple on va on va pas plus haut que six sept pas au-delà après dénombrer on peut dénombrer des plus grandes quantités

Dans l'entretien J se réfère souvent à Brissiaud, il utilise l'album à calculer (Brissiaud, Boulard, Ouzoulias, & Riou, 2004) qui propose les décompositions des nombres jusqu'à sept.

Ici J décrit la situation du gobelet (Brissiaud, Boulard, Ouzoulias, & Riou, 2002).

81	J- donc on cache un certain nombre de gobelet sous le heu de jetons sous le gobelet pardon et donc il faut que l'autre devine enfin entre guillemets devine c'est le côté un peu magique magicien mais en fait c'est pas vraiment deviner c'est la c'est la décomposition du nombre combien y'a de de jetons cachés

Enfin, il évoque des activités relatives au passage à cinq, à des paquets de cinq.

101	J- dans ma classe ce que j'ai observé après est-ce que c'est lié au fait qu'on a pas mal travaillé ces nombres là je sais pas le passage par le cinq aussi les cinq doigts de la main constellation un peu repère je sais pas

La branche cardinal-quantité

J donne des remarques d'ordre général sur la définition du cardinal, sur la quantité.

21	J- donc en fait cet aspect quantité me parait important à à travailler dès le début ça c'est cette familiarisation dès dès la PS peut-être à alors au début je ce que je faisais c'est que je faisais compt j'attaquais par déjà bon toujours comparer des quantités avec les TPS donc pour avoir cette cette notion de quantité qui y'en a plus qui en a moins y'en a beaucoup y'en a pas beaucoup tout ce vocabulaire-là

Il installe le vocabulaire, beaucoup-pas beaucoup et décrit la première situation qu'il met en place, S0 : comparer deux collections.

265	J- y'a toujours aussi avec les comparaisons des quantités
266	Chercheur- ah oui tu m'as dit que tu partais toujours de comparaisons
267	J- au début pour avoir cette notion de quantité

Pour J, la situation fondamentale « comparer des collection » est intimement liée à la notion de quantité, en tout cas, elle est première. Ensuite J présente le dénombrement ainsi que le domaine numérique dans lequel il propose des situations de dénombrement.

39	J- après dénombrer on peut dénombrer des plus grandes quantités
40	Chercheur- oui jusqu'à combien à peu près
41	J- oh en GS oh une bonne vingtaine

Puis J donne des exemples de situations, comme la situation fondamentale « autant que » et celle « comparer de quantités ».

Comparer des collections :

J expose deux types de situations de comparaison, une où il vise le dénombrement, une autre où il vise un travail sur la quantité. Il module ces deux types de situations en proposant des domaines numériques différents.

277	J- alors il va y avoir deux deux types de situations là à la fois les situations où on va être sur un sur le domaine numérique où on va pas avoir besoin de compter
278	Chercheur- d'accord
279	J- où on va reconnaitre là c'est dans mes quilles souvent le jeu de de la sorcière avec les quilles là le château de la sorcière y'a six quilles donc là visuellement on voit qui en a le plus qui en a le moins et puis y'a d'autres situations où il va falloir avoir une autre stratégie parce que le nombre est plus important on n'est pas dans le nombre où on pas où on peut avoir une reconnaissance globale donc là on va être sur sur heu

J décrit la situation des châteaux de quilles où deux équipes s'affrontent en détruisant le maximum de châteaux (des quilles) et à l'issue de la bataille « on voit là on compare ». J distingue deux cas de figures dans cette situation, le cas où « on va être sur un sur le domaine numérique où on va pas avoir besoin de compter » où on reconnait visuellement quelle est la collection qui a la plus grande quantité « on va reconnaitre » « on voit ». Cette reconnaissance visuelle va être entrainée sur de petites quantités et même avec des quantités plus importantes mais alors J prendra soin de disposer les collections pour faciliter cette reconnaissance visuelle. Il s'agit ici d'une première comparaison directe que nous pouvons nommer "perceptive" fondée sur la reconnaissance visuelle globale. Si cette reconnaissance visuelle n'est pas possible du fait de l'inorganisation de la collection, alors J décrit deux stratégies employées : la correspondance terme à terme lorsque les collections sont déplaçables ou bien le dénombrement pour des situations de comparaison directe des collections.

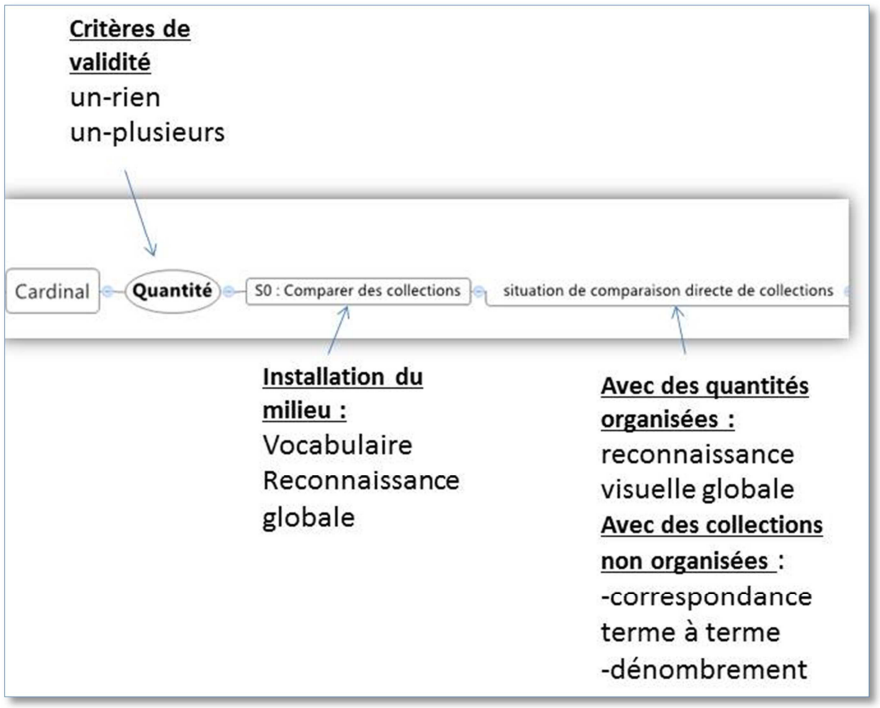


FIGURE 89 : INTERPRÉTATION DE LA BRANCHE CARDINAL-QUANTITÉ DE J

Construire des collections de même quantité

Il développe le jeu de la marchande « avec l'utilisation de la monnaie parfois » mais sans plus de détail. Une comparaison directe entre les pièces et le prix des articles est possible, mais il ne dit rien dans ce sens.

385	J- la marchande ils aiment bien et puis on peut aussi là à ce moment-là heu avoir heu le système des commandes qui fait que on doit heu dénombrer la collection pour faire sa commande parce qu'on peut pas avoir heu on peut pas mettre les collections à côté on peut pas enfin on peut pas rapprocher et du coup on enfin là on est vraiment sur le dénombrement pour faire une commande similaire par exemple tiens l'élève J elle a elle a elle a eu tout ça de bonbons je voudrais qu'on ait pareil il faut que tu ailles commander à la marchande le nombre de bonbons après on peut introduire les paquets la marchande vend les bonbons par paquets de cinq avec les CP paquets de dix et du coup on est dans des et puis y'en a un qui dit qui donne les paquets puis après on peut vérifier très facilement après on peut utiliser la correspondance terme à terme pour valider heu
386	Chercheur- et est-ce qu'il y a aussi des fois des commandes écrites est-ce

	qu'on peut aller jusque là
387	J- oui oui avec le chiffre avec le chiffre pas très grand pour les GS tu vois mais on peut aussi

Quoiqu'il en soit, la comparaison directe est empêchée, les collections sont espacées « on peut pas mettre les collections à côté on peut pas enfin on peut pas rapprocher ».

Intervient alors un « système des commandes » détaillé par J, il s'agit d'une situation de formulation à autrui « pour faire une commande similaire par exemple tiens Justine elle a elle a eu tout ça de bonbons je voudrais qu'on ait pareil il faut que tu ailles commander à la marchande le nombre de bonbons », avec une commande écrite.

Cet exemple détaillé par J, montre l'évolution des connaissances liées à cardinal-quantité de la correspondance terme à terme à la formulation à autrui avec un écrit mathématique.

c- La branche numérations

Pour J il s'agit d'un « apprentissage d'une suite de mots », et il mentionne différentes connaissances spécifiques comme le fait « d'intercaler quelque chose entre ces mots », il propose je jeu du furet qu'il réalise avec les GS et les CP, puis le « passage sous le tunnel ».

233	J- alors après la comptine numérique bon bé c'est un apprentissage heu d'une suite de mots après la comptine on la on la varie comme je te disais un stylo deux stylos etc. pour essayer de la d'intercaler quelque chose entre ces mots après on fait le jeu du furet on se met tous ensemble et ça les GS et les CP on le fait ensemble tu vois ça c'est une chose qu'ils peuvent bien aller ça c'est quelque chose que je fais soit en début de séance parfois soit sinon ça peut être au moment du rituel aussi tu vois ça fait partie d'activité qui peuvent être dans les dans les deux après y'a le passage sous le tunnel

J joue avec une lampe de poche pour représenter le passage sous le tunnel et demander de « sauter » un nombre lorsque la lampe s'éteint.

237	J- donc j'ai une lampe de poche dans dans la classe on éteint les autres lumières mais c'est quand même pas sombre hein tu vois c'est juste c'est juste éclairé pas éclairé et on dit les nombres pareil soit avec le système du furet où chaque enfant dit un nombre à la suite soit on les dit heu soit c'est un enfant qui dit tous les nombres et en fait au moment la lampe est éclairée on dit tous les nombres au moment où j'éteins la lampe hop ça veut dire qu'il va y avoir un nombre à sauter ça ils adorent ce le jeu du tunnel vraiment ça leur plait beaucoup beaucoup beaucoup

J détaille différents entrainements pour la mémorisation de la suite orale des mots nombres : le jeu du filet, la fusée, etc. Chaque proposition traduit des connaissances spécifiques pour la numération orale, compter à rebours, s'arrêter au nombre cible.

243	J- on part d'un certain nombre et on arrive à un autre nombre tu vois pas partir spécialement de zéro et puis s'arrêter à tel nombre y'a le jeu du filet avec les pêcheurs
244	Chercheur- oui oui oui
245	J- au niveau de la comptine qui fonctionne et après heu la fusée ça c'est à l'envers bon avec les GS on part uniquement de dix

J sépare aisément les attendus pour les différents savoirs, il perçoit une différence entre la comptine qui peut se mémoriser jusqu'à trente, les décompositions qu'il travaille jusqu'à sept et les situations de dénombrement jusqu'à vingt.

39	J- après y'a une différence entre la comptine où tu peux aller plus loin avec la comptine tu vois y'a heu en GS tu peux aller jusqu'à trente

J détaille longuement les différents stades de son enseignement vis-à-vis de la mémorisation de la suite orale des mots nombres, de l'écriture et de la lecture des chiffres et des nombres ainsi que des configurations conventionnelles ou pas.

139	J- ça c'est plutôt pour connaître le nom des nombres tu vois puisqu'après au niveau des objectifs il y a l'aspect bon comptine y'a l'aspect dénombrement y'a l'aspect connaissance aussi de la comptine chiffrée associer le nombre écrit et le nombre oral alors là en fait ça fait trois associations y'a associer le nombre écrit le nombre oral et la collection voilà ces trois choses là

J décrit « le dictionnaire des nombres » qu'il réalise aussi avec les CP, et fait part de son questionnement sur la primarisation de ses propositions pour les GS, compte tenu de la configuration de sa classe.

150	J- voilà voilà après il peut y avoir j'te dis les différentes variables ça peut être avec les jetons ça peut être avec les points ça peut être avec mes doigts aussi je montre sept sur mes doigts et ils doivent eux et puis ça se fait aussi dans d'autres sens où à l'inverse je mets une collection de sept objets eux ils doivent m'écrire le chiffre tu vois ça se fait dans tous ces sens-là y'a le dictionnaire des nombres aussi je fais le dictionnaire des nombres parce que je le fais aussi avec les CP et je le fais aussi avec les GS du coup ça me permet de faire une acti je cherche aussi des activités un peu comme ça en commun des activités du coup c'est peut-être un peu embêtant parce que je suis sur des activités un peu maternelles mais un peu peut-être primarisées je ne sais pas je ne sais pas ou peut être que c'est l'inverse aussi parfois je maternalise mes CP

J enseigne également l'écriture chiffrée, « avec le passage par le corps » pour le geste d'écriture puis l'entrainement sur fiche pour l'aspect graphique.

217	J- à ce moment-là oui voilà je travaille je la travaille en parallèle avec le passage par le corps en salle de motricité on repasse sur des des nombres je le fais quand même même s'ils sont en GS je le fais quand même bon ça a été plus ou moins fait avant mais je le fais quand même puis après j'ai tout un tas de petits classeurs où ils ont des pochettes plastifiées et à l'intérieur ils ont aussi ces nombres pareil avec des petits entrainements quoi mais c'est l'aspect plutôt graphique

Cet enseignement requiert du temps pour l'entrainement en classe.

c- La branche calcul

Le premier jeu, que je nomme « la course à cinq »[72] se joue à deux avec un gobelet et des jetons. Les joueurs peuvent déposer, à tour de rôle, un, deux ou trois jetons à la fois, le premier qui dit cinq a gagné. J fait remarquer à deux reprises, qu'il ne faut pas dépasser cinq, respecter le nombre cible, fait partie des connaissances qu'un élève de l'école maternelle doit atteindre.

297	J- je pense à d'autres jeux qui sont intéressants ça je l'ai trouvé dans le cap maths CP j'ai trouvé cette manipulation dans le cap math CP et en fait je la fais aussi avec les les GS donc c'est un jeu qu'on fait il faut qu'on fait en binôme eux et le eux et le maitre
298	Chercheur- d'accord
299	J- donc on a possibilité de prendre un jeton deux jetons ou trois jetons on a un gobelet et on doit arriver à un nombre donné alors avec les CP c'est dix avec les GS je fais cinq

J explique les procédures de l'élève qui utilise les doigts pour prendre en compte toutes les étapes du jeu, il lève un doigt, puis en rajoute deux et encore un. L'utilisation des doigts lui

[72] En référence à « la course à vingt » de Guy Brousseau (1998). La « course à cinq » est une belle installation du milieu avec de jeunes élèves de la maternelle pour « la course à vingt ».

permet également de « voir » ce qu'il peut jouer en observant les doigts baissés. Dans un premier temps J accepte cette utilisation des doigts, puis il va demander à l'élève de ne plus les utiliser. Ce jeu sur de petites quantités avec des ajouts successifs favorise la recherche du complément à cinq compris entre un et trois. Ensuite J énonce les problèmes de distribution. Pour cet exemple, J analyse sa pratique à la suite d'une lecture faite. Il décrit une situation de partage d'un paquet de douze chocolats en trois enfants.

328	J- tu vois il va y avoir les problèmes de d'ajout de diminution de complément de partage aussi de distribution après au niveau de la distribution ça j'ai lu que heu des fois tu sais on donne quelque chose heu on donne un paquet de j'sais pas moi de chocolat de douze chocolats à distribuer puis on dit ben tiens on va les partager en trois enfants et en fait j'ai je lisais que en faisant partager comme ça parfois en donnant les chocolats on n'a pas forcément une situation qui est très mathématique on n'est pas beaucoup dans le nombre ils ont même pas besoin de savoir combien y a de chocolats puisqu'ils vont faire un un un un on va juste dans le un finalement donc leur dire ben tiens il va y'a un paquet de chocolats à partager il va falloir essayer de trouver combien on peut en donner à chacun quitte à leur prêter des jetons là on va être dans une situation plus symbolique ou alors ils vont pouvoir utiliser d'autres constellations enfin dessiner heu ils sont pas encore beaucoup en GS dans le dessin les CP vont passer sur le dessin les GS sont plutôt avec les jetons et là on va être plus dans une situation mathématique tu vois chose que des ça au début j'avais pas vu quand j'enseignais je on distribuait les chocolats et je me disais qu'on était dans les maths et que je j'avais fait beaucoup de maths alors qu'en fait non pas vraiment

À travers cet exemple J fait part de sa réflexion sur les situations de partage, il entrevoit la situation d'action, qui empêche la distribution directe, et développe différentes collections intermédiaires, matérielles (les jetons), écrites (avec le dessin) pour résoudre le problème. J décrit une situation d'action où l'action directe, ici la distribution un à un, est empêchée. Il fait référence également à une collection intermédiaire matérielle avec les jetons ou écrite avec les constellations ou le dessin. Sur cet exemple-là, J installait le milieu en favorisant la distribution un chocolat-un enfant (correspondance terme à terme) jusqu'à épuisement des chocolats et s'arrêtait dans un premier temps ici, d'où son sentiment de ne pas avoir fait beaucoup de mathématiques. Suite à des lectures, qu'il ne mentionne pas, il prolonge cette situation en situation d'action avec anticipation et utilisation de collection intermédiaire matérielle et écrite. L'évolution des connaissances est repérée et prise en compte.

d- La branche énumération

Il n'y a pas d'exemple d'activité permettant de rencontrer des connaissances mathématiques spécifiques du professeur en situation. C'est la manière dont il appréhende l'observation des difficultés de l'élève qui est développée ici. J observe des stratégies diverses selon que les collections sont organisées ou pas, déplaçables ou pas.

279	J- après ça va dépendre aussi tu vois là le nombre va dépendre de si ma collection elle est organisée ou si elle est pas organisée si elle est organisée même si c'est une collection de heu sept huit on va pouvoir sans compter et sans adopter de enfin sans utiliser d'autres stratégies voir qui en a le plus qui en a le moins après si la collection même si elle est de huit qu'elle est pas qu'elles sont pas organisées là il va falloir soit dénombrer les deux ensuite on a nos deux nombres et on compare soit et bien on va utiliser un autre moyen c'est à dire correspondance terme à terme si on peut déplacer les deux collections après y'a aussi cette variable là justement on introduit dans certaines situations problème le fait que la collection elle est pas déplaçable donc il va falloir trouver une autre stratégie donc là on passe par le dénombrement la mémorisation du nombre dénombrement de l'autre côté mémorisation des nombres et après comparaison des nombres et là on est vraiment dans de l'abstrait

J énonce : « il y a un problème au niveau de je place mon doigt sur le jeton au bon moment je n'oublie pas de jeton ». La difficulté liée à la synchronisation entre le geste, pointer l'élément de la collection « je place mon doigt sur le jeton » et la suite orale des mots nombres « au bon moment » est identifiée par J. Un peu plus loin, J poursuit : « y'en a qui ont le biais qui ont le truc de le faire [d'organiser la collection] y'en a d'autres qui pas du tout ».

95	J- puis après on essaye d'expliquer un petit peu toutes les solutions qu'on a trouvé alors là ben y'a un enfant qui va les compter un à un et je m'aperçois que même si ils ont bien la compt tu vois ce que je disais tout à l'heure même le problème de la comptine et de la quantité à dénombrer même s'ils ont bien la comptine ils arrivent pas forcément à dénombrer parce qu'il y a un problème au niveau de je place mon doigt sur le jeton au bon moment je n'oublie pas de jeton surtout que ma collection de jetons elle est pas organisée donc après voir si eux ils vont mettre en place des stratégies pour organiser ou non leur collection y'en a qui ont le biais qui ont le truc de le faire y'en a d'autres qui pas du tout après y'a différentes organisations de collections tu vois y'en a qui me mettent qui me le mettent en file qui vont avoir besoin de beaucoup d'espace pour faire un long une chenille en fait tu vois et puis comme ça ils vont compter un après l'autre ils sont sûrs de pas en oublier y'en a qui mettent deux à deux

En l'absence de savoir identifiable et identifié tout se passe comme si ces connaissances-là étaient finalement innées. Et J de conclure : « je crois qu'il y a quelque chose-là qui se joue ». J repère un espace pour ce savoir presque plus transparent.

283	J- après y'a le fait je crois qu'il y a quelque chose-là qui se joue au niveau de quand on pointe les objets de dire en même temps le nombre en pointant les objets et donc là y'a quelque chose qui se passe au niveau de du temps tu vois dans le sens où y'a ce décalage temporel où parfois ils vont trop vite à l'oral ou alors voilà y'a ce décalage entre le pointage et et donc ça ça fait souci et y'a le souci aussi de pas en oublier parce que quand la collection est pas organisée quand ils ont pas forcément la stratégie et ben ils vont recompter plusieurs fois le même même jeton je suis souvent dans les jetons hein et du coup voilà on a déjà ce problème-là

e- La branche ordinal

Depuis le début de l'entretien il y a une ambiguïté avec l'aspect ordinal qui est directement associé à la comptine numérique. Ceci mis à part, il y a deux extraits codés sur cette branche ordinal-relations. Les connaissances repérées ne sont pas exposées en tant que telles. Les deux exemples portent sur les mêmes connaissances, à savoir la notion de déplacement juste avant et juste après « le bon jour aujourd'hui » dans l'exemple de la date et sur la frise numérique pour le second exemple.

61	J- alors là on est aussi dans le nombre parce qu'on cherche bon le jour d'aujourd'hui et on cherche le jour d'avant donc hier
62	Chercheur- d'accord
63	J- donc j'sais plus l'autre jour on était le SIX et on a cherché que la veille on était le cinq et puis après on cherche le jour d'après donc le sept

La position, l'orientation, l'origine n'est pas détaillée par J bien qu'il utilise des jeux de déplacement dans sa classe. La seule chose qui peut être dite à ce sujet, est que J ne décrit pas de situation sur ce savoir dans cet entretien.

10.3- Dialectique savoir/connaissance à travers certaines activités décrites

a- Des savoirs vers les connaissances

Lorsque J décrit l'activité du gobelet pour travailler la décomposition des nombres jusqu'à sept, il présente différentes étapes « au début ja j'ai fait moi avec devant tout le gr devant le groupe ». L'enseignant montre d'abord devant tout le monde, telle la visite d'une œuvre. Ensuite « je prends des élèves et on on et en fait on le fait tous les deux ». Enfin « et puis après là on en est au stade où ils le font par deux par petits groupes de deux » et là « j'ai pris un tout petit nombre tu vois et on s'est pas mal entrainé ». Dans cette description, la première étape est marquée par l'enseignement du professeur qui montre le savoir en collectif, il remontre le savoir en individuel[73] et s'assure des connaissances minimales de chacun (avec un très petit nombre) pour passer ensuite à la phase de l'entrainement et alors à ce stade-là, les connaissances vont se développer progressivement avec la rencontre des nombres (décomposition de deux, de trois, de quatre…).

b- Des connaissances vers les savoirs

J décrit une activité de recherche lors d'un défi maths maternelle « et là on essaye de voir un petit peu chacun cherche j'aime bien les activités comme ça où ils passent du temps à chercher ».

95	J- par exemple sur une feuil une trentaine on va jusqu'à une trentaine sur une feuille et je leur dis on va essayer de les compter et donc là chaque enfant va être un peu isolé et essayer de chercher une solution

Il met en place ce moment individuel où chaque enfant est face à ses connaissances et essaye, la notion de temps soulignée par J permet une implication de l'élève qui s'autorise à chercher une solution « et donc là chaque enfant va être un peu isolé et essayer de chercher une solution ». Puis, vient la phase de la mise en commun, de la validation des solutions trouvées « et puis après on essaye d'expliquer un petit peu toutes les solutions qu'on a trouvées ». Dans cet exemple J ne dit rien sur la phase d'institutionnalisation qui confère le changement de statut de la connaissance en savoir ; quoiqu'il en soit, J décrit un processus qui part des connaissances individuelles des élèves, qui évoluent avec les connaissances des autres et qui va vers le savoir.

115	J- à chercher c'est vrai que au début quand on est sur ces temps de recherche y'en a qui heu voilà ou alors ben ils trouvent pas ou alors heu il bon y'en a qui font un peu autre chose aussi donc ils trouvent pas ils veulent passer à autre chose heu passer à une autre phase et en fait en développant comme ça ces temps de recherche en voyant qu'après il va y avoir quelque chose aussi qui va se passer quelque chose après qu'après on va en discuter ensemble et que je vais leur demander qu'est-ce qui ont qu'est-ce qu'ils ont trouvé et que même s'ils ont pas trouvé le résultat c'est ils s'aperçoivent que c'est pas forcément ce qui m'intéresse ben du coup ça ça fait que ce temps de recherche là est plus riche plus on avance dans l'année plus on avance et plus on en a a fait et plus ce temps de recherche est intéressant en début d'année tu vois des fois c'est un peu la foire sur ces temps de recherche parce que parce qu'ils ont pas l'habitude ils sont petits encore

[73] Il s'agit d'une pratique courante à la maternelle, en effet, les jeunes élèves ne se sentent pas toujours concernés par « le collectif », l'enseignant est alors obligé de répéter soit dans des petits groupes, soit en individuel.

10.4- Les niveaux d'activités de J

a- Niveau +3 : niveau noosphérien ou idéologique

+3		« Un », déterminant indéfini et adjectif numéral		Habillage des situations		Situation problème recherchée		Contrainte de la classe à trois niveaux		Compter sur les doigts à l'élémentaire		Question sur la formation

PJ_{+3} pense que l'ambiguïté linguistique autour du « un » ajoute une possible confusion chez les jeunes élèves. Il adhère complètement à la réflexion de Brissiaud (Brissiaud, 2007, p. 86) selon laquelle la distinction « one-a » en anglais enlève la polysémie du « un » français.

PJ_{+3} explique son changement de pratique par rapport à l'habillage des situations. Alors qu'il passait beaucoup de temps et d'énergie dans son travail de classe « à découper, à bricoler », à préparer le matériel en adéquation avec son thème (J n'a pas d'ATSEM pour l'aider dans cette préparation matérielle), il s'autorise, à présent, à utiliser plus souvent des jetons ou des haricots. Le fait d'avoir entendu en stage de formation continu que l'utilisation de jetons à la maternelle est possible, lui permet d'être « décomplexé ». Tout se passe comme si, à la maternelle, le matériel proposé pour les situations devait être à l'image du matériel de puériculture c'est-à-dire gros, coloré et accroché à un thème porteur. J ne dit rien quant à l'utilisation de jetons qui n'enlève rien au caractère mathématique des situations ni à la dévolution facilitée par l'habillage des situations par exemple.

PJ_{+3} propose des situations problème pour privilégier des moments de recherche. Cela est vrai pour les mathématiques de façon générale mais aussi dans d'autres disciplines.

PJ_{+3} prend en compte les besoins de sa classe à multi-niveaux et a toujours en tête la recherche d'activités à partager avec ses différents niveaux, ou bien des activités à décliner en fonction de ses deux niveaux. Cette préoccupation est toujours présente dans sa recherche d'activités, de situations.

PJ_{+3} se questionne sur l'utilisation des doigts par les élèves de l'élémentaire dans des situations de calcul, ce qui a des répercussions dans son acceptation et sa tolérance à la maternelle.

PJ_{+3} fait part rapidement de sa formation et de son début de carrière ainsi que de sa réflexion sur la scolarisation des enfants de moins de trois ans, qui, dans de bonnes conditions d'accueil, est tout à fait profitable.

b- Niveau +2 : situation de construction

+2		La comptine pour apprendre la suite orale des mots nombres, pour dénombrer, pour décomposer, correspondance écrit/oral L'affichage de la frise numérique, le dictionnaire des nombres L'écriture chiffrée		La comparaison des quantités		Ajout, retrait, compléments, partage, distribution

PJ_{+2} envisage un apprentissage autour de la numération orale. Il planifie des comptines pour entrainer la mémorisation de la suite orale des mots nombres, pour la mémorisation des décompositions et pouvoir utiliser ensuite ces mots nombres dans le dénombrement.

L'enseignement lié à l'écrit avec la correspondance oral/écrit, l'écriture chiffrée ainsi que les supports tels la frise numérique et le dictionnaire des nombres sont décrits ici par PJ_{+2}.

PJ_{+2} énonce une progression autour de la comparaison des quantités en tenant compte de la discrimination visuelle des petites quantités.

PJ_{+2} présente des possibles sur le calcul, en parlant d'ajout, de retrait, de compléments, de partage et de distribution.

c- Niveau +1 et niveau 0 : situation de projet de leçon (dans la séance) et situation didactique

+1 & 0		Exemples d'activités		Détail du fonctionnement de la journée

$PJ_{+1\&0}$ donne des exemples du déroulement de certaines activités, de jeux.

$PJ_{+1\&0}$ détaille le fonctionnement et le déroulement de la journée, les moments collectifs ou plus individuels, l'organisation des ateliers.

d- Niveau -1 : niveau d'observation ou de dévolution

- 1		Facilités et difficultés observées		Adaptations aux élèves		Cas d'élèves en particulier		Évaluations		Dévolution	

PJ_{-1} observe des difficultés et des réussites chez ses élèves. Réussites liées à la mémorisation de la suite orale des mots nombres et une aisance générale par rapport aux nombres. PJ_{-1} constate que ses élèves sont performants, à l'aise. Toutefois PJ_{-1} relève des difficultés pour les élèves par rapport à la notion de quantité, à la mémorisation des mots nombres onze douze treize et surtout seize. Des difficultés observées liées à ses choix didactiques notamment sur " un deux trois " qui ne « fonctionnait pas forcément ». PJ_{-1} note des difficultés liées à l'énumération. Il ne les nomme pas ainsi puisqu'il n'identifie pas l'énumération comme un savoir à part entière mais il décrit très précisément et finement les difficultés des élèves et les problèmes relatifs à la synchronisation entre la suite orale des mots nombres et le pointage des éléments de la collection, au traitement de tous les éléments une et une seule fois, à l'organisation d'une collection à configuration déplaçable ou non déplaçable.

PJ_{-1} examine l'utilisation des doigts dans des situations de calcul et anticipe sur les difficultés futures pour se débarrasser de l'automatisme de compter sur les doigts observé à l'élémentaire.

PJ_{-1} laisse une grande part à l'observation des réactions et des difficultés des élèves pour lui permettre de s'adapter en situation didactique. Ce modèle structurel permet effectivement des observations et des interprétations du travail des élèves au niveau -1 pour en tenir compte et rectifier, modifier la situation didactique au niveau 0.

PJ_{-1} décrit le cas particulier d'une première scolarisation non réussie d'un élève et des conséquences de celle-ci sur ses apprentissages.

PJ_{-1} expose ses observations lors du processus de dévolution dans les activités de recherche. PJ_{-1} les inscrit dans la durée et décrit successivement les différentes étapes pour certains élèves passant de « ils font un peu autre chose », « ils veulent passer à autre chose » ou

« c'est un peu la foire » à « plus on avance dans l'année […] et plus ce temps de recherche est intéressant ».

PJ_{-1} évalue les élèves en début d'année puis régulièrement ce qui lui donne des repères par rapport à la difficulté ou aux erreurs des élèves.

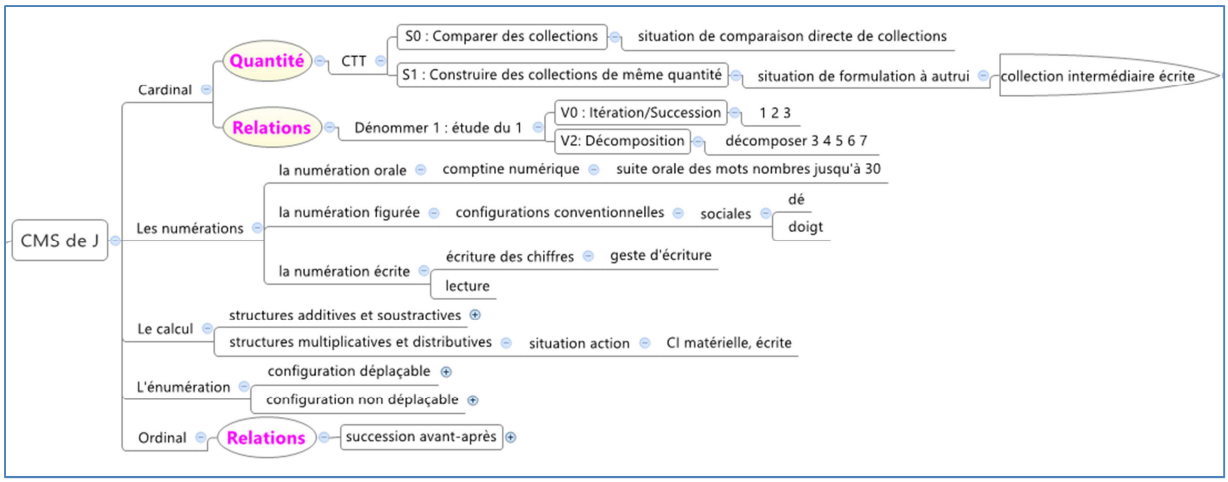
10.5- Conclusion concernant J

J raconte son enseignement du nombre à l'école maternelle en détaillant sa programmation et parfois ses progressions en s'appuyant sur des exemples d'activités (+2). Le recours aux réactions et aux difficultés des élèves observées par PJ_{-1} entrainent des adaptations au niveau de la situation didactique (0) qui ont des répercussions sur la situation du projet (+1). J se documente sur l'enseignement du nombre pour construire son thème (+2), le milieu M_{+2} est donc composé entre autres de manuels et de livres du maitre de CP. Il s'intéresse à l'enseignement à l'école maternelle en général (+3) et ses lectures ont des répercussions sur les autres niveaux. J tire parti des lectures, des recherches mais également des observations d'élèves pour adapter et modifier sa pratique (+1) et (0) et transforme ainsi son point de vue dans cette activité réflexive « il apprend dans son activité professionnelle » (Margolinas, 2002a, p. 145).

Niveau noosphérien ou idéologique	+3
Niveau de construction ou de conception d'un thème	+2
Niveau de projet de leçon et niveau de la situation didactique	+1 & 0
Niveau d'observation ou de dévolution	-1

TABLEAU 20 : ACTIVITÉ RÉFLEXIVE DE J

En résumé, J développe son enseignement du nombre en GS en exposant, pour la quantité, des situations fondamentales « comparer et construire des collections ». J joue sur les variables didactiques de la situation pour permettre différentes procédures. Il insiste également sur les trois premiers nombres mais oriente rapidement son enseignement vers les décompositions des nombres jusqu'à sept. J utilise deux livres du maitres, un pour les GS (Brissiaud, Boulard, Ouzoulias, & Riou, 2002), un autre pour les CP (Charnay & Dussuc, 2004) qu'il adapte pour les GS. J consacre du temps à l'enseignement de la numération orale et a recours à une multitude de propositions pour l'apprentissage de la suite orale des mots nombres. Il propose également toutes sortes d'activités pour enseigner la numération figurée et la numération écrite. J remet en cause ses pratiques, se questionne, se documente même s'il reconnait ne pas avoir assez le temps. Il pioche ainsi des situations qu'il teste en classe et qu'il investit si elles correspondent à ses objectifs. Il favorise les situations de recherche qui lui demandent de la patience pour l'installation des règles du jeu. L'énumération et l'ordinalité ne sont pas des savoirs identifiés par J. Pour l'énumération, J fait preuve d'une observation minutieuse et précise des difficultés des élèves qui l'amène très près du savoir, il en perçoit presque les contours. Du fait de sa configuration de classe, GS-CP, J pense parfois tendre vers une élémentarisation des élèves de GS car ils partagent certains outils et certains jeux avec les CP. Toutefois, J propose toujours une adaptation, c'est le cas pour la course à cinq pour les GS et la course à dix pour les CP, il propose également un jeu pour la lecture de l'écriture chiffrée qu'il cache partiellement à l'aide d'aimants sur la frise numérique pour les GS, sur le tableau des nombres pour les CP.


CMS de J
Cardinal
Quantité
CTT
S0 : Comparer des collections
situation de comparaison directe de collections
S1 : Construire des collections de même quantité
situation de formulation à autrui
collection intermédiaire écrite
Relations
Dénommer 1 : étude du 1
V0 : Itération/Succession
1 2 3
V2: Décomposition
décomposer 3 4 5 6 7
Les numérations
la numération orale
comptine numérique
suite orale des mots nombres jusqu'à 30
la numération figurée
configurations conventionnelles
sociales
dé
doigt
la numération écrite
écriture des chiffres
geste d'écriture
lecture
Le calcul
structures additives et soustractives
structures multiplicatives et distributives
situation action
CI matérielle, écrite
L'énumération
configuration déplaçable
configuration non déplaçable
Ordinal
Relations
succession avant-après

CONCLUSION DE LA PARTIE 2

L'arbre du nombre offre une répartition des savoirs sur différentes branches. L'analyse des entretiens E1 fait apparaitre certains résultats spécifiques aux savoirs (1- Une synthèse par branche) et des résultats plus spécifiques à des particularités d'enseignement (2- Des différences importantes).

1- UNE SYNTHÈSE PAR BRANCHE

1.1- La banche numérations

Cette branche est fortement représentée en activités décrites, en temps d'entretien mais surtout en temps d'enseignement. Elle est considérée comme une vraie priorité par les enseignants. La mémorisation de la suite orale des mots nombres demande une attention particulière en PS et une attention moins soutenue en MS GS. Tous les professeurs n'appréhendent pas de la même façon cet enseignement, ils n'ont pas tous la même implication, certains sont très investis dans la recherche de comptines numériques, multiplient les possibilités offertes, d'autres, au contraire, font avec la connaissance de la suite orale des mots nombres apprise à la maison ou ailleurs et l'utilisent plus qu'ils ne l'enseignent. L'insistance sur la lecture des constellations des dés, des doigts est quasi générale, elle se retrouve dans une proportion moindre pour la lecture de l'écriture chiffrée. De la même façon, l'écriture des chiffres est enseignée en tenant compte des niveaux de classe.

Globalement et individuellement toutes les connaissances mathématiques spécifiques sont plus ou moins décrites sur la branche numérations.

1.2- La branche cardinal

Cette branche est très abondée d'exemples.

a- La branche cardinal-relations

Une certaine homogénéisation de la progression de l'étude des nombres : un deux trois quatre cinq six sept huit neuf dix est présente chez tous les enseignants, plus ou moins marquée. Avec une variation pour les PS un deux trois, un deux trois quatre, voire cinq pour d'autres. Chaque année, la progression est la même, l'étude à partir de un, plus ou moins vite, puis la poursuite de l'étude.

La progression de la branche cardinal-relations s'accorde également parfaitement avec la référence à la programmation « jusqu'à trois en PS, jusqu'à cinq en MS, jusqu'à dix en GS », qui n'est écrite nulle part dans les programmes 2008 en vigueur au moment de l'entretien et pourtant qui semble acquise de façon évidente. La seule justification proposée spontanément par un enseignant est celle de l'âge, alors même que la notion d'âge est sans doute l'une des plus abstraite qui soit et que les enfants y associent souvent des « demis »… à 42 mois, l'enfant n'a pas trois ans, mais fièrement trois ans et demi !

Les programmes ne décrivent pas nettement l'enseignement du nombre mais cette « progression » ne trouve pas de justification dans les différents programmes. Toutefois, les

rapports d'inspections précédemment détaillés, faisaient apparaitre l'étude systématique des nombres, étude du nombre six (en 1945), le nombre neuf (en 1950) et quatre, (en 1957). Cependant je ne dispose pas d'élément en ce qui concerne une quelconque progression, un découpage de cette étude de la PS à la GS.

L'étude de un, deux et trois en PS est paradoxale : le comptage n'a pas d'intérêt jusqu'à trois, domaine clair du *subitizing*, les activités rituelles chaque matin impliquent des nombres plus importants : dénombrement des présents et des absents (qui parfois, « par chance », comme le dit un des enseignants, ne dépasse pas trois), la suite orale des nombres est entraînée ailleurs qu'à l'école (un enseignant précise clairement comme relevant de la maison et des parents), les « nombres » n'ont pas alors d'utilité vraiment nette par rapport à d'autres procédures (ce qu'un des enseignants témoigne, en exprimant sa surprise). Il existe une sorte d'infantilisation en TPS-PS où l'enseignement se cantonne à un deux trois et en GS, pour certains enseignants au moins, un énorme saut vers une élémentarisation précoce.

L'enseignement des décompositions n'est pas présent chez tous les enseignants. Ce n'est pas forcément lié aux niveaux de classe.

Globalement les branches dénommer, succession, décomposer et recomposer sont décrites par les enseignants de l'école maternelle. Individuellement, si dénommer et succession sont pratiquement communes à tous, il n'en est pas de même pour décomposer et recomposer. De plus, la branche succession fait apparaitre la chronologie de l'étude des nombres plus que l'itération de l'unité.

Le dénombrement, très présent à l'école maternelle, s'accorde parfaitement à la progression suivie par la branche cardinal-relations (dénombrer des collections de deux, puis trois, puis quatre, puis cinq, etc.) mais tendrait à masquer le travail spécifique sur la quantité, à rendre la branche cardinal-quantité opaque.

b- La branche cardinal-quantité

L'usage massif du dénombrement par comptage dans l'enseignement de tous les professeurs, impose une clarification des termes employés.

J'ai été amenée à opérer une distinction pour préciser les propos des enseignants sur les situations relatées. Le comptage est synonyme de récitation de la suite orale des mots nombres, l'exemple étant, en collectif, de compter le plus loin possible. Mais j'englobe également dans le comptage le fait de passer en revue tous les boutons d'un gilet ou tous les élèves assis sur le banc, juste pour réciter la suite orale des mots nombres, sans rien faire de la quantité de boutons ou de la quantité d'enfants, c'est-à-dire en ne visant pas un enseignement de la quantité. Le dénombrement, par opposition, permet la mise en avant de la quantité de boutons ou d'enfants que ce soit pour la comparer à une autre quantité, pour construire une collection, pour classer des collections, pour transporter l'information de la quantité.

La distinction entre dénombrement par utilisation de la suite orale des mots nombres (dénombrement par comptage) ou dénombrement par perception immédiate permet d'entrevoir les procédures possibles par les élèves. Les connaissances mathématiques spécifiques pour l'enseignement du dénombrement par utilisation de la suite orale des mots nombres englobent des connaissances sur la suite orale des mots nombres, l'énumération, la quantité. Les connaissances mathématiques spécifiques pour l'enseignement du

dénombrement par perception immédiate regroupent des connaissances sur le *subitizing*, les décompositions, les configurations spatiales (dés, doigts).

La domination massive du dénombrement par comptage, fait que l'on distingue assez difficilement la branche numération orale et la branche cardinal voire même la branche calcul. Les enseignants eux-mêmes ne les distinguent pas vraiment car ils considèrent implicitement que le travail sur le nombre est en jeu dès qu'un nombre est nommé oralement et éventuellement écrit. Les indications des programmes 2008 renforcent cette imprécision en énonçant l'utilisation de la suite orale des mots nombres pour dénombrer. Le dénombrement est associé au savoir de la numération orale, ce qui fait que les branches numération orale et cardinal sont intimement liées.

