Sur l'approximation et la complétude des translatés dans les espaces de fonctions

Florian Le Manach

Thèse de Doctorat

présentée à

L'université de Bordeaux

École Doctorale de Mathématiques et Informatique

par Florian Le Manach

sous la direction de Karim Kellay et Mohamed Zarrabi

pour obtenir le grade de Docteur

Spécialité : Mathématiques pures - Analyse

Sur l'approximation et la complétude des translatés dans les espaces de fonctions

Soutenue le 22 novembre 2018 à l'Institut de Mathématiques de Bordeaux
devant le jury composé de :

Frédéric Bayart	Professeur	Université Clermont Auvergne	Examinateur
Alexandre Borichev	Professeur	Aix Marseille Université	Examinateur
Sandrine Grellier	Professeur	Université d'Orléans	Présidente
Karim Kellay	Professeur	Université de Bordeaux	Directeur
Pascal Lefèvre	Professeur	Université d'Artois	Rapporteur
Pascal Thomas	Professeur	Université de Toulouse	Rapporteur
Mohamed Zarrabi	Maître de Conférences	Université de Bordeaux	Directeur

Résumé

Nous nous intéressons à l'étude de la cyclicité et la bicyclicité dans les espaces $\ell^p(\mathbb{Z})$ à poids et à l'étude de la cyclicité dans les espaces de Dirichlet. Alors que Wiener a caractérisé la bicyclicité des vecteurs de $\ell^1(\mathbb{Z})$ et $\ell^2(\mathbb{Z})$ grâce à l'ensemble des zéros de la transformée de Fourier, Lev et Olevski ont démontré que cet ensemble ne peut caractériser la bicyclicité dans $\ell^p(\mathbb{Z})$ lorsque $1 < p < 2$ pour des suites $u \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Beurling, Salem et Newman se sont aussi intéressés à la bicyclicité de vecteurs de $\ell^p(\mathbb{Z})$ pour $1 < p < 2$. Dans ce travail, nous étendons tout d'abord les résultats de Beurling, Salem et Newman aux espaces $\ell^p(\mathbb{Z})$ à poids, en étudiant la dimension de Hausdorff et la capacité de l'ensemble des zéros de la transformée de Fourier. Ensuite nous démontrons que le résultat de Lev-Olevskii reste valide pour la cyclicité dans $\ell^p(\mathbb{Z})$, $1 < p < 2$. De plus, nous donnons des conditions suffisantes à la cyclicité dans les espaces $\ell^p(\mathbb{Z})$ à poids. Enfin nous démontrons que, pour une fonction f appartenant à l'algèbre du disque et à un espace de type Dirichlet, si f est extérieure et si l'ensemble des zéros de f est réduit à un point alors f est cyclique. Ceci généralise le résultat de Hedenmalm et Shields qui ont traité le cas du Dirichlet classique.

Mots clefs : *Cyclicité, transformée de Fourier, capacité, ensembles de Cantor, espaces de Dirichlet, fonctions extérieures.*

Abstract

On the approximation and completeness of translates in function spaces

We are interested in the study of cyclicity and bicyclicity in weighted $\ell^p(\mathbb{Z})$ spaces and the study of cyclicity in Dirichlet spaces. While Wiener characterized the bicyclicity in $\ell^1(\mathbb{Z})$ and $\ell^2(\mathbb{Z})$, thanks to the zero set of the Fourier transform, Lev and Olevski have shown that this set cannot characterize bicyclicity in $\ell^p(\mathbb{Z})$ when $1 < p < 2$ for sequences in $\ell^1(\mathbb{Z})$. Also Beurling, Salem and Newman were interested in the bicyclicity in $\ell^p(\mathbb{Z})$ when $1 < p < 2$. In this work, we first extend the results of Beurling, Salem and Newman to the weighted $\ell^p(\mathbb{Z})$ spaces, by studying the Hausdorff dimension and the capacity of the zero set of the Fourier transform. Then we prove that the Lev-Olevskii result remains valid for cyclicity in $\ell^p(\mathbb{Z})$, $1 < p < 2$. In addition, we give sufficient conditions for the cyclicity in the weighted $\ell^p(\mathbb{Z})$ spaces. Finally, we prove that, for a function f in the disk algebra and in a generalized Dirichlet space, if f is outer and the zero set of f is reduced to a point then f is cyclic. This generalizes the result of Hedenmalm and Shields who have treated the case of the classical Dirichlet space.

Key words : *Cyclicity, Fourier transform, capacity, Cantor sets, Dirichlet spaces, outer functions.*

Institut de Mathématiques de Bordeaux UMR 5251, Université de Bordeaux,
351, cours de la Libération - 33405 TALENCE.

Remerciements

Mes plus sincères remerciements vont directement à mes directeurs de thèse, Karim Kellay et Mohamed Zarrabi. Je les remercie grandement pour leur gentillesse, leur bonne humeur et leur grande disponibilité. Les nombreuses conversations mathématiques partagées avec eux auront su me guider tout au long de ma thèse.

Je suis très reconnaissant envers Pascal Lefèvre et Pascal Thomas pour avoir accepté d'être mes rapporteurs ainsi que pour la qualité de leur lecture.

Je remercie aussi Frédéric Bayart, Alexandre Borichev et Sandrine Grellier d'avoir accepté de faire partie du jury de cette thèse.

Je remercie l'équipe d'analyse de l'IMB pour ce cadre de travail des plus agréables.

Enfin, je souhaite tout particulièrement remercier Jialun, Stéphane, Bianca et Antonin, mes collègues doctorants, pour avoir rendu ces quatre années agréables et divertissantes.

Table des matières

Introduction

Dans cette thèse, nous nous intéressons à l'étude des vecteurs cycliques et bicycliques dans les espaces $\ell^p(\mathbb{Z})$ à poids, en particulier dans les espaces $\ell^p_\beta(\mathbb{Z})$, $p \geq 1$, $\beta \geq 0$, de suites complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ vérifiant

$$\|u\|^p_{\ell^p_\beta(\mathbb{Z})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|^p(1+|n|)^{p\beta} < \infty.$$

Nous nous intéresserons aussi aux vecteurs cycliques dans les espaces de Dirichlet.

Dans un espace de Banach Y de suites complexes, on dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est bicyclique dans Y si le sous-espace engendré par $\{(u_{n-k})_{n\in\mathbb{Z}},\ k \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans Y. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est cyclique dans Y si le sous-espace engendré par $\{(u_{n-k})_{n\in\mathbb{Z}},\ k \in \mathbb{N}\}$ est dense dans Y.

Les premiers résultats obtenus sur la bicyclicité dans les espaces $\ell^p(\mathbb{Z})$ ont été établis en 1932 par Norbert Wiener dans [48]. Il donne une caractérisation de la bicyclicité des suites de $\ell^1(\mathbb{Z})$ et $\ell^2(\mathbb{Z})$. Cette caractérisation associe la bicyclicité d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ à l'ensemble des zéros de sa transformée de Fourier définie sur le cercle unité $\mathbb{T}$ par

$$\widehat{u}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n z^n, \quad z \in \mathbb{T}.$$

En effet, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est bicyclique dans $\ell^1(\mathbb{Z})$ si et seulement si sa transformée de Fourier $\widehat{u}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{T}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est bicyclique dans $\ell^2(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\mathcal{Z}(\widehat{u})$, l'ensemble des zéros de $\widehat{u}$, est de mesure de Lebesgue nulle.

La bicyclicité dans les espaces $\ell^p(\mathbb{Z})$ est fortement liée à l'ensemble des zéros de la transformée de Fourier. C'est pourquoi dans la suite, plutôt que d'énoncer les résultats dans les espaces $\ell^p(\mathbb{Z})$, on le fera dans les espaces de fonctions

$$A^p(\mathbb{T}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{T}),\ \|f\|^p_{A^p(\mathbb{T})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^p < \infty \right\}, \quad 1 \leq p \leq 2,$$

qui sont isométriquement isomorphes aux espaces $\ell^p(\mathbb{Z})$. Ainsi dire qu'une fonction f est cyclique dans $A^p(\mathbb{T})$ signifie que l'ensemble

$$\{Pf,\ P \text{ polynôme analytique}\}$$

est dense dans $A^p(\mathbb{T})$ et dire que f est bicyclique dans $A^p(\mathbb{T})$ signifie que l'ensemble

$$\{Pf,\ P \text{ polynôme trigonométrique}\}$$

est dense dans $A^p(\mathbb{T})$. Il est à noter que $A^1(\mathbb{T}) = A(\mathbb{T})$ est l'algèbre de Wiener et que $A^2(\mathbb{T}) = L^2(\mathbb{T})$.

Wiener se demandait [1] alors si l'ensemble des zéros $\mathcal{Z}(f)$ d'une fonction $f \in A(\mathbb{T})$ caractérisait la bicyclicité de f dans $A^p(\mathbb{T})$ pour $1 < p < 2$. Plusieurs travaux ont fait suite aux résultats de Wiener en liant la bicyclicité dans $A^p(\mathbb{T})$ d'une fonction f et la « taille » de l'ensemble de ses zéros, $\mathcal{Z}(f)$, mais sans obtenir de caractérisation lorsque $1 < p < 2$.

En 1951, Arne Beurling détermina, dans [5], une condition suffisante, en terme de dimension de Hausdorff de l'ensemble des zéros, à la bicyclicité dans $A^p(\mathbb{T})$ pour $1 < p < 2$. La même année Raphaël Salem démontra dans [46], l'existence de fonctions non bicycliques avec un ensemble de zéros « grand » en terme de dimension de Hausdorff. D'autre part, en 1964, Donald J. Newman montra dans [34] qu'il existe toujours une fonction bicyclique dans $A^p(\mathbb{T})$ dont la dimension de Hausdorff de son ensemble de zéros est 1. Plus tard, en 2011, Nir Lev et Alexander Olevskii répondirent à la question de Wiener dans [32] (voir Théorème II).

Pour $E \subset \mathbb{T}$, on note par $\dim(E)$ la dimension de Hausdorff de E. On peut résumer ces résultats par le théorème suivant :

Théorème I. *Soit $1 \leq p \leq 2$ et $q = p/(p-1)$.*

(1) Beurling : si $f \in A(\mathbb{T})$ et $\dim(\mathcal{Z}(f)) < 2/q$ alors f est bicyclique dans $A^p(\mathbb{T})$;

(2) Salem : pour $2/q < \alpha \leq 1$, il existe $E \subset \mathbb{T}$ tel que $\dim(E) = \alpha$ et toute fonction $f \in A(\mathbb{T})$ vérifiant $\mathcal{Z}(f) = E$ n'est pas bicyclique dans $A^p(\mathbb{T})$;

(3) Newman : il existe un ensemble $E \subset \mathbb{T}$ tel que $\dim(E) = 1$ et toute fonction $f \in A(\mathbb{T})$ vérifiant $\mathcal{Z}(f) = E$ est bicyclique dans $A^p(\mathbb{T})$ pour tout $p > 1$.

1. WIENER dans [48] : « My own suspicion is that the general theorem is at least true for $1 \leq p \leq 2$ ».

Dans le deuxième chapitre, nous nous intéressons à la bicyclité dans les espaces

$$A^p_\beta(\mathbb{T}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{T}),\ \|f\|^p_{A^p_\beta(\mathbb{T})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^p (1+|n|)^{\beta p} < \infty \right\},$$

pour $1 \leq p \leq 2$ et $\beta \geq 0$. Nous obtenons le résultat suivant (Théorème 2.4.5) qui étend les résultats de Beurling, Salem et Newman aux espaces $A^p_\beta(\mathbb{T})$.

Théorème A. *Soit $1 < p < 2$, $q = p/(p-1)$ et $\beta > 0$ tels que $\beta q \leq 1$.*

(1) Si $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ et $\dim(\mathcal{Z}(f)) < \frac{2}{q}(1-\beta q)$ alors f est bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$.

(2) Si $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ et $\dim(\mathcal{Z}(f)) > 1-\beta q$ alors f n'est pas bicyclique $A^p_\beta(\mathbb{T})$.

(3) Pour $\frac{2}{q}(1-\beta q) < \alpha \leq 1$, il existe un sous-ensemble fermé $E \subset \mathbb{T}$ tel que $\dim(E) = \alpha$ et tout $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ vérifiant $\mathcal{Z}(f) = E$ n'est pas bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$.

(4) Soit $k = [q/2]$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $E \subset \mathbb{T}$ tel que

$$\dim(E) \geq \max\left(\frac{2}{q}(1-\beta q)k - \varepsilon,\ 1 - 2(k+1)\beta\right)$$

et tel que tout $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ vérifiant $\mathcal{Z}(f) = E$ est bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$. De plus, si $p = \frac{2k}{2k-1}$ pour un $k \in \mathbb{N}^*$, E peut être choisi tel que $\dim(E) = 1 - \beta q$.

Il faut noter que le point (4) du théorème ne permet pas d'atteindre la borne $1-\beta q$ lorsque p n'est pas de la forme $\frac{2k}{2k-1}$, $k \in \mathbb{N}^*$. On peut également souligner que la démonstration du point (4) nécessite la construction d'un ensemble de Cantor généralisé S_λ vérifiant, pour tout $0 < \lambda < 1$ et $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\dim(k \times S_\lambda) = \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \quad \text{et} \quad C_{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}}(k \times S_\lambda) = 0,$$

avec $k \times S_\lambda = S_\lambda + \cdots + S_\lambda$ désignant la somme de S_λ avec lui-même k fois et où $C_\alpha(E)$ désigne, pour E un sous-ensemble compact de $\mathbb{T}$ et $0 < \alpha < 1$, la α-capacité de E (voir partie 1.2). Rappelons que $C_\alpha(E) = 0$ signifie que E ne supporte pas de mesure μ non nulle de α-énergie finie :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{|\widehat{\mu}(n)|^2}{(1+|n|)^{1-\alpha}} < \infty.$$

Newman étudia également, dans [34], la bicyclicité de fonction f dans $A^p(\mathbb{T})$ vérifiant $\dim(\mathcal{Z}(f)) = 2/q$, cas qui n'est pas traité par les théorèmes de Beurling et Salem. Plus précisément il s'intéressa au cas où la α-mesure de Hausdorff (voir partie 1.2) de $\mathcal{Z}(f)$ est nulle pour $\alpha = 2/q$ avec $1 \leq p \leq 2$. Il posa la question suivante :

L'égalité $H_\alpha(\mathcal{Z}(f)) = 0$ implique-t-elle que f est bicyclique dans $A^p(\mathbb{T})$?

Sous certaines conditions forte sur l'ensemble des zéros de f, nous apportons une réponse partielle à la question de Newman dans les espaces $A^p_\beta(\mathbb{T})$ (Théorème 2.4.7) :

Théorème B. *Soit $1 < p < 2$, $q = p/(p-1)$ et $\beta \geq 0$ tel que $\beta q < 1$.*

(1) Si $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ et $\mathcal{Z}(f)$ est de α-mesure forte nulle, où $\alpha = \frac{2}{q}(1-\beta q)$ alors f est bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$.

(2) Pour tout $\gamma > \frac{2}{q}$, il existe un ensemble fermé $E \subset \mathbb{T}$ tel que toute fonction $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ vérifiant $\mathcal{Z}(f) = E$ n'est pas bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$ et tel que $H_h(E) = 0$ où $h(t) = \frac{t^\alpha}{\log(e/t)^\gamma}$ avec $\alpha = \frac{2}{q}(1-\beta q)$.

La conjecture de Wiener, à savoir que l'ensemble des zéros d'une fonction $f \in A(\mathbb{T})$ caractérise sa bicyclicité dans $A^p(\mathbb{T})$ pour $1 < p < 2$, est réstée ouverte jusqu'en 2011, date à laquelle Nir Lev et Alexander Olevskii l'infirment dans [32]. Ils démontrent le résultat suivant :

Théorème II. *Pour $1 < p < 2$, il existe deux fonctions f et g dans $A(\mathbb{T})$ vérifiant $\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}(g)$, et telles que l'une soit bicyclique dans $A^p(\mathbb{T})$ et l'autre non.*

Dans le troisième chapitre, nous nous intéressons à la cyclicité dans les espaces $A^p_\beta(\mathbb{T})$. Notons que toute fonction cyclique est bicyclique. Ainsi le théorème de Wiener et le théorème de Szegö-Kolmogorov [2], nous donne une caractérisation de la cyclicité dans l'espace $A^2(\mathbb{T}) = L^2(\mathbb{T})$. Plus précisément, $f \in A^2(\mathbb{T})$ est cyclique dans $A^2(\mathbb{T})$ si et seulement si $\mathcal{Z}(f)$ est de mesure de Lebesgue nulle et $\log|f| \notin L^1(\mathbb{T})$. Cela a pour conséquence directe que si une fonction f est cyclique dans $A^p(\mathbb{T})$ pour un certain p vérifiant $1 < p < 2$ alors $\mathcal{Z}(f)$ est de mesure de Lebesgue nulle et $\log|f| \notin L^1(\mathbb{T})$. Donc en utilisant le Théorème de Wiener dans $A(\mathbb{T})$, on peut voir qu'il n'existe pas de fonction cyclique dans $A(\mathbb{T})$. On peut alors se demander si une conjecture de type

2. voir [39, Theorem 4.1.1 p. 65] : pour $f \in L^2(\mathbb{T})$

$$\inf\{\|f - zQf\|_{L^2(\mathbb{T})},\ Q \text{ polynôme}\} = \exp\left(\int_{\mathbb{T}} \log|f| dm\right)$$

Wiener est vraie pour la cyclicité à savoir : pour une fonction $f \in A(\mathbb{T})$ vérifiant $\log|f| \notin L^1(\mathbb{T})$, l'ensemble des zéros de f caractérise-t-il la cyclicité de f ?

On répond par la négative à cette question dans le troisième chapitre en démontrant le résultat suivant de type Lev-Olevskii (Théorème 3.2.1)

Théorème C. *Soit $1 < p < 2$. Il existe deux fonctions f et g dans $A(\mathbb{T})$ vérifiant $\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}(g)$, $\log|f| \notin L^1(\mathbb{T})$, $\log|g| \notin L^1(\mathbb{T})$ telle que f n'est pas cyclique dans $A^p(\mathbb{T})$ et g est cyclique dans $A^p(\mathbb{T})$.*

L'existence de vecteurs cycliques dans $A^p(\mathbb{T})$, pour $p > 1$, a été établie par Abakumov, Atzmon et Grivaux dans [2, Corollary 1]. Dans ce chapitre nous donnons des conditions suffisantes pour qu'une fonction régulière f soit cyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$. En particulier cela nous permet de construire des exemples explicites de vecteurs cycliques dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$. Pour E un sous-ensemble de $\mathbb{T}$, on désigne par $d(\cdot, E)$ la distance à E et pour $\delta > 0$, on note $\mathrm{Lip}_\delta(\mathbb{T})$ l'ensemble des fonctions f telles qu'il existe $C > 0$ vérifiant

$$|f(\zeta) - f(\zeta')| \leq C|\zeta - \zeta'|^\delta, \qquad \zeta, \zeta' \in \mathbb{T}.$$

Une première condition suffisante à la cyclicité dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$ est donnée par le théorème suivant (Théorème 3.3.5) :

Théorème D. *Soit $1 < p < 2$ et $\beta > 0$ tel que $\beta q < 1$. Soit $f \in \mathrm{Lip}_\delta(\mathbb{T})$, où $\delta > \beta + 1/p - 1/2$. On suppose que $\mathcal{Z}(f)$ est de mesure de Lebesgue nulle. Si*

$$\int_{\mathbb{T}} \log d(\zeta, \mathcal{Z}(f))|d\zeta| = -\infty$$

alors f est cyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$ si et seulement si f est bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$.

En combinant ce résultat avec le Théorème A sur la bicyclicité dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$, on obtient des conditions suffisantes à la cyclicité des fonctions lipschitziennes dont l'ensemble des zéros n'est pas un ensemble de Carleson [3].

Nous donnons aussi des exemples de fonctions de classe C^∞ cycliques : soit E un sous-ensemble fermé de $\mathbb{T}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{T}$ par

$$f(\zeta) = \exp\left(-1/d(\zeta, E)^\gamma\right),$$

si $\zeta \notin E$ et $f(\zeta) = 0$ sinon.

Si $\gamma \geq 1$ on obtient, par un théorème de Makarov et le Théorème A (voir Théorème 3.3.6) :

3. $E \subset \mathbb{T}$ est dit un ensemble de Carleson lorsque $\log(d(\cdot, E)) \in L^1(\mathbb{T})$. L'ensemble triadique de Cantor en est un exemple.

(1) si $\dim(E) < \frac{2}{q}(1-\beta q)$ alors f est cyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$;

(2) si $\dim(E) > 1-\beta q$ alors f n'est pas cyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$;

(3) pour $\frac{2}{q}(1-\beta q) \leq \alpha \leq 1$, il existe un sous-ensemble fermé $E \subset \mathbb{T}$ tel que $\dim(E) = \alpha$ et f n'est pas cyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$;

(4) si $p = \frac{2k}{2k-1}$ pour un $k \in \mathbb{N}$ alors il existe un sous-ensemble fermé $E \subset \mathbb{T}$ tel que $\dim(E) = 1-\beta q$ et f est cyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$.

Finalement nous montrons dans ce chapitre que l'ensemble des fonctions cycliques de $A^p_\beta(\mathbb{T})$, pour $1 \leq p \leq 2$ et lorsque $A^p_\beta(\mathbb{T})$ n'est pas une algèbre, est dense dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$ (voir Théorème 3.4.3).

Dans le quatrième chapitre nous nous intéressons aux vecteurs cycliques dans les espaces de Dirichlet. On appelle espace de Dirichlet les espaces de la forme $\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$ avec $p \geq 1$, $\alpha > -1$ définis par

$$\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D}) = \left\{ f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}),\ \|f\|^p_{\mathscr{D}^p_\alpha} = |f(0)|^p + \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^p (1-|z|^2)^\alpha \mathrm{dA}(z) < \infty \right\}.$$

Contrairement aux chapitres précédents, les fonctions sont ici holomorphes sur le disque unité donc les résultats obtenus sur la cyclicité seront de nature différentes. Notons que lorsque $p=2$ et $\alpha=1$, l'espace $\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$ est l'espace de Hardy $H^2 \simeq \ell^2(\mathbb{N})$ et lorsque $p=2$ et $\alpha=0$, l'espace $\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$ est l'espace de Dirichlet classique $\mathscr{D}$. En effet si $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ alors

$$\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 (1-|z|^2) \mathrm{dA}(z) \asymp \sum_{n\geq 1} |a_n|^2$$

et

$$\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 \mathrm{dA}(z) = \sum_{n\geq 1} n|a_n|^2.$$

On note par $A(\mathbb{D})$ l'algèbre du disque.

Le problème des vecteurs cycliques pour l'espace de Dirichlet est un problème qui remonte aux travaux de Beurling et Carleson (voir [4], [7] et [8]). Alors que le théorème de Beurling caractérise les vecteurs cycliques dans l'espace de Hardy H^2 (ce sont les fonctions extérieures [4]), le problème des

4. Une fonction $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ est dite extérieure si f s'écrit de la forme

$$f(z) = c \exp \int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \log \varphi(\zeta) \frac{|d\zeta|}{2\pi}, \qquad z \in \mathbb{D},$$

où $|c| = 1$ et où φ est une fonction positive vérifiant $\log \varphi \in L^1(\mathbb{T})$.

vecteurs cycliques dans l'espace de Dirichlet semble difficile. Il existe des fonctions extérieures de l'espace de Dirichlet qui ne sont pas cycliques dans $\mathscr{D}$. En fait la cyclicité de telles fonctions dépend notamment de la distribution des zéros de la limite radiale de f sur le cercle. Lorsque l'ensemble des zéros de $f \in A(\mathbb{D}) \cap \mathscr{D}$ est réduit à un point sur le cercle, Hedenmalm et Shields ont montré que si f est extérieure alors f est cyclique dans $\mathscr{D}$. Richter et Sundberg ont montré que ceci reste vrai lorsque f est seulement dans l'espace de Dirichlet $\mathscr{D}$. Si $f \in A(\mathbb{D})$, on note par $\mathcal{Z}(f)$ l'ensemble des zéros de f sur le cercle unité.

Dans ce chapitre nous étendons le résultat de Hedenmalm et Shields aux espaces de Dirichlet $\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$ (Théorème 4.2.10).

Théorème E. *Soit $p > 1$ vérifiant $\alpha+1 < p \leq \alpha+2$. Soit $f \in A(\mathbb{D}) \cap \mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$. Si f est extérieure et $\mathcal{Z}(f) = \{1\}$ alors f est cyclique dans $\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$.*

Notons que lorsque $p < \alpha + 1$, toute fonction extérieure est cyclique dans $\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$ et lorsque $p > \alpha + 2$ toute fonction de l'algèbre du disque s'annulant en un point n'est pas cyclique dans $\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$.

Notations

Dans tout le mémoire on utilisera les symboles suivants :
Pour A et B des expressions dépendantes d'un paramètre commun, on utilisera lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté

— $A \lesssim B$ pour dire qu'il existe une constante C telle que $A \leq CB$.

— $A \asymp B$ si on a $A \lesssim B$ et $B \lesssim A$.

Chapitre 1

Ensembles d'unicité, de multiplicité et phénomène de Piatetski-Shapiro

On considère $\mathbb{T}$ le cercle unité sur $\mathbb{C}$. On appelle ensemble d'unicité (voir [25, Chapitre V]) tout ensemble $K \subset \mathbb{T}$ vérifiant

$$\forall z \in \mathbb{T} \setminus K,\ \lim_{N\to\infty} \sum_{|n|\leq N} c_n z^n = 0 \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{Z},\ c_n = 0.$$

On appelle ensemble de multiplicité tout ensemble qui n'est pas un ensemble d'unicité. Les ensembles de multiplicité sont caractérisés de la manière suivante (voir [25, Chapitre V, Théorème I]) : K est un ensemble de multiplicité si et seulement s'il vérifie le critère (CM).

(CM) : il existe S une distribution sur le cercle, non nulle, à support dans K et dont les coefficients de Fourier vérifient

$$\lim_{|n|\to\infty} \widehat{S}(n) = 0. \tag{1.0.1}$$

La notion de distribution sur le cercle est rappelée dans la première partie de ce chapitre.

Dans les années 1870, Georg Cantor a commencé à s'intéresser à ces ensembles et il démontra que l'ensemble vide et les ensembles finis de points du cercle sont des ensembles d'unicité. En 1908, William Henry Young démontra que les ensembles dénombrables sont des ensembles d'unicité. D'autre part, il est facile de voir que tout ensemble de mesure de Lebesgue non nulle n'est pas un ensemble d'unicité. Ainsi en 1915, Nikolaï Louzine conjectura dans sa thèse intitulée « Integral and trigonometric series », que tous les ensembles de mesure de Lebesgue nulle sont des ensembles d'unicité. Cette conjecture fut infirmée par Menchoff dans [37] qui construit un ensemble de multiplicité K de mesure de Lebesgue nulle qui de plus supporte une mesure non nulle à coefficients de Fourier s'annulant en l'infini. Une question naturelle est de savoir si on peut remplacer « S distribution » par « μ mesure » dans le critère (CM). La réponse est donnée par Piatetski-Shapiro dans [41] qui en 1954 démontra qu'il existe un ensemble compact $K \subset \mathbb{T}$ qui supporte une distribution non nulle vérifiant (1.0.1) mais qui ne supporte aucune mesure non nulle vérifiant (1.0.1).

Soit X un espace de Banach de suites complexes indexées sur $\mathbb{Z}$. On dit qu'un phénomène de Piatetski-Shapiro existe dans l'espace X s'il existe un ensemble compact $K \subset \mathbb{T}$ qui supporte une distribution non nulle S vérifiant $\widehat{S} \in X$ mais qui ne supporte aucune mesure non nulle μ vérifiant $\widehat{\mu} \in X$ (voir [32]). D'après le résultat de Piatetski-Shapiro dans [41], ce phénomène existe dans l'espace c_0 des suites s'annulant en l'infini. Dans la deuxième partie de ce chapitre nous introduirons la notion de capacité et nous donnerons une preuve du théorème de Beurling qui montre que le phénomène de Piatetski-Shapiro n'existe pas dans les espaces

$$\ell^2_\alpha(\mathbb{Z}) = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{Z}},\ \sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|^2(1+|n|)^{2\alpha} < \infty \right\}$$

pour $-1/2 \leq \alpha < 0$. Dans la troisième partie on s'intéressera au théorème de Salem qui montre que dès lors que $q > 2/\alpha$ on peut trouver un ensemble compact $K \subset \mathbb{T}$ de dimension de Hausdorff α qui supporte une mesure non nulle μ vérifiant $\widehat{\mu} \in \ell^q(\mathbb{Z})$. Finalement dans la quatrième partie on introduira les ensembles de Helson et on présentera le résultat récent de Lev et Olevskii qui montre que le phénomène de Piatetski-Shapiro existe dans $\ell^q(\mathbb{Z})$ lorsque $q > 2$.

Nous verrons, dans les chapitres suivants, que l'étude des vecteurs cycliques et bicycliques et le problème d'approximation polynomiale pondérée est intimement lié aux ensembles d'unicité et au phénomène de Piatetski-Shapiro.

1.1 Espace de distributions

Nous allons ici introduire la notion de distribution sur le cercle $\mathbb{T}$. On identifie $\mathbb{T}$ à $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et z à e^{it}. On note $\mathcal{D}(\mathbb{T})$ l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{T}$. On munit $\mathcal{D}(\mathbb{T})$ de la famille de semi-normes $\mathcal{N}_k$, $k \in \mathbb{N}$ définies par

$$\mathcal{N}_k(\varphi) = \sum_{n=0}^{k} \|\varphi^{(n)}\|_\infty.$$

On note $\mathcal{D}'(\mathbb{T})$ le dual topologique de $\mathcal{D}(\mathbb{T})$. On appelle distribution sur le cercle tout élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{T})$. On note $\mathcal{M}(\mathbb{T})$ l'espace des mesures sur le cercle qui est le dual topologique de l'espace $C(\mathbb{T})$ des fonctions continues sur $\mathbb{T}$ et on note $\mathcal{M}^+(\mathbb{T})$ l'ensemble des mesures positives sur le cercle.

Pour $n \in \mathbb{Z}$ et $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{T})$, on définit le n-ième coefficient de Fourier de T par

$$\widehat{T}(n) = \langle T, z^{-n} \rangle.$$

Pour une fonction $f \in L^1(\mathbb{T})$, on a

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{-int} dt.$$

Notons que les coefficients de Fourier d'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{T})$ sont à croissance polynomiale, c'est-à-dire vérifient

$$\exists k \in \mathbb{N},\ \exists C > 0,\ \forall n \in \mathbb{Z},\ |\widehat{T}(n)| \leq C(1 + |n|)^k.$$

Réciproquement, à toute suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ à croissance polynomiale, on peut associer une unique distribution T dont les coefficients de Fourier coïncide avec les termes de la suite

$$\widehat{T}(n) = u_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ainsi pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{T})$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{T})$, on a

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{T}(n)\ \widehat{\varphi}(-n).$$

On note alors

$$T \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{T}(n) z^n \quad \text{ou} \quad T \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{T}(n) e^{int}.$$

On dit que $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{T})$ est nulle sur un ouvert $A \subset \mathbb{T}$ si pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{T})$ à support dans A on a $\langle T, \varphi \rangle = 0$. On appelle support de T, que l'on note $\text{supp}(T)$, le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel T est nulle. Lorsqu'un ensemble K vérifie $\text{supp}(T) \subset K$, on dit que la distribution T est supportée par K ou que l'ensemble K supporte la distribution T.

De manière équivalente, on peut également voir le support comme étant le plus petit fermé K de $\mathbb{T}$ tel que la fonction

$$\tilde{T}(z) = \begin{cases} \sum_{n\geq 0} \widehat{T}(n) z^n & \text{si } |z|<1 \\ -\sum_{n<0} \widehat{T}(n) z^n & \text{si } |z|>1 \end{cases}$$

se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus K$. En effet, pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{T})$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{T})$, on a

$$\langle T, \varphi\rangle = \lim_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(e^{it}) \left(\tilde{T}(re^{it}) - \tilde{T}(e^{it}/r)\right) dt.$$

Cela implique directement que $\operatorname{supp}(T) \subset K$. L'autre inclusion découle de [50, Théorème 2.4].

1.2 Capacités, mesures de Hausdorff et théorème de Beurling

Commençons par introduire la dimension de Hausdorff. Étant donnés $E \subset \mathbb{T}$ et h une fonction continue, strictement croissante vérifiant $h(0) = 0$, on définit la h-mesure de Hausdorff de E par

$$H_h(E) = \lim_{\delta\to 0} \inf \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} h(|U_i|),\ E \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} U_i,\ |U_i| \leq \delta \right\}$$

où U_i sont des intervalles ouverts de $\mathbb{T}$ et où $|U_i|$ désigne la longueur de U_i. Lorsque $h(t) = t^\alpha$ avec $0 < \alpha \leq 1$ on notera H_α au lieu de H_h. Une des propriétés importantes de H_α est, pour un ensemble E fixé, l'existence d'une borne d telle que pour tout $\alpha < d$, $H_\alpha(E) = \infty$ et pour tout $\alpha > d$, $H_\alpha(E) = 0$ (voir [25, Chapitre II]). Cette borne d est appelé la dimension de Hausdorff de E. Autrement dit la dimension de Hausdorff d'un ensemble $E \subset \mathbb{T}$ est donnée par

$$\dim(E) = \inf\{\alpha \in]0,1[, H_\alpha(E) = 0\} = \sup\{\alpha \in]0,1[, H_\alpha(E) = \infty\}.$$

Lorsque E est un ensemble compact on peut exprimer la dimension de Hausdorff autrement à l'aide de la proposition 1.2.1 ci-dessous. Ce résultat est dû à Frostman et une démonstration est présentée dans [25, Chapitre II, Théorème II]. On rappelle qu'une fonction f définie sur $\mathbb{T}$ est dite lipschitzienne d'ordre β, et on note $f \in \operatorname{Lip}_\beta(\mathbb{T})$, s'il existe $C > 0$ tel que

$$|f(\zeta) - f(\zeta')| \leq C|\zeta - \zeta'|^\beta, \qquad \zeta, \zeta' \in \mathbb{T}.$$

Proposition 1.2.1. *Soit E un compact de $\mathbb{T}$. On a*

$$\dim(E) = \sup\{\beta \geq 0,\ \exists \mu \in \mathcal{M}^+(E) \setminus \{0\} \text{ vérifiant } (t \mapsto \mu([0,t])) \in \mathrm{Lip}_\beta(\mathbb{T})\}.$$

On introduit maintenant la notion de capacité. On définit le noyau logarithmique comme étant la fonction K_0 définie sur $]0, 2\pi[$ par

$$K_0 : t \mapsto \log\left(\frac{1}{\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|}\right).$$

Pour $\alpha \in]0,1[$, on définit le noyau d'ordre α comme étant la fonction K_α définie sur $]0, 2\pi[$ par

$$K_\alpha : t \mapsto \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right|^\alpha}.$$

On observe (voir [25, Chapitre III, Proposition 2] et [25, III.7.]) que, pour $0 \leq \alpha < 1$ fixé, les coefficients de Fourier de K_α sont strictement positifs et vérifient

$$\widehat{K_\alpha}(n) \asymp (1 + |n|)^{\alpha-1}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{1.2.1}$$

Pour $\alpha \in [0, 1[$ et μ une mesure borélienne finie sur $\mathbb{T}$, on définit le α-potentiel comme étant l'application U_μ^α définie sur $\mathbb{T}$ par

$$U_\mu^\alpha : x \mapsto \int_{\mathbb{T}} K_\alpha(|x - y|)\, \mathrm{d}\mu(y).$$

En terme de série de série de Fourier, on a

$$U_\mu^\alpha \sim 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\mu}(n)\widehat{K_\alpha}(n)e^{inx}. \tag{1.2.2}$$

On définit la α-énergie de la mesure μ comme étant le réel

$$I_\alpha(\mu) = \int_{\mathbb{T}} U_\mu^\alpha(x)\, \mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}} K_\alpha(|x - y|)\, \mathrm{d}\mu(y)\, \mathrm{d}\mu(x).$$

D'après (1.2.2), la α-énergie d'une mesure positive μ vérifie

$$I_\alpha(\mu) = 4\pi^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{K^\alpha}(n)|\widehat{\mu}(n)|^2 \asymp \sum_{n\geq 1} \frac{|\widehat{\mu}(n)|^2}{(1 + |n|)^{1-\alpha}}.$$

Finalement on définit la α-capacité d'un sous-ensemble compact E de $\mathbb{T}$ comme étant le réel

$$C_\alpha(E) = \left(\inf\{I_\alpha(\mu),\ \mu \text{ mesure de probabilité sur } E\}\right)^{-1}.$$

Si $\alpha = 0$, C_0 est appelé la capacité logarithmique. On remarque que pour E un compact de $\mathbb{T}$ et $\alpha \in [0, 1[$, on a $C_\alpha(E) > 0$ si et seulement s'il existe une mesure positive non nulle portée par E de α-énergie finie. Donc lorsque $C_\alpha(E) = 0$ alors E est un ensemble de mesure de Lebesgue nulle. De plus il est à noter que les ensembles dénombrables sont de α-capacité nulle pour tout $\alpha \in [0, 1[$ et pour certains ensembles de Cantor on peut déterminer de manière précise leur capacité (voir section 2.3).

