



# Gyromètre optique basé sur une cavité résonante passive en fibre à cœur creux

Alexia Ravaille

## ► To cite this version:

Alexia Ravaille. Gyromètre optique basé sur une cavité résonante passive en fibre à cœur creux. Optique [physics.optics]. Université Paris Saclay (COMUE), 2018. Français. NNT : 2018SACLS411 . tel-01972444

**HAL Id: tel-01972444**

**<https://theses.hal.science/tel-01972444>**

Submitted on 7 Jan 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Gyromètre optique basé sur une cavité résonante passive en fibre à cœur creux

Thèse de doctorat de l'Université Paris-Saclay  
préparée à l'Université Paris-Sud

École doctorale n°572 Ondes et matière (EDOM)  
Spécialité de doctorat: Optique et photonique

Thèse présentée et soutenue à Palaiseau, le 9 Novembre 2018 par

**Alexia Ravaille**

Composition du Jury :

Rosa Tualle-Broui Professeur, Institut d'Optique Graduate School (Palaiseau)	Présidente
Patrice Féron Professeur, ENSSAT (Laboratoire Foton, Lannion)	Rapporteur
Bernard Dussardier Directeur de recherche, Université de Nice (Sophia Antipolis)	Rapporteur
Carlos Garrido Alzar Chargé de recherche, Observatoire de Paris	Examineur
Fetah Benabid Professeur, Xlim (Limoges)	Examineur
Fabien Bretenaker Professeur, Université Paris-sud (LAC, Orsay)	Directeur de thèse
Gilles Feugnet Ingénieur de recherche, Thales Research & Technology (Palaiseau)	Invité
Bertrand Morbieu Ingénieur, Thales Avionics (Châtelleraut)	Invité



---

# Gyromètre optique basé sur une cavité résonante passive en fibre à cœur creux

---

"Sur tous les murs, j'écirais je le jure, Liberté"

*1798, les amants de la bastille*





---

# Remerciements

---

Bonjour à toi, cher lecteur qui entreprend le parcours de ce manuscrit. Avant de rentrer dans le vif du sujet, il est de coutume de remercier tous les gens qui ont pu participer, de près ou de loin à l'élaboration de ce manuscrit, et c'est ce que j'entends de faire ici.

Les travaux que je présente ici ont été réalisés grâce à la collaboration entre 3 entités qui sont l'entreprise Thales Avionics (TAV, à Châtellerauld), le laboratoire Aimé Cotton (LAC, à Orsay) et l'entreprise Thales Research and Technology (TRT, à Palaiseau). Être au milieu de 3 entités aurait pu être compliqué, mais ça n'a pas été le cas, car j'ai eu la chance que mes trois responsables, Bertrand Morbieu, Fabien Bretenaker et Gilles Feugnet s'entendent suffisamment bien entre eux pour que ma thèse se déroule dans de (très) bonnes conditions. C'est pourquoi je voudrais vous remercier tous les trois pour avoir fait en sorte que cette collaboration soit saine. Sans votre bonne entente de base, rien n'aurait été possible, alors merci !

Gilles, tu as eu la tâche ingrate de m'encadrer au quotidien à TRT. Je ne compte plus tous les moments passés à nous poser tout un tas de questions et tenter tant bien que mal d'y répondre, avec les moyens du bord. Merci de m'avoir poussé dans mes retranchements et de ne m'avoir jamais cru quand je t'affirmais quelque chose tant que je ne te l'avais pas démontré par  $A+B$ . J'ai grâce à ça gagné énormément en assurance et en confiance en moi, car quand j'arrivais à te convaincre (chose parfois ardue), je m'étais par la même convaincue moi-même. Merci aussi de m'avoir laissé une place dans ton labo, et d'avoir même accepté que je le range, même si ce faisant, je me suis attirée les foudres de Noad qui avait désespérément essayé de le faire avant moi mais n'y était pas arrivé. Merci enfin de n'avoir jamais perdu patience avec moi. J'ai vraiment beaucoup apprécié de travailler avec toi au quotidien, je tiens à ce que tu le saches !

Fabien, merci à toi qui a toujours su te rendre disponible pour moi tout au long de ma thèse. Je te l'ai dit de vive voix et je te l'écris ici : on n'a pas tous la chance d'avoir un directeur de thèse tel que toi, qui trouve toujours du temps, même là où il n'y en a pas, pour venir résoudre un problème de gyro le temps d'une après-midi par ci par là. Tu étais (et es toujours) très occupé, et malgré tout, tu as toujours répondu à tous mes mails, toujours relu tout ce que j'ai

pu écrire, que ce soit pour une conférence, pour un article, ou pour ce manuscrit. Tu ne m'as jamais laissée tombée, même jusqu'en Chine, où je n'aurais jamais eu le courage d'aller si tu ne m'y avais pas poussée ! L'expérience montre que tu as toujours de bonnes idées et de bons conseils. Alors merci, du fond du cœur (pas creux), tu es un super directeur de thèse, et je suis fière de pouvoir dire que je compte parmi tes doctorant-e-s !

Enfin, merci à toi, Bertrand. Tu étais loin, et pourtant tu étais là, pendant toute ma thèse. Merci de t'être autant battu, que ce soit pour le projet ou pour les financements. Tu m'as protégée de tout le côté administratif sans fin d'une thèse cifre, et tu as toujours eu de très bons conseils en matière de lecture scientifique (je pense notamment au Gourgoulhon, que j'envisage d'arriver un jour à finir, et surtout, à comprendre). Je suis désolée que le calendrier ait fait que je ne poursuive pas mon projet de thèse à tes côtés à TAV, mais je reste dans Thales, et je ne suis jamais qu'à un coup de téléphone.

Comme vous l'aurez compris, j'ai passé 90% de mon temps de thèse à TRT dans le laboratoire Micro et Nano Particules (MNP) du Groupe de Physique (GrP). Je tiens donc à remercier les responsables respectifs Arnaud Brignon et Daniel Dolfi pour m'avoir accueillie dans leur labo pendant mes 3 années de thèse.

Ensuite, je tiens aussi à remercier messieurs Patrice Féron et Bernard Dussardier pour avoir accepté la lourde charge de rapporter ce manuscrit. Vos commentaires ont grandement amélioré la qualité du manuscrit, avec une mention spéciale pour Patrice, qui a su apporter, au travers de ses remarques pertinentes, un peu plus de cohérence à ce manuscrit.

J'en profite aussi pour remercier mes examinateurs qui sont Rosa Tualle-Brouri, Carlos Garrido Alzar et Fetah Benabid, pour avoir accepté de faire partie de mon jury.

Le projet de gyromètre résonant n'aurait jamais pu voir le jour sans les discussions animées de Sylvain Schwartz, Ihsan Fsaïfes et Fabien Bretenaker. Merci à vous d'avoir initié ce projet que j'ai essayé de porter le plus loin possible pendant ma thèse. Merci aussi aux autres membres de hollogyr, Matthieu Goullard, Christophe Pierre, Johan Boulet, Jérôme Alibert et Benoît Debord, qui ont su œuvrer ensemble pour que le projet de gyromètre à cœur creux décolle. Mention spéciale à Matthieu pour toutes ses simulations simulink, et toutes ses heures au téléphone à m'expliquer les modélisations d'asservissements, et leur bande passante, ça m'a bien aidée !

D'ailleurs, je n'aurais jamais pu faire partie de ce projet si je n'avais pas eu la chance d'effectuer mon stage de recherche au laboratoire Ondes et Traitement du Signal de GrP à TRT. Merci donc à Pascale Nouchi, Ghaya Baili et Perrine Berger d'avoir été les premières à me faire confiance, pour mon stage de fin d'étude. Perrine, je me souviendrais toujours de ce que tu m'as dit quand je cherchais une thèse : "Tu devrais aller voir Gilles, il propose une thèse avec

des gyromètres, le sujet est sympa et je pense que vous allez bien vous entendre avec Gilles". Je peux te le dire maintenant 3 ans après : tu avais raison ! Merci pour tes conseils. Et merci pour les 6 mois passés dans votre bureau avec Ghaya.

Après 6 mois passés avec Ghaya et Perrine, j'ai eu la chance de partager ensuite mon bureau avec Matthieu Dupont-Nivet, qui a eu la patience de me supporter pendant mes 3 années de thèse. Merci pour cette patience, merci d'avoir toujours répondu à toutes mes questions, qu'elles soient d'ordre scientifique (mais au fait : ça marche comment la variance d'Allan ?), ou plus aléatoire (est ce qu'il existe un opposé au titre de prix Nobel ??). Maintenant, quand j'entends le mot schtroumph, je t'entends chanter (très mal) et je m'énervé toute seule... Merci d'avoir accepté ma folie quotidienne et de ne pas m'avoir jugée, de m'avoir rassurée les jours de désespoir de rédaction, ou les jours où je faisais des boulettes qui me semblaient plus grosses que moi (malheureusement, il y a eu de ces jours là). Je n'aurais pu rêver d'un meilleur co-bureau pendant ces 3 ans, alors merci ! Je te souhaite bon courage avec tes atomes froids, et bon courage aussi à Benjamin, qui a partagé notre bureau pendant 6 mois, et qui n'en a visiblement pas eu assez, puisqu'il revient en thèse ! Vous allez former une belle équipe !

Je me suis toujours sentie très bien pendant ces 3 ans (et demi) à TRT, et c'était dû à la super entente qui régnait (et règne toujours) dans les équipes. Merci aux doctorants qui étaient là au début de ma thèse et qui sont maintenant diplômés. Je pense notamment à Aude, Yoann, Alexandre, Jérémy, Arnaud P., Sophie, Nicolas, Rémy, Oriane et Romain (qui m'a devancé de peu pour sa soutenance) ! Merci à vous pour m'avoir si bien intégrée au niveau du labo, et mention spéciale à Oriane, Alex, Jérèm et Yoann pour le voyage au ski YES qui est parmi les meilleurs souvenirs de vacances que j'ai ! Merci aussi aux nouveaux doctorants qui prennent maintenant la relève : Myriam (merci merci pour le super pull, je l'adore!!!!), Quentin, VincentB., Maxellande et Gabriel ! Léa, Inès, Delphin et Simone, je compte sur vous pour mettre l'ambiance au A4 ! Merci aussi à tous les autres membres des labos (en essayant de ne pas en oublier) : Jérôme, Sylvain, Vincent C., Thierry, Alfredo, Patrick, Arnaud G., François, Vincent K., Éric, Christian, Luc, Ludovic, Loïc, Dominique, Barbara, Muriel et Cyril. J'ai vraiment passé de super moments en votre compagnie à tous, que ce soit pour les pauses café, pour aller au pilates, ou pour venir vous embêter un peu tous successivement quand j'avais des questions d'ordre technique !

Merci tout spécialement à Muriel pour toutes nos discussions sur tout et sur rien, à Dominique pour nous avoir montré la voie de la médiathèque, à Christian pour toujours avoir eu un mot gentil à me dire quand je venais le chercher pour la cantine, à Vincent C. pour ses explications sur le PDH, et enfin à Vincent K. pour ses conseils avisés concernant TUS. Voilà 2 mois que j'y suis et c'était vraiment un bon choix !

Merci aussi à ceux qui sont passés par le labo mais n'en font plus partie aujourd'hui. Je pense notamment à Stéphanie, Marie et Grégoire. Stéphanie, comme tu n'es pas partie très loin, il est temps que tu me remplaces aux pilates avec Muriel Aude et Oriane!!

J'ai aussi passé une (petite) partie de mon temps de thèse au LAC, et je tiens à remercier en particulier Fabienne pour avoir fait toutes les démarches administratives pour que je puisse venir et manger par mes propres moyens au LAC. Merci aussi à tous les membres de GLOP pour m'avoir accueillie pendant vos réunions mensuelles. Mention spéciale pour Aliou, avec qui j'ai bien sympathisé avant qu'il ne parte à Toulouse : bon courage pour la suite!

Enfin, je tiens à remercier toutes les personnes de ma vie extra-professionnelle qui m'ont supportée et accompagnée que ce soit au cours de ma thèse ou plus généralement durant mes études universitaires. Merci aux LAMA qui se reconnaîtront pour avoir bouleversé ma vie depuis que nous nous sommes trouvées à supop. Merci pour toutes ces heures passées au téléphone (ou par mails), à nous raconter nos aventures. Vous êtes toutes géniales, ne changez pas!!! Merci à l'équipe piscine + resto du mercredi, à savoir Laurent, Adeline, Kévin et Jean. Je ne compte plus le nombre de fou-rires que nous avons eu et je compte bien continuer notre nouvelle tradition de vacances ensemble 1 fois par ans! Merci à Matthieu pour ses interventions régulières dans nos soirées resto, et pour toutes ces heures au téléphone à refaire le monde en mieux. Bon courage à toi dans ton nouveau travail!

Merci ensuite à l'équipe Squash du mardi soir, Baptiste et Loïc, même pour les parties en plein mois d'août à 35°C. Merci aussi plus largement à Delphine et Émilie pour les soirées passées ensembles. Baptiste et Delphine, merci pour les nouveaux ans à vos côtés, pour les sorties, pour le ski, pour tout... Nos parties à sauver le monde de la pandémie me manquent déjà. Vivement nos prochaines vacances ensemble!!

Merci à Pauline et Arthur qui ont su égayer quelques unes de nos soirées. Ma thèse n'aurait pas été la même si nous n'avions pu nous retrouver de temps en temps pour bavarder. Ca y est, moi aussi, je suis docteur, comme vous, sauf que je ne sauve pas de vie... Merci à vous deux et bon courage pour l'installation dans votre nouvelle maison.

Merci aussi à Charles et Julie qui ont eux aussi participé à enjoliver quelques soirées. Toujours présents quand il s'agit de sortir mais aussi de déménager, ou d'assister à une soutenance! Merci d'avoir été là pour ce moment si important pour moi! N'hésitez pas à venir nous rejoindre dans le sud, hein!!! Petite pensée aussi pour Alex et Max, qui ont presque toujours été présents à mes retours sur Agde. On s'était dit rendez vous dans 10 ans, mais contrairement à la chanson, on ne s'est jamais quitté entre-temps. Pourvu que ça dure! Merci aussi à Mag de m'avoir intégrée dans sa nouvelle vie de maman : bon courage à vous 3 pour la suite!

Merci à toute ma famille qui a su me soutenir de loin pendant toutes ces années. Bon courage à mon frerot qui a lui aussi entrepris d'obtenir un doctorat (mais en mathématiques,

dommage, personne n'est parfait...;) ). Et merci à mes mamies d'avoir fait le déplacement pour ma soutenance. Merci à mes parents d'avoir contribué à faire de moi la personne que je suis aujourd'hui. Merci à mon tonton et à ma tatie Troyens qui m'ont accueillie un weekend de temps en temps depuis que je suis sur Paris. Les weekends avec vous étaient de vraies grandes bouffées d'air ! Et vous n'avez pas chaumés, 2 naissances pendant ma thèse, c'est du bon boulot ! Bon courage avec votre nouvelle petite famille !

Et enfin, le meilleur pour la fin, merci à toi, mon Bastien, mon fiancé. Merci pour tout : merci d'avoir survécu à ma rédaction, merci d'avoir été le soleil qui manquait à mon ciel parisien, merci d'avoir presque adopté mon (gros) bébé chat, et merci d'avoir tout sacrifié pour me suivre dans le sud... Tu es la personne qui compte le plus pour moi, alors merci tout simplement de faire partie de mon quotidien.

Bonne Lecture<sup>1</sup>.

---

1. P.S : pour ceux qui se demandent, non, on ne peut pas se servir d'un gyromètre pour donner de l'élan à un pigeon...



---

# Table des matières

---

<b>Remerciements</b>	<b>5</b>
<b>Introduction</b>	<b>17</b>
<b>1 L'effet Sagnac et son application dans les gyromètres optiques</b>	<b>23</b>
1.1 Démonstration dans le cadre de la relativité restreinte . . . . .	24
1.1.1 Formules de changement de coordonnées en relativité restreinte . . . . .	24
1.1.2 Cas d'un référentiel tournant . . . . .	25
1.2 Application au gyromètre interférométrique à fibre optique . . . . .	29
1.2.1 Le déphasage Sagnac dans un gyromètre interférométrique - Mesure de rotation . . . . .	29
1.2.2 Performances des gyromètres interférométriques . . . . .	31
1.3 Application au gyrolaser . . . . .	32
1.3.1 L'effet Sagnac dans un gyrolaser - Mesure de rotation . . . . .	32
1.3.2 Performance des gyrolasers . . . . .	34
1.4 Applications au gyromètre résonant passif . . . . .	36
1.4.1 L'effet Sagnac dans une cavité résonante - Mesure de rotation . . . . .	36
1.4.2 Comparaison avec les autres types de gyromètres . . . . .	37
1.5 Conclusion . . . . .	38
<b>2 État de l'art des gyromètres résonants passifs</b>	<b>41</b>
2.1 Caractéristiques d'une cavité résonante passive . . . . .	41
2.1.1 Fonction de transfert de la cavité observée en réflexion . . . . .	44
2.1.2 Fonction de transfert de la cavité observée en transmission . . . . .	45
2.1.3 Largeur de raie, finesse et contraste . . . . .	46
2.2 Mesure de la fréquence de résonance . . . . .	49
2.2.1 Principe d'un asservissement . . . . .	49



2.2.2	Obtention d'un signal d'erreur . . . . .	51
2.2.2.1	La modulation de phase : expression du signal d'erreur dans le cas général . . . . .	52
2.2.2.2	Modulation de phase avec $f_{\text{Mod}} \ll \Gamma$ . . . . .	56
2.2.2.3	Modulation de phase avec $f_{\text{Mod}} \gg \Gamma$ , l'asservissement Pound-Drever-Hall . . . . .	61
2.3	Lien entre asservissement et mesure de rotation . . . . .	64
2.3.1	Mesure en boucle ouverte . . . . .	65
2.3.2	Mesure en boucle fermée . . . . .	66
2.4	Bruits dans un gyro résonant passif . . . . .	68
2.4.1	Bruit de grenaille . . . . .	68
2.4.2	Effet Kerr . . . . .	70
2.4.3	Rétrodiffusion . . . . .	71
2.4.4	Effets de la polarisation de la lumière . . . . .	72
2.4.5	Amplitude de modulation résiduelle . . . . .	74
2.5	État de l'art des gyromètres passifs résonants actuels . . . . .	74
2.5.1	Années 1970-80 : les cavités air libre [1, 2] . . . . .	76
2.5.2	Années 1980 à nos jours : les cavités à fibre optique en silice . . . . .	77
2.5.2.1	Cavité hybride avec un coupleur espace libre [3, 4] . . . . .	77
2.5.2.2	Cavité entièrement fibrée avec coupleur en fibre de silice [5] . . . . .	78
2.5.3	Années 2000 à nos jours : les microgyromètres résonants . . . . .	79
2.5.3.1	Résonateur à modes de galerie [6] . . . . .	79
2.5.3.2	Micro gyromètre résonant en fibre optique [7] . . . . .	80
2.5.4	Années 2010 à nos jours : Cavités en fibre à cœur creux [8, 9] . . . . .	81
2.6	Conclusion . . . . .	81
<b>3</b>	<b>Étude et caractérisation de fibres à cœur creux pour la gyrométrie résonante</b>	<b>83</b>
3.1	Introduction sur les fibres à cœur creux : principe de guidage . . . . .	84
3.1.1	Fibre à bande interdite photonique . . . . .	85
3.1.2	Fibre Kagomé . . . . .	87
3.2	Le cahier des charges de la fibre à cœur creux . . . . .	88
3.2.1	Caractéristiques gyrométriques . . . . .	88
3.2.2	Caractéristiques de la fibre . . . . .	88
3.3	Identification de la fibre à cœur creux pour l'application gyrométrique . . . . .	89
3.3.1	Tests réalisés sur les fibres . . . . .	89
3.3.2	Résultats des tests et sélection de la fibre . . . . .	93

3.3.2.1	Fibre 19-cell à bande interdite photonique de chez X-Lim : le problème de la contamination . . . . .	93
3.3.2.2	Les fibres de chez NKT : pas de contamination, mais trop de pertes	95
3.3.2.3	La fibre Kagomé GLOphotonics : un compromis acceptable . . .	97
3.4	Caractéristiques de la cavité résonante avec la fibre Kagomé sélectionnée . . . . .	97
3.4.1	Mesure des paramètres de la cavité . . . . .	97
3.4.2	Performances théoriques de la cavité . . . . .	100
3.5	Conclusion . . . . .	101
<b>4</b>	<b>Rétrodiffusion et zone aveugle dans un gyromètre à fibre à cœur creux</b>	<b>103</b>
4.1	Lien entre rétrodiffusion et zone aveugle . . . . .	103
4.1.1	Mise en équation des champs intracavité en présence de rétrodiffusion . .	103
4.1.2	Modes propres et champ total intracavité : cas général . . . . .	106
4.1.3	Cas d'un couplage dissipatif pur : $\zeta = 0$ . . . . .	107
4.1.4	Cas d'un couplage conservatif pur $\zeta = \pi/2$ . . . . .	108
4.2	Mesure de la rétrodiffusion dans la fibre Kagomé fournie par GLOphotonics . . .	108
4.2.1	Modélisation de la rétrodiffusion dans une fibre à cœur creux . . . . .	109
4.2.2	Mesure du coefficient de rétrodiffusion de la fibre Kagomé . . . . .	110
4.2.3	Évaluation de la zone aveugle dans le cas d'un couplage dissipatif . . . . .	114
4.3	Mesure de la zone aveugle . . . . .	114
4.4	Conclusion sur la mesure de rotation en asservissant les deux ondes sur le même mode . . . . .	118
<b>5</b>	<b>Asservissements et mesure de rotation : les performances du gyromètre réso-</b>	
	<b>nant développé</b>	<b>119</b>
5.1	Procédure expérimentale d'asservissement . . . . .	119
5.1.1	Modélisation Simulink . . . . .	120
5.1.2	Choix des gains du correcteur PID et des bandes passantes de démodulation pour un asservissement stable . . . . .	122
5.1.3	Accord entre modélisation et expérience . . . . .	126
5.1.4	Suppression de la modulation d'amplitude résiduelle . . . . .	127
5.2	Mesures en asservissement dit "à deux ondes", décalées de 13 modes . . . . .	128
5.2.1	Facteur d'échelle et rotation . . . . .	129
5.2.2	Marche au hasard angulaire et dérive du biais . . . . .	133
5.2.3	Conclusion sur la méthode à 2 ondes avec 13 modes d'écart . . . . .	135
5.3	Mesures avec l'asservissement dit "à 3 ondes" . . . . .	136
5.3.1	Le modèle "à 3 ondes" . . . . .	136
5.3.2	Les résultats préliminaires : on ne mesure pas le même ISL . . . . .	137

5.4 Conclusions sur la méthode 3 ondes . . . . .	138
<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>141</b>
<b>A Analysis of the design of a passive resonant miniature optical gyroscope based on integrated optics technologies</b>	<b>145</b>
<b>B A Test Resonator for Kagome Hollow-Core Photonic Crystal Fibers for Resonant Rotation Sensing</b>	<b>157</b>
<b>C In-Situ Measurement of Backscattering in Hollow-Core Fiber Based Resonant Cavities</b>	<b>159</b>
<b>D Détails des calculs du chapitre 2</b>	<b>167</b>
D.1 Calcul des intensités réfléchies et transmises par une cavité résonante passive . .	167
D.1.1 Rappel des équations de départ . . . . .	167
D.1.2 Calcul du champ intracavité . . . . .	169
D.1.3 Intensité et champ réfléchi par la cavité . . . . .	170
D.1.4 Intensité et champ transmis par la cavité . . . . .	172
D.2 Calcul de la largeur de raie . . . . .	173
D.2.1 Cas de la réflexion . . . . .	173
D.2.2 Cas de la transmission . . . . .	176
D.3 Calcul du contraste en réflexion . . . . .	177
D.4 Calcul de la composante à $f_{\text{Mod}}$ de l'intensité en sortie de la cavité . . . . .	178
D.5 Calcul de la puissance incidente sur la photodiode en asservissement PDH, avec $\beta = 1,08$ rad . . . . .	180
<b>E Mesure du coefficient de réflexion d'un miroir</b>	<b>183</b>
<b>F Détails des calculs du chapitre 4</b>	<b>185</b>
F.1 Calcul de la matrice M . . . . .	185
F.2 Valeurs propres de la matrice M . . . . .	186
F.3 Vecteurs propres associés . . . . .	187
F.4 Calcul des conditions initiales A et B . . . . .	188
<b>G Annexe du chapitre 5</b>	<b>189</b>
G.1 Fréquence de coupure d'un filtre d'ordre deux composé de deux filtres d'ordre 1 .	189
G.1.1 Filtre passe-bas d'ordre 1 de la détection synchrone numérique . . . . .	189
G.1.2 Filtre passe-bas d'ordre k et fréquence de coupure . . . . .	190
G.1.3 Fonction de transfert du filtre d'ordre 2 . . . . .	190

**Bibliographie****192**



---

# Introduction générale

---

Le gyromètre est un capteur permettant de mesurer des vitesses de rotation par rapport à un référentiel inertiel (fixe vis-à-vis des étoiles)<sup>2</sup>. Il est utilisé dans un grand nombre d'applications civiles et militaires telles que la navigation inertielle ou la stabilisation de plateforme. La principale application considérée dans ce manuscrit est la réalisation d'une centrale inertielle pour la navigation aérienne. Une centrale inertielle est composée de trois gyromètres et trois accéléromètres qui mesurent les accélérations et les rotations du porteur. Ces mesures permettent de calculer la position et l'attitude de la centrale à tout instant, par rapport à une position de départ donnée [10]. Cela permet donc de s'orienter dans l'espace, en absence ou en complémentarité d'un autre système de positionnement tel que le GNSS (pour *Global Navigation Satellite System*).

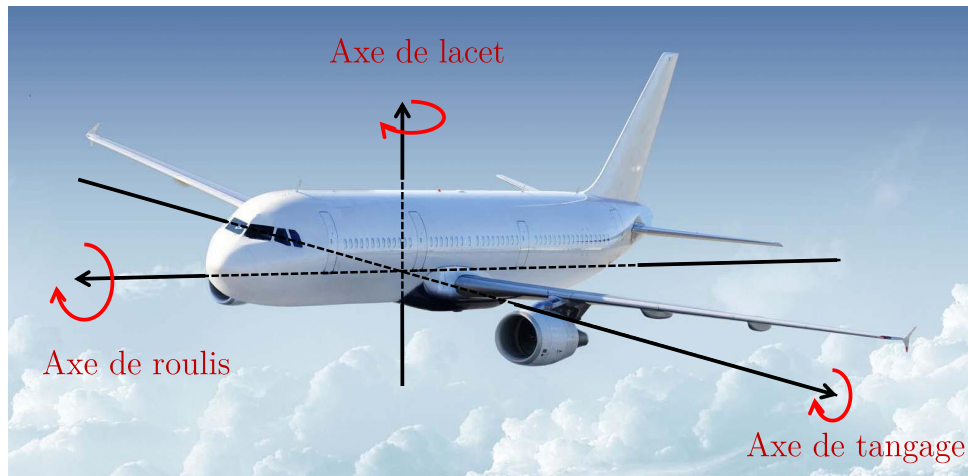


FIGURE 1 – Représentation schématique des axes du référentiel propre de l'avion, ainsi que des axes de rotation de référence.

Le calcul de la position d'un avion (ou de tout autre objet) par centrale inertielle est assez complexe [11]. Il nécessite en particulier des calculs de changement de repère. En effet, si les

---

2. Notons ici que la langue française distingue les *gyromètres*, qui donnent un signal de sortie dépendant de la vitesse de rotation, des *gyroscopes* qui donnent un signal de sortie dépendant de la position angulaire. Cette distinction n'existe pas en anglais où seul le mot *gyroscope* existe.

accéléromètres mesurent des accélérations (ou plutôt une résultante de force) dans leur référentiel local, les gyromètres mesurent des rotations par rapport à un référentiel inertiel, alors que la position doit, elle, être connue dans le référentiel terrestre. Il est aussi nécessaire d'intégrer deux fois les accélérations mesurées par les accéléromètres, et d'intégrer une fois les vitesses de rotation mesurées par les gyromètres. L'intégration au cours du temps de la vitesse de rotation mesurée par les gyromètres impose des contraintes sur la performance en termes de bruit de ces capteurs. En effet, une dérive  $\delta\dot{\theta}$  sur la mesure de vitesse angulaire se traduit, après une durée  $T$  de navigation, par une erreur angulaire de  $\delta\dot{\theta}T$ .

La performance des gyromètres se caractérise par trois critères principaux : leur marche aléatoire d'angle (ou ARW pour *Angular Random Walk* en anglais), la stabilité de leur biais (*bias drift* en anglais) et l'exactitude de leur facteur d'échelle (*Scale factor accuracy* en anglais).

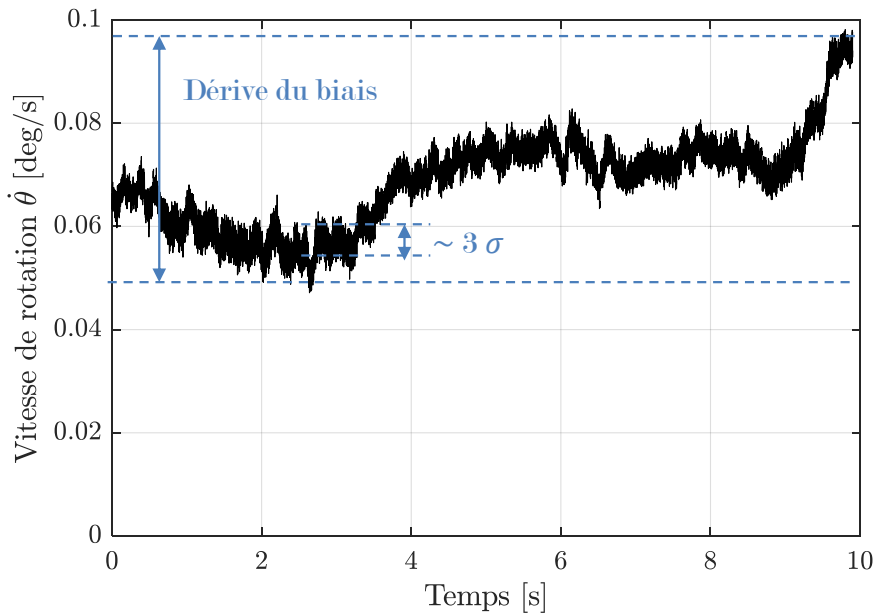


FIGURE 2 – Exemple de courbe de sortie d'un gyromètre lorsqu'il n'est soumis à aucune rotation. La bande passante de mesure est ici de 10 Hz.

La figure 2 représente le signal de sortie d'un gyromètre lorsque celui-ci est au repos, c'est-à-dire qu'il n'est soumis à aucune rotation extérieure. La valeur moyenne de ce signal s'appelle le biais. Il est en théorie nul pour un gyromètre parfait (si pas de rotation, pas de signal). Dans les gyromètres réels, il est non nul et dérive au cours du temps. Le biais ainsi que sa dérive sont dus à plusieurs sources de bruits que nous détaillerons dans le cas du gyromètre résonnant passif plus tard dans ce manuscrit (essentiellement au chapitre 2). La dérive du biais se mesure en deg/h et correspond à l'amplitude maximale de la dérive du signal au repos sur une plage de temps donnée. Pour 10 s de mesure, on parle de dérive à court terme, et pour 1 h de mesure, on parle de dérive à long terme.

La marche au hasard d'angle est une mesure du bruit (en théorie blanc) du signal de sortie au repos. Elle correspond à la racine carrée de la Densité Spectrale de Puissance (DSP, notée  $S_\nu$ ) du signal au repos :  $ARW = \sqrt{S_\nu}$ . La DSP est constante pour un bruit blanc et a pour unité le  $(\text{deg}/\text{h})^2/\text{Hz}$ . L'ARW se mesure donc en  $\text{deg}/\text{h}/\sqrt{\text{Hz}}$ . On peut aussi exprimer l'ARW en fonction de la variance  $\sigma$  du signal, mesurée sur une bande passante de 1 Hz. La variance d'Allan, dont nous détaillerons le calcul au chapitre 5, permet la mesure de l'ARW. En termes d'unité de mesure, la convention dans les gyromètres est d'exprimer cette marche au hasard en  $\text{deg}/\sqrt{\text{h}}$  sachant que  $1\text{deg}/\text{h}/\sqrt{\text{Hz}} = \frac{1}{60} \text{deg}/\sqrt{\text{h}}$ .

Enfin, le facteur d'échelle est le facteur de proportionnalité qui lie le signal de sortie des gyromètres (par exemple pour un gyromètre résonant, une différence de fréquence) à la vitesse de rotation. Ce facteur de proportionnalité dépend de plusieurs paramètres et il faut donc que ce dernier soit le plus stable possible dans le temps pour que la mesure soit la plus reproductible possible. L'exactitude du facteur d'échelle se mesure en % ou en ppm (parties par million) et est donnée lors de la calibration du gyromètre : c'est l'erreur relative de mesure du facteur d'échelle lors de l'étalonnage.

Comme on peut le voir dans le tableau 1 ci-dessous, le niveau de performance requis pour les gyromètres dépend de l'application.

Performances	Exemple d'application	Marche au hasard $[\text{°}/\sqrt{\text{h}}]$	Stabilité du biais $[\text{°}/\text{h}]$	Exactitude facteur d'échelle
Faibles	Alignement de plateforme	$> 0,5$	10 – 1000	0,1 – 1 %
Tactique	Contrôle assiette et cap	0,05 – 0,5	1 – 10	100 – 1000 ppm
Intermédiaires	Navigation pour avions civils	0,005 – 0,05	0,01 – 1	10 – 100 ppm
Inertielles	Navigation pour avions militaires	0,0003 – 0,005	0,001 – 0,01	1 – 10 ppm
Stratégiques	Navigation pour sous-marins, satellites	$< 0,0003$	$< 0,001$	$< 1$ ppm

TABLE 1 – *Performances requises des gyromètres en fonction de l'application visée. Les données sont adaptées de [12, 13].*

À ce jour, il existe 4 grandes familles de gyromètres :

- Les MEMS (pour *Micro Electro Mechanical System*), qui se basent sur la mesure de l'accélération de Coriolis pour mesurer des vitesses de rotation. Leurs performances sont limitées : à ce jour, les meilleurs vont jusqu'à la classe intermédiaire de performance [14, 15]. Ils ont cependant l'avantage d'avoir un très faible encombrement spatial.
- Les gyromètres atomiques, qui se basent sur l'effet Sagnac pour mesurer des rotations, en sont encore au stade de la recherche, mais ont le potentiel d'atteindre les très hautes performances (stratégique) [16, 17].



- Les gyromètres optiques [18, 12], qui sont eux-mêmes divisés en plusieurs sous-catégories dont nous détaillerons le principe de fonctionnement au chapitre 1. Ils se basent aussi sur l'effet Sagnac pour mesurer des rotations, et certains d'entre eux peuvent atteindre actuellement les performances de classe stratégique.
- Et enfin, les gyromètres à suspension électrostatique (ESG pour *Electrostatically Suspended Gyroscope*) qui se basent sur une mesure de l'accélération de Coriolis pour mesurer une rotation. Ce sont les premiers gyromètres à avoir atteint les très hautes performances (stratégiques) [19, 20].

Actuellement, les gyromètres les plus commercialisés dans le domaine de la navigation inertielle sont des gyrolasers (gyromètres optiques). Cependant, comme nous le verrons au chapitre 1, les gyrolasers sont limités par plusieurs sources de bruits ce qui rend leur fabrication très coûteuse. Les progrès réalisés ces 20 dernières années dans la fabrication des fibres optiques à cœur creux font du gyromètre résonant passif une alternative sérieuse au gyrolaser. C'est pourquoi, l'objectif de cette thèse est de démontrer la possibilité de réaliser un gyromètre résonant passif en fibre à cœur creux dont les performances sont celles requises pour la navigation inertielle.

Ces travaux de thèse ont été réalisés dans le cadre de la collaboration entre plusieurs entités :

- l'entreprise Thales Avionics (TAV), dont l'objectif est de rester compétitive sur le marché de la navigation inertielle ;
- l'entreprise Thales Research and Technology (TRT), qui possède les moyens techniques et technologiques de réaliser des cavités résonantes en fibre à cœur creux ;
- le laboratoire Aimé Cotton (LAC) qui dispose d'une expertise dans le domaine de l'étude des cavités résonantes et des asservissements ;
- les entreprise et laboratoire GLOphotonics et X-LIM, qui sont des fabricants et experts en fibre à cœur creux ;
- l'entreprise ALPhANOV qui a apporté son expertise en termes d'intégration de fibres à cœur creux.

## Plan de ce mémoire

Ce manuscrit est découpé en 5 chapitres, dont l'organisation est la suivante :

- Le chapitre 1 présente un état de l'art des gyromètres optiques actuels. En partant du calcul de l'effet Sagnac, nous expliquons comment mesurer des vitesses de rotation dans trois types de gyromètres optiques : le gyrolaser, le gyromètre interférométrique et le gyromètre résonant passif. Nous comparons ces technologies entre elles.
- Le chapitre 2 est un état de l'art dédié aux gyromètres résonants passifs. Nous y détaillons les différentes méthodes utilisées dans la littérature pour mesurer des rotations, ainsi que

les bruits les plus courants associés à ce type de gyromètre. L'avantage que présente une fibre à cœur creux par rapport à une fibre classique y est décrit.

- Dans le chapitre 3, nous présentons une étude expérimentale des caractéristiques des différents types de fibres à cœur creux afin d'identifier la fibre qui correspond le mieux à notre application. Nous caractérisons la cavité résonante réalisée à partir de la fibre à cœur creux que nous avons sélectionnée. Une évaluation théorique des performances du gyromètre réalisé au moyen de cette fibre y est présentée.
- Dans le chapitre 4, une mesure de zone aveugle dans une cavité résonante gyrométrique est présentée, et son origine théorique est expliquée.
- Enfin, le chapitre 5 présente les mesures de rotations et la caractérisation du gyromètre résonant réalisé en fibre à cœur creux.



# L'effet Sagnac et son application dans les gyromètres optiques

---

Par définition, l'effet Sagnac est le décalage temporel dans la réception de deux signaux lumineux tournant en sens inverse quand ils sont émis par un émetteur-récepteur fixé sur un disque tournant. L'explication physique de l'origine de ce retard a été source de débats au sein de la communauté scientifique. En particulier, les deux notes de Sagnac publiées en 1913 [21, 22] sur la mesure optique de ce retard présentent cet effet comme étant une preuve de l'existence de l'éther, contre la relativité d'Einstein dont l'article fondateur date de 1905 [23]. Cependant, la théorie de la relativité (générale ou restreinte) permet elle aussi de prédire correctement l'amplitude de ce retard et donne le même résultat que les calculs non relativistes en ce qui concerne une onde optique.

Les prédictions de l'effet Sagnac de ces deux théories divergent néanmoins si ce sont des particules qui ne vont pas à la vitesse de la lumière qui sont en circulation autour du disque tournant. En effet, la théorie de l'éther lumineux prédit un retard qui dépend de la vitesse des objets en mouvement dans le référentiel tournant, alors que la relativité générale prédit que le retard est indépendant de cette vitesse [24]. C'est ce qui a permis de départager ces deux théories, le retard Sagnac ayant été mesuré pour des particules telles que des atomes de calcium [25] ou de sodium [26] comme étant non dépendant de la vitesse de ces derniers, démontrant ainsi la validité de l'explication relativiste de l'effet Sagnac.

D'autre part, on peut aussi trouver dans la littérature scientifique d'autres explications de l'effet Sagnac. Par exemple, certains articles présentent ce retard comme étant un corollaire de l'effet Doppler [27], ou de l'effet Fresnel-Fizeau [28]. Malykin rassemble dans son article [24] toutes les explications physiques que l'on peut trouver dans les différentes publications

scientifiques sur cet effet. Il y démontre en quoi il n'y a que la théorie de la relativité (générale ou restreinte) d'Einstein qui permet, à ce jour, d'expliquer rigoureusement l'origine du phénomène sans approximations quelconques.

On se propose dans ce chapitre de faire la démonstration de l'effet Sagnac en relativité restreinte (dans un cas simple particulier) pour ensuite expliquer comment les gyromètres optiques actuels utilisent cet effet pour mesurer une vitesse de rotation.

## 1.1 Démonstration dans le cadre de la relativité restreinte

L'objectif de cette section est de faire une démonstration en relativité restreinte, et dans un cas simplifié, de l'effet Sagnac qui existe entre deux particules voyageant à contresens et à la même vitesse le long d'une boucle fermée dans un référentiel en rotation.

### 1.1.1 Formules de changement de coordonnées en relativité restreinte

La démonstration de l'effet Sagnac dans le cadre de la relativité restreinte nécessite de connaître les formules relativistes de changement de coordonnées entre deux référentiels inertiels.

Considérons un référentiel inertiel  $G$ , de centre  $O$ , qui sera le référentiel de l'observateur. Considérons aussi un référentiel  $G'$  de centre  $O'$  en mouvement rectiligne uniforme selon l'axe  $Ox$  par rapport à  $G$ . Le référentiel  $G'$  est donc lui aussi inertiel. Dans toute la suite, on note 'prime' toutes les coordonnées (position, vitesse, etc..) exprimées dans le référentiel  $G'$ . Pour plus de lisibilité, les vitesses exprimées dans  $G'$  sont notées  $u'$ , et les vitesses dans  $G$  sont notées  $v$ . On note donc  $v_{G'}$  la vitesse de translation de  $G'$  par rapport à  $G$ , exprimée dans  $G$ . On considère maintenant un point  $M$  de l'espace. On note  $x, y, z, t$  les coordonnées spatio-temporelles de ce point  $M$  dans  $G$  et  $x', y', z', t'$ , ces mêmes coordonnées dans  $G'$ . Les formules de changement de référentiel de Lorentz [23] permettent d'exprimer les coordonnées du point  $M$  dans  $G'$  par rapport à celles du point  $M$  dans  $G$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{x - v_{G'}t}{\sqrt{1 - \frac{v_{G'}^2}{c^2}}}, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \frac{t - x\frac{v_{G'}}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v_{G'}^2}{c^2}}}, \end{array} \right. \quad (1.1)$$

avec  $c$  la vitesse de la lumière dans le vide.

Supposons maintenant que le point M se déplace selon l'axe  $Ox'$  dans  $G'$ . On pose  $u'_M$  sa vitesse de déplacement par rapport à  $G'$  (exprimée dans le référentiel  $G'$ ). On peut prendre par exemple un homme marchant à la vitesse  $u'_M = 2$  km/h dans un train (Référentiel  $G'$ ) roulant à  $v_T = 300$  km/h par rapport au sol (référentiel  $G$ ). Dans ce cas, la vitesse du point M s'écrit :

$$\begin{cases} u'_M = \frac{x'}{t'} & \text{dans le référentiel } G'; \\ v_M = \frac{x}{t} & \text{dans le référentiel } G. \end{cases}$$

En utilisant les formules de changement de repère de Lorentz (1.1), on peut exprimer la vitesse  $v_M$  du point M dans  $G$  en fonction de la vitesse  $u'_M$  de ce point dans  $G'$  et de la vitesse  $v_{G'}$  de  $G'$  par rapport à  $G$ . On trouve alors la relation :

$$v_M = \frac{u'_M + v_{G'}}{1 + \frac{u'_M \cdot v_{G'}}{c^2}}. \quad (1.2)$$

C'est la loi de composition des vitesses en relativité restreinte. On peut remarquer ici que pour des vitesses de déplacement (du référentiel  $G'$  et du point M) faibles devant la vitesse de la lumière, on retrouve bien la formule de composition des vitesses de la mécanique classique newtonienne qui est :

$$v_M \simeq u'_M + v_{G'}.$$

### 1.1.2 Cas d'un référentiel tournant

Considérons maintenant le cas où le référentiel  $G'$  est un référentiel tournant à une vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  par rapport au référentiel inertiel  $G$  précédent. On suppose que les origines des deux référentiels sont confondues et que le référentiel  $G'$  tourne autour de son origine. Un référentiel tournant n'est, par définition, pas inertiel. Cependant, en absence de variation de champ gravitationnel et pour des vitesses de rotation ne variant pas significativement à l'échelle du temps du parcours du signal, la théorie de la relativité restreinte reste valable [24, 29], et on peut donc appliquer la loi de composition des vitesses relativiste. Dans le cas contraire, il faut faire appel à la théorie de la relativité générale pour exprimer les formules de composition des vitesses d'un référentiel à l'autre.

Considérons deux tortues  $T_+$  et  $T_-$  se déplaçant à la même vitesse (constante) selon une trajectoire circulaire de rayon  $R$ , chacune dans un sens différent dans  $G'$ . Pour plus de simplicité dans les calculs, on suppose que le centre de rotation du référentiel est confondu avec le centre de la trajectoire circulaire des deux tortues. On peut prendre pour exemple une rotation autour de la terre au niveau de l'équateur. Dans cet exemple, la terre constitue le référentiel  $G'$  en rotation,

le référentiel  $G$  pouvant par exemple être héliocentrique. Par convention, on indice par '+' tout ce qui tourne dans le même sens que le référentiel  $G'$  et on indice par '-' tout ce qui tourne en sens inverse. La figure 1.1 représente schématiquement la position des tortues au début et à la fin du tour.

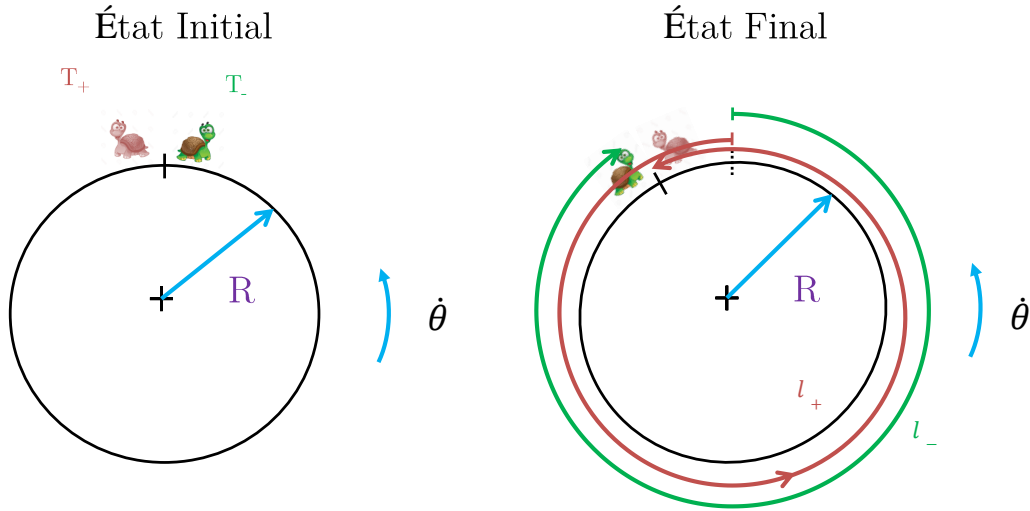


FIGURE 1.1 – Représentation schématique du trajet des tortues autour du référentiel en rotation. On peut voir qu'au bout d'un tour complet, la distance  $l_+$  que parcourt la tortue  $T_+$  dans le référentiel fixe est plus grande que celle parcourue par la tortue  $T_-$  dans ce même référentiel, notée  $l_-$ .

Les distances et les vitesses sont orientées, et on choisit par convention de compter positivement les vitesses et les déplacements lorsque ces derniers sont faits dans le sens de rotation du référentiel  $G'$ . La vitesse de déplacement de la tortue  $T_+$  (respectivement  $T_-$ ) exprimée dans le référentiel tournant  $G'$  est donnée par  $u'$  (respectivement  $-u'$ ), avec  $u' > 0$ . On note  $l_{\pm}$  la distance parcourue par la tortue  $T_{\pm}$  dans le référentiel  $G$  lorsqu'elle a fait un tour complet dans son référentiel tournant. On pose aussi  $t_{\pm}$  le temps mis à faire cette rotation. On a alors :

$$l_{\pm} = \pm 2\pi R + R\dot{\theta}t_{\pm}. \quad (1.3)$$

Or, en posant  $v_{\pm}$  la vitesse des tortues  $T_{\pm}$  dans le référentiel  $G$ , on a aussi la relation :

$$l_{\pm} = v_{\pm}t_{\pm}. \quad (1.4)$$

En égalisant les expressions des équations (1.3) et (1.4), on obtient l'expression des temps de parcours (exprimés dans  $G$ ) de chaque tortue pour un tour dans chaque sens, en fonction de leur vitesse dans chaque sens (exprimées elles aussi dans le référentiel  $G$ ) :

$$t_{\pm} = \frac{\pm 2\pi R}{v_{\pm} - R\dot{\theta}}. \quad (1.5)$$

La subtilité de l'effet Sagnac réside dans la manière d'exprimer les vitesses  $v_{\pm}$  des tortues dans le référentiel G en fonction de leurs vitesses respectives dans le référentiel G'. D'après l'équation (1.2), la vitesse des tortues dans le référentiel G est donnée, en relativité restreinte, par :

$$v_{\pm} = \frac{\pm u' + R\dot{\theta}}{1 \pm \frac{u' \cdot R\dot{\theta}}{c^2}} \quad (1.6)$$

En combinant les équations (1.5) et (1.6), on obtient les temps de parcours sur un tour pour chaque tortue :

$$\begin{cases} t_+ = \frac{2\pi R}{u' \left(1 - \frac{(R\dot{\theta})^2}{c^2}\right)} \left(1 + \frac{R\dot{\theta}u'}{c^2}\right), \\ t_- = \frac{2\pi R}{u' \left(1 - \frac{(R\dot{\theta})^2}{c^2}\right)} \left(1 - \frac{R\dot{\theta}u'}{c^2}\right). \end{cases}$$

L'effet Sagnac, qui est le décalage temporel à l'arrivée des deux tortues à leur point de départ, est donc égal à :

$$\Delta t_S = t_+ - t_- = \frac{4\pi R^2 \dot{\theta}}{c^2 \left(1 - \frac{(R\dot{\theta})^2}{c^2}\right)}. \quad (1.7)$$

Ce résultat appelle plusieurs commentaires. Premièrement, le décalage temporel  $\Delta t_S$  est indépendant de la vitesse des porteurs  $u'$  dans le référentiel tournant. C'est pourquoi l'effet Sagnac ne dépend pas de la nature de ce qui parcourt la boucle fermée, que ce soient des tortues ou des ondes lumineuses. Il ne dépend donc pas non plus de la nature du milieu qui est traversé.

Ensuite, si on ne considère que de faibles vitesses de rotation de référentiel ( $R\dot{\theta} \ll c$ ), on peut approcher l'effet Sagnac par la formule :

$$\Delta t_S \simeq \frac{4\pi R^2 \dot{\theta}}{c^2}, \quad (1.8)$$

qui est celle qu'on emploie le plus pour décrire l'effet Sagnac. Dans cette approximation, on peut exprimer les temps de parcours dans chaque sens par :

$$t_{\pm} = t_0 \pm \frac{\Delta t_S}{2}, \quad (1.9)$$



avec

$$\left\{ \begin{array}{l} t_0 = \frac{2\pi R}{u'}, \\ \frac{\Delta t_S}{2} = \frac{2\pi R^2 \dot{\theta}}{c^2}. \end{array} \right. \quad (1.10)$$

De plus, bien que l'effet Sagnac ne dépende pas de la vitesse des porteurs dans la boucle, il dépend du nombre de tours parcourus par ces porteurs. En effet, si on considère un parcours de longueur  $L$  le long d'un (ou plusieurs) cercle(s) de rayon  $R$  dans un référentiel tournant, alors les formules précédentes deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} t_0 = \frac{L}{u'}, \\ \frac{\Delta t_S}{2} = \frac{LR\dot{\theta}}{c^2}. \end{array} \right. \quad (1.11)$$

Ce cas de figure peut avoir lieu par exemple lorsque la lumière parcourt son trajet le long d'une fibre de longueur  $L$  enroulée en  $N$  boucles de rayon  $R$ .

Ensuite, cette formule est en fait un cas particulier de l'effet Sagnac : on s'est placé dans un cas où le trajet parcouru est circulaire et colinéaire à la rotation du référentiel. La formule générale du retard Sagnac, lorsqu'on considère une boucle effectuée le long d'un chemin de coordonnées radiales  $\vec{r}$  non nécessairement centré sur le centre de rotation du référentiel  $G'$ , est donnée par [12] :

$$\Delta t_S = \frac{4\vec{A} \cdot \vec{\theta}}{c^2}, \quad \text{avec :} \quad \vec{A} = \frac{1}{2} \oint \vec{r} \wedge d\vec{r}. \quad (1.12)$$

On retrouve notre expression de l'effet Sagnac en sachant que dans notre modèle précédent, on a  $A = \pi R^2 N = LR\dot{\theta}/2$  avec  $N$  le nombre de boucles parcourues pendant la trajectoire circulaire ( $L = N2\pi R$ ).

Enfin, l'effet Sagnac est très faible. Si on prend l'exemple d'un tour de la terre ( $\dot{\theta} = 15$  deg/h) au niveau de l'équateur - par exemple par des avions volant à altitude constante ( $R = 6380$  km) - alors le retard Sagnac est de seulement  $\Delta t_S = 413$  ns, ce qui est très difficilement mesurable, même avec des horloges atomiques. Mais ce n'est pas infaisable. En effet, Hafele et Keating [30, 31] ont réussi à mesurer le retard entre des horloges atomiques placées dans des avions tournant en sens opposés autour de la terre. Le retard mesuré correspondait bien aux prévisions relativistes.

En optique, un décalage temporel d'arrivée entre deux ondes est équivalent à un déphasage, et les très petits déphasages sont facilement mesurables grâce aux interférences. De nos jours, il existe trois principaux types de gyromètres optiques :

- Le gyromètre interférométrique à fibre optique (IFOG pour *Interferometric Fiber Optic Gyroscope* en anglais) que nous présenterons brièvement en section 1.2.

- Le gyrolaser que nous présenterons brièvement en section 1.3.
- Le gyromètre résonant passif, qui fait l'objet de cette thèse, et dont nous présenterons le principe général de fonctionnement en section 1.4, avant d'en faire une description plus détaillée au chapitre 2.

## 1.2 Application au gyromètre interférométrique à fibre optique

### 1.2.1 Le déphasage Sagnac dans un gyromètre interférométrique - Mesure de rotation

Le principe de fonctionnement d'un gyromètre interférométrique est présenté sur la figure 1.2.

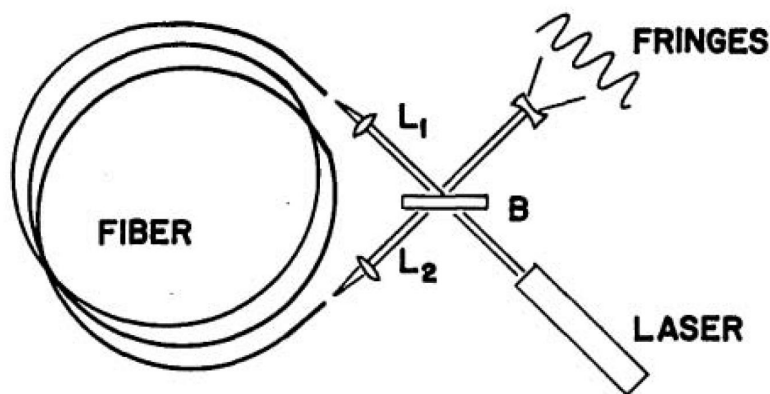


FIGURE 1.2 – Schéma de principe d'un gyromètre interférométrique à fibre optique (tiré de [32]). La lumière provenant du laser est séparée en deux faisceaux - de puissance égale - par la séparatrice (B). Les faisceaux sont injectés dans une des extrémités de la fibre au moyen des lentilles  $L_1$  et  $L_2$ , puis collimatés par les lentilles  $L_2$  et  $L_1$  pour ensuite venir être recombinaés par la séparatrice (B) et ainsi interférer. Les interférences sont ici non localisées.

Le premier gyromètre interférométrique à fibre optique a été réalisé en 1976 par Vali et Shorthill [32]. De manière générale, un gyromètre interférométrique à fibre optique est constitué entre autres d'une source lumineuse (par exemple un laser), d'une longue fibre optique de longueur  $L$  (typiquement de quelques centaines de mètres à quelques kilomètres) enroulée sur une boucle de rayon  $R$  et d'une séparatrice qui permet d'une part d'injecter la lumière du laser dans les deux extrémités de la fibre optique et, d'autre part, de recombinaer les deux faisceaux en sortie de la fibre optique pour qu'ils interfèrent sur une photodiode. Dans le cas d'un interféromètre tout fibré, la séparatrice et les lentilles sont remplacées par un coupleur fibré 50/50 et des soudures.

Si on appelle  $\Phi_{\pm}$  la phase accumulée par l'onde lumineuse de fréquence  $\nu$  (et de vitesse  $u' = c/n$  avec  $n$  l'indice de la fibre optique) parcourant la boucle de longueur  $L$  dans les deux sens de circulation de la fibre, alors, d'après les équations (1.9) et (1.11), on a :

$$\Phi_{\pm} = 2\pi\nu t_{\pm} = 2\pi\nu \left( \frac{nL}{c} \pm \frac{LR\dot{\theta}}{c^2} \right),$$

ce qui fait que la différence de phase accumulée par les deux ondes à la sortie du gyromètre interférométrique, et due à l'effet Sagnac, sera donnée par :

$$\Delta\Phi_S = \Phi_+ - \Phi_- = 4\pi\nu \frac{LR\dot{\theta}}{c^2}. \quad (1.13)$$

En considérant que l'intensité optique incidente sur l'interféromètre est  $I_0$ , alors l'intensité circulant dans chacun des bras est  $I_0/2$  et l'intensité en sortie d'interféromètre est donnée par la formule de l'interférence à deux ondes :

$$I_{out} = \frac{I_0}{2} (1 + \cos(\Delta\Phi_S)), \quad (1.14)$$

dont on peut tracer l'évolution en fonction de la vitesse de rotation comme le montre la figure 1.3.

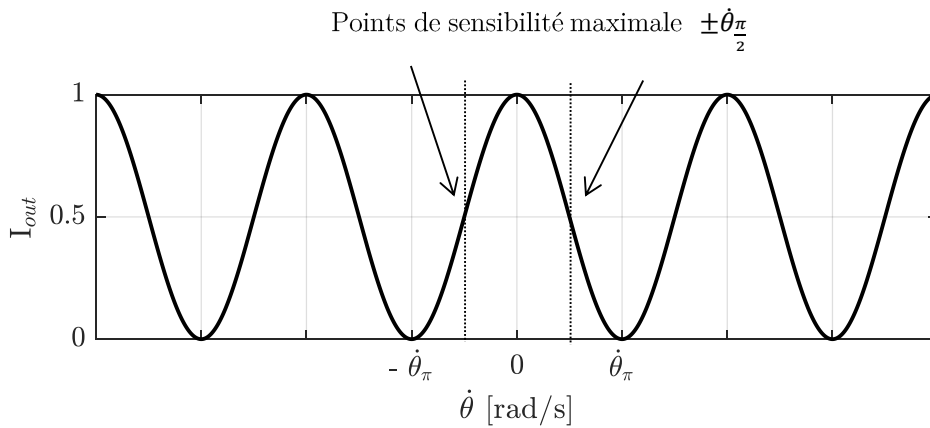


FIGURE 1.3 – Allure de l'intensité optique en sortie d'un gyromètre interférométrique en fonction de la vitesse de rotation  $\dot{\theta}$ .

Pour mesurer la vitesse de rotation, on place une photodiode à la sortie de l'interféromètre. En effet, le courant en sortie de la photodiode est proportionnel à l'intensité optique incidente sur cette dernière. Or, comme on peut le voir sur la figure 1.3, l'intensité lumineuse détectée sur la photodiode est dépendante de la vitesse de rotation du référentiel dans lequel se trouve le gyromètre interférométrique. La sensibilité de ce gyromètre est maximale lorsqu'on se place au point de fonctionnement  $\dot{\theta}_{\pi/2}$  tel que  $\Delta\Phi_S = \pm\pi/2$  (soit  $\dot{\theta}_{\pi/2} = \pm c^2/(8\nu LR)$ ). En effet, en ces points-là, la réponse du gyromètre interférométrique est linéaire et permet de distinguer le sens de la rotation effectuée. Pour se placer sur ce point de fonctionnement autrement qu'en faisant tourner le gyromètre à vitesse constante  $\dot{\theta}_{\pi/2}$ , il faut rajouter artificiellement une différence de phase de  $\pi/2$  entre les deux bras de l'interféromètre. Pour ce faire, on peut par exemple rajouter

un modulateur de phase dans un des bras de l'interféromètre, dont on va piloter la phase  $\Phi_{PM}$  par un signal carré de période  $T$  tel que :

$$\Phi_{PM}(t) = \begin{cases} +\frac{\pi}{4} & t < \frac{T}{2}, \\ -\frac{\pi}{4} & t > \frac{T}{2}. \end{cases} \quad (1.15)$$

En choisissant astucieusement la période du signal  $T$  comme étant égale à deux fois le temps mis par l'onde pour parcourir la cavité ( $T = 2nL/c$ ) on peut faire en sorte que le déphasage entre les deux ondes soit égal à tout instant à :

$$\Delta\Phi = \Delta\Phi_S + \frac{\pi}{2}, \quad (1.16)$$

et donc que l'intensité détectée sur la photodiode soit donnée par :

$$\begin{aligned} I_{out} &= \frac{I_0}{2}(1 + \cos(\Delta\Phi)) = \frac{I_0}{2}(1 - \sin(\Delta\Phi_S)) \simeq \frac{I_0}{2}(1 - \Delta\Phi_S) \\ I_{out} &\simeq \frac{I_0}{2}\left(1 - 4\pi\nu \frac{LR\dot{\theta}}{c^2}\right) \end{aligned}$$

On a bien ici une relation linéaire entre l'intensité optique détectée sur la photodiode et la vitesse de rotation.

### 1.2.2 Performances des gyromètres interférométriques

D'après Hervé Lefèvre [33], spécialiste en gyroscopie, les meilleurs gyromètres optiques (en termes de performances) sont à ce jour des gyromètres interférométriques. Ces derniers peuvent atteindre la classe stratégique des performances<sup>1</sup>, c'est-à-dire une marche au hasard angulaire inférieure à  $0.0003 \text{ deg}/\sqrt{\text{h}}$  et une dérive du biais inférieure à  $0.001 \text{ deg/h}$  [34]. Ce genre de gyromètre interférométrique est très coûteux et difficile à produire, il n'en sort par exemple qu'une petite dizaine par an chez Honeywell [34]. Les principaux acteurs dans le domaine des performances stratégiques en gyromètre interférométrique à fibre sont Honeywell et iXblue. Les autres fournisseurs tels que Northrop-Grumman ou Sagem Navigation GmbH adressent plutôt la classe des performances inertielles [33].

La performance des gyromètres interférométriques est limitée par plusieurs sources de bruits. Parmi elles, on peut notamment citer le bruit thermique, qui est le principal facteur limitant de ces gyromètres. En effet, la dépendance de l'indice de la fibre à la température induit une non-réciprocité du trajet optique de la lumière dans les deux sens de circulation de la fibre optique. La durée  $t_0 = nL/c$  n'est alors plus identique dans ces deux sens, car dépendant de  $n$  qui dépend de la température, qui elle-même dépend du temps. Cela induit donc un biais

---

1. Voir le tableau 1 en introduction

non constant sur le signal de sortie du gyromètre. Bien qu'il existe maintenant des bobinages complexes quadripolaires qui permettent d'atténuer ces effets thermiques [35], il n'en reste pas moins l'un des principaux facteurs limitants des gyromètres interférométriques à fibre optique. Notons ici que les autres sources de bruits "classiques" telles que l'effet Kerr ou la rétrodiffusion sont moins importantes dans un gyromètre interférométrique que pour un gyromètre résonant, car on peut en diminuer les effets en utilisant une source à spectre large, c'est-à-dire à faible longueur de cohérence temporelle.

## 1.3 Application au gyrolaser

### 1.3.1 L'effet Sagnac dans un gyrolaser - Mesure de rotation

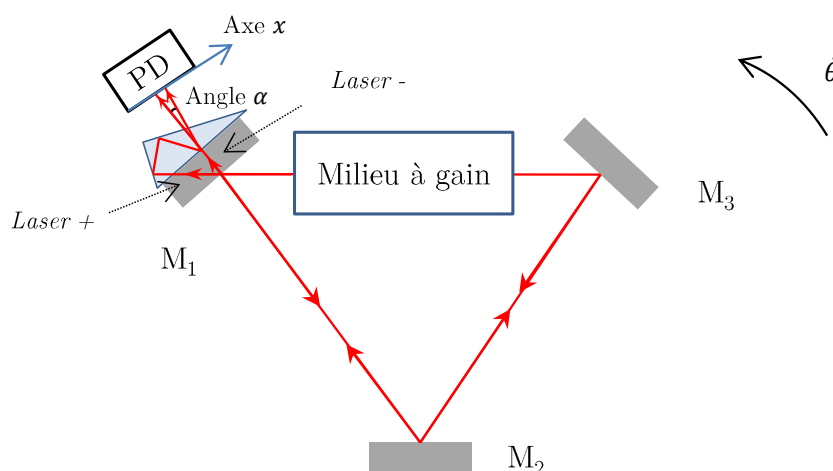


FIGURE 1.4 – Schéma de principe de fonctionnement d'un gyrolaser.  $M$  : Miroir diélectrique,  $PD$  : Photodiode

Mis au point en 1963 par Macek et Davis [36], le gyrolaser a été le premier gyromètre optique à avoir été commercialisé<sup>2</sup>. La figure 1.4 présente une modélisation simplifiée d'un gyrolaser. Ce dernier est constitué d'une cavité résonante en anneau (composée de trois miroirs dans notre exemple), avec un milieu à gain intracavité.

Les propriétés de la cavité résonante et du milieu à gain font qu'une oscillation laser peut avoir lieu au sein de la cavité, et ce, dans les deux sens de rotation de la lumière intracavité<sup>3</sup>. Deux faisceaux lasers sont donc émis par la cavité : un dans chaque sens de rotation (notés "Laser +" et "Laser -" sur la figure 1.4). Ces deux lasers sont liés car ils ont le même milieu à gain, mais pas forcément la même fréquence d'émission. Cette dernière va dépendre de la vitesse et du sens de rotation de la cavité. En effet, les lasers émettent chacun une fréquence optique, qui répond à la condition de résonance, à savoir que leur fréquence d'émission est un multiple

2. En 1978, par Honeywell [29]

3. Pour plus d'explications sur le fonctionnement physique d'un laser, voir [37]

de l'intervalle spectral libre de la cavité résonante, qui est lui-même défini comme l'inverse du temps mis par la lumière pour faire un tour dans la cavité. Or, comme nous l'avons vu dans la section précédente, le temps mis pour faire un tour sur une boucle fermée dépend de si ladite boucle (en l'occurrence la cavité résonante) est en rotation. L'intervalle spectral libre de la cavité ne sera donc pas le même pour les deux lasers contrarotatifs lorsque la cavité tournera, et leur fréquence d'émission ne sera alors pas la même.

Si on note  $\Delta\nu_{ISL+}$  (respectivement  $\Delta\nu_{ISL-}$ ) l'intervalle spectral libre de l'onde circulant dans le sens '+' (respectivement dans le sens '-'), alors on peut écrire d'après (1.9) que :

$$\Delta\nu_{ISL\pm} = \frac{1}{t_{\pm}} = \frac{1}{t_0 \pm \frac{\Delta t_S}{2}}. \quad (1.17)$$

En combinant cette équation avec l'équation (1.11), sachant que  $\frac{\Delta t_S}{2} \ll t_0$ , et que ici, la vitesse de l'onde dans le référentiel tournant est de  $u' = c/n$ , on obtient :

$$\Delta\nu_{ISL\pm} \simeq \frac{1}{t_0} \left( 1 \mp \frac{\Delta t_S}{2t_0} \right) = \Delta\nu_{ISL_0} \mp \frac{\delta\nu_S}{2}, \quad (1.18)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\nu_{ISL_0} = \frac{1}{t_0} = \frac{c}{nL}, \\ \frac{\delta\nu_S}{2} = \frac{\Delta t_S}{2t_0^2} = \frac{R\dot{\theta}}{n^2L} = \frac{2A\dot{\theta}}{n^2L^2}, \end{array} \right. \quad (1.19)$$

avec  $A$  l'aire encerclée par la cavité laser et  $L$  le périmètre de cette dernière.

Notons  $\nu_+$  (respectivement  $\nu_-$ ) la fréquence du laser émis dans le sens '+' (respectivement '-'). Comme la fréquence d'émission laser est un multiple  $p$  de l'intervalle spectral libre, on a la relation :

$$\nu_{\pm} = p\Delta\nu_{ISL\pm}. \quad (1.20)$$

Et donc la différence de fréquence d'émission du laser entre le sens + et le sens - vaut :

$$\Delta\nu_S = \nu_- - \nu_+ = p\delta\nu_S. \quad (1.21)$$

Or, on peut approximer le nombre  $p$  d'intervalles spectraux libres en fonction de la longueur d'onde du laser par :

$$p = \frac{\nu_+}{\Delta\nu_{ISL+}} = \frac{\nu_-}{\Delta\nu_{ISL-}} \simeq \frac{c}{\lambda} \frac{1}{\Delta\nu_{ISL_0}} = \frac{nL}{\lambda}. \quad (1.22)$$

Ce qui au final, en combinant les équations (1.19), (1.21) et (1.22), donne l'expression de la différence de fréquence d'émission entre les deux lasers :

$$\Delta\nu_S = \frac{4A}{nL\lambda} \dot{\theta}. \quad (1.23)$$

Les fréquences d'émission des deux lasers issus de la même cavité résonante seront donc décalées de la quantité  $\Delta\nu_S$ , proportionnelle à la vitesse de rotation du système.

Pour mesurer cet écart de fréquence, on s'arrange dans un gyrolaser pour qu'un des miroirs (appelé miroir de sortie) ait un coefficient de réflexion légèrement plus petit que les deux autres (le miroir  $M_1$  sur la figure 1.4). Dans ce cas-là, une partie du faisceau laser va pouvoir "s'échapper" de la cavité et on place un système optique (un prisme sur la figure 1.4) qui permet de faire interférer les deux faisceaux lasers avec un angle  $\alpha$ . L'intensité optique qui résulte de l'interférence entre deux faisceaux qui ont une divergence angulaire  $\alpha$  et une différence de fréquence  $\Delta\nu_S$  est donnée par [18] :

$$I = 2I_0 \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi\alpha x}{\lambda} + 2\pi\Delta\nu_S t + \varphi \right) \right], \quad (1.24)$$

avec  $\lambda$  la longueur d'onde du laser (à rotation nulle),  $I_0$  l'intensité de sortie des deux lasers (supposée égale pour chacun des faisceaux de sortie) et  $\varphi$  une phase aléatoire. On observera donc sur la photodiode un ensemble de franges mobiles (espacées spatialement d'une interfrange  $x_i = \lambda/\alpha$ ) dont la vitesse de défilement au cours du temps est proportionnelle à la différence de fréquence  $\Delta\nu_S$  des deux faisceaux laser contrarotatifs (et donc à la vitesse de rotation du gyrolaser selon un axe perpendiculaire au plan de sa cavité). Il suffit alors, en plaçant non pas une, mais deux photodiodes sur le lieu de l'interférence des faisceaux, de compter le nombre de franges ayant défilé pour revenir à la mesure de rotation du gyrolaser. Le sens de rotation du laser sera donné par le sens de défilement des franges.

### 1.3.2 Performance des gyrolasers

Le gyrolaser, dans sa forme la plus connue (voir figure 1.5), se présente sous la forme d'un bloc de Zérodur (matériau à faible coefficient de dilatation thermique) dans lequel est contenu un mélange gazeux d'Hélium-Néon servant de milieu amplificateur.

Les gyrolasers actuels ont des performances pouvant aller jusqu'à celles requises pour la navigation inertielle (voir tableau 1 en introduction). Les principaux fournisseurs de gyrolaser à ce jour sont Honeywell (pour le marché mondial) et Thales Avionics et Safran pour le marché français. Ils adressent essentiellement les marchés de moyennes performances (inertiels). Le gyrolaser est limité par deux effets principaux : la rétrodiffusion et la nature gazeuse du milieu amplificateur. La rétrodiffusion est à l'origine d'une zone aveugle, c'est à dire d'une plage de faibles vitesses de rotation qui n'est pas détectée par le système. Le chapitre 4 détaille le mécanisme à l'origine de ce phénomène.

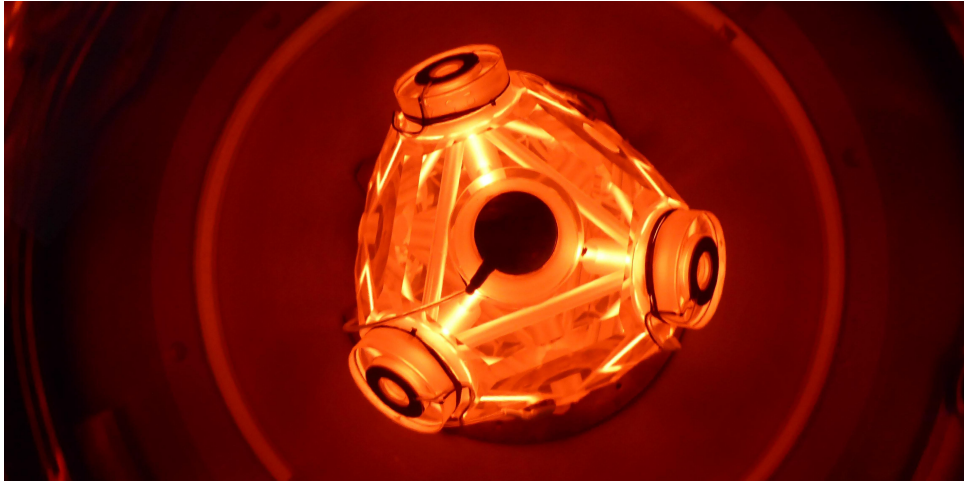


FIGURE 1.5 – *Photo Thales Avionics d'un gyrolaser Hélium-Néon triaxe. La couleur rouge est due à la fluorescence du néon vue au travers du Zérodur.*

Le problème de la zone aveugle est partiellement résolu dans les gyrolasers par une activation mécanique. Cette dernière consiste à imprimer au gyrolaser une vitesse de rotation variant sinusoïdalement dans le temps. Si l'amplitude de cette oscillation est suffisamment grande, le gyrolaser passe la plupart de son temps hors de sa zone aveugle. Le caractère aléatoire de cette oscillation évite d'accumuler des biais au cours du temps.

La nature gazeuse du milieu amplificateur est elle aussi problématique. En effet, la pureté du gaz est aussi un facteur limitant qui nécessite une forte étanchéité des miroirs. D'autre part, ce dernier est sensible à l'effet Fizeau, qui est lui aussi un effet relativiste dû au mouvement du gaz intra cavité. En effet, si le gaz est lui aussi en mouvement lorsque l'effet laser a lieu, alors il y a un déphasage supplémentaire entre les deux faisceaux lasers qui est donné par [38] :

$$\Delta\Phi = 8\pi n^2 \frac{Lv}{\lambda c} \left(1 - \frac{1}{n}\right), \quad (1.25)$$

avec  $n$  l'indice du gaz (milieu en mouvement),  $v$  la vitesse du gaz par rapport au référentiel du laboratoire (et pas par rapport au référentiel tournant), et  $L$  la longueur de la cavité.

Or, le gaz est mis en mouvement dans un gyrolaser à cause des décharges des électrodes de pompe du milieu à gain. On résout le problème en faisant deux décharges de pompe parfaitement symétriques sur la cavité, de sorte que la vitesse du gaz soit nulle, et donc que l'effet Fizeau soit nul. Cela impose des conditions de fabrication très contraignantes au niveau des électrodes de pompe du milieu à gain [29].



