Ecoulements, imbibition et fragmentation de phase dans les milieux poreux

Jean-Baptiste Charpentier

▶ **To cite this version:**

Jean-Baptiste Charpentier. Ecoulements, imbibition et fragmentation de phase dans les milieux poreux. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Normandie Université, 2017. Français. NNT : 2017NORMLH20 . tel-01944902

HAL Id: tel-01944902
https://theses.hal.science/tel-01944902

Submitted on 5 Dec 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Normandie Université

THESE

Pour obtenir le diplôme de doctorat

Spécialité : Mécanique des fluides

Préparée à l'Université Le Havre Normandie

Écoulements, imbibition et fragmentation de phase dans les milieux poreux

Présentée et soutenue par
Jean-Baptiste CHARPENTIER

Thèse soutenue publiquement le 04/12/2017 devant le jury composé de		
Azita AHMADI-SENICHAULT	PU, ENSAM Bordeaux-Talence	Rapporteur
Mustapha HELLOU	PU, INSA de Rennes	Rapporteur
Abdelhak AMBARI	PU, ENSAM Angers	Examinateur
François BOULOGNE	CR au LPS, Université Paris-Sud	Examinateur
Yohan DAVIT	CR à l'IMF de Toulouse	Examinateur
Khalid LAFDI	PU, Université de Dayton	Examinateur
Laurent BIZET	MC, Université Le Havre Normandie	Co-encadrant
Abdelghani SAOUAB	PU, Université Le Havre Normandie	Directeur de thèse

Thèse dirigée par Abdelghani Saouab, **LOMC UMR 6294, CNRS-Université le Havre Normandie**
et co-encadrée par Laurent Bizet, **LOMC UMR 6294, CNRS-Université le Havre Normandie**

UNIVERSITÉ LE HAVRE NORMANDIE

ED PSIME

LABORATOIRE ONDES et MILIEUX COMPLEXES

Résumé : Écoulements, imbibition et fragmentation de phase dans les milieux poreux

Les milieux poreux sont omniprésents dans le quotidien des hommes du 21ème siècle que ce soit par hasard ou par nécessité. Certains permettent le transport d'une ou plusieurs phases fluides immiscibles, une situation à la fois courante et critique dans de nombreuses applications industrielles. Le transport d'une phase mouillante, l'imbibition, a été largement étudiée mais un certain nombre de problèmes restent ouverts. Dans cette thèse, nous nous sommes concentrés sur trois d'entre eux. La fragmentation de phase induite par la gravité dans une jonction asymétrique a été étudiée. La dynamique et un critère d'apparition ont été prédits analytiquement puis confirmés expérimentalement. Ensuite, l'évolution de l'épaisseur d'un front d'imbibition dans un réseau de capillaires a été simulée numériquement. Les résultats ont permis de lever une controverse de la littérature. Enfin, l'imbibition dans un milieu constitué de lames flexibles déformables a été explorée numériquement et expérimentalement. Il a été montré que la déformabilité des lames induit leur coalescence et agit sur la dynamique de l'imbibition.

Abstract : Flow, imbibition and phase fragmentation in porous media

Porous media are ubiquitous in today's society due to chance or necessity. Some of them allow the transportation of one or several immiscible fluid phases simultaneously. This property is both usual and critical in many industrial processes. The transport of a wetting phase, imbibition, has been widely studied but lots of issues remain opened. In this manuscript, three of them are addressed. Gravity induced phase fragmentation has been studied in an asymmetric pore junction. Fragmentation criterion and dynamic are predicted analytically and confirmed experimentally. Then, the broadening of an imbibition front in a capillary network has been investigated numerically. Results resolved a controversy in the literature. Finally, imbibition in a medium made of flexible sheets has been studied both numerically and experimentally. It showed that sheets flexibility induces their clustering and influences the imbibition dynamic.

Remerciements

Je remercie tout d'abord Abedelghani Saouab et Laurent Bizet pour, respectivement, la direction et l'encadrement de ma thèse. Je les remercie en particulier de m'avoir laissé de la liberté dans la recherche et de m'avoir continuellement soutenu.

Je remercie également Innocent Mutabazi, directeur du laboratoire Laboratoire Ondes et Milieux complexes (LOMC) où j'ai réalisé les trois années de ma thèse, pour avoir fait en sorte qu'elle se déroule dans de bonnes conditions.

Je remercie bien sûr l'ensemble des membres du jury, à commencer par les rapporteurs, Mme Azita Ahmadi-Senichault et M. Mustapha Hellou pour le temps qu'ils ont passé sur le manuscrit et les corrections proposées, et les autres membres du jury, M. Abdelhak Ambari, M. François Boulogne, M. Yohan Davit, et M. Khalid Lafdi pour avoir accepté d'en faire partie et également pour leur travail.

Comme bien souvent lors d'une réalisation quelconque, on doit beaucoup à des personnes qui ne sont pourtant pas reliées de manière explicite à celle-ci. Pour ma thèse, il y en a une, c'est Marie-Charlotte Renoult, qui a su me donner de nombreux conseils, professionnels comme personnels, pas toujours agréables à entendre mais invariablement justes. C'est pour ces raisons que je tiens à lui adresser un remerciement tout particulier et à lui signifier ma gratitude.

Sur le plan humain, qui est loin d'être insignifiant en thèse, je remercie tous les membres de mon bureau, Anthony Auzerais, Celine Raimbault, Benoît Lebon, Bouchra Aaboud, Nezha Bouhafs et Timothée Duguet (et pas Durant), pour les bons moments passés à l'intérieur et hors du laboratoire. Je remercie également les personnes qui sont passées par le bureau ou qui y sont arrivées récemment, Safa Essid, Nihad Abdelhadi Ahmed Siddig, Mathieu Lanza, Marine Durafour, Zakia Khelifi, etc.

Je remercie aussi les autres doctorants/post-doctorants du laboratoire avec lesquels j'ai conversé et qui m'ont apporté beaucoup, Arnaud Fur, Raounak Loudad, Camille Gauthier, Nesrine Kherraz, Kamal Selvam, Xuezhou Lu, Changwoo Kang, Abdessamad Thalioua, Simon Teinturier, Valentin Ageorges, Mélanie Vah, Sixtine Neuveglise, Antoine Meyer, Kyle Walker, Hafsa Jamshaid, Nicolas Hecht, Jonathan Leboucher, Clément Carlier et Yang Bai (qui n'est pas parti dans le sud). Et bien sûr, tous ceux que j'ai oubliés dans cette liste.

Toujours sur l'aspect humain, je remercie les membres de ma famille, ma mère, mon père, mon frère Benoît et ma sœur Lucile, ainsi que mes amis proches, Aymeric Praud, Michaël Fétiveau, Erwan Cariou, Weilin Wang et Maxime Milhe.

Enfin, je remercie la région Normandie pour avoir financé cette thèse.

Table des matières

Résumé i

Remerciements ii

Table des variables et symboles ix

Introduction générale 1

I Introduction aux écoulements diphasiques dans les milieux poreux 3
- I.1 Introduction . . . 3
- I.2 Milieux poreux . . . 3
  - I.2.1 Les pores . . . 3
  - I.2.2 Saturation . . . 6
  - I.2.3 Perméabilité . . . 7
- I.3 Capillarité . . . 12
  - I.3.1 Modèle mécanique de la capillarité . . . 12
  - I.3.2 La tension de surface . . . 16
  - I.3.3 Description thermodynamique de la capillarité . . . 17
- I.4 Mouillage statique . . . 21
  - I.4.1 Relation d'Young . . . 21
  - I.4.2 Mouillage partiel et mouillage total . . . 23
  - I.4.3 Rugosité du substrat . . . 23
  - I.4.4 Limites de l'équation d'Young . . . 24
  - I.4.5 Notion de ménisque . . . 25
- I.5 Mouillage statique dans les milieux poreux . . . 27
- I.6 Mouillage dynamique . . . 29
  - I.6.1 Nombre capillaire . . . 29
  - I.6.2 Angle dynamique . . . 30
  - I.6.3 Film de démouillage . . . 33
- I.7 Imbibition d'un capillaire . . . 34
  - I.7.1 Équation de Washburn . . . 37
  - I.7.2 Premiers instants . . . 38
  - I.7.3 Fin d'imbibition . . . 40
- I.8 Écoulement dans les milieux poreux . . . 41
  - I.8.1 Mécanismes locaux . . . 41
  - I.8.2 Modélisation par paquets de capillaires . . . 42
  - I.8.3 Modélisation continue . . . 42

I.8.4 Modélisation par réseaux de capillaires 42
I.9 Conclusion et ouverture 43

II Fragmentation de phase induite par la gravité lors d'une imbibition spontanée 45
II.1 Introduction 45
II.2 Mécanismes de fragmentation 46
II.2.1 Fragmentation quasi-statique 46
II.2.2 Pincement 46
II.2.3 Fragmentation visqueuse 46
II.2.4 Fragmentation gravitationnelle 47
II.2.5 Justification de l'étude 48
II.3 Traitement analytique 49
II.3.1 Présentation du système d'étude 49
II.3.2 Hypothèses 51
II.3.3 Opposition de la gravité et de la différence de pression capillaire . 52
II.3.3.1 Équations 52
II.3.3.2 Simplifications 53
II.3.3.3 Transformation du capillaire d'alimentation 53
II.3.3.4 Adimensionnalisation 54
II.3.3.5 Comportement asymptotique 55
II.3.3.6 Dynamique de l'imbibition avec fragmentation 57
Premier régime 57
Second régime 59
II.3.3.7 Bilan 60
II.3.4 Actions coordonnées de la gravité et de la différence de pression capillaire 61
II.3.4.1 Équations 62
II.3.4.2 Critère de fragmentation 62
II.3.4.3 Dynamique de l'écoulement 63
II.3.4.4 Bilan 63
II.3.5 Application aux milieux poreux 63
II.4 Vérification Expérimentale 65
II.4.1 Cellules microfluidiques 66
II.4.1.1 Géométrie des cellules 66
II.4.1.2 Longueurs et position relative des canaux 66
II.4.1.3 Profondeur des canaux 68
II.4.1.4 Largeur des canaux 68
II.4.1.5 Rugosité des canaux 69
II.4.1.6 Autres types de défauts des canaux 70
II.4.1.7 Propriétés issues des paramètres géométriques 70
II.4.2 Montage expérimental 71
II.4.2.1 Support des cellules 71
II.4.2.2 Réglage du plateau du microscope 72
II.4.3 Liquides employés 73
II.4.3.1 Tension de surface 73
II.4.3.2 Viscosité dynamique 74

II.4.4 Types d'expériences . . . 75
II.4.5 Extraction des résultats . . . 75
II.5 Résultats . . . 77
II.5.1 Expériences sur la dynamique . . . 77
II.5.2 Expériences sur le critère de fragmentation . . . 83
II.6 Discussion . . . 83
II.7 Conclusion . . . 85

III Modélisation numérique de l'épaississement du front dans un réseau de pores en imbibition 87
III.1 Introduction . . . 87
III.2 Modélisation de la propagation des interfaces . . . 88
III.2.1 Outils et résultats issus de la théorie de la percolation . . . 89
III.2.1.1 Notion de percolation . . . 89
III.2.1.2 Notion d'agglomérat . . . 91
III.2.1.3 Comportements critiques . . . 92
III.2.1.4 Fractales et dimension fractale . . . 94
III.2.2 Quelques modélisations du front . . . 97
III.2.2.1 Invasion-Percolation . . . 98
III.2.2.2 Modèle en présence d'un gradient de pression . . . 99
Modélisation avec co-percolation . . . 100
Modélisation sans co-percolation . . . 100
Prise en compte de la perte de charge . . . 100
III.2.2.3 Modèle basé sur l'observation microscopique . . . 102
III.2.2.4 Modèle à deux échelles . . . 104
III.2.3 Questions ouvertes . . . 104
III.3 Modèle et simulation . . . 105
III.3.1 Modélisation . . . 105
III.3.1.1 Choix du réseau de capillaires . . . 105
III.3.1.2 Géométries 2D et 3D . . . 106
III.3.1.3 Adimensionnalisation . . . 107
III.3.1.4 Équations réduites . . . 108
III.3.2 Simulation numérique . . . 109
III.3.2.1 Résolution et intégration temporelle . . . 109
III.3.2.2 Conditions limites . . . 111
III.3.2.3 Condition initiale . . . 111
III.3.2.4 Choix du pas de temps . . . 111
III.4 Résultats . . . 111
III.4.1 Quantités extraites et méthodes d'extractions . . . 111
III.4.1.1 Définitions du front . . . 111
III.4.1.2 Position de l'interface et nombre capillaire . . . 112
III.4.1.3 Épaisseur du front . . . 113
III.4.1.4 Dimension Fractale . . . 113
Méthode des boîtes . . . 113
Méthode de la fonction de corrélation . . . 115
III.4.1.5 Largeur du front en pression . . . 116
III.4.2 Durée et nombre de simulations . . . 117

III.4.3 Description des résultats . . . 117
III.4.3.1 Cas 2D . . . 118
Nombre capillaire . . . 118
Épaisseur de l'interface . . . 119
Longueur de corrélation . . . 120
Dimension fractale . . . 121
Épaisseur de pression . . . 122
Bilan . . . 123
III.4.3.2 Influence du paramètre statistique en 2D . . . 124
Nombre capillaire . . . 124
Épaisseur du front . . . 125
Longueur de corrélation . . . 125
Dimension Fractale . . . 126
Bilan . . . 127
III.4.3.3 Cas 3D . . . 128
Nombre capillaire . . . 128
Épaisseur du front . . . 129
Longueur de corrélation . . . 130
Dimension fractale . . . 131
Épaisseur de pression . . . 132
Bilan . . . 133
III.4.3.4 Influence du paramètre statistique en 3D . . . 133
Nombre capillaire . . . 134
Épaisseur du front . . . 134
Longueur de corrélation . . . 135
Dimension fractale . . . 136
Bilan . . . 137
III.5 Synthèse des résultats . . . 137
III.6 Discussion . . . 138
III.7 Conclusion . . . 141

IV Compétition d'imbibition élasto-capillaire 143
IV.1 Introduction . . . 143
IV.2 Modèle et simulation . . . 146
IV.2.1 Description du système réduit . . . 146
IV.2.2 Modélisation du système réduit . . . 146
IV.2.2.1 Modélisation de l'écoulement . . . 147
IV.2.2.2 Conditions limites appliquées à l'écoulement . . . 148
IV.2.2.3 Modélisation de la membrane . . . 148
IV.2.2.4 Conditions limites appliquées à la membrane . . . 149
IV.2.2.5 Condition initiale . . . 150
IV.2.2.6 Adimensionalisation . . . 150
IV.2.3 Résolution numérique . . . 151
IV.2.3.1 Formulation faible . . . 151
IV.2.3.2 Choix des éléments et maillage . . . 152
IV.2.3.3 Application des conditions limites . . . 153
IV.2.3.4 Application des contacts . . . 153

IV.2.3.5 Résolution par Newton-Raphson . . . 154
IV.2.3.6 Transport des interfaces . . . 155
IV.2.3.7 Conditions initiales . . . 156
IV.2.3.8 Condition finale . . . 156
IV.2.3.9 Cas tests . . . 156
Équilibre de la poutre . . . 156
Équation de conservation . . . 158
Équation de Washburn . . . 158
Bilan sur les cas tests . . . 159
IV.2.3.10 Angle de contact dynamique . . . 159
IV.2.3.11 Gravité . . . 162
IV.3 Résultats sur le système réduit . . . 164
IV.3.1 Méthodologie de l'analyse des résultats . . . 164
IV.3.1.1 Le déplacement maximum . . . 165
IV.3.1.2 Durée de l'imbibition . . . 165
IV.3.1.3 Position relative des ménisques . . . 165
IV.3.1.4 Volume occupé dans le pseudo-capillaire 1 . . . 165
IV.3.1.5 Volume occupé dans le pseudo-capillaire 2 . . . 165
IV.3.1.6 Volume total occupé . . . 165
IV.3.2 Résultats de simulation sur les systèmes réduits . . . 166
IV.3.2.1 Encastrement au niveau de la source . . . 166
Description qualitative des résultats . . . 166
Influence de h_2/h_1 . . . 169
Remplissage des pseudo-capillaires . . . 169
IV.3.2.2 Encastrement opposé à la source . . . 170
Description qualitative des résultats . . . 170
Influence de h_2/h_1 . . . 173
Remplissage des pseudo-capillaires . . . 173
IV.3.2.3 Double encastrement . . . 173
Description qualitative des résultats . . . 173
Influence de h_2/h_1 . . . 174
Remplissage des pseudo-capillaires . . . 177
IV.3.3 Influence de l'angle de contact dynamique . . . 178
IV.3.3.1 Encastrement au niveau de la source . . . 178
IV.3.3.2 Encastrement opposé à la source . . . 181
IV.3.3.3 Double encastrement . . . 184
IV.3.3.4 Bilan sur l'influence de l'angle dynamique . . . 184
IV.3.4 Influence de la gravité . . . 187
IV.3.4.1 Encastrement du côté de la source . . . 187
IV.3.4.2 Encastrement du côté opposé à la source . . . 188
IV.3.4.3 Double encastrement . . . 188
IV.3.4.4 Bilan . . . 189
IV.3.5 Conclusion sur les résultats de simulation de systèmes réduits . . . 189
IV.4 Vérification expérimentale . . . 191
IV.4.1 Montage expérimental . . . 191
IV.4.1.1 Système . . . 191
IV.4.1.2 Liquide . . . 192

IV.4.1.3 Montage . . . 192
IV.4.1.4 Plan d'expérience . . . 192
IV.4.2 Extraction des résultats . . . 193
IV.4.3 Résultats expérimentaux . . . 194
IV.4.3.1 Résultat typique . . . 194
IV.4.3.2 Régime sans déformation (I) . . . 194
IV.4.3.3 Régime avec faible déformation (II) . . . 195
IV.4.3.4 Régime avec forte déformation (III) . . . 195
IV.4.3.5 Comparaison numérique expérimental . . . 196
IV.4.3.6 Limites de la comparaison . . . 198
IV.4.4 Conclusion sur les résultats expérimentaux . . . 198
IV.5 Résultats sur le système complet . . . 200
IV.5.1 Modélisation du système complet . . . 200
IV.5.2 Simulation numérique du système complet . . . 201
IV.5.3 Grandeurs étudiées . . . 201
IV.5.3.1 Durée de l'imbibition . . . 201
IV.5.3.2 Qualité de l'imbibition . . . 201
IV.5.3.3 Épaisseur de l'interface . . . 202
IV.5.4 Résultats de simulation . . . 202
IV.5.4.1 Encastrement à la source . . . 202
Description qualitative des résultats . . . 202
Durée de l'imbibition . . . 202
Qualité de l'imbibition . . . 204
Épaisseur du front . . . 204
IV.5.4.2 Encastrement opposé à la source . . . 206
Description qualitative des résultats . . . 206
Durée de l'imbibition . . . 206
Qualité de l'imbibition . . . 206
Épaisseur du front . . . 206
IV.5.4.3 Double Encastrement . . . 209
Description qualitative des résultats . . . 209
Durée de l'imbibition . . . 209
Qualité de l'imbibition . . . 209
Épaisseur du front . . . 209
IV.5.5 Conclusion sur les systèmes complets . . . 212
IV.6 Discussion . . . 212
IV.7 Conclusion . . . 213

Conclusion générale **215**

Bibliographie **217**

Table des variables et symboles

Table des variables principales

(A) : Domaine de séparation entre deux domaines
(L) : Domaine occupé par une phase à l'état liquide
(V) : Domaine occupé par une phase à l'état gazeux

A : Surface des pores ou des contours d'un système (Chapitre I)
B : Rigidité de flexion des lames (Chapitre IV)
B_o : Nombre de Bond
C_a : Nombre capillaire
D : Dimension fractale (Chapitre III)
d : Dimension usuelle (Chapitre III)
E : Module d'Young (Chapitre IV)
e : Épaisseur caractéristique
$e_{(a,b)}$: Exposant d'évolution de a en fonction de b (Chapitre III)
$f_{(a,b)}$: Pré-facteur d'évolution de a en fonction de b (Chapitre III)
g : Intensité du champ de pesenteur
H : Probabilité d'appartenance au cluster percolant (Chapitre III)
h_j : Hauteur de Jurin
h : Espacement entre lames flexibles (Chapitre IV)
K : Perméabilité
L : Longueur du système
l : Longueur caractéristique du problème
M_μ : Rapport de viscosité des phases déplacées
$m_{\widetilde{x}}$: Position moyenne du front (Chapitre III)
O_h : Nombre d'Ohnesorge
P : Pression
P_c : Pression capillaire
Q : Débit de l'écoulement
r : Taille de pore

S : Saturation
t : Variable temporelle et temps caractéristiques
V : Volume
W : Largeur des canaux (Chapitre II)
W_p : Profondeur des canaux (Chapitre II)
w : Épaisseur du front
X : Positions de ménisques

α : Angle d'ouverture de la jonction (chapitre II)
β : Exposant critique de l'agglomérat percolant (chapitre III)
γ : Tension de surface
η : Rugosité de surface
θ : Angle de contact
κ : Courbure
λ : Nombre de coordination
μ : viscosité dynamique
ν : Exposant critique d'évolution de la longueur de corrélation (chapitre III)
ν_P : Coefficient de Poisson (chapitre IV)
ξ : Longueur de corrélation
ρ : Masse volumique
σ : Moment statistique d'ordre deux d'une distribution
Φ : Potentiel d'interaction (Chapitre I)
ϕ : Porosité
φ : Angle d'inclinaison des supports (Chapitre II)
χ : Exposant critique d'évolution de la perméabilité (Chapitre III)
ψ : Exposant d'évolution de l'épaisseur du front

Table des symboles principaux

$\vec{\nabla} a$: Opérateur gradient appliqué à a
Δa : Opérateur Laplacien ou différence appliqué à a
$\widetilde{a}$: Grandeur a adimensionnée
$\dot{a}$: Dérivée temporelle de a
∂a : Opérateur de différentiation partielle
$\langle a \rangle$: Opérateur de moyenne spatiale

Introduction générale

Les milieux poreux sont omniprésents dans notre quotidien et l'étaient déjà dans celui de nos ancêtres. La quasi-totalité des matériaux industriels et naturels le sont : l'ensemble des textiles, le papier, le bois, les roches, les céramiques, les sables, les hydrogels, les os, les poumons et même la membrane plasmique de nos cellules. Cette liste est bien évidemment loin d'être exhaustive. S'ils sont aussi courants c'est pour deux raisons : premièrement, il est très difficile de réaliser un matériau sans porosité et secondement, les milieux poreux possèdent des propriétés particulières. Ils permettent par exemple de filtrer, stocker ou encore d'isoler thermiquement ou phonétiquement, soit un ensemble de propriétés intéressantes dont la nature et l'industrie ont su tirer parti.

Certains milieux poreux permettent le transport d'une ou plusieurs phases immiscibles au travers d'eux. Cette capacité est critique dans nombre d'applications : dans l'exploitation pétrolière, elle permet l'extraction des hydrocarbures et dans les matériaux composites, elle permet l'imprégnation du réseau de fibres. Si les écoulements diphasiques dans les milieux poreux sont étudiés depuis plus d'un siècle, nombre de questions restent ouvertes. Dans le cadre de cette thèse, nous avons tenté de répondre à certaines de ces questions.

Le manuscrit se divise en quatre chapitres. Le premier tâchera d'introduire les notions utiles à la compréhension des sujets traités. Il devrait notamment permettre à un néophyte d'acquérir les notions incontournables relatives aux écoulements diphasiques dans les milieux poreux.

Le second chapitre traite de la fragmentation de phase induite par la gravité dans un milieu poreux représenté par une jonction de capillaires asymétrique. Il est montré analytiquement que la fragmentation se produit sous réserve qu'un certain critère, dépendant des nombres adimensionnés qui caractérisent l'écoulement, soit respecté. Les caractéristiques de la dynamique de l'écoulement sont également prédites. Le critère et la dynamique de la fragmentation sont ensuite confirmés expérimentalement.

Le troisième chapitre traite de l'évolution de l'épaisseur du front lors d'une imbibition. Nous montrons qu'un modèle issu de la littérature et qui s'appuie sur la théorie de la percolation s'applique dans des conditions non-prédites originellement. Nous vérifions cette hypothèse grâce à la modélisation numérique de l'imbibition de réseaux de capillaires et confirmons ce résultat sur des cas bi et tri-dimensionnels.

Enfin, le quatrième chapitre traite de l'imbibition d'un milieu poreux déformable idéalisé constitué de lames flexibles parallèles irrégulièrement espacées. L'étude est principalement numérique. Nous nous concentrons d'abord sur un système réduit et étudions l'impact de différents paramètres sur l'imbibition. Nous réalisons ensuite une vérification expérimentale sur un des cas d'étude, puis nous comparons les observations faites sur des systèmes réduits à celles réalisées sur des systèmes plus complets. Nous montrons, entre autres, que la flexibilité des membranes induit leur coalescence et pénalise l'imbibition.

Chapitre I

Introduction aux écoulements diphasiques dans les milieux poreux

I.1 Introduction

L'étude des écoulements diphasiques dans les milieux poreux fait appel à de nombreuses notions relatives à la fois aux phases fluides, au milieu poreux et aux interfaces qui les séparent. Dans ce chapitre elles sont introduites successivement, ainsi nous commencerons par les milieux poreux puis la capillarité, traités séparément l'un de l'autre. À partir de ceux-ci, les notions clefs du mouillage statique sont présentées puis transposés aux milieux poreux. On introduira ensuite le mouillage dynamique puis l'imbibition d'un capillaire. Enfin, quelques exemples de modélisation d'écoulements seront présentés.

I.2 Milieux poreux

I.2.1 Les pores

Les pores désignent les espaces vides[1] qui se situent dans un matériau solide. Ceux-ci peuvent exister à l'échelle atomique comme à l'échelle macroscopique et posséder toutes sortes de formes. L'existence de pores dans un milieu est caractérisée par la porosité ϕ :

$$\phi = \frac{\sum_i V_i}{V_T} \tag{I.1}$$

1. Comprendre non remplis par la matière du milieu solide dans lequel ils se situent

Soit la somme des volume des pores V_i divisée par le volume total V_T qui comprend la matière et les pores du système considéré. Cette définition implique que les contours du milieu doivent être définis précisément. D'après sa définition, ϕ est positive ou nulle et strictement inférieure à 1. Il existe des milieux de toute porosité ϕ intermédiaire, les assemblages de fibres courtes employés pour le filtrage peuvent posséder une porosité proche de 1 tandis que certains milieux naturels possèdent des porosités proches de 0 [Thovert *et al.*, 2001].

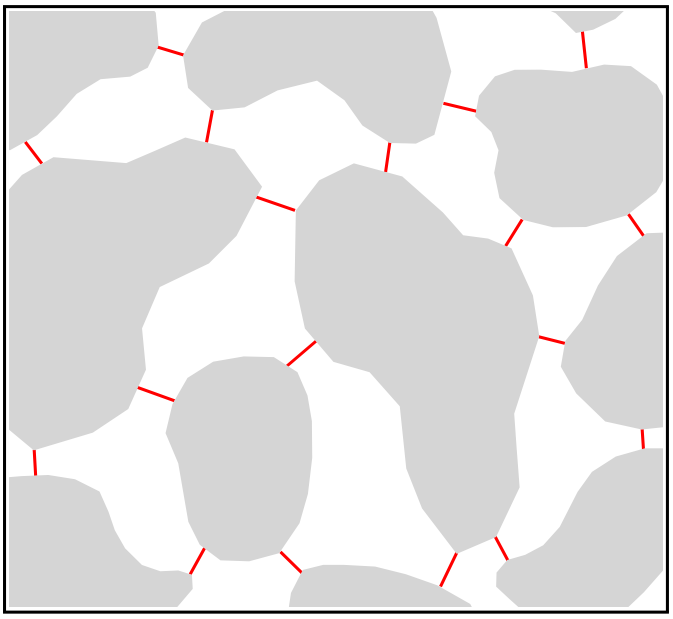

FIGURE I.1: Représentation des pores et de leurs limites spatiales. Les particules solides sont en gris et les délimitations entre les pores en rouges

Les pores peuvent exister de manière isolée ou être connectés à d'autres pores et former un réseau. Dans ce dernier cas, une définition plus précise du terme pore s'impose. On désigne par pore un espace vide délimité soit par de la matière soit par des constrictions [Dullien, 1992]. Un exemple d'application de cette définition est présenté sur la figure I.1.

On peut associer nombre de propriétés à chacun de ces pores, dont, une taille de pore r et un nombre de coordination des pores λ. Un pore possède une structure tridimensionnelle, nombre de définitions peuvent donc être employées pour caractériser sa taille r, la définition que nous conserverons est celle du rayon hydraulique du pore :

$$r_i = r_{i,h} = \frac{V_i}{A_i} \tag{I.2}$$

Soit le ratio du volume V_i du pore i sur l'aire A_i du milieu solide qui le délimite. Le nombre de coordination λ_i du pore i est défini comme le nombre de pores connectés au pore i. Sa moyenne λ est le nombre de coordination moyen du réseau.

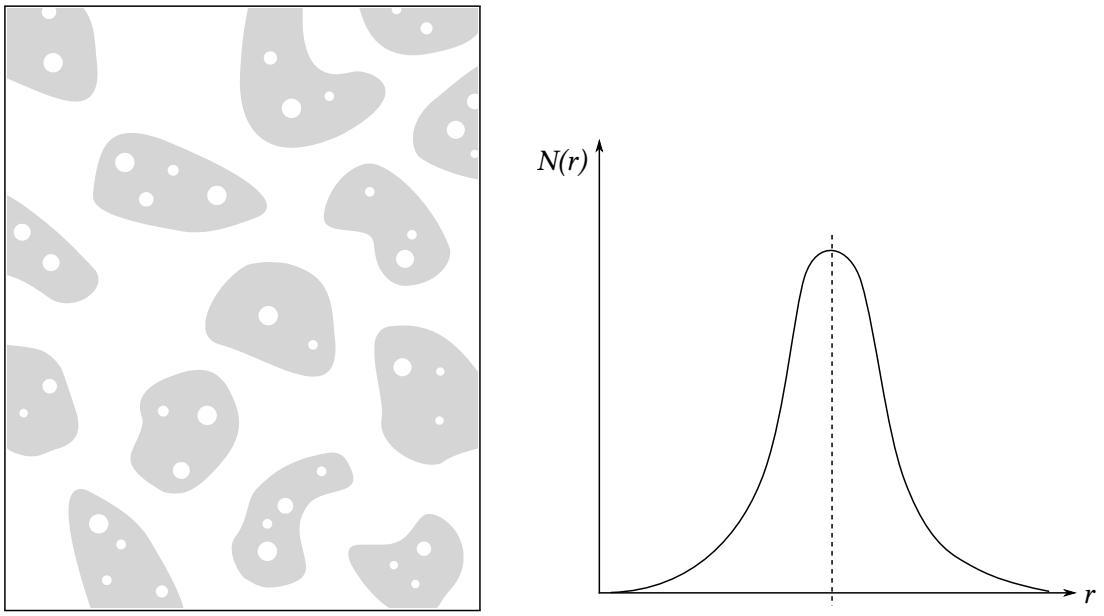

FIGURE I.2: Exemple de distributions de pores (en blanc) dont certains sont déconnectés du réseau principal (gauche). Distribution des tailles de pores monomodale mesurée par le porosimètre à mercure (droite)

A partir des définitions données plus haut, il est possible de dénombrer les pores et de leur associer une taille caractéristique, il est donc possible de définir la distribution statistique N des tailles de pores r. Un exemple de loi de distribution est représenté sur la figure I.2. Expérimentalement, la mesure dépend de la méthode employée. Les méthodes les plus fiables pour déterminer cette distribution sont les méthodes d'analyse d'image ou de topographique. Les méthodes indirectes (porosimétrie à mercure, conductivité, *etc.*) interagissent avec le réseau de pores et sont sensibles aux délimitations entre les pores plus qu'aux pores eux mêmes. Une illustration de cette limite est présentée sur la figure I.2. Sur celle-ci on observe des pores de petites tailles qui n'appartiennent pas au réseau de pore principal, l'analyse indirecte du réseau ne donnera donc aucune information sur cette fraction des pores [2] puisqu'elle n'appartient pas au réseau principal. Il existe une infinité de types de distributions de tailles de pores, trois exemples sont discutés ci-après. La distribution monomodale est représentée sur la figure I.2 elle correspond par exemple à un entassement de grains de tailles similaires. Une distribution bimodale sur la figure I.3, elle correspond, par exemple, à un arrangement de fibres textiles, l'une des tailles caractéristiques étant la distance entre les fibres et l'autre la distance entre les paquets de fibres. Enfin, une distribution amodale est présentée sur la figure I.3, elle peut correspondre à un milieu dont la structure est fractale. Chacune de ces distributions peut correspondre à de très nombreuses configurations spatiales, comme cela est illustré, dans un cas bimodale sur la figure I.4.

2. cette limite n'est pas la seule à ce type d'analyse

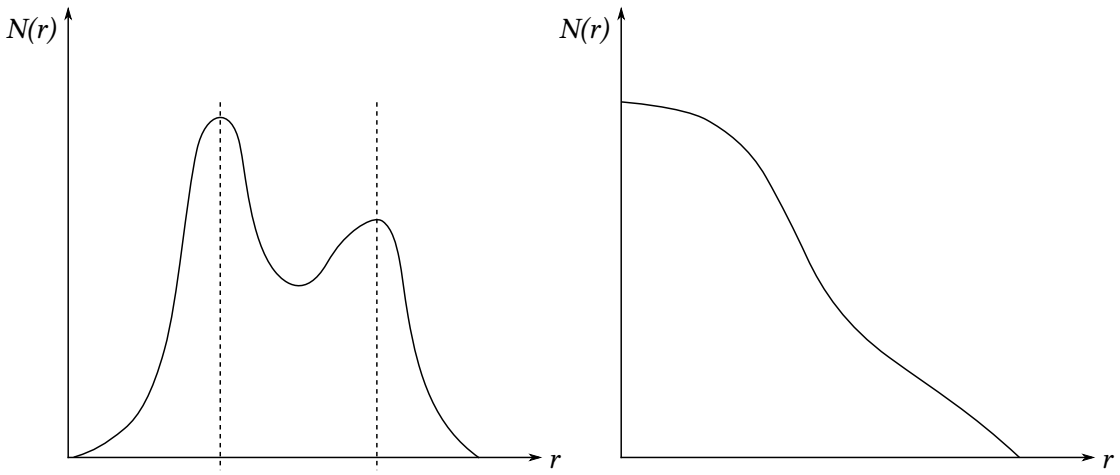

FIGURE I.3: Exemple de distributions statistiques des tailles de pores. Bimodale (gauche) et amodale (droite)

La connaissance de la distribution des tailles de pores d'un milieu poreux donc est insuffisante pour représenter celui-ci et prédire ses propriétés, la représentation du milieu demande également de caractériser l'organisation spatiale des pores. Les propriétés du milieu ne sont clairement définies que lorsque le milieu est homogène. On parlera par la suite de milieux poreux homogènes lorsque les portions considérées seront statistiquement indifférenciables du milieu dans son ensemble [3]. Pour que cette propriété soit vérifiée il faut considérer une portion du milieu suffisamment grande pour que la dimension de la portion soit supérieure à une longueur l_h. La notion d'homogénéité et d'hétérogénéité dépend donc de l'échelle d'étude. Les milieux poreux sont quasi-systématiquement hétérogènes à l'échelle de quelques pores. Cette propriété est un corollaire de leur nature dispersée. Ils peuvent même être hétérogènes à des échelles larges, ce qui interdit de les considérer comme homogènes et rend leur caractérisation complexes.

I.2.2 Saturation

Lorsqu'une phase fluide est introduite dans un milieu poreux, elle occupe une certaine fraction du volume disponible. La saturation désigne la fraction du volume total des pores occupée par celle-ci :

$$S_j = \frac{\sum_i V_{i,j}}{\phi V_T} \tag{I.3}$$

Avec S_j, la saturation de la phase j et $V_{i,j}$ le volume occupé par la phase j dans le pore i. La saturation peut également être définie localement et non globalement, elle est alors

3. Cette condition est nécessaire mais pas suffisante, l'arrangement spatiale devrait également être identique au milieu dans son ensemble.

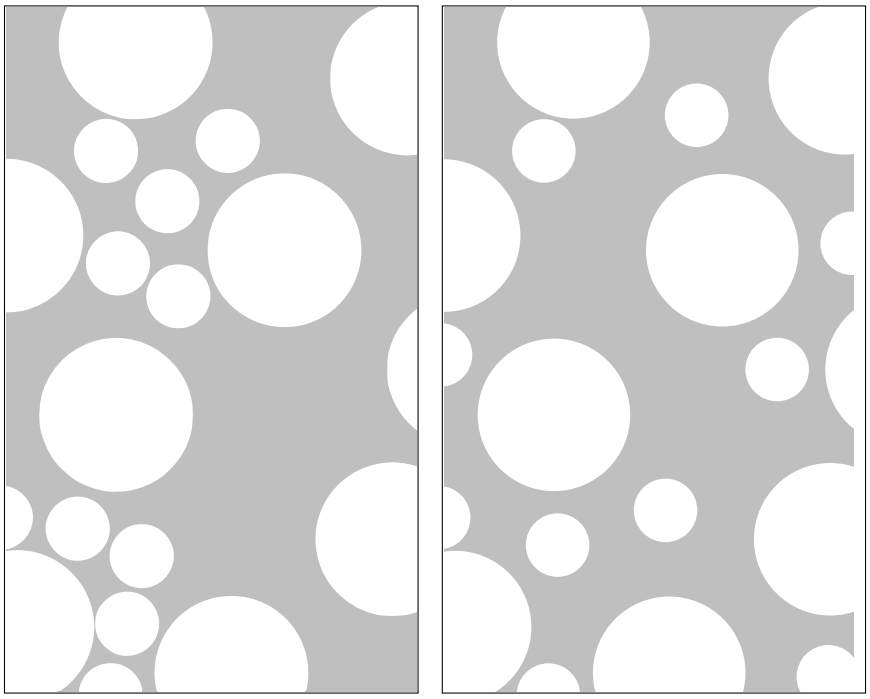

FIGURE I.4: Exemple de tranches de milieux poreux (les pores sont en blanc). La distribution des tailles de pores est identique sur les deux images

définie à une échelle supérieure à la longueur l_h mais suffisamment petite par rapport à la taille du système pour qu'elle soit locale.

I.2.3 Perméabilité

On peut diviser les milieux poreux en deux grandes catégories, les milieux dont les pores forment au moins un réseau connexe de la taille du milieu considéré, on parlera alors de réseau percolant, et les autres. Les milieux poreux qui possèdent au moins un réseau de pores percolant possèdent également des propriétés de conductivité propres à l'existence de celui-ci, notamment la perméabilité K.

Considérons une phase liquide incompressible et newtonienne qui remplit l'espace des pores ($S = 1$), l'équation de Navier-Stokes peut être appliquée :

$$\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v} = \mu\nabla^2\vec{v} - \vec{\nabla}P + \vec{f_v} \tag{I.4}$$

Avec ρ, la masse volumique du fluide, t le temps, $\vec{v}$ la vitesse, μ la viscosité dynamique, P la pression et $\vec{f_v}$ les forces volumiques. Cette équation peut être simplifiée lorsque les termes inertiels de celle-ci sont faibles devant les termes visqueux. Le ratio de l'amplitude des termes est contenu dans le nombre de Reynolds, R_e :

$$R_e = \frac{\rho v L}{\mu} \tag{I.5}$$

Avec, v une vitesse caractéristique et L une dimension caractéristique du problème. Trois principaux domaines sont à distinguer. Lorsque le nombre de Reynolds est grand, $Re >$ 2000 l'inertie domine l'écoulement et celui-ci est turbulent. Lorsqu'il est intermédiaire, $1 < Re < 2000$ l'écoulement résulte de l'action conjointe des effets visqueux et inertiels, il est généralement laminaire mais l'inertie impacte toujours l'écoulement. Lorsqu'il est faible, $R_e \ll 1$, c'est le régime de Stokes, l'écoulement est laminaire, stationnaire et les effets inertiels sont négligeables devant les effets visqueux, l'équation de Navier-Stokes peut alors se résumer à l'équation de Stokes :

$$\vec{0} = \mu \nabla^2 \vec{v} - \vec{\nabla} P + \vec{f_v} \tag{I.6}$$

Cette équation possède quelques propriétés remarquables. Les solutions de l'équation sont uniques (pas d'hystérèse), superposables et minimisent la dissipation visqueuse.

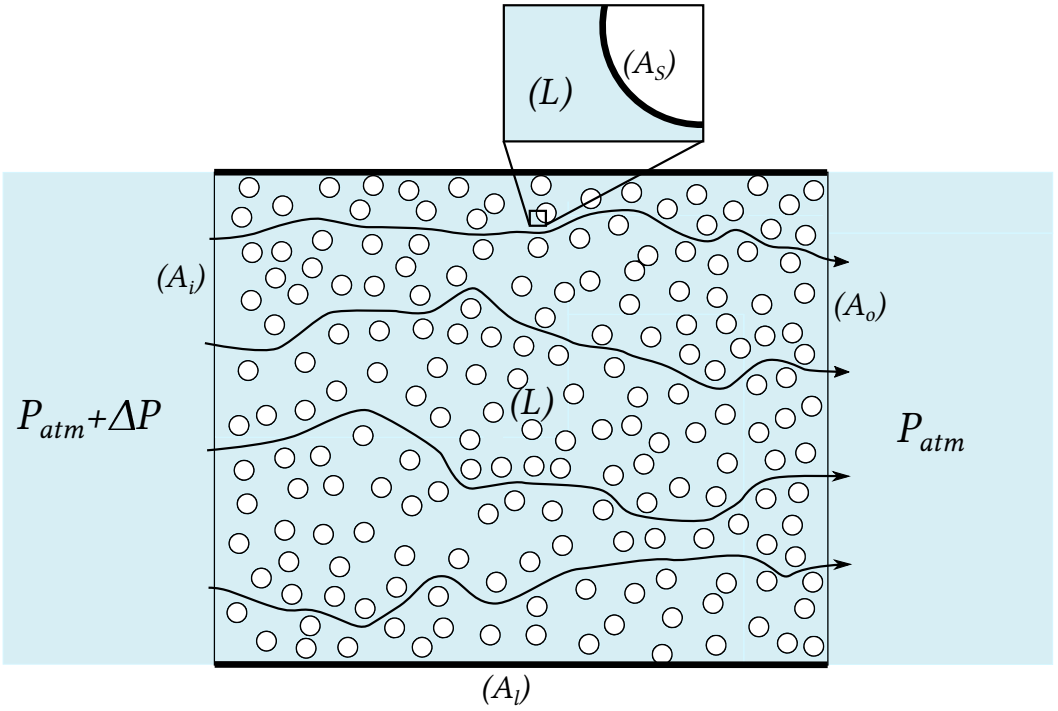

FIGURE I.5: Illustration du système soumis à une différence de pression ΔP

Dans les milieux poreux, les tailles caractéristiques, c'est-à-dire la taille des pores r, sont souvent assez faibles, si bien que le nombre de Reynolds l'est également. L'écoulement se produit donc généralement dans le régime de Stokes et peut être décrit sans effets inertiels. Cependant, le nombre de Reynolds ne doit plus être comparer aux valeurs de 1

et 2000 dans les milieux poreux mais à des valeurs dépendantes du milieu étudié [Dullien, 1992], de plus les transitions sont graduelles et non brusques.

Considérons maintenant la situation décrite sur la figure I.5. Un milieu poreux est soumis à une différence de pression ΔP en l'absence de force volumique, $\vec{f_v} = \vec{0}$. La pression est homogène et constante aux deux extrémités du milieu. Les équations qui décrivent le problème sont :

$$\left|\begin{array}{ll} \mu\nabla^2\vec{v} - \vec{\nabla}P = \vec{0}, & \vec{x} \in (L) \\ \vec{\nabla}.\vec{v} = 0 & \vec{x} \in (L) \\ \vec{v} = 0 & \vec{x} \in (A_S) \\ \vec{v} = 0 & \vec{x} \in (A_l) \\ P = P_{atm} & \vec{x} \in (A_o) \\ P = P_{atm} + \Delta P & \vec{x} \in (A_i) \end{array}\right. \tag{I.7}$$

Avec (L), le milieu occupé par le fluide dans le milieu poreux, (A_S) l'interface avec le milieu solide, P_{atm} la pression sur la face (A_o), $P_{atm} + \Delta P$ la pression sur la face, (A_i) et enfin, (A_l) les faces latérales. Le liquide étant incompressible, la pression est définie à une constante près, on pose arbitrairement $P_{atm} = 0$. On définit le débit dans une section (A) du système par la relation :

$$Q = \int_{(A)} \vec{v}.d\vec{A} \tag{I.8}$$

Notons la solution au problème I.7 décrit ci-dessus, $(\vec{v}^*, P^*)$. Considérons la solution multipliée par un réel a, $(a\vec{v}^*, aP^*)$, ce couple est solution du même problème pour une différence de pression, $a\Delta P$ mais correspond à un débit : aQ. Le débit est donc proportionnel à la différence de pression :

$$Q \propto \Delta P \tag{I.9}$$

Considérons maintenant le couple, $(a\vec{v}^*, P^*)$. Il est solution du problème I.7 pour une viscosité μ/a. Le débit est donc multiplié par a lorsque la viscosité est divisée par a :

$$Q \propto \frac{\Delta P}{\mu} \tag{I.10}$$

Ce résultat est très général. Par la suite nous allons considérer une portion du milieu poreux à une échelle où il est homogène. En considérant a systèmes en parallèle le débit

sera le même dans chacun des systèmes et sera donc proportionnel à la surface sur laquelle le calcul sera effectué [4]. On déduit donc :

$$Q \propto A\frac{\Delta P}{\mu} \tag{I.11}$$

Considérons maintenant a systèmes en série et supposons que leur raccordement n'affecte pas les conditions limites latérales. Le débit est le même dans chacun par conservation du volume et la variation de pression est la même dans chacun par symétrie ($\Delta P/a$).

$$Q \propto A\frac{\Delta P}{a\mu} \tag{I.12}$$

a est proportionnel à la longueur totale des systèmes disposés en parallèle. On peut donc regrouper la fraction $\Delta P/a$ sous la forme du gradient de pression. On distingue alors la pression locale P de la pression $\langle P\rangle$ moyenne.

$$Q \propto \frac{A}{\mu}\frac{\partial\langle P\rangle}{\partial x} \tag{I.13}$$

Enfin, on peut calculer le débit par unité de surface q :

$$q = \frac{Q}{A} \propto \frac{1}{\mu}\frac{\partial\langle P\rangle}{\partial x} \tag{I.14}$$

Le coefficient de proportionnalité de la relation ci-dessus est la perméabilité K (au signe près) du milieu, elle s'exprime en m^2. D'après le raisonnement qui précède, elle possède un sens qui n'est, ni microscopique (à l'échelle des pores), ni macroscopique, mais mésoscopique. Cependant, ce paramètre est fréquemment assimilé à une taille caractéristique de pore au carré [5]. Cette équation se généralise dans les milieux isotropes en dimension supérieure à 1 :

$$\vec{q_l} = -\frac{K}{\mu}\vec{\nabla}\langle P\rangle \tag{I.15}$$

Avec $\vec{q_l}$, le débit local et $\vec{\nabla}$ le gradient. Elle est généralement évoquée sous l'appellation : équation de Darcy [1856]. Le paramètre K n'est pas nécessairement un scalaire, dans les milieux anisotropes il prend la forme d'une matrice réelle symétrique.

4. Notez que cette propriété n'a de sens que pour un système considéré à une échelle supérieure à celle de la portion considérée. Il n'est pas valable dans ce système élémentaire.

5. Ce qui est rarement judicieux

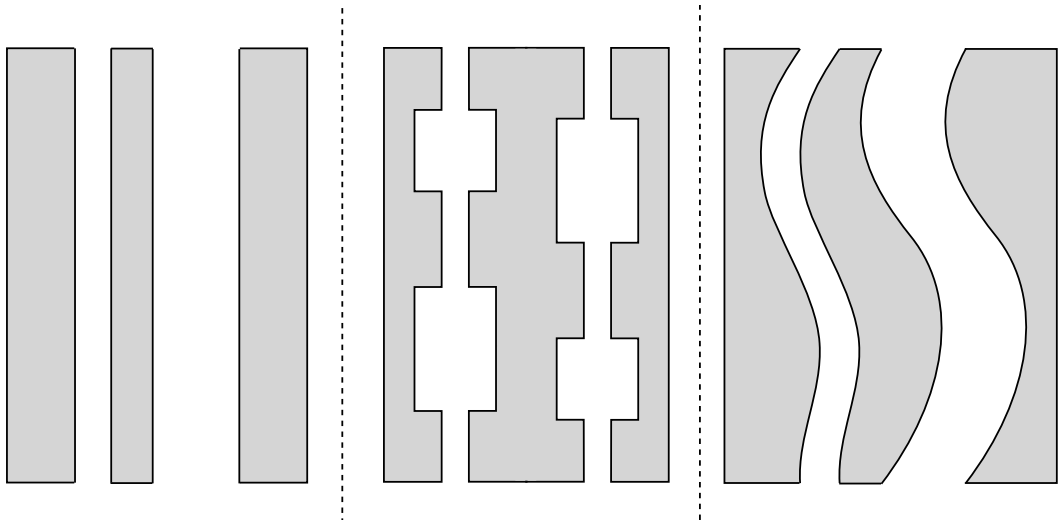

FIGURE I.6: Illustration de milieux poreux de distribution de taille de pores et de porosité identiques mais dont les perméabilités sont différentes

Plusieurs remarques sont nécessaires sur cette équation. Premièrement, la relation de Navier-Stokes demande de considérer un élément de volume petit devant la taille des pores mais grand devant celle des particules du fluide. En pratique, la perméabilité reste une propriété pertinente jusqu'à des échelles relativement faibles de l'ordre de quelques nanomètres [Gruener *et al.*, 2009].

