



HAL
open science

Étude des fibres singulières des systèmes de Mumford impairs et pairs

Yasmine Fittouhi

► **To cite this version:**

Yasmine Fittouhi. Étude des fibres singulières des systèmes de Mumford impairs et pairs. Géométrie algébrique [math.AG]. Université de Poitiers, 2017. Français. NNT : 2017POIT2252 . tel-01981449

HAL Id: tel-01981449

<https://theses.hal.science/tel-01981449>

Submitted on 15 Jan 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

pour l'obtention du Grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE POITIERS

(Faculté des Sciences Fondamentales et Appliquées)

Diplôme National - Arrêté du 7 août 2006

École Doctorale : Sciences et Ingénierie pour l'Information, Mathématiques

Secteur de Recherche : Mathématiques et leurs Interactions

Présentée par :

Yasmine FITTOUHI

Étude des fibres singulières des systèmes de Mumford impairs et pairs

Directeur de thèse :

Pol VANHAECKE

Soutenue le 12 Janvier 2017
devant la Commission d'Examen

JURY

Armando TREIBICH	Professeur, Université d'Artois	Rapporteur
Eva MIRANDA	Professeur, Universitat Politècnica de Catalunya, Espagne	Rapporteur
Mattia CAFASSO	Maître de Conférences (HDR), Université d'Angers	Examineur
Alessandra SARTI	Professeur, Université de Poitiers	Examineur
Pol VANHAECKE	Professeur, Université de Poitiers	Directeur

Table des matières

1	Introduction	5
1.1	Origines historiques de l'intégrabilité algébrique	5
1.1.1	L'intégrabilité avant les années '60	5
1.1.2	Renaissance	6
1.1.3	Intégrabilité algébrique	7
1.2	Les systèmes de Mumford	7
1.3	Stratifications des fibres singulières $M_g(h)$	9
1.3.1	La stratification par degré d'indépendance des champs D_i	10
1.3.2	La stratification par le PGCD	11
1.3.3	La stratification par singularité	12
1.3.4	La stratification fine des fibres $M_g(h)$	12
1.4	Description géométro-algébrique des strates maximales	14
1.5	Structure de cette thèse	14
2	Préliminaires	17
2.1	Structures de Poisson	17
2.2	Systèmes intégrables	20
2.3	Résultant et sous-résultant	22
3	Les systèmes de Mumford	29
3.1	Les systèmes de Mumford impairs	29
3.2	Les systèmes de Mumford pairs	35
4	Stratifications	41
4.1	Préliminaires	41
4.2	Les systèmes de Mumford impairs	42
4.2.1	La stratification de l'espace de phases M_g	43
4.2.2	La stratification des fibres $M_g(h)$	49
4.2.3	Lissitude des strates	57
4.3	Les systèmes de Mumford pairs	59
4.3.1	La stratification de l'espace de phases M'_g	59
4.3.2	La stratification des fibres $M'_g(h)$	61
4.3.3	Lissitude des strates	63
5	Description géométro-algébrique des strates	65
5.1	Rappels	65
5.1.1	Diviseurs sur une courbe	65
5.1.2	Courbes hyperelliptiques	66
5.1.3	Jacobiennes généralisées	67
5.2	Jacobienne généralisée d'une courbe hyperelliptique	69
5.3	Description géométro-algébrique des strates $M_{g,g}(h)$	71

5.3.1	Notations	71
5.3.2	Lien entre la strate $M_{g,g}(h)$ et la jacobienne $\text{Jac}_m(\overline{C'})$	72
Bibliographie		79

Chapitre 1

Introduction

Le thème central de cette thèse est l'étude des fibres singulières (complexes) de l'application moment d'un système algébriquement intégrable. Nous nous concentrons sur le cas des systèmes de Mumford impair et pair d'ordre g (où $g \in \mathbb{N}^*$). Ainsi, dans cette introduction nous retraçons d'abord la naissance du concept d'intégrabilité algébrique et rappelons rapidement le système de Mumford impair d'ordre g . Ensuite, nous motivons et décrivons plusieurs stratifications de l'espace de phase de ces systèmes, ainsi que des fibres de leur application moment. Les strates *finies* des systèmes de Mumford impairs sont ensuite étudiées du point de vue de la géométrie algébrique, et nous montrons que chaque strate est isomorphe avec un ouvert de la jacobienne généralisée d'une courbe singulière (en général) que l'on peut expliciter.

1.1 Origines historiques de l'intégrabilité algébrique

Nous expliquons d'abord comment la notion d'intégrabilité algébrique est née à la fin des années '70, alors qu'elle aurait pu naître un demi-siècle auparavant.

1.1.1 L'intégrabilité avant les années '60

Les systèmes intégrables apparaissent d'abord en mécanique classique, lors des tentatives de résoudre explicitement les équations de mouvement qui décrivent des systèmes de particules en interaction, comme par exemple les planètes du système solaire. Par des méthodes directes il était possible de traiter les systèmes classiques à un degré de liberté et certains systèmes (comme le problème à deux corps) ayant plusieurs degrés de liberté, mais possédant un groupe non-trivial de symétrie. Mais même lorsque Euler découvra dans l'étude de la toupie qui porte son nom (la toupie d'Euler) de nouvelles fonctions, les fonctions elliptiques, avec lesquelles il arriva à intégrer les équations de mouvement de sa toupie, il devint rapidement clair que déjà pour des hamiltoniens classiques très simples, et même en utilisant de nouvelles fonctions, on ne peut pas espérer intégrer explicitement les équations de mouvement.

Si le rôle que jouent les symétries dans l'intégration des équations de mouvement n'était pas du tout compris au début, l'utilité des constantes de mouvement était claire : toute constante de mouvement permet de diminuer d'une unité la dimension de l'espace de phase (qui est $2n$ pour des systèmes classiques à n degrés de liberté). Ainsi, $2n - 1$ constantes de mouvement indépendantes suffisent pour réduire les équations à une seule équation différentielle que l'on peut *en principe* intégrer. Pour la recherche d'un nombre suffisant de constantes de mouvement, le théorème de Poisson semble très prometteur, car il dit qu'à partir de deux constantes de mouvement on peut en construire une troisième, en utilisant le crochet qui porte son nom (le crochet de Poisson). Or, sauf cas exceptionnel, ce procédé ne produit pas beaucoup de nouvelles constantes de mouvement, souvent même aucune. On sait maintenant que les systèmes en n degrés de liberté qui ont $2n - 1$

constantes de mouvement indépendantes (actuellement on appelle tels systèmes *superintégrables*) sont très, très rares, plus rares en effet que les systèmes qui font l'objet du paragraphe suivant.

Un progrès fondamental est dû à Liouville, qui montre que n constantes de mouvement indépendantes (plutôt que $2n - 1$) suffisent, à condition qu'elles soient en involution, c'est-à-dire qu'elles commutent pour le crochet de Poisson. Plus précisément, Liouville montre que les équations de mouvement sont alors intégrables *par quadratures*, i.e., en utilisant uniquement des calculs algébriques, le théorème des fonctions inverses et l'intégration (d'une fonction d'une variable). On dit maintenant qu'un tel système est *intégrable au sens de Liouville*. Dans le cas de deux degrés de liberté, par exemple, le résultat de Liouville implique que pour l'intégrabilité il suffit de trouver une seule constante de mouvement, indépendante de l'hamiltonien ; les constantes de mouvement sont automatiquement en involution avec l'hamiltonien. Inutile donc de chercher une troisième constante de mouvement ! Ainsi, dans les années qui suivirent, l'intégrabilité au sens de Liouville de plusieurs systèmes provenant de la mécanique classique a été démontrée. Le cas le plus célèbre est la toupie intégrable découverte par Kowalevski, qu'elle intègre en termes de fonctions thêta de genre deux ; pour ce travail fondateur, Kowalevski reçoit en 1888 par l'Académie (Française) des Sciences le fameux Prix Bordin. Son travail, ainsi que ceux de Weierstraß, Painlevé et plus tard Garnier, étaient le début d'un lien fondamental entre les systèmes intégrables et l'analyse complexe/la géométrie algébrique complexe. Mais, malheureusement, ce lien était oublié et la théorie des systèmes intégrables a été mise dans un placard, quand Poincaré a démontré en début du XX-ème siècle que le problème à trois corps n'est pas intégrable.

1.1.2 Renaissance

Soixante ans plus tard, une suite de découvertes portant sur l'équation de Korteweg-de Vries (KdV), une EDP qui décrit des vagues en faible profondeur, a réveillé l'intérêt en la théorie des systèmes intégrables, au point où l'intégrabilité devint un thème central en physique mathématique : un nombre infini de constantes de mouvement indépendantes de KdV ont été trouvées et elles sont en involution par rapport à une structure symplectique (en dimension infinie). Cette EDP a donc toutes les caractéristiques d'un système intégrable (au sens de Liouville) de dimension infinie. De plus, cette équation fût résolue par la méthode de scattering inverse, elle a été écrite comme flot isospectral sur un espace d'opérateurs pseudo-différentiels (écriture comme équation de Lax) et le lien avec les fonctions thêta renaît quand Its et Matveev montrent que pour toute courbe hyperelliptique lisse, la dérivée seconde logarithmique de sa fonction thêta, proprement paramétrée, est une solution de l'équation de KdV !

Peu après, dans les années '70, les systèmes intégrables classiques de dimension *finie* ont été revisités et étudiés à nouveau sous un nouvel angle, en vue des nouvelles idées provenant de l'équation de KdV. Les équations de Lax sont dans ce cas des équations différentielles sur des algèbres de Lie, ce qui a été le début d'une riche interaction entre les systèmes intégrables et la théorie des représentations. La mécanique classique avait peu avant été réécrite entièrement en termes de la géométrie différentielle, en particulier la géométrie symplectique, suivant la vision géométrique de Poincaré des systèmes dynamiques comme étant des champs de vecteurs sur l'espace de phase, dont les courbes intégrales sont en correspondance biunivoque avec les solutions du système. De cette approche géométrique et moderne de la mécanique classique, la théorie des systèmes intégrables en devint un chapitre assez particulier. Arnold prouve une version géométrique du théorème de Liouville, qui fait apparaître les fameux tores de Liouville¹, qui sont engendrés par les flots du système dans l'espace de phases ; Arnold démontre aussi le théorème d'actions-angles, décrivant tout système intégrable sur une variété symplectique au voisinage d'un tore de Liouville.

1. Sous une hypothèse de compacité.

1.1.3 Intégrabilité algébrique

A cette époque, Adler et van Moerbeke revisitent les travaux de Painlevé et de Kowalevski, qu'ils confrontent avec la vision géométrique moderne de la mécanique, avec la géométrie différentielle complexe, et avec la géométrie algébrique. La notion d'intégrabilité algébrique, centrale dans cette thèse, est alors née. Comme dans les travaux de Kowalevski et de Painlevé, on s'intéresse aux systèmes ayant des solutions *complexes* avec de bonnes propriétés (univalentes, méromorphes en fonction du temps), mais mettant l'accent sur la géométrie (complexe) du système, plutôt que sur les solutions. On demande alors que les flots complexes du système (complexe ou complexifié) engendrent des variétés abéliennes, c'est-à-dire des tores complexes algébriques. Dans le cas de la toupie de Kowalevski, ils montrent que les variétés complexes génériques, engendrées par le flot (complexe) sont des parties affines de surfaces abéliennes de type $(1, 2)$. Dans d'autres systèmes intégrables ils trouvent des jacobiniennes, des variétés de Prym, puis même des cas bien exotiques, comme des surfaces abéliennes de type $(1, 6)$. Si ces exemples restent les plus remarquables, il y a également des exemples de systèmes intégrables où la fibre générique est un ouvert d'un groupe algébrique, par exemple une extension d'une variété abélienne par des copies de \mathbb{C} et/ou de \mathbb{C}^* ; les jacobiniennes généralisées sont des exemples de telles groupes abéliennes.

Si l'étude des systèmes algébriquement intégrables s'est jusqu'à présent toujours concentrée sur la fibre générique de l'application moment (qui est donc un ouvert d'une variété abélienne), le but de cette thèse est d'étudier les autres fibres, notamment celles au-dessus de valeurs critiques de l'application moment, c'est-à-dire les fibres singulières de l'application moment. Comme détaillé dans la suite de l'introduction, nous ferons cette étude pour les systèmes de Mumford impairs et pairs qui sont algébriquement intégrables et contiennent pour tout genre g les jacobiniennes (moins une, respectivement deux copies de leur diviseur thêta) de *toutes* les courbes hyperelliptiques de genre g .

1.2 Les systèmes de Mumford

Nous allons nous intéresser principalement à deux systèmes intégrables : le système de Mumford impair, appelé aussi système de Jacobi-Mumford introduit par Mumford dans le début des années '80 et le système de Mumford pair introduit par Vanhaecke dans le début des années '90. Dans cette introduction, nous rappelons seulement le système de Mumford impair, le cas pair étant assez similaire.

On fixe un entier $g > 0$. Le système de Mumford impair d'ordre g est un système hamiltonien dont l'espace de phases M_g est l'espace affine complexe \mathbb{C}^{3g+1} . Les points de cet espace sont décrits par des matrices polynomiales 2×2 de trace nulle, dont les coefficients sont des polynômes (en une variable), avec des contraintes sur leurs degrés :

$$M_g := \left\{ \begin{pmatrix} v(x) & u(x) \\ w(x) & -v(x) \end{pmatrix} \text{ tel que } \begin{cases} u(x) = x^g + u_{g-1}x^{g-1} + u_{g-2}x^{g-2} + \dots + u_0 \\ v(x) = v_{g-1}x^{g-1} + v_{g-2}x^{g-2} + \dots + v_0 \\ w(x) = x^{g+1} + w_g x^g + w_{g-1}x^{g-1} + \dots + w_0 \end{cases} \right\} \simeq \mathbb{C}^{3g+1}.$$

Les coefficients de ces polynômes donnent des coordonnées affines sur M_g . Le déterminant de la matrice $A(x) = \begin{pmatrix} v(x) & u(x) \\ w(x) & -v(x) \end{pmatrix}$ de M_g , est un polynôme de degré $2g + 1$ de coefficient dominant -1 ,

$$\det(A(x)) = -[v(x)^2 + u(x)w(x)].$$

Ceci suggère de considérer l'espace affine H_g de tous les polynômes unitaires (en une variable) de degré $2g + 1$; il est de dimension $2g + 1$. On considère alors l'application \mathbf{H} de M_g dans H_g ,

donnée par $H(A(x)) := -\det(A(x))$. On appelle \mathbf{H} l'application *moment* du système de Mumford (d'ordre g), pour des raisons qui seront expliquées plus bas.

La fibre de l'application moment \mathbf{H} au-dessus d'un polynôme $h(x)$ de H_g sera notée $M_g(h)$. Elle est constituée de matrices isospectrales,

$$M_g(h) = \{A(x) \in M_g \mid \det(\mathbb{1}_2 y - A(x)) = y^2 - h(x)\}.$$

Donc, à chaque fibre $M_g(h)$ est naturellement associé une courbe algébrique, la courbe d'équation affine $y^2 = h(x)$. Cette courbe est hyperelliptique, elle est lisse si et seulement si le polynôme $h(x)$ est sans racines multiples, et dans ce cas, g est le genre de la courbe.

Mumford a fait l'étude des fibres $M_g(h)$ de \mathbf{H} dans le cas où le polynôme h est un polynôme sans racine multiple ; dans ce qui suit, nous appellerons ces fibres les *fibres lisses*² de \mathbf{H} . Soit $h \in H_g$ un polynôme sans racine multiple. Soit C la courbe hyperelliptique lisse de genre g d'équation affine $y^2 = h(x)$. Notons par $\text{Div}_0^{g,+}(C)$ le sous-ensemble des diviseurs effectifs de degré g de la courbe hyperelliptique lisse C définie par :

$$\text{Div}_0^{g,+}(C) = \left\{ D = \sum_{i=1}^g (a_i, b_i) \text{ tel que } p_i \neq \infty \text{ pour tout } 1 \leq i \leq g \right. \\ \left. \text{et } (a_i, b_i) \neq (a_j, -b_j) \text{ pour tout } 1 \leq i \neq j \leq g \right\}.$$

Mumford définit un morphisme bijectif entre la fibre lisse $M_g(h)$ de \mathbf{H} et la variété affine (de dimension g) $\text{Div}_0^{g,+}(C)$:

$$\begin{array}{ccc} M_g(h) & \longrightarrow & \text{Div}_0^{g,+}(C) \\ \left(\begin{array}{c} v(x) \\ \underbrace{\prod_{i=1}^g (x - a_i)}_{u(x)} \\ w(x) \quad -v(x) \end{array} \right) & \longrightarrow & \sum_{i=1}^g (a_i, v(a_i)). \end{array}$$

De plus, il montre que $\text{Div}_0^{g,+}(C)$ est un ouvert de $\text{Jac}(C)$, la jacobienne de la courbe hyperelliptique lisse C . Rappelons que la jacobienne d'une courbe algébrique lisse de genre g est une variété abélienne de dimension g , c'est-à-dire un tore complexe de dimension g que l'on peut plonger dans un espace projectif complexe. Plus précisément, Mumford prouve que $\text{Div}_0^{g,+}(C)$ est isomorphe à $\text{Jac}(C)$ privé de son diviseur thêta.

Mais il y a plus ! L'espace affine M_g admet une famille de structures de Poisson compatibles, provenant d'une structure d'algèbre de Lie, qui ne sera pas détaillé ici. En effet, dans le cadre de cette thèse nous n'utiliserons qu'une de ces structures de Poisson. Cette structure est définie à l'aide du crochet des fonctions coordonnées $u_{g-1}, \dots, u_0, v_{g-1}, \dots, v_0, w_g, \dots, w_0$, par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \{u(x), u(y)\} &= \{v(x), v(y)\} = 0, \\ \{u(x), v(y)\} &= \frac{u(x) - u(y)}{x - y}, \\ \{u(x), w(y)\} &= -2 \frac{v(x) - v(y)}{x - y}, \\ \{v(x), w(y)\} &= \frac{w(x) - w(y)}{x - y} - u(x), \\ \{w(x), w(y)\} &= 2(v(x) - v(y)). \end{aligned} \tag{1.1}$$

2. Nous montrerons que ces fibres sont en effet précisément les fibres non-singulières de \mathbf{H} , d'où la terminologie utilisée.

Ici, x et y sont des paramètres formels et le crochet de Poisson $\{u_i, v_j\}$, par exemple, est déterminé à partir de la deuxième ligne de (1.1) en développant le côté droit de l'égalité (qui est un polynôme en x et y), puis y prenant le coefficient du monôme $x^i y^j$.

Sur la variété de Poisson $(M_g, \{\cdot, \cdot\})$, on considère les champs hamiltoniens, associées aux fonctions \mathbf{H}_y définies ainsi : pour $y \in \mathbb{C}$, on note par \mathbf{H}_y la fonction obtenue en composant l'application \mathbf{H} par l'évaluation en y :

$$\mathbf{H}_y : \begin{array}{ccc} M_g & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \left(\begin{array}{cc} v(x) & u(x) \\ w(x) & -v(x) \end{array} \right) & \longrightarrow & v^2(y) + u(y)w(y) \end{array}$$

On note par D_y le champ hamiltonien sur M_g , associé à \mathbf{H}_y . Il s'écrit de façon explicite et compacte comme une équation de Lax à paramètre spectral :

$$D_y(A(x)) = \left[A(x), -\frac{A(y)}{x-y} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u(y) & 0 \end{pmatrix} \right]. \quad (1.2)$$

En utilisant cette équation de Lax on montre facilement que les fonctions \mathbf{H}_y sont toutes en involution (par rapport au crochet de Poisson (1.1)). Les champs hamiltoniens D_y sont donc tangents à toutes les fibres $M_g(h)$ de l'application moment et elles commutent deux-à-deux. Des calculs de dimension montrent qu'on a bien un système intégrable au sens de Liouville. Mumford montre que sous la bijection définie ci-dessus les champs D_y , restreints à une fibre lisse $M_g(h)$ sont envoyés sur des champs de vecteurs invariants par translation sur $\text{Jac}(C)$. Ainsi il prouve que le système intégrable qui porte son nom est algébriquement intégrable.

Pour finir ce petit rappel sur le système de Mumford, nous introduisons g champs de vecteurs particuliers, qu'on utilisera à la place des champs D_y , avec $y \in \mathbb{C}$. Ils sont notés D_0, D_1, \dots, D_{g-1} et sont définis par

$$D_y(A(x)) = \sum_{i=0}^{g-1} y^i D_i(A(x)). \quad (1.3)$$

Bien sûr, le span des champs $(D_y)_{y \in \mathbb{C}}$ et celui des champs $(D_i)_{i=0,1,\dots,g-1}$ coïncident. D'ailleurs, les champs D_i sont également des champs hamiltoniens, car on peut montrer que ce sont les champs hamiltoniens associés aux composantes de \mathbf{H} ; ce sont également des champs de vecteurs polynômiaux, tangents à toutes les fibres, ils s'écrivent en termes d'une équation de Lax et, d'après (1.3) tous les champs de vecteurs D_y , avec $y \in \mathbb{C}$, s'expriment comme combinaison linéaire (à coefficients dans \mathbb{C}) des champs hamiltoniens D_0, D_1, \dots, D_{g-1} . Ces derniers ont l'avantage par rapport aux champs D_y d'être linéairement indépendants sur un ouvert (de Zariski) non-vide de M_g .

1.3 Stratifications des fibres singulières $M_g(h)$

Comme nous l'avons dit, nous nous intéressons aux fibres $M_g(h)$ de l'application moment \mathbf{H} du système de Mumford (que l'on prend impair dans cette introduction) d'ordre g . La fibre générique $M_g(h)$, décrite par Mumford, a les caractéristiques suivantes

- (1) Le polynôme h est de discriminant nul (c'est ici le sens de \acute{a} générique \acute{z}) ;
- (2) La fibre $M_g(h)$ est lisse ;
- (3) Les champs de vecteurs D_0, D_1, \dots, D_{g-1} sont indépendants en tout point de $M_g(h)$;
- (4) La fibre $M_g(h)$ est isomorphe à $\text{Jac}(y^2 = h(x))$ moins son diviseur θ ;
- (5) Les champs de vecteurs D_0, D_1, \dots, D_{g-1} sont invariants par translation sur $\text{Jac}(y^2 = h(x))$.

Pour les autres fibres plus rien de tout cela est vrai : il s'agit donc des fibres $M_g(h)$ où h admet des racines multiples ; comme nous le monterons, ces fibres ne sont jamais lisses et les champs de vecteurs D_0, D_1, \dots, D_{g-1} ne sont pas indépendants en tout point de $M_g(h)$, même s'ils le sont en un point générique de $M_g(h)$. Nous sommes ainsi dans le cadre des fibres singulières de \mathbf{H} emmenés à considérer dans chaque fibre les plus petites sous-variétés, invariantes par le flot des champs de vecteurs (commutants) D_0, D_1, \dots, D_{g-1} . Cela nous amène à une première stratification des fibres singulières, que l'on décrira également en termes arithmétiques, puis à une stratification plus fine, dont les strates correspondent précisément aux variétés invariantes décrites ci-dessus.

La notion de stratification que nous utilisons dans ce texte est la suivante :

Définition 1.1. Soit (I, \leq) un ensemble (partiellement) ordonné. Une *stratification* d'une variété algébrique V est une partition de V par une famille $(S_i)_{i \in I}$ de variétés quasi-affines³ telle que : Pour tout $i \in I$, la fermeture de Zariski $\overline{S_i}$ de S_i est donnée par

$$\overline{S_i} = \bigsqcup_{j \leq i} S_j, \text{ (union disjointe).} \quad (1.4)$$

Les S_i sont appelées *strates*. La condition (1.4) entraîne que le bord de chaque strate S_i est composé de toutes les strates S_j avec $j < i$,

$$\partial S_i = \bigsqcup_{j < i} S_j.$$

1.3.1 La stratification par degré d'indépendance des champs D_i

Du point de vue de la théorie des systèmes dynamiques/intégrables, il est naturel de partitionner chaque fibre selon le nombre de champs de vecteurs parmi D_0, D_1, \dots, D_{g-1} qui y sont indépendants (rappelons que ces champs de vecteurs y sont tangents). Ceci peut se faire partiellement en utilisant la théorie des distributions généralisées, mais nous utiliserons une méthode plus directe, qui a l'avantage d'être plus explicite et de fournir une description des strates comme variétés quasi-affines.

Cette stratification des fibres est héritée d'une stratification de l'espace de phases M_g , qui est définie par les fibres d'une application σ , qui est définie par

$$\begin{aligned} \sigma : M_g &\longrightarrow \{0, \dots, g\} \\ A(x) &\longmapsto \dim \langle D_0|_A, \dots, D_{g-1}|_A \rangle. \end{aligned}$$

Pour tout $i \in \{0, \dots, g\}$, on notera par $M_{g,i}$ la fibre de σ au dessus de i . Un premier résultat que nous démontrons (cfr. Proposition 4.7) est le suivant :

Proposition 1.2. *La famille $(M_{g,i})_{i \in \{0,1,\dots,g\}}$ définit une stratification de M_g . En particulier, pour tout $i \in \{0, 1, \dots, g\}$, la variété quasi-affine $M_{g,i}$ est non vide.*

Remarquons que le fait que tous les $M_{g,i}$ avec $i = 0, 1, \dots, g$ sont non vides n'est pas évident et est établi grâce à une autre stratification, comme expliqué dans le paragraphe 1.3.2.

Nous passons ensuite à la stratification des fibres $M_g(h)$ de \mathbf{H} . Nous avons deux applications surjectives, définies sur M_g , selon le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} & M_g & \\ \sigma \swarrow & & \searrow \mathbf{H} \\ \{0, 1, \dots, g\} & & H_g \end{array}$$

3. Ici, les variétés quasi-affines ne sont pas supposées irréductibles.

Puisque les champs hamiltoniens D_0, D_1, \dots, D_g sont tangents aux fibres de \mathbf{H} , qui sont des variétés affines, l'intersection des fibres de σ et de \mathbf{H} donne une stratification de toutes les fibres de \mathbf{H} , sauf que l'intersection d'une fibre de σ avec une fibre de \mathbf{H} peut être vide. Par exemple, comme on l'a vu, les champs de vecteurs D_0, D_1, \dots, D_g sont indépendants en chaque point des fibres lisses $M_g(h)$, et dans ce cas la fibre contient une seule strate, la fibre elle-même. Etant donné $h \in H_g$, il n'est a priori pas clair pour quelles valeurs de i l'intersection $M_{g,i}(h) := M_g(h) \cap M_{g,i}$ est non vide. Pour ce faire, nous utilisons une deuxième stratification, décrite dans le paragraphe suivant.

1.3.2 La stratification par le PGCD

La stratification définie dans le paragraphe précédent est difficilement calculable, en particulier il est difficile d'expliciter ses strates. De plus, comme nous l'avons évoqué, il est difficile de prouver que les strates $M_{g,i}$ sont toutes non vides, et de déterminer pour quelles valeurs de i les strates $M_{g,i}(h)$ sont non vides. Une première réponse, donnant une description précise de la strate M_g et donc des strates $M_{g,g}(h)$, pour tout $h \in H_g$, est donnée par la proposition suivante (voir Proposition 4.9) :

Proposition 1.3. *Les champs de vecteurs D_0, \dots, D_{g-1} sont linéairement indépendants au point*

$$A(x) = \begin{pmatrix} v(x) & u(x) \\ w(x) & -v(x) \end{pmatrix}$$

de M_g si et seulement si les trois polynômes $u(x), v(x), w(x)$ sont premiers entre eux.

Nous avons ainsi une description précise d'une strate de M_g et de $M_g(h)$: la strate de dimension maximale (que l'on appellera la *strate maximale*). La question qui se pose est si une telle description explicite est possible pour les autres strates de M_g et de $M_g(h)$. La réponse est positive ! Pour l'expliquer, on introduit une autre application sur l'espace de phases, à nouveau à valeurs dans $\{0, 1, \dots, g\}$:

$$\begin{aligned} \rho : M_g &\longrightarrow \{0, \dots, g\} \\ \begin{pmatrix} v(x) & u(x) \\ w(x) & -v(x) \end{pmatrix} &\longmapsto \deg \text{PGCD}(u(x), v(x), w(x)). \end{aligned}$$

Cette fois-ci il est facile de montrer que cette application est surjective. Grâce à la théorie des sous-résultants, rappelée dans la Section 2.3, nous pouvons démontrer que les fibres de ρ , qui sont donc toutes non vides, sont des variétés quasi-affines, qui forment une stratification de M_g . Pour $i = 0, 1, \dots, g$, notons pas $S_{g,i}$ l'ensemble de matrices $A(x) = \begin{pmatrix} v(x) & u(x) \\ w(x) & -v(x) \end{pmatrix}$ où $\deg(\text{PGCD}(u, v, w)) = g - i$. On a alors le résultat suivant (Proposition 4.8) :

Proposition 1.4. *La famille $(S_{g,i})_{i \in \{0, \dots, g\}}$ définit une stratification de M_g .*

Comme dans le cas de la stratification introduite dans le paragraphe 1.3.1, nous pouvons restreindre la stratification $(S_{g,i})_{i \in \{0, \dots, g\}}$ de M_g aux fibres de l'application moment \mathbf{H} . Posons $S_{g,i}(h) := S_{g,i} \cap M_g(h)$. Nous avons alors le résultat précis suivant (voir Proposition 4.24) :

Proposition 1.5. *Pour $h \in H_g$, la variété $S_{g,i}(h)$ est non-vide si et seulement si $g - \rho(h) \leq i \leq g$. La fibre $M_g(h)$ est donc stratifiée par $\rho(h) + 1$ strates.*

Dans cette proposition, $\rho(h)$ est le degré maximal des polynômes unitaires $P(x)$ tels que $P^2(x)$ divise $h(x)$ (de tels polynômes $P(x)$ sont appelés des *diviseurs quadratiques* de h). On appelle cet entier, qui contient une information importante sur la fibre $M_g(h)$ le *degré de non-régularité* de h .

Le résultat principal concernant les deux stratifications de M_g est qu'elles coïncident, c'est-à-dire elles ont les mêmes strates. Par conséquent, il en est de même pour les deux stratifications de chaque fibre $M_g(h)$ (voir Proposition 4.16) :

Proposition 1.6. *Pour toute matrice $A(x)$ de M_g on a $\sigma(A) = g - \rho(A)$. Ainsi, les deux stratifications définies par ρ et par σ coïncident, tout comme les stratifications induites sur toutes les fibres $M_g(h)$.*

Comme conséquence immédiate nous avons le résultat suivant :

Corollaire 1.7. *Les variétés $M_{g,i}$ sont non vides pour $i = 0, 1, \dots, g$. Pour tout $h \in H_g$, la variété $M_{g,i}(h)$ est non vide si et seulement si $g - \rho(h) \leq i \leq g$.*

1.3.3 La stratification par singularité

Toute variété affine V admet une stratification naturelle, où les strates sont maximales lisses. La construction est classique. Les singularités de V forment un fermé V^{sing} dans V , donc nous pouvons écrire $V = V^{sm} \sqcup V^{sing}$, où V^{sm} est une variété quasi-affine non-singulière. Puisque V^{sing} est un fermé de Zariski, on peut répéter cette construction sur V^{sing} et donc le décomposer en sa partie non-singulière (qui est la réunion disjointe de une ou plusieurs variétés quasi-affines, mais que l'on prendra comme une seule strate) et sa partie singulière. Appliqué au cas des fibres $M_g(h)$ de l'application moment \mathbf{H} , on obtient une autre stratification de ces fibres. Cette stratification est définie par le rang de \mathbf{H} en tout point, et donc par le rang de la matrice jacobienne de \mathbf{H} en tout point. Nous montrons que cette matrice s'exprime en termes du résultant des coefficients de $A(x)$, ce qui nous permet de le calculer explicitement et de l'exprimer en termes du PGCD de ces coefficients (voir Théorème 4.38) :

Proposition 1.8. *Le rang de la matrice jacobienne de \mathbf{H} au point $A(x)$ est égal à $2g + 1 - \rho(A)$.*

D'une part, cela prouve que cette troisième stratification des fibres coïncide avec les deux premières (par degré d'indépendance des champs D_i , ou par PGCD). Ensuite, cela prouve que toutes les fibres singulières $M_g(h)$ (c'est-à-dire au-dessus d'une courbe affine *singulière* $y^2 = h(x)$) sont effectivement singulières, ce qui justifie la terminologie que nous utilisons. De plus, cela montre que toutes les strates que nous avons considérées sont (des variétés quasi-affines) non-singulières. Mais la conséquence la plus remarquable est que le bord de chaque strate est constitué exactement du lieu singulier de la fermeture de la strate. Le phénomène que les champs du système intégrable deviennent précisément dépendants sur les points singuliers de la fermeture de la strate qu'elles définissent nous semble assez exceptionnel, car à notre connaissance il n'a pas été observé pour d'autres systèmes intégrables, et il ne se produit sûrement pas pour tout système intégrable, même s'il est algébriquement intégrable.