## 1.4 Applications au gyromètre résonant passif

### 1.4.1 L'effet Sagnac dans une cavité résonante - Mesure de rotation

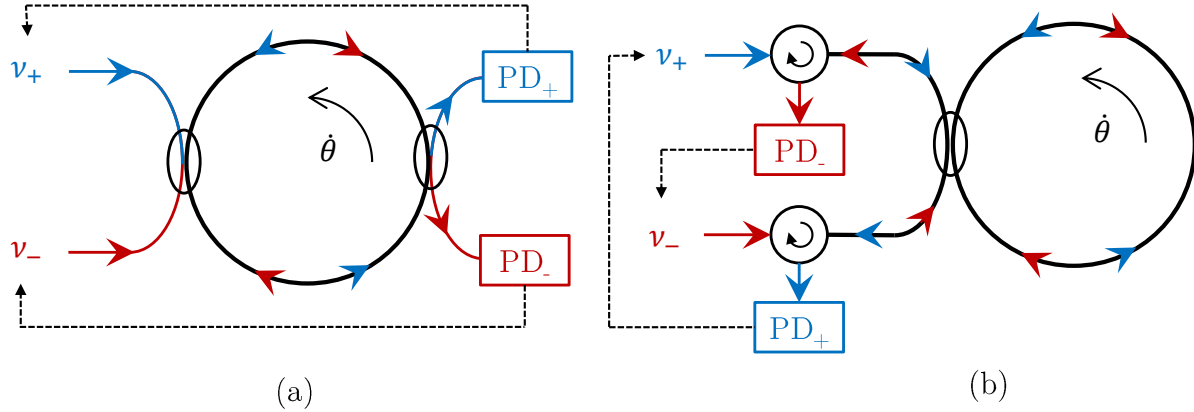


FIGURE 1.6 – Schéma de principe de fonctionnement d'un gyromètre résonant, observé en transmission (a) ou en réflexion (b). Les flèches en pointillé symbolisent une rétroaction (un asservissement) faite sur les fréquences optiques de sorte qu'elles concordent avec les fréquences de résonance de la cavité. PD : Photodiodes.

Ce sont Ezekiel et Balsamo qui, en 1977, proposèrent les premiers le concept et la réalisation expérimentale d'un gyromètre résonant [1]. Ce premier gyromètre n'était pas à fibre optique puisque la cavité résonante était constituée de quatre miroirs. Un gyromètre résonant à fibre optique est représenté sur la figure 1.6. Il se compose d'au moins deux ondes lumineuses de fréquences  $\nu_+$  et  $\nu_-$ , qui peuvent provenir (ou non) d'un même laser. Ces deux ondes sont injectées dans chacun des sens de circulation d'une cavité résonante au travers d'un coupleur d'entrée (qui peut être soit fibré comme sur le schéma, soit en espace libre avec un miroir). La cavité résonante est composée d'une fibre optique (ou d'une aire encerclée par des miroirs en espace libre) et peut être observée soit en transmission (figure 1.6 (a)), soit en réflexion (figure 1.6 (b)). Quelle que soit la configuration du gyromètre résonant (en réflexion ou en transmission), c'est grâce à la cavité résonante (fibrée sur la figure) que la mesure de vitesse de rotation peut être réalisée.

Comme pour un gyrolaser, la mesure de la vitesse de rotation dans un gyromètre résonant repose sur le fait que l'intervalle spectral libre d'une cavité résonante est modifié par la rotation de cette dernière. Cependant, comme il n'y a pas de milieu à gain dans la cavité résonante (elle est d'ailleurs dite passive dans cette configuration), la fréquence du laser externe n'a aucune raison particulière de suivre la fréquence dite de résonance de la cavité (multiple entier de l'intervalle spectral libre), qui va être modifiée par la rotation.

C'est pourquoi on utilise, dans le cas d'un gyromètre résonant, un asservissement qui va permettre de suivre la fréquence de résonance de la cavité au cours du temps. L'asservissement,

qui sera décrit au chapitre 2, est représenté sur la figure 1.6 par les flèches en pointillés. D'après ce qui a été dit précédemment, si chacune des deux ondes incidentes sur la cavité est asservie à la même fréquence de résonance de la cavité résonante, alors on a, comme pour un gyrolaser :

$$\begin{aligned}\nu_+ &= p\Delta\nu_{\text{ISL}_+}, \\ \nu_- &= p\Delta\nu_{\text{ISL}_-}, \\ \nu_- - \nu_+ &= \Delta\nu_S = \frac{4A}{nL\lambda}\dot{\theta}.\end{aligned}\tag{1.26}$$

Dans le cas où la cavité est constituée par une fibre de longueur  $L$  enroulée sur  $N$  tours de rayon  $R$  (telle que  $L = 2\pi RN$ ), alors l'expression ci-dessus se simplifie en :

$$\Delta\nu_S = \frac{2R}{n\lambda}\dot{\theta},\tag{1.27}$$

car dans ce cas, l'aire encerclée par la cavité est donnée par  $A = N\pi R^2$ .

La différence de fréquence due à l'effet Sagnac ne dépend pas du nombre  $N$  de tours sur lesquels la fibre optique est enroulée, mais seulement du rayon d'enroulement de cette dernière. Elle dépend cependant directement de l'indice  $n$  du milieu traversé par la lumière dans la cavité, ce qui va s'avérer être une source de bruit, que nous détaillerons au chapitre 2.

La position du laser et des détecteurs dans un gyromètre résonant n'a aucune influence sur la mesure de la rotation. En effet, comme la mesure ne dépend que des fréquences de résonances intrinsèques à la cavité résonante, le référentiel dans lequel se trouve le laser n'a aucune influence sur la mesure. De la même manière, la position des détecteurs permettant de réaliser l'asservissement sur la fréquence laser n'a aucune influence sur la mesure de la rotation. En effet, que les photodiodes tournent avec la cavité résonante, ou qu'elles soient fixes en dehors du référentiel tournant ne change rien, tant que les deux photodiodes se trouvent dans le même référentiel.

### 1.4.2 Comparaison avec les autres types de gyromètres

Un état de l'art approfondi sur les gyromètres résonants est présenté au chapitre 2. Les gyromètres résonants présentent certains avantages par rapport aux deux gyromètres optiques présentés précédemment. En effet, comme nous le verrons aux chapitres 4 et 5, le fait de pouvoir choisir la fréquence de résonance de la cavité sur laquelle on s'asservit permet de s'affranchir du problème de la zone aveugle des gyrolasers. Et leur avantage par rapport aux gyromètres interférométriques est qu'ils ne nécessitent qu'une faible longueur de fibre optique (de l'ordre de la dizaine de mètres) et sont donc beaucoup moins sensibles aux effets thermiques.

Aussi, le gyromètre résonant n'est pas non plus sensible à l'effet Fizeau, comme peut l'être le gyrolaser. En effet, dans le cas où le milieu de propagation est une fibre optique en silice, cette dernière est immobile et donc il n'y a pas de vitesse du milieu de propagation dans la cavité.

Et dans le cas où le milieu de propagation est de l'air (comme pour une cavité résonante en espace libre ou en fibre à cœur creux), il n'y a pas de décharge électrique pouvant mettre en mouvement les particules d'air et donc pas non plus de vitesse du milieu de propagation.

## 1.5 Conclusion

Nous avons montré dans ce chapitre que l'effet Sagnac est un effet chrono-géométrique de l'espace-temps. C'est un retard temporel dû à la contraction ou l'élongation des longueurs dans un référentiel en mouvement. Les gyromètres optiques se servent des conséquences de cet effet pour mesurer des rotations, conséquences qui portent soit sur une modification d'un intervalle spectral libre d'une cavité résonante, soit sur un déphasage entre deux ondes circulant en sens opposé sur une boucle en anneau.

Nous avons ensuite détaillé succinctement le mécanisme de mesure de rotation dans trois types de gyromètres optiques différents : le gyromètre interférométrique, le gyrolaser et le gyromètre résonant. Notons qu'il existe d'autres types de gyromètres optiques, comme le gyromètre à effet Brillouin<sup>4</sup>, dont le principe de base repose aussi sur un corollaire de l'effet Sagnac, mais dont les performances sont très en dessous des trois gyromètres cités précédemment [6].

En ce qui concerne les gyromètres résonants, il n'y a, à ce jour, aucun gyromètre de ce type présent sur le marché industriel. En effet, bien que les gyromètres résonants aient le potentiel d'atteindre les mêmes performances que les gyromètres interférométriques en termes de limite en bruit de grenaille [40], ils sont limités par plusieurs autres sources de bruits qui les empêchent d'atteindre les performances de classe inertielle. La source principale de bruit, que nous détaillerons au chapitre 2, est l'effet Kerr ayant lieu dans les fibres optiques. Cet effet Kerr est dû au fait que le milieu de propagation dans la cavité résonante soit de la silice. C'est pourquoi le récent essor des fibres à cœur creux depuis 1999 [41] a renouvelé l'intérêt des chercheurs dans le développement des gyromètres résonants [42]. En effet, comme nous l'expliquerons au chapitre 3, le principal avantage de ces fibres est que la lumière est guidée dans l'air. Elles ne sont donc pas source d'effets non linéaires tels que l'effet Kerr. C'est pourquoi l'objet de ma thèse a été de développer un gyromètre résonant dont la cavité résonante est formée d'une fibre à cœur creux, et de tester ses performances.

### Remarque sur les notations du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons utilisé les notations '+' et '-' pour désigner ce qui tourne dans le même sens que le référentiel en rotation et ce qui tourne en sens opposé. Il est cependant d'usage d'orienter de manière absolue la vitesse de rotation du référentiel en mouvement dans le sens direct (sens antihoraire). Une rotation ayant lieu dans le sens indirect sera alors comptée

---

4. Pour plus de détails sur l'effet Brillouin dans les fibres optiques, voir [39]

négativement. Il est aussi d'usage que les sens de circulation de la lumière dans la cavité soient orientés de manière absolue dans le sens horaire (CW pour *Clockwise* en anglais) et dans le sens antihoraire (CCW pour *Counterclockwise* en anglais). De cette manière, dans un gyromètre résonant, la différence des fréquences de résonance s'écrit :

$$\Delta\nu_S = \nu_{CW} - \nu_{CCW} = \frac{4A}{nL\lambda} \dot{\theta}. \quad (1.28)$$



# État de l’art des gyromètres résonants passifs

---

Ce chapitre présente une revue des gyromètres résonants passifs. Nous présentons les équations décrivant la résonance d’une cavité passive, les méthodes de mesure de l’effet Sagnac dans ces dernières et les bruits limitant la performance des gyromètres résonants. Un état de l’art sur quatre technologies différentes de gyromètres résonants est aussi réalisé. Nous ne ferons pas, dans ce chapitre, d’approximations sur les pertes de la cavité dans les calculs. En particulier, nous n’utiliserons pas le formalisme temporel de Haus [43].

## 2.1 Caractéristiques d’une cavité résonante passive

Une cavité résonante optique est un circuit clos par des miroirs ou des coupleurs dans lequel une onde optique peut entrer en résonance. La résonance pour une onde optique se traduit par un déphasage égal à un multiple entier de  $2\pi$  exactement entre une onde à un endroit dans la cavité et cette même onde au même endroit, mais ayant fait un tour de plus. L’objet de cette partie est de proposer un modèle physique complet d’une telle cavité, qu’elle soit observée en transmission (on ne mesure que le faisceau qui est passé dans la cavité) ou en réflexion (on observe l’interférence entre le faisceau passé dans la cavité et le faisceau incident). On s’intéresse ici plus particulièrement à des cavités résonantes en anneau (encerclant ce qu’on appelle une aire Sagnac non nulle) par opposition aux cavités linéaires dites de Fabry-Pérot, pour lesquelles l’effet Sagnac est nul.

La figure 2.1 présente une schématisation de trois cavités résonantes en anneau, à base de miroirs, de fibre optique, ou mixte, observées en transmission et en réflexion. Comme nous le

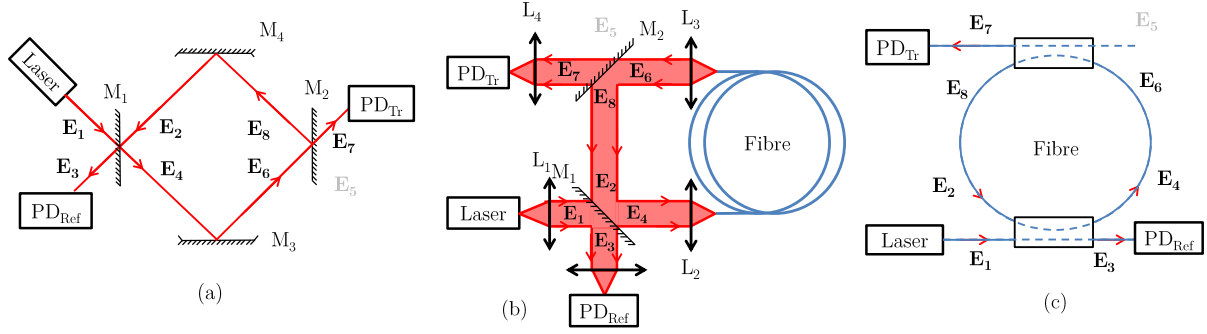


FIGURE 2.1 – Représentation schématique de trois cavités résonantes passives observées en transmission et en réflexion. La photodiode  $PD_{Ref}$  est celle qui observe la lumière réfléchiée par la cavité, et la photodiode  $PD_{Tr}$  est celle qui observe la lumière transmise par la cavité. Dans toutes les figures, le champ  $E_5$  est grisé car il est nul dans notre modèle.

verrons, ces cavités sont toutes équivalentes. Elles seront donc décrites par la suite avec un formalisme identique. Pour les cavités (a) et (b), le miroir  $M_1$  représente le coupleur d'entrée de la cavité (et de sortie de la cavité en réflexion). Le miroir  $M_2$  est le miroir de sortie de la cavité par lequel la transmission de cette dernière sera observée. Pour la cavité (c), les miroirs sont remplacés par des coupleurs fibrés.

Les différents champs électriques complexes d'entrée et de sortie de la cavité sont liés par les relations :

$$E_3 = -r_1\sqrt{1-\gamma_1}E_1 + t_1\sqrt{1-\gamma_1}E_2, \quad (2.1)$$

$$E_4 = t_1\sqrt{1-\gamma_1}E_1 + r_1\sqrt{1-\gamma_1}E_2, \quad (2.2)$$

$$E_7 = -r_2\sqrt{1-\gamma_2}E_5 + t_2\sqrt{1-\gamma_2}E_6, \quad (2.3)$$

$$E_8 = t_2\sqrt{1-\gamma_2}E_5 + r_2\sqrt{1-\gamma_2}E_6, \quad (2.4)$$

$$E_6 = \mathcal{T}_1 \cdot e^{2i\pi\nu\tau_1} E_4, \quad (2.5)$$

$$E_2 = \mathcal{T}_2 \cdot e^{2i\pi\nu\tau_2} E_8, \quad (2.6)$$

où on a défini les termes suivants :

- $r_i$  (respectivement  $t_i$ ) le coefficient de réflexion (respectivement de transmission) du miroir  $M_i$ , exprimé en amplitude du champ électrique, de telle sorte que  $r_i^2 + t_i^2 = 1$ . Dans le cas d'un coupleur entièrement fibré, les conventions veulent que les coefficients  $r$  et  $t$  soient notés respectivement  $j\sqrt{\kappa}$  et  $\sqrt{1-\kappa}$  [44]. Par la suite, nous emploierons le terme de coupleur pour désigner indifféremment un miroir ou un coupleur fibré.
- $\gamma_i$  les pertes (en intensité) des miroirs  $M_i$ . En effet, les équations (2.1), (2.2), (2.3) et (2.4) donnent :  $|E_3|^2 + |E_4|^2 = (1-\gamma_1)(|E_1|^2 + |E_2|^2)$ , et  $|E_7|^2 + |E_8|^2 = (1-\gamma_2)(|E_5|^2 + |E_6|^2)$ .
- $\mathcal{T}_1$  (respectivement  $\mathcal{T}_2$ ) la transmission intracavité en amplitude de champ électrique sur le trajet entre le miroir  $M_1$  et le miroir  $M_2$  (respectivement entre le miroir  $M_2$  et le miroir

$M_1$ ). Ces transmissions dépendent de l'architecture de la cavité résonante. En effet, elles comprennent, en fonction de la cavité :

- la transmission (en amplitude de champ électrique) de la fibre optique, si la cavité est constituée de fibre optique. Cette transmission vaut  $e^{-\alpha L/2}$ , avec  $\alpha$  le coefficient d'atténuation de la fibre en intensité (unités  $\text{m}^{-1}$ ), et  $L$  sa longueur,
- les pertes de couplage entre les deux extrémités de la fibre, si couplage il y a (comme dans la cavité (b) de la figure 2.1),
- la réflexion (et les pertes) d'autres miroirs que les miroirs  $M_1$  et  $M_2$  s'il y en a d'autres utilisés dans la cavité (comme dans la cavité (a) de la figure 2.1).

On notera par la suite  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \mathcal{T}_2$  la transmission totale intracavité ne tenant pas compte des pertes des coupleurs d'entrée et de sortie.

- $\tau_1$  (respectivement  $\tau_2$ ), le temps mis par la lumière pour faire le trajet  $M_1$  vers  $M_2$  (respectivement  $M_2$  vers  $M_1$ ). On note  $\tau = \tau_1 + \tau_2$  le temps mis pour faire un tour complet dans la cavité. D'après le chapitre précédent, ce temps dépend du sens de parcours de la lumière dans la cavité, lorsque cette dernière est en rotation. L'intervalle spectral libre, qui est défini comme étant l'inverse du temps mis pour faire un tour dans la cavité, est donc différent en fonction du sens de circulation de la lumière dans la cavité. D'après les équations (1.18) et (1.19), cet intervalle spectral libre sera égal, en fonction du sens de circulation de la cavité, à :

$$\Delta\nu_{ISL_{\pm}} = \Delta\nu_{ISL_0} \mp \frac{\delta\nu_S}{2}, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \Delta\nu_{ISL_0} = \frac{c}{nL}, \\ \frac{\delta\nu_S}{2} = \frac{2A\dot{\theta}}{n^2 L^2}, \end{cases}$$

avec  $L = 2\pi NR$ , la longueur de la cavité, et  $A = N\pi R^2$  son aire<sup>1</sup>. Pour simplifier les notations dans les calculs suivants, nous n'explicitons par le sens de parcours de la lumière dans la cavité et écrirons de manière générale  $\Delta\nu_{ISL} = \frac{1}{\tau}$ .

- $\nu$  la fréquence de l'onde laser incidente sur la cavité.

Notons que dans notre cas, il y a pas de lumière incidente sur la cavité par le miroir  $M_2$ , le champ  $E_5$  est donc nul.

---

1. Si la cavité ne tourne pas, alors l'intervalle spectral libre est le même dans les deux sens et vaut :  $\Delta\nu_{ISL} = \frac{1}{\tau} = \frac{c}{nL}$ . Pour les cavités résonantes linéaires, plus communément appelées "cavités de Fabry-Pérot", on écrit que  $\Delta\nu_{ISL_0} = \frac{c}{2L}$ . Le facteur 2 vient du fait que la longueur  $L$  considérée ici est l'espacement entre deux miroirs. Or la lumière, pour faire un aller-retour dans la cavité linéaire, doit parcourir deux fois cette distance  $L$ , d'où le facteur 2.



### 2.1.1 Fonction de transfert de la cavité observée en réflexion

Le champ réfléchi par une cavité est défini sur tous les schémas de la figure 2.1 comme le champ  $E_3$ . Pour la cavité observée en réflexion, le coupleur d'entrée est aussi le coupleur de sortie, il n'est donc pas nécessaire d'avoir un second coupleur dans les cavités. Nous garderons cependant le coupleur de transmission dans les notations pour pouvoir comparer les cavités en réflexion et en transmission entre elles.

La fonction de transfert en réflexion de la cavité (que l'on note  $F_R(\nu)$ ) est définie par le rapport du champ sortant réfléchi de la cavité ( $E_3$ ) sur le champ entrant ( $E_1$ ) soit :

$$F_R(\nu) = \frac{E_3}{E_1}. \quad (2.7)$$

D'après les équations (2.1) à (2.6), on a :

$$F_R(\nu) = \sqrt{1 - \gamma_1} \left( \frac{-r_1 + \sqrt{1 - \gamma_1} \mathcal{T} r_2 \sqrt{1 - \gamma_2} e^{2i\pi\nu/\Delta\nu_{\text{ISL}}}}{1 - r_1 \sqrt{1 - \gamma_1} \mathcal{T} r_2 \sqrt{1 - \gamma_2} e^{2i\pi\nu/\Delta\nu_{\text{ISL}}}} \right). \quad (2.8)$$

L'intensité (normalisée) réfléchie par la cavité résonante est donnée par <sup>2</sup> :

$$\frac{I_3(\nu)}{I_1(\nu)} = |F_R(\nu)|^2 = (1 - \gamma_1) \left( 1 - \frac{1 - \left( \frac{r_1 - \sqrt{1 - \gamma_1} \mathcal{T} r_2 \sqrt{1 - \gamma_2}}{1 - r_1 \sqrt{1 - \gamma_1} \mathcal{T} r_2 \sqrt{1 - \gamma_2}} \right)^2}{1 + 4 \frac{r_1 \sqrt{1 - \gamma_1} \mathcal{T} r_2 \sqrt{1 - \gamma_2}}{(1 - r_1 \sqrt{1 - \gamma_1} \mathcal{T} r_2 \sqrt{1 - \gamma_2})^2} \sin^2 \left( \frac{\pi\nu}{\Delta\nu_{\text{ISL}}} \right)} \right). \quad (2.9)$$

Ces deux expressions sont périodiques de période  $\Delta\nu_{\text{ISL}}$ . C'est pourquoi on peut définir l'écart à la résonance  $\delta\nu$  tel que  $\delta\nu \equiv \nu [\Delta\nu_{\text{ISL}}]$  et de telle sorte que  $F_R(\nu) = F_R(\delta\nu)$ .

Les paramètres  $r_1$  et  $\sqrt{1 - \gamma_1} \mathcal{T} r_2 \sqrt{1 - \gamma_2}$  jouent des rôles symétriques dans l'équation (2.9). En effet, ces deux termes sont interchangeables dans l'équation de sorte que remplacer l'un par l'autre ne modifie pas cette dernière. Par la suite, nous noterons  $g = \sqrt{1 - \gamma_1} \mathcal{T} r_2 \sqrt{1 - \gamma_2}$  pour alléger les notations. Physiquement, le paramètre  $g$  représente la transmission totale intracavité (en champ électrique) en dehors du coefficient de couplage  $r_1$ . À partir de cette équation, nous pouvons tracer les différents régimes de fonctionnement d'une cavité résonante (sous-couplage, couplage critique et sur-couplage) en fonction des valeurs relatives de  $r_1$  et  $g$ . La figure 2.2 rassemble les différents cas envisageables.

La largeur de raie  $\Gamma$  d'une cavité résonante est définie comme la largeur à mi-hauteur des courbes présentées en figure 2.2. Une définition mathématique de cette dernière, en fonction des caractéristiques de la cavité, est présentée en partie 2.1.3. Notons qu'à pertes  $(1 - g^2)$  fixées,

---

2. Pour plus de détails sur les calculs de champ et d'intensité réfléchis, voir l'annexe D.1.2

la largeur de raie d'une cavité sur-couplée est plus grande que la largeur de raie d'une cavité sous-couplée, le couplage critique étant un cas intermédiaire.

L'intensité réfléchie par une cavité est maximale (égale à  $I_{R,\text{Max}}$ ) hors résonance, c'est-à-dire quand l'écart à la résonance  $\delta\nu$  de la fréquence du laser est en dehors de la largeur de raie de la cavité. En effet, lorsque la fréquence du laser est en dehors d'une résonance, celle-ci est quasiment totalement réfléchie par la cavité. En revanche, la lumière rentre dans la cavité à la résonance (quand  $\nu \equiv 0$  [ $\Delta\nu_{\text{ISL}}$ ], soit  $\delta\nu = 0$ ), et y est stockée, c'est pourquoi l'intensité réfléchie est minimale (égale à  $I_{R,\text{Min}}$ ). Notons que le couplage critique est un cas particulier, pour lequel l'intensité réfléchie par la cavité tombe à zéro à résonance.

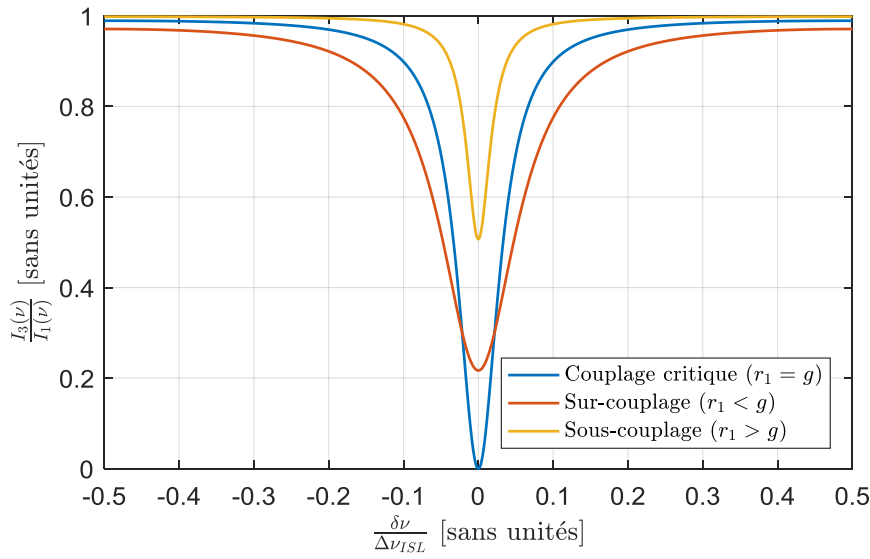


FIGURE 2.2 – Intensité normalisée réfléchie par une cavité résonante en fonction des paramètres  $r_1$  et  $g$ . Les données pour la modélisation sont  $g = 0,9$  (fixe), car  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ ,  $r_2 = 0,98$  et  $\mathcal{T} = 0,92$ . Le sur-couplage correspond au cas où  $r_1 < g$  (on a choisi pour l'exemple  $r_1 = 0,75$ ), le couplage critique au cas où  $r_1 = g$  et le sous-couplage au cas où  $r_1 > g$  (on a choisi pour l'exemple  $r_1 = 0,98$ ).

Il est possible, à partir d'une courbe expérimentale donnant l'intensité réfléchie d'une cavité résonante en fonction de la fréquence du laser, d'ajuster une courbe théorique pour extraire les paramètres  $r_1$  et  $g$  de la courbe théorique. Comme les deux paramètres jouent un rôle symétrique, il suffit d'en mesurer expérimentalement un (par exemple le paramètre  $r_1$ ), pour en déduire le second. Les pertes intrinsèques de la cavité (égales à  $1 - \mathcal{T}^2$ ) ne sont connues exactement qu'à condition de connaître parfaitement toutes les autres sources de pertes, à savoir les pertes  $\gamma_1$  du coupleur d'entrée et les pertes du miroir  $M_2$ , si miroir il y a.

### 2.1.2 Fonction de transfert de la cavité observée en transmission

Le champ transmis par une cavité est défini sur toutes les sous-figures de la figure 2.1 comme le champ  $E_7$ . De la même manière que pour la cavité observée en réflexion, on définit la fonction

de transfert en transmission (que l'on note  $F_T(\nu)$ ) comme le rapport de l'amplitude du champ électrique sortant de la cavité ( $E_7$ ) sur l'amplitude du champ entrant sur la cavité ( $E_1$ ), soit :

$$F_T(\nu) = \frac{E_7}{E_1}.$$

D'après les équations (2.1) à (2.6), on a :

$$F_T(\nu) = \frac{E_7}{E_1} = \frac{t_1 \sqrt{1 - \gamma_1} \cdot t_2 \sqrt{1 - \gamma_2} \cdot \mathcal{T}_1 \cdot e^{2i\pi\nu\tau_1}}{1 - r_1 \sqrt{1 - \gamma_1} \mathcal{T} r_2 \sqrt{1 - \gamma_2} e^{2i\pi\nu/\Delta\nu_{\text{ISL}}}}. \quad (2.10)$$

L'intensité (normalisée) transmise par la cavité résonante est donnée par<sup>3</sup> :

$$\frac{I_7(\nu)}{I_1(\nu)} = |F_T(\nu)|^2 = \frac{\frac{(1 - r_1^2)(1 - r_2^2)(1 - \gamma_1)(1 - \gamma_2)\mathcal{T}_1^2}{(1 - r_1 \sqrt{1 - \gamma_1} \mathcal{T} r_2 \sqrt{1 - \gamma_2})^2}}{1 + 4 \frac{r_1 \sqrt{1 - \gamma_1} \mathcal{T} r_2 \sqrt{1 - \gamma_2}}{(1 - r_1 \sqrt{1 - \gamma_1} \mathcal{T} r_2 \sqrt{1 - \gamma_2})^2} \sin^2\left(\frac{\pi\nu}{\Delta\nu_{\text{ISL}}}\right)}. \quad (2.11)$$

Contrairement au cas de la réflexion, seule l'équation (2.11) est périodique de période  $\Delta\nu_{\text{ISL}}$ . L'équation en champ (2.10) l'est aussi si le coupleur de sortie se trouve à mi-cavité, c'est-à-dire si  $\tau_1 = \frac{2}{\Delta\nu_{\text{ISL}}}$ , ce que nous supposons par la suite. Dans ce cas, on peut aussi définir l'écart à la résonance  $\delta\nu \equiv \nu[\Delta\nu_{\text{ISL}}]$  de telle sorte que  $F_T(\nu) = F_T(\delta\nu)$ . On peut reconnaître ici aussi le paramètre  $g = \sqrt{1 - \gamma_1} \mathcal{T} r_2 \sqrt{1 - \gamma_2}$  qui ne joue plus un rôle symétrique avec  $r_1$ . Les dénominateurs des intensités en réflexion et en transmission sont les mêmes. L'intensité transmise dépend de la position du coupleur de sortie  $M_2$  par rapport à  $M_1$  au travers du terme de transmission  $\mathcal{T}_1$ . À partir de cette équation, nous pouvons tracer les différents régimes de fonctionnement d'une cavité résonante en fonction des valeurs relatives de  $r_1$  et  $g$ . La figure 2.3 rassemble les différents cas envisageables.

Là encore, dans le cas du sur-couplage, la largeur de raie est plus importante que dans le cas du sous-couplage pour une cavité observée en transmission avec des pertes internes fixées. Contrairement au cas de la réflexion, l'intensité transmise par une cavité est minimale hors résonance (égale à  $I_{T,\text{Min}}$ ), et est maximale à la résonance (égale à  $I_{T,\text{Max}}$ ), quand  $\nu \equiv 0 [\Delta\nu_{\text{ISL}}]$ .

### 2.1.3 Largeur de raie, finesse et contraste

La largeur de raie  $\Gamma$  est définie comme la largeur fréquentielle à mi-hauteur de la courbe d'intensité (réfléchiée ou transmise). Plus précisément, elle est définie telle que :

$$I\left(\frac{\Gamma}{2}\right) = \frac{I_{\text{Max}} + I_{\text{Min}}}{2}. \quad (2.12)$$

La finesse  $\mathcal{F}$  d'une cavité est définie comme étant le rapport entre l'intervalle spectral libre et la largeur de raie :

---

3. Pour plus de détails sur les calculs permettant d'obtenir le champ et l'intensité transmis, voir l'annexe D.1.4

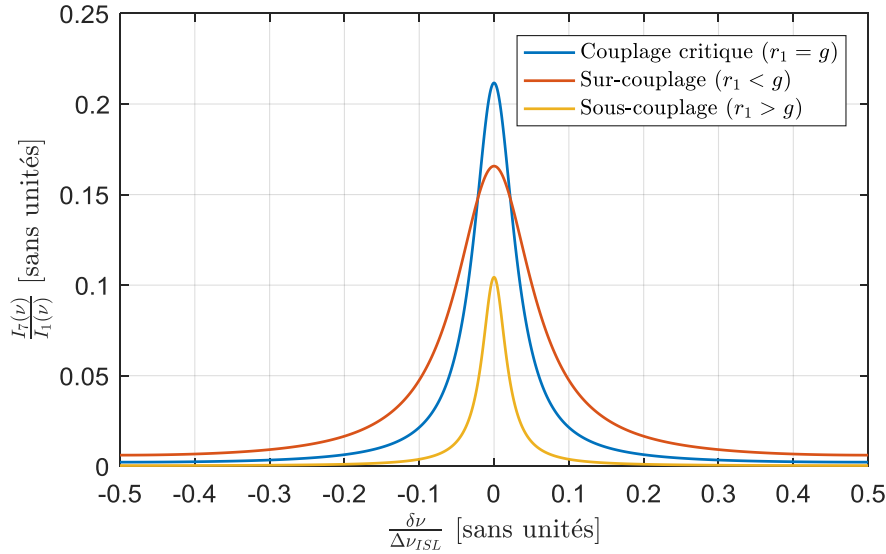


FIGURE 2.3 – Intensité normalisée transmise par une cavité résonante en fonction des paramètres  $r_1$  et  $g$ . Les données pour la modélisation sont les mêmes que celles de la figure 2.2, c'est à dire  $g = 0,9$  (fixe), car  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ ,  $r_2 = 0,98$ ,  $\mathcal{T} = 0,92$  et  $\mathcal{T}_1 = 1$ . Le sur-couplage correspond au cas où  $r_1 < g$  (on a choisi pour l'exemple  $r_1 = 0,75$ ), le couplage critique au cas où  $r_1 = g$  et le sous-couplage au cas où  $r_1 > g$  (on a choisi pour l'exemple  $r_1 = 0,98$ ).

$$\mathcal{F} = \frac{\Delta\nu_{\text{ISL}}}{\Gamma}.$$

Le contraste  $C$  n'est défini quant à lui que pour une cavité résonante observée en réflexion. Il vaut 100% au couplage critique et nous le définissons par :

$$\mathcal{C} = \frac{I_{\text{Max}} - I_{\text{Min}}}{I_{\text{Max}}}. \quad (2.13)$$

Le tableau 2.1 rassemble les expressions de la largeur de raie, du contraste et des intensités maximales et minimales en fonction des caractéristiques de la cavité, pour une cavité pouvant être observée à la fois en réflexion et en transmission. La démonstration de ces expressions est réalisée dans les annexes D.2 pour la largeur de raie et D.3 pour le contraste. Pour alléger les expressions, on a utilisé le paramètre  $g$  tel que  $g = \sqrt{1 - \gamma_1} \mathcal{T} r_2 \sqrt{1 - \gamma_2}$ . Ces résultats montrent que la largeur de raie (et donc la finesse) d'une cavité ne dépend que des paramètres  $r_1$  et  $g$ . La largeur de raie est identique pour une cavité en réflexion et en transmission.

Lorsque nous nous intéresserons aux asservissements en partie 2.2.2, il sera important de connaître le comportement hors résonance de la cavité en réflexion et en transmission, en fonction de la finesse de cette dernière. C'est pourquoi nous avons calculé, pour tous les couples  $[r_1, g]$  appartenant au domaine  $[0; 1] \times [0; 1]$ , l'évolution de l'intensité maximale réfléchie normalisée  $I_{\text{R,Max}}/I_1$ , de l'intensité minimale transmise normalisée  $I_{\text{T,Min}}/I_1$  et de la finesse  $\mathcal{F}$ . La figure 2.4 présente ces intensités normalisées en fonction de la finesse correspondante. Les courbes sont

	Transmission	Réflexion
$F(\nu)$	$\frac{t_1 \sqrt{1-\gamma_1} t_2 \sqrt{1-\gamma_2} \mathcal{T}_1 e^{2i\pi\nu\tau_1}}{1 - r_1 g e^{\frac{2i\pi\nu}{\Delta\nu_{\text{ISL}}}}}$	$\sqrt{1-\gamma_1} \left( \frac{-r_1 + g e^{\frac{2i\pi\nu}{\Delta\nu_{\text{ISL}}}}}{1 - r_1 g e^{\frac{2i\pi\nu}{\Delta\nu_{\text{ISL}}}}} \right)$
$I(\nu)$	$\frac{\frac{(1-r_1^2)(1-r_2^2)(1-\gamma_1)(1-\gamma_2)\mathcal{T}_1}{(1-r_1g)^2}}{1 + 4 \frac{r_1 g}{(1-r_1g)^2} \sin^2\left(\frac{\pi\nu}{\Delta\nu_{\text{ISL}}}\right)}$	$(1-\gamma_1) \left( 1 - \frac{1 - \left(\frac{r_1-g}{1-r_1g}\right)^2}{1 + 4 \frac{r_1 g}{(1-r_1g)^2} \sin^2\left(\frac{\pi\nu}{\Delta\nu_{\text{ISL}}}\right)} \right)$
$I_{\text{Max}}/I_1$	$\frac{(1-r_1^2)(1-r_2^2)(1-\gamma_1)(1-\gamma_2)\mathcal{T}_1}{(1-r_1g)^2}$	$(1-\gamma_1) \frac{(r_1+g)^2}{(1+r_1g)^2}$
$I_{\text{Min}}/I_1$	$\frac{(1-r_1^2)(1-r_2^2)(1-\gamma_1)(1-\gamma_2)\mathcal{T}_1}{(1+r_1g)^2}$	$(1-\gamma_1) \frac{(r_1-g)^2}{(1-r_1g)^2}$
$\Gamma$	$\frac{2\Delta\nu_{\text{ISL}}}{\pi} \sin^{-1}\left(\frac{(1-r_1g)}{\sqrt{2}\sqrt{1+r_1^2g^2}}\right)$	$\frac{2\Delta\nu_{\text{ISL}}}{\pi} \sin^{-1}\left(\frac{(1-r_1g)}{\sqrt{2}\sqrt{1+r_1^2g^2}}\right)$
$\mathcal{F}$	$\frac{\pi}{2 \sin^{-1}\left(\frac{(1-r_1g)}{\sqrt{2}\sqrt{1+r_1^2g^2}}\right)}$	$\frac{\pi}{2 \sin^{-1}\left(\frac{(1-r_1g)}{\sqrt{2}\sqrt{1+r_1^2g^2}}\right)}$
$C$		$\frac{4r_1g(1-r_1^2)(1-g^2)}{(1-r_1g)^2(r+g)^2}$

TABLE 2.1 – *Tableau rassemblant les expressions de la largeur de raie, de la finesse, du contraste et des intensités maximales et minimales en réflexion et en transmission en fonction des caractéristiques de la cavité. Aucune approximation n'a été faite ici.*

des surfaces, car plusieurs couples  $[r_1, g]$  peuvent donner la même finesse  $\mathcal{F}$  sans pour autant donner la même intensité normalisée (minimale ou maximale). Cette figure montre que pour des finesesses supérieures à 10, on peut considérer que  $I_{\text{R,Max}}/I_1 \simeq 1$  et que  $I_{\text{T,Min}}/I_1 \simeq 0$ .<sup>4</sup> Nous nous placerons dans ce cas par la suite, car les cavités résonantes que nous étudierons auront toutes une finesse supérieure à 10.

Dans certains cas, il est possible de simplifier les expressions du tableau 2.1 en faisant des approximations. La plus courante, qui correspond au cas des cavités de Fabry-Pérot, consiste à considérer que les pertes intracavité sont faibles, et que les coefficients de réflexion des coupleurs d'entrée et de sortie sont égaux et proches de 1, c'est-à-dire :

—  $|1 - \mathcal{T}_{1/2}| \ll 1$ ,

—  $\gamma_{0i} \ll 1$ ,

---

4. Soit  $F_{\text{R}}\left(\frac{\Delta\nu_{\text{ISL}}}{2}\right) \simeq -1$  et  $F_{\text{T}}\left(\frac{\Delta\nu_{\text{ISL}}}{2}\right) \simeq 0$ .

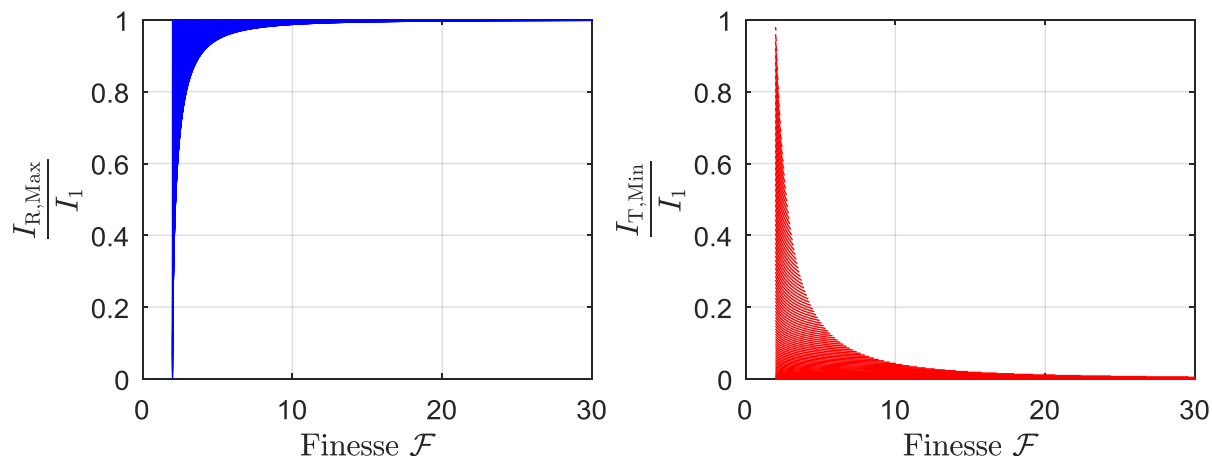


FIGURE 2.4 – Tracé de l'intensité maximale réfléchie normalisée (graphe de gauche) et de l'intensité minimale transmise (graphe de droite) en fonction de la finesse de la cavité. Nous avons considéré pour ces tracés que  $r_2 = r_1$ , que les pertes des miroirs étaient nulles ( $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ ) et que  $\mathcal{T}_1 = 1$ .

- donc  $g \simeq r_2 = r_1 = r$  (résonateur sans pertes intrinsèque et au couplage critique)
- $r$  est proche de la valeur asymptotique 1.

Dans ce cas, les paramètres de la cavité deviennent ceux présentés dans le tableau 2.2. On retrouve alors les formules classiques des cavités de Fabry-Pérot.

## 2.2 Mesure de la fréquence de résonance

Comme expliqué dans le chapitre 1, la mesure de vitesse de rotation dans une cavité résonante est réalisée par l'intermédiaire de la mesure de sa fréquence de résonance dans ses deux sens de rotation. Dans les gyromètres résonants passifs, la mesure d'une fréquence de résonance est effectuée indirectement par un asservissement. L'objectif de cette partie est de décrire le fonctionnement des principaux asservissements existants dans la littérature et d'expliquer comment s'en servir pour mesurer des vitesses de rotation.

### 2.2.1 Principe d'un asservissement

Le principe de fonctionnement d'un asservissement est présenté en figure 2.5. Un asservissement sert à contrôler la sortie d'un système (par exemple la fréquence d'un laser) de sorte qu'elle corresponde à la consigne qui lui est donnée (par exemple la fréquence de résonance d'une cavité). Le comparateur fait la différence entre la consigne et la sortie, et produit le signal d'erreur :

$$\varepsilon(t) = C(t) - S(t).$$

	Transmission	Réflexion
$F(\nu)$	$\frac{(1-r^2)e^{2i\pi\nu\tau_1}}{1-r^2e^{\frac{2i\pi\nu}{\Delta\nu_{\text{ISL}}}}}$	$r \left( \frac{-1 + e^{\frac{2i\pi\nu}{\Delta\nu_{\text{ISL}}}}}{1-r^2e^{\frac{2i\pi\nu}{\Delta\nu_{\text{ISL}}}}} \right)$
$I(\nu)$	$\frac{1}{1 + \frac{4}{(1-r^2)^2} \sin^2\left(\frac{\pi\nu}{\Delta\nu_{\text{ISL}}}\right)}$	$\left( 1 - \frac{1}{1 + \frac{4}{(1-r^2)^2} \sin^2\left(\frac{\pi\nu}{\Delta\nu_{\text{ISL}}}\right)} \right)$
$I_{\text{Max}}/I_1$	1	$\frac{(2r)^2}{(1+r^2)^2} \simeq 1$
$I_{\text{Min}}/I_1$	$\frac{(1-r^2)^2}{(1+r^2)^2} \simeq 0$	0
$\Gamma$	$\frac{\Delta\nu_{\text{ISL}_0}}{\pi} (1-r^2)$	$\frac{\Delta\nu_{\text{ISL}_0}}{\pi} (1-r^2)$
$\mathcal{F}$	$\frac{\pi}{1-r^2}$	$\frac{\pi}{1-r^2}$
$C$		1

TABLE 2.2 – Expressions de la largeur de raie, de la finesse, du contraste et des intensités maximales et minimales en réflexion et en transmission en fonction des caractéristiques de la cavité dans l'approximation des faibles pertes, et au couplage critique.

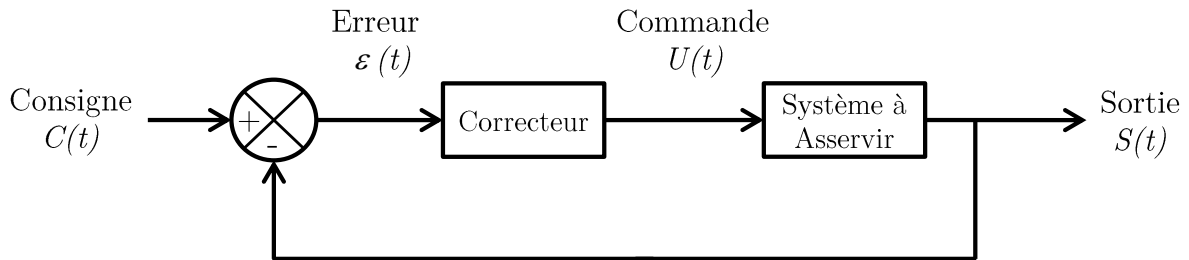


FIGURE 2.5 – Schéma du principe de fonctionnement d'un asservissement. Le système à asservir dans notre cas peut être soit le laser, soit un modulateur acousto-optique, soit une cale piézoélectrique.

Le signal d'erreur vaut 0 lorsque le système est asservi. Le correcteur permet de piloter le système à asservir (par exemple la fréquence du laser, ou la longueur d'une cavité résonante) au moyen de sa commande.

Plusieurs paramètres caractérisent les performances d'un asservissement :

- La rapidité. Elle est définie par la vitesse à laquelle la sortie va s'asservir à la consigne. La rapidité se mesure grâce au temps de réponse à l'application d'un échelon sur la consigne du système.

- La stabilité. Pour une consigne constante, un système est stable si la sortie tend vers une valeur finie. Si elle oscille ou diverge, l'asservissement est instable.
- La précision, c'est-à-dire la capacité de l'asservissement à atteindre la consigne avec le moins d'écart possible à la valeur "vraie".

Pour optimiser ces différents paramètres, il faut agir sur le correcteur dans la boucle d'asservissement. Il existe différents types de correcteurs. En général, les correcteurs utilisés sont des correcteurs proportionnels et/ou dérivateurs et/ou intégrateurs. Nous verrons au chapitre 5 comment optimiser les paramètres d'un correcteur PID (proportionnel, intégrateur et dérivateur) afin de réaliser un asservissement qui soit le plus rapide possible, tout en restant stable et précis.

Comme il n'existe pas de comparateur optique, la problématique de l'asservissement de la fréquence d'un laser sur la fréquence de résonance d'une cavité réside dans l'obtention du signal d'erreur, qui va permettre de comparer ces deux fréquences (optiques).

### 2.2.2 Obtention d'un signal d'erreur

Il existe plusieurs méthodes pour obtenir un signal d'erreur qui permet d'asservir la fréquence d'un laser sur la fréquence de résonance d'une cavité passive. On peut notamment citer :

- L'asservissement sur un flanc de résonance [45], qui repose sur une comparaison de puissances, l'une transmise par la cavité, et l'autre fixée. Cette technique permet, comme son nom l'indique, de s'asservir sur un flanc de résonance, et donc pas sur la résonance. L'inconvénient majeur de cette technique est que l'asservissement est alors sensible aux fluctuations d'intensité du laser [46], et elle n'est donc pas utilisée en gyroscopie.
- L'asservissement par biréfringence [47] qui repose sur l'ellipticité de la polarisation intracavité pour obtenir le signal d'erreur. Cette technique est mieux adaptée pour asservir des cavités de Fabry-Pérot avec des miroirs, et possède une faible plage d'accrochage [47].
- Enfin, l'asservissement dérivé de la spectroscopie laser à modulation de phase [48], qui repose sur une modulation de phase du laser puis démodulation du signal transmis ou réfléchi par la cavité. Cette technique change de nom en fonction de la fréquence de modulation : si cette dernière est inférieure à la largeur de raie, on parle d'asservissement à modulation de phase, et si la fréquence de modulation est bien supérieure à la largeur de raie, on parle d'asservissement Pound Drever Hall (PDH) [49].

La technique que nous avons retenue pour nos asservissements est celle de l'asservissement PDH, car c'est celle qui permet d'obtenir la plus grande plage d'accrochage [46], avec un meilleur rapport signal à bruit [50]. L'objet de cette partie est de détailler mathématiquement comment obtenir un signal d'erreur à partir de la modulation de phase, en fonction de la valeur relative de cette dernière par rapport à la largeur de raie de la cavité.



### 2.2.2.1 La modulation de phase : expression du signal d'erreur dans le cas général

La modulation de phase consiste à moduler la phase d'un signal laser par un signal sinusoïdal de fréquence  $f_{\text{Mod}}$  connue, à envoyer ce signal sur une cavité résonante, puis à démoduler l'intensité optique en sortie de la cavité pour obtenir un signal d'erreur [48]. La modulation de phase peut se faire par exemple par un composant électro-optique, ou par une cale piézoélectrique modulant la longueur de parcours de la lumière. Quelle que soit la technique utilisée, on peut représenter la modulation/démodulation de phase par le schéma de la figure 2.6.

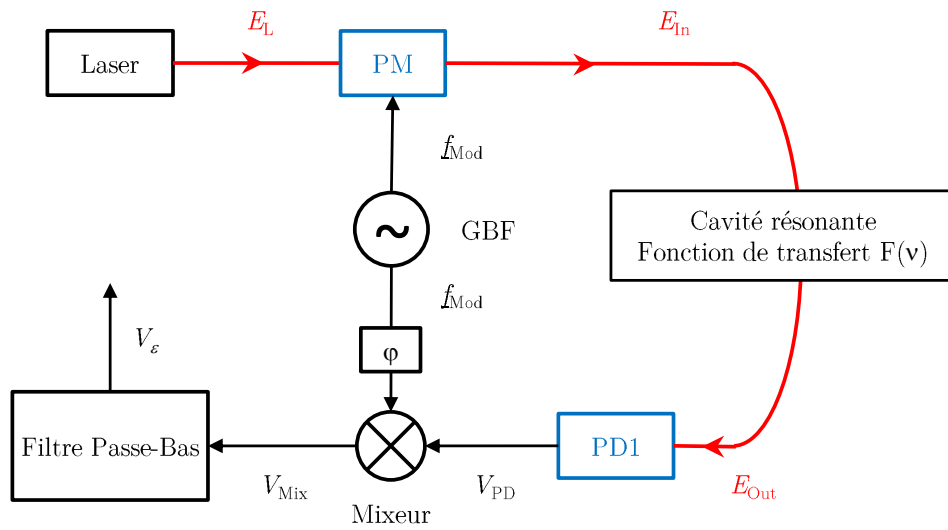


FIGURE 2.6 – Principe de fonctionnement de la modulation de fréquence. Le champ incident sur la cavité est noté  $E_{\text{In}}$  et le champ en sortie de la cavité (transmis ou réfléchi) est noté  $E_{\text{Out}}$ . PM : Modulateur de Phase, PD : photodiode. GBF : Générateur Basse Fréquence.  $\varphi$  représente un déphaseur.

On considère ici une cavité résonante dont on n'explicite pas si elle est sondée en réflexion ou en transmission. On note  $F(\nu)$  sa fonction de transfert, qui sera donnée soit par l'équation (2.8) dans le cas de la réflexion, soit par l'équation (2.10) dans le cas de la transmission. Aucune approximation n'est faite quant aux pertes de la cavité. Le champ électrique en sortie du laser est de la forme :

$$E_L = E_0 \cdot e^{2i\pi\nu t},$$

avec  $\nu$  la fréquence optique du laser et  $E_0$  l'amplitude du champ électrique associé. Pour alléger les notations, on n'explicite pas les complexes conjugués dans les équations. Le modulateur de phase a pour effet de moduler la phase de l'onde laser incidente par une fonction sinus de fréquence  $f_{\text{Mod}}$  et d'amplitude  $\beta$ . Le champ en sortie du modulateur (et donc en entrée de la

cavité résonante) est donné par :

$$E_{\text{In}} = E_0 \cdot e^{2i\pi\nu t} e^{i\beta \sin(2\pi f_{\text{Mod}} t)} = E_0 \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(\beta) e^{2i\pi(\nu + k f_{\text{Mod}}) t},$$

avec  $J_k$  la fonction de Bessel de première espèce d'ordre  $k$ . Le développement en fonctions de Bessel montre que le champ incident sur la cavité se décompose en somme de plusieurs champs électriques d'amplitudes différentes et oscillants aux fréquences  $\nu \pm k f_{\text{Mod}}$ . On peut interpréter la modulation de phase comme la création de bandes latérales au signal de fréquence centrale  $\nu$ . Ces bandes latérales sont d'amplitude  $J_k(\beta)$ , et sont espacées de la fréquence centrale  $\nu$  par des multiples entiers de la fréquence de modulation  $f_{\text{Mod}}$ . Le spectre de Fourier de la lumière après le modulateur est représenté par la figure 2.7. L'amplitude des bandes latérales dépend de l'amplitude  $\beta$  de la modulation.

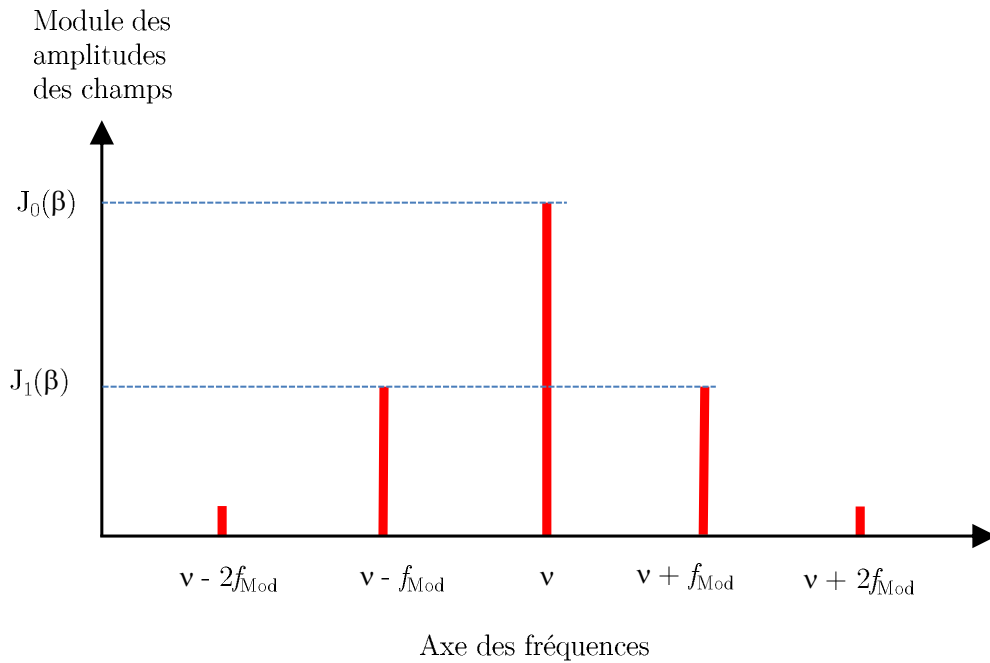


FIGURE 2.7 – Allure du spectre de Fourier de la lumière incidente sur la cavité

Chaque bande latérale voit donc la fonction de transfert de la cavité à sa propre fréquence. Le champ total en sortie de la cavité est donc donné par :

$$E_{\text{Out}} = E_0 \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(\beta) F(\nu + k f_{\text{Mod}}) e^{2i\pi(\nu + k f_{\text{Mod}}) t}.$$

Sans faire d'approximation quelconque sur les amplitudes des différents modes, on peut écrire que l'intensité optique en sortie de la cavité est donnée par :

$$I_{\text{Out}} = |E_{\text{Out}}|^2 = I_0 \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_k(\beta) F(\nu + k f_{\text{Mod}}) J_p(\beta) \overline{F(\nu + p f_{\text{Mod}})} e^{2i\pi(k-p) f_{\text{Mod}} t}, \quad (2.14)$$

avec  $I_0 = |E_0|^2$  l'intensité totale du champ incident, et où la barre au-dessus de  $F(\nu + pf_{\text{Mod}})$  désigne son complexe conjugué. Cette expression permet de calculer simplement les composantes de l'intensité en sortie de la cavité à tous les multiples de la fréquence de modulation  $f_{\text{Mod}}$ . On peut réécrire l'intensité comme la somme des composantes oscillant à toutes les fréquences multiples de  $f_{\text{Mod}}$  :

$$I_{\text{Out}} = \sum_{k=0}^{+\infty} I_{\text{Out}}(k \cdot f_{\text{Mod}}), \quad (2.15)$$

où

$$I_{\text{Out}}(k \cdot f_{\text{Mod}}) = c_k \cos(2\pi k f_{\text{Mod}} t) + s_k \sin(2\pi k f_{\text{Mod}} t), \quad (2.16)$$

avec  $c_k$  et  $s_k$  les amplitudes de l'intensité correspondant aux quadratures sinus et cosinus du signal oscillant à la fréquence  $k f_{\text{Mod}}$ .

La tension en sortie de la photodiode est proportionnelle à l'intensité lumineuse reçue sur le capteur et donc on peut écrire que :

$$V_{\text{PD}} = G_{\text{PD}} \cdot I_{\text{Out}}.$$

Le signal de la photodiode est démodulé pour en extraire le signal d'erreur. La démodulation consiste à mixer puis filtrer le signal en sortie de la photodiode avec un signal de fréquence  $n \cdot f_{\text{Mod}}$ , dont on peut choisir la phase  $\varphi$ . Cela permet d'extraire l'amplitude du signal  $V_{\text{PD}}$  oscillant à cette fréquence. Le signal en sortie du mixeur s'écrit :

$$V_{\text{Mix}} = G_{\text{PD}} G_{\text{Mix}} \cdot I_{\text{Out}} \cdot \sin(2\pi n \cdot f_{\text{Mod}} t + \varphi),$$

ce que l'on peut expliciter d'après (2.15) et (2.16) par :

$$\begin{aligned} V_{\text{Mix}} = \frac{G_{\text{PD}} G_{\text{Mix}}}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} c_k & [\sin(2\pi f_{\text{Mod}}(k+n)t + \varphi) - \sin(2\pi f_{\text{Mod}}(k-n)t - \varphi)] \\ & + s_k [\cos(2\pi f_{\text{Mod}}(k-n)t - \varphi) - \cos(2\pi f_{\text{Mod}}(k+n)t + \varphi)]. \end{aligned}$$

La sortie du mixeur est composée de termes constants (ceux pour lesquels  $k = n$ ) et de termes oscillants à des multiples entiers de la fréquence de modulation  $f_{\text{Mod}}$ . En choisissant la fréquence de coupure  $f_c$  du filtre passe-bas telle que  $f_c \ll f_{\text{Mod}}$ , on ne récupère en sortie du filtre que la composante continue du signal  $V_{\text{Mix}}$ , à savoir :

$$V_\varepsilon = \frac{G_{\text{PD}} G_{\text{Mix}} G_{\text{Filtre}}}{2} [c_n \sin(\varphi) + s_n \cos(\varphi)], \quad (2.17)$$

ce qui correspond bien à la composante de la puissance réfléchie ou transmise oscillant à  $n f_{\text{Mod}}$ . Par la suite, on notera  $G_{\text{tot}} = G_{\text{PD}} G_{\text{Mix}} G_{\text{Filtre}}$ . Le choix de la phase  $\varphi$  de démodulation permet de sélectionner la quadrature du signal que l'on veut observer.

Dans notre cas, on s'intéresse à une démodulation à la fréquence  $f_{\text{Mod}}$ , c'est à dire  $n = 1$ . Le signal en sortie du filtre passe-bas aura alors pour amplitude la composante de  $I_{\text{Out}}$  oscillant à la fréquence  $f_{\text{Mod}}$ . On s'intéresse donc aux termes ayant cette composante fréquentielle dans  $I_{\text{Out}}$  soit, d'après l'équation (2.14) :

$$\begin{aligned} I_{\text{Out}}(f_{\text{Mod}}) &= I_0 \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k J_{k+1} F(\nu + k f_{\text{Mod}}) \overline{F(\nu + (k+1) f_{\text{Mod}})} e^{-2i\pi f_{\text{Mod}} t} \quad (p = k+1) \\ &+ I_0 \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k J_{k-1} F(\nu + k f_{\text{Mod}}) \overline{F(\nu + (k-1) f_{\text{Mod}})} e^{2i\pi f_{\text{Mod}} t} \quad (p = k-1). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Pour plus de lisibilité, on a enlevé la dépendance en  $\beta$  des  $J_k$  dans les équations. Sachant que pour tout entier relatif  $k$ , on a la relation  $J_{-k}(\beta) = (-1)^k J_k(\beta)$ , on peut regrouper astucieusement<sup>5</sup> les termes de l'équation (2.18) de sorte à obtenir l'équation finale :

$$I_{\text{Out}}(f_{\text{Mod}}) = I_0 \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} 2J_k J_{k+1} [\text{Re}(a_k) \cos(2\pi f_{\text{Mod}} t) + \text{Im}(a_k) \sin(2\pi f_{\text{Mod}} t)], \quad (2.19)$$

avec

$$a_k = F(\nu + k f_{\text{Mod}}) \overline{F(\nu + (k+1) f_{\text{Mod}})} - F(\nu - (k+1) f_{\text{Mod}}) \overline{F(\nu - k f_{\text{Mod}})}.$$

C'est l'expression générale de l'intensité reçue sur la photodiode oscillant à la fréquence  $f_{\text{Mod}}$ . On a alors, d'après les notations des équations (2.15) et (2.16) :

$$c_1 = I_0 \sum_{k=0}^{+\infty} 2J_k J_{k+1} \text{Re}(a_k) \quad \text{et} \quad s_1 = I_0 \sum_{k=0}^{+\infty} 2J_k J_{k+1} \text{Im}(a_k). \quad (2.20)$$

D'après l'équation (2.17), la tension en sortie du filtre passe-bas, après modulation et démodulation à  $f_{\text{Mod}}$  est donnée, dans sa forme la plus générale, par :

$$V_\varepsilon = G_{\text{tot}} I_0 \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} J_k J_{k+1} [\text{Re}(a_k) \sin(\varphi) + \text{Im}(a_k) \cos(\varphi)], \quad (2.21)$$

$$a_k = F(\nu + k f_{\text{Mod}}) \overline{F(\nu + (k+1) f_{\text{Mod}})} - F(\nu - (k+1) f_{\text{Mod}}) \overline{F(\nu - k f_{\text{Mod}})}. \quad (2.22)$$

La composante du signal incident sur la photodiode oscillant à  $f_{\text{Mod}}$  est en fait le battement entre les modes  $J_k$  et  $J_{k+1}$ . Cette équation générale permet de calculer les signaux d'erreurs obtenus par l'asservissement à modulation de phase et l'asservissement PDH.

---

5. Pour l'astuce, voir l'annexe D.4

### Remarque

On a considéré dans notre modèle que la modulation en phase avait lieu sur le faisceau laser incident sur la cavité. Cependant, si la modulation de phase est réalisée par l'intermédiaire de la modulation en longueur de la cavité, les résultats sont les mêmes.

#### 2.2.2.2 Modulation de phase avec $f_{\text{Mod}} \ll \Gamma$

Cette technique d'asservissement est la première à avoir été mise en place par Ezekiel et al. [1] pour la mesure de vitesse de rotation. Dans leur article, c'est une cavité observée en transmission qui est étudiée, et la modulation est obtenue par l'intermédiaire d'une cale piézoélectrique collée sur un des miroirs de la cavité. La modulation de phase est donc obtenue par l'intermédiaire de la modulation de la longueur de cavité. La modulation de phase telle que  $f_{\text{Mod}} \ll \Gamma$  est la plus répandue pour la mesure de rotation dans les gyromètres résonants [51, 52, 53, 54, 55]. En effet, cette dernière est compatible avec la technique de suppression de la porteuse, qui permet de diminuer les bruits dus à la rétrodiffusion (que nous détaillerons en section 2.4.3). La suppression de la porteuse consiste à moduler avec une amplitude de  $\beta = 2,405$  radians de telle sorte que  $J_0(\beta) = 0$ , et donc que la porteuse oscillant à  $\nu$  ait une amplitude nulle. On supposera dans cette partie que l'amplitude de modulation de  $\beta$  est optimisée pour la suppression de porteuse.

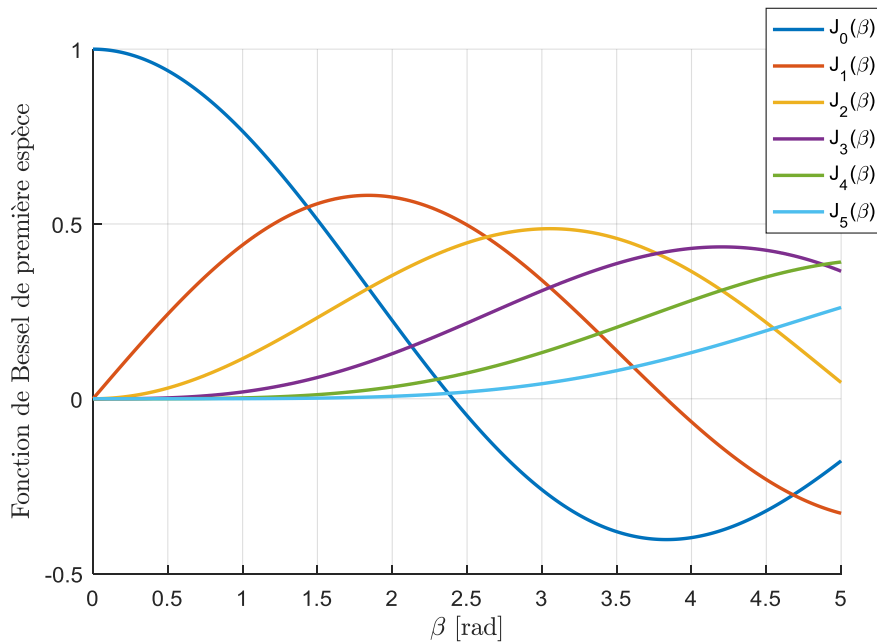


FIGURE 2.8 – Tracé des fonctions de Bessel d'ordre 0 à 5 en fonction de l'amplitude de modulation  $\beta$ .

La figure 2.8 présente l'amplitude des fonctions de Bessel d'ordre 0 à 5 en fonction de l'amplitude de modulation  $\beta$ . On rappelle que quel que soit l'entier relatif  $k$ ,  $J_{-k}(\beta) = (-1)^k J_k(\beta)$ . Pour l'amplitude de modulation choisie ( $\beta = 2,405$  radians), l'amplitude des fonctions de Bessel d'ordre supérieur à 4 est négligeable devant l'amplitude des autres modes. On peut donc se

contenter de simplifier la somme infinie de l'équation (2.21) par une somme finie allant jusqu'à 4, et écrire que :

$$V_\varepsilon \simeq G_{\text{tot}} I_0 \cdot \sum_{k=0}^4 J_k J_{k+1} [\text{Re}(a_k) \sin(\varphi) + \text{Im}(a_k) \cos(\varphi)], \quad (2.23)$$

$$a_k = F(\nu + k f_{\text{Mod}}) \overline{F(\nu + (k+1) f_{\text{Mod}})} - F(\nu - (k+1) f_{\text{Mod}}) \overline{F(\nu - k f_{\text{Mod}})}.$$

On retiendra cette formule pour la suite des calculs.

Pour des fréquences de modulation telles que  $4f_{\text{Mod}} \ll \Gamma$ , il est possible de faire un développement de Taylor de la fonction de transfert et d'écrire que pour tout entier  $k \leq 4$  :

$$F(\nu \pm k f_{\text{Mod}}) \simeq F(\nu) \pm k f_{\text{Mod}} \frac{d}{d\nu} F(\nu), \quad (2.24)$$

en supposant que la fréquence  $\nu$  soit proche d'une résonance. Dans cette approximation, on peut simplifier le coefficient  $a_k$  (2.22) du signal d'erreur par :

$$\begin{aligned} a_k &= F(\nu + k f_{\text{Mod}}) \overline{F(\nu + (k+1) f_{\text{Mod}})} - F(\nu - (k+1) f_{\text{Mod}}) \overline{F(\nu - k f_{\text{Mod}})} \\ &\simeq (2k+1) f_{\text{Mod}} \frac{d}{d\nu} |F(\nu)|^2. \end{aligned}$$

Ce coefficient est purement réel, donc en démodulant le signal de la photodiode avec la bonne quadrature  $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$  on obtient le signal d'erreur (2.21) :

$$V_{\varepsilon, \text{app}} = G_{\text{tot}} I_0 \cdot f_{\text{Mod}} \frac{d}{d\nu} |F(\nu)|^2 \sum_{k=0}^4 (2k+1) J_k J_{k+1}.$$

L'expression finale du signal d'erreur dépend alors de la manière dont on sonde la cavité (en transmission ou en réflexion).

### Cavité sondée en réflexion

Pour une cavité en réflexion, d'après l'équation (2.9), le module de la fonction de transfert vaut :

$$|F_R(\nu)|^2 = (1 - \gamma_1) \left( 1 - \frac{1 - \left( \frac{r_1 - g}{1 - r_1 g} \right)^2}{1 + 4 \frac{r_1 g}{(1 - r_1 g)^2} \sin^2 \left( \frac{\pi \nu}{\Delta \nu_{\text{ISL}}} \right)} \right),$$

dont la dérivée est donnée par :

$$\frac{d}{d\nu} |F_R(\nu)|^2 = (1 - \gamma_1) \left( 1 - \left( \frac{r_1 - g}{1 - r_1 g} \right)^2 \right) \frac{8 \frac{r_1 g}{(1 - r_1 g)^2} \frac{\pi}{\Delta \nu_{\text{ISL}}} \cos \left( \frac{\pi \nu}{\Delta \nu_{\text{ISL}}} \right) \sin \left( \frac{\pi \nu}{\Delta \nu_{\text{ISL}}} \right)}{\left( 1 + 4 \frac{r_1 g}{(1 - r_1 g)^2} \sin^2 \left( \frac{\pi \nu}{\Delta \nu_{\text{ISL}}} \right) \right)^2}. \quad (2.25)$$

Si on considère que la fréquence laser est proche de la résonance, on peut écrire que  $\nu = p\Delta\nu_{\text{ISL}} + \delta\nu$  avec  $\delta\nu \ll \Gamma$  et donc l'expression ci-dessus se simplifie en :

$$\frac{d}{d\nu}|F_R(\nu)|^2 \simeq (1 - \gamma_1)8 \frac{r_1 g (1 - r_1^2)(1 - g^2)}{(1 - r_1 g)^4} \left( \frac{\pi}{\Delta\nu_{\text{ISL}}} \right)^2 \delta\nu, \quad (2.26)$$

ce qui donne un signal d'erreur proche de la résonance :

$$V_{\varepsilon,app} = G_{\text{tot}} K_A \delta\nu, \quad (2.27)$$

avec

$$K_A = I_0 \cdot f_{\text{Mod}} (1 - \gamma_1) 8 \frac{r_1 g (1 - r_1^2)(1 - g^2)}{(1 - r_1 g)^4} \left( \frac{\pi}{\Delta\nu_{\text{ISL}}} \right)^2 \sum_{k=0}^4 (2k+1) J_k J_{k+1}. \quad (2.28)$$

On a bien une tension en sortie du filtre passe-bas dont la valeur passe par 0 à la résonance, c'est-à-dire lorsque  $\nu = p\Delta\nu_{\text{ISL}}$ , soit  $\delta\nu = 0$ .

La figure 2.9 est un tracé du signal d'erreur sans approximations  $V_\varepsilon$  de l'équation (2.21) pour lequel on a choisi une phase  $\varphi = \pi/2$ , et de son approximation valable autour de la résonance  $V_{\varepsilon,app}$ , donné par l'équation (2.27). Nous avons rappelé sur la figure le tracé du module de la fonction de transfert de la cavité sondée en réflexion (courbe bleue).

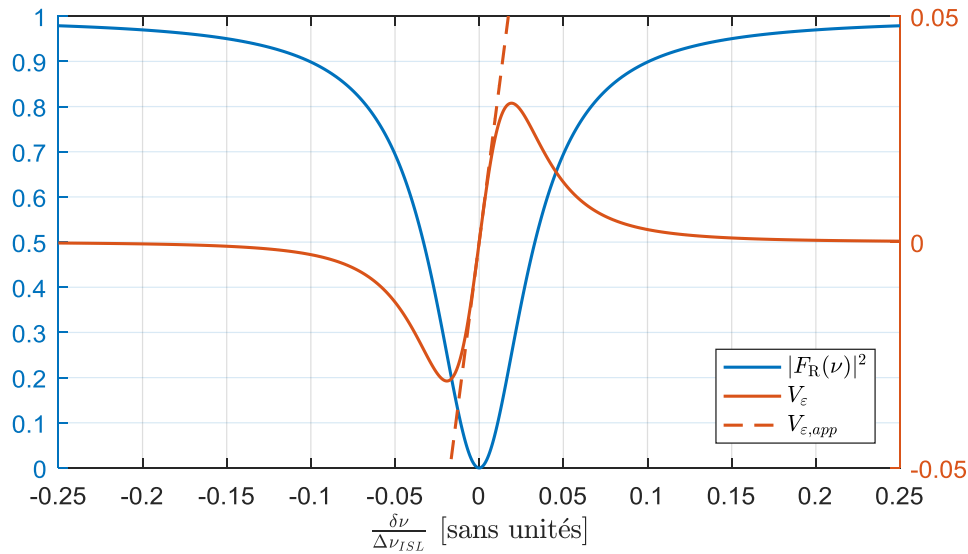


FIGURE 2.9 – Tracé du module de la fonction de transfert  $|F_R(\nu)|^2$  (2.9), du signal d'erreur  $V_\varepsilon$  donné par l'équation (2.21) et du signal d'erreur approché au voisinage de la résonance  $V_{\varepsilon,app}$  donné par l'équation (2.27). Les valeurs prises sont  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ ,  $r = g = 0,9$ ,  $f_{\text{Mod}} = \Gamma/50$ ,  $\beta = 2,405 \text{ rad}$ ,  $G_{\text{tot}} I_0 = 1$ .

La figure 2.9 montre que l'approximation est raisonnable quand la fréquence est proche de la résonance ( $\delta\nu = 0$ ). Nous définissons la "pente du signal d'erreur" par le coefficient  $G_{\text{tot}} K_A$  de

l'équation (2.27). Elle dépend de l'amplitude de modulation  $\beta$ , de la fréquence de modulation  $f_{\text{Mod}}$ , et des caractéristiques de la cavité ( $r_1, g$ ,  $\gamma_1$ , et  $\Delta\nu_{\text{ISL}}$ ).

### Cavité sondée en transmission

Pour une cavité en transmission, le module de la fonction de transfert est donné par l'équation (2.11) :

$$|F_T(\nu)|^2 = \frac{\frac{(1-r_1^2)(1-r_2^2)(1-\gamma_1)(1-\gamma_2)\mathcal{T}_1^2}{(1-r_1g)^2}}{1 + 4\frac{r_1g}{(1-r_1g)^2}\sin^2\left(\frac{\pi\nu}{\Delta\nu_{\text{ISL}}}\right)},$$

dont la dérivée vaut :

$$\frac{d}{d\nu}|F_T(\nu)|^2 = -\frac{(1-r_1^2)(1-r_2^2)(1-\gamma_1)(1-\gamma_2)\mathcal{T}_1^2}{(1-r_1g)^2} \frac{8\frac{r_1g}{(1-r_1g)^2}\frac{\pi}{\Delta\nu_{\text{ISL}}}\cos\left(\frac{\pi\nu}{\Delta\nu_{\text{ISL}}}\right)\sin\left(\frac{\pi\nu}{\Delta\nu_{\text{ISL}}}\right)}{\left(1 + 4\frac{r_1g}{(1-r_1g)^2}\sin^2\left(\frac{\pi\nu}{\Delta\nu_{\text{ISL}}}\right)\right)^2}. \quad (2.29)$$

Pour une fréquence laser proche de la résonance, on peut à nouveau écrire que  $\nu = p\Delta\nu_{\text{ISL}} + \delta\nu$  avec  $\delta\nu \ll \Gamma$  et donc l'expression ci-dessus se simplifie en :

$$\frac{d}{d\nu}|F_T(\nu)|^2 \simeq -\frac{8r_1g(1-r_1^2)(1-r_2^2)(1-\gamma_1)(1-\gamma_2)\mathcal{T}_1^2}{(1-r_1g)^4} \left(\frac{\pi}{\Delta\nu_{\text{ISL}}}\right)^2 \delta\nu, \quad (2.30)$$

ce qui donne un signal d'erreur au voisinage de la résonance :

$$V_{\varepsilon,app} = -G_{\text{tot}}K_B\delta\nu, \quad (2.31)$$

avec

$$K_B = I_0 \cdot f_{\text{Mod}} \frac{8r_1g(1-r_1^2)(1-r_2^2)(1-\gamma_1)(1-\gamma_2)\mathcal{T}_1^2}{(1-r_1g)^4} \left(\frac{\pi}{\Delta\nu_{\text{ISL}}}\right)^2 \sum_{k=0}^4 (2k+1)J_kJ_{k+1}. \quad (2.32)$$

On a bien à nouveau une tension en sortie du filtre passe-bas dont la valeur passe par 0 à la résonance. La figure 2.10 est un tracé du signal d'erreur rigoureux  $V_\varepsilon$  de l'équation (2.21). Ce dernier est démodulé avec une phase  $\varphi = \pi/2$ . Est aussi tracée sur la figure l'approximation valable autour de la résonance  $V_{\varepsilon,app}$ , donnée par l'équation (2.31) ; ainsi que le module de la fonction de transfert de la cavité sondée en transmission (courbe bleue).