Deuxièmement, les relations de proportionnalité qui nous ont amenées à la relation de Darcy sont exactes pour des transformations exactes. En pratique, les milieux poreux sont irréguliers et possèdent, du fait de leur nature aléatoire des propriétés uniques, ou du moins non-équivalentes selon l'organisation précise du milieu et ce, malgré de mêmes distributions statistiques et une même organisation dans l'espace [Bodaghi *et al.*, 2016]. Cette sensibilité est problématique car elle prédit un manque de répétabilité expérimentale.

Troisièmement, si on considère maintenant des milieux poreux de natures différentes mais de distributions de tailles de pores tout à fait semblables. Ceux-ci peuvent posséder des perméabilités proches comme très différentes. Nombre de paramètres peuvent intervenir, notamment l'organisation spatiale, qui joue un rôle déterminant. Sur la figure I.6 trois exemples de milieux (caricaturés) de même distribution mais de perméabilité différentes sont représentées. L'existence de constrictions sur la figure centrale implique une baisse de la perméabilité et celle de la tortuosité des pores, illustrée sur la figure de droite, implique également une baisse de la perméabilité par rapport au cas présenté sur la figure de gauche.

Enfin, les nombres adimensionnés comme le nombre de Reynolds peuvent être trompeurs, la vitesse déduite du débit $\vec{q_l}$ de l'écoulement ne correspond pas à la vitesse réelle de

l'écoulement physique $\vec{v}$ à l'échelle des pores mais à une moyenne de celle-ci, localement la vitesse peut donc être beaucoup plus (ou moins) élevée. Un nombre de Reynolds petit devant 1 n'assure donc pas un écoulement de Stokes (condition nécessaire à l'application de l'équation de Darcy) dans tout le milieu.

Des modèles analytiques existent ([Carman, 1937], [Childs et Collis-George, 1950], [Dullien, 1992], [Cai *et al.*, 2014]), ils sont cependant fortement dépendant des hypothèses relatives à leur cadre spécifique d'application. Le recours à la simulation numérique est bien souvent employé pour la déterminer, ou pour évaluer leur variabilité statistique [Bodaghi *et al.*, 2016]. Les données expérimentales sont donc bien souvent nécessaires pour caractériser la perméabilité d'un milieu avec certitude.

I.3 Capillarité

Dans les milieux poreux la dimension caractéristique des pores est généralement assez faible, $r < 1mm$. A ces échelles, la pesanteur n'est plus responsable de la forme de l'interface entre deux phases fluides immiscibles, c'est la capillarité qui s'en charge. Dans cette partie, nous allons montrer que les effets capillaires sont une conséquence de la nature cohésive des liquides, puis nous présenterons la notion de tension de surface et enfin celle d'énergie de surface.

I.3.1 Modèle mécanique de la capillarité

Les liquides possèdent une nature cohésive, ce constat est difficile à notre échelle mais il est évident à des échelles inférieures. Les insectes n'interagissent pas avec les liquides comme nous le faisons, une fourmi peut se déplacer avec un réservoir d'eau de sa taille sous forme de goutte et un gerris peut marcher sur l'eau. En l'absence de cohésion comment expliquer l'existence d'une goutte de pluie, son apparition n'est pas justifiée et elle devrait se fragmenter indéfiniment sous l'effet des frottements de l'air lors de sa chute ! Ce constat a été établi assez tôt dans l'histoire des sciences et son lien avec l'existence d'une tension de surface a rapidement été suspecté [Bikerman, 1978]. C'est Laplace [1806] qui a apporté la première théorie cohérente de la capillarité en 1806. Dans son manuscrit, il suppose l'existence d'une force attractive agissant à courte portée et montre qu'elle permet d'expliquer les observations réalisées à l'époque. On peut résumer son modèle de la manière suivante :

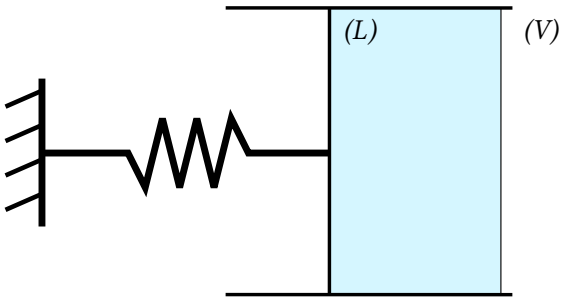

FIGURE I.7: Représentation du dispositif de mesure de la pression dans la phase liquide. La délimitation en noir fin représente l'interface, liquide-air et la délimitation en noir épais, le dispositif de mesure

Considérons un liquide déposé sur un dispositif de mesure de pression tel que représenté sur la figure I.7. Pour simplifier, nous allons supposer que le liquide et le solide n'interagissent pas ensemble[6].

Considérons tout d'abord une interface plane entre une phase gaz à la pression P_{atm} et une phase liquide. Le système est supposé à l'équilibre. En utilisant l'équation d'équilibre hydrostatique en l'absence de forces volumiques extérieures et en supposant qu'il est légitime de considérer que le système se comporte comme un liquide à l'échelle de la portée des interactions attractives[7], on peut écrire :

$$-\vec{\nabla}P + \vec{f_v} = \vec{0} \tag{I.16}$$

En définissant la force $\vec{f_v}$ tel que résultant d'un potentiel Φ, on transforme l'équation précédente pour obtenir :

$$-\vec{\nabla}(P + \Phi) = \vec{0} \tag{I.17}$$

Ce potentiel est à valeurs négatives et s'annule en l'absence d'interactions ou au-delà d'une distance l_Φ. Le théorème du gradient nous permet de reformuler l'équation ci-dessus sous la forme suivante :

$$\int_{(\Omega)} \vec{\nabla}(P + \Phi) d\Omega = \int_{(\partial\Omega)} (P + \Phi) d\partial\vec{\Omega} = \vec{0} \tag{I.18}$$

Sous cette dernière forme, nous allons considérer les forces subies par les systèmes représentés sur la figure I.8. On supposera que les particules dans la phase gaz sont

6. Cette hypothèse n'est pas crédible mais elle permet de simplifier le problème, le résultat reste juste si elle n'est pas adoptée

7. Ce qui n'est pas du tout évident.

très diluées, si bien que le potentiel d'interaction entre deux petits volumes de matière des phases liquide et gaz est négligeable. La pression P est connue au niveau de l'interface libre, elle correspond à la pression atmosphérique P_{atm}. Lorsque l'interface est plane, les particules en surface subissent la moitié des interactions que subissent les particules dans le corps du liquide, le terme attractif correspondant sera noté : $\Phi_{1/2}$. Au niveau des extrémités inférieures et supérieures du système, le potentiel d'attraction Φ est donc de $\Phi = \Phi_{1/2}$. Ce qui impose :

$$P_{atm} + \Phi_{1/2} = P_p + \Phi_{1/2} \tag{I.19}$$

Avec P_p, la pression mesurée par le piston. Il découle de l'équation ci-dessus que la pression mesurée par le dispositif correspond à la pression atmosphérique P_{atm}.

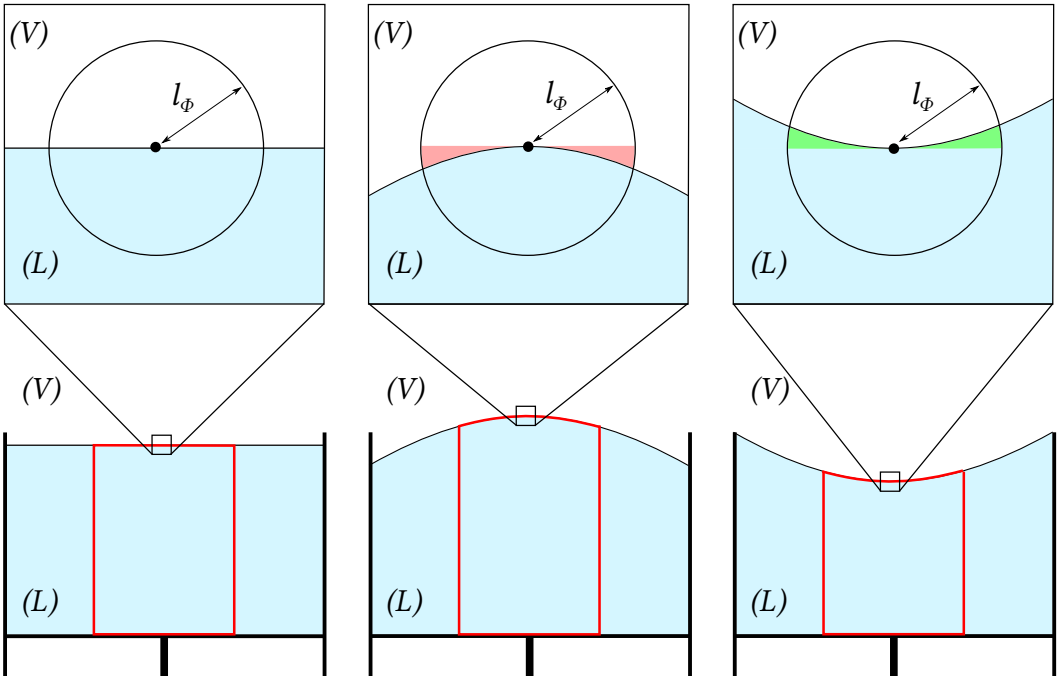

FIGURE I.8: Représentation des systèmes considérés (partie inférieure de l'image) délimités en rouge vif. Les interactions avec les particules dans le voisinage sont représentées dans la partie supérieure

Considérons maintenant la situation où l'interface est convexe, cette situation est représentée sur la figure I.8 (centre). Au niveau de l'interface, certaines interactions manquent, le potentiel Φ est donc supérieur [8] en surface d'une quantité $-\Phi_c(\kappa)$ fonction de la courbure κ de celle-ci. L'équation d'équilibre prend alors la forme :

$$P_{atm} + \Phi_{1/2} - \Phi_c(\kappa) = P_p + \Phi_{1/2} \tag{I.20}$$

8. Puisque le potentiel est négatif.

On déduit donc de l'équation ci-dessus que la pression mesurée par le piston est supérieure à la pression atmosphérique, d'une quantité $-\Phi_c(\kappa)$.

Considérons enfin la situation ou l'interface est concave, ce cas est représenté sur la figure I.8 (droite). Au niveau de l'interface, il existe des interactions en excès par rapport à la situation plane. Le potentiel Φ est donc inférieur d'une quantité fonction de la courbure.

$$P_{atm} + \Phi_{1/2} + \Phi_c(\kappa) = P_p + \Phi_{1/2} \tag{I.21}$$

L'équation d'équilibre implique alors que la pression dans le corps du liquide doit être plus faible d'une quantité $\Phi_c(\kappa)$.

La variation de la pression observée est donc la conséquence directe de la nature attractive des interactions qui agissent sur un certain volume à une distance limitée du morceau de matière considéré. Tant que la courbure est faible par rapport à la portée des interactions[9], la fonction $\Phi_c(\kappa)$ peut être approximée par un développement limité à l'ordre 1.

$$\Phi_c(\kappa) \approx \Phi_c(0) + \kappa \frac{d\Phi_c}{d\kappa} \tag{I.22}$$

D'après la définition de Φ_c, il s'annule lorsque la courbure est nulle. En définissant la tension de surface γ par rapport à la variation du potentiel :

$$\gamma = -\frac{d\Phi_c}{d\kappa} \tag{I.23}$$

On peut écrire que la pression dans le liquide varie en fonction de la courbure :

$$P - P_{atm} = -\kappa\gamma \tag{I.24}$$

Cette différence de pression est désignée par l'appellation loi de Laplace [1806]. En 3 dimensions, la courbure n'est plus unique, l'expression de la pression de Laplace prend alors la forme :

$$\Delta P = -\gamma(\kappa_1 + \kappa_2) \tag{I.25}$$

avec κ_1 et κ_2 les courbures propres de l'interface.

9. De l'ordre de quelques nm.

Ce modèle a permis d'expliquer beaucoup de phénomènes capillaires connus à l'époque, comme cela peut être compris à la lecture du manuscrit historique de Laplace [1806]. Cette description de la capillarité est strictement mécanique et n'était plus pertinente dès l'apparition de la thermodynamique au milieu du XIXème siècle mais elle suffisante dans le cadre de ce document.

En pratique, les interactions attractives sont de natures variables selon le liquide étudié. elles peuvent correspondre aux forces de Van der Waals, aux liaisons métalliques, aux liaisons H., *etc.* Plus les interactions sont fortes et portent loin plus la tension de surface est élevée. L'ordre de grandeur typique de la distance sur laquelle les interactions agissent est de quelques nm maximum, ce qui donne un ordre d'idée de la robustesse de l'équation de Laplace.

Le lecteur intéressé pourra accéder à un traitement plus conséquent et historique du problème dans Rowlinson et Widom [2002] et à une description récente dans Marchand [2011]. Le raisonnement proposé dans cette partie est notamment inspirée de ces deux sources.

I.3.2 La tension de surface

Ce n'est généralement pas sous la forme de la variation d'un potentiel d'interaction mais plutôt sous celle d'une force linéique ou d'une tension de surface que la capillarité est présentée. Lorsqu'un liquide est au contact d'une autre phase, l'interface qui les sépare est dans un état de tension mécanique. Cette situation est assez similaire à ce qui se produit lorsqu'on gonfle un ballon de baudruche, la pression est plus élevée dans la partie convexe (conformément à la modélisation réalisée dans la partie ci-dessus) et les parois du ballon sont en tension. Si on considère une portion de la paroi une force linéique agit dans le plan tangent perpendiculairement aux contours de la portion. Cette analogie est cependant trompeuse, un ballon de baudruche ne prend pas une forme sphérique mais une forme de poire et cette différence est fondamentale entre les liquides et les solides. La tension dans le cas du ballon dépend de l'état de déformation de ses parois, alors que la tension dans l'interface liquide est indépendante de celui-ci [10]. Cette interprétation de la tension de surface comme un état de tension mécanique de l'interface est expérimentalement vérifiée et est à la base de différentes méthodes de mesure ([Wilhelmy, 1863], [du Noüy, 1925], *etc.*) de celle-ci.

10. Et où la notion de déformation est beaucoup plus flou.

I.3.3 Description thermodynamique de la capillarité

Les effets capillaires peuvent également être observés sous l'angle de la thermodynamique (là encore, Rowlinson et Widom [2002] offrent une description poussée de la thermodynamique des interfaces). Dans un système fermé au contact d'un thermostat et en équilibre avec celui-ci on considère un liquide incompressible (L) dans une atmosphère (V) tous deux séparés par la surface (A). Conformément à la description de l'interface dans la partie I.3.1 on supposera l'interface infiniment fine, elle correspond donc exactement à la surface (A). La variation de l'énergie libre du système s'écrit :

$$dF = -S_E dT - PdV + \gamma dA + \sum_i \mu_i n_i \tag{I.26}$$

Avec S_E, l'entropie du système, T la température, V le volume du système et A l'aire de l'interface, n_i les composantes du vecteur des quantités de matière et μ_i celles du vecteur des potentiels chimiques. Et où le terme additionnel γ correspond désormais à l'énergie libre par unité de surface. On peut écrire γ :

$$\gamma = \frac{\partial F}{\partial A}|_{V,T,n_i} \tag{I.27}$$

Il est important de comprendre que cette définition est relative à des transformations exécutées de manière isotherme, isochore et pour un système fermé. Elle peut aussi bien être définie par rapport aux autres potentiels thermodynamiques en considérant les transformations relatives à ceux-ci.

La description ci-dessus ne permet pas, *a priori*, de déduire que l'interface adopte une forme dont la somme des courbures est constante à l'équilibre, alors que ce résultat découle directement de la loi de Laplace vue précédemment. Nous allons montrer ci-dessous que cette implication existe [11].

Le système considéré est représenté sur la figure I.9. Supposons qu'il existe un champ de déplacement en tout point normal à l'interface ϵ et orienté positivement vers l'extérieur de (L). On considérera quatre points (B, C, D, E) de l'interface définis sur la figure et leur transformation après application du champ de déplacement. Localement et en utilisant les notations du schéma le vecteur normal à l'interface s'écrit :

11. Raisonnement inspiré de Bouasse [1924]

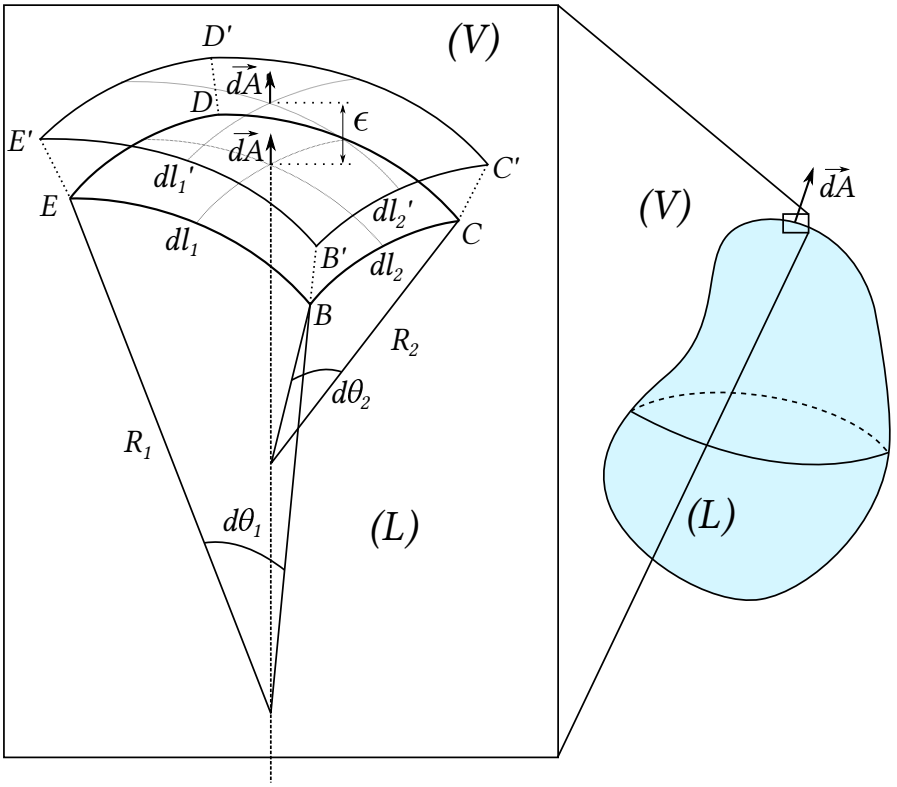

FIGURE I.9: Représentation de l'interface courbe entre les deux phases et de sa transformation

$$\vec{dA} = dA \begin{pmatrix} \sin(d\theta_1) \\ \sin(d\theta_2) \\ \cos(d\theta_1)\cos(d\theta_2) \end{pmatrix} \tag{I.28}$$

En considérant des points proches de celui considéré par rapport au plus petit rayon de courbure, on peut approximer le vecteur normal à l'ordre 1 sous la forme :

$$\vec{dA} \approx dA \begin{pmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{I.29}$$

A l'échelle du système, les variations du champ de déplacement sont supposées faibles ainsi que la variation du rayon de courbure. La position d'un point X, du segment BE, est identifiée par la variable a qui après transformation s'écrit :

$$\vec{XX'} = \epsilon \begin{pmatrix} ad\theta_1 \\ d\theta_2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{I.30}$$

Le nouveau segment $B'E'$ est donc également un arc de cercle, de rayon $R_1 + \epsilon$. La longueur dl_1 de la portion courbe BE possède la longueur :

$$dl_1 = R_1 d\theta_1 \tag{I.31}$$

Et après transformation, elle possède donc la longueur :

$$dl'_1 = (R_1 + \epsilon) d\theta_1 \tag{I.32}$$

Les mêmes arguments, appliqués au segment BC, permettent de montrer que :

$$dl'_2 = (R_2 + \epsilon) d\theta_2 \tag{I.33}$$

L'aire de la section après transformation s'écrit donc :

$$dA' \approx dl'_1 dl'_2 = (R_1 + \epsilon)(R_2 + \epsilon) d\theta_1 d\theta_2 \tag{I.34}$$

Soit en l'approximant à l'ordre 1 :

$$dA' \approx (R_1 R_2 + (R_1 + R_2)\epsilon) d\theta_1 d\theta_2 \tag{I.35}$$

Qui permet d'écrire :

$$dA' - dA \approx \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \epsilon dA \tag{I.36}$$

La variation de l'air est donc proportionnelle à la somme de l'inverse des rayons de courbure locaux. *A contrario*, la variation du volume est proportionnelle à ϵdA pour ϵ petit devant chacune des courbures.

En supposant que les deux courbures propres soient définies en chaque point de l'interface, on peut donc écrire que toutes les transformations isochores doivent respecter la propriété :

$$\Delta V = \int_{(A)} \epsilon dA = 0 \tag{I.37}$$

La variation d'énergie libre correspondante étant :

$$\Delta F = \int_{(A)} \gamma\epsilon \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) dA \tag{I.38}$$

Supposons que la somme des courbures du système soit constante en tout point de l'interface, alors, d'après l'équation I.38 toute transformation isochore est une transformation sans variation de l'énergie libre du système. Nous venons de montrer que si notre système possède une somme de ces courbures constante alors il est à l'équilibre ($\Delta F = 0$).

Nous pouvons également montrer que la réciproque est vraie. Notons C la somme des courbures en un point de l'interface et C^* la courbure moyenne :

$$C^* = \frac{1}{A} \int_{(A)} C dA \tag{I.39}$$

Supposons que $\Delta F = 0$, cela doit être vrai pour tout champ de déplacement ϵ isochore. Il doit donc l'être également pour le champ de transformation $\epsilon = b(C - C^*)$. La variation d'énergie libre associée s'écrit :

$$\Delta F = \gamma \int_{(A)} b(C - C^*) C dA \tag{I.40}$$

Une expression qu'on peut réécrire :

$$\Delta F = \gamma \int_{(A)} b \left((C - C^*)^2 + C^* C - C^{*2} \right) dA \tag{I.41}$$

Soit, en utilisant la définition de C^* :

$$\Delta F = \gamma \int_{(A)} b(C - C^*)^2 dA \tag{I.42}$$

Puisque b peut être librement choisi, il existe donc forcément une transformation isochore qui permet de faire varier F si la somme des courbures de l'interface est non constante. On peut donc écrire que l'interface possède une somme de des courbures constante si et seulement si elle est à l'équilibre. Le raisonnement présenté ici tient uniquement en l'absence de forces volumiques.

I.4 Mouillage statique

I.4.1 Relation d'Young

Lorsqu'un liquide est au contact d'un solide indéformable, la situation change radicalement. L'observation de tous les jours est élémentaire, une calotte se forme[12]. L'intersection de l'interface liquide avec le solide, nommée ligne de contact, dépend du couple liquide-solide employé. C'est Young [1805] qui proposa la première modélisation de l'équilibre qui se manifeste au niveau de la ligne de contact. Son raisonnement s'appuie sur un bilan des forces linéiques qui s'exercent au niveau de la ligne de contact. Ce raisonnement est controversé. Par conséquent, nous allons présenter dans cette partie un raisonnement strictement thermodynamique, sans prétendre connaître la distribution des forces au niveau de la ligne de contact.

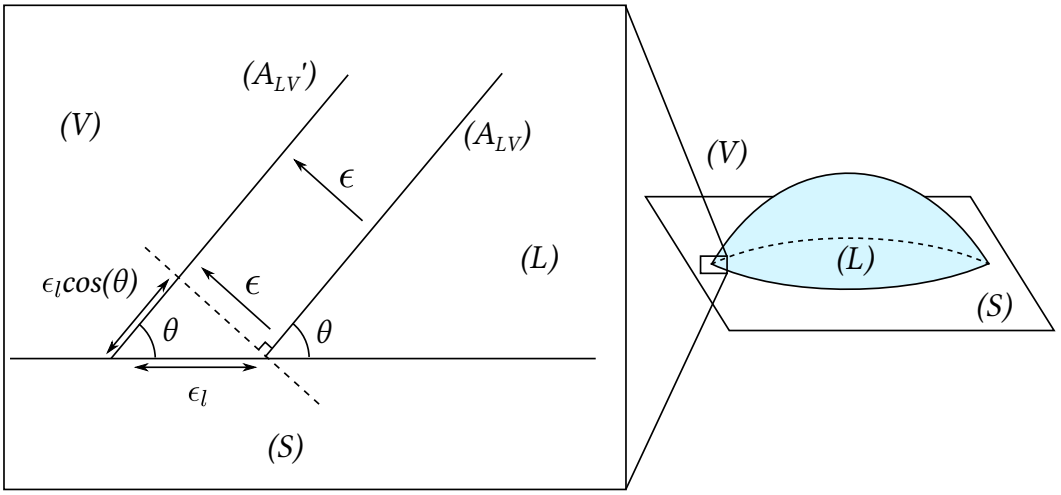

FIGURE I.10: Représentation de la ligne triple et de la transformation locale

Nous sommes maintenant en présence de trois types d'interfaces différentes, une interface liquide-air (A_{LV}) avec une énergie libre associée γ_{lv}, une interface solide-air (A_{SV}) avec une énergie libre associée γ_{sv} et enfin une interface solide-liquide (A_{SL}) avec une énergie libre associée γ_{sl}. Le substrat solide sur lequel la goutte repose est parfaitement plan[13], nous définirons donc un champ de petits déplacements ϵ, normaux à l'interface. Ces déplacements sont continus, sur les bords cela implique notamment un déplacement de la ligne triple (l), soit une modification de l'énergie libre du système associée aux interfaces solide-air et solide-liquide. On note ϵ_l le déplacement de l'interface au niveau de la ligne de contact, projeté selon la tangente au substrat perpendiculaire à la ligne et orienté positivement vers l'extérieur. La transformation décrite ci-dessus est représentée

12. Pour de petites gouttes.
13. On pourrait parfaitement se priver de cette hypothèse

schématiquement sur la figure I.10. Le déplacement normal ϵ de l'interface est lié au déplacement ϵ_l par la relation :

$$\epsilon = \epsilon_l sin(\theta) \tag{I.43}$$

Avec θ, l'angle de contact local de l'interface avec le substrat. Le déplacement de l'interface s'accompagne d'une variation de l'énergie libre :

$$dF = \epsilon_l \left(\gamma_{lv} cos(\theta) + \gamma_{sl} - \gamma_{sv}\right) dl \tag{I.44}$$

Avec dl, une portion élémentaire de la ligne de contact. La variation de volume associée à ce petit déplacement s'écrit :

$$dV = \frac{\epsilon_l^2}{2} \left(cos(\theta) sin(\theta)\right) dl \tag{I.45}$$

Et qui peut se réécrire :

$$dV = \frac{\epsilon^2}{2} \left(\frac{1}{tan(\theta)}\right) dl \tag{I.46}$$

Cette variation est d'ordre 2 en déplacement, or l'équation de conservation ne sera vérifiée qu'à l'ordre 1. La contribution du déplacement sur les bords sera donc supposée négligeable par rapport aux déplacements de l'interface liquide-air. A l'ordre 1 on peut donc écrire les variations de volume :

$$\Delta V = \int_{(A)} \epsilon dA \tag{I.47}$$

Et d'énergie libre :

$$\Delta F = \int_{(A)} \gamma_{lv} \epsilon \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) dA + \int_{(l)} \epsilon_l (\gamma_{lv} cos(\theta) + \gamma_{sl} - \gamma_{sv}) dl \tag{I.48}$$

Le même argument que celui vu précédemment s'applique au champ ϵ, il ne peut être nul pour une transformation isochore que si la courbure est constante. Mais cela est insuffisant pour dire que la goutte est en équilibre car il faut également que la variation d'énergie libre soit nulle au niveau de la ligne de contact :

$$\gamma_{lv}cos(\theta) + \gamma_{sl} - \gamma_{sv} = 0 \tag{I.49}$$

Alors $\Delta F = 0$, l'interface est donc à l'équilibre. L'angle de contact doit donc être constant, il sera noté, θ_e par la suite. Supposons maintenant que le système soit à l'équilibre, $\Delta F = 0$ pour toute transformation isochore. On peut appliquer le même raisonnement que précédemment à l'interface liquide-air, pour la ligne de contact on applique une transformation de la forme :

$$\epsilon_l = b(\gamma_{lv}cos(\theta) + \gamma_{sl} - \gamma_{sv}) \tag{I.50}$$

La variation d'énergie libre ne peut alors être nulle que si l'équation I.49 est vérifiée partout sur la ligne de contact. Il y a donc équivalence entre une variation élémentaire de l'énergie libre du système nulle [14] et une somme des courbures constante de l'interface et la ligne de contact vérifiant l'équation d'Young.

I.4.2 Mouillage partiel et mouillage total

Trois grandes catégories de mouillage sont distinguables. Lorsque l'angle de contact est nul, $\theta_e = 0°$, on parle de mouillage total. Lorsque l'angle de contact est très fort, $\theta_e = 180°$ on parle de non-mouillage. Enfin lorsque l'angle de contact est intermédiaire, $0° < \theta_e < 180°$ on parle de mouillage partiel. Ces trois situations découlent de l'équation d'Young I.49 qui ne possède pas forcement de solution puisque les variations de la fonction cosinus sont bornées. En pratique la situation non-mouillante n'existe pratiquement jamais bien que certains systèmes s'en rapprochent. Les deux situations courantes sont donc le mouillage partiel et le mouillage total.

I.4.3 Rugosité du substrat

Lorsque le substrat est irrégulier localement, la loi d'Young n'est pas vérifiée. Le raisonnement présenté dans la partie I.2.3 n'est plus valide car le déplacement de l'interface sur la longueur ϵ_l génère une surface de contact d'air proportionnelle à $\eta\epsilon_l dl$ avec η la rugosité du substrat, qui se défini comme le ratio entre la surface réelle et la surface idéalisée. La relation d'Young prend alors la forme :

$$\gamma_{lv}cos(\theta) + \eta(\gamma_{sl} - \gamma_{sv}) = 0 \tag{I.51}$$

14. Qui n'est pas nécessairement l'équilibre thermodynamique mais seulement un équilibre métastable ou même instable.

et est nommée, relation de Wenzel [1936]. La notion de rugosité telle qu'employée dans la relation de Wenzel, I.51, perd cependant tout son sens lorsque les irrégularités ont des dimensions inférieures ou de l'ordre de la portée des interactions (quelques nm). L'effet de la rugosité est d'amplifier la tendance mouillante ou non mouillante, si l'angle de contact est plutôt non mouillant, $\theta_e > \pi/2$, un substrat très rugueux augmente l'angle de contact. A l'inverse, pour un système plutôt mouillant, $\theta_e < \pi/2$ la rugosité abaisse l'angle de contact [15].

I.4.4 Limites de l'équation d'Young

Malheureusement, dans la réalité les choses ne sont pas si simples. Une goutte d'eau déposée sur une vitre ne coule pas nécessairement sous l'effet de son propre poids mais peut rester à une position fixe. Cette observation illustre l'existence d'une hystérèse de mouillage. L'hystérèse se manifeste sous la forme de l'existence d'un angle d'avancée et d'un angle de retrait [Dettre *et al.*, 1965]. Tous deux sont illustrés sur la figure I.11. L'existence de ceux-ci est principalement due à deux choses, l'existence d'hétérogénéités physiques et chimiques.

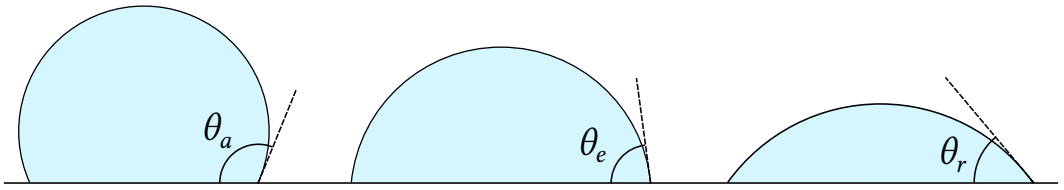

FIGURE I.11: Représentation des angles de contact d'avancée, d'équilibre et de retrait pour un même couple solide-liquide

Les hétérogénéités physiques comprennent les défauts et irrégularités en surface. Lorsque la ligne de contact se déplace, elle s'ancre à ces défauts et y reste accrochée [Nadkarni et Garoff, 1992]. Lorsque l'interface est soumise à un nouveau déplacement le point d'ancrage tire l'interface vers lui. Donc, l'interface n'a pas la capacité d'atteindre spontanément l'état qui minimise son énergie libre. Elle reste bloquée dans un état d'équilibre métastable, soit un minimum local de l'énergie libre.

Les hétérogénéités chimiques correspondent à des variations de la composition du substrat. Ces variations sont susceptibles de modifier localement l'énergie libre de surface (γ_{sv} ou γ_{sl}) et donc, d'après la relation d'Young I.49, de faire varier l'angle de contact d'équilibre θ_e [Cassie et Baxter, 1944]. Le mécanisme de l'ancrage existe également (sur une zone plus mouillante) et est tout à fait similaire à celui qui se produit pour les hétérogénéités physiques.

15. Ce qui peut très facilement se retrouver en remarquant que par définition $\eta \geq 1$

Si une goutte, dont l'angle de contact statique est intermédiaire, est déposée avec un angle $\theta(t = 0) \sim \pi$, la goutte évolue dynamiquement et l'angle d'arrêt est l'angle de contact d'avancée θ_a. Au-dessus de cet angle, la progression du liquide n'est plus spontanée. A l'inverse, si la goutte est initialement étalée, $\theta(t = 0) \sim 0$, la goutte va se "regrouper" et l'angle de contact va se stopper à la valeur de l'angle de retrait θ_r. On peut donc écrire :

$$\theta_r \leq \theta_e \leq \theta_a \tag{I.52}$$

Les angles de contact à l'avancée et au retrait, sont fortement dépendants du substrat. Lorsque le mouillage est total, ils sont tous les deux égaux à l'angle de contact à l'équilibre.

Séparément des hystérèses de mouillage, l'angle de contact est très sensible à l'état de surface du substrat. La pollution de celui-ci, comme des interfaces liquides, se produit naturellement [16] et agit principalement sur les composantes γ_{sl} et γ_{sv} de la relation d'Young. L'exemple typique est celui du verre, une goutte d'eau doit s'étaler sur un substrat en verre propre. En pratique, il faut laver minutieusement le verre pour observer ce résultat.

I.4.5 Notion de ménisque

Lorsqu'un solide est plongé dans un bain de liquide mouillant vis-à-vis de celui-ci [17], la surface du bain se courbe à ses extrémités et semble monter sur le solide. Cette situation est représentée sur la figure I.12. Si l'on s'éloigne du solide qui trempe dans le bain, le liquide est seulement soumis à son propre poids. L'équation hydrostatique peut être employée dans la phase liquide (L) en supposant la densité de l'autre phase négligeable.

$$-\vec{\nabla}P - \rho g\vec{e_z} = \vec{0} \tag{I.53}$$

Cette équation peut être intégrée et prédit une évolution linéaire du champ de pression en fonction de la hauteur. En supposant que l'interface est plane et donc que la pression de Laplace entre le liquide et l'atmosphère est nulle, la forme de l'interface correspond à une ligne de niveau en pression, $P = P_{atm}$. Lorsque l'interface est courbe, la condition limite entre l'atmosphère et le liquide est plus complexe et dépend de la courbure locale

16. Pour abaisser l'énergie libre du système.
17. Notez que le potentiel thermodynamique à employer n'est plus F, l'énergie libre, mais l'ensemble grand canonique, $\Omega = F - \boldsymbol{\mu}.\mathbf{n}$.

de l'interface. L'équation d'équilibre hydrostatique est toujours valable dans le volume (L). On désigne par ménisque la forme adoptée par l'interface à proximité du solide.

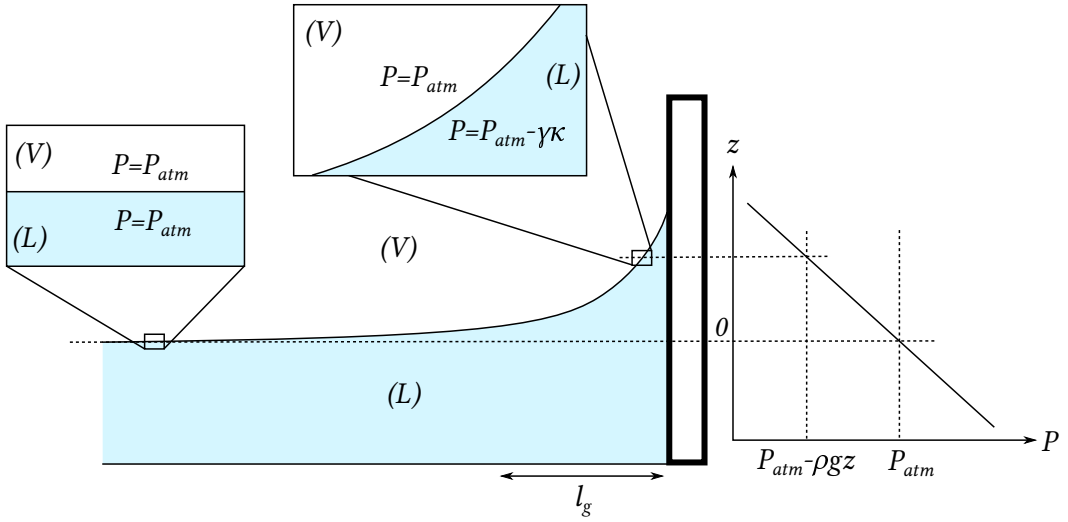

FIGURE I.12: Représentation du ménisque qui se forme autour du solide immergé (notez que le liquide est mouillant vis-à-vis du solide, dans le cas inverse l'interface serait courbée vers le bas)

L'interface se courbe substantiellement sur une distance limitée, grossièrement, on peut estimer que pour un ménisque remontant à une hauteur h, les effets portent sur une distance telle que la pression de Laplace soit de l'ordre de la pression hydrostatique correspondante :

$$\rho g h = \frac{\gamma h}{l_g^2} \tag{I.54}$$

Soit une longueur :

$$l_g = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}} \tag{I.55}$$

Cette longueur l_g se nomme longueur capillaire. Lorsque la taille caractéristique d'un système est petite devant celle-ci, la courbure du ménisque est constante à l'équilibre et celui-ci correspond à une surface à pression constante. C'est également cette longueur qui définit le domaine à proximité du solide. Notamment, dans un capillaire circulaire de rayon r, le ménisque prend la forme d'une calotte sphérique s'il est petit devant la longueur capillaire. La pression dans le liquide au niveau du ménisque s'écrit alors :

$$P = -\frac{2\gamma}{r} cos(\theta_e) \tag{I.56}$$

Le critère précédent revient à dire que la variation de pression hydrostatique à l'échelle du ménisque, ρgr est négligeable devant la pression capillaire, $\rho gr \ll \gamma/r$. Pour un liquide complètement mouillant, le ratio de ses deux quantités constitue le nombre de Bond :

$$B_o = \frac{\rho g r^2}{\gamma} \tag{I.57}$$

Lorsque le nombre de Bond est grand devant 1, la gravité domine les effets capillaires et dessine la forme de l'interface. A l'inverse, lorsque celui-ci est petit devant 1, les effets capillaires dominent. Le nombre de Bond est fréquemment défini avec $\Delta\rho$, la différence des densités des phases lorsque celles-ci ont des masses volumiques comparables.

Lorsqu'un capillaire est trempé dans un bain de ce liquide et que celui-ci a un rayon r tel que $B_o \ll 1$, on s'attend donc à ce que le liquide puisse s'écouler dans le capillaire jusqu'à atteindre la hauteur pour laquelle la pression hydrostatique égale la pression au niveau du ménisque, soit la hauteur :

$$h_j = \frac{2\gamma}{\rho g r} cos(\theta_e) \tag{I.58}$$

Cette relation se nomme loi de Jurin et constitue l'une des premières observations robustes sur les effets capillaires [18].

I.5 Mouillage statique dans les milieux poreux

Dans un milieu poreux, il existe une distribution des tailles de pore. Cette distribution ne permet pas de définir une pression capillaire ou une hauteur de Jurin mais un ensemble de celles-ci. Considérons un milieu poreux qui trempe dans un bain de liquide mouillant vis-à-vis de celui-ci. Le liquide va pénétrer dans le milieu et atteindre un état qui respectera l'équation hydrostatique. La transition entre la zone sèche et la zone saturée n'est pas brutale mais progressive. Cette situation est représentée sur la figure I.13. Dans la zone partiellement saturée, la pression hydrostatique correspond à la pression de Laplace. On peut donc écrire en négligeant l'influence de la phase non mouillante :

$$P_c(z) = -\rho g z \tag{I.59}$$

18. Ce n'est pas par hasard que le manuscrit de Laplace s'intitule : "Sur la théorie des tubes capillaires".

A une échelle d'observation large (où le milieu est statistiquement homogène), la saturation moyenne $\langle S \rangle$ dans le milieu est mesurable pour une côte z donnée. A l'équilibre on peut donc déduire une relation entre la saturation et la pression capillaire $P_c(\langle S \rangle)$. A quoi correspond cette relation ? A l'échelle des pores, le fluide s'organise et prend l'aspect d'un ensemble de ménisques [19]. Le lien entre la géométrie réelle (souvent complexe) des pores et la pression capillaire correspondante n'est pas évident. Premièrement les pores n'ont pas des formes semblables aux capillaires de section circulaire évoqués dans la partie précédente. Localement, la relation entre la taille des pores et la pression capillaire n'est donc pas triviale [20] ([Purcell, 1950], [Morrow, 1976]). De plus, les milieux poreux sont rarement chimiquement homogènes [Brown et Fatt, 1956], l'angle de contact n'est donc pas unique mais dépend de la composition locale voir de la pollution locale du milieu. Cela complique encore largement l'interprétation microscopique des observations expérimentales.

La courbe $P_c(\langle S \rangle)$ a également été étudiée en drainage ; considérons maintenant que le même milieu poreux est initialement saturé de la phase mouillante puis placé au contact du bain de liquide. La phase liquide fuit alors le milieu progressivement et tend à atteindre un équilibre statique. Cette situation est représentée sur la figure I.13. Le résultat alors obtenu n'est pas équivalent au résultat obtenu en imbibition. La courbe $P_c(\langle S \rangle)$ est soumise à de fortes hystérèses liées, entre autres choses, à l'hystérèse de mouillage. La situation la plus surprenante est probablement l'observation d'un domaine de saturation indépendant de la pression (au-dessus de la ligne pointillé sur la figure I.13), cette zone est hors équilibre. Lorsque le démouillage se produit, des portions de phases mouillantes subsistent, isolées dans le milieu [Leverett, 1941]. La transition vers l'équilibre ne peut alors plus se produire par l'écoulement (la portion étant isolée) mais par diffusion, soit un phénomène considérablement plus lent, le système est donc dans une situation de blocage cinétique. Ce blocage a même été remarqué à des échelles de temps géologiques [Morrow, 1971].

De manière strictement statique, la transition du capillaire simple au milieu poreux est donc non triviale. Ce constat s'amplifie encore largement lorsqu'on s'intéresse à la dynamique de ces problèmes. Celle-ci fait l'objet des parties suivantes.

19. Dans certains milieux poreux l'interface est au contraire continue.
20. De nombreux auteurs utilisent le rayon hydraulique, ce qui est très discutable.

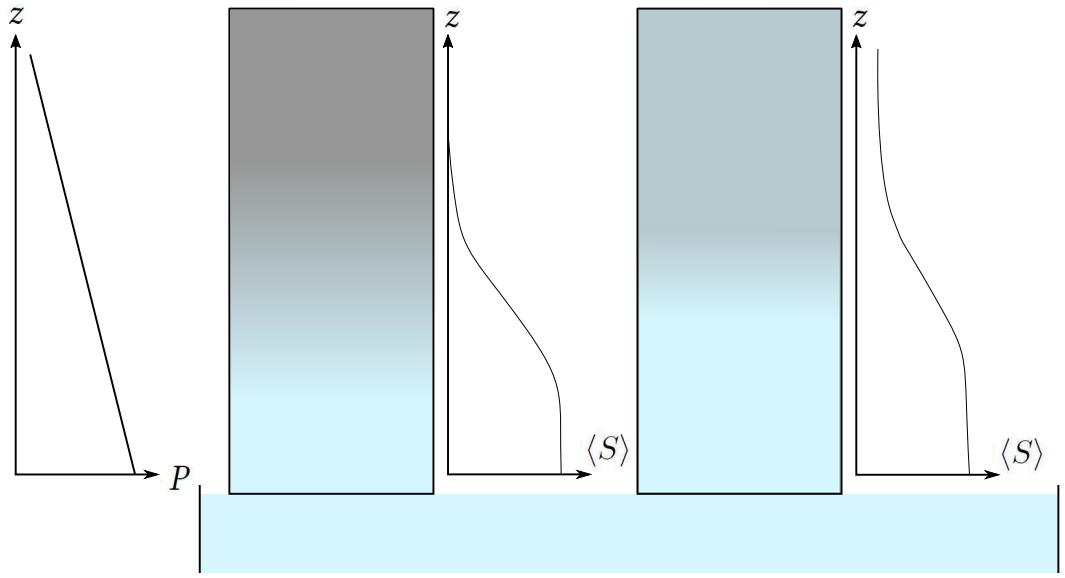

FIGURE I.13: Imbibition d'un milieu poreux (gauche) et milieu poreux drainé (droite), au contact d'un bain de liquide

I.6 Mouillage dynamique

I.6.1 Nombre capillaire

Dans les écoulements aux petites échelles, la dissipation visqueuse domine généralement les effets inertiels. La dynamique est donc principalement contrôlée par la tension de surface et la viscosité. En considérant un système de dimension caractéristique r, le terme visqueux est de l'ordre de $\mu v/r^2$ et le gradient de pression, γ/r^2. Le ratio de ces deux quantités définit le nombre capillaire :

$$C_a = \frac{\mu v}{\gamma} \tag{I.60}$$

En prenant la viscosité de l'eau, $\mu \sim 1 \times 10^{-3} Pa.s$ et sa tension de surface $\gamma \sim 7 \times 10^{-2} kg.s^{-2}$ on trouve, $C_a = v/70$, soit une vitesse de l'écoulement comparée par rapport à $70 m.s^{-1}$. Soit une vitesse d'écoulement qu'on rencontre très rarement dans les milieux poreux. Ce nombre est donc généralement inférieur à 1 et c'est donc principalement la tension de surface qui est responsable de la forme de l'interface. Cette définition du nombre capillaire n'est pas la seule valable. Le nombre capillaire est souvent défini en estimant le gradient de pression avec la perméabilité K du milieu, $\mu v/K$. Ce qui donne :

$$C_a = \frac{\mu v r^2}{K\gamma} \tag{I.61}$$

La définition à employer dépend donc du contexte de travail.

I.6.2 Angle dynamique

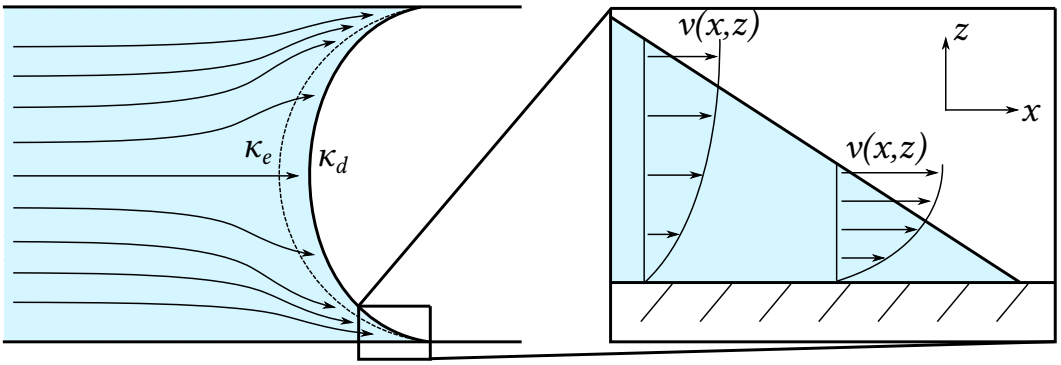

FIGURE I.14: Illustration des modifications du champ de vitesse à proximité du ménisque et de l'angle dynamique (gauche). κ_e représente la courbure du ménisque statique et κ_a la courbure du ménisque en déplacement. Illustration du champ de vitesse à proximité de la ligne triple (droite)

Considérons un tube capillaire de section circulaire de rayon r, on injecte un liquide dans ce tube à débit constant et on nomme la vitesse moyenne dans une section u. On supposera que la phase déplacée a une influence négligeable sur l'écoulement. On choisit les paramètres de l'étude tels que le nombre de Bond soit faible, $B_o \ll 1$. L'interface peut-elle être une portion de sphère ? Non. L'équation de Stokes est applicable dans le domaine liquide, l'existence d'un champ de vitesse entre le centre du ménisque et la ligne triple demande l'existence d'un gradient de pression et l'existence d'un gradient de pression implique l'existence d'un gradient de courbure. Ce problème a rapidement été identifié expérimentalement [Hoffman, 1975] et étudié analytiquement [21] ([Huh et Scriven, 1971], [Hervet et de Gennes, 1984]). Le modèle de De Gennes décrit assez bien ce qui se produit. Le système de l'étude est représenté sur la figure I.14. L'angle de contact entre le liquide et les parois du tube est supposé faible, si bien que l'hypothèse de lubrification est appliquée, le champ de vitesse peut donc être déterminé, à la position x avec une épaisseur $h(x)$:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x} \tag{I.62}$$

21. On peut lire dans le manuscrit de Laplace [1806] (p. 221) : *Si, par l'effet du frottement du fluide contre les parois du tube, on augmente ou l'on diminue la courbure, [...].* La notion de courbure étant liée directement à l'angle de raccordement, la variation de l'angle efficace hors équilibre était déjà évoquée par Laplace.

