Sur le contrôle optimal des équations de diffusion et onde fractionnaires en temps à données incomplètes

Claire Joseph

Université des Antilles
Faculté des Sciences Exactes et Naturelles
École doctorale pluridisciplinaire

Thèse pour le doctorat en Mathématiques

Claire JOSEPH

Sur le contrôle optimal des équations de diffusion et onde fractionnaires en temps à données incomplètes.

Sous la direction du Professeur :

Gisèle Adélie MOPHOU-LOUDJOM

soutenue le : 06 Septembre 2017 à Pointe-à-Pitre

Membres du jury :

Séverine ANDOUZE BERNARD, Maître de conférences - Université des Antilles (France)
Abdon ATANGANA, Professeur - University of the Free State (Afrique du Sud)
Alain PIETRUS, Professeur - Université des Antilles (France)
Pascal POULLET, Maître de conférences HDR - Université des Antilles (France)
Sombdouda SAWADOGO, Maître de conférences - Université de Ouagadougou (Burkina Faso)
Rapporteurs :
Jean-Pierre PUEL, Professeur - Université de Versailles de Saint Quentin (France)
Gaston N'GUÉRÉKATA, Professeur - Morgan State University (USA)

Membre invité :

Gisèle Adélie MOPHOU-LOUDJOM, Professeur - Université des Antilles (France)

Sur le contrôle optimal des équations de diffusion et onde fractionnaires en temps à données incomplètes.

Claire JOSEPH
Thèse dirigée par le Professeur Gisèle MOPHOU-LOUDJOM
Université des Antilles
Faculté des Sciences Exactes et Naturelles
Département de Mathématiques et Informatique
Laboratoire LAMIA

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je souhaite remercier le Seigneur pour m'avoir béni et donner l'intelligence, la sagesse puis la patience. Je te remercie aussi Seigneur d'avoir mis sur ma route toutes les personnes qui seront cités ci-dessous.

Je veux dire merci à tous les membres des laboratoires CEREGMIA et LAMIA. Sans laboratoire d'accueil, je n'aurais pas pu vivre cette aventure. Et je vous remercie tous pour vos conseils et votre soutien. Merci également à la région Martinique pour avoir financé ma thèse.

Dans mon laboratoire, j'ai une attention particulière pour celle qui m'a donné ma chance, m'a accompagné et soutenu dès mon arrivée en Guadeloupe. Je parle de ma directrice de thèse, le Professeur Gisèle MOPHOU-LOUDJOM, sans qui rien aurait été possible. Vous avez agi comme une mère le ferait avec sa fille, et pour cela je vous serai à jamais reconnaissante. Que Dieu vous bénisse et vous garde pour toujours, je ne vous oublierai jamais.

Je souhaite également remercier mes amis, et plus particulièrement Michelle MERCAN, Annouk LAVIOLETTE, Nina TRAORÉ et Kizaïna AJAX. Je tenais à vous dire merci mes amies, pour votre présence à mes côtés, votre écoute, votre aide et votre soutien.

À vous ma famille, je ne pourrai jamais vous exprimer ma reconnaissance ainsi que tout l'amour que j'éprouve pour vous. Je souhaite surtout remercier mes deux grands frères qui n'ont jamais cessé de veiller sur moi Jim et Nickoles JOSEPH, ma nièce bien aimée Mélinda JOSEPH-BERNARD, ainsi que ma merveilleuse marraine Patricia MONGINY ainsi que ses deux fils, mes frères de coeur Gilles et Éric LAVERY. Vous avez tous cru en moi et encouragé à vivre mes rêves, merci à vous.

À mon soutien moral durant toutes ses années, nous ne sommes pas de la même famille, mais tu as gagné ta place dans la mienne et dans mon coeur. Gwénaëlle VAIRAC-MASSEL, je te dis merci pour ton soutien, pour m'avoir aider à me relever quand je faiblissais et surtout pour ne pas m'avoir laisser m'abattre sur mon sort. Tu as joué un rôle important durant cette thèse et pour cela je te dis merci encore une fois.

Colette et Augustin JOSEPH, je vous dédie ma thèse, le fruit de toutes ces années d'étude durant lesquelles vous ne m'avez jamais abandonné. Vous avez toujours été présents pour moi et vous m'avez soutenu ; Dieu seul sait à quel point cela a été difficile pour nous parfois, mais vous étiez là avec moi. Voilà ma thèse, elle est pour vous Maman et Papa ! J'espère qu'elle vous rendra fière, mais quoiqu'il en soit je sais qu'une vie ne sera jamais suffisante pour vous rendre tout ce que vous nous avez donné. Je suis fière d'être votre fille et de vous représenter aujourd'hui.

À mes parents,

RÉSUMÉ

Ce travail a pour but de résoudre des problèmes de contrôle optimal associés à des équations de diffusion et onde fractionnaires en temps à données incomplètes.

Pour commencer, nous proposons la résolution d'équations de diffusion et onde fractionnaires en temps, où les dérivées sont prises au sens de Riemann-Liouville. Ces équations modélisent le déplacement d'une concentration dans un milieu poreux, et nous les obtenons en remplaçant la dérivée de premier ordre (resp. second ordre) dans l'équation de diffusion (resp. onde) classique par la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $0 < \alpha < 1$ (resp. $1 < \alpha < 2$). Dans ce travail, nous utilisons la méthode spectrale afin d'obtenir l'existence et l'unicité de solutions dans des espaces de Hilbert. Suite à cela, nous établissons des estimations primordiales pour nos applications à des problèmes de contrôle optimal. Notons qu'avec cette méthode, nous obtenons que l'existence de solutions faibles, mais cela est suffisant pour la suite du travail. Avant de passer à la résolution des problèmes de contrôle optimal, nous donnons des résultats d'existence et d'unicité de solution à des équations de diffusion et onde fractionnaires où les dérivées sont prises au sens de Caputo. Ces derniers résultats sont utiles car nous verrons dans les applications que les équations adjointes sont des équations de diffusion et onde fractionnaires où les dérivées sont les dérivées à droite de Caputo.

Pour continuer, nous proposons de résoudre un problème de contrôle optimal associé à une équation d'onde fractionnaire. Dans cette partie, nous cherchons à approcher l'état $I^{2-\alpha}y(v,T)$ par un état désiré z_d en contrôlant v, où $y = y(v)$ est

solution de l'équation d'état

$$\begin{cases} D^\alpha_{RL} y - \Delta y &= v \quad \text{dans } Q, \\ y &= 0 \quad \text{sur } \Sigma, \\ I^{2-\alpha} y(0) &= y^0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial}{\partial t} I^{2-\alpha} y(0) &= y^1 \quad \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Nous allons donc considérer la fonctionnelle

$$J(v) = \frac{1}{2}\|I^{2-\alpha} y(v,T) - z_d\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{N}{2}\|v\|^2_{L^2(Q)},$$

et résoudre le problème de contrôle optimal

$$\inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v),$$

où $\mathcal{U}_{ad}$ est un convexe fermé non vide de $L^2(Q)$.

Pour finir, nous nous sommes penchés sur la résolution de problèmes de contrôle optimal associés à des équations de diffusion et onde fractionnaires en temps à données incomplètes. Dans les problèmes environnementaux, nous sommes souvent confrontés aux manques de données, c'est pourquoi dans cette thèse nous avons voulu étudier ce genre de problème. Quand les données sont incomplètes, les problèmes de contrôle optimal sont impossibles à résoudre, ainsi nous faisons le choix d'utiliser les notions de contrôles sans regret et à moindres regrets. Ces deux notions sont extrêmement liées, en effet nous verrons dans les deux derniers chapitres que le problème de contrôle sans regret étant difficile à résoudre directement, nous allons passer par la résolution du problème de contrôle à moindres regrets pour résoudre ce dernier.

Ainsi, premièrement nous allons étudier le problème de contrôle sans regret :

$$\inf_{v \in L^2(\Sigma)} \sup_{g \in L^2(Q)} (J(v,g) - J(0,g)), \tag{1}$$

où J est donnée par

$$J(v,g) = \|y(x,t;v,g) - z_d\|^2_{L^2(Q)} + N\|v\|^2_{L^2(\Sigma)},$$

et $y(v,g)$ est solution de l'équation de diffusion fractionnaire

$$\begin{cases} D^\alpha_{RL} y - \Delta y &= g \quad \text{dans } Q, \\ y &= v \quad \text{sur } \Sigma, \\ I^{1-\alpha} y(0) &= y^0 \quad \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{2}$$

Pour résoudre ce problème, nous allons au préalable résoudre le problème de contrôle à moindres regrets :

$$\inf_{v\in L^2(\Sigma)} \sup_{g\in L^2(Q)} (J(v,g) - J(0,g) - \gamma\|g\|^2_{L^2(Q)}), \quad \gamma > 0,$$

puis montrer que la solution de ce problème converge vers le contrôle sans regret solution de (1).

Deuxièmement, nous allons considérer le problème de contrôle sans regret :

$$\inf_{v\in L^2(Q)} \sup_{g\in L^2(\Omega)} (J(v,g) - J(0,g)), \tag{3}$$

où J est donnée par

$$J(v,g) = \|y(x,t;v,g) - z_d\|^2_{L^2(Q)} + N\|v\|^2_{L^2(Q)},$$

et $y(v,g)$ est solution de l'équation d'onde fractionnaire

$$\begin{cases} D^\alpha_{RL} y - \Delta y &= v & \text{dans } Q, \\ y &= 0 & \text{sur } \Sigma, \\ I^{2-\alpha} y(0) &= y^0 & \text{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial}{\partial t} I^{2-\alpha} y(0) &= g & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{4}$$

Pour résoudre le problème de contrôle sans regret, nous allons résoudre le problème de contrôle à moindres regrets donné par :

$$\inf_{v\in L^2(Q)} \sup_{g\in L^2(\Omega)} (J(v,g) - J(0,g) - \gamma\|g\|^2_{L^2(\Omega)}), \quad \gamma > 0.$$

Puis nous allons montrer que le contrôle à moindres regrets converge vers le contrôle sans regret solution du problème (3).

Dans les équations (2) et (4), g est la donnée manquante. Dans les problèmes environnementaux, la donnée g représente souvent la pollution.

Dans cette thèse, nous ne nous contentons pas de prouver que nos problèmes de contrôle optimal admettent une solution unique. En effet, notre principal objectif est d'établir les trajectoires optimales pour chaque problème. Ainsi, en utilisant les conditions d'optimalité d'Euler-Lagrange, nous caractérisons chaque contrôle par un système d'optimalité.

Mots clés : Dérivée fractionnaire ; équations de diffusion et onde fractionnaires ; contrôle optimal.

ABSTRACT

The purpose of this study is solve optimal control problems associated to fractional diffusion and wave equations in time with incomplete data.

To begin, we propose the solve of fractional diffusion and wave equations in time, where derivatives are understood in Riemann-Liouville sense. These equations are modeling the move of a concentration in a porous medium, and we obtain them by replacing the first-order time derivative (resp. the second order) in the classical diffusion equation (resp. wave equation) by the fractional derivative of Riemann-Liouville of order $0 < \alpha < 1$ (resp. $1 < \alpha < 2$). In this work, we use the spectral method in order to obtain the existence and uniqueness of solutions in Hilbert spaces. After, we establish important estimations for our applications to optimal control problems. Note, with this method, we only obtain weak solutions but it's enough for the next of this study. Before the solve of optimal control problems, we give existence and uniqueness results for fractional diffusion and wave equations where derivatives are understood in Caputo sense. The latter are helpful because in our applications, we will see that adjoint equations are fractional diffusion and wave equations where derivatives are the right fractional Caputo derivative.

To continue, we propose the solve of an optimal control problem associated to a fractional wave equation. In this part, we want to approach the state $I^{2-\alpha}y(v,T)$ by a desired state z_d controlling v, where $y = y(v)$ is solution of the state equation

$$
\begin{cases}
D^{\alpha}_{RL} y - \Delta y & = & v & \text{dans } Q, \\
y & = & 0 & \text{sur } \Sigma, \\
I^{2-\alpha} y(0) & = & y^0 & \text{dans } \Omega, \\
\dfrac{\partial}{\partial t} I^{2-\alpha} y(0) & = & y^1 & \text{dans } \Omega.
\end{cases}
$$

Hence, we consider the fractional

$$J(v) = \frac{1}{2}\|I^{2-\alpha} y(v,T) - z_d\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{N}{2}\|v\|^2_{L^2(Q)},$$

and solve the optimal control problem

$$\inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v),$$

where $\mathcal{U}_{ad}$ is a closed convex subset of $L^2(Q)$.

To finish, we study the solve of optimal control problems associated to fractional diffusion and wave equations in time with incomplete data. In environmental problems, we are often faced with incomplete data and this is why we want to solve these problems. When we have incomplete data, it is impossible to solve optimal control problems, then we use the notion of no-regret and low-regret controls. These two concepts are highly related, in fact we will see in the last two chapters that the no-regret control problem being difficult to solve directly, we first solve the associated low-regret control problem.
Hence, firstly we will solve the no-regret control problem

$$\inf_{v \in L^2(\Sigma)} \sup_{g \in L^2(Q)} (J(v,g) - J(0,g)), \tag{1}$$

where J is given by

$$J(v,g) = \|y(x,t;v,g) - z_d\|^2_{L^2(Q)} + N\|v\|^2_{L^2(\Sigma)},$$

and $y(v,g)$ is solution of the following fractional diffusion equation

$$
\begin{cases}
D^{\alpha}_{RL} y - \Delta y & = & g & \text{dans } Q, \\
y & = & v & \text{sur } \Sigma, \\
I^{1-\alpha} y(0) & = & y^0 & \text{dans } \Omega.
\end{cases} \tag{2}
$$

To solve this problem, we solve before the low-regret control

$$\inf_{v \in L^2(\Sigma)} \sup_{g \in L^2(Q)} (J(v,g) - J(0,g) - \gamma\|g\|^2_{L^2(Q)}), \quad \gamma > 0,$$

after we prove that the low-regret control converges to the no-regret control solution of (1).
Secondly, we will consider the no-regret control problem

$$\inf_{v\in L^2(Q)} \sup_{g\in L^2(\Omega)} (J(v,g)-J(0,g)), \tag{3}$$

where J is given by

$$J(v,g)=\|y(x,t;v,g)-z_d\|^2_{L^2(Q)}+N\|v\|^2_{L^2(Q)},$$

and $y(v,g)$ is solution of the following fractional wave equation

$$\begin{cases} D^\alpha_{RL}y-\Delta y &= v \quad \text{dans } Q,\\ y &= 0 \quad \text{sur } \Sigma,\\ I^{2-\alpha}y(0) &= y^0 \quad \text{dans } \Omega,\\ \dfrac{\partial}{\partial t}I^{2-\alpha}y(0) &= g \quad \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{4}$$

To solve the no-regret control problem, we will first solve the low-regret control problem given by :

$$\inf_{v\in L^2(Q)} \sup_{g\in L^2(\Omega)} (J(v,g)-J(0,g)-\gamma\|g\|^2_{L^2(\Omega)}), \quad \gamma>0.$$

Then we will prove that the low-regret control converges to the no-regret control solution of (3).

In equations (2) and (4), g is unknown. In environmental problems, g often represents pollution.

In this thesis, we do not just prove that our problems of optimal control have a unique solution. In fact, our principal purpose is establish optimal trajectories for each control. Hence, using Euler-Lagrange optimality conditions, we characterize each control by an optimality system.

Keywords : Fractional derivative ; fractional diffusion and wave equations ; optimal control.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

L'idée du calcul fractionnaire est apparue pour la première fois dans une lettre envoyée par L'Hospital à Leibniz en 1695. Dans cette lettre, L'Hospital interroge Leibniz sur son article apparu en 1646 dans lequel il donne une définition de la dérivée d'ordre n d'une fonction f où $n = 1, 2, \ldots$. L'Hospital lui demande qu'obtient-on si $n = 1/2$, et Leibniz répond que "cela mène à un paradoxe dont on tirera un jour d'utiles conséquences". Depuis cette découverte, beaucoup de mathématiciens se sont penchés sur le sujet, le but étant de généraliser les résultats obtenus pour des dérivées d'ordre entier, dans le cas où les dérivées sont d'ordre arbitraire. Notons que le calcul fractionnaire n'apparaît pas uniquement en mathématiques pures. En effet, les dérivées fractionnaires sont un excellent outil pour la description de la mémoire et des propriétés héréditaires dans différents matériaux et processus. C'est l'avantage des dérivées fractionnaires si nous devons les comparer avec les dérivées d'ordre entier. C'est pour ces raisons, que nous retrouvons le calcul fractionnaire dans d'autres domaines, comme par exemple la chimie, la physique ou encore l'économie. Pour en savoir plus sur le calcul fractionnaire, nous référons les livres [1, 2, 3, 4, 5] et leurs références.

Dans cette thèse, nous nous intéressons à la résolution de problèmes de contrôle optimal associés à des équations de diffusion et onde fractionnaires en temps, où les dérivées sont prises au sens de Riemann-Liouville. Nous obtenons ces équations à partir de l'équation de diffusion (respectivement onde) classique, en remplaçant la dérivée de premier ordre (respectivement second ordre) par la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α avec $0 < \alpha < 1$ (respectivement $1 < \alpha < 2$). En physique, les équations de diffusion et onde fractionnaires modélisent le déplacement d'une concentration dans un milieu poreux. En fonction de la taille des pores, nous parlons soit d'équation de diffusion fractionnaire (diffusion lente), soit d'équation d'onde fractionnaire (diffusion rapide). Depuis plusieurs années, des mathématiciens s'intéressent à la résolution de ce type d'équations. Par exemple, Yamamoto et al. dans [11], ont considéré l'équation de diffusion-onde fractionnaire :

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha u(x,t) &=& (Lu)(x,t) + F(x,t), & x \in \Omega, t \in (0,T), 0 < \alpha \leq 2, \\ u(x,t) &=& 0, & x \in \partial\Omega, t \in (0,T), \\ u(x,0) &=& a(x), & x \in \Omega, \\ \partial_t u(x,0) &=& b(x), & x \in \Omega, \text{ si } 1 < \alpha < 2. \end{cases}$$

où Ω est un ensemble borné de $\mathbb{R}^d$ de frontière suffisamment lisse $\partial\Omega$ et ∂_t^α est la dérivée de Caputo. L est donnée par

$$Lu(x) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^{d} A_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} u(x) \right) + C(x)u(x), x \in \Omega,$$

où $A_{ij} = A_{ji} \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}), 1 \leq i,j \leq d, C \in \mathcal{C}(\Omega)$ et $C(x) \geq 0, x \in \bar{\Omega}$. Dans cet article, les auteurs ont utilisé la méthode spectrale pour prouver l'existence et l'unicité de solutions faibles dans plusieurs cas ($a = 0, b = 0, a = b = 0, f = 0 \ldots$) et pour finir, ils ont appliqué leurs résultats à un problème inverse. Pour plus de lecture sur l'étude d'existence et d'unicité de solutions à ce type d'équations fractionnaires, nous référons aux articles [12]-[25].

Depuis plusieurs décennies, de nombreux travaux ont été menés sur les problèmes de contrôle optimal associés à des équations de diffusion et onde fractionnaires. Dans [29], Mophou a appliqué la théorie du contrôle optimal classique dans le cas d'une équation de diffusion fractionnaire où la dérivée est prise au sens de Riemann-Liouville. Plus précisément, l'auteur a étudié le problème de contrôle optimal

$$\inf_{v \in L^2(Q)} J(v),$$

où J est la fonctionnelle coût donnée par

$$J(v) = \|y(v) - z_d\|^2_{L^2(Q)} + N\|v\|_{L^2(Q)}, \quad z_d \in L^2(Q), \quad N > 0,$$

avec $y = y(v)$ solution de l'équation de diffusion fractionnaire

$$\begin{cases} D_+^\alpha y - \Delta y &=& v & \text{dans } Q, \\ y &=& 0 & \text{sur } \Sigma, \\ I_+^{1-\alpha} y(0^+) &=& y^0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Dans cette étude, l'auteur a considéré que $0 < \alpha < 1, y^0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, le contrôle v appartient à $L^2(Q)$ et l'intégrale $I_+^{1-\alpha}$ et la dérivée fractionnaire D_+^α sont prises au sens de Riemann-Liouville.

Dans [30], Dorville et al. ont étudié un problème de contrôle optimal associé à une équation de diffusion fractionnaire. Dans cette étude, les auteurs ont préalablement résolu l'équation de Dirichlet non-homogène fractionnaire :

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{RL}y - \Delta y &= h & \text{dans } Q, \\ y &= v & \text{sur } \Sigma, \\ I^{1-\alpha}y(0^+) &= 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{1}$$

où $0 < \alpha < 1, h \in L^2(Q)$ et le contrôle $v \in L^2(\Sigma)$. L'intégrale $I^{1-\alpha}$ et la dérivée fractionnaire D^{α}_{RL} sont prises au sens de Riemann-Liouville. Pour cela, ils ont utilisé la méthode de transposition. Par la suite, ils ont prouvé l'existence et l'unicité de la solution du problème de contrôle optimal :

$$\inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v),$$

où $\mathcal{U}_{ad}$ est un sous-ensemble non-vide convexe et fermé de $L^2(\Sigma)$ et J est la fonctionnelle coût donnée par

$$J(v) = \frac{1}{2}\|I^{1-\alpha}y(v,T) - z_d\|^2_{H^{-1}(\Omega)} + \frac{N}{2}\|v\|^2_{L^2(\Sigma)},$$

avec $z_d \in H^{-1}(\Omega), N > 0$ et $y(v)$ est solution de l'équation (1). Pour finir, les auteurs ont caractérisé le contrôle optimal par un système d'optimalité, en utilisant les conditions d'Euler-Lagrange. Nous référons également [31]-[40] et leurs références pour plus de littérature sur l'étude de problèmes de contrôle optimal associés à des équations de diffusion et onde fractionnaires.

Á ce jour, nous savons résoudre que les problèmes de contrôle optimal associés à des équations bien posées au sens d'Hadamard. On dit q'une équation est bien posée au sens d'Hadamard si elle admet une unique solution qui dépend de façon continue des données. Mais qu'en est-il quand certaines données sont manquantes ? Dans notre étude, nous appelons "équations de diffusion et onde fractionnaires à données incomplètes", des équations de diffusion et onde fractionnaires où l'une des données de l'équation est inconnue (conditions initiales, condition au bord etc). Ne sachant pas résoudre les problèmes de contrôle optimal associés à des équations différentielles à données incomplètes, J. L. Lions propose, dans [51, 52], l'approche suivante : si v désigne le contrôle, alors on cherche, les contrôles v "les meilleurs possibles" qui, en tout cas, font "au moins aussi bien" ou "pas beaucoup plus mal dans le pire des cas" que de ne rien faire du tout (v=0). Ainsi, sont nées les notions de contrôle sans regret et contrôle à moindres regrets. Dans le cas de dérivées d'ordre entier, nous trouvons de nombreux travaux faisant appel à ces dernières notions, nous pouvons par exemple citer les articles [45]-[56]. Dans cette thèse, nous nous sommes principalement intéressés aux problèmes de contrôle optimal associés à des équations de diffusion et ondes fractionnaires à données incomplètes car dans les problèmes environnementaux, les scientifiques sont souvent confrontés aux manques d'information. De plus, dans les nombreuses études sur les équations de diffusion et onde fractionnaires qui ont été menées, les auteurs ont presque toujours considéré des problèmes bien posés. Récemment, dans [57], Mophou a étudié un problème de contrôle optimal associé à l'équation de diffusion fractionnaire à données incomplètes :

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{RL} y - \Delta y & = & v & \text{dans } Q, \\ y & = & g & \text{sur } \Sigma, \\ I^{1-\alpha} y(0^+) & = & y^0 & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

où $0 < \alpha < 1, v \in L^2(Q)$ et $y^0 \in H^1_0(\Omega)$. L'intégrale $I^{1-\alpha}$ et la dérivée fractionnaire D^{α}_{RL} sont prises au sens de Riemann-Liouville. $g \in L^2(\Sigma)$ est l'inconnue. Pour résoudre ce problème, l'auteur a appliqué la théorie des contrôles sans regret et à moindres regrets. Plus précisément, Mophou à tout d'abord, résolu le problème de contrôle à moindres regrets

$$\inf_{v \in L^2(Q)} \left(\sup_{g \in L^2(\Sigma)} J(v, g) - J(0, g) - \gamma \|g\|^2_{L^2(\Sigma)} \right), \quad \gamma > 0,$$

où J est la fonctionnelle coût définie par

$$J(v, g) = \|y(x, T; v, g) - z_d\|^2_{L^2(Q)} + N\|v\|^2_{L^2(Q)}, \quad z_d \in L^2(Q) \text{ et } N > 0.$$

Puis, Mophou a prouvé que le contrôle à moindres regrets converge quand $\gamma \to 0$ vers le contrôle sans regret , solution du problème :

$$\inf_{v \in L^2(Q)} \left(\sup_{g \in L^2(\Sigma)} J(v, g) - J(0, g) \right).$$

Dans son travail, l'auteur a également caractérisé chaque contrôle par un système d'optimalité.

Cette thèse se divise en cinq chapitres. Pour commencer, nous donnons toutes les définitions et les principaux résultats dont nous avons besoin pour mener à bien cette étude. Dans la suite, nous étudions une équation de diffusion fractionnaire, puis une équation d'onde fractionnaire. Pour ces deux équations, la dérivée fractionnaire est prise au sens de Riemann-Liouville, et nous utilisons la méthode spectrale afin d'obtenir des solutions faibles dans un espace de Hilbert. Notons ici que les travaux concernant l'étude de ces équations ont été publiés dans les articles [28] et [44]. Nous donnons également, dans cette partie, des résultats d'existence et d'unicité de solutions à des équations de diffusion et onde fractionnaires où la dérivée est prise au sens de Caputo. Suite à ces résultats, nous ferons une application à un problème de contrôle optimal associé à une équation d'onde fractionnaire. Pour cette étude, nous nous sommes appuyés sur le livre de J-L. Lions [9] et les travaux de Mophou, dans [29]. Cependant, ici nous faisons le choix de prendre comme équation d'état une équation d'onde fractionnaire et nous cherchons un contrôle dans un sous-ensemble convexe fermé non-vide de $L^2(Q)$ et pas dans tout l'espace $L^2(Q)$ comme dans ce dernier papier. Ces travaux ont été présenté lors de la 9ième conférence sur les équations différentielles et systèmes dynamiques, qui s'est déroulé à Dallas, USA en Mai 2015. Suite à cela, nos résultats ont été publiés dans [44]. Pour finir, nous proposons d'étendre les résultats obtenus dans [57], en étudiant deux problèmes de contrôle sans regret associés à des équations de diffusion et onde fractionnaires. Plus précisément, pour commencer nous choisissons de considérer un problème de contrôle sans regret associé à une équation de Dirichlet non-homogène fractionnaire où le terme source est inconnu. Puis dans un second temps, nous considérons comme équation d'état une équation d'onde fractionnaire où l'une des conditions initiales est inconnue. Ces derniers résultats ont fait l'objet d'une publication dans la revue Advances in Difference Equation, [58].

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

Dans cette section, nous donnons les définitions et les principaux résultats qui nous permettront d'introduire tout d'abord les notions d'intégrale et dérivées fractionnaires puis qui nous permettront de résoudre nos équations de diffusion et onde fractionnaires.

1.1 Outils

Dans cette partie, nous nous concentrons sur l'ensemble des fonctions que nous utiliserons dans la théorie des fractionnaires. Nous commençons par la fonction gamma définie de la façon suivante,

Definition 1.1. *[1, 2] Soit z un complexe tel que $Re(z) > 0$. Alors la fonction Gamma, notée Γ, est donnée par*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Un résultat important liée à cette fonction est le suivant :

Proposition 1.1. *[1, 2] Soit z un complexe tel que $Re(z) > 0$. Alors nous avons le résultat suivant :*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Definition 1.2. *[1, 2] Soient x et y deux nombres complexes tels que $Re(x) > 0$ et $Re(y) > 0$. Alors la fonction bêta est la fonction a deux variables définie par,*

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt.$$

La relation entre ces deux fonctions est donnée dans la proposition suivante,

Proposition 1.2. *[1, 2] Soient x et y deux nombres complexes tels que $Re(x) > 0$ et $Re(y) > 0$. Alors nous avons*

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

Tout comme dans le cas des équations différentielles d'ordre entier, nous utilisons dans ce travail la transformée de Laplace afin de résoudre nos équations différentielles fractionnaires. C'est pour cela que nous donnons la définition suivante :

Definition 1.3. *[2]**(Transformée de Laplace)** Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. La transformée de Laplace de fonction est définie par :*

$$(\mathcal{L}f)(s) = \mathcal{L}[f(t)](s) = \hat{f}(s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \quad , s \in \mathbb{C}.$$

Maintenant, nous passons à la définition et aux propriétés de la fonction Mittag-Leffler.

Definition 1.4. *[1, 2] Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que $Re(\alpha) > 0$ et $Re(\beta) > 0$. Alors on note par,*

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad z \in \mathbb{C} \tag{1.1}$$

la fonction de Mittag-Leffer classique a deux paramètres et nous notons

$$E_{\alpha,1}(z) = E_\alpha(z).$$

Afin de montrer l'unicité de chaque solution dans les sections qui suivent, nous aurons besoin d'établir des estimations. Et pour cela, nous utiliserons les deux résultats suivants :

Lemme 1.1. *[1] Pour un entier positif $m, \lambda > 0$ et $\alpha > 0$, nous avons,*

$$\frac{d^n}{dt^n} E_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha) = -\lambda t^{\alpha-n} E_{\alpha,\alpha-n+1}(-\lambda t^\alpha), \quad t > 0. \tag{1.2}$$

et

$$\frac{d}{dt}(tE_{\alpha,2}(-\lambda t^\alpha)) = E_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha), \quad t > 0. \tag{1.3}$$

Ainsi que

Théorème 1.1. *[1, 11] Soient $0 < \alpha < 2$, β est un réel arbitraire, et on suppose que μ est tel que*

$$\frac{\pi\alpha}{2} < \mu < \min\{\pi, \pi\alpha\}.$$

Alors il existe une constante $C = C(\alpha, \beta, \mu) > 0$ telle que

$$|E_{\alpha,\beta}(z)| \leq \frac{C}{1+|z|}, \qquad \mu \leq |arg(z)| \leq \pi.$$

Nous donnons maintenant, la définition de la fonction de Mittag-Leffler généralisée

Definition 1.5. *[2, 6] Soient $\alpha, \beta, \rho \in \mathbb{C}$ tel que $Re(\alpha) > 0$ et $Re(\beta) > 0$ alors la fonction de Mittag-Leffler généralisée est définie par*

$$\mathcal{E}^{\rho}_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\rho)_n t^n}{\Gamma(\alpha n + \beta) n!}, \qquad \textit{pour tout } t \in \mathbb{C},$$

où $(\rho)_n = \rho(\rho+1)\dots(\rho+n-1)$.

Remarque 1.1. *Notons que quand $\rho = 1$ nous avons*

$$\mathcal{E}^{1}_{\alpha,\beta}(t) = E_{\alpha,\beta}(t),$$

où E est la fonction de Mittag-Leffler classique définie par (1.1).

Dans la suite du travail, nous aurons besoin des deux résultats qui suivent :

Lemme 1.2. *[2, 6, 7] Soient $\alpha, \beta, \rho \in \mathbb{C}$ tels que $Re(\alpha) > 0$ et $Re(\beta) > 0$. Alors nous avons*

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^n (\mathcal{E}^{\rho}_{\alpha,\beta}(t)) = (\rho)_n \mathcal{E}^{\rho+n}_{\alpha,\beta+\alpha n}(t), \quad t \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.4}$$

Et

$$\alpha\rho\mathcal{E}^{\rho+1}_{\alpha,\beta}(t) = (1 + \alpha\rho - \beta)\mathcal{E}^{\rho}_{\alpha,\beta}(t) + \mathcal{E}^{\rho}_{\alpha,\beta-1}(t), \quad t \in \mathbb{C}. \tag{1.5}$$

Lemme 1.3. *[6] Soient α, β, ρ des nombres complexes tels que $Re(\alpha) > 0, Re(\rho) > 0$ et $Re(\beta) > 0$. Alors nous avons que*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{\rho-1}}{s^{\alpha} + as^{\beta} + b}; t\right\} = t^{\alpha-\rho} \sum_{k=0}^{+\infty} (-a)^k t^{(\alpha-\beta)k} \mathcal{E}^{k+1}_{\alpha,\alpha+(\alpha-\beta)k-\rho+1}(-bt^{\alpha}).$$

où $|as^{\beta}/(s^{\alpha} + b)| < 1$ et on suppose que la série dans l'égalité précédente est convergente.

1.2 Calcul fractionnaire.

Nous entendons par "calcul fractionnaire", les calculs d'intégrales et dérivées d'ordre réel arbitraire ou d'ordre complexe. Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés qu'aux dérivées de Riemann-Liouville et de Caputo.

1.2.1 Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville.

1.2.1.1 Définitions et principaux résultats.

Definition 1.6. *[1, 2] Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\alpha > 0$. Alors l'expression*

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds, \quad t > 0$$

est appelée intégrale de Riemann-Liouville d'ordre α, quand l'intégrale existe.

Definition 1.7. *[1, 2] Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre α de f est définie par*

$$D^\alpha_{RL} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} . \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s)ds, \quad t > 0,$$

où $\alpha \in (n-1, n), n \in \mathbb{N}$, quand l'intégrale existe.

Nous pouvons noter d'après la définition précédente que contrairement à la dérivée d'ordre entier d'une constante C, la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une constante est non nulle. Pour être plus précise, la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $0 < \alpha < 1$ d'une constante C est donnée par

$$D^\alpha_{RL} C = \frac{Ct^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

Dans le lemme qui suit, nous donnons quelques relations entre la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville et l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville :

Lemme 1.4. *Soient $u \in \mathcal{C}^n([0,T]), \alpha \in (n-1; n), n \in \mathbb{N}$ et $v \in \mathcal{C}^1([0,T])$. Alors pour $t \in [0,T]$, nous avons les propriétés suivantes :*

$$D^\alpha_{RL} v(t) = \frac{d}{dt} I^{1-\alpha} v(t); \quad n = 1, \tag{1.6}$$

$$D^\alpha_{RL} v(t) = \frac{d^2}{dt^2} I^{2-\alpha} v(t); \quad n = 2, \tag{1.7}$$

$$D^{\alpha}_{RL} I^{\alpha} v(t) = v(t) \tag{1.8}$$

$$I^{\alpha} D^{\alpha}_{RL} u(t) = u(t) - \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} (I^{1-\alpha} u)(0) \quad si\ n = 1 \tag{1.9}$$

1.2.1.2 Transformée de la Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville.

Dans cette partie, nous notons $\hat{D}^{\alpha}_{RL} f(s)$ la transformée de Laplace de la dérivée de Riemann-Liouville et $\hat{f}(s)$ la transformée de Laplace de la fonction f. Alors nous avons les deux résultats suivants :

Théorème 1.2. *[4] Soit* $0 < \alpha < 1$. *Alors la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre* α *est donnée par :*

$$\hat{D}^{\alpha}_{RL} f(s) = -\lim_{s \to 0} I^{1-\alpha} f(s) + s^{\alpha} \hat{f}(s). \tag{1.10}$$

Nous avons également le résultat :

Théorème 1.3. *[4] Soit* $1 < \alpha < 2$. *Alors la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre* α *est donnée par :*

$$\hat{D^{\alpha}_{RL} y_i}(s) = s^{\alpha} \hat{f}(s) - s \lim_{t \to 0} I^{2-\alpha} f(t) - \lim_{t \to 0} \frac{\partial}{\partial t} I^{2-\alpha} f(t). \tag{1.11}$$

Dans cette thèse, nous utilisons la transformée de Laplace pour résoudre nos équations de diffusion et onde fractionnaires en temps. Nous pouvons voir ici, que dans la formulation des transformées de Laplace apparaissent les termes $\lim_{t \to 0} I^{1-\alpha} f(t)$, $\lim_{t \to 0} I^{2-\alpha} f(t)$ et $\lim_{t \to 0} \frac{\partial}{\partial t} I^{2-\alpha} f(t)$ contrairement aux dérivées d'ordre entier où nous voyons apparaître les valeurs initiales des fonctions f, f' etc. Ainsi, il est donc utile si on veut résoudre nos équations de prendre comme conditions initiales la valeur de l'intégrale fractionnaire d'ordre $1 - \alpha$ de la fonction f pour le premier cas, et l'intégrale fractionnaire d'ordre $2 - \alpha$ ainsi que sa dérivée en temps de la fonction f dans le deuxième cas.

1.2.1.3 Équations de diffusion et onde fractionnaires prises au sens de Riemann-Liouville.

Suite à la partie précédente, nous pouvons maintenant poser nos équations de diffusion et onde fractionnaires. Pour cela nous considérons $n \in \mathbb{N}^*$ et Ω un sous-ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière $\partial\Omega$ de classe $\mathcal{C}^2$. Pour le temps $T > 0$, nous posons

$$Q = \Omega\times]0,T[\quad \text{et} \quad \Sigma = \partial\Omega\times]0,T[.$$

1er Cas : $0 < \alpha < 1$. Résoudre une équation de diffusion fractionnaire où la dérivée est prise au sens de Riemann-Liouville, revient à trouver y :
solution de l'équation de la chaleur

$$D^{\alpha}_{RL}y(x,t) - \Delta y(x,t) = f(x,t) \quad \text{dans } Q$$

vérifiant la condition de Dirichlet

$$y(\sigma,t) = 0 \quad \text{sur } \Sigma,$$

et la condition initiale

$$I^{1-\alpha}y(x,0) = y^0 \quad \text{dans } \Omega.$$

où D^{α}_{RL} est la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $0 < \alpha < 1$, $I^{1-\alpha}y(x,0) = \lim_{t\to 0} I^{1-\alpha}y(x,t)$ où $I^{1-\alpha}$ est l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $1-\alpha$.