> *« Progressivement, les enfants acquièrent la suite des nombres au moins jusqu'à 30 et apprennent à l'utiliser pour dénombrer. […] Dénombrer une quantité en utilisant la suite orale des nombres connus ». (Men, 2008)*

Cette compétence énoncée en fin de cycle 1 devient, pour les professeurs, un objectif d'enseignement, un savoir à part entière constitué de la récitation de la suite orale des mots nombres lors de l'énumération de la collection et de la répétition du dernier mot nombre. Le dénombrement est décortiqué en connaissances mathématiques spécifiques pour l'enseignement sans pour autant identifier les savoirs mathématiques spécifiques en jeu : la suite orale des mots nombres, l'énumération et la cardinalité qui poursuivent des progressions indépendantes. Alors que les connaissances mathématiques spécifiques sont extrêmement précises, la confusion qui les relie aux savoirs, obstrue l'identification des branches. Apprendre à utiliser la suite orale des mots nombres pour dénombrer n'est que l'étape ultime d'un enseignement distinct sur trois branches en parallèle. Tout d'abord, la numération orale avec la mémorisation et la segmentation de la suite orale des mots nombres. Des connaissances mathématiques spécifiques sont, par exemple, l'emploi progressif de comptines par blocs aux comptines segmentées, la récitation jusqu'à un nombre cible, à partir d'un nombre origine, égrener la suite orale à rebours, etc. Cette mémorisation peut être travaillée indépendamment des quantités, comme une chanson. Puis vient l'énumération de la collection, où des connaissances mathématiques spécifiques permettent l'identification et la prise en compte de tous les éléments une et une seule fois à partir de configurations déplaçables et non déplaçables. Là encore, sans avoir la nécessité d'utiliser le nombre. Enfin, le savoir cardinal, avec des connaissances mathématiques spécifiques sur les collections, la construction, la comparaison et le classement de collections. Pour finir, il s'agit de synchroniser la récitation de la suite orale des mots nombres et le pointage des éléments de la collection (d'où la nécessité de segmenter la suite orale) et d'énoncer la caractéristique commune de la collection par rapport à la quantité. Toutefois, le dénombrement fait l'objet de pratiques fortement présentes dans les classes, aussi, cette compétence de fin de cycle est recherchée, travaillée, entrainée, répétée, lui conférant alors un statut de savoir à part entière qui s'enseigne en repérant et en séparant les étapes du dénombrement. L'enseignant prend en charge l'énumération en guidant le doigt de l'élève, par exemple, afin de synchroniser la suite orale des mots nombres et le pointage des éléments de la collection, puis entraine à répéter le dernier mot nombre, en masquant les raisons d'être des savoirs sous-jacents mêlés.

La quasi absence de travail sur la quantité sans dénombrement par comptage pour tous les enseignants relève également de l'incertitude à identifier les savoirs mathématiques spécifiques pour l'enseignement du nombre. Pourtant les programmes évoquent ce travail.

Depuis 1986, les procédures non numériques (notamment la correspondance terme à terme) sont préconisées dans les programmes. En 1995, la possibilité d'une progression en dehors du dénombrement est indiquée « les quantités à estimer dépassent les possibilités de dénombrement ». Dans les programmes successifs, la quantité est exprimée sans référence au dénombrement, la quantité alors est décrite comme un savoir mathématique spécifique qui concerne l'enseignement du nombre. Les situations fondamentales S0 et S1 sont évoquées dans les programmes successifs et par les enseignants. Pourtant, il y a très peu de situations relatées qui sont des situations d'action et presque aucune qui sont des situations de formulation (une seule, pas vraiment décrite, seulement évoquée). Par situation d'action, il s'agit d'une situation avec un milieu pour la validation qui, au moins dans les deux premiers niveaux, ne peut être que matériel. Les élèves doivent soit dire le nombre cardinal d'une collection d'objet (et dans ce cas il n'y aucun milieu pour la validation), soit produire une collection d'objet de cardinal donné. Cette dernière situation est plus rare et les enseignants la reconnaissent d'ailleurs parfois comme « difficile ». Dans cette dernière catégorie, il est rare qu'un milieu permette de valider la quantité par appariement, alors même que du matériel est presque toujours présent.

Plus qu'un obstacle relevant de l'installation du milieu, peut-être est-ce induit par la domination de l'étude (ou visite) des savoirs, identifiable à partir des activités relatées : les nombres « existent » et il faut les « apprendre » en répétant quotidiennement les mêmes activités, en changeant le contexte mais rarement la situation. Le professeur prend en charge la totalité de la responsabilité de l'apprentissage de l'élève, et joue alors le rôle des rétroactions et de la validation. La visite des savoirs renvoie au niveau noosphérien et à la façon d'enseigner à l'école maternelle. Les apprentissages incidents (Tricot, 2011) développés au contact de milieux riches et variés, et la rétroaction du milieu dans les situations d'action ou de formulation, ôtent le contrôle d'une partie de l'enseignement au professeur.

Toutefois, il est plus probable que le manque de lisibilité des savoirs en jeu sur la cardinalité ne permette pas au professeur d'installer un milieu capable de prévoir la rétroaction des actions de l'élève.

1.1- La branche calcul

La branche calcul offre de fortes variations : certains enseignants sont uniquement dans le champ additif et vont assez loin dans les situations (par exemple avec la situation fondamentale de la boîte). D'autres sont plutôt du côté de la distribution et éventuellement du partage, d'autres encore sont plutôt dans les relations (par exemple un en plus ou en moins).

Pour les enseignants seulement en GS (ce n'est sans doute pas le seul déterminant mais je le signale tout de même), une certaine « élémentarisation » de l'école maternelle est proposée, allant jusqu'au tableau des nombres – qui n'est d'ailleurs pas toujours présent au CP. Leurs connaissances mathématiques communes sont sans doute plus assurées en ce qui concerne la numération au CP (dizaine, unité, etc.) et les savoirs correspondant peut-être plus faciles à valoriser à leurs yeux, à ceux des parents et à ceux des enseignants d'école élémentaire aussi.

Parce que cette branche se développe au-delà du cycle 1, et est plus légitime au cycle 2, certains enseignants sont tentés d'aller plus loin, c'est-à-dire d'emprunter cette branche au-

delà du cycle 1 et d'enseigner vraiment le calcul. En effet, les premiers apprentissages prennent du temps et parfois la frustration de l'enseignant à ne pas aller guère plus loin dans les savoirs avec ses élèves est palpable. Toutefois, au moment des entretiens, la GS appartient au cycle 1 et au cycle 2, aussi, il est envisageable qu'avec certains élèves, les enseignants proposent des activités de l'élémentaire. Par ailleurs, les programmes 2008 sont assez explicites quant aux possibilités de la GS et celles du CP en matière d'enseignement du calcul, notamment en ce qui concerne les techniques opératoires.

> *« À la fin de l'école maternelle, les problèmes constituent une première entrée dans l'univers du calcul mais c'est le cours préparatoire qui installera le symbolisme (signes des opérations, signe "égal") et les techniques » Programmes 2008*

Sur la branche calcul, les connaissances mathématiques spécifiques sont détaillées précisément par certains enseignants.

1.2- La branche énumération

De la même façon, l'énumération, qui n'est pas nommée dans les programmes 2008, n'apparait pas explicitement dans les discours des enseignants. Paradoxalement, l'énumération apparait dans l'observation des difficultés des élèves que les enseignants relatent. Cependant, dans la plupart des cas, les enseignants déclarent organiser eux-mêmes le travail des élèves de manière à faciliter l'énumération. Ils n'ont pas à cet égard une visée d'enseignement mais une visée de facilitation de la tâche, ce qui est cohérent avec les observations de Margolinas (Margolinas, Wozniak, Canivenc, De Redon, & Rivière, 2007; Margolinas, Rivière, & Wozniak, 2015). Les macro-variables telles les configurations modifiables ou non (ou bien les éléments déplaçables ou pas) sont peu identifiées. La synchronisation entre la suite orale des mots nombres et le pointage des éléments de la collection est souvent repérée par les enseignants. Le balayage de la collection qui traite tous les éléments de la collection une et une seule fois est également souvent observé. Ce savoir mathématique spécifique est transparent aux yeux des programmes 2008 et des enseignants (seul un enseignant l'identifie comme tel en le nommant) aussi, ils ne proposent pas de connaissances mathématiques spécifiques pour l'enseignement de l'énumération. L'observation fine des élèves en situation permet de dégager les variables de l'énumération.

1.3- La branche position

Des similitudes par rapport à un savoir difficilement identifié sont à amener avec l'ordinalité. En effet, l'aspect ordinal du nombre, même s'il n'est pas ignoré, six enseignants sur dix en parlent, est extrêmement marginal. Parfois, « premier » et « dernier » semblent suffire à satisfaire l'aspect ordinal, là où, pour prendre une comparaison, il ne viendrait à l'idée d'aucun enseignant de se contenter de « peu » et « beaucoup » pour l'aspect cardinal. Les mots nombres ordinaux sont souvent évoqués.

Les jeux de piste sont peut-être l'occasion d'aborder certains aspects de l'ordinalité, comme le déplacement, l'orientation, la case origine, mais rien n'est moins sûr. La construction d'un repère spatial n'est sans doute pas associé au nombre, aucun enseignant ne parle d'origine ni du nombre zéro. La lecture des points sur le dé (cardinal) et l'énoncé de la suite des mots-nombres au fur et à mesure de l'avancée (requise par contrat : c'est la règle du jeu) sont sans doute plus représentés que le fait de se trouver sur la deuxième ou la troisième case, qui n'a pas toujours beaucoup d'intérêt dans le jeu, où il suffit souvent de savoir qui est avant l'autre et non pas la position précise du pion de chacun. À cet égard, les programmes

2008 sont explicites et proposent l'utilisation des jeux de déplacements sur une piste pour travailler la suite écrite, c'est-à-dire la lecture de l'écriture chiffrée.

> *« La suite écrite des nombres est introduite dans des situations concrètes (avec le calendrier par exemple) ou des jeux (déplacements sur une piste portant des indications chiffrées) ». Programmes 2008*

Les extraits codés dans ordinal sont sans doute à minimiser, du fait de mon codage généreux des jeux de plateau dans ordinal lors de l'analyse. En effet, si le déplacement sur piste entraine bien des connaissances sur le déplacement une case après l'autre, sur l'orientation ainsi que sur la case à partir de laquelle le déplacement à lieu, il n'est effectivement pas certain que le savoir visé par l'enseignement soit celui de l'ordinalité. Les enseignants n'ont pas à cet égard une visée d'enseignement de l'ordinal mais une visée de respect de règle du jeu concernant le déplacement. Le savoir visé est plutôt, comme celui évoqué dans les programmes, la lecture de l'écriture chiffrée ou des constellations du dé. Ainsi, la bande numérique et sa lecture dans le sens de la lecture (raison graphique) est la référence à l'ordre des nombres (c'est alors l'aspect ordonné et non pas ordinal qui est mis en jeu), alors même que le sens de la lecture est en cours d'apprentissage et que son acquisition comme relative à l'ordre temporel est problématique.

2- DES DIFFÉRENCES IMPORTANTES

Toutefois, une grande incertitude est exprimée par l'ensemble des professeurs sur l'enseignement du nombre en général. Ils ne savent souvent pas très bien, et en ont conscience, ce qui caractérise l'enseignement du nombre. De ce fait, c'est souvent aux connaissances mathématiques communes qu'ils se réfèrent pour établir leur enseignement. Leur incertitude se voit parfois en creux, par exemple dans la confusion entre chiffre et nombre pour les nombres de un à neuf. Cette confusion révèle que ce sont plutôt sur les connaissances mathématiques communes (la distinction n'existe pas dans le langage courant) que sur les connaissances mathématiques spécifiques qu'ils s'appuient.

Tout cela concourt à ce que le nombre, même dans les aspects majoritaires (étude des numérations et de la cardinalité), ait une place assez paradoxale dans l'enseignement à l'école maternelle. Le nombre est abordé quotidiennement et massivement (on « compte » tous les jours) pourtant l'apprentissage du nombre ne connaît quasiment pas de progression identifiée autrement que par la progression de la suite des nombres eux-mêmes, ce qui ne convient que pour l'étude des relations (branche cardinal-relations) et éventuellement pour la lecture des constellations et de l'écriture chiffrée (branches numération figurée et numération écrite), mais pas pour les autres.

Les savoirs spécifiques concernant le nombre à l'école maternelle sont peu institutionnalisés et les enseignants révèlent régulièrement leur incertitude. La doxa installée à l'école maternelle (non appuyée sur les programmes) apparait alors sécurisante.

La richesse des cinq savoirs mathématiques spécifiques légitime cet enseignement du nombre à l'école maternelle. Si les connaissances du nombre sont uniquement appuyées sur une seule branche, quelle que soit la branche par ailleurs, s'il n'existe qu'une seule branche principale à construire dans l'enseignement du professeur, alors il y a peu de choses à enseigner. Le manque de visibilité des savoirs mathématiques spécifiques à l'enseignement privent les professeurs de connaissances mathématiques spécifiques pour l'enseignement du nombre.

Les raisons d'être des savoirs quantité, ordinal, énumération ne sont pas identifiées clairement et ne permettent pas une fluidité dans l'enseignement, c'est-à-dire la prise en compte de l'évolution des connaissances. C'est pourquoi, nous nous attacherons, dans la dernière partie (Partie 3), à rendre des savoirs mathématiques spécifiques manquants plus lisibles pour le professeur.

PARTIE 3- PROLONGEMENT DE L'ÉTUDE : L'INFLUENCE DE NOUVEAUX SAVOIRS SUR LES CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES SPÉCIFIQUES DU PROFESSEUR

Dans cette dernière partie il s'agit de mettre en avant certains savoirs mathématiques spécifiques pour l'enseignement du nombre peu identifiés précédemment dans les propos déclarés des professeurs et d'observer les connaissances mathématiques spécifiques du professeur en situation de classe. Une méthodologie particulière a été constituée pour dépasser l'obstacle majeur lié à l'enseignement du nombre à l'école maternelle qui est « partout ». Une diffusion de savoirs mathématiques spécifiques est proposée pour rendre possible la focalisation sur un aspect particulier de l'enseignement du nombre à l'école maternelle : celui appelé cardinal-quantité. Le corpus s'enrichit par le recueil de cinq enseignements en classe, et est analysé ici. En conclusion, l'utilité possible des résultats pour la formation sera envisagée.

CHAPITRE 1- MÉTHODOLOGIE POUR OBSERVER LES CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES SPÉCIFIQUES EN SITUATION

Précédemment, l'analyse des propos déclarés des dix enseignants à partir de l'arbre des savoirs du nombre a mis en valeur l'omniprésence de l'aspect cardinal dans l'enseignement du nombre à l'école maternelle. Le choix retenu maintenant a été d'abonder la branche cardinal de savoirs mathématiques didactiques spécifiques à l'enseignement de la quantité. En restreignant les savoirs visés, une formation ciblée sur la quantité relativement courte a pu être proposée. Le choix méthodologique imposé par les conditions particulières d'enseignement du nombre à l'école maternelle, et le choix des savoirs retenus sont présentés dans le premier paragraphe (1 – Des propos déclarés aux pratiques de classe). Puis, la micro formation est à son tour exposée (2- La micro-formation) en relatant le contenu du cours enregistré, les conditions de passation et le recueil des commentaires des professeurs. Enfin, l'analyse du cours est développée (3- Analyse du cours enregistré sur la quantité). Et pour finir, les principes de l'analyse sont envisagés (4.- Principes de l'analyse des cinq cas).

1– DES PROPOS DÉCLARÉS AUX PRATIQUES DE CLASSE

1.1- Retour sur une difficulté méthodologique spécifique à l'enseignement du nombre à l'école maternelle

Comme anticipé dans le début de la thèse, le nombre « est partout », « le nombre c'est tout le temps ». Les entretiens E1 confirment que l'enseignement du nombre à l'école maternelle ne se limite pas à des séances spécifiques comme à l'école élémentaire mais se réalise tout au long de la journée en privilégiant tantôt la récitation de la suite orale des mots nombres, le dénombrement de collections multiples et variées, des situations problèmes de comparaison de collection, l'écriture et la lecture chiffrée, la reconnaissance instantanée de petites collections, etc. Cette difficulté est spécifique à l'enseignement du nombre à l'école maternelle. Les savoirs sur le nombre s'entremêlent et se répandent dans diverses situations, même inopportunes. Ceci confère à l'enseignement du nombre des contours indéfinis. L'enseignement du nombre se dilue et peut devenir flou, cette incertitude se retrouve dans les entretiens E1. Les professeurs eux-mêmes sont parfois incertains sur leur enseignement du nombre. Les différentes composantes du nombre à l'école maternelle, les cinq branches des savoirs déterminées dans la thèse, ne sont pas identifiées clairement par les enseignants, toutefois, aucune autre structuration n'apparaît vraiment. En prenant en considération ce contexte, il n'est pas envisageable de demander aux enseignants, comme Clivaz (Clivaz, 2011) pour la multiplication posée à deux chiffres (que les enseignants concernés identifient parfaitement), de me prévenir quand ils enseignent par exemple, la quantité – alors même qu'il s'agit d'une composante très présente dans l'enseignement de tous les professeurs.

1.2- Le choix d'une institutionnalisation

Les connaissances mathématiques spécifiques pour l'enseignement du nombre des enseignants sont plus ou moins formalisées en termes de savoirs explicites. Pour l'énumération et la position, les savoirs mathématiques spécifiques sont invisibles, ce n'est pas le cas en ce qui concerne les numérations écrite, orale et figurée et la quantité, mais avec de grandes différences d'un enseignant à l'autre toutefois. Enfin, les limites entre les savoirs mathématiques spécifiques pour l'école maternelle et ceux pour l'élémentaire sont un peu floues dans les domaines du calcul et de la numération décimale de position.

Pour pouvoir demander aux enseignants d'inviter le chercheur à un moment spécifié de leur enseignement, plusieurs solutions étaient possibles. En particulier leur demander de mettre en place une ingénierie conçue par le chercheur pour étudier leurs réactions et leurs modifications en termes de connaissances spécifiques pour l'enseignement. Le choix retenu porte sur l'institutionnalisation d'un des aspects des savoirs sur le nombre. Il est alors demandé aux professeurs d'inviter le chercheur lors de l'enseignement de cet aspect du nombre.

1.3- Le choix d'un aspect du savoir sur le nombre

Le contexte étant défini, plusieurs choix étaient alors possibles : introduire des savoirs très peu visibles pour les enseignants, comme notamment l'énumération ou la position ou bien institutionnaliser un savoir connu mais pas nécessairement dans tous ses aspects, comme les numérations ou le cardinal. Les résultats de l'analyse des entretiens E1 montrent une domination des savoirs sur les numérations et sur la cardinalité dans les propos des professeurs. Tous les professeurs décrivent un enseignement sur la numération orale, la numération écrite et la numération figurée. Par contre pour la branche cardinal, il y a une différence entre la branche cardinal-quantité et la branche cardinal-relations en termes de connaissances mathématiques spécifiques des professeurs. En effet, les conclusions précédentes révélaient un manque de visibilité pour les savoirs inhérents à la quantité. De plus, les branches numérations et cardinal-relations s'appuient sur une visite des savoirs. La branche cardinal-quantité repose sur une construction des savoirs sur la quantité. Le choix de l'institutionnalisation de savoirs particuliers s'est naturellement porté sur la quantité.

1.4- Le choix d'une formation à distance

Là encore il y avait différents choix possibles : un document « papier », par exemple un chapitre de livre ou un article, une formation (animation pédagogique ou stage) que j'aurais pu organiser, etc. Une part d'opportunité a joué dans la décision retenue d'une formation à distance. En effet, le choix de ce format pour la micro-formation, est largement influencé par l'apparition « m@gistère », formation à distance mise en place par l'éducation nationale qui s'inscrit dans le cadre de la loi d'orientation et de programmation pour la refondation de l'école de la République du 8 juillet 2013, avec l'ambition de "Faire entrer l'École dans l'ère du numérique". La formation m@gistère s'adresse aux enseignants du premier degré et second degré. La formation à distance prend de plus en plus d'importance dans le cadre de la formation continue des enseignants[74]. Ce choix, même s'il n'est pas l'objet de la thèse, permet de poser des questions sur ce type de formation. Par ailleurs, Claire Margolinas,

[74] En 2016, sur les 18h de formation continue, 9h sont proposées en présentiel et 9h sur m@gistère.

directrice de la thèse, avait utilisé la forme de cours enregistrés d'une heure dans le cadre de formations à distance à l'Université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand pour la formation continue diplômante, qui permet à des enseignants en poste d'acquérir le master MEEF. Même si ces cours étaient associés à des TD en présence, il semblait possible d'utiliser un de ces cours, centré sur l'aspect cardinal-quantité, pour institutionnaliser les différents savoirs qui avaient été identifiés pour cette branche de l'arbre des savoirs du nombre. De plus, ce choix offre d'avoir rigoureusement la même exposition au cours pour tous les enseignants, dans les mêmes conditions.

1.5- Le choix des enseignants

Ce dispositif a été proposé aux enseignants qui avaient déjà été interrogés, appuyant alors l'analyse sur leurs connaissances, telles qu'elles avaient été repérées dans les entretiens E1. À la rentrée scolaire 2013-2014, huit[75] enseignants sur dix de mon panel initial ont été invités à poursuivre la collaboration pour mon travail de thèse sur l'enseignement du nombre à l'école maternelle, en participant à une micro-formation. Six enseignants ont répondus favorablement. Suite à la projection du cours enregistré, les professeurs choisissaient librement de prolonger ce travail dans leur classe. Ils ont signé alors un formulaire de participation au dispositif de recherche. Un enseignant sur les six, n'a pas souhaité donner suite. Le tableau suivant rend compte des cinq enseignants engagés dans le protocole complet de la micro formation.

Enseignants	Niveau de classe pendant l'entretien E1 en 2012-2013	Niveau de classe pendant la micro formation en 2013-2014
A	TPS PS	
B	TPS PS	
C	GS	
D	TPS PS	MS
E	TPS PS MS GS CP	TPS PS MS GS CP
F	MS GS	MS GS
G	TPS PS	
H	TPS PS MS	
I	GS	GS
J	GS CP	MS GS CP

TABLEAU 21: PARTICIPATION DES ENSEIGNANTS ET LEURS NIVEAUX DE CLASSE

2- LA MICRO-FORMATION

La micro-formation porte sur une diffusion minimale de savoirs ciblés sur un point précis de la dimension cardinal-quantité, une situation fondamentale, la plus commune à l'école maternelle « construire des collections de même quantité ».

La micro-formation est conçue dans le but de diffuser des savoirs mathématiques spécifiques à l'enseignement de la quantité. Elle est constituée d'un cours enregistré sur le nombre et la quantité de Claire Margolinas, appuyé sur la théorie des situations, suivie immédiatement d'un recueil de commentaires à chaud de cinq enseignants. Ces différents éléments de la micro-formation vont être présentés puis analysés.

[75] Entre temps, un enseignant a changé de département et je ne suis pas arrivée à joindre le dixième enseignant dans le temps imparti.

2.1- Le cours enregistré

Ce cours n'a pas été produit spécifiquement pour la micro-formation, il fait partie d'un module d'enseignement à distance qui a été conçu pour les étudiants du master Métiers de l'Enseignement et de l'Éducation[76]. Au plan technique, il s'agit de l'enregistrement d'un diaporama commenté, disponible en format vidéo. La forme du diaporama commenté est la forme contemporaine classique du cours universitaire, la seule originalité étant d'être enregistré. Dans le cadre du master MEE, ce cours magistral est associé à des TD en présentiel. Ce module sur le nombre comprend six cours magistraux[77] : le premier cours, qui est celui que nous avons retenu pour la micro-formation, est centré sur le nombre et la quantité à la maternelle, il est également introductif à la théorie des situations didactiques et de ce fait, dans son format originel, il fait 90 minutes. Un montage vidéo de ce cours a été réalisé en supprimant certains passages spécifiques aux enseignants débutants de manière à aboutir à un enregistrement de 60 minutes convenable pour les buts de la recherche[78].

Lors de la projection aux enseignants, il leur a été notifié qu'il s'agissait d'un cours à destination des étudiants de l'ESPE de Clermont Ferrand, dans le cadre de la formation initiale, écourté pour les besoins de la micro-formation et dont l'enjeu se trouvait dans les savoirs sur la quantité et sur la présentation de concepts didactiques de base.

2.2- La projection du cours

Les six enseignants ont visionné le cours, quatre dans leur classe (sur le temps méridien pour deux d'entre eux, après la classe pour les deux autres), les deux autres projections ont eu lieu à domicile. Ils ont choisi le temps et le lieu de projection. En installant l'ordinateur, je rappelais qu'ils visionneraient le cours seul, en entier, que je n'interviendrai pas et que s'ils le souhaitaient nous échangerions à la fin du cours. Ils ont tous suivi le cours enregistré dans les mêmes conditions, sur un écran d'ordinateur, sans possibilité d'arrêter la vidéo ni de me poser des questions pendant la projection. Les six enseignants volontaires ont bénéficié de la même formation sous les mêmes conditions : suivre individuellement le cours enregistré de Claire Margolinas projeté sur ordinateur. L'enseignant était seul face à la vidéo, je leur ai fourni un document papier pour prendre des notes, s'ils le souhaitaient. Ce document reprenait la chronologie des diapositives du cours projeté. J'étais présente dans un coin de la salle notamment pour gérer d'éventuels problèmes informatiques. Puis ils choisissaient de s'engager ou pas dans l'élaboration d'une séquence d'apprentissage sur la quantité en fonction de ce qui avait été décrit dans le cours visualisé. À l'issue de cela, ils notifiaient les séances qu'ils souhaitaient me montrer (entre une et cinq) pour que je les filme dans la classe. Ma présence était également nécessaire pour enregistrer l'échange à venir.

[76] Premier master mis en place à l'IUFM d'Auvergne avant la réforme conduisant aux masters MEEF (Métiers de l'enseignement de l'éducation et de la formation), qui a existé de 2010 à 2013. Durant cette période, les étudiants obtenaient leur master avant de pouvoir devenir fonctionnaire-stagiaire, quand ils obtenaient le concours de recrutement des professeurs des écoles (CRPE). Leur prise de fonction à plein temps durant leur année de stage (Professeur des écoles stagiaires) impliquait une formation professionnelle poussée avant l'obtention du concours.

[77] Le cours 2 est relatif à la numération au cycle 2, le cours 3 à la numération au cycle 3, le cours 4 traite des décimaux et des grandeurs, le cours 5 des rationnels et le cours 6 des fractions.

[78] La transcription de ce cours oral est fournie dans les annexes.

2.3- Le recueil des commentaires jouxtant la projection du cours

À l'issue du cours projeté, un temps d'échange libre et non formalisé est enregistré. Il ne s'agit pas d'un entretien structuré proche de « questions de cours » ou bien « d'opinions sur le cours », mais plus d'un temps d'échange pour libérer la parole après une heure de visionnement mais aussi d'entrevoir les attendus pour la suite du dispositif, poursuivre ou non leur participation à la recherche en m'accueillant dans leur classe.

Cependant, pour des raisons méthodologiques, ces commentaires ont été enregistrés, en particulier pour vérifier que des biais n'avaient pas été introduits par les propos du chercheur durant ces échanges.

En écoutant puis en transcrivant partiellement ces échanges, la richesse et l'intérêt en tant que données de recherche ont émané de ces commentaires, même si ces enregistrements n'avaient pas été conçus au départ comme tels. Ce temps permet à l'enseignant de revenir sur ce qui a été vu et entendu, de formuler des commentaires à chaud et de partager ses impressions avec moi. Ces échanges enregistrés constituent mes deuxièmes entretiens E2.

2.4- La poursuite dans le dispositif de recherche

L'entretien E2 sert également de lieu de cadrage pour la suite à donner, c'est-à-dire l'élaboration ou non d'une séquence d'apprentissage sur la quantité et de planification pour mes venues dans la classe afin de filmer les séances choisies par l'enseignant.

Chercheur- maintenant si tu veux bien continuer
J- oui oui alors dis-moi comment ça se passe après
Chercheur- alors tu vas te débrouiller tout seul
J- je je garde [J montre le document écrit sur lequel il a pris des notes pendant la projection du cours]
Chercheur- tu gardes ça […] et après voilà tu sais que moi je vais pouvoir venir jusqu'à cinq fois ça peut être une fois aussi

En fonction des réactions suscitées par le cours j'émets des possibilités pour les séances, comme par exemple ici avec I. Lors de son commentaire, I revient sur la situation d'action avec les rétroactions, les situations avec éloignement dans l'espace qu'il réalise en classe et la situation avec éloignement dans le temps qu'il trouve intéressante.

Chercheur- donc est-ce que tu aimerais maintenant mettre en place des des séances que je viendrai filmer pour justement voir ensuite moi j'ai besoin de voir aussi des enfants en action et voir du coup là par rapport à ce qu'on a vu et un peu appris comment ça se met en place dans la classe voilà donc ça et heu alors maximum cinq il peut y en avoir qu'une je peux venir qu'à une qu'à deux à toi de préparer et de me dire voilà j'aimerai bien que tu viennes voir ça heu ça peut être aussi comme tu disais les situations d'éloignement dans l'espace ça tu le faisais déjà mais du coup ça peut aussi ben viens voir ce que je fais déjà par rapport à ça donc venir voir une situation d'éloignement dans l'espace et après une dans le temps pourquoi pas ou une situation d'action avec une rétroaction enfin tu vois quelque chose comme ça que tu aurais envie donc ça le but du jeu donc pour moi ce que j'ai besoin c'est que tu prépares seul je viens voir et par contre après on en parle […] justement cette première partie où moi j'interviens pas où toi tu me montres juste par rapport à ce qui a été vu et entendu voilà bon alors ça peut être une deux ou trois séances
I- ben ouais moi je suis ok

Pendant l'échange E témoigne de certains oublis dans son enseignement « des choses que je ne fais pas ». Aussi la sollicitation pour la suite prend appui sur les points repérés, l'éloignement dans l'espace, dans le temps et « l'histoire de la quantité mais du coup sans les nombres ».

Chercheur- voilà donc est-ce que ça te donnerait envie de faire d'essayer des choses que tu faisais pas peut-être sur heu heu
E- ben sur tout ce qui est là heu
Ensemble- l'éloignement dans l'espace ou dans le temps
E- parce que ça je le fais pas quoi ou je fais pas assez l'éloignement dans le temps je fais pas essayer de retravailler du coup cette histoire de quantité mais du coup sans les nombres puisque c'est ce que je fais donc changer quoi
Chercheur- […] alors maintenant c'est toi qui choisis alors quoi qui heu donc si si tu as envie si je peux venir filmer il faudra les autorisations des enfants je te donnerai les formulaires
E- moi avec plaisir

F souhaite également essayer une situation avec éloignement dans l'espace.

Chercheur- écoute on peut très bien focaliser sur
F- quelque chose que j'ai jamais fait
Chercheur- l'éloignement dans le temps
F- bien voilà
Chercheur- si tu as envie d'essayer
F- bien oui écoute
Chercheur- alors je sais pas tu disais par rapport à des situations tu disais que l'éloignement dans l'espace c'est quelque chose que tu faisais et on peut imaginer ben reprendre

Spontanément dans les réactions à chaud, D fait part de sa volonté à se mettre à ma disposition pour montrer son enseignement du nombre.

D- heu est-ce que oui vas-y
Chercheur- non non vas-y
D- est-ce que je sais pas est-ce que tu veux voir des comptines ou des jeux de doigts ou est-ce que tu veux pas le voir ça tu veux le mettre
Chercheur- donc si si si par contre voilà avec ce que tu as entendu
D- pas forcément sur le nombre dis-moi ce que tu veux voir dis-moi plutôt ce que toi tu aimerais voir en comptine est-ce que tu aimerais voir monsieur pouce […] ou est-ce que tu veux voir uniquement sur le nombre style les trois moustiques […]
Chercheur- moi je préfèrerai la sur le nombre pour rester dans le cadre-là plutôt que sur la motricité […] mais peut-être plus rester sur ce que l'on a entendu par rapport aux comptines et au nombre et est-ce que toi dans ce que tu as vu il y a des choses que tu ne faisais pas et que tu te dis bon peut-être que avec les MS ça peut marcher alors à adapter sous certaines conditions
D- pout ton film tu attends quoi
Chercheur- pour toi ce qui est important

Ma demande n'est pas toujours très précise pour laisser une plus grande liberté d'interprétation des enseignants.

La participation au cours n'impliquait pas de poursuivre la suite du dispositif. Cinq enseignants se sont engagés dans la réalisation d'une séquence d'apprentissage en lien avec la quantité et les situations didactiques. Cette séquence était uniquement à leur charge, ils devaient fixer des dates pour filmer dans la classe de une à cinq séances en fonction de ce qu'ils souhaitaient me montrer. Ils étaient totalement libres de leurs choix par rapport aux séances et aux situations à montrer. Ces séances de classe filmées représentent la troisième source de données SC.

3– ANALYSE DU COURS ENREGISTRÉ SUR LA QUANTITÉ

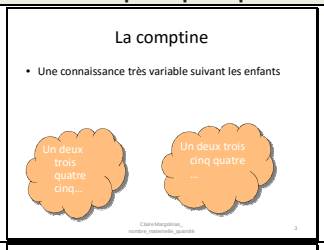
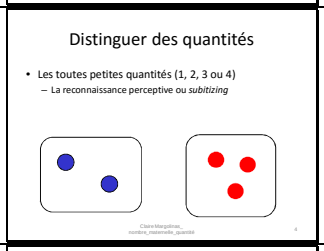
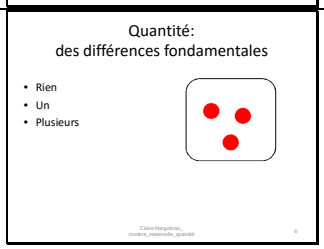
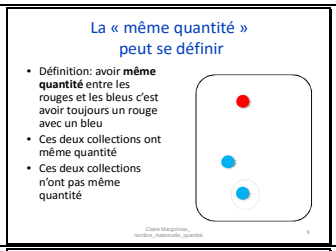
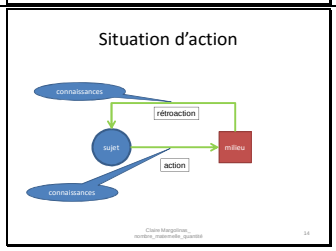
3.1- L'ossature du cours

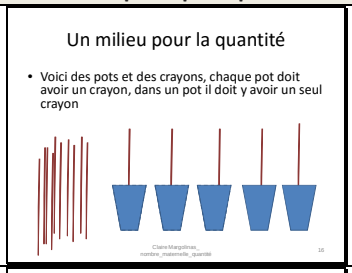
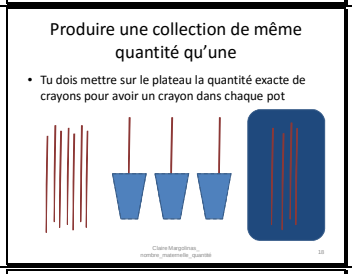
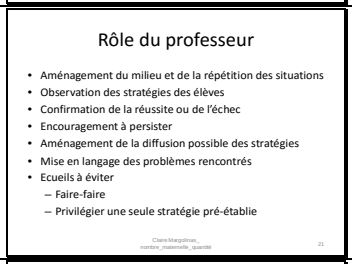
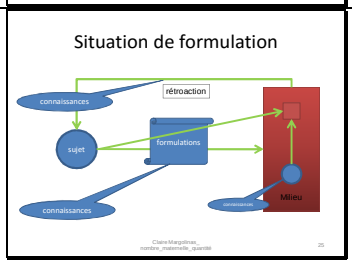
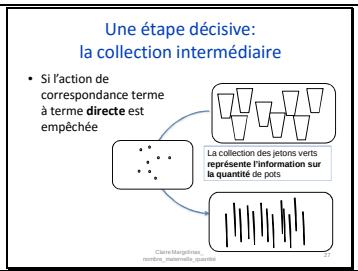
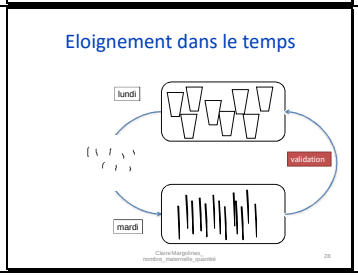
Dans ce cours, une attention particulière à l'évolution des connaissances des élèves est décrite. Le cours cherche à montrer les connaissances des élèves via leurs réponses possibles d'élèves dans les situations déclinées à partir de la situation fondamentale de la quantité.

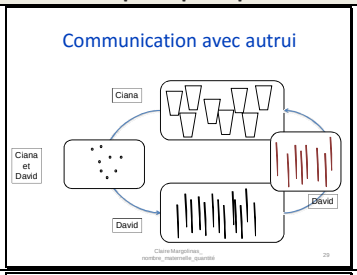
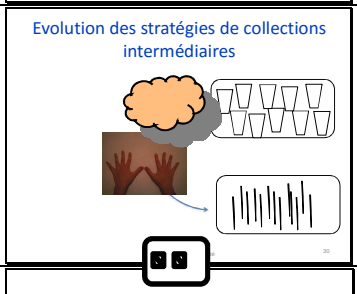
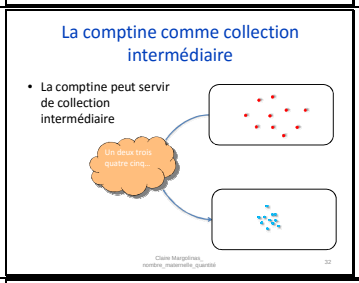
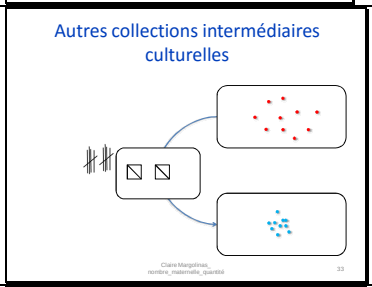
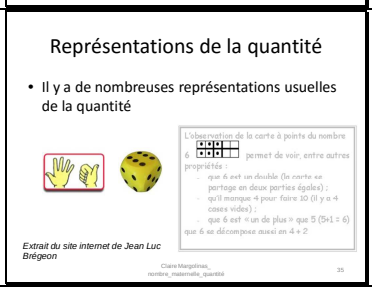
« C'est par les situations que nous allons aborder les savoirs à enseigner et les connaissances à transmettre concernant le nombre à l'école maternelle. » (Margolinas & Wozniak, 2012, p. 5).

Pour faciliter l'analyse, j'ai découpé le cours en dix-huit points principaux. Cette présentation permet une lecture chronologique des différents savoirs spécifiques à la quantité abordés dans le cours.

Une attention particulière à l'évolution des connaissances des élèves est décrite. Le cours cherche à montrer les connaissances des élèves via les réponses possibles dans les situations déclinées à partir de la situation fondamentale de la quantité.

	Point principal Résumé du contenu du cours	**Numéro**	**Image d'une diapositive du cours illustrant le point principal**
1	Suite orale des mots nombres Le premier point développé permet d'entrer dans les nombres par les connaissances les plus visibles qui sont celles de la suite orale des mots nombres. Cette connaissance de la comptine est différente pour chaque élève entrant à la maternelle. Cette chanson des nombres est considérée comme un des aspects le plus facile à identifier et à repérer au premier abord.	Diapo 3	
2	Subitizing Le point suivant rappelle les apports des psychologues dans le domaine des nombres : le subitizing et la non conservation de la quantité. Le subitizing est la faculté de reconnaitre immédiatement de petites quantités. Reconnaitre signifie ici percevoir la quantité sans dénombrer ou compter les éléments des collections.	Diapo 4	
3	Critères de validité Les critères de validité sont des connaissances élémentaires simples, des connaissances minimales qui permettent notamment de valider l'action. Ce sont des connaissances qui interviennent dans la rétroaction.	Diapo 6	
4	Situation fondamentale : même quantité que La définition de la situation fondamentale la « même quantité » est donnée. La procédure de correspondance terme à terme est utilisée.	Diapo 9	
5	TSD / Situation d'action Après la présentation de Guy Brousseau et de ses travaux, le modèle formalisé de la situation d'action est introduit. Une fois que le milieu est identifié et repéré, le sujet peut réaliser une action. Pour cela il mobilise des connaissances en situation il s'agit de connaissances antérieures sur lesquelles pourront se greffer de nouvelles connaissances déclenchées par la situation d'action. Les connaissances de l'action et les connaissances pour la rétroaction ne sont pas de même nature.	Diapo 14	

	Point principal Résumé du contenu du cours	**Numéro**	**Image d'une diapositive du cours illustrant le point principal**
6	Introduction et installation du milieu Consigne L'installation du milieu correspond à une consigne engageant l'action sur le matériel pots-crayons. L'installation du milieu est primordiale toutefois elle ne représente pas à elle seule la situation d'apprentissage instaurée par la situation d'action. La formulation de la consigne détermine l'utilisation du milieu autorisé.	Diapo 16	
7	Situation d'action en classe La consigne change pour introduire l'anticipation qui est la condition de la situation d'action. L'ambiguïté existante entre la manipulation et la situation d'action est soulevée ici. Le temps pris pour l'installation du milieu, et pour l'installation de la validation de l'action sont des étapes nécessaires mais non suffisantes pour définir une situation d'action.	Diapo 18	
8	Rôle du professeur Le professeur facilite l'apprentissage, toutefois il y a des écueils à éviter. L'observation doit aider le professeur à reconnaitre les stratégies des élèves et identifier les connaissances mobilisées pour pouvoir les faire évoluer.	Diapo 21	
9	Situations de formulation Les situations de formulation correspondent à une évolution des connaissances. Il y a une ambiguïté sur le terme « formulation ». Il est souvent employé pour parler de « reformulation », c'est-à-dire pour redire avec d'autres mots les explications des jeunes élèves. Dans une situation de formulation, le milieu ne permet plus l'action directe, celle-ci est strictement empêchée. C'est la formulation des connaissances sur la quantité qui permettra d'agir. Cette formulation n'est pas nécessairement orale, en effet, on peut dire, montrer ou bien écrire des connaissances sur la quantité.	Diapo 25	
10	Eloignement dans l'espace La situation de formulation avec éloignement dans l'espace est très proche de la situation d'action. Différentes stratégies vont être nécessaires pour réaliser l'action, notamment celles où la mémoire entre en jeu, mémoire visuelle, mémoire de la quantité… En effet, la formulation doit être comprise comme un moyen de transporter l'information sur la quantité pour pouvoir agir plus loin.	Diapo 27	
11	Eloignement dans le temps Les informations relatives à la quantité ne sont accessibles que le lundi et l'action se réalisera le mardi. Les situations de formulation avec éloignement dans le temps sont favorisent l'entrée dans l'écrit mathématique.	Diapo 28	

	Point principal Résumé du contenu du cours	**Numéro**	**Image d'une diapositive du cours illustrant le point principal**
12	Communication à autrui Dans une situation de communication à autrui le sujet ne peut plus agir lui-même, l'action sera réalisée par un tiers. La formulation, la communication à l'autre devra intégrer les connaissances de l'action, mais également la capacité du destinataire à réaliser l'action et à comprendre le message donné.	Diapo 29	
13	Collection intermédiaire C'est l'information sur la quantité qui doit être transportée grâce à cet intermédiaire, et peu importe l'intermédiaire. Cette étape est tout à fait décisive par rapport aux connaissances qui sont ici différentes des connaissances de l'action.	Diapos 30	
14	Du temps aux apprentissages Cette notion de temps est essentielle à l'école maternelle pour travailler les connaissances en situation. L'élève doit savoir que s'il échoue il pourra réessayer, ces situations s'inscrivent donc dans la durée.	Diapo 31	
15	Des quantités suffisantes La taille des collections est une variable importante pour favoriser des stratégies autres que le dénombrement ou le comptage.	Diapo 33	
16	Pas de hiérarchie dans les procédures Il n'y a pas de procédure experte *a priori*, c'est en situation que les stratégies se révèlent être efficaces ou moins pertinentes.	Diapo 34	
17	Configurations Il est fait référence dans cette partie à certaines représentations usuelles de la quantité comme le dessin des mains, les dés ou bien des représentations élaborées pour l'école comme les cartes à points de Jean-Luc Brégeon[79]. Le choix de telle ou telle configuration induira alors des connaissances différentes.	Diapo 35	

[79] http://jean-luc.bregeon.pagesperso-orange.fr/

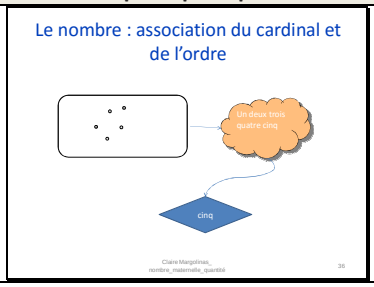
	Point principal Résumé du contenu du cours	**Numéro**	**Image d'une diapositive du cours illustrant le point principal**
18	Définition du cardinal Pour conclure, la définition du cardinal est énoncée. Cette définition du cardinal resitue et réaffirme l'antériorité de la quantité sur le nombre au plan mathématique.	Diapo 36	

TABLEAU 22: SAVOIRS ABORDES DANS LE COURS

L'introduction à la théorie des situations didactiques est la particularité de ce cours (de la diapositive 3 à la diapositive 17). Cette orientation didactique colore les connaissances mathématiques spécifiques et les savoirs qui vont être diffusés.