L'équation peut être intégrée deux fois en utilisant l'absence de contrainte sur l'interface libre et la vitesse imposée au niveau de la paroi (on se place dans le référentiel en translation rectiligne uniforme qui suit l'interface) :

$$v = \frac{1}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x}\left(\frac{z^2}{2} - zh\right) - u \tag{I.63}$$

Le volume déplacé doit être nul dans le référentiel en mouvement soit :

$$\int_{z=0}^{z=h} v dz = 0 \tag{I.64}$$

Ce qui donne l'expression :

$$v = 3u\left(\frac{z}{h} - \frac{z^2}{2h^2}\right) - u \tag{I.65}$$

Le champ de vitesse étant connu, il est possible de calculer la puissance dissipée par l'effort visqueux entre le liquide et la paroi sur une longueur dx :

$$dP_\mu = u\mu\frac{\partial v}{\partial z}dx \tag{I.66}$$

qui s'écrit donc simplement :

$$dP_\mu = 3\mu\frac{u^2}{h}dx \tag{I.67}$$

Cette force doit enfin être sommée sur x et chaque position correspond à une unique épaisseur h pour la géométrie du coin :

$$h = x\tan(\theta_d) \tag{I.68}$$

En pratiquant le changement de variable, l'équation est intégrée de h_1 à h_2.

$$P_\mu = \int_{h=h_1}^{h=h_2}\left(3\mu\frac{u^2}{h}\right)\frac{1}{\tan(\theta_d)}dh \tag{I.69}$$

L'intégration est triviale et mène au résultat :

$$P_\mu = 3\mu u^2 ln\left(\frac{h_2}{h_1}\right)\frac{1}{\tan(\theta_d)} \tag{I.70}$$

En pratique les longueurs h_1 et h_2 correspondent aux limites basses et hautes du système. Les longueurs au-dessus du rayon du capillaire n'ont plus de sens et les longueurs en dessous de la distance inter-moléculaire n'en possèdent pas plus, ce sont les limites "naturelles" du domaine d'intégration.

L'observation expérimentale montre une variation du rayon de courbure apparent du ménisque. Le déplacement provoque donc l'illusion [22] d'un angle de raccordement différent. L'énergie libre [23] due au déplacement de la ligne triple permet d'écrire :

$$P_\gamma = u\gamma cos(\theta_e) \tag{I.71}$$

Mais la puissance dissipée P_μ, localisée dans les coins du ménisque s'oppose au déplacement. On peut donc écrire que l'angle de contact observé délivre une puissance correspondant à la différence des deux autres :

$$u\gamma cos(\theta_d) = u\gamma cos(\theta_e) - P_\mu \tag{I.72}$$

Soit une expression qui peut s'écrire :

$$\tan(\theta_d)\left(cos(\theta_e) - cos(\theta_d)\right) = 3C_a ln\left(\frac{h_2}{h_1}\right) \tag{I.73}$$

Dans l'approximation des petits angles, cette expression se réduit enfin à la forme :

$$\theta_d\left(\theta_d^2 - \theta_e^2\right) = 3C_a ln\left(\frac{h_2}{h_1}\right) \tag{I.74}$$

La vitesse de l'écoulement impacte donc la forme du ménisque, ce qui impacte en retour l'angle de contact apparent ou dynamique. Les effets interviennent même pour un nombre capillaire faible, $C_a \sim 10^{-3}$ en raison de la puissance 1/3 qui lie l'angle de contact au nombre capillaire dans le cas du mouillage total. Ce modèle n'est pas le seul qui permet de décrire l'écart observé à l'angle statique. Un modèle concurrent [Blake et Haynes, 1969], basé sur le déplacement des particules du liquide au niveau de la ligne triple d'un site d'adsorption au suivant, existe également, il est supposé plus pertinent lorsque l'angle de contact est grand [de Gennes, 1985]. Dans la suite, nous nous intéresserons principalement à des angles de contact nuls ou faibles, seul le modèle hydrodynamique sera utilisé.

22. Uniquement à l'échelle d'observation, l'angle est inchangé à l'échelle microscopique
23. Ce qui suppose que la température est invariante, et qui peut se vérifier (Un calcul d'ordre permet de montrer que la température varie peu).

I.6.3 Film de démouillage

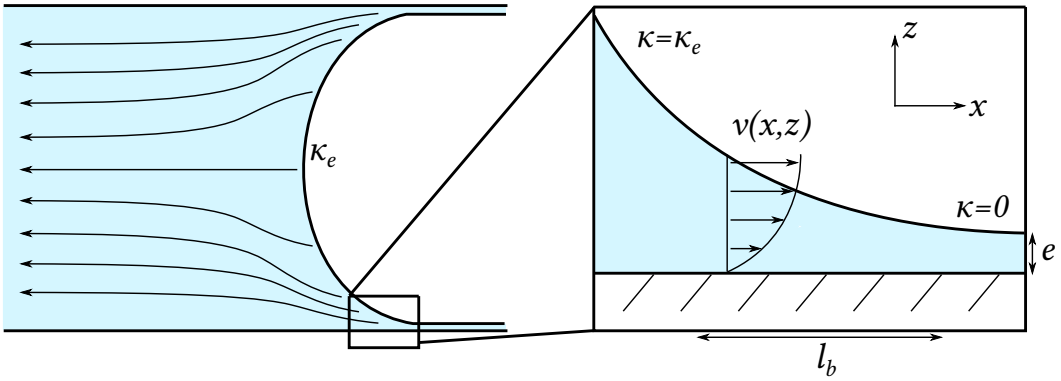

FIGURE I.15: Illustration du mécanisme de dépôt de film en démouillage (gauche). κ_e représente la courbure du ménisque statique. Illustration du champ de vitesse à proximité du film déposé et des grandeurs l_b et e (droite)

Considérons maintenant la situation inverse, un liquide complètement mouillant ($\theta_e = 0$) est extrait du même tube capillaire à une vitesse donnée u. Le liquide va alors déposer sur les parois du tube qu'il démouille un film d'épaisseur e. Cette situation est représentée schématiquement sur la figure I.15. Ce film est supposé statique, dans le tube circulaire, sa pression P_{film} est de :

$$P_{film} = -\frac{\gamma}{r} \tag{I.75}$$

La pression P_m au niveau du ménisque est de l'ordre de :

$$P_m = -\frac{2\gamma}{r} \tag{I.76}$$

Il existe donc un gradient de pression qui agit entre le ménisque et le film. L'interface est au contact permanent d'une phase dont les propriétés seront supposées négligeables, ce gradient correspond donc à un gradient de courbure qu'on peut estimer être de l'ordre de :

$$\frac{\gamma}{r l_b} \sim \gamma \frac{e}{l_b^3} \tag{I.77}$$

Ce qui nous permet de déduire que :

$$l_b \sim \sqrt{er} \tag{I.78}$$

La perte de charge visqueuse dans cette zone s'écrit également :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\mu u}{12e^2} \tag{I.79}$$

En utilisant la relation I.78 et le gradient de pression visqueux, on déduit :

$$\frac{\mu u}{12e^2} \sim \frac{\gamma}{r\sqrt{er}} \tag{I.80}$$

Soit, en remaniant les termes :

$$C_a \sim 12\left(\frac{e}{r}\right)^{3/2} \tag{I.81}$$

Ce résultat implique que l'existence du film a un impact direct sur la pression capillaire. En effet, le capillaire de rayon r voit sa pression capillaire modifiée par la présence du film et augmenter (en valeur absolue) pour devenir :

$$P_m = \frac{-2\gamma}{r-e} \tag{I.82}$$

Ou, en utilisant l'équation précédant,

$$P_m = \frac{-2\gamma}{r - r\left(\frac{C_a}{12}\right)^{2/3}} \tag{I.83}$$

L'effet ne se limite donc pas au dépôt du film mais modifie les conditions de l'écoulement. Il a été identifié et modélisé par Bretherton [1961]. La présentation ci-dessus est incomplète, l'entrainement de film ne se fait pas nécessairement et lorsqu'il existe de la dissipation se produit entre les échelles, r et e.

I.7 Imbibition d'un capillaire

L'imbibition et le drainage désignent tout deux l'entrée d'un liquide dans un milieu poreux. Lorsque le liquide est plutôt mouillant, on parle d'imbibition et on parle de drainage lorsque le liquide est plutôt non-mouillant. En particulier, l'imbibition spontanée désigne l'entrée d'un liquide dans un solide par capillarité uniquement.

Dans cette partie nous allons nous concentrer sur l'imbibition spontanée d'un capillaire de section circulaire, de rayon r et invariant selon sa longueur. Nous supposerons également que la phase déplacée a une influence négligeable sur l'écoulement. Le système

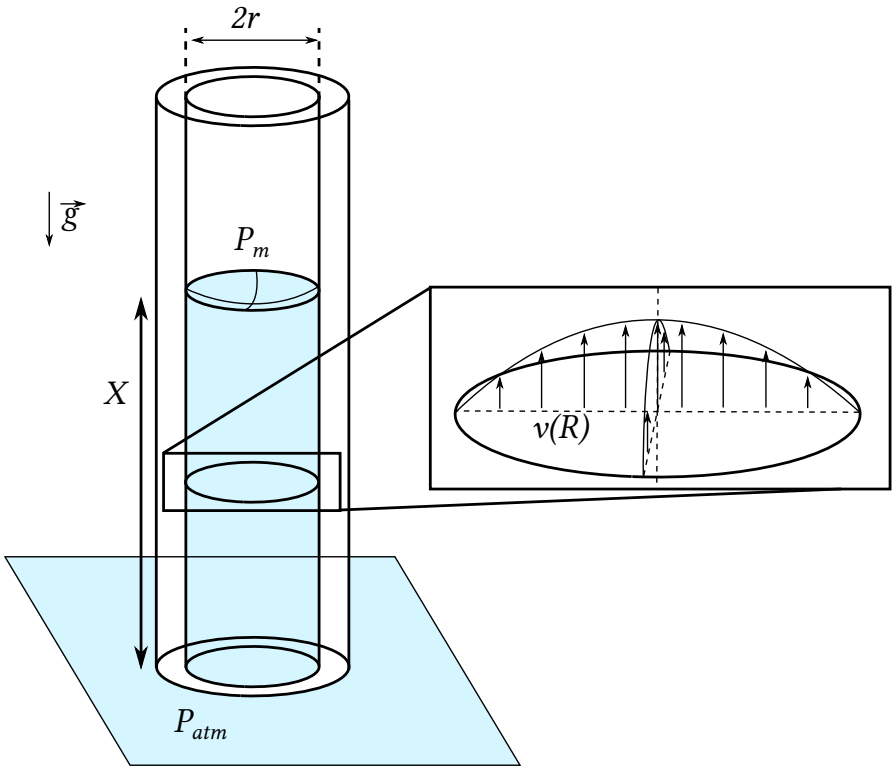

FIGURE I.16: Illustration du capillaire en cours d'imbibition et du champ de vitesse laminaire dans celui-ci

de l'étude est présenté sur la figure I.16. Les nombre de Bond B_o et capillaire C_a sont supposés suffisamment faibles pour que le ménisque soit de somme des courbures constante et donc de pression constante. On supposera que la pression de celui-ci est :

$$P_m = P_{atm} - \frac{2\gamma}{r}\cos(\theta_e) \tag{I.84}$$

Cette équation constitue la condition limite au niveau du ménisque. A l'autre extrémité, le capillaire est au contact d'un bain de liquide à pression atmosphérique. On supposera que l'écoulement est laminaire et que les effets de bord sont négligeables au niveau des extrémités (du bain et du ménisque). Le champ de vitesse normal à la section du tube peut facilement être résolu en coordonnées cylindriques :

$$v(R) = \frac{1}{4\mu}\frac{\partial P}{\partial x}\left(R^2 - r^2\right) \tag{I.85}$$

La force de frottement appliquée par les parois du tube sur le liquide se déduit immédiatement :

$$dF_\mu = \pi\frac{\partial P}{\partial x}R^2 dx \tag{I.86}$$

La vitesse moyenne de l'écoulement se déduit de l'intégration de la vitesse sur la surface :

$$u = -\frac{1}{\pi r^2}\int_{R=0}^{R=r}\int_{\theta=2\pi}^{\theta=0} v(R)RdRd\theta = \frac{r^2}{8\mu}\frac{\partial P}{\partial x} \tag{I.87}$$

D'après l'équation de conservation :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{I.88}$$

D'où, un gradient de pression constant. Enfin, la puissance dissipée peut donc être intégrée sur la longueur du capillaire X :

$$P_\mu = -\pi r^2 \frac{\partial P}{\partial x} X u = -8\pi\mu u^2 X \tag{I.89}$$

Le déplacement du ménisque fait varier l'énergie libre du système, il est à l'origine d'une puissance, P_γ :

$$P_\gamma = 2\pi r\gamma cos(\theta_e)u \tag{I.90}$$

La pesanteur peut également agir, en supposant que le capillaire soit vertical, le déplacement du ménisque équivaut à une variation de l'énergie potentielle de pesanteur P_g. Soit la puissance correspondante :

$$P_g = -\rho\pi r^2 guX \tag{I.91}$$

Enfin, on peut également supposer que le nombre de Reynolds ne soit pas trop petit devant 1 si bien que des phénomènes inertiels puissent apparaitre. Pour ce système ouvert, l'énergie cinétique s'écrit :

$$P_c = \pi r^2\rho\left(\frac{dX}{dt}u^2 + \frac{du}{dt}uX\right) \tag{I.92}$$

En remarquant que la dérivée de la position du ménisque correspond à la vitesse moyenne de l'écoulement, on peut écrire :

$$P_c = \pi r^2\rho\left(\left(\frac{dX}{dt}\right)^3 + \frac{1}{2}\frac{d^2X}{dt^2}\frac{dX}{dt}X\right) \tag{I.93}$$

Le théorème de l'énergie cinétique implique que la puissance de l'énergie cinétique égale la puissance de la somme des forces appliquées au système. Il doit cependant être corrigé pour les systèmes ouverts [24] :

$$P_c + \frac{\pi r^2 X \rho}{2}\left(\frac{dX}{dt}\right)^2 = P_\mu + P_\gamma + P_g \tag{I.94}$$

En utilisant les expressions des termes vus précédemment, on obtient :

$$\pi r^2 \rho\left(\left(\frac{dX}{dt}\right)^3 + \frac{d^2X}{dt^2}\frac{dX}{dt}X\right) = -8\pi\mu\left(\frac{dX}{dt}\right)^2 X + 2\pi r\gamma cos(\theta_e)\left(\frac{dX}{dt}\right) - \rho\pi r^2 g\left(\frac{dX}{dt}\right) \tag{I.95}$$

Cette équation peut être divisée par $\pi r^2\left(\frac{dX}{dt}\right)$ ce qui conduit au résultat :

$$\rho\left(\left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + \frac{d^2X}{dt^2}X\right) = -\frac{8\mu}{r^2}\left(\frac{dX}{dt}\right)X + 2\frac{\gamma}{r}cos(\theta_e) - \rho g X \tag{I.96}$$

Plusieurs remarques s'imposent sur cette équation. Premièrement, nous avons calculé le profil de vitesse (et donc la puissance dissipée par la viscosité) en supposant que l'écoulement est dominé par la viscosité, or, nous avons ensuite ajouté un terme inertiel qui suppose que l'écoulement ne l'est pas complètement. D'après les propriétés de l'écoulement de Stokes (minimisation de la dissipation), le terme de dissipation visqueuse est sous-estimé lorsque l'inertie est importante. Deuxièmement, un terme de dissipation dans le coin de ménisque peut être ajouté, son impact sur l'équation revient à transformer l'angle de contact θ_e en θ_d. Troisièmement, cette équation ne possède aucune solution analytique connue, les analyses qui vont suivre vont donc systématiquement éliminer au moins un des termes.

I.7.1 Équation de Washburn

Le cas le plus simple consiste à prendre compte les effets qui ne peuvent pas être négligés et se limite donc aux termes visqueux et capillaire ([Cameron et Bell, 1906], [Green et Ampt, 1911], [Washburn, 1921]). L'équation I.96 prend alors la forme :

24. Cette subtilité est parfois manquée dans la littérature.

$$0 = \frac{8\mu}{r^2}\left(\frac{dX}{dt}\right)X - 2\frac{\gamma}{r}cos(\theta_e) \tag{I.97}$$

La solution de cette équation s'obtient aisément par intégration :

$$X = \sqrt{\frac{\gamma r}{2\mu}cos(\theta_e)t} \tag{I.98}$$

Le résultat, $x \propto t^{1/2}$ est probablement l'un des plus célèbre concernant les écoulements dans les milieux poreux. Cette forme de solution est assez souvent qualifiée de diffusive, à cause de l'exposant 1/2. Ce qualificatif est cependant très discutable puisque les mécanismes à l'origine de celui-ci sont très différents des phénomènes de diffusion moléculaire, comme l'a justement pointé Dullien [1992] [25].

I.7.2 Premiers instants

Bosanquet [1923] a été le premier à résoudre (justement) le problème de la divergence aux temps cours. Le problème a été réétudié plus récemment et a montré que certains effets étaient restés dans l'ombre [Quéré, 1997]. En effet, si la position croit en $t^{1/2}$ la vitesse décroit en $t^{-1/2}$ et diverge donc lorsque t tend vers 0. La divergence de la vitesse n'est pas crédible physiquement parlant. En repartant de l'équation I.96 on peut constater que lorsque X tend vers 0, seul deux termes sont non négligeables, ce qui mène à l'équation :

$$\rho\left(\frac{dX}{dt}\right)^2 = \frac{2\gamma}{r}\cos(\theta_e) \tag{I.99}$$

D'après l'équation ci-dessus, la vitesse est constante lorsque X est suffisamment faible. Il doit donc exister un temps caractéristique de transition d'un régime au suivant. En ajoutant le terme visqueux, l'équation prend la forme :

$$0 = \rho\left(\left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + \frac{d^2X}{dt^2}X\right) + \frac{8\mu}{r^2}\left(\frac{dX}{dt}\right)X - \frac{2\gamma}{r}cos(\theta_e) \tag{I.100}$$

En remarquant que :

$$\frac{d}{dt}\left(X\frac{dX}{dt}\right) = \frac{d^2X}{dt^2}X + \left(\frac{dX}{dt}\right)^2 \tag{I.101}$$

25. On pourrait également opposée à cette appellation l'invariance de loi de diffusion en dimension supérieure à 1 qui n'est pas valable

La solution de l'équation prend la forme :

$$X = \sqrt{\frac{\gamma r}{2\mu} cos(\theta_e) \left(t + t_i \left(e^{-t/t_i} - 1\right)\right)} \tag{I.102}$$

Avec $t_i = \frac{\rho r^2}{8\mu}$. Il est tout à fait évident que le temps caractéristique est t_i : lorsque $t \gg t_i$ l'équation ci-dessus prend la forme de l'équation de Washburn, alors que lorsque $t \ll t_i$ on retrouve le résultat en l'absence de viscosité [26]. On peut également comparer l'intensité des effets de la viscosité et de l'inertie en faisant le ratio des temps nécessaires selon l'équation I.99 et selon l'équation I.97 pour atteindre la position X. Ce ratio s'exprime :

$$\frac{t_i}{t_\mu} = \frac{X}{r} \frac{\mu}{\sqrt{\rho r \gamma \cos(\theta_e)}} \tag{I.103}$$

La seconde partie de cette équation correspond au nombre d'Ohnesorge :

$$O_h = \frac{\mu}{\sqrt{\rho r \gamma \cos(\theta_e)}} \tag{I.104}$$

Le nombre d'Ohnesorge présente également l'avantage de permettre une comparaison pour des systèmes dont le passé est inconnu. Un grand nombre d'Ohnesorge O_h implique que les effets visqueux dominent même pour une valeur de $\frac{X}{r}$ de l'ordre de 1 (en dessous de 1 les équations ne sont plus valables puisque l'hypothèse d'un système quasi 1D ne tient plus). A l'inverse, un petit nombre d'Ohnesorge signifie que les effets inertiels vont dominer au début de l'imbibition.

On pourrait se demander ce qui est susceptible de se produire lorsque le nombre d'Ohnesorge O_h est très grand et que le ménisque est assez proche de l'entrée du capillaire. En utilisant l'équation I.97 on trouve en effet, qu'à une position X donnée, la vitesse est de :

$$\frac{dX}{dt} = \frac{\gamma r \cos(\theta_e)}{4\mu X} \tag{I.105}$$

Soit un nombre capillaire :

$$C_a = \frac{r \cos(\theta_e)}{4X} \tag{I.106}$$

26. Ce résultat se retrouve à l'aide d'un développement limité à l'ordre 2 de l'exponentiel.

Le nombre capillaire est donc important, $C_a \sim 0.1$ et des effets d'angle dynamique doivent exister et impacter fortement l'écoulement. Cet effet pourrait être pris en compte en remplaçant simplement l'angle de contact statique par l'angle de contact dynamique. Les deux effets peuvent également co-exister. Les premiers instants de l'imbibition d'un capillaire sont donc assez complexes [27].

I.7.3 Fin d'imbibition

Lorsque l'imbibition se produit en présence de gravité, elle ne se prolonge pas indéfiniment mais est limitée par la hauteur de Jurin (voir section I.4.5). La loi $x \propto t^{1/2}$ ne peut donc durer indéfiniment. En supposant que les conditions de l'écoulement sont telles que les effets d'angle dynamique et les effets inertiels sont négligeables [28], on peut écrire :

$$0 = \frac{8\mu}{r^2}\left(\frac{dX}{dt}\right)X - 2\frac{\gamma}{r}cos(\theta) + \rho g X \tag{I.107}$$

Cette équation peut être résolue en réorganisant les termes sous la forme suivante :

$$\frac{8\mu}{\rho g r^2}\left(1 + \frac{h_j}{h_j - X}\right)dX = dt \tag{I.108}$$

Avec $h_j = (2\gamma\cos(\theta))/(\rho g r)$. Cette équation s'intègre facilement et donne :

$$\frac{8\mu}{\rho g r^2}\left(X + h_j ln\left(1 - X/h_j\right)\right) = t \tag{I.109}$$

La longueur caractéristique qui apparait dans l'équation ci-dessus est la hauteur de Jurin, h_j. A proximité de l'équilibre, le temps caractéristique t_j correspondant est de :

$$t_j = \frac{16\mu\gamma\cos(\theta)}{r^3(\rho g)^2} \tag{I.110}$$

Notez que nous avons seulement considéré la situation où la gravité s'oppose à l'imbibition. Dans le cas inverse, la gravité agit de concert, l'équation s'écrit :

$$0 = \frac{8\mu}{r^2}\left(\frac{dX}{dt}\right)X - 2\frac{\gamma}{r}cos(\theta) - \rho g X \tag{I.111}$$

27. Dans les premiers instants, la dissipation visqueuse à l'entrée du capillaire peut également jouer un rôle.

28. La situation où la gravité, la viscosité et la capillarité dominent l'écoulement en l'absence d'inertie et d'angle de contact dynamique correspond à la situation traitée par Washburn [1921] bien qu'il ne soit généralement pas cité pour cela.

En employant une méthodologie tout à fait similaire, on obtient :

$$\frac{8\mu}{\rho g r^2}\left(X - h_j ln\left(1 + X/h_j\right)\right) = t \tag{I.112}$$

Lorsque t tend vers l'infini, le ménisque se déplace alors à vitesse constante. On peut également remarquer que la distance caractéristique est, là encore, la hauteur de Jurin h_j. Le temps caractéristique de transition du régime dominé par la viscosité au régime dominé par la gravité est également le même que précédemment, t_j.

I.8 Écoulement dans les milieux poreux

Il est aujourd'hui très difficile de résumer (même dans les grandes lignes) les travaux qui portent sur les écoulements diphasiques dans les milieux poreux tant ils sont nombreux. Il est cependant possible de décrire les principaux mécanismes de transports lors d'écoulement immiscibles.

I.8.1 Mécanismes locaux

Lenormand *et al.* [1983] ont étudié les écoulements diphasiques localement dans un milieu poreux modèle. Les mécanismes responsables du déplacement d'une phase diffèrent selon que la phase étudiée soit mouillante ou non mouillante.

En drainage, on injecte une phase non mouillante dans le milieu, le déplacement est assez simple, il se produit sous la forme du déplacement du ménisque entre les deux phases. Ce mode de déplacement, appelé déplacement de type piston, n'est pas régulier et se produit par sauts (sauts de Haines [1930]) lorsque le ménisque passe dans une zone où la pression capillaire est plus faible en valeur absolue, les ménisques restent donc plus longtemps dans les constrictions que dans les zones larges. En drainage, les constrictions contrôlent l'écoulement.

En imbibition, on injecte une phase mouillante dans le milieu. Elle occupe les zones les plus fines de celui-ci, et peut notamment progresser via les coins [Concus et Finn, 1969] et les rugosités de surface [Dullien *et al.*, 1989]. Elle peut également progresser par le même mode de déplacement que dans le cas du drainage, le déplacement de type piston. Cependant, en imbibition ce sont les zones où la pression capillaire est la plus basse qui contrôlent l'écoulement, c'est à dire les plus grands pores et liaisons. Il existe un mécanisme singulier en imbibition, le pincement [Roof, 1970], les films présents sur les parois d'une liaison ou d'un pore peuvent se déstabiliser et scinder la phase non

mouillante. L'ensemble de ces mécanismes font de l'imbibition un sujet d'étude plus complexe que le drainage.

L'ensemble des positions des interfaces qui séparent les phases immiscibles constituent le front. Cette description sera affinée dans le chapitre II. Il existe différentes manières de modéliser l'écoulement et donc le front à une échelle large, grossièrement ces modèles se regroupent en trois catégories qui font l'objet des parties suivantes.

I.8.2 Modélisation par paquets de capillaires

Nous avons vu dans la partie I.7 les lois et phénomènes qui se produisent lors de l'imbibition spontanée d'un capillaire. Ce système est fréquemment utilisé pour modélisé l'imbibition des milieux poreux, il rentre dans la catégorie de la modélisation par paquets de capillaire. Dans ce type de modélisation le milieu est supposé se comporter comme une superposition de capillaires indépendants les uns des autres. Ce modèle est historiquement l'un des premiers à apparaitre et a fourni la première prédiction de l'évolution de la position de l'interface, $X \propto t^{1/2}$. Il est également employé assez fréquemment pour interpréter des résultats de mesures réalisées avec un porosimètre à mercure. Il est cependant assez limité car il ne retranscrit aucune information issue de l'organisation du réseau de pores. Il fournirait donc des prédictions équivalentes pour des structures de pores radicalement différentes comme celles représentées sur la figure I.4.

I.8.3 Modélisation continue

Cette modélisation repose sur l'hypothèse d'un milieu homogène à l'échelle d'étude, Buckingham [1907] l'a introduit en 1906, elle a été reprise par de nombreux auteurs ([Richards, 1931], [Buckley et Leverett, 1942], *etc.*). Le modèle considère que le milieu possède des propriétés qui lui sont propres (perméabilité, pression capillaire en fonction de la saturation *etc.*). Différentes méthodologies permettent de renseigner ces paramètres (numériques, analytiques, expérimentales) puis de réaliser des prédictions. Ce modèle est plus robuste que le précédent. Il permet notamment de distinguer des milieux poreux où l'organisation spatiale des pores est différente. Il se confronte cependant au fait qu'il ignore généralement complètement les mécanismes locaux qui se produisent.

I.8.4 Modélisation par réseaux de capillaires

Historiquement c'est le type de représentation le plus jeune [Fatt, 1956], il représente le milieu par un réseau de pores, c'est-à-dire par un ensemble de capillaires connectés les

uns aux autres. Cette représentation permet d'intégrer l'organisation spatiale des pores ce qui la différentie nettement du modèle du paquet de capillaire. Elle permet de comprendre et prédire le type de l'écoulement en fonction des nombres adimensionnels qui le caractérisent [Lenormand *et al.*, 1988]. Elle possède néanmoins le désavantage notoire de rendre le traitement analytique très difficile (en l'absence de propriétés remarquables). Sous certaines variantes elle permet également de rendre compte de mécanismes complexes comme le pincement.

I.9 Conclusion et ouverture

Les notions introduites dans ce chapitre doivent permettre d'éclaircir les sujets d'études qui seront traités dans les chapitres suivants. Les écoulements multiphasiques dans les milieux poreux sont complexes car ils font appel, comme nous l'avons vu, à un ensemble de notions variées et interdépendantes. Mais ce n'est pas tout, la structure des milieux poreux, généralement aléatoire et fortement dispersée, rend des notions simples dans des systèmes modèles, comme la hauteur de Jurin dans un capillaire, rapidement difficiles à appréhender. Lorsque la dynamique de l'écoulement intervient les choses se compliquent encore, puisque différents phénomènes sont susceptibles d'intervenir et d'agir sur celle-ci.

La présentation qui a été dressée dans ce chapitre est extrêmement limitée et sélective. La littérature du domaine est très diversifiée et s'attaque à des problèmes qui combinent certains des aspects qui ont été présentés avec d'autres qui ne l'ont pas été. On peut citer pour appuyer cette remarque les cas où le milieu se dissous dans le fluide [Kelemen *et al.*, 1995], ceux où le milieu est déformable [Siddique *et al.*, 2009], ceux où les fluides sont miscibles Aris [1956], ceux où il existe un gradient de propriété dans le milieu [Reyssat *et al.*, 2009], ou encore ceux où le liquide a une rhéologie complexe [Berli et Urteaga, 2014]. Cette liste est loin d'être exhaustive mais illustre bien la diversité qui existe dans le domaine des écoulements au travers des milieux poreux.

Chapitre II

Fragmentation de phase induite par la gravité lors d'une imbibition spontanée

II.1 Introduction

La fragmentation désigne la transformation d'un objet en un ensemble d'objets de tailles inférieures. La fragmentation d'une phase se produit spontanément dans nombre de problèmes physiques de tous les jours. Ouvrez un robinet d'eau et limitez l'ouverture. Observez le jet produit, si le débit est suffisamment faible, le jet se fragmente en gouttes avant de toucher le fond de l'évier. Cet effet est une conséquence de l'instabilité de Rayleigh-Plateau. La tension de surface déstabilise le jet et provoque sa fragmentation. Dans les milieux poreux, la fragmentation de phase peut résulter de nombreux mécanismes et son étude est utile dans différentes applications : dans l'exploitation pétrolière elle produit des poches d'huile, ce qui induit une diminution du rendement, dans les nappes phréatiques elle crée des poches de DNAPL [1] qui contaminent la nappe et dans la mise en œuvre des matériaux composites elle est à l'origine de poches d'air qui après polymérisation de la résine réduisent les performances mécaniques des pièces. Dans ce chapitre, un mécanisme de fragmentation particulier, induit par la pesanteur, est prédit analytiquement puis observé expérimentalement.

1. Dense Non-Aqueous Phase Liquid, cette appellation désigne généralement des polluants.

II.2 Mécanismes de fragmentation

II.2.1 Fragmentation quasi-statique

L'existence de fragments de phase se manifeste lors de la mesure des courbes pression-saturation (voir section I.5). Ces expériences sont pratiquées de manière quasi-statique. Un fluide non-mouillant est poussé à l'intérieur d'un milieu poreux, initialement rempli d'un fluide mouillant via une membrane semi-perméable par une pression P. La pression P est ensuite lentement augmentée et la saturation de la phase mouillante S_m est mesurée. Il apparait que S_m décroit lorsque P croit. Il apparait également que la limite que S_m atteint est non-nulle. En procédant ensuite à l'envers, i.e., en poussant la phase non-mouillante avec la phase mouillante de manière quasi-statique, il apparait que la saturation de la phase mouillante S_m tend vers une limite strictement inférieure à 1 pour une pression d'injection divergente. L'existence d'une saturation irréductible (premier cas) et d'une saturation résiduelle (second cas) montre qu'une ou plusieurs portions de phase mouillante ou non-mouillante ne communiquent pas via un réseau continu, en d'autre terme que celle-ci perdurent sous forme de fragments isolés. Cette observation avait déjà été faite par Leverett [1941]. Le mécanisme sous-jacent est le suivant, lorsque la saturation d'une phase diminue, les domaines qui restent occupés sont ceux qui minimisent l'énergie libre du système. Lorsque la saturation atteint un certain seuil, les domaines deviennent disjoints les uns des autres.

II.2.2 Pincement

En imbibition, le liquide mouillant est capable de progresser via les coins ([Ransohoff et Radke, 1988], [Lenormand *et al.*, 1983]) et les surfaces rugueuses devant la progression de type piston. Lorsque le nombre capillaire est relativement faible, le liquide présent dans les coins ou sous forme de film est susceptible de subir un pincement (*snap-off*). C'est-à-dire qu'il peut se déstabiliser et remplir le corps du pore (au niveau d'une constriction) plutôt que ses surfaces ou ses coins. Ce mécanisme mène à la fragmentation de la phase non-mouillante. Il se produit lorsque le nombre capillaire est faible et dépend fortement de la géométrie du système (Beresnev *et al.* [2009]).

II.2.3 Fragmentation visqueuse

Lorsqu'on réalise l'imbibition ou le drainage d'un milieu poreux et que le nombre capillaire est modérément faible, tous les pores ne sont pas remplis à la même vitesse ni au même moment à cause de la dispersion géométrique de ceux-ci. Le premier modèle

employé était celui du doublet de pore [Rose et Witherspoon, 1956]. Celui-ci permet de modéliser très simplement la compétition qui se produit via deux capillaires de rayons différents et connectés à leurs deux extrémités. Il est cependant très limité car il ignore complètement la géométrie réelle du problème. Plus récemment, différents auteurs se sont intéressés à l'épaisseur du front qui sépare les phases. Le transport du front n'est pas nécessairement stable, il dépend du ratio des viscosités de la phase déplacée sur la phase qui la déplace, $M_\mu = \mu_1/\mu_2$, avec μ_1 la viscosité de la phase déplacée et μ_2 celle de la phase qui déplace l'autre. Lorsque $M_\mu > 1$ le déplacement devient instable (en l'absence de milieu poreux il s'agit de l'instabilité de Saffman-Taylor) et le front s'étend sous la forme de doigts sans saturer. Lorsque le ratio est inférieur à 1, la viscosité lisse le front [Lenormand *et al.*, 1988]. Les deux situations, stable et instable, peuvent entrainer la fabrication de fragments de la phase déplacée par fermeture des zones où celle-ci persiste. Ces mécanismes sont des mécanismes de piégeage, où le front se referme sur lui-même et emprisonne la phase déplacée.

L'écoulement peut également fragmenter une portion de phase [Melrose, 1974], lorsque la différence de pression due au gradient de pression visqueux est de l'ordre de la pression capillaire, cette dernière ne suffit plus à stabiliser la phase liquide et la fragmentation se produit. Cette situation s'écrit :

$$\frac{\gamma}{r} < l_f \nabla \langle P \rangle \tag{II.1}$$

Avec l_f une longueur (dans la direction du gradient de pression) typique sur laquelle le système agit. Ce qui s'écrit :

$$1 < \frac{l_f}{r} C_a \tag{II.2}$$

Il existe donc une longueur critique l_c, $l_c \sim r/C_a$ telle que les systèmes de tailles supérieures se fragmentent et les systèmes de tailles inférieures sont stables. Ce type de cas de figure a été étudié (entre autre) par Dias et Payatakes [1986]. Lorsque le nombre capillaire augmente encore, la longueur critique peut être de l'ordre de la taille des plus grands pores du milieu, la fragmentation peut alors se produire jusque dans les pores [Pak *et al.*, 2015].

II.2.4 Fragmentation gravitationnelle

La viscosité n'est pas le seul élément susceptible de provoquer la fragmentation d'une phase. La gravité peut également jouer ce rôle ([Morrow, 1979], [Auradou *et al.*, 1999]).

A l'instar de la digitation visqueuse, lorsqu'un fluide dense surplombe un fluide moins dense, le front tend à croitre indéfiniment alors qu'elle est stabilisée dans la situation inverse [Glass *et al.*, 1991]. Ces écoulements produisent des fragments par emprisonnement de chacune des phases. Ces mécanismes sont des mécanismes de piégeage, tout à fait similaires à ceux décrits dans la partie précédente.

A l'instar du cas précédent, un gradient de pression due à la gravité peut également causer la fragmentation d'une portion de phase isolée. Celle-ci se produit lorsque la différence de pression due au gradient de pression hydrostatique est de l'ordre de la pression capillaire :

$$\frac{\gamma}{r} < l_f \nabla \langle P \rangle \tag{II.3}$$

Qui cette fois-ci s'écrit :

$$1 < \frac{l_f}{r} B_o \tag{II.4}$$

La taille critique l_c prend cette fois la forme $l_c \sim \frac{r}{B_o}$. Ces fragments peuvent de nouveau se fragmenter lorsqu'ils ont une taille supérieure à l_c [Birovljev *et al.*, 1995]. La fragmentation dans les pores n'est alors possible que si la longueur critique est de l'ordre de la dimension des pores, soit pour un nombre de Bond de l'ordre de 1.

II.2.5 Justification de l'étude

La stabilité de l'écoulement et la régularité de son front ont été étudiés lorsqu'ils agissent de manière colinéaire l'un à l'autre ([Dawson et Roberts, 1997], [Méheust *et al.*, 2002], [Løvoll *et al.*, 2005]), ce qui permet d'évaluer les quantités pertinentes pour prédire le piégeage. En revanche, à l'heure actuelle et à notre connaissance, aucune étude ne s'est spécifiquement focalisée sur la dynamique de la fragmentation de phase induite par la gravité ou par la viscosité. De plus, aucune étude ne s'est intéressée à l'influence simultanée de la viscosité et de la gravité lorsqu'elles agissent dans des directions perpendiculaires l'une à l'autre. Une situation pourtant susceptible de se produire dans de nombreux procédés. C'est spécifiquement ce cas de figure qui est étudiée dans ce chapitre via un système modèle.

II.3 Traitement analytique

II.3.1 Présentation du système d'étude

Le système étudié est une jonction asymétrique. Les jonctions sont très fréquemment rencontrées dans les milieux poreux modélisables par des réseaux de capillaires puisqu'elles forment les connections qui établissent le réseau. Les dimensions des pores et des constrictions dans les milieux poreux étant généralement assez dispersées, le choix d'une jonction asymétrique permet de rendre compte des variations géométriques locales. Ce type de système a déjà été utilisé à de nombreuses reprises, notamment pour étudier le retard à l'imbibition au niveau d'un jonction analytiquement et expérimentalement [Chatzis et Dullien, 1983]. Ce dernier a également été étudié indépendamment [2] par Mehrabian *et al.* [2011] numériquement et analytiquement et enfin par Sadjadi *et al.* [2015], analytiquement et expérimentalement. Ces trois études se sont focalisées sur la même configuration, une jonction asymétrique en imbibition spontanée et où l'influence de la phase déplacée a été négligée. La progression du liquide est suivie par la position des ménisques et l'observation rapportée par ces différents auteurs est décrite dans la section qui suit et représentée sur la figure II.1.

Le liquide pénètre par le canal d'alimentation sur la gauche de l'image et progresse de la gauche vers la droite par capillarité. La pression à la jonction est représentée en fonction du temps. Le liquide atteint la jonction à l'instant t_I, le ménisque ralentit alors car il progresse dans la partie divergente de la jonction (à t_2 sur le schéma) où la pression capillaire est moins importante. Le ménisque atteint ensuite la séparation entre les capillaires à l'instant t_{II} et se réorganise en deux ménisques distincts. La pression à la jonction est alors imposée par le ménisque de plus forte pression capillaire, $P_{c,2}$ (valeur absolue) tandis que l'autre est bloqué à la jonction (à t_3 sur le schéma). L'imbibition se poursuit alors de manière asymétrique et la pression chute à la jonction (en valeur absolue) à cause de la perte de charge (à t_4 sur le schéma) qui se produit dans le capillaire 2. C'est donc la différence entre les pressions capillaires qui oriente l'écoulement. Lorsque la pression est égale à la plus faible pression capillaire des canaux, $P_{c,3}$, i.e., à l'instant t_{III}, l'imbibition se produit dans les deux capillaires de manière simultanée (à t_5 sur le schéma). L'étude analytique de ce système ne prédit en aucun cas la fragmentation de phase et il n'a jamais permis de l'observer non plus.

Dans ce chapitre nous nous attaquerons à l'étude analytique d'une jonction de pores asymétrique mais similaires, c'est à dire, de pores dont les dimensions sont légèrement

2. Sans que les auteurs connaissent l'article de Chatzis et Dullien [1983]

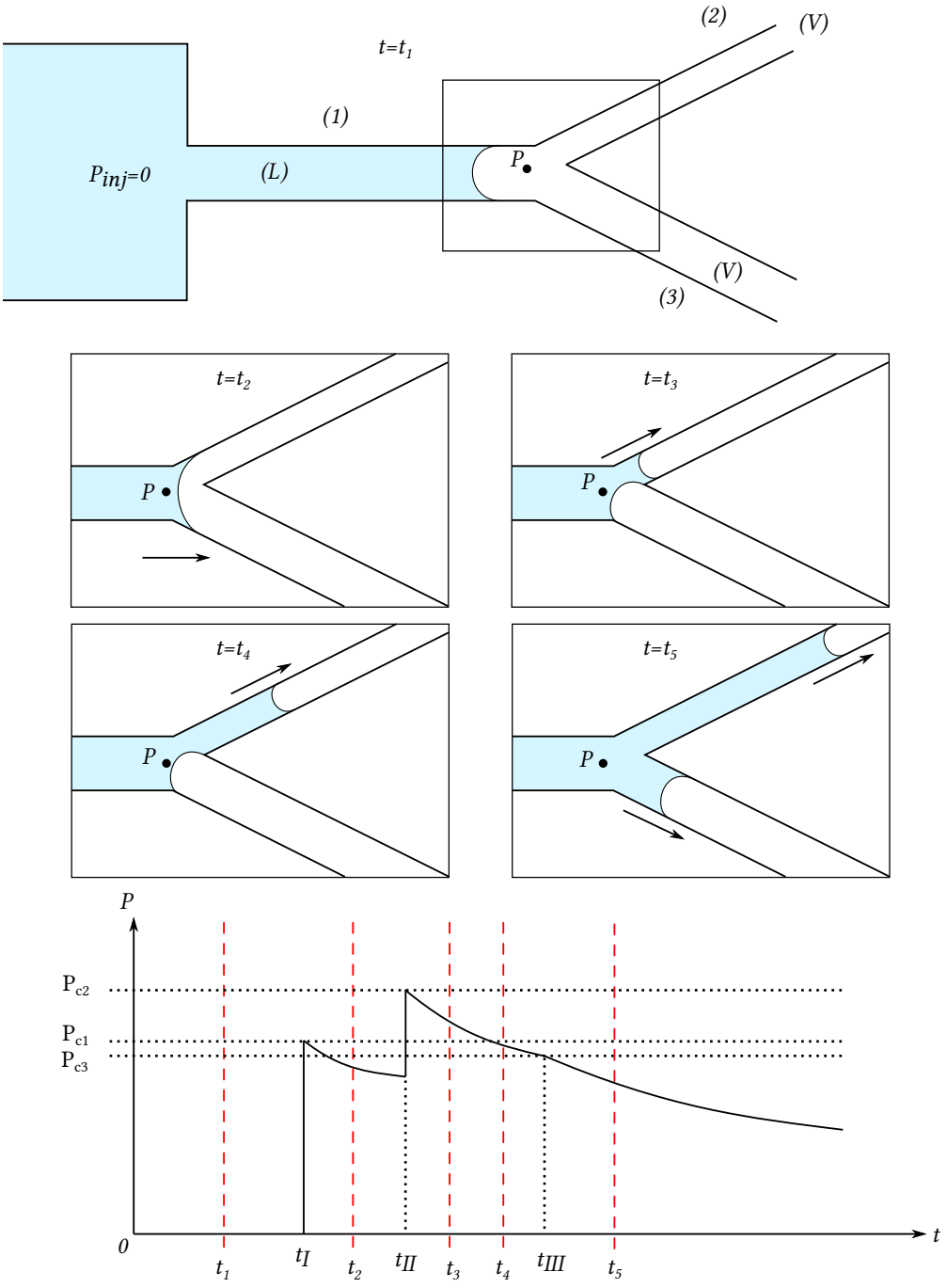

FIGURE II.1: Représentation de l'imbibition spontanée d'une jonction asymétrique

différentes, si bien que leurs perméabilités, surfaces et pressions capillaires soient comparables. La jonction est soumise à l'action de la gravité, qui agit perpendiculairement à l'axe de l'écoulement. Le système est représenté sur la figure II.2.

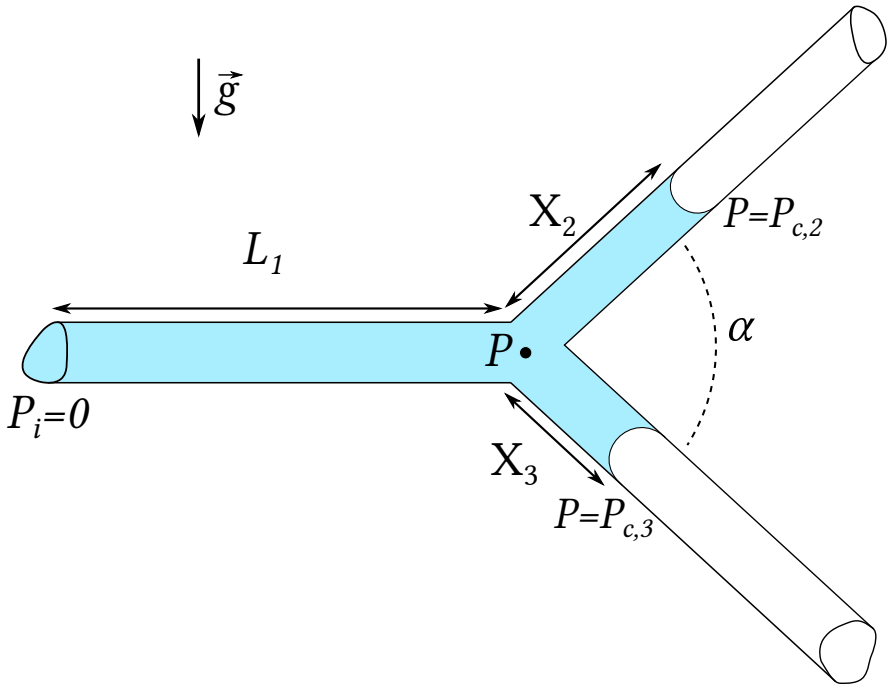

FIGURE II.2: Représentation schématique du système étudié

II.3.2 Hypothèses

Dans le cadre du développement analytique nous nous limiterons au cas fixé par les hypothèses suivantes :

- La phase déplacée a une influence négligeable sur l'écoulement.
- La phase considérée est liquide et complètement mouillante ($\theta_e = 0$).
- Le liquide est Newtonien et parfaitement incompressible.
- Les nombres capillaire et de Bond sont faibles et le nombre d'Ohnesorge est élevé ($C_a \ll 1, B_o \ll 1$ et $O_h \gg 1$).
- Les sections des canaux sont invariantes selon leurs longueurs.
- La gravité agit perpendiculairement à l'axe de l'écoulement dans le capillaire d'alimentation (1).
- La pression à l'entrée du canal d'alimentation est constante et égale à la pression atmosphérique.

On notera par la suite systématiquement les capillaires 2 et 3 de manière à avoir :

$$P_{c,2} \leq P_{c,3} \tag{II.5}$$

On nomme la différence entre ces deux pression, $\Delta P_c = P_{c,3} - P_{c,2}$, la différence de pression capillaire locale. Localement, nous l'avons vu dans la section II.3.1, c'est cette différence qui dirige l'écoulement.

L'étude se divise en deux parties : 1) La gravité s'oppose à la différence de pression capillaire locale. 2) La gravité agit dans le sens de la différence de pression capillaire locale. Les deux cas sont traités par la suite, analytiquement puis expérimentalement.

II.3.3 Opposition de la gravité et de la différence de pression capillaire

II.3.3.1 Équations

La variation de la pression dans les canaux 2 et 3 est calculée en utilisant l'équation de Washburn sans termes inertiels ($O_h \gg 1$) et sans angles de contact dynamique ($C_a \ll 1$). En supposant que la pression capillaire est seulement imposée par la forme des canaux et la tension de surface du fluide ($B_o \ll 1$).

$$\dot{X}_2 X_2 = -\frac{K_2}{\mu}\left(P_{c,2} - P + X_2 \rho g sin(\alpha)\right) \tag{II.6}$$

$$\dot{X}_3 X_3 = -\frac{K_3}{\mu}\left(P_{c,3} - P - X_3 \rho g sin(\alpha)\right) \tag{II.7}$$

Les positions des ménisques sont notées respectivement, X_2 et X_3 dans le capillaire 2 et dans le capillaire 3. Leurs dérivés temporelles s'écrivent, $\dot{X}_2$ et $\dot{X}_3$. Les perméabilités et pressions capillaires sont notées, K_2, K_3 et $P_{c,2}$, $P_{c,3}$. P est la pression à la jonction, μ, la viscosité dynamique du liquide et ρ sa densité. Enfin, g désigne l'intensité du champ de pesanteur et α l'angle d'ouverture de la jonction. Dans le canal d'alimentation, la variation de la pression est calculée via l'équation de Darcy [1856] en supposant que la pression à l'entrée du canal 1 est égale à la pression atmosphérique :

$$\dot{X}_1 = -\frac{K_1}{\mu}\frac{P}{L_1} \tag{II.8}$$

Avec L_1, la longueur du système et K_1, la perméabilité du canal 1. Enfin, l'équation de conservation du volume ferme le système :

$$\dot{X}_1 A_1 = \dot{X}_2 A_2 + \dot{X}_3 A_3 \tag{II.9}$$

Avec A_i, la section du capillaire i. Le système est formé de quatre équations et quatre inconnues (X_1, X_2, X_3 et P) qui incluent les conditions limites et auxquelles s'ajoutent les conditions initiales. A $t = 0$: $X_2(t = 0) = 0$ et $X_3(t = 0) = 0$.

II.3.3.2 Simplifications

Comme nous l'avons vu dans la section II.3.2, la différence de pression capillaire à la jonction joue un rôle majeur et guide l'écoulement. En revanche, l'aire des sections droites et les perméabilités des capillaires jouent un rôle secondaire dans la situation où $C_a \ll 1$. Par la suite nous supposerons donc que les perméabilités et l'aire des sections droites des capillaires à la jonction sont suffisamment proches pour être assimilable les unes aux autres. On considérera par la suite que les propriétés des canaux sont égales à :

$$K_{23} = \frac{K_2 + K_3}{2} \tag{II.10}$$

Pour la perméabilité des canaux 2 et 3 et :

$$A_{23} = \frac{A_2 + A_3}{2} \tag{II.11}$$

pour la surface des canaux 2 et 3. Les calculs qui suivent peuvent être réalisés en introduisant uniquement à la fin du calcul cette simplification en négligeant les termes en $K_2 - K_3$ et $A_2 - A_3$ devant K_{23} et A_{23} respectivement. Cette approche demande cependant des calculs plus fastidieux c'est pourquoi elle n'est pas présentée dans ce manuscrit.