2ème Cas : $1 < \alpha < 2$. Résoudre une équation d'onde fractionnaire où la dérivée est prise au sens de Riemann-Liouville, revient à trouver y :
solution de l'équation d'onde

$$D^{\alpha}_{RL}y(x,t) - \Delta y(x,t) = f(x,t) \quad \text{dans } Q$$

vérifiant la condition de Dirichlet

$$y(\sigma,t) = 0 \quad \text{sur } \Sigma,$$

et les conditions initiales

$$I^{2-\alpha}y(x,0) = y^0 \quad \text{dans } \Omega,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}I^{2-\alpha}y(x,0) = y^1 \quad \text{dans } \Omega.$$

où D^{α}_{RL} est la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $1 < \alpha < 2$, $I^{2-\alpha}y(x,0) = \lim_{t\to 0} I^{2-\alpha}y(x,t)$ et $\frac{\partial}{\partial t}I^{2-\alpha}y(x,0) = \lim_{t\to 0}\frac{\partial}{\partial t}I^{2-\alpha}y(x,0)$ où $I^{2-\alpha}$ est l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $2-\alpha$.

1.2.2 Dérivée fractionnaire de Caputo.

1.2.2.1 Définitions et principaux résultats.

Definition 1.8. *[1, 2] Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. La dérivée fractionnaire de Caputo à gauche d'ordre α de f est définie par*

$$D_C^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)ds, \quad t > 0,$$

où $\alpha \in (n-1, n], n \in \mathbb{N}$, quand l'intégrale existe.

Nous pouvons remarquer que contrairement à la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, la dérivée fractionnaire de Caputo à gauche d'une constante C vaut zéro, ce qui nous rappelle un résultat similaire dans le cas des dérivées d'ordre entier.

Definition 1.9. *[1, 2] Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. La dérivée fractionnaire de Caputo à droite d'ordre α de f est définie par*

$$\mathcal{D}_C^\alpha f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^T (s-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)ds, \quad 0 < t < T,$$

où $\alpha \in (n-1, n], n \in \mathbb{N}$, quand l'intégrale existe.

Nous voyons ici apparaître les notions de dérivées fractionnaires à gauche et à droite. En mathématiques, la dérivée fractionnaire à gauche représente l'opérateur adjoint de la dérivée fractionnaire à droite. Il est intéressant de voir le point de vue physique de ces deux notions. En effet, en physique, si t est le temps et que $f(t)$ décrit un certain processus dynamique en temps. Si on choisit τ tel que $\tau < t$, t étant le moment présent, alors l'état $f(\tau)$ du processus f appartient au passé de ce processus. Réciproquement, si on choisit $\tau > t$, alors l'état $f(\tau)$ du processus f appartient au futur de ce processus.

Dans le lemme qui suit, nous donnons les principales relations entre la dérivée fractionnaire à gauche de Caputo et l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville.

Lemme 1.5. *[1, 2] Soient $u \in \mathcal{C}^n([0,T]), \alpha \in (n-1; n], n \in \mathbb{N}$ et $v \in \mathcal{C}^1([0,T])$. Alors pour $t \in [0,T]$, nous avons les propriétés suivantes :*

$$D_C^\alpha I^\alpha v(t) = v(t); \tag{1.12}$$

$$I^\alpha D_C^\alpha u(t) = u(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} u^{(k)}(0); \tag{1.13}$$

$$I^\alpha D_C^\alpha u(t) = u(t) - \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} (I^{1-\alpha} u)(0) \quad si\ n = 1; \tag{1.14}$$

$$I^{\alpha} D_C^{\alpha} u(t) = u(t) - u(0) \quad si\ n = 1. \tag{1.15}$$

Dans l'équation (1.15), nous voyons apparaître de nouveau une similarité entre dérivée fractionnaire de Caputo et dérivée d'ordre entier. En effet, tout comme pour le cas entier, l'intégrale de la dérivée de Caputo d'une fonction u est égale à la fonction u moins la valeur en 0 de cette fonction.

1.2.2.2 Équations de diffusion et onde fractionnaires prises au sens de Caputo.

Dans cette partie, nous posons nos équations de diffusion et onde fractionnaires avec la dérivée de Caputo. Nous pouvons distinguer deux catégories, les équations directes (avec la dérivée fractionnaire à gauche de Caputo) et les équations rétrogrades (avec la dérivée fractionnaire à droite de Caputo).

Équations de diffusion et onde fractionnaires directes :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et Ω un sous-ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière $\partial\Omega$ de classe $\mathcal{C}^2$. Pour le temps $T > 0$, nous posons

$$Q = \Omega \times]0, T[\quad \text{et} \quad \Sigma = \partial\Omega \times]0, T[.$$

1er Cas : $0 < \alpha < 1$**.** Résoudre une équation de diffusion fractionnaire directe où la dérivée est prise au sens de Caputo, revient à trouver y :
solution de l'équation de la chaleur

$$D_C^{\alpha} y(x,t) - \Delta y(x,t) = f(x,t) \quad \text{dans } Q$$

vérifiant la condition de Dirichlet

$$y(\sigma, t) = 0 \quad \text{sur } \Sigma,$$

et la condition initiale

$$y(x, 0) = y^0 \quad \text{dans } \Omega.$$

où D_C^{α} est la dérivée fractionnaire à gauche de Caputo d'ordre $0 < \alpha < 1$.

2ème Cas : $1 < \alpha < 2$**.** Résoudre une équation d'onde fractionnaire directe où la dérivée est prise au sens de Caputo, revient à trouver y :
solution de l'équation d'onde

$$D_C^{\alpha} y(x,t) - \Delta y(x,t) = f(x,t) \quad \text{dans } Q$$

vérifiant la condition de Dirichlet

$$y(\sigma, t) = 0 \quad \text{sur } \Sigma,$$

et les conditions initiales

$$y(x, 0) = y^0 \quad \text{dans } \Omega,$$
$$\frac{\partial}{\partial t} y(x, 0) = y^1 \quad \text{dans } \Omega.$$

où D_C^α est la dérivée fractionnaire à gauche de Caputo d'ordre $1 < \alpha < 2$.

Notons que, si $\alpha = 1$ alors nous avons une équation parabolique et si $\alpha = 2$ alors nous avons une équation hyperbolique.

Équations de diffusion et onde fractionnaires rétrogrades :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et Ω un sous-ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière $\partial\Omega$ de classe $\mathcal{C}^2$. Pour le temps $T > 0$, nous posons

$$Q = \Omega \times]0, T[\quad \text{et} \quad \Sigma = \partial\Omega \times]0, T[.$$

1er Cas : $0 < \alpha < 1$. Résoudre une équation de diffusion fractionnaire rétrograde où la dérivée est prise au sens de Caputo, revient à trouver y :
solution de l'équation de la chaleur

$$-\mathcal{D}_C^\alpha y(x, t) - \Delta y(x, t) = f(x, t) \quad \text{dans } Q$$

vérifiant la condition de Dirichlet

$$y(\sigma, t) = 0 \quad \text{sur } \Sigma,$$

et la condition initiale

$$y(x, T) = y^0 \quad \text{dans } \Omega.$$

où $\mathcal{D}_C^\alpha$ est la dérivée fractionnaire à droite de Caputo d'ordre $0 < \alpha < 1$.

2ème Cas : $1 < \alpha < 2$. Résoudre une équation d'onde fractionnaire rétrograde où la dérivée est prise au sens de Caputo, revient à trouver y :
solution de l'équation d'onde

$$\mathcal{D}_C^\alpha y(x, t) - \Delta y(x, t) = f(x, t) \quad \text{dans } Q$$

vérifiant la condition de Dirichlet

$$y(\sigma, t) = 0 \quad \text{sur } \Sigma,$$

et les conditions initiales

$$y(x,T) = y^0 \quad \text{dans } \Omega,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} y(x,T) = y^1 \quad \text{dans } \Omega.$$

où $\mathcal{D}_C^\alpha$ est la dérivée fractionnaire à droite de Caputo d'ordre $1 < \alpha < 2$.

Nous parlons d'équation rétrograde car les conditions initiales correspondent à l'état final (c'est-à-dire à l'instant T) de la fonction y.

1.3 Calcul intégral.

Nous donnons dans cette partie, des résultats d'intégrations par parties qui nous seront très utiles pour la suite. Pour cela, nous considérons $n \in \mathbb{N}^*$ et Ω un sous-ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière $\partial\Omega$ de classe $\mathcal{C}^2$. Pour le temps $T > 0$, nous posons $Q = \Omega\times]0,T[$ et $\Sigma = \partial\Omega\times]0,T[$, et nous avons les résultats suivants :

Lemme 1.6. *(Intégration par parties)[29] Soient* $0 < \alpha < 1$, $y \in \mathcal{C}^\infty(\bar{Q})$ *et* $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\bar{Q})$. *Alors nous avons,*

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_\Omega (D_{RL}^\alpha y(x,t) - \Delta y(x,t))\varphi(x,t)dxdt = \\
&\int_\Omega \varphi(x,T) I^{1-\alpha} y(x,T)dx - \int_\Omega \varphi(x,0) I^{1-\alpha} y(x,0)dx \\
&+ \int_0^T \int_{\partial\Omega} y(\sigma,t)\frac{\partial\varphi}{\partial v}(\sigma,t)d\sigma dt - \int_0^T \int_{\partial\Omega} \frac{\partial y}{\partial v}(\sigma,t)\varphi(\sigma,t)d\sigma dt \\
&+ \int_\Omega \int_0^T y(x,t)(-\mathcal{D}_C^\alpha \varphi(x,t) - \Delta\varphi(x,t))dxdt,
\end{aligned} \tag{1.16}$$

où $\mathcal{D}_C^\alpha$ *est la dérivée à droite de Caputo d'ordre* $0 < \alpha < 1$.

En s'appuyant sur le résultat précédent, nous obtenons le corollaire qui suit,

Corollaire 1.1. *[29] Soient* $0 < \alpha < 1$, $y \in \mathcal{C}^\infty([0,T])$. *Soit aussi* $\mathbb{D}(0,T)$ *l'espace des fonctions* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $(0,T)$ *à support compact. Alors pour tout* $\varphi \in \mathbb{D}(0,T)$, *nous avons*

$$\int_0^T D_{RL}^\alpha y(t)\varphi(t)dt = -\int_0^T y(t)\mathcal{D}_C^\alpha \varphi(t)dt$$

où $\mathcal{D}_C^\alpha$ *est la dérivée à droite de Caputo d'ordre* $0 < \alpha < 1$.

Nous allons considérer maintenant le cas $1 < \alpha < 2$. Ainsi nous avons le lemme suivant

Lemme 1.7. *(Intégration par parties) Soient $1 < \alpha < 2$, $y \in \mathcal{C}^\infty(\bar{Q})$ et $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\bar{Q})$. Alors nous avons,*

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_\Omega (D_{RL}^\alpha y(x,t) - \Delta y(x,t))\varphi(x,t)dxdt = \\
&\int_\Omega \varphi(x,T)\frac{\partial}{\partial t}(I^{2-\alpha}y(x,T))dx - \int_\Omega \varphi(x,0)\frac{\partial}{\partial t}(I^{2-\alpha}y(x,0^+))dx \\
&-\int_\Omega I^{2-\alpha}y(x,T)\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,T)dx + \int_\Omega I^{2-\alpha}y(x,0)\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,0)dx \\
&+\int_0^T \int_{\partial\Omega} y(\sigma,t)\frac{\partial\varphi}{\partial v}(\sigma,t)d\sigma dt - \int_0^T \int_{\partial\Omega} \frac{\partial y}{\partial v}(\sigma,t)\varphi(\sigma,t)d\sigma dt \\
&+\int_\Omega \int_0^T y(x,t)(\mathcal{D}_C^\alpha \varphi(x,t) - \Delta\varphi(x,t))dxdt.
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{Q})$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_\Omega (D_{RL}^\alpha y(x,t) - \Delta y(x,t))\varphi(x,t)dxdt &= \int_0^T \int_\Omega D_{RL}^\alpha y(x,t)\varphi(x,t)dxdt \\
&- \int_0^T \int_\Omega \Delta y(x,t)\varphi(x,t)dxdt.
\end{aligned}$$

Or on a

$$\begin{aligned}
-\int_0^T \int_\Omega \Delta y(x,t)\varphi(x,t)dxdt &= -\int_0^T \int_{\partial\Omega} \frac{\partial y}{\partial v}(\sigma,t)\varphi(\sigma,t)d\sigma dt \\
&+ \int_0^T \int_{\partial\Omega} y(\sigma,t)\frac{\partial\varphi}{\partial v}(\sigma,t)d\sigma dt \\
&- \int_0^T \int_\Omega y(x,t)\Delta\varphi(x,t)dxdt.
\end{aligned} \tag{1.18}$$

De plus,

$$
\begin{aligned}
\int_0^T\int_\Omega D^\alpha_{RL}y(x,t)\varphi(x,t)dxdt &= \int_\Omega\left[\int_0^T\varphi(x,t)\frac{\partial^2}{\partial t^2}(I^{2-\alpha}y(x,t))dt\right]dx\\
&= \int_\Omega\left[\frac{\partial}{\partial t}(I^{2-\alpha}y(x,t))\varphi(x,t)\right]_0^T dx\\
&- \int_\Omega\left[\int_0^T\frac{\partial}{\partial t}(I^{2-\alpha}y(x,t))\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t)dt\right]dx\\
&= \int_\Omega\varphi(x,T)\frac{\partial}{\partial t}(I^{2-\alpha}y(x,T))dx\\
&- \int_\Omega\varphi(x,0)\frac{\partial}{\partial t}(I^{2-\alpha}y(x,0))dx\\
&- \int_\Omega I^{2-\alpha}y(x,T)\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,T)dx\\
&+ \int_\Omega I^{2-\alpha}y(x,0)\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,0)dx\\
&+ \int_\Omega\left[\int_0^T I^{2-\alpha}y(x,t)\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}(x,t)dx\right]dt
\end{aligned}
$$

Avec,

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega\left[\int_0^T I^{2-\alpha}y(x,t)\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}(x,t)dx\right]dt =\\
&\int_\Omega\left[\int_0^T\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}(x,t)\left(\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_0^t(t-s)^{1-\alpha}y(x,s)ds\right)dt\right]dx =\\
&\int_\Omega\left[\int_0^T y(x,s)\left(\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_s^T(t-s)^{1-\alpha}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}(x,t)dt\right)ds\right]dx =\\
&\int_\Omega\left[\int_0^T y(x,s)\mathcal{D}^\alpha_C\varphi(x,s)ds\right]dx
\end{aligned}
$$

où $\mathcal{D}^\alpha_C\varphi$ est la dérivée à droite de Caputo d'ordre $1<\alpha<2$.
On a donc

$$
\begin{aligned}
\int_0^T\int_\Omega D^\alpha_{RL}y(x,t)\varphi(x,t)dxdt &= \int_\Omega\varphi(x,T)\frac{\partial}{\partial t}(I^{2-\alpha}y(x,T))dx\\
&- \int_\Omega\varphi(x,0)\frac{\partial}{\partial t}(I^{2-\alpha}y(x,0))dx\\
&- \int_\Omega I^{2-\alpha}y(x,T)\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,T)dx\\
&+ \int_\Omega I^{2-\alpha}y(x,0)\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,0)dx\\
&+ \int_\Omega\left[\int_0^T y(x,s)\mathcal{D}^\alpha_C\varphi(x,s)ds\right]dx
\end{aligned}
\tag{1.19}
$$

D'où d'après (1.18) et (1.19), on a ,

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_\Omega (D^\alpha_{RL}y(x,t)-\Delta y(x,t))\varphi(x,t)dxdt = \\
&\int_\Omega \varphi(x,T)\frac{\partial}{\partial t}(I^{2-\alpha}y(x,T))dx - \int_\Omega \varphi(x,0)\frac{\partial}{\partial t}(I^{2-\alpha}y(x,0^+))dx \\
&-\int_\Omega I^{2-\alpha}y(x,T)\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,T)dx + \int_\Omega I^{2-\alpha}y(x,0)\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,0)dx \\
&+\int_0^T\int_{\partial\Omega} y(\sigma,t)\frac{\partial\varphi}{\partial v}(\sigma,t)d\sigma dt - \int_0^T\int_{\partial\Omega}\frac{\partial y}{\partial v}(\sigma,t)\varphi(\sigma,t)d\sigma dt \\
&+\int_\Omega\int_0^T y(x,t)(\mathcal{D}^\alpha_C\varphi(x,t)-\Delta\varphi(x,t))dxdt.
\end{aligned}$$

□

Du lemme précédent, nous pouvons déduire le corollaire qui suit :

Corollaire 1.2. *Soient $1<\alpha<2$, $y\in\mathcal{C}^\infty([0,T])$. Soit aussi $\mathbb{D}(0,T)$ l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $(0,T)$ à support compact. Alors pour tout $\varphi\in\mathbb{D}(0,T)$, nous avons*

$$\int_0^T D^\alpha_{RL}y(t)\varphi(t)dt = \int_0^T y(t)\mathcal{D}^\alpha_C\varphi(t)dt$$

où $\mathcal{D}^\alpha_C$ est la dérivée à droite de Caputo d'ordre $1<\alpha<2$.

Démonstration. D'après (1.19), nous avons la relation suivante :

$$\begin{aligned}
\int_0^T\int_\Omega D^\alpha_{RL}y(x,t)\varphi(x,t)dxdt &= \int_\Omega \varphi(x,T)\frac{\partial}{\partial t}(I^{2-\alpha}y(x,T))dx \\
&- \int_\Omega \varphi(x,0)\frac{\partial}{\partial t}(I^{2-\alpha}y(x,0))dx \\
&- \int_\Omega I^{2-\alpha}y(x,T)\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,T)dx \\
&+ \int_\Omega I^{2-\alpha}y(x,0)\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,0)dx \\
&+ \int_\Omega\left[\int_0^T y(x,s)\mathcal{D}^\alpha_C\varphi(x,s)ds\right]dx.
\end{aligned}$$

Or $\varphi\in\mathbb{D}(0,T)$ d'où

$$\varphi(x,0)=\varphi(x,T)=\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,0)=\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,T)=0.$$

Ce qui implique

$$\int_0^T D^\alpha_{RL}y(t)\varphi(t)dt = \int_0^T y(t)\mathcal{D}^\alpha_C\varphi(t)dt, \quad \forall\varphi\in\mathbb{D}(0,T)$$

□

CHAPITRE 2

RÉSULTATS D'EXISTENCE ET D'UNICITÉ DE SOLUTIONS À DES ÉQUATIONS DE DIFFUSION ET ONDE FRACTIONNAIRES.

2.1 Étude d'une équation de diffusion fractionnaire avec la dérivée de Riemann-Liouville.

2.1.1 Position du problème.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et Ω un sous-ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière $\partial\Omega$ de classe $\mathcal{C}^2$. Pour le temps $T > 0$, nous posons $Q = \Omega \times]0, T[$ et $\Sigma = \partial\Omega \times]0, T[$, et on considère l'équation de diffusion fractionnaire :

$$\begin{cases} D^\alpha_{RL} y(x,t) - \Delta y(x,t) & = & f(x,t) & (x,t) \in Q, \\ y(\sigma, t) & = & 0 & (\sigma, t) \in \Sigma, \\ I^{1-\alpha} y(x, 0^+) & = & y^0 & x \in \Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $0 < \alpha < 1, f \in L^2(Q), y^0 \in H^1_0(\Omega)$ et $I^{1-\alpha} y(x, 0^+) = \lim\limits_{t \downarrow 0} I^{1-\alpha} y(x,t)$. L'intégrale fractionnaire I^α d'ordre α et la dérivée fractionnaire D^α_{RL} d'ordre α sont pris au sens de Riemann-Liouville.

Pour résoudre ce problème, nous avons fait le choix d'utiliser la méthode spectrale, le but étant de trouver une solution dans un espace de Hilbert, cela nous permettant de faire par la suite des applications à des problèmes de contrôle optimal. Mais avant tout cela, nous devons transformer le problème.

Pour cela, on suppose que la solution du problème (2.1) est telle que $y \in \mathcal{C}^{\infty}(\bar{Q})$. Multiplions la première équation de (2.1) par une fonction $v \in H_0^1(\Omega)$ et en intégrant par parties sur Ω, on obtient,

$$\int_{\Omega} D_{RL}^{\alpha} y(x,t)v(x)dx - \int_{\Omega} \Delta y(x,t)v(x)dx = \int_{\Omega} f(x,t)v(x)dx.$$

Et en utilisant la formule de Green, on a l'équation suivante :

$$\int_{\Omega} D_{RL}^{\alpha} y(x,t)v(x)dx + \int_{\Omega} \nabla y(x,t)\nabla v(x)dx = \int_{\Omega} f(x,t)v(x)dx. \tag{2.2}$$

Maintenant posons,

$$\forall \varphi, \psi \in L^2(\Omega) \qquad (\varphi,\psi)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} \varphi(x)\psi(x)dx,$$

le produit scalaire sur $L^2(\Omega)$ et on note $\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}$ la norme associée. Nous posons aussi,

$$a(\varphi,\psi) = \int_{\Omega} \nabla\varphi(x)\nabla\psi(x)dx, \quad \forall \varphi,\psi \in H_0^1(\Omega). \tag{2.3}$$

Alors notre forme $a(.,.)$ définie comme telle, est le produit scalaire sur $H_0^1(\Omega)$ et on notera

$$\|\varphi\|^2_{H_0^1(\Omega)} = a(\varphi,\varphi), \tag{2.4}$$

la norme associée.

D'autre part, $(-\Delta)$ étant une forme elliptique uniforme et symétrique, il existe une suite de valeurs propres réelles, $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq ...$ avec $\lambda_k \to \infty$ quand $k \to \infty$.
De plus, il existe une base hilbertienne orthonormale $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ de $L^2(\Omega)$, où $w_k \in H_0^1(\Omega)$ est le vecteur propre associé à λ_k : $-\Delta w_k = \lambda_k w_k$. Et on a,

$$a(w_k,p) = \lambda_k (w_k,p)_{L^2(\Omega)} \qquad \forall p \in H_0^1(\Omega). \tag{2.5}$$

On a également $\left\{\dfrac{w_k}{\sqrt{\lambda_k}}\right\}_{k=1}^{\infty}$ qui est une base hilbertienne orthonormale de $H_0^1(\Omega)$ pour le produit scalaire $a(.,.)$, d'où nous avons

$$||\phi||^2_{H_0^1(\Omega)} = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i (\phi, w_i)^2_{L^2(\Omega)}, \qquad \forall \phi \in H_0^1(\Omega). \tag{2.6}$$

L'équation (2.2) s'écrit donc,

$$(D_{RL}^{\alpha} y(t), v)_{L^2(\Omega)} + a(y(t),v) = (f(t),v)_{L^2(\Omega)}$$

Or nous avons, $(D^{\alpha}_{RL}y(t),v) = D^{\alpha}_{RL}(y(t),v)$ d'où le problème (2.1) devient, pour tout $t \in (0,T)$:

$$\left\{\begin{array}{rcll} D^{\alpha}_{RL}(y(t),v)_{L^2(\Omega)} + a(y(t),v) & = & (f(t),v)_{L^2(\Omega)} & \text{dans } \Omega, \quad \forall v \in H^1_0(\Omega), \\ y(t) & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ I^{1-\alpha}y(0) & = & y^0 & \text{dans } \Omega. \end{array}\right. \tag{2.7}$$

Maintenant que nous avons transformer notre problème, nous pouvons passer aux résultats d'existence et d'unicité de la solution à notre équation de diffusion fractionnaire.

2.1.2 Existence et unicité de la solution.

Considérons le problème suivant : Étant donné $0 < \alpha < 1, y^0 \in H^1_0(\Omega)$ et $f \in L^2(Q)$, trouver

$$y \in L^2((0,T), H^1_0(\Omega)), \tag{2.8a}$$

$$I^{1-\alpha}y \in \mathcal{C}([0,T]; H^1_0(\Omega)), \tag{2.8b}$$

telles que

$$\forall v \in H^1_0(\Omega), D^{\alpha}_{RL}(y(t),v)_{L^2(\Omega)} + a(y(t),v) = (f(t),v)_{L^2(\Omega)} \quad \forall t \in (0,T), \tag{2.9a}$$

$$I^{1-\alpha}y(0) = y^0 \text{ dans } \Omega \tag{2.9b}$$

Alors nous avons le résultat d'existence suivant :

Théorème 2.1. *Soit $1/2 < \alpha < 1$. Soit aussi $a(.,.)$ la forme bilinéaire définie par (2.3). Alors le problème (2.8)-(2.9) admet une solution faible unique $y \in L^2((0,T), H^1_0(\Omega))$ telle que $I^{1-\alpha}y \in \mathcal{C}([0,T]; H^1_0(\Omega))$ donnée par :*

$$y(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} \left\{ t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i t^{\alpha})y^0_i + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i(t-s)^{\alpha})f_i(s)ds \right\} w_i, \tag{2.10}$$

où λ_i est la valeur propre associée à l'opérateur $-\Delta$ correspondant au vecteur propre w_i, $y^0_i = (y^0, w_i)_{L^2(\Omega)}$ et $f_i(t) = (f(t), w_i)_{L^2(O)}$ sont respectivement la i-ème composante de y^0 et $f(t)$ dans la base orthonormale $\{w_i\}_{i=1}^{\infty}$ de $L^2(\Omega)$.
De plus, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|y\|_{L^2((0,T);H^1_0(\Omega))} \leq \Delta \left(\|y^0\|_{H^1_0(\Omega)} + \|f\|_{L^2(Q)} \right) \tag{2.11}$$

$$\|I^{1-\alpha}y\|_{\mathcal{C}([0,T];H^1_0(\Omega))} \leq \Pi \left(\|y^0\|_{H^1_0(\Omega)} + \|f\|_{L^2(Q)} \right), \tag{2.12}$$

avec

$$\Delta = \max\left(C\sqrt{\frac{2T^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}}, \frac{C}{\alpha}\sqrt{\frac{2T}{\lambda_1}}\right),$$

et

$$\Pi = \sup\left(C\sqrt{2}, C\sqrt{\frac{2T^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}}\right)$$

Démonstration. **Prouvons l'existence :** Pour prouver l'existence, nous supposons au préalable que la série définie dans (2.10) est convergente.

En remplaçant v par w_i dans (2.9a) et en utilisant le fait que

$$a(y(t), w_i) = \lambda_i (y(t), w_i)_{L^2(\Omega)} = \lambda_i y_i,$$

on en déduit d'après (2.9) que y_i est solution de l'équation différentielle ordinaire :

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{RL} y_i(t) + \lambda_i y_i(t) &= f_i(t), \quad t \in (0,T) \\ I^{1-\alpha} y_i(0) &= y_i^0 \end{cases} \tag{2.13}$$

Maintenant, utilisons la transformée de Laplace pour résoudre l'équation (2.13). D'après $(2.13)_1$, nous avons l'équation suivante

$$\hat{D}^{\alpha}_{RL} y_i(s) + \lambda_i \hat{y}_i(s) = \hat{f}_i(s) \tag{2.14}$$

où

$$\begin{aligned} \hat{D}^{\alpha}_{RL} y_i(s) &= \mathcal{L}(D^{\alpha}_{RL} y_i(t))(s) \\ \hat{y}_i(s) &= \mathcal{L}(y_i(t))(s) \\ \hat{f}_i(s) &= \mathcal{L}(f_i(t))(s) \end{aligned}$$

D'après (1.10), nous avons

$$\hat{D}^{\alpha}_{RL} y_i(s) = -I^{1-\alpha} y_i(0^+) + s^{\alpha}\hat{y}_i(s).$$

Ainsi, en combinant avec (2.14), on obtient

$$-y_i^0 + s^{\alpha}\hat{y}_i(s) + \lambda_i \hat{y}_i(s) = \hat{f}_i(s)$$

ce qui implique que

$$\hat{y}_i(s) = \frac{y_i^0}{s^{\alpha} + \lambda_i} + \frac{\hat{f}_i(s)}{s^{\alpha} + \lambda_i}$$

D'après le lemme 1.3, nous avons que

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^\alpha+\lambda_i};t\right) = t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i t^\alpha),$$

D'où

$$y_i(t) = t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i t^\alpha)y_i^0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i(t-s)^\alpha)f_i(s)ds.$$

Or nous avons $y(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} y_i(t)w_i$ d'où la solution (2.10).

Prouvons l'unicité : Pour démontrer ce résultat, nous procédons en trois étapes.
Étape 1 : Nous prouvons l'existence de la solution du problème approché de (2.8)-(2.9).
Soit V_m un sous-espace de $H_0^1(\Omega)$ généré par $w_1, w_2, \ldots, w_m$. Considérons le problème approché associé à $(2.8)-(2.9)$ suivant :
Trouver $y_m : t \in (0,T] \to y_m(t) \in V_m$ solution de

$$D_{RL}^\alpha (y_m(t), v)_{L^2(\Omega)} + a(y_m(t), v) = (f(t), v)_{L^2(\Omega)}, \forall v \in V_m, \tag{2.15}$$

$$I^{1-\alpha}y_m(0) = y_m^0 = \sum_{i=1}^m y_i^0 w_i \tag{2.16}$$

Comme $y_m(t) \in V_m$, on a

$$y_m(t) = \sum_{i=1}^m (y(t), w_i)_{L^2(\Omega)} w_i = \sum_{i=1}^m y_i(t)w_i.$$

On vérifie exactement comme dans la démonstration du théorème 2.1, que la fonction y_m est solution du problème $(2.15)-(2.16)$ et est donnée par,

$$y_m(t) = \sum_{i=1}^m \left\{ t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i t^\alpha)y_i^0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i(t-s)^\alpha)f_i(s)ds \right\} w_i. \tag{2.17}$$

Étape 2 : Nous montrons que les suites (y_m) et $(I^{1-\alpha}y_m)$ sont respectivement de Cauchy dans les espaces $L^2((0,T); H_0^1(\Omega))$ et $\mathcal{C}([0,T]; H_0^1(\Omega))$.
Soient m et p deux entiers tels que $p > m \geq 1$. On a alors

$$y_p(t) - y_m(t) = \sum_{i=m+1}^p y_i(t)w_i.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
a(y_p(t)-y_m(t),y_p(t)-y_m(t)) &= \sum_{i=m+1}^{p}\lambda_i[y_i(t)]^2\\
&\le 2\sum_{i=m+1}^{p}\lambda_i t^{2\alpha-2}E^2_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i t^\alpha)|y_i^0|^2\\
&+ 2\sum_{i=m+1}^{p}\lambda_i\left\{\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i(t-s)^\alpha)f_i(s)ds\right\}^2,
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\|y_p(t)-y_m(t)\|^2_{L^2((0,T);H_0^1(\Omega))} &= \int_0^T a(y_p(t)-y_m(t),y_p(t)-y_m(t))dt\\
&\le A_p+B_p,
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
A_p &= 2\sum_{i=m+1}^{p}\lambda_i|y_i^0|^2\int_0^T t^{2\alpha-2}E^2_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i t^\alpha)dt,\\
B_p &= 2\sum_{i=m+1}^{p}\int_0^T\lambda_i\left\{\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i(t-s)^\alpha)f_i(s)ds\right\}^2 dt.
\end{aligned}$$

Remarque 2.1. *Dans tout le reste de cette preuve, nous avons* $-\lambda_i t^\alpha < 0$ *d'où* $arg(-\lambda_i t^\alpha)=\pi$ *et ainsi nous pouvons utiliser le théorème 1.1.*

En utilisant le théorème 1.1 et le fait que $1/2<\alpha<1$, nous avons

$$\begin{aligned}
A_p &= 2\sum_{i=m+1}^{p}\lambda_i|y_i^0|^2\int_0^T t^{2\alpha-2}E^2_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i t^\alpha)dt\\
&\le 2C^2\sum_{i=m+1}^{p}\lambda_i|y_i^0|^2\int_0^T t^{2\alpha-2}dt\\
&= \frac{2C^2T^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}\sum_{i=m+1}^{p}\lambda_i|y_i^0|^2.
\end{aligned}$$

Remarque 2.2. *Pour que cette majoration est un sens nous avons dû rajouter la condition* $2\alpha-1>0$ *d'où la restriction* $1/2<\alpha$ *pour obtenir l'unicité.*

On a d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$B_p \le 2\sum_{i=m+1}^{p}\int_0^T\left\{\lambda_i\left(\int_0^t[(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i(t-s)^\alpha)]^2ds\right)\left(\int_0^t|f_i(s)|^2ds\right)\right\}dt. \tag{2.18}$$

Posons maintenant $z=t-s$ nous avons alors

$$\int_0^t [(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i(t-s)^\alpha)]^2 ds = \int_0^t [z^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i z^\alpha)]^2 dz.$$

Ainsi en utilisant (1.2), nous avons

$$\int_0^t [z^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i z^\alpha)]^2 dz = \int_0^t \left[-\frac{1}{\lambda_i}\frac{d}{dz}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i z^\alpha)\right]^2 dz,$$

de plus d'après (1.4), nous pouvons écrire que

$$\int_0^t \left[\frac{d}{dz}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i z^\alpha)\right]^2 dz = \int_0^t \left[\mathcal{E}^2_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda_i z^\alpha)\right]^2 dz.$$

D'où en utilisant (1.5), nous obtenons

$$\int_0^t \left[\mathcal{E}^2_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda_i z^\alpha)\right]^2 dz = \int_0^t \left[\frac{1}{\alpha}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i z^\alpha)\right]^2 dz = \frac{1}{\alpha^2}\int_0^t E^2_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i z^\alpha) dz.$$

Nous avons donc d'après (2.18),

$$\begin{aligned} B_p &\leq 2\sum_{i=m+1}^{p}\frac{\lambda_i}{\lambda_i^2\alpha^2}\int_0^T \left\{\left(\int_0^t E^2_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i z^\alpha)dz\right)\left(\int_0^t |f_i(s)|^2 ds\right)\right\} \\ &\leq \frac{2C^2T}{\lambda_1\alpha^2}\sum_{i=m+1}^{p}\left(\int_0^T |f_i(s)|^2 ds\right) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \|y_p(t)-y_m(t)\|^2_{L^2((0,T);H_0^1(\Omega))} &\leq \frac{2C^2T^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}\sum_{i=m+1}^{p}\lambda_i|y_i^0|^2 \\ &+ \frac{2C^2T}{\lambda_1\alpha^2}\sum_{i=m+1}^{p}\left(\int_0^T |f_i(s)|^2 ds\right) \end{aligned}$$

et on a

$$\begin{aligned} \|y_p(t)-y_m(t)\|_{L^2((0,T);H_0^1(\Omega))} &\leq C\sqrt{\frac{2T^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}}\left(\sum_{i=m+1}^{p}\lambda_i|y_i^0|^2\right)^{1/2} \\ &+ \frac{C}{\alpha}\sqrt{\frac{2T}{\lambda_1}}\left(\sum_{i=m+1}^{p}\int_0^T |f_i(s)|^2 dt\right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

D'autre part, nous avons

$$I^{1-\alpha}(y_p(t) - y_m(t)) = C_p(t) + Z_p(t),$$

avec

$$\begin{aligned}
C_p(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{i=m+1}^{p} \left\{ y_i^0 \int_0^t (t-s)^{-\alpha} s^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i s^\alpha) ds \right\} w_i \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{i=m+1}^{p} \left\{ y_i^0 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\lambda_i)^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} s^{\alpha k + \alpha - 1} ds \right\} w_i,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
Z_p(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{i=m+1}^{p} \left\{ \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \left[\int_0^s (s-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i (s-\tau)^\alpha) f_i(\tau) d\tau \right] ds \right\} w_i \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{i=m+1}^{p} \left\{ \int_0^t f_i(\tau) \left[\int_\tau^t (t-s)^{-\alpha} (s-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i (s-\tau)^\alpha) ds \right] d\tau \right\} w_i \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{i=m+1}^{p} \left\{ \int_0^t f_i(\tau) \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\lambda_i)^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} \int_\tau^t (t-s)^{-\alpha} (s-\tau)^{\alpha k + \alpha - 1} ds \right] d\tau \right\} w_i.
\end{aligned}$$

En utilisant la définition de la fonction Bêta et la Proposition 1.2, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\int_0^t (t-s)^{-\alpha} s^{\alpha k + \alpha - 1} ds &= \int_0^t t^{-\alpha} \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{-\alpha} \left(\frac{s}{t}\right)^{\alpha k + \alpha - 1} t^{\alpha k + \alpha - 1} ds \\
&= t^{\alpha k - 1} \int_0^t \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{-\alpha} \left(\frac{s}{t}\right)^{\alpha k + \alpha - 1} ds \\
&= t^{\alpha k - 1} \int_0^1 (1-u)^{-\alpha} u^{\alpha k + \alpha - 1} t du \\
&= t^{\alpha k} \int_0^1 (1-u)^{-\alpha} u^{\alpha k + \alpha - 1} du \\
&= t^{\alpha k} B(1-\alpha, \alpha k + \alpha) = t^{\alpha k} \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha k + \alpha)}{\Gamma(\alpha k + 1)}.
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
C_p(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{i=m+1}^{p} \left\{ y_i^0 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\lambda_i)^k}{\Gamma(\alpha k + \alpha)} t^{\alpha k} \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha k + \alpha)}{\Gamma(\alpha k + 1)} \right\} w_i \\
&= \sum_{i=m+1}^{p} \left\{ y_i^0 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\lambda_i)^k t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 1)} \right\} w_i = \sum_{i=m+1}^{p} \left\{ y_i^0 E_{\alpha,1}(-\lambda_i t^\alpha) \right\} w_i.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

D'autre part, nous avons

$$
\begin{aligned}
&\int_\tau^t (t-s)^{-\alpha}(s-\tau)^{\alpha k+\alpha-1} ds d\tau = \\
&\int_\tau^t [(t-s)-(s-\tau)]^{-\alpha}\left(\frac{s-\tau}{t-\tau}\right)^{\alpha k+\alpha-1}(t-\tau)^{\alpha k+\alpha-1} ds \\
&= \int_\tau^t (t-\tau)^{-\alpha}\left[1-\frac{s-\tau}{t-\tau}\right]^{-\alpha}\left(\frac{s-\tau}{t-\tau}\right)^{\alpha k+\alpha-1}(t-\tau)^{\alpha k+\alpha-1} ds \\
&= \int_\tau^t (t-\tau)^{\alpha k-1}\left[1-\frac{s-\tau}{t-\tau}\right]^{-\alpha}\left(\frac{s-\tau}{t-\tau}\right)^{\alpha k+\alpha-1} ds \\
&= (t-\tau)^{\alpha k-1}\int_0^1 (1-u)^{-\alpha}u^{\alpha k+\alpha-1}(t-\tau) du \\
&= (t-\tau)^{\alpha k} B(1-\alpha, \alpha k+\alpha) \\
&= (t-\tau)^{\alpha k}\frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha k+\alpha)}{\Gamma(\alpha k+1)}.
\end{aligned}
$$

Ce qui implique que

$$
\begin{aligned}
Z_p(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\sum_{i=m+1}^{p}\left\{\int_0^t f_i(\tau)\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-\lambda_i)^k}{\Gamma(\alpha k+\alpha)}(t-\tau)^{\alpha k}\frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha k+\alpha)}{\Gamma(\alpha k+1)} d\tau\right\} w_i \\
&= \sum_{i=m+1}^{p}\left\{\int_0^t f_i(\tau)E_{\alpha,1}(-\lambda_i(t-\tau)^\alpha) d\tau\right\} w_i.
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

En combinant (2.20) et (2.21), nous obtenons

$$
\begin{aligned}
I^{1-\alpha}(y_p(t)-y_m(t)) &= \sum_{i=m+1}^{p}\left\{y_i^0 E_{\alpha,1}(-\lambda_i t^\alpha)\right\} w_i \\
&+ \sum_{i=m+1}^{p}\left\{\int_0^t f_i(\tau)E_{\alpha,1}(-\lambda_i(t-\tau)^\alpha) d\tau\right\} w_i
\end{aligned}
$$

En utilisant le théorème 1.1, (2.4) et l'inégalité de Cauchy-Schwartz, nous pouvons écrire que

$$
\begin{aligned}
||I^{1-\alpha}(y_p(t)-y_m(t))||^2_{H^1_0(\Omega)} &= a(I^{1-\alpha}(y_p(t)-y_m(t)), I^{1-\alpha}(y_p(t)-y_m(t)) \\
&\leq 2\sum_{i=m+1}^{p}\lambda_i E^2_{\alpha,1}(-\lambda_i t^\alpha)|y_i^0|^2 \\
&+ 2\sum_{i=m+1}^{p}\lambda_i\left\{\int_0^t f_i(\tau)E_{\alpha,1}(-\lambda_i(t-\tau)^\alpha)d\tau\right\}^2 \\
&\leq 2C^2\sum_{i=m+1}^{p}\lambda_i|y_i^0|^2 \\
&+ 2C^2\sum_{i=m+1}^{p}\left(\int_0^t |f_i|^2(\tau)d\tau\right)\left(\int_0^t (t-\tau)^{-\alpha}d\tau\right) \\
&= 2C^2\sum_{i=m+1}^{p}\lambda_i|y_i^0|^2 + \frac{2C^2t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\sum_{i=m+1}^{p}\left(\int_0^t |f_i|^2(\tau)d\tau\right)
\end{aligned}
$$

Ainsi, nous avons

$$
\begin{aligned}
\sup_{t\in[0,T]}||I^{1-\alpha}(y_p(t)-y_m(t))||_{H^1_0(\Omega)} &\leq C\sqrt{2}\left(\sum_{i=m+1}^{p}\lambda_i|y_i^0|^2\right)^{1/2} \\
&+ C\sqrt{\frac{2T^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}}\left(\sum_{i=m+1}^{p}\int_0^T |f_i(\tau)|^2d\tau\right)^{1/2}.
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

Comme $y^0\in H^1_0(\Omega)$ et $f\in L^2(Q)$, nous avons

$$
\begin{aligned}
\lim_{m,p\to\infty}\left(\sum_{i=m+1}^{p}\int_0^T |f_i(s)|^2ds\right)^{1/2} &= 0, \\
\lim_{m,p\to\infty}\left(\sum_{i=m+1}^{p}\lambda_i|y_i^0|^2\right)^{1/2} &= 0,
\end{aligned}
$$

Donc d'après (2.19) et (2.22) , nous avons,

$$
\lim_{m,p\to\infty}\int_0^T \|y_p(t)-y_m(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)}dt = 0
$$

et

$$
\sup_{t\in[0,T]}\|I^{1-\alpha}(y_p(t)-y_m(t))\|_{H^1_0(\Omega)} = 0
$$

Ce qui implique que les suites (y_m) et $(I^{1-\alpha}y_m)$ sont de Cauchy, respectivement, dans $L^2((0,T);H^1_0(\Omega))$ et $\mathcal{C}([0,T];H^1_0(\Omega))$.