3.2- Enjeux de la formation : la diffusion de savoirs mathématiques spécifiques

Ce sont des savoirs mathématiques spécifiques à la didactique des mathématiques, et plus précisément à la théorie des situations didactiques relatifs à la quantité qui sont visés et diffusés à travers ce cours. En effet, l'auteure du cours décrit des situations caractéristiques de la théorie des situations didactiques et développe les savoirs qui s'y rattachent. Ce sont des savoirs spécifiques à l'enseignement des situations d'action et de formulation.

Savoirs mathématiques en didactique spécifiques à l'enseignement de la quantité pour le professeur	Repères dans le cours
Différence entre un et plusieurs/ un et rien : critère de validité	Point 3
Savoirs sur la quantité : La même quantité se définit avec la correspondance terme à terme La quantité est une grandeur	Point 4
Savoirs sur la situation d'action : L'anticipation favorise les connaissances sur la quantité les connaissances de la rétroaction (critères de validité) sont plus élémentaires	Point 5
Savoirs sur les situations de formulation : la formulation de la quantité favorise l'évolution des connaissances	Point 9
Savoirs sur les collections intermédiaires : Les collections intermédiaires permettent le transport d'information sur la quantité leur utilisation renseigne sur l'évolution des connaissances des élèves	Point 13

3.3– Analyse du cours par rapport à la branche cardinal-quantité de l'arbre du nombre

Les savoirs mathématiques spécifiques à l'enseignement de la quantité énoncés dans le cours concernent la théorie des situations didactiques, avec l'installation du milieu, la situation d'action, les connaissances pour la rétroaction, les situations de formulation et les collections intermédiaires. Ces situations de base de la théorie des situations didactiques suffisent, à l'école maternelle, pour permettre d'enseigner « construire la même quantité » mais aussi « comparer des quantités » ainsi que l'enseignement de la position (construire la même position, comparer des positions).

Le cours ne décline pas l'évolution des situations jusqu'au bout de la branche de l'arbre déterminé par notre analyse *a priori* (voir partie 1), en effet, la situation de formulation collective n'est pas détaillée ici[80].

Le cours est ciblé sur une situation fondamentale de la quantité, S1 : construire des collections de même quantité. La figure suivante (Figure 90: situation fondamentale retenue pour la micro-formation S1 : construire des collections de même quantité) montre les savoirs visés par le cours. La figure suivante (Figure 91 : évolution des connaissances à partir de la situation fondamentale S1 : « construire des collections de même quantité ») reprend l'évolution des connaissances telle quelle avait été formulée dans l'analyse *a priori*. La dernière figure (Figure 92 : connaissances mathématiques spécifiques détaillées dans le cours (coloré) met en lumière le grand nombre de situations détaillé dans le cours.

[80] La situation de formulation collective et code commun est exposée dans « Le nombre à l'école maternelle, une approche didactique, p. 33 »

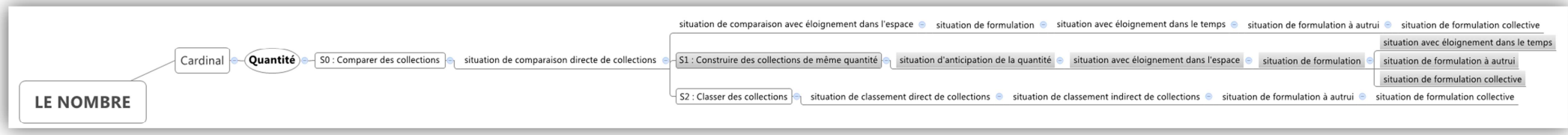


FIGURE 90: SITUATION FONDAMENTALE RETENUE POUR LA MICRO-FORMATION S1 : CONSTRUIRE DES COLLECTIONS DE MÊME QUANTITÉ

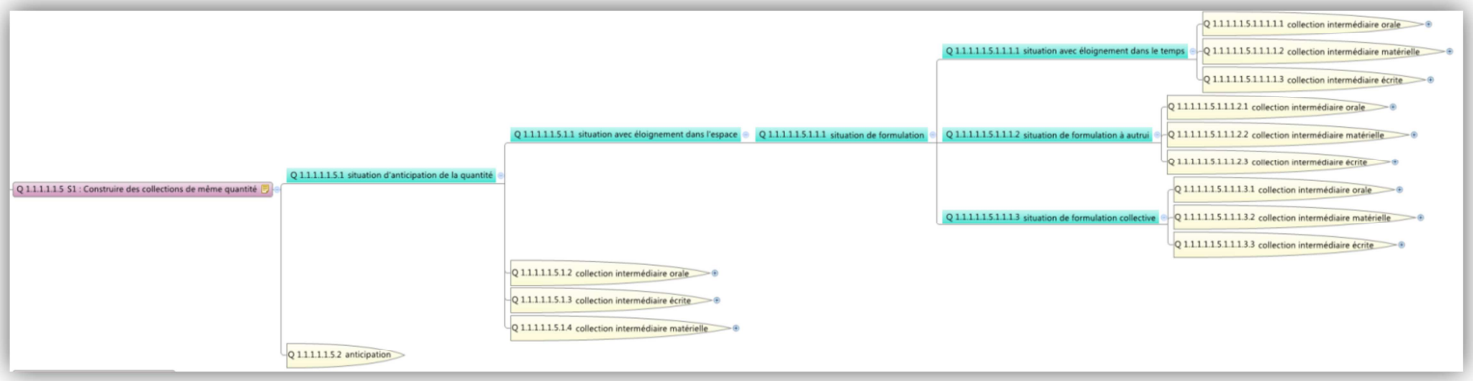


FIGURE 91 : ÉVOLUTION DES CONNAISSANCES À PARTIR DE LA SITUATION FONDAMENTALE S1 : « CONSTRUIRE DES COLLECTIONS DE MÊME QUANTITÉ »

FIGURE 92 : CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES SPÉCIFIQUES DÉTAILLÉES DANS LE COURS (COLORÉ)

L'analyse de l'évolution des connaissances à partir de la situation fondamentale « construire des collections de même quantité » est effectuée avec le logiciel transana.

La liste séquentielle des mots-clés de la série met en valeur, pour la situation fondamentale « construire la même quantité », le lien entre la situation d'action et l'installation du milieu ainsi que les situations de formulation avec les collections intermédiaires.

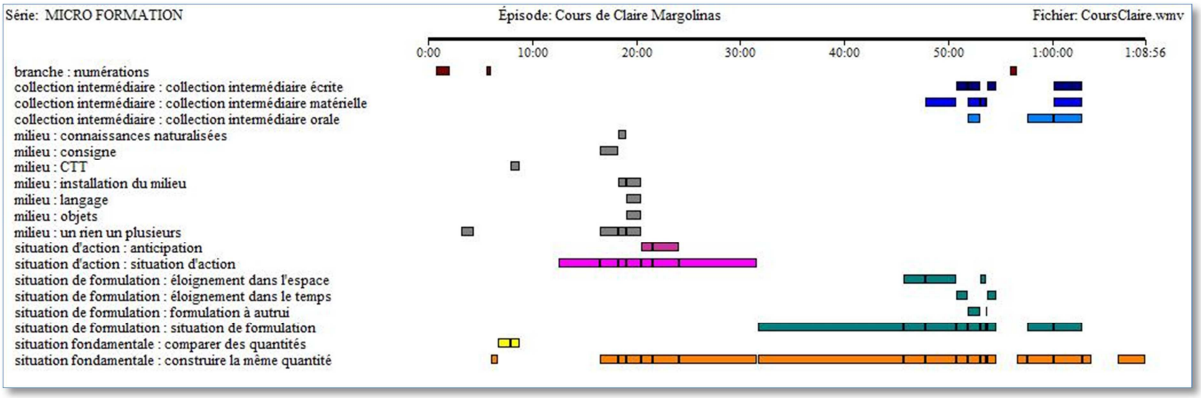


FIGURE 93 : CARTE SÉQUENTIELLE DES MOTS CLÉS DU COURS SUR LA QUANTITÉ

Le cours progresse pas à pas dans la branche, la première demi-heure est consacrée à la situation d'action, la seconde demi-heure aux situations de formulation. La présentation de la situation d'action est l'occasion d'introduire l'installation du milieu de la branche, c'est-à-dire les connaissances minimales des élèves qui permettent la dévolution des situations mais aussi ce que le professeur installe en termes d'objets, de vocabulaire, de consigne. Ensuite la situation d'action est détaillée en abordant l'anticipation, enfin les situations de formulation sont exposées en commençant par l'éloignement dans l'espace, dans le temps et la formulation à autrui. Le schéma du cours et le déroulé sur la branche cardinal-quantité pour la situation fondamentale S1 sont en concordance parfaite. Les mots-clés définis dans transana mettent en valeur deux temps dans la situation d'action, un premier moment consacré à l'installation du milieu avec la correspondance terme à terme, la présentation des objets, du vocabulaire associé, de la consigne, des connaissances pour la rétroaction. Et un second temps où l'anticipation prend toute sa place et permet la mise en place de connaissances nouvelles. Les mots clés pour les situations de formulation mettent en avant le rôle des collections intermédiaires avec la particularité pour la situation avec éloignement dans le temps de provoquer une collection intermédiaire écrite. L'évolution des connaissances est mise en relief par l'utilisation de collections intermédiaires. Les choix et l'utilisation que les élèves ont d'une collection intermédiaire déterminent l'évolution de leurs connaissances.

L'analyse du cours à partir de la branche cardinal-quantité de l'arbre des savoirs du nombre met en valeur l'enrichissement des connaissances du professeur pour le savoir relatif à la quantité. La diffusion de savoirs mathématiques spécifiques à l'enseignement de la quantité est visée à travers ce dispositif. Plus précisément, il s'agit de savoirs mathématiques spécifiques à l'enseignement se rapportant à la situation fondamentale « S1 : construire des collections de même quantité ».

3.4- Effet possible de la micro-formation sur les savoirs mathématiques spécifiques à l'enseignement des professeurs du corpus

Les enseignants qui participent à cette phase de la recherche ont tous mentionné des exemples, plus ou moins détaillés, pour la situation fondamentale S1 lors du premier entretien E1.

FIGURE 94 : CMS DE E POUR LA SITUATION FONDAMENTALE S1

FIGURE 95 : CMS DE D POUR LA SITUATION FONDAMENTALE S1

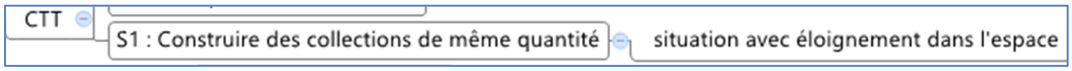


FIGURE 96 : CMS DE I POUR LA SITUATION FONDENTALE S1

FIGURE 97 : CMS DE J POUR LA SITUATION FONDAMENTALE S1

FIGURE 98 : CMS DE F POUR LA SITUATION FONDAMENTALE S1

Ils identifient tous la situation fondamentale S1 : construire des collections de même quantité. Par contre, elle ne se déroule pas de la même façon sur la branche. Par exemple, E et I font part d'une activité sur fiche relative à la construction de collections de même quantité. La situation proposée renvoie à une situation d'action car la correspondance terme à terme directe n'est pas possible puisque les collections de fleurs et de gommettes sont dans des cases différentes du lieu où les élèves doivent construire leur collection. I expose la situation avec éloignement dans l'espace « mettre la table ». F et J exposent le jeu de la marchande, avec une commande orale écrite possible.

4- PRINCIPES DE L'ANALYSE DES CINQ CAS

4.1- Réactions « à chaud »

L'entretien E2 n'est pas transcrit intégralement. Il est découpé en plusieurs paragraphes en fonction des dix-huit points du cours, quand cela est possible. Une partie concerne également la suite du dispositif avec la programmation des séances à filmer. Un travail d'analyse des réactions concernant les points du cours permet d'affiner l'enseignement du nombre du professeur et d'appréhender parfois des répercussions sur les différents niveaux d'activité.

4.2– Observation des connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement du professeur en situation

La micro-formation est orientée sur des savoirs mathématiques spécifiques à l'enseignement de la situation fondamentale S1 : « construire la même quantité ». L'entretien E2 qui jouxte

la projection du cours de Claire Margolinas renforce parfois les résultats dégagés dans l'analyse, il permet aussi une auto analyse de la représentation de l'enseignement du nombre chez certains professeurs, pose les bases de nouvelles situations à concevoir en classe et spécifie le cadre pour les séances de classe à filmer, c'est-à-dire les situations que le professeur souhaite montrer.

Récapitulatif des données			
Premiers entretiens	Micro-formation		
Représentation de l'enseignement du nombre à la maternelle Données 1 Entretien 1 : E1	Diffusion des savoirs didactiques spécifiques à l'enseignement de la quantité Données 2 Cours projeté de Claire Margolinas	Recueil de réactions sur les savoirs didactiques spécifiques à l'enseignement de la quantité Données 3 Entretien 2 qui jouxte le cours projeté : E2	Observation des connaissances mathématiques spécifiques pour l'enseignement de la quantité en situation Données 4 Séances filmées en classe

La répercussion de la diffusion de savoirs mathématiques spécifiques à l'enseignement de la quantité sur la représentation de l'enseignement du nombre du professeur est questionnée maintenant, à partir des séances construites. Les séances en classe permettent l'observation des connaissances mathématiques spécifiques du professeur en situation d'enseignement de la quantité. Les passations des consignes, les interactions avec les élèves, les adaptations parfois nécessaires, les prises en compte des connaissances des élèves, la diffusion des stratégies, sont autant d'éléments constitutifs de la situation didactiques (0) et d'observation (-1) qui attestent des connaissances mathématiques spécifiques du professeur.

Seules les séances en lien avec des éléments du cours projeté font partie de l'analyse, c'est à dire en lien avec des savoirs mathématiques spécifiques à la quantité. En effet, lors des réactions à chaud, en fonction des commentaires et des envies des professeurs, certains ont souhaité intégrer des pratiques courantes concernant l'enseignement du nombre dans les séances. Il s'agit dans les deux cas d'enseignement sur les numérations, orales, écrites et figurées.

Les séances filmées en classe, sont présentées chronologiquement pour rendre compte de l'enchainement prévu dans l'enseignement construit par le professeur. Je propose dans un premier temps, une vision de la séquence telle qu'elle m'a été donnée, dans son ensemble. Ensuite je décris particulièrement les séances filmées une à une, en essayant de rendre compte du déroulement de la situation et des connaissances sous-jacentes. Enfin, une attention particulière est apportée à la formulation des consignes

CONCLUSION

Tour à tour les séances proposées par les cinq enseignants sont présentées, décrites et analysées. Pour chaque enseignant, les réactions suite au cours projeté sont mises en parallèle avec les savoirs énoncés, puis sont questionnées par rapport à la conception de l'enseignement du professeur. Enfin, les connaissances mathématiques spécifiques sont observées en classe, la séquence proposée est décrite, les séances sont analysées et les consignes liées à la quantité sont étudiées. L'installation du milieu mobilise une attention particulière dans la description des connaissances mathématiques spécifiques. Enfin

l’analyse par enseignant se termine par une conclusion par rapport à la branche quantité de l’arbre des savoirs et une conclusion par rapport aux niveaux d’activité du professeur.

Les questions qui se posent sont les suivantes :

Quels sont les savoirs du cours qui se diffusent, comment se répandent-ils c’est-à-dire où se « greffent »-ils sur l’arbre du nombre du professeur et comment se propagent-ils ?

La micro-formation donne-t-elle des clés de compréhension par rapport aux connaissances mathématiques spécifiques du professeur, notamment pour observer les connaissances des élèves et leur évolution ?

CHAPITRE 2- L'ENSEIGNANT J

Après avoir suivi la micro-formation, J témoigne un intérêt particulier et une implication forte dans le dispositif. Il m'envoie ses fiches de préparation avant les séances de classe, fait des photocopies des travaux des élèves, note ses remarques au fur et à mesure. Bien que n'ayant aucune interaction entre les séances montrées, J consigne ses questionnements pour les exposer et les reprendre à la fin du protocole. À l'issue de sa séquence d'enseignement, J manifeste son envie de dépasser le cadre imposé par la recherche pour prolonger les interactions avec moi et avec Claire Margolinas. Ces échanges n'ont pas été inclus dans mon corpus de thèse.

Ainsi, J présente un cas particulièrement « favorable » pour analyser l'impact possible de la micro-formation, ce qui rend l'analyse plus simple. J'ai donc décidé de présenter ce cas en premier et de respecter seulement ensuite l'ordre alphabétique des lettres assignées aux enseignants pour les prochains chapitres.

1- RÉACTIONS « À CHAUD »

1.1- Résumé des commentaires du cours

Les premières réactions à chaud donnent une indication de la résonance des savoirs mathématiques spécifiques de la micro-formation sur les savoirs mathématiques spécifiques visés par l'entretien antérieur E1. Ces réactions sont également classées suivant les niveaux d'activités du professeur, de manière à identifier les niveaux renforcés ou questionnés par les nouveaux savoirs.

Les points du cours faisant l'objet d'un commentaire de J dans l'entretien E2, sont envisagés dans l'ordre dans lequel ils apparaissent dans le cours (qui n'est pas nécessairement celui des commentaires de J).

Point 2 : Subitizing

J fait part de sa difficulté à trouver des situations permettant l'apprentissage de cette reconnaissance immédiate pour un élève de CP.

> J- ah oui les enfants aussi qui ont du mal à reconnaitre une quantité moi j'ai un gamin en CP il a du mal à reconnaitre les quantités même en CP tu vois par exemple cinq il peut lui arriver encore en CP de recompter il le reconnait pas alors c'est bon j'ai fait beaucoup de jeux de société avec le dé mais après je ne sais pas comment faire

La difficulté persistante chez un élève questionne J. Le niveau d'observation (-1) interagit avec les niveaux (0 &1). La difficulté observée de l'élève renvoie à la difficulté du professeur en (0&1).

Point 3- Critères de validité

J revient sur son expérience avec les TPS-PS.

> J- un rien plusieurs aussi et en fait là maintenant je le fais moins parce que j'ai des plus grands mais je me rappelle qu'à la ville X je travaillais beaucoup là-

dessus tu vois et en fait des fois je me disais mais finalement tu es trop j'avais l'impression de rester trop longtemps là-dessus alors qu'en fait elle a l'air de dire que quand même c'est c'est drôlement important d'avoir cette notion enfin moi je disais un plusieurs pas du tout mais mais tu vois ça me parait difficile ça aussi finalement de quantifier enfin de rien de dire que c'est une quantité rien de dire tu vois de dire y'a rien alors au niveau du vocabulaire oui y'a rien mais ça ça me parait pas évident aussi à réfléchir

Les connaissances « un rien plusieurs » indispensables au début de la branche quantité sont travaillées par J. Mais à la différence du cours où ces connaissances sont énoncées comme déjà présentes chez les élèves entrant à l'école maternelle J consacre beaucoup de temps à installer ces notions-là.

J est conforté dans sa pratique mais surtout dans sa conception de séquence, le niveau (+2) est ici renforcé par les critères de validité.

Point 5- TSD / Situation d'action

J n'a jamais entendu parler de Guy Brousseau ni de théorie des situations didactiques.

J- théorie des situations didactiques au début ça m'a interpellé en fait je me suis dit mais qu'est-ce que c'est tu vois […] Guy Brousseau je le connaissais pas du tout […] tu vois jamais entendu parlé

Le modèle de la situation d'action est une aide pour la conceptualisation des connaissances de l'action et de la rétroaction.

J- c'est vraiment parlant ce truc là avec ce schéma avec la rétroaction aussi

Les savoirs relatifs à la théorie des situations didactiques touchent le niveau (+2), J relève la rétroaction, il visualise, à l'aide du schéma théorique de la situation d'action, les connaissances de la rétroaction qui ne sont pas de même nature que les connaissances d'action. C'est bien la conception de l'enseignement de la quantité qui est atteinte par ces savoirs didactiques.

Point 6 : Introduction et installation du milieu Consigne

J remarque que la situation n'a pas forcément besoin d'être « enrobée ».

J- par rapport au fait que des fois on enrobe […] elle n'appuie pas là-dessus

Il insiste sur ce point et sur la liberté que cela offre dans sa préparation notamment par rapport au temps consacré, à l'école maternelle, aux découpages. Cette réflexion était déjà présente dans le premier entretien E1.

Le niveau noosphérien est renforcé par l'interprétation de J sur les situations, en effet, dans le cours rien n'est dit sur la nécessité de l'habillage des situations, et J, qui s'autorise à présent à s'extraire de cette contrainte, voit dans l'absence de propos à ce sujet une validation et une liberté possible de faire autrement.

Point 7- Situation d'action en classe

J a noté sur sa feuille :

J- l'anticipation avec le plateau c'est par l'anticipation qu'on accède à la quantité

Cette note lui permettra de concevoir la première séance avec la situation d'action. Elle se situe au niveau (+2).

Point 8- Rôle du professeur

La répétition des situations, accepter l'échec, l'aménagement de la diffusion des stratégies sont des points relevés par J. Il s'interroge jusqu'à quand faut-il répéter les situations.

J- ah oui là aussi dans le rôle du professeur la répétition des situations tu vois je me pose des questions tu vois jusqu'à quand on fait cette répétition des situations

Le rôle du professeur renvoie au niveau de la situation didactique et plonge J dans des questions pratiques du niveau (0).

Point 9- Situations de formulation

Il identifie la formulation comme étant plus importante que la situation d'action. Il note la nécessité de formuler. J rend compte de sa compréhension partielle sur la notion de formulation, il comprend l'enjeu et l'importance de celle-ci par rapport à la situation d'action, mais il ne peut pas, à partir de ce cours, accéder au savoir. J emploie une fois le terme de formalisation à la place de formulation. Toutefois, il sait qu'il se joue là quelque chose d'important pour l'évolution de ses propres connaissances.

J- la formulation pour diffuser les stratégies mais en fait là là ce moment-là j'ai moyennement

Le niveau (+2) de conception de la séquence est impacté par ces savoirs didactiques mais il n'a pas de visibilité de la raison d'être de la situation de formulation. Le terme de formulation fait peut-être écran à la compréhension des enjeux de la situation.

Point 10- Eloignement dans l'espace

J reconnait les situations dans l'espace qu'il utilise en classe.

J- sur l'espace oui ça j'utilise qu'on ne puisse pas se déplacer ça je le fais

Il décrit une situation empruntée à cap math CP, le robot ziglotron[81].

J- le ziglotron c'est un espèce de robot qui a des boutons et les boutons ne fonctionnent pas et donc il faut aller chercher les boutons pour pouvoir faire fonctionner le robot mais du coup avant d'y aller au début tu vas juste chercher les boutons comme ça sans autre chose puis en une seule fois puis pour les CP avec les boîtes de dix

J interprète directement la situation avec éloignement dans l'espace au niveau (+1) de réalisation de la leçon.

Point 11- Eloignement dans le temps

L'éloignement dans le temps n'est pas une situation que J élabore dans sa classe « mais dans le temps non honnêtement ».

J- ouais et puis le temps le décalage dans le temps moi je ne l'utilise pas ou très peu quoi parce qu'en fait pour moi le temps c'est quelque chose qui me parait être la notion la plus abstraite pour les enfants et du coup j'ai l'impression que c'est difficile tu vois pour eux de revenir sur quelque chose qu'on a enfin on revient sur quelque chose qu'on a fait la veille mais j'ai toujours du mal à laisser quelque chose en suspens tu vois comme ça et du coup je l'utilise peu ou pas

[81] Le Ziglotron, Cap Maths CP Hatier

Il est curieux de cette nouvelle opportunité avec la situation de formulation avec éloignement dans le temps.

Il entrevoit l'opportunité d'une situation avec éloignement dans le temps aux niveaux (+1) et (+2). Toutefois, il donnera des explications et des justifications à partir du niveau (+3), car pour lui, la notion du temps est difficile à aborder à l'école maternelle[82].

Point 12- Communication à autrui

J organise des situations de formulation à autrui avec des commandes.

> J- la commande aussi avec la marchande ça je fais beaucoup et puis bon y'a pas mal de situations dans le cap math qui s'y prêtent avec les CP et puis qui se prêtent aussi du coup avec les GS

Ici encore, les situations de communication à autrui font partie de son enseignement, il les réalise au niveau (+1).

Point 13- Collection intermédiaire

J analyse les collections intermédiaires possibles autorisées à ses élèves : les doigts et le dénombrement par comptage. Il identifie le recours à une collection intermédiaire écrite avec l'éloignement dans le temps. J permet l'utilisation de collection intermédiaire matérielle avec les doigts des mains et la collection intermédiaire orale avec le cardinal de la collection. Il aborde ce savoir sur les collections intermédiaires en analysant plus finement les procédures des élèves.

> J- dans le temps non mais après dans le temps en fait donc tu vas avoir cette symbolisa tu vas aller aussi vers la symbolisation tu vas avoir ces différentes possibilités soit utiliser les jetons et garder cette collection en réserve enfin une collection intermédiaire de jetons soit tu vas pouvoir utiliser la symbolisation soit il va pouvoir y avoir le nombre mais si tu donnes aussi une collection ça dépend aussi ce que tu attends si tu donnes une collection grande et ben du coup le nombre ils vont pas pouvoir l'utiliser parce que c'est pas dans leur compétence c'est super c'est fascinant […] collection intermédiaire matérielle et validation le lendemain ça m'intéresse vraiment […] et le fait aussi que la comptine soit aussi une collection parmi d'autres une collection intermédiaire parmi d'autres et en fait oui mais on n'y pense pas

Ce savoir lui permet une lecture éclairée des stratégies et des connaissances en situations des élèves au niveau (-1).

Point 14- Du temps aux apprentissages

J apprécie la remarque sur le temps donné aux apprentissages.

> J- j'aime bien aussi le fait qu'elle dise que ça prendra beaucoup de temps à l'école maternelle cette notion-là tu vois qu'on va y revenir ça c'est intéressant aussi

Il savoure ce point qui renforce le niveau (+3).

Point 16- Pas de hiérarchie dans les procédures

J entrevoit la possibilité de modifier les situations par rapport aux stratégies utilisées des élèves. Il conçoit les procédures en réponse aux situations.

[82] J a fait des études supérieures en Histoire.

J- y'a plus de procédures expertes c'est en fonction de ta situation que tu vas déterminer les procédures qui fonctionnent ça c'est génial par contre

Il se sent renforcé dans le niveau de la situation didactique pour s'adapter aux procédures utilisées par les élèves. Le niveau (-1) est également sollicité ici par l'intermédiaire d'une observation centrée sur les procédures utilisées.

Point 17- Configurations

J trouve les représentations symboliques intéressantes.

J- ce qui est intéressant aussi je trouve c'est les représentations symboliques

Ce sont plutôt les niveaux (+1) et (+2) qui sont touchés par sa réflexion.

Synthèse des points abordés

Points abordés dans le cours	Points repris par J
Point 1 : Suite orale des mots nombres	
Point 2 : Subitizing	X
Point 3- Critères de validité	X
Point 4 : Situation fondamentale : même quantité que	
Point 5- TSD / Situation d'action	X
Point 6 : Introduction et installation du milieu Consigne	X
Point 7- Situation d'action en classe	X
Point 8- Rôle du professeur	X
Point 9- Situations de formulation	X
Point 10- Eloignement dans l'espace	X
Point 11- Eloignement dans le temps	X
Point 12- Communication à autrui	X
Point 13- Collection intermédiaire	X
Point 14- Du temps aux apprentissages	X
Point 15 : Des quantités suffisantes	
Point 16- Pas de hiérarchie dans les procédures	X
Point 17- Configurations	X
Point 18- Définition du cardinal	

J commente, parfois évoque quatorze points des dix-huit présentés dans la micro-formation.

À travers les réactions exprimées, tous les niveaux d'activités de J sont concernés par le cours. Il interprète les savoirs exposés à différents niveaux d'activités selon que ses connaissances sont confortées, bousculées ou éclairées par de nouveaux savoirs. Le niveau noosphérien de J est atteint par les savoirs didactiques qui touchent à sa conception du nombre (+2) mais aussi à sa conception de l'enseignement à l'école maternelle en général (+3).

1.2- Réactions par rapport à la conception de l'enseignement du nombre

J explique :

J- tu sens que que y'avait des trucs que tu sentais mais qu'il y avait des choses quand même qui t'échappaient et du coup ces choses-là et des choses aussi que tu fais que tu sens mais que tu avais pas mis d'explications et de mots dessus

Peut-être fait-il allusion aux critères de validité « un plusieurs et rien » qu'il sentait comme étant importants, ensuite, sans doute parle-t-il des concepts de la théorie des situations qui lui échappaient, enfin peut-être que les explications du cours lui ouvre la compréhension de la situation avec éloignement dans l'espace, de la collection intermédiaire. J fait part de son enthousiasme :

J- en fait c'est super ça fait franchement ça fait du bien ça de voir ça parce que du coup tu te dis ah mais oui mais oui

Ses connaissances deviennent à présent pour J des savoirs, des savoirs mathématiques spécifiques à l'enseignement de la quantité, clairement repérés et identifiés.

Pendant les réactions à chaud E2, J fait part de certaines situations reconnues dans les exemples du cours, qui font partie de son enseignement comme la prise en compte des connaissances « un rien et plusieurs » et des situations avec éloignement dans l'espace.

La figure suivante (Figure 99 : Branche cardinal-quantité de J issue de l'entretien E1) reprend la branche cardinal-quantité obtenue à l'issue du premier entretien E1. La figure 11 (Figure 100 : Branche cardinal-quantité de J précisée après les réactions à chaud E2) complète la première représentation de l'enseignement de la quantité de J par des situations entendues dans le cours qu'il reconnait comme faisant partie de son enseignement.

FIGURE 99 : BRANCHE CARDINAL-QUANTITÉ DE J ISSUE DE L'ENTRETIEN E1

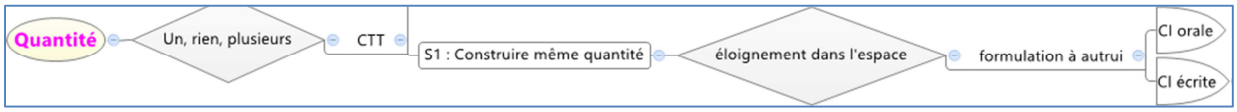


FIGURE 100 : BRANCHE CARDINAL-QUANTITÉ DE J PRÉCISÉE APRÈS LES RÉACTIONS À CHAUD E2

Suite au cours visionné, à la fin des réactions à chaud, J prévoit de montrer une situation avec éloignement dans l'espace, une avec formulation à autrui et une avec éloignement dans le temps, les situations sont entourées sur la figure suivante. Il ne dit rien quant à une situation d'action, peut-être parce que pour lui cela va de soi.

Qu'en est-il à présent de son choix effectif et de ses connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement de la quantité en situation didactique ?

2- SÉQUENCE ÉLABORÉE PAR J

J conçoit une séquence d'enseignement sur la quantité comprenant douze séances pour les neuf élèves de MS (7) GS(2). Au moment de cette séquence, J a une classe à trois niveaux, MS GS CP. Pour ces séances sur la quantité, les CP sont parfois en autonomie quand J est avec les MS GS, parfois il les intègre avec MS GS mais il leur demande de ne pas intervenir en leur expliquant le but de mon travail exclusivement pour l'école maternelle. J a prévu certaines adaptations et propose, en parallèle et sans ma présence, une partie du travail avec les CP, qui ont parfois très envie d'intervenir. Les séances choisies pour être filmées sont les séances 1, 5, 9, 10 et 12. Il me fournit la totalité de la séquence, les tableaux de réussites des élèves ainsi que la production des élèves en dictée à l'adulte réalisée pour le cahier de vie. Les cinq séances montrées sont décrites chronologiquement pour rendre compte du déroulement des évènements dans la classe. La figure suivante (Figure 101:

Séquence quantité élaborée par J) propose les douze séances élaborées par J, les séances 1, 5, 9, 10 et 12 avec une photo sont celles qui ont été filmées.

FIGURE 101: SÉQUENCE QUANTITÉ ÉLABORÉE PAR J

2.1- Présentation des séances montrées

a- Séance 1- Situation d'action

 Dans la salle de motricité	Durée de 0 à 3 :33 Situation d'action dans la salle de motricité. Installation du milieu « cerceaux – élèves » : Des cerceaux jonchent le sol de la salle de jeu, les élèves marchent autour et au signal du tambourin, chaque élève se place dans un cerceau, il n'y a pas de cerceau vide, ni d'élève sans cerceau. J insiste sur le mot « chaque » en situation. 3 :33 à 14 :04

	Anticipation avec le panier « cerceaux – élèves » : J propose à trois élèves différents, à tour de rôle, de mettre autant d'élèves que de cerceaux dans le panier (la cage de foot rouge), puis au signal du tambourin c'est la phase de validation, chaque élève s'installe dans un cerceau. Trois essais sont réalisés par trois élèves différents, une fois avec cinq cerceaux, puis trois cerceaux et cinq cerceaux.
 Dans la classe	14 :45 à 17 :52 Situation d'action en classe. Installation du milieu « maison – ours » : Dans un plateau se trouvent des bouchons de bouteilles de lait qui représentent les maisons, un gant de toilette avec des ours dedans ainsi qu'une barquette en bois, qui sert de panier.
	18 :57 à 37 :10 Anticipation avec le panier « maison – ours » : Mettre autant d'ours que de maisons dans le panier, au signal du tambourin déposer chaque ours dans une maison pour valider. 37 :13 à 39 :40 Temps collectif, phase de bilan de l'activité : Un temps collectif est prévu pour parler du travail réalisé dans la matinée toute la classe réunie les MS GS CP.

J m'indique, dans la séquence transmise, des renseignements pour les séances 2, 3 et 4 non observées.

> *« Séances 2 et 3 : Mêmes compétences et même situation proposée avec une évolution de la quantité de maisons (bouchons), évolution progressive et différente selon les enfants.*
> *Séance 4 : Même situation dans le préau puis avec les plateaux avec une seule recherche avec un nombre de bouchons avec lequel l'enfant a déjà réussi. En deuxième partie de séance nous avons fait une diffusion de procédures. » Notes de J*

b- Séance 5– Situation avec éloignement dans l'espace

 Le jeu se déroule dans la salle de motricité et le panier se trouve dans la salle de repos, à côté.	0 à 13 :40 Situation avec éloignement dans l'espace dans la salle de motricité, milieu « cerceaux – élèves » : Les cerceaux sont déposés au sol et le panier rouge se trouve dans la salle de repos à côté de cette salle. Pour réaliser leur panier, les élèves doivent changer de salle, les cerceaux ne sont plus visibles. Les élèves du panier sont retenus par une corde et amenés dans la salle de motricité pour la validation au signal du tambourin.
 Dans la classe : les ours sont déposés derrière l'étagère, les plateaux avec les maisons ne sont plus visibles	13 :40 à 39 :30 Situation avec éloignement dans l'espace dans la classe, milieu « maison – ours » : Mettre autant d'ours que de maisons dans le panier, avec les ours qui se trouvent dans leur sac sur une chaise derrière l'étagère. Les élèves partent derrière l'étagère pour préparer leur panier et reviennent à la table pour la validation au signal du tambourin. 39 :30 à 41 :10 Temps collectif, phase de bilan de l'activité : Un temps collectif est prévu pour faire le point de la matinée avec les autres niveaux, mais c'est l'occasion également de revenir sur une stratégie qui

	fonctionnait pour la situation d'action mais plus maintenant avec des collections éloignées.

J donne les précisions suivantes et me transmet les tableaux de validation pour les séances 6, 7 et 8.

> *« Séances 6 et 7 : Mêmes compétences et même situation proposée qu'à la séance 5 avec une évolution de la quantité de maisons (bouchons), évolution progressive et différente selon les enfants. Activité collective dans le préau puis individuelle avec les plateaux dans la classe (sachets d'ours derrière les rayonnages).*
> *Séance 8 : Même situation qu'à la séance 5 avec les plateaux et deux situations de recherche. En deuxième partie de séance nous faisons une diffusion de procédures. » Notes de J*

c- Séance 9– Situation avec éloignement dans l'espace, première partie d'une situation avec éloignement dans le temps

 Modèles de cartes du Père-Noël à photocopier tirés de Vers les maths GS, chez Accès Validation	1 :48 à 33 :42 Situation avec éloignement dans l'espace avec les cartes du Père-Noël : Les cartes pour le Père-Noël doivent être remplies avec des gommettes, autant de gommettes que de ronds. Celles-ci se trouvent derrière l'étagère de la classe. Les élèves s'y rendent avec leur panier en bois et reviennent coller les gommettes à la table pour valider.
 Message écrit, collection intermédiaire écrite	36 :16 à 53 :58 Situation avec éloignement dans le temps première partie, réalisation du message : Mettre autant d'ours que de maisons dans le panier, mais les ours et le panier ne sont pas accessibles aujourd'hui, seulement demain. Les élèves réalisent un message écrit pour ceux qui le souhaitent.

d- Séance 10- Situation avec éloignement dans l'espace, deuxième partie d'une situation avec éloignement dans le temps

 Les cartes du Père-Noël	0 à 2 :08 Situation avec éloignement dans l'espace avec les cartes du Père-Noël : D'autres cartes pour le Père-Noël doivent être remplies avec des gommettes, autant de gommettes que de ronds. Celles-ci se trouvent toujours derrière l'étagère de la classe. Les élèves s'y rendent avec un bouchon et reviennent coller les gommettes à la table pour valider. Les gommettes en trop seront collées derrière la carte. Les élèves travaillent en autonomie. Deux adaptations sont apportées : le panier en bois, troué, qui laissait passer les gommettes par terre est remplacé par un bouchon. Les gommettes en trop sont collées derrière la carte pour que le maitre puisse valider. 19 :38 à 22 :35 Correction et validation par le maitre.

 Lecture du message écrit	2 :12 à 19 :32 Situation avec éloignement dans le temps seconde partie, réalisation du panier et validation : Les élèves utilisent leur message pour réaliser le panier d'ours. Puis l'enseignant donne le plateau avec les maisons pour la validation. Nouveau plateau et nouvel essai, nouveau message.

Pour la séance onze, les indications sont les suivantes :

> *« Les enfants préparent leurs ours par rapport aux maisons montrées vendredi. Validation : l'enseignant amène les maisons et les enfants mettent les ours dans les maisons, ils constatent la réussite ou non. Constat : beaucoup d'enfants n'ont pas utilisé de papier, « c'est difficile de se souvenir sans papier », seul un élève s'est souvenu (huit maisons). L'enseignant regarde avec ceux qui en avaient, leur papier pour voir d'où vient le problème en cas de non réussite et comment ils ont réussi en cas de réussite. « On n'est pas sûr de réussir même si on a bien fait le papier, il faut bien prendre les ours comme le papier ». Il s'agit d'un premier bilan fait de façon individuelle, il permet de réfléchir sur la procédure essayée. Note de J et réactions d'élèves.*

e- Séance 12- Deuxième partie d'une situation avec éloignement dans le temps et situation de formulation à autrui

	2 :04 à 19 :55 Situation avec éloignement dans le temps seconde partie (une semaine de décalage), réalisation du panier et validation Les paniers et les sacs avec les ours sont distribués pour que les élèves construisent leur panier d'après le message écrit réalisé une semaine avant. Puis validation avec les maisons.
 Transport de l'information écrite sur la quantité à autrui	19 :55 à 40 :50 Situation de formulation à autrui Le jeu de la marchande, à deux, un élève a le plateau avec les maisons, l'autre élève, éloigné détient le sachet avec les ours. Le premier élève transmet un message écrit concernant les maisons.

2.2- Analyse des consignes

La passation des consignes permet une première observation quant aux connaissances mathématiques spécifiques du professeur. Comment les consignes sont-elles formulées, quels sont les mots choisis pour viser la quantité ?

a- Séance 1

Situation cerceaux-élèves

Situation d'action Consigne « cerceau élève »	J- l'enfant qui va venir m'aider il va falloir qu'il prenne juste assez d'enfants pour qu'il y ait un enfant dans chaque maison jaune et ces enfants il va les mettre dans un panier puis après on vérifiera s'il ne s'est pas trompé s'il a bien pris juste assez d'enfants pour qu'il y ait un enfant dans chaque maison pas plus pas moins

J utilise la terminologie « juste assez, un dans chaque, pas plus pas moins » pour aborder la même quantité. L'anticipation est formalisée par la présence du panier, enfin la validation « vérifiera s'il ne s'est pas trompé » signalée par le mot "après" qui permet la rétroaction de l'action, est énoncée aux élèves.

Situation maisons-ours

Situation d'action Consigne « maisons - ours »	J- il va falloir mettre un ours dans chaque attends attends […] il va falloir mettre un ours dans chaque maison mais avant de les mettre dans les maisons on devra les mettre dans le panier on n'a pas le droit de mettre attends chut […] de mettre les ours dans les maisons directement hein ça c'est interdit hein on n'a pas le droit donc on prend les ours et on les met attends écoute moi […] donc là vous prendrez les ours et vous les mettrez dans le panier pour qu'ensuite quand je vais venir voir et que je écoute […] vous prendrez les ours vous les mettrez dans le panier quand vous pensez que c'est bon que vous allez pouvoir après mettre un ours et un seul dans chaque maison vous me dites maitresse ça y est on va pouvoir faire le tambourin et là je viendrai avec le tambourin je taperai dans le tambourin et vous prendrez les ours et vous pourrez les disposer dans les cerceaux dans les maisons et là on verra si vous avez gagné ou si vous n'avez pas gagné et si vous n'avez pas gagné vous essaierez de trouver une façon de pouvoir gagner vous avez le droit de faire tout ce que vous voulez avec les ours et avec les maisons la seule chose que vous n'aurez pas le droit de faire c'est de mettre les ours directement dans les maisons on n'a pas le droit de mettre dans les maisons pour essayer on doit aller les amener dans le panier mais on peut déplacer les maisons on peut faire des essais avec les ours mettre les ours sur les plateaux

Lors de cette consigne J est dérangé quatre fois par des élèves « attends attends, attends chut, attends écoute moi, écoute », il est coupé dans sa consigne, il reprend et prolonge. Ici il réutilise la terminologie « un dans chaque et un et un seul dans chaque » pour exprimer la construction de quantités identiques. L'anticipation est repérée avec le panier « mettre dans le panier » et le mot « avant », la validation est également mentionnée et introduite par « ensuite ». J fait part de ce qui est autorisé et ce qui ne l'est pas.

b- Séance 5

La séance 5 est la première séance d'éloignement dans l'espace. Une observation un peu plus précise portera sur la transformation de la situation d'action en situation d'éloignement dans l'espace.