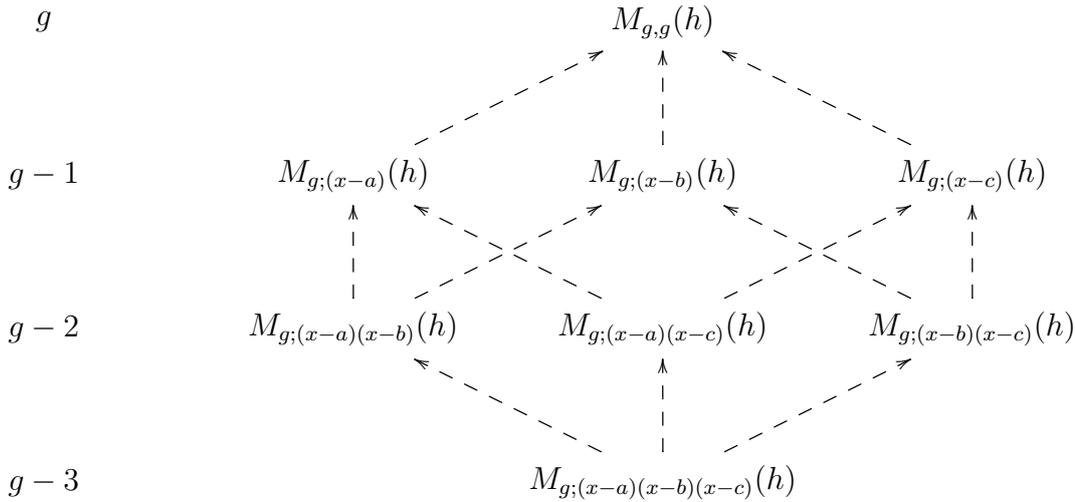
1.3.4 La stratification fine des fibres $M_g(h)$

Les trois stratifications (identiques) des fibres singulières $M_g(h)$ de l'application moment $\mathbf{H} : M_g \rightarrow H_g$ s'avèrent n'être pas assez fines pour décrire ces fibres; même si toutes les strates sont invariantes par les flots des champs hamiltoniens D_0, D_1, \dots, D_{g-1} (ou, de façon équivalente, des champs hamiltoniens D_a , avec $a \in \mathbb{C}$), elles ne sont pas les plus petites sous-variétés avec cette propriété. Pour un $h \in H_g$ donné, que l'on suppose de discriminant nul, on peut associer à chaque diviseur quadratique P de h (voir ci-dessus pour la définition) le sous-ensemble de $M_g(h)$, défini par

$$M_{g;P}(h) := \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} v(x) & u(x) \\ w(x) & -v(x) \end{pmatrix} \in M_g(h) \mid \text{PGCD}(u(x), v(x), w(x)) = P \right\}.$$

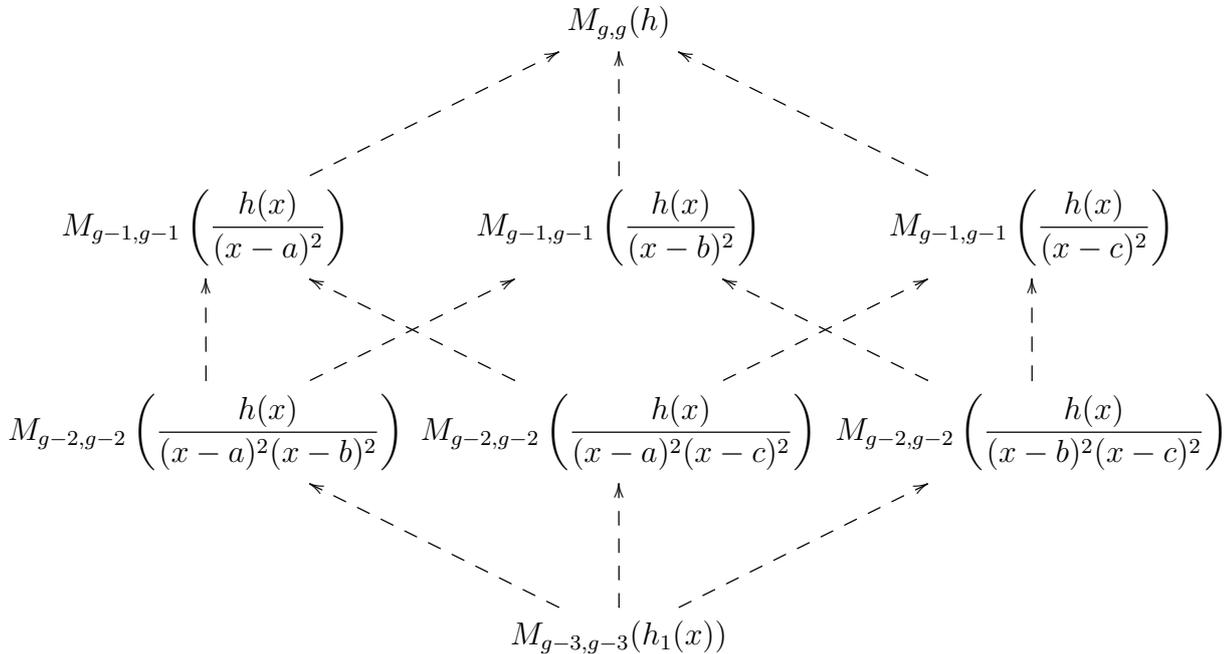
Ces variétés quasi-affines forment une stratification plus fine que les stratifications des fibres définies auparavant, car si $A(x) \in M_{g;P}(h)$ alors $A(x) \in M_{g,g-\deg(P)}(h)$, donc la strate $M_{g;P}(h)$ est contenue dans la strate $M_{g,g-\deg(P)}(h)$. On appelle cette stratification la *stratification fine* des fibres. D'après ce qui précède, toutes les strates fines sont lisses. De plus, nous montrons que chaque strate fine de M_g est isomorphe (en tant que variété, muni d'une famille de champs de vecteurs) avec une strate maximale d'une fibre de $M_{g'}$, pour un certain $g' < g$. Nous illustrons cela sur un exemple, repris dans le texte.

Soit $g \geq 3$ et soient a, b et c trois éléments distincts de \mathbb{C} . Soit $h(x) = (x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2h_1(x)$ avec h_1 un polynôme unitaire de degré $2g-5$ et de discriminant non nul. Les diviseurs quadratiques de h sont $1, x-a, x-b, x-c, (x-a)(x-b), (x-a)(x-c), (x-b)(x-c)$ et $(x-a)(x-b)(x-c)$. La fibre $M_g(h)$ contient donc 8 strates fines, que l'on représente par le diagramme suivant :



Chaque sommet de ce diagramme est une strate de la stratification fine et un sommet A est lié à un sommet B par une suite de flèches \dashrightarrow si et seulement si $A \subset \overline{B}$. Aussi, chaque ligne du diagramme est composée de toutes les strates déterminées par le même degré de liberté (indiqué à gauche) des champs de vecteurs D_0, \dots, D_{g-1} .

Pour illustrer l'isomorphisme entre ces 8 strates et 8 strates maximales de fibres d'autres systèmes de Mumford, nous répétons ce diagramme, où chaque entrée est remplacée par la strate maximale qui y est isomorphe.



1.4 Description géométro-algébrique des strates maximales

D'après ce qui précède, il suffit d'étudier les strates maximales $M_{g,g}(h)$ des fibres $M_g(h)$ de l'application moment $\mathbf{H} : M_g \rightarrow H_g$ pour tout $g \in \mathbb{N}^*$ et $h \in H_g$: les autres strates y sont isomorphes. Dans le cas où h est sans racines multiples, $M_g(h)$ est un ouvert de la jacobienne de la courbe hyperelliptique $y^2 = h(x)$, comme nous l'avons rappelé plus haut. En utilisant les morphismes entre différents systèmes de Mumford que nous avons construits, nous avons ainsi une description d'une grande partie des strates fines. La question qui reste est de décrire les strates maximales des fibres singulières $M_g(h)$. La même question se pose bien sûr pour les strates maximales des fibres singulières $M'_g(h)$ des systèmes de Mumford *pairs*, mais cette question sera étudié ici uniquement pour le cas impair ; même si la plupart des techniques utilisées ici sont facilement adaptables au cas pair, les fibres de l'application moment \mathbf{H}' ne sont pas irréductibles, en général (penser par exemple à la courbe hyperelliptique singulière $y^2 = x^4$).

On rappelle d'abord, suivant Serre⁴, la construction de la jacobienne généralisée, que nous utilisons dans le cadre d'une courbe hyperelliptique avec potentiellement plusieurs points singuliers, ce qui demande d'adapter certains résultats et certaines constructions de Serre. Pour définir la jacobienne généralisée, on part d'une courbe projective lisse \bar{C}' et d'une module \mathfrak{m} de \bar{C}' , c'est-à-dire un diviseur effectif de \bar{C}' . On retrouve telles données en partant d'une courbe singulière \bar{C} et en prenant sur sa normalisée \bar{C}' le diviseur sur \bar{C}' correspondant via la normalisation aux points singuliers de \bar{C} . Pour un entier π adapté (que l'on peut calculer à partir du couple (\bar{C}', \mathfrak{m}) , le produit symétrique $\bar{C}'^{(\pi)}$ admet une loi de groupe birationnel, définie par la \mathfrak{m} -équivalence, où deux diviseurs dont le support est disjoint du support de \mathfrak{m} sont dit \mathfrak{m} -équivalents s'ils sont équivalents par une fonction rationnelle qui vaut 1, modulo \mathfrak{m} , en chaque point du module \mathfrak{m} (voir le Chapitre 5 pour des précisions). Un tel groupe birationnel est birationnellement isomorphe à un groupe algébrique ; dans le cas présent, ce groupe algébrique est appelé la *jacobienne généralisée* de \bar{C}' (relativement au module \mathfrak{m}), noté $J_{\mathfrak{m}}(\bar{C}')$. Serre décrit explicitement la jacobienne généralisée $J_{\mathfrak{m}}(\bar{C}_1)$ comme extension de la jacobienne usuelle $\text{Jac}(\bar{C}')$. et montre qu'elle est isomorphe au groupe de diviseurs de degré zéro sur \bar{C}' , étrangers à \mathfrak{m} , modulo \mathfrak{m} -équivalence.

Appliqué au système de Mumford, nous considérons la strate maximale $M_{g,g}(h)$ de $M_g(h)$, où h admet des racines multiples. On peut alors écrire de façon unique $h(x) = P(x)^2 h'(x)$, où $h'(x)$ est sans racines multiples et la courbe hyperelliptique d'équation affine $C' : z^2 = h'(x)$ est non-singulière, et elle est la normalisée de la courbe hyperelliptique d'équation affine $C : y^2 = h(x)$. Utilisant le morphisme de normalisation $\phi : C' \rightarrow C$, les points singuliers de C définissent un module \mathfrak{m} sur \bar{C}' . Sous ces conditions on obtient le théorème suivant :

Théorème 1.9. *La strate maximale $M_{g,g}(h)$ de $M_g(h)$ est isomorphe à un ouvert de la jacobienne généralisée $J_{\mathfrak{m}}(\bar{C}')$.*

Les champs de vecteurs D_i qui sont tangents à $M_{g,g}(h)$ et y sont indépendants en tout point sont envoyés par cet isomorphisme sur des champs invariants sur le groupe algébrique $J_{\mathfrak{m}}(\bar{C}')$, c'est-à-dire l'isomorphisme linéarise tous les champs de vecteurs D_0, D_1, \dots, D_{g-1} .

1.5 Structure de cette thèse

Cette thèse est composée de trois parties. La première partie consiste de quelques rappels et compléments, faits dans les chapitres 2 et 3. Dans le chapitre 2 nous donnons les définitions et propriétés de base des systèmes intégrables, tout en faisant quelques rappels sur les structures de Poisson. Nous nous attardons un peu plus longuement sur les sous-résultants, car dans notre

4. Serre se restreint à l'étude de la jacobienne généralisée dans le cas d'une courbe algébrique avec un seul point singulier.

usage des sous-résultants nous ne connaissons pas le degré d'un des deux polynômes. Dans le chapitre 3 nous rappelons les systèmes de Mumford impairs et pairs et leur description comme systèmes algébriquement intégrables. Dans la seconde partie, le chapitre 4, nous construisons les différentes stratifications de l'espace de phase des systèmes de Mumford et de toutes les fibres de leur application moment. Ces stratifications sont comparées et illustrées par des exemples de courbes avec plusieurs singularités. Nous y comparons également les strates *fin* issues de différents systèmes de Mumford (c'est-à-dire des strates des fibres de M_g et de $M_{g'}$, avec $g \neq g'$); précisément nous montrons que chaque strate fine d'une fibre singulière de M_g est isomorphe (en tant que variété, muni d'une famille de champs de vecteurs) avec une strate maximale d'une fibre de $M_{g'}$, avec $g' < g$. Il nous reste alors, dans la troisième partie de donner une description géométro-algébrique des strates maximales des fibres de M_g . Nous faisons cela dans le chapitre 5, où nous démontrons que chaque strate maximale est isomorphe à un ouvert d'une jacobienne généralisée.

Chapitre 2

Préliminaires

2.1 Structures de Poisson

Le système de Mumford est un système intégrable dont l'espace de phases est un espace affine muni d'une structure de Poisson. Nous ferons un rappel sur les structures de Poisson que nous restreindrons aux espaces affines. Les propriétés des structures de Poisson sur un espace affine sont essentiellement les mêmes que les propriétés des structures de Poisson sur un espace vectoriel ; nous référons au livre [14] où le cas de structures de Poisson sur les espaces vectoriels est traité en détail.

Pour V un espace affine sur un corps \mathbb{K} , on note par $\mathcal{F}(V)$ l'algèbre des fonctions polynomiales sur V et par $\mathfrak{X}^1(V)$ le $\mathcal{F}(V)$ -module des champs de vecteurs polynomiaux sur V .

Définition 2.1. Soit V un espace affine de dimension finie. Une application bilinéaire $\{\cdot, \cdot\}$ de $\mathcal{F}(V) \times \mathcal{F}(V)$ dans $\mathcal{F}(V)$ vérifiant

- (1) $(\mathcal{F}(V), \{\cdot, \cdot\})$ est une algèbre de Lie,
- (2) Pour tout F, G et H dans $\mathcal{F}(V)$ on a

$$\{F, GH\} = G\{F, H\} + H\{F, G\} \quad (\text{relation de Leibniz}),$$

est appelée un *crochet de Poisson* sur $\mathcal{F}(V)$. On dira que V est muni d'une *structure de Poisson*. On notera par $(V, \{\cdot, \cdot\})$ l'espace affine V muni du crochet de Poisson $\{\cdot, \cdot\}$.

Un crochet de Poisson sur un espace affine V définit une bidériveration sur $\mathcal{F}(V)$ car il est antisymétrique et vérifie la relation de Leibniz.

Soit F une fonction de $\mathcal{F}(V)$. L'application linéaire

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_F : \mathcal{F}(V) &\longrightarrow \mathcal{F}(V) \\ G &\longmapsto \mathcal{X}_F(G) = \{G, F\} \end{aligned}$$

est une dériveration de l'algèbre $\mathcal{F}(V)$, par conséquent elle définit un champ de vecteurs (polynomial) sur V . Ce champ de vecteurs est noté \mathcal{X}_F et est appelé le *champ hamiltonien* associé à F . L'ensemble de tous les champs hamiltoniens sera noté $\text{Ham}(V, \{\cdot, \cdot\})$.

L'identité de Jacobi du crochet de Poisson $\{\cdot, \cdot\}$ implique que pour toutes les fonctions F et G de $\mathcal{F}(V)$

$$\mathcal{X}_{\{F, G\}} = -[\mathcal{X}_F, \mathcal{X}_G],$$

où $[\cdot, \cdot]$ est le crochet de Lie des champs de vecteurs. Autrement dit, l'application linéaire

$$\begin{aligned} \mathcal{X} : \mathcal{F}(V) &\longrightarrow \mathfrak{X}^1(V) \\ F &\longmapsto \mathcal{X}_F \end{aligned}$$

est un anti-morphisme d'algèbres de Lie.

Une fonction $F \in \mathcal{F}(V)$ est dite de *Casimir* si son champ hamiltonien associé \mathcal{X}_F est nul. On note par $\text{Cas}(V, \{\cdot, \cdot\})$ l'ensemble de toutes les fonctions de Casimir. Autrement dit $\text{Cas}(V, \{\cdot, \cdot\})$ est le centre de l'algèbre de Lie $(\mathcal{F}(V), \{\cdot, \cdot\})$. Par la relation de Leibniz on conclut que $\text{Cas}(V, \{\cdot, \cdot\})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(V)$.

Soit V un espace affine de dimension d , doté de coordonnées linéaires x_1, \dots, x_d . Toute bidérivation antisymétrique B de $\mathcal{F}(V)$ s'écrit de façon unique sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} B : \mathcal{F}(V) \times \mathcal{F}(V) &\longrightarrow \mathcal{F}(V) \\ (F, G) &\longmapsto B(F, G) = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d x_{ij} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial G}{\partial x_j} \end{aligned}$$

avec les $x_{ij} \in \mathcal{F}(V)$ tels que $x_{ij} = -x_{ji}$ pour tout $1 \leq i, j \leq d$. On a $x_{i,j} = B(x_i, x_j)$ pour tout $1 \leq i, j \leq d$. Toute bidérivation antisymétrique de $\mathcal{F}(V)$ est donc décrite par une matrice de fonctions polynomiales carrée $d \times d$ antisymétrique

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{1,2} & \dots & x_{1,d} \\ -x_{1,2} & 0 & \dots & x_{2,d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -x_{1,d} & -x_{2,d} & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Une bidérivation antisymétrique B définit un crochet de Poisson si et seulement si pour tout $1 \leq i < j < k \leq d$ on a

$$B(B(x_i, x_j), x_k) + B(B(x_j, x_k), x_i) + B(B(x_k, x_i), x_j) = 0. \quad (2.2)$$

Il suffit donc de vérifier l'identité de Jacobi pour des fonctions coordonnées. On dit alors que la matrice (2.1) est une *matrice de Poisson*.

Soit $(V, \{\cdot, \cdot\})$ un espace affine muni d'une structure de Poisson et soit m un point de V . On note par $\text{Ham}_m(V, \{\cdot, \cdot\})$ l'ensemble des valeurs des champs hamiltoniens au point m . C'est un sous-espace vectoriel de l'espace tangent $T_m V$. La dimension de $\text{Ham}_m(V, \{\cdot, \cdot\})$ est appelée le *rang de la structure de Poisson au point m* et est notée $\text{rg}_m(\{\cdot, \cdot\})$. Le rang de la structure de Poisson au point m est égal au rang de toute matrice de Poisson qui lui est associée, au point m . Le rang est pair car le rang d'une matrice antisymétrique est toujours pair. On pose

$$\text{rg}(V, \{\cdot, \cdot\}) = \max_{m \in V} \text{rg}_m(\{\cdot, \cdot\})$$

et on l'appelle le *rang* de la structure de Poisson $\{\cdot, \cdot\}$. Aussi, on note par V_r le sous-ensemble de V , défini par

$$V_r = \{m \in V \mid \text{rg}_m(\{\cdot, \cdot\}) \geq 2r\}.$$

Le sous-ensemble V_r est un ouvert de Zariski ; il sera non-vide, et donc dense dans V , si et seulement si $2r \leq \text{rg}(V, \{\cdot, \cdot\})$.

Exemple 2.2. Structures de Poisson constantes.

Soit V un espace affine de dimension d muni de coordonnées linéaires x_1, \dots, x_d . On considère une bidérivation antisymétrique définie par

$$\begin{aligned} \{\cdot, \cdot\} : \mathcal{F}(V) \times \mathcal{F}(V) &\longrightarrow \mathcal{F}(V) \\ (F, G) &\longmapsto \{F, G\} = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d x_{ij} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial G}{\partial x_j}, \end{aligned}$$

où chaque x_{ij} est une fonction constante $x_{ij} \in \mathbb{C}$.

On a alors

$$\{\{x_i, x_j\}, x_k\} = 0 \text{ pour tout } 1 \leq i, j, k \leq d.$$

D'après (2.2), le crochet $\{\cdot, \cdot\}$ définit une structure de Poisson sur $\mathcal{F}(V)$. On l'appelle une structure de Poisson *constante*.

Exemple 2.3. Structures de Poisson linéaires.

Soit $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$ une algèbre de Lie de dimension finie d , munie d'une base (x_1, \dots, x_d) . On note par \mathfrak{g}^* et \mathfrak{g}^{**} ses espaces vectoriels dual et bidual respectivement. On a un isomorphisme canonique entre \mathfrak{g} et son bidual

$$\begin{aligned} \widehat{\cdot} : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g}^{**} \\ x &\longmapsto \widehat{x}. \end{aligned}$$

Rappelons qu'il est définie par $\widehat{x}(\xi) = \langle \xi, x \rangle$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$ et $\xi \in \mathfrak{g}^*$. Cet isomorphisme nous permet de transporter la structure de Lie de \mathfrak{g} vers \mathfrak{g}^{**} . On aura alors un crochet de Lie sur \mathfrak{g}^{**} tel que

$$[\widehat{x}, \widehat{y}] = \widehat{[x, y]},$$

pour tout $x, y \in \mathfrak{g}$. On définit sur $\mathcal{F}(\mathfrak{g}^*)$ la bidérivation antisymétrique suivante : pour tout F et G dans $\mathcal{F}(\mathfrak{g}^*)$ et $\xi \in \mathfrak{g}^*$,

$$\{F, G\}(\xi) = \langle \xi, [d_\xi F, d_\xi G] \rangle.$$

Dans cette formule, le crochet de Lie est celui sur \mathfrak{g}^{**} , construit ci-dessus. Les différentielles $d_\xi F$ et $d_\xi G$ sont vues ici comme éléments de \mathfrak{g}^{**} sous l'identification canonique de $T_\xi \mathfrak{g}^*$ avec \mathfrak{g}^* .

Soit $x \in \mathfrak{g}$. Alors \widehat{x} est une fonction sur \mathfrak{g}^* et puisqu'elle est linéaire on a pour tout $\xi \in \mathfrak{g}^*$ l'égalité

$$d_\xi \widehat{x} = \widehat{x}.$$

Par conséquent, pour $1 \leq i, j \leq d$ et pour tout ξ de \mathfrak{g}^* on a

$$\{\widehat{x}_i, \widehat{x}_j\}(\xi) = \langle \xi, [d_\xi \widehat{x}_i, d_\xi \widehat{x}_j] \rangle = \langle \xi, [\widehat{x}_i, \widehat{x}_j] \rangle = \left\langle \widehat{[x_i, x_j]}, \xi \right\rangle,$$

donc $\{\widehat{x}_i, \widehat{x}_j\} = \widehat{[x_i, x_j]}$. Ainsi, pour $1 \leq i, j, k \leq d$ on a

$$\{\{\widehat{x}_i, \widehat{x}_j\}, \widehat{x}_k\} = \{\widehat{[x_i, x_j]}, \widehat{x}_k\} = \widehat{[[x_i, x_j], x_k]}.$$

Comme le crochet de Lie $[\cdot, \cdot]$ satisfait à l'identité de Jacobi, ce calcul montre que la bidérivation $\{\cdot, \cdot\}$ satisfait à l'identité (2.2) et est donc bien un crochet de Poisson sur $\mathcal{F}(\mathfrak{g}^*)$. La structure de Poisson qu'elle définit sur \mathfrak{g}^* est appelée structure de *Lie-Poisson* ou structure de Poisson *linéaire*.

Exemple 2.4. Structures de Poisson affines.

Les structures de Poisson que nous utiliserons sont la somme d'une structure de Poisson constante et d'une structure de Lie-Poisson, vérifiant une relation de compatibilité, détaillée ci-dessous.

Soit V un espace vectoriel (ou affine) de dimension finie d , muni de coordonnées linéaires x_1, \dots, x_d . Soient $\{\cdot, \cdot\}_c$ une structure de Poisson constante et $\{\cdot, \cdot\}_l$ une structure de Poisson linéaire définie sur $\mathcal{F}(V)$. On définit la bidérivation $\{\cdot, \cdot\}$ de $\mathcal{F}(V)$ suivante :

$$\{\cdot, \cdot\} = \{\cdot, \cdot\}_l + \{\cdot, \cdot\}_c.$$

Pour tout i, j et k avec $1 \leq i, j, k \leq d$ on a

$$\begin{aligned} \{\{x_i, x_j\}, x_k\} &= \{\{x_i, x_j\}_l + \{x_i, x_j\}_c, x_k\} \\ &= \{\{x_i, x_j\}_l, x_k\}_l + \{\{x_i, x_j\}_c, x_k\}_c. \end{aligned}$$

Comme on l'a vu, le crochet $\{\cdot, \cdot\}_l$ vérifie l'identité de Jacobi. Pour que $\{\cdot, \cdot\}$ soit un crochet de Poisson sur $\mathcal{F}(V)$, il est alors nécessaire et suffisant que l'on ait

$$\{\{x_i, x_j\}_l, x_k\}_c + \{\{x_j, x_k\}_l, x_i\}_c + \{\{x_k, x_i\}_l, x_j\}_c = 0 ,$$

pour tout $1 \leq i, j, k \leq d$. On dit alors que $\{\cdot, \cdot\}$ est une structure de Poisson *affine* ou structure de *Lie-Poisson modifiée* sur V .

Définition 2.5. Soient $(V, \{\cdot, \cdot\}_1)$ et $(W, \{\cdot, \cdot\}_2)$ deux espaces affines munis d'une structure de Poisson. Une application polynomiale $\phi : V \rightarrow W$ est un *morphisme de Poisson* si le morphisme d'algèbres

$$\begin{aligned} \phi^* : \mathcal{F}(W) &\longrightarrow \mathcal{F}(V) \\ F &\longmapsto \phi^* F = F \circ \phi , \end{aligned}$$

est un morphisme de Lie, c'est-à-dire elle satisfait

$$\phi^* \{F, G\}_2 = \{\phi^*(F), \phi^*(G)\}_1 ,$$

pour tout F et G dans $\mathcal{F}(W)$. Pour que cette condition soit satisfaite, il faut et suffit que

$$\phi^* \{x_i, x_j\}_2 = \{\phi^*(x_i), \phi^*(x_j)\}_1 ,$$

pour tout $i < j$ avec $1 \leq i, j \leq d$, où x_1, x_2, \dots, x_d est un système de coordonnées linéaires sur W .

2.2 Systèmes intégrables

Dans cette section nous allons introduire les définitions et les propriétés de base des systèmes intégrables qui nous seront utiles dans l'étude du système de Mumford. Nous référons au livre [3] pour plus d'information sur ces rappels ainsi que pour les preuves des propriétés qui seront énoncées.

Dans cette section, le corps \mathbb{K} est le corps des réels ou des complexes. Les espaces affines que nous considérons sont définis sur \mathbb{K} et sont de dimension finie.

Définition 2.6. Soit $(V, \{\cdot, \cdot\})$ un espace affine muni d'une structure de Poisson. Deux fonctions F et G de $\mathcal{F}(V)$ sont dites en *involution* si

$$\{F, G\} = 0.$$

Une famille de fonctions $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_s)$ de $\mathcal{F}(V)$ est dite *involution* si toutes les paires de fonctions de \mathbf{F} sont en involution.

Soit V un espace affine de dimension finie sur \mathbb{K} . Toute famille $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_s)$ de $\mathcal{F}(V)$ définit une application, également notée \mathbf{F} :

$$\begin{aligned} \mathbf{F} : V &\longrightarrow \mathbb{K}^s \\ m &\longmapsto (F_1(m), \dots, F_s(m)) . \end{aligned}$$

Pour tout $c \in \mathbb{K}^s$, le sous-ensemble $\mathbf{F}^{-1}(c)$ est appelé la *fibres au dessus* du point c , noté \mathbf{F}_c . Soit m un point de V . La *fibres* passant par m est la variété affine, notée \mathbf{F}_m définie par

$$\mathbf{F}_m = \mathbf{F}_{\mathbf{F}(m)} = \{p \in V \mid \mathbf{F}(p) = \mathbf{F}(m)\}.$$

La famille $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_s)$ de $\mathcal{F}(V)$ est dite *indépendante* si l'ensemble

$$\mathcal{U}_{\mathbf{F}} = \{m \in V \text{ tel que } d_m F_1 \wedge \dots \wedge d_m F_s \neq 0\}$$

est un ouvert dense de V ; puisque $\mathcal{U}_{\mathbf{F}}$ est un ouvert de Zariski de V , cela revient à dire que $\mathcal{U}_{\mathbf{F}} \neq \emptyset$.

Proposition 2.7. Soit $(V, \{\cdot, \cdot\})$ un espace affine de dimension d muni d'une structure de Poisson de rang $2r$. Soit $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_s)$ une famille de fonctions indépendantes de $\mathcal{F}(V)$. On a les propriétés suivantes :

- Si les fonctions F_1, \dots, F_s sont des Casimirs, alors $s \leq d - 2r$.
- Si \mathbf{F} est une famille involutive et $s = d - r$, pour tout $m \in \mathcal{U}_{\mathbf{F}} \cap V_r$ on a

$$\dim \langle \mathcal{X}_{F_1}|_m, \dots, \mathcal{X}_{F_s}|_m \rangle = r.$$

Définition 2.8. Soit $(V, \{\cdot, \cdot\})$ un espace affine de dimension d , muni d'une structure de Poisson de rang $2r$. Soit $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_s)$ une famille de fonctions de $\mathcal{F}(V)$. Le triplet $(V, \{\cdot, \cdot\}, \mathbf{F})$ est un système intégrable (au sens de Liouville) de rang $2r$ si :

- $s = d - r$,
- \mathbf{F} est involutive,
- \mathbf{F} est indépendante.

La famille de fonctions $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_s)$ de $\mathcal{F}(V)$, vue comme application $\mathbf{F} : V \rightarrow \mathbb{K}^s$, est appelée l'application moment du système intégrable $(V, \{\cdot, \cdot\}, \mathbf{F})$.

Proposition 2.9. Soit $(V, \{\cdot, \cdot\}, \mathbf{F})$ un système intégrable de rang $2r$, avec $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_s)$. L'ouvert $\mathcal{U}_{\mathbf{F}} \cap V_r$ est conservé par les flots de tous les champs de vecteurs \mathcal{X}_{F_i} , $1 \leq i \leq s$. Ces $\mathcal{X}_{F_1}, \dots, \mathcal{X}_{F_s}$ définissent sur cet ouvert une distribution D de rang r , intégrable au sens de Frobenius.

Pour tout point $m \in \mathcal{U}_{\mathbf{F}} \cap V_r$, la variété intégrale maximale de la distribution D passant par le point m est appelée la variété invariante de \mathbf{F} , passant par m . On la notera \mathbf{F}'_m . On a $\mathbf{F}'_m \subseteq \mathbf{F}_m$ car les champs hamiltoniens sont tangents aux fibres de \mathbf{F} , mais on n'a pas toujours égalité ; toutefois, chaque fibre de \mathbf{F} est la réunion disjointe des variétés invariantes qu'elle contient.

Le théorème de Liouville décrit sous certaines conditions la géométrie des variétés invariantes d'un système intégrable réel. On l'écrira ici dans le cas où l'espace de phase est un espace affine.

Théorème 2.10 (Théorème de Liouville). Soit V un espace affine réel de dimension d et soit $(V, \{\cdot, \cdot\}, \mathbf{F})$ un système intégrable de rang $2r$. Soit $m \in \mathcal{U}_{\mathbf{F}} \cap V_r$.

- Si \mathbf{F}'_m est compacte, alors il existe un difféomorphisme entre \mathbf{F}'_m et le tore $\mathbb{T}^r = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^r$, tel que l'image par ce difféomorphisme de chaque champ hamiltonien $\mathcal{X}_{F_1}, \dots, \mathcal{X}_{F_s}$ est un champ de vecteurs constant (i.e., invariant par translation).
- Si \mathbf{F}'_m est non-compacte et les flots des champs hamiltoniens de $\mathcal{X}_{F_1}, \dots, \mathcal{X}_{F_s}$ sont complets sur \mathbf{F}'_m , alors il existe un difféomorphisme de \mathbf{F}'_m vers un cylindre $\mathbb{R}^{r-q} \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^q$ avec $0 \leq q < r$ tel que pour $1 \leq i \leq s$ l'image des champs hamiltoniens \mathcal{X}_{F_i} par ce difféomorphisme soient des champs de vecteurs constants.

La définition suivante est l'analogie en complexe de la notion d'intégrabilité au sens de Liouville :

Définition 2.11. Soit V un espace affine complexe de dimension d et soit $(V, \{\cdot, \cdot\}, \mathbf{F})$ un système intégrable où \mathbf{F} est une famille de s fonctions (F_1, \dots, F_s) . Le triplet $(V, \{\cdot, \cdot\}, \mathbf{F})$ est un système algébriquement complètement intégrable (a.c.i.) si pour c dans un ouvert de Zariski dense de \mathbb{C}^s , la fibre \mathbf{F}_c est une partie affine d'une variété abélienne et si les champs de vecteurs hamiltoniens $\mathcal{X}_{F_1}, \dots, \mathcal{X}_{F_s}$, restreints à \mathbf{F}_c , sont invariants par translation.

Les systèmes de Mumford pairs et impairs, que nous étudierons dans cette thèse, sont des exemples de systèmes algébriquement complètement intégrables. Dans ce cas, les variétés abéliennes qui apparaissent comme fibres (lisses) de l'application moment sont des jacobienes de courbes hyperelliptiques.

Proposition 2.12. *Le déterminant de la matrice $S(P, Q)$ (respectivement le déterminant des matrices $S_j^{[i]}(P, Q)$) est indépendant du choix de l'entier non nul $m \geq 1$.*

Preuve. Supposons que dans l'écriture (2.4) de Q on ait $b_m = 0$. Notons $Q_1 = \sum_{i=0}^{m-1} b_i x^i$. On a

$$S(P, Q) = \left(\begin{array}{c|cccccccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline a_{n-1} & 1 & \cdots & 0 & b_{m-1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-2} & a_{n-1} & \cdots & 0 & b_{m-2} & b_{m-1} & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & a_{n-1} & b_0 & b_1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & a_{n-2} & 0 & b_0 & & b_{m-1} \\ a_0 & \vdots & & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ & a_0 & & \vdots & & & & b_1 \\ & & & a_0 & & & & b_0 \end{array} \right).$$

Soit $S^1(P, Q)$ la sous-matrice de $S(P, Q)$ qui se compose des colonnes $2, \dots, m+n$ et des lignes $2, \dots, m+n$ de $S(P, Q)$. Alors $S^1(P, Q) = S(P, Q_1)$, et donc

$$\det(S(P, Q)) = \det(S^1(P, Q)) = \det(S(P, Q_1)).$$

Par récurrence, ceci montre que $\det(S(P, Q))$ est indépendant du choix de $m \geq 1$. Avec les mêmes arguments, les déterminants $\det(S_j^{[k]}(P, Q))$ sont indépendants du choix de $m \geq 1$. \square

Définition 2.13. Soit $j \leq m$. Le j -ème sous-résultant de P et de Q est le polynôme

$$R_j(P, Q) = \sum_{i=0}^j \det(S_j^{[i]}(P, Q)) x^i.$$

En particulier, $R_0(P, Q)$ est noté $R(P, Q)$ et est appelé *le résultant* des polynômes P et Q .

Il est clair que le résultant ainsi que le résultant de P et Q , ainsi que tous leurs sous-résultants, sont des polynômes en fonction des coefficients des deux polynômes P et Q .

Remarque 2.14. Le résultant et les sous-résultants d'un polynôme unitaire P et du polynôme nul sont toujours nuls. Pour le voir, il suffit de prendre $m = 1$ et $b_0 = b_1 = 0$.

La première propriété fondamentale des sous-résultants est la suivante :

Proposition 2.15. *Soit P un polynôme unitaire et soit Q un polynôme non nul. Notons par j le degré de $\text{PGCD}(P, Q)$. Alors $R_0(P, Q) = R_1(P, Q) = \dots = R_{j-1}(P, Q) = 0$ et $R_j(P, Q) \neq 0$. De plus, $\text{PGCD}(P, Q)$ est égal à une constante multiplicative près au sous-résultant $R_j(P, Q)$.*

La proposition 2.15 généralise la propriété bien connue que deux polynômes sont premiers entre eux si et seulement si leur résultant est non-nul. On fera attention au cas $Q = 0$; alors $R_j(P, Q) = 0$ tandis que $\text{PGCD}(P, Q) = P$.