Donc
$$y_m \to y \qquad \text{dans } L^2((0,T);H_0^1(\Omega)), \tag{2.23}$$
et
$$I^{1-\alpha}y_m \to \xi \qquad \text{dans } \mathcal{C}([0,T];H_0^1(\Omega)),$$
La fonction y étant dans $L^2((0,T);H_0^1(\Omega))$ et l'opérateur $I^{1-\alpha}$ étant continu, nous avons $\xi = I^{1-\alpha}y$ et
$$I^{1-\alpha}y_m \to I^{1-\alpha}y \qquad \text{dans } \mathcal{C}([0,T];H_0^1(\Omega)). \tag{2.24}$$
Étape 3 : Nous prouvons que y est solution du problème $(2.8)-(2.9)$.

Soit $\mathbb{D}(0,T)$, l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ dans $(0,T)$ à support compact et soit $\varphi \in \mathbb{D}(0,T)$. Soit aussi $\mu \geq 1$ un entier. Alors d'après (2.15), nous avons pour tout $m \geq \mu$,
$$\begin{aligned}\int_0^T (f(t),v)_{L^2(\Omega)}\varphi(t)dt &= \int_0^T D_{RL}^\alpha (y_m(t),v)_{L^2(\Omega)}\varphi(t)dt\\ &+ \int_0^T a(y_m(t),v)\varphi(t)dt, \quad \forall v \in V_\mu,\end{aligned}$$
D'où en utilisant le corollaire 1.1, nous obtenons
$$\begin{aligned}\int_0^T (f(t),v)_{L^2(\Omega)}\varphi(t)dt &= -\int_0^T (y_m(t),v)_{L^2(\Omega)}\mathcal{D}_C^\alpha\varphi(t)dt\\ &+ \int_0^T a(y_m(t),v)\varphi(t)dt, \quad \forall v \in V_\mu,\end{aligned}$$
Ainsi, en passant à la limite et en utilisant (2.23), nous avons
$$\begin{aligned}\int_0^T (f(t),v)_{L^2(\Omega)}\varphi(t)dt &= -\int_0^T (y(t),v)_{L^2(\Omega)}\mathcal{D}_C^\alpha\varphi(t)dt\\ &+ \int_0^T a(y(t),v)\varphi(t)dt, \quad \forall v \in V_\mu,\end{aligned}$$
Comme $\cup_{\mu\geq 1}V_\mu$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$ car (w_i) est une base de $H_0^1(\Omega)$, on a donc la relation précédente pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$.
$$\begin{aligned}\int_0^T (f(t),v)_{L^2(\Omega)}\varphi(t)dt &= -\int_0^T (y(t),v)_{L^2(\Omega)}\mathcal{D}_C^\alpha\varphi(t)dt\\ &+ \int_0^T a(y(t),v)\varphi(t)dt, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),\end{aligned}$$
Et en utilisant de nouveau le corollaire 1.1, nous pouvons écrire que,
$$\begin{aligned}\int_0^T (f(t),v)_{L^2(\Omega)}\varphi(t)dt &= \int_0^T D_{RL}^\alpha (y(t),v)_{L^2(\Omega)}\varphi(t)dt\\ &+ \int_0^T a(y(t),v)\varphi(t)dt, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),\end{aligned}$$

Ce qui signifie que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$(f(t), v)_{L^2(\Omega)}\varphi(t) = D_{RL}^{\alpha}(y(t), v)_{L^2(\Omega)}\varphi(t) + a(y(t), v)\varphi(t), \quad \forall t \in (0, T).$$

D'après (2.24), on a

$$I^{1-\alpha}y_m(0) \to I^{1-\alpha}y(0) \quad \text{dans } H_0^1(\Omega)$$

Or

$$I^{1-\alpha}y_m(0) = \sum_{i=1}^{m} y_i^0 w_i \to \sum_{i=1}^{+\infty} y_i^0 w_i = y^0.$$

Donc

$$I^{1-\alpha}y(0) = y^0.$$

Prouvons (2.11) **et** (2.12) **:** Soit y solution du problème (2.8) – (2.9), alors y est donnée par

$$y(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} \left\{ t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i t^{\alpha})y_i^0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i(t-s)^{\alpha})f_i(s)ds \right\} w_i.$$

Alors en utilisant les calculs précédents, nous montrons que nous avons

$$\begin{aligned} \|y(t)\|^2_{L^2((0,T);H_0^1(\Omega))} &\leq \frac{2C^2T^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}\sum_{i=1}^{+\infty}\lambda_i|y_i^0|^2 \\ &+ \frac{2C^2T}{\alpha^2\lambda_1}\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\int_0^T |f_i(s)|^2dt\right), \end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned} \|y(t)\|_{L^2((0,T);H_0^1(\Omega))} &\leq C\sqrt{\frac{2T^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}}\left(\sum_{i=1}^{+\infty}\lambda_i|y_i^0|^2\right)^{1/2} \\ &+ \frac{C}{\alpha}\sqrt{\frac{2T}{\lambda_1}}\left(\sum_{i=1}^{+\infty}\int_0^T |f_i(s)|^2dt\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

D'où (2.11). Nous avons également,

$$\begin{aligned} ||I^{1-\alpha}y(t)||^2_{H_0^1(\Omega)} &= a(I^{1-\alpha}y(t), I^{1-\alpha}y(t)) \\ &\leq 2\sum_{i=1}^{+\infty}\lambda_i E^2_{\alpha,1}(-\lambda_i t^{\alpha})|y_i^0|^2 \\ &+ 2\sum_{i=m+1}^{p}\lambda_i\left\{\int_0^t f_i(\tau)E_{\alpha,1}(-\lambda_i(t-\tau)^{\alpha})d\tau\right\}^2 \\ &\leq 2C^2\sum_{i=1}^{+\infty}\lambda_i|y_i^0|^2 + \frac{2C^2t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\int_0^t |f_i|^2(\tau)d\tau\right). \end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons

$$\begin{array}{rcl} \sup\limits_{t\in[0,T]} ||I^{1-\alpha}y(t)||_{H_0^1(\Omega)} & \leq & C\sqrt{2}\left(\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\lambda_i|y_i^0|^2\right)^{1/2} \\ & + & C\sqrt{\dfrac{2T^{1-\alpha}}{(1-\alpha)}}\sum\limits_{i=1}^{+\infty}\left(\int_0^T|f_i(\tau)|^2d\tau\right)^{1/2}. \end{array}$$

D'où (2.12).

□

2.2 Étude d'une équation d'onde fractionnaire avec la dérivée de Riemann-Liouville.

2.2.1 Position du problème.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et Ω un sous-ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière $\partial\Omega$ de classe $\mathcal{C}^2$. Pour le temps $T > 0$, nous posons $Q = \Omega\times]0,T[$ et $\Sigma = \partial\Omega\times]0,T[$, et on considère l'équation d'onde fractionnaire :

$$\left\{\begin{array}{lcll} D_{RL}^\alpha y(x,t) - \Delta y(x,t) & = & f(x,t) & (x,t)\in Q, \\ y(\sigma,t) & = & 0 & (\sigma,t)\in\Sigma, \\ I^{2-\alpha}y(x,0^+) & = & y^0 & x\in\Omega, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}I^{2-\alpha}y(x,0^+) & = & y^1 & x\in\Omega, \end{array}\right. \tag{2.25}$$

où $1 < \alpha < 2, f \in L^2(Q), y^0 \in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega), y^1 \in L^2(\Omega)$. $I^{2-\alpha}y(x,0^+) = \lim\limits_{t\downarrow 0} I^{2-\alpha}y(x,t)$ et $\dfrac{\partial}{\partial t}I^{2-\alpha}y(x,0^+) = \lim\limits_{t\downarrow 0}\dfrac{\partial}{\partial t}I^{2-\alpha}y(x,t)$ où l'intégrale fractionnaire I^α d'ordre α et la dérivée fractionnaire D_{RL}^α d'ordre α sont pris au sens de Riemann-Liouville.

Pour résoudre ce problème, nous allons procéder de la même manière que pour la résolution de l'équation de diffusion fractionnaire dans la section précédente. En effet, nous utiliserons également la méthode spectrale et en procédant comme pour la transformation du problème (2.1), nous montrons que le problème (2.25) est équivalent au problème suivant, pour tout $t \in [0,T]$:

$$
\begin{cases}
D^{\alpha}_{RL}(y(t),v)_{L^2(\Omega)} + a(y(t),v) & = & (f(t),v)_{L^2(\Omega)} & \text{dans } \Omega, & \forall v \in H^1_0(\Omega), \\
y(t) & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega, & \\
I^{2-\alpha}y(0) & = & y^0 & \text{dans } \Omega, & \\
\dfrac{\partial}{\partial t}I^{2-\alpha}y(0) & = & y^1 & \text{dans } \Omega. &
\end{cases}
\tag{2.26}
$$

Ainsi, nous pouvons passer aux résultats d'existence et d'unicité qui suivent.

2.2.2 Existence et unicité de la solution.

Considérons le problème suivant : Étant donné $1 < \alpha < 2, y^0 \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega), y^1 \in L^2(\Omega)$ et $f \in L^2(Q)$, trouver

$$
y \in L^2((0,T), H^1_0(\Omega)), \tag{2.27a}
$$

$$
I^{2-\alpha}y \in \mathcal{C}([0,T]; H^1_0(\Omega)), \tag{2.27b}
$$

$$
\frac{\partial}{\partial t}(I^{2-\alpha}y) \in \mathcal{C}([0,T]; L^2(\Omega)) \tag{2.27c}
$$

telles que

$$
\forall v \in H^1_0(\Omega), D^{\alpha}_{RL}(y(t),v)_{L^2(\Omega)} + a(y(t),v) = (f(t),v)_{L^2(\Omega)} \quad \forall t \in (0,T), \tag{2.28a}
$$

$$
I^{2-\alpha}y(0) = y^0 \text{ dans } \Omega \text{ et } \frac{\partial}{\partial t}I^{2-\alpha}y(0) = y^1 \text{ dans } \Omega. \tag{2.28b}
$$

Nous avons le résultat suivant :

Théorème 2.2. *Soient $3/2 < \alpha < 2$ et le produit scalaire $a(.,.)$ défini par (2.3). Alors le problème (2.27) − (2.28) admet une solution faible unique $y \in L^2((0,T), H^1_0(\Omega))$ telle que $I^{2-\alpha}y \in \mathcal{C}([0,T]; H^1_0(\Omega))$, $\frac{d}{dt}I^{2-\alpha}y \in \mathcal{C}([0,T]; L^2(\Omega))$ donnée par :*

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \Big\{ t^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}(-\lambda_i t^{\alpha})y^0_i + t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i t^{\alpha})y^1_i \\
&+ \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i (t-s)^{\alpha})f_i(s)ds \Big\} w_i.
\end{aligned}
\tag{2.29}
$$

où $E_{\alpha,\alpha}$ est donnée par (1.1), λ_i est la valeur propre correspondant au vecteur propre w_i. $y^0_i = (y^0, w_i)_{L^2(\Omega)}$, $y^1_i = (y^1, w_i)_{L^2(\Omega)}$ et $f_i = (f, w_i)_{L^2(\Omega)}$ sont respectivement la i-ème composante de y^0, y^1 et f dans la base orthonormale $\{w_i\}_{i=1}^{\infty}$ de

$L^2(\Omega)$.
De plus, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|y\|_{L^2((0,T);H_0^1(\Omega))} \leq \Delta \left(\|y^0\|_{H_0^1(\Omega)} + \|y^1\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(Q)} \right) \tag{2.30}$$

$$\|I^{2-\alpha}y\|_{\mathcal{C}([0,T];H_0^1(\Omega))} \leq \Pi \left(\|y^0\|_{H_0^1(\Omega)} + \|y^1\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(Q)} \right), \tag{2.31}$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} I^{2-\alpha} y \right\|_{\mathcal{C}([0,T];L^2(\Omega))} \leq \Theta \left(\|y^0\|_{H^2(\Omega)} + \|y^1\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(Q)} \right), \tag{2.32}$$

avec

$$\Delta = \max \left(C\sqrt{\frac{2T^{2\alpha-3}}{(2\alpha-3)}}, C\sqrt{\frac{T^{\alpha-1}}{(\alpha-1)}}, C\sqrt{\frac{2T^{\alpha}}{\alpha(\alpha-1)}} \right),$$

$$\Pi = \sup \left(C\sqrt{2}, C\sqrt{2T^{2-\alpha}}, C\sqrt{\frac{2T^{3-\alpha}}{(3-\alpha)}} \right)$$

et

$$\Theta = \max \left(\sqrt{2}CT^{\alpha-1}, \sqrt{2}C \right)$$

Démonstration. **Prouvons l'existence :** Pour prouver l'existence, nous supposons au préalable que la série définie dans (2.29) est convergente.

Commençons par remplacer v par w_i dans (2.28*a*) et en utilisant le fait que $a(y_m(t), w_i) = \lambda_i (y_m(t), w_i)_{L^2(\Omega)} = \lambda_i y_i$, on déduit de (2.28*a*) et (2.28*b*) que $y_i = (y(t), w_i)_{L^2(\Omega)}$ est solution de l'équation fractionnaire :

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{RL} y_i(t) + \lambda_i y_i(t) & = & f_i(t), \forall t \in (0,T), \\ I^{2-\alpha} y_i(0) & = & y_i^0, \\ \dfrac{\partial}{\partial t} I^{2-\alpha} y_i(0) & = & y_i^1. \end{cases} \tag{2.33}$$

En utilisant la transformée de Laplace de l'équation (2.33), nous obtenons l'équation :

$$\hat{D}^{\alpha}_{RL} y_i(s) + \lambda_i \hat{y}_i(s) = \hat{f}_i(s) \tag{2.34}$$

où

$$\begin{array}{lcl} \hat{D}^{\alpha}_{RL} y_i(s) & = & \mathcal{L}(D^{\alpha}_{RL} y_i(t))(s) \\ \hat{y}_i(s) & = & \mathcal{L}(y_i(t))(s) \\ \hat{f}_i(s) & = & \mathcal{L}(f_i(t))(s) \end{array}$$

D'après (1.11), nous avons

$$\hat{D^{\alpha}_{RL}} y_i(s) = s^{\alpha}\hat{y}_i(s) - sy_i^0 - y_i^1.$$

D'où en combinant avec (2.34), nous avons

$$s^{\alpha}\hat{y}_i(s) - sy_i^0 - y_i^1 + \lambda_i\hat{y}_i(s) = \hat{f}_i(s),$$

Ainsi, nous pouvons écrire que

$$\hat{y}_i(s) = \frac{sy_i^0}{s^{\alpha}+\lambda_i} + \frac{y_i^1}{s^{\alpha}+\lambda_i} + \frac{\hat{f}_i(s)}{s^{\alpha}+\lambda_i},$$

soit,

$$y_i(t) = t^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}(-\lambda_i t^{\alpha})y_i^0 + t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i t^{\alpha})y_i^0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i(t-s)^{\alpha})f_i(s)ds.$$

Et comme $y(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} y_i(t)w_i$, nous obtenons (2.29).

Prouvons l'unicité : Pour cette démonstration, nous procédons en trois étapes.

Étape 1 : Nous prouvons l'existence de la solution du problème approché de (2.27) − (2.28).

Soit V_m un sous-espace de $H_0^1(\Omega)$ généré par $w_1, w_2, \ldots, w_m$. Considérons le problème approché associé à (2.27) − (2.28a) suivant : Trouver $y_m : t \in (0,T] \to y_m(t) \in V_m$ solution de

$$D^{\alpha}_{RL}(y_m(t), v)_{L^2(\Omega)} + a(y_m(t), v) = (f(t), v)_{L^2(\Omega)}, \forall v \in V_m, \tag{2.35}$$

$$I^{2-\alpha}y_m(0) = y_m^0 = \sum_{i=1}^{m} y_i^0 w_i, \quad \frac{\partial}{\partial t}I^{2-\alpha}y_m(0) = y_m^1 = \sum_{i=1}^{m} y_i^1 w_i. \tag{2.36}$$

Comme $y_m(t) \in V_m$, on a

$$y_m(t) = \sum_{i=1}^{m}(y(t), w_i)_{L^2(\Omega)}w_i = \sum_{i=1}^{m} y_i(t)w_i.$$

On vérifie exactement comme dans la démonstration du Théorème 2.2, que la fonction y_i est solution du problème (2.35) − (2.36) et est donnée par,

$$
\begin{aligned}
y_m(t) &= \sum_{i=1}^{m} \Big\{ t^{\alpha-2} E_{\alpha,\alpha-1}(-\lambda_i t^\alpha) y_i^0 + t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i t^\alpha) y_i^1 \\
&+ \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i (t-s)^\alpha) f_i(s) ds \Big\} w_i.
\end{aligned} \tag{2.37}
$$

Étape 2 : Nous montrons que les suites (y_m), $(I^{2-\alpha} y_m)$ et $\left(\frac{\partial}{\partial t}(I^{2-\alpha} y_m) \right)$ sont des suites de Cauchy respectivement dans $L^2((0,T); H_0^1(\Omega))$, $\mathcal{C}([0,T]; H_0^1(\Omega))$ et $\mathcal{C}([0,T]; L^2(\Omega))$.

Soient m et p deux entiers tels que $p > m \geq 1$. On a alors

$$
y_p(t) - y_m(t) = \sum_{i=m+1}^{p} y_i(t) w_i.
$$

Nous avons

$$
\begin{aligned}
a(y_p(t) - y_m(t), y_p(t) - y_m(t)) &= \sum_{i=m+1}^{p} \lambda_i [y_i(t)]^2 \\
&\leq 2 \sum_{i=m+1}^{p} \lambda_i t^{2\alpha-4} E^2_{\alpha,\alpha-1}(-\lambda_i t^\alpha) |y_i^0|^2 \\
&+ 2 \sum_{i=m+1}^{p} \lambda_i t^{2\alpha-2} E^2_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i t^\alpha) |y_i^1|^2 \\
&+ 2 \sum_{i=m+1}^{p} \lambda_i \left\{ \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i (t-s)^\alpha) f_i(s) ds \right\}^2.
\end{aligned}
$$

d'où

$$
\begin{aligned}
||y_p(t) - y_m(t)||^2_{L^2((0,T); H_0^1(\Omega))} &= \int_0^T a(y_p(t) - y_m(t), y_p(t) - y_m(t)) dt \\
&\leq A_p + B_p + C_p.
\end{aligned}
$$

avec

$$
A_p = 2 \sum_{i=m+1}^{p} \lambda_i |y_i^0|^2 \int_0^T t^{2\alpha-4} E^2_{\alpha,\alpha-1}(-\lambda_i t^\alpha) dt,
$$

$$
B_p = 2 \sum_{i=m+1}^{p} \lambda_i |y_i^1|^2 \int_0^T t^{2\alpha-2} E^2_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i t^\alpha) dt,
$$

$$
C_p = 2 \sum_{i=m+1}^{p} \int_0^T \lambda_i \left\{ \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i (t-s)^\alpha) f_i(s) ds \right\}^2 dt.
$$

Remarque 2.3. *Dans tout le reste de cette preuve, nous avons* $-\lambda_i t^\alpha < 0$ *d'où* $arg(-\lambda_i t^\alpha) = \pi$ *et ainsi nous pouvons utiliser le théorème 1.1.*

En utilisant le théorème 1.1 et le fait que $3/2 < \alpha < 2$, on obtient

$$\begin{aligned} A_p &= 2\sum_{i=m+1}^{p} \lambda_i |y_i^0|^2 \int_0^T t^{2\alpha-4} E^2_{\alpha,\alpha-1}(-\lambda_i t^\alpha)dt \\ &\leq 2C^2 \sum_{i=m+1}^{p} \lambda_i |y_i^0|^2 \int_0^T t^{2\alpha-4} dt \\ &= 2C^2 \frac{T^{2\alpha-3}}{2\alpha-3} \sum_{i=m+1}^{p} \lambda_i |y_i^0|^2. \end{aligned}$$

Remarque 2.4. *Tout comme dans la section précédente, nous avons dû rajouter la condition* $2\alpha - 3 > 0$ *pour que cette majoration est un sens d'où la restriction* $3/2 < \alpha < 2$ *pour obtenir l'unicité.*

On a également

$$\begin{aligned} B_p &= 2\sum_{i=m+1}^{p} \lambda_i |y_i^1|^2 \int_0^T t^{2\alpha-2} E^2_{\alpha,\alpha-1}(-\lambda_i t^\alpha)dt \\ &\leq 2C^2 \sum_{i=m+1}^{p} |y_i^1|^2 \int_0^T t^{\alpha-2} dt \\ &= 2C^2 \frac{T^{\alpha-1}}{\alpha-1} \sum_{i=m+1}^{p} |y_i^1|^2. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, nous obtenons

$$\begin{aligned} C_P &\leq 2\sum_{i=m+1}^{p} \lambda_i \int_0^T \left(\int_0^t |f_i(s)|^2 ds\right) \left(\int_0^t (t-s)^{2\alpha-2} E^2_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i (t-s)^\alpha) ds\right) dt \\ &\leq 2\sum_{i=m+1}^{p} \lambda_i \int_0^T \frac{C^2}{\lambda_i} \left(\int_0^t |f_i(s)|^2 ds\right) \left(\int_0^t (t-s)^{\alpha-2} ds\right) dt \\ &\leq 2\int_0^T \frac{C^2 t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)} dt \sum_{i=m+1}^{p} \left(\int_0^t |f_i(s)|^2 ds\right) \\ &\leq 2\frac{C^2 T^\alpha}{\alpha(\alpha-1)} \sum_{i=m+1}^{p} \left(\int_0^T |f_i(s)|^2 ds\right). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}||y_p(t)-y_m(t)||^2_{L^2((0,T);H^1_0(\Omega))} &\leq 2C^2\frac{T^{2\alpha-3}}{(2\alpha-3)}\sum_{i=m+1}^{p}\lambda_i|y_i^0|^2 \\ &+ 2C^2\frac{T^{\alpha-1}}{(\alpha-1)}\sum_{i=m+1}^{p}|y_i^1|^2 \\ &+ 2\frac{C^2T^\alpha}{\alpha(\alpha-1)}\sum_{i=m+1}^{p}\left(\int_0^T|f_i(t)|^2dt\right).\end{aligned} \tag{2.38}$$

D'autre part, nous avons

$I^{2-\alpha}(y_p(t)-y_m(t)) =$

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{i=m+1}^{p}\left\{y_i^0\int_0^t(t-s)^{1-\alpha}s^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}(-\lambda_i s^\alpha)ds\right\}w_i+$$
$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{i=m+1}^{p}\left\{y_i^1\int_0^t(t-s)^{1-\alpha}s^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i s^\alpha)ds\right\}w_i+$$
$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{i=m+1}^{p}\left\{\int_0^t(t-s)^{1-\alpha}\left[\int_0^s(s-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i(s-\tau)^\alpha)f_i(\tau)d\tau\right]ds\right\}w_i =$$
$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{i=m+1}^{p}\left\{y_i^0\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-\lambda_i)^k}{\Gamma(\alpha k+\alpha-1)}\int_0^t(t-s)^{1-\alpha}s^{\alpha k+\alpha-2}ds\right\}w_i+$$
$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{i=m+1}^{p}\left\{y_i^1\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-\lambda_i)^k}{\Gamma(\alpha k+\alpha)}\int_0^t(t-s)^{1-\alpha}s^{\alpha k+\alpha-1}ds\right\}w_i+$$
$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{i=m+1}^{p}\left\{\int_0^t f_i(\tau)\left[\int_\tau^t(t-s)^{1-\alpha}(s-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i(s-\tau)^\alpha)ds\right]d\tau\right\}w_i.$$

Or nous avons

$$\begin{aligned}\int_0^t(t-s)^{1-\alpha}s^{\alpha k+\alpha-2}ds &= \int_0^t t^{1-\alpha}\left(1-\frac{s}{t}\right)^{1-\alpha}\left(\frac{s}{t}\right)^{\alpha k+\alpha-2}t^{\alpha k+\alpha-2}ds \\ &= t^{\alpha k}\int_0^1(1-\tau)^{1-\alpha}\tau^{\alpha k+\alpha-2}d\tau \\ &= t^{\alpha k}B(2-\alpha,\alpha k+\alpha-1) \\ &= t^{\alpha k}\frac{\Gamma(2-\alpha)\Gamma(\alpha k+\alpha-1)}{\Gamma(\alpha k+1)}.\end{aligned}$$

Ainsi que

$$
\begin{aligned}
\int_0^t (t-s)^{1-\alpha} s^{\alpha k+\alpha-1} ds &= \int_0^t t^{1-\alpha}\left(1-\frac{s}{t}\right)^{1-\alpha}\left(\frac{s}{t}\right)^{\alpha k+\alpha-1} t^{\alpha k+\alpha-1} ds \\
&= t^{\alpha k+1}\int_0^1 (1-\tau)^{1-\alpha}\tau^{\alpha k+\alpha-1} d\tau \\
&= t^{\alpha k+1} B(2-\alpha, \alpha k+\alpha) \\
&= t^{\alpha k+1}\frac{\Gamma(2-\alpha)\Gamma(\alpha k+\alpha)}{\Gamma(\alpha k+2)}.
\end{aligned}
$$

Et comme

$$
\begin{aligned}
&\int_\tau^t (t-s)^{1-\alpha}(s-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i(s-\tau)^\alpha)ds = \\
&\int_\tau^t [(t-\tau)-(s-\tau)]^{1-\alpha}(s-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i(s-\tau)^\alpha)ds = \\
&\int_\tau^t (t-\tau)^{1-\alpha}\left(1-\frac{s-\tau}{t-\tau}\right)^{1-\alpha}\left[\frac{s-\tau}{t-\tau}\right]^{\alpha-1}(t-\tau)^{\alpha-1}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-\lambda_i)^k(s-\tau)^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+\alpha)}ds = \\
&\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-\lambda_i)^k}{\Gamma(\alpha k+\alpha)}\int_\tau^t (t-\tau)^{1-\alpha}\left(1-\frac{s-\tau}{t-\tau}\right)^{1-\alpha}\left[\frac{s-\tau}{t-\tau}\right]^{\alpha k+\alpha-1}(t-\tau)^{\alpha k+\alpha-1}ds = \\
&\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-\lambda_i)^k}{\Gamma(\alpha k+\alpha)}\int_\tau^t (t-\tau)^{\alpha k}\left(1-\frac{s-\tau}{t-\tau}\right)^{1-\alpha}\left[\frac{s-\tau}{t-\tau}\right]^{\alpha k+\alpha-1} ds = \\
&(t-\tau)\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-\lambda_i)^k(t-\tau)^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+\alpha)}\int_0^1 (1-u)^{1-\alpha}u^{\alpha k+\alpha-1}du = \\
&(t-\tau)\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-\lambda_i)^k(t-\tau)^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+\alpha)}B(2-\alpha,\alpha k+\alpha) = \\
&(t-\tau)\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-\lambda_i)^k(t-\tau)^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+\alpha)}\frac{\Gamma(2-\alpha)\Gamma(\alpha k+\alpha)}{\Gamma(\alpha k+2)} = (t-\tau)\Gamma(2-\alpha)E_{\alpha,2}(-\lambda_i(t-\tau)^\alpha).
\end{aligned}
$$

On déduit donc que

$$
\begin{aligned}
I^{2-\alpha}(y_p(t)-y_m(t)) &= \sum_{i=m+1}^{p} E_{\alpha,1}(-\lambda_i t^\alpha)y_i^0 w_i \\
&+ \sum_{i=m+1}^{p} tE_{\alpha,2}(-\lambda_i t^\alpha)y_i^1 w_i \\
&+ \sum_{i=m+1}^{p}\left\{\int_0^t f_i(\tau)(t-\tau)E_{\alpha,2}(-\lambda_i(t-\tau)^\alpha)d\tau\right\} w_i.
\end{aligned} \tag{2.39}
$$

En utilisant le théorème 1.1, (2.4) et l'inégalité de Cauchy-Schwartz, nous avons

$$
\begin{aligned}
||I^{2-\alpha}(y_p(t)-y_m(t))||^2_{H_0^1(\Omega)} &= a(I^{2-\alpha}(y_p(t)-y_m(t)), I^{2-\alpha}(y_p(t)-y_m(t)) \\
&\leq 2\sum_{i=m+1}^{p} \lambda_i E^2_{\alpha,1}(-\lambda_i t^\alpha)|y_i^0|^2 \\
&+ 2\sum_{i=m+1}^{p} \lambda_i t^2 E^2_{\alpha,2}(-\lambda_i t^\alpha)|y_i^1|^2 \\
&+ 2\sum_{i=m+1}^{p} \lambda_i \left\{\int_0^t f_i(\tau)(t-\tau)E_{\alpha,2}(-\lambda_i(t-\tau)^\alpha)d\tau\right\}^2 \\
&\leq 2C^2\sum_{i=m+1}^{p} \lambda_i|y_i^0|^2 \\
&+ 2C^2T^{2-\alpha}\sum_{i=m+1}^{p}|y_i^1|^2 \\
&+ 2\sum_{i=m+1}^{p}\lambda_i\left(\int_0^t|f_i(\tau)|^2d\tau\right)\left(\int_0^t(t-\tau)^2E^2_{\alpha,2}(-\lambda_i(t-\tau)^\alpha)d\tau\right).
\end{aligned}
$$

Donc d'après le théorème 1.1, on déduit que

$$
\begin{aligned}
||I^{2-\alpha}(y_p(t)-y_m(t))||^2_{H_0^1(\Omega)} &\leq 2C^2\sum_{i=m+1}^{p}\lambda_i|y_i^0|^2 \\
&+ 2C^2T^{2-\alpha}\sum_{i=m+1}^{p}|y_i^1|^2 \\
&+ 2C^2\sum_{i=m+1}^{p}\left(\int_0^t|f_i(\tau)|^2d\tau\right)\left(\int_0^t(t-\tau)^{2-\alpha}d\tau\right) \\
&\leq 2C^2\sum_{i=m+1}^{p}\lambda_i|y_i^0|^2 + 2C^2T^{2-\alpha}\sum_{i=m+1}^{p}|y_i^1|^2 \\
&+ \frac{2C^2T^{3-\alpha}}{3-\alpha}\sum_{i=m+1}^{p}\int_0^T|f_i(\tau)|^2d\tau.
\end{aligned}
$$

D'où

$$
\begin{aligned}
\sup_{t\in[0,T]}||I^{2-\alpha}(y_p(t)-y_m(t))||_{H_0^1(\Omega)} &\leq C\sqrt{2}\left(\sum_{i=m+1}^{p}\lambda_i|y_i^0|^2\right)^{1/2} \\
&+ C\sqrt{2T^{2-\alpha}}\left(\sum_{i=m+1}^{p}|y_i^1|^2\right)^{1/2} \\
&+ C\sqrt{\frac{2T^{3-\alpha}}{(3-\alpha)}}\left(\sum_{i=m+1}^{p}\int_0^T|f_i(\tau)|^2d\tau\right)^{1/2}.
\end{aligned}
\tag{2.40}
$$

D'après (2.39) et le lemme 1.1, nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} I^{2-\alpha}(y_p(t)-y_m(t)) &= \sum_{i=m+1}^{p} y_i^0 \frac{\partial}{\partial t}\{E_{\alpha,1}(-\lambda_i t^\alpha)\} w_i \\
&+ \sum_{i=m+1}^{p} y_i^1 \frac{\partial}{\partial t}\left\{t E_{\alpha,2}(-\lambda_i t^\alpha)\right\} w_i \\
&+ \sum_{i=m+1}^{p} \frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_0^t f_i(\tau)(t-\tau)E_{\alpha,2}(-\lambda_i(t-\tau)^\alpha)d\tau\right\} w_i \\
&= \sum_{i=m+1}^{p} y_i^0(-\lambda_i t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i t^\alpha))w_i + \sum_{i=m+1}^{p} y_i^1 E_{\alpha,1}(-\lambda_i t^\alpha)w_i \\
&+ \sum_{i=m+1}^{p} \int_0^t f_i(\tau)\frac{\partial}{\partial t}\{(t-\tau)E_{\alpha,2}(-\lambda_i(t-\tau)^\alpha)\}d\tau \\
&= \sum_{i=m+1}^{p} y_i^0(-\lambda_i t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i t^\alpha))w_i + \sum_{i=m+1}^{p} y_i^1 E_{\alpha,1}(-\lambda_i t^\alpha)w_i \\
&+ \sum_{i=m+1}^{p} \int_0^t f_i(s)E_{\alpha,1}(-\lambda_i(t-s)^\alpha)ds.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial}{\partial t} I^{2-\alpha}(y_p(t)-y_m(t))\right\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq 2\sum_{i=m+1}^{p} \lambda_i^2 |y_i^0|^2 [t^{2\alpha-2}E_{\alpha,\alpha}^2(-\lambda_i t^\alpha)] \\
&+ 2\sum_{i=m+1}^{p} |y_i^1|^2 E_{\alpha,1}^2(-\lambda_i t^\alpha) \\
&+ 2\sum_{i=m+1}^{p} \left|\int_0^t f_i(s)E_{\alpha,1}(-\lambda_i(t-s)^\alpha)ds\right|^2,
\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial}{\partial t} I^{2-\alpha}(y_p(t)-y_m(t))\right\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq 2C^2T^{2\alpha-2}\sum_{i=m+1}^{p} \lambda_i^2 |y_i^0|^2 \\
&+ 2C^2\sum_{i=m+1}^{p} |y_i^1|^2 \\
&+ 2C^2\sum_{i=m+1}^{p} \int_0^T |f_i(s)|^2 ds.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$
\begin{aligned}
\sup_{t\in[0,T]}\left\|\frac{\partial}{\partial t}I^{2-\alpha}(y_p(t)-y_m(t))\right\|_{L^2(\Omega)} &\leq \sqrt{2}CT^{\alpha-1}\left(\sum_{i=m+1}^{p}\lambda_i^2|y_i^0|^2\right)^{1/2} \\
&+ \sqrt{2}C\left(\sum_{i=m+1}^{p}|y_i^1|^2\right)^{1/2} \\
&+ \sqrt{2}C\left(\sum_{i=m+1}^{p}\int_0^T|f_i(s)|^2ds\right)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{2.41}
$$

Remarque 2.5. *Pour aboutir au résultat souhaité, nous avons dû prendre ici la condition $y^0 \in H^2(\Omega)$.*

Comme $y^0 \in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega), y^1 \in L^2(\Omega)$ et $f \in L^2(Q)$, nous avons

$$
\begin{aligned}
\lim_{m,p\to\infty}\left(\sum_{i=m+1}^{p}\int_0^T|f_i(s)|^2ds\right)^{1/2} &= 0, \\
\lim_{m,p\to\infty}\left(\sum_{i=m+1}^{p}\lambda_i|y_i^0|^2\right)^{1/2} &= 0, \\
\lim_{m,p\to\infty}\left(\sum_{i=m+1}^{p}\lambda_i^2|y_i^0|^2\right)^{1/2} &= 0, \\
\lim_{m,p\to\infty}\left(\sum_{i=m+1}^{p}|y_i^1|^2\right)^{1/2} &= 0.
\end{aligned}
$$

Donc d'après (2.38),(2.40) et (2.41), nous avons

$$
\lim_{m,p\to\infty}\int_0^T\|y_p(t)-y_m(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}dt = 0,
$$

$$
\sup_{t\in[0,T]}\|I^{2-\alpha}(y_p(t)-y_m(t))\|_{H_0^1(\Omega)} = 0,
$$

et

$$
\sup_{t\in[0,T]}\left\|\frac{\partial}{\partial t}I^{2-\alpha}(y_p(t)-y_m(t))\right\|_{L^2(\Omega)} = 0.
$$

Ce qui implique que les suites $(y_m), (I^{2-\alpha}y_m)$ et $\left(\frac{\partial}{\partial t}I^{2-\alpha}y_m\right)$ sont de Cauchy, respectivement, dans $L^2((0,T);H_0^1(\Omega)), \mathcal{C}([0,T];H_0^1(\Omega))$ et $\mathcal{C}([0,T];L^2(\Omega))$.