II.3.3.3 Transformation du capillaire d'alimentation

Dans le cas traité, le capillaire d'alimentation est saturé, le débit Q dans celui-ci est donc directement proportionnelle à la différence de pression ΔP_c qui existe à ses bornes par l'équation :

$$Q = -\frac{K_1 A_1}{L_1 \mu} \Delta P \tag{II.12}$$

Supposons qu'il existe un canal invariant selon sa longueur de perméabilité K_c et de section A_c, la vitesse moyenne de l'écoulement dans une section de ce canal sera notée $\dot{X}_c$. Si une différence de pression ΔP est appliquée sur une longueur L_c, ce canal délivre

un débit : $Q_c = -\Delta P K_c A_c / \mu L_c$. Les deux canaux seront donc équivalent si, $K_1 A_1 L_c = K_c A_c L_1$. Le canal d'alimentation, de section S_1, de perméabilité K_1 et de longueur L_1 peut donc être remplacée par un capillaire de section A_c et de perméabilité K_c, si :

$$L_c = L_1 \frac{K_c A_c}{K_1 A_1} \tag{II.13}$$

Cette transformation du capillaire d'alimentation est appliquée de manière à avoir trois capillaires aux propriétés (surface et perméabilité) équivalentes et permet de simplifier grandement les équations. Par la suite, on écrira donc :

$$L_1^* = L_1 \frac{K_{23} A_{23}}{K_1 A_1} \tag{II.14}$$

Et le débit dans le capillaire 1 sera considéré dans le capillaire équivalent. Cette transformation n'est valable que lorsque les capillaires sont complètement saturés.

II.3.3.4 Adimensionnalisation

Pour simplifier le traitement analytique qui va suivre, on adimensionne les équations. La différence de pression capillaire locale, $\Delta P_c = P_{c,3} - P_{c,2}$ sera employée pour l'adimensionnalisation des pressions :

$$\widetilde{P} = \frac{P}{\Delta P_c} \tag{II.15}$$

ΔP_c est strictement positif car les capillaires 2 et 3 sont numérotés de manière à avoir, $P_{c,2} < P_{c,3}$. En présence de gravité, l'imbibition est limitée par la hauteur de Jurin, on prendra comme longueur caractéristique la hauteur de remontée correspondant à la pression caractéristique ΔP_c :

$$\Delta h_j = \frac{\Delta P_c}{\rho g sin(\alpha)} \tag{II.16}$$

Les longueurs adimensionnées s'écrivent donc :

$$\widetilde{X} = \frac{X}{\Delta h_j} \tag{II.17}$$

Par la suite, on notera la hauteur de Jurin dans le capillaire i par $h_{j,i} = P_{c,i}/\rho g sin(\alpha)$. Enfin, l'essentiel de la perte de charge se produit dans le canal d'alimentation qui se

charge d'amener le liquide depuis la source, le temps caractéristique est donc de l'ordre du temps nécessaire pour amener un volume de liquide correspondant à $A_{23}\Delta h_j$ avec la pression capillaire ΔP_c soit :

$$t_a = \frac{\mu L_1^* \Delta h_j}{\Delta P_c K_{23}} \tag{II.18}$$

Soit le temps adimensionné :

$$\widetilde{t} = \frac{t}{t_a} \tag{II.19}$$

En utilisant les variables ci-dessus, les équations II.6, II.7, II.8 et II.9 prennent la forme :

$$\widetilde{\dot{X}}_2 \widetilde{X}_2 = -\frac{L_1^*}{\Delta h_j}\left(-\frac{h_{j,2}}{\Delta h_j} - \widetilde{P} + \widetilde{X}_2\right) \tag{II.20}$$

$$\widetilde{\dot{X}}_3 \widetilde{X}_3 = -\frac{L_1^*}{\Delta h_j}\left(-\frac{h_{j,3}}{\Delta h_j} - \widetilde{P} - \widetilde{X}_3\right) \tag{II.21}$$

$$\widetilde{\dot{X}}_1 = -\widetilde{P} \tag{II.22}$$

$$\widetilde{\dot{X}}_1 = \widetilde{\dot{X}}_2 + \widetilde{\dot{X}}_3 \tag{II.23}$$

II.3.3.5 Comportement asymptotique

Il est bien connu que lorsqu'un milieu poreux est trempé dans un bain de liquide en présence d'un champ de pesanteur et que le liquide mouille celui-ci, l'imbibition est limitée par la pesanteur. Dans le système décrit ici, le capillaire dont l'imbibition est limitée par la gravité est le capillaire 2. Nous supposerons donc que lorsque $\widetilde{t}$ tend vers l'infini, la position du ménisque dans le capillaire 2 tend vers une limite fixe noté $\widetilde{X}_2^{lim}$ et que $\widetilde{\dot{X}}_2$ tend vers 0. A l'inverse, dans le capillaire 3 l'écoulement n'est pas limité par la gravité mais favorisé par celle-ci, nous supposerons donc que $\widetilde{X}_3$ diverge lorsque $\widetilde{t}$ tend vers l'infini. Sous ces hypothèses, les équations prennent la forme :

$$0 = \left(-\frac{h_{j,2}}{\Delta h_j} - \widetilde{P} + \widetilde{X}_2^{lim}\right) \tag{II.24}$$

$$\widetilde{\dot{X}}_3 = \frac{L_1^*}{\Delta h_j} \tag{II.25}$$

$$\widetilde{\dot{X}}_1 = -\widetilde{P} \tag{II.26}$$

$$\widetilde{\dot{X}}_1 = \widetilde{\dot{X}}_3 \tag{II.27}$$

D'après les équations ci-dessus on peut calculer la pression à la jonction :

$$\widetilde{P} = -\frac{L_1^*}{\Delta h_j} \tag{II.28}$$

Cette expression permet également de vérifier l'hypothèse faite plus haut qu'il existe une position d'équilibre limite que le ménisque du canal 2 tend à atteindre. Or, pour que les équations présentées ci-dessus restent valides, il faut que cette position ait un sens physique, c'est-à-dire que :

$$\widetilde{X}_2^{lim} > 0 \tag{II.29}$$

Soit un critère qui s'écrit :

$$\widetilde{X}_2^{lim} = -\frac{L_1^*}{\Delta h_j} + \frac{h_{j,2}}{\Delta h_j} > 0 \tag{II.30}$$

Ce critère se résume donc à la comparaison d'une hauteur de Jurin et de la longueur d'alimentation du capillaire équivalent :

$$h_{j,2} > L_1 \tag{II.31}$$

On peut également remarquer que le débit limite dans le capillaire 3 est strictement positif, ce qui confirme la validité de l'hypothèse de divergence de la position dans le capillaire 3 réalisée au début de cette partie.

En résumé, nous avons montré ici que lorsque le critère II.31 est rempli, le ménisque dans le capillaire 2 tend à occuper une position fixe. A l'inverse, lorsque le critère n'est pas rempli, la pression à la jonction est inférieure à la pression du capillaire 2, ce qui implique le démouillage complet du capillaire puis la fragmentation de la phase liquide. Le critère inverse :

$$h_{j,2} < L_1 \tag{II.32}$$

Est donc un critère de fragmentation. Dans ces conditions les équations présentées précédemment ne sont plus valides ($\widetilde{X}_2 < 0$) et ne décrivent plus correctement le système.

Le constat réalisé ci-dessus ne donne aucune indication sur la dynamique de l'imbibition, celle-ci est étudiée dans la partie suivante dans le cas où la fragmentation est assurée de se produire.

II.3.3.6 Dynamique de l'imbibition avec fragmentation

Nous avons vu dans la section précédente que l'imbibition du système peut mener à deux fins différentes, selon que le critère, II.32 soit rempli ou non. Dans cette partie nous nous intéressons à la dynamique de l'écoulement exclusivement dans les cas où la fragmentation est assurée de se produire :

$$h_{j,2} \ll L_1 \tag{II.33}$$

Ce qui assure la validité du critère II.32.

Premier régime A $\widetilde{t} = 0^+$, les ménisques dans les canaux 2 et 3 ont des positions proches de la jonction de capillaires, or, les ménisques des deux canaux possèdent des pressions capillaires différentes, il devrait donc y avoir un écoulement d'un capillaire (de pression capillaire plus importante) vers un autre (de pression capillaire inférieure) avec une résistance visqueuse très faible puisque la distance qui les sépare l'est également. En pratique, le ménisque du capillaire de plus forte pression capillaire est dans l'incapacité de se déplacer et reste bloqué à la jonction tant que la pression à la jonction n'est pas supérieure à sa pression capillaire. Traduit avec les variables du système, ce critère s'écrit :

$$\widetilde{\dot{X}}_3 = 0, \quad \widetilde{P} < \frac{P_{c,3}}{\Delta P_c} \tag{II.34}$$

Les équations II.20-II.23 vues précédemment et réadaptées à l'aide de l'équation II.34 donnent :

$$\widetilde{\dot{X}}_2 \widetilde{X}_2 = -\frac{L_1^*}{\Delta h_j}\left(-\frac{h_{j,2}}{\Delta h_j} - \widetilde{P} + \widetilde{X}_2\right) \tag{II.35}$$

$$\widetilde{\dot{X}}_1 = -\widetilde{P} \tag{II.36}$$

$$\widetilde{\dot{X}}_1 = \widetilde{\dot{X}}_2 \tag{II.37}$$

Ce système fermé est transformé en une unique équation :

$$\widetilde{\dot{X}}_2\widetilde{X}_2 = -\frac{L_1^*}{\Delta h_j}\left(-\frac{h_{j,2}}{\Delta h_j} + \widetilde{\dot{X}}_2 + \widetilde{X}_2\right) \tag{II.38}$$

Cette équation est non-linéaire et ne possède pas de solution triviale. Pour résoudre cette équation de manière approchée et dans le cadre de l'hypothèse II.33, on suppose dans un premier temps que le terme non-linéaire est négligeable devant tous les autres termes. L'équation différentielle est alors linéaire et du premier ordre :

$$0 = -\frac{h_{j,2}}{\Delta h_j} + \widetilde{\dot{X}}_2 + \widetilde{X}_2 \tag{II.39}$$

Sa solution est immédiate :

$$\widetilde{X}_2 = \frac{h_{j,2}}{\Delta h_j}(1 - e^{-\widetilde{t}}) \tag{II.40}$$

La solution de l'équation différentielle linéaire permet de quantifier l'erreur commise en comparant un-à-un les termes de l'équation différentielle linéaire avec le terme non-linéaire. Les ratios R_i formés du terme non-linéaire sur le $i$ème terme linéaire donnent après remaniement :

$$R_1 = \frac{h_{j,2}}{L_1}(1 - e^{-\widetilde{t}})e^{-\widetilde{t}} \tag{II.41}$$

$$R_2 = \frac{h_{j,2}}{L_1}(1 - e^{-\widetilde{t}}) \tag{II.42}$$

$$R_3 = \frac{h_{j,2}}{L_1}e^{-\widetilde{t}} \tag{II.43}$$

$$\tag{II.44}$$

Dans notre cadre d'hypothèse, la longueur d'alimentation est grande devant la hauteur de Jurin. D'où :

$$R_1 \ll 1 \tag{II.45}$$

$$R_2 \ll 1 \tag{II.46}$$

$$R_3 \ll 1 \tag{II.47}$$

L'hypothèse selon laquelle la partie non-linéaire de l'équation est négligeable devant la partie linéaire est donc valable dans notre cadre d'étude.

L'équation et sa solution restent donc valides tant que la pression à la jonction est inférieure à la pression capillaire du canal 3. Ce critère est invalidé à $t = t_1$ lorsque :

$$\widetilde{P}(\widetilde{t_1}) = -\frac{h_{j,2}}{\Delta h_j} e^{-\widetilde{t_1}} = -\widetilde{h}_{j,3} \tag{II.48}$$

Soit,

$$\widetilde{t_1} = ln\left(\frac{h_{j,2}}{h_{j,3}}\right) \tag{II.49}$$

On remarquera également qu'à $t = t_1$:

$$X_2(t_1) = \Delta h_j \tag{II.50}$$

Ces résultats seront utiles pour la suite. A $t > t_1$, le liquide s'écoule dans les deux capillaires et les équations utilisées ci-dessus ne décrivent plus correctement le système. Ce second régime fait l'objet de la section suivante.

Second régime Après le premier régime, les deux ménisques se déplacent. Le système est donc décrit par les équations, II.20-II.23. Cependant, aucune solution à ce système n'a été trouvée analytiquement. Pour simplifier le problème, on peut calculer le débit dans le canal d'alimentation en supposant que la pression capillaire au niveau de la jonction reste proche d'une valeur moyenne, $P_{c,23} = (P_{c,2} + P_{c,3})/2$, dont la hauteur de Jurin associée s'écrit h_j. On déduit des équations II.22 et II.23 :

$$-\frac{P_{c,23}}{\Delta P_c} = \dot{\widetilde{X}}_2 + \dot{\widetilde{X}}_3 \tag{II.51}$$

On intègre ensuite de $\widetilde{t_1}$ à $\widetilde{t}$ ($\widetilde{t} > \widetilde{t_1}$) :

$$-\frac{P_{c,23}}{\Delta P_c}(\widetilde{t} - \widetilde{t_1}) = \left(\widetilde{X}_2 - 1\right) + \widetilde{X}_3 \tag{II.52}$$

En faisant la différence entre les équations II.20 et II.21, on obtient l'équation :

$$(\dot{\widetilde{X}}_2\widetilde{X}_2 - \dot{\widetilde{X}}_3\widetilde{X}_3) = -\frac{L_1^*}{\Delta h_j}\left(-1 + \widetilde{X}_2 + \widetilde{X}_3\right) \tag{II.53}$$

En réinjectant les termes de l'équation de conservation dans l'équation ci-dessus et en utilisant l'hypothèse de grande longueur d'alimentation (II.33), on obtient l'équation :

$$1 - \widetilde{\dot{X}_2}\frac{h_j}{\Delta h_j} - \frac{L_1^*}{\Delta h_j}\left(\widetilde{t} - \widetilde{t_1}\right) - \left(\widetilde{\dot{X}}_2(\widetilde{t} - \widetilde{t_1}) + \widetilde{X}_2\right) = 0$$

L'équation ci-dessus peut être intégrée, en utilisant le changement de variable $\widetilde{t'} = \widetilde{t} - \widetilde{t_1}$:

$$\int_{\widetilde{t'}=0}^{\widetilde{t'}=\widetilde{t}} 1 - \widetilde{\dot{X}_2}\frac{h_j}{\Delta h_j} - \frac{L_1^*}{\Delta h_j}\widetilde{t'} - \left(\widetilde{\dot{X}}_2\widetilde{t'} + \widetilde{X}_2\right) dt' = 0 \tag{II.54}$$

L'intégration donne le résultat :

$$\widetilde{t} + (1 - \widetilde{X}_2)\frac{\Delta h_j}{h_j} - \frac{L_1^*}{\Delta h_j}\left(\frac{\widetilde{t}^2}{2}\right) - \widetilde{X}_2\widetilde{t} = 0 \tag{II.55}$$

Soit une relation de $\widetilde{X_2}$ en fonction de $\widetilde{t}$:

$$\widetilde{X}_2 = \frac{\widetilde{t} + \frac{\Delta h_j}{h_j} - \frac{L_1^*}{\Delta h_j}\left(\frac{\widetilde{t}^2}{2}\right)}{\frac{\Delta h_j}{h_j} + \widetilde{t}} \tag{II.56}$$

La fonction $\widetilde{X}_2$ n'est pas strictement monotone en fonction de $\widetilde{t}$. Elle tend vers $-\infty$ lorsque $\widetilde{t} \to +\infty$. L'évolution de la position prédit donc le retour du ménisque à la jonction. Ce résultat est conforme à la prédiction de la fragmentation réalisée plus haut. On peut alors déterminer la durée du second régime $\widetilde{t_2}$ comme le temps pour lequel $\widetilde{X}_2(\widetilde{t_2}) = 0$:

$$\widetilde{t_2} = \left(\frac{\Delta h_j}{L_1^*}\right)\left(1 + \sqrt{1 + 2\frac{L_1^*}{h_j}}\right) \tag{II.57}$$

Cette durée représente le temps nécessaire pour que le ménisque dans le capillaire 2 se déplace puis retourne à la jonction à partir de sa position à $\widetilde{t_1}$.

II.3.3.7 Bilan

D'après les trois sous-parties ci-dessus, lorsque la longueur d'alimentation est grande devant la hauteur de Jurin et que la différence de pression capillaire locale agit contre

la gravité, l'imbibition passe par deux régimes dynamiques distincts, le premier régime est dirigé par la différence de pression capillaire locale. Il s'achève lorsque la gravité est d'intensité similaire à la différence de pression capillaire. Ensuite, le second régime est dirigé par la gravité et s'achève par la fragmentation de la phase. La dynamique correspondante est représentée sur la figure II.3.

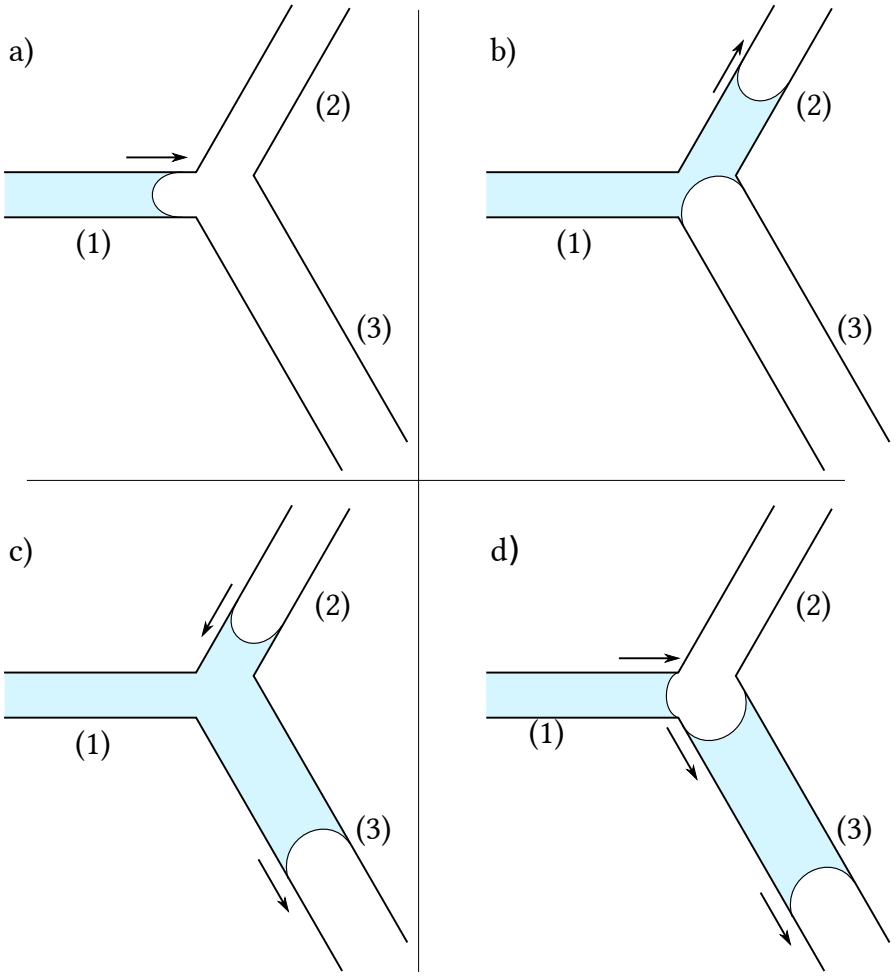

FIGURE II.3: Représentation schématique de l'imbibition dynamique jusqu'à la fragmentation. Le liquide (a) imbibe le canal d'alimentation jusqu'à la jonction, (b) s'écoule dans le capillaire 2, (c) s'écoule dans les capillaires 2 et 3 et (d) s'écoule en deux fragments séparées

II.3.4 Actions coordonnées de la gravité et de la différence de pression capillaire

On considère maintenant la situation où la gravité agit dans la même direction que la différence de pression capillaire locale.

II.3.4.1 Équations

En utilisant les mêmes notations adimensionnées et hypothèses que précédemment et en utilisant l'équation de Washburn dans les capillaires 2 et 3, on obtient :

$$\widetilde{\dot{X}}_2\widetilde{X}_2 = -\frac{L_1^*}{\Delta h_j}\left(-\frac{h_{j,2}}{\Delta h_j} - \widetilde{P} - \widetilde{X}_2\right) \tag{II.58}$$

$$\widetilde{\dot{X}}_3\widetilde{X}_3 = -\frac{L_1^*}{\Delta h_j}\left(-\frac{h_{j,3}}{\Delta h_j} - \widetilde{P} + \widetilde{X}_3\right) \tag{II.59}$$

Les équations de perte de charge dans le capillaire d'alimentation et de conservation restent inchangées :

$$\widetilde{\dot{X}}_1 = -\widetilde{P} \tag{II.60}$$

$$\widetilde{\dot{X}}_1 = \widetilde{\dot{X}}_2 + \widetilde{\dot{X}}_3 \tag{II.61}$$

II.3.4.2 Critère de fragmentation

On peut déterminer un critère de fragmentation en supposant qu'à $t = 0$, un petit volume de liquide est présent dans le capillaire 2, comme dans le cas précédant on suppose que dans les premiers instants $\dot{X}_3 = 0$. Sous ces hypothèses, on note la position $\widetilde{X}_2(0) = \delta\widetilde{X}$ avec $\widetilde{\delta X} \ll 1$. On peut alors utiliser l' équation II.58 pour calculer la pression à la jonction :

$$\widetilde{P} = -\frac{h_{j,2}}{\Delta h_j} + \delta\widetilde{X}\left(\widetilde{\dot{X}}_2\frac{\Delta h_j}{L_1^*} - 1\right) \tag{II.62}$$

La fragmentation ne se produit pas si :

$$\widetilde{P} < -\frac{h_{j,2}}{\Delta h_j} \tag{II.63}$$

Soit, si :

$$\widetilde{\dot{X}}_2\frac{\Delta h_j}{L_1^*} < 1 \tag{II.64}$$

Or, pour $\delta\widetilde{X}$ faible, $\widetilde{\dot{X}}_2$ s'écrit :

$$\widetilde{X}_2 = -\frac{P_{c,2}}{\Delta P_c} = \frac{h_{j,2}}{\Delta h_j} \tag{II.65}$$

Soit un critère qui prend la forme :

$$h_{j,2} > L_1^* \tag{II.66}$$

Le critère de stabilité est donc le même que le système agisse avec ou contre la gravité.

II.3.4.3 Dynamique de l'écoulement

Lorsque le ménisque provenant du canal d'alimentation arrive à la jonction, il est déjà dans une situation où la fragmentation est susceptible de se produire. Dans le cas traité dans la section II.3.3 le temps caractéristique était lié à l'acheminement d'une quantité de liquide à la jonction. Dans le cas présent l'acheminement n'est plus nécessaire puisque la fragmentation est déjà en train de se produire. Le temps caractéristique mis-en-jeu est donc de l'ordre de :

$$t_f \sim \frac{\mu \delta X^2}{\Delta P_c K_{23}} \tag{II.67}$$

Or, ce temps caractéristique est négligeable devant le temps t_a puisque $\delta X \ll L_1^*$ et $\delta X \ll \Delta h_j$. On s'attend donc à ce que le liquide démouille rapidement le capillaire.

II.3.4.4 Bilan

D'après le raisonnement développé dans les sections ci-dessus, lorsque la gravité agit dans le même sens que la différence de pression capillaire locale, la fragmentation se produit si le critère II.66, est vérifié. La dynamique est très rapide devant les temps t_1 et t_2. Elle est représentée de manière schématique sur la figure II.4.

II.3.5 Application aux milieux poreux

Les milieux poreux peuvent être représentés comme des réseaux de capillaires de tailles variables. A ce titre, la jonction étudiée dans les sections précédentes représente une intersection entre différents pores. Supposons que le milieu poreux considéré puisse être représenté par une taille de pore typique notée r. La pression capillaire associée à cette taille de pore est donnée par la relation de Laplace, $P_c = -2\gamma/r$. En associant

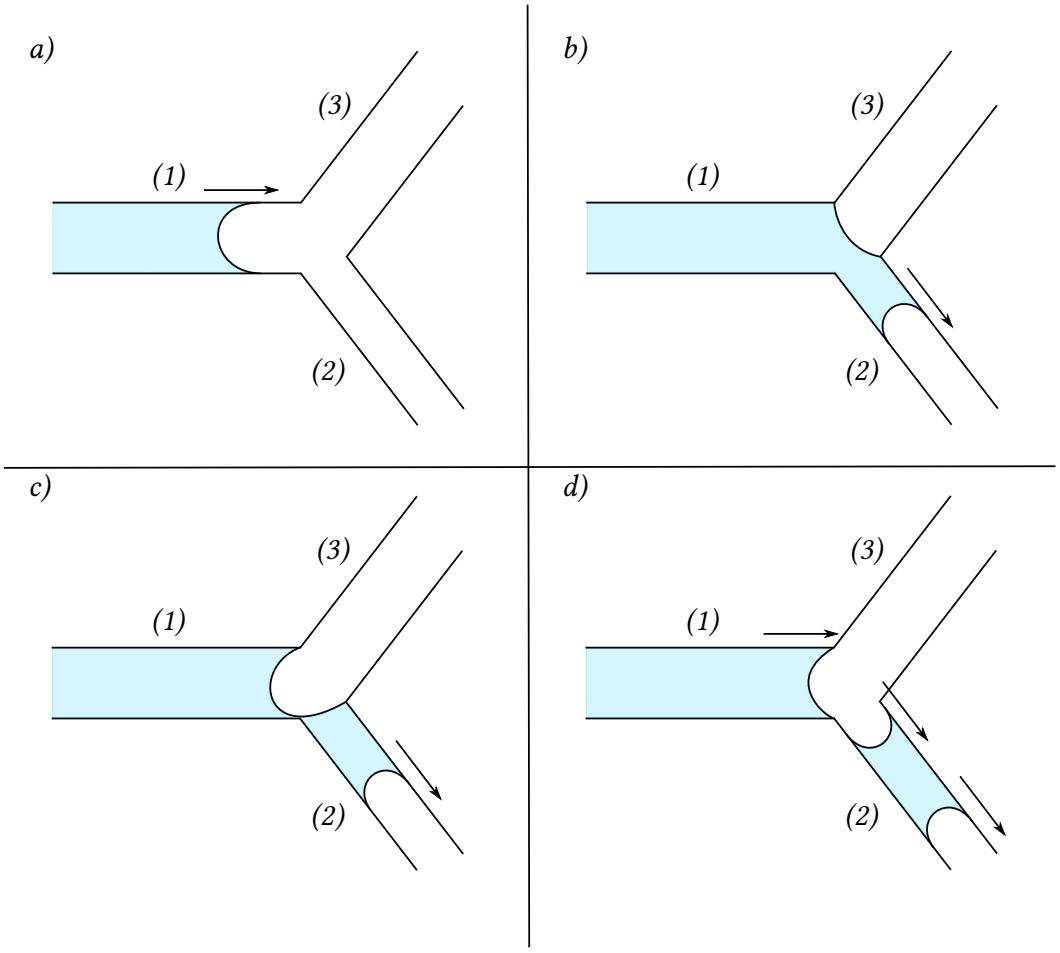

FIGURE II.4: Représentation schématique de l'imbibition dynamique jusqu'à la fragmentation. (a) Le liquide imbibe le canal d'alimentation jusqu'à la jonction, (b) le liquide s'écoule dans le capillaire 2 et tire sur le ménisque au niveau de la jonction, (c) le ménisque se divise en deux ménisques dans les capillaire 1 et 2 (d) l'écoulement se produit en deux fragments séparées

une perméabilité K au milieu, on peut calculer la vitesse de l'imbibition unidimensionnelle lorsque le front atteint une distance L du bain de liquide qui sert de source, $v = -KP_c/\mu L$. Soit une vitesse typique v qui s'écrit :

$$v = 2\frac{\gamma K}{\mu L r} \tag{II.68}$$

D'après la définition du nombre capillaire dans les milieux poreux, I.61, on trouve :

$$C_a = \frac{2r}{L} \tag{II.69}$$

Et le nombre de Bond, d'après l'équation I.57, s'écrit :

$$B_o = \frac{\rho g r^2}{\gamma} \tag{II.70}$$

Dans un milieu poreux, on peut également calculer une hauteur de Jurin typique :

$$h_j = -\frac{P_c}{\rho g} \tag{II.71}$$

D'après les relations ci-dessus, et en supposant que la jonction de capillaire vue plus haut modélise un milieu poreux isotrope lorsque tous les canaux possède des perméabilités comparables K, on peut retranscrire les deux critères de fragmentation. Ils s'écrivent sous la forme unique :

$$C_a < B_o sin(\alpha) \tag{II.72}$$

Sous cette forme le critère indique que la dissipation visqueuse joue un rôle d'inhibiteur de la fragmentation. Dans les milieux poreux toutes les orientations de la jonction dans l'espace sont attendues, on déduit donc que la fragmentation apparait lorsque :

$$C_a < B_o \tag{II.73}$$

Ce dernier critère est très proche du critère de stabilité d'une interface lorsque la phase la plus visqueuse et la plus dense déplace une autre phase, moins visqueuse et moins dense mais située en dessous de la première ([Wilkinson, 1984], [Méheust *et al.*, 2002]). Il apparait également dans différents procédés microscopiques [Or, 2008]. Hors du champ des milieux poreux ce critère est également proche de celui de Saffman-Taylor bien que la physique sous-jacente soit assez différente.

II.4 Vérification Expérimentale

Dans la partie précédente, nous avons montré qu'une jonction asymétrique soumise à l'action de la gravité et en imbibition spontanée mène à la fragmentation de la phase qui l'imbibe lorsque la gravité domine l'écoulement. Lorsque la gravité s'oppose à la différence de pression capillaire locale deux régimes sont prédits. Un premier, dominé par la capillarité et limité par la gravité et un second dominé par la gravité et qui mène à la fragmentation de la phase mouillante. La validité du critère de fragmentation ainsi que la validité des prédictions de la durée des régimes sont vérifiées expérimentalement dans cette partie.

II.4.1 Cellules microfluidiques

Trois cellules microfluidiques ont été employées. Elles ont été fabriquées par la société Epigem (Grande-Bretagne) et réalisées en SU-8 (polymère) par photolithographie. Ce procédé est classique dans la fabrication de cellules microfluidiques [Tabeling, 2015], il consiste à disposer une couche de résine photosensible puis à éclairer dans l'ultraviolet sélectivement, à l'aide d'un masque, la couche déposée. Les zones exposées réticuleront et les autres pourront être éliminées à l'aide d'un solvant. Les canaux seront ensuite être fermés de manière étanche. Les canaux des cellules sont ainsi uniquement constitués de SU-8.

II.4.1.1 Géométrie des cellules

Les trois cellules ont des géométries semblables. Une photo d'une cellule typique est présentée sur la figure II.5. Le canal d'alimentation de chacune à une longueur de $109mm$. Le canal d'alimentation n'est pas droit pour des raisons pratiques (limiter la taille de la cellule microfluidique). Cependant, le rayon de courbure de celui-ci est de l'ordre de $0.5cm$ pour une largeur des canaux de l'ordre de $500\mu m$. Le rayon de courbure étant 10 fois supérieur à la largeur des canaux, l'impact de celui-ci est supposé négligeable.

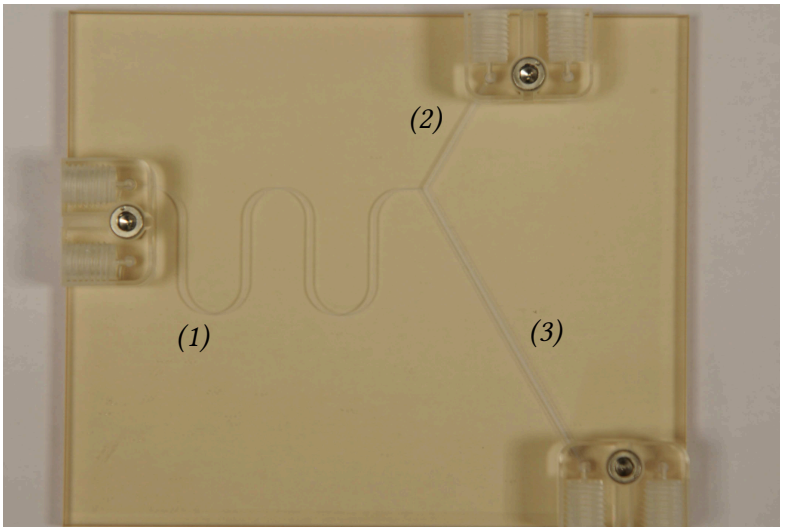

FIGURE II.5: Image d'une cellule, les canaux sont numérotés d'après la nomenclature présentée dans la partie II.3.2

II.4.1.2 Longueurs et position relative des canaux

Les longueurs des canaux ont été mesurées à partir d'images prises avec un appareil photo D300S Nikon. Les images ont été traitées sur le logiciel MATLAB. La longueur

des cellules (préalablement mesurée) a été utilisée pour convertir les dimensions de pixel en mètre. Les dimensions ainsi que les angles relatifs sont reportées dans le tableau II.1.

$N°$ de cellule	1	2	3
α_1 (deg)	119.8	119.6	119.9
α_2 (deg)	119.3	120.1	119.0
α_3 (deg)	119.9	120.5	120.7
$Ł_1'$ (mm)	46.2	46.6	46.4
$Ł_2$ (mm)	20.3	20.3	20.4
$Ł_3$ (mm)	50.1	50.2	50.4

TABLE II.1: Longueurs et angles relatifs des canaux. La précision de mesure des angles est de l'ordre de 1° et celle des distances de l'ordre de $0.5(mm)$

Une photo type utilisée pour la mesure des dimensions des cellules est présentée sur la figure II.5 tandis que les grandeurs mesurées sont représentées schématiquement sur la figure II.6.

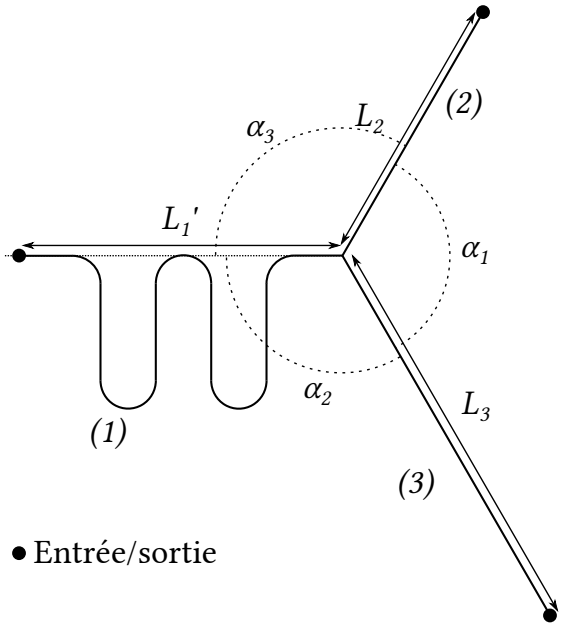

FIGURE II.6: Schéma des grandeurs mesurées, les angles relatifs et les longueurs des canaux

II.4.1.3 Profondeur des canaux

Les canaux des cellules ont des sections rectangulaires et une épaisseur de $W_p \sim 400\mu m$ pour toutes les cellules et invariante selon la longueur des canaux. Les épaisseurs ont été mesurées par imagerie à l'aide d'un microscope Keyence en réalisant la focale sur les extrémités inférieures et supérieures de chaque canal de chaque cellule. La précision de cette mesure n'est pas très bonne, de l'ordre de $\sim 30\mu m$.

II.4.1.4 Largeur des canaux

Les largeurs des canaux ont été mesurées à l'aide d'un microscope Keyence avec un grossissement de l'ordre de 100. Les épaisseurs ont été déduites en post-traitant les images obtenues. La précision des mesures est de l'ordre de $10\mu m$. Les résultats sont résumées dans le tableau II.2.

$N°$ de cellule	1	2	3
W_1 (μm)	170	280	215
W_2 (μm)	420	300	415
W_3 (μm)	570	400	515

TABLE II.2: Largeurs des canaux mesurées avec une précision de l'ordre de $10\mu m$

Une image réalisée pendant les mesures des dimensions des canaux est présentée sur la figure II.7.

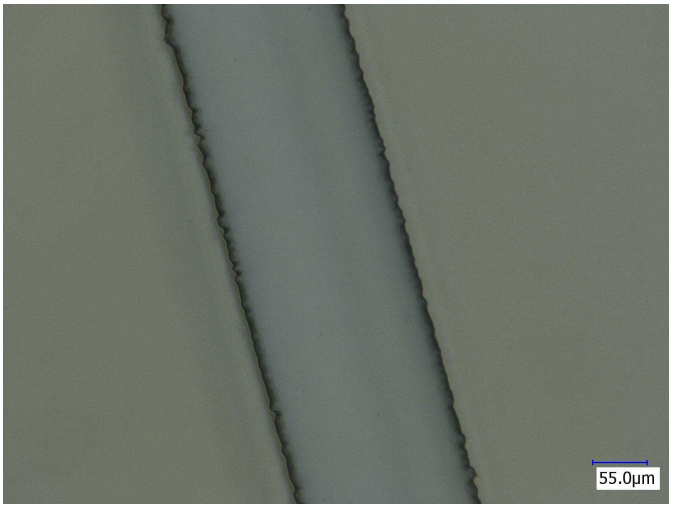

FIGURE II.7: Image des canaux réalisée en transmission avec un microscope Keyence lors de la mesure de largeur des canaux

II.4.1.5 Rugosité des canaux

La figure II.8 montre les bords d'un canal d'une cellule. On peut remarquer sur la figure que les parois sont rugueuses, i.e., elles ne sont pas planes. La rugosité se caractérise, pour le mouillage (voir I.4.3), par le ratio entre la surface idéalisée (plane) et la surface réelle mesurée. Ici, la rugosité de surface est réalisée par mesure de l'amplitude des irrégularités visibles[3] sur les canaux. Les amplitudes ont été reportées dans le tableau II.3 pour l'ensemble des canaux. La précision de mesure est assez faible $\sim 2\mu m$ lorsque rapportée aux dimensions mesurées.

$N°$ de Cellule	1	2	3
η_1 (μm)	8.7	8.3	7.6
η_2 (μm)	7.6	7.6	6.6
η_3 (μm)	6.7	7.9	7.3

TABLE II.3: Amplitude de la rugosité des canaux. La précision de mesure est de l'ordre de $2\mu m$

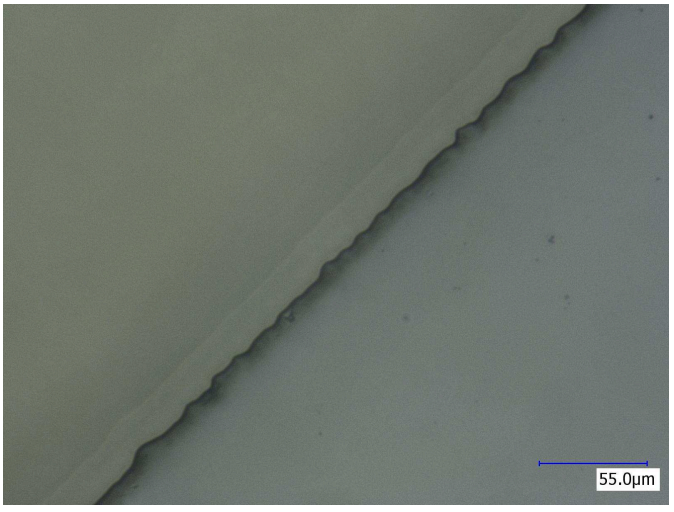

FIGURE II.8: Visualisation au microscope de l'amplitude de la rugosité des canaux

La rugosité de surface est donc assez forte puisqu'elle est seulement inférieure d'un peu plus d'un ordre de grandeur à la taille des canaux. On remarquera également que les faces inférieures et supérieures des canaux sont extrêmement planes. Cette observation découle de l'absence de défaut optique lors de l'observation en transmission des canaux des cellules. La répartition très inégale de la rugosité est une conséquence du procédé de fabrication. Une image des irrégularités est présentée sur la figure II.8.

3. La rugosité est uniquement mesurée au niveau de la partie supérieure des canaux

II.4.1.6 Autres types de défauts des canaux

Deux types de défauts ont été observés au microscope avant le début des expériences : l'existence de particules dans les canaux et des défauts de collage entre les parties inférieures et supérieures des cellules. Un exemple de fibre dans les canaux est présenté sur la figure II.9.a et un exemple de défaut de collage est présenté sur la figure II.9.b. Notez que sur la figure II.9.b on voit des franges d'interférences sur couche mince, qui indiquent que le défaut est de l'ordre de quelques longueurs d'onde du visible $\sim 1-5\mu m$. Les défauts de collage sont donc assez rares et leurs épaisseurs sont généralement faibles devant les dimensions des canaux ($\sim 400\mu m$).

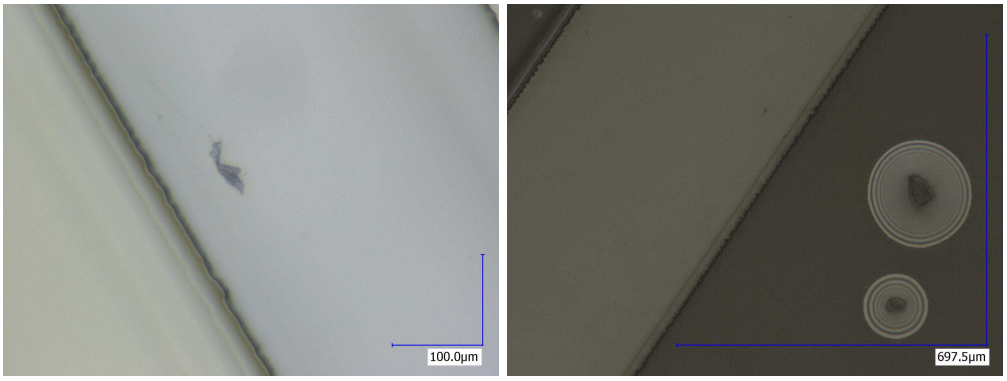

FIGURE II.9: (a) Image prise avec le microscope Keyence d'une portion de fibre dans un canal. (b) Visualisation au microscope des défauts de collage

II.4.1.7 Propriétés issues des paramètres géométriques

La connaissance de la forme de la section des canaux et de leurs dimensions (largeur, profondeur) permet de déterminer deux quantités, la perméabilité et la pression capillaire des canaux qui seront nécessaires pour calculer les nombres adimensionnés. La perméabilité est une propriété strictement géométrique. Pour un canal régulier de section rectangulaire elle peut être calculée analytiquement :

$$K = W_p^2 \left(\frac{1}{12} - \frac{16 W_p}{\pi^5 W} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{(1 - cos(i\pi))}{(2i)^i} \tanh\left(\frac{i\pi W}{2W_p} \right) \right) \tag{II.74}$$

avec W_p la profondeur des canaux et W leur largeur. Lorsqu'un liquide complètement mouillant se situe dans un canal, il forme un ménisque ($C_a \ll 1$), dans les conditions de l'étude le ménisque n'est pas influencé par la gravité ($B_o \ll 1$) on va supposer pour la suite que la pression capillaire correspond au ratio du périmètre sur la surface multiplié par la tension de surface du liquide employé :

$$P_c = -2\gamma \left(\frac{1}{W_p} + \frac{1}{W} \right) \tag{II.75}$$

Cette hypothèse n'est pas aussi qualitative qu'elle semble l'être, elle retranscrit assez bien la réalité puisque l'erreur maximale commise est de l'ordre de 5% [Lenormand *et al.*, 1983].

II.4.2 Montage expérimental

Le montage expérimental consiste simplement à disposer la cellule microfluidique utilisée sur un support incliné selon un angle connu et à filmer à l'aide d'un microscope l'imbibition spontanée d'un liquide dans la cellule. Un schéma du montage est présentée sur la figure II.10.

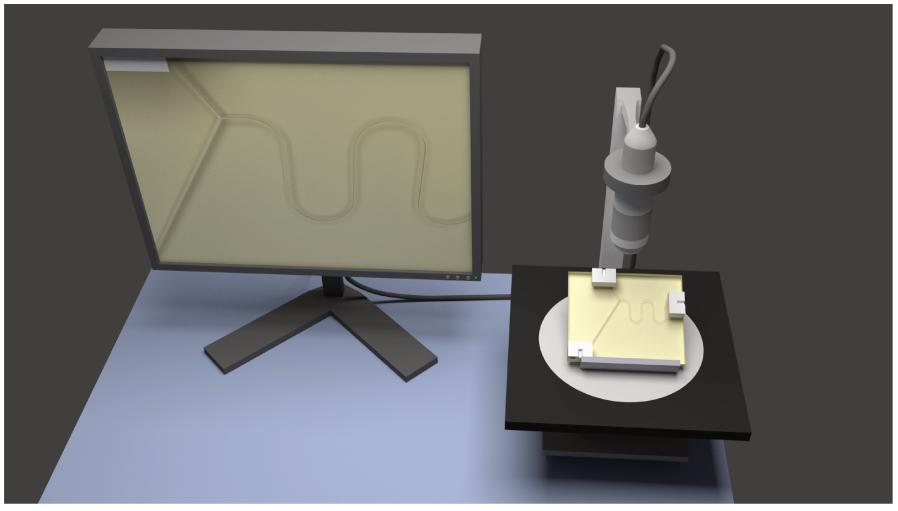

FIGURE II.10: Représentation infographique du montage

II.4.2.1 Support des cellules

Les supports des cellules sont fabriqués par impression 3D (par dépose filamentaire). Leur rôle est d'imposer une inclinaison précise par rapport à l'axe où la gravité agit. Neuf supports ont été imprimés, l'angle d'inclinaison de chacun est rapporté dans le tableau II.4 et une image des supports est présentée sur la figure II.11. La précision de l'impression est de l'ordre de $500\mu m$ et la distance minimale entre deux appuis du supports est de l'ordre de $5cm$, garantissant une précision de l'ordre de 1°.

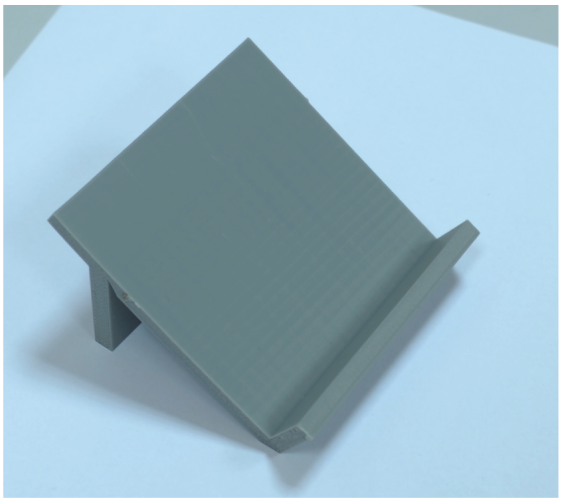

FIGURE II.11: Image d'un support de cellule fabriqué par impression 3D

$N°$ de support	1	2	3	4	5	6	7	8	9
φ (deg)	9	11	13	15	17	20	25	30	35

TABLE II.4: Tableau des angles d'inclinaisons (φ) des supports de cellules. La précision est de l'ordre de 1°

II.4.2.2 Réglage du plateau du microscope

La normale au plateau du microscope ainsi que l'axe optique de celui-ci ont été réglés parallèlement à l'axe selon lequel la gravité s'exerce. L'axe du microscope a été réglé en utilisant une ficelle et un poids et en ajustant l'axe de manière à le rendre parallèle à la ficelle. Le plateau du microscope a été réglé à l'aide d'un niveau. Deux photos de la méthode du poids et de la ficelle sont présentées sur la figure II.12.

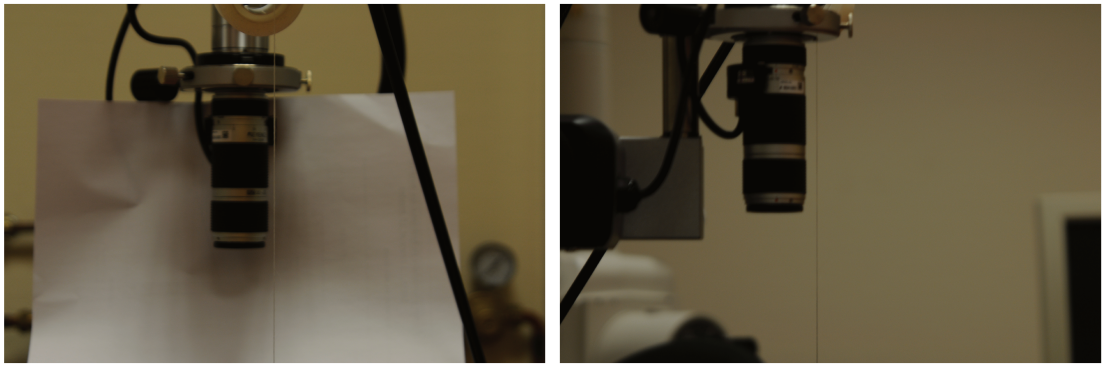

FIGURE II.12: Photos du montage du réglage de l'axe du microscope avec le poids tendu par une ficelle

II.4.3 Liquides employés

Quatre liquides complètement mouillants ont été utilisés. L'éthanol, l'alcool isopropylique et deux huiles silicones différentes. Les tensions de surfaces et viscosités dynamiques de ces quatre liquides ont été caractérisées. Leurs masses volumiques ont été reprises des données du fournisseur.

II.4.3.1 Tension de surface

Les tensions de surface des liquides ont été mesurées par la méthode de la goutte pendante. Le principe de la goutte pendante repose sur l'analyse du profil d'une goutte en équilibre hydrostatique. Le montage nécessaire à la création des images de goutte a été réalisé avec une caméra Génie M1024 et des pièces réalisées par impression 3D. L'équation d'équilibre statique de la goutte a été intégrée via un schéma numérique de type Runge-Kutta d'ordre 2. L'intensité du champ de gravité, les densités et la résolution spatiale de l'image sont supposées connues. Une image de goutte est présentée sur la figure II.13.