Une notion particulièrement importante dans la théorie des capacités est la notion de mesure d'équilibre introduite par Frostman dans [17] (voir aussi [25, Chapitre III, pp 36-37]) : si $C_\alpha(E) > 0$ alors il existe une unique mesure d'équilibre μ_e sur E, c'est-à-dire une mesure de probabilité supporté par E vérifiant

$$C_\alpha(E) = 1/I_\alpha(\mu_e).$$

Cette mesure d'équilibre vérifie $U^\alpha_{\mu_e}(x) \leq 1/C_\alpha(E)$ pour tout $x \in \mathbb{T}$ et $0 \leq \alpha < 1$ (voir [25, Chapitre III, Proposition 6]) et

$$U^\alpha_{\mu_e}(x) = \frac{1}{C_\alpha(E)}$$

pour presque tout $x \in E$ par rapport à la mesure de Lebesgue (voir [25, Chapitre III, Proposition 5]).

Comme pour la dimension de Hausdorff, une propriété de la capacité est, pour un ensemble E fixé, l'existence d'une borne d telle que pour tout $\alpha < d$, $C_\alpha(E) > 0$ et pour tout $\alpha > d$, $C_\alpha(E) = 0$. Cette borne d est alors appelé la dimension capacitaire de E et on la note $\alpha(E)$. On a égalité entre dimension de Hausdorff et dimension capacitaire, soit pour tout compact $E \subset \mathbb{T}$,

$$\alpha(E) = \dim(E). \tag{1.2.3}$$

Dans la démonstration de ce résultat, on utilise principalement la proposition 1.2.1 et les mesures d'équilibre (voir [25, Chapitre III, Théorème I]).

Le théorème suivant est attribué à Beurling (voir [4], [25]). Il a pour conséquence que le phénomène de Piatetski-Shapiro n'existe pas dans $\ell^2_\beta(\mathbb{Z})$ pour $-1/2 \leq \beta < 0$. En effet ce résultat implique que dès lors que l'on peut trouver une distribution non nulle S supportée par un ensemble compact K et vérifiant $\widehat{S} \in \ell^2_\beta(\mathbb{Z})$, on peut alors trouver une mesure μ vérifiant les même propriétés.

Théorème 1.2.2. *Soit E un ensemble compact de $\mathbb{T}$ et $\alpha \in [0, 1[$.*
La α-capacité de E est strictement positive si et seulement s'il existe une distribution S non nulle et supportée par E et vérifiant

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{|\widehat{S}(n)|^2}{(1 + |n|)^{1-\alpha}} < \infty.$$

Démonstration. Le sens direct de l'implication est évident d'après la définition de la capacité. Supposons qu'il existe une distribution S non nulle, supportée par E et vérifiant

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|\widehat{S}(n)|^2}{(1+|n|)^{1-\alpha}} < \infty.$$

Comme S est non nulle il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\widehat{S}(n) \neq 0$. Quitte à considérer $z^{-n}S$ on peut supposer, sans perte de généralité, que $\widehat{S}(0) \neq 0$. On pose, pour $\delta > 0$,

$$E_\delta = \{z \in \mathbb{T},\ d(z, E) \leq \delta\}$$

avec $d(z, E)$ la distance de z à E. On a que E_δ est de mesure de Lebesgue positive donc $C_\alpha(E_\delta) > 0$. Ainsi, d'après le théorème de Frostman, il existe une mesure d'équilibre μ_e^δ vérifiant

$$I_\alpha(\mu_e^\delta) = 1/C_\alpha(E_\delta)$$

et de plus on a

$$U^\alpha_{\mu_e^\delta}(x) = \frac{1}{C_\alpha(E_\delta)}$$

pour presque tout $x \in E_\delta$ et la fonction $U^\alpha_{\mu_e^\delta}$ est bornée sur $\mathbb{T}$. On considère les deux fonctions holomorphes suivantes

$$\begin{cases} S^+(z) = \sum_{n\geq 0} \widehat{S}(n) z^n & \text{si } |z| < 1 \\ S^-(z) = -\sum_{n<0} \widehat{S}(n) z^n & \text{si } |z| > 1. \end{cases}$$

Comme $\operatorname{supp}(S) \subset E$ on a que

$$\lim_{r\to 1^-} S^+(rz) - S^-(z/r) = 0$$

pour tout $z \in \mathbb{T} \setminus E_\delta$. Ainsi

$$\lim_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left(U^\alpha_{\mu_e^\delta}(z) - 1/C_\alpha(E_\delta)\right) \left(S^+(rz) - S^-(z/r)\right) |dz| = 0.$$

On obtient alors

$$\lim_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} U^\alpha_{\mu_e^\delta}(z) \left(S^+(rz) - S^-(z/r)\right) |dz| = \frac{\widehat{S}(0)}{C_\alpha(E_\delta)}. \tag{1.2.4}$$

D'une part, puisque $U^\alpha_{\mu_e^\delta}$ est bornée sur $\mathbb{T}$ et d'après (1.2.2),

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} U^\alpha_{\mu_e^\delta}(z) S^+(rz) |dz| &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \sum_{n\geq 0} U^\alpha_{\mu_e^\delta}(z) \widehat{S}(n) r^m z^n |dz| \\ &= 2\pi \sum_{n\geq 0} \widehat{\mu_e^\delta}(-n) \widehat{K_\alpha}(-n) \widehat{S}(n) r^n. \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et (1.2.1), on obtient

$$\limsup_{r\to 1^-}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} U^{\alpha}_{\mu_e^\delta}(z)S^+(rz)|dz|\right| \lesssim \left(\sum_{n\geq 0}\frac{|\widehat{\mu_e^\delta}(n)|^2}{(1+|n|)^{1-\alpha}}\right)^{1/2}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{|\widehat{S}(n)|^2}{(1+|n|)^{1-\alpha}}\right)^{1/2}. \tag{1.2.5}$$

De même on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} U^{\alpha}_{\mu_e^\delta}(z)S^-(z/r)|dz| &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\sum_{n<0} U^{\alpha}_{\mu_e^\delta}(z)\widehat{S}(n)r^{-n}z^n|dz| \\ &= 2\pi\sum_{n<0}\widehat{\mu_e^\delta}(-n)\widehat{K_\alpha}(-n)\widehat{S}(n)r^{-n}.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\limsup_{r\to 1^-}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} U^{\alpha}_{\mu_e^\delta}(z)S^-(z/r)|dz|\right| \lesssim \left(\sum_{n\geq 0}\frac{|\widehat{\mu_e^\delta}(n)|^2}{(1+|n|)^{1-\alpha}}\right)^{1/2}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{|\widehat{S}(n)|^2}{(1+|n|)^{1-\alpha}}\right)^{1/2}. \tag{1.2.6}$$

Donc en sommant les inégalités (1.2.5) et (1.2.6) et en utilisant le fait que

$$1/C_\alpha(E_\delta) \asymp \sum_{n\geq 0}\frac{|\widehat{\mu_e^\delta}(n)|^2}{(1+|n|)^{1-\alpha}},$$

on obtient à partir de (1.2.4) que,

$$\begin{aligned}\left|\widehat{S}(0)\right| &\lesssim C_\alpha(E_\delta)\left(\sum_{n\geq 0}\frac{|\widehat{\mu_e^\delta}(n)|^2}{(1+|n|)^{1-\alpha}}\right)^{1/2}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{|\widehat{S}(n)|^2}{(1+|n|)^{1-\alpha}}\right)^{1/2} \\ &\lesssim \left(\sum_{n\geq 0}\frac{|\widehat{\mu_e^\delta}(n)|^2}{(1+|n|)^{1-\alpha}}\right)^{-1/2}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{|\widehat{S}(n)|^2}{(1+|n|)^{1-\alpha}}\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Par le théorème de Helly, il existe une suite (δ_j) qui tend vers zéro et telle que la suite $(\mu_e^{\delta_j})$ converge faiblement vers une mesure de probabilité μ supportée par E. Donc en particulier $\widehat{\mu_e^{\delta_j}}(n) \to \widehat{\mu}(n)$ lorsque $j\to\infty$. Ainsi par le lemme de Fatou on a

$$\left|\widehat{S}(0)\right| \lesssim \left(\sum_{n\geq 0}\frac{|\widehat{\mu}(n)|^2}{(1+|n|)^{1-\alpha}}\right)^{-1/2}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{|\widehat{S}(n)|^2}{(1+|n|)^{1-\alpha}}\right)^{1/2}.$$

Comme

$$\left(\sum_{n\geq 0}\frac{|\widehat{\mu}(n)|^2}{(1+|n|)^{1-\alpha}}\right)^{-1/2} \lesssim C_\alpha(E)^{1/2},$$

$\left|\widehat{S}(0)\right| > 0$ et

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|\widehat{S}(n)|^2}{(1+|n|)^{1-\alpha}} < \infty$$

cela démontre que $C_\alpha(E) > 0$ ce qui conclut la preuve. □

1.3 Ensembles parfaits de translation et théorème de Salem

Nous allons ici nous intéresser à une classe d'ensemble sur le cercle $\mathbb{T}$, les ensembles parfaits de translation (voir [25]), qui permettrons de démontrer le théorème de Salem. La construction de tels ensembles s'inspire de celle des ensembles de Cantor en la généralisant, c'est-à-dire une construction par étape en enlevant à chaque étape un certain nombre d'intervalles. L'idée générale est la suivante : on part d'un intervalle de longueur l_0 et à la première étape on enlève des intervalles de sorte à ne garder que k_1 intervalles fermés disjoints de même longueur l_1. A la deuxième étape on applique le même procédé à chaque intervalle obtenu par l'étape précédente mais en gardant cette fois k_2 intervalles de longueur l_2. On obtient alors à la fin de la deuxième étape k_1k_2 intervalles fermés de longueur l_2. On itère ce procédé et on appelle ensemble parfait de translation l'intersection des tous les intervalles construits à chaque étape. Plus précisément :

Définition 1.3.1. *Soit $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers, $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et $(\lambda_{j,n})_{(j,n)\in\mathbb{N}^2}$ une suite de réels. On suppose que ces suites vérifient $k_0 = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $k_n \geq 2$ et pour tout $j \in [\![1, k_n - 1]\!]$,*

$$0 \leq \lambda_{j,n} < \lambda_{j,n} + l_n < \lambda_{j+1,n} < \lambda_{j+1,n} + l_n \leq l_{n-1}$$

Posons $p_n = \prod_{j=0}^{n} k_j$. On définit $E_0 = [0, l_0]$ et on construit par récurrence une suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles compacts : pour $n \geq 1$ on suppose que E_{n-1}, déjà construit, est une réunion disjointe de p_{n-1} intervalles fermés de longueur l_{n-1}. On construit alors E_n à partir de E_{n-1} en remplaçant chaque intervalle de E_{n-1} par une réunion disjointe de k_n intervalles fermés de longueur l_n de la façon suivante : si

$$E_{n-1} = \bigcup_{j=1}^{p_{n-1}} [a_j, a_j + l_{n-1}] \quad \textit{(union disjointe)},$$

alors on définit

$$E_n = \bigcup_{j=1}^{p_{n-1}} \bigcup_{s=1}^{k_n} [a_j + \lambda_{s,n}, a_j + \lambda_{s,n} + l_n].$$

Notons que les intervalles dans la réunion sont disjoints de par les propriétés de la suite $(\lambda_{j,n})_{(j,n)\in\mathbb{N}^2}$*. On définit finalement*

$$E = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n. \tag{1.3.1}$$

Un tel ensemble E *est appelé ensemble parfait de translation associé aux suites* $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(\lambda_{j,n})_{(j,n)\in\mathbb{N}^2}$.

On définit de la manière suivante une mesure naturelle sur les ensembles parfaits de translation.

Définition 1.3.2. *Soit* E *un ensemble parfait de translation sur* $[0, 2\pi]$*, que l'on décompose comme dans* (1.3.1)*. Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on définit sur* $[0, 2\pi]$ *la fonction* L_n *continue, affine par morceaux, de pente* $1/p_n l_n$ *sur les* p_n *intervalles de* E_n*, constante sur les intervalles contigus de* E_n *et vérifiant* $L_n(0) = 0$ *et* $L_n(2\pi) = 1$*. La suite de fonctions* (L_n) *converge uniformément vers une fonction* L *appelée fonction de Lebesgue sur* E*. La mesure de Stieltjes associée à* L*, que l'on note* dL*, est appelé la* L*-mesure associée à* E*.*

La propriété suivante nous permettra d'obtenir des estimations des coefficients de Fourier de la L-mesure associée à un ensemble parfait de translation. Elle est obtenue dans [25, pp. 18-19].

Proposition 1.3.3. *Soit* E *un ensemble parfait de translation associé à des suites* $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(\lambda_{j,n})_{(j,n)\in\mathbb{N}^2}$*. On considère* dL *la* L*-mesure associée à* E*. Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on pose*

$$Q_n(t) = \frac{1}{k_n}\sum_{j=1}^{k_n} e^{-i\lambda_{j,n}t}.$$

Si on note $c_m = \int_0^{2\pi} e^{-imt}dL(t)$ *le* m*-ième coefficient de Fourier de* dL *alors on a*

$$c_m = \prod_{n=0}^{\infty} Q_{n+1}(m).$$

Le résultat suivant permet de déterminer la dimension de Hausdorff d'un ensemble parfait de translation à l'aide de sa L-mesure (voir [25, Théorème II.IV et II.V p. 30]).

Proposition 1.3.4. *Soit* E *un ensemble parfait de translation,* L *sa fonction de Lebesgue. On considère* ω_L *le module de continuité de* L*, c'est-à-dire*

$$\omega_L(t) = \sup_{|x-x'|\le t} |L(x') - L(x)|.$$

Si

$$\lim_{t\to 0} \frac{\log(\omega_L(t))}{\log(t)} = \alpha$$

alors E est de dimension de Hausdorff α.

Avant de démontrer le théorème de Salem nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 1.3.5. *Soit $\nu \in \mathbb{N}^*$, $(c_j)_{1\leq j\leq \nu}$ une suite de réels et $(\lambda_j)_{1\leq j\leq \nu}$ une suite de réels linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Soit P la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$P : t \mapsto \sum_{j=1}^{\nu} c_j e^{i\lambda_j t}.$$

Alors pour tout $r > 0$, il existe $T_0 > 0$ tel que pour tout $T \geq T_0$ et $a \in \mathbb{R}$ on a

$$\frac{1}{T}\int_a^{a+T} |P(t)|^r dt < 2\left(\frac{r}{2}+1\right)^{r/2}\left(\sum_{j=1}^{\nu}|c_j|^2\right)^{r/2}.$$

Démonstration. Pour $a \in \mathbb{R}$, $T > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{1}{T}\int_a^{a+T} e^{i\omega x}dx = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega = 0 \\ \frac{1}{iT\omega}\left(e^{i\omega(a+T)} - e^{i\omega a}\right) & \text{si } \omega \neq 0 \end{cases}$$

Donc si $\omega \neq 0$ on a

$$\left|\frac{1}{T}\int_a^{a+T} e^{i\omega x}dx\right| \leq \frac{2}{T\omega} \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{1.3.2}$$

De plus pour une suite de nombres complexes (z_j) quelconque on a la formule,

$$\left|\sum_{j=1}^{\nu} z_j\right|^2 = \sum_{j=1}^{\nu}|z_j|^2 + \sum_{1\leq i<j\leq \nu} z_i\overline{z_j} + \overline{z_i}z_j \tag{1.3.3}$$

Soit q l'entier naturel vérifiant $r \leq 2q < r+2$. En utilisant la formule de Newton et (1.3.3), on obtient pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |P(t)|^{2q} &= \left|\sum_{h_1+h_2+\cdots+h_\nu=q}\left(\prod_{j=1}^{\nu} c_j^{h_j} e^{i\lambda_j h_j t}\right)\frac{q!}{h_1!h_2!\ldots h_\nu!}\right|^2 \\ &= \sum_{h_1+h_2+\cdots+h_\nu=q}\left(\prod_{j=1}^{\nu}|c_j|^{2h_j}\right)\left(\frac{q!}{h_1!h_2!\ldots h_\nu!}\right)^2 + R \end{aligned}$$

avec R qui est une combinaison linéaire finie de termes de la forme $e^{i\mu t}$ avec $\mu \neq 0$ car μ est combinaison linéaire à coefficients entiers non tous nuls des λ_j qui sont linéairement indépendants.
D'après (1.3.2) et en utilisant la formule de Newton, on a alors, uniformément en a,

$$\begin{aligned}
\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_a^{a+T} |P(t)|^{2q} dt &= \sum_{h_1+h_2+\cdots+h_\nu=q} \left(\prod_{j=1}^{\nu} |c_j|^{2h_j}\right)\left(\frac{q!}{h_1!h_2!\dots h_\nu!}\right)^2 \\
&\leq q!\left(\sum_{j=1}^{\nu} |c_j|^2\right)^q \\
&\leq q^q\left(\sum_{j=1}^{\nu} |c_j|^2\right)^q .
\end{aligned}$$

Ainsi il existe $T_0 > 0$ tel que pour tout $T \geq T_0$ et $a \in \mathbb{R}$,

$$\left(\frac{1}{T}\int_a^{a+T} |P(t)|^r dt\right)^{1/r} \leq \left(\frac{1}{T}\int_a^{a+T} |P(t)|^{2q} dt\right)^{1/2q} \leq 2^{1/r} q^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{\nu} |c_j|^2\right)^{1/2}$$

ce qui conclut la preuve en remarquant que $q < r/2 + 1$. □

On présente maintenant la démonstration du théorème de Salem. Il est à noter qu'une fois ce résultat acquis, le théorème 2.1.3 sur la bicyclicité s'obtient directement grâce à la proposition 2.2.6. Notons aussi que dans la démonstration du théorème la construction de l'ensemble n'est pas explicite. La démonstration que l'on présente ici est celle de Salem dans [25, Théorème VIII.IV pp.106-110] (voir aussi [46]).

Théorème 1.3.6. *Soit $0 < \alpha < 1$ et $q > 2/\alpha$. Il existe un ensemble parfait de translation E, de dimension de Hausdorff α, qui supporte une mesure positive non nulle μ dont les coefficients de Fourier vérifient*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{\mu}(n)|^q < \infty.$$

Démonstration. Soit ε un réel vérifiant

$$0 < \varepsilon < \alpha(q/2 - \varepsilon) - 1 \tag{1.3.4}$$

et ν un entier vérifiant

$$2(q/2+1)^{q/2} \leq \nu^{\varepsilon}. \tag{1.3.5}$$

On pose $\xi^\alpha = 1/\nu$. On considère une suite $(\lambda_j)_{1\leq j\leq \nu}$ de réels linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$ vérifiant pour tout $j \in [\![1, \nu-1]\!]$,

$$0 < \lambda_j < \lambda_j + \xi < \lambda_{j+1} < \lambda_{j+1} + \xi < 1$$

Notons que ceci est possible puisque $\nu\xi < 1$. Pour toute suite $(t_k)_{k\geq 1}$ à valeur dans $[0,1]$ on pose

$$\xi_k = \xi(1-\xi^{\epsilon k})(1-t_k) + \xi t_k. \tag{1.3.6}$$

Notons que

$$\xi(1-\xi^{\epsilon k}) \leq \xi_k \leq \xi. \tag{1.3.7}$$

Ainsi on associe à toute suite (t_k) l'ensemble parfait de translation $E_{(t_k)}$ associé aux suites

$$k_n = \nu, \quad l_n = \prod_{k=1}^{n} \xi_k \quad \text{et} \quad \lambda_{j,n} = \lambda_j l_{n-1} \tag{1.3.8}$$

comme dans la définition 1.3.1.

On va alors montrer que pour la mesure de Lebesgue produit λ^∞ sur $[0,1]^{\mathbb{N}^*}$, les ensembles $E_{(t_k)}$ vérifient le théorème pour presque toute suite $(t_k)_{k\geq 1}$ à valeur dans $[0,1]$. D'après la propriété 1.3.3, les coefficients de Fourier c_m de la L-mesure associée à $E_{(t_k)}$ vérifient

$$c_m = \prod_{n=0}^{\infty} Q_{n+1}(m)$$

avec

$$Q_n(t) = \frac{1}{k_n}\sum_{j=1}^{k_n} e^{-i\lambda_{j,n}t} = \frac{1}{\nu}\sum_{j=1}^{\nu} e^{-i\lambda_j l_{n-1}t}.$$

On pose pour $m \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$,

$$c_{m,p} = \prod_{n=0}^{p} Q_{n+1}(m).$$

Notons que Q_n dépend de l_{n-1} qui dépend des $n-1$ premiers éléments de la suite (ξ_k). Donc, par (1.3.6), $c_{m,p}$ dépend des p premiers éléments de la suite (t_k). On note

$$\mathbb{E}(\cdot) = \int_{[0,1]^{\mathbb{N}^*}} \cdot \, d\lambda^\infty(t_k)$$

la valeur moyenne sur $[0,1]^{\mathbb{N}^*}$. Ainsi en remarquant que $\mathbb{E}(|c_{m,p}|^q)$ s'obtient en intégrant $|c_{m,p}|^q$ par rapport à $dt_1, dt_2, \ldots, dt_p$, on obtient

$$\mathbb{E}(|c_{m,p}|^q) \leq \mathbb{E}(|c_{m,p-1}|^q) \sup_{t_1,t_2,\ldots,t_{p-1}} \int_0^1 |Q_{p+1}(m)|^q dt_p. \tag{1.3.9}$$

Or, si on considère les t_k fixés pour $1 \leq k \leq p-1$, on obtient

$$\int_0^1 |Q_{p+1}(m)|^q dt_p \quad = \quad \frac{1}{\nu^q} \int_0^1 \left| \sum_{j=1}^{\nu} e^{-i\lambda_j l_p m} \right|^q dt_p.$$

De plus on a

$$l_p = l_{p-1}\xi_p = l_{p-1}\left(\xi(1-\xi^{\epsilon p})(1-t_p) + \xi t_p\right) = l_{p-1}\xi(1-\xi^{\epsilon p}) + l_{p-1}\xi^{1+\epsilon p} t_p$$

donc, pour $m \neq 0$, on effectue le changement de variable $u = a + Tt_p$ avec

$$a = l_{p-1}\xi(1-\xi^{\varepsilon p})m \quad \text{et} \quad T = l_{p-1}\xi^{1+\varepsilon p} m,$$

et on obtient

$$\int_0^1 |Q_{p+1}(m)|^q dt_p = \frac{1}{\nu^q} \int_a^{a+T} \left| \sum_{j=1}^{\nu} e^{-i\lambda_j u} \right|^q \frac{du}{T}.$$

Ainsi d'après le lemme 1.3.5, il existe $T_0 > 0$, indépendant de p, tel que

$$\int_0^1 |Q_{p+1}(m)|^q dt_p < 2\left(\frac{q}{2}+1\right)^{q/2} \nu^{-q/2}, \tag{1.3.10}$$

lorsque $|T| \geq T_0$. D'après (1.3.7) et (1.3.8), la condition $|T| \geq T_0$ est vérifiée si

$$\xi^{p-1} \prod_{k=1}^{p-1} (1-\xi^{\varepsilon k}) \xi^{1+\varepsilon p} |m| \geq T_0$$

ou encore si

$$\xi^{p+\varepsilon p}|m| \geq T_0 \left(\prod_{k=1}^{\infty} (1-\xi^{\varepsilon k}) \right)^{-1} = C. \tag{1.3.11}$$

Notons que si un entier p vérifie (1.3.11) alors tout entier naturel plus petit que p vérifie également (1.3.11). On note alors

$$p_0 = \max\left\{ p \in \mathbb{N},\ \xi^{p+\varepsilon p}|m| \geq C \right\}.$$

Donc, d'après (1.3.5) et (1.3.10), on a pour tout $p \leq p_0$,

$$\int_0^1 |Q_{p+1}(m)|^q dt_p < \nu^{-q/2+\varepsilon}. \tag{1.3.12}$$

Ainsi, pour $m \neq 0$ fixé, on a d'après (1.3.9) et (1.3.12),

$$\mathbb{E}(|c_{m,p_0}|^q) \leq \mathbb{E}(|c_{m,p_0-1}|^q)\ \nu^{-q/2+\varepsilon} \leq \nu^{-p_0(q/2-\varepsilon)} \tag{1.3.13}$$

Puisque par définition $\xi^\alpha = 1/\nu$, on a

$$\nu^{-p_0(q/2-\varepsilon)} = \xi^{\alpha p_0(q/2-\varepsilon)} \leq \left(\frac{C}{|m|}\right)^{\frac{\alpha(q/2-\varepsilon)}{1+\varepsilon}} \frac{1}{\xi^{\alpha(q/2-\varepsilon)}}.$$

donc, d'après (1.3.13) et puisque $|Q_n(t)| \leq 1$, on obtient

$$\mathbb{E}(|c_m|^q) \leq \mathbb{E}(|c_{m,p_0}|^q) \leq \left(\frac{C}{|m|}\right)^{\frac{\alpha(q/2-\varepsilon)}{1+\varepsilon}} \frac{1}{\xi^{\alpha(q/2-\varepsilon)}}. \tag{1.3.14}$$

Or par (1.3.4), on a $\frac{\alpha(q/2-\varepsilon)}{1+\varepsilon} > 1$ donc

$$\sum_{|m|\geq 1} \frac{1}{|m|^{\frac{\alpha(q/2-\varepsilon)}{1+\varepsilon}}} < \infty$$

et ainsi

$$\mathbb{E}\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} |c_m|^q\right) < \infty.$$

Donc pour presque toute suite $(t_k)_{k\geq 1}$ à valeurs dans $[0,1]$, la suite des coefficients de Fourier de la L-mesure associée à $E_{(t_k)}$ est dans $\ell^q(\mathbb{Z})$. Pour conclure il suffit de vérifier que la dimension de Hausdorff de $E_{(t_k)}$ vérifie

$$\dim(E_{(t_k)}) = \alpha.$$

De par la définition de la fonction de Lebesgue L et la construction de l'ensemble parfait de translation $E_{(t_k)}$ à l'étape n on a que

$$\frac{1}{\nu^n} = \frac{1}{p_n} \leq \sup_{|x-x'|\leq l_n} |L(x') - L(x)| \leq \frac{2}{p_n} = \frac{2}{\nu^n}$$

et par conséquent

$$\log(\omega_L(l_n)) = \log\left(\sup_{|x-x'|\leq l_n} |L(x') - L(x)|\right) \sim -n\log(\nu).$$

De plus, par (1.3.8) et (1.3.7), on a

$$\xi^n \prod_{k=1}^{\infty}(1-\xi^{\epsilon k}) \leq l_n \leq \xi^n$$

donc

$$\frac{\log(l_n)}{n\log(\xi)} \sim 1, \quad n\to\infty$$

et ainsi

$$\log(\omega_L(l_n)) \sim -\frac{\log(\nu)\log(l_n)}{\log(\xi)} = \alpha \log(l_n), \quad n \to \infty.$$

Comme la fonction ω_L est croissante on obtient

$$\log(\omega_L(t)) \sim \alpha \log(t), \quad t \to 0^+$$

et par la propriété 1.3.4 on déduit ainsi que

$$\dim(E_{(t_k)}) = \alpha,$$

ce qui termine cette démonstration. □

1.4 Ensembles de Helson

Les ensembles de Helson sont des ensembles compacts K assez petits pour que l'on puisse interpoler toute fonction continue sur K par une fonction dont la série des coefficients de Fourier est absolument convergente. Ils ont été introduits par Helson en 1954. Plus précisément

Définition 1.4.1. *On appelle ensemble de Helson un ensemble compact $K \subset \mathbb{T}$ vérifiant pour tout $f \in \mathcal{C}(K)$, il existe g une fonction dont la série des coefficients de Fourier est absolument convergente et telle que $g|_K = f$.*

Proposition 1.4.2. *Soit $K \subset \mathbb{T}$ un ensemble compact. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *K est un ensemble de Helson ;*

(ii) *il existe $\delta_1 > 0$ tel que pour tout $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ vérifiant $\operatorname{supp}(\mu) \subset K$ on ait*

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{\mu}(n)| \geq \delta_1 \int_{\mathbb{T}} |\mathrm{d}\mu|$$

(iii) *il existe $\delta_2 > 0$ tel que pour tout $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ vérifiant $\operatorname{supp}(\mu) \subset K$ on ait*

$$\limsup_{|n|\to\infty} |\hat{\mu}(n)| \geq \delta_2 \int_{\mathbb{T}} |\mathrm{d}\mu|$$

Remarque
On peut trouver une démonstration de cette proposition dans [25, Chapitre XI]. La propriété (*iii*) implique qu'un ensemble de Helson ne supporte aucune mesure non nulle μ vérifiant $\widehat{\mu}(n) \to 0$ lorsque $|n| \to \infty$.

En 1973, T. Körner et R. Kaufman ont construit dans [29] et [27] un ensemble de Helson qui est un ensemble de multiplicité, c'est-à-dire qui supporte une distribution non nulle S vérifiant $\widehat{S}(n) \to 0$ lorsque $|n| \to \infty$.

Lev et Olevskii ont démonté en 2011 dans [32] l'existence d'un ensemble de Helson supportant une distribution non nulle à coefficients de Fourier dans $\ell^q(\mathbb{Z})$ pour $q > 2$. Cela démontre qu'il existe un phénomène de Piatetski-Shapiro dans $\ell^q(\mathbb{Z})$ lorsque $q > 2$.

Théorème 1.4.3 ([32])**.** *Soit $q > 2$. Il existe un ensemble de Helson K et il existe une distribution non nulle S supportée par K vérifiant*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{S}(n)|^q < \infty.$$

Ce résultat est la clef pour démontrer le résultat principal dans [32] sur la bicyclicité dans les espaces $\ell^p(\mathbb{Z})$. Nous l'utiliserons pour obtenir un résultat analogue sur la cyclicité dans le chapitre 3.

Chapitre 2

Bicyclicité dans les espaces $\ell^p(\mathbb{Z})$ à poids

Soit X un espace vectoriel métrique de distributions ou de fonctions complexes définies sur le cercle unité $\mathbb{T}$. On suppose que l'opérateur shift S, défini par

$$S(f)(z) = zf(z), \quad z \in \mathbb{T}$$

est un isomorphisme topologique de X sur lui même. Pour $f \in X$, on note $[f]_{\mathbb{Z}}^X$ le sous-espace vectoriel fermé engendré par $\{z^n f,\ n \in \mathbb{Z}\}$, autrement dit,

$$[f]_{\mathbb{Z}}^X = \overline{\operatorname{span}}^X \{z^n f,\ n \in \mathbb{Z}\} = \overline{\{Pf,\ P \in \mathcal{P}(\mathbb{T})\}}^X,$$

où $\mathcal{P}(\mathbb{T})$ est l'ensemble des polynômes trigonométriques sur $\mathbb{T}$. On dit que $f \in X$ est bicyclique dans X si $[f]_{\mathbb{Z}}^X = X$. On suppose de plus que X est un espace de Banach dans lequel $\mathcal{P}(\mathbb{T})$ est un sous-espace dense. On a alors la propriété d'approximation pondérée suivante : une fonction ou une distribution $f \in X$ est bicyclique dans X si et seulement s'il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes trigonométriques vérifiant

$$\lim_{n\to\infty} \|1 - P_n f\|_X = 0. \tag{2.0.1}$$

La bicyclicité se définit aussi dans des espaces de suites. Soit Y un espace vectoriel métrique de suites complexes indexées sur $\mathbb{Z}$. On suppose que l'opérateur shift S, défini par

$$S((u_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = (u_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}$$

est un isomorphisme topologique de Y sur lui même. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in Y$ est bicyclique dans Y si le sous-espace engendré par $\{(u_{n-k})_{n\in\mathbb{Z}},\ k \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans Y. Cette définition naturelle étend, grâce à la transformée de Fourier, celle de la bicyclicité dans les espaces de distributions. En effet reprenons X un espace de distributions vérifiant les propriétés précédentes. On définit $Y = \hat{X} = \{(\hat{T}(n))_{n\in\mathbb{Z}},\ T \in X\}$ l'image par la transformation de Fourier de l'espace X. Dès lors la transformée de Fourier est un isomorphisme entre X et Y et en munissant Y de la métrique issu de X, l'espace Y vérifie les propriétés précédentes car $\widehat{z^kT}(n) = \hat{T}(n-k)$. Ainsi une distribution $T \in X$ est bicyclique dans X si et seulement si $(\hat{T}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est bicyclique dans Y.

Dans ce chapitre nous nous intéressons à l'étude des suites bicycliques dans les espaces $\ell^p(\mathbb{Z})$ à poids. Nous nous intéresserons principalement aux espaces

$$\ell^p_\beta(\mathbb{Z}) = \left\{ (u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}},\ \sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|^p (1+|n|)^{\beta p} < \infty \right\}$$

avec $p \geq 1$ et $\beta \geq 0$. Pour simplifier les notations, nous établirons, dans toute la suite, les résultats dans les espaces

$$A^p_\beta(\mathbb{T}) = \left\{ S \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}),\ \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{S}(n)|^p (1+|n|)^{\beta p} < \infty \right\}.$$

D'après le paragraphe précédent, $\ell^p_\beta(\mathbb{Z})$ étant l'image par la transformée de Fourier de $A^p_\beta(\mathbb{T})$, les résultats sur la bicyclicité dans les espaces $\ell^p_\beta(\mathbb{Z})$ et $A^p_\beta(\mathbb{T})$ sont identiques. On notera $A(\mathbb{T})$ l'algèbre de Wiener qui correspond à l'espace $A^1_0(\mathbb{T})$ et de manière générale on notera $A^p(\mathbb{T})$ au lieu de $A^p_0(\mathbb{T})$.

Dans la première partie nous rappellerons les résultats connus sur la bicyclicité dans $A^p(\mathbb{T})$. Dans la deuxième partie nous étudierons les espaces $A^p_\beta(\mathbb{T})$. Dans la troisième partie nous construirons un ensemble de Cantor qui sera utile à la quatrième partie dans laquelle nous établirons nos résultats sur la bicyclicité dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$. En particulier nos deux résultats principaux, les théorèmes 2.4.5 et 2.4.7, donnent des conditions liant la bicyclicité d'une fonction f et son ensemble des zéros que l'on note $\mathcal{Z}(f)$. Enfin dans une dernière partie nous nous intéresserons à la bicyclicité dans les espaces $A^p(\omega, \mathbb{T})$ avec ω un poids à croissance lente, c'est-à-dire vérifiant $\omega_n = O((1+|n|)^\varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$.

2.1 Bicyclicité dans les espaces $\ell^p(\mathbb{Z})$

Les premiers résultats obtenus sur la bicyclicité dans $\ell^p(\mathbb{Z})$, que l'on identifiera à $A^p(\mathbb{T})$, ont été établis en 1932 par Norbert Wiener dans [48]. Il donne une caractérisation de la bicyclicité des fonctions dans $A(\mathbb{T})$ et des fonctions dans $A^2(\mathbb{T}) = L^2(\mathbb{T})$.

Théorème 2.1.1 ([48]). *(1) Une fonction $f \in A(\mathbb{T})$ est bicyclique dans $A(\mathbb{T})$ si et seulement si f ne s'annule pas sur $\mathbb{T}$.*

(2) Une fonction $f \in A^2(\mathbb{T})$ est bicyclique dans $A^2(\mathbb{T})$ si et seulement si f ne s'annule pas sur $\mathbb{T}$ sauf sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle.