Donc

$$
y_m \to y \qquad \text{dans } L^2((0,T);H_0^1(\Omega)), \tag{2.42}
$$

$$I^{2-\alpha} y_m \to \xi \qquad \text{dans } \mathcal{C}([0,T]; H_0^1(\Omega)),$$

et

$$\frac{\partial}{\partial t} I^{2-\alpha} y_m \to \theta \qquad \text{dans } \mathcal{C}([0,T], L^2(\Omega)).$$

La fonction y étant dans $L^2((0,T); H_0^1(\Omega))$ et l'opérateur $I^{2-\alpha}$ étant continu, nous avons $\xi = I^{2-\alpha} y$ et

$$I^{2-\alpha} y_m \to I^{2-\alpha} y \qquad \text{dans } \mathcal{C}([0,T]; H_0^1(\Omega)). \tag{2.43}$$

De plus, nous avons $\theta = \dfrac{\partial}{\partial t} I^{2-\alpha} y$ et

$$\frac{\partial}{\partial t} I^{2-\alpha} y_m \to \frac{\partial}{\partial t} I^{2-\alpha} y \qquad \text{dans } \mathcal{C}([0,T], L^2(\Omega)). \tag{2.44}$$

Étape 3 : Nous prouvons que y est solution du problème $(2.27) - (2.28)$.

Soit $\mathbb{D}(0,T)$, l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ dans $(0,T)$ à support compact et soit $\varphi \in \mathbb{D}(0,T)$. Soit aussi $\mu \geq 1$ un entier. Alors d'après (2.35), nous avons pour tout $m \geq \mu$,

$$\begin{aligned} \int_0^T (f(t), v)_{L^2(\Omega)} \varphi(t) dt &= \int_0^T D_{RL}^\alpha (y_m(t), v)_{L^2(\Omega)} \varphi(t) dt \\ &+ \int_0^T a(y_m(t), v) \varphi(t) dt, \quad \forall v \in V_\mu, \end{aligned}$$

D'où en utilisant le corollaire 1.2, nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_0^T (f(t), v)_{L^2(\Omega)} \varphi(t) dt &= \int_0^T (y_m(t), v)_{L^2(\Omega)} \mathcal{D}_C^\alpha \varphi(t) dt \\ &+ \int_0^T a(y_m(t), v) \varphi(t) dt, \quad \forall v \in V_\mu, \end{aligned}$$

Ainsi, en passant à la limite et en utilisant (2.42), nous avons

$$\begin{aligned} \int_0^T (f(t), v)_{L^2(\Omega)} \varphi(t) dt &= \int_0^T (y(t), v)_{L^2(\Omega)} \mathcal{D}_C^\alpha \varphi(t) dt \\ &+ \int_0^T a(y(t), v) \varphi(t) dt, \quad \forall v \in V_\mu, \end{aligned}$$

Comme $\cup_{\mu \geq 1} V_\mu$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$ car (w_i) est une base de $H_0^1(\Omega)$, on a donc la relation précédente pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$.

$$\begin{aligned} \int_0^T (f(t), v)_{L^2(\Omega)} \varphi(t) dt &= \int_0^T (y(t), v)_{L^2(\Omega)} \mathcal{D}_C^\alpha \varphi(t) dt \\ &+ \int_0^T a(y(t), v) \varphi(t) dt, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{aligned}$$

Et en utilisant de nouveau le corollaire 1.2, nous pouvons écrire que,

$$\begin{aligned}\int_0^T (f(t),v)_{L^2(\Omega)}\varphi(t)dt &= \int_0^T D^{\alpha}_{RL}(y(t),v)_{L^2(\Omega)}\varphi(t)dt \\ &+ \int_0^T a(y(t),v)\varphi(t)dt, \quad \forall v\in H^1_0(\Omega),\end{aligned}$$

Ce qui signifie que pour tout $v\in H^1_0(\Omega)$,

$$(f(t),v)_{L^2(\Omega)}\varphi(t) = D^{\alpha}_{RL}(y(t),v)_{L^2(\Omega)}\varphi(t) + a(y(t),v)\varphi(t), \quad \forall t\in(0,T).$$

D'après (2.43), on a

$$I^{2-\alpha}y_m(0)\to I^{2-\alpha}y(0) \quad \text{dans } H^1_0(\Omega)$$

Or

$$I^{2-\alpha}y_m(0)=\sum_{i=1}^{m} y_i^0 w_i \to \sum_{i=1}^{+\infty} y_i^0 w_i = y^0.$$

Donc

$$I^{2-\alpha}y(0)=y^0.$$

D'autre part, d'après (2.44), on a

$$\frac{\partial}{\partial t}I^{2-\alpha}y_m(0)\to \frac{\partial}{\partial t}I^{2-\alpha}y(0) \quad \text{dans } L^2(\Omega)$$

Or

$$\frac{\partial}{\partial t}I^{2-\alpha}y_m(0)=\sum_{i=1}^{m} y_i^1 w_i \to \sum_{i=1}^{+\infty} y_i^1 w_i = y^1.$$

Donc

$$\frac{\partial}{\partial t}I^{2-\alpha}y(0)=y^1.$$

Ce qui termine cette démonstration.
Prouvons (2.30) (2.31) **et** (2.32) **:**
Soit y solution du problème $(2.27)-(2.28)$, alors y est donnée par :

$$\begin{aligned}y(t) &= \sum_{i=1}^{+\infty}\Big\{t^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}(-\lambda_i t^{\alpha})y_i^0 + t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i t^{\alpha})y_i^1 \\ &+ \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i(t-s)^{\alpha})f_i(s)ds\Big\}\, w_i.\end{aligned}$$

Nous avons, d'après (2.4)

$$
\begin{aligned}
\int_0^T ||y(t)||^2_{H^1_0(\Omega)}dt &= \int_0^T a(y(t),y(t))dt \\
&\leq 2C^2\frac{T^{2\alpha-3}}{(2\alpha-3)}\sum_{i=1}^{+\infty}\lambda_i|y_i^0|^2 \\
&+ 2C^2\frac{T^{\alpha-1}}{(\alpha-1)}\sum_{i=1}^{+\infty}|y_i^1|^2 \\
&+ 2\frac{C^2T^\alpha}{\alpha(\alpha-1)}\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\int_0^T |f_i(t)|^2dt\right).
\end{aligned}
$$

Ce qui implique que

$$
\begin{aligned}
||y||^2_{L^2((0,T);H^1_0(\Omega))} &\leq 2C^2\frac{T^{2\alpha-3}}{(2\alpha-3)}\|y^0\|^2_{H^1_0(\Omega)} \\
&+ 2C^2\frac{T^{\alpha-1}}{(\alpha-1)}\|y^1\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&+ 2\frac{C^2T^\alpha}{\alpha(\alpha-1)}\|f\|^2_{L^2(Q)}.
\end{aligned}
$$

D'où (2.30).
Montrons maintenant que nous avons la relation (2.31) :
D'après (2.4), nous pouvons écrire que

$$
\begin{aligned}
||I^{2-\alpha}y(t)||^2_{H^1_0(\Omega)} &= a(I^{2-\alpha}y(t),I^{2-\alpha}y(t)) \\
&\leq 2C^2\sum_{i=1}^{+\infty}\lambda_i|y_i^0|^2 + 2C^2T^{2-\alpha}\sum_{i=1}^{+\infty}|y_i^1|^2 \\
&+ 2C^2\frac{T^{3-\alpha}}{3-\alpha}\sum_{i=1}^{+\infty}\int_0^T |f_i(\tau)|^2d\tau.
\end{aligned}
$$

Soit,

$$
\begin{aligned}
\sup_{t\in[0,T]}\|I^{2-\alpha}y(y)\|_{H^1_0(\Omega)} &\leq C\sqrt{2}\|y^0\|_{H^1_0(\Omega)} \\
&+ C\sqrt{2T^{2-\alpha}}\|y^1\|_{L^2(\Omega)} \\
&+ C\sqrt{\frac{2T^{3-\alpha}}{(3-\alpha)}}\|f\|_{L^2(Q)}.
\end{aligned}
$$

D'où la relation (2.31).
Pour finir, nous avons

$$
\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial}{\partial t} I^{2-\alpha} y(t) \right\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq 2C^2 T^{2\alpha-2} \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i^2 |y_i^0|^2 \\
&+ 2C^2 \sum_{i=1}^{+\infty} |y_i^1|^2 \\
&+ 2C^2 \sum_{i=1}^{+\infty} \int_0^T |f_i(s)|^2 ds.
\end{aligned}
$$

d'où

$$
\begin{aligned}
\sup_{t\in[0,T]} \left\| \frac{\partial}{\partial t} I^{2-\alpha} (y(t)) \right\|_{L^2(\Omega)} &\leq \sqrt{2} C T^{\alpha-1} \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i^2 |y_i^0|^2 \right)^{1/2} \\
&+ \sqrt{2} C \left(\sum_{i=1}^{+\infty} |y_i^1|^2 \right)^{1/2} \\
&+ \sqrt{2} C \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \int_0^T |f_i(s)|^2 ds \right)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

On a donc notre relation (2.32). □

2.3 Étude d'équations de diffusion et onde fractionnaires avec la dérivée de Caputo.

Dans cette partie, nous étudions des équations de diffusion et onde fractionnaires où les dérivées sont prises au sens de Caputo. Dans les chapitres 3 et 5, nous verrons que les équations adjointes seront des équations rétrogrades fractionnaires où les dérivées sont les dérivées fractionnaires à droite de Caputo. C'est pour cette raison, que nous présentons ici les résultats suivants, qui s'appuient principalement sur les travaux menés par M. Yamamoto et al. dans [11].

2.3.1 Équation de diffusion fractionnaire avec la dérivée de Caputo.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et Ω un sous-ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière $\partial\Omega$ de classe $\mathcal{C}^2$. Pour le temps $T > 0$, nous posons $Q = \Omega\times]0,T[$ et $\Sigma = \partial\Omega\times]0,T[$, et on considère l'équation de diffusion fractionnaire suivante

$$
\left\{
\begin{array}{lcll}
D_C^\alpha y - \Delta y & = & f & \text{dans} \quad Q, \\
y & = & 0 & \text{sur} \quad \Sigma, \\
y(0) & = & 0 & \text{dans} \quad \Omega,
\end{array}
\right.
\tag{2.45}
$$

où D_C^α est la dérivée fractionnaire à gauche de Caputo d'ordre $0 < \alpha < 1$, alors nous avons le résultat suivant :

Théorème 2.3. *[11]*
Soit $f \in L^2(Q)$. *Alors le problème* (2.45) *admet une unique solution* $y \in L^2((0,T), H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$ *telle que* $\frac{\partial y}{\partial t} \in L^2(Q)$. *De plus, il existe un* $C > 0$ *telle que*

$$\|y\|_{L^2((0,T);H^2(\Omega))} + \left\|\frac{\partial y}{\partial t}\right\|_{L^2(Q)} \leq \|f\|_{L^2(Q)}. \tag{2.46}$$

Nous avons le corollaire qui suit

Corollaire 2.1. *Soient* $0 < \alpha < 1$ *et* $\phi \in L^2(Q)$. *Alors le problème*

$$\left\{\begin{array}{lcll} -\mathcal{D}_C^\alpha \psi - \Delta\psi & = & \phi & dans \quad Q, \\ \psi & = & 0 & sur \quad \Sigma, \\ \psi(T) & = & 0 & dans \quad \Omega, \end{array}\right. \tag{2.47}$$

admet une unique solution $\psi \in L^2((0,T), H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$ *telle que* $\frac{\partial}{\partial t}\psi \in L^2(Q)$. *De plus, il existe un* $C > 0$ *telle que. De plus, il existe un* $C > 0$ *telle que*

$$\|\psi\|_{L^2((0,T);H^2(\Omega))} + \left\|\frac{\partial \psi}{\partial t}\right\|_{L^2(Q)} \leq \|f\|_{L^2(Q)}. \tag{2.48}$$

Démonstration. Dans l'article [30], Dorville et al. ont prouvé qu'en faisant le changement de variable $t \to T - t$ dans (2.45) nous retrouvons l'équation (2.47). Ainsi d'après le théorème 2.3, nous obtenons ce corollaire.

□

2.3.2 Équation d'onde fractionnaire avec la dérivée de Caputo.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et Ω un sous-ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière $\partial\Omega$ de classe $\mathcal{C}^2$. Pour le temps $T > 0$, nous posons $Q = \Omega\times]0,T[$ et $\Sigma = \partial\Omega\times]0,T[$, et on considère l'équation d'onde fractionnaire suivante :

$$\left\{\begin{array}{lcll} D_C^\alpha p(x,t) - \Delta p(x,t) & = & 0 & (x,t) \in Q, \\ p(\sigma,t) & = & 0 & (x,t) \in \Sigma, \\ p(x,0) & = & 0 & x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial p}{\partial t}(x,0) & = & p^1 & x \in \Omega, \end{array}\right. \tag{2.49}$$

où $1 < \alpha < 2, p^1 \in L^2(\Omega)$ et D_c^α est la dérivée de Caputo à gauche d'ordre α. Alors, nous avons le résultat suivant :

Théorème 2.4. *[11] Soit $p^1 \in L^2(\Omega)$. Alors le problème* (2.49) *admet une unique solution $p \in \mathcal{C}([0,T];L^2(\Omega))$. De plus, $\dfrac{\partial p}{\partial t} \in \mathcal{C}([0,T];L^2(\Omega))$ et il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\|p\|_{\mathcal{C}([0,T];L^2(\Omega))} + \left\|\frac{\partial p}{\partial t}\right\|_{\mathcal{C}([0,T];L^2(\Omega))} \leq C\|p^1\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.50}$$

D'après le résultat précédent, nous obtenons le corollaire qui suit

Corollaire 2.2. *Soient $1 < \alpha < 2$ et $p^1 \in L^2(\Omega)$. Considérons l'équation d'onde fractionnaire :*

$$\begin{cases} \mathcal{D}_C^\alpha \psi - \Delta\psi &= 0 & \text{dans } Q, \\ \psi &= 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \psi(T) &= 0 & \text{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial t}(T) &= p^1 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{2.51}$$

où $\mathcal{D}_C^\alpha$ est la dérivée à droite de Caputo d'ordre α. Alors le problème (2.51) *admet une unique solution $\psi \in \mathcal{C}([0,T];L^2(\Omega))$. De plus, $\dfrac{\partial \psi}{\partial t} \in \mathcal{C}([0,T];L^2(\Omega))$ et il existe une constante $C > 0$ telle que ,*

$$\|\psi\|_{\mathcal{C}([0,T];L^2(\Omega))} + \left\|\frac{\partial \psi}{\partial t}\right\|_{\mathcal{C}([0,T];L^2(\Omega))} \leq C\|p^1\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.52}$$

Démonstration. Pour prouver ce résultat, nous devons démontrer qu'en faisant le changement de variable $t \to T - t$ pour $t \in [0,T]$, le problème (2.51) est équivalent au problème (2.49). Pour cela, nous posons

$$(\mathcal{T}_T\psi)(t) = \psi(T-t), \quad t \in (0,T). \tag{2.53}$$

Ainsi

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{T}_T\psi)(t) = -p'(T-t),$$

d'où

$$\frac{d^2}{dt^2}(\mathcal{T}_T\psi)(t) = \psi''(T-t) = (\mathcal{T}_T\psi)''(t). \tag{2.54}$$

D'après la définition 1.9, nous avons pour $1 < \alpha < 2$ la dérivée de Caputo à droite définie par :

$$\mathcal{D}_C^\alpha \psi(t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_t^T (s-t)^{1-\alpha}\psi''(s)ds.$$

En faisant le changement de variable $t \to T - t$ dans l'expression précédente, nous obtenons,

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_C^\alpha\psi(T-t) &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_{T-t}^{T}(s-(T-t))^{1-\alpha}\psi''(s)ds\\ &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_{T-t}^{T}(t-(T-s))^{1-\alpha}\psi''(s)ds.\end{aligned}$$

d'où en posant $u = T - s$, nous pouvons écrire que

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_C^\alpha\psi(T-t) &= -\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_{t}^{0}(t-u)^{1-\alpha}\psi''(T-u)du\\ &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_{0}^{t}(t-u)^{1-\alpha}\psi''(T-u)du.\end{aligned}$$

Et en combinant la dernière égalité avec (2.54) et en utilisant la notation (2.53), nous avons

$$\mathcal{D}_C^\alpha(\mathcal{T}_T\psi)(t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_{0}^{t}(t-u)^{1-\alpha}(\mathcal{T}_T\psi)''(u)du.$$

Ce qui implique que

$$\mathcal{D}_C^\alpha(\mathcal{T}_T\psi)(t) = D_C^\alpha(\mathcal{T}_T\psi)(t). \tag{2.55}$$

Maintenant en faisant le changement de variable $t \to T - t$, dans (2.51) et en utilisant (2.55), nous obtenons l'équation d'onde fractionnaire suivante :

$$\begin{cases} D_C^\alpha(\mathcal{T}_T\psi) - \Delta(\mathcal{T}_T\psi) &= 0 \quad \text{dans } Q,\\ \mathcal{T}_T\psi &= 0 \quad \text{sur } \Sigma,\\ (\mathcal{T}_T\psi)(0) &= 0 \quad \text{dans } \Omega,\\ \dfrac{\partial(\mathcal{T}_T\psi)}{\partial t}(0) &= p^1 \quad \text{dans } \Omega,\end{cases}$$

où D_C^α est la dérivée fractionnaire de Caputo à gauche.
Comme $\tau = T - t \in [0, T]$ car $t \in [0, T]$, en posant $\mathcal{T}_T\psi(t) = \psi(T-t) = \tilde{\psi}(\tau)$, l'équation d'onde précédente peut aussi s'écrire

$$\begin{cases} D_C^\alpha\tilde{\psi} - \Delta\tilde{\psi} &= 0 \quad \text{dans } Q,\\ \tilde{\psi} &= 0 \quad \text{sur } \Sigma,\\ \tilde{\psi}(0) &= 0 \quad \text{dans } \Omega,\\ \dfrac{\partial\tilde{\psi}}{\partial t}(0) &= p^1 \quad \text{dans } \Omega,\end{cases}$$

On a donc que $\tilde{\psi}$ est solution de (2.49). Ainsi, $\tilde{\psi}$ vérifie l'etimation (2.50). Par conséquent, ψ aussi. D'où (2.52).

□

Maintenant, considérons l'équation d'onde fractionnaire :

$$\begin{cases} D_C^\alpha y - \Delta y &= f \quad \text{dans } Q, \\ y &= 0 \quad \text{sur } \Sigma, \\ y(0) &= 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial y}{\partial t}(0) &= 0 \quad \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{2.56}$$

où $f \in L^2(Q)$, $3/2 < \alpha < 2$ et D_C^α est la dérivée à gauche de Caputo d'ordre α. Et nous donnons le résultat suivant,

Théorème 2.5. *Soit $f \in L^2(Q)$. Alors le problème* (2.56) *admet une unique solution faible $y \in \mathcal{C}([0,T]; H_0^1(\Omega))$ telle que $\frac{d}{dt}y \in \mathcal{C}([0,T]; L^2(\Omega))$ donnée par :*

$$y(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} \left\{ \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i (t-s)^\alpha) f_i(s) ds \right\} w_i.$$

De plus, il existe une constante $C > 0$ telle que,

$$\|y\|_{\mathcal{C}([0,T];H_0^1(\Omega))} \leq C \sqrt{\frac{T^{\alpha-1}}{\alpha-1}} \|f\|_{L^2(Q)} \tag{2.57}$$

et

$$\left\| \frac{\partial y}{\partial t} \right\|_{\mathcal{C}([0,T];L^2(\Omega))} \leq C \sqrt{\frac{T^{2\alpha-3}}{2\alpha-3}} \|f\|_{L^2(Q)}. \tag{2.58}$$

Démonstration. Soit y solution de (2.56). D'après le théorème 2.2 de [11], y s'écrit sous la forme

$$y(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} \left\{ \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i (t-s)^\alpha) f_i(s) ds \right\} w_i \tag{2.59}$$

où λ_i est la valeur propre associée à l'opérateur $-\Delta$ correspondant au vecteur propre w_i, et $f_i(t) = (f(t), w_i)_{L^2(O)}$ est la i-ème composante de $f(t)$ dans la base orthonormale $\{w_i\}_{i=1}^\infty$ de $L^2(\Omega)$.

Pour terminer la preuve du théorème nous procèdons en deux étapes.

Étape 1 : Nous montrons que les suites (y_m) et $(\dfrac{\partial y_m}{\partial t})$ sont respectivement de Cauchy dans les espaces $\mathcal{C}([0,T]; H_0^1(\Omega))$ et $\mathcal{C}([0,T]; L^2(\Omega))$.

Soient m et p deux entiers tels que $p > m \geq 1$. On a alors

$$y_p(t) - y_m(t) = \sum_{i=m+1}^{p} y_i(t) w_i.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\|y_p(t)-y_m(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)} &= a(y_p(t)-y_m(t),y_p(t)-y_m(t))\\ &= \sum_{i=m+1}^{p}\lambda_i[y_i(t)]^2\\ &= \sum_{i=m+1}^{p}\lambda_i\left\{\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i(t-s)^\alpha)f_i(s)ds\right\}^2,\end{aligned}$$

En observant d'une part que

$$\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i(t-s)^\alpha)f_i(s)ds \leq \\ \left(\int_0^t (t-s)^{2\alpha-2}E^2_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i(t-s)^\alpha)ds\right)^{1/2}\left(\int_0^t |f_i(s)|^2ds\right)^{1/2},$$

et d'autre part que en utilisant le théorème 1.1,

$$\int_0^t (t-s)^{2\alpha-2}E^2_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i(t-s)^\alpha)ds \leq \frac{C^2}{\lambda_i}\int_0^t (t-s)^{\alpha-2}ds \leq \frac{C^2T^{\alpha-1}}{\lambda_i(\alpha-1)},$$

on a que

$$\|y_p(t)-y_m(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leq \frac{C^2T^{\alpha-1}}{(\alpha-1)}\sum_{i=m+1}^{p}\left(\int_0^T |f_i(s)|^2ds\right),$$

d'où

$$\sup_{t\in[0,T]}\|y_p(t)-y_m(t)\|_{H^1_0(\Omega)} \leq \sqrt{\frac{T^{\alpha-1}}{(\alpha-1)}}\sum_{i=m+1}^{p}\left(\int_0^T |f_i(s)|^2ds\right)^{1/2}.$$

De même en utilisant d'une part le fait que

$$\frac{d}{dt}\left[(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i(t-s)^\alpha)\right] = (t-s)^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}(-\lambda_i(t-s)^\alpha)$$

et d'autre part le fait que

$$\frac{\partial y}{\partial t}(t) = \sum_{i=1}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_0^t (t-s)^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}(-\lambda_i(t-s)^\alpha)f_i(s)ds\right\}w_i$$

on obtient en utilisant le théorème 1.1 et en prenant $\alpha > 3/2$,

$$
\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial(y_p(t)-y_m(t))}{\partial t}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq \sum_{i=m+1}^{p}\left|\int_0^t (t-s)^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}(-\lambda_i(t-s)^\alpha)f_i(s)ds\right|^2\\
&\leq \sum_{i=m+1}^{p}\left\{\left(\int_0^t |f_i(s)|^2 ds\right)\left(\int_0^t (t-s)^{2\alpha-4}E^2_{\alpha,\alpha-1}(-\lambda_i(t-s)^\alpha)ds\right)\right\}\\
&\leq C^2\sum_{i=m+1}^{p}\left\{\left(\int_0^t |f_i(s)|^2 ds\right)\left[-\frac{(t-s)^{2\alpha-3}}{2\alpha-3}\right]_0^t\right\}\\
&\leq \frac{C^2T^{2\alpha-3}}{2\alpha-3}\sum_{i=m+1}^{p}\left(\int_0^T |f_i(s)|^2 ds\right).
\end{aligned}
$$

Ainsi

$$
\sup_{t\in[0,T]}\left\|\frac{\partial(y_p(t)-y_m(t))}{\partial t}(t)\right\|_{L^2(\Omega)} \leq C\sqrt{\frac{T^{2\alpha-3}}{2\alpha-3}}\sum_{i=m+1}^{p}\left(\int_0^T |f_i(s)|^2 ds\right)^{1/2}
$$

Par conséquent Comme $f\in L^2(Q)$, on a

$$
\begin{aligned}
\lim_{m,p\to+\infty}\sup_{t\in[0,T]}\|y_p(t)-y_m(t)\|_{H^1_0(\Omega)} &= 0,\\
\lim_{m,p\to+\infty}\sup_{t\in[0,T]}\left\|\frac{\partial(y_p(t)-y_m(t))}{\partial t}(t)\right\|_{L^2(\Omega)} &= 0.
\end{aligned}
$$

Ce qui montre que les suite (y_m) et $(\dfrac{\partial y_m}{\partial t})$ sont respectivement de Cauchy dans les espaces $\mathcal{C}([0,T];H^1_0(\Omega))$ et $\mathcal{C}([0,T];L^2(\Omega))$. On a donc

$$
\begin{aligned}
y_m &\to y \quad \text{dans} \quad \mathcal{C}([0,T];H^1_0(\Omega)),\\
\frac{\partial y_m(t)}{\partial t} &\to \frac{\partial y(t)}{\partial t} \quad \text{dans} \quad \mathcal{C}([0,T];L^2(\Omega)).
\end{aligned}
$$

Étape 2 : On établit les estimations (2.57) et (2.58)
Nous avons

$$
\begin{aligned}
\|y\|^2_{H^1_0(\Omega)} &= \lim_{M\to+\infty}\sum_{i=1}^{M}\lambda_i\left(\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i(t-s)^\alpha)f_i(s)ds\right)^2\\
&\leq \lim_{M\to+\infty}\sum_{i=1}^{M}\lambda_i\left(\int_0^t (t-s)^{2\alpha-2}E^2_{\alpha,\alpha}(-\lambda_i(t-s)^\alpha)ds\right)\left(\int_0^t |f_i(s)|^2ds\right)\\
&\leq C^2\lim_{M\to+\infty}\sum_{i=1}^{M}\left(\int_0^t (t-s)^{\alpha-2}ds\right)\left(\int_0^t |f_i(s)|^2ds\right)\\
&= C^2\lim_{M\to+\infty}\sum_{i=1}^{M}\left(\left[-\frac{1}{\alpha-1}(t-s)^{\alpha-1}\right]_0^t\right)\left(\int_0^t |f_i(s)|^2ds\right)\\
&= \frac{C^2t^{\alpha-1}}{\alpha-1}\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\int_0^T |f_i(s)|^2ds\right).
\end{aligned}
$$

Ce qui implique que

$$
\sup_{t\in[0,T]}\|y\|_{H^1_0(\Omega)} \leq C\sqrt{\frac{2T^{\alpha-1}}{\alpha-1}}\|f\|_{L^2(Q)}.
$$

Ainsi nous obtenons (2.57).
De même, en utilisant l'inégalité de Cauchy Schwartz et le théorème 1.1,

$$
\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial y}{\partial t}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq \lim_{M\to+\infty}\sum_{i=1}^{M}\left|\int_0^t (t-s)^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}(-\lambda_i(t-s)^\alpha)f_i(s)ds\right|^2\\
&\leq \lim_{M\to+\infty}\sum_{i=1}^{M}\left\{\left(\int_0^t |f_i(s)|^2ds\right)\left(\int_0^t (t-s)^{2\alpha-4}E^2_{\alpha,\alpha-1}(-\lambda_i(t-s)^\alpha)ds\right)\right\}\\
&\leq C^2\lim_{M\to+\infty}\sum_{i=1}^{M}\left\{\left(\int_0^t |f_i(s)|^2ds\right)\left[-\frac{(t-s)^{2\alpha-3}}{2\alpha-3}\right]_0^t\right\}\\
&= \frac{C^2t^{2\alpha-3}}{2\alpha-3}\sum_{i=1}^{+\infty}\left(\int_0^T |f_i(s)|^2ds\right)
\end{aligned}
$$

Par conséquent, nous avons

$$
\sup_{t\in[0,T]}\left\|\frac{\partial y}{\partial t}\right\|_{L^2(\Omega)} \leq C\sqrt{\frac{T^{2\alpha-3}}{2\alpha-3}}\|f\|_{L^2(Q)},
$$

ainsi nous obtenons (2.58).

$\square$

En faisant le changement de variable $t \to T-t$, nous montrons comme pour le corollaire 2.2 que nous avons le résultat suivant :

Corollaire 2.3. *Soit* $3/2 < \alpha < 2$ *et* $\phi \in L^2(Q)$. *Considérons l'équation d'onde fractionnaire :*

$$\begin{cases} \mathcal{D}_C^\alpha \psi - \Delta\psi & = & \phi & \textit{dans } Q, \\ \psi & = & 0 & \textit{sur } \Sigma, \\ \psi(T) & = & 0 & \textit{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial t}(T) & = & 0 & \textit{dans } \Omega, \end{cases} \tag{2.60}$$

où $\mathcal{D}_C^\alpha$ *est la dérivée fractionnaire à droite de Caputo d'ordre* α. *Alors le problème* (2.60) *admet une unique solution* $\psi \in \mathcal{C}([0,T]; H_0^1(\Omega))$. *De plus,* $\dfrac{\partial \psi}{\partial t} \in \mathcal{C}([0,T]; L^2(\Omega))$ *et il existe une constante* $C > 0$ *telle que,*

$$\|\psi\|_{\mathcal{C}([0,T];H_0^1(\Omega))} \leq C\sqrt{\frac{T^{\alpha-1}}{\alpha-1}}\|\phi\|_{L^2(Q)}, \tag{2.61}$$

et

$$\left\|\frac{\partial \psi}{\partial t}\right\|_{\mathcal{C}([0,T];L^2(\Omega))} \leq C\sqrt{\frac{T^{2\alpha-3}}{2\alpha-3}}\|\phi\|_{L^2(Q)}. \tag{2.62}$$

Maintenant que nous avons donné nos résultats d'existence et d'unicité, nous pouvons passer à la résolution d'un problème de contrôle optimal associé à une équation d'onde fractionnaire.

CHAPITRE 3

PROBLÈME DE CONTRÔLE OPTIMAL ASSOCIÉ À UNE ÉQUATION D'ONDE FRACTIONNAIRE PRISE AU SENS DE RIEMANN-LIOUVILLE.

3.1 Position du problème.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et Ω un sous-ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière $\partial\Omega$ de classe $\mathcal{C}^2$. Pour le temps $T > 0$, nous posons $Q = \Omega\times]0,T[$ et $\Sigma = \partial\Omega\times]0,T[$, et on considère l'équation d'onde fractionnaire :

$$\begin{cases} D^\alpha_{RL} y(x,t) - \Delta y(x,t) & = & v(x,t) & \text{dans } Q, \\ y(\sigma,t) & = & 0 & \text{sur } \Sigma, \\ I^{2-\alpha} y(x,0^+) & = & y^0 & \text{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial}{\partial t} I^{2-\alpha} y(x,0^+) & = & y^1 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

où $3/2 < \alpha < 2, v \in L^2(Q), y^0 \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$, et $y^1 \in L^2(\Omega)$. $I^{2-\alpha}y(x,0^+) = \lim\limits_{t\downarrow 0} I^{2-\alpha}y(x,t)$ et $\dfrac{\partial}{\partial t} I^{2-\alpha} y(x,0^+) = \lim\limits_{t\downarrow 0} \dfrac{\partial}{\partial t} I^{2-\alpha}y(x,t)$ où l'intégrale fractionnaire I^α d'ordre α et la dérivée fractionnaire D^α_{RL} d'ordre α sont pris au sens de Riemann-Liouville.

Dans ce chapitre, nous cherchons à contrôler le système (3.1), plus précisément, nous voulons approcher l'état $I^{2-\alpha}y(v,T)$ par un état désiré z_d en contrôlant v, où $y = y(v)$ est solution de l'équation d'état (3.1).

D'après le théorème 2.2, l'équation (3.1) admet une unique solution dans $L^2((0,T); H^1_0(\Omega))$, de plus $I^{2-\alpha}y \in \mathcal{C}([0,T]; H^1_0(\Omega))$ ce qui implique que $I^{2-\alpha}y(v,T) \in H^1_0(\Omega) \subset$

$L^2(\Omega)$. Ainsi nous pouvons considérer la fonctionnelle coût, notée J définie par :

$$J(v) = \frac{1}{2}\|I^{2-\alpha}y(v,T) - z_d\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{N}{2}\|v\|^2_{L^2(Q)}, \tag{3.2}$$

où $z_d \in L^2(\Omega)$ et $N > 0$. Dans cette partie, le problème de contrôle optimal consiste à trouver $u \in \mathcal{U}_{ad}$ telle que

$$J(u) = \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v), \tag{3.3}$$

où $\mathcal{U}_{ad}$ est un convexe fermé non vide de $L^2(Q)$. $\mathcal{U}_{ad}$ est l'ensemble des contrôles admissibles.
Pour la suite, nous aurons besoin du résultat suivant

Lemme 3.1. *[10] Soit X et Y deux espaces de Hilbert. Notons*

$$W(0,T) = \left\{\rho| \quad \rho \in L^2((0,T);X),\ \frac{\partial^m \rho}{\partial t^m} \in L^2((0,T);Y)\right\}.$$

Alors pour tout $\rho \in W(0,T)$, on a

$$\frac{\partial^j \rho}{\partial t^j} \in C\left([0,T];[X,Y]_{(j+1/2)/m}\right), \quad 0 \leq j \leq m-1, \tag{3.4}$$

l'application $u \mapsto \frac{\partial^j \rho}{\partial t^j}$ étant linéaire continue de $W(O,T) \to C\left([0,T];[X,Y]_{(j+1/2)/m}\right)$.

Dans la suite du travail, nous allons prouver que le problème de contrôle optimal (3.3) admet une unique solution puis nous allons caractériser cette solution par un système d'optimalité.

3.2 Résolution du problème de contrôle optimal.

Maintenant que nous avons tous les outils nécessaires, nous pouvons passer à la résolution du problème (3.3). Ainsi nous avons le résultat suivant :

Théorème 3.1. *Supposons que l'état $y = y(x,t;v)$ est solution de l'équation (3.1). Alors il existe un unique contrôle optimal u dans $\mathcal{U}_{ad}$ telle que (3.3) soit vérifié.*

Démonstration. Dans toute la démonstration, la constante C est une constante générique, strictement positive et indépendante de n.

