



Courbures riemanniennes dans le problème plan des trois corps

Mihail Barbosu

► To cite this version:

Mihail Barbosu. Courbures riemanniennes dans le problème plan des trois corps. Astrophysique [astro-ph]. Observatoire de Paris, 1995. Français. NNT : . tel-01958569

HAL Id: tel-01958569

<https://theses.hal.science/tel-01958569>

Submitted on 18 Dec 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT

soutenue à
L'OBSERVATOIRE DE PARIS

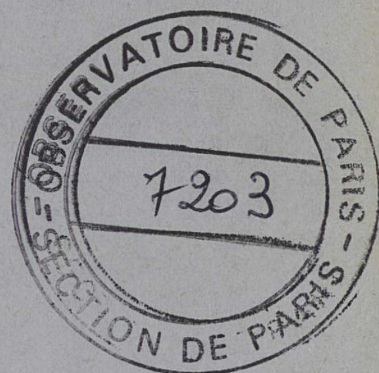
Spécialité:
ASTRONOMIE FONDAMENTALE, MÉCANIQUE CÉLESTE ET GÉODÉSIE

présentée par
Mihail BARBOSU

Sujet de la thèse:
Courbures riemanniennes dans le problème plan des trois corps
Application à l'étude de la stabilité

Soutenue le 13 novembre 1995 devant le jury composé de:

M. Badaoui ELMABSOUT.....examineur
M. Claude LAMOUREUX.....rapporteur
M. Christian MARCHAL.....rapporteur
M. Charles-Michel MARLE.....examineur
M. JEAN-Louis SAGNIER.....examineur



Thèse préparée au Laboratoire des Systèmes Dynamiques de l'Université Pierre et Marie Curie, Paris VI

(043)
BAR

THÈSE DE DOCTORAT

soutenue à

L'OBSERVATOIRE DE PARIS

Spécialité:

ASTRONOMIE FONDAMENTALE, MÉCANIQUE CÉLESTE ET GÉODÉSIE

présentée par

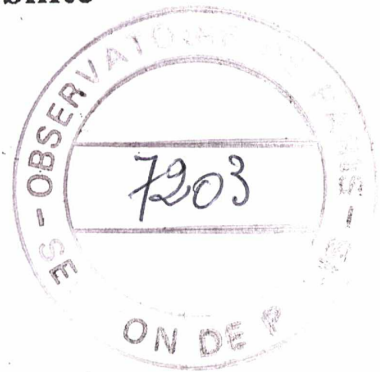
Mihail BARBOSU

Sujet de la thèse:

Courbures riemanniennes dans le problème plan des trois corps
Application à l'étude de la stabilité

Soutenue le 13 novembre 1995 devant le jury composé de:

M. Badaoui ELMABSOUT.....examineur
M. Claude LAMOUREUX.....rapporteur
M. Christian MARCHAL.....rapporteur
M. Charles-Michel MARLE.....examineur
M. JEAN-Louis SAGNIER.....examineur



Thèse préparée au Laboratoire des Systèmes Dynamiques de l'Université Pierre et Marie Curie, Paris VI

A mes parents

Remerciements

Cette thèse a été préparée au Laboratoire des Systèmes Dynamiques à l'U.F.R. de Mécanique, sous la direction de Monsieur Badaoui ELMABSOUT, Professeur à l'Université Pierre et Marie Curie. Je tiens à lui exprimer ma profonde gratitude pour ses conseils, sa disponibilité et ses encouragements, qui ont été déterminants pour l'aboutissement de ce travail. Je le remercie également pour le soutien moral et les conditions optimales dont j'ai bénéficié dans son laboratoire.

Je remercie Monsieur Claude LAMOUREUX, Professeur à l'Ecole Centrale de Paris, d'avoir accepté la tâche de rapporteur pour cette thèse. Ses remarques pertinentes m'ont permis d'améliorer la version finale de ce mémoire.

J'exprime mes remerciements à Monsieur Christian MARCHAL, Directeur de recherches à l'ONERA, qui m'a fait déjà profiter de son enseignement et a dirigé mon stage de D.E.A, pour avoir accepté d'être rapporteur pour cette thèse et pour les discussions fructueuses que nous avons eues par la suite.

Monsieur Charles-Michel MARLE, Professeur à l'Université Pierre et Marie Curie, m'a fait découvrir les relations entre la géométrie et la mécanique dans un contexte de rigueur scientifique excellente. Il m'a fait l'honneur d'accepter de participer à ce jury. Qu'il trouve ici l'expression de ma respectueuse reconnaissance.

Monsieur Jean-Louis SAGNIER, Astronome au Bureau des Longitudes, excellent pédagogue et spécialiste en Mécanique Céleste, a bien voulu participer au jury. Je suis sensible à l'honneur qu'il m'a fait et je le remercie chaleureusement.

Ce travail n'aurait pas pu être fait sans le soutien financier dont j'ai bénéficié de la part du Gouvernement Français. J'exprime, à ce sujet, ma gratitude pour leur gentillesse et leur grande compréhension à Monsieur Christian DUHAMEL, Attaché de Coopération à l'Ambassade de France en Roumanie et à Madame Christiane BRABENEC, Responsable du Service de Développement et d'Evaluation Financière au CNOUS.

Notations

$\times$: le produit cartésien;

$\wedge$: le produit vectoriel;

$\| \cdot \|$: la norme euclidienne;

M^n : espace riemannien de dimension n ;

$T(M^n)$: fibré tangent de M^n ;

$g_{ij}(q)$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) : composantes covariantes du tenseur métrique
fondamental;

δ_{ij} : le symbole de Kronecker;

Γ_{ijk} : les symboles de Christoffel de première espèce;

$\Gamma_i{}^j{}_k$: les symboles de Christoffel de deuxième espèce;

v^i ($i = 1, 2, \dots, n$) : les composantes contravariantes d'un champ de vecteurs v ,
sur M^n ;

∇v^i : les composantes contravariantes de la différentielle covariante de v^i

$\frac{\delta w^i}{\delta u}$: la dérivée absolue du vecteur w^i , w^i étant défini le long d'une

courbe paramétrée par u ;

R_{ijkl} : les composantes covariantes du tenseur de courbure de Riemann-Christoffel

q^i ($i = 1, \dots, n$) : les coordonnées généralisées d'un point ;

$\dot{q}^i$ ($i = 1, \dots, n$) : la vitesse d'un point ;

m : la masse d'un point;

p^i : les variables de Poisson;

G : la constante de la gravitation universelle

T : l'énergie cinétique ;

V : le potentiel;

U : la fonction de force, $U = -V$;

I : le moment d'inertie par rapport au centre des masses;

H : le hamiltonnien;

h : la constante de l'énergie;

K : le moment cinétique;

c : la constante du moment cinétique.

INTRODUCTION

Pour étudier les systèmes dynamiques non intégrables on a souvent recours soit à des méthodes d'approximation appliquées aux équations différentielles soit à des méthodes qualitatives. Dans ce travail nous nous sommes intéressés à la *théorie géométrique* des systèmes dynamiques conservatifs et plus particulièrement aux problèmes concernant le comportement des trajectoires d'un tel système.

Du point de vue mathématique, nous développons une méthode pour rechercher et étudier la courbure de l'espace des configurations et de l'espace des phases. Une discussion sur le signe des courbures riemanniennes conduira à des conclusions concernant la stabilité ou la non-stabilité du système dans le voisinage d'une configuration donnée.

Nous appliquons cette méthode géométrique au problème plan des trois corps dans divers cas.

§ 1.1 Thème de l'étude, point de départ

En 1774 Maupertuis énonça le principe de moindre action et Jacobi (1843) en donna un énoncé plus clair. Plus tard, les travaux de Riemann sur la géométrie ont été utilisés pour prouver un théorème sur les géodésiques d'un espace de Riemann de dimension finie (Darboux [28]). Ce théorème, connu sous le nom du "Principe de

Maupertuis”, énoncé dans ce qui suit, sera notre point de départ dans l’étude des trajectoires d’un système dynamique:

Pour toute valeur fixée, h , de la constante de l’énergie, les trajectoires d’un système dynamique conservatif sont des géodésiques de l’espace des configurations muni de la métrique riemannienne de Maupertuis (voir § 2.3 ou [59]).

Donc les propriétés des trajectoires d’un système dynamique peuvent être obtenues grâce à l’étude des géodésiques de l’espace des configurations, muni de cette métrique.

Les solutions des équations du mouvement d’un système hamiltonien sont des courbes de *l’espace des phases*. Ces courbes sont des géodésiques de l’espace des phases muni de la métrique de Sasaki [82], métrique déduite de celle de Maupertuis. On sait par ailleurs qu’un relèvement d’une géodésique de l’espace des configurations est une géodésique de l’espace des phases. Autrement dit, les trajectoires de l’espace des phases se projettent sur celles de l’espace des configurations.

Donc, la discussion sur la *stabilité* du mouvement d’un système dynamique s’effectue d’une manière très claire si l’on raisonne sur le comportement des géodésiques. Ce sont les tenseurs de courbure et les courbures riemanniennes qui donnent le plus d’information dans ce sens:

- une courbure riemannienne positive dans un point de l’espace est une indication de stabilité, alors qu’une courbure riemannienne négative est associée à l’instabilité du mouvement (voir § 2.5).

Bien que les informations tirées du tenseur de courbure aient un *caractère local*, on peut déduire certains résultats concernant la stabilité si les propriétés locales sont valables dans un domaine de la variété ou tout le long d’une géodésique.

Pour pouvoir utiliser ces résultats, nous calculerons et étudierons donc les courbures riemanniennes de l'espace des configurations et de l'espace des phases dans le problème plan des trois corps, en discutant suivant les valeurs des masses et de la constante de l'énergie. Des résultats sur la stabilité des trajectoires seront obtenus pour des configurations particulières du triangle des trois corps.

§ 1.2 Plan de l'étude

Ce travail comprend quatre chapitres et trois annexes.

Le but du **premier chapitre** est de situer notre travail dans le cadre des recherches existantes sur le sujet. Ce chapitre sera ainsi consacré à une revue bibliographique des travaux déjà publiés.

Dans le **deuxième chapitre** nous avons mis au point une méthode de calcul des courbures permettant d'analyser la stabilité des trajectoires d'un système dynamique conservatif. On y rappelle tout d'abord les notions théoriques utiles dans notre démarche. On peut distinguer ainsi deux parties.

Une partie est consacrée aux notions géométriques: espace riemannien, fibré tangent, métrique de Sasaki, géodésiques sur un espace riemannien et sur son fibré tangent; tenseurs de courbure et les courbures riemanniennes; liaison entre le signe des courbures riemanniennes et le comportement des géodésiques.

L'autre partie porte sur des aspects dynamiques: espace des configurations muni de la métrique de Maupertuis, espace des phases muni de la métrique de Sasaki, courbure de l'espace et stabilité.

La suite du chapitre concerne un *algorithme de calcul* basé sur les notions théoriques introduites et appliqué à des exemples simples.

Le **troisième chapitre** est consacré au problème plan des trois corps. On commence avec des rappels sur la topologie du problème en soulignant l'importance du paramètre hc^2 qui intervient dans la détermination des régions possibles du mouvement et dans les domaines des configurations admissibles.

Suivant l'algorithme établi dans le deuxième chapitre, nous avons déterminé les formules qui donnent les courbures riemanniennes de l'espace des configurations du problème plan des trois corps et les composantes de la métrique de l'espace des phases.

Pour la plupart des calculs et des graphiques faits dans ce chapitre et le suivant, nous avons utilisé les logiciels de calcul formel Mathematica et Macsyma.

Dans le **quatrième chapitre** nous avons analysé les courbures riemanniennes et le tenseur de Ricci dans les cas particuliers suivants:

- cas planétaire; c'est le cas d'une masse prépondérante sur les deux autres;

- cas équilatéral homothétique et cas rectiligne homothétique; dans ce cas les trois corps décrivent des orbites keplériennes;

- cas d'équilibre relatif de Lagrange et cas d'équilibre relatif d'Euler.

Dans chacun de ces cas particuliers, nous avons déduit des résultats sur la stabilité des configurations étudiées.

Afin de *faciliter la lecture*, nous avons mis dans la partie intitulée **Annexes** des compléments sur des résultats connus, que nous avons présentés de façon originale (voir Annexe-A) et les expressions encombrantes de certaines courbures.

Ainsi, une partie importante du travail se trouve, pour ainsi dire, “cachée” dans l’Annexe-B et dans l’Annexe-C.

Dans la **Conclusion** nous avons fait une synthèse des résultats obtenus dans ce travail et nous avons présenté les développements des recherches possibles autour du sujet.

CHAPITRE I

Revue bibliographique

Objectifs

§ 1.1 Outils théoriques

Pour aborder le sujet de cette thèse, il faut tout d'abord préciser les éléments théoriques qui vont intervenir dans notre étude.

La notion géométrique sur laquelle notre attention est concentrée est la *courbure d'un espace riemannien M^n de dimension n* . Tous les traités de géométrie riemannienne (y compris ceux cités dans les références bibliographiques [19], [56], [69], [90], [106]) contiennent une partie consacrée à cette notion. Les propriétés de l'espace sont plus faciles à obtenir par l'étude des courbures sectionnelles (riemanniennes) plutôt que par une étude "directe" du tenseur de Riemann-Christoffel (voir par exemple [20], [55]).

Ricci et Levi-Civita ont donné en 1900 un premier exposé systématique des éléments de calcul tensoriel. Dans le calcul des tenseurs de courbure et des courbures riemanniennes, nous avons choisi la méthode du repère mobile de Cartan [23] et les

formules indiquées dans Lichnerowicz [59], Eisenhart [37], Synge et Schild [93], Schouten [85].

L'étude systématique de la *courbure* du *fibré tangent*, $T(M^n)$, commence dans les années '60 avec les travaux de Davies [29], Yano [107] et Sasaki [82], [83]; ces résultats sont déjà devenus classiques.

En ce qui nous concerne, dans le fibré tangent nous avons utilisé la métrique de Sasaki. C'est une métrique naturelle, déduite de la métrique de l'espace M^n . Si l'on munit le fibré tangent de la métrique de Sasaki, *le relèvement d'une géodésique de l'espace M^n est une géodésique du fibré tangent*. Sasaki, [82], a montré ce résultat en 1958. Dans le même article il donne les expressions des symboles de Christoffel, les équations différentielles des géodésiques de $T(M^n)$, et, pour les espaces à courbure constante, il déduit des propriétés de ces géodésiques. En 1962 Sasaki [83] continue l'étude des fibrés tangents avec sa métrique pour les vecteurs *unitaires* tangents à M^n .

Des travaux ultérieurs ont révélé d'autres propriétés géométriques intéressantes de cette métrique (voir [13], [21], [84]). On retient les théorèmes de Kazutoshi Aso [13] sur les courbures sectionnelles du fibré tangent. Il montre que *pour la métrique de Sasaki, le fibré tangent $T(M^n)$ est plat si et seulement si l'espace M^n est plat* et il déduit que si la courbure sectionnelle du fibré tangent est bornée, alors le fibré tangent est plat. Nous avons vérifié ce résultat sur l'exemple du pendule, dans le deuxième chapitre. Dans son travail, Satō [84] a étudié les formes des isométries infinitésimales et les transformations affines de l'espace $T(M^n)$ muni de la métrique de Sasaki.

On retrouve aussi l'utilisation de la métrique de Sasaki en mécanique, dans le travail de Avez et Buzanca [14]. Ils font l'étude du générateur infinitésimal du flot

géodésique sur le fibré unitaire tangent d'une surface, avec une interprétation de ce générateur en mécanique des fluides parfaits, en étudiant les orbites du flot.

Un autre aspect important pour notre étude concerne la liaison entre les courbures et le comportement des géodésiques sur un espace riemannien. A cet égard, la conclusion est claire: une courbure riemannienne positive implique la convergence des géodésiques alors qu'une courbure riemannienne négative (*respectivement nulle*) reflète une divergence exponentielle (*respectivement linéaire*) des géodésiques. Mais une discussion s'impose, qui tient compte du caractère local ou global du signe de la courbure. Ainsi, sur des variétés *compactes* les démonstrations ont un caractère global (voir [6], [8], [100]) alors que sur d'autres variétés riemanniennes nous pouvons déduire seulement des propriétés locales (voir [47], [93], [3]).

C'est dans les espaces à courbure riemannienne constante que l'on obtient les résultats les plus intéressants. Par exemple, dans un espace à *courbure constante positive* deux géodésiques adjacentes qui partent d'un point commun, vont s'intersecter de nouveau sur la variété considérée à une distance l , égale à $l = \frac{\pi}{\sqrt{K}}$, K étant la courbure de l'espace (voir Annexe-A).

Comme exemples d'espaces à *courbure négative*, on peut citer

-le paraboloïde: $z = x^2 - y^2$,

-l'hyperboloïde: $x^2 + y^2 - z^2 = 1$,

-la pseudo-sphère $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2} + \text{Argch}\sqrt{x^2 + y^2}$, $z > 0$, (voir [68],

[55]).

On sait depuis Anosov que le flot géodésique sur une surface compacte à courbure constante, négative, est structurellement stable.

§ 1.2 Courbures riemanniennes et systèmes dynamiques

La géométrie des systèmes dynamiques fait l'objet de nombreux livres et articles (voir [1], [2], [4], [11], [12], [38], [49], [58], [68], [88], [89]).

Plus proches de notre sujet sont les travaux concernant les courbures de l'espace des configurations et de l'espace des phases d'un système dynamique conservatif. Le mouvement d'un tel système peut être représenté comme un flot géodésique sur une variété riemannienne (Goldstein [41], Anosov et Sinai [7]).

On munit l'espace des configurations de la métrique ds_0^2 de Maupertuis,

$$(1.1) \quad ds_0^2 = 2 (U+h) ds^2$$

avec
$$ds^2 = 2 T dt^2,$$

U étant la fonction de force, h la constante de l'énergie, T l'énergie cinétique et t le temps.

Sur les sous-variétés d'énergie constante, les géodésiques sont les trajectoires du système considéré. En utilisant cette propriété, Anosov [6] étudie les flots géodésiques sur des variétés riemanniennes compactes, à courbure négative. Il déduit les conditions dans lesquelles un système dynamique est structurellement stable dans le sens d'Andronov et Pontryagin. Cela signifie que sous certaines conditions, pour une petite perturbation, il existe un homéomorphisme de l'espace des phases, voisin de l'identité, qui transforme les trajectoires du système non-perturbé en les trajectoires du système perturbé. En 1962 Anosov et Sinai [7] ont traité des systèmes dynamiques sur des variétés fermées, dont les trajectoires sont exponentiellement instables. Leur étude touche ainsi un sujet classique de

la théorie ergodique. Il s'agit des systèmes d'entropie positive, donc ergodiques. Ils montrent qu'une instabilité "faible" ne conduit pas à l'ergodicité (!).

A ce propos, après une synthèse des résultats concernant les courbures riemanniennes, Arnold souligne la "découverte inattendue de l'étonnante stabilité des systèmes exponentiellement instables par rapport aux perturbations du système"; c'est une idée avancée par Smale et démontrée par Anosov et Sinai. De même, on trouve dans Arnold [9] un exemple d'application de l'instabilité exponentielle des trajectoires dans le problème de Boltzmann (chocs entre billes) et on trouve aussi une suggestion pour étudier l'instabilité hydrodynamique d'un fluide visqueux décrit par les équation de Navier-Stokes. En effet, le fait que l'espace des phases de ce problème soit de dimension infinie, n'est pas la difficulté majeure, puisque Michal [66] a traité de cette manière l'équation de la corde vibrante où l'espace est de dimension infinie.

Michal, 1964 [66] considère un fil de longueur l , fixé aux deux extrémités. Avec les hypothèses de simplification habituelles, l'équation des ondes à une dimension s'écrit:

$$(1.2) \quad \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2},$$

avec $a^2 = \frac{F}{\rho}$, F étant la tension du fil et ρ la densité. L'énergie cinétique T et l'énergie potentielle V sont données respectivement par les expressions:

$$(1.3) \quad T = \frac{\rho}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right)^2 dx$$

$$(1.4) \quad V = \frac{F}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)^2 dx.$$

En plus, on a la conservation de l'énergie totale, soit $T + V = h$. Le résultat essentiel de son travail se résume dans le théorème suivant:

Les états vibratoires (trajectoires dynamiques) à niveau d'énergie h d'une corde élastique à extrémités fixées peuvent être représentés par une géodésique de l'espace riemannien de dimension infinie dont l'élément de longueur d'arc est donné par :

$$(1.5) \quad ds^2 = 2 \left[h - \frac{F}{2} \int_0^l \left(\frac{d v(x)}{d x} \right) dx \right] \rho \int_0^l (\delta v(x_1))^2 dx_1,$$

où $\delta v(x)$ et $v(x)$ sont des fonctions arbitraires, deux fois continuellement dérivables dans $[0, l]$ et nulles pour $x=0$ et $x=l$. Michal montre aussi que les vibrations harmoniques peuvent être représentées comme des géodésiques:

Si $h > 0$, alors pour toute valeur entière de n , la vibration harmonique

$$(1.6) \quad u_n(x, t) = \frac{2}{n\pi} \sqrt{\frac{l h}{F}} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{F}{\rho}} t\right),$$

est une géodésique de l'espace riemannien de dimension infinie dont l'élément d'arc ds est donné par (1.5). L'énergie totale de chacune de ces vibrations harmoniques est égale à h .

Les propriétés de la courbure de la variété d'une corde vibrante de niveau d'énergie totale fixée sont aussi étudiées par l'auteur qui en déduit que la variété riemannienne de dimension infinie associée aux vibrations transverses d'une corde élastique à extrémités fixes, de niveau d'énergie constant, *n'a pas une courbure riemannienne constante.*

Cette méthode utilisée par Michal est valable pour des phénomènes gouvernés par des équations aux dérivées partielles linéaires ou non linéaires et par des équations fonctionnelles.

Dans les travaux énumérés ci-dessus les résultats ont un caractère global et concernent tout l'espace. Par contre, si le signe de la courbure de l'espace n'est pas constant, il faut se contenter des propriétés locales. C'est le domaine des travaux qui touchent notre sujet et que nous allons présenter dans ce qui suit.

En 1978 van Velsen [96] donne les expressions du tenseur de Riemann-Christoffel pour le mouvement d'un système dynamique conservatif à n degrés de liberté, en utilisant la métrique de Maupertuis, à partir d'une métrique dont le tenseur fondamental est constant par rapport aux coordonnées.

Il introduit la matrice symétrique μ ayant pour éléments:

$$(1.7) \quad \mu_{ij} = 3v_i v_j + 2 (U + h) v_{ij}$$

$$\text{où} \quad v_i = -\frac{\partial U}{\partial q^i} \quad \text{et} \quad v_{ij} = -\frac{\partial^2 U}{\partial q^i \partial q^j},$$

U étant la fonction de force et q^j les coordonnées généralisées. Il note λ_i les valeurs propres de la matrice μ_{ij} . La matrice des μ_{ij} est liée au tenseur de Riemann-Christoffel par la relation:

$$(1.8) \quad 4 (U + h)^3 R^{ij}_{k1} = (\lambda_i + \lambda_j - \sum_m v_m v_m) (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}),$$

où δ_{ij} est le symbole de Dirac.

Van Velsen montre ensuite la liaison entre la *courbure sectionnelle* K_{ij} , (déterminée par les vecteurs tangents dans les directions q^i et q^j), les valeurs propres de la matrice μ_{ij} et le tenseur de Riemann-Christoffel:

$$(1.9) \quad R^{ij}{}_{kl} = K_{ij} (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}),$$

où

$$(1.10) \quad K_{ij} = \frac{\lambda_i + \lambda_j - v_m v_m}{4(U + h)^3}, \quad i < j.$$

L'auteur conclut que, pour une configuration d'équilibre absolu, les courbures K_{ij} sont positives. Il souligne aussi que la courbure négative est une condition suffisante pour l'ergodicité mais pas nécessaire.

La *méthode de calcul* des courbures proposée par van Velsen est bien adaptée au calcul numérique, mais nous considérons *qu'elle n'est pas très efficace dans l'étude analytique*.

En 1980, van Velsen [97] applique la méthode proposée dans [96] à l'étude des courbures d'un système dynamique où le potentiel V est celui de Hénon-Heiles:

$$(1.11) \quad V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + 2x^2y - \frac{2}{3}y^3)$$

L'espace des configurations est borné dans ce cas, et la courbure riemannienne est positive:

$$(1.12) \quad R = \frac{1}{(h - V)^2} \left\{ 2 + \frac{1}{(h - V)} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} > 0.$$

L'étude de cette courbure lui permet de discuter les problèmes de stabilité d'un tel système en comparaison avec des résultats obtenus par d'autres méthodes.

Dans le même travail, des applications numériques sont données pour des problèmes dont le potentiel est celui de Debye-Hückel:

$$V(r_1, r_2, \dots, r_N) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^N \frac{e^{-r_{ij}}}{r_{ij}}, \quad r_{ij} = |r_i - r_j|,$$

(r_{ij} étant la distance entre les particules), concernant un modèle de plasma, ou celui de Lennard-Jones:

$$V(r_1, r_2, \dots, r_N) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^N \left(\frac{1}{r_{ij}^{12}} - \frac{1}{r_{ij}^6} \right), \quad \text{avec } r_{ij} = |r_i - r_j|,$$

concernant l'interaction entre les atomes d'un gaz rare.

L'étude des courbures a été utilisée en mécanique quantique dans les travaux de Iwai [51] et [52], dans lesquels l'auteur utilise la théorie de jauge et des notions de probabilité. Mais ces travaux sont très éloignés de notre sujet.

§ 1.3 Courbures et problème des trois corps

Les aspects géométriques du problème des trois corps sont abordés dans de nombreux travaux. Nous les avons cités dans le quatrième chapitre et dans l'Annexe-B.

Pour plus d'information sur ce problème nous suggérons la monographie de Marchal [63] et ses 289 références.

Nous allons examiner avec plus de détails les travaux où l'étude de la courbure intervient dans le problème des trois corps.

En 1962 Deprit et Delie [31] utilisent dans une étude du problème plan des trois corps M_1, M_2, M_3 , de masses respectives m_1, m_2, m_3 , (voir Fig.1.1) la métrique riemannienne (1.13).

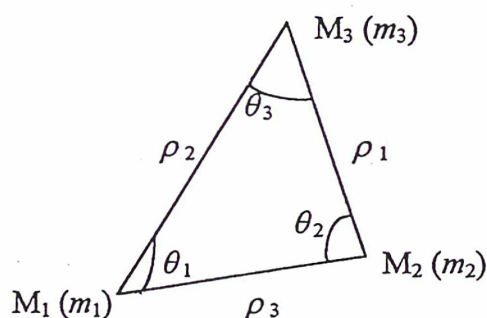


Fig. 1.1

$$(1.13) \quad ds^2 = \sum_{1 \leq i \leq 3} \sum_{1 \leq j \leq 3} g_{ij} d\rho_i d\rho_j,$$

où

$$g_{ii} = \frac{1}{g} \left(\frac{1}{m_0^2} + \frac{1}{m_i^2} \sin^2 \theta_i \right),$$

$$g_{jk} = \frac{1}{g} \left(\frac{\sin^2 \theta_j}{m_j} \frac{\sin^2 \theta_k}{m_k} + \frac{\cos^2 \theta_i}{m_0^2} \right),$$

avec

$$g = \frac{4J\Delta^2}{m_0^4 \rho_1^2 \rho_2^2 \rho_3^2},$$

où

m_0 est la "masse réduite", définie par la relation:

$$m_0^2 (m_1 + m_2 + m_3) = m_1 m_2 m_3,$$

ρ_i étant la distance entre les points M_j et M_k ,

Δ la mesure de l'aire du triangle $M_1 M_2 M_3$,

J le moment d'inertie par rapport au centre des masses et

θ_i l'angle déterminé par $M_i M_k$ et $M_i M_j$.

Avec la métrique (1.13), (voir aussi [73]), ils montrent que, à un facteur numérique près, la courbure riemannienne scalaire R est inversement proportionnelle au moment d'inertie J , soit

$$(1.14) \quad R = -\frac{6}{J}$$

Ce résultat implique, en particulier, qu'il n'existe pas de point de l'espace où la métrique est localement euclidienne.

La métrique (1.13) n'est pas celle de Maupertuis, donc l'étude de Deprit et Delie ne concerne ni les géodésiques de l'espace, ni les problèmes de stabilité.

Ong (1975, [76]) utilise la métrique de Maupertuis pour l'étude des courbures d'un système dynamique conservatif de potentiel $V(\mathbf{x})$, à n degrés de liberté. Pour les courbures, sa méthode de calcul utilise les formules qui donnent les relations entre les tenseurs de courbure relatifs à deux métriques conformes, soit ds_0^2 et ds^2 , (1.1). Ces formules sont données par exemple dans [37].

Dans le cas général il démontre des théorèmes sur le signe des courbures dans un voisinage de la frontière F_h du domaine où le mouvement est possible:

$$(1.15) \quad F_h = \{ \mathbf{x} \in \mathbf{M}^n : V(\mathbf{x}) = h \}$$

Dans cette direction, pour la courbure sectionnelle (riemannienne) $K(\pi)$, déterminée par un plan π , l'auteur obtient le résultat suivant:

Lorsque $\mathbf{x}$ tend vers un point de F_h , alors

a) $K(\pi) \rightarrow \infty$ si le plan π contient un vecteur à l'intérieur du cône $\mathcal{C}$, d'axe $\text{grad } V$

et d'angle égal à $\text{Arccos}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

b) $K(\pi) \rightarrow -\infty$ (respectivement $K(\pi) \rightarrow \infty \cdot \text{sgn}[\text{Hess } V(\xi, \xi) + \text{Hess } V(\eta, \eta)]$) si

π contient un vecteur orthogonal à $\text{grad } V$ et si le plan π se trouve à l'extérieur du cône $\vec{\mathcal{C}}$, (respectivement si le plan π est tangent au cône $\vec{\mathcal{C}}$).

Ong examine aussi les courbures riemanniennes (par d'autres méthodes que celles de van Velsen) pour les points critiques p de la fonction V , donc pour les points p tels que $\text{grad } V(p) = 0$, ce qui correspond à un mouvement stationnaire. Il démontre que

a) si p est un point de minimum local pour V , $K(\pi) > 0$ dans un voisinage de p ;

b) si p est un point de maximum local pour V , $K(\pi) < 0$ dans un voisinage de p .

On trouve aussi dans son travail une application au problème de Kepler, où la courbure riemannienne est du signe opposé à celui de l'énergie.

Dans le problème plan des trois corps, il introduit des *fonctions auxiliaires* pour préparer le calcul des courbures dans une étude ultérieure qu'il annonce, mais qu'il n'a jamais faite, à notre connaissance. Dans un théorème sur la *courbure scalaire* R , pour la position d'équilibre relatif de Lagrange, avec $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = r$, il obtient l'expression:

$$(1.16) \quad R = -\frac{3}{4(h - V)^3} \left(2h + \frac{m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3}{r} \right) \frac{m_1 + m_2 + m_3}{r^3}$$

Cette expression de R est fautive; nous l'avons recalculée dans le paragraphe § 4.2.3.

En 1980 van Velsen [97] applique la méthode décrite par les formules (1.7)-(1.10) au problème des trois corps. Il fait l'étude des valeurs propres de la matrice μ_{ij} , (1.7), pour la solution de l'équilibre relatif de Lagrange, dans *le cas où les trois corps décrivent*

des cercles autour du centre des masses avec une vitesse angulaire constante, $\omega = \sqrt{\frac{M}{r^3}}$,

M étant la somme des trois masses et r la longueur *constante* des côtés du triangle $M_1M_2M_3$. Il montre, en étudiant les signes de ces valeurs propres que cette solution n'est pas stable; en outre, dans le voisinage de la solution de Lagrange, les vecteurs propres correspondant aux valeurs propres *positives*, génèrent des familles de solutions quasi-périodiques. Dans le paragraphe § 4.2.3 nous avons complété le travail de van Velsen avec les *expressions des courbures riemanniennes principales* et avec *l'étude du cas équilatéral homothétique*.

Delmas [30] étudie les courbures dans le cas *planétaire* plan des trois corps, M_1, M_2, M_3 , en utilisant les coordonnées de Jacobi $(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2)$ -voir Fig.1.2 et § 3.1.

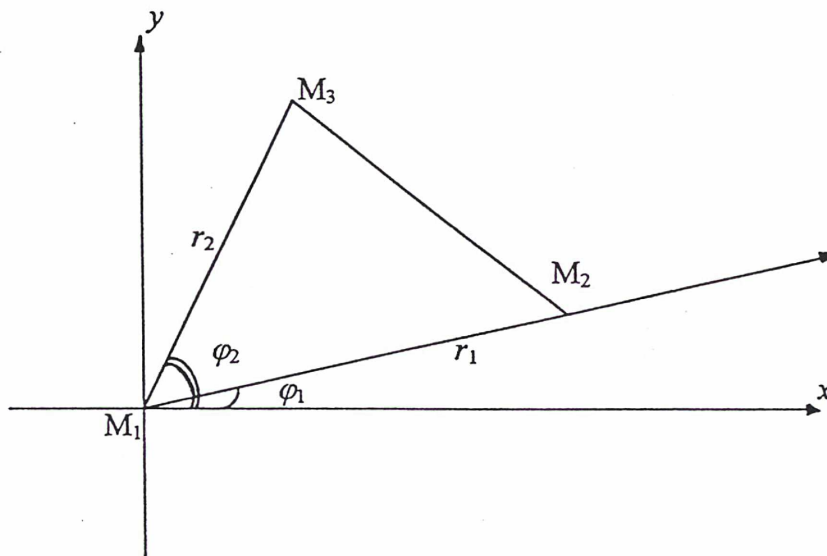


Fig. 1.2

La métrique de Maupertuis, ds_0^2 , s'écrit:

$$(1.17) \quad ds_0^2 = (U + h) [dr_1^2 + r_1^2 d\varphi_1^2 + k(dr_2^2 + r_2^2 d\varphi_2^2)],$$

où
$$U = \frac{1}{r_1} + \frac{k}{r_2},$$

et
$$\frac{m_3}{m_2} = k, \text{ la masse du corps } M_1 \text{ étant prépondérante } (m_1 \gg m_2,$$

$m_1 \gg m_3)$ et prise égale à l'unité ($m_1 = 1$).

Delmas se base dans le calcul des tenseurs de courbure sur les relations entre tenseurs des deux métriques conformes.

Dans le cas où le triangle des trois corps est *isocèle*, il montre que l'espace des configurations muni de la métrique de Maupertuis correspondante à une énergie totale négative h , donnée, admet un tenseur de Ricci diagonal, négatif ou nul si l'excentricité ne dépasse pas $\frac{k}{k+1}$ avec $0 < k \leq 1$. Cependant, nous avons montré (voir § 4.1) que le tenseur de Ricci n'est pas diagonal dans le cas planétaire, puisque $R_{13} = R_{31} \neq 0$. Après avoir effectué une discussion selon les valeurs de h et de r_1 nous avons démontré néanmoins que ce tenseur peut être négatif dans certains cas.

Tous ces travaux, passés en revue dans ce chapitre, montrent que plusieurs auteurs se sont déjà intéressés à l'étude des courbures dans un système dynamique conservatif.

Néanmoins le problème n'a été traité que partiellement. Il reste encore plusieurs pistes ouvertes à explorer, parmi lesquelles se trouve l'étude des courbures que nous allons aborder dans cette thèse.

CHAPITRE II

METHODE PROPOSEE POUR ETUDIER LA STABILITE DES ORBITES D'UN SYSTEME DYNAMIQUE CONSERVATIF

§ 2.1 Rappels

Nous allons, dans ce qui suit, rappeler les notions géométriques de base qui vont nous servir tout le long de ce travail.

Soient M une *variété différentielle* de dimension n et Q un point générique de M (affine) de coordonnées locales q^i ($i = 1, \dots, n$). Par la suite, on adoptera, sauf mention contraire, la convention de sommation d'Einstein.

On prend dans chaque ouvert $\mathcal{V}$ de M une forme quadratique *définie positive*, donnée par :

$$(2.1) \quad ds^2 = g_{ij}(Q) dq^i dq^j$$

M muni de la métrique ds^2 est un *espace riemannien* de dimension n (voir [19]). Désignons cet espace par M^n .

Soit $T(M^n)$ le *fibré tangent* de M^n . On peut munir $T(M^n)$ d'une métrique naturelle, dite *métrique de Sasaki*. On définit cette métrique dans un ouvert $\mathcal{U}$ de $T(M^n)$ à partir de la métrique riemannienne (2.1) de M^n , par :

$$(2.2) \quad d\sigma^2 = g_{ij}(Q) dq^i dq^j + g_{ij}(Q) \nabla v^i \nabla v^j$$

où $\nabla v^i = \nabla_m v^i dq^m$,

les $\nabla_m v^i$ étant les composantes de la dérivée covariante de v (voir Annexe-A).

On met la métrique $d\sigma^2$ sous la forme:

$$(2.3) \quad d\sigma^2 = G_{\alpha\beta} dq^\alpha dq^\beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, \dots, 2n)$$

où $q^{n+i} = v^i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$, avec

$$(2.4) \quad G_{\alpha\gamma} G^{\gamma\beta} = \delta_\alpha^\beta = \begin{cases} 1 & \text{pour } \alpha = \beta \\ 0 & \text{pour } \alpha \neq \beta \end{cases}.$$

En identifiant (2.2) et (2.3) on obtient *les composantes covariantes* du tenseur fondamental de $T(M^n)$:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} G_{jk} &= g_{jk} + g_{\beta\gamma} \Gamma_{\mu j}^\beta \Gamma_{v k}^\gamma v^\mu v^\gamma \\ G_{j(n+k)} &= \Gamma_{\lambda kj} v^\lambda \quad j, k = 1, 2, 3, \dots, n. \\ G_{(n+j)(n+k)} &= g_{jk} \end{aligned}$$

En utilisant (2.4) et (2.5), les *composantes contravariantes* du tenseur métrique fondamental de Sasaki s'écrivent:

$$(2.6) \quad \begin{aligned} G^{(n+j)(n+k)} &= g^{jk} + g^{\beta\gamma} \Gamma_{\mu\beta}^j \Gamma_{\nu\gamma}^k v^\mu v^\nu \\ G^{j(n+k)} &= -\Gamma_{\mu 1}^k g^{jl} v^\mu \quad j, k = 1, 2, 3, \dots, n. \\ G^{jk} &= g^{jk} \end{aligned}$$

L'espace $(T(M^n), d\sigma^2)$ est un espace riemannien (voir [108]).

Le système des équations différentielles des *géodésiques* sur M^n s'écrit:

$$(2.7) \quad \frac{d^2 q^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dq^j}{ds} \frac{dq^k}{ds} = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, n,$$

s étant l'abscisse curviligne.

Les *équations des géodésiques* de $T(M^n)$ en fonction des coordonnées (q^i) et des symboles de Christoffel $(\Gamma_j^i k)$ de M^n sont données par:

$$(2.8) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 q^i}{d\sigma^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dq^j}{d\sigma} \frac{dq^k}{d\sigma} &= R_{j\lambda\mu}^i \frac{dq^j}{d\sigma} v^\lambda \frac{\delta v^\mu}{\delta \sigma} \\ \frac{\delta^2 v^i}{\delta \sigma^2} &= 0 \end{aligned} \right.$$

où σ est l'élément d'arc et où δ est le symbole utilisé pour la dérivée absolue (voir [82] et Annexe-A).

Ce qui nous intéresse est la liaison entre les géodésiques de l'espace M^n et celles de l'espace $T(M^n)$. Afin de signaler cette liaison, rappelons la notion de *relèvement d'une courbe*.

Soit C_M^n une courbe donné sur M^n :

$$(2.9) \quad C_M^n : \quad q^i = q^i(u), \quad u \in [a, b] \subseteq \mathbb{R}$$

Par chaque point $(q^i(0), v^i(0)) \in T(M^n)$ passe une courbe C_{TM}^n ,

$$(2.10) \quad C_{TM}^n : \quad q^i = q^i(u), \quad v^i = v^i(u); \quad u \in [a, b],$$

qui vérifie le système des équations différentielles suivantes:

$$(2.11) \quad \frac{dv^i}{du} + \Gamma_{jk}^i v^j \frac{dq^k}{du} = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

La courbe C_{TM}^n ci-dessus s'appelle le relèvement de la courbe C_M^n .

