# Paramètres hamiltoniens pour le problème des deux centres fixes

Ahmed Ben M'Rad

▶ **To cite this version:**

Ahmed Ben M'Rad. Paramètres hamiltoniens pour le problème des deux centres fixes. Astrophysique [astro-ph]. Observatoire de Paris, 1984. Français. NNT : 1984OBSP0009 . tel-01958587

**HAL Id: tel-01958587**
**https://theses.hal.science/tel-01958587**

Submitted on 18 Dec 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

Présentée pour l'obtention du

DIPLOME DE DOCTEUR DE 3EME CYCLE

à

L'OBSERVATOIRE DE PARIS

N° 84 OBSP 0002

par

Ahmed BEN M'RAD

Spécialité :

ASTRONOMIE ET TECHNIQUES SPATIALES

Sujet :

# PARAMETRES HAMILTONIENS POUR LE PROBLEME DES DEUX CENTRES FIXES

Soutenue le 24 mai 1984 devant la Commission d'Examen :

Y. THIRY Président
J. DELHAYE
C. MARCHAL
F. NAHON

THESE

Présentée pour l'obtention du

DIPLOME DE DOCTEUR DE 3EME CYCLE

à

L'OBSERVATOIRE DE PARIS

par

Ahmed BEN M'RAD

Spécialité :

ASTRONOMIE ET TECHNIQUES SPATIALES

OBSERVATOIRE DE PARIS - SECTION DE PARIS/S
6688

Sujet :

# PARAMETRES HAMILTONIENS POUR LE PROBLEME DES DEUX CENTRES FIXES

Soutenue le 24 mai 1984 devant la Commission d'Examen :

Y. THIRY Président
J. DELHAYE
C. MARCHAL
F. NAHON

# REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ici ma sincère reconnaissance à Monsieur C. MARCHAL. Il a suivi mon travail, et ses bons conseils et ses encouragements constants m'y ont beaucoup aidé.

Je voudrais exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur J. DELHAYE qui m'a souvent donné des avis précieux.

Je remercie vivement Monsieur Y. THIRY et Monsieur F. NAHON pour leurs excellents cours qui m'ont donné goût à la mécanique céleste.

Je suis reconnaissant à tous ceux qui m'ont aidé durant mes études, en particulier à mes parents, ensuite à mes frères ABDELAZIZ, RACHID et ALI, à ma femme, à mes beaux-parents Monsieur et Madame Abdelfettah MEZIOU, et à mes amis, surtout Khereddine FOURATI, Habib SADDOUD et Mongi SOUAÏ.

Mes remerciemnts vont aussi à Madame R. WEINSTEIN pour son extrême gentillesse, à Madame B. GRENIER qui a accompli la frappe de cette thèse et enfin à Mademoiselle D. MICHOUD responsable du service de la scolarité de l'Observatoire de Paris.

RESUME

Le but de ce travail a été de rechercher un système de variables hamiltoniennes commodes pour le problème des deux centres fixes.

Dans une première partie sont brièvement rappelés les résultats classiques.

Dans la deuxième partie une transformation de Von Zeipel a abouti à un système de variables hamiltoniennes mais avec des discontinuités. Afin d'éliminer les inconvénients correspondants, on a effectué une transformation linéaire conduisant à des variables action-angle continues et à des relations commodes entre les éléments képlériens osculateurs ordinaires.

Enfin, dans une troisième partie, on a fait l'étude du mouvement des satellites artificiels dans le potentiel terrestre réel. Ce potentiel est très voisin de celui de deux centres fixes et, pour les perturbations dues aux harmoniques zonales, la "quasi-intégrale" correspondante est vraiment très constante (variation de l'ordre de $10^{-25}$ / an), c'est une véritable "troisième intégrale" au sens de Contopoulos [1] et de Hénon [2], elle rend intégrable ces perturbations zonales.

# INTRODUCTION

Parmi les problèmes de la mécanique classique celui des deux centres fixes est l'un des rares que l'on puisse intégrer par quadrature.

La fonction de force du problème des deux centres fixes donne une excellente approximation du potentiel gravitationnel de la Terre [3] et cela a été utilisé plusieurs fois dans la théorie des satellites artificiels.

Ces théories sont rapidement convergentes mais conduisent à des développements compliqués et c'est pour simplifier ces développements grâce aux propriétés des formulations hamiltoniennes que les paramètres hamiltoniens correspondants ont été recherchés.

Cela conduit en particulier à la quasi-intégrabilité des perturbations dues aux harmoniques zonales.

# CHAPITRE I

## DEFINITION ET ETUDE DU PROBLEME DES DEUX CENTRES FIXES.

Le problème des deux centres fixes est celui qui est posé par l'étude du mouvement d'un point pesant soumis à l'attraction newtonienne de deux masses ponctuelles fixes quelconques. Dans cette étude, les deux masses sont égales, ce cas a spécialement été étudié par Askenov [4] et Vinti [5]

Soient G la constante de la loi de Newton, $m_1$ et $m_2$ les deux masses fixes séparées par la distance 2s.M le satellite de cote OQ = z et de vitesse $\vec{V}$ (figure 1).

Le probléme du mouvement de M admet trois intégrales premières.

1. Energie :

(1) $$W = \frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{2r_1} - \frac{\mu}{2r_2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} m_1 = m_2 \\ \mu = G(m_1 + m_2) \end{cases}$$

2. Moment cinétique autour de Oz :

(2) $$H = xy' - yx'$$

(3) 3. $$K = \left(\vec{r} \wedge \vec{V}\right)^2 + s^2 z'^2 + sz\left(\frac{\mu}{r_2} - \frac{\mu}{r_1}\right)$$

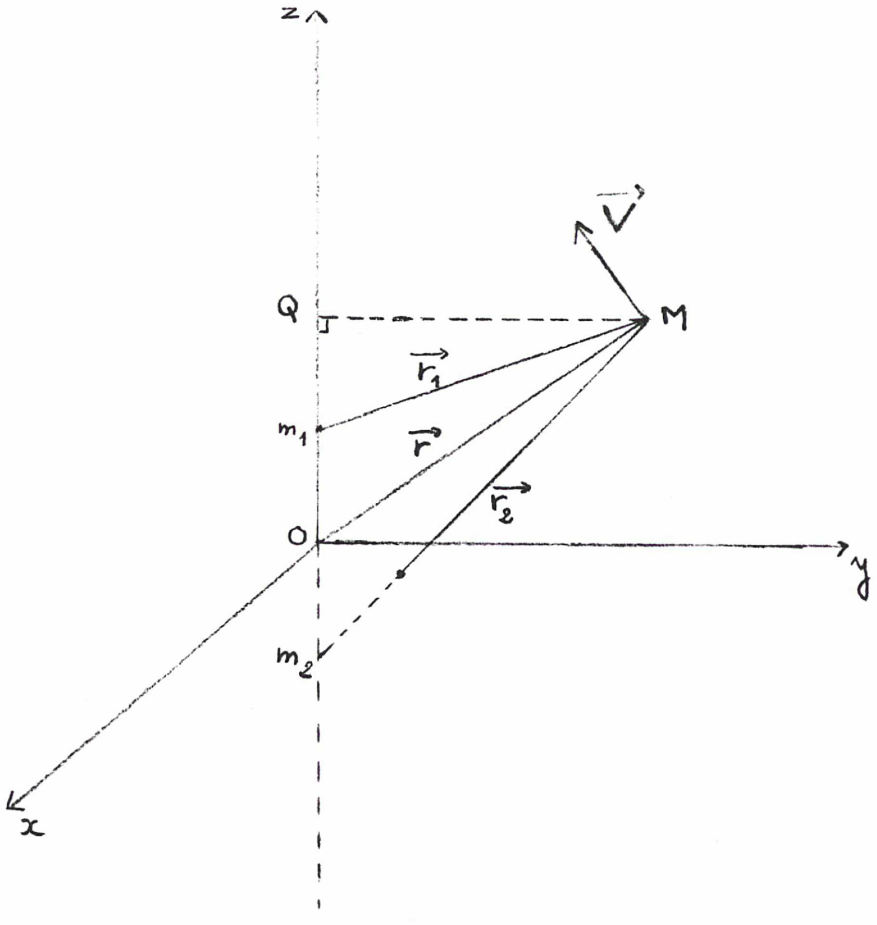


Fig. 1

$\overline{Om_1} = \overline{m_2 O} = s$

$OQ = z$

$\overrightarrow{m_1 M} = \vec{r_1}$

$\overrightarrow{OM} = \vec{r}$

$\overrightarrow{m_2 M} = r_2$

$\varphi$ = latitude

$\lambda$ = longitude

Posons :

$$(4)\quad \begin{cases} \Delta = \dfrac{r_2 - r_1}{2} \; ; \; \Sigma = \dfrac{r_1 + r_2}{2} \; , \; \vec{r} = \dfrac{\vec{r_1} + \vec{r_2}}{2} \\ \left( |\Delta| \leq s \leq \Sigma \right) \end{cases}$$