On considère une suite minimisante $(v_n) \in \mathcal{U}_{ad}$ telle que,

$$\lim_{n \to +\infty} J(v_n) = \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v). \tag{3.5}$$

Alors d'après (3.5), on sait qu'il existe $C > 0$ telle que

$$J(v_n) \leq C.$$

D'où d'après (3.2), on obtient,

$$\|v_n\|_{L^2(Q)} \leq C, \tag{3.6a}$$

$$\|I^{2-\alpha} y(v_n, T)\|_{L^2(\Omega)} \leq C. \tag{3.6b}$$

Alors $y_n = y(v_n)$ est solution de (3.1), soit y_n satisfait :

$$D^{\alpha}_{RL} y_n(x,t) - \Delta y_n(x,t) = v_n(x,t) \quad \text{dans } Q, \tag{3.7a}$$

$$y_n(\sigma, t) = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \tag{3.7b}$$

$$I^{2-\alpha} y_n(x, 0) = y^0 \quad \text{dans } \Omega, \tag{3.7c}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} I^{2-\alpha} y_n(x, 0) = y^1 \quad \text{dans } \Omega \tag{3.7d}$$

et d'après le théorème 2.2, nous avons

$$\|y_n\|_{L^2((0,T);H^1_0(\Omega))} < C, \tag{3.8}$$

$$\|I^{2-\alpha} y_n\|_{\mathcal{C}([0,T];H^1_0(\Omega))} < C,$$

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t} I^{2-\alpha} y_n\right\|_{\mathcal{C}([0,T];L^2(\Omega))} < C.$$

L'injection de $C([0,T]; H^1_0(\Omega))$ dans $L^2((0,T); H^1_0(\Omega))$ et l'injection de $C([0,T]; L^2(\Omega))$ dans $L^2(Q)$ étant continues nous pouvons écrire que :

$$\|I^{2-\alpha} y_n\|_{L^2((0,T);H^1_0(\Omega))} < C, \tag{3.9a}$$

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t} I^{2-\alpha} y_n\right\|_{L^2((0,T);L^2(\Omega))} < C. \tag{3.9b}$$

En utilisant $(3.6a)$ et $(3.7a)$, on en déduit que

$$\|D^{\alpha}_{RL} y_n - \Delta y_n\|_{L^2(Q)} \leq C. \tag{3.10}$$

Alors d'après $(3.6a)$,(3.8), et (3.10), on sait qu'il existe $u, \delta, \eta \in L^2(Q)$ et $y, \gamma \in L^2((0,T); H^1_0(\Omega))$ et on peut extraire des sous-suites (appellées encore (v_n) et (y_n)) respectivement de (v_n) et (y_n) telles que

$$v_n \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } L^2(Q), \tag{3.11a}$$
$$D^\alpha_{RL} y_n - \Delta y_n \rightharpoonup \delta \text{ faiblement dans } L^2(Q), \tag{3.11b}$$
$$y_n \rightharpoonup y \text{ faiblement dans } L^2((0,T); H^1_0(\Omega)), \tag{3.11c}$$
$$I^{2-\alpha} y_n \rightharpoonup \gamma \text{ faiblement dans } L^2((0,T), H^1_0(\Omega)), \tag{3.11d}$$
$$\frac{\partial}{\partial t} I^{2-\alpha} y_n \rightharpoonup \eta \text{ faiblement dans } L^2(Q). \tag{3.11e}$$

Or $\mathcal{U}_{ad}$ est un convexe fermé de $L^2(Q)$, donc il est faiblement fermé et on a,

$$u \in \mathcal{U}_{ad}.$$

Montrons que (u, y) vérifie (3.1).
Soit $\mathbb{D}(Q)$, l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ dans Q à support compact et nous notons $\mathbb{D}'(Q)$ son dual. En multipliant (3.7a) par $\varphi \in \mathbb{D}(Q)$ et en intégrant par parties sur Q, nous obtenons, en utilisant le lemme 1.7 que

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_\Omega (D^\alpha_{RL} y_n(x,t) - \Delta y_n(x,t))\varphi(x,t)dxdt = \\
&\int_\Omega \varphi(x,T)\frac{\partial}{\partial t}(I^{2-\alpha} y_n(x,T))dx - \int_\Omega \varphi(x,0)\frac{\partial}{\partial t}(I^{2-\alpha} y_n(x,0^+))dx \\
&- \int_\Omega I^{2-\alpha} y_n(x,T)\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,T)dx + \int_\Omega I^{2-\alpha} y_n(x,0)\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,0)dx \\
&+ \int_\Omega \int_0^T y_n(x,t)(\mathcal{D}^\alpha_C \varphi(x,t) - \Delta\varphi(x,t))dxdt = \\
&\int_\Omega \int_0^T y_n(x,t)(\mathcal{D}^\alpha_C \varphi(x,t) - \Delta\varphi(x,t))dxdt,
\end{aligned}$$

car y_n vérifie (3.8).
D'où en passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans la dernière égalité, on a

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} \int_0^T \int_\Omega (D^\alpha_{RL} y_n(x,t) - \Delta y_n(x,t))\varphi(x,t)dxdt = \\
&\int_0^T \int_\Omega y(x,t)(\mathcal{D}^\alpha_C \varphi(x,t) - \Delta\varphi(x,t))dxdt = \\
&\int_0^T \int_\Omega (D^\alpha_{RL} y(x,t) - \Delta y(x,t))\varphi(x,t)dxdt.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$D^\alpha_{RL} y_n - \Delta y_n \rightharpoonup D^\alpha_{RL} y - \Delta y \quad \text{faiblement dans} \quad \mathbb{D}'(Q),$$

donc d'après (3.11b), nous avons

$$D^{\alpha}_{RL}y - \Delta y = \delta \quad \text{dans} \quad Q. \tag{3.12}$$

Ainsi,

$$D^{\alpha}_{RL}y_n - \Delta y_n \rightharpoonup D^{\alpha}_{RL}y - \Delta y \quad \text{faiblement dans} \quad L^2(Q). \tag{3.13}$$

D'où en passant à la limite dans (3.7a) et en utilisant (3.13), nous obtenons,

$$D^{\alpha}_{RL}y - \Delta y = u \quad \text{dans} \quad Q. \tag{3.14}$$

Nous avons premièrement,

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \int_0^T I^{2-\alpha} y_n(x,t)\varphi(x,t)dtdx = \\
&\int_\Omega \int_0^T y_n(x,s) \left(\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_s^T (t-s)^{1-\alpha} \varphi(x,t)dt \right) dsdx \quad \forall \varphi \in \mathbb{D}(Q).
\end{aligned}$$

D'où en passant à la limite dans la dernière égalité, et en utilisant (3.11c) et (3.11d), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\int_0^T \gamma\varphi(x,t)dtdx &= \int_\Omega \int_0^T y(x,s) \left(\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_s^T (t-s)^{1-\alpha} \varphi(x,t)dt \right) dsdx \\
&= \int_\Omega \int_0^T I^{2-\alpha} y(x,t)\varphi(x,t)dtdx \quad \forall \varphi \in \mathbb{D}(Q).
\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$I^{2-\alpha}y(x,t) = \gamma \text{ dans } Q.$$

Ainsi (3.11d) devient

$$I^{2-\alpha}y_n \rightharpoonup I^{2-\alpha}y \text{ faiblement dans } L^2((0,T), H^1_0(\Omega)). \tag{3.15}$$

Deuxièmement, d'après (3.15), nous avons

$$\frac{\partial}{\partial t} I^{2-\alpha}y_n \rightharpoonup \frac{\partial}{\partial t} I^{2-\alpha}y \text{ faiblement dans } \mathbb{D}'(Q)$$

et comme nous avons (3.11e), nous obtenons

$$\frac{\partial}{\partial t} I^{2-\alpha}y_n \rightharpoonup \frac{\partial}{\partial t} I^{2-\alpha}y = \eta \text{ faiblement dans } L^2(Q) \tag{3.16}$$

Pour continuer, nous avons besoin de quelques résultats de traces. D'une part, nous avons montré que

$$y \in L^2((0,T);H_0^1(\Omega)) \quad \text{et} \quad I^{2-\alpha}y \in L^2((0,T);H_0^1(\Omega)),$$

d'où

$$D_{RL}^{\alpha}y = \frac{\partial^2}{\partial t^2}I^{2-\alpha}y \in H^{-2}((0,T);H_0^1(\Omega)) \subset H^{-2}((0,T);L^2(\Omega)),$$

et

$$u \in L^2(Q) = L^2((0,T);L^2(\Omega)).$$

Or $\Delta y = D_{RL}^{\alpha}y - u$ donc,

$$\Delta y \in H^{-2}((0,T);L^2(\Omega)) \cap L^2((0,T);L^2(\Omega)) = H^{-2}((0,T);L^2(\Omega)).$$

On a alors, $y(t) \in L^2(\Omega)$ et $\Delta y(t) \in L^2(\Omega)$, on peut alors conclure d'après [10], que $y_{|\partial\Omega}$ et $\dfrac{\partial y}{\partial v}_{|\partial\Omega}$ existent et on a

$$y(t) \in H^{-1/2}(\partial\Omega) \quad \text{et} \quad \frac{\partial y}{\partial v}(t) \in H^{-3/2}(\partial\Omega).$$

D'autre part, nous avons

$$D_{RL}^{\alpha}y = u - \Delta y,$$

avec

$$u \in L^2((0,T);L^2(\Omega)),$$

et

$$y \in L^2((0,T);H_0^1(\Omega)) \Rightarrow \Delta y \in L^2((0,T);H^{-1}(\Omega)).$$

On obtient donc que

$$D_{RL}^{\alpha}y = \frac{\partial^2}{\partial t^2}I^{2-\alpha}y \in L^2((0,T);H^{-1}(\Omega)). \tag{3.17}$$

En somme, nous avons montrer que

$$\begin{array}{lcl} I^{2-\alpha}y & \in & L^2((0,T);H_0^1(\Omega)), \\ \dfrac{\partial}{\partial t}I^{2-\alpha}y & \in & L^2((0,T);L^2(\Omega)), \\ \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}I^{2-\alpha}y & \in & L^2((0,T);H^{-1}(\Omega)). \end{array}$$

Et il vient alors du Lemme 3.1 que

$$\begin{array}{lclcl} I^{2-\alpha}y & \in & \mathcal{C}([0,T],[H_0^1(\Omega),L^2(\Omega)]_{1/2}) & \subset & \mathcal{C}([0,T];H^{1/2}(\Omega)), \\ \dfrac{\partial}{\partial t}I^{2-\alpha}y & \in & \mathcal{C}([0,T],[H_0^1(\Omega),H^{-1}(\Omega)]_{1/2}) & = & \mathcal{C}([0,T];L^2(\Omega)). \end{array}$$

Remarque 3.1. *Dire que* $I^{2-\alpha}y \in \mathcal{C}([0,T]; H^{1/2}(\Omega))$ *et* $\dfrac{\partial}{\partial t}I^{2-\alpha}y \in \mathcal{C}([0,T]; L^2(\Omega))$ *revient à dire que*

- $I^{2-\alpha}y(0)$ *et* $I^{2-\alpha}y(T)$ *existent et appartiennent à* $H^{1/2}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$.
- $\dfrac{\partial}{\partial t}I^{2-\alpha}y(0)$ *et* $\dfrac{\partial}{\partial t}I^{2-\alpha}y(T)$ *existent et appartiennent à* $L^2(\Omega)$.

Maintenant, multiplions (3.7a) par une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{Q})$ avec $\varphi_{|\partial\Omega} = 0$ et $\varphi(x,T) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}(x,T) = 0$ sur Ω, et en intégrant par parties sur Q, on obtient en utilisant le lemme 1.7 que

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_\Omega (D^\alpha_{RL} y_n(x,t) - \Delta y_n(x,t))\varphi(x,t)dxdt = \\
&-\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t} I^{2-\alpha} y_n(x,0)\varphi(x,0)dx + \int_\Omega I^{2-\alpha}y_n(x,0)\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,0)dx \\
&+\int_\Omega \int_0^T y_n(x,t)(\mathcal{D}^\alpha_C \varphi(x,t) - \Delta\varphi(x,t))dxdt.
\end{aligned}$$

D'où, d'après (3.7c) et (3.7d), on peut écrire

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_\Omega (D^\alpha_{RL} y_n(x,t) - \Delta y_n(x,t))\varphi(x,t)dxdt = \\
&-\int_\Omega y^1\varphi(x,0)dx + \int_\Omega y^0\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,0)dx \\
&+\int_\Omega \int_0^T y_n(x,t)(\mathcal{D}^\alpha_C \varphi(x,t) - \Delta\varphi(x,t))dxdt.
\end{aligned}$$

Ainsi en passant à la limite, et en utilisant (3.11c) et (3.11b), nous avons

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_\Omega (D^\alpha_{RL} y(x,t) - \Delta y(x,t))\varphi(x,t)dxdt + \\
&\int_\Omega y^1\varphi(x,0)dx - \int_\Omega y^0\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,0)dx \\
&= \int_\Omega \int_0^T y(x,t)(\mathcal{D}^\alpha_C \varphi(x,t) - \Delta\varphi(x,t))dxdt.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

En faisant une intégration par parties du membre de droite de l'équation (3.18), nous avons, d'après le lemme 1.7 que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \int_0^T y(x,t)(\mathcal{D}^\alpha_C \varphi(x,t) - \Delta\varphi(x,t))dxdt = \\
&\int_0^T \int_\Omega (D^\alpha_{RL} y(x,t) - \Delta y(x,t))\varphi(x,t)dxdt \\
&+\int_\Omega \varphi(x,0)\frac{\partial}{\partial t}I^{2-\alpha}y(x,0)dx - \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}\varphi(x,0)I^{2-\alpha}y(x,0)dx \\
&-\left\langle y(\sigma,t), \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}(\sigma,t)\right\rangle_{H^{-2}((0,T);H^{-1/2}(\partial\Omega)),H^2_0((0,T);H^{1/2}(\partial\Omega))}.
\end{aligned}$$

On obtient donc, d'après (3.18),

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \varphi(x,0)y^1dx-\int_\Omega y^0\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,0)dx=\\&\int_\Omega \varphi(x,0)\frac{\partial}{\partial t}I^{2-\alpha}y(x,0)dx-\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}\varphi(x,0)I^{2-\alpha}y(x,0)dx\\&-\left\langle y(\sigma,t),\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}(\sigma,t)\right\rangle_{H^{-2}((0,T);H^{-1/2}(\partial\Omega)),H_0^2((0,T);H^{1/2}(\partial\Omega))},\end{aligned}\tag{3.19}$$

pour tout $\varphi\in C^\infty(\overline{Q})$ avec $\varphi_{|\partial\Omega}=0$ et $\varphi(x,T)=\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}(x,T)=0$ sur Ω.

Choisissons φ telle que $\varphi(x,0)=\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}(x,0)=0$, on a alors

$$\left\langle y(\sigma,t),\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}(\sigma,t)\right\rangle_{H^{-2}((0,T);H^{-1/2}(\partial\Omega)),H_0^2((0,T);H^{1/2}(\partial\Omega))}=0.$$

Ce qui implique que

$$y=0\quad\text{sur }\Sigma.\tag{3.20}$$

Choisissons maintenant φ telle que $\varphi(x,0)=0$. On a alors

$$\int_\Omega y^0\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,0)dx=\int_\Omega\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x,0)I^{2-\alpha}y(x,0)dx.$$

Ainsi nous avons

$$I^{2-\alpha}y(0)=y^0\quad\text{dans }\Omega.\tag{3.21}$$

Finalement, il nous reste

$$\int_\Omega y^1\varphi(x,0)dx=\int_\Omega\frac{\partial}{\partial t}I^{2-\alpha}y(x,0)\varphi(x,0)dx.$$

Donc

$$\frac{\partial}{\partial t}I^{2-\alpha}y(0)=y^1\quad\text{dans }\Omega.\tag{3.22}$$

D'après (3.14), (3.20), (3.21) et (3.22), on a $y=y(u)$ solution de l'équation (3.1).

Montrons maintenant, que notre u est bien le contrôle optimal.

La fonction $v \to J(v)$ est continue donc semi-continue inférieurement pour la topologie faible, d'où

$$J(u) \leq \liminf J(v_n).$$

Ainsi d'après (3.6a), nous avons

$$J(u) \leq \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v).$$

Donc d'après la définition de la borne inférieure, il vient que

$$J(u) = \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v).$$

Nous venons de démontrer l'existence de u, montrons maintenant l'unicité :
La fonction $v \to J(v)$ est strictement convexe. On suppose que u_1, u_2 réalisent le minimum de J sur $\mathcal{U}_{ad}$. Alors $\mathcal{U}_{ad}$ étant convexe, on a

$$\frac{1}{2}(u_1 + u_2) \in \mathcal{U}_{ad} \quad \text{et} \quad J(\frac{1}{2}(u_1 + u_2)) < \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v).$$

Ce qui implique que $u_1 = u_2$ et démontre l'unicité. □

Nous venons de montrer que le problème de contrôle optimal (3.3) admet une unique solution, nous allons maintenant la caractériser par un système d'optimalité.

3.3 Caractérisation du contrôle optimal.

Nous avons le résultat suivant :

Théorème 3.2. *Si u est solution du problème de minimisation* (3.3)*, alors il existe $p \in \mathcal{C}([0,T]; L^2(\Omega))$ telle que le triplet (u, y, p) vérifie le système d'optimalité qui suit*

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{RL} y(x,t) - \Delta y(x,t) & = & u(x,t) & \textit{dans } Q, \\ y(\sigma,t) & = & 0 & \textit{sur } \Sigma, \\ I^{2-\alpha} y(x,0) & = & y^0(x) & \textit{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial}{\partial t} I^{2-\alpha} y(x,0) & = & y^1(x) & \textit{dans } \Omega, \end{cases} \tag{3.23}$$

$$\begin{cases} \mathcal{D}^{\alpha}_{C} p(x,t) - \Delta p(x,t) & = & 0 & \textit{dans } Q, \\ p(\sigma,t) & = & 0 & \textit{sur } \Sigma, \\ p(x,T) & = & 0 & \textit{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial p}{\partial t}(x,T) & = & I^{2-\alpha} y(u,T) - z_d & \textit{dans } \Omega, \end{cases} \tag{3.24}$$

et

$$(Nu - p, v - u)_{L^2(Q)} \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}. \tag{3.25}$$

Démonstration. On rappelle que la fonctionnelle J est donnée par,

$$J(v) = \frac{1}{2}\|I^{2-\alpha}y(v,T) - z_d\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{N}{2}\|v\|^2_{L^2(Q)}.$$

Les conditions d'optimalité d'Euler-Lagrange donnent :

$$\lim_{k \to 0} \frac{J(u + k(v-u)) - J(u)}{k} \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}. \tag{3.26}$$

En posant $w = v - u$, et d'après la définition de J, nous avons

$$\begin{aligned}
J(u+kw) &= \frac{1}{2}\|I^{2-\alpha}y(u+kw,T) - z_d\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{N}{2}\|u+kw\|^2_{L^2(Q)} \\
&= \frac{1}{2}\|I^{2-\alpha}y(u,T) - z_d + kI^{2-\alpha}y(w,T)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{N}{2}\|u+kw\|^2_{L^2(Q)} \\
&= \frac{1}{2}\|I^{2-\alpha}y(u,T) - z_d\|^2_{L^2(\Omega)} + k(I^{2-\alpha}y(u,T) - z_d, I^{2-\alpha}y(w,T))_{L^2(\Omega)} \\
&+ \frac{k^2}{2}\|I^{2-\alpha}y(w,T)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{N}{2}\|u\|^2_{L^2(Q)} + kN(u,w)_{L^2(Q)} + \frac{Nk^2}{2}\|w\|^2_{L^2(Q)}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
J(u+kw) - J(u) &= k(I^{2-\alpha}y(u,T) - z_d, I^{2-\alpha}y(w,T))_{L^2(\Omega)} \\
&+ \frac{k^2}{2}\|I^{2-\alpha}y(w,T)\|^2_{L^2(\Omega)} + kN(u,w)_{L^2(Q)} + \frac{Nk^2}{2}\|w\|^2_{L^2(Q)}.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{J(u+kw) - J(u)}{k} &= (I^{2-\alpha}y(u,T) - z_d, I^{2-\alpha}y(w,T))_{L^2(\Omega)} + \frac{k}{2}\|I^{2-\alpha}y(w,T)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&+ N(u,w)_{L^2(Q)} + \frac{Nk}{2}\|w\|^2_{L^2(Q)}.
\end{aligned}$$

Et quand $k \to 0$, nous obtenons

$$\lim_{k \to 0} \frac{J(u+kw) - J(u)}{k} = (I^{2-\alpha}y(u,T) - z_d, I^{2-\alpha}y(w,T))_{L^2(\Omega)} + N(u,w)_{L^2(Q)},$$

donc d'après (3.26), nous avons l'inégalité suivante :

$$(I^{2-\alpha}y(u,T)-z_d, I^{2-\alpha}y(w,T))_{L^2(\Omega)} + N(u,w)_{L^2(Q)} \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}. \tag{3.27}$$

Soit $z(v-u)$ l'état associé à $v-u \in L^2(Q)$. Alors d'après (3.1) $z(v-u)$ est solution de l'équation suivante

$$\left\{\begin{array}{lcll} D^{\alpha}_{RL}z(x,t)-\Delta z(x,t) & = & v(x,t)-u(x,t) & \text{dans } Q, \\ z(\sigma,t) & = & 0 & \text{sur } \Sigma, \\ I^{2-\alpha}z(x,0) & = & 0 & \text{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}I^{2-\alpha}z(x,0) & = & 0 & \text{dans } \Omega. \end{array}\right. \tag{3.28}$$

Afin d'interpréter (3.27), nous considérons l'équation d'état adjoint suivante :

$$\left\{\begin{array}{lcll} \mathcal{D}^{\alpha}_{C}p(x,t)-\Delta p(x,t) & = & 0 & \text{dans } Q, \\ p(x,t) & = & 0 & \text{sur } \Sigma, \\ p(x,T) & = & 0 & \text{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial p}{\partial t}(x,T) & = & I^{2-\alpha}y(u,T)-z_d & \text{dans } \Omega. \end{array}\right. \tag{3.29}$$

Comme $I^{2-\alpha}y(u,T)-z_d \in L^2(Q)$, nous savons d'après le corollaire 2.2 que l'équation (3.29) admet une unique solution $p \in \mathcal{C}([0,T];L^2(\Omega)) \subset L^2(Q)$. Maintenant, multiplions la première équation de (3.28) par p solution (3.29), on obtient alors en utilisant le lemme 1.7,

$$\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^T\int_\Omega (D^{\alpha}_{RL}z(x,t)-\Delta z(x,t))p(x,t)dxdt = \\ \displaystyle\int_\Omega p(x,T)\frac{\partial}{\partial t}I^{2-\alpha}z(x,T)dx - \int_\Omega p(x,0)\frac{\partial}{\partial t}I^{2-\alpha}z(x,0)dx \\ \displaystyle-\int_\Omega \frac{\partial p}{\partial t}(x,T)I^{2-\alpha}z(x,T)dx + \int_\Omega \frac{\partial p}{\partial t}(x,0)I^{2-\alpha}z(x,0)dx \\ \displaystyle+\int_\Omega\int_0^T z(x,t)(\mathcal{D}^{\alpha}_{C}p(x,t)-\Delta p(x,t))dtdx. \end{array}$$

Or d'après (3.28) et (3.29), nous avons

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_0^T\int_\Omega (D^{\alpha}_{RL}z(x,t)-\Delta z(x,t))p(x,t)dxdt & = & \displaystyle-\int_\Omega \frac{\partial p}{\partial t}(x,T)I^{2-\alpha}z(x,T)dx \\ & = & \displaystyle\int_\Omega [I^{2-\alpha}y(u,T)-z_d]I^{2-\alpha}z(x,T)dx \\ & = & \displaystyle\int_0^T\int_\Omega [v(x,t)-u(x,t)]p(x,t)dxdt. \end{array}$$

D'où en combinant avec (3.27), nous pouvons écrire que

$$\int_\Omega \int_0^T [v(x,t) - u(x,t)]p(x,t)dxdt \leq N \int_\Omega \int_0^T u(x,t)[v(x,t) - u(x,t)]dtdx,$$

soit

$$\int_\Omega \int_0^T [Nu(x,t) - p(x,t)][v(x,t) - u(x,t)]dtdx \geq 0$$

d'où la relation (3.25).

Réciproquement, nous supposons que (3.26) est vérifiée, c'est-à-dire que la limite existe. Alors d'après la convexité de la fonction $v \to J(v)$, nous avons pour tout $\theta \in]0,1[$ que

$$\begin{array}{rcl} J(\theta v + (1-\theta)w) & \leq & \theta J(v) + (1-\theta)J(w) \\ & = & \theta(J(v) - J(w)) + J(w), \end{array}$$

ce qui implique que

$$\frac{1}{\theta}[J(\theta v + (1-\theta)w) - J(w)] \leq J(v) - J(w).$$

Ce qui peut encore s'écrire

$$J(v) - J(w) \geq \frac{1}{\theta}[J(w + \theta(v - w)) - J(w)].$$

Or nous avons supposé que (3.26) est vérifiée, on a donc

$$J(v) - J(w) \geq J'(w).(v - w) \geq 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}.$$

Maintenant, prenons $w = u$ alors nous avons que

$$J(v) - J(u) \geq 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}.$$

Ce qui implique que u est solution du problème de contrôle optimal (3.3).

□

CHAPITRE 4

CONTRÔLE OPTIMAL D'UNE ÉQUATION DE DIFFUSION FRACTIONNAIRE EN TEMPS À DONNÉES INCOMPLÈTES.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et Ω un sous-ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière $\partial\Omega$ de classe $\mathcal{C}^2$. Pour le temps $T > 0$, nous posons $Q = \Omega \times]0, T[$ et $\Sigma = \partial\Omega \times]0, T[$, et on considère l'équation de diffusion fractionnaire :

$$\begin{cases} D_{RL}^{\alpha} y(x,t) - \Delta y(x,t) & = & g(x,t) & (x,t) \in Q, \\ y(\sigma,t) & = & v & (\sigma,t) \in \Sigma, \\ I^{1-\alpha} y(x,0^+) & = & y^0 & x \in \Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

où $0 < \alpha < 1, y^0 \in H_0^1(\Omega)$, et $v \in L^2(\Sigma)$. La fonction $g = g(x,t) \in L^2(Q)$ est inconnue, $I^{1-\alpha} y(x,0^+) = \lim_{t \downarrow 0} I^{1-\alpha} y(x,t)$ et où l'intégrale fractionnaire I^{α} d'ordre α et la dérivée fractionnaire D_{RL}^{α} d'ordre α sont pris au sens de Riemann-Liouville.

Dans ce chapitre, nous cherchons à résoudre un problème de contrôle sans regret, où l'équation d'état est donnée par (4.1). Mais avant cela, nous donnons les résultats suivants :

Théorème 4.1. *[57] Soit $(g, v, y^0) \in L^2(Q) \times L^2(\Sigma) \times H_0^1(\Omega)$. Alors l'équation* (4.1) *admet une unique solution $y(v,g) = y(x,t;v,g) \in L^2(Q)$ telle que*

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_\Omega y(x,t;v,g)(-\mathcal{D}_C^{\alpha}\psi(x,t) - \Delta\psi(x,t))dxdt = \\ &\int_0^T \int_\Omega g(x,t)\psi(x,t)dxdt + \int_\Omega y^0(x)\psi(x,0)dx - \int_0^T \int_{\partial\Omega} v(\sigma,t)\frac{\partial\psi}{\partial\nu}(\sigma,t)d\sigma dt, \\ &\forall \psi \in L^2((0,T); H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \text{ avec } \psi(x,T) = 0, \end{aligned}$$

où $\mathcal{D}_C^\alpha y$ est la dérivée fractionnaire de Caputo à droite d'ordre α de la fonction y. De plus, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|y(v,g)\|_{L^2(Q)} \leq C\left(\|g\|_{L^2(Q)} + \|v\|_{L^2(\Sigma)} + \|y^0\|_{H_0^1(\Omega)}\right). \tag{4.2}$$

Nous avons également les résultats de traces qui suivent :

Lemme 4.1. *[29] Soient $f \in L^2(Q)$ et $y \in L^2(Q)$ telle que $D_{RL}^\alpha y - \Delta y = f$. Alors*

1. *$y_{|\partial\Omega}$ et $\dfrac{\partial y}{\partial \nu_A}_{|\partial\Omega}$ existent et appartiennent respectivement à $H^{-1}((0,T);H^{-1/2}(\partial\Omega))$ et $H^{-1}((0,T);H^{-3/2}(\partial\Omega))$.*

2. *$I^{1-\alpha}y$ existe et appartient à $\mathcal{C}([0,T];H^{-1}(\Omega)$.*

Nous pouvons maintenant passer à notre problème de contrôle optimal.

4.1 Position du problème.

Soit $y(v,g) \in L^2(Q)$ solution de l'équation (4.1). Alors nous pouvons définir la fonctionnelle coût J par

$$J(v,g) = \|y(x,t;v,g) - z_d\|^2_{L^2(Q)} + N\|v\|^2_{L^2(\Sigma)}, \tag{4.3}$$

où $z_d \in L^2(Q)$ et $N > 0$.

On souhaite résoudre le problème de contrôle optimal

$$\inf_{v \in L^2(\Sigma)} J(v,g). \tag{4.4}$$

Remarque 4.1. *Si $g = 0$ (le problème est donc à données complètes), alors $J(v,g) = J(v,0)$ et on obtient le problème de contrôle optimal :*

$$\inf_{v \in L^2(\Sigma)} J(v,0).$$

Ce problème a un sens et on peut se référer à [29] pour sa résolution.

Si $g \in L^2(Q)$ alors le problème (4.4) n'a pas de sens, car $L^2(Q)$ étant un espace de dimension infinie, l'équation (4.1) est mal posé au sens d'Hadamard. Et c'est pour cela que nous utilisons les notions de contrôles sans regret et à moindres regrets. Nous allons maintenant les définir.

Nous avons vu que, si $g \in L^2(Q)$, alors le problème (4.4) n'a pas de sens, on va donc se borner aux contrôles v, s'il en existe, tels que

$$J(v,g) \leq J(0,g) \qquad \forall g \in L^2(Q). \tag{4.5}$$

Si $v = 0$ correspond au cas où l'on n'exerce aucun contrôle, on ne considère ainsi que des contrôles qui, au moins, ne rendent pas la situation pire.

D'après (4.5), on a

$$J(v,g) - J(0,g) \leq 0 \qquad \forall g \in L^2(Q).$$

La fonction $g \to J(v,g) - J(0,g)$ est donc majorée et admet une borne supérieure, il est donc équivalent de dire qu'on se borne aux contrôles v tels que

$$\sup_{g \in L^2(Q)} J(v,g) - J(0,g) < \infty. \tag{4.6}$$

Et le problème naturel est de trouver $u \in L^2(\Sigma)$ réalisant :

$$\inf_{v \in L^2(\Sigma)} \sup_{g \in L^2(Q)} (J(v,g) - J(0,g)). \tag{4.7}$$

Si le problème (4.7) admet une unique solution u, alors u est appelé contrôle sans regret.

Le contrôle sans regret n'étant pas toujours facile à caractériser, nous considérons pour chaque $\gamma > 0$, le problème :

$$\inf_{v \in L^2(\Sigma)} \sup_{g \in L^2(Q)} (J(v,g) - J(0,g) - \gamma \|g\|^2_{L^2(Q)}). \tag{4.8}$$

Un tel $u^\gamma \in L^2(\Sigma)$ vérifiant (4.8) est appelé contrôle à moindres regrets.

Avant de passer aux résultats d'existence et d'unicité, nous avons besoin des calculs suivants.

Soient $y(v,0) := y(x,t;v,0), y(0,g) := y(x,t;0,g)$ et $y(0,0) := y(x,t;0,0)$ solutions respectivement de

$$\begin{cases} D^\alpha_{RL} y(v,0) - \Delta y(v,0) & = & 0 & \text{dans} & Q, \\ y(v,0) & = & v & \text{sur} & \Sigma, \\ I^{1-\alpha} y(0^+;v,0) & = & y^0 & \text{dans} & \Omega, \end{cases} \tag{4.9}$$

$$\begin{cases} D^\alpha_{RL} y(0,g) - \Delta y(0,g) & = & g & \text{dans} & Q, \\ y(0,g) & = & 0 & \text{sur} & \Sigma, \\ I^{1-\alpha} y(0^+;0,g) & = & y^0 & \text{dans} & \Omega, \end{cases} \tag{4.10}$$

et

$$\begin{cases} D^\alpha_{RL} y(0,0) - \Delta y(0,0) & = & 0 & \text{dans} & Q, \\ y(0,0) & = & 0 & \text{sur} & \Sigma, \\ I^{1-\alpha} y(0^+;0,0) & = & y^0 & \text{dans} & \Omega, \end{cases} \tag{4.11}$$

où $I^{1-\alpha}y(0^+;v,g) = \lim_{t\to 0} I^{1-\alpha}y(x,t;v,g)$. Comme $g \in L^2(Q), v \in L^2(\Sigma)$ et $y^0 \in H_0^1(\Omega)$, d'après le théorème 4.1, nous savons que $y(v,0) \in L^2(Q)$ et d'après la section 2.1, nous savons que $y(0,g)$ et $y(0,0)$ appartiennent à $L^2((0,T);H_0^1(\Omega))$. Ainsi, nous avons le résultat suivant :

Lemme 4.2. *Pour chaque $v \in L^2(\Sigma)$ et chaque $g \in L^2(Q)$, nous avons*

$$\begin{aligned} J(v,g) - J(0,g) &= J(v,0) - J(0,0) \\ &+ 2\int_\Omega \int_0^T [y(0,g) - y(0,0)][y(v,0) - y(0,0)]dtdx, \end{aligned} \tag{4.12}$$

où $y(v,0), y(0,g)$ et $y(0,0)$ sont solutions respectivement de (4.9) (4.10) *et* (4.11) *et la fonctionnelle J est donnée par* (4.3).

Démonstration. En observant d'une part que

$$J(v,0) = \int_\Omega \int_0^T [y(v,0) - z_d][y(v,0) - z_d]dtdx + N\|v\|^2_{L^2(Q)} , \tag{4.13a}$$

$$J(0,g) = \int_\Omega \int_0^T [y(0,g) - z_d][y(0,g) - z_d]dtdx , \tag{4.13b}$$

$$J(0,0) = \int_\Omega \int_0^T [y(0,0) - z_d][y(0,0) - z_d]dtdx . \tag{4.13c}$$

Et d'autre part que,

$$y(v,g) = y(v,0) + y(0,g) - y(0,0),$$

nous avons alors que

$$\begin{aligned} J(v,g) &= \|y(v,g) - z_d\|^2_{L^2(Q)} + N\|v\|^2_{L^2(Q)} \\ &= \|y(v,0) + y(0,g) - y(0,0) - z_d\|^2_{L^2(Q)} + N\|v\|^2_{L^2(Q)} \\ &= \|y(v,0) - z_d\|^2_{L^2(Q)} + N\|v\|^2_{L^2(Q)} \\ &+ \|y(0,g) - y(0,0)\|^2_{L^2(Q)} + 2\int_\Omega \int_0^T [y(v,0) - z_d][y(0,g) - y(0,0)]dtdx. \end{aligned} \tag{4.14}$$

D'après (4.14) et (4.13a), nous obtenons que

$$\begin{aligned} J(v,g) &= J(v,0) + \|y(0,g) - y(0,0)\|^2_{L^2(Q)} \\ &+ 2\int_\Omega \int_0^T [y(v,0) - z_d][y(0,g) - y(0,0)]dtdx. \end{aligned}$$

Posons

$$A = 2\int_\Omega \int_0^T [y(v,0) - z_d][y(0,g) - y(0,0)]dtdx$$

Alors en remplaçant $y(v,0)-z_d$ par $y(v,0)-y(0,0)+y(0,0)-z_d$ dans A nous avons

$$\begin{aligned} A &= 2\int_\Omega\int_0^T [y(v,0)-y(0,0)+y(0,0)-z_d][y(0,g)-y(0,0)]dtdx \\ &= 2\int_\Omega\int_0^T [y(v,0)-y(0,0)][y(0,g)-y(0,0)]dtdx \\ &+ 2\int_\Omega\int_0^T [y(0,0)-z_d][y(0,g)-y(0,0)]dtdx. \end{aligned}$$

Ainsi, nous pouvons écrire que

$$\begin{aligned} J(v,g) &= J(v,0)+2\int_\Omega\int_0^T [y(v,0)-y(0,0)][y(0,g)-y(0,0)]dtdx \\ &+ \|y(0,g)-y(0,0)\|^2_{L^2(Q)}+2\int_\Omega\int_0^T [y(0,0)-z_d][y(0,g)-y(0,0)]dtdx. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Posons maintenant

$$B=\|y(0,g)-y(0,0)\|^2_{L^2(Q)}.$$

D'où en remplaçant $y(0,g)-y(0,0)$ par $y(0,g)-z_d-(y(0,0)-z_d)$ dans B, on obtient

$$\begin{aligned} B &= \int_\Omega\int_0^T [(y(0,g)-z_d)-(y(0,0)-z_d)][(y(0,g)-z_d)-(y(0,0)-z_d)]dtdx \\ &= \|y(0,g)-z_d\|^2_{L^2(Q)}+\|y(0,0)-z_d\|^2_{L^2(Q)} \\ &- 2\int_\Omega\int_0^T [y(0,g)-z_d][y(0,0)-z_d]dtdx. \end{aligned}$$

Et en remplaçant $y(0,g)-z_d$ par $y(0,g)-y(0,0)+y(0,0)-z_d$ dans l'intégrale, il vient que

$$\begin{aligned} B &= \|y(0,g)-z_d\|^2_{L^2(Q)}+\|y(0,0)-z_d\|^2_{L^2(Q)} \\ &- 2\int_\Omega\int_0^T [y(0,g)-y(0,0)+y(0,0)-z_d][y(0,0)-z_d]dtdx \\ &= \|y(0,g)-z_d\|^2_{L^2(Q)}+\|y(0,0)-z_d\|^2_{L^2(Q)}-2\|y(0,0)-z_d\|^2_{L^2(Q)} \\ &- 2\int_\Omega\int_0^T [y(0,g)-y(0,0)][y(0,0)-z_d]dxdt \\ &= \|y(0,g)-z_d\|^2_{L^2(Q)}-\|y(0,0)-z_d\|^2_{L^2(Q)} \\ &- 2\int_\Omega\int_0^T [y(0,g)-y(0,0)][y(0,0)-z_d]dxdt \\ &= J(0,g)-J(0,0)-2\int_\Omega\int_0^T [y(0,g)-y(0,0)][y(0,0)-z_d]dxdt. \end{aligned}$$

Pour finir en remplaçant B dans (4.15), on a

$$\begin{array}{rcl} J(v,g) &=& J(v,0)+2\int_\Omega\int_0^T[y(v,0)-y(0,0)][y(0,g)-y(0,0)]dtdx \\ &+& J(0,g)-J(0,0)-2\int_\Omega\int_0^T[y(0,g)-y(0,0)][y(0,0)-z_d]dxdt \\ &+& 2\int_\Omega\int_0^T[y(0,0)-z_d][y(0,g)-y(0,0)]dtdx \\ &=& J(v,0)+J(0,g)-J(0,0) \\ &+& 2\int_\Omega\int_0^T[y(v,0)-y(0,0)][y(0,g)-y(0,0)]dtdx. \end{array}$$

D'où

$$J(v,g)-J(0,g)=J(v,0)-J(0,0)+2\int_\Omega\int_0^T[y(v,0)-y(0,0)][y(0,g)-y(0,0)]dtdx.$$

□

Lemme 4.3. *Pour chaque $v\in L^2(\Sigma)$ et pour chaque $g\in L^2(Q)$, nous avons*

$$J(v,g)-J(0,g)=J(v,0)-J(0,0)+2\int_0^T\int_\Omega g(x,t)\xi(x,t;v)dxdt, \tag{4.16}$$

où $\xi(v)\in L^2((0,T);H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))$ est solution de

$$\left\{\begin{array}{lcll} -\mathcal{D}_C^\alpha\xi(v)-\Delta\xi(v) &=& y(v,0)-y(0,0) & \textit{dans } Q, \\ \xi(v) &=& 0 & \textit{sur } \Sigma, \\ \xi(T;v) &=& 0 & \textit{dans } \Omega, \end{array}\right. \tag{4.17}$$

Démonstration. Comme $y(v,0)-y(0,0)\in L^2(Q)$, d'après le corollaire 2.1, l'équation (4.17) admet une unique solution $\xi:=\xi(v)\in L^2((0,T);H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))$. De plus, il existe une constante $C>0$ telle que

$$\|\xi(v)\|_{L^2((0,T);H^2(\Omega))}\leq C\|y(v,0)-y(0,0)\|_{L^2(\Omega)}. \tag{4.18}$$

Posons $z=y(0,g)-y(0,0)$, alors z est solution de

$$\left\{\begin{array}{lcll} D_{RL}^\alpha z-\Delta z &=& g & \text{dans } \quad Q, \\ z &=& 0 & \text{sur } \quad \Sigma, \\ I^{1-\alpha}z(0^+) &=& 0 & \text{dans } \quad \Omega. \end{array}\right. \tag{4.19}$$

Maintenant multiplions la première équation de (4.17) par z et en utilisant le lemme 1.6, on obtient

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \int_\Omega z(x,t)(-\mathcal{D}_C^\alpha \xi(x,t;v) - \Delta\xi(x,t;v))dxdt = \\
&-\int_\Omega \xi(x,T;v) I^{1-\alpha} z(x,T)dx + \int_\Omega \xi(x,0;v) I^{1-\alpha} z(x,0^+)dx \\
&+\int_0^T \int_\Omega (D_{RL}^\alpha z(x,t) - \Delta z(x,t))\xi(x,t;v)dxdt \\
&= \int_0^T \int_\Omega (y(x,t;v,0) - y(x,t;0,0))z(x,t)dxdt.
\end{aligned}
$$

D'où en combinant (4.19) et (4.17), nous avons

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \int_\Omega (y(x,t;v,0) - y(x,t;0,0))(y(x,t;0,g) - y(x,t;0,0))dxdt = \\
&\int_0^T \int_\Omega g(x,t)\xi(x,t;v)dxdt.
\end{aligned}
$$

Ainsi en remplaçant le terme de gauche dans (4.12), on obtient (4.16).