Remarques
La caractérisation de la bicyclicité dans l'algèbre $A(\mathbb{T})$ peut se déduire de la propriété suivante : si une fonction $f \in A(\mathbb{T})$ ne s'annule pas sur $\mathbb{T}$ alors $1/f \in A(\mathbb{T})$. Pour une démonstration de ce résultat on peut se référer à (2.2.5) ou à [48] et [35].
La caractérisation de la bicyclicité dans $A^2(\mathbb{T})$ est une conséquence de la caractérisation suivante des sous-espaces bi-invariants de $L^2(\mathbb{T})$, c'est-à-dire des sous-espaces E fermés de $L^2(\mathbb{T})$ vérifiant $zE = E$. D'après un théorème de Wiener (voir [39, Theorem 1.2.1]), un sous-espace E est bi-invariant si et seulement s'il existe un (unique) ensemble mesurable A tel que $E = \{f \in L^2(\mathbb{T}),\ f|_A = 0\ p.p.\}$.

On note, pour une fonction $f \in C(\mathbb{T})$,

$$\mathcal{Z}(f) = \{z \in \mathbb{T},\ f(z) = 0\}.$$

Wiener se demandait [1] alors si l'ensemble des zéros $\mathcal{Z}(f)$ d'une fonction $f \in A(\mathbb{T})$ caractérisait la bicyclicité de f dans $A^p(\mathbb{T})$ pour $1 < p < 2$. Plusieurs travaux ont fait suite aux résultats de Wiener en liant la bicyclicité dans $A^p(\mathbb{T})$ d'une fonction f et la « taille » de l'ensemble de ses zéros, $\mathcal{Z}(f)$, mais sans obtenir de caractérisation lorsque $1 < p < 2$. Il est à noter que lorsque $p \geq 2$ on a la caractérisation suivante : une fonction $f \in A(\mathbb{T})$ est bicyclique dans $A^p(\mathbb{T})$ si et seulement si $\mathcal{Z}(f)$ ne supporte aucune fonction non nulle $g \in A^q(\mathbb{T})$ avec $q = p/(p-1)$. Ce résultat s'obtient grâce à la propriété 2.2.6 et au fait que $A^q(\mathbb{T})$ est un espace de fonctions quand $p \geq 2$.

En 1951, Arne Beurling détermina, dans [5], une condition suffisante, en terme de dimension de Hausdorff de l'ensemble des zéros, à la bicyclicité dans $A^p(\mathbb{T})$ pour $1 < p < 2$.

1. WIENER dans [48] : « My own suspicion is that the general theorem is at least true for $1 \leq p \leq 2$ ».

Théorème 2.1.2 ([5]). *Soit $f \in A(\mathbb{T})$ et $1 < p < 2$. Si*

$$\dim(\mathcal{Z}(f)) < \frac{2(p-1)}{p}$$

alors f est bicyclique dans $A^p(\mathbb{T})$.

Remarques
De manière équivalente le théorème peut se reformuler comme ceci à l'aide des capacités : si $\alpha < \frac{2(p-1)}{p}$ et si $C_\alpha(\mathcal{Z}(f)) = 0$ alors f est bicyclique dans $A^p(\mathbb{T})$. Ce résultat devient alors une conséquence du Théorème 1.2.2.
On peut remarquer, dans le théorème, l'hypothèse $f \in A(\mathbb{T})$. Elle permet notamment de définir précisément $\mathcal{Z}(f)$, l'ensemble des zéros de f. Mais on peut aussi noter que $\mathcal{Z}(f)$ est bien défini lorsque $f \in C(\mathbb{T})$ qui est une hypothèse plus faible que $f \in A(\mathbb{T})$. Cependant très peu de résultats sont connus sur la relation entre les zéros d'une fonction $f \in C(\mathbb{T})$ et sa bicyclicité dans $A^p(\mathbb{T})$, $1 < p < 2$. Dans [32, 7.2], les auteurs posent la question suivante : pour $f \in C(\mathbb{T}) \cap A^p(\mathbb{T})$, $1 < p < 2$, la condition $\mathcal{Z}(f) = \varnothing$ implique-t-elle que f est bicyclique dans $A^p(\mathbb{T})$?

La même année Raphaël Salem démontra dans [46] que la borne $\frac{2(p-1)}{p}$ du théorème précédent est optimale dans le sens suivant.

Théorème 2.1.3 ([46]). *Soit $1 < p < 2$. Si $\frac{2(p-1)}{p} < \alpha \leq 1$ alors il existe $f \in A(\mathbb{T})$ non bicyclique dans $A^p(\mathbb{T})$ vérifiant $\dim(\mathcal{Z}(f)) = \alpha$.*

Ce résultat est une conséquence du Théorème 1.3.6. On peut observer que les résultats de Beurling et de Salem ne traitent pas le cas $\dim(\mathcal{Z}(f)) = \frac{2(p-1)}{p}$. Nous montrerons dans la quatrième partie que le théorème de Salem reste vrai pour $\alpha = \frac{2(p-1)}{p}$.

En 1964, Donald J. Newman étudia, dans [34], le cas limite $\dim(\mathcal{Z}(f)) = \frac{2(p-1)}{p}$. Plus précisément il s'intéressa au cas où la α-mesure de Hausdorff de $\mathcal{Z}(f)$ est nulle pour $\alpha = \frac{2(p-1)}{p}$ avec $1 \leq p \leq 2$. Il posa la question suivante :

Question de Newman $(\star)$
L'égalité $H_\alpha(\mathcal{Z}(f)) = 0$ implique-t-elle que f est bicyclique dans $A^p(\mathbb{T})$?

Une réponse positive à cette question aurait pour corollaire immédiat les théorèmes de Wiener et de Beurling. Cependant cette question reste encore aujourd'hui ouverte. On montrera dans la quatrième partie qu'on peut avoir une réponse positive à cette question en remplaçant H_α par H_h la fonction déterminante de Hausdorff avec $h(t) = \frac{t^\alpha}{\log(e/t)^\gamma}$ où $\gamma > \alpha$ (au lieu de $h(t) = t^\alpha$ pour H_α).

Newman dans [34] répondit partiellement à cette question en introduisant la notion de α-mesure forte. Soit E un ensemble fermé de $\mathbb{T}$ et $\alpha \in]0,1]$. On considère la suite $]a_k, b_k[$ des intervalles contigus à E, c'est à dire que $\mathbb{T} \setminus E$ est égal à la réunion disjointe des intervalles $]a_k, b_k[$ et on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $b_{k+1} - a_{k+1} \leq b_k - a_k$. On pose

$$r_n = 2\pi - \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k).$$

On dit alors que E est de α-mesure forte 0 si

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{\alpha}-1} r_n = 0.$$

On peut voir que si E est de α-mesure forte 0 alors $H_\alpha(E) = 0$, la réciproque n'étant pas vraie en général (on peut construire des contre-exemples avec des ensembles dénombrables). Newman démontre le résultat suivant.

Théorème 2.1.4 ([34])**.** *Soit $f \in A(\mathbb{T})$ et $1 < p < 2$. Si $\mathcal{Z}(f)$ est de α-mesure forte 0 où $\alpha = \frac{2(p-1)}{p}$ alors f est bicyclique dans $A^p(\mathbb{T})$.*

Newman montre également qu'il existe toujours une fonction bicyclique dans $A^p(\mathbb{T})$ dont la dimension de Hausdorff de son ensemble de zéros est 1. Plus précisément :

Théorème 2.1.5 ([34])**.** *Il existe un ensemble fermé $E \subset \mathbb{T}$ tel que $\dim(E) = 1$ et tel que toute fonction $f \in A(\mathbb{T})$ vérifiant $\mathcal{Z}(f) = E$ est bicyclique dans $A^p(\mathbb{T})$.*

En 2011, Nir Lev et Alexander Olevskii infirment la conjecture de Wiener dans [32]. Ils démontrent que, pour $1 < p < 2$, on ne peut pas caractériser la bicyclicité dans $A^p(\mathbb{T})$ d'une fonction $f \in A(\mathbb{T})$, en utilisant uniquement $\mathcal{Z}(f)$, les zéros de f.

Théorème 2.1.6 ([32])**.** *Pour $1 < p < 2$, il existe deux fonctions f et g dans $A(\mathbb{T})$ vérifiant $\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}(g)$, et telles que l'une soit bicyclique dans $A^p(\mathbb{T})$ et l'autre non.*

2.2 Propriétés des espaces $A^p_\beta(\mathbb{T})$

Nous allons étudier dans cette partie des propriétés des espaces $A^p_\beta(\mathbb{T})$. L'espace $A^p_\beta(\mathbb{T})$ est défini, pour $1 \leq p < \infty$ et $\beta \in \mathbb{R}$, par

$$A^p_\beta(\mathbb{T}) = \Big\{ S \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}),\ \ \|S\|^p_{A^p_\beta} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{S}(n)|^p (1+|n|)^{p\beta} < \infty \Big\}.$$

L'espace $A^p_\beta(\mathbb{T})$ muni de la norme $\|\cdot\|_{A^p_\beta}$ est un espace de Banach isométriquement isomorphe, par la transformation de Fourier, à l'espace

$$\ell^p_\beta(\mathbb{Z}) = \Big\{ (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}},\ \ \|(u_n)\|^p_{\ell^p_\beta} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|^p (1+|n|)^{p\beta} < \infty \Big\}.$$

De plus il est facile de voir que l'espace $A^p_\beta(\mathbb{T})$ vérifie bien les propriétés de l'espace X décrites en introduction du présent chapitre, c'est-à-dire que l'opérateur shift est un isomorphisme topologique de $A^p_\beta(\mathbb{T})$ sur lui même et que $\mathcal{P}(\mathbb{T})$ est un sous-espace dense de $A^p_\beta(\mathbb{T})$. Notons que les notions de bicyclicité dans les espaces $A^p_\beta(\mathbb{T})$ et $\ell^p_\beta(\mathbb{Z})$ sont équivalentes. On notera dans toute la suite de ce chapitre $q = \frac{p}{p-1}$ le conjugué de p.

Dans le lemme suivant on s'intéresse aux différentes inclusions qu'il y a entre les espaces $\ell^p_\beta(\mathbb{Z})$. On a évidemment exactement les même inclusions pour les espaces $A^p_\beta(\mathbb{T})$.

Lemme 2.2.1. *Soit $1 \leq r, s < \infty$ et $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$.*

(1) Si $r \leq s$ alors $\ell^r_\beta(\mathbb{T}) \subset \ell^s_\gamma(\mathbb{T}) \iff \gamma \leq \beta$.

(2) Si $r > s$ alors $\ell^r_\beta(\mathbb{T}) \subset \ell^s_\gamma(\mathbb{T}) \iff \beta - \gamma > \frac{1}{s} - \frac{1}{r}$.

De plus toutes ces injections sont continues.

Démonstration. (1) : Soit $r \leq s$. Supposons que $\gamma \leq \beta$ et prenons $u \in \ell^r_\beta(\mathbb{T})$. On a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|^s (1+|n|)^{\gamma s} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|^s (1+|n|)^{\beta s} (1+|n|)^{(\gamma-\beta)s} \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|^s (1+|n|)^{\beta s} \\
&\leq \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|^r (1+|n|)^{\beta r} \right)^{s/r},
\end{aligned}$$

car $r \leq s$ donc $\|\cdot\|_{\ell^s} \leq \|\cdot\|_{\ell^r}$. Cela montre que $u \in \ell^s_\gamma(\mathbb{T})$ et que $\ell^r_\beta(\mathbb{T})$ s'injecte continûment dans $\ell^s_\gamma(\mathbb{T})$.

Reciproquement, supposons que $\gamma > \beta$. Prenons $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la suite vérifiant pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$u_n(1+|n|)^\beta = \begin{cases} \frac{1}{m^{2/r}} & \text{si } |n| = 2^m \text{ et } |n| \neq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi on a $u \in \ell^r_\beta(\mathbb{T})$. D'autre part on a pour $|n| = 2^m$,

$$|u_n|^s(1+|n|)^{\gamma s} = \Big(|u_n|(1+|n|)^\beta\Big)^s (1+|n|)^{(\gamma-\beta)s} = \frac{1}{m^{2s/r}}(1+2^m)^{(\gamma-\beta)s} \underset{|m|\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Donc $u \notin \ell^s_\gamma(\mathbb{T})$ ce qui démontre la réciproque.

(2) : Soit maintenant $r > s$. Supposons que $\beta - \gamma > \frac{1}{s} - \frac{1}{r}$. Prenons $u \in \ell^r_\beta(\mathbb{T})$ et $\delta = (\beta-\gamma)s$. En appliquant l'inégalité de Hölder avec $r' = \frac{r}{s} > 1$ et $s' = \frac{r}{r-s}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|^s(1+|n|)^{\gamma s} &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|^s(1+|n|)^{\gamma s}\frac{(1+|n|)^\delta}{(1+|n|)^\delta} \\
&\leq \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|^r(1+|n|)^{\gamma r}(1+|n|)^{\delta\frac{r}{s}}\right)^{\frac{s}{r}} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+|n|)^{-\delta\frac{r}{r-s}}\right)^{\frac{r-s}{r}} \\
&\leq \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|^r(1+|n|)^{\beta r}\right)^{\frac{s}{r}} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+|n|)^{-(\beta-\gamma)\frac{rs}{r-s}}\right)^{\frac{r-s}{r}} < \infty
\end{aligned}$$

car $(\beta-\gamma)\frac{rs}{r-s} > 1$ et $u \in \ell^r_\beta(\mathbb{T})$. Ainsi $u \in \ell^s_\gamma(\mathbb{T})$ et $\ell^r_\beta(\mathbb{T})$ s'injecte continûment dans $\ell^s_\gamma(\mathbb{T})$.

Considérons maintenant le cas $\beta - \gamma < \frac{1}{s} - \frac{1}{r}$. Prenons $\varepsilon > 0$ tel que

$$\beta - \gamma + \varepsilon < \frac{1}{s} - \frac{1}{r}.$$

Posons $\alpha = -\frac{1}{s} - \gamma + \varepsilon$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ la suite définie par $u_n = (1+|n|)^\alpha$. On a alors que

$$|u_n|^s(1+|n|)^{\gamma s} \underset{|n|\to\infty}{\sim} |n|^{\alpha s+\gamma s}.$$

Puisque $\alpha s + \gamma s = -1 + \varepsilon s > -1$, on a $u \notin \ell^s_\gamma(\mathbb{T})$. De plus

$$\alpha r + \beta r = \left(-\frac{1}{s} - \gamma + \varepsilon\right) r + \beta r < -1$$

car $\beta - \gamma + \varepsilon < \frac{1}{s} - \frac{1}{r}$. Ainsi $u \in \ell^r_\beta(\mathbb{T})$ ce qui démontre que $\ell^r_\beta(\mathbb{T}) \not\subset \ell^s_\gamma(\mathbb{T})$.

Il reste le cas $\beta - \gamma = \frac{1}{s} - \frac{1}{r}$. Prenons $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ vérifiant

$$u_n^r(1+|n|)^{\beta r} = \frac{1}{(1+|n|)\log(1+|n|)^{1+\varepsilon}}$$

avec $\varepsilon = \frac{r}{s} - 1 > 0$. On a donc que $u \in \ell^r_\beta(\mathbb{T})$. De plus

$$|u_n|^s(1+|n|)^{\gamma s} = \left(\frac{1}{(1+|n|)\log(1+|n|)^{1+\varepsilon}}\right)^{s/r} (1+|n|)^{(\gamma-\beta)s}.$$

Or $(\gamma-\beta)s = \frac{s}{r} - 1$ donc on obtient que

$$|u_n|^s(1+|n|)^{\gamma s} = \frac{1}{(1+|n|)\log(1+|n|)^{(1+\varepsilon)s/r}}$$

et comme $(1+\varepsilon)s/r = 1$, la série de terme général $|u_n|^s(1+|n|)^{\gamma s}$ diverge. Ainsi $u \notin \ell^s_\gamma(\mathbb{T})$ ce qui montre que $\ell^r_\beta(\mathbb{T}) \not\subset \ell^s_\gamma(\mathbb{T})$. □

Le résultat suivant est une généralisation de celui de Newman dans [34, Lemma 3] pour le cas $\beta = 0$. On rappelle que l'on note $q = \frac{p}{p-1}$ le conjugué de p.

Lemme 2.2.2. *Soit $p \in [1,2]$ et $\beta \geq 0$ vérifiant $\beta < 1/2 + 1/q$. Il existe $C > 0$, tel que pour toute suite $(c_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$,*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^p(1+|n|)^{p\beta} \leq C\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n|^2\right)^{\frac{3}{4}p-\frac{1}{2}-\frac{p\beta}{2}} \left(|c_0|^2 + \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2|c_n|^2\right)^{\frac{1}{2}-\frac{p}{4}+\frac{p\beta}{2}} \tag{2.2.1}$$

Démonstration. Commençons par démontrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour toute suite complexe $(c_n)_{n\geq 1}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^p(1+|n|)^{p\beta} \leq C\left(\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2\right)^{\frac{3}{4}p-\frac{1}{2}-\frac{p\beta}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^2|c_n|^2\right)^{\frac{1}{2}-\frac{p}{4}+\frac{p\beta}{2}}.$$

Sans perte de généralité supposons que $\sum_{n\geq 1} n^2|c_n|^2 < \infty$. Posons

$$x^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2 \quad \text{et} \quad x^2y^2 = \sum_{n=1}^{\infty}n^2|c_n|^2.$$

Notons que $y \geq 1$. En utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient lorsque $1 \leq p < 2$,

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq n\leq y} |c_n|^p(1+|n|)^{p\beta} &\leq \left(\sum_{1\leq n\leq y} |c_n|^2\right)^{\frac{p}{2}} \left(\sum_{1\leq n\leq y} (1+|n|)^{\frac{2p\beta}{2-p}}\right)^{1-\frac{p}{2}} \\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2\right)^{\frac{p}{2}} \left(y(1+y)^{\frac{2p\beta}{2-p}}\right)^{1-\frac{p}{2}} \\
&\leq 2^{p\beta} x^p y^{1-\frac{p}{2}+p\beta}.
\end{aligned}$$

D'autre part en posant $\gamma = \frac{2p}{2-p}(\beta - 1)$ lorsque $p \neq 2$, on a

$$\gamma < -1 \Leftrightarrow \beta < \frac{1}{2} + \frac{1}{q}.$$

Donc l'inégalité de Hölder nous donne,

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq y+1} |c_n|^p(1+|n|)^{p\beta} &\leq 2^{p\beta} \left(\sum_{n\geq y+1} n^2|c_n|^2\right)^{\frac{p}{2}} \left(\sum_{n\geq y+1} n^{\frac{2p(\beta-1)}{2-p}}\right)^{1-\frac{p}{2}} \\
&\leq 2^{p\beta} \left(x^2y^2\right)^{\frac{p}{2}} \left(\frac{-1}{\gamma+1}\right)^{1-p/2} \left(y^{1+\gamma}\right)^{1-\frac{p}{2}} \\
&\leq 2^{p\beta} \left(\frac{-1}{\gamma+1}\right)^{1-p/2} x^p y^{1-\frac{p}{2}+p\beta}.
\end{aligned}$$

Ainsi en posant

$$C = 2^{p\beta} \max\left(1, \left(\frac{-1}{\gamma+1}\right)^{1-p/2}\right),$$

on obtient que pour tout $1 \leq p < 2$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^p(1+|n|)^{p\beta} \leq Cx^py^{1-\frac{p}{2}+p\beta} = C\left(\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2\right)^{\frac{3}{4}p-\frac{1}{2}-\frac{p\beta}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^2|c_n|^2\right)^{\frac{1}{2}-\frac{p}{4}+\frac{p\beta}{2}}.$$

Si $p = 2$, le cas $\beta = 0$ est immédiat et lorsque $0 < \beta < 1$ on obtient par l'inégalité de Hölder,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2(1+|n|)^{2\beta} = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^{2-2\beta}|c_n|^{2\beta}(1+|n|)^{2\beta} \leq 2^{2\beta}\left(\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2\right)^{1-\beta} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^2|c_n|^2\right)^{\beta}.$$

Pour une suite complexe $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ on a donc

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} |c_n|^p(1+|n|)^{p\beta} \leq 2C\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n|^2\right)^{\frac{3}{4}p-\frac{1}{2}-\frac{p\beta}{2}}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2|c_n|^2\right)^{\frac{1}{2}-\frac{p}{4}+\frac{p\beta}{2}}$$

car les exposants $\frac{3}{4}p-\frac{1}{2}-\frac{p\beta}{2}$ et $\frac{1}{2}-\frac{p}{4}+\frac{p\beta}{2}$ sont positifs. De plus

$$|c_0|^p = \left(|c_0|^2\right)^{\frac{3}{4}p-\frac{1}{2}}\left(|c_0|^2\right)^{\frac{1}{2}-\frac{p}{4}} \leq \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n|^2\right)^{\frac{3}{4}p-\frac{1}{2}-\frac{p\beta}{2}}\left(|c_0|^2+\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2|c_n|^2\right)^{\frac{1}{2}-\frac{p}{4}+\frac{p\beta}{2}}.$$

On obtient alors le résultat en sommant les deux inégalités ci-dessus. □

Si on applique le lemme précédent dans les espaces $A^p_\beta(\mathbb{T})$, on obtient, en remarquant que $\widehat{f'}(n) = in\hat{f}(n)$, le résultat suivant.

Corollaire 2.2.3. *Soit $p\in[1,2]$ et $\beta\geq 0$ vérifiant $\beta<1/2+1/q$. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{T}$ telle que $f'\in A^2(\mathbb{T})$. On a*

$$\|f\|_{A^p_\beta} \lesssim \|f\|_{A^2}^{\frac{3}{2}-\frac{1}{p}-\beta}\left(\|f\|_{A^2}+\|f'\|_{A^2}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}+\beta}.$$

Le résultat suivant montre que l'espace $C^1(\mathbb{T})$ des fonctions continûment dérivables sur $\mathbb{T}$ se plonge dans l'espace $A^1_\beta(\mathbb{T})$ lorsque $\beta<1/2$.

Lemme 2.2.4. *Pour tout $g\in C^1(\mathbb{T})$ et $\beta<1/2$, on a*

$$\|g\|_{A^1_\beta} \leq \|g\|_\infty + 2^{1+\beta}\sqrt{\frac{1-\beta}{1-2\beta}}\|g'\|_\infty. \tag{2.2.2}$$

Démonstration. Soit $g\in C^1(\mathbb{T})$ et $\beta<1/2$. On a par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n\neq 0}|\hat{g}(n)|(1+|n|)^\beta\right)^2 &\leq \left(\sum_{n\neq 0}\frac{(1+|n|)^{2\beta}}{|n|^2}\right)\left(\sum_{n\neq 0}|n|^2|\hat{g}(n)|^2\right)\\
&\leq 2^{1+2\beta}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2-2\beta}}\right)\left(\sum_{n\neq 0}|n|^2|\hat{g}(n)|^2\right)\\
&\leq 2^{1+2\beta}\left(\int_1^\infty \frac{1}{t^{2-2\beta}}dt+1\right)\left(\sum_{n\neq 0}|n|^2|\hat{g}(n)|^2\right)\\
&\leq 2^{1+2\beta}\frac{2-2\beta}{1-2\beta}\left(\sum_{n\neq 0}|n|^2|\hat{g}(n)|^2\right)
\end{aligned}$$

Puisque $|\widehat{g'}(n)| = |n\hat{g}(n)|$, l'égalité de Parseval nous donne,

$$\begin{aligned}\|g\|_{A^1_\beta} &\leq |\hat{g}(0)| + 2^{\beta+1/2}\sqrt{\frac{2-2\beta}{1-2\beta}}\|g'\|_2 \\ &\leq \|g\|_\infty + 2^{1+\beta}\sqrt{\frac{1-\beta}{1-2\beta}}\|g'\|_\infty.\end{aligned}$$

□

Pour $p \neq 1$, on peut identifier l'espace dual de $A^p_\beta(\mathbb{T})$ avec $A^q_{-\beta}(\mathbb{T})$ où $q = \frac{p}{p-1}$. La dualité est donnée par

$$\langle S, T\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{S}(n)\widehat{T}(-n), \qquad S \in A^p_\beta(\mathbb{T}),\ T \in A^q_{-\beta}(\mathbb{T}).$$

On rappelle que pour $1 \leq p < \infty$, $\beta \geq 0$, $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ et $S \in A^p_\beta(\mathbb{T})$, le produit fS défini par

$$fS \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)\widehat{S}(n-k)\right) z^n, \tag{2.2.3}$$

vérifie

$$\|fS\|_{A^p_\beta} \leq \|f\|_{A^1_\beta}\|S\|_{A^p_\beta}. \tag{2.2.4}$$

On utilise pour montrer cela l'inégalité $(1+|n|)^\beta \leq (1+|n-k|)^\beta(1+|k|)^\beta$ pour n et k dans $\mathbb{Z}$ ainsi que les propriétés de la convolution dans les espaces $\ell^p(\mathbb{Z})$. De même pour $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ et $S \in A^p_{-\beta}(\mathbb{T})$ on définit le produit $fS \in A^p_{-\beta}(\mathbb{T})$ par la même formule que (2.2.3) et, en utilisant l'inégalité $(1+|n|)^{-\beta} \leq (1+|n-k|)^{-\beta}(1+|k|)^\beta$, on a

$$\|fS\|_{A^p_{-\beta}} \leq \|f\|_{A^1_\beta}\|S\|_{A^p_{-\beta}}.$$

Lemme 2.2.5. *Soit $1 \leq p < \infty$ et $0 \leq \beta < 1/2$. Soit $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ et $S \in A^p_{-\beta}(\mathbb{T})$. Si $\langle S, z^n f\rangle = 0$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, alors* $\operatorname{supp}(S) \subset \mathcal{Z}(f)$.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$\langle S, z^n f\rangle = \langle fS, z^n\rangle = 0,$$

donc $fS = 0$. Soit $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T})$ vérifiant $\operatorname{supp}(\varphi) \subset \mathbb{T} \setminus \mathcal{Z}(f)$. Supposons que nous avons

$$\frac{\varphi}{f} \in A^1_\beta(\mathbb{T}). \tag{2.2.5}$$

On obtient, en remarquant que $A^1_\beta(\mathbb{T}) \subset A^q_\beta(\mathbb{T})$ pour $q = p/(p-1)$,

$$\langle S, \varphi\rangle = \langle fS, \frac{\varphi}{f}\rangle = 0$$

ce qui démontre que $\mathrm{supp}(S) \subset \mathcal{Z}(f)$.
Maintenant prouvons la propriété (2.2.5). Nous allons utiliser la preuve de Newman, dans [35], sur l'inversibilité dans l'algèbre de Wiener de fonctions ne s'annulant pas. Soit

$$\varepsilon = \min\{|f(t)|,\ t \in \mathrm{supp}(\varphi)\} > 0$$

et $P \in \mathcal{P}(\mathbb{T})$ tel que $\|f - P\|_{A^1_\beta} \leq \varepsilon/3$. On considère la série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(P-f)^{n-1}}{P^n}\varphi. \tag{2.2.6}$$

et on va montrer qu'elle converge absolument dans $A^1_\beta(\mathbb{T})$. Pour tout $t \in \mathrm{supp}(\varphi)$, on a $|P(t)| \geq |f(t)| - |P(t) - f(t)| \geq \varepsilon - \|f - P\|_{A^1_\beta} \geq \frac{2}{3}\varepsilon$. Ainsi

$$\left\|\frac{\varphi}{P^n}\right\|_\infty \leq \left(\frac{3}{2\varepsilon}\right)^n \|\varphi\|_\infty.$$

De plus $\left(\frac{\varphi}{P^n}\right)' = \frac{\varphi' P - n\varphi P'}{P^{n+1}}$ donc

$$\left\|\left(\frac{\varphi}{P^n}\right)'\right\|_\infty \leq (\|\varphi' P\|_\infty + n\|\varphi P'\|_\infty)\left(\frac{3}{2\varepsilon}\right)^{n+1}.$$

En utilisant le lemme 2.2.4 on obtient

$$\left\|\frac{\varphi}{P^n}\right\|_{A^1_\beta} \leq \left(\|\varphi\|_\infty + 2^\beta\sqrt{\frac{1-\beta}{1-2\beta}}(\|\varphi' P\|_\infty + n\|\varphi P'\|_\infty)\frac{3}{\varepsilon}\right)\left(\frac{3}{2\varepsilon}\right)^n.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{(P-f)^{n-1}}{P^n}\varphi\right\|_{A^1_\beta} &\leq \|f-P\|^{n-1}_{A^1_\beta}\left\|\frac{\varphi}{P^n}\right\|_{A^1_\beta} \\
&\leq \left(\|\varphi\|_\infty + 2^\beta\sqrt{\frac{1-\beta}{1-2\beta}}(\|\varphi' P\|_\infty + n\|\varphi P'\|_\infty)\frac{3}{\varepsilon}\right)\frac{3}{\varepsilon 2^n}
\end{aligned}$$

ce qui démontre que la série (2.2.6) converge absolument dans $A^1_\beta(\mathbb{T})$. En remarquant que $f = \left(1 - \frac{P-f}{P}\right)P$ sur $\mathrm{supp}(\varphi)$ on obtient que

$$\frac{\varphi}{f} = \sum_{n\geq 1}\frac{(P-f)^{n-1}}{P^n}\varphi \in A^1_\beta(\mathbb{T}),$$

ce qui conclut la preuve. $\square$

La proposition suivante donne l'un des principaux outils pour monter qu'une fonction est bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$. Elle nous dit d'une part qu'une fonction bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$ a un ensemble de zéros « trop petit » pour supporter une mesure non nulle du dual de $A^p_\beta(\mathbb{T})$ et d'autre part qu'une fonction qui n'est pas bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$ a un ensemble de zéros « assez grand » pour supporter une distribution dans le dual de $A^p_\beta(\mathbb{T})$. Lorsque $\beta = 0$ cette proposition nous donne que l'ensemble des zéros caractérise la bicyclicité dans $A^p(\mathbb{T})$ lorsque $p \geq 2$. En effet cela vient du fait que le dual de $A^p(\mathbb{T})$ lorsque $p \geq 2$ est un espace de fonctions et donc de mesures. Lorsque $\beta > 0$ il n'est plus évident que l'ensemble des zéros caractérise la bicyclicité. De plus en combinant ce résultat avec les résultats du chapitre 1, on obtiendra dans la partie 2.4 des premiers résultats directs sur la bicyclicité.

Proposition 2.2.6. *Soit $1 < p < \infty$ et $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ avec $\beta \geq 0$. On a*

(1) Si f n'est pas bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$ alors il existe $S \in A^q_{-\beta}(\mathbb{T}) \setminus \{0\}$ tel que $\operatorname{supp}(S) \subset \mathcal{Z}(f)$.

(2) S'il existe une mesure $\mu \in A^q_{-\beta}(\mathbb{T})$ non nulle telle que $\operatorname{supp}(\mu) \subset \mathcal{Z}(f)$ alors f n'est pas bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$.

Démonstration. (1) Si f n'est pas bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$, par le théorème de Hahn-Banach, il existe $S \in A^q_{-\beta}(\mathbb{T}) \setminus \{0\}$ tel que

$$\langle S, z^n f\rangle = 0, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Donc, d'après le lemme 2.2.5, on a $\operatorname{supp}(S) \subset \mathcal{Z}(f)$.

(2) Soit $\mu \in A^q_{-\beta}(\mathbb{T}) \cap \mathcal{M}(\mathbb{T}) \setminus \{0\}$ tel que $\operatorname{supp}(\mu) \subset \mathcal{Z}(f)$. Puisque μ est une mesure sur $\mathbb{T}$ on a $\langle \mu, z^n f\rangle = 0$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Ainsi f n'est pas bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$. □

On rappelle que $A^1_\beta(\mathbb{T})$ est une algèbre de Banach (voir (2.2.4)). Soit I un idéal fermé de $A^1_\beta(\mathbb{T})$. On note $\mathcal{Z}_I$ l'ensemble des zéros communs des fonctions de I,

$$\mathcal{Z}_I = \bigcap_{f\in I} \mathcal{Z}(f).$$

Le résultat suivant est une propriété de synthèse spectrale dans $A^1_\beta(\mathbb{T})$. Nous adaptons la preuve dans [25, pp. 121-123] pour les espaces $A^1_\beta(\mathbb{T})$.

Lemme 2.2.7. *Soit $0 \leq \beta < 1/2$ et I un idéal fermé de $A^1_\beta(\mathbb{T})$. Si g est une fonction lipschitzienne qui s'annule sur $\mathcal{Z}_I$ alors $g \in I$.*

Démonstration. Soit $I^\perp$ l'ensemble des distributions S dans l'espace dual de $A^1_\beta(\mathbb{T})$ vérifiant $\langle S, f\rangle = 0$ pour tout $f \in I$. Soit g une fonction lipschitzienne qui s'annule sur $\mathcal{Z}_I$ et $S \in I^\perp$. D'après le lemme 2.2.5, $\mathrm{supp}(S) \subset \mathcal{Z}_I$. Soit, pour $h > 0$, la fonction

$$\Delta_h : t \mapsto \begin{cases} \frac{-|t|}{h^2} + \frac{1}{h} & \text{si } t \in [-h, h] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a

$$\widehat{\Delta_h}(0) = 1/2\pi \qquad \text{et} \qquad \widehat{\Delta_h}(n) = \frac{1}{2\pi} \frac{4\sin(nh/2)^2}{(nh)^2}, \qquad \text{pour } n \neq 0.$$

On définit $S_h = S * \Delta_h$ le produit de convolution entre S et Δ_h. Puisque $S \in A^1_{-\beta}(\mathbb{T})$, on a $S_h \in A^1(\mathbb{T})$. De plus

$$\mathrm{supp}(S_h) \subset \mathrm{supp}(S) + \mathrm{supp}(\Delta_h) \subset \mathcal{Z}_I^h := \mathcal{Z}_I + [-h, h],$$

et, puisque g est lipschitzienne et $\mathcal{Z}_I \subset \mathcal{Z}(g)$, pour tout $x \in \mathcal{Z}_I^h$, $|g(x)| \leq Ch$ avec C une constante strictement positive. Donc

$$\begin{aligned} |\langle S_h, g\rangle|^2 &= \left| \int_{\mathcal{Z}_I^h \setminus \mathcal{Z}(g)} S_h(x) g(x) \frac{dx}{2\pi} \right|^2 \\ &\leq \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{S}(n)\widehat{\Delta_h}(n)|^2 \right) \left(\int_{\mathcal{Z}_I^h \setminus \mathcal{Z}(g)} |g(x)|^2 dx \right) \\ &\leq C^2 \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|\widehat{S}(n)|^2}{(1+|n|)^2} \right) \left(|\mathcal{Z}_I^h \setminus \mathcal{Z}(g)| \right) \end{aligned}$$

où $|\mathcal{Z}_I^h \setminus \mathcal{Z}(g)|$ représente la mesure de Lebesgue de $\mathcal{Z}_I^h \setminus \mathcal{Z}(g)$.
Donc $\lim\limits_{h\to 0} \langle S_h, g\rangle = 0$. On obtient aussi par convergence dominée

$$\lim_{h\to 0} \langle S_h, g\rangle = \lim_{h\to 0} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{S_h}(n)\widehat{g}(-n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{S}(n)\widehat{g}(-n) = \frac{1}{2\pi}\langle S, g\rangle.$$

D'où $\langle S, g\rangle = 0$ puis finalement $g \in I$. □

Remarque
On peut améliorer l'hypothèse « g est une fonction lipschitzienne » par « $g \in \mathrm{Lip}_\beta(\mathbb{T})$ » ce qui signifie qu'il existe $C > 0$ tel que

$$|g(\zeta) - g(\zeta')| \leq C|\zeta - \zeta'|^\beta, \qquad \zeta, \zeta' \in \mathbb{T}.$$

La proposition suivante est un résultat de Carl S. Herz en 1957 présenté dans [23]. La preuve ressemble à celle du lemme précédent.

Proposition 2.2.8 ([23]). *Soit $p \in]1,\infty[$ et $f \in A(\mathbb{T})$. S'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f \in \mathrm{Lip}_\varepsilon(\mathbb{T})$ et s'il existe $S \in A^q(\mathbb{T}) \setminus \{0\}$ tel que $\mathrm{supp}(S) \subset \mathcal{Z}(f)$ alors f n'est pas bicyclique dans $A^p(\mathbb{T})$.*

Le résultat suivant est un résultat établi par Newman dans [34, Lemma 2] pour le cas $\beta = 0$. Il caractérise les ensembles fermés E pour lesquels toute fonction de $A^p_\beta(\mathbb{T})$ ayant E pour ensemble de zéros est bicyclique. Ces ensembles sont appelés des « p-spanning-set » dans [34] lorsque $\beta = 0$. Le résultat suivant ramène le problème de tels ensembles E en un problème d'existence d'une seule fonction lipschitzienne bicyclique s'annulant sur E.