Situation cerceaux-élèves

Situation avec éloignement dans l'espace Consigne « cerceau élève	J- alors j'ai installé des cerceaux ce sont les maisons qui se rappelle de l'activité qu'on a fait la dernière fois avec les maisons qu'est-ce qu'il fallait faire allez élève N
	Élève N- en fait maitre il avait mis le foulard et on prend les enfants si on en met beaucoup on a perdu
	J- et si on en met beaucoup on a perdu d'accord donc il faut prendre des enfants pour pouvoir en mettre combien dans chaque maison
	Élève N- un deux trois quatre quatre
	J- un dans chaque
	Élèves- maison
	J- un dans chaque maison et les enfants on les met directement dans les maisons
	Élèves- non dans le panier
	J- qui c'est qui veut expliquer où on les met allez élève S
	Élève S- dans le panier
	J- on les met dans le panier
	Élève S- il est là-bas le panier
	J- ah mais oui le panier il n'est pas là oh lala

	Élève S- moi je sais il est où
	J- tu sais où il est toi élève S (il part en courant en direction de la salle de repos) attends reste là explique viens explique nous où est-ce qu'il est le panier
	Élève S– là-bas dans notre chambre
	J- le panier aujourd'hui je l'ai mis dans la salle de repos donc on va faire assieds-toi élève S un petit peu le même jeu un peu la même activité pour gagner il faudra bien préparer les enfants pour qu'il y en ait un dans chaque maison et un seulement et qu'il y ait pas de maison vide et qu'il reste pas d'enfant dans le panier qu'il y ait pas d'enfant en trop mais le panier aujourd'hui il va être dans la salle de repos donc il faudra aller préparer le panier dans la salle de repos alors avant il faudra bien regarder les maisons que j'ai mises
	élève N [pointe avec son doigt et commence à compter]- un
	J- chut qui c'est qui va essayer de le faire aujourd'hui

Les termes « un dans chaque maison et un seulement » sont employés, le panier n'est pas directement sur place. Les élèves connaissent maintenant la situation, on note une familiarité avec le milieu et les connaissances concernant la validation n'ont plus besoin d'être explicitées. Aussi, J insiste uniquement sur le déplacement du panier dans la salle de repos.

Situation maisons-ours

Situation avec éloignement dans l'espace Consigne « maisons ours	J- dans un plateau j'ai préparé les maisons et j'ai préparé le panier et dis-nous S qu'est ce qui se passe qu'est-ce qui nous manque là
	élève S- les paniers pour mettre les ours dedans
	J- et oui il nous manque les sachets avec les ours alors aujourd'hui attends tu les as déjà vus les sachets avec les ours écoute bien élève N c'est important les sachets avec les ours ils sont derrière l'étagère là-bas donc il faudra aller avec votre panier avant vous regarderez bien les maisons vous pourrez les déplacer vous pourrez faire tout ce que vous voulez avec les maisons et puis après vous partez avec votre panier et puis en une seule fois il faudra aller chercher là vous n'êtes pas prêts […] donc on disait avec élève S qu'on avait bien le panier les maisons mais pas les ours parce que les sachets d'ours ils sont là-bas derrière derrière l'étagère des documentaires on ira les voir tout à l'heure donc il faudra bien regarder les maisons et quand on a regardé les maisons et qu'on est prêt on prend son panier et en une seule fois on a le droit de faire qu'un seul voyage on va préparer ses ours après on les ramène et puis pareil on appelle le maitre qui tape dans le tambourin et puis on voit si on a gagné ou si on n'a pas gagné

Pour exprimer la même quantité l'enseignant J utilise à présent le verbe « regarder », il s'agit de « bien regarder » les maisons, sous-entendu de bien regarder la quantité de maison mais tout se passe comme si J s'interdisait de prononcer le mot quantité, alors qu'il ne veut pas prononcer combien ou quel est le nombre de maisons qui impliquent une procédure de comptage ou de dénombrement. Ce phénomène « d'interdit » peut être rapproché du cas d'une enseignante débutante de collège : Béatrice (Margolinas, 2002) qui s'interdit de prononcer le mot "transformation", car elle pense que le programme le proscrit, et qui s'offusque que sa tutrice expérimentée, elle, s'autorise cet emploi.

c- Séance 9

La séance 9 est la première situation d'éloignement dans le temps aussi l'observation porte spécifiquement sur sa mise en place.

Situation cartes-Père-Noël

Situation	J- donc pour préparer sa tournée vous allez avoir des jouets à gagner

avec éloignement dans l'espace Consigne « cartes Père-Noël »	vous aurez comme moi élève R des petites cartes avec un jouet ici ça sera pas les mêmes qu'est-ce que c'est le jouet que j'ai moi […] pour le gagner il faut que je mette une gommette sur chaque petits ronds sur chaque petits cercles il faut qu'il y en ait une pour chaque cercle pas plus pas moins mais les gommettes vous les avez pas sur la table
	Élèves- non
	J- par contre vous avez un petit panier il faudra aller les chercher pour la table verte les gommettes elles sont là-bas derrière et vous la table bleue les gommettes elles sont là-bas derrière [L'enseignant J montre les paniers de gommettes] il faut trouver avec sa petite carte combien il faut aller en chercher
	Élève S- on prend sa carte
	J- on n'a pas le droit de prendre sa carte jusque là-bas c'est une bonne question élève S on n'a pas le droit de l'amener là-bas donc il va falloir trouver une solution pour récupérer ses gommettes sans sa carte vous avez le droit d'utiliser du matériel toujours pareil la table qui est là-bas je vous mets aussi des feuilles de différentes tailles avec des feutres au niveau du matériel vous ferez comme vous voudrez par contre on n'aura pas le droit de retourner chercher les gommettes si on s'est trompé on n'a pas le droit de retourner en chercher d'autres s'il en manque par exemple on fait qu'un seul voyage un voyage pour chaque carte d'accord
Situation avec éloignement dans le temps Consigne « maisons ours »	J- vous avez le plateau vous avez les maisons les petits bouchons mais il va vous manquer quelque chose qu'est-ce qu'il vous manque tu lèves le doigt
	Élève R- le panier
	J- il manque le panier aujourd'hui je ne vais pas donner le panier il manque quoi encore élève A
	Élève A- les ours
	J- il manque aussi les ours les ours je les ai pas aujourd'hui vous avez vus quand vous êtes allés chercher les gommettes là-bas vous les avez pas vus les ours je les ai pas les ours je vais vous les donner demain mais aujourd'hui je vous ai donné le plateau élève P elle me regarde elle se dit mais vraiment c'est bizarre ça tu as donné le plateau tu donneras les ours demain et ben oui cette fois ci je donne le plateau aujourd'hui avec les maisons et les ours je les donnerai que demain il va vous falloir regarder vos maisons et trouver une solution pour pouvoir vous rappeler demain

Pour la situation avec éloignement dans l'espace, la même quantité est exprimée avec les mêmes termes «une gommette pour chaque rond ». J souligne la possibilité d'utiliser du matériel pour la constitution d'une collection intermédiaire matérielle ou écrite.

Pour la situation avec éloignement dans le temps, J n'énonce plus la quantité « un pour chaque », il s'agit de regarder les maisons et pouvoir se rappeler demain.

d- Séance 10

La séance 10 est la seconde étape de la situation avec éloignement dans le temps. Les élèves ne se souviennent plus du message réalisé la veille.

Situation avec éloignement dans le temps 2/2 Consigne « maisons ours »	J- aujourd'hui j'ai amené les petits ours mais y'a pas les maisons les maisons elles étaient là hier vous vous rappelez et il va falloir maintenant mettre les petits ours dans les paniers et après je vous prêterai les maisons et on verra si ça marche ou si ça ne marche pas vous êtes prêts à mettre les petits ours vous n'avez besoin de rien allez je vous laisse faire
	Élève N- on fait quoi là
	J- c'est pour les maisons par rapport à hier tu te rappelles après je vous donnerai et vous vous avez besoin de rien vous vous en rappelez comment des maisons d'hier
	Élève P- moi après je me rappelle l'autre jour
	J- tu t'es rappelé de quoi toi élève P
	Élève P- de mon nombre d'ours

	J- ah toi tu t'es rappelé de ton nombre toute la nuit
	Élève P- non pas la nuit
	J- et là ce matin tu t'en es rappelé on n'avait pas fait quelque chose pour s'en rappeler
	Élèves- si
	J- on avait fait quoi déjà
	Élève M- on prend un papier
	J- ah vous avez mis des choses sur un papier vous le voulez votre papier ou vous en avez pas besoin

e- Séance 12

La séance 12 est la première séance de communication à autrui.

Situation maisons-ours

Situation de communication à autrui Consigne « maisons ours »	J- il va y avoir des acheteurs qui vont être là-bas et qui vont regarder les maisons et après ils viendront voir leurs copains ici qui seront les marchands vous serez par groupe de deux ou par groupe de trois et il faudra dire à son marchand alors soit le lui dire soit le lui écrire soit lui expliquer en tout cas lui faire comprendre parce que c'est le marchand qui préparera les petits ours il faudra pas se tromper faudra bien expliquer au marchand pour qu'il puisse après bien préparer les ours

J ne précise plus « un ours dans chaque maison » il s'agit de regarder les maisons pour bien préparer les ours, les verbes regarder et préparer n'évoquent pas la quantité, celle-ci est implicite, mais ils engagent les élèves dans l'action, dans une recherche active.

La passation des consignes joue un rôle déterminant dans la compréhension et l'implication des élèves dans la situation. J propose différentes formulations afin que tous les élèves puissent comprendre ce qui est demandé. À partir des consignes et de la compréhension que les élèves en ont, il s'agit d'observer une part de la dévolution de la situation faite aux élèves. Les consignes sont également le reflet de l'intention pédagogique et didactique impulsée par le professeur.

J contrôle son vocabulaire par rapport à la quantité, tout au long des séances, il s'interdit le mot "combien" qui induit immédiatement un dénombrement ou une procédure de comptage, il s'interdit même de demander la même quantité préférant employer « un pour chaque ». Nous pouvons ici parler d'un véritable interdit puisque J écrit sur sa feuille de préparation de ne pas employer « combien ». J réalise que les procédures de comptage sont déclenchées par ce mot, d'après le cours de la micro-formation. À partir de la deuxième séance la quantité devient implicite et J maniera plutôt les termes « bien regarder » et « bien préparer ». J adapte également son langage, ses consignes aux connaissances et aux interactions avec les élèves.

3- ANALYSE DES SITUATIONS INSTALLÉES PAR J

3.1– Succession des situations par rapport à la micro-formation

Les situations s'enchainent telles qu'elles sont décrites dans le cours pour la micro-formation. La situation d'action, puis l'éloignement dans l'espace, dans le temps et la communication à autrui.

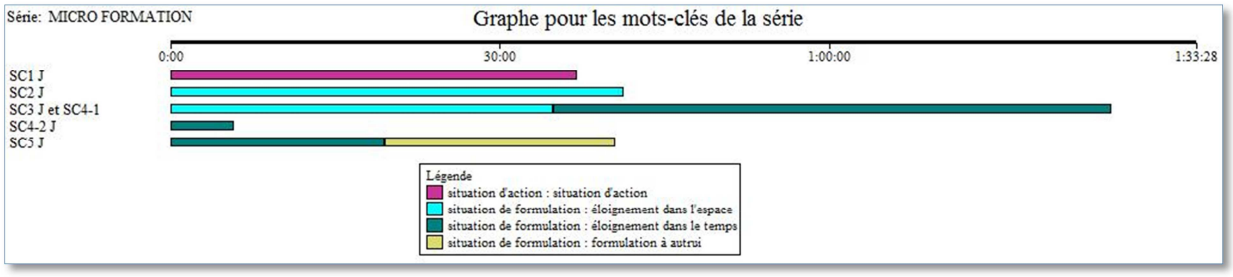


FIGURE 102: SITUATIONS D'ACTION ET DE FORMULATION

Exactement comme dans le cours, la situation d'action élaborée par J permet d'abord d'installer le milieu, de présenter les objets, le vocabulaire associé, la consigne, de s'assurer également des critères de validité pour la rétroaction et enfin d'introduire l'anticipation. Tous les éléments du cours sont présents.

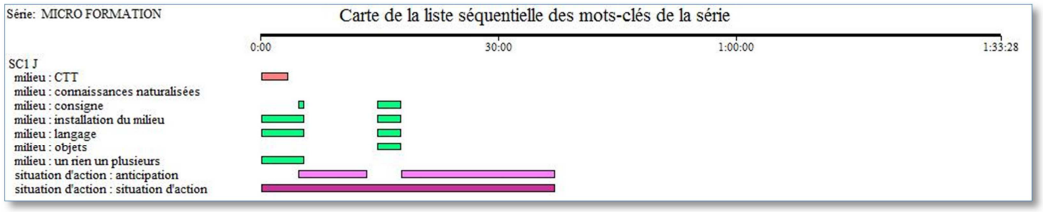


FIGURE 103 : SITUATION D'ACTION ET MILIEU

C'est aussi vrai pour les situations de formulation qui font apparaitre les collections intermédiaires orales, matérielles et écrites en fonction des situations. Majoritairement la collection intermédiaire écrite est employée par les élèves en situation avec éloignement dans le temps et en communication à autrui, alors que J a proposé toutes les possibilités et n'a rien demandé en particulier. La carte de la liste séquentielle des mots-clés de la série fait apparaitre l'utilisation d'une collection intermédiaire matérielle en situation avec éloignement dans l'espace et avec un éloignement dans le temps. En situation avec communication à autrui une collection intermédiaire orale est employée par un élève.

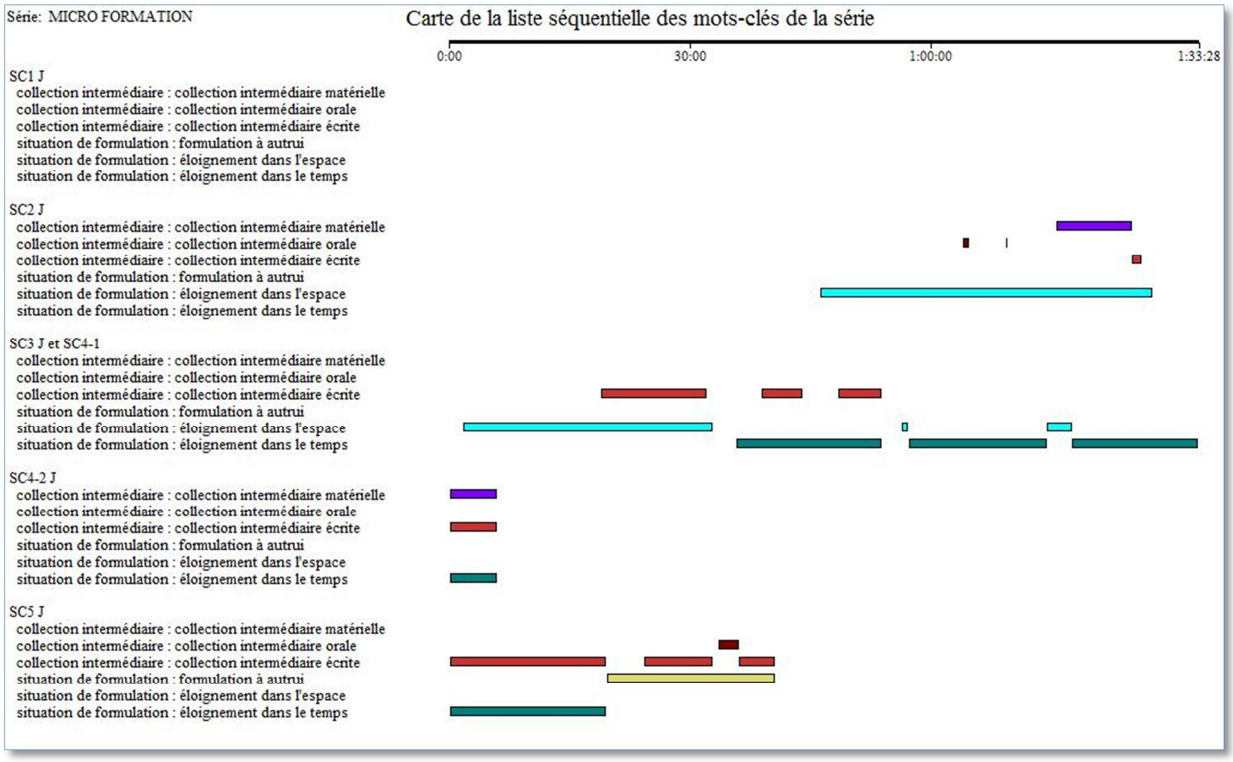


FIGURE 104 : SITUATIONS DE FORMULATION ET COLLECTION INTERMÉDIAIRE

3.2-Situation d'action et installation du milieu

Dans le cours il est question d'un plateau qui introduit l'anticipation.

7	CM- […] tu dois mettre sur le plateau la quantité exacte de crayon j'aurais pu dire aussi juste assez de crayon pour avoir un crayon dans chaque pot alors qu'est-ce que j'ai fait en introduisant un plateau j'introduis l'anticipation quand l'élève dépose les crayons sur son plateau il anticipe il fait le pari en quelque sorte que effectivement son action va réussir c'est à dire qu'en prenant tous les crayons qui sont sur le plateau il va bien pouvoir mettre un crayon dans chaque pot […]

Le milieu auquel le cours fait allusion n'est qu'un moyen pour parler de la quantité et introduire les situations.

Quel choix de matériel a été retenu pour la situation d'action ?

Situation d'action	
Milieu matériel utilisé dans le cours	Milieu matériel choisi par l'enseignant J
Pot-crayon et Plateau pour l'anticipation	Cerceau-élève / Maison-ours et Panier pour l'anticipation
	Le plateau sert de contenant pour les maisons des ours.

La première situation dans la salle de motricité permet à l'élève de "vivre", d'éprouver le mot chaque : un élève dans chaque cerceau, les critères de validité sont également facilités : pas de cerceau vide, pas d'élève sans cerceau. Ces situations de jeu sont fréquentes en motricité et les élèves n'ont aucune difficulté à s'approprier ce matériel. Le panier, matérialisé par la cage de foot rouge et la mise en scène instaurée par le tambourin pour la validation, sont bien acceptés et compris par tous les élèves. Pour la situation d'action qui a lieu dans la classe, J propose un matériel proche de la situation vécue dans la salle de motricité, les bouchons de bouteille de lait jouent le rôle des cerceaux et les ours matérialisent les élèves. Le tambourin pour la validation est toujours présent. Dans la deuxième séance J présentera de façon plus explicites les ressemblances des deux situations dans la consigne « alors j'ai installé des cerceaux ce sont les maisons ».

3.3-Situations de formulation et collection intermédiaire

Ce sont les choix et l'utilisation que les élèves ont d'une collection intermédiaire qui renseignent le professeur sur l'évolution de leurs connaissances. Les connaissances mathématiques du professeur spécifiques à l'enseignement de la quantité lui permettent d'observer et de déceler les connaissances de l'élève à travers les procédures ou les collections intermédiaires utilisées.

a- Collection intermédiaire orale

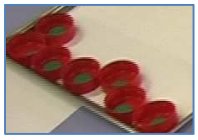
Suite aux collections proposées, les élèves ont parfois utilisé la discrimination visuelle, plutôt que le dénombrement par comptage à voix haute, basse ou intériorisée. Globalement, les élèves ont fait appel à une collection intermédiaire orale, la suite orale des mots nombres ou le cardinal de la collection. Même si le mot nombre énoncé pour le cardinal représente la caractéristique de la quantité de la collection (et pas la quantité) je la considère ici comme une collection intermédiaire (de la même façon, l'écriture chiffrée du cardinal est une représentation de la quantité mais sera également considérée comme une collection intermédiaire écrite, dans la mesure où cet écrit porte en lui l'information (de la représentation) de la quantité.

b- Collection intermédiaire matérielle

L'élève S essaie d'utiliser des jetons, il les place devant les maisons dans une correspondance terme à terme parfaite, mais il n'en fait rien, il laisse les pions à côté des maisons, il prend

alors une carte à points au hasard, la transporte avec lui, puis choisit un domino en montrant les points mais ne fait pas de correspondance terme à terme avec la collection initiale.

En fin de la séance 10 l'élève N préparera une collection intermédiaire matérielle en déposant des jetons verts dans les couvercles rouges, puis poussera le plateau au milieu de la table et prendra une feuille pour commencer un dessin.

	J- et toi élève N tu as terminé avec tes maisons Élève N- oui J- tu enlèves les pions par contre tu les ranges

À ce moment-là, le professeur est pris dans l'achèvement de la séance et il n'identifie pas cette collection intermédiaire matérielle réalisée par l'élève N (alors que les élèves devaient trouver une solution pour se souvenir de la quantité de leurs maisons pour le lendemain).

En effet, si les niveaux (-1) et (0) interagissent fortement, en situation didactique, au niveau (0), le rôle et l'action de l'enseignant prennent le dessus. Le professeur doit permettre l'avancée du temps didactique (Chevallard & Mercier, 1987; Chopin, 2006; Chopin, 2007) et l'observation des procédures et des connaissances des élèves est difficilement compatible avec l'action de l'enseignant, c'est peut-être pourquoi il n'est pas disponible pour repérer la collection intermédiaire matérielle. Cependant, une autre hypothèse peut être que les savoirs qu'il a rencontrés au sujet des collections intermédiaires dans la micro-formation ne permettent pas des connaissances mathématiques spécifiques, disponibles et utiles ici en situation.

c)-Collection intermédiaire écrite

Dans la première situation avec éloignement dans le temps, en seconde partie de la séance 9, les élèves ont rapidement eu envie de réaliser un message écrit pour se rappeler la collection de maisons.

Écrit mathématique	Exemples de production
Message écrit et dessin 	Cet élève commence son message écrit avec huit ronds rouges ce qui est exact. Puis prolonge avec un dessin pour compléter l'espace vide de la feuille, tant et si bien qu'il dessine la tête d'un bonhomme dans le septième rond. L'élève ne lira pas son message entièrement, il ne prendra en compte que les cinq premiers ronds. J marquera les cinq premiers ronds lors de la phase de validation. Il lui fera remarquer qu'il avait réalisé le bon message avant d'entreprendre son dessin.
Écriture chiffrée 	Ici l'élève écrit quatorze avec le quatre (à l'envers) et un zéro. Toutefois cette écriture non conventionnelle de quatorze est stable chez cet élève, il lira en effet quatorze lors de la réalisation de sa collection d'ours et gagnera sa partie. Échanger les messages entre élèves permettrait la nécessaire évolution des connaissances de l'écriture chiffrée de cet élève.
Collection organisée et énumérée	Ici la collection est organisée en ligne et marquée d'un petit point pour réaliser alors la collection équivalente. Il est intéressant d'observer la raison graphique, c'est-à-dire l'organisation spatiale utilisée par cet élève de MS qui commence à gauche, conformément au sens de l'écriture et qui prolonge son « écriture mathématique » en suivant le bord de la feuille en dessinant les ronds les uns sous les autres.

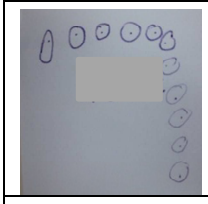
	
Collection organisée en lignes	Ici l'élève dessine quatre, puis quatre et encore trois ronds symbolisant les maisons des ours. Trois lignes sont clairement identifiées dans ce message écrit. Au-delà des connaissances mathématiques, ce message écrit témoigne également de connaissances relatives au geste d'écriture cursive dans sa gestion statique de l'espace graphique à travers l'horizontalité et la régularité d'espaces entre les ronds et entre les lignes.

TABLEAU 23: EXEMPLES DE COLLECTION INTERMÉDIAIRE ÉCRITE

4- CONCLUSION POUR J

Quel est l'impact de cette micro-formation sur les connaissances mathématiques spécifiques du professeur observées au niveau didactique, étant donné les conceptions de l'enseignement du nombre déclarées par J lors du premier entretien ?

4.1-Une répercussion sur la branche quantité

Il s'agit de reprendre l'arbre des savoirs du nombre de J et plus précisément la branche cardinal, de la confronter avec les savoirs mathématiques spécifiques choisis et retenus du cours et voir ce qu'est devenue la branche cardinal après le cours.

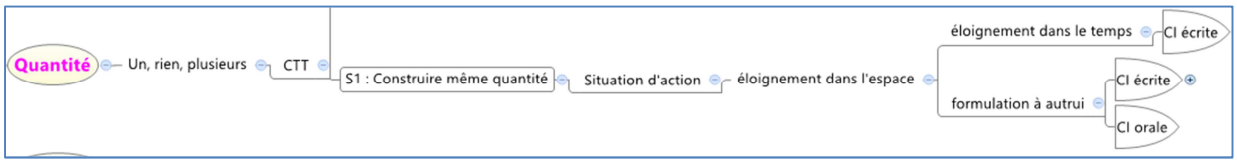


FIGURE 105 : BRANCHE CARDINAL-QUANTITÉ DE J SUITE À L'OBSERVATION DES SÉANCES

a)-La branche quantité se développe

La succession des situations proposée à l'identique de celle dans le cours, favorise le développement de la branche, plus exactement, l'enseignant s'est saisi des différentes variables didactiques ce qui permet à la situation de se développer et de se prolonger en empêchant l'action directe, en éloignant la deuxième collection dans l'espace et dans le temps et en privilégiant la formulation à autrui. Dans E1, J décrivait des exemples d'activité pour la situation fondamentale « construire des collections de même quantité » à l'aide d'une boîte de douze œufs (correspondance terme à terme), à partir d'un défi math (situation avec éloignement dans l'espace) et avec le jeu de la marchande (communication à autrui). La situation avec éloignement dans le temps n'apparaissait pas dans ses propos déclarés, ce qui fut confirmé, après la vision du cours, avec ses réactions à chaud.

FIGURE 106: BRANCHE CARDINAL QUANTITÉ AVANT LA MICRO-FORMATION

FIGURE 107 : BRANCHE CARDINAL QUANTITÉ APRÈS LA MICRO-FORMATION

La situation avec éloignement dans le temps prolonge les possibilités d'appréhender la quantité en offrant notamment la voie privilégiée à l'entrée dans l'écrit mathématique pour se souvenir. La micro-formation a allongé la branche cardinal quantité de J en insérant les moyens offerts par la situation avec éloignement dans le temps.

b)-La branche quantité s'étoffe

La micro-formation propose différentes procédures possibles des élèves en situations. L'anticipation du résultat y est décrite comme déclencheur de connaissances mathématiques pour les élèves. J intègre cette anticipation avec l'introduction d'une barquette en bois (dans la situation maison-ours).

FIGURE 108 : LE PANIER INTRODUIT L'ANTICIPATION

J prend conscience de la richesse possible d'une collection intermédiaire matérielle qu'il rendra possible pour la situation avec éloignement dans l'espace en proposant sur deux tables du matériel directement disponible : des feuilles et des feutres et des crayons, des jetons de la couleur des ours, des petits blocs, des buchettes, des marrons, des dominos, des cartes avec les constellations des dés. Il installe ces deux tables quelques jours avant la situation avec éloignement dans l'espace.

FIGURE 109 : TABLE AVEC DU MATÉRIEL INSTALLÉE EN COURS DE SÉQUENCE

FIGURE 110 : DIFFÉRENTS OBJETS POUR RÉALISER UNE COLLECTION INTERMÉDIAIRE MATÉRIELLE

Différentes procédures sont possibles, les élèves peuvent les éprouver dans diverses situations, choisir des procédures, renoncer à d'autres, s'adapter au milieu. Le dénombrement est utilisé par les élèves mais certains essayent le matériel disponible, réalisent des correspondances terme à terme entre ce matériel et la collection de maisons, sans pour autant reproduire une correspondance terme à terme avec la collection d'ours.

Le transport de l'information de la quantité par le biais des jetons n'est pas accompagné et explicité par J. D'autres élèves tentent des messages écrits.

J installe des milieux plus riches avec plus de questionnements, de procédures différentes possibles pour des situations orientées vers la quantité et non plus seulement pour exercer le dénombrement.

FIGURE 111 : BRANCHE CARDINAL QUANTITÉ ÉTOFFÉE PAR LA MICRO-FORMATION

4.2-Analyse des niveaux d'activité du professeur

Avec les séances filmées, j'observe le niveau didactique 0, je m'intéresse principalement aux niveaux +1 et -1 qui sont les plus visibles en situation didactique et plus particulièrement le niveau -1 lieu des connaissances en situation des élèves ; ce niveau rend compte également des connaissances mathématiques spécifiques pour l'enseignement de la quantité du professeur qui identifie et accompagne l'évolution des connaissances des élèves.

Pendant les commentaires à chaud J relevait l'importance de la répétition des situations, du fait d'accepter l'échec, ainsi que l'aménagement de la diffusion des stratégies. Dans les douze situations qu'il installe (ce qui est conséquent en termes d'ateliers à l'école maternelle), les mêmes milieux sont repris avec des consignes qui varient, ce qui correspond à la démarche proposée dans la micro-formation. Dans la classe, au cours des séances filmées, J conçoit et organise la répétition des situations pour que tous les élèves réussissent. Il accompagne les procédures des élèves en leur offrant du temps pour qu'elles puissent aller au bout et amener à la réussite. Des problèmes liés notamment au choix de matériel (barquette en bois percée laissant tomber les gommettes), aux échanges entre pairs, ont anéanti des procédures efficaces que l'enseignant J n'a pas pu valoriser ni mettre en avant pour l'institutionnalisation. J permet la diffusion des stratégies, sans toutefois commencer le processus d'institutionnalisation. Il y aura comme un flottement au niveau des procédures et des résultats des tentatives des élèves car J « calque » l'avancée du temps didactique sur les tâtonnements des élèves. J installe un milieu favorable à l'émergence d'une collection intermédiaire matérielle autre que les doigts mais n'intervient pas pour autant pour inciter à son utilisation ni pour forcer cet apprentissage. Il reste fidèle aux essais des élèves, accompagne les tentatives et permet l'aboutissement des tâtonnements en organisant la répétition des situations. La micro-formation a un double impact sur la branche quantité de l'arbre des savoirs du nombre de J ; le niveau (+2), comme vu précédemment, a été renforcé, mais également le niveau (+3) qui est touché par la micro formation. Toutefois, rien ne peut être énoncé sur l'impact à long terme de cette micro-formation sur son enseignement du nombre l'année suivante.

CHAPITRE 3- L'ENSEIGNANT D

L'enseignant D déclare être plus attiré par les informations et les savoirs « terre à terre », il est plus sensible aux apports des niveaux 0 et +1, celui du temps didactique de la classe et de la préparation de la séance que par une formation plus théorique renforçant le niveau +2.

D- de mettre en relation ça avec des séances je me dis mais oh heu pour moi c'est du terre à terre quoi quand tu fais une séance en en classe c'est tellement terre à terre

1- RÉACTIONS « À CHAUD »

1.1- Résumé des commentaires du cours

Point 1– La suite orale des mots nombres

D fait part de son intérêt pour les comptines numériques.

D- donc attends les comptines sur le nombre donc heu ouais comment faire trois et puis dissocier le un le premier le second le troisième tu vois le un le deux le trois

À travers l'apprentissage de la suite orale des premiers mots nombres, D utilise les comptines numériques pour travailler soit la suite orale des mots nombres ordinaux, soit l'aspect ordinal du nombre en dissociant « le un le deux le trois du premier second troisième ». La remarque « comment faire trois », peut s'entendre du point de vue des relations comme deux et encore un ou bien du point de vue des configurations conventionnelles c'est-à-dire comment faire trois avec les doigts, déplier le pouce, puis l'index et le majeur, par exemple.

Les comptines numériques sont utilisées par D pour viser différents savoirs : ordinal, numérations et cardinal. Les connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement du nombre à l'école maternelle (connaissances du thème) en (+2) lui permettent de faire des choix pour utiliser telle ou telle comptine numérique pour sa séance en (+1).

Point 7- Situation d'action en classe

D questionne le dispositif par rapport au matériel : les pots doivent-ils être opaques ou transparents ?

D- il faut que ce soit opaque ou transparent les pots j'ai les pots de crayons dessinalo

D garde en tête la procédure de dénombrement par comptage qui est celle qu'il vise «et après compter».

D- il faut que physiquement ils puissent mettre et après compter

Selon la progression de D, l'étude du nombre trois doit succéder à celle du nombre deux « je commence par le un le deux le trois on l'apprendra après ».

D- ah ben au moins deux et là on pourrait commencer peut-être le nombre trois

D imagine la séance en classe niveau (0) et entre concrètement par le matériel « les pots de crayons » pour questionner les procédures « physiquement mettre et après compter » et imaginer les actions des élèves au niveau (-1).

D fait part de sa programmation de son apprentissage, le un puis le deux et « là on pourrait commencer peut-être le nombre trois » issue du niveau (+2). Peut-être interprète-t-il la micro-formation depuis la branche cardinal-relations. Nous pouvons faire l'hypothèse également, niveau (+3), que sa conception de l'enseignement du nombre relève, en partie, de l'étude des savoirs constitués. Il est possible de s'interroger sur l'interprétation que D peut faire sur le but même du cours présenté lors de la micro-formation, nous retrouverons cette question après les observations des séances montrées.

Point 10- Eloignement dans l'espace

```
D- oui oui oui quand il faut mettre la table pour voir jusqu'où ils comptaient il faut chercher une poupée pour chaque personne combien on va chercher d'assiettes je n'ai pas dit le nombre y'en a pas assez tu retournes en chercher montrez-moi trois fourchettes quatre verres mais le lexique
```

D décrit une situation qu'il rapproche de la situation de formulation avec éloignement dans l'espace avec des élèves de MS. Cette situation lui permet de « voir jusqu'où ils comptaient ». D autorise plusieurs voyages pour obtenir la même quantité, ce qui est cohérent avec la multiplication des situations qui autorisent le comptage dans la limite visée à un moment donné de l'année (jusqu'à trois, quatre ou cinq). Il profite également de cette situation pour demander de montrer trois fourchettes, quatre verres, lorsque la table est installée. Il s'agit donc à la fois de savoir dénombrer et nommer le cardinal, mais aussi de connaitre le lexique des nombres pour montrer la quantité correspondante.

D cherche à reconnaître dans la micro-formation les situations qu'il met en place dans sa classe, la micro-formation ne déclenche pas sur ce point une démarche de développement mais lui donne par contre l'occasion d'expliciter sa propre pratique.

Point 13- Collection intermédiaire

```
D- ça le truc intermédiaire ça va pas marcher j'ai du mal à percevoir ce dispositif-là passer par l'écrit c'est très mathématique
```

D associe et retient de la collection intermédiaire l'exemple d'une collection intermédiaire écrite, avec l'entrée dans l'écrit mathématique. Il a du mal « à percevoir ce dispositif-là » car le recours à un écrit mathématique pour construire des collections de mêmes quantités n'est pas un usage commun à l'école maternelle en MS, en tout cas pour lui. Le cours projeté, qui est entendu comme l'énoncé d'une prescription et non pas comme une analyse des différents aspects du nombre, n'est donc pas assez « terre à terre » pour que D puisse envisager de faire quelque chose de ce qu'il considère comme un « dispositif ».

D fait part de sa difficulté à interpréter les savoirs exposés dans le cours au niveau (+2) dans les niveaux (1 & 0), il exprime clairement un désaccord avec le cours. Il anticipe alors l'échec pour les élèves en (-1) « ça va pas marcher ». Le manque de clarté par rapport à l'écrit mathématique au niveau (+2) bloque les niveaux inférieurs, D écarte cette possibilité en donnant une justification du niveau (+3) « c'est très mathématique », sous-entendu trop mathématique pour des élèves à l'école maternelle en MS.

Point 17- Configurations

```
D- alors comment on fait deux montrez-moi deux avec les doigts […] alors est-ce que
c'est gênant comment on fait deux alors il faut pas l'accepter c'est conventionnel
qu'est-ce qu'on peut accepter dans la représentation des doigts »
D- « La norme s'apprend à l'école
```

D se questionne sur la façon de montrer les nombres, les quantités avec les doigts, comment faire deux avec les doigts, mais surtout sur les connaissances des élèves. Quelles sont les connaissances qu'il peut accepter par rapport à la norme, à la convention apprise à l'école ? Il y a ici pour D un conflit entre des connaissances mathématiques justes mais non conformes à ce qu'il considère comme relevant de la norme scolaire.

D est tiraillé entre le niveau (+3) et le (+2) pour légitimer des connaissances d'élève. En effet montrer deux avec l'auriculaire et le pouce est juste mathématiquement mais le questionne par rapport aux usages scolaires français qui préfèrent, pour lui, le pouce et l'index. Il justifie son choix (+2), et son rôle, et par voie de conséquence sa pratique (+1 & 0) par des contraintes issues du niveau noosphérien, « la norme s'apprend à l'école ». D ne trouve pas de réponse à son questionnement dans le cours projeté. D n'est pas en recherche de nouvelles situations en ce qui concerne la quantité. Il ne considère pas de nouveaux développements via la micro-formation.

Synthèse des points abordés

Points abordés dans le cours	Points repris par D
Point 1 : Suite orale des mots nombres	X
Point 2 : Subitizing	
Point 3- Critères de validité	
Point 4 : Situation fondamentale : même quantité que	
Point 5- TSD / Situation d'action	
Point 6 : Introduction et installation du milieu Consigne	
Point 7- Situation d'action en classe	X
Point 8- Rôle du professeur	
Point 9- Situations de formulation	
Point 10- Eloignement dans l'espace	X
Point 11- Eloignement dans le temps	
Point 12- Communication à autrui	
Point 13- Collection intermédiaire	X
Point 14- Du temps aux apprentissages	
Point 15 : Des quantités suffisantes	
Point 16- Pas de hiérarchie dans les procédures	
Point 17- Configurations	X
Point 18- Définition du cardinal	

L'ancrage solide dans les niveaux (1&0) complété par un va et vient permanent entre les différents niveaux permet à D d'être à l'affut et de relever certains points du cours pour les interpréter directement en classe. Il recherche le « terre à terre » dans ce cours c'est-à-dire les éléments concrets pour sa pratique de classe se situant aux niveaux (0&1) mais cette

formation se déroule essentiellement au niveau (+2) et provoque un décalage par rapport à ses attentes.

D interprète le cours à partir de ses connaissances spécifiques de l'enseignement du nombre qui portent sur l'étude des savoirs sur le nombre (cardinal-relations), principalement à partir de la dénomination des petites quantités (de trois à cinq) : dénombrement par comptage de petites quantités, désignation d'une quantité dont le cardinal est donné.

Alors qu'il reconnaît des éléments qui ressemblent à son point de vue dans les points 1 (comptine numérique) 7 et 10 (situation d'action, situation de formulation avec éloignement dans l'espace), qui permettent de multiplier les occasions de dénombrer, il rentre en désaccord avec les points 13 (collection intermédiaire) et 17 (configurations). Ce désaccord renforce notre interprétation sur la focalisation de l'étude du nombre : les collections intermédiaires et les constellations non conventionnelles représentent des quantités sans utiliser ce que D considère comme « le » nombre (dénommé à l'oral ou conventionnellement représenté à l'écrit).

1.2- Réactions par rapport à la conception de l'enseignement du nombre

D décrit entre autre un enseignement basé sur l'étude de la succession des nombres les uns après les autres « toujours de la même façon ». Il entreprend une étude complète des cinq premiers nombres successivement, ce qui correspond dans notre analyse à la branche cardinal-relations, plus particulièrement dans la sous branche « succession » dans laquelle les nombres s'enseignent un par un, à la suite, mais aussi sur la branche « dénommer ».

Pour D, dénommer c'est énoncer le mot-nombre, reconnaitre et lire les configurations sociales, et celles qui font partie de l'univers scolaire, montrer avec les doigts, compter, regrouper, construire des collections de même quantité, comparer des collections, classer des collections. Il a élaboré un panel d'activités qu'il propose pour chacun des cinq premiers nombres, « toujours de la même façon ». Plus que la succession, c'est la dénomination qui guide l'enseignement du nombre de D, à l'intérieur de la branche cardinal-relations.

La figure suivante (Figure 112 : Branche cardinal-quantité de D issue de l'entretien E1) reprend la branche issue lors de l'entretien E1, où D avait alors une classe de TPS-PS.

FIGURE 112 : BRANCHE CARDINAL-QUANTITÉ DE D ISSUE DE L'ENTRETIEN E1

La figure suivante (Figure 113 : Branche cardinal-quantité de D précisée après les réactions à chaud E2) complète sa branche cardinal-quantité. En effet, suite à la projection du cours, D reconnait des situations avec éloignement dans l'espace dans son enseignement, « la table des poupées ».

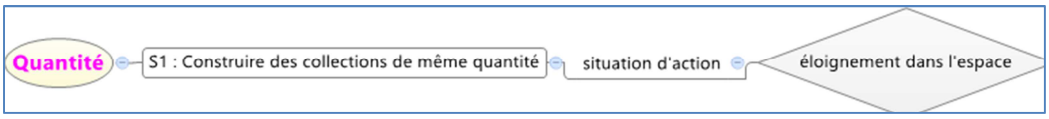


FIGURE 113 : BRANCHE CARDINAL-QUANTITÉ DE D PRÉCISÉE APRÈS LES RÉACTIONS À CHAUD E2

Lors de l'entretien E2, en octobre, D enseigne l'étude du deux et prévoit de passer à l'enseignement du nombre trois pour les séances filmées. Il dit vouloir explorer la situation pots-crayons via l'éloignement dans l'espace. Il ne dit rien quant à l'anticipation avec la situation d'action. Il souhaite poursuivre l'étude des nombres à partir de comptines

numériques, l'enrichir avec la lecture d'un album de jeunesse, entrainer la reconnaissance des petites quantités à l'aide d'un jeu de dé et finir avec une évaluation.

2- SÉQUENCE ÉLABORÉE PAR D

2.1– Présentation des séances montrées

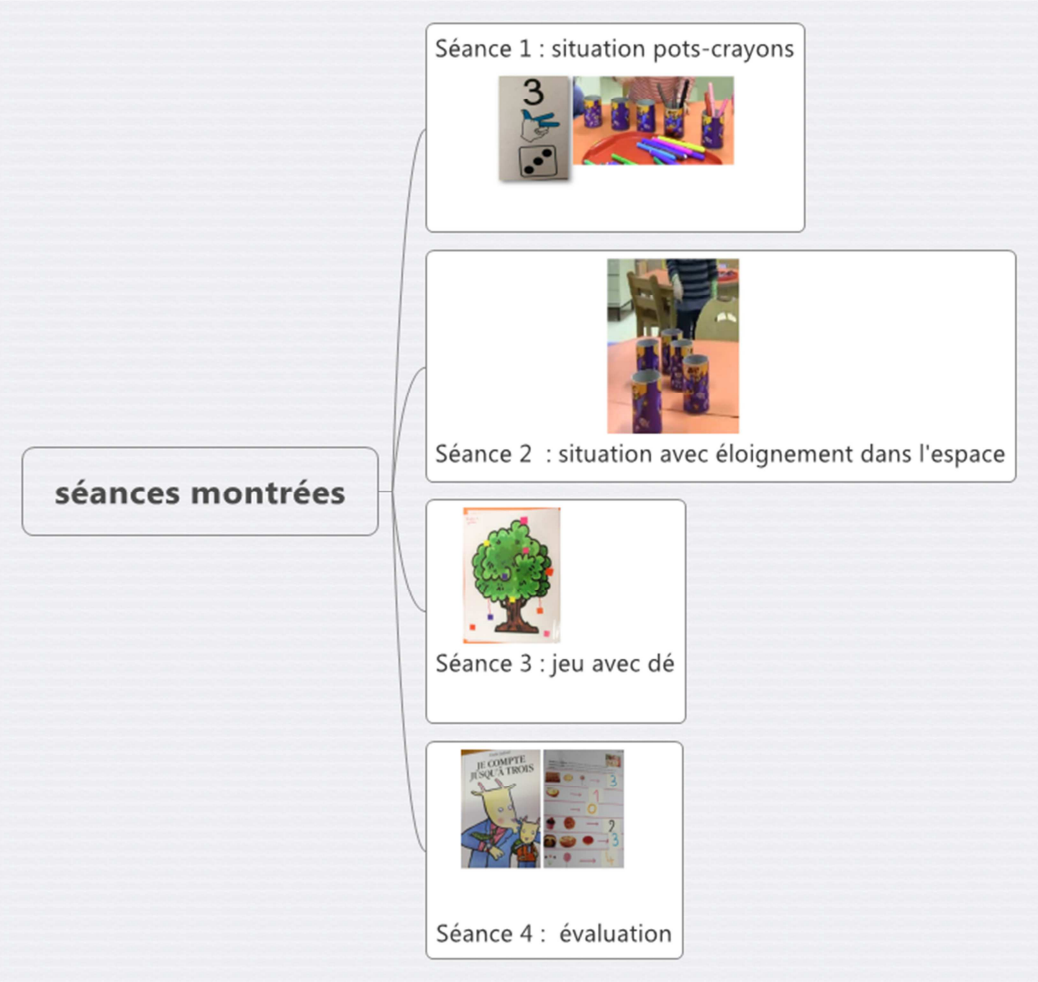


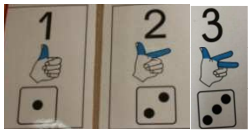
FIGURE 114 : SEANCES MONTREES PAR L'ENSEIGNANT D

D choisit de regrouper les quatre séances à montrer dans la semaine. Il insère autant que possible ces quatre séances à sa progression de classe. Il souhaite réaliser une séance avec les pots-crayons, suivie l'après-midi de l'éloignement dans l'espace, une séance avec un jeu de dé avec le support de l'oralbum « l'arbre à goûters » (Ouzoulias & Tartare-Serrat, 2011) et une séance évaluative. L'oralbum, sert ici uniquement pour créer le contexte du jeu, pour le dénombrement lors de cette séance. En effet, un oralbum est un outil pour travailler l'oral, il a la particularité de s'appuyer sur des textes de l'oral afin que l'élève s'approprie les compétences du langage oral (Boisseau, 2005; Boisseau & Tartare-Serrat, 2010).