□

Maintenant considérons le problème de contrôle sans regret :

$$
\inf_{v\in L^2(\Sigma)} \sup_{g\in L^2(Q)} (J(v,g) - J(0,g)). \tag{4.20}
$$

D'après (4.16), ce problème est équivalent à :

$$
\inf_{v\in L^2(\Sigma)} \sup_{g\in L^2(Q)} \left[J(v,0) - J(0,0) + 2\int_\Omega \int_0^T \xi(x,t;v)g(x,t)dtdx \right]. \tag{4.21}
$$

L'espace $L^2(Q)$ étant un espace vectoriel, nous avons les deux possibilités suivantes :

$$
\sup_{g\in L^2(Q)} \left(\int_\Omega \int_0^T \xi(x,t;v)g(x,t)dtdx \right) = +\infty \tag{4.22}
$$

or

$$
\sup_{g\in L^2(Q)} \left(\int_\Omega \int_0^T \xi(x,t;v)g(x,t)dtdx \right) = 0. \tag{4.23}
$$

Le contrôle sans regret existe uniquement dans le cas (4.23). Ce qui implique que le contrôle sans regret appartient à l'ensemble :

$$
\mathcal{K} = \{ v \in L^2(\Sigma) \quad \text{telle que} \quad \int_\Omega \int_0^T \xi(x,t;v)g(x,t)dtdx = 0, \quad \forall g \in L^2(Q) \}.
$$

Un tel contrôle étant difficile à caractériser, nous considérons la forme pénalisée du problème (4.20). Plus précisément, pour chaque $\gamma > 0$, nous considérons le problème à moindres regrets :

$$\inf_{v\in L^2(\Sigma)} \sup_{g\in L^2(Q)} (J(v,g) - J(0,g) - \gamma\|g\|^2_{L^2(Q)}). \tag{4.24}$$

D'après (4.16), le problème (4.24) est équivalent à :

$$\inf_{v\in L^2(\Sigma)} \left[J(v,0) - J(0,0) + 2 \sup_{g\in L^2(Q)} \left(\int_\Omega \int_0^T \xi(x,t;v) g(x,t) dt dx - \frac{\gamma}{2}\|g\|^2_{L^2(Q)} \right) \right].$$

En utilisant la transformée de Legendre-Fenchel, nous avons que

$$2\gamma \sup_{g\in L^2(Q)} \left(\int_\Omega \int_0^T \frac{1}{\gamma} \xi(x,t;v) g(x,t) dt dx - \frac{1}{\gamma}\frac{\gamma}{2}\|g\|^2_{L^2(Q)} \right) = \frac{1}{\gamma} \|\xi(v)\|^2_{L^2(Q)},$$

d'où le problème (4.24) devient : Pour chaque $\gamma > 0$, trouver $u^\gamma \in L^2(\Sigma)$ tel que :

$$J_\gamma(u^\gamma) = \inf_{v\in L^2(\Sigma)} J_\gamma(v), \tag{4.25}$$

où

$$J_\gamma(v) = J(v,0) - J(0,0) + \frac{1}{\gamma} \|\xi(v)\|^2_{L^2(Q)}. \tag{4.26}$$

4.2 Résolution du problème de contrôle à moindres regrets.

Nous avons le résultat d'existence et d'unicité qui suit :

Proposition 4.1. *Soit $\gamma > 0$. Alors il existe un unique contrôle à moindres regrets u^γ qui vérifie* (4.25).

Démonstration. Nous avons

$$J_\gamma(v) = J(v,0) - J(0,0) + \frac{1}{\gamma} \|\xi(v)\|^2_{L^2(Q)} \geq -J(0,0),$$

alors on sait que $\inf_{v\in L^2(\Sigma)} J_\gamma(v)$ existe. Soit $(v_n) \in L^2(\Sigma)$ une suite minimisante telle que

$$\lim_{n\to+\infty} J_\gamma(v_n) = \inf_{v\in L^2(\Sigma)} J_\gamma(v). \tag{4.27}$$

Alors $y_n = y(x,t;v_n,0)$ est solution de (4.9). Et y_n satisfait :

$$D^{\alpha}_{RL} y_n - \Delta y_n = 0 \quad \text{dans } Q, \tag{4.28a}$$
$$y_n = v_n \quad \text{sur } \Sigma, \tag{4.28b}$$
$$I^{1-\alpha} y_n(0^+) = y^0 \quad \text{dans } \Omega. \tag{4.28c}$$

D'après le théorème 4.1, il existe une constante $C > 0$ indépendante de n telle que

$$\|y_n\|_{L^2(Q)} \leq C \left(\|v_n\|_{L^2(\Sigma)} + \|y^0\|_{H^1_0(\Omega)} \right). \tag{4.29}$$

D'après (4.27), il existe une constante $C(\gamma) > 0$ indépendante de n telle que

$$-J(0,0) \leq J(v_n,0) - J(0,0) + \frac{1}{\gamma} \|\xi(v_n)\|^2_{L^2(Q)} \leq C(\gamma),$$

d'où

$$0 \leq J(v_n,0) + \frac{1}{\gamma} \|\xi(v_n)\|^2_{L^2(Q)} \leq C(\gamma) + J(0,0) = C(\gamma)$$

Et en utilisant la définition de $J(v_n,0)$, on obtient

$$\|v_n\|_{L^2(\Sigma)} < C(\gamma), \tag{4.30a}$$
$$\|\xi(v_n)\|_{L^2(Q)} < \sqrt{\gamma} C(\gamma). \tag{4.30b}$$

D'après (4.28a), on déduit qu'il existe $C(\gamma) > 0$ telle que

$$\|D^{\alpha}_{RL} y_n - \Delta y_n\|_{L^2(Q)} \leq C(\gamma). \tag{4.31}$$

En utilisant (4.2) et (4.30a), nous pouvons écrire que

$$\|y_n\|_{L^2(Q)} \leq C(\gamma), \tag{4.32}$$

ainsi nous savons qu'il existe $u^\gamma \in L^2(\Sigma)$ et $\delta, y^\gamma \in L^2(Q)$ et qu'on peut extraire des sous-suites de (v_n) et (y_n) (encore appelée (v_n) et (y_n)) telles que

$$v_n \rightharpoonup u^\gamma \text{ faiblement dans } L^2(\Sigma), \tag{4.33a}$$
$$D^{\alpha}_{RL} y_n - \Delta y_n \rightharpoonup \delta \text{ faiblement dans } L^2(Q), \tag{4.33b}$$
$$y_n \rightharpoonup y^\gamma \text{ faiblement dans } L^2(Q). \tag{4.33c}$$

Le reste de la preuve se décompose en trois étapes.
Étape 1 : Nous prouvons que (u^γ, y^γ) vérifie (4.9).

Soit $\mathbb{D}(Q)$, l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ dans Q à support compact et nous notons $\mathbb{D}'(Q)$ son dual. En multipliant (4.28a) par $\varphi \in \mathbb{D}(Q)$ et en utilisant le lemme 1.6, nous obtenons

$$\int_0^T \int_\Omega (D^\alpha_{RL} y_n(x,t) - \Delta y_n(x,t))\varphi(x,t)dxdt = \int_0^T \int_\Omega y_n(x,t)(-\mathcal{D}^\alpha_C \varphi(x,t) - \Delta\varphi(x,t))dxdt,$$

d'où en passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans la dernière égalité, on a

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to+\infty} \int_0^T \int_\Omega (D^\alpha_{RL} y_n(x,t) - \Delta y_n(x,t))\varphi(x,t)dxdt = \\ &\int_0^T \int_\Omega y^\gamma(x,t)(-\mathcal{D}^\alpha_C \varphi(x,t) - \Delta\varphi(x,t))dxdt \\ &= \int_0^T \int_\Omega (D^\alpha_{RL} y^\gamma(x,t) - \Delta y^\gamma(x,t))\varphi(x,t)dxdt. \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$D^\alpha_{RL} y_n - \Delta y_n \rightharpoonup D^\alpha_{RL} y^\gamma - \Delta y^\gamma \quad \text{faiblement dans} \quad \mathbb{D}'(Q),$$

donc d'après (4.33b), nous avons

$$D^\alpha_{RL} y^\gamma - \Delta y^\gamma = \delta \quad \text{dans} \quad Q. \tag{4.34}$$

Ainsi,

$$D^\alpha_{RL} y_n - \Delta y_n \rightharpoonup D^\alpha_{RL} y^\gamma - \Delta y^\gamma \quad \text{faiblement dans} \quad L^2(Q). \tag{4.35}$$

D'où en passant à la limite dans (4.28a) et en utilisant (4.35), nous obtenons que

$$D^\alpha_{RL} y^\gamma - \Delta y^\gamma = 0 \quad \text{dans} \quad Q. \tag{4.36}$$

Comme $y^\gamma \in L^2(Q)$ et $D^\alpha_{RL} y^\gamma - \Delta y^\gamma \in L^2(Q)$, d'après le lemme 4.1, nous savons que $y^\gamma_{|\partial\Omega}$ existe et appartient à $H^{-1}((0,T); H^{-1/2}(\partial\Omega))$ et que $I^{1-\alpha} y^\gamma \in \mathcal{C}([0,T]; H^{-1}(\Omega))$. Maintenant, multiplions (4.28a) par $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\bar{Q})$ avec $\varphi_{|\partial\Omega} = 0$ et $\varphi(x,T) = 0$ dans Ω, et en intégrant par parties et en utilisant le lemme 1.6, nous avons

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \int_\Omega (D_{RL}^\alpha y_n(x,t) - \Delta y_n(x,t))\varphi(x,t)dxdt = \\
&\int_\Omega \varphi(x,T) I^{1-\alpha} y_n(x,T)dx - \int_\Omega \varphi(x,0) I^{1-\alpha} y_n(x,0^+)dx \\
&+ \int_0^T \int_{\partial\Omega} y_n(\sigma,t)\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}(\sigma,t)d\sigma dt - \int_0^T \int_{\partial\Omega} \varphi(\sigma,t)\frac{\partial y_n}{\partial \nu}(\sigma,t)d\sigma dt \\
&+ \int_0^T \int_\Omega y_n(x,t)(-\mathcal{D}_C^\alpha \varphi(x,t) - \Delta\varphi(x,t))dxdt = \\
&- \int_\Omega \varphi(x,0) y^0 dx + \int_0^T \int_{\partial\Omega} v_n(\sigma,t)\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}(\sigma,t)d\sigma dt \\
&+ \int_0^T \int_\Omega y_n(x,t)(-\mathcal{D}_C^\alpha \varphi(x,t) - \Delta\varphi(x,t))dxdt.
\end{aligned}
\tag{4.37}
$$

En passant à la limite dans (4.37), et en utilisant (4.33a), (4.33c) et (4.35), on obtient,

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \int_\Omega (D_{RL}^\alpha y^\gamma(x,t) - \Delta y^\gamma(x,t))\varphi(x,t)dxdt = \\
&- \int_\Omega \varphi(x,0) y^0 dx + \int_0^T \int_{\partial\Omega} u^\gamma(\sigma,t)\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}d\sigma dt \\
&\int_0^T \int_\Omega y^\gamma(x,t)(-\mathcal{D}_C^\alpha \varphi(x,t) - \Delta\varphi(x,t))dxdt
\end{aligned}
\tag{4.38}
$$

En intégrant, maintenant la partie de droite de (4.38), et en utilisant le lemme d'intégration par parties, nous pouvons écrire que

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \varphi(x,0) y^0 dx - \int_0^T \int_{\partial\Omega} u^\gamma(\sigma,t)\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}d\sigma dt = \\
&\langle \varphi(x,0), I^{1-\alpha} y^\gamma(x,0)\rangle_{H_0^1(\Omega),H^{-1}(\Omega)} \\
&-\langle y^\gamma(\sigma,t), \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}(\sigma,t)\rangle_{H^{-1}((0,T);H^{-1/2}(\partial\Omega)),H_0^1((0,T);H^{1/2}(\partial\Omega))}
\end{aligned}
\tag{4.39}
$$

$\forall \varphi \in C^\infty(\overline{Q})$ telle que $\varphi_{|\partial\Omega} = 0$, $\varphi(x,T) = 0$ in Ω.

où $\langle .,. \rangle_{Y,Y'}$ représente les crochets de dualité entre les espaces Y et Y'. Choisissons maintenant, φ telle que $\varphi(x,0) = 0$ dans Ω, on a alors

$$
- \int_0^T \int_{\partial\Omega} u^\gamma(\sigma,t)\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}d\sigma dt = -\langle y^\gamma(\sigma,t), \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}(\sigma,t)\rangle_{H^{-1}((0,T);H^{-1/2}(\partial\Omega)),H_0^1((0,T);H^{1/2}(\partial\Omega))},
$$

ce qui implique que

$$
y^\gamma = u^\gamma \quad \text{sur} \quad \Sigma. \tag{4.40}
$$

Ainsi nous avons que

$$
\int_\Omega \varphi(x,0) y^0 dx = \langle \varphi(x,0), I^{1-\alpha} y^\gamma(x,0)\rangle_{H_0^1(\Omega),H^{-1}(\Omega)},
$$

d'où

$$I^{1-\alpha}y^\gamma(0) = y^0 \quad \text{dans} \quad \Omega. \tag{4.41}$$

D'après (4.36), (4.40) et (4.41), nous avons que $y^\gamma = y^\gamma(x,t;u^\gamma,0)$ est solution de (4.9).

Étape 2 : Nous montrons que $\xi(v_n)$ converge vers $\xi^\gamma = \xi(u^\gamma)$ et que (ξ^γ, y^γ) vérifie (4.17). On a $\xi(v_n)$ solution de

$$\left\{\begin{array}{lcll} -\mathcal{D}_C^\alpha\xi(v_n) - \Delta\xi(v_n) & = & y_n(v_n,0) - y(0,0) & \text{dans } Q, \\ \xi(v_n) & = & 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \xi(T;v_n) & = & 0 & \text{dans } \Omega. \end{array}\right. \tag{4.42}$$

Posons $z_n = y_n(v_n,0) - y(0,0)$, alors z_n est solution de

$$\left\{\begin{array}{lcll} D_{RL}^\alpha z_n - \Delta z_n & = & 0 & \text{dans } Q, \\ z_n & = & v_n & \text{sur } \Sigma, \\ I^{1-\alpha}z_n & = & 0 & \text{dans } \Omega. \end{array}\right.$$

d'où d'après le théorème 4.1 et (4.30a), on sait que $z_n \in L^2(Q)$ et de plus, il existe $C(\gamma) > 0$ telle que

$$\|z_n\|_{L^2(Q)} = \|y_n(v_n,0) - y(0,0)\|_{L^2(Q)} \leq C(\gamma).$$

Par conséquent, d'après (4.42), nous avons

$$\| -\mathcal{D}_C^\alpha\xi(v_n) - \Delta\xi(v_n)\|_{L^2(Q)} \leq C(\gamma), \tag{4.43}$$

et comme $y_n(v_n,0) - y(0,0) \in L^2(Q)$, d'après le corollaire 2.1, nous avons

$$\|\xi(v_n)\|_{L^2((0,T);H^2(\Omega))} \leq C(\gamma). \tag{4.44}$$

Nous savons alors qu'il existe $\xi^\gamma \in L^2((0,T);H^2(\Omega))$ et qu'on peut extraire une sous-suite de $(\xi(v_n))$ (encore appelée $(\xi(v_n))$) telle que

$$\xi(v_n) \rightharpoonup \xi^\gamma \quad \text{faiblement dans} \quad L^2((0,T);H^2(\Omega)). \tag{4.45}$$

D'après $(4.42)_3$, nous posons

$$\xi^\gamma(T) = 0 \text{ dans } \Omega. \tag{4.46}$$

Maintenant, multiplions la première équation de (4.42), par $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\bar{Q})$ telle que $\psi_{|\partial\Omega} = 0$ et $I^{1-\alpha}\psi(x,0) = 0$, et en intégrant par parties et en utilisant le lemme 1.6, nous avons l'égalité suivante :

$$\int_0^T\int_\Omega(-\mathcal{D}_C^\alpha\xi(x,t;v_n)-\Delta\xi(x,t;v_n))\psi(x,t)dxdt =$$
$$\int_0^T\int_\Omega(y_n(x,t;v_n,0)-y(x,t;0,0))\psi(x,t)dxdt$$
$$=\int_0^T\int_\Omega(D_{RL}^\alpha\psi(x,t)-\Delta\psi(x,t))\xi(x,t;v_n)dxdt$$

Ainsi en utilisant (4.33c) et (4.45), et en passant à la limite quand $n\to+\infty$ dans la dernière égalité, nous avons

$$\int_0^T\int_\Omega(y^\gamma(x,t;u^\gamma,0)-y(x,t;0,0))\psi(x,t)dxdt =$$
$$\int_0^T\int_\Omega(D_{RL}^\alpha\psi(x,t)-\Delta\psi(x,t))\xi^\gamma(x,t;u^\gamma)dxdt.$$

$\forall\psi\in\mathcal{C}^\infty(\bar{Q})$ telle que $\psi_{|\partial\Omega}=0$ et $I^{1-\alpha}\psi(x,0)=0$

D'où en utilisant de nouveau le lemme 1.6, on obtient $\forall\psi\in\mathbb{D}(Q)$,

$$\int_0^T\int_\Omega(y^\gamma(x,t;u^\gamma,0)-y(x,t;0,0))\psi(x,t)dxdt =$$
$$\int_0^T\int_\Omega(-\mathcal{D}_C^\alpha\xi^\gamma(x,t;u^\gamma)-\Delta\xi^\gamma(x,t;u^\gamma))\psi(x,t)dxdt,$$

ce qui implique que

$$-\mathcal{D}_C^\alpha\xi^\gamma(u^\gamma)-\Delta\xi^\gamma(u^\gamma)=y^\gamma(u^\gamma,0)-y(0,0) \text{ dans } Q. \tag{4.47}$$

Maintenant, multiplions la première équation de (4.42) par $\psi\in\mathcal{C}^\infty(\bar{Q})$ avec $\psi_{|\partial\Omega}=0$ et $I^{1-\alpha}\psi(x,0)=0$ dans Q, en intégrant par parties sur Q, nous avons

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_\Omega(y_n(x,t;v_n,0)-y(x,t;0,0))\psi(x,t)dxdt =\\&\int_0^T\int_\Omega(-\mathcal{D}_C^\alpha\xi(x,t;v_n)-\Delta\xi(x,t;v_n))\psi(x,t)dxdt =\\&\int_0^T\int_\Omega(D_{RL}^\alpha\psi(x,t)-\Delta\psi(x,t))\xi(x,t;v_n)dxdt.\end{aligned} \tag{4.48}$$

En utilisant (4.33c) et (4.45), en passant à la limite dans (4.48), on obtient

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_\Omega(y^\gamma(x,t;u^\gamma,0)-y(x,t;0,0))\psi(x,t)dxdt =\\&\int_0^T\int_\Omega(D_{RL}^\alpha\psi(x,t)-\Delta\psi(x,t))\xi^\gamma(x,t;u^\gamma)dxdt\end{aligned} \tag{4.49}$$

$\forall\psi\in\mathcal{C}^\infty(\bar{Q})$ avec $\psi_{|\partial\Omega}=0$ et $I^{1-\alpha}\psi(x,0)=0$ dans Q.

d'où en utilisant de nouveau le lemme 1.6, nous obtenons

$$\int_0^T \int_\Omega (y^\gamma(x,t;u^\gamma,0) - y(x,t;0,0))\psi(x,t)dxdt =$$
$$\int_0^T \int_\Omega (-\mathcal{D}_C^\alpha \xi(x,t;v_n) - \Delta\xi(x,t;v_n))\psi(x,t)dxdt$$
$$+ \int_\Omega \xi^\gamma(x,T;u^\gamma) I^{1-\alpha}\psi(x,T)dx - \int_{\partial\Omega}\int_0^T \xi^\gamma(\sigma,t)\frac{\partial\psi}{\partial\nu}(\sigma,t)dtd\sigma$$

$\forall\psi \in \mathcal{C}^\infty(\bar{Q})$ avec $\psi_{|\partial\Omega} = 0$ et $I^{1-\alpha}\psi(x,0) = 0$ dans Q.

D'après (4.46) et (4.47), nous avons

$$\xi^\gamma = 0 \text{ sur } \Sigma. \tag{4.50}$$

D'après (4.46), (4.47) et (4.50), nous avons que (ξ^γ, y^γ) est solution de (4.17).

Étape 3 :La fonction $v \to J_\gamma(v)$ étant semi-continue inférieurement pour la topologie faible, on a

$$J_\gamma(u^\gamma) \leq \lim_{n\to+\infty} \inf J_\gamma(v_n),$$

d'où d'après (4.27), on peut écrire

$$J_\gamma(u^\gamma) = \inf_{v\in L^2(\Sigma)} J_\gamma(v).$$

L'unicité de u^γ vient de la strict-convexité de J_γ.

□

Théorème 4.2. *Soit u^γ le contrôle à moindres regrets. Alors il existe $q^\gamma \in L^2((0,T);H_0^1(\Omega))$ et $p^\gamma \in L^2((0,T);H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))$ telles que $(u^\gamma, y^\gamma = y(u^\gamma,0), p^\gamma, q^\gamma)$ satisfait le système d'optimalité suivant :*

$$\begin{cases} D_{RL}^\alpha y^\gamma - \Delta y^\gamma &= 0 & \textit{dans } Q, \\ y^\gamma &= u^\gamma & \textit{sur } \Sigma, \\ I^{1-\alpha}y^\gamma(0) &= y^0 & \textit{dans } \Omega, \end{cases} \tag{4.51}$$

$$\begin{cases} D_{RL}^\alpha q^\gamma - \Delta q^\gamma &= \dfrac{1}{\sqrt{\gamma}}\xi(u^\gamma) & \textit{dans } Q, \\ q^\gamma &= 0 & \textit{sur } \Sigma, \\ I^{1-\alpha}q^\gamma(0) &= 0 & \textit{dans } \Omega, \end{cases} \tag{4.52}$$

$$\begin{cases} -\mathcal{D}_C^\alpha p^\gamma - \Delta p^\gamma &= y^\gamma - z_d + \dfrac{1}{\sqrt{\gamma}}q^\gamma & \textit{dans } Q, \\ p^\gamma &= 0 & \textit{sur } \Sigma, \\ p^\gamma(T) &= 0 & \textit{dans } \Omega, \end{cases} \tag{4.53}$$

et

$$Nu^\gamma - \frac{\partial p^\gamma}{\partial \nu} = 0 \quad dans\ Q. \tag{4.54}$$

Démonstration. Les relations (4.36), (4.40) et (4.41) donnent (4.51). Pour caractériser le contrôle à moindres regrets u^γ, on utilise les conditions d'optimalité d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dk} J_\gamma(u^\gamma + k(v-u^\gamma))|_{k=0} = 0, \forall v \in L^2(Q). \tag{4.55}$$

Posons $w = v - u^\gamma$, on a alors,

$$\begin{array}{rcl} J_\gamma(u^\gamma + kw) & = & J(u^\gamma + kw) - J(0,0) + \dfrac{1}{\gamma}\|\xi(u^\gamma + kw)\|^2_{L^2(Q)} \\ & = & \|y(u^\gamma,0) - z_d\|^2_{L^2(Q)} + k^2\|y(w,0)\|^2_{L^2(Q)} \\ & + & 2k(y(u^\gamma,0) - z_d, y(w,0))_{L^2(Q)} \\ & + & N\|u^\gamma\|^2_{L^2(\Sigma)} + k^2N\|w\|^2_{L^2(\Sigma)} + 2k(u^\gamma,w)_{L^2(\Sigma)} - \|y(0,0) - z_d\|^2_{L^2(Q)} \\ & + & \dfrac{1}{\gamma}\|\xi(u^\gamma)\|^2_{L^2(Q)} + \dfrac{k^2}{\gamma}\|\xi(w)\|^2_{L^2(Q)} + \dfrac{2k}{\gamma}(\xi(u^\gamma),\xi(w))_{L^2(Q)}. \end{array}$$

d'où

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{J_\gamma(u^\gamma + kw) - J_\gamma(u^\gamma)}{k} & = & k\|y(w,0)\|^2_{L^2(Q)} + 2(y(u^\gamma,0) - z_d, y(w,0))_{L^2(Q)} \\ & + & kN\|w\|^2_{L^2(\Sigma)} + 2(u^\gamma,w)_{L^2(\Sigma)} + \dfrac{k}{\gamma}\|\xi(w)\|^2_{L^2(Q)} \\ & + & \dfrac{2}{\gamma}(\xi(u^\gamma),\xi(w))_{L^2(Q)}. \end{array}$$

donc d'après (4.55), et en remplaçant w par $v - u^\gamma$ on obtient l'égalité suivante :

$$\begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega\int_0^T (y(u^\gamma,0) - z_d)(y(v,0) - y(u^\gamma,0))dtdx + \\ \displaystyle\int_\Omega\int_0^T Nu^\gamma(v - u^\gamma)dtdx + \\ \displaystyle\frac{1}{\gamma}\int_\Omega\int_0^T (\xi(x,t;u^\gamma),\xi(x,t;v-u^\gamma))\,dtdx = 0 \quad \forall v \in L^2(\Sigma), \end{array} \tag{4.56}$$

où d'après (4.17), $\xi(v - u^\gamma) = \xi(x,t;v-u^\gamma) \in L^2((0,T);H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))$ est solution de

$$\left\{\begin{array}{lcll} -\mathcal{D}_C^\alpha\xi(v-u^\gamma) - \Delta\xi(v-u^\gamma) & = & y(v,0) - y^\gamma(u^\gamma,0) & \text{dans } Q, \\ \xi(v-u^\gamma) & = & 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \xi(T;v-u^\gamma) & = & 0 & \text{dans } \Omega. \end{array}\right. \tag{4.57}$$

Soit $z(v-u^\gamma)=y(x,t;v,0)-y^\gamma(x,t;u^\gamma,0)$ l'état associé à $(v-u^\gamma)\in L^2(\Sigma)$. Alors d'après (4.9), $z=z(v-u^\gamma)\in L^2(Q)$ est solution de l'équation de diffusion fractionnaire :

$$\left\{\begin{array}{lcll} D^\alpha_{RL}z-\Delta z & = & 0 & \text{dans } Q,\\ z & = & v-u^\gamma & \text{sur } \Sigma,\\ I^{1-\alpha}z(0) & = & 0 & \text{dans } \Omega. \end{array}\right. \tag{4.58}$$

Pour interpréter (4.56), considérons $q^\gamma=q^\gamma(u^\gamma,0)$ solution de l'équation (4.52). Comme $\dfrac{1}{\sqrt{\gamma}}\xi(u^\gamma)\in L^2(Q)$, d'après le théorème 2.1, q^γ est unique et appartient à $L^2((0,T);H^1_0(\Omega))$. De plus, il existe une constante $C>0$ telle que

$$\|q^\gamma\|_{L^2((0,T);H^1_0(\Omega))}\leq\frac{C}{\sqrt{\gamma}}\|\xi(u^\gamma)\|_{L^2(Q)}. \tag{4.59}$$

En multipliant la première équation de (4.57) par $\dfrac{1}{\sqrt{\gamma}}q^\gamma$ et en utilisant le lemme 1.6, il vient que

$$\int_0^T\int_\Omega\frac{1}{\sqrt{\gamma}}q^\gamma(x,t)(-\mathcal{D}^\alpha_C\xi(x,t;v-u^\gamma)-\Delta\xi(x,t;v-u^\gamma))dxdt=$$
$$-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\int_\Omega\xi(x,T;v-u^\gamma)I^{1-\alpha}q^\gamma(x,T)dx+\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\int_\Omega\xi(x,0;v-u^\gamma)I^{1-\alpha}q^\gamma(x,0^+)dx$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\int_0^T\int_\Omega(D^\alpha_{RL}q^\gamma(x,t)-\Delta q^\gamma(x,t))\xi(x,t;v)dxdt.$$

Soit

$$\int_\Omega\int_0^T\frac{1}{\sqrt{\gamma}}q^\gamma(x,t)(y(x,t;v,0)-y^\gamma(x,t;u^\gamma,0))dtdx=$$
$$\int_\Omega\int_0^T\frac{1}{\gamma}\xi(x,t;u^\gamma)\xi(x,t;v-u^\gamma)dtdx,$$

d'où en combinant avec (4.56), on obtient

$$\begin{array}{l}\displaystyle\int_\Omega\int_0^T(y(u^\gamma,0)-z_d+\frac{1}{\sqrt{\gamma}}q^\gamma)(y(v,0)-y(u^\gamma,0))dtdx+\\ \displaystyle\int_\Omega\int_0^T Nu^\gamma(v-u^\gamma)dtdx=0,\quad\forall v\in L^2(\Sigma).\end{array} \tag{4.60}$$

Maintenant, soit p^γ solution de (4.53). Alors, d'après le corollaire 2.1, $p^\gamma\in L^2((0,T);H^2(\Omega)\cap H^1_0(\Omega))$ car $y^\gamma-z_d+\dfrac{1}{\sqrt{\gamma}}q^\gamma\in L^2(Q)$. En multipliant la première équation de (4.58) par p^γ solution de (4.53), et en utilisant le lemme d'intégration par parties, on a

$$\int_0^T \int_\Omega (D^\alpha_{RL} z(x,t) - \Delta z(x,t)) p^\gamma(x,t) dxdt =$$
$$\int_\Omega p^\gamma(x,T) I^{1-\alpha} z(x,T) dx - \int_\Omega p^\gamma(x,0) I^{1-\alpha} z(x,0^+) dx$$
$$+ \int_0^T \int_\Omega z(x,t)(-\mathcal{D}^\alpha_C p^\gamma(x,t) - \Delta p^\gamma(x,t)) dxdt.$$

D'où d'après (4.53) et (4.58), on obtient

$$\int_0^T \int_\Omega (y(v,0) - y(u^\gamma,0))(y(u^\gamma,0) - z_d + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} q^\gamma) dxdt$$
$$+ \int_0^T \int_{\partial\Omega} (v - u^\gamma) \frac{\partial p^\gamma}{\partial \nu} d\sigma dt = 0.$$

et en combinant avec (4.60), nous avons

$$\int_\Omega \int_0^T \left(N u^\gamma - \frac{\partial p^\gamma}{\partial \nu} \right) (v - u^\gamma) = 0,$$

ce qui implique que

$$N u^\gamma - \frac{\partial p^\gamma}{\partial \nu} = 0 \quad \text{dans} \quad Q.$$

Réciproquement, nous supposons que (4.55) est vérifiée, c'est-à-dire que la limite existe. Alors d'après la convexité de la fonction $v \to J_\gamma(v)$, nous avons pour tout $\theta \in]0,1[$ que

$$\begin{array}{rcl} J_\gamma(\theta v + (1-\theta) w) & \leq & \theta J_\gamma(v) + (1-\theta) J_\gamma(w) \\ & = & \theta(J_\gamma(v) - J_\gamma(w)) + J_\gamma(w), \end{array}$$

ce qui implique que

$$\frac{1}{\theta}[J_\gamma(\theta v + (1-\theta) w) - J_\gamma(w)] \leq J_\gamma(v) - J_\gamma(w).$$

Ce qui peut encore s'écrire

$$J_\gamma(v) - J_\gamma(w) \geq \frac{1}{\theta}[J_\gamma(w + \theta(v - w)) - J_\gamma(w)].$$

Or nous avons supposé que (4.55) est vérifiée, on a donc

$$J_\gamma(v) - J_\gamma(w) \geq J'_\gamma(w).(v - w) = 0 \qquad \forall v \in L^2(\Sigma).$$

Maintenant, prenons $w = u^\gamma$ alors nous avons que

$$J_\gamma(v) - J_\gamma(u^\gamma) \geq 0 \qquad \forall v \in L^2(\Sigma).$$

Ce qui implique que u^γ est solution du problème de contrôle à moindres regrets (4.25).

$\square$

4.3 Résolution du problème de contrôle sans regret.

Nous venons de résoudre le problème de contrôle à moindres regrets, nous allons maintenant montrer que le contrôle à moindres regrets converge vers le contrôle sans regret que nous caractériserons ensuite par un système d'optimalité. Nous donnons donc le résultat suivant,

Théorème 4.3. *Le contrôle à moindres regrets u^γ converge vers le contrôle sans regret u solution de* (4.21) *dans $L^2(\Sigma)$.*

Démonstration. Comme u^γ est solution de (4.25), on a

$$J_\gamma(u^\gamma) \leq J_\gamma(0) = 0,$$

car $\xi(0) = 0$ dans Q d'après (4.17). Donc d'après la définition de J_γ donnée par (4.26), nous pouvons écrire que

$$\|y(u^\gamma, 0) - z_d\|^2_{L^2(Q)} + N\|u^\gamma\|^2_{L^2(\Sigma)} + \frac{1}{\gamma}\|\xi(u^\gamma)\|^2_{L^2(Q)} \leq J(0,0) = \|y(0,0) - z_d\|^2_{L^2(Q)}.$$

Ce qui implique que

$$\|y(u^\gamma, 0)\|_{L^2(Q)} \leq \|y(0,0) - z_d\|_{L^2(Q)}, \tag{4.61a}$$

$$\|u^\gamma\|_{L^2(\Sigma)} \leq \frac{1}{N}\|y(0,0) - z_d\|_{L^2(Q)}, \tag{4.61b}$$

$$\|\xi(u^\gamma)\|_{L^2(Q)} \leq \sqrt{\gamma}\|y(0,0) - z_d\|_{L^2(Q)}. \tag{4.61c}$$

Ainsi d'après (4.61b) et $(4.51)_1$, nous avons

$$\|D^\alpha_{RL} y(u^\gamma, 0) - \Delta y(u^\gamma, 0)\|_{L^2(Q)} \leq \frac{1}{N}\|y(0,0) - z_d\|_{L^2(Q)}. \tag{4.62}$$

Comme $y(u^\gamma, 0)$ est solution de (4.51), d'après le théorème 4.1, il existe une constante C indépendante de γ telle que

$$\|y(u^\gamma, 0)\|_{L^2((0,T);H^1_0(\Omega))} \leq \frac{C}{N}\|y(0,0) - z_d\|_{L^2(Q)}.$$

D'où ils existent $u \in L^2(\Sigma), y \in L^2(Q), \delta \in L^2(Q)$ et des sous-suites extraites de (u^γ) and (y^γ) (encore appelées (u^γ) et (y^γ)) telles que

$$u^\gamma \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } L^2(\Sigma), \tag{4.63a}$$
$$y^\gamma \rightharpoonup y \text{ faiblement dans } L^2(Q), \tag{4.63b}$$
$$D^\alpha_{RL} y^\gamma - \Delta y^\gamma \rightharpoonup \delta \text{ faiblement dans } L^2(Q). \tag{4.63c}$$

En procédant comme aux pages 58 à 79, en utilisant (4.63a)-(4.63c), nous montrons que $y = y(x,t;u,0)$ est solution de

$$\begin{cases} D^\alpha_{RL} y - \Delta y &= 0 & \text{dans } Q, \\ y &= u & \text{sur } \Sigma, \\ I^{1-\alpha} y(0) &= y^0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{4.64}$$

Et $\xi = \xi(x,t;u) \in L^2((0,T); H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega))$ est solution de

$$\begin{cases} -\mathcal{D}^\alpha_C \xi - \Delta \xi &= y(u,0) - y(0,0) & \text{dans } Q, \\ \xi &= 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \xi(T) &= 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{4.65}$$

De plus, d'après (4.61c), nous avons

$$\xi(u^\gamma) \rightharpoonup \xi(u) = 0 \text{ fortement dans } L^2(Q),$$

par conséquent,

$$\int_0^T \int_\Omega g(x,t)\xi(x,t;u)dxdt = 0.$$

Ce qui signifie que u est solution du problème sans regret (4.21).