Lemme 2.2.9. *Soit $0 \leq \beta < 1/2$ et E un sous-ensemble fermé de $\mathbb{T}$. Il existe une suite (f_n) de fonctions lipschitziennes qui s'annulent sur E et telle que*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - 1\|_{A^p_\beta} = 0$$

si et seulement si toute fonction $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ vérifiant $\mathcal{Z}(f) = E$ est bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$.

De plus la suite (f_n) peut-être prise de la forme $f_n = P_n f$ avec (P_n) une suite de polynômes trigonométriques et f une fonction lipschitzienne.

Démonstration. Supposons qu'il existe une suite (f_n) de fonctions lipschitziennes qui s'annulent sur E et telle que

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - 1\|_{A^p_\beta} = 0.$$

Soit $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ vérifiant $\mathcal{Z}(f) = E$. Considérons I le sous-espace vectoriel fermé de $A^1_\beta(\mathbb{T})$ engendré par $\{Pf,\ P \in \mathcal{P}(\mathbb{T})\}$. En fait I est un idéal fermé de $A^1_\beta(\mathbb{T})$ car $\mathcal{P}(\mathbb{T})$ est dense dans $A^1_\beta(\mathbb{T})$. Donc pour tout $P \in \mathcal{P}(\mathbb{T})$ et $n \in \mathbb{N}$, on a, d'après le lemme 2.2.7, que $Pf_n \in I$ et on a

$$\|Pf_n - P\|_{A^p_\beta} \leq \|P\|_{A^1_\beta} \|f_n - 1\|_{A^p_\beta} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Puisque $\mathcal{P}(\mathbb{T})$ est dense dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$, on a que I est aussi dense dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$, ce qui démontre que f est cyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$.

Réciproquement on suppose que toute fonction $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ vérifiant $\mathcal{Z}(f) = E$ est cyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$. On prend alors une fonction $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ lipschitzienne vérifiant $\mathcal{Z}(f) = E$, par exemple $f(t) = d(t, E)$. La fonction f est alors cyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$ et ainsi on a l'existence d'une suite de polynômes trigonométriques (P_n) vérifiant

$$\lim_{n\to\infty} \|P_n f - 1\|_{A^p_\beta} = 0$$

ce qui prouve la réciproque. □

2.3 Ensembles de Cantor généralisés

Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{T}$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on définit l'ensemble $k \times E$ par

$$k \times E = \left\{ x = \sum_{i=1}^{k} x_i,\ x_i \in E \right\}.$$

Le but de cette partie est de construire pour tout $0 < \alpha < 1$ un ensemble compact E vérifiant pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\dim(E) = \alpha \quad \text{et} \quad C_\alpha(k \times E) = 0.$$

Cela entraîne en particulier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\dim(E) = \dim(k \times E) = \alpha.$$

Pour cela nous allons nous intéresser aux ensembles de Cantor généralisés (voir [40] et [12]). Il s'agit d'un cas particulier d'ensembles parfaits de translation (voir partie 1.3). En effet dans la construction d'un ensemble de Cantor généralisé, par rapport à un ensemble parfait de translation, on impose, lors du passage de l'étape $n-1$ à n, que les intervalles soient équidistants. On part d'un intervalle de longueur l_0 et à la première étape on enlève (au milieu) k_1-1 intervalles ouverts de longueur d_1 de sorte à ne garder que k_1 intervalles fermés équidistants de même longueur l_1. A la deuxième étape on applique le même procédé à chaque intervalle obtenu par l'étape précédente mais en gardant cette fois k_2 intervalles fermés équidistants de longueur l_2. On itère ce procédé et on appelle ensembles de Cantor généralisé l'intersection des tous les intervalles construits à chaque étape. Plus précisément :

Définition 2.3.1. *Soit $(k_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers et $(l_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs vérifiant $k_0 = 1$ et pour tout $j \geq 1$,*

$$k_j \geq 2 \quad \text{et} \quad k_j l_j < l_{j-1}.$$

Posons $p_n = \prod_{j=0}^{n} k_j$. On définit $E_0 = [0, l_0]$ et on construit par récurrence une suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles compacts : pour $n \geq 1$ on suppose que E_{n-1}, déjà construit, est réunion de p_{n-1} intervalles fermés de longueur l_{n-1}. On construit alors E_n à partir de E_{n-1} en remplaçant chaque intervalle de E_{n-1} par une réunion de k_n intervalles fermés équidistants de longueur l_n et on impose que les bornes des intervalles de E_{n-1} soit dans E_n. Plus précisément si

$$E_{n-1} = \bigcup_{j=1}^{p_{n-1}} [a_j, a_j + l_{n-1}]$$

alors on définit

$$E_n = \bigcup_{j=1}^{p_{n-1}} \bigcup_{s=0}^{k_n-1} [a_j + s(l_n + d_n), a_j + s(l_n + d_n) + l_n]$$

avec $d_n = \dfrac{l_{n-1} - k_n l_n}{k_n - 1}$ *correspondant à la distance séparant deux intervalles de* $[a_j, b_j]$. *On définit alors*

$$E = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n.$$

Un tel ensemble E *est appelé ensemble de Cantor généralisé associé aux suites* $(k_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *et* $(l_j)_{j\in\mathbb{N}}$.

Le théorème suivant est un résultat de Ohtsuka ([40]) qui permet d'établir une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble de Cantor généralisé soit de α-capacité nulle pour $\alpha \neq 0$ et de capacité logarithmique nulle pour $\alpha = 0$.

Théorème 2.3.2 ([40] et [12])**.** *Soit* $0 \leq \alpha < 1$ *et* E *un ensemble de Cantor généralisé associé à des suites* $(k_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *et* $(l_j)_{j\in\mathbb{N}}$. *On a, en posant* $p_n = \prod_{j=0}^{n} k_j$,

$$\begin{cases} C_\alpha(E) = 0 \Longleftrightarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} p_n^{-1} l_n^{-\alpha} = \infty & si \quad \alpha \neq 0 \\ C_\alpha(E) = 0 \Longleftrightarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} p_n^{-1} \log(1/l_n) = \infty & si \quad \alpha = 0. \end{cases}$$

Remarque

Lorsque pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $k_j = 2$ l'ensemble de Cantor généralisé est appelé ensemble parfait symétrique ([25, I.2]). Le théorème ci-dessus est alors une généralisation du théorème de Carleson [7] pour les ensembles parfaits symétriques.

Pour $x \in \mathbb{R}$ on notera $[x]$ la partie entière de x. On commence tout d'abord par faire quelques rappels sur la décomposition binaire des réels de $[0, 1[$. Pour tout $x \in [0, 1[$, il existe une unique suite $(x_i)_{i\geq 0}$ à valeurs dans $\{0, 1\}$ non identiquement égale à 1 à partir d'un certain rang, c'est-à-dire vérifiant pour tout $n \geq 0$, il existe $m \geq n$ tel que $x_m = 0$, et telle que

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_i}{2^{i+1}}.$$

On appelle cette suite la décomposition binaire de x. De plus on a pour tout $i \geq 0$,

$$x_i = \left[2^{i+1}x\right] - 2\left[2^i x\right].$$

On définit, pour $\lambda \in]0,1[$ et $k \in \mathbb{N}^*$,

$$K_\lambda^k = \left\{m \in \mathbb{N},\ \exists j \in \mathbb{N},\ m \in [2^j, 2^j(1+\lambda+1/j) - k + 1]\right\}.$$

et on considère, dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, l'ensemble

$$S_\lambda^k = \left\{x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_i}{2^{i+1}},\ (x_i) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \text{ such that } i \in K_\lambda^k \Rightarrow x_i = 0\right\}.$$

On notera K_λ au lieu de K_λ^1 et S_λ au lieu S_λ^1. Notons que si $k_1 \leq k_2$ et $\lambda_1 \leq \lambda_2$ alors

$$K_{\lambda_1}^{k_2} \subset K_{\lambda_2}^{k_1} \subset K_{\lambda_2}$$

et donc

$$S_{\lambda_2} \subset S_{\lambda_2}^{k_1} \subset S_{\lambda_1}^{k_2}.$$

Proposition 2.3.3. *Pour tout $k \geq 1$ et $\alpha \neq 0$, on a*

(1) $k \times S_\lambda \subset S_\lambda^k$;

(2) $C_\alpha(S_\lambda^k) = 0$ *si et seulement si* $\alpha \geq \frac{1-\lambda}{1+\lambda}$;

(3) $\dim(k \times S_\lambda) = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}$ *et* $C_{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}}(k \times S_\lambda) = 0$.

Démonstration. (1) : On va démontrer cette propriété par récurrence. La propriété est vraie pour $k = 1$ car on a on a $S_\lambda = S_\lambda^1$. Supposons le résultat vrai pour $k-1$ avec $k \geq 2$ et montrons que $k \times S_\lambda \subset S_\lambda^k$. Nous avons

$$k \times S_\lambda = (k-1) \times S_\lambda + S_\lambda \subset S_\lambda^{k-1} + S_\lambda.$$

Soit $x \in S_\lambda^{k-1}$, $y \in S_\lambda$. Montrons que $z = x+y$ appartient à S_λ^k. On note (x_i), (y_i) et (z_i) les décompositions binaires des nombres x, y, z. Soit $m \in K_\lambda^k$. Il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $m \in [2^j, 2^j(1+\lambda+1/j) - k + 1]$. Puisque $m \in K_\lambda^k$, m et $m+1$ sont dans $K_\lambda^{k-1} \subset K_\lambda$, donc on obtient que $x_m = y_m = x_{m+1} = y_{m+1} = 0$. Donc

$$z = x + y = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{x_i + y_i}{2^{i+1}} + \sum_{i=m+2}^{\infty} \frac{x_i + y_i}{2^{i+1}}. \tag{2.3.1}$$

En remarquant qu'il existe $i \geq m+2$ tel que $x_i + y_i < 2$, on peut alors voir que

$$\sum_{i=m+2}^{\infty} \frac{x_i + y_i}{2^{i+1}} < \frac{1}{2^{m+1}}$$

et donc

$$\left[2^{m+1} z\right] = 2\left[2^m z\right] = 2^{m+1} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{x_i + y_i}{2^{i+1}}.$$

Ainsi par la définition de la décomposition binaire, on a

$$z_m = \left[2^{m+1} z\right] - 2\left[2^m z\right] = 0.$$

Cela démontre que $z = x + y \in S_\lambda^k$ et ainsi $k \times S_\lambda \subset S_\lambda^k$.

(2) : Nous allons étudier la capacité de S_λ^k en le décomposant. Montrons d'abord que S_λ^k est un ensemble de Cantor généralisé. Soit

$$\nu_j = [2^j(1 + \lambda + 1/j) - k + 1] + 1$$

et N_0 (dépendant seulement de k et λ) tel que pour tout $j \geq N_0$, $2^j < \nu_j < 2^{j+1}$. On définit pour $N \geq N_0$,

$$l_N = \sum_{j=N}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\nu_j}} - \frac{1}{2^{2^{j+1}}} \right). \tag{2.3.2}$$

Puisque $2^j(1 + \lambda + 1/j) - k + 1 < \nu_j \leq 2^j(1 + \lambda + 1/j) - k + 2$, on a

$$\sum_{j=N}^{\infty} \frac{1}{2^{2^j(1+\lambda+\frac{1}{j})}} \left(\frac{1}{2^{2-k}} - \frac{1}{2^{2^j(1-\lambda-\frac{1}{j})}} \right) \leq l_N \leq \sum_{j=N}^{\infty} \frac{1}{2^{2^j(1+\lambda+\frac{1}{j})}} \left(\frac{1}{2^{1-k}} - \frac{1}{2^{2^j(1-\lambda-\frac{1}{j})}} \right)$$

D'une part, il existe $C \geq 1$ tel que pour tout $j \geq N$,

$$\frac{1}{C} \leq \frac{1}{2^{2-k}} - \frac{1}{2^{2^j(1-\lambda-\frac{1}{j})}} \leq \frac{1}{2^{1-k}} - \frac{1}{2^{2^j(1-\lambda-\frac{1}{j})}} \leq C.$$

De plus, pour $N \geq N_0$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^{2^N(1+\lambda+\frac{1}{N})}} \leq \sum_{j=N}^{\infty} \frac{1}{2^{2^j(1+\lambda+\frac{1}{j})}} &\leq \frac{1}{2^{2^N(1+\lambda+\frac{1}{N})}} + \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{2^{N+1}(1+\lambda)}} \right)^{2^j} \\
&\leq \frac{1}{2^{2^N(1+\lambda+\frac{1}{N})}} + \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{2^{N+1}(1+\lambda)}} \right)^{j+1} \\
&\leq \frac{1}{2^{2^N(1+\lambda+\frac{1}{N})}} + \frac{2}{2^{2^{N+1}(1+\lambda)}} \\
&\leq \frac{3}{2^{2^N(1+\lambda+\frac{1}{N})}}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient que

$$\frac{C_1}{2^{2^N(1+\lambda+\frac{1}{N})}} \leq l_N \leq \frac{C_2}{2^{2^N(1+\lambda+\frac{1}{N})}}, \tag{2.3.3}$$

avec $C_1 = 1/C$ et $C_2 = 3C$. De plus, par (2.3.2), on a

$$l_N = \frac{1}{2^{\nu_N}} - \sum_{j=N+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{2^j}} - \frac{1}{2^{\nu_j}} \right) < \frac{1}{2^{\nu_N}} \leq \frac{1}{2^{2^N}}. \tag{2.3.4}$$

On définit, pour $N \geq N_0$,

$$E_N = \left\{ \sum_{i=0}^{2^N-1} \frac{x_i}{2^{i+1}} + l_N z,\ z \in [0,1[,\ x_i \in \{0,1\},\ i \in K_\lambda^k \Rightarrow x_i = 0 \right\}.$$

On peut voir E_N comme une union disjointe d'intervalles en écrivant

$$E_N = \bigcup_{\substack{(x_i) \in \{0,1\}^{2^N} \\ i \in K_\lambda^k \Rightarrow x_i = 0}} E_N^{(x_i)},$$

où, pour (x_i) fixé,

$$E_N^{(x_i)} = \sum_{i=0}^{2^N-1} \frac{x_i}{2^{i+1}} + l_N[0,1[.$$

Les intervalles $E_N^{(x_i)}$ sont disjoints, c'est-à-dire $E_N^{(x_i)} \cap E_N^{(x_i')} = \varnothing$ lorsque $(x_i) \neq (x_i')$ car d'après (2.3.4), $l_N < 1/2^{2^N}$.

Pour un $N \geq N_0$ fixé, soit $(x_i)_{0 \leq i \leq 2^N-1} \in \{0,1\}^{2^N}$ et $(y_i)_{0 \leq i \leq 2^{N+1}-1} \in \{0,1\}^{2^{N+1}}$. Montrons maintenant l'assertion suivante :

$$\begin{gathered} \diamondsuit : E_{N+1}^{(y_i)} \subset E_N^{(x_i)} \text{ si et seulement si} \\ x_i = y_i \text{ pour tout } 0 \leq i < 2^N \text{ et } y_i = 0 \text{ pour tout } 2^N \leq i < \nu_N. \end{gathered}$$

Supposons que $E_{N+1}^{(y_i)} \subset E_N^{(x_i)}$ et posons $u \in E_{N+1}^{(y_i)}$. On a

$$u = \sum_{i=0}^{2^{N+1}-1} \frac{y_i}{2^{i+1}} + l_{N+1} z_2 = \sum_{i=0}^{2^N-1} \frac{x_i}{2^{i+1}} + l_N z_1,$$

où z_1 et z_2 sont dans $[0,1[$. Par (2.3.4), $l_N < 1/2^{\nu_N}$, et en utilisant l'unicité de la décomposition binaire, on obtient $x_i = y_i$ pour tout $0 \leq i < 2^N$ et $y_i = 0$ pour tout $2^N \leq i < \nu_N$.

Maintenant supposons $x_i = y_i$ pour tout $0 \leq i < 2^N$ et $y_i = 0$ pour tout $2^N \leq i < \nu_N$. Soit $u \in E_{N+1}^{(y_i)}$. On écrit

$$u = \sum_{i=0}^{2^N-1} \frac{x_i}{2^{i+1}} + \sum_{i=\nu_N}^{2^{N+1}-1} \frac{y_i}{2^{i+1}} + l_{N+1} z,$$

où $z \in [0, 1[$. Or on a d'après (2.3.2),

$$\sum_{i=\nu_N}^{2^{N+1}-1} \frac{1}{2^{i+1}} + l_{N+1} = \frac{1}{2^{\nu_N}} - \frac{1}{2^{2^{N+1}}} + l_{N+1} = l_N. \tag{2.3.5}$$

Alors on obtient

$$\sum_{i=0}^{2^N-1} \frac{x_i}{2^{i+1}} \leq \sum_{i=0}^{2^N-1} \frac{x_i}{2^{i+1}} + \sum_{i=\nu_N}^{2^{N+1}-1} \frac{y_i}{2^{i+1}} + l_{N+1} z \leq \sum_{i=0}^{2^N-1} \frac{x_i}{2^{i+1}} + l_N,$$

et $u \in E_N^{(x_i)}$. Cela conclut la preuve de $\diamondsuit$.

Grâce à $\diamondsuit$, pour un (x_i) fixé et pour $N \geq N_0$, on obtient les propriétés suivantes :

(i) l'intervalle $E_N^{(x_i)}$ contient précisément

$$k_{N+1} = \#\{(y_i)_{\nu_N \leq i \leq 2^{N+1}-1} : y_i \in \{0, 1\}\} = 2^{2^{N+1}-\nu_N}$$

intervalles de la forme $E_{N+1}^{(y_i)}$;

(ii) les intervalles de la forme $E_{N+1}^{(y_i)}$ contenus dans $E_N^{(x_i)}$ sont des intervalles équidistants de longueur l_{N+1} : la distance entre deux intervalles contigus de la forme $E_{N+1}^{(y_i)}$ est égal à $\frac{1}{2^{2^{N+1}}} - l_{N+1}$;

(iii) si on note $E_N^{(x_i)} = [a, b]$ alors il existe (y_i) et (z_i) tel que $E_{N+1}^{(y_i)} = [a, a + l_{N+1}]$ et $E_{N+1}^{(z_i)} = [b - l_{N+1}, b]$.

Finalement on écrit S_λ^k comme

$$S_\lambda^k = \bigcap_{N \geq N_0} E_N.$$

Cela démontre que S_λ^k est un ensemble de Cantor généralisé. Ainsi par le théorème 2.3.2, on obtient pour $0 < \alpha < 1$ que $C_\alpha(S_\lambda^k) = 0$ si et seulement si

$$\sum_{N=N_0}^{\infty} \frac{1}{(k_{N_0} \cdots k_N) l_N^\alpha} = \infty$$

avec $k_{N_0} = 1$. Puisque

$$2^{(k-2)(N-N_0)+(2^N-2^{N_0})(1-\lambda)-\sigma_N} \leq k_{N_0} \cdots k_N \leq 2^{(k-1)(N-N_0)+(2^N-2^{N_0})(1-\lambda)-\sigma_N},$$

où

$$\sigma_N = \sum_{j=N_0}^{N-1} \frac{2^j}{j},$$

on a, d'après (2.3.3), que $C_\alpha(S_\lambda^k) = 0$ si et seulement si

$$\sum_{N=N_0}^{\infty} 2^{2^N(\alpha(1+\lambda)-(1-\lambda))+\alpha 2^N/N+\sigma_N-(k-1)(N-N_0)+2^{N_0}(1-\lambda)} = \infty.$$

Ainsi $C_\alpha(S_\lambda^k) = 0$ si et seulement si $\alpha \geq \frac{1-\lambda}{1+\lambda}$.

(3) est une conséquence directe de (1) et (2) en utilisant (1.2.3) et le fait que si $A \subset B$ alors $C_\alpha(A) \leq C_\alpha(B)$. $\square$

2.4 Bicyclicité dans les espaces $\ell^p_\beta(\mathbb{Z})$

Dans cette partie nous nous intéressons à la bicyclicité dans les espaces $A^p_\beta(\mathbb{T})$ avec $p \geq 1$ et $\beta \geq 0$. On notera dans toute la suite $q = \frac{p}{p-1}$ le conjugué de p.

2.4.1 Théorèmes de type Beurling, Salem et Newman

Nous cherchons ici des analogues aux théorèmes de Beurling, Salem et Newman dans les espaces à poids.

Tout d'abord un cas où la bicyclicité est simple à étudier est le cas où $A^p_\beta(\mathbb{T})$ est une algèbre. En effet dans ce cas on peut appliquer la théorie de Gelfand sur les idéaux maximaux des algèbres de Banach commutatives (voir [18] et [26]) et obtenir un résultat similaire au théorème 2.1.1 de Wiener portant sur la bicyclicité dans $A^1(\mathbb{T})$. De plus, d'après [16, Corollary 3.2.9], l'espace $A^p_\beta(\mathbb{T})$ est une algèbre de Banach si et seulement si $\beta q > 1$. On obtient ainsi le résultat suivant :

Théorème 2.4.1. *Soit $1 \leq p < \infty$ et $\beta \geq 0$. On suppose que $\beta q > 1$. Une fonction $f \in A^p_\beta(\mathbb{T})$ est bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$ si et seulement si f ne s'annule pas sur $\mathbb{T}$.*

On suppose maintenant que $\beta q \leq 1$. Un autre cas où l'on possède une caractérisation de la bicyclicité c'est le cas $p = 2$. En effet Richter, Ross et Sundberg ont démontré le résultat suivant.

Théorème 2.4.2 ([43]). *Soit $0 < \beta \leq \frac{1}{2}$ et $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$. La fonction f est bicyclique dans $A^2_\beta(\mathbb{T})$ si et seulement si $C_{1-2\beta}(\mathcal{Z}(f)) = 0$.*

On remarque que ce résultat peut être vu comme l'analogue au théorème 2.1.1 de Wiener qui caractérise la bicyclicité dans $A^2(\mathbb{T})$. On s'intéresse alors à la bicyclicité des fonctions de $A^p_\beta(\mathbb{T})$ lorsque $1 \leq p \leq 2$.

Pour énoncer le prochain résultat nous avons besoin d'un résultat de représentation des éléments du dual de $C^1(\mathbb{T})$. On rappelle que l'on note $C(\mathbb{T})$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{T}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Dans la suite on verra $\mathbb{T}$ comme $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et donc on identifiera $C(\mathbb{T})$ à l'espace $\{f \in C([0, 2\pi]),\ f(0) = f(2\pi)\}$. On note $C^1(\mathbb{T})$ l'espace des fonctions $f \in C(\mathbb{T})$ dérivables sur $\mathbb{T}$ telles que $f' \in C(\mathbb{T})$. On munit $C^1(\mathbb{T})$ de la norme $\|f\|_{C^1(\mathbb{T})} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.

Lemme 2.4.3. *Si L est une forme linéaire continue sur $C^1(\mathbb{T})$ alors il existe μ une mesure borélienne complexe sur $\mathbb{T}$ vérifiant pour tout $g \in C^1(\mathbb{T})$,*

$$L(g) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} g'(t)d\mu(t) + L(1)\int_0^{2\pi} g(t)dt\right).$$

Démonstration. Soit L est une forme linéaire continue sur $C^1(\mathbb{T})$. On pose

$$E = \left\{f \in C(\mathbb{T}),\ \int_0^{2\pi} f(t)dt = 0\right\}.$$

Il est facile de voir que E est un sous-espace vectoriel fermé de $C(\mathbb{T})$. On considère alors T la forme linéaire définie sur E par $T(f) = L(h)$ pour tout $f \in E$ avec h définie par

$$h : x \mapsto \int_0^x f(t)dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^u f(t)dtdu.$$

On a pour tout $f \in E$,

$$|T(f)| \leq \|L\|\|h\|_{C^1(\mathbb{T})} = \|L\|(\|h\|_\infty + \|f\|_\infty) \lesssim \|f\|_\infty$$

donc T est continue sur E. Ainsi par le théorème d'Hahn-Bancah T se prolonge en une forme linéaire continue sur $C([0, 2\pi])$ et par le théorème de représentation de Riesz, il existe μ une mesure borélienne complexe sur $\mathbb{T}$ vérifiant pour tout $f \in E$,

$$T(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) d\mu(t).$$

Soit maintenant $g \in C^1(\mathbb{T})$. On pose $f = g'$. On a $f \in E$ et $g(x) = g(0) + \int_0^x f(t)dt$. On obtient alors que

$$h(x) = \int_0^x f(t)dt - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^u f(t)dtdu = g(x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t)dt.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} L(g) &= L\left(g - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t)dt\right) + L(1)\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t)dt \\ &= T(f) + L(1)\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} f(t)d\mu(t) + L(1) \int_0^{2\pi} g(t)dt\right) \end{aligned}$$

ce qui démontre le résultat. □

La proposition suivante nous donne une condition suffisante sur l'ensemble des zéros pour qu'une fonction soit bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$. Cette condition porte à la fois sur la taille de l'ensemble des zéros en terme de capacité mais aussi sur la structure algébrique de cet ensemble. Ce résultat est de même nature que celui de Newman, [34, lemma 6], dans le cas $\beta = 0$. Dans ce cas Newman utilise la mesure de Lebesgue au lieu des capacités. On rappelle que pour $f, g \in L^1(\mathbb{T})$, le produit de convolution entre f et g, noté $f * g$, est l'application définie sur $\mathbb{T}$ par

$$(f * g)(x) = \int_0^{2\pi} f(x - t)g(t)\frac{dt}{2\pi}.$$

Proposition 2.4.4. *Soit $1 < p < 2$ et $\beta > 0$ tel que $\beta q \leq 1$. Soit $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$.*

(a) Si $k \in \mathbb{N}^*$ vérifie $k \leq q/2$ et si $C_\alpha(k \times \mathcal{Z}(f)) = 0$ pour un $\alpha < \frac{2}{q}(1 - \beta q)k$, alors f est bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$.

(b) Si $k \in \mathbb{N}^*$ vérifie $q/2 \leq k \leq 1/(2\beta)$ et si $C_\alpha(k \times \mathcal{Z}(f)) = 0$ où $\alpha = 1 - 2k\beta$, alors f est bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$.

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ n'est pas bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$. Alors il existe $L \in A^q_{-\beta}(\mathbb{T})$, le dual de $A^p_\beta(\mathbb{T})$, tel que

$$L(1) = 1 \quad \text{et} \quad L(Pf) = 0, \quad \forall P \in \mathcal{P}(\mathbb{T}). \tag{2.4.1}$$

Puisque $\beta < \frac{1}{2}$, on obtient, d'après le lemme 2.2.4, que $C^1(\mathbb{T}) \subset A^1_\beta(\mathbb{T}) \subset A^p_\beta(\mathbb{T})$ tous ces plongements étant continus. Ainsi L appartient au dual de $C^1(\mathbb{T})$ et comme $L(1) = 1$, il existe, d'après le lemme 2.4.3, une mesure borélienne μ telle que

$$L(g) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} g'(x)d\mu(x) + \int_0^{2\pi} g(x)dx\right), \qquad \forall g \in C^1(\mathbb{T}).$$

Puisque $L \in A^q_{-\beta}(\mathbb{T})$ on a que $(L(e_n))_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^q_{-\beta}(\mathbb{Z})$ avec $e_n : t \mapsto e^{int}$ car $L(e_n) = \langle L, z^n\rangle = \widehat{L}(-n)$. De plus $L(e_n) = in\widehat{\mu}(-n)$ lorsque $n \neq 0$, donc

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n\widehat{\mu}(n)|^q(1+|n|)^{-\beta q} < \infty. \tag{2.4.2}$$

On peut noter que μ est une fonction de $L^2(\mathbb{T})$. En effet, l'inégalité de Hölder nous donne,

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{\mu}(n)|^2 &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{\mu}(n)|^2(1+|n|)^{2(1-\beta)}(1+|n|)^{2(\beta-1)} \\
&\leq \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{\mu}(n)|^q(1+|n|)^{q(1-\beta)}\right)^{2/q}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+|n|)^{2(\beta-1)q/(q-2)}\right)^{1-2/q} \\
&\lesssim \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n\widehat{\mu}(n)|^q(1+|n|)^{-\beta q}\right)^{2/q}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}(1+|n|)^{2(\beta-1)q/(q-2)}\right)^{1-2/q}.
\end{aligned}$$

En utilisant (2.4.2), l'hypothèse $\beta q \leq 1$ et le fait que $2(\beta-1)q/(q-2) < -1 \Leftrightarrow 2(\beta q - 1) < q$, on obtient qu'il existe une fonction $\phi \in L^2(\mathbb{T})$ telle que $d\mu(x) = \phi(x)dx$. Donc on peut écrire

$$L(g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(g'(x)\phi(x) + g(x)\Big)\,\mathrm{d}x, \qquad \forall g \in C^1(\mathbb{T}).$$

Par (2.4.1), on a

$$0 = \int_0^{2\pi}\Big((e_nf)'(x)\phi(x) + (e_nf)(x)\Big)\,\mathrm{d}x = \langle \phi, (e_nf)'\rangle + \langle 1, e_nf\rangle, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

donc $\langle \phi' - 1, e_nf\rangle = 0$ où ϕ' est définie au sens des distributions. Par (2.4.2), $\phi' - 1 \in A^q_{-\beta}(\mathbb{T})$, donc d'après le lemme 2.2.5, on obtient $\mathrm{supp}(\phi' - 1) \subset \mathcal{Z}(f)$.

On note $\phi^{*1} = \phi$ et pour $m \geq 2$, ϕ^{*m} la fonction ϕ convolée m fois avec elle-même. En utilisant le fait que $S' * T = S * T' = (S * T)'$ et $1 * S' = 0$ pour toutes distributions S et T, on a pour $m \geq 2$,

$$(\phi' - 1) * \left(\left(\phi^{*(m-1)}\right)^{(m-1)} + (-1)^{m-1}\right) = (\phi^{*m})^{(m)} + (-1)^m.$$

Ainsi on peut voir par récurrence sur $m \geq 1$ et grâce à la formule $\mathrm{supp}(T * S) \subset \mathrm{supp}(T) + \mathrm{supp}(S)$ que

$$\mathrm{supp}\left((\phi^{*m})^{(m)} + (-1)^m\right) \subset m \times \mathcal{Z}(f), \qquad \forall m \geq 1. \tag{2.4.3}$$

Il est à noter que $\widehat{(\phi^{*k})^{(k)}}(n) = i^k n^k \widehat{\phi}(n)^k$ pour $k \geq 1$ et $n \in \mathbb{Z}$.

(a) : Supposons que $0 < k \leq q/2$ et $C_\alpha(k \times \mathcal{Z}(f)) = 0$ avec $\alpha < \frac{2}{q}(1-\beta q)k$. On réécrit (2.4.2) comme

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(|n\widehat{\phi}(n)|^k\right)^{\frac{q}{k}} (1+|n|)^{-\frac{q}{k}\beta k} < \infty.$$

Donc si on pose $q' = \frac{q}{k} \geq 2$ et $\beta' = \beta k$, on a $\left(\phi^{*k}\right)^{(k)} \in A^{q'}_{-\beta'}(\mathbb{T}) \subset A^2_{(\alpha-1)/2}(\mathbb{T})$ d'après le lemme 2.2.1. Par (2.4.3) et puisque $C_\alpha(k \times \mathcal{Z}(f)) = 0$, on obtient, d'après le Théorème 1.2.2 de Beurling, que $\left(\phi^{*k}\right)^{(k)} = (-1)^{k-1}$. Ceci est absurde car $\widehat{(\phi^{*k})^{(k)}}(0) = 0$.

(b) : Maintenant on suppose que $k \geq q/2$ et $C_\alpha(k \times \mathcal{Z}(f)) = 0$ où $\alpha = 1 - 2k\beta$. Puisque $q \leq 2k$, on a par (2.4.2),

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n\widehat{\phi}(n)|^{2k}(1+|n|)^{-2k\beta} < \infty.$$

Donc $\left(\phi^{*k}\right)^{(k)} \in A^2_{-k\beta}(\mathbb{T})$ et $\left(\phi^{*k}\right)^{(k)} = (-1)^{k-1}$. Ceci est également absurde car $\widehat{(\phi^{*k})^{(k)}}(0) = 0$. □

Remarque
La condition suffisante pour la bicyclicité dans la proposition précédente porte sur la capacité de la somme de l'ensemble des zéros. Le calcul de la capacité d'un tel ensemble peut s'avérer compliqué en général. La section 2.3 nous permet cependant de calculer cette capacité lorsque l'ensemble des zéros est un certain ensemble de Cantor généralisé.

Le théorème suivant est un des résultats principaux de ce chapitre. Il permet d'obtenir des résultats de type Beurling, Salem et Newman dans les espaces $A^p_\beta(\mathbb{T})$.

Théorème 2.4.5. *Soit $1 < p < 2$ et $\beta > 0$ tels que $\beta q \leq 1$.*

(1) Si $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ et $\dim(\mathcal{Z}(f)) < \frac{2}{q}(1-\beta q)$ alors f est bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$.

(2) Si $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ et $C_{1-\beta q}(\mathcal{Z}(f)) > 0$ alors f n'est pas bicyclique $A^p_\beta(\mathbb{T})$.

(3) Pour $\frac{2}{q}(1-\beta q) < \alpha \leq 1$, il existe un sous-ensemble fermé $E \subset \mathbb{T}$ tel que $\dim(E) = \alpha$ et tout $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ vérifiant $\mathcal{Z}(f) = E$ n'est pas bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$.

(4) Soit $k = [q/2]$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $E \subset \mathbb{T}$ tel que

$$\dim(E) \geq \max\left(\frac{2}{q}(1-\beta q)k - \varepsilon,\ 1 - 2(k+1)\beta\right) \tag{2.4.4}$$

et tel que tout $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ vérifiant $\mathcal{Z}(f) = E$ est bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$. De plus, si $p = \frac{2k}{2k-1}$ pour un $k \in \mathbb{N}^*$, E peut être choisi tel que $\dim(E) = 1 - \beta q$.

Démonstration. (1) : On remarque tout d'abord que, par 1.2.3, $\dim(\mathcal{Z}(f)) < \frac{2}{q}(1-\beta q)$ si et seulement s'il existe $\alpha < \frac{2}{q}(1-\beta q)$ tel que $C_\alpha(\mathcal{Z}(f)) = 0$. Si $C_\alpha(\mathcal{Z}(f)) = 0$, d'après le Théorème 1.2.2, il n'existe pas de distribution $S \in A^q_{-\beta}(\mathbb{T}) \setminus \{0\}$ tel que $\operatorname{supp}(S) \subset \mathcal{Z}(f)$. Donc, par la proposition 2.2.6 (1), f est bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$.

(2) : On suppose que $C_{1-\beta q}(\mathcal{Z}(f)) > 0$. Il existe une mesure de probabilité μ d'énergie $I_{1-\beta q}(\mu) < \infty$, tel que $\operatorname{supp}(\mu) \subset \mathcal{Z}(f)$. Donc $\mu \in A^2_{-\beta q/2}(\mathbb{T}) \setminus \{0\}$. Puisque $|\widehat{\mu}(n)| \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $q \geq 2$, on a $\mu \in A^q_{-\beta}(\mathbb{T})$. D'après le proposition 2.2.6 (2), f n'est pas bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$.

(3) : Soit $\frac{2}{q}(1-\beta q) < \alpha \leq 1$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\frac{2}{q}(1-\beta q) + \varepsilon < \alpha$. Soit q' tel que $\frac{2}{q} - 2\beta + \varepsilon = \frac{2}{q'}$. Puisque $\beta > \frac{1}{q} - \frac{1}{q'}$, d'après le lemme 2.2.1, $A^{q'}(\mathbb{T}) \subset A^q_{-\beta}(\mathbb{T})$. Par le théorème 1.3.6, comme q' vérifie $q' > \frac{2}{\alpha}$, il existe un sous-ensemble fermé $E \subset \mathbb{T}$ tel que $\dim(E) = \alpha$ et il existe une mesure positive non nulle $\mu \in A^{q'}(\mathbb{T}) \subset A^q_{-\beta}(\mathbb{T})$ telle que $\operatorname{supp}(\mu) \subset E$. Ainsi (3) se déduit de la proposition 2.2.6.(2).