De ces trois intégrales premières on tire les deux équations :

$$(5)\quad r_1^2 r_2^2 \left(\frac{d\Sigma}{dt}\right)^2 = F(\Sigma) = (\Sigma^2 - s^2)[2W\Sigma^2 + 2\mu\Sigma - K] - s^2 H^2$$

$$(6)\quad r_1^2 r_2^2 \left(\frac{d\Delta}{dt}\right)^2 = j(\Delta) = (\Delta^2 - s^2)[2W\Delta^2 - K] - s^2 H^2$$

Ce problème se résout classiquement par quatre quadratures par l'intermédiaire de la variable auxiliaire w définie par :

$$dt = r_1 r_2 \, dw$$

Si $W<0$, $F(\Sigma)$ et $j(\Delta)$ sont tous deux négatifs pour $|\Sigma|$ ou $|\Delta|$ grands, $\Sigma$ et $\Delta$ oscillent tous deux (en général), de manière périodique en fonction de w, entre un maximum ( $\Sigma_M$ et $\Delta_M$ ) et un minimum ( $\Sigma_m$ et $\Delta_m$ ).

On peut présenter le problème sous une première forme hamiltonienne avec l'Hamiltonien :

$$(7)\quad \begin{cases} \mathcal{H} = \dfrac{V^2}{2} - \dfrac{\mu}{2r_1} - \dfrac{\mu}{2r_2} = \mathcal{H}(\vec{r}, \vec{V}) \\ \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{V}} \; ; \; \dfrac{d\vec{V}}{dt} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{r}} = -\dfrac{\mu \vec{r_1}}{2r_1^3} - \dfrac{\mu \vec{r_2}}{2r_2^3} \end{cases}$$

# CHAPITRE II

## RECHERCHE D'UN SYSTEME DE VARIABLES HAMILTONIENNES COMMODES.

### 1. APPLICATION DE LA TRANSFORMATION DE VON ZEIPEL.

Nous allons chercher des variables hamiltoniennes fonctions linéaires du temps. Pour celà, effectuons une transformation de Von Zeipel [6] qui fait passer de $\vec{r}$ et $\vec{V}$ à W, K, H, $p_W$, $p_K$ et $p_H$ au moyen de la fonction génératrice $S = S(W, K, H, \vec{r})$

avec $\vec{V} = \frac{\partial S}{\partial \vec{r}}$ et $p_W = \frac{\partial S}{\partial W}$ ; $p_K = \frac{\partial S}{\partial K}$ ; $p_H = \frac{\partial S}{\partial H}$

Appelons $\lambda$ la longitude du satellite autour de Oz (figure 2) ; avec $\Sigma' = \frac{d\Sigma}{dt}$ et $\Delta' = \frac{d\Delta}{dt}$ :

soit :

$$(8) \quad S = H\lambda + (\text{sign } \Sigma') \int_{\Sigma_m}^{\Sigma} \frac{\sqrt{f(\sigma)}\, d\sigma}{\sigma^2 - s^2} + (\text{sign } \Delta') \int_{\Delta_m}^{\Delta} \frac{\sqrt{j(\beta)}}{s^2 - \beta^2} d\beta$$

$f(\sigma)$ et $j(\beta)$ sont les fonctions définies en (5) et (6) tandis que $\Sigma_m$ et $\Delta_m$ sont les minimums de $\Sigma$ et $\Delta$ pour le mouvement considéré, minimums qui sont des fonctions de W, K, H et qui sont solutions de $f(\Sigma_m) = 0$ et de $j(\Delta_m) = 0$.

Nous allons tout d'abord vérifier que $\frac{\partial S}{\partial \vec{r}} = \vec{V}$ .

Calculons $\frac{\partial S}{\partial \vec{r}}$ suivant la direction circonférentielle horizontale $\vec{u}$ (figure 2) ; pour celà, posons $\delta \vec{r} = \vec{\varepsilon}$ ; donc $\delta\lambda = \frac{\varepsilon}{\rho}$ (avec $\rho$ = distance à l'axe Oz) et par suite $\delta S = \frac{H\varepsilon}{\rho}$ .

$\left(\frac{\partial S}{\partial \vec{r}}\right)_{\vec{u}} = \frac{H}{\rho}$ d'où $H = \rho \cdot V_u$ ce qui est bien le moment cinétique axial.

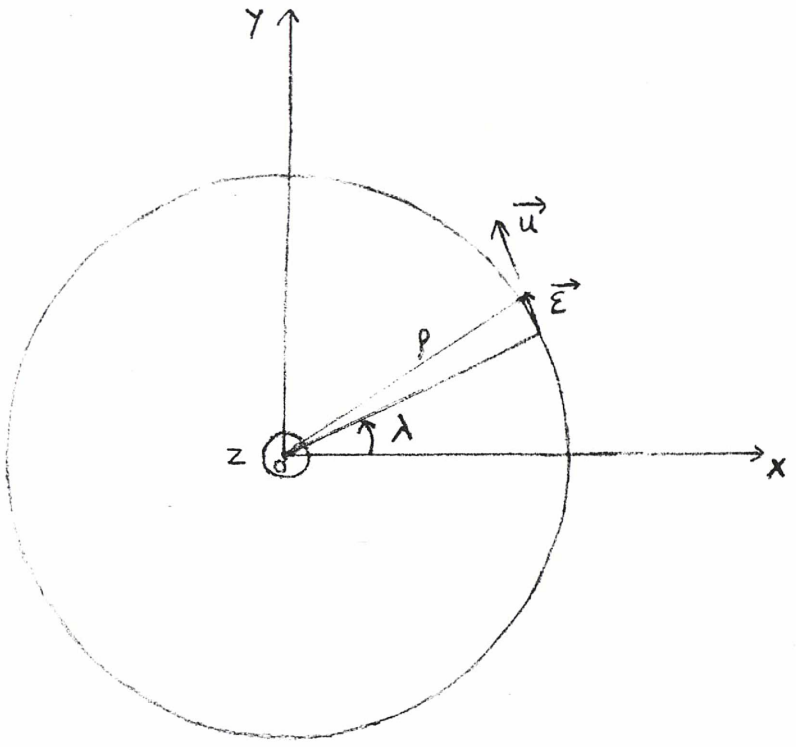


Fig. 2

Pour le plan méridien utilisons les deux directions suivantes :

a) $\delta \vec{r} = \vec{\varepsilon}_1$ : la direction bissectrice vers l'extérieur de l'angle des vecteurs $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ (figure 3).

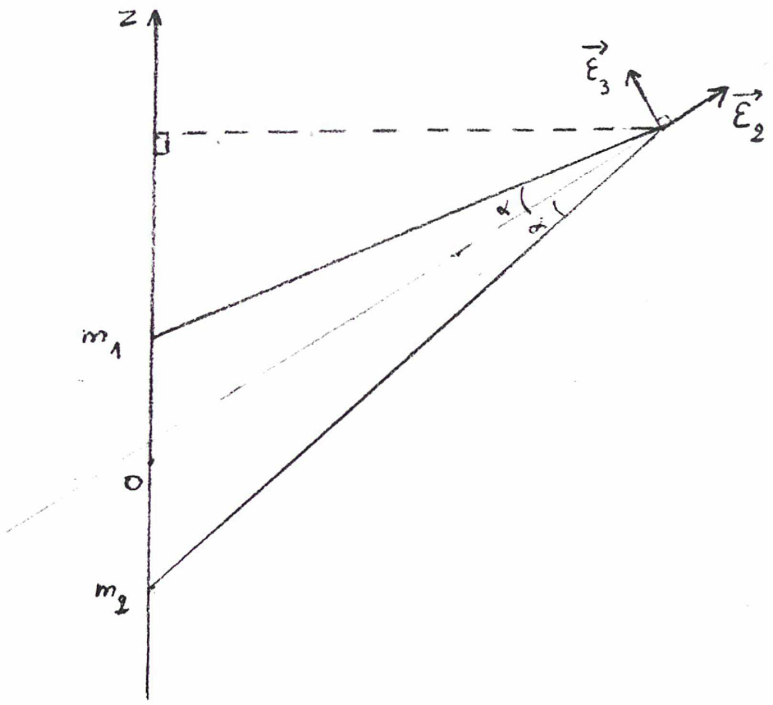


Fig. 3

Voyons si $\left(\frac{\partial S}{\partial \vec{r}}\right)_{\vec{\varepsilon}_2}$ est la composante de $\vec{V}$ dans la direction $\vec{\varepsilon}_2$ .