$\square$

Théorème 4.4. *Soit $u = \lim_{\gamma \to 0} u^\gamma$, le contrôle sans regret associé à l'état $y(u,0)$. Alors ils existent $q \in L^2((0,T); H^1_0(\Omega))$ et $p \in L^2((0,T); H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega))$ telles que $(u, y = y(u,0), q, p)$ satisfait le système d'optimalité suivant :*

$$\begin{cases} D^\alpha_{RL} y - \Delta y &= 0 & \textit{dans } Q, \\ y &= u & \textit{sur } \Sigma, \\ I^{1-\alpha} y(0) &= y^0 & \textit{dans } \Omega, \end{cases} \tag{4.66}$$

$$\begin{cases} D^\alpha_{RL} q - \Delta q &= \tau_1 & \textit{dans } Q, \\ q &= 0 & \textit{sur } \Sigma, \\ I^{1-\alpha} q(0) &= 0 & \textit{dans } \Omega, \end{cases} \tag{4.67}$$

$$\begin{cases} -\mathcal{D}^\alpha_C p - \Delta p &= y^\gamma - z_d + \tau_2 & \textit{dans } Q, \\ p &= 0 & \textit{sur } \Sigma, \\ p(T) &= 0 & \textit{dans } \Omega, \end{cases} \tag{4.68}$$

et

$$Nu - \frac{\partial p}{\partial \nu} = 0 \quad \textit{dans } Q. \tag{4.69}$$

Démonstration. D'après (4.64), nous avons (4.66).
D'après (4.61c), nous savons que

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \xi(u^\gamma) \right\|_{L^2(Q)} \leq \|y(0,0) - z_d\|_{L^2(Q)},$$

d'où en utilisant (4.59), nous obtenons

$$\|q^\gamma\|_{L^2((0,T);H_0^1(\Omega))} \leq C\|y(0,0) - z_d\|_{L^2(Q)}. \tag{4.70}$$

Par conséquent, il existe $\tau_1 \in L^2(Q)$ et $q \in L^2((0,T); H_0^1(\Omega))$ telles que :

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \xi(u^\gamma) \rightharpoonup \tau_1 \text{ faiblement dans } L^2(Q), \tag{4.71}$$

$$q^\gamma \rightharpoonup q \text{ faiblement dans } L^2((0,T); H_0^1(\Omega)). \tag{4.72}$$

En utilisant (4.71) et (4.72) et en passant à la limite dans (4.52), nous montrons comme pour la convergence de $y_n = y(v_n, 0)$ (voir pages 75 à 77) que q vérifie (4.67).

Nous avons q^γ solution de l'équation (4.52), d'où d'après le théorème 2.1, nous savons que q^γ vérifie,

$$\|q^\gamma\|_{L^2((0,T);H_0^1(\Omega))} \leq C\|\xi(u^\gamma)\|_{L^2(Q)},$$

d'où en multipliant par $\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$ et en combinant avec (4.61c), on obtient

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{\gamma}} q^\gamma \right\|_{L^2((0,T);H_0^1(\Omega))} \leq C\|y(0,0) - z_d\|_{L^2(Q)}.$$

Alors, il existe $\tau_2 \in L^2((0,T); H_0^1(\Omega)$ telle que,

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} q^\gamma \rightharpoonup \tau_2 \text{ faiblement dans } L^2((0,T); H_0^1(\Omega)). \tag{4.73}$$

On a p^γ solution de (4.53), d'où d'après le corollaire 2.1, nous savons qu'il existe $C > 0$ telle que

$$\|p^\gamma\|_{L^2((0,T);H^2(\Omega))} \leq C.$$

Ainsi, il existe $p \in L^2((0,T); H^2(\Omega))$ telle que

$$p^\gamma \rightharpoonup p \text{ faiblement dans } L^2((0,T);H^2(\Omega)). \tag{4.74}$$

En utilisant (4.73) et (4.74) et en passant à la limite dans (4.53), nous montrons comme pour la convergence de $y_n = y(v_n, 0)$ (voir pages 75 à 77) que p vérifie (4.68).

D'après (4.61b) et (4.54), nous avons

$$\left\| \frac{\partial p^\gamma}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\Sigma)} \leq \|y(0,0) - z_d\|_{L^2(Q)},$$

alors, on sait qu'il existe $\delta \in L^2(\Sigma)$ telle que

$$\frac{\partial p^\gamma}{\partial \nu} \rightharpoonup \delta \text{ faiblement dans } L^2(\Sigma)$$

d'où en combinant avec (4.74), nous obtenons

$$\frac{\partial p^\gamma}{\partial \nu} \rightharpoonup \frac{\partial p}{\partial \nu} \text{ faiblement dans } L^2(\Sigma). \tag{4.75}$$

Maintenant, en passant à la limite dans (4.54), et en utilisant (4.63a) et (4.75), on obtient (4.69). $\square$

CHAPITRE 5

CONTRÔLE OPTIMAL D'UNE ÉQUATION D'ONDE FRACTIONNAIRE EN TEMPS À DONNÉES INCOMPLÈTES.

Dans ce chapitre, nous procédons comme précédemment afin de résoudre un problème de contrôle sans regret où cette fois ci, l'équation d'état est une équation d'onde fractionnaire à données incomplètes.

5.1 Position du problème.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et Ω un sous-ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière $\partial\Omega$ de classe $\mathcal{C}^2$. Pour le temps $T > 0$, nous posons $Q = \Omega \times]0, T[, \quad \Sigma = \partial\Omega \times]0, T[$, et on considère l'équation d'onde fractionnaire :

$$\left\{ \begin{array}{llll} D^{\alpha}_{RL} y(x,t) - \Delta y(x,t) & = & v(x,t) & (x,t) \in Q \\ y(\sigma,t) & = & 0 & (\sigma,t) \in \Sigma \\ I^{2-\alpha} y(x,0^+) & = & y^0 & x \in \Omega \\ \dfrac{\partial}{\partial t} I^{2-\alpha} y(x,0^+) & = & g & x \in \Omega \end{array} \right. \tag{5.1}$$

où $3/2 < \alpha < 2$, $y^0 \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$, $g \in L^2(\Omega)$, et $v \in L^2(Q)$. g est inconnu, $I^{2-\alpha} y(x,0^+) = \lim\limits_{t \to 0} I^{2-\alpha} y(x,t)$ et $\dfrac{\partial}{\partial t} I^{2-\alpha} y(x,0^+) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\partial}{\partial t} I^{2-\alpha} y(x,t)$ où l'intégrale fractionnaire I^{α} d'ordre α et la dérivée fractionnaire D^{α}_{RL} d'ordre α sont pris au sens de Riemann-Liouville.

D'après la section 2.2, l'équation (5.1) admet une unique solution $y(v,g) \in L^2((0,T); H^1_0(\Omega))$. De plus, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|y\|_{L^2((0,T);H_0^1(\Omega))} \quad \leq \quad \Delta\left(\|y^0\|_{H_0^1(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(Q)}\right) \tag{5.2}$$

$$\|I^{2-\alpha}y\|_{C([0,T];H_0^1(\Omega))} \leq \Pi\left(\|y^0\|_{H_0^1(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(Q)}\right), \tag{5.3}$$

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t}I^{2-\alpha}y\right\|_{C([0,T];L^2(\Omega))} \leq \Theta\left(\|y^0\|_{H^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(Q)}\right), \tag{5.4}$$

avec

$$\Delta = \max\left(C\sqrt{\frac{2T^{2\alpha-3}}{(2\alpha-3)}}, C\sqrt{\frac{T^{\alpha-1}}{(\alpha-1)}}, C\sqrt{\frac{2T^{\alpha}}{\alpha(\alpha-1)}}\right),$$

$$\Pi = \sup\left(C\sqrt{2}, C\sqrt{2T^{2-\alpha}}, C\sqrt{\frac{2T^{3-\alpha}}{(3-\alpha)}}\right)$$

et

$$\Theta = \max\left(\sqrt{2}CT^{\alpha-1}, \sqrt{2}C\right)$$

Soit $y(v,g) \in L^2((0,T);H_0^1(\Omega)) \subset L^2(Q)$ solution de (5.1), alors nous pouvons définir la fonctionnelle coût J par

$$J(v,g) = \|y(x,t;v,g) - z_d\|^2_{L^2(Q)} + N\|v\|^2_{L^2(Q)}. \tag{5.5}$$

On souhaite résoudre le problème de contrôle optimal suivant

$$\inf_{v \in L^2(Q)} J(v,g). \tag{5.6}$$

Si $g = 0$ (on a donc un problème à données complètes), alors $J(v,g) = J(v,0)$ donc le problème de contrôle optimal

$$\inf_{v \in L^2(Q)} J(v,0),$$

a un sens. Dans ce travail, nous faisons le choix de considérer $g \in L^2(\Omega)$ alors le problème (5.6), n'a pas de sens, car $L^2(\Omega)$ est un espace de dimension infinie. Et c'est pour cela que nous utilisons, comme dans la section précédente, les notions de contrôle à moindres regrets et contrôle sans regret.

Avant de passer à la résolution du problème de contrôle à moindres regrets puis à la résolution du problème de contrôle sans regret, nous devons faire les calculs suivants.

Soient $y(v,0) = y(x,t;v,0), y(0,g) = y(x,t;0,g)$ et $y(0,0) = y(x,t;0,0)$ les solutions respectivement de :

$$\left\{\begin{array}{lcll} D^{\alpha}_{RL}y(v,0) - \Delta y(v,0) & = & v & \text{dans } Q, \\ y & = & 0 & \text{sur } \Sigma, \\ I^{2-\alpha}y(0;v,0) & = & y^0 & \text{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}I^{2-\alpha}y(0;v,0) & = & 0 & \text{dans } \Omega, \end{array}\right. \tag{5.7}$$

$$\left\{\begin{array}{lcll} D^{\alpha}_{RL}y(0,g) - \Delta y(0,g) & = & 0 & \text{dans } Q, \\ y & = & 0 & \text{sur } \Sigma, \\ I^{2-\alpha}y(0;0,g) & = & y^0 & \text{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}I^{2-\alpha}y(0;0,g) & = & g & \text{dans } \Omega, \end{array}\right. \tag{5.8}$$

et

$$\left\{\begin{array}{lcll} D^{\alpha}_{RL}y(0,0) - \Delta y(0,0) & = & 0 & \text{dans } Q, \\ y & = & 0 & \text{sur } \Sigma, \\ I^{2-\alpha}y(0;0,0) & = & y^0 & \text{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}I^{2-\alpha}y(0;0,0) & = & 0 & \text{dans } \Omega, \end{array}\right. \tag{5.9}$$

où $I^{2-\alpha}y(0;v,g) = \lim\limits_{t\to 0^+} I^{2-\alpha}y(x,t;v,g)$ et $\dfrac{\partial}{\partial t}I^{2-\alpha}y(0;v,g) = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{\partial}{\partial t}I^{2-\alpha}y(x,t;v,g)$.

Comme $v \in L^2(Q), y^0 \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$ et $g \in L^2(\Omega)$, d'après la section 2.2, nous savons que $y(v,0), y(0,g)$ et $y(0,0)$ appartiennent à $L^2((0,T);H^1_0(\Omega))$.

Ainsi, nous avons le résultat suivant :

Lemme 5.1. *Pour chaque $v \in L^2(Q)$ et pour chaque $g \in L^2(\Omega)$, nous avons*

$$\begin{array}{rcl} J(v,g) - J(0,g) & = & J(v,0) - J(0,0) \\ & + & 2\displaystyle\int_{\Omega}\int_0^T [y(0,g) - y(0,0)][y(v,0) - y(0,0)]dtdx, \end{array} \tag{5.10}$$

où J est la fonctionnelle définie par (5.5) et $y(v,g) = y(x,t;v,g) \in L^2(0,T;H^1_0(\Omega)) \subset L^2(Q)$ est solution de (5.1).

Démonstration. Nous obtenons ce résultat en procédant exactement comme pour le lemme 4.2. □

De plus, nous avons le lemme suivant,

Lemme 5.2. *Pour chaque $v \in L^2(Q)$ et pour chaque $g \in L^2(\Omega)$, nous avons*

$$J(v,g) - J(0,g) = J(v,0) - J(0,0) + 2\int_{\Omega} g\xi(x,0;v)dx, \tag{5.11}$$

où $\xi(v) = \xi(x,t;v) \in C([0,T]; H_0^1(\Omega))$ *est solution de*

$$\left\{\begin{array}{lcll} \mathcal{D}_C^\alpha \xi(v) - \Delta\xi(v) & = & y(v,0) - y(0,0) & \textit{dans } Q, \\ \xi & = & 0 & \textit{sur } \Sigma, \\ \xi(x,T;v) & = & 0 & \textit{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial t}(x,T;v) & = & 0 & \textit{dans } \Omega. \end{array}\right. \tag{5.12}$$

Démonstration. Comme $y(v,0) - y(0,0) \in L^2(Q)$, d'après le corollaire 2.3, nous savons que le système (5.12) admet une unique solution $\xi(v) \in C([0,T]; H_0^1(\Omega))$. De plus, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|\xi(v)\|_{C([0,T];H_0^1(\Omega))} \leq C\sqrt{\frac{T^{\alpha-1}}{\alpha-1}}\|y(v,0) - y(0,0)\|_{L^2(Q)}, \tag{5.13}$$

et

$$\left\|\frac{\partial \xi}{\partial t}(v)\right\|_{C([0,T];L^2(\Omega))} \leq C\sqrt{\frac{T^{2\alpha-3}}{2\alpha-3}}\|y(v,0) - y(0,0)\|_{L^2(Q)}. \tag{5.14}$$

Soit $z = y(0,g) - y(0,0)$. Alors z vérifie

$$\left\{\begin{array}{lcll} D_{RL}^\alpha z - \Delta z & = & 0 & \text{dans } Q, \\ z & = & 0 & \text{sur } \Sigma, \\ I^{2-\alpha} z(0) & = & 0 & \text{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial}{\partial t} I^{2-\alpha} z(0) & = & g & \text{dans } \Omega. \end{array}\right. \tag{5.15}$$

Comme $g \in L^2(\Omega)$, d'après la section 2.2, on a $z \in L^2((0,T); H_0^1(\Omega))$, $I^{2-\alpha} z \in C([0,T], H_0^1(\Omega))$ et $\dfrac{\partial}{\partial t} I^{2-\alpha} z \in C([0,T], L^2(\Omega))$. Maintenant, multiplions la première équation de (5.12) par z et en intégrant par parties sur Q, nous avons en utilisant le lemme 1.7 :

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \int_0^T z(x,t)(\mathcal{D}_C^\alpha \xi(x,t;v) - \Delta\xi(x,t;v))dxdt = \\ &\int_0^T \int_\Omega (D_{RL}^\alpha z(x,t) - \Delta z(x,t))\xi(x,t;v)dxdt \\ &- \int_\Omega \xi(x,T;v)\frac{\partial}{\partial t}(I^{2-\alpha} z(x,T))dx + \int_\Omega \xi(x,0;v)\frac{\partial}{\partial t}(I^{2-\alpha} z(x,0^+))dx \\ &+ \int_\Omega I^{2-\alpha} z(x,T)\frac{\partial \xi}{\partial t}(x,T;v)dx - \int_\Omega I^{2-\alpha} z(x,0)\frac{\partial \xi}{\partial t}(x,0;v)dx. \end{aligned}$$

D'où en combinant (5.12) et (5.15), nous obtenons

$$\int_0^T \int_\Omega (y(x,t;v,0) - y(x,t;0,0))(y(x,t;0,g) - y(x,t;0,0))dxdt = \int_\Omega \xi(x,0;v)gdx,$$

ainsi (5.10) devient

$$J(v,g) - J(0,g) = J(v,0) - J(0,0) + 2\int_\Omega \xi(x,0;v)gdx.$$

□

Maintenant considérons le problème de contrôle sans regret :

$$\inf_{v\in L^2(Q)} \sup_{g\in L^2(\Omega)} (J(v,g) - J(0,g)). \tag{5.16}$$

Alors d'après (5.11), ce problème est équivalent au problème suivant :

$$\inf_{v\in L^2(Q)} \sup_{g\in L^2(\Omega)} \left[J(v,0) - J(0,0) + 2\int_\Omega \xi(x,0;v)gdx\right]. \tag{5.17}$$

L'espace $L^2(\Omega)$ étant un espace vectoriel, nous avons les deux possibilités suivantes :

$$\sup_{g\in L^2(\Omega)} \left(\int_\Omega \xi(x,0;v)gdx\right) = +\infty, \tag{5.18}$$

ou,

$$\sup_{g\in L^2(\Omega)} \left(\int_\Omega \xi(x,0;v)gdt\right) = 0. \tag{5.19}$$

Et le contrôle sans regret existe que dans le cas (5.19). Donc le contrôle sans regret appartient à l'ensemble :

$$\mathcal{K} = \{v \in L^2(Q) \text{ telle que } \int_\Omega \xi(x,0;v)gdx = 0, \quad \forall g \in L^2(\Omega)\}.$$

Un tel contrôle étant difficile à caractériser, nous considérons la forme pénalisée du problème (5.16). Plus précisément, pour chaque $\gamma > 0$, nous considérons le problème à moindres regrets :

$$\inf_{v\in L^2(Q)} \sup_{g\in L^2(\Omega)} (J(v,g) - J(0,g) - \gamma\|g\|^2_{L^2(\Omega)}). \tag{5.20}$$

D'après (5.11), le problème (5.20) est équivalent au problème suivant :

$$\inf_{v\in L^2(Q)} \left[J(v,0) - J(0,0) + 2\sup_{g\in L^2(\Omega)} \left(\int_\Omega \xi(x,0;v)gdx - \frac{\gamma}{2}\|g\|^2_{L^2(\Omega)}\right)\right].$$

D'où en utilisant la transformée de Legendre-Fenchel, on obtient

$$2\gamma \sup_{g\in L^2(\Omega)} \left(\int_\Omega \frac{1}{\gamma}\xi(x,0;v)gdt - \frac{1}{\gamma}\frac{\gamma}{2}\|g\|^2_{L^2(\Omega)} \right) \quad = \quad \frac{1}{\gamma}\left\|\xi(.,0;v)\right\|^2_{L^2(\Omega)},$$

et le problème (5.20) devient : Pour chaque $\gamma > 0$, trouver $u^\gamma \in L^2(Q)$ telle que :

$$J_\gamma(u^\gamma) = \inf_{v\in L^2(Q)} J_\gamma(v), \tag{5.21}$$

où

$$J_\gamma(v) = J(v,0) - J(0,0) + \frac{1}{\gamma}\left\|\xi(.,0;v)\right\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{5.22}$$

5.2 Résolution du problème de contrôle à moindres regrets.

Nous avons le résultat d'existence et d'unicité qui suit :

Proposition 5.1. *Soit* $\gamma > 0$. *Alors il existe un unique contrôle à moindres regrets* u^γ *qui vérifie* (5.21).

Démonstration. Nous avons

$$J_\gamma(v) = J(v,0) - J(0,0) + \frac{1}{\gamma}\left\|\xi(.,0;v)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \geq -J(0,0),$$

alors nous savons que $\inf\limits_{v\in L^2(Q)} J_\gamma(v)$ existe. Soit $(v_n) \in L^2(Q)$ une suite minimisante telle que

$$\lim_{n\to+\infty} J_\gamma(v_n) = \inf_{v\in L^2(Q)} J_\gamma(v). \tag{5.23}$$

Alors $y_n = y(x,t;v_n,0)$ est solution de (5.7). Et y_n satisfait :

$$\begin{aligned}
D^\alpha_{RL} y_n(x,t) - \Delta y_n(x,t) &= v_n(x,t) \quad \text{dans } Q, && (5.24a)\\
y_n(x,t) &= 0 \quad \text{sur } \Sigma, && (5.24b)\\
I^{2-\alpha} y_n(x,0) &= y^0 \quad \text{dans } \Omega, && (5.24c)\\
\frac{\partial}{\partial t} I^{2-\alpha} y_n(x,0) &= 0 \quad \text{dans } \Omega. && (5.24d)
\end{aligned}$$

D'après (5.23), il existe $C(\gamma) > 0$ indépendante de n telle que,

$$0 \leq J(v_n,0) + \frac{1}{\gamma}\left\|\xi(.,0;v_n)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C(\gamma) + J(0,0) = C(\gamma).$$

Et en utilisant la définition de $J(v_n, 0)$ nous obtenons,

$$\|v_n\|_{L^2(Q)} < C(\gamma), \tag{5.25a}$$

$$\|\xi(.,0;v_n)\|_{L^2(\Omega)} < \sqrt{\gamma}C(\gamma). \tag{5.25b}$$

D'après le théorème 2.2, nous savons qu'il existe une constante C indépendante de n telle que

$$\|y_n\|_{L^2((0,T);H_0^1(\Omega))} < C(\gamma), \tag{5.26a}$$

$$\|I^{2-\alpha}y_n\|_{L^2((0,T);H_0^1(\Omega))} < C(\gamma), \tag{5.26b}$$

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t}I^{2-\alpha}y_n\right\|_{L^2((0,T);L^2(\Omega))} < C(\gamma). \tag{5.26c}$$

De plus, d'après (5.24a) et (5.25a), nous avons

$$\|D_{RL}^{\alpha}y_n - \Delta y_n\|_{L^2(Q)} \leq C(\gamma). \tag{5.27}$$

Par conséquent, il existe $u^\gamma \in L^2(Q), y^\gamma \in L^2((0,T);H_0^1(\Omega)), \delta \in L^2(Q), \eta \in L^2((0,T);H_0^1(\Omega)), \theta \in L^2((0,T);L^2(\Omega))$ et nous pouvons extraire des sous-suites de (v_n) et (y_n)(encore appelées (v_n) et (y_n)) telles que :

$$v_n \rightharpoonup u^\gamma \text{ faiblement dans } L^2(Q), \tag{5.28a}$$

$$D_{RL}^{\alpha}y_n - \Delta y_n \rightharpoonup \delta \text{ faiblement dans } L^2(Q), \tag{5.28b}$$

$$y_n \rightharpoonup y^\gamma \text{ faiblement dans } L^2((0,T);H_0^1(\Omega)), \tag{5.28c}$$

$$I^{2-\alpha}y_n \rightharpoonup \eta \text{ faiblement dans } L^2((0,T),H_0^1(\Omega)), \tag{5.28d}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}I^{2-\alpha}y_n \rightharpoonup \theta \text{ faiblement dans } L^2((0,T);L^2(\Omega)). \tag{5.28e}$$

Le reste de la preuve se décompose en trois étapes.

Étape 1 : Nous prouvons que (u^γ, y^γ) vérifie (5.7).

Soit $\mathbb{D}(Q)$, l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ dans Q à support compact et nous notons $\mathbb{D}'(Q)$ son dual. En multipliant (5.24a) par $\varphi \in \mathbb{D}(Q)$ et en utilisant le lemme 1.7, nous obtenons

$$\int_0^T\int_\Omega (D_{RL}^{\alpha}y_n(x,t) - \Delta y_n(x,t))\varphi(x,t)dxdt = \int_0^T\int_\Omega y_n(x,t)(\mathcal{D}_C^{\alpha}\varphi(x,t) - \Delta\varphi(x,t))dxdt,$$

d'où en passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans la dernière égalité, on a

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty}\int_0^T\int_\Omega (D_{RL}^{\alpha}y_n(x,t) - \Delta y_n(x,t))\varphi(x,t)dxdt = \\
&\int_0^T\int_\Omega y^\gamma(x,t)(\mathcal{D}_C^{\alpha}\varphi(x,t) - \Delta\varphi(x,t))dxdt = \\
&\int_0^T\int_\Omega (D_{RL}^{\alpha}y^\gamma(x,t) - \Delta y^\gamma(x,t))\varphi(x,t)dxdt.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$D^{\alpha}_{RL}y_n-\Delta y_n \rightharpoonup D^{\alpha}_{RL}y^{\gamma}-\Delta y^{\gamma} \quad \text{faiblement dans} \quad \mathbb{D}'(Q),$$

donc d'après (5.28b), nous avons

$$D^{\alpha}_{RL}y^{\gamma}-\Delta y^{\gamma}=\delta \quad \text{dans} \quad Q. \tag{5.29}$$

Ainsi,

$$D^{\alpha}_{RL}y_n-\Delta y_n \rightharpoonup D^{\alpha}_{RL}y^{\gamma}-\Delta y^{\gamma} \quad \text{faiblement dans} \quad L^2(Q). \tag{5.30}$$

D'où en passant à la limite dans (5.24a) et en utilisant (5.30) et (5.28a), nous obtenons,

$$D^{\alpha}_{RL}y^{\gamma}-\Delta y^{\gamma}=u^{\gamma} \quad \text{dans} \quad Q. \tag{5.31}$$

D'une part nous avons, $\forall\varphi\in\mathbb{D}(Q)$,

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega}\int_0^T I^{2-\alpha}y_n(x,t)\varphi(x,t)dtdx=\\ &\int_{\Omega}\int_0^T\left(\int_0^t\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}(t-s)^{1-\alpha}y_n(x,s)ds\right)\varphi(x,t)dxdt=\\ &\int_{\Omega}\int_0^T y_n(x,s)\left(\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_s^T(t-s)^{1-\alpha}\varphi(x,t)dt\right)dsdx\end{aligned}$$

D'où en passant à la limite et en utilisant (5.28c) et (5.28d), on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^T \eta\varphi(x,t)dtdx &= \int_{\Omega}\int_0^T y^{\gamma}(x,s)\left(\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_s^T(t-s)^{1-\alpha}\varphi(x,t)dt\right)dsdx\\ &=\int_{\Omega}\int_0^T I^{2-\alpha}y^{\gamma}(x,t)\varphi(x,t)dtdx, \quad \forall\varphi\in\mathbb{D}(Q).\end{aligned}$$

Ce qui implique que,

$$I^{2-\alpha}y^{\gamma}(x,t)=\eta \text{ dans } Q.$$

Ainsi, (5.28d) devient

$$I^{2-\alpha}y_n \rightharpoonup I^{2-\alpha}y^{\gamma} \text{ faiblement dans } L^2((0,T);H^1_0(\Omega)). \tag{5.32}$$

D'après (5.32), nous avons que

$$\frac{\partial}{\partial t}I^{2-\alpha}y_n \rightharpoonup \frac{\partial}{\partial t}I^{2-\alpha}y^{\gamma} \text{ faiblement dans } \mathbb{D}'(Q)$$

et comme nous avons (5.28e), alors on a

$$\frac{\partial}{\partial t}I^{2-\alpha}y_n \rightharpoonup \frac{\partial}{\partial t}I^{2-\alpha}y^\gamma = \theta \text{ faiblement dans } L^2(Q) \tag{5.33}$$

Comme $y^\gamma \in L^2(Q)$ et $D^\alpha_{RL}y^\gamma - \Delta y^\gamma \in L^2(Q)$, nous savons que $y^\gamma_{|\partial\Omega}$ et $\dfrac{\partial y^\gamma}{\partial v}_{|\partial\Omega}$ existent et appartiennent à $H^{-2}((0,T); H^{-1/2}(\partial\Omega)) \subset H^{-5/2}((0,T); H^{-1/2}(\partial\Omega))$ et $H^{-2}((0,T); H^{-3/2}(\partial\Omega)) \subset H^{-5/2}((0,T); H^{-3/2}(\partial\Omega))$ respectivement (voir preuve résultat d'unicité à la section 2.2). De plus, comme de (5.31), on a $D^\alpha_{RL}y^\gamma = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}I^{2-\alpha}y^\gamma = u^\gamma + \Delta y^\gamma L^2((0,T); H^{-1}(\Omega))$, en utilisant le Lemme 3.1, nous avons $I^{2-\alpha}y^\gamma \in \mathcal{C}([0,T]; H^{1/2}(\Omega)) \subset \mathcal{C}([0,T]; L^2(\Omega))$ et $\dfrac{\partial}{\partial t}I^{2-\alpha}y^\gamma \in \mathcal{C}([0,T]; L^2(\Omega))$ puisque

$$\begin{array}{rcl}
I^{2-\alpha}y^\gamma & \in & L^2((0,T); H^1_0(\Omega)), \\
\dfrac{\partial}{\partial t}I^{2-\alpha}y^\gamma & \in & L^2((0,T); L^2(\Omega)) \\
\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}I^{2-\alpha}y^\gamma & \in & L^2((0,T); H^{-1}(\Omega)).
\end{array}$$

Maintenant, multiplions (5.24a) par une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{Q})$ telle que $\varphi_{|\partial\Omega} = 0$ et $\varphi(x,T) = \dfrac{\partial}{\partial t}\varphi(x,T) = 0$ in Ω, et en intégrant par parties sur Q, d'après le lemme 1.7, on obtient

$$\begin{array}{rcl}
\displaystyle\int_0^T\int_\Omega v_n(x,t)\varphi(x,t)dxdt & = & \displaystyle\int_0^T\int_\Omega (D^\alpha_{RL}y_n(x,t) - \Delta y_n(x,t))\varphi(x,t)dxdt \\
& = & \displaystyle\int_\Omega y^0\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x,0)dx \\
& + & \displaystyle\int_\Omega\int_0^T y_n(x,t)(\mathcal{D}^\alpha_C\varphi(x,t) - \Delta\varphi(x,t))dxdt
\end{array}$$

car on a (5.24c) et (5.24d). Ainsi, en passant à la limite dans la dernière égalité et en utilisant (5.28a) et (5.28c), nous pouvons écrire que

$$\begin{array}{rcl}
\displaystyle\int_0^T\int_\Omega u^\gamma(x,t)\varphi(x,t)dxdt & = & \displaystyle\int_\Omega y^0\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,0)dx \\
& + & \displaystyle\int_\Omega\int_0^T y^\gamma(x,t)(\mathcal{D}^\alpha_C\varphi(x,t) - \Delta\varphi(x,t))dxdt,
\end{array}$$

$\forall\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{Q})$ telle que $\varphi_{|\partial\Omega} = 0$, $\varphi(x,T) = \dfrac{\partial\varphi}{\partial t}(x,T) = 0$ dans Ω, et en utilisant de nouveau le lemme 1.7, nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega u^\gamma(x,t)\varphi(x,t)dxdt &= \int_\Omega y^0\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,0)dx\\ &+ \int_0^T\int_\Omega(D^\alpha_{RL}y^\gamma(x,t)-\Delta y^\gamma(x,t))\varphi(x,t)dxdt\\ &+ \int_\Omega\varphi(x,0)\frac{\partial}{\partial t}I^{2-\alpha}y^\gamma(x,0)dx\\ &- \int_\Omega\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x,0)I^{2-\alpha}y^\gamma(x,0)dx\\ &- \langle y^\gamma(\sigma,t),\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}(\sigma,t)\rangle_{H^{-5/2}((0,T);H^{-1/2}(\partial\Omega)),H^{5/2}((0,T);H^{1/2}(\partial\Omega))},\end{aligned}$$

$\forall\varphi\in\mathcal{C}^\infty(\overline{Q})$ telle que $\varphi_{|\partial\Omega}=0$, $\varphi(x,T)=\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}(x,T)=0$ dans Ω.

En utilisant (5.31), nous avons

$$\begin{aligned}0 &= \int_\Omega y^0\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,0)dx\\ &+ \int_\Omega\varphi(x,0),\frac{\partial}{\partial t}I^{2-\alpha}y^\gamma(x,0)dx\\ &- \int_\Omega\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x,0)I^{2-\alpha}y^\gamma(x,0)dx\\ &- \langle y^\gamma(\sigma,t),\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}(\sigma,t)\rangle_{H^{-5/2}((0,T);H^{-1/2}(\partial\Omega)),H^{5/2}((0,T);H^{1/2}(\partial\Omega))},\end{aligned}$$

$\forall\varphi\in\mathcal{C}^\infty(\overline{Q})$ telle que $\varphi_{|\partial\Omega}=0$, $\varphi(x,T)=\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}(x,T)=0$ dans Ω.

Choisissons maintenant φ telle que $\varphi(x,0)=\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}(x,0)=0$, on obtient

$$\langle y^\gamma(\sigma,t),\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}(\sigma,t)\rangle_{H^{-5/2}((0,T);H^{-1/2}(\partial\Omega)),H^{5/2}((0,T);H^{1/2}(\partial\Omega))}=0,$$

soit,

$$y^\gamma(\sigma,t)=0\quad(\sigma,t)\in\Sigma. \tag{5.34}$$

Et en choisissant φ telle que $\varphi(x,0)=0$, on a

$$\int_\Omega y^0\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,0)dx=\int_\Omega\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x,0)I^{2-\alpha}y^\gamma(x,0)dx.$$

Ce qui implique que

$$I^{2-\alpha}y^\gamma(x,0)=y^0\quad x\in\Omega. \tag{5.35}$$

Ainsi il nous reste

$$\int_\Omega\varphi(x,0)\frac{\partial}{\partial t}I^{2-\alpha}y^\gamma(x,0)dx=0$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial t} I^{2-\alpha} y^\gamma(x,0) = 0 \quad x \in \Omega. \tag{5.36}$$

D'après (5.31), (5.34), (5.35) et (5.36), nous avons $y^\gamma = y^\gamma(x,t;u^\gamma,0)$ solution de (5.7).

Étape 2 : Nous montrons que $\xi(v_n)$ converge vers $\xi^\gamma = \xi^\gamma(u^\gamma)$ et que (ξ^γ, y^γ) vérifie (5.12). On a $\xi(v_n)$ solution de

$$\left\{ \begin{array}{lcll} \mathcal{D}_C^\alpha \xi_n - \Delta \xi_n & = & y(v_n,0) - y(0,0) & \text{dans } Q, \\ \xi_n & = & 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \xi_n(T) & = & 0 & \text{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\xi_n(T) & = & 0 & \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \tag{5.37}$$

Soit $z_n = y(v_n,0) - y(0,0)$. Alors d'après (5.26a) et (5.9), z_n vérifie

$$\left\{ \begin{array}{lcll} D_{RL}^\alpha z_n - \Delta z_n & = & v_n & \text{dans } Q, \\ z_n & = & 0 & \text{sur } \Sigma, \\ I^{2-\alpha} z_n(0) & = & 0 & \text{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial}{\partial t} I^{2-\alpha} z_n(0) & = & 0 & \text{dans } \Omega. \end{array} \right.$$

D'où d'après le théorème 2.2, et (5.25a) nous avons

$$\|z_n\|_{L^2((0,T);H_0^1(\Omega))} = \|y_n(v_n,0) - y(0,0)\|_{L^2((0,T);H_0^1(\Omega))} \leq C(\gamma).$$

Ainsi, d'après le corollaire 2.3, nous pouvons écrire que

$$\|\xi_n\|_{\mathcal{C}([0,T];H_0^1(\Omega))} \leq C(\gamma), \tag{5.38}$$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t}\xi_n \right\|_{\mathcal{C}([0,T];L^2(\Omega))} \leq C(\gamma). \tag{5.39}$$

L'injection de $\mathcal{C}([0,T];H_0^1(\Omega))$ dans $L^2((0,T);H_0^1(\Omega))$ et l'injection de $\mathcal{C}([0,T];L^2(\Omega))$ dans $L^2(Q)$ étant continues, Nous savons donc qu'il existe $\xi^\gamma \in L^2((0,T);H_0^1(\Omega))$ et $\beta^\gamma \in L^2(Q)$ telles que

$$\xi_n \rightharpoonup \xi^\gamma \quad \text{faiblement dans} \quad L^2((0,T);H_0^1(\Omega)) \tag{5.40}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\xi_n \rightharpoonup \beta^\gamma \quad \text{faiblement dans} \quad L^2(Q). \tag{5.41}$$

De (5.40), on a

$$\frac{\partial}{\partial t}\xi_n \rightharpoonup \frac{\partial}{\partial t}\xi^\gamma \quad \text{faiblement dans} \quad \mathbb{D}'(Q).$$

Ce qui combiné avec (5.41) donne

$$\frac{\partial}{\partial t}\xi_n \rightharpoonup \frac{\partial}{\partial t}\xi^\gamma = \beta^\gamma \quad \text{faiblement dans} \quad L^2(Q). \tag{5.42}$$

Dès lors le Lemme 3.1 nous dit que

$$\xi^\gamma \in \mathcal{C}\left([0,T], H^{1/2}(\Omega)\right). \tag{5.43}$$

D'où d'après $(5.37)_3$, nous avons

$$\xi^\gamma(T) = 0 \quad \text{dans } \Omega. \tag{5.44}$$

Aussi d'après $(5.37)_4$, nous posons

$$\frac{\partial}{\partial t}\xi^\gamma(T) = 0 \quad \text{dans } \Omega. \tag{5.45}$$

D'après (5.25b), nous pouvons déduire qu'il existe $\rho \in L^2(\Omega)$ telle que

$$\xi(.,0;v_n) \rightharpoonup \rho \quad \text{faiblement dans} \quad L^2(\Omega). \tag{5.46}$$

Multiplions la première équation de (5.37), par $\psi \in \mathbb{D}(Q)$, et en intégrant par parties et en utilisant le lemme 1.7, nous avons l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_\Omega (\mathcal{D}_C^\alpha \xi(x,t;v_n) - \Delta\xi(x,t;v_n))\psi(x,t)dxdt = \\
&\int_0^T \int_\Omega (y_n(x,t;v_n,0) - y(x,t;0,0))\psi(x,t)dxdt = \\
&\int_0^T \int_\Omega (D_{RL}^\alpha \psi(x,t) - \Delta\psi(x,t))\xi(x,t;v_n)dxdt
\end{aligned}$$

Ainsi en utilisant (5.28c) et (5.41), et en passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans la dernière égalité, nous avons $\forall\psi \in \mathbb{D}(Q)$,

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_\Omega (y^\gamma(x,t;u^\gamma,0) - y(x,t;0,0))\psi(x,t)dxdt = \\
&\int_0^T \int_\Omega (D_{RL}^\alpha \psi(x,t) - \Delta\psi(x,t))\xi^\gamma(x,t;u^\gamma)dxdt.
\end{aligned}$$

D'où en utilisant de nouveau le lemme 1.7, on obtient $\forall\psi \in \mathbb{D}(Q)$

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_\Omega (y^\gamma(x,t;u^\gamma,0) - y(x,t;0,0))\psi(x,t)dxdt = \\
&\int_0^T \int_\Omega (\mathcal{D}_C^\alpha \xi^\gamma(x,t;u^\gamma) - \Delta\xi^\gamma(x,t;u^\gamma))\psi(x,t)dxdt \quad ,
\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\mathcal{D}_C^\alpha \xi^\gamma(u^\gamma) - \Delta\xi^\gamma(u^\gamma) = y^\gamma(u^\gamma, 0) - y(0,0) \text{ dans } Q. \tag{5.47}$$

Maintenant, multiplions la première équation de (5.37) par $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\bar{Q})$ avec $\phi_{|\partial\Omega} = 0$ et $I^{2-\alpha}\phi(x,0) = 0$ dans Ω et en intégrant par parties sur Q, nous avons d'après le lemme 1.7,

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \int_0^T (y_n(x,t) - y(x,t;0,0))\phi(x,t)dtdx = \\
&\int_\Omega \int_0^T (\mathcal{D}_C^\alpha \xi_n(x,t) - \Delta\xi_n(x,t))\phi(x,t)dtdx = \\
&\int_\Omega \int_0^T \left(D_{RL}^\alpha \phi(x,t) - \Delta\phi(x,t)\right)\xi_n(x,t)dtdx + \int_\Omega \xi(x,0;v_n)\frac{\partial}{\partial t}I^{2-\alpha}\phi(x,0)dx,
\end{aligned}$$

Et en passant à la limite dans la dernière égalité, et en utilisant (5.28c), (5.40) et (5.46), nous pouvons écrire que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \int_0^T (y^\gamma(x,t) - y(x,t;0,0))\phi(x,t)dtdx = \\
&\int_\Omega \int_0^T \left(D_{RL}^\alpha \phi(x,t) - \Delta\phi(x,t)\right)\xi^\gamma(x,t)dtdx + \int_\Omega \rho(x)\frac{\partial}{\partial t}I^{2-\alpha}\phi(x,0)dx,
\end{aligned} \tag{5.48}$$

$\forall\phi \in \mathcal{C}^\infty(\bar{Q})$ telle que $\phi_{|\partial\Omega} = 0$, $I^{2-\alpha}\phi(x,0) = 0$ dans Ω.
D'où en utilisant de nouveau le lemme 1.7, (5.44), (5.45) et (5.47) nous obtenons

$$-\int_0^T \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial\nu}\phi(\sigma,t)\xi^\gamma(\sigma,t)d\sigma dt + \int_\Omega \rho(x)\frac{\partial}{\partial t}I^{2-\alpha}\phi(x,0)dx = \int_\Omega \xi^\gamma(x,0;u^\gamma)\frac{\partial}{\partial t}I^{2-\alpha}\phi(x,0)dx$$

$\forall\phi \in \mathcal{C}^\infty(\bar{Q})$ telle que $\phi_{|\partial\Omega} = 0$, $I^{2-\alpha}\phi(x,0) = 0$ dans Ω.