Ici, la pente du signal d'erreur est le coefficient  $G_{\text{tot}}K_B$  (2.31). Si on avait démodulé avec une phase de  $\varphi = -\pi/2$ , la pente du signal d'erreur aurait été positive, car un signe '-' serait sorti de la démodulation. De la même manière que pour  $K_A$ , le coefficient  $K_B$  dépend de l'amplitude



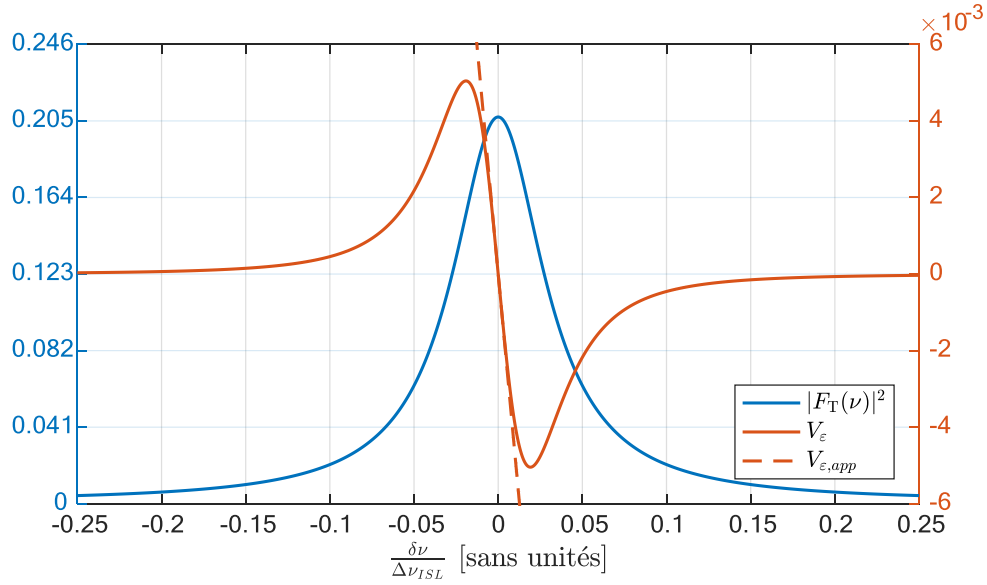


FIGURE 2.10 – Tracé du module de la fonction de transfert  $|F_T(\nu)|^2$  (2.11), du signal d'erreur  $V_\varepsilon$  donné par l'équation (2.21) et du signal d'erreur approché au voisinage de la résonance  $V_{\varepsilon,app}$  donné par l'équation (2.31). Les valeurs prises sont  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ ,  $r = g = 0,9$ ,  $f_{Mod} = \Gamma/50$ ,  $\beta = 2,405$ ,  $G_{tot}I_0 = 1$ ,  $\mathcal{T}_1 = 0,989$  et  $r_2 = 0,98$ .

de modulation choisie. On remarque aussi que  $K_A$  et  $K_B$  sont liés par la relation :

$$K_B = K_A \frac{(1 - \gamma_2)(1 - r_2^2)}{(1 - g^2)} \mathcal{T}_1^2, \quad (2.33)$$

ce qui montre que dans l'approximation des faibles pertes (soit  $\gamma_2 \simeq 0$ ,  $\mathcal{T}_1 \simeq 1$  et  $g \simeq r_2$ ), les pentes des signaux d'erreur en transmission et en réflexion sont égales.

### Optimisation de l'asservissement

Optimiser l'asservissement, c'est maximiser la pente du signal d'erreur pour que la discrimination entre la fréquence de résonance et la fréquence du laser soit la plus grande possible. Les équations précédentes laissent penser qu'il est possible de pouvoir simplement optimiser la pente des signaux d'erreur dans le cas  $f_{Mod} \ll \Gamma$ . En réalité, il n'en est rien, puisque cette pente dépend de la fréquence de modulation  $f_{Mod}$  et qu'une étude à partir de l'équation exacte (2.21) montre que la pente optimale, pour des valeurs  $\beta$ ,  $g$  et  $r_1$  données ne respecte pas forcément la condition  $f_{Mod} \ll \Gamma$ , ce qui rend inutilisables les formules précédentes pour l'optimisation de la pente du signal d'erreur. Si cette méthode est sélectionnée pour l'asservissement d'une cavité à pertes données  $(1 - g^2)$ , la détermination des paramètres  $r_1$ ,  $f_{Mod}$  et  $\beta$  telle que l'asservissement soit optimisé demandera une étude plus poussée que celle présentée ici.

### 2.2.2.3 Modulation de phase avec $f_{\text{Mod}} \gg \Gamma$ , l'asservissement Pound-Drever-Hall

Dans la technique d'asservissement de Pound Drever et Hall [56, 57, 58] (nommée ci-après l'asservissement PDH), la fréquence de modulation est telle que les bandes latérales se situent en dehors de la largeur de raie de la cavité [59, 49], c'est-à-dire telle que pour tout entier  $k$ ,  $\Gamma \ll k f_{\text{Mod}} [\Delta\nu_{\text{ISL}}] \ll \Delta\nu_{\text{ISL}} - \Gamma$ . Dans ce cas, pour des cavités de finesse supérieure à 10, d'après ce que nous avons vu en partie 2.1.3, on peut écrire que pour tout entier naturel  $k$  strictement positif, lorsque  $\nu$  est proche d'une résonance (i.e  $\nu \simeq 0 [\Delta\nu_{\text{ISL}}]$ ), on a :

$$F_{\text{R}}(\nu \pm k f_{\text{Mod}}) \simeq \overline{F_{\text{R}}(\nu \pm k f_{\text{Mod}})} \simeq F_{\text{R}}\left(\frac{\Delta\nu_{\text{ISL}}}{2}\right) \simeq -1, \quad (2.34)$$

$$F_{\text{T}}(\nu \pm k f_{\text{Mod}}) \simeq \overline{F_{\text{T}}(\nu \pm k f_{\text{Mod}})} \simeq F_{\text{T}}\left(\frac{\Delta\nu_{\text{ISL}}}{2}\right) \simeq 0. \quad (2.35)$$

#### Cavité sondée en transmission

Dans le cas d'un signal observé en transmission, les coefficients  $a_k$  (2.22) du signal d'erreur (2.21) sont tous nuls :

$$a_k = F_{\text{T}}(\nu + k f_{\text{Mod}}) \overline{F_{\text{T}}((\nu + (k+1)f_{\text{Mod}}))} - F_{\text{T}}((\nu - (k+1)f_{\text{Mod}})) \overline{F_{\text{T}}((\nu - k f_{\text{Mod}}))} = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Le signal d'erreur en transmission est donc nul, quelle que soit la phase de la démodulation. Cela se comprend aussi physiquement quand on sait que la cavité ne transmet que les ondes dont les fréquences sont dans sa largeur de raie. En modulant avec une fréquence de modulation supérieure à la largeur de raie, on ne laisse passer que la porteuse, et pas ses bandes latérales créées par la modulation. La porteuse ne pourra alors pas interférer avec ses bandes latérales pour créer le signal d'erreur.

La modulation de phase telle que  $f_{\text{Mod}} \gg \Gamma$  ne peut donc pas servir à l'asservissement pour une cavité observée en transmission. C'est pourquoi l'asservissement PDH ne concerne que des cavités sondées en réflexion.

#### Cavité sondée en réflexion

Dans le cas de la réflexion, on a :

$$\begin{aligned} a_0 &\simeq -F_{\text{R}}(\nu) + \overline{F_{\text{R}}(\nu)} = -2i\text{Im}[F_{\text{R}}(\nu)], \\ a_k &= F_{\text{R}}(\nu + k f_{\text{Mod}}) \overline{F_{\text{R}}(\nu + (k+1)f_{\text{Mod}})} - F_{\text{R}}(\nu - (k+1)f_{\text{Mod}}) \overline{F_{\text{R}}(\nu - k f_{\text{Mod}})} \simeq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^*. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Le signal d'erreur, dont on rappelle l'expression générale (2.21) :

$$V_{\varepsilon} = G_{\text{tot}} I_0 \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} J_k J_{k+1} [\text{Re}(a_k) \sin(\varphi) + \text{Im}(a_k) \cos(\varphi)],$$

est ici non nul, et n'est dû qu'au battement entre la porteuse et ses bandes latérales d'ordre 1. Le résultat de ce battement (donné par le coefficient  $a_0$ ) étant imaginaire pur, on a alors le signal d'erreur qui, démodulé à la bonne quadrature  $\varphi = 0$ , est donné par :

$$V_{\varepsilon,app} = -2G_{\text{tot}}I_0 \cdot J_0J_1\text{Im}[F_R(\nu)].$$

La partie imaginaire de la fonction de transfert en réflexion (2.8) est donnée par

$$\text{Im}[F_R(\nu)] = \sqrt{1-\gamma_1} \frac{g(1-r_1^2) \sin\left(\frac{2\pi\nu}{\Delta\nu_{\text{ISL}}}\right)}{(1-r_1g)^2 + 4r_1g \sin^2\left(\frac{\pi\nu}{\Delta\nu_{\text{ISL}}}\right)}. \quad (2.37)$$

Le signal d'erreur près de la résonance est donc donné par :

$$V_{\varepsilon,app} = -G_{\text{tot}}K_C\delta\nu. \quad (2.38)$$

$$K_C = 4I_0 \cdot J_0J_1\sqrt{1-\gamma_1} \frac{g(1-r_1^2)}{(1-r_1g)^2} \frac{\pi}{\Delta\nu_{\text{ISL}}}. \quad (2.39)$$

La figure 2.11 trace le signal d'erreur donné par la formule générale (2.21) démodulé avec une phase  $\phi = 0$ , et sa valeur approchée à l'origine donnée par l'équation (2.38) en fonction de la fréquence optique. Notons ici que l'asservissement PDH ne permet pas de faire de la suppression de porteuse, puisque si on supprime cette dernière ( $J_0 = 0$ ), le signal d'erreur devient nul.

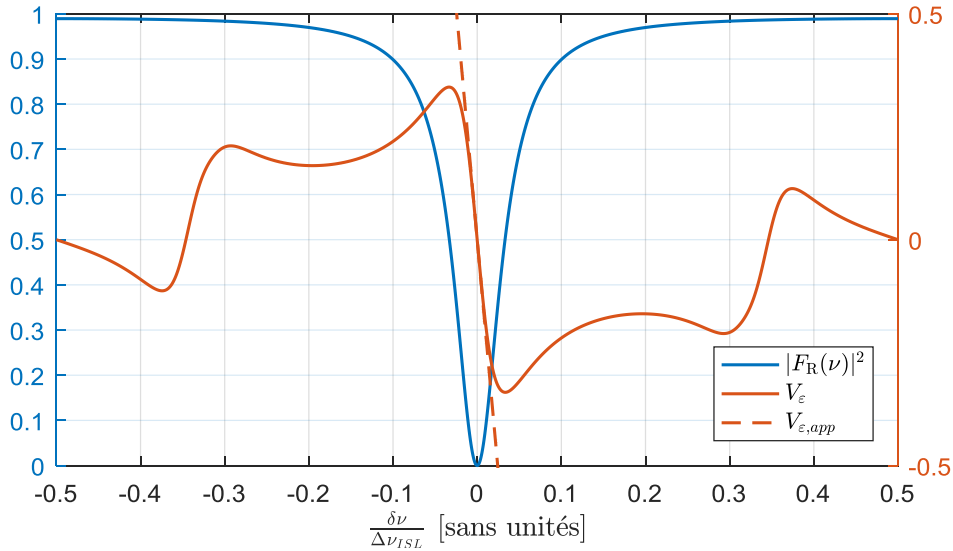


FIGURE 2.11 – Tracé du module de la fonction de transfert  $|F_R(\nu)|^2$  (2.9), du signal d'erreur  $V_\varepsilon$  donné par l'équation (2.21) et du signal d'erreur approché au voisinage de la résonance  $V_{\varepsilon,app}$  donné par l'équation (2.38). Les valeurs prises sont  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ ,  $r = g = 0,9$ ,  $f_{\text{Mod}} = 0,25 \cdot \Delta\nu_{\text{ISL}}$ ,  $\beta = 0,5$ ,  $G_{\text{tot}}I_0 = 1$ .

### Approximations des faibles pertes

Supposons que la cavité étudiée réponde à l'approximation des faibles pertes, et que les miroirs utilisés pour la cavité aient le même coefficient de réflexion. Dans ce cas, on écrit que  $g = r_2 = r_1 = r \rightarrow 1$ , et dans ces conditions, la pente du signal d'erreur peut se simplifier en :

$$K_C = 4I_0 \cdot J_0 J_1 \frac{1}{\Gamma}, \quad (2.40)$$

en sachant que dans cette approximation, on a :

$$\Gamma = \frac{\Delta\nu_{\text{ISL}}}{\pi}(1 - r^2).$$

On retrouve alors l'expression de Black [49] dans son article de 2001 sur la technique d'asservissement PDH.

### Optimisation de l'asservissement Pound-Drever-Hall

Dans le cas de l'asservissement PDH, il est possible de trouver, pour une cavité à pertes fixées, les valeurs de  $r_1$  et de  $\beta$  qui maximisent la pente du signal d'erreur. Cette dernière est donnée par les équations (2.38) et (2.39) que nous combinons ici en :

$$V_{\varepsilon,app} = -G_{\text{tot}} 4I_0 \cdot J_0(\beta) J_1(\beta) \sqrt{1 - \gamma_1} \frac{g(1 - r_1^2)}{(1 - r_1 g)^2} \frac{\pi}{\Delta\nu_{\text{ISL}}} \delta\nu. \quad (2.41)$$

En effet, la pente de l'asservissement est proportionnelle au produit  $J_0(\beta) J_1(\beta)$ . La figure 2.12 présente le tracé de ce produit en fonction de la variable  $\beta$ , qui montre que le produit est maximal pour  $\beta = 1,08$  rad, c'est donc l'amplitude de modulation à choisir pour un asservissement PDH. Dans ce cas, là, on a :  $J_0^2(1,08) \simeq J_1(1,08) \simeq \frac{1}{2}$ .

D'autre part, à pertes fixées, il existe un coefficient de réflexion  $r_1$  qui maximise la pente du signal d'erreur. En effet, la dérivée de la pente du signal d'erreur (2.41) par rapport à  $r_1$  donne :

$$\frac{dV_{\varepsilon,app}}{dr_1} = -G_{\text{tot}} 4I_0 \cdot J_0(\beta) J_1(\beta) \sqrt{1 - \gamma_1} g \frac{-2r_1(1 - r_1 g)^2 + (1 - r_1^2)2g(1 - r_1 g)}{(1 - r_1 g)^4} \frac{\pi}{\Delta\nu_{\text{ISL}}} \delta\nu,$$

qui s'annule pour la condition  $r_1 = g$ , c'est-à-dire au couplage critique. Pour que la pente de l'asservissement PDH soit maximale, il faut donc aussi que le coefficient de réflexion du coupleur d'entrée soit égal à la transmission intracavité.

La figure 2.13 présente l'évolution de la pente du signal d'erreur de l'asservissement PDH (2.41) calculée au couplage critique en fonction de la transmission  $g$  de la cavité, pour une amplitude de modulation de  $\beta = 1,08$  rad. La courbe montre que plus la transmission intracavité est grande (donc plus les pertes sont faibles) et plus la pente de l'asservissement PDH est importante.

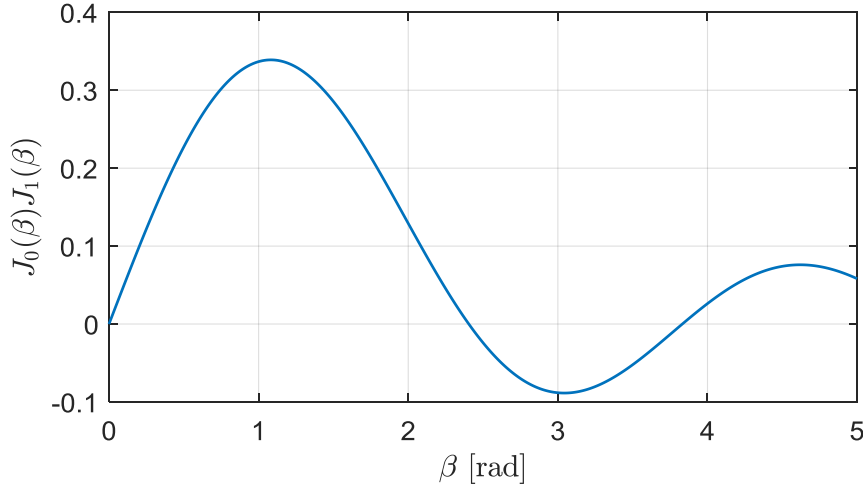


FIGURE 2.12 – Tracé du produit  $J_0(\beta)J_1(\beta)$  en fonction de  $\beta$ . Le produit est maximum pour  $\beta = 1,08$  rad et vaut donc environ  $J_0J_1 \simeq \frac{1}{2\sqrt{2}}$ .

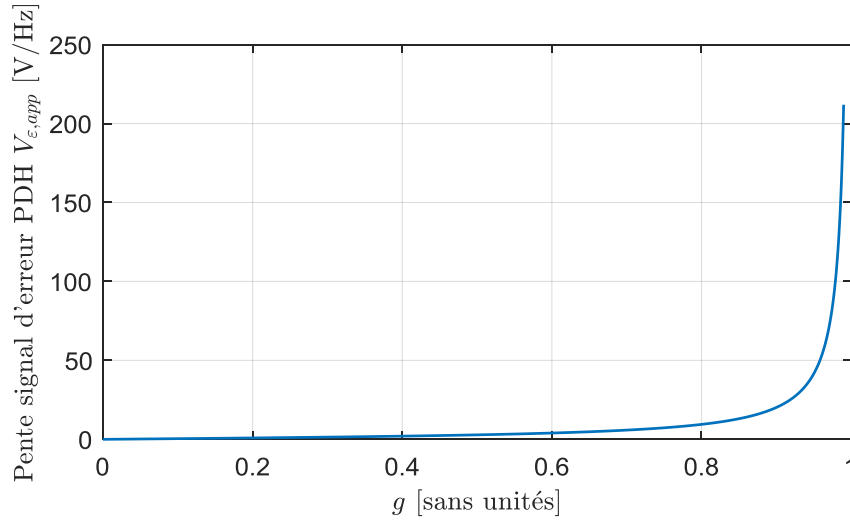


FIGURE 2.13 – Tracé de la pente du signal d'asservissement PDH (2.41) en fonction de la transmission  $g$  de la cavité, au couplage critique. Les données de la modélisation sont :  $r_1 = g$ ,  $\beta = 1,08$ ,  $\gamma_1 = 0$ ,  $G_{\text{tot}}I_0 = 1$  et  $\Delta\nu_{\text{ISL}} = 1$ , et  $f_{\text{Mod}} \gg \Gamma$ .

## 2.3 Lien entre asservissement et mesure de rotation

Maintenant que nous savons comment obtenir un signal d'erreur, nous pouvons expliciter comment s'en servir pour mesurer des vitesses de rotation. Il existe deux types de fonctionnements de la mesure de rotation, dits en boucle ouverte ou en boucle fermée, que nous allons décrire ci-après.

### 2.3.1 Mesure en boucle ouverte

La mesure en boucle ouverte consiste à détecter la rotation directement sur le signal d'erreur de sortie du filtre passe-bas de démodulation pour un sens, l'autre sens étant asservi. La figure 2.14 présente un des fonctionnements possibles d'une mesure de rotation en boucle ouverte.

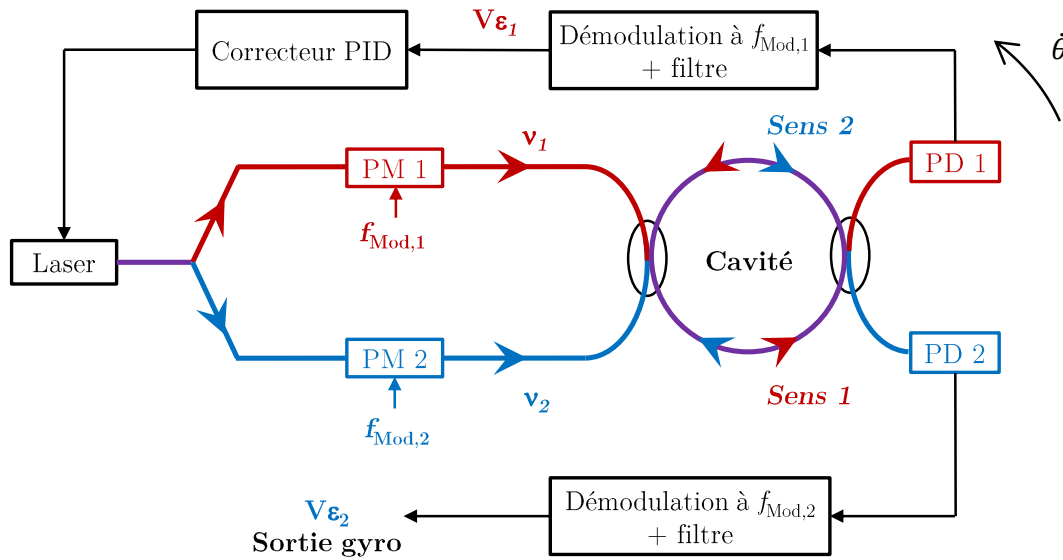


FIGURE 2.14 – Schéma représentatif d'un fonctionnement boucle ouverte du gyromètre résonant. On a choisi ici de le représenter en transmission. PM : Modulateur de phase, PD : photodiodes

Un asservissement est réalisé entre la cavité et le laser dans un des deux sens de circulation à l'intérieur de la cavité (ici le sens 1), au moyen du signal d'erreur récupéré précédemment. Cet asservissement peut être mis en œuvre de deux manières :

- On peut asservir la résonance de la cavité sur la fréquence du laser. Dans ce cas, le système à asservir sera la longueur de la cavité, qui pourra être modifiée au moyen d'une cale piézoélectrique insérée dans la cavité. Cela permet de modifier son intervalle spectral libre de sorte qu'une des résonances de la cavité suive les évolutions de la fréquence du laser.
- Ou alors, comme dans le cas de la figure 2.14, on peut asservir la fréquence du laser sur la résonance de la cavité. Dans ce cas, le système à asservir sera le laser lui-même, qui devra être accordable en fréquence au moyen d'un contrôle thermique ou mécanique. La rétroaction permettra de venir modifier la fréquence du laser de sorte que cette dernière suive une résonance de la cavité.

En reprenant les notations du chapitre 1, et en remarquant que sur le schéma présenté en figure 2.14 le sens 1 (respectivement le sens 2) est équivalent au sens '+' (respectivement au sens

'-') du chapitre précédent, on a les relations suivantes :

$$V_{\varepsilon_1} = G_{\text{tot}}K(\nu_1 - p\Delta\nu_{\text{ISL}_+}) = 0, \quad (2.42)$$

$$\nu_1 = p\Delta\nu_{\text{ISL}_+}, \quad (2.43)$$

$$\nu_2 = \nu_1, \quad (2.44)$$

$$V_{\varepsilon_2} = G_{\text{tot}}K(\nu_2 - p\Delta\nu_{\text{ISL}_-}). \quad (2.45)$$

On a supposé ici que les deux asservissements avaient la même pente  $G_{\text{tot}}K$ , sans expliciter la méthode d'asservissement sélectionnée et donc la valeur de la constante  $K$ . L'équation (2.42) se justifie par le fait que le laser est asservi en permanence à une fréquence de résonance de la cavité.

Le sens 1 étant asservi, on produit un signal d'erreur avec l'onde circulant dans le sens 2. Ce signal d'erreur ne sera pas utilisé pour un asservissement, mais pour la lecture directe de la vitesse de rotation. En effet, comme nous l'avons vu lors du chapitre 1, la cavité en rotation a des fréquences de résonance différentes dans chacun des sens de rotation. Si la cavité ne tourne pas, les résonances de la cavité dans les deux sens coïncident. Comme le laser est asservi sur la résonance dans le sens 1, le signal d'erreur dans le sens 2 sera nul. Si la cavité tourne, la fréquence du laser dans le sens 1 va suivre la résonance dans le sens 1. Cependant, comme la fréquence de résonance dans le sens 2 s'est décalée, le signal d'erreur du sens 2 sera non nul, car la fréquence du laser dans le sens 2 (qui est la même que celle dans le sens 1) ne coïncidera plus avec la résonance dans le sens 2. Le signal d'erreur correspond donc à la sortie du gyromètre et permet de venir directement mesurer la rotation. De ce fait, d'après le groupe d'équations (1.26) du chapitre 1, le signal de sortie du gyromètre résonant est donné par :

$$V_{\varepsilon_2} = G_{\text{tot}}Kp(\Delta\nu_{\text{ISL}_+} - \Delta\nu_{\text{ISL}_-}) = -G_{\text{tot}}K\Delta\nu_{\text{S}} = -G_{\text{tot}}K\frac{4A}{nL\lambda}\dot{\theta}.$$

La sortie du gyromètre résonant est donc bien directement proportionnelle à la rotation de ce dernier, et permet la mesure de rotation. La précision de la mesure de rotation dépend notamment de la rapidité et de la précision avec laquelle le laser va être asservi.

### 2.3.2 Mesure en boucle fermée

La mesure en boucle fermée consiste à asservir la fréquence du laser dans les deux sens de rotation de la cavité. La différence des fréquences asservies sera alors proportionnelle à la vitesse de rotation. Pour décaler la fréquence du laser dans un sens indépendamment de la fréquence laser dans l'autre sens, on utilise en général des modulateurs acousto-optiques (MAO). La figure 2.15 présente un exemple de fonctionnement d'une mesure de rotation en boucle fermée.

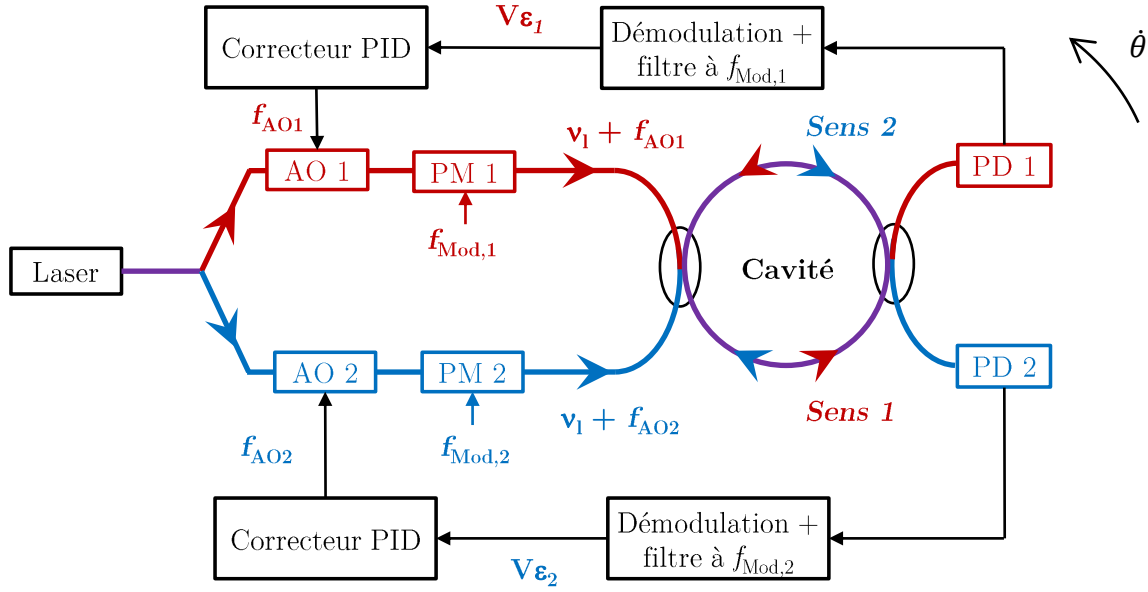


FIGURE 2.15 – Schéma représentatif du fonctionnement boucle fermée du gyromètre résonant. On a choisi ici de le représenter en transmission. PM : Modulateur de phase, AO : modulateurs acousto-optiques PD : photodiodes

Dans le cas présenté sur la figure 2.15, on suppose que les deux modulateurs acousto-optiques sont asservis sur le même mode, de sorte qu'on ait les relations :

$$V_{\varepsilon_1} = V_{\varepsilon_2} = 0, \quad (2.46)$$

$$\nu_1 + f_{AO1} = p\Delta\nu_{ISL+}, \quad (2.47)$$

$$\nu_1 + f_{AO2} = p\Delta\nu_{ISL-}. \quad (2.48)$$

Dans ce cas, c'est la mesure des fréquences de décalage  $f_{AO1}$  et  $f_{AO2}$  qui va permettre d'extraire la vitesse de rotation. En effet, d'après ce qui précède, on a :

$$f_{AO2} - f_{AO1} = p(\Delta\nu_{ISL-} - \Delta\nu_{ISL+}) = \Delta\nu_S = \frac{4A}{nL\lambda}\dot{\theta}.$$

La différence de fréquence de correction des modulateurs acousto-optiques est proportionnelle à la vitesse de rotation du système. Il est aussi possible de ne pas s'asservir sur le même mode avec les deux modulateurs acousto-optiques. Dans ce cas, la différence de fréquence entre les modulateurs acousto-optiques sera décalée d'un nombre entier d'intervalles spectraux libres, en plus du décalage dû à l'effet Sagnac.

Une autre architecture en boucle fermée consiste à asservir le laser sur la cavité (ou la cavité sur le laser) dans un sens de rotation, et à mesurer la rotation directement sur le décalage en fréquence du modulateur acousto-optique dans l'autre sens.



## 2.4 Bruits dans un gyro résonant passif

Nous venons de voir comment mesurer des rotations. La technique de mesure de rotation ainsi que la cavité résonante elle-même induisent des bruits sur cette mesure. C'est ce que nous allons décrire dans cette partie.

### 2.4.1 Bruit de grenaille

Le bruit de grenaille (aussi appelé bruit de photon, bruit de Schottky, ou *shot noise* en anglais) est un bruit blanc lié à la détection de la lumière. Lorsqu'une photodiode est éclairée par un flux lumineux d'intensité  $I_{\text{det}}$ , elle délivre un courant que l'on note  $i_{\text{det}}$  dont la valeur moyenne est donnée par :

$$i_{\text{det}} = \frac{\eta e \lambda}{hc} P_{\text{det}}, \quad (2.49)$$

avec  $\eta$  le rendement de détection de la photodiode,  $\lambda$  la longueur d'onde de la lumière incidente et  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C la valeur absolue de la charge d'un électron. La puissance incidente sur le détecteur  $P_{\text{det}}$  est proportionnelle à l'intensité lumineuse  $I_{\text{det}}$  de par la relation  $P_{\text{det}} = S \cdot I_{\text{det}}$ , avec  $S$  l'aire effective du faisceau<sup>6</sup>. Cette puissance incidente sur le détecteur va dépendre de l'asservissement réalisé, et n'est généralement pas égale à  $P_0$ , puissance incidente sur la cavité.

Le courant  $i_{\text{det}}$  est entaché d'un bruit  $i_{SN}$  (le bruit de grenaille) dont la valeur efficace est donnée par la formule :

$$i_{SN} = \sqrt{\frac{2e i_{\text{det}}}{\tau}}, \quad (2.50)$$

où  $\tau$  est le temps de réponse du système de détection du signal. Il est intéressant de convertir ce bruit de courant en bruit équivalent d'intensité lumineuse, noté  $I_{SN}$ , en entrée de la photodiode. Pour cela, il suffit d'utiliser les relations précédentes, et on obtient :

$$I_{SN} = \frac{i_{SN}}{\frac{\eta e \lambda}{hc} S} = \frac{1}{S} \sqrt{\frac{2hc}{\eta \lambda \tau} P_{\text{det}}}. \quad (2.51)$$

Ce bruit équivalent d'intensité lumineuse induira donc un bruit sur la chaîne de détection qui se retrouvera dans le signal d'erreur. En effet, comme le bruit est blanc, on retrouvera une de ses composantes à la fréquence de démodulation du système de détection de sorte que le bruit sur le signal d'erreur  $V_{\epsilon, SN}$  est donné par :

$$V_{\epsilon, SN} = \frac{G_{\text{tot}}}{\sqrt{2}} I_{SN} = \frac{G_{\text{tot}}}{S} \sqrt{\frac{hc}{\eta \lambda \tau} P_{\text{det}}},$$

---

6.  $S$  est l'aire effective du faisceau si le faisceau est spatialement plus petit que le détecteur, sinon,  $S$  représente l'aire du détecteur.

où le facteur  $\sqrt{2}$  vient du fait qu'une seule des quadratures du bruit blanc a été démodulée. La conséquence sur le bruit de détection de la fréquence de résonance sera alors donnée en fonction de l'asservissement choisi par :

$$\delta\nu_{\text{SN}} = \frac{1}{SK_i} \sqrt{\frac{hc}{\eta\lambda\tau} P_{\text{det}}},$$

avec  $K_i$  la pente du signal d'erreur de l'asservissement, qui dépend de la méthode d'asservissement choisie, car  $\delta V_\varepsilon = G_{\text{tot}} K_i \delta\nu_{\text{SN}} = V_{\varepsilon, \text{SN}}$ . Ce bruit est la limite ultime du bruit de marche au hasard des gyromètres résonants. En effet, comme on a, d'après l'équation (1.26),

$$\Delta\nu_{\text{S}} = \frac{4A}{nL\lambda} \dot{\theta},$$

l'erreur sur la mesure de rotation est alors donnée par :

$$\delta\dot{\theta}_{\text{SN}} = \frac{nL\lambda}{4A} \sqrt{2} \delta\nu_{\text{SN}} = \frac{nL}{4A} \frac{1}{SK_i} \sqrt{\frac{2hc\lambda}{\eta\tau} P_{\text{det}}}. \quad (2.52)$$

Le facteur  $\sqrt{2}$  de la formule vient du fait que les bruits provenant de chaque fréquence mesurée s'ajoutent de manière quadratique. La quantité  $\delta\dot{\theta}_{\text{SN}}\sqrt{\tau}$  correspond au bruit de marche au hasard angulaire du gyromètre, si celui-ci est limité par le bruit de grenaille. Plus la pente de l'asservissement choisi  $K_i$  sera importante, plus faible sera la limite liée au bruit de grenaille.

### Expression du bruit de grenaille en asservissement PDH

Dans le cas où la technique d'asservissement PDH est choisie, la pente  $K_i$  est donnée par l'équation (2.39), et le bruit de grenaille est alors donné par :

$$\delta\dot{\theta}_{\text{SN}} = \frac{nL}{4A} \frac{(1 - r_1 g)^2 \Delta\nu_{\text{ISL}}}{4P_0 \cdot J_0(\beta) J_1(\beta) \sqrt{1 - \gamma_1^2} g (1 - r_1^2) \pi} \sqrt{\frac{2hc\lambda}{\eta\tau} P_{\text{det}}},$$

car  $I_0 S = P_0$ ,  $P_0$  étant la puissance incidente du laser sur la cavité.

L'annexe D.5 présente le calcul de la puissance incidente sur le détecteur dans le cas d'un asservissement PDH avec une amplitude de modulation  $\beta = 1,08$  rad. Cette dernière est donnée par :

$$P_{\text{det}} = \frac{P_0}{2} \left[ \frac{I_{\text{R,Min}}}{I_0} + 1 \right] \quad (2.53)$$

D'autre part, on a  $J_0(\beta)^2 \simeq J_1(\beta) \simeq 1/2$  pour  $\beta = 1,08$  rad. Donc on peut écrire que la marche au hasard angulaire, limitée par le bruit de grenaille, est égale à :

$$\delta\dot{\theta}_{\text{SN}}\sqrt{\tau} = \frac{nL}{4A} \frac{(1 - r_1 g)^2 \Delta\nu_{\text{ISL}}}{\sqrt{1 - \gamma_1^2} g (1 - r_1^2) \pi} \sqrt{\frac{hc\lambda}{2\eta P_0} \left[ \frac{I_{\text{R,Min}}}{I_0} + 1 \right]}. \quad (2.54)$$

### Remarque sur l'approximation des faibles pertes

Dans l'approximation des faibles pertes ( $g = r_2$ ), avec deux miroirs identiques ( $r_1 = r_2 = r$ ), on a, d'après l'équation (2.40) :

$$K_3 = 4I_0 \cdot J_0 J_1 \frac{1}{\Gamma},$$

et

$$I_{R, \text{Min}} = 0.$$

En remplaçant  $K_i$  par cette valeur dans l'équation (2.52), on retrouve alors l'expression de notre article [60]<sup>7</sup> de la marche au hasard angulaire limitée par le bruit de grenaille :

$$\delta\dot{\theta}_{\text{SN}}\sqrt{\tau} = \frac{nL}{4A}\Gamma\sqrt{\frac{hc\lambda}{2\eta P_0}}.$$

Notons que la plupart des groupes de recherche utilisent une autre formule pour exprimer le bruit de grenaille, qui est donnée sans démonstration dans l'article d'Ezekiel et al. [2] :

$$\delta\dot{\theta}_{\text{SN}} = \frac{nL\lambda}{4A}\Gamma\sqrt{\frac{2}{N\eta\tau}},$$

avec  $N = \frac{P_{\text{det}}\lambda}{hc}$  le flux de photons arrivant sur le détecteur. Cette formule diffère de la nôtre car il n'y est pas tenu compte de l'asservissement qui a une influence sur l'expression du bruit de grenaille.

### 2.4.2 Effet Kerr

Un autre bruit limitant la performance des gyromètres résonants à fibre est l'effet Kerr [61, 62, 63]. Cet effet correspond à un changement de l'indice du cœur d'une fibre optique avec la puissance optique qu'on lui injecte. En effet, la différence d'indice entre les deux sens de propagation est donnée par [12] :

$$\Delta n_{\text{Kerr}} = n_2 \frac{\Delta P}{\sigma},$$

avec  $n_2$  l'indice effectif non linéaire de la fibre optique,  $\sigma$  l'aire effective du mode guidé et  $\Delta P$  la différence de puissance optique entre les ondes contrapropagatives, à l'intérieur de la cavité. La différence de fréquence de résonance correspondante est alors donnée par :

$$\delta\nu_{\text{Kerr}} = \frac{c}{\lambda n_0} \Delta n_{\text{Kerr}} = \frac{c}{\lambda n_0} n_2 \frac{\Delta P}{\sigma}.$$

---

7. que nous avons reproduit en annexe A.

L'erreur de mesure de la rotation sera donnée par :

$$\delta\dot{\theta}_{\text{Kerr}} = \frac{n_0 L \lambda}{4A} \delta\nu_{\text{Kerr}} = \frac{Lc}{4A} n_2 \frac{\Delta P}{\sigma}.$$

Cette erreur correspond à un biais non constant sur la mesure qui limite donc la stabilité de biais du gyromètre résonant. Il existe principalement deux solutions pour réduire l'impact de l'effet Kerr sur le signal de sortie du gyromètre résonant. On peut, d'une part, contrôler avec le plus grand soin la puissance relative intracavité dans chaque sens de circulation, de sorte que  $\Delta P = 0$ . Cette puissance intracavité étant liée à la puissance incidente sur la cavité, un contrôle actif (au moyen d'un asservissement) de la puissance intracavité permet de réduire l'effet Kerr [64]. Une autre technique pour annuler le biais dû à l'effet Kerr consiste à utiliser une fibre à cœur creux, qui a un indice non linéaire quasi nul [42], et ne présente donc pas d'effet Kerr.

Nous avons montré dans notre article [60], cité en annexe A, que diminuer le bruit dû à l'effet Kerr impose des contraintes sur la puissance incidente qui sont antagonistes avec celles imposées par la diminution du bruit de grenaille, à diamètre de cavité fixé. Ces contraintes sont d'autant plus restrictives que la cavité a un diamètre faible et remettent en cause la possibilité de réaliser un microgyromètre résonant passif à haute performance avec les technologies actuelles d'optique intégrée.

### 2.4.3 Rétrodiffusion

La rétrodiffusion est le fait qu'une partie de la lumière circulant dans un sens de la cavité est diffusée par les composants de la cavité (miroir ou fibre optique) et se retrouve guidée dans l'autre sens de la cavité. Comme de la lumière est envoyée dans les deux sens de rotation de la cavité, la portion rétrodiffusée va interférer avec l'onde circulant déjà dans ce sens. Cette interférence sera plus amplement décrite au chapitre 4. Elle est source de ce qu'on appelle la "zone aveugle" qui interdit la mesure des faibles vitesses de rotation du système.

Il existe cependant plusieurs techniques pour s'affranchir de ce bruit. La plupart des équipes de recherche travaillent, comme nous l'avons dit, en situation de suppression de la porteuse [2, 65]. En effet, le bruit de rétrodiffusion est dû au fait qu'il y a deux ondes à la même fréquence circulant en sens opposé dans la cavité. Supprimer la porteuse dans les deux sens, c'est supprimer la présence de deux ondes à la même fréquence dans la cavité. Les interférences ayant lieu seront alors entre les bandes latérales créées par la modulation. Il suffit que les fréquences de modulation soient différentes pour les deux sens pour que leurs battements soient filtrés par le filtre passe-bas de démodulation.

Une autre manière de faire consiste à décaler la fréquence du laser dans une des branches, à l'aide d'un modulateur acousto-optique, de quelques dizaines de kHz. De la sorte, en boucle

ouverte, le signal d'erreur est biaisé d'une quantité constante et empêche, même en rotation, que les deux fréquences présentes intracavité soient égales [5].

Enfin, une dernière possibilité est de ne pas s'asservir sur le même mode de la cavité. En utilisant des modulateurs acousto-optiques, il est possible de décaler les fréquences lasers dans chaque branche d'un (ou plusieurs) intervalle spectral libre de sorte que, là aussi, le battement dû à la rétrodiffusion puisse être filtré [66].

#### 2.4.4 Effets de la polarisation de la lumière

Nous n'en avons pas encore parlé jusqu'à présent, mais toutes les analyses que nous venons de faire sur les cavités résonantes et leurs fonctions de transfert présupposent qu'il n'y a qu'un seul état de polarisation rectiligne qui se propage à l'intérieur de la cavité. Or, dans le cas où la cavité se compose d'une fibre optique à maintien de polarisation, cette dernière présente deux axes propres de polarisation. On les appelle axe lent et axe rapide, et ils présentent des polarisations linéaires orthogonales, ainsi que des indices effectifs différents.

En théorie, si la lumière est polarisée selon l'un de ces deux axes en entrée de la fibre, elle y reste jusqu'à la fin de sa propagation. Son état de polarisation est donc maintenu d'un bout à l'autre de la fibre. En pratique, il y a toujours un peu de couplage entre les deux états fondamentaux de polarisation, et donc un peu de lumière se retrouve toujours dans l'autre état de polarisation. Cela a pour effet d'introduire un biais non constant sur le signal de sortie du gyromètre [67], et donc de dégrader les performances de ce dernier. En effet, la présence d'une polarisation secondaire dans la cavité vient déformer la fonction de transfert de la cavité, et donc déformer le signal d'erreur. Cette déformation dépend de la température et donc induit un biais non constant sur le gyromètre. La figure 2.16 illustre la déformation de la résonance au cours du temps par la polarisation parasite.

Une des premières solutions envisagées, dès les années 1990, a été d'introduire à l'intérieur de la cavité une soudure à 90deg entre deux extrémités de la fibre, au milieu du trajet de la lumière dans la cavité [68]. Cette position de soudure impose un fonctionnement en réflexion du gyromètre. La figure 2.17 illustre la soudure réalisée sur la fibre. Dans cette configuration, on moyenne les fuites sur l'axe lent et l'axe rapide, et la résonance de la cavité n'est plus déformée. Les effets de la température sur le signal d'erreur du gyromètre résonant passif sont donc atténués.

Cependant, cette soudure intracavité ne permet de réduire que partiellement le bruit dû à la polarisation parasite. C'est pourquoi il a été proposé plus tard, dans les années 2010, d'introduire une seconde soudure à 90deg intracavité [69]. Dans ce cas, les deux soudures sont disposées comme le montre la figure 2.18. Une observation en transmission de la cavité résonante est alors nécessaire. L'équipe de recherche de Ma et al. [70] a démontré qu'une double soudure donne des variations de biais moins importantes qu'une soudure simple.

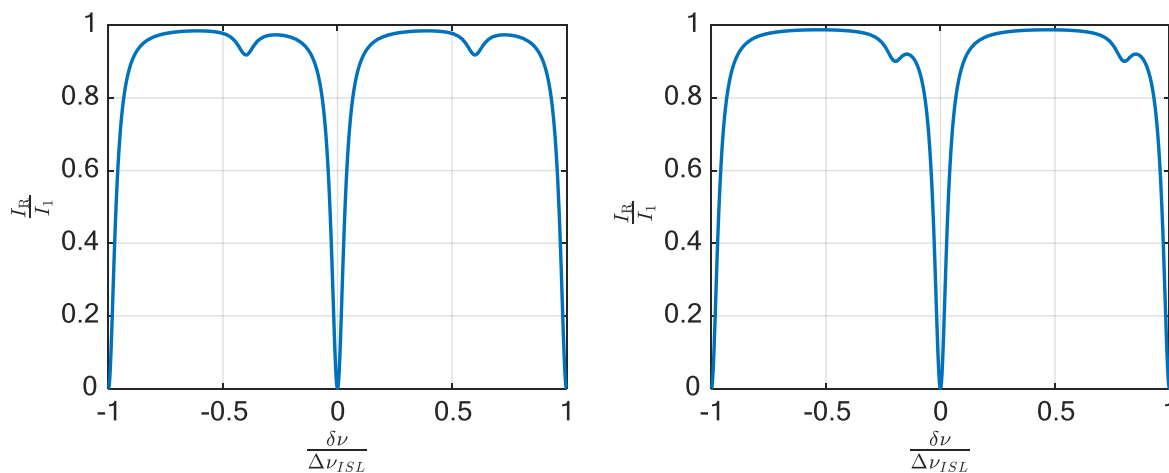


FIGURE 2.16 – Représentation de l'intensité réfléchi par la cavité pour deux écarts en fréquence entre la polarisation parasite et la polarisation principale. La position du creux de résonance parasite dépend très fortement de la température, et vient induire un biais non constant sur le signal d'erreur.

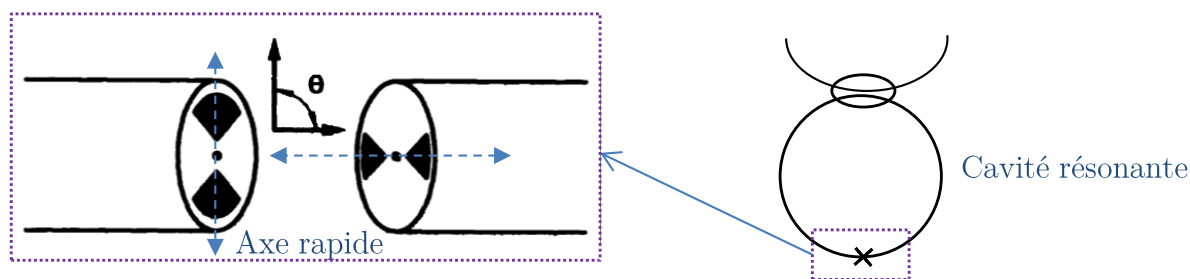


FIGURE 2.17 – Schéma représentatif de la soudure à 90deg, la partie gauche du schéma étant tirée de [68].

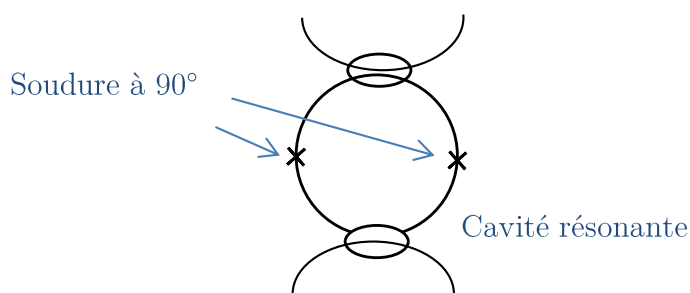


FIGURE 2.18 – Position des deux soudures à 90deg dans une cavité en transmission.

Une autre solution pour limiter les effets délétères de la polarisation parasite consiste à contrôler la température de la cavité résonante très précisément, afin que le biais introduit par la polarisation reste constant. Enfin, on peut aussi utiliser des polariseurs intra cavité, voire des fibres polarisantes (comme dans [71]) afin d'éliminer au mieux la polarisation parasite intracavité.

### 2.4.5 Amplitude de modulation résiduelle

L'amplitude de modulation résiduelle provient directement des modulateurs de phase [72]. Ces derniers n'étant pas parfaits, on observe un déséquilibre d'amplitude sur les bandes latérales créées par la modulation. Ce déséquilibre vient créer un biais sur le signal d'erreur et entacher la mesure de rotation. Il nécessite donc aussi un contrôle actif des modulateurs de phase, dont on peut maîtriser l'amplitude de modulation résiduelle par un contrôle actif de la tension de biais appliquée au modulateur [73]. Nous détaillerons au chapitre 5 la manière dont peut être réalisé ce contrôle actif. Mentionnons aussi les développements récents de modulateurs de phase à amplitude de modulation résiduelle réduite [74], qui ouvrent des perspectives attractives pour notre application.

## 2.5 État de l'art des gyromètres passifs résonants actuels

Un état de l'art exhaustif sur les gyromètres passifs résonants est assez difficile à faire étant donné que c'est un domaine qui est en constante évolution avec les avancées de la technologie. En effet, à chaque nouveau progrès technologique est associée une nouvelle génération de gyromètres résonants développés par les groupes de recherche.

L'état de l'art que nous proposons ici sera centré sur quatre types de gyromètres résonants passifs, reposant sur quatre technologies différentes :

- le gyromètre résonant en espace libre, composé uniquement de miroirs, comme présenté en figure 2.1 (a), qui a été le premier à être mis en œuvre par Ezekiel [1],
- le gyromètre résonant en fibre de silice, composé d'une fibre optique à maintien de polarisation ou polarisante, qui a rapidement été développé avec l'essor des fibres optiques à faibles pertes de propagation (développées principalement pour les communications),
- le microgyromètre résonant (RMOG), où la cavité résonante a un diamètre de l'ordre du centimètre,
- et enfin, le gyromètre en fibre à cœur creux (HC RFOG), qui a suivi l'essor de ces fibres au cours des 20 dernières années.

Nous présentons dans le tableau 2.3 les meilleurs résultats en termes de stabilité de biais et de marche au hasard angulaire (ARW) de chacun de ces types de gyromètres résonants passifs.

Chacune de ces cavités appelle un commentaire, que ce soit en termes de technologie d'asservissement, de technique de réduction de bruit ou de limitations théoriques, et c'est l'objet des parties ci-après.

Notons que les résultats présentés par les différents groupes de recherche sont à regarder avec un certain recul, car les conditions dans lesquelles les mesures ont été faites ne sont pas

Type Gyro	Auteur	Cavité	Laser	Performances
Air Libre	Sanders – 1981 [1,2]	$\mathcal{F} = 980$ $L = 68$ cm $\Gamma = 450$ kHz $\Delta\nu_{\text{ISL}} = 441$ MHz $\text{Aire} = 289$ cm <sup>2</sup>	He-Ne $\lambda = 632,8$ nm	ARW = $0,54$ °/ $\sqrt{h}$ ( $\tau = 4$ s) ARW = $1,4$ °/ $\sqrt{h}$ ( $\tau = 90$ s)  Stab. Biais = $10^\circ/\text{h}$ sur 1 h
Fibre en Silice	Sanders – 2017 [3,4]	$\mathcal{F} = 35$ $L = 100$ m $\Gamma = 57$ kHz $\Delta\nu_{\text{ISL}} = 2$ MHz $\text{Aire} = 20,3$ cm <sup>2</sup>	Laser diode $\lambda = 1,55$ $\mu\text{m}$ (probablement)	ARW = $0,0029$ °/ $\sqrt{h}$ ( $\tau = ?$ ) Stab. Biais = $0,02$ °/h sur 2 h
	Qiu -2014 (Sanders) [5]	$\mathcal{F} = ---$ $L = 19$ m $\Gamma = ---$ $\Delta\nu_{\text{ISL}} = 11$ MHz $\text{Aire} = 104$ cm <sup>2</sup>	$\lambda = 1,55$ $\mu\text{m}$	ARW = $0,0077$ °/ $\sqrt{h}$ ( $\tau = 0,1$ s) Stab. Biais = $0,1$ °/h sur 2 h
Micro gyromètre résonant	Liang – 2017 (Maleki) [6]	$\mathcal{F} = 10^5$ $L = 2.2$ cm $\Gamma = 94$ kHz $\Delta\nu_{\text{ISL}} = 9,4$ GHz $\text{Aire} = 0,38$ cm <sup>2</sup>		ARW = $0,02$ °/ $\sqrt{h}$ ( $\tau = 0,1$ s) Stab. Biais = $3$ °/h sur 60 h
	Ma – 2015 [7]	$\mathcal{F} = 202$ $L = 60$ cm $\Gamma = 1,7$ MHz $\Delta\nu_{\text{ISL}} = 345$ MHz $\text{Aire} = 17,9$ cm <sup>2</sup>		ARW = $0,64$ °/ $\sqrt{h}$ ( $\tau = 50$ s) Stab. Biais = $9,6$ °/h sur 30 min
Fibre à cœur creux	Jiao – 2017 (Feng) [8, 9]	$\mathcal{F} = 12$ $L = ---$ $\Gamma = ---$ $\Delta\nu_{\text{ISL}} = ---$ $\text{Aire} = ---$		ARW = $0,075$ °/ $\sqrt{h}$ ( $\tau = 300$ s) Stab. Biais = $1,3$ °/h sur 1h

TABLE 2.3 – Tableau récapitulatif de l'état de l'art des performances des gyromètres résonants en fonction de la cavité utilisée. ARW = Marche Aléatoire Angulaire. Stab. Biais = stabilité du biais. La valeur de  $\tau$  indique le temps d'intégration de la mesure. L'aire correspond à l'aire encerclée par la cavité résonante. Les valeurs en violet dans le tableau ont été déduites des données de l'article, et non indiquées dans ce dernier.

toujours bien précisées, notamment au niveau environnemental. On n'a, par exemple, aucune information sur un contrôle de température ou des vibrations au cours des mesures présentées.



### 2.5.1 Années 1970-80 : les cavités air libre [1, 2]

La figure 2.19 présente un schéma de la cavité résonante développée et étudiée par le groupe de recherche d'Ezekiel et Sanders dans les années 70-80. La cavité se compose de quatre miroirs (deux plans, deux concaves) disposés en carré de 70 cm de côté. Elle est observée en transmission.

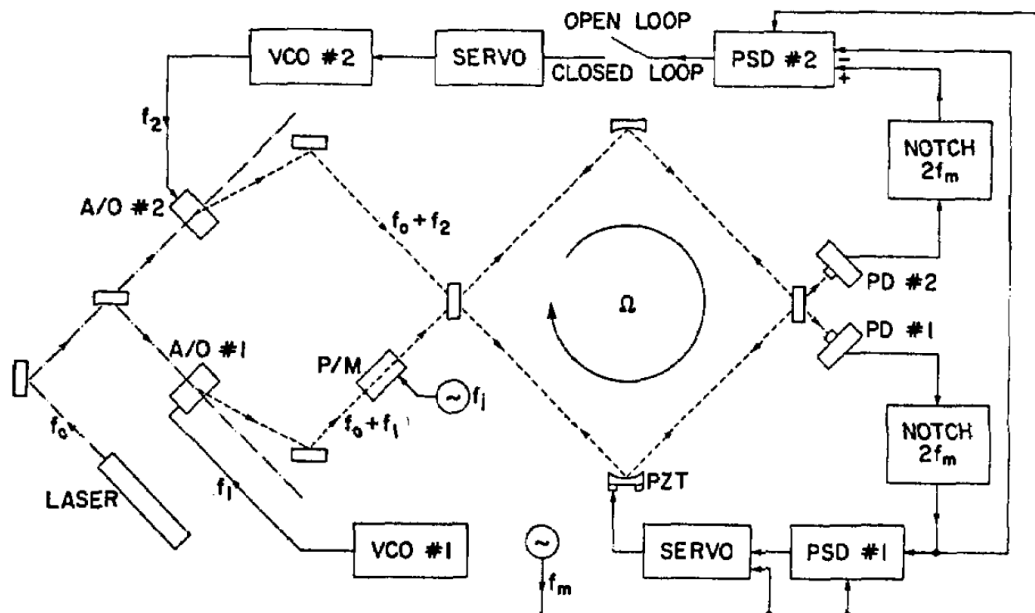


FIGURE 2.19 – Figure de la cavité résonante et de l'asservissement mis en place par Ezekiel et al, tiré de [2].

La mesure de la rotation est réalisée en boucle fermée. La longueur de la cavité (et donc sa fréquence de résonance) est asservie sur la fréquence optique du laser avec une onde lumineuse circulant dans le sens 1, qui est le sens de définition de la rotation  $\Omega$  sur le schéma figure 2.19. Ce sens est aussi appelé CW pour *clockwise* en anglais. Notons que  $\Omega$ , qui est ici la vitesse de rotation, est défini sur le schéma comme étant positive dans le sens indirect (CW). Une cale piézoélectrique collée sur l'un des miroirs de la cavité, et modulée à la fréquence  $f_m$  permet d'asservir la longueur de la cavité. Un modulateur acousto-optique dans le sens 2 est alors asservi sur la résonance de la cavité dans le sens 2 (ou CCW, pour *counter-clockwise* en anglais). Les deux asservissements réalisés sont de type modulation de fréquence avec la même fréquence de modulation  $f_m = 32 \text{ kHz} < \Gamma = 450 \text{ kHz}$ .

Une des premières sources d'erreur dans une cavité en espace libre provient du désalignement des faisceaux optiques avec le mode fondamental de la cavité. En effet, si les faisceaux ne sont pas bien alignés sur le mode fondamental de la cavité résonante, les modes d'ordres supérieurs viennent bruyter la mesure. La contre-mesure des auteurs de l'article a été d'utiliser des montures ultra stables, pour éviter tout désalignement. Un autre bruit provient de la rétrodiffusion des miroirs. Ce bruit a été atténué en insérant un modulateur de phase (modulé à la fréquence

$f_j = 4$  kHz) sur l'un des bras de manière à pouvoir supprimer la porteuse, ce qui a diminué le bruit sur le signal de rotation.

### 2.5.2 Années 1980 à nos jours : les cavités à fibre optique en silice

La première cavité résonante en fibre de silice pour la gyrométrie a été développée en 1983, encore par le groupe d'Ezekiel [51]. Ce genre de cavité a depuis connu un essor important et est développé par des groupes comme celui de Hotate et al. au Japon [52, 75] ou Ma et al. en Chine [76, 77].

#### 2.5.2.1 Cavité hybride avec un coupleur espace libre [3, 4]

Le meilleur résultat en termes de performance pour une cavité à fibre en silice, présenté dans le tableau 2.3, est détenu par le groupe de Sanders et al. [3, 4]. La figure 2.20 présente la cavité résonante utilisée, ainsi que l'asservissement réalisé.

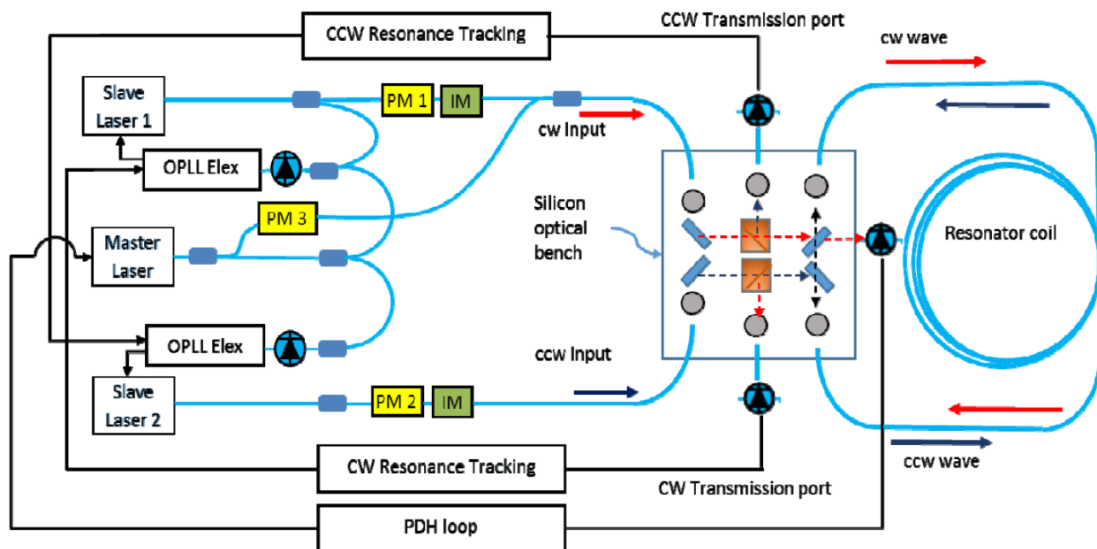


FIGURE 2.20 – Figure de la cavité résonante et de l'asservissement mis en place par Sanders et al, du groupe Honeywell tiré de [4].

La particularité de cette cavité est qu'elle est hybride, dans le sens où elle est composée d'une fibre optique en silice à maintien de polarisation, mais le coupleur n'est pas fibré. C'est une monture en silicium, composé de 6 lentilles boules (pour la collimation et focalisation des faisceaux lasers), quatre miroirs (servant de coupleur d'entrée et/ou de sortie pour les différents faisceaux injectés dans la cavité) et deux cubes séparateurs de polarisation (pour contrôler cette dernière).

La mesure de la rotation se fait en configuration dite à trois ondes car il y a trois faisceaux circulant dans la cavité. Deux faisceaux dans le sens 1 (CW), et un faisceau dans le sens 2 (CCW). Ici, les trois faisceaux proviennent de trois lasers différents. Deux de ces lasers (dits "esclaves")

sont asservis en phase sur le troisième (laser "maître"), de sorte à pouvoir faire varier de manière continue leur fréquence par rapport à celle du laser maître. Le laser maître est modulé en phase (grâce au PM3 sur le schéma figure 2.20) puis recombinaison avec un des deux lasers esclaves (lui aussi modulé en phase, grâce au PM1) et injecté dans le sens 1 (CW) de la cavité. L'autre laser esclave est modulé en phase par le PM2 et est injecté dans le sens 2 (CCW) de la cavité. Les trois fréquences de modulation sont différentes les unes des autres pour pouvoir récupérer un signal d'erreur correspondant à chacun des lasers. La différence de fréquence d'émission entre les deux lasers esclaves sera donc proportionnelle à la vitesse de rotation de la cavité.

Les deux lasers esclaves sont asservis grâce à l'observation en transmission de la cavité (la fréquence de modulation de leur phase est donc plus petite que la largeur de raie de la cavité), tandis que le laser maître est asservi grâce à la réflexion de la cavité (en asservissement PDH).

Le bruit dû à la rétrodiffusion est corrigé ici par le fait que les deux lasers esclaves ne sont pas asservis sur la même fréquence de résonance de la cavité. Un intervalle spectral libre les sépare.

Le bruit dû à la polarisation a été diminué par l'ajout de deux polariseurs en entrée/sortie de la cavité, qui permettent de filtrer la fuite sur l'autre état de polarisation de la fibre optique en sortie de la cavité.

L'effet Kerr est ici contrôlé par des modulateurs d'intensité qui permettent de contrôler activement la puissance injectée dans chacun des bras du résonateur.

### 2.5.2.2 Cavité entièrement fibrée avec coupleur en fibre de silice [5]

La cavité résonante, présentée en figure 2.21 est composée exclusivement de fibre à maintien de polarisation. Elle est sondée en transmission, et les coupleurs sont ici fibrés.

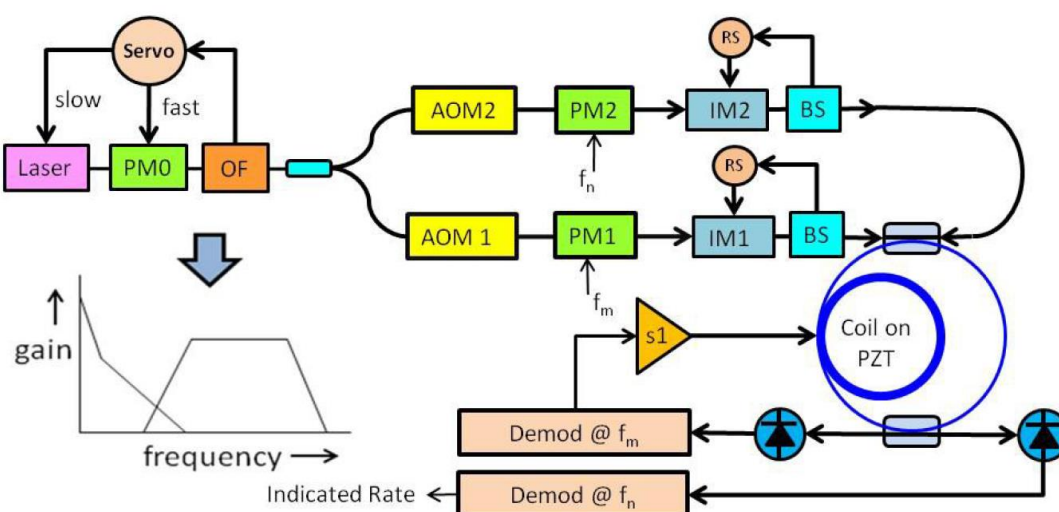


FIGURE 2.21 – Figure de la cavité résonante et de l'asservissement mis en place par Sanders et. al, du groupe Honeywell tiré de [5].

La mesure de rotation est faite en boucle ouverte. Le laser est séparé en deux voies au moyen d'un coupleur 50/50. La cavité est asservie sur la fréquence du laser dans un sens au moyen d'une cale piézoélectrique, mais cette dernière n'est pas modulée puisque ce sont deux modulateurs de phase qui le sont, un dans chaque branche. L'autre sens est démodulé et la sortie de cette démodulation est lue comme étant la sortie du gyromètre. Comme la cavité est observée en transmission, les fréquences de modulation doivent être inférieures à la largeur de raie de la cavité résonante.

Pour limiter le bruit de fréquence du laser, qui est un bruit limitant en termes de modulation de phase, ce dernier est asservi sur une résonance d'une cavité de Fabry-Pérot de faible largeur de raie (160 kHz) par un asservissement PDH. La sortie en transmission de cette cavité de Fabry-Pérot devient la sortie du laser qui a alors une faible largeur de raie, et un plus faible bruit de fréquence. L'effet Kerr est aussi contrôlé ici au moyen de modulateurs d'intensité qui permettent d'équilibrer la puissance dans chacun des bras du gyromètre. L'effet de la rétrodiffusion est annulé grâce à la présence de deux modulateurs acousto-optiques (un dans chaque bras) dont on suppose qu'ils servent à séparer les fréquences d'un intervalle spectral libre de la cavité (non précisé dans l'article).

### 2.5.3 Années 2000 à nos jours : les microgyromètres résonants

Le premier microgyromètre résonant date de 1983 et était basé sur un résonateur intégré en polyméthacrylate de méthyle [78]. Cependant, ce n'est qu'à partir des années 2000 que les microgyromètres résonants ont été massivement développés dans les groupes de recherche, en s'appuyant sur diverses nouvelles technologies en optique intégrée.

#### 2.5.3.1 Résonateur à modes de galerie [6]

La cavité est ici un résonateur cristallin sur puce en  $\text{CaF}_2$ . La figure 2.22 présente un schéma de la cavité et de son asservissement. La cavité résonante est un résonateur à modes de galerie (*Whispering gallery mode resonator* en anglais). La lumière est injectée dans le résonateur au moyen de prismes et de lames séparatrices. Ce type de résonateur est observé en réflexion.

La mesure de rotation se fait en boucle ouverte. Le laser est modulé en phase à l'intérieur de la largeur de raie et la fréquence de modulation est la même pour les deux voies. Le laser est asservi sur la cavité dans le sens 1 de rotation, et le sens 2 est démodulé pour obtenir le signal de sortie du gyromètre.

Un des effets qui limitent les performances de ce gyromètre est l'interaction entre les différents modes de la cavité résonante. La lumière qui se couple dans les ordres supérieurs (de manière non symétrique entre les deux sens de propagation) est source de dérive de biais dans le signal de sortie du gyromètre. C'est pourquoi un alignement parfait sur le mode fondamental de la

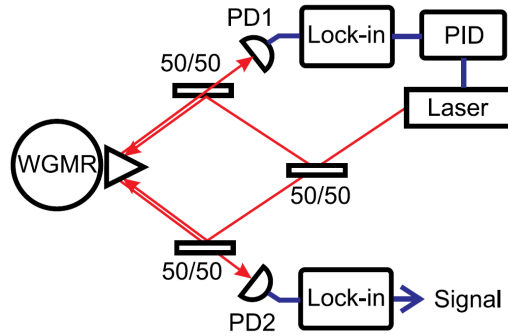


FIGURE 2.22 – *Figure de la cavité résonante et de l'asservissement mis en place par Maleki et. al, [6].*

cavité est crucial. L'effet Kerr a été réduit en stabilisant la puissance dans chacun des bras au nanowatt près, sur une puissance totale injectée sur la cavité de  $80 \mu\text{W}$ .

### 2.5.3.2 Micro gyromètre résonant en fibre optique [7]

La figure 2.23 présente la cavité résonante. Elle est ici hybride, dans le sens où le laser, les modulateurs de phase et le coupleur sont sur puce photonique intégrée, mais la cavité elle-même est une fibre optique classique à maintien de polarisation, incorporée sur un substrat en silicium.

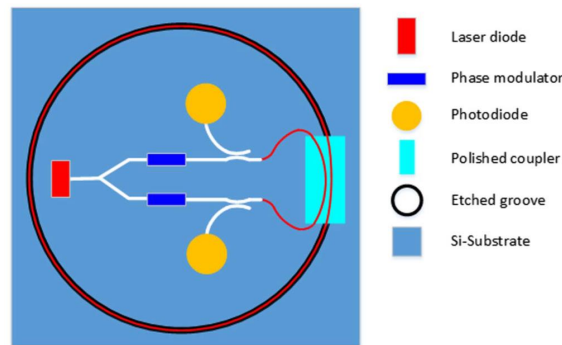


FIGURE 2.23 – *Figure de la cavité résonante et de l'asservissement mis en place par Ma et. al, [7].*

La lecture de la rotation se fait en boucle ouverte : le laser est asservi sur la résonance de la cavité dans le sens 1 et la rotation est lue sur le signal d'erreur du sens 2. La cavité est observée en réflexion. La rétrodiffusion est corrigée au moyen de quatre modulateurs de phase (deux dans chaque voie) qui sont tous modulés en suppression de porteuse de manière à atteindre une meilleure suppression. D'après l'article, c'est le bruit de fréquence du laser qui limite la stabilité du biais du gyromètre.

### 2.5.4 Années 2010 à nos jours : Cavités en fibre à cœur creux [8, 9]

Ce sont Sanders et al. [42] qui, les premiers, suggérèrent d'utiliser une fibre à cœur creux au sein de la cavité résonante, car cette dernière a l'avantage d'être très faiblement sensible à l'effet Kerr. La meilleure sensibilité pour un gyromètre résonant à base de fibre à cœur creux est détenue par Feng et al. [8]. La figure 2.24 présente la cavité résonante qu'ils ont utilisée.

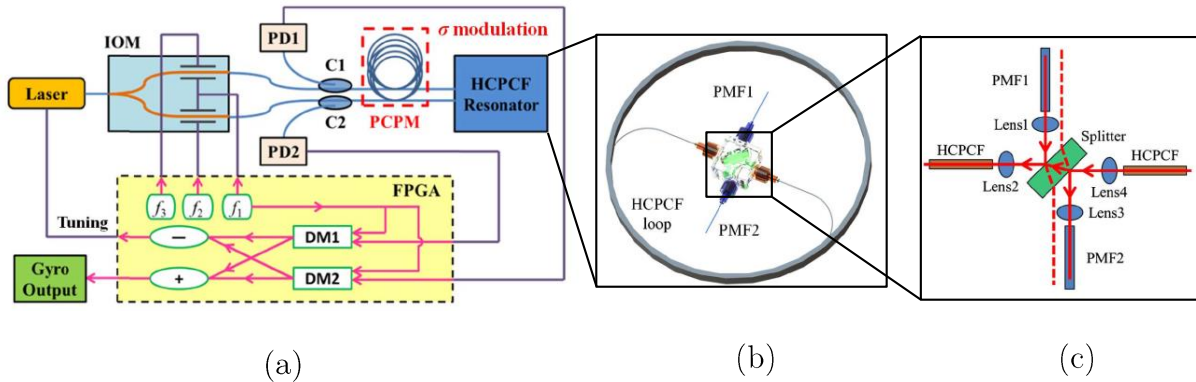


FIGURE 2.24 – Figure de la cavité résonante et de l'asservissement mis en place par Feng et al, [8]. (a) : Cavité et Asservissement général. (b) : Zoom sur la cavité résonante. (c) Zoom sur le coupleur fibre en silice (PMF) - fibre à cœur creux (HCPCF).

La nature de la fibre à cœur creux utilisée ici n'est pas précisée. La cavité est fermée au moyen d'un miroir qui sert de coupleur d'entrée et de sortie pour les deux ondes contrapropagatives. Cependant, l'utilisation dans le montage des deux faces de la lame séparatrice fait que la cavité est sondée en transmission et non en réflexion, malgré le fait qu'il n'y ait qu'un seul coupleur. Le système est ici de type boucle ouverte : le laser est asservi sur la cavité dans le sens 1, et la démodulation dans le sens 2 sert à la lecture de la rotation. Le bruit principal qui limite la rotation dans ce système est le bruit dû au deuxième état de polarisation dans la fibre à cœur creux.

## 2.6 Conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre les différentes technologies permettant de réaliser des gyromètres résonants passifs, ainsi que des méthodes de mesure de vitesse de rotation dans ces derniers. Nous avons passé en revue les principaux bruits limitant la détection de rotation dans ces systèmes tels que le bruit de grenaille, l'effet Kerr ou les bruits de polarisation. La technologie de la fibre à cœur creux semble prometteuse pour le développement de gyromètre à faible bruit car l'effet Kerr, qui nous semble être le bruit le plus difficile à corriger technologiquement, est inexistant dans ces dernières. C'est pourquoi c'est la technologie que nous avons sélectionnée pour cette thèse. Comme le montre le tableau 2.3, les performances actuelles de ce type de

gyromètre ne sont pas encore de classe inertielle. Cependant, comme nous allons le voir par la suite, ils ont le potentiel de les atteindre.

## Chapitre 3

---

# Étude et caractérisation de fibres à cœur creux pour la gyrométrie résonante

---

Comme nous l'avons montré au chapitre précédent, l'utilisation d'une fibre à cœur creux pour constituer la cavité résonante est une solution envisageable pour remédier aux limitations induites par l'effet Kerr dans les gyromètres résonants. C'est donc la solution vers laquelle nous nous sommes tournés. Le but de ce chapitre est, dans un premier temps, d'expliquer brièvement les mécanismes à l'origine du guidage de la lumière dans une fibre à cœur creux<sup>1</sup>. Ensuite, nous détaillerons les tests que nous avons réalisés sur cinq fibres à cœur creux, afin de déterminer laquelle était la plus adaptée à une application de gyrométrie. Enfin, nous détaillerons la limite théorique en bruit d'un gyromètre réalisé avec cette fibre optique en nous basant sur les caractéristiques de la cavité résonante associée.