Nous avons alors le résultat suivant concernant le "passage" d'une géodésique de l'espace M^n à une géodésique sur $T(M^n)$:

Le relèvement d'une géodésique sur une variété riemannienne M^n est une géodésique sur le fibré tangent $T(M^n)$.

En effet, on montre que sur le relèvement d'une géodésique de M^n on a:

$$(2.12) \quad \frac{\delta v^i}{\delta s} = 0, \quad (\text{voir Annexe-A}).$$

(2.12) entraîne avec (2.7) les équations (2.8). Ce résultat va nous permettre d'aborder les géodésiques de $T(M^n)$ en utilisant les calculs faits dans l'espace M^n (voir aussi [82]).

§ 2.2 Courbures riemanniennes et géodésiques

Soient $v_1(v_1^i)$ et $v_2(v_2^i)$ deux vecteurs linéairement indépendants dans $T_Q M^n$, l'espace tangent à M^n en Q . Les deux vecteurs déterminent un 2-plan (π_1) qui passe par Q . Pour chaque 2-plan de $T_Q M^n$, la *courbure riemannienne* (ou *sectionnelle*) est définie par l'invariant $K(\pi_1)$ (voir [19] [69], [93] [106]) :

$$(2.13) \quad K(\pi_1) = \frac{R_{ijkl} v_1^i v_2^j v_1^k v_2^l}{(g_{jl} g_{ik} - g_{jk} g_{il}) v_1^i v_2^j v_1^k v_2^l}$$

On voit que si les deux vecteurs sont orthonormés, la courbure sectionnelle devient :

$$(2.14) \quad K(\pi_1) = R_{ijkl} v_1^i v_2^j v_1^k v_2^l$$

Remarques:

R.1 La courbure riemannienne ne dépend pas du choix des vecteurs v_1 et v_2 dans le 2-plan (π_1), mais elle dépend du point Q et du 2-plan (π_1). Par ailleurs il existe une *infinité* de 2-plans qui contiennent le point Q .

R.2 L'ensemble des géodésiques qui passent par le point Q et qui sont tangentes au 2-plan (π_1) engendre une surface (*de dimension 2*), tangente à (π_1). $K(\pi_1)$ est la courbure de Gauss (*courbure totale*) de cette surface.

On dit que *la courbure riemannienne est constante (ou garde un signe constant)* en *un point* Q de l'espace riemannien M^n si dans *toutes* les directions planes autour de Q , les courbures riemanniennes sont constantes (*respectivement gardent un signe constant*).

On dit qu'*un espace riemannien est un espace à courbure négative (positive ou nulle)* si *en tout point* Q de M^n les courbures riemanniennes sont négatives (*respectivement positives ou nulles*).

La notion de *courbure* est une notion intrinsèque, liée à la géométrie de l'espace. Nous allons présenter dans ce qui suit la liaison entre le signe des courbures riemanniennes et le comportement (*convergence, divergence*) des géodésiques sur un espace riemannien.

Considérons une famille de géodésiques γ_i sur M^n , donnée par :

$$(2.15) \quad \gamma_i = q^i(s, \lambda),$$

s étant *l'abscisse curviligne* qui varie le long d'une géodésique de la famille et λ un paramètre constant pour une géodésique, mais qui varie quand on passe d'une géodésique à l'autre.

Soient $\gamma_1(s, \lambda)$ et $\gamma_2(s, \lambda + d\lambda)$ deux géodésiques distinctes, qui passent par un point $Q \in M^n$.

Considérons deux points équidistants du point commun Q , soient $Q_1 \in \gamma_1$ et $Q_2 \in \gamma_2$ (voir Fig.2.1).

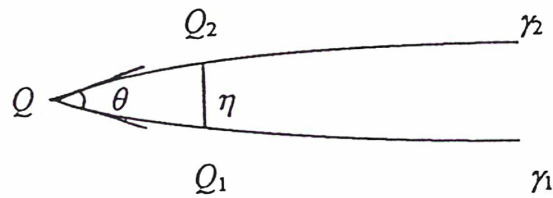


Fig.2.1

On dit que Q_1 et Q_2 sont des points *correspondants*. Soit η la distance Q_1Q_2 . En utilisant l'équation de la déviation géodésique ainsi que des résultats sur les courbures riemanniennes, on démontre que la variation de la distance Q_1Q_2 en fonction de s s'exprime par:

$$(2.16) \quad \eta(s) = \theta \left[s - K(\pi_1) \frac{s^3}{6} \right] + \dots,$$

θ étant l'angle très petit, déterminé par les deux géodésiques (voir une démonstration de (2.16) dans l'Annexe-A).

La dernière relation permet d'exprimer le comportement des géodésiques γ_1 et γ_2 en fonction du signe de la courbure riemannienne $K(\pi_1)$, de la manière suivante:

Une courbure riemannienne positive implique la "convergence" de deux géodésiques proches et une courbure riemannienne négative implique la "divergence" de ces géodésiques.

Géométriquement, cette conclusion est représentée dans les figures suivantes:

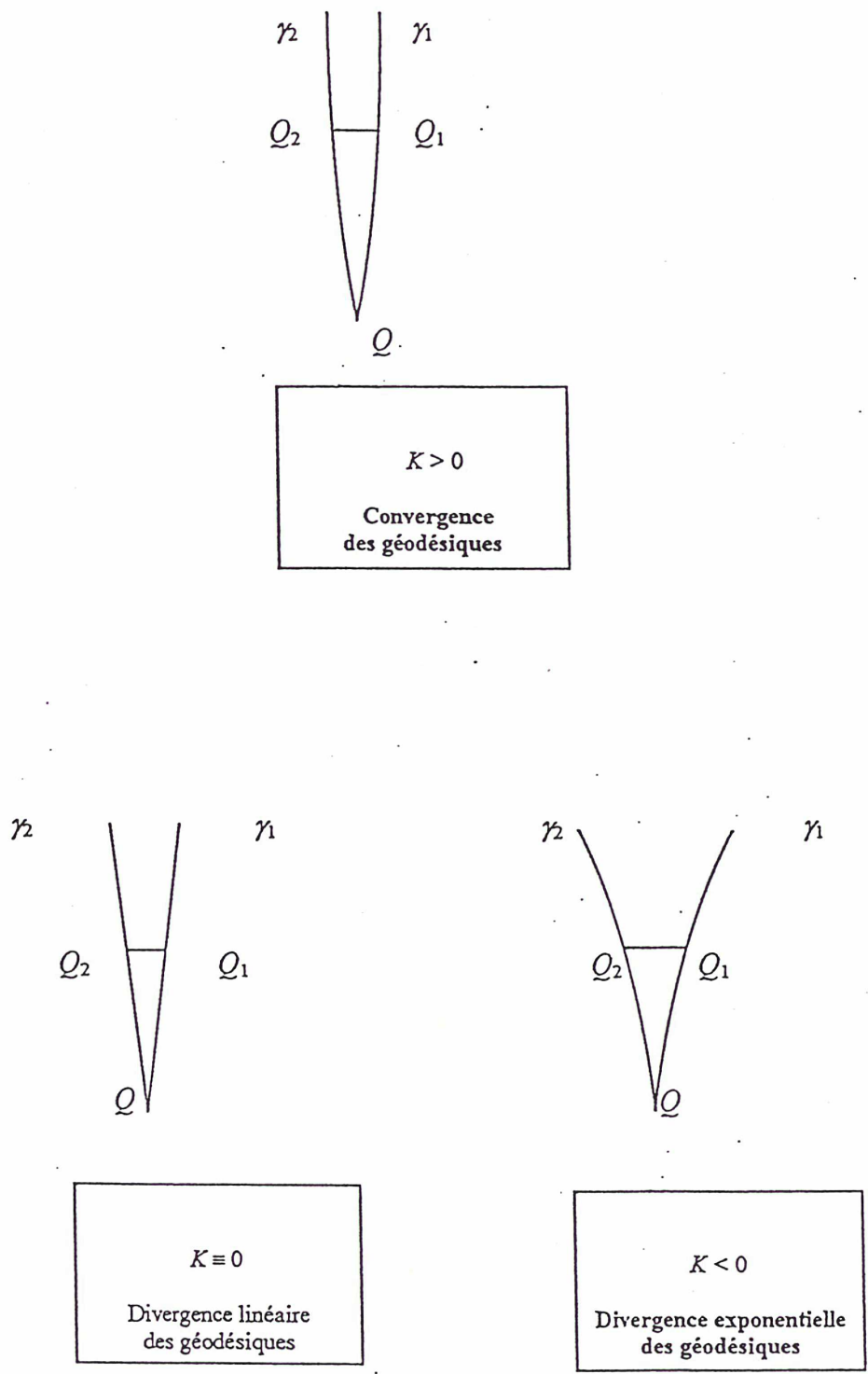


Fig.2. 2

Dans l'application de ce résultat il faut prendre quelques précautions basées sur les remarques suivantes:

℞.3 L'interprétation ci-dessus reste valable même pour deux géodésiques qui ne passent pas par un point commun mais par deux points distincts, *voisins* ([93]).

℞.4 Dans la démonstration de (2.16), la fonction $\eta(s)$ est développée *dans un voisinage* du point Q .

℞. 5 La métrique elle même ne détermine pas toutes les propriétés d'un espace mais seulement les propriétés géométriques *locales*, dans un voisinage d'un point donné.

Nous sommes ainsi conduits à souligner le caractère *local* du résultat. Néanmoins, s'il existe *des régions de l'espace* où la courbure riemannienne est constante ou garde un signe constant, nous pouvons tirer des conclusions sur le comportement des géodésiques *dans ces régions*.

Dans le cas où l'espace riemannien est à courbure constante, on obtient bon nombre de résultats sur le comportement des géodésiques (voir chapitre I et Annexe-A).

§ 2.3 Géométrie riemannienne d'un système dynamique

Afin de faciliter la lecture, nous allons reprendre dans ce paragraphe les notations de géométrie riemannienne déjà introduites pour désigner les notions correspondantes de mécanique.

Soit (Σ) un système dynamique à n degrés de liberté, soumis à des *liaisons holonomes, parfaites et indépendantes du temps*. L'ensemble des positions (les configurations) d'un tel système constitue une variété différentielle M^n , dite *l'espace des*

configurations. Ainsi, une position du système sera repérée par le point $Q (q^1, \dots, q^n)$, où $q^i_{(i=1,\dots,n)}$ sont les coordonnées généralisées. Lorsque le système passe d'une configuration à une autre, Q décrit dans M^n une courbe (*en fait, la trajectoire*):

$$(2.17) \quad \dot{q}^i = \dot{q}^i(t), \text{ où le paramètre } t \text{ est le temps.}$$

Les composantes contravariantes du vecteur vitesse généralisée sont alors:

$$(2.18) \quad \dot{q}^i = \frac{dq^i}{dt}$$

L'énergie cinétique de (Σ) est alors la forme quadratique définie positive :

$$(2.19) \quad T = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j, \text{ où les } g_{ij} \text{ sont des fonctions de } q^i.$$

Remarque: T est un invariant par changement de coordonnées.

A partir de T , on introduit sur M^n *la métrique*:

$$(2.20) \quad ds^2 = 2 T dt^2, \text{ ce qui s'accorde avec (2.1).}$$

L'espace des configurations, M^n , pourvu de la métrique ds^2 est un *espace riemannien* (voir [54]).

Rappelons qu'un système dynamique est dit *conservatif* s'il existe une fonction de force $U(q^i)$, indépendante du temps, telle que l'énergie généralisée du système soit constante:

$$(2.21) \quad T - U = h$$

Dans ces conditions, on peut munir M^n d'une métrique ds_0^2 , dite métrique de Maupertuis :

$$(2.22) \quad ds_0^2 = 2(U+h) ds^2$$

L'importance de la métrique (2.22) est reflétée dans l'énoncé suivant, qui constitue le principe de l'action stationnaire, dite aussi le principe de la moindre action de Maupertuis:

Pour toute valeur fixée, h , de la constante de l'énergie, les trajectoires d'un système dynamique conservatif sont des géodésiques de l'espace des configurations muni de la métrique riemannienne ds_0^2 .

L'espace (M^n, ds_0^2) est un espace riemannien. Ainsi, le mouvement d'un système dynamique classique peut être représenté par le flot géodésique de l'espace (M^n, ds_0^2) .

La loi selon laquelle ces géodésiques sont décrites au cours du temps est fournie par la relation:

$$(2.23) \quad \frac{ds_0}{dt} = 2(U + h).$$

$T(M^n)$ est l'espace des phases du système dynamique considéré. C'est un espace de dimension $2n$, muni des coordonnées $(q^i, p^i)_{(i=1, \dots, n)}$.

Nous avons vu dans le premier paragraphe que le relèvement d'une géodésique de l'espace M^n est une géodésique de l'espace $T(M^n)$.

Nous proposons donc de munir l'espace des phases $T(M^n)$ de la métrique $d\sigma_0^2$ de Sasaki, (2.2), déduite de la métrique de Maupertuis ds_0^2 . Les géodésiques de l'espace des phases se projettent alors sur les trajectoires du système dynamique. En conséquence

l'étude de la courbure de ces géodésiques va donner plus d'informations sur le mouvement considéré.

Nous avons maintenant la plupart des outils mathématiques nécessaires pour aborder notre étude. Avec tous ces éléments, nous allons donner, dans ce qui suit, un algorithme de calcul permettant de traiter certains aspects géométriques des systèmes dynamiques conservatifs.

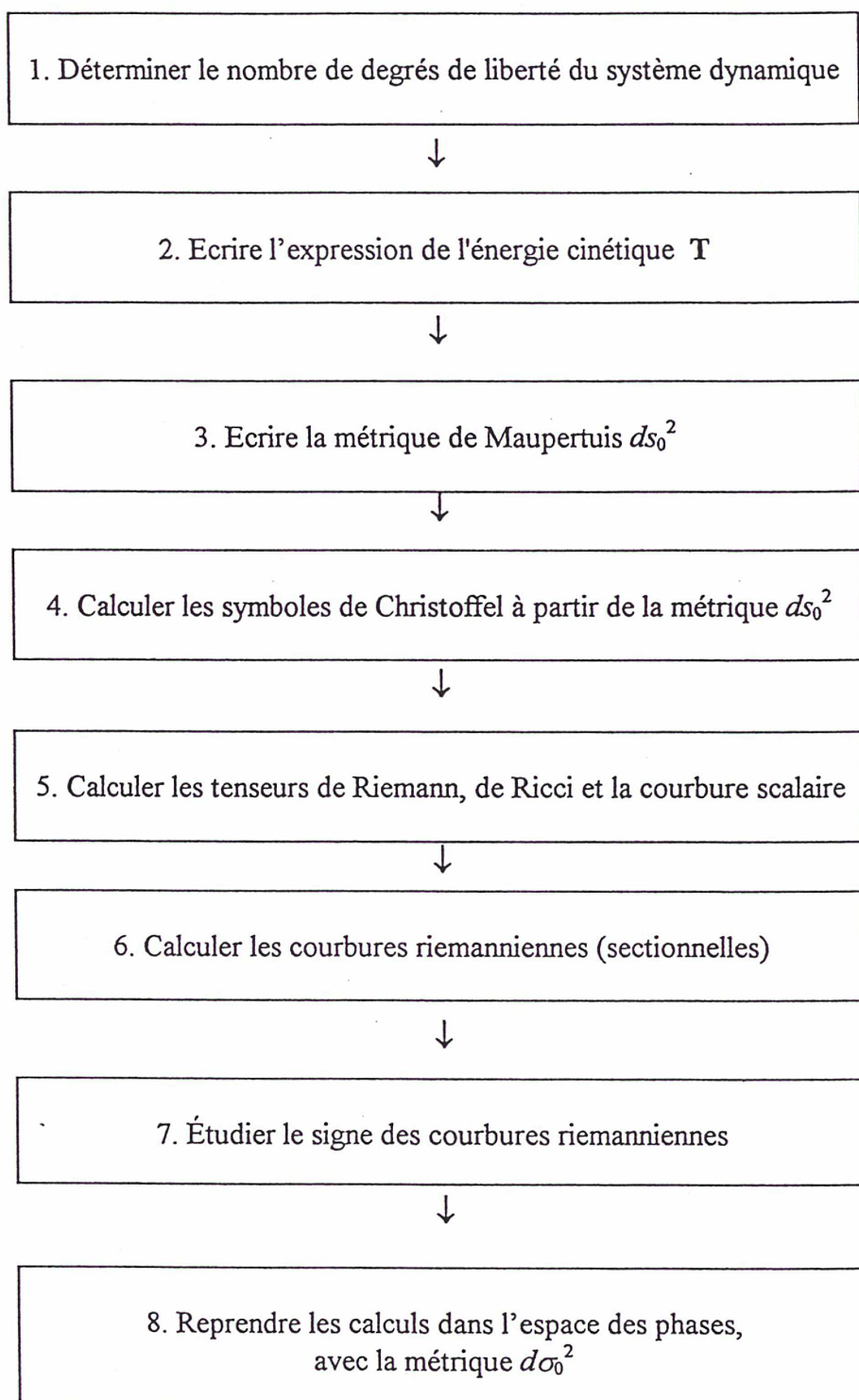
§ 2.4 Algorithme de calcul

Nous proposons dans ce qui suit un algorithme de calcul basé sur les notions introduites dans les paragraphes §2.1 - §2.3.

Après avoir calculé l'énergie cinétique (2.19), nous allons déterminer la métrique ds_0^2 , (2.23) et la métrique $d\sigma_0^2$. Le calcul des courbures se fait à l'aide des formules (A.1), (A.2), (A.6), (A.7), (A.8) et (2.13). Nous avons ainsi les tenseurs de courbure de Riemann, de Ricci, les courbures riemanniennes et la courbure scalaire.

Les différentes étapes de ces calculs sont montrées dans l'organigramme suivant:

Organigramme des calculs



On peut observer que le choix des coordonnées généralisées est déterminant pour la complexité des calculs. C'est pourquoi il faut essayer de trouver un système de coordonnées qui rend la métrique de Maupertuis diagonale.

Une autre remarque concerne *le nombre* des courbures riemanniennes (2.13), que l'on doit calculer pour pouvoir tirer des conclusions sur le comportement des trajectoires. Dans §2.2, (R.1) nous avons vu qu'il existe une *infinité* de 2-plans qui déterminent la courbure riemannienne dans un point de l'espace, mais si les g_{ij} de la métrique (2.1) sont constants, alors pour la métrique de Maupertuis, le tenseur de Riemann-Christoffel s'exprime uniquement en fonction des $\frac{n(n-1)}{2}$ courbures sectionnelles principales (voir (1.9) et (1.10)). Ces dernières sont celles obtenues en prenant les 2-plans engendrés par les vecteurs $\left(\frac{\partial}{\partial q^i} \right)_{(i=1, 2, 3, \dots, n)}$ du plan tangent à M^n au point $Q(q^1, q^2, \dots, q^n)$.

§ 2.5 Courbure et stabilité

Les calculs proposés ci-dessus, concernant les courbures d'un système dynamique permettent de déduire certaines propriétés qualitatives des trajectoires de ce système. Par la suite nous allons passer en revue les hypothèses à imposer sur les courbures et les propriétés qualitatives correspondantes.

Une condition suffisante, mais non nécessaire, pour qu'un système dynamique borné soit ergodique est que la courbure riemannienne de l'espace M^n (ou $T(M^n)$) soit *négative*. Donc, la courbure riemannienne négative d'un espace implique l'ergodicité. En

révanche, si l'on a une ou plusieurs courbures sectionnelles positives, cela ne signifie pas forcément que le système n'est pas ergodique (voir [96]).

Pour les équations différentielles du mouvement d'un système dynamique, les familles des solutions qui divergent exponentiellement sont liées à une courbure riemannienne négative. On remarque aussi que la présence d'une courbure riemannienne négative le long d'une solution stationnaire ou d'un système en équilibre relatif implique que la solution n'est pas stable (voir [98]).

Un système dynamique *défini sur une variété fermée* à courbure négative est ergodique, on a donc un mouvement très erratique. Les orbites sont très instables; deux orbites correspondant à des conditions initiales voisines, s'écartent l'une de l'autre de façon exponentielle. Cette propriété entraîne l'indépendance asymptotique du futur et du passé. Un tel système est dit *K-système* et ses propriétés sont fortement probabilistes (voir [6], [8]).

En mécanique céleste on ne rencontre pas de tels systèmes, mais des systèmes dont la courbure peut être localement négative (positive), par exemple au voisinage d'une trajectoire connue.

Les familles des solutions quasi-périodiques sont liées à une courbure riemannienne positive. Une courbure riemannienne positive est aussi une indication de stabilité du mouvement (voir [98]).

Certains auteurs ont essayé de trouver une relation **directe** entre la courbure riemannienne positive et l'intégrabilité d'un système dynamique (voir [99]), mais l'on peut donner au moins un exemple, celui du problème de Kepler (voir la fin de ce chapitre), où

le système est intégrable, mais où la courbure ne garde pas de signe constant positif.

Pour un système ayant une solution stationnaire, si *toutes* les courbures riemanniennes sont positives en ce point stationnaire de l'espace des configurations, l'équilibre est stable (voir [48]).

Si la courbure riemannienne ne garde pas un signe constant, une autre méthode géométrique concernant la stabilité des orbites est basée sur l'étude des valeurs propres de la matrice du tenseur de Ricci, en appliquant le théorème de Poincaré-Lyapounov. Mais nous avons trouvé que dans ce cas les calculs analytiques sont assez compliqués.

Parmi les autres courbures, la *courbure scalaire* a une expression finale beaucoup plus simple. C'est pourquoi on trouve cette valeur calculée dans plusieurs travaux (voir [76]). Mais, du point de vue pratique, la courbure scalaire ne donne pas d'information sur la stabilité ou l'ergodicité d'un système dynamique.

Une autre quantité, liée à la courbure scalaire et aux propriétés ergodiques a été proposée par van Velsen [99]. Il s'agit d'une moyennisation de la courbure scalaire sur l'espace des configurations M (supposé compact) d'un système dynamique conservatif (avec $U+h > 0$):

$$(2.24) \quad \bar{R} = \frac{\int_M R \sqrt{g} \, dq^1 dq^2 \cdots dq^n}{\int_M \sqrt{g} \, dq^1 dq^2 \cdots dq^n},$$

g étant le déterminant des g_{ij} .

Une valeur positive de $\bar{R}$ est associée à l'intégrabilité du système et une valeur négative de $\bar{R}$ est liée à l'ergodicité du système dynamique. En fait, van Velsen démontre que si le système est intégrable, alors $\bar{R}$ est positif.

Par ailleurs, si l'entropie de Kolmogorov (voir [8]) est positive, le système est ergodique.

D'après les remarques ci-dessus on voit que l'étude du signe des courbures peut être appliquée à de plusieurs types de stabilité. Mais notre étude concerne la *stabilité ou la non-stabilité des configurations (trajectoires)* d'un système dynamique, que l'on peut définir de la façon suivante (voir [57], [80]):

Soient γ_0 une *trajectoire donnée* et $\Gamma = (\gamma_i(t))_{i \in I}$ une famille de trajectoires d'un système dynamique.

On dit que $\gamma_0(t)$ est *stable* relativement à Γ si toute trajectoire $\gamma_i(t) \in \Gamma$ suffisamment proche de γ_0 à un moment donné t_0 , reste assez proche de γ_0 pour $t > t_0$. Autrement dit, $\gamma_0(t)$ est stable relativement à Γ si pour $\forall \varepsilon > 0$ et t_0 donnés, il existe un $\eta(\varepsilon) > 0$ tel que, si $\gamma_1(t) \in \Gamma$ et $\|\gamma_1(t_0) - \gamma_0(t_0)\| < \eta$, alors $\|\gamma_1(t) - \gamma_0(t)\| < \varepsilon$ pour $t \geq t_0$. Si $\gamma_1(t) \rightarrow \gamma_0(t)$ quand $t \rightarrow \infty$, il s'agit d'une *stabilité asymptotique* des trajectoires.

Cette définition de la stabilité s'applique aussi dans le cas où la trajectoire γ_0 se réduit à une position d'équilibre du système considéré.

Nous allons conclure ce chapitre avec l'application de la méthode d'étude proposée sur deux exemples simples.

1. Problème du pendule simple

On considère un pendule plan de masse m et de longueur l . Soient g l'accélération de la pesanteur et φ l'angle formé par le fil l avec la verticale :

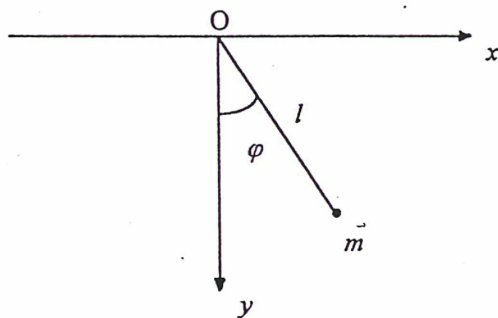


Fig. 2.3

L'espace des configurations est un espace à 1 dimension. L'énergie cinétique et la fonction de force s'écrivent respectivement:

$$(2.25) \quad T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2$$

$$(2.26) \quad U = m l g \cos(\varphi)$$

La métrique de Maupertuis et le symbole de Christoffel correspondant sont:

$$(2.27) \quad ds_0^2 = \frac{m l^2 [m g l \cos(\varphi) + h]}{2} d\varphi^2$$

$$(2.28) \quad \Gamma_{11}^1 = -\frac{m g l \sin(\varphi)}{2[m g l \cos(\varphi) + h]}$$

Toutes les courbures de l'espace des configurations sont nulles.

Dans l'espace des phases, les composantes de la métrique de Sasaki sont les éléments de la matrice:

$$\begin{bmatrix} \frac{ml^2 \{m^2 l^2 g^2 [p_\varphi^2 \sin^2(\varphi) + 4 \cos^2(\varphi)] + 4h[2mgl \cos(\varphi) + h]\}}{8[mgl \cos(\varphi) + h]} & -\frac{m^2 l^3 g p_\varphi \sin(\varphi)}{4} \\ -\frac{m^2 l^3 g p_\varphi \sin(\varphi)}{4} & \frac{ml^2 [mgl \cos(\varphi) + h]}{2} \end{bmatrix}$$

où $p_\varphi = ml^2 \dot{\varphi}$ est la variable de Poisson correspondante à φ .

Les symboles de Christoffel distincts non-nuls sont:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= -\frac{mgl \sin(\varphi)}{2[mgl \cos(\varphi) + h]} \\ \Gamma_{11}^2 &= -\frac{mgl p_\varphi [mgl + h \cos(\varphi)]}{2[mgl \cos(\varphi) + h]^2} \\ \Gamma_{12}^2 &= -\frac{mgl \sin(\varphi)}{2[mgl \cos(\varphi) + h]} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Le calcul des courbures montre que l'espace des phases est plat, parce que le tenseur de Riemann-Christoffel est nul; le tenseur de Ricci et la courbure riemannienne s'annulent aussi. Ce résultat est possible: l'espace des phases du problème considéré, muni de la métrique quotient, est un espace plat (voir [8]).

2. Problème de Kepler:

Pour le problème de Kepler on considère le mouvement dans un champ central de

potentiel $V = -\frac{1}{r}$.

En coordonnées polaires (r, φ) , avec les notations habituelles, nous avons:

-la métrique de Maupertuis dans l'espace des configurations:

$$(2.31) \quad ds_0^2 = \frac{r h + 1}{r} dr^2 + r(r h + 1) d\varphi^2$$

-les symboles de Christoffel distincts, non-nuls:

$$(2.32) \quad \begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= -\frac{1}{r(r h + 1)} \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{2r h + 1}{r(r h + 1)} \\ \Gamma_{22}^1 &= -\frac{r(2r h + 1)}{r(r h + 1)} \end{aligned}$$

-la seule composante non-nulle du tenseur de Riemann-Christoffel:

$$(2.33) \quad R_{1212} = -\frac{h}{(r h + 1)}$$

-les composantes non-nulles du tenseur de Ricci:

$$(2.34) \quad R_{11} = -\frac{h}{r(r h + 1)^2} \quad R_{22} = -\frac{r h}{(r h + 1)^2}$$

-la courbure riemannienne:

$$(2.35) \quad K = -\frac{h}{4(rh+1)^3}$$

On voit que

- pour $h < 0$, K est positif, donc pour les orbites elliptiques une petite variation des conditions initiales sur la constante h va très peu changer l'orbite. Les orbites elliptiques sont stables dans le sens de Lyapounov.

- $K = h = 0$ pour les orbites paraboliques.
- K est négatif si $h > 0$ pour les orbites hyperboliques.

Dans l'espace des phases, on note R et ϕ les variables de Poisson conjuguées respectivement des variables r et φ . Les composantes covariantes de la métrique de Sasaki sont alors:

$$(2.36) \quad \begin{aligned} G_{11} &= \frac{R^2 + r^2[\phi^2(2hr+1)^2 + 4(hr+1)^2]}{4r^3(hr+1)} & G_{12} &= \frac{R\phi(2hr+1)}{2r} \\ G_{13} &= -\frac{R}{2r^2} & G_{14} &= \frac{\phi(2hr+1)}{2} \\ G_{22} &= \frac{(R^2 + r^2\phi^2)(2hr+1)^2 + 4r^2(hr+1)^2}{4r(hr+1)} & G_{23} &= -\frac{\phi(2hr+1)}{2} \end{aligned}$$

$$G_{24} = \frac{R (2 \, hr + 1)}{2}$$

$$G_{33} = \frac{hr + 1}{2r}$$

$$G_{34} = 0$$

$$G_{44} = \frac{r (hr + 1)}{2}$$

La métrique *de l'espace des phases* n'est pas diagonale ce qui rend les expressions des courbures très compliquées. Cela empêche une étude analytique de ces courbures. On retiendra donc surtout les informations fournies par les courbures dans l'espace des configurations.

Les exemples ci-dessus viennent de montrer l'intérêt suscité pour l'étude des courbures, tant sur le plan théorique que sur le plan pratique.

CHAPITRE III

PROBLEME PLAN DES TROIS CORPS

Nous allons dans ce chapitre effectuer tout d'abord une étude générale des courbures dans le problème plan des trois corps. Cela va nous permettre, ensuite, d'appliquer cette étude dans des cas particuliers, afin de déduire des propriétés qualitatives des trajectoires.

§ 3.1 Description du problème

Dans un plan affine d'origine O , muni d'un repère galiléen (Ox, Oy) , on considère trois corps ponctuels M_1, M_2, M_3 (voir Fig.3.1) de masses respectives m_1, m_2, m_3 , qui s'attirent mutuellement selon la loi de Newton.

Soient q^i les vecteurs de position,

$$(3.1) \quad q^i = OM_i \quad (i = 1, 2, 3) \text{ et}$$

$q = (q^1, q^2, q^3) \in (\mathbb{R}^2)^3$ un vecteur correspondant à une configuration des trois corps.

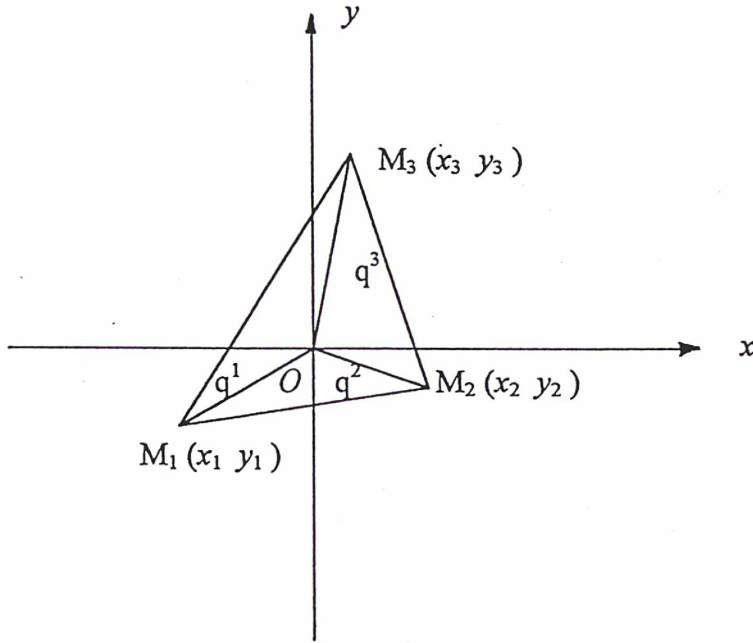


Fig. 3.1

Pour *les vitesses* nous utilisons les notations:

$$(3.2) \quad \dot{q}^1, \dot{q}^2, \dot{q}^3$$

$$\dot{q} = (\dot{q}^1, \dot{q}^2, \dot{q}^3),$$

où le point représente la dérivation par rapport au temps.

Les variables de Poisson sont:

$$(3.3) \quad p^i = \dot{q}^i / m_i, \quad i = 1, 2, 3, \text{ d'où}$$

$$p = (p^1, p^2, p^3)$$

On note également les composantes des vecteurs q^i dans le repère Oxy par $(x_i, y_i)_{(i=1,2,3)}$ et les composantes des vitesses $\dot{q}^i$ par $(\dot{x}_i, \dot{y}_i)_{(i=1,2,3)}$.

Par la suite, sans perdre de généralité (voir [79]) et sans perdre le caractère galiléen du repère utilisé, nous pouvons supposer le centre des masses des trois corps fixe, et placé en O .

L'espace des configurations est la variété différentielle définie par :

$$(3.4) \quad \mathbf{M}^4 = \{ \mathbf{q} = (q^1, q^2, q^3) \in (\mathbb{R}^2)^3 \mid \sum_{i=1}^3 m_i q^i = 0 \} \setminus \{ \mathbf{q} \in (\mathbb{R}^2)^3 \mid r_{ij} = 0, i \neq j \}$$

où $r_{ij} = \| q^i - q^j \|$ ($i \neq j; i, j = 1, 2, 3$) est la distance entre M_i et M_j .

L'espace des phases du problème est le fibré tangent de $\mathbf{M}^4$, donné par :

$$(3.5) \quad \mathbf{T}(\mathbf{M}^4) = \{ (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in (\mathbb{R}^2)^3 \times (\mathbb{R}^2)^3 \mid \mathbf{q} \in \mathbf{M}^4, \sum_{i=1}^3 m_i \dot{q}^i = 0 \}$$

Si l'on tient compte de l'intégrale première du moment cinétique, on obtient la sous-variété intégrale de $\mathbf{T}(\mathbf{M}^4)$ donnée par:

$$(3.6) \quad \mathbf{M}^7(\mathbf{c}) = \{ (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbf{T}(\mathbf{M}^4) \mid \mathbf{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{c} \}$$

où $\mathbf{c}$ est la constante du moment cinétique, $\mathbf{K}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$.

Si l'on tient également compte de l'intégrale première de l'énergie (dont la valeur de la constante est h), on obtient une sous-variété intégrale (*de dimension 6*), définie par:

$$(3.7) \quad \mathbf{M}^6(\mathbf{h}, \mathbf{c}) = \{ (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \mathbf{M}^7(\mathbf{c}) \mid \mathbf{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = h \}$$

La topologie de cette sous-variété dépend des valeurs du paramètre hc^2 (voir Annexe-B). Nous allons voir dans § 3.2 que ce paramètre va jouer un rôle important dans la détermination des domaines admissibles du mouvement des trois corps.

Le centre des masses étant fixé à l'origine, dans l'espace des configurations nous avons:

$$(3.8) \quad \sum_{i=1}^3 m_i q^i = 0, \text{ soit}$$

$$(3.8') \quad \begin{cases} m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = 0 \\ m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 = 0 \end{cases}$$

Après avoir testé plusieurs systèmes de coordonnées pour notre étude, nous avons opté pour *les coordonnées de Jacobi* - $(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2)$ - définies ci-dessous, (voir Fig. 3.2), sous la forme indiquée dans [30] et [65]. Ce choix a été fait pour deux raisons:

- la métrique de l'espace des configurations est diagonale dans ce cas, ce qui va simplifier les calculs (du moins au début);
- ces coordonnées facilitent l'interprétation physique des résultats obtenus.

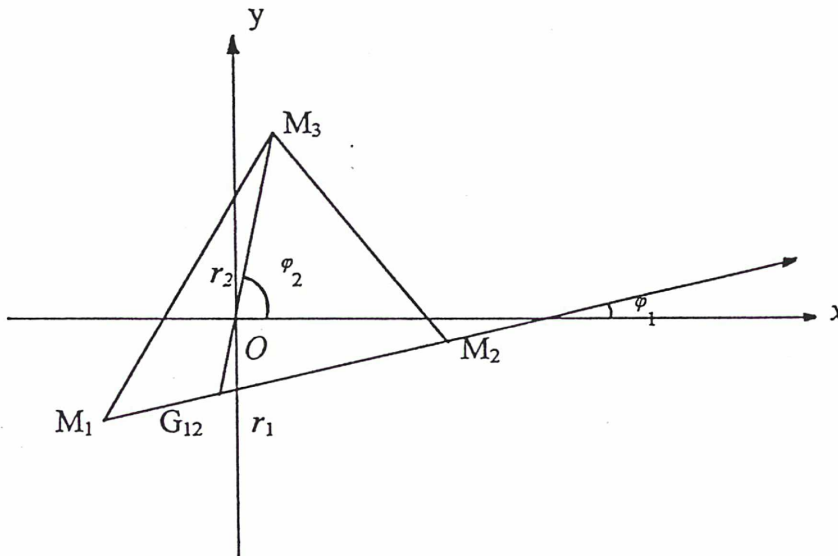


Fig. 3.2

Soient:

$G_{12} (x_{G_{12}}, y_{G_{12}})$ le centre des masses de M_1 et M_2 ,

r_1 la distance $M_1 M_2$,

φ_1 l'angle que fait la droite $M_1 M_2$ avec la droite Ox ,

r_2 la distance $G_{12} M_3$,

φ_2 l'angle que fait $G_{12} M_3$ avec la droite Ox .

Soient:

$$(3.9) \quad x_{G_{12}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \quad y_{G_{12}} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}$$

Les coordonnées $(r_1, r_2, \varphi_1, \varphi_2)$ s'expriment en fonction des (x_1, y_1, x_2, y_2)

par :

$$(3.10) \quad r_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad r_2 = \sqrt{(x_3 - x_{G_{12}})^2 + (y_3 - y_{G_{12}})^2}$$

$$(3.11) \quad \varphi_1 = \text{Arctg}\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) \quad \varphi_2 = \text{Arctg}\left(\frac{y_3 - y_{G_{12}}}{x_3 - x_{G_{12}}}\right)$$

On peut paramétrer la configuration en tenant compte de (3.8') et de (3.9). On obtient:

$$(3.12) \quad x_1 = -\frac{m_3 r_2 (m_1 + m_2) \cos(\varphi_2) + r_1 m_2 (m_1 + m_2 + m_3) \cos(\varphi_1)}{(m_1 + m_2)(m_1 + m_2 + m_3)}$$

$$(3.13) \quad y_1 = -\frac{m_3 r_2 (m_1 + m_2) \sin(\varphi_2) + r_1 m_2 (m_1 + m_2 + m_3) \sin(\varphi_1)}{(m_1 + m_2)(m_1 + m_2 + m_3)}$$

$$(3.14) \quad x_2 = -\frac{m_3 r_2 (m_1 + m_2) \cos(\varphi_2) - r_1 m_1 (m_1 + m_2 + m_3) \cos(\varphi_1)}{(m_1 + m_2)(m_1 + m_2 + m_3)}$$

$$(3.15) \quad y_2 = -\frac{m_3 r_2 (m_1 + m_2) \sin(\varphi_2) - r_1 m_1 (m_1 + m_2 + m_3) \sin(\varphi_1)}{(m_1 + m_2)(m_1 + m_2 + m_3)}$$

$$(3.16) \quad x_3 = \frac{r_2 (m_1 + m_2) \cos(\varphi_2)}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$(3.17) \quad y_3 = \frac{r_2 (m_1 + m_2) \sin(\varphi_2)}{m_1 + m_2 + m_3}$$

On remarque que les expressions de x_3 et de y_3 ne dépendent pas de l'angle φ_1 , ce qui est normal, car l'origine O se trouve sur $G_{12} M_3$.

Rappelons maintenant les expressions suivantes écrites en utilisant les coordonnées de Jacobi.