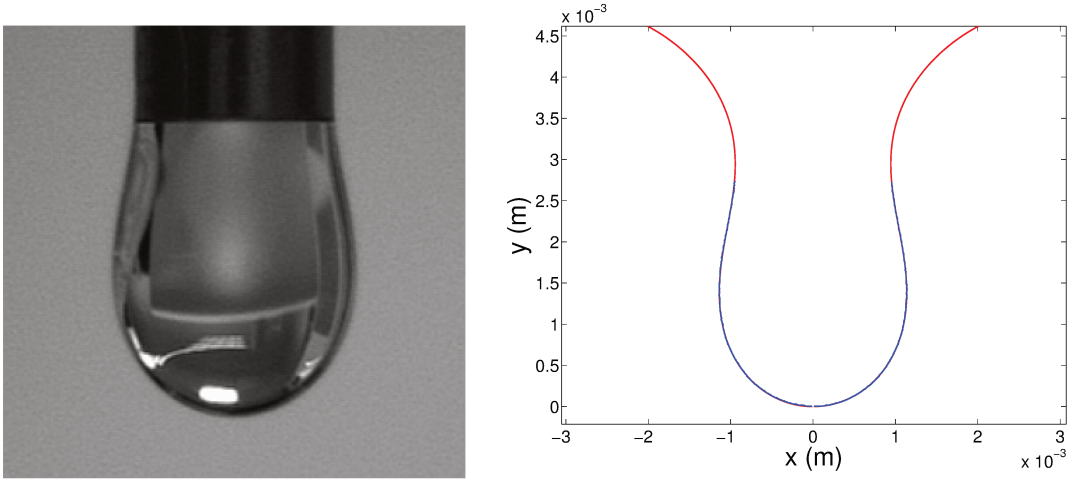

FIGURE II.13: Photo d'une goutte (gauche). Ajustement (–) sur le profil (–) par optimisation inverse (droite)

Après extraction du profil de la goutte sur l'image par une méthode sub-pixel, le jeu de paramètres est identifié par optimisation inverse (via un algorithme d'évolution) sur MATLAB. Les résultats sont reportés dans le tableau II.5 ainsi que des références issues de la littérature [Vazquez *et al.*, 1995] ou de fiches techniques du fournisseur à $20C°$.

Liquide	Éthanol	AIP	HS 10	HS 20
γ $(mN.m^{-1})$	21.8	21.2	20.4	20.2
γ_{ref} $(mN.m^{-1})$	22.3	21.7	20.1	20.6

TABLE II.5: γ, valeurs des tensions de surface de : l'éthanol, l'alcool isopropylique (AIP), et deux huiles silicones (HS 10,20) ainsi que des valeurs de référence issues de la littérature [Vazquez *et al.*, 1995] ou de fiches techniques γ_{ref}.

Une rapide analyse de sensibilité sur les paramètres de l'optimisation a montré que la précision de la mesure est de l'ordre de 3%. Les valeurs de tension de surface mesurées sont proches des valeurs de la littérature ou des données fournisseur (pour les huiles silicones).

II.4.3.2 Viscosité dynamique

Les viscosités dynamiques ont été mesurées par identification inverse à partir de la loi de Washburn [1921]. Pour chaque liquide, une goutte a été déposée en entrée d'un capillaire courbe en forme de U et de dimensions connues. Le liquide l'a imbibé spontanément avec un angle de contact supposé nul. Les imbibitions sont filmées avec le microscope Keyence et éclairées en transmission, le grossissement est $\times 20$, la fréquence d'acquisition de $15Hz$, la résolution de 1600×1200 et le capillaire est positionné à plat sur le plateau. La position du ménisque est identifiée à chaque instant par analyse d'image. Les trajectoires ainsi obtenues sont ensuite ajustées sur une forme en U via un algorithme d'optimisation. A partir de l'ajustement les trajectoires sont converties en distance à la source. En prenant en compte la pression hydrostatique à l'entrée de la cellule (la goutte en entrée est située au-dessus des canaux) et en ajustant la loi de Washburn sur les résultats obtenus, on obtient un coefficient dépendant uniquement de la viscosité du liquide et de la perméabilité du canal. Enfin, en utilisant les dimensions du capillaire, on peut déterminer la viscosité des liquides. Les résultats sont présentés dans le tableau II.6 avec des viscosités de référence issues de la littérature ([González *et al.*, 2007], [Pang *et al.*, 2007]) ou de fiches techniques (huiles silicones) à $20C^{\circ}$.

Liquide	Éthanol	AIP	HS10	HS20
μ $(mPa.s)$	1.2 ± 0.11	2.5 ± 0.13	10.7 ± 0.70	19.1 ± 0.94
μ_{ref} $(mPa.s)$	1.1	2.4	10.0	19.0

TABLE II.6: Viscosités μ des liquides mesurées par la méthode de l'imbibition spontanée et valeurs de référence μ_{ref} issues de la littérature ([González *et al.*, 2007], [Pang *et al.*, 2007]) et de fiches techniques

À nouveau, les résultats rapportés dans le tableau II.6 sont proches des valeurs issues de la littérature.

II.4.4 Types d'expériences

Deux types d'expériences ont été réalisés. Le premier type d'expérience sert à vérifier les prédictions du régime dynamique présentées dans la partie II.3. Le second sert à vérifier la validité du critère de fragmentation.

Les deux types d'expériences sont lancés par le dépôt d'une goutte dans le canal d'alimentation des cellules. Après chaque expérience, les cellules sont lavées par passage successif d'éthanol et d'air pour être ensuite réutilisées dans les expériences suivantes. La dégradation des cellules entre le début et la fin des expériences a été évaluée et jugée négligeable.

Pour le premier type d'expérience, l'imbibition est filmée par réflexion au niveau de la jonction à partir de l'arrivée du ménisque à la jonction et jusqu'aux instants qui suivent la fragmentation de la phase. Chaque expérience est réalisée 5 fois pour évaluer la répétabilité et estimer grossièrement la précision des mesures. Les trajectoires des ménisques sont extraites et traitées pour déterminer le temps t_1, le temps t_2 et la hauteur $X_2(t_1)$.

Pour le second type, l'imbibition est filmée en transmission et l'analyse des résultats se limite au constat de l'absence ou de la présence de la fragmentation.

II.4.5 Extraction des résultats

Pour la première série d'expériences, les fichiers vidéo ont été exploités sur MATLAB. Les coordonnées des ménisques ont été identifiées manuellement sur les images de toutes les vidéos. Ensuite, elles ont été transformées de manière à corriger le biais de visualisation due à l'orientation relative entre l'axe optique du microscope et le plan des cellules. Enfin,

les coordonnées ont été replacées dans leur base propre en utilisant l'ACP (Analyse en Composantes Principales). L'origine dans chacun des canaux à été calculée à partir des coordonnées de la jonction. La résolution spatiale est calculée pour chaque vidéo et est de l'ordre de $35\mu m.pixel^{-1}$. La fréquence d'acquisition est de $15Hz$ avec une résolution de 1600×1200. Deux résultats types après les traitements mentionnés ci-dessus sont présentés sur la figure II.14.

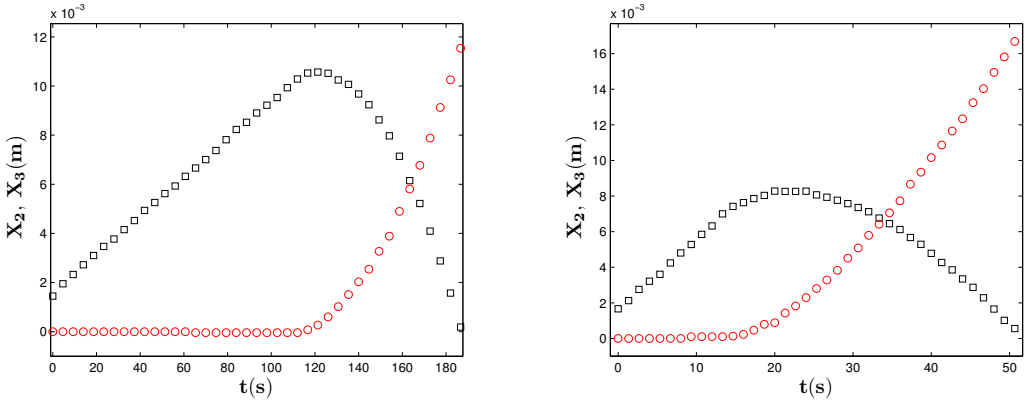

FIGURE II.14: Exemples de résultat pré-traités. Avec la cellule 1, l'AIP et un angle d'inclinaison de 20° (gauche). Avec la cellule 2, l'HS 10 et un angle d'inclinaison de 35° (droite). X_2 est représenté par (□) et X_3 par (○)

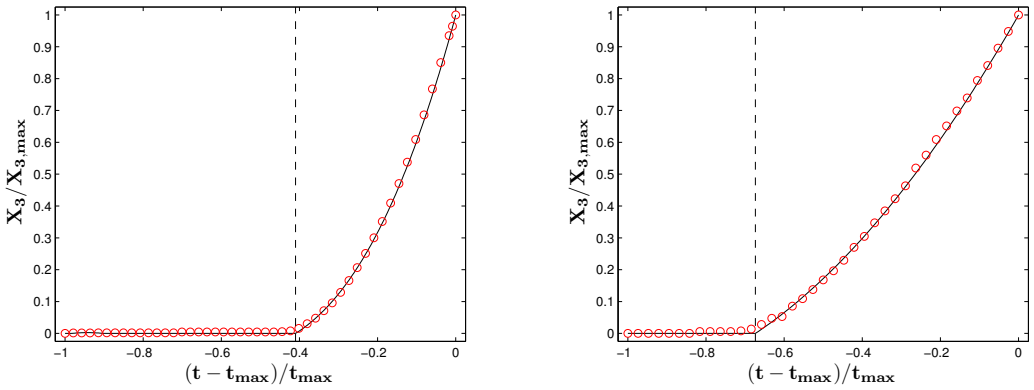

FIGURE II.15: Exemples de résultat traités. Avec la cellule 1, l'AIP et un angle d'inclinaison de 20° (gauche). Avec la cellule 2, l'HS 10 et un angle d'inclinaison de 35° (droite). X_3 est représenté par par (○) et la meilleur ondelette en (-)

Les résultats sont ensuite traités de manière à extraire la durée du premier régime, t_1, la position du second ménisque à cet instant $X_2(t_1)$ et la durée du second régime t_2. Les premières positions du ménisque dans le capillaire 2 sont utilisées via un ajustement linéaire pour déterminer l'origine du temps. Cette correction est nécessaire dans la mesure où le début du premier régime est dominé par la réorganisation du volume de liquide disponible au moment où le liquide atteint la jonction. L'instant t_1 est ensuite calculé grâce à une transformée en ondelette [Blaisot et Adeline, 2000] des positions du ménisque dans le capillaire 3. Les positions sont normalisées pour être ramenées sur le

domaine $[-1, 0] \times [0, 1]$. La transformée en ondelette s'appuie sur une fonction de trois paramètres $\Psi_{a,b,c}$.

$$\Psi_{abc}(x) = min(ax^3 + bx^2 + cx + 1, 0) \tag{II.76}$$

La forme de la fonction permet de déterminer le décrochage de la zone constante à la zone variable avec précision et sans être trop fortement influencée par le bruit. Les paramètres a, b et c sont déterminés comme les coordonnées du minimum de $F(a, b, c)$ dans l'espace de la transformée de la fonction :

$$F(a, b, c) = -\frac{\int_{-1}^{0} f(x)\Psi_{abc}(x)dx}{\sqrt{\int_{-1}^{0} \Psi_{abc}^2(x)dx}} \tag{II.77}$$

Avec f les positions normalisées et F la fonction à optimiser. L'optimisation a été réalisée par l'algorithme du plus grand gradient. La position correspondante dans le capillaire 2, $X_2(t_1)$ est déterminée par interpolation linéaire. Enfin, la durée t_1+t_2 est déterminée par un ajustement polynomial d'ordre 2 sur les dernières valeurs de X_2 qui permet d'évaluer l'instant de retour à la jonction.

II.5 Résultats

II.5.1 Expériences sur la dynamique

Un résultat typique est présenté sur la figure II.17 ainsi que des images expérimentales sur la figure II.16. Sur cette dernière on voit distinctement apparaitre deux régimes, conformément à la prédiction réalisée. Ce résultat est représentatif de l'ensemble des résultats obtenus.

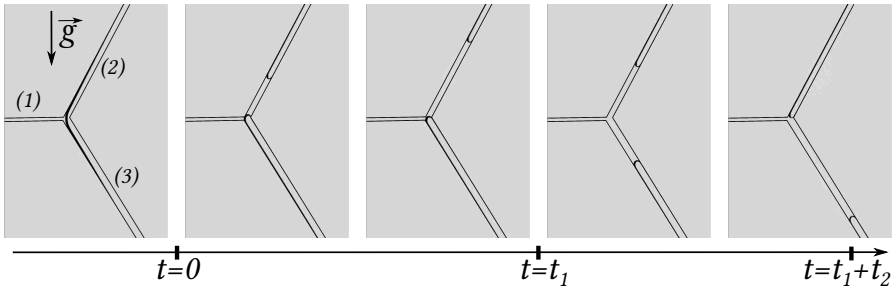

FIGURE II.16: Suite chronologique d'images obtenues expérimentalement. Les contours des canaux des cellules ont été surlignés en noir

Les principales caractéristiques de la figure II.17 sont communes à l'ensemble des résultats obtenus. On observe dans un premier temps que X_2 évolue linéairement en fonction de t et X_3 est constant. Dans un second temps, X_2 évolue de manière non monotone en fonction de t, il croit puis décroit jusqu'à 0 alors que X_3 croit de manière non-linéaire. Ces observations qualitatives sont conformes aux descriptions respectives du premier et second régime (voir partie II.3.3.6).

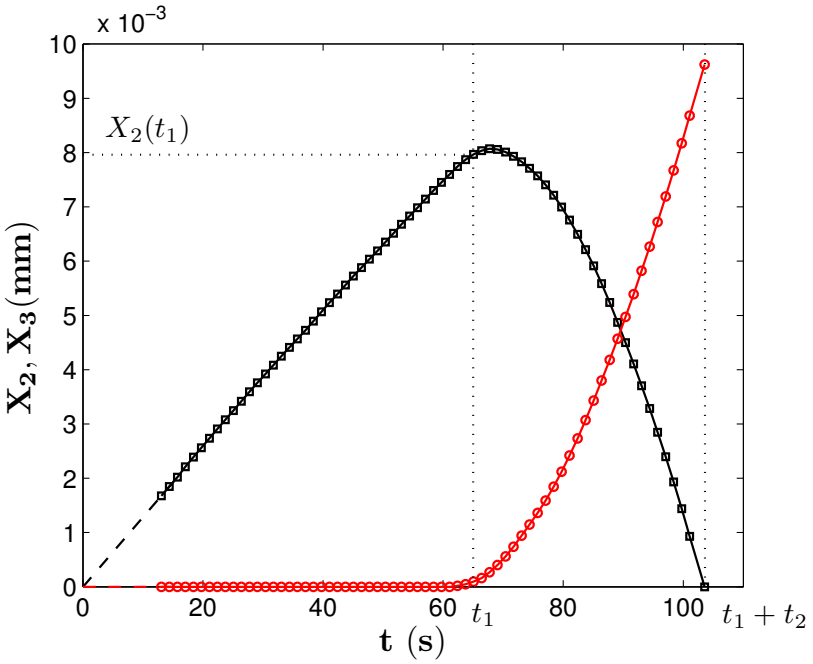

FIGURE II.17: Résultat typique obtenu avec l'huile silicone HS 10 pour une inclinaison de 20° et la cellule 1. X_2 est représenté par les (□) et X_3 par les (○). Les droites en (− −) représentent l'extrapolation à $t = 0$

Le nombre capillaire et le nombre de Bond sont calculés selon les relations II.69 et II.70 respectivement en utilisant un rayon r correspondant à un capillaire circulaire équivalent. La durée t_1 en fonction de C_a/B_o est représentée sur la figure II.18 pour l'ensemble des expériences réalisées. On remarque sur la figure que la correspondance entre la durée du premier régime et la prédiction théorique est assez bonne. La hauteur maximale de remontée $X_2(t_1)$ en fonction de C_a/B_o est représentée sur la figure II.19.

On remarque que la correspondance est bonne pour de faibles valeurs de C_a/B_o mais se détériore à mesure que ce ratio augmente. Cette remarque est conforme au cadre d'hypothèse ($C_a \ll B_o$) imposé pour déterminer les temps et durées caractéristiques du second régime. On peut d'ailleurs s'étonner de la bonne adéquation entre le modèle et l'expérience pour t_1. Une interprétation simple serait que la perte de charge dans le capillaire 2, lorsqu'elle n'est plus négligeable ralentit l'écoulement et diminue $X_2(t_1)$. Ces deux effets agissent en sens contraires l'un de l'autre et semblent se contrebalancer qualitativement.

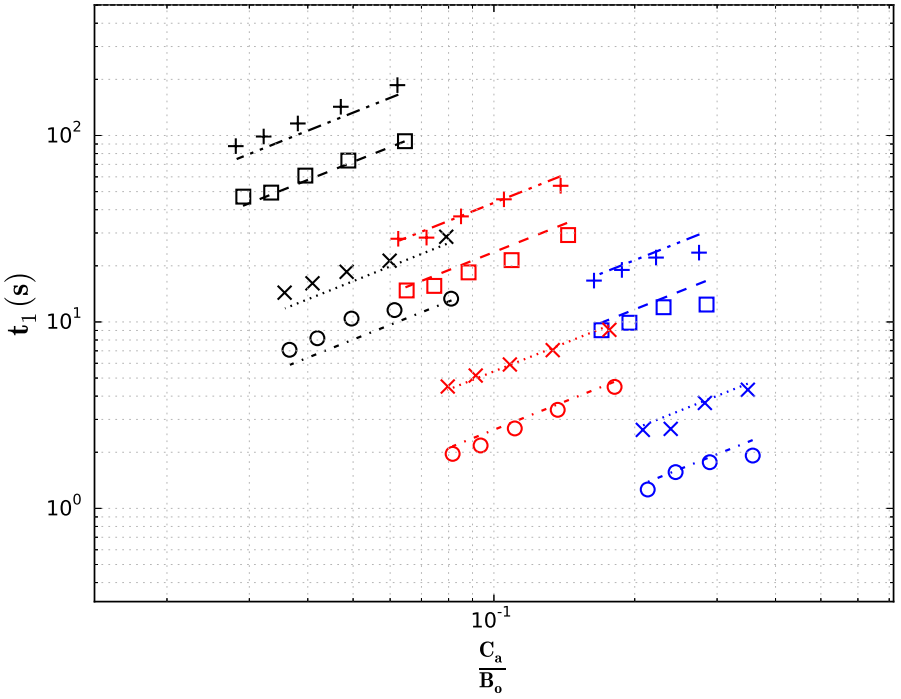

FIGURE II.18: Durée t_1 du régime 1 en fonction du ratio C_a/B_o. Les données en noir, bleu et rouge représente respectivement les expériences réalisées avec les cellules 1, 2 et 3. Les symboles représentent les valeurs expérimentales et théoriques : $(+, \cdots -)$: l'HS 20, $(\square, --)$: l'HS 10, $(\times, \cdots)$: l'AIP, $(\circ, \cdot -)$: l'éthanol

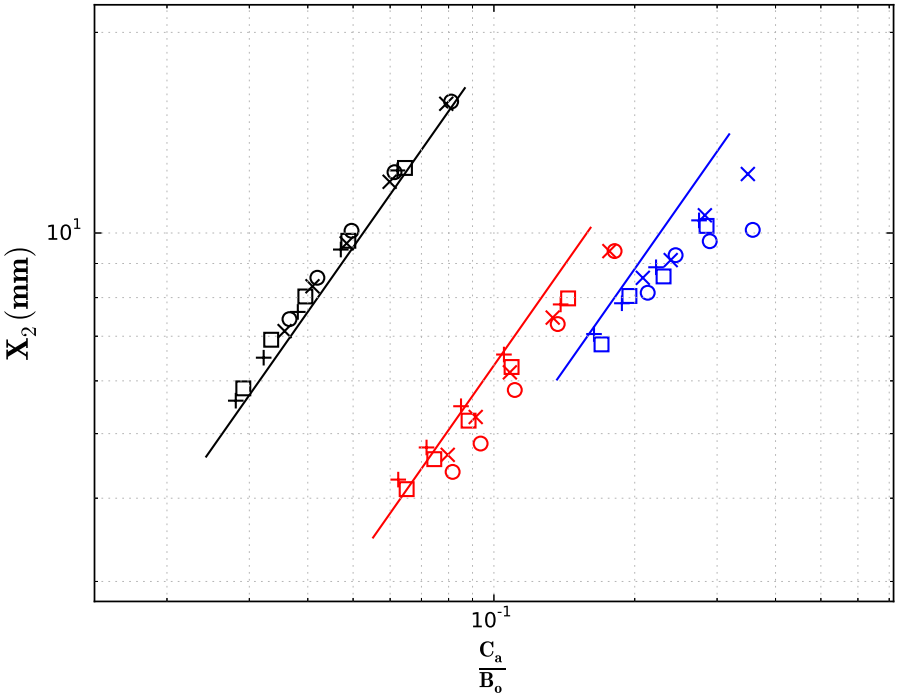

FIGURE II.19: Position $X_2(t_1)$ en fonction du ratio C_a/B_o. Les données en noir, bleu et rouge représente respectivement les expériences réalisées avec les cellules 1, 2 et 3. Les symboles représentent les valeurs expérimentales : $(+)$: l'HS 20, $(\square)$: l'HS 10, $(\times)$: l'AIP, $(\circ)$: l'éthanol. Les valeurs théoriques sont en lignes continues

Enfin, la durée t_2 en fonction de C_a/B_o est représentée sur la figure II.20. On remarque que la correspondance est assez bonne à l'exception des expériences réalisées avec l'éthanol et l'AIP pour la cellule 2 et des expériences réalisées avec l'éthanol pour la cellule 3. L'interprétation associée est que dans ces cas précis, le produit du rapport d'aspect du système et du nombre d'Ohnesorge est peu élevé (0.3 pour l'éthanol et 0.6 pour l'AIP) l'inertie influence donc l'écoulement. Ici, la variation de vitesse de l'écoulement au niveau de la jonction ralentit l'écoulement. Enfin, on peut remarquer qu'il existe une différence de pente pour toutes les valeurs de t_2 en fonction de C_a/B_o réalisées avec la cellule 1. Ces différences sont interprétées comme l'influence des écoulements dans les coins des canaux qui affaiblit la correspondance avec le modèle.

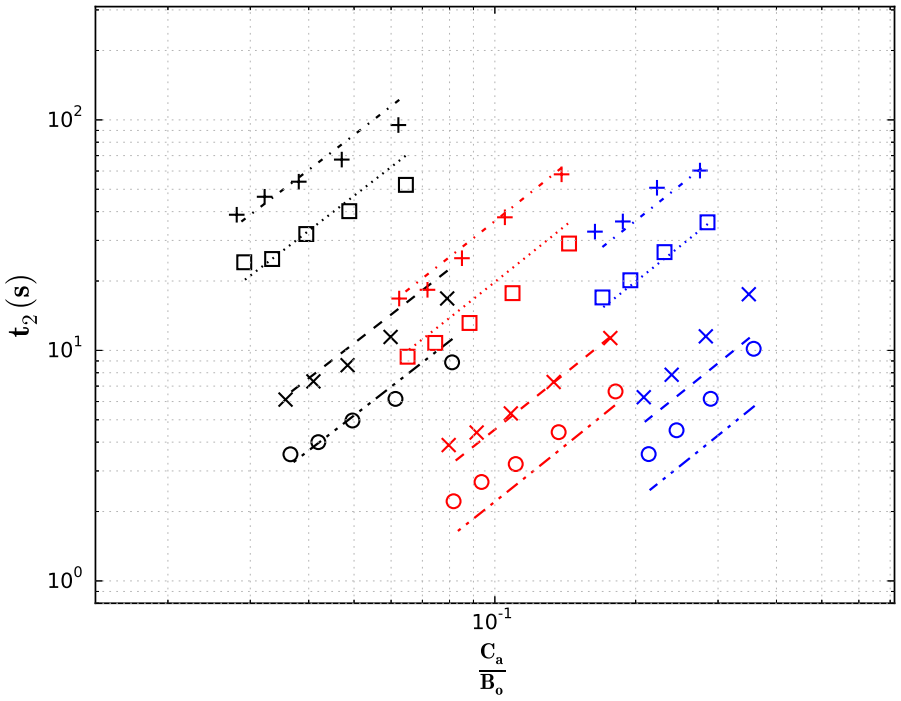

FIGURE II.20: Durée t_2 du régime 2 en fonction du ratio C_a/B_o. Les données en noir, bleu et rouge représente respectivement les expériences réalisées avec les cellules 1, 2 et 3. Les symboles représentent les valeurs expérimentales et théoriques : $(+, \cdots -)$: l'HS 20, $(\square, --)$: l'HS 10, $(\times, \cdots)$: l'AIP, $(\circ, -)$: l'éthanol

Notez que dans la prédiction du modèle, aucun ajustement n'a été réalisé, les valeurs sont issues de mesure directes et principalement géométriques. Tous les points expérimentaux présentés sur les graphiques précédant correspondent à (au moins) cinq expériences. Aucun tri n'a été réalisé dans les expériences.

Les variabilités des résultats en fonction de C_a/B_o sont représentées sur les figures II.22, II.21 et II.23. Il apparait que les écarts-types relatifs σ sont très éclatés et varient entre

1% et 20% des valeurs. On remarque également que les écart-types relatifs des paramètres, t_1 et t_2 sont croissants de la cellule 1 à la cellule 3 puis à la cellule 2, c'est-à-dire lorsque le nombre capillaire est croissant. En revanche, aucune tendance claire n'apparait lorsque les valeurs de B_o varient à C_a fixé. Ce dernier constat sous-entend que l'écart-type relatif des résultats est lié spécifiquement au nombre capillaire.

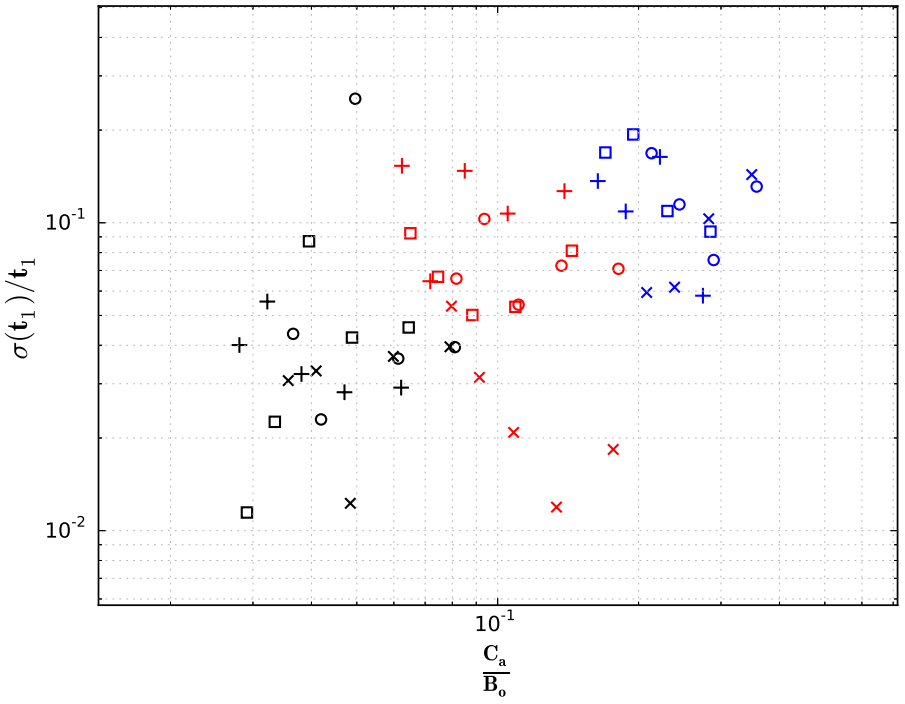

FIGURE II.21: Écart-types relatifs pour t_1. Les symboles représentent les valeurs expérimentales : (+) : l'HS 20, (□) : l'HS 10, (×) : l'AIP, (○) : l'éthanol

Ce constat n'est pas étonnant, dans la mesure où lorsque C_a augmente le comportement dynamique impacte de plus en plus fortement l'écoulement. Or, celui-ci est sensible à ce qui se produit en proche paroi (angle de contact dynamique, film précurseur ou de Bretherton, écoulement dans les coins, *etc.*), et d'une expérience à la suivante les conditions ne sont pas strictement les mêmes ; il peut y avoir des résidus de la phase mouillante utilisée dans l'expérience précédente, une évolution des propriétés de mouillabilité des parois ou un dépôt de particules dans les micro-canaux.

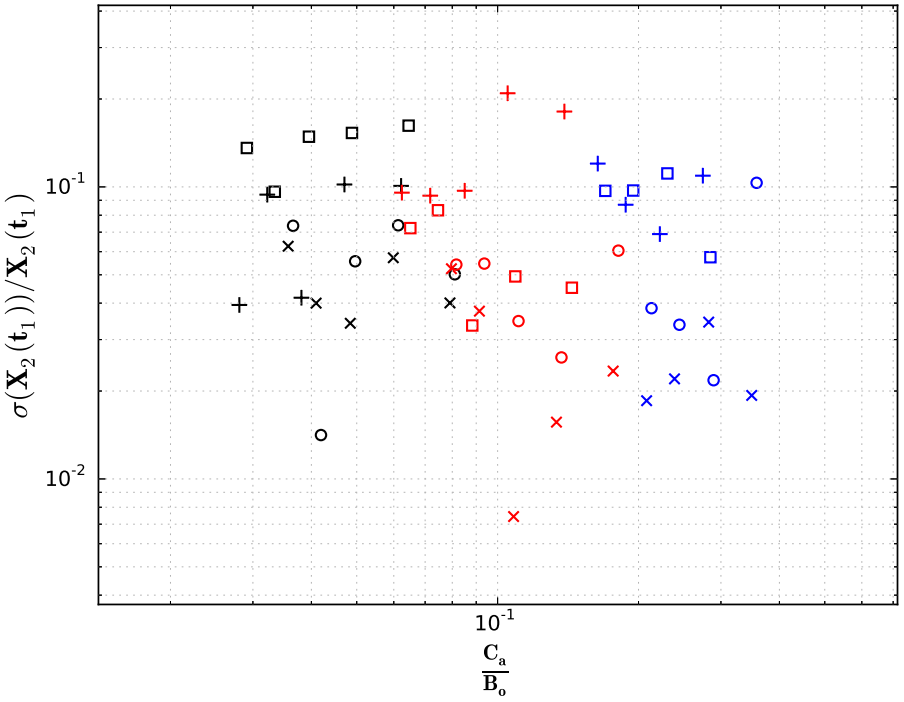

FIGURE II.22: Écart-types relatifs pour $X_2(t_1)$. Les symboles représentent les valeurs expérimentales : (+) : l'HS 20, (□) : l'HS 10, (×) : l'AIP, (○) : l'éthanol

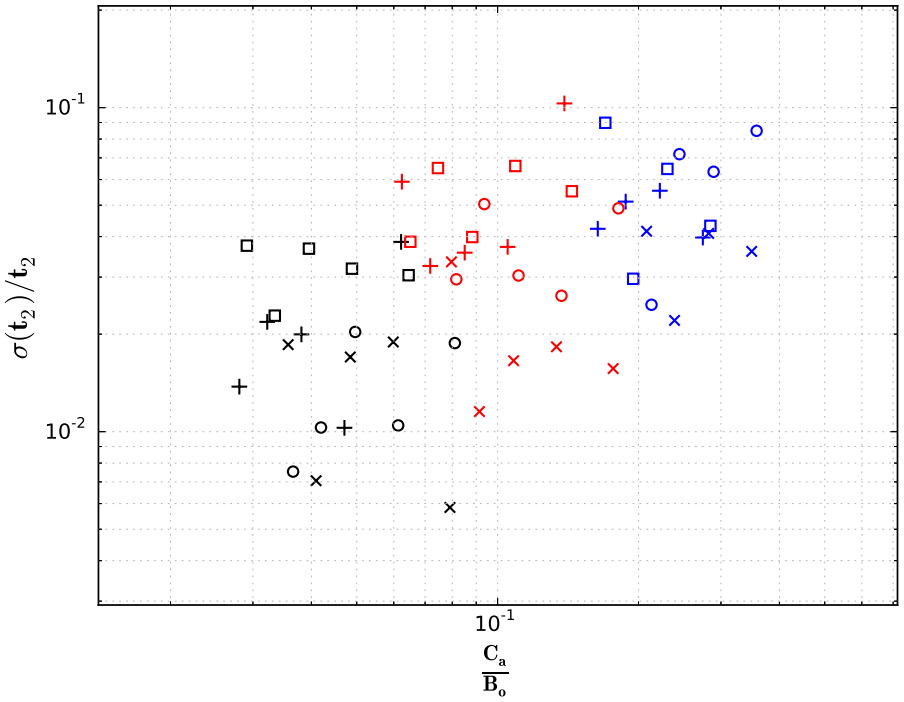

FIGURE II.23: Écart-types relatifs pour t_2. Les symboles représentent les valeurs expérimentales : (+) : l'HS 20, (□) : l'HS 10, (×) : l'AIP, (○) : l'éthanol

II.5.2 Expériences sur le critère de fragmentation

Cinq expériences ont été réalisées pour différents angles d'inclinaison (φ) par rapport à l'horizontal. Pour chaque expérience, la visualisation de la fragmentation est représentée par un Booléen sur la figure II.24 en fonction de l'angle d'inclinaison. On trouve une bonne adéquation entre la prédiction théorique et le résultat obtenu. On rappelle également que la précision sur l'angle d'inclinaison est de l'ordre de 1° et que le réglage du plateau est du même ordre. Ces deux effets justifient possiblement la différence entre le critère théorique et l'observation. L'observation de la fragmentation pour les autres cellules microfluidiques n'a pas été possible, car les angles d'inclinaison correspondant au critère pour les cellules 1 et 2 sont trop faibles $\sim 1-5°$ pour que l'expérience soit réalisable et que l'interprétation des résultats soit fiable.

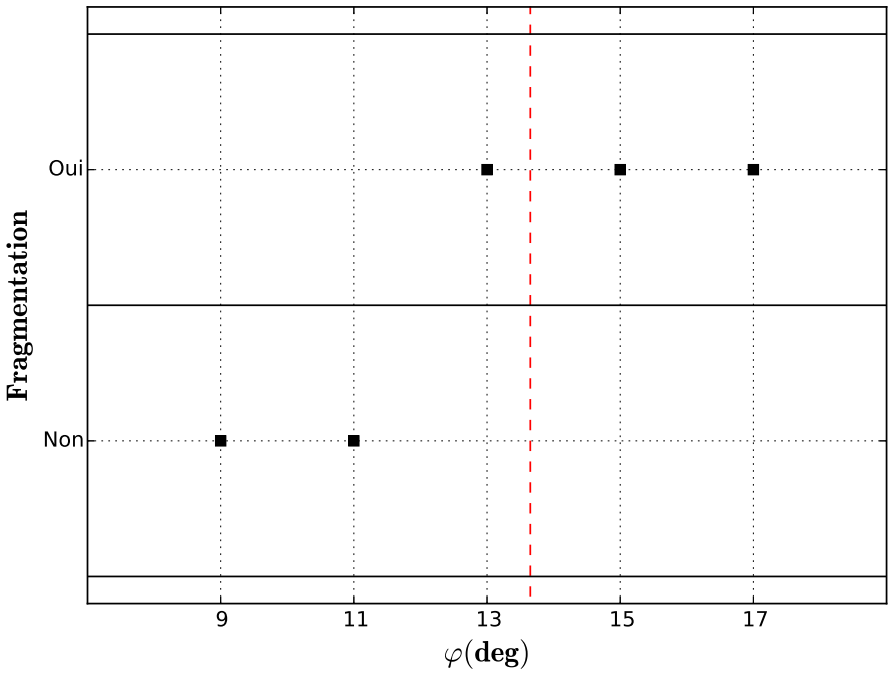

FIGURE II.24: Fragmentation observée en fonction de l'angle de contact statique, le critère $C_a - B_o = 0$ est représenté par la droite en (– –)

II.6 Discussion

Dans les milieux poreux, la fragmentation ne se produit pas nécessairement localement, au niveau d'une jonction de pores mais à l'échelle d'un ensemble ou d'un réseau de pores. Le mécanisme de fragmentation décrit plus haut peut cependant permettre de comprendre qualitativement ce qui se produit. Dans la littérature, la fragmentation

induite par gravité a déjà été observée ([Auradou *et al.*, 1999], [Birovljev *et al.*, 1995]). Notamment, il avait été remarqué qu'elle apparaissait au delà d'un certain nombre de Bond [Auradou *et al.*, 1999] dépendant de la taille du fragment de phase disponible [Birovljev *et al.*, 1995]. Ces observations ont été réalisées dans des situations où l'influence du nombre capillaire était négligeable. Bien que les expériences correspondantes soient bien différentes du cadre de travail développé ici, on peut noter que l'observation d'une dimension minimale à atteindre avant que ne débute la fragmentation concorde avec la transition entre le premier et le second régime. C'est-à-dire à la situation critique où les différences de pression capillaires peinent à stabiliser la phase en ascension.

Le mouillage total est une situation très particulière et restrictive, il se caractérise, entre autre, par l'absence d'un angle de contact d'avancée θ_a et de retrait θ_r. Des expériences dynamiques et de fragmentation ont été réalisées avec deux liquides partiellement mouillants (l'éthylène glycol et le propane-1,3-diol), dont les angles de contact ont été mesurés autour de $70°$ (par observation du ménisque dans les canaux des cellules). Les angles d'avancée et de retrait n'ont pas été mesurés, cependant les surfaces des cellules sont rugueuses, ce qui est susceptible d'accrocher la ligne de contact triple et donc de retarder l'avancée ou le retrait de la ligne triple. De plus, les parois supérieures et inférieures sont moins rugueuses que les parois latérales, les angles de contact d'avancée et de retrait varient donc probablement selon la paroi considérée ce qui rend difficile l'étude quantitative. Les expériences réalisées montrent une absence de fragmentation dans toutes les situations explorées, bien que le critère II.72 la prédisait dans certaines situations. Le critère de fragmentation identifié précédemment semble donc incapable de rendre compte correctement de ces effets. On peut interpréter assez simplement cette inhibition en remarquant que les canaux étudiés possèdent des dimensions semblables et donc des pressions capillaires semblables. En notant r_1 et r_2 le rayon de capillaire équivalent on peut écrire que :

$$\Delta P_c = 2\gamma cos(\theta_e)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \tag{II.78}$$

En présence d'hystérèse de mouillage, pour qu'un ménisque puisse en déplacer un autre il faut que la différence de pression soit supérieure à :

$$\Delta P_c^* = 2\gamma\left(\frac{cos(\theta_r)}{r_1} - \frac{cos(\theta_a)}{r_2}\right) \tag{II.79}$$

Ou :

$$\Delta P_c^* = 2\gamma \left(\frac{cos(\theta_a)}{r_1} - \frac{cos(\theta_r)}{r_2} \right) \tag{II.80}$$

Pour des angles d'avancée et de retrait très distincts les uns des autres, l'effet de dispersion de la pression capillaire due à l'hystérèse domine l'effet des variations géométriques (qui était assez faible dans le cas étudié). Un critère très similaire a également été proposé et vérifié expérimentalement par Morrow [1979] [4].

Dans les deux types d'expériences réalisées, la description des observations s'est arrêtée à la fragmentation lorsqu'elle se produisait. Après la fragmentation, un ménisque est formé au niveau du capillaire d'alimentation et l'imbibition reprend comme dans la situation initiale. Cependant, lorsque le ménisque touche de nouveau la jonction, il est tiré par le fragment dans le capillaire inférieur et sa dynamique n'est plus comparable à celle de la première imbibition. La fragmentation se produit directement, indépendamment de l'orientation de la différence de pression capillaire locale. Cet effet peut se produire plusieurs fois de suite et de manière répétable (même taille de fragment produit). Il est cependant assez peu probable qu'il se produise aussi facilement dans les milieux poreux où la taille limitée des pores et leurs connectivités pourrait éviter à la phase déplacée d'être piégée.

La validité du critère de fragmentation dans la situation où la différence de pression capillaire s'oppose à la gravité n'a pas été vérifiée. En pratique ce serait assez difficile, car, à mesure que $C_a \rightarrow B_o$, la taille de la colonne de liquide nécessaire pour que l'effondrement se produise tend vers l'infini. Expérimentalement, le cas où C_a tend vers B_o correspond à un angle d'inclinaison de 15° avec la cellule 2. Ce cas n'a simplement pas pu être traité car le liquide atteignait l'extrémité inférieure du canal 3 (5 cm) avant que le démouillage à la jonction ne se produise.

II.7 Conclusion

Dans ce chapitre, la fragmentation d'une phase en imbibition à l'échelle des pores à été étudiée analytiquement et expérimentalement. Deux cas de figures ont été envisagés selon que la différence de pression capillaire s'oppose à la gravité ou qu'elle l'assiste. Dans le premier cas, lorsque la gravité domine les effets de perte de charge ($Bo \gg C_a$), une dynamique en deux régimes est observée. Le premier est dominé par la différence de pression capillaire et est limité par la gravité. Le second est dominé par la gravité et s'achève par la fragmentation de la phase mouillante. Un critère de fragmentation a été

4. Mais pour prédire la mobilisation d'une phase piégée

déterminé par le calcul. Sa validité a été confirmée par l'expérience lorsque la différence de pression capillaire agit dans le même sens que la gravité.

Les résultats résumés ci-dessus sont supposés applicables dans les milieux poreux où la taille des pores n'est pas trop petite par rapport à la longueur capillaire, c'est-à-dire aux milieux dans lesquels les hauteurs de Jurin ne sont pas trop supérieures à la taille des pores ($0.05 < B_o < 1$). Pour des pores plus larges, les effets de la gravité agissent jusque dans ceux-ci. D'autres limites sont envisageables comme l'existence d'une hystérèse de mouillage.

Chapitre III

Modélisation numérique de l'épaississement du front dans un réseau de pores en imbibition

III.1 Introduction

En modélisant un écoulement diphasique dans un milieu poreux *via* un milieu homogène équivalent et régulier, on peut alors rendre compte de certains résultats expérimentaux, comme l'évolution de la position du front en imbibition spontanée. Cependant, cette modélisation est incapable de décrire correctement certaines propriétés du front, comme son épaisseur. La raison de cet échec est très simple et découle du principe de Curie : *"Lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits"*. Dans la modélisation décrite plus haut, la nature irrégulière du milieu n'est pas retranscrite. Le front est alors invariant perpendiculairement à l'axe principal de l'écoulement et donc plan. Or, les milieux poreux sont généralement très irréguliers, et par conséquent les fronts diphasiques dans les milieux poreux ne sont pas plans. Cette affirmation est vérifiable par des observations de tous les jours : l'interface formée lorsqu'on trempe un sucre dans le café ou qu'on renverse de l'eau sur une nappe est irrégulière lorsqu'elle est observée de près. L'épaisseur du front joue un rôle crucial dans la fabrication de fragments isolés de la phase déplacée dans la phase qui déplace l'autre. Soit un problème qui concerne nombre d'applications industrielles majeures (exploitation pétrolière, polluants dans les nappes phréatiques, mise en œuvre composites *etc.*). Récemment, Gruener *et al.* [2012] ont réalisé une observation expérimentale qui semble ne correspondre à aucune prédiction théorique et ont proposé une modélisation analytique. L'enjeu de ce chapitre est de tester la validité de ce modèle

et de le comparer à d'autres modèles de la littérature. Après avoir introduit les notions élémentaires de la théorie de la percolation, quelques modèles d'épaississement de l'interface sont présentés puis l'outil numérique employé est décrit ainsi que les résultats obtenus.

Si les modèles de paquets de capillaires ou continus permettent de rendre compte de certains résultats expérimentaux, comme la vitesse de propagation du front en imbibition spontanée, ils échouent généralement lorsqu'il s'agit de décrire certaines propriétés du front, comme son épaisseur. La raison de ces échecs est très simple et découle du principe de Curie : *"Lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits"*. Dans les deux modèles cités plus haut, le milieu est homogénéisé et sa nature irrégulière n'est donc pas retranscrite [1]. Le front est alors invariant perpendiculairement à l'axe principal de l'écoulement et donc plan. Or, les milieux poreux sont généralement très irréguliers, et par conséquent les fronts diphasiques dans les milieux poreux ne sont pas plans. Cette affirmation est vérifiable par des observations de tous les jours : l'interface formée lorsqu'on trempe un sucre dans le café ou qu'on renverse de l'eau sur une nappe est irrégulière lorsqu'elle est observée de près. L'épaisseur du front joue un rôle crucial dans la fabrication de fragments isolés de la phase déplacée dans la phase qui déplace l'autre. Soit un problème qui concerne nombre d'applications industrielles majeures (exploitation pétrolière, polluants dans les nappes phréatiques, mise en œuvre composites *etc.*). Récemment, Gruener *et al.* [2012] ont réalisé une observation expérimentale qui semble ne correspondre à aucune prédiction théorique et ont proposé une modélisation analytique. L'enjeu de ce chapitre est de tester la validité de ce modèle et de le comparer à d'autres modèles de la littérature. Après avoir introduit les notions élémentaires de la théorie de la percolation, quelques modèles d'épaississement de l'interface sont présentés puis l'outil numérique employé est décrit ainsi que les résultats obtenus.

III.2 Modélisation de la propagation des interfaces

Il existe un grand nombre de modèles de propagation d'interfaces. Ceux-ci définissent des classes, dites universelles qui découlent de la physique des problèmes qu'ils traitent [Barabási et Stanley, 1995]. Ces classes se retrouvent dans les écoulements diphasiques dans les milieux poreux ([Lenormand *et al.*, 1988], [Martys *et al.*, 1991]), dans la croissance des colonies de bactéries ([Vicsek *et al.*, 1990], [Matsushita et Fujikawa, 1990]), les procédés de dépositions [Csahók et Vicsek, 1992], les fronts de combustion [Zhang *et al.*, 1992], *etc.*. Ces différentes applications ont en commun de s'intéresser à l'épaisseur

1. Il existe des modèles continus qui prédisent des irrégularités de front mais ils sont rares.

de l'interface w. Les différentes classes correspondent à des situations différentes où il peut exister une tendance de l'interface à se régulariser [Edwards et Wilkinson, 1982], des effets géométriques [Kardar *et al.*, 1986], une tendance à l'étirement [Witten et Sander, 1981] et des effets plus complexes ou des combinaisons de ceux-ci ([Buldyrev *et al.*, 1992a], [Buldyrev *et al.*, 1992b]). Dans les milieux poreux, l'interface dont l'étude est pertinente se dénomme le front, cette distinction est nécessaire pour différentier les interfaces locales (les ménisques) du front qui sépare les phases. Selon les conditions de l'écoulement (nombre capillaire, nombre de Bond, *etc.*) différents modèles peuvent s'appliquer. Par la suite, le cadre d'étude sera limité aux écoulements stables ($M_\mu < 1$ et $B_o > 0$) sans terme régulateur. La modélisation de ceux-ci passe par un outil particulier : la théorie de la percolation. Les notions élémentaires de cette théorie ainsi que les différents modèles et prédictions dans ce cadre d'étude singulier font l'objet de cette partie. La présentation qui suit est inspirée du livre *Introduction to percolation theory*, [Aharony et Stauffer, 2003] qui est beaucoup plus complet et présente de manière simple et claire les notions clefs de la théorie de la percolation.

III.2.1 Outils et résultats issus de la théorie de la percolation

III.2.1.1 Notion de percolation

On considère une grille 2D infinie et régulière dont chacune des cases peut être dans deux états qu'on nommera ouvert et fermé. Chaque case de la grille voit son état déterminé par le tirage d'une variable aléatoire. On nomme q la probabilité que la case soit dans l'état ouvert et $1 - q$ la probabilité qu'elle soit fermée. Les tirages sont dé-corrélés les uns des autres, c'est-à-dire que chacun ne dépend en aucune façon des valeurs des autres cases. On définit ensuite les connections d'une case à ses plus proches voisines, par exemple en considérant que chaque case est connectée aux quatre autres cases avec lesquelles elle partage un segment. Le nombre de voisins connectés sera noté λ, d'après la règle évoquée ci-dessus, $\lambda = 4$. En utilisant la grille fabriquée par le procédé décrit ci-dessus et la règle de connectivité des plus proches voisins, on fait varier la probabilité q qu'une case soit ouverte. Deux exemples de tirage sont présentés sur la figure III.1, pour q proche de 0 et proche de 1.

Les premières observations sont que :

- Lorsque $q \sim 0$: très peu de cases sont ouvertes et elles ne possèdent généralement aucun voisin.
- Lorsque $q \sim 1$: très peu de cases sont fermées, pratiquement aucune case ouverte n'est isolée et elles appartiennent en grande majorité à un ensemble connecté qui s'étend sur l'ensemble de la grille.