(4) : Soit $k = [q/2]$. On remarque tout d'abord que si $\beta q = 1$, il suffit de prendre $E = \varnothing$. On se place alors dans le cadre $\beta q < 1$. On suppose dans un premier temps que $\frac{2}{q}(1-\beta q)k > 1 - 2(k+1)\beta$. Soit $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ vérifiant $1 - 2(k+1)\beta \leq \frac{2}{q}(1-\beta q)k - \varepsilon'$. On considère l'ensemble de Cantor généralisé S_λ construit dans la partie 2.3 où λ vérifie

$$\frac{2}{q}(1-\beta q)k - \varepsilon' < \frac{1-\lambda}{1+\lambda} < \frac{2}{q}(1-\beta q)k.$$

D'après la proposition 2.3.3.(3) on a

$$\dim(S_\lambda) = \frac{1-\lambda}{1+\lambda} > \max\left(\frac{2}{q}(1-\beta q)k - \varepsilon,\ 1 - 2(k+1)\beta\right)$$

et $C_{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}}(k \times S_\lambda) = 0$. D'après la proposition 2.4.4.(a), toute fonction $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ tel que $\mathcal{Z}(f) = S_\lambda$ est bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$.

Maintenant on suppose que $\frac{2}{q}(1-\beta q)k \leq 1 - 2(k+1)\beta$. On considère S_λ où $\frac{1-\lambda}{1+\lambda} = 1 - 2(k+1)\beta$. D'après la proposition 2.3.3.(3) on a

$$\dim(S_\lambda) = \frac{1-\lambda}{1+\lambda} = 1 - 2(k+1)\beta$$

et $C_{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}}((k+1) \times S_\lambda) = 0$. Donc par la proposition 2.4.4.(b), toute fonction $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ tel que $\mathcal{Z}(f) = S_\lambda$ est bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$.

Si maintenant $p = \frac{2k}{2k-1}$ pour un $k \in \mathbb{N}^*$. Comme avant, on considère S_λ où $\frac{1-\lambda}{1+\lambda} = 1 - 2k\beta = 1 - \beta q$. Donc encore par la proposition 2.4.4.(b), toute fonction $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ tel que $\mathcal{Z}(f) = S_\lambda$ est bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$. $\square$

Remarques

(a) Dans les quatre conditions du théorème, l'hypothèse $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ est importante. Elle vient de la proposition 2.2.6. La relation entre les zéros d'une fonction $f \in C(\mathbb{T})$ et sa bicyclicité dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$, pour $1 < p < 2$ et $0 \leq \beta q \leq 1$, semble compliqué. On rappelle que dans [32, 7.2], les auteurs posent la question suivante : pour $f \in C(\mathbb{T}) \cap A^p(\mathbb{T})$, $1 < p < 2$, la condition $\mathcal{Z}(f) = \varnothing$ implique-t-elle que f est bicyclique dans $A^p(\mathbb{T})$?

(b) On peut noter que l'ensemble E qui est considéré dans Théorème 2.4.5.(4) vérifie $C_\alpha(E) = 0$ avec un α vérifiant

$$\alpha \geq \max\left(\frac{2}{q}(1-\beta q)k - \varepsilon,\ 1 - 2(k+1)\beta\right)$$

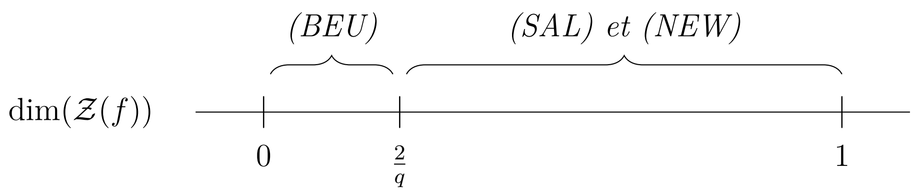
ce qui est plus fort que seulement $\dim(E) = \alpha$.

(c) On peut déduire de (4) que pour tout α vérifiant

$$0 < \alpha < \max\left(\frac{2}{q}(1-\beta q)k,\ 1 - 2(k+1)\beta\right)$$

on peut trouver une fonction $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$ vérifiant $\dim(\mathcal{Z}(f)) = \alpha$.

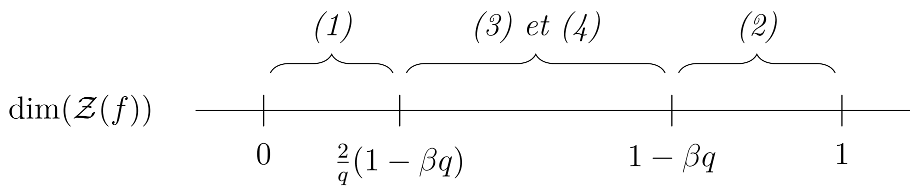
On peut résumer les résultats obtenus dans les espaces à poids et les comparer aux résultats connus dans les espaces sans poids grâce aux schémas suivants. On rapelle que dans $A^p(\mathbb{T})$ pour $1 < p < 2$ nous avons la situation suivante :



avec

$$\begin{array}{rcl} (BEU) & : & \dim(\mathcal{Z}(f)) < 2/q \Longrightarrow f \text{ bicyclique dans } A^p(\mathbb{T}) \\ (SAL) & : & \forall \alpha > 2/q,\ \exists f \text{ non bicyclique dans } A^p(\mathbb{T}) \text{ tel que } \dim(\mathcal{Z}(f)) = \alpha \\ (NEW) & : & \exists f \text{ bicyclique dans } A^p(\mathbb{T}) \text{ tel que } \dim(\mathcal{Z}(f)) = 1 \end{array}$$

Dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$ pour $1 < p < 2$, $\beta > 0$ et $\beta q \leq 1$, nous avons la situation suivante



avec (1), (2), (3) et (4) correspondant aux résultats du théorème 2.4.5. Il faut noter que le point (4) du théorème ne permet pas d'atteindre la borne $1-\beta q$ lorsque p n'est pas de la forme $\frac{2k}{2k-1}$, $k \in \mathbb{N}^*$. En effet cette restriction vient du théorème 2.4.4 et du fait que, pour atteindre la borne $1-\beta q$, on a besoin de convoler $q/2$ fois la fonction ϕ. Or $q/2 \in \mathbb{N}$ si et seulement si p est de la forme $\frac{2k}{2k-1}$.

2.4.2 Cas $\dim(\mathcal{Z}(f)) = \frac{2}{q}(1-\beta q)$

On s'intéresse maintenant à ce qui se passe lorsque $\dim(\mathcal{Z}(f)) = \frac{2}{q}(1-\beta q)$, cas qui n'est pas traité par le théorème 2.4.5. On rappelle que Newman s'est intéressé à cette question dans les espaces $A^p(\mathbb{T})$. Il a démontré le théorème 2.1.4 et a posé la question $(\star)$ rappelée page 36. Le but ici est de généraliser le théorème de Newman dans les espaces $A^p_\beta(\mathbb{T})$.

Tout d'abord nous allons énoncer le théorème suivant qui est dû à Körner (voir [28, Theorem 1.2]).

Théorème 2.4.6. *Soit $h : [0,\infty) \to [0,\infty)$ une fonction continue et strictement croissante vérifiant $h(0) = 0$ et soit $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ une fonction strictement décroissante. On suppose que*

(1) $\int_1^\infty \phi(x)^2 dx = \infty$ *;*

(2) il existe $K_1, K_2 > 1$ *tel que pour tout* $1 \le x \le y \le 2x$,

$$K_1\phi(2x) \le \phi(x) \le K_2\phi(y);$$

(3) il existe $\gamma > 0$ *tel que*

$$\lim_{x\to\infty} x^{1-\gamma}\phi(x) = \infty;$$

(4) il existe $0 < K_3 < K_4 < 1$ *tel que pour tout* $t > 0$,

$$K_3 h(2t) \le h(t) \le K_4 h(2t).$$

Alors il existe une mesure de probabilité μ *ayant un support de* h*-mesure de Hausdorff nulle tel que*

$$|\widehat{\mu}(n)| \le \phi\left(\frac{1}{h(|n|^{-1})}\right)\left(\log\left(\frac{1}{h(|n|^{-1})}\right)\right)^{1/2}, \qquad \forall n \ne 0.$$

Le théorème suivant est le second résultat principal de ce chapitre. Rappelons la notion de α-mesure forte. Soit E un ensemble fermé de $\mathbb{T}$ et $\alpha \in]0,1]$. On considère la suite $]a_k, b_k[$ des intervalles contigus à E. On pose

$$r_n = 2\pi - \sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k).$$

On dit que E est de α-mesure forte 0 si

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{\alpha}-1} r_n = 0.$$

Théorème 2.4.7. *Soit* $1 < p < 2$ *et* $\beta \ge 0$ *tel que* $\beta q < 1$.

(1) Si $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ *et* $\mathcal{Z}(f)$ *est de* α*-mesure forte nulle, où* $\alpha = \frac{2}{q}(1-\beta q)$ *alors* f *est bicyclique dans* $A^p_\beta(\mathbb{T})$.

(2) Pour tout $\gamma > \frac{2}{q}$, *il existe un ensemble fermé* $E \subset \mathbb{T}$ *tel que toute fonction* $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ *vérifiant* $\mathcal{Z}(f) = E$ *n'est pas bicyclique dans* $A^p_\beta(\mathbb{T})$ *et tel que* $H_h(E) = 0$ *où* $h(t) = \frac{t^\alpha}{\log(e/t)^\gamma}$ *avec* $\alpha = \frac{2}{q}(1-\beta q)$.

Démonstration. (1) : On note par $]a_k, b_k[$ les intervalles contigus à $\mathcal{Z}(f)$ triés par ordre décroissant de longueur et on pose

$$r_n = 2\pi - \sum_{k=0}^{n}(b_k - a_k).$$

L'ensemble $\mathcal{Z}(f)$ est de α-mesure forte nulle où $\alpha = \frac{2}{q}(1-\beta q)$ donc

$$\lim_{n\to\infty} r_n \; n^{\frac{1}{\alpha}-1} = 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $r_n < \varepsilon n^{1-\frac{1}{\alpha}}$ et $\varepsilon n^{-\frac{1}{\alpha}} < 1$. Soit ψ la fonction donnée par

$$\psi(x) = \max\Big(1 - \frac{n^{\frac{1}{\alpha}}}{\varepsilon}\rho(x),\ 0\Big), \qquad x \in \mathbb{T},$$

où

$$\rho(x) = \mathrm{dist}\,\Big(x, \mathbb{T} \setminus \bigcup_{k=1}^{n}]a_k, b_k[\Big).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \|\psi\|^2_{A^2} &= \int_{\mathbb{T}\setminus\bigcup_{k=1}^n]a_k,b_k[} \psi(t)^2 \frac{dt}{2\pi} + \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{b_k} \psi(t)^2 \chi_{\{\rho(x)\le \varepsilon n^{-\frac{1}{\alpha}}\}}(t) \frac{dt}{2\pi} \\ &\le r_n + \sum_{k=1}^{n} 2\varepsilon n^{-\frac{1}{\alpha}} \le 3\varepsilon n^{1-\frac{1}{\alpha}}. \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned} \|\psi'\|^2_{A^2} = \int_{\mathbb{T}} \psi'(t)^2 \frac{dt}{2\pi} = \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{b_k} \psi'(t)^2 \chi_{\{\rho(x)\le \varepsilon n^{-\frac{1}{\alpha}}\}}(t) \frac{dt}{2\pi} \\ \le \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n^{\frac{1}{\alpha}}}{\varepsilon}\right)^2 2\varepsilon n^{-\frac{1}{\alpha}} \le 2\frac{n^{1+\frac{1}{\alpha}}}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Puisque $\varepsilon n^{-\frac{1}{\alpha}} < \frac{n^{\frac{1}{\alpha}}}{\varepsilon}$ et $\alpha = \frac{2}{q}(1-\beta q)$, d'après le corollaire 2.2.3,

$$\|\psi\|_{A^p_\beta} \le C\left(3\varepsilon n^{1-\frac{1}{\alpha}}\right)^{\frac{3}{4}-\frac{1}{2p}-\frac{\beta}{2}} \left(5\frac{n^{1+\frac{1}{\alpha}}}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2p}-\frac{1}{4}+\frac{\beta}{2}} \le C'\varepsilon^{1-\frac{1}{p}-\beta}$$

où C et C' sont des constantes strictement positives dépendant seulement de β et p. En remarquant que $1-\psi$ est une fonction lipschitzienne et que $\mathcal{Z}(f) \subset \mathcal{Z}(1-\psi)$, on conclut grâce au lemme 2.2.9.

(2) : Soit $\alpha = \frac{2}{q}(1-\beta q)$ et $\gamma > \frac{2}{q}$. Soit

$$\phi(t) = (t\log(et))^{-1/2}, \quad t \ge 1 \quad \text{et} \quad h(t) = \frac{t^\alpha}{\log(e/t)^\gamma}, \quad 0 \le t \le 1.$$

Il est clair que ϕ et h vérifient les hypothèses du théorème 2.4.6. Ce dernier nous donne qu'il existe une mesure de probabilité μ avec pour support un ensemble de h-mesure nulle et telle que

$$|\widehat{\mu}(n)| \leq \phi\left(\frac{1}{h(|n|^{-1})}\right)\left(\log\left(\frac{1}{h(|n|^{-1})}\right)\right)^{1/2} \leq (|n|^{\alpha}\log(e|n|)^{\gamma})^{-1/2},$$

pour $n \neq 0$. Puisque $\gamma q/2 > 1$,

$$\begin{aligned}\sum_{n\neq 0}|\widehat{\mu}(n)|^q(1+|n|)^{-\beta q} &\leq C\sum_{n\neq 0}|n|^{-\alpha q/2-\beta q}\log(e|n|)^{-\gamma q/2}\\ &\leq C\sum_{n\neq 0}\frac{1}{|n|\log(e|n|)^{\gamma q/2}} < \infty\end{aligned}$$

avec C une constante positive. Donc $\mu \in A^q_{-\beta}(\mathbb{T})$. On pose alors $E = \mathrm{supp}(\mu)$ et le lemme 2.2.6 permet de démontrer le résultat. $\square$

2.5 Poids à croissance lente

On dit que $\omega = (\omega_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ est un poids si $w_n \geq 1$ et $\omega_{n+k} \leq C\omega_n\omega_k$ pour tout $k, n \in \mathbb{Z}$ et avec $C > 0$ une constante indépendante de k et n. Pour ω un poids et $1 \leq p < \infty$ on pose

$$A^p(\omega,\mathbb{T}) = \left\{S \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}),\quad \|S\|^p_{A^p(\omega,\mathbb{T})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}}|\widehat{S}(n)|^p\omega_n^p < \infty\right\}.$$

On remarque que $\|zS\|_{A^p(\omega,\mathbb{T})} \leq C\|z\|_{A^1(\omega,\mathbb{T})}\|S\|_{A^p(\omega,\mathbb{T})}$ pour $S \in A^p(\omega,\mathbb{T})$. Donc on peut caractériser la cyclicité dans $A^p(\omega,\mathbb{T})$ avec la norme grâce à (2.0.1).

Quand $\omega_n = O((1+|n|)^{\varepsilon})$ pour tout $\varepsilon > 0$, par exemple $\omega_n = \log(e+|n|)^{\beta}$ où $\beta \geq 0$, on peut montrer les même résultats que dans le lemme 2.2.9. Donc en notant que pour tout $p \geq 1$ et $\delta > 0$,

$$A^p_{\delta}(\mathbb{T}) \subset A^p(\omega,\mathbb{T}) \subset A^p(\mathbb{T})$$

on obtient des résultat similaire au théorème 2.4.5 avec $\beta = 0$.

Théorème 2.5.1. *Soit $1 < p < 2$ et $\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ un poids vérifiant $\omega_n = O((1+|n|)^{\varepsilon})$ pour tout $\varepsilon > 0$.*

(1) Si $f \in A^1(\omega,\mathbb{T})$ et $\dim(\mathcal{Z}(f)) < \frac{2}{q}$ alors f est bicyclique dans $A^p(\omega,\mathbb{T})$.

(2) *Pour* $\frac{2}{q} < \alpha \leq 1$*, il existe un sous-ensemble fermé* $E \subset \mathbb{T}$ *tel que* $\dim(E) = \alpha$ *et toute fonction* $f \in A^1(\omega, \mathbb{T})$ *vérifiant* $\mathcal{Z}(f) = E$ *n'est pas cyclique dans* $A^p(\omega, \mathbb{T})$*.*

(3) *Pour tout* $0 < \varepsilon < 1$*, il existe un sous-ensemble fermé* $E \subset \mathbb{T}$ *tel que* $\dim(E) = 1 - \varepsilon$ *et toute fonction* $f \in A^1(\omega, \mathbb{T})$ *vérifiant* $\mathcal{Z}(f) = E$ *est bicyclique* $A^p(\omega, \mathbb{T})$*.*

Démonstration. (1) : Soit $f \in A^1(\omega, \mathbb{T})$ tel que $\dim(\mathcal{Z}(f)) < \frac{2}{q}$. Il existe $0 < \delta < 1/2$ tel que $\dim(\mathcal{Z}(f)) < \frac{2}{q}(1 - \delta q)$. Par le théorème 2.4.5.(1), toute fonction $g \in A^1_\delta(\mathbb{T})$ vérifiant $\mathcal{Z}(g) = \mathcal{Z}(f)$ est bicyclique $A^p_\delta(\mathbb{T})$. Ainsi par le lemme 2.2.9, il existe (f_n) une suite de fonctions lipschitziennes qui s'annulent sur $\mathcal{Z}(f)$ et telle que

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - 1\|_{A^p_\delta} = 0.$$

De plus $\omega_n = O((1 + |n|)^\delta)$ donc

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - 1\|_{A^p(\omega,\mathbb{T})} = 0.$$

Encore par le lemme 2.2.9 dans $A^p(\omega, \mathbb{T})$, on obtient que f est bicyclique dans $A^p(\omega, \mathbb{T})$.

(2) : Par le théorème de Salem (voir le théorème 1.3.6), il existe un sous-ensemble fermé $E \subset \mathbb{T}$ tel que $\dim(E) = \alpha$ et toute fonction $f \in A^1(\mathbb{T})$ vérifiant $\mathcal{Z}(f) = E$ n'est pas bicyclique dans $A^p(\mathbb{T})$. Soit $f \in A^1(\omega, \mathbb{T})$ tel que $\mathcal{Z}(f) = E$. Puisque $f \in A^1(\mathbb{T})$, f n'est pas bicyclique dans $A^p(\mathbb{T})$. Cependant $\|\cdot\|_{A^p(\mathbb{T})} \leq \|\cdot\|_{A^p(\omega,\mathbb{T})}$ donc f n'est pas bicyclique dans $A^p(\omega, \mathbb{T})$.

(3) : Soit $0 < \varepsilon < 1$ et $\beta > 0$ tel que $1 - 2([q/2] + 1)\beta \geq 1 - \varepsilon$. D'après le théorème 2.4.5.(4), il existe un sous-ensemble fermé $E \subset \mathbb{T}$ tel que

$$\dim(E) \geq 1 - 2([q/2] + 1)\beta \geq 1 - \varepsilon$$

et tel que toute fonction $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ vérifiant $\mathcal{Z}(f) = E$ est bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$. Puisque $A^p_\beta(\mathbb{T}) \subset A^p(\omega, \mathbb{T})$, on obtient par le lemme 2.2.9, que toute fonction $f \in A^1(\omega, \mathbb{T})$ vérifiant $\mathcal{Z}(f) = E$ est bicyclique dans $A^p(\omega, \mathbb{T})$. □

Lorsque $\omega_n = \log(e + |n|)^\beta$ où $0 < \beta < 1$, pour tout $p > \frac{2}{1-\beta}$ et pour tout $\alpha < 2\pi$, Nikolskii montre dans [38, Corollary 6], qu'il existe $E \subset \mathbb{T}$ ayant pour mesure de Lebesgue $|E| > \alpha$ telle que toute fonction $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ vérifiant $\mathcal{Z}(f) = E$ est bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$.

Chapitre 3

Cyclicité dans les espaces $\ell^p(\mathbb{Z})$ à poids

Après avoir étudié, dans le chapitre précédent, la bicyclicité dans les espaces $A^p_\beta(\mathbb{T})$, c'est-à-dire l'étude des fonctions f telle que le sous-espace engendré par $\{z^n f,\ n \in \mathbb{Z}\}$ est dense, on s'intéresse dans ce chapitre à l'étude des fonctions cycliques c'est-à-dire telles que le sous-espace engendré par $\{z^n f,\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense. Il est facile de voir que la cyclicité est une notion plus forte que la bicyclité dans le sens où toute fonction cyclique est bicyclique. Nous démontrerons le Théorème 2.1.6 qui étend le résultat de Lev et Olevskii à la cyclicité dans $A^p(\mathbb{T})$ pour $1 < p < 2$. Nous donnerons aussi des conditions suffisantes pour la cyclicité de fonctions régulières et nous donnerons des exemples de fonctions cycliques dans les espaces $A^p_\beta(\mathbb{T})$. Finalement nous montrerons que l'ensemble des fonctions cycliques de $A^p_\beta(\mathbb{T})$, pour $1 \leq p \leq 2$ et lorsque $A^p_\beta(\mathbb{T})$ n'est pas une algèbre, est dense dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$.

3.1 Définitions et résultats connus

Soit X un espace vectoriel métrique de distributions ou de fonctions complexes définies sur le cercle unité $\mathbb{T}$. On suppose que l'opérateur shift S, défini par

$$S(f)(z) = zf(z), \quad z \in \mathbb{T}$$

est un isomorphisme topologique de X sur lui même. Pour $f \in X$ et $\Lambda \subset \mathbb{Z}$, on note $[f]^X_\Lambda$ le sous-espace vectoriel fermé engendré par $\{z^n f,\ n \in \Lambda\}$:

$$[f]^X_\Lambda = \overline{\text{span}\{z^n f,\ n \in \Lambda\}}^X.$$

On rappelle que $f \in X$ est bicyclique dans X si $[f]^X_\mathbb{Z} = X$ et on dira que f est cyclique dans X si $[f]^X_\mathbb{N} = X$.

On peut noter que f est cyclique dans X si et seulement si f est bicyclique dans X et $[f]_{\mathbb{N}}^X = [f]_{\mathbb{Z}}^X$. On note $\mathcal{P}(\mathbb{T})$ l'ensemble des polynômes trigonométriques sur $\mathbb{T}$ et on note $\mathcal{P}_+(\mathbb{T})$ l'ensemble des polynômes analytiques sur $\mathbb{T}$. Ainsi $[f]_{\mathbb{Z}}^X$ est l'adhérence dans X de l'ensemble $\{Pf,\ P \in \mathcal{P}(\mathbb{T})\}$ et $[f]_{\mathbb{N}}^X$ est l'adhérence dans X de l'ensemble $\{Pf,\ P \in \mathcal{P}_+(\mathbb{T})\}$.

Proposition 3.1.1. *Pour $f \in X$ on a*

$$[f]_{\mathbb{N}}^X = [f]_{\mathbb{Z}}^X \iff f \in [f]_{\mathbb{N}^*}^X \tag{3.1.1}$$

Démonstration. Supposons que $[f]_{\mathbb{N}}^X = [f]_{\mathbb{Z}}^X$. On a alors que $\overline{z}f \in [f]_{\mathbb{N}}^X$. Donc il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes analytiques telle que $\overline{z}f = \lim P_n f$ et comme la multiplication par z est continue sur X on obtient

$$f = z \lim P_n f = \lim zP_n f \in [f]_{\mathbb{N}^*}^X. \tag{3.1.2}$$

Réciproquement si $f \in [f]_{\mathbb{N}^*}^X$ alors on a, d'après (3.1.2), $\overline{z}f \in [f]_{\mathbb{N}}^X$. On suppose pour $n \geq 1$ que $\overline{z}^n f \in [f]_{\mathbb{N}}^X$. Il existe alors une suite $(P_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de polynômes analytiques telle que $\overline{z}^n f = \lim P_m f$. Ainsi, comme la multiplication par $\overline{z}$ est continue sur X,

$$\overline{z}^{n+1} f = \overline{z} \lim P_m f = \lim P_m \overline{z} f.$$

Or $P_m \overline{z} f \in [f]_{\mathbb{N}}^X$ et $[f]_{\mathbb{N}}^X$ est un sous-espace fermé de X cela démontre que $\overline{z}^{n+1} f \in [f]_{\mathbb{N}}^X$. Ainsi par récurrence on obtient que $[f]_{\mathbb{Z}}^X = [f]_{\mathbb{N}}^X$. □

On suppose maintenant qu'en plus des propriétés précédentes X est un espace de Banach dans lequel $\mathcal{P}(\mathbb{T})$ est un sous-espace dense. On rappelle, d'après (2.0.1), qu'une fonction ou une distribution $f \in X$ est bicyclique dans X si et seulement s'il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes trigonométriques vérifiant

$$\lim_{n\to\infty} \|1 - P_n f\|_X = 0.$$

Pour la cyclicité on a la caractérisation suivante :

Proposition 3.1.2. *Une distribution f est cyclique dans X si et seulement s'il existe deux suites $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}(\mathbb{T})^{\mathbb{N}}$ et $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}_+(\mathbb{T})^{\mathbb{N}}$ vérifiant*

$$\|1 - P_n f\|_X \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \textit{et} \quad \|f - zQ_n f\|_X \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3.1.3}$$

Présentons maintenant les résultats connus sur la cyclicité dans les espaces $A_\beta^p(\mathbb{T})$. Dans $A^2(\mathbb{T}) = L^2(\mathbb{T})$ on rappelle qu'on a, par le théorème 2.1.1 de Wiener, qu'une fonction f est bicyclique dans $A^2(\mathbb{T})$ si et seulement son ensemble des zéros $\mathcal{Z}(f)$ est de mesure de Lebesgue nulle. Donc par (2.0.1), une fonction $f \in A^2(\mathbb{T})$ est cyclique dans $A^2(\mathbb{T})$ si et seulement si $\mathcal{Z}(f)$ est de mesure de Lebesgue nulle et

$$\inf\{\|f - zQf\|_{A^2},\ Q \in \mathcal{P}_+(\mathbb{T})\} = 0. \tag{3.1.4}$$

Or le théorème de Szegö-Kolmogorov (voir [39, Theorem 4.1.1 p. 65]), nous donne l'égalité

$$\inf\{\|f - zQf\|_{A^2},\ Q \in \mathcal{P}_+(\mathbb{T})\} = \exp\left(\int_{\mathbb{T}} \log|f|dm\right),$$

avec dm la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{T}$. Donc

$$\inf\{\|f - zQf\|_{A^2},\ Q \in \mathcal{P}_+(\mathbb{T})\} = 0 \Longleftrightarrow \int_{\mathbb{T}} \log|f| = -\infty.$$

On obtient alors une première caractérisation de la cyclicité dans l'espace $A^2(\mathbb{T})$:

$f \in A^2(\mathbb{T})$ est cyclique dans $A^2(\mathbb{T})$ si et seulement si
$\mathcal{Z}(f)$ est de mesure de Lebesgue nulle et $\log|f| \notin L^1(\mathbb{T})$.

Si une fonction f est cyclique dans $A^p(\mathbb{T})$ alors f est aussi cyclique dans $A^q(\mathbb{T})$ pour tout $q \geq p$. Cela a pour conséquence directe que si une fonction f est cyclique dans $A^p(\mathbb{T})$ pour un certain p vérifiant $1 \leq p \leq 2$ alors $\mathcal{Z}(f)$ est de mesure de Lebesgue nulle et $\log|f| \notin L^1(\mathbb{T})$. En utilisant la caractérisation de la bicyclicité dans $A(\mathbb{T})$ (Théorème 2.1.1), on obtient alors qu'il n'existe pas de fonctions cycliques dans $A(\mathbb{T})$ (on peut également voir [2] pour une preuve différente de ce résultat).

L'existence de vecteurs cycliques dans $A^p(\mathbb{T})$, pour $p > 1$, a été établie par Abakumov, Atzmon et Grivaux dans [2, Corollary 1] en 2007. Ils ont mentionné dans leur papier que ce résultat a été démontré en premier par Olevskii dans un papier non publié en 1998 (voir [2, Remark 1]). Notons que ce résultat peut aussi découler du Théorème de Makarov (voir (3.3.2)) et du Théorème de Beurling (voir Théorème 2.1.2).

Des résultats ont également été obtenus dans l'espace de Dirichlet $A^2_{1/2}(\mathbb{T})$ par Abakumov, El-Fallah, Kellay et Ransford en 2017 dans [3].

3.2 Théorème de type Lev-Olevskii pour la cyclicité

On a vu dans la première partie de ce chapitre que l'on peut caractériser la cyclicité d'une fonction f dans $A^p(\mathbb{T})$ pour $p = 1$ et $p = 2$ à l'aide uniquement de son ensemble de zéros et de l'intégrale $\int_{\mathbb{T}} \log|f|$. Lev et Olevskii ont montré en 2011 que l'on ne peut pas pas caractériser les fonctions $f \in A(\mathbb{T})$ bicycliques dans $A^p(\mathbb{T})$, pour $1 < p < 2$, uniquement à l'aide de leur ensemble de zéros. Nous montrons que ceci reste valable pour les vecteurs cycliques dans $A^p(\mathbb{T})$ pour $1 < p < 2$. Plus précisément :

Théorème 3.2.1. *Soit $1 < p < 2$. Il existe deux fonctions f et g dans $A(\mathbb{T})$ vérifiant $\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}(g)$, $\log|f| \notin L^1(\mathbb{T})$, $\log|g| \notin L^1(\mathbb{T})$ avec f non-cyclique dans $A^p(\mathbb{T})$ et g cyclique dans $A^p(\mathbb{T})$.*

3.2.1 Preuve du Théorème 3.2.1

On commence par s'intéresser à un résultat sur les ensembles de Helson introduits dans la partie 1.4. Nous avons tout d'abord besoin du lemme suivant dont on peut trouver une démonstration dans [25, Chapitre XI, Lemme 2].

Lemme 3.2.2. *Soit X et Y deux espaces de Banach et $T : X \to Y$ une application linéaire continue. On note T' l'adjoint de T. S'il existe $c > 0$ tel que pour tout $y' \in Y'$, $\|T'y'\|_{X'} \geq c\|y'\|_{Y'}$ alors T est surjective. De plus pour tout $y \in Y$, il existe $x \in X$ tel que $Tx = y$ et $c\|x\|_X \leq 2\|Tx\|_Y$.*

Dans le lemme suivant nous allons affiner la définition d'ensemble de Helson en contrôlant les normes $\|\cdot\|_{A^1}$ et $\|\cdot\|_{A^p}$ de g. Ce lemme a été démontré par Lev et Olevskii dans [32, Lemma 10].

Lemme 3.2.3. *Soit K un ensemble de Helson. Pour $\varepsilon > 0$, $p > 1$ et $f \in \mathcal{C}(K)$ il existe $g \in A(\mathbb{T})$ vérifiant*

$$\begin{cases} g|_K & = & f \\ \|g\|_{A^1} & \leq & \frac{2}{\delta_2}\|f\|_\infty \\ \|g\|_{A^p} & < & \varepsilon \end{cases}$$

avec δ_2 une constante vérifiant la condition (iii) de la proposition 1.4.2.

Démonstration :

Soit $\varepsilon > 0$, $p > 1$ et $f \in \mathcal{C}(K)$. Posons $\varepsilon' = \frac{\delta_2 \varepsilon}{4\|f\|_\infty}$. On note $B = A(\mathbb{T})$ l'espace muni de la norme $\|\cdot\|_B = \|\cdot\|_{A^1} + \frac{1}{\varepsilon'}\|\cdot\|_{A^p}$. L'espace B est un espace de Banach puisque la norme $\|\cdot\|_B$ est équivalente à la norme $\|\cdot\|_{A^1}$. Soit l'opérateur

$$\begin{array}{rccc} T: & B & \longrightarrow & \mathcal{C}(K) \\ & g & \longmapsto & g|_K \end{array}.$$

Soit $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ vérifiant $\operatorname{supp}(\mu) \subset K$. Il existe une sous-suite de $(|\hat{\mu}(n)|)_{n\in\mathbb{Z}}$ qui converge vers $\limsup_{|n|\to\infty} |\hat{\mu}(n)|$, c'est-à-dire qu'il existe $(n_j) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ vérifiant pour tout $j \in \mathbb{N}$, $|n_j| < |n_{j+1}|$ et il existe $(\theta_j) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tel que

$$\lim_{j\to\infty} |\hat{\mu}(n_j)| = \lim_{j\to\infty} \hat{\mu}(n_j)e^{-i\theta_j} = \limsup_{|n|\to\infty} |\hat{\mu}(n)|.$$

On définit alors pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ la fonction g_N définie sur $\mathbb{T}$ par

$$g_N(t) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} e^{-i(n_j t+\theta_j)}.$$

On a $g_N \in B = A(\mathbb{T})$. De plus $\|g_N\|_{A^1} = 1$ et $\|g_N\|_{A^p} = \left(\frac{N}{N^p}\right)^{\frac{1}{p}} = N^{\frac{1}{p}-1}$ car les n_j sont deux à deux distincts et $|e^{-i\theta_j}| = 1$. Ainsi

$$\|g_N\|_B = 1 + \frac{1}{\varepsilon'}N^{\frac{1}{p}-1} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Le lemme de Cesàro nous donne

$$\begin{aligned}\langle T'\mu, g_N\rangle = \langle \mu, Tg_N\rangle &= \int_K g_N(t)\,\mathrm{d}\mu(t)\\ &= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\hat{\mu}(n_j)e^{-i\theta_j}\\ &\underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \limsup_{|n|\to\infty}|\hat{\mu}(n)|.\end{aligned}$$

Ainsi pour tout $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ vérifiant $\operatorname{supp}(\mu) \subset K$ on a

$$\|T'\mu\|_{B'} \geq \lim_{N\to\infty}\frac{|\langle T'\mu, g_N\rangle|}{\|g_N\|_B} = \limsup_{|n|\to\infty}|\hat{\mu}(n)| \geq \delta_2\int_{\mathbb{T}}|\mathrm{d}\mu|$$

car K est un ensemble de Helson.

En utilisant le lemme 3.2.2 on obtient donc qu'il existe $g \in B = A(\mathbb{T})$ tel que

$$\begin{cases} Tg = f \\ \|g\|_B \leq \frac{2}{\delta_2}\|f\|_\infty \end{cases}$$

Cela signifie que $g|_K = f$, $\|g\|_{A^1} \leq \|g\|_B \leq \frac{2}{\delta_2}\|f\|_\infty$ et que

$$\|g\|_{A^p} \leq \varepsilon'\|g\|_B \leq \frac{\delta_2\varepsilon}{4\|f\|_\infty}\,\frac{2}{\delta_2}\|f\|_\infty < \varepsilon.$$

$\square$

Soit E un sous-ensemble fermé de $\mathbb{T}$. On pose

$$\mathcal{I}(E) = \{f \in A(\mathbb{T}),\ f|_E = 0\}$$

et on note par $\mathcal{J}(E)$ la fermeture dans $A(\mathbb{T})$ de l'ensemble des fonctions de $A(\mathbb{T})$ s'annulant au voisinage de E. On a de manière évidente que $\mathcal{J}(E) \subset \mathcal{I}(E)$. On dira alors que E est un ensemble de synthèse si

$$\mathcal{J}(E) = \mathcal{I}(E).$$

Puisque $\{1\}$ est un ensemble de synthèse (voir [25, Theorem IV] p. 123 ou [20, Appendix 3] pp. 416-418), on a $\mathcal{I}(\{1\}) = \mathcal{J}(\{1\})$. Contrairement à $A(\mathbb{T})$, l'espace $\mathcal{I}(\{1\})$ contient des vecteurs cycliques. On a même, par [2, Proposition 2], que l'ensemble des vecteurs cycliques de $\mathcal{I}(\{1\})$ est un sous-ensemble G_δ dense de $\mathcal{I}(\{1\})$.