Le moment d'inertie du système des trois corps est :

$$(3.18) \quad I(q) = \sum_{i=1}^3 m_i \|q^i\|^2 = [\mu_1 r_1^2 + \mu_2 r_2^2]$$

où

$$(3.19) \quad \mu_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \mu_2 = \frac{m_3 (m_1 + m_2)}{m_1 + m_2 + m_3}$$

La fonction de force s'écrit :

$$(3.20) \quad U = G \left(\frac{m_1 m_2}{r_1} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} \right)$$

où

$$(3.21) \quad r_{13}^2 = (\varepsilon_1 r_1)^2 + r_2^2 + 2 \varepsilon_1 r_1 r_2 \cos(\varphi)$$

$$(3.22) \quad r_{23}^2 = (\varepsilon_2 r_1)^2 + r_2^2 - 2 \varepsilon_2 r_1 r_2 \cos(\varphi)$$

$$(3.23) \quad \varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

$$(3.24) \quad \varepsilon_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad \varepsilon_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

Remarque : $\varepsilon_1 r_1 = M_1 G_{12}$ et $\varepsilon_2 r_1 = M_2 G_{12}$. Par la suite nous allons prendre la constante de la gravitation G égale à 1.

L'énergie cinétique est donnée par :

$$(3.25) \quad T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{(p^i)^2}{m_i} = \frac{1}{2} \left[\mu_1 (\dot{r}_1^2 + r_1^2 \dot{\varphi}_1^2) + \mu_2 (\dot{r}_2^2 + r_2^2 \dot{\varphi}_2^2) \right]$$

Le moment cinétique total par rapport à O s'exprime par :

$$(3.26) \quad K = \sum_{i=1}^3 q^i \wedge p^i = \mu_1 r_1^2 \dot{\varphi}_1 + \mu_2 r_2^2 \dot{\varphi}_2$$

Les intégrales premières de l'énergie et du moment cinétique sont respectivement:

$$(3.27) \quad \frac{1}{2} \left[\mu_1 (\dot{r}_1^2 + r_1^2 \dot{\varphi}_1^2) + \mu_2 (\dot{r}_2^2 + r_2^2 \dot{\varphi}_2^2) \right] - \left(\frac{m_1 m_2}{r_1} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} \right) = h$$

$$(3.28) \quad \mu_1 r_1^2 \dot{\varphi}_1 + \mu_2 r_2^2 \dot{\varphi}_2 = c$$

§ 3.2 Régions possibles du mouvement et domaines des configurations admissibles
dans le problème plan des trois corps

La question à laquelle nous allons répondre dans ce paragraphe est la suivante:

“Quelles sont les conditions imposées aux paramètres $(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2)$ si h et c sont fixés?”

Ces conditions vont déterminer des domaines admissibles pour $(r_1, \varphi_1, r_2, \varphi_2)$ et cela va nous servir dans l'étude des courbures que nous allons développer dans le chapitre suivant.

En utilisant les coordonnées de Jacobi nous allons démontrer l'inégalité:

$$(3.29) \quad 2 I (U + h) \geq c^2 + \mu_1 \mu_2 r_1^2 r_2^2 \dot{\phi}^2$$

Nous allons montrer aussi que la relation ci-dessus donne en particulier les inégalités qui déterminent les régions possibles du mouvement et les domaines des configurations admissibles dans le problème plan des trois corps.

Démonstration de l'inégalité (3.29)

Nous avons:

$$(3.30) \quad 2 T = \mu_1 \dot{r}_1^2 + \mu_1 r_1^2 \dot{\phi}_1^2 + \mu_2 \dot{r}_2^2 + \mu_2 r_2^2 \dot{\phi}_2^2 \geq \mu_1 r_1^2 \dot{\phi}_1^2 + \mu_2 r_2^2 \dot{\phi}_2^2$$

donc,

$$(3.31) \quad 2 T \geq \mu_1 r_1^2 \dot{\phi}_1^2 + \mu_2 r_2^2 \dot{\phi}_2^2$$

On multiplie par I et on a:

$$(3.32) \quad 2 I T \geq I (\mu_1 r_1^2 \dot{\phi}_1^2 + \mu_2 r_2^2 \dot{\phi}_2^2)$$

Si l'on remplace dans le second membre l'expression (3.18) de I , on obtient:

$$(3.33) \quad 2IT \geq (\mu_1 r_1^2 + \mu_2 r_2^2) (\mu_1 r_1^2 \dot{\phi}_1^2 + \mu_2 r_2^2 \dot{\phi}_2^2)$$

ou encore,

$$(3.34) \quad 2IT \geq (\mu_1^2 r_1^4 \dot{\phi}_1^2 + \mu_2^2 r_2^4 \dot{\phi}_2^2) + \mu_1 \mu_2 r_1^2 r_2^2 (\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2)$$

En ajoutant et en retranchant $2\mu_1 \mu_2 r_1^2 r_2^2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2$, on a:

$$(3.35) \quad 2IT \geq (\mu_1^2 r_1^4 \dot{\phi}_1^2 + \mu_2^2 r_2^4 \dot{\phi}_2^2 + 2\mu_1 \mu_2 r_1^2 r_2^2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2) + \mu_1 \mu_2 r_1^2 r_2^2 (\dot{\phi}_1^2 - 2\dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 + \dot{\phi}_2^2)$$

De (3.28) on voit que le premier terme du second membre de (3.35) est égal à c^2 :

$$(3.36) \quad 2IT \geq c^2 + \mu_1 \mu_2 r_1^2 r_2^2 (\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2)^2$$

Cela s'écrit d'après (3.23):

$$(3.37) \quad 2IT \geq c^2 + \mu_1 \mu_2 r_1^2 r_2^2 \dot{\phi}^2.$$

D'après (3.27) on a alors:

$$(3.38) \quad 2I(U+h) \geq c^2 + \mu_1 \mu_2 r_1^2 r_2^2 \dot{\phi}^2, \quad \text{c.q.f.d.}$$

Remarque: L'inégalité (3.38) est une relation entre les coordonnées, les masses et la vitesse $\dot{\phi}$ de déformation du triangle. Les coordonnées ϕ_1 et ϕ_2 n'interviennent pas explicitement dans cette inégalité.

Si l'on fixe l'angle ϕ , en imposant $\dot{\phi} = 0$, on obtient en particulier:

$$(3.39) \quad 2I(U+h) - c^2 \geq 0,$$

ce qui donne, pour h et c fixés, les *régions où le mouvement des trois corps est possible* (voir [38], [61], [63], [110], [111]).

Ensuite, de (3.38) nous allons déduire aussi l'inégalité:

$$(3.40) \quad IU^2 + 2hc^2 \geq 0,$$

qui donne le *domaine des configurations admissibles* dans le problème plan des trois corps.

Démonstration de l'inégalité (3.40)

On reprend l'inégalité (3.38):

$$2I(U+h) \geq c^2 + \mu_1\mu_2 r_1^2 r_2^2 \dot{\phi}^2$$

d'où

$$(3.41) \quad I \geq \frac{c^2}{2(U+h)} + \frac{\mu_1\mu_2 r_1^2 r_2^2 \dot{\phi}^2}{2(U+h)}$$

On multiplie (3.41) par U^2 ,

$$(3.42) \quad IU^2 \geq \frac{c^2 U^2}{2(U+h)} + \frac{\mu_1\mu_2 r_1^2 r_2^2 \dot{\phi}^2 U^2}{2(U+h)}$$

et on ajoute $2hc^2$:

$$(3.43) \quad 2hc^2 + IU^2 \geq \frac{c^2 U^2 + 4hc^2(U+h)}{2(U+h)} + \frac{\mu_1\mu_2 r_1^2 r_2^2 \dot{\phi}^2 U^2}{2(U+h)}$$

$$(3.44) \quad 2hc^2 + IU^2 \geq \frac{c^2(U^2 + 4Uh + 4h^2)}{2(U+h)} + \frac{\mu_1\mu_2 r_1^2 r_2^2 \dot{\phi}^2 U^2}{2(U+h)}$$

On obtient ainsi:

$$(3.45) \quad 2h c^2 + IU^2 \geq \frac{c^2 (U + 2h)^2}{2(U + h)} + \frac{\mu_1 \mu_2 r_1^2 r_2^2 \dot{\varphi}^2 U^2}{2(U + h)}$$

Les deux termes du second membre sont positifs:

$$(3.46) \quad \frac{c^2 (U + 2h)^2}{2(U + h)} + \frac{\mu_1 \mu_2 r_1^2 r_2^2 \dot{\varphi}^2 U^2}{2(U + h)} \geq 0$$

On déduit donc

$$2h c^2 + IU^2 \geq 0, \quad \text{c.q.f.d.}$$

§ 3.3 Courbures dans le problème plan des trois corps

1. Métrique de Maupertuis dans le problème plan des trois corps

Avec les notations du deuxième chapitre, on pose:

$$(3.47) \quad q^1 = r_1 \quad q^2 = \varphi_1 \quad q^3 = \varphi_2 \quad q^4 = r_2$$

En utilisant l'expression de l'énergie cinétique T , donnée par (3.25), on obtient la métrique de Maupertuis sous la forme (voir [16], [30]):

$$(3.48) \quad ds_0^2 = (U + h) [\mu_1 (dr_1^2 + r_1^2 d\varphi_1^2) + \mu_2 (dr_2^2 + r_2^2 d\varphi_2^2)],$$

avec $U + h > 0$.

Les composantes covariantes du tenseur métrique fondamental de l'espace des configurations sont alors:

$$(3.49) \quad g_{11} = \mu_1 (U + h) \quad g_{22} = \mu_1 r_1^2 (U + h) \quad g_{33} = \mu_2 (U + h) \quad g_{44} = \mu_2 r_2^2 (U + h)$$

Remarque: On voit qu'en utilisant les coordonnées de Jacobi *le tenseur métrique est diagonal*, ce qui n'est pas le cas si l'on utilise des coordonnées cartésiennes.

2. Métrique de Sasaki dans l'espace des phases du problème plan des trois corps

Dans l'espace des phases, les variables de Poisson $(R_1, \phi_1, R_2, \phi_2)$, conjuguées des variables de position $(r_1, \phi_1, r_2, \phi_2)$ s'écrivent:

$$(3.50) \quad R_1 = \mu_1 \dot{r}_1 \quad R_2 = \mu_2 \dot{r}_2$$

$$(3.51) \quad \phi_1 = \mu_1 r_1^2 \dot{\phi}_1 \quad \phi_2 = \mu_2 r_2^2 \dot{\phi}_2$$

Remarque: Dans $M^6(h, c)$ les coordonnées: $(r_1, \phi_1, r_2, \phi_2, R_1, \phi_1, R_2, \phi_2)$ sont liées, d'après (3.27) et (3.28), par les intégrales premières:

$$(3.52) \quad \frac{1}{2} \left[\mu_1 \left(R_1^2 + \frac{\phi_1^2}{r_1^2} \right) + \mu_2 \left(R_2^2 + \frac{\phi_2^2}{r_2^2} \right) \right] - U(r_1, r_2, \varphi) = h$$

$$(3.53) \quad \phi_1 + \phi_2 = c$$

A partir de la métrique (3.48) on peut calculer selon (3.3) la métrique de Sasaki correspondante:

$$(3.54) \quad d\sigma_0^2 = G_{\alpha\beta} dq^\alpha dq^\beta \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, \dots, 8,$$

où les $G_{\alpha\beta}$ sont donnés par (3.5), avec $q^5 = R_1$, $q^6 = \phi_1$, $q^7 = R_2$, $q^8 = \phi_2$.

Soit G_s la matrice des éléments $G_{\alpha\beta}$ du tenseur métrique fondamental de l'espace des phases. G_s est la matrice symétrique de dimension 8×8 :

$$(3.55) \quad G_s = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} & G_{15} & G_{16} & G_{17} & G_{18} \\ G_{12} & G_{22} & G_{23} & G_{24} & G_{25} & G_{26} & G_{27} & G_{28} \\ G_{13} & G_{23} & G_{33} & G_{34} & G_{35} & G_{36} & G_{37} & G_{38} \\ G_{14} & G_{24} & G_{34} & G_{44} & G_{45} & G_{46} & G_{47} & G_{48} \\ \hline G_{15} & G_{25} & G_{35} & G_{45} & G_{55} & 0 & 0 & 0 \\ G_{16} & G_{26} & G_{36} & G_{46} & 0 & G_{66} & 0 & 0 \\ G_{17} & G_{27} & G_{37} & G_{47} & 0 & 0 & G_{77} & 0 \\ G_{18} & G_{28} & G_{38} & G_{48} & 0 & 0 & 0 & G_{88} \end{bmatrix}$$

Nous avons calculé les valeurs explicites des éléments $G_{\alpha\beta}$ dans l'Annexe-B.

3. Symboles de Christoffel de deuxième espèce avec la métrique de Maupertuis

Pour le calcul des symboles de Christoffel de deuxième espèce nous avons développé les sommes qui interviennent dans les formules (A.2) en utilisant les expressions des g_{ij} données par (3.49). Si l'on tient compte du fait que $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$, les Γ_{ij}^k *non nuls* sont:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{\frac{\partial U}{\partial r_1}}{2(U+h)}$$

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{\frac{\partial U}{\partial \varphi_1}}{2r_1^2(U+h)}$$

$$\Gamma_{11}^3 = -\frac{\mu_1 \frac{\partial U}{\partial r_2}}{2\mu_2(U+h)}$$

$$\Gamma_{11}^4 = -\frac{\mu_1 \frac{\partial U}{\partial \varphi_2}}{2\mu_2 r_2^2(U+h)}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{21}^1 &= -\frac{\frac{\partial U}{\partial \varphi_1}}{2(U+h)} & \Gamma_{21}^2 &= \frac{r_1 \frac{\partial U}{\partial r_1} + 2(U+h)}{2r_1(U+h)} \\
 \Gamma_{22}^1 &= -\frac{r_1 \left[r_1 \frac{\partial U}{\partial r_1} + 2(U+h) \right]}{2(U+h)} & \Gamma_{22}^2 &= -\frac{\frac{\partial U}{\partial \varphi_1}}{2(U+h)} \\
 \Gamma_{22}^3 &= -\frac{\mu_1 r_1^2 \frac{\partial U}{\partial r_2}}{2\mu_2(U+h)} & \Gamma_{22}^4 &= -\frac{\mu_1 r_1^2 \frac{\partial U}{\partial \varphi_2}}{2\mu_2 r_2^2(U+h)} \\
 \Gamma_{31}^1 &= \frac{\frac{\partial U}{\partial r_2}}{2(U+h)} & \Gamma_{31}^3 &= \frac{\frac{\partial U}{\partial r_1}}{2(U+h)} \\
 \Gamma_{32}^2 &= \frac{\frac{\partial U}{\partial r_2}}{2(U+h)} & \Gamma_{32}^3 &= \frac{\frac{\partial U}{\partial \varphi_1}}{2(U+h)} \\
 \Gamma_{33}^1 &= -\frac{\mu_2 \frac{\partial U}{\partial r_1}}{2\mu_1(U+h)} & \Gamma_{33}^2 &= -\frac{\mu_2 \frac{\partial U}{\partial \varphi_1}}{2\mu_1 r_1^2(U+h)} \\
 \Gamma_{33}^3 &= \frac{\frac{\partial U}{\partial r_2}}{2(U+h)} & \Gamma_{33}^4 &= -\frac{\frac{\partial U}{\partial \varphi_2}}{2r_2^2(U+h)} \\
 \Gamma_{41}^1 &= \frac{\frac{\partial U}{\partial \varphi_2}}{2(U+h)} & \Gamma_{41}^4 &= \frac{\frac{\partial U}{\partial r_1}}{2(U+h)} \\
 \Gamma_{42}^2 &= \frac{\frac{\partial U}{\partial \varphi_2}}{2(U+h)} & \Gamma_{42}^4 &= \frac{\frac{\partial U}{\partial \varphi_1}}{2(U+h)} \\
 \Gamma_{43}^3 &= \frac{\frac{\partial U}{\partial \varphi_2}}{2(U+h)} & \Gamma_{43}^4 &= \frac{r_2 \frac{\partial U}{\partial r_2} + 2(U+h)}{2r_2(U+h)}
 \end{aligned}
 \tag{3.56}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{44}^1 &= -\frac{\mu_2 r_2^2 \frac{\partial U}{\partial r_1}}{2\mu_1(U+h)} & \Gamma_{44}^2 &= -\frac{\mu_2 r_2^2 \frac{\partial U}{\partial \varphi_1}}{2\mu_1 r_1^2(U+h)} \\ \Gamma_{44}^3 &= -\frac{r_2 \left[r_2 \frac{\partial U}{\partial r_2} + 2(U+h) \right]}{2(U+h)} & \Gamma_{44}^4 &= \frac{\frac{\partial U}{\partial \varphi_2}}{2(U+h)}\end{aligned}$$

Il y a 28 symboles de Christoffel de première espèce non-nuls sur 40. On remarque que la parenthèse $(U + h)$ qui apparaît aux dénominateurs est positive.

Dans le cas du problème plan des trois corps, avec U donné par (3.20), les

expressions des $\frac{\partial U}{\partial r_1}$, $\frac{\partial U}{\partial r_2}$, $\frac{\partial U}{\partial \varphi_1}$ et $\frac{\partial U}{\partial \varphi_2}$ sont:

$$\frac{\partial U}{\partial r_1} = -\frac{m_1 m_2}{r_1^2} - \frac{m_1 m_3 \left[\frac{2m_2 r_2 \cos \varphi}{m_1 + m_2} + \frac{2m_2^2 r_1}{(m_1 + m_2)^2} \right]}{2r_{13}^3} - \frac{m_2 m_3 \left[\frac{2m_1^2 r_1}{(m_1 + m_2)^2} - \frac{2m_1 r_2 \cos \varphi}{m_1 + m_2} \right]}{2r_{23}^3}$$

$$\frac{\partial U}{\partial r_2} = -\frac{m_1 m_3 \left[\frac{2m_2 r_2 \cos \varphi}{m_1 + m_2} + \frac{2m_2^2 r_1}{(m_1 + m_2)^2} \right]}{2r_{13}^3} - \frac{m_2 m_3 \left[\frac{2m_1^2 r_1}{(m_1 + m_2)^2} - \frac{2m_1 r_2 \cos \varphi}{m_1 + m_2} \right]}{2r_{23}^3}$$

$$(3.57) \quad \frac{\partial U}{\partial \varphi_1} = \frac{m_1 m_2 m_3 r_1 r_2 \sin \varphi}{m_1 + m_2} \left(\frac{1}{r_{23}^3} - \frac{1}{r_{13}^3} \right)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi_2} = \frac{m_1 m_2 m_3 r_1 r_2 \sin \varphi}{m_1 + m_2} \left(\frac{1}{r_{13}^3} - \frac{1}{r_{23}^3} \right)$$

U étant une fonction homogène de degré -1, on vérifie aisément que:

$$(3.58) \quad U + r_1 \frac{\partial U}{\partial r_1} + r_2 \frac{\partial U}{\partial r_2} = 0$$

4. Le tenseur de courbure de Riemann-Christoffel

Les expressions des symboles de Christoffel permettent ensuite de calculer les composantes du tenseur de courbure de Riemann, données par (A.6).

Pour ne pas donner toutes les composantes du tenseur de Riemann, nous allons utiliser les identités usuelles (voir [93]):

$$\begin{aligned}
 R_{ijkl} &= -R_{jikl} \\
 R_{ijkl} &= -R_{jilk} \\
 R_{ijkl} &= R_{ikjl}
 \end{aligned}
 \tag{3.59}$$

Ainsi, les composantes covariantes *indépendantes, non-nulles* du tenseur de courbure de Riemann-Christoffel sont:

$$\begin{aligned}
 R_{1212} &= - \frac{\mu_1 \left[2\mu_2 r_1^2 r_2^2 (U+h) \frac{\partial^2 U}{\partial r_1^2} - 2\mu_2 r_1^2 r_2^2 \left(\frac{\partial U}{\partial r_1} \right)^2 + 2\mu_2 r_1 r_2^2 (U+h) \frac{\partial U}{\partial r_1} + \right. \\
 &\quad \left. + 2\mu_2 r_2^2 (U+h) \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1^2} - 2\mu_2 r_2^2 \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi_1} \right)^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \mu_1 r_1^2 r_2^2 \left(\frac{\partial U}{\partial r_2} \right)^2 + \mu_1 r_1^2 \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi_2} \right)^2 \right]}{4\mu_2 r_2^2 (U+h)} \\
 R_{1213} &= \frac{\mu_1 \left[3 \frac{\partial U}{\partial \varphi_1} \frac{\partial U}{\partial r_2} - 2(U+h) \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1 \partial r_2} \right]}{4(U+h)}
 \end{aligned}
 \tag{3.60}$$

$$R_{1214} = \frac{\mu_1 \left[3 \frac{\partial U}{\partial \varphi_1} \frac{\partial U}{\partial \varphi_2} - 2(U+h) \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} \right]}{4(U+h)}$$

$$R_{1223} = - \frac{\mu_1 r_1^2 \left[3 \frac{\partial U}{\partial r_1} \frac{\partial U}{\partial r_2} - 2(U+h) \frac{\partial^2 U}{\partial r_1 \partial r_2} \right]}{4(U+h)}$$

$$R_{1224} = - \frac{\mu_1 r_1^2 \left[3 \frac{\partial U}{\partial r_1} \frac{\partial U}{\partial \varphi_2} - 2(U+h) \frac{\partial^2 U}{\partial r_1 \partial \varphi_2} \right]}{4(U+h)}$$

$$R_{1313} = - \frac{\left[2\mu_2 r_1^2 r_2^2 (U+h) \frac{\partial^2 U}{\partial r_1^2} - 2\mu_2 r_1^2 r_2^2 \left(\frac{\partial U}{\partial r_1} \right)^2 + \mu_2 r_2^2 \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi_1} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2\mu_2 r_1^2 r_2^2 (U+h) \frac{\partial^2 U}{\partial r_2^2} - 2\mu_1 r_1^2 r_2^2 \left(\frac{\partial U}{\partial r_2} \right)^2 + \mu_1 r_1^2 \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi_2} \right)^2 \right]}{4\mu_2 r_1^2 r_2^2 (U+h)}$$

$$R_{1314} = \frac{\mu_1 \left[3r_2 \frac{\partial U}{\partial r_2} \frac{\partial U}{\partial \varphi_2} - 2r_2(U+h) \frac{\partial^2 U}{\partial r_2 \partial \varphi_2} + 2(U+h) \frac{\partial U}{\partial \varphi_2} \right]}{4r_2(U+h)}$$

$$R_{1323} = \frac{\mu_2 \left[3r_1 \frac{\partial U}{\partial r_1} \frac{\partial U}{\partial \varphi_1} - 2r_1(U+h) \frac{\partial^2 U}{\partial r_1 \partial \varphi_1} + 2(U+h) \frac{\partial U}{\partial \varphi_1} \right]}{4r_1(U+h)}$$

$$R_{1334} = - \frac{\mu_2 \left[3 \frac{\partial U}{\partial r_1} \frac{\partial U}{\partial \varphi_2} - 2(U+h) \frac{\partial^2 U}{\partial r_1 \partial \varphi_2} \right]}{4(U+h)}$$

$$R_{1414} = - \frac{\left[2\mu_2 r_1^2 r_2^2 (U+h) \frac{\partial^2 U}{\partial r_1^2} - 2\mu_2 r_1^2 r_2^2 \left(\frac{\partial U}{\partial r_1} \right)^2 + \mu_2 r_2^2 \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi_1} \right)^2 + \right. \\ \left. + \mu_1 r_1^2 r_2^2 \left(\frac{\partial U}{\partial r_2} \right)^2 + 2\mu_1 r_1^2 r_2 (U+h) \frac{\partial U}{\partial r_2} + \right. \\ \left. + 2\mu_1 r_1^2 (U+h) \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_2^2} - 2\mu_1 r_1^2 \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi_2} \right)^2 \right]}{4r_1^2 (U+h)}$$

$$R_{1424} = \frac{\mu_2 r_2^2 \left[3r_1 \frac{\partial U}{\partial r_1} \frac{\partial U}{\partial \varphi_1} - 2r_1 (U+h) \frac{\partial^2 U}{\partial r_1 \partial \varphi_1} + 2(U+h) \frac{\partial U}{\partial \varphi_1} \right]}{4r_1 (U+h)}$$

$$R_{1434} = \frac{\mu_2 r_2^2 \left[3 \frac{\partial U}{\partial r_1} \frac{\partial U}{\partial r_2} - 2(U+h) \frac{\partial^2 U}{\partial r_1 \partial r_2} \right]}{4(U+h)}$$

$$R_{2323} = - \frac{\left[\mu_2 r_1^2 r_2^2 \left(\frac{\partial U}{\partial r_1} \right)^2 + 2\mu_2 r_1 r_2^2 (U+h) \frac{\partial U}{\partial r_1} + 2\mu_2 r_2^2 (U+h) \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1^2} - \right. \\ \left. - 2\mu_2 r_2^2 \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi_1} \right)^2 + 2\mu_1 r_1^2 r_2^2 (U+h) \frac{\partial^2 U}{\partial r_2^2} - \right. \\ \left. - 2\mu_1 r_1^2 r_2^2 \left(\frac{\partial U}{\partial r_2} \right)^2 + \mu_1 r_1^2 \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi_2} \right)^2 \right]}{4r_2^2 (U+h)}$$

$$R_{2324} = - \frac{\mu_1 r_1^2 \left[3r_2 \frac{\partial U}{\partial r_2} \frac{\partial U}{\partial \varphi_2} - 2r_2 (U+h) \frac{\partial^2 U}{\partial r_2 \partial \varphi_2} + 2(U+h) \frac{\partial U}{\partial \varphi_2} \right]}{4r_2 (U+h)}$$

$$R_{2334} = - \frac{\mu_2 \left[3 \frac{\partial U}{\partial \varphi_1} \frac{\partial U}{\partial \varphi_2} - 2(U+h) \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} \right]}{4(U+h)}$$

$$R_{2424} = - \frac{\left[\begin{aligned} &\mu_2 r_1^2 r_2^2 \left(\frac{\partial U}{\partial r_1} \right)^2 + 2\mu_2 r_1 r_2^2 (U+h) \frac{\partial U}{\partial r_1} + 2\mu_2 r_2^2 (U+h) \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1^2} - \\ &- 2\mu_2 r_2^2 \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi_1} \right)^2 + \mu_1 r_1^2 r_2^2 \left(\frac{\partial U}{\partial r_2} \right)^2 + 2\mu_1 r_1^2 r_2 (U+h) \frac{\partial U}{\partial r_2} + \\ &+ 2\mu_1 r_1^2 (U+h) \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_2^2} - 2\mu_1 r_1^2 \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi_2} \right)^2 \end{aligned} \right]}{4(U+h)}$$

$$R_{2434} = - \frac{\mu_2 r_2^2 \left[3 \frac{\partial U}{\partial r_2} \frac{\partial U}{\partial \varphi_1} - 2(U+h) \frac{\partial^2 U}{\partial r_2 \partial \varphi_1} \right]}{4(U+h)}$$

$$R_{3434} = - \frac{\left[\begin{aligned} &\mu_2 r_1^2 r_2^2 \left(\frac{\partial U}{\partial r_1} \right)^2 + \mu_2 r_2^2 \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi_1} \right)^2 + 2\mu_1 r_1^2 r_2^2 (U+h) \frac{\partial^2 U}{\partial r_2^2} - \\ &- 2\mu_1 r_1^2 r_2^2 \left(\frac{\partial U}{\partial r_2} \right)^2 + 2\mu_1 r_1^2 r_2 (U+h) \frac{\partial U}{\partial r_2} + \\ &+ 2\mu_1 r_1^2 (U+h) \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_2^2} - 2\mu_1 r_1^2 \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi_2} \right)^2 \end{aligned} \right]}{4\mu_1 r_1^2 (U+h)}$$

Remarques : Il y a 18 composantes non-nulles sur 20. On vérifie aisément l'identité de Bianchi:

$$(3.61) \quad R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0$$

Dans les expressions ci-dessus les dénominateurs sont positifs; en plus nous avons mis en évidence aux numérateurs l'expression $(U+h)$, qui est positive.

5. Le tenseur de Ricci

Les composantes covariantes non-nulles du tenseur de Ricci sont:

$$(3.62) \quad \begin{aligned} R_{11} &= \frac{\left[3\mu_2 r_1^2 r_2^2 (U+h) \frac{\partial^2 U}{\partial r_1^2} - 3\mu_2 r_1^2 r_2^2 \left(\frac{\partial U}{\partial r_1} \right)^2 + \mu_2 r_1^2 r_2^2 (U+h) \frac{\partial U}{\partial r_1} + \right. \\ &\quad \left. + \mu_2 r_2^2 (U+h) \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1^2} + \mu_2 r_2^2 (U+h) \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1^2} + \mu_1 r_1^2 r_2^2 (U+h) \frac{\partial^2 U}{\partial r_2^2} + \right. \\ &\quad \left. + \mu_1 r_1^2 r_2 (U+h) \frac{\partial U}{\partial r_2} + \mu_1 r_1^2 (U+h) \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_2^2} \right]}{2\mu_2 r_1^2 r_2^2 (U+h)^2} \\ R_{12} &= \frac{3r_1 \frac{\partial U}{\partial r_1} \frac{\partial U}{\partial \varphi_1} - 2r_1 (U+h) \frac{\partial^2 U}{\partial r_1 \partial \varphi_1} + 2(U+h) \frac{\partial U}{\partial \varphi_1}}{2r_1 (U+h)^2} \\ R_{13} &= \frac{3 \frac{\partial U}{\partial r_1} \frac{\partial U}{\partial r_2} - 2(U+h) \frac{\partial^2 U}{\partial r_1 \partial r_2}}{2(U+h)^2} \\ R_{14} &= \frac{3 \frac{\partial U}{\partial r_1} \frac{\partial U}{\partial \varphi_2} - 2(U+h) \frac{\partial^2 U}{\partial r_1 \partial \varphi_2}}{2(U+h)^2} \end{aligned}$$

$$R_{22} = \frac{\left[\begin{aligned} &\mu_2 r_1^2 r_2^2 (U+h) \frac{\partial^2 U}{\partial r_1^2} + 3\mu_2 r_1 r_2^2 (U+h) \frac{\partial U}{\partial r_1} + \\ &+ 3\mu_2 r_2^2 (U+h) \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1^2} - 3\mu_2 r_2^2 \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi_1} \right)^2 + \mu_1 r_1^2 r_2^2 (U+h) \frac{\partial^2 U}{\partial r_2^2} + \\ &+ \mu_1 r_1^2 r_2 (U+h) \frac{\partial U}{\partial r_2} + \mu_1 r_1^2 (U+h) \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_2^2} \end{aligned} \right]}{2\mu_2 r_2^2 (U+h)^2}$$

$$R_{23} = \frac{3 \frac{\partial U}{\partial \varphi_1} \frac{\partial U}{\partial r_2} - 2(U+h) \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1 \partial r_2}}{2(U+h)^2}$$

$$R_{24} = \frac{3 \frac{\partial U}{\partial \varphi_1} \frac{\partial U}{\partial \varphi_2} - 2(U+h) \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2}}{2(U+h)^2}$$

$$R_{33} = \frac{\left[\begin{aligned} &\mu_2 r_1^2 r_2^2 (U+h) \frac{\partial^2 U}{\partial r_1^2} + \mu_2 r_1 r_2^2 (U+h) \frac{\partial U}{\partial r_1} + \mu_2 r_2^2 (U+h) \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1^2} + \\ &+ 3\mu_1 r_1^2 r_2^2 (U+h) \frac{\partial^2 U}{\partial r_2^2} - 3\mu_1 r_1^2 r_2^2 \left(\frac{\partial U}{\partial r_2} \right)^2 + \mu_1 r_1^2 r_2 (U+h) \frac{\partial U}{\partial r_2} + \\ &+ \mu_1 r_1^2 (U+h) \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_2^2} \end{aligned} \right]}{2\mu_1 r_1^2 r_2^2 (U+h)^2}$$

$$R_{34} = \frac{3r_2 \frac{\partial U}{\partial r_2} \frac{\partial U}{\partial \varphi_2} - 2r_2(U+h) \frac{\partial^2 U}{\partial r_2 \partial \varphi_2} + 2(U+h) \frac{\partial U}{\partial \varphi_2}}{2r_2(U+h)^2}$$

$$R_{44} = \frac{\left[\begin{aligned} &\mu_2 r_1^2 r_2^2 (U+h) \frac{\partial^2 U}{\partial r_1^2} + \mu_2 r_1 r_2^2 (U+h) \frac{\partial U}{\partial r_1} + \mu_2 r_2^2 (U+h) \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1^2} + \\ &+ \mu_1 r_1^2 r_2^2 (U+h) \frac{\partial^2 U}{\partial r_2^2} + 3\mu_1 r_1^2 r_2 (U+h) \frac{\partial U}{\partial r_2} + \\ &+ 3\mu_1 r_1^2 (U+h) \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_2^2} - 3\mu_1 r_1^2 \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi_2} \right)^2 \end{aligned} \right]}{2\mu_1 r_1^2 (U+h)^2}$$

Remarque: Nous avons tenu compte du fait que le tenseur de Ricci est symétrique ($R_{ij} = R_{ji}$). On voit que, dans le cas général, ce tenseur n'a pas de composante nulle. Il dépend de l'expression de la fonction de force U .

6. La courbure scalaire

Par la contraction du tenseur de Ricci on obtient la courbure scalaire sous la forme:

(3.63)

$$R = - \frac{3 \left[\begin{aligned} &2\mu_2 r_1^2 r_2^2 (U+h) \frac{\partial^2 U}{\partial r_1^2} - \mu_2 r_1^2 r_2^2 \left(\frac{\partial U}{\partial r_1} \right)^2 + 2\mu_2 r_1 r_2^2 (U+h) \frac{\partial U}{\partial r_1} + \\ &+ 2\mu_2 r_2^2 (U+h) \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1^2} - \mu_2 r_2^2 \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi_1} \right)^2 + 2\mu_2 r_1^2 r_2^2 (U+h) \frac{\partial^2 U}{\partial r_2^2} - \mu_1 r_1^2 r_2^2 \left(\frac{\partial U}{\partial r_2} \right)^2 + \\ &+ 2\mu_1 r_1^2 r_2 (U+h) \frac{\partial U}{\partial r_2} + 2\mu_1 r_1^2 (U+h) \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_2^2} - \mu_1 r_1^2 \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi_2} \right)^2 \end{aligned} \right]}{4\mu_1 \mu_2 r_1^2 r_2^2 (U+h)^3}$$

7. Courbures riemanniennes principales

Suivant l'algorithme proposé pour l'étude des trajectoires d'un système dynamique conservatif (§2.6) nous allons déterminer maintenant les courbures riemanniennes des trajectoires du problème plan des trois corps afin d'amorcer une étude qualitative sur le comportement des trajectoires.

Soient $v_1(v_1^i)$, $v_2(v_2^i)$, $v_3(v_3^i)$ et $v_4(v_4^i)$ les vecteurs orthonormés qui déterminent les 2-plans principaux de section (voir § 2.4). Les composantes de ces vecteurs s'écrivent:

$$(3.64) \quad v_1^1 = \frac{1}{\sqrt{\mu_1}} \quad v_1^2 = 0 \quad v_1^3 = 0 \quad v_1^4 = 0$$

$$(3.65) \quad v_2^1 = 0 \quad v_2^2 = \frac{1}{r_1 \sqrt{\mu_1}} \quad v_2^3 = 0 \quad v_2^4 = 0$$

$$(3.66) \quad v_3^1 = 0 \quad v_3^2 = 0 \quad v_3^3 = \frac{1}{\sqrt{\mu_2}} \quad v_3^4 = 0$$

$$(3.67) \quad v_4^1 = 0 \quad v_4^2 = 0 \quad v_4^3 = 0 \quad v_4^4 = \frac{1}{r_2 \sqrt{\mu_2}}.$$

Soient $K_{m\ n}$ ($m < n$, $m, n = 1, 2, 3, 4$) les six courbures riemanniennes principales du problème considéré. Nous avons calculé ces courbures en appliquant (3.14), avec les g_{ij} donnés par (3.49), les R_{ijkl} exprimés par (3.60) et les vecteurs v_m ($m = 1, 2, 3, 4$) ci dessus. Ce calcul a été effectué à l'aide du logiciel Macsyma, pas à pas, afin de nous permettre de vérifier aussi la forme des résultats intermédiaires.

Nous avons obtenu:

- pour le plan déterminé par les vecteurs $v_1(v_1^i)$ et $v_2(v_2^i)$

$$K_{12} = - \frac{\left[\begin{aligned} & 2\mu_2 r_2^2 (U + h) \left(r_1^2 \frac{\partial^2 U}{\partial r_1^2} + r_1 \frac{\partial U}{\partial r_1} + \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1^2} \right) - \\ & - 2\mu_2 r_1^2 r_2^2 \left(\frac{\partial U}{\partial r_1} \right)^2 - 2\mu_2 r_2^2 \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi_1} \right)^2 + \mu_1 r_1^2 r_2^2 \left(\frac{\partial U}{\partial r_2} \right)^2 + \mu_1 r_1^2 \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi_2} \right)^2 \end{aligned} \right]}{4\mu_1 \mu_2 r_1^2 r_2^2 (U + h)^3}$$

- pour le plan déterminé par les vecteurs $v_1(v_1^i)$ et $v_3(v_3^i)$

$$(3.68) \quad K_{13} = - \frac{\left[\begin{aligned} & 2r_1^2 r_2^2 (U + h) \left(\mu_2 \frac{\partial^2 U}{\partial r_1^2} + \mu_1 \frac{\partial^2 U}{\partial r_2^2} \right) - \\ & - 2\mu_2 r_1^2 r_2^2 \left(\frac{\partial U}{\partial r_1} \right)^2 + \mu_2 r_2^2 \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi_1} \right)^2 - 2\mu_1 r_1^2 r_2^2 \left(\frac{\partial U}{\partial r_2} \right)^2 + \mu_1 r_1^2 \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi_2} \right)^2 \end{aligned} \right]}{4\mu_1 \mu_2 r_1^2 r_2^2 (U + h)^3}$$

- pour le plan déterminé par les vecteurs $v_1(v_1^i)$ et $v_4(v_4^i)$

$$K_{14} = - \frac{\left[\begin{aligned} & 2r_1^2 (U + h) \left(\mu_2 r_2^2 \frac{\partial^2 U}{\partial r_1^2} + \mu_1 r_2 \frac{\partial U}{\partial r_2} + \mu_1 \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_2^2} \right) - \\ & - 2\mu_2 r_1^2 r_2^2 \left(\frac{\partial U}{\partial r_1} \right)^2 + \mu_2 r_2^2 \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi_1} \right)^2 + \mu_1 r_1^2 r_2^2 \left(\frac{\partial U}{\partial r_2} \right)^2 - 2\mu_1 r_1^2 \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi_2} \right)^2 \end{aligned} \right]}{4\mu_1 \mu_2 r_1^2 r_2^2 (U + h)^3}$$

- pour le plan déterminé par les vecteurs $v_2(v_2^i)$ et $v_3(v_3^i)$

$$K_{23} = - \frac{\left[\begin{aligned} & 2r_2^2 (U + h) \left(\mu_2 r_1 \frac{\partial U}{\partial r_1} + \mu_2 \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1^2} + \mu_1 r_1^2 \frac{\partial^2 U}{\partial r_2^2} \right) + \\ & + \mu_2 r_1^2 r_2^2 \left(\frac{\partial U}{\partial r_1} \right)^2 - 2\mu_2 r_2^2 \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi_1} \right)^2 - 2\mu_1 r_1^2 r_2^2 \left(\frac{\partial U}{\partial r_2} \right)^2 + \mu_1 r_1^2 \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi_2} \right)^2 \end{aligned} \right]}{4\mu_1 \mu_2 r_1^2 r_2^2 (U + h)^3}$$

- pour le plan déterminé par les vecteurs $v_2(v_2^i)$ et $v_4(v_4^i)$

$$K_{24} = - \frac{\left[2(U + h) \left(\mu_2 r_1 r_2^2 \frac{\partial U}{\partial r_1} + \mu_2 r_2^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1^2} + \mu_1 r_1^2 r_2 \frac{\partial U}{\partial r_2} + \mu_1 r_1^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_2^2} \right) + \right. \\ \left. + \mu_2 r_1^2 r_2^2 \left(\frac{\partial U}{\partial r_1} \right)^2 - 2\mu_2 r_2^2 \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi_1} \right)^2 + \mu_1 r_1^2 r_2^2 \left(\frac{\partial U}{\partial r_2} \right)^2 - 2\mu_1 r_1^2 \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi_2} \right)^2 \right]}{4\mu_1 \mu_2 r_1^2 r_2^2 (U + h)^3}$$

- pour le plan déterminé par les vecteurs $v_3(v_3^i)$ et $v_4(v_4^i)$

$$K_{34} = - \frac{\left[2\mu_1 r_1^2 (U + h) \left(r_2^2 \frac{\partial^2 U}{\partial r_2^2} + r_2 \frac{\partial U}{\partial r_2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_2^2} \right) + \right. \\ \left. + \mu_2 r_1^2 r_2^2 \left(\frac{\partial U}{\partial r_1} \right)^2 + \mu_2 r_2^2 \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi_1} \right)^2 - 2\mu_1 r_1^2 r_2^2 \left(\frac{\partial U}{\partial r_2} \right)^2 - 2\mu_1 r_1^2 \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi_2} \right)^2 \right]}{4\mu_1 \mu_2 r_1^2 r_2^2 (U + h)^3}$$

Dans les expressions des courbures riemanniennes nous avons mis en évidence les termes positifs, à savoir $(U+h)$ et les *carrés parfaits*. On voit que les dénominateurs sont positifs, alors que sur le signe des numérateurs on ne peut pas tirer une conclusion évidente dans le cas général du problème plan des trois corps. Cela dépend essentiellement de l'expression de U . Pour avoir une idée sur la complexité des K_{mn} dans le cas général, nous avons présenté dans l'Annexe-B les numérateurs des courbures, après avoir remplacé la fonction de force U , par son expression donnée dans (3.20).