Choisissons maintenant $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\bar{Q})$, telle que $\phi_{|\partial\Omega} = 0$, $I^{2-\alpha}\phi(x,0) = \dfrac{\partial}{\partial t}I^{2-\alpha}\phi(x,0) = 0$, alors nous avons

$$-\int_0^T \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial\nu}\phi(\sigma,t)\xi^\gamma(\sigma,t)d\sigma dt = 0,$$

soit,

$$\xi^\gamma = 0 \quad \text{sur } \Sigma. \tag{5.49}$$

Donc on a

$$\int_{\Omega}\rho(x)\frac{\partial}{\partial t}I^{2-\alpha}\phi(x,0)dx=\int_{\Omega}\xi^{\gamma}(x,0;u^{\gamma})\frac{\partial}{\partial t}I^{2-\alpha}\phi(x,0)dx,$$

ce qui implique que,

$$\xi^{\gamma}(.,0;u^{\gamma})=\rho(.)\quad \text{dans } \Omega. \tag{5.50}$$

D'après (5.44), (5.45), (5.47) et (5.49), nous avons que $(\xi^{\gamma}, y^{\gamma})$ est solution de (5.12).

De plus, En utilisant (5.50) et (5.43), l'équation (5.46) devient

$$\xi(.,0;v_n)\rightharpoonup\xi(.,0;u^{\gamma})\quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega). \tag{5.51}$$

*Étape 3 :*Nous montrons l'unicité du contrôle à moindres regrets.
La fonction $v\to J_{\gamma}(v)$ étant semi-continue inférieurement, on a

$$J_{\gamma}(u^{\gamma})\leq\lim_{n\to+\infty}\inf J_{\gamma}(v_n),$$

d'où d'après (5.23), on peut écrire

$$J_{\gamma}(u^{\gamma})=\inf_{v\in L^2(\Sigma)}J_{\gamma}(v).$$

L'unicité de u^{γ} vient de la strict-convexité de J_{γ}. □

Maintenant, nous caractérisons le contrôle à moindres regrets par le résultat suivant :

Théorème 5.1. *Pour chaque $\gamma>0$, soit u^{γ} le contrôle à moindres regrets. Alors il existe $q^{\gamma}\in L^2((0,T);H_0^1(\Omega))$ et $p^{\gamma}\in\mathcal{C}([0,T];H_0^1(\Omega))$ telles que $(u^{\gamma}, y^{\gamma}=y^{\gamma}(u^{\gamma},0), q^{\gamma}, p^{\gamma})$ vérifie le système d'optimalité suivant :*

$$\begin{cases} D_{RL}^{\alpha}y^{\gamma}-\Delta y^{\gamma} & = & u^{\gamma} & \text{dans } Q,\\ y^{\gamma} & = & 0 & \text{sur } \Sigma,\\ I^{2-\alpha}y^{\gamma}(0) & = & y^0 & \text{dans } \Omega,\\ \dfrac{\partial}{\partial t}I^{2-\alpha}y^{\gamma}(0) & = & 0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{5.52}$$

$$\begin{cases} D_{RL}^{\alpha}q^{\gamma}-\Delta q^{\gamma} & = & 0 & \text{dans } Q,\\ q^{\gamma} & = & 0 & \text{sur } \Sigma,\\ I^{2-\alpha}q^{\gamma}(0) & = & 0 & \text{dans } \Omega,\\ \dfrac{\partial}{\partial t}I^{2-\alpha}q^{\gamma}(0) & = & \dfrac{1}{\sqrt{\gamma}}\xi(0;u^{\gamma}) & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{5.53}$$

$$\begin{cases} \mathcal{D}_C^\alpha p^\gamma - \Delta p^\gamma &= y^\gamma - z_d + \dfrac{1}{\sqrt{\gamma}} q^\gamma & \textit{dans } Q, \\ p^\gamma &= 0 & \textit{sur } \Sigma, \\ p^\gamma(T) &= 0 & \textit{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial p^\gamma}{\partial t}(T) &= 0 & \textit{dans } \Omega, \end{cases} \tag{5.54}$$

et

$$N u^\gamma + p^\gamma = 0 \quad \textit{dans } Q. \tag{5.55}$$

Démonstration. Les relations (5.31), (5.34),(5.35) et (5.36) donnent (5.52). Pour caractériser le contrôle sans-regret u^γ, nous utilisons les conditions d'optimalité d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dk} J_\gamma(u^\gamma + k(v - u^\gamma))|_{k=0} = 0, \forall v \in L^2(Q). \tag{5.56}$$

Posons $w = v - u^\gamma$, on a alors

$$\begin{aligned} J_\gamma(u^\gamma + kw) &= \|y(u^\gamma, 0) + ky(w, 0) - z_d\|^2_{L^2(Q)} + N\|u^\gamma + kw\|^2_{L^2(Q)} \\ &- \|y(0, 0) - z_d\|^2_{L^2(Q)} + \frac{1}{\gamma} \|\xi(x, 0; u^\gamma + kw))\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &= \|y(u^\gamma, 0) - z_d\|^2_{L^2(Q)} + 2k(y(w, 0), y(u^\gamma, 0) - z_d)_{L^2(Q)} \\ &+ k^2\|y(w, 0)\|^2_{L^2(Q)} + N\|u^\gamma\|^2_{L^2(Q)} + Nk^2\|w\|^2_{L^2(Q)} \\ &- \|y(0, 0) - z_d\|^2_{L^2(Q)} + \frac{1}{\gamma} \|\xi(x, 0; u^\gamma)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{k^2}{\gamma} \|\xi(x, 0; w)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &+ \frac{2k}{\gamma} (\xi(x, 0; u^\gamma), \xi(x, 0; w))_{L^2(\Omega)} + 2Nk(u^\gamma, w)_{L^2(Q)}. \end{aligned}$$

Soit,

$$\begin{aligned} J_\gamma(u^\gamma + k(v - u^\gamma)) - J_\gamma(u^\gamma) &= 2k(y(w, 0), y(u^\gamma, 0) - z_d)_{L^2(Q)} + k^2\|y(w, 0)\|^2_{L^2(Q)} \\ &+ Nk^2\|w\|^2_{L^2(Q)} + 2Nk(u^\gamma, w)_{L^2(Q)} \\ &+ \frac{2k}{\gamma} (\xi(x, 0; u^\gamma), \xi(x, 0; w))_{L^2(\Omega)} \\ &+ \frac{k^2}{\gamma} \|\xi(x, 0; w)\|^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{J_\gamma(u^\gamma + k(v - u^\gamma)) - J_\gamma(u^\gamma)}{k} &= 2(y(w, 0), y(u^\gamma, 0) - z_d)_{L^2(Q)} + k\|y(w, 0)\|^2_{L^2(Q)} \\ &+ Nk\|w\|^2_{L^2(Q)} + 2N(u^\gamma, w)_{L^2(Q)} \\ &+ \frac{2}{\gamma} (\xi(x, 0; u^\gamma), \xi(x, 0; w))_{L^2(\Omega)} + \frac{k}{\gamma} \|\xi(x, 0; w)\|^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Donc d'après (5.56), on obtient,

$$\int_\Omega \int_0^T (y^\gamma(u^\gamma,0) - z_d)(y(x,t;v,0) - y(x,t;u^\gamma,0))dtdx +$$
$$\int_\Omega \int_0^T Nu^\gamma(v-u^\gamma)dtdx + \frac{1}{\gamma}\int_\Omega (\xi(x,0;u^\gamma), \xi(x,0;v-u^\gamma))\,dx = 0, \forall v \in L^2(Q). \tag{5.57}$$

où d'après (5.12), $\xi(v-u^\gamma) \in \mathcal{C}((0,T);H_0^1(\Omega))$ est solution de

$$\left\{\begin{array}{lcll} \mathcal{D}^\alpha \xi(v-u^\gamma) - \Delta\xi(v-u^\gamma) & = & y(v,0) - y(u^\gamma,0) & \text{dans } Q, \\ \xi(v-u^\gamma) & = & 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \xi(T, v-u^\gamma) & = & 0 & \text{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial t}(T, v-u^\gamma) & = & 0 & \text{dans } \Omega. \end{array}\right. \tag{5.58}$$

Soit $z(v-u^\gamma) = y(x,t;v,0) - y^\gamma(x,t;u^\gamma,0)$ l'état associé au contrôle $(v-u^\gamma) \in L^2(Q)$. Alors $z = z(v-u^\gamma) \in L^2((0,T);H_0^1(\Omega))$ est solution de,

$$\left\{\begin{array}{lcll} D^\alpha_{RL} z - \Delta z & = & v - u^\gamma & \text{dans } Q, \\ z & = & 0 & \text{sur } \Sigma, \\ I^{2-\alpha}z(0) & = & 0 & \text{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial}{\partial t} I^{2-\alpha}z(0) & = & 0 & \text{dans } \Omega. \end{array}\right. \tag{5.59}$$

Pour interpréter (5.57), on introduit $q^\gamma = q^\gamma(u^\gamma, 0)$ solution de l'équation (5.53).

Comme $\dfrac{1}{\sqrt{\gamma}}\xi(x,0;u^\gamma) \in L^2(\Omega)$, d'après la Section 2.2, nous savons que q^γ est unique et appartient à $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. De plus, il existe C telle que

$$\|q^\gamma\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq \frac{C}{\sqrt{\gamma}} \|\xi(0;u^\gamma)\|_{L^2(\Omega)}. \tag{5.60}$$

Multiplions la première équation de (5.58) par $\dfrac{1}{\sqrt{\gamma}}q^\gamma$ où q^γ est solution de (5.53) et en intégrant par parties sur Q, on obtient d'après le lemme 1.7,

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \int_0^T \left(\mathcal{D}_C^\alpha \xi(x,t;v-u^\gamma) - \Delta\xi(x,t;v-u^\gamma)\right) \frac{1}{\sqrt{\gamma}} q^\gamma(x,t)dtdx = \\
&\int_0^T \int_\Omega (D_{RL}^\alpha q^\gamma(x,t) - \Delta q^\gamma(x,t))\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\xi(x,t;v-u^\gamma)dxdt- \\
&\int_\Omega \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\xi(x,T;v-u^\gamma)\frac{\partial}{\partial t}(I^{2-\alpha}q^\gamma(x,T))dx \\
&+\int_\Omega \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\xi(x,0;v-u^\gamma)\frac{\partial}{\partial t}(I^{2-\alpha}q^\gamma(x,0))dx+ \\
&\int_\Omega \frac{1}{\sqrt{\gamma}}I^{2-\alpha}q^\gamma(x,T)\frac{\partial\xi}{\partial t}(x,T;v-u^\gamma)dx \\
&-\int_\Omega \frac{1}{\sqrt{\gamma}}I^{2-\alpha}q^\gamma(x,0)\frac{\partial\xi}{\partial t}(x,0;v-u^\gamma)dx = \\
&\int_\Omega \int_0^T y(x,t;v,0) - y(x,t;u^\gamma,0)\frac{1}{\sqrt{\gamma}}q^\gamma(x,t)dtdx.
\end{aligned}
$$

Et comme q^γ est solution de (5.53) et $\xi(v-u^\gamma)$ est solution de (5.58), on a finalement

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \int_0^T y(x,t;v,0) - y(x,t;u^\gamma,0)\frac{1}{\sqrt{\gamma}}q^\gamma(x,t)dtdx = \\
&\int_\Omega \xi(x,0;v-u^\gamma)\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial}{\partial t}(I^{2-\alpha}q^\gamma(x,0))dx = \frac{1}{\gamma}\int_\Omega \xi(x,0;v-u^\gamma)\xi(x,0;u^\gamma)dx.
\end{aligned}
$$

D'où en combinant avec (5.57), on obtient,

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \int_0^T [y(x,t;v,0) - y(x,t;u^\gamma,0)]\left[(y(u^\gamma,0) - z_d + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}q^\gamma)\right] dtdx+ \\
&\int_Q \int_0^T Nu^\gamma(v-u^\gamma)dtdx = 0, \quad \forall v \in L^2(Q).
\end{aligned}
\tag{5.61}
$$

Maintenant, on considère l'état adjoint p^γ solution de (5.54).

Comme $y^\gamma - z_d + \dfrac{1}{\sqrt{\gamma}}q^\gamma \in L^2(Q)$, d'après le corollaire 2.3, on peut dire que $p^\gamma \in \mathcal{C}((0,T);H_0^1(\Omega))$.

Ainsi, en multipliant la première équation de (5.59) par p^γ, et en intégrant par parties sur Q, on obtient d'après le lemme 1.7 :

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \int_\Omega (D^\alpha_{RL} z(x,t;v-u^\gamma) - \Delta z(x,t;v-u^\gamma)) p^\gamma(x,t) dxdt = \\
&\int_\Omega p^\gamma(x,T) \frac{\partial}{\partial t}(I^{2-\alpha} z(x,T;v-u^\gamma))dx - \int_\Omega p^\gamma(x,0)\frac{\partial}{\partial t}(I^{2-\alpha} z(x,0;v-u^\gamma))dx \\
- &\int_\Omega I^{2-\alpha} z(x,T;v-u^\gamma)\frac{\partial p^\gamma}{\partial t}(x,T)dx + \int_\Omega I^{2-\alpha} z(x,0;v-u^\gamma)\frac{\partial p^\gamma}{\partial t}(x,0)dx \\
+ &\int_\Omega \int_0^T z(x,t;v-u^\gamma)(\mathcal{D}^\alpha_C p^\gamma(x,t) - \Delta p^\gamma(x,t))dxdt \\
= &\int_0^T \int_\Omega (v-u^\gamma) p^\gamma dxdt.
\end{aligned}
$$

Et comme $z(v-u^\gamma) = y(x,t;v,0) - y(x,t;u^\gamma,0)$ est solution de (5.59), on obtient

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \int_\Omega (v-u^\gamma) p^\gamma dxdt = \\
&\int_\Omega \int_0^T [y(x,t;v,0) - y(x,t;u^\gamma,0)] \left[y(x,t;u^\gamma,0) - z_d + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} q^\gamma) \right] dtdx
\end{aligned}
$$

d'où en combinant avec (5.61), on a

$$\int_0^T \int_\Omega (Nu^\gamma + p^\gamma)(v-u^\gamma) dxdt = 0, \forall v \in L^2(Q).$$

Ce qui implique que $Nu^\gamma + p^\gamma = 0$ dans Q.

Réciproquement, nous supposons que (5.56) est vérifiée, c'est-à-dire que la limite existe. Alors d'après la convexité de la fonction $v \to J_\gamma(v)$, nous avons pour tout $\theta \in]0,1[$ que

$$
\begin{aligned}
J_\gamma(\theta v + (1-\theta)w) &\leq \theta J_\gamma(v) + (1-\theta) J_\gamma(w) \\
&= \theta(J_\gamma(v) - J_\gamma(w)) + J_\gamma(w),
\end{aligned}
$$

ce qui implique que

$$\frac{1}{\theta}[J_\gamma(\theta v + (1-\theta)w) - J_\gamma(w)] \leq J_\gamma(v) - J_\gamma(w).$$

Ce qui peut encore s'écrire

$$J_\gamma(v) - J_\gamma(w) \geq \frac{1}{\theta}[J_\gamma(w + \theta(v-w)) - J_\gamma(w)].$$

Or nous avons supposé que (5.56) est vérifiée, on a donc

$$J_\gamma(v) - J_\gamma(w) \geq J'_\gamma(w).(v-w) = 0 \qquad \forall v \in L^2(Q).$$

Maintenant, prenons $w = u^\gamma$ alors nous avons que

$$J_\gamma(v) - J_\gamma(u^\gamma) \geq 0 \qquad \forall v \in L^2(Q).$$

Ce qui implique que u^γ est solution du problème de contrôle à moindres regrets (5.21).

□

5.3 Résolution du problème de contrôle sans regret.

Nous venons de résoudre le problème de contrôle à moindres regrets, nous allons maintenant montrer que le contrôle à moindres regrets converge vers le contrôle sans regret que nous caractériserons ensuite par un système d'optimalité. Nous donnons donc le résultat suivant,

Théorème 5.2. *Le contrôle à moindres regrets u^γ converge vers le contrôle sans regret u solution de* (5.17) *dans* $L^2(\Sigma)$.

Démonstration. Comme u^γ est solution de (5.21), on a

$$J_\gamma(u^\gamma) \leq J_\gamma(0) = 0,$$

car $\xi(0) = \xi(x,t;0) = 0$ dans Q d'après (5.12). Donc d'après la définition de J_γ donnée par (5.22), nous pouvons écrire que

$$\begin{aligned} \|y(u^\gamma,0) - z_d\|^2_{L^2(Q)} + N\|u^\gamma\|^2_{L^2(Q)} + \frac{1}{\gamma}\|\xi(.,0;u^\gamma)\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq J(0,0) \\ &= \|y(0,0) - z_d\|^2_{L^2(Q)}. \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\|y(u^\gamma,0)\|_{L^2(Q)} \leq \|y(0,0) - z_d\|_{L^2(Q)}, \tag{5.62a}$$

$$\|u^\gamma\|_{L^2(Q)} \leq \frac{1}{N}\|y(0,0) - z_d\|_{L^2(Q)}, \tag{5.62b}$$

$$\|\xi(.,0;u^\gamma)\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{\gamma}\|y(0,0) - z_d\|_{L^2(Q)}. \tag{5.62c}$$

Ainsi d'après (5.62b) et $(5.52)_1$, nous avons

$$\|D^\alpha_{RL} y(u^\gamma,0) - \Delta y(u^\gamma,0)\|_{L^2(Q)} \leq \frac{1}{N}\|y(0,0) - z_d\|_{L^2(Q)}. \tag{5.63}$$

Comme $y(u^\gamma,0)$ est solution de (5.52), d'après la section 2.2, nous savons qu'il existe une constante C indépendante de γ telle que

$$\|y(u^\gamma,0)\|_{L^2((0,T);H_0^1(\Omega))} \leq \frac{C}{N}\|y(0,0)-z_d\|_{L^2(Q)}.$$

Ainsi, il existe $u \in L^2(Q), y \in L^2((0,T);H_0^1(\Omega)), \delta \in L^2(Q)$ et nous pouvons extraire des sous-suite de (u^γ) et (y^γ) (encore appelées (u^γ) et (y^γ)) telles que

$$u^\gamma \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } L^2(Q), \tag{5.64a}$$

$$y^\gamma \rightharpoonup y \text{ faiblement dans } L^2((0,T);H_0^1(\Omega)), \tag{5.64b}$$

$$D_{RL}^\alpha y^\gamma - \Delta y^\gamma \rightharpoonup \delta \text{ faiblement dans } L^2(Q). \tag{5.64c}$$

En procédant comme aux pages 94 à 99, en utilisant (5.64a)-(5.64c), nous montrons que $y = y(x,t;u,0)$ est solution de

$$\left\{\begin{array}{rcll} D_{RL}^\alpha y - \Delta y &=& u & \text{dans} \quad Q, \\ y &=& 0 & \text{sur} \quad \Sigma, \\ I^{2-\alpha}y(x,0) &=& y^0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}I^{2-\alpha}y(x,0) &=& 0 & \text{dans} \quad \Omega, \end{array}\right. \tag{5.65}$$

Et $\xi = \xi(x,t;u) \in \mathcal{C}([0,T];H_0^1(\Omega))$ est solution de

$$\left\{\begin{array}{lcll} \mathcal{D}^\alpha \xi - \Delta\xi &=& y(u,0)-y(0,0) & \text{dans } Q, \\ \xi &=& 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \xi(T) &=& 0 & \text{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial t}(T) &=& 0 & \text{dans } \Omega. \end{array}\right. \tag{5.66}$$

De plus, d'après (5.62c), nous avons

$$\xi(.,0;u^\gamma) \to \xi(.,0;u) = 0 \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega). \tag{5.67}$$

par conséquent, $\displaystyle\int_0^T \int_{\partial\Omega} g\xi(x,0;u)dx = 0.$
Ce qui signifie que u est solution du problème sans regret (5.17).

□

Maintenant, caractérisons le contrôle sans regret. Pour cela, nous donnons le résultat suivant

Théorème 5.3. *Soit $u = \lim_{\gamma\to 0} u^\gamma$ le contrôle sans regret associé à l'état $y(u,0)$. Alors il existe $q \in L^2((0,T);H_0^1(\Omega))$ et $p \in \mathcal{C}([0,T];H_0^1(\Omega))$ telles que $(u, y = y(u,0), q, p)$ vérifie le système d'optimalité suivant :*

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{RL} y - \Delta y &= u & dans\ Q, \\ y &= 0 & sur\ \Sigma, \\ I^{2-\alpha} y(0) &= y^0 & dans\ \Omega, \\ \dfrac{\partial}{\partial t} I^{2-\alpha} y(0) &= 0 & dans\ \Omega, \end{cases} \tag{5.68}$$

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{RL} q - \Delta q &= 0 & dans\ Q, \\ q &= 0 & sur\ \Sigma, \\ I^{2-\alpha} q(0) &= 0 & dans\ \Omega, \\ \dfrac{\partial}{\partial t} I^{2-\alpha} q(0) &= \tau_1 & dans\ \Omega, \end{cases} \tag{5.69}$$

$$\begin{cases} \mathcal{D}^{\alpha}_{C} p - \Delta p &= y(u,0) - z_d + \tau_2 & dans\ Q, \\ p &= 0 & sur\ \Sigma, \\ p(T) &= 0 & dans\ \Omega, \\ \dfrac{\partial p}{\partial t}(T) &= 0 & dans\ \Omega, \end{cases} \tag{5.70}$$

et

$$Nu + p = 0 \quad dans\ Q. \tag{5.71}$$

Démonstration. Nous avons (5.68) d'après (5.65).
D'après (5.62c), nous avons

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \xi(0; u^{\gamma}) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \|y(0,0) - z_d\|_{L^2(Q)}.$$

Par conséquent, la relation (5.60) devient

$$\|q^{\gamma}\|_{L^2((0,T);H^1_0(\Omega))} \leq C\|y(0,0) - z_d\|_{L^2(Q)}. \tag{5.72}$$

Ainsi, il existe $\tau_1 \in L^2(\Omega)$ et $q \in L^2((0,T); H^1_0(\Omega))$ telles que

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \xi(.,0; u^{\gamma}) \rightharpoonup \tau_1 \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega), \tag{5.73}$$

$$q^{\gamma} \rightharpoonup q \quad \text{faiblement dans } L^2((0,T); H^1_0(\Omega)). \tag{5.74}$$

En passant à la limite dans (5.53) quand $\gamma \to 0$ et en utilisant (5.73) et (5.74), nous prouvons comme pour la convergence de $y_n = y(v_n, 0)$ (voir pages 94 à 97) que q satisfait (5.69).

D'après (5.55) et (5.62b), nous avons

$$\|p^\gamma\|_{L^2(Q)} \leq \|y(0,0) - z_d\|_{L^2(Q)}.$$

Par conséquent, il existe $p \in L^2(Q)$ telle que

$$p^\gamma \rightharpoonup p \quad \text{faiblement dans } L^2(Q). \tag{5.75}$$

D'après (5.54) et (5.62a), nous savons qu'il existe $\tau_2 \in L^2(Q)$ telle que

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} q^\gamma \rightharpoonup \tau_2 \quad \text{faiblement dans } L^2(Q). \tag{5.76}$$

Et nous prouvons comme pour la convergence de $\xi_n = \xi(x,t;v_n)$ (voir pages 97 à 99) que p vérifie (5.70). Pour finir, en passant à la limite dans (5.55) et en utilisant (5.62b) et (5.75) , nous obtenons (5.71).

$\square$

CONCLUSION ET PERSPECTIVE.

Nous nous sommes intéressés à des problèmes de contrôle optimal associés à des équations de diffusion et onde fractionnaires. Pour mener à bien cette étude, nous avons choisi d'utiliser la méthode spectrale afin de trouver des solutions faibles uniques à chaque équation, dans des espaces de Hilbert. Ainsi, nous avons pu établir certaines estimations qui nous ont permis de résoudre les problèmes de contrôle optimal. Dans la vie courante, il arrive souvent que les scientifiques ne disposent pas de toutes les données d'un problème, c'est pourquoi nous avons fait le choix de considérer deux équations de diffusion et onde fractionnaires à données incomplètes. Ces équations étant alors mal posées au sens d'Hadamard, nous avons vu qu'il était impossible de résoudre des problèmes de contrôle optimal associés à ces dernières. Une alternative était alors d'utiliser les notions de contrôles sans regret et à moindres regrets. Nous montrons alors que ces contrôles existent et nous caractérisons chaque contrôle par un système d'optimalité en utilisant les conditions d'Euler-Lagrange.

Tout au long de cette thèse, nous avons principalement étudié et contrôlé des équations de diffusion et onde fractionnaires avec des conditions aux limites de Dirichlet homogène. Après ma thèse, j'ai comme objectif d'étudier les problèmes de contrôle associés aux équations d'onde fractionnaires avec des conditions aux limites non homogènes. Ce qui nécessite l'étude d'existence et d'unicité de ces types de problèmes. Le premier problème que je vais considérer est l'étude de l'existence et de l'unicité de la solution de l'équation d'onde fractionnaire suivante :

$$\left\{\begin{array}{llll} D^{\alpha}_{RL}y(x,t)-\Delta y(x,t) & = & v(x,t) & (x,t)\in Q, \\ y(\sigma,t) & = & g(\sigma,t) & (\sigma,t)\in\Sigma, \\ I^{2-\alpha}y(x,0^+) & = & 0 & x\in\Omega, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}I^{2-\alpha}y(x,0^+) & = & 0 & x\in\Omega, \end{array}\right.$$

où Ω un sous-ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ de frontière $\partial\Omega$ de classe $\mathcal{C}^2$.Le temps $T > 0$, $Q = \Omega \times]0, T[$, $\Sigma = \partial\Omega \times]0, T[$. $1 < \alpha < 2$, $v \in L^2(Q)$ et $g \in L^2(\Sigma)$. $I^{2-\alpha} y(x, 0^+) = \lim\limits_{t \to 0} I^{2-\alpha} y(x, t)$ et $\dfrac{\partial}{\partial t} I^{2-\alpha} y(x, 0^+) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\partial}{\partial t} I^{2-\alpha} y(x, t)$ où l'intégrale fractionnaire I^α d'ordre α et la dérivée fractionnaire D^α_{RL} d'ordre α sont pris au sens de Riemann-Liouville.

Je pense utiliser la méthode de transposition afin d'obtenir une solution dans l'espace $L^2(Q)$. Pour cela, j'ai l'intention de m'inspirer de ce qui se passe dans le cas des équations d'onde classiques pour donner un sens à cette équation et établir des estimations pour les fonctions $y, I^{2-\alpha} y$ et $\dfrac{\partial}{\partial t} I^{2-\alpha} y$ dans des espaces appropriés. Une fois ceci fait, je pourrai étudier un problème de contrôle optimal associé à cette équation.

Notons qu'il serait également intéressant par la suite d'utiliser la méthode spectrale pour étudier des équations de diffusion et onde fractionnaires où les dérivées seront différentes de celles utilisées habituellement. Je pense par exemple, utiliser prochainement d'autres types de dérivées fractionnaires en temps comme celles de Caputo-Fabrizio ou encore Atangana-Baleanu.

Et pour finir je pense aussi m'intéresser à la modélisation de ces types d'équations et à la comparaison des résultats théoriques des problèmes de contrôle optimal avec les résultats numériques.

BIBLIOGRAPHIE

[1] I.Podlubny. *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, 1999.

[2] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations.* Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.

[3] S.G. Samko, A.A. Kilbas and O. I. Marichev. *Fractional integral and derivatives : Theory and applications.* Gordon and Breach Science Publishers, Switzerland, 1993.

[4] K.B. Oldham and J. Spanier. *The Fractional Calculus.* Academic Press, New York, 1974.

[5] K. Miller and B. Ross. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations.* John Wiley and Sons, 1993.

[6] H.J. Haubold, A. M. Mathai, and R. K. Saxena. *Mittag-Leffler Functions and Their Applications.* Hindawi Publishing Corporation, Journal of Applied Mathematics, Volume 2011, Article ID 298628, 51 pages.

[7] T.R. Prabhakar. *A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel.* Yokohama Mathematical Journal, vol. 19, pp. 7-15, 1971.

[8] P.A. Raviart, J.M. Thomas. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles.* Collection : Mathématiques appliquées pour la maîtrise.

[9] J.L. Lions. *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles.* Dunod Gauthier villars, Paris, 1968.

[10] J.L. Lions. *Problèmes aux limites non homogènes et applications 1,2.* Dunod, Paris, 1968.

[11] K. Sakamoto and M. Yamamoto. *Initial value/boundary value problems for fractional diffusion-wave equations and applications to some inverse problems.* J. Math. Anal. Appl. 382 (2011) 426-447.

[12] O.P. Agrawal. *Solution for a fractional diffusion-wave equation defined in a bounded domain*, Nonlinear Dynam. 29 (2002) 145-155.

[13] O.P. Agrawal, *A general solution for the fourth-order fractional diffusion-wave equation*, Fract. Calc. Appl. Anal. 3 (2000) 1-12.

[14] F. Mainardi and G. Pagnini. *The wright functions as solutions of time-fractional diffusion equation*, Appl. Math. Comput. 141 (2003) 51-62.

[15] C. Tadjeran, M.M. Meerschaert, H.-P. Scheffler. *A second-order accurate numerical approximation for the fractional diffusion equation.* Journal of Computational Physics. 213(2006), pp. 205-213.

[16] W. Wyss. *The fractional diffusion equation.* Journal of Mathematical Physics 27(1986), 2782-2785.

[17] . B. Baeumer, S. Kurita, M.M. Meerschaert. *Inhomgeneous fractional diffusion equations.* Fractional et Applied Analysis. Vol 8, No 4, 2005. pp. 371-386.

[18] Y. Lucho. *Some uniqueness and existence results for the initial-boundary value problems for a generalized time-fractional difusion equation.* Computers and Mathematics with applications. 59(2010), pp. 1766-1772.

[19] F. Mainardi, P. Paradis and R. Gorenflo. *Probability distributions generated by fractional diffusion equations*, FRACALMO PRE-PRINT www.fracalmo.org.

[20] F. Mainardi and P. Paradisi. *Model of diffusion waves in viscoelasticity based on fractal calculus*, in : O.R. Gonzales (Ed.), Proceedings of IEEE Conference of Decision and Control, vol. 5, IEEE, New York, 1997, pp. 4961-4966.

[21] R. Metzler and J. Klafter. *Boundary value problems for fractional diffusion equations.* Physica A 278 (2000) 107-125.

[22] C. Lizama. *An operator theoretical approach to a class of fractional order differential equations.* Appl. Math. Lett. 24(2011) 184-190.

[23] C. Lizama, G.M. N'Guérékata. *Bounded mild solutions for semilinear integro differential equations in Banach Spaces.* Integral Equ. Oper. Theory 68 (2010) 207-227.

[24] Y. Zhou, *Basic Theory of Fractional Differential Equations.* World Scientific, Singapore, 2014.

[25] Y.K. Chang, J.J. Nieto. *Some new existence results for fractional differential inclusions with boundary conditions.* Math. Comput. Modell. 49 (2009) 605–609.

[26] Y. Zhou, F. Jiao. *Nonlocal Cauchy problem for fractional evolution equations.* Nonlinear Anal. : RWA 11 (2010) 4465–4475.

[27] C. Lizama, G.M. N'Guérékata. *Mild solutions for abstract fractional differential equations.* Appl. Anal. 92 (2013) 1731–1754.

[28] G. Mophou, S. Tao and C. Joseph. *Initial value/boundary value problem for composite fractional relaxation equation.* Applied Mathematics and Computation. 257 (2015) 134-144

[29] G. M.Mophou. *Optimal control of fractional diffusion equation.* Computers and Mathematics with Applications 61 (2011) 68-78.

[30] R. Dorville, G. M.Mophou and V. S.Valmorin. *Optimal control of a nonhomogeneous Dirichlet boundary fractional diffusion equation.* Computers and Mathematics with Applications 62 (2011) 1472-1481.

[31] R. Kumar Biswas and S. Sen. *Free final time fractional optimal control problems.* Journal of the Franklin Institute 351 (2014) 941-951.

[32] T. Liang Guo. *The Necessary Conditions of Fractional Optimal Control in the Sense of Caputo.* J. Optim. Theory Appl (2013) 156 : 115-126

[33] O.P. Agrawal. *A general formulation and solution scheme for fractional optimal control problems*, Nonlinear Dynam. 38 (2004) 323-337.

[34] O.P. Agrawal. *Formulation of Euler-Lagrange equations for fractional variational problems.* J. Math. Anal. 272 (2002) 368-379.

[35] S.F. Frederico Gastao and F.M. Torres Delfim. *Fractional optimal control in the sense of caputo and the fractional Noether's Theorem.* Int. Math. Forum 3 (10) (2008) 479-493.

[36] O.P. Agrawal. *Fractional Optimal Control of a Distributed System Using Eigenfunctions.* J. Comput. Nonlinear Dynam. (2008) doi :10.1115/1.2833873.

[37] O.P. Agrawal. *Fractional variational calculus and the transversality conditions.* Journal of physics A/ Mathematical and general. 39(2006),pp.10375-10384.

[38] N. Özdemir, D. Karadeniz and B. B. Skender. *Fractional optimal control problem of a distributed system in cylindrical coordinates.* Physics Letters A 373 (2009) 221-226.

[39] Z. D. Jeličić and N. Petrovacki. *Optimality conditions and a solution scheme for fractional optimal control problems.* Structural and Multidisciplinary Optimization 38 (6) (2009) 571-581.

[40] M. R. Rapaić and Z. D. Jeličić. *Optimal control of a class of fractional heat diffusion systems.* Nonlinear dyn. (2010)62 : 39-51.

[41] O.P. Agrawal, O. Defterli and D. Baleanu. *Fractional optimal control problems with several state and control variables.* Journal of Vibration and Control 16 (13) (2010) 1967-1976. 26

[42] Baleanu, D, Machado, JAT, Luo, ACJ. *Fractional Dynamics and Control.*Springer, New York (2012).

[43] Malinowska, AB. Odzijewicz, T. Torres, DFM : *Advanced Methods in the Fractional Calculus of Variations.* SpringerBriefs in Applied Sciences and Technology. Springer, Berlin (2015).

[44] G. Mophou and C. Joseph.*Optimal control with final observation of a fractional diffusion wave equation.* DCDIS Series A : Mathematical analysis 23 (2016) 341-364.

[45] O. Nakoulima, A. Omrane and R. Dorville. *Low-Regret Control of Singular Distributed Systems : The Ill-Posed Backwards Heat Problem.* Applied Mathematics Letters 17 (2004), pp 549-552.

[46] O. Nakoulima, A. Omrane and R. Dorville. *Contrôle optimal pour les problèmes de contrôlabilité des systèmes distribués à données manquantes.* C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004), pp. 921-924.

[47] O. Nakoulima, A. Omrane, and J. Velin. *Low-regret perturbations in distributed systems with incomplete data.* SIAM J. Control Optim. 42 (4) (2003) 1167-1184.

[48] O. Nakoulima, A. Omrane, and J. Velin. *No-regret control for nonlinear distributed systems with incomplete data.* J. Math. Pures Appl. 81 (2002) 1161-1189.

[49] D. Gabay and J.L. Lions. *Décisions stratégiques à moindres regrets.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I 319 (1994), 1249-1256.

[50] J.L. Lions . *Least regret control, virtual control and decomposition methods.* Mathematical Modelling and numerical analysis M2AN. Vol. 34, No 2, 2000, pp. 409-418.

[51] J. L. Lions. *Contrôle à moindres regrets des systèmes distribués.* C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math., 315 (1992), pp. 1253-1257.

[52] J. L. Lions. *No-regret and low-regret control.* Environment, Economics and Their Mathematical Models, Masson, Paris, 1994.

[53] Maitine Bergounioux *Sur un problème de contrôle à moindres regrets.* C. R. Acad. Sci. Paris, t. 317, Série I, p. 61-63, 1993.

[54] O. Nakoulima, A. Omrane, and J. Velin. *Perturbations à moindres regrets dans les systèmes distribués à données manquantes.* C. R. Acad. Sci. Paris, t. 330, Série I, p. 801-806, 2000.

[55] B. Jacob, A. Omrane. *Optimal control for age-structured population dynamics of incomplete data*. Journal of Mathematical Analysis and Applications 370 (2010) 42-48.

[56] Lions, JL. *Duality Arguments for Multi Agents Least-Regret Control.* Collège de France, Paris (1999).

[57] G. Mophou. *Optimal control for fractional diffusion equations with incomplete data*. Journal of Optimization Theory and Applications, pp 1-21, 2015.

[58] D. Baleanu, C. Joseph and G. Mophou. *Low regret control for a fractional wave equation with incomplete data*. Advances in Difference Equations (2016) 2016 :240.