La proposition suivante est la seconde propriété fondamentale des sous-résultants :

Proposition 2.16. *Soient P un polynôme unitaire et Q un polynôme non nul de $\mathbb{C}[x]$ de degrés n et m respectivement. Si $\deg(\text{PGCD}(P, Q)) = j$ alors le sous-résultant $R_j(P, Q)$ divise les sous-résultants $R_i(P, Q)$ avec $0 \leq i \leq m$.*

Corollaire 2.17. *Soit P un polynôme de degré n et soit Q un polynôme non-nul de degré m avec $m \leq n$. Le polynôme Q divise P si et seulement si $R_0(P, Q) = R_1(P, Q) = \dots = R_{m-1}(P, Q) = 0$.*

Nous détaillons dans ce qui suit un procédé pour déterminer le degré du PGCD de deux polynômes, qui se généralise aux cas de plusieurs polynômes.

Définition 2.18. Soit $R(x) = \sum_{i=0}^k c_i x^i$ un polynôme et soit $l \in \mathbb{N}^*$, on note par $\mathbf{M}_{R,l}$ la matrice de l lignes et $k+l$ colonnes définie de la manière suivante :

$$\mathbf{M}_{R,l} = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \dots & \dots & c_{k-1} & c_k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_0 & c_1 & \dots & \dots & c_{k-1} & c_k & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & c_{k-l+1} & c_{k-l+2} & \dots & \dots & c_k \end{pmatrix}.$$

Proposition 2.19. *Soit $l \in \mathbb{N}^*$. Soit $R(x) = \sum_{i=0}^k c_i x^i$ et soit $\gamma \in \mathbb{C}$ une racine de R d'ordre n . Soit Γ la famille suivante de n vecteurs linéairement indépendants :*

$$\Gamma = \{(1, \gamma, \gamma^2, \dots, \gamma^{k+l})^t, (0, 1, 2\gamma, \dots, (k+l)\gamma^{k+l-1})^t, \dots, (0, 0, \dots, 0, A_{j-1}^{j-1}, A_j^{j-1}\gamma, \dots, A_{k+l}^{j-1}\gamma^{k+l-j+1})^t, \dots, (0, 0, \dots, 0, A_{n-1}^{n-1}, A_n^{n-1}\gamma, \dots, A_{k+l}^{n-1}\gamma^{k+l-n+1})^t\}$$

où pour tout $n, k \in \mathbb{N}$, on note

$$A_n^k = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!} & k \leq n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les vecteurs de la famille Γ sont dans le noyau de l'application linéaire $\mathbf{M}_{R,l}$.

Preuve. Montrons que $\mathbf{M}_{R,l}(0, 0, \dots, 0, A_{j-1}^{j-1}, A_j^{j-1}\gamma, \dots, A_{k+l}^{j-1}\gamma^{k+l-j+1})^t = (0, \dots, 0)^t$, pour tout $1 \leq j \leq n$:

$$\mathbf{M}_{R,l}(0, 0, \dots, 0, A_{j-1}^{j-1}, A_j^{j-1}\gamma, \dots, A_{k+l}^{j-1}\gamma^{k+l-j+1})^t = ((R(x))^{(j-1)}(\gamma), (xR(x))^{(j-1)}(\gamma), \dots, (x^l R(x))^{(j-1)}(\gamma))^t.$$

Comme γ est une racine d'ordre n et $j \leq n$, la dérivée $(j-1)$ -ème du polynôme $x^m R(x)$ évaluée au point γ est nulle et cela pour tout $m \in \mathbb{N}$. Par conséquent

$$\mathbf{M}_{R,l}(0, 0, \dots, 0, A_{j-1}^{j-1}, A_j^{j-1}\gamma, \dots, A_{k+l}^{j-1}\gamma^{k+l-j+1})^t = (0, 0, \dots, 0)^t.$$

□

Proposition 2.20. *Soit $l \in \mathbb{N}^*$. Soit $P(x) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ un polynôme unitaire de degré n , dont la factorisation est :*

$$P(x) = \prod_{i=1}^k (x - \alpha_i)^{n_i},$$

où les racines $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ sont distinctes deux à deux et où $\sum_{i=1}^k n_i = n$. Le noyau de l'application $\mathbf{M}_{P,l}$ est de dimension n et

$$\text{Ker}(\mathbf{M}_{P,l}) = \left\langle \left(0, 0, \dots, 0, A_{j_i-1}^{j_i-1}, A_{j_i}^{j_i-1} \alpha_i, \dots, A_{n+l}^{j_i-1} \alpha_i^{n+l-j_i+1} \right)^t, \text{ avec } 1 \leq i \leq k \text{ et } 1 \leq j_i \leq n_i \right\rangle.$$

Preuve. De la proposition 2.19, on sait que les n vecteurs linéairement indépendants

$$\left(0, 0, \dots, 0, A_{j_i-1}^{j_i-1}, A_{j_i}^{j_i-1} \alpha_i, \dots, A_{n+l}^{j_i-1} \alpha_i^{n+l-j_i+1} \right)^t \text{ avec } 1 \leq i \leq k \text{ et } 1 \leq j_i \leq n_i,$$

appartiennent à $\text{Ker}(\mathbf{M}_{P,l})$. Notons par (e_1, \dots, e_{n+l}) la base canonique de \mathbb{C}^{n+l} . L'image de $(e_{n+1}, \dots, e_{n+l})$ par $\mathbf{M}_{P,l}$ s'écrit sous la forme de la matrice carrée $l \times l$ triangulaire de déterminant 1

$$\mathbf{M}_{P,l}(e_{n+1}, \dots, e_{n+l}) = \begin{pmatrix} 1 & a_{n-1} & \dots & a_{n-l+1} \\ 0 & 1 & \dots & a_{n-l+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent $\dim(\text{Im}(\mathbf{M}_{P,l})) = l$. On sait que $\dim(\text{Ker}(\mathbf{M}_{P,l})) = n + l - \dim(\text{Im} \mathbf{M}_{P,l})$, donc $\dim(\text{Ker}(\mathbf{M}_{P,l})) = n$. D'où

$$\text{Ker}(\mathbf{M}_{P,l}) = \left\langle \left(0, 0, \dots, 0, A_{j_i-1}^{j_i-1}, A_{j_i}^{j_i-1} \alpha_i, \dots, A_{n+l}^{j_i-1} \alpha_i^{n+l-j_i+1} \right)^t, \text{ avec } 1 \leq i \leq k \text{ et } 1 \leq j_i \leq n_i \right\rangle.$$

□

Remarque 2.21. Soit Q un polynôme défini de la manière suivante :

$$Q(x) = 0x^{n+m} + \dots + 0x^{n+1} + \sum_{i=0}^n c_i x^i = 0x^{n+m} + \dots + 0x^{n+1} + c_n \prod_{i=1}^k (x - \alpha_i)^{n_i},$$

où les racines $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ sont distinctes deux à deux et où $\sum_{i=1}^k n_i = n$ et $c_n \in \mathbf{C}^*$. On a

$$\mathbf{M}_{Q,l} = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \dots & \dots & c_{n-1} & c_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_0 & c_1 & \dots & \dots & c_{n-1} & c_n & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \dots & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & c_{n-l+1} & c_{n-l+2} & \dots & \dots & c_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Le noyau de l'application $\mathbf{M}_{Q,l}$ est de dimension $n + m$ car

$$\text{Ker}(\mathbf{M}_{Q,l}) = \left\langle (0, 0, \dots, 0, \dots, 1), \dots, (0, \dots, 0, 0, \underbrace{1, \dots, 0, 0}_{m-1}), (0, \dots, 0, \underbrace{1, 0, \dots, 0}_m), \right. \\ \left. (0, 0, \dots, 0, A_{j_i-1}^{j_i-1}, A_{j_i}^{j_i-1} \alpha_i, \dots, A_{n+m+l}^{j_i-1} \alpha_i^{n+m+l-j_i+1})^t, \text{ avec } 1 \leq i \leq k \text{ et } 1 \leq j_i \leq n_i \right\rangle.$$

Remarque 2.22. Soient P un polynôme unitaire et Q un polynôme tels que

$$P(x) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \text{ et } Q(x) = \sum_{i=0}^m b_i x^i.$$

Nous pouvons écrire la transposée de la matrice (2.5) de la manière suivante :

$$S(P, Q)^t = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{P,m} \\ \mathbf{M}_{Q,n} \end{pmatrix}.$$

Proposition 2.23. Soient $P(x) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ et $Q(x) = \sum_{i=0}^m b_i x^i$ deux polynômes. On note par D le PGCD des polynômes P et Q . On a

$$\text{Ker}(\mathbf{M}_{D,m+n-d}) = \text{Ker}(\mathbf{M}_{P,m}) \cap \text{Ker}(\mathbf{M}_{Q,n}).$$

Le degré de $\text{PGCD}(P, Q)$ est égal à $\dim(\text{Ker}(S(P, Q)^t))$.

Preuve. Montrons que

$$\text{Ker}(\mathbf{M}_{D,m+n-d}) = \text{Ker}(\mathbf{M}_{P,m}) \cap \text{Ker}(\mathbf{M}_{Q,n}).$$

En vertu de la proposition 2.19 et de la remarque 2.21, on déduit que $\text{Ker}(\mathbf{M}_{P,m}) \cap \text{Ker}(\mathbf{M}_{Q,n})$ est vide si et seulement si P et Q n'ont pas de racine commune.

Selon la proposition 2.19 on a les inclusions suivantes :

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\mathbf{M}_{D,m+n-d}) &\subseteq \text{Ker}(\mathbf{M}_{P,m}), \\ \text{Ker}(\mathbf{M}_{D,m+n-d}) &\subseteq \text{Ker}(\mathbf{M}_{Q,n}), \end{aligned}$$

donc

$$\text{Ker}(\mathbf{M}_{D,m+n-d}) \subseteq \text{Ker}(\mathbf{M}_{P,m}) \cap \text{Ker}(\mathbf{M}_{Q,n}).$$

Le polynôme P se factorise de la façon suivante : $P(x) = \prod_{i=1}^k (x - \alpha_i)^{n_i}$ où les racines $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$

sont distinctes deux à deux et où $\sum_{i=1}^k n_i = n$. Supposons qu'il existe un vecteur dans $\text{Ker}(\mathbf{M}_{P,m}) \cap \text{Ker}(\mathbf{M}_{Q,n})$ n'appartenant pas à $\text{Ker}(\mathbf{M}_{D,m+n-d})$. Alors il existe $i \in \{1, \dots, k\}$ et $j_i \in \{1, \dots, n_i\}$ tel que le vecteur

$$\mathbf{v} = \left(0, 0, \dots, 0, A_{j_i-1}^{j_i-1}, A_{j_i}^{j_i-1} \alpha_i, \dots, A_{n+l}^{j_i-1} \alpha_i^{n+l-j_i+1} \right)^t$$

n'appartient pas à $\text{Ker}(\mathbf{M}_{D,m+n-d})$. Ce qui est impossible car si $\mathbf{v} \in \text{Ker}(\mathbf{M}_{P,m}) \cap \text{Ker}(\mathbf{M}_{Q,n})$ cela signifie que α_i est une racine multiple au moins d'ordre j_i de P et Q , donc une racine multiple au moins d'ordre j_i du $\text{PGCD}(P, Q)$. On conclut que $\mathbf{v} \in \text{Ker}(\mathbf{M}_{D,m+n-d})$. D'où l'égalité :

$$\text{Ker}(\mathbf{M}_{D,m+n-d}) = \text{Ker}(S(P, Q)^t).$$

Comme $S(P, Q)^t = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{P,m} \\ \mathbf{M}_{Q,n} \end{pmatrix}$, on a $\text{Ker}(S(P, Q)^t) = \text{Ker}(\mathbf{M}_{P,m}) \cap \text{Ker}(\mathbf{M}_{Q,n})$, alors

$$\text{Ker}(\mathbf{M}_{D,m+n-d}) = \text{Ker}(S(P, Q)^t).$$

De la proposition 2.20, on sait que $\dim(\text{Ker}(\mathbf{M}_{D,m+n-d})) = d$, donc on a bien

$$\deg(\text{PGCD}(P, Q)) = \dim(\text{Ker}(S(P, Q)^t)).$$

□

Nous pouvons utiliser une méthode similaire à celle décrit ci-dessus pour déterminer le degré du PGCD de plusieurs polynômes où au moins un des polynômes est unitaire, d'où théorème suivant :

Théorème 2.24. Soient P_1, \dots, P_k des polynômes de degrés n_1, \dots, n_k respectivement, avec P_1 unitaire. Soient $m_2, \dots, m_k \in \mathbb{N}^*$. Soit $m := \max\{n_1+1, n_2+m_2, \dots, n_k+m_k\}$ et soit $m_1 := m - n_1$ et notons par $0_{i,j}$ la matrice nulle de dimension $i \times j$. Définissons la matrice

$$S(P_1, \dots, P_k)_{m_1, \dots, m_k}^t = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{P_1, m_1} & 0_{m_1, 0} \\ \mathbf{M}_{P_2, m_2} & 0_{m_2, m-m_2} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{M}_{P_k, m_k} & 0_{m_k, m-m_k} \end{pmatrix}.$$

On a

$$\deg(\text{PGCD}(P_1, \dots, P_k)) = \dim(\text{Ker}(S(P_1, \dots, P_k)_{m_1, \dots, m_k}^t)).$$

Chapitre 3

Les systèmes de Mumford

Dans ce chapitre nous allons rappeler les systèmes de Mumford impairs et pairs. Les systèmes de Mumford impairs (aussi appelés systèmes de Jacobi-Mumford) ont été construits par Mumford dans [17]. Les courbes hyperelliptiques qui y apparaissent naturellement sont d'équation affine $y^2 = x^{2g+1} + h_{2g}x^{2g} + \dots + h_0$ et leurs jacobiniennes jouent un rôle central dans la description géométrico-algébrique de ces systèmes. Les systèmes de Mumford pairs ont été construits et étudiés par Vanhaecke dans [23]. Pour plus de détails concernant la construction des systèmes de Mumford impairs et pairs, nous référons au livre [24].

Dans tout ce chapitre, on fixe $g \in \mathbb{N}^*$. On détaillera d'abord le cas impair puis le cas pair.

3.1 Les systèmes de Mumford impairs

L'espace de phases du système de Mumford impair d'ordre g est un espace affine complexe de dimension $3g+1$, que l'on note M_g . Afin de simplifier les écritures ainsi que les calculs, nous allons exprimer l'espace affine M_g à l'aide des matrices polynomiales 2×2 à trace nulle de la manière suivante :

$$M_g = \left\{ \begin{pmatrix} v(x) & u(x) \\ w(x) & -v(x) \end{pmatrix} \text{ tel que } \begin{cases} u(x) = x^g + u_{g-1}x^{g-1} + u_{g-2}x^{g-2} + \dots + u_0, \\ v(x) = v_{g-1}x^{g-1} + v_{g-2}x^{g-2} + \dots + v_0, \\ w(x) = x^{g+1} + w_gx^g + w_{g-1}x^{g-1} + \dots + w_0. \end{cases} \right\} \simeq \mathbb{C}^{3g+1}.$$

Dans cette description, x et y sont des paramètres formels, mais plus loin ils auront une signification géométrique. Sur l'espace affine M_g , il y a une famille de structures de Poisson compatibles. Nous utilisons dans la suite l'une de ces structures de Poisson $\{\cdot, \cdot\}$. Afin de la définir, il suffit qu'on définisse le crochet des fonctions coordonnées $u_{g-1}, \dots, u_0, v_{g-1}, \dots, v_0, w_g, \dots, w_0$, ce que nous faisons en utilisant les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \{u(x), u(y)\} &= \{v(x), v(y)\} = 0, \\ \{u(x), v(y)\} &= \frac{u(x) - u(y)}{x - y}, \\ \{u(x), w(y)\} &= -2 \frac{v(x) - v(y)}{x - y}, \\ \{v(x), w(y)\} &= \frac{w(x) - w(y)}{x - y} - u(x), \\ \{w(x), w(y)\} &= 2(v(x) - v(y)). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Expliquons les notations. Par définition,

$$\{u(x), v(y)\} = \sum_{i,j=0}^{g-1} x^i y^j \{u_i, v_j\}.$$

La deuxième équation de (3.1) dit alors que le crochet $\{u_i, v_j\}$ est égal au coefficient de $x^i y^j$ dans le polynôme $\frac{u(x) - u(y)}{x - y}$. Il en est de même pour les autres crochets. Ainsi la première ligne dit que $\{u_i, u_j\} = \{v_i, v_j\} = 0$ pour tout $i, j = 0, \dots, g - 1$.

La matrice de Poisson de (3.1) par rapport aux coordonnées $u_{g-1}, \dots, u_0, v_{g-1}, \dots, v_0, w_g, \dots, w_0$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} 0 & A & B \\ -{}^t A & 0 & C \\ -{}^t B & -{}^t C & D \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

où les matrices $A \in M_{g,g}(\mathbb{C})$, $B \in M_{g,g+1}(\mathbb{C})$, $C \in M_{g,g+1}(\mathbb{C})$ et $D \in M_{g+1,g+1}(\mathbb{C})$ sont définies par

$$\begin{aligned} \{u(x), v(y)\} &= (x^{g-1}, \dots, 1)A(y^{g-1}, \dots, 1)^t, \\ \{u(x), w(y)\} &= (x^{g-1}, \dots, 1)B(y^g, \dots, 1)^t, \\ \{v(x), w(y)\} &= (x^{g-1}, \dots, 1)C(y^g, \dots, 1)^t, \\ \{w(x), w(y)\} &= (x^g, \dots, 1)D(y^g, \dots, 1)^t. \end{aligned}$$

Explicitement, les matrices A, B, C et D pour $g \geq 2$ sont données par¹

$$A = \begin{pmatrix} \{u_{g-1}, v_{g-1}\} & \{u_{g-1}, v_{g-2}\} & \dots & \{u_{g-1}, v_1\} & \{u_{g-1}, v_0\} \\ \{u_{g-2}, v_{g-1}\} & \{u_{g-2}, v_{g-2}\} & \dots & \{u_{g-2}, v_1\} & \{u_{g-2}, v_0\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \{u_1, v_{g-1}\} & \{u_1, v_{g-2}\} & \dots & \{u_1, v_1\} & \{u_1, v_0\} \\ \{u_0, v_{g-1}\} & \{u_0, v_{g-2}\} & \dots & \{u_0, v_1\} & \{u_0, v_0\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & u_{g-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & u_3 & u_2 \\ 1 & u_{g-1} & \dots & u_2 & u_1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -2v_{g-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2v_3 & -2v_2 \\ 0 & 0 & -2v_{g-1} & \dots & -2v_2 & -2v_1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & w_g - u_{g-1} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & w_g & w_{g-1} - u_{g-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & w_4 & w_3 & w_2 - u_1 \\ 1 & w_g & \dots & w_3 & w_2 & w_1 - u_0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 2v_{g-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 2v_1 \\ 0 & -2v_{g-1} & \dots & -2v_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le rang de cette structure de Poisson est $2g$. Pour plus d'informations sur cette structure de Poisson nous référons au livre [24, Chap 3].

Nous rappelons ensuite l'application moment du système de Mumford impair d'ordre g . Pour toute matrice $A(x) = \begin{pmatrix} v(x) & u(x) \\ w(x) & -v(x) \end{pmatrix}$ de M_g , le déterminant de $A(x)$,

$$\det(A(x)) = -[v(x)^2 + u(x)w(x)],$$

est un polynôme de degré $2g + 1$ de coefficient dominant -1 . On note par H_g l'ensemble des polynômes unitaires de $\mathbb{C}[X]$ de degré $2g + 1$. H_g est un espace affine de dimension $2g + 1$. On note par \mathbf{H} l'application polynomiale surjective définie par

$$\begin{aligned} \mathbf{H} : M_g &\longrightarrow H_g \\ A(x) &\longmapsto -\det(A(x)). \end{aligned}$$

1. Nous explicitons la matrice de Poisson pour $g = 1$ dans l'exemple 3.4.

Les composantes de \mathbf{H} définissent des fonctions polynomiales sur M_g que l'on notera h_0, \dots, h_{2g+1} . Ainsi,

$$\mathbf{H}(A(x)) = \sum_{i=0}^{2g+1} h_i(A(x))x^i. \quad (3.3)$$

Pour $y \in \mathbb{C}$, notons par \mathbf{H}_y la fonction polynomiale, définie par

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_y : M_g &\longrightarrow \mathbb{C} \\ A(x) &\longmapsto \mathbf{H}(A(x))|_{x=y} = -\det(A(y)). \end{aligned}$$

Ces deux familles de fonctions $(h_i)_{i=0, \dots, 2g}$ et $(\mathbf{H}_y)_{y \in \mathbb{C}}$ définissent deux familles de champs hamiltoniens $(\mathcal{X}_{h_i})_{i=0, \dots, 2g}$ et $(\mathcal{X}_{\mathbf{H}_y})_{y \in \mathbb{C}}$ sur la variété de Poisson $(M_g, \{\cdot, \cdot\})$. Pour $i = 0, \dots, 2g$, le champ hamiltonien \mathcal{X}_{h_i} est défini par $\mathcal{X}_{h_i} = \{\cdot, h_i\}$, tandis que pour $y \in \mathbb{C}$, le champ hamiltonien $\mathcal{X}_{\mathbf{H}_y}$ est défini par $\mathcal{X}_{\mathbf{H}_y} = \{\cdot, \mathbf{H}_y\}$.

Tout champ de vecteurs \mathcal{X} sur l'espace affine M_g peut être décrit comme une application sur M_g à valeurs dans l'espace vectoriel associé à M_g , qui est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}[x])$. Ainsi, pour tout $0 \leq i \leq 2g$ et $y \in \mathbb{C}$ on notera par D_i^g et D_y^g les applications

$$D_i^g, D_y^g : M_g \longrightarrow \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}[x]),$$

qui décrivent les champs de vecteurs $\mathcal{X}_{\mathbf{H}_y}$ et \mathcal{X}_{h_i} sur M_g . Dans les notations D_i^g et D_y^g , on omettra d'écrire g s'il n'y a pas de risque de confusion. Afin de simplifier les notations on remplacera les écritures $D_i^g(A(x))$ et $D_y^g(A(x))$ par $D_i^g|_A$ et $D_y^g|_A$, donc $D_i^g|_A$ ($D_y^g|_A$) est la valeur du champ de vecteurs D_i^g (D_y^g) au point $A(x)$, vu comme un élément de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}[x])$. Puisque les fonctions \mathbf{H}_y et h_i sont des fonctions polynomiales et la structure de Poisson est polynomiale, les applications D_y^g et D_i^g sont polynomiales.

Proposition 3.1. *Soit $A(x) \in M_g$. Pour tout $y \in \mathbb{C}$ et $0 \leq i \leq 2g$ les champs de vecteurs D_y et D_i au point $A(x)$ s'écrivent sous forme d'équation de Lax :*

$$D_i|_A = \left[A(x), \left[\frac{A(x)}{x^{i+1}} \right]_+ - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u_i & 0 \end{pmatrix} \right], \quad (3.4)$$

$$D_y|_A = \left[A(x), -\frac{A(y)}{x-y} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u(y) & 0 \end{pmatrix} \right]. \quad (3.5)$$

Dans la première formule $\left[\frac{A(x)}{x^{i+1}} \right]_+$ est la partie polynomiale de la matrice $\frac{A(x)}{x^{i+1}}$.

Preuve. Nous allons donner une idée de la preuve de (3.5). Pour plus de détails on réfère au livre [24, Chap 4]. Soit $A \in M_g$ et soit $y \in \mathbb{C}$. À l'aide des égalités (3.1), on obtient les crochets suivants :

$$\begin{aligned} \{u(x), v^2(y) + u(y)w(y)\} &= 2 \frac{u(x)v(y) - u(y)v(x)}{x-y}, \\ \{v(x), v^2(y) + u(y)w(y)\} &= \frac{u(y)w(x) + w(y)u(x)}{x-y} - u(y)u(x), \\ \{w(x), v^2(y) + u(y)w(y)\} &= 2 \frac{v(x)w(y) - w(x)v(y)}{x-y} + 2v(x)u(y). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Notons

$$\begin{aligned} \{A(x), \mathbf{H}_y\} &= \left\{ \begin{pmatrix} v(x) & u(x) \\ w(x) & -v(x) \end{pmatrix}, v^2(y) + u(y)w(y) \right\} \\ &= \begin{pmatrix} \{v(x), v^2(y) + u(y)w(y)\} & \{u(x), v^2(y) + u(y)w(y)\} \\ \{w(x), v^2(y) + u(y)w(y)\} & -\{v(x), v^2(y) + u(y)w(y)\} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. Ici, y n'est pas formel.

Alors, d'après (3.6),

$$\{A(x), \mathbf{H}_y\} = \left[A(x), -\frac{A(y)}{x-y} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u(y) & 0 \end{pmatrix} \right]. \quad (3.7)$$

Ceci nous donne l'équation de Lax (3.5). L'équation de Lax (3.4) est obtenue à partir de l'équation (3.5) par un calcul de résidu formel. \square

Remarque 3.2. De l'équation (3.4), on peut facilement voir que $\{A(x), h_i\} = 0$ pour tout $g \leq i \leq 2g$ car $\left[\frac{A(x)}{x^{i+1}} \right]_+ - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u_i & 0 \end{pmatrix} = 0$ pour tout $i \geq g$. On conclut que les fonctions h_g, \dots, h_{2g} sont des fonctions de Casimir pour cette structure de Poisson. Nous nous intéressons alors uniquement aux champs de vecteurs D_i où $0 \leq i \leq g-1$.

L'équation (3.4) nous permet d'expliciter pour $i = 0, \dots, g-1$ les champs de vecteurs D_i en un point arbitraire $A^0(x) = \begin{pmatrix} v^0(x) & u^0(x) \\ w^0(x) & -v^0(x) \end{pmatrix}$ de M_g :

$$D_i|_{A^0} u(x) = 2v^0(x) \left[\frac{u^0(x)}{x^{i+1}} \right]_+ - 2u^0(x) \left[\frac{v^0(x)}{x^{i+1}} \right]_+, \quad (3.8)$$

$$D_i|_{A^0} v(x) = u^0(x) \left(\left(\left[\frac{w^0(x)}{x^{i+1}} \right]_+ - u_i^0 \right) - w^0(x) \left[\frac{u^0(x)}{x^{i+1}} \right]_+ \right), \quad (3.9)$$

$$D_i|_{A^0} w(x) = 2w^0(x) \left[\frac{v^0(x)}{x^{i+1}} \right]_+ - 2v^0(x) \left(\left[\frac{w^0(x)}{x^{i+1}} \right]_+ - u_i^0 \right). \quad (3.10)$$

Proposition 3.3. Soit $y \in \mathbb{C}$. Le champ de vecteurs D_y s'écrit

$$D_y = \sum_{i=0}^{g-1} y^i D_i.$$

Preuve. Soit $A \in M_g$. Par définition, $\mathbf{H}_y(A(x)) = \mathbf{H}(A(x))|_{x=y}$. À l'aide de l'égalité (3.3) on obtient

$$\mathbf{H}_y = \sum_{i=0}^{2g+1} y^i h_i.$$

On a donc

$$\mathcal{X}_{\mathbf{H}_y} = \{\cdot, \mathbf{H}_y\} = \sum_{i=0}^{2g+1} y^i \{\cdot, h_i\} = \sum_{i=0}^{2g+1} y^i \mathcal{X}_{h_i}.$$

D'après la remarque 3.2, on sait que $\mathcal{X}_{h_i} = 0$ pour tout $g \leq i \leq 2g$ et $\mathcal{X}_{h_{2g+1}} = 0$ car $h_{2g+1} = 1$. On conclut alors que

$$D_y = \sum_{i=0}^{g-1} y^i D_i. \quad \square$$

Exemple 3.4. Soit $g = 1$. Soit $A(x) = \begin{pmatrix} v_0 & x + u_0 \\ x^2 + w_1x + w_0 & -v_0 \end{pmatrix}$ une matrice de M_1 . On a $\mathbf{H}_y(A(x)) = y^3 + h_2y^2 + h_1y + h_0$ avec

$$\begin{aligned} h_2 &= u_0 + w_1, \\ h_1 &= u_0w_1 + w_0, \\ h_0 &= u_0w_0 + v_0^2. \end{aligned}$$

La matrice de Poisson de $\{\cdot, \cdot\}$, calculée à partir de (3.1), est donnée par

$$\begin{matrix} & u_0 & v_0 & w_1 & w_0 \\ \begin{matrix} u_0 \\ v_0 \\ w_1 \\ w_0 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & w_1 - u_0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & u_0 - w_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

On a $\mathcal{X}_{h_1} = \mathcal{X}_{h_2} = 0$ et $\mathcal{X}_{h_0} = D_0$. D'après la proposition 3.3 on a $D_y = D_0$. Explicitons D_0 :

$$\begin{aligned} D_0(u_0) &= 2v_0, \\ D_0(v_0) &= -w_0 + u_0w_1 - u_0^2, \\ D_0(w_1) &= -2v_0, \\ D_0(w_0) &= 2v_0(u_0 - w_1). \end{aligned}$$

Exemple 3.5. Soit $g = 2$. Soit $A(x) = \begin{pmatrix} v_1x + v_0 & x^2 + u_1x + u_0 \\ x^3 + w_2x^2 + w_1x + w_0 & -v_1x - v_0 \end{pmatrix}$ une matrice de M_2 . On a $\mathbf{H}_y(A(x)) = y^5 + h_4y^4 + h_3y^3 + h_2y^2 + h_1y + h_0$ avec

$$\begin{aligned} h_4 &= u_1 + w_2, \\ h_3 &= u_1w_2 + w_1 + u_0, \\ h_2 &= w_2u_0 + u_1w_1 + w_0 + v_1^2, \\ h_1 &= u_1w_0 + u_0w_1 + 2v_1v_0, \\ h_0 &= u_0w_0 + v_0^2. \end{aligned}$$

La matrice de Poisson peut maintenant être calculée à partir de (3.2). Elle est donnée par

$$\begin{matrix} & u_1 & u_0 & v_1 & v_0 & w_2 & w_1 & w_0 \\ \begin{matrix} u_1 \\ u_0 \\ v_1 \\ v_0 \\ w_2 \\ w_1 \\ w_0 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & u_1 & 0 & 0 & -2v_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & w_2 - u_1 \\ -1 & -u_1 & 0 & 0 & 1 & w_2 & w_1 - u_0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -w_2 & 0 & 0 & 2v_1 \\ 0 & 2v_1 & u_1 - w_2 & u_0 - w_1 & 0 & -2v_1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

On a $\mathcal{X}_{h_4} = \mathcal{X}_{h_3} = \mathcal{X}_{h_2} = 0$ et $\mathcal{X}_{h_1} = D_1$, $\mathcal{X}_{h_0} = D_0$. Par la proposition 3.3 on a $D_y = D_1y + D_0$. Explicitons D_1 et D_0 :

$$\begin{aligned} D_1(u_1) &= 2v_1, & D_0(u_1) &= 2v_0, \\ D_1(u_0) &= 2v_0, & D_0(u_0) &= 2(u_1v_0 - u_0v_1), \\ D_1(v_1) &= u_0 + u_1(w_2 - u_1) - w_1, & D_0(v_1) &= u_0(w_2 - u_1) - w_0, \\ D_1(v_0) &= u_0(w_2 - u_1) - w_0, & D_0(v_0) &= -u_1w_0 + u_0(w_1 - u_0), \\ D_1(w_2) &= -2v_1, & D_0(w_2) &= -2v_0, \\ D_1(w_1) &= 2[(u_1 - w_2)v_1 - v_0], & D_0(w_1) &= 2(u_0v_1 - w_2v_0), \\ D_1(w_0) &= 2v_0(u_1 - w_2), & D_0(w_0) &= 2[v_0(u_0 - w_1) + v_1w_0]. \end{aligned}$$

Proposition 3.6. *Le système $(M_g, \{\cdot, \cdot\}, \mathbf{H})$ est intégrable au sens de Liouville. Il est appelé le système de Mumford impair d'ordre g .*

Preuve. On sait d'après la remarque 3.2 que pour tout $g \leq i \leq 2g$, la fonction h_i est un Casimir. On vérifie que les g fonctions h_0, \dots, h_{g-1} sont deux à deux en involution. Soit A une matrice de M_g et soient x et y deux paramètres formels. On a avec les égalités (3.6) que

$$\{\mathbf{H}_x, \mathbf{H}_y\} = \{v^2(x) + u(x)w(x), v^2(y) + u(y)w(y)\} = 0.$$

Par définition,

$$\{\mathbf{H}_x, \mathbf{H}_y\} = \sum_{i,j=0}^{g-1} x^i y^j \{h_i, h_j\}.$$

On obtient,

$$\sum_{i,j=0}^{g-1} x^i y^j \{h_i, h_j\} = 0.$$

Dès lors que x et y sont deux paramètres formels, on a que $\{h_i, h_j\} = 0$. On conclut que les fonctions h_0, \dots, h_{g-1} sont deux à deux en involution. On peut démontrer que

$$\mathcal{U}_{\mathbf{H}} = \{A \in M_g \text{ tel que } \mathcal{X}_{h_0}|_A \wedge \dots \wedge \mathcal{X}_{h_{g-1}}|_A \neq 0\}$$

n'est pas vide, c'est donc un ouvert dense de M_g . On a donc que (h_0, \dots, h_{2g}) est une famille involutive de $s = 2g + 1$ fonctions avec $g + 1$ fonctions h_g, \dots, h_{2g} de Casimir et

$$\dim \langle \mathcal{X}_{h_0}|_A, \dots, \mathcal{X}_{h_{g-1}}|_A \rangle = g.$$

L'espace affine M_g est de dimension $d = 3g + 1$ et de rang $2r = 2g$. On a alors bien $s = d - r$. Par conséquent, le système $(M_g, \{\cdot, \cdot\}, \mathbf{H})$ est intégrable au sens de Liouville. \square

Les fibres génériques de l'application moment du système de Mumford impair d'ordre g admettent une description géométrico-algébrique, comme l'a été démontré par Mumford [17]. Soit $h \in H_g$ un polynôme sans racine multiple. La courbe affine C d'équation $y^2 = h(x)$ est alors lisse. Vu que le degré du polynôme h est impair, la compactification (lisse) \overline{C} de C est donnée en ajoutant à la courbe C un seul point que l'on notera par ∞ . Avec ces notations, la fibre $\mathbf{H}^{-1}(h)$ est isomorphe à la jacobienne de \overline{C} dépourvue du diviseur Θ . Dans ce qui suit nous rappelons quelques éléments de la construction de Mumford, qui permet de prouver ce résultat³.