Les quatre séances filmées sont décrites chronologiquement pour rendre compte du déroulement des évènements dans la classe. D prend en compte les éléments entendus dans le cours de la micro-formation faisant référence à sa pratique de classe, et décide de les compiler pour me les présenter, pour donner à voir son enseignement du nombre. Il joue sur les modalités de groupes pour être au plus près de la représentation qu'il a de mes attentes. La situation pots-crayons ne fait pas partie d'une séance de classe, elle est seulement

imaginée pour un seul groupe d'élèves qui participeront à cet atelier et ne concerne pas toute la classe.

a-Séance 1 : le nombre 3

 Au coin regroupement, en collectif	Durée de 0 à 24 :35 D distribue des cartes avec différentes représentations des nombres un, deux et trois comme l'écriture chiffrée, les constellations du dé ou autres configurations non conventionnelles. Les élèves doivent placer leur carte sur le tableau selon le tri demandé « toutes les façons d'avoir trois » et tout ce qui n'est pas trois.
 Deux ateliers avec trois élèves	24 :36 à 35 :31 La situation pots-feutres. Après un temps de reformulation de la consigne, le premier élève place trois feutres dans chaque pot. Il prend les trois feutres sans les dénombrer un à un, plutôt par paquet de deux et encore un ou directement trois. Une fois les cinq pots remplis, l'enseignant demande aux deux autres élèves de valider l'action de l'élève et demande à un autre élève de « les compter » pour vérifier. À tour de rôle les élèves vont dénombrer les trois feutres dans le pot et l'enseignant déplace le pot déjà vérifié en disant « celui-là il est bon ». Il prend à sa charge la gestion de l'espace différencié dans l'énumération. Pour le second élève l'enseignant rajoute un pot, il y a à présent six pots sur la table. Il demande à un élève de les compter. D a toujours la même rigueur pour la vérification des pots et sépare spatialement les espaces entre les pots déjà validés et ceux qui restent à valider, qu'il prend à sa charge mais progressivement les élèves déplaceront eux même les pots, à la demande de l'enseignant ; il continuera à verbaliser ce déplacement « il est bon » « on le place ». Le plateau sert ici de contenant pour les feutres. Il n'y a pas de situation d'action proposée à l'issue de cette installation du milieu.

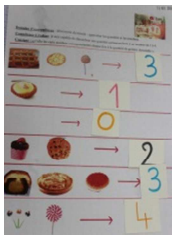
b- Séance 2 : situation avec éloignement dans l'espace

 Deux groupes de trois élèves	0 à 17:47 Situation pots-feutres avec éloignement dans l'espace. Par petit groupe de trois, les élèves vont essayer de rapporter deux feutres pour cinq pots en un seul voyage. Les trois élèves vont tous échouer. Une élève a néanmoins la bonne procédure, même si elle ne parvient pas à apporter deux feutres pour les cinq pots en un seul voyage. Elle amène huit feutres d'un seul coup, elle a compris que l'enjeu de la tâche se situe dans le transport de la bonne quantité en un seul voyage. Elle s'approche du plateau, prend une pleine main de feutres, se retourne vers D et lui demande s'il y en a assez. D ne montre rien et l'élève se ravise « attends », elle revient à la table, compte le nombre de pots et retourne au plateau de feutres, elle en prend deux dans sa main, se retourne et vise un pot et les pose sur la table, prend deux autres feutres et vise un autre pot, ainsi de suite s'arrête au troisième pot, semble perdue et reprend deux feutres, elle est déçue d'avoir échoué « en une seule fois ». Les autres élèves amènent deux feutres par deux, D autorise plusieurs voyages pour finir de remplir les pots.

c- Séance 3 : l'arbre aux goûters

Configuration du dé En atelier avec cinq élèves	0 à 12 :21 Jeux de dé à partir d'un support exploité en classe, l'oralbum « l'arbre à goûters ». À tour de rôle les élèves lancent le dé, ils savent tous lire les constellations et/ou l'écriture chiffrée, ils énoncent le mot nombre et dénombrent la quantité demandée d'étiquettes goûters à disposer sur leur arbre. Il y a dix étiquettes à prendre pour remplir l'arbre. D a fabriqué le dé afin d'obtenir l'écriture chiffrée et une constellation non conventionnelle avec des points sur une même face.

d- Séance 4 : évaluation.

Comptines numériques En collectif	0 à 18:31 Comptines et jeux de doigts puis comptines numériques, un petit cochon (un élève propose un nombre cible et récite alors la suite orale des mots nombres) et trois petits moustiques.
 Album	18:32 à 24:41 Lecture de l'album « je compte jusqu'à trois» (Jadoul, 2005). Rapidement D incite les élèves à répéter en cœur « un deux trois » afin de mémoriser la suite orale des trois premiers nombres.
 Fiche évaluative	24:42 à 36:38 D présente la fiche pour l'évaluation en collectif, demande aux élèves de trouver la consigne et un élève remplit les trois premières lignes au tableau. Cinq élèves répartis en atelier rempliront cette fiche, sous la surveillance de D qui questionne les élèves et corrige si nécessaire. Les élèves dénombrent les petites quantités, un, deux, trois, quatre et reconnaissent zéro, ils lisent également l'écriture chiffrée correspondante, il y a une difficulté avec l'écriture du quatre, D écrit pour un élève l'écriture chiffrée du quatre afin qu'il puisse coller l'étiquette à l'endroit.

2.2- Analyse des consignes

Comment les consignes sont-elles formulées, quels sont les mots choisis pour enseigner la quantité ?

a- Séance 1: Situation pots-crayons, installation du milieu

D dépose sur la table le matériel nécessaire pour la séance et demande aux élèves ce qu'ils voient. Il demande à un élève de vider les feutres sur le plateau. Le plateau, présenté dans la micro-formation comme un support permettant une consigne visant à l'anticipation, est utilisé par D comme contenant.

FIGURE 115 : L'UTILISATION DU PLATEAU EST DÉTOURNÉE

Ensuite il demande à l'élève de « compter les pots », l'élève compte la collection de pots en les énumérant, il les pointe un à un, sans les déplacer.

FIGURE 116 : COMPTER LES POTS

L'élève pointe avec le doigt en comptant les pots installés par le maitre sur la table. L'enseignant répète le dernier mot nombre énoncé « cinq » et montre cinq avec sa main. Puis il énonce la consigne.

Situation pots/crayons, installation du milieu Consigne « pots-feutres » avec l'élève A	D- dans chaque pot que je mets devant toi tu vas y mettre y placer trois feutres tu as bien compris qu'est-ce que tu dois faire redis moi ce que tu dois faire Élève A : je sais pas D- qui peut l'aider l'élève A qu'est-ce qu'elle doit faire Élève B : elle doit prendre les feutres et en mettre trois dans les pots D- ah dans chaque pot tu dois mettre trois feutres facile on te regarde vas-y
Consigne « pots-feutres » avec l'élève C	D- j'ai rajouté un pot combien j'ai de pot tu veux bien les compter Élève S : un deux trois quatre cinq six D- six pots six pareil élève C tu vas placer trois feutres dans chaque pot je te laisse faire
Consigne « pots-feutres » avec l'élève L	D- qu'est-ce qu'on a Élève V : des pots D- des pots tu nous dis des pots combien est-ce que tu en comptes des pots Élève V : un deux trois quatre cinq D- très bien j'ai cinq pots et élève F qu'est-ce que j'ai placé ici sur le plateau Élève F : des crayons D- des crayons oui des feutres d'accord allez la consigne écoutez la bien je vais demander à élève L écoute bien élève L je vais demander à élève L de placer dans chaque pot trois feutres comme le nombre trois de tout à l'heure d'accord mais là ce ne sont pas des points ce ne sont pas des cartes ce sont des feutres tu vas me ranger trois feutres chaque fois dans les pots on te regarde

D « travaille sur le nombre trois », aussi il donne cette indication dans sa consigne, en demandant trois feutres par pot. La reformulation de la consigne par un élève lui permet d'insister sur « chaque » pot en les survolant avec la main et de montrer trois avec les doigts.

Lors de cette phase d'installation du milieu, les élèves placent trois, puis trois, trois, trois et encore trois feutres, dans chaque pot. Une fois la compréhension du mot chaque acquise par tous, cette tâche ne pose pas de problème pour les élèves. D insiste sur la validation qui est effectuée en collectif, un élève recompte les feutres d'un premier pot et l'enseignant déplace au fur et à mesure les pots déjà validés, il prend à sa charge une partie de l'énumération des pots déjà validés.

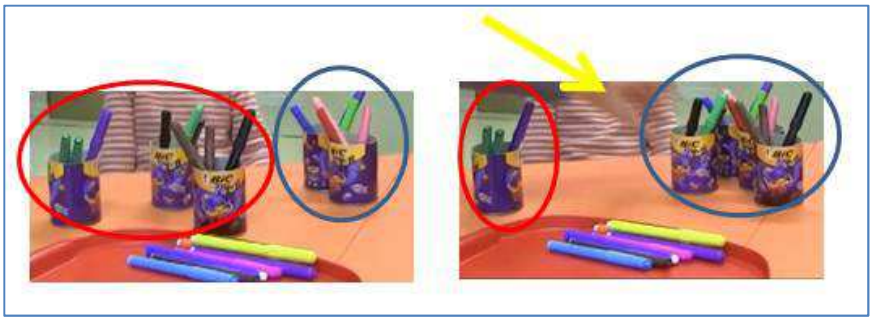


FIGURE 117 : PRISE EN CHARGE DE L'ÉNUMÉRATION DES POTS PAR D

En rouge les pots qui ne sont pas encore validés, en bleu, les pots déjà vérifiés, la flèche indique le déplacement de la main de D qui pousse un pot.

À ce moment-là de la séance, D ne prolonge pas la situation en proposant une situation d'action. Cette possibilité n'est pas retenue ici, l'installation du milieu suffit à entrainer le *subitizing* qui permet de prendre trois feutres sur le plateau, à dénombrer ou compter trois pour vérifier et valider les pots. La répétition cinq fois par élève, c'est-à-dire dix fois par petit groupe, permet d'entrainer et d'exercer la mémorisation de la suite orale des mots nombres « un deux trois », de compter, d'énumérer une petite collection de trois feutres et de gérer l'énumération des pots.

b- Séance 2 : situation pots-crayons avec éloignement dans l'espace

Situation pots-crayons avec éloignement dans l'espace Consigne « pots-feutres » pour l'élève P	D- ce sont des pots et ces pots qu'est ce qui leur manque Élèves : des crayons des feutres D- il leur manque des feutres ou des crayons alors ces feutres ils sont posés où à votre avis Élèves : là-bas D- oui là-bas un petit peu plus loin ce matin on a joué avec les copains et ils étaient à côté d'eux et là maintenant le plateau est un petit peu plus loin d'accord donc ça va être écoutez-moi ça va être à vous d'aller chercher les feutres mais d'y aller en une seule fois Les élèves commencent à se lever D- attendez attendez je n'ai pas dit qui va y aller et je n'ai pas fini la consigne la consigne c'est la suivante je veux élève P on va commencer par toi je veux que dans chaque pot il y ait deux feutres d'accord dans chaque pot tu dois placer tu dois mettre deux feutres tu as le droit d'aller une fois sur le plateau pour prendre ce dont tu as besoin tu es prêt on y va vas-y

D pointe chaque pot avec son doigt et énonce clairement deux en montrant deux doigts. Le premier élève se lève et rapporte deux feutres. D pointe les pots sans feutre, et demande si chaque pot contient deux feutres. Il autorise l'élève à retourner en chercher mais précise « là par contre tu n'en prends pas que deux » et l'élève en ramène trois. En aparté D me demande « il termine là il a le droit de se relever ? », il témoigne ainsi d'une volonté de se détacher de la responsabilité de cette situation, qui est alors autant « la mienne » (en tant

que représentante de la micro-formation) que « la sienne » (en tant qu'enseignant de la classe). Il lui permet de retourner au plateau, l'élève apporte deux autres feutres. D insiste sur la validation du pot « celui-ci il est bon tu le ranges à côté de moi », là encore il met en mot et organise l'espace des pots déjà validés, c'est à présent l'élève qui est conduit à opérer le déplacement des pots validés. Il reste deux pots vides sur la table. L'élève est invité à prolonger son action « il en manque encore mais attention tu écoutes élève S tu essayes de remplir deux en même temps, d'en prendre assez » D montre du doigt les deux pots, l'élève prend quatre feutres. Le second élève prend une poignée assez importante de feutres, se retourne vers D et lui demande « ça suffit là », l'enseignant lui montre qu'il ne répondra pas, l'élève se ravise, « attends » et vient compter les pots en les pointant.

FIGURE 118 : L'ÉLÈVE VIENT CHERCHER L'INFORMATION DE LA QUANTITÉ EN POINTANT LES POTS

L'élève retourne à la table des feutres, dépose deux feutres les saisit dit « deux », se retourne vers la table des pots et montre avec son bras les pots.

FIGURE 119 : CORRESPONDANCE TERME À TERME ENTRE LES DEUX FEUTRES DANS LA MAIN ET LE GESTE QUI POINTE UN POT

L'élève rapportera huit feutres au lieu de dix, et donnera les explications suivantes « j'ai compté et je me suis dit deux pour celui-là, deux pour celui-là, deux pour celui-là ».

Un autre élève prend au hasard une poignée de feutres, il y en a six, y retourne une autre fois reprend au hasard une poignée, en reprend six, place les feutres dans les pots et fait mine de retourner poser les deux feutres en trop sur le plateau avant d'être stoppé par D.

Le dernier élève prend trois feutres pour le premier voyage, puis cinq autres feutres et retourne enfin en rechercher deux autres. D lui demande de compter dans chaque pot combien il y en a afin d'entrainer le comptage de deux éléments.

c- Séance 3: l'arbre à goûters

Situation à l'arbre goûters Consigne à « arbre goûters »	D- je lance le dé si elle tombe sur le nombre deux combien est-ce qu'elle a le droit de prendre de goûters Les élèves : deux D- deux le premier qui a rempli tout l'arbre de goûters Les élèves : a gagné D- a gagné d'accord

La consigne est donnée à partir de l'exemple du dé lancé et tombé sur deux, les élèves doivent reconnaitre la constellation du dé ou bien lire l'écriture chiffrée que l'enseignant D a

ajouté ou bien compter le nombre de points éventuellement, mais aucun élève ne comptera les points ou n'utilisera la correspondance terme à terme avec les points pour prendre la même quantité d'étiquettes goûters pour les placer sur l'arbre, aux emplacements indiqués. Le dé fabriqué va de un à quatre.

d- Séance 4 : évaluation

Après avoir récité différentes comptines numériques et jeux de doigts, la fiche évaluative est expliquée en collectif, un élève réalise les trois premiers items au tableau, puis les élèves sont répartis dans les groupes. D présente la fiche et énonce la consigne.

Évaluation Consigne « fiche évaluative »	D- chaque fois que l'on va lire une ligne on va compter le nombre de goûters on y va quand vous avez compté votre ligne vous choisissez un nombre et vous le collez à côté après la flèche allez-y je vous regarde commence par la première ligne d'abord

D est à la disposition des élèves qui travaillent chacun à leur rythme. Il passe de l'un à l'autre, valide, reprend s'il voit une erreur, questionne le sens de l'écriture des chiffres si nécessaire. Cette fiche vise des savoirs relatifs à la lecture de l'écriture chiffrée des quatre premiers nombres. Trouver le nombre de goûters est possible à l'aide du *subitizing* ou d'une procédure de comptage, quoiqu'il en soit, cette étape est maitrisée par tous les élèves. La principale difficulté réside dans le sens de l'écriture chiffrée du 3, du 1 et du 4.

3- ANALYSE DES SITUATIONS INSTALLÉES PAR D

L'analyse dans cette partie sera centrée principalement sur les deux situations installées dans les séances 1 et 2, parce qu'elles visent clairement un rapprochement avec le cours.

3.1- Adoption d'un milieu matériel pour deux séances montrées

D a retenu un choix de milieu matériel qui est similaire à celui du cours : utiliser des pots et des crayons.

La situation pots-crayons développée dans le cours permet de construire une collection équipotente à une autre. D garde le même matériel mais ne vise pas l'équipotence des deux collections, puisque son projet est de travailler le nombre trois. Il propose donc de remplir les pots avec trois feutres. Les pots ne servent plus de quantité biunivoque pour construire la même quantité dans une correspondance terme à terme. L'alternative aurait pu consister à utiliser trois pots et de remplir chaque pot avec un seul crayon.

Cependant, la situation installée par D lui permet de faire compter les pots puis de faire compter plusieurs collections de trois objets, ce qui multiplie les occasions de dénombrer par comptage des petites collections, objectif qui est pour lui prioritaire en MS.

3.2- Situation d'action et anticipation

Milieu matériel utilisé dans le cours	Milieu matériel choisi par D
Pot-crayon et plateau	Pot, feutres et plateau

Dans la micro-formation, le plateau permet d'introduire l'anticipation, dans la situation installée par D, le plateau est présent, mais il sert de récipient pour les feutres. La micro-formation n'a pas permis à D de concevoir l'utilité du plateau pour l'anticipation.

Dans la logique d'étude des savoirs, les connaissances n'interviennent en situation que quand elles ont déjà été construites par l'étude : c'est le cas ici quand on dénombre cinq pots ou trois crayons. Dans la logique de construction des connaissances, qui est celle du cours de la micro-formation, des connaissances peuvent être rencontrées avant d'être institutionnalisées. Cependant, les deux logiques restent implicites, à la fois dans les entretiens de D et dans la micro-formation.

Cependant, en refusant la possibilité à la fois des collections intermédiaires et des constellations non conventionnelles, D manifeste l'orientation de sa conception de l'enseignement (+3).

3.3- Situation d'éloignement dans l'espace

Parce qu'il fait tout son possible pour accueillir positivement les enseignements du cours de la micro-formation, D propose deux situations successives similaires à celles de la micro-formation : action et éloignement dans l'espace.

Cependant, il est face à une difficulté qui révèle des connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement : comment prolonger une situation dans laquelle on met trois feutres dans une collection de cinq pots ? La dimension multiplicative de la situation (il faut 5x3 feutres) n'apparaît pas, situation qui peut être résolue par une addition itérée : disposer sur le plateau, trois puis trois puis trois puis trois puis trois feutres. D est très sensible aux difficultés trop importantes auxquelles il ne veut pas confronter les élèves, la dimension multiplicative n'est pas envisagée.

Pour l'éloignement dans l'espace D propose de remplir les pots avec deux feutres ; la seule tentative qui pourrait réussir est celle de l'élève qui mime le déplacement de deux feutres dans un pot et qui renouvelle cette procédure pour les autres pots, en se perdant toutefois dans l'énumération mentale, à distance, des pots. Même s'il ne formule pas la difficulté, pour l'éloignement dans l'espace, D demande seulement deux feutres par pot, par rapport à l'installation du milieu où il en demandait trois.

4- CONCLUSION POUR D

4.1- Une répercussion sur la branche cardinal

a- La branche cardinal relations impactée

Pour la situation fondamentale « autant que », dans l'entretien E1 D proposait des collections de petites quantités pour favoriser le passage par le dénombrement. À partir de gommettes collées sur une fiche, D demandait la même quantité d'œufs que de gommettes (dans un espace différent), il exposait une situation d'action. La figure suivante (Figure 120: Branche cardinal-quantité de D issue de l'entretien E1) reprend la partie de la branche cardinal-quantité relative à la situation fondamentale S1 : construire des collections de même quantité. Toutefois, avec l'exploitation de petites quantités D est très proche de son enseignement basé sur la succession des nombres les uns après les autres.

FIGURE 120: BRANCHE CARDINAL-QUANTITÉ DE D ISSUE DE L'ENTRETIEN E1

Après la projection du cours, lors des réactions à chaud, D relate une situation avec éloignement dans l'espace courante à l'école maternelle « mettre la table pour les poupées ». Aussi, cette nouvelle situation vient enrichir la branche la situation fondamentale S1, ce qui est visible sur la figure suivante (Figure 121 : Branche cardinal-quantité de D complétée après le cours).

FIGURE 121 : BRANCHE CARDINAL-QUANTITÉ DE D COMPLÉTÉE APRÈS LE COURS

Enfin, après la micro-formation, l'installation du milieu un pot-trois crayons observée en classe ainsi que l'éloignement dans l'espace un pot-deux crayons, complètent la situation fondamentale S1 (Figure 122 : Branche cardinal-quantité de D après la micro-formation).

FIGURE 122 : BRANCHE CARDINAL-QUANTITÉ DE D APRÈS LA MICRO-FORMATION

En effet, la branche cardinal-quantité devrait se dérouler ainsi, c'est-à-dire avec des situations qui s'enchainent et qui s'enrichissent à partir d'une situation dédiée à l'installation du milieu. Cependant, l'observation du niveau didactique permet d'affiner les savoirs visés par D et de confirmer ses propos énoncés dans l'entretien jouxtant le cours. Tout se passe comme si les séances montrées, issues du cours, venaient enrichir la branche cardinal-relations en proposant une autre façon d'entrainer trois, de travailler le trois avec une autre situation (Figure 123 : Situations détournées au profit de la branche cardinal relations).

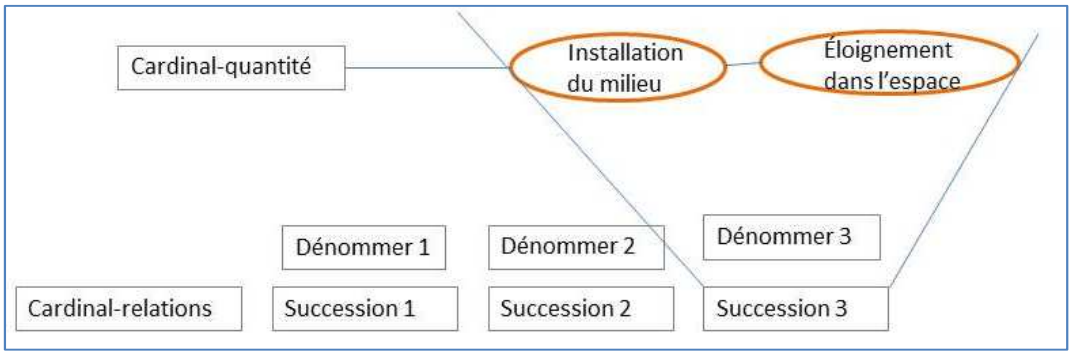


FIGURE 123 : SITUATIONS DÉTOURNÉES AU PROFIT DE LA BRANCHE CARDINAL RELATIONS

b- La branche cardinal-relations s'étoffe

Plus exactement, pour pouvoir réussir l'activité demandée par D « mettre trois crayons dans un pot », les connaissances minimales dans le milieu sont des connaissances issues des situations dénommer et succéder de la branche cardinal-relations. C'est différent pour la situation mathématique de l'éloignement dans l'espace, qui demande des connaissances permettant le transport de la quantité, mais elle est exploitée par D comme réinvestissement du nombre deux.

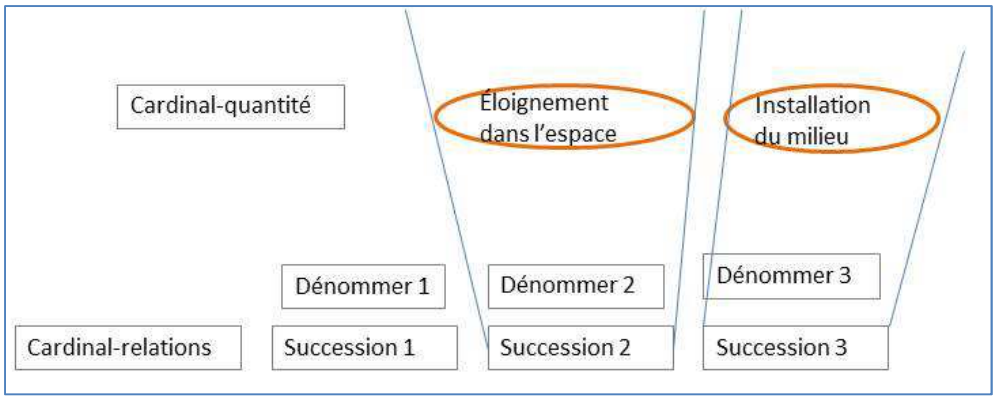


FIGURE 124 : LE NOMBRE DEUX ET LE NOMBRE TROIS

D identifie bien une difficulté supplémentaire dans la situation avec éloignement dans l'espace, c'est-à-dire qui permet un saut dans l'évolution des connaissances, puisqu'il utilise cette situation pour ré exploiter le nombre deux. Ces deux séances trouvent facilement à s'insérer dans sa progression du nombre deux et du nombre trois en modifiant légèrement le matériel. Les mêmes séances, sur la branche cardinal-quantité auraient pu être proposées avec une collection de trois feutres et trois pots, D choisit de les intégrer entièrement à la branche cardinal-relations car cela entraine ainsi la reconnaissance de deux, de trois, le dénombrement de deux, de trois, ou de cinq (pots). Toutefois, si dans les phases de validation il accentue sur le nombre deux et le nombre trois, pendant les phases de recherche de l'élève il favorise, accueille et permet toutes les procédures. Une élève traitera la collection de la situation avec éloignement dans l'espace en raisonnant sur les quantités « deux pour ce pot, deux pour ce pot, deux pour ce pot ».

D demande à l'élève d'expliquer sa procédure devant le petit groupe et aide à la mise en mots ; il valorise les tentatives de l'élève.

```
Élève- il en manque un [un pot avec deux feutres]
D- ah il en manque un écoute déjà je trouve ça très bien parce que quand même tu as réfléchi avant comment tu as fait pour heu pour compter dis-moi qu'est-ce que tu faisais là-bas comment tu as fait
Élève- en fait j'ai compté
D- tu as compté de loin
Élève- un deux trois quatre cinq
D- tu as compté de loin
Élève- oui j'ai compté de loin et je me suis dit deux pour celui-là, deux pour celui-là, deux pour celui-là, deux pour celui-là,
D- et celui-là qu'est-ce qu'il s'est passé comment
Élève- il en manque
D- il en manque combien
Élève- deux
```

En situation, D observe et reconnaît l'intérêt de cette procédure (-1), sans la relier au savoir concernant les procédures multiplicatives (addition répétée).

La micro-formation apporte une activité de plus pour enrichir la connaissance des premiers petits nombres, ces situations viennent enrichir, voire étoffer les possibles de la branche cardinal relations, toutefois, greffées sur cette branche-là ces situations ne peuvent pas se développer. Au-delà de la facilité de mise en place par rapport au matériel, ces situations, sur la branche cardinal-relations ne permettent pas de nourrir le projet du professeur et de faire avancer le temps didactique, elles entrainent toutefois la dénomination de deux, de trois, en nommant et en dénombrant deux et trois. Mais n'étant pas conçues pour abonder cette branche, ces situations s'étioleront sans doute d'elles-mêmes.

4.2- Analyse des niveaux d'activité du professeur

Dans l'entretien E2, D se questionne sur le matériel dont il dispose dans sa classe « il faut que ce soit opaque ou transparent les pots j'ai les pots de crayons dessinalo ». C'est donc le matériel qui est retenu comme étant pertinent pour les séances montrées, qui doivent intégrer le matériel « pots et crayons ». Dans le cours ce matériel est présenté comme un milieu possible.

6	CM- […] ce milieu pot crayon c'est un milieu possible on pourrait imaginer toute sorte de chose hein œuf-coquetier lapin-terrier etc. etc. le professeur peut imaginer toute sorte d'histoire de milieu tel qu'il le veut la seule chose importante pour construire la quantité comme je l'avais montrée tout à l'heure avec les jetons c'est d'avoir une collection dans laquelle on peut avoir un élément avec un autre élément […]

Le but, qui est « que physiquement ils puissent mettre et après compter » est clairement orienté vers le comptage : D garde en tête la procédure experte du dénombrement « et après compter ».

D imagine la séance en classe niveau (0) et entre concrètement par le matériel « les pots de crayons » pour questionner les procédures « physiquement mettre et après compter » et imaginer les actions des élèves au niveau (-1).

D fait part de sa programmation de son apprentissage, le un puis le deux et « là on pourrait commencer peut-être le nombre trois » issue du niveau (+2).

Ce qui est envisagé à ce moment précis de l'entretien E2 est exactement ce qui a été mis en place dans la classe. La branche exploitée est clairement énoncée « je commence par le un le deux le trois on l'apprendra après ». Un autre élément permet de l'affirmer, je demande à D jusqu'où il compte aller, il me répond « ah ben au moins deux et là on pourrait commencer peut-être le nombre trois ». Je me rends compte que nous sommes, à ce moment-là, sur deux branches différentes, car s'agissant de la branche quantité et l'évolution des connaissances des élèves, « jusqu'où » renvoie à jusqu'à quelle situation : situation avec éloignement dans l'espace, ou dans le temps.

FIGURE 125 : EVOLUTION DES SITUATION SUR LA BRANCHE CARDINAL-QUANTITÉ

Pour D, il s'agit de la branche cardinal-relations et « jusqu'où » renvoie à l'évolution de l'étude des nombres.

FIGURE 126 : EVOLUTION DES SITUATION SUR LA BRANCHE CARDINAL-RELATIONS

Cependant, la logique de progression dans la branche cardinal-quantité n'est pas cohérente avec la progression de D, ce qui permet de conclure à un apport très limité de la micro-formation.

La micro-formation n'a pas permis à la branche quantité de se développer, alors que D prend le temps d'introduire et d'installer le milieu, le choix imposé par les trois feutres le ramène immédiatement sur la branche cardinal-relations. Rester sur la branche quantité en

travaillant avec trois feutres introduirait des situations multiplicatives, trop difficiles pour des MS. La branche quantité est avortée et ne peut pas se développer malgré les apports du cours.

CHAPITRE 4- L'ENSEIGNANT E

1- RÉACTIONS « À CHAUD »

Une fois le cours fini, E réagit rapidement sur son enseignement, par rapport au niveau de construction du thème, (+2).

> E- oui oui après je pense que du coup par rapport à ce qu'elle dit moi j'associe trop tout de suite le nombre à la quantité je fais pas tout ce travail de dire heu la même chose même quand on travaille autant que heu moi j'associe directement heu avec un nombre donc heu je me rends compte qu'il y a plein de choses à faire heu avant de faire rentrer le nombre quoi donc heu voilà

Tout au long de cet entretien, E affinera ce « plein de choses » en relisant ses notes jusqu'à me demander : « autant que on peut tout faire sans compter ».

E soulève la dominance et l'omniprésence de la procédure de comptage dans son enseignement sur la quantité.

1.1- Résumé des commentaires du cours

Point 2- Subitizing

E fait part de l'exemple d'un élève en MS pour qui cette reconnaissance est impossible, et qui compte dès que le cardinal de la collection dépasse deux. E associe directement le *subitizing* et la reconnaissance globale « quand elle parle de la reconnaissance globale » à partir d'un exemple de difficulté d'élève.

E prend appui sur le niveau d'observation (-1) pour décrire les difficultés d'un élève qui lui renvoient sa difficulté, en tant qu'enseignant, à faire évoluer les connaissances de cet élève par rapport à la « reconnaissance globale » des petites quantités. Il rebondit sur ces connaissances du niveau (+2) pour montrer le déséquilibre entre son objectif de leçon en (+1) et les difficultés observées (-1) « au-delà de deux il compte ».

> E- mais moi effectivement je voudrais que jusqu'à trois quatre ça soit reconnu globalement

Point 3- Critères de validité

E pense ne pas insister assez sur le « rien », il le traduit immédiatement traduit par « zéro ».

> E- je ne le fais pas assez le zéro

Il lui parait indispensable de vérifier les connaissances « le rien le un et le plusieurs » surtout pour les élèves qui rentrent à l'école à deux ans.

E souhaite vérifier ces connaissances minimales et ne pas les considérer comme acquises par tous les élèves à leur entrée à l'école maternelle car il « doute toujours » des prérequis des élèves.

> E- moi j'en doute toujours voilà j'en doute toujours l'histoire des prérequis là elle a raison

Les critères de validités énoncés au niveau (+2), sont imaginés par E aux niveaux (0&1), il pourrait même envisager les réactions des élèves deux ans.

Point 4- Situation fondamentale : même quantité que

E- j'ai un gros travail à faire sur ça moi j'ai toujours l'impression que si on pose une bille bleue avec une bille rouge à chaque fois pour savoir si y'en a pareil moi j'ai l'impression qu'on n'est pas dans le nombre justement et du coup souvent je me freine de la faire parce que je me dis mais non il faut qu'il sache que là y'en a huit alors là il en faut huit alors que y'a d'autres choses à construire avant donc c'est là où je me rends compte que je fais pas forcément les choses dans l'ordre voilà

E ne perçoit pas la quantité comme un savoir qui permet la construction du nombre. Plus encore, il pensait que la correspondance terme à terme empêchait l'utilisation du nombre. Plus précisément il oppose deux procédures : la correspondance terme à terme et le dénombrement. Comme E vise le dénombrement, la correspondance ne lui sert à rien et biaise même son objectif.

Ce cours lui permet de voir la correspondance terme à terme autrement et lui offre une autre possibilité pour l'exploiter. Il entrevoit « autres choses à construire avant ».

Point 5- TSD/ situation d'action

E- l'histoire de l'anticipation ils voient les pots vides dans leur tête

E retient de la situation d'action « l'histoire de l'anticipation ». Le choix du mot « histoire » fait référence à l'installation du milieu, à la répétition des situations comme le déroulement d'une histoire, décors, péripéties, etc.

La situation d'action avec l'anticipation vient enrichir le niveau (+2).

Point 8- rôle du professeur

E- après moi ce qui me pose le plus question c'est dans la dans la manipulation c'est à dire heu comment combien de temps et comment on laisse venir les stratégies pas les enfants à quel moment moi avec les petits c'est ça qui me pose le plus de problème à quel moment on intervient à quel moment on guide sans c'est ce qu'elle dit faire faire heu comment on sait qu'on n'est pas dans le faire faire et à la fois est ce qu'on laisse longtemps là dix minutes sans que rien ne se dise ou que voilà c'est ça qui est parce que est-ce que de eux même ils vont poser les crayons devant les pots est-ce qu'il va falloir leur le le les induire là-dessus enfin voilà ça ça je trouve que c'est le plus compliqué en en pratique

E est en questionnement sur son accompagnement au plus près de l'action de l'élève. Il souligne le dilemme dans lequel il se trouve entre laisser du temps aux apprentissages et faire avancer le temps didactique.

Point 10- Eloignement dans l'espace

E met en place un capitaine de groupe qui est chargé notamment du matériel. Il doit aller chercher, par exemple, une paire de ciseaux pour chaque élève, cependant, E oriente la procédure de l'élève en lui demandant de compter les élèves du groupe et de ramener six paires de ciseaux.

E- comme moi j'ai un un capitaine de groupe on a besoin de ciseaux ben il va aller chercher les ciseaux pour tout le monde donc c'est à ce moment-là qu'on verbalise mais avec le nombre on dit vous êtes six ben il faudra six paires de ciseaux et du coup alors c'est lui qui dit faudra six paires voilà mais on est quand même toujours avec le avec le nombre

E prend conscience qu'en imposant un dénombrement, il limite la recherche de procédures pour construire une collection équipotente.

Les possibilités offertes par la situation avec l'éloignement dans l'espace viennent enrichir le niveau (+2) de E qui se projette au niveau (-1) d'observation des procédures des élèves. Il peut envisager à présent différentes procédures possibles pour aborder la quantité en évitant d'imposer immédiatement le dénombrement.

Point 11- Eloignement dans le temps

L'éloignement dans le temps suscite de la curiosité et une envie de mettre en place cette situation.

E- éloignement dans l'espace dans l'espace je vois dans le temps je suis curieux de voir

Cette curiosité pour l'éloignement dans le temps ouvre des possibles pour l'enseignement du nombre à la maternelle et permet, de surcroit, l'évolution des connaissances mathématiques spécifiques du professeur. E n'hésite pas à se questionner et n'est pas inquiet à l'idée d'expérimenter de nouvelles situations évoquées par la micro-formation.

La situation avec éloignement dans le temps vient enrichir le niveau (+2) de E.

Point 13- Collection intermédiaire

E rebondit sur la collection intermédiaire écrite en l'illustrant de l'exemple d'un élève de CP qui dessine des pommes en respectant l'organisation spatiale du modèle.

L'exemple donné par E laisse supposer que l'élève ne s'attache pas à la caractéristique commune des collections basée sur la quantité mais plutôt à une similitude liée à la forme, à l'organisation spatiale.

E- ben j'ai certains élèves qui vont dessiner les pommes et qui vont les dessiner par exemple en respectant le l'endroit où elles sont si elles sont rangées en pyramide ben ils vont dessiner en pyramide heu sans compter même à la limite mais du coup ils vont reproduire les dessins d'autres qui vont dessiner directement comme le dé et d'autres qui vont dessiner tout en ligne systématiquement et là on voit que du coup c'est pas encore commun

E analyse des procédures d'élèves observées au niveau (-1) à la lumière de savoirs mathématiques spécifiques sur la collection intermédiaire du niveau (+2).

Point 14- Du temps aux apprentissages

Dans la gestion du multi-niveau, E se questionne sur le temps laissé à la découverte, à l'entrainement par tous les élèves, « mais comme il faut faire refaire ».

La répétition des situations est peut-être prise comme une injonction « il faut faire refaire » qui peut devenir une contrainte forte.

E- après moi j'espère toujours que dans le groupe y'en un qui va pouvoir faire ce que moi je veux pas faire mais alors du coup cet enfant là c'est aussi toujours le problème c'est si il faut quand elle dit là qu'il faut refaire bien sûr qu'il faut refaire refaire mais là si il y en a un par exemple pour qui c'est évident que ben c'est fait quoi c'est acquis alors est-ce qu'il va pas s'ennuyer est-ce qu'on est-ce qu'on s'en sert toujours comme de support pour les autres est-ce qu'à un moment on lui fait faire autre chose ailleurs est-ce que voilà c'est ça qui est le plus

L'idée selon laquelle la répétition des situations construit les connaissances des élèves est partagée par E au niveau (+3) mais impose une contrainte forte au niveau (0).

Point 16- Pas de hiérarchie dans les procédures

En relisant ses notes, E a noté la question : « qui donne les stratégies » qui fait écho au rôle du professeur.

```
E- alors j'avais mis qui donne les stratégies si les enfants ne disent rien
```

Derrière cette question « qui donne les stratégies », E s'interroge sur la gestion de l'avancée du temps didactique et sur la légitimité qu'il pourrait avoir à amener les stratégies, surtout lorsque dans les petites cohortes des classes multi-niveaux, l'émulation ne joue pas toujours son rôle.

E renvoie la question de hiérarchie des procédures du niveau (+2) au rôle du professeur en situation didactique au niveau (0).

Point 17- Configuration

Dans cette partie du cours, il est aussi rappelé le rôle du *subitizing* dans le choix de petites quantités, par rapport à de plus grandes quantités.

```
E- d'instinct je n'aurais pas travaillé avec de grandes quantités puisque moi je suis sur la reconnaissance
```

L'apport des cartes à points de Bregeon, est apprécié par E qui ne les connaissait pas, « les cartes à points c'est une autre représentation» pour travailler « les compléments ». Par cette remarque, E montre qu'il a tout à fait su considérer les cartes à points comme un dispositif qui concerne les compléments, ce qui enrichit ses connaissances mathématiques spécifiques.

La remarque sur le choix des petites ou des grandes quantités permet à E de clarifier son enseignement et de se repérer par rapport aux savoirs visés. Il opère une différence entre la reconnaissance globale et immédiate de petites quantités et le travail concernant la quantité qui autorise de plus grandes collections.

Le choix des quantités et du matériel renforce les connaissances du niveau (+2).

Point 18- Définition du cardinal

E utilise de façon systématique et explicite la répétition du dernier mot nombre.

```
E- après sur le cardinal on répète le dernier on dit combien et on répète le dernier
```

E fait le choix d'un enseignement explicite « on répète le dernier» pour obtenir le cardinal des collections, sans en donner toutefois, les raisons d'être du savoir.

La définition du cardinal qui permet de lier l'aspect ordinal et cardinal du nombre au niveau (+2) est ramenée au niveau de classe, au niveau (0).

Synthèse des points abordés

Points abordés dans le cours	Points repris par E
Point 1 : Suite orale des mots nombres	
Point 2 : Subitizing	X
Point 3- Critères de validité	X
Point 4 : Situation fondamentale : même quantité que	X
Point 5- TSD / Situation d'action	X
Point 6 : Introduction et installation du milieu Consigne	
Point 7- Situation d'action en classe	
Point 8- Rôle du professeur	X
Point 9- Situations de formulation	
Point 10- Eloignement dans l'espace	X
Point 11- Eloignement dans le temps	X
Point 12- Communication à autrui	
Point 13- Collection intermédiaire	X
Point 14- Du temps aux apprentissages	X
Point 15 : Des quantités suffisantes	
Point 16- Pas de hiérarchie dans les procédures	X
Point 17- Configurations	X
Point 18- Définition du cardinal	X

1.2- Réactions par rapport à la conception de l'enseignement du nombre

Dans l'entretien E1, E propose une évaluation sur fiche analysée comme une situation d'action. La figure suivante (Figure 127 : Branche cardinal-quantité de D issue de l'entretien E1) reprend la branche cardinal-quantité de E.

FIGURE 127 : BRANCHE CARDINAL-QUANTITÉ DE D ISSUE DE L'ENTRETIEN E1

Lors de l'entretien E2, E reconnait, dans sa gestion collective du matériel, une situation avec éloignement dans l'espace, bien que la procédure de dénombrement soit imposée.

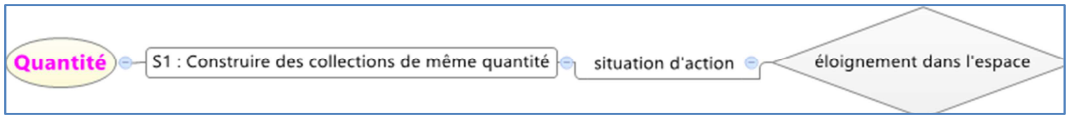


FIGURE 128 : BRANCHE CARDINAL-QUANTITÉ DE E COMPLÉTÉE APRÈS L'ENTRETIEN E2

La micro-formation lui apporte des savoirs mathématiques spécifiques, sur la collection intermédiaire. Outre une collection intermédiaire orale basée sur la suite orale de mots nombres ou le cardinal de la collection, E prend conscience qu'une collection intermédiaire matérielle et une collection intermédiaire écrite peuvent permettre de résoudre, en situation, des problèmes portant sur la quantité.