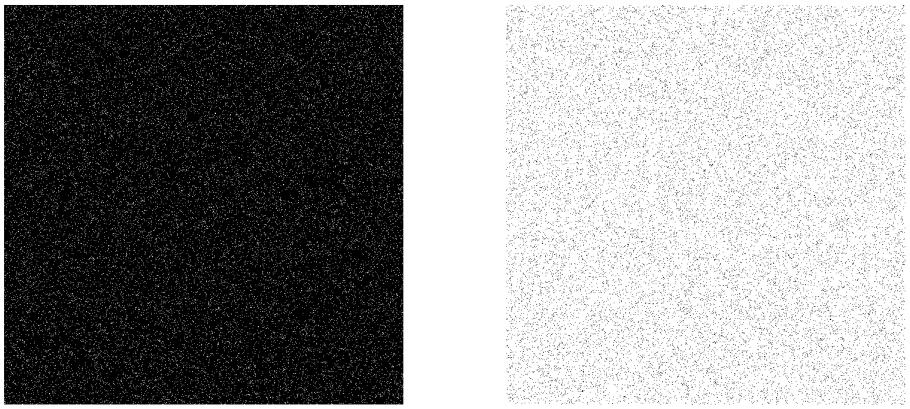

FIGURE III.1: Représentation des cellules ouvertes en blanc et des cellules fermées en noir, pour $q = 0.05$ et $q = 0.95$ sur une grille 1000×1000

Ces observations sont bien visibles sur la figure III.1 et sont qualitativement justifiables par le calcul. En effet, la probabilité $n(1, q)$ qu'il existe 1 cellule isolée est de :

$$n(1, q) = q(1 - q)^4 \tag{III.1}$$

Alors que la probabilité $n(2, q)$ qu'il existe 2 cellules connectées est de :

$$n(2, q) = 2q^2(1 - q)^6 \tag{III.2}$$

Or, on peut remarquer que :

$$\lim_{q \to 0} \frac{n(2, q)}{n(1, q)} = 0 \tag{III.3}$$

Cet argument justifie également l'existence de rares cases fermées agglomérées dans le cas $q \to 1$, qui justifient elles-mêmes l'existence d'un réseau de taille similaire à la grille. Lorsqu'un tel réseau existe, on dit qu'il y a percolation. En faisant varier la probabilité q de 0 à 1, on remarque qu'il existe une valeur de q notée q_c et nommée seuil de percolation pour laquelle ce réseau apparait. La théorie de la percolation s'intéresse à ce qui se produit au voisinage du seuil de percolation. Attention, la description ci-dessus du seuil de percolation n'est valide que pour une grille infinie.

La percolation telle que décrite dans l'exemple précédent est un cas particulier bien spécifique. Les notions de tailles de réseaux, de seuil de percolation ou de nombre de voisins connectés sont transposables à des cas 1D, 3D, 4D, *etc.*. Pour des grilles régulières

ou irrégulières. La valeur du seuil de percolation est impactée par un changement de dimension de la grille ou par un changement du nombre de voisins connectés λ.

Il est également possible d'attribuer des valeurs aléatoires aux liaisons entre les cases à la place des cases elles-mêmes. Cette possibilité correspond à un autre grand type de modification qui impacte la valeur du seuil de percolation. Elle est nommée percolation des liaisons par opposition avec la version précédente, la percolation des sites [2]. Le terme site désigne alors les cases de la grille dans l'exemple plus haut.

III.2.1.2 Notion d'agglomérat

On repart de la grille 2D et on choisit maintenant n'importe quelle case ouverte de la grille, et on dénombre les cases occupées qui possèdent un chemin de voisins connectés ouverts qui les lient à la case choisie. Chacun de ces ensembles de points se nomme agglomérat (les agglomérats sont visibles sur la figure III.2 et III.3). Le nombre de cases s d'un agglomérat est nommé son poids. On nomme, $n(s,q)$ la probabilité qu'en une case arbitrairement choisie on trouve un agglomérat de taille s avec une probabilité d'ouverture q. A partir de la distribution, on peut étudier les agglomérats du réseau, en définissant G, le poids moyen de la distribution moyennée sur les agglomérats :

$$G = \sum_{0}^{\infty} \frac{s^2 n(s,q)}{\sum_0^\infty s n(s,q)} \tag{III.4}$$

Qui se réécrit :

$$G = \frac{1}{q} \sum_{0}^{\infty} s^2 n(s,q) \tag{III.5}$$

Il est important de remarquer que la définition ci-dessus n'a de sens que si la somme converge, ce qui n'est pas forcément le cas au niveau ou au-dessus du seuil de percolation. Pour s'assurer de sa convergence au-delà du seuil de percolation, les agglomérats non finis sont exclus du calcul de G et l'expression (III.5) n'est plus exacte. On définit de manière corolaire H la probabilité d'appartenance d'un point à l'agglomérat infini. On peut écrire :

$$q = H + \sum_{0}^{s_{max}} s n(s,q) \tag{III.6}$$

2. Il existe également des versions où deux probabilités sont employées, une pour les sites et une autre pour les liaisons.

Et,

$$G = \sum_{0}^{s_{max}} \frac{s^2 n(s,q)}{\sum_0^{s_{max}} s n(s,q)} \tag{III.7}$$

Avec s_{max} le plus grand agglomérat fini du réseau. Il est tentant d'essayer de déterminer par le calcul la distribution $n(s,q)$ en fonction de q. Cependant, il n'existe pas à l'heure actuelle d'expression qui donne cette distribution de manière exacte car, pour chaque poids s, il existe un ensemble d'agglomérats de conformations différentes (en dimension supérieure à 1) qu'on nomme animaux et qui sont difficilement dénombrables. Il existe cependant deux comportements de $n(s,q)$ valables pour s grand devant 1. Le premier est connu sous le nom de loi de Fisher et prédit :

$$n(s,q) \propto s^{-\tau} \tag{III.8}$$

Avec τ, l'exposant de Fisher. Cette description est valable au seuil de percolation pour tout poids s grand devant 1. Le ratio de la somme des poids des clusters sur le nombre de sites doit être fini au niveau du seuil de percolation (pour que la somme de l'équation III.6 converge). On déduit de cette propriété, $\tau > 2$. En revanche, dans le voisinage du seuil de percolation, la loi de Fisher ne tient que pour des agglomérats de poids inférieurs à une certaine dimension s^* fonction de q et q_c. Au-delà de ce poids, la distribution s'amortit exponentiellement :

$$n(s,q) \propto e^{-s/s^*} \tag{III.9}$$

Cette dissociation du comportement avant et après le poids limite s^* marque la transition entre deux domaines distincts qui font l'objet de la partie suivante.

III.2.1.3 Comportements critiques

Comme explicité dans la section précédente, il existe un poids limite au-delà duquel la répartition des tailles d'agglomérats change de forme et s'amortit exponentiellement. Cette grandeur notée s^* évolue en fonction de la probabilité q, du seuil de percolation q_c et d'un exposant Λ :

$$s^* \propto |q_c - q|^{-1/\Lambda} \tag{III.10}$$

Cette loi est valide des deux côtés du seuil de percolation. Plus spécifiquement, de nombreuses propriétés adoptent un comportement semblable à celui du poids critique, c'est le cas de G :

$$G \propto |q_c - q|^{-\zeta} \tag{III.11}$$

Et de H :

$$H \propto |q_c - q|^{\beta} \tag{III.12}$$

Les exposants explicités plus hauts : Λ, ζ et β, ne sont pas indépendants les uns des autres. Par exemple, il est possible de montrer, en calculant de deux manières différentes G et H, que :

$$\beta = \frac{\tau - 2}{\Lambda} \tag{III.13}$$

Et,

$$\zeta = \frac{3 - \tau}{\Lambda} \tag{III.14}$$

Bien d'autres grandeurs possèdent un comportement critique à proximité du seuil de percolation, c'est notamment le cas de la longueur de corrélation ξ, qui représente la taille (spatiale) des plus grands agglomérats.

$$\xi \propto |q_c - q|^{-\nu} \tag{III.15}$$

L'intérêt de chacune de ces lois dépend de l'application visée. Par la suite, nous en utiliserons une dernière, qui concerne la perméabilité K. L'une des particularités remarquables de toutes ces lois c'est qu'elles s'appliquent indépendamment de la structure précise du réseaux. Mieux, les exposants sont invariants pour une dimension de réseau fixée. Ils sont, par exemple, identiques en percolation de site et de liaison. L'évolution du poids des agglomérats et les comportements critiques sont illustrés sur la figure III.2 pour la percolation de type site et III.3 pour la percolation de type liaison.

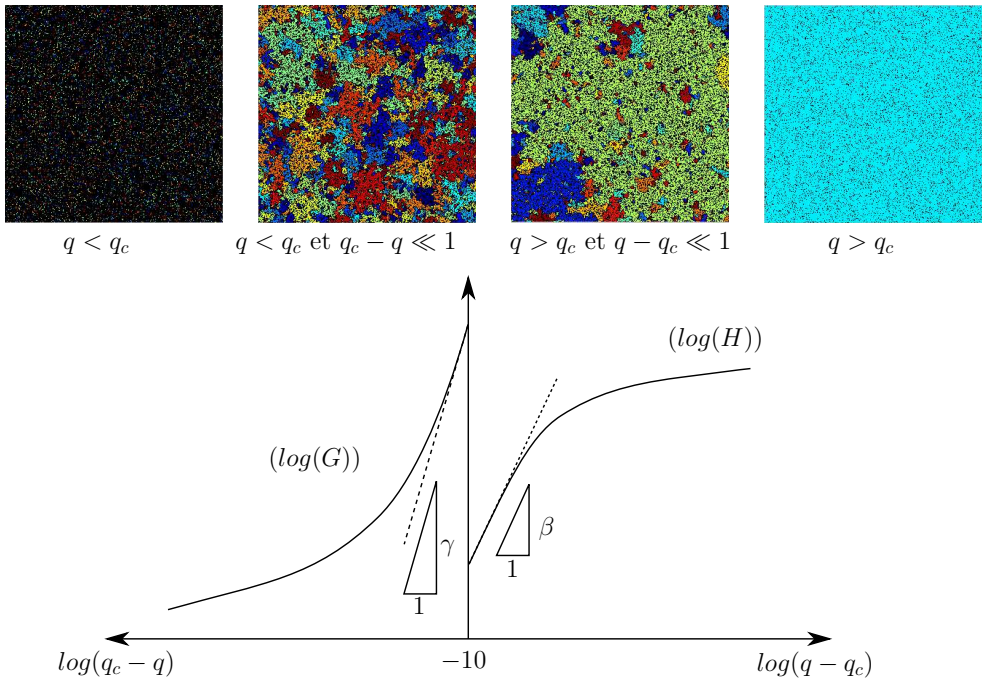

FIGURE III.2: Sur les illustrations supérieures, chaque agglomérat apparait d'une couleur uniforme. Sur l'illustration inférieure l'évolution de G est représentée sous le seuil de percolation et celle de H au-dessus

III.2.1.4 Fractales et dimension fractale

D'après la partie précédente, on pourrait avoir envie d'écrire que le poids limite des agglomérats est proportionnel à la taille caractéristique à l'exposant de la dimension de la grille d :

$$s^* \propto \xi^d \tag{III.16}$$

Avec d, la dimension de la grille. Cependant cette équation n'est pas valide. Cette relation suppose une densité constante des agglomérats, c'est-à-dire une fraction remplie qui ne dépend pas de la taille de ceux-ci. Cette dernière remarque n'est pas valable car les agglomérats ont une structure fractale en-dessous de la longueur de corrélation ξ.

Les fractales sont des objets qui possèdent une structure similaire (en un sens) à différentes échelles d'observations. Un des exemples les plus classiques de fractale est représenté sur la figure III.4. Il s'agit du tapis de Sierpinski, il se construit de manière récursive en disposant 9 carrés de taille l pour former un carré de taille $3l$, en retirant le carré central et en appliquant la même procédure en partant de la figure obtenue à la place du carré

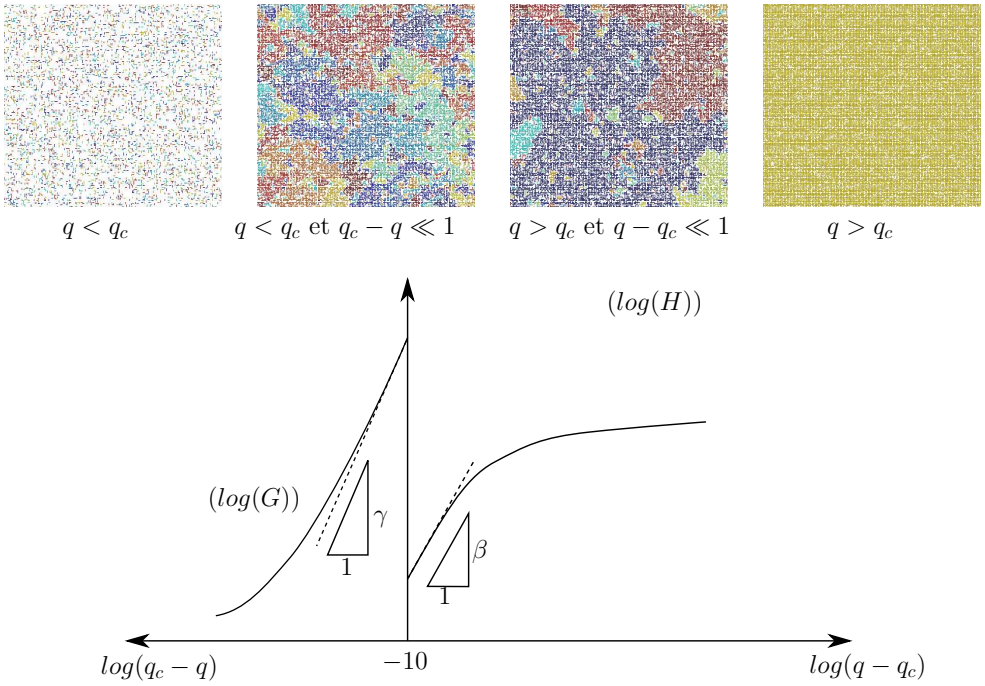

FIGURE III.3: Cette figure est similaire à la figure III.2 mais pour une percolation de type de liaison. Le seuil de percolation est déplacé mais les autres caractéristiques sont inchangées en 2D

de taille l et ainsi de suite. A une échelle d'observation $l_{k+1} = l_0 \times (3)^{k+1}$ il y a donc, 8 fois plus de carrés qu'à l'échelle l_k, et d'aires identiques. On peut donc écrire :

$$A(l_{k+1}) = 8 \times A(l_k) \tag{III.17}$$

Soit,

$$A(l_k) = (8)^k \times A(l_0) \tag{III.18}$$

Or, la dimension fractale se définit (entre autre) comme la dérivée du poids en fonction de la taille :

$$D = \frac{dlog(A(l))}{dlog(l)} \tag{III.19}$$

En appliquant cette définition au tapis de Sierpinski, on trouve :

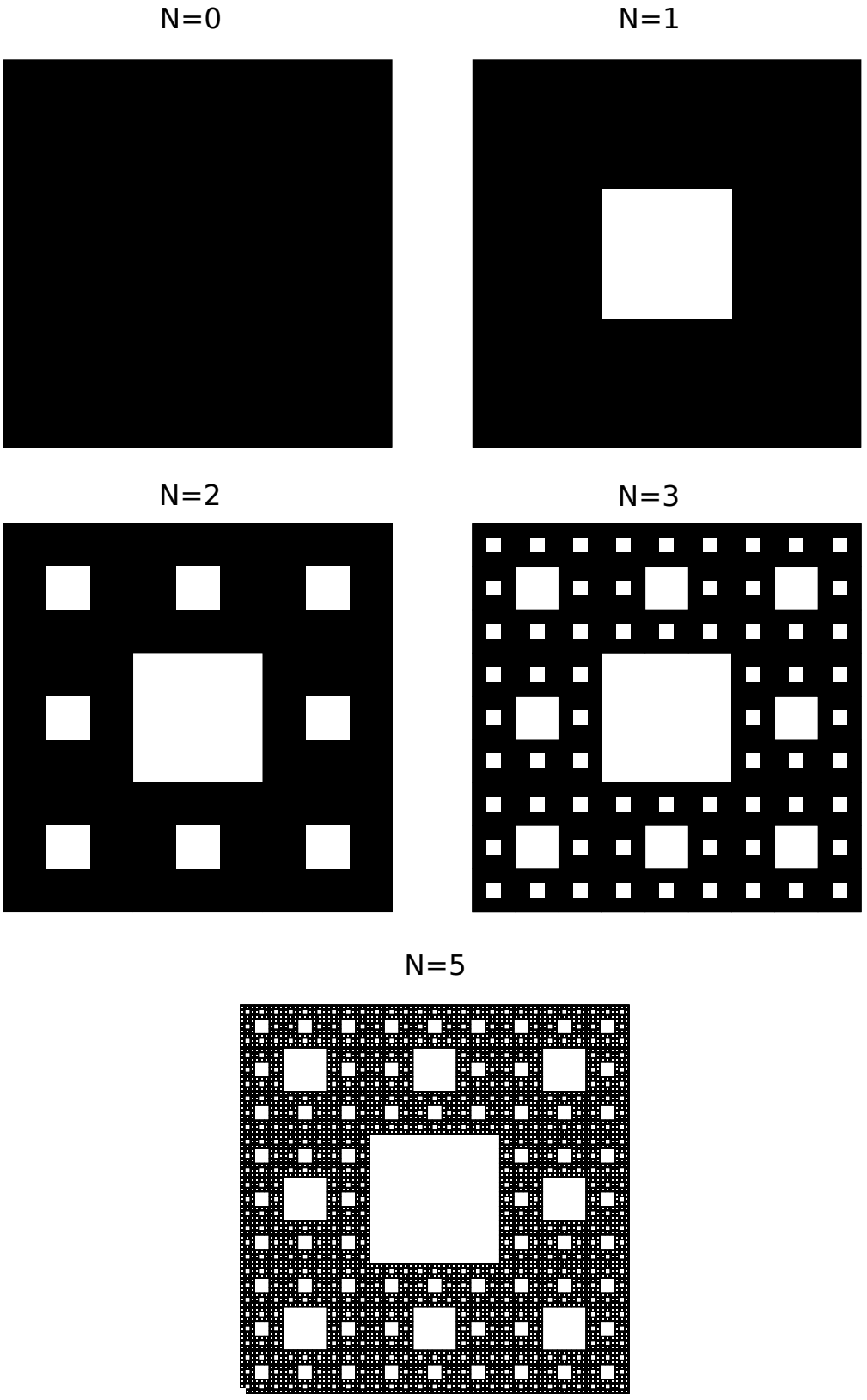

FIGURE III.4: Représentation de la fabrication du tapis de Sierpinski

$$D = \frac{log(8)}{log(3)} \tag{III.20}$$

Soit une diminution de la densité du système lorsque la dimension d'observation croit par rapport à un objet usuel ($D < d$). La dimension calculée est la dimension de Hausdorff. La mesure de dimension fractale demande du soin et sera développée plus loin. Dans les systèmes qui nous intéressent, les agglomérats, le poids d'un agglomérat varie en fonction de sa taille et de sa dimension fractale. Ce qui s'écrit :

$$s^* \propto \xi^D \tag{III.21}$$

En utilisant la loi d'évolution de la longueur de corrélation III.21 aux relations III.10 et III.15 on peut écrire :

$$1 = \Lambda \nu D \tag{III.22}$$

Enfin, au-delà du seuil de percolation deux types d'agglomérats coexistent, les agglomérats infinis, et les agglomérats finis. La nature fractale de ceux-ci étant réservée aux objets de tailles inférieures à la longueur de corrélation ξ. L'agglomérat percolant, en particulier, ne possède pas une structure fractale, d'où son poids dans un système fini de côte L, HL^d. On peut supposer que dans un système fini, où la longueur de corrélation est proche de la taille du système $L \sim \xi$, les deux types d'agglomérats ont des dimensions similaires :

$$HL^d \sim \xi^D \tag{III.23}$$

Ce qui donne la relation :

$$D = d - \frac{\beta}{\nu} \tag{III.24}$$

Les exposants des lois critiques ont été, soit mesurés sur des simulations de type Monte-Carlo, soit déterminés exactement. Ils ne font pas l'objet du présent travail, leurs valeurs seront reprises de résultats connus de la littérature.

III.2.2 Quelques modélisations du front

La théorie de la percolation a été développée (en partie) dans la perspective de l'appliquer au transport dans les milieux poreux. Ce problème, pour des nombres capillaires très faibles $C_a \ll 10^{-3}$ et dans le cas du drainage d'un réseau de pores, est en effet assez

proche du problème traité par la théorie de la percolation [Martys *et al.*, 1991]. Les milieux poreux sont généralement dispersés, la taille de leurs pores et par conséquent la pression capillaire varie d'un pore à l'autre. Si une phase non-mouillante est injectée dans le milieu, à une pression d'injection donnée elle ne pourra pénétrer que les constrictions les plus larges du réseau, soit une fraction q correspondant à une pression P[3]. En jouant sur la pression d'injection, la fraction q peut approcher le seuil de percolation et les observations correspondantes confirmer les prédictions issues de la théorie de la percolation. Il existe plusieurs modèles qui permettent de déterminer l'évolution du front selon les hypothèses employées. Dans cette partie, certains de ces modèles, pertinents dans le cadre d'étude, sont présentés.

III.2.2.1 Invasion-Percolation

Les applications de la théorie de la percolation au suivi dynamique du front dans les milieux poreux débutent avec Wilkinson et Willemsen [1983] et l'invasion-percolation. L'application impose la modélisation du milieu poreux par un réseau de pores et de gorges (constrictions qui délimitent les pores) qui sont l'équivalent des sites et liaisons dans la grille utilisée pour illustrer la percolation. Contrairement aux premières applications de la théorie de la percolation [Larson *et al.*, 1981], ils considèrent un problème physique à débit constant plutôt qu'à pression constante, ce qui impose une évolution dynamique du front. La procédure utilisée se résume aux étapes suivantes :

— Assignation à toutes les liaisons d'un nombre aléatoire tiré uniformément entre 0 et 1 qui représente la pression capillaire.
— A chaque pas de temps, déplacement du ménisque dans la liaison de plus faible pression capillaire (en valeur absolue).
— Déplacement du front (ménisques) si la phase déplacée possède un chemin vers la sortie (règle de piégeage).

Malgré les nombreuses différences qui existent entre ce modèle et la théorie de la percolation (déplacement dynamique, position du front qui ne correspond pas à un critère précis), l'agglomérat formé au seuil de percolation possède une dimension fractale conforme à la théorie de la percolation et les relations usuelles tiennent sans la règle de piégeage. Avec cette règle additionnelle, la dimension fractale D est abaissée en $2D$ et pratiquement inchangée en $3D$. La variation de l'effet en fonction de la dimension du réseau provient de la difficulté qu'a une phase à en piéger une autre en $3D$ (puisque la surface nécessaire est proportionnelle au carré de la taille). De plus Wilkinson et Willemsen

3. Un raisonnement tout à fait similaire à celui présenté dans la partie, I.5

[1983] remarquent que la dimension impacte les résultats au travers du seuil de percolation q_c, qui dans les cas $2D$, est généralement supérieure à $1/2$. Ce qui implique que la co-percolation (percolation simultanée des deux phases) est impossible, alors qu'il est généralement inférieur en $3D$. Certaines de ces prédictions ont notamment fait l'objet d'une vérification expérimentale par Lenormand et Zarcone [1985].

III.2.2.2 Modèle en présence d'un gradient de pression

Lorsque, dans un écoulement diphasique, le nombre capillaire et/ou le nombre de Bond est non nul, il existe un gradient de pression dans le milieu. En présence de ce gradient, l'application de la règle du choix de déplacement de l'invasion-percolation n'est plus acceptable. Pour simplifier la description suivante nous nous plaçons dans la situation où le nombre capillaire est négligeable. Dans cet état statique, l'équilibre hydrostatique est valable en tout point. On peut donc écrire, en utilisant l'équilibre dans les deux phases, que :

$$P_0 = P(q) + \Delta\rho g \Delta z \tag{III.25}$$

Avec $P(q)$, la pression en fonction de la fraction accessible q, $\Delta\rho$ la différence de masse volumique, Δz la différence de hauteur entre deux points d'une même phase au niveau du front et P_0 une constante qui dépend du choix de l'origine. La description proposée ci-dessus ne rentre dans le cadre de la théorie de la percolation que si la variation du taux de remplissage est négligeable à l'échelle de la longueur de corrélation [4] :

$$|\frac{dq}{dz}|\xi < \Delta q \tag{III.26}$$

Cependant à mesure que $\Delta q \to 0$, la longueur de corrélation ξ diverge. L'idée de Wilkinson [1984] est de supposer qu'il existe donc un seuil à partir duquel ce critère n'est plus rempli. Ce qui permet d'écrire, en utilisant les résultats de la théorie de la percolation :

$$\xi \propto \left(\frac{\sigma}{B_o}\right)^{\nu/(1+\nu)} \tag{III.27}$$

Avec σ, la dispersion relative des tailles de pores du milieu. La longueur de corrélation ξ est croissante lorsque B_o diminue. A proximité du seuil de percolation (distance inférieure à ξ), le front possède une dimension fractale $D = \nu$ (Attention il s'agit de la dimension

4. Sinon les propriétés critiques varient spatialement trop rapidement par rapport à la longueur sur laquelle elles sont définies.

fractale du pourtour et pas du corps) en 2D et $D = d - \beta/\nu$ en dimension supérieure. En l'absence d'hypothèses supplémentaires, le modèle ne permet pas de prédire l'épaisseur du front.

Modélisation avec co-percolation Supposons que le seuil de percolation soit q_c. Le seuil de percolation de l'autre phase est donc de $1-q_c$. Si les deux phases ont la capacité de co-percoler, cela implique qu'il existe un niveau de probabilité pour lequel $1 - q_c > q$ et $q_c < q$ ce qui implique, $q_c < 1/2$. Puisque les deux phases peuvent percoler chacune de leur côté, il existe un domaine où les deux phases percolent et ont un comportement non critique. On peut écrire que l'épaisseur du front est déterminée par la distance entre les seuils de percolation de chacune des phases :

$$w \approx \frac{P(q_c) - P(1-q_c)}{\Delta\rho g} \tag{III.28}$$

Avec, w l'épaisseur du front. Soit, sous une forme plus simple :

$$w \propto \frac{\sigma}{B_o} \tag{III.29}$$

Cette prédiction n'est valable que dans le cas de la co-percolation.

Modélisation sans co-percolation Supposons maintenant que les deux phases ne peuvent co-percoler, $q_c > 1/2$. Les deux phases ne peuvent plus atteindre leur seuil de percolation simultanément. La coexistence n'existe donc plus en dehors de la zone proche du seuil de percolation. On déduit la relation :

$$w \sim \xi \propto \left(\frac{\sigma}{B_o}\right)^{\nu/(1+\nu)} \tag{III.30}$$

Cette prédiction ne tient que si les deux phases ne co-percolent pas. Elle a été vérifiée en 2D expérimentalement par différents auteurs ([Birovljev *et al.*, 1991], [Frette *et al.*, 1992], [Méheust *et al.*, 2002]).

Prise en compte de la perte de charge Si le nombre de Bond est d'intensité négligeable mais où le nombre capillaire influence l'écoulement, la situation est similaire mais plus complexe. La conductivité (perméabilité) adopte également un comportement

critique à proximité du seuil de percolation avec un exposant χ. Wilkinson [1986] distingue deux domaines dans le cas de la co-percolation en supposant un profil de saturation tel que prédit par Buckley et Leverett [1942] : le domaine où la phase qui impose le gradient de pression (la plus visqueuse) a un comportement critique et le domaine où c'est l'autre phase qui adopte un comportement critique. Dans le premier cas, la variation de la perméabilité à proximité du seuil de percolation et le profil de saturation sont dépendants des lois critiques, d'où un comportement complexe qui donne une prédiction :

$$\xi \sim \left(\frac{\sigma}{C_a}\right)^{\nu/(1+\nu+\chi-\beta)} \tag{III.31}$$

Alors que de l'autre côté la saturation et la perméabilité varient plus lentement, ce qui permet de négliger leurs variations locales et mène à la prédiction :

$$\xi \sim \left(\frac{\sigma}{C_a}\right)^{\frac{\nu}{1+\nu}} \tag{III.32}$$

Ces résultats ont été prédits pour un nombre capillaire fixe (hypothèse nécessaire pour appliquer Buckley et Leverett [1942]). Cette hypothèse est importante car elle n'est justement non valable en imbibition spontanée. En supposant que le milieu admet la co-percolation, l'existence d'un domaine non critique intermédiaire mène à la prédiction d'une épaisseur de l'interface de la forme :

$$w \propto \frac{\sigma}{C_a} \tag{III.33}$$

À nouveau, sans co-precolation, il semble légitime de supposer que l'épaisseur de l'interface est de l'ordre de la longueur de corrélation. Mais le modèle de Wilkinson [1986] n'est pas non plus directement applicable dans le cas où la co-percolation n'existent pas puisque les deux phases ont un comportement critique simultanément mais suivant des exposants différents. On peut résoudre ce problème assez simplement en observant que les deux exposants prédits sont différents l'un de l'autre. Asymptotiquement, lorsque $C_a \to 0$, l'épaisseur du front devrait correspondre à la longueur de corrélation la plus grande, soit à la loi III.32 puisque $\chi > \beta$. Les situations de co-percolation et de non co-percolation sont représentées sur les figures III.5 et III.6. Sur ces figures, ξ_1 et ξ_2 correspondent aux prédictions III.31 et III.32 respectivement. Dans les deux cas, il existe trois domaines intermédiaires, cependant, lorsqu'il n'y a pas co-percolation le domaine critique représente l'ensemble de l'épaisseur de l'interface.

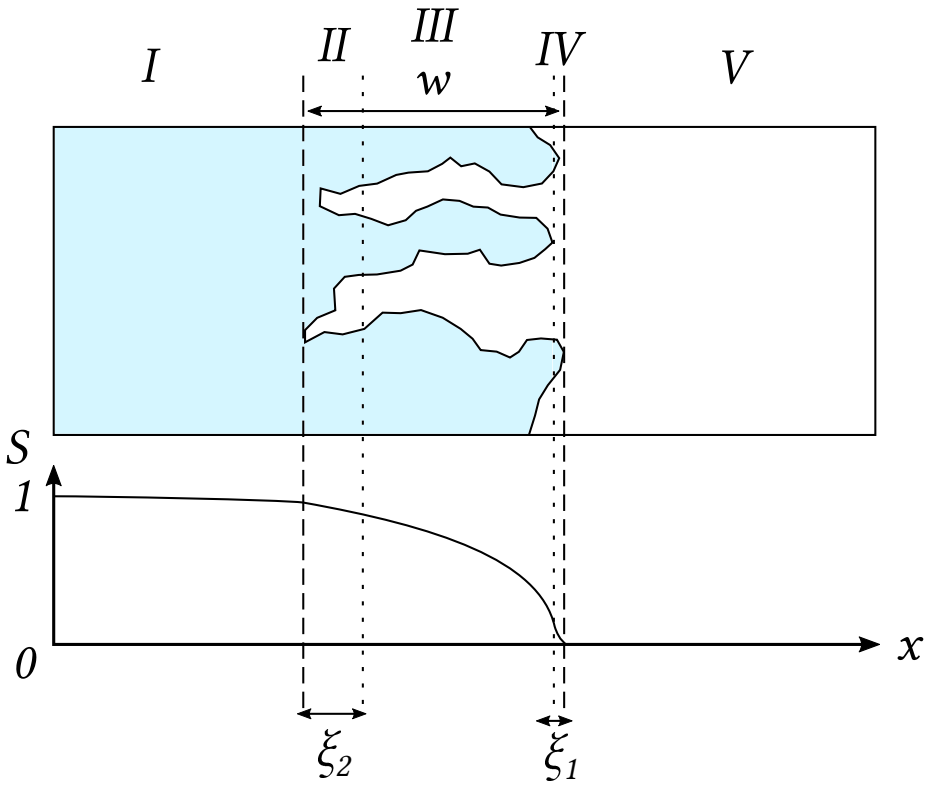

FIGURE III.5: Représentation d'un front diphasique (une phase en bleu l'autre en blanc) et les cinq domaines en fonction de la saturation lorsqu'il y a co-percolation. Le domaine *III* est le domaine diphasique non critique

III.2.2.3 Modèle basé sur l'observation microscopique

Toutes les prédictions de la littérature ne reposent pas sur la théorie de la percolation. Gruener *et al.* [2012] ont développé leur propre modèle en se basant sur l'arrêt de ménisque au niveau de jonctions asymétriques [Sadjadi *et al.*, 2015] (par ailleurs déjà observée par Chatzis et Dullien [1983]). Ils ont notamment remarqué que l'arrêt se produit tant que la pression est localement inférieure à la pression capillaire locale. Dans une imbibition spontanée, d'après l'équation de Washburn :

$$X(t) \propto t^{1/2} \tag{III.34}$$

Avec $X(t)$, la position du front à l'instant t, d'où,

$$C_a \propto t^{-1/2} \tag{III.35}$$

La distance entre deux points, ΔX, l'un au niveau du front (f) et l'autre en arrière de celui-ci (b) est liée à la différence de pression entre les points :

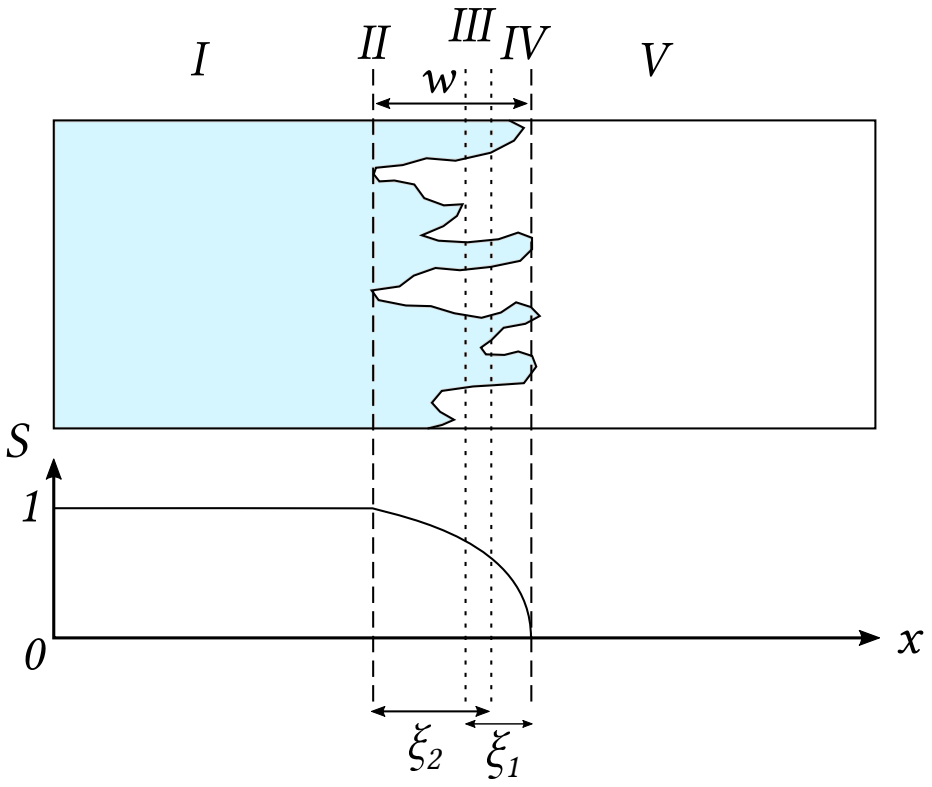

FIGURE III.6: Représentation d'un front diphasique (une phase en bleu l'autre en blanc) lorsqu'il n'y a pas co-percolation. Le domaine III est le domaine "doublement" critique

$$P_f - P_b = \Delta X(t) \frac{P_f}{X(t)} \tag{III.36}$$

En supposant un gradient de pression constant. D'où une évolution de la distance entre les points :

$$\Delta X \propto \frac{\sigma}{C_a} \tag{III.37}$$

Enfin, les auteurs supposent que cette distance est de l'ordre de l'épaisseur de l'interface :

$$w \propto \frac{\sigma}{C_a} \tag{III.38}$$

Cette prédiction ne tient pas compte de la variation de perméabilité à proximité du front ni des seuils de percolation de chacune des phases. Cette prédiction a été appuyée par une étude expérimentale et numérique. Les auteurs ont également essayé de mesurer la longueur de corrélation et n'en ont pas identifié, ils ont conclu qu'il n'en existait pas.

III.2.2.4 Modèle à deux échelles

On peut également citer le modèle de Bico [2000] qui produit une prédiction en imbibition spontanée. Dans ce modèle deux capillaires communiquant et de tailles différentes s'imbibent spontanément. Analytiquement il est possible de montrer que la distance entre les fronts des deux capillaires est proportionnelle à la racine du temps :

$$\Delta X(t) \propto \left(\frac{1-\sigma}{1+\sigma}\right) t^{1/2} \tag{III.39}$$

Et le nombre capillaire décroit en fonction du temps.

$$C_a \propto t^{-1/2} \tag{III.40}$$

Soit la prédiction :

$$w \propto \left(\frac{1-\sigma}{1+\sigma}\right) \frac{1}{C_a} \tag{III.41}$$

Le modèle est globalement proche du modèle de Sadjadi et Rieger [2013] mais différent dans la mesure où l'auteur s'intéressait à des cadres d'applications où les échelles des deux tailles de pores étaient assez différentes. Il a également pris en compte la variation de la perméabilité due à l'occupation des plus petits pores en imbibition. Là encore cette prédiction est avancée en l'absence d'une description précise de l'arrangement spatial des pores. Ce modèle a également été vérifié expérimentalement [Bico, 2000].

III.2.3 Questions ouvertes

Comme nous l'avons vu dans les sections précédentes, plusieurs modèles permettant de décrire l'évolution de l'épaisseur de l'interface en fonction du nombre capillaire existent. Les prédictions de ces modèles ne sont pas équivalentes, alors que les modèles sans la théorie de la percolation prédisent une largeur du front systématiquement proportionnelle à $\frac{1}{C_a}$. Dans le cadre de la théorie de la percolation, les prédictions de Wilkinson [1986] distinguent deux situations selon la valeur du seuil de percolation du milieu poreux. En particulier, les prédictions de Gruener *et al.* [2012] ont été vérifiées numériquement via un modèle 2D [Sadjadi et Rieger, 2013]. La loi d'évolution de la largeur du front et l'absence de longueurs de corrélation identifiables contredisent les prédictions du modèle de Wilkinson [1986]. Cela soulève plusieurs questions : Que se

passe-t-il lorsque l'imbibition spontanée se produit sans co-percolation ? Est-ce que l'imbibition spontanée, qui impose la variation du nombre capillaire en fonction du temps, peut être correctement décrite par le modèle de Wilkinson [1986] ? Comment évolue l'épaisseur du front en fonction du paramètre statistique σ ? Pour répondre à ces questions, un outil numérique a été développé. La description de l'outil et celle des résultats obtenus font l'objet des parties suivantes.

III.3 Modèle et simulation

III.3.1 Modélisation

Le système qui est modélisé est un réseau de capillaires soumis à une imbibition spontanée où la phase déplacée est assimilable à du vide (car compressible sans effort).

III.3.1.1 Choix du réseau de capillaires

La modélisation d'un milieu poreux par un réseau de capillaires n'est pas nouvelle et date des années 50 [Fatt, 1956]. Celle-ci s'appuie sur la géométrie des milieux poreux, i.e., l'existence de pores reliés par des constrictions. Dans le réseau, les capillaires représentent des constrictions et les nœuds les pores. Dans les milieux poreux, la perte de charge est déterminée par les constrictions. En revanche, la pression capillaire, qui détermine si une phase est susceptible de traverser un pore ou une constriction, est dépendante des rôles des phases. En imbibition, la phase qui provoque le déplacement est la phase mouillante. Sa progression est donc limitée par les zones de plus faible pression capillaire (en valeur absolue) soit les pores. En drainage, c'est la phase non-mouillante et sa progression est limitée par les zones de plus forte pression capillaire (en valeur absolue) soit les constrictions. Le choix d'un type de modélisation ou d'une autre dépend donc de la mouillabilité des phases (pour des mouillabilités intermédiaires, la situation est beaucoup moins claire [Morrow, 1976]). Le type de percolation dépend également de ce choix, en imbibition, la percolation de site est plus judicieuse puisqu'elle est contrôlée par les pores alors que c'est la percolation de type liaison en drainage car il est contrôlé par les constrictions. Les deux possèdent des seuils de percolations différents mais des exposants communs (à dimension fixée). Ici, la modélisation du milieu poreux sera réalisée par un réseau de capillaires qui contrôle l'imbibition, ce choix s'oppose à la description ci-dessus. Il représente un milieu où les capillaires sont plus larges que les pores. Ce choix s'appuie sur trois arguments :

— Les percolations de sites et de liaisons sont équivalentes

— La discrétisation est simple à réaliser
— Ce choix est équivalent à celui réalisé par Sadjadi et Rieger [2013]

L'imbibition modélisée est spontanée et se fait donc avec une pression d'injection nulle. La pression capillaire adimensionnée $\widetilde{P}_{c,i}$ est tirée aléatoirement pour chaque capillaire i selon une loi uniforme de largeur $\sigma_{\widetilde{P}_c}$ centrée sur 1 et les autres grandeurs sont supposées indépendantes du capillaire et invariantes selon la longueur de ceux-ci. La phase déplacée est supposée n'avoir aucune influence sur l'écoulement. La règle de piégeage n'a pas été employée, la phase déplacée est donc infiniment compressible sans résistance. Elle s'assimile donc à du vide.

III.3.1.2 Géométries 2D et 3D

Les capillaires du réseau peuvent être disposés dans de nombreuses configurations en faisant varier le nombre de capillaires liés en un nœud, ce nombre correspond à la quantité λ évoquée dans la partie I.2.1. Deux types de géométries ont été étudiés. La géométrie 2D consiste en un quadrillage régulier incliné de 45°. Dans cette configuration, représentée sur la figure III.7, $\lambda = 4$. La largeur du réseau est définie via un nombre entier de nœuds N_i et sa longueur via un nombre de nœuds N_j. Dans le cas $3D$ la disposition des nœuds suit la disposition cubique centrée (cristallographie) et chaque nœud est lié aux huit nœuds correspondant aux coins du cube dont le nœud considéré est le centre. Cette disposition est représentée sur la figure III.7. Dans ce cas de figure, le nombre de capillaires par site est de $\lambda = 8$. Comme dans la situation précédente les dimensions du réseau sont définies par le nombre de site dans chaque direction, N_i, N_j et N_k.

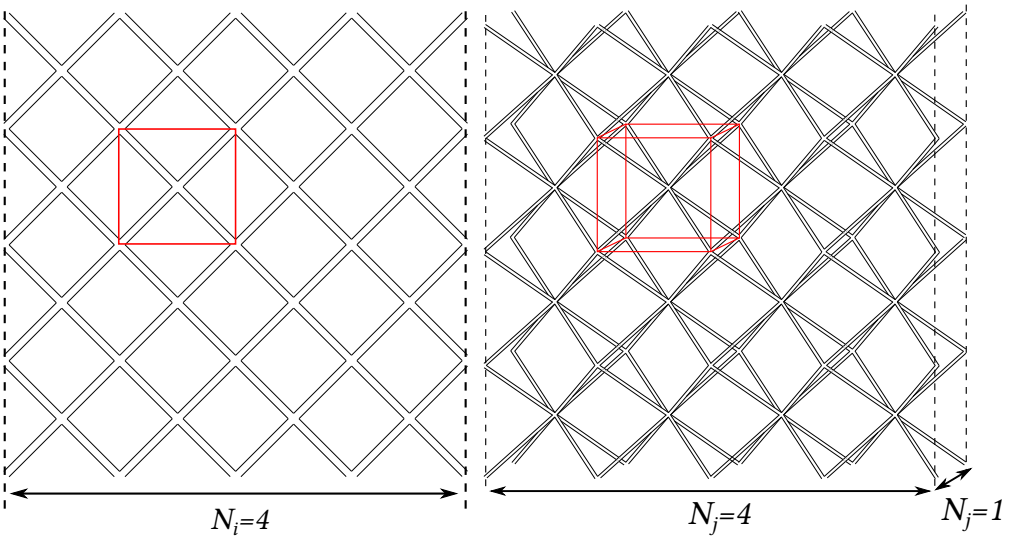

FIGURE III.7: Organisation des capillaires en 2D (gauche) et en 3D (droite) ainsi que la maille élémentaire (rouge)

III.3.1.3 Adimensionnalisation

Les pressions sont adimensionnalisées en utilisant la pression de Laplace :

$$\widetilde{P} = \frac{Pr}{\gamma} \tag{III.42}$$

Avec r, une taille typique de pore et γ la tension de surface de la phase mouillante. Les positions dans les capillaires, notés x, sont adimensionnalisées en utilisant la longueur des capillaires L (indépendante du capillaire considéré) :

$$\widetilde{x} = \frac{x}{L} \tag{III.43}$$

Enfin, le temps caractéristiques t_r est fixée de manière à ce que l'imbibition d'un capillaire de longueur L grâce à une différence de pression γ/r soit d'une unité :

$$t_r = \frac{\mu r L^2}{\gamma K} \tag{III.44}$$

On remarquera également que la vitesse est liée au débit par un coefficient indépendant du capillaire considéré (puisque la section est la même pour tous les capillaires.). Le débit adimensionné s'écrit :

$$Q = \frac{AL}{t_r}\widetilde{Q} = Av = A\frac{L}{t_r}\widetilde{v} \tag{III.45}$$

D'où,

$$\widetilde{Q} = \widetilde{v} \tag{III.46}$$

Le débit adimensionné est équivalent à la vitesse adimensionnée. On peut exprimer localement le nombre capillaire :

$$\frac{v\mu r^2}{\gamma K} = \frac{\widetilde{v} L \mu r^2}{t_r \gamma K} = \widetilde{v}\frac{r}{L} \tag{III.47}$$

Le nombre capillaire dépend donc uniquement du rapport d'aspect des pores et de la vitesse dans le capillaire considéré. Cette définition n'est valable qu'à l'échelle locale (et pas à l'échelle du réseau).

III.3.1.4 Équations réduites

Dans un capillaire saturé par la phase mouillante, le débit est supposé constant sur la longueur du capillaire par conservation du volume (voir partie I.7), l'invariance des sections impose alors que la vitesse soit constante et la constance des perméabilités la constance du gradient de pression :

$$\frac{\partial \widetilde{P}}{\partial \widetilde{x}} = cst \tag{III.48}$$

Avec, $\widetilde{x}$ la position adimensionnée dans le capillaire. Cette équation peut être intégrée sur la longueur adimentionnée du capillaire :

$$\frac{\partial \widetilde{P}}{\partial \widetilde{x}} = \Delta \widetilde{P} \tag{III.49}$$

Cette perte de charge correspond à la dissipation visqueuse, soit l'équation :

$$\Delta \widetilde{P} = -\widetilde{Q} \tag{III.50}$$

Le débit adimensionné est donc égal à la différence de pression adimensionnée qui agit aux bornes du capillaire.

Dans un capillaire partiellement rempli, l'intégration ne peut être réalisée qu'entre son extrémité remplie et le ménisque où la pression est égale à la pression capillaire. L'intégration donne donc le résultat :

$$\frac{\widetilde{P}_{c,i} - \widetilde{P}}{\widetilde{L}_i} = -\widetilde{Q}_i \tag{III.51}$$

Avec $\widetilde{L}_i$, la position adimensionnée du ménisque dans le capillaire i, $\widetilde{Q}_i$ le débit et $\widetilde{P}_{c,i}$ la pression capillaire. Cette équation est non-linéaire et pose plusieurs problèmes (voir partie I.7.2). Par mesure de simplicité il sera supposé par la suite que les dimensions du système sont grandes devant $\widetilde{L}_i$. Cette hypothèse permet de linéariser l'équation III.51 en approximant : $\widetilde{L}_i = 1$ et d'éviter les problèmes qui se produisent lorsque $\widetilde{L}_i \ll 1$.

Aux nœuds, l'équation de conservation du volume doit être respectée. Le bilan est représenté sur la figure III.8. La somme des débits entrants doit égaler la somme des débits sortants.

$$\sum_i \widetilde{Q}_i = 0 \tag{III.52}$$

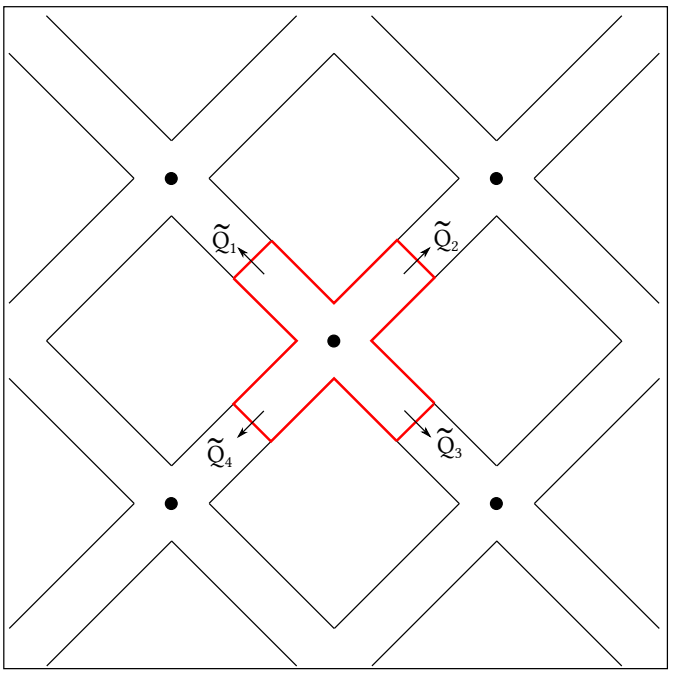

FIGURE III.8: Volume de contrôle (en rouge) lors du calcul de la conservation du volume représenté pour la configuration 2D

III.3.2 Simulation numérique

III.3.2.1 Résolution et intégration temporelle

La résolution des équations passe par la résolution d'un système matriciel. Les degrés de liberté en débit sont préalablement supprimés à l'aide de l'équation III.52. L'intégration temporelle est implicite, la résolution en champ de pression permet donc de calculer le débit dans chaque capillaire. En notant S_i la saturation du liquide mouillant dans le capillaire i, on peut donc mettre à jour la position des ménisques et donc la saturation dans les capillaires insaturés. Dans un capillaire, trois scénarios sont envisageables :

— La saturation change (ou pas) et reste intermédiaire ($0 \leq S_i < 1$)
— Le capillaire devient complètement saturé ($S_i \geq 1$)
— La saturation d'un capillaire devient négative ($S_i < 0$)

Dans la première situation, la saturation est augmentée d'une quantité $\Delta\widetilde{t}\widetilde{Q}$, avec $\Delta\widetilde{t}$ le pas de temps. Dans le deuxième cas, le capillaire est considéré comme complètement saturé, il est supposé plein $S_i = 1$. Dans le dernier, la signification physique est que les capillaires voisins ont "emprunté" du liquide au capillaire i. Cette interprétation ne

s'accorde pas avec la réalité physique où l'emprunt n'existe pas. Son existence pose donc problème et cette situation doit être évitée. La solution qui a été trouvée est itérative. On résout le champ de pression et on calcule les saturations S_i. Avant de mettre à jour les positions, on recherche les capillaires qui auraient à l'itération suivante une saturation négative. S'il y en a, ils seront exclus de la résolution suivante. S'il n'y en a pas, la résolution est achevée. Cet algorithme converge nécessairement, puisqu'à chaque itération soit le nombre de capillaire à prendre en compte diminue soit aucun capillaire n'est dans la situation problématique. Cependant, il peut être couteux en temps de calcul. En pratique, une solution intermédiaire a été adoptée, la boucle est stoppée si elle excède quatre itérations. Il a été vérifié que la saturation ne descend jamais sous -0.02. Cette situation possède un sens physique tant qu'elle est modérée, un ménisque à une jonction peut se déformer et "pénétrer" dans un capillaire voisin (voir figure II.1). L'algorithme employé est représenté sur la figure III.9.