Lemme 3.2.4. *Soit $f \in \mathcal{I}(\{1\})$. Si f est cyclique dans $\mathcal{I}(\{1\})$ alors f est cyclique dans $A^p(\mathbb{T})$ pour tout $p > 1$.*

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{I}(\{1\})$ cyclique dans $\mathcal{I}(\{1\})$ et $\varepsilon > 0$. On note h_k, pour $k \in \mathbb{N}$, la fonction définie sur $\mathbb{T}$ par

$$h_k(z) = \frac{z-1}{z-1-1/k}.$$

On a $h_k \in \mathcal{I}(\{1\})$. De plus pour $z \in \mathbb{T}$,

$$h_k(z) = 1 - \frac{1}{k+1}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(1+1/k)^n}.$$

Ainsi pour $p > 1$, on obtient

$$\begin{aligned}
\|1-h_k\|_{A^p}^p &= \frac{1}{(k+1)^p}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1+1/k)^{pn}} \\
&= \frac{1}{(k+1)^p}\frac{1}{1-\frac{1}{(1+1/k)^p}} \\
&= \frac{1}{(k+1)^p - k^p} \quad \underset{k\to\infty}{\sim} \quad \frac{1}{pk^{p-1}}
\end{aligned}$$

Donc pour $p > 1$ fixé, on choisit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\|1-h_k\|_{A^p} < \varepsilon$. Puisque f est cyclique dans $\mathcal{I}(\{1\})$, il existe P et Q dans $\mathcal{P}_+(\mathbb{T})$ tel que

$$\|h_k - Pf\|_{A^1} < \varepsilon \quad \text{et} \quad \|f - zQf\|_{A^1} < \varepsilon.$$

On obtient que $\|f - zQf\|_{A^p} < \varepsilon$ et

$$\|1 - Pf\|_{A^p} \leq \|1 - h_k\|_{A^p} + \|h_k - Pf\|_{A^1} < 2\varepsilon.$$

Cela démontre, d'après (3.1.3), que f est cyclique dans $A^p(\mathbb{T})$ pour tout $p > 1$. □

Théorème 3.2.5. *Soit K un ensemble de Helson sur $\mathbb{T}$. Il existe une fonction $g \in A(\mathbb{T})$ s'annulant sur K telle que g est cyclique dans $A^p(\mathbb{T})$ pour tout $p > 1$.*

Démonstration. Soit K un ensemble de Helson sur $\mathbb{T}$. On rappelle que

$$\mathcal{I}(K) = \{g \in A(\mathbb{T}),\ g|_K = 0\}$$

qui, muni de la norme $\|\cdot\|_{A^1}$, est un espace de Banach. On définit

$$\mathcal{G}(K) = \{g \in \mathcal{I}(K),\ g \text{ est cyclique dans } A^p(\mathbb{T}),\ \forall p > 1\}.$$

Nous allons montrer que $\mathcal{G}(K)$ est un sous-ensemble G_δ-dense de $\mathcal{I}(K)$. Pour $\varepsilon > 0$ et $p > 1$, on considère l'ensemble

$$G(\varepsilon, p) = \{g \in \mathcal{I}(K),\ \exists P \in \mathcal{P}(\mathbb{T}),\ \exists Q \in \mathcal{P}_+(\mathbb{T}),\ \|1 - Pg\|_{A^p} < \varepsilon \\ \text{et} \ \ \|g - zQg\|_{A^p} < \varepsilon\}.$$

Soit $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ et $p_n = 1 + \frac{1}{n}$. Pour utiliser le lemme de Baire, nous allons démontrer

- (i) $\bigcap_{n=1}^{\infty} G(\varepsilon_n, p_n) = \mathcal{G}(K)$
- (ii) Pour tous $\varepsilon > 0$ et $p > 1$, $G(\varepsilon, p)$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathcal{I}(K)$
- (iii) Pour tous $\varepsilon > 0$ et $p > 1$, $G(\varepsilon, p)$ est un sous-ensemble dense de $\mathcal{I}(K)$.

(i) : Soit $g \in \mathcal{I}(K)$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $P_n \in \mathcal{P}(\mathbb{T})$ et $Q_n \in \mathcal{P}_+(\mathbb{T})$ vérifiant $\|1 - P_n g\|_{A^{p_n}} < \varepsilon_n$ et $\|g - zQ_n g\|_{A^{p_n}} < \varepsilon_n$.
Puisque pour tout $p > 1$, il existe N tel que pour tout $n \geq N$ on a $p > p_n$, on obtient

$$\|1 - P_n g\|_{A^p} \leq \|1 - P_n g\|_{A^{p_n}} < \varepsilon_n \to 0, \qquad n \to \infty$$

et

$$\|g - zQ_n g\|_{A^p} \leq \|g - zQ_n g\|_{A^{p_n}} < \varepsilon_n \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Donc, d'après (3.1.3), g est cyclique dans $A^p(\mathbb{T})$ pour tout $p > 1$ et ainsi on a $g \in \mathcal{G}(K)$. L'autre inclusion est claire.

(ii) : Soit $g_0 \in G(\varepsilon, p)$. Il existe $P \in \mathcal{P}(\mathbb{T})$ et $Q \in \mathcal{P}_+(\mathbb{T})$ tels que

$$\|1 - Pg_0\|_{A^p} < \varepsilon \quad \text{et} \quad \|g_0 - zQg_0\|_{A^p} < \varepsilon.$$

Soit

$$\eta = \min\left(\frac{\varepsilon - \|1 - Pg_0\|_{A^p}}{\|P\|_{A^p}}, \frac{\varepsilon - \|g_0 - zQg_0\|_{A^p}}{1 + \|zQ\|_{A^p}}\right).$$

Donc on a $g \in G(\varepsilon, p)$ pour tout $g \in \mathcal{I}(K)$ vérifiant $\|g - g_0\|_{A^1} < \eta$. En effet, on a

$$\|1 - Pg\|_{A^p} < \|1 - Pg_0\|_{A^p} + \eta\|P\|_{A^p} \leq \varepsilon$$

et

$$\|g - zQg\|_{A^p} \leq \|g - g_0\|_{A^1} + \|g_0 - zQg_0\|_{A^p} + \|zQ\|_{A^p}\|g_0 - g\|_{A^1} < \varepsilon$$

Ainsi $G(\varepsilon, p)$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathcal{I}(K)$.

(iii) : Soit $g_0 \in \mathcal{I}(K)$. Nous allons montrer que pour tout $\kappa > 0$, il existe $g \in G(\varepsilon, p)$ tel que $\|g - g_0\|_{A^1} < \kappa$. Sans perte de généralité, on suppose que $1 \in K$. Ainsi nous avons $g_0 \in \mathcal{I}(\{1\})$. Puisque K est un ensemble de Helson, on considère δ_2 la constante vérifiant la condition (iii) de la proposition 1.4.2. L'ensemble de vecteurs cycliques de $\mathcal{I}(\{1\})$ étant dense dans $\mathcal{I}(\{1\})$ (voir [2]), il existe une fonction h cyclique dans $\mathcal{I}(\{1\})$ telle que

$$\|h - g_0\|_{A^1} < \frac{\delta_2}{2 + \delta_2}\kappa.$$

Pour tout $t \in K$,

$$|h(t)| = |h(t) - g_0(t)| \leq \|h - g_0\|_\infty \leq \|h - g_0\|_{A^1} < \frac{\delta_2}{2 + \delta_2}\kappa.$$

Puisque h est cyclique dans $\mathcal{I}(\{1\})$, on a, d'après le lemme 3.2.4, que h est aussi cyclique dans $A^p(\mathbb{T})$. Par (3.1.3), il existe $P \in \mathcal{P}(\mathbb{T})$ et $Q \in \mathcal{P}_+(\mathbb{T})$ vérifiant $\|1 - Ph\|_{A^p} < \frac{\varepsilon}{2}$ et $\|h - zQh\|_{A^p} < \frac{\varepsilon}{2}$. D'après le lemme 3.2.3, il existe $f \in A(\mathbb{T})$ vérifiant

$$\begin{cases} f|_K &= h|_K \\ \|f\|_{A^1} &\leq \dfrac{2\|h|_K\|_\infty}{\delta_2} < \dfrac{2\kappa}{2 + \delta_2} \\ \|f\|_{A^p} &< \min\left(\dfrac{\varepsilon}{2\|P\|_{A^1}}, \dfrac{\varepsilon}{2\|1 - zQ\|_{A^1}}\right) \end{cases}$$

Soit $g = h - f$. On a $g \in \mathcal{I}(K)$ puisque $f|_K = h|_K$. De plus $g \in G(\varepsilon, p)$ puisque

$$\|1 - Pg\|_{A^p} \leq \|1 - Ph\|_{A^p} + \|P\|_{A^1}\|f\|_{A^p} < \varepsilon$$

et
$$\|g - zQg\|_{A^p} \le \|h - zQh\|_{A^p} + \|1 - zQ\|_{A^1}\|f\|_{A^p} < \varepsilon.$$
Finalement, on a
$$\|g - g_0\|_{A^1} \le \|h - g_0\|_{A^1} + \|f\|_{A^1} < \frac{\delta_2}{2+\delta_2}\kappa + \frac{2\kappa}{2+\delta_2} = \kappa.$$
Ainsi $G(\varepsilon, p)$ est un sous-ensemble dense de $\mathcal{I}(K)$.

Par le lemme de Baire, l'ensemble $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G(\varepsilon_n, p_n)$ est un sous-ensemble G_δ-dense de $\mathcal{I}(K)$. En particulier $\mathcal{G}(K)$ est non-vide. □

Démonstration. **(du théorème 3.2.1)** On rappelle que $1 < p < 2$. Soit K un ensemble de Helson vérifiant le théorème 1.4.3. D'après le théorème 3.2.5, il existe $g \in A(\mathbb{T})$ tel que g s'annule sur K et tel que g est cyclique dans $A^p(\mathbb{T})$. Cela implique en particulier que $\log|g| \notin L^1(\mathbb{T})$. De plus il existe $f \in C^1(\mathbb{T})$ tel que $\mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}(g)$ et $\log|f| \notin L^1(\mathbb{T})$ (en prenant par exemple $f(\zeta) = e^{-1/d(\zeta, \mathcal{Z}(g))}$ si $\zeta \notin \mathcal{Z}(g)$ et 0 sinon). Par la proposition 2.2.8 et le théorème 1.4.3, f n'est pas bicyclique dans $A^p(\mathbb{T})$ donc n'est pas cyclique dans $A^p(\mathbb{T})$. □

Remarque
Dans la construction de f et g dans le théorème 3.2.1, l'une des fonctions est bicyclique et l'autre non. Une question naturelle est : Est-il possible de construire deux fonctions bicycliques avec les même propriétés que dans le théorème 3.2.1 ?

3.3 Conditions sur la cyclicité de fonctions régulières et exemples

Dans toute cette partie on note $q = p/(p-1)$. Nous donnerons des conditions suffisantes et des conditions nécessaires pour qu'une fonction f soit cyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$, lorsque f est régulière, pour $1 < p < 2$ et $0 \le \beta q \le 1$. En particulier les conditions obtenues dans cette section nous permettent de construire des exemples de vecteurs cycliques. Notons que, lorsque $\beta q > 1$, il n'existe pas de vecteur cyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$. En effet pour $1 \le p < \infty$ et $\beta \ge 0$, $A^p_\beta(\mathbb{T})$ est une algèbre de Banach de fonctions continues si et seulement si $\beta q > 1$ (voir [16]). Donc, si f est cyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$, quand $\beta q > 1$, alors $\mathcal{Z}(f) = \varnothing$ et $\log|f| \notin L^1(\mathbb{T})$ ce qui est impossible puisque f est continue.

On note H^∞ l'espace des fonctions $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ vérifiant $\widehat{f}(n) = 0$ pour tout $n < 0$. Il est bien connu que H^∞ peut être identifié avec l'espace des fonctions holomorphes bornées sur le disque $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$. On rappelle qu'on définit une fonction extérieure comme étant une fonction f de la forme

$$f(z) = c \exp \int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \log \varphi(\zeta) \frac{|d\zeta|}{2\pi}, \qquad z \in \mathbb{D},$$

où $|c| = 1$ et où φ est une fonction positive vérifiant $\log \varphi \in L^1(\mathbb{T})$. La limite radiale de f, que l'on notera aussi par f, existe presque partout et on a $|f| = \varphi$ p.p. sur $\mathbb{T}$ (voir [10]).

Le résultat suivant permet d'exprimer la norme dans $A^2_\alpha(\mathbb{T})$ à l'aide d'une double intégrale sur $\mathbb{T}$. Il est inspiré des résultats de Douglas dans [9] (voir aussi [43, section 5.]).

Proposition 3.3.1. *Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$ et $\alpha > 0$ vérifiant $\alpha < 1$. On a*

$$\mathcal{D}_\alpha(f) = \iint_{\mathbb{T}^2} \frac{|f(\zeta) - f(\zeta')|^2}{|\zeta - \zeta'|^{1+2\alpha}} |d\zeta||d\zeta'| \asymp \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 |n|^{2\alpha}.$$

En particulier

$$\|f\|^2_{A^2_\alpha} \asymp |\widehat{f}(0)|^2 + \mathcal{D}_\alpha(f).$$

Démonstration. En utilisant l'égalité de Parseval, on a

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbb{T}^2} \frac{|f(\zeta) - f(\zeta')|^2}{|\zeta - \zeta'|^{1+2\alpha}} |d\zeta||d\zeta'| &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\left|\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{in\theta} \left(e^{int} - 1\right)\right|^2}{\left|1 - e^{it}\right|^{1+2\alpha}} d\theta dt \\
&= 2\pi \int_0^{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 \frac{\left|e^{int} - 1\right|^2}{\left|1 - e^{it}\right|^{1+2\alpha}} dt
\end{aligned}$$

De plus, pour $n > 0$,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{\left|e^{int} - 1\right|^2}{\left|1 - e^{it}\right|^{1+2\alpha}} dt &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin(nt/2)^2}{|\sin(t/2)|^{1+2\alpha}} dt \\
&= \int_0^{\pi n} \frac{\sin(u)^2}{|\sin(u/n)|^{1+2\alpha}} \frac{2du}{n} \\
&= 2 \int_0^{\pi n/2} \frac{\sin(u)^2}{|\sin(u/n)|^{1+2\alpha}} \frac{2du}{n}.
\end{aligned}$$

Or pour tout $u \in [0, \pi n/2]$, on a $\frac{2u}{n\pi} \leq \sin(u/n) \leq \frac{u}{n}$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{\left|e^{int} - 1\right|^2}{\left|1 - e^{it}\right|^{1+2\alpha}} dt &\leq 2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1+2\alpha} \int_0^{\pi n/2} \frac{\sin(u)^2}{|u/n|^{1+2\alpha}} \frac{2du}{n} \\
&\leq 4 \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1+2\alpha} \int_0^{\infty} \frac{\sin(u)^2}{u^{1+2\alpha}} |n|^{2\alpha} du \\
&\lesssim |n|^{2\alpha}.
\end{aligned}$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{|e^{int}-1|^2}{|1-e^{it}|^{1+2\alpha}}dt &\geq 2\int_0^{\pi n/2} \frac{\sin(u)^2}{|u/n|^{1+2\alpha}}\frac{2du}{n} \\
&\geq 4\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(u)^2}{u^{1+2\alpha}}|n|^{2\alpha}du \\
&\gtrsim |n|^{2\alpha}.
\end{aligned}$$

Lorsque $n<0$, on obtient la même chose car $|e^{int}-1| = |e^{-int}-1|$. □

On peut aussi exprimer la norme $\|f\|_{A^2_\alpha}$ grâce à la formule suivante due à Aleman (voir [1]). Pour $f \in A^2_\alpha(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T})$, $\alpha > 0$, on note également par f son extension harmonique sur $\mathbb{D}$ définie par

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{1-|z|^2}{|\zeta - z|^2} f(\zeta)|d\zeta|, \quad z \in \mathbb{D}.$$

On note dA la mesure de Lebesgue (mesure d'aire) normalisée sur $\mathbb{D}$:

$$\mathrm{dA}(x+iy) = dxdy/\pi.$$

Proposition 3.3.2. *Soit $f \in L^2(\mathbb{T})$ et $\alpha > 0$ vérifiant $\alpha < 1/2$. On pose, pour $z \in \mathbb{D}$,*

$$\mathcal{A}_z(f) = \int_{\mathbb{T}} \left|\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}\right|^2 \frac{|d\zeta|}{2\pi}.$$

On a

$$\int_{\mathbb{D}} (1-|z|)^{-2\alpha}\mathcal{A}_z(f)dA(z) \asymp \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2|n|^{2\alpha}.$$

En particulier

$$\|f\|^2_{A^2_\alpha} \asymp |\widehat{f}(0)|^2 + \int_{\mathbb{D}} (1-|z|)^{-2\alpha}\mathcal{A}_z(f)dA(z).$$

Démonstration. Notons d'abord que l'extension harmonique d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{T})$ vérifie

$$f(re^{i\theta}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)r^{|n|}e^{in\theta}.$$

Donc par le même calcul que dans le début de la démonstration de la proposition 3.3.1, en utilisant l'égalité de Parseval, on obtient

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\frac{f(e^{it})-f(re^{i\theta})}{e^{it}-re^{i\theta}}\right|^2 dtd\theta = 2\pi\int_0^{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^2 \left|\frac{1-r^{|n|}e^{-int}}{1-re^{-it}}\right|^2 dt.$$

D'une part, lorsque $n > 0$,

$$\frac{1 - r^n e^{-int}}{1 - re^{-it}} = \sum_{k=0}^{n-1} r^k e^{-ikt}$$

et d'autre part, lorsque $n < 0$,

$$\left|\frac{1 - r^{|n|} e^{-int}}{1 - re^{-it}}\right| = \left|\frac{1 - r^{|n|} e^{-i|n|t}}{1 - re^{-it}}\right| = \left|\sum_{k=0}^{|n|-1} r^k e^{-ikt}\right|.$$

Donc, en utilisant l'égalité de Parseval, on obtient pour $n \neq 0$,

$$\int_0^{2\pi} \left|\frac{1 - r^{|n|} e^{-int}}{1 - re^{-it}}\right|^2 dt = 2\pi \sum_{k=0}^{|n|-1} r^{2k}.$$

On a alors,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} (1 - |z|)^{-2\alpha} \mathcal{A}_z(f) dA(z) &= \int_0^1 (1-r)^{-2\alpha} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|\frac{f(e^{it}) - f(re^{i\theta})}{e^{it} - re^{i\theta}}\right|^2 dt d\theta r dr \\
&= 4\pi^2 \int_0^1 (1-r)^{-2\alpha} \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |\widehat{f}(n)|^2 \sum_{k=0}^{|n|-1} r^{2k} r dr \\
&= 4\pi^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |\widehat{f}(n)|^2 \sum_{k=0}^{|n|-1} \int_0^1 (1-r)^{-2\alpha} r^{2k} r dr.
\end{aligned}$$

Il est bien connu (voir les propriétés de la fonction bêta d'Euler) que pour α fixé,

$$\int_0^1 (1-r)^{-2\alpha} r^{2k} dr \asymp \frac{1}{(2k)^{1-2\alpha}}.$$

Donc il vient

$$\int_{\mathbb{D}} (1 - |z|)^{-2\alpha} \mathcal{A}_z(f) dA(z) \asymp \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^2 |n|^{2\alpha}.$$

□

La proposition suivante s'inspire de la démonstration [43, Proposition 3.4].

Proposition 3.3.3. *Soit $1 < p < 2$, $\beta \geq 0$ vérifiant $\beta q < 1$ et $f \in A^2_\alpha(\mathbb{T})$ avec*

$$1/p - 1/2 + \beta < \alpha < 1/2.$$

Les assertions suivantes sont équivalentes.

(1) $[f]_{\mathbb{N}}^{A^p_\beta(\mathbb{T})} = [f]_{\mathbb{Z}}^{A^p_\beta(\mathbb{T})}$

(2) $\inf\Big\{\|Pf\|_{A^p_\beta},\ P \in H^\infty,\ Pf \in A^2_\alpha(\mathbb{T}),\ P(0)=1\Big\} = 0$

Démonstration. Notons d'abord que, d'après le lemme 2.2.1, $\alpha > 1/p - 1/2 + \beta$ implique que $A^2_\alpha(\mathbb{T}) \subset A^p_\beta(\mathbb{T})$.

Supposons que $[f]_{\mathbb{N}}^{A^p_\beta(\mathbb{T})} = [f]_{\mathbb{Z}}^{A^p_\beta(\mathbb{T})}$. Par (3.1.3), il existe $P_n \in \mathcal{P}_+(\mathbb{T})$ tel que $\|f - zP_nf\|_{A^p_\beta}$ tend vers zéro lorsque $n \to \infty$. Puisque $1 - zP_n \in H^\infty$, on a

$$\inf\Big\{\|Pf\|_{A^p_\beta},\ P \in H^\infty,\ Pf \in A^2_\alpha(\mathbb{T}),\ P(0)=1\Big\} = 0.$$

Maintenant supposons *(2)*. Soit $P_n \in H^\infty$, pour $n \in \mathbb{N}$, tel que $P_n(0) = 1$, $P_nf \in A^2_\alpha(\mathbb{T})$ et $\|P_nf\|_{A^p_\beta}$ tend vers zéro lorsque $n \to \infty$. On écrit $P_n = 1 - zQ_n$ avec $Q_n \in H^\infty$. Donc on a,

$$\lim_{n\to\infty} \|P_nf\|_{A^p_\beta} = \lim_{n\to\infty} \|zQ_nf - f\|_{A^p_\beta} = 0.$$

On a $[f]_{\mathbb{N}}^{A^p_\beta(\mathbb{T})} = [f]_{\mathbb{Z}}^{A^p_\beta(\mathbb{T})}$ si et seulement si $f \in [f]_{\mathbb{N}^*}^{A^p_\beta(\mathbb{T})}$. Comme $[f]_{\mathbb{N}^*}^{A^p_\beta(\mathbb{T})}$ est un sous-ensemble fermé de $A^p_\beta(\mathbb{T})$, il suffit de montrer que $zQ_nf \in [f]_{\mathbb{N}^*}^{A^p_\beta(\mathbb{T})}$ pour obtenir *(1)*. Or $zQ_nf \in A^2_\alpha(\mathbb{T})$ car P_nf et f sont dans $A^2_\alpha(\mathbb{T})$, il suffit alors de montrer que :

$$\text{si } Q \in H^\infty \text{ vérifie } zQf \in A^2_\alpha(\mathbb{T}) \text{ alors } zQf \in [f]_{\mathbb{N}^*}^{A^p_\beta(\mathbb{T})}.$$

On note, pour $0 < r < 1$, $Q_r(z) = Q(rz)$. On a $zQ_rf \in [f]_{\mathbb{N}^*}^{A^p_\beta(\mathbb{T})}$ car pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\tilde{Q}_r \in \mathcal{P}_+(\mathbb{T})$ tel que $\|Q_r - \tilde{Q}_r\|_{A^1_\beta} < \varepsilon$ et

$$\|zQ_rf - z\tilde{Q}_rf\|_{A^p_\beta} \le \|Q_r - \tilde{Q}_r\|_{A^1_\beta}\|zf\|_{A^p_\beta} < \varepsilon\|zf\|_{A^p_\beta}.$$

De plus, par le théorème de Hahn-Banach, l'ensemble $[f]_{\mathbb{N}^*}^{A^p_\beta(\mathbb{T})}$, qui est convexe et fermé, est faiblement fermé dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$. Donc il suffit de montrer que zQ_rf converge faiblement vers zQf dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$ quand $r \to 1^-$. Soit $g \in A^q_{-\beta}(\mathbb{T})$ un élément du dual de $A^p_\beta(\mathbb{T})$ avec $1/p + 1/q = 1$. Il existe une suite de polynômes (g_n) de $\mathcal{P}(\mathbb{T})$ telle que $\|g - g_n\|_{A^q_{-\beta}}$ tend vers zéro lorsque $n \to \infty$. Ainsi on a

$$\begin{aligned}
|\langle zQ_rf - zQf, g\rangle| &\le |\langle zQ_rf - zQf, g - g_n\rangle| + |\langle zQ_rf - zQf, g_n\rangle| \\
&\le \|zQ_rf - zQf\|_{A^p_\beta}\|g - g_n\|_{A^q_{-\beta}} + \\
&\qquad \left|\int_{\mathbb{T}} (zQ_rf - zQf)(\zeta) g_n(\zeta)|d\zeta|\right|.
\end{aligned}$$

Montrons que les termes de l'inégalité ci-dessus tendent vers zéro lorsque $r \to 1^-$. Puisque $f \in L^1(\mathbb{T})$, on obtient en appliquant le théorème de convergence dominé,

$$\lim_{r\to 1^-} \int_{\mathbb{T}} |(zQ_r f - zQf)(\zeta) g_n(\zeta)||d\zeta| = 0.$$

De plus, puisque $\|g - g_n\|_{A^q_{-\beta}} \to 0$, il suffit de montrer que $\|zQ_r f\|_{A^p_\beta}$ est borné. Tout d'abord on a $\|zQ_r f\|_{A^p_\beta} \leq \|zQ_r f\|_{A^2_\alpha}$ car $\alpha > 1/p - 1/2 + \beta$. Ensuite la formule de Aleman (voir proposition 3.3.2) nous donne que

$$\|zQ_r f\|_{A^2_\alpha} \lesssim \left| \int_{\mathbb{D}} (1-|z|)^{-2\alpha} \mathcal{A}_z(Q_r f) dA(z) \right| + |\widehat{zQ_r f}(0)|.$$

Notons d'abord que $|\widehat{zQ_r f}(0)| \leq \|Q\|_\infty \|f\|_{L^1(\mathbb{T})}$. De plus on a, pour $z \in \mathbb{D}$,

$$\mathcal{A}_z(Q_r f) = \int_{\mathbb{T}} \left| \frac{Q_r f(\zeta) - Q_r f(z)}{\zeta - z} \right|^2 \frac{|d\zeta|}{2\pi} \leq 2\|Q\|^2_\infty \mathcal{A}_z(f) + 2|f(z)|^2 \mathcal{A}_z(Q_r).$$

De plus, par [43, (5.2)], pour tout $z \in \mathbb{D}$ et $0 < r < 1$, $\mathcal{A}_z(Q_r) \leq 4\mathcal{A}_z(Q)$. Donc, comme pour $\zeta \in \mathbb{T}$,

$$|f(z)Q(\zeta) - f(z)Q(z)|^2 \leq 2|f(\zeta)Q(\zeta) - f(z)Q(z)|^2 + 2|f(z)Q(\zeta) - f(\zeta)Q(\zeta)|^2,$$

on obtient

$$|f(z)|^2 \mathcal{A}_z(Q_r) \leq 4|f(z)|^2 \mathcal{A}_z(Q) \leq 8\mathcal{A}_z(Qf) + 8\|Q\|^2_\infty \mathcal{A}_z(f).$$

Puisque $f \in A^2_\alpha(\mathbb{T})$ et $Qf \in A^2_\alpha(\mathbb{T})$, cela démontre que

$$\|zQ_r f\|^2_{A^2_\alpha} \lesssim \|Q\|^2_\infty \|f\|^2_{A^2_\alpha} + \|Qf\|^2_{A^2_\alpha}$$

est uniformément borné par rapport à $0 < r < 1$.

Ainsi $zQ_r f \to zQf$ faiblement dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$ quand $r \to 1^-$ et $zQf \in [f]^{A^p_\beta(\mathbb{T})}_{\mathbb{N}^*}$. Cela complète la preuve. □

Soit $E \subset \mathbb{T}$ un ensemble fermé. L'ensemble E est dit de Carleson lorsque

$$\int_{\mathbb{T}} \log\left(\frac{1}{d(\zeta, E)}\right) |d\zeta| < \infty.$$

Si on note I_n les intervalles contigus à E, c'est-à-dire les intervalles ouverts disjoints tels que $\mathbb{T} \setminus E = \bigcup I_n$, alors E est un ensemble de Carleson si et seulement si E est de mesure de Lebesgue nulle et si

$$\sum |I_n| \log\left(\frac{1}{|I_n|}\right) < \infty.$$

Ces ensembles ont été introduits par Beurling (voir [8]) et étudiés par Carleson. Ici nous allons nous intéresser à des ensembles qui ne sont pas de Carleson.

Le lemme suivant est issu de la démonstration de [3, Théorème 1.3].

Lemme 3.3.4. *Soit E un sous-ensemble fermé de $\mathbb{T}$ de mesure de Lebesgue nulle et tel que* $\log(d(\cdot, E)) \notin L^1(\mathbb{T})$. *Soit $\delta' > 1/2$ et $\gamma > 0$ tel que $2\delta' - \gamma - 1 \geq 0$. Soit F_ε la fonction extérieure vérifiant*

$$|F_\varepsilon(\zeta)| = (d(\zeta, E)^\gamma + \varepsilon)^{1/2} \qquad p.p.\ sur\ \mathbb{T}$$

et $F_\varepsilon(0) = e^{-M_\varepsilon}$ avec

$$M_\varepsilon = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} \log \left(\frac{1}{d(\zeta, E)^\gamma + \varepsilon} \right) \frac{|d\zeta|}{2\pi}.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$\iint_{\mathbb{T}^2} d(\zeta', E)^{2(\delta' - \gamma)} \frac{|F_\varepsilon(\zeta) - F_\varepsilon(\zeta')|^2}{|\zeta - \zeta'|^2} |d\zeta||d\zeta'| \lesssim M_\varepsilon.$$

Le résultat suivant a été démontré dans [3] pour $p = 2$ et $\beta = 1/2$.

Théorème 3.3.5. *Soit $1 < p < 2$ et $\beta > 0$ tel que $\beta q < 1$. Soit $f \in \mathrm{Lip}_\delta(\mathbb{T})$, où $\delta > \beta + 1/p - 1/2$. On suppose que $\mathcal{Z}(f)$ est de mesure de Lebesgue nulle. Si*

$$\int_{\mathbb{T}} \log d(\zeta, \mathcal{Z}(f)) |d\zeta| = -\infty$$

alors

$$[f]_{\mathbb{Z}}^{A^p_\beta(\mathbb{T})} = [f]_{\mathbb{N}}^{A^p_\beta(\mathbb{T})}.$$

Si en plus on a $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ et $\dim(\mathcal{Z}(f)) < \frac{2}{q}(1 - \beta q)$ alors f est cyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$.

Démonstration. Soit $\alpha > 0$ tel que $\beta + 1/p - 1/2 < \alpha < \min(\delta, 1/2)$. Premièrement on a $f \in \mathrm{Lip}_\delta(\mathbb{T}) \subset A^2_\alpha(\mathbb{T}) \subset A^p_\beta(\mathbb{T})$. En effet d'après la formule de Douglas, (voir proposition 3.3.1), $f \in A^2_\alpha(\mathbb{T})$ si et seulement si $f \in L^2(\mathbb{T})$ et

$$\mathcal{D}_\alpha(f) = \iint_{\mathbb{T}^2} \frac{|f(\zeta) - f(\zeta')|^2}{|\zeta - \zeta'|^{1+2\alpha}} |d\zeta||d\zeta'| < \infty.$$

De plus on a

$$\|f\|^2_{A^2_\alpha} \asymp \|f\|^2_{L^2(\mathbb{T})} + \mathcal{D}_\alpha(f). \tag{3.3.1}$$

Par conséquent si $f \in \mathrm{Lip}_\delta(\mathbb{T})$, c'est-à-dire $|f(\zeta) - f(\zeta')| \lesssim |\zeta - \zeta'|^\delta$ pour $\zeta, \zeta' \in \mathbb{T}$, alors

$$\mathcal{D}_\alpha(f) \lesssim \iint_{\mathbb{T}^2} \frac{1}{|\zeta - \zeta'|^{1+2\alpha-2\delta}} |d\zeta||d\zeta'| < \infty$$

et $f \in A^2_\alpha(\mathbb{T})$. D'autre part, d'après la proposition 2.2.1, on a $A^2_\alpha(\mathbb{T}) \subset A^p_\beta(\mathbb{T})$. Il suffit maintenant de montrer, par la proposition 3.3.3, que

$$\inf \Big\{ \|Pf\|_{A^p_\beta},\ P \in H^\infty,\ Pf \in A^2_\alpha(\mathbb{T}),\ P(0) = 1 \Big\} = 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $\gamma > 0$ tel que $\gamma < \delta - \alpha$. On note $E = \mathcal{Z}(f)$. On définit p_ε la fonction extérieure vérifiant

$$|p_\varepsilon(\zeta)| = \frac{e^{-M_\varepsilon}}{(d(\zeta, E)^\gamma + \varepsilon)^{1/2}} \qquad p.p.$$

et $p_\varepsilon(0) = 1$. En particulier on a

$$M_\varepsilon = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} \log \left(\frac{1}{d(\zeta, E)^\gamma + \varepsilon} \right) \frac{|d\zeta|}{2\pi}.$$

Puisque $\log d(\cdot, E) \notin L^1(\mathbb{T})$, $M_\varepsilon \to \infty$ quand $\varepsilon \to 0$.

Nous allons montrer que

$$\|p_\varepsilon f\|_{A^p_\beta} \leq \|p_\varepsilon f\|_{A^2_\alpha} \longrightarrow 0 \qquad \text{quand } \varepsilon \to 0.$$

D'après la formule de Douglas, proposition 3.3.1, on a

$$\|p_\varepsilon f\|^2_{A^2_\alpha} \asymp \|p_\varepsilon f\|^2_{L^2(\mathbb{T})} + \mathcal{D}_\alpha(p_\varepsilon f).$$

D'abord, puisque $\gamma < 2\delta$,

$$\|p_\varepsilon f\|^2_{L^2(\mathbb{T})} \lesssim e^{-2M_\varepsilon} \int_{\mathbb{T}} \frac{d(\zeta, E)^{2\delta}}{d(\zeta, E)^\gamma} |d\zeta| \lesssim e^{-2M_\varepsilon} \to 0.$$

Ensuite, on a

$$\mathcal{D}_\alpha(p_\varepsilon f) = \iint_{\mathbb{T}^2} \frac{|p_\varepsilon f(\zeta) - p_\varepsilon f(\zeta')|^2}{|\zeta - \zeta'|^{1+2\alpha}} |d\zeta||d\zeta'|.$$

Remarquons que pour tout $(\zeta, \zeta') \in \mathbb{T}^2$ on a

$$|p_\varepsilon f(\zeta) - p_\varepsilon f(\zeta')|^2 \leq 2|p_\varepsilon(\zeta)|^2 |f(\zeta) - f(\zeta')|^2 + 2|f(\zeta')|^2 |p_\varepsilon(\zeta) - p_\varepsilon(\zeta')|^2.$$

Donc si on note $\Gamma = \{(\zeta,\zeta') \in \mathbb{T}^2,\ d(\zeta',E) \leq d(\zeta,E)\}$, on obtient, en remarquant que ζ et ζ' jouent un rôle symétrique,

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_\alpha(p_\varepsilon f) &\lesssim \iint_\Gamma |p_\varepsilon(\zeta)|^2 \frac{|f(\zeta)-f(\zeta')|^2}{|\zeta-\zeta'|^{1+2\alpha}}|d\zeta||d\zeta'| + \iint_\Gamma |f(\zeta')|^2 \frac{|p_\varepsilon(\zeta)-p_\varepsilon(\zeta')|^2}{|\zeta-\zeta'|^{1+2\alpha}}|d\zeta||d\zeta'| \\ &= A_\varepsilon + B_\varepsilon.\end{aligned}$$

Soit η tel que $\frac{\gamma}{2\delta} \leq \eta < \frac{2\delta-2\alpha}{2\delta}$. En utilisant le fait que pour $(\zeta,\zeta') \in \Gamma$, $|f(\zeta')| \leq d(\zeta,E)^\delta$, on obtient

$$\begin{aligned}A_\varepsilon &= e^{-2M_\varepsilon} \iint_\Gamma \left(\frac{|f(\zeta)-f(\zeta')|^{2\eta}}{d(\zeta,E)^\gamma+\varepsilon}\right)\left(\frac{|f(\zeta)-f(\zeta')|^{2-2\eta}}{|\zeta-\zeta'|^{1+2\alpha}}\right)|d\zeta||d\zeta'| \\ &\lesssim e^{-2M_\varepsilon} \iint_\mathbb{T} \frac{d(\zeta,E)^{2\eta\delta}}{d(\zeta,E)^\gamma}\left(\frac{|f(\zeta)-f(\zeta')|^{2-2\eta}}{|\zeta-\zeta'|^{1+2\alpha}}\right)|d\zeta||d\zeta'| \\ &\lesssim e^{-2M_\varepsilon} \iint_\mathbb{T} \frac{|\zeta-\zeta'|^{(2-2\eta)\delta}}{|\zeta-\zeta'|^{1+2\alpha}}|d\zeta||d\zeta'| \\ &\lesssim e^{-2M_\varepsilon} \to 0.\end{aligned}$$

Pour estimer B_ε, on considère la fonction extérieure F_ε définie dans le lemme 3.3.4. Puisque que p_ε et F_ε sont extérieures et pour tout $\zeta \in \mathbb{T}$, $|p_\varepsilon(\zeta)| = e^{-M_\varepsilon}/|F_\varepsilon(\zeta)|$, on a $p_\varepsilon(\zeta) = e^{-M_\varepsilon}/F_\varepsilon(\zeta)$. Soit

$$\Gamma_1 = \{(\zeta,\zeta') \in \Gamma,\ d(\zeta',E) \leq |\zeta-\zeta'|\},$$

$$\Gamma_2 = \{(\zeta,\zeta') \in \Gamma,\ d(\zeta',E) > |\zeta-\zeta'|\}.$$

On a

$$\begin{aligned}B_\varepsilon &= \iint_\Gamma |f(\zeta')|^2|p_\varepsilon(\zeta)p_\varepsilon(\zeta')|^2 \frac{|1/p_\varepsilon(\zeta')-1/p_\varepsilon(\zeta)|^2}{|\zeta-\zeta'|^{1+2\alpha}}|d\zeta||d\zeta'| \\ &\lesssim e^{-2M_\varepsilon} \iint_\Gamma \frac{d(\zeta',E)^{2\delta}}{(d(\zeta,E)^\gamma+\varepsilon)(d(\zeta',E)^\gamma+\varepsilon)} \frac{|F_\varepsilon(\zeta)-F_\varepsilon(\zeta')|^2}{|\zeta-\zeta'|^{1+2\alpha}}|d\zeta||d\zeta'| \\ &\lesssim e^{-2M_\varepsilon} \iint_{\Gamma_1} |\zeta-\zeta'|^{2\delta-2\gamma-2\alpha-1}|F_\varepsilon(\zeta)-F_\varepsilon(\zeta')|^2|d\zeta||d\zeta'| \\ &\quad + e^{-2M_\varepsilon} \iint_{\Gamma_2} d(\zeta',E)^{2\delta-2\gamma-2\alpha+1} \frac{|F_\varepsilon(\zeta)-F_\varepsilon(\zeta')|^2}{|\zeta-\zeta'|^2}|d\zeta||d\zeta'| \\ &= B_\varepsilon^1 + B_\varepsilon^2.\end{aligned}$$

Puisque $\gamma < \delta-\alpha$ et que $|F_\varepsilon|$ est borné sur $\mathbb{T}$ uniformément par rapport à $\varepsilon \in]0,1]$, on a $B_\varepsilon^1 \lesssim e^{-2M_\varepsilon} \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$.