Ces nouveaux savoirs ouvrent des possibles « on peut tout faire sans compter », sous-entendu, d'autres procédures existent pour la situation fondamentale S1 : construire des collections de même quantité.

E souhaite tester une situation avec éloignement dans l'espace et dans le temps et « travailler cette histoire de même quantité sans les nombres ».

2- SÉQUENCE ÉLABORÉE PAR E

2.1- Présentation des séances montrées

Avec tous les niveaux de maternelle, E fait le choix de proposer une séquence pour les PS-MS et une séquence pour les GS. Il me propose de venir filmer quatre fois parmi cinq séances qu'il réalise en classe, je n'assiste pas à la première séance. Pour les quatre séances filmées, il commence toujours par la séance des GS puis enchaine avec celle des PS-MS. Il prévoira un temps d'activité d'entrainement sur la correspondance terme à terme, sous la responsabilité de l'ATSEM, pour les TPS-PS en dernière séance.

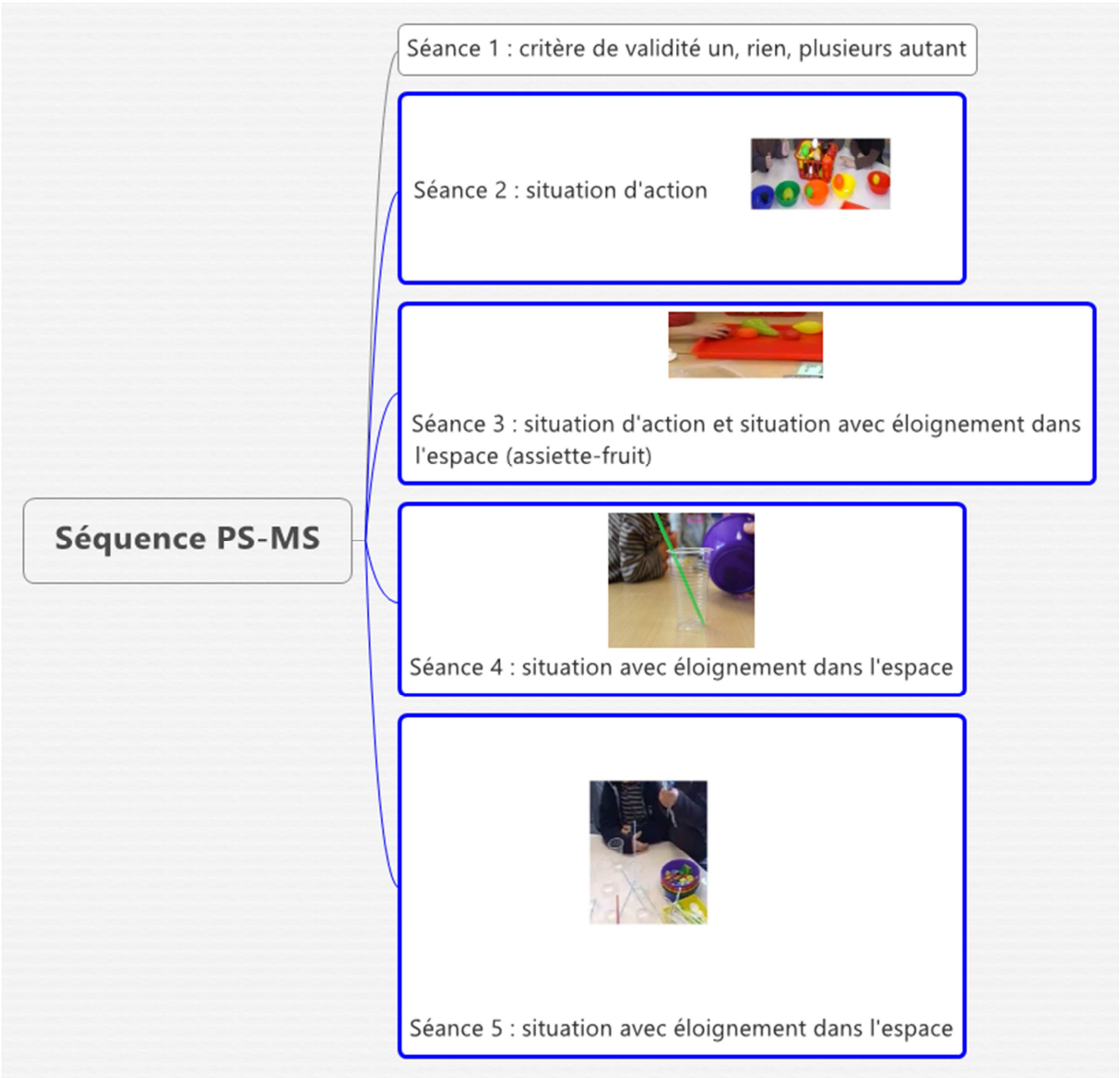


FIGURE 5: SÉANCES FILMEES EN PS-MS CHEZ E

FIGURE 6 : SEANCES FILMEES EN GS CHEZ E

Les quatre séances montrées sont décrites chronologiquement pour rendre compte du déroulement des évènements dans la classe. E fait avancer le temps didactique, il prend en main l'évolution des connaissances, institutionnalise, oriente vers les procédures qu'il souhaite voir, diffuse et dirige les stratégies.

a- PS-MS séance 2- « même quantité » installation du milieu et situation d'action

Un-rien-plusieurs et Institutionnalisation « Autant que »	0 à 2 :36 Temps collectif, phase de rappel de l'activité de la veille : un-rien-beaucoup Les fruits et légumes sont déposés dans les assiettes, une avec rien une avec un seul fruit et la dernière avec beaucoup, plusieurs fruits. Installation des critères de validité. E consacre du temps pour ce langage
	2 :36 à 9 :40 Institutionnalisation de « autant que : même quantité » E utilise des pions bleus et des jetons jaunes.
	9 :40 à 15 :33 Installation du milieu « assiettes – fruits » : E installe le milieu matériel, des assiettes en couleur et des fruits et légumes, énonce la consigne en demandant un fruit dans chaque assiette, il s'assure de la compréhension du mot chaque et prend le temps avec un élève de petite section qui ne comprend pas la signification du mot « chaque ».

Installation du milieu	
 Situation d'action	15 :33 à 25 :35 Situation d'action, anticipation avec le plateau « assiettes – fruits » : À tour de rôle les sept élèves de l'atelier vont essayer de préparer « un bon plateau ».
 Situation d'action (variable didactique : disposition des assiettes)	Élève 1 a trois assiettes devant lui, il déposera quatre fruits sur le plateau Élève 2 a trois assiettes devant lui, il déposera trois fruits sur le plateau Élève 3 a quatre assiettes devant lui, il déposera quatre fruits sur le plateau Élève 4 a quatre assiettes devant lui, il déposera quatre fruits sur le plateau Élève 5 a deux assiettes devant lui, il déposera quatre fruits sur le plateau puis en ajoutera deux de plus après la question de l'enseignant « c'est bon tu penses que tu en as assez » Élève 6 a quatre assiettes devant lui, il déposera quatre fruits sur le plateau Élève 7 a trois assiettes devant lui, il déposera trois fruits sur le plateau E joue sur la variable "disposition spatiale des assiettes".

b- PS-MS séance 3- situation d'action et situation avec éloignement dans l'espace

	0 à 3 :17 Qu'est-ce qu'on a fait la dernière fois ? E insiste sur la consigne et l'enjeu mathématique de la situation : exactement pareil, exactement la même quantité, la bonne quantité pour qu'il y ait un fruit dans chaque assiette.
 Situation d'action,	3 :17 à 15 :32 Situation d'action À tour de rôle les sept élèves vont réaliser une ou plusieurs situations d'action. La procédure est donnée par E à deux élèves.
 Situation avec éloignement dans l'espace, variable didactique : assiettes transparentes	15 :32 à 33 :22 Situation avec éloignement dans l'espace E introduit dans son histoire des courses à aller faire au marché pour des invités et déplace les fruits à l'autre bout de la classe. À tour de rôle les sept élèves vont réaliser une ou plusieurs situations avec éloignement dans l'espace. Il propose des collections de trois ou quatre assiettes et deux pour un élève de petite section. E joue sur la variable "couleur des assiettes" et pour le dernier élève il remplace les assiettes en couleur par des assiettes transparentes.

c- PS-MS séance 4- situation avec éloignement dans l'espace

	0 à 6 :29 Qu'est-ce qu'on a fait la dernière fois ? Institutionnalise une collection intermédiaire orale avec le nom des couleurs Vérification de « chaque » et situation d'action pour l'élève de petite section
 Gobelet transparent et paille	6 :29 à 21 :02 Situation avec éloignement dans l'espace avec les gobelets transparents et les pailles À tour de rôle les sept élèves vont réaliser une situation avec éloignement dans l'espace. Il propose en fonction des élèves une collection de trois, de quatre, de cinq, de six et trois collections de huit gobelets. Cinq élèves vont réussir du premier coup.

d- PS-MS séance 5- situation avec éloignement dans l'espace

<table>
<tr>
<td>
Variable didactique : 12 gobelets transparents PUIS plus de 20

Collection intermédiaire matérielle</td>
<td><u>0 à 24 :56</u>
<u>Situation avec éloignement dans l'espace avec les gobelets transparents et les pailles</u>
Installation du milieu matériel, douze gobelets transparents.
E élimine les différentes procédures qui ne réussissent pas : compter, bien regarder (organisation spatiale ou forme dessinée par les gobelets) pour préconiser et institutionnaliser une collection intermédiaire matérielle, avec des jetons.
Même chose avec plus de vingt gobelets.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Séance spécifique pour deux élèves, un TPS et un PS avec l'ATSEM, pendant la séance 5 des PS-MS</td>
</tr>
<tr>
<td>Correspondance terme à terme TPS-PS

Correspondance terme à terme : un animal dans chaque case

Correspondance terme à terme variable la taille des cases</td>
<td><u>Correspondance terme à terme</u>
E joue sur la taille des cases, il propose d'abord le bac à glaçon, qui impose de fait, un animal dans une case, puis les petits gobelets où il est plus facile de déposer plusieurs animaux.</td>
</tr>
</table>

e- GS séance 2- situation d'action et situation avec éloignement dans l'espace

<table>
<tr>
<td>
Institutionnalisation</td>
<td><u>0 à 3 :15</u>
Qu'est-ce qu'on a fait la dernière fois ?
Institutionnalisation de la « même quantité »</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td><u>3 :15 à 6 :28</u>
<u>Installation du milieu « assiettes – fruits » :</u>
Matériel : assiette en plastique et fruits et légumes en plastique
consigne : E s'arrête sur le mot chaque « un légume dans chaque assiette » il montre chaque assiette avec le doigt et accompagne verbalement l'élève qui est en train de les énumérer.</td>
</tr>
</table>

 Situation d'action	6 :28 à 12 :55 Situation d'action, anticipation avec le plateau « assiettes – fruits » : Trois essais sont réalisés Élève 1 a cinq assiettes devant lui, il déposera cinq fruits sur le plateau Élève 2 a quatre assiettes devant lui, il déposera quatre fruits sur le plateau Élève 3 a six assiettes devant lui, il déposera six fruits sur le plateau À chaque réalisation E demande aux élèves d'expliquer leur procédure, il aide parfois à mettre en mots
 Situation avec éloignement dans l'espace	12 :55 à 26 :53 Situation avec éloignement dans l'espace « assiettes – fruits » Élève 1 a huit assiettes devant lui, il déposera huit fruits sur le plateau Élève 2 a neuf assiettes devant lui, il déposera neuf fruits sur le plateau Élève 3 a sept assiettes devant lui, il déposera cinq fruits sur le plateau L'élève 3 va rejouer, il a six assiettes devant lui, il déposera six fruits sur le plateau

f- GS séance 3- situation avec éloignement dans l'espace

	0 à 14 :03 Situation avec éloignement dans l'espace « pailles – gobelets » : Installation du milieu matériel avec des gobelets et des pailles. E installe 15 gobelets. Les trois élèves passent à tour de rôle, ils échouent tous.
 Collection intermédiaire matérielle	14 :03 à 19 :31 Collection intermédiaire matérielle
	19 :31 à 20 :35 Institutionnalisation de la collection intermédiaire Avec de grandes quantités on utilise une collection intermédiaire matérielle…

g- GS séance 4- situation avec éloignement dans le temps

	0 à 2 :23 Qu'est-ce qu'on a fait la dernière fois ? Explication de la consigne et des stratégies.
 Collection intermédiaire matérielle	2 :23 à 16 :12 Situation avec éloignement dans le temps « pailles – gobelets », Installation du milieu, consigne, matériel, dix-huit gobelets Collection intermédiaire matérielle
 écriture chiffrée	16 : 12 à 22 :23 Écrit mathématique, écriture chiffrée du cardinal qui représente la quantité
 Collection intermédiaire écrite	22 : 23 à 27 :15 Collection intermédiaire matérielle écrite, dessin des pailles

h- GS séance 5- situation avec éloignement dans le temps

	0 à 5 :26 Situation avec éloignement dans le temps seconde partie, réalisation de la collection de pailles et validation : Qu'est-ce qu'on a fait la dernière fois ? « Pourquoi on cachait des pions dans le chevalet »
 Correspondance terme à terme entre la collection intermédiaire de jetons et les pailles	5 :26 à 9 :40 Collection intermédiaire matérielle des jetons, et correspondance terme à terme avec les pailles.
 Énumération de la collection intermédiaire écrite	9 :40 à 11 :40 Collection intermédiaire écrite, lecture de l'écriture chiffrée et dénombrement à voix haute de dix-huit pailles.
 Fichier des CP	11 :40 à 22 :46 E souligne le problème d'énumération lié à la gestion de la collection intermédiaire écrite, le dessin des pailles. Il prend appui sur le fichier des élèves de CP pour montrer les croix sur les éléments déjà comptés et propose de prendre un feutre, l'élève repasse le trait chaque fois qu'il prend une paille. Institutionnalisation d'une collection intermédiaire écrite (dessin) avec une grande quantité.

2.2- Analyse des consignes

Comment les consignes sont-elles formulées, quels sont les mots choisis pour viser la quantité ?

a- Séances 2 : Situations d'action

PS-MS	GS
E- « maintenant plus difficile je voudrais qu'on prépare un fruit pour chaque assiette mais qu'on prépare ici (E lève le plateau) Élève 1 : alors on met les assiettes dans le plateau E- ah non on met pas les assiettes dans le plateau on n'a pas le droit les assiettes et le plateau peuvent pas être ensemble comment on va faire pour préparer les fruits et les légumes dans le plateau pour qu'on puisse avoir un fruit dans chaque assiette tout le monde comprend un fruit dans chaque assiette »	E- « y'a plus de bleus que de jaunes parce que il reste un bleu tout seul qui n'a pas de copain d'accord donc hier on avait fait ça bon c'était déjà pas mal aujourd'hui on va continuer on va faire d'autres jeux d'accord on va toujours essayer de trouver pour qu'il y ait la même quantité pour qu'il y ait autant de choses alors donc je vais vous demander (l'enseignant E relit sa fiche de préparation) je vais poser ici sur la table de l'élève 1 je vais poser des assiettes d'accord je pose des assiettes je vais poser ça comme assiettes déjà d'accord (cinq assiettes) Élève 2 : quatre assiettes E- on a dit hier que pour le moment on veut pas savoir exactement comment y'en a on travaille sans compter pour le moment d'accord donc je pose des assiettes et je vais faire le marché je voudrais préparer dans ce plateau des légumes ou des fruits pour qu'il y ait un légume dans chaque assiette alors qu'est-ce que ça veut dire un légume dans chaque assiette est-ce que quelqu'un peut le dire autrement […] on prépare exactement assez de fruits ou de légumes pour qu'on puisse en mettre un dans chaque assiette »

E accompagne oralement l'évolution des connaissances, « maintenant plus difficile », «donc hier on avait fait ça […] aujourd'hui on va continuer ». Avec les PS-MS, E demande « un fruit pour chaque assiette » et rapidement va questionner « tout le monde comprend un fruit dans chaque assiette ». L'introduction du plateau pose problème pour les élèves, « on met les assiettes dans le plateau », il montre le plateau, il le nomme également. Avec les GS, E explicite les attentes du jeu « qu'il y ait la même quantité pour qu'il y ait autant de choses ». La formulation « qu'il y ait un légume dans chaque assiette » est choisie pour introduire la quantité sans parler de nombre. E tire profit de la remarque de l'élève 2, pour préciser « on travaille sans compter pour le moment ». Le plateau est montré et nommé. Rapidement il va s'arrêter sur la compréhension du mot chaque, il demandera aux élèves de reformuler, et n'hésitera pas à montrer chaque assiette avec sa main.

b- Séances 3 : Situation d'action et éloignement dans l'espace

Consigne	PS-MS	GS
Situation d'action	E- « tu mets dans le plateau exactement ce qu'il faut pour qu'il y ait un fruit dans chaque assiette »	
Eloignement dans l'espace	E- « on va essayer d'aller faire le marché maintenant donc je vais aller installer le petit marché un peu loin de la table et vous allez devoir aller chercher loin là-bas au marché vous allez devoir aller chercher des fruits dans le plateau pour qu'il y ait exactement la même quantité de fruits que la quantité d'assiettes donc c'est-à-dire qu'on va partir d'ici on va aller là-bas et sans regarder ce qu'il se passe ici on va essayer de fabriquer un bon plateau qui ait exactement la même quantité d'accord ah ah ça se complique ». Consigne pour l'Élève 1 «donc élève 1 écoute moi bien j'ai installé la table avec tes invités il faut que tu leur ramènes à tes invités un fruit chacun quand tu te sens prêt tu vas là-bas et tu nous ramène le plateau avec la bonne quantité de fruits Élève 1 : je suis prêt E- et bien alors vas-y »	E- « Aujourd'hui on va continuer à aller chercher des choses un peu loin là des bureaux d'accord la règle ça va toujours être qu'on a le droit d'y aller qu'une seule fois bien sûr […] mais par contre aujourd'hui on va travailler avec des gobelets d'accord donc vous avez vu j'en ai pas pris cinq ou six hein aujourd'hui on va travailler avec de grandes quantités on va travailler avec beaucoup de choses et puis j'avais pris des cuillères et puis on a trouvé des pailles alors les pailles c'est peut-être mieux parce que ça fait ça se casse moins que les cuillères d'accord donc moi ce que je vais faire c'est que je vais installer les pailles là-bas loin dans la classe sur le plateau bleu et puis vous avec un plateau vous allez partir et vous allez essayer de ramener des pailles pour qu'il y en ait Élèves : « autant dans chaque gobelet » E- « autant que de gobelets ou une dans chaque gobelet d'accord ça veut dire la même chose mais on le dit différemment soit on dit on ramène autant de pailles que ce qu'il y a de gobelets sur la table soit on dit je vais chercher les pailles pour qu'il y en ait Élève : une dans chaque gobelet »

Dans la deuxième séance montrée E installe le milieu de la situation avec éloignement dans l'espace. L'utilisation du plateau est expliquée, il va servir à mettre les fruits à l'intérieur car il s'agira d'essayer de « fabriquer un bon plateau ». E utilise le terme de « quantité, même quantité, bonne quantité » plusieurs fois dans sa consigne. Avec les GS, il installe le milieu rappelle « la règle » et présente le travail « avec de grandes quantités ». Il reformule la consigne et propose indifféremment « autant de pailles que ce qu'il y a de gobelets » et « les pailles pour qu'il y en ait une dans chaque gobelet ».

c- Séances 4 : Situations de formulation

PS-MS : éloignement dans l'espace	GS : éloignement dans le temps
E- « aujourd'hui on va travailler avec des verres et des pailles Élèves : et les cuillères E- et peut-être les cuillères peut être les pions on va voir mais en tout cas on va travailler avec ça d'accord tout ça […] donc aujourd'hui on va faire ça on va essayer de ne pas s'aider de couleurs c'est pour ça que j'ai pris des verres tous les mêmes transparents et donc on va pas s'aider des couleurs d'accord c'est bon moi je vais emmener les pailles là-bas sur le bureau de l'élève 1 et puis on va devoir remplir chaque gobelet avec une paille »	E- « aujourd'hui on va pas remplir les gobelets on le fera une prochaine fois d'accord aujourd'hui on va juste essayer de regarder trouver des solutions pour que lundi donc là on est jeudi il va passer vendredi encore un jour d'école après deux jours à la maison et lundi on va revenir il faudra arriver à se rappeler comment on va remplir nos gobelets d'accord je vais poser les gobelets moi et lundi lundi on n'aura plus les gobelets ils seront cachés quelque part et il faudra quand même aller choisir la bonne quantité de pailles » Élève 1 : « on peut essayer d'aller chercher les gobelets dans l'école »

E installe le milieu avec les PS-MS, il déplace le matériel sur un bureau éloigné et demande de « remplir chaque gobelet avec une paille ».

Avec les GS, E installe le milieu de la situation avec éloignement dans le temps. Il différencie les étapes qui auront lieu aujourd'hui et celles de lundi. Il rappelle qu'il s'agit de « choisir la bonne quantité ». Un élève est toutefois perplexe et propose de rechercher les gobelets qui seront cachés plutôt que d'accepter la dévolution de la situation. Ces réactions de perplexité devant les situations d'éloignement dans le temps, qui supposent au final un recours à l'écrit, ont été décrites dans d'autres contextes mathématiques (Briand, Loubet, & Salin, 2004). Cet élève gardera en tête la recherche des gobelets et proposera le lundi une chasse au trésor pour retrouver les gobelets.

d- Séances 5 : éloignement dans l'espace et dans le temps

PS-MS : éloignement dans l'espace	GS : éloignement dans le temps
E- « donc aujourd'hui on va essayer toujours de mettre une paille dans chaque verre et aujourd'hui on va avoir énormément d'invités il va falloir trouver le moyen de leur apporter une paille à chacun il va falloir chercher une solution pour aller chercher exactement la même quantité de paille pour tous les invités »	E demande aux élèves pourquoi ils ont mis des choses dans le chevalet, puis vont chercher leur message et prennent la même quantité de pailles puis valident.

La situation avec éloignement dans l'espace est installée, E place douze gobelets sur la table pour les « invités », il utilise indifféremment « une paille à chacun » et « chercher exactement la même quantité de paille pour tous les invités ».

3- ANALYSE DES SITUATIONS INSTALLÉES PAR E

3.1- Installation du milieu

Quel choix de matériel a été retenu dans les séances de E ?

Milieu matériel utilisé dans le cours pour la situation d'action	Milieu matériel choisi par E
Pot-crayon et Plateau pour l'anticipation	Assiette en couleur-fruit et Plateau pour l'anticipation
Milieu matériel utilisé dans le cours pour les situations de formulation	Milieu matériel choisi par E (éloignement dans l'espace et dans le temps)
Pot-crayon	Assiette-fruit (éloignement dans l'espace), puis gobelet transparent-paille (éloignement dans l'espace et dans le temps)

E utilise d'abord des assiettes en plastique couleur et des fruits et légumes, ce choix de matériel lui permet d'orienter les élèves vers l'utilisation d'une collection intermédiaire orale : la suite des mots couleur en répétant un pour l'assiette rouge, un pour la bleue, un pour la verte et un fruit pour la violette. Il introduira ensuite des assiettes en plastique transparent pour permettre l'évolution des connaissances des élèves. Il utilisera par la suite des gobelets en plastique pour travailler avec de grandes quantités, et des pailles. Le plateau ou les barquettes sont utilisées pour l'anticipation et l'éloignement dans l'espace pour le transport des collections.

3.2- Institutionnalisation de différentes procédures

E donne de l'importance à un enseignement explicite qui passe par l'institutionnalisation, en particulier dans les phases de rappel de début de séance. Il considère que son rôle est donc très important dans l'institutionnalisation des procédures les plus efficaces, qu'il a besoin d'anticiper. E peut être rapproché des « planificateurs » de Chopin.

> *« le planificateur anticipe (avec succès ou non), la nature des difficultés que rencontreront les élèves par rapport à l'objet de savoir. » (Chopin, 2008, p. 72)*

La micro-formation lui fournit la description de nouvelles procédures par rapport à celles qu'il institutionnalisait auparavant. Par ailleurs, il s'interroge sur son rôle et sur le moment où les procédures doivent être explicitées voire imposées. Cette réflexion met en lumière la complexité du rôle du professeur dans le processus d'institutionnalisation.

3.3- Situation d'éloignement dans le temps

La situation d'éloignement dans le temps, qu'il réserve aux GS est tout à fait nouvelle pour lui. Elle est vraisemblablement raisonnable, effectivement.

S'appuyer sur des procédures possibles et variées lui permet sans doute de franchir le pas pour proposer cette situation.

3.4- Recherche des valeurs des variables

Au fur et à mesure des situations, les variables se modifient (couleur/ sans couleur, taille des collections). L'augmentation de la collection (de douze gobelets transparents à vingt), particulièrement intéressante, reflète le caractère expérimental d'une variable didactique. Il se heurte à des problèmes d'énumération qui ne sont pas décrits dans ce cours de la micro-formation[83]. Ce travail sur les variables témoigne d'une vraie curiosité de la part de E.

4- CONCLUSION POUR E

Quel est l'impact de cette micro-formation sur les connaissances mathématiques spécifiques du professeur observées au niveau didactique, étant donné les conceptions de l'enseignement du nombre déclarées par E lors du premier entretien ?

4.1- Une répercussion sur la branche quantité

a- La branche quantité se développe

En décrivant son enseignement du nombre dans l'entretien E1, E prend appui sur une fiche des évaluations nationales où il faut coller la même quantité de gommettes que de fleurs dessinées sur la feuille. Il s'agit d'une situation d'action, les gommettes ne sont pas collées directement sur les fleurs. E est également sensible à l'installation du milieu notamment par rapport au lexique employé compte tenu des lacunes en vocabulaire de ses élèves.

FIGURE 129 : BRANCHE CARDINAL QUANTITÉ AVANT LA MICRO-FORMATION

Dans l'entretien E2 des réactions immédiatement après le cours, E détaille une situation avec éloignement dans l'espace lorsque l'élève de service doit aller chercher le bon nombre de paires de ciseaux pour que chaque élève de l'atelier en ait un.

FIGURE 130 : BRANCHE CARDINAL QUANTITE AVANT LE COURS

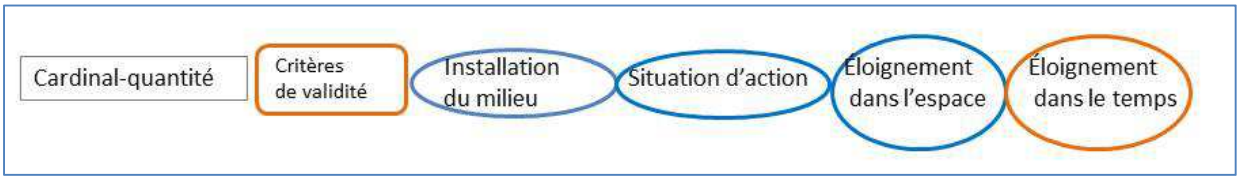


FIGURE 131 : BRANCHE CARDINAL QUANTITÉ APRÈS LE COURS

La succession des situations proposée après le cours favorise le développement de la branche quantité de E. Il consacre du temps et donne de l'importance aux critères de validité et à l'installation du milieu, le départ de la branche quantité est solidement bâti. Les

[83] Pour les étudiants, il s'agissait d'un autre cours concernant l'organisation et la gestion de données.

situations suivantes peuvent s'étendre et prospérer. La situation avec éloignement dans le temps ne faisait pas partie de son enseignement, comme le confirme ses propos après le cours. Sa branche cardinal-quantité s'accroit avec ces nouveaux savoirs.

b- La branche quantité s'étoffe

Le cours insiste aussi sur les connaissances des élèves observées à partir de différentes procédures possibles. L'anticipation du résultat est un moment clé pour l'évolution des connaissances mathématiques de l'élève. E matérialise cette anticipation avec la mise en place d'un plateau qui intensifie la situation d'action. Il oriente, autant qu'il lui est possible, les procédures des élèves pour éviter le dénombrement ce qui accroit les autres stratégies des élèves.

E n'aura de cesse de valoriser les procédures ne faisant pas intervenir le dénombrement, il sera vigilant à la formulation des consignes (installation du milieu) afin de ne pas influencer cette procédure.

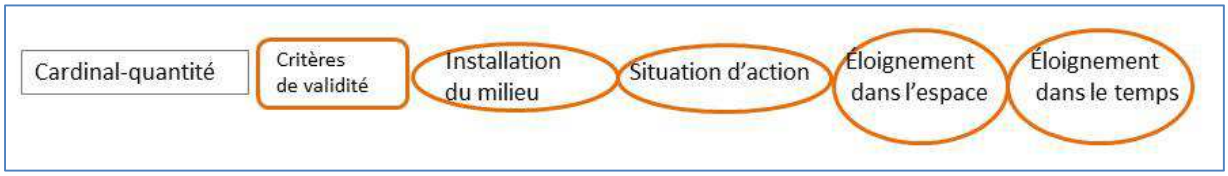


FIGURE 132 : SITUATIONS IMPACTÉES PAR LE COURS

E prend conscience des potentialités d'une collection intermédiaire matérielle, il mettra à disposition du matériel sur la table pour la situation avec éloignement dans l'espace (cuillères en plastique, jetons). Pour l'éloignement dans le temps il provoquera l'émergence d'une collection intermédiaire de jetons, une collection intermédiaire écrite avec le dessin des pailles et l'écriture chiffrée du cardinal de la collection qui représente la quantité. Les différentes étapes sont nourries et enrichies du cours ce qui a pour conséquence d'étoffer et d'étendre la branche cardinal quantité de E.

4.2- Analyse des niveaux d'activité du professeur

Avec les séances filmées, j'observe le niveau didactique (0) et je m'intéresse particulièrement au niveau (-1) lieu des connaissances en situation des élèves et des connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement de la quantité du professeur.

E est en questionnement sur son accompagnement au plus près de l'action de l'élève. Il souligne l'ambivalence qu'il éprouve entre laisser du temps aux apprentissages et faire avancer le temps didactique.

La difficulté ou les doutes parfois issus du niveau didactique (0) sont renforcés par le multi-niveau de la classe de E. Derrière cette question « qui donne les stratégies », E est confronté à une particularité liée au multi-niveau.

E renvoie la question de hiérarchie des procédures du niveau (+2) au rôle du professeur en situation didactique au niveau (0). E fait part de son questionnement sur le rôle du professeur avec des petits groupes, trois élèves en grande section lors de l'entretien jouxtant le cours E2. Il se demande jusqu'où le professeur peut influencer l'avancée des connaissances des élèves, où est la frontière entre l'aide et le faire faire, quels sont les indices d'une aide trop proche. Toutes ces questions récurrentes sur le rôle du professeur

distillent au fur et à mesure de ses commentaires du cours. En situation didactique j'observe E qui a pris le parti de faire avancer le temps didactique ; il sait clairement où il se situe sur la branche des savoirs et connait les procédures qu'il souhaiterait voir chez les élèves aussi il oriente, il favorise, il diffuse toutes les tentatives d'élèves abondant son dessein.

La branche cardinal-quantité de E est enrichie et développée, prolongée par l'apport de la micro-formation.

CHAPITRE 5- L'ENSEIGNANT F

1- RÉACTIONS « À CHAUD »

Pour F ce cours active des connaissances professionnelles mais aussi personnelles.

```
F- bon après ce qui est intéressant c'est de construire tout ça j'allais dire en tant que culture personnelle pas forcément liée au métier enseignant de re de repartir à zéro de repartir de ce qu'il se passe finalement avant même que les enfants arrivent à l'école y'a déjà des choses acquises heu donc ça c'était intéressant hein bon tout simplement
```

1.1- Résumé des commentaires du cours

Point 3- Critères de validité

F constate qu'il n'enseigne pas ces notions-là, qu'elles sont déjà acquises quand les élèves arrivent dans sa classe car ce sont des connaissances élémentaires simples. En situation, il observe ces connaissances.

```
F- voilà le rien le zéro le rien pas toujours acquis mais ça se fait un peu tout seul avec le rituel en comptant les enfants absents comme y'a souvent des enfants et ça se fait tout seul du coup je l'ai jamais travaillé en tant que tel
```

F ne planifie pas d'enseignement sur le zéro, le rien, en (+2) et (+1), il observe en (-1) ces connaissances chez tous les élèves.

Point 6- Introduction et installation du milieu

```
F- voilà le plus dur c'est de trouver peut-être une situation qui a un petit peu de sens parce qu'en math ce n'est pas toujours évident je trouve
F- est-ce que je ne devrais pas donner plus de sens ludique au niveau de l'histoire aux maths est-ce que j'ai tort ou pas
F- je me dis le savoir faut que ça soit un plaisir un plaisir d'effort
```

L'introduction et l'installation du milieu d'une situation mathématique questionne F qui est en quête de sens. Il est tiraillé entre « le sens ludique » ou l'habillage ludique et le sens mathématique et aimerait trouver des situations qui allient les deux.

F interroge le côté ludique des situations au moment de la situation didactique au niveau (0), il met en parallèle le sens mathématique des situations (+2) et est guidé par le niveau noosphérien en ce qui concerne le plaisir d'effort. Il pense que le savoir est un plaisir qui s'acquiert avec de l'effort.

Point 8- Rôle du professeur

```
F- je me pose des questions à savoir aussi ce qui a fait que les nombres arrivent ça arrive un peu tout seul moi en MS sur tout ce qu'elle a dit au début moi ce n'est pas la peine du tout de le travailler
```

Il interpelle son rôle d'enseignant-observateur à la lumière des savoirs qu'il n'enseigne pas et qui sont déjà présents chez les élèves. Que ce soit appris à la maison ou dans la classe avant la sienne il n'observe pas la bascule des connaissances en savoir ce qui fait qu'il trouve que « ça arrive un peu tout seul ».

L'observation en (-1) de connaissances pour lesquelles il n'a pas envisagé d'enseignement en (+2) et en (0&1) trouve des justifications dans le cours.

Point 9 - Situations de formulation

Point 10 - Eloignement dans l'espace

Point 11 - Eloignement dans le temps

Point 12 - Communication à autrui

Les situations de formulation sont regroupées et commentées en même temps par F. En effet, dans ces différentes situations l'action directe est empêchée.

```
F- y'a peut-être une chose moi que je ne fais pas c'est le temps là l'éloignement dans le temps l'éloignement dans l'espace on le fait heu communication à autrui la marchande tout ça on fait mais c'est vrai que l'éloignement dans le temps j'ai jamais fait de faire un exercice de math un jour en disant on aura la suite demain enfin je sais pas comment le dire mais on on voilà où de trouver un système pour que ça ait du sens en disant bon ben on va faire ça aujourd'hui mais combien y'en aura demain heu ça j'ai jamais fait
```

F est intrigué par la situation avec éloignement dans le temps. Il reconnait comme pratique courante à l'école maternelle, la situation avec éloignement dans l'espace et la communication à autrui avec notamment le jeu de la marchande mais l'éloignement dans le temps ne fait pas partie de sa pratique de classe.

Ces nouveaux savoirs mathématiques spécifiques à l'enseignement de la quantité enrichissent le niveau (+2) de F qui les intègre rapidement aux niveaux (0&1), il imagine donner la consigne dans le niveau didactique, sans trop savoir comment introduire l'éloignement dans le temps, mais surtout il planifie la séance au niveau (+1) en imaginant « trouver un système pour que ça ait du sens ». Ces nouveaux savoirs déclenchent un va et vient entre les niveaux (0&1) et (+2).

Point 16- Pas de hiérarchie dans les procédures

Il n'y a pas de procédure experte *a priori*, c'est en situation que les stratégies se révèlent être efficaces ou pas.

```
F- correspondance terme à terme ça c'est acquis après sur les grands nombres ça c'est plus compliqué on peut relier quand c'est sur papier plus pour des situations de comparaison
```

F constate que la correspondance terme à terme est acquise avec de petites quantités mais que cette procédure est « plus compliquée » « sur les grands nombres ». F donne l'exemple pour la situation fondamentale « comparer des quantités » avec des collections non déplaçables.

F fait part de ses observations au niveau (-1) et des difficultés des élèves dans des situations de comparaison.

Synthèse des points abordés

Points abordés dans le cours	Points repris par F
Point 1 : Suite orale des mots nombres	
Point 2 : Subitizing	
Point 3- Critères de validité	X
Point 4 : Situation fondamentale : même quantité que	
Point 5- TSD / Situation d'action	
Point 6 : Introduction et installation du milieu Consigne	X
Point 7- Situation d'action en classe	
Point 8- Rôle du professeur	X
Point 9- Situations de formulation	X
Point 10- Eloignement dans l'espace	X
Point 11- Eloignement dans le temps	X
Point 12- Communication à autrui	X
Point 13- Collection intermédiaire	
Point 14- Du temps aux apprentissages	
Point 15 : Des quantités suffisantes	
Point 16- Pas de hiérarchie dans les procédures	X
Point 17- Configurations	
Point 18- Définition du cardinal	

1.2- Réactions par rapport à la conception de l'enseignement du nombre

Dans l'entretien E1, J décrivait une situation de formulation à autrui avec le jeu du banquier.

FIGURE 133: BRANCHE CARDINAL-QUANTITÉ DE F À L'ISSUE DE L'ENTRETIEN E1

Suite au cours projeté, F déclare réaliser des situations avec éloignement dans l'espace et complète les formulations à autrui avec le jeu de la marchande. Le dénombrement par comptage est la procédure experte pour résoudre les situations à l'oral et à l'écrit.

FIGURE 134 : BRANCHE CARDINAL-QUANTITÉ DE F COMPLÉTÉ APRÈS E2

Dans la séquence à filmer, F souhaite expérimenter une situation avec éloignement dans le temps. Il pense également proposer une situation avec éloignement dans l'espace et une formulation à autrui.

2- SÉQUENCE ÉLABORÉE PAR F

2.1- Présentation des séances montrées

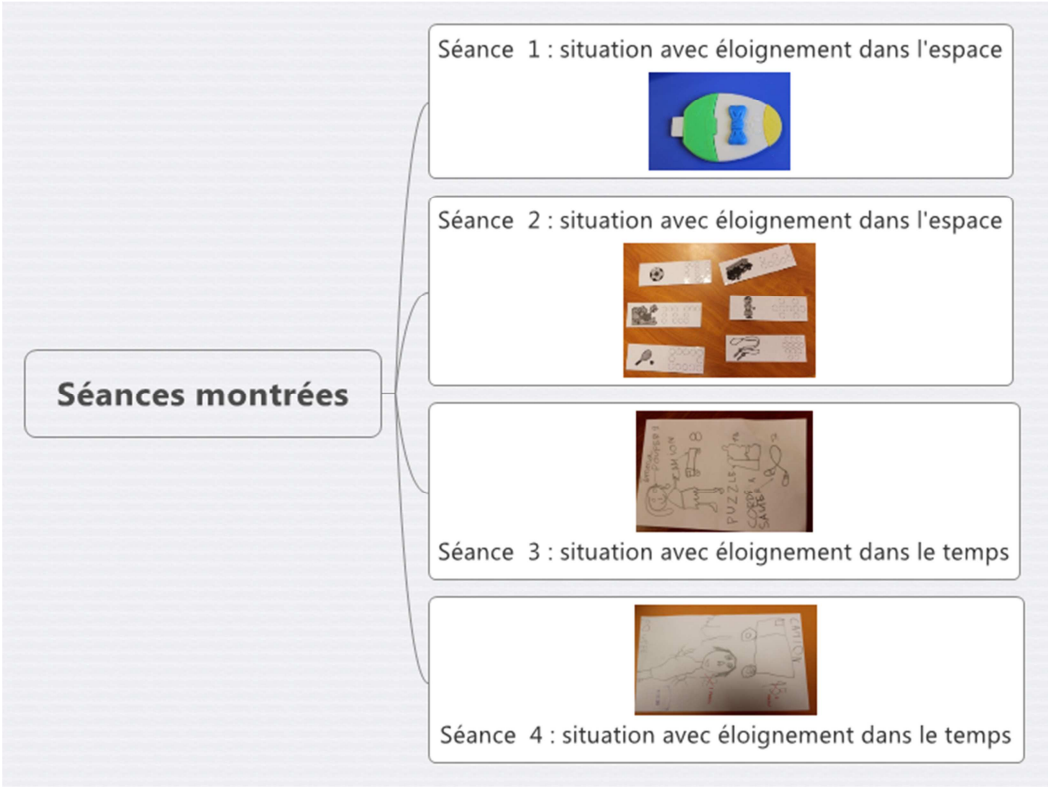


FIGURE 135: SÉQUENCE QUANTITÉ DE F

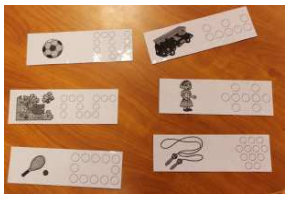
Les quatre séances montrées sont décrites chronologiquement pour rendre compte du déroulement des évènements dans la classe.

a-Séance 1 : situation avec communication à autrui et éloignement dans l'espace

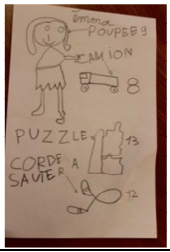
Séance 1 : situation avec communication à autrui et éloignement dans l'espace Par groupe de trois élèves avec les mathœufs	Durée : de 0 à 1 :38 Installation du milieu « mathœufs » F présente la situation en grand groupe et répartit trois élèves dans trois groupes.
	1 :38 à 8 :53 Communication à autrui pour les pantalons Les trois groupes habillent neuf mathœufs, ils sont tous en réussite. F demande les procédures utilisées, proposent aux élèves de montrer, un groupe n'a pas compté, a entendu « neuf » et est allé commander neuf pantalons. Un élève du groupe tente un début d'explication avec les décompositions, trois, trois et encore deux, un ? L'enseignant prend le temps de matérialiser avec ses doigts l'opération, il s'appuie sur la connaissance des petits doubles, trois et trois six, puis demande aux élèves « combien pour avoir neuf ».
	8 :53 à 15 :49 Communication à autrui pour les pantalons et les chaussures F modifie la quantité de mathœufs pour chaque groupe et propose à présent onze,

	douze et treize mathœufs. Dans le groupe de treize mathœufs après avoir dénombré un élève déclare « moi c'est le treize que je suis né ».
 Mathœufs habillés	15 :49 à 23 :59 Situation avec éloignement dans l'espace pour les nœuds papillon et les cheveux Les élèves prennent seuls la quantité de nœuds papillon et de cheveux dans la boîte.
	23 :59 à 26 :08 Explications par F des procédures erronées

b- Séance 2 : situation avec éloignement dans l'espace

 Les cartes du Père-Noël	0 à 2 :18 Installation du milieu Présentation du matériel, les cartes du Père-Noël[84] et du jeu, c'est-à-dire la consigne. F rend explicite l'énumération des ronds sur les cartes jouets avec la synchronisation « je montre ce que je compte » ainsi que l'enjeu de la situation, « il faut se souvenir » de la quantité comptée.
 Carte avec les jetons pour vérification et validation	2 :18 à 8 :37 Situation avec éloignement dans l'espace avec les cartes du Père-Noël : Les quatre premiers élèves retournent leur carte, dénombrent et vont chercher, sur la table derrière, des jetons correspondants. Deux élèves sur quatre échouent. Les trois autres jouent à leur tour.
	8 :37 à 10 :39 Processus d'Institutionnalisation F explique l'énumération d'une collection non déplaçable, se souvenir du point de départ, et l'organisation du dénombrement des jetons sur la table plutôt que dans la main.
	10 :39 à 16 :40 Situation avec éloignement dans l'espace avec les cartes du Père-Noël : Les élèves tentent de gagner une deuxième carte.
	16 :40 à 27 :45 Situation avec éloignement dans l'espace avec les cartes du Père-Noël par groupe de deux : Comment faire pour jouer à deux, réfléchir à deux pour s'organiser pour compter, trouver une idée pour le faire à deux. F prend soin entre chaque essai de demander aux élèves d'expliquer leurs stratégies, certains se sont partagés aléatoirement la collection, dans un autre groupe les élèves se sont répartis les tâches, un dénombre les ronds de la carte et l'autre élève ramène la même quantité de jetons.
	27 :45 à 29 :31 Échange et diffusion des procédures avec tout le groupe

c- Séance 3 : situation avec éloignement dans le temps

	0 à 6 :30 Installation du milieu Présentation de la situation avec éloignement dans le temps, demain les élèves joueront par deux, un élève père noël distribuera les jetons et un élève fera sa commande de jetons au père noël pour gagner les cartes-jouets. Comment faire pour « se souvenir combien de ronds il y a » ? En collectif les propositions sont accueillies puis un élève propose d'écrire, F s'empare du message écrit, demande l'écriture du nom du jouet, le dessin du jouet ainsi que l'écriture du nombre de jetons à commander.