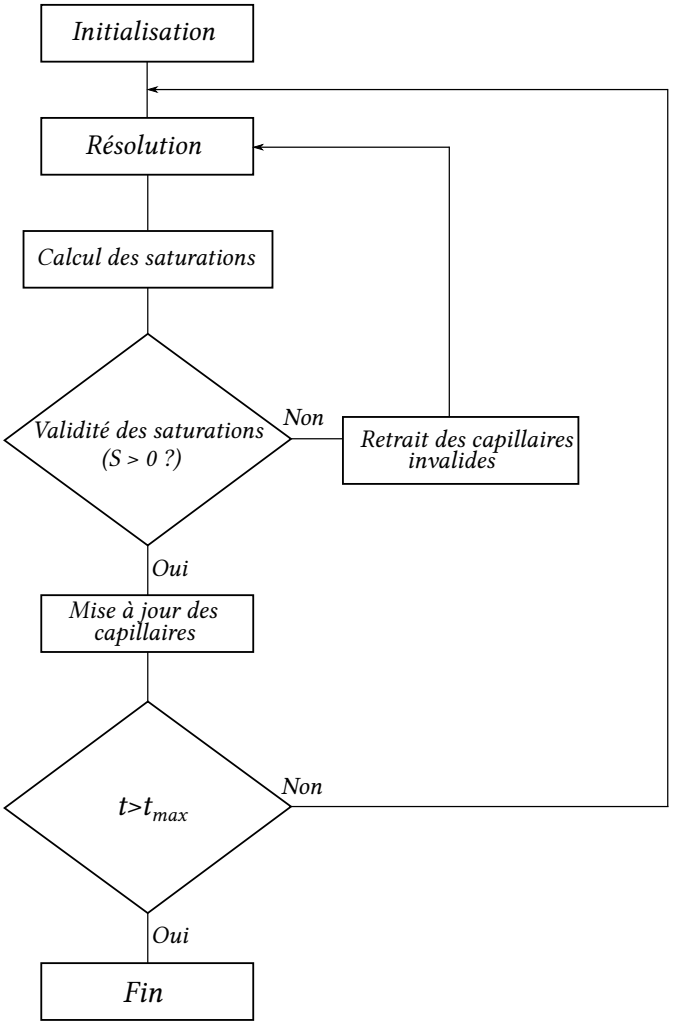

FIGURE III.9: Représentation schématique de l'algorithme de résolution

III.3.2.2 Conditions limites

Trois types de conditions limites sont appliqués au système. La face inférieure est supposée au contact d'une source de liquide à la pression $\widetilde{P} = 0$. Cette condition limite est imposée par pénalisation de la matrice lors de la résolution du système. Sur les faces latérales (au nombre de 2 en $2D$ et au nombre de 4 en $3D$), une condition aux limites périodique est appliquée. Cette condition permet notamment d'éviter les effets de bords. Enfin, au niveau du front entre les phases, la pression capillaire est appliquée via le second membre du système matriciel (voir équation III.51).

III.3.2.3 Condition initiale

Initialement, à $\widetilde{t} = 0$, les capillaires et nœuds sont insaturés au-delà d'une distance $\widetilde{L}_0$ de la source et saturés avant cette distance. La distance employée en pratique est de 4. Le front est régulier et sa largeur est donc strictement nulle à l'instant initial.

III.3.2.4 Choix du pas de temps

Lors de la simulation, la différence de pression typique est de l'ordre de la pression capillaire $\Delta\widetilde{P} \sim 1$. Le débit associé est également de l'ordre de l'unité, $\widetilde{Q} \sim 1$, soit un temps caractéristique de remplissage d'un capillaire de taille $\widetilde{L} = 1$ également de l'ordre de 1. Le pas de temps a été fixé à 0.3. De cette façon le remplissage d'un capillaire se fait en 3 pas de temps. En pratique, cette situation est très improbable, l'estimation est donc fortement exagérée. Ce choix contraste avec l'utilisation par différents auteurs d'un pas de temps de l'ordre de 1 ou adaptatif [Løvoll *et al.*, 2005].

III.4 Résultats

III.4.1 Quantités extraites et méthodes d'extractions

Pour analyser les résultats obtenus par la simulation numérique, on extrait des quantités à des instants linéairement distribués. Les quantités extraites et les méthodes employées sont décrites ci-dessous.

III.4.1.1 Définitions du front

Le front est défini via un ensemble de points non reliés. On peut le définir de deux manières différentes :

— Le front large : l'ensemble des positions de ménisque
— Le front fin : l'ensemble des ménisques qui communiquent avec l'entrée et la sortie du système par un chemin continu d'une seule phase

Ces deux définitions sont représentées sur la figure III.10. Les propriétés du front sont calculées par la suite avec les deux définitions.

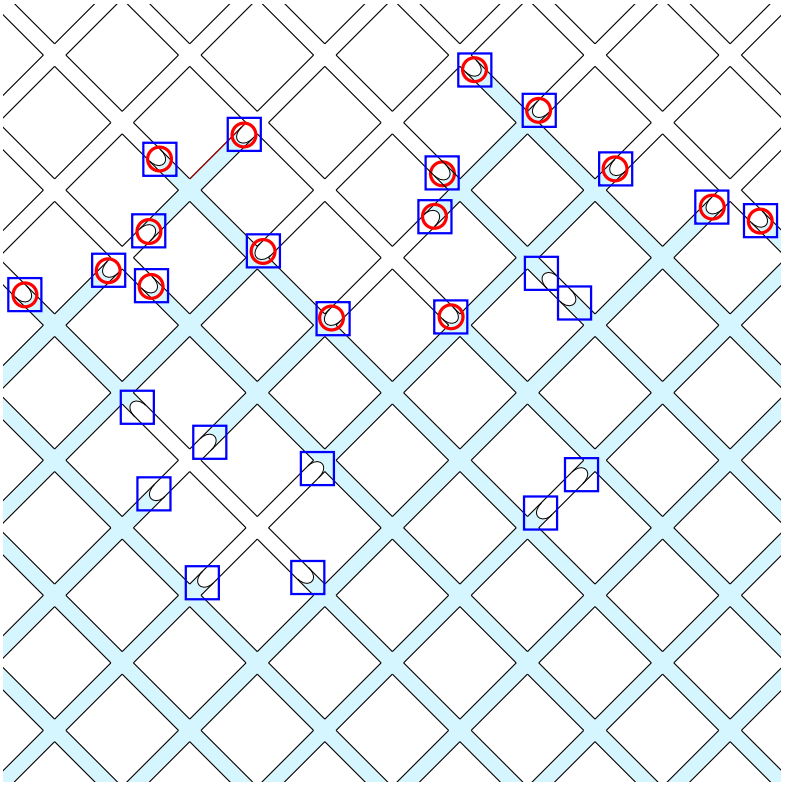

FIGURE III.10: Représentation schématique des deux définitions du front. La fine avec des cercles rouges et la large en carrés bleus

III.4.1.2 Position de l'interface et nombre capillaire

La position du front est définie comme la moyenne des positions des points du front à un instant $\widetilde{t}$ selon l'axe d'imbibition $\vec{e_x}$.

$$m_{\widetilde{x}} = \frac{1}{N_m} \sum_{i}^{N_m} \widetilde{x}_i \tag{III.53}$$

Avec N_m, le nombre de points de l'interface et $m_{\widetilde{x}}$ la moyenne. On définit notamment le nombre capillaire comme la dérivée temporelle de $m_{\widetilde{x}}$ en fonction du temps adimensionné :

$$C_a = \frac{dm_{\widetilde{x}}}{\widetilde{dt}} \tag{III.54}$$

Cette définition du nombre capillaire sera employée jusqu'à la fin du chapitre.

III.4.1.3 Épaisseur du front

Elle est définie comme l'écart-type des positions des points du nuage qui représente le front à un instant $\widetilde{t}$.

$$\widetilde{w} = \sqrt{\frac{1}{N_m}\sum_{i}^{N_m}(\widetilde{x_i} - m_{\widetilde{x}})^2} \tag{III.55}$$

Avec, $\widetilde{w}$ l'épaisseur du front adimensionnée par L.

III.4.1.4 Dimension Fractale

La dimension fractale est mesurée par deux méthodes différentes pour accroitre la robustesse de la mesure : la méthode des boites et la méthode de la fonction de corrélation. La première est appliquée à tous les instants (car elle est peu coûteuse en temps de calcul) et la seconde est appliquée pour quelques instants seulement. Les deux méthodes sont décrites ci-dessous.

Méthode des boîtes La méthode des boîtes (*box counting*) est représentée sur la figure III.11. Elle consiste à mesurer la somme des longueurs des cases d'une grille régulière occupées par au moins un point de l'interface L_T. En notant la cote des cases de la grille l, la longueur de l'interface évolue selon la loi :

$$L_T(l) \sim l^{1-D} \tag{III.56}$$

En 2D et :

$$L_T(l) \sim l^{2-D} \tag{III.57}$$

En 3D.

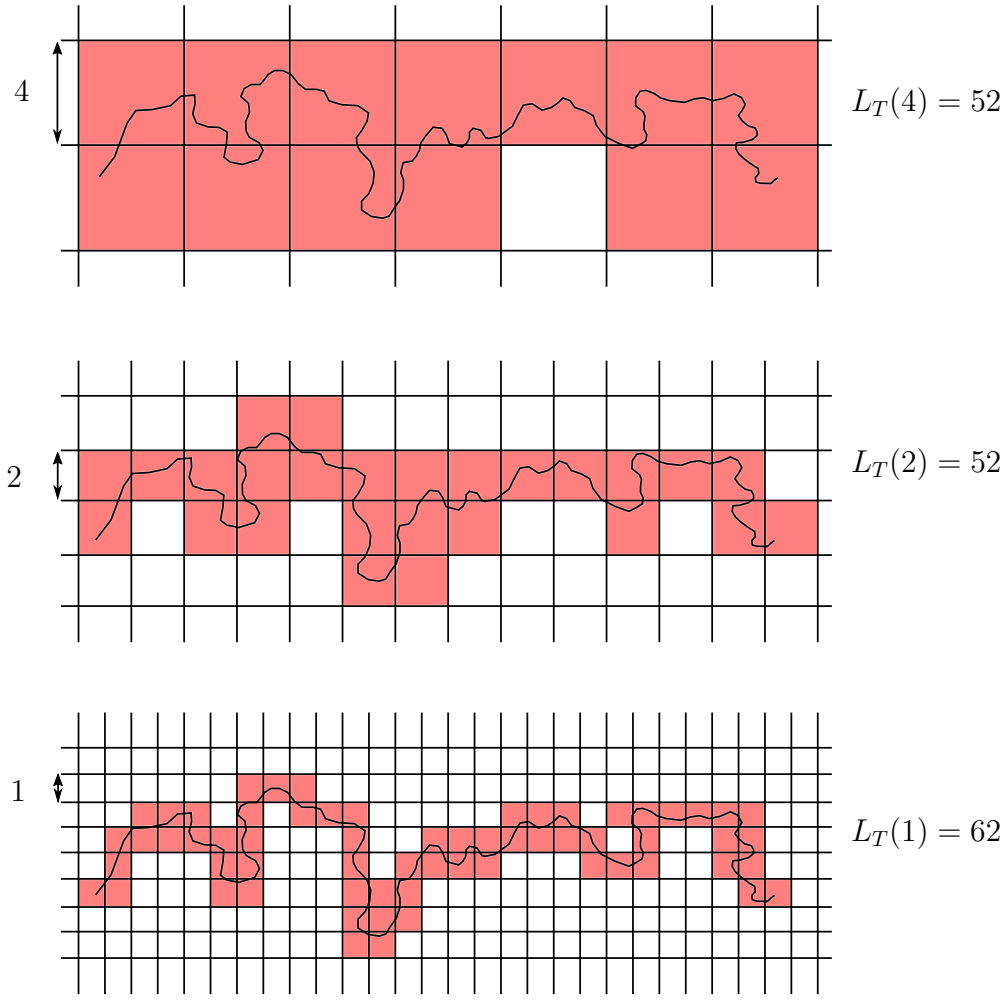

FIGURE III.11: Représentation schématique de la méthode des boîtes

Un résultat typique est présenté sur la figure III.12. On constate sur la figure qu'il existe deux régimes. Un premier où la longueur du front décroit avec l et un second où elle stagne. Ce résultat correspond à la description de Wilkinson [1984] qui prédit l'existence d'une longueur de corrélation en-dessous de laquelle la structure du front est fractale et au-dessus de laquelle le front est non-fractal. Deux grandeurs sont extraites de ces courbes. La dimension fractale est calculée à partir de la pente de la zone décroissante via un ajustement linéaire (courbe en pointillé rouge sur la figure III.12) et la longueur de corrélation ξ est calculée comme la première position où le résultat correspond à l'asymptote (courbe en pointillés bleus sur la figure III.12). La longueur de corrélation est adimensionnée par L, $\widetilde{\xi} = \xi/L$.

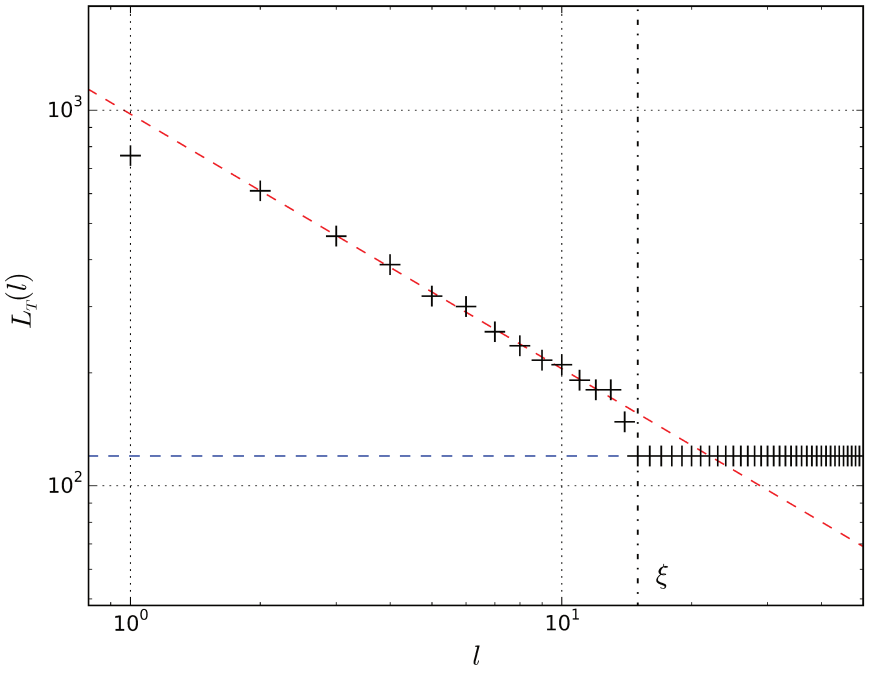

FIGURE III.12: Longueur totale L_T en fonction de la taille l. La loi puissance est en (– –) et le plateau en (– –). La longueur de corrélation ξ apparait également sur le graphique

Méthode de la fonction de corrélation La méthode de la fonction de corrélation consiste à compter le nombre de points du front qui se situent à une distance inférieure à l. Ce nombre évolue selon la loi :

$$N(l) = l^D \tag{III.58}$$

Avec $N(l)$, le nombre de points. Pour clarifier les zones, les résultats sont représentés sous la forme $N(l)/l$ qui permet d'observer un plateau si la structure est non fractale. Un résultat typique est représenté sur la figure III.13. Là encore, on distingue deux régimes distincts au-dessus et en-dessous de la longueur de corrélation. On peut cependant remarquer que N décroit après avoir atteint un maximum. Cet effet a été interprété comme un effet de bords (à mesure que l augmente de plus en plus de points sont influencés par les bords). La dimension fractale et la longueur de corrélation sont mesurées de la même manière que pour la méthode des boîtes.

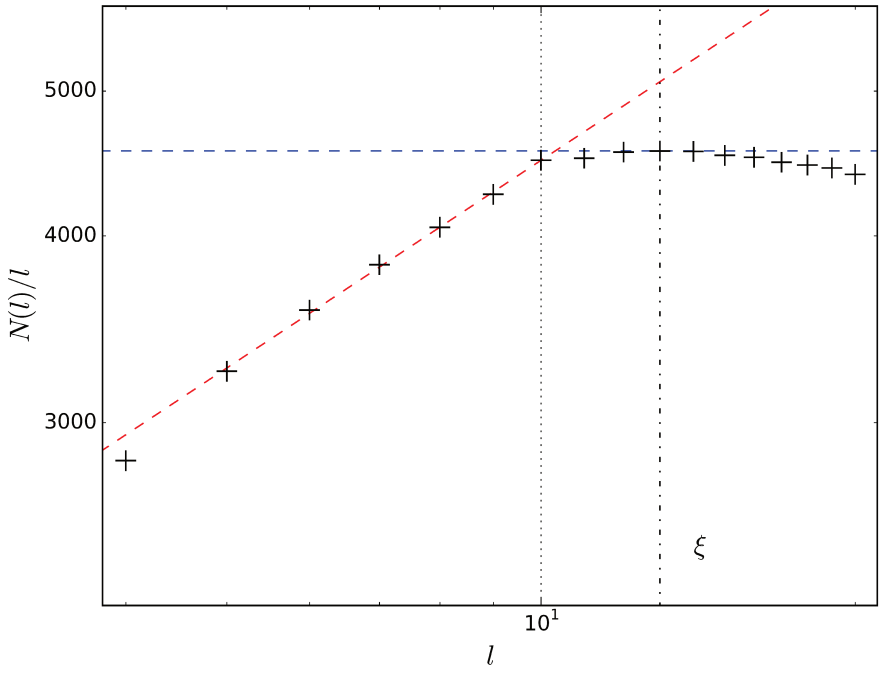

FIGURE III.13: Nombre de points N en fonction de la taille l. La loi puissance est en (– –) et le maximum en (– –). La longueur de corrélation ξ est également représentée

III.4.1.5 Largeur du front en pression

La pression est calculée pour tous les nœuds imbibés du réseau et est moyennée selon la (ou les) direction(s) perpendiculaire(s) à l'axe de l'écoulement. Cette grandeur est notée $< \widetilde{P} >_{\widetilde{y}}$. Un exemple de résultat obtenu est représenté sur la figure III.14. Deux domaines sont visibles, un premier où le gradient de pression est linéaire et un second où il évolue de manière plus complexe. Les premiers points du domaine linéaire sont utilisés pour ajuster une droite, et l'éloignement à la droite est calculé pour tous les points. La distance à laquelle la transition se produit est calculée par mesure de l'éloignement à la variation linéaire supérieure à 0.01. La longueur de la zone où le gradient n'est plus constant est noté $\widetilde{w}_p$.

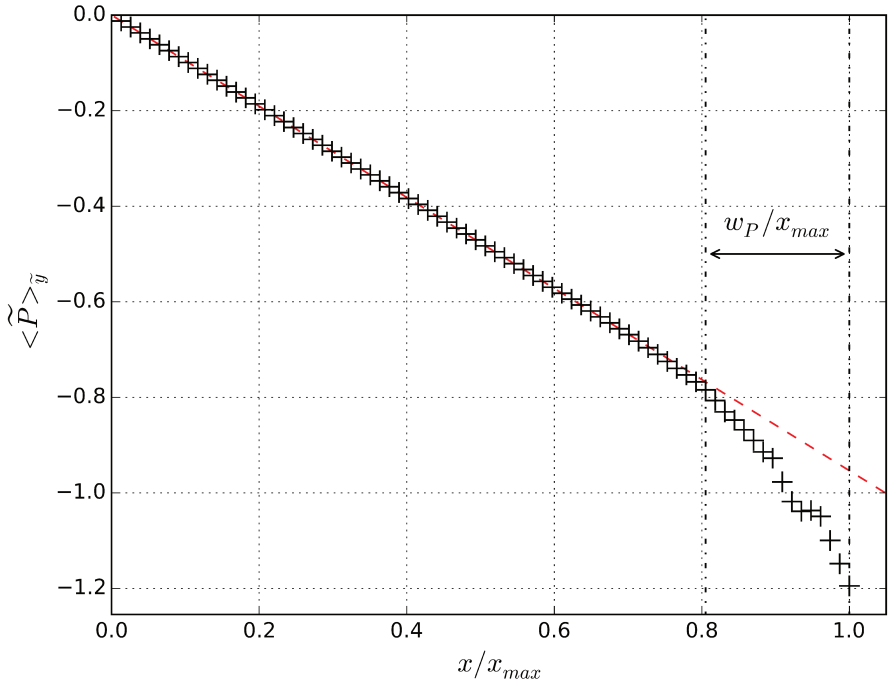

FIGURE III.14: Pression moyenne $< \widetilde{P} >_{\widetilde{y}}$ en fonction de la position x normalisée. La partie linéaire est en (– –), la longueur w_p normalisée est représentée sur l'image

III.4.2 Durée et nombre de simulations

La durée adimensionnée de chaque simulation est de $\widetilde{t}_{max} = 3000$ (10^4 pas de temps). Pour chaque jeu de paramètres, M expériences numériques sont réalisées dans le but de moyenner les résultats obtenus. Deux types d'études ont été réalisées. L'étude de l'impact des dimensions du réseau et celle de la loi de distribution des pressions capillaires sur les mesures.

III.4.3 Description des résultats

Les grandeurs précédemment décrites peuvent être extraites à chaque instant et ce sont leurs évolutions en fonction du temps et leur interdépendances qui nous intéresseront par la suite. De manière générale, l'évolution du nombre capillaire C_a, de la longueur de corrélation $\widetilde{\xi}$ et de l'épaisseur du front $\widetilde{w}$ suivent des lois d'évolution du type :

$$a = f_{(a,b)} b^{e_{(a,b)}} \tag{III.59}$$

Où a et b sont deux grandeurs liées par l'exposant $e_{(a,b)}$ et le pré-facteur $f_{(a,b)}$. Les exposants et pré-facteurs sont mesurés par ajustement puis systématiquement moyennés sur l'ensemble des simulations réalisées avec le même jeu de paramètre (au nombre de M). Les barres d'erreur représentées sur les figures correspondent aux variations de la mesure sur les M réalisations.

III.4.3.1 Cas 2D

Les simulations réalisées sont résumées dans le tableau III.1. Le nombre N_i représente le nombre de nœuds utilisés en largeur par simulation, M le nombre de simulation réalisées et $\sigma_{\widetilde{P_c}}$ la largeur de la distribution statistique utilisée pour le tirage des pressions capillaires adimensionnées.

Numéro	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N_i	4	6	8	10	15	20	30	40	50	70	100	200
M	20	20	20	20	20	10	10	10	10	10	5	3
$\sigma_{\widetilde{P_c}}$	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35

TABLE III.1: Tableau des paramètres de l'étude 2D à largeur variable

Nombre capillaire Le nombre capillaire est mesuré comme la dérivée de la position adimensionnée $m_{\widetilde{X}}$ de l'interface par rapport au temps $\widetilde{t}$. Les valeurs de l'exposant $e_{(Ca,\widetilde{t})}$ sont représentées sur la figure III.15 en fonction de N_i. Les résultats avec les deux définitions du front sont en très bon accord avec la prédiction de Washburn [1921] et confirment la validité des simulations. Ils sont relativement indépendants du paramètre N_i.

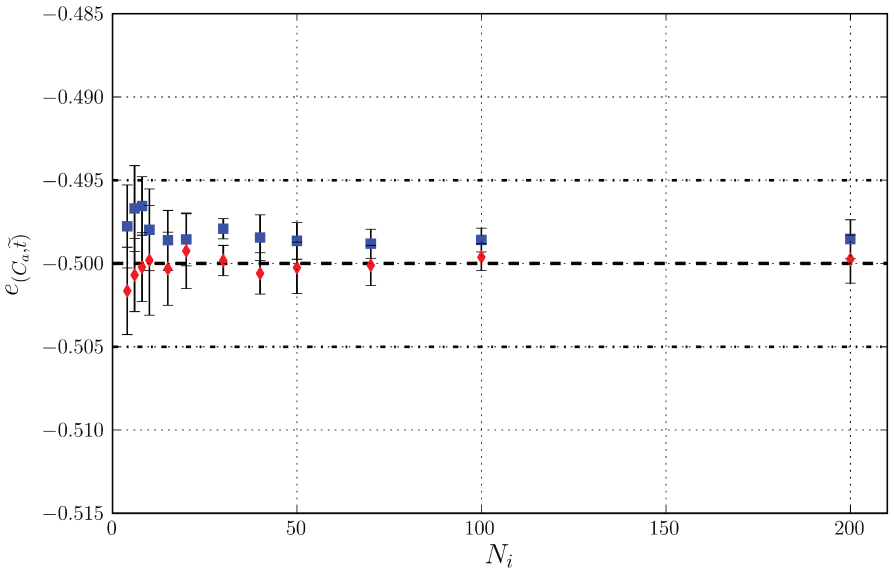

FIGURE III.15: Exposant $e_{(C_a,\widetilde{t})}$ en fonction du nombre de nœuds en largeur N_i. Le front fin est représenté par les (●) et le large avec les (■), le repère (− −) est la prédiction théorique de Washburn [1921] (-0.5)

Épaisseur de l'interface L'exposant $e_{(\widetilde{w},1/C_a)}$ ainsi que le pré-facteur $f_{(\widetilde{w},1/C_a)}$ sont représentés sur la figure III.16.

D'après la figure, les points correspondants à la définition large sont indépendants de la largeur du système et leurs valeurs tournent autour de 0.85. Une valeur plus proche de 1 que de $\nu/(1+\nu) \approx 0.57$ bien que la correspondance ne soit pas très bonne. Les résultats pour la définition fine, sont assez proches, de la prédiction de Wilkinson [1984] lorsque les valeurs de N_i ne sont pas trop faibles.

Le pré-facteur $f_{(\widetilde{w},1/C_a)}$ est représenté en fonction de N_i sur la figure III.16. D'après les résultats, l'épaisseur du front large est indépendante de N_i. A l'inverse l'épaisseur du front fin est croissant pour de faibles valeurs de N_i puis semble atteindre une asymptote. Ce comportement correspond au modèle de Wilkinson [1984] ; l'épaisseur du front est de l'ordre de la longueur de corrélation, lorsque celle-ci atteint la largeur du système N_i la longueur de corrélation ne peut plus croitre et l'épaisseur du front sature.

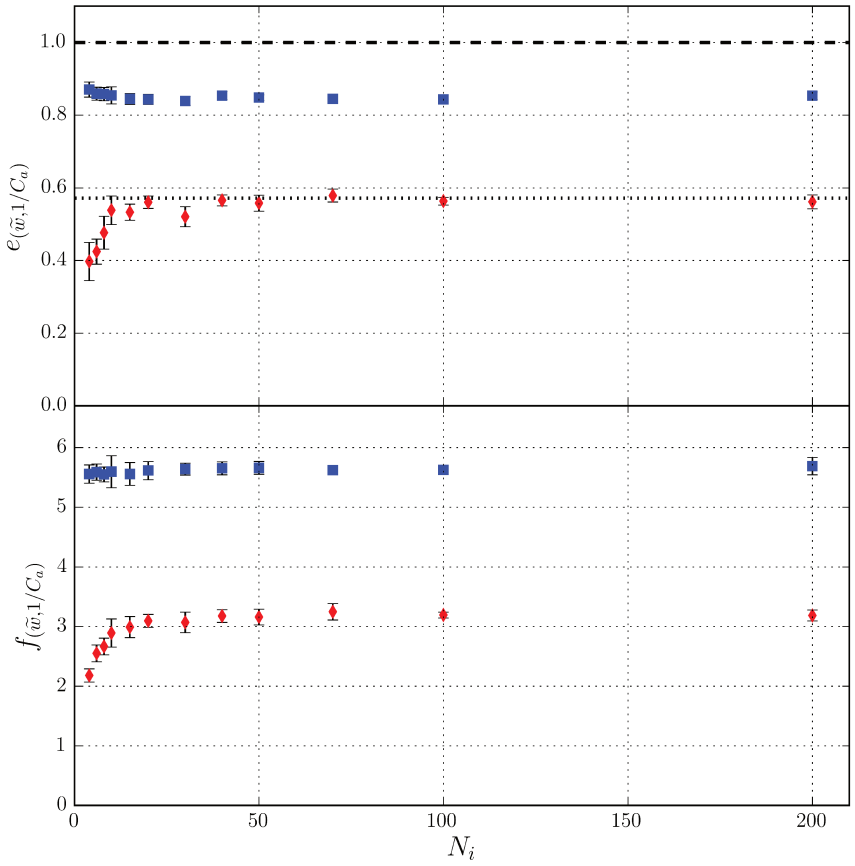

FIGURE III.16: Exposant $e_{(\widetilde{w},1/C_a)}$ et $f_{(\widetilde{w},1/C_a)}$ en fonction du nombre de nœuds en largeur N_i. Le front fin est représenté par les (●) et le large avec les (■). Les prédictions théoriques de Sadjadi et Rieger [2013] (− −) et Wilkinson [1986] (· · ·) sont sur la figure

Longueur de corrélation L'exposant $e_{(\widetilde{\xi},1/C_a)}$ de la loi d'évolution de la longueur de corrélation $\widetilde{\xi}$ et son pré-facteur $f_{(\widetilde{\xi},1/C_a)}$ mesurés par la méthode des boîtes en fonction de N_i est représentée sur la figure III.17. Il apparait clairement que les valeurs mesurées sont très variables, ce qui est probablement due à la nature indirecte de la mesure. On peut cependant remarquer que l'exposant de la longueur de corrélation du front large est de l'ordre de 0.85, soit une valeur proche de celle de l'exposant $e_{(\widetilde{w},1/C_a)}$ pour la même définition du front. Pour le front fin, on remarque que ses valeurs sont croissantes pour N_i faible puis saturent qualitativement autour de 0.5. Un résultat également proche de ce qui avait été observé avec l'exposant $e_{(\widetilde{w},1/C_a)}$.

Les résultats obtenus avec les pré-facteurs $f_{(\widetilde{\xi},1/C_a)}$ sont moins dispersés. Ils montrent que pour de faibles valeurs de N_i et pour les deux définitions du front, les pré-facteurs de la loi d'évolution diminuent. La variation est beaucoup plus marquée pour la définition fine.

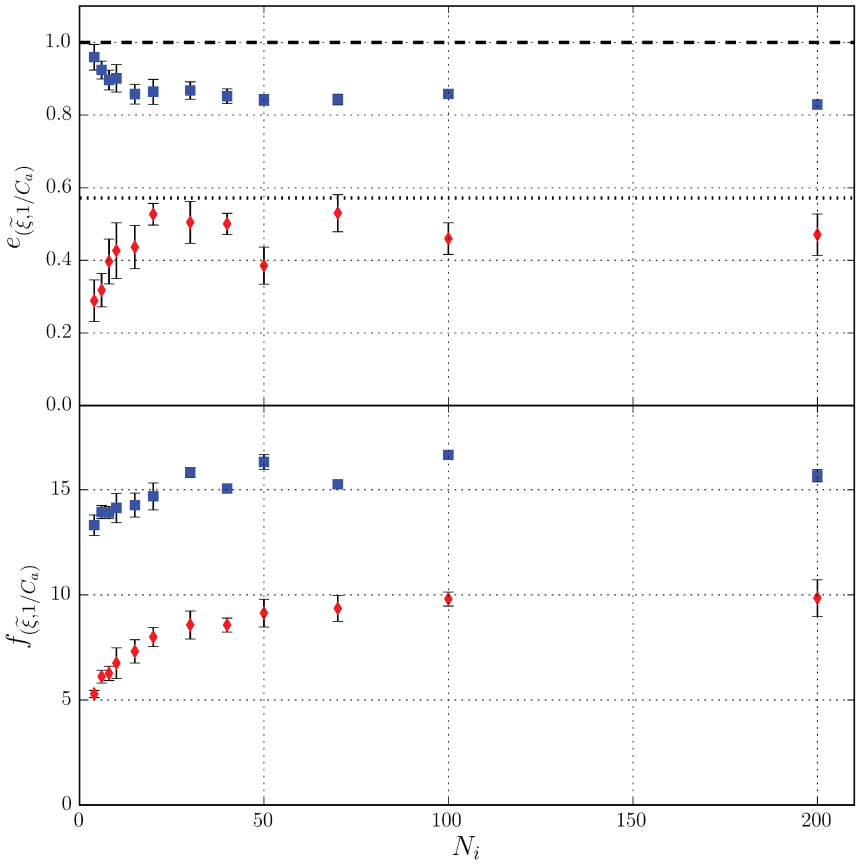

FIGURE III.17: Exposant $e_{(\widetilde{\xi},1/Ca)}$ et pré-facteur $f_{(\widetilde{\xi},1/Ca)}$ en fonction du nombre de nœuds en largeur N_i en 2D. Le front fin est représenté par les (●) et le large avec les (■). Les prédictions théoriques de Sadjadi et Rieger [2013] (− −) et Wilkinson [1986] (· · ·) sont sur la figure

Dimension fractale La dimension fractale du front a été mesurée par deux méthodes, la méthode des boîtes et la méthode de la fonction de corrélation. Les résultats obtenus avec chacune des méthodes sont représentés sur la figure III.18.

La dimension fractale mesurée avec la méthode des boites est de 1.67 pour le front large et proche de 1.44 pour le front fin. Ces valeurs sont relativement indépendantes de N_i. Avec la méthode de la fonction de corrélation, les résultats sont proches de 1.55 pour l'interface large et de 1.34 pour l'interface fine. Aucune des valeurs mesurée pour la définition large ne correspond à une dimension fractale remarquable pertinente (la valeur de 1.67 correspond aux prédictions de la DLA [Witten et Sander, 1981] mais aucun argument physique ne la défend [5]). En revanche, pour le front fin, la valeur de 1.34 est très proche de la prédiction théorique $D = 4/3$ en 2D.

5. De plus, c'est une dimension de densité du corps et pas du périmètre.

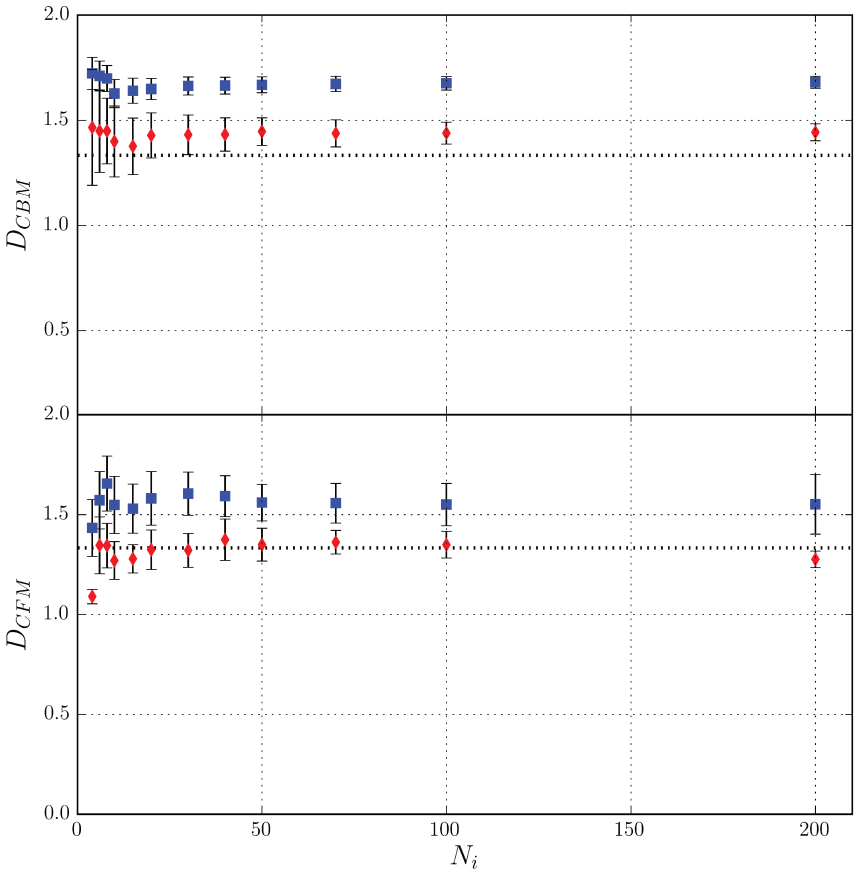

FIGURE III.18: Dimension fractale de l'interface mesurée avec la méthode des boites D_{CBM} et la mesure de la fonction de corrélation D_{CFM} en fonction de N_i en 2D. Le front fin est représenté par les (●) et le large avec les (■). La prédiction de Wilkinson [1986] est représentée en $(\cdots)$

Épaisseur de pression L'exposant $e_{(\widetilde{w}_p,1/C_a)}$ de l'évolution de la distance sur laquelle le gradient de pression n'est plus strictement linéaire $\widetilde{w}_p$ est représenté en fonction de N_i sur la figure III.19. Cet exposant est de l'ordre de 0.90. Soit une valeur plus proche de 1 que de $\nu/(1+\nu) \approx 0.57$. Ce résultat indique que l'épaisseur du front définie par le champ de pression est plus proche de la définition large du front que de la définition fine.

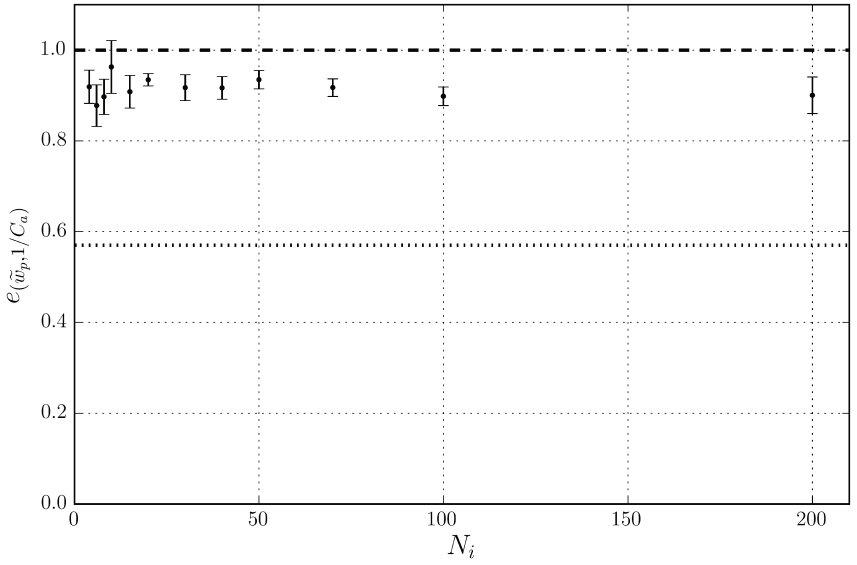

FIGURE III.19: Exposant $e(\widetilde{w}_p, 1/C_a)$ de la loi entre la longueur sur laquelle le gradient de pression est non constant en fonction de $1/C_a$ représenté en fonction de N_i. Les prédictions théoriques de Sadjadi et Rieger [2013] $(- -)$ et Wilkinson [1986] $(\cdots)$ sont sur la figure

Bilan Il apparait donc que la définition du front impacte directement les résultats. Le front fin possède une dimension fractale proche de la prédiction théorique de Wilkinson [1986], un exposant d'évolution également proche, avec un comportement saturant en dessous d'une certaine longueur et une longueur de corrélation possédant un exposant proche de celui de la prédiction théorique (bien que mesuré qualitativement). Ces éléments semblent indiquer que la prédiction de Wilkinson [1986] s'applique à cette définition du front.

La définition large permet de trouver un résultat conforme aux résultats numériques de Sadjadi et Rieger [2013]. Cependant, ils restent assez éloignés de la prédiction théorique et de la mesure expérimentale de l'exposant $e(\widetilde{w}, 1/C_a)$: 1. Les mêmes remarques s'appliquent également au modèle de Bico [2000]. Il apparait également que l'épaisseur du front $\widetilde{w}$ n'est pas dépendante de la longueur de corrélation $\widetilde{\xi}$, même lorsque le système possède une largeur N_i inférieure à $\widetilde{\xi}$. Ce résultat, associé à la mesure de la dimension fractale qui est intermédiaire entre la prédiction de Wilkinson [1986] et la dimension du système, implique que la grandeur mesurée n'est pas la longueur de corrélation dans le cas de la définition large du front. Elle correspond plutôt à une définition alternative de l'épaisseur du front.

III.4.3.2 Influence du paramètre statistique en 2D

L'influence des paramètres de la distribution statistique a également été étudiée. Le plan d'expérience employé est résumé dans le tableau III.2. La largeur de la distribution statistique a donc été variée linéairement de 0.2 à 0.5 par pas de 0.05.

Numéro	1	2	3	4	5	6	7
N_i	60	60	60	60	60	60	60
M	10	10	10	10	10	10	10
$\sigma_{\widetilde{P_c}}$	0.2	0.25	0.3	0.35	0.40	0.45	0.5

TABLE III.2: Tableau des paramètres de l'étude des paramètres statistiques en 2D

Nombre capillaire L'exposant d'évolution du nombre capillaire possède les mêmes propriétés que dans les cas 2D traités précédemment pour toutes les valeurs de $\sigma_{\widetilde{P_c}}$ il est très proche de la prédiction de Washburn [1921] (-0.5). Les résultats sont représentés sur la figure III.20. On peut également remarquer que l'exposant augmente légèrement lorsque la valeur de $\sigma_{\widetilde{P_c}}$ augmente pour la définition large du front. L'effet reste cependant assez limité puisqu'une variation de l'ordre de 2% est observée pour un paramètre variant de plus de 50%.

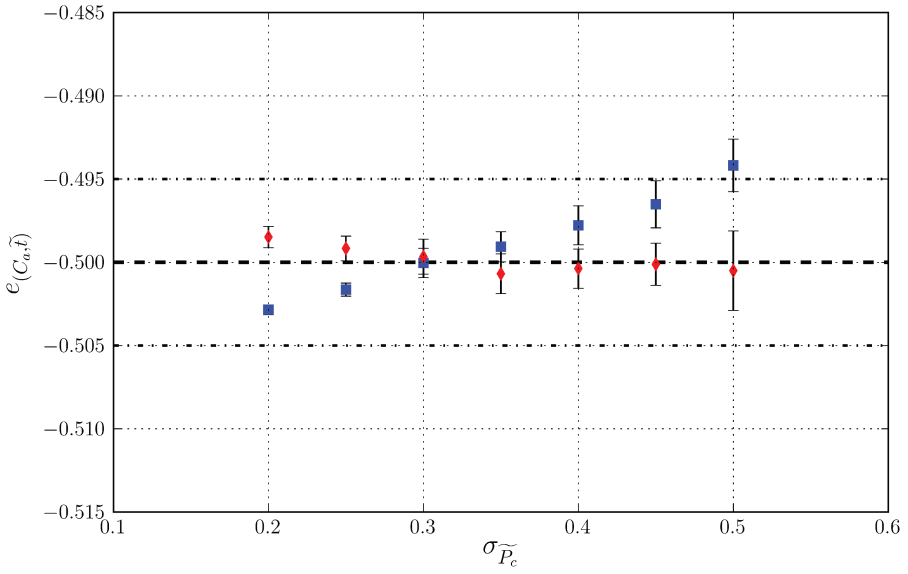

FIGURE III.20: Exposant $e_{(C_a,\tilde{t})}$ représenté en fonction de $\sigma_{\widetilde{P_c}}$ en 2D. Le front fin est représenté par les (●) et le large avec les (■). La prédiction de Washburn [1921] est en (− −) sur la figure

Épaisseur du front L'exposant de la loi d'évolution du front en fonction de $\sigma_{\widetilde{P_c}}$ et le pré-facteur correspondant sont présentés sur la figure III.21. Il semble que les exposants des fronts soient peu impactés par ce paramètre statistique. En revanche, il apparait que les pré-facteurs suivent des lois puissances de ce paramètre. En réalisant un ajustement linéaire sur chacune des lois on trouve un exposant 0.53 et 0.86 pour les définitions fines et larges respectivement. Ces résultats sont proches des exposants $e_{(\widetilde{w},1/C_a)}$ correspondants, ce qui confirme la validité des modèles de Wilkinson [1986] et Sadjadi et Rieger [2013] et invalide au contraire le modèle de Bico [2000].

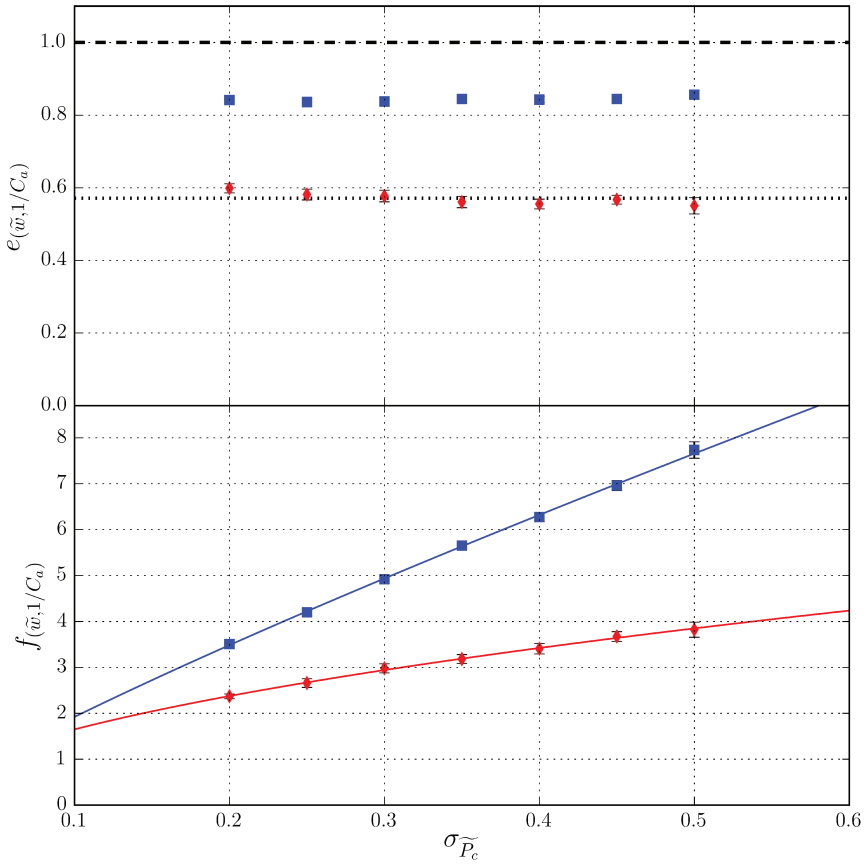

FIGURE III.21: Exposant $e_{(\widetilde{w},1/C_a)}$ et pré-facteur $f_{(\widetilde{w},1/C_a)}$ en fonction de $\sigma_{\widetilde{P_c}}$ en 2D. Le front fin est représenté par les (●) et le large avec les (■). Les prédictions théoriques de Sadjadi et Rieger [2013] (− −) et Wilkinson [1986] (· · ·) sont sur la figure

Longueur de corrélation L'exposant $e_{(\widetilde{\xi},1/C_a)}$ et le pré-facteur $f_{(\widetilde{\xi},1/C_a)}$ sont représentés sur la figure III.22. Les exposants sont proche des valeurs 0.85 (large) et 0.57 (fine) identifiés précédemment bien que les valeurs ne soient connues avec précision.

Les pré-facteurs ont les mêmes propriétés que les facteurs de l'épaisseur du front. L'ajustement, en supposant une loi puissance, donne des exposants 0.90 et 0.50 dans ce cas, soit des valeurs proches de celles observées pour l'épaisseur du front.