On remarque que les six courbures riemanniennes principales dépendent de sept paramètres : $m_1, m_2, m_3, r_1, r_2, \varphi$ et h . Nous allons les étudier, en détail, dans des cas particuliers importants, ce qui fera l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE IV

ANALYSE DES COURBURES DANS DES CAS PARTICULIERS

Nous allons aborder dans ce chapitre l'étude des courbures dans des cas particuliers, obtenus en discutant selon les valeurs des masses, ou selon la forme du triangle des trois corps.

Dans les analyses qui vont suivre le but est de détecter des régions de l'espace des configurations où les courbures riemanniennes, (ou les valeurs propres du tenseur de Ricci) gardent un signe constant. A part l'aspect géométrique du problème, cela va donner des indications sur la stabilité de la configuration étudiée.

Remarques:

1) Les dénominateurs des courbures riemanniennes principales (voir § 3.3) sont positifs. En effet,

$$(4.1) \quad U + h > 0$$

Cette condition va intervenir dans toutes les analyses des cas particuliers étudiés.

2) Le choix d'une configuration particulière va imposer de nouvelles conditions (et implicitement un certain domaine de variation) aux paramètres qui apparaissent dans les K_{mn} , ($m < n$; $m, n = 1, 2, 3, 4$).

3) Etant intéressé par l'étude du signe des courbures et non pas par les valeurs des courbures riemanniennes elles-mêmes, nous allons considérer par la suite les expressions SK_{mn} qui donnent le signe des K_{mn} .

§ 4.1 Cas d'un système planétaire

Dans ce paragraphe nous allons compléter le travail de M. Delmas [30] sur l'étude des courbures dans le cas du système planétaire.

On considère le cas où la masse du corps M_1 prépondérante ($m_1 \gg m_2, m_1 \gg m_3$) et l'on prend m_1 égale à l'unité. Pour les deux autres masses on prend:

$$(4.2) \quad \frac{m_2}{m_1} = \varepsilon \quad \frac{m_3}{m_1} = k\varepsilon, \text{ donc } \frac{m_3}{m_2} = k.$$

avec $0 \leq k \leq 1$. Avec ce choix, le petit paramètre ε se trouve en facteur dans le hamiltonien H du problème et si l'on considère le cas limite intégrable $\varepsilon \rightarrow 0$, on prend le hamiltonien (voir [30]):

$$(4.3) \quad H^* = \frac{H}{\varepsilon} = \frac{T - U}{\varepsilon} = T^* - U^*$$

De même, nous allons considérer la métrique:

$$(4.4) \quad ds^2 = 2 T^* (dt)^2$$

La fonction de force s'écrit:

$$(4.5) \quad U^* = \frac{1}{r_1} + \frac{k}{r_{13}} + \frac{k\varepsilon}{r_{23}} = U_0 + \varepsilon U_1 + O(\varepsilon^2)$$

On prend par la suite $\varepsilon = 0$. On remarque que dans ce cas, les vecteurs $\overline{M_1 M_2}$ et $\overline{G_{12} M_3}$ vont avoir la même origine, à savoir M_1 (voir Fig. 4.1), qui est le centre des trois masses.

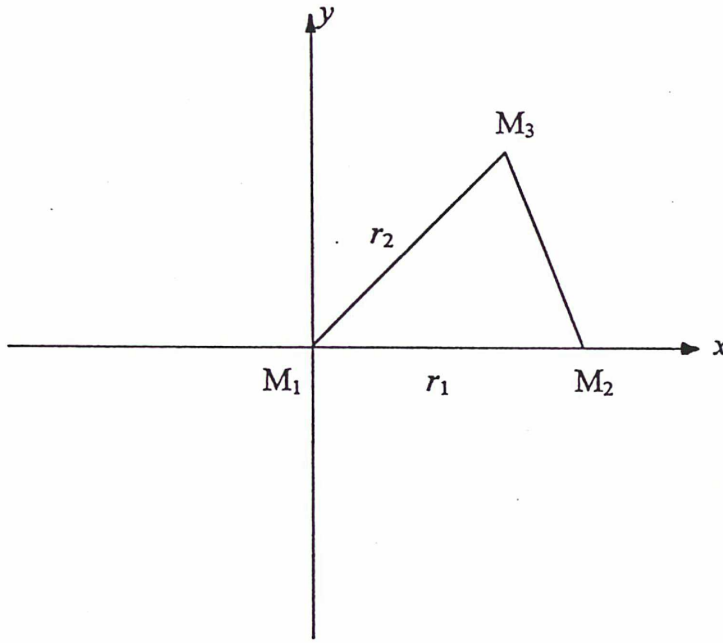


Fig. 4.1

La métrique de Maupertuis, ds_0^2 (3.48), s'écrit:

$$(4.6) \quad ds_0^2 = (U + h) [dr_1^2 + r_1^2 d\varphi_1^2 + k(dr_2^2 + r_2^2 d\varphi_2^2)],$$

donc les composantes non-nulles du tenseur métrique fondamental sont:

$$(4.7) \quad \begin{aligned} g_{11} &= \frac{k r_1 + r_2 + h r_1 r_2}{r_1 r_2} & g_{22} &= \frac{r_1 (k r_1 + r_2 + h r_1 r_2)}{r_2} \\ g_{33} &= \frac{k (k r_1 + r_2 + h r_1 r_2)}{r_1 r_2} & g_{44} &= \frac{k r_2 (k r_1 + r_2 + h r_1 r_2)}{r_1} \end{aligned}$$

De (4.5), on tire:

$$(4.8) \quad U_0 = \frac{1}{r_1} + \frac{k}{r_2}$$

Nous avons obtenu le résultat suivant:

Théorème 1 *Dans le cas planétaire du problème plan des trois corps, les courbures riemanniennes principales non-nulles, n'ont pas toutes même signe.*

Démonstration

Les calculs du cas général du Chapitre III permettent d'obtenir les tenseurs de courbure et les courbures riemanniennes principales. Ils sont donnés dans l'Annexe-B.

La condition (4.1) s'écrit:

$$(4.9) \quad r_2 + r_1 k + h r_2 r_1 > 0$$

Le signe des K_{mn} ($m < n$, $m, n = 1, 2, 3, 4$) est donné par le signe des expressions suivantes:

$$(4.10) \quad \begin{aligned} SK_{12} &= -2 h r_2^4 - 2 k r_2^3 - k r_1^3 \\ SK_{13} &= -2 h r_1 r_2^4 - r_2^4 - 2 k r_1 r_2^3 - 2 h r_1^4 r_2 - 2 r_1^3 r_2 - k r_1^4 \\ SK_{14} &= -4 h r_1 r_2^4 - 2 r_2^4 - 4 k r_1 r_2^3 + 2 h r_1^4 r_2 + 2 r_1^3 r_2 + k r_1^4 \\ SK_{23} &= 2 h r_1 r_2^4 + r_2^4 + 2 k r_1 r_2^3 - 4 h r_1^4 r_2 - 4 r_1^3 r_2 - 2 k r_1^4 \\ SK_{24} &= 2 h r_1 r_2^4 + r_2^4 + 2 k r_1 r_2^3 + 2 h r_1^4 r_2 + 2 r_1^3 r_2 + k r_1^4 \\ SK_{34} &= -r_2^3 - 2 h r_1^4 - 2 r_1^3 \end{aligned}$$

On voit alors que si $K_{13} \neq 0$ et $K_{24} \neq 0$, pour des valeurs quelconques de k, r_1, r_2 et h on a:

$$(4.11) \quad \text{sign}(K_{13}) = -\text{sign}(K_{24}),$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

Nous allons appeler “*configuration isocèle*” dans le cas planétaire du problème plan des trois corps la configuration pour laquelle $r_1 = r_2$.

Nous avons obtenu le résultat suivant:

Théorème 2 *Dans le cas planétaire du problème plan des trois corps les courbures riemanniennes principales s’annulent si et seulement si la configuration des trois corps est un triangle isocèle, $k = 1$ et $2 r_1 h + 3 = 0$.*

Démonstration

De $2 r_1 h + 3 = 0$ on tire $h = -\frac{3}{2r_1}$.

On vérifie tout d’abord la condition (4.9).

Pour $r_2 = r_1$, $k = 1$ et $h = -\frac{3}{2r_1}$ on obtient :

$$\frac{r_1}{2} > 0, \text{ donc la condition est vérifiée.}$$

La condition du théorème est nécessaire:

Déterminons les conditions dans lesquelles les courbures riemanniennes s’annulent.

Suivant les valeurs de l’énergie, h , nous allons discuter trois sous-cas:

a) Sous-cas: $h > 0$.

Si $h > 0$, de (4.10) on tire:

$$(4.12) \quad K_{12} < 0, K_{13} < 0, K_{34} < 0 \text{ et } K_{24} > 0, \text{ alors que}$$

$$K_{14} \text{ et } K_{23} \text{ sont strictement négatives pour } r_2 < r_1 < \sqrt[3]{2} r_2.$$

b) Sous-cas: $h = 0$.

Les expressions (4.10) deviennent:

$$\begin{aligned}
 SK_{12} &= -2kr_2^3 - kr_1^3 \\
 SK_{13} &= -r_2^4 - 2kr_1r_2^3 - 2r_1^3r_2 - kr_1^4 \\
 (4.13) \quad SK_{14} &= -2r_2^4 - 4kr_1r_2^3 + 2r_1^3r_2 + kr_1^4 \\
 SK_{23} &= r_2^4 + 2kr_1r_2^3 - 4r_1^3r_2 - 2kr_1^4 \\
 SK_{24} &= r_2^4 + 2kr_1r_2^3 + 2r_1^3r_2 + kr_1^4 \\
 SK_{34} &= -r_2^3 - 2r_1^3
 \end{aligned}$$

On a alors, puisque r_1, r_2 et k sont positifs,

$$K_{12} < 0, K_{13} < 0, K_{24} > 0, K_{34} < 0;$$

$$K_{14} \text{ et } K_{23} \text{ sont strictement négatives pour } r_2 < r_1 < \sqrt[3]{2}r_2.$$

c) Sous-cas: $h < 0$.

En imposant la condition $K_{13} = K_{24} = 0$, on a:

$$(4.14) \quad k = -[(2hr_1 + 1)r_2^4 + (2hr_1^4 + 2r_1^3)r_2] / (2r_1r_2^3 + r_1^4)$$

En utilisant cette valeur de k dans les expressions (4.10), on obtient:

$$\begin{aligned}
 SK_{12} &= r_2(r_2^3 + 2hr_1^4 + 2r_1^3) / r_1 \\
 SK_{13} &= 0 \\
 (4.15) \quad SK_{14} &= 3r_1^3r_2^4(2hr_1 + 3) / (2r_2^3 + r_1^3) \\
 SK_{23} &= -3r_1^3r_2^4(2hr_1 + 3) / (2r_2^3 + r_1^3) \\
 SK_{24} &= 0 \\
 SK_{34} &= -r_2^3 - 2hr_1^4 - 2r_1^3
 \end{aligned}$$

On remarque alors que si l'on cherche à avoir les deux courbures K_{13} et K_{24} égales à zéro cela implique $K_{14} = -K_{23}$. Ainsi, si l'on impose la condition $K_{14} = -K_{23} = 0$, on obtient

$$2h r_1 + 3 = 0, \text{ d'où}$$

$$(4.16) \quad h = -\frac{3}{2r_1}$$

Mais, pour cette valeur de h , on a :

$$(4.17) \quad K_{13} = K_{14} = K_{23} = K_{24} = 0,$$

$$SK_{12} = r_2 (r_2 - r_1) (r_2^2 + r_1 r_2 + r_1^2) / r_1,$$

$$SK_{34} = -(r_2 - r_1) (r_2^2 + r_1 r_2 + r_1^2) / r_1 \text{ et de (4.14) on déduit } k = 1.$$

On remarque alors que la condition supplémentaire $K_{12} = K_{34} = 0$, donne $r_2 = r_1$; c'est le cas où la configuration est un triangle isocèle.

Pour résumer, si les courbures s'annulent, cela implique

$$r_2 = r_1, \quad k = 1 \text{ et } 2h r_1 + 3 = 0.$$

La condition du théorème est suffisante:

En effet, en supposant $r_1 = r_2$ on obtient:

$$(4.18) \quad \begin{aligned} SK_{12} &= -r_1^3 (2h r_1 + 3k) \\ SK_{13} &= -r_1^4 (4h r_1 + 3k + 3) \\ SK_{14} &= -r_1^4 (2h r_1 + 3k) \\ SK_{23} &= -r_1^4 (2h r_1 + 3) \\ SK_{24} &= r_1^4 (4h r_1 + 3k + 3) \\ SK_{34} &= -r_1^3 (2h r_1 + 3) \end{aligned}$$

Alors, pour $k = 1$ et $2h r_1 + 3 = 0$, toutes les courbures s'annulent.

c.q.f.d.

Etude des valeurs propres du tenseur de Ricci dans la configuration du triangle isocèle

Pour $r_2 = r_1$ les composantes du tenseur de Ricci (données dans l'Annexe-C) deviennent:

$$(4.19) \quad \begin{bmatrix} -\frac{3(2k+1+2hr_1)}{2r_1^2(k+1+hr_1)^2} & 0 & \frac{3k}{2r_1^2(k+1+hr_1)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3k}{2r_1^2(k+1+hr_1)^2} & 0 & -\frac{3k(k+2+2hr_1)}{2r_1^2(k+1+hr_1)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La condition (4.1) s'écrit dans ce cas:

$$(4.20) \quad k+1+hr_1 > 0.$$

Les valeurs propres de la matrice ci-dessus sont:

$$(4.21) \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{3\left(\sqrt{4h^2r_1^2(k-1)^2 + 4r_1(k-1)^2(k+1) + (k^2+1)^2} + 2hr_1(k+1) + k^2 + 4k + 1\right)}{4r_1^2(hr_1 + k + 1)^2} \\ \lambda_2 &= \frac{3\left(\sqrt{4h^2r_1^2(k-1)^2 + 4r_1(k-1)^2(k+1) + (k^2+1)^2} - 2hr_1(k+1) - k^2 - 4k - 1\right)}{4r_1^2(hr_1 + k + 1)^2} \end{aligned}$$

$$\lambda_3 = 0$$

$$\lambda_4 = 0$$

Nous avons deux valeurs propres nulles, donc la matrice (4.19) n'est pas positive (ou négative) définie. Etudions le signe des deux valeurs propres qui ne sont pas nulles.

Le produit $\lambda_1 \lambda_2$ est:

$$(4.22) \quad \lambda_1 \lambda_2 = \frac{9k(k+1+2hr_1)}{2r_1^4(k+1+hr_1)^3}.$$

La condition pour que λ_1 et λ_2 gardent un signe constant est donc

$$k+1+2hr_1 > 0, \text{ soit}$$

$$(4.23) \quad h > -\frac{k+1}{2r_1}$$

La somme des deux valeurs propres non-nulles est:

$$(4.24) \quad \lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{3(2hkr_1 + 2hr_1 + k^2 + 4k + 1)}{2r_1^2(k+1+hr_1)^2}$$

La somme $\lambda_1 + \lambda_2$ s'annule pour

$$(4.25) \quad h = -\frac{k^2 + 4k + 1}{2r_1(k+1)},$$

et l'on vérifie aisément que

$$(4.26) \quad -\frac{k+1}{2r_1} \geq -\frac{k^2 + 4k + 1}{2r_1(k+1)} \geq -\frac{k+1}{r_1}.$$

Discutons le signe des valeurs propres non-nulles.

D'après (4.22), (4.24) et (4.26) on obtient:

$$\text{- pour } h \geq -\frac{k+1}{2r_1} \text{ les deux valeurs propres sont } \textit{négatives} ;$$

- pour $h = -\frac{k+1}{2r_1}$ une valeur propre est négative est l'autre s'annule;
- pour $-\frac{k+1}{2r_1} \geq h > -\frac{k+1}{r_1}$ les deux valeurs propres sont de signes

opposés.

Finalement, on peut résumer la discussion sur le signe des valeurs propres du tenseur de Ricci dans le tableau suivant:

$h > -\frac{k+1}{2r_1}$	2 valeurs propres <i>négatives</i> et 2 valeurs propres <i>nulles</i> .
$h = -\frac{k+1}{2r_1}$	1 valeur propre <i>négative</i> et 3 valeurs propres <i>nulles</i>
$-\frac{k+1}{2r_1} > h \geq -\frac{k+1}{r_1}$	2 valeurs propres <i>de signes opposés</i> et 2 valeurs propres <i>nulles</i>

La courbure scalaire dans le cas planétaire est:

$$(4.27) \quad R = -\frac{3[r_2^3(2kr_1 + r_2 + 2hr_1r_2) + r_1^3(kr_1 + 2r_2 + 2hr_1r_2)]}{2r_1r_2(kr_1 + r_2 + hr_1r_2)^3},$$

ce qui donne dans le cas isocèle:

$$(4.28) \quad R = -\frac{3(4hr_1 + 3k + 3)}{2r_1(hr_1 + k + 1)^3}$$

On remarque que dans les conditions du *Théorème 2*, la courbure scalaire *s'annule* aussi.

Cas planétaire et métrique de Sasaki

Dans l'espace des phases, les calculs faits avec la métrique de Sasaki (voir *l'Annexe-C*) dans le cas planétaire conduisent à des expressions qui ne permettent pas une étude analytique. Le fichier Macsyma contenant les expressions qui déterminent les courbures a une taille de 20 Méga-octets. Par contre, en calculant numériquement les 28 courbures riemanniennes principales pour $r_1 = r_2 = 1$, $k = 1$, $R_1 = R_2 = 0$, $\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$\phi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $h = -\frac{3}{2}$, on obtient:

$$SK_{12} = 0$$

$$SK_{13} = 0$$

$$SK_{14} = 0$$

$$SK_{15} = -2.3 \cdot 10^{-6} \cong 0$$

$$SK_{16} = 0$$

$$SK_{17} = 0$$

$$SK_{18} = 0$$

$$SK_{23} = 0$$

$$SK_{24} = 0$$

$$SK_{25} = -1.7 \cdot 10^{-6} \cong 0$$

$$SK_{26} = 0$$

$$SK_{27} = 0$$

$$SK_{28} = 0$$

$$SK_{34} = 0$$

$$SK_{35} = 0$$

$$SK_{36} = 0$$

$$SK_{37} = 0$$

$$SK_{38} = 0$$

$$SK_{45} = -3.1 \cdot 10^{-5} \cong 0$$

$$SK_{46} = 0$$

$$SK_{47} = 0$$

$$SK_{48} = 0$$

$$SK_{56} = -5.8 \cdot 10^{-5} \cong 0$$

$$SK_{57} = 0$$

$$SK_{58} = -1.2 \cdot 10^{-7} \cong 0$$

$$SK_{67} = 0$$

$$SK_{68} = 0$$

$$SK_{78} = 0$$

Ce calcul a été fait avec 10 chiffres exacts après la virgule. Tout laisse supposer que les SK_{mm} ci-dessus qui ne sont pas différents de zéro, sont en réalité nuls, car des erreurs de calculs ont dû s'accumuler à cause du nombre important d'opérations élémentaires effectuées par la machine.

§ 4.2 Cas des configurations centrales

Une *configuration centrale* est une configuration des trois corps dans laquelle le rapport des distances entre les corps reste constant. Par contre, la dimension du triangle peut varier et le triangle tourner autour du centre des masses. On sait que, dans ce cas, il existe deux solutions analytiques (voir Marchal, [63]):

1. Mouvements de Lagrange

Les trois corps se trouvent aux sommets d'un triangle équilatéral, et l'on a:

$$\frac{r_1}{(r_1)_0} = \frac{r_{13}}{(r_{13})_0} = \frac{r_{23}}{(r_{23})_0} = f(t),$$

où $(r_{ij})_0$ dénote la valeur de r_{ij} au moment $t = 0$ (le moment où la configuration est déjà un triangle équilatéral); les trois corps décrivent des orbites képlériennes.

2. Mouvements d'Euler

C'est le cas rectiligne. Si les corps se trouvent sur la droite dans l'ordre $M_1, M_2,$

M_3 , alors le rapport $X = \frac{r_{23}}{r_{12}}$ entre les distances est donné par l'équation :

$$(4.29) \quad (m_1+m_2)X^5 + (3m_1+2m_2)X^4 + (3m_1+m_2)X^3 - (m_2+3m_3)X^2 - (2m_2+3m_3)X - (m_2+m_3) = 0$$

Deux autres équations similaires s'obtiennent si les corps sont dans un ordre différent sur la droite. Les trois corps décrivent 3 orbites képlériennes homothétiques avec le même foyer.

Dans les deux cas ci-dessus si les distances entre les corps sont constantes, alors les solutions sont dites *stationnaires*. Ce sont les solutions de l'équilibre relatif. Le mouvement des trois corps est alors un mouvement circulaire uniforme.

§ 4.2.1 Cas du triangle équilatéral avec les trois masses égales

Hypothèses:

On prend:

$$\begin{aligned}
 &\text{a) } m_1 = m_2 = m_3 = m \\
 &\text{b) } r_{23} = r_{13} = r_{12} = r_1(t) \\
 &\text{c) } \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad r_2 = r_1 \frac{\sqrt{3}}{2}.
 \end{aligned}
 \tag{4.30}$$

On impose dès le début la condition (4.1), soit $T = U + h > 0$, qui s'écrit:

$$h r_1 + 3m^2 > 0
 \tag{4.31}$$

Nous avons obtenu le résultat suivant:

Théorème 3 *Dans le cas équilatéral du problème plan des trois corps avec les masses égales, les courbures riemanniennes principales sont toutes négatives pour :*

$$-9 m^2 < 5 h r_1 < 0.
 \tag{4.32}$$

Démonstration

En utilisant les formules (3.72) et les hypothèses (4.30) on obtient les expressions suivantes, qui donnent les signes des courbures riemanniennes principales:

$$\begin{aligned}
 SK_{12} &= - (4 h r_1 + 9 m^2) \\
 SK_{13} &= - (5 h r_1 + 9 m^2) \\
 (4.33) \quad SK_{14} &= - (4 h r_1 + 9 m^2) \\
 SK_{23} &= - (4 h r_1 + 9 m^2) \\
 SK_{24} &= h \\
 SK_{34} &= - (4 h r_1 + 9 m^2)
 \end{aligned}$$

Cherchons les conditions pour lesquelles les courbures ont un même signe. Suivant les valeurs de h nous avons les sous-cas suivants:

a) Pour $h > 0$,

$$(4.34) \quad K_{24} > 0, K_{12} < 0, K_{13} < 0, K_{14} < 0, K_{23} < 0, K_{34} < 0.$$

Donc, on n'obtient pas le même signe pour toutes les courbures.

b) Pour $h = 0$,

$K_{24} = 0$ et *toutes* les autres courbures sont négatives.

c) Pour $h < 0$,

$K_{24} < 0$ et les *cinq* autres courbures sont négatives si

$$(4.35) \quad 4 h r_1 + 9 m^2 > 0 \quad \text{et} \quad 5 h r_1 + 9 m^2 > 0.$$

On remarque que $5 h r_1 + 9 m^2 > 0$ implique $4 h r_1 + 9 m^2 > 0$. On vérifie aussi que la condition (4.31) est satisfaite pour $5 h r_1 + 9 m^2 > 0$.

Les courbures sont ainsi négatives pour $-9 m^2 < 5 h r_1 < 0$. c.q.f.d.

Remarque sur l'inégalité (4.32)

Sans perdre de généralité, on prend les trois masses égales à l'unité et on regarde le domaine plan imposé par l'inégalité (4.32). Pour cela on introduit la fonction:

$$(4.36) \quad f: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(h, r_1) = 5 h r_1 + 9$$

Cherchons les valeurs de (h, r_1) telles que la fonction f soit positive. Pour $h < 0$ et $r_1 > 0$, la courbe implicite déterminée par la fonction f est donnée par le graphique suivant:

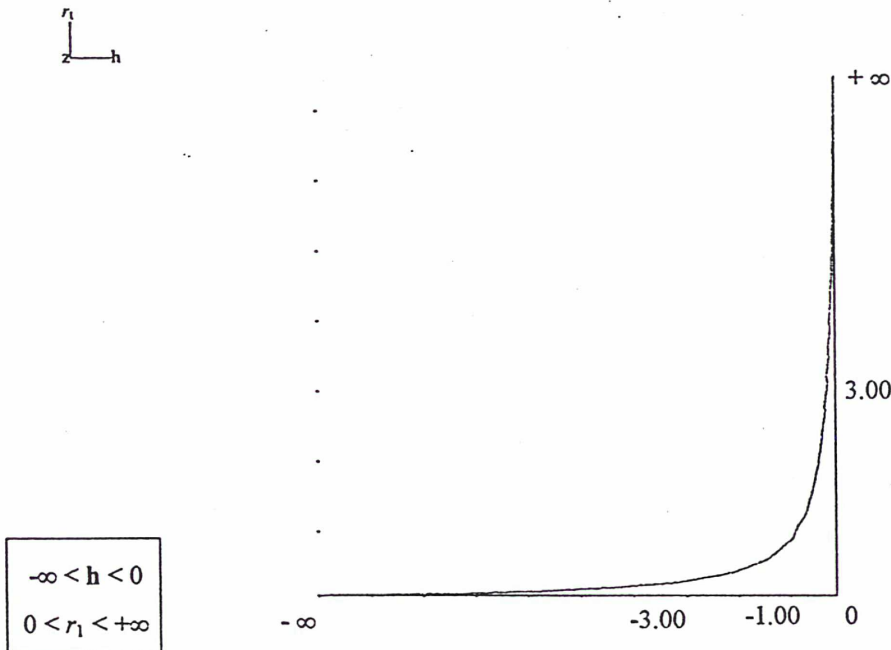


Fig. 4.2

La fonction f est positive dans le domaine situé sous la courbe représenté dans la Fig. 4.2. C'est le domaine où *toutes* les courbures principales sont négatives.

Remarque sur le cas stationnaire

Jusqu'ici r_1 était variable. *En particulier*, si l'on considère que le côté r_1 du triangle est *constant*, nous sommes amené au cas *stationnaire*. On prend $r_1 = 1$. Le mouvement des trois corps est alors un mouvement circulaire uniforme, de vitesse angulaire $\omega = \sqrt{3m}$. Dans ce cas, la constante h de l'énergie est égale à $-\frac{3m^2}{2}$. Les courbures riemanniennes principales deviennent ainsi *négatives*. Ce dernier résultat vient de confirmer la conclusion de Van Velsen [98], où la méthode d'étude était basée sur l'étude des valeurs propres d'une matrice associée au tenseur de Riemann-Christoffel.

Etude du tenseur de Ricci

La matrice des composantes covariantes du tenseur de Ricci s'écrit dans ce cas:

$$(4.37) \quad \begin{bmatrix} -\frac{27m^2 (h r_1 + 2m^2)}{8r_1^2 (hr_1 + 3m^2)^2} & 0 & -\frac{3\sqrt{3} h m^2}{4r_1 (hr_1 + 3m^2)^2} & 0 \\ 0 & -\frac{9m^2}{8(hr_1 + 3m^2)} & 0 & \frac{9m^2}{8(hr_1 + 3m^2)} \\ -\frac{3\sqrt{3} h m^2}{4r_1 (hr_1 + 3m^2)^2} & 0 & -\frac{9m^2 (h r_1 + 2m^2)}{2r_1^2 (hr_1 + 3m^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{9m^2}{8(hr_1 + 3m^2)} & 0 & -\frac{9m^2}{8(hr_1 + 3m^2)} \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de cette matrice sont:

$$\lambda_1 = -\frac{3m^2 \left(\sqrt{3} \sqrt{19h^2 r_1^2 + 12h m^2 r_1 + 12m^4} + 21hr_1 + 42m^2 \right)}{16r_1^2 (hr_1 + 3m^2)^2}$$

$$\lambda_2 = -\frac{3m^2 \left(\sqrt{3} \sqrt{19h^2 r_1^2 + 12h m^2 r_1 + 12m^4} - 21hr_1 - 42m^2 \right)}{16r_1^2 (hr_1 + 3m^2)^2}$$

$$\lambda_3 = -\frac{9m^2}{16r_1^2 (hr_1 + 3m^2)}$$

$$\lambda_4 = 0$$

On remarque que la troisième valeur propre est négative et que la quatrième est *nulle*. Par conséquent, la matrice (4.37) n'est pas négative définie. Etudions le signe des deux premières valeurs propres.

Le produit $\lambda_1 \lambda_2$ est:

$$(4.38) \quad \lambda_1 \lambda_2 = \frac{27m^4 (2h r_1 + 3m^2)}{4r_1^2 (hr_1 + 3m^2)^3}$$

et la somme $\lambda_1 + \lambda_2$ est:

$$(4.39) \quad \lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{63m^2 (h r_1 + 2m^2)}{8r_1^2 (hr_1 + 3m^2)^2}$$

En tenant compte de la condition (4.31), soit $h > -\frac{3m^2}{r_1}$, l'étude du signe des

valeurs propres donne:

$h > -\frac{3m^2}{2r_1}$	3 valeurs propres <i>négatives</i> et 1 valeur propre <i>nulle</i> .
$h = -\frac{3m^2}{2r_1}$	2 valeurs propres <i>négatives</i> et 2 valeurs propres <i>nulles</i>
$-\frac{3m^2}{r_1} < h < -\frac{3m^2}{2r_1}$	1 valeur propre <i>positive</i> , 2 valeurs propres <i>négatives</i> et 1 valeur propre <i>nulle</i>

Le tenseur de Ricci est négatif pour $h \geq -\frac{3m^2}{2r_1}$.

On remarque dans ce cas que si les valeurs propres du tenseur de Ricci sont négatives, alors les courbures riemanniennes sont négatives, car l'inégalité ci-dessus implique (4.32).

La courbure scalaire est dans ce cas:

$$(4.40) \quad R = -\frac{9m(4h r_1 + 9m^2)}{2r_1(hr_1 + 3m^2)^3}$$

$$R \geq 0 \quad \text{pour } h \geq -\frac{9m^2}{4r_1} \quad \text{et } R < 0 \quad \text{pour } h < -\frac{9m^2}{4r_1}.$$

On voit que *dans les conditions du Théorème 3, la courbure scalaire est négative.*

Remarque Dans la position d'équilibre relatif, donc pour $h = -\frac{3m^2}{2}$, on obtient

$$R = -\frac{4}{m^3}, \text{ la courbure scalaire étant } \textit{négative}.$$

4.2.2 Cas rectiligne avec les trois masses égales

Nous allons étudier maintenant le cas d'équilibre relatif rectiligne avec les trois masses égales.

Hypothèses:

- (4.41) a) $m_1 = m_2 = m_3 \equiv m$
- b) $r_{23} = r_{13} + r_1$
- c) $\varphi = 0$ (voir Fig.4.3).

Comme nous sommes dans le cas d'équilibre relatif, la solution réelle de l'équation (4.29) est $X=1$. Cela implique aussi:

$$r_2 = \frac{3r_1}{2}$$

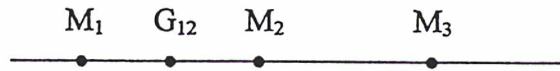


Fig. 4.3

La condition (4.1) s'écrit dans ce cas:

$$(4.42) \quad 2 h r_1 + 5m^2 > 0$$

Dans les conditions ci-dessus, le signe des courbures riemanniennes principales est donné par:

$$(4.43) \quad \begin{aligned} SK_{12} &= - (164 h r_1 + 435 m^2) \\ SK_{13} &= - (68 h r_1 + 145 m^2) \\ SK_{14} &= - (44 h r_1 + 115 m^2) \end{aligned}$$

$$SK_{23} = - (52 h r_1 + 5 m^2)$$

$$SK_{24} = 68 h r_1 + 145 m^2$$

$$SK_{34} = - (108 h r_1 + 145 m^2)$$

L'analyse des expressions (4.43) montre que:

a) Pour $h \geq 0$,

$$SK_{24} = - SK_{13} > 0 \text{ (inégalité stricte!)}.$$

Donc on n'obtient pas un signe constant pour *toutes* les courbures, mais *cinq* courbures sont négatives.

b) Pour $h < 0$ nous avons toujours $SK_{24} = - SK_{13}$. Imposons:

$$(4.44) \quad SK_{24} = - SK_{13} = 0.$$

De (4.44) on tire:

$$(4.45) \quad h = - \frac{145 m^2}{68 r_1}$$

Cette valeur de h vérifie la condition (4.42). Pour le signe des autres courbures, on a:

$$SK_{12} < 0 \quad SK_{14} < 0$$

$$SK_{34} > 0 \quad SK_{23} > 0.$$

Etude des valeurs propres du tenseur de Ricci

Dans ce cas, la matrice des composantes du tenseur de Ricci est:

$$\begin{bmatrix} -\frac{m^2(464hr_1 + 1085m^2)}{322r_1^2(2hr_1 + 5m^2)^2} & 0 & \frac{m^2(56hr_1 + 215m^2)}{16r_1^2(2hr_1 + 5m^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{7m^2}{16(2hr_1 + 5m^2)} & 0 & -\frac{21m^2}{16(2hr_1 + 5m^2)} \\ \frac{m^2(56hr_1 + 215m^2)}{16r_1^2(2hr_1 + 5m^2)^2} & 0 & -\frac{m^2(352hr_1 + 655m^2)}{24r_1^2(2hr_1 + 5m^2)^2} & 0 \\ 0 & -\frac{21m^2}{16(2hr_1 + 5m^2)} & 0 & -\frac{21m^2}{16(2hr_1 + 5m^2)} \end{bmatrix}$$

Les quatre valeurs propres de cette matrice sont, à un facteur positif près:

$$\lambda_1 = m^2 r_1^2 [-84hr_1(\sqrt{13} + 1) - 210m^2(\sqrt{13} + 1)]$$

$$\lambda_2 = m^2 r_1^2 [84hr_1(\sqrt{13} - 1) + 210m^2(\sqrt{13} - 1)]$$

$$\lambda_3 = \frac{\sqrt{5}m^2 [\sqrt{90368h^2r_1^2 + 689440hm^2r_1 + 1411925m^4} + 2800hr_1 + 5875m^2]}{2}$$

$$\lambda_4 = \frac{\sqrt{5}m^2 [\sqrt{90368h^2r_1^2 + 689440hm^2r_1 + 1411925m^4} - 2800hr_1 - 5875m^2]}{2}$$

On voit que les λ_3 et λ_4 sont réels, puisque

$$90368h^2r_1^2 + 689440hm^2r_1 + 1411925m^4 > 0 .$$

Étudions le signe des λ_i ($i = 1, 2, 3, 4$).

Le produit des deux premières valeurs propres est

$$(4.46) \quad \lambda_1 \lambda_2 = -21168 m^4 r_1^4 (2 h r_1 + 5 m^2)^2$$

et le produit des deux dernières est

$$(4.47) \quad \lambda_3 \lambda_4 = 24960 m^4 (2 h r_1 + 5 m^2) (37 h r_1 + 55 m^2) .$$

La somme des deux premières valeurs propres est

$$(4.48) \quad \lambda_1 + \lambda_2 = -84 m^2 r_1^2 (2 h r_1 + 5 m^2)$$

et la somme des deux autres:

$$(4.49) \quad \lambda_3 + \lambda_4 = -25 m^2 (112 h r_1 + 235 m^2)$$

Le produit $\lambda_1 \lambda_2$ est *négatif pour toutes* les valeurs de h , r_1 et m , donc λ_1 et λ_2 *sont de signes opposés*.

Le produit $\lambda_3 \lambda_4$ est positif pour

$$(4.50) \quad h \geq -\frac{55m^2}{37r_1}$$

Cette inégalité implique (4.42).

Si l'on impose (4.50), la somme $\lambda_3 + \lambda_4$ devient *négative*. On arrive ainsi aux conclusions suivantes:

$h > -\frac{55m^2}{37r_1}$	3 valeurs propres <i>négatives</i> et 1 valeur propre <i>positive</i> .
$h = -\frac{55m^2}{37r_1}$	1 valeur propre <i>positive</i> , 2 valeurs propres <i>négatives</i> et 1 valeur propre <i>nulle</i>
$-\frac{5m^2}{2r_1} < h < -\frac{55m^2}{37r_1}$	2 valeurs propres <i>positives</i> et 2 valeurs propres <i>négatives</i>

Cela montre que le tenseur de Ricci n'est ni défini positif ni défini négatif.

La courbure scalaire s'écrit dans ce cas:

$$(4.51) \quad R = -\frac{3m(68hr_1 + 145m^2)}{2r_1(2hr_1 + 5m^2)^3}$$

On voit que la courbure scalaire change de signe:

- pour $-\frac{5m^2}{2r_1} < h < -\frac{145m^2}{68r_1}$ elle est positive ,
- pour $h = -\frac{145m^2}{68r_1}$, $R = 0$
- pour $h > -\frac{145m^2}{68r_1}$, R est négative.

On remarque que la valeur de h ci-dessus, qui annule la courbure scalaire est la même que celle qui annule K_{24} et K_{13} .

§ 4.2.3. Cas du triangle équilatéral avec les masses inégales:

Hypothèses:

$$\begin{aligned}
 & \text{a) } m_1 > m_2 > m_3 \\
 (4.52) \quad & \text{b) } r_{13} = r_{23} = r_1 = r_1(t) \\
 & \text{c) } \varphi = \arctan \frac{\sqrt{3}(m_1 + m_2)}{m_1 - m_2}, \quad r_2 = \frac{\sqrt{m_1^2 + m_1 m_2 + m_2^2}}{m_1 + m_2} r_1.
 \end{aligned}$$

La condition (4.1) s'écrit:

$$(4.53) \quad m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3 + h r_1 > 0$$

En utilisant (4.52) on constate que les expressions des SK_{mm} dépendent linéairement de $(h r_1)$. Pour des raisons de commodité, nous nottons:

$$\begin{aligned}
 SK_{12} &= SK_1, & SK_{13} &= SK_2, & SK_{14} &= SK_3, \\
 SK_{23} &= SK_4, & SK_{24} &= SK_5, & SK_{34} &= SK_6
 \end{aligned}$$

et $h r_1 = \xi$.

Avec ces notations, on peut écrire les expressions qui donnent le signe des courbures riemanniennes sous la forme:

$$(4.54) \quad SK_i = - [\xi f_i(m_1, m_2, m_3) + g_i(m_1, m_2, m_3)], \quad i = 1, 2, \dots, 6,$$

f_i et g_i étant des fonctions des masses, que nous précisons plus loin.

Notons ξ_i la solution de l'équation $SK_i = 0$:

$$(4.55) \quad \xi_i = - \frac{g_i(m_1, m_2, m_3)}{f_i(m_1, m_2, m_3)}, \quad i = 1, 2, \dots, 6$$

et $\xi_c = - (m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3)$.

Ainsi, la condition (4.53) s'écrit:

$$\xi > \xi_c.$$

Etudions le signe des SK_i ($i = 1, 2, \dots, 6$).