D'autre part en appliquant le lemme 3.3.4 avec $\delta' = \delta-\alpha+1/2$, on obtient $B_\varepsilon^2 \lesssim M_\varepsilon e^{-2M_\varepsilon}$. Ainsi $B_\varepsilon^2 \to 0$ lorsque $\varepsilon \to 0$. Par conséquent on a

$\lim \|p_\varepsilon f\|_{A^p_\beta} = 0$ et, par la proposition 3.3.3, $[f]_{\mathbb{Z}}^{A^p_\beta(\mathbb{T})} = [f]_{\mathbb{N}}^{A^p_\beta(\mathbb{T})}$. Finalement, par le Théorème 2.4.5, si $\dim(\mathcal{Z}(f)) < \frac{2}{q}(1-\beta q)$ alors f est bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$, donc f est cyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$ □

Remarque
Soit $1 < p < 2$ et $\beta > 0$ tel que $\beta q < 1$. En utilisant le fait que $A^2_{1/2}(\mathbb{T}) \subset A^p_\beta(\mathbb{T})$ et le [3, Théorème 1.2] on obtient, pour $f \in A^p_\beta(\mathbb{T})$ tel que $|f| \in C^1(\mathbb{T})$ et $|f|' \in \mathrm{Lip}_\delta(\mathbb{T})$ pour $\delta > 0$, le résultat suivant : si $\dim(\mathcal{Z}(f)) < \frac{2}{q}(1-\beta q)$ et $\log|f| \notin L^1(\mathbb{T})$ alors f^2 est cyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$.

Quand $f \in C^\infty(\mathbb{T})$, Makarov a montré dans [36], que

$$[f]_{\mathbb{N}}^{C^\infty(\mathbb{T})} = [f]_{\mathbb{Z}}^{C^\infty(\mathbb{T})} \iff \log|f| \notin L^1(\mathbb{T}). \tag{3.3.2}$$

Comme conséquence du théorème de Makarov et du Théorème 2.4.5, on obtient le résultat suivant :

Théorème 3.3.6. *Soit $1 < p < 2$, $\beta \geq 0$ tel que $\beta q \leq 1$. Nous avons les assertions suivantes :*

(1) Si $f \in C^\infty(\mathbb{T})$, $\dim(\mathcal{Z}(f)) < \frac{2}{q}(1-\beta q)$ et $\log|f| \notin L^1(\mathbb{T})$ alors f est cyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$.

(2) Si $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$, $\dim(\mathcal{Z}(f)) > 1-\beta q$ alors f n'est pas cyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$.

(3) Pour $\frac{2}{q}(1-\beta q) \leq \alpha \leq 1$, il existe un ensemble fermé $E \subset \mathbb{T}$ tel que $\dim(E) = \alpha$ et toute fonction $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ vérifiant $\mathcal{Z}(f) \subset E$ n'est pas cyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$.

(4) Si $p = \frac{2k}{2k-1}$ pour un $k \in \mathbb{N}$ alors il existe un sous ensemble fermé $E \subset \mathbb{T}$ tel que $\dim(E) = 1-\beta q$ et tout $f \in C^\infty(\mathbb{T})$ vérifiant $\mathcal{Z}(f) \subset E$ et $\log|f| \notin L^1(\mathbb{T})$ est cyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$.

On remarque que, pour $1 < p < 2$ et $\beta \geq 0$ tel que $\beta q \leq 1$, si f est cyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$ alors $\log|f| \notin L^1(\mathbb{T})$.

Démonstration. Pour (2) et (3), on utilise les Théorème 2.4.5 et 2.4.7 puisque si f n'est pas bicyclique alors f n'est pas cyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$.

Pour (1) et (4), on suppose $\log|f| \notin L^1(\mathbb{T})$. Puisque $[f]_{\mathbb{N}}^{C^\infty(\mathbb{T})} = [f]_{\mathbb{Z}}^{C^\infty(\mathbb{T})}$ et puisque le plongement $C^\infty(\mathbb{T}) \subset A^p_\beta(\mathbb{T})$ est continu, on obtient $[f]_{\mathbb{N}}^{A^p_\beta(\mathbb{T})} = [f]_{\mathbb{Z}}^{A^p_\beta(\mathbb{T})}$. De plus, par le Théorème 2.4.5, f est bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$. Ainsi f est cyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$. □

Dans la suite on notera, pour $E \subset \mathbb{T}$, $|E|$ la mesure de Lebesgue de E

3.3.1 Exemples

Soit E un sous-ensemble fermé de $\mathbb{T}$ et Λ une fonction continue, positive et décroissante définie sur $(0,\infty)$ telle que $\lim \Lambda(t) = \infty$ quand $t \to 0^+$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{T}$ par

$$f(\zeta) = \exp\left(-\Lambda(d(\zeta, E))\right) \tag{3.3.3}$$

si $\zeta \notin E$ et $f(\zeta) = 0$ sinon. Supposons que $\Lambda(t) = 1/t^\gamma$ pour $\gamma \geq 1$. On a alors $\log|f| \notin L^1(\mathbb{T})$. Donc, d'après le théorème 3.3.6,

(1) si $\dim(E) < \frac{2}{q}(1-\beta q)$ alors f est cyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$;

(2) si $\dim(E) > 1 - \beta q$ alors f n'est pas cyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$;

(3) pour $\frac{2}{q}(1-\beta q) \leq \alpha \leq 1$, il existe un sous-ensemble fermé $E \subset \mathbb{T}$ tel que $\dim(E) = \alpha$ et f n'est pas cyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$;

(4) si $p = \frac{2k}{2k-1}$ pour un $k \in \mathbb{N}$ alors il existe un sous-ensemble fermé $E \subset \mathbb{T}$ tel que $\dim(E) = 1 - \beta q$ et f est cyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$.

Remarque

On suppose maintenant que la fonction Λ est continue, positive et décroissante sur $(0,\infty)$ et vérifie en plus

$$\lim_{t\to 0^+} \Lambda(t) = \infty \quad \text{et} \quad \lim_{t\to 0^+} t\Lambda(t) = 0.$$

Par [15, Proposition A.1], on a

$$\int_{\mathbb{T}} \log|f(\zeta)||d\zeta| = -\int_{\mathbb{T}} \Lambda(d(\zeta,E))|d\zeta| = -\infty \Leftrightarrow \int_{\mathbb{T}} |E_t| d\Lambda(t) = -\infty$$

où $E_t = \{\zeta \in \mathbb{T},\ d(\zeta,E) \leq t\}$. Soit $N_E(t)$ le nombre minimum d'arcs de longueur $2t$ recouvrant E. On a, par [15, Lemma A.3], que

$$tN_E(t) \leq |E_t| \leq 4tN_E(t).$$

Ainsi, par [7, théorème 2, p. 30], on a pour $0 < \delta < 1$,

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{1}{t^{\delta+1}N_E(t)} dt = \infty \Leftrightarrow \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{t^\delta |E_t|} dt = \infty \Rightarrow \dim(E) \leq \delta.$$

Maintenant on suppose que $\Lambda(t) = 1/t^\gamma$ pour $0 < \gamma < 1$. La fonction f définie par (3.3.3) est infiniment dérivable sur $\mathbb{T}$. Soit $1 < p < 2$, $\beta \geq 0$ tel que $\beta q < 1$. On peut construire un ensemble de Cantor généralisé E tel que

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{|E_t|}{t^{\gamma+1}} dt = \infty \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{t^\delta |E_t|} dt = \infty$$

pour $\delta < \frac{2}{q}(1-\beta q)$. Par le théorème 3.3.6, la fonction f est cyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$.

3.4 Densité de l'ensemble des vecteurs cycliques

Quand $\beta q \leq 1$, nous avons vu, dans la précédente section, qu'il existe des vecteurs cycliques dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$. Ici nous allons montrer que l'ensemble des vecteurs cycliques dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$ est un sous-ensemble G_δ-dense de $A^p_\beta(\mathbb{T})$.

Lemme 3.4.1. *Soit $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$. Si $\mathcal{Z}(f)$ est un ensemble fini alors f est bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$ pour $p > 1$ et $\beta \geq 0$ tel que $\beta q \leq 1$.*

Démonstration. Soit $S \in A^q_{-\beta}(\mathbb{T})$ tel que $\langle S, z^n f\rangle = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. il suffit de prouver que $S = 0$. Tout d'abord on a $\text{supp}(S) \subset \mathcal{Z}(f)$, d'après la proposition 2.2.5, et puisque $\mathcal{Z}(f)$ est fini, on obtient que

$$S = \sum_{k=1}^{N} \sum_{n=0}^{M} \lambda_{k,n}\ \delta^{(n)}_{z_k}$$

où $\mathcal{Z}(f) = \{z_k,\ k \in [\![1, N]\!]\} \subset \mathbb{T}$, $\lambda_{k,n} \in \mathbb{C}$ et où $\delta^{(n)}_{z_k}$ est la dérivée $n$ème suivant le cercle de la mesure de Dirac concentré au point z_k.

On suppose que $S \neq 0$. Il existe k_0 et n_0 tels que $\lambda_{k_0,n_0} \neq 0$. On définit

$$T = \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq k_0}}^{N} (z - z_k)^{M+1}\ S.$$

Donc $T \in A^q_{-\beta}(\mathbb{T})$ et $T \neq 0$. Ainsi il existe $(c_n) \in \mathbb{C}^{M+1}$ tel que pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{T})$,

$$\langle T, \varphi\rangle = \langle S, \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq k_0}}^{N} (z - z_k)^{M+1}\varphi\rangle = \sum_{n=0}^{M} \lambda_{k_0,n}\ c_n\ \varphi^{(n)}(z_{k_0}).$$

Si on note $n_1 = \max\{n,\ c_n\lambda_{k_0,n} \neq 0\}$, alors on a pour tout $l \in \mathbb{Z}$

$$|\langle T, z^l\rangle| = \left|\sum_{n=0}^{N} \lambda_{k_0,n}\ c_n\ (il)^n z^l_{k_0}\right| \underset{l\to\infty}{\sim} |\lambda_{k_0,n_1}|\ |c_{n_1}||l|^{n_1}$$

(ici $z^l = e^{il\theta}$). Cela est impossible car $T \in A^q_{-\beta}(\mathbb{T})$ et $\beta q \leq 1$. □

Lemme 3.4.2. *Soit $1 < p \leq 2$ et $\beta \geq 0$ tels que $\beta q \leq 1$ où $1/p + 1/q = 1$. Si $f \in A^p_\beta(\mathbb{T})$ est cyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$ et si $P \in \mathcal{P}(\mathbb{T})$ est non nul alors Pf est cyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Par le lemme 3.4.1, P est bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$ car $\mathcal{Z}(P)$ est fini. Donc il existe $P_1 \in \mathcal{P}(\mathbb{T})$ tel que $\|1 - P_1 P\|_{A^p_\beta} < \varepsilon$. De plus puisque f est bicyclique, il existe $P_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{T})$ tel que

$$\|1 - P_2 f\|_{A^p_\beta} < \frac{\varepsilon}{\|P_1 P\|_{A^1_\beta}}.$$

Donc

$$\|1 - P_1 P_2 P f\|_{A^p_\beta} \leq \|1 - P_1 P\|_{A^p_\beta} + \|P_1 P\|_{A^1_\beta} \|1 - P_2 f\|_{A^p_\beta} < 2\varepsilon,$$

et Pf est bicyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$.

De plus, puisque f est cyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$, il existe $Q \in \mathcal{P}_+(\mathbb{T})$ tel que $\|f - zQf\|_{A^p_\beta} < \frac{\varepsilon}{\|P\|_{A^1_\beta}}$. Donc on a

$$\|Pf - zQPf\|_{A^p_\beta} \leq \|P\|_{A^1_\beta} \|f - zQf\|_{A^p_\beta} < \varepsilon.$$

D'après (3.1.3), Pf est cyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$. □

Théorème 3.4.3. *Soit $1 < p \leq 2$ et $\beta \geq 0$ tels que $\beta q \leq 1$ où $1/p + 1/q = 1$. L'ensemble des vecteurs cycliques dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$ est un sous-ensemble G_δ-dense de $A^p_\beta(\mathbb{T})$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. On considère l'ensemble

$$G_\varepsilon = \{g \in A^p_\beta(\mathbb{T}),\ \exists P \in \mathcal{P}(\mathbb{T}),\ \exists Q \in \mathcal{P}_+(\mathbb{T}),\ \|1 - Pg\|_{A^p_\beta} < \varepsilon \quad \text{et} \quad \|g - zQg\|_{A^p_\beta} < \varepsilon\}.$$

Pour utiliser le lemme de Baire nous allons démontrer que

(i) $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_{1/n} = \{f \in A^p_\beta(\mathbb{T}) \text{ cyclique dans } A^p_\beta(\mathbb{T})\}$

(ii) Pour $\varepsilon > 0$, G_ε est un sous-ensemble ouvert de $A^p_\beta(\mathbb{T})$

(iii) Pour $\varepsilon > 0$, G_ε est un sous-ensemble dense de $A^p_\beta(\mathbb{T})$.

(i) : Soit $g \in A^p_\beta(\mathbb{T})$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $P_n \in \mathcal{P}(\mathbb{T})$ et $Q_n \in \mathcal{P}_+(\mathbb{T})$ vérifiant $\|1 - P_n g\|_{A^p_\beta} < 1/n$ et $\|g - zQ_n g\|_{A^p_\beta} < 1/n$. Par (3.1.3), g est cyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$. L'autre inclusion est claire.

(ii) vient du fait que, pour $f \in A^1_\beta(\mathbb{T})$ et $g \in A^p_\beta(\mathbb{T})$, on a

$$\|fg\|_{A^p_\beta} \leq \|f\|_{A^1_\beta} \|g\|_{A^p_\beta}.$$

(iii) : Puisque pour $\varepsilon > 0$, $\{f \in A^p_\beta(\mathbb{T})$ cyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})\} \subset G_\varepsilon$, nous allons montrer que $\{f \in A^p_\beta(\mathbb{T})$ cyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})\}$ est dense dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$. Soit $h \in A^p_\beta(\mathbb{T})$ et $\eta > 0$ tel que $\eta < \|h\|_{A^p_\beta}$. On considère $f \in A^p_\beta(\mathbb{T})$ cyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$. Donc il existe un polynôme non nul $P \in \mathcal{P}_+(\mathbb{T})$ tel que $\|h - Pf\|_{A^p_\beta} < \eta$ et par le lemme 3.4.2, Pf est cyclique dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$. Ainsi cela prouve que G_ε est dense dans $A^p_\beta(\mathbb{T})$. $\square$

Chapitre 4

Cyclicité dans les espaces de Dirichlet

Soit X un espace de Banach de fonctions holomorphes sur le disque unité $\mathbb{D}$. On suppose que l'opérateur shift S, défini par

$$S(f)(z) = zf(z), \quad z \in \mathbb{D},$$

est borné sur X. Pour $f \in X$, on note $[f]_{\mathbb{N}}^X$ le sous-espace vectoriel fermé engendré par $\{z^n f,\ n \in \mathbb{Z}\}$, autrement dit,

$$[f]_{\mathbb{N}}^X = \overline{\text{span}}^X \{z^n f,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

On dit que $f \in X$ est cyclique dans X si $[f]_{\mathbb{N}}^X = X$.

Le problème des vecteurs cycliques pour l'espace de Dirichlet est un problème qui remonte aux travaux de Beurling et Carleson (voir [4], [7] et [8]). L'espace de Dirichlet classique est donné par

$$\mathscr{D}(\mathbb{D}) = \left\{ f \in \mathscr{H}(\mathbb{D}),\ \|f\|_{\mathscr{D}}^2 = |f(0)|^2 + \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 \mathrm{dA}(z) < \infty \right\}.$$

Notons que si $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ alors

$$\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 \mathrm{dA}(z) = \sum_{n \geq 1} n |a_n|^2.$$

Alors que le théorème de Beurling caractérise les vecteurs cycliques dans l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$ (ce sont les fonctions extérieures), le problème des vecteurs cycliques dans l'espace de Dirichlet semble difficile. Il existe des fonctions extérieures de l'espace de Dirichlet qui ne sont pas cycliques dans

$\mathscr{D}(\mathbb{D})$. En fait la cyclicité de telles fonctions dépend notamment de la distribution des zéros de la limite radiale f^* de f sur le cercle. Beurling a montré que toute fonction de l'espace de Dirichlet admet une limite radiale quasi-partout, c'est-à-dire qui existe sur le cercle sauf sur un ensemble de capacité logarithmique nulle. Carleson a montré que lorsque E est un ensemble fermé de $\mathbb{T}$,

$$\mathcal{D}_E = \{f \in \mathscr{D}(\mathbb{D}),\ f^*|_E = 0 \quad q.p.\}$$

est un sous-espace (fermé) de $\mathscr{D}(\mathbb{D})$ invariant pour le shift. Il a aussi montré que lorsque E est un ensemble fermé de capacité logarithmique nulle, il existe une fonction f extérieure dont la limite radiale s'annule sur E et telle que f est cyclique dans $\mathscr{D}(\mathbb{D})$. Brown et Shields ([6]) ont conjecturé que $f \in \mathscr{D}(\mathbb{D})$ est cyclique dans $\mathscr{D}(\mathbb{D})$ si et seulement si f est extérieure et la capacité logarithmique de l'ensemble de zéros de f^* est nulle. Lorsque l'ensemble des zéros de f^* est réduit à un point, Brown et Shields ont montré que si f est régulière et extérieure alors f est cyclique. Hedenmalm et Shields ont montré dans [22] que ceci reste vrai lorsque $f \in \mathscr{D}(\mathbb{D})$ et est dans l'algèbre du disque. Finalement Richter et Sundberg ([44] et [45]) ont montré que ceci reste encore vrai lorsque f est seulement dans l'espace de Dirichlet.

Dans ce chapitre nous nous intéressons à la cyclicité, dans des espaces de Dirichlet plus généraux, de fonctions s'annulant en un seul point.

4.1 Espace de Dirichlet et dualité

On note $\mathscr{H}(\mathbb{D})$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur le disque $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$ et on note dA la mesure de Lebesgue (mesure d'aire) normalisée sur $\mathbb{D}$ ($\mathrm{dA}(x+iy) = dxdy/\pi$).
On appelle espace de Dirichlet les espaces de la forme $\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$ avec $p \geq 1$, $\alpha > -1$ définis par

$$\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D}) = \left\{ f \in \mathscr{H}(\mathbb{D}),\ \|f\|^p_{\mathscr{D}^p_\alpha} = |f(0)|^p + \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^p (1-|z|^2)^\alpha \mathrm{dA}(z) < \infty \right\}.$$

On appelle espace de Bergman les espaces de la forme $\mathscr{A}^p_\alpha(\mathbb{D})$ avec $p \geq 1$, $\alpha > -1$ définis par

$$\mathscr{A}^p_\alpha(\mathbb{D}) = \left\{ f \in \mathscr{H}(\mathbb{D}),\ \|f\|^p_{\mathscr{A}^p_\alpha} = \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p (1-|z|^2)^\alpha \mathrm{dA}(z) < \infty \right\}.$$

On définit également les espaces de Bergman sur le disque extérieur $\mathbb{D}_e = \{z \in \mathbb{C},\ |z| > 1\} \cup \{\infty\} = \{1/z,\ z \in \mathbb{D}\}$, notés $\mathscr{B}^p_\alpha(\mathbb{D}_e)$ avec $p \geq 1$, $\alpha > -1$ et définis par

$$\mathscr{B}^p_\alpha(\mathbb{D}_e) = \left\{ g \in \mathscr{H}(\mathbb{D}_e),\ g(\infty) = 0 \text{ et } \|g\|^p_{\mathscr{B}^p_\alpha} = \int_{\mathbb{D}_e} |g(z)|^p \frac{(|z|^2-1)^\alpha}{|z|^{4-p+2\alpha}} \mathrm{dA}(z) < \infty \right\}.$$

On peut observer que les espaces $\mathscr{A}^p_\alpha(\mathbb{D})$ et $\mathscr{B}^p_\alpha(\mathbb{D}_e)$ sont isométriquement isomorphe via l'isométrie $R : f \mapsto Rf$ définie sur $\mathscr{A}^p_\alpha(\mathbb{D})$ par

$$Rf(z) = \frac{1}{z}\overline{f\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}, \quad z \in \mathbb{D}_e. \tag{4.1.1}$$

En effet en effectuant le changement de variable $z \mapsto 1/\overline{z}$ on obtient

$$\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p(1-|z|^2)^\alpha \mathrm{dA}(z) = \int_{\mathbb{D}_e} |\overline{f(1/\overline{z})}/z|^p \frac{(|z|^2-1)^\alpha}{|z|^{4-p+2\alpha}} \mathrm{dA}(z)$$

De plus lorsque $f = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \in \mathscr{A}^p_\alpha(\mathbb{D})$ on obtient en utilisant (4.1.1)

$$Rf(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{a_n}}{z^{n+1}}, \quad z \in \mathbb{D}_e. \tag{4.1.2}$$

Dans toute la suite on considère $p > 1$ et on note $q = \frac{p}{p-1}$.

Lemme 4.1.1. *Supposons que $-1 < \alpha < p-1$. L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie sur $\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D}) \times \mathscr{A}^q_{-\alpha q/p}(\mathbb{D})$ par*

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{D}} f'(z)\overline{S^*g(z)}dA(z) + f(0)\overline{g(0)}, \quad f \in \mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D}),\ g \in \mathscr{A}^q_{-\alpha q/p}(\mathbb{D}) \tag{4.1.3}$$

avec

$$S^*g(z) = \frac{g(z)-g(0)}{z}$$

est linéaire à gauche, antilinéaire à droite et vérifie

$$|\langle f, g\rangle| \lesssim \|f\|_{\mathscr{D}^p_\alpha} \|g\|_{\mathscr{A}^q_{-\alpha q/p}}.$$

Démonstration. L'application est bien définie car $\alpha < p-1 \iff -\alpha q/p > -1$ et elle est linéaire à gauche et antilinéaire à droite. Il suffit alors de montrer que $|\langle f, g\rangle| \lesssim \|f\|_{\mathscr{D}^p_\alpha} \|g\|_{\mathscr{A}^q_{-\alpha q/p}}$. D'abord on peut observer que l'évaluation $g \mapsto g(0)$ est continue sur $\mathscr{A}^q_{-\alpha q/p}(\mathbb{D})$ ([21, proposition 1.1]). Montrons que le « backward shift » S^* est continue sur $\mathscr{A}^p_\alpha(\mathbb{D})$ pour $p \geq 1$ et $\alpha > -1$ quelconques. Soit $f \in \mathscr{A}^p_\alpha(\mathbb{D})$, on a, d'après l'inégalité des accroissements finis et l'inégalité de la sous-harmonicité (voir [21, proposition 1.1]),

$$\left|\frac{f(z)-f(0)}{z}\right| \leq \sup_{|w|\leq 1/2} |f'(w)| \lesssim \|f\|_{\mathscr{A}^p_\alpha},$$

pour tout $|z| < 1/2$. Donc

$$\begin{aligned}
\|S^*f\|^p_{\mathscr{A}^p_\alpha} &\leq \int_{|z|\leq 1/2} \|f\|^p_{\mathscr{A}^p_\alpha}(1-|z|^2)^\alpha dA(z) \\
&\quad + 2^p \int_{1/2<|z|<1} |f(z)-f(0)|^p(1-|z|^2)^\alpha dA(z) \\
&\lesssim \|f\|^p_{\mathscr{A}^p_\alpha} + \|f-f(0)\|^p_{\mathscr{A}^p_\alpha} \\
&\lesssim \|f\|^p_{\mathscr{A}^p_\alpha}
\end{aligned}$$

la dernière inégalité résulte du fait que l'évaluation $f \mapsto f(0)$ est continue sur $\mathscr{A}^p_\alpha(\mathbb{D})$. Ainsi S^* est continue sur $\mathscr{A}^q_{-\alpha q/p}(\mathbb{D})$ et on a, par l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned}
|\langle f,g\rangle| &\leq \int_{\mathbb{D}} |f'(z)|\frac{(1-|z|^2)^{\alpha/p}}{(1-|z|^2)^{\alpha/p}}|\overline{S^*g(z)}|dA(z) + |f(0)\overline{g(0)}| \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^p(1-|z|^2)^\alpha dA(z)\right)^{1/p}\left(\int_{\mathbb{D}} |S^*g(z)|^q(1-|z|^2)^{-\alpha q/p}dA(z)\right)^{1/q} \\
&\quad + |f(0)||g(0)| \\
&\leq \|f\|_{\mathscr{D}^p_\alpha}\,\|S^*g\|_{\mathscr{A}^q_{-\alpha q/p}} + |f(0)||g(0)| \\
&\lesssim \|f\|_{\mathscr{D}^p_\alpha}\,\|g\|_{\mathscr{A}^q_{-\alpha q/p}}.
\end{aligned}$$

□

Le lemme précédent démontre que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ définit un crochet de dualité entre $\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$ et $\mathscr{A}^q_{-\alpha q/p}(\mathbb{D})$. La proposition suivante montre que le dual de $\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$ s'identifie à $\mathscr{A}^q_{-\alpha q/p}(\mathbb{D})$.

Proposition 4.1.2. *Soit $p > 1$ et $-1 < \alpha < p-1$. Le dual de $\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$, noté $\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})'$, est isomorphe à $\mathscr{A}^q_{-\alpha q/p}(\mathbb{D})$.*

Démonstration. Nous allons démontrer que l'application $g \mapsto \langle \cdot, g\rangle$ est un isomorphisme de $\mathscr{A}^q_{-\alpha q/p}(\mathbb{D})$ dans $\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})'$ le dual de $\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$. Cette application est bien définie, antilinéaire et continue. De plus il est facile de voir qu'elle est injective. Montrons qu'elle est surjective. Soit $L \in \mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})'$. Pour tout $f \in \mathscr{A}^p_\alpha(\mathbb{D})$, on considère F l'unique primitive de f sur $\mathbb{D}$ vérifiant $F(0) = 0$. Il est facile de voir que $F \in \mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$. On définit alors l'application L_0 sur $\mathscr{A}^p_\alpha(\mathbb{D})$ par $L_0(f) = L(F)$. Ainsi L_0 appartient au dual de $\mathscr{A}^p_\alpha(\mathbb{D})$ car $|L_0(f)| = |L(F)| \leq \|L\|\|F\|_{\mathscr{D}^p_\alpha} = \|L\|\|f\|_{\mathscr{A}^p_\alpha}$. Par le théorème de Hahn-Banach, L_0 se prolonge sur

$$L^p_\alpha(\mathbb{D}) = \left\{f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \text{ mesurable}, \ \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p(1-|z|^2)^\alpha dA(z) < \infty\right\}$$

en une forme linéaire continue $\widetilde{L_0}$. Il existe, par le théorème de représentation de Riesz, une fonction $\psi_0 \in L^p_{-\alpha q/p}(\mathbb{D}) = L^p_\alpha(\mathbb{D})'$ telle que pour tout $g \in L^p_\alpha(\mathbb{D})$,

$$\widetilde{L_0}(g) = \int_{\mathbb{D}} g(z)\overline{\psi_0}(z)dA(z).$$

On définit alors l'application

$$P : f \mapsto \left(Pf : z \mapsto \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1-z\overline{w})^2}dA(w)\right).$$

D'après [21, Théorème 1.10], l'application P est une projection bornée de $L^s_\gamma(\mathbb{D})$ dans $\mathscr{A}^s_\gamma(\mathbb{D})$ lorsque $\gamma < s-1$ ce qui est le cas pour $(s,\gamma) = (p,\alpha)$ et $(s,\gamma) = (q, -\alpha q/p)$. Posons $\psi = P(\psi_0) \in \mathscr{A}^q_{-\alpha q/p}(\mathbb{D})$. Ainsi pour tout $f \in \mathscr{A}^p_\alpha(\mathbb{D})$, on a

$$\begin{aligned} L_0(f) = \widetilde{L_0}(f) &= \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{\psi_0}(z)dA(z) \\ &= \int_{\mathbb{D}}\int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1-z\overline{w})^2}\overline{\psi_0}(z)dA(w)dA(z) \\ &= \int_{\mathbb{D}} f(w)\int_{\mathbb{D}} \overline{\frac{\psi_0(z)}{(1-w\overline{z})^2}}dA(z)dA(w) \\ &= \int_{\mathbb{D}} f(w)\overline{\psi(w)}dA(w). \end{aligned}$$

On vient donc de démontrer qu'il existe $\psi \in \mathscr{A}^q_{-\alpha q/p}(\mathbb{D})$ tel que pour tout $F \in \mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$ vérifiant $F(0) = 0$ on ait

$$L(F) = \int_{\mathbb{D}} F'(z)\overline{\psi(z)}dA(z).$$

Posons $\varphi(z) = z\psi(z) + \overline{L(1)} \in \mathscr{A}^q_{-\alpha q/p}(\mathbb{D})$. On a $S^*\varphi = \psi$. Il vient alors que pour $h \in \mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$ quelconque,

$$\begin{aligned} L(h) &= L(h-h(0)) + L(h(0)) \\ &= \int_{\mathbb{D}} h'(z)\overline{\psi(z)}dA(z) + h(0)L(1) \\ &= \int_{\mathbb{D}} h'(z)\overline{S^*\varphi(z)}dA(z) + h(0)\overline{\varphi(0)} = \langle h, \varphi\rangle. \end{aligned}$$

Cela démontre que l'application $g \mapsto \langle \cdot, g\rangle$ est surjective et définie bien un isomorphisme de $\mathscr{A}^q_{-\alpha q/p}(\mathbb{D})$ dans $\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})'$. □

Remarque
On a donc vu que, lorsque $p > 1$ et $\alpha < p-1$, le dual de $\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$ s'identifie

à $\mathscr{A}^q_{-\alpha q/p}(\mathbb{D})$. Or on a également vu que $\mathscr{A}^q_{-\alpha q/p}(\mathbb{D})$ et $\mathscr{B}^q_{-\alpha q/p}(\mathbb{D}_e)$ sont isomorphes donc on peut aussi identifier le dual de $\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$ à $\mathscr{B}^q_{-\alpha q/p}(\mathbb{D}_e)$ avec la dualité suivante

$$\langle f, g\rangle_e = \langle f, R^{-1}g\rangle, \quad f \in \mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D}),\ g \in \mathscr{B}^q_{-\alpha q/p}(\mathbb{D}_e)$$

Dans ce qui suit nous allons introduire les outils permettant d'utiliser le Théorème de Hedenmalm et Shields [22, Theorem 1]. Pour tout $\varphi \in \mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})'$ on pose

$$\widetilde{\varphi}(\lambda) = \langle f_\lambda, \varphi\rangle, \quad \lambda \in \mathbb{D}_e$$

avec f_λ la fonction définie sur $\mathbb{D}$ par

$$f_\lambda(z) = (\lambda - z)^{-1}.$$

On définit alors comme dans [22]

$$\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})^* = \{\widetilde{\varphi},\ \varphi \in \mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})'\}.$$

Pour $\varphi \in \mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})'$, on a

$$\widetilde{\varphi}(\lambda) = \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\lambda^{n+1}}, \varphi \right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle z^n, \varphi\rangle}{\lambda^{n+1}}.$$

On identifie φ comme un élément de $\mathscr{A}^q_{-\alpha q/p}(\mathbb{D})$ que l'on écrit

$$\varphi(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Donc si $n = 0$ on a $\langle z^n, \varphi\rangle = \overline{\varphi(0)} = \overline{a_0}$ et si $n \geq 1$ on obtient

$$\begin{aligned} \langle z^n, \varphi\rangle &= \int_{\mathbb{D}} nz^{n-1}\overline{S^*\varphi(z)}dA(z) \\ &= \int_{\mathbb{D}} nz^{n-1} \sum_{m=1}^{\infty} \overline{a_m}\ \overline{z}^{m-1}dA(z) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} n\overline{a_m} \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^{n+m-2}e^{i\theta(n-m)}d\theta/\pi\ rdr \\ &= \overline{a_n} \int_0^1 2nr^{2n-1}dr = \overline{a_n}. \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

Ainsi on a pour tout $\lambda \in \mathbb{D}_e$,

$$\widetilde{\varphi}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{a_n}}{\lambda^{n+1}}.$$

De plus, d'après (4.1.2), on a aussi que

$$R\varphi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{a_n}}{\lambda^{n+1}}, \quad \lambda \in \mathbb{D}_e.$$

Donc $\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})^* = \mathscr{B}^q_{-\alpha q/p}(\mathbb{D}_e)$.

Le lemme suivant sera utile pour exprimer la dualité (voir [22, Lemma 3]).