On a

(9) $$\begin{cases} \delta\Sigma = \varepsilon_2 \cos.\alpha \\ \delta\Delta = 0 \\ \delta\lambda = 0 \end{cases}$$

(10) $$\delta S = \text{sign } \Sigma' . \varepsilon_2 . \cos.\alpha . \frac{\sqrt{F(\Sigma)}}{\Sigma^2 - S^2}$$

(11) $$\left(\frac{\partial S}{\partial \vec{r}}\right)_{\vec{\varepsilon}_2} = (\text{sign } \Sigma') . \cos\alpha . \frac{r_1 r_2 \left|\frac{d\Sigma}{dt}\right|}{\Sigma^2 - S^2} \quad ; \text{ car } \quad \sqrt{F(\Sigma)} = r_1 r_2 \left|\frac{d\Sigma}{dt}\right|$$

(12) $$\left(\frac{\partial S}{\partial \vec{r}}\right)_{\vec{\varepsilon}_2} = \frac{r_1 r_2 \cos\alpha}{\Sigma^2 - S^2} \cdot \frac{d\Sigma}{dt}$$

(13) or $$\left(\vec{V}\right)_{\vec{\varepsilon}_2} = \frac{d\Sigma}{dt} \cdot \frac{1}{\cos\alpha}$$

Il faut donc vérifier que :

(14) $$r_1 r_2 \cos^2\alpha = \Sigma^2 - S^2$$

ce qui ne présente aucune difficulté.

b) De même grâce à $r_1 r_2 \sin^2\alpha = s^2 - \Delta^2$ , on vérifie que :

$\left(\frac{\partial S}{\partial \vec{r}}\right)_{\vec{\varepsilon}_3} = (\vec{V})_{\vec{\varepsilon}_3}$ = composante de $\vec{V}$ dans la direction $\vec{\varepsilon}_3$ perpendiculaire à celles de $\vec{\varepsilon}$ et $\vec{\varepsilon}_2$ .

On arrive ainsi aux paramètres hamiltoniens W, K, H, $p_W$, $p_K$ et $p_H$ et pour un potentiel $\mathcal{H}$ quelconque les équations de Hamilton donnent :

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{dW}{dt} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_W} \; ; \; \dfrac{dp_W}{dt} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial W} \\ \dfrac{dK}{dt} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_K} \; ; \; \dfrac{dp_K}{dt} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial K} \\ \dfrac{dH}{dt} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_H} \; ; \; \dfrac{dp_H}{dt} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial H} \end{cases}$$

On a :

$$(16)\quad p_W = \frac{\partial S}{\partial W} = (\text{sign } \Sigma') \int_{\Sigma_m}^{\Sigma} \frac{\partial F(\sigma)}{\partial W} \cdot \frac{d\sigma}{2\sqrt{F(\sigma)}\,(\sigma^2 - s^2)} + (\text{sign } \Delta') \int_{\Delta_m}^{\Delta} \frac{\partial j(\beta)}{\partial W} \cdot \frac{d\beta}{2(s^2-\beta^2)\sqrt{j(\beta)}}$$

Or :

$$(17)\quad \frac{\partial F(\sigma)}{\partial W} = \sigma^2 \cdot 2(\sigma^2 - s^2) \; ; \; \frac{\partial j(\beta)}{\partial W} = 2\beta^2(\beta^2 - s^2)$$

Donc :

$$(18)\quad p_W = \frac{\partial S}{\partial W} = (\text{sign } \Sigma') \int_{\Sigma_m}^{\Sigma} \frac{\sigma^2 d\sigma}{\sqrt{F(\sigma)}} - (\text{sign } \Delta') \int_{\Delta_m}^{\Delta} \frac{\beta^2 d\beta}{\sqrt{j(\beta)}}$$

De même d'après :

$$(19)\quad \frac{\partial F(\sigma)}{\partial K} = -(\sigma^2 - s^2) \quad \text{et} \quad \frac{\partial j(\beta)}{\partial K} = -(\beta^2 - s^2)$$

on trouve :

$$(20)\quad p_K = \frac{\partial S}{\partial K} = (-\text{sign } \Sigma') \int_{\Sigma_m}^{\Sigma} \frac{d\sigma}{2\sqrt{F(\sigma)}} + (\text{sign } \Delta') \int_{\Delta_m}^{\Delta} \frac{d\beta}{2\sqrt{j(\beta)}}$$

Enfin d'après

(21) $$\frac{\partial f(\sigma)}{\partial H} = -2 s^2 H(\sigma^2 - s^2) \quad \text{et} \quad \frac{\partial j(\beta)}{\partial H} = -2 s^2 H(\beta^2 - s^2)$$

on trouve :

(22) $$p_H = \frac{\partial S}{\partial H} = \lambda - (\text{sign } \Sigma') \int_{\Sigma_m}^{\Sigma} \frac{H s^2 d\sigma}{(\sigma^2 - s^2)\sqrt{f(\sigma)}} - (\text{sign } \Delta') \int_{\Delta_m}^{\Delta} \frac{H s^2 d\beta}{(s^2 - \beta^2)\sqrt{j(\beta)}}$$

On remarque les discontinuités des intégrales et de $p_w$, $p_K$ , $p_H$ pour les maximums de $\Sigma$ ou $\Delta$ .

Dans le cas de 2 centres fixes : $H = W$ et le paramètre $p_w$ est le seul variable avec $\frac{dp_w}{dt} = 1$.

## 2 . ETUDE DES DISCONTINUITES DE $p_w$, $p_K$ ET $p_H$ .

La discontinuité de $p_w$ pour $\Sigma = \Sigma_M$ est $p_{w_+} - p_{w_-}$ avec :

(23) $$\begin{cases} p_{w_+} = -\int_{\Sigma_m}^{\Sigma_M} \frac{\sigma^2 d\sigma}{\sqrt{f(\sigma)}} + \text{terme avec } \Delta \\ p_{w_-} = \int_{\Sigma_m}^{\Sigma_M} \frac{\sigma^2 d\sigma}{\sqrt{f(\sigma)}} + \text{terme avec } \Delta \end{cases}$$

Donc :

(24) $$\delta p_w \left( \text{à } \Sigma_M \right) = -2 \int_{\Sigma_m}^{\Sigma_M} \frac{\sigma^2 d\sigma}{\sqrt{f(\sigma)}}$$

De même :

(25) $$\delta p_w \left( \text{à } \Delta_m \right) = 2 \int_{\Delta_m}^{\Delta_M} \frac{\beta^2 d\beta}{\sqrt{j(\beta)}}$$

(26) $$\delta p_K \left( \text{à } \Sigma_M \right) = \int_{\Sigma_m}^{\Sigma_M} \frac{d\sigma}{\sqrt{f(\sigma)}}$$

(27) $$\delta p_K \left( \text{à } \Delta_M \right) = -\int_{\Delta_m}^{\Delta_M} \frac{d\beta}{\sqrt{j(\beta)}}$$

(28) $$\delta p_H \left( \text{à } \Sigma_M \right) = 2 \int_{\Sigma_m}^{\Sigma_M} \frac{H s^2 d\sigma}{(\sigma^2 - s^2)\sqrt{f(\sigma)}}$$

(29) $$\delta p_H \left( \text{à } \Delta_M \right) = 2 \int_{\Delta_m}^{\Delta_M} \frac{H s^2 d\beta}{(s^2 - \beta^2)\sqrt{j(\beta)}}$$

## 3 . ELIMINATION DES DISCONTINUITES.

Il est évidemment très génant d'avoir des paramètres $p_W$ , $p_K$ , $p_H$ discontinus chaque fois que $\Sigma$ ou $\Delta$ passe par un maximum.