Le signe de SK_1

On a:

$$SK_1 = - [\xi f_1(m_1, m_2, m_3) + g_1(m_1, m_2, m_3)],$$

où $f_1(m_1, m_2, m_3) = 2(m_1 + m_2)$

et $g_1(m_1, m_2, m_3) = 3m_3(m_1^2 + m_1m_2 + m_2^2)$

On voit que, f_1 et g_1 sont positifs, donc, on peut écrire:

$$(4.56) \quad \xi < \xi_1 \Rightarrow SK_1 > 0 \quad \text{et} \quad \xi \geq \xi_1 \Rightarrow SK_1 \leq 0.$$

On remarque que $\xi_1 < 0$.

Le signe de SK_2

On a:

$$SK_2 = - [\xi f_2(m_1, m_2, m_3) + g_2(m_1, m_2, m_3)],$$

avec

$$f_2(m_1, m_2, m_3) = 7m_2^2m_3 + m_1m_3(7m_1 - 2m_2) + 16m_2^3 + \\ + 23m_1m_2^2 + 23m_1^2m_2 + 16m_1^3$$

$$g_2(m_1, m_2, m_3) = 3(m_2m_3 + m_1m_3 + m_1m_2)[m_2^2m_3 + \\ + m_1m_2(5m_1 - 2m_3) + m_1^2m_3 + 4m_2^3 + 5m_1m_2^2 + 4m_1^3]$$

Pour $m_1 > m_2 > m_3 > 0$, f_2 et g_2 sont positifs. On en déduit:

$$(4.57) \quad \xi < \xi_2 \Rightarrow SK_2 > 0 \quad \text{et} \quad \xi \geq \xi_2 \Rightarrow SK_2 \leq 0.$$

On remarque aussi que $\xi_2 < 0$.

Le signe de SK_3

On a:

$$SK_3 = - [\xi f_3(m_1, m_2, m_3) + g_3(m_1, m_2, m_3)],$$

où

$$\begin{aligned} f_3(m_1, m_2, m_3) &= (m_1 + m_2) [m_2^2 (17m_1 - 5m_3) + 4m_1 m_2 m_3 + \\ &\quad + m_1^2 (17m_2 - 5m_3) + 4m_2^3 + 4m_1^3] \\ g_3(m_1, m_2, m_3) &= 3 [m_2^4 m_3 (2m_2 - m_3) + 2m_1 m_2^3 m_3 (8m_1 - m_3) + \\ &\quad + 2m_1^3 m_2 m_3 (8m_2 - m_3) + m_1^4 m_3 (6m_2 - m_3) + 6m_1 m_3 m_2^4 + \\ &\quad + 2m_1^5 m_3 + 3m_1^2 m_2^4 + 6m_1^3 m_2^3 + 3m_1^4 m_2^2] \end{aligned}$$

Dans les hypothèses (4.52), f_3 et g_3 sont positifs. Donc,

$$(4.58) \quad \xi < \xi_3 \Rightarrow SK_3 > 0 \quad \text{et} \quad \xi \geq \xi_3 \Rightarrow SK_3 \leq 0.$$

On a aussi $\xi_3 < 0$.

Le signe de SK_4

On a:

$$SK_4 = - [\xi f_4(m_1, m_2, m_3) + g_4(m_1, m_2, m_3)],$$

où

$$\begin{aligned} f_4(m_1, m_2, m_3) &= (m_1 + m_2) [13m_2^2 m_3 + 4m_1 m_2 m_3 + 13m_1^2 m_3 + \\ &\quad + 4m_2^3 + m_1 (2m_1^2 - m_2^2) + m_1^2 (2m_1 - m_2)] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 g_4(m_1, m_2, m_3) = & 3 (3 m_2^4 m_3^2 + 8 m_1 m_2^3 m_3^2 + 8 m_1^2 m_2^2 m_3^2 + \\
 & + 8 m_1^3 m_2 m_3^2 + 3 m_1^4 m_3^2 + 4 m_1 m_2^4 m_3 + \\
 & + 2 m_1^2 m_2^3 m_3 + 2 m_1^3 m_2^2 m_3 + 4 m_1^4 m_2 m_3 + \\
 & + 2 m_1 m_2^5 + 3 m_1^2 m_2^4 + 2 m_1^3 m_2^3 + 3 m_1^4 m_2^2 + 2 m_1^5 m_2)
 \end{aligned}$$

On voit que pour $m_1 > m_2 > m_3$, les fonctions f_4 et g_4 sont positives. On a:

$$(4.59) \quad \xi < \xi_4 \Rightarrow SK_4 > 0 \quad \text{et} \quad \xi \geq \xi_4 \Rightarrow SK_4 \leq 0.$$

On remarque que $\xi_4 < 0$.

Le signe de SK_5

On a:

$$SK_5 = - [\xi f_5(m_1, m_2, m_3) + g_5(m_1, m_2, m_3)],$$

avec

$$\begin{aligned}
 f_5(m_1, m_2, m_3) = & - [m_2^2 (8 m_2 - m_3) + m_1^2 (8 m_1 - m_3) + \\
 & + m_1 m_2 (7 m_2 - 5 m_3) + m_1 m_2 (7 m_1 - 5 m_3)]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_5(m_1, m_2, m_3) = & 3 (m_2 m_3 + m_1 m_3 + m_1 m_2) (m_2^2 m_3 + 4 m_1 m_2 m_3 + \\
 & + m_1^2 m_3 - 2 m_2^3 - m_1 m_2^2 - m_1^2 m_2 - 2 m_1^3)
 \end{aligned}$$

On remarque que $f_5 < 0$.

La discussion sur le signe de g_5 est plus compliquée. Regardons-la de plus près:

Notons $k_2 = \frac{m_2}{m_1}$ et $k_3 = \frac{m_3}{m_1}$. Puisque $m_1 > m_2 > m_3$, on a :

$$(4.61) \quad 1 > k_2 > k_3 > 0.$$

On reprend l'expression de g_5 . Avec les nouvelles notations on peut écrire:

$$m_1^3 g_5(k_2, k_3) = (k_2^2 k_3 + 4 k_2 k_3 + k_3 - 2 k_2^3 - k_2^2 - k_2 - 2)$$

On définit la fonction $\gamma_5 : [0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$(4.62) \quad \gamma_5(k_2, k_3) = k_2^2 k_3 + 4 k_2 k_3 + k_3 - 2 k_2^3 - k_2^2 - k_2 - 2$$

Le signe de g_5 est donné par le signe de γ_5 . Le graphe de la fonction γ_5 est (voir Fig. 4.4):

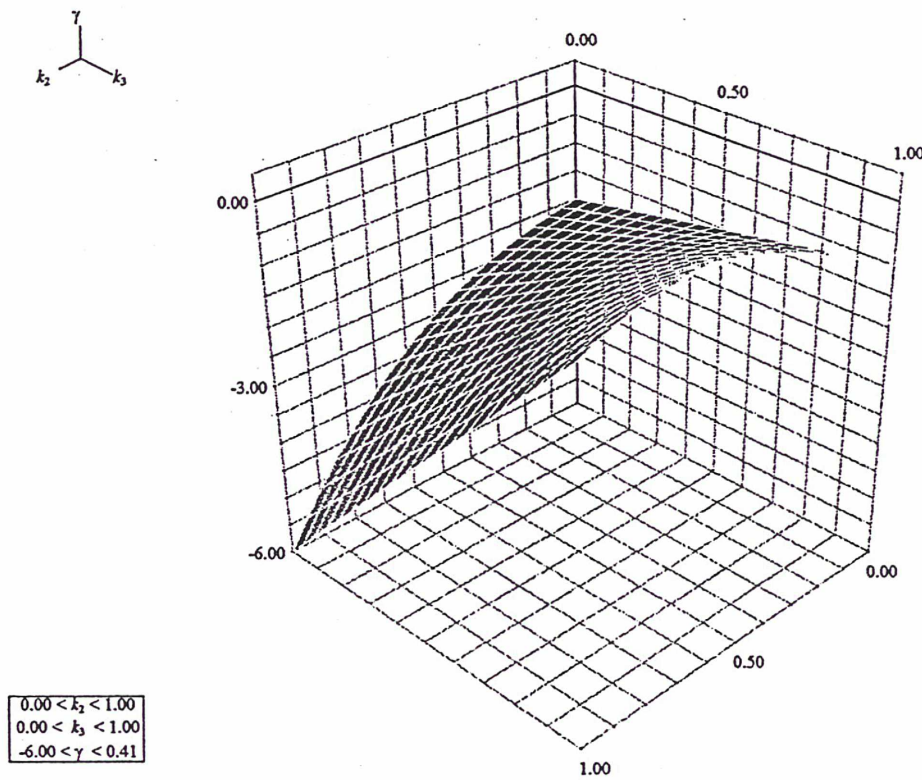


Figure 4.4

Dans un même système d'axes, nous avons représenté l'intersection de la surface ci-dessus avec le plan $\gamma = 0$ et la première bissectrice, $k_2 = k_3$ (voir Fig. 4.5) :

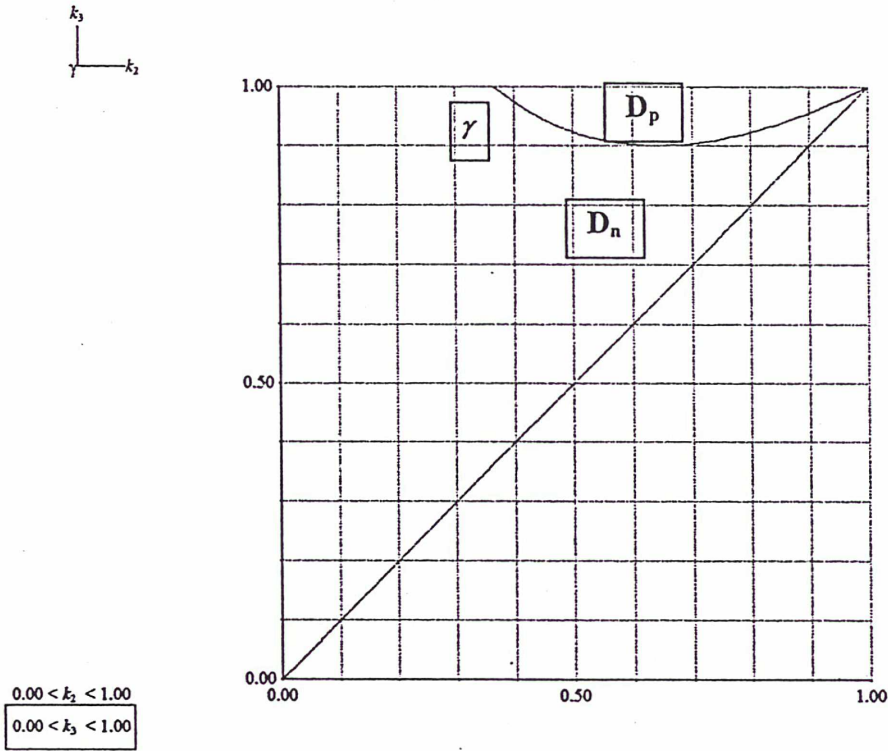


Figure 4.5

Si l'on examine les deux graphiques, on voit que la fonction γ_s est:

-négative pour $(k_2, k_3) \in D_n$, (les valeurs (k_2, k_3) qui se trouvent en dessous de la courbe $k_3 = \frac{2k_2^3 + k_2^2 + k_2 + 2}{k_2^2 + 4k_2 + 1}$, figuré sur la Fig. 4.5);

-positive pour $(k_2, k_3) \in D_p$ (les valeurs (k_2, k_3) qui se trouvent au dessus de la courbe figurée sur la Fig. 4.5).

Etant donné que $k_2 > k_3$ (soit les valeurs (k_2, k_3) situées sous la première bissectrice), on peut conclure aussi sur le signe de g_s et de SK_5 :



$g_5 < 0$, donc

$$(4.63) \quad \xi < \xi_5 \Rightarrow SK_5 < 0 \quad \text{et} \quad \xi \geq \xi_5 \Rightarrow SK_5 \geq 0.$$

On remarque aussi que

$$(4.63) \quad \xi_5 < 0.$$

Le signe de SK_6

On a:

$$SK_6 = - [\xi f_6(m_1, m_2, m_3) + g_6(m_1, m_2, m_3)],$$

où $f_6(m_1, m_2, m_3) = 2(m_1 + m_2)$

et $g_6(m_1, m_2, m_3) = 3 m_1 m_2 (m_3 + m_2 + m_1)$

Les fonctions f_6 et g_6 sont positives. On déduit que:

$$(4.64) \quad \xi < \xi_6 \Rightarrow SK_6 > 0 \quad \text{et} \quad \xi \geq \xi_6 \Rightarrow SK_6 \leq 0.$$

On a $\xi_6 < 0$.

Conclusions concernant le signe des courbures riemanniennes dans le cas du triangle équilatéral avec les masses inégales

1. $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6$ et ξ_c sont négatives.
2. On vérifie aisément que $\xi_1 > \xi_c$, $\xi_2 > \xi_c$, $\xi_3 > \xi_c$ et $\xi_5 > \xi_c$. Par contre, la condition $m_1 > m_2 > m_3$ n'est pas suffisante pour que l'on ait aussi $\xi_4 > \xi_c$ et $\xi_6 > \xi_c$.

3. On vérifie aussi $\xi_5 > \xi_2$, ce qui exclut la possibilité d'avoir un signe positif pour toutes les courbures.

4. On note: $\xi_{\max} = \max\{ \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_6 \}$. Si $\xi_5 > \xi_{\max}$, les courbures riemanniennes principales sont négatives pour $\xi \in [\xi_{\max}, \xi_5] \cap [\xi_c, +\infty]$.

La courbure scalaire

Dans ce cas, la courbure scalaire R s'écrit:

$$(4.65) \quad R = - \frac{3(m_1 + m_2 + m_3)(4h r_1 + 3m_1 m_2 + 3m_1 m_3 + 3m_2 m_3)}{2r_1(hr_1 + m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3)^3}.$$

On note :

$$\xi_R = - \frac{3(m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3)}{4}$$

On voit que $\xi_R > \xi_c$. On peut ainsi conclure que

R est *positive* pour $\xi_c < \xi < \xi_R$ et

R est *négative* pour $\xi > \xi_R$.

Afin de corriger un théorème de Ong [76] concernant la courbure scalaire dans le cas d'équilibre relatif de Lagrange, nous allons considérer *le cas particulier* où r_1 est

constant. Dans ce cas, on a $h = - \frac{m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3}{2r_1}$.

On remplace cette valeur de h dans (4.65) et l'on obtient:

$$(4.66) \quad R = - \frac{12(m_1 + m_2 + m_3)}{r_1 (m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3)^2}$$

On voit que dans le cas d'équilibre relatif de Lagrange la courbure scalaire est *négative*.

Interprétation du paramètre ξ en éléments orbitaux dans le cas du triangle
équilatéral avec les masses inégales

Le paramètre $\xi = h^2 r_1$ intervient dans toutes les inégalités montrées dans ce paragraphe.

Exprimons ξ (donc h et r_1) en éléments orbitaux.

Pour des raisons de commodité, nottons par la suite r le côté du triangle équilatéral (voir Fig.4.6).

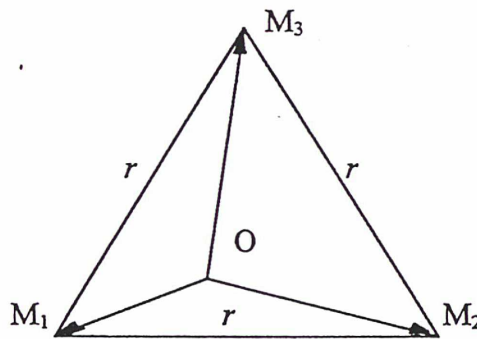


Fig. 4.6

Soient

O - le centre des masses des trois corps, fixé à l'origine;

$\overline{OM}_1, \overline{OM}_2, \overline{OM}_3$ les vecteurs de position des trois corps.

Dans le cas équilatéral, chacun des trois corps décrit une orbite keplérienne de foyer O .

Etudions le cas elliptique. Les trois orbites ont la même période de révolution, T , la même excentricité, e , et les trois corps passent au péricentre et au apocentre en même temps (voir [63]).

La période de révolution étant la même, on a:

$$(4.67) \quad T = \frac{a_1^{\frac{3}{2}}}{\mu_1^{\frac{1}{2}}} = \frac{a_2^{\frac{3}{2}}}{\mu_2^{\frac{1}{2}}} = \frac{a_3^{\frac{3}{2}}}{\mu_3^{\frac{1}{2}}}$$

où

a_1, a_2 et a_3 sont les demi-grandes axes des ellipses,

$$(4.68) \quad \begin{aligned} \mu_1 &= \frac{G(m_2^2 + m_3^2 + m_2 m_3)^{\frac{3}{2}}}{M^2}, \\ \mu_2 &= \frac{G(m_1^2 + m_3^2 + m_1 m_3)^{\frac{3}{2}}}{M^2}, \\ \mu_3 &= \frac{G(m_1^2 + m_2^2 + m_1 m_2)^{\frac{3}{2}}}{M^2}, \end{aligned}$$

G est la constante de la gravitation universelle et

M est la somme des trois masses, soit $M = m_1 + m_2 + m_3$.

Interprétation de h en éléments orbitaux

En éléments orbitaux, la constante de l'énergie, h , est donnée par:

$$(4.69) \quad h = - \sum_{i=1}^3 m_i \frac{\mu_i}{a_i}$$

Démonstration:

Les intégrales de l'énergie pour chacun des trois corps s'écrivent:

$$(4.70) \quad v_i^2 = \frac{2\mu_i}{|\vec{OM}_i|} + h_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

où v_i est la vitesse du corps M_i et h_1 , h_2 et h_3 sont les constantes de l'énergie correspondantes aux trois problèmes keplériens.

L'intégrale de l'énergie pour le problème plan des trois corps s'écrit:

$$(4.71) \quad \sum_{i=1}^3 m_i v_i^2 = 2U + h,$$

où h est la constante de l'énergie du problème des trois corps et U est la fonction de force, donné par:

$$(4.72) \quad U = \frac{G}{r} (m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3)$$

Si l'on remplace les expressions des v_i^2 , (4.70), μ_i , (4.68) et U , (4.72) dans (4.71), on obtient:

$$(4.73) \quad m_1 h_1 + m_2 h_2 + m_3 h_3 = h$$

On a aussi:

$$(4.74) \quad a_i = -\frac{\mu_i}{h_i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

De (4.74) et (4.73) on déduit:

$$(4.75) \quad h = -\sum_{i=1}^3 m_i \frac{\mu_i}{a_i} \quad \text{c.q.f.d.}$$

Interprétation de r en éléments orbitaux

Nous allons tout d'abord déduire la liaison entre les $|\overrightarrow{OM_i}|_{i=1,2,3}$ et r (voir (4.88)).

Le centre des masses étant fixé à l'origine, on a:

$$(4.76) \quad m_1 \overrightarrow{OM_1} + m_2 \overrightarrow{OM_2} + m_3 \overrightarrow{OM_3} = 0$$

Soient:

$$\vec{r}_{12} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}, \quad \vec{r}_{13} = \overrightarrow{OM_3} - \overrightarrow{OM_1} \quad \text{et} \quad \vec{r}_{23} = \overrightarrow{OM_3} - \overrightarrow{OM_2}.$$

On a évidemment:

$$(4.77) \quad \vec{r}_{12} + \vec{r}_{23} + \vec{r}_{31} = 0$$

De (4.76) on tire:

$$(4.78) \quad \overrightarrow{OM_3} = -\frac{m_1 \overrightarrow{OM_1} + m_2 \overrightarrow{OM_2}}{m_3}$$

On remplace l'expression (4.78) de $\overrightarrow{OM_3}$ dans $\vec{r}_{23} = \overrightarrow{OM_3} - \overrightarrow{OM_2}$, d'où:

$$(4.79) \quad \vec{r}_{23} = -\frac{m_2 + m_3}{m_3} \overrightarrow{OM_2} - \frac{m_1}{m_3} \overrightarrow{OM_1}.$$

On élimine $\overrightarrow{OM_2}$ entre (4.79) et $\vec{r}_{12} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$. On obtient ainsi:

$$(4.80) \quad \overrightarrow{OM}_1 = -\frac{1}{M}[(m_2 + m_3)\vec{r}_{12} + m_3 \vec{r}_{23}]$$

De (4.77) on a $\vec{r}_{23} = -\vec{r}_{12} - \vec{r}_{31}$. On remplace cette expression de $\vec{r}_{23}$ dans (4.80). On obtient:

$$(4.81) \quad \overrightarrow{OM}_1 = -\frac{1}{M}[m_2 \vec{r}_{12} + m_3 \vec{r}_{13}]$$

De la même façon on obtient:

$$(4.82) \quad \overrightarrow{OM}_2 = -\frac{1}{M}[m_3 \vec{r}_{23} + m_1 \vec{r}_{21}]$$

$$(4.83) \quad \overrightarrow{OM}_3 = -\frac{1}{M}[m_1 \vec{r}_{31} + m_2 \vec{r}_{32}]$$

Etant dans le cas équilatéral,

$$(4.84) \quad |\vec{r}_{12}| = |\vec{r}_{23}| = |\vec{r}_{31}| = r.$$

De $|\overrightarrow{OM}_1|^2 = \overrightarrow{OM}_1 \cdot \overrightarrow{OM}_1$ et (4.84), on déduit:

$$(4.85) \quad |\overrightarrow{OM}_1|^2 = \frac{r^2}{M^2}(m_2^2 + m_3^2 + m_2 m_3), \text{ soit}$$

$$|\overrightarrow{OM}_1| = \frac{r}{M} \sqrt{m_2^2 + m_3^2 + m_2 m_3}$$

De la même façon s'obtiennent:

$$(4.86) \quad |\overrightarrow{OM}_2| = \frac{r}{M} \sqrt{m_1^2 + m_3^2 + m_1 m_3}$$

$$(4.87) \quad |\overrightarrow{OM}_3| = \frac{r}{M} \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_1 m_2}$$

De (4.85)-(4.87) et (4.68) on déduit:

$$(4.88) \quad r = \frac{|\overrightarrow{OM_i}|^2}{(GM\mu_i)^{\frac{2}{3}}} \quad i = 1, 2, 3.$$

La valeur minimale $r_{\min}$ de r s'obtient quand le corps M_i se trouve au péricentre, ce qui correspond à $\overline{OM_i} = a_i(1-e)$ $i = 1, 2, 3$ et la valeur maximale $r_{\max}$ de r s'obtient pour $\overline{OM_i} = a_i(1+e)$ $i = 1, 2, 3$.

On en déduit pour chacune des trois ellipses:

$$(4.89) \quad \begin{aligned} r_{\min} &= \frac{a_1(1-e)}{\alpha_1} & r_{\max} &= \frac{a_1(1+e)}{\alpha_1} \\ r_{\min} &= \frac{a_2(1-e)}{\alpha_2} & r_{\max} &= \frac{a_2(1+e)}{\alpha_2} \\ r_{\min} &= \frac{a_3(1-e)}{\alpha_3} & r_{\max} &= \frac{a_3(1+e)}{\alpha_3} \end{aligned}$$

où $\alpha_i = (GM\mu_i)^{\frac{2}{3}}$, $i = 1, 2, 3$.

On peut aussi exprimer $r_{\min}$ et $r_{\max}$ en fonction des éléments des trois des ellipses. On a:

$$(4.90) \quad r_{\min}^2 = \frac{M(1-e)^2 \sum_{i=1}^3 m_i a_i}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3}$$

$$(4.91) \quad r_{\max}^2 = \frac{M(1+e)^2 \sum_{i=1}^3 m_i a_i}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3}$$

Démonstration des relations (4.90) et (4.91):

Soit I le moment d'inertie des trois corps par rapport à O :

$$(4.92) \quad I = \sum_{i=1}^3 m_i |\overrightarrow{OM_i}|^2$$

La relation barycentrique de Leibniz s'écrit:

$$(4.93) \quad \sum_{1 \leq i < j \leq 3} m_i m_j r_{ij}^2 = I \sum_{i=1}^3 m_i$$

Mais, $r_{ij}^2 = r^2$, donc:

$$(4.94) \quad r^2 = \frac{M \sum_{i=1}^3 m_i |\overrightarrow{OM_i}|^2}{m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3},$$

d'où (4.90) et (4.91) s'obtiennent pour les valeurs minimales (resp. maximales) des

$|\overrightarrow{OM_i}|$ $i = 1, 2, 3$.

c.q.f.d.

Les expressions de h (4.75) et de $r_{\min}$ (4.90) (resp. $r_{\max}$ de (4.91)) permettent ainsi d'exprimer ξ en éléments orbitaux:

$$(4.95) \quad \xi_{\min} = - \frac{G(1+e)(a_1 m_1 + a_2 m_2 + a_3 m_3)^{\frac{1}{2}} [m_1 a_2 a_3 (m_2^2 + m_2 m_3 + m_3^2)^{\frac{3}{2}} + m_2 a_1 a_3 (m_1^2 + m_1 m_3 + m_3^2)^{\frac{3}{2}} + m_3 a_1 a_2 (m_1^2 + m_1 m_2 + m_2^2)^{\frac{3}{2}}]}{a_1 a_2 a_3 M^{\frac{3}{2}} (m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\xi_{\max} = - \frac{G(1-e)(a_1 m_1 + a_2 m_2 + a_3 m_3)^{\frac{1}{2}} [m_1 a_2 a_3 (m_2^2 + m_2 m_3 + m_3^2)^{\frac{3}{2}} + m_2 a_1 a_3 (m_1^2 + m_1 m_3 + m_3^2)^{\frac{3}{2}} + m_3 a_1 a_2 (m_1^2 + m_1 m_2 + m_2^2)^{\frac{3}{2}}]}{a_1 a_2 a_3 M^{\frac{3}{2}} (m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3)^{\frac{1}{2}}}$$

§ 4.2.4 Cas rectiligne avec deux masses extrêmes égales

Dans le cas rectiligne, si l'on suppose que les masses sont distinctes, les expressions des K_{mm} sont très encombrantes et ne permettent pas un traitement analytique. Mais le traitement numérique conduit à des conclusions semblables à celles que l'on va rencontrer dans le cas particulier suivant:

Hypothèses

(a) Les trois corps se trouvent sur la droite dans l'ordre M_3, M_1, M_2 (Fig. 4.7), dans le cas d'équilibre relatif d'Euler. Alors, le rapport $X = \frac{r_{12}}{r_{13}}$ entre les distances vérifie l'équation du cinquième degré (voir (4.29)):

$$(4.96) \quad (m_1+m_3)X^5+(3m_3+2m_1)X^4+(3m_3+m_1)X^3-(m_1+3m_2)X^2-(2m_1+3m_2)X-(m_1+m_2)=0$$

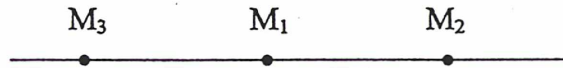


Fig. 4.7

(b) On prend $m_2 = m_3 = m$. Alors, de (4.96) on obtient $X = 1$.

(c) On va garder toujours la condition (4.1), soit $U + h > 0$, où

$$(4.97) \quad U = \frac{m(m+4m_1)}{2r_1}$$

(d) On reprend la notation:

$$\xi = h r_1.$$

En utilisant les conditions ci-dessus, on obtient les expressions qui donnent les signes des courbures riemanniennes principales:

Le signe de SK_1

On a:

$$SK_1 = - [\xi f_1(m_1, m) + g_1(m_1, m)],$$

$$f_1(m_1, m) = 8m_1^2 + 17m m_1 + 16m^2$$

$$g_1(m_1, m_2, m_3) = m (m_1 + 2m) (4m_1 + m) (12m_1 + 17m)$$

On voit que f_1 et g_1 sont positifs, donc on peut écrire:

$$(4.98) \quad \xi < \xi_1 \Rightarrow SK_1 > 0 \quad \text{et} \quad \xi \geq \xi_1 \Rightarrow SK_1 \leq 0.$$

On remarque que $\xi_1 < 0$.

Le signe de SK_2

On a:

$$SK_2 = - [\xi f_2(m_1, m) + g_2(m_1, m)],$$

$$f_2(m_1, m) = (8m_1 + 9m)$$

$$g_2(m_1, m) = m (4m_1 + m) (12m_1 + 17m)$$

f_2 et g_2 sont positifs, donc,

$$(4.99) \quad \xi < \xi_2 \Rightarrow SK_2 > 0 \quad \text{et} \quad \xi \geq \xi_2 \Rightarrow SK_2 \leq 0.$$

On a aussi $\xi_2 < 0$.

Le signe de SK_3

$$SK_3 = - [\xi f_3(m_1, m) + g_3(m_1, m)],$$

$$f_3(m_1, m) = 8m_1^2 + 17 m m_1 + 30 m^2$$

$$g_3(m_1, m) = m (4 m_1 + m) (12 m_1^2 + 41 m m_1 + 62 m^2)$$

On voit que, f_3 et g_3 sont positifs. Le signe de SK_3 est :

$$(4.100) \quad \xi < \xi_3 \Rightarrow SK_3 > 0 \quad \text{et} \quad \xi \geq \xi_3 \Rightarrow SK_3 \leq 0.$$

On remarque que $\xi_3 < 0$.

Le signe de SK_4

On a:

$$SK_4 = - [\xi f_4(m_1, m) + g_4(m_1, m)],$$

$$f_4(m_1, m) = 8m_1^2 + 17 m m_1 - 12 m^2$$

$$g_4(m_1, m) = m (4 m_1 + m) (12 m_1^2 + 17 m m_1 - 28 m^2)$$

Pour $m_1 > 0.55 m$, $f_4 > 0$ et pour $m_1 < 0.55 m$, $f_4 < 0$.

Pour $m_1 > 0.95 m$, $g_4 > 0$ et pour $m_1 < 0.95 m$, $g_4 < 0$.

Sur le signe de SK_4 on peut dire que:

$$\text{Si } m_1 > 0.55 m \text{ et } \xi < \xi_4 \Rightarrow SK_4 > 0$$

Si $m_1 > 0.55 m$ et $\xi \geq \xi_4 \Rightarrow SK_4 \leq 0$.

(4.101) Pour $m_1 < 0.55 m$ et $\xi < \xi_4 \Rightarrow SK_4 < 0$,

Pour $m_1 < 0.55 m$ et $\xi \geq \xi_4 \Rightarrow SK_4 \geq 0$.

Le signe de SK_5

On a:

$$SK_5 = - [\xi f_5(m_1, m) + g_5(m_1, m)],$$

$$f_5(m_1, m) = - (8 m_1 + 9 m) = - f_2(m_1, m)$$

$$g_5(m_1, m) = - m (4 m_1 + m) (12 m_1 + 17 m) = - g_2(m_1, m)$$

f_5 et g_5 sont négatifs.

On remarque que: $SK_5 = - SK_2$

Le signe de SK_5 est alors:

(4.102) $\xi < \xi_5 \Rightarrow SK_5 < 0$ et $\xi \geq \xi_5 \Rightarrow SK_5 \geq 0$.

On a $\xi_5 < 0$.

Le signe de SK_6

On a:

$$SK_6 = - [\xi f_6(m_1, m) + g_6(m_1, m)],$$

$$f_6(m_1, m) = 4 (m_1 + 2 m) (8 m_1 + m)$$

$$g_6(m_1, m) = m m_1 (4 m_1 + m) (12 m_1 + 17 m)$$

On voit que f_6 et g_6 sont positifs. Le signe de SK_6 est :

$$(4.103) \quad \xi < \xi_6 \Rightarrow SK_6 > 0 \quad \text{et} \quad \xi \geq \xi_6 \Rightarrow SK_6 \leq 0.$$

On remarque que $\xi_6 < 0$.

Puisque $SK_5 = -SK_2$, on constate que dans ce cas, on ne peut pas avoir un même signe pour toutes les courbures riemanniennes principales.

Remarques sur la stabilité des configurations étudiées

Dans la plupart des configurations étudiées, nous avons détecté la présence de courbures riemanniennes de signes opposés. Cela ne permet de conclure ni à la stabilité, ni à l'instabilité des trajectoires dans l'espace des configurations. Pourtant, sous certaines conditions (espace de configurations borné), on peut raffiner cette conclusion: on montre qu'il n'y a pas de condition qui assure la stabilité d'une telle configuration et même que l'instabilité des trajectoires du système prédomine dans l'espace des configurations (voir [97]). D'où le problème suivant reste ouvert:

Existe-t-il dans ce cas d'autres critères concernant la courbure, pour décider du degré d'instabilité?

Le même problème se pose en réalité en utilisant les méthodes analytiques classiques: il y a beaucoup de cas où l'on ne peut décider si la stabilité a lieu ou si elle n'a pas lieu. C'est le cas, par exemple, de la position d'équilibre relatif de Lorange (voir [86]).

Dans le cas du triangle équilatéral avec les trois masses égales, nous avons trouvé une inégalité qui assure le signe négatif pour toutes les courbures riemanniennes principales, ce qui indique l'instabilité de cette configuration. Et nous avons montré que sous certaines conditions (voir § 4.2.3, page 102), les courbures riemanniennes gardent un signe négatif, même si les masses sont différentes. Cette dernière conclusion est en accord avec les résultats présentés dans [98].

ANNEXE-A

Compléments de géométrie riemannienne

§ A.1 Courbures dans un espace riemannien

Dans cette annexe nous allons donner explicitement les définitions et les démonstrations des résultats utilisés dans le troisième chapitre.

Les symboles de Christoffel de première espèce Γ_{ij} - notés aussi $[ij, l]$ - sont:

$$(A.1) \quad \Gamma_{ij} = \Gamma_{ji} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial q^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^l} \right)$$

Les symboles de Christoffel de deuxième espèce Γ_{ij}^k (ou $\left\{ \begin{smallmatrix} k \\ ij \end{smallmatrix} \right\}$) s'expriment par:

$$(A.2) \quad \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k = g^{kl} \Gamma_{ijl} = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial q^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^l} \right)$$

Soient v^i ($i = 1, 2, \dots, n$) les composantes contravariantes d'un champ de vecteurs v , donné sur M^n .

La différentielle absolue de v^i a pour composantes contravariantes :

$$(A.3) \quad \nabla v^i = dv^i + \Gamma_{l m}^i v^l dq^m$$

La dérivée covariante de v^i est :

$$(A.4) \quad \nabla_m v^i = \frac{\partial v^i}{\partial q^m} + \Gamma_{l m}^i v^l$$

Les composantes mixtes du tenseur de courbure de Riemann-Christoffel sont :

$$(A.5) \quad R^i_{jkl} = \frac{\partial \Gamma_{j l}^i}{\partial q^k} - \frac{\partial \Gamma_{j k}^i}{\partial q^l} + \Gamma_{j l}^r \Gamma_{r k}^i - \Gamma_{j k}^r \Gamma_{r l}^i$$

et les composantes covariantes du même tenseur s'expriment par :

$$(A.6) \quad \begin{aligned} R_{ijkl} &= \frac{\partial \Gamma_{ijl}}{\partial q^k} - \frac{\partial \Gamma_{ijk}}{\partial q^l} + \Gamma_{j l}^r \Gamma_{ir k} - \Gamma_{k j}^r \Gamma_{ir l} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial q^j \partial q^k} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial q^i \partial q^l} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial q^j \partial q^l} - \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial q^i \partial q^k} \right) - g^{rs} (\Gamma_{ir k} \Gamma_{js l} - \Gamma_{ir l} \Gamma_{js k}) \end{aligned}$$

Le tenseur de Ricci est le tenseur symétrique, covariant d'ordre 2, obtenu par la contraction du tenseur de Riemann-Christoffel :

$$R_{ik} = R_{ki} = g^{jl} R_{ijkl} \text{ soit,}$$

$$(A.7) \quad R_{ik} = \frac{\partial \Gamma_{i k}^j}{\partial q^j} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^j}{\partial q^k} + \Gamma_{i k}^l \Gamma_{j l}^j - \Gamma_{i j}^l \Gamma_{k l}^j$$

La courbure scalaire est l'invariant obtenu par la contraction du tenseur de Ricci :

$$(A.8) \quad R = g^{ik} R_{ik}$$

§ A.2 Courbures riemanniennes et géodésiques

Soit un champ de vecteurs contravariant w , défini le long d'une courbe d'équations:

$$(A.9) \quad q^i = q^i(u) \quad u \in [a, b] \subseteq \mathbb{R}$$

La *dérivée absolue* d'un vecteur w^i le long de la courbe (A.9) est définie par:

$$(A.10) \quad \frac{\delta w^i}{\delta u} = \frac{dw^i}{du} + \Gamma_{jk}^i w^j \frac{dq^k}{du}$$

Sur une géodésique, si l'on prend $v^i = \frac{dq^i}{ds}$ (s étant l'abscisse curviligne), nous avons:

$$(A.11) \quad \frac{\delta v^i}{\delta s} = \frac{\delta}{\delta s} \left(\frac{dq^i}{ds} \right) = 0 \quad (\text{voir [93]})$$

On reprend maintenant les deux géodésiques $\gamma_1(s, \lambda)$ et $\gamma_2(s, \lambda + d\lambda)$, introduites au deuxième chapitre (§ 2.2), pour démontrer la relation (3.16).

Soit η le vecteur infinitésimal $Q_1 Q_2$, de composantes:

$$(A.12) \quad \eta^i = \frac{\partial q^i}{\partial \lambda} d\lambda$$

Comment varie η en fonction de s ? La réponse à cette question est donnée par

l'équation de la déviation géodésique:

$$(A.13) \quad \frac{\delta^2 \eta^i}{\delta s^2} + R^i_{jkl} v^j \eta^k v^l = 0$$

où $v^j = \partial q^j / \partial s$ est le vecteur unitaire tangent à la géodésique γ^1 au point d'application de η^j ;

δ est le symbole utilisé pour la dérivée absolue, (A.10).

L'équation (A.13) fournit $\eta^j = \eta^j(s)$ pour des valeurs initiales η^j_0 et $(\delta \eta^j / \delta s)_0$ données.

En utilisant l'équation de la déviation géodésique nous allons exprimer la variation de la distance η en fonction de s .

Soit

$$(A.14) \quad \eta^j = \eta e^j$$

où e^j est le vecteur unitaire dans la direction de η^j et η est la longueur du vecteur η^j .

La définition de e^j conduit à:

$$(A.15) \quad g_{ij} e^i e^j = 1$$

et on déduit:

$$(A.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} e^i e_i = 1 \\ e_i \frac{\delta e^i}{\delta s} = 0 \\ \frac{\delta e_i}{\delta s} \frac{\delta e^i}{\delta s} + e_i \frac{\delta^2 e^i}{\delta s^2} = 0 \end{array} \right.$$

On développe η en série par rapport à s au voisinage de $s = 0$ et on obtient:

$$(A.17) \quad \eta(s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d^m \eta(0)}{ds^m} \frac{s^m}{m!}$$

$$(A.18) \quad \eta(s) = (\eta)_{(0)} + \left(\frac{d\eta}{ds} \right)_{(0)} s + \left(\frac{d^2 \eta}{ds^2} \right)_{(0)} \frac{s^2}{2} + \left(\frac{d^3 \eta}{ds^3} \right)_{(0)} \frac{s^3}{6} + \dots$$

Nous allons calculer la limite des coefficients du développement (A.17) lorsque s tend vers 0. Par la définition de η , nous avons:

$$(A.19) \quad s \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \eta \rightarrow 0$$

De même on remarque que

$$(A.20) \quad \left(\frac{d\eta}{ds} \right)_{(0)} \neq 0,$$

car sinon les deux géodésiques coïncident. On note

$$(A.21) \quad \theta = \left(\frac{d\eta}{ds} \right)_{(0)},$$

θ étant l'angle déterminé par les deux géodésiques.

Si l'on remplace l'expression (A.14) de η^i dans l'équation de la déviation géodésique (A.13), on obtient (voir par exemple [93]):

$$(A.22) \quad \frac{d^2 \eta}{ds^2} e^i + 2 \frac{d\eta}{ds} \frac{\delta e^i}{\delta s} + \eta \frac{\delta^2 e^i}{\delta s^2} + \eta R^i_{jkl} v^j e^k v^l = 0$$

On multiplie (A.22) par e_i et on tient compte de (A.16). On a alors:

$$(A.23) \quad \frac{d^2\eta}{ds^2} + \eta e_i \frac{\delta^2 e^i}{\delta s^2} + \eta K(\pi_1) = 0$$

où $K(\pi_1)$ est la courbure riemannienne (sectionnelle) du 2-plan (π_1) , déterminé par les vecteurs η^i et v^i .