Remarque 3.7. Les fibres $M_g(h) = \mathbf{H}^{-1}(h)$ sont au moins de dimension g car ce sont les fibres de $\mathbf{H} : M_g \rightarrow H_g$ avec $\dim(M_g) = 3g + 1$ et $\dim(H_g) = 2g + 1$.

Soit C une courbe hyperelliptique affine de genre g d'équation $y^2 = h(x)$ où h est un polynôme de H_g sans racine multiple,

$$h(x) = \prod_{i=1}^{2g+1} (x - a_i).$$

On note par ι l'involution hyperelliptique de \overline{C} définie de la manière suivante :

$$\begin{cases} \iota(x, y) &= (x, -y) \text{ pour } (x, y) \in C, \\ \iota(\infty) &= \infty. \end{cases}$$

On note par $D_0^{g,+}(\overline{C})$ le sous-ensemble de $D^{g,+}(\overline{C})$

$$D_0^{g,+}(\overline{C}) = \left\{ D = \sum_{i=1}^g p_i \text{ tel que } p_i \neq \infty \text{ et } p_i \neq \iota(p_j) \text{ pour tout } 1 \leq i \neq j \leq g \right\}.$$

3. Un rappel sur les jacobiniennes, ainsi que sur le diviseur thêta, sera fait dans le chapitre 5.

Proposition 3.8. *L'ensemble des diviseurs $D_0^{g,+}(\overline{C})$ défini ci-dessus est une variété affine, isomorphe à $\text{Jac}(\overline{C}) - \Theta$.*

Preuve. Pour la preuve de ce théorème on réfère au livre [17]. □

Soit $D = \sum_{i=1}^g p_i$ un diviseur de $D_0^{g,+}(\overline{C})$. On note $n_i = \text{ord}_{p_i} D$ pour tout $1 \leq i \leq g$. On associe à D l'unique matrice $A(x) = \begin{pmatrix} v(x) & u(x) \\ w(x) & -v(x) \end{pmatrix} \in M_g$ telle que les trois polynômes u, v et w satisfassent les conditions suivantes :

- $u(x) = \prod_{i=1}^g (x - x(p_i))$,
- $\frac{d^j}{dx^j} [v(x) - y]|_{(x,y)=p_i} = 0$ pour tout $0 \leq j \leq n_i - 1$,
- $w(x) = \frac{\prod_{i=1}^{2g+1} (x - a_i) - v(x)^2}{u(x)}$.

$w(x)$ est bien un polynôme car les racines du polynôme u sont aussi des racines du polynôme $h - v^2$ avec au moins la même multiplicité. Par construction, $\mathbf{H}(A(x)) = h(x)$. On obtient donc une application $\Psi : \text{Jac}(\overline{C}) - \Theta \rightarrow \mathbf{H}^{-1}(h(x))$.

Théorème 3.9. *Soit h un polynôme de H_g sans racine multiple. Soit C la courbe affine d'équation $y^2 = h(x)$. L'application $\Psi : \text{Jac}(\overline{C}) - \Theta \rightarrow \mathbf{H}^{-1}(h(x))$ est un isomorphisme. Les deux familles de champs hamiltoniens $(D_i)_{i=0,\dots,g-1}$ et $(D_y)_{y \in \mathbb{C}}$ transportées sur $\text{Jac}(\overline{C}) - \Theta$ par Ψ^{-1} sont invariantes par translation.*

Preuve. Pour la preuve de ce théorème on réfère au livre [17]. □

Comme $\dim(\text{Jac}(\overline{C})) = g$, on conclut en particulier que la dimension de chaque fibre $M_g(h)$, avec h sans racines multiples, est g .

À l'aide de la proposition 3.6 et du théorème 3.9, on a le théorème suivant :

Théorème 3.10. *Le système de Mumford impair d'ordre g est algébriquement complètement intégrable (a.c.i).*

3.2 Les systèmes de Mumford pairs

Nous allons aussi étudier les systèmes de Mumford pairs, qui ont été introduits par Vanhaecke. Ces systèmes sont similaires au système de Mumford cas impair.

Soit M'_g l'espace affine complexe de dimension $3g+2$, muni de coordonnées $u_0, \dots, u_{g-1}, v_0, \dots, v_{g-1}, w_0, \dots$. On représentera cet espace à l'aide de matrices polynomiales 2×2 de traces nulles de la manière suivante :

$$M'_g = \left\{ \left(\begin{pmatrix} v(x) & u(x) \\ w(x) & -v(x) \end{pmatrix} \text{ tel que } \begin{array}{l} u(x) = x^g + u_{g-1}x^{g-1} + u_{g-2}x^{g-2} + \dots + u_0, \\ v(x) = v_{g-1}x^{g-1} + v_{g-2}x^{g-2} + \dots + v_0, \\ w(x) = x^{g+2} + w_{g+1}x^{g+1} + w_g x^g + w_{g-1}x^{g-1} + \dots + w_0. \end{array} \right. \right\}.$$

Soient x et y deux paramètres formels. L'espace affine M'_g est muni de la structure de Poisson

$\{\cdot, \cdot\}$ définie de la manière suivante

$$\begin{aligned} \{u(x), u(y)\} &= \{v(x), v(y)\} = 0, \\ \{u(x), v(y)\} &= \frac{u(x) - u(y)}{x - y}, \\ \{u(x), w(y)\} &= -2 \frac{v(x) - v(y)}{x - y}, \\ \{v(x), w(y)\} &= \frac{w(x) - w(y)}{x - y} - \alpha(x + y)u(x), \\ \{w(x), w(y)\} &= 2\alpha(x + y)(v(x) - v(y)), \end{aligned} \quad (3.11)$$

où $\alpha(x) = x + w_{g+1} - u_{g-1}$. Soit H'_g l'espace des polynômes unitaires de degré $2g + 2$. Soit \mathbf{H}' l'application définie par

$$\begin{aligned} \mathbf{H}' : M'_g &\longrightarrow H'_g \\ A(x) &\longmapsto -\det(A(x)). \end{aligned}$$

On définit maintenant une famille de $2g + 2$ fonctions de M'_g vers \mathbb{C} notées h'_i avec $0 \leq i \leq 2g + 1$ telles que l'application \mathbf{H}' s'écrit à l'aide de ses $2g + 1$ fonctions

$$\mathbf{H}'(A(x)) = x^{2g+2} + h'_{2g+1}(A(x))x^{2g} + \dots + h'_0(A(x)).$$

On note par $\mathcal{X}_{h'_i}$ les champs hamiltoniens définis par h'_i sur l'espace affine M'_g pour tout $0 \leq i \leq 2g + 1$. Pour tout $y \in \mathbb{C}$, on note par \mathbf{H}'_y l'application suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}'_y : M'_g &\longrightarrow \mathbb{C} \\ A(x) &\longmapsto \mathbf{H}'(A(x))|_{x=y} = -\det(A(y)). \end{aligned}$$

Le champ hamiltonien de \mathbf{H}'_y est noté $\mathcal{X}_{\mathbf{H}'_y}$. Comme dans le cas du système de Mumford impair d'ordre g , chaque champ de vecteurs de l'espace affine M'_g , peut être décrit à l'aide une application de M'_g vers $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}[x])$. Pour tout $y \in \mathbb{C}$ et $0 \leq i \leq 2g + 1$, les champs hamiltoniens $\mathcal{X}_{h'_i}$ et $\mathcal{X}_{\mathbf{H}'_y}$ sont décrit par les applications :

$$D_i^g, D_y^g : M'_g \longrightarrow \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}[x]).$$

S'il n'y a pas de risque de confusion on omettra g des notations D_y^g et D_i^g . Afin d'alléger les écritures pour tout $A(x) \in M'_g$, nous noterons $D_y^g(A(x))$ et $D_i^g(A(x))$ par $D_y^g|_A$ et $D_i^g|_A$ respectivement. Comme dans le cas impair proposition 3.1, ces champs de vecteurs peuvent s'exprimer sous la forme de Lax. D'où la proposition suivante :

Proposition 3.11. *Soit $A(x) \in M'_g$. Pour tout $y \in \mathbb{C}$ et $0 \leq i \leq 2g + 1$ les champs de vecteurs D_y^g et D_i^g au point $A(x)$ s'écrivent sous forme d'équation de Lax :*

$$D_i^g|_A = \left[A(x), \left[\frac{A(x)}{x^{i+1}} \right]_+ - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u_{i+1} + u_i(w_{g+1} - u_{g-1}) & 0 \end{pmatrix} \right], \quad (3.12)$$

$$D_y^g|_A = \left[A(x), -\frac{A(y)}{x - y} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u(y)\alpha(y + x) & 0 \end{pmatrix} \right]. \quad (3.13)$$

Dans la première formule $\left[\frac{A(x)}{x^{i+1}} \right]_+$ est la partie polynomiale de la matrice $\frac{A(x)}{x^{i+1}}$.

Remarquons que $\{A(x), h'_i\} = 0$ pour tout $g \leq i \leq 2g + 1$. Par conséquent les fonctions h'_g, \dots, h'_{2g+1} sont des fonctions de Casimir pour cette structure de Poisson. Comme dans le système de Mumford impair d'ordre g (voir proposition 3.3), on a :

Proposition 3.12. *Pour tout $y \in \mathbb{C}$*

$$D_y^g = \sum_{i=0}^{g-1} y^i D_i^g.$$

Exemple 3.13. Soit $g = 1$. Soit

$$A(x) = \begin{pmatrix} & v_0 & x + u_0 \\ x^3 + w_2x^2 + w_1x + w_0 & & -v_0 \end{pmatrix}$$

une matrice de M'_1 . On a $\mathbf{H}_y(A(x)) = y^4 + h_3y^3 + h_2y^2 + h_1y^1 + h_0$ avec

$$\begin{aligned} h_3 &= u_0 + w_2, \\ h_2 &= w_1 + w_2u_0, \\ h_1 &= u_0w_1 + w_0, \\ h_0 &= u_0w_0 + v_0^2. \end{aligned}$$

La matrice de Poisson est la suivante :

$$\begin{matrix} & u_0 & v_0 & w_2 & w_1 & w_0 \\ \begin{matrix} u_0 \\ v_0 \\ w_2 \\ w_1 \\ w_0 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & w_2 - u_0 & w_1 + u_0(u_0 - w_2) \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_0 - w_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_0(w_2 - u_0) - w_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Les fonctions h_1, h_2 et h_3 sont des Casimirs pour cette structure de Poisson. On a donc $D'_y = D'_0$. Explicitons D'_0

$$\begin{aligned} D'_0(u_0) &= 2v_0, \\ D'_0(v_0) &= u_0[w_1 + u_0(u_0 - w_2)] - w_0, \\ D'_0(w_2) &= -2v_0, \\ D'_0(w_1) &= 2v_0(u_0 - w_2), \\ D'_0(w_0) &= 2v_0[u_0(w_2 - u_0) - w_1]. \end{aligned}$$

Exemple 3.14. Soit $g = 2$. Soit

$$A(x) = \begin{pmatrix} & v_1x + v_0 & x^2 + u_1x + u_0 \\ x^4 + w_3x^3 + w_2x^2 + w_1x + w_0 & & -v_1x - v_0 \end{pmatrix}$$

une matrice de M'_2 . On a $\mathbf{H}_y(A(x)) = y^6 + h_5y^5 + h_4y^4 + h_3y^3 + h_2y^2 + h_1y + h_0$ avec

$$\begin{aligned} h_5 &= w_3 + u_1, \\ h_4 &= u_0 + u_1w_3 + w_2, \\ h_3 &= u_0w_3 + w_2u_1 + w_1, \\ h_2 &= w_2u_0 + u_1w_1 + w_0 + v_1^2, \\ h_1 &= u_1w_0 + u_0w_1 + 2v_1v_0, \\ h_0 &= u_0w_0 + v_0^2. \end{aligned}$$

La matrice de Poisson est définie par

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & u_1 & u_0 & & v_1 & & v_0 & w_3 & w_2 & & w_1 & & w_0 \\
 u_1 & \left(\begin{array}{cccccccccccc}
 0 & 0 & & 0 & & 1 & & 0 & 0 & & 0 & & 0 \\
 0 & 0 & & 1 & & u_1 & & 0 & 0 & & 0 & & -2v_1 \\
 0 & -1 & & 0 & & 0 & & 0 & 1 & & w_3 - u_1 & & w_2 - u_0 + u_1(u_1 - w_3) \\
 -1 & -u_1 & & 0 & & 0 & & 1 & w_3 & & w_2 - u_0 & & w_1 + u_0(u_1 - w_3) \\
 0 & 0 & & 0 & & -1 & & 0 & 0 & & 0 & & 0 \\
 0 & 0 & & -1 & & -w_3 & & 0 & 0 & & 0 & & 2v_1 \\
 0 & 0 & & u_1 - w_3 & & u_0 - w_2 & & 0 & 0 & & 0 & & 2v_1(w_3 - u_1) \\
 0 & 2v_1 & u_0 - w_2 - u_1(u_1 - w_3) & & -w_1 - u_0(u_1 - w_3) & & 0 & -2v_1 & -2v_1(w_3 - u_1) & & 0 & & 0
 \end{array} \right)
 \end{array}$$

Les fonctions h_2, h_3, h_4 et h_5 sont des Casimirs pour cette structure de Poisson. On a $D'_g =$

$D'_1 y + D'_0$. Explicitons D_1 et D_0

$$\begin{aligned}
 D'_1(u_1) &= 2v_1, \\
 D'_1(u_0) &= 2v_0, \\
 D'_1(v_1) &= u_1^2(u_1 - w_3) - u_0(u_1 - w_3) + u_1(w_2 - u_0) - w_1, \\
 D'_1(v_0) &= u_0(w_2 - u_1 w_3 + u_1^2 - u_0) - w_0, \\
 D'_1(w_3) &= -2v_1, \\
 D'_1(w_2) &= -2v_0 + 2v_1(u_1 - w_3), \\
 D'_1(w_1) &= 2[v_1(u_1(w_3 - u_1) - w_2 + u_0) + v_0(-w_3 + u_1)], \\
 D'_1(w_0) &= -2v_0(u_1(u_1 - w_3) + u_0 - w_2).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D'_0(u_1) &= 2v_0, \\
 D'_0(u_0) &= 2(u_1 v_0 - u_0 v_1), \\
 D'_0(v_1) &= u_0[w_2 - u_0 + u_1(u_1 - w_3)] - w_0, \\
 D'_0(v_0) &= u_0[w_1 + u_0(u_1 - w_3)] - u_1 w_0, \\
 D'_0(w_3) &= -2v_0, \\
 D'_0(w_2) &= 2(-w_3 v_0 + u_0 v_1), \\
 D'_0(w_1) &= 2(v_1 u_0(w_3 - u_1) + v_0(-w_2 + u_0)), \\
 D'_0(w_0) &= 2[v_0(-w_1 - u_0(u_1 - w_3)) + v_1 w_0].
 \end{aligned}$$

Théorème 3.15. *Le triplet $(M'_g, \{\cdot, \cdot\}, \mathbf{H}')$ est un système intégrable au sens de Liouville. Il est appelé le système de Mumford pair d'ordre g .*

Preuve. La preuve est similaire à celle de la proposition 3.6. \square

Il y a une description géomètro-algébrique des fibres génériques de l'application moment du système de Mumford pair d'ordre g , ce qui a été fait par Vanhaecke [24]. Soit $h \in H'_g$ un polynôme sans racine multiple. La courbe affine C d'équation $y^2 = h(x)$ est lisse. Comme le polynôme h est de degré $2g + 2$, la compactification (lisse) \overline{C} de C s'obtient en ajoutant deux points à la courbe C que l'on note ∞_- et ∞_+ . La fibre $\mathbf{H}'^{-1}(h)$ est isomorphe à la jacobienne de \overline{C} privée de deux copies du diviseur Θ . Nous allons dans cette suite rappeler quelques éléments de la construction de Vanhaecke.

Fixons une courbe hyperelliptique lisse C de genre g d'équation $y^2 = h(x)$ où $h \in H'_g$ telle que $h(x) = \prod_{i=1}^{2g+2} (x - a_i)$ avec les a_i tous distincts. On définit l'ensemble des diviseurs $D_0^{g,+}(\overline{C})$ de la manière suivante :

$$D_0^{g,+}(\overline{C}) = \left\{ D \in D^{g,+}(\overline{C}) \mid D = \sum_{i=1}^g p_i \text{ tel que } p_i \neq \infty_{\pm} \text{ et } p_i \neq \iota(p_j) \text{ pour tout } 1 \leq i \neq j \leq g \right\}.$$

Soit $D = \sum_{i=1}^g p_i$ un diviseur de $D_0^{g,+}(\overline{C})$. On note $n_i = \text{ord}_{|p_i} D$ pour tout $1 \leq i \leq g$. On associe à D trois polynômes u, v et w tels que

- $u(x) = \prod_{i=1}^g (x - x(p_i))$,
- $\frac{d^j}{dx^j} [v(x) - y] |_{(x,y)=p_i} = 0$ pour tout $0 \leq j \leq n_i - 1$ et $1 \leq i \leq g$,
- $w(x) = \frac{h(x) - v(x)^2}{u(x)}$.

On note par $M'_g(h)$ la fibre au dessus de $h(x) = \prod_{i=1}^{2g+2} (x - a_i)$ par l'application \mathbf{H}'

$$M'_g(h) = \left\{ \begin{pmatrix} v(x) & u(x) \\ w(x) & -v(x) \end{pmatrix} \in M'_g \text{ tel que } u(x)w(x) + v^2(x) = h(x) \right\}.$$

Théorème 3.16. *Soit h un polynôme de H'_g sans racine multiple. Soit C la courbe affine d'équation $y^2 = h(x)$. Il y a un isomorphisme entre les deux variétés affines $\text{Jac}(\overline{C}) - (\Theta_- + \Theta_+)$ et $M'_g(h)$. Pour tout $0 \leq i \leq g - 1$, les champs de vecteurs $\mathcal{X}_{h'_i}$ restreints à la fibre $M'_g(h)$ sont invariants par translation. Par conséquent le système de Mumford pair d'ordre g est algébriquement complètement intégrable (a.c.i.).*

Preuve. Pour la preuve de ce théorème on réfère au livre [24]. □

Comme $\dim(\text{Jac}(\overline{C})) = g$, la dimension de la fibre $M'_g(h)$ est égale à g .

Chapitre 4

Stratifications

Dans ce chapitre nous allons décrire les lieux de dépendance des champs intégrables des systèmes de Mumford impairs et pairs, rappelés dans le chapitre précédent. Ceci nous amènera à une stratification de leurs espaces de phases respectifs, qu'on décrira de deux façons différentes. Par restriction aux fibres de leur application moment, on obtiendra une première stratification de chaque fibre. Une deuxième stratification, plus fine, des fibres sera également donnée. Une description géomètro-algébrique de ces strates *fin*es sera donnée dans le chapitre suivant.

Dans tout ce chapitre, g est un entier strictement positif fixé.

4.1 Préliminaires

Nous donnons ici la définition de stratification ainsi qu'un vocabulaire que nous utiliserons par la suite.

Définition 4.1. Soit (I, \leq) un ensemble (partiellement) ordonné. Une *stratification* d'une variété algébrique V , est une partition de V par une famille $(S_i)_{i \in I}$ de variétés quasi-affines telle que : Pour tout $i \in I$, la fermeture de Zariski \overline{S}_i de S_i est donnée par

$$\overline{S}_i = \bigsqcup_{j \leq i} S_j, \text{ (union disjointe).} \quad (4.1)$$

Les S_i sont appelées *strates*.

Remarque 4.2. La condition (4.1) entraîne que le bord de chaque strate S_i est composé des strates S_j avec $j < i$,

$$\partial S_i = \bigsqcup_{j < i} S_j.$$

Définition 4.3. Soient $(S_i)_{i \in I}$ et $(S'_{i'})_{i' \in I'}$ deux stratifications d'une variété algébrique V . La stratification $(S'_{i'})_{i' \in I'}$ est dite *plus fine* que $(S_i)_{i \in I}$, si pour tout $i' \in I'$ il existe un (unique) $i \in I$ tel que $S'_{i'} \subseteq S_i$.

Définition 4.4. Une matrice A de $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C})$ est *régulière* si son polynôme minimal est égal à son polynôme caractéristique. Sinon la matrice A sera dite *non-régulière*.

Proposition 4.5. Une matrice A de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ est non-régulière si et seulement si elle est nulle.

Preuve. La matrice nulle de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ est non-régulière car son polynôme caractéristique est y^2 tandis que son polynôme minimal est y .

Soit $A \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ une matrice non-régulière. Alors son polynôme minimal et son polynôme caractéristique $\det(A - y\mathbb{1}_2) = y^2 + \det A$ sont différents. D'après les propriétés du polynôme minimal et caractéristique, le polynôme caractéristique $y^2 + \det A$ doit admettre une racine double, donc nécessairement $\det A = 0$. Par conséquent, son polynôme minimal est égal à y . Comme la matrice A annule son polynôme minimal, il en découle que A est nulle. \square

Soit $A(x) \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}[x]) - \{0\}$ une matrice de coefficients $P_{ij}(x) \in \mathbb{C}[x]$. On note par d le *degré* de la matrice A défini par $d = \max_{1 \leq i, j \leq n} \deg(P_{ij})$. On peut alors écrire

$$A(x) = \sum_{i=0}^d A_i x^i, \text{ où } A_i \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}).$$

La matrice A_d sera notée $A(\infty)$. Par définition, $A(\infty) \neq 0$.

Définition 4.6. Une matrice $A(x) \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}[x])$ est dite *régulière* si les matrices $A(a)$ pour tout $a \in \mathbb{C}$ et $A(\infty)$ sont régulières. Sinon elle est dite *non-régulière*.

Soit $A(x) \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}[x])$. Si $A(x) \neq 0$ alors $A(\infty) \neq 0$; d'après la proposition 4.5, la matrice $A(\infty)$ est régulière. Une matrice $A(x) \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}[x]) - \{0\}$ est donc régulière si et seulement si pour tout $a \in \mathbb{C}$ la matrice $A(a)$ est régulière. Pour toute matrice $A(x) = \begin{pmatrix} v(x) & u(x) \\ w(x) & -v(x) \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}[x]) - \{0\}$, on note $\text{PGCD}(A) = \text{PGCD}(u, v, w)$.

Si une matrice $A(x)$ de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}[x]) - \{0\}$ n'est pas régulière, la proposition 4.5 implique qu'il existe un $a_0 \in \mathbb{C}$ tel que chaque coefficient de $A(x)$ est divisible par $x - a_0$ et donc le degré de $\text{PGCD}(A)$ est supérieur ou égal à 1. Ceci motive la définition de l'application surjective suivante :

$$\begin{aligned} \rho : \quad & M_g \quad \longrightarrow \quad \{0, \dots, g\} \\ A(x) = \begin{pmatrix} v(x) & u(x) \\ w(x) & -v(x) \end{pmatrix} & \longmapsto \quad \rho(A) = \deg(\text{PGCD}(A)). \end{aligned} \quad (4.2)$$

D'après ce qui précède une matrice $A(x) \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}[x])$ est régulière si et seulement si $\rho(A) = 0$. On appellera $\rho(A)$ le *degré de non-régularité* de A . Pour toute matrice $A(x) = \begin{pmatrix} v(x) & u(x) \\ w(x) & -v(x) \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}[x]) - \{0\}$ l'unique matrice $A'(x) \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}[x])$ définie par

$$A(x) = \text{PGCD}(A)A'(x) \quad (4.3)$$

appartient à $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}[x]) - \{0\}$ et elle est régulière car $\rho(A') = 0$.

4.2 Les systèmes de Mumford impairs

Nous rappelons d'abord quelques notations introduites dans le chapitre précédent. L'espace affine

$$M_g = \left\{ \begin{pmatrix} v(x) & u(x) \\ w(x) & -v(x) \end{pmatrix} \text{ tel que } \begin{cases} u(x) = x^g + u_{g-1}x^{g-1} + u_{g-2}x^{g-2} + \dots + u_0, \\ v(x) = v_{g-1}x^{g-1} + v_{g-2}x^{g-2} + \dots + v_0, \\ w(x) = x^{g+1} + w_g x^g + w_{g-1}x^{g-1} + \dots + w_0. \end{cases} \right\}$$

est l'espace de phases du système de Mumford impair d'ordre g . Son application moment \mathbf{H} est définie par

$$\mathbf{H} : \quad \begin{aligned} M_g & \longrightarrow H_g \\ A(x) & \longmapsto -\det(A(x)), \end{aligned}$$

où H_g est l'espace des polynômes unitaires de degré $2g + 1$. Elle définit $2g + 1$ fonctions h_0, \dots, h_{2g} en posant pour tout $A(x) \in M_g$

$$\mathbf{H}(A(x)) = x^{2g+1} + \sum_{i=0}^{2g} x^i h_i(A(x)).$$

On note par D_i les champs hamiltoniens associés aux fonctions h_i . Rappelons que ces champs de vecteurs sont polynomiaux en $u_0, \dots, u_{g-1}, v_0, \dots, v_{g-1}, w_0, \dots, w_g$ car la structure de Poisson est polynomiale et les fonctions h_i sont polynomiales. Rappelons aussi que pour tout $y \in \mathbb{C}$, nous avons défini une fonction \mathbf{H}_y sur M_g , en posant pour tout $A(x) \in M_g$

$$\mathbf{H}_y(A(x)) = \mathbf{H}(A(x))|_{x=y}.$$

Le champ hamiltonien associé à \mathbf{H}_y est noté D_y .

4.2.1 La stratification de l'espace de phases M_g

Nous montrons dans cette section que l'espace de phases du système de Mumford impair d'ordre g admet une stratification naturelle, donnée par l'application σ définie par

$$\begin{aligned} \sigma : M_g &\longrightarrow \{0, \dots, g\} \\ A(x) &\longmapsto \dim \langle D_0|_A, \dots, D_{g-1}|_A \rangle. \end{aligned}$$

Pour tout $i \in \{0, \dots, g\}$, on notera par $M_{g,i}$ la fibre de σ au dessus de i :

$$M_{g,i} = \{A(x) \in M_g \mid \dim \langle D_0|_A, \dots, D_{g-1}|_A \rangle = i\}. \quad (4.4)$$

On note par I l'ensemble des entiers $i \in \{0, \dots, g\}$ tels que $M_{g,i} \neq \emptyset$. On verra plus loin que $I = \{0, \dots, g\}$ (remarque 4.17).

Proposition 4.7. *La famille $(M_{g,i})_{i \in I}$ définit une stratification de M_g .*

Preuve. La famille $(M_{g,i})_{i \in I}$ est constitué des fibres non vides d'une application, donc $M_{g,i} \cap M_{g,j} = \emptyset$ pour tout $i \neq j$ et $M_g = \bigsqcup_{i \in I} M_{g,i}$. Les membres de $(M_{g,i})_{i \in I}$ définissent donc bien une partition de M_g . Nous allons montrer que pour tout $i \in I$, l'ensemble $\bigsqcup_{j \leq i} M_{g,j}$ est un fermé de Zariski de l'espace affine M_g .

Rappelons d'abord que pour tout $0 \leq k \leq g-1$, les champs de vecteurs D_k s'écrivent sous forme polynomiale en fonction de $u_0, \dots, u_{g-1}, v_0, \dots, v_{g-1}, w_0, \dots, w_g$. Les composantes de ces champs de vecteurs forment une matrice $(3g+1) \times g$ à coefficients dans $\mathbb{C}[u_0, \dots, u_{g-1}, v_0, \dots, v_{g-1}, w_0, \dots, w_g]$ qu'on note $\mathcal{D} = (D_0, \dots, D_{g-1})$. D'après (4.4),

$$\bigsqcup_{j \leq i} M_{g,j} = \{A(x) \in M_g \mid \dim \langle D_0|_A, \dots, D_{g-1}|_A \rangle \leq i\}.$$

C'est-à-dire $\bigsqcup_{j \leq i} M_{g,j}$ est l'ensemble des matrices $A(x) \in M_g$ tel que le rang de la matrice $\mathcal{D}|_A = (D_0|_A, \dots, D_{g-1}|_A)$ est au plus i . En d'autre termes, tous les mineurs d'ordre $k > i$ de la matrice \mathcal{D} sont nuls. Comme les mineurs d'une matrice sont des polynômes en fonction de ses coefficients, on peut conclure que les mineurs de \mathcal{D} sont des polynômes en fonction de $u_0, \dots, u_{g-1}, v_0, \dots, v_{g-1}, w_0, \dots, w_g$. On peut donc conclure que $\bigsqcup_{j \leq i} M_{g,j}$ est un fermé de Zariski de M_g . Il reste à démontrer que

chaque $M_{g,i}$ (avec $i \in I$) est une variété quasi-affine. En effet, l'ensemble $M_{g,i}$ est le complémentaire d'un fermé de $\bigsqcup_{j \leq i} M_{g,j}$ car

$$M_{g,i} = \bigsqcup_{j \leq i} M_{g,j} - \bigsqcup_{j \leq i-1} M_{g,j}.$$

On conclut que $M_{g,i}$ est un ouvert de Zariski de $\bigsqcup_{j \leq i} M_{g,j}$ et que $\overline{M_{g,i}} = \bigsqcup_{j \leq i} M_{g,j}$. La famille $(M_{g,i})_{i \in I}$ est donc bien une stratification de M_g . \square

L'espace de phases M_g admet une seconde stratification, donnée par les fibres de l'application surjective ρ définie dans (4.2). On note par $S_{g,i}$ la fibre de ρ au-dessus de $g - i$, c'est-à-dire

$$S_{g,i} = \rho^{-1}(g - i) = \{A(x) \in M_g \mid \deg(\text{PGCD}(A)) = g - i\}.$$

Comme dans la proposition 4.7, les $(S_{g,i})_{i \in \{0, \dots, g\}}$ forment une partition de M_g , étant les fibres d'une application. Notons qu'aucune de ces fibres n'est vide car ρ est surjective.

Proposition 4.8. *La famille $(S_{g,i})_{i \in \{0, \dots, g\}}$ définit une stratification de l'espace affine M_g .*

Preuve. Soit $0 < i \leq g$. On montre que l'image inverse de $\{i, \dots, g\}$ par ρ est un fermé de Zariski de M_g . Pour ce faire nous utilisons la notion de sous-résultant, rappelée dans la section 2.3, et plus particulièrement les propriétés fondamentales des sous-résultants (propositions 2.15 et 2.16).

L'image inverse $\rho^{-1}(\{i, \dots, g\}) = \bigsqcup_{j=0}^{g-i} S_{g,j}$ est l'ensemble des points $A(x) = \begin{pmatrix} v(x) & u(x) \\ w(x) & -v(x) \end{pmatrix}$ de M_g tels que $\deg(\text{PGCD}(u, v, w)) \geq i$. Cet ensemble est inclus dans l'ensemble des matrices $A(x) = \begin{pmatrix} v(x) & u(x) \\ w(x) & -v(x) \end{pmatrix}$ de M_g telles que $\deg(\text{PGCD}(u, v)) \geq i$. D'après la proposition 2.15, cette dernière condition équivaut à

$$R_0(u, v) = \dots = R_{i-1}(u, v) = 0.$$

On sait que $\text{PGCD}(u, v, w) = \text{PGCD}(w, \text{PGCD}(u, v))$. Par conséquent, si $\deg(\text{PGCD}(u, v, w)) \geq i$, alors w et $\text{PGCD}(u, v)$ ont en facteur commun $\text{PGCD}(w, \text{PGCD}(u, v))$ de degré supérieur ou égal à i . Selon la proposition 2.15, pour que $\deg(\text{PGCD}(w, \text{PGCD}(u, v))) \geq i$, il suffit que $R_0(w, R_j(u, v)) = \dots = R_{i-1}(w, R_j(u, v)) = 0$ pour $j = \text{PGCD}(u, v)$. On conclut que $\rho^{-1}(\{i, \dots, g\})$ est contenue dans l'ensemble des points $A(x) = \begin{pmatrix} v(x) & u(x) \\ w(x) & -v(x) \end{pmatrix}$ de M_g tels que

$$\begin{cases} R_0(u, v) = \dots = R_{i-1}(u, v) = 0, \\ R_0(w, R_i(u, v)) = \dots = R_{i-1}(w, R_i(u, v)) = 0, \\ R_0(w, R_{i+1}(u, v)) = \dots = R_{i-1}(w, R_{i+1}(u, v)) = 0, \\ \vdots \\ R_0(w, R_g(u, v)) = \dots = R_{i-1}(w, R_g(u, v)) = 0. \end{cases} \quad (4.5)$$

Soit $A(x) = \begin{pmatrix} v(x) & u(x) \\ w(x) & -v(x) \end{pmatrix} \in M_g$ telle que u, v et w vérifient les équations (4.5). Les équations $R_0(u, v) = \dots = R_{i-1}(u, v) = 0$, impliquent que $\deg(\text{PGCD}(u, v)) = j \geq i$. Toujours par (4.5), on a que les égalités $R_0(w, R_j(u, v)) = \dots = R_{i-1}(w, R_j(u, v)) = 0$ sont équivalentes aux égalités $R_0(w, \text{PGCD}(u, v)) = \dots = R_{i-1}(w, \text{PGCD}(u, v)) = 0$. Par conséquent, $\deg(\text{PGCD}(w, \text{PGCD}(u, v))) \geq i$, donc $\deg \text{PGCD}(A) \geq i$. On conclut que $A \in \rho^{-1}(\{i, \dots, g\})$. On

a donc que $\rho^{-1}(\{i, \dots, g\}) = \bigsqcup_{j=0}^{g-i} S_{g,j}$ est égale à

$$\left\{ \begin{pmatrix} v(x) & u(x) \\ w(x) & -v(x) \end{pmatrix} \in M_g \mid \begin{array}{l} R_0(u, v) = \dots = R_{i-1}(u, v) = 0, \\ R_0(w, R_j(u, v)) = \dots = R_{i-1}(w, R_j(u, v)) = 0 \text{ pour tout } i \leq j \leq g. \end{array} \right\}.$$

Comme les sous-resultants ci-dessus sont des polynômes en fonction des coefficients des polynômes u, v et w , on conclut que $\rho^{-1}(\{i, \dots, g\}) = \bigsqcup_{j=0}^{g-i} S_{g,j}$ est un fermé de Zariski de M_g et que

$$S_{g,g-i} = \bigsqcup_{j=0}^{g-i} S_{g,j} - \bigsqcup_{j=0}^{g-i-1} S_{g,j}.$$

Donc $S_{g,g-i}$ est un ouvert du fermé $\bigsqcup_{j \leq g-i} S_{g,j}$ et $\overline{S_{g,g-i}} = \bigsqcup_{j \leq g-i} S_{g,j}$. Par conséquent, les fibres de l'application ρ définissent bien une stratification de M_g . \square

On mettra en relation les deux stratifications $(M_{g,i})_{i \in I}$ et $(S_{g,i})_{i \in \{0, \dots, g\}}$ de M_g . Pour cela nous allons énoncer un résultat qui fait le lien entre la dépendance des champs de vecteurs D_0, \dots, D_{g-1} en une matrice $A^0(x) \in M_g$ et la régularité de $A^0(x)$.