Pour éliminer les inconvénients correspondants, on va effectuer une transformation linéaire qui va rendre toutes les discontinuités multiples de $2\pi$ ce qui permettra de considérer les paramètres $\ell$, $g$, $h$ correspondants comme des angles continus. Les nouvelles variables L, G, H, $\ell$, $g$, $h$ s'obtiennent au moyen de la seconde fonction génératrice $Z = Z(W,K,H,\ell,g,h)$

$$Z = S_2(W,K,H) + \ell S_3(W,K,H) + g S_4(W,K,H) + h H \tag{30}$$

$$\begin{cases} \text{avec: } \dfrac{\partial Z}{\partial h} = H, \dfrac{\partial Z}{\partial g} = S_4(W,K,H) = G, \dfrac{\partial Z}{\partial \ell} = S_3(W,K,H) = L \\ p_W = \dfrac{\partial Z}{\partial W} = \dfrac{\partial S_2}{\partial W} + \ell \dfrac{\partial S_3}{\partial W} + g \dfrac{\partial S_4}{\partial W} \\ \text{et} \quad p_K = \dfrac{\partial Z}{\partial K} = \dfrac{\partial S_2}{\partial K} + \ell \dfrac{\partial S_3}{\partial K} + g \dfrac{\partial S_4}{\partial K} \\ p_H = \dfrac{\partial Z}{\partial H} = \dfrac{\partial S_2}{\partial H} + \ell \dfrac{\partial S_3}{\partial H} + g \dfrac{\partial S_4}{\partial H} + h \end{cases} \tag{31}$$

Afin que les discontinuités soient bien celles que nous recherchons, nous sommes conduit à prendre pour les termes de Z :

$$S_4 = G = |H| + \frac{1}{\pi} \int_{a_m}^{\Delta_m} \frac{d\Delta \cdot \sqrt{j(\Delta)}}{s^2 - \Delta^2} = G(W,K,H) \tag{32}$$

$$S_3 = L = G + \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma_m}^{\Sigma_m} \frac{d\Sigma \cdot \sqrt{F(\Sigma)}}{\Sigma^2 - s^2} = L(W,K,H) \tag{33}$$

$$S_2 = \frac{1}{\ell} \int_{\Delta_m}^{\Delta_m} \frac{d\Delta \cdot \sqrt{j(\Delta)}}{s^2 - \Delta^2} \tag{34}$$

Posons :

$$(35)\quad \begin{cases} S_4 = |H| + \dfrac{1}{\pi}\psi & \text{où} \quad \psi = \displaystyle\int_{\Delta_m}^{\Delta_M} \frac{d\Delta \cdot \sqrt{j(\Delta)}}{s^2 - \Delta^2} \\ S_3 = G + \dfrac{1}{\pi}\varphi & \text{où} \quad \varphi = \displaystyle\int_{\Sigma_m}^{\Sigma_M} \frac{d\Sigma \cdot \sqrt{F(\Sigma)}}{\Sigma^2 - s^2} \\ S_2 = \dfrac{1}{2}\psi \end{cases}$$

et de même :

$$(36)\quad \begin{cases} -\frac{1}{2}\delta p_w \left(\text{à } \Sigma_m\right) = W_\Sigma = \displaystyle\int_{\Sigma_m}^{\Sigma_M} \frac{\Sigma^2\, d\Sigma}{\sqrt{F(\Sigma)}} \\ +\frac{1}{2}\delta p_w \left(\text{à } \Delta_m\right) = W_\Delta = \displaystyle\int_{\Delta_m}^{\Delta_M} \frac{\Delta^2\, d\Delta}{\sqrt{j(\Delta)}} \\ +\delta p_K \left(\text{à } \Sigma_m\right) = K_\Sigma = \displaystyle\int_{\Sigma_m}^{\Sigma_M} \frac{d\Sigma}{\sqrt{F(\Sigma)}} \\ -\delta p_K \left(\text{à } \Delta_m\right) = K_\Delta = \displaystyle\int_{\Delta_m}^{\Delta_M} \frac{d\Delta}{\sqrt{j(\Delta)}} \\ \frac{1}{2}\delta p_H \left(\text{à } \Sigma_m\right) = H_\Sigma = H s^2 \displaystyle\int_{\Sigma_m}^{\Sigma_M} \frac{d\Sigma}{(\Sigma^2 - s^2)\sqrt{F(\Sigma)}} \\ \frac{1}{2}\delta p_H \left(\text{à } \Delta_m\right) = H_\Delta = H s^2 \displaystyle\int_{\Delta_m}^{\Delta_M} \frac{d\Delta}{(s^2 - \Delta^2)\sqrt{j(\Delta)}} \end{cases}$$

On a si $s \simeq 0$ :

$$(37)\quad \pi(L - G) = \varphi = \int_{\Sigma_m}^{\Sigma_m} \frac{d\Sigma\,\sqrt{F(\Sigma)}}{\Sigma^2 - s^2} = \pi\left[\frac{\nu}{\sqrt{-2W}} - \sqrt{K} + \frac{s^2}{\sqrt{K}}\left(\frac{W}{2} + \frac{\nu^2}{4K} - \frac{H^2 W}{2K} - \frac{3\nu^2 H^2}{4K^2}\right) + o(s^4)\right]$$

et

$$(38)\quad \pi(G - |H|) = \psi = \int_{\Delta_m}^{\Delta_M} \frac{d\Delta \cdot \sqrt{j(\Delta)}}{s^2 - \Delta^2} = \pi\sqrt{K}\left[1 + \frac{s^2 W}{2K^2}\left(H^2 - K\right) + o(s^4)\right] - \pi|H|$$

$$= \pi\left[\sqrt{K} - |H| + \frac{s^2}{2K\sqrt{K}}\, W\left(H^2 - K\right) + o(s^4)\right]$$

On trouve ainsi

$$(39)\quad W_\Sigma = \frac{\partial\varphi}{\partial W} = \frac{-\pi\nu}{2W\sqrt{-2W}} + \frac{\pi s^2}{2K\sqrt{K}}\left(K - H^2\right) + o(s^4)$$

$$(40)\quad W_\Delta = -\frac{\partial\psi}{\partial W} = \frac{\pi s^2}{2K\sqrt{K}}\left(K - H^2\right) + o(s^4)$$

$$(41)\quad K_\Sigma = -\frac{2\,\partial\varphi}{\partial K} = \frac{\pi}{\sqrt{K}}\left[1 + s^2\left(\frac{W}{2K} + \frac{3\nu^2}{4K^2} - \frac{3WH^2}{2K^2} - \frac{15\nu^2 H^2}{4K^3}\right) + o(s^4)\right]$$

(42) $$K_\Delta = \frac{2\partial\Psi}{\partial K} = \frac{\pi}{\sqrt{K}}\left[1 + s^2\left(\frac{W}{2K} - \frac{3H^2W}{2K^2}\right) + o(s^4)\right]$$

(43) $$H_\Sigma = -\frac{\partial\Psi}{\partial H} = \frac{\pi s^2 H}{2K^2\sqrt{K}}\left(2KW + 3\mu^2\right) + o(s^4)$$

(44) $$H_\Delta = -\frac{\partial\Psi}{\partial H} = \pi\left[\operatorname{sign} H - \frac{s^2 HW}{K\sqrt{K}} + o(s^4)\right]$$

Vérifions que les discontinuités $\delta l$, $\delta g$ et $\delta h$ correspondantes sont toutes multiples de $2\pi$ :

(45) $$p_w = \frac{\partial Z}{\partial W} = -\frac{1}{2}\int_{\Delta_m}^{\Delta_M}\frac{\Delta^2\,d\Delta}{\sqrt{j(\Delta)}} + l\frac{\partial S_4}{\partial W} + \frac{l}{\pi}\int_{\Sigma_m}^{\Sigma_M}\frac{\Sigma^2\,d\Sigma}{\sqrt{F(\Sigma)}} + g\frac{\partial S_4}{\partial W}$$

donc :