De (A.19) et (A.23) on peut tirer maintenant:

$$(A.24) \quad s \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{d^2\eta}{ds^2} \rightarrow 0$$

On fait $s \rightarrow 0$ dans l'équation (A.22) et on utilise (A.24). On obtient:

$$(A.25) \quad s \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\delta e^i}{\delta s} \rightarrow 0$$

Donc, par (A.16),

$$(A.26) \quad s \rightarrow 0 \Rightarrow e_i \frac{\delta^2 e^i}{\delta s^2} \rightarrow 0$$

Finalement, si on divise (A.23) par η et on fait $s \rightarrow 0$, en utilisant (2.13) on a:

$$(A.27) \quad s \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{1}{\eta} \frac{d^2\eta}{ds^2} \rightarrow -K(\pi_1)$$

En remplaçant maintenant les coefficients du développement (A.18) par leurs valeurs obtenues d'après (A.19), (A.24) et (A.27), on obtient:

$$(A.28) \quad \eta(s) = \left(\frac{d\eta}{ds} \right)_{(0)} s + \left(\frac{1}{\eta} \frac{d^2\eta}{ds^2} \right)_{(0)} \left(\frac{d\eta}{ds} \right)_{(0)} \frac{s^3}{6} + \dots$$

soit,

$$(A.29) \quad \eta(s) = \left(\frac{d\eta}{ds} \right)_{(0)} \left[s - K(\pi_1) \frac{s^3}{6} \right] + \dots,$$

ce qui est la relation (3.16). En utilisant (A.21) on peut mettre (A.29) sous la forme

$$(A.30) \quad \eta(s) = \theta \left[s - K(\pi_1) \frac{s^3}{6} \right] + \dots \quad \text{c.q.f.d.}$$

§ A.3 Espaces riemanniens à courbure constante

Dans la suite nous allons présenter quelques résultats sur les espaces à courbure constante (voir [19], [23], [37], [47],[55], [56], [93], [100]).

On appelle *point isotropique* dans un espace riemannien un point où la courbure riemannienne est la même pour tous les 2-plans qui passent par ce point.

En un point isotropique, la courbure riemannienne (3.13) satisfait:

$$(A.31) \quad K (g_{jl} g_{ik} - g_{jk} g_{il}) = R_{ijkl}$$

Théorème de Schur *La courbure riemannienne est constante dans un ouvert connexe d'un espace riemannien si tous les points de cet ouvert sont des points isotropiques. (voir par exemple [37]).*

On dit qu'un espace est un *espace à courbure constante* si $K(\pi_1) = K = \text{const.}$ pour tout $Q \in M^n$ et pour tous les 2-plans de $T_Q M^n$ (voir [55]).

L'équation de la déviation géodésique (A.13) s'écrit dans ce cas:

$$(A.32) \quad \frac{\delta^2 \eta^i}{\delta s^2} + K \eta^i = 0$$

Dans un espace à courbure constante positive, ($K > 0$) deux géodésiques qui partent d'un point commun, vont s'intersecter de nouveau à une distance l du point initial, égale à:

$$(A.33) \quad l = \frac{\pi}{\sqrt{K}}.$$

ANNEXE-B

Compléments sur le problème plan des trois corps

§ B.1 Sur la topologie du problème plan des trois corps

Les notations introduites dans le troisième chapitre restent ici valables. Dans ce paragraphe S^n désigne la sphère unité de dimension n .

Sur la topologie du problème plan des trois corps nous avons les résultats suivants (voir [38]):

La sous-variété $M^7(c)$ (de moment cinétique constant) est difféomorphe à $S^3 \times \mathbb{R}^4$.

$$(B.1) \quad M^7(c) \cong S^3 \times \mathbb{R}^4$$

Soit l'application :

$$(B.2) \quad \begin{aligned} \pi_1 : M^7(c) &\rightarrow S^5 \\ \pi_1(q,p) &= q / I(q) \end{aligned}$$

L'image de π_1 à $M^6(h, c)$ est $M^3(h, c)$, qu'on appelle le *sous-espace des positions normalisées* :

$$(B.3) \quad M^3(h, c) = \pi_1(M^6(c)).$$

Remarque. Tout point de $M^3(h, c)$ donne une position des trois corps telle que le moment d'inertie I , par rapport au centre des masses est égal à 1.

Notons $O^3 = \pi_1(M^3(c))$ et $u = q / I(q) \in O^3$. La relation barycentrique de Leibniz :

$$(B.4) \quad \sum_{i < j} m_i m_j r_{ij}^2(q) = I(q) \sum_{i=1}^3 m_i, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

permet ensuite de définir une application π_2 sur O^3 par:

$$(B.5) \quad \pi_2(u) = s = (s_1, s_2, s_3) \quad \text{où}$$

$$s_1 = r_{23}(q) / I \quad s_2 = r_{13}(q) / I \quad s_3 = r_{12}(q) / I$$

On utilise l'application π_2 pour obtenir

$$(B.6) \quad M^2(h, c) = \pi_2(M^3(h, c)),$$

qui est le *sous-espace des configurations normalisées* d'énergie h et de moment cinétique c , fixés.

La structure topologique de $M^6(h, c)$ et de $M^2(h, c)$ dépend des valeurs des masses et des constantes h et c . On démontre que l'espace des configurations normalisées est inclus dans un triangle sur un ellipsoïde; $M^2(h, c)$ étant un sous-espace de l'espace des configurations normalisées, sa topologie est facile à interpréter (Elmabsout [38]) et conduit à de beaux résultats.

Par la suite nous allons nous placer dans le cas général, $m_1 \geq m_2 \geq m_3 > 0$. Les résultats sur la topologie de $M^6(h, c)$ selon différentes valeurs de h et de c ($h \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}_+$) sont réunis dans le tableau suivant :

h et c	$M^6(h, c) \cong$
1. $h \geq 0$ $c = 0$	$S^1 \times \Sigma^2 \times \mathbb{R} \times S^2$
2. $h \geq 0$ $c \neq 0$	$S^1 \times \Sigma^2 \times \mathbb{R}^3$
3. $h < 0$ $c = 0$	$S^1 \times \Sigma^2 \times \mathbb{R}^3$
4. $h < 0$ $c \neq 0$; $0 < -hc^2 < d_1$	$S^1 \times \Sigma^2 \times S^3$
5. $h < 0$ $c \neq 0$; $d_1 < -2hc^2 < d_2$	$S^1 \times ((S^5 \times S^4) \setminus (S^3 \cup S^3 \cup S^3))$
6. $h < 0$ $c \neq 0$; $d_2 < -2hc^2 < d_3$	$S^1 \times (S^5 \setminus (S^3 \cup S^3 \cup S^3))$
7. $h < 0$ $c \neq 0$; $d_3 < -2hc^2 < d_4$	$S^1 \times ((S^5 \setminus (S^3 \cup S^3)) \cup (S^5 \setminus S^3))$
8. $h < 0$ $c \neq 0$; $d_4 < -2hc^2 < \infty$	$S^1 \times ((S^5 \setminus S^3) \cup (S^5 \setminus S^3) \cup (S^5 \setminus S^3))$

où

- Σ^2 est la sphère S^2 privée de trois points distincts ;
- toutes les réunions qui apparaissent dans le tableau sont disjointes ;
- d_1, d_2, d_3, d_4 ($0 < d_1 < d_2 < d_3 < d_4$) sont les valeurs critiques de la fonction U . Les points d_1, d_2 et d_3 correspondent aux points d'équilibre relatif d'Euler, où les trois corps sont alignés, alors que d_4 correspond à la position d'équilibre relatif de Lagrange, où les trois corps forment un triangle équilatéral. C'est surtout autour de ces points que nous

avons étudié les courbures. Pour la démonstration des isomorphismes, (2^{ème} colonne) se rapporter aux références [1], [38], [49],[88], [89].

§ B.2 Sur le paramètre hc^2

Nous avons déjà rencontré le paramètre hc^2 , qui intervient dans la discussion sur la topologie de $M^6(h, c)$, dans l'inégalité

$$(B.7) \quad 2h c^2 + IU^2 \geq 0,$$

qui donne le domaine des configurations admissibles (§ 3.2). Donnons une *démonstration directe* de cette inégalité, en utilisant les coordonnées de Jacobi.

On utilise dans

$$(B.8) \quad T - U = h$$

l'expression de l'énergie cinétique (3.25) et l'expression du moment cinétique (3.26):

$$(B.9) \quad \mu_1 \dot{r}_1^2 + \mu_1 r_1^2 \dot{\phi}_1^2 + \mu_2 \dot{r}_2^2 + \mu_2 r_2^2 \dot{\phi}_2^2 - 2 \frac{U}{c} (\mu_1 r_1^2 \dot{\phi}_1 + \mu_2 r_2^2 \dot{\phi}_2) = 2 h$$

En regroupant les termes de façon convenable on obtient:

$$(B.10) \quad \begin{aligned} & \mu_1 \dot{r}_1^2 + \mu_2 \dot{r}_2^2 + (\mu_1 r_1^2 \dot{\phi}_1^2 - 2 \frac{U}{c} \mu_1 r_1^2 \dot{\phi}_1 + \mu_1 r_1^2 \frac{U^2}{c^2}) + \\ & + (\mu_2 r_2^2 \dot{\phi}_2^2 - 2 \frac{U}{c} \mu_2 r_2^2 \dot{\phi}_2 + \mu_2 r_2^2 \frac{U^2}{c^2}) - \\ & - \frac{U^2}{c^2} (\mu_1 r_1^2 + \mu_2 r_2^2) = 2 h \end{aligned}$$

ou encore,

$$(B.11) \quad \mu_1 \dot{r}_1^2 + \mu_2 \dot{r}_2^2 + \mu_1 r_1^2 \left(\dot{\phi}_1 - \frac{U}{c} \right)^2 + \mu_2 r_2^2 \left(\dot{\phi}_2 - \frac{U}{c} \right)^2 = 2h + \frac{U^2}{c^2} (\mu_1 r_1^2 + \mu_2 r_2^2)$$

L'expression qui apparaît entre parenthèses dans le second membre est le moment d'inertie I , donc :

$$(B.12) \quad \mu_1 \dot{r}_1^2 + \mu_2 \dot{r}_2^2 + \mu_1 r_1^2 \left(\dot{\phi}_1 - \frac{U}{c} \right)^2 + \mu_2 r_2^2 \left(\dot{\phi}_2 - \frac{U}{c} \right)^2 = 2h + \frac{U^2}{c^2} I$$

Le premier membre de l'égalité ci-dessus étant une somme de carrés, il est donc positif. On en déduit:

$$(B.13) \quad 2h + \frac{IU^2}{c^2} \geq 0$$

soit

$$2h c^2 + IU^2 \geq 0 \quad \text{c.q.f.d.}$$

Sur l'importance du paramètre hc^2 dans le problème des trois corps, on peut citer les travaux suivants: [4], [61], [63], [71], [86], [104],[110], [111], [112].

§ B.3 Métrique de Sasaki dans l'espace des phases du problème plan des trois corps

Nous allons donner dans ce paragraphe les expressions explicites des éléments du tenseur métrique de l'espace des phases du problème plan des trois corps, avec la métrique de Sasaki.

On reprend la matrice G_s (3.55) et on la met sous la forme:

$$(B.14) \quad G_s = \begin{bmatrix} A & B \\ B' & G \end{bmatrix}$$

A , B et G sont des matrices 4×4 . A est une matrice symétrique et G est la matrice des g_{ij} (3.49), les composantes du tenseur métrique de l'espace des configurations. B' est la matrice transposée de B .

Soient

$$(B.15) \quad A = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} \\ G_{12} & G_{22} & G_{23} & G_{24} \\ G_{13} & G_{23} & G_{33} & G_{34} \\ G_{14} & G_{24} & G_{34} & G_{44} \end{bmatrix}$$

$$(B.16) \quad B = \begin{bmatrix} G_{15} & G_{16} & G_{17} & G_{18} \\ G_{25} & G_{26} & G_{27} & G_{28} \\ G_{35} & G_{36} & G_{37} & G_{38} \\ G_{45} & G_{46} & G_{47} & G_{48} \end{bmatrix}$$

$$(B.17) \quad G = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{44} \end{bmatrix}$$

Les composantes covariantes du tenseur métrique fondamental $d\sigma_0^2$, de l'espace des phases du problème plan des trois corps, avec les Γ_{ij}^k de (3.56), sont:

$$\begin{aligned}
G_{11} = & g_{11} + R_1^2 [g_{44} (\Gamma_1^4)^2 + g_{33} (\Gamma_1^3)^2 + g_{22} (\Gamma_1^2)^2 + g_{11} (\Gamma_1^1)^2] + \\
& + 2 R_1 \phi_2 (g_{44} \Gamma_1^1 \Gamma_1^4 + g_{11} \Gamma_1^1 \Gamma_1^4) + \phi_2^2 [g_{44} (\Gamma_1^1)^2 + g_{11} (\Gamma_1^4)^2] + \\
& + 2 R_1 R_2 (g_{33} \Gamma_1^1 \Gamma_1^3 + g_{11} \Gamma_1^1 \Gamma_1^3) + R_2^2 [g_{33} (\Gamma_1^1)^2 + g_{11} (\Gamma_1^3)^2] + \\
& + \phi_1^2 [g_{22} (\Gamma_1^2)^2 + g_{11} (\Gamma_1^2)^2] + 2 R_1 \phi_1 (g_{22} \Gamma_1^2 \Gamma_1^2 + g_{11} \Gamma_1^1 \Gamma_1^2) + \\
& + 2 R_2 \phi_2 g_{11} \Gamma_1^3 \Gamma_1^4 + 2 \phi_1 \phi_2 g_{11} \Gamma_1^2 \Gamma_1^4 + 2 \phi_1 R_2 g_{11} \Gamma_1^2 \Gamma_1^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{12} = & R_1 \phi_1 (g_{44} \Gamma_1^4 \Gamma_2^4 + g_{33} \Gamma_1^3 \Gamma_2^3 + g_{22} \Gamma_1^2 \Gamma_2^2 + g_{11} \Gamma_1^1 \Gamma_2^1) + \\
& + \phi_1 \phi_2 (g_{44} \Gamma_1^1 \Gamma_2^4 + g_{11} \Gamma_1^4 \Gamma_2^1) + R_1 \phi_2 (g_{44} \Gamma_1^4 \Gamma_1^2 + g_{22} \Gamma_1^2 \Gamma_1^4) + \\
& + \phi_2^2 g_{44} \Gamma_1^1 \Gamma_1^2 + \phi_1 R_2 (g_{33} \Gamma_1^1 \Gamma_2^3 + g_{11} \Gamma_1^3 \Gamma_2^1) + \\
& + R_1 R_2 (g_{33} \Gamma_1^3 \Gamma_1^2 + g_{22} \Gamma_1^2 \Gamma_1^3) + R_2^2 g_{33} \Gamma_1^1 \Gamma_1^2 + \\
& + R_1 \phi_1 [g_{22} (\Gamma_1^2)^2 + g_{11} (\Gamma_1^2)^2] + \phi_1^2 (g_{22} \Gamma_1^2 \Gamma_1^2 + g_{11} \Gamma_1^2 \Gamma_2^1) + \\
& + R_1^2 (g_{22} \Gamma_1^2 \Gamma_1^2 + g_{11} \Gamma_1^1 \Gamma_1^2) + \phi_1 \phi_2 g_{22} \Gamma_1^2 \Gamma_1^4 + \phi_1 R_2 g_{22} \Gamma_1^2 \Gamma_1^3 + \\
& + R_1 \phi_2 g_{11} \Gamma_1^2 \Gamma_1^4 + R_1 R_2 g_{11} \Gamma_1^2 \Gamma_1^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{13} = & R_1 \phi_2 (g_{44} \Gamma_1^4 \Gamma_3^4 + g_{22} \Gamma_1^3 \Gamma_1^4) + R_1 R_2 (g_{44} \Gamma_1^4 \Gamma_3^3 + g_{33} \Gamma_1^3 \Gamma_1^3 + \\
& + g_{22} \Gamma_1^2 \Gamma_3^3 + g_{11} \Gamma_1^1 \Gamma_3^3) + R_2 \phi_2 (g_{44} \Gamma_1^1 \Gamma_3^4 + g_{11} \Gamma_1^4 \Gamma_3^3) + \\
& + \phi_2^2 g_{44} \Gamma_1^1 \Gamma_3^4 + R_2^2 (g_{33} \Gamma_1^1 \Gamma_1^3 + g_{11} \Gamma_1^3 \Gamma_3^3) + R_1 \phi_1 (g_{33} \Gamma_1^3 \Gamma_1^2 + \\
& + g_{22} \Gamma_1^2 \Gamma_1^3) + R_1^2 (g_{33} \Gamma_1^1 \Gamma_1^3 + g_{11} \Gamma_1^1 \Gamma_1^3) + R_1 R_2 [g_{33} (\Gamma_1^1)^2 + \\
& + g_{11} (\Gamma_1^3)^2] + R_2 \phi_2 g_{33} \Gamma_1^1 \Gamma_1^4 + \phi_1 R_2 g_{33} \Gamma_1^1 \Gamma_1^2 + \phi_1 R_2 (g_{22} \Gamma_1^2 \Gamma_3^3 + \\
& + g_{11} \Gamma_1^2 \Gamma_3^3) + \phi_1^2 g_{22} \Gamma_1^2 \Gamma_1^3 + R_1 \phi_2 g_{11} \Gamma_1^3 \Gamma_1^4 + R_1 R_2 g_{11} \Gamma_1^2 \Gamma_1^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{14} = & R_1 R_2 (g_{44} \Gamma_{11}^4 \Gamma_{34}^4 + g_{33} \Gamma_{11}^3 \Gamma_{14}^1) + R_1 \phi_2 (g_{44} \Gamma_{11}^4 \Gamma_{14}^1 + g_{33} \Gamma_{11}^3 \Gamma_{44}^3 + \\
& + g_{22} \Gamma_{11}^2 \Gamma_{44}^2 + g_{11} \Gamma_{11}^1 \Gamma_{44}^1) + \phi_2^2 (g_{44} \Gamma_{11}^1 \Gamma_{14}^1 + g_{11} \Gamma_{14}^1 \Gamma_{44}^1) + \\
& + R_1 \phi_1 (g_{44} \Gamma_{11}^4 \Gamma_{12}^1 + g_{22} \Gamma_{11}^2 \Gamma_{14}^1) + R_1^2 (g_{44} \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^4 + g_{11} \Gamma_{11}^1 \Gamma_{14}^1) + \\
& + R_1 \phi_2 [g_{44} (\Gamma_{11}^1)^2 + g_{11} (\Gamma_{14}^1)^2] + R_2 \phi_2 g_{44} \Gamma_{11}^1 \Gamma_{34}^4 + \phi_1 \phi_2 g_{44} \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 + \\
& + R_2 \phi_2 (g_{33} \Gamma_{11}^1 \Gamma_{44}^3 + g_{11} \Gamma_{13}^1 \Gamma_{44}^1) + \phi_1^2 g_{22} \Gamma_{12}^2 \Gamma_{14}^1 + R_1 R_2 g_{11} \Gamma_{13}^1 \Gamma_{14}^1 + \\
& + R_1 \phi_1 g_{11} \Gamma_{12}^1 \Gamma_{14}^1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{22} = & g_{22} + \phi_1^2 [g_{44} (\Gamma_{24}^4)^2 + g_{33} (\Gamma_{22}^3)^2 + g_{22} (\Gamma_{12}^1)^2 + g_{11} (\Gamma_{22}^2)^2] + \\
& + 2 \phi_1 \phi_2 (g_{44} \Gamma_{12}^1 \Gamma_{24}^4 + g_{22} \Gamma_{12}^1 \Gamma_{14}^1) + \phi_2^2 [g_{44} (\Gamma_{12}^1)^2 + g_{22} (\Gamma_{14}^1)^2] + \\
& + 2 \phi_1 R_2 (g_{33} \Gamma_{12}^1 \Gamma_{22}^3 + g_{22} \Gamma_{12}^1 \Gamma_{13}^1) + R_2^2 [g_{33} (\Gamma_{12}^1)^2 + g_{22} (\Gamma_{13}^1)^2] + \\
& + R_1^2 [g_{22} (\Gamma_{12}^2)^2 + g_{11} (\Gamma_{12}^1)^2] + 2 R_1 \phi_1 (g_{22} \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2 + g_{11} \Gamma_{12}^1 \Gamma_{22}^2) + \\
& + 2 R_2 \phi_2 g_{22} \Gamma_{13}^1 \Gamma_{14}^1 + 2 R_1 \phi_2 g_{22} \Gamma_{12}^2 \Gamma_{14}^1 + 2 R_1 R_2 g_{22} \Gamma_{12}^2 \Gamma_{13}^1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{23} = & \phi_1 \phi_2 (g_{44} \Gamma_{22}^4 \Gamma_{34}^4 + g_{33} \Gamma_{14}^1 \Gamma_{22}^3) + \phi_1 R_2 (g_{44} \Gamma_{22}^4 \Gamma_{33}^4 + g_{33} \Gamma_{13}^1 \Gamma_{22}^3 + \\
& + g_{22} \Gamma_{12}^1 \Gamma_{33}^2 + g_{11} \Gamma_{22}^1 \Gamma_{33}^1) + R_2 \phi_2 (g_{44} \Gamma_{12}^1 \Gamma_{33}^4 + g_{22} \Gamma_{14}^1 \Gamma_{33}^2) + \\
& + \phi_2^2 g_{44} \Gamma_{12}^1 \Gamma_{34}^4 + \phi_1^2 (g_{33} \Gamma_{12}^1 \Gamma_{22}^3 + g_{22} \Gamma_{12}^1 \Gamma_{13}^1) + \\
& + R_1 \phi_1 (g_{33} \Gamma_{11}^1 \Gamma_{22}^3 + g_{11} \Gamma_{13}^1 \Gamma_{22}^2) + R_2^2 (g_{33} \Gamma_{12}^1 \Gamma_{13}^1 + g_{22} \Gamma_{12}^1 \Gamma_{13}^1) + \\
& + \phi_1 R_2 [g_{33} (\Gamma_{12}^1)^2 + g_{22} (\Gamma_{13}^1)^2] + R_2 \phi_2 g_{33} \Gamma_{12}^1 \Gamma_{14}^1 + R_1 R_2 g_{33} \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 + \\
& + R_1 R_2 (g_{22} \Gamma_{12}^2 \Gamma_{33}^2 + g_{11} \Gamma_{12}^1 \Gamma_{33}^1) + \phi_1 \phi_2 g_{22} \Gamma_{13}^1 \Gamma_{14}^1 + R_1 \phi_1 g_{22} \Gamma_{12}^2 \Gamma_{13}^1 + \\
& + R_1^2 g_{11} \Gamma_{12}^1 \Gamma_{13}^1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{24} = & \phi_1 R_2 (g_{44} \Gamma_{22}^4 \Gamma_{34}^4 + g_{33} \Gamma_{14}^1 \Gamma_{22}^3) + \phi_1 \phi_2 (g_{44} \Gamma_{14}^1 \Gamma_{22}^4 + g_{33} \Gamma_{22}^3 \Gamma_{44}^3 + \\
& + g_{22} \Gamma_{12}^1 \Gamma_{44}^2 + g_{11} \Gamma_{22}^1 \Gamma_{44}^1) + \phi_1^2 (g_{44} \Gamma_{12}^1 \Gamma_{22}^4 + g_{22} \Gamma_{12}^1 \Gamma_{14}^1) + \\
& + R_1 \phi_1 (g_{44} \Gamma_{11}^1 \Gamma_{22}^4 + g_{11} \Gamma_{14}^1 \Gamma_{22}^1) + \phi_2^2 (g_{44} \Gamma_{12}^1 \Gamma_{14}^1 + g_{22} \Gamma_{14}^1 \Gamma_{44}^2) + \\
& + \phi_1 \phi_2 [g_{44} (\Gamma_{12}^1)^2 + g_{22} (\Gamma_{14}^1)^2] + R_2 \phi_2 g_{44} \Gamma_{12}^1 \Gamma_{34}^4 + R_1 \phi_2 g_{44} \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 + \\
& + R_2 \phi_2 (g_{33} \Gamma_{12}^1 \Gamma_{44}^3 + g_{22} \Gamma_{13}^1 \Gamma_{44}^2) + R_2^2 g_{33} \Gamma_{12}^1 \Gamma_{14}^1 + R_1 \phi_2 (g_{22} \Gamma_{12}^2 \Gamma_{44}^2 + \\
& + g_{11} \Gamma_{12}^1 \Gamma_{44}^1) + \phi_1 R_2 g_{22} \Gamma_{13}^1 \Gamma_{14}^1 + R_1 \phi_1 g_{22} \Gamma_{12}^2 \Gamma_{14}^1 + R_1^2 g_{11} \Gamma_{12}^1 \Gamma_{14}^1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{33} = & g_{33} + \phi_2^2 [g_{44} (\Gamma_{34}^4)^2 + g_{33} (\Gamma_{14}^1)^2] + 2 R_2 \phi_2 (g_{44} \Gamma_{33}^4 \Gamma_{34}^4 + g_{33} \Gamma_{13}^1 \Gamma_{14}^1) + \\
& + R_2^2 [g_{44} (\Gamma_{33}^4)^2 + g_{33} (\Gamma_{13}^1)^2 + g_{22} (\Gamma_{33}^2)^2 + g_{11} (\Gamma_{33}^1)^2] + \\
& + 2 \phi_1 R_2 (g_{33} \Gamma_{12}^1 \Gamma_{13}^1 + g_{22} \Gamma_{13}^1 \Gamma_{33}^2) + 2 R_1 R_2 (g_{33} \Gamma_{11}^1 \Gamma_{13}^1 + g_{11} \Gamma_{13}^1 \Gamma_{33}^1) + \\
& + \phi_1^2 [g_{33} (\Gamma_{12}^1)^2 + g_{22} (\Gamma_{13}^1)^2] + R_1^2 [g_{33} (\Gamma_{11}^1)^2 + g_{11} (\Gamma_{13}^1)^2] + \\
& + 2 \phi_1 \phi_2 g_{33} \Gamma_{12}^1 \Gamma_{14}^1 + 2 R_1 \phi_2 g_{33} \Gamma_{11}^1 \Gamma_{14}^1 + 2 R_1 \phi_2 g_{33} \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{34} = & R_2 \phi_2 [g_{44} (\Gamma_{34}^4)^2 + g_{33} (\Gamma_{14}^1)^2] + R_2^2 (g_{44} \Gamma_{33}^4 \Gamma_{34}^4 + g_{33} \Gamma_{13}^1 \Gamma_{14}^1) + \\
& + \phi_2^2 (g_{44} \Gamma_{14}^1 \Gamma_{34}^4 + g_{33} \Gamma_{14}^1 \Gamma_{44}^3) + R_2 \phi_2 (g_{44} \Gamma_{14}^1 \Gamma_{33}^4 + g_{33} \Gamma_{13}^1 \Gamma_{44}^3 + \\
& + g_{22} \Gamma_{33}^2 \Gamma_{44}^2 + g_{11} \Gamma_{33}^1 \Gamma_{44}^1) + \phi_1 R_2 (g_{44} \Gamma_{12}^1 \Gamma_{33}^4 + g_{22} \Gamma_{14}^1 \Gamma_{33}^2) + \\
& + R_1 R_2 (g_{44} \Gamma_{11}^1 \Gamma_{33}^4 + g_{11} \Gamma_{14}^1 \Gamma_{33}^1) + \phi_1 \phi_2 g_{44} \Gamma_{12}^1 \Gamma_{34}^4 + R_1 \phi_2 g_{44} \Gamma_{11}^1 \Gamma_{34}^4 + \\
& + \phi_1 \phi_2 (g_{33} \Gamma_{12}^1 \Gamma_{44}^3 + g_{22} \Gamma_{13}^1 \Gamma_{44}^2) + R_1 \phi_2 (g_{33} \Gamma_{11}^1 \Gamma_{44}^3 + g_{11} \Gamma_{13}^1 \Gamma_{44}^1) + \\
& + \phi_1 R_2 g_{33} \Gamma_{12}^1 \Gamma_{14}^1 + R_1 R_2 g_{33} \Gamma_{11}^1 \Gamma_{14}^1 + \phi_1^2 g_{22} \Gamma_{13}^1 \Gamma_{14}^1 + R_1^2 g_{11} \Gamma_{13}^1 \Gamma_{14}^1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{44} = & g_{44} + R_2^2 [g_{44} (\Gamma_{34}^4)^2 + g_{33} (\Gamma_{14}^1)^2] + 2 R_2 \phi_2 (g_{44} \Gamma_{14}^1 \Gamma_{34}^4 + g_{33} \Gamma_{14}^1 \Gamma_{44}^3) + \\
& + \phi_2^2 [g_{44} (\Gamma_{14}^1)^2 + g_{33} (\Gamma_{44}^3)^2 + g_{22} (\Gamma_{44}^2)^2 + g_{11} (\Gamma_{44}^1)^2] + \\
& + 2 \phi_1 \phi_2 (g_{44} \Gamma_{12}^1 \Gamma_{14}^1 + g_{22} \Gamma_{14}^1 \Gamma_{44}^2) + 2 R_1 \phi_2 (g_{44} \Gamma_{11}^1 \Gamma_{14}^1 + g_{11} \Gamma_{14}^1 \Gamma_{44}^1) + \\
& + \phi_1^2 [g_{44} (\Gamma_{12}^1)^2 + g_{22} (\Gamma_{14}^1)^2] + R_1^2 [g_{44} (\Gamma_{11}^1)^2 + g_{11} (\Gamma_{11}^1)^2] + \\
& + 2 \phi_1 R_2 g_{44} \Gamma_{12}^1 \Gamma_{34}^4 + 2 R_1 R_2 g_{44} \Gamma_{11}^1 \Gamma_{34}^4 + 2 R_1 \phi_1 g_{44} \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1
\end{aligned}$$

$$G_{15} = g_{11}(\phi_2 \Gamma_{14}^1 + R_2 \Gamma_{13}^1 + \phi_1 \Gamma_{12}^1 + R_1 \Gamma_{11}^1)$$

$$G_{16} = g_{22}(\phi_1 \Gamma_{12}^2 + R_1 \Gamma_{11}^2)$$

$$G_{17} = g_{33}(R_2 \Gamma_{11}^1 + R_1 \Gamma_{13}^1)$$

$$G_{18} = g_{44}(\phi_2 \Gamma_{11}^1 + R_1 \Gamma_{11}^4)$$

$$G_{25} = g_{11}(\phi_1 \Gamma_{22}^1 + R_1 \Gamma_{12}^1)$$

$$G_{26} = g_{22}(\phi_2 \Gamma_{14}^1 + R_2 \Gamma_{13}^1 + \phi_1 \Gamma_{12}^1 + R_1 \Gamma_{12}^2)$$

$$G_{27} = g_{33}(R_2 \Gamma_{12}^1 + \phi_1 \Gamma_{22}^3)$$

$$G_{28} = g_{44}(\phi_2 \Gamma_{12}^1 + \phi_1 \Gamma_{22}^4)$$

$$G_{35} = g_{11}(R_2 \Gamma_{33}^1 + R_1 \Gamma_{13}^1)$$

$$G_{36} = g_{22}(R_2 \Gamma_{33}^2 + \phi_1 \Gamma_{13}^1)$$

$$G_{37} = g_{33}(\phi_2 \Gamma_{14}^1 + R_2 \Gamma_{13}^1 + \phi_1 \Gamma_{12}^1 + R_1 \Gamma_{11}^1)$$

$$G_{38} = g_{44}(\phi_2 \Gamma_{34}^4 + R_2 \Gamma_{33}^4)$$

$$G_{45} = g_{11}(\phi_2 \Gamma_{44}^1 + R_1 \Gamma_{14}^1)$$

$$G_{46} = g_{22}(\phi_2 \Gamma_{44}^2 + \phi_1 \Gamma_{14}^1)$$

$$G_{47} = g_{33}(\phi_2 \Gamma_{44}^3 + R_2 \Gamma_{43}^3)$$

$$G_{48} = g_{44}(\phi_2 \Gamma_1^1{}_4 + R_2 \Gamma_3^4{}_4 + \phi_1 \Gamma_1^1{}_2 + R_1 \Gamma_1^1{}_1)$$

$$G_{55} = g_{11}$$

$$G_{66} = g_{22}$$

$$G_{77} = g_{33}$$

$$G_{88} = g_{44}$$

§ B.4 Numérateurs des courbures riemanniennes principales

Dans ce paragraphe nous allons donner le programme de calcul MACSYMA et les expressions des numérateurs des courbures riemanniennes (3.72), après avoir remplacé la fonction de force U par (3.20).

Notations

Etant donné que les expressions suivantes sont calculées avec le logiciel MACSYMA, il faut expliquer les notations utilisées dans ces formules:

f est l'angle φ , [voir (3.23)] ;

$r1$ correspond à r_1 , (3.9) ;

$r2$ correspond à r_2 , (3.9) ;

$r13 \rightarrow r_{13}$, (3.21) ;

$r23 \rightarrow r_{23}$, (3.22) ;

$m12 \rightarrow m_1 m_2$ (produit des masses) ;

$m13 \rightarrow m_1 m_3$;

$m23 \rightarrow m_2 m_3$;

$u1 \rightarrow \mu_1$, (3.19) ;

$u2 \rightarrow \mu_2$, (3.19) ;

$p \rightarrow \varepsilon_1$, (3.24) ;

$q \rightarrow \varepsilon_2$ (3.24)

$h \rightarrow h$ (constante de l'énergie).

EXEMPLE DE PROGRAMME DE CALCUL MACSYMA POUR LE
NUMERATEUR sk_{12} DE LA COURBURE RIEMANNIENNE K_{12} (3.68)

```
clear_ctensor( );
```

```
tensorkill:true;
```

Charger le programme de calcul tensoriel :

```
csetup( );
```

Enter the dimension of the coordinate system:

```
4;
```

Do you wish to change the coordinate names?

```
y;
```

Enter a list containing the names of the coordinates in order:

```
[r1,f1,r2,f2];
```

Do you want to

1. Enter a new metric?
2. Enter a metric from a file?
3. Approximate a metric with a Taylor series?

```
1;
```

What kind of matrix?

- | | |
|-------------|------------------|
| 1. Diagonal | 3. Antisymmetric |
| 2. Symetric | 4. General |

Selection:

```
1;
```

Row 1 Column 1:

```
u1*(U+h);
```

Row 2 Column 2:

```
u1*r1^2*(U+h);
```

Row 3 Column 3:

```
u2*(U+h);
```

Row 4 Column 4:

$u^2 r^2 (U+h)$;

Matrix entered.