Proposition 4.9. *Les champs de vecteurs D_0, \dots, D_{g-1} sont linéairement indépendants au point $A^0(x) = \begin{pmatrix} v^0(x) & u^0(x) \\ w^0(x) & -v^0(x) \end{pmatrix}$ de M_g si et seulement si la matrice A^0 est régulière.*

Preuve. Soit $A^0(x)$ un point de M_g où les champs de vecteurs D_0, \dots, D_{g-1} sont linéairement dépendants. Il existe alors g constantes a_0, \dots, a_{g-1} non toutes nulles telles que

$$\sum_{i=0}^{g-1} a_i D_i|_{A^0} = 0.$$

En utilisant les équations (3.8), on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{g-1} a_i D_i|_{A^0} u(x) &= 2v^0(x) \underbrace{\sum_{i=0}^{g-1} a_i \left[\frac{u^0(x)}{x^{i+1}} \right]_+}_{Q(x)} - 2u^0(x) \underbrace{\sum_{i=0}^{g-1} a_i \left[\frac{v^0(x)}{x^{i+1}} \right]_+}_{R(x)} = 0, \\ \sum_{i=0}^{g-1} a_i D_i|_{A^0} v(x) &= u^0(x) \underbrace{\sum_{i=0}^{g-1} a_i \left(\left[\frac{w^0(x)}{x^{i+1}} \right]_+ - u_i^0 \right)}_{S(x)} - w^0(x) \underbrace{\sum_{i=0}^{g-1} a_i \left[\frac{u^0(x)}{x^{i+1}} \right]_+}_{Q(x)} = 0, \\ \sum_{i=0}^{g-1} a_i D_i|_{A^0} w(x) &= 2w^0(x) \underbrace{\sum_{i=0}^{g-1} a_i \left[\frac{v^0(x)}{x^{i+1}} \right]_+}_{R(x)} - 2v^0(x) \underbrace{\sum_{i=0}^{g-1} a_i \left(\left[\frac{w^0(x)}{x^{i+1}} \right]_+ - u_i^0 \right)}_{S(x)} = 0. \end{aligned}$$

Remarquons que les polynômes Q et S sont des polynômes non nuls, car les polynômes u^0 et w^0 sont unitaires et les constantes a_i ne sont pas toutes nulles. Notons aussi que les degrés des polynômes S et Q vérifient $\deg(S) \leq g$ et $\deg(Q) \leq g-1$.

On a $u^0 S = w^0 Q$, donc les polynômes $u^0 S$ et $w^0 Q$ ont les mêmes racines avec les mêmes degrés de multiplicité. Comme $\deg(u^0) = g$, $\deg(S) \leq g$ et $\deg(w^0) = g+1$, $\deg(Q) \leq g-1$, les polynômes u^0 et w^0 ont une racine commune. Par récurrence, il existe donc b une racine de u^0 de multiplicité β qui est aussi racine de w^0 tel que la multiplicité de b dans Q est strictement inférieure à β . Par l'égalité $v^0 Q = u^0 R$, on déduit que b est une racine de v^0 , car les polynômes $u^0 R$ et $v^0 Q$ admettent les mêmes racines avec les mêmes degrés de multiplicités.

Par conséquent, u^0, v^0 et w^0 ont au moins une racine commune. On conclut que si D_0, \dots, D_{g-1} sont linéairement dépendantes au point A^0 , alors les polynômes u^0, v^0 et w^0 ont une racine commune, c'est-à-dire la matrice A^0 est non-régulière.

Pour la réciproque, soit A^0 est une matrice non-régulière, alors il existe un $a \in \mathbb{C}$ tel que $A^0(a) = 0$. D'après la proposition 3.1, on a $D_a|_{A^0} = 0$, car pour tout $y \in \mathbb{C}$ on a

$$D_y|_{A^0} = \left[A^0(x), -\frac{A^0(y)}{x-y} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u^0(y) & 0 \end{pmatrix} \right].$$

En évaluant cette dernière équation en $y = a$ on obtient

$$D_a|_{A^0} = \left[A^0(x), \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = 0.$$

Comme $D_a|_{A^0} = \sum_{i=0}^{g-1} a^i D_i|_{A^0}$,

$$\sum_{i=0}^{g-1} a^i D_i|_{A^0} = 0.$$

Par conséquent, les g champs de vecteurs D_0, \dots, D_{g-1} sont linéairement dépendants au point A^0 . \square

Définition 4.10. Soit $P(x)$ un polynôme unitaire de $\mathbb{C}[x]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$. On note par μ_P l'application affine définie de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mu_P : M_g &\longrightarrow M_{g+n} \\ A(x) &\longmapsto P(x)A(x). \end{aligned}$$

Proposition 4.11. Pour tout polynôme unitaire $P(x)$ de $\mathbb{C}[x]$, l'application μ_P est un isomorphisme affine sur son image.

Preuve. Pour P un polynôme unitaire fixé μ_P est injective car si $P(x)A(x) = P(x)A'(x)$ alors $A(x) = A'(x)$. Par conséquent, μ_P est un isomorphisme affine sur son image. \square

Proposition 4.12. Soit $P(x)$ un polynôme unitaire de $\mathbb{C}[x]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$, soit $A^0(x) \in M_g$ et soit $y \in \mathbb{C}$. On a

$$D_y^{g+n}|_{PA^0} = P(y)\mu_{P*}(D_y^g|_{A^0}). \quad (4.6)$$

Preuve. Pour toute matrice $A^0(x) = \begin{pmatrix} v^0(x) & u^0(x) \\ w^0(y) & -v^0(x) \end{pmatrix}$ de M_g , on sait par l'égalité (3.5) que

$$D_y^g|_{A^0} = \left[A^0(x), -\frac{A^0(y)}{x-y} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u^0(y) & 0 \end{pmatrix} \right].$$

L'image du champ de vecteurs D_y^g au point $A^0(x)$ par l'application linéaire μ_{P*} est

$$\mu_{P*}(D_y^g|_{A^0}) = P(x) \left[A^0(x), -\frac{A^0(y)}{x-y} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u^0(y) & 0 \end{pmatrix} \right]. \quad (4.7)$$

Toujours par l'égalité (3.5) on a

$$\begin{aligned} D_y^{g+n}|_{PA^0} &= \left[P(x)A^0(x), -\frac{P(y)A^0(y)}{x-y} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ P(y)u^0(y) & 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= P(x)P(y) \left[A^0(x), -\frac{A^0(y)}{x-y} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u^0(y) & 0 \end{pmatrix} \right]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

En remplaçant l'égalité (4.7) dans (4.8) on obtient

$$D_y^{g+n}|_{PA^0} = P(y)\mu_{P*}(D_y^g|_{A^0}).$$

\square

Corollaire 4.13. Avec les notations de la proposition 4.12, on a pour tout $0 \leq i \leq g + n - 1$ l'égalité suivante :

$$D_i^{g+n}|_{PA^0} = \operatorname{Res}_{y=0} \frac{P(y)\mu_{P^*}(D_y^g|_{A^0})}{y^{i+1}}.$$

Preuve. Soit $y \in \mathbb{C}$. On sait d'après la proposition 3.3 et l'égalité (4.6) que

$$\sum_{i=0}^{g+n-1} y^i D_i^{g+n}|_{PA^0} = D_y^{g+n}|_{PA^0} = P(y)\mu_{P^*}(D_y^g|_{A^0}).$$

En identifiant les coefficients des y^i pour tout $0 \leq i \leq g + n - 1$, on conclut que

$$D_i^{g+n}|_{PA^0} = \operatorname{Res}_{y=0} \frac{P(y)\mu_{P^*}(D_y^g|_{A^0})}{y^{i+1}}.$$

□

Corollaire 4.14. Soit $P(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $A^0(x) \in M_g$. Alors

$$D_0^{g+n}|_{PA^0} = D_1^{g+n}|_{PA^0} = \cdots = D_{n-1}^{g+n}|_{PA^0} = 0,$$

et

$$D_{n+i}^{g+n}|_{PA^0} = \mu_{P^*}(D_i^g|_{A^0}) \text{ pour tout } 0 \leq i \leq g - 1.$$

Preuve. Pour tout $0 \leq k \leq n + g$ on a, d'après le corollaire 4.13,

$$D_k^{g+n}|_{PA^0} = \operatorname{Res}_{y=0} \frac{y^n \mu_{P^*}(D_y^g|_{A^0})}{y^{k+1}} = \operatorname{Res}_{y=0} \sum_{i=0}^{g-1} y^{n-k-1+i} \mu_{P^*}(D_i^g|_{A^0}).$$

Cela donne $D_k^{g+n}|_{PA^0} = 0$ pour tout $0 \leq k \leq n - 1$ et $D_k^{g+n}|_{PA^0} = \mu_{P^*}(D_{k-n}^g|_{A^0})$ pour tout $n \leq k \leq g + n - 1$. □

Exemple 4.15. Nous reprenons ici l'exemple 3.5. Soit $A(x)$ une matrice de M_2 de la forme

$$x \begin{pmatrix} v_1 & x + u_1 \\ x^2 + w_2x + w_1 & -v_1 \end{pmatrix}. \text{ Les champs de vecteurs } D_1^2 \text{ et } D_0^2 \text{ au point } A(x) \text{ s'écrivent}$$

$$\begin{array}{ll} D_1^2(u_1) & = 2v_1, & D_0^2(u_1) & = 0, \\ D_1^2(u_0) & = 0, & D_0^2(u_0) & = 0, \\ D_1^2(v_1) & = u_1(w_2 - u_1) - w_1, & D_0^2(v_1) & = 0, \\ D_1^2(v_0) & = 0, & D_0^2(v_0) & = 0, \\ D_1^2(w_2) & = -2v_1, & D_0^2(w_1) & = 0, \\ D_1^2(w_1) & = -2(w_2 - u_1)v_1, & D_0^2(w_0) & = 0, \\ D_1^2(w_0) & = 0. & & \end{array}$$

Notons par $A^0(x) = \begin{pmatrix} v_1 & x + u_1 \\ x^2 + w_2x + w_1 & -v_1 \end{pmatrix} \in M_1$. On a $A(x) = xA^0(x)$. D'après l'exemple 3.4, le champ de vecteurs D_0 au point $A^0(x)$ s'écrit

$$\begin{array}{ll} D_0^1(u_1) & = 2v_1, \\ D_0^1(v_1) & = u_1(w_2 - u_1) - w_1, \\ D_0^1(w_2) & = -2v_1, \\ D_0^1(w_1) & = -2(w_2 - u_1)v_1. \end{array}$$

On a donc bien

$$D_1^2|_{xA^0} = \mu_{x^*}(D_0^1|_{A^0}).$$

On a vu précédemment que les applications ρ et σ définissent sur l'espace de phases M_g deux stratifications. Les strates de la stratification définie par ρ sont des matrices de même degré de non-régularité. Comparativement, σ nous définit une stratification où les strates sont conditionnées par le degré de liberté des champs hamiltoniens D_0^g, \dots, D_{g-1}^g . Ces deux stratifications sont identiques, comme le montre la proposition suivante :

Proposition 4.16. *Pour toute matrice $A^0(x)$ de M_g on a*

$$\sigma(A^0) = g - \rho(A^0).$$

On a ainsi le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} & M_g & \\ \rho \swarrow & & \searrow \sigma \\ \mathbb{N} & \xrightarrow{g-\text{id}} & \mathbb{N} \end{array}$$

Preuve. Soit $A^0(x)$ une matrice de M_g de degré de non-régularité $n = \rho(A^0)$. On note par $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ le polynôme unitaire de degré n tel que $P = \text{PGCD}(A^0)$. L'unique matrice $A^1(x)$ de M_{g-n} telle que

$$A^0(x) = P(x)A^1(x)$$

est régulière. D'après la proposition 3.3, on a pour tout $y \in \mathbb{C}$

$$D_y^g|_{PA^1} = \sum_{i=0}^{g-1} y^i D_i^g|_{PA^1} \text{ et } D_y^{g-n}|_{A^1} = \sum_{i=0}^{g-n-1} y^i D_i^{g-n}|_{A^1}.$$

En utilisant la proposition 4.12, on peut conclure des deux égalités précédentes

$$\sum_{i=0}^{g-1} y^i D_i^g|_{PA^1} = P(y) \sum_{i=0}^{g-n-1} y^i \mu_{P*} D_i^{g-n}|_{A^1} \text{ pour tout } y \in \mathbb{C}.$$

À l'aide de cette dernière égalité on obtient

$$\langle D_0^g|_{PA^1}, \dots, D_{g-1}^g|_{PA^1} \rangle = \langle \mu_{P*} D_0^{g-n}|_{A^1}, \dots, \mu_{P*} D_{g-n-1}^{g-n}|_{A^1} \rangle. \quad (4.9)$$

Par l'égalité (4.9) on a

$$\dim \langle D_0^g|_{A^0}, \dots, D_{g-1}^g|_{A^0} \rangle = \dim \langle \mu_{P*} D_0^{g-n}|_{A^1}, \dots, \mu_{P*} D_{g-n-1}^{g-n}|_{A^1} \rangle.$$

Comme $A^1(x)$ est une matrice régulière, la proposition 4.9 nous assure que les $g - n$ vecteurs $D_0^{g-n}|_{A^1}, \dots, D_{g-n-1}^{g-n}|_{A^1}$ sont linéairement indépendants. Du fait que μ est une immersion, on obtient

$$\dim \langle \mu_{P*} D_0^{g-n}|_{A^1}, \dots, \mu_{P*} D_{g-n-1}^{g-n}|_{A^1} \rangle = g - n.$$

On conclut que

$$\dim \langle D_0^g|_{A^0}, \dots, D_{g-1}^g|_{A^0} \rangle = g - n. \quad \square$$

Remarque 4.17. De la proposition 4.16, on déduit que $M_{g,i} = S_{g,i}$ et que $I = \{0, \dots, g\}$, car $M_{g,i} = \sigma^{-1}(i)$ et $S_{g,i} = \rho^{-1}(g - i)$.

Proposition 4.18. *Soit P un polynôme unitaire de degré n . Pour tout $0 \leq i \leq g$, l'image de la strate $M_{g,i}$ par μ_P est incluse dans la strate $M_{g+n,i}$. Plus exactement,*

$$\mu_P(M_{g,i}) = M_{g+n,i} \cap \mu_P(M_g). \quad (4.10)$$

Preuve. Soit $0 \leq i \leq g$. D'après la proposition 4.16, toutes les matrices A de $M_{g,i}$ ont $\rho(A) = g - i$, donc $\rho(PA) = g + n - i$ et $\mu_P(M_{g,i}) \subset M_{g+n,i}$, donc l'intersection $M_{g+n,i} \cap \mu_P(M_g)$ est non vide et $\mu_P(M_{g,i}) \subset M_{g+n,i} \cap \mu_P(M_g)$. La variété $M_{g+n,i} \cap \mu_P(M_g)$ est définie par les matrices B de M_{g+n} telles que $\rho(B) = n + g - i$ et $\text{PGCD}(B)$ est un multiple de P c'est-à-dire $\frac{B}{P} \in M_{g,i}$. On conclut que

$$\mu_P(M_{g,i}) = M_{g+n,i} \cap \mu_P(M_g).$$

□

Remarque 4.19. Les champs de vecteurs D_0^g, \dots, D_{g-1}^g sont tangents à $M_{g,i}$ pour tout $1 \leq i \leq g$. En effet, si $A(x)$ est une matrice de $M_{g,i}$, alors il existe un unique polynôme P de degré $g - i$ et une unique matrice régulière $A'(x) \in M_{i,i}$ tel que $A(x) = P(x)A'(x)$. Les champs de vecteurs D_0^i, \dots, D_{i-1}^i sont tangents et linéairement indépendants sur $M_{i,i}$. Par l'immersion μ_P on a que $\mu_{P*}D_0^i, \dots, \mu_{P*}D_{i-1}^i$ sont aussi tangents à $M_{g,i}$ et ils sont linéairement indépendants au point $A(x)$ de $\mu_P(M_{i,i}) \subset M_{g,i}$. De plus

$$\langle D_0^g|_{PA'}, \dots, D_{g-1}^g|_{PA'} \rangle = \langle \mu_{P*}D_0^i|_{A'}, \dots, \mu_{P*}D_{i-1}^i|_{A'} \rangle,$$

et le span des champs de vecteurs D_0^g, \dots, D_{g-1}^g correspond donc en A à celui des champs de vecteurs D_0^i, \dots, D_{i-1}^i en A' .

4.2.2 La stratification des fibres $M_g(h)$

Soit $h \in H_g$. La fibre au dessus de h par l'application

$$\begin{aligned} \mathbf{H} : M_g &\longrightarrow H_g \\ A(x) &\longmapsto -\det(A(x)), \end{aligned}$$

est notée $M_g(h)$. Notons que $M_g(h)$ est non-vide car \mathbf{H} est surjective. Puisque \mathbf{H} est une application régulière, $M_g(h)$ est une variété affine.

Dans cette section nous allons décrire deux stratifications sur la variété affine $M_g(h)$. Dans un premier temps nous décrirons une stratification héritée de M_g où les strates sont déterminées par $M_{g,i} \cap M_g(h)$. Puis nous définirons une seconde stratification plus fine. Introduisons les définitions suivantes :

Définition 4.20. Soit h un polynôme de H_g . Un polynôme unitaire Q de $\mathbb{C}[x]$ tel que Q^2 divise h est appelé *diviseur quadratique de h* . On note par $\mathbb{C}[x]_h$ l'ensemble des diviseurs quadratiques de h et on note par $\mathbb{C}[x]_{i,h}$ l'ensemble des diviseurs quadratiques de h de degré i .

Définition 4.21. Soit h un polynôme de H_g . On appelle *le degré de non-régularité de h* le degré maximal des diviseurs quadratiques de h , noté $\rho(h)$.

Proposition 4.22. Soit h un polynôme de H_g . Pour toute matrice $A \in M_g(h)$ on a :

$$\rho(A) \leq \rho(h).$$

Preuve. Soit A une matrice de $M_g(h)$ de degré de régularité $\rho(A) = n$ où $P = \text{PGCD}(A)$. Il existe alors une matrice régulière A^1 tel que $A(x) = P(x)A^1(x)$. Par conséquent, on a $h(x) = \det(A(x)) = P^2(x)\det(A^1(x))$. De ce fait $P \in \mathbb{C}[x]_h$, ce qui implique que $\deg(P) \leq \rho(h)$. On conclut que $\rho(A) \leq \rho(h)$. □

Remarque 4.23. Soit h un polynôme de H_g . Le discriminant de h est non-nul, si et seulement si $\mathbb{C}[x]_h = \{1\}$, si et seulement si $\rho(h) = 0$. Observons que

$$\mathbb{C}[x]_h = \bigsqcup_{i=0}^{\rho(h)} \mathbb{C}[x]_{i,h}.$$

Notons aussi que $\mathbb{C}[x]_{\rho(h),h}$ est constitué d'un seul polynôme qu'on appellera le *diviseur quadratique maximal de h*.

Soit h un polynôme de H_g . Pour tout $0 \leq i \leq g$, on note

$$M_{g,i}(h) = M_g(h) \cap M_{g,i}, \quad (4.11)$$

qui est une variété quasi-affine, car c'est l'intersection d'une variété affine avec une variété quasi-affine.

Proposition 4.24. *Soit $h \in H_g$. L'ensemble $M_{g,i}(h)$ est non-vide si et seulement si $g - \rho(h) \leq i \leq g$.*

La fibre $M_g(h)$ est donc stratifiée par $\rho(h) + 1$ strates.

Preuve. Soit $g - \rho(h) \leq i \leq g$. Montrons que $M_{g,i}(h) \neq \emptyset$. Pour ce faire, nous allons construire une matrice $A(x) = \begin{pmatrix} v(x) & u(x) \\ w(x) & -v(x) \end{pmatrix} \in M_g(h)$ telle que $\rho(A) = g - i$. Soit $Q(x) = \prod_{j=1}^{g-i} (x - \alpha_j)$ un polynôme de $\mathbb{C}[x]_{g-i,h}$; un tel polynôme existe car $g - i \leq \rho(h)$. Choisissons i éléments a_j de \mathbb{C} , tous distincts tels que $h(a_j) \neq 0$ pour tout $1 \leq j \leq i$. Notons par b_j un nombre complexe tel que $b_j^2 = h(a_j)$, pour tout $1 \leq j \leq i$. Définissons des polynômes $u(x)$ et $v(x)$ de la manière suivante :

$$u(x) = Q(x) \underbrace{\prod_{j=1}^i (x - a_j)}_{u'(x)},$$

$$v(x) = Q(x) \underbrace{\sum_{j=1}^i b_j \frac{\prod_{k \neq j} (x - a_k)}{Q(a_j) \prod_{k \neq j} (a_j - a_k)}}_{v'(x)}.$$

On a bien $\deg(v) < \deg(u) = g$ et u est un polynôme unitaire.

Constatons que par construction $v(a_j) = b_j$ pour tout $1 \leq j \leq i$. Ainsi, pour $1 \leq j \leq i$ et $1 \leq k \leq g - i$ le polynôme $h(x) - v^2(x)$ s'annule en $x = a_j$ et $x = \alpha_k$, donc $h(x) - v^2(x)$ est divisible par $u(x)$. Par conséquent, on peut définir le polynôme $w(x)$ unitaire de degré $g + 1$ de la manière suivante :

$$w(x) = \frac{h(x) - v^2(x)}{u(x)} = Q(x) \underbrace{\frac{h'(x) - v'(x)v(x)}{u'(x)}}_{w'(x)} \quad \text{où } h'(x) = \frac{h(x)}{Q^2(x)}.$$

Pour tout $1 \leq j \leq i$, les racines a_j du polynôme u' n'annulent pas le polynôme $v(x)$, donc $v'(a_j) \neq 0$. Par conséquent, $\text{PGCD}(u'(x), v'(x)) = 1$ ce qui implique que $\text{PGCD}(u'(x), v'(x), w'(x)) = 1$, donc

$$\begin{aligned} \text{PGCD}(A(x)) &= \text{PGCD}(Q(x)u'(x), Q(x)v'(x), Q(x)w'(x)) \\ &= Q(x) \text{PGCD}(u'(x), v'(x), w'(x)) = Q(x), \end{aligned}$$

et $\rho(A) = \deg(Q) = g - i$. On conclut que $M_{g,i}(h) \neq \emptyset$ car $A(x) \in M_{g,i}(h)$.

Il reste à démontrer que si $i < g - \rho(h)$, alors $M_{g,i}(h)$ est vide. On sait que $g - \sigma(A) = \rho(A)$ et d'après la proposition 4.22 on a $g - \sigma(A) = \rho(A) \leq \rho(h)$. Si $A \in M_{g,i}(h)$ alors $g - i \leq \rho(h)$. Donc pour tout $i < g - \rho(h)$, on a $M_{g,i}(h) = \emptyset$. □

Proposition 4.25. Soit $h \in H_g$. La famille $(M_{g,i}(h))_{i \in \{g-\rho(h), \dots, g\}}$ est une stratification de la fibre $M_g(h)$.

Preuve. La variété affine $M_g(h)$ est un fermé de M_g , donc toute stratification de M_g induit une stratification de $M_g(h)$. D'après la proposition 4.24, ce qui subsiste de l'intersection des strates de la stratification $(M_{g,i})_{i \in \{0, \dots, g\}}$ de M_g avec $M_g(h)$ est la stratification $(M_{g,i}(h))_{i \in \{g-\rho(h), \dots, g\}}$ de $M_g(h)$. \square

Remarque 4.26. Si $h \in H_g$ est tel que $\rho(h) = 0$, alors d'après la proposition 4.25 la stratification se réduit à une seule strate $M_{g,g}(h)$. Les g champs de vecteurs D_0, \dots, D_{g-1} sont linéairement indépendants aux points $A(x) \in M_{g,g}(h) = M_g(h)$.

Dans la suite de cette section nous allons établir une stratification plus fine des fibres $M_g(h)$ où $h \in H_g$. La partition de chaque strate de la stratification $(M_{g,i}(h))_{i \in \{g-\rho(h), \dots, g\}}$ qu'elle définira, sera indexée par un sous-ensemble de l'ensemble des diviseurs quadratiques de h .

Soit $h \in H_g$, on sait d'après la remarque 4.26 que si $\rho(h) = 0$, nous obtenons une stratification avec une seule strate qui est toute la fibre. La stratification plus fine que nous allons définir, coïncide dans le cas $\rho(h) = 0$ avec la stratification originale; nous allons donc exclure ce cas dans ce qui suit et supposons dans la suite que $h \in H_g$ soit tel que $\rho(h) \geq 1$.

Définition 4.27. Soit $Q \in \mathbb{C}[x]_h$ un polynôme unitaire. Notons par $M_{g,Q}(h)$ l'ensemble des matrices $A(x) = \begin{pmatrix} v(x) & u(x) \\ w(x) & -v(x) \end{pmatrix} \in M_g(h)$ tel que Q divise les polynômes u, v et w , c'est-à-dire Q divise $\text{PGCD}(A)$.

Proposition 4.28. Soit Q un polynôme de $\mathbb{C}[x]_h$. Le sous-ensemble $M_{g,Q}(h)$ de $M_g(h)$ est un fermé de Zariski non-vide de M_g .

Preuve. Constatons que

$$M_{g,Q}(h) = M_g(h) \cap \mu_Q(M_{g-\deg(Q)}). \quad (4.12)$$

Par la proposition 4.11, on sait que μ_Q est une application affine, donc l'image de $M_{g-\deg(Q)}$ par μ_Q est un fermé de Zariski de M_g et comme $M_g(h)$ est un fermé de Zariski de M_g , leur intersection $M_{g,Q}(h)$ est un fermé de Zariski de M_g . Montrons que $M_{g,Q}(h) \neq \emptyset$. D'après (4.12)

$$M_{g,Q}(h) = M_g(h) \cap \mu_Q(M_{g-\deg(Q)}(\frac{h}{Q^2})).$$

Comme $\mu_Q(M_{g-\deg(Q)}(\frac{h}{Q^2})) \subset M_g(h)$,

$$M_{g,Q}(h) = \mu_Q(M_{g-\deg(Q)}(\frac{h}{Q^2})).$$

Puisque l'application \mathbf{H} est surjective, $M_{g-\deg(Q)}(\frac{h}{Q^2})$ est non-vide, par conséquent $M_{g,Q}(h)$ n'est pas vide. \square

Remarquons que pour $Q = 1$ on a $M_{g,Q}(h) = M_g(h)$.

Proposition 4.29. *La strate $M_{g,g}(h)$ est un ouvert de Zariski de $M_g(h)$ et son bord est $\bigcup_{Q \in \mathbb{C}[x]_{1,h}} M_{g,Q}(h)$.*

Preuve. On sait d'après l'équation (4.11) et d'après la proposition 4.16 que

$$M_{g,g}(h) = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} v(x) & u(x) \\ w(x) & -v(x) \end{pmatrix} \in M_g(h) \mid \rho(A) = 0 \right\}.$$

D'après la proposition 4.24, la strate $M_{g,g}(h)$ est non-vide. Le complémentaire de $M_{g,g}(x)$ dans $M_g(h)$ est constitué des matrices A telles que $\rho(A) > 0$, c'est-à-dire des matrices de $\bigcup_{Q \in \mathbb{C}[x]_{1,h}} M_{g,Q}(h)$.

De la proposition 4.28, on a que $\bigcup_{Q \in \mathbb{C}[x]_{1,h}} M_{g,Q}(h)$ une réunion finie des fermés et donc est un fermé de Zariski de $M_g(h)$. Par conséquent, $M_{g,g}(h)$ est un ouvert de Zariski non-vide de $M_g(h)$ de bord $\bigcup_{Q \in \mathbb{C}[x]_{1,h}} M_{g,Q}(h)$. \square

Théorème 4.30. *Pour tout $0 \leq i \leq \rho(h)$, la strate $M_{g,g-i}(h)$ est donnée par l'union disjointe suivante :*

$$M_{g,g-i}(h) = \bigsqcup_{Q \in \mathbb{C}[x]_{i,h}} \mu_Q M_{g-i,g-i} \left(\frac{h}{Q^2} \right).$$

Preuve. Soit $0 \leq i \leq \rho(h)$. Si $A \in \mu_Q M_{g-i,g-i} \left(\frac{h}{Q^2} \right)$, alors $\text{PGCD}(A) = Q$, donc l'union est bien disjointe. Montrons maintenant $M_{g,g-i}(h) \subseteq \bigsqcup_{Q \in \mathbb{C}[x]_{i,h}} \mu_Q M_{g-i,g-i} \left(\frac{h}{Q^2} \right)$. Soit A une matrice de $M_{g,g-i}(h)$ de degré de régularité i . D'après l'égalité (4.3) on a que

$$A(x) = \text{PGCD}(A)A_i(x), \text{ avec } A_i \text{ une matrice régulière de } M_{g-i,g-i}.$$

$\text{PGCD}(A)$ est un diviseur quadratique de h de degré i car

$$h(x) = \mathbf{H}(A(x)) = -\det(\text{PGCD}(A)A_i(x)) = -\text{PGCD}(A)^2 \det(A_i(x)). \quad (4.13)$$

Par l'égalité (4.13) on a $-\det(A_i(x)) = \frac{h(x)}{\text{PGCD}(A)^2}$ et par régularité de la matrice A_i , on obtient $A_i \in M_{g-i,g-i} \left(\frac{h(x)}{\text{PGCD}(A)^2} \right)$, donc $A \in \mu_{\text{PGCD}(A)} M_{g-i,g-i} \left(\frac{h(x)}{\text{PGCD}(A)^2} \right)$. On conclut que

$$M_{g,g-i}(h) \subseteq \bigsqcup_{Q \in \mathbb{C}[x]_{i,h}} \mu_Q M_{g-i,g-i} \left(\frac{h}{Q^2} \right).$$

Montrons l'inclusion inverse $\bigsqcup_{Q \in \mathbb{C}[x]_{i,h}} \mu_Q M_{g-i,g-i} \left(\frac{h}{Q^2} \right) \subseteq M_{g,g-i}(h)$. D'après l'égalité (4.10), on a pour tout $Q \in \mathbb{C}[x]_{i,h}$

$$\mu_Q \left(M_{g-i,g-i} \cap M_{g-i} \left(\frac{h}{Q^2} \right) \right) \subseteq \underbrace{M_{g,g-i} \cap M_g(h)}_{M_{g,g-i}(h)},$$

donc $\bigsqcup_{Q \in \mathbb{C}[x]_{i,h}} \mu_Q M_{g-i,g-i} \left(\frac{h}{Q^2} \right) \subseteq M_{g,g-i}(h)$. On conclut l'égalité

$$M_{g,g-i}(h) = \bigsqcup_{Q \in \mathbb{C}[x]_{i,h}} \mu_Q M_{g-i,g-i} \left(\frac{h}{Q^2} \right).$$

\square

Proposition 4.31. *Soit P le diviseur quadratique maximal de h . La strate $M_{g,g-\rho(h)}(h)$ est isomorphe à la fibre $M_{g-\rho(h)}\left(\frac{h}{P^2}\right) = M_{g-\rho(h),g-\rho(h)}\left(\frac{h}{P^2}\right)$.*

Preuve. On sait que $\mathbb{C}[x]_{\rho(h),h}$ est constitué du seul polynôme P . Par le théorème 4.30,

$$M_{g,g-\rho(h)}(h) = \mu_P M_{g-\rho(h),g-\rho(h)}\left(\frac{h}{P^2}\right).$$

Puisque P est le diviseur quadratique maximal de h , le polynôme $\frac{h}{P^2}$ est à discriminant non-nul donc $\rho\left(\frac{h}{P^2}\right) = 0$. D'après la proposition 4.25 on a que

$$M_{g-\rho(h)}\left(\frac{h}{P^2}\right) = M_{g-\rho(h),g-\rho(h)}\left(\frac{h}{P^2}\right).$$

Par la proposition 4.11, μ_P est un isomorphisme sur son image. Donc la restriction de μ_P au fermé de Zariski $M_{g-\rho(h),g-\rho(h)}(h)$ définit un isomorphisme sur son image. On conclut que $M_{g,g-\rho(h)}(h)$ est isomorphe à $M_{g-\rho(h)}\left(\frac{h}{P^2}\right)$. \square

Définition 4.32. Soit $1 \leq i \leq \rho(h)$ et soit Q un polynôme de $\mathbb{C}[x]_{i,h}$. Pour tout $k \leq g-i$, on note

$$M_{g,k,Q}(h) = M_{g,Q}(h) \cap M_{g,k}(h).$$

Remarquons que si $k > g-i$ alors $M_{g,Q}(h) \cap M_{g,k}(h) = \emptyset$, car si A est une matrice de $M_{g,k}(h)$ alors $\rho(A) = g-k$, c'est-à-dire $\deg(\text{PGCD}(A)) = g-k$. Comme $k > g-i$, on a $\deg(\text{PGCD}(A)) < i$, et par conséquent $\text{PGCD}(A) \notin \mathbb{C}[x]_{i,h}$.

La proposition suivante est une généralisation de la proposition 4.31.