[84]Modèles de cartes à photocopier extraits de Vers les maths GS, Accès Edition.

Collection intermédiaire écrite	
 Frise numérique pour aider à l'écriture chiffrée	6 :30 à 19 :20 Situation avec éloignement dans le temps première partie, réalisation du message écrit: Les élèves choisissent quatre jouets et recopient du tableau les noms et les dessinent. Ils se dirigent vers une autre table pour trouver les cartes-jouets, dénombrer la quantité de ronds, s'aident éventuellement de la frise numérique pour l'écriture chiffrée correspondante.

d- Séance 4 : situation avec éloignement dans le temps et formulation à autrui

	0 à 4 :40 Qu'est-ce qu'on a fait hier ? F sollicite la mémoire des élèves pour justifier et valider le choix d'une liste écrite « heureusement que vous avez fait une liste ».
 Collection intermédiaire écrite	4 :40 à 8 :33 F explique le fonctionnement et propose un exemple avec l'élève de service. Il explique les procédures, demande de vérifier le nombre de jetons donné par le Père-Noël, dispose les Pères-Noël aux bonnes tables et répartit les élèves dans les groupes.
	8 :33 à 27 :00 Eloignement dans le temps (2) pour pouvoir communiquer à autrui Les élèves utilisent leur message pour commander la collection de jetons au Père-Noël. Les frises numériques sont à disposition des élèves pour leur permettre de lire le nombre écrit. F valide au fur et à mesure.

2.2 Analyse des consignes

Comment les consignes sont-elles formulées, quels sont les mots choisis pour viser la quantité ?

a- Séance 1 : Situation avec communication à autrui et situation avec éloignement dans l'espace

Situation avec communication à autrui et éloignement dans l'espace	F- il va falloir venir me voir je serai le marchand et il va falloir venir me voir d'accord pour chercher le nombre de pantalons qu'il vous faudra pour pouvoir habiller vos mathœufs vos œufs d'accord donc il va falloir venir me demander ce qu'il vous faut exactement le nombre de pantalons qu'il vous faut d'accord pas un de plus pas un de moins juste ce qu'il faut […] juste ce qu'il faut de pantalons pour habiller vos bonhommes

F installe le milieu de la situation de communication à autrui, c'est lui qui préparera la collection de pantalons suite à la demande des élèves. Dans la consigne, il leur demande « le nombre de pantalons » et prolongera avec « pas un de plus pas un de moins juste ce qu'il faut ». Les élèves utilisent facilement le dénombrement et F souhaite favoriser cette procédure en la demandant dans la consigne. Un peu plus tard il demandera « juste ce qu'il faut de pantalons pour habiller vos bonhommes » sans faire référence aux nombres mais à la quantité.

b- Séance 2: Situation avec éloignement dans l'espace

Situation avec éloignement dans l'espace	F- il va falloir mettre autant de jetons qui sont là-bas que de ronds

F demande « autant de jetons que de ronds », cette consigne focalisée sur la quantité, permet différentes procédures possibles. Les jetons, disposés sur une autre table à l'écart, sont présentés dans la consigne « qui sont là-bas ».

c- Séance 3 : Situation avec éloignement dans le temps

Situation avec éloignement dans l'espace	F- alors demain demain vous allez jouer deux par deux il y a un enfant qui fera le Père-Noël et un enfant qui fera sa commande au Père-Noël vous allez choisir parmi les objets qui sont là quatre jeux que vous allez commander au Père-Noël demain il y a un enfant qui aura les jetons […] l'enfant Père-Noël aura les jetons pour faire la commande au Père-Noël il va falloir se souvenir combien de ronds il y a comment faire comment se souvenir de combien de ronds

Il s'agit d'une consigne pour une double situation, l'éloignement dans le temps est au service de la communication à autrui. La commande aura lieu demain, les cartes-jouets ne seront plus accessibles, seule la lettre au Père-Noël, qui est la commande, sera disponible pour aller voir le Père-Noël. L'éloignement dans le temps est représenté par les mots « demain » et « se souvenir », la quantité est soulignée par « combien » qui implique une procédure de dénombrement.

d- Séance 4 : Situation avec éloignement dans le temps et formulation à autrui

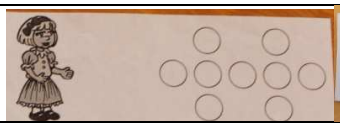
Eloignement dans le temps	F- est-ce que vous vous souvenez de combien de jetons il faut

Le rappel du souvenir est la caractéristique de la situation avec éloignement dans le temps, le mot « combien » fait référence à la quantité en interpellant une procédure de dénombrement. La communication à autrui est jouée et ne nécessite pas de consigne particulière, les Pères-Noël prennent place et attendent la formulation du nombre de jetons pour s'exécuter.

3- ANALYSE DES SITUATIONS INSTALLÉES PAR F

3.1- Installation du milieu

Quel choix de matériel a été retenu dans les séances de F ?

Milieu matériel utilisé dans le cours	Milieu matériel choisi par F
Pot-crayon et Plateau pour l'anticipation	Les mathœufs sont déposés nus sur les tables des élèves, ils doivent venir commander à F la quantité de pantalons souhaitée, ils les transportent dans leur main. Il y a le pantalon, le nœud papillon, les cheveux et la paire de chaussures.
	Les cartes-jouets (issues de vers les maths GS) et une collection de jetons
	

Le matériel est conforme à une correspondance terme à terme (un pantalon/un mathœuf et un rond/un jeton). La multiplication des milieux peut être liée à ce que F considère comme une « quête de sens » : la carte du Père-Noël aurait un sens social que n'auraient pas les mathœufs ou bien les ronds/jetons sans autre habillage.

3.2- Situation de communication à autrui et situation d'éloignement dans le temps

La communication est implicitement l'objet d'une norme importante. Dans la première situation, F joue le rôle du marchand, il peut donc dire ce qu'il accepte ou non. Dans la seconde situation, la communication verbale entre les élèves correspond au nombre de jetons. Il y a une « ouverture » de la situation au plan social (commande de Noël, s'intéresser aux jouets) mais pas au plan des procédures pour la quantité. La volonté de contrôle des procédures elles-mêmes (et pas de la situation) se retrouve dans la production des messages qui sont totalement orchestrés par l'enseignant (il dicte et écrit au tableau les mots permettant d'écrire les noms des jouets).

En mélangeant les deux situations, F oblige les élèves à trouver un moyen de se souvenir de la quantité et de la nature du jouet demandé.

4- CONCLUSION POUR F

4.1- Une répercussion sur la branche quantité

a- La branche quantité se développe

F exposait, pour la construction de collections identiques, le jeu du banquier avec un système de commande, il s'agit là d'une situation de communication à autrui.

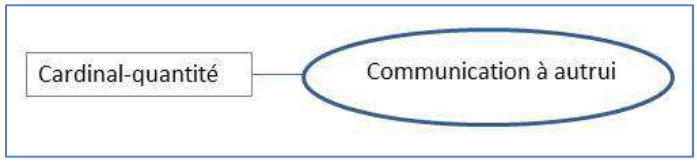


FIGURE 136 : BRANCHE CARDINAL QUANTITÉ AVANT LE COURS

L'échange informel après le cours apporte plus de lisibilité sur le début de la branche, F précise qu'il réalise des situations avec éloignement dans l'espace et de communication à autrui avec le jeu de la marchande.

FIGURE 137 : BRANCHE CARDINAL QUANTITÉ COMPLÉTÉE APRÈS LES COMMENTAIRES DE F

FIGURE 138 : BRANCHE CARDINAL QUANTITÉ APRÈS LE COURS

F complète et enrichit les situations proposées par une situation avec éloignement dans le temps qu'il couple avec une communication à autrui (se souvenir de la quantité de ronds demain pour commander au Père-Noël les cartes jouets) où les élèves joueront le rôle d'émetteurs et de récepteurs. Cette nouvelle modalité questionnait F quant à la façon de l'introduire auprès des élèves pour que la situation ait du sens. La commande au Père-Noël qu'il propose rend nécessaire une collection intermédiaire écrite pour se souvenir des quatre cartes-jouets à commander. Il n'y a pas de situation d'action, les élèves dénombrent tous facilement les collections de mathœufs ou de ronds sur la carte, c'est la seule procédure observée dans le groupe d'élèves. F trouve peut-être la situation d'action trop facile pour ce groupe d'élèves et préfère se concentrer sur les étapes où l'action directe est empêchée.

b- La branche quantité s'étoffe

F organise ses groupes d'élèves de telle sorte qu'ils soient amenés à jouer à plusieurs, à jouer ensemble pour un but commun. En imposant cette contrainte aux groupes F provoque la diffusion des stratégies, l'écoute, la réflexion, la recherche, le partage des tâches etc. Le dénombrement est toujours privilégié mais les élèves doivent être en mesure de jouer à plusieurs pour gagner ensemble. F déclare, lors du commentaire au cours entendu E2, ne pas proposer ce type de modalité avec les élèves de l'école maternelle, car ils sont trop égocentrés. Pourtant il met en place ce type de fonctionnement. Est-ce sa remarque qui lui

ouvre des possibles, ou bien a-t-il entendu une explication particulière pendant le cours qui provoque ce travail en groupe ? Quoiqu'il en soit ce travail de groupe étoffe la situation de formulation et donc sa branche cardinal-quantité.

4.2-Analyse des niveaux d'activité du professeur

Le dénombrement est la seule procédure envisagée par les élèves et précisée par F dans la consigne. Des difficultés liées à l'énumération viennent parfois fausser les résultats pour des collections supérieures à douze. F montre alors et institutionnalise à partir d'un exemple, comment faire pour dénombrer une collection non déplaçable, avec le choix du premier élément de la collection à mémoriser et le sens de traitement de la collection pour passer en revue tous les éléments une et une seule fois. Pour le message écrit, F met à disposition des bandes numériques pour lire puis écrire l'écriture chiffrée du cardinal de la collection. Les procédures recherchées sont, d'abord le dénombrement, puis l'écriture chiffrée du cardinal et enfin la lecture du cardinal écrit avec des aides possibles. La confrontation du travail en équipe permet à F de mettre en lumière et de diffuser les stratégies possibles autour des décompositions ou du surcomptage lorsque dans un groupe deux élèves ont partagé aléatoirement la collection de jetons.

CHAPITRE 6- L'ENSEIGNANT I

1- RÉACTIONS « À CHAUD »

1.1- Résumés des commentaires du cours

Point 2- Subitizing

I consacre du temps à l'apprentissage de la reconnaissance globale des petites quantités en GS, car elle n'est pas acquise pour tous les élèves. Il fait immédiatement référence à l'ouvrage de Brissiaud (Brissiaud, 2007) et à la similitude des propos du cours sur le *subitizing.*

I- des choses qu'on fait enfin j'ai enfin j'ai retrouvé pas mal de choses que j'avais lu dans le petit bouquin de Brissiaud voilà le travail sur la reconnaissance globale des quantités le subitizing donc c'est quelque chose que je travaille encore en GS

L'importance de la reconnaissance immédiate globale des petites quantités à partir du *subitizing*, déjà très présente pour l'enseignant I au niveau (+2), est renforcée par l'apport du cours.

Point 5-TSD / Situation d'action

Après la présentation de Guy Brousseau et de ses travaux, le modèle formalisé de la situation d'action est introduit.

I- des mots que enfin des termes heu pédagogiques que je connaissais pas situation d'apprentissage enfin ça évidemment mais la situation d'action pour moi enfin voilà je savais pas ce que ça voulait enfin voilà je me suis dit tiens un truc il faut que je note voilà ça je je savais pas

I rencontre pour la première fois le terme de situation d'action ainsi que sa signification.

Point 7-Situation d'action en classe

I- et puis ensuite ben le fait dans la situation d'action d'introduire la rétroaction c'est quelque chose que parfois on prévoit sans y avoir réfléchit et finalement le fait de le de le voir de manière schématisée ça enfin tu te dis ben que oui effectivement ça serait peut-être bien de l'anticiper de voir comment eux tout seul peuvent avoir la réponse à leur réussite ou à leur ou à leur échec quoi donc ça

Il retient principalement la rétroaction du milieu, et interroge la façon de prévoir, de concevoir et d'anticiper consciemment cette rétroaction du milieu.

La présentation théorisée du modèle de la situation d'action permet à I d'entrevoir de nouvelles perspectives pour son enseignement. Ces nouveaux savoirs mathématiques spécifiques à l'enseignement de la quantité enrichissent son niveau (+2) et l'intéressent plus particulièrement par rapport à son rôle dans l'installation du milieu.

Point 10-Eloignement dans l'espace

Point 12-Communication à autrui

I- et puis ensuite après quand on parle plus de de tout ce qui est la la situation bon de formulation ça évidement on joue quasiment tous dans les classes à la marchande donc le fait d'avoir des collections éloignées géographiquement c'est quelque chose qu'on fait

Pour I, le jeu de la marchande fait partie d'une pratique commune dans « quasiment » toutes les classes à l'école maternelle. La situation de communication à autrui avec le jeu de la marchande est une pratique instaurée chez I, son niveau (+2) est conforté par ce passage du cours.

Point 11-Eloignement dans le temps

I- par contre l'éloignement dans le temps je l'avais jamais travaillé enfin je ne l'ai jamais travaillé et donc du coup même si par moment j'introduisais la liste de courses finalement elle elle c'était une situation artificielle parce que ben voilà y'avait enfin elle était pas si artificielle parce que tu en as quand même besoin quand tu as un nombre important de d'éléments mais c'était pas la notion d'éloignement dans le temps qui introduisait cet écrit quoi et ça c'est sûr que enfin voilà c'est quelque chose auquel j'avais jamais pensé du tout

I découvre l'éloignement dans le temps ainsi que l'entrée dans l'écrit mathématique. Il expose sa liste de course et l'analyse comme « une situation artificielle ».

Le niveau (+2) de I est enrichit par de nouveaux savoirs comme l'éloignement dans le temps qui demeure la situation privilégiée pour entrer dans l'écrit mathématique.

Synthèse des points abordés

Points abordés dans le cours	Points repris par I
Point 1 : Suite orale des mots nombres	
Point 2 : Subitizing	X
Point 3- Critères de validité	
Point 4 : Situation fondamentale : même quantité que	
Point 5- TSD / Situation d'action	X
Point 6 : Introduction et installation du milieu Consigne	
Point 7- Situation d'action en classe	X
Point 8- Rôle du professeur	
Point 9- Situations de formulation	
Point 10- Eloignement dans l'espace	
Point 11- Eloignement dans le temps	X
Point 12- Communication à autrui	X
Point 13- Collection intermédiaire	
Point 14- Du temps aux apprentissages	
Point 15 : Des quantités suffisantes	
Point 16- Pas de hiérarchie dans les procédures	
Point 17- Configurations	
Point 18- Définition du cardinal	

1.2- Réactions par rapport à la conception de l'enseignement du nombre

Dans l'entretien E1, I relatait une situation avec éloignement dans l'espace avec des TPS, mettre la table pour les poupées.

FIGURE 139 : BRANCHE CARDINAL-QUANTITÉ DE I ISSUE DE L'ENTRETIEN E1

À l'issue du cours projeté, I reconnait installer le jeu de la marchande dans sa classe.

FIGURE 140 : BRANCHE CARDINAL-QANTITÉ DE I COMPLÉTÉE APRÈS L'ENTRETIEN E2

Pour les séances filmées, I souhaite tester une situation avec éloignement dans le temps. Il ne dit rien de plus lors de l'entretien à chaud mais est très intéressé pour permettre et favoriser l'émergence d'une collection intermédiaire matérielle ainsi qu'une collection intermédiaire écrite. Le cours lui permet d'associer l'éloignement dans le temps et l'entrée dans l'écrit mathématique.

2- SÉQUENCE ÉLABORÉE PAR I

2.1- Présentation des séances montrées

I propose trois séances à filmer sur une semaine.

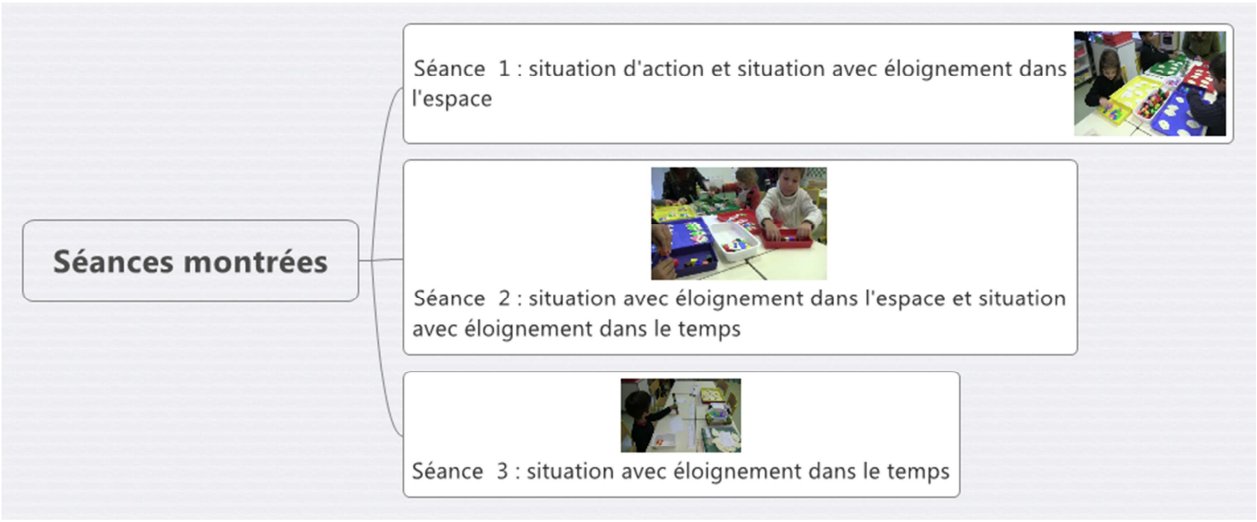


FIGURE 141 : SÉQUENCE QUANTITÉ DE I

Les trois séances montrées sont décrites chronologiquement pour rendre compte du déroulement des évènements dans la classe.

a- Séance 1 : situation d'action et situation avec éloignement dans l'espace

Utilisation des mathœufs	7 :23 à 9 :56 Remémoration du travail déjà réalisé avec les mathœufs, la classe a participé à un défi où il fallait construire le plus possible de mathœufs différents (trouver toutes les combinaisons possibles avec des couleurs différentes et quatre accessoires- cheveux, nœud papillon, pantalon et chaussures).

 Installation du milieu.	9 :56 à 19 :33 situation d'action I élimine les chaussures en énonçant que les mathœufs « restent à la maison ». Les quatre élèves ont un plateau de couleur différente dans lequel est placée une quantité de mathœufs, une barquette de la même couleur pour déposer la collection équipotente (elle permet l'anticipation), une barquette au milieu de la table avec les pantalons, une barquette avec des briques de lego et un pot avec des crayons. I compose deux plateaux avec neuf mathœufs, un avec sept et l'autre avec huit mathœufs. Un élève demande s'il faut les compter, tous les élèves comptent alors à voix haute, I ne répond pas et laisse les procédures de dénombrement par comptage diffuser puis il rectifie et précise « j'ai demandé de prendre autant de pantalons moi j'ai pas demandé combien y'en avait j'ai demandé juste la même quantité ». La même opération est proposée avec les nœuds papillon puis avec les cheveux. Pour les chaussures, I déclare « les chaussures c'est des paires et cela m'embête un peu ils sont à la maison ils n'ont pas de chaussure ». I modifie ensuite la quantité de mathœufs 8, 7, 6 et 6 et propose de confectionner la collection de cheveux.
 Eloignement dans l'espace	19 :33 à 36 :43 situation avec éloignement dans l'espace I s'éloigne avec la barquette des pantalons et s'installe à une table derrière celle où sont déposés les mathœufs. Il demande aux élèves de venir chercher dans leur barquette « juste assez de pantalons pour habiller leurs mathœufs ».
	36 :43 qu'est-ce qu'on a appris aujourd'hui ? I rend explicite les apprentissages et commence le processus d'institutionnalisation « on a appris à prendre juste ce qu'il faut la même quantité pas en prendre plus pas en prendre moins juste ce qu'il faut ».

b- Séance 2 : situation avec éloignement dans l'espace et situation avec éloignement dans le temps

	0 à 2:48 Mise en place des groupes et rappel de la situation Qu'est-ce qu'on a fait mardi, quelle était la consigne ?
	2 :48 à 18 :21 situation avec éloignement dans l'espace La situation se déroule comme le jour précédent. Un élève dénombre par comptage sa collection de mathœufs, il trouve une première fois neuf, puis dix (problème d'énumération) et recompte une autre fois et trouve neuf, il se rend à la table pour prendre les pantalons, précise à I qui lui en faut neuf, et vraisemblablement, prend des pantalons à partir d'une estimation perceptive globale, il en prend huit. Pour les nœuds papillon, il en prendra sept. I lui rappelle alors sa procédure efficace pour trouver six à l'aide des décompositions : trois et encore trois, cette fois il pose neuf mathœufs et lui place sur le plateau, spatialement trois, trois et encore trois. En s'appuyant sur les décompositions-recompositions l'élève réussit.
Constitution d'une collection intermédiaire matérielle avec des briques de lego Collection intermédiaire matérielle dans la barquette	18 :21 à 41 :46 situation avec éloignement dans le temps I contextualise la situation d'éloignement dans le temps : l'enseignant d'une autre classe utilise les cheveux pour un travail avec ses élèves et les cheveux ne seront rendus que le lendemain, comment faire pour se souvenir demain ? Il met à disposition des briques de lego, des crayons et des feuilles. Un élève cherche à encastrer les briques de lego à la place des cheveux, un autre dépose la même quantité de lego que de mathœufs dans sa barquette, I demande à cet élève pourquoi il met les cubes dans la barquette, et reformule « tu as la même quantité de cubes que

	de mathœufs » cette discussion sur l'utilisation des cubes permet aux autres élèves d'affiner leur tâtonnement, un autre élève écrit onze sur une feuille.
 Collection intermédiaire matérielle dans la barquette (briques emboitées)	
 Écriture chiffrée	

c- Séance 3 : situation avec éloignement dans le temps

	4 :44 à 6 :16 La dernière fois … I réactive la situation des mathœufs, la consigne et quelques procédures d'élèves.
 collection intermédiaire matérielle	6 :16 à 27 :19 Situation avec éloignement dans le temps Certains élève ne se servent pas de leur message (écrit ou collection intermédiaire matérielle), ils se souviennent de la quantité à prendre (cardinal de la collection). Les autres élèves comptent les briques en lego et prennent la même quantité, les autres lisent l'écriture chiffrée sur leur feuille de message directement c'est-à-dire sans l'aide de la bande numérique ou s'entraident. Une élève échoue à cause de problème d'énumération (collection de douze mathœufs, et elle dénombre onze).

2.2 Analyse des consignes

Comment les consignes sont-elles formulées, quels sont les mots choisis pour viser la quantité ?

a- Séance 1: Situation d'action et situation avec éloignement dans l'espace

Situation d'action	I- On va devoir prendre juste ce qu'il faut de pantalons pour habiller vos mathœufs il va falloir prendre dans sa barquette juste ce qu'il faut de pantalons pour habiller ses mathœufs mais attention pas un de plus pas un de moins juste ce qu'il faut pour habiller les mathœufs et vous les mettez dans votre barquette allez-y
éloignement dans l'espace	I- il faut venir chercher juste ce qu'il faut de pantalons avec votre barquette

I choisit la formulation « juste ce qu'il faut de » pour introduire la consigne, dans les échanges avec les élèves il parlera aussi de quantité et fera attention à ne pas employer "combien" pour ne pas orienter les procédures. Tout de suite après il précise « mais attention pas un de plus pas un de moins », lorsqu'il constatera des erreurs il reviendra sur cette formulation en demandant à l'élève s'il y en a en plus, en moins, et combien de plus, combien de moins. La barquette est introduite dès la deuxième reformulation, puis dans

chaque proposition par la suite. L'éloignement dans l'espace est amené, de fait, par son déplacement avec la barquette de pantalons. On pourrait penser à un rôle de marchand mais il n'intervient pas, il note les procédures des élèves et régule seulement l'ordre de passage des élèves et les incite à retourner vers le plateau de mathœufs quand les élèves montrent qu'ils ont oublié.

b- Séance 2 filmée : Situation avec éloignement dans l'espace et situation avec éloignement dans le temps

Situation avec éloignement dans l'espace	I- moi ce que je veux c'est que dans votre barquette vous veniez chercher là-bas juste assez de pantalons pour habiller vos mathœufs mais attention pas un de plus pas un de moins juste ce qu'il faut tu as compris enfant1 on prend juste ce qu'il faut
Situation avec éloignement dans le temps	I- il leur manque les cheveux moi j'ai un petit souci j'ai un petit souci parce que les cheveux on les a pas c'est la maitresse X qui a travaillé avec les mathœufs qui a les cheveux et elle en a besoin cet après-midi donc on va pas pouvoir leur mettre les cheveux maintenant elle nous rendra les cheveux demain […] on aura que les cheveux demain comment on va faire pour se souvenir combien on doit prendre qu'on doit prendre juste ce qu'il faut de cheveux comment on peut faire pour se souvenir.

Il emploie le même type de formulation de consigne, il introduit « juste assez » et il s'adresse en particulier à un élève en le nommant pour l'impliquer directement. En introduisant l'éloignement dans le temps il prolonge sa phrase avec « combien on doit prendre » puis se ravise et rectifie « qu'on doit prendre juste ce qu'il faut ».

c- Séance 3 filmée : Situation avec éloignement dans le temps

Situation avec éloignement dans le temps	I- on avait un souci qu'est-ce qu'il nous manquait hier Élèves : les cheveux mais tu les as I- la maitresse des grands me les a rendus ce matin et je les ai dans la classe et donc Élève 1 : moi je sais mon nombre I- ah tu sais ton nombre élève 1 Élèves : moi aussi moi aussi moi aussi I- ah chut chut vous avez réussi à vous souvenir dans votre tête ce qu'il fallait alors qu'est-ce qu'on avait fait comme on avait peur d'oublier Élève 1 : c'est treize I- ah c'est le treize toi Élève à côté de l'élève 1 : non c'est le sept (c'est exact) I- ah je sais pas chut on avait peur de pas se souvenir alors qu'est-ce qu'on a fait Élève : on a écrit I- y'a des enfants qui ont écrit élève 2 lui il a pas écrit qu'est-ce que tu as fait toi élève 2 tu te souviens [Les enfants rejoignent la table et trouvent leur barquette, après un temps de redécouverte des barquettes I demande à l'élève 1] I- est-ce que tu peux nous expliquer comment tu as fait pour te souvenir de ce qu'il fallait que tu ailles chercher […] comme cheveux ».

I identifie et insiste sur l'éloignement dans le temps et le souvenir. La formulation de la quantité est à présent réduite à « comme » par contre une grande place est faite au verbe « souvenir ».

3- ANALYSE DES SITUATIONS INSTALLÉES PAR I

3.1- Installation du milieu

Dans le cours il est question d'un plateau qui introduit l'anticipation. Quel choix de matériel a été retenu dans les séances de I ?

Milieu matériel utilisé dans le cours pour la situation d'action	Milieu matériel choisi par l
Pot-crayon et Plateau pour l'anticipation	Les mathœufs sont déposés dans un grand plateau, les accessoires sont disponibles au fur et à mesure, les pantalons-nœuds papillon-cheveux et enfin chaque élève dispose d'une barquette pour l'anticipation. Ce matériel connu des élèves, permet un entrainement et une modification des stratégies au cours de l'habillage du mathœuf. I valide, explique, diffuse les stratégies, rappelle les procédures efficaces entre chaque passage en fonction des besoins des élèves. Trois passages sont nécessaires pour habiller un mathœuf (pantalon, nœud papillon et cheveux).

3.2- Valorisation d'une multiplicité des procédures

I cherche à favoriser une multiplicité de procédures, de plusieurs manières. Tout d'abord il emploie un lexique suffisamment neutre (comme « juste assez » par exemple) pour ne pas enfermer les élèves dans une quelconque procédure. Ensuite, il fournit du matériel varié (objets, outils d'écriture, par exemple). Il ponctue les séances avec des synthèses, des bilans et ouvre les séances avec un rappel, de fait il alimente régulièrement le processus d'institutionnalisation. Enfin, une observation des procédures essayées par les élèves lui permet de proposer des réponses individuelles aux difficultés rencontrées (difficulté de passer de 6 à 9).

3.3- Situation d'éloignement dans le temps

L'éloignement dans le temps est nouveau pour I. Il ressent le besoin de « contextualiser » par une histoire fictive (absence des cheveux) l'éloignement dans le temps – alors qu'il ne le fait pas pour le reste, de plus les mathœufs sont un matériel assez neutre. Il réalise cet éloignement dans le temps d'un jour à l'autre (comme dans le cours, d'ailleurs) mais le but (trouver des procédures pour pallier la mémoire) n'est pas clair et certains élèves cherchent à mémoriser le nombre et y parviennent (d'un jour sur l'autre).

4- CONCLUSION POUR I

4.1- Une répercussion sur la branche quantité

a- La branche quantité se développe

I proposait des situations avec éloignement dans l'espace, comme mettre la table ou habiller des poupées. Après le cours il complète ses situations avec le jeu de la marchande. Enfin,

avec sa séance, il teste une situation d'action et une situation avec éloignement dans le temps.

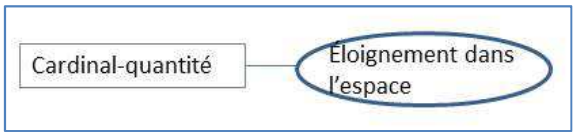


FIGURE 142 : BRANCHE CARDINAL QUANTITÉ ISSUE DE L'ENTRETIEN E1

FIGURE 143 : BRANCHE CARDINAL COMPLÉTÉE AVEC L'ENTRETIEN E2 JOUXANT LE COURS

FIGURE 144 : BRANCHE CARDINAL QUANTITÉ APRÈS LE COURS

La succession des situations proposées favorise le développement de la branche cardinal-quantité de I. Suite au cours, il propose une situation d'action, la rétroaction du milieu le fait réagir et il est attentif au matériel employé. La situation avec éloignement dans le temps ne faisait pas partie de son enseignement, comme le confirme ses propos après le cours. Sa branche cardinal-quantité s'accroit avec les nouveaux savoirs présentés dans le cours.

b)-La branche quantité s'étoffe

Le cours décrit les connaissances des élèves et différentes procédures possibles. L'anticipation du résultat est un moment important pour l'évolution des connaissances mathématiques de l'élève. I matérialise cette anticipation avec la mise en place d'une barquette. Il autorise et accueille toutes les procédures des élèves sans valoriser le dénombrement, ce qui accroit les différentes stratégies des élèves. L'éloignement dans l'espace est traitée par un élève à l'aide des décompositions : trois et encore trois. Il ne transfère pas cette procédure pour neuf, I lui rappelle alors sa procédure gagnante avec six, ce qui lui permettra de ramener la bonne quantité sans avoir à dénombrer. L'éloignement dans le temps est propice à l'élaboration d'une collection intermédiaire. I prévoit sur la table à cet égard, du matériel ; des briques de lego, un pot de crayons à papier et des feuilles.

FIGURE 145 : BRIQUES DE LEGO, CRAYONS À PAPIER ET FEUILLES

Les élèves proposeront avec ce matériel une collection intermédiaire matérielle avec les briques de lego et un écrit avec l'écriture chiffrée du cardinal de la collection.

4.2-Quelle analyse avec les niveaux d'activité du professeur ?

I s'impose une rigueur dans la formulation de la consigne, pour éviter de prononcer « combien » ou « quel nombre ».

La micro-formation lui a permis de visualiser les connaissances nécessaires pour la rétroaction de l'action et d'en tenir compte lors de l'installation du milieu. Il a investi la situation avec éloignement dans le temps en incitant le recours à une collection intermédiaire matérielle ou écrite. Il ne la propose pas mais le matériel qu'il dispose sur la table suffit à enrôler les élèves dans des tâtonnements et recherches par rapport à la quantité. I ne vient pas en aide pour la collection intermédiaire écrite quand il est sollicité par un élève, il lui propose de se servir des référents existants dans la classe.

CONCLUSION DE LA PARTIE 3

Le dispositif spécifique choisi pour la micro-formation est centré sur des apports ciblés en savoirs mathématiques spécifiques pour la branche quantité et plus particulièrement à la situation fondamentale S1 : construire une collection de même quantité. Le recueil de données, nécessaire pour la thèse, oblige les enseignants à choisir et à réaliser des séances sur la quantité en classe. Une synthèse des choix élaborés, des CMS du professeur sera présentée (1- Effet de la micro-formation : une synthèse). Puis un second point fera état des écarts posés avec les savoirs mathématiques du cours (2- Régularités et différences importantes des effets de la micro-formation).

1- EFFETS DE LA MICRO-FORMATION : UNE SYNTHÈSE

1.1- Les différents types de situations

	Milieu	Situation d'action	Éloignement dans l'espace	Éloignement dans le temps	Communication à autrui
J	X	X	X	X	X
D	X		X		
E	X	X	X	X	
F	X		X	X	X
I	X	X	X	X	

TABLEAU 24 : SITUATIONS RETENUES PAR LES ENSEIGNANTS

Suite à la micro formation, les cinq enseignants ont privilégiés dans les séances filmées, l'installation d'un milieu et une situation d'éloignement dans l'espace. Le milieu est volontairement mentionné ici au même rang qu'une situation. En effet, à l'école maternelle, l'installation du milieu peut être considérée, du point de vue de l'organisation des enseignements, comme une séance à part entière (voir plusieurs séances), avec des connaissances et des savoirs relatifs à la compréhension du milieu. Il s'agit de désigner, nommer les objets ; de comprendre la correspondance et d'installer également les rétroactions du milieu.

La situation avec éloignement dans l'espace offre une résonnance aux pratiques de classe avec le jeu « mettre la table aux poupées ». Nous pouvons supposer, qu'il s'agit aussi pour les enseignants, de montrer une situation connue et maitrisée, c'est-à-dire d'être dans une zone de confort par rapport à leur enseignement.

J, E et I proposent une situation d'action, les trois niveaux PS MS et GS sont concernés. En situation, de nombreux essais sont nécessaires, y compris pour les GS.

J, E, F et I sont interpellés par l'éloignement dans le temps, qui ne fait pas du tout partie de leur modalité d'enseignement. Ils sont curieux et demandent à voir. Cette situation

d'éloignement dans le temps est la situation qui déclenche l'envie et l'intérêt de l'expérimentation.

Alors que le jeu de la marchande est également une référence dans l'école maternelle, J et F (MS-GS et GS) seulement proposent une situation de communication à autrui. La contrainte du nombre de séances filmées peut être un élément de réponse.

1.2- Connaissances mathématiques spécifiques (CMS)

	quantité	Collection intermédiaire	Schéma-écrit
J	X	X	X
D		X	
E	X	X	X
F		X	X
I	X	X	X

TABLEAU 25 : CMS CIBLÉS

Dans le cours, l'introduction de l'écrit mathématique à partir de l'éloignement dans le temps a permis aux enseignants d'accéder à la raison d'être de l'écrit mathématique en situation. Ils signalent tous cet écrit (positivement ou négativement) et volontairement ils font le choix de solliciter cet écrit ou pas en situation. Toutefois, en situation, D choisit de ne pas proposer cet écrit mathématique.

I, J et E introduisent du matériel possible pour rendre possible l'émergence d'une collection intermédiaire matérielle. F et D acceptent et accueillent les propositions des élèves (collection intermédiaire orale à partir des décompositions-recompositions). Les CMS sur la collection intermédiaire leur permettent de prendre en compte les procédures des élèves et de valider leur choix, pour autant ils n'incitent à pas ce recours.

Les CMS concernant l'enseignement de la quantité (la quantité existe indépendamment du nombre), sont mises en avant par E, J et I. Fet D favorisent le dénombrement par comptage et donc l'usage du nombre comme représentant de la quantité.

1.3- Effets de la micro-formation en fonction des CMS antérieures : lieu de greffe de la micro formation

	Branche cardinal-quantité avant la micro-formation repérée à partir de l'entretien E1	Lieu de greffe de la micro-formation sur l'arbre des savoirs des enseignants
J	X	Branche cardinal-quantité
D	X	Branche cardinal-relations
E	X	Branche cardinal-quantité
F	X	Branche cardinal-quantité
I	X	Branche cardinal-quantité

TABLEAU 26 : GREFFE DE LA MICRO-FORMATION SUR L'ARBRE DES SAVOIRS

Pour J, E, F et I les effets de la micro-formation se constatent sur la branche cardinal-quantité.

Pour F, la micro-formation développe la branche cardinal, avec une orientation forte sur le dénombrement. En effet, toutes les situations proposées visent le dénombrement, et comme nous l'avons supposé en conclusion de la partie 2, la forte domination du dénombrement peut masquer la branche quantité.

Pour D, la micro-formation tente de se greffer sur la branche cardinal-relations. En effet, comme nous l'avons laissé entendre dans la conclusion de la partie 2, une branche peut monopoliser l'enseignement du nombre du professeur au point d'occulter certaines autres branches. La domination de la branche cardinal-relations dans l'enseignement de D et la caractérisation de D par rapport aux niveaux d'activité font que la micro-formation ne produit que peu d'effet sur l'enseignement de D. Qu'en serait-il d'une micro-formation axée sur une séance en classe, niveaux (0) et (+1), relative à la branche succession ? En considérant les catégories de Chopin, peut-être que D passerait de stochastique à investigateur ou planificateur ?

2- RÉGULARITÉS ET DIFFÉRENCES IMPORTANTES DES EFFETS DE LA MICRO-FORMATION

2.1- Installation du milieu : conformité apparente ou conformité sur le sens

Le milieu matériel proposé fait apparaitre de grandes disparités entre enseignants.

F et I utilisent les mathœufs, ce matériel permet plusieurs correspondances terme à terme (cheveux, nœud papillon, pantalon et paire de chaussures), I décide de ne pas prendre la paire de chaussures, il est attentif à l'aspect de la validation.

Lors de la séquence, F et J emploient les mêmes cartes cadeaux de Noël avec des configurations de points non déplaçables.

D garde la proposition du cours, le matériel crayon-pot, dans une conformité apparente. Il complique la situation en la modifiant tout à fait sur le sens, mais il ne va pas jusqu'au bout de sa proposition puisque ce qui lui importe c'est d'avoir l'occasion de compter. Un objectif didactique modeste (dénombrer deux, dénombrer trois) permet d'obtenir une situation très complexe (situation multiplicative) qui est presque impossible pour les élèves, mais dont la réussite n'est pas une priorité. F complique la situation en poursuivant plusieurs objectifs, plusieurs savoirs. Les élèves doivent se souvenir de quatre quantités différentes, dessiner, écrire le nom du jouet, puis écrire l'écriture chiffrée du cardinal de la configuration de ronds.

J recherche un milieu « attractif » pour les élèves, il choisit ours-maison qui rappelle le jeu cerceau-élève.

E propose un milieu avec les fruits et légumes de la classe et raconte une histoire de restaurant pour introduire la correspondance terme à terme.

Les milieux, mathœufs, fruit-assiette, ours-maison sont conforment sur le sens, aux savoirs proposés dans le cours. Autrement dit, le pari du cours, qui ne présente pas une situation

modèle mais une situation à transformer avec un milieu plus propice et plus familier, est plutôt réussi.

2.2- Situation d'action et anticipation

D détourne l'utilisation du plateau : il sert de contenant aux feutres et n'introduit pas l'anticipation.

J et I utilisent également le plateau comme contenant du matériel (mathœufs et maison-ours) mais proposent une barquette (en plastique ou en bois) pour souligner l'anticipation. Chaque enfant a son plateau.

E prend le plateau pour l'anticipation (fruit-assiette) car les assiettes sont posées sur la table. L'enseignant propose la situation d'action en collectif.

La situation d'action qui introduit l'anticipation, permet l'introduction du concept. La quantité est abordée, sans être forcément représentée. C'est pourquoi, certains élèves de GS éprouvent encore des difficultés. Par contre, les élèves qui réussissent dans les premières situations proposées, réussissent tout le temps. Les PS ont des difficultés relatives à l'acceptation des critères de validité. De plus, pour certains élèves, un élément en trop sur le plateau n'a pas le même statut d'erreur qu'une assiette vide par exemple (je n'ai observé cette difficulté qu'avec un PS). Une autre difficulté observée provient de la dévolution de la situation, l'élève ne prend pas à sa charge la construction de la collection et se repose sur l'enseignant qui ne dépose jamais la bonne quantité pour que l'élève puisse gagner (j'ai observé cette difficulté, plus ou moins formulée par les élèves, en PS et en GS). Certains élèves n'accordent pas d'importance à perdre, « mon mathœuf est tout nu, c'est rigolo ».

2.3- Situation de formulation avec éloignement dans l'espace

Ces situations semblent familières aux enseignants interrogés, cependant la dimension d'anticipation de l'éloignement dans l'espace n'est pas toujours respectée (plusieurs voyages sont autorisés pour compléter la collection).

De la même façon, les enseignants ne prennent pas en compte le même « éloignement ». Quatre enseignants éloignent les collections de telle sorte qu'elles ne soient pas visibles. Un enseignant propose les deux collections sur deux tables face à face, les collections sont visibles, et les élèves regardent les pots. Dans cette proposition, la situation avec éloignement dans l'espace est très proche de la situation d'action, elle prolonge la situation d'action, sans s'en distinguer véritablement.

2.4- Situation de formulation avec éloignement dans le temps

La situation avec éloignement dans le temps surprend le plus les enseignants, ils sont quatre à relever la nouveauté. Ils énoncent ne pas concevoir cette situation dans leur enseignement mais sont tous volontaires pour l'essayer. D rejette cette situation car elle lui semble trop éloignée de ses pratiques.

I, J, F et E « essayent » en se donnant plus ou moins de garantie pour que la situation fonctionne. Certains apportent une contextualisation (c'est le cas pour l'emprunt des cheveux des mathœufs par I de la classe voisine, par exemple, ou la carte du Père-Noël de F). I et E, qui ont installé un milieu spécifique pour la situation (ours-maison et fruit-assiette), introduisent l'éloignement comme une variable didactique, sans scénarisation particulière.