Enter functional dependencies with DEPENDS function or 'N' if none:

DEPENDS(U,[r1,f1,r2,f2]);

Do you wish to see the metric?

n;

**Calcul du tenseur de Riemann-Christoffel*

*d'ordre 4, sans l'afficher : **

lriemann(false)\$

** v1 et v2 sont les vecteurs qui déterminent le*

*plan de section :**

array:v1[i]\$

array:v2[i]\$

v1[1]:1/(sqrt(u1))\$

v1[2]:0\$

v1[3]:0\$

v1[4]:0\$

v2[1]:0\$

v2[2]:1/(r1*sqrt(u1))\$

v2[3]:0\$

v2[4]:0\$

**Calcul de la courbure sectionnelle K12 (3.68), sans*

*avoir remplacé la fonction de force, U :**

NK12:0\$

for i:1 thru 4 do

for j:1 thru 4 do

for k:1 thru 4 do

for l:1 thru 4 do

```

NK12:NK12+lriem[i,j,k,l]*v1[i]*v2[j]*v1[k]*v2[l]$
DK12:0$
for i:1 thru 4 do
  for j:1 thru 4 do
    for k:1 thru 4 do
      for l:1 thru 4 do
        DK12:DK12 - (lg[j,k]*lg[i,l]-lg[j,l]*lg[i,k])
          *v1[i]*v2[j]*v1[k]*v2[l]$
K12:NK12/DK12$
K12:factor(%);

```

**Calcul du numérateur sk12 de K12, après
avoir remplacé la fonction de force, U :**

```

num(%)$
ev(%,u:m12/r1+m13/sqrt((p*r1)^2+r2^2+2*p*r1*r2*cos(f2-f1))
  +m23/sqrt((q*r1)^2+r2^2-2*q*r1*r2*cos(f2-f1)),diff)$
subst(r13^2,r2^2+2*cos(f2-f1)*p*r1*r2+p^2*r1^2,%)$
subst(r23^2,r2^2-2*cos(f2-f1)*q*r1*r2+q^2*r1^2,%)$
ev(%, f2:f1+f)$
subst(abs(r13)=r13,%)$
subst(abs(r23)=r23,%)$
factor(%)$
sk12:%$

```

Numérateur de K_{12} :

(c3) sk12: %;

r_2^2

$$\begin{aligned}
 & 6 \sin^2(f) h m_{13} p^2 r_1^3 r_{13} r_2^2 r_{23}^6 u^2 + 6 \cos^2(f) h m_{13} p^2 r_1^3 r_{13} r_2^2 r_{23}^6 u^2 + 6 \sin^2(f) m_{12} m_{13} p^2 r_1^2 \\
 & * r_{13} r_2^2 r_{23}^6 u^2 + 6 \cos^2(f) m_{12} m_{13} p^2 r_1^2 r_{13} r_2^2 r_{23}^6 u^2 + 4 \sin^2(f) m_{13}^2 p^2 r_1^2 r_2^2 r_{23}^6 u^2 + 4 \cos^2(f) \\
 & * m_{13}^2 p^2 r_1^2 r_2^2 r_{23}^6 u^2 - 4 \cos(f) m_{12} m_{13} p r_1 r_{13}^3 r_2 r_{23}^6 u^2 + 12 \cos(f) h m_{13} p^3 r_1^4 r_{13} r_2 r_{23}^6 u^2 \\
 & + 12 \cos(f) m_{12} m_{13} p^3 r_1^3 r_{13} r_2 r_{23}^6 u^2 + 8 \cos(f) m_{13}^2 p^3 r_1^4 r_2 r_{23}^6 u^2 + 2 h m_{12} r_{13}^6 r_{23}^6 u^2 + 2 \\
 & * m_{12} m_{13} r_{13}^5 r_{23}^6 u^2 - 4 h m_{13} p^2 r_1^3 r_{13}^3 r_{23}^6 u^2 - 8 m_{12} m_{13} p^2 r_1^2 r_{13}^3 r_{23}^6 u^2 - 4 m_{13}^2 p^2 r_1^3 r_{13}^3 \\
 & * r_{23}^6 u^2 + 6 h m_{13} p^4 r_1^5 r_{13} r_{23}^6 u^2 + 6 m_{12} m_{13} p^4 r_1^4 r_{13} r_{23}^6 u^2 + 4 m_{13}^2 p^4 r_1^5 r_{23}^6 u^2 + 6 \sin^2(f) \\
 & * m_{13} m_{23} p^2 r_1^3 r_{13} r_2^2 r_{23}^5 u^2 + 6 \cos^2(f) m_{13} m_{23} p^2 r_1^3 r_{13} r_2^2 r_{23}^5 u^2 + 12 \cos(f) m_{13} m_{23} p^3 r_1^4 \\
 & * r_{13} r_2 r_{23}^5 u^2 + 2 m_{12} m_{23} r_{13}^6 r_{23}^5 u^2 - 4 m_{13} m_{23} p^2 r_1^3 r_{13}^3 r_{23}^5 u^2 + 6 m_{13} m_{23} p^4 r_1^5 r_{13} r_{23}^5 u^2 \\
 & + 4 \sin^2(f) m_{13} m_{23} p q r_1^3 r_{13}^3 r_2^2 r_{23}^3 u^2 + 4 \cos^2(f) m_{13} m_{23} p q r_1^3 r_{13}^3 r_2^2 r_{23}^3 u^2 + 4 \cos(f) m_{12} \\
 & * m_{23} q r_1 r_{13}^6 r_2 r_{23}^3 u^2 - 4 \cos(f) m_{13} m_{23} p q^2 r_1^4 r_{13}^3 r_2 r_{23}^3 u^2 + 4 \cos(f) m_{13} m_{23} p^2 q r_1^4 r_{13}^3 r_2 \\
 & * r_{23}^3 u^2 - 4 h m_{23} q^2 r_1^3 r_{13}^6 r_{23}^3 u^2 - 8 m_{12} m_{23} q^2 r_1^2 r_{13}^6 r_{23}^3 u^2 - 4 m_{13} m_{23} q^2 r_1^3 r_{13}^6 r_{23}^3 u^2 - 4 \\
 & * m_{13} m_{23} p^2 q^2 r_1^5 r_{13}^3 r_{23}^3 u^2 - 4 m_{23}^2 q^2 r_1^3 r_{13}^6 r_{23}^2 u^2 + 6 \sin^2(f) h m_{23} q^2 r_1^3 r_{13}^6 r_2^2 r_{23} u^2 + 6 \\
 & * \cos^2(f) h m_{23} q^2 r_1^3 r_{13}^6 r_2^2 r_{23} u^2 + 6 \sin^2(f) m_{12} m_{23} q^2 r_1^2 r_{13}^6 r_2^2 r_{23} u^2 + 6 \cos^2(f) m_{12} m_{23} q^2 \\
 & * r_1^2 r_{13}^6 r_2^2 r_{23} u^2 + 6 \sin^2(f) m_{13} m_{23} q^2 r_1^3 r_{13}^5 r_2^2 r_{23} u^2 + 6 \cos^2(f) m_{13} m_{23} q^2 r_1^3 r_{13}^5 r_2^2 r_{23} u^2 \\
 & - 12 \cos(f) h m_{23} q^3 r_1^4 r_{13}^6 r_2 r_{23} u^2 - 12 \cos(f) m_{12} m_{23} q^3 r_1^3 r_{13}^6 r_2 r_{23} u^2 - 12 \cos(f) m_{13} m_{23} q^3 \\
 & * r_1^4 r_{13}^5 r_2 r_{23} u^2 + 6 h m_{23} q^4 r_1^5 r_{13}^6 r_{23} u^2 + 6 m_{12} m_{23} q^4 r_1^4 r_{13}^6 r_{23} u^2 + 6 m_{13} m_{23} q^4 r_1^5 r_{13}^5 r_{23} \\
 & * u^2 + 4 \sin^2(f) m_{23}^2 q^2 r_1^3 r_{13}^6 r_2^2 u^2 + 4 \cos^2(f) m_{23}^2 q^2 r_1^3 r_{13}^6 r_2^2 u^2 - 8 \cos(f) m_{23}^2 q^3 r_1^4 r_{13}^6 r_2 \\
 & * u^2 + 4 m_{23}^2 q^4 r_1^5 r_{13}^6 u^2 + m_{13}^2 r_1^3 r_2^2 r_{23}^6 u^1 + 2 \cos(f) m_{13}^2 p r_1^4 r_2 r_{23}^6 u^1 + \sin^2(f) m_{13}^2 p^2 r_1^5 \\
 & * r_{23}^6 u^1 + \cos^2(f) m_{13}^2 p^2 r_1^5 r_{23}^6 u^1 + 2 m_{13} m_{23} r_1^3 r_{13}^3 r_2^2 r_{23}^3 u^1 - 2 \cos(f) m_{13} m_{23} q r_1^4 r_{13}^3 r_2 \\
 & * r_{23}^3 u^1 + 2 \cos(f) m_{13} m_{23} p r_1^4 r_{13}^3 r_2 r_{23}^3 u^1 - 2 \sin^2(f) m_{13} m_{23} p q r_1^5 r_{13}^3 r_{23}^3 u^1 - 2 \cos^2(f) \\
 & * m_{13} m_{23} p q r_1^5 r_{13}^3 r_{23}^3 u^1 + m_{23}^2 r_1^3 r_{13}^6 r_2^2 u^1 - 2 \cos(f) m_{23}^2 q r_1^4 r_{13}^6 r_2 u^1 + \sin^2(f) m_{23}^2 q^2 \\
 & * r_1^5 r_{13}^6 u^1 + \cos^2(f) m_{23}^2 q^2 r_1^5 r_{13}^6 u^1
 \end{aligned}$$

(d3) -

$$r_1 r_{13}^6 r_{23}^6$$

Numérateur de K_{13} :

(c5) sk13: %;

 r_2^2

$$\begin{aligned}
& 6 \cos^2(f) h m_{13} p^2 r_1^4 r_{13} r_2^2 r_{23}^6 u_2 + 6 \cos^2(f) m_{12} m_{13} p^2 r_1^3 r_{13} r_2^2 r_{23}^6 u_2 + \sin^2(f) m_{13}^2 p^2 r_1^4 r_2^2 \\
& * r_{23}^6 u_2 + 4 \cos^2(f) m_{13}^2 p^2 r_1^4 r_2^2 r_{23}^6 u_2 - 4 \cos(f) m_{12} m_{13} p r_1^2 r_{13}^3 r_2 r_{23}^6 u_2 + 12 \cos(f) h m_{13} p^3 \\
& * r_1^5 r_{13} r_2 r_{23}^6 u_2 + 12 \cos(f) m_{12} m_{13} p^3 r_1^4 r_{13} r_2 r_{23}^6 u_2 + 8 \cos(f) m_{13}^2 p^3 r_1^5 r_2 r_{23}^6 u_2 + 4 h m_{12} r_1 \\
& * r_{13}^6 r_{23}^6 u_2 + 2 m_{12}^2 r_{13}^6 r_{23}^6 u_2 + 4 m_{12} m_{13} r_1 r_{13}^5 r_{23}^6 u_2 - 2 h m_{13} p^2 r_1^4 r_{13}^3 r_{23}^6 u_2 - 6 m_{12} m_{13} \\
& * p^2 r_1^3 r_{13}^3 r_{23}^6 u_2 - 2 m_{13}^2 p^2 r_1^4 r_{13}^3 r_{23}^6 u_2 + 6 h m_{13} p^4 r_1^6 r_{13} r_{23}^6 u_2 + 6 m_{12} m_{13} p^4 r_1^5 r_{13} r_{23}^6 \\
& * u_2 + 4 m_{13}^2 p^4 r_1^6 r_{23}^6 u_2 + 6 \cos^2(f) m_{13} m_{23} p^2 r_1^4 r_{13} r_2^2 r_{23}^5 u_2 + 12 \cos(f) m_{13} m_{23} p^3 r_1^5 r_{13} r_2 \\
& * r_{23}^5 u_2 + 4 m_{12} m_{23} r_1 r_{13}^6 r_{23}^5 u_2 - 2 m_{13} m_{23} p^2 r_1^4 r_{13}^3 r_{23}^5 u_2 + 6 m_{13} m_{23} p^4 r_1^6 r_{13} r_{23}^5 u_2 - 2 \\
& * \sin^2(f) m_{13} m_{23} p q r_1^4 r_{13}^3 r_2^2 r_{23}^3 u_2 + 4 \cos^2(f) m_{13} m_{23} p q r_1^3 r_{13}^3 r_2^2 r_{23}^3 u_2 + 4 \cos(f) m_{12} m_{23} \\
& * q r_1^2 r_{13}^6 r_2 r_{23}^3 u_2 - 4 \cos(f) m_{13} m_{23} p q^2 r_1^5 r_{13}^3 r_2 r_{23}^3 u_2 + 4 \cos(f) m_{13} m_{23} p^2 q r_1^5 r_{13}^3 r_2 r_{23}^3 \\
& * u_2 - 2 h m_{23} q^2 r_1^4 r_{13}^6 r_{23}^3 u_2 - 6 m_{12} m_{23} q^2 r_1^3 r_{13}^6 r_{23}^3 u_2 - 2 m_{13} m_{23} q^2 r_1^4 r_{13}^3 r_{23}^3 u_2 - 4 m_{13} \\
& * m_{23} p^2 q^2 r_1^6 r_{13}^3 r_{23}^3 u_2 - 2 m_{23}^2 q^2 r_1^4 r_{13}^6 r_{23}^3 u_2 + 6 \cos^2(f) h m_{23} q^2 r_1^4 r_{13}^6 r_2^2 r_{23} u_2 + 6 \cos^2(f) \\
& * m_{12} m_{23} q^2 r_1^3 r_{13}^6 r_2^2 r_{23} u_2 + 6 \cos^2(f) m_{13} m_{23} q^2 r_1^4 r_{13}^3 r_2^2 r_{23} u_2 - 12 \cos(f) h m_{23} q^3 r_1^5 r_{13}^6 r_2 \\
& * r_{23} u_2 - 12 \cos(f) m_{12} m_{23} q^3 r_1^4 r_{13}^6 r_2 r_{23} u_2 - 12 \cos(f) m_{13} m_{23} q^3 r_1^5 r_{13}^3 r_2 r_{23} u_2 + 6 h m_{23} q^4 \\
& * r_1^6 r_{13}^6 r_{23} u_2 + 6 m_{12} m_{23} q^4 r_1^5 r_{13}^6 r_{23} u_2 + 6 m_{13} m_{23} q^4 r_1^6 r_{13}^3 r_{23} u_2 + \sin^2(f) m_{23}^2 q^2 r_1^4 r_{13}^6 \\
& * r_2^2 u_2 + 4 \cos^2(f) m_{23}^2 q^2 r_1^4 r_{13}^6 r_2^2 u_2 - 8 \cos(f) m_{23}^2 q^3 r_1^5 r_{13}^6 r_2 u_2 + 4 m_{23}^2 q^4 r_1^6 r_{13}^6 u_2 + 6 h \\
& * m_{13} r_1^4 r_{13} r_2^2 r_{23}^6 u_1 + 6 m_{12} m_{13} r_1^3 r_{13} r_2^2 r_{23}^6 u_1 + 4 m_{13}^2 r_1^4 r_2^2 r_{23}^6 u_1 + 12 \cos(f) h m_{13} p r_1^5 \\
& * r_{13} r_2 r_{23}^6 u_1 + 12 \cos(f) m_{12} m_{13} p r_1^4 r_{13} r_2 r_{23}^6 u_1 + 8 \cos(f) m_{13}^2 p r_1^5 r_2 r_{23}^6 u_1 - 2 h m_{13} r_1^4 r_{13}^3 \\
& * r_{23}^6 u_1 - 2 m_{12} m_{13} r_1^3 r_{13}^3 r_{23}^6 u_1 - 2 m_{13}^2 r_1^4 r_{13}^3 r_{23}^6 u_1 + 6 \cos^2(f) h m_{13} p^2 r_1^6 r_{13} r_{23}^6 u_1 + 6 \\
& * \cos^2(f) m_{12} m_{13} p^2 r_1^5 r_{13} r_{23}^6 u_1 + \sin^2(f) m_{13}^2 p^2 r_1^6 r_{23}^6 u_1 + 4 \cos^2(f) m_{13}^2 p^2 r_1^6 r_{23}^6 u_1 + 6 m_{13} \\
& * m_{23} r_1^4 r_{13} r_2^2 r_{23}^5 u_1 + 12 \cos(f) m_{13} m_{23} p r_1^5 r_{13} r_2 r_{23}^5 u_1 - 2 m_{13} m_{23} r_1^4 r_{13}^3 r_{23}^5 u_1 + 6 \cos^2(f) \\
& * m_{13} m_{23} p^2 r_1^6 r_{13} r_{23}^5 u_1 - 4 m_{13} m_{23} r_1^4 r_{13}^3 r_2^2 r_{23}^5 u_1 + 4 \cos(f) m_{13} m_{23} q r_1^5 r_{13}^3 r_2 r_{23}^5 u_1 - 4 \\
& * \cos(f) m_{13} m_{23} p r_1^5 r_{13}^3 r_2 r_{23}^5 u_1 - 2 h m_{23} r_1^4 r_{13}^6 r_{23}^5 u_1 - 2 m_{12} m_{23} r_1^3 r_{13}^6 r_{23}^5 u_1 - 2 m_{13} m_{23} \\
& * r_1^4 r_{13}^3 r_{23}^5 u_1 - 2 \sin^2(f) m_{13} m_{23} p q r_1^6 r_{13}^3 r_{23}^5 u_1 + 4 \cos^2(f) m_{13} m_{23} p q r_1^5 r_{13}^3 r_{23}^5 u_1 - 2 \\
& * m_{23}^2 r_1^4 r_{13}^6 r_{23}^5 u_1 + 6 h m_{23} r_1^4 r_{13}^6 r_2^2 r_{23} u_1 + 6 m_{12} m_{23} r_1^3 r_{13}^6 r_2^2 r_{23} u_1 + 6 m_{13} m_{23} r_1^4 r_{13}^3 \\
& * r_2^2 r_{23} u_1 - 12 \cos(f) h m_{23} q r_1^5 r_{13}^6 r_2 r_{23} u_1 - 12 \cos(f) m_{12} m_{23} q r_1^4 r_{13}^6 r_2 r_{23} u_1 - 12 \cos(f) m_{13} \\
& * m_{23} q r_1^5 r_{13}^3 r_2 r_{23} u_1 + 6 \cos^2(f) h m_{23} q^2 r_1^6 r_{13}^6 r_{23} u_1 + 6 \cos^2(f) m_{12} m_{23} q^2 r_1^5 r_{13}^6 r_{23} u_1 + 6 \\
& * \cos^2(f) m_{13} m_{23} q^2 r_1^6 r_{13}^3 r_{23} u_1 + 4 m_{23}^2 r_1^4 r_{13}^6 r_2^2 u_1 - 8 \cos(f) m_{23}^2 q r_1^5 r_{13}^6 r_2 u_1 + \sin^2(f) \\
& * m_{23}^2 q^2 r_1^6 r_{13}^6 u_1 + 4 \cos^2(f) m_{23}^2 q^2 r_1^6 r_{13}^6 u_1
\end{aligned}$$

(d5) -

$$r_1^2 r_{13}^6 r_{23}^6$$

Numérateur de K_{14} :

(c7) sk14:=;

 r_2^2

$$\begin{aligned}
& 6 \cos^2(f) h m_{13} p^2 r_1^4 r_{13} r_2^2 r_{23}^6 u^2 + 6 \cos^2(f) m_{12} m_{13} p^2 r_1^3 r_{13} r_2^2 r_{23}^6 u^2 + \sin^2(f) m_{13}^2 p^2 r_1^4 r_2^2 \\
& * r_{23}^6 u^2 + 4 \cos^2(f) m_{13}^2 p^2 r_1^4 r_2^2 r_{23}^6 u^2 - 4 \cos(f) m_{12} m_{13} p r_1^2 r_{13}^3 r_2 r_{23}^6 u^2 + 12 \cos(f) h m_{13} p^3 \\
& * r_1^5 r_{13} r_2 r_{23}^6 u^2 + 12 \cos(f) m_{12} m_{13} p^3 r_1^4 r_{13} r_2 r_{23}^6 u^2 + 8 \cos(f) m_{13}^3 p^3 r_1^5 r_2 r_{23}^6 u^2 + 4 h m_{12} r_1 \\
& * r_{13}^6 r_{23}^6 u^2 + 2 m_{12}^2 r_{13}^6 r_{23}^6 u^2 + 4 m_{12} m_{13} r_1 r_{13}^5 r_{23}^6 u^2 - 2 h m_{13} p^2 r_1^4 r_{13}^3 r_{23}^6 u^2 - 6 m_{12} m_{13} \\
& * p^2 r_1^3 r_{13}^3 r_{23}^6 u^2 - 2 m_{13}^2 p^2 r_1^4 r_{13}^2 r_{23}^6 u^2 + 6 h m_{13} p^4 r_1^6 r_{13} r_{23}^6 u^2 + 6 m_{12} m_{13} p^4 r_1^5 r_{13} r_{23}^6 \\
& * u^2 + 4 m_{13}^2 p^4 r_1^6 r_{23}^6 u^2 + 6 \cos^2(f) m_{13} m_{23} p^2 r_1^4 r_{13} r_2^2 r_{23}^5 u^2 + 12 \cos(f) m_{13} m_{23} p^3 r_1^5 r_{13} r_2 \\
& * r_{23}^5 u^2 + 4 m_{12} m_{23} r_1 r_{13}^6 r_{23}^5 u^2 - 2 m_{13} m_{23} p^2 r_1^4 r_{13}^3 r_{23}^5 u^2 + 6 m_{13} m_{23} p^4 r_1^6 r_{13} r_{23}^5 u^2 - 2 \\
& * \sin^2(f) m_{13} m_{23} p q r_1^4 r_{13}^3 r_2^2 r_{23}^3 u^2 + 4 \cos^2(f) m_{13} m_{23} p q r_1^4 r_{13}^3 r_2^2 r_{23}^3 u^2 + 4 \cos(f) m_{12} m_{23} \\
& * q r_1^4 r_{13}^3 r_2 r_{23}^3 u^2 - 4 \cos(f) m_{13} m_{23} p q^2 r_1^5 r_{13}^3 r_2 r_{23}^3 u^2 + 4 \cos(f) m_{13} m_{23} p^2 q r_1^5 r_{13}^3 r_2 r_{23}^3 \\
& * u^2 - 2 h m_{23} q^2 r_1^4 r_{13}^6 r_{23}^3 u^2 - 6 m_{12} m_{23} q^2 r_1^3 r_{13}^6 r_{23}^3 u^2 - 2 m_{13} m_{23} q^2 r_1^4 r_{13}^5 r_{23}^3 u^2 - 4 m_{13} \\
& * m_{23} p^2 q r_1^6 r_{13}^3 r_{23}^3 u^2 - 2 m_{23}^2 q^2 r_1^4 r_{13}^6 r_{23}^3 u^2 + 6 \cos^2(f) h m_{23} q^2 r_1^4 r_{13}^6 r_2^2 r_{23}^3 u^2 + 6 \\
& * \cos^2(f) m_{12} m_{23} q^2 r_1^3 r_{13}^6 r_2^2 r_{23}^3 u^2 + 6 \cos^2(f) m_{13} m_{23} q^2 r_1^4 r_{13}^5 r_2^2 r_{23}^3 u^2 - 12 \cos(f) h m_{23} q^3 \\
& * r_1^5 r_{13}^6 r_2 r_{23}^3 u^2 - 12 \cos(f) m_{12} m_{23} q^3 r_1^4 r_{13}^6 r_2 r_{23}^3 u^2 - 12 \cos(f) m_{13} m_{23} q^3 r_1^5 r_{13}^6 r_2 r_{23}^3 u^2 + 6 \\
& * h m_{23} q^4 r_1^6 r_{13}^6 r_{23}^3 u^2 + 6 m_{12} m_{23} q^4 r_1^5 r_{13}^6 r_{23}^3 u^2 + 6 m_{13} m_{23} q^4 r_1^6 r_{13}^5 r_{23}^3 u^2 + \sin^2(f) m_{23}^2 q^2 \\
& * r_1^4 r_{13}^6 r_2^2 u^2 + 4 \cos^2(f) m_{23}^2 q^2 r_1^4 r_{13}^6 r_2^2 u^2 - 8 \cos(f) m_{23}^2 q^3 r_1^5 r_{13}^6 r_2 u^2 + 4 m_{23}^2 q^4 r_1^6 r_{13}^6 \\
& * u^2 + m_{13}^2 r_1^4 r_2^2 r_{23}^6 u^1 + 2 \cos(f) m_{13}^2 p r_1^5 r_2 r_{23}^6 u^1 - 2 h m_{13} r_1^4 r_{13}^3 r_{23}^6 u^1 - 2 m_{12} m_{13} r_1^3 r_{13}^3 \\
& * r_{23}^6 u^1 - 2 m_{13}^2 r_1^4 r_{13}^2 r_{23}^6 u^1 + 6 \sin^2(f) h m_{13} p^2 r_1^6 r_{13} r_{23}^6 u^1 + 6 \sin^2(f) m_{12} m_{13} p^2 r_1^5 r_{13} r_{23}^6 \\
& * u^1 + 4 \sin^2(f) m_{13}^2 p^2 r_1^6 r_{23}^6 u^1 + \cos^2(f) m_{13}^2 p^2 r_1^6 r_{23}^6 u^1 - 2 m_{13} m_{23} r_1^4 r_{13}^3 r_{23}^5 u^1 + 6 \sin^2(f) \\
& * m_{13} m_{23} p^2 r_1^6 r_{13} r_{23}^5 u^1 + 2 m_{13} m_{23} r_1^4 r_{13}^3 r_2^2 r_{23}^3 u^1 - 2 \cos(f) m_{13} m_{23} q r_1^5 r_{13}^3 r_2 r_{23}^3 u^1 + 2 \\
& * \cos(f) m_{13} m_{23} p r_1^5 r_{13}^3 r_2 r_{23}^3 u^1 - 2 h m_{23} r_1^4 r_{13}^6 r_{23}^3 u^1 - 2 m_{12} m_{23} r_1^3 r_{13}^6 r_{23}^3 u^1 - 2 m_{13} m_{23} \\
& * r_1^4 r_{13}^5 r_{23}^3 u^1 + 4 \sin^2(f) m_{13} m_{23} p q r_1^6 r_{13}^3 r_{23}^3 u^1 - 2 \cos^2(f) m_{13} m_{23} p q r_1^6 r_{13}^3 r_{23}^3 u^1 - 2 \\
& * m_{23}^2 r_1^4 r_{13}^6 r_{23}^3 u^1 + 6 \sin^2(f) h m_{23} q^2 r_1^6 r_{13}^6 r_{23}^3 u^1 + 6 \sin^2(f) m_{12} m_{23} q^2 r_1^5 r_{13}^6 r_{23}^3 u^1 + 6 \\
& * \sin^2(f) m_{13} m_{23} q^2 r_1^6 r_{13}^5 r_{23}^3 u^1 + m_{23}^2 r_1^4 r_{13}^6 r_2^2 u^1 - 2 \cos(f) m_{23}^2 q r_1^5 r_{13}^6 r_2 u^1 + 4 \sin^2(f) \\
& * m_{23}^2 q^2 r_1^6 r_{13}^6 u^1 + \cos^2(f) m_{23}^2 q^2 r_1^6 r_{13}^6 u^1
\end{aligned}$$

(d7) -

$$r_1^2 r_{13}^6 r_{23}^6$$

Numérateur de K_{23} :

(c9) sk23:z;

 r^2

$$\begin{aligned}
& 6 \sin^2(f) h m_{13} p^2 r_1^4 r_{13} r_2^2 r_{23}^6 u^2 + 6 \sin^2(f) m_{12} m_{13} p^2 r_1^3 r_{13} r_2^2 r_{23}^6 u^2 + 4 \sin^2(f) m_{13}^2 p^2 r_1^4 \\
& * r_2^2 r_{23}^6 u^2 + \cos^2(f) m_{13}^2 p^2 r_1^4 r_2^2 r_{23}^6 u^2 + 2 \cos(f) m_{12} m_{13} p r_1^2 r_{13}^3 r_2 r_{23}^6 u^2 + 2 \cos(f) m_{13}^2 \\
& * p^3 r_1^5 r_2 r_{23}^6 u^2 - 2 h m_{12} r_1 r_{13}^6 r_{23}^6 u^2 - m_{12}^2 r_{13}^6 r_{23}^6 u^2 - 2 m_{12} m_{13} r_1 r_{13}^5 r_{23}^6 u^2 - 2 h m_{13} \\
& * p^2 r_1^4 r_{13}^3 r_{23}^6 u^2 - 2 m_{13}^2 p^2 r_1^4 r_{13}^2 r_{23}^6 u^2 + m_{13}^2 p^4 r_1^6 r_{23}^6 u^2 + 6 \sin^2(f) m_{13} m_{23} p^2 r_1^4 r_{13} \\
& * r_2^2 r_{23}^5 u^2 - 2 m_{12} m_{23} r_1 r_{13}^6 r_{23}^5 u^2 - 2 m_{13} m_{23} p^2 r_1^4 r_{13}^3 r_{23}^5 u^2 + 4 \sin^2(f) m_{13} m_{23} p q r_1^4 \\
& * r_{13}^3 r_2^2 r_{23}^3 u^2 - 2 \cos^2(f) m_{13} m_{23} p q r_1^4 r_{13}^3 r_2^2 r_{23}^3 u^2 - 2 \cos(f) m_{12} m_{23} q r_1^2 r_{13}^6 r_2 r_{23}^3 u^2 \\
& + 2 \cos(f) m_{13} m_{23} p q^2 r_1^5 r_{13}^3 r_2 r_{23}^3 u^2 - 2 \cos(f) m_{13} m_{23} p^2 q r_1^5 r_{13}^3 r_2 r_{23}^3 u^2 - 2 h m_{23} q^2 \\
& * r_1^4 r_{13}^6 r_{23}^3 u^2 - 2 m_{13} m_{23} q^2 r_1^4 r_{13}^5 r_{23}^3 u^2 + 2 m_{13} m_{23} p^2 q^2 r_1^6 r_{13}^3 r_{23}^3 u^2 - 2 m_{23}^2 q^2 r_1^4 \\
& * r_{13}^6 r_{23}^2 u^2 + 6 \sin^2(f) h m_{23} q^2 r_1^4 r_{13}^6 r_2^2 r_{23} u^2 + 6 \sin^2(f) m_{12} m_{23} q^2 r_1^3 r_{13}^6 r_2^2 r_{23} u^2 + 6 \\
& * \sin^2(f) m_{13} m_{23} q^2 r_1^4 r_{13}^5 r_2^2 r_{23} u^2 + 4 \sin^2(f) m_{23}^2 q^2 r_1^4 r_{13}^6 r_2^2 u^2 + \cos^2(f) m_{23}^2 q^2 r_1^4 r_{13}^6 \\
& * r_2^2 u^2 - 2 \cos(f) m_{23}^2 q^3 r_1^5 r_{13}^6 r_2 u^2 + m_{23}^2 q^4 r_1^6 r_{13}^6 u^2 + 6 h m_{13} r_1^4 r_{13} r_2^2 r_{23}^6 u^1 + 6 m_{12} \\
& * m_{13} r_1^3 r_{13} r_2^2 r_{23}^6 u^1 + 4 m_{13}^2 r_1^4 r_2^2 r_{23}^6 u^1 + 12 \cos(f) h m_{13} p r_1^5 r_{13} r_2 r_{23}^6 u^1 + 12 \cos(f) m_{12} \\
& * m_{13} p r_1^4 r_{13} r_2 r_{23}^6 u^1 + 8 \cos(f) m_{13}^2 p r_1^5 r_2 r_{23}^6 u^1 - 2 h m_{13} r_1^4 r_{13}^3 r_{23}^6 u^1 - 2 m_{12} m_{13} r_1^3 \\
& * r_{13}^3 r_{23}^6 u^1 - 2 m_{13}^2 r_1^4 r_{13}^2 r_{23}^6 u^1 + 6 \cos^2(f) h m_{13} p^2 r_1^6 r_{13} r_{23}^6 u^1 + 6 \cos^2(f) m_{12} m_{13} p^2 r_1^5 \\
& * r_{13} r_{23}^6 u^1 + \sin^2(f) m_{13}^2 p^2 r_1^6 r_{23}^6 u^1 + 4 \cos^2(f) m_{13}^2 p^2 r_1^6 r_{23}^6 u^1 + 6 m_{13} m_{23} r_1^4 r_{13} r_2^2 r_{23}^5 \\
& * u^1 + 12 \cos(f) m_{13} m_{23} p r_1^5 r_{13} r_2 r_{23}^5 u^1 - 2 m_{13} m_{23} r_1^4 r_{13}^3 r_{23}^5 u^1 + 6 \cos^2(f) m_{13} m_{23} p^2 r_1^6 \\
& * r_{13} r_{23}^5 u^1 - 4 m_{13} m_{23} r_1^4 r_{13}^3 r_2^2 r_{23}^3 u^1 + 4 \cos(f) m_{13} m_{23} q r_1^5 r_{13}^3 r_2 r_{23}^3 u^1 - 4 \cos(f) m_{13} \\
& * m_{23} p r_1^5 r_{13}^3 r_2 r_{23}^3 u^1 - 2 h m_{23} r_1^4 r_{13}^6 r_{23}^3 u^1 - 2 m_{12} m_{23} r_1^3 r_{13}^6 r_{23}^3 u^1 - 2 m_{13} m_{23} r_1^4 r_{13}^5 \\
& * r_{23}^3 u^1 - 2 \sin^2(f) m_{13} m_{23} p q r_1^6 r_{13}^3 r_{23}^3 u^1 + 4 \cos^2(f) m_{13} m_{23} p q r_1^6 r_{13}^3 r_{23}^3 u^1 - 2 m_{23}^2 r_1^4 \\
& * r_{13}^6 r_{23}^2 u^1 + 6 h m_{23} r_1^4 r_{13}^6 r_2^2 r_{23} u^1 + 6 m_{12} m_{23} r_1^3 r_{13}^6 r_2^2 r_{23} u^1 + 6 m_{13} m_{23} r_1^4 r_{13}^5 r_2^2 r_{23} \\
& * u^1 - 12 \cos(f) h m_{23} q r_1^5 r_{13}^6 r_2 r_{23} u^1 - 12 \cos(f) m_{12} m_{23} q r_1^4 r_{13}^6 r_2 r_{23} u^1 - 12 \cos(f) m_{13} \\
& * m_{23} q r_1^5 r_{13}^5 r_2 r_{23} u^1 + 6 \cos^2(f) h m_{23} q^2 r_1^6 r_{13}^6 r_{23} u^1 + 6 \cos^2(f) m_{12} m_{23} q^2 r_1^5 r_{13}^6 r_{23} u^1 \\
& + 6 \cos^2(f) m_{13} m_{23} q^2 r_1^6 r_{13}^5 r_{23} u^1 + 4 m_{23}^2 r_1^4 r_{13}^6 r_2^2 u^1 - 8 \cos(f) m_{23}^2 q r_1^5 r_{13}^6 r_2 u^1 \\
& + \sin^2(f) m_{23}^2 q^2 r_1^6 r_{13}^6 u^1 + 4 \cos^2(f) m_{23}^2 q^2 r_1^6 r_{13}^6 u^1
\end{aligned}$$

(d9) -

$$r_1^2 r_{13}^6 r_{23}^6$$

Numérateur de K_{24} :

(c11) sk24:=;

 r_2^2

$$\begin{aligned}
& 6 \sin^2(f) h m_{13} p^2 r_1^4 r_{13} r_2^2 r_{23}^6 u_2 + 6 \sin^2(f) m_{12} m_{13} p^2 r_1^3 r_{13} r_2^2 r_{23}^6 u_2 + 4 \sin^2(f) m_{13}^2 p^2 r_1^4 \\
& * r_2^2 r_{23}^6 u_2 + \cos^2(f) m_{13}^2 p^2 r_1^4 r_2^2 r_{23}^6 u_2 + 2 \cos(f) m_{12} m_{13} p r_1^2 r_{13}^3 r_2 r_{23}^6 u_2 + 2 \cos(f) m_{13}^2 \\
& * p^3 r_1^5 r_2 r_{23}^6 u_2 - 2 h m_{12} r_1 r_{13}^6 r_{23}^6 u_2 - m_{12}^2 r_{13}^6 r_{23}^6 u_2 - 2 m_{12} m_{13} r_1 r_{13}^5 r_{23}^6 u_2 - 2 h m_{13} \\
& * p^2 r_1^4 r_{13}^3 r_{23}^6 u_2 - 2 m_{13}^2 p^2 r_1^4 r_{13}^3 r_{23}^6 u_2 + m_{13}^2 p^4 r_1^6 r_{23}^6 u_2 + 6 \sin^2(f) m_{13} m_{23} p^2 r_1^4 r_{13} \\
& * r_2^2 r_{23}^5 u_2 - 2 m_{12} m_{23} r_1 r_{13}^6 r_{23}^5 u_2 - 2 m_{13} m_{23} p^2 r_1^4 r_{13}^3 r_{23}^5 u_2 + 4 \sin^2(f) m_{13} m_{23} p q r_1^4 \\
& * r_{13}^3 r_2^2 r_{23}^3 u_2 - 2 \cos^2(f) m_{13} m_{23} p q r_1^4 r_{13}^3 r_2^2 r_{23}^3 u_2 - 2 \cos(f) m_{12} m_{23} q r_1^2 r_{13}^6 r_2 r_{23}^3 u_2 \\
& + 2 \cos(f) m_{13} m_{23} p q^2 r_1^3 r_{13}^3 r_2 r_{23}^3 u_2 - 2 \cos(f) m_{13} m_{23} p^2 q r_1^5 r_{13}^3 r_2 r_{23}^3 u_2 - 2 h m_{23} q^2 \\
& * r_1^4 r_{13}^6 r_{23}^3 u_2 - 2 m_{13} m_{23} q^2 r_1^4 r_{13}^3 r_{23}^3 u_2 + 2 m_{13} m_{23} p^2 q^2 r_1^6 r_{13}^3 r_{23}^3 u_2 - 2 m_{23}^2 q^2 r_1^4 \\
& * r_{13}^6 r_{23}^2 u_2 + 6 \sin^2(f) h m_{23} q^2 r_1^4 r_{13}^6 r_2^2 r_{23} u_2 + 6 \sin^2(f) m_{12} m_{23} q^2 r_1^3 r_{13}^6 r_2^2 r_{23} u_2 + 6 \\
& * \sin^2(f) m_{13} m_{23} q^2 r_1^4 r_{13}^5 r_2^2 r_{23} u_2 + 4 \sin^2(f) m_{23}^2 q^2 r_1^4 r_{13}^6 r_2^2 u_2 + \cos^2(f) m_{23}^2 q^2 r_1^4 r_{13}^6 \\
& * r_2^2 u_2 - 2 \cos(f) m_{23}^2 q^3 r_1^5 r_{13}^6 r_2 u_2 + m_{23}^2 q^4 r_1^6 r_{13}^6 u_2 + m_{13}^2 r_1^4 r_2^2 r_{23}^6 u_1 + 2 \cos(f) m_{13}^2 \\
& * p r_1^5 r_2 r_{23}^6 u_1 - 2 h m_{13} r_1^4 r_{13}^3 r_{23}^6 u_1 - 2 m_{12} m_{13} r_1^3 r_{13}^3 r_{23}^6 u_1 - 2 m_{13}^2 r_1^4 r_{13}^2 r_{23}^6 u_1 + 6 \\
& * \sin^2(f) h m_{13} p^2 r_1^6 r_{13} r_{23}^6 u_1 + 6 \sin^2(f) m_{12} m_{13} p^2 r_1^5 r_{13} r_{23}^6 u_1 + 4 \sin^2(f) m_{13}^2 p^2 r_1^6 r_{23}^6 u_1 \\
& + \cos^2(f) m_{13}^2 p^2 r_1^6 r_{23}^6 u_1 - 2 m_{13} m_{23} r_1^4 r_{13}^3 r_{23}^5 u_1 + 6 \sin^2(f) m_{13} m_{23} p^2 r_1^6 r_{13} r_{23}^5 u_1 + 2 \\
& * m_{13} m_{23} r_1^4 r_{13}^3 r_2^2 r_{23}^3 u_1 - 2 \cos(f) m_{13} m_{23} q r_1^5 r_{13}^3 r_2 r_{23}^3 u_1 + 2 \cos(f) m_{13} m_{23} p r_1^5 r_{13}^3 \\
& * r_2 r_{23}^3 u_1 - 2 h m_{23} r_1^4 r_{13}^6 r_{23}^3 u_1 - 2 m_{12} m_{23} r_1^3 r_{13}^6 r_{23}^3 u_1 - 2 m_{13} m_{23} r_1^4 r_{13}^5 r_{23}^3 u_1 + 4 \\
& * \sin^2(f) m_{13} m_{23} p q r_1^6 r_{13}^3 r_{23}^3 u_1 - 2 \cos^2(f) m_{13} m_{23} p q r_1^6 r_{13}^3 r_{23}^3 u_1 - 2 m_{23}^2 r_1^4 r_{13}^6 r_{23}^2 \\
& * u_1 + 6 \sin^2(f) h m_{23} q^2 r_1^6 r_{13}^6 r_{23} u_1 + 6 \sin^2(f) m_{12} m_{23} q^2 r_1^5 r_{13}^6 r_{23} u_1 + 6 \sin^2(f) m_{13} m_{23} q^2 \\
& * r_1^6 r_{13}^5 r_{23} u_1 + m_{23}^2 r_1^4 r_{13}^6 r_2^2 u_1 - 2 \cos(f) m_{23}^2 q r_1^5 r_{13}^6 r_2 u_1 + 4 \sin^2(f) m_{23}^2 q^2 r_1^6 r_{13}^6 u_1 \\
& + \cos^2(f) m_{23}^2 q^2 r_1^6 r_{13}^6 u_1
\end{aligned}$$

(d11) -

$$r_1^2 r_{13}^6 r_{23}^6$$

Numérateur de K_{34} :

(c13) sk34: %;

r_2^2

$$\begin{aligned}
 & \sin^2(f) m_{13}^2 p^2 r_1^4 r_2^2 r_{23}^6 u_2 + \cos^2(f) m_{13}^2 p^2 r_1^4 r_2^2 r_{23}^6 u_2 + 2 \cos(f) m_{12} m_{13} p r_1^2 r_{13}^3 r_2 r_{23}^6 \\
 & * u_2 + 2 \cos(f) m_{13}^2 p^3 r_1^5 r_2 r_{23}^6 u_2 + m_{12}^2 r_{13}^6 r_{23}^6 u_2 + 2 m_{12} m_{13} p^2 r_1^3 r_{13}^3 r_{23}^6 u_2 + m_{13}^2 p^4 r_1^6 \\
 & * r_{23}^6 u_2 - 2 \sin^2(f) m_{13} m_{23} p q r_1^4 r_{13}^3 r_2^2 r_{23}^3 u_2 - 2 \cos^2(f) m_{13} m_{23} p q r_1^4 r_{13}^3 r_2^2 r_{23}^3 u_2 - 2 \\
 & * \cos(f) m_{12} m_{23} q r_1^2 r_{13}^6 r_2 r_{23}^3 u_2 + 2 \cos(f) m_{13} m_{23} p^2 q r_1^5 r_{13}^3 r_2 r_{23}^3 u_2 - 2 \cos(f) m_{13} m_{23} \\
 & * p^2 q r_1^5 r_{13}^3 r_2 r_{23}^3 u_2 + 2 m_{12} m_{23} q^2 r_1^3 r_{13}^6 r_{23}^3 u_2 + 2 m_{13} m_{23} p^2 q^2 r_1^6 r_{13}^3 r_{23}^3 u_2 + \sin^2(f) \\
 & * m_{23}^2 q^2 r_1^4 r_{13}^6 r_2^2 u_2 + \cos^2(f) m_{23}^2 q^2 r_1^4 r_{13}^6 r_2^2 u_2 - 2 \cos(f) m_{23}^2 q^3 r_1^5 r_{13}^6 r_2 u_2 + m_{23}^2 q^4 \\
 & * r_1^6 r_{13}^6 u_2 + 6 h m_{13} r_1^4 r_{13} r_2^2 r_{23}^6 u_1 + 6 m_{12} m_{13} r_1^3 r_{13} r_2^2 r_{23}^6 u_1 + 4 m_{13}^2 r_1^4 r_2^2 r_{23}^6 u_1 + 12 \\
 & * \cos(f) h m_{13} p r_1^5 r_{13} r_2 r_{23}^6 u_1 + 12 \cos(f) m_{12} m_{13} p r_1^4 r_{13} r_2 r_{23}^6 u_1 + 8 \cos(f) m_{13}^2 p r_1^5 r_2 \\
 & * r_{23}^6 u_1 - 4 h m_{13} r_1^4 r_{13}^3 r_{23}^6 u_1 - 4 m_{12} m_{13} r_1^3 r_{13}^3 r_{23}^6 u_1 - 4 m_{13}^2 r_1^4 r_{13}^2 r_{23}^6 u_1 + 6 \sin^2(f) h \\
 & * m_{13} p^2 r_1^6 r_{13} r_{23}^6 u_1 + 6 \cos^2(f) h m_{13} p^2 r_1^6 r_{13} r_{23}^6 u_1 + 6 \sin^2(f) m_{12} m_{13} p^2 r_1^5 r_{13} r_{23}^6 u_1 + 6 \\
 & * \cos^2(f) m_{12} m_{13} p^2 r_1^5 r_{13} r_{23}^6 u_1 + 4 \sin^2(f) m_{13}^2 p^2 r_1^6 r_{23}^6 u_1 + 4 \cos^2(f) m_{13}^2 p^2 r_1^6 r_{23}^6 u_1 + 6 \\
 & * m_{13} m_{23} r_1^4 r_{13} r_2^2 r_{23}^5 u_1 + 12 \cos(f) m_{13} m_{23} p r_1^5 r_{13} r_2 r_{23}^5 u_1 - 4 m_{13} m_{23} r_1^4 r_{13}^3 r_{23}^5 u_1 + 6 \\
 & * \sin^2(f) m_{13} m_{23} p^2 r_1^6 r_{13} r_{23}^5 u_1 + 6 \cos^2(f) m_{13} m_{23} p^2 r_1^6 r_{13} r_{23}^5 u_1 - 4 m_{13} m_{23} r_1^4 r_{13}^3 r_2^2 \\
 & * r_{23}^3 u_1 + 4 \cos(f) m_{13} m_{23} q r_1^5 r_{13}^3 r_2 r_{23}^3 u_1 - 4 \cos(f) m_{13} m_{23} p r_1^5 r_{13}^3 r_2 r_{23}^3 u_1 - 4 h m_{23} \\
 & * r_1^4 r_{13}^6 r_{23}^3 u_1 - 4 m_{12} m_{23} r_1^3 r_{13}^6 r_{23}^3 u_1 - 4 m_{13} m_{23} r_1^4 r_{13}^5 r_{23}^3 u_1 + 4 \sin^2(f) m_{13} m_{23} p q r_1^6 \\
 & * r_{13}^3 r_{23}^3 u_1 + 4 \cos^2(f) m_{13} m_{23} p q r_1^6 r_{13}^3 r_{23}^3 u_1 - 4 m_{23}^2 r_1^4 r_{13}^6 r_{23}^2 u_1 + 6 h m_{23} r_1^4 r_{13}^6 r_{23}^2 \\
 & * r_{23} u_1 + 6 m_{12} m_{23} r_1^3 r_{13}^6 r_2^2 r_{23} u_1 + 6 m_{13} m_{23} r_1^4 r_{13}^5 r_2^2 r_{23} u_1 - 12 \cos(f) h m_{23} q r_1^5 r_{13}^6 r_2 \\
 & * r_{23} u_1 - 12 \cos(f) m_{12} m_{23} q r_1^4 r_{13}^6 r_2 r_{23} u_1 - 12 \cos(f) m_{13} m_{23} q r_1^5 r_{13}^5 r_2 r_{23} u_1 + 6 \sin^2(f) h \\
 & * m_{23} q^2 r_1^6 r_{13}^6 r_{23} u_1 + 6 \cos^2(f) h m_{23} q^2 r_1^6 r_{13}^6 r_{23} u_1 + 6 \sin^2(f) m_{12} m_{23} q^2 r_1^5 r_{13}^6 r_{23} u_1 + 6 \\
 & * \cos^2(f) m_{12} m_{23} q^2 r_1^5 r_{13}^6 r_{23} u_1 + 6 \sin^2(f) m_{13} m_{23} q^2 r_1^6 r_{13}^5 r_{23} u_1 + 6 \cos^2(f) m_{13} m_{23} q^2 r_1^6 \\
 & * r_{13}^5 r_{23} u_1 + 4 m_{23}^2 r_1^4 r_{13}^6 r_2^2 u_1 - 8 \cos(f) m_{23}^2 q r_1^5 r_{13}^6 r_2 u_1 + 4 \sin^2(f) m_{23}^2 q^2 r_1^6 r_{13}^6 u_1 \\
 & + 4 \cos^2(f) m_{23}^2 q^2 r_1^6 r_{13}^6 u_1
 \end{aligned}$$

(d13) -

$$r_1^2 r_{13}^6 r_{23}^6$$

Les expressions ci-dessus sont celles utilisées dans les analyses des courbures dans des cas particuliers, développées dans le quatrième chapitre.