(46) $$p_w = -\frac{1}{2}\int_{\Delta_m}^{\Delta_M}\frac{\Delta^2\,d\Delta}{\sqrt{j(\Delta)}} + \frac{l}{\pi}\int_{\Sigma_m}^{\Sigma_M}\frac{\Sigma^2\,d\Sigma}{\sqrt{F(\Sigma)}} - (l+g)\frac{1}{\pi}\int_{\Delta_m}^{\Delta_M}\frac{\Delta^2\,d\Delta}{\sqrt{j(\Delta)}}$$

soit :

(47) $$p_w = -\left(\frac{1}{2} + \frac{l+g}{\pi}\right)\int_{\Delta_m}^{\Delta_M}\frac{\Delta^2\,d\Delta}{\sqrt{j(\Delta)}} + \frac{l}{\pi}\int_{\Sigma_m}^{\Sigma_M}\frac{\Sigma^2\,d\Sigma}{\sqrt{F(\Sigma)}}$$

ou bien :

(48) $$p_w = -\left(\frac{1}{2} + \frac{l+g}{\pi}\right)W_\Delta + \frac{l}{\pi}W_\Sigma = \frac{\partial Z}{\partial W}$$

de même :

(49) $$p_K = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{l+g}{\pi}\right)K_\Delta - \frac{l}{2\pi}K_\Sigma = \frac{\partial Z}{\partial K}$$

(50) $$p_H = -\left(\frac{1}{2} + \frac{l+g}{\pi}\right)H_\Delta - \frac{l}{\pi}H_\Sigma + (l+g)\operatorname{sign} H + h = \frac{\partial Z}{\partial H}$$

Réciproquement :

(51) $$l = \pi\,\frac{2W_\Delta p_K + K_\Delta p_w}{K_\Delta W_\Sigma - K_\Sigma W_\Delta}$$

(52) $$g = -\frac{\pi}{2} + \pi\,\frac{(K_\Sigma - K_\Delta)p_w + 2(W_\Sigma - W_\Delta)p_K}{K_\Delta W_\Sigma - K_\Sigma W_\Delta}$$

(53) $$h = p_H + \frac{\pi}{2}(\operatorname{sign} H) + \frac{p_w\left[K_\Delta H_\Sigma + K_\Sigma H_\Delta - \pi K_\Sigma \cdot \operatorname{sign} H\right] + 2p_K\left[W_\Delta H_\Sigma + W_\Sigma H_\Delta - \pi W_\Sigma \cdot \operatorname{sign} H\right]}{K_\Delta W_\Sigma - K_\Sigma W_\Delta}$$

avec pour H=0 :

(54) $$\begin{cases} h = \lambda & \text{si} \quad \Delta' > 0 \\ h = \lambda \pm \pi & \text{si} \quad \Delta' < 0 \end{cases}$$

Avec (36) on vérifie immédiatement que lors des passages de $\Sigma$ au maximum $\Sigma_M$ :

(55) $$\left\{\begin{array}{l}\delta\ell = -2\pi \\ \delta g = 2\pi \\ \delta h = 0\end{array}\right\} \quad \text{donne bien} \quad \left\{\begin{array}{l}\delta p_W = -2W_\Sigma \\ \delta p_K = K_\Sigma \\ \delta p_H = 2H_\Sigma\end{array}\right.$$

et lors des passages de $\Delta$ au maximum $\Delta_M$ ;

(56) $$\left\{\begin{array}{l}\delta\ell = 0 \\ \delta g = -2\pi \\ \delta h = 2\pi \operatorname{sign} H\end{array}\right\} \quad \text{donne bien} \quad \left\{\begin{array}{l}\delta p_W = 2W_\Delta \\ \delta p_K = -K_\Delta \\ \delta p_H = +2H_\Delta\end{array}\right.$$

## 4 . POTENTIEL DE DEUX CENTRES FIXES EN COORDONNEES SPHERIQUES.

Le point M de coordonnées sphériques $r, \lambda, \varphi$ (fig.1) est soumis au potentiel:

(57) $$U_V = -G m_1\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = -\frac{\mu}{2}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

$U_V$ est indépendant de $\lambda$ et est une fonction paire de $\varphi$ .

On a : $$r_1^2 = r^2 + s^2 - 2rs\sin\varphi$$

$$r_2^2 = r^2 + s^2 + 2rs\sin\varphi$$

Supposons que M soit à l'extérieur de la sphère de centre 0 et de rayon s , on peut alors développer $\frac{1}{r_1}$ et $\frac{1}{r_2}$ en séries convergentes de $\frac{s}{r}$ .

(58)
$$\begin{cases} \frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} + \frac{s}{r_2} P_1(\sin\varphi) + \frac{s^2}{r^3} P_2(\sin\varphi) + \dots \\ \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r} - \frac{s}{r_2} P_1(\sin\varphi) + \frac{s^2}{r^3} P_2(\sin\varphi) + \dots \end{cases}$$

$P_1(\sin\varphi)$, $P_2(\sin\varphi)$ ... étant les polynômes de Legendre.

On peut donc mettre $U_V$ sous la forme :

(59)
$$U_V = -\frac{\mu}{r}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^{2n}}{r^{2n}} P_{2n}(\sin\varphi)\right]$$

et en posant $I_{20} = \frac{s^2}{R^2}$ avec R = rayon équatorial de la Terre, il est donc possible de trouver s (imaginaire) tel que :

$$I_{20} = \frac{s^2}{R^2} = J_{20}$$ terrestre réel;

$U_V$ représentera alors une excellente approximation du potentiel de la Terre à des termes de l'ordre $(J_{20})^2$ et $J_{n,m}$ près, soit $10^{-6}$ environ.

## 5 . RELATIONS ENTRE LES ELEMENTS HAMILTONIENS ET LES ELEMENTS KEPLERIENS OSCULATEURS ORDINAIRES.

Appelons $a_{osc}, e_{osc}, i_{osc}, \Omega_{osc}, \omega_{osc}, M_{osc}$ les éléments képlériens osculateurs ordinaires et définissons les éléments de "Vinti" voisins a, e, i, $\Omega$, $\omega$, M par les formules de Delaunay ordinaires.

(60)
$$\begin{cases} n^2 a^3 = \mu \\ n a^2 = L \end{cases} \Big\} \; a = \frac{L^2}{\mu} = \text{demi-grand-axe de "Vinti"}$$

$$n ab = G \; ; \; b = a\sqrt{1-e^2} = \text{demi-petit-axe}$$

(61)
$$n ab \cos i = H = n_{osc} a_{osc} b_{osc} \cos i_{osc}$$

(62)
$$\begin{cases} \Omega = h \\ \omega = g \\ M = l \end{cases}$$

et de même

$$p = a\left(1 - e^2\right) \qquad = \text{paramètre}$$

(63)
$$\begin{cases} E = \text{anomalie excentrique} \\ v = \text{anomalie vraie} \\ M = E - e \sin E \; ; \; \operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2} \\ u = v + g \qquad = \text{élongation angulaire nodale.} \end{cases}$$

Dans le problème de deux centres fixes a, e, i seront constants ; $\Omega$, $\omega$, M seront des fonctions linéaires du temps.