Des tests préliminaires ont été réalisés sur des fibres Kagomé et à bande interdite photonique [79]. Les résultats de ces tests sont présentés en annexe B.

---

1. Notons ici que comme la technologie des fibres à cœur creux est récente, les processus de guidage au sein de ces fibres ne sont pas complètement compris, donc ce qui sera présenté dans ce chapitre est basé sur les modèles actuels de ces fibres, mais ces derniers peuvent être amenés à évoluer.



### 3.1 Introduction sur les fibres à cœur creux : principe de guidage

Le mécanisme de guidage de la lumière dans une fibre à cœur creux est différent de celui d'une fibre classique de silice. La figure 3.1 représente schématiquement une fibre classique à saut d'indice. Ce type de fibre est constituée d'un cœur d'indice  $n_c$ , dans lequel se propage la lumière, et d'une gaine d'indice  $n_g$  de telle sorte que  $n_c > n_g$ .

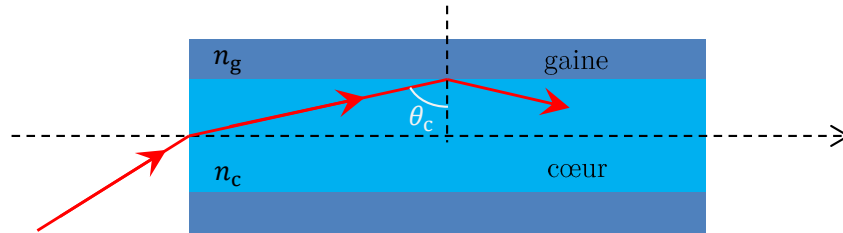


FIGURE 3.1 – Représentation schématique du mode de fonctionnement de guidage d'une fibre classique. L'angle de réfraction  $\theta_g$  n'a pas été représenté, puisqu'en cas de réflexion totale, il n'y a pas de réfraction dans la gaine.

Le principe de guidage d'une fibre classique repose sur le phénomène de la réflexion totale de la lumière à l'interface de deux milieux d'indice différents (ici  $n_g$  et  $n_c$ ). La réflexion totale ne peut avoir lieu, d'après la loi de Snell-Descartes<sup>2</sup>, qu'à condition que l'indice du cœur (milieu de propagation) soit supérieur à l'indice de la gaine (milieu de réfraction), et que l'angle d'incidence soit tel que  $\sin(\theta_c) \geq n_g/n_c$ . Dans le cas où ces conditions sont vérifiées, la lumière est guidée dans le cœur de la fibre, d'une extrémité à l'autre de cette dernière. Le principe de guidage par réflexion totale ne peut donc pas avoir lieu pour un cœur d'air, car l'indice de l'air est proche de 1, et donc nécessairement inférieur à celui de la gaine.

Les fibres à cœur creux que nous avons étudiées sont des fibres à cristal photonique, c'est-à-dire que leur structure interne est spatialement périodique.

Le principe de guidage dans une fibre à cristal photonique repose essentiellement sur l'utilisation de réseaux de Bragg. Un réseau de Bragg à une dimension est présenté en figure 3.2 (a). C'est une alternance de couches minces d'indices différents  $n_1$  et  $n_2$ . Le pas du réseau  $\Lambda$  correspond à la période spatiale d'espacement entre deux couches de même indice. Supposons qu'une onde lumineuse arrive sur ce réseau avec un angle  $\theta$ . Il existe une longueur d'onde  $\lambda_B$  vérifiant :

$$\lambda_B = 2\Lambda \cos(\theta),$$

telle que les interférences des ondes réfléchies par les multiples interfaces  $n_1/n_2$  soient constructives. Dans ce cas, le réseau agit comme un miroir dont le coefficient de réflexion dépend de

---

2.  $n_c \sin(\theta_c) = n_g \sin(\theta_g)$

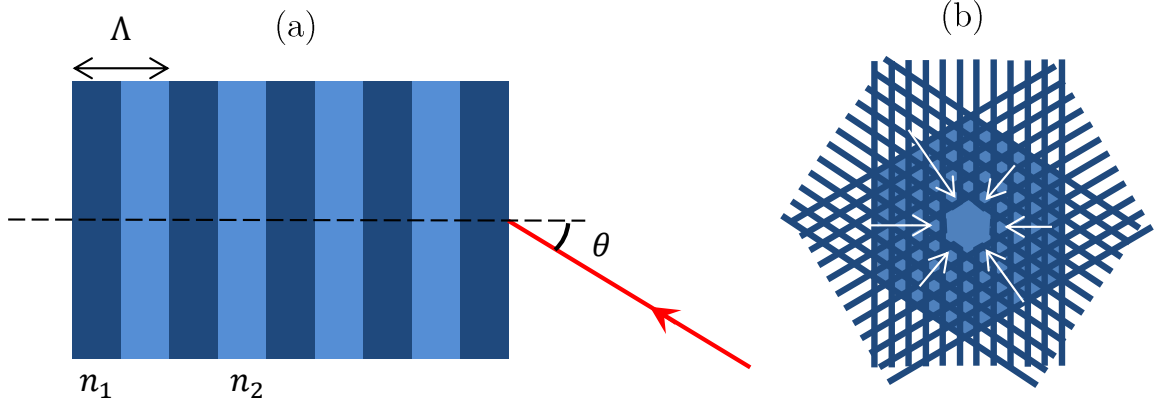


FIGURE 3.2 – (a) : Représentation schématique du mode de fonctionnement d'un réseau de Bragg.  $\Lambda$  représente le pas du réseau, et  $\theta$  l'angle d'incidence de la lumière sur le réseau. (b) : Représentation schématique de plusieurs réseaux de Bragg entremêlés en deux dimensions. La partie centrale d'indice  $n_2$  représente le cœur où la lumière est stockée car se réfléchissant sur les parois avoisinantes.

la valeur relative des indices  $n_1$  et  $n_2$ . En agencant spatialement plusieurs réseaux de Bragg, comme sur la figure 3.2 (b) par exemple, on obtient, pour une longueur d'onde donnée, plusieurs directions de réflexion (représentés par les flèches en blanc sur la figure). Si le milieu d'indice  $n_2$  de la figure 3.2 (b) est de l'air, alors on peut guider la lumière dans le cœur (creux) de la fibre. Cependant, le phénomène de réflexion par miroir de Bragg présente beaucoup de pertes de propagation. Il ne permet donc pas, à lui seul, d'expliquer le processus physique de guidage à faibles pertes de propagation des fibres à cœur creux.

Nous nous sommes intéressés au cours de cette thèse à deux types de fibres à cristaux photoniques : les fibres à bandes interdites photoniques (PBG pour *Photonic Band Gap* en anglais) et les fibres Kagomé. Nous allons détailler par la suite les processus physiques à l'origine du guidage à faibles pertes dans chacune de ces fibres.

### 3.1.1 Fibre à bande interdite photonique

La bande interdite, en physique du solide, est une plage d'énergies que les électrons ne peuvent pas prendre au sein d'un solide. En optique, la bande interdite photonique est une plage de longueurs d'onde que la lumière ne peut pas prendre au sein d'un cristal photonique.

On définit par densité d'états photoniques de gaine  $\rho(k, n_{\text{eff}})$  le nombre de modes électromagnétiques solutions des équations de Maxwell par cellule élémentaire de fibre et par unité de longueur axiale (transverse à la direction de propagation de la fibre) sur une plage infinitésimale de nombre d'onde et une plage infinitésimale d'indice effectif ( $n_{\text{eff}}$ ). Si on pose  $\vec{e}_z$  l'axe de la fibre, alors on peut écrire que son vecteur d'onde  $\vec{k}$  est donné par :

$$\vec{k} = k_{\perp} \vec{e}_{\perp} + k_z \vec{e}_z. \quad (3.1)$$

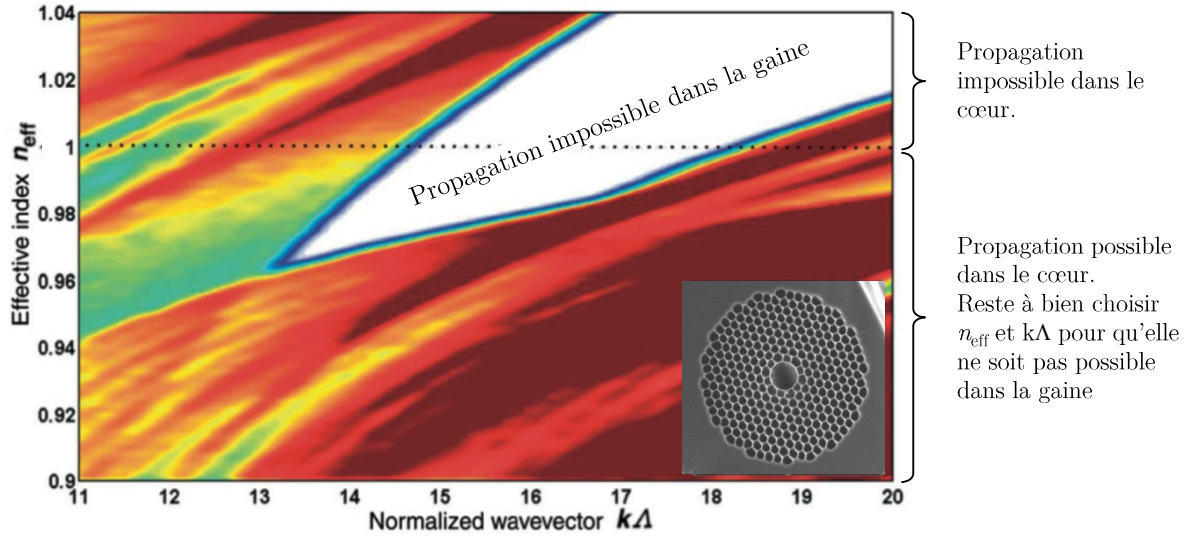


FIGURE 3.3 – Graphe (tiré de [80]) représentant la densité d'états photoniques en fonction de l'indice effectif  $n_{\text{eff}}$  et du vecteur d'onde normalisé  $k\Lambda$  d'une fibre à bande interdite photonique à maille triangulaire dont la vue en coupe est présenté dans l'insert. L'échelle des couleurs va de blanc (pas d'états photoniques) à rouge (forte densité d'états photoniques). L'insert dans la figure est une image au microscope de la section d'une fibre à bande interdite photonique 7-cell à maille triangulaire. La partie blanche est en silice, la partie noire est de l'air. Insert tiré de [81].

Or, si on note  $\nu$  la fréquence de l'onde traversant la fibre, la norme du vecteur d'onde est de :

$$|\vec{k}| = n_{\text{cœur}} \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{2\pi\nu}{c}, \quad (3.2)$$

car l'indice du cœur vaut 1. La propagation au sein de la fibre à bande interdite photonique n'est possible que si la condition  $k_z \leq |\vec{k}|$  avec  $k_z = n_{\text{eff}} \frac{2\pi\nu}{c}$  est respectée soit :

$$n_{\text{eff}} \leq 1.$$

L'insert de la figure 3.3 présente une vue au microscope de la face d'entrée (coupe transverse) d'une fibre à bande interdite photonique. La figure 3.3 représente le diagramme de densité d'états photoniques qui lui est associé. On peut voir que pour  $n_{\text{eff}} \leq 1$ , il existe une plage de vecteurs d'onde (inversement proportionnel à la longueur d'onde  $\lambda$ ) telle que la densité d'états photoniques dans la silice structurée (autrement dit, dans la gaine) est nulle. Une densité d'états photoniques nulle signifie qu'aucun mode ne peut se propager dans une cellule de la fibre [80]. Sachant que les cellules constituent la gaine de la fibre, si la lumière ne peut pas se propager dans une cellule, elle sera guidée dans le cœur de la fibre. Ce principe de guidage a d'abord été théorisé pour une fibre optique en 1987 [82], mais la première démonstration expérimentale d'une fibre optique à bande interdite photonique date de 1999 [41].

### 3.1.2 Fibre Kagomé

Pour les fibres Kagomé, le principe de guidage à faibles pertes repose sur un couplage inhibé. En effet, comme le montre la figure 3.4 (a), la densité d'états photoniques de gaine pour une fibre Kagomé n'est jamais nulle pour  $n_{\text{eff}} \leq 1$ , donc on ne peut pas parler de guidage par bande interdite photonique. En revanche, cette densité reste malgré tout très faible, donc le couplage avec les modes de gaine est lui aussi très faible. On dit que le couplage avec les modes de gaine est inhibé dans la fibre Kagomé. C'est pourquoi la lumière, bien que présente dans la structure de la gaine, se propage principalement dans le cœur d'air avec des pertes faibles, grâce à ce couplage [83]. La structure spatiale d'une fibre Kagomé est présentée en figure 3.4 (b).

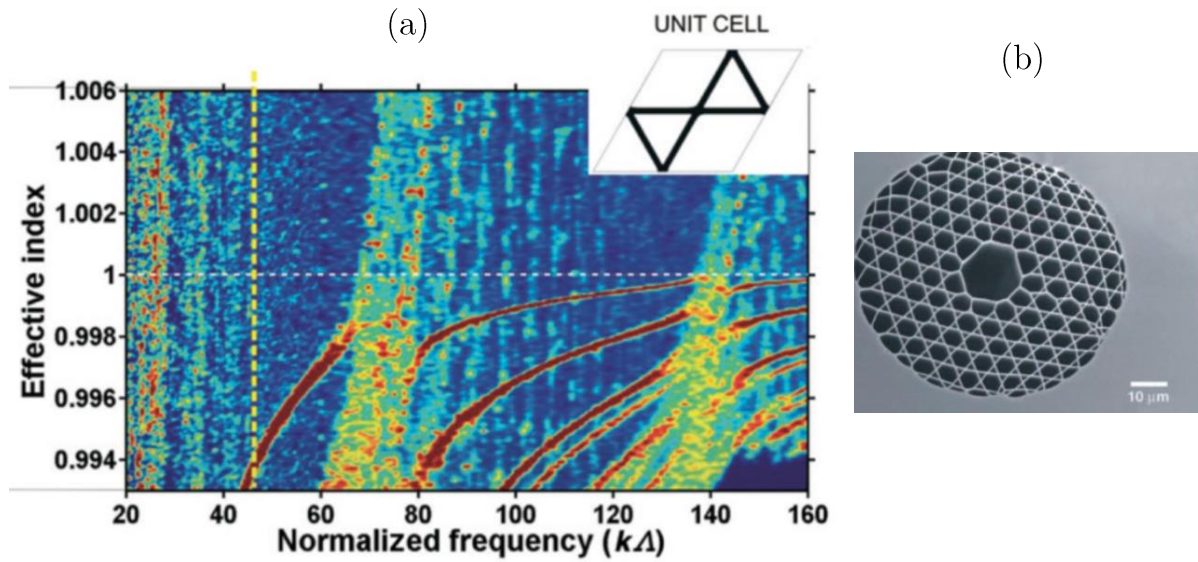


FIGURE 3.4 – (a) Graphe (tiré de [80]) représentant la densité d'états photoniques de gaine en fonction de l'indice effectif  $n_{\text{eff}}$  et du vecteur d'onde normalisé  $k\Delta$  d'une fibre Kagomé, dont la vue en coupe est présenté en (b). L'échelle de couleur est la même que pour la figure 3.3. (b) Image (tirée de [81]) au microscope de la section d'une fibre Kagomé 7-cell. La partie blanche est en silice, la partie noire est de l'air.

Dans les deux types de fibres, Kagomé ou bande interdite photonique, la fabrication de la fibre consiste à empiler des tubes creux en silice (qui constituent la cellule élémentaire de la fibre), et d'en retirer 1, 7, 19 (ou plus) du centre afin de former le cœur de la fibre. On parlera alors de fibre 1-cell, 7-cell ou 19-cell, dépendant du nombre de cellules élémentaires retirées pour former le cœur, sachant que les fibres 19-cell auront un cœur plus grand que le même type de fibre en 7-cell.

## 3.2 Le cahier des charges de la fibre à cœur creux

Le but de cette partie est de définir les spécifications de la fibre à cœur creux dont nous avons besoin pour réaliser la cavité résonante. Cela permettra ensuite, dans un second temps, de sélectionner la fibre adéquate à l'application gyrométrique.

### 3.2.1 Caractéristiques gyrométriques

Nous voulons développer un gyromètre pour la navigation inertielle (voir tableau 1 en introduction), c'est à dire un gyromètre tel que :

- sa marche au hasard angulaire soit inférieure à  $0,005 \text{ deg}/\sqrt{h}$ ,
- la dérive de son biais soit inférieure à  $0,01 \text{ deg/h}$ ,
- son facteur d'échelle soit stable à mieux que 5 ppm.

La longueur d'onde de travail que nous avons choisie est de  $\lambda = 1,55 \text{ }\mu\text{m}$  car c'est dans cette gamme de longueurs d'onde que les lasers monofréquences et les composants fibrés sont les plus développés et accessibles. La dimension spatiale du gyromètre devra être la plus petite possible dans sa version définitive, c'est pourquoi nous souhaitons que la dimension spatiale de la cavité résonante du gyromètre ne dépasse les 10 cm de diamètre. L'asservissement que nous avons choisi de faire est l'asservissement PDH, décrit en partie 2.2.2.3 du chapitre 2.

### 3.2.2 Caractéristiques de la fibre

Comme nous l'avons vu au chapitre 2, pour que la marche au hasard angulaire provenant du bruit de grenaille soit la plus faible possible, il faut que le coefficient  $g$  qui décrit la transmission de la cavité soit lui aussi le plus grand possible<sup>3</sup>. Il faut donc que la fibre ait le moins de pertes possible. Les pertes dues à la propagation de la lumière dans les fibres sont caractérisées par le coefficient d'atténuation linéique. Plus l'atténuation est importante, et plus les pertes à la propagation seront importantes.

Comme les fibres à cœur creux ont des atténuations de l'ordre de la dizaine de dB/km à  $\lambda = 1,55 \text{ }\mu\text{m}$ , nous avons fixé la longueur de la fibre que nous voulons utiliser pour le gyromètre à environ 20 m, de sorte à minimiser les pertes par transmission des fibres.

La fibre devra avoir un comportement monomode. En effet, si la fibre est multimode, la résonance de la cavité sera déformée et cela induira un biais sur le signal d'erreur.

Pour respecter le critère d'encombrement du gyromètre, la fibre optique devra pouvoir avoir un rayon d'enroulement qui soit faible (typiquement inférieur à 5 cm), sans détériorer ses autres caractéristiques telles que ses pertes ou son caractère monomode.

---

3. Cette affirmation est vraie pour un asservissement PDH réalisé sur une cavité au couplage critique.

Enfin, il faut aussi que la fibre ne modifie pas la polarisation de l'onde incidente, de sorte à ne pas dégrader la stabilité du biais à cause du bruit de polarisation.

### 3.3 Identification de la fibre à cœur creux pour l'application gyrométrique

Nous avons eu l'occasion, au cours de cette thèse, de tester 5 fibres à cœur creux différentes, guidant à  $\lambda = 1,55 \mu\text{m}$ , et dont nous rassemblons les données constructeurs dans le tableau 3.1.

Catégorie Fibre	Fournisseur	nb cell	$\phi_{\text{Coeur}}$	Atténuation	Longueur
Bande Interdite Photonique	NKT	7 cell	10 $\mu\text{m}$	< 30 dB/km	3 m
	NKT	19 cell	20 $\mu\text{m}$	20 dB/km	22 m
	X-Lim	19 cell	17 $\mu\text{m}$	---	25 m
Kagomé	GLOphotonics	7 cell	63 $\mu\text{m}$	15 dB/km	10 m
	GLOphotonics	7 cell	67,5 $\mu\text{m}$	12 dB/km	19 m

TABLE 3.1 – *Tableau récapitulatif des données constructeur des fibres à cœur creux que nous avons testées.*

Les deux fibres fournies par NKT ne figurent pas dans leur catalogue de vente, car elles font partie d'un lot de fibres expérimentales non dédiées à la vente à grande échelle par NKT. Les deux fibres de chez GLOphotonics sont quasiment identiques, en dehors du fait que la 7-cell avec 12 dB/km d'atténuation a subi un traitement particulier sur sa gaine, la rendant plus rigide et moins sensible aux vibrations extérieures. Nous pouvons remarquer que toutes ces fibres ont des atténuations bien supérieures à celles des fibres de silice classiques qui, elles, ont des atténuations inférieures à 1 dB/km.

#### 3.3.1 Tests réalisés sur les fibres

Nous avons réalisé plusieurs tests sur ces fibres à cristal photonique afin de déterminer laquelle d'entre elles répondait le mieux aux spécifications énoncées précédemment.

#### Mesure de la transmission de la fibre

Nous avons mis en place le montage présenté sur la figure 3.5 afin de mesurer la transmission des différentes fibres à cœur creux.

Ce montage permet dans un premier temps de sélectionner le couple de lentilles  $L_1$  et  $L_2$  permettant d'obtenir la meilleure transmission, et donc la meilleure adaptation de mode entre la



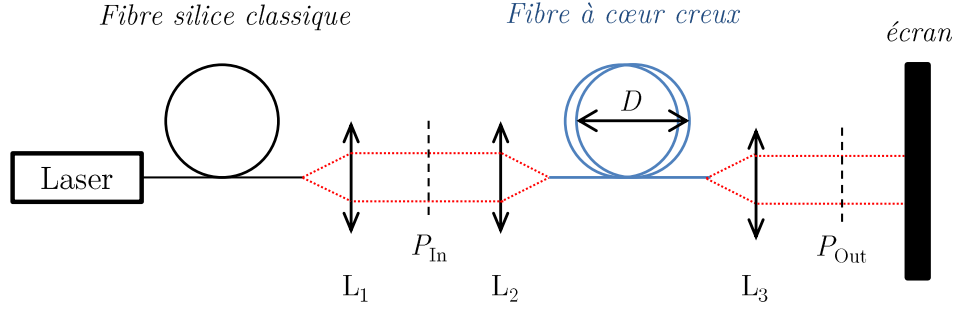


FIGURE 3.5 – Schéma du montage de mesure de transmission de fibre à cœur creux. La lumière sort du laser et est collimatée par la lentille  $L_1$ . La lentille  $L_2$  focalise la lumière dans la fibre à cœur creux et la lentille  $L_3$  re-collimate la lumière sur le détecteur de puissance. Le laser utilisé est un laser Koheras-E15 de chez NKT émettant à  $1,55 \mu\text{m}$ . Le puissancemètre est positionné entre  $L_1$  et  $L_2$  pour mesurer  $P_{\text{In}}$  et entre  $L_3$  et l'écran pour mesurer  $P_{\text{Out}}$ .

fibre en silice et celle à cœur creux. Il apparaît expérimentalement que la meilleure adaptation de mode a lieu pour un couple de lentilles vérifiant :

$$\frac{f'_2}{f'_1} = \frac{\Phi_{\text{cœur, fibre creuse}}}{\Phi_{\text{cœur, fibre silice}}} \cdot 0,7.$$

Le facteur de 0,7 est expérimental. Dans notre cas, nous utilisons des fibres en silice telles que  $\Phi_{\text{cœur, fibre silice}} = 9,9 \mu\text{m}$ . Par analogie avec les fibres classiques, la transmission  $T$  dépend, en théorie, du couplage  $C$  entre le mode de la fibre en silice et celui de la fibre à cœur creux et de l'atténuation linéique de la fibre  $\alpha$  par la relation :

$$T = \frac{P_{\text{Out}}}{P_{\text{In}}} = C \cdot e^{-\alpha L}, \quad (3.3)$$

avec  $L$  la longueur de la fibre. En général, on préfère exprimer la transmission en décibel, soit :

$$T_{\text{dB}} = 10 \log(T) = 10 \log(C) - \frac{10\alpha}{\ln(10)} L, \quad (3.4)$$

car cette dernière est directement proportionnelle à la longueur de la fibre. Le coefficient d'atténuation en décibel de la fibre est défini par  $\alpha_{\text{dB}} = \frac{10\alpha}{\ln(10)}$ . Les résultats des mesures de transmission sur chacune de nos fibres, ainsi que les lentilles utilisées, sont rassemblés dans le tableau 3.2 en partie 3.3.2.

### Mesure de l'atténuation d'une fibre par "cut-back"

Dans certains cas (que nous détaillerons par la suite) nous avons décidé de faire une mesure par "cut-back" du coefficient d'atténuation de la fibre. Dans l'hypothèse où le coefficient d'atténuation est constant le long de la fibre, la puissance en sortie de la fibre dépend de la longueur  $L$  parcourue dans la fibre par la relation (3.3) :

$$P_{\text{Out}}(L) = C \cdot P_{\text{In}} \cdot e^{-\alpha L},$$

avec  $C$  le couplage et  $\alpha$  le coefficient d'atténuation linéique de la fibre optique, en  $\text{m}^{-1}$ . Pour mesurer le coefficient d'atténuation  $\alpha$ , il suffit de mesurer deux puissances de sortie à deux longueurs de fibre différentes, sans changer le couplage. Pour ce faire, on mesure la transmission de la fibre sur une longueur  $L_1$  avec le montage figure 3.5, puis on coupe une longueur  $L_2$  de cette fibre et on mesure à nouveau la puissance en sortie des  $L_3 = L_1 - L_2$  mètres de fibres restant sur le montage

$$\alpha = \frac{\ln \left( \frac{P_{\text{Out}}(L_3)}{P_{\text{Out}}(L_1)} \right)}{L_2}.$$

Les résultats de nos mesures sont présentés dans le tableau 3.2 en partie 3.3.2.

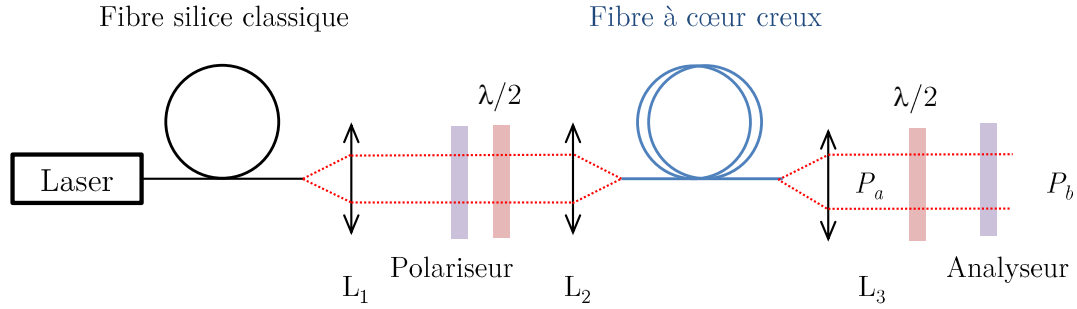


FIGURE 3.6 – Montage de mesure du maintien de la polarisation d'une fibre à cœur creux. Un polariseur, un analyseur ainsi que deux lames  $\lambda/2$  ont été insérées en entrée et en sortie de la fibre à cœur creux afin de contrôler la polarisation en entrée et en sortie de la fibre.

### Mesure du maintien de polarisation de la fibre

Pour mesurer la capacité de la fibre à maintenir la polarisation, nous avons utilisé le montage de la figure 3.6. Si la fibre maintient la polarisation, alors il existe une position des deux lames  $\lambda/2$  telle que la puissance de sortie  $P_b$  soit nulle. En réalité, la puissance en sortie de l'analyseur n'est jamais complètement nulle, mais on considère que la fibre maintient correctement la polarisation si le taux d'extinction (défini par  $P_b/P_a$  sur la figure 3.6) est inférieur à 3 %<sup>4</sup>. Dans le cas des fibres à bande interdite photonique, il est possible de faire varier le taux d'extinction en vrillant la fibre.

### Mesure du caractère monomode de la fibre

Pour évaluer le caractère monomode de la fibre, on place une caméra infrarouge entre la lentille

4. Pour bien faire, il faudrait tracer la puissance de sortie en fonction de l'angle de la seconde lame demi onde ( $\theta$ ) pour ajuster la sinusoïde ainsi obtenue (loi de Malus :  $P_b(\theta) = P_a \cos^2(\theta)$ ) et déterminer la polarisation exacte de la lumière, mais nous voulions juste ici avoir une idée du caractère maintien de la polarisation de la fibre, pas une mesure précise.



$L_3$  et l'écran du montage figure 3.5. Cette caméra permet d'observer le profil du mode (en champ lointain) en sortie de la fibre à cœur creux. Si ce mode est gaussien ou pseudo-gaussien (comme sur la figure 3.7 (a)), on considère que la fibre est monomode. Si on peut observer plusieurs lobes en sortie de la fibre (comme sur la figure 3.7 (b)), alors cette dernière n'est pas monomode.

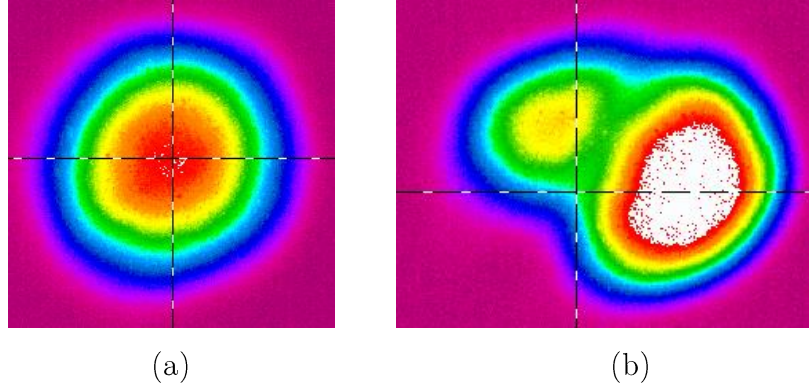


FIGURE 3.7 – (a) Allure du mode en champ lointain en sortie de la fibre Kagomé de GLOphotonics 7-cell de  $63\ \mu\text{m}$  de diamètre de cœur, lorsque cette dernière est enroulée sur un diamètre de  $50\ \text{cm}$ . (b) Allure du mode en sortie de cette même fibre, lorsque cette dernière est enroulée sur un diamètre de  $10\ \text{cm}$ .

### Influence des perturbations mécaniques extérieures

Pour caractériser l'influence des perturbations extérieures, on bouge un peu la fibre (ou on la tapote) dans toutes les expériences précédentes. Si le caractère monomode, la polarisation et la transmission ne changent pas après avoir touché ou bougé la fibre, alors on considère qu'elle est peu sensible aux perturbations mécaniques extérieures.

### Contamination de la fibre

Une fibre se contamine si sa transmission diminue au cours du temps sans qu'il y ait désalignement du montage de mesure de transmission. Pour savoir si une fibre se contamine, on réalise le montage de la figure 3.5. On mesure la puissance en sortie de la fibre, puis on refait la même mesure le lendemain, en réalignant la fibre au besoin. Si la transmission s'est dégradée de plus de 5% entre les deux mesures, alors il y a eu contamination.

### Mesure de l'influence du rayon d'enroulement sur la fibre

Pour mesurer l'influence du rayon d'enroulement sur la fibre, on recommence toutes les expériences précédentes en faisant varier le diamètre  $D$  sur lequel la fibre est enroulée. Si les résultats expérimentaux ne sont pas modifiés, alors le diamètre d'enroulement n'a pas d'influence sur les caractéristiques de la fibre.

### 3.3.2 Résultats des tests et sélection de la fibre

Le tableau 3.2 présente les résultats des différents tests opérés sur les fibres à cœur creux. Les valeurs avec un astérisque dans le tableau sont celles qui sont influencées par le rayon d'enroulement de la fibre. Nous allons commenter dans les paragraphes suivants les résultats obtenus pour ces fibres.

Fibre	Bande photonique interdite			Kagomé	
Fournisseur	NKT	NKT	X-Lim	GLO	GLO
Nb cell	7 cell	19 cell	19 cell	7 cell	7 cell
$\phi_{\text{Cœur}}$	10 $\mu\text{m}$	20 $\mu\text{m}$	17 $\mu\text{m}$	63 $\mu\text{m}$	67,5 $\mu\text{m}$
Focale $f_1$	11 mm	11 mm	6,24 mm	11 mm	11 mm
Focale $f_2$	6,24 mm	11 mm	7 mm	40 mm	40 mm
Atténuation (constructeur)	< 30 dB/km	20 dB/km	---	15 dB/km	12 dB/km
Longueur échantillon	3 m	22 m	25 m	10 m	19 m
Transmission mesurée	75 %	70 %	90 %	82 %*	86 %*
Atténuation (mesurée)	--	50 dB/km	2,3 dB/km	--	--
Contamination	non	non	oui	non	non
Maintien de la polarisation	oui	oui	oui	non	non
Monomode	oui	oui	oui	oui*	oui*
Influence du diamètre d'enroulement	non	non	non	oui	oui
Influence des perturbations mécaniques	non	non	non	oui	non

TABLE 3.2 – Tableau récapitulatif des données mesurées sur les fibres à cœur creux que nous avons eu l'occasion de tester. Les valeurs du tableau avec un astérisque sont celles qui sont influencées par le diamètre d'enroulement. Les valeurs en vert sont celles qui répondent aux critères pour les gyromètres, celles en rouge n'y répondent pas.

#### 3.3.2.1 Fibre 19-cell à bande interdite photonique de chez X-Lim : le problème de la contamination

Cette fibre répond à quasiment tous les critères de performances que l'on recherche, excepté celui de la contamination. Comme nous l'avons dit précédemment, la contamination, c'est le fait

que la transmission de la fibre diminue au cours du temps sans que rien d'autre n'ait changé dans le montage. Pour la 19-cell, la contamination fait passer la transmission de la fibre de 83 % après clivage à 70 % après 8h, et environ 60 % au bout de 24h. Nous avons établi que la contamination a lieu sur les faces d'entrée et de sortie de la fibre car en clivant environ 1 cm à chaque extrémité de la fibre, on retrouve la transmission de 83 % initiale. Cependant, cette propriété est très contraignante en termes de mesure et de prototypage, car la contamination implique de devoir cliver quotidiennement la fibre et donc réaligner quotidiennement une cavité résonante, ce qui est très limitant en matière d'expérimentation, et de reproductibilité.

C'est pourquoi, au cours de la thèse, nous avons mené un partenariat avec AlphaNov (à Bordeaux) et GLOphotonics (à Limoges) avec lesquels nous avons tenté de résoudre le problème de la contamination de la fibre à cœur creux d'X-Lim. Il semblerait, après discussion avec GLOphotonics, que la contamination vienne de l'air, et plus précisément de l'oxydation en surface de la silice constituant la gaine, à cause des atomes de Chlore présents dans cette dernière. Pour remédier à ce problème, Alphanov a développé un embout, (que nous appellerons "end-cap"), et dont la forme est présentée en figure 3.8. Cet embout se fixe hermétiquement aux extrémités de la fibre à cœur creux de manière à les isoler de l'air ambiant, et donc à théoriquement empêcher la contamination.

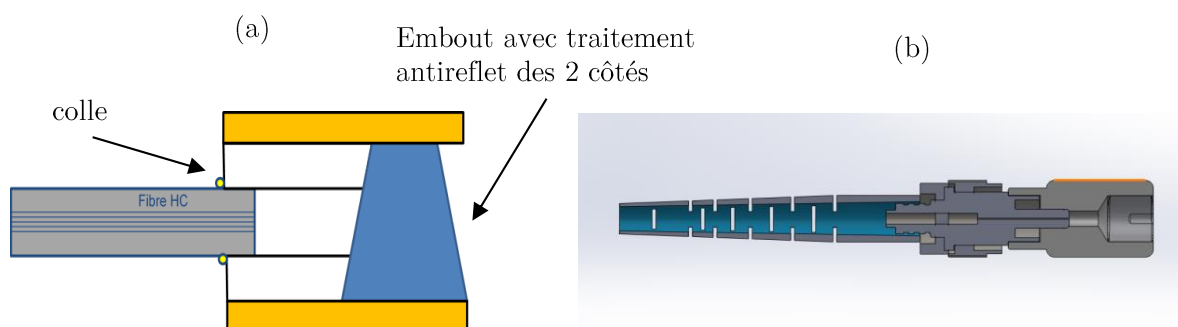


FIGURE 3.8 – (a) Schéma de principe de fonctionnement du end-cap fixé à la fibre à cœur creux. Les faces du prisme sont inclinées et traitées anti-reflet afin d'éviter de rajouter des pertes intracavité, et de la rétrodiffusion. (b) Vue à l'aide d'un logiciel de conception optique du système end-cap.

Alphanov a réalisé des tests en transmission avec cet embout sur la fibre de chez X-Lim. La transmission a été mesurée sur 20 m avec et sans embouts à chaque extrémité. Elle est égale à 90% sans embouts et 89% avec. Cependant, la transmission de la fibre avec ses end-cap a baissé jusqu'à 60% au bout de quelques jours. La contamination a donc quand même lieu, malgré les end-cap, probablement due au dégazage de la colle utilisée pour fixer les embouts. La fibre avec ses embouts a ensuite été mise au four, et une transmission de 75% a pu être récupérée et maintenue dans le temps. Ce résultat est correct, mais pas suffisant, car la transmission de 90% n'est pas récupérée.

Nous avons donc envisagé de tester une autre solution de protection des extrémités de la fibre, à savoir un traitement sur les faces avec un dépôt métallique dont Alphanov garde le secret. Les premiers résultats concernant la transmission sont prometteurs (voir la figure 3.9), car ils semblent indiquer une absence de contamination au cours du temps sur 70 h. Cependant, ces mesures n'ont jusqu'alors été réalisées que sur 3 m de fibre à cœur creux. Or, la contamination semble aussi dépendre de la longueur de fibre utilisée, c'est pourquoi des tests sont actuellement en cours sur des longueurs de fibre de l'ordre de 20 m.

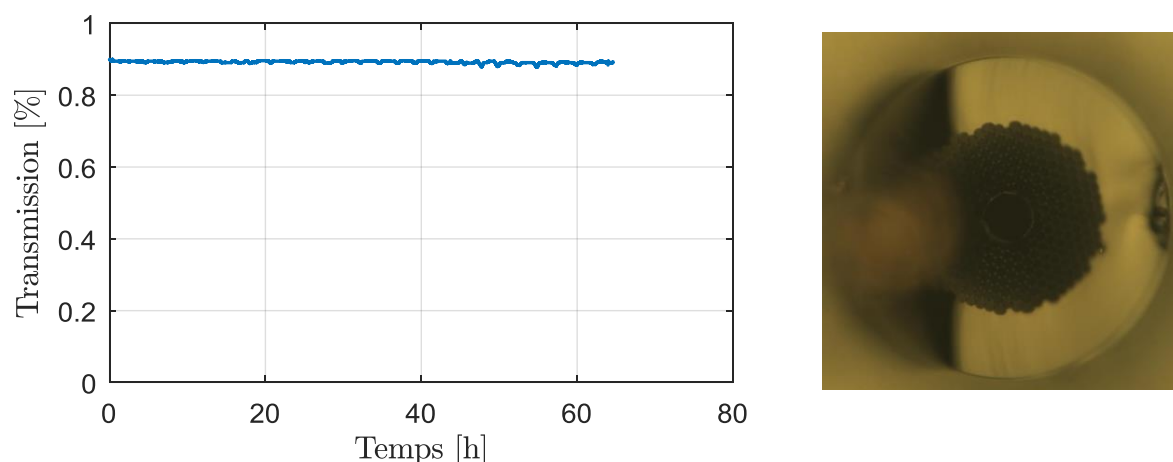


FIGURE 3.9 – À gauche évolution de la transmission de la fibre au cours du temps. À droite, photo de surface de la fibre avec son recouvrement. Les tests ont été réalisés sur une portion de 3 m de la fibre.

En parallèle, GLOphotonics est en train de développer des fibres à bande interdite photonique à base de silice moins chlorée, ce qui pourrait rendre ces dernières insensibles à la contamination.

En conclusion, la fibre creuse à bande photonique interdite de chez X-Lim semble idéale pour une application de gyromètre optique résonant, mais sa contamination la rend impossible à utiliser en pratique. Des recherches sont en cours pour trouver des solutions pour remédier à ce problème, mais à l'heure actuelle, il n'est toujours pas résolu (pour cette fibre), ce qui empêche son utilisation dans un gyromètre optique résonant.

### 3.3.2.2 Les fibres de chez NKT : pas de contamination, mais trop de pertes

Le fabricant NKT semble, quant à lui, avoir trouvé un moyen de résoudre le problème de contamination pour les fibres à bande interdite photonique. En effet, les fibres 7-cell et 19-cell qu'il nous a fournies sont des fibres à bande interdite photonique qui ne se contaminent pas (*contamination-free*). Cependant, la transmission mesurée de ces fibres est assez faible, de l'ordre de 70 %. Cela peut venir soit d'un mauvais couplage entre le mode de la fibre en silice et le mode de la fibre à cœur creux, soit d'une atténuation plus importante que celle annoncée par le constructeur. Pour départager ces deux hypothèses, nous avons réalisé une mesure du coefficient

d'atténuation de la fibre 19-cell de 19 m. Le cut-back réalisé entre  $L_1 = 22$  m et  $L_3 = 3$  m nous a donné des pertes de 50 dB/km, bien plus importantes que les pertes annoncées par NKT (20 dB/km), et qui correspondent à un couplage d'environ 90 % dans la fibre.

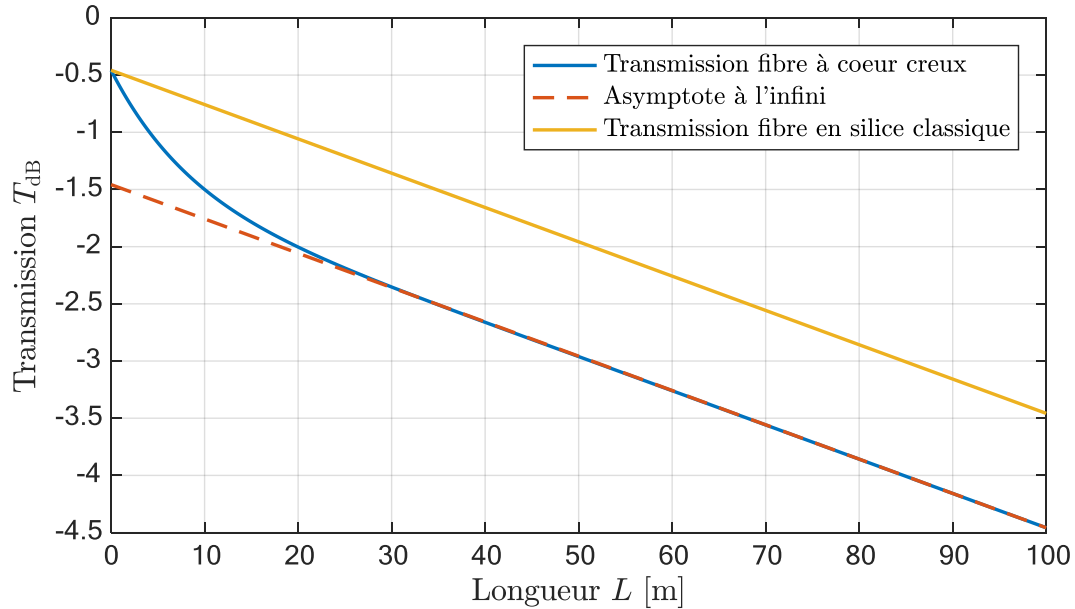


FIGURE 3.10 – La courbe bleue représente schématiquement la transmission en décibel d'une fibre à cœur creux, dont l'atténuation mesurée par les constructeurs serait de  $\alpha_{dB} = 30$  dB/km, pour un couplage de  $C = 90$  %. La courbe jaune représente la transmission théorique de cette fibre sans tenir compte de l'atténuation plus importante des premiers mètres, donnée par l'équation (3.4). Le coefficient directeur des courbes, sur leur plage linéaire, donne directement le coefficient d'atténuation  $\alpha_{dB}$ . Ces courbes sont théoriques et ne reflètent aucune mesure.

Après discussion avec le fournisseur NKT<sup>5</sup>, il apparaît que l'atténuation des fibres qu'ils nous ont fournies n'est pas constante sur toute leur longueur. En effet, un filtrage modal a lieu sur les premiers mètres de la fibre, ce qui rajoute des pertes supplémentaires. La figure 3.10 présente l'allure schématique de l'évolution de la transmission des fibres à cœur creux de chez NKT en fonction de la longueur de la fibre (courbe bleue).

L'atténuation  $\alpha_{dB}$  est mesurée par les constructeurs en "cut-back", sur des tronçons d'environ 100 m auxquels sont enlevés environ 50 m. Ils mesurent donc le coefficient directeur de la courbe bleue (figure 3.10) entre  $L = 100$  m et  $L = 50$  m, courbe qui est bien linéaire entre ces deux longueurs. Mais ce coefficient d'atténuation ne reflète pas la transmission que l'on obtient en sortie de la fibre, à cause de l'atténuation non constante des premiers mètres. C'est pour cela que les valeurs de transmission que nous mesurons en sortie de nos 19 m et 3 m de fibre (courbe bleue de la figure 3.10) sont plus faibles que les valeurs attendues à ces longueurs (courbe jaune sur la figure 3.10), compte tenu des pertes.

5. à la conférence CLEO Europe (Munich) 2017

En conclusion, bien que les fibres de chez NKT ne se contaminent pas, leur faible transmission et surtout des doutes quant à la pérennité de leur disponibilité nous ont conduits à ne pas les utiliser pour notre application gyrométrique.

### 3.3.2.3 La fibre Kagomé GLOphotonics : un compromis acceptable

La fibre Kagomé de chez GLOphotonics que nous avons entourée en vert dans le tableau 3.2 répond à deux critères primordiaux, à savoir : une bonne transmission, et pas de contamination. Ses inconvénients majeurs sont que sa transmission et son caractère monomode dépendent de son rayon de courbure, et que la polarisation n'est pas très bien maintenue à l'intérieur de la fibre. Cependant, c'est cette fibre que nous avons retenue pour les tests, car nous avons privilégié le peu de pertes intracavité et l'absence de contamination par rapport au rayon de courbure de la cavité. C'est pourquoi, au cours de nos tests, nous avons réalisé une cavité de rayon important (environ 60 cm), avec des lames  $\lambda/2$  et des polariseurs intracavité qui permettent de contrôler la polarisation.

## 3.4 Caractéristiques de la cavité résonante avec la fibre Kagomé sélectionnée

Nous nous intéressons dans cette partie à la mesure expérimentale des paramètres de la cavité résonante réalisée avec la fibre Kagomé. En effet, les caractéristiques de la cavité permettront d'évaluer les performances du gyromètre développé avec la fibre à cœur creux.

### 3.4.1 Mesure des paramètres de la cavité

Pour mesurer les paramètres de notre cavité résonante, tels que sa finesse et ses pertes, nous réalisons le montage de la figure 3.11.

Comme nous l'avons vu au chapitre 2, l'intensité normalisée réfléchie par cette cavité est donnée par la relation (2.9) :

$$\frac{I_3}{I_1}(\nu) = |F_R(\nu)|^2 = (1 - \gamma_1) \left( 1 - \frac{1 - \left( \frac{r_1 - g}{1 - r_1 g} \right)^2}{1 + 4 \frac{r_1 g}{(1 - r_1 g)^2} \sin^2 \left( \frac{\pi \nu}{\Delta \nu_{\text{ISL}}} \right)} \right),$$

avec :

- $\gamma_1$  les pertes du coupleur d'entrée,
- $r_1$  le coefficient de réflexion du miroir (coupleur) d'entrée,
- et  $g$  la transmission sur 1 tour de la cavité, ne tenant pas compte du coefficient de réflexion du miroir  $M_1$ . Dans notre cas, le paramètre  $g$  tient compte du couplage  $C$  entre le laser et

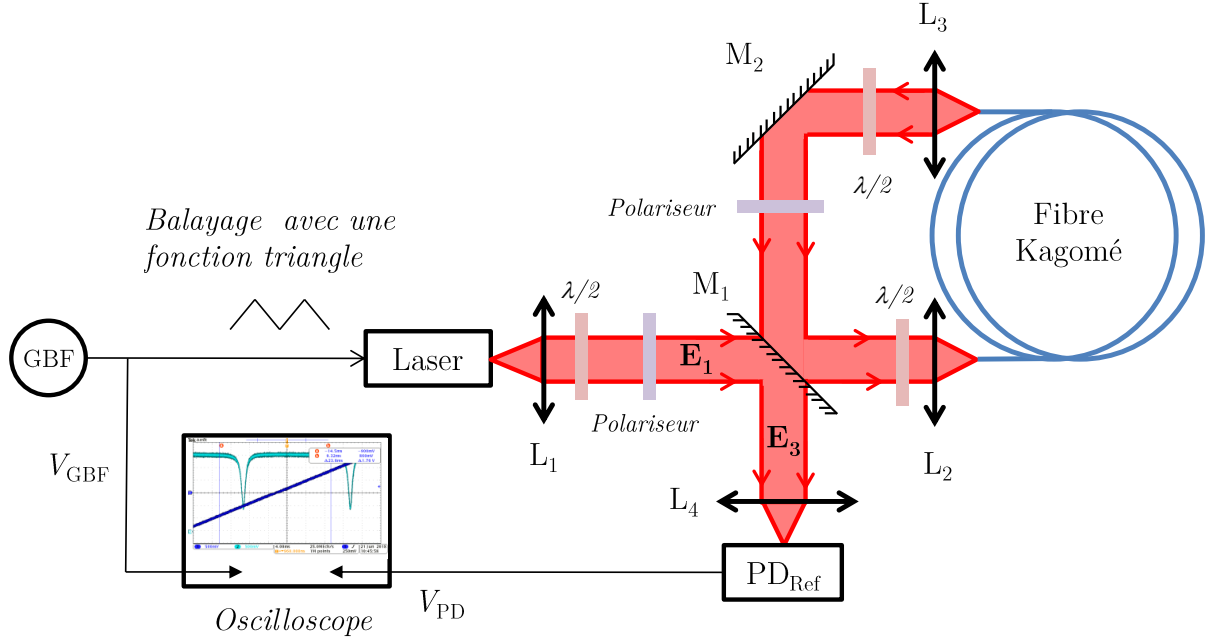


FIGURE 3.11 – Figure de la cavité résonante réalisée avec la fibre Kagomé. Les focales des lentilles  $L_1$  et  $L_4$  sont égales et valent  $f'_1 = f'_4 = 11$  mm. Les focales des lentilles  $L_2$  et  $L_3$  sont égales et valent  $f'_2 = f'_3 = 40$  mm.

la fibre, de la propagation à l'intérieur de la fibre dont la transmission en intensité s'écrit  $e^{-\alpha L}$ , et de la réflexion du miroir  $M_2$  qui s'écrit  $r_2 \sqrt{1 - \gamma_2}$ .

La tension en sortie de la photodiode étant proportionnelle à l'intensité optique reçue, on a alors :

$$V_{PD} = G_{PD} I_1 (1 - \gamma_1) \left( 1 - \frac{1 - \left( \frac{r_1 - g}{1 - r_1 g} \right)^2}{1 + 4 \frac{r_1 g}{(1 - r_1 g)^2} \sin^2 \left( \frac{\pi \nu}{\Delta \nu_{ISL}} \right)} \right). \quad (3.5)$$

La figure 3.12 présente ce que l'on observe sur l'oscilloscope de la figure 3.11 lorsque le laser est balayé linéairement en fréquence. Le signal de balayage du laser est en jaune et le signal de la photodiode  $PD_{Ref}$  est en bleu, la courbe rouge correspondant à l'ajustement des données expérimentales par l'équation (3.5), dont nous détaillerons les paramètres par la suite. L'axe des abscisses de la figure est un axe temporel, mais comme le balayage de la fréquence laser est linéaire avec le temps, cet axe est proportionnel à un axe en fréquence optique.

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, il est possible de retrouver les paramètres  $r_1$  et  $g$  de la cavité résonante grâce à un ajustement des données expérimentales. Or, ces deux paramètres jouent un rôle symétrique dans l'équation (2.9), c'est-à-dire qu'il existe deux couples de valeurs  $r_1$  et  $g$  qui permettent d'ajuster la courbe expérimentale. Il faut donc déjà avoir une idée de la valeur d'au moins un des deux paramètres pour les départager.

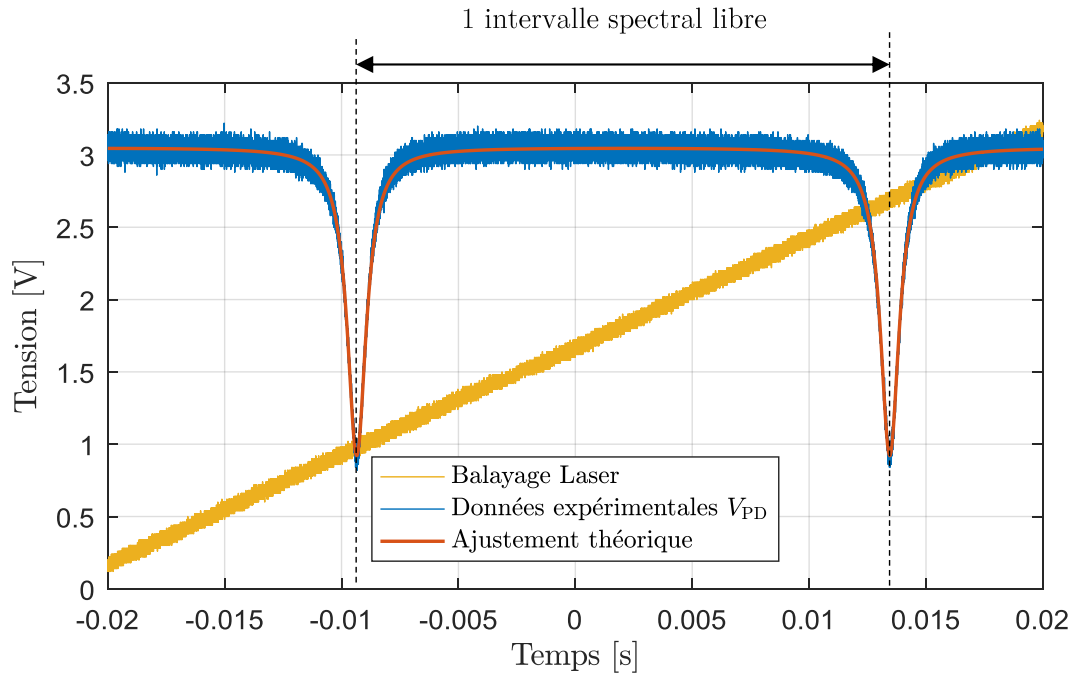


FIGURE 3.12 – Courbe de la fonction de transfert en réflexion de la cavité expérimentale et son ajustement théorique. L’axe des abscisses est un axe de temps car les signaux sont observés temporellement. Cependant, comme la fréquence laser est balayée linéairement au cours du temps (signal jaune : tension de consigne laser), l’axe des abscisses est proportionnel à un axe de fréquence.

Nous pouvons dans un premier temps évaluer le paramètre de transmission  $g^2$  comme étant à peu près égal à la transmission de la fibre mesurée en partie précédente, et donc approximer  $g^2$  par :  $g^2 \simeq 0,86$ . C’est d’ailleurs cette évaluation de la transmission intracavité qui nous a conduits au choix du miroir d’entrée  $M_1$ , car nous voulions nous rapprocher au maximum du couplage critique. Nous avons en effet choisi un miroir parmi ceux dont nous disposions dont le coefficient de réflexion se rapproche au mieux de la transmission intracavité. Celui que nous avons sélectionné a un coefficient de réflexion égal à  $r_1^2 = 0,942$ , avec une transmission de  $t_1^2 = 0,058$  et des pertes de  $\gamma_1 = 0,003$ . L’annexe E présente la mesure expérimentale de ces paramètres.

La figure 3.12 présente l’ajustement de la courbe théorique (courbe rouge) sur la courbe expérimentale (courbe bleue). Les paramètres de la modélisation sont :

- $G_{PD}I_1(1 - \gamma_1) = 3,055 \text{ V}$ ,
- $r_1^2 = 0,941$ . Cette valeur donnée par l’ajustement est bien en accord avec la mesure.
- $g^2 = 0,811$ . La valeur de l’ajustement est du même ordre de grandeur que la transmission de la fibre, mais un peu plus faible, ce qu’on impute à la présence de lames intracavité.

La documentation du laser nous indique que l’entrée modulation de fréquence du laser a un gain d’environ 9,6 MHz/V. Or, la courbe du balayage laser de la figure 3.12 montre que ce dernier



parcourt 1,7 V pendant un intervalle spectral libre, ce qui correspond à un balayage en fréquence de 16,4 MHz. L'intervalle spectral libre en fréquence optique est donc de :  $\Delta\nu_{\text{ISL}} = 16,4$  MHz environ. Cette mesure sera faite avec plus de précision par la suite, mais c'est un bon ordre de grandeur pour l'intervalle spectral libre de la cavité. Ces paramètres permettent de déduire que la finesse<sup>6</sup> de la cavité est de  $\mathcal{F} = 23$  et donc que la largeur de raie de la cavité est d'environ  $\Gamma = 700$  kHz. Ces données nous seront utiles lors du choix des fréquences de modulation pour l'asservissement de la cavité.

### 3.4.2 Performances théoriques de la cavité

Comme nous l'avons vu au chapitre 2, la marche au hasard angulaire d'un gyromètre due au bruit de grenaille est donnée, dans le cas d'un asservissement PDH avec une amplitude de modulation de  $\beta = 1,08$ , par l'équation (2.54) :

$$\delta\dot{\theta}_{\text{SN}}\sqrt{\tau} = \frac{nL}{4A} \frac{(1-r_1g)^2\Delta\nu_{\text{ISL}}}{\sqrt{1-\gamma_1g(1-r_1^2)}\pi} \sqrt{\frac{hc\lambda}{2\eta P_0} \left[ \frac{I_{\text{R,min}}}{I_0} + 1 \right]}.$$

Les paramètres de notre cavité sont :

- $n = 1$  car la fibre est à cœur creux, et le reste de la propagation intracavité a lieu dans l'air,
- $\frac{L}{4A} = \frac{1}{D}$ , avec  $D = 60$  cm, le diamètre d'enroulement de la fibre<sup>7</sup>
- $r_1^2 = 0,941$ ,  $g^2 = 0,811$ , et  $\gamma_1 = 0,003$  donnés par l'ajustement et les mesures précédentes,
- $\Delta\nu_{\text{ISL}} = 16,4$  MHz
- la réponse  $\mathcal{R}(\lambda) = \frac{\eta e\lambda}{hc}$  des photodiodes dans l'infrarouge est en général de 1 A/W. Sachant que la valeur absolue de la charge d'un électron vaut  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C, on peut en déduire que  $\frac{hc}{\lambda\eta} = 1,6 \cdot 10^{-19}$  W/s,
- $\lambda = 1,55$   $\mu\text{m}$ ,
- $P_0 = 1$  mW est l'ordre de grandeur de la puissance incidente sur la cavité,
- $\frac{I_{\text{R,min}}}{I_0} = (1-\gamma_1) \left( \frac{r_1-g}{1-r_1g} \right)^2 = 0,301$ .

Le calcul de la marche au hasard angulaire  $\delta\dot{\theta}_{\text{SN}}\sqrt{\tau}$  donne :

$$\begin{aligned} \delta\dot{\theta}_{\text{SN}}\sqrt{\tau} &= 4,14 \cdot 10^{-8} \text{ rad}/\sqrt{\text{s}} \\ &= 1,4 \cdot 10^{-4} \text{ deg}/\sqrt{\text{h}}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

6. Voir le tableau 2.1 du chapitre 2 pour le calculs de la finesse en fonction des caractéristiques de la cavité

7. Car  $L \simeq N\pi D$  et  $A \simeq N\pi D^2/4$  avec  $N$  : le nombre de boucles d'enroulement de la fibre. On considère ici que la longueur de la cavité est égale à celle de la fibre : on néglige les quelques centimètres d'espace libre parcourus par la lumière entre les miroirs.

Un gyromètre réalisé à partir de notre cavité résonante a donc le potentiel d’atteindre les performances de la classe inertielle en termes de marche au hasard angulaire.<sup>8</sup>

### 3.5 Conclusion

Il semble possible, au vu des évaluations que nous venons de faire, de réaliser un gyromètre résonant en fibre à cœur creux qui atteint les performances de classe inertielle en matière de marche au hasard angulaire. La dérive du biais de ce gyromètre devrait être réduite car il n’y a pas d’effet Kerr dans les fibres creuses, et pas de polarisation parasite dans notre cavité, puisque nous y avons inséré des polariseurs. Le bruit dû à la rétrodiffusion sera évalué dans le chapitre 4 suivant, tandis que les performances réelles du gyromètre seront présentées au chapitre 5.

---

8. Notons qu’à toutes choses égales, si la cavité est enroulée sur un diamètre de 10 cm, alors la limite de marche au hasard angulaire est de  $\delta\dot{\theta}_{SN}\sqrt{\tau} = 8 \cdot 10^{-4} \text{ deg}/\sqrt{\text{h}}$ , ce qui permet aussi de pouvoir théoriquement atteindre la classe inertielle de performances.



# Rétrodiffusion et zone aveugle dans un gyromètre à fibre à cœur creux

---

Comme nous l'avons évoqué aux chapitres 1 et 2, la rétrodiffusion dans la cavité résonante est responsable de l'apparition d'une zone aveugle. L'objectif de ce chapitre est, dans un premier temps, de faire un lien mathématique entre la rétrodiffusion et la zone aveugle, et, dans un second temps, de mesurer la zone aveugle sur le gyromètre que nous développons.

## 4.1 Lien entre rétrodiffusion et zone aveugle

Dans le cas des gyrolasers, le lien entre la rétrodiffusion et la zone aveugle est bien établi [18]. La modélisation de la rétrodiffusion que nous présentons ici est inspirée de celle présentée par Spreeuw et al. [84].

### 4.1.1 Mise en équation des champs intracavité en présence de rétrodiffusion

La zone aveugle est une plage de faibles vitesses de rotation pour laquelle la différence entre les fréquences de résonance des deux sens de rotation (que nous appellerons CW pour *Clockwise*, le sens horaire ; et CCW pour *Counterclockwise*, le sens antihoraire) est nulle. Cette zone aveugle contredit la formule (1.26) du chapitre 1 :

$$\Delta\nu_S = \frac{4A}{nL\lambda}\dot{\theta} = K_S\dot{\theta},$$

qui est en théorie valable quelle que soit la vitesse de rotation  $\dot{\theta}$ . On a défini le paramètre  $K_S = \frac{4A}{nL\lambda}$ , qui est le facteur d'échelle du gyromètre résonant.

La zone aveugle est due au phénomène de verrouillage (*lock-in* en anglais) entre les deux fréquences de résonance de la cavité. Les deux résonateurs que sont la cavité dans le sens CW et la cavité dans le sens CCW sont couplés par la rétrodiffusion, ce qui entraîne une modification des modes propres de résonance de la cavité, et donc le lock-in. La figure 4.1 représente une cavité résonante passive dans laquelle on suppose qu'il y a une source de rétrodiffusion au point B.

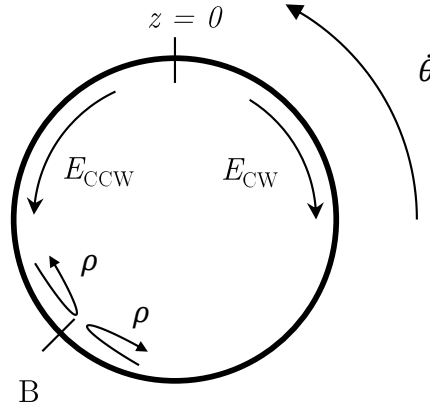


FIGURE 4.1 – Schéma d'une cavité résonante avec deux ondes circulant à contre-sens. On symbolise par B un point où a lieu toute la rétrodiffusion de la cavité.

On suppose la présence de deux ondes planes de champs électriques  $E_{CW}(z, t)$  et  $E_{CCW}(z, t)$  circulant respectivement dans le sens contraire, et dans le même sens que la rotation  $\dot{\theta}$ . Les champs ont alors pour expressions générales :

$$E_{CW}(z, t) = \mathcal{A}_{CW}(t)e^{-ikz}, \quad (4.1)$$

$$E_{CCW}(z, t) = \mathcal{A}_{CCW}(t)e^{ikz}, \quad (4.2)$$

avec  $\mathcal{A}(t)$  l'amplitude du champ dépendant des pertes temporelles  $\gamma_{cav}$  de la cavité<sup>1</sup> et de la fréquence de l'onde laser de sorte que  $\mathcal{A}(t) = E_0 e^{-\gamma_{cav}t/2} e^{-i2\pi\nu t}$ . Pour alléger les notations, on n'explicite pas les complexes conjugués dans les équations.

On reprend les notations du chapitre 1 et on exprime par  $t_+$  et  $t_-$  le temps mis par l'onde optique pour faire un tour dans la cavité respectivement dans le sens CCW et dans le sens CW. On rappelle que dans ce cas, les temps  $t_+$  et  $t_-$  sont liés par la relation (1.9) :

$$t_{\pm} = t_0 \pm \frac{\Delta t_S}{2},$$

1. Comme nous sommes passés dans le domaine temporel (et pas stationnaire, comme au chapitre 2) d'équation des champs, le paramètre  $\gamma_{cav}$  représente les pertes de la cavité réparties sur la propagation de l'onde pendant 1 tour. Pour faire le lien avec le chapitre 2, on a :  $e^{\frac{-\gamma_{cav}}{2} \frac{nL}{c}} = r_1 g$ .

avec (1.10) :

$$\begin{cases} t_0 &= \frac{nL}{c}, \\ \frac{\Delta t_S}{2} &= \frac{2A\dot{\theta}}{c^2}. \end{cases}$$

Si on suppose la présence de rétrodiffusion au point  $z_B$  de la cavité, alors une partie de l'onde CCW va être réinjectée dans le sens CW de telle sorte que l'amplitude de l'onde CW après un tour sera donnée par :

$$\mathcal{A}_{CW}(t + t_-) = \mathcal{A}_{CW}(t) e^{-\gamma_{cav} t_- / 2} e^{-i 2 \pi \nu t_-} + \rho e^{i \varphi_{CCW}} \mathcal{A}_{CCW}(t),$$

où on a posé  $\varphi_{CCW}$  la phase de la rétrodiffusion, et  $\rho$  son amplitude. De la même manière, on a, pour l'onde CCW :

$$\mathcal{A}_{CCW}(t + t_+) = \mathcal{A}_{CCW}(t) e^{-\gamma_{cav} t_+ / 2} e^{-i 2 \pi \nu t_+} + \rho e^{i \varphi_{CW}} \mathcal{A}_{CW}(t).$$

On a supposé que l'amplitude  $\rho$  de la rétrodiffusion était la même dans les deux sens, mais que la phase pouvait être différente. En remarquant que les temps  $t_+$  et  $t_-$  sont très faibles devant  $t$ , et que  $\frac{\Delta t_S}{2} \ll t_0$ , on peut écrire que :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{CW}(t + t_-) &\simeq \mathcal{A}_{CW}(t) + t_- \frac{d\mathcal{A}_{CW}(t)}{dt} \simeq \mathcal{A}_{CW}(t) + t_0 \frac{d\mathcal{A}_{CW}(t)}{dt}, \\ \mathcal{A}_{CCW}(t + t_+) &\simeq \mathcal{A}_{CCW}(t) + t_+ \frac{d\mathcal{A}_{CCW}(t)}{dt} \simeq \mathcal{A}_{CCW}(t) + t_0 \frac{d\mathcal{A}_{CCW}(t)}{dt}. \end{aligned}$$

En définissant le vecteur à deux dimensions  $|\varepsilon(t)\rangle$  par :

$$|\varepsilon(t)\rangle = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{CW}(t) \\ \mathcal{A}_{CCW}(t) \end{pmatrix},$$

on obtient l'équation différentielle :

$$|\varepsilon(t)\rangle + \frac{nL}{c} \frac{d}{dt} |\varepsilon(t)\rangle = \begin{pmatrix} e^{-2i\pi\nu\left(\frac{nL}{c} - \frac{2A\dot{\theta}}{c^2}\right)} \cdot e^{\frac{-\gamma_{cav}}{2}\left(\frac{nL}{c} - \frac{2A\dot{\theta}}{c^2}\right)} & \rho e^{i\varphi_{CCW}} \\ \rho e^{i\varphi_{CW}} & e^{-2i\pi\nu\left(\frac{nL}{c} + \frac{2A\dot{\theta}}{c^2}\right)} \cdot e^{\frac{-\gamma_{cav}}{2}\left(\frac{nL}{c} + \frac{2A\dot{\theta}}{c^2}\right)} \end{pmatrix} |\varepsilon(t)\rangle. \quad (4.3)$$

Après une simplification présentée en annexe F.1, l'équation différentielle est donnée par :

$$i \frac{d}{dt} |\varepsilon(t)\rangle = M |\varepsilon(t)\rangle, \quad (4.4)$$

avec

$$M = \begin{pmatrix} 2\pi\nu - \pi K_S \dot{\theta} - i \frac{\gamma_{cav}}{2} & i \rho e^{i\delta} e^{-i\zeta} \frac{c}{nL} \\ i \rho e^{-i\delta} e^{-i\zeta} \frac{c}{nL} & 2\pi\nu + \pi K_S \dot{\theta} - i \frac{\gamma_{cav}}{2} \end{pmatrix},$$

et

$$\delta = \frac{\varphi_{CCW} - \varphi_{CW}}{2} \quad \text{et} \quad \zeta = -\frac{\varphi_{CCW} + \varphi_{CW}}{2}.$$

#### 4.1.2 Modes propres et champ total intracavité : cas général

La résolution de l'équation différentielle (4.4) permet de donner une expression des champs intracavité circulant dans les deux sens de rotation et liés par la rétrodiffusion. Comme montré en annexe F.2, la matrice  $M$  présente deux valeurs propres données par :

$$\omega_{\pm} = 2\pi\nu - i\frac{\gamma_{\text{cav}}}{2} \pm \pi K_S \sqrt{\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_L^2 e^{-2i\zeta}}, \quad (4.5)$$

avec :

$$\dot{\theta}_L = \frac{c}{\pi K_S n L} \rho. \quad (4.6)$$

Ces deux valeurs propres sont associées à deux vecteurs propres (calculés en annexe F.3), et qui sont :

$$|\varepsilon_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|\chi|^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \chi \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad |\varepsilon_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|\chi|^2}} \begin{pmatrix} -\chi e^{-2i\delta} \\ 1 \end{pmatrix},$$

avec :

$$\chi = \frac{\dot{\theta} + \sqrt{\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_L^2 e^{-2i\zeta}}}{i\dot{\theta}_L e^{i(\delta-\zeta)}}.$$

Les vecteurs propres de la matrice  $M$  correspondent aux modes propres d'oscillation de la cavité. En effet, les solutions de l'équation différentielle (4.4) s'écrivent :

$$|\varepsilon(t)\rangle = A e^{-i\omega_+ t} |\varepsilon_+\rangle + B e^{-i\omega_- t} |\varepsilon_-\rangle,$$

avec  $A$  et  $B$  des constantes dépendant des conditions initiales, à savoir la présence ou non d'un champ incident sur la cavité dans le sens CW et/ou dans le sens CCW. On note  $|\varepsilon(t=0)\rangle = t_1 E_0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  avec  $t_1$  la transmission du coupleur d'entrée et  $E_0$  l'amplitude du champ incident. Les variables  $x$  et  $y$  valent 0 ou 1 en fonction de la présence (ou non) d'un champ incident sur la cavité respectivement dans les sens CW ou CCW. Les constantes  $A$  et  $B$  sont alors données par<sup>2</sup> :

$$\begin{cases} A = \frac{t_1 E_0 \sqrt{1+|\chi|^2}}{1+\chi^2 e^{-2i\delta}} (x + y \chi e^{-2i\delta}), \\ B = \frac{t_1 E_0 \sqrt{1+|\chi|^2}}{1+\chi^2 e^{-2i\delta}} (y - \chi x). \end{cases}$$

---

2. Pour le calcul, voir l'annexe F.4

Le champ total intracavité est la somme des champs  $|\varepsilon(t)\rangle$  ayant fait 1, 2, ...  $k$  tours dans la cavité et interférant ensemble. Les équations précédentes permettent d'exprimer le champ total intracavité par :

$$|\varepsilon_{\text{Tot}}(t)\rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} \left| \varepsilon \left( t + k \frac{nL}{c} \right) \right\rangle = A e^{-i\omega_+ t} \sum_{k=0}^{+\infty} \left( e^{-\frac{i\omega_+}{\Delta\nu_{\text{ISL}_0}}} \right)^k |\varepsilon_+\rangle + B e^{-i\omega_- t} \sum_{k=0}^{+\infty} \left( e^{-\frac{i\omega_-}{\Delta\nu_{\text{ISL}_0}}} \right)^k |\varepsilon_-\rangle,$$

avec  $\Delta\nu_{\text{ISL}_0} = \frac{c}{nL}$ . Dans le cas où  $\left| e^{-\frac{i\omega_{\pm}}{\Delta\nu_{\text{ISL}_0}}} \right| < 1$ , c'est à dire quand  $\text{Im}(\omega_{\pm}) < 0$ , on a alors :

$$|\varepsilon_{\text{Tot}}(t)\rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} \left| \varepsilon \left( t + k \frac{nL}{c} \right) \right\rangle = A e^{-i\omega_+ t} T_+(\nu) |\varepsilon_+\rangle + B e^{-i\omega_- t} T_-(\nu) |\varepsilon_-\rangle,$$

avec :

$$T_{\pm}(\nu) = \frac{1}{1 - e^{-\frac{i\omega_{\pm}}{\Delta\nu_{\text{ISL}_0}}}} = \frac{1}{1 - e^{\frac{\text{Im}(\omega_{\pm})}{\Delta\nu_{\text{ISL}_0}}} e^{-\frac{i \text{Re}(\omega_{\pm})}{\Delta\nu_{\text{ISL}_0}}}}.$$

La cavité présente donc deux modes propres avec deux résonances distinctes dépendant des valeurs propres  $\omega_+$  et  $\omega_-$ . La partie imaginaire des valeurs propres induira des pertes intracavité, et la partie réelle sera responsable de la fréquence de résonance du mode.

### 4.1.3 Cas d'un couplage dissipatif pur : $\zeta = 0$

Un couplage dissipatif est un couplage qui rajoute des pertes au système. Dans ce cas,  $\zeta = 0$  et les valeurs propres (4.5) s'écrivent :

$$\omega_{\pm} = 2\pi\nu - i \frac{\gamma_{\text{cav}}}{2} \pm \pi K_S \sqrt{\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_L^2},$$

et il existe une plage de vitesses de rotation pour laquelle  $\sqrt{\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_L^2}$  est imaginaire pur, et donc des pertes sont rajoutées au système. La figure 4.2 présente l'évolution des parties réelle et imaginaire des valeurs propres, à fréquence laser fixée, en fonction de la vitesse de rotation  $\dot{\theta}$ , pour un couplage dissipatif pur.

La plage où les deux fréquences propres sont superposées correspond au lock-in de la cavité. Malgré une vitesse de rotation non nulle, les fréquences de résonance (des modes propres) sont égales, et ce sont les pertes des modes qui sont modifiées. La limite de la zone aveugle est donnée par :

$$\dot{\theta}_L = \frac{c}{\pi K_S n L} \rho.$$

De plus, on vérifie bien sur la figure 4.2 que la partie imaginaire des modes propres est inférieure à 0 quelle que soit la vitesse de rotation.