Lemme 4.1.3. *Soit $p > 1$ et $-1 < \alpha < p-1$. Soit $f \in \mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$ et $g \in \mathscr{B}^q_{-\alpha q/p}(\mathbb{D}_e)$. Pour $0 \le r < 1$, on pose*

$$f_r(z) = f(rz), \quad z \in \mathbb{D}$$

et

$$g_{1/r}(z) = g(z/r), \quad z \in \mathbb{D}_e.$$

On a alors

$$\langle f, g\rangle_e = \lim_{r\to 1^-} \langle f_r, g_{1/r}\rangle_e = \lim_{r\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n r^n = \lim_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) g(e^{i\theta}/r) e^{i\theta} d\theta.$$

avec

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \;\; g(1/z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{n+1}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

4.2 Cyclicité dans $\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$

On commence dans cette partie par étudier les différentes inclusions des espaces $\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$ avec les espaces de Hardy $H^p(\mathbb{D})$. Dans toute la suite de cette section on considère $p \ge 1$ et $\alpha > -1$. Pour $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$, $0 \le r < 1$ et $p \ge 1$, on note

$$M_p(f, r) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta\right)^{1/p}.$$

On rappelle que, pour $1 \le p < \infty$, les espaces de Hardy $H^p(\mathbb{D})$ sont définis par

$$H^p(\mathbb{D}) = \{f \in \mathscr{H}(\mathbb{D}), \;\; \|f\|_{H^p} = \sup_{r<1} M_p(f, r) < \infty\}$$

et pour $p = \infty$,

$$H^\infty(\mathbb{D}) = \{f \in \mathscr{H}(\mathbb{D}), \;\; \|f\|_{H^\infty} = \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)| < \infty\}.$$

On rappelle qu'on définit une fonction extérieure comme étant une fonction f de la forme

$$f(z) = c\exp\int_{\mathbb{T}} \frac{\zeta+z}{\zeta-z}\log\varphi(\zeta)\frac{|d\zeta|}{2\pi}, \qquad z\in\mathbb{D},$$

où $|c|=1$ et où φ est une fonction positive vérifiant $\log\varphi\in L^1(\mathbb{T})$. Dans les espaces $H^p(\mathbb{D})$, $1\le p\le\infty$, on a la caractérisation de la cyclicité suivante : une fonction $f\in H^p(\mathbb{D})$ est cyclique dans $H^p(\mathbb{D})$ si et seulement si f est une fonction extérieure de $H^p(\mathbb{D})$ [39, 4.8.4]. On étudie alors les différentes inclusions possibles entre les espaces $\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$ et $H^p(\mathbb{D})$ pour obtenir de premières conditions sur la cyclicité dans les espaces de Dirichlet.

Proposition 4.2.1. *Soit $p\ge 1$ et $\alpha>-1$. Si $p<\alpha+1$ alors l'espace $H^p(\mathbb{D})$ s'injecte continûment dans $\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$. On a alors que toute fonction extérieure de $H^p(\mathbb{D})$ est cyclique dans $\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$.*

Démonstration. Supposons que $p<\alpha+1$. Soit $f\in H^p(\mathbb{D})$, $z=re^{it}\in\mathbb{D}$ et $r<\rho<1$. Par la formule de Cauchy on a

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\rho e^{i\theta})}{(\rho e^{i\theta}-re^{it})^2}\rho e^{i\theta}d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\rho e^{i(\theta+t)})}{(\rho e^{i\theta}-r)^2}\rho e^{i(\theta-t)}d\theta. \end{aligned}$$

L'inégalité de Minkowski nous donne

$$\begin{aligned} M_p(f',r) &= \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\rho e^{i(\theta+t)})}{(\rho e^{i\theta}-r)^2}\rho e^{i(\theta-t)}d\theta\right|^p dt\right)^{1/p} \\ &\le \frac{\rho}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|f(\rho e^{i(\theta+t)})|^p}{|\rho e^{i\theta}-r|^{2p}}dt\right)^{1/p}d\theta \\ &\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\rho}{|\rho e^{i\theta}-r|^2}d\theta\ M_p(f,\rho) \\ &= \frac{\rho}{\rho^2-r^2}M_p(f,\rho)\le\frac{1}{\rho-r}M_p(f,\rho) \end{aligned}$$

Par passage à la limite lorsque $\rho\to 1$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f'(re^{i\theta})|^p d\theta\le\frac{1}{(1-r)^p}\|f\|^p_{H^p},$$

et donc

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}}|f'(z)|^p(1-|z|^2)^\alpha \mathrm{dA}(z) &= \int_0^1\int_0^{2\pi}|f'(re^{i\theta})|^p d\theta(1-r^2)^\alpha r dr/\pi \\ &\le 2^{\alpha+1}\left(\int_0^1\frac{(1-r)^\alpha}{(1-r)^p}dr\right)\|f\|^p_{H^p}. \end{aligned}$$

Puisque $p < \alpha + 1$ on a $\int_0^1 \frac{(1-r)^\alpha}{(1-r)^p} dr < \infty$ et ainsi $H^p(\mathbb{D})$ s'injecte continûment dans $\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$. Or toute fonction extérieure de $H^p(\mathbb{D})$ est cyclique dans $H^p(\mathbb{D})$ donc toute fonction extérieure de $H^p(\mathbb{D})$ est aussi cyclique dans $\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$ lorsque $p < \alpha + 1$. □

Remarque
En fait lorsque $p < \alpha + 1$, l'espace de Dirichlet $\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$ s'identifie à l'espace de Bergman $\mathscr{A}^p_{\alpha-p}(\mathbb{D})$ [49]. Alors il existe des fonctions intérieures cycliques dans $\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$ lorsque $p < \alpha + 1$ ([42]). Ceci n'est plus vrai quand $p > \alpha + 1$ par la proposition suivante.

Proposition 4.2.2. *Soit $p > 1$ et $p > \alpha + 1$. L'espace $\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$ s'injecte continûment dans $H^p(\mathbb{D})$. Ainsi toute fonction cyclique dans $\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$ est extérieure.*

Démonstration. Soit $f \in \mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$ et $r \in [1/2, 1[$. Pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, on a

$$f(re^{i\theta}) = \int_0^r f'(se^{i\theta})e^{i\theta} ds + f(0).$$

De plus, d'après l'inégalité de sous-harmonicité (voir [21, proposition 1.1]), il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$ et $s \in [0, 1/2]$, $|f'(se^{i\theta})| \le C\|f\|_{\mathscr{D}^p_\alpha}$ et on a également que $|f(0)| \le \|f\|_{\mathscr{D}^p_\alpha}$. Donc pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, on a

$$|f(re^{i\theta})| \le \int_{1/2}^r |f'(se^{i\theta})| ds + (C/2 + 1)\|f\|_{\mathscr{D}^p_\alpha}.$$

On obtient donc, en utilisant l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta\right)^{1/p} &\lesssim \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{1/2}^r |f'(se^{i\theta})| ds\right)^p d\theta\right)^{1/p} + \|f\|_{\mathscr{D}^p_\alpha} \\
\lesssim & \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{1/2}^r |f'(se^{i\theta})|^p (1-s^2)^\alpha ds\right) \left(\int_{1/2}^r (1-s^2)^{-\alpha q/p} ds\right)^{p/q} d\theta\right)^{1/p} + \|f\|_{\mathscr{D}^p_\alpha} \\
\lesssim & \left(\int_0^{2\pi} \int_{1/2}^1 |f'(se^{i\theta})|^p (1-s^2)^\alpha 2s ds d\theta\right)^{1/p} \left(\int_{1/2}^1 (1-s^2)^{-\alpha q/p} ds\right)^{1/q} + \|f\|_{\mathscr{D}^p_\alpha} \\
\lesssim & \|f\|_{\mathscr{D}^p_\alpha}
\end{aligned}$$

car $\alpha q/p = \alpha/(p-1) < 1$ ce qui entraîne que $\int_{1/2}^1 (1-s^2)^{-\alpha q/p} ds < \infty$. Donc $\|f\|_{H^p} \lesssim \|f\|_{\mathscr{D}^p_\alpha}$, ce qui démontre la première partie du résultat. De plus si f est cyclique dans $\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$ alors f est aussi cyclique dans $H^p(\mathbb{D})$ et donc f est extérieure. □

Remarque

On a $\mathscr{D}_1^2(\mathbb{D}) = H^2(\mathbb{D})$ et $\mathscr{D}_0^1(\mathbb{D}) \subset H^1(\mathbb{D})$ (avec inégalité des normes) donc lorsque $1 \leq p \leq 2$ et $p = \alpha+1$, on obtient, par interpolation (voir [49, (3.8)]), que $\mathscr{D}_\alpha^p(\mathbb{D})$ s'injecte continûment dans $H^p(\mathbb{D})$. De plus lorsque $p > \alpha+2$ on a que $\mathscr{D}_\alpha^p(\mathbb{D})$ s'injecte continûment dans $H^\infty(\mathbb{D})$ (voir la preuve de [49, Theorem 4.2]).

On résume ici toutes les inclusions obtenues :

$$\begin{array}{rcl} p < \alpha+1 & \Longrightarrow & H^p(\mathbb{D}) \subset \mathscr{D}_\alpha^p(\mathbb{D}) = \mathscr{A}_{\alpha-p}^p(\mathbb{D}) \\ 1 \leq p \leq 2 \text{ et } p = \alpha+1 & \Longrightarrow & \mathscr{D}_\alpha^p(\mathbb{D}) \subset H^p(\mathbb{D}) \\ p > \alpha+1 & \Longrightarrow & \mathscr{D}_\alpha^p(\mathbb{D}) \subset H^p(\mathbb{D}) \\ p > \alpha+2 & \Longrightarrow & \mathscr{D}_\alpha^p(\mathbb{D}) \subset H^\infty(\mathbb{D}). \end{array}$$

De plus on a $\mathscr{D}_1^2(\mathbb{D}) = H^2(\mathbb{D})$ et $\mathscr{D}_0^2(\mathbb{D}) = \mathscr{D}(\mathbb{D})$.

On suppose dans la suite que $p > \alpha + 1$. On note $A(\mathbb{D})$ l'algèbre du disque définie comme étant l'ensemble des fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$ et continues sur $\overline{\mathbb{D}}$. Nous allons démontrer que toute fonction extérieure de $A(\mathbb{D}) \cap \mathscr{D}_\alpha^p(\mathbb{D})$ dont l'ensemble des zéros est réduit à un point est cyclique dans $\mathscr{D}_\alpha^p(\mathbb{D})$. Pour cela nous allons utiliser un Théorème de Hedenmalm et Shields [22, Theorem 1]. Avant d'énoncer celui-ci, nous avons tout d'abord besoin de définir les notions suivantes. Soit $X \subset \mathscr{H}(\mathbb{D})$ un espace de Banach. On définit le multiplicateur de X, noté $M(X)$, par

$$M(X) = \{\varphi \in \mathscr{H}(\mathbb{D}),\ \varphi f \in X,\ \forall f \in X\}.$$

Si $X \subset \mathscr{H}(\mathbb{D}_e)$ on définit de manière analogue $M(X)$.

On appelle espace de Smirnov, que l'on note $\mathscr{N}^+(\mathbb{D})$, l'ensemble des fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$ de la forme f/g avec $f, g \in H^\infty(\mathbb{D})$ et g une fonction extérieure. Enfin pour $E \subset \mathbb{T}$ un ensemble fermé de mesure de Lebesgue nulle et X un espace de Banach tel que son dual X' s'identifie a un espace X^* de fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}_e$, on note

$$\mathscr{H}_E(\mathscr{N}^+, X^*) = \left\{\varphi \in \mathscr{H}(\mathbb{C} \cup \{\infty\} \setminus E),\ \varphi|_{\mathbb{D}} \in \mathscr{N}^+(\mathbb{D}),\ \varphi|_{\mathbb{D}_e} \in X^*\right\}.$$

On note $\mathscr{H}(\overline{\mathbb{D}})$, respectivement $\mathscr{H}(\overline{\mathbb{D}_e})$, l'ensemble des fonctions holomorphes dans un voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$, respectivement $\overline{\mathbb{D}_e}$.

Théorème 4.2.3 (Hedenmalm-Shields 1988)**.** *Soit $X \subset \mathscr{H}(\mathbb{D})$ un espace de Banach tel que $X \cap A(\mathbb{D})$ soit une algèbre de Banach (munie de la norme $\|\cdot\|_{X\cap A(\mathbb{D})} = \|\cdot\|_X + \|\cdot\|_{A(\mathbb{D})}$). On suppose que l'injection $X \to \mathscr{H}(\mathbb{D})$ est* *continue et que $\mathscr{H}(\overline{\mathbb{D}})$ est un sous-ensemble dense de X et de $X \cap A(\mathbb{D})$. On suppose que $\mathscr{H}(\overline{\mathbb{D}}) \subset M(X)$ et que $\mathscr{H}(\overline{\mathbb{D}_e}) \subset M(X^*) = H^\infty(\mathbb{D}_e)$.*

Si $f \in X \cap A(\mathbb{D})$ est une fonction extérieure et si

$$\mathscr{H}_{\mathcal{Z}(f)}(\mathscr{N}^+, X^*) = \{0\}$$

alors f est cyclique dans X.

Hedenmalm et Shields ont montré que si $f \in A(\mathbb{D}) \cap \mathscr{D}_0^2(\mathbb{D})$ est extérieure et si $\mathcal{Z}(f)$ est réduit à un point alors $\mathscr{H}_{\mathcal{Z}(f)}(\mathscr{N}^+, \mathscr{D}_0^2(\mathbb{D})^*) = \{0\}$ et donc f est cyclique. Nous allons montrer un résultat analogue dans le cas de $\mathscr{D}_\alpha^p(\mathbb{D})$ pour $\alpha + 1 < p \leq \alpha + 2$. Tout d'abord nous avons le résultat suivant :

Théorème 4.2.4. *Soit $p > 1$ et $p > \alpha + 1$. Si $f \in A(\mathbb{D}) \cap \mathscr{D}_\alpha^p(\mathbb{D})$ est une fonction extérieure et si $\mathscr{H}_{\mathcal{Z}(f)}(\mathscr{N}^+, \mathscr{D}_\alpha^p(\mathbb{D})^*) = \{0\}$ alors f est cyclique dans $\mathscr{D}_\alpha^p(\mathbb{D})$.*

Pour démontrer ce théorème, nous utilisons le Théorème 4.2.3 appliqué à l'espace $\mathscr{D}_\alpha^p(\mathbb{D})$. Pour cela il nous suffit de démontrer le lemme suivant (la preuve est issue de [11, lemma 11]).

Lemme 4.2.5. *Soit $p > 1$ et $\alpha > -1$. L'ensemble des multiplicateurs de $\mathscr{B}_\alpha^p(\mathbb{D}_e)$ est égal à $H^\infty(\mathbb{D}_e)$.*

Démonstration. Soit $f \in \mathscr{B}_\alpha^p(\mathbb{D}_e)$ et $g \in H^\infty(\mathbb{D}_e)$. On a

$$\int_{\mathbb{D}_e} |f(z)g(z)|^p \frac{(|z|^2-1)^\alpha}{|z|^{4-p+2\alpha}} \mathrm{dA}(z) \leq \|g\|_\infty^p \|f\|_{\mathscr{B}_\alpha^p}^p$$

et donc $fg \in \mathscr{B}_\alpha^p(\mathbb{D}_e)$. Ainsi $H^\infty(\mathbb{D}_e) \subset M(\mathscr{B}_\alpha^p(\mathbb{D}_e))$.
Réciproquement soit $g \in M(\mathscr{B}_\alpha^p(\mathbb{D}_e))$. On considère alors l'application $M_g : \mathscr{B}_\alpha^p(\mathbb{D}_e) \to \mathscr{B}_\alpha^p(\mathbb{D}_e)$ définie par $M_g(f) = fg$. Cette application est alors bornée par le théorème du graphe fermé. Pour tout $z \in \mathbb{D}_e$, on note Λ_z l'évaluation en z dans $\mathscr{B}_\alpha^p(\mathbb{D}_e)$ qui est une forme linéaire continue non nulle ([21, proposition 1.1]). On a donc pour tout $f \in \mathscr{B}_\alpha^p(\mathbb{D}_e)$ et $z \in \mathbb{D}_e$,

$$|f(z)g(z)| = |\Lambda_z(M_g f)| \leq \|\Lambda_z\| \|M_g\| \|f\|_{\mathscr{B}_\alpha^p}.$$

En prenant la borne supérieure sur toutes les fonctions $f \in \mathscr{B}_\alpha^p(\mathbb{D}_e)$ de norme 1, on obtient

$$\|\Lambda_z\| |g(z)| \leq \|\Lambda_z\| \|M_g\|$$

ce qui démontre que g est bornée sur $\mathbb{D}_e$. Donc $M(\mathscr{B}_\alpha^p(\mathbb{D}_e)) \subset H^\infty(\mathbb{D}_e)$ ce qui conclut la preuve. □

Pour X un espace de Banach et $E \subset X$, on note $E^{\perp}$ l'orthogonal de E c'est-à-dire l'ensemble $\{x' \in X',\ \langle x', x\rangle = 0\ \forall x \in E\}$. En identifiant le dual de $\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$ avec $\mathscr{B}^q_{-\alpha q/p}(\mathbb{D}_e)$, on a pour $f \in \mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$ et $\varphi \in \mathscr{B}^q_{-\alpha q/p}(\mathbb{D}_e)$,

$$\varphi \in \left([f]_{\mathbb{N}}^{\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})}\right)^{\perp} \Longleftrightarrow \langle z^n f, \varphi\rangle_e = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Lemme 4.2.6. *Soit $p > 1$ et $p > \alpha + 1$. Soit $E \subset \mathbb{T}$ un ensemble fermé de mesure de Lebesgue nulle, $\varphi \in \mathscr{H}_E(\mathscr{N}^+, \mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})^*)$ et $f \in \mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$. Si la famille d'applications $z \in \mathbb{T} \mapsto f(rz)\varphi(z/r)$ est uniformément intégrable sur $\mathbb{T}$ pour $1/2 < r < 1$ alors $\varphi \in \left([f]_{\mathbb{N}}^{\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})}\right)^{\perp}$.*

Démonstration. Cette preuve s'inspire de celle de [15, Lemma 3.4] pour le cas du Dirichlet classique. Par hypothèse $f \in \mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$ et $\varphi|_{\mathbb{D}_e} \in \mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})^* = \mathscr{B}^q_{-\alpha q/p}(\mathbb{D}_e)$ donc par la proposition 4.1.3, on a que

$$\langle f, \varphi\rangle = \lim_{r\to 1^-} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\varphi(e^{i\theta}/r)e^{i\theta}d\theta.$$

Notons que, d'après la proposition 4.2.2, $f \in \mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D}) \subset H^p(\mathbb{D})$ donc la limite radiale de f, noté f^* existe presque partout sur $\mathbb{T}$. De plus comme $\varphi \in \mathscr{H}(\mathbb{C}\setminus E)$ et E est de mesure de Lebesgue nulle, $\varphi(z/r) \longrightarrow \varphi(z)$ pour presque tout $z \in \mathbb{T}$ lorsque $r \to 1^-$. Donc la famille d'applications $z \mapsto f(rz)\varphi(z/r)$ converge presque partout vers $f^*\varphi$ lorsque $r \to 1^-$ et puisque cette famille est uniformément intégrable sur $\mathbb{T}$, elle converge en norme $L^1(\mathbb{T})$. Alors il vient

$$\langle f, \varphi\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^*(e^{i\theta})\varphi(e^{i\theta})e^{i\theta}d\theta.$$

De plus $\varphi \in \mathscr{N}^+$ et $f \in H^p(\mathbb{D}) \subset \mathscr{N}^+$ donc $f\varphi \in \mathscr{N}^+$. On peut alors appliquer le principe du maximum généralisé de Smirnov ([10, Theorem 2.11]) qui nous donne $f\varphi \in H^1(\mathbb{D})$ et donc pour $n < 0$, $\widehat{f^*\varphi}(n) = 0$. Par conséquent

$$\langle f, \varphi\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^*(e^{i\theta})\varphi(e^{i\theta})e^{i\theta}d\theta = 0.$$

On peut utiliser le même raisonnement en remplaçant f par $z^n f$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on obtient $\langle z^n f, \varphi\rangle = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ce qui démontre le lemme. $\square$

Pour $E \subset \mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C}$, on note $d(z, E) = \inf\{|z - \zeta|, \zeta \in E\}$ la distance de z à E.

Lemme 4.2.7. *Soit $p > 1$ et $p > \alpha + 1$. Soit $E \subset \mathbb{T}$ un ensemble fermé de mesure de Lebesgue nulle et $\varphi \in \mathscr{H}_E(\mathscr{N}^+, \mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})^*)$. Il existe $C > 0$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $1 < |z| < 2$,*

$$|\varphi(z)| \leq \frac{C}{d(z,E)^4}.$$

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathscr{H}_E(\mathscr{N}^+, \mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})^*)$. Comme $\varphi|_{\mathbb{D}} \in \mathscr{N}^+$, on peut décomposer $\varphi|_{\mathbb{D}} = \varphi_{int}\varphi_{ext}$ avec φ_{int} une fonction intérieure sur $\mathbb{D}$ et φ_{ext} une fonction extérieure de $\mathscr{N}$ (voir [10, p. 25]). De plus, comme E est de mesure de Lebesgue nulle, $\varphi(z) = \varphi^*(z) = \lim_{r\to 1^-} \varphi(rz)$ pour presque tout $z \in \mathbb{T}$. Puisque $\log|\varphi| \in L^1(\mathbb{T})$, pour $z \in \mathbb{D}$,

$$\begin{aligned}
|\varphi(z)| &\leq |\varphi_{ext}(z)| = \left|\exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log|\varphi(e^{it})|dt\right)\right| \\
&\leq \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\log|\varphi(e^{it})|dt\right) \\
&\leq \exp\left(\frac{1-|z|^2}{(1-|z|)^2}\int_0^{2\pi}\left|\log|\varphi(e^{it})|\right|dt\right) \\
&\leq \exp\left(\frac{2}{1-|z|}\|\log|\varphi|\|_{L^1(\mathbb{T})}\right). \\
&\leq \exp\left(\frac{C_1}{1-|z|}\right),
\end{aligned}$$

avec $C_1 > 0$ indépendant de z. De plus, $\varphi|_{\mathbb{D}_e} \in \mathscr{B}^q_{-\alpha q/p}(\mathbb{D}_e)$ donc en particulier on a que $|\varphi|$ est sous-harmonique sur $\mathbb{D}_e$. Soit $z \in \mathbb{D}_e$ vérifiant $|z| \leq 2$. En observant que la boule de centre z et de rayon $(|z|-1)/2$ vérifie $B(z,(|z|-1)/2) \subset \mathbb{D}_e$, on obtient en prenant $q = p/(p-1) \geq 1$

$$\begin{aligned}
\frac{(|z|-1)^2}{4}|\varphi(z)|^q &\leq \frac{1}{\pi}\int_{B(z,(|z|-1)/2)} |\varphi(w)|^q dA(w) \\
&\leq \frac{1}{\pi}\int_{B(z,(|z|-1)/2)} |\varphi(w)|^q \frac{(|w|^2-1)^{-\alpha q/p}}{|w|^{4-q-2\alpha q/p}}\frac{|w|^{4-q-2\alpha q/p}}{(|w|^2-1)^{-\alpha q/p}}dA(w) \\
&\leq \max(2^{2\alpha q/p}, 2^{4-q})\int_{\mathbb{D}_e} |\varphi(w)|^q \frac{(|w|^2-1)^{-\alpha q/p}}{|w|^{4-q-2\alpha q/p}}dA(w) \\
&\leq \max(2^{2\alpha q/p}, 2^{4-q})\|\varphi|_{\mathbb{D}_e}\|_{\mathcal{B}^q_{-\alpha q/p}}.
\end{aligned}$$

Ainsi pour tout $z \in \mathbb{D}_e$ vérifiant $|z| \leq 2$, on obtient que

$$|\varphi(z)| \leq \frac{C_2}{(|z|-1)^2},$$

avec $C_2 > 0$ indépendant de z. En remarquant que $\log|\varphi|$ est une fonction sous-harmonique, on applique les résultats de Taylor et Williams [47, lemma 5.8 et 5.9] ce qui nous permet de conclure. □

Le résultat suivant nous permet de réduire l'étude des vecteurs cycliques s'annulant sur un ensemble fermé E en l'étude de la cyclicité d'une seule fonction vérifiant certaines propriétés. Plus précisément nous avons le résultat suivant (voir aussi le Théorème 4.2.4).

Théorème 4.2.8. *Soit $p > 1$ et $p > \alpha + 1$. Soit $E \subset \mathbb{T}$ un ensemble fermé de mesure de Lebesgue nulle et $f \in \mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$. S'il existe $C_1 > 0$ tel que,*

$$|f(z)| \leq C_1 d(z,E)^4, \quad z \in \mathbb{D}$$

alors

$$\mathscr{H}_E(\mathscr{N}^+, \mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})^*) \subset \left([f]_{\mathbb{N}}^{\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})}\right)^\perp.$$

Cela signifie que pour tout $g \in \mathscr{H}_E(\mathscr{N}^+, \mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})^*)$, $g|_{\mathbb{D}_e} \in \left([f]_{\mathbb{N}}^{\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})}\right)^\perp$ c'est-à-dire

$$\langle z^n f, g|_{\mathbb{D}_e}\rangle_e = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathscr{H}_E(\mathscr{N}^+, \mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})^*)$. D'après le lemme 4.2.7, il existe $C_2 > 0$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $1 < |z| < 2$,

$$|\varphi(z)| \leq \frac{C_2}{d(z,E)^4}.$$

Ainsi pour $1/2 < r < 1$ et $z \in \mathbb{T}$ on a

$$|f(rz)\varphi(z/r)| \leq C_1 C_2 \frac{d(rz,E)^4}{d(z/r,E)^4} \leq C_1 C_2.$$

Donc la famille d'applications $z \mapsto f(rz)\varphi(z/r)$ est uniformément intégrable sur $\mathbb{T}$ pour $1/2 < r < 1$ et on a d'après le lemme 4.2.6 que $\varphi \in \left([f]_{\mathbb{N}}^{\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})}\right)^\perp$, ce qui conclut cette preuve. □

Corollaire 4.2.9. *Soit $p > 1$ vérifiant $\alpha + 1 < p \leq \alpha + 2$. On a*

$$\mathscr{H}_{\{1\}}(\mathscr{N}^+, \mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})^*) = \{0\}.$$

Démonstration. Posons $f(z) = (z-1)^4$. On a que $f \in \mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$ vérifie $|f(z)| \leq |z-1|^4$ donc par le théorème 4.2.8 on obtient que

$$\mathscr{H}_{\{1\}}(\mathscr{N}^+, \mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})^*) \subset \left([f]_{\mathbb{N}}^{\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})}\right)^\perp.$$

Il suffit alors de montrer que f est cyclique pour démontrer le résultat. Soit $\varphi \in \mathscr{A}^q_{-\alpha q/p}(\mathbb{D})$ tel que

$$\langle z^n(z-1), \varphi\rangle = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Donc en notant $\varphi(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ on obtient, d'après (4.1.4),

$$\overline{a_n} = \langle z^n, \varphi\rangle = \langle z^{n+1}, \varphi\rangle = \overline{a_{n+1}}.$$

Alors

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \frac{a_0}{1-z}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Supposons que $\varphi \neq 0$. Puisque $\varphi \in \mathscr{A}^q_{-\alpha q/p}(\mathbb{D})$ on a

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^{-\alpha q/p}}{|1-z|^q} < \infty, \tag{4.2.1}$$

ce qui est équivalent à $q + \alpha q/p < 2$ car $-\alpha q/p > -1$ (voir la démonstration du [21, Theorem 1.7]). Ceci est absurde car $p \leq \alpha + 2$. Ainsi $\varphi = 0$ et $[z-1]_{\mathbb{N}}^{\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})} = \mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$. En particulier on a $z - 1 \in [(z-1)^2]_{\mathbb{N}}^{\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})}$ et donc

$$[(z-1)^2]_{\mathbb{N}}^{\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})} = [z-1]_{\mathbb{N}}^{\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})} = \mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D}).$$

Par le même raisonnement on obtient que

$$[(z-1)^4]_{\mathbb{N}}^{\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})} = \mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D}),$$

ce qui démontre que $f(z) = (z-1)^4$ est cyclique dans $\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$. $\square$

Remarque
La preuve du résultat précédent nous donne aussi que lorsque $p > \alpha + 2$ alors la fonction $f(z) = z - 1$ n'est pas cyclique dans $\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$. En effet d'après la caractérisation de (4.2.1) on peut montrer que la fonction $\varphi(z) = 1/(1-z) \in \mathscr{A}^q_{-\alpha q/p}(\mathbb{D})$ et est orthogonale à $z^n f$, $n \in \mathbb{N}$. Plus généralement si $f \in A(\mathbb{D}) \cap \mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$ et si $f(1) = 0$ alors f n'est pas cyclique dans $\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$. En effet lorsque $p > \alpha + 2$, on a $\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D}) \subset H^\infty(\mathbb{D})$ avec $\|\cdot\|_{H^\infty} \lesssim \|\cdot\|_{\mathscr{D}^p_\alpha}$ donc

$$[f]_{\mathbb{N}}^{\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})} \subset \{g \in A(\mathbb{D}),\ g(1) = 0\}.$$

Théorème 4.2.10. *Soit $p > 1$ vérifiant $\alpha + 1 < p \leq \alpha + 2$. Soit $f \in A(\mathbb{D}) \cap \mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$. Si f est extérieure et $\mathcal{Z}(f) = \{1\}$ alors f est cyclique dans $\mathscr{D}^p_\alpha(\mathbb{D})$.*

Démonstration. Ce théorème est la conséquence directe du théorème 4.2.4 et du corolaire 4.2.9. $\square$

Bibliographie

[1] A. Aleman, *Hilbert spaces of analytic functions between the Hardy and the Dirichlet space*, Proceedings of the American Mathematical Society 115, no. 1 (1992) : 97-104.

[2] E. Abakumov, A. Atzmon, S. Grivaux, *Cyclicity of bicyclic operators and completeness of translates*, Math. Ann. 341 (2008), no. 2, 293–322.

[3] E. Abakumov, O. El-Fallah, K. Kellay, T. Ransford, *Cyclicity in the harmonic Dirichlet space*, Conference on Harmonic and Functional, Analysis, Operator Theory and Applications. Theta Series in Advanced Mathematics (2017) 1-10.

[4] A. Beurling, *Ensembles exceptionnels*, Acta Math. 72, (1940), 1–13.

[5] A. Beurling, *On a closure problem*, Ark. Mat. 1 (1951), 301–303.

[6] L. Brown, A. Shields, *Cyclic vectors in the Dirichlet space*, Trans. Amer. Math. Soc. 285 (1984), 269–304.

[7] L. Carleson, *Selected problems of exceptional sets*, Van Nostrand, Princeton (1967).

[8] L. Carleson, *Sets of uniqueness for functions regular in the unit circle*, Acta Math. 87, (1952). 325–345.

[9] J. Douglas, *Solution of the problem of Plateau*, Transactions of the American Mathematical Society 33.1 (1931) : 263-321.

[10] P. L. Duren, *Theory of Hp spaces*, New York and London : Academic Press (1970).

[11] P. L. Duren, B. W. Romberg, A. L. Shields, *Linear functionals on H^p spaces with* $0 < p < 1$, J. Reine Angew. Math. 238 (1969) 32–60.

[12] V.Ya. Eiderman, *Capacities of Generalized Cantor Sets*, Operator Theory : Advances and Applications, Vol. 158, 131-139 (2005)

[13] O.El-Fallah, K.Kellay, H.Klaja, J.Mashreghi, T.Ransford, *Dirichlet spaces with superharmonic weights and de Branges-Rovnyak spaces*, Complex Anal. Oper. Theory 10 (2016), no. 1, 97–107.

[14] O. El-Fallah, K. Kellay, J. Mashreghi, T. Ransford, *A primer on the Dirichlet spaces*, Cambridge Tracts in Mathematics 203. (2014).

[15] O.El-Fallah, K.Kellay, T.Ransford, *Cyclicity in the Dirichlet space*, Ark. Mat. 44 (2006), no. 1, 61–86.

[16] O. El-Fallah, N. K. Nikolski, M. Zarrabi, *Estimates for resolvents in Beurling-Sobolev algebras*, St. Petersburg Math. J. 10 (1999), no. 6, 901-964.

[17] O. Frostman, *Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles*, Thèse de doctorat, Lund (1935).

[18] T.W. Gamelin, *Uniform algebras*, Vol. 311. American Mathematical Soc. (2005).

[19] J. Garnett, *Bounded analytic functions*, Vol. 236. Springer Science & Business Media, (2007).

[20] C.C. Graham, O.C. McGehee, *Essays in commutative harmonic analysis*, Vol. 238. Springer (2012).

[21] H. Hedenmalm, B. Korenblum, K. Zhu, *Theory of Bergman spaces*, Vol. 199. Springer Science and Business Media, (2012).

[22] H. Hedenmalm, A. Shields, *Invariant subspaces in Banach spaces of analytic functions*, Michigan Math. J, vol. 37, no 1, (1990), 91-104.

[23] Carl S. Herz, *A note on the span of translations in L^p*, Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957), 724–727.

[24] J-P. Kahane, *Séries de Fourier absolument convergentes*, Springer-Verlag, Berlin-Heidenberg-New York, (1970)

[25] J-P. Kahane, R. Salem, *Ensembles parfaits et séries trigonométriques*, Hermann, Paris (1963).

[26] Y. Katznelson, *An introduction to harmonic analysis*, Cambridge University Press (2004).

[27] R. Kaufman, *M-sets and distributions*, Astérisque 5, Soc. Math. France (1973) 225-230.

[28] T.W. Körner, *On the theorem of ivašev-musatov iii*, Proc. Lond. Math. Soc. (1986) 53(3) 143-192.

[29] T.W. Körner, *A pseudofunction on a Helson set*, I and II, Astérisque 5, Soc. Math. France (1973) 3-224 and 231-239.

[30] F. Le Manach, *Cyclicity in l^p spaces and zero sets of the Fourier transforms*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 462, no. 1 (2018) : 967-981.

[31] F. Le Manach, *Cyclicity in weighted l^p spaces*, arXiv preprint, arXiv :1703.02841, 2017.

[32] N. Lev, A. Olevskii, *Wiener's 'closure of translates' problem and Piatetski-Shapiro's uniqueness phenomenon*, Ann. of Math. (2) 174 (2011), no. 1, 519–541.

[33] D. J. Newman, *Some results in spectral synthesis*, Duke Mathematical Journal, vol. 27 (1960), pp. 359–362

[34] D. J. Newman, *The closure of translates in ℓ^p*, Amer. J. Math. 86 (1964), pp. 651–667

[35] D. J. Newman, *A simple proof of Wiener's $1/f$ theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. 48 (1975), 264-265.

[36] N. G. Makarov, *Invariant subspaces of the space C^∞*, Mat. Sb. (N.S.), 119(161) :1(9) (1982), 3–31 ; Math. USSR-Sb., 47 :1 (1984), 1–26

[37] D. Menchoff, *Sur l'unicité du développement trigonométrique*, C.R. Acad. Sci. Paris, vol. 163, (1916), p. 433-436.

[38] N. K. Nikolskii, *Lectures on the shift operator IV*, Zapiski Nauchnykh Seminarov LOMI Vol 65 (1976) pp. 103-132.

[39] N. K. Nikolski, *Operators, Functions, and Systems : An Easy Reading*, Mathematical Surveys and Monographs, Volume 92.

[40] M. Ohtsuka, *Capacité d'ensembles de Cantor généralisés*, Nagoya Math. J. 11 151-160 (1957)

[41] I. I. Piatetski-Shapiro, *Supplement to the work : On the problem of uniqueness of expansion of a function in a trigonometric series*, (in Russian), Moskov. Gos. Univ. Uč. Zap. Mat. 165(7) (1954), 79–97. English translation in *Selected works of Ilya Piatetski-Shapiro*, AMS Collected Works 15, 2000.

[42] J. W. Robert, *Cyclic inner functions in the Bergman spaces and weak outer functions in H^p, $0 < p < 1$*, Illinois Journal of Mathematics 29, no. 1 (1985) : 25-38.

[43] S. Richter, W. T. Ross, C. Sundberg, *Hyperinvariant subspaces of the harmonic Dirichlet space*, J. Reine Angew. Math. 448 (1994) 1–26.

[44] S. Richter, C. Sundberg, *Multipliers and invariant subspaces in the Dirichlet space*, J. Operator Theory 28 (1992), 167–186.

[45] S. Richter, C. Sundberg, *Invariant subspaces of the Dirichlet shift and pseudocontinuations*, Trans. Amer. Math. Soc. 341 (1994), 863–879.

[46] R. Salem, *On singular monotonic functions whose spectrum has a given Hausdorff dimension*, Ark. Mat., 1 : 353–365, (1950)

[47] B. A. Taylor, D. L. Williams, *Ideals in rings of analytic functions with smooth boundary values*, Can. J. Math., Vol XXII, No. 6, (1970), pp. 1266-1283.

[48] N. Wiener, *Tauberian theorems*, Ann. of Math. (2) 33 (1932), no. 1, 1–100.

[49] Z. Wu, *Carleson Measure ans multipliers for Dirichlet Spaces*, Journal of Functional Analysis 169, (1999), 148-163.

[50] M. Zarrabi, *Contractions à spectre dénombrable et propriétés d'unicité des fermés dénombrables du cercle*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 43 (1993), no. 1, 251–263.