En utilisant les expressions (1) à (3), (37), (38), (61), on peut développer les éléments képlériens osculateurs en fonction des éléments de Vinti :

(64)
$$a_{osc} = a + \frac{a^2 s^2}{2}\left[\frac{3\cos^2 i - 1}{b^3} + \frac{2}{p^3}\left(3\sin^2 i \sin^2 u - 1\right)\left(1 + e\cos v\right)^3\right] + O\left(\frac{s^4}{p^3}\right).$$

(65)
$$e_{osc} = e + s^2\left[\frac{\sin^2 i}{4b^2}\left[\cos(3v + 2g) + 3\cos(v + 2g) + e\cos 2g\right] + \frac{e(1 - 3\cos^2 i)}{4p(a+b)}\right] + O\left(\frac{s^4}{p^4}\right).$$
$$\left[+\frac{1}{2p^2}\left(3\sin^2 i \sin^2 u - 1\right)\left(3\cos v + e + 3e\cos^2 v + e^2\cos^3 v\right)\right]$$

(66)
$$i_{osc} = i + s^2 \frac{\sin i \cos i}{4p^2}\left[6\sin^2 u - 3 - e^2\cos 2g - e\cos(3v + 2g) - 3e\cos(v + 2g)\right] +$$
$$+ O\left(\frac{s^4}{p^4}\right).$$

(67) $$\Omega_{osc} = \Omega + (\nu - M)\frac{3s^2}{2p^2}\cos i - \frac{3s^2}{4p^2}\cos i \sin 2u +$$

$$+ \frac{s^2 \cos i}{4p^2} e \left[6 \sin \nu - 3 \sin(2g+\nu) - \sin(2g-3\nu) - e \sin g\right] + O\left(\frac{s^4}{p^4}\right).$$

(68) $$\omega_{osc} = g + (\nu - M)\frac{3s^2}{4p^2}(1 - 5\cos^2 i) +$$

$$+ \frac{3s^2}{2ep^2}\left[ - \sin \nu + \sin^2 i \left[\frac{7}{4}\sin(\nu + 2g) - \frac{7}{12}\sin(3\nu + 2g) - 3 \sin g \cdot \cos u\right]\right.$$

$$+ e\left[-\frac{3}{8}\sin^2 i \sin(4\nu + 2g) + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{2}\sin^2 i \cos g \sin(2\nu + g) - \right.$$

$$\left. - \frac{\sin 2\nu}{2} + \sin 2u\left(\frac{1}{2} - 2\sin^2 i\right)\right]$$

$$+ e^2\left[\frac{\sin^3 \nu}{3} - 2\sin \nu + \frac{\sin(\nu + 2g)}{2} + \frac{\sin(3\nu + 2g)}{6}\right.$$

$$+ \sin^2 i\left[\frac{\sin \nu \cos 2g}{4} + \frac{3}{8}\cos \nu \sin 2g - \frac{\sin^2 \nu}{2} -\right.$$

$$- \frac{19}{48}\sin(3\nu + 2g) - \frac{1}{16}\sin(5\nu + 2g) +$$

$$\left.\left. + \frac{5}{4}\sin(\nu + 2g) - 5 \sin g \cos u\right]\right]\Bigg]$$

$$+ O\left(\frac{s^4}{p^4}\right).$$

(69) $$M_{osc} = M + \frac{3s^2}{2bp}\left[-e\sin V - \frac{3}{4}\sin^2 i \sin 2u - \frac{e^2}{4}\sin^2 i \sin 2g + e\sin^2 i\left(\frac{3}{4}\sin(2g+v) - \frac{\sin(2g+3v)}{4} - 3\sin g\cos u\right)\right]$$

$$- \frac{b}{a}(\omega_{osc} - g) - \frac{b}{a}\cos i(\Omega_{osc} - \Omega) + (V - M)\frac{3s^2}{4pb}(1 - 3\cos^2 i) + O\left(\frac{s^4}{p^4}\right).$$

Avec (64), (65), (66) on vérifie aisément (61).

# CHAPITRE III

## APPLICATION AU POTENTIEL TERRESTRE ZONAL REEL ET EXPRESSION DE LA QUASI-INTEGRALE CORRESPONDANTE.

Comme nous l'avons vu en II.4, le potentiel de deux centres fixes appropriés constitue une excellente approximation du potentiel terrestre réel. Cette approximation est environ mille fois meilleure que celle d'un seul centre.

Cette propriété a été souvent utilisée pour étudier le mouvement des satellites artificiels en se servant du mouvement développé dans les chapitres précédents comme d'une première approximation.

Le potentiel $U_V$ de deux centres fixes peut s'exprimer en harmoniques sphériques (figure 1) :

(70) $$U_V = -\frac{\mu}{2r_1} - \frac{\mu}{2r_2} = -\frac{\mu}{r} - \frac{\mu s^2}{r^3} P_2(\sin\varphi) - \frac{\mu s^4}{r^5} P_4(\sin\varphi) \cdots - \frac{\mu s^{2n}}{r^{2n+1}} P_{2n}(\sin\varphi)$$

où $P_1(\sin\varphi)$, $P_2(\sin\varphi)$... sont les polynômes de Legendre.

En ne tenant compte que des harmoniques zonales, le potentiel de la Terre s'écrit :

(71) $$U_{Terre} = -\frac{\mu}{r}\left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{J_{no} R^n}{r^n} P_n(\sin\varphi)\right]$$

On peut, en prenant $\frac{s^2}{R^2} = J_{20} = -1{,}0827.10^{-3}$, identifier les deux premiers termes du potentiel. Pour les autres on obtient alors avec le modèle de la Standard Earth (1969) :

(72)

| Terre | Deux centres fixes |
|---|---|
| $J_{30} = 2{,}54.10^{-6}$ | $J_{30} = 0$ |
| $J_{40} = 1{,}59.10^{-6}$ | $J_{40} = J_{20}^2 = 1{,}17.10^{-6}$ |
| $J_{50} = 0{,}24.10^{-6}$ | $J_{50} = 0$ |
| $J_{60} = -0{,}50.10^{-6}$ | $J_{60} = J_{20}^3 = -10^{-9}$ |
| ... | |
| pour les suivants | etc... $J_{2n+1,0} = 0$ ; |
| $\lvert J_{n_o} \rvert \ll 0{,}4.10^{-6}$ | $J_{2n.o} = J_{2,0}^n$ |

On voit que l'écart relatif entre les deux potentiels est de l'ordre du millionième et l'on peut écrire pour le mouvement des satellites artificiels :

(73) $$\mathcal{H} = \text{Hamiltonien} = \frac{V^2}{2} + U_{\text{Terre}} = \frac{V^2}{2} + U_{\text{2 centres}} + U_p$$

avec : $$\frac{V^2}{2} + U_{\text{2 centres}} = \frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{2r_1} - \frac{\mu}{2r_2} = W$$

(74) et $U_p$ = potentiel perturbateur $= -\frac{\mu}{r}\left[\sum_{n=3}^{\infty} \frac{J'_{no} R^n}{r^n} P_n(\sin\varphi)\right]$

(75) où : $$J'_{no} = \begin{cases} J_{no} & \text{si n est impair} \\ J_{no} - J_{20}^{n/2} & \text{si n est pair} \end{cases}$$ d'ordre $10^{-6}$

$\mathcal{H}$ et $U_p$ sont aussi des fonctions de (L, G, H, $\ell$, $g$) et les équations du mouvement conservent la forme habituelle de Hamilton mais avec le terme perturbateur $U_p$ de l'ordre de $10^{-6}$. W seulement:

$$(76)\quad \begin{cases} \mathcal{H} = W(L,G,H) + U_p(L, G, H, \ell, g) \\ \dfrac{d\ell}{dt} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial L} \; ; \dfrac{dL}{dt} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \ell} \\ \dfrac{dg}{dt} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial G} \; ; \dfrac{dG}{dt} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial g} \\ \dfrac{dh}{dt} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial H} \; ; \dfrac{dH}{dt} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial h} = 0 \end{cases}$$

Le développement de W en fonction de L, G, H et $s^2 = J_{20}R^2$ donne :

$$(77)\quad \begin{cases} W = -\dfrac{\nu^2}{2L^2} + \dfrac{\nu^4 s^2 (3H^2 - G^2)}{4L^3 G^5} - \dfrac{3\nu^6 s^4}{32 L^4 G^{10}} (G^2 - 3H^2)^2 + \\ \quad + \dfrac{3\nu^6 s^4}{64 L^5 G^{11}} \left[ \begin{array}{l} -5L^2G^4 + 70 L^2 G^2 H^2 - 105 L^2 H^4 + \\ + 2G^6 - 36 G^4 H^2 + 50 G^2 H^4 \end{array} \right] + O\left(\dfrac{\nu^8 s^6}{G^{14}}\right) \\ \text{ou bien } W = -\dfrac{\nu^2}{2L^2} + \mathcal{A} \end{cases}$$

A partir de l'expression (76) du mouvement d'un satellite perturbé par les harmoniques zonales de la Terre, nous pouvons rechercher l'expression de la quasi-intégrale I. La décomposition ordinaire donne :

$$(78)\quad \begin{cases} \mathcal{H} = W + U_p = -\dfrac{\nu^2}{2L^2} + \mathcal{A} + U_p \\ \quad = J + \mathcal{H} + \mathcal{L} \end{cases}$$

OBSERVATOIRE DE PARIS

(78) avec $J = -\frac{\nu^2}{2L^2}$

$$\mathcal{K} = \mathcal{A} + \bar{U}_p = \mathcal{A} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U_p(L,G,H,\ell,g)\,d\ell$$

$$\mathcal{L} = U_p - \bar{U}_p$$

$\mathcal{K}$ est de l'ordre de $J_{20}$ ; $\mathcal{L}$ et $\bar{U}_p$ sont de l'ordre de $J_{20}^2$ . Le premier terme de la quasi-intégrale est $T_0 = \mathcal{K}$ .