Proposition 4.33. *Soit $1 \leq i \leq \rho(h)$. Si Q_1 est un polynôme de $\mathbb{C}[x]_{i,h}$, alors l'application μ_{Q_1} définit l'isomorphisme suivant :*

$$\begin{array}{ccc} M_{g-i,g-i}\left(\frac{h}{Q_1^2}\right) & \xrightarrow{\sim} & M_{g,g-i,Q_1}(h) \\ A(x) & \mapsto & \mu_{Q_1}(A(x)). \end{array}$$

Preuve. Par définition

$$M_{g,g-i,Q_1}(h) = M_{g,Q_1}(h) \cap M_{g,g-i}(h).$$

On sait par le théorème 4.30 que $M_{g,g-i}(h) = \bigsqcup_{Q \in \mathbb{C}[x]_{i,h}} \mu_Q M_{g-i,g-i}\left(\frac{h}{Q^2}\right)$. Par conséquent,

$$M_{g,g-i,Q_1}(h) = M_{g,Q_1}(h) \cap \bigsqcup_{Q \in \mathbb{C}[x]_{i,h}} \mu_Q M_{g-i,g-i}\left(\frac{h}{Q^2}\right) = \mu_{Q_1} M_{g-i,g-i}\left(\frac{h}{Q_1^2}\right).$$

Par la proposition 4.11 on sait que μ_{Q_1} est isomorphisme sur son image. Par conséquent, la restriction de μ_{Q_1} au fermé de Zariski $M_{g-i,g-i}\left(\frac{h}{Q_1^2}\right)$ est aussi un isomorphisme sur son image. Par conséquent, $M_{g,g-i,Q_1}(h)$ est isomorphe à $M_{g-i,g-i}\left(\frac{h}{Q_1^2}\right)$. \square

En utilisant, les théorèmes et propositions précédents, on peut maintenant décrire une stratification plus fine de $M_g(h)$, mais d'abord nous introduisons quelques notations qui seront utiles. Par définition, $\mathbb{C}_{i,h}[x]$ est la famille finie de diviseurs quadratiques de degré i de h . Cette famille sera notée $\{Q_1^{(i)}, \dots, Q_{n_i}^{(i)}\}$. Rappelons qu'on note

$$M_{g,g-i,Q_j^{(i)}}(h) = M_{g,g-i}(h) \cap M_{g,Q_j^{(i)}}(h) \text{ pour tout } 0 \leq j \leq n_i \text{ et } 0 \leq i \leq \rho(h).$$

S'il n'y a pas de confusion et pour alléger les notations, on notera $M_{g,g-i,Q_j^{(i)}}(h)$ par $M_{g;Q_j^{(i)}}(h)$.

Définition 4.34. L'ensemble $(\mathbb{C}[x]_h, \leq)$ est (partiellement) ordonné. Sa relation d'ordre est définie de la manière suivante : pour Q et Q' deux polynômes unitaires de $\mathbb{C}[x]_h$, on note

$$Q \leq Q' \text{ si } Q \text{ divise } Q'.$$

On note $Q < Q'$ si $\deg(Q) < \deg(Q')$ et Q divise Q' (ce qui équivaut $Q \neq Q'$ et Q divise Q').

Théorème 4.35. La famille $(M_{g,g-i,Q_j^{(i)}}(h))_{Q_j^{(i)} \in \mathbb{C}[x]_h}$ est une stratification de $M_g(h)$. On appelle les strates de cette stratification les strates fines (des fibres) du système de Mumford impair d'ordre g .

Preuve. Montrons que $(M_{g,g-i,Q_j^{(i)}}(h))_{Q_j^{(i)} \in \mathbb{C}[x]_h}$ est une partition de $M_g(h)$. Soient $Q_j^{(i)}, Q_{j'}^{(i')} \in \mathbb{C}[x]_h$. Si $i \neq i'$, alors $M_{g,g-i,Q_j^{(i)}}(h) \cap M_{g,g-i',Q_{j'}^{(i')}}(h) = \emptyset$ car $M_{g,i}(h) \cap M_{g,i'}(h) = \emptyset$. Si $i = i'$ et $Q_j^{(i)} \neq Q_{j'}^{(i)}$, on a $M_{g,g-i,Q_j^{(i)}}(h) \cap M_{g,g-i,Q_{j'}^{(i)}}(h) = \emptyset$, car s'il existe une matrice $A(x) \in M_{g,g-i,Q_j^{(i)}}(h) \cap M_{g,g-i,Q_{j'}^{(i)}}(h)$, cela signifie que $A(x) \in M_{g,g-i}(h)$, comme $\text{PGCD}(A(x))$ est un polynôme unitaire de degré i , divisant à la fois les polynômes unitaires $Q_j^{(i)}$ et $Q_{j'}^{(i)}$ qui sont de degré i , ce qui est impossible. Donc $M_{g,g-i,Q_j^{(i)}}(h) \cap M_{g,g-i,Q_{j'}^{(i)}}(h) = \emptyset$.

On sait par la proposition 4.33 que $M_{g,g-i,Q_j^{(i)}}(h) \simeq \mu_{Q_j^{(i)}} M_{g-i,g-i, \left(\frac{h}{Q_j^{(i)2}}\right)}$, donc le théorème 4.30 nous donne

$$M_{g,g-i}(h) = \bigsqcup_{Q_j^{(i)} \in \mathbb{C}[x]_{i,h}} M_{g,g-i,Q_j^{(i)}}(h). \quad (4.14)$$

De plus, par la proposition 4.25 on sait

$$M_g(h) = \bigsqcup_{i=0}^g M_{g,i}(h). \quad (4.15)$$

En combinant les deux égalités (4.14) et (4.15), on obtient

$$M_g(h) = \bigsqcup_{i=0}^g \bigsqcup_{Q_j^{(i)} \in \mathbb{C}[x]_{i,h}} M_{g,g-i,Q_j^{(i)}}(h) = \bigsqcup_{Q_j^{(i)} \in \mathbb{C}[x]_h} M_{g,g-i,Q_j^{(i)}}(h).$$

Par conséquent, la famille $(M_{g,g-i,Q_j^{(i)}}(h))_{Q_j^{(i)} \in \mathbb{C}[x]_h}$ est bien une partition de $M_g(h)$.

Montrons maintenant que $\overline{M_{g,g-i,Q_j^{(i)}}(h)} = \bigsqcup_{Q_{j'}^{(i')} \leq Q_j^{(i)}} M_{g,g-i',Q_{j'}^{(i')}}(h)$. Commençons par montrer

l'égalité suivante :

$$M_{g,Q_j^{(i)}}(h) = \bigsqcup_{Q_{j'}^{(i')} \leq Q_j^{(i)}} M_{g,g-i',Q_{j'}^{(i')}}(h). \quad (4.16)$$

Par définition, $M_{g,Q_j^{(i)}}(h)$ est l'ensemble des matrices $A \in M_g(h)$ telles que $Q_j^{(i)}$ divise $\text{PGCD}(A)$. On sait aussi que l'ensemble $M_{g,g-i',Q_{j'}^{(i')}}(h)$ est constitué des matrices $A \in M_g(h)$ telles que $\text{PGCD}(A) = Q_{j'}^{(i')}$. Comme $Q_j^{(i)}$ divise $Q_{j'}^{(i')}$, on obtient $\bigsqcup_{Q_{j'}^{(i')} \leq Q_j^{(i)}} M_{g,g-i',Q_{j'}^{(i')}}(h) = M_{g,Q_j^{(i)}}(h)$.

Par le même raisonnement qu'au dessus, on peut constater que

$$\bigsqcup_{Q_{j'}^{(i')} < Q_j^{(i)}} M_{g,g-i',Q_{j'}^{(i')}}(h) = \bigcup_{Q_{j'}^{(i')} < Q_j^{(i)}} M_{g,Q_{j'}^{(i')}}(h).$$

De la proposition 4.28 on sait que $M_{g,Q_j^{(i')}}(h)$ est un fermé de Zariski pour tout $Q_j^{(i')} \in \mathbb{C}[x]_h$.

L'union finie de fermés de Zariski $\bigsqcup_{Q_j^{(i')} < Q_j^{(i)}} M_{g,Q_j^{(i')}}(h)$ est aussi un fermé de Zariski. Par conséquent,

l'ensemble $M_{g,g-i,Q_j^{(i)}}(h)$ est un ouvert d'un fermé de Zariski car

$$M_{g,g-i,Q_j^{(i)}}(h) = M_{g,Q_j^{(i)}}(h) - \bigsqcup_{Q_j^{(i')} < Q_j^{(i)}} M_{g,Q_j^{(i')}}(h).$$

Donc $\overline{M_{g,g-i,Q_j^{(i)}}(h)} = \bigsqcup_{Q_j^{(i')} \leq Q_j^{(i)}} M_{g,Q_j^{(i')}}(h)$. On conclut que la famille $(M_{g,g-i,Q_j^{(i)}}(h))_{Q_j^{(i)} \in \mathbb{C}[x]_h}$ est

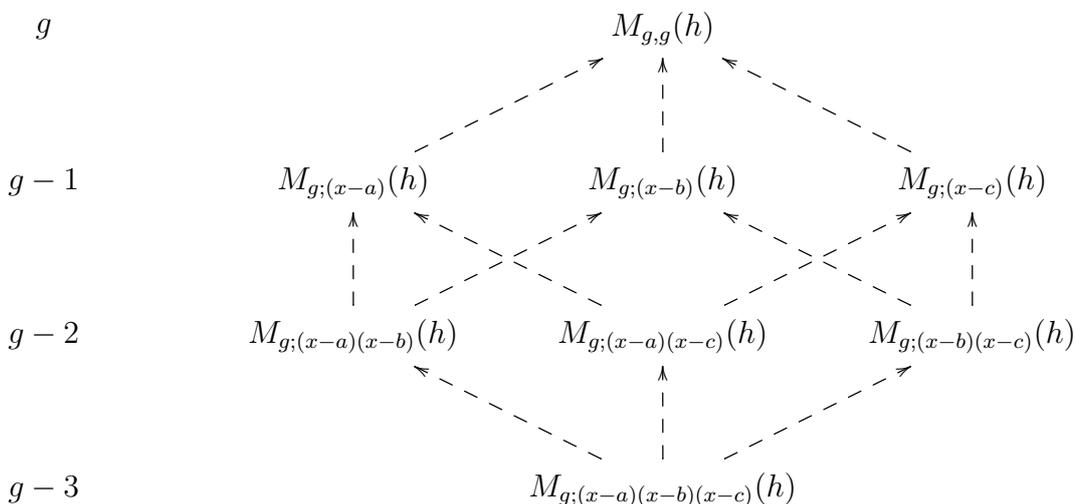
bien une stratification de $M_g(h)$. □

Chaque fibre $M_g(h)$ du système de Mumford d'ordre g admet donc la stratification définie ci-dessus

$$\left(M_{g,g-i,Q_j^{(i)}}(h) \right)_{Q_j^{(i)} \in \mathbb{C}[x]_h},$$

où les strates de cette dernière sont caractérisées par le degré de liberté des champs de vecteurs D_0, \dots, D_{g-1} et par les diviseurs quadratiques de h . Cela sera explicité dans les exemples suivants :

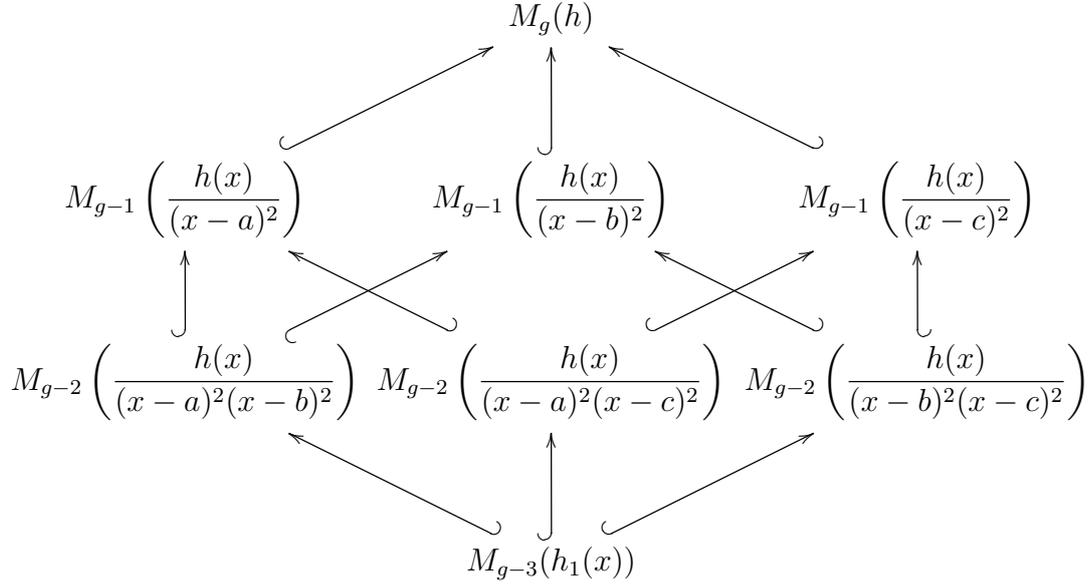
Exemple 4.36. Soit $g \geq 3$ et soient a, b et c trois éléments distincts de \mathbb{C} . Soit $h(x) = (x - a)^2(x - b)^2(x - c)^2h_1(x)$ avec h_1 un polynôme unitaire de degré $2g - 5$ et de discriminant non nul. On a $\mathbb{C}[x]_h = \{1, x - a, x - b, x - c, (x - a)(x - b), (x - a)(x - c), (x - b)(x - c), (x - a)(x - b)(x - c)\}$:



Dans ce diagramme, on a noté $A \dashrightarrow B$ si $A \subset \overline{B}$.

Chaque élément du diagramme est une strate de la stratification $(M_{g,Q_j^{(i)}}(h))_{Q_j^{(i)} \in \mathbb{C}[x]_h}$. D'après la proposition 4.16, chaque ligne de ce diagramme est composée de toutes les strates déterminées par le même degré de liberté des champs de vecteurs D_0, \dots, D_{g-1} . De plus, d'après le théorème 4.35 ; on a bien que la fermeture d'une strate (un élément du diagramme) est composée de toutes les éléments du diagrammes (strates) de lignes inférieures liés à ce dernière, à l'aide d'une suite de flèches \dashrightarrow et elle-même.

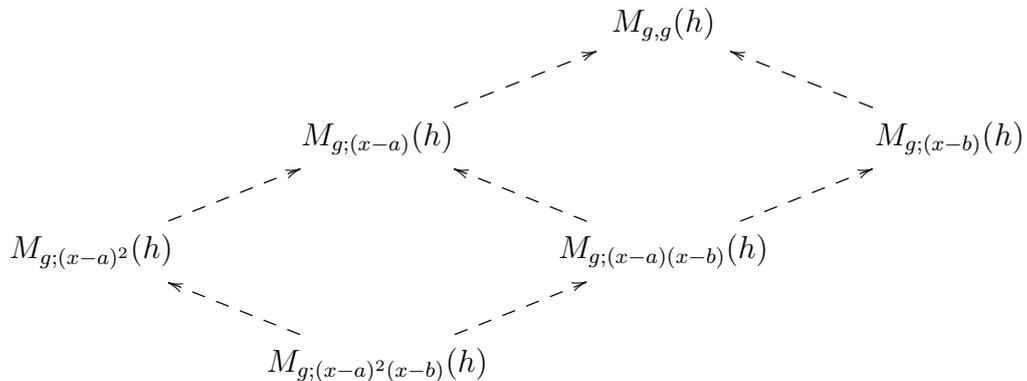
À l'aide de la proposition 4.18, ce second diagramme illustre le fait que la fermeture de chaque strate fine est isomorphe à une fibre d'un système de Mumford d'ordre inférieur tel que tous les éléments d'une même ligne de ce diagramme admettent un même degré maximal de liberté des champs de vecteurs.



Toute flèche et suite de flèches \hookrightarrow met les fibres du système de Mumford d'ordre $g - 3 \leq n \leq g$ en relation avec des fibres du système de Mumford d'ordre supérieur à l'aide de l'application μ_Q avec $Q \in \mathbb{C}[x]_h$, comme nous l'explicitons ci-dessous :

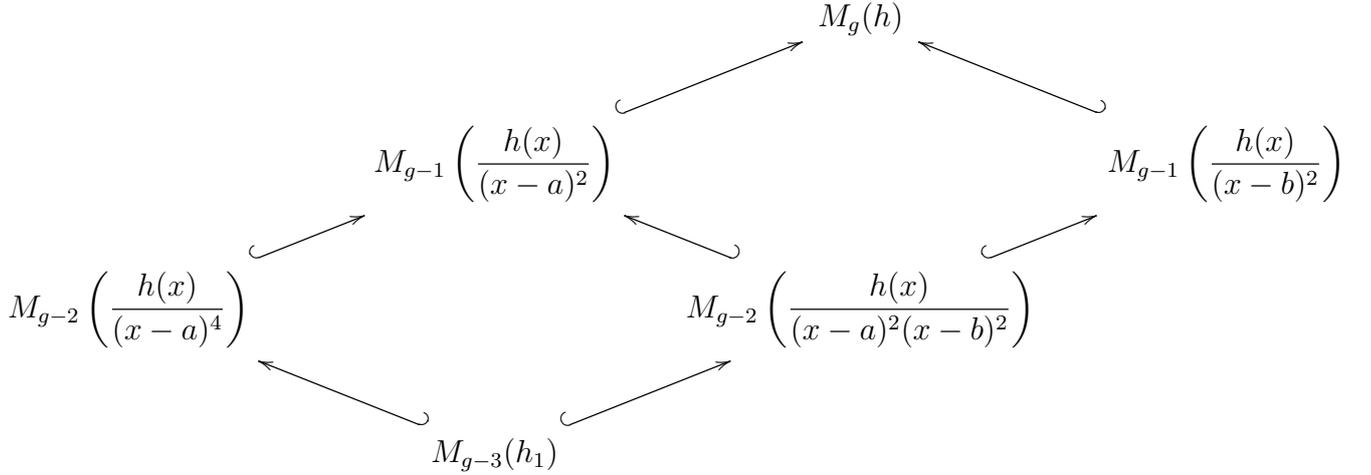
$$\begin{array}{c}
 M_{g-3}(h_1) \xrightarrow{\mu_{(x-a)}} M_{g-2}\left(\frac{h(x)}{(x-b)^2(x-c)^2}\right) \xrightarrow{\mu_{(x-c)}} M_{g-1}\left(\frac{h(x)}{(x-b)^2}\right) \xrightarrow{\mu_{(x-b)}} M_g(h). \\
 \underbrace{\hspace{15em}}_{\mu_{(x-a)(x-c)}} \\
 \underbrace{\hspace{15em}}_{\mu_{(x-a)(x-b)(x-c)}}
 \end{array}$$

Exemple 4.37. Soit $g \geq 3$ et soient a et b deux éléments distincts de \mathbb{C} . Soit $h(x) = (x - a)^4(x - b)^2h_1(x)$ avec h_1 un polynôme unitaire de degré $2g - 5$ de discriminant non nul. On a $\mathbb{C}[x]_h = \{1, x - a, x - b, (x - a)(x - b), (x - a)^2, (x - a)^2(x - b)\}$. Comme dans l'exemple 4.36, nous allons à l'aide de deux diagrammes décrire les propositions et théorèmes vus précédemment.



Les lignes de ce diagramme sont composées des strates déterminées par le même degré de liberté des champs de vecteurs allant de g à $g - 3$.

Le diagramme suivant nous permet de voir la relation entre certaines fibres du système de Mumford d'ordre décroissant.



4.2.3 Lissitude des strates

Chaque fibre $M_g(h)$ de l'espace de phase M_g est de dimension au moins g et est muni de g champs de vecteurs D_0, \dots, D_{g-1} . Elle admet une seule strate où les champs de vecteurs sont linéairement indépendants. C'est la strate $M_{g,g}$. On appelle $M_{g,g}(h)$ la strate *maximale* de $M_g(h)$.

Dans ce paragraphe, nous allons déterminer les singularités de chaque fibre $M_g(h)$, ainsi que la fermeture de chaque strate $M_{g,i}(h)$ de $M_g(h)$. Pour ce faire nous allons déterminer, en tout point le rang de la matrice jacobienne de l'application moment \mathbf{H} . Nous pourrions conclure que la dimension de chaque fibre $M_g(h)$ est égale à g .

Rappelons qu'on note par \mathbf{H} l'application polynomiale surjective définie par

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H} : M_g &\longrightarrow H_g \\
 A(x) = \begin{pmatrix} v(x) & u(x) \\ w(x) & -v(x) \end{pmatrix} &\longmapsto -\det(A(x)) = v^2(x) + u(x)w(x).
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Notons par h_0, \dots, h_{2g} les fonctions sur M_g telles que :

$$\mathbf{H}(A) = x^{2g+1} + \sum_{i=0}^{2g} h_i(A)x^i. \tag{4.18}$$

Les fonctions h_0, \dots, h_{2g} sont polynomiales en fonction des coordonnées $u_0, \dots, u_{g-1}, v_0, \dots, v_{g-1}, w_0, \dots, w_g$. Soit $A^0 = \begin{pmatrix} v^0 & u^0 \\ w^0 & -v^0 \end{pmatrix} \in M_g$, on note par $J_{\mathbf{H}}(A^0)$ la matrice jacobienne de l'application \mathbf{H} au point A^0 . Afin d'établir la matrice jacobienne $J_{\mathbf{H}}(A^0)$, il suffit de connaître $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \star}(A^0)$ où \star peut être égal à u_j, v_j, w_j pour tout $0 \leq j \leq g$. D'après l'égalité (4.18) $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \star}(A^0)$ s'écrit sous la forme

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \star}(A^0) = \sum_{i=0}^{2g} x^i \frac{\partial h_i}{\partial \star}(A^0), \tag{4.19}$$

et d'après l'égalité (4.17)

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \star}(A^0) = 2v(x) \frac{\partial v(x)}{\partial \star}(A^0) + w(x) \frac{\partial u(x)}{\partial \star}(A^0) + u(x) \frac{\partial w(x)}{\partial \star}(A^0). \tag{4.20}$$

En remplaçant \star par u_j, v_j, w_j pour tout $0 \leq j \leq g$ dans les égalités (4.19) et (4.20),

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial u_j}(A^0) = \sum_{i=0}^{2g} x^i \frac{\partial h_i}{\partial u_j}(A^0), \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial v_j}(A^0) = \sum_{i=0}^{2g} x^i \frac{\partial h_i}{\partial v_j}(A^0), \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial w_j}(A^0) = \sum_{i=0}^{2g} x^i \frac{\partial h_i}{\partial w_j}(A^0), \tag{4.21}$$

et

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial u_j}(A^0) = x^j w^0(x), \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial v_j}(A^0) = 2x^j v^0(x), \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial w_j}(A^0) = x^j u^0(x). \quad (4.22)$$

En combinant les égalités de (4.21) avec ceux de (4.22), on obtient

$$\sum_{i=0}^{2g} x^i \frac{\partial h_i}{\partial u_j}(A^0) = x^j w^0(x), \quad \sum_{i=0}^{2g} x^i \frac{\partial h_i}{\partial v_j}(A^0) = 2x^j v^0(x), \quad \sum_{i=0}^{2g} x^i \frac{\partial h_i}{\partial w_j}(A^0) = x^j u^0(x). \quad (4.23)$$

Les égalités (4.23), nous permettent d'écrire la matrice jacobienne de \mathbf{H} au point $A^0(x)$ suivante :

$$J_{\mathbf{H}}(A^0) = \begin{matrix} & h_0 & h_1 & \dots & \dots & h_g & h_{g-1} & h_g & h_{g+1} & \dots & h_{2g} \\ \begin{matrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{g-1} \\ v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{g-1} \\ w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_g \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccccccccccc} w_0^0 & w_1^0 & \dots & \dots & w_g^0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_0^0 & w_1^0 & \dots & \dots & w_g^0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & w_1^0 & w_2^0 & \dots & \dots & 1 \\ 2v_0^0 & 2v_1^0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & & \\ 0 & 2v_0^0 & 2v_1^0 & \dots & 2v_{g-1}^0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 2v_0^0 & 2v_1^0 & 2v_2^0 & \dots & \dots & 0 \\ u_0^0 & u_1^0 & \dots & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_0^0 & u_1^0 & \dots & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & u_1^0 & \dots & \dots & 1 \end{array} \right) \end{matrix}$$

Théorème 4.38. Soit $A^0(x) = \begin{pmatrix} v^0(x) & u^0(x) \\ w^0(x) & -v^0(x) \end{pmatrix} \in M_g$. Le rang de la matrice jacobienne de \mathbf{H} au point A^0 est égal à $2g + 1 - \rho(A^0)$.

Preuve. D'après la définition 2.18, on peut écrire $J_{\mathbf{H}}(A^0)$ de la manière suivante :

$$J_{\mathbf{H}}(A^0) = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{w^0,g} \\ \mathbf{M}_{v^0,g} \ 0_{g \times 2} \\ \mathbf{M}_{u^0,g+1} \end{pmatrix},$$

où $0_{g \times 2}$ est la matrice nulle de dimension $g \times 2$. En appliquant le théorème 2.24, on obtient

$$\dim(\text{Ker}(J_{\mathbf{H}}(A^0))) = \deg(\text{PGCD}(u^0, v^0, w^0)).$$

Par définition, $\rho(A^0) = \deg(\text{PGCD}(u^0, v^0, w^0))$, et donc le rang de $J_{\mathbf{H}}(A^0)$ est égal à $2g + 1 - \rho(A^0)$. \square

Proposition 4.39. Soit $h \in H_g$. La strate maximale $M_{g,g}(h)$ est une variété quasi-affine lisse de dimension g . De plus, le bord de $M_{g,g}(h)$ est constitué de tous les points singuliers de $M_g(h)$. En particulier, chaque fibre $M_g(h)$ est une variété affine de dimension g .

Preuve. Rappelons qu'une matrice A^0 appartient à $M_{g,g}(h)$ si et seulement si $\rho(A^0) = 0$. Le théorème 4.38 nous assure que la strate maximale de $M_g(h)$ est la partie lisse de $M_g(h)$, car le rang de \mathbf{H} au point $A^0 \in M_g(h)$ est maximal si et seulement si $\rho(A^0) = 0$. \square

De la proposition 4.39 et du fait que chaque strate $M_{g,i}(h)$ est union disjointe de sous-variétés quasi-affines isomorphe à des strates maximales de systèmes de Mumford d'ordre i , on peut déduire la proposition suivante :

Proposition 4.40. Soit $h \in H_g$. Chaque strate $M_{g,i}(h)$ de la fibre $M_g(h)$ est lisse et de dimension i .

4.3 Les systèmes de Mumford pairs

Nous allons construire et étudier dans cette section deux stratifications des fibres et une stratification de l'espace de phases du système de Mumford pair. Les constructions sont similaires à celles dans le cas du système de Mumford impair. Nous utiliserons les mêmes notations que dans le cas impair en leur ajoutant une prime pour les différencier du cas impair. Nous rappelons d'abord les notations que nous avons vues dans le chapitre précédent. L'espace affine

$$M'_g = \left\{ \left(\begin{array}{cc} v(x) & u(x) \\ w(x) & -v(x) \end{array} \right) \text{ tel que } \begin{array}{l} u(x) = x^g + u_{g-1}x^{g-1} + u_{g-2}x^{g-2} + \cdots + u_0, \\ v(x) = v_{g-1}x^{g-1} + v_{g-2}x^{g-2} + \cdots + v_0, \\ w(x) = x^{g+2} + w_{g+1}x^{g+1} + w_{g-1}x^{g-1} + \cdots + w_0. \end{array} \right\},$$

est l'espace de phase du système de Mumford pair d'ordre g . L'application \mathbf{H}' est définie par

$$\mathbf{H}' : \begin{array}{ccc} M'_g & \longrightarrow & H'_g \\ A(x) & \longmapsto & -\det(A(x)), \end{array}$$

où H'_g l'espace des polynômes unitaires de degré $2g+2$. L'application \mathbf{H}' définit $2g+2$ fonctions polynomiales h'_0, \dots, h'_{2g+1} en posant pour tout $A(x) \in M'_g$

$$\mathbf{H}'(A(x)) = x^{2g+2} + \sum_{i=0}^{2g+1} x^i h'_i(A(x)).$$

On note par D'_i les champs hamiltoniens associés aux fonctions h_i . Ces champs hamiltoniens sont polynomiaux en $u_0, \dots, u_{g-1}, v_0, \dots, v_{g-1}, w_0, \dots, w_{g+1}$ car la structure de Poisson est polynomiale et les fonctions h_i sont polynomiales. Rappelons aussi que pour tout $y \in \mathbb{C}$, nous avons défini une fonction \mathbf{H}'_y sur M'_g , en posant pour tout $A(x) \in M'_g$

$$\mathbf{H}'_y(A(x)) = \mathbf{H}'(A(x))|_{x=y}.$$

Son champ hamiltonien associé est noté D'_y .

4.3.1 La stratification de l'espace de phases M'_g

L'espace de phases du système de Mumford pair d'ordre g admet une stratification naturelle donnée par l'application surjective σ définie par

$$\sigma : \begin{array}{ccc} M'_g & \longrightarrow & \{0, \dots, g\} \\ A(x) & \longmapsto & \dim \langle D'_0|_A, \dots, D'_{g-1}|_A \rangle. \end{array}$$

Pour tout $i \in \{0, \dots, g\}$, on notera par $M'_{g,i}$ la fibre de σ au dessus de i . On note par I l'ensemble des entiers $i \in \{0, \dots, g\}$ tel que $M'_{g,i} \neq \emptyset$.

L'espace de phases M'_g admet une seconde stratification, donnée par l'application surjective

$$\rho : \begin{array}{ccc} M'_g & \longrightarrow & \{0, \dots, g\} \\ A(x) = \left(\begin{array}{cc} v(x) & u(x) \\ w(x) & -v(x) \end{array} \right) & \longmapsto & \deg(\text{PGCD}(u, v, w)). \end{array}$$

Pour tout $0 \leq i \leq g$, notons par $S'_{g,i}$ l'image inverse de ρ au point $g-i$.

Proposition 4.41. *Les deux familles $(M'_{g,i})_{i \in I}$ et $(S'_{g,i})_{i \in \{0, \dots, g\}}$ forment deux stratifications de la variété M'_g .*

Preuve. La preuve que $(M'_{g,i})_{i \in I}$ est une stratification de M'_g est identique à la preuve de la proposition 4.7. De même, la démonstration pour vérifier que $(S'_{g,i})_{i \in \{0, \dots, g\}}$ est une stratification de M'_g , est analogue à la preuve de la proposition 4.8. \square

Nous allons voir que les stratifications $(M'_{g,i})_{i \in \{0, \dots, g\}}$ et $(S'_{g,i})_{i \in \{0, \dots, g\}}$ de M'_g sont liées.

Théorème 4.42. *Les champs de vecteurs D'_0, \dots, D'_{g-1} sont linéairement indépendants au point $A^0(x) = \begin{pmatrix} v^0(x) & u^0(x) \\ w^0(x) & -v^0(x) \end{pmatrix}$ de M'_g si et seulement si la matrice A^0 est régulière.*

Preuve. La preuve du théorème 4.42 est presque identique à celle du théorème 4.9, seul le degré des polynômes $w(x)$ et $s(x)$ change, sans incidence aux arguments utilisés. \square

Définition 4.43. Soit $P(x)$ un polynôme unitaire de $\mathbb{C}[x]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$. On note par μ_P l'application affine définie de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mu_P : M'_g &\longrightarrow M'_{g+n} \\ A(x) &\longmapsto P(x)A(x). \end{aligned}$$

Proposition 4.44. *Soit P un polynôme unitaire de $\mathbb{C}[x]$. L'application μ_P est un isomorphisme affine sur son image.*

Preuve. La preuve est identique à la preuve de la proposition 4.11. \square

Proposition 4.45. *Soit $P(x)$ un polynôme de $\mathbb{C}[x]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$, soit $A^0(x) \in M'_g$ et soit $y \in \mathbb{C}$, on a*

$$D_y^{g+n}|_{PA^0} = P(y)\mu_{P*}D_y^g|_{A^0}. \quad (4.24)$$

Preuve. Pour toute matrice $A^0(x) = \begin{pmatrix} v^0(x) & u^0(x) \\ w^0(x) & -v^0(x) \end{pmatrix}$ de M'_g , on sait par l'égalité (3.5) que

$$D_y^g|_{A^0} = \left[A^0(x), -\frac{A^0(y)}{x-y} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u^0(y)\alpha(x+y) & 0 \end{pmatrix} \right].$$

L'image du champ de vecteurs D_y^g au point $A^0(x)$ par l'application linéaire μ_P est

$$\mu_{P*}D_y^g|_{A^0} = P(x) \left[A^0(x), -\frac{A^0(y)}{x-y} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u^0(y)\alpha(x+y) & 0 \end{pmatrix} \right]. \quad (4.25)$$

Toujours par l'égalité (3.5) on a

$$\begin{aligned} D_y^{g+n}|_{PA^0} &= \left[P(x)A^0(x), -\frac{P(y)A^0(y)}{x-y} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ P(y)u^0(y)\alpha(x+y) & 0 \end{pmatrix} \right], \\ &= P(y)P(x) \left[A^0(x), -\frac{A^0(y)}{x-y} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ u^0(y)\alpha(x+y) & 0 \end{pmatrix} \right]. \end{aligned} \quad (4.26)$$

En remplaçant l'égalité (4.25) dans (4.26) on obtient

$$D_y^{g+n}|_{PA^0} = P(y)\mu_{P*}D_y^g|_{A^0}.$$

\square

Corollaire 4.46. *Pour tout $A^0(x) \in M'_g$ on a*

$$D_i^{g+n}|_{PA^0} = \text{Res}_{y=0} \left[\frac{P(y)\mu_{P*}D_y^g|_{A^0}}{y^{i+1}} \right], \text{ pour tout } 0 \leq i \leq g+n-1.$$

Preuve. La preuve est semblable à la preuve du corollaire 4.13. □

Proposition 4.47. *Soit $P(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $A^0(x) \in M'_g$. On a*

$$D_0^{g+n}|_{PA^0} = D_1^{g+n}|_{PA^0} = \dots = D_{n-1}^{g+n}|_{PA^0} = 0,$$

et

$$D_{n+i}^{g+n}|_{PA^0} = \mu_{P*}(D_i^g|_{A^0}) \text{ pour tout } 0 \leq i \leq g-1.$$

De plus

$$\dim \langle D_0^g|_{A^0}, \dots, D_{g-1}^g|_{A^0} \rangle = g - \rho(A^0).$$

Preuve. La preuve est analogue à la preuve du corollaire 4.14 et la proposition 4.16. □

Comme dans le cas du système de Mumford impair, nous avons défini deux stratifications sur l'espace de phases M'_g . La première stratification est définie par ρ où les strates contiennent toutes les matrices de même degré de régularité. Les strates de la seconde stratification définie par σ nous définit une stratification où les strates sont conditionnées par le degré de liberté des champs hamiltoniens D_0^g, \dots, D_{g-1}^g . Par la proposition 4.47, ces deux stratifications sont identiques, car ρ et σ sont liées par l'égalité

$$\sigma(A) = g - \rho(A) \text{ pour tout } A \in M'_g.$$

D'où la proposition suivante :

Proposition 4.48. *Les deux stratifications $(M'_{g,i})_{i \in \{0, \dots, g\}}$ et $(S'_{g,i})_{i \in \{0, \dots, g\}}$ de M'_g sont identiques.*

Remarque 4.49. Les champs de vecteurs D_0^g, \dots, D_{g-1}^g sont tangents à $M'_{g,i}$ pour tout $1 \leq i \leq g$. De plus

$$\langle D_0^g|_{PA'}, \dots, D_{g-1}^g|_{PA'} \rangle = \langle \mu_{P*}D_0^i|_{A'}, \dots, \mu_{P*}D_{i-1}^i|_{A'} \rangle.$$

L'argumentation de cette remarque est similaire à celle de la remarque 4.19.