2.5- Situation de formulation avec communication à autrui

La plupart des enseignants évoquent des situations de la « marchande » qui leur semblent familières. Pour autant ils n'en montrent guère, seulement F et J en proposent. La question du nombre de séances filmées peut être un début de réponse. Le fait qu'ils préfèrent « tester » une situation différente de leurs habitudes lors de ma venue est aussi une possibilité. Enfin, il est envisageable que cette situation de la marchande connue et familière, soit peut-être plus observée spontanément dans les coins jeux qu'en tant que modalité d'enseignement.

CONCLUSION
RETOUR SUR LA FORMATION DES ENSEIGNANTS

À l'issue de ce travail de thèse, il s'agit maintenant de revenir à la formation des enseignants, en examinant comment les résultats de mes travaux de recherche permettent de questionner la formation des enseignants au sens large : formation initiale, formation continue, accompagnement, conseil pédagogique, documentation, etc. Ce retour permettra également de considérer de nouvelles questions de recherche.

Les entretiens initiaux font apparaître une grande incertitude des professeurs enseignant à l'école maternelle en ce qui concerne le nombre. La modélisation des savoirs à partir de l'arbre hiérarchique offre une visibilité des savoirs mathématiques spécifiques et une lisibilité des connaissances mathématiques spécifiques du professeur. Les premières questions porteront donc sur les connaissances spécifiques des enseignants sur le nombre et la façon dont elles pourraient évoluer (1- Le nombre : un savoir problématique pour les enseignants de l'école maternelle ?).

Le dispositif de micro-formation et d'observation à la suite de cette formation permet de questionner les possibilités de formation au niveau (+2). Revenir sur ce dispositif en interrogeant les potentialités du point de vue de la recherche permettra de mettre celui-ci en perspective avec d'autres formations distantes sans interaction (comme par exemple m@gistère), et d'autres dispositifs associant recherches et formations basés sur la préparation de séquence (en particulier les *Lesson Study*). (2- Quels dispositifs de formation pour enrichir le niveau (+2) de savoirs mathématiques spécifiques ?).

1- LE NOMBRE : UN SAVOIR PROBLÉMATIQUE POUR LES ENSEIGNANTS DE L'ÉCOLE MATERNELLE ?

1.1- INCERTITUDES DES ENSEIGNANTS DE L'ÉCOLE MATERNELLE EN CE QUI CONCERNE LE NOMBRE

a- Des interrogations issues de l'analyse des entretiens E1

Seuls les savoirs cardinal et numérations sont énoncés par tous les enseignants. Les savoirs ordinal, calcul et énumération ne sont pas communs aux dix enseignants. En termes de visibilité des savoirs, seulement deux savoirs sont partagés par tous les enseignants de mon panel. La base commune de l'enseignement du nombre à l'école maternelle se cristallise autour des numérations orale, figurée, écrite et de la cardinalité. Plus particulièrement ensuite, à l'intérieur de chaque branche, certains savoirs semblent obscurs.

Les doutes émis par les enseignants, les questionnements, les erreurs parfois, les hésitations, témoignent d'une incertitude face à l'enseignement du nombre et attestent d'une opacité de certains savoirs. Les doutes ou les hésitations sont sans doute liés à un manque de visibilité de certaines branches lorsque par exemple, une branche prend une importance trop grande.

Les programmes d'enseignement entretiennent peut-être cette confusion en ne proposant pas toujours de savoirs clairement identifiés. C'est d'autant plus vrai que, même si chaque programme a sa propre cohérence, au cours de sa carrière, l'enseignant est confronté à plusieurs programmes d'enseignement. Une difficulté consisterait à repenser la façon même

de considérer le nombre, alors même que l'investissement de l'enseignant dans la façon de concevoir l'enseignement du nombre ne se modifie pas instantanément, et sans doute très difficilement, ce que nous pouvons rapprocher de l'existence d'un « document générateur » (Margolinas & Wozniak, 2009a, p.61).

Les questions suivantes peuvent donc se poser :

Dans quelles conditions se construisent les connaissances mathématiques spécifiques des enseignants de l'école maternelle au sujet du nombre ?
Comment les instructions officielles sont-elles prises en compte dans la construction de ces connaissances ?

b- Notion de branche principale

La domination d'une branche en particulier et peu importe laquelle, peut imposer sa progression aux autres branches. Les différents savoirs sont alors utilisés uniquement au service d'un seul savoir. L'analyse des entretiens E1 a montré une domination fréquente de la branche cardinal-relations, surtout en PS, qui imposait aux autres branches : numérations figurée, écrite et orale ; quantité et ordinal de progresser au rythme successif de : un, deux trois, alors même que cette progression, cohérente pour la branche cardinal-relations, ne l'est pas pour les autres.

L'analyse des entretiens E1 a également mis en avant que la branche cardinal-quantité pouvait être masquée par un usage excessif du dénombrement. La compétence de fin de cycle énoncée par le programme occupe et focalise l'enseignement sur l'entrainement du dénombrement, au point même d'occulter le développement de la branche quantité.

De nouvelles questions pour la formation continue des enseignants apparaissent :

Comment identifier les savoirs mathématiques spécifiques pour le niveau (+2) de construction du thème ?
Comment faire apparaitre l'existence de chacune des branches ? Comment rendre visible toutes les branches ?
Comment faire en sorte que chaque savoir soit légitime ?

1.2- L'ARBRE DES SAVOIRS DU NOMBRE

L'enseignement du nombre à l'école maternelle est plus complexe qu'il n'y parait, les savoirs s'emmêlent et se développent en parallèle ou bien conjointement et s'imbriquent. Il est parfois difficile d'opérer des distinctions.

L'analyse à partir des situations fondamentales pour chacun des savoirs est une aide précieuse.

La vision synthétique de l'arbre des savoirs du nombre peut être un outil utile pour la profession. Le premier point présente l'arbre des savoirs du nombre comme un outil de lecture, lecture des connaissances mathématiques spécifiques du professeur mais aussi lecture des savoirs des programmes d'enseignement.

Ensuite l'accent est mis sur l'arbre des savoirs du nombre comme outil d'interprétation des différents courants et prises de positions mathématiques, enfin l'arbre des savoirs du nombre est décrit comme un outil de programmation.

a- L'arbre des savoirs du nombre comme outil de lecture

Les différentes branches de l'arbre offrent une lisibilité, une grille de lecture de l'enseignement du nombre du professeur, c'est-à-dire des CMS du professeur et des programmes d'enseignement, c'est-à-dire des SMS.

Outil de lecture pour le chercheur ou le formateur

L'image de l'arbre et de ses branches propose une vision d'un développement, de ramifications qui étoffent les branches et fait apparaitre sur un même outil les savoirs enseignés et les connaissances en situation.

Les premiers entretiens E1 ont été analysés avec l'arbre des savoirs du nombre, les professeurs décrivaient leur enseignement à partir d'exemples d'activités, d'observations d'élèves, de conceptions et de principes d'enseignement.

Le recours aux situations fondamentales a permis de traduire leurs propos en connaissances mathématiques spécifiques et de les situer sur les branches de l'arbre en fonction des savoirs visés. Dans une observation de classe, les situations installées renseignent sur les branches empruntées, les connaissances mobilisées en situation répondent à des savoirs visés par le professeur. Sans négliger les liens entre les branches, l'arbre des savoirs du nombre désigne au chercheur ou au formateur de grands axes des différents savoirs. Il est un support d'entretien de formation car l'arbre des savoirs du nombre propose une mise à plat des savoirs, ce qui permet de les passer en revue et d'orienter les échanges sur une branche en particulier. La lecture des savoirs simplifiés offre une représentation de l'enseignement du nombre.

Nous avons également vu qu'il est un outil pour la lecture des programmes d'enseignement (Partie 2). Il permet en particulier d'établir des comparaisons, ici entre les programmes de 2008 et de 2015.

b- Comparaison des programmes de l'école maternelle 2008 et 2015

Surligner directement les programmes en respectant un code couleur pour les différentes branches permet de visualiser les nouvelles colorations prises par le programme 2015.

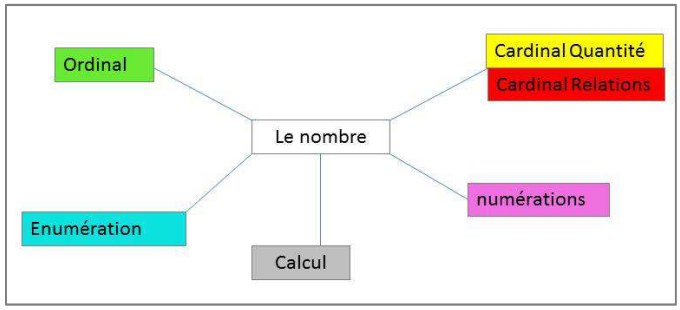


FIGURE 146 : BRANCHES DE L'ARBRE DU NOMBRE EN COULEUR

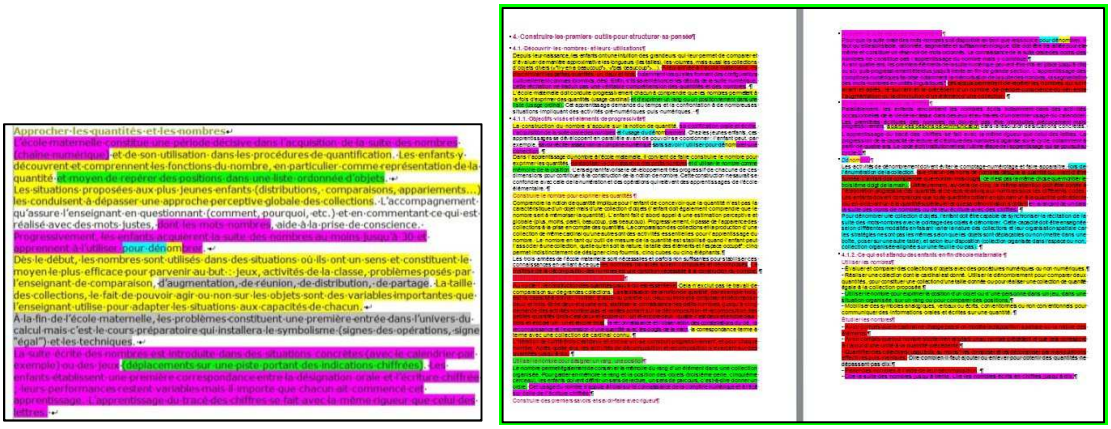


FIGURE 147:EXTRAIT DES PROGRAMMES 2008 COLORÉ ET DU PROGRAMME 2015 COLORÉ

Légende : Cardinal-QuantitéCardinal-RelationsOrdinalNumérationsEnumérationCalcul

La particularité du programme 2015 se trouve essentiellement dans l'émergence de la branche cardinal-relations et dans la quasi-disparition de la branche « calcul » (respectivement en rouge et en gris). Les branches relatives à l'ordinal et aux numérations sont toujours présentes.

Le dénombrement est une demande forte du programme 2015. L'énumération apparait, avec la définition du programme 2015, pour le dénombrement et la synchronisation de la suite orale des mots-nombres avec le pointage des objets à dénombrer. Le programme 2015 a fait l'objet d'un projet de programme et recommandations sorti en juillet 2014 (Men, 2014c) soumis aux enseignants avant la rédaction du nouveau programme. Dans les discussions entre le terrain et les concepteurs de programme (le conseil supérieur des programmes) l'énumération, alors plus développée, s'est amoindrie.

Le simple classement sur les différentes branches propose une visibilité de tous les savoirs en jeu dans l'enseignement du nombre à l'école maternelle. La catégorisation proposée dans ce travail de thèse permet une lecture éclairée des programmes d'enseignement pour l'école maternelle.

c- L'arbre des savoirs du nombre comme outil d'interprétation

Différents courants et prises de positions mathématiques

Les bibliothèques des centres de ressources pédagogiques proposent différents ouvrages pédagogiques et didactiques sur le nombre à l'école maternelle. Comment le professeur des écoles, non spécialiste des mathématiques, oriente-t-il ses choix et identifie-t-il ses besoins ? L'arbre des savoirs du nombre permet de questionner des savoirs principaux à développer. Les sphères de la recherche, concernant l'enseignement et l'éducation, et de l'école maternelle sont assez étanches, l'information qui arrive jusque dans les écoles maternelles est parfois incomplète. Ainsi, en fonction de leur appartenance à telle ou telle communauté, les chercheurs apportent des éléments pour comprendre, étoffer et développer certaines branches plutôt que d'autres. C'est ainsi que pour l'école maternelle les branches cardinal-quantité, ordinal-position et énumération sont questionnées par les didacticiens des mathématiques comme (Margolinas & Wozniak, 2012), (Briand, Loubet, & Salin, 2004), par exemple, et les branches cardinal-relations, numérations et calcul plutôt investies par les psychologues (Fayol, 2013) et la psychologie cognitive (Brissiaud, 2007), par exemple.

Ainsi des travaux qui sont parfois considérés (y compris par certains de leurs auteurs) comme opposés, qui sont instaurés par des courants de pensée différents, se retrouvent ici, sur le même arbre des savoirs du nombre, offrant alors une lecture de la recherche qui n'apparait plus en opposition pour les enseignants mais qui permet une complémentarité enrichissant l'enseignement du professeur.

Complémentarité et non opposition

Pour l'enseignement du nombre à l'école maternelle les diverses visions trouvent chacune leur place sur des branches différentes renforçant la complémentarité et la richesse de situations en direction des élèves. L'identification rendue possible par l'arbre des savoirs du nombre, apporte aux enseignants, une lisibilité qui permet d'œuvrer avec conscience et connaissance. C'est en proposant tantôt des situations où le savoir se construit à partir des connaissances institutionnalisées, tantôt des activités où le savoir « se visite » que les connaissances et les savoirs se construiront pour tous les élèves. La complémentarité d'approches peut également être un levier pour aider les élèves. Cette complémentarité est aussi intéressante du point de vue du professeur qui module son activité en fonction des branches explorées et exploitées. L'enseignant n'a plus à choisir mais à combiner et mixer les différentes approches et conceptions du nombre.

d- L'arbre des savoirs du nombre comme outil de programmation

Pour l'enseignant

L'arbre des savoirs du nombre peut être un outil d'aide pour la progression des situations et des activités. Le professeur observe sur les branches de l'arbre le développement des situations fondamentales. La programmation peut tout naturellement découler de cet arbre des savoirs en prenant soin de faire avancer conjointement et en parallèle plusieurs savoirs, de différentes branches, car les connaissances et les savoirs se nourrissent et s'enrichissent les uns les autres.

Pour la formation

Utilisé par les inspecteurs, les conseillers pédagogiques, les enseignants, l'arbre des savoirs du nombre permet de repérer les branches peu ou pas exploitées. La formation peut s'orienter sur ces branches qui ne se développent pas suffisamment dans les classes. Ce serait un outil partagé offrant une visibilité commune sur les savoirs.

2- DES DISPOSITIFS DE FORMATION POUR ENRICHIR LE NIVEAU (+2) DE SAVOIRS MATHÉMATIQUES SPÉCIFIQUES

Les résultats montrent qu'une micro formation courte sur des savoirs mathématiques spécifiques ciblés sur une situation fondamentale, sans interaction directe avec les professeurs (même format que la formation m@gistère) suivie d'une série de séances en classe obtient des résultats positifs pour quatre enseignants sur cinq.

1- LES DIFFÉRENTS « PROFILS » D'ENSEIGNANTS ET LA MICRO-FORMATION

Les résultats de l'analyse à partir des niveaux d'activité montrent combien certains enseignants sont très attachés au niveau de la situation didactique (0), d'autres sont focalisés sur les difficultés des élèves observées au niveau (-1), une autre partie des professeurs entrent volontiers dans la conception et la construction d'un thème, niveau (+2).

Les savoirs didactiques proposés dans la micro-formation enrichissent essentiellement le niveau (+2) mais tous les niveaux sont impactés. Le niveau de projet de leçon (+1), mais aussi le niveau (-1) et (0) en focalisant sur l'évolution des connaissances des élèves, les procédures utilisées par les élèves en situation permettent d'identifier leurs connaissances, le professeur, ainsi armé, est à même d'accompagner l'évolution des connaissances au niveau (0). Le niveau noosphérien (+3) est également enrichit par la didactique des mathématiques qui repose sur une conception idéologique de transformation des connaissances en savoirs.

1.1- Profil des enseignants suivant les catégories de Chopin

Marie-Pierre Chopin (Chopin, 2008) définit trois groupes de professeurs, trois idéal-types à partir du pouvoir exercé par l'un des niveaux d'activité en particulier. Elle introduit ces types dans le cadre d'une recherche spécifique qui porte sur l'hétérogénéïsation et le temps didactique. Chopin ne considère pas que les professeurs observés seraient décrits par ces idéal-types dans toute situation didactique, mais seulement dans celles qui ont été définies dans le cadre expérimental de sa thèse. De même, les enseignants observés dans la troisième partie de ma thèse ne peuvent être décrits en référence à ces idéal-types que dans les situations spécifiques observées, cependant des pistes pourraient se dégager en ce qui concerne la réception de la micro-formation et le développement professionnel.

> *« L'investigateur : niveau de référence 0*
> *L'investigateur est le professeur qui ne sait pas, avant de commencer sa leçon, quel type de connaissance posera véritablement problème à la classe en rapport avec l'objet de savoir en jeu. Pour autant, il cherche à le déterminer. Pour cela, il aborde la leçon sur la base d'une planification souple destinée avant tout à « tâter le terrain » pour trouver certains lieux de création d'hétérogénéité didactique.[…]. Nous le nommons « investigateur » en rapport avec cette attitude d'enquêteur, ou plutôt d'expérimentateur : son dispositif vise à repérer petit à petit les variables didactiques générant des différences entre élèves. » (Chopin, 2008, pp. 71-72)*

Pour E la dimension « investigateur » au sens de Chopin est mise en avant : au fur et à mesure des situations on observe des variables se modifier (couleur/ sans couleur, taille des collections).

Toutefois, il y a aussi une dimension planificateur dans la mesure où il est capable de décrire à l'avance les réactions de tel enfant ou de tel autre par rapport aux messages mathématiques écrits, il les imagine même en train de réaliser des messages et de les stocker dans leur trousse. La séance se passe toujours en collectif, de façon « magistrale ».

I observe et accepte plus de procédures possibles, voire les favorise mais sans les imposer, en tout cas explicitement. I « se cherche » par rapport à la situation d'éloignement dans le temps inhabituelle. Ceci, associé avec ses qualités d'observation des procédures des élèves, le rapproche du profil « investigateur » au sens de Chopin.

J se pose beaucoup de questions en amont, lors de la préparation de ses séances, il anticipe, cherche à préparer la séance en fonction des connaissances qu'il a de ses élèves. En ce sens il est un planificateur au sens de Chopin.

Toutefois, en situation didactique, J devient un investigateur, il laisse l'orientation de la séance aux procédures et aux tâtonnements des élèves.

> *« Le planificateur : niveau de référence +1 et +2*
> *À l'inverse de l'investigateur, le planificateur anticipe (avec succès ou non), la nature des difficultés que rencontreront ses élèves par rapport à l'objet de savoir. Il déclare savoir ce qui leur posera problème, et agit en fonction pour préparer sa classe. Cette connaissance (issue de son expérience, de ses savoirs disciplinaires, etc.) est située en amont de la situation didactique proprement dite, où se déroule l'enseignement. C'est pour cela que nous lui associons de manière indifférenciée les deux niveaux intermédiaires du modèle (+1 et +2). Le planificateur balise à l'avance le chemin de l'apprentissage. » (Chopin, 2008, p. 72)*

F souhaite voir apparaître les procédures qu'il a lui-même soit introduit soit au minimum prévu, ce qui le conduit à favoriser celles qu'il connait. Il sait à l'avance les problèmes que rencontreront les élèves.

> *« Le stochastique : niveau de référence +3*
> *L'importance pour lui n'est donc pas accordée aux effets didactiques spécifiques que l'enseignement est censé produire. Elle apparait plutôt liée à des principes génériques situés au niveau noosphérien (+3), et non au contenu du savoir mathématique. Ce sont ces principes génériques qui justifient les dispositifs d'enseignement. Par exemple, du travail de groupe sera organisé car il serait « propice à un apprentissage coopératif », selon les termes des professeurs […]. » (Chopin, 2008, p. 72)*

D ne considère pas les apports de la micro-formation suffisamment importants pour être tester en classe.

J	Investigateur et Planificateur
D	Stochastique
E	Investigateur et Planificateur
F	Planificateur
I	Investigateur

TABLEAU 27 : IDÉAL-TYPE DE CHOPIN

1.2- Impact de la micro-formation en fonction des profils

L'impact de la micro formation est assez différent suivant les profils.

Enseignants	Idéal-type de Chopin	Niveaux d'activité du professeur	Impact de la micro formation
J	Investigateur et Planificateur	Niveaux (+2)	++
D	Stochastique	Niveaux (0) et (+1))	
E	Investigateur et Planificateur	Niveaux (+2)	++
F	Planificateur	Niveaux (-1)	+
I	Investigateur	Niveaux (+2)	+

TABLEAU 28 : IMPACT DE LA MICRO-FORMATION EN FONCTION DES NIVEAUX D'ACTIVITÉ CARACTÉRISTIQUE ET DES IDÉAL-TYPE

En résumé, un enseignant avec un profil d'investigateur et de planificateur, caractérisé par le niveau (+2), reçoit très positivement la micro-formation qui a un gros impact sur son enseignement du nombre. Il entrevoit la légitimité de nouveaux savoirs mathématiques spécifiques (la raison d'être des savoirs) et de nouvelles connaissances mathématiques spécifiques pour son enseignement du nombre à l'école maternelle. Je caractérise avec (++) l'impact de la micro-formation sur J et E car la branche cardinal-quantité leur est apparue de façon limpide. Ce résultat trivial est rassurant, tout de même. La micro-formation a également eu un impact positif sur l'enseignement de I et F. Enfin, la micro-formation n'a pas eu d'impact dans l'enseignement de D, à travers les séances filmées.

Toutefois, nous ne savons pas ce qu'il est advenu de ces situations testées pendant les séances filmées, si elles n'ont été qu'expérimentales ou bien intégrées dans de nouvelles pratiques.

2- DE NOUVEAUX DISPOSITIFS DE FORMATION ?

2.1- Micro-formation et formation m@gistère

Le choix d'un cours enregistré nous a permis d'offrir les mêmes savoirs à tous les enseignants dans des lieux et temps différents. La nouvelle modalité de formation à distance m@gistère répond à cette exigence. Une culture commune peut être partagée entre différents enseignants, à distance, sans déplacement pour le formateur, pour les enseignants et sans frais de déplacement à rembourser. Le niveau (+2) est visé par la formation. Comment interpeller le niveau de la situation didactique qui avait été observé par le biais des séances filmées ?

En effet, c'est parce que les professeurs se sont inscrits dans le dispositif de recherche qu'ils ont mené à bien des séances dans leur classe. Dans les modules m@gistère des temps de forum sont prévus dans le parcours de formation. Ils jouent le rôle de l'entretien E2, le recueil de commentaires à chaud. Comme dans notre dispositif où le cours était visualisé sans interaction, l'entretien E2 était à la liberté de l'enseignant, pour reformuler les savoirs (+2), pour anticiper des séances (+1), envisager la situation en classe (0) en confrontant des

idées, des points de vue, comme les questions sur ces temps de forum. Enfin, la possibilité de déposer des séances, des séquences ou autres travaux d'expérimentation ou de retours de pratiques vient compléter les possibilités offertes avec m@gistère. Les différents niveaux couverts avec la micro-formation dans notre dispositif de thèse, pourraient l'être, *a minima*, avec un parcours m@gistère. Dans ces deux dispositifs évoqués, l'articulation entre les différents niveaux d'activité du professeur est le fil conducteur des modalités de formation : un renforcement du niveau (+2), un travail en (+1) pour permettre une observation au niveau (0). On retrouve dans les *Lesson Study* cette même exigence dans les différents niveaux d'activité du professeur.

En choisissant la projection individuelle d'un cours enregistré dans notre protocole de diffusion de savoirs mathématiques spécifiques, nous avons imaginé la modalité m@gistère possible et réaliste, compte tenu de la durée du cours. Les séances filmées en classe, faisaient partie du dispositif de recherche mais est impossible en dehors de ce cadre. Aussi, un dispositif moins lourd peut être imaginé dans lequel des allers et retours avec la classe seraient possibles, mais à partir d'une base commune. Un résultat de la thèse montre en quoi la micro-formation a donné une base commune pour le savoir cardinal-quantité (sauf pour 1 enseignant sur 5, ce qui est à la fois peu et beaucoup).

2.2- Une ouverture vers les Lesson Study

La lisibilité des savoirs mathématiques spécifiques à l'enseignement du nombre à l'école maternelle enrichit le niveau (+2). La question posée pour la formation est d'atteindre le niveau (+2) de tous les enseignants, alors même qu'ils ont des connaissances mathématiques spécifiques différentes et qu'ils ne visent pas tous les mêmes savoirs dans leur enseignement.

Une piste pourrait se trouver dans l'émergence d'une nouvelle modalité de formation importée du Japon, les *Lesson Study* (Clivaz, 2015b; Clivaz, 2015a) où le niveau de construction d'une leçon (+1) est soumis à un travail partagé entre quelques enseignants. Pour construire et tester cette leçon, le niveau (+2), celui des savoirs mathématiques pour l'enseignement, est interrogé à la lumière des difficultés des élèves (-1). La séance est ensuite expérimentée en classe par un enseignant sous le regard des autres enseignants. Les échanges partagés permettent d'affiner la séance qui peut être proposée dans une autre classe avec un autre enseignant. Les allers-retours entre les niveaux (0) et (+1) questionnent et sollicitent sans cesse le niveau (+2). L'observation du niveau (-1) peut également être mise en avant dans des dispositifs spécifiques. Les *Lesson Study* permettraient alors d'atteindre le niveau (+2) des enseignants (niveau favorable pour la modification des pratiques).

De nouvelles questions se centrent alors sur la formation :

Comment faire en sorte que de nouveaux savoirs se développent sur la « bonne branche » ?

En quoi le niveau d'observation (-1) peut-il permettre d'appréhender la « bonne branche » du savoir ?

Comment intégrer dans les nouveaux dispositifs de formation les différents niveaux d'activité ? Comment rendre ces différentes entrées lisibles pour les enseignants ?

BIBLIOGRAPHIE

Ball, D. L. (1988). *Knowledge and reasoning in mathematical pedagogy: examining what prospective teachers bring to teacher education.* Dissertation, Michigan State University.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching : What makes it special ? *Journal of teacher Education, 59*(5), 389-407.

Baruk, S. (2003). *Comptes pour petits et grands. Pour un apprentissage du nombre et de la numération fondé sur la langue et le sens*. Paris: Magnard.

Bautier, E. (Ed.). (2006). *Apprendre à l'école, Apprendre l'école. Des risques de construction d'inégalités dès la maternelle*. Lyon: Chronique Sociale.

Bessot, A. (2011). L'ingénierie didactique au coeur de la théorie des situations. In C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck & F. Wozniak (Eds.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp. 29-56). Grenoble: La pensée sauvage.

Bloch, I. (1999). L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en Première scientifique. Détermination d'un milieu - connaissances et savoirs. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 135-193.

Bloch, I. (2002). Différents niveaux de modèles de milieu dans la théorie des situations. Recherche d'une dialectique scientifique entre analyses théoriques et contingence. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, B. René & R. Floris (Eds.), *Actes de la 11ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques* (pp. 125-140). Grenoble: La pensée sauvage.

Boisseau, P. (2005). *Enseigner la langue orale en maternelle*. Paris: Retz.

Boisseau, P., & Tartare-Serrat, C. (2010). *Les albums échos. Des outils pour apprendre*. Paris: Retz.

Bontant-Duchemin, S., Luquet, D., Quicray-Renard, F., Marot, S., & Rumin, J.-P. (2013). *Conditions de sécurité des équipements et des matériels utilisés pour les activités éducatives*. Paris: EP&S.

Bossis, J., Dumas, C., Livérato, C., & Méjean, C. (2015). *Aménager les espaces pour mieux apprendre, à l'école de la bienveillance*. Paris: Retz.

Boujon, C. (1985). *Bon appétit, Monsieur Lapin !* Paris: École des loisirs.

Bouvier, A., George, M., & Le Lionnais, F. (2013). *Dictionnaire des mathématiques* (4e édition mise à jour ed.). Paris: PUF.

Briand, J. (1993). *L'énumération dans le mesurage des collections.* Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I, Bordeaux.

Briand, J. (1999). Contribution à la réorganisation des savoirs prénumériques et numériques. Étude et réalisation d'une situation d'enseignement de l'énumération dans le domaine prénumérique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(1), 41-76.

Briand, J., Lacave-Luciani, M.-J., Harvouët, M., Bedere, D., & Goua de Baix, V. (2000). Enseigner l'énumération en moyenne section. *Grand N, Numéro spécial maternelle, approche du nombre, T1*, 123-138.

Briand, J., Loubet, M., & Salin, M.-H. (2004). *Apprentissages mathématiques en maternelle*. Paris Hatier.

Brissiaud, R., Clerc, P., & Ouzoulias, A. (2001). *J'apprends les maths avec Picbille*. Paris: Retz.

Brissiaud, R., Boulard, C., Ouzoulias, A., & Riou, M. (2002). *Livre du maître le nombre l'espace le temps. J'apprends les maths GS*. Paris: Retz.

Brissiaud, R. (2003). *Comment les enfants apprennent à calculer*. Paris: Retz.

Brissiaud, R., Boulard, C., Ouzoulias, A., & Riou, M. (2004). *L'album à calculer Maternelle GS*. Paris: Retz.

Brissiaud, R. (2007). *Premiers pas vers les maths. Les chemins de la réussite à l'école maternelle*. Paris: Retz.

Brissiaud, R. (2014a). Le nombre dans le nouveau programme maternelle : Quatre concepts clés pour la pratique et la formation.

Brissiaud, R. (2014b). Le nombre dans le nouveau programme maternelle : Deuxième partie.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 33-115.

Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9*(3), 309-336.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (2005). Situations fondamentales et processus génétiques de la statistique. In A. Mercier & C. Margolinas (Eds.), *Balises en didactique des Mathématiques* (pp. 165-194). Grenoble: La pensée sauvage.

Brousseau, G. (2010). Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques (1998). http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf

Calmelet, J.-J., Graff, O., & Valzan, A. (2010). Développer des compétences pour résoudre des problèmes additifs et soustractifs. In J.-L. Durpaire & M. Mégard (Eds.), *Le nombre au cycle 2* (Ressources pour faire la classe ed., pp. 51-74). Paris: Scerén CNDP-CRDP.

Carle, E. (2001). *La coccinelle mal lunée*. Namur: Mijade.

Charnay, R., & Dussuc, M.-P. (2004). *Livre du maître, Cap maths CP*. Paris: Hatier.

Chesnais, A. (2009). *L'enseignement de la symétrie axiale en sixième dans des contextes différents : les pratiques de deux enseignants et les activités des élèves.* Thèse de doctorat, Université Paris 7, Paris.

Chevallard, Y., & Mercier, A. (1987). *Sur la formation historique du temps didactique*. Marseille: IREM.

Chevallard, Y. (2010a). La didactique, dites-vous ? *Education et didactique, 4*(1), 139-148.

Chevallard, Y. (2010b). La didactique, dites-vous? *Education et Didactique, 4*(1), 136-143. http://educationdidactique.revues.org/771

Chopin, M.-P. (2006). Temps d'enseignement et temps didactique. Approche didactique de la question du temps dans l'enseignement des mathématiques au cycle 3 de l'école élémentaire. *Carrefours de l'éducation, 21*, 53-71.

Chopin, M.-P. (2007). *Le temps didactique dans l'enseignement des mathématiques.* Thèse de doctorat, Université Victor Segalen Bordeaux II, Bordeaux.

Chopin, M.-P. (2008). La visibilité didactique : un milieu pour l'action du professeur. Présentation d'un concept pour l'étude des pratiques d'enseignement. *Education et didactique, 2*(2), 63-79.

Clivaz, S. (2011). *Des mathématiques pour enseigner Analyse de l'influence des connaissances mathématiques d'enseignants vaudois sur leur enseignement des mathématiques à l'école primaire.* Thèse de doctorat, Université de Genève.

Clivaz, S. (2015a). Les Lesson Study ? Kesako ? *Math Ecole, 224*(Novembre 2015), 23-26.

Clivaz, S. (2015b). Les *Lesson Study* : des situations scolaires aux situations d'apprentissage professionnel pour les enseignants. *Formation et pratiques d'enseignement en questions, 19*, 99-105.

Colomb, J., Charnay, R., Douaire, J., Valentin, D., & Guillaume, J.-C. (2005). *Apprentissages numériques et résolution de problèmes GS cycle 2*. Paris: Hatier & ERMEL.

Douglas, M. (2004). *Comment pensent les institutions (A. Abeillé, Trad.)*. Paris : La découverte.

Dumont, D. (2006). *Le geste d'écriture méthode d'apprentissage cycle 1-cycle 2*. Paris: Hatier.

Dumont, D. (2013). *Le système d'écriture des minuscules latines manuscrites en usage dans les écoles françaises. Intérêt de la prise en compte de ce système pour l'enseignement de l'écriture manuscrite* Thèse de Doctorat, Université Paris-Descartes, Paris.

Duprey, S., Duprey, G., & Sautenet, C. (2009). *Vers les maths GS*. Paris: Accès Edition.

Emprin, F., & Emprin, F. (2010). Premières compétences pour accéder au dénombrement. In J.-L. Durpaire & M. Mégard (Eds.), *Le nombre au cycle 2 mathématiques* (pp. 23-34). Paris: Scéren- CNDP-CRDP.

Fayol, M. (2013). *L'acquisition du nombre* (Vol. N°3941.

Goigoux, R. (1998). Quels contenus d'enseignement, quelle définition de l'école maternelle. In B. Groison (Ed.), *Maternelle offre avenir* (pp. 49-62). Paris: Syndicat national des instituteurs, professeurs d'école et professeurs de collège (FSU).

Goody, J. (1979). *La raison graphique* (J. Bazin & A. Bensa, Trad.). Paris: Les éditions de minuit.

Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge : conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of student. *Journal for research in mathematics education, 39*(4), 372-400.

Jadoul, E. (2005). *Je compte jusqu'à trois*. Paris: Pastel.

Joigneaux, C. (2004). *Entre formes et situations scolaire.* DEA, Université de Paris VIII, Paris.

Joigneaux, C. (2009). *Des processus de différenciation dès l'école maternelle. Historicités plurielles et inégalité scolaire.* Thèse de doctorat, Paris VIII Saint-denis, Paris

Jousson, G., Peres, J., Loubet, M., Naura, M. H., & Rémy, A. (1987). Construction et utilisation d'un code de désignation d'objets à l'école maternelle. *Grand N Mathématiques en Maternelle*.

Junge, N., & Jandl, E. (2000). *Le cinquième*. Paris: École Des Loisirs.

Laparra, M., & Margolinas, C. (2008). *Quand la dévolution prend le pas sur l'institutionnalisation.* Les didactiques et leur rapport à l'enseignement et à la formation, Bordeaux. http://www.aquitaine.iufm.fr/infos/colloque2008/cdromcolloque/communications/marg.pdf

Laparra, M., & Margolinas, C. (2009). Le schéma: un écrit de savoir? *Pratiques, 143-144*(Numéro spécial: les écrits de savoir), 51-82.

Laparra, M., & Margolinas, C. (2010). Milieu, connaissance, savoir. Des concepts pour l'analyse de situations d'enseignement. *Pratiques, 145-146*, 141-160.

Levain, J.-P., & Vergnaud, G. (1994). Proportionnalité simple, proportionnalité multiple. Cycle III. *Grand N 56*, 55-66.

Luc, J.-N. (1997). *L'invention du jeune enfant au XIXe siècle de la salle d'asile à l'école maternelle*. Paris: Belin.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics : Teachers'understanding of fundamental mathematics in China and the United states*. Mahawah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Margolinas, C. (1985). *Le nombre dans tous ses états. Un bilan des connaissances sur les nombres après la classe de 4e.* DEA, Université de Bordeaux I, Bordeaux.

Margolinas, C. (1993). *De l'importance du vrai et le faux dans la classe de mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Margolinas, C., & Steinbring, H. (1994). Double analyse d'un épisode: cercle épistémologique et structuration du milieu. In M. Artigue, R. Gras, C. Laborde, P. Tavignot & N. Balacheff (Eds.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud.* (pp. 250-258). Grenoble: La pensée sauvage.

Margolinas, C. (1995). La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations. In C. Margolinas (Ed.), *Les débats de didactique des mathématiques* (pp. 89-102). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Margolinas, C. (2002a). Situations, milieux, connaissances : analyse de l'activité du professeur. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Eds.), *Actes de la 11ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques* (pp. 141-156). Grenoble La Pensée Sauvage.

Margolinas, C. (2002b). Situations, milieux, connaissances : analyse de l'activité du professeur (complément du cours). In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Eds.), *Actes de la 11ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques* (pp. cédérom). Grenoble La Pensée Sauvage.

Margolinas, C. (2005a). La dévolution et le travail du professeur. In P. Clanché, M.-H. Salin & B. Sarrazy (Eds.), *Autour de la théorie des situations* (pp. 329-333). Grenoble: La pensée sauvage.

Margolinas, C. (2005b). Les bifurcations didactiques : un phénomène révélé par l'analyse de la structuration du milieu. *Balises en didactique des mathématiques*, 1-12.

Margolinas, C., & Goigoux, R. (2005). Une comparaison de l'activité d'une maîtresse de cours préparatoire en français et en mathématiques. In A. Mercier & C. Margolinas (Eds.),

Balises en didactique des mathématiques (pp. Cédérom). Grenoble La Pensée Sauvage.

Margolinas, C., Wozniak, F., Canivenc, B., De Redon, M.-C., & Rivière, O. (2007). Les mathématiques à l'école ? Plus complexe qu'il n'y paraît ! Le cas de l'énumération de la maternelle... au lycée *Bulletin de l'APMEP, 471*, 483-496.

Margolinas, C., & Laparra, M. (2009). Savoirs invisibles et connaissances cruciales : le cas des mathématiques en maternelle. In C. Passerieux (Ed.), *La maternelle. Première école, premiers apprentissages* (pp. 99-107). Lyon: Chronique sociale.

Margolinas, C., & Wozniak, F. (2009a). Place des documents dans l'élaboration d'un enseignement de mathématiques à l'école primaire. In I. Bloch & F. Conne (Eds.), *Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques* (pp. 135-146). Grenoble: La pensée sauvage.

Margolinas, C., & Wozniak, F. (2009b). Usage des manuels dans le travail l'enseignant : l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. *Revue des sciences de l'éducation, 35*(2), 59-82.

Margolinas, C. (2012a). Connaissance et savoir. Des distinctions frontalières? In P. Losego (Ed.), *Actes du colloque "Sociologie et didactiques : vers une transgression des frontières", 13 et 14 septembre 2012* (pp. 17-44). Lausanne: Haute Ecole pedagogique de Vaud.

Margolinas, C. (2012b). *Des savoirs à la maternelle oui, mais lesquels ?* Actes du XXXIX Colloque COPIRELEM, Quimper.

Margolinas, C., & Wozniak, F. (2012). *Le nombre à l'école maternelle. Une approche didactique*. Louvain-la-Neuve: De Boeck.

Margolinas, C., & Wozniak, F. (2014). Les besoins praxéologiques du professeur : le nombre ordinal. In D. Butlen, I. Bloch, M. Bosch, C. Chambris, G. Cirade, S. Clivaz, S. Gobert, C. Hache, M. Hersant & C. Mangiante-Orsola (Eds.), *Rôles et places de la didactique et des didacticiens des mathématiques dans la société et dans le système éducatif* (pp. 123-152). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Margolinas, C. (2015a). Connaissance et savoir. Concepts didactiques et perspectives sociologiques ? *à paraitre*, 17.

Margolinas, C. (2015b). Situations, savoirs et connaissances...comme lieu de rencontre ? *Formation et pratiques d'enseignement en questions, 19*, 31-39.

Margolinas, C., Rivière, O., & Wozniak, F. (2015). Situations d'énumération et exploration des collections. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 35*(2), 183-220.

Margolinas, C., & Wozniak, F. (2015). Comment les professeurs se saisissent-ils des outils didactiques ? *Didactiques en pratique, 1*, 25-31.

Margolinas, C., & Laparra, M. (2016). *Les premiers apprentissages scolaires à la loupe. Des liens entre énumération, oralité et littératie*. Louvain-la-Neuve: De Boeck.

MEN (2008). *BO n°3 Numéro Hors-série Horaires et programmes d'enseignement de l'école primaire*.

MEN (2014a). *Repères & références statistiques sur les enseignements, la formation et la recherche* (

MEN (2014b). Préparation de la rentrée scolaire 2014. *BO, 21*(circulaire n°2014-068), 1-26.

MEN (2014c). Projet de programme et recommandation école maternelle. *Conseil supérieur des programmes*.

MEN/DEGESCO (2010). *Aide à l'évaluation des acquis des élèves en fin d'école maternelle*.

Ministère de l'éducation nationale (2016). Suivi et évaluation des apprentissages des élèves à l'école maternelle. *http://eduscol.education.fr/ressources-maternelle*.

Ouzoulias, A., & Tartare-Serrat, C. (2011). *L'arbre à goûters*. Paris: Retz.

Quivy, R., & Van Campenhoudt, L. (2007). *Manuel de recherche en sciences sociales*. Paris: Dunod.

Sarrazy, B. (2007). Ostention et dévolution dans l'enseignement des mathématiques. *Education et didactique, 1*(3), 31-46.

Shulman, L. (1986). Those Who Understand : Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher, 15(2)*, 4-14.

Shulman, L. (2007). Ceux qui comprennent. Le développement de la connaissance dans l'enseignement. *Education et didactique, 1*(1), 97-114.

Tricot, A. (2011). Apprentissages et enseignement. *Médiadoc, Apprendre l'info-doc : quelle médiation?"*, 1-7.

Valentin, D. (2004). *Découvrir le monde avec les mathématiques : situations pour la petite et la moyenne sections*. Paris: Hatier.

Vasse, T. (2008). *ATSEM-enseignant : travailler ensemble le partenariat ville-école en question*. Nantes: Canopé-CRDP.

Vergnaud, G. (1986). Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques un exemple : les structures additives. *Grand N, 38*, 31-40.

Vidal, F., & Nouhen, E. (2009). *La grenouille à grande bouche*. Paris: Didier.

Agnès Malet

Savoirs et connaissances mathématiques spécifiques du professeur pour l'enseignement du nombre à l'école maternelle

Résumé : La question de l'enseignement du nombre à l'école maternelle est abordée à travers les savoirs et les connaissances mathématiques spécifiques du professeur. Cette thèse s'inscrit dans le cadre de la théorie des situations didactiques. Une modélisation des savoirs mathématiques spécifiques pour l'enseignement du nombre à l'école maternelle est proposée afin d'étudier l'enseignement du nombre de dix enseignants. Le travail est complété par une micro formation relative à des savoirs spécifiques à la quantité. La thèse étudie l'impact de nouveaux savoirs sur les connaissances mathématiques spécifiques de cinq professeurs. Enfin, les résultats de la recherche sont interprétés par rapport à la formation des enseignants.

Mots clés : enseignement, nombre, école maternelle, connaissances, savoirs, professeur

Résumé en anglais : Teaching number in nursery school is tackled through the teacher's mathematical specialized content knowledge. This thesis is part of the didactic situations theory. A modelling of mathematical specialized content knowledge to teach number is suggested to study how ten teachers work on numbers. The study is completed by a micro training programme referring to the quantity specialized knowledge. The thesis studies the impact of new mathematical knowledge on five teachers' mathematical specialized content knowledge. Therefore the results of the research are interpreted to improve teachers vocational training.

Key words : teaching, number, nursery school, knowledge, teacher