Les expressions des termes suivants sont données dans la référence [7] .

(79) $$T_1 = \frac{1}{(dJ/dp_1)} \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial C}{\partial q_i}\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial p_i} - \frac{\partial C}{\partial p_i}\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial q_i}\right)$$

(80) $$T_2 = \frac{1}{(dJ/dp_1)}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial C}{\partial p_i}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}\,dq_1 + \frac{d^2J/dp_1^2}{(dJ/dp_1)^2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mathcal{L}^2}{2}\,dq_1$$

(81) avec : $p_1 = L$ ; $q_1 = \ell$
$p_2 = G$ ; $q_2 = g$
$p_3 = H$ ; $q_3 = h$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial \ell} = \mathcal{L} \\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} C(L,G,H,\ell,g)\,d\ell = 0 \end{cases}$$

On voit que déjà $T_2$ est d'ordre $J_{20}^4$ soit $10^{-12}$ et nous le laisserons de côté, on ne s'intéresse donc qu'à $T_1$.

(82) $$T_1 = \frac{1}{n}\left(\frac{\partial C}{\partial \ell}\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial L} + \frac{\partial C}{\partial g}\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial G}\right) + \text{ordre}\left(J_{20}^4\right)$$

(83) $$T_1 = \mathcal{L}\,\frac{3J_{20}R^2(1-3\cos^2 i)}{4bp} + \frac{\partial C}{\partial g}(1-5\cos^2 i)\frac{3J_{20}R^2}{4p^2} + \text{ordre}\left(J_{20}^4\right)$$

Donc à l'ordre $J_{20}^4$ près soit $10^{-12}$ la quasi-intégrale I est :

(84) $$I = I_0 + I_1 + \text{ordre}\,(10^{-12}) = \mathcal{A} + \overline{U}_p + \frac{3\mathcal{L}}{4pb} J_{20} R^2 (1 - 3\cos^2 i) + \frac{3 J_{20} R^2}{4p^2}(1 - 5\cos^2 i)\frac{\partial c}{\partial g} + \text{ordre } 10^{-12}$$

$\mathcal{A}$ est d'ordre $10^{-3}$ et fonction de L, G, H.

$\overline{U}_p$ est d'ordre $10^{-6}$ et fonction de L, G, H, g.

Le reste est d'ordre $10^{-9}$ et fonction de L, G, H, $\ell$, g.

La partie principale de $\overline{U}_p$ est simple:

$$\overline{U}_p = \frac{3\nu R^3 J_{30}}{8pb^3} e \sin i \sin g\,(4 - 5\sin^2 i) -$$

$$- \frac{\nu R^4 (J_{40} - J_{20}^2)}{4p^2 b^3}\left[\left(\frac{3}{2} + \frac{9e^2}{4}\right)\left(1 - 5\sin^2 i + \frac{35}{8}\sin^4 i\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{15 e^2 \sin^2 i}{16}(6 - 7\sin^2 i)\cos 2g\right] -$$

$$- \frac{5}{2}\frac{\nu J_{50} R^5}{p^3 b^3} e \sin i \sin g \left[\frac{3}{2} + \frac{9}{8}e^2 - 7\sin^2 i\left(\frac{3}{4} + \frac{3}{8}e^2 + \frac{e^2}{4}\sin^2 g\right) + \right.$$

$$\left. + 63 \sin^4 i \left(\frac{1}{16} + \frac{3e^2}{128} + \frac{e^2 \sin^2 g}{32}\right)\right] +$$

(85) $$+ \frac{5}{16}\frac{\nu R^6}{b^3 p^4}(J_{60} - J_{20}^3)\left[\left(1 + 5e^2 + \frac{15}{8}e^4\right)\left(1 - \frac{21}{2}\sin^2 i + \frac{189}{8}\sin^4 i - \frac{231}{16}\sin^6 i\right) + \right.$$

$$+ \frac{21}{4} e^2 \sin^2 i \left[5\cos 2g\left(1 - 3\sin^2 i + \frac{33}{16}\sin^4 i\right) + \right.$$

$$+ e^2 \left[\cos 2g\left(\frac{5}{2} - \frac{15}{2}\sin^2 i + \frac{165}{32}\sin^4 i\right) + \right.$$

$$\left.\left.\left. + \sin^2 i \cos 4g\left(\frac{15}{32} - \frac{33}{64}\sin^2 i\right)\right]\right]\right]$$

+ termes en $J'_{n0}$ avec $n \geqslant 7$ + termes d'ordre $J_{20} J'_{n0}$.

L'expression de I nécessite le calcul de $\frac{\partial C}{\partial g}$ , ou bien $\int \frac{\partial (U_p - \overline{U}_p)\, dl}{\partial g}$, car d'après (78) et (81) on a : $\frac{\partial C}{\partial l} = \mathcal{L} = U_p - \overline{U}_p$

Dans le triangle sphérique déterminé par le plan de l'orbite, celui de l'équateur et le plan méridien passant par le satellite (figure 3), on a :

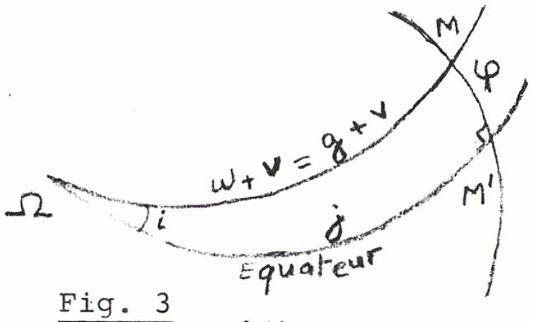


Fig. 3

$$\left.\begin{aligned} \sin\varphi &= \sin i \cdot \sin(g+v) \\ \cos(g+v) &= \cos j \cdot \cos\varphi \end{aligned}\right\} \quad (86)$$

(87) Donc ; $\frac{\partial U_p}{\partial g} = \sin i \cos j \frac{\partial U_p}{\partial \varphi}$

et avec (74) et (85) :

(88) $$\frac{\partial U_p}{\partial \varphi} = -\frac{3}{2}\mu J_{30}\frac{R^3}{r^4}\cos\varphi(5\sin^2\varphi - 1) - \frac{5}{4}\mu\left(J_{40} - J_{20}^2\right)\frac{R^4}{r^5}\sin 2\varphi(7\sin^2\varphi - 3) + \dots$$

(89)
$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{U}_p}{\partial g} = {} & \frac{3\mu R^3 J_{30}}{8pb^3} e \sin i \cos g \left(4 - 5\sin^2 i\right) + \frac{\mu R^4 (J_{40} - J_{20}^2)}{4p^2 b^3}\left[\frac{15 e^2 \sin^2 i}{8}(6 - 7\sin^2 i)\sin 2g\right] - \\ & - \frac{5}{2}\frac{\mu J_{50} R^5}{p^3 b^3} e \sin i \left[\cos g\left(\frac{3}{2} + \frac{9}{8}e^2\right) - 7\sin^2 i \cdot \cos g\left(\frac{3}{4} + \frac{3}{8}e^2\right) - \right. \\ & - \frac{21}{4} e^2 \cos g \cdot \sin^2 g \cdot \sin^2 i + 63 \sin^4 i \cos g\left(\frac{1}{16} + \frac{3e^2}{128}\right) + \\ & \left. + \frac{189}{32} e^2 \sin^4 i \cdot \cos g \cdot \sin^2 g \right] \\ & + \frac{5}{16}\frac{\mu R^6}{b^3 p^4}\left(J_{60} - J_{20}^3\right) \dots + \dots \end{aligned}$$