ANNEXE C

Courbures dans le cas planétaire

§ C.1. Symboles de Christoffel dans le cas planétaire:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{11}^1 &= -\frac{r_2}{2r_1(kr_1 + r_2 + hr_1r_2)} & \Gamma_{11}^3 &= \frac{r_1}{2r_2(kr_1 + r_2 + hr_1r_2)} \\
 \Gamma_{12}^2 &= -\frac{2kr_1 + r_2 + 2hr_1r_2}{2r_1(kr_1 + r_2 + hr_1r_2)} & \Gamma_{13}^1 &= -\frac{kr_1}{2r_2(kr_1 + r_2 + hr_1r_2)} \\
 \Gamma_{13}^3 &= -\frac{r_2}{2r_1(kr_1 + r_2 + hr_1r_2)} & \Gamma_{14}^4 &= -\frac{r_2}{2r_1(kr_1 + r_2 + hr_1r_2)} \\
 (C.1) \quad \Gamma_{22}^1 &= -\frac{r_1(2kr_1 + r_2 + 2hr_1r_2)}{2(kr_1 + r_2 + hr_1r_2)} & \Gamma_{22}^3 &= \frac{r_1^3}{2r_2(kr_1 + r_2 + hr_1r_2)} \\
 \Gamma_{23}^2 &= -\frac{kr_1}{2r_2(kr_1 + r_2 + hr_1r_2)} & \Gamma_{33}^1 &= -\frac{kr_2}{2r_1(kr_1 + r_2 + hr_1r_2)} \\
 \Gamma_{33}^3 &= -\frac{kr_1}{2r_2(kr_1 + r_2 + hr_1r_2)} & \Gamma_{34}^4 &= \frac{kr_1 + 2r_2 + 2hr_1r_2}{2r_2(kr_1 + r_2 + hr_1r_2)} \\
 \Gamma_{44}^1 &= \frac{kr_2^3}{2r_1(kr_1 + r_2 + hr_1r_2)} & \Gamma_{44}^3 &= -\frac{r_2(kr_1 + 2r_2 + 2hr_1r_2)}{2(kr_1 + r_2 + hr_1r_2)}
 \end{aligned}$$

§ C.2. Tenseurs de courbure dans le cas planétaire:

Tenseur de Riemann-Christoffel

$$R_{1212} = -\frac{2hr_2^4 + 2kr_2^3 + kr_1^3}{4r_2^3(kr_1 + r_2 + hr_1r_2)}$$

$$R_{1223} = -\frac{3kr_1}{4r_2(kr_1 + r_2 + hr_1r_2)}$$

$$R_{1313} = -\frac{k[r_2^3(2kr_1 + r_2 + 2hr_1r_2) + r_1^3(kr_1 + 2r_2 + 2hr_1r_2)]}{2r_1^3r_2^3(kr_1 + r_2 + hr_1r_2)}$$

$$R_{1414} = -\frac{k[2r_2^3(2kr_1 + r_2 + 2hr_1r_2) - r_1^3(kr_1 + 2r_2 + 2hr_1r_2)]}{4r_1^3r_2^3(kr_1 + r_2 + hr_1r_2)}$$

$$(C.2) \quad R_{1434} = \frac{3k^2r_2}{4r_1(kr_1 + r_2 + hr_1r_2)}$$

$$R_{2323} = \frac{k[2r_2^3(2kr_1 + r_2 + 2hr_1r_2) - 2r_1^3(kr_1 + 2r_2 + 2hr_1r_2)]}{4r_1^3r_2^3(kr_1 + r_2 + hr_1r_2)}$$

$$R_{2424} = \frac{k[r_2^3(2kr_1 + r_2 + 2hr_1r_2) + r_1^3(kr_1 + 2r_2 + 2hr_1r_2)]}{4r_1r_2^3(kr_1 + r_2 + hr_1r_2)}$$

$$R_{3434} = -\frac{k^2(r_2^3 + 2hr_1^4 + 2r_1^3)}{4r_1^3r_2^3(kr_1 + r_2 + hr_1r_2)}$$

Tenseur de Ricci dans le cas planétaire

$$\begin{aligned}
R_{11} &= -\frac{r_2^3(5kr_1 + 2r_2 + 5hr_1r_2) + r_1^3(kr_1 + r_2 + hr_1r_2)}{2r_1^2r_2^2(kr_1 + r_2 + hr_1r_2)^2} \\
R_{13} &= \frac{3k}{2(kr_1 + r_2 + hr_1r_2)^2} \\
(C.3) \quad R_{22} &= \frac{r_2^3 - r_1^3}{2r_2^2(kr_1 + r_2 + hr_1r_2)} \\
R_{33} &= -\frac{k[r_2^3(kr_1 + r_2 + hr_1r_2) + r_1^3(2kr_1 + 5r_2 + 5hr_1r_2)]}{2r_1^2r_2^2(kr_1 + r_2 + hr_1r_2)^2} \\
R_{44} &= -\frac{k(r_2^3 - r_1^3)}{2r_1^2(kr_1 + r_2 + hr_1r_2)}
\end{aligned}$$

§ C.3. Courbure scalaire et courbures riemanniennes dans le cas planétaireCourbure scalaire:

$$(C.4) \quad R = -\frac{3[r_2^3(2kr_1 + r_2 + 2hr_1r_2) + r_1^3(kr_1 + 2r_2 + 2hr_1r_2)]}{2r_1r_2(kr_1 + r_2 + hr_1r_2)^3}$$

Courbures riemanniennes dans le cas planétaire

$$K_{12} = -\frac{2hr_2^4 + 2kr_2^3 + kr_1^3}{4r_2(kr_1 + r_2 + hr_1r_2)^3}$$

$$\begin{aligned}
K_{13} &= -\frac{r_2^3(2kr_1 + r_2 + 2hr_1r_2) + r_1^3(kr_1 + 2r_2 + 2hr_1r_2)}{2r_1r_2(kr_1 + r_2 + hr_1r_2)^3} \\
K_{14} &= -\frac{2r_2^3(2kr_1 + r_2 + 2hr_1r_2) - r_1^3(kr_1 + 2r_2 + 2hr_1r_2)}{4r_1r_2(kr_1 + r_2 + hr_1r_2)^3} \\
(C.5) \quad K_{23} &= \frac{r_2^3(2kr_1 + r_2 + 2hr_1r_2) - 2r_1^3(kr_1 + 2r_2 + 2hr_1r_2)}{4r_1r_2(kr_1 + r_2 + hr_1r_2)^3} \\
K_{24} &= \frac{r_2^3(2kr_1 + r_2 + 2hr_1r_2) + r_1^3(kr_1 + 2r_2 + 2hr_1r_2)}{4r_1r_2(kr_1 + r_2 + hr_1r_2)^3} \\
K_{34} &= -\frac{2hr_1^4 + r_2^3 + 2r_1^3}{4r_1(kr_1 + r_2 + hr_1r_2)^3}
\end{aligned}$$

§ C.4. Métrique de Sasaki dans le cas planétaire

$$\begin{aligned}
G_{11} &= g_{11} + \phi^2 g_{44} (\Gamma_1^1)^2 + R_1^2 [g_{33} (\Gamma_1^3)^2 + g_{11} (\Gamma_1^1)^2] + 2R_1R_2 (g_{33} \Gamma_1^1 \Gamma_1^3 + \\
&\quad + g_{11} \Gamma_1^1 \Gamma_1^3) + R_2^2 [g_{33} (\Gamma_1^1)^2 + g_{11} (\Gamma_1^3)^2] + \phi^2 g_{22} (\Gamma_1^2)^2 \\
G_{12} &= R_1 \phi_1 (g_{33} \Gamma_1^3 \Gamma_2^3 + g_{11} \Gamma_1^1 \Gamma_2^1) + \phi_1 R_2 (g_{33} \Gamma_1^1 \Gamma_2^3 + g_{11} \Gamma_1^3 \Gamma_2^1) + \\
&\quad + \phi_1 R_2 g_{22} \Gamma_1^2 \Gamma_1^3 + R_1 \phi_1 g_{22} (\Gamma_1^2)^2 \\
G_{13} &= \phi^2 g_{44} \Gamma_1^1 \Gamma_3^4 + R_1 R_2 (g_{33} \Gamma_1^3 \Gamma_1^3 + g_{11} \Gamma_1^1 \Gamma_3^3) + R_2^2 (g_{33} \Gamma_1^1 \Gamma_1^3 + \\
&\quad + g_{11} \Gamma_1^3 \Gamma_3^3) + R_1^2 (g_{33} \Gamma_1^1 \Gamma_1^3 + g_{11} \Gamma_1^1 \Gamma_1^3) + R_1 R_2 [g_{33} (\Gamma_1^1)^2 + \\
&\quad + g_{11} (\Gamma_1^3)^2] + \phi^2 g_{22} \Gamma_1^2 \Gamma_1^3
\end{aligned}$$

$$G_{14} = R_2 \phi_2 g_{44} \Gamma_{11}^1 \Gamma_{34}^4 + R_1 \phi_2 g_{44} (\Gamma_{11}^1)^2 + R_1 \phi_2 (g_{33} \Gamma_{11}^3 \Gamma_{44}^3 + g_{11} \Gamma_{11}^1 \Gamma_{44}^1) + \\ + R_2 \phi_2 (g_{33} \Gamma_{11}^1 \Gamma_{44}^3 + g_{11} \Gamma_{13}^1 \Gamma_{44}^1)$$

$$G_{22} = g_{22} + \phi_1^2 [g_{33} (\Gamma_{22}^3)^2 + g_{11} (\Gamma_{22}^1)^2] + R_2^2 g_{22} (\Gamma_{13}^1)^2 + 2 R_1 R_2 g_{22} \Gamma_{12}^2 \Gamma_{13}^1 + \\ + R_1^2 g_{22} (\Gamma_{12}^2)^2$$

$$G_{23} = \phi_1 R_2 (g_{33} \Gamma_{13}^1 \Gamma_{22}^3 + g_{11} \Gamma_{22}^1 \Gamma_{33}^1) + R_1 \phi_1 (g_{33} \Gamma_{11}^1 \Gamma_{22}^3 + g_{11} \Gamma_{13}^1 \Gamma_{22}^1) + \\ + \phi_1 R_2 g_{22} (\Gamma_{13}^1)^2 + R_1 \phi_1 g_{22} \Gamma_{12}^2 \Gamma_{13}^1$$

$$G_{24} = \phi_1 \phi_2 (g_{33} \Gamma_{22}^3 \Gamma_{44}^3 + g_{11} \Gamma_{22}^1 \Gamma_{44}^1)$$

$$G_{33} = g_{33} + \phi_2^2 g_{44} (\Gamma_{34}^4)^2 + R_2^2 [g_{33} (\Gamma_{13}^1)^2 + g_{11} (\Gamma_{33}^1)^2] + 2 R_1 R_2 (g_{33} \Gamma_{11}^1 \Gamma_{13}^1 + \\ + g_{11} \Gamma_{13}^1 \Gamma_{33}^1) + R_1^2 [g_{33} (\Gamma_{11}^1)^2 + g_{11} (\Gamma_{13}^1)^2] + \phi_1^2 g_{22} (\Gamma_{13}^1)^2$$

$$G_{34} = R_2 \phi_2 g_{44} (\Gamma_{34}^4)^2 + R_1 \phi_2 g_{44} \Gamma_{11}^1 \Gamma_{34}^4 + R_2 \phi_2 (g_{33} \Gamma_{13}^1 \Gamma_{44}^3 + g_{11} \Gamma_{33}^1 \Gamma_{44}^1) + \\ + R_1 \phi_2 (g_{33} \Gamma_{11}^1 \Gamma_{44}^3 + g_{11} \Gamma_{13}^1 \Gamma_{44}^1)$$

$$G_{44} = g_{44} + R_2^2 g_{44} (\Gamma_{34}^4)^2 + 2 R_1 R_2 g_{44} \Gamma_{11}^1 \Gamma_{34}^4 + R_1^2 g_{44} (\Gamma_{11}^1)^2 + \\ + \phi_2^2 [g_{33} (\Gamma_{44}^3)^2 + g_{11} (\Gamma_{44}^1)^2]$$

$$G_{15} = g_{11} (R_2 \Gamma_{13}^1 + R_1 \Gamma_{11}^1)$$

$$G_{16} = g_{22} \phi_1 \Gamma_{12}^2$$

$$G_{17} = g_{33} (R_2 \Gamma_{11}^1 + R_1 \Gamma_{13}^1)$$

$$G_{18} = g_{44} \phi_2 \Gamma_1^1$$

$$G_{25} = g_{11} \phi_1 \Gamma_2^1$$

$$G_{26} = g_{22}(R_2 \Gamma_1^1 + R_1 \Gamma_1^2)$$

$$G_{27} = g_{33} \phi_1 \Gamma_2^3$$

$$G_{28} = 0$$

$$G_{35} = g_{11}(R_2 \Gamma_3^1 + R_1 \Gamma_1^3)$$

$$G_{36} = g_{22} \phi_1 \Gamma_1^1$$

$$G_{37} = g_{33}(R_2 \Gamma_1^1 + R_1 \Gamma_1^1)$$

$$G_{38} = g_{44} \phi_2 \Gamma_3^4$$

$$G_{45} = g_{11} \phi_2 \Gamma_4^1$$

$$G_{46} = 0$$

$$G_{47} = g_{33} \phi_2 \Gamma_4^3$$

$$G_{48} = g_{44} (R_2 \Gamma_3^4 + R_1 \Gamma_1^1)$$

$$G_{55} = g_{11}$$

$$G_{66} = g_{22}$$

$$G_{77} = g_{33}$$

$$G_{88} = g_{44}$$

Conclusion

Le sujet de cette thèse concerne l'étude des systèmes dynamiques conservatifs en général et du problème plan des trois corps en particulier, par des méthodes spécifiques de la géométrie riemannienne.

Avec une métrique adéquate dans l'espace de configuration (métrique de Maupertuis) et une autre dans l'espace des phases (métrique de Sasaki), nous avons proposé une *méthode de calcul* des tenseurs de courbure et des courbures riemanniennes. Nous avons utilisé le logiciel de calcul formel Macsyma, ce qui nous a permis d'effectuer des calculs mathématiques très compliqués qui ne sont pas faisables à la main. C'est la puissance des micro-ordinateurs qui s'est accrue énormément depuis quelques années, qui a permis de mener à bien ces calculs.

Cette méthode de calcul est efficace puisqu'elle permet d'obtenir les expressions analytiques (parfois trop encombrantes!) des courbures.

Nous avons appliqué cette méthode dans le *problème plan des trois corps*, où nous avons calculé dans l'espace de configuration, muni de la métrique de Maupertuis, *les symboles de Christoffel, les tenseurs de courbure et les courbures riemanniennes principales*, pour une fonction de force quelconque.

Nous avons calculé aussi, dans l'espace des phases du problème plan des trois corps, muni de la métrique de Sasaki, les expressions analytiques du tenseur métrique et

les courbures riemanniennes. Mais les expressions que nous avons obtenues pour ces courbures sont trop encombrantes et inexploitable analytiquement. Nous ne les avons donc pas incluses dans ce travail. Elles peuvent servir pour une exploitation numérique. Nous avons donné un exemple d'un tel calcul numérique en un point particulier de l'espace des phases.

C'est pourquoi nous avons concentré nos efforts sur l'analyse des courbures dans l'espace des configurations, muni de la métrique de Maupertuis.

Nous avons fait ainsi une analyse des courbures dans des cas particuliers remarquables du problème plan des trois corps. Cette analyse nous a permis de tirer des conclusions sur *les signes des courbures et sur la stabilité des configurations étudiées*. Voilà *quelques résultats* obtenus:

1. Dans le cas *planétaire isocèle*, nous avons trouvé des conditions dans lesquelles les courbures riemanniennes principales s'annulent. Nous avons montré aussi que dans les mêmes conditions, *la courbure scalaire* s'annule. L'étude du tenseur de Ricci montre qu'il n'est pas diagonal et qu'il n'existe pas de liaison directe entre ce tenseur et les courbures principales. Pourtant nous avons étudié les conditions dans lesquelles il est négatif.

2. Dans le cas du *triangle équilatéral* avec les trois masses égales, nous avons trouvé une inégalité qui assure le signe négatif pour toutes les courbures riemanniennes principales. Cela entraîne l'instabilité de cette configuration. Nous avons prouvé, par ailleurs, que si les valeurs propres du tenseur de Ricci sont négatives, alors les courbures riemanniennes sont négatives. La courbure scalaire est aussi négative.

Sous certaines conditions, les courbures riemanniennes gardent un signe négatif, même si les masses sont différentes.

3. La présence de courbures de signes opposés dans le cas rectiligne, montre qu'on ne peut pas obtenir des conditions qui assurent la stabilité d'une telle configuration.

On remarque que dans tous les cas considérés ci-dessus, nous n'avons pas obtenu de conditions qui assurent la stabilité. L'impression qui se dégage est donc que l'instabilité prédomine dans le problème plan des trois corps.

La mise en oeuvre de cette méthode géométrique et l'étude des courbures et de la stabilité dans les cas particuliers ci-dessus nous ont demandé beaucoup de travail, mais le sujet n'est pas épuisé. Il peut être prolongé dans les directions suivantes:

- Etudier le problème ouvert, signalé à la fin du Chapitre IV, à savoir: peut-on raffiner les critères concernant la courbure, dans le cas où le signe de cette courbure n'est pas constant le long d'une trajectoire, pour décider du degré d'instabilité?
- Etudier des courbures et de la stabilité d'autres configurations particulières du problème plan des trois corps.
- Exploiter numériquement les expressions analytiques des courbures que nous avons obtenues avec la métrique de Maupertuis par Macsyma, afin de détecter les régions de l'espace des configurations où les courbures gardent un signe constant (là où l'étude ne peut pas être faite analytiquement).

- Envisager un traitement numérique des expressions des courbures de l'espace des phases muni de la métrique de Sasaki. Mais ce travail ne peut se faire de façon efficace que sur un ordinateur puissant avec une grande mémoire.
- Etudier dans un espace riemannien les conditions qui permettent de déduire le signe de la courbure de l'espace à partir des signes des courbures riemanniennes principales.
- Etudier par cette méthode la stabilité des trajectoires d'autres systèmes dynamiques conservatifs.

Références bibliographiques

- [1] ABRAHAM, R. et MARSDEN, J. 1978. *Foundations of Mechanics*, Benjamin Cummings, London.
- [2] ABRAHAM, R., MARSDEN, J. et RATTI, T. 1983. *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*, Addison-Wesley Publ. Comp., Inc. London, Amsterdam, Don Mills, Sydney, Tokyo.
- [3] ADLER, R., BAZIN, M. et SCHIFFER, M. 1965. *Introduction to General Relativity*, McGraw-Hill, New York.
- [4] ALBOUY, A. 1992. Variétés intégrales du problème des n corps, *Thèse de doctorat de l'Université Paris 7*.
- [5] ANDOYER, H. 1923. *Cours de mécanique céleste*, Gauthier-Villars, Paris.
- [6] ANOSOV, D.V. 1967. Geodesic Flows on Closed Riemannian Manifolds of Negative Curvature, *Proc. Steklov Math. Inst.* 90, 1-235.
- [7] ANOSOV, D.V. et SINAI Y. G. 1967. Some Smooth Ergodic Systems, *Russian Math. Surv.* 22, 103-168.
- [8] ARNOLD, V. I. et AVEZ, A. 1967. *Problèmes érgodiques de la mécanique classique*, Gauthier-Villars, Paris.
- [9] ARNOLD, V. I. 1976. *Les méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Editions MIR, Moscou.
- [10] ARNOLD, V. I. 1983. *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, New York.

-
- [11] ARNOLD, V. I. (Ed.) 1988. *Encycl. of Math. Sci.* vol 3, *Dynamical Systems III*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- [12] ARNOLD, V. I. (Ed.), 1994. *Encycl. of Math. Sci.* vol 5, *Dynamical Systems V*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- [13] ASO, K. 1981. Notes on Some Properties of the Sectional Curvature of the Tangent Bundle, *Yokohama Math. J.* 29, 1-5.
- [14] AVEZ, A. et BUZZANCA, C. 1976. Flusso geodetico sul fibrato unitario tangente di una superficie, *Rend. Circ. Matem Palermo Serie II*, Tomo XXV, 176-182.
- [15] BALESCU, R. 1975. *Equilibrium and nonequilibrium in mechanics*, Wiley, New York.
- [16] BARBOSU, M. 1993. La métrique de Maupertuis dans l'étude du problème plan des trois corps, *Prepr. Univ. Babes-Bolyai*, 1, 26-33.
- [17] BARBOSU, M. 1995. Courbures riemanniennes dans le problème plan des trois corps, communiqué à U.A.I. Symposium 172, Paris.
- [18] BIRKHOFF, G. D. 1927. *Dynamical Systems*, Am. Math. Soc., Providence, New York.
- [19] BISHOP, R. L. et CRITTENDEN, R. J. 1964. *Geometry of Manifolds*, Academic Press, New York, London.
- [20] BISHOP, R. L. et GOLDBERG, S. I. 1968. *Tensor Analysis on Manifolds*, Macmillan, New York.
- [21] BORISENKO, A. A. et YAMPOLSKII, A. L. 1987. The Sasaki Metric of the Normal Bundle of a Submanifold in a Riemannian Space, *Mat. Sbornik Nouv. Sér.* 2, (287), 158-176.

-
- [22] BROWER, D. et CLEMENCE, G. M. 1961. *Methods of Celestial Mechanics*, Academic Press, New York, London.
- [23] CARTAN, E. 1946. *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, Gauthier-Villars, Paris.
- [24] CHEN XIANG-YAN 1979. Topology of the Manifold M_3 of the General Problem of Three Bodies, *Chinese Astronomy* 3, 1-23.
- [25] CHEN XIANG-YAN et al. 1979. On the Permissible Region of Motion in the General Problem of Three Bodies, *Chinese Astronomy*, 3, 223-237.
- [26] DAJCZER, M. et NOMIZU, K. 1980. On Sectional Curvature of Indefinite Metrics. II, *Math. Ann.*, 247, 279-282.
- [27] DANBY, J. M. A., 1962. *Fundamentals of Celestial Mechanics*, Macmillan, New York.
- [28] DARBOUX, G. 1915. *Leçons sur la théorie des surfaces*, tome 2, ch.VIII, Gauthier-Villars, Paris.
- [29] DAVIES, E. T. 1969. On the Curvature of the Tangent Bundle, *Annali di Mat.*, (IV), 81, 193-204.
- [30] DELMAS, C. 1981. Etude de certaines solutions périodiques absolues dans le problème planétaire plan des trois corps, *Thèse de doctorat de l'Université Paris 6*.
- [31] DEPRIT, A. et DELIE, A. 1962. Courbure de la métrique riemannienne du problème plan des trois corps, *Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci.* (5) 48, 652-658.
- [32] DONNISON, J. R. et WILLIAMS, I. P. 1983. The Stability of Coplanar Three-Body Systems With Application to the Solar System, *Celest. Mech.* 31, 123-128.
- [33] DONSON, C. T. J. et POSTON, T. 1991. *Tensor Geometry: The Geometric Viewpoint and its Uses*, Second Edition, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg.

-
- [34] EASTON, R. 1971. Some Topology of the Three-Body Problem, *J. Diff. Eq.*, 10, 2, 371-377.
- [35] EASTON, R. 1975. Some Topology of the N -Body Problem, *J. Diff. Eq.*, 19, 258-269.
- [36] EISELE, J. A. et MASON, R. 1970. *Applied Matrix and Tensor Analysis*, Wiley Interscience, New York, London, Sydney, Toronto.
- [37] EISENHART, L. 1964. *Riemannian Geometry*, Princeton Univ. Press, Princeton.
- [38] ELMABSOUT, B. 1978. Espace des phases dans le problème plan des trois corps, *J. de Mécanique*, 17, (4), 485-530.
- [39] ELMABSOUT, B. 1988. Sur l'existence de certaines configurations d'équilibre relatif dans le problème des n corps, *Celest. Mech and Dyn. Astr.* 41, 131-151.
- [40] ELMABSOUT, B. 1994. Stability of Some Degenerate Positions of Relative Equilibrium in the n -body Problem, *Dynamics and Stability of Systems*, 9, (4), 305-319.
- [41] GOLDSTEIN, H. 1950. *Classical Mechanics*, Addison-Wesley Press, Cambridge.
- [42] GOLUBEV, V. G. 1971. Certain Implications of Classical Integrals in the Three Body Problem, *Trudy Moskow Energ. Instit.* 89, 87-101.
- [43] GOUYON, R. 1963. *Calcul Tensoriel*, Libraire Vuibert, Paris.
- [44] GRAVES, L. et NOMIZU, K. 1978. On Sectional Curvature of Indefinite Metrics, *Math. Ann.* 232, 267-272.
- [45] HAGIHARA, Y., 1976. *Celestial Mechanics*, vol V, Part 1, "Topology of the Three-Body Problem", Japan Soc. for the Promotion of Science, Tokyo,
- [46] HARTMAN, Ph. 1983. Remarks on Geodesics, *Proc. of the American Math. Soc.*, 89, (3), 467-471.

-
- [47] HELGASON, S. 1962. *Differential Geometry and Symetric Spaces*, Academic Press, New York.
- [48] HIRSCH, M. et SMALE, S. 1974. *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, Academic Press, New York.
- [49] IACOB, A. 1973. *Metode topologice in mecanica clasica*, Ed. Academiei R.S.R.
- [50] IACOB, C. 1971. *Mecanica Teoretica*, Ed. didactica si pedagogica, Bucuresti.
- [51] IWAI, T. 1987. A Gauge Theory for the Quantum Angular Planar Three-Body Problem, *J. of Math. Phys.* **28**, (4), 964-974.
- [52] IWAI, T. 1987. A Geometric Setting for the Internal Motions of the Quantum Three-Body System, *J. of Math. Phys.* **28**, (6), 1315-1326.
- [53] KAPLAN, W. 1942. Topology of the Two Body Problem, *Am. Math. Monthly*, **49**, 316-323.
- [54] KILCEVSKI, N. A. 1956. *Elemente de calcul tensorial si aplicatiile lui in mecanica*, Editura tehnica, Bucuresti.
- [55] KOBAYASHI, S. et NOMIZU, K. 1963. *Foundations of Differential Geometry*, Interscience Publishers, New York, London.
- [56] LAUGWITZ, D. 1965. *Differential geometry and Riemannian Geometry*, Academic Press, New York.
- [57] LEFSCHETZ, S. 1963. *Differential Equations: Geometric Theory*, Wiley, New York.
- [58] LIBERMANN, P. et MARLE Ch.-M. 1990. Géométrie symplectique. Bases théoriques de la mécanique, *Publ. math. de l'Univ. Paris VII*, Paris.
- [59] LICHNEROWICZ, A. 1960. *Eléments de Calcul tensoriel*, Collection Armand Colin, Paris.

-
- [60] LUKATSKII, A. M. 1988. Structure of the Curvature Tensor of the Group of Measure-Preserving Diffeomorphisms of Compact Two-Dimensional Manifolds, *Siberian Math. J.* **29**, (6), 947-950.
- [61] MARCHAL, C. et SAARI, D. G. 1975. Hill Regions for the General Three-Body Problem, *Celest. Mech.*, **12**, 115-129.
- [62] MARCHAL, C. et BOZIS, G. 1982. Hill Stability and Distance Curves for the General Three-Body Problem, *Celest. Mech.*, **26**, 311-333.
- [63] MARCHAL, C. 1990. *The Three-Body Problem*, (Studies in Astronautics 4), Elsevier, Amsterdam-Oxford-New York-Tokyo.
- [64] McGEHEE, R. 1974. Triple Collision in the Collinear Three-Body Problem, *Inv. Math.* **27**, 191-227.
- [65] MEYER, K. R. et HALL, G. R. 1992. *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem*, Appl. Math. Sci. vol. 90, Springer-Verlag, New York.
- [66] MICHAL, A. D. 1964. *Le calcul différentiel dans les espaces de Banach*, Gauthier-Villars, Paris.
- [67] MILANI, A. et NOBILI, A. M. 1983. On Topological Stability in the General Three-Body Problem, *Celest. Mech.* **31**, 213-240.
- [68] MILNOR, J. 1965. *Topology From the Differential Viewpoint*, University of Virginia Press, Charlottesville.
- [69] MILNOR, J. 1970. *Morse Theory*, Annals of Mathematics Studies 51 (4^{ème} éd.), Princeton University Press.
- [70] MISNER, C. W. et THORNE, K. S. 1973. *Gravitation*, W.H. Freeman, San Francisco.

-
- [71] MOECKEL, R. 1988. Some Qualitative Features of the Three Body Problem, *Collection: Hamiltonian Dynamical Systems, Boulder*, 1-22, Am. Math. Soc., Providence.
- [72] MOULTON, F. R. 1914: *An Introduction to Celestial Mechanics*, Macmillan, New York.
- [73] MURNAGHAN, F. D. 1936. A Symmetric Reduction of the Planar Three-Body Problem, *American J. of Math.*, **58**, 829-832.
- [74] NAKAMURA, T. et YOSHIDA, J. 1992. Hill Stability of the Planar Three-Body Problem: General and Restricted Cases, *Celest. Mech. and Dyn. Astron.*, **54**, (1-3) 255-260.
- [75] NOMIZU, K. 1956. Lie Groups and Differential Geometry, *Publ. Math. Soc. Japan*, **2**.
- [76] ONG, C. P. 1975. Curvature and Mechanics, *Adv. in Math.*, **15**, 269-311.
- [77] PALIS, J. et MELO, W. 1982. *Geometric Theory of Dynamical Systems*, Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin.
- [78] POINCARÉ, H. 1892 (1899). *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Gauthier-Villars, vol.1 (vol.2).
- [79] POLLARD, H. 1966. *Mathematical Introduction To Celestial Mechanics*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., London.
- [80] ROSEAU, M. 1966. *Vibrations non linéaires et théorie de la stabilité*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- [81] ROY, A. E. 1965. *Foundations of Astrodynamics*, The Macmillan Company, New York Collier-Macmillan Canada, Ltd., Toronto, Ontario.

-
- [82] SASAKI, S. 1958. On the Differential Geometry of Tangent Bundles of Riemannian Manifolds, *Tohoku Math. J.*, **10**, 338-354.
- [83] SASAKI, S. 1962. On the Differential Geometry of Tangent Bundles of Riemannian Manifolds II, *Tohoku Math. J.*, **14**, 146-155.
- [84] SATÖ, K. 1974. Infinitesimal Affine Transformations of the Tangent Bundles With Sasaki Metric, *Tohoku Math. J.*, **26**, 353-361.
- [85] SCHOUTEN, J. A. 1954. *Ricci-Calculus*, Springer-Verlag, Berlin .
- [86] SIEGEL, C. L. et MOSER, J. K. 1971. *Lectures on Celestial Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin.
- [87] SIMO, C. 1987. Qualitative Study of the Planar Isocetes Three Body Problem, *Celest. Mech.* **41**, (1-4), 179-251.
- [88] SMALE, S. 1970. Topology and Mechanics I, *Inventiones Math.*, **10**, (4), 305-331.
- [89] SMALE, S. 1970. Topology and Mechanics II, *Inventiones Math.*, **11**, (1), 45-64.
- [90] SPIVAK, M. 1979. *Differential Geometry*, Publish or Perish, Inc., Boston.
- [91] STERNBERG, S. 1969. *Celestial Mechanics*, W. A. Benjamin, Inc., New York, Amsterdam.
- [92] STIEFEL, E. L. et SCHEIFELE, G. 1971. *Linear and Regular Celestial Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York.
- [93] SYNGE, J.L. et SCHILD, A. 1962. *Tensor Calculus*, Univ. of Toronto Press.
- [94] SZEBEHELY, V. 1967. *Theory of Orbits. The Restricted problem of Three Bodies*, Academic Press, New York.
- [95] SZEBEHELY, V. et TAPLEY, B. D. (Eds.) 1973. *Recent Advances in Dynamical Astronomy, Recent Advances in the Problem of Three Bodies*, D. Reidel Publ. Co., Dordrecht, Holland.

-
- [96] van VELSEN, J. F. C. 1978. On the Riemann Curvature of Conservative Systems in Classical Mechanics, *Phys. Lett.*, **67A**, 325-327.
- [97] van VELSEN, J.F.C. 1980. Curvature Statistics of Some Few-Body Debye-Hückel and Lennard-Jones Systems, *J. Phys. A* **13**, 833-854.
- [98] van VELSEN, J.F.C. 1981. Isoenergetic Families of Quasi-Periodic Solutions Near the Equilateral Solution of the Three-Body Problem, *Celest. Mech.*, **23**, 383-395.
- [99] van VELSEN, J.F.C. 1981. The Average Riemann Curvature of Conservative Systems in Classical Mechanics, *J. Phys. A* **14**, 1621-1627.
- [100] VINBERG, E. B. (Ed.) 1993. *Geometry II. Spaces of Constant Curvature*, *Encycl. of Math. Sci.*, vol 29, Springer -Verlag, Berlin Heidelberg.
- [101] WALKER, I. W., EMSLIE, G. et ROY A. E. 1980. Stability Criteria in Many Body Systems I, *Celest. Mech.* **22**, 371-402.
- [102] WALKER, I. W. et ROY A. E. 1981. Stability Criteria in Many Body Systems II, *Celest. Mech.* **24**, 195 - 225.
- [103] WEATHERBURN, C. E. 1966. *An Introduction to Riemannian Geometry and the Tensor Calculus*, Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- [104] WHITTAKER, E. T. 1965. *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies. With an Introduction to the Problem of Three Bodies*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [105] WINTNER, A. 1941. *The Analytical Foundations of Celestial Mechanics*, Princeton University Press, Princeton, N. J.
- [106] YANO, K. et BOCHNER, S. 1953. *Curvature and Betti numbers*, Princeton Univ. Press.

-
- [107] YANO, K. et DAVIES, E. T. 1963. On the Tangent Bundles of Finsler and Riemannian Manifolds, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **12**, 211-228.
- [108] YANO, K. et ISHIHARA, S. 1973. *Tangent and Cotangent Bundles. Differential Geometry*, Marcel Dekker, Inc. New York.
- [109] ZAK, M. 1986. Chaotic Instability in the Three-Body Problem, *Acta Mech.* **61** (1-4), 203-208.
- [110] ZARE, K. 1976. The Effects of Integrals on the Totality of Solutions of Dynamical Systems, *Celest. Mech.* **14**, 73-83.
- [111] ZARE, K. 1977. Bifurcations Points in the Planar Problem of Three Bodies, *Celest. Mech.* **16**, 35-38.
- [112] ZARE, K. 1981. Properties of the Moment of Inertia in the Problem of Three Bodies, *Celest. Mech.* **24**, 345-354.

TABLE DES MATIERES

NOTATIONS.....	3
INTRODUCTION.....	5
§ 1.1 Thème de l'étude, point de départ.....	5
§ 1.2 Plan de l'étude.....	7
CHAPITRE I : <i>Revue bibliographique. Objectifs</i>	10
§ 1.1 Outils théoriques.....	10
§ 1.2 Courbure riemannienne et systèmes dynamiques.....	13
§ 1.3 Courbures et problème plan des trois corps.....	18
CHAPITRE II: <i>Méthode proposée pour étudier la stabilité des orbites d'un système dynamique conservatif</i>	24
§ 2.1 Rappels.....	24
§ 2.2 Courbures riemanniennes et géodésiques.....	28
§ 2.3 Géométrie riemannienne d'un système dynamique.....	32
§ 2.4 Algorithme de calcul.....	35
§ 2.5 Courbure et stabilité.....	37

CHAPITRE III : <i>Problème plan des trois corps</i>	46
§ 3.1 Description du problème.....	46
§ 3.2 Régions possibles du mouvement et domaines des configurations admissibles dans le problème plan des trois corps.....	53
§ 3.3 Courbures dans le problème plan des trois corps.....	56
 CHAPITRE IV : <i>Analyse des courbures dans des cas particuliers</i>	71
§ 4.1 Cas d'un système planétaire.....	73
§ 4.2 Cas des configurations centrales.....	84
§ 4.2.1 Cas du triangle équilatéral avec les trois masses égales.....	85
§ 4.2.2 Cas rectiligne avec les trois masses égales.....	91
§ 4.2.3. Cas du triangle équilatéral avec les masses inégales.....	96
§ 4.2.4 Cas rectiligne avec deux masses extrêmes égales.....	111
 ANNEXE-A : <i>Compléments de géométrie riemannienne</i>	117
§ A.1 Courbures dans un espace riemannien.....	117
§ A.2 Courbures riemanniennes et géodésiques.....	119
§ A.3 Espaces riemanniennes à courbure constante.....	123
 ANNEXE-B : <i>Compléments sur le problème plan des trois corps</i>	125
§ B.1 Sur la topologie du problème plan des trois corps.....	125
§ B.2 Sur le paramètre hc^2	128

§ B.3 Métrique de Sasaki dans l'espace des phases du problème plan des trois corps.....	129
§ B.4 Numérateurs des courbures riemanniennes.....	136
 ANNEXE C : <i>Courbures dans le cas planétaire</i>	146
§ C.1. Symboles de Christoffel dans le cas planétaire.....	146
§ C.2. Tenseurs de courbure dans le cas planétaire.....	147
§ C.3. Courbure scalaire et courbures riemanniennes dans le cas planétaire.....	148
§ C.4. Métrique de Sasaki dans le cas planétaire.....	149
 CONCLUSION.....	152
 REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	156