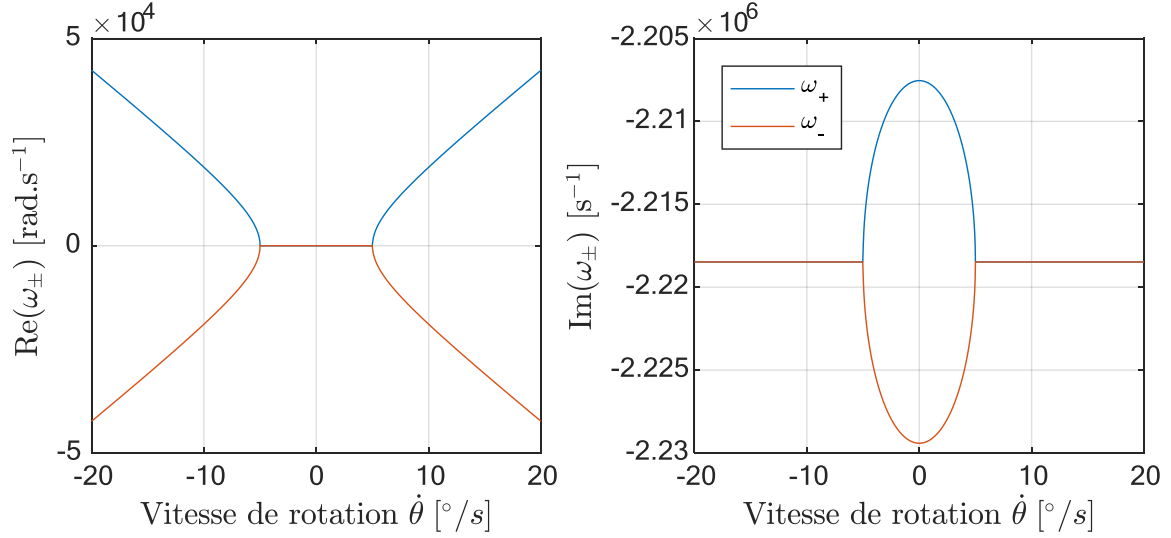


FIGURE 4.2 – Évolution des valeurs propres en fonction de la vitesse de rotation  $\dot{\theta}$  pour un couplage dissipatif pur ( $\zeta = 0$ ). Les paramètres de la modélisation sont : un diamètre d’enroulement de  $D = 60$  cm, une longueur d’onde  $\lambda = 1,55$   $\mu\text{m}$ , soit  $K_S = D/\lambda = 3,87 \cdot 10^5$   $\text{Hz}/(\text{rad}/\text{s})$ , et un coefficient  $\gamma_{\text{cav}} = 4,44 \cdot 10^6$   $\text{Hz}$ . La paramètre  $\gamma_{\text{cav}}$  de la modélisation a été fixé tel que  $e^{\frac{-\gamma_{\text{cav}}}{2} \frac{nL}{c}} = r_1 g$  avec  $r_1^2 = 0.941$ ,  $g^2 = 0.8108$ , et  $\Delta\nu_{\text{ISL}_0} = 16,4$   $\text{MHz}$ . On a de plus choisi :  $\dot{\theta}_L = 5 \text{deg}/\text{s}$ . On a retiré  $2\pi\nu$  aux valeurs propres pour que le graphe des parties réelles soit centré en 0.

#### 4.1.4 Cas d’un couplage conservatif pur $\zeta = \pi/2$

Un couplage conservatif ne rajoute aucune perte au système. Dans ce cas,  $\zeta = \pi/2$  et les valeurs propres (4.5) s’écrivent :

$$\omega_{\pm} = 2\pi\nu - i\frac{\gamma_{\text{cav}}}{2} \pm \pi K_S \sqrt{\dot{\theta}^2 + \dot{\theta}_L^2},$$

et le coefficient sous la racine est toujours strictement positif, ce qui ne rajoute pas de pertes au système. La figure 4.3 présente l’évolution des parties réelle et imaginaire des valeurs propres, à fréquence laser fixée, en fonction de la vitesse de rotation  $\dot{\theta}$ . Il n’y a plus de recouvrement entre les modes propres de la cavité : on n’a plus de zone aveugle dans ce cas.

Lorsque la vitesse de rotation est très supérieure à la limite de la zone aveugle, les cas dissipatifs et conservatifs sont équivalents, et on retrouve le comportement de la cavité en absence de rétrodiffusion.

## 4.2 Mesure de la rétrodiffusion dans la fibre Kagomé fournie par GLOphotonics

Si on suppose que la rétrodiffusion dans notre cavité résonante basée sur une fibre à cœur creux est dissipative, alors on peut évaluer la zone aveugle  $\dot{\theta}_L$  en connaissant le coefficient de

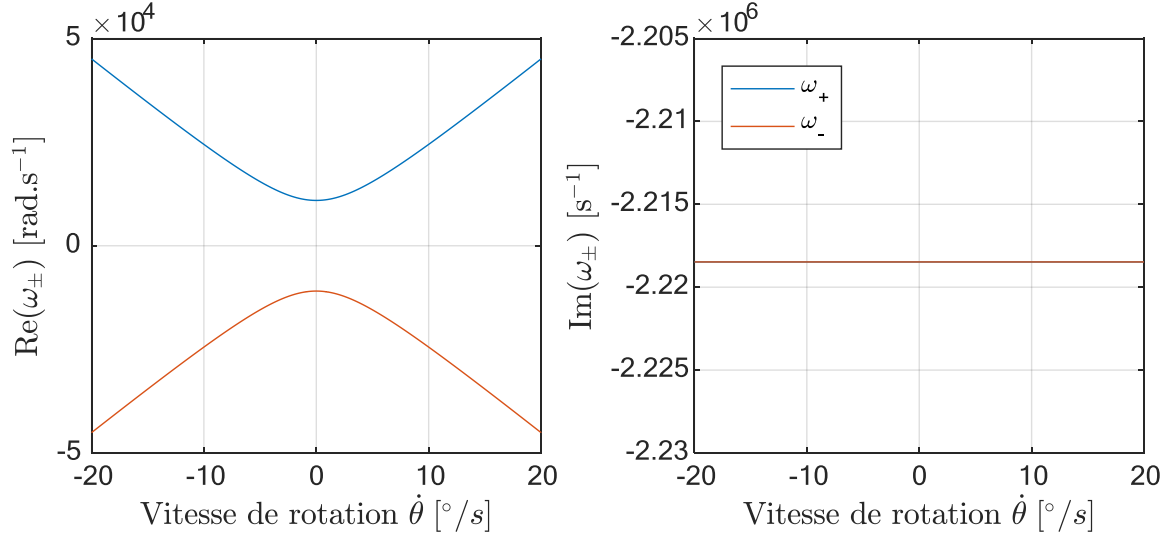


FIGURE 4.3 – Évolution des valeurs propres pour un couplage conservatif pur ( $\zeta = \pi/2$ ) en fonction de la vitesse de rotation  $\dot{\theta}$ . Les paramètres de la modélisation sont les mêmes que ceux pris pour la figure 4.2. Les parties imaginaires de  $\omega_+$  et  $\omega_-$  sont superposées sur le graphe de droite.

réflexion  $\rho$  dû à la rétrodiffusion de la cavité. Si on suppose de plus que seule la fibre à cœur creux rétrodiffuse dans la cavité, on peut estimer le coefficient  $\rho$  à partir du coefficient de rétrodiffusion de la fibre  $\alpha_{\text{RD}}$ , et de la longueur  $L$  de cette dernière par :

$$\rho \simeq \sqrt{\alpha_{\text{RD}} L}. \quad (4.7)$$

Cependant, comme le développement des fibres à cœur creux est récent, il n'y a pas encore de mesure systématique du coefficient de rétrodiffusion  $\alpha_{\text{RD}}$  sur les fibres à cœur creux. En effet, les instruments de mesure du coefficient de rétrodiffusion tels que des OTDR (pour *Optical Time Domain Reflectometer*) sont optimisés pour des fibres en silice classiques et ne permettent pas de réaliser une mesure sur des fibres à cœur creux. C'est pourquoi nous avons mis en place une méthode de mesure de ce coefficient, que nous allons présenter par la suite.

#### 4.2.1 Modélisation de la rétrodiffusion dans une fibre à cœur creux

Pour modéliser la rétrodiffusion dans une fibre à cœur creux, on se base sur le modèle des fibres en silice classiques. On considère une fibre de longueur  $L$  et on définit :

- $\alpha_A$  son coefficient d'absorption linéique,
- $\alpha_D$  son coefficient de diffusion (Rayleigh) linéique,
- $\alpha = \alpha_A + \alpha_D$  son coefficient d'atténuation linéique.

Comme vu au chapitre précédent, si un faisceau de puissance  $P_0$  est incident sur la fibre, la puissance transmise en un point d'abscisse  $x$  de cette fibre est donnée par (3.3) :

$$P(x) = CP_0 e^{-\alpha x},$$

avec  $C$  le coefficient de couplage entre la puissance incidente et la fibre. La puissance diffusée par une portion  $dx$  de la fibre est donnée par :

$$dP(x) = CP_0 e^{-\alpha x} \alpha_D dx.$$

Seule une fraction  $S$  de cette puissance est guidée en sens inverse dans la fibre. Le paramètre  $S$  est un coefficient de capture, défini par les caractéristiques géométriques de la fibre, et la distribution angulaire de la rétrodiffusion Rayleigh qui n'est *a priori* pas isotrope [85]. La puissance rétrodiffusée revient ensuite à son point de départ et est donc donnée par :

$$dP_{RD}(x) = CP_0 e^{-2\alpha x} S \alpha_D dx.$$

En intégrant sur toute la longueur de la fibre, on obtient l'expression de la puissance rétrodiffusée, qui est :

$$P_{RD}(L) = \frac{S \alpha_D}{2\alpha} CP_0 (1 - e^{-2\alpha L}) \simeq S \alpha_D CP_0 L,$$

car  $\alpha L \ll 1$ . On définit alors le coefficient de rétrodiffusion linéique de la fibre  $\alpha_{RD} = S \alpha_D$ . Le paragraphe suivant propose une méthode de mesure de ce coefficient au moyen d'une cavité résonante.

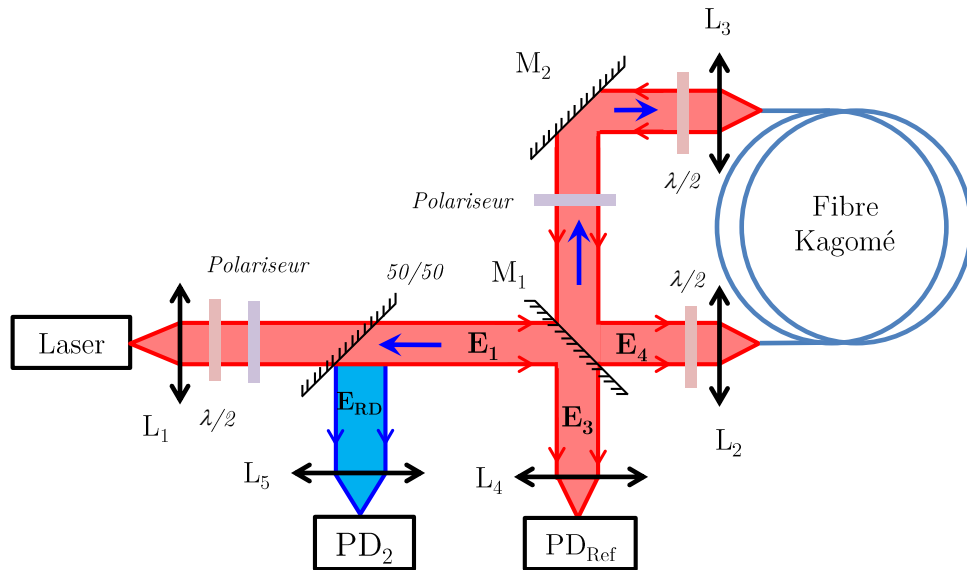
#### 4.2.2 Mesure du coefficient de rétrodiffusion de la fibre Kagomé

Pour mesurer le coefficient de rétrodiffusion, nous avons utilisé le montage présenté dans notre article [86] reproduit en annexe C. Le montage est présenté figure 4.4. Le champ intracavité  $E_4$  est donné en annexe D.1.2 par l'équation (D.1) :

$$E_4 = \frac{t_1 \sqrt{1 - \gamma_1}}{1 - r_1 g} \cdot e^{2i\pi\nu/\delta\nu_{ISL}} E_1.$$

En supposant que seule la fibre rétrodiffuse à l'intérieur de la cavité, et en tenant compte du fait que cette rétrodiffusion résonne [87], le champ rétrodiffusé intracavité est donné par :

$$E_{RD,cav} = \frac{\sqrt{\alpha_{RD} L}}{1 - r_1 g e^{2i\pi\nu/\Delta\nu_{ISL}}} E_4.$$

$$E_{RD} = r_{50/50} \frac{\sqrt{\alpha_{RD} L} (1 - r_1^2) (1 - \gamma_1) e^{2i\pi\nu/\delta\nu_{\text{ISL}}}}{(1 - r_1 g e^{2i\pi\nu/\Delta\nu_{\text{ISL}}})^2} E_1.$$
$$P_{\text{RD}} = r_{50/50}^2 \frac{\alpha_{\text{RD}} L (1 - r_1^2)^2 (1 - \gamma_1)^2}{(1 - r_1 g)^4} P_1. \quad (4.8)$$


L'équation (4.8) montre qu'une mesure de l'intensité maximale rétrodiffusée donne accès au coefficient de rétrodiffusion, à condition de connaître les paramètres  $r_1$  et  $g$  de la cavité. Or, comme nous l'avons vu au chapitre 3, une mesure de ces paramètres est possible grâce à la photodiode PD<sub>Ref</sub> et un balayage de la fréquence du laser.

À chaque fois que la cavité est à résonance, une partie de l'intensité est rétrodiffusée et résonne elle aussi. On utilise la courbe de l'intensité réfléchie pour évaluer les pertes intracavité, ainsi

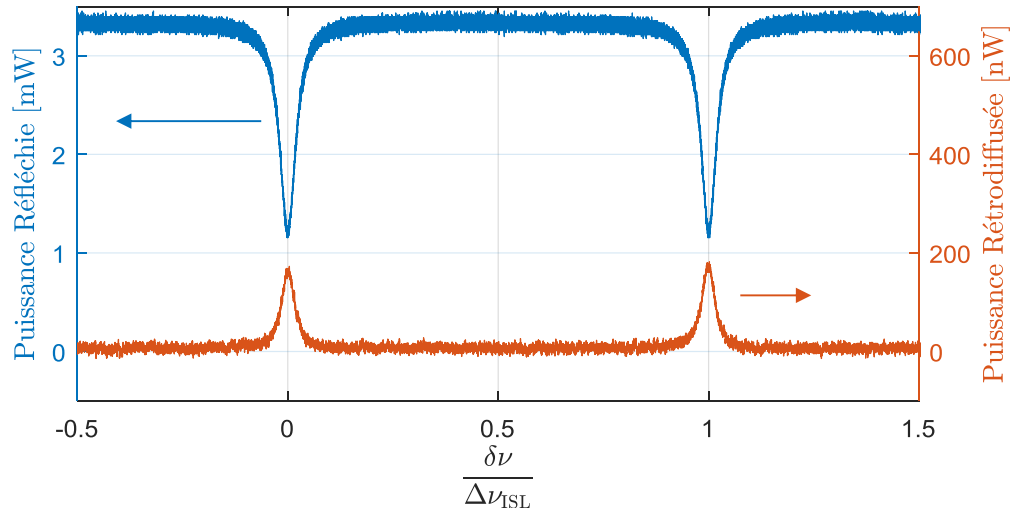


FIGURE 4.5 – Évolution expérimentale de la puissance réfléchie et de la puissance rétrodiffusée lorsque la fréquence du laser est balayée. La puissance incidente est ici de  $P_1 = 3,35 \text{ mW}$ . La cavité a été mise au point avec 18,3 m de fibres.

que le coefficient de réflexion du miroir  $M_1$ , avec un ajustement comme celui fait au chapitre 3. On mesure la puissance maximale rétrodiffusée grâce à la courbe de rétrodiffusion.

Trois difficultés rendent la mesure de rétrodiffusion délicate. Premièrement, l'alignement de la polarisation intracavité pose problème. Comme nous l'avons vu au chapitre 3, la fibre Kagomé ne maintient pas la polarisation. C'est pourquoi nous avons choisi d'insérer des lames  $\lambda/2$  et un polariseur à l'intérieur de la cavité, pour contrôler cette dernière. La seconde difficulté concerne l'intensité rétrodiffusée par la cavité qui est assez faible, comme on peut le voir sur les échelles différentes des courbes de la figure 4.5. Cela a pour conséquence que toute réflexion parasite de chacun des composants vient perturber la mesure. Nous avons donc cherché à éliminer toutes ces sources de bruit, par exemple en inclinant les différents composants (surtout ceux intracavité). Enfin, la dernière difficulté réside dans le fait que notre procédure de mesure est basée sur la comparaison de deux puissances d'ordres de grandeur très différents et mesurées avec deux détecteurs différents. C'est pourquoi nous avons procédé à une calibration croisée des détecteurs, afin que la conversion en puissance de la tension en sortie de ces derniers soit la plus juste possible. D'autre part, ces détecteurs peuvent présenter des "offsets". Pour annuler les erreurs provenant de ces offsets, nous avons réalisé plusieurs mesures de puissance maximale rétrodiffusée à plusieurs puissances incidentes différentes. Nous avons pu vérifier, comme le montre la figure 4.6, que l'évolution de la puissance rétrodiffusée en fonction de la puissance incidente était linéaire. La pente de cette courbe correspond au ratio  $P_{RD}/P_1$  et donne accès au coefficient de rétrodiffusion.

Pour vérifier que la rétrodiffusion intracavité était bien due à la fibre optique, nous avons mené cette expérience pour deux longueurs de fibres différentes. Le tableau 4.1 présente les résultats que nous avons obtenus pour la fibre Kagomé à deux longueurs différentes.

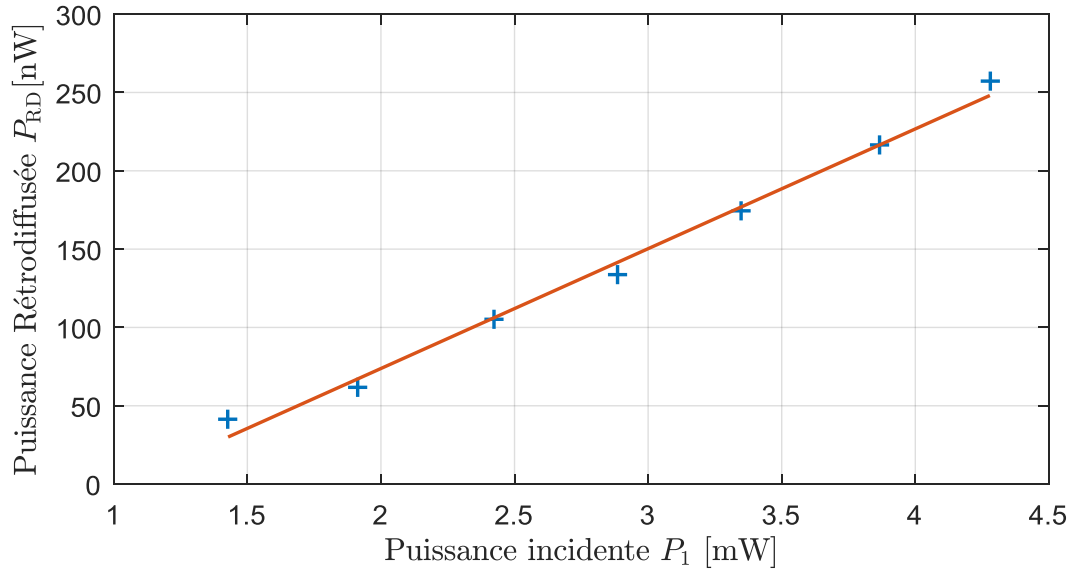


FIGURE 4.6 – Courbe présentant les mesures de puissance maximale rétrodiffusée en fonction de la puissance incidente sur la cavité. L'équation de la courbe est :  $y[\text{nW}] = 76,47x[\text{mW}] - 79,15$ . Le coefficient de corrélation est de 0,992.

Longueur [m]	$r_1^2$	$\gamma_1$	$g^2$	Finesse	Mesure $P_{RD}/P_1$	$\alpha_{RD}$ [m <sup>-1</sup> ]
18,3	0,946	0,003	0,766	24,6	$7,65 \cdot 10^{-5}$	$1,49 \cdot 10^{-6}$
3	0,943	0,003	0,834	32,7	$3,49 \cdot 10^{-5}$	$1,26 \cdot 10^{-6}$

TABLE 4.1 – Résultats des mesures de rétrodiffusion sur la fibre Kagomé de chez GLOphotonics

Les coefficients de rétrodiffusion que nous mesurons sont bien du même ordre de grandeur pour les deux longueurs de fibre. Cela valide notre hypothèse de départ qui est que la rétrodiffusion est majoritairement due à la fibre optique au sein de la cavité. La finesse et les pertes que nous obtenons sont différentes pour les deux longueurs de fibre, car 3 mètres de fibre présentent moins de pertes que 20 mètres. Les coefficients de réflexion du miroir  $M_1$  tirés des modélisations sont en accord avec la valeur mesurée (au chapitre 3) de  $r_1^2 = 0,942$ . La littérature présente une mesure de coefficient de rétrodiffusion pour une fibre 7-cell à bande interdite photonique [88] de l'ordre de  $\alpha_{RD} = 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ m}^{-1}$ , ce qui est du même ordre de grandeur que nos mesures sur la fibre Kagomé.

D'autres mesures de coefficient de rétrodiffusion ont été réalisées sur certaines des autres fibres à cœur creux en notre possession et sont présentées dans notre article [86] reproduit en annexe C. Les coefficients de rétrodiffusion que nous obtenons pour toutes les fibres à cœur creux sont du même ordre de grandeur, c'est-à-dire de l'ordre de  $1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^{-1}$ . On peut supposer que les mécanismes à l'origine de la rétrodiffusion dans les fibres à cœur creux sont les mêmes pour

tous les types de fibres, ce qui expliquerait pourquoi nous trouvons le même ordre de grandeur de coefficient pour toutes les fibres.

### 4.2.3 Évaluation de la zone aveugle dans le cas d'un couplage dissipatif

Dans le cas d'un couplage dissipatif, la zone aveugle est donnée par la formule (4.6) :

$$\dot{\theta}_L = \frac{c}{\pi K_S n L} \rho.$$

Le gyromètre que nous développons est celui présenté au chapitre 3, nous avons donc, d'après tout ce qui précède :

- $\Delta\nu_{\text{ISL}_0} = \frac{c}{nL} = 16,4 \text{ MHz}$ ,
- $K_S = \frac{4A}{nL\lambda} = \frac{D}{\lambda} = 3,87 \cdot 10^5 \text{ Hz/(rad/s)}$  car  $D = 0,6 \text{ m}$  et  $\lambda = 1,55 \text{ }\mu\text{m}$ ,
- D'après l'équation (4.7),  $\rho = \sqrt{\alpha_{\text{RD}} L} = 0,0052$ . Nous avons pris pour le calcul  $\alpha_{\text{RD}} = 1,5 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1}$  et  $L = \frac{c}{n\Delta\nu_{\text{ISL}_0}} = 18,3 \text{ m}$ .

Nous pouvons donc évaluer la taille de la zone aveugle dans le gyromètre que nous développons par :  $\dot{\theta}_L \simeq 4 \text{ deg/s}$ . L'objet de la partie suivante est de mesurer cette zone aveugle.

## 4.3 Mesure de la zone aveugle

Pour mesurer la zone aveugle, nous avons mis en place un système de mesure de rotation en boucle fermée, avec deux modulateurs acousto-optiques<sup>3</sup>. La figure 4.7 présente le montage mis en place pour mesurer la zone aveugle. Un asservissement PDH (décrit au chapitre 2) est réalisé pour asservir les ondes contrapropageantes à la résonance de la cavité, au travers des modulateurs acousto-optiques. Les deux modulateurs acousto-optiques (référence : MGAS110-A1 de chez AA OptoElectronic) fonctionnent dans l'ordre +1 et leur fréquence de décalage est centrée sur 110 MHz. Ils ont une bande passante de  $\pm 10 \text{ MHz}$  autour des 110 MHz de décalage en fréquence. Les ondes contrapropageantes sont asservies sur le même mode de la cavité. Les filtres passe-bas sont des filtres d'ordre 2 de bande passante égale à 1 kHz. Les photodiodes utilisées sont des photodiodes Thorlabs (référence : PDA10CS-EC). La pente du signal d'erreur est mesurée (comme présenté au chapitre 5) égale à  $1,9 \text{ }\mu\text{V/Hz}$  dans les deux sens. La définition des gains du correcteur PID est présentée au chapitre 5, et nous avons choisi ici, conformément à la procédure décrite dans ce même chapitre 5 :  $G_P = 3,4 \cdot 10^6$ ,  $G_I = 1,6 \cdot 10^{10} \text{ Hz}$ ,  $G_D = 176$  et  $G_N = 3,7 \cdot 10^6 \text{ Hz}$ . Ces gains PID permettent d'obtenir une bande passante boucle fermée d'environ 5 kHz, une marge de phase de  $M_\varphi = 90 \text{ deg}$  et une marge de gain de  $M_g = 59 \text{ dB}$  (ces paramètres seront eux aussi définis au chapitre suivant).

3. voir le chapitre 2 section 2.3.2 pour une explication de ce type de mesure.

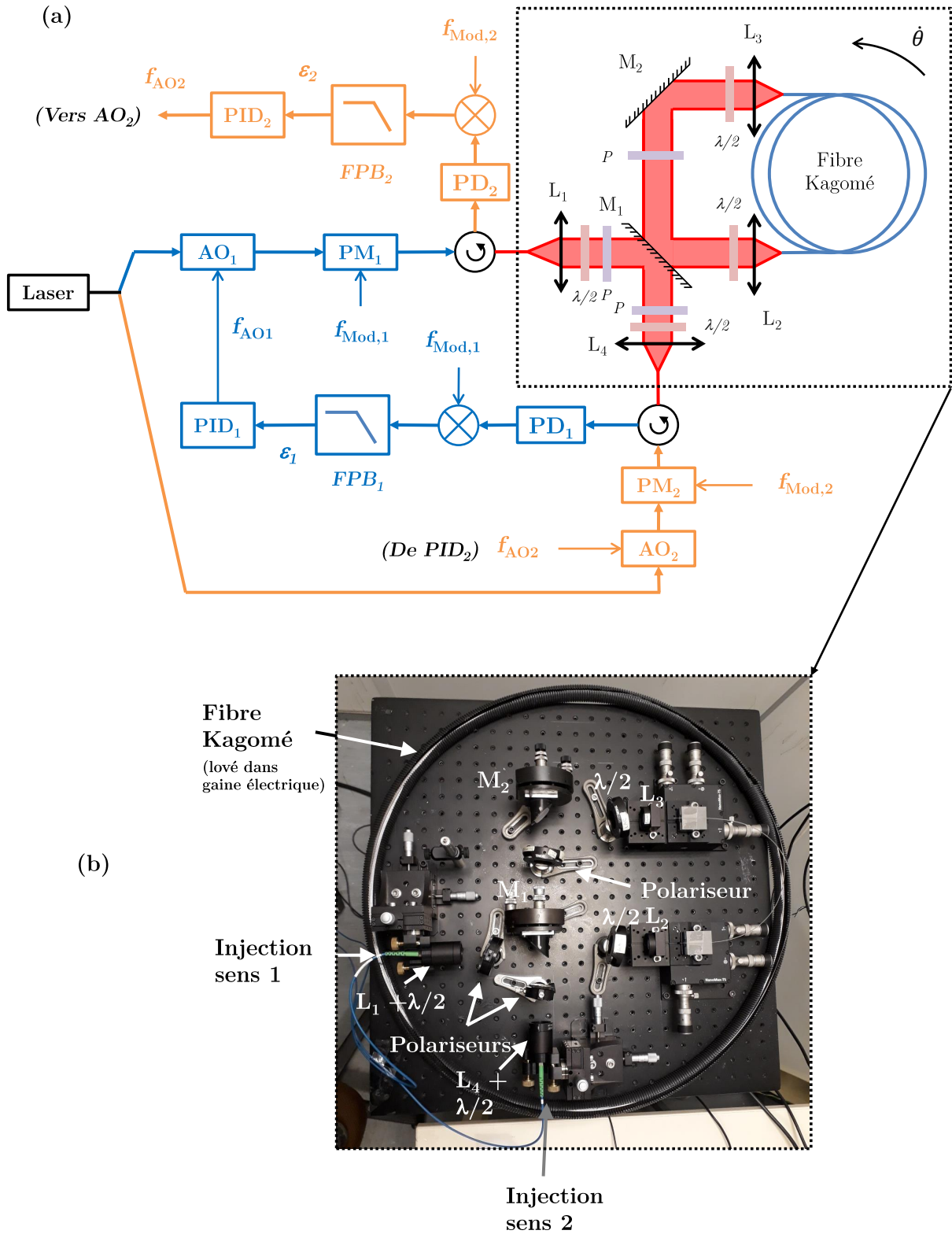


FIGURE 4.7 – (a) Schéma du principe de mesure de la zone aveugle. Le laser est séparé en deux faisceaux au moyen d'un coupleur fibré 50/50. Chacun des faisceaux est envoyé sur un modulateur acousto-optique (AO) et un modulateur de phase (PM) avant d'être injecté dans la cavité.  $P$  = Polariseurs,  $PD$  = Photodiode,  $FPB$  = Filtre passe-bas,  $PID$  : correcteur de boucle d'asservissement. Nouveaux éléments : circulateurs. (b) : Photo du montage optique de la cavité résonante réelle.



Les fréquences de pilotage des modulateurs de phase sont choisies égales à 3,012 MHz (voie 1) et 2,84 MHz (voie 2). Nous utilisons un amplificateur à verrouillage de phase de type Zurich Instruments (UHF-LI) qui permet de réaliser toute la partie démodulation, filtrage et correcteur PID sur les deux voies, et de tracer les évolutions des fréquences des oscillateurs qui pilotent les deux modulateurs acousto-optiques. Un asservissement supplémentaire (non représenté sur le schéma figure 4.7, mais décrit au chapitre 5) permet de minimiser la modulation d'amplitude résiduelle des modulateurs de phase.

La table tournante sur laquelle est posée le gyromètre est pilotée au moyen d'un appareil qui permet de fixer une vitesse de rotation dans le sens CW ou le sens CCW. La table tournante et son module de pilotage nous ont été fournies par Thales Avionics. Nous avons considéré pour toutes nos mesures que l'étalonnage en vitesse de rotation de cette table était parfait et c'est elle qui nous sert de référence dans nos mesures. La plage de vitesses atteignable par cette table va de  $0,001^\circ/\text{s}$  à  $999^\circ/\text{s}$ .

Comme nous l'avons vu à la section précédente, les fréquences des modulateurs acousto-optiques en cas de rétrodiffusion purement dissipative sont telles que :

$$\Delta\nu_S = f_{\text{AO},2} - f_{\text{AO},1} = K_S \sqrt{\dot{\theta} - \dot{\theta}_L}.$$

En mesurant la fréquence des modulateurs acousto-optiques au cours du temps, et en faisant tourner la table sur laquelle la cavité résonante est posée, on obtient les signaux de la figure 4.8 (a). La différence de ces deux signaux est tracée en figure 4.8 (b).

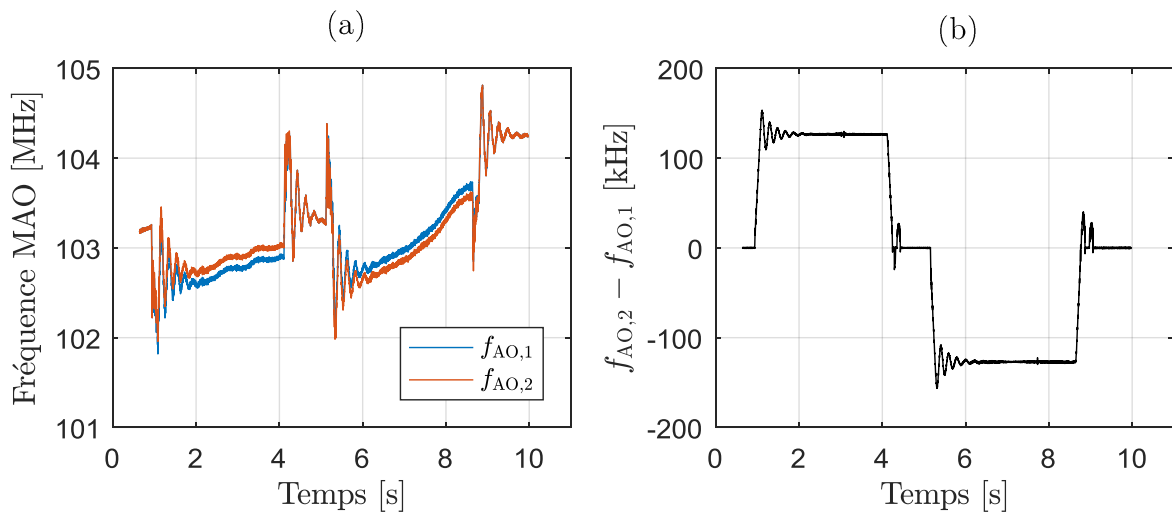


FIGURE 4.8 – (a) Tracé des fréquences des Modulateurs Acousto-Optiques (MAO) en fonction du temps. Deux rotations ont été appliquées à la table tournante, la première CCW et la seconde CW à  $\dot{\theta} = \pm 20^\circ/\text{s}$ . (b) Tracé de la différence des deux fréquences au cours du temps. Les oscillations transitoires proviennent de la table tournante.

La courbe de la figure 4.8 (b) permet d'extraire la valeur de  $\Delta\nu_s$  pour une vitesse de rotation  $\dot{\theta}$  fixée. En recommençant pour plusieurs vitesses de rotation, on peut tracer la courbe d'étalonnage du gyromètre (voir la figure 4.9). Cette dernière met en évidence la zone aveugle de la cavité, plage pour laquelle les fréquences  $f_{AO,1}$  et  $f_{AO,2}$  se verrouillent et où la rotation n'est pas mesurable.

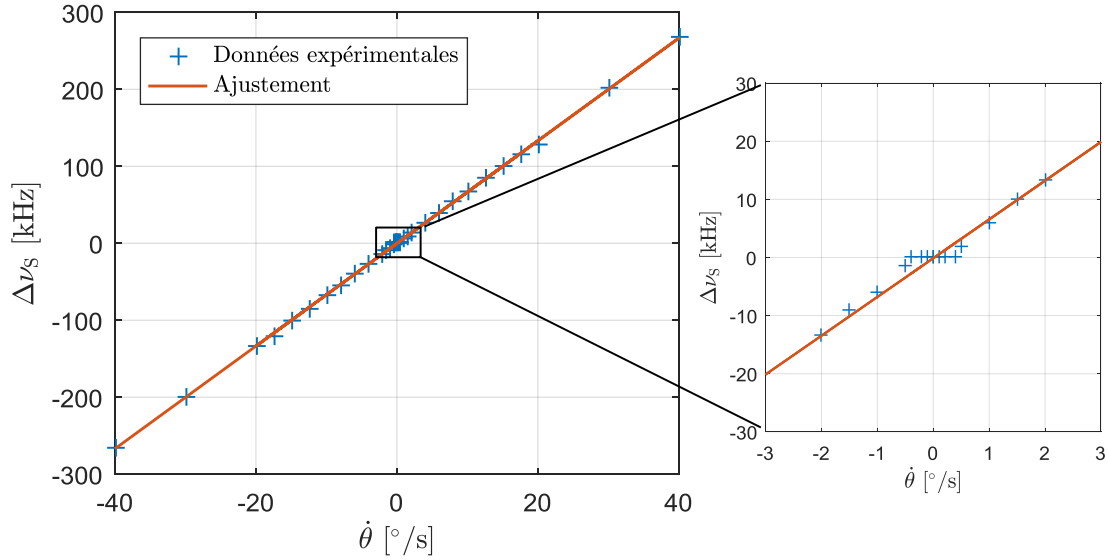


FIGURE 4.9 – Courbe d'étalonnage du gyromètre. La partie de droite est un zoom près des rotations nulles du graphe de la partie de gauche.

Plusieurs commentaires sont à faire sur ces résultats. Tout d'abord, les oscillations que l'on peut voir sur les graphes de la figure 4.8 au début et à la fin des mises en rotation sont dues à la table tournante. En effet, comme nous l'expliquons au chapitre 5, nous avons vérifié que l'asservissement des modulateurs acousto-optiques converge sans osciller. Nous pensons que les oscillations sont dues à l'asservissement de la table tournante à la vitesse de rotation de consigne fixé par le module de pilotage. En effet, la table tournante est faite pour fonctionner avec du matériel moins lourd qu'une table optique et ses composants, ce qui fait que la charge que nous avons placée sur la table tournante entraîne probablement une plus grande inertie que prévue par les constructeurs.

Ensuite, les fréquences mesurées par les deux modulateurs acousto-optiques sont identiques lorsque la table n'est pas en rotation. Cela confirme que les deux voies sont bien asservies sur le même mode. D'autre part, les fréquences dérivent au cours du temps. Cela est dû à deux phénomènes : la dérive de la fréquence laser au cours du temps, et/ou la dérive en longueur de la cavité. Ces deux phénomènes sont indiscernables sur la fréquence individuelle des modulateurs acousto-optiques et sont supprimés dans le calcul de l'effet Sagnac par la différence des deux fréquences des modulateurs acousto-optiques.

La zone aveugle mesurée expérimentalement est égale à  $\dot{\theta}_L = 0,4 \text{ deg/s}$ , ce qui est 10 fois inférieur à la théorie ( $\dot{\theta}_L = 4 \text{ deg/s}$ ). Cet écart d'un ordre de grandeur entre théorie et expérience peut venir du fait que la rétrodiffusion au sein de la cavité n'est pas purement dissipative.

Le graphe de la figure 4.9 permet de mesurer le facteur d'échelle de la cavité, qui est égal à  $K_S = 6,67 \text{ kHz/(deg/s)} = 3,82 \cdot 10^5 \text{ Hz/(rad/s)}$ , ce qui est aussi en accord avec la valeur théorique ( $3,87 \cdot 10^5 \text{ Hz/(rad/s)}$ ) pour un diamètre de  $D = 60 \text{ cm}$ .

## 4.4 Conclusion sur la mesure de rotation en asservissant les deux ondes sur le même mode

Nous venons de présenter une méthode de mesure de rotation qui consiste à asservir deux modulateurs acousto-optiques de telle sorte que les ondes contrapropageantes résonnent sur le même mode de la cavité. Cette méthode permet de mettre en évidence l'existence d'une zone aveugle dans notre cavité résonante. Les premières mesures nous ont permis d'évaluer le facteur d'échelle de notre cavité, ainsi que notre zone aveugle. Il apparaît que cette méthode de mesure de rotation ne peut être utilisée avec une cavité passive car la zone aveugle est trop importante. Il faut donc passer à d'autres méthodes d'asservissement, que nous présentons au chapitre 5.

# Asservissements et mesure de rotation : les performances du gyromètre résonant développé

---

Dans tout le chapitre, la cavité résonante utilisée est la cavité que nous avons réalisée et caractérisée au chapitre 3. Les méthodes d'asservissement décrites ici utiliseront les équations présentées aux chapitres 1 et 2. Ce chapitre se découpe en trois parties. Dans un premier temps, nous allons décrire la procédure que nous avons suivie pour réaliser les différents asservissements permettant de mesurer des rotations. Dans un second temps, nous détaillerons la méthode d'asservissement dite "à deux ondes" décalées de 13 modes (ou 13 intervalles spectraux libres) qui a permis de s'affranchir des limitations liées à la zone aveugle vues au chapitre 4, et de réaliser une maquette de gyromètre de classe de performance intermédiaire. Nous évaluerons les limitations de ce gyromètre au moyen de la variance d'Allan. Enfin, nous présenterons une méthode de mesure de rotation dite "à trois ondes" permettant en théorie de s'affranchir des limitations de la méthode à deux ondes décalées de 13 modes.

## 5.1 Procédure expérimentale d'asservissement

Comme nous l'avons vu au chapitre 2, les caractéristiques d'un asservissement telles que la rapidité, la stabilité et la précision dépendent des gains choisis pour le correcteur de la boucle. L'objet de cette section est de détailler la démarche que nous avons suivie pour choisir les gains des différents correcteurs PID mis en œuvre pour réaliser nos asservissements PDH. Cette

démarche repose sur une modélisation de nos asservissements sous Simulink<sup>1</sup>. Nous considérons que nos gains sont optimisés lorsque l'asservissement est le plus rapide possible, tout en restant stable. La démarche détaillée dans cette section est réitérée à chaque nouvel asservissement réalisé.

Nos asservissements consistent à piloter une fréquence optique de sorte que cette dernière soit un multiple entier de l'intervalle spectral libre d'une cavité résonante (voir chapitre 2 pour plus de détails). Le contrôle de la fréquence optique se fait ici par des modulateurs acousto-optiques (MAO), qui permettent de décaler la fréquence du laser d'une quantité que l'on peut piloter. C'est donc la fréquence optique qui est asservie à la résonance de la cavité, mais on dira par abus de langage que ce sont les MAO qui sont asservis, puisque ce sont ces derniers qui permettent de contrôler la fréquence optique.

### 5.1.1 Modélisation Simulink

Nous nous sommes servis de l'outil mathématique Simulink pour modéliser et optimiser nos asservissements. La modélisation sous Simulink de l'asservissement d'un MAO est présentée en figure 5.1 (a). La figure 5.1 (b) correspond au schéma d'asservissement réel associé à la modélisation Simulink.

On rappelle l'expression du signal au voisinage de la résonance pour un asservissement PDH, donné par (2.38) et (2.39) :

$$V_{\epsilon 1, app} = -G_{tot} 4I_0 \cdot J_0 J_1 \sqrt{1 - \gamma_1} \frac{g(1 - r_1^2)}{(1 - r_1 g)^2} \frac{\pi}{\Delta \nu_{ISL}} \delta \nu.$$

avec ici  $\delta \nu = p \Delta \nu_{ISL} - (\nu_1 + f_{AO1})$ . Le facteur  $G_{PDH}$  de la modélisation Simulink correspond à la pente du signal d'erreur proche de la résonance, à savoir :

$$G_{PDH} = G_{tot} 4I_0 \cdot J_0 J_1 \sqrt{1 - \gamma_1} \frac{g(1 - r_1^2)}{(1 - r_1 g)^2} \frac{\pi}{\Delta \nu_{ISL}}. \quad (5.1)$$

Son unité est en Volts par Hertz optiques.

La photodiode est modélisée par un filtre passe-bas de fonction de transfert  $H_{PD}(\omega)$ , avec  $\omega$  la pulsation électrique. Les photodiodes que nous utilisons sont des photodiodes PDA10CS-EC de chez Thorlabs. Ces dernières ont un gain ajustable qui vient modifier leur bande passante. Nous avons utilisé les photodiodes sur le calibre 10 dB ce qui donne à la photodiode une bande passante de  $B = 4$  MHz et donc on a :

$$H_{PD}(\omega) = \frac{1}{1 + \frac{i\omega}{2\pi B}}. \quad (5.2)$$

---

1. Simulink est une boîte à outils du logiciel Matlab

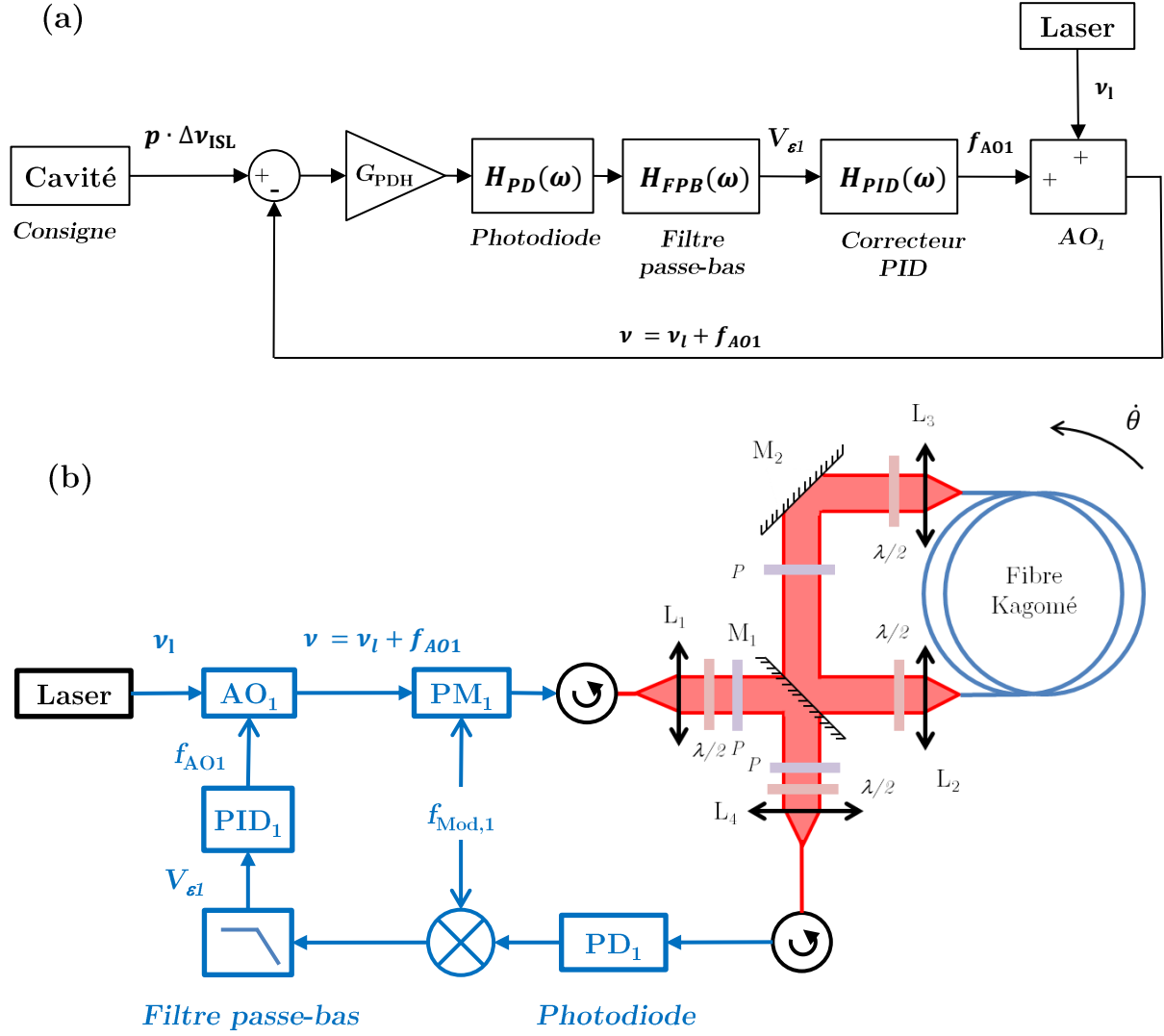


FIGURE 5.1 – (a) Modélisation sous Simulink de l’asservissement réalisé sur le Modulateur Acousto-Optique. (b) Schéma équivalent réalisé expérimentalement. PM : Modulateur de Phase, AO : Modulateur Acousto-Optique, PD : Photodiode, PID : Correcteur Proportionnel Intégral Dérivateur, P : Polariseur.

Le filtre de démodulation est un filtre passe-bas d’ordre 2 réalisé numériquement par un amplificateur à verrouillage de phase de chez Zurich Instruments (UHF-LI). L’annexe G.1 présente la manière dont cet instrument met en œuvre ces filtres de démodulation. La fonction de transfert dans le domaine analogique équivalente au filtre numérique d’ordre 2 est donnée par :

$$H_{FPB}(\omega) = \frac{1}{\left(1 + i \frac{\omega \sqrt{\sqrt{2} - 1}}{2\pi f_2}\right)^2}, \quad (5.3)$$

avec  $f_2$  la fréquence de coupure du filtre d’ordre 2.

Le correcteur PID est lui aussi numérique, et a une fonction de transfert équivalente analogique donnée par :

$$H_{\text{PID}}(\omega) = G_P + \frac{G_I}{i\omega} + \frac{G_D G_N}{1 + \frac{G_N}{i\omega}}, \quad (5.4)$$

avec :  $G_P$  le gain proportionnel (en Hz/V),  $G_I$  le gain de l'intégrateur (en Hz/V·rad/s),  $G_D$  le gain dérivateur (en Hz/V·s/rad), et  $G_N$  un gain (en rad/s) qui permet de "clamber" le dérivateur, de sorte à empêcher la fonction de transfert de dériver aux hautes fréquences.

La fonction de transfert de l'asservissement en boucle ouverte  $H_{\text{BO}}(\omega)$  est définie par :

$$H_{\text{BO}}(\omega) = G_{\text{PDH}} \cdot H_{\text{PD}}(\omega) \cdot H_{\text{FPB}}(\omega) \cdot H_{\text{PID}}(\omega), \quad (5.5)$$

et la fonction de transfert en boucle fermée  $H_{\text{BF}}(\omega)$  est définie par :

$$H_{\text{BF}}(\omega) = \frac{H_{\text{BO}}(\omega)}{1 + H_{\text{BO}}(\omega)}. \quad (5.6)$$

Le diagramme de Bode (amplitude et phase) de la fonction de transfert boucle ouverte permet de déterminer la stabilité de l'asservissement grâce à la mesure de la marge de phase et de la marge de gain, que nous définirons dans la section suivante. Le diagramme de Bode en boucle fermée permet de déterminer la bande passante du système d'asservissement. La bande passante de l'asservissement ainsi que sa stabilité vont dépendre des gains choisis pour le correcteur PID.

### 5.1.2 Choix des gains du correcteur PID et des bandes passantes de démodulation pour un asservissement stable

Pour choisir les gains PID les mieux adaptés à notre système, nous avons dans un premier temps mesuré expérimentalement le facteur  $G_{\text{PDH}}$ . En effet, la mesure expérimentale de ce gain permet de s'affranchir de la mesure de paramètres tel que  $I_0$  ou  $G_{\text{tot}}$ . Cela permet aussi de rapprocher notre modélisation au mieux de la réalité. Pour mesurer le facteur  $G_{\text{PDH}}$ , nous mettons en place le montage de la figure 5.2, qui est dérivé de la figure 5.1 (b) sans fermer l'asservissement.

Comme l'asservissement n'est pas en fonctionnement, on balaye la fréquence du laser et on observe le signal d'erreur PDH en sortie du filtre de démodulation, pour lequel nous fixons une bande passante de 20 kHz, afin que le filtrage ne déforme pas le signal PDH à l'oscilloscope. Un exemple de signal d'erreur observé sur l'oscilloscope est présenté en figure 5.3. Dans cet exemple, la fréquence de modulation du modulateur de phase est de  $f_{\text{Mod}} = 3,012$  MHz. Son amplitude de modulation est telle que  $\beta = 1,08$  rad (voir chapitre 2). La pente du PDH est donnée par l'asymptote de la courbe rouge de la figure 5.3 proche de la résonance, et correspond à une pente de 1800 Volts par secondes. Comme le montre la figure 5.3, un intervalle spectral libre

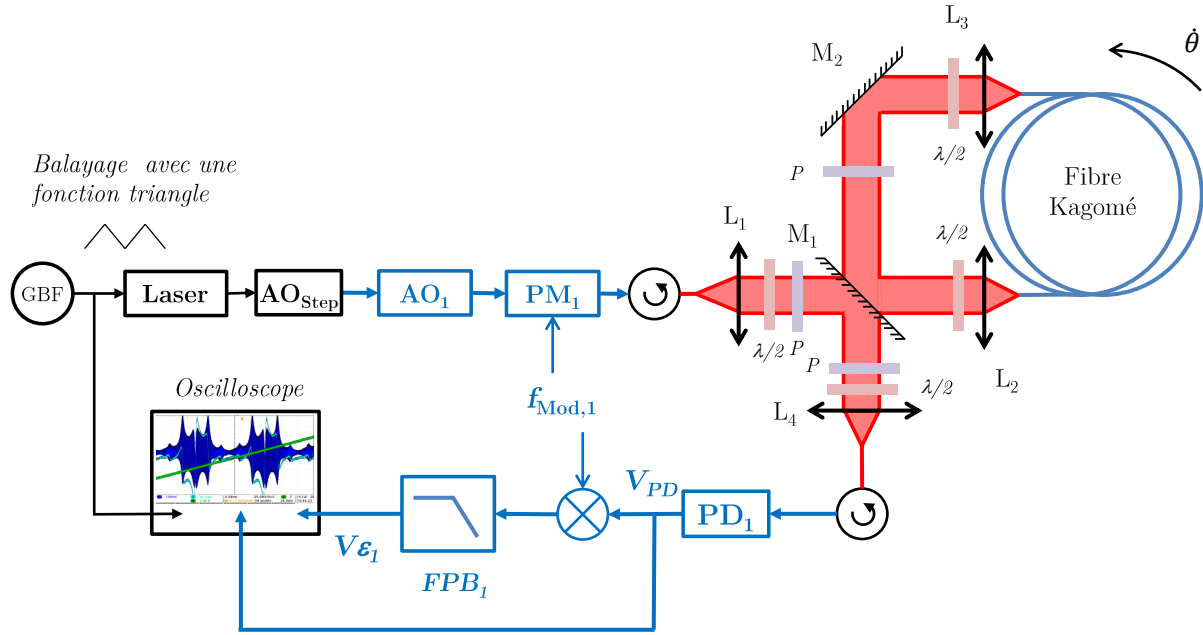


FIGURE 5.2 – Schéma présentant la mesure du gain  $G_{PDH}$ . L'utilité de mettre un second modulateur acousto-optique en série (" $AO_{Step}$ ") sera précisée dans la partie 5.1.3. AO : Modulateur Acousto-Optique, PD : Photodiode, FPB : Filtre Passe-Bas, PM : Modulateur de Phase.

(16,4 MHz) est balayé en 17,6 ms, ce qui permet de convertir la pente du signal d'erreur en gain PDH :  $G_{PDH} = 1,9 \mu V/Hz$ . C'est la valeur du gain que nous prenons dans la modélisation Simulink.

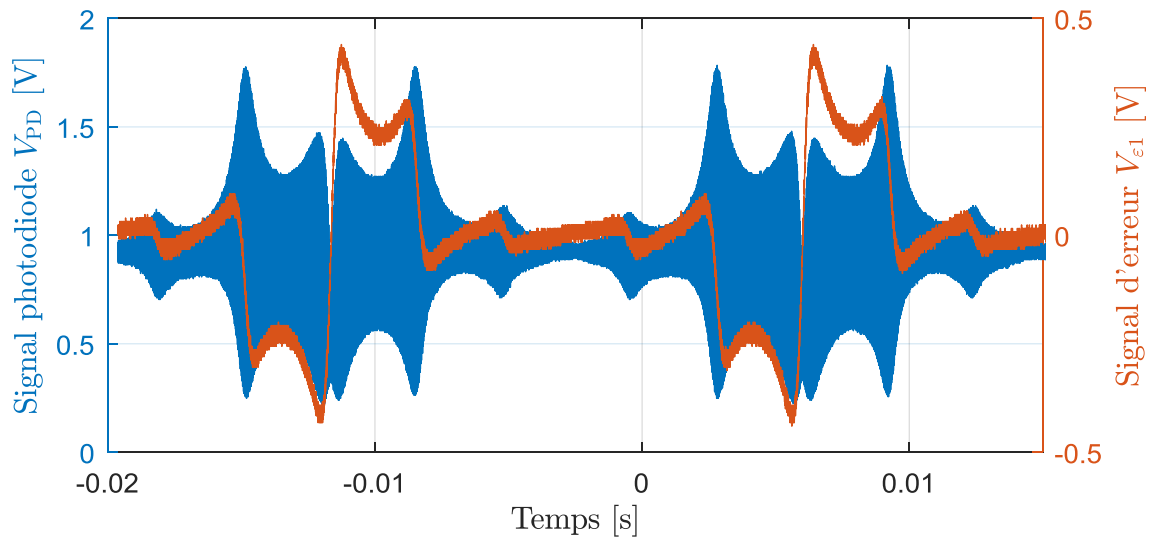


FIGURE 5.3 – Tracé expérimental du signal d'erreur  $V_{e1}$  (rouge) et du signal de sortie de la photodiode PD1 (bleu) lorsque le laser est balayé en fréquence. La fréquence de modulation du modulateur de phase est ici de  $f_{Mod} = 3,012$  MHz. Le signal en sortie de la photodiode est déformé par la modulation. Le facteur  $G_{PDH}$  correspond à la pente de l'asymptote du signal d'erreur proche de la résonance.



Ensuite, il faut fixer la fréquence de coupure  $f_2$  du filtre de démodulation. Elle doit être suffisamment faible pour couper la partie du signal d'erreur oscillant à  $2f_{\text{Mod}} = 6,024$  MHz et suffisamment importante pour que l'asservissement ait un temps de réponse qui soit le plus court possible. En effet, le temps de réponse de l'asservissement est lié à la bande passante des filtres de démodulation. Nous choisissons une bande passante  $f_2 = 1$  kHz.

Une fois la pente de l'asservissement mesurée, et la fréquence du filtre de démodulation fixée, nous utilisons l'outil Simulink pour modéliser la réponse à un échelon de consigne (*step response* en anglais) de notre système lorsqu'il est asservi. La réponse du système correspond à la sortie du modulateur acousto-optique sur la figure 5.1. Dans notre modélisation, nous avons considéré que l'échelon en fréquence était de 1 Hz. Simulink permet de piloter le temps de réponse du système en modifiant les gains du correcteur PID. La figure 5.4 présente trois modélisations de réponses différentes à une consigne échelon.

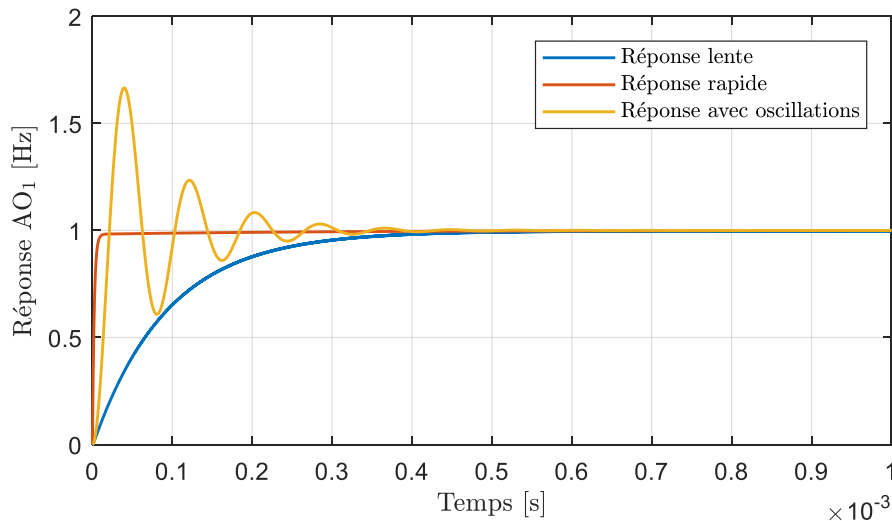


FIGURE 5.4 – Réponse du modulateur acousto optique à un échelon de consigne de 1Hz. Les gains PID pour la réponse lente sont de :  $G_P = 1,2 \cdot 10^6$  Hz/V,  $G_I = 5,4 \cdot 10^9$  Hz/V·rad/s,  $G_D = 57$  Hz/V·s/rad, et  $G_N = 1,2 \cdot 10^6$  rad/s. Les gains PID pour la réponse rapide sont de :  $G_P = 2,8 \cdot 10^7$  Hz/V,  $G_I = 7,2 \cdot 10^{10}$  Hz/V·rad/s,  $G_D = 2,4 \cdot 10^3$  Hz/V·s/rad, et  $G_N = 5 \cdot 10^7$  rad/s, et les gains PID pour la réponse oscillante sont de :  $G_P = 2,8 \cdot 10^7$  Hz/V,  $G_I = 2,5 \cdot 10^{11}$  Hz/V·rad/s,  $G_D = 126$  Hz/V·s/rad, et  $G_N = 7,7 \cdot 10^4$  rad/s.

On considère que les gains sont optimisés si la réponse est rapide et sans oscillations. Nous choisissons donc pour l'asservissement de fixer les gains du correcteur PID aux valeurs de la réponse rapide de la figure 5.4 soit :  $G_P = 2,8 \cdot 10^7$  Hz/V,  $G_I = 7,2 \cdot 10^{10}$  Hz/V·rad/s,  $G_D = 2,4 \cdot 10^3$  Hz/V·s/rad, et  $G_N = 5 \cdot 10^7$  rad/s, ce qui correspond à un temps de réponse d'environ 10  $\mu$ s.

Pour vérifier la stabilité de notre système, nous traçons son diagramme de Bode en boucle ouverte (voir la figure 5.5) qui permet de mesurer la marge de gain et la marge de phase de notre système.

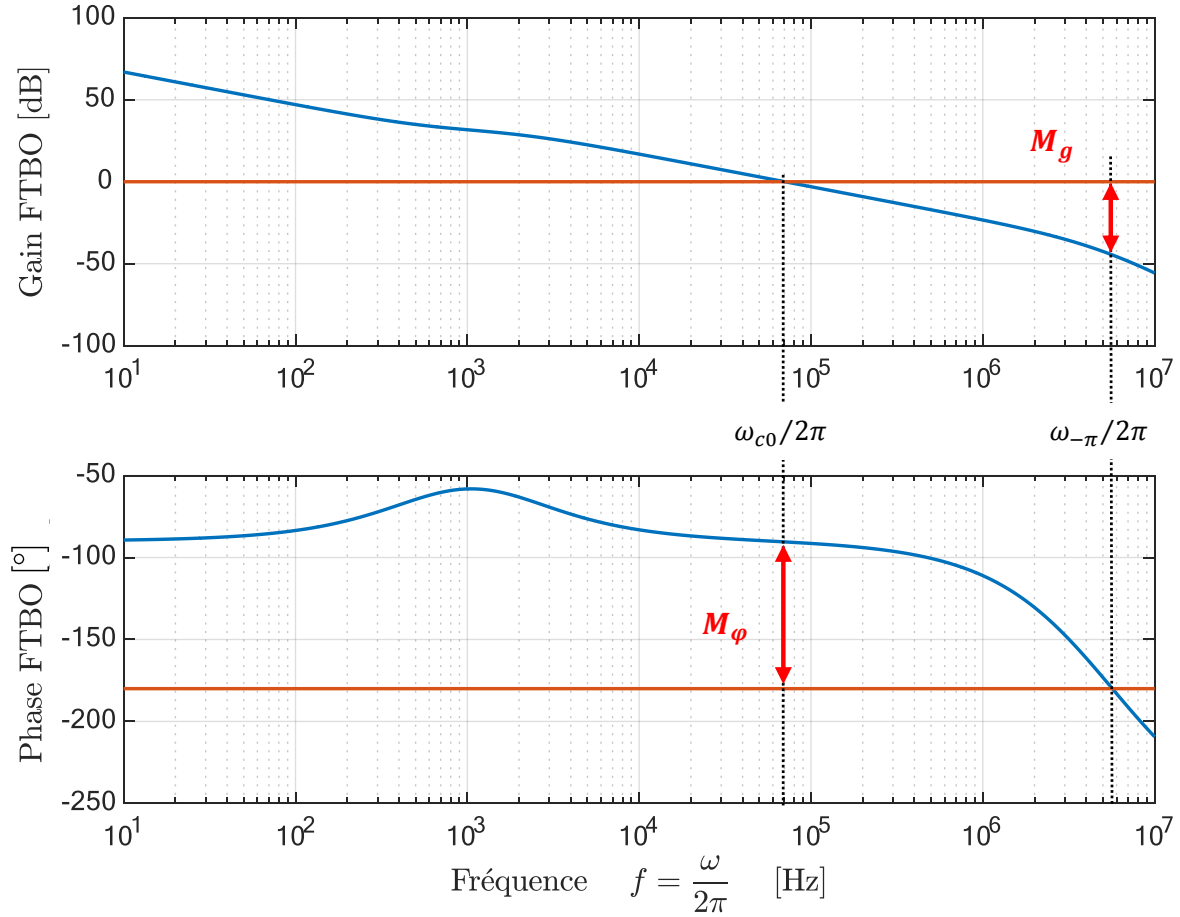


FIGURE 5.5 – Diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) de notre système. Le gain FTBO en dB est défini par :  $10 \log(|H_{BO}(\omega)|^2)$  et la phase est définie comme l'argument de la fonction  $H_{BO}(\omega)$ .

Soit  $\omega_{-\pi}$  la pulsation telle que la phase de la fonction de transfert en boucle ouverte soit égale à  $-\pi$ . La marge de gain  $M_g$  est définie par l'écart entre 0 dB et le gain à la pulsation  $\omega_{-\pi}$  telle que la phase du diagramme de Bode  $\varphi_{BO}$  soit de  $-\pi$  :

$$M_g = -10 \log(|H_{BO}(\omega_{-\pi})|^2).$$

Le système est stable si la marge de gain est supérieure à 0. Une bonne stabilité commence à partir de  $M_g = 10$  dB [89].

Soit  $\omega_{c0}$  la pulsation telle que  $|H_{BO}(\omega_{c0})|^2 = 1$ . La marge de phase  $M_\phi$  est définie par la différence entre la phase à la pulsation  $\omega_{c0}$  et  $-\pi$  :

$$M_\phi = \varphi_{BO}(\omega_{c0}) + \pi.$$

Le système est stable si la marge de phase est supérieure à 45deg, mais une bonne stabilité commence à partir d'une marge de phase de 60deg [89]. Dans notre cas, la marge de phase est

de  $M_\varphi = 90^\circ$  et la marge de gain est de  $M_g = 44$  dB ce qui confirme que notre système d'asservissement est stable.

Le tracé du module de la fonction de transfert en boucle fermée de la figure 5.6 permet de mesurer la bande passante à -3 dB du système asservi, qui est de 70 kHz. En première approximation, la bande passante du système est environ égale à l'inverse du temps de réponse du système (à un échelon de consigne). Les 70 kHz de bande passante que nous calculons sont donc en accord avec les 10  $\mu$ s de temps de réponse donnés par la modélisation.

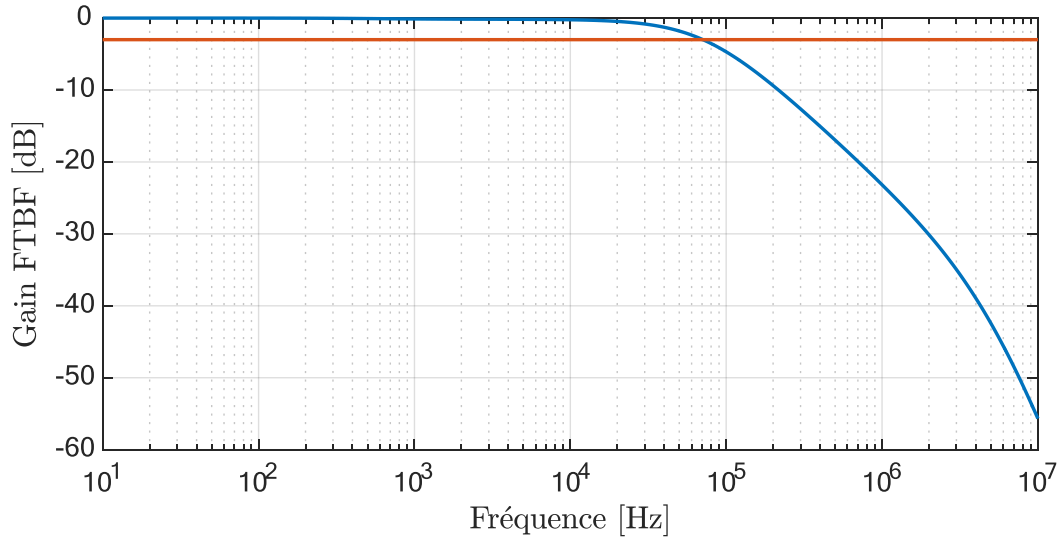


FIGURE 5.6 – Tracé du gain de la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) de notre système. Le gain FTBF en dB est défini par :  $10 \log(|H_{BF}(\omega)|^2)$ .

Notons que nous avons négligé dans la modélisation le temps de calcul (et donc de réponse) de la détection synchrone numérique, que nous avons supposé instantané.

### 5.1.3 Accord entre modélisation et expérience

Les calculs précédents permettent de prédire la stabilité de notre système, mais nous avons cherché à vérifier que notre modèle est bien en accord avec notre expérience. Pour vérifier que notre asservissement a bien le temps de réponse évalué par la modélisation, on utilise le modulateur acousto-optique supplémentaire ("AO<sub>Step</sub>") inséré dans le système, comme sur la figure 5.2. On applique à ce modulateur acousto-optique un saut en fréquence d'amplitude 500 kHz<sup>2</sup>. Le temps de réponse du modulateur acousto-optique utilisé est d'environ 50 ns, on peut donc considérer que le saut en fréquence qui lui est appliqué est instantané, par rapport au temps de réponse de l'asservissement. On enregistre au cours du temps la sortie du correcteur PID 1 ( $f_{AO1}$ ), ainsi que le signal d'erreur associé  $V_{\varepsilon 1}$  (voir la figure 5.1) lorsque le saut est

2. Le lecteur attentif pourra remarquer que l'amplitude du saut en fréquence ici n'est pas de 1 Hz, comme sur la figure 5.4. En fait, la modélisation de la réponse à un échelon de consigne permet de modéliser n'importe quelle amplitude de saut, et nous avons choisi une amplitude de 500 kHz car c'est encore dans la largeur de raie de la cavité (à 700 kHz) et que c'est une amplitude bien visible sur les signaux.

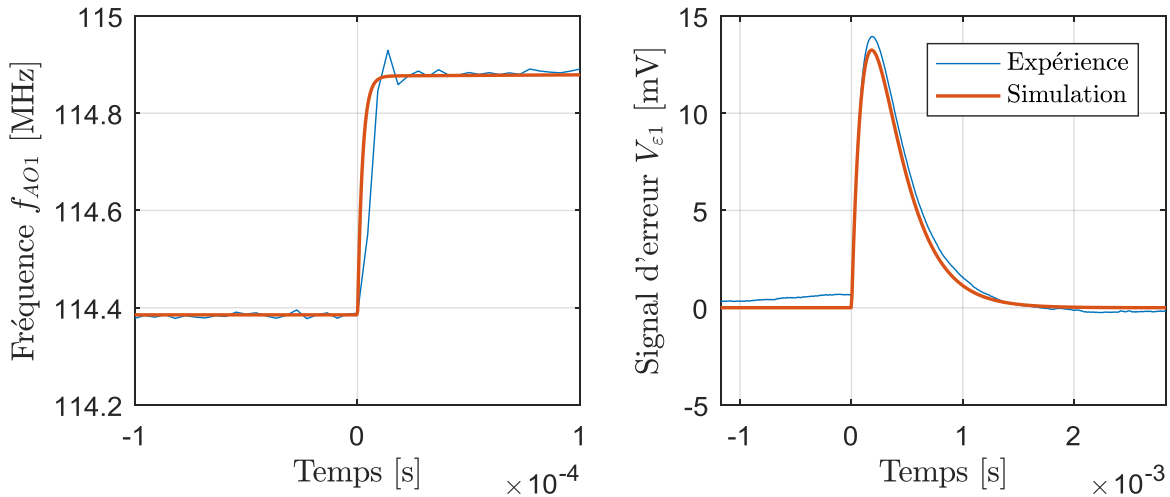


FIGURE 5.7 – Tracé de la fréquence du modulateur acousto-optique 1 (AO1) et du signal d'erreur  $V_{e1}$  associé pour un saut en fréquence sur le MAO de contrôle de 0,5 MHz. La bande passante du filtre de démodulation est de 1 kHz, et on rappelle que les gains PID sont ici de :  $G_P = 2,8 \cdot 10^7$  Hz/V,  $G_I = 7,2 \cdot 10^{10}$  Hz/V·rad/s,  $G_D = 2,4 \cdot 10^3$  Hz/V·s/rad, et  $G_N = 5 \cdot 10^7$  rad/Hz, le gain PDH étant égal à  $G_{PDH} = 1,9 \mu V/Hz$ .

appliqué et que le MAO est asservi. Les résultats de cette expérience, ainsi que de la simulation sous Simulink sont présentés en figure 5.7.

La figure 5.7 montre que la modélisation reflète bien notre expérience. Le temps de réponse de l'asservissement est bien de  $10 \mu s$  pour notre exemple. On vérifie également que l'asservissement oscille peu.

### 5.1.4 Suppression de la modulation d'amplitude résiduelle

Comme nous l'avons expliqué au chapitre 2, la modulation d'amplitude résiduelle (RAM) des modulateurs de phase est un problème pour l'asservissement. En effet, la figure 5.8 présente l'allure d'un signal d'erreur PDH sans suppression de RAM, et on peut voir que le signal est légèrement décalé verticalement par rapport à 0. Ce décalage entraîne un biais (non constant au cours du temps) sur le signal d'erreur, biais qui va venir bruite la mesure de rotation.

Pour supprimer la RAM, nous insérons dans tous nos montages un coupleur 90/10 en sortie des circulateurs, comme présenté sur la figure 5.9. Le signal issu de la photodiode placée derrière les 10 % est démodulé à la fréquence de modulation de la phase. Cela produit un signal d'erreur non nul lorsqu'il y a de la RAM. Ce signal d'erreur est envoyé sur un PID dont la sortie est reliée à l'entrée offset des modulateurs de phase. Les gains PID sont réglés de telle sorte que le signal d'erreur  $V_{e,RAM}$  tombe à 0. On vérifie à ce moment-là que le signal d'erreur  $V_{e1}$  ne présente plus d'offset.

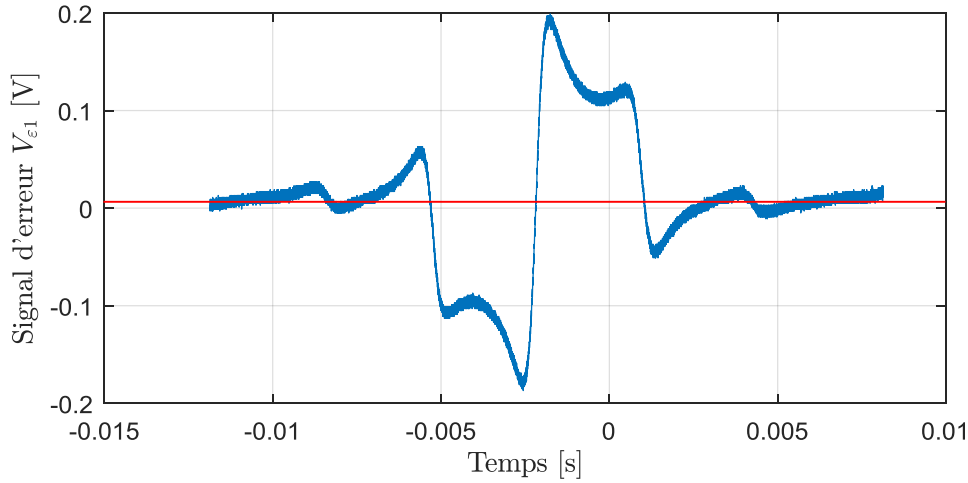


FIGURE 5.8 – Signal d'erreur  $V_{\epsilon 1}$  obtenu expérimentalement sans suppression de RAM. La ligne rouge sur la figure symbolise l'offset sur le signal.

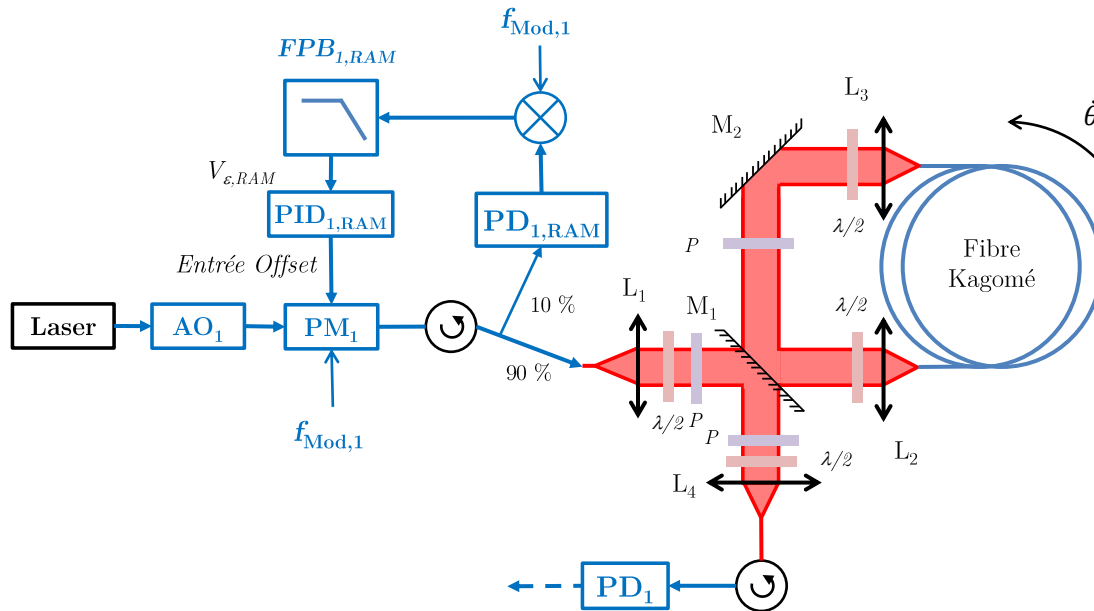


FIGURE 5.9 – Montage utilisé pour la suppression de RAM sur une des deux voies. L'asservissement sur les modulateurs acousto-optiques n'a pas été représenté ici. Le même asservissement de suppression de RAM est réalisé sur la voie 2, non représenté sur le schéma.