4.3.2 La stratification des fibres $M'_g(h)$

Soit $h \in H'_g$. La fibre au dessus de h par l'application surjective \mathbf{H}' est notée $M'_g(h)$. Notons que par la surjectivité de l'application \mathbf{H}' , toutes les fibres sont non vides.

Comme dans le cas des systèmes de Mumford impairs, nous allons décrire deux stratifications sur chaque fibre de l'application moment des systèmes de Mumford pairs. La première est héritée de la stratification de M'_g , décrite ci-dessus ; la deuxième est plus fine.

Soit h un polynôme de H'_g . Pour tout $0 \leq i \leq g$, notons

$$M'_{g,i}(h) = M'_g(h) \cap M'_{g,i}.$$

Proposition 4.50. *Soit $h \in H'_g$. L'ensemble $M'_{g,i}(h)$ est non-vide si et seulement si $g - \rho(h) \leq i \leq g$.*

Preuve. La preuve est identique à celle de la proposition 4.24. □

Proposition 4.51. *Soit $h \in H'_g$. La famille $(M'_{g,i}(h))_{i \in \{g-\rho(h), \dots, g\}}$ est une stratification de la fibre $M'_g(h)$.*

Preuve. La preuve est similaire à celle de la proposition 4.25. \square

Remarque 4.52. Si $h \in H'_g$ tel que $\rho(h) = 0$, d'après la proposition 4.51, la stratification se réduit à une seule strate. Les g champs de vecteurs D'_0, \dots, D'_{g-1} sont linéairement indépendants en ces points $A(x) \in M'_g(h)$.

Dans la suite, nous allons construire une stratification plus fine sur les fibres $M'_g(h)$ où $h \in H'_g$. Elle définira sur chaque strate de la stratification $(M'_{g,i}(h))_{i \in \{g-\rho(h), \dots, g\}}$ une partition indexée par un sous-ensemble de l'ensemble des diviseurs quadratiques de h . Soit $h \in H'_g$, on sait d'après la remarque 4.52 que si $\rho(h) = 0$ nous obtenons une stratification avec une unique strate qui est toute la fibre. On suppose donc dans la suite de cette section que $h \in H'_g$ soit tel que $\rho(h) \geq 1$.

Définition 4.53. Soit Q un polynôme unitaire. Notons par $M'_{g,Q}(h)$ l'ensemble des matrices $A(x) = \begin{pmatrix} v(x) & u(x) \\ w(x) & -v(x) \end{pmatrix} \in M'_g(h)$ tel que Q divise les polynômes u, v et w .

Proposition 4.54. Soit Q un polynôme de $\mathbb{C}[x]_h$. Le sous-ensemble $M'_{g,Q}(h)$ de $M'_g(h)$ est un fermé de Zariski.

Preuve. La preuve est analogue à celle de la proposition 4.28. \square

Remarquons que pour le polynôme $Q = 1$, on a que $M'_{g,Q}(h) = M'_g(h)$.

Théorème 4.55. Pour tout $0 \leq i \leq \rho(h)$, la strate $M'_{g,g-i}(h)$ est donnée par l'union disjointe suivante :

$$M'_{g,g-i}(h) = \bigsqcup_{Q \in \mathbb{C}[x]_{i,h}} \mu_Q M'_{g-i,g-i} \left(\frac{h}{Q^2} \right).$$

Preuve. La preuve est similaire à la preuve du théorème 4.30. \square

Proposition 4.56. Soit P le diviseur quadratique maximal de h . La strate $M'_{g,g-\rho(h)}(h)$ est isomorphe à la fibre $M'_{g-\rho(h)} \left(\frac{h}{P^2} \right)$.

Preuve. La preuve est identique à la preuve de la proposition 4.31. \square

Définition 4.57. Soit $1 \leq i \leq \rho(h)$, soit Q un polynôme $\mathbb{C}[x]_{i,h}$ et soit k un entier naturel tel que $k \leq g - i$. On note

$$M'_{g,k,Q}(h) = M'_{g,Q}(h) \cap M'_{g,k}(h).$$

Remarquons que si $k > g - i$ alors $M'_{g,Q}(h) \cap M'_{g,k}(h) = \emptyset$.

La proposition suivante est une généralisation de la proposition 4.56 :

Proposition 4.58. Soit $1 \leq i \leq \rho(h)$. Si Q est un polynôme de $\mathbb{C}[x]_{i,h}$, alors l'application μ_Q définit l'isomorphisme suivant :

$$\begin{array}{ccc} M'_{g-i,g-i} \left(\frac{h}{Q^2} \right) & \xrightarrow{\sim} & M'_{g,g-i,Q}(h) \\ A(x) & \longmapsto & \mu_Q(A(x)). \end{array}$$

Preuve. La preuve est identique à la preuve de la proposition 4.33. \square

Avec les théorèmes et propositions précédents, on peut maintenant décrire une stratification plus fine de $M'_g(h)$, mais introduisons d'abord les notations suivantes :

L'ensemble $\mathbb{C}_{i,h}[x]$ est formé de la famille finie des diviseurs quadratiques degré i de h . Cette famille sera notée $\{Q_1^{(i)}, \dots, Q_{n_i}^{(i)}\}$. Pour tout $0 \leq i \leq \rho(h)$, on note

$$M'_{g,g-i,Q_j^{(i)}}(h) = M'_{g,g-i}(h) \cap M'_{g,Q_j^{(i)}}(h) \text{ pour tout } Q_j^{(i)} \in \mathbb{C}_{i,h}[x].$$

Théorème 4.59. *La famille $(M'_{g,g-i,Q_j^{(i)}}(h))_{Q_j^{(i)} \in \mathbb{C}[x]_h}$ est une stratification de $M'_g(h)$*

$$M'_g(h) = \bigsqcup_{i=0}^{\rho(h)} \bigsqcup_{Q_j^{(i)} \in \mathbb{C}[x]_{i,h}} M'_{g,g-i,Q_j^{(i)}}(h).$$

On appelle les strates de cette stratification les strates fines (des fibres) du système de Mumford pair d'ordre g .

Preuve. La preuve est similaire à la preuve du théorème 4.35. □

4.3.3 Lissitude des strates

Toutes les fibres $M'_g(h)$ de l'espace de phase M'_g admettent une unique strate où les champs de vecteurs sont linéairement indépendants. Cette strate n'est rien d'autre que $M'_{g,g}(h)$, qu'on appelle la strate *maximale* de $M'_g(h)$.

Dans ce paragraphe, nous allons omettre d'écrire les preuves des propositions et théorèmes, car elles sont similaires à celles exposées dans la section 4.2.3.

Rappelons qu'on note par \mathbf{H}' l'application polynomiale surjective définie par

$$\begin{aligned} \mathbf{H}' : \quad & M'_g & \longrightarrow & H'_g \\ A(x) = \begin{pmatrix} v(x) & u(x) \\ w(x) & -v(x) \end{pmatrix} & \longmapsto & -\det(A(x)) = v^2(x) + u(x)w(x). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Notons par h'_0, \dots, h'_{2g+1} les fonctions sur M'_g telles que :

$$\mathbf{H}'(A) = x^{2g+1} + \sum_{i=0}^{2g+1} h'_i(A)x^i. \quad (4.28)$$

Les fonctions h'_0, \dots, h'_{2g+1} sont polynomiales en fonction des coordonnées $u_0, \dots, u_{g-1}, v_0, \dots, v_{g-1}, w_0, \dots, w_{g+1}$. Soit $A^0 = \begin{pmatrix} v^0 & u^0 \\ w^0 & -v^0 \end{pmatrix} \in M'_g$. On note par $J_{\mathbf{H}'}(A^0)$ la matrice jacobienne de l'application \mathbf{H}' au point A^0 . Nous calculons la matrice jacobienne $J_{\mathbf{H}'}(A^0)$. Pour cela il suffit de connaître $\frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial \star}(A^0)$ où \star peut être égal à u_j, v_j, w_j pour tout $0 \leq j \leq g+1$. D'après l'égalité (4.28) $\frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial \star}(A^0)$ s'écrit sous la forme

$$\frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial \star}(A^0) = \sum_{i=0}^{2g+1} x^i \frac{\partial h'_i}{\partial \star}(A^0), \quad (4.29)$$

et d'après l'égalité (4.27)

$$\frac{\partial \mathbf{H}'}{\partial \star}(A^0) = 2v(x) \frac{\partial v(x)}{\partial \star}(A^0) + w(x) \frac{\partial u(x)}{\partial \star}(A^0) + u(x) \frac{\partial w(x)}{\partial \star}(A^0). \quad (4.30)$$

En remplaçant \star par u_j, v_j, w_j pour tout $0 \leq j \leq g$ dans les égalités (4.29) et (4.30), puis en combinant les égalités obtenues, on a

$$\sum_{i=0}^{2g+1} x^i \frac{\partial h'_i}{\partial u_j}(A^0) = x^j w^0(x), \quad \sum_{i=0}^{2g+1} x^i \frac{\partial h'_i}{\partial v_j}(A^0) = 2x^j v^0(x), \quad \sum_{i=0}^{2g+1} x^i \frac{\partial h'_i}{\partial w_j}(A^0) = x^j u^0(x). \quad (4.31)$$

Les égalités (4.31), nous permettent d'écrire la matrice jacobienne de \mathbf{H}' au point $A^0(x)$ suivante :

$$J_{\mathbf{H}'}(A^0) = \begin{matrix} & h'_0 & h'_1 & \dots & \dots & h'_g & h_{g-1} & h'_g & h_{g+1} & \dots & h'_{2g+1} \\ \begin{matrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{g-1} \\ v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{g-1} \\ w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_{g+1} \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccccccccccc} w_0^0 & w_1^0 & \dots & \dots & w_g^0 & w_{g+1}^0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_0^0 & w_1^0 & \dots & \dots & w_g^0 & w_{g+1}^0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & w_1^0 & w_2^0 & \dots & \dots & 1 \\ 2v_0^0 & 2v_1^0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 2v_0^0 & 2v_1^0 & \dots & 2v_{g-1}^0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 2v_0^0 & 2v_1^0 & 2v_2^0 & \dots & \dots & 0 \\ u_0^0 & u_1^0 & \dots & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_0^0 & u_1^0 & \dots & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & u_1^0 & \dots & \dots & 1 \end{array} \right) \end{matrix}$$

Théorème 4.60. Soit $A^0(x) = \begin{pmatrix} v^0(x) & u^0(x) \\ w^0(x) & -v^0(x) \end{pmatrix} \in M'_g$. Le rang de la matrice jacobienne de \mathbf{H}' au point A^0 est égal à $2g + 2 - \rho(A^0)$.

Preuve. Preuve identique à celle du théorème 4.38. □

Proposition 4.61. Soit $h \in H'_g$. La strate maximale $M'_{g,g}(h)$ est une variété quasi-affine lisse de dimension g . De plus, le bord de $M'_{g,g}(h)$ est constitué de tous les points singuliers de $M'_g(h)$. En particulier, chaque fibre $M'_g(h)$ est une variété affine de dimension g .

Preuve. Preuve similaire à celle de la proposition 4.39. □

De la proposition 4.61 et comme chaque strate $M'_{g,i}(h)$ est union disjointe de sous-variétés quasi-affines isomorphes à des strates maximales de systèmes de Mumford impair d'ordre $g - i$, on a la proposition suivante :

Proposition 4.62. Soit $h \in H'_g$. Chaque strate $M'_{g,i}(h)$ de la fibre $M'_g(h)$ est lisse et de dimension i .

Chapitre 5

Description géométrico-algébrique des strates

Nous avons montré dans le chapitre précédent que chaque strate fine des systèmes de Mumford (impairs ou pairs) est isomorphe avec une strate maximale d'un système de Mumford d'ordre inférieur (cfr. Théorèmes 4.30 et 4.55). Pour décrire toutes les strates des systèmes de Mumford, il suffit alors de décrire les strates maximales, c'est-à-dire les strates $M_{g,g}(h)$ dans le cas impair, et les strates $M'_{g,g}(h)$ dans le cas pair. Quand h est sans racine multiple, $M_{g,g}(h)$ coïncide avec la fibre $M_g(h)$ (et de même pour $M'_{g,g}(h)$) et est d'après Mumford un ouvert de la jacobienne de la courbe hyperelliptique lisse, définie par $y^2 = h(x)$. Nous étudions dans ce chapitre le cas singulier, où h admet des racines multiples, et nous nous restreignons au cas des systèmes de Mumford impairs.

5.1 Rappels

Dans cette section, nous rappelons brièvement la notion de diviseur sur une courbe algébrique, nous énonçons la définition et les propriétés fondamentales des courbes hyperelliptiques et nous rappelons la construction de la jacobienne généralisée (voir [12] et [18] pour des détails et des informations complémentaires).

5.1.1 Diviseurs sur une courbe

Soit \overline{C} une courbe algébrique projective. Le *groupe des diviseurs* de \overline{C} est le groupe abélien libre, engendré par les points de \overline{C} . Il est noté $\text{Div}(\overline{C})$ et ses éléments sont appelés *diviseurs* (de \overline{C}). Tout diviseur D de \overline{C} s'écrit comme

$$D = \sum_{p \in \overline{C}} n_p p, \text{ où les } n_p \text{ sont des entiers presque tous nuls.}$$

Le *support* de D , noté $\text{supp}(D)$, est l'ensemble (fini) de points $p \in \overline{C}$ tel que $n_p \neq 0$. Le *degré* de D est l'entier $\sum_{p \in \overline{C}} n_p$, noté $\text{deg}(D)$. La fonction $\text{deg} : \text{Div}(\overline{C}) \rightarrow \mathbb{Z}$ est un morphisme de groupes,

dont le noyau est noté $\text{Div}^0(\overline{C})$. Pour $p \in \overline{C}$ on appelle n_p la *multiplicité de D en p* , noté $D|_p$.

Le groupe des diviseurs $\text{Div}(\overline{C})$ est naturellement muni d'une relation d'ordre (partielle). Soient $D = \sum_{p \in \overline{C}} n_p p$ et $D' = \sum_{p \in \overline{C}} n'_p p$ deux diviseurs de \overline{C} . On dit que $D \geq D'$ si $n_p \geq n'_p$ pour tout $p \in \overline{C}$.

Un diviseur $D \in \text{Div}(\overline{C})$ est dit *effectif* si $D \geq 0$. L'ensemble des diviseurs effectifs est noté $\text{Div}^+(\overline{C})$. Les diviseurs effectifs de \overline{C} de degré n sont en bijection avec les éléments de $\overline{C}^{(n)}$, où $\overline{C}^{(n)}$ est le produit symétrique n -ième de la courbe \overline{C} . Par abus de langage, on appelle les éléments de $\overline{C}^{(n)}$ aussi des diviseurs de C .

Supposons maintenant que \overline{C} soit une courbe non-singulière. Une fonction rationnelle f sur \overline{C} définit un diviseur, noté (f) , où

$$(f) = \sum_{p \in \overline{C}} v_p(f)p,$$

avec v_p la valuation de la fonction f au point (lisse) p . Un tel diviseur est appelé diviseur *principal*. Les diviseurs principaux de \overline{C} forment un sous-groupe de $\text{Div}^0(\overline{C})$, noté $\text{Princ}(\overline{C})$. Deux diviseurs D et D' de \overline{C} sont dit *linéairement équivalents* si leur différence est un diviseur principal. On écrira alors $D \sim D'$ et on note $[D]$ la classe d'équivalence de D . Les diviseurs principaux de \overline{C} sont donc les diviseurs D avec $D \sim 0$. La relation d'équivalence linéaire est compatible avec la structure de groupe de $\text{Div}(\overline{C})$: si $D \sim D'$ alors $D + D'' \sim D' + D''$ pour tout $D'' \in \text{Div}(\overline{C})$. Par conséquent, le quotient $\text{Div}(\overline{C})/\text{Princ}(\overline{C})$ est un groupe. On l'appelle le *groupe de Picard*, noté $\text{Pic}(\overline{C})$. Puisque le degré de tout diviseur principal est zéro, le morphisme $\text{deg} : \text{Div}(\overline{C}) \rightarrow \mathbb{Z}$ induit un morphisme $\text{deg} : \text{Pic}(\overline{C}) \rightarrow \mathbb{Z}$. Son noyau, qui consiste de la classe d'équivalence linéaire de tous les diviseurs de degré zéro de \overline{C} est un groupe abélien, appelé la *jacobienne* de la courbe \overline{C} , noté $\text{Jac}(\overline{C})$. C'est une variété abélienne de dimension g qui est très utile dans l'étude de la courbe lisse \overline{C} . Plus loin, nous considérerons les jacobienes généralisées, qui généralisent la notion de jacobienne pour des courbes singulières.

5.1.2 Courbes hyperelliptiques

Soit \overline{C} une courbe projective lisse. On dit que \overline{C} est *hyperelliptique* si le genre de \overline{C} est au moins deux et \overline{C} admet une involution ι (appelée *l'involution hyperelliptique* de \overline{C}) tel que \overline{C}/ι soit isomorphe à \mathbb{P}^1 . Toute courbe projective lisse de genre deux est hyperelliptique, mais à partir du genre trois la courbe générique n'est pas hyperelliptique. Toute courbe hyperelliptique de genre g admet une équation affine

$$y^2 = x^{2g+1} + c_{2g}x^{2g} + \cdots + c_1x + c_0, \quad (5.1)$$

ainsi qu'une équation affine

$$y^2 = x^{2g+2} + c_{2g+1}x^{2g+1} + \cdots + c_1x + c_0, \quad (5.2)$$

où les coefficients c_i appartiennent à \mathbb{C} . On peut reconstruire \overline{C} à partir de chacune de ces équations : si on note C la courbe affine d'équation (5.1), on obtient \overline{C} on ajoutant un point à C , noté ∞ . De même, si on note C la courbe affine d'équation (5.2), on obtient \overline{C} on ajoutant deux points à C , notés ∞_+ et ∞_- . Les polynômes qui figurent dans le côté droit de (5.1) et de (5.2) n'ont pas de racines multiples, car \overline{C} est lisse. Une courbe affine d'équation (5.1) ou (5.2) sera appelée une *courbe hyperelliptique singulière* si le côté droit de son équation admet des racines multiples. On peut également compactifier (compléter) telles courbes en ajoutant à nouveau un ou deux points, comme avant. Comme nous l'avons vu, les fibres de l'application moment du système de Mumford *impair* d'ordre g sont naturellement associées à des courbes hyperelliptiques (éventuellement singulières), d'équation affine (5.1), tandis que pour les systèmes de Mumford *pairs* ils correspondent aux courbes hyperelliptiques (éventuellement singulières), d'équation affine (5.2). Cela explique la terminologie impair/pair pour les systèmes de Mumford. Notons au passage aussi que quand $g = 1$ alors (5.1) et de (5.2) définissent une courbe *elliptique* (éventuellement singulière) ; ceci explique le terme *hyperelliptique*.

On peut décrire très explicitement l'équivalence linéaire de diviseurs sur les courbes hyperelliptiques. Soit \overline{C} une courbe hyperelliptique (lisse) d'équation affine $y^2 = \underbrace{\prod_{i=1}^k (x - a_i)}_{h(x)}$. Alors les

diviseurs des zéros et des pôles de y , $x - a$ et $(x - a)/(x - b)$ (avec $a, b \in \mathbb{C}$), que l'on voit comme fonctions rationnelles sur \overline{C} , sont donnés par les formules suivantes :

$$(y) = \begin{cases} \sum_{i=1}^k (a_i, 0) - (g+1)(\infty_+ + \infty_-) & \text{si } k = 2g + 2, \\ \sum_{i=1}^k (a_i, 0) - (2g+1)\infty & \text{si } k = 2g + 1, \end{cases}$$

$$(x - b) = \begin{cases} (b, \sqrt{h(b)}) + (b, -\sqrt{h(b)}) - (\infty_+ + \infty_-) & \text{si } k = 2g + 2, \\ (b, \sqrt{h(b)}) + (b, -\sqrt{h(b)}) - 2\infty & \text{si } k = 2g + 1, \end{cases}$$

$$\left(\frac{x-a}{x-b}\right) = (a, \sqrt{h(a)}) + (a, -\sqrt{h(a)}) - (b, \sqrt{h(b)}) - (b, -\sqrt{h(b)}).$$

Tout d'abord, ces formules impliquent que tous les diviseurs $P + \iota(P)$ sont linéairement équivalents. Si $k = 2g + 1$ (cas impair) cela veut dire que $P + \iota(P) \sim 2\infty$ pour tout $P \in \overline{C}$; si $k = 2g + 2$ (cas pair) cela veut dire que $P + \iota(P) \sim \infty_+ + \infty_-$ pour tout $P \in \overline{C}$. De plus, quand deux diviseurs effectifs D et D' de \overline{C} de degré au plus g sont linéairement équivalents, et de support disjoints, alors il existe $P \in \overline{C}$ tel que $D - P - \iota(P)$ soit effectif, et de même pour D' . Cela donne une description totale de l'équivalence linéaire car, si on fixe un point P_0 de \overline{C} , tout diviseur D de degré zéro est linéairement équivalent avec un diviseur de la forme $\sum_{i=1}^g P_i - gP_0$.

5.1.3 Jacobiennes généralisées

Afin de décrire les strates singulières des systèmes de Mumford, nous aurons besoin de jacobiniennes généralisées. Suivant Serre [18] nous rappelons ici les définitions de base sur les jacobiniennes généralisées, que nous spécialiserons dans la prochaine section aux courbes hyperelliptiques. La jacobienne généralisée sera construite en passant par un groupe birationnel, dont nous rappelons d'abord la définition.

Définition 5.1. Soit X une variété algébrique. Une application rationnelle $* : X \times X \dashrightarrow X$ est appelée *loi de composition rationnelle*. Le couple $(X, *)$ est un *groupe birationnel* avec élément neutre e , si $*$ vérifie pour tous $a, b, c \in X$ les propriétés suivantes :

- (1) Commutativité : si $a * b$ est définie, $b * a$ l'est aussi et $a * b = b * a$;
- (2) Associativité : si $(a * b) * c$ est définie, $a * (b * c)$ l'est aussi et $(a * b) * c = a * (b * c)$;
- (3) Élément neutre : $a * e = a$;
- (4) Existence d'inverses : il existe $a^{-1} \in X$ tel que $a * a^{-1} = e$.

Dans tout ce paragraphe, \overline{C}' est une courbe projective lisse de genre g' et \mathfrak{n} est un diviseur effectif de \overline{C}' , appelé *module* (de \overline{C}'). La courbe C' munie du module \mathfrak{n} correspond à la normalisée d'une courbe projective singulière notée C , avec S l'ensemble de ses points singuliers. Il y a une projection ϕ entre la courbe C' et la courbe C où $\phi : C' - \text{supp } \mathfrak{n} \rightarrow C - S$ est un isomorphisme birégulier. A partir de ces données, on construit un groupe birationnel. Pour ce faire, on a besoin d'une généralisation de la notion d'équivalence linéaire.

Définition 5.2. Deux diviseurs D et D' de \overline{C}' sont dits *\mathfrak{n} -équivalents*, noté $D \sim_{\mathfrak{n}} D'$, s'il existe une fonction rationnelle f de C telle que $(f - 1)|_p \geq \mathfrak{n}|_p$ pour tout $p \in \text{supp}(\mathfrak{n})$ et $D - D' = (f)$.

Cette notion sera surtout utilisée dans le cas de diviseurs D étrangers à $\text{supp}(\mathfrak{n})$. On définit également les espaces de Riemann-Roch par rapport au module \mathfrak{n} :

Définition 5.3. Soit D un diviseur de $\overline{C'}$, étranger à $\text{supp}(\mathbf{n})$. L'espace vectoriel $L_{\mathbf{n}}(D)$ est composé des fonctions f telles que $(f) \geq -D$ et f admet une même valeur $c \in \mathbb{C}$ sur tous les points du $\text{supp}(\mathbf{n})$ avec $(f - c)|_p \geq \mathbf{n}|_p$ pour tout $p \in \text{supp} \mathbf{n}$. La dimension de $L_{\mathbf{n}}(D)$ est notée $l_{\mathbf{n}}(D)$. L'espace vectoriel $I_{\mathbf{n}}(D)$ est l'ensemble des formes ω telles que $(\omega) \geq D - \mathbf{n}$. La dimension de $I_{\mathbf{n}}(D)$ est notée $i_{\mathbf{n}}(D)$.

Le théorème classique de Riemann-Roch généralise de la façon suivante au cas présent :

Théorème 5.4 (Riemann-Roch). *Soient $\overline{C'}$ une courbe projective lisse de genre g' et soit \mathbf{n} un diviseur effectif de $\overline{C'}$. Si D est un diviseur de $\overline{C'}$, étranger à $\text{supp}(\mathbf{n})$, alors*

$$l_{\mathbf{n}}(D) - i_{\mathbf{n}}(D) = \deg(D) + 1 - \pi.$$

où

$$\begin{cases} \pi = g' & \text{si } \mathbf{n} = 0, \\ \pi = g' + \delta & \text{si } \mathbf{n} \neq 0, \end{cases}$$

où $\delta = \deg(\mathbf{n}) - \text{ord}(S) + 1$ quand \mathbf{n} est un diviseur générique.

Preuve. Voir [18, page 86]. □

Dans le cas qui nous intéresse, le cas de courbes hyperelliptiques, le module \mathbf{n} n'est pas un diviseur générique et la valeur de δ est différente. Nous la calculerons dans la section prochaine. Pour ce qui suit dans ce paragraphe, la valeur précise de δ n'est pas importante car tous les énoncés sont formulés en termes de π .

Comme simple application du théorème de Riemann-Roch, soit D un diviseur de degré 0 de $\overline{C'}$, étranger à $\text{supp}(\mathbf{n})$. Alors $l_{\mathbf{n}}(D) \leq 1$, donc $\pi - 1 \leq i_{\mathbf{n}}(D) \leq \pi$. Deux autres applications sont données par les résultats suivants (voir [18, pages 86, 87]) :

Lemme 5.5. *Soient $\overline{C'}$ une courbe projective lisse de genre g' et soit \mathbf{n} un module de $\overline{C'}$. Soit D un diviseur de $\overline{C'}$, étranger à $\text{supp}(\mathbf{n})$ et soit p un point générique de $\overline{C'}$. Si $i_{\mathbf{n}}(D) \geq 1$, alors*

$$i_{\mathbf{n}}(D + p) = i_{\mathbf{n}}(D) - 1.$$

Une application répétée de ce lemme prouve le résultat suivant :

Lemme 5.6. *Soient $\overline{C'}$ une courbe projective lisse de genre g' et soit \mathbf{n} un module de $\overline{C'}$. Soit D un diviseur de degré zéro de $\overline{C'}$ et soient M_1, \dots, M_{π} des points génériques de $\overline{C'}$. Alors il existe un unique diviseur effectif D' de $\overline{C'}$ tel que*

$$D' \underset{\mathbf{n}}{\sim} D + \sum_{i=1}^{\pi} M_i.$$

Ce dernier lemme permet de définir une loi de composition rationnelle sur $\overline{C'}^{(\pi)}$: si M et N sont des points génériques de $\overline{C'}^{(\pi)}$, alors le lemme implique qu'il existe un unique élément R de $\overline{C'}^{(\pi)}$, satisfaisant

$$R \underset{\mathbf{n}}{\sim} M + N - \pi P_0, \tag{5.3}$$

où P_0 est un point arbitraire donnée de $\overline{C'} - \text{supp}(\mathbf{n})$.

Proposition 5.7. *La variété $\overline{C'}^{(\pi)}$, muni de cette loi de composition, est un groupe birationnel.*

Pour la preuve, on réfère encore à Serre. On y trouve aussi une preuve du résultat fondamental suivant :

Proposition 5.8. *Tout groupe birationnel est birationnellement isomorphe à un (unique) groupe algébrique.*

Dans le cas du groupe birationnel $(\overline{C'}^{(\pi)}, \star)$, le groupe algébrique correspondant est appelé la *jacobienne généralisée* de $\overline{C'}$ (relativement au module \mathfrak{n}), noté $\text{Jac}_{\mathfrak{n}}(\overline{C'})$. On note dans ce cas l'application birationnelle par $\varphi : \overline{C'}^{(\pi)} \rightarrow \text{Jac}_{\mathfrak{n}}(\overline{C'})$. Il est clair que $\text{Jac}_{\mathfrak{n}}(\overline{C'})$ est de dimension π .

Même si φ est birationnel, on peut définir un homomorphisme (partout défini) entre le groupe des diviseurs de $\overline{C'}$, étrangers à $\text{supp}(\mathfrak{n})$ et $\text{Jac}_{\mathfrak{n}}(\overline{C'})$. Fixons un point de base $P_0 \in \overline{C'}$ en dehors du support de \mathfrak{n} . Pour $D \in \text{Div}(\overline{C'})$ et $M = \sum_{i=1}^{\pi} M_i$ générique il existe d'après le Lemme 5.6 un unique $N \in \overline{C'}^{(\pi)}$ tel que

$$N \underset{\mathfrak{n}}{\sim} D - \deg(D)P_0 + M.$$

On montre alors, utilisant que φ est pour des éléments génériques un morphisme de groupes abéliens, que $\varphi(N) - \varphi(M)$ est indépendant de M ; on pose alors $\theta(D) := \varphi(N) - \varphi(M)$, où l'on peut donc choisir M arbitrairement, tout en le prenant générique. L'application θ construite ainsi est un morphisme de groupes entre le groupe des diviseurs de $\overline{C'}$, étrangers à $\text{supp}(\mathfrak{n})$, et $\text{Jac}_{\mathfrak{n}}(\overline{C'})$. Son noyau est formé des diviseurs étrangers au support de \mathfrak{n} qui sont \mathfrak{n} -équivalents à un multiple de P_0 . Restreint au groupe de diviseurs de degré zéro on obtient un isomorphisme de groupes entre le groupe des diviseurs de degré zéro de $\overline{C'}$, étrangers à $\text{supp}(\mathfrak{n})$, module \mathfrak{n} -équivalence, et la jacobienne généralisée $\text{Jac}_{\mathfrak{n}}(\overline{C'})$. Dans toute la suite, l'application θ sera appelé le *morphisme de Serre*.

5.2 Jacobienne généralisée d'une courbe hyperelliptique

Dans notre étude des fibres de l'application moment des systèmes de Mumford, nous avons uniquement besoin de la jacobienne généralisée dans le cas de courbes hyperelliptiques. Nous spécialisons dans cette section les rappels du paragraphe 5.1.3 à ce cas et nous expliquons le lien entre la jacobienne généralisée et la jacobienne usuelle. On se restreint ici au cas impair.

Soit C une courbe hyperelliptique singulière, d'équation affine $y^2 = h(x)$, où h est un polynôme unitaire de degré $2g + 1$. Notons par $P(x)$ le diviseur quadratique maximal de $h(x)$, c'est-à-dire $P(x)$ est le polynôme unitaire de degré maximal tel que $P^2(x)$ divise $h(x)$. La normalisée de C est alors la courbe hyperelliptique lisse C' , d'équation $z^2 = h'(x)$. Son genre sera noté g' ; ainsi h' est un polynôme unitaire de degré $2g' + 1$. On a le morphisme suivant entre la normalisée de C et C :

$$\begin{aligned} \phi : C' &\longrightarrow C \\ (x, z) &\longmapsto (x, P(x)z). \end{aligned}$$

Ce morphisme s'étend à un morphisme entre les courbes compactifiées $\overline{C'}$ et \overline{C} ; ce morphisme sera aussi noté ϕ .

Afin de définir le module sur C' qui correspond aux points singuliers, nous devons factoriser P , distinguant ses racines communes avec h' des autres : on factorise

$$P(x) = \prod_{i=1}^k (x - a_i)^{\ell_i}$$

où tous les $a_i \in \mathbb{C}$ tous distincts, avec $h'(a_i) = 0$ pour $1 \leq i \leq d$ et $h'(a_i) = b_i^2 \neq 0$ pour $d + 1 \leq i \leq k$. Les ℓ_i sont tous des entiers strictement positifs. Si on note n le degré de P , alors

$$n = \sum_{i=1}^k \ell_i \quad \text{et} \quad g = g' + n.$$

On note par \mathbf{m} le module de $\overline{C'}$, défini par

$$\mathbf{m} = \sum_{i=1}^d 2\ell_i(a_i, 0) + \sum_{i=d+1}^k \ell_i((a_i, b_i) + (a_i, -b_i)).$$

Notons que $\deg(\mathbf{m}) = \sum_{i=1}^k 2\ell_i = 2n$. Dans le lemme qui suit, nous calculons la valeur des entiers δ et π que nous avons introduits dans le paragraphe 5.1.3, et qui figurent en particulier dans le théorème de Riemann-Roch.