Décomposons en fonction des $J'_{no}$ : $\frac{\partial C}{\partial g} = \sum_{n=3}^{\infty} \nu J'_{no} X_n$ (90)

(91) $$X_3 = \int \left[ \left[ -\frac{3}{2} \frac{R^3}{r^4} \sin i . \cos j . \cos\varphi \left( 5\sin^2\varphi - 1 \right) \right] - \left( \frac{\partial \bar{u}_r}{\partial g} \right)_{J'_{30}} \right] dl$$

(92) $$X_4 = \int \left[ \left[ -\frac{5}{4} \frac{R^4}{r^5} \sin i . \cos j . \sin 2\varphi \left( 7\sin^2\varphi - 3 \right) \right] - \left( \frac{\partial \bar{u}_p}{\partial g} \right)_{J'_{40}} \right] dl \quad \text{etc ...}$$

$$\int \frac{\partial (u_p - \bar{u}_p)}{\partial g} dl = \frac{\partial C}{\partial g} = \mu \left[ J'_{30} X_3 + J'_{40} X_4 \ldots \right]$$

On obtient , avec u = v+g :

(93)

$$X_3 = -\frac{3}{2} \frac{R^3 \sin i}{b^3 p} \left[ \begin{array}{l} \frac{5}{12} \sin^2 i \left( 3\sin u - \sin 3u \right) - \sin u - \\ -\frac{5}{2} e \sin^2 i \left[ \begin{array}{l} \frac{1}{8} \sin(4v + 3g) + \frac{1}{4} \sin(2v + 3g) - \\ \frac{1}{4} \sin(2v + g) \end{array} \right] + \\ -\frac{5}{8} e^2 \sin^2 i \left[ \begin{array}{l} \frac{1}{3} \sin 3u - \sin u + \frac{1}{10} \sin(5v + 3g) + \\ + \frac{1}{2} \sin(v + 3g) + \frac{1}{4} \sin(3v + g) - \frac{1}{2} \sin(v - g) \end{array} \right] - \\ -\frac{e^2}{2} \left[ \frac{1}{16} \sin(3v + g) + \frac{1}{2} \sin(v - g) + \sin u \right] + \end{array} \right]$$

$$+ \frac{3}{8} \frac{R^3}{b^3 p} (v - l) e . \sin i . \cos g \left( 4 - 5\sin^2 i \right) .$$

$$
X_4 = \frac{5R^4 \sin^2 i}{4 b^3 p^2} \left[ \begin{array}{l}
\frac{1}{2}\left(\frac{7}{2}\sin^2 i - 3\right)\cos 2u - \frac{7}{16}\sin^2 i \cos 4u - \\
- \frac{21}{8} e \sin^2 i \left[\frac{1}{5}\cos(5v+4g) + \frac{1}{3}\cos(3v+4g)\right] + \\
+ \frac{3}{2} e \left(\frac{7}{2}\sin^2 i - 3\right)\left[\frac{1}{3}\cos(3v+2g) + \cos(v+2g)\right] - \\
- \frac{21}{8} e^2 \sin^2 i \left[\frac{1}{4}\cos 4u + \frac{1}{12}\cos(6v+4g) + \frac{1}{4}\cos(2v+4g)\right] + \\
+ \frac{3}{2} e^2 \left(\frac{7}{2}\sin^2 i - 3\right)\left[\frac{1}{2}\cos 2u + \frac{1}{8}\cos(4v+2g)\right] - \\
- \frac{7}{16} e^3 \sin^2 i \left[\begin{array}{l} \frac{1}{14}\cos(7v+4g) + \frac{1}{2}\cos(v+4g) + \\ + \frac{3}{10}\cos(5v+4g) + \frac{1}{2}\cos(3v+4g) \end{array}\right] + \\
+ \frac{e^3}{4}\left(\frac{7}{12}\sin^2 i - 3\right)\left[\begin{array}{l} \frac{1}{10}\cos(5v+2g) - \frac{1}{2}\cos(2g-v) + \\ + \frac{1}{12}\cos(3v+2g) + \frac{3}{2}\cos(v+2g) \end{array}\right]
\end{array} \right]
$$

$$
+ \frac{15}{32}\frac{R^4}{b^3 p^2}(v-\ell) e^2 \sin^2 i \cdot \sin 2g \left(6 - 7\sin^2 i\right). \qquad (94)
$$

$X_5$, $X_6$ etc ... avec un nombre de termes de plus en plus grand mais toujours fini.

Avec les deux intégrales $\mathcal{H}$, H et la quasi-intégrale I, on obtient l'intégrabilité pratique du problème des harmoniques zonales. Car I varie de moins de $10^{-25}$ par an (ce qui ne correspond qu'à un mm en plusieurs milliards d'années) et son expression approchée (84) est suffisante pour une précision centimétrique.

On retrouve de la sorte, avec plus de précision, les résultats classiques y compris les librations au voisinage des inclinaisons critiques.

# CONCLUSION

Le système de variables hamiltoniennes obtenu dans ce travail est une extension rigoureuse au problème des deux centres fixes des variables habituelles de Delaunay. L'examen des petites perturbations autour de ce problème peut se faire avec un potentiel un peu différent de celui des deux centres fixes exactement comme on le fait habituellement au voisinage du problème des deux corps avec les éléments ordinaires de Delaunay. Dans le cas du potentiel terrestre l'avantage de cette nouvelle méthode est un niveau de perturbations beaucoup plus faible.

A partir de l'étude du mouvement d'un satellite artificiel perturbé par les harmoniques zonales, il est possible de rechercher l'expression de la quasi-intégrale correspondante ; elle est si constante qu'elle rend le même service qu'une intégrale et permet de résoudre complètement le problème.

On peut se poser la question de savoir ce que deviennent les "régions de mouvements chaotiques" découvertes par Michel Hénon dans les problèmes non-intégrables. Il est probable qu'ici elles sont si étroites qu'elles passent tout à fait inaperçues.

REFERENCES

1 G. CONTOPOULOS : 1967, Bull. Astron. 2, 223.

2 M. HENON : 1966, "Exploration numérique du problème restreint III et IV", Bull. Astron., Paris, Vol 1, fasc. 1, p 157 et fasc. 2, p 49.

3 E.P. AKSENOV, E.A. GREBENIKOV and V.G. DEMIN :
The Generalized problem of motion about two fixed centres and its application to the theory of artificial earth satellites.
Soviet Astronomy. AJ - Vol 7, n° 2, p 276-282.

5 J.P. VINTI : New methods of Solution For Unretarded Satellite Orbits. Journal of Research of the National Bureau of Standards. B Mathematics and Mathematical Physics. Vol 62 B, n° 2, October-December 1959, p 105-116.

Theory of an Accurate Intermediary Orbit for Satellite Astronomy. Journal of Research of the National Bureau of Standards. B Mathematics and Mathematical Physics. Vol 65B, n° 3, July-September 1961, p 169-201.

6 J. KOVALEVSKY : Introduction à la mécanique céleste, Armand Colin 1963, p 127.

7 C. MARCHAL : 1980 "The Quasi-Integrals", Celestical Mechanics 21 (1980), p 183-191.

8 C. MARCHAL : Bulletin Astronomique
Série 3, Tome 1, Fasc. 3, 1966.

TABLE DES MATIERES


| | pages |
|---|---|
| RESUME | 1 |
| INTRODUCTION | 2 |
| Chapitre I : DEFINITION ET ETUDE DU PROBLEME DES DEUX CENTRES FIXES. | 3 |
| Chapitre II : RECHERCHE D'UN SYSTEME DE VARIABLES HAMILTONIENNES COMMODES. | 6 |
| 1. Application de la transformation de Von Zeipel. | 6 |
| 2. Etude des discontinuités de $p_w$, $p_k$ et $p_H$. | 10 |
| 3. Elimination des discontinuités. | 11 |
| 4. Potentiel de deux centres fixes en coordonnées sphériques. | 14 |
| 5. Relations entre les éléments hamiltoniens et les éléments képlériens osculateurs ordinaires. | 15 |
| Chapitre III : APPLICATION AU POTENTIEL TERRESTRE ZONAL REEL ET EXPRESSION DE LA QUASI-INTEGRALE CORRESPONDANTE. | 19 |
| CONCLUSION | 28 |
| REFERENCES | 29 |


OBSERVATOIRE DE PARIS