## 5.2 Mesures en asservissement dit "à deux ondes", décalées de 13 modes

Le montage d'asservissement dit "à deux ondes" est présenté en figure 5.10. Il est identique au montage d'asservissement présenté au chapitre 4 en figure 4.7. La seule différence est que le modulateur acousto-optique 2 diffracte ici dans l'ordre -1 et donc décale négativement la fréquence optique du laser. En effet, comme nous l'avons vu au chapitre 4, si on asservit les deux MAOs sur le même mode, alors la zone aveugle vient empêcher la mesure de faibles vitesses de

rotation. C'est pourquoi, dans un second temps, nous avons décidé d'utiliser deux MAOs qui diffractent sur deux ordres différents. Nous rappelons que le MAO 1 fonctionne sur l'ordre +1 et est centré sur 110 MHz.

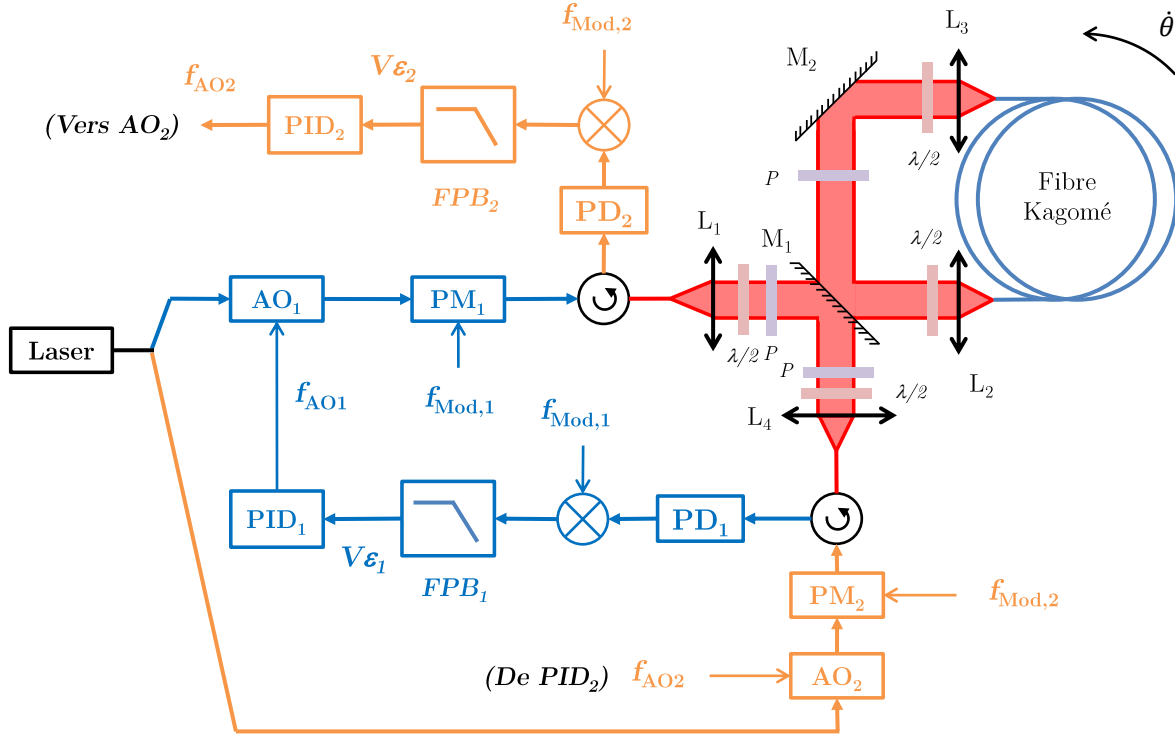


FIGURE 5.10 – Montage utilisé pour la mesure de rotation en 2 ondes avec asservissement sur 2 modes différents. Le laser utilisé est un Koheras-E15 de chez NKT centré sur  $\lambda = 1,55 \mu\text{m}$ .  $P$  = Polariseurs,  $PD$  = photodiodes,  $FPB$  = Filtre passe-bas,  $PID$  = correcteur Proportionnel Intégral Dérivateur.

Les photodiodes sont des photodiodes Thorlabs (PDA10CS-EC) utilisées sur le calibre 10 dB. La partie démodulation, filtrage et asservissement (détection synchrone) est effectuée au moyen de l'appareil Zurich Instruments UHF-LI. Nous mettons aussi en place le montage de suppression de RAM non schématisé sur la figure 5.10, mais décrit en section 5.1.4.

### 5.2.1 Facteur d'échelle et rotation

Nous utilisons la démarche présentée en section 5.1.2 pour fixer les gains des deux PID pour l'asservissement. Nous souhaitons que les deux asservissements sur les deux voies soient les plus symétriques possible, de sorte que les bruits venant du laser ou de la cavité soient corrigés avec la même amplitude par les deux modulateurs acousto-optiques.

Pour cela, nous faisons en sorte, en modifiant l'amplitude de la tension appliquée aux deux modulateurs acousto-optiques, que les gains PDH des deux asservissements soient identiques. En effet, comme le montre la formule (5.1), le gain PDH dépend de l'intensité optique incidente sur

la cavité, et cette intensité incidente peut être ajustée dans les deux bras grâce aux modulateurs acousto-optiques. Le gain PDH dans les deux sens est mesuré égal à  $G_{\text{PDH}} = 3,3 \mu\text{V}/\text{Hz}$ .

Les fréquences de modulation sur les deux voies sont  $f_{\text{Mod},1} = 3,012 \text{ MHz}$  et  $f_{\text{Mod},2} = 2,89 \text{ MHz}$ . La bande passante des filtres de démodulation est fixée à  $f_2 = 1 \text{ kHz}$  pour les deux voies.

Comme les gains PDH et les bandes passantes des filtres de démodulation sont identiques dans les deux sens, cela permet de fixer aussi les mêmes gains sur les correcteurs PID pilotant les asservissements. Nous fixons ces derniers à :  $G_P = 6,1 \cdot 10^6 \text{ Hz/V}$ ,  $G_I = 2,7 \cdot 10^{10} \text{ Hz/V}\cdot\text{rad/s}$ ,  $G_D = 335 \text{ Hz/V}\cdot\text{s/rad}$ , et  $G_N = 1,5 \cdot 10^6 \text{ rad/s}$ . Les gains choisis sont tels que la marge de phase est  $M_\varphi = 80 \text{ deg}$  et la marge de gain est  $M_g = 48 \text{ dB}$ . Nos asservissements sont donc stables. La figure 5.11 présente le diagramme de Bode de la fonction de transfert boucle fermée de l'asservissement. La bande passante de l'asservissement est d'environ  $20 \text{ kHz}$ , soit un temps de réponse d'environ  $50 \mu\text{s}$ .

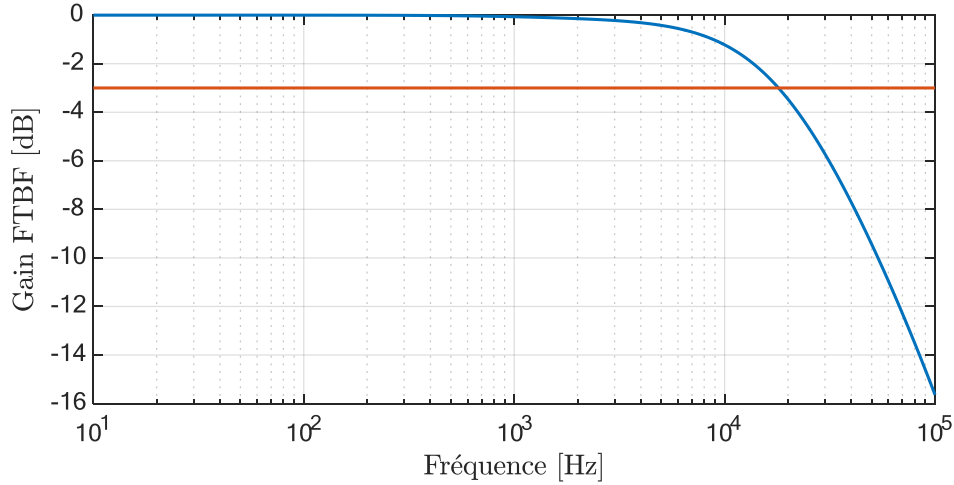


FIGURE 5.11 – *Diagramme de Bode en amplitude de la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) des asservissements réalisés.*

Pour vérifier que nos asservissements sont bien réciproques, nous mesurons les signaux d'erreur des deux systèmes asservis au cours du temps, sans rotation. Cette mesure est présentée en figure 5.12. Les signaux d'erreur dans les deux sens de rotation sont corrélés et ont la même amplitude. Cela confirme la symétrie des deux voies d'asservissement.

Lorsque les fréquences des modulateurs acousto-optiques sont asservies, les deux bras sont séparés de 13 intervalles spectraux libres. Les fréquences des MAOs obéissent aux équations suivantes :

$$\begin{aligned} \nu_1 + f_{\text{AO1}} &= (p + 6) \cdot \Delta\nu_{\text{ISL}+} , \\ \nu_1 - f_{\text{AO2}} &= (p - 7) \cdot \Delta\nu_{\text{ISL}-} , \end{aligned} \tag{5.7}$$

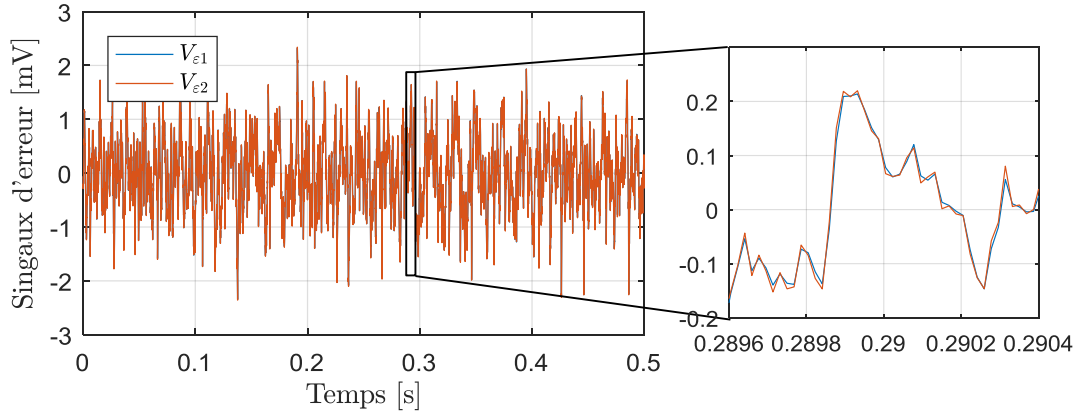


FIGURE 5.12 – Tracé des signaux d'erreur des deux asservissements réalisés.

avec, d'après (1.18), (1.19) et (1.22) <sup>3</sup>

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\nu_{\text{ISL}\pm} = \Delta\nu_{\text{ISL}_0} \mp \frac{\delta\nu_S}{2}, \\ p \simeq \frac{nL}{\lambda}, \\ \Delta\nu_{\text{ISL}_0} = \frac{c}{nL}, \\ \frac{\delta\nu_S}{2} = \frac{2A\dot{\theta}}{n^2 L^2}. \end{array} \right. \quad (5.8)$$

La somme entre les deux fréquences des modulateurs acousto-optiques s'écrit alors :

$$f_{\text{AO1}} + f_{\text{AO2}} = 13\Delta\nu_{\text{ISL}_0} - (2p + 1)\frac{\delta\nu_S}{2} \simeq 13\frac{c}{nL} - \Delta\nu_S, \quad (5.9)$$

avec :

$$\Delta\nu_S = \frac{4A}{\lambda nL} \dot{\theta}. \quad (5.10)$$

On peut donc, à partir de la somme des fréquences des MAOs asservis, retrouver la vitesse de rotation de la cavité, ainsi que son intervalle spectral libre. De la même manière qu'au chapitre 4, nous mesurons les fréquences de résonance dans les deux sens de rotation que nous présentons en figure 5.13 (a). La somme de ces fréquences est tracée en figure 5.13 (b). On peut voir que, contrairement au cas où les modulateurs acousto-optiques étaient d'ordre +1 tous les deux, les fréquences des MAOs évoluent ici en sens opposés, ce qui est cohérent avec les équations (5.7). Cela nous permet de tracer à nouveau la courbe d'étalonnage du gyromètre en figure 5.14. Cette courbe a pour équation :

$$\Delta\nu_S = 6,7 \cdot 10^3 \dot{\theta} - 13,9 \quad [\text{Hz}], \quad (5.11)$$

avec  $\dot{\theta}$  exprimé en deg/s.

3. Nous renvoyons au chapitre 1 pour plus d'explications sur ces formules.



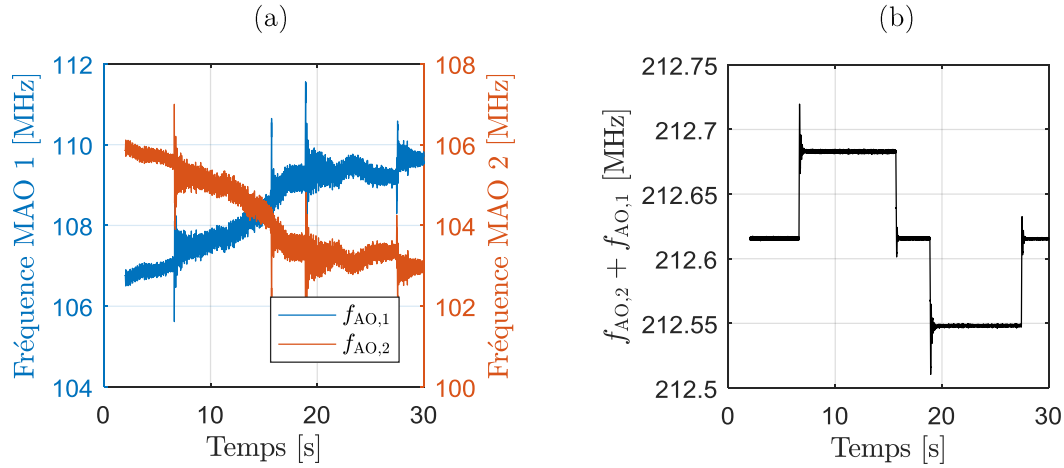


FIGURE 5.13 – (a) Fréquences des modulateurs acousto-optiques 1 et 2 au cours du temps lorsqu’une rotation est appliquée. (b) Tracé de la somme des deux signaux d’erreur. La rotation appliquée est de  $\pm 10$  deg/s, d’abord dans le sens CCW puis dans le sens CW.

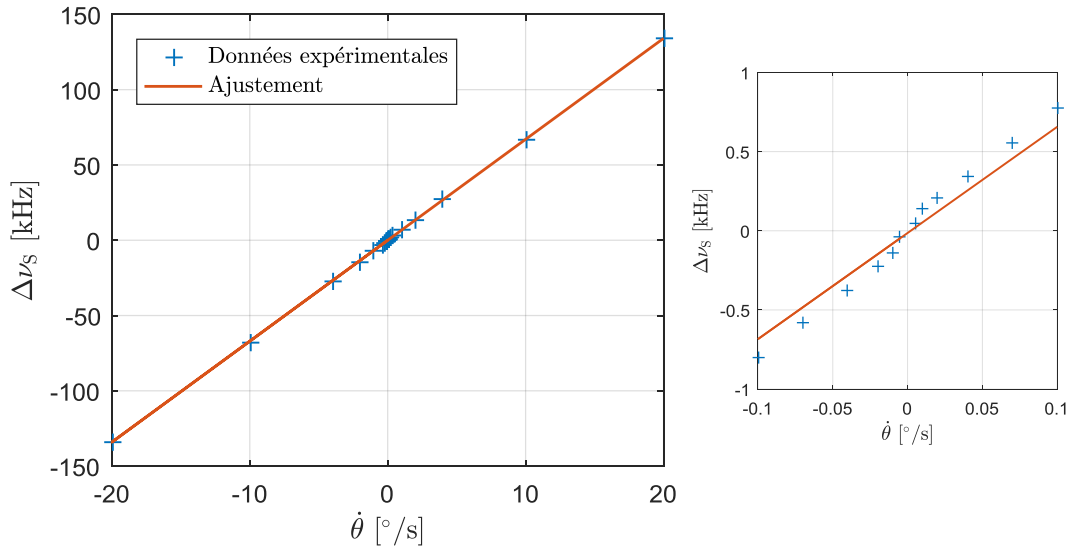


FIGURE 5.14 – À gauche, courbe d’étalonnage du gyromètre résonant. À droite, zoom sur les faibles vitesses de rotation.

Le facteur d’échelle est donc de  $K_S = \frac{4A}{\lambda n L} = 6,7 \text{ kHz}/(\text{deg/s})$ , ce qui est en accord avec la théorie et les mesures effectuées au chapitre 4. Comme on peut le voir sur le zoom de la figure 5.14, la plus petite vitesse de rotation mesurée (en faisant tourner la table tournante) est  $\dot{\theta}_{\min} = 0,005 \text{ deg/s}$ , ce qui est du même ordre de grandeur que la vitesse de rotation de la Terre.<sup>4</sup> L’allure de la somme des fréquences des MAO à cette vitesse de rotation est présentée en figure 5.15 (a). Pour extraire la rotation du bruit de ce signal, nous avons utilisé un filtre à moyenne glissante, équivalent à un filtre passe-bas de fréquence de coupure égale à 10 Hz, ce qui permet d’obtenir les données de la figure 5.15 (b). On peut voir sur cette figure que le biais centré

4. La vitesse de rotation de la terre est de  $\dot{\theta}_T = 15 \text{ deg/h} = 4,2 \cdot 10^{-3} \text{ deg/s}$ .

à 212,61585 MHz n'est pas constant et dérive au cours du temps. Cependant, la valeur moyenne de ce biais nous donne accès à l'intervalle spectral libre, qui est de  $\Delta\nu_{\text{ISL}_0} = 16,355$  MHz, en accord avec la mesure réalisée au chapitre 3.

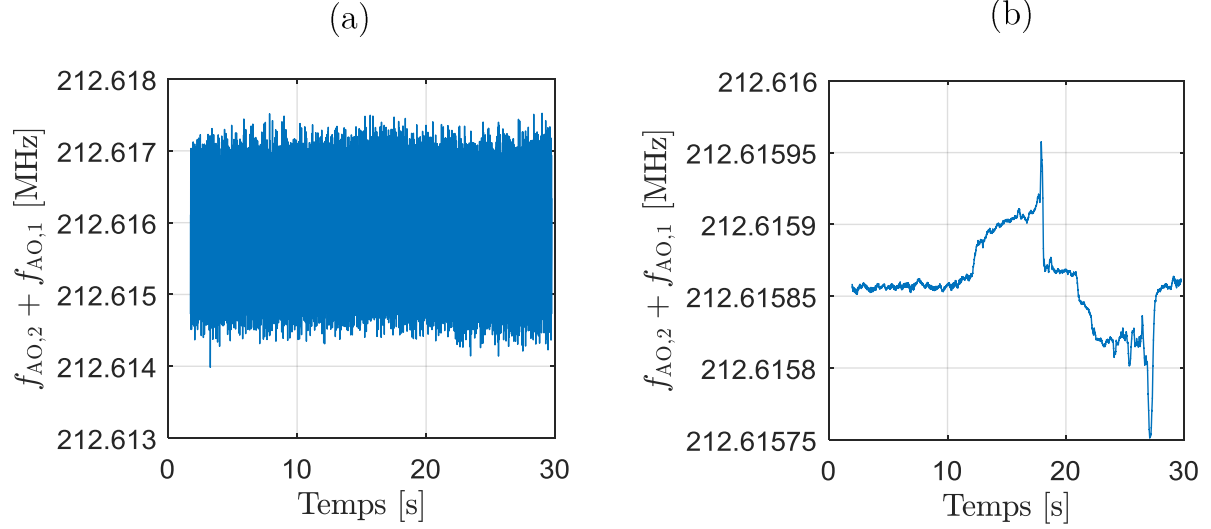


FIGURE 5.15 – (a) Données brutes de la somme des fréquences  $f_{\text{AO}1} + f_{\text{AO}2}$  pour une rotation de  $\dot{\theta}_{\min} = \pm 0,005^\circ/\text{s}$ . (b) Données filtrées avec un filtre à moyenne glissante de bande passante 10 Hz.

### 5.2.2 Marche au hasard angulaire et dérive du biais

Afin d'évaluer la stabilité de notre système, nous avons réalisé des mesures de variance d'Allan [90, 91] sur le signal  $f_{\text{AO}1} + f_{\text{AO}2}$  en absence de rotation. Comme on peut le voir sur la figure 5.15 (b), le signal de correction filtré présente un biais qui dérive<sup>5</sup>. La variance d'Allan permet de quantifier l'amplitude du bruit de ce biais, que l'on traduit par la marche au hasard angulaire, ainsi que sa dérive.

Soient  $\tau_0$  la période d'échantillonnage de la fréquence des modulateurs acousto-optiques, et  $y_i$  le  $i^{\text{ème}}$  échantillon de mesure de la somme des fréquences  $f_{\text{AO}1} + f_{\text{AO}2}$ . La variance d'Allan avec des échantillons sans recouvrement est définie par [91] :

$$\sigma_y^2(\tau = n\tau_0) = \frac{1}{2(M_n - 1)} \sum_{i=1}^{M_n-1} \left[ \bar{y}_{in+1}^n - \bar{y}_{(i-1)n+1}^n \right]^2, \quad (5.12)$$

où  $M_n = E(N/n)$  est le nombre d'échantillons disponibles de mesures de somme de fréquence moyennées sur le temps  $\tau = n\tau_0$ , avec  $E(X)$  la partie entière de  $X$ , et  $N$  le nombre total

5. On voit que pendant les rotations (de 12 à 18 s et de 21 à 28 s, le signal n'est pas constant, et même en dehors des rotations, le signal dérive

d'échantillons  $y_i$ . Les moyennes des échantillons  $y_i$  s'écrivent :

$$\bar{y}_{j+m}^n = \frac{1}{n} \sum_{k=j}^{n+j-1} y_{k+m}. \quad (5.13)$$

Notons que le nombre  $n$  est limité par le nombre d'échantillons. En effet, la valeur maximale que pourra prendre  $n$  (et donc  $\tau$ ) est de  $E(N/2)$  car au-delà de cette valeur, il faudrait faire des moyennes sur 1 seul échantillon de données (moyennées), ce qui n'a pas de sens. Pour diminuer l'incertitude sur la mesure de la variance d'Allan, il est possible d'utiliser la variance d'Allan avec recouvrement des échantillons. Elle est définie par [91, 92] :

$$\sigma_y^2(\tau = n\tau_0) = \frac{1}{2(N+1-2n)} \sum_{j=1}^{N-2n+1} [\bar{y}_{j+n}^n - \bar{y}_j^n]^2. \quad (5.14)$$

C'est cette dernière que nous allons utiliser pour nos mesures. Pour calculer la variance d'Allan avec recouvrement, nous avons mesuré le signal de sortie du gyromètre ( $f_{AO1} + f_{AO2}$ ) pendant environ 20 secondes avec une période d'échantillonnage de  $\tau_0 = 36 \mu s$ . Nous avons ensuite converti les données de sortie du gyromètre en deg/h grâce au facteur d'échelle  $K_S = \frac{6,7 \cdot 10^3}{3600} \text{ Hz}/(\text{deg/h})$  mesuré précédemment. Nous avons enfin calculé la variance d'Allan avec recouvrement de ce signal  $\sigma_{\dot{\theta}}$ , que nous traçons en figure 5.16.

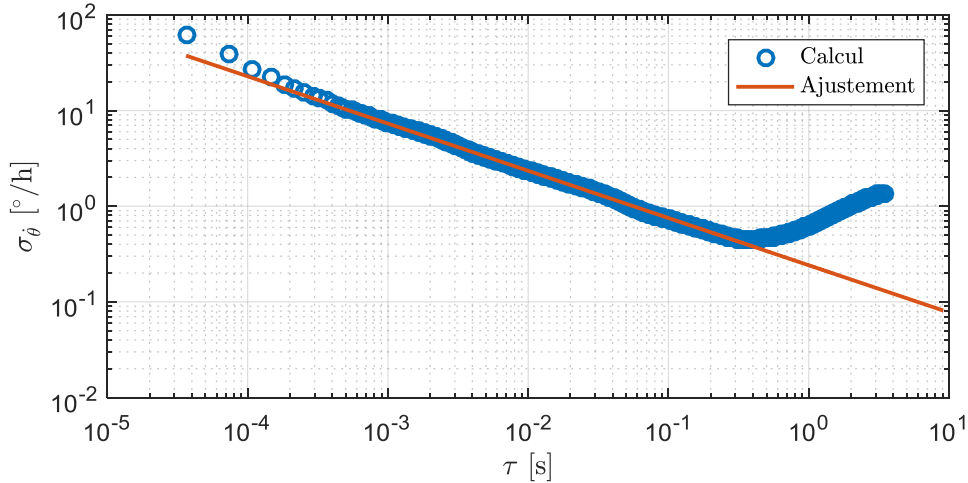


FIGURE 5.16 – *Tracé en échelle logarithmique de la variance d'Allan avec recouvrement du signal de sortie du gyromètre à rotation nulle. L'ajustement de la partie linéaire a pour équation :  $\ln(\sigma_{\dot{\theta}}) = -0,49 \cdot \ln(\tau) - 1,42$ .*

On peut identifier deux parties sur la courbe : une partie décroissante avec une pente de  $-1/2$  caractéristique du bruit blanc de marche au hasard [93], et une partie de pente positive. Le minimum atteint par la variance d'Allan définit la dérive du biais du gyromètre. La variance du

bruit de marche au hasard est donnée par :

$$\sigma_{\dot{\theta}} = ARW/\sqrt{\tau}, \quad (5.15)$$

avec  $ARW$  la marche au hasard angulaire du gyromètre. La variance étant tracée en échelle logarithmique, on a :

$$\ln(\sigma_{\dot{\theta}}) = \ln(ARW) - \frac{1}{2} \ln(\tau), \quad (5.16)$$

et la valeur de la marche au hasard angulaire  $ARW$  peut être lue directement sur la droite rouge de la figure 5.16 au point d'abscisse  $\tau = 1$  s.

La marche au hasard angulaire de notre système est de  $ARW = 0,24 \text{ (deg/h)}/\sqrt{\text{Hz}}$ , ce qui correspond à  $ARW = 0,004 \text{ deg}/\sqrt{\text{h}}$ . Ceci est 30 fois supérieur à la valeur calculée théoriquement au chapitre 3, dans le cas où la marche au hasard serait due au bruit de grenaille, et qui est  $ARW = \dot{\theta}\sqrt{\tau} = 1,4 \cdot 10^{-4} \text{ deg}/\sqrt{\text{h}}$ . Ce n'est donc pas le bruit de grenaille qui limite notre détection. Nous ne savons pas à quoi est dû la marche au hasard angulaire, un calcul de budget d'erreur est en cours afin de déterminer d'où elle provient. La dérive du biais est de 0,45 deg/h, mesurée sur 20 s.

Nous avons donc un gyromètre qui atteint des performances de classe intermédiaire en terme de dérive de biais, et de classe inertielle en terme de marche au hasard angulaire. Rappelons (voir tableau 2.3) que l'état de l'art à ce jour pour un gyromètre résonant en fibre à cœur creux est de  $ARW = 0,075 \text{ deg}/\sqrt{\text{h}}$  et une dérive de biais de 1,3 deg/h (sur 300 s) [8, 9], nous sommes donc au delà de l'état de l'art des gyromètres résonants en fibre à cœur creux.

### 5.2.3 Conclusion sur la méthode à 2 ondes avec 13 modes d'écart

La méthode d'asservissement à 2 ondes permet de développer un gyromètre de performances intermédiaires. Le principal facteur limitant de notre système est la dérive de son biais, qui est trop importante pour pouvoir atteindre la classe inertielle de performances. Nous supposons que la dérive du biais est due à une dérive au cours du temps de l'intervalle spectral libre. En effet, notre biais est centré sur  $13 \cdot \Delta\nu_{\text{ISL}_0}$ , donc si l'intervalle spectral libre dérive, le biais dérive.

La dérive du biais est de 0,45 deg/h soit 0,84 Hz de dérive pour 13 intervalles spectraux libres soit  $\delta\Delta\nu_{\text{ISL}} = 0,064 \text{ Hz}$  de dérive pour 1 intervalle spectral libre. Si on suppose que la dérive de l'intervalle spectral libre est due à une dérive de longueur de cavité  $\delta L$ , alors on peut évaluer cette dernière par :

$$\delta L = L \frac{\delta\Delta\nu_{\text{ISL}}}{\Delta\nu_{\text{ISL}}} = 72 \text{ nm}, \quad (5.17)$$

ce qui est une dérive de longueur envisageable pour notre cavité. Pour remédier à ce problème, nous avons décidé de mettre au point un montage dit "à 3 ondes", que nous allons décrire au

paragraphe suivant, et qui permet en théorie la mesure au cours du temps de l'intervalle spectral libre.

## 5.3 Mesures avec l'asservissement dit "à 3 ondes"

### 5.3.1 Le modèle "à 3 ondes"

L'asservissement à 3 ondes consiste à envoyer deux ondes (à deux fréquences différentes) dans un sens et une autre onde dans l'autre sens. La figure 5.17 présente le montage réalisé pour la mesure à 3 ondes. Le laser est séparé en 3 bras, et chacun des bras est décalé en fréquence au moyen d'un modulateur acousto-optique. Les MAOs 1 et 2 sont les mêmes que ceux de la partie précédente : le MAO1 décale la fréquence dans l'ordre +1 centré sur 110 MHz, le MAO 2 décale la fréquence dans l'ordre -1 centré sur 110 MHz. Le troisième MAO décale dans l'ordre +1 mais sa fréquence est centrée sur 42 MHz. Chacun des bras est ensuite modulé à une fréquence  $f_{\text{Mod}}$  différente. Les bras 1 et 3 sont regroupés au moyen d'un coupleur 50/50 afin d'entrer dans la cavité tous les deux dans le sens CCW, le bras 2 étant injecté seul dans le sens CW. Le signal de sortie de la photodiode 1 est démodulé aux deux fréquences  $f_{\text{Mod},1}$  et  $f_{\text{Mod},3}$ , puis filtré pour obtenir deux signaux d'erreur permettant d'asservir respectivement les modulateurs acousto-optiques 1 et 3. Le signal de sortie de la photodiode 2 est quant à lui démodulé à  $f_{\text{Mod},2}$ , puis filtré pour obtenir le signal d'erreur permettant d'asservir le MAO2.

De la même manière que précédemment, nous mettons aussi en place 3 asservissements supplémentaires de suppression de RAM non représentés sur la figure 5.17. Lorsque tous les bras sont asservis, les relations qui lient les fréquences des modulateurs acousto-optiques lorsque ces derniers sont asservis sont :

$$\begin{aligned}\nu_1 + f_{\text{AO1}} &= (p + 6) \cdot \Delta\nu_{\text{ISL}_+} , \\ \nu_1 - f_{\text{AO2}} &= (p - 7) \cdot \Delta\nu_{\text{ISL}_-} , \\ \nu_1 + f_{\text{AO3}} &= (p + 2) \cdot \Delta\nu_{\text{ISL}_+} ,\end{aligned}\tag{5.18}$$

Trois combinaisons linéaires de ces trois équations donnent :

$$f_{\text{AO1}} + f_{\text{AO2}} \simeq 13\Delta\nu_{\text{ISL}_0} - \Delta\nu_{\text{S}} ,\tag{5.19}$$

$$f_{\text{AO1}} - f_{\text{AO3}} = 4\Delta\nu_{\text{ISL}_0} + 4\delta\nu_{\text{S}} \simeq 4\Delta\nu_{\text{ISL}_0} ,\tag{5.20}$$

$$f_{\text{AO3}} + f_{\text{AO2}} \simeq 9\Delta\nu_{\text{ISL}_0} - \Delta\nu_{\text{S}} .\tag{5.21}$$

Le troisième modulateur acousto-optique permet de mesurer l'intervalle spectral libre de la cavité pendant que la somme des MAOs 1 et 2 permet de mesurer la rotation due à l'effet Sagnac. La

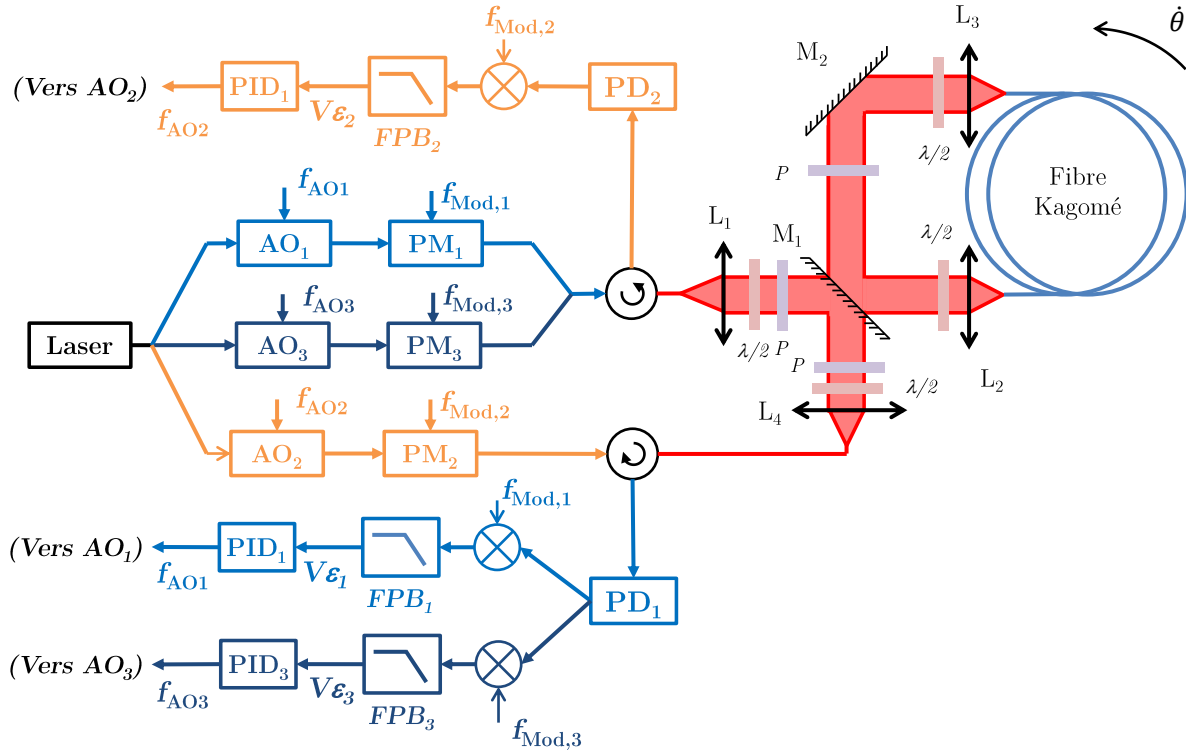


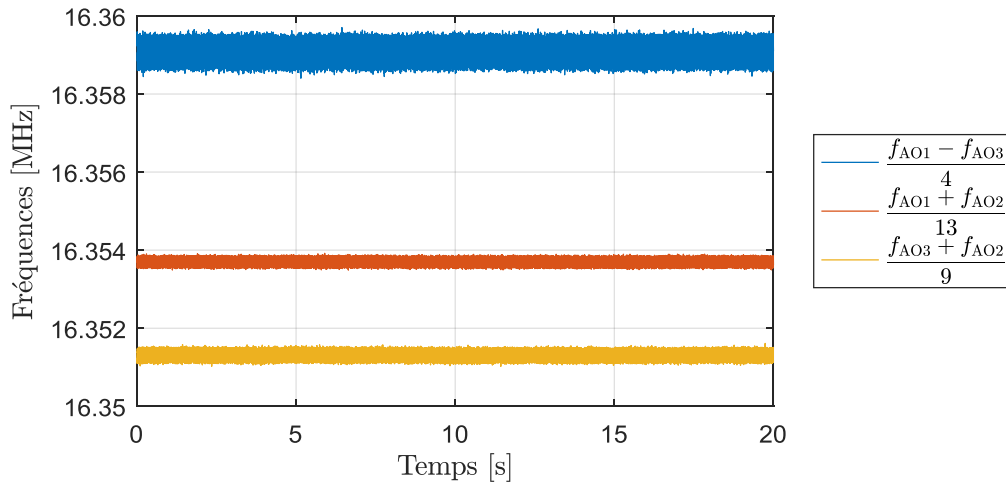
FIGURE 5.17 – Montage utilisé pour la mesure de rotation en asservissement dit 3 ondes, sur 3 modes différents.  $P$  = Polariseurs,  $PD$  = Photodiodes,  $FPB$  = Filtres passe-bas,  $PID$  : correcteur Proportionnel Intégrateur Dérivateur.

mesure de l'intervalle spectral libre au cours du temps devrait permettre de diminuer le bruit sur le biais que nous observons sur les signaux à deux ondes.

### 5.3.2 Les résultats préliminaires : on ne mesure pas le même ISL

Comme pour les montages à 2 ondes, nous avons fait en sorte en pilotant la tension appliquée aux modulateurs acousto-optiques que les pentes des 3 asservissements PDH réalisés soient les mêmes. Elles sont, pour cette expérience, égales à 200 nV/Hz. La bande passante des filtres passe-bas est de 1 kHz. Les gains PID choisis pour les asservissements sont  $G_P = 1,1 \cdot 10^7$ ,  $G_I = 5,2 \cdot 10^{10}$  Hz,  $G_D = 550 \cdot 10^3$ , et  $G_N = 1,2 \cdot 10^6$  Hz. Ce qui donne une bande passante d'asservissement d'environ 1,5 kHz. Les fréquences de modulation des 3 modulateurs de phase sont :  $f_{Mod,1} = 3,012$  MHz,  $f_{Mod,2} = 2,89$  MHz et  $f_{Mod,3} = 2,71$  MHz.

La figure 5.18 présente le tracé des différentes combinaisons linéaires des fréquences des modulateurs acousto optiques, lorsque l'asservissement est en fonctionnement, et la cavité au repos. On peut voir sur la figure 5.18 que la mesure de l'intervalle spectral libre n'est pas identique pour les différentes combinaisons linéaires réalisées, ce qui ne permet pas de soustraire le signal  $\frac{f_{AO1} - f_{AO3}}{4}$  aux autres pour s'affranchir de la dérive du biais dont on a supposé qu'elle était due à la dérive de l'intervalle spectral libre.

FIGURE 5.18 – *Mesures en asservissement sans rotation*

Le montage dit à 3 ondes est à ce jour non concluant, en raison de la non cohérence des mesures d'intervalle spectral libre par les 3 MAOs.

## 5.4 Conclusions sur la méthode 3 ondes

La méthode à 3 ondes n'a pour l'instant pas donné de résultats probants. Nous ne savons pas aujourd'hui à quoi est due la différence de mesure d'intervalle spectral libre sur les mesures en 3 ondes. Plusieurs pistes sont cependant en cours d'étude :

- l'anomalie observée en asservissement 3 ondes pourrait provenir de biais dus à l'électronique de l'asservissement. Une méthode pour contrer ces biais serait de réaliser les asservissements avec des cartes FPGA, bien plus rapides que nos asservissements actuels.
- une modélisation sous Simulink plus complète que celle présentée dans cette thèse est en cours de développement à Thales Avionics Chatellerault. Cette modélisation plus poussée permet de tracer sous Simulink le signal d'asservissement PDH complet, en tenant compte des bruits de phase et d'intensité du laser, qui pourraient expliquer la dérive du biais que l'on observe.
- Un nouveau modulateur acousto-optique a été commandé, centré sur 200 MHz, permettant de limiter les bruits sur les modulateurs acousto-optiques. En effet, l'appareil de détection synchrone (Zurich Instruments) que nous utilisons ne possède que 2 ports de sortie de modulation. Les corrections appliquées aux modulateurs 2 et 3 étaient donc issues du même signal, que nous avons séparé puis filtré. Nous supposons que l'ajout de filtres dans la boucle d'asservissements a pu détériorer ce dernier, et c'est pourquoi le nouveau modulateur est centré sur 200 MHz, ce qui permettra de supprimer les filtres de séparation, le filtrage se faisant directement sur les acousto-optiques eux-mêmes.

- Après discussion avec des collègues experts en asservissement PDH, il est apparu qu'un contrôle en température des modulateurs de phase pourrait permettre de réduire plus amplement le bruit de modulation d'amplitude résiduelle de ces derniers, que nous ne corrigeons pas forcément complètement avec nos asservissements de suppression de RAM. Cette mauvaise correction pourrait être à l'origine des quelques kHz de biais observé.
- Enfin, des discussions sont en cours avec des sous-traitants afin de réaliser un socle solide d'injection dans la fibre à cœur creux, ce qui pourrait permettre d'augmenter la stabilité mécanique du gyromètre, et donc augmenter sa précision.





---

# Conclusions et perspectives

---

Le travail réalisé au cours de cette thèse s'inscrit dans une volonté commune à Thales Avionics, Thales Research and Technology et au LAC de développer un gyromètre résonant qui semble être la technologie du futur en termes de gyroskopie optique. L'objectif poursuivi tout au long de cette thèse a été la réalisation d'un gyromètre passif résonant en fibre à cœur creux satisfaisant les spécifications imposées pour l'application de la navigation inertielle.

Par comparaison avec les gyromètres optiques déjà présents sur le marché (gyromètre interférométrique et gyromètre laser), le gyromètre résonant présente le potentiel d'atteindre les hautes performances tout en gardant des longueurs de fibres de l'ordre de la dizaine de mètres. La technologie de fibre à cœur creux offre l'avantage d'une absence d'effet Kerr lors de la propagation de la lumière. Cela en fait une candidate idéale pour les gyromètres dont la dérive du biais est limitée par cet effet. De plus, les gyromètres résonants ne sont pas limités par leur zone aveugle, contrairement aux gyrolasers.

Pour réaliser un gyromètre résonant passif en fibre à cœur creux, nous avons commencé par nous inspirer de l'état de l'art existant, et c'est pourquoi une partie de la thèse a été consacrée à une étude approfondie de cet état de l'art.

Ensuite, un autre aspect de la thèse a été une caractérisation de deux types de fibres à cœur creux : celles à bandes interdites photoniques et les fibres Kagomé. L'essor de ces fibres étant récent, les caractéristiques de ces dernières ne sont encore pas bien connues. Par exemple il n'existe aucune mesure systématique à ce jour de coefficient de rétrodiffusion pour les fibres à cœur creux, alors que cette mesure est quasi systématiquement réalisée pour une fibre en silice classique.

Pour ce qui est du gyromètre résonant, nous avons dans un premier temps réalisé une cavité résonante en fibre à cœur creux, qui est la base d'un tel gyromètre. Nous avons ensuite caractérisé cette cavité afin de pouvoir évaluer les performances maximales atteignables par le gyromètre et vérifier que l'on peut bien atteindre les performances de classe inertielles. Nous avons enfin testé plusieurs systèmes d'asservissements à deux et à trois ondes afin de réaliser la mesure de rotation

la plus précise possible. Nous avons vérifié qu'en asservissant deux ondes sur le même mode de résonance de la cavité, il existait une zone aveugle qui empêche la mesure de faible vitesse de rotation. La zone aveugle a été mesurée expérimentalement égale à 0,4 deg/s pour notre cavité résonante. Nous avons réalisé un gyromètre de classe intermédiaire de performances (avec une marche au hasard d'angle  $ARW = 0,004 \text{ deg}/\sqrt{h}$  et une stabilité de biais de 0,45 deg/h, mesurée sur 20 s) en asservissant à 2 ondes avec 13 intervalles spectraux libres d'écart. La faisabilité d'un gyromètre résonant de classes de performances intermédiaires a cependant été démontrée.

## Pour aller plus loin

Le développement d'un gyromètre résonant en fibre à cœur creux pour la navigation inertielle est en bonne voie. Plusieurs pistes sont envisagées afin d'atteindre cet objectif final.

Pour le montage dit "à deux ondes", il est possible d'envisager augmenter la stabilité du biais à long terme en plaçant la cavité résonante dans une enceinte à vide thermalisée. En effet, la cavité est actuellement "à l'air libre" ce qui la rend sensible à beaucoup de bruits, et notamment aux vibrations des personnes marchant dans le couloir du laboratoire. Une isolation devrait permettre d'augmenter les performances mesurées.

Pour le montage dit "à trois ondes", la source des biais observés est à ce jour inconnue. Des études sont en cours pour en identifier la cause, avec notamment une modélisation du système complet sous Simulink incluant les temps de réponse de la détection synchrone que nous avons ignorés dans cette étude, et qui pourraient être responsables des biais observés. D'autre part, nous pensons que les bruits de phase et d'amplitude du laser peuvent eux aussi être responsables des biais observés et c'est pourquoi l'influence de ces bruits est aussi en cours d'étude, aussi bien au LAC qu'à TAV, au travers de modélisations.

À plus long terme, le prochain objectif à atteindre est de réaliser le même gyromètre avec les mêmes performances, mais dont la cavité résonante aurait au plus 5 cm de diamètre. Pour cela, la conception d'une nouvelle fibre à cœur creux, sans contamination, mais pouvant être enroulée sans augmenter les pertes de propagation est nécessaire. Ce travail est en cours chez GLOphotonics (qui travaille sur la conception d'une telle fibre) et ALPhANOV (qui travaille sur l'isolation des fibres à bande interdite photonique déjà développées mais qui se contaminent).

D'autre part, un travail d'intégration du système de collimation (miroir et lentilles) doit aussi être réalisé. En effet, l'absence de coupleur en fibre à cœur creux implique une collimation/focalisation en espace libre, ce qui implique une instabilité supplémentaire à cause des vibrations. Le système doit donc être miniaturisé et rigidifié, mais cela ne pourra être réalisé que lorsque la fibre définitive aura été fabriquée.

Enfin, la partie de mise en forme du faisceau laser (Modulateurs de phase, coupleurs, circulateurs, etc...) est pour l'instant réalisée avec des composants fibrés. Une des étapes de miniaturisation

risation du gyromètre est d'intégrer la plupart des composants de mise en forme du faisceau en optique intégrée sur silicium, ce qui devrait permettre de réduire grandement l'encombrement du gyromètre résonant actuel.



Analysis of the design of a passive  
resonant miniature optical gyroscope  
based on integrated optics  
technologies

---

# Analysis of the design of a passive resonant miniature optical gyroscope based on integrated optics technologies

Gilles Feugnet,<sup>a,\*</sup> Alexia Ravaille,<sup>a,b,c</sup> Sylvain Schwartz,<sup>a,†</sup> and Fabien Bretenaker<sup>c</sup>

<sup>a</sup>Thales Research and Technology, Palaiseau, France

<sup>b</sup>Thales Avionics, Châtellerault, France

<sup>c</sup>Laboratoire Aimé Cotton, Université Paris Sud, CNRS, ENS Paris-Saclay, Université Paris Saclay, Campus d'Orsay, Orsay, France

**Abstract.** We present a simple analysis of the design of a passive miniature resonant optical gyroscope. By combining the requirements on the angular random walk and the bias stability, we end up with simple expressions of the minimum diameter of the ring waveguide cavity and the maximum power that should be used to probe it. Using state-of-the-art performances of photonic integrated circuit and whispering gallery mode technologies in terms of propagation losses and mode size, we show that tactical grade gyroscope performances can be achieved with a diameter of a few cm provided the detrimental influence of the Kerr effect is mitigated using, for instance, an active control of the unbalance in the intensities. We further extend the analysis to medium performance gyroscope and give some hints on the efforts to be made to potentially demonstrate a miniature resonant optical gyroscope with this level of performance. © The Authors. Published by SPIE under a Creative Commons Attribution 3.0 Unported License. Distribution or reproduction of this work in whole or in part requires full attribution of the original publication, including its DOI. [DOI: 10.1117/1.OE.56.10.107109]

Keywords: gyroscope; integrated optics; shot noise; cavity; Kerr effect.

Paper 170968 received Jun. 23, 2017; accepted for publication Sep. 26, 2017; published online Oct. 26, 2017.

## 1 Introduction

The fabrication of a navigation-grade miniature optical gyroscope has been the aim of an old quest. Indeed, the possible realization of a miniature optical gyroscope integrated on an optical chip and having a bias stability better than 1 deg/h could have a strong impact on the medium/high performance gyroscope market, currently dominated by the well-established ring laser gyroscope<sup>1</sup> or interferometric fiber optical gyroscope.<sup>2</sup> The resonant miniature optical gyroscope (RMOG), based on a waveguide-type ring resonator, is an attracting approach, where the reduction of the optical path length is compensated for by the cavity  $Q$  factor, as for other passive resonant devices.<sup>3</sup> Such RMOG becomes more and more realistic due to the progress of the photonic integrated circuit (PIC) and whispering gallery mode resonator (WGMR) technologies. PIC technology, on the one hand, offers the potential of cost reduction through a collective manufacturing process like the semiconductor industry and the generalization of the multiwafer-run capability implemented by several foundries. There are now several platforms assisting end-users to design and manufacture PICs.<sup>4,5</sup> PIC development achieved a remarkable improvement in the losses,<sup>6,7</sup> heterogeneous integration of active indium phosphide gain sections or photodiodes with passive silicon or silicon nitride circuits,<sup>8,9</sup> and packaging.<sup>10</sup> On the other hand, WGMRs are not always fully compatible with collective manufacturing as they need to be diamond polished or they need to be heterogeneously reported on a

substrate or coupled to a tapered fiber to inject and extract light. However, some of the best performances of miniature cavities and gyroscopes were demonstrated<sup>11</sup> with this approach.

In such a gyro architecture, the passive optical cavity is probed by two coherent counterpropagating waves, and the rotation rate is retrieved by monitoring the modifications of the resonant frequencies of the clockwise (CW) and counter-clockwise (CCW) beams circulating inside the cavity. From the literature,<sup>3</sup> it is known that the partially reduced sensitivity of the RMOG could also be compensated for by a higher laser incident power, to reduce shot noise. However, it is also known that a difference in the intensities of the CW and CCW beams induces, via the Kerr effect, a nonreciprocal index difference<sup>2</sup> resulting in a bias in the gyroscope response.<sup>12</sup> Increasing the incident laser power then leads to the necessity of a tighter control of this difference, which becomes increasingly challenging. In this paper, we conduct an analysis that shows that it is possible, under realistic assumptions, to find an expression of the minimum cavity diameter and the maximum incident power that the cavity should be probed with to meet a given requirement on both the angular random walk (ARW) and bias stability of such a gyroscope. Our analysis takes into account (i) the PIC and WGMR technology performances in terms of propagation losses and mode size and (ii) the difference of the counter propagating beam intensities. We then use this simple model to assess the feasibility of a RMOG for navigation applications.

The paper is organized as follows. In Sec. 2, we introduce our cavity model. In Sec. 3, we use this model to derive the necessary minimum cavity diameter and the maximum incident power allowed to meet a set of navigation grade performances. As these values depend on the ring waveguide

\*Address all correspondence to: Gilles Feugnet, E-mail: [gilles.feugnet@thalesgroup.com](mailto:gilles.feugnet@thalesgroup.com)

<sup>†</sup>Now with Laboratoire Kastler-Brossel, CNRS-Université Pierre et Marie Curie-Paris 6-ENS, Paris, France.

propagation losses, the Kerr effect coefficient, and the mode size, we conduct in Sec. 4, a parametric analysis using numbers from state-of-the-art PIC and WGMR technology to assess the feasibility of low (tactical) and medium performance RMOGs. We give some perspectives in terms of gyro development in Sec. 5. These sections are supported by five appendices, where we give the details of some calculations.

## 2 Cavity Model

The rotation sensing ring cavity of diameter  $D$  is schematized in Fig. 1. We suppose that the cavity has only one coupler.<sup>13</sup>

To maintain the laser at resonance, we implement a Pound–Drever–Hall (PDH) locking scheme.<sup>14,15</sup> We use the notations of Stokes et al.<sup>16</sup> by introducing the intensity losses  $\gamma_0$  and the intensity coupling coefficient  $\kappa$  of the coupler, which relate the coupler output and input intensities through the following relations:

$$E_3 = \sqrt{1 - \gamma_0}(\sqrt{1 - \kappa}E_1 + i\sqrt{\kappa}E_2), \quad (1)$$

$$E_4 = \sqrt{1 - \gamma_0}(i\sqrt{\kappa}E_1 + \sqrt{1 - \kappa}E_2), \quad (2)$$

where the field complex amplitudes are labeled according to Fig. 1.

In Appendix A, we use these definitions to derive the expressions of the intracavity field and of the field reflected by the cavity. This leads to the following full-width at half-maximum for the cavity resonance dip:

$$\Delta\nu_{\text{FWHM}} = \frac{1 - e^{-\alpha L/2} \sqrt{1 - \gamma_0} \sqrt{1 - \kappa}}{\pi} \Delta\nu_{\text{FSR}} \equiv \frac{\Delta\nu_{\text{FSR}}}{\mathcal{F}}, \quad (3)$$

where  $\Delta\nu_{\text{FSR}}$  is the cavity free-spectral range,  $\alpha$  and  $L$  are the waveguide intensity linear attenuation coefficient and length, respectively, and we have defined the finesse  $\mathcal{F}$  of the cavity. As discussed in Appendix A and in Ref. 17, this expression is valid only in the low-loss approximation.

The noise properties of the PDH locking scheme can be optimized by maximizing the slope of the error signal at resonance. We show in Appendix B that this optimum is obtained when the cavity obeys the so-called critical coupling condition,<sup>18</sup> for which the resonance dip goes down to zero reflection, and is obtained by equating the coupling factor with the internal losses of the resonator:

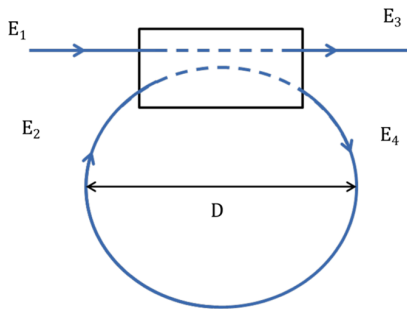


Fig. 1 Schematics of the gyroscope sensing ring cavity.

$$\sqrt{1 - \kappa} = \sqrt{1 - \gamma_0} e^{-\alpha L/2}. \quad (4)$$

As shown in Appendix B, optimizing the slope of the PDH error signal leads to a result different from the optimization of the cavity finesse because the slope depends on both the finesse and the contrast of the resonances. In the case where the condition of Eq. (4) is satisfied, Eq. (3) becomes

$$\frac{\Delta\nu_{\text{FWHM}}}{\Delta\nu_{\text{FSR}}} = \frac{1 - e^{-\alpha L}(1 - \gamma_0)}{\pi}. \quad (5)$$

To enhance the sensitivity of our gyroscope, it is important that the losses be small. In this case, we can use the following approximation:

$$e^{-\alpha L} \simeq 1 - \alpha L, \quad (6)$$

and suppose that the coupler losses  $\gamma_0$  are much smaller than the propagation losses, leading to

$$\kappa = 1 - (1 - \gamma_0)e^{-\alpha L} \simeq \alpha L. \quad (7)$$

Using Eqs. (4), (5), and (7), this leads to

$$\frac{\Delta\nu_{\text{FWHM}}}{\Delta\nu_{\text{FSR}}} = \frac{1}{\mathcal{F}} \simeq \frac{\alpha L}{\pi} = \alpha D, \quad (8)$$

where  $D$  is the diameter of the resonator (see Fig. 1).

For a cavity under critical coupling conditions, we show in Appendix A that the intracavity intensity  $|E_4|^2$  at resonance is given by

$$\left( \frac{|E_4|^2}{|E_1|^2} \right)_{\text{resonance}} = \frac{1 - \gamma_0}{1 - (1 - \gamma_0)e^{-\alpha L}}. \quad (9)$$

In the low loss approximation, we can use Eq. (7) to obtain:

$$\left( \frac{|E_4|^2}{|E_1|^2} \right)_{\text{resonance}} \simeq \frac{1}{\kappa} \simeq \frac{1}{\alpha \pi D}. \quad (10)$$

This expression, already obtained in Ref. 19, stresses the direct link between the intracavity intensity and the propagation losses for a high finesse cavity in the critical coupling regime.

## 3 Shot Noise and Kerr Effect Related Performance Limits

We now focus on the ultimate achievable performances of the RMOG, assuming in the following sections that the only limitations are due to the shot noise and the Kerr effect. All other sources of noises, such as the laser source or electronic noises, or limitations, for instance, from Rayleigh backscattering,<sup>20</sup> or polarization noise,<sup>21,22</sup> are supposed to be mitigated. Of course, in a real development, these should be conveniently addressed, which is not a task that should be underestimated. We will come back to Brillouin scattering at the end of Sec. 4 to show that it is negligible with the materials that we consider.



### 3.1 Shot Noise Limit

The smallest measurable angular velocity in a time  $\tau$  depends on the slope of the PDH servolocking slope, the Sagnac effect scale factor,<sup>23</sup> and the shot noise level. Its expression is derived in Appendix C and reads

$$\delta\dot{\theta}_{\text{SNL}} = \frac{n_0 \Delta\nu_{\text{FWHM}}}{D} \sqrt{\frac{\lambda hc}{2\chi\tau P_0}}, \quad (11)$$

where  $n_0$  is the guided mode effective index,  $\lambda$  is the wavelength,  $\chi$  is the detector quantum efficiency, which we take equal to 1 in the following,  $\tau$  is the integration time, and  $P_0$  is the optical power incident on the cavity. The quantity  $\delta\dot{\theta}_{\text{SNL}}\sqrt{\tau}$  sets a limit on the minimal ARW of the device.

### 3.2 Kerr Effect Induced Bias

We then focus on the bias instability resulting from the Kerr effect. We show in Appendix D that the Kerr effect introduces a rotation rate bias given by

$$\dot{\theta}_{\text{Kerr}} = \frac{cn_2\mathcal{F}}{2\pi\sigma D} \Delta P_0, \quad (12)$$

where  $\Delta P_0$  is the difference between the CW and CCW powers incident on the sensing cavity,  $n_2$  is the nonlinear refractive index of the waveguide, and  $\sigma$  is the guided mode area. It is important to notice that Eq. (12) takes into account only the bias induced by the unbalance of the incident powers and not the extra noise induced by the differences between the frequencies or the voltages used for the PDH locking modulations in the two propagation directions.<sup>12,21</sup>

The bias of Eq. (12) should be maintained below the maximum bias  $\dot{\theta}_{\text{bias}}$  required by the gyro specifications, thus requiring a certain level of control of  $\Delta P_0$ . For example, for a silica cavity ( $n_2 = 2.7 \times 10^{-20} \text{ m}^2/\text{W}$ )<sup>24</sup> of finesse  $\mathcal{F} = 40$ , diameter  $D = 25 \text{ mm}$ , and mode section area  $\sigma = 33 \mu\text{m}^2$ , Eq. (12) leads to a bias  $\dot{\theta}_{\text{Kerr}}/\Delta P_0 = 4 \text{ deg/s/mW}$ , in fair agreement with the measured value of  $5.3 \text{ deg/s/mW}$  reported in Ref. 25, after having taken into account the factor of 2 coming from the fact that only one half of the incident power is at the carrier frequency that is resonant with the cavity.

### 3.3 Derivation of the Cavity Design Guidelines

Equations (11) and (12) predict the ultimate performances of a RMOG depending on design parameters. Let us shortly summarize the hypothesis along which these expressions were obtained: (i) The cavity exhibits low losses. The numerical results given later will prove that this must be the case to reach the desired performances. (ii) The coupler losses  $\gamma_0$  are negligible compared with the propagation losses  $\alpha L$ . This is a reasonable assumption for state-of-the-art PICs couplers and waveguides.<sup>6</sup> However, this hypothesis may be slightly too optimistic for WGMRs. (iii) A PDH locking scheme is implemented and the phase modulation amplitude is set at its optimum<sup>15</sup> ( $\beta = 1.08 \text{ rad}$ ). (iv) The cavity is set at the critical coupling to optimize the PDH slope (see Appendix B). Although this is not a critical parameter for our analysis, this can be a tricky issue in terms of manufacturing as the propagation losses might not be totally

reproducible or predictable. However, it was demonstrated in Refs. 26 and 27 that thermally controlled variable couplers can be integrated on a PIC, allowing postfabrication tuning of the coupling efficiency, at the expense of potential drifts or errors if an active control is necessary. (v) The detector efficiency  $\chi$  is equal to 1, and the shot noise limit is reached.

Equations (11) and (12) contain different kinds of parameters. Some of them, such as  $\lambda$ ,  $c$ , and  $h$ , are physical constants that have fixed values. Some of them depend on the degree of maturity of the chosen technology. This is the case of  $\alpha$ ,  $n_2$ ,  $\sigma$ , and  $n_0$ , which depend on the chosen PIC or WGMR technology, and of the degree to which one is able to balance the two counterpropagating intracavity powers, which we will parametrize by introducing the following notation:

$$\xi = \frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta P_0}{P_0}, \quad (13)$$

where  $\Delta P/P$  and  $\Delta P_0/P_0$  are the relative unbalance of the intracavity and incident powers, respectively. The smallest achievable value of the parameter  $\xi$  depends on the efforts put into the active control of  $\Delta P_0$  through relevant electronics controls. Finally, the two remaining parameters in Eqs. (11) and (12) are  $D$  and  $P_0$ , which are the true design parameters of the gyro.

Consequently, our aim here is to derive the values of the design parameters  $D$  and  $P_0$  to achieve a given performance ARW and  $\dot{\theta}_{\text{bias}}$ , taking into account the parameters  $\alpha$ ,  $n_2$ ,  $\sigma$ , and  $n_0$  of the chosen technology. By combining Eqs. (11) and (12) with Eqs. (8) and (10), we obtain the following constraints on  $P_0$  and  $D$ :

$$\frac{P_0}{D^2} < \frac{2\pi\sigma\alpha}{c} \frac{1}{n_2\xi} \dot{\theta}_{\text{bias}}, \quad (14)$$

$$\sqrt{P_0}D > \sqrt{\frac{\lambda hc^3}{2\pi^2}} \alpha \frac{1}{\text{ARW}}. \quad (15)$$

One can see that these relations impose contradictory constraints on the input optical power  $P_0$ . In particular, for a fixed value of  $D$ , Eq. (14) imposes a “maximum” value of  $P_0$  to limit the bias instabilities, which scales like  $\alpha$ , while Eq. (15) imposes a “minimum” value for  $P_0$  to reach the required ARW performance, which scales like  $\alpha^2$ .

## 4 Applications to Tactical and Medium Performance Gyroscopes

A tactical grade (i.e., low precision navigation grade) gyroscope usually has the following performance requirements:

$$\text{ARW} \leq 0.1 \text{ deg}/\sqrt{\text{h}} = 2.9 \times 10^{-5} \text{ rad}/\sqrt{\text{s}}, \quad (16)$$

$$\dot{\theta}_{\text{bias}} \leq 1 \text{ deg/h} = 4.8 \times 10^{-6} \text{ rad/s}, \quad (17)$$

while for a medium precision gyroscope, these specifications become

$$\text{ARW} \leq 0.01 \text{ deg}/\sqrt{\text{h}} = 2.9 \times 10^{-6} \text{ rad}/\sqrt{\text{s}}, \quad (18)$$

$$\dot{\theta}_{\text{bias}} \leq 0.1 \text{ deg/h} = 4.8 \times 10^{-7} \text{ rad/s}. \quad (19)$$

**Table 1** Propagation losses  $\alpha$  and nonlinear index of refraction  $n_2$  for five different PIC materials.

Technology	$\alpha$	$n_2$
SoI	2.7 dB/m (Ref. 38)	$5 \times 10^{-18}$ m <sup>2</sup> /W (Ref. 39)
InP	0.35 dB/cm (Refs. 32 and 33)	$10^{-16}$ m <sup>2</sup> /W (Ref. 40)
SiN	0.32 dB/m (Ref. 6)	$2.4 \times 10^{-19}$ m <sup>2</sup> /W (Ref. 41)
SiO <sub>2</sub>	0.11 dB/m (Ref. 7)	$2.7 \times 10^{-20}$ m <sup>2</sup> /W (Ref. 24)
CaF <sub>2</sub>	0.0016 dB/m (Ref. 11)	$3.6 \times 10^{-20}$ m <sup>2</sup> /W (Ref. 42)

Given those specifications, the question now is to decide which PIC or WGMR technology is the most favorable to build a RMOG that could meet them. Table 1 summarizes the propagation losses and nonlinear index of four different PIC technologies and one WGMR technology, namely silicon-on-insulator (SoI, see Refs. 28 and 29), indium phosphide (InP, see Refs. 30–33), silicon nitride (SiN, see Refs. 34 and 35), silicon-chip-based monolithic silica resonators (SiO<sub>2</sub>, see Refs. 7, 36, and 37), and CaF<sub>2</sub> WGMRs, which are heterogeneously reported on a micro-optical chip.<sup>11</sup>

Note also that we suppose that the performances reported in Table 1 were all obtained for single-mode waveguides, which may not always be the case.

From Table 1, the most promising technologies seem to be the ones based on SiN, SiO<sub>2</sub>, and CaF<sub>2</sub> for two reasons. First, these materials are the one with which the lowest propagation losses were demonstrated. Second, their nonlinear indices of refraction  $n_2$  are smaller than the other materials mentioned in Table 1. Actually, SiN is even more favorable than what can be seen in this table because its “effective nonlinear index of refraction” can be made quite close to the one of silica. Indeed, because the contrast between the refractive indices of SiN and SiO<sub>2</sub>, which is used as the substrate for the PIC, is pretty small, the mode profile can be tailored to be only weakly confined so that the field mainly propagates inside SiO<sub>2</sub>. Actually, as can be seen in Ref. 6, the confinement factor  $\eta$ , defined as the fraction of the mode power that propagates in the central SiN core,<sup>43</sup> is only 0.03, meaning that the effective nonlinear index is approximately given by

$$n_{2,\text{eff}} = \eta n_2(\text{SiN}) + (1 - \eta) n_2(\text{SiO}_2) \approx 3.4 \times 10^{-20} \text{ m}^2/\text{W}. \quad (20)$$

Moreover, with such a low confinement, the mode area  $\sigma$  is equal to  $33 \mu\text{m}^2$  (see Ref. 6), thus further decreasing the bias induced by the Kerr effect. The mode diameter in SiO<sub>2</sub> resonators is taken to be equal to  $37 \mu\text{m}^2$  (see Ref. 37). The CaF<sub>2</sub> WGMR technology benefits from an even larger mode diameter, namely  $\sigma = 190 \mu\text{m}^2$ , which we deduced from Ref. 42.

From Table 1, SoI could also have been a possible candidate, provided some improvement on the propagation losses would be achievable. However, because the index of refraction contrast between the silicon layer and the SiO<sub>2</sub> substrate is very high, the mode remains mainly

confined inside the silicon layer, meaning that the effective Kerr effect is close to the one of the bulk material reported in Table 1, i.e., 100 times larger than that of SiO<sub>2</sub> and 10 times that of SiN (for further comparison between SoI and SiN, see, for instance, Ref. 44). Concerning InP, it is also worth mentioning that other nonlinear effects, such as the two-photon absorption, could become detrimental to the gyro performance even before the Kerr effect itself becomes a problem.

#### 4.1 Tactical Grade Gyroscope

With the figures that we have obtained for SiN and SiO<sub>2</sub> PICs and CaF<sub>2</sub> WGMRs, respectively, Figs. 2(a)–2(c) show the range of the parameters  $D$  and  $P_0$  for which the limit is compatible with tactical performances [see Eqs. (16) and (17)] for four values of the maximum power imbalance  $\xi$ . These areas are obtained using the conditions given by Eqs. (14) and (15).

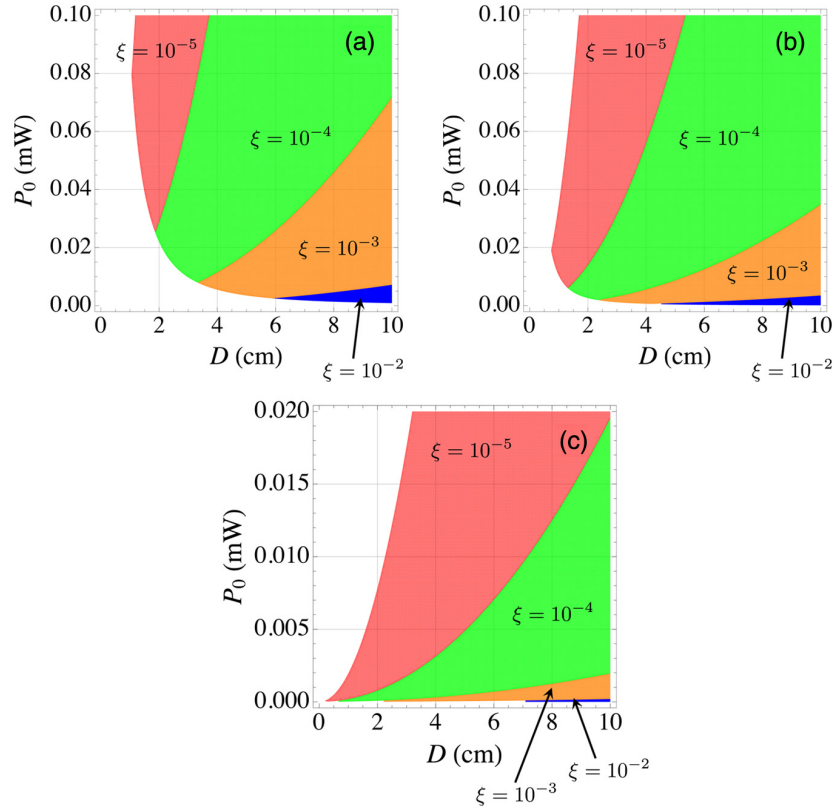
The first thing we notice by comparing Figs. 2(a) and 2(b) is that the results are quite similar for the two considered PIC materials. Looking more closely into details, one can see that for  $\xi = 10^{-2}$ , the diameter of the gyro must be larger than 6 or 4.5 cm in the cases of SiN and SiO<sub>2</sub>, respectively. These are no longer really miniature dimensions. Besides, with such a value of  $\xi$ , the optical power must be reduced to a few  $\mu\text{W}$  to mitigate the Kerr effect bias. Only a power imbalance control as good as  $\xi = 10^{-3}$ , which is achievable with a servo-loop control, can permit a reduction of  $D$  below 4 cm in the case of SiN and below 3 cm in the case of SiO<sub>2</sub>, with an optical power of the order of  $10 \mu\text{W}$ . A power imbalance control as good as  $\xi = 10^{-4}$  could permit a decrease in the cavity diameter down to 2 and 1.5 cm for SiN and SiO<sub>2</sub>, respectively.

From Fig. 2(c), one could *a priori* believe that CaF<sub>2</sub> WGMR can achieve tactical grade performances with smaller dimensions than PIC technologies. However, this impression must be mitigated by several observations: (i) the level of power needed to control the Kerr effect induced bias becomes so low, in the range of  $1 \mu\text{W}$ , that detection noise problems may become an issue; (ii) the calculations of Fig. 2(c) have been performed by assuming critical coupling, which is far from being the case in real implementations like the one of Ref. 11, where coupling losses are 16 times larger than internal losses; (iii) the tapered fiber coupling technique used for WGMR probably induces coupler losses, that are neglected here, which will further degrade the performance.

As a partial conclusion, Fig. 2 stresses the fact that one really needs to take into account the role of the Kerr effect, and not only the shot noise limit, in the achievable ultimate performance of the gyro. They also show that a control of the power imbalance between the two counter propagating curves is unavoidable.

#### 4.2 Medium Performance Gyroscope

The situation is even worse in the case of a medium performance gyroscope, i.e., with the performance specifications given by Eqs. (18) and (19). As can be seen in Fig. 3, an active control of the power imbalance as good as  $\xi = 10^{-5}$  can only allow a reduction in the minimum cavity diameter down to 6 cm in the case of SiN and to 5 cm in the case of SiO<sub>2</sub>. From Fig. 3(c), it seems possible to reduced



**Fig. 2** Areas in which Eqs. (14) and (15) are valid for a tactical grade gyroscope [see Eqs. (16) and (17)] for (a) SiN, (b) SiO<sub>2</sub>, and (c) CaF<sub>2</sub> microresonators. The values of the parameters are (a)  $n_2 = 3.4 \times 10^{-20} \text{ m}^2/\text{W}$ ,  $\alpha = 0.32 \text{ dB/m}$ , and  $\sigma = 33 \text{ } \mu\text{m}^2$ , (b)  $n_2 = 2.7 \times 10^{-20} \text{ m}^2/\text{W}$ ,  $\alpha = 0.11 \text{ dB/m}$ , and  $\sigma = 37 \text{ } \mu\text{m}^2$ , and (c)  $n_2 = 3.6 \times 10^{-20} \text{ m}^2/\text{W}$ ,  $\alpha = 0.0016 \text{ dB/m}$ , and  $\sigma = 190 \text{ } \mu\text{m}^2$ . The four areas correspond to  $\xi = 10^{-2}$ ,  $10^{-3}$ ,  $10^{-4}$ , and  $10^{-5}$ .

this diameter down to 3 or 4 cm in the case of CaF<sub>2</sub> WGMRs. But the same discussion on the validity of the hypothesis as in the discussion on tactical performance gyroscopes applies here also.

With SiN and SiO<sub>2</sub> PIC technologies, respectively, a tremendously precise power control ( $\xi = 10^{-6}$ ) is necessary to obtain the desired performance for  $D = 5 \text{ cm}$  and  $D = 3 \text{ cm}$ , as can be seen from Figs. 3(a) and 3(b). Figure 3(c) suggests that this diameter could only be slightly reduced by the use of a CaF<sub>2</sub> WGMR.

With the materials that we have chosen, and with the typical diameters and optical powers that we consider, one can check that Brillouin scattering is negligible, as shown in Appendix E.

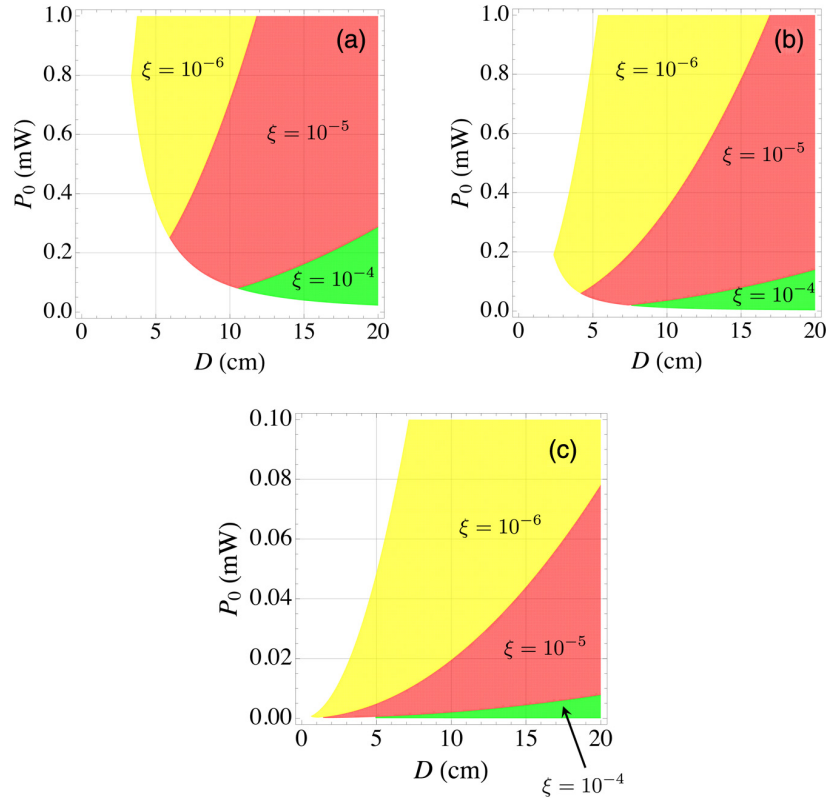
#### 4.3 Discussion

The main conclusion of this simple analysis is that the Kerr effect deeply impacts the RMOG design as it rapidly limits the level of power allowed to probe the cavity. For such a given power limit, the only way to improve the sensitivity at the shot noise limit is to increase the cavity diameter, leading to cavity dimensions that become comparable with other optical gyro technologies. Even for the tactical grade gyroscope, which has the less stringent performances, relative power differences well below the percent level are required. With a power imbalance level in the  $10^{-3}$  to  $10^{-4}$  range, a miniature tactical grade gyroscope seems achievable with

a ring cavity diameter in the few cm range. Making a medium performance RMOG seems much more problematic because the relative difference of power should be below  $10^{-5}$ , not even mentioning the fact that the cavity should remain monomode with a single polarization or the manufacturing and cost issues associated with such a large diameter resonator.