Lemme 5.9. *L'entier δ est donné par $\delta = \sum_{i=1}^k \delta_{(a_i, 0)}$ où $\delta_{(a_i, 0)} = \ell_i$, pour $i = 1, \dots, k$. En particulier, $\pi = g' + \delta = g' + n = g$.*

Preuve. Soit ϕ la projection entre C' , la normalisé de la courbe C , et C .

$$\begin{aligned} \phi : C' &\longrightarrow C \\ (x, z) &\longmapsto (x, P(x)z) \end{aligned} .$$

Pour un point p de C (resp. un point q de C'), on note par \mathcal{O}_p (resp. \mathcal{O}'_q) l'anneau local de C (resp. C'). Pour $p = (a_i, 0)$ pour $1 \leq i \leq d$

$$\mathcal{O}_p = \{g \in \mathbb{C}(C) \mid f = g \circ \phi \text{ avec } f \in \mathcal{O}'_{(a_i, 0)} \text{ et } v_{(a_i, 0)}(f) \geq \ell_i\} .$$

Par définition, $\delta_{(a_i, 0)} = \dim(\mathcal{O}'_{(a_i, 0)}/\phi^{-1}(\mathcal{O}_{(a_i, 0)}))$, donc

$$\delta_{(a_i, 0)} = \dim \langle 1, y, y^2, \dots, y^{\ell_i-1} \rangle = \ell_i .$$

Pour $p = (a_i, 0)$ pour $d+1 \leq i \leq k$

$$\mathcal{O}_p = \{g \in \mathbb{C}(C) \mid f = g \circ \phi \text{ avec } f \in \mathcal{O}'_{(a_i, b_i)} \cap \mathcal{O}'_{(a_i, -b_i)} \text{ et } v_{(a_i, b_i)}(f) = v_{(a_i, -b_i)}(f) \geq \ell_i\} .$$

Par la définition de $\delta_{(a_i, 0)}$, on a dans ce cas également

$$\delta_{(a_i, 0)} = \dim \langle 1, (x - a_i), (x - a_i)^2, \dots, (x - a_i)^{\ell_i-1} \rangle = \ell_i .$$

L'application ϕ est un isomorphisme entre $C - \{(a_1, 0), \dots, (a_d, 0), (a_{d+1}, 0), \dots, (a_k, 0)\}$ et $C' - \text{supp } \mathbf{m}$ où on rappelle que $\mathbf{m} = \sum_{i=1}^d 2\ell_i(a_i, 0) + \sum_{i=d+1}^k \ell_i((a_i, b_i) + (a_i, -b_i))$. Pour tout point p de $C - \{(a_1, 0), \dots, (a_d, 0), (a_{d+1}, 0), \dots, (a_k, 0)\}$, on a

$$\mathcal{O}_p = \{g \in \mathbb{C}(C) \mid f = g \circ \phi \text{ avec } f \in \mathcal{O}'_{\phi^{-1}(p)}\} .$$

Par conséquent,

$$\delta_p = \dim \mathcal{O}'_{\phi^{-1}(p)}/\phi^{-1}(\mathcal{O}_p) = 0$$

pour tout p différent des points singuliers de C . Puisque, par définition, $\delta = \sum_{p \in C} \delta_p$, on trouve

$$\delta = \sum_{i=1}^k \delta_{(a_i, 0)} = \sum_{i=1}^k \ell_i = n ,$$

et donc $\pi = g' + n = g$. □

Dans notre cas, la formule de Riemann-Roch (voir théorème 5.4) prend donc la forme

$$l_{\mathbf{m}}(D) - i_{\mathbf{m}}(D) = \deg(D) + 1 - g .$$

D'après les rappels du paragraphe 5.1.3, il y a une loi de composition rationnelle sur $\overline{C'}^{(g)}$ qui en fait un groupe birationnel, qui est birationnellement isomorphe avec un groupe algébrique de dimension g , la jacobienne généralisée $\text{Jac}_{\mathbf{m}}(\overline{C'})$. Le morphisme de Serre θ entre le groupe des diviseurs de $\overline{C'}$, étrangers à $\text{supp}(\mathbf{m})$, et $\text{Jac}_{\mathbf{m}}(\overline{C'})$ amène à un morphisme $\tau : \text{Jac}_{\mathbf{m}}(\overline{C'}) \rightarrow \text{Jac}_0(\overline{C'}) = \text{Jac}(\overline{C'})$. Si on voit un élément u de $\text{Jac}_{\mathbf{m}}(\overline{C'})$ comme la classe de \mathbf{m} -équivalence d'un diviseur de degré zéro, disjoint du support de \mathbf{m} , alors $\tau(u)$ est simplement la classe d'équivalence linéaire de u . Ceci implique que $\text{Jac}_{\mathbf{m}}(\overline{C'})$ est une extension de $\text{Jac}(\overline{C'})$ par $L_{\mathbf{m}} := \text{Ker } \tau$. Serre décrit ce dernier group abélien comme produit de plusieurs copies du group additif \mathbb{C} et du groupe multiplicatif \mathbb{C}^* . Dans notre cas (c'est-à-dire dans la cas de courbes hyperelliptiques singulières), on peut montrer que

$$L_{\mathbf{m}} \simeq \mathbb{C}^{*k-d} \times \mathbb{C}^{n-k+d} .$$

On a alors la suite exacte de groupes abéliens suivante :

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}^{*k-d} \times \mathbb{C}^{n-k+d} \longrightarrow \text{Jac}_{\mathbf{m}}(\overline{C'}) \longrightarrow \text{Jac}(\overline{C'}) \longrightarrow 0 .$$

5.3 Description géométrico-algébrique des strates $M_{g,g}(h)$

L'objectif de cette section est de décrire les fibres $M_g(h)$ de l'application moment \mathbf{H} du système de Mumford impair d'ordre g à l'aide des outils de la géométrie algébrique. Lorsque le polynôme $h \in H_g$ est de discriminant non-nul la fibre $M_g(h)$ est décrite par Mumford : elle est isomorphe à $\text{Jac}(y^2 = h(x))$ moins son diviseur thêta ; de plus, les images des champs de vecteurs D_0, D_1, \dots, D_{g-1} de $M_g(h)$ par cet isomorphisme sont des champs de vecteurs invariants par translation sur $\text{Jac}(y^2 = h(x))$. Nous avons vu dans le chapitre précédent que quand le polynôme h admet des racines multiples, la fibre $M_g(h)$ de \mathbf{H} admet une stratification (la stratification *fine*) telle que chaque strate est isomorphe à la strate maximale d'une fibre d'un système de Mumford d'ordre inférieur. Par conséquent, afin de décrire les fibres singulières $M_g(h)$ du système de Mumford, il suffit de décrire les strates maximales $M_{g,g}(h)$ où on rappelle que

$$M_{g,g}(h) = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} v(x) & u(x) \\ w(x) & -v(x) \end{pmatrix} \in M_g(h) \mid \text{PGCD}(u, v, w) = 1 \right\} .$$

5.3.1 Notations

Nous fixons et résumons d'abord les notations que nous utiliserons tout au long de cette section. Soit h un polynôme de H_g de discriminant nul, et soit P le diviseur quadratique maximal de h . Le degré de P sera noté n . On note par h' le polynôme unitaire tel que $h(x) = P^2(x)h'(x)$. Le discriminant de h' est non-nul et le degré de h' est impair ; soit g' tel que $\deg h' = 2g' + 1$. La factorisation du polynôme P est la suivante :

$$P(x) = \prod_{i=1}^k (x - a_i)^{\ell_i}, \tag{5.4}$$

Les racines $a_i \in \mathbb{C}$ de $P(x)$ sont toutes distinctes, et ordonnées tels que $h'(a_i) = 0$ pour tout i avec $1 \leq i \leq d$ et $h'(a_i) \neq 0$ pour tout i avec $d + 1 \leq i \leq k$.

Pour deux polynômes S et q , on note par S_q le quotient de S par q ,

$$S(x) = q(x)S_q(x).$$

L'ensemble des polynômes unitaires Q de $\mathbb{C}[x]$ tel que Q^2 divise h est noté par $\mathbb{C}[x]_h$.

Notons par C la courbe hyperelliptique singulière d'équation affine $y^2 = h(x)$ et par C' la normalisée de C , qui est la courbe hyperelliptique lisse d'équation affine $z^2 = h'(x)$. Le genre arithmétique de C est g , tandis que le genre de C' est g' . On a le morphisme suivant entre la normalisée de C et C' :

$$\begin{aligned} \phi : C' &\longrightarrow C \\ (x, z) &\longmapsto (x, P(x)z). \end{aligned}$$

L'extension de ce morphisme entre les courbes compactifiées $\overline{C'}$ et \overline{C} ; sera aussi noté ϕ . On note par \mathfrak{m} le module sur C' suivant :

$$\mathfrak{m} = \sum_{i=1}^d 2\ell_i(a_i, 0) + \sum_{i=d+1}^k \ell_i((a_i, b_i) + (a_i, -b_i)),$$

où $b_i^2 = h'(a_i)$ pour tout $1 \leq i \leq k$. L'image du support de \mathfrak{m} par l'application ϕ correspond aux points singuliers de la courbe C' . Fixons le point P_0 égal au point ∞ de la courbe lisse $\overline{C'}$, comme le point de base du morphisme de Serre θ entre le groupe des diviseurs de $\overline{C'}$, étrangers à $\text{supp}(\mathfrak{m})$, et $\text{Jac}_{\mathfrak{m}}(\overline{C'})$. Son noyau est formé des diviseurs étrangers au support de \mathfrak{m} qui sont \mathfrak{m} -équivalents à un multiple de ∞ .

5.3.2 Lien entre la strate $M_{g,g}(h)$ et la jacobienne $\text{Jac}_{\mathfrak{m}}(\overline{C'})$

Dans cette section, nous définissons un morphisme injectif entre la strate $M_{g,g}(h)$ et un ouvert de la jacobienne $\text{Jac}_{\mathfrak{m}}(\overline{C'})$. Nous montrons également que les champs de vecteurs indépendants D_i sont envoyés par ce morphisme sur des champs invariants sur le groupe algébrique $J_{\mathfrak{m}}(\overline{C'})$.

Lemme 5.10. Soit $A(x) = \begin{pmatrix} v(x) & u(x) \\ w(x) & -v(x) \end{pmatrix} \in M_{g,g}(h)$.

Si $\text{PGCD}(P^2, u) = R$, alors R est le carré d'un polynôme unitaire Q et $\text{PGCD}(P, u, v) = Q$. Réciproquement si $\text{PGCD}(P, u, v) = Q$ alors $\text{PGCD}(P^2, u) = Q^2$.

Si $\text{PGCD}(P^2, w) = R$, alors R est le carré d'un polynôme unitaire Q et $\text{PGCD}(P, w, v) = Q$. Réciproquement si $\text{PGCD}(P, w, v) = Q$ alors $\text{PGCD}(P^2, w) = Q^2$.

Preuve. Soit $A(x) = \begin{pmatrix} v(x) & u(x) \\ w(x) & -v(x) \end{pmatrix} \in M_{g,g}(h)$. Soit $a \in \mathbb{C}$ une racine de $\text{PGCD}(P^2, u)$. Supposons que $\text{PGCD}(P^2, u, (x-a)^{2k}) = (x-a)^{2k-1}$ avec $k \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que

$$P^2(x)h' - u(x)w(x) = v^2(x). \quad (5.5)$$

Le polynôme $(x-a)^{2k-1}$ divise le coté gauche de l'égalité (5.5), donc $(x-a)^{2k-1}$ divise $v^2(x)$ ceci implique que $(x-a)^{2k}$ divise $v^2(x)$. De même, comme $(x-a)^{2k-1}$ divise $P^2(x)$ ceci implique que $(x-a)^{2k}$ divise $P^2(x)$, donc le polynôme $(x-a)^{2k}$ divise le coté gauche de l'égalité (5.5), mais $\text{PGCD}(u, v, w) = 1$, donc $(x-a)^{2k}$ divise $u(x)$. On a alors

$$\text{PGCD}(P^2, u, (x-a)^{2k}) = (x-a)^{2k}.$$

On arrive à une contradiction. On conclut que toute racine du polynôme $\text{PGCD}(P^2, u)$ est une racine d'ordre pair, d'où l'existence d'un (unique) polynôme unitaire Q tel que $Q^2(x) = \text{PGCD}(P^2, u)$.

Nous montrons ensuite que $\text{PGCD}(P, u, v) = Q$. De l'égalité (5.5), on voit que si $\text{PGCD}(P^2, u) = Q^2$ alors Q divise v . Soit a une racine de Q d'ordre k , c'est-à-dire a est une racine de $\text{PGCD}(P^2, u) = Q^2$ d'ordre $2k$, par conséquent a est une racine d'ordre au moins k de u , P et v . Si a est une racine

d'ordre au moins $k + 1$ de P et v , de l'égalité (5.5) et du fait que $\text{PGCD}(u, v, w) = 1$ on a que a est une racine u d'ordre $2k + 2$. Alors a est une racine d'ordre $2k + 2$ de $\text{PGCD}(P^2, u)$, ce qui est une contradiction. Donc a est une racine de Q d'ordre k et $\text{PGCD}(P, u, v) = Q$.

Pour la réciproque, supposons que $\text{PGCD}(P, u, v) = Q$. Alors l'égalité (5.5) devient

$$Q^2(x)[P_Q^2(x)h' - v_Q^2(x)] = u(x)w(x). \quad (5.6)$$

Le fait que $\text{PGCD}(u, v, w) = 1$, dans ces conditions Q^2 divise u et donc Q^2 divise $\text{PGCD}(P^2, u)$. Si Q^2 divise $\text{PGCD}(P^2, u)$, mais $\text{PGCD}(P^2, u) \neq Q^2$. d'après ce qu'il précède $\text{PGCD}(P, u, v)^2 = \text{PGCD}(P^2, u)$, c'est-à-dire $\text{PGCD}(P, u, v)^2 \neq Q$, contradiction avec les hypothèses.

Pour prouver le second point de la proposition on refait les mêmes étapes et conclusions en remplaçant le polynôme u par le polynôme w . \square

Remarque 5.11. Soit $A(x) \in \begin{pmatrix} v(x) & u(x) \\ w(x) & -v(x) \end{pmatrix} \in M_{g,g}(h)$, et soit Q le polynôme unitaire tel que $Q^2 = \text{PGCD}(P^2, u)$. D'après le lemme, Q divise P , et donc $Q \in \mathbb{C}[x]_h$.

Définition 5.12. On note par Φ l'application entre $M_{g,g}(h)$ et $\text{Jac}_m(C')$ définie de la manière suivante :

$$\Phi : \begin{matrix} M_{g,g}(h) & \longrightarrow & \text{Jac}_m(C') \\ \begin{pmatrix} v(x) & u(x) \\ w(x) & -v(x) \end{pmatrix} & \longmapsto & \theta \left(\left(\frac{\mathfrak{P}(x)(P(x)z + v(x))}{u(x)} + 1 \right)_0 \right), \end{matrix}$$

où $\mathfrak{P}(x) = \prod_{i=1}^k (x - a_i)^{\ell_i + 1}$.

Proposition 5.13. L'application Φ de $M_{g,g}(h)$ vers $\text{Jac}_m(C')$ est bien définie.

Preuve. Pour montrer que l'application Φ est bien définie, il suffit de montrer que le diviseur de zéros de

$$\frac{\mathfrak{P}(x)(P(x)z + v(x))}{u(x)} + 1$$

est étranger à $\text{supp}(\mathfrak{m})$.

Soit $A(x) = \begin{pmatrix} v(x) & u(x) \\ w(x) & -v(x) \end{pmatrix} \in M_{g,g}(h)$. Soit $Q = \text{PGCD}(P, u, v)$ et notons par j le degré de Q . D'après le lemme 5.10, Q^2 divise le polynôme u . Notons aussi que Q divise \mathfrak{P} . Par conséquent

$$\frac{\mathfrak{P}(x)(P(x)z + v(x))}{u(x)} + 1 = \frac{\mathfrak{P}_Q(x)(P_Q(x)z + v_Q(x))}{u_{Q^2}(x)} + 1.$$

Soient x_i les racines du polynôme $u_{Q^2}(x)$, que l'on peut alors écrire $u_{Q^2}(x) = \prod_{i=1}^{g-2j} (x - x_i)$. Le diviseur principal de la fonction $\frac{\mathfrak{P}_Q(x)(P_Q(x)z + v_Q(x))}{u_{Q^2}(x)} + 1$ est donné par

$$\left(\frac{\mathfrak{P}_Q(x)(P_Q(x)z + v_Q(x))}{u_{Q^2}(x)} + 1 \right) = - \sum_{i=1}^{g-2j} \left(x_i, \frac{v_Q(x_i)}{P_Q(x_i)} \right) - (2(n+k) + 1)\infty + D,$$

où D est un diviseur effectif de degré $g + 2(n+k-j) + 1$. Pour montrer cela, on détermine d'abord les zéros sur C' de u_{Q^2} ; ils viennent en paires

$$\left(x_i, \frac{v_Q(x_i)}{P_Q(x_i)} \right) \quad \text{et} \quad \left(x_i, -\frac{v_Q(x_i)}{P_Q(x_i)} \right)$$

mais ce dernier est aussi un zéro de $(P_Q(x)z + v_Q(x))$ et les seuls points de C' dans le diviseur de pôles de la fonction sont les points $\left(x_i, \frac{v_Q(x_i)}{P_Q(x_i)}\right)$ avec $i = 1, \dots, g - 2j$. Ensuite, on prend un paramètre local t au voisinage de ∞ , que l'on peut prendre de sorte que $x = 1/t^2$. On a alors, au voisinage de ∞ :

$$\mathfrak{P}_Q \sim \frac{1}{t^{2(k+n)}}, \quad P(x) \sim \frac{1}{t^{2n}}, \quad z \sim \frac{1}{t^{2g'+1}}.$$

Après substitution, on trouve que, au voisinage de ∞ :

$$\frac{\mathfrak{P}(x)(P(x)z + v(x))}{u(x)} + 1 \sim \frac{1}{t^{2(k+n)+1}}.$$

La formule pour le degré de D est alors obtenu par le fait que le degré de tout diviseur principal est zéro.

Montrons maintenant que le diviseur D est étranger à $\text{supp } \mathfrak{m}$. Pour ce faire, il suffit de montrer que \mathfrak{P}_Q s'annule en chaque a_i ; ceci est clair car Q est un diviseur de P et déjà \mathfrak{P}_P s'annule en chaque a_i parce que

$$\mathfrak{P}_P = \frac{\mathfrak{P}}{P} = \prod_{i=1}^k (x - a_i).$$

□

Remarque 5.14. Soit $A(x) = \begin{pmatrix} v(x) & u(x) \\ w(x) & -v(x) \end{pmatrix} \in M_{g,g}(h)$, tel que $\text{PGCD}(P, u, v) = 1$, ce qui est vrai pour $A(x)$ dans un ouvert dense de $M_{g,g}(h)$. Alors

$$\frac{\mathfrak{P}(x)(P(x)z + v(x))}{u(x)} = 0 \pmod{\mathfrak{m}}$$

et donc cette fonction réalise une \mathfrak{m} -équivalence entre ses zéros et ses pôles. Or, comme nous l'avons vu, les pôles sont simples à décrire et nous avons donc sur le-dit ouvert de $M_{g,g}(h)$ la description explicite suivante :

$$\begin{pmatrix} v(x) & u(x) \\ w(x) & -v(x) \end{pmatrix} \mapsto \theta \left(\sum_{i=1}^g \left(x_i, \frac{v(x_i)}{P(x_i)} \right) \right).$$

Notre morphisme généralise donc le morphisme de Mumford, que nous avons rappelé dans le chapitre 3.

Remarque 5.15. L'application $\Phi : M_{g,g}(h) \longrightarrow \text{Jac}_{\mathfrak{m}}(C')$ est continue car l'application

$$\begin{pmatrix} M_{g,g}(h) & \longrightarrow & \mathbb{C}(C') \\ \begin{pmatrix} v(x) & u(x) \\ w(x) & -v(x) \end{pmatrix} & \longmapsto & \frac{\mathfrak{P}(x)(P(x)z + v(x))}{u(x)} + 1, \end{pmatrix}$$

est continue; composée avec la prise de zéros (dont on pourra fixer le nombre, en ajoutant un multiple de $P_0 = \infty$), et avec le morphisme de Serre, on a bien étendu le morphisme de la remarque précédente en un morphisme sur toute la strate.

Nous voulons ensuite montrer que notre application linéarise les champs des systèmes de Mumford : nous montrons que ces champs deviennent des champs invariants par translation sur la jacobienne généralisée. Rappelons d'abord la relation entre les formes différentielles invariantes sur la jacobienne $\text{Jac}_{\mathfrak{m}}(C')$ et les formes différentielles de la courbe C' :

Proposition 5.16. *L'application θ^* est une bijection entre l'ensemble des formes différentielles invariantes sur $\text{Jac}_m(C')$ et l'ensemble des formes différentielles rationnelles α de la courbe C' tel que $(\alpha) \geq -\mathbf{m}$.*

Nous commençons avec le plus simple des champs de vecteurs des systèmes de Mumford impairs, le champ de vecteurs D_{g-1} qui, comme les autres champs de vecteurs D_i est tangent à la strate $M_{g,g}(h)$.

Proposition 5.17. *Le champ de vecteurs D_{g-1} , restreint à la strate $M_{g,g}(h)$ est dual à une forme différentielle invariante sur $\text{Jac}_m(\overline{C'})$. Il est donc envoyé par Φ sur un champ de vecteurs invariant.*

Preuve. Il suffit de donner la preuve pour $A^0(x)$ dans l'ouvert dense de $M_{g,g}(h)$ où $\text{PGCD}(P, u, v) = 1$. On peut alors utiliser la description simple du morphisme, donné dans la remarque 5.14. On a $u^0(x) = \prod_{i=1}^g (x - x_i^0)$ avec les $x_i^0 \in \mathbb{C}$. On sait que

$$D_{g-1} |_{A^0} (u^0(x)) = 2v^0(x) \quad (5.7)$$

Puisqu'il n'y a pas de confusion possible, et afin de simplifier les formules nous omettrons de mettre l'indice 0 et écrivons l'équation (5.7) de la manière suivante

$$-\sum_{i=1}^g \prod_{k \neq i} (x - x_k) \frac{dx_i}{dt} = 2v(x).$$

En évaluant cette dernière équation en x_i avec $1 \leq i \leq g+n$, on obtient

$$-\prod_{k \neq i} (x_i - x_k) \frac{dx_i}{dt} = 2v(x_i).$$

Comme $v(x_i) = P(x_i)z_i$ où $(x_i, z_i) \in C'$ on a

$$\begin{aligned} -\prod_{k \neq i} (x_i - x_k) \frac{dx_i}{dt} &= 2P(x_i)z_i, \\ \frac{dx_i}{P(x_i)z_i} &= -2 \frac{dt}{\prod_{k \neq i} (x_i - x_k)}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

En sommant les équations (5.8) pour tout i on aura

$$\sum_{i=1}^g \frac{dx_i}{P(x_i)z_i} = 0.$$

Rappelons que le polynôme $P(x) = \prod_{j=1}^k (x - a_j)^{l_j}$ est le diviseur quadratique maximal de h et il est de degré n . En multipliant l'équation (5.8) par les diviseurs du polynôme $P(x)$ suivant :

$[(x - a_1), \dots, (x - a_1)^{l_1}, (x - a_1)^{l_1}(x - a_2), \dots, P(x)]$ et puis en évaluant au point x_i , on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_i}{(x_i - a_1)^{l_1-1} \prod_{j \geq 2}^k (x_i - a_j)^{l_j} z_i} = -2(x_i - a_1) \frac{dt}{\prod_{k \neq i} (x_i - x_k)}, \\ \frac{dx_i}{(x_i - a_1)^{l_1-2} \prod_{j \geq 2}^k (x_i - a_j)^{l_j} z_i} = -2(x_i - a_1)^2 \frac{dt}{\prod_{k \neq i} (x_i - x_k)}, \\ \vdots \\ \frac{dx_i}{\prod_{j \geq 2}^k (x_i - a_j)^{l_j} z_i} = -2(x_i - a_1)^{l_i} \frac{dt}{\prod_{k \neq i} (x_i - x_k)}, \\ \frac{dx_i}{(x_i - a_2)^{l_2-1} \prod_{j \geq 3}^k (x_i - a_j)^{l_j} z_i} = -2(x_i - a_2)(x_i - a_1)^{l_i} \frac{dt}{\prod_{k \neq i} (x_i - x_k)}, \\ \vdots \\ \frac{dx_i}{z_i} = P(a_i) \frac{dt}{\prod_{k \neq i} (x_i - x_k)}. \end{array} \right. \quad (5.9)$$

En sommant chaque équation de (5.9), on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{g+n} \frac{dx_i}{(x_i - a_1)^{l_1-1} \prod_{j \geq 2}^k (x_i - a_j)^{l_j} z_i} = 0, \\ \sum_{i=1}^{g+n} \frac{dx_i}{(x_i - a_1)^{l_1-2} \prod_{j \geq 2}^k (x_i - a_j)^{l_j} z_i} = 0, \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{g+n} \frac{dx_i}{\prod_{j \geq 2}^k (x_i - a_j)^{l_j} z_i} = 0, \\ \sum_{i=1}^{g+n} \frac{dx_i}{(x_i - a_2)^{l_2-1} \prod_{j \geq 3}^k (x_i - a_j)^{l_j} z_i} = 0, \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{g+n} \frac{dx_i}{z_i} = 0. \end{array} \right.$$

Refaisons les mêmes étapes que précédemment en multipliant l'équation (5.8) par $x^j P(x)$, pour $1 \leq j \leq g' - 1$, puis évaluer l'équation obtenue au point x_i , et enfin, additionner les équations

pour tout $1 \leq i \leq g$, on aura

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^g \frac{x_i dx_i}{z_i} = 0, \\ \sum_{i=1}^g \frac{x_i^2 dx_i}{z_i} = 0, \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^g \frac{x_i^{g'-2} dx_i}{z_i} = 0, \\ \sum_{i=1}^g \frac{x_i^{g'-1} dx_i}{z_i} = (-1)^{g+n-1} 2dt. \end{array} \right.$$

D'après Serre [18],

$$\left\langle \frac{dx}{P(x)z}, \frac{dx}{(x-a_1)^{l_1-1} \prod_{j \geq 2}^k (x-a_j)^{l_j} z}, \frac{dx}{(x-a_1)^{l_1-2} \prod_{j \geq 2}^k (x-a_j)^{l_j} z}, \dots, \frac{dx}{z}, \frac{x dx}{z}, \frac{x^{g-1} dx}{z} \right\rangle$$

est l'espace vectoriel de formes différentielles rationnelles invariantes sur C' , qui définissent les formes différentielles invariantes sur $\text{Jac}_m(\overline{C'})$. Le calcul ci-dessus montre alors que le champ de vecteurs D_{g-1} est annulé par tous ces formes différentielles, sauf par un pour lequel l'accouplement donne une constante. Cela prouve que le champ D_{g-1} est envoyé par Φ sur un champs de vecteurs invariant par translation. \square

Exemple 5.18. Soit C la courbe hyperelliptique singulière d'équation affine $y^2 = h(x)$ où $h(x) = \underbrace{x^2}_{P^2(x)}(x^3 - 1)$ de genre $g = 2$. Soit C' la courbe hyperelliptique non-singulière d'équation $z^2 = x^3 - 1$ de genre $g = 1$. Le diviseur effectif $\mathbf{m} = (0, i) + (0, -i)$. Soit $y \in \mathbb{C}$. L'image du champ de vecteur $D_y^2|_{A(x)}$ est $(D_1^1|_{A'(x)}, dz|_{\beta_1})$. Voyons de plus près le champs de vecteurs D_1^2 . on sait que

$$D_1^2(u(x)) = 2v(x),$$

$$D_1^2[(x - a_1)(x - a_2)] = 2v(x),$$

$$-(x - a_2)D_1^2(a_1) - (x - a_1)D_0^1(a_2) = 2v(x),$$

en évaluons en a_1 puis en a_2 on obtient

$$-(a_1 - a_2)D_1^2(a_1) = 2v(a_1),$$

$$-(a_2 - a_1)D_1^2(a_2) = 2v(a_2),$$

comme $v^2(x) = x^2 h_1(x)$, où $h_1(x) = z^2$ alors $v^2(x) = x^2 z^2$ notons par $v(a_1) = a_1 z_1$ et $v(a_2) = a_2 z_2$ alors

$$-(a_1 - a_2)D_1^2(a_1) = 2a_1 z_1,$$

$$\frac{D_1^2(a_1)}{a_1 z_1} = -2 \frac{1}{(a_1 - a_2)},$$

$$-(a_2 - a_1)D_1^2(a_2) = 2a_2z_2 ,$$

$$\frac{D_1^2(a_2)}{a_2z_2} = 2\frac{1}{(a_1 - a_2)} ,$$

On obtient ainsi le système d'équation suivant

$$\begin{aligned} \frac{D_1^2(a_1)}{a_1z_1} &= -2\frac{1}{(a_1 - a_2)}, \\ \frac{D_1^2(a_2)}{a_2z_2} &= 2\frac{1}{(a_1 - a_2)}. \end{aligned}$$

Si cela ne porte pas à la confusion, on notera $D_1^2 = \frac{d}{dt}$ on obtient ainsi

$$\frac{da_1}{a_1z_1} = -2\frac{dt}{(a_1 - a_2)}, \quad (5.10)$$

$$\frac{da_2}{a_2z_2} = 2\frac{dt}{(a_1 - a_2)}. \quad (5.11)$$

En sommant (5.10) et (5.11), puis en sommant $a_1 \times (5.10)$ et $a_2 \times (5.11)$ on obtient

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{a_1z_1} + \frac{da_2}{a_2z_2} &= 0, \\ \frac{da_1}{z_1} + \frac{da_2}{z_2} &= -2dt. \end{aligned}$$

D'après [18, page 97, proposition 5] que l'espace des formes différentielles invariantes ω sur $\text{Jac}_m(C')$ telles que $(\omega) \geq \mathfrak{m}$ est engendré par $\frac{dx}{z}$ et $\frac{dx}{xz}$.

Proposition 5.19. *Les champs de vecteurs D_{g-1}^g, \dots, D_0^g , restreints à la strate $M_{g,g}(h)$ correspondent à des champs invariants sur la jacobienne généralisée $\text{Jac}_m(\overline{C'})$.*

Preuve. Comme les champs de vecteurs D_{g-1}^g, \dots, D_0^g commutent, alors il est de même pour leur image. De plus comme l'image de D_{g-1} est invariante par translation et comme elle commutes avec les image de D_{g-2}, \dots, D_0^g , on conclut que les images de D_{g-2}, \dots, D_0^g sont invariantes par translation. \square

Proposition 5.20. *L'application Φ définit un isomorphisme entre $M_{g,g}(h)$ et un ouvert de la jacobienne généralisée $\text{Jac}_m(C')$.*

Preuve. Nous montrons d'abord que Φ est injective. Tout d'abord, Φ est localement injective, car d'une part les deux variétés lisses $M_{g,g}(h)$ et $\text{Jac}_m(C')$ ont la même dimension g et d'autre part Φ envoie, d'après la proposition 5.19, les g champs de vecteurs indépendants D_i sur g champs de vecteurs indépendants sur la jacobienne généralisée. De plus, Φ est injectif quand restreint sur un ouvert dense de $M_{g,g}(h)$: comme nous l'avons vu dans la remarque 5.14, Φ est donné sur un ouvert dense par

$$\begin{pmatrix} v(x) & u(x) \\ w(x) & -v(x) \end{pmatrix} \mapsto \theta \left(\sum_{i=1}^g \left(x_i, \frac{v(x_i)}{P(x_i)} \right) \right).$$

Su cet ouvert, l'application qui associe à une matrice $A(x)$ un diviseur sur C' est injective. De plus, Serre montre que si deux diviseurs effectifs *génériques* de degré g sont \mathfrak{m} -équivalents, alors ils sont égaux. Cela veut dire que Φ est à la fois localement injective et injective sur un ouvert dense. Φ est donc injective et son image est un ouvert de $\text{Jac}_m(C')$. \square

Bibliographie

- [1] M. Adler and P. van Moerbeke. Completely integrable systems, Euclidean Lie algebras, and curves. *Adv. in Math.*, 38(3) :267–317, 1980.
- [2] Mark Adler and Pierre van Moerbeke. Linearization of Hamiltonian systems, Jacobi varieties and representation theory. *Adv. in Math.*, 38(3) :318–379, 1980.
- [3] Mark Adler, Pierre van Moerbeke, and Pol Vanhaecke. *Algebraic integrability, Painlevé geometry and Lie algebras*, volume 47 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [4] E. Arbarello, M. Cornalba, P. A. Griffiths, and J. Harris. *Geometry of algebraic curves. Vol. I*, volume 267 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, New York, 1985.
- [5] Michèle Audin. *Spinning tops*, volume 51 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996. A course on integrable systems.
- [6] Michèle Audin. *Hamiltonian systems and their integrability*, volume 15 of *SMF/AMS Texts and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI; Société Mathématique de France, Paris, 2008. Translated from the 2001 French original by Anna Pierrehumbert, Translation edited by Donald Babbitt.
- [7] Olivier Babelon, Denis Bernard, and Michel Talon. *Introduction to classical integrable systems*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [8] Saugata Basu, Richard Pollack, and Marie-Françoise Roy. *Algorithms in real algebraic geometry*, volume 10 of *Algorithms and Computation in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [9] Arnaud Beauville. Jacobiennes des courbes spectrales et systèmes hamiltoniens complètement intégrables. *Acta Math.*, 164(3-4) :211–235, 1990.
- [10] Lubomir Gavrilov. Generalized Jacobians of spectral curves and completely integrable systems. *Math. Z.*, 230(3) :487–508, 1999.
- [11] Phillip Griffiths. Linearizing flows and a cohomology interpretation of Lax equations. In *Seminar on nonlinear partial differential equations (Berkeley, Calif., 1983)*, volume 2 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 37–46. Springer, New York, 1984.
- [12] Phillip Griffiths and Joseph Harris. *Principles of algebraic geometry*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994. Reprint of the 1978 original.

- [13] Rei Inoue, Pol Vanhaecke, and Takao Yamazaki. Algebraic integrable systems related to spectral curves with automorphisms. *J. Geom. Phys.*, 87 :198–216, 2015.
- [14] Camille Laurent-Gengoux, Anne Pichereau, and Pol Vanhaecke. *Poisson structures*, volume 347 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer, Heidelberg, 2013.
- [15] David Mumford. *Algebraic geometry. I*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976. Complex projective varieties, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, No. 221.
- [16] David Mumford. *The red book of varieties and schemes*, volume 1358 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, expanded edition, 1999. Includes the Michigan lectures (1974) on curves and their Jacobians, With contributions by Enrico Arbarello.
- [17] David Mumford. *Tata lectures on theta. II*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2007. Jacobian theta functions and differential equations, With the collaboration of C. Musili, M. Nori, E. Previato, M. Stillman and H. Umemura, Reprint of the 1984 original.
- [18] Jean-Pierre Serre. *Groupes algébriques et corps de classes*. Publications de l'institut de mathématique de l'université de Nancago, VII. Hermann, Paris, 1959.
- [19] Jean-Pierre Serre. *Algebraic groups and class fields*, volume 117 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1988. Translated from the French.
- [20] Igor R. Shafarevich. *Basic algebraic geometry. 1*. Springer, Heidelberg, third edition, 2013. Varieties in projective space.
- [21] Igor R. Shafarevich. *Basic algebraic geometry. 2*. Springer, Heidelberg, third edition, 2013. Schemes and complex manifolds, Translated from the 2007 third Russian edition by Miles Reid.
- [22] Michael Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. V*. Publish or Perish, Inc., Wilmington, Del., second edition, 1979.
- [23] Pol Vanhaecke. Stratifications of hyperelliptic Jacobians and the Sato Grassmannian. *Acta Appl. Math.*, 40(2) :143–172, 1995.
- [24] Pol Vanhaecke. *Integrable systems in the realm of algebraic geometry*, volume 1638 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2001.