In view of resonant gyro applications, the PIC or WGMR design should consequently focus not only on the propagation losses but also on the mode area  $\sigma$  to decrease the effective Kerr effect. Even with a reduction of the Kerr effect, operation of a truly miniature ring with a diameter of a few cm implies a mandatory active control of the intensities. Indeed, such a level of power imbalance control ( $10^{-5}$  for a 3-cm diameter tactical grade diameter RMOG for instance) seems impossible to achieve in a passive way. In this respect, the demonstration in Ref. 45 of relative power imbalance actively reduced down to  $2.5 \times 10^{-5}$  opens the way to such controls. The intensity modulation scheme proposed in Ref. 46 is also well adapted to the small cavities that we consider here, contrary to the one described in Ref. 12.

To obtain the above results, we have assumed that the coupler losses,  $\gamma_0$ , are negligible compared with the propagation losses  $\alpha L$  and the coupler transmission  $\kappa$ . This assumption should be reassessed for the very small coupling values in the case of PIC resonators and may be far from being valid in the case of WGMRs, as discussed above.



**Fig. 3** Areas in which Eqs. (14) and (15) are valid for a medium performance gyroscope [see Eqs. (18) and (19)] for (a) SiN, (b) SiO<sub>2</sub>, and (c) CaF<sub>2</sub> microresonators. The values of the parameters are (a)  $n_2 = 3.4 \times 10^{-20} \text{ m}^2/\text{W}$ ,  $\alpha = 0.32 \text{ dB/m}$ , and  $\sigma = 33 \mu\text{m}^2$ , (b)  $n_2 = 2.7 \times 10^{-20} \text{ m}^2/\text{W}$ ,  $\alpha = 0.11 \text{ dB/m}$ , and  $\sigma = 37 \mu\text{m}^2$ , and (c)  $n_2 = 3.6 \times 10^{-20} \text{ m}^2/\text{W}$ ,  $\alpha = 0.0016 \text{ dB/m}$ , and  $\sigma = 190 \mu\text{m}^2$ . The three areas correspond to  $\xi = 10^{-4}$ ,  $10^{-5}$ , and  $10^{-6}$ .

This would make things worse if this hypothesis is no longer true. Indeed, some extra coupler losses would lead to an increase of the cavity linewidth and smaller PDH slope, as can be seen from Eqs. (40)–(42), in Appendix B. The effect of these extra losses on the PDH slope should then be compensated for by increasing the incident power and/or the gyroscope resonator diameter. We have also assumed that the cavity is exactly tuned to the critical coupling regime. This not only makes all the calculations simpler, allowing us to derive formulas that can be used as simple design rules of a RMOG (and actually for any resonant optical gyroscope) but also optimizes the PDH slope. Thus, should the cavity coupling be set at a different regime, this would also lead to a need to increase the incident power or/and the gyroscope size to meet the desired performance limits.

Moreover, we assumed throughout this paper that the phase modulation depth was optimal for the PDH locking (i.e., 1.08 rad). However, it was shown<sup>20</sup> that a modulation depth of 2.4 rad should be used to suppress the carrier and thus reduce the effect of the backscattering that we mentioned as a noise to be addressed. However, this modulation scheme leads to a somehow less steep error signal because the dominant terms are now proportional to  $J_1(\beta)J_2(\beta)$ , as shown in Ref. 47. A way to keep a modulation depth equal 1.08 rad while addressing the backscattering issue could be to interrogate the cavity with three different frequencies

separated by an integer number of cavity free-spectral ranges, as proposed in Ref. 48.

## 5 Conclusion

In conclusion, we have performed a simple analysis of a PIC-based or WGMR-based RMOG with few realistic assumptions, namely critical coupling, high-Q cavity, negligible coupling losses, and PDH locking scheme driven with the optimal modulation depth. We have derived design rules to calculate the minimum gyroscope diameter and the maximum power to probe it, taking the shot noise limit and the Kerr-effect induced bias into account. From this, we conclude that the Kerr effect has a deep impact on the design of the gyroscope and that the cavity  $Q$ -factor is not the unique parameter governing the gyro performance. To meet the bias stability requirement, the Kerr effect puts a limit on the acceptable difference between the powers of the two counter-propagating probing beams. With a fixed given relative power imbalance, this drastically limits the maximum input power. It then becomes necessary to increase the gyroscope dimensions to fulfill the ARW requirement.

More precisely, we conclude that even the goal of building a cm-diameter-scale tactical grade gyroscope (i.e., a relatively low performance grade in terms of inertial navigation) already puts a strong constraint on the power balance, making it very challenging to build and raising cost-related issues. Assuming some of the best demonstrated PIC or



WGMR technologies so far, reaching the performances of such a gyroscope requires a mitigation of the Kerr effect, for instance, with an active control of the counter propagating beam intensities. Second, for the same reasons, important improvements on the technology, such as a strong decrease in the losses, would be necessary to make a medium grade RMOG feasible. A more radical approach could be to get rid of the Kerr effect itself by making the light propagate mainly in air as with hollow-core fibers,<sup>49</sup> by exploiting circular hollow core waveguides,<sup>50,51</sup> by adapting the slot-waveguide approach<sup>52,53</sup> to air core, or by pushing to its limits the wedge resonator geometry<sup>7,36</sup> so that the sharp part of the waveguide is so thin that the mode confinement drastically decreases and the field mainly propagates in air. Another approach to reduce the Kerr effect limitation would be to identify new modulation solutions adapted to small cavities.

Finally, let us mention that another approach,<sup>54</sup> based on an active Brillouin resonator, seems also promising to achieve a performant miniature optical gyroscope.

## Appendix A: Cavity Resonance and Linewidth

In this appendix, we derive the expression of the field reflected by and inside the cavity, to obtain Eqs. (3)–(10). Inside the cavity (see Fig. 1), the fields  $E_2$  and  $E_4$  are related by

$$E_2 = E_4 e^{-\alpha L/2} e^{-i\Phi}, \quad (21)$$

$$\frac{|E_3|^2}{|E_1|^2} = (1 - \gamma_0) \left[ 1 - \kappa \frac{1 - (1 - \gamma_0)e^{-\alpha L}}{(1 - e^{-\alpha L/2} \sqrt{1 - \gamma_0} \sqrt{1 - \kappa})^2 + 4e^{-\alpha L/2} \sqrt{1 - \gamma_0} \sqrt{1 - \kappa} \sin^2 \Phi/2} \right]. \quad (26)$$

The reflected intensity is minimum at resonance, i.e., for  $\sin^2 \Phi/2 = 0$ , and maximum at antiresonance, i.e., for  $\sin^2 \Phi/2 = 1$ . The half-width at half-maximum of the resonance corresponds to the value

$$\Phi_{1/2} = \pi \frac{\Delta\nu_{\text{FWHM}}}{\Delta\nu_{\text{FSR}}}, \quad (27)$$

which is the value of the phase deviation with respect to resonance for which the reflected intensity is equal to the average of the minimum and maximum reflected intensities. From Eq. (26), it is given by

$$\sin^2 \frac{\Phi_{1/2}}{2} = \frac{(1 - e^{-\alpha L} \sqrt{1 - \gamma_0} \sqrt{1 - \kappa})^2}{2[1 + e^{-\alpha L} (1 - \gamma_0)(1 - \kappa)]}. \quad (28)$$

In the case where the cavity finesse is large, one has  $\sin \Phi_{1/2} \simeq \Phi_{1/2}$ , leading to

$$\frac{\Delta\nu_{\text{FWHM}}}{\Delta\nu_{\text{FSR}}} \simeq \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{1 - e^{-\alpha L} \sqrt{1 - \gamma_0} \sqrt{1 - \kappa}}{[1 + e^{-\alpha L} (1 - \gamma_0)(1 - \kappa)]^{1/2}}. \quad (29)$$

For such a high finesse cavity, one has  $1 + e^{-\alpha L} (1 - \gamma_0)(1 - \kappa) \simeq 2$ , leading to Eq. (3). In the case where the losses are too large for this approximation to

where the round-trip phase shift is given by

$$\Phi = \frac{2\pi\nu n_0 L}{c} = \frac{\omega}{\Delta\nu_{\text{FSR}}}, \quad (22)$$

where  $\omega$  is the light angular frequency and  $n_0$  is the guided mode effective index. By combining this equation with Eq. (2), we get

$$E_4 = \frac{i\sqrt{1 - \gamma_0}\sqrt{\kappa}}{1 - e^{-\alpha L/2} e^{-i\Phi} \sqrt{1 - \gamma_0} \sqrt{1 - \kappa}} E_1. \quad (23)$$

At resonance, i.e.,  $e^{-i\Phi} = 1$ , the intracavity intensity is maximized and is given by

$$\left( \frac{|E_4|^2}{|E_1|^2} \right)_{\text{resonance}} = \frac{\kappa(1 - \gamma_0)}{(1 - e^{-\alpha L/2} \sqrt{1 - \gamma_0} \sqrt{1 - \kappa})^2}. \quad (24)$$

In the critical coupling regime given by Eq. (4), we retrieve the expression of Eq. (9).

The field reflected by the cavity is obtained by injecting Eqs. (21) and (23) into Eq. (1), leading to

$$E_3 = \sqrt{1 - \gamma_0} \left[ \frac{\sqrt{1 - \kappa} - e^{-\alpha L/2} e^{-i\Phi} \sqrt{1 - \gamma_0}}{1 - e^{-\alpha L/2} e^{-i\Phi} \sqrt{1 - \gamma_0} \sqrt{1 - \kappa}} \right] E_1. \quad (25)$$

This leads to the following expression for the reflected intensity:

be valid, an exact expression of the cavity linewidth can be found in Ref. 17.

## Appendix B: Optimization of the Slope of the PDH Error Signal

In this appendix, we derive the slope of the PDH error signal for a single coupler ring cavity such as the one of Fig. 1 and show that the critical coupling is the one that maximizes this slope. We adopt the notations of Ref. 15, where the incident field at angular frequency  $\omega = 2\pi\nu$ , of complex amplitude  $E_0$ , is phase modulated at angular frequency  $\Omega$  with an amplitude  $\beta$ . The incident field thus reads

$$E_0 e^{i[\omega t + \beta \sin(\Omega t)]} = E_0 \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} J_n(\beta) e^{i(\omega + n\Omega)t}, \quad (30)$$

where  $J_n$  is the Bessel function of order  $n$ . The reflected field, limited to the central carrier and the first two sidebands, is equal to

$$E_0 [F(\omega) J_0(\beta) e^{i\omega t} + F(\omega + \Omega) J_1(\beta) e^{i(\omega + \Omega)t} + F(\omega - \Omega) J_{-1}(\beta) e^{i(\omega - \Omega)t}], \quad (31)$$

where  $F(\omega)$  is the cavity amplitude reflection coefficient given in Eq. (25):

$$F(\omega) = \sqrt{1-\gamma_0} \left[ \frac{\sqrt{1-\kappa} - e^{-\alpha L/2} e^{-i\omega/\Delta\nu_{\text{FSR}}} \sqrt{1-\gamma_0}}{1 - e^{-\alpha L/2} e^{-i\omega/\Delta\nu_{\text{FSR}}} \sqrt{1-\gamma_0} \sqrt{1-\kappa}} \right]. \quad (32)$$

If we suppose that the sidebands are completely out of resonance, then  $F(\omega \pm \Omega) \simeq -1$  and, following Ref. 15, the error signal after demodulation, i.e., multiplication by  $\sin(\Omega t)$ , and low-pass filtering is given by

$$\text{Im}[F(\omega)] = \frac{\kappa(1-\gamma_0)e^{-\alpha L/2} \sin(\omega/\Delta\nu_{\text{FSR}})}{(1 - e^{-\alpha L/2} \sqrt{1-\kappa} \sqrt{1-\gamma_0})^2 + 4e^{-\alpha L/2} \sqrt{1-\kappa} \sqrt{1-\gamma_0} \sin^2(\omega/2\Delta\nu_{\text{FSR}})}. \quad (34)$$

If we call  $\delta\omega$ , the shift of  $\omega$  with respect to resonance and suppose that  $\delta\omega \ll 2\pi\Delta\nu_{\text{FSR}}$ , then Eq. (34) becomes

$$\text{Im}[F(\delta\omega)] \simeq \frac{\kappa(1-\gamma_0)e^{-\alpha L/2}}{(1 - e^{-\alpha L/2} \sqrt{1-\kappa} \sqrt{1-\gamma_0})^2} \frac{\delta\omega}{\Delta\nu_{\text{FSR}}}. \quad (35)$$

Close to resonance, the evolution of the error signal with the cavity detuning is thus linear. One can optimize the slope of this evolution by choosing the value of the coupling  $\kappa$  that satisfies

$$\frac{d}{d\kappa} \text{Im}[F(\delta\omega)] = 0. \quad (36)$$

By taking the derivative of Eq. (35) with respect to  $\kappa$ , one retrieves exactly the condition (4) for critical coupling:

$$\kappa = 1 - e^{-\alpha L} (1 - \gamma_0). \quad (37)$$

In the case of critical coupling, Eq. (35) becomes

$$\text{Im}[F(\delta\omega)] \simeq \frac{(1-\gamma_0)e^{-\alpha L/2}}{1 - e^{-\alpha L} (1 - \gamma_0)} \frac{\delta\omega}{\Delta\nu_{\text{FSR}}}. \quad (38)$$

In the case of a high finesse cavity, we have  $e^{-\alpha L} (1 - \gamma_0) \simeq 1 - \alpha L - \gamma_0$ , so that

$$\text{Im}[F(\delta\omega)] \simeq \frac{1}{\alpha L + \gamma_0} \frac{\delta\omega}{\Delta\nu_{\text{FSR}}}. \quad (39)$$

Besides, Eq. (5) leads to

$$\frac{1}{\mathcal{F}} = \frac{\Delta\nu_{\text{FSR}}}{\Delta\nu_{\text{FWHM}}} \simeq \frac{\alpha L + \gamma_0}{\pi}, \quad (40)$$

allowing us to rewrite Eq. (39) in the following form:

$$\text{Im}[F(\delta\omega)] \simeq \frac{\delta\omega}{\pi\Delta\nu_{\text{FWHM}}}. \quad (41)$$

Using Eq. (33), we finally obtain:

$$\varepsilon(\delta\omega) = 2GP_0 |J_0(\beta) J_1(\beta)| \frac{\delta\omega}{\pi\Delta\nu_{\text{FWHM}}}. \quad (42)$$

$$\varepsilon(\omega) = 2GP_0 |J_0(\beta) J_1(\beta)| \text{Im}[F(\omega)], \quad (33)$$

where  $G$  is the optical to electrical conversion gain and  $P_0$  is the optical power associated with the incident laser field  $E_0$ . The error signal is thus proportional to the imaginary part of  $F(\omega)$ , which, according to Eq. (32), is given by

## Appendix C: Shot Noise Limit

In this appendix, we use the slope error signal expression obtained in Appendix B to derive the shot noise limit of a resonant gyroscope. The detection of the power  $P_{\text{det}}$  reflected by the cavity creates a photocurrent given by

$$i_{\text{det}} = \frac{\chi e \lambda}{hc} P_{\text{det}}, \quad (43)$$

where  $\chi$  is the detector efficiency and  $\lambda$  is the light wavelength. The shot noise associated with this current is given by

$$i_{\text{SNL}} = \sqrt{\frac{2e i_{\text{det}}}{\tau}}, \quad (44)$$

where  $\tau$  is the integration time, leading to the following noise equivalent power:

$$P_{\text{SNL}} = \frac{i_{\text{SNL}}}{\chi e \lambda / hc} = \sqrt{\frac{2hc}{\chi \lambda \tau}} P_{\text{det}}. \quad (45)$$

The noise on the servoloop error signal is thus

$$\varepsilon_{\text{SNL}} = \frac{GP_{\text{SNL}}}{\sqrt{2}} = G \sqrt{\frac{hc}{\chi \lambda \tau}} P_{\text{det}}, \quad (46)$$

where the  $1/\sqrt{2}$  factor comes from the fact that only one quadrature is kept after demodulation. Using Eq. (42), this transforms into the following limit for the detection of the deviation of the optical frequency from resonance:

$$\delta\omega_{\text{SNL}} = \sqrt{\frac{hc}{\lambda \chi \tau}} \sqrt{P_{\text{det}}} \frac{\pi \Delta\nu_{\text{FWHM}}}{2P_0 |J_0(\beta) J_1(\beta)|}. \quad (47)$$

The Sagnac effect scale factor relates a rotation rate  $\dot{\theta}$  into a frequency difference  $\Delta\omega_{\text{Sagnac}}$  through

$$\Delta\omega_{\text{Sagnac}} = \frac{2\pi D}{n_0 \lambda} \dot{\theta}, \quad (48)$$

Then, Eq. (46) translates into the following noise limit on the measurement of a variation of the rotation rate:

$$\delta\dot{\theta}_{\text{SNL}} = \frac{n_0\lambda}{2\pi D} \sqrt{2\delta\omega_{\text{SNL}}}, \quad (49)$$

where the factor  $\sqrt{2}$  comes from the fact that to measure a variation in the rotation rate, one needs to compare two values of the signal for which the shot noises quadratically add. Using Eq. (46) becomes

$$\delta\dot{\theta}_{\text{SNL}} = \frac{n_0\Delta\nu_{\text{FWHM}}}{D} \sqrt{\frac{\lambda hc}{\chi\tau} \frac{\sqrt{P_{\text{det}}}}{2\sqrt{2}P_0|J_0(\beta)J_1(\beta)|}}. \quad (50)$$

Close to resonance, in critical coupling conditions, the power falling on the detector is mainly due to the two first sidebands, which are fully reflected by the cavity, leading to

$$P_{\text{det}} \simeq 2P_0J_1(\beta)^2. \quad (51)$$

Moreover, as shown in Ref. 15, the error signal can be maximized by choosing  $\beta \simeq 1.08$  rad, for which  $J_0(\beta)^2 \simeq J_1(\beta) \simeq 1/2$ . In these conditions, Eq. (50) becomes

$$\delta\dot{\theta}_{\text{SNL}} = \frac{n_0\Delta\nu_{\text{FWHM}}}{D} \sqrt{\frac{\lambda hc}{2\chi\tau P_0}}, \quad (52)$$

which is equivalent to Eq. (11) above.

## Appendix D: Kerr Bias

As shown in Ref. 2, if the two counter propagating intracavity beams exhibit a power difference  $\Delta P$ , the Kerr effect creates a difference between the refractive indices seen by the two counter propagating waves that reads

$$\Delta n_{\text{Kerr}} = n_2 \frac{\Delta P}{\sigma}, \quad (53)$$

where  $n_2$  is the waveguide effective nonlinear index and  $\sigma$  is the guided mode area. This leads to a difference between the resonance frequencies of the two counterpropagating modes, given by

$$\Delta\omega_{\text{Kerr}} = 2\pi \frac{cn_2}{\lambda n_0} \frac{\Delta P}{\sigma}. \quad (54)$$

Using the gyro scale factor given by Eq. (48), one obtains the expression of the bias angular velocity induced by the Kerr effect:

$$\dot{\theta}_{\text{Kerr}} = \frac{cn_2\Delta P}{\sigma D}, \quad (55)$$

which can be related to the difference  $\Delta P_0$  between the powers incident on the cavity in the CW and CCW directions using Eqs. (8) and (10), leading to

$$\dot{\theta}_{\text{Kerr}} = \frac{cn_2\mathcal{F}\Delta P_0}{\pi\sigma D 2}. \quad (56)$$

The extra factor of 2 at the denominator of Eq. (56) is due to the factor  $J_0(\beta)^2$ , which relates the carrier power to the total incident power  $P_0$  in the PDH servolocking configuration [see Eq. (31)] with  $\beta = 1.08$  rad.

## Appendix E: Calculation of Brillouin Scattering Threshold

The threshold pump power for Brillouin scattering in a single-pass geometry in a waveguide of length  $L$  is approximated in Ref. 55 by the formula

$$P_{\text{th}} \simeq 21 \frac{\sigma}{gL_{\text{eff}}}, \quad (57)$$

where  $\sigma$  is the mode area,  $L_{\text{eff}} = (1 - e^{-\alpha L})/\alpha$  is the waveguide effective length taking propagation losses into account, and  $g$  is the Brillouin gain ( $g = 5 \times 10^{-11}$  m/W for silica). With the SiN waveguides considered in Sec. 4, we have  $\sigma = 33 \mu\text{m}^2$ . Since  $\alpha = 0.0736 \text{ m}^{-1}$  for 0.32 dB/km losses (see Table 1) and since the cavity diameter  $D$  is only few cm large, we have  $L_{\text{eff}} \simeq \pi D$ . Assuming, for instance, a 5-cm diameter cavity and that the low confinement of the mode allows us to consider that it propagates in silica only, we end up with a threshold of 100 W, far above the considered powers. For this calculation, we considered a single-pass geometry because we can choose the cavity free-spectral range to make the Brillouin scattered frequency non-resonant when the laser beam is resonant, as opposed to a doubly resonant geometry.<sup>56</sup>

## Acknowledgments

We wish to thank Jérôme Bourderionnet, Alfredo De Rossi, and Sylvain Combré for sharing their expertise on integrated photonics technologies with us. This work is supported by the Agence Nationale de la Recherche (Project PHOBAG: ANR-13-BS03-0007) and the European Space Agency (ESA). The work of G.F., A.R., and F.B. is performed in the framework of the joint research lab between Thales Research & Technology and Laboratoire Aimé Cotton.

## References

1. F. Aronowitz, "The laser gyro," in *Laser Applications*, Vol. 1, pp. 133–200, Academic Press, New York (1971).
2. H. Lefèvre, *The Fiber Optic Gyroscope*, Artech House, Norwood, Massachusetts (1993).
3. S. Ezekiel and S. R. Balsamo, "Passive ring resonator laser gyroscope," *Appl. Phys. Lett.* **30**, 478–480 (1977).
4. Joint European Platform for Photonic Integration of Components and Circuits, <http://www.jeppix.eu/>.
5. VLC Photonics Co., <http://www.vlcphotonics.com/>.
6. D. T. Spencer et al., "Integrated waveguide coupled Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub> resonators in the ultrahigh-Q regime," *Optica* **1**, 153–157 (2014).
7. K. Y. Yang et al., "Integrated ultra-high-Q optical resonator," arXiv:1702.05076 (2017).
8. G. Roelkens, "Heterogeneous III-V/silicon photonic integrated circuits," in *Asia Communications and Photonics Conf., Optical Society of America*, ATh3A–5 (2013).
9. J. Bowers, "Heterogeneous III-V/silicon photonic integrated circuits," in *IEEE Optical Fiber Communications Conf.*, pp. 1–50 (2015).
10. L. Carroll et al., "Photonic packaging: transforming silicon photonic integrated circuits into photonic devices," *Appl. Sci.* **6**, 426 (2016).
11. W. Liang et al., "Resonant microphotonic gyroscope," *Optica* **4**, 114–117 (2017).
12. K. Iwatsuki, K. Hotate, and M. Higashiguchi, "Kerr effect in an optical passive ring-resonator gyro," *J. Lightwave Technol.* **4**, 645–651 (1986).
13. C. Ciminelli et al., "Label-free optical resonant sensors for biochemical applications," *Prog. Quantum Electron.* **37**, 51–107 (2013).
14. R. W. P. Drever et al., "Laser phase and frequency stabilization using an optical resonator," *Appl. Phys. B* **31**, 97–105 (1983).
15. E. D. Black, "An introduction to Pound-Drever-Hall laser frequency stabilization," *Am. J. Phys.* **69**, 79–87 (2001).
16. L. F. Stokes, M. Chodorow, and H. J. Shaw, "All-single-mode fiber resonator," *Opt. Lett.* **7**, 288–290 (1982).
17. F. Dell'Olio et al., "New ultrasensitive resonant photonic platform for label-free biosensing," *Opt. Express* **23**, 28593–28604 (2015).

18. Y. Dumeige et al., "Determination of coupling regime of high-q resonators and optical gain of highly selective amplifiers," *J. Opt. Soc. Am. B* **25**, 2073–2080 (2008).
19. A. Yariv, "Universal relations for coupling of optical power between microresonators and dielectric waveguides," *Electron. Lett.* **36**, 321–322 (2000).
20. H. Mao, H. Ma, and Z. Jin, "Polarization maintaining silica waveguide resonator optic gyro using double phase modulation technique," *Opt. Express* **19**, 4632–4643 (2011).
21. G. A. Sanders, "Critical review of resonator fiber optic gyroscope technology," *Proc. SPIE* **10266**, 102660A (1993).
22. H. Ma et al., "Improving long-term stability of a resonant micro-optic gyro by reducing polarization fluctuation," *IEEE Photonics J.* **4**, 2372–2381 (2012).
23. G. Sagnac, "Sur la preuve de la réalité de l'éther lumineux par l'expérience de l'interférographe tournant," *C. R. Acad. Sci. Paris* **157**, 1410–1413 (1913).
24. M. J. Weber, D. Milam, and W. L. Smith, "Nonlinear refractive index of glasses and crystals," *Opt. Eng.* **17**, 175463 (1978).
25. X. Li et al., "Test and analysis of the optical Kerr-effect in resonant micro-optic gyros," *IEEE Photonics J.* **6**, 1–7 (2014).
26. L. Wang et al., "A tunable polymer waveguide ring filter fabricated with UV-based soft imprint technique," *Opt. Commun.* **298**, 95–100 (2013).
27. M. J. Strain et al., "Tunable Q-factor silicon microring resonators for ultra-low power parametric processes," *Opt. Lett.* **40**, 1274–1277 (2015).
28. B. Jalali and S. Fathpour, "Silicon photonics," *J. Lightwave Technol.* **24**, 4600–4615 (2006).
29. D. Thomson et al., "Roadmap on silicon photonics," *J. Opt.* **18**, 073003 (2016).
30. T. M. Shish, "Indium phosphide based integrated photonic devices for telecommunications and sensing applications," Doctoral dissertation, Massachusetts Institute of Technology (2012).
31. G. Gilardi and M. K. Smit, "Generic InP-based integration technology: present and prospects," *Prog. Electromagn. Res.* **147**, 23–35 (2014).
32. D. D'Agostino et al., "Low-loss passive waveguides in a generic InP foundry process via local diffusion of zinc," *Opt. Express* **23**, 25143–25143 (2015).
33. C. Ciminelli et al., "A high-Q InP resonant angular velocity sensor for a monolithically integrated optical gyroscope," *IEEE Photonics J.* **8**, 6800418 (2016).
34. K. Wörhoff et al., "TriPLeX: a versatile dielectric photonic platform," *Adv. Opt. Technol.* **4**, 189–207 (2015).
35. C. Krüchel, "Integrated nonlinear optics in silicon nitride waveguides," Doctoral dissertation, Chalmers University of Technology (2015).
36. H. Lee et al., "Chemically etched ultrahigh-Q wedge-resonator on a silicon chip," *Nat. Photonics* **6**, 369–373 (2012).
37. S. H. Lee et al., "Towards visible soliton micro comb generation," arXiv:1705.06703 (2017).
38. A. Biberman et al., "Ultra-low loss silicon ring resonators," *Opt. Lett.* **37**, 4236–4238 (2012).
39. A. D. Bristow, N. Rotenberg, and H. M. V. Driel, "Two-photon absorption and kerr coefficients of silicon for 850–2200 nm," *Appl. Phys. Lett.* **90**, 191104 (2007).
40. J. Leuthold, "Advanced indium-phosphide waveguide Mach-Zehnder interferometer all-optical switches and wavelength converters," Doctoral dissertation, ETH Zürich (1998).
41. D. T. H. Tan et al., "Group velocity dispersion and self phase modulation in silicon nitride waveguides," *Appl. Phys. Lett.* **96**, 061101 (2010).
42. A. A. Savchenkov et al., "Low threshold optical oscillations in a whispering gallery mode CaF<sub>2</sub> resonator," *Phys. Rev. Lett.* **93**, 243905 (2004).
43. A. Yariv, *Quantum Electronics*, 3rd ed., Wiley, New York (1989).
44. R. Baets et al., "Silicon photonics: silicon nitride versus silicon-on-insulator," in *IEEE Optical Fiber Communications Conf.*, pp. 1–3 (2016).
45. H. Ma et al., "Reduction of optical Kerr-effect induced error in a resonant micro-optic gyro by light-intensity feedback technique," *Appl. Opt.* **53**, 3465–3472 (2014).
46. K. Takiguchi and K. Hotate, "Method to reduce the optical Kerr-effect-induced bias in an optical passive ring-resonator gyro," *IEEE Photonics Technol. Lett.* **4**, 203–206 (1992).
47. X. L. Zhang et al., "Open-loop operation experiments in a resonator fiber-optic gyro using the phase modulation spectroscopy technique," *Appl. Opt.* **45**, 7961–7965 (2006).
48. S. Schwartz, G. Feugnet, and F. Bretenaker, "Optical passive resonator gyro with three beams," European Patent EP2857797 (2015).
49. I. Fsaifes et al., "A test resonator for Kagome hollow-core photonic crystal fibers for resonant rotation sensing," *Opt. Commun.* **383**, 485–490 (2017).
50. M. Kumar et al., "Tunable hollow optical waveguide and its applications," Chapter 17 in *Frontiers in Guided Wave Optics and Optoelectronics*, B. Pal, Ed., INTECH Open Access Publisher, Rijeka, Croatia (2010).
51. W. Yang et al., "Low loss hollow-core waveguide on a silicon substrate," *Nanophotonics* **1**, 23–29 (2012).
52. V. R. Almeida et al., "Guiding and confining light in void nanostructure," *Opt. Lett.* **29**, 1209–1211 (2004).
53. C. F. Carlborg et al., "A packaged optical slot-waveguide ring resonator sensor array for multiplex label-free assays in labs-on-chips," *Lab Chip* **10**, 281–290 (2010).
54. J. Li, M.-G. Suh, and K. Vahala, "Microresonator Brillouin gyroscope," *Optica* **4**, 346–348 (2017).
55. G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*, 5th ed., Academic Press, Cambridge, Massachusetts (2013).
56. S. Norcia et al., "High-efficiency single-frequency Brillouin fiber laser with a tunable coupling coefficient," *J. Opt. Soc. Am. B* **21**, 1424–1430 (2004).

**Gilles Feugnet** graduated from Institut d'Optique Graduate School in 1989. He then joined Coherent Inc. (working on the development of mode-locked titanium sapphire laser), and in 1991, he joined Thales Research & Technology (formerly Laboratoire Central de Recherches). He has been working on laser-diode pumped solid-state lasers such as for gyroscopes. He is the author or coauthor of more than 40 papers and holds 20 patents.

**Alexia Ravaille** graduated from Institut d'Optique Graduate School in 2015. She is currently preparing her PhD degree on resonant optical passive gyroscope at Laboratoire Aimé Cotton, Orsay, in close collaboration with Thales Research & Technology.

**Sylvain Schwartz** graduated from Ecole Polytechnique in 2001 and received his PhD degree from the same institution in 2006. He joined Thales Research and Technology (Palaiseau, France) in 2006 as a research engineer. He is the author or coauthor of about 15 journal papers and holds 25 patent applications. Since 2015, he has been working in the group of Mikhail Lukin at Harvard. His current research interests include optical gyroscopes, atom interferometry for inertial sensing, and quantum information with neutral atoms coupled through Rydberg interaction and photonic crystal cavities.

**Fabien Bretenaker** graduated from Ecole Polytechnique, France, in 1988. He received his PhD from University of Rennes, Rennes, France, in 1992 while working on ring laser gyroscopes for Sagem. He joined the Centre National de la Recherche Scientifique, Rennes, in 1994 and worked in Rennes until 2002 on laser physics and nonlinear optics. In 2003, he joined the Laboratoire Aimé Cotton, Orsay, France, working on nonlinear optics, laser physics, quantum optics, and microwave photonics. He is also a part time professor in Ecole Polytechnique, Palaiseau, France, and an adjunct professor in Ecole Normale Supérieure Paris Saclay, Cachan, France.





# A Test Resonator for Kagome Hollow-Core Photonic Crystal Fibers for Resonant Rotation Sensing

---

Pour des raisons de droits d'auteur, nous n'avons pas pu reproduire l'article dans cette annexe pour la version finale de la thèse. Cet article est néanmoins consultable grâce à son doi : [http ://dx.doi.org/10.1016/j.optcom.2016.09.046](http://dx.doi.org/10.1016/j.optcom.2016.09.046)



**In-Situ Measurement of  
Backscattering in Hollow-Core Fiber  
Based Resonant Cavities**

---

# *In-Situ* Measurement of Backscattering in Hollow-Core Fiber Based Resonant Cavities

Alexia Ravaille,<sup>1,2,3</sup> Gilles Feugnet,<sup>1</sup> Ihsan Fsaifes,<sup>2</sup> Assaad Baz,<sup>4</sup>  
Benoît Debord,<sup>4</sup> Frédéric Gérôme,<sup>4</sup> George Humbert,<sup>4</sup>  
Fetah Benabid,<sup>4</sup> and Fabien Bretenaker,<sup>2</sup> *Member, IEEE*

<sup>1</sup>Thales Research & Technology, Palaiseau 91120, France

<sup>2</sup>Laboratoire Aimé Cotton, CNRS, Université Paris-Sud, ENS Paris-Saclay, Université Paris-Saclay, Orsay 91400, France

<sup>3</sup>Thales Avionics, Châtelleraut 86100, France

<sup>4</sup>GPPMM Group, XLIM Research Institute, CNRS, Université de Limoges, Limoges 87032, France

DOI:10.1109/JPHOT.2017.2713441

1943-0655 © 2017 IEEE. Translations and content mining are permitted for academic research only.

Personal use is also permitted, but republication/redistribution requires IEEE permission.

See [http://www.ieee.org/publications\\_standards/publications/rights/index.html](http://www.ieee.org/publications_standards/publications/rights/index.html) for more information.

Manuscript received March 21, 2017; revised June 1, 2017; accepted June 5, 2017. Date of publication June 8, 2017; date of current version June 23, 2017. This work was supported in part by the Agence Nationale de la Recherche under Awards ANR-13-BS03-0007 and ANR-11-CHEX-0009, and in part by the European Space Agency. Corresponding author: Fabien Bretenaker (e-mail: fabien.bretenaker@lac.u-psud.fr).

**Abstract:** We measure the light backscattered by resonant optical cavities based on two types of hollow-core photonic bandgap fibers, namely, 7-cell and 19-cell fibers. The measurement of the intensity backscattered by the cavity at resonance permits to deduce the value of the fiber backscattering coefficient. We find backscattering coefficients of the order of  $2.0 \times 10^{-6}$  and  $1.0 \times 10^{-6} \text{ m}^{-1}$  for the 7-cell and 19-cell fibers, respectively, two orders of magnitude larger than the one for standard solid-core single-mode fiber.

**Index Terms:** Gyroscopes, resonators, photonic crystal fibers.

## 1. Introduction

For the last few years, there has been a renewed interest for the resonant fiber optic gyroscope (R-FOG), due in particular to the recent progress of hollow-core photonic crystal fibers (HC-PCF) [1]. Indeed, R-FOGs using conventional silica fibers are limited by several noises, in particular Kerr-effect-induced drift [2] and temperature-driven polarization instability [3], which prevent them from becoming a commercial competitor of the interferometric fiber optic gyroscope (I-FOG). More precisely, the main source of bias in a conventional R-FOG arises from the propagation of monochromatic light in a glass medium, leading to an intensity dependent refractive index [1]. It has been shown that using HC-PCF as the sensing coil permits light to propagate mainly in air, thus making the R-FOG less sensitive to such Kerr non-linearities [4]. Besides, it has been known since [5] that backscattering limits the accuracy of R-FOGs. Indeed, it is responsible for the lock-in phenomenon that prevents the R-FOG from measuring slow angular velocities. While the backscattering in standard silica fiber is well known, there is no specific instrument developed to measure such a parameter in HC-PCF. To date, to the best of our knowledge, there are only two direct measurements of backscattering in HC-PCF: one performed using a commercial reflectometer (Luna Technology)

[6] and one extracted from Optical Frequency Domain Reflectometer (OFDR) measurements [7]. These two measurements were performed with the same commercial 7-cell HC-PCF from NKT. However, different types of HC-PCFs can be considered for application to R-FOG. For example, recently, 19-cell photonic bandgap HC-PCF was found to be a good candidate [8]. The aim of the present paper is thus to compensate the lack of information concerning backscattering in HC-PCFs by proposing a simple in-situ measurement method based on measuring the backscattered power directly in a R-FOG configuration. The system developed here allows us to compare different types of HC-PCF and to measure backscattering over different lengths. The proposed method also offers the benefit of requiring only a few meters of fiber. This is important in terms of cost and also when such fibers are difficult to manufacture or exhibit variations of their parameters along propagation.

The paper is organized as follows. In Section 2, we derive the theoretical expressions that relate the intensity reflected by the cavity to the fiber backscattering coefficient. Section 3 describes the experimental setup. Finally, Section 4 presents the experimental results for different types of fibers and discusses the accuracy of these measurements.

## 2. Theory

When coherent light is launched into an optical fiber, a fraction of its intensity is scattered in all directions due to Rayleigh scattering. The backscattered fraction of the intensity launched into the fiber of length  $L$  is given by [9]

$$\alpha_{BS} = \alpha_S S \frac{1 - e^{-2\alpha L}}{2\alpha}, \quad (1)$$

where  $\alpha_S$  is the Rayleigh scattering coefficient of the fiber,  $S$  the recapture factor [9], and  $\alpha$  the total attenuation coefficient of the fiber. If  $L$  is small enough for the total attenuation to be small, i.e.  $\alpha L \ll 1$ , then (1) reduces to:

$$\alpha_{BS} \simeq \alpha_S S L. \quad (2)$$

If such a fiber of length  $L$  is used to build a ring resonator of area  $A$ , the lock-in threshold for the rotation rate that can be observed with this cavity in a passive resonant gyro architecture is given by [5], [10]:

$$\Omega_{LI} = \frac{c\lambda\sqrt{\alpha_{BS}}}{4\pi A}, \quad (3)$$

where  $c$  is the velocity and  $\lambda$  the wavelength of light. Since in the following we consider only hollow-core fibers, those quantities are taken in vacuum. From (3) we can thus see that fiber backscattering has a direct impact on the performance of the gyro.

Rather than measuring the fiber backscattering coefficient using reflectometers [6], [7], we decide here to perform a measurement in a gyrometer resonant cavity. Since we want to compare different fibers, we choose a semi-bulk cavity architecture, as shown in Fig. 1.

This cavity is closed with mirrors  $M_1$  (cavity output coupler) and  $M_2$  (a highly reflecting mirror) and contains the fiber under test, together with its coupling optics. We call  $r_1$  (resp.  $r_2$ ) and  $t_1$  (resp.  $t_2$ ) the amplitude reflection and transmission coefficients of mirror  $M_1$  (resp.  $M_2$ ) and  $t$  the amplitude transmission coefficient for the intracavity fiber including both injection losses and fiber attenuation. If one excites the cavity with a field with complex amplitude  $E_0$  (intensity  $I_0$ ) incident on mirror  $M_1$ , the field amplitude inside the cavity, just after mirror  $M_1$ , is

$$E_{cav} = \frac{t_1}{1 - r_1 r_2 t \exp\left(\frac{i2\pi\delta}{\Delta\nu_{ISL}}\right)} E_0, \quad (4)$$

where  $\delta$  is the frequency detuning with respect to resonance and  $\Delta\nu_{ISL}$  the cavity free spectral range. The field reflected by the cavity is the sum of the incident field directly reflected from mirror

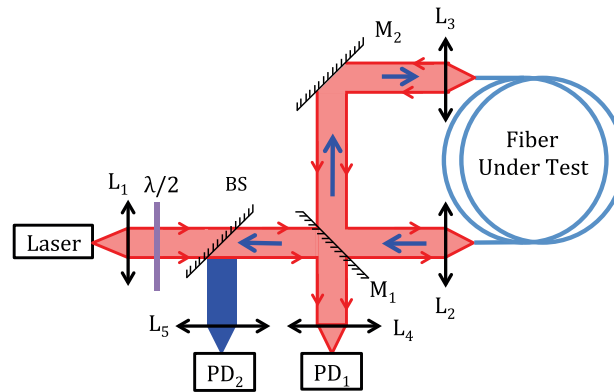


Fig. 1. Experimental setup aimed at measuring light backscattered from the fiber resonator. The laser frequency can be linearly swept to probe the resonator resonances.  $M_1$ ,  $M_2$ : mirrors.  $PD_1$ ,  $PD_2$ : photodetectors. BS: beamsplitter.

$M_1$  and the fraction of the intracavity field of (4) that is transmitted by mirror  $M_1$ :

$$E_R = -r_1 E_0 + t_1 t_2 \exp\left(\frac{i2\pi\delta}{\Delta\nu_{\text{SL}}}\right) E_{\text{cav}}. \quad (5)$$

The reflected intensity is obtained by taking the square modulus of (5), which can be written in the following form:

$$I_R = I_0(r_1^2 + t_1^2) \left\{ 1 - \frac{1 - \frac{[r_1 - (r_1^2 + t_1^2)t_2]^2}{(1-r_1t_2)^2(r_1^2 + t_1^2)}}{1 + \frac{4r_1r_2t}{(1-r_1t_2)^2} \sin^2\left(\frac{\pi\delta}{\Delta v_{\text{ISL}}}\right)} \right\}, \quad (6)$$

where  $(r_1^2 + t_1^2)$  might be different from 1 because of the losses of the mirror. The existence of backscattering given by (2) inside the cavity will convert a fraction of the intracavity field of (4) into a counterpropagating intracavity field. This field (namely  $\sqrt{\alpha_{\text{BS}}}E_{\text{cav}}$ ) is then injected inside the counterpropagating mode as if it were coming from an external source, and the intracavity backscattered field results from the resonance of this injected field [11], [12]. Taking multiple round-trips into account, the intracavity counterpropagating field is thus given by:

$$E_{\text{cav,back}} = \frac{\sqrt{\alpha_{\text{BS}}}}{1 - r_1 r_2 t \exp\left(\frac{i2\pi\delta}{\Delta\nu_{\text{SL}}}\right)} E_{\text{cav}} = \frac{\sqrt{\alpha_{\text{BS}}} t_1}{\left[1 - r_1 r_2 t \exp\left(\frac{i2\pi\delta}{\Delta\nu_{\text{SL}}}\right)\right]^2} E_0. \quad (7)$$

At resonance ( $\delta = 0$ ), (7) simplifies, leading to the following expression for the intensity backscattered by the cavity, i.e. at the output of the cavity:

$$\frac{I_{\text{back}}(\delta = 0)}{I_0} = \frac{\alpha_{\text{BS}} t_1^4}{(1 - r_1 r_2 t)^4}. \quad (8)$$

Equation (8) shows that the measurement of the intensity backscattered by the cavity at resonance permits to determine the fiber backscattering coefficient  $\alpha_{BS}$ , provided we know the values of the cavity parameters  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $t_1$ , and  $t$ . However, (5) shows that these parameters can be experimentally determined by measuring the reflection spectrum of the cavity, as explained in the following section.

### 3. Experimental Setup

The measurement of the intensities backscattered and reflected by the resonant cavity is performed as shown in Fig. 1. The laser is a commercial 1.55  $\mu\text{m}$  laser (Koheras Adjustik E15 laser from NKT Photonics) with a 100-Hz linewidth and an extremely good frequency stability (frequency noise equal to 65 Hz/ $\sqrt{\text{Hz}}$  at 100 Hz and 26 Hz/ $\sqrt{\text{Hz}}$  at 1 kHz). The light emitted from this fibered laser (output

TABLE 1  
Characteristics of the Investigated Fibers

Fiber type	Length (m)	MFD ( $\mu\text{m}$ )	$f_1$ (mm)
19-cell PBG	25	12	6.24
19-cell PBG	3	12	6.24
7-cell PBG	3	6.3	11

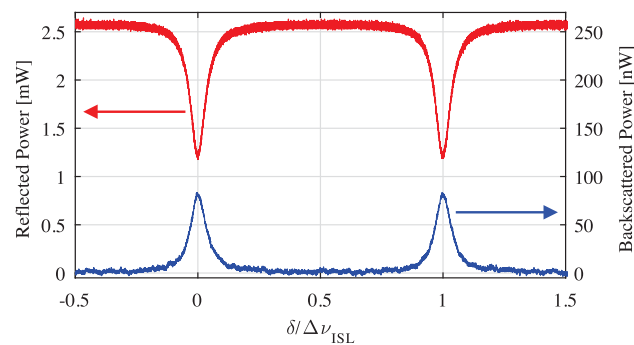


Fig. 2. Experimental evolutions of reflected and backscattered powers when the incident light frequency is scanned. These results were obtained with 25 m of 19-cell PBG fiber provided by GPPMM and an incident power of 2.7 mW.

mode diameter equal to  $9.9 \mu\text{m}$ ) is first collimated by lens  $L_1$  (focal length  $f_1$ ). The resonator consists of the fiber under test, the two lenses  $L_2$  and  $L_3$  of identical focal lengths ( $f_2 = f_3 = 6.24 \text{ mm}$ ) and the two mirrors  $M_1$  and  $M_2$ . To be able to compare the backscattering coefficients of different fibers, those intracavity components (lenses and mirrors) remain the same for all tested fibers. In order to match the external probe laser to the fundamental mode of the cavity, only  $f_1$  is changed. The choice of  $f_1$  is optimized to get the best coupling efficiency for each fiber (see the last column in Table 1).

In all our measurements, we make sure that the cavity transmission spectra and polarization remain unaffected by small environmental changes (fiber curvature, fiber displacement, local strain, . . .). We also check that our cavity alignment procedure leads to reproducible results.

The intensity reflected by the cavity is monitored by  $\text{PD}_1$ , and one half of the backscattered light intensity is reflected by the beamsplitter BS and monitored by photodiode  $\text{PD}_2$ . A typical measurement result, while the laser frequency is scanned, is reproduced in Fig. 2.

One can clearly see on this figure that each time the cavity is at resonance, the intracavity backscattering excites a resonant wave propagating in the opposite direction inside the cavity. Such backscattering peaks were also observed in the case of solid core fiber resonators [13]. Here, as explained in Section 2, we use the reflectivity dips to determine the cavity parameters. The result of a fit of one dip of Fig. 2 using (6) is shown in Fig. 3. The quantities which are adjusted during the fit to (6) are actually  $r_1^2$ ,  $r_1^2 + t_1^2$ , and  $t^2 r_2^2$ . For example, the data of Fig. 3 lead to  $r_1^2 = 0.895$ ,  $r_1^2 + t_1^2 = 0.966$ , and  $t^2 r_2^2 = 0.718$ . It is worth noticing that, in general, a simple fit of the reflection resonance peak of a cavity has two solutions, corresponding to undercoupling and overcoupling situations [14]. However, here, we know a priori quite well the value of  $r_1^2$ , that shows that our cavity is in under coupling regime. This allows us to launch the fitting procedure with initial values close to the actual values of the cavity parameters, ensuring convergence to the correct set of parameters



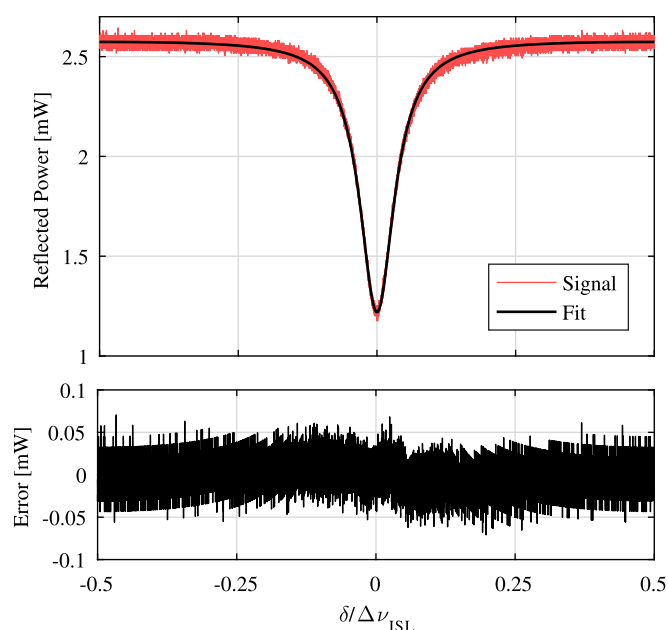


Fig. 3. Fit (black line) of the experimental evolution of the reflected power (red line) of Fig. 2. The lower curve is the residual difference between the signal and the fit.

only. The validity of the fits is thus confirmed by comparing the fitted values of  $r_1^2$  and  $r_1^2 + t_1^2$  to their directly measured values, namely  $r_1^2 = 0.9$ ,  $r_1^2 + t_1^2 = 0.97$ . Once these quantities are known, one can use them in (8) to deduce  $\alpha_{BS}$  from the peak of the backscattered spectrum like the one shown in Fig. 2.

Three difficulties make these measurements tricky. The first one is that the backscattered intensity is rather weak, as can be seen by comparing the vertical scales of the two signals of Fig. 2. This means that any spurious reflection from any component that may end up on detector PD<sub>2</sub> will spoil the measurement. We thus made a lot of efforts to mask all spurious reflections coming from all interfaces (for instance by tilting all optical components, in particular the intracavity ones). The second difficulty lies in the polarization alignment of the cavity. Indeed, the light incident on mirror M<sub>1</sub> is vertically polarized. The cavity eigenmodes must hence have the same polarization. In spite of the fact that hollow core fibers are not polarization maintaining, we managed to obtain a stable single polarization inside the cavity by twisting them as demonstrated in [15]. This method allowed us to avoid inserting any intracavity polarizer or waveplates that could have added backscattering. The third difficulty comes from the fact that our measurement procedure is based on the comparison of two strongly different light powers detected with two different detectors. This led us to perform a precise cross calibration. Besides, such detectors can exhibit offsets. In order to cancel the errors arising from these offsets, we made several measurements by varying the power incident on the cavity. We checked that the evolution was linear in the relevant range (see Fig. 4) and we used the slopes of such measurements to extract  $I_{back}(\delta = 0)/I_0$  and thus  $\alpha_{BS}$ .

#### 4. Experimental Results

We have explored three different samples of hollow core photonic bandgap fibers, whose characteristics are summarized in Table 1. Two different lengths of 19-cell PBG fiber made at GPPMM were considered: 25 m and 3 m. A 3-m long sample of commercially available 7-cell PBG fiber from NKT was also tested. The measurement results are summarized in Table 2.

We can see that our experimental protocol seems sound because the values of the measured mirror parameters, namely  $r_1^2$  and  $r_1^2 + t_1^2$  are reproducible within  $\pm 0.003$ , and are confirmed by

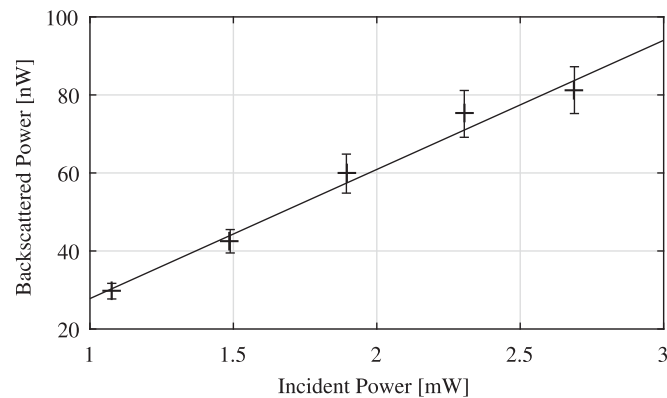


Fig. 4. Example of evolution of the power backscattered by the cavity at resonance as a function of the incident power. The black full line is a linear fit. The slope of the fit is of 33 nW/mW. These results were obtained with the same fiber as in Fig. 3.

TABLE 2  
Measurement Results

Fiber Type	Length (m)	$r_1^2$	$r_1^2 + t_1^2$	$t_2^2 r_2^2$	Finesse	$\alpha_{BS}$ (measured)	$\alpha_S S$ (measured)	$\alpha_S S$ (literature)
19-cell PBG	25	0.895	0.966	0.718	14.1	$2.5 \times 10^{-5}$	$1.0 \times 10^{-6}$	— — —
19-cell PBG	3	0.898	0.960	0.802	19.1	$3.9 \times 10^{-6}$	$1.3 \times 10^{-6}$	— — —
7-cell PBG	3	0.899	0.963	0.732	15.0	$7.6 \times 10^{-6}$	$2.5 \times 10^{-6}$	$1.6 \times 10^{-6}$ [6]

direct measurements. We can also see that the result we obtain for the 7-cell PBG fiber ( $\alpha_S S = 2.5 \times 10^{-6} \text{ m}^{-1}$ ) is of the same order of magnitude as the one mentioned in [6] and extrapolated from the measurements performed in [7], and also in agreement with simulations [16]. Concerning the 19-cell PBG fiber, we find a backscattering coefficient, which is of the same order of magnitude but twice smaller than for the 7-cell fiber. The fact that we obtain similar results for two very different values of the fiber length ( $L = 25 \text{ m}$  and  $L = 3 \text{ m}$ ) shows that the backscattering from intracavity elements (mirrors and lenses) is indeed negligible compared to the one from the fiber. Although the backscattering coefficient is found to be smaller for 19-cell PBG than for 7-cell PBG, we are still far from the ultimate limits mentioned in [4] ( $7 \times 10^{-10} \text{ m}^{-1}$  and  $7 \times 10^{-11} \text{ m}^{-1}$ , respectively), and two orders of magnitude above the typical backscattering coefficients observed for standard SMF 28 fibers ( $\simeq 10^{-8} \text{ m}^{-1}$ ).

Other backscattering measurements were performed on our setup with Kagome HC lattice design fiber from GLOphotonics but were inconclusive due to their unstable multimodal character. As the mode at the output of the fiber was strongly modified by any local pressure on the fiber or slight displacement of it, it was not possible to obtain reproducible measurements. Indeed, different mode profiles must lead to different overlap with the surrounding glass and then to different backscattering coefficients.

## 5. Conclusion

In conclusion, we have performed backscattering measurements on a cavity based on two types of HC-PCF, namely 19-cell and 7-cell PBG fibers, that are aimed at being used to build R-FOG

cavities. These measurements confirm the order of magnitude of the backscattering coefficient for 7-cell fiber [6], [7], [15] and show that the backscattering coefficient is slightly smaller, but of the same order of magnitude, for 19-cell PBG fiber. These backscattering coefficients are two orders of magnitude larger than the one usually observed for standard single-mode fiber, showing that lock-in threshold should be a difficult issue with such fibers. Finally, these results confirm that a new types of servo control architectures [17] aiming at measuring the cavity rotation may prove instrumental to cancel the effect of backscattering on the lock-in zone.

## Acknowledgement

The work of AR, GF, IF, and FB has been realized in the framework of the joint research laboratory between Laboratoire Aimé Cotton and Thales Research & Technology.

## References

- [1] G. A. Sanders, L. K. Strandjord, and T. Qiu, "Hollow core fiber optic ring resonator for rotation sensing," in *Proc. OSA Opt. Fiber Sensors*, Cancun, Mexico, Oct. 2006, Paper ME6.
- [2] K. Iwatsuki, K. Hotate, and M. Higashiguchi, "Kerr effect in an optical passive ring-resonator gyro," *J. Lightw. Technol.*, vol. LT-4, no. 6, pp. 645–651, Jun. 1986.
- [3] H. Ma, Z. Chen, Z. Yang, X. Yu, and Z. Jin, "Polarization-induced noise in resonator fiber optic gyro," *Appl. Opt.*, vol. 51, no. 28, pp. 6708–6717, 2012.
- [4] M. A. Terrel, M. J. F. Dignonnet, and S. Fan, "Resonant fiber optic gyroscope using an air-core fiber," *J. Lightw. Technol.*, vol. 30, no. 7, pp. 931–937, Apr. 2012.
- [5] F. Zarinetchi and S. Ezekiel, "Observation of lock-in behavior in a passive resonator gyroscope," *Opt. Lett.*, vol. 11, no. 6, pp. 401–403, 1986.
- [6] S. Lloyd, V. Dangui, M. Dignonnet, S. Fan, and G. S. Kino, "Measurement of reduced backscattering noise in laser-driven fiber optic gyroscopes," *Opt. Lett.*, vol. 25, no. 2, pp. 121–123, 2010.
- [7] M. Wegmuller, M. Legré, N. Gisin, T. Hansen, C. Jakobsen, and J. Broeng, "Experimental investigation of the polarization properties of a hollow core photonic bandgap fiber for 1550 nm," *Opt. Exp.*, vol. 13, no. 5, pp. 1457–1467, 2005.
- [8] I. Fsaifes *et al.*, "Hollow-core photonic-bandgap fiber resonator for rotation sensing," in *Proc. OSA Conf. Lasers Electro-Opt.*, San José, CA, USA, Jun. 2016, Paper SM2P4.
- [9] P. Gysel and R. K. Staubli, "Statistical properties of Rayleigh backscattering in single-mode fibers," *J. Lightw. Technol.*, vol. 8, no. 4, pp. 561–567, Apr. 1990.
- [10] R. J. C. Spreeuw, J. P. Woerdman, and D. Lenstra, "Photon band structure in a Sagnac fiber-optic ring resonator," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 61, no. 3, pp. 318–321, 1988.
- [11] T. J. Kippenberg, S. M. Spillane, and K. J. Vahala, "Modal coupling in traveling-wave resonators," *Opt. Lett.*, vol. 27, no. 19, pp. 1669–1671, 2002.
- [12] S. Trebaol, Y. Dumeige, and P. Féron, "Ring phenomenon in coupled cavities: Application to modal coupling in whispering-gallery-mode resonators," *Phys. Rev.*, vol. 81, 2010, Art. no. 043828.
- [13] H. Ma, X. Chang, Z. Yang, and Z. Jin, "Full investigation of the backscattering in resonator fiber optic gyro," *Opt. Commun.*, vol. 284, no. 19, pp. 4480–4484, 2011.
- [14] Y. Dumeige, S. Trebaol, L. Ghiša, T. K. N. Nguyễn, H. Tavernier, and P. Féron, "Determination of coupling regime of high-Q resonators and optical gain of highly selective amplifiers," *J. Opt. Soc. Amer. B*, vol. 25, no. 12, pp. 2073–2080, 2008.
- [15] M. Terrel, M. J. F. Dignonnet, and S. Fan, "Polarization controller for hollow-core fiber," *Opt. Lett.*, vol. 32, no. 11, pp. 1524–1526, 2007.
- [16] V. Dangui, M. J. F. Dignonnet, and G. S. Kino, "Modeling of the propagation loss and backscattering in air-core photonic-bandgap fibers," *J. Lightw. Technol.*, vol. 27, no. 17, pp. 3783–3789, Sep. 2009.
- [17] S. Schwartz, G. Feugnet, and F. Bretenaker, "Gyromètre optique passif à trois faisceaux," Patent EP2857797 A1, 2013.

## Détails des calculs du chapitre 2

### D.1 Calcul des intensités réfléchies et transmises par une cavité résonante passive

Le but de cette section est de présenter le détail des calculs des équations du chapitre 2, qui sont les équations (2.8), (2.9), (2.10) et (2.11).

#### D.1.1 Rappel des équations de départ

On rappelle que la figure 2.1 présente une schématisation de trois cavités résonantes en anneau, à base de miroirs, de fibres optiques, ou mixtes, observées en transmission et/ou en réflexion.

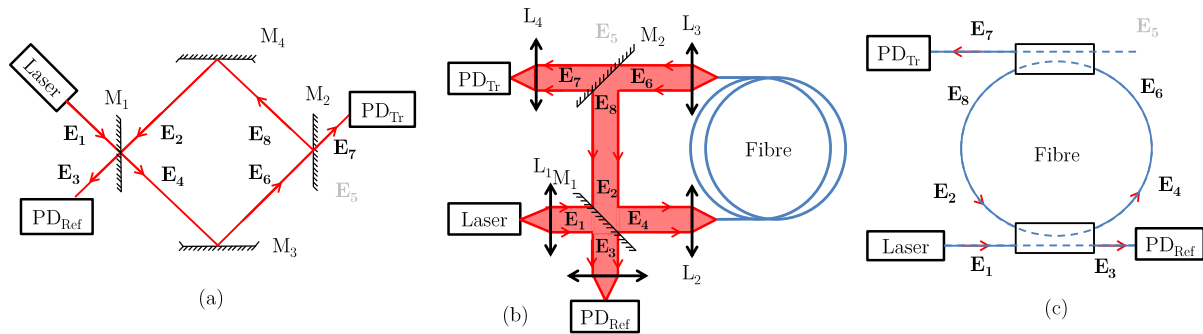


FIGURE D.1 — Représentation schématique de trois cavités résonantes passives observées en transmission et en réflexion. La photodiode  $PD_{Ref}$  est celle qui observe la lumière réfléchie par la cavité, et la photodiode  $PD_{Tr}$  est celle qui observe la lumière transmise par la cavité

Les différents champs d'entrée et de sortie de la cavité sont liés par les relations (2.1) à (2.6) du chapitre 2, que nous réécrivons ci-dessous :

$$E_3 = -r_1\sqrt{1-\gamma_1}E_1 + t_1\sqrt{1-\gamma_1}E_2 \quad (2.1)$$

$$E_4 = t_1\sqrt{1-\gamma_1}E_1 + r_1\sqrt{1-\gamma_1}E_2, \quad (2.2)$$

$$E_7 = -r_2\sqrt{1-\gamma_2}E_5 + t_2\sqrt{1-\gamma_2}E_6, \quad (2.3)$$

$$E_8 = t_2\sqrt{1-\gamma_2}E_5 + r_2\sqrt{1-\gamma_2}E_6, \quad (2.4)$$

$$E_6 = \mathcal{T}_1 \cdot e^{2i\pi\nu\tau_1} E_4, \quad (2.5)$$

$$E_2 = \mathcal{T}_2 \cdot e^{2i\pi\nu\tau_2} E_8, \quad (2.6)$$

où on a défini les termes suivants :

- $r_i$  (respectivement  $t_i$ ) le coefficient de réflexion (respectivement de transmission) du miroir  $M_i$ , exprimé en amplitude du champ électrique, de telle sorte que  $r_i^2 + t_i^2 = 1$ . Dans le cas d'un coupleur entièrement fibré, les conventions veulent que les coefficients  $t$  et  $r$  soient notés respectivement  $\kappa$  et  $\sqrt{1-\kappa}$  [44]. Par la suite, nous emploierons le terme de coupleur pour désigner indifféremment un miroir ou un coupleur fibré.
- $\gamma_i$  les pertes (en intensité) des miroirs  $M_i$ . En effet, les équations (2.1), (2.2), (2.3) et (2.4) donnent :  $|E_3|^2 + |E_4|^2 = (1-\gamma_1)(|E_1|^2 + |E_2|^2)$ , et  $|E_7|^2 + |E_8|^2 = (1-\gamma_2)(|E_5|^2 + |E_6|^2)$ .
- $\mathcal{T}_1$  (respectivement  $\mathcal{T}_2$ ) la transmission intracavité en amplitude de champ électrique sur le trajet entre le miroir  $M_1$  et le miroir  $M_2$  (respectivement entre le miroir  $M_2$  et le miroir  $M_1$ ). Ces transmissions dépendent de l'architecture de la cavité résonante. En effet, elles comprennent, en fonction de la cavité :
  - la transmission (en amplitude de champ électrique) de la fibre optique, si la cavité est constituée de fibre optique. Cette transmission vaut  $e^{-\alpha L/2}$ , avec  $\alpha$  le coefficient d'atténuation de la fibre en intensité (unités  $\text{m}^{-1}$ ), et  $L$  sa longueur,
  - les pertes de couplage entre les deux extrémités de la fibre, si couplage il y a (comme dans la cavité (b) de la figure 2.1),
  - la réflexion d'autres miroirs que les miroirs  $M_1$  et  $M_2$  s'il y en a d'autres utilisés dans la cavité (comme dans la cavité (a) de la figure 2.1).

On notera par la suite  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2$  la transmission totale intracavité ne tenant pas compte des pertes des coupleurs d'entrée et de sortie.

- $\tau_1$  (respectivement  $\tau_2$ ), le temps mis par la lumière pour faire le trajet  $M_1$  vers  $M_2$  (respectivement  $M_2$  vers  $M_1$ ). On note  $\tau = \tau_1 + \tau_2$  le temps mis pour faire un tour complet dans la cavité. D'après le chapitre précédent, ce temps dépend du sens de parcours de la lumière dans la cavité, lorsque cette dernière est en rotation. L'intervalle spectral libre, qui est défini comme étant l'inverse du temps mis pour faire un tour dans la cavité, est donc différent en fonction du sens de circulation de la lumière dans la cavité. D'après les

équations (1.18) et (1.19), cet intervalle spectral libre sera égal, en fonction du sens de circulation de la cavité, à :

$$\Delta\nu_{ISL_{\pm}} = \Delta\nu_{ISL_0} \mp \frac{\delta\nu_S}{2}, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \Delta\nu_{ISL_0} = \frac{c}{nL}, \\ \frac{\delta\nu_S}{2} = \frac{2A\dot{\theta}}{n^2L^2}, \end{cases}$$

avec  $L = 2\pi NR$ , la longueur de la cavité, et  $A = N\pi R^2$  son aire<sup>1</sup>. Pour simplifier les notations dans les calculs suivants, nous n'explicitons par le sens de parcours de la lumière dans la cavité et écrivons de manière générale  $\Delta\nu_{ISL} = \frac{1}{\tau}$ .

—  $\nu$  la fréquence de l'onde laser incidente sur la cavité.

### D.1.2 Calcul du champ intracavité

Pour pouvoir exprimer les champs réfléchis et transmis par la cavité, il est intéressant d'exprimer d'abord les champs intracavité. Ces derniers sont les champs  $E_4$ ,  $E_6$ ,  $E_8$  et  $E_2$ . Nous allons commencer par exprimer le champ  $E_4$  intracavité en fonction du champ incident  $E_1$  pour en déduire l'expression de tous les autres champs intracavité. On commence donc par combiner les équations (2.2) et (2.6), ce qui donne :

$$E_4 = t_1\sqrt{1-\gamma_1}E_1 + r_1\sqrt{1-\gamma_1}\mathcal{T}_2 \cdot e^{2i\pi\nu\tau_2}E_8.$$

Ensuite, on remplace  $E_8$  dans l'équation ci-dessus par son expression donnée par l'équation (2.4) sachant que, dans notre cas, on a  $E_5 = 0$  car il n'y a pas de lumière arrivant sur la cavité de ce côté-là. On obtient donc :

$$E_4 = t_1\sqrt{1-\gamma_1}E_1 + r_1\sqrt{1-\gamma_1}\mathcal{T}_2 \cdot e^{2i\pi\nu\tau_2}r_2\sqrt{1-\gamma_2}E_6.$$

Enfin, on remplace  $E_6$  par son expression donnée par l'équation (2.5), ce qui donne :

$$E_4 = t_1\sqrt{1-\gamma_1}E_1 + r_1\sqrt{1-\gamma_1}\mathcal{T}_2 \cdot e^{2i\pi\nu\tau_2}r_2\sqrt{1-\gamma_2}\mathcal{T}_1 \cdot e^{2i\pi\nu\tau_1}E_4.$$

Il suffit maintenant de rassembler les termes en  $E_4$ , en utilisant le fait que  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1\mathcal{T}_2$  et que  $\tau = \tau_1 + \tau_2$  ce qui donne au final le champ intracavité  $E_4$  en fonction du champ incident  $E_1$  qui vaut :

---

1. Si la cavité ne tourne pas, alors l'intervalle spectral libre est le même dans les deux sens et vaut :  $\Delta\nu_{ISL} = \frac{1}{\tau} = \frac{c}{nL}$ . Pour les cavités résonantes linéaires, plus communément appelées "cavités de Fabry-Pérot", on écrit que  $\Delta\nu_{ISL_0} = \frac{c}{2L}$ . Le facteur 2 vient du fait que la longueur  $L$  considérée ici est l'espacement entre deux miroirs. Or la lumière, pour faire un aller-retour dans la cavité linéaire, doit parcourir deux fois cette distance  $L$ , d'où le facteur 2.

$$E_4 = \frac{t_1 \sqrt{1 - \gamma_1}}{1 - r_1 \sqrt{1 - \gamma_1} \mathcal{T} r_2 \sqrt{1 - \gamma_2} \cdot e^{2i\pi\nu\tau}} E_1. \quad (\text{D.1})$$

À partir de cette équation, nous pouvons retrouver l'expression de tous les autres champs intracavité. En effet, en combinant cette équation avec l'équation (2.5), on obtient l'expression du champ  $E_6$ , à savoir :

$$E_6 = \frac{t_1 \sqrt{1 - \gamma_1} \mathcal{T}_1 \cdot e^{2i\pi\nu\tau_1}}{1 - r_1 \sqrt{1 - \gamma_1} \mathcal{T} r_2 \sqrt{1 - \gamma_2} \cdot e^{2i\pi\nu\tau}} E_1. \quad (\text{D.2})$$

Cette dernière équation, combinée à (2.4), donne l'expression du champ  $E_8$  :

$$E_8 = \frac{t_1 \sqrt{1 - \gamma_1} \mathcal{T}_1 r_2 \sqrt{1 - \gamma_2} \cdot e^{2i\pi\nu\tau_1}}{1 - r_1 \sqrt{1 - \gamma_1} \mathcal{T} r_2 \sqrt{1 - \gamma_2} \cdot e^{2i\pi\nu\tau}} E_1. \quad (\text{D.3})$$

Et enfin le champ  $E_2$  est donné par l'équation précédente et l'équation (2.6) :

$$E_2 = \frac{t_1 \sqrt{1 - \gamma_1} \mathcal{T} r_2 \sqrt{1 - \gamma_2} \cdot e^{2i\pi\nu\tau}}{1 - r_1 \sqrt{1 - \gamma_1} \mathcal{T} r_2 \sqrt{1 - \gamma_2} \cdot e^{2i\pi\nu\tau}} E_1. \quad (\text{D.4})$$

### D.1.3 Intensité et champ réfléchi par la cavité

Le champ réfléchi par la cavité est le champ  $E_3$ . En combinant les équations (2.1) et (D.4) on obtient l'expression du champ  $E_3$  qui vaut :

$$E_3 = -r_1 \sqrt{1 - \gamma_1} E_1 + t_1 \sqrt{1 - \gamma_1} \frac{t_1 \sqrt{1 - \gamma_1} \mathcal{T} r_2 \sqrt{1 - \gamma_2} \cdot e^{2i\pi\nu\tau}}{1 - r_1 \sqrt{1 - \gamma_1} \mathcal{T} r_2 \sqrt{1 - \gamma_2} \cdot e^{2i\pi\nu\tau}} E_1,$$

ce qui donne

$$E_3 = \left( -r_1 \sqrt{1 - \gamma_1} \frac{1 - r_1 \sqrt{1 - \gamma_1} \mathcal{T} r_2 \sqrt{1 - \gamma_2} \cdot e^{2i\pi\nu\tau}}{1 - r_1 \sqrt{1 - \gamma_1} \mathcal{T} r_2 \sqrt{1 - \gamma_2} \cdot e^{2i\pi\nu\tau}} + \frac{t_1^2 (1 - \gamma_1) \mathcal{T} r_2 \sqrt{1 - \gamma_2} \cdot e^{2i\pi\nu\tau}}{1 - r_1 \sqrt{1 - \gamma_1} \mathcal{T} r_2 \sqrt{1 - \gamma_2} \cdot e^{2i\pi\nu\tau}} \right) E_1,$$

et donc :

$$E_3 = \frac{-r_1 \sqrt{1 - \gamma_1} + r_1^2 (1 - \gamma_1) \mathcal{T} r_2 \sqrt{1 - \gamma_2} \cdot e^{2i\pi\nu\tau} + t_1^2 (1 - \gamma_1) \mathcal{T} r_2 \sqrt{1 - \gamma_2} \cdot e^{2i\pi\nu\tau}}{1 - r_1 \sqrt{1 - \gamma_1} \mathcal{T} r_2 \sqrt{1 - \gamma_2} \cdot e^{2i\pi\nu\tau}} E_1.$$

Sachant que, comme nous l'avons défini plus haut,  $r_1^2 + t_1^2 = 1$ , on obtient finalement pour  $E_3$  :

$$E_3 = \frac{-r_1 \sqrt{1 - \gamma_1} + (1 - \gamma_1) \mathcal{T} r_2 \sqrt{1 - \gamma_2} \cdot e^{2i\pi\nu\tau}}{1 - r_1 \sqrt{1 - \gamma_1} \mathcal{T} r_2 \sqrt{1 - \gamma_2} \cdot e^{2i\pi\nu\tau}} E_1.$$

En se rappelant que, comme dit plus haut,  $\tau = \frac{1}{\Delta\nu_{\text{ISL}}}$ , on obtient bien l'expression de la fonction de transfert de la cavité en réflexion (2.8), à savoir :

$$F_R(\nu) = \frac{E_3}{E_1} = \sqrt{1 - \gamma_1} \left( \frac{-r_1 + \sqrt{1 - \gamma_1} \mathcal{T} r_2 \sqrt{1 - \gamma_2} e^{2i\pi\nu/\Delta\nu_{\text{ISL}}}}{1 - r_1 \sqrt{1 - \gamma_1} \mathcal{T} r_2 \sqrt{1 - \gamma_2} e^{2i\pi\nu/\Delta\nu_{\text{ISL}}}} \right).$$

Pour alléger les notations par la suite, on reprend la notation avec le paramètre  $g$  qui vaut  $g = \sqrt{1 - \gamma_1} \mathcal{T} r_2 \sqrt{1 - \gamma_2}$ , et donc on peut écrire :

$$F_R(\nu) = \frac{E_3}{E_1} = \sqrt{1 - \gamma_1} \left( \frac{-r_1 + g e^{2i\pi\nu/\Delta\nu_{\text{ISL}}}}{1 - r_1 g e^{2i\pi\nu/\Delta\nu_{\text{ISL}}}} \right).$$

L'intensité réfléchie normalisée n'est autre que le module de l'expression ci-dessus, à savoir :

$$\frac{I_3}{I_1}(\nu) = |F_R(\nu)|^2 = (1 - \gamma_1) \left( \frac{-r_1 + g e^{2i\pi\nu/\Delta\nu_{\text{ISL}}}}{1 - r_1 g e^{2i\pi\nu/\Delta\nu_{\text{ISL}}}} \right) \left( \frac{-r_1 + g e^{-2i\pi\nu/\Delta\nu_{\text{ISL}}}}{1 - r_1 g e^{-2i\pi\nu/\Delta\nu_{\text{ISL}}}} \right),$$

ce qui peut se réécrire en :

$$|F_R(\nu)|^2 = (1 - \gamma_1) \left( \frac{r_1^2 - r_1 g (e^{2i\pi\nu/\Delta\nu_{\text{ISL}}} + e^{-2i\pi\nu/\Delta\nu_{\text{ISL}}}) + g^2}{1 - r_1 g (e^{2i\pi\nu/\Delta\nu_{\text{ISL}}} + e^{-2i\pi\nu/\Delta\nu_{\text{ISL}}}) + r_1^2 g^2} \right),$$

ou encore en :

$$|F_R(\nu)|^2 = (1 - \gamma_1) \left( \frac{r_1^2 - r_1 g 2 \cos\left(\frac{2\pi\nu}{\Delta\nu_{\text{ISL}}}\right) + g^2}{1 - r_1 g 2 \cos\left(\frac{2\pi\nu}{\Delta\nu_{\text{ISL}}}\right) + r_1^2 g^2} \right).$$

En faisant apparaître artificiellement au numérateur le dénominateur, on peut écrire que :

$$|F_R(\nu)|^2 = (1 - \gamma_1) \left( \frac{r_1^2 - r_1 g 2 \cos\left(\frac{2\pi\nu}{\Delta\nu_{\text{ISL}}}\right) + g^2 + 1 - 1 + r_1^2 g^2 - r_1^2 g^2}{1 - r_1 g 2 \cos\left(\frac{2\pi\nu}{\Delta\nu_{\text{ISL}}}\right) + r_1^2 g^2} \right),$$

et donc que :

$$|F_R(\nu)|^2 = (1 - \gamma_1) \left( 1 - \frac{-r_1^2 - g^2(1 - r_1^2) + 1}{1 - r_1 g 2 \cos\left(\frac{2\pi\nu}{\Delta\nu_{\text{ISL}}}\right) + r_1^2 g^2} \right).$$

D'autre part, comme on peut écrire que  $\cos\left(\frac{2\pi\nu}{\Delta\nu_{\text{ISL}}}\right) = 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\pi\nu}{\Delta\nu_{\text{ISL}}}\right)$ , on obtient :

$$|F_R(\nu)|^2 = (1 - \gamma_1) \left( 1 - \frac{1 - r_1^2 - g^2 + g^2 r_1^2}{1 - 2r_1 g \left(1 - 2 \sin^2\left(\frac{\pi\nu}{\Delta\nu_{\text{ISL}}}\right)\right) + r_1^2 g^2} \right),$$

et donc :



$$|F_R(\nu)|^2 = (1 - \gamma_1) \left( 1 - \frac{1 - r_1^2 - g^2 + g^2 r_1^2}{(1 - r_1 g)^2 + 4r_1 g \sin^2 \left( \frac{\pi \nu}{\Delta \nu_{\text{ISL}}} \right)} \right).$$

Le numérateur peut s'écrire de deux manières différentes. En effet, on a les relations :

$$1 - r_1^2 - g^2 + g^2 r_1^2 = (1 - r_1^2)(1 - g^2) = (1 - r_1 g)^2 - (r_1 - g)^2.$$

Et donc on peut écrire que l'intensité normalisée réfléchie est donnée par :

$$|F_R(\nu)|^2 = (1 - \gamma_1) \left( 1 - \frac{(1 - r_1 g)^2 - (r_1 - g)^2}{(1 - r_1 g)^2 + 4r_1 g \sin^2 \left( \frac{\pi \nu}{\Delta \nu_{\text{ISL}}} \right)} \right),$$

ce qui, en factorisant par le terme  $(1 - r_1 g)^2$  donne :

$$|F_R(\nu)|^2 = (1 - \gamma_1) \left( 1 - \frac{1 - \left( \frac{r_1 - g}{1 - r_1 g} \right)^2}{1 + 4 \frac{r_1 g}{(1 - r_1 g)^2} \sin^2 \left( \frac{\pi \nu}{\Delta \nu_{\text{ISL}}} \right)} \right). \quad (\text{D.5})$$

On retrouve bien, en remplaçant le paramètre  $g$  par sa valeur  $g = \sqrt{1 - \gamma_1} \mathcal{T} r_2 \sqrt{1 - \gamma_2}$ , l'équation (2.9) du chapitre 2 qui est :

$$\frac{I_3}{I_1}(\nu) = |F_R(\nu)|^2 = (1 - \gamma_1) \left( 1 - \frac{1 - \left( \frac{r_1 - \sqrt{1 - \gamma_1} \mathcal{T} r_2 \sqrt{1 - \gamma_2}}{1 - r_1 \sqrt{1 - \gamma_1} \mathcal{T} r_2 \sqrt{1 - \gamma_2}} \right)^2}{1 + 4 \frac{r_1 \sqrt{1 - \gamma_1} \mathcal{T} r_2 \sqrt{1 - \gamma_2}}{(1 - r_1 \sqrt{1 - \gamma_1} \mathcal{T} r_2 \sqrt{1 - \gamma_2})^2} \sin^2 \left( \frac{\pi \nu}{\Delta \nu_{\text{ISL}}} \right)} \right).$$

#### D.1.4 Intensité et champ transmis par la cavité

Le champ transmis par la cavité est le champ  $E_7$ . On peut l'exprimer directement en combinant les équations (2.3) et (D.2), sachant que  $E_5 = 0$ , par :

$$E_7 = \frac{t_1 \sqrt{1 - \gamma_1} t_2 \sqrt{1 - \gamma_2} \mathcal{T}_1 \cdot e^{2i\pi \nu \tau_1}}{1 - r_1 \sqrt{1 - \gamma_1} \mathcal{T} r_2 \sqrt{1 - \gamma_2} \cdot e^{2i\pi \nu \tau}} E_1,$$

On retrouve alors bien l'équation (2.10) du chapitre 2 qui est :

$$F_T(\nu) = \frac{E_7}{E_1} = \frac{t_1 \sqrt{1 - \gamma_1} \cdot t_2 \sqrt{1 - \gamma_2} \cdot \mathcal{T}_1 \cdot e^{2i\pi \nu \tau_1}}{1 - r_1 \sqrt{1 - \gamma_1} \mathcal{T} r_2 \sqrt{1 - \gamma_2} e^{2i\pi \nu / \Delta \nu_{\text{ISL}}}}.$$

L'intensité réfléchie normalisée est égale au module de cette équation. En posant toujours le paramètre  $g = \sqrt{1 - \gamma_1} \mathcal{T} r_2 \sqrt{1 - \gamma_2}$ , on a :

$$\frac{I_7}{I_1}(\nu) = |F_T(\nu)|^2 = \frac{t_1^2(1-\gamma_1)t_2^2(1-\gamma_2)\mathcal{T}_1^2}{(1-r_1ge^{2i\pi\nu/\Delta\nu_{\text{ISL}}})(1-r_1ge^{-2i\pi\nu/\Delta\nu_{\text{ISL}}})},$$

ce qui donne, sachant que  $t_i^2 = 1 - r_i^2$  :

$$|F_T(\nu)|^2 = \frac{(1-r_1^2)(1-\gamma_1)(1-r_2^2)(1-\gamma_2)\mathcal{T}_1^2}{1-r_1g(e^{2i\pi\nu/\Delta\nu_{\text{ISL}}} + e^{-2i\pi\nu/\Delta\nu_{\text{ISL}}}) + r_1^2g^2}.$$

En suivant les mêmes simplifications du dénominateur que pour l'intensité réfléchie, on obtient :

$$|F_T(\nu)|^2 = \frac{(1-r_1^2)(1-\gamma_1)(1-r_2^2)(1-\gamma_2)\mathcal{T}_1^2}{(1-r_1g)^2 + 4r_1g\sin^2\left(\frac{\pi\nu}{\Delta\nu_{\text{ISL}}}\right)}.$$

Si on factorise par la quantité  $(1-r_1g)^2$  au numérateur et au dénominateur, on trouve :

$$|F_T(\nu)|^2 = \frac{\frac{(1-r_1^2)(1-\gamma_1)(1-r_2^2)(1-\gamma_2)\mathcal{T}_1^2}{(1-r_1g)^2}}{1 + \frac{4r_1g}{(1-r_1g)^2}\sin^2\left(\frac{\pi\nu}{\Delta\nu_{\text{ISL}}}\right)}. \quad (\text{D.6})$$

En remplaçant le facteur  $g$  par sa valeur, on retrouve bien l'expression (2.11) de l'intensité transmise normalisée par la cavité, à savoir :

$$\frac{I_7(\nu)}{I_1(\nu)} = |F_T(\nu)|^2 = \frac{\frac{(1-r_1^2)(1-r_2^2)(1-\gamma_1)(1-\gamma_2)\mathcal{T}_1^2}{(1-r_1\sqrt{1-\gamma_1}\mathcal{T}r_2\sqrt{1-\gamma_2})^2}}{1 + 4\frac{r_1\sqrt{1-\gamma_1}\mathcal{T}r_2\sqrt{1-\gamma_2}}{(1-r_1\sqrt{1-\gamma_1}\mathcal{T}r_2\sqrt{1-\gamma_2})^2}\sin^2\left(\frac{\pi\nu}{\Delta\nu_{\text{ISL}}}\right)}.$$

## D.2 Calcul de la largeur de raie

Comme définie au chapitre 2, la largeur de raie correspond à la largeur à mi-hauteur de la courbe d'intensité (qu'elle soit réfléchie ou transmise), et on a, d'après l'équation (2.12) :

$$I\left(\frac{\Gamma}{2}\right) = \frac{I_{\text{Max}} + I_{\text{Min}}}{2}.$$

Il faut donc calculer l'intensité maximale et minimale dans chacun des cas pour pouvoir avoir accès à la largeur de raie.

### D.2.1 Cas de la réflexion

L'intensité réfléchie est donnée, en fonction des paramètres  $r_1$  et  $g$  par l'équation (D.5), qui est :

$$\frac{I_3}{I_1}(\nu) = (1 - \gamma_1) \left( 1 - \frac{1 - \left( \frac{r_1 - g}{1 - r_1 g} \right)^2}{1 + 4 \frac{r_1 g}{(1 - r_1 g)^2} \sin^2 \left( \frac{\pi \nu}{\Delta \nu_{\text{ISL}}} \right)} \right).$$

Or, l'intensité réfléchie est maximale quand  $\nu = \Delta \nu_{\text{ISL}}/2$   $[\Delta \nu_{\text{ISL}}]$  et est minimale quand  $\nu = 0$   $[\Delta \nu_{\text{ISL}}]$ . On peut donc écrire :

$$\frac{I_{\text{R,Min}}}{I_1} = \frac{I_3}{I_1}(0) = (1 - \gamma_1) \left( \frac{r_1 - g}{1 - r_1 g} \right)^2, \quad (\text{D.7})$$

et

$$\begin{aligned} \frac{I_{\text{R,Max}}}{I_1} = \frac{I_3}{I_1}(\Delta \nu_{\text{ISL}}/2) &= (1 - \gamma_1) \left( 1 - \frac{1 - \left( \frac{r_1 - g}{1 - r_1 g} \right)^2}{1 + 4 \frac{r_1 g}{(1 - r_1 g)^2}} \right) \\ &= (1 - \gamma_1) \left( \frac{1 + 4 \frac{r_1 g}{(1 - r_1 g)^2} - 1 + \left( \frac{r_1 - g}{1 - r_1 g} \right)^2}{1 + 4 \frac{r_1 g}{(1 - r_1 g)^2}} \right) \\ &= (1 - \gamma_1) \left( \frac{4r_1 g + (r_1 - g)^2}{(1 - r_1 g)^2 + 4r_1 g} \right) \\ &= (1 - \gamma_1) \left( \frac{r_1 + g}{1 + r_1 g} \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

L'intensité à mi-hauteur normalisée est donc donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{I_{\text{R,Max}} + I_{\text{R,Min}}}{2I_1} &= \frac{(1 - \gamma_1)}{2} \left( \left( \frac{r_1 + g}{1 + r_1 g} \right)^2 + \left( \frac{r_1 - g}{1 - r_1 g} \right)^2 \right), \\ &= \frac{(1 - \gamma_1)}{2} \frac{(r_1 + g)^2(1 - r_1 g)^2 + (r_1 - g)^2(1 + r_1 g)^2}{(1 + r_1 g)^2(1 - r_1 g)^2} \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

L'équation donnant la largeur de raie est donc :

$$\frac{I_3}{I_1} \left( \frac{\Gamma}{2} \right) = \frac{I_{\text{R,Max}} + I_{\text{R,Min}}}{2I_1},$$

que l'on peut réécrire grâce aux équations (D.5) et (D.9) :

$$(1 - \gamma_1) \left( 1 - \frac{1 - \left( \frac{r_1 - g}{1 - r_1 g} \right)^2}{1 + 4 \frac{r_1 g}{(1 - r_1 g)^2} \sin^2 \left( \frac{\pi \Gamma}{2 \Delta \nu_{\text{ISL}}} \right)} \right) = \frac{(1 - \gamma_1)}{2} \frac{(r_1 + g)^2(1 - r_1 g)^2 + (r_1 - g)^2(1 + r_1 g)^2}{(1 + r_1 g)^2(1 - r_1 g)^2},$$

ce qui donne :

$$\frac{1 - \left( \frac{r_1 - g}{1 - r_1 g} \right)^2}{1 + 4 \frac{r_1 g}{(1 - r_1 g)^2} \sin^2 \left( \frac{\pi \Gamma}{2 \Delta \nu_{\text{ISL}}} \right)} = 1 - \frac{(r_1 + g)^2(1 - r_1 g)^2 + (r_1 - g)^2(1 + r_1 g)^2}{2(1 + r_1 g)^2(1 - r_1 g)^2},$$

soit

$$\frac{(1 - r_1^2)(1 - g^2)}{(1 - r_1g)^2 + 4r_1g \sin^2\left(\frac{\pi\Gamma}{2\Delta\nu_{\text{ISL}}}\right)} = \frac{2(1 + r_1g)^2(1 - r_1g)^2 - (r_1 + g)^2(1 - r_1g)^2 - (r_1 - g)^2(1 + r_1g)^2}{2(1 + r_1g)^2(1 - r_1g)^2}. \quad (\text{D.10})$$

Occupons-nous du numérateur du terme de droite de l'équation. On peut le factoriser en :

$$2(1 + r_1g)^2(1 - r_1g)^2 - (r_1 + g)^2(1 - r_1g)^2 - (r_1 - g)^2(1 + r_1g)^2 = 2(1 + r_1^2g^2)(1 - r_1^2)(1 - g^2). \quad (\text{D.11})$$

Ci-dessous, la démonstration de cette factorisation :

$$\begin{aligned} & 2(1 + r_1g)^2(1 - r_1g)^2 - (r_1 + g)^2(1 - r_1g)^2 - (r_1 - g)^2(1 + r_1g)^2 \\ &= (1 + r_1g)^2[2(1 - r_1g)^2 - (r_1 - g)^2] - (r_1 + g)^2(1 - r_1g)^2 \\ &= (1 + r_1g)^2[2 - 4r_1g + 2r_1^2g^2 - r_1^2 + 2r_1g - g^2] - (r_1 + g)^2(1 - r_1g)^2 \\ &= (1 + r_1g)^2[2(1 + r_1^2g^2) + 2 - r_1^2 - 2r_1g - g^2] - (r_1 + g)^2(1 - r_1g)^2 \\ &= (1 + r_1g)^2[2(1 + r_1^2g^2) - (r_1 + g)^2] - (r_1 + g)^2(1 - r_1g)^2 \\ &= 2(1 + r_1^2g^2)(1 + r_1g)^2 - (r_1 + g)^2[(1 - r_1g)^2 + (1 + r_1g)^2] \\ &= 2(1 + r_1^2g^2)(1 + r_1g)^2 - (r_1 + g)^2[1 - 2r_1g + r_1^2g^2 + 1 + 2r_1g + r_1^2g^2] \\ &= 2(1 + r_1^2g^2)(1 + r_1g)^2 - 2(r_1 + g)^2(1 + r_1^2g^2) \\ &= 2(1 + r_1^2g^2)[(1 + r_1g)^2 - (r_1 + g)^2] \\ &= 2(1 + r_1^2g^2)[1 + 2r_1g + r_1^2g^2 - r_1^2 - 2r_1g - g^2] \\ &= 2(1 + r_1^2g^2)(1 - r_1^2)(1 - g^2). \end{aligned}$$

On remplace la factorisation (D.11) dans l'équation (D.10) précédente et on obtient :

$$\frac{(1 - r_1^2)(1 - g^2)}{(1 - r_1g)^2 + 4r_1g \sin^2\left(\frac{\pi\Gamma}{2\Delta\nu_{\text{ISL}}}\right)} = \frac{2(1 + r_1^2g^2)(1 - r_1^2)(1 - g^2)}{2(1 + r_1g)^2(1 - r_1g)^2},$$

soit

$$\frac{1}{(1 - r_1g)^2 + 4r_1g \sin^2\left(\frac{\pi\Gamma}{2\Delta\nu_{\text{ISL}}}\right)} = \frac{(1 + r_1^2g^2)}{(1 + r_1g)^2(1 - r_1g)^2},$$

on inverse tout :

$$\begin{aligned} (1 - r_1g)^2 + 4r_1g \sin^2\left(\frac{\pi\Gamma}{2\Delta\nu_{\text{ISL}}}\right) &= \frac{(1 + r_1g)^2(1 - r_1g)^2}{(1 + r_1^2g^2)}, \\ 4r_1g \sin^2\left(\frac{\pi\Gamma}{2\Delta\nu_{\text{ISL}}}\right) &= \frac{[(1 + r_1g)^2 - (1 + r_1^2g^2)](1 - r_1g)^2}{(1 + r_1^2g^2)}, \end{aligned}$$

$$4r_1g \sin^2 \left( \frac{\pi\Gamma}{2\Delta\nu_{\text{ISL}}} \right) = \frac{2r_1g(1-r_1g)^2}{(1+r_1^2g^2)},$$

Ce qui donne au final :

$$\sin \left( \frac{\pi\Gamma}{2\Delta\nu_{\text{ISL}}} \right) = \frac{(1-r_1g)}{\sqrt{2(1+r_1^2g^2)}},$$

Et donc la largeur de raie qui est donnée par :

$$\Gamma = \frac{2\Delta\nu_{\text{ISL}}}{\pi} \sin^{-1} \left( \frac{(1-r_1g)}{\sqrt{2(1+r_1^2g^2)}} \right). \quad (\text{D.12})$$

### D.2.2 Cas de la transmission

L'intensité transmise est donnée, en fonction des paramètres  $r_1$  et  $g$  par (D.6) :

$$\frac{I_7(\nu)}{I_1(\nu)} = \frac{\frac{(1-r_1^2)(1-\gamma_1)(1-r_2^2)(1-\gamma_2)\mathcal{T}_1^2}{(1-r_1g)^2}}{1 + \frac{4r_1g}{(1-r_1g)^2} \sin^2 \left( \frac{\pi\nu}{\Delta\nu_{\text{ISL}}} \right)}.$$

L'intensité transmise est minimale quand  $\nu = \Delta\nu_{\text{ISL}}/2$   $[\Delta\nu_{\text{ISL}}]$  et est maximale quand  $\nu = 0$   $[\Delta\nu_{\text{ISL}}]$ . On a alors les expressions pour l'intensité minimale et maximale transmise :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{I_{\text{T,Max}}}{I_1} = \frac{I_7(0)}{I_1} = \frac{(1-r_1^2)(1-\gamma_1)(1-r_2^2)(1-\gamma_2)\mathcal{T}_1^2}{(1-r_1g)^2} \\ \frac{I_{\text{T,Min}}}{I_1} = \frac{I_7\left(\frac{\Delta\nu_{\text{ISL}}}{2}\right)}{I_1} = \frac{(1-r_1^2)(1-\gamma_1)(1-r_2^2)(1-\gamma_2)\mathcal{T}_1^2}{(1+r_1g)^2} \end{array} \right.$$

L'intensité à mi-hauteur normalisée est alors donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{I_{\text{T,Max}} + I_{\text{T,Min}}}{2I_1} &= \frac{(1-r_1^2)(1-\gamma_1)(1-r_2^2)(1-\gamma_2)\mathcal{T}_1^2}{2} \left[ \frac{1}{(1-r_1g)^2} + \frac{1}{(1+r_1g)^2} \right] \\ &= \frac{(1-r_1^2)(1-\gamma_1)(1-r_2^2)(1-\gamma_2)\mathcal{T}_1^2}{2} \left[ \frac{(1+r_1g)^2 + (1-r_1g)^2}{(1-r_1g)^2(1+r_1g)^2} \right] \\ &= (1-r_1^2)(1-\gamma_1)(1-r_2^2)(1-\gamma_2)\mathcal{T}_1^2 \frac{(1+r_1^2g^2)}{(1-r_1g)^2(1+r_1g)^2} \end{aligned}$$

L'équation donnant la largeur de raie est donc :

$$\frac{I_7}{I_1} \left( \frac{\Gamma}{2} \right) = \frac{I_{\text{T,Max}} + I_{\text{T,Min}}}{2I_1}$$

$$\frac{\frac{(1-r_1^2)(1-\gamma_1)(1-r_2^2)(1-\gamma_2)\mathcal{T}_1^2}{(1-r_1g)^2}}{1 + \frac{4r_1g}{(1-r_1g)^2} \sin^2 \left( \frac{\pi\Gamma}{2\Delta\nu_{\text{ISL}}} \right)} = (1-r_1^2)(1-\gamma_1)(1-r_2^2)(1-\gamma_2)\mathcal{T}_1^2 \frac{(1+r_1^2g^2)}{(1-r_1g)^2(1+r_1g)^2}$$

$$\begin{aligned}
1 + \frac{4r_1g}{(1-r_1g)^2} \sin^2 \left( \frac{\pi\Gamma}{2\Delta\nu_{\text{ISL}}} \right) &= \frac{(1+r_1g)^2}{(1+r_1^2g^2)} \\
\frac{4r_1g}{(1-r_1g)^2} \sin^2 \left( \frac{\pi\Gamma}{2\Delta\nu_{\text{ISL}}} \right) &= \frac{(1+r_1g)^2 - (1+r_1^2g^2)}{(1+r_1^2g^2)} \\
\frac{4r_1g}{(1-r_1g)^2} \sin^2 \left( \frac{\pi\Gamma}{2\Delta\nu_{\text{ISL}}} \right) &= \frac{2r_1g}{(1+r_1^2g^2)} \\
\sin \left( \frac{\pi\Gamma}{2\Delta\nu_{\text{ISL}}} \right) &= \frac{(1-r_1g)}{\sqrt{2(1+r_1^2g^2)}}
\end{aligned}$$

La largeur de raie, dans le cas de la transmission est donc donnée par :

$$\Gamma = \frac{2\Delta\nu_{\text{ISL}}}{\pi} \sin^{-1} \left( \frac{(1-r_1g)}{\sqrt{2(1+r_1^2g^2)}} \right) \quad (\text{D.13})$$

On retrouve la même équation que pour la réflexion.

### D.3 Calcul du contraste en réflexion

Nous avons défini le contraste par la relation (2.13) :

$$\mathcal{C} = \frac{I_{\text{Max}} - I_{\text{Min}}}{I_{\text{Max}}}.$$

En reprenant les expressions de  $I_{\text{R,Max}}$  et  $I_{\text{R,Min}}$  des équations (D.8) et (D.7) en réflexion, on obtient la relation suivante pour la contraste :

$$\mathcal{C} = \frac{(1-\gamma_1) \left( \frac{r_1+g}{1+r_1g} \right)^2 - (1-\gamma_1) \left( \frac{r_1-g}{1-r_1g} \right)^2}{(1-\gamma_1) \left( \frac{r_1+g}{1+r_1g} \right)^2}.$$

soit

$$\mathcal{C} = \frac{(r_1+g)^2(1-r_1g)^2 - (r_1-g)^2(1+r_1g)^2}{(r_1+g)^2(1-r_1g)^2}.$$

Le numérateur peut se simplifier en :

$$(r_1+g)^2(1-r_1g)^2 - (r_1-g)^2(1+r_1g)^2 = 2r_1g(1-r_1^2)(1-g^2)$$

Démonstration de la simplification :

$$\begin{aligned}
& (r_1 + g)^2(1 - r_1g)^2 - (r_1 - g)^2(1 + r_1g)^2 \\
&= [(r_1 + g)(1 - r_1g) + (r_1 - g)(1 + r_1g)][(r_1 + g)(1 - r_1g) - (r_1 - g)(1 + r_1g)] \\
&= [r_1 - r_1^2g + g - r_1g^2 + r_1 + r_1^2g - g - r_1g^2][r_1 - r_1^2g + g - r_1g^2 - r_1 - r_1^2g + g + r_1g^2] \\
&= [2r_1 - 2r_1g^2][-2r_1^2g + g] \\
&= 4r_1g(1 - g^2)(1 - r_1^2)
\end{aligned}$$

On a donc, pour le contraste :

$$\mathcal{C} = \frac{4r_1g(1 - g^2)(1 - r_1^2)}{(r_1 + g)^2(1 - r_1g)^2}.$$

## D.4 Calcul de la composante à $f_{\text{Mod}}$ de l'intensité en sortie de la cavité

L'objectif de cette partie est de démontrer l'égalité entre les équations (2.18) et (2.19) suivante :

$$\begin{aligned}
I_{\text{Out @ } f_{\text{Mod}}} &= I_0 \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k J_{k+1} F(\nu + kf_{\text{Mod}}) \overline{F(\nu + (k+1)f_{\text{Mod}})} e^{-2i\pi f_{\text{Mod}} t} \\
&+ I_0 \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k J_{k-1} F(\nu + kf_{\text{Mod}}) \overline{F(\nu + (k-1)f_{\text{Mod}})} e^{2i\pi f_{\text{Mod}} t} \\
&= I_0 \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} 2J_k J_{k+1} [\text{Re}(a_k) \cos(2\pi f_{\text{Mod}} t) + \text{Im}(a_k) \sin(2\pi f_{\text{Mod}} t)]
\end{aligned}$$

avec

$$a_k = F(\nu + kf_{\text{Mod}}) \overline{F(\nu + (k+1)f_{\text{Mod}})} - F(\nu - (k+1)f_{\text{Mod}}) \overline{F(\nu - kf_{\text{Mod}})}.$$

Pour cela, on part de l'équation (2.18) de départ, et on la divise en 4 termes :

$$\begin{aligned}
I_{\text{Out @ } f_{\text{Mod}}} &= I_0 \cdot \sum_{k=-\infty}^{-1} J_k J_{k+1} F(\nu + kf_{\text{Mod}}) \overline{F(\nu + (k+1)f_{\text{Mod}})} e^{-2i\pi f_{\text{Mod}} t} \\
&+ I_0 \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} J_k J_{k+1} F(\nu + kf_{\text{Mod}}) \overline{F(\nu + (k+1)f_{\text{Mod}})} e^{-2i\pi f_{\text{Mod}} t} \\
&+ I_0 \cdot \sum_{k=-\infty}^{-1} J_k J_{k-1} F(\nu + kf_{\text{Mod}}) \overline{F(\nu + (k-1)f_{\text{Mod}})} e^{2i\pi f_{\text{Mod}} t} \\
&+ I_0 \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} J_k J_{k-1} F(\nu + kf_{\text{Mod}}) \overline{F(\nu + (k-1)f_{\text{Mod}})} e^{2i\pi f_{\text{Mod}} t}
\end{aligned}$$

Sachant que pour tout entier relatif  $k$ , on a la relation  $J_{-k}(\beta) = (-1)^k J_k(\beta)$ , on peut exprimer les termes de l'équation précédente en fonction de sommes sur des  $k$  uniquement positifs :

$$\begin{aligned}
I_{\text{Out @ } f_{\text{Mod}}} &= I_0 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_k (-1)^{k-1} J_{k-1} F(\nu - k f_{\text{Mod}}) \overline{F(\nu - (k-1) f_{\text{Mod}})} e^{-2i\pi f_{\text{Mod}} t} \\
&+ I_0 \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} J_k J_{k+1} F(\nu + k f_{\text{Mod}}) \overline{F(\nu + (k+1) f_{\text{Mod}})} e^{-2i\pi f_{\text{Mod}} t} \\
&+ I_0 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k J_k (-1)^{k+1} J_{k+1} F(\nu - k f_{\text{Mod}}) \overline{F(\nu - (k+1) f_{\text{Mod}})} e^{2i\pi f_{\text{Mod}} t} \\
&+ I_0 \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} J_k J_{k-1} F(\nu + k f_{\text{Mod}}) \overline{F(\nu + (k-1) f_{\text{Mod}})} e^{2i\pi f_{\text{Mod}} t}
\end{aligned}$$

Soit, en changeant d'indice les sommes pour les exprimer en fonction des  $J_k J_{k+1}$  :

$$\begin{aligned}
I_{\text{Out @ } f_{\text{Mod}}} &= -I_0 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} J_{k+1} J_k F(\nu - (k+1) f_{\text{Mod}}) \overline{F(\nu - k f_{\text{Mod}})} e^{-2i\pi f_{\text{Mod}} t} \\
&+ I_0 \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} J_k J_{k+1} F(\nu + k f_{\text{Mod}}) \overline{F(\nu + (k+1) f_{\text{Mod}})} e^{-2i\pi f_{\text{Mod}} t} \\
&- I_0 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} J_k J_{k+1} F(\nu - k f_{\text{Mod}}) \overline{F(\nu - (k+1) f_{\text{Mod}})} e^{2i\pi f_{\text{Mod}} t} \\
&+ I_0 \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} J_{k+1} J_k F(\nu + (k+1) f_{\text{Mod}}) \overline{F(\nu + k f_{\text{Mod}})} e^{2i\pi f_{\text{Mod}} t}
\end{aligned}$$

En posant le coefficient

$$a_k = F(\nu + k f_{\text{Mod}}) \overline{F(\nu + (k+1) f_{\text{Mod}})} - F(\nu - (k+1) f_{\text{Mod}}) \overline{F(\nu - k f_{\text{Mod}})},$$

on peut simplifier l'expression ci-dessus par :

$$\begin{aligned}
I_{\text{Out @ } f_{\text{Mod}}} &= I_0 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} J_{k+1} J_k a_k e^{-2i\pi f_{\text{Mod}} t} \\
&+ I_0 \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} J_{k+1} J_k \overline{a_k} e^{2i\pi f_{\text{Mod}} t}
\end{aligned}$$

Soit, en décomposant les exponentielles en somme de sinus et cosinus :

$$I_{\text{Out @ } f_{\text{Mod}}} = I_0 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} J_{k+1} J_k [(a_k + \overline{a_k}) \cos(2\pi f_{\text{Mod}} t) + (\overline{a_k} - a_k) i \sin(2\pi f_{\text{Mod}} t)]$$

On retrouve bien, au final :

$$I_{\text{Out @ } f_{\text{Mod}}} = I_0 \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} 2 J_k J_{k+1} [\text{Re}(a_k) \cos(2\pi f_{\text{Mod}} t) + \text{Im}(a_k) \sin(2\pi f_{\text{Mod}} t)]$$



## D.5 Calcul de la puissance incidente sur la photodiode en asservissement PDH, avec $\beta = 1,08$ rad

L'objectif de cette annexe est de calculer la puissance réfléchie  $P_{\text{det}}$  qui intervient dans la formule du bruit de grenaille (2.49) :

$$i_{\text{det}} = \frac{\eta e \lambda}{h c} P_{\text{det}},$$

La puissance totale incidente sur le détecteur correspond à la puissance totale en sortie de la cavité résonante, et est donnée par l'équation (2.14) :

$$P_{\text{det}} = S I_{\text{Out}} = P_0 \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_k(\beta) F(\nu + k f_{\text{Mod}}) J_p(\beta) \overline{F(\nu + p f_{\text{Mod}})} e^{2i\pi(k-p)f_{\text{Mod}}t},$$

avec  $P_0 = S I_0$ , et  $S$  l'aire effective du faisceau optique<sup>2</sup>.

La figure 2.8 de la partie 2.2.2.2 présente l'évolution de l'amplitude des fonctions de Bessel d'ordre 0 à 5 en fonction de l'amplitude de modulation  $\beta$ . Pour la modulation de phase considérée ( $\beta = 1,08$  rad), la porteuse (à  $J_0$ ) et les premières bandes latérales (à  $J_1$ ) ont des amplitudes bien supérieures aux autres bandes latérales. Nous négligerons donc par la suite les  $J_k$  avec  $k \geq 2$  dans les calculs.

D'autre part, la cavité est observée en réflexion pour un asservissement PDH. On a donc la puissance incidente sur le détecteur qui est donnée par :

$$\begin{aligned} P_{\text{det}} &= P_0 \cdot \sum_{k=-1}^{+1} \sum_{p=-1}^{+1} J_k(\beta) F_{\text{R}}(\nu + k f_{\text{Mod}}) J_p(\beta) \overline{F_{\text{R}}(\nu + p f_{\text{Mod}})} e^{2i\pi(k-p)f_{\text{Mod}}t}, \\ &= P_0 [J_0^2 |F_{\text{R}}(\nu)|^2 + J_1^2 (|F_{\text{R}}(\nu + f_{\text{Mod}})|^2 + |F_{\text{R}}(\nu - f_{\text{Mod}})|^2)] \\ &\quad + 2P_0 J_0 J_1 \cdot \text{Re} \left[ F_{\text{R}}(\nu) \overline{F_{\text{R}}(\nu + f_{\text{Mod}})} - \overline{F_{\text{R}}(\nu)} F_{\text{R}}(\nu - f_{\text{Mod}}) \right] \cos(2\pi f_{\text{Mod}}t) \\ &\quad + 2P_0 J_0 J_1 \cdot \text{Im} \left[ F_{\text{R}}(\nu) \overline{F_{\text{R}}(\nu + f_{\text{Mod}})} - \overline{F_{\text{R}}(\nu)} F_{\text{R}}(\nu - f_{\text{Mod}}) \right] \sin(2\pi f_{\text{Mod}}t) \\ &\quad - 2P_0 J_1^2 \text{Re} \left[ F_{\text{R}}(\nu + f_{\text{Mod}}) \overline{F_{\text{R}}(\nu - f_{\text{Mod}})} \right] \cos(2\pi \cdot 2f_{\text{Mod}}t) \\ &\quad + 2P_0 J_1^2 \text{Im} \left[ F_{\text{R}}(\nu + f_{\text{Mod}}) \overline{F_{\text{R}}(\nu - f_{\text{Mod}})} \right] \sin(2\pi \cdot 2f_{\text{Mod}}t) \end{aligned}$$

On reconnaît dans l'expression ci-dessus l'expression de la partie réelle et imaginaire de  $a_0$  défini par l'équation (2.22). On cherche l'expression de la puissance arrivant sur le détecteur lorsque l'asservissement est en fonctionnement, c'est à dire que nous avons les hypothèses suivantes :

---

2.  $S$  est l'aire effective du faisceau si le faisceau est spatialement plus petit que le détecteur, sinon,  $S$  représente l'aire du détecteur.

- $\nu \equiv 0$  [ $\Delta\nu_{\text{ISL}}$ ] soit  $F_R(\nu) = F_R(0)$  et  $F_R(\nu \pm f_{\text{Mod}}) = F_R(\pm f_{\text{Mod}})$
- $F_R(f_{\text{Mod}}) \simeq F_R(-f_{\text{Mod}}) \simeq -1$  car la modulation se fait en dehors de la largeur de raie, et que la finesse des cavités considérées est supérieure à 10.
- $|F_R(\pm f_{\text{Mod}})|^2 \simeq 1$
- $|F_R(0)|^2 = \frac{I_{R,\text{Min}}}{I_0} = (1 - \gamma_1) \left( \frac{r_1 - g}{1 - r_1 g} \right)^2$  d'après l'équation (D.7)
- $a_0 = F_R(\nu) \overline{F_R(\nu + f_{\text{Mod}})} - \overline{F_R(\nu)} F_R(\nu - f_{\text{Mod}}) \simeq -2i\text{Im}[F_R(\nu)] = 0$  à la résonance, d'après (2.36) et (2.37)

La puissance incidente sur le détecteur est donc donnée par :

$$P_{\text{det}} = P_0 \left[ J_0^2 \frac{I_{R,\text{Min}}}{I_0} + 2J_1^2 \right] - 2P_0 J_1^2 \cos(2\pi \cdot 2f_{\text{Mod}}t)$$

Le terme de droite de l'équation est la somme d'un offset constant et d'un terme qui oscille à la fréquence  $2f_{\text{Mod}}$ . Comme la moyenne temporelle de l'oscillation est nulle, nous considérerons que ce second terme est nul en première approximation.

D'autre part, comme la modulation est faite avec une amplitude de  $\beta = 1,08$  rad, on peut écrire que  $J_0(1,08)^2 \simeq J_1(1,08) \simeq \frac{1}{2}$ , et donc au final que :

$$P_{\text{det}} = \frac{P_0}{2} \left[ \frac{I_{R,\text{Min}}}{I_0} + 1 \right] \quad (\text{D.14})$$

Au couplage critique ( $r_1 = g$  soit  $I_{R,\text{Min}} = 0$ ), sans faire d'approximations sur les pertes, la puissance réfléchie est donnée par :

$$P_{\text{det}} = \frac{P_0}{2}$$



# Mesure du coefficient de réflexion d'un miroir

Cette annexe détaille le procédé expérimental de mesure du coefficient de réflexion du coupleur (miroir) d'entrée de la cavité.

La figure E.1 présente le montage réalité pour la mesure.

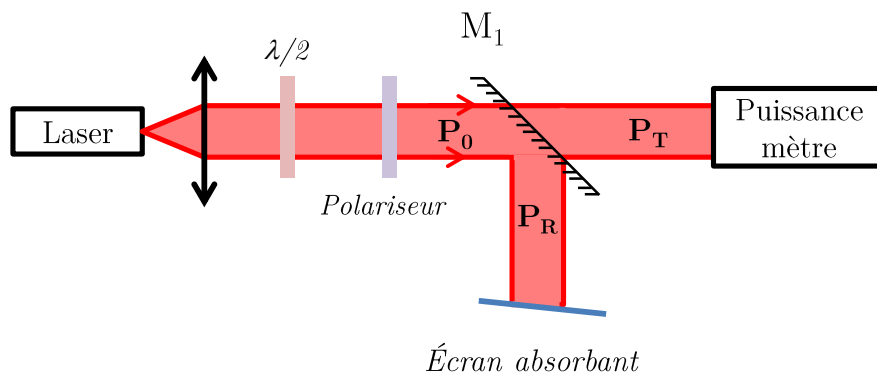


FIGURE E.1 – Montage utilisé pour la mesure du coefficient de transmission et de réflexion du miroir  $M_1$ . L'écran absorbant est penché de manière à ce qu'aucune réflexion parasite ne vienne entacher la mesure de puissance

Pour une même puissance Laser, on mesure, avec le même puissance-mètre, la puissance incidente  $P_0$ , la puissance transmise  $P_T$  et la puissance réfléchie  $P_R$  en ayant pris soin de déplacer l'écran absorbant. Le puissance-mètre est aligné de manière à maximiser le signal obtenu. On recommence ensuite ces mesures pour différentes puissances laser incidentes, sans rien toucher à l'alignement entre le laser et le miroir. On trace ensuite les évolutions de la puissance réfléchie

et de la puissance transmise en fonction de la puissance incidente sur le laser. On obtient les courbes présentées en figure E.2

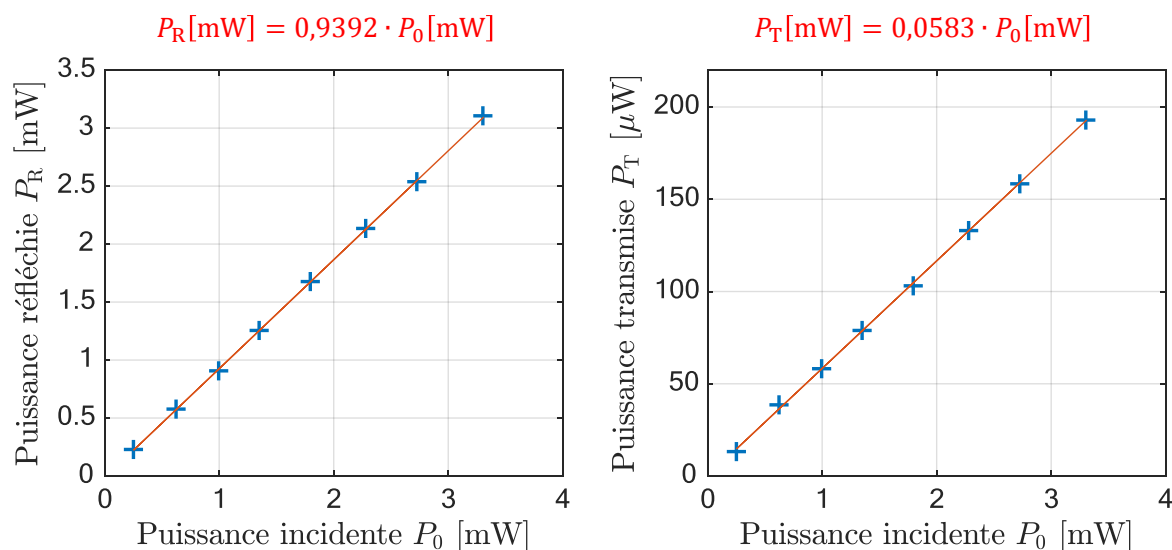


FIGURE E.2 – Résultat des mesures de puissances réfléchies (à gauche) et transmise (à droite), en fonction de la puissance incidente.

La pente de ces courbes nous donne le coefficient de réflexion (ou de transmission) du miroir  $M_1$  en intensité, multipliées par les pertes du miroir qui sont prises en comptes dans la mesure. C'est-à-dire que nous avons :  $r_1^2(1 - \gamma_1) = 0,9392$ ,  $t_1^2(1 - \gamma_1) = 0,0583$ , et donc, comme  $r_1^2 + t_1^2 = 1$  :

- $r_1^2(1 - \gamma_1) + t_1^2(1 - \gamma_1) = 1 - \gamma_1$  soit :  $\gamma_1 = 0,0025$ .
- $r_1^2 = 0,9416$
- $t_1^2 = 0,0584$

---

## Détails des calculs du chapitre 4

---

### F.1 Calcul de la matrice M

On repart de l'équation différentielle de départ (4.3) :

$$|\varepsilon(t)\rangle + \frac{nL}{c} \frac{d}{dt} |\varepsilon(t)\rangle = \begin{pmatrix} e^{-2i\pi\nu\left(\frac{nL}{c} - \frac{2A\dot{\theta}}{c^2}\right)} \cdot e^{\frac{-\gamma_{\text{cav}}}{2}\left(\frac{nL}{c} - \frac{2A\dot{\theta}}{c^2}\right)} & \rho e^{i\varphi_{\text{CCW}}} \\ \rho e^{i\varphi_{\text{CW}}} & e^{-2i\pi\nu\left(\frac{nL}{c} + \frac{2A\dot{\theta}}{c^2}\right)} \cdot e^{\frac{-\gamma_{\text{cav}}}{2}\left(\frac{nL}{c} + \frac{2A\dot{\theta}}{c^2}\right)} \end{pmatrix} |\varepsilon(t)\rangle.$$

On peut réécrire les exponentielles imaginaires de la matrice :

$$-2i\pi\nu\left(\frac{nL}{c} \pm \frac{2A\dot{\theta}}{c^2}\right) = -2i\pi\nu\frac{nL}{c} \mp i\pi\frac{nL}{c}\frac{4A\dot{\theta}}{L\lambda} = -2i\pi\nu\frac{nL}{c} \mp i\pi\frac{nL}{c}K_S\dot{\theta}. \quad (\text{F.1})$$

avec :  $K_S = \frac{4A}{\lambda L}$  le facteur d'échelle. L'équation différentielle deviens alors :

$$\frac{d|\varepsilon(t)\rangle}{dt} = \frac{c}{nL} \begin{pmatrix} e^{-2i\pi\nu\frac{nL}{c}} \cdot e^{i\pi\frac{nL}{c}K_S\dot{\theta}} \cdot e^{-\gamma_{\text{cav}}\frac{nL}{2c}} - 1 & \rho e^{i\varphi_{\text{CCW}}} \\ \rho e^{i\varphi_{\text{CW}}} & e^{-2i\pi\nu\frac{nL}{c}} \cdot e^{-i\pi\frac{nL}{c}K_S\dot{\theta}} \cdot e^{-\gamma_{\text{cav}}\frac{nL}{2c}} - 1 \end{pmatrix} |\varepsilon(t)\rangle,$$

on a négligé les termes  $\frac{2A\dot{\theta}}{c^2}$  dans les exponentielles réelles car bien inférieur à  $\frac{nL}{c}$ . D'autre part, on a :

- $2i\pi\nu\frac{nL}{c} \ll 1$
- $i\pi\frac{nL}{c}K_S\dot{\theta} \ll 1$

— et  $\gamma_{\text{cav}} \frac{nL}{2c} \ll 1$

alors on peut écrire qu'au premier ordre :

$$e^{-2i\pi\nu \frac{nL}{c}} \cdot e^{\pm i\pi \frac{nL}{c} K_S \dot{\theta}} \cdot e^{-\gamma_{\text{cav}} \frac{nL}{2c}} \simeq 1 - 2i\pi\nu \frac{nL}{c} \pm i\pi \frac{nL}{c} K_S \dot{\theta} - \gamma_{\text{cav}} \frac{nL}{2c},$$

et donc que :

$$\frac{d|\varepsilon(t)\rangle}{dt} = \frac{c}{nL} \begin{pmatrix} -2i\pi\nu \frac{nL}{c} + i\pi \frac{nL}{c} K_S \dot{\theta} - \gamma_{\text{cav}} \frac{nL}{2c} & \rho e^{i\varphi_{\text{CCW}}} \\ \rho e^{i\varphi_{\text{CW}}} & -2i\pi\nu \frac{nL}{c} - i\pi \frac{nL}{c} K_S \dot{\theta} - \gamma_{\text{cav}} \frac{nL}{2c} \end{pmatrix} |\varepsilon(t)\rangle,$$

soit :

$$i \frac{d|\varepsilon(t)\rangle}{dt} = \begin{pmatrix} 2\pi\nu - \pi K_S \dot{\theta} - i \frac{\gamma_{\text{cav}}}{2} & i \rho e^{i\varphi_{\text{CCW}}} \frac{c}{nL} \\ i \rho e^{i\varphi_{\text{CW}}} \frac{c}{nL} & 2\pi\nu + \pi K_S \dot{\theta} - i \frac{\gamma_{\text{cav}}}{2} \end{pmatrix} |\varepsilon(t)\rangle.$$

En posant les variables  $\delta$  et  $\zeta$  telles que

$$\delta = \frac{\varphi_{\text{CCW}} - \varphi_{\text{CW}}}{2} \quad \text{et} \quad \zeta = -\frac{\varphi_{\text{CCW}} + \varphi_{\text{CW}}}{2} \quad (\text{F.2})$$

on obtient l'équation différentielle (4.4)

$$i \frac{d}{dt} |\varepsilon(t)\rangle = M |\varepsilon(t)\rangle$$

avec

$$M = \begin{pmatrix} 2\pi\nu - \pi K_S \dot{\theta} - i \frac{\gamma_{\text{cav}}}{2} & i \rho e^{i\delta} e^{-i\zeta} \frac{c}{nL} \\ i \rho e^{-i\delta} e^{-i\zeta} \frac{c}{nL} & 2\pi\nu + \pi K_S \dot{\theta} - i \frac{\gamma_{\text{cav}}}{2} \end{pmatrix}$$

## F.2 Valeurs propres de la matrice M

Les valeurs propres  $\omega$  de M sont solutions de l'équation :

$$\det(M - \omega Id) = 0 \quad (\text{F.3})$$

soit

$$(2\pi\nu - \pi K_S \dot{\theta} - i \frac{\gamma_{\text{cav}}}{2} - \omega)(2\pi\nu + \pi K_S \dot{\theta} - i \frac{\gamma_{\text{cav}}}{2} - \omega) + \left(\frac{c}{nL} \rho\right)^2 e^{-2i\zeta} = 0 \quad (\text{F.4})$$

d'où

$$(2\pi\nu - i \frac{\gamma_{\text{cav}}}{2} - \omega)^2 = (\pi K_S \dot{\theta})^2 - \left(\frac{c}{nL} \rho\right)^2 e^{-2i\zeta} \quad (\text{F.5})$$

En posant  $\dot{\theta}_L = \frac{c}{\pi K_S n L} \rho$  et en supposant que  $\dot{\theta} \neq \dot{\theta}_L e^{-i\zeta}$ , on a alors deux valeurs propres distinctes qui sont données par :

$$\omega_{\pm} = 2\pi\nu - i\frac{\gamma_{\text{cav}}}{2} \pm \pi K_S \sqrt{\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_L^2 e^{-2i\zeta}} \quad (\text{F.6})$$

### F.3 Vecteurs propres associés

On note  $|\varepsilon_+\rangle = \begin{pmatrix} a_+ \\ b_+ \end{pmatrix}$  le vecteur propre associé à la valeur  $\omega_+$ . Dans ce cas, le vecteur propre est solution de l'équation :

$$M |\varepsilon_+\rangle = \omega_+ |\varepsilon_+\rangle \quad (\text{F.7})$$

soit

$$\begin{pmatrix} 2\pi\nu - \pi K_S \dot{\theta} - i\frac{\gamma_{\text{cav}}}{2} & i\rho e^{i\delta} e^{-i\zeta} \frac{c}{nL} \\ i\rho e^{-i\delta} e^{-i\zeta} \frac{c}{nL} & 2\pi\nu + \pi K_S \dot{\theta} - i\frac{\gamma_{\text{cav}}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_+ \\ b_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_+ a_+ \\ \omega_+ b_+ \end{pmatrix} \quad (\text{F.8})$$

Les deux équations données par ce système sont équivalentes, et permettent de trouver un lien entre les deux coordonnées  $a_+$  et  $b_+$  du vecteur  $\varepsilon_+$  qui est :

$$\frac{b_+}{a_+} = \frac{\dot{\theta} + \sqrt{\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_L^2 e^{-2i\zeta}}}{i\dot{\theta}_L e^{i(\delta-\zeta)}} = \chi \quad (\text{F.9})$$

Si on normalise le vecteur, on a de plus la relation :

$$|a_+|^2 + |b_+|^2 = 1 \quad (\text{F.10})$$

ce qui donne les coordonnées du vecteur :

$$|\varepsilon_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|\chi|^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \chi \end{pmatrix} \quad (\text{F.11})$$

De la même manière, on note  $|\varepsilon_-\rangle = \begin{pmatrix} a_- \\ b_- \end{pmatrix}$  le vecteur propre associé à la valeur  $\omega_-$ . Dans ce cas, le vecteur propre est solution de l'équation :

$$M |\varepsilon_-\rangle = \omega_- |\varepsilon_-\rangle \quad (\text{F.12})$$

ce qui donne une relation entre les coordonnées  $a_-$  et  $b_-$  :

$$\frac{a_-}{b_-} = \frac{\dot{\theta} + \sqrt{\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_L^2 e^{-2i\zeta}}}{-i\dot{\theta}_L e^{-i(\delta+\zeta)}} = -\chi e^{2i\delta}. \quad (\text{F.13})$$



Si on normalise le vecteur, on a en plus la relation :

$$|a_-|^2 + |b_-|^2 = 1 \quad (\text{F.14})$$

qui fixe les coordonnées du vecteur à :

$$|\varepsilon_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|\chi|^2}} \begin{pmatrix} -\chi e^{-2i\delta} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{F.15})$$

## F.4 Calcul des conditions initiales A et B

Les conditions initiales A et B sont solutions de l'équation :

$$|\varepsilon(t=0)\rangle = A|\varepsilon_+\rangle + B|\varepsilon_-\rangle = t_1 E_0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (\text{F.16})$$

On a alors les deux systèmes d'équations :

$$\begin{cases} A \cdot \frac{1}{\sqrt{1+|\chi|^2}} - B \cdot \frac{\chi e^{-2i\delta}}{\sqrt{1+|\chi|^2}} = t_1 E_0 x \\ A \cdot \frac{\chi}{\sqrt{1+|\chi|^2}} + B \cdot \frac{1}{\sqrt{1+|\chi|^2}} = t_1 E_0 y \end{cases} \quad (\text{F.17})$$

qui se simplifient en :

$$\begin{cases} A - B\chi e^{-2i\delta} = t_1 E_0 x \sqrt{1+|\chi|^2} \\ A\chi + B = t_1 E_0 y \sqrt{1+|\chi|^2} \end{cases} \quad (\text{F.18})$$

Deux combinaisons linéaires de ces deux équations permettent d'isoler les paramètres A et B et on obtient :

$$\begin{cases} A = \frac{t_1 E_0 \sqrt{1+|\chi|^2}}{1+\chi^2 e^{-2i\delta}} (x + y\chi e^{-2i\delta}) \\ B = \frac{t_1 E_0 \sqrt{1+|\chi|^2}}{1+\chi^2 e^{-2i\delta}} (y - \chi x) \end{cases} \quad (\text{F.19})$$

---

# Annexe du chapitre 5

---

## G.1 Fréquence de coupure d'un filtre d'ordre deux composé de deux filtres d'ordre 1

### G.1.1 Filtre passe-bas d'ordre 1 de la détection synchrone numérique

Les filtres de démodulation d'ordre deux que nous utilisons sont mis en œuvre numériquement sur l'appareil de détection synchrone numérique (Zurich Instruments, UHF-LI). La spécification de cet instrument indique que les filtres de démodulation sont des filtres discrets exponentiels à moyenne glissante. On définit :

- $T$  la période d'échantillonnage de l'appareil,
- $e[n]$  le signal d'entrée échantillonné sur le filtre passe-bas d'ordre 1.  $n$  représente le  $n^{\text{ième}}$  échantillon pris au temps  $t = n \cdot T$ ,
- $s[n]$  le signal de sortie échantillonné du filtre passe bas d'ordre 1,
- $\tau$  la constante de temps du filtre passe bas d'ordre 1.

La spécification de l'appareil indique que le signal de sortie discret  $s[n]$  est lié au signal d'entrée discret  $e[n]$  par la relation :

$$s[n] = e^{-T/\tau} s[n-1] + (1 - e^{-T/\tau})e[n]. \quad (\text{G.1})$$

Dans le domaine fréquentiel, la fonction de transfert du filtre passe-bas discret peut être approchée par la formule<sup>1</sup> :

$$H(\omega) = \frac{s(\omega)}{e(\omega)} = \frac{1}{1 + i\omega\tau}, \quad (\text{G.2})$$

---

1. Voir la fiche des spécifications de la Zurich Instruments UHF-LI

et c'est pourquoi on parle souvent de filtre RC discret pour désigner ce genre de filtre passe-bas numérique. La fréquence de coupure du filtre passe-bas d'ordre 1, que l'on note  $f_0$  est donc donnée par :  $f_0 = \frac{1}{2\pi\tau} = \frac{\omega_0}{2\pi}$ .

### G.1.2 Filtre passe-bas d'ordre k et fréquence de coupure

L'appareil de détection synchrone permet d'implémenter des filtres passe-bas de démodulation d'ordre 1 à 6. Ces filtres sont en fait la mise en série de 1 à 6 filtres passe-bas d'ordre 1. Si on note  $k$  l'ordre du filtre, et  $\omega_0$  sa pulsation de coupure, alors sa fonction de transfert est donnée par :

$$H_k(\omega) = \frac{1}{\left(1 + i\frac{\omega}{\omega_0}\right)^k}. \quad (\text{G.3})$$

Le module de cette fonction de transfert d'ordre  $k$  est donné par :

$$|H_k(\omega)| = \frac{1}{\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right)^k}. \quad (\text{G.4})$$

La pulsation de coupure  $\omega_k$  d'un tel filtre est telle que :

$$|H_k(\omega_k)| = \frac{|H_k(\omega_k)|_{\max}}{\sqrt{2}} \quad (\text{G.5})$$

Dans notre cas, on a  $|H_k(\omega_k)|_{\max} = 1$  et donc :

$$\frac{1}{\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_k}{\omega_0}\right)^2}\right)^k} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{G.6})$$

Soit :

$$\left(1 + \left(\frac{\omega_k}{\omega_0}\right)^2\right)^k = 2 \quad (\text{G.7})$$

et donc :

$$\omega_k = \omega_0 \sqrt{2^{1/k} - 1} \quad (\text{G.8})$$

### G.1.3 Fonction de transfert du filtre d'ordre 2

Pour démoduler le signal de la photodiode, nous utilisons un filtre passe-bas d'ordre 2 de fréquence de coupure  $f_2$ . La fonction de transfert de ce filtre est alors donnée par :

$$H_2(\omega) = \frac{1}{\left(1 + i\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}. \quad (\text{G.9})$$

avec :

$$\omega_0 = \frac{2\pi f_2}{\sqrt{\sqrt{2} - 1}}. \quad (\text{G.10})$$



---

# Bibliographie

---

- [1] S. Ezekiel and S. Balsamo, “Passive ring resonator laser gyroscope,” *Applied Physics Letters*, vol. 30, pp. 478–480, 1977.
- [2] G. A. Sanders, M. Prentiss, and S. Ezekiel, “Passive ring resonator method for sensitive inertial rotation measurements in geophysics and relativity,” *Optics Letters*, vol. 6, pp. 569–571, 1981.
- [3] G. Sanders, L. K. Strandjord, J. Wu, W. Williams, M. Smiciklas, M. Salit, C. Narayanan, E. Benser, and T. Qiu, “Improvements of compact resonator fiber optic gyroscopes,” in *2017 DGON Inertial Sensors and Systems (ISS)*, pp. 1–12, 2017.
- [4] G. A. Sanders, L. K. Strandjord, J. Wu, W. Williams, M. Smiciklas, M. Salit, C. Narayanan, and T. Qiu, “Development of compact resonator fiber optic gyroscopes,” in *2017 IEEE International Symposium on Inertial Sensors and Systems (INERTIAL)*, pp. 168–170, 2017.
- [5] T. Qiu, J. Wu, L. K. Strandjord, and G. A. Sanders, “Performance of resonator fiber optic gyroscope using external-cavity laser stabilization and optical filtering,” in *OFS2014 23rd International Conference on Optical Fiber Sensors*, pp. 91570B–91570B, International Society for Optics and Photonics, 2014.
- [6] W. Liang, V. S. Ilchenko, A. A. Savchenkov, E. Dale, D. Eliyahu, A. B. Matsko, and L. Maleki, “Resonant microphotonic gyroscope,” *Optica*, vol. 4, pp. 114–117, 2017.
- [7] H. Ma, J. Zhang, L. Wang, Y. Lu, D. Ying, and Z. Jin, “Resonant micro-optic gyro using a short and high-finesse fiber ring resonator,” *Optics Letters*, vol. 40, pp. 5862–5865, 2015.
- [8] H. Jiao, L. Feng, J. Wang, K. Wang, and Z. Yang, “Transmissive single-beam-splitter resonator optic gyro based on a hollow-core photonic-crystal fiber,” *Optics Letters*, vol. 42, pp. 3016–3019, 2017.
- [9] H. Jiao, L. Feng, K. Wang, N. Liu, and Z. Yang, “Analysis of polarization noise in transmissive single-beam-splitter resonator optic gyro based on hollow-core photonic-crystal fiber,” *Optics Express*, vol. 25, pp. 27806–27817, 2017.

- [10] P. G. Savage, *Strapdown analytics*, vol. 2. Strapdown Associates Maple Plain, MN, 2000.
- [11] R. M. Rogers, *Applied mathematics in integrated navigation systems*, vol. 1. Aiaa, 2003.
- [12] H. C. Lefèvre, *The fiber-optic gyroscope*. Artech house, 2014.
- [13] W. W. Chow, J. Gea-Banacloche, L. M. Pedrotti, V. E. Sanders, W. Schleich, and M. O. Scully, “The ring laser gyro,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 57, pp. 61–104, 1985.
- [14] B. R. Johnson, E. Cabuz, H. B. French, and R. Supino, “Development of a mems gyroscope for northfinding applications,” in *IEEE/ION Position, Location and Navigation Symposium*, pp. 168–170, 2010.
- [15] “<https://www.siliconsensing.com/media/30885/crh02-01-0100-132-rev-1.pdf>.”
- [16] G. Remi, I. Dutta, D. Savoie, B. Fang, C. L. Alzar Garrido, C. Guerlin, M. Meunier, T. Leveque, B. Venon, M. Lours, and A. Landragin, “Gyromètre à atomes froids de grande sensibilité,” *Revue Française de Métrologie*, vol. 2016-1, 2016.
- [17] D. Savoie, *Fonctionnements continu et entrelacé d’un gyromètre à atomes froids et amélioration de sa stabilité*. PhD thesis, Ecole doctorale Physique en Île-de-France, 2017.
- [18] F. Aronowitz, “The laser gyro,” *Laser applications*, vol. 1, pp. 133–200, 1971.
- [19] D. F. ELWELL, “An attitude reference system with electrically suspended gyros,” *Navigation*, vol. 20, no. 4, pp. 321–328, 1973.
- [20] V. G. Peshekhonov, “Gyroscopic navigation systems : Current status and prospects,” *Gyroscopy and Navigation*, vol. 2, p. 111, 2011.
- [21] G. Sagnac, “L’ether lumineux démontré par l’effet du vent relatif d’ether dans un interferometre en rotation uniforme,” *C. R. Acad. Sci.*, vol. 157, pp. 708–710, 1913.
- [22] G. Sagnac, “Sur la preuve de la réalité de l’éther lumineux par l’expérience de l’interférographe tournant,” *Comptes Rendus*, vol. 157, pp. 1410–1413, 1913.
- [23] A. Einstein, “Zur Elektrodynamik bewegter Körper,” *Annalen der Physik*, vol. 322, pp. 891–921, 1905.
- [24] G. B. Malykin, “The Sagnac effect : correct and incorrect explanations,” *Physics-Uspekhi*, vol. 43, p. 1229, 2000.
- [25] F. Riehle, T. Kisters, A. Witte, J. Helmcke, and C. J. Bordé, “Optical ramsey spectroscopy in a rotating frame : Sagnac effect in a matter-wave interferometer,” *Physical Review Letters*, vol. 67, pp. 177–180, 1991.
- [26] A. Lenef, T. D. Hammond, E. T. Smith, M. S. Chapman, R. A. Rubenstein, and D. E. Pritchard, “Rotation sensing with an atom interferometer,” *Physical Review Letters*, vol. 78, pp. 760–763, 1997.
- [27] A. Sommerfeld, *Optics*. Lectures on theoretical physics, Academic Press, 1954.

- [28] F. Harress, *Die Geschwindigkeit des Lichtes in bewegten Körpern, Inaugural-Dissertation.* Buchdruckerei G. Richters, 1912.
- [29] S. Schwartz, *Gyrolaser à état solide. Application des lasers à atomes à la gyrométrie.* Thèse, École Polytechnique, 2006.
- [30] J. C. Hafele and R. E. Keating, “Around-the-world atomic clocks : Predicted relativistic time gains,” *Science*, vol. 177, pp. 166–168, 1972.
- [31] J. C. Hafele and R. E. Keating, “Around-the-world atomic clocks : Observed relativistic time gains,” *Science*, vol. 177, pp. 168–170, 1972.
- [32] V. Vali and R. Shorthill, “Fiber ring interferometer,” *Applied Optics*, vol. 15, pp. 1099–1100, 1976.
- [33] H. Lefèvre, “Comprendre et apprécier le gyrofibre : le gyro aux performances ultimes?,” *Photoniques*, pp. 40–43, 2016.
- [34] G. A. Sanders, S. J. Sanders, L. K. Strandjord, T. Qiu, J. Wu, M. Smiciklas, D. Mead, S. Mosor, A. Arrizon, W. Ho, and M. Salit, “Fiber optic gyro development at honeywell,” *SPIE Proceedings*, vol. 9852, pp. 07–1, 07–14, 2016.
- [35] P. B. Ruffin, C. M. Lofts, C. C. Sung, and J. L. Page, “Reduction of nonreciprocity noise in wound fiber optic interferometers,” *Optical Engineering*, vol. 33, pp. 33 – 33 – 5, 1994.
- [36] W. M. Macek and D. Davis Jr, “Rotation rate sensing with traveling-wave ring lasers,” *Applied Physics Letters*, vol. 2, pp. 67–68, 1963.
- [37] F. Bretenaker and N. Treps, *Le laser : 50 ans de découvertes.* EDP Sciences, 2012.
- [38] É. Gourgoulhon, *Special relativity in general frames.* Springer, 2016.
- [39] J.-C. Beugnot, *La diffusion Brillouin dans les fibres optiques microstructurées.* PhD thesis, Université de Franche-Comté, 2007.
- [40] S. Schwartz, F. Goldfarb, and F. Bretenaker, “Some considerations on slow- and fast-light gyros,” *Optical Engineering*, vol. 53, pp. 53(1) – 53 (4), 2014.
- [41] R. F. Cregan, B. J. Mangan, J. C. Knight, T. A. Birks, P. S. J. Russell, P. J. Roberts, and D. C. Allan, “Single-mode photonic band gap guidance of light in air,” *Science*, vol. 285, pp. 1537–1539, 1999.
- [42] G. A. Sanders, L. K. Strandjord, and T. Qiu, “Hollow core fiber optic ring resonator for rotation sensing,” in *Optical Fiber Sensors*, p. ME6, Optical Society of America, 2006.
- [43] H. A. Haus, *Waves and fields in optoelectronics.* Prentice-Hall, 1984.
- [44] L. F. Stokes, M. Chodorow, and H. J. Shaw, “All-single-mode fiber resonator,” *Optics Letters*, vol. 7, pp. 288–290, 1982.
- [45] J. Helmcke, S. A. Lee, and J. L. Hall, “Dye laser spectrometer for ultrahigh spectral resolution : design and performance,” *Applied Optics*, vol. 21, pp. 1686–1694, 1982.



- [46] T. Day, E. K. Gustafson, and R. L. Byer, "Sub-Hertz relative frequency stabilization of two-diode laser-pumped Nd :YAG lasers locked to a Fabry-Perot interferometer," *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 28, pp. 1106–1117, 1992.
- [47] T. Hansch and B. Couillaud, "Laser frequency stabilization by polarization spectroscopy of a reflecting reference cavity," *Optics Communications*, vol. 35, pp. 441 – 444, 1980.
- [48] G. C. Bjorklund, M. D. Levenson, W. Lenth, and C. Ortiz, "Frequency modulation (fm) spectroscopy," *Applied Physics B*, vol. 32, pp. 145–152, 1983.
- [49] E. D. Black, "An introduction to pound–drever–hall laser frequency stabilization," *American Journal of Physics*, vol. 69, pp. 79–87, 2001.
- [50] X. Jin, Y. Lin, Y. Lu, H. Ma, and Z. Jin, "Short fiber resonant optic gyroscope using the high-frequency pound&#x2013;drever&#x2013;hall technique," *Appl. Opt.*, vol. 57, pp. 5789–5793, Jul 2018.
- [51] R. Meyer, S. Ezekiel, D. W. Stowe, and V. Tekippe, "Passive fiber-optic ring resonator for rotation sensing," *Optics Letters*, vol. 8, pp. 644–646, 1983.
- [52] K. Hotate, K. Takiguchi, and A. Hirose, "Adjustment-free method to eliminate the noise induced by the backscattering in an optical passive ring-resonator gyro," *IEEE Photonics Technology Letters*, vol. 2, pp. 75–77, 1990.
- [53] H. Ma, X. Zhang, Z. Jin, and C. Ding, "Waveguide-type optical passive ring resonator gyro using phase modulation spectroscopy technique," *Optical Engineering*, vol. 45(8), 2006.
- [54] H. Ma, Z. He, and K. Hotate, "Sensitivity improvement of waveguide-type optical passive ring resonator gyroscope by carrier suppression," *SPIE Proceedings*, vol. 7503, pp. 7503(1) – 7503(4), 2009.
- [55] L. Feng, M. Lei, H. Liu, Y. Zhi, and J. Wang, "Suppression of backreflection noise in a resonator integrated optic gyro by hybrid phase-modulation technology," *Applied Optics*, vol. 52, pp. 1668–1675, 2013.
- [56] R. V. Pound, "Electronic frequency stabilization of microwave oscillators," *Review of Scientific Instruments*, vol. 17, pp. 490–505, 1946.
- [57] R. W. P. Drever, J. L. Hall, F. V. Kowalski, J. Hough, G. M. Ford, A. J. Munley, and H. Ward, "Laser phase and frequency stabilization using an optical resonator," *Applied Physics B*, vol. 31, pp. 97–105, 1983.
- [58] J. L. Hall, L. Hollberg, T. Baer, and H. G. Robinson, "Optical heterodyne saturation spectroscopy," *Applied Physics Letters*, vol. 39, pp. 680–682, 1981.
- [59] O. Mor and A. Arie, "Performance analysis of drever-hall laser frequency stabilization using a proportional+integral servo," *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 33, pp. 532–540, 1997.

- [60] G. Feugnet, A. Ravaille, S. Schwartz, and F. Bretenaker, "Analysis of the design of a passive resonant miniature optical gyroscope based on integrated optics technologies," *Optical Engineering*, vol. 56, pp. 56(1) – 56(10), 2017.
- [61] K. Iwatsuki, K. Hotate, and M. Higashiguchi, "Kerr effect in an optical passive ring-resonator gyro," *Journal of Lightwave Technology*, vol. 4, pp. 645–651, 1986.
- [62] K. Takiguchi and K. Hotate, "Partially digital-feedback scheme and evaluation of optical kerr-effect induced bias in optical passive ring-resonator gyro," *IEEE Photonics Technology Letters*, vol. 3, pp. 679–681, 1991.
- [63] X. Li, J. Zhang, H. Ma, and Z. Jin, "Test and analysis of the optical kerr-effect in resonant micro-optic gyros," *IEEE Photonics Journal*, vol. 6, pp. 1–7, 2014.
- [64] G. A. Sanders, L. K. Strandjord, J. Wu, and T. Qiu, "Low noise resonator fiber optic gyro," Oct.28 2014. US Patent 8,873,063.
- [65] H. Ma, Z. He, and K. Hotate, "Reduction of backscattering induced noise by carrier suppression in waveguide-type optical ring resonator gyro," *Journal of Lightwave Technology*, vol. 29, pp. 85–90, 2011.
- [66] S. Schwartz, G. Feugnet, and F. Bretenaker, "Optical passive resonator gyro with three beams," Oct. 31 2014. US Patent 9,803,981.
- [67] K. Iwatsuki, K. Hotate, and M. Higashiguchi, "Eigenstate of polarization in a fiber ring resonator and its effect in an optical passive ring-resonator gyro," *Applied Optics*, vol. 25, pp. 2606–2612, 1986.
- [68] G. A. Sanders, R. B. Smith, and G. F. Rouse, "Novel polarization-rotating fiber resonator for rotation sensing applications," *SPIE Proceedings*, vol. 1169, pp. 373–381, 1989.
- [69] X. Wang, Z. He, and K. Hotate, "Reduction of polarization-fluctuation induced drift in resonator fiber optic gyro by a resonator with twin 90° polarization-axis rotated splices," *Optics Express*, vol. 18, pp. 1677–1683, 2010.
- [70] H. Ma, X. Lu, L. Yao, X. Yu, and Z. Jin, "Full investigation of the resonant frequency servo loop for resonator fiber-optic gyro," *Applied Optics*, vol. 51, pp. 5178–5185, 2012.
- [71] X. Yu, H. Ma, and Z. Jin, "Improving thermal stability of a resonator fiber optic gyro employing a polarizing resonator," *Optics Express*, vol. 21, pp. 358–369, 2013.
- [72] H. Shen, L. Li, J. Bi, J. Wang, and L. Chen, "Systematic and quantitative analysis of residual amplitude modulation in pound-drever-hall frequency stabilization," *Physical Review A*, vol. 92, p. 063809, 2015.
- [73] N. C. Wong and J. L. Hall, "Servo control of amplitude modulation in frequency-modulation spectroscopy : demonstration of shot-noise-limited detection," *Journal of the Optical Society of America B*, vol. 2, pp. 1527–1533, 1985.

- [74] Z. Tai, L. Yan, Y. Zhang, X. Zhang, W. Guo, S. Zhang, and H. Jiang, “Electro-optic modulator with ultra-low residual amplitude modulation for frequency modulation and laser stabilization,” *Optics Letters*, vol. 41, pp. 5584–5587, 2016.
- [75] X. Wang, Z. He, and K. Hotate, “Resonator fiber optic gyro with bipolar digital serrodyne scheme using a field-programmable gate array-based digital processor,” *Japanese Journal of Applied Physics*, vol. 50, p. 042501, 2011.
- [76] Z. Jin, X. Yu, and H. Ma, “Resonator fiber optic gyro employing a semiconductor laser,” *Applied Optics*, vol. 51, pp. 2856–2864, 2012.
- [77] L. Wang, Y. Yan, H. Ma, and Z. Jin, “Resonant fiber optic gyro based on a sinusoidal wave modulation and square wave demodulation technique,” *Applied Optics*, vol. 55, pp. 3274–3278, 2016.
- [78] J. R. Haavisto, “Thin-film waveguides for inertial sensors,” *SPIE Proceedings*, vol. 0412, pp. 0412 – 0412 – 8, 1983.
- [79] I. Fsaifes, G. Feugnet, A. Ravaille, B. Debord, F. Gérôme, A. Baz, G. Humbert, F. Benabid, S. Schwartz, and F. Bretenaker, “A test resonator for kagome hollow-core photonic crystal fibers for resonant rotation sensing,” *Optics Communications*, vol. 383, pp. 485 – 490, 2017.
- [80] B. Debord, *Génération et micro-confinement de plasmas microondes dans des fibres optiques creuses microstructurées*. PhD thesis, Limoges, 2013.
- [81] F. Benabid and P. Roberts, “Linear and nonlinear optical properties of hollow core photonic crystal fiber,” *Journal of Modern Optics*, vol. 58, pp. 87–124, 2011.
- [82] E. Yablonovitch, “Inhibited spontaneous emission in solid-state physics and electronics,” *Physical Review Letters*, vol. 58, pp. 2059–2062, 1987.
- [83] F. Couny, F. Benabid, P. Roberts, P. Light, and M. Raymer, “Generation and photonic guidance of multi-octave optical-frequency combs,” *Science*, vol. 318, pp. 1118–1121, 2007.
- [84] R. Spreeuw, R. C. Neelen, N. Van Druten, E. Eliel, and J. Woerdman, “Mode coupling in a he-ne ring laser with backscattering,” *Physical Review A*, vol. 42, p. 4315, 1990.
- [85] P. Gysel and R. K. Staubli, “Statistical properties of rayleigh backscattering in single-mode fibers,” *Journal of Lightwave Technology*, vol. 8, pp. 561–567, 1990.
- [86] A. Ravaille, G. Feugnet, I. Fsaifes, A. Baz, B. Debord, F. Gérôme, G. Humbert, F. Benabid, and F. Bretenaker, “In-situ measurement of backscattering in hollow-core fiber based resonant cavities,” *IEEE Photonics Journal*, vol. 9, pp. 1–7, 2017.
- [87] S. Trebaol, *Theoretical and experimental study on the dispersive properties of photonic structures based on microresonators*. Thèse, Université Rennes 1, 2010.

- [88] S. W. Lloyd, V. Dangui, M. J. F. Digonnet, S. Fan, and G. S. Kino, “Measurement of reduced backscattering noise in laser-driven fiber optic gyroscopes,” *Optics Letters*, vol. 35, pp. 121–123, 2010.
- [89] Y. Granjon, *Automatique*. 2001.
- [90] D. W. Allan, “Statistics of atomic frequency standards,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 54, pp. 221–230, 1966.
- [91] W. J. Riley, “Handbook of frequency stability analysis,” 2008.
- [92] M. Dupont-Nivet, *Vers un accéléromètre atomique sur puce*. PhD thesis, Université Paris-Saclay, 2016.
- [93] L. C. Ng and D. J. Pines, “Characterization of ring laser gyro performance using the allan variance method,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 20, no. 1, pp. 211–214, 1997.

**Titre :** Gyromètre optique basé sur une cavité passive résonante en fibre à cœur creux

**Mots clés :** Gyromètre résonant, Fibres optiques à cœur creux, Bande interdite photonique, Kagomé, Sagnac

**Résumé :** Dans ce manuscrit, nous rapportons les développements, théoriques et expérimentaux, en cours à TRT ainsi qu'à TAV et au LAC, visant la réalisation d'un gyromètre résonant passif en fibre optique à cœur creux atteignant des performances permettant la navigation inertielle.

Nous y décrivons mathématiquement l'effet Sagnac, effet relativiste à la base des mesures optiques dans les gyromètres. Ensuite, nous exposons en détail les méthodes utilisées à ce jour pour mesurer des rotations avec des gyromètres passifs par les différentes équipes de recherches. Nous explicitons les limitations de ces méthodes, et en quoi la fibre optique à cœur creux semble être la solution la plus prometteuse pour pallier les défauts des gyromètres passifs résonants actuels.

Une partie de cette thèse est alors consacrée à l'étude des propriétés physiques des fibres à cœur creux (Kagomé et bande interdite photonique), telles que leur atténuation, leur capacité à maintenir la polarisation, et leur rétrodiffusion. Nous présentons la première mesure de zone aveugle (plage de faibles vitesses de rotations non mesurables par un gyromètre) dans un gyromètre résonant passif en fibre à cœur creux. Un modèle mathématique est posé pour expliquer le lien entre cette zone aveugle et la rétrodiffusion au sein de la cavité résonante. Nous décrivons ensuite un protocole expérimental permettant de s'affranchir de cette limitation dans notre gyromètre. Nous détaillons enfin la mise en œuvre de ce protocole et caractérisons les performances ainsi atteintes par notre gyromètre.

**Title :** Resonant fiber optical gyroscope based on hollow core fibre

**Keywords :** Resonant gyrometer, Hollow-core optic fiber, Photonic bandgap fiber, Kagomé, Sagnac

**Abstract :** In this manuscript, we report the theoretical and experimental developments at TRT, TAV and LAC, aiming the realization of a hollow-core passive resonant fiber optical gyroscope that can achieve navigation grade performances.

We mathematically describe the Sagnac effect, which is a relativistic effect used to optically probe mechanical rotations. Then, we detail the state of the art in passive resonant fiber optical gyroscope development. We identify their limitations, and explain why the hollow core fiber seems to be the best solution to cope with the actual limitations of such gyroscopes.

We then focus on two different types of hollow core fibers: Kagome and photonic bandgap. We evaluate their performances in terms of transmission, polarization holding and backscattering. We describe the first measurement of a lock in region in a hollow core fiber passive optical gyroscope, i.e the range of rotation rates that cannot be measured because of backscattering. A mathematical model is propounded to link the lock in to the backscattering of the cavity. We then discuss the experimental protocol that we implemented to circumvent this limitation.

Finally, we characterize the performances of our gyroscope based on these features..