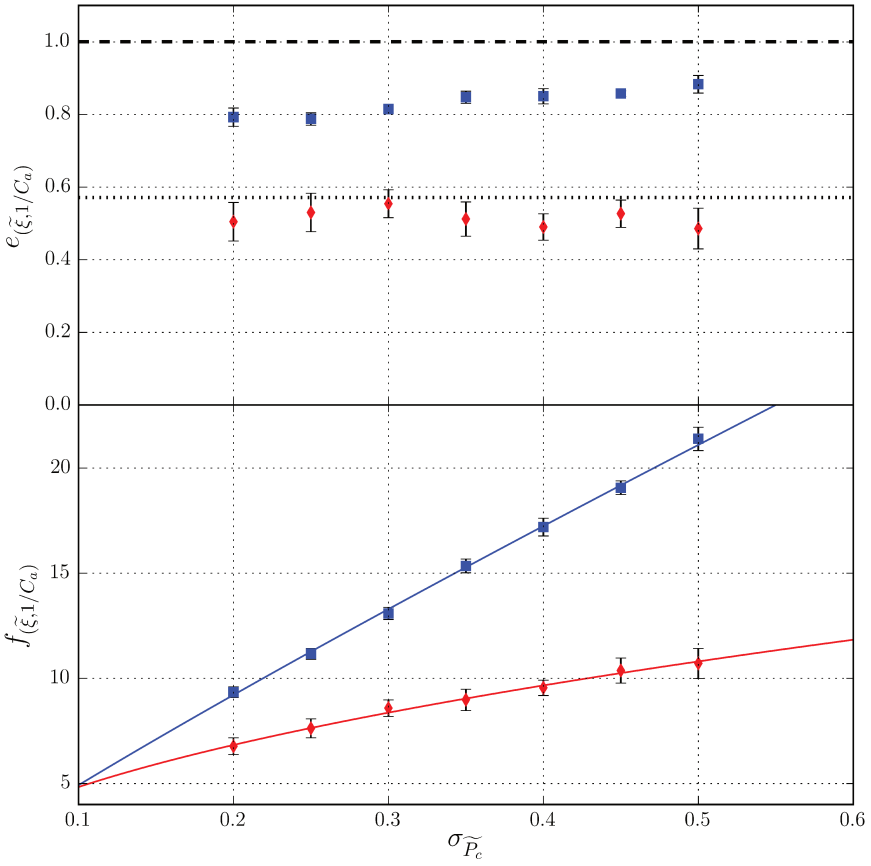

FIGURE III.22: Exposant et pré-facteur de la loi entre la longueur de corrélation et le nombre capillaire C_a représenté en fonction de $\sigma_{\widetilde{P_c}}$ en 2D. Le front fin est représenté par les (●) et le large avec les (■). Les prédictions théoriques de Sadjadi et Rieger [2013] $(- -)$ et Wilkinson [1986] $(\cdots)$ sont sur la figure

Dimension Fractale Les dimensions fractales mesurées avec la méthode des boîtes et la méthode de la fonction de corrélation sont représentées sur la figure III.23. On peut remarquer que la dimension fractale D mesurée par la méthode des boîtes est indépendante du paramètre statistique. Cependant, la mesure effectuée par la méthode de la fonction de corrélation montre une légère déviation avec le paramètre $\sigma_{\widetilde{P_c}}$. Ce constat est valide indépendamment de la définition du front. Malgré cette variation, les valeurs pour la définition fine sont proches de la prédiction de Wilkinson [1986] et intermédiaire pour la définition large.

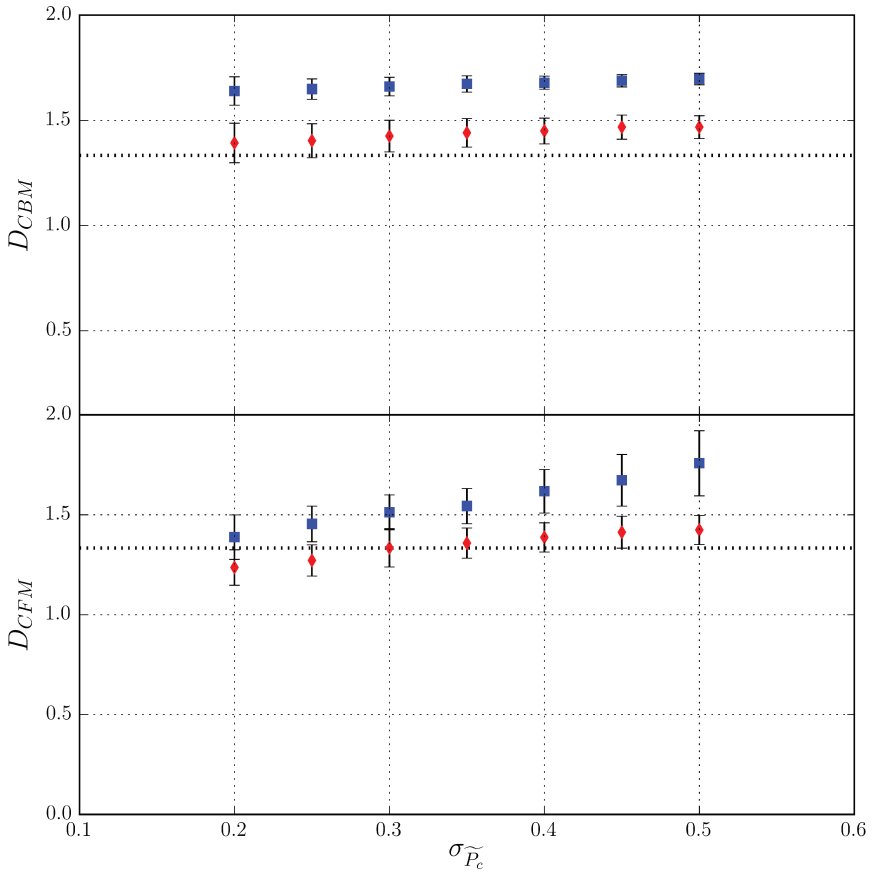

FIGURE III.23: Dimension fractale mesurée par la méthode des boîtes D_{CBM} et la méthode de la fonction de corrélation D_{CFM} représentées en fonction de $\sigma_{\widetilde{P_c}}$ en 2D. Le front fin est représenté par les (●) et le large avec les (■). sur la figure la prédiction de Wilkinson [1986] est représenté en $(\cdots)$

Bilan L'étude de l'influence de la dispersion des pressions capillaires révèle que les exposants des lois qui lient les paramètres physiques restent inchangés. *A contrario*, les pré-facteurs subissent des variations selon des lois quasi-linéaire ou puissance selon que la définition du front soit large ou fine. Les observations réalisées confirment la validité des modèles de Wilkinson [1986] et Sadjadi et Rieger [2013] ils montrent cependant que le modèle de Bico [2000] n'est pas confirmé par la simulation. L'une des mesures de la dimension fractale (fonction de corrélation) se révèle sensible à $\sigma_{\widetilde{P_c}}$. Ce constat est surprenant puisqu'elle devrait être indépendante de ce paramètre.

III.4.3.3 Cas 3D

Plusieurs cas 3D ont également été étudiés. Les paramètres N_i et N_j désignent désormais les largeurs (en nombre de nœuds) dans les deux directions perpendiculaires à l'écoulement. Les cas étudiés sont résumés dans le tableau III.3 et le tableau III.4.

Numéro	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
N_i	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
N_j	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
M	10	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
$\sigma_{\widetilde{P_c}}$	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35

TABLE III.3: Tableau des paramètres de l'étude 3D à largeur variable, partie I

Numéro	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
N_i	5	5	5	5	5	5	5	5	5	7	10	12	14
N_j	5	7	9	11	13	15	17	19	21	7	10	12	14
M	10	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
$\sigma_{\widetilde{P_c}}$	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35

TABLE III.4: Tableau des paramètres de l'étude 3D à largeur variable, partie II

Les mêmes grandeurs que dans les cas 2D ont été étudiées et la durée des simulations est de $\widetilde{t}_{max} = 3000$.

Nombre capillaire L'exposant, $e_{(C_a,\widetilde{t})}$ du nombre capillaire C_a en fonction de $\widetilde{t}$ est représenté sur la figure III.24 en fonction de N_i. Sur la courbe, il apparait clairement qu'il est indépendant de N_i et de Nj. Il semble légèrement supérieur pour la définition large du front (à peu près 1%). Là encore, ce résultat est en accord avec l'équation de Washburn [1921].

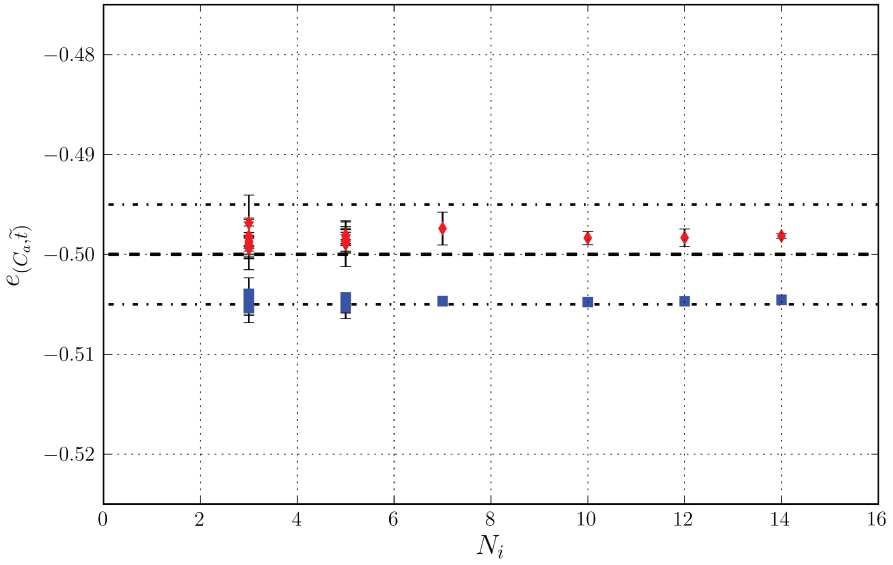

FIGURE III.24: Exposant, $e(C_a, \widetilde{t})$ représenté en fonction de N_i pour les deux définitions du front en 3D. Le front fin est représenté par les (●) et le large avec les (■). la prédiction de Washburn [1921] est représentée en (− −)

Épaisseur du front L'exposant $e_{(\widetilde{w},1/C_a)}$ et le pré-facteur $f_{(\widetilde{w},1/C_a)}$ de la loi d'évolution de l'épaisseur du front en fonction du nombre capillaire sont représentés sur la figure III.25. Les résultats sont faiblement dépendant de la définition du front contrairement aux cas 2D et montrent une absence de saturation même pour de très faibles valeurs de N_i. Les exposants sont intermédiaires, clairement supérieurs à 0.57 (prédiction 2D) et encore plus par rapport à 0.46 (prédiction 3D) mais strictement inférieurs à 1. Ils sont cependant plus proches de cette dernière valeur que des autres.

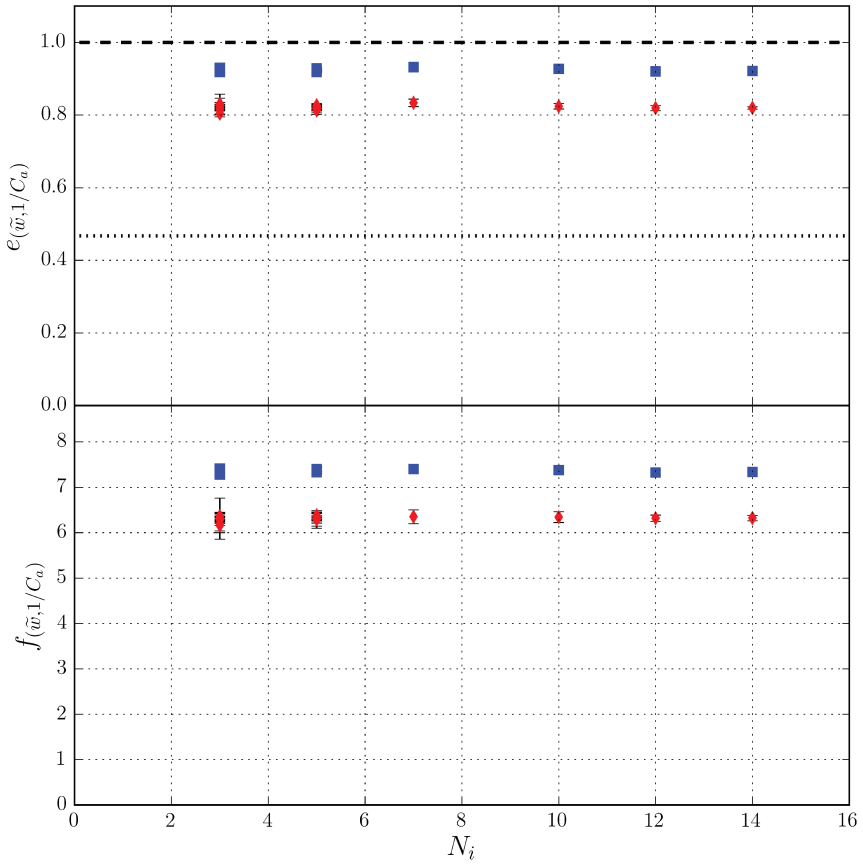

FIGURE III.25: Exposant $e_{(\widetilde{w},1/Ca)}$, et pré-facteur $f_{(\widetilde{w},1/Ca)}$, représentés en fonction de N_i pour les deux définitions du front en 3D. Le front fin est représenté par les (●) et le large avec les (■). Les prédictions théoriques de Sadjadi et Rieger [2013] (− −) et Wilkinson [1986] sans co-percolation (· · ·) sont sur la figure

Longueur de corrélation La longueur de corrélation est déduite par la mesure de la dimension fractale. L'exposant $e_{(\widetilde{\xi},1/Ca)}$ et le pré-facteur $f_{(\widetilde{\xi},1/Ca)}$ de sa variation en fonction du nombre capillaire sont présentés sur la figure III.26. Les résultats montrent un exposant comparable à celui de la loi d'évolution de l'épaisseur du front. Ni les exposants ni les pré-facteurs ne dépendent de N_i ou N_j. A nouveau ce résultat contraste avec ceux obtenus en 2D.

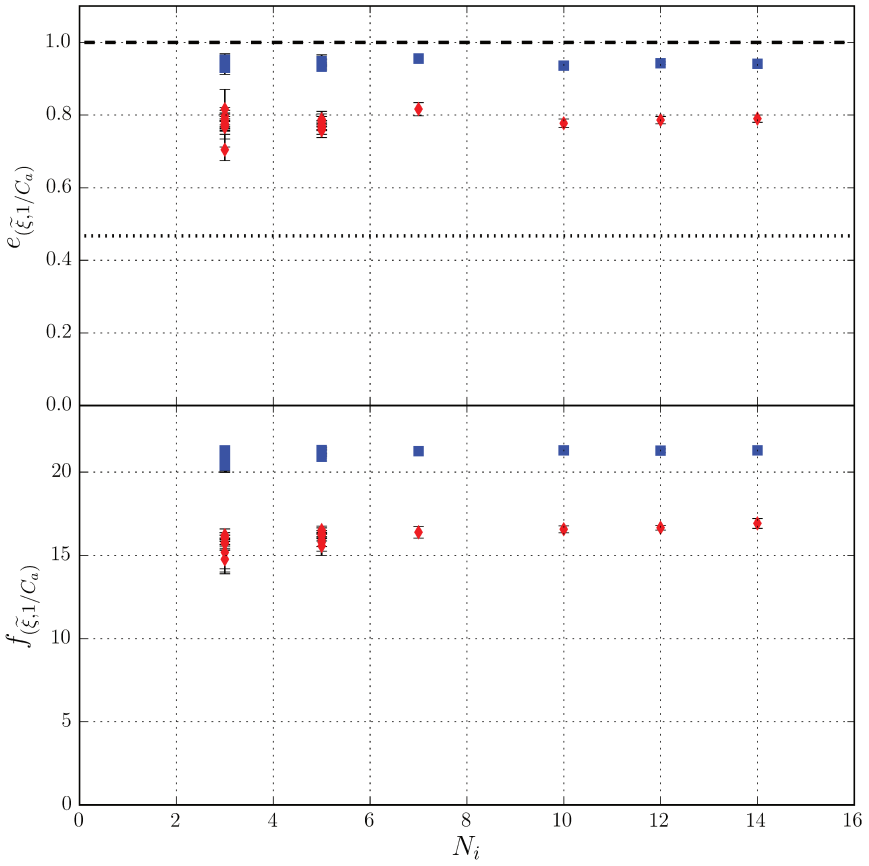

FIGURE III.26: Exposant $e_{(\widetilde{\xi},1/C_a)}$ et pré-facteur $f_{(\widetilde{\xi},1/C_a)}$, représentés en fonction de N_i pour les deux définitions du front en 3D. Le front fin est représenté par les (●) et le large avec les (■). Les prédictions théoriques de Sadjadi et Rieger [2013] (− −) et Wilkinson [1986] sans co-percolation (· · ·) sont sur la figure

Dimension fractale La dimension fractale du front mesurée selon les deux méthodes est représentée sur la figure III.27. Les résultats montrent une dimension fractale de l'ordre de 2.75 et 2.67 selon la définition du front et avec la méthode des boîtes. Cette valeur ne correspond pas à la prédiction théorique d'un agglomérat en 3D, $D \approx 2.5$. Elle est intermédiaire entre la valeur théorique 2.5 et la dimension (en dessous de la longueur de corrélation) 3. Ce résultat est confirmé par la mesure avec la fonction de corrélation pour des systèmes suffisamment grands, les systèmes de petites tailles étant beaucoup plus sensibles aux effets de bord.

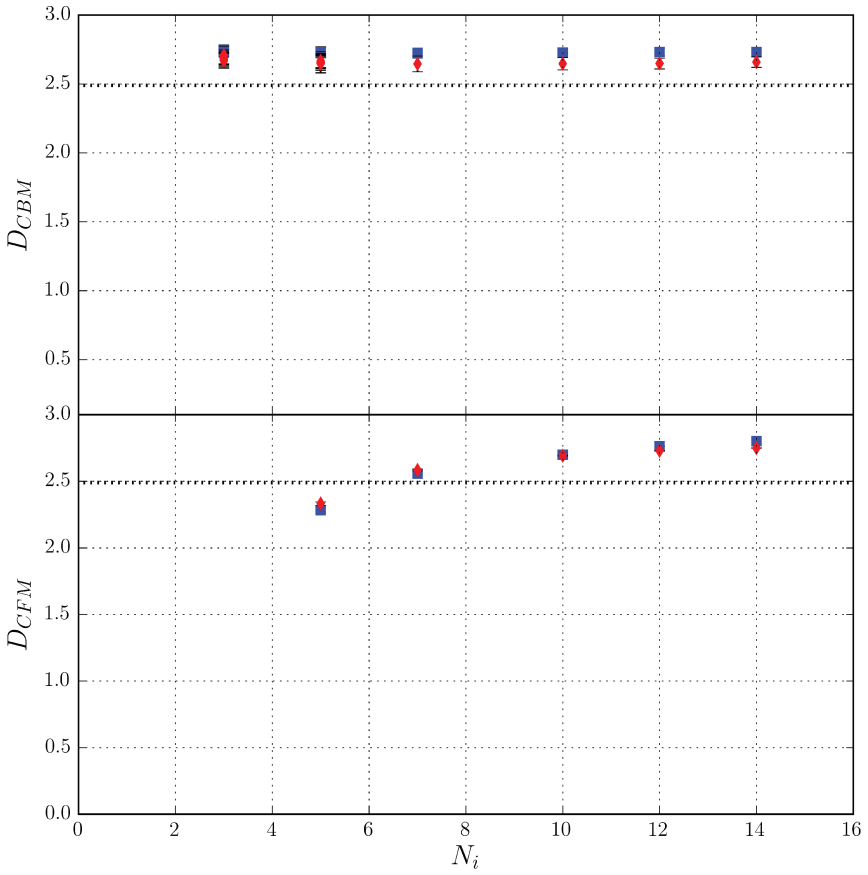

FIGURE III.27: Dimension fractale D_{CBM} et D_{CFM} mesurées par la méthode des boîtes en 3D. Le front fin est représenté par les (●) et le large avec les (■). La prédiction de Wilkinson [1986] sans co-percolation est représenté en $(\cdots)$

Épaisseur de pression L'exposant $e_{(\widetilde{w}_p,1/C_a)}$ de la loi d'évolution de l'épaisseur en pression est représenté en fonction de N_i sur la figure III.28. Cet exposant est de l'ordre de 0.95, soit une valeur très proche de 1. Comme dans le cas $2D$, cette valeur est proche de celle obtenue pour la définition large du front.

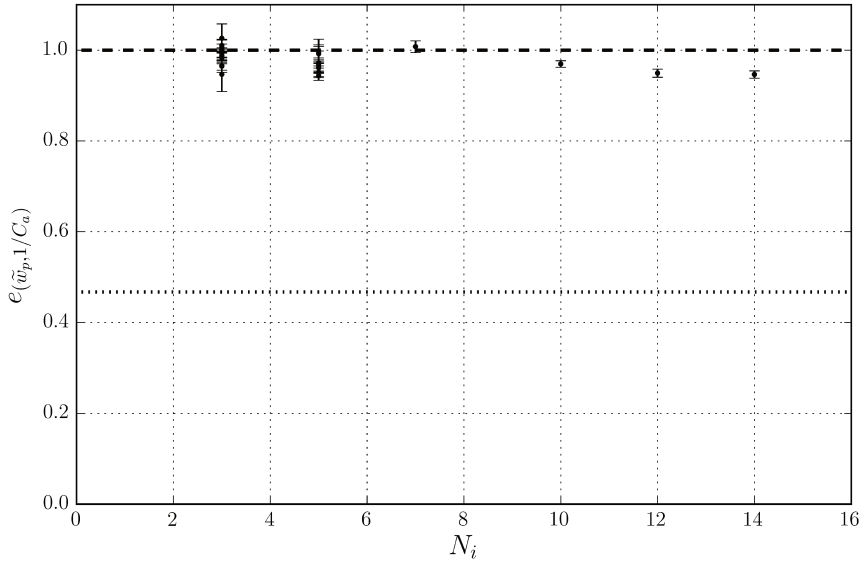

FIGURE III.28: Exposant $e(\widetilde{w}_p, 1/C_a)$ de la loi entre la longueur sur laquelle le gradient de pression est non constant en fonction de $1/C_a$ représenté en fonction de N_i en 3D. Les prédictions théoriques de Sadjadi et Rieger [2013] $(- -)$ et Wilkinson [1986] sans co-percolation $(\cdots)$ sont sur la figure

Bilan Les résultats semblent être indépendants de N_i et N_j, ce constat contraste fortement avec les résultats obtenus en 2D. Cette variation forte du comportement entre les cas 2D et 3D est conforme à la description de Wilkinson [1986] de l'évolution du front. La longueur de corrélation réelle du front en 3D ne correspond probablement pas aux valeurs mesurées, cependant, en supposant que celle-ci soit similaire à celle obtenue dans le cas 2D, $\widetilde{\xi} \sim 10$. Il semblerait que l'épaisseur du front ne sature pas, même lorsque $N_i \sim 3$ et $N_j \sim 3$. Ce constat est conforme à l'observation de Sadjadi et Rieger [2013], qui rapportaient une absence de longueur de corrélation mais il s'explique simplement par l'argument de Wilkinson [1986] : lorsqu'il y a co-percolation l'épaisseur du front et la longueur de corrélation sont indépendantes.

III.4.3.4 Influence du paramètre statistique en 3D

L'influence des paramètres de la distribution statistique a également été étudiée dans le cas 3D. Les paramètres des simulations numériques sont résumés dans le tableau III.5.

Numéro	1	2	3	4	5	6	7	8
N_i	5	5	5	5	5	5	5	5
N_j	5	5	5	5	5	5	5	5
M	5	5	5	5	5	5	5	5
$\sigma_{\widetilde{P_c}}$	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.40	0.45	0.5

TABLE III.5: Tableau des paramètres de l'étude des paramètres statistiques en 3D

Nombre capillaire L'exposant de la loi d'évolution du nombre capillaire en fonction du temps est représenté sur la figure III.29. Les résultats sont en accord avec la loi de Washburn [1921]. On observe une légère déviation de la loi pour les plus faibles valeurs du paramètre $\sigma_{\widetilde{P_c}}$ mais globalement la correspondance avec la prédiction théorique est assez bonne.

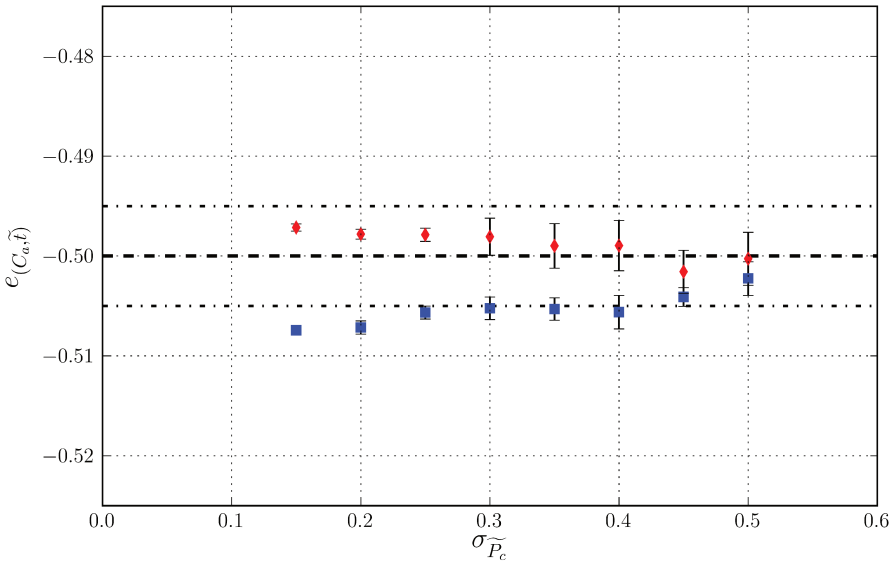

FIGURE III.29: Exposant, $e(C_a, \widetilde{t})$ représenté en fonction de $\sigma_{\widetilde{P_c}}$ pour les deux définitions du front en 3D. Le front fin est représenté par les (●) et le large avec les (■). La prédiction de Washburn [1921] est présentée en (− −)

Épaisseur du front L'exposant $e_{(\widetilde{w},1/C_a)}$ son pré-facteur $f_{(\widetilde{w},1/C_a)}$ sont représentés sur la figure III.30. Les exposants mesurés sont relativement indépendants du paramètre statistique $\sigma_{\widetilde{P_c}}$. *A contrario*, les pré-facteurs évoluent selon des lois puissances, une mesure approximative de l'exposant correspondant donne des valeurs de 0.91 et 0.82. Ces valeurs sont en bon accord avec les exposants de l'épaisseur $\widetilde{w}$ en fonction de $1/C_a$, ce

qui est conforme aux prédictions de Wilkinson [1986] et Sadjadi et Rieger [2013] mais pas à la prédiction de Bico [2000].

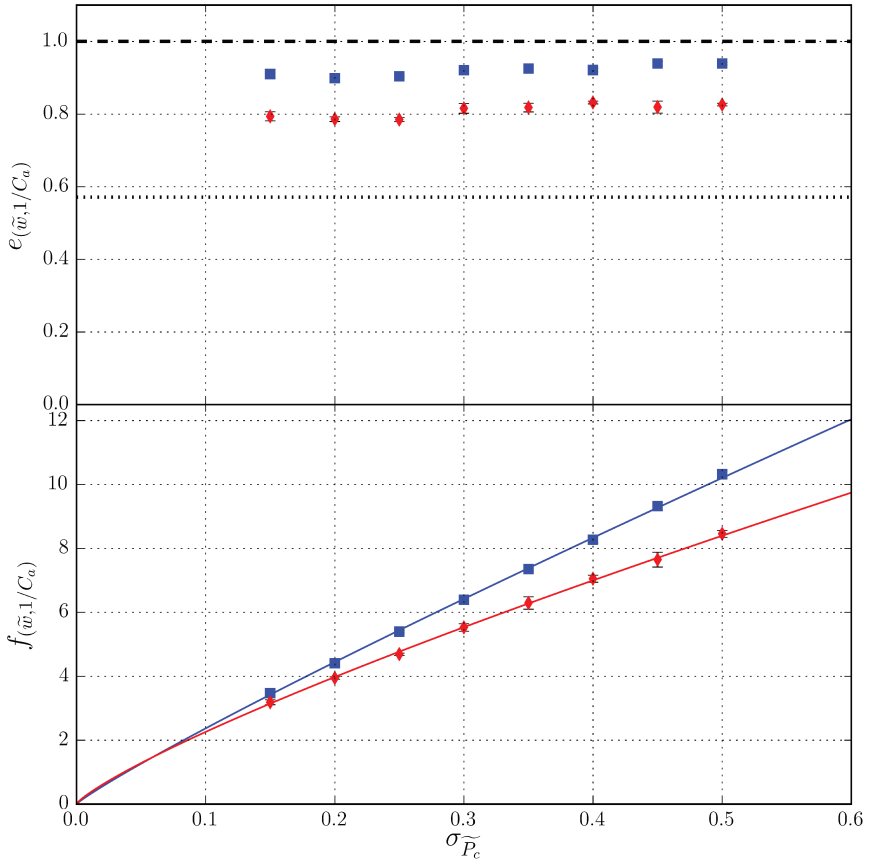

FIGURE III.30: Exposant $e_{(\widetilde{w},1/Ca)}$ et le pré-facteur $f_{(\widetilde{w},1/Ca)}$ représenté en fonction de $\sigma_{\widetilde{P_c}}$ pour les deux définitions du front en 3D. Le front fin est représenté par les (●) et le large avec les (■). Les prédictions théoriques de Sadjadi et Rieger [2013] (− −) et Wilkinson [1986] sans co-percolation (· · ·) sont sur la figure

Longueur de corrélation Les exposants et pré-facteur mesurés pour l'évolution temporelle de la longueur de corrélation en fonction du paramètre statistique $\sigma_{\widetilde{P_c}}$ sont représentés sur les figure III.31. On remarque de nouveau que les exposants sont relativement indépendants du paramètre statistique alors que les pré-facteurs suivent une loi puissance dont les exposants sont de 0.95 et 0.77 pour les définitions large et fine respectivement. Des exposants plus qualitativement en accord avec les valeurs de $e_{(\widetilde{w},1/Ca)}$.

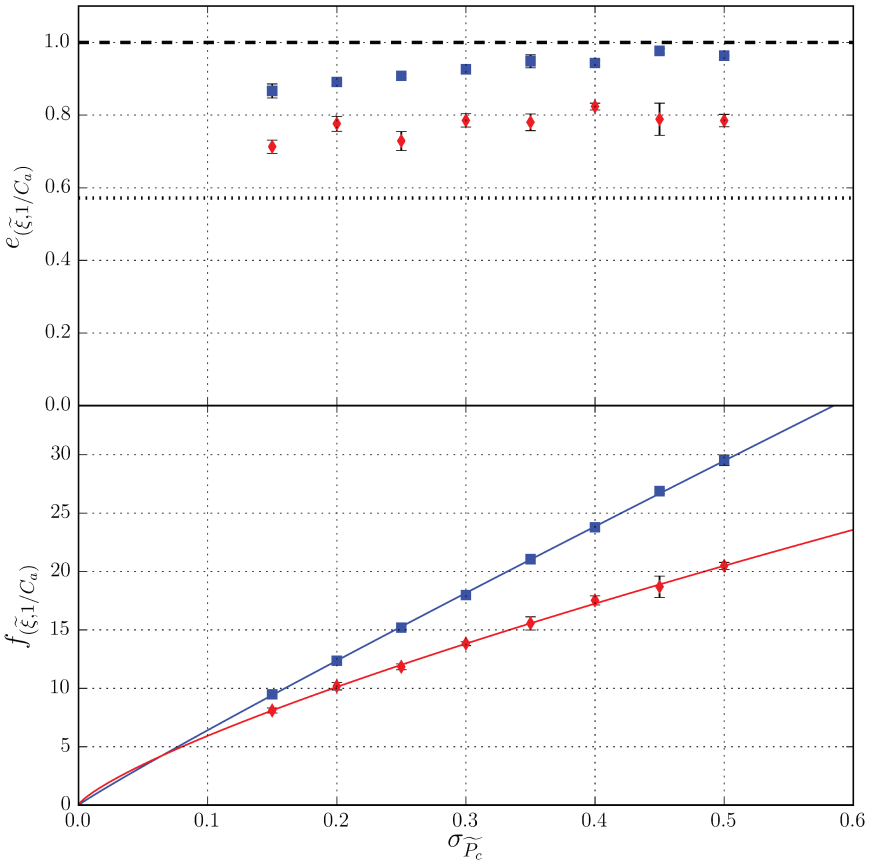

FIGURE III.31: Exposant $e_{(\widetilde{\xi},1/Ca)}$ et pré-facteur $f_{(\widetilde{\xi},1/Ca)}$, représentés en fonction de $\sigma_{\widetilde{P_c}}$ pour les deux définitions du front en 3D. Le front fin est représenté par les (●) et le large avec les (■). Les prédictions théoriques de Sadjadi et Rieger [2013] (– –) et Wilkinson [1986] sans co-percolation (· · ·) sont sur la figure

Dimension fractale Enfin, la dimension fractale mesurée par la méthode des boites est présentée par la figure III.32. D'après la figure ce paramètre semble indépendant de $\sigma_{\widetilde{P_c}}$ sur la plage d'étude. Ce qui est de nouveau conforme à la prédiction de Wilkinson [1986] bien que la valeur mesurée ne soit pas conforme à la valeur attendue. Les simulations réalisées étaient de petites dimensions, or, la méthode de la fonction de corrélation est sensible aux effets de bords, c'est pourquoi les dimensions fractales obtenues par cette seconde méthode ne sont pas présentées.

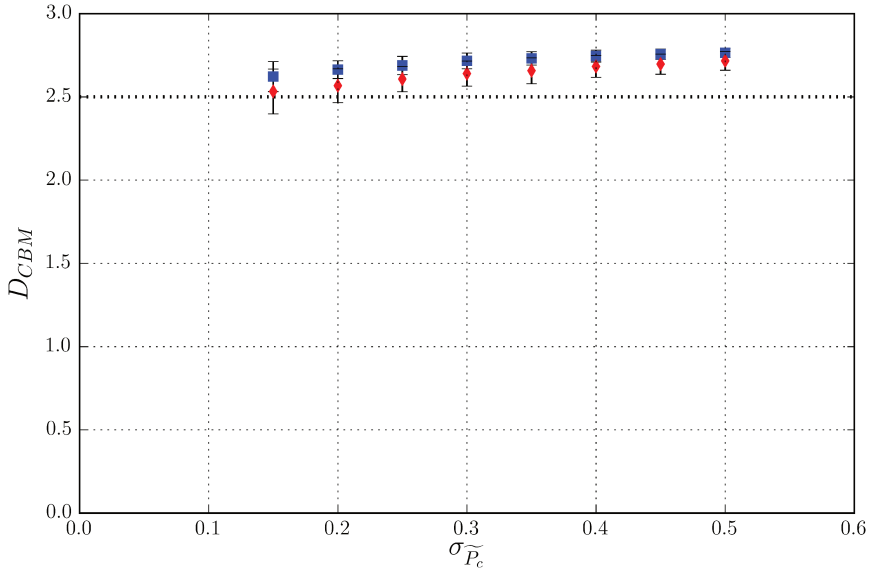

FIGURE III.32: Dimension fractale D mesurée par la méthode des boîtes en fonction de $\sigma_{\widetilde{P_c}}$ en 3D. Le front fin est représenté par les (●) et le large avec les (■). La prédiction de Wilkinson [1986] sans co-percolation $(\cdots)$ est sur la figure

Bilan L'étude de l'influence du paramètre statistique $\sigma_{\widetilde{P_c}}$ sur des simulations en 3D révèle de nouveau une bonne correspondance avec les modèles de Wilkinson [1986] et Sadjadi et Rieger [2013]. Comme dans l'étude de l'influence des dimensions du système sur les grandeurs mesurées, il existe une déviation assez importante de l'exposant $e_{(\widetilde{w},1/C_a)}$, par rapport à la prédiction théorique, remarquée pour les deux définitions du front mais plus marquée pour la définition fine.

III.5 Synthèse des résultats

Au travers des simulations menées, il a été observé que l'épaisseur du front suit une loi puissance de la forme :

$$\widetilde{w} \propto \left(\frac{\sigma_{\widetilde{P_c}}}{C_a}\right)^{\psi} \tag{III.60}$$

De manière générale, il a été remarqué que la longueur de corrélation mesurée correspond à l'épaisseur du front. Les exposants correspondant sont par conséquent les mêmes que ceux de la loi III.60.

En 2D, pour la définition fine, l'exposant $\psi \approx 0.57$ est très proche de la prédiction de Wilkinson [1986], 0.57. L'épaisseur du front adopte un exposant plus faible lorsque

l'épaisseur du front est supérieure ou de l'ordre de la largeur du système N_i. Ce constat confirme que l'épaisseur du front correspond bien à la longueur de corrélation, conformément à la prédiction de Wilkinson [1986] en 2D. La dimension fractale du front est proche de la prédiction théorique de Wilkinson [1986], $D \approx 1.33$, lorsque mesurée avec la méthode de la fonction de corrélation $D \approx 1.34$ mais moins proche lorsque mesurée avec la méthode des boites $D \approx 1.44$.

En 2D, pour la définition large, $\psi \approx 0.85$ en accord acceptable avec la prédiction de Sadjadi et Rieger [2013], 1. Aucune variation de l'exposant en fonction de N_i n'est remarquée, il semble donc que la largeur du front soit indépendante de la longueur de corrélation. L'exposant de la largeur de pression, $\psi \approx 0.90$, montre que cette largeur correspond approximativement à celle de la définition large.

En 3D, pour la définition fine, $\psi \approx 0.82$ ce qui est en accord acceptable avec la prédiction de Wilkinson [1986], 1. La dimension fractale est intermédiaire entre la dimension d'un agglomérat en 3D, 2.5 et la dimension du système 3.

En 3D, pour la définition large du front, $\psi \approx 0.92$, ce qui est en accord acceptable avec la prédiction de Wilkinson [1986], 1. La dimension fractale est de nouveau intermédiaire entre 2.5 et 3. L'exposant de l'épaisseur de pression est, à nouveau, en accord avec celui de la définition large, $\psi \approx 0.92$.

III.6 Discussion

Dans toutes les parties précédentes les deux définitions du front ont été employées sans que l'on s'intéressent à la pertinence de chacune. Or, la définition large est peu judicieuse [6]. En effet, dans la plupart des écoulements diphasiques, les deux phases sont faiblement compressibles, contrairement au cas traité. Les fragments de la phase déplacée qui se situent derrière le front fin sont donc fixes (si les conditions de l'écoulement le permettent). La définition large de l'interface prédit alors une évolution de l'épaisseur du front strictement proportionnelle à la distance sur laquelle le front a été déplacé. Cette définition ne correspond donc pas à grand-chose. *A contrario*, la définition fine du front quantifie le degré d'irrégularité du domaine qui sépare les deux phases en déplacement. Cette épaisseur n'est pas non plus celle qu'il faut considérer pour la formation des fragments de la phase déplacée [Wilkinson, 1986], celle-ci correspond plutôt à la longueur de corrélation.

En considérant principalement la définition du front fin, l'ensemble des résultats obtenus donnent donc raison à Wilkinson [1986] devant les modèles de Sadjadi et Rieger [2013]

6. Bien qu'utilisée par Sadjadi et Rieger [2013]

et Bico [2000]. Si la correspondance dans les cas 2D est assez bonne entre la théorie et les résultats numériques, elle est moins bonne dans le cas 3D. Notamment l'exposant de la loi d'évolution de l'épaisseur de l'interface qui, bien que proche de 1, est toujours strictement inférieur à cette valeur.

L'observation expérimentale de Gruener *et al.* [2012] se justifie simplement par les résultats présentés plus haut. La structure du milieu est 3D et non 2D, l'épaisseur de l'interface évolue donc selon un exposant $e_{(\widetilde{w},1/C_a)}$ proche de $0.80 - 0.85$ en fonction de $1/C_a$ et donc avec un exposant proche de $0.40 - 0.43$ en fonction de $\widetilde{t}$. Un résultat numérique inférieur à l'observation expérimentale (0.50) et aux prédictions théoriques de tous les modèles (0.50). Cette valeur numérique, différente du modèle et de l'observation, correspond également aux résultats issus des simulations de Sadjadi et Rieger [2013]. Plusieurs pistes sont envisageables pour comprendre l'origine de cette différence :

Premièrement, on peut remarquer que les prédictions théoriques de Sadjadi et Rieger [2013] et Bico [2000] font l'hypothèse d'un gradient de pression constant dans le front, qui n'est pas vérifié numériquement. Cependant, cette hypothèse n'explique pas que l'exposant mesuré expérimentalement corresponde effectivement à 1.

Deuxièmement, on peut remarquer que le modèle qui fonctionne le mieux, [Wilkinson, 1986], sort de son cadre strict d'application, c'est-à-dire qu'il est appliqué dans une situation où le nombre capillaire varie alors qu'il est valable pour un nombre capillaire fixe. Cette limite est importante, et pose la question des temps de réponse du système à une variation des nombres adimensionnels qui régissent l'écoulement. Cette question n'a pas été évoquée dans la littérature. Par mesure de simplicité, on va se limiter à une situation où la gravité agit en l'absence d'écoulement. En partant d'une situation d'équilibre, on peut calculer la répartition spatiale de la fraction accessible q :

$$\frac{dP_c}{dq}\frac{dq_g^{eq}}{dx} + \rho g = 0 \tag{III.61}$$

Avec q_g^{eq} la solution pour un champ de pesanteur d'intensité g. On considère ensuite le même problème mais où l'intensité du champ de gravité est augmenté instantanément de Δg. Le nouvel équilibre est de :

$$\frac{dP_c}{dq}\frac{dq_{g+\Delta g}^{eq}}{dx} + \rho(g + \Delta g) = 0 \tag{III.62}$$

Localement on peut calculer la différence entre les deux :

$$(\frac{dP_c}{dq}\frac{dq_g^{eq}}{dx} - \frac{dP_c}{dq}\frac{dq_{g+\Delta g}^{eq}}{dx}) - \rho(\Delta g) = 0 \tag{III.63}$$

On supposera que les deux champs sont proche l'un de l'autre :

$$|q_g^{eq} - q_{g+\Delta g}^{eq}| \ll 1 \tag{III.64}$$

On peut alors calculer la variation de la saturation moyenne $\langle S \rangle$ en fonction du temps :

$$\frac{\partial \langle S \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{K}{\mu}\left(\frac{dP_c}{dq}\frac{dq}{dx} + \rho(g+\Delta g)\right)\right) = 0 \tag{III.65}$$

En utilisant l'équation d'équilibre pour un champ d'intensité $g+\Delta g$ on peut donc écrire :

$$\frac{\partial \langle S \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{K}{\mu}\left(\frac{dP_c}{dq}\frac{dq}{dx} - \frac{dP_c}{dq}\frac{dq_{g+\Delta g}^{eq}}{dx}\right)\right) = 0 \tag{III.66}$$

Soit à $t = 0$:

$$\frac{\partial \langle S \rangle}{\partial t} - \frac{\rho(\Delta g)}{\mu}\frac{\partial K}{\partial x} = 0 \tag{III.67}$$

On supposera que ces temps varient peu à mesure que q tend vers $q_{g+\Delta g}^{eq}$. En se rappelant que la perméabilité varie à proximité du seuil de percolation selon un exposant χ, et en se plaçant à proximité du seuil de percolation on peut écrire :

$$t_c \propto (\Delta q)^{-\chi} \tag{III.68}$$

Or, $\chi > 1$, le temps caractéristique diverge donc au niveau du seuil de percolation. Il existe donc un spectre entier de temps caractéristiques correspondant à différentes positions dans le front. Ce raisonnement est soutenu par la trajectoire de différents niveaux de taux de remplissage, qui montrent que le front se déforme de manière non-homothétique pendant sa progression. Bien que constaté numériquement cet effet ne permet pas non plus d'expliquer les différences entre le modèle numérique et l'observation expérimentale puisqu'il est uniquement valable dans la partie critique du front, soit une petite fraction de l'épaisseur totale w. Un autre argument peut être avancé, des simulations à nombre capillaire constant ont également été réalisées, elles montrent que le système tend (en fonction du temps) vers une épaisseur stationnaire selon un exposant

de l'ordre de $0.8 - 0.9$. Il est probable que cet exposant conditionne la validité du modèle de Wilkinson [1986] vis-à-vis de variations temporelles de l'inverse du nombre capillaire. Les valeurs présentées ci-dessus permettent donc de justifier l'applicabilité du modèle puisque le nombre capillaire varie selon un exposant $1/2$ inférieur aux exposants mesurés. Cependant, elles n'expliquent pas non plus l'écart observé.

Troisièmement, il existe une limite commune à l'ensemble des simulations réalisées, c'est la différence de taille entre la grandeur observée w et la dimension élémentaire du réseau L. Le modèle de Wilkinson [1986] suppose implicitement que $w \gg L$. Une condition qui se vérifie de mieux en mieux à mesure que le nombre capillaire diminue et que w augmente. Dans les milieux poreux, il est recommandé de manipuler des grandeurs à des échelles supérieures à une dimension l_h pour laquelle une portion du milieu est statistiquement indifférentiable du milieu dans son ensemble. Cette condition est mal vérifiée dans les simulations numériques réalisées, elle est en revanche bien vérifiée expérimentalement (Dans l'expérience Gruener *et al.* [2012] les pores ont des tailles $\sim 5nm$ pour des mesures à l'échelle de $\sim 1mm$). Ce constat est conforme à l'observation de Sadjadi et Rieger [2013] qui observait une tendance de l'exposant à se rapprocher de $1/2$ sans le justifier théoriquement. Les simulations réalisées à nombre capillaire fixé confirment cette hypothèse, elles montrent une transition vers un exposant proche de 1 pour un nombre capillaire faible ($C_a < 3 \times 10^{-3}$).

Enfin, on peut également remarquer que la modélisation du réseau est extrêmement simpliste et ne prend pas en compte bon nombre de phénomènes susceptibles de se produire. Il peut y avoir des variations de la mouillabilité dans le milieu ou des corrélations dans les dimensions des capillaires qui constituent le réseau ou encore une progression importante par les coins et rugosités des pores. Tous ces phénomènes peuvent mettre en péril la description de Wilkinson [1986], c'est pourquoi une bonne caractérisation du milieu étudié est nécessaire avant l'application de ce modèle.

III.7 Conclusion

Une étude numérique complète de l'évolution du front en fonction du temps a été réalisée dans le cas de l'imbibition d'un réseau de pores. Les résultats montrent la validité du modèle de Wilkinson [1984]. Cependant l'exposant mesuré numériquement qui lie l'épaisseur du front au nombre capillaire est inférieur à la prédiction du modèle. Cet effet a été interprété comme la conséquence d'une trop faible différence de taille entre l'épaisseur du front et la taille caractéristique d'une maille du réseau. Le rôle de la variation temporelle du nombre adimensionné qui dirige l'écoulement n'a pas non plus été étudié. D'autres simulations et des expériences mériteraient d'être lancées sur le sujet. En

effet dans nombre de procédé, les nombres caractéristiques varient dans le temps. Dans le cas d'une variation temporelle de ces grandeurs, l'adaptation de l'épaisseur du front peut impacter fortement la création de fragments de phase et bouleverser la description présentée dans ce chapitre et par les modèles actuellement existant.

Chapitre IV

Compétition d'imbibition élasto-capillaire

IV.1 Introduction

Dès que les effets capillaires ont été compris par Laplace l'éventualité de la déformation d'un solide due à la capillarité a également été prédite, *"La théorie précédente donne encore l'explication et la mesure d'un phénomène que présente l'expérience, soit que le fluide s'élève ou s'abaisse entre deux plans verticaux et parallèles plongeant dans ce fluide par leurs extrémités inférieures, ces plans tendent à se rapprocher."*, Laplace [1806].

Les effets de déformation élastique d'un solide imposés par la capillarité sont regroupés sous l'appellation : effets élasto-capillaires. On peut classer les effets élasto-capillaires dans deux grandes catégories. La première concerne la déformation substantielle d'un milieu et intervient lorsque la pression de Laplace est de l'ordre du module d'Young du substrat :

$$\frac{\gamma}{r} \sim E \tag{IV.1}$$

En pratique, les liquides usuels dans nos conditions de pression et de température ont une tension de surface de l'ordre de $0.07 N.m^{-1}$ ou inférieure [1]. Pour une goutte de $1\mu m$, cette condition est vérifiée pour les solides dont le module d'Young est au maximum de $E \sim 1 \times 10^5 Pa$. Soit un module d'Young déjà très faible ! Jusqu'à très récemment, la distribution précise des efforts au niveau de la ligne triple était controversée, bien qu'il est établi de longue date que la relation d'Young [1805] décrit correctement les

1. Les liquides aqueux ou organiques

conditions d'équilibre d'une goutte sur un substrat solide. Récemment, l'expérience de Marchand *et al.* [2012] a appuyé le modèle introduit par le même auteur [Marchand, 2011] et permis de lever la controverse. Un des résultats clefs est que ces efforts ne se localisent pas uniquement au niveau de la ligne de contact mais existent sur l'ensemble des parties immergées du solide et sont proportionnels à sa courbure locale et à la tension de surface du liquide.

La seconde catégorie concerne la flexion de membranes élastiques, dans ce cas, l'effet se produit lorsque la flexion d'une lame d'épaisseur e_l due à la pression capillaire exercée sur une longueur L est de l'ordre de l'espacement entre les lames h, ce qui s'écrit :

$$E \sim \frac{\gamma}{h^2}\left(\frac{L^4}{e_l^3}\right) \tag{IV.2}$$

Un large ratio L/e_l peut alors permettre la déformation de la fibre ou de la membrane. Des matériaux très rigides peuvent être déformés de cette manière, comme des fibres de carbone $E \sim 500GPa$ ou des fibres ou lames d'acier $E \sim 200GPa$, *etc.* Il s'avère que ce type d'effet élasto-capillaire est employé par certaines espèces pour améliorer leur capacité à se déplacer à la surface de l'eau ([Park et Kim, 2008], [Bush et Hu, 2006]). Industriellement, ils peuvent permettre la fabrication d'objets de formes déterminées [Py *et al.*, 2007b] et sont également observés lors de l'imbibition de milieux poreux déformables [Siddique *et al.*, 2009].

Quelques auteurs se sont intéressés au mouillage statique de systèmes flexibles. On peut citer par exemple Bico *et al.* [2004] qui ont étudié la coalescence de fibres mouillées et identifié la longueur élasto-capillaire comme longueur pertinente de ce type de problème ou plus récemment Py *et al.* [2007a] qui ont poussé l'étude dans des configurations plus complexes. D'autres systèmes ont été étudiés de manière statique, par exemple, Kim et Mahadevan [2006] se sont intéressés à l'imbibition entre deux plaques flexibles encastrées à leur base et remarqué que la hauteur de Jurin est plus importante lorsque les systèmes sont déformables. Bien d'autres configurations ont été étudiées comme celle d'une goutte au contact d'une membrane flexible [Kwon *et al.*, 2008] ou encore d'une goutte entre deux fibres [Duprat *et al.*, 2012].

D'autres auteurs se sont intéressés à la dynamique de ces systèmes, comme Van Honschoten *et al.* [2007] qui ont remarqué que l'imbibition de micro-canaux déformables est plus rapide que celle des mêmes canaux mais indéformables. Cambau *et al.* [2011] ont réalisé une étude similaire mais pour un système plus large, la dynamique de l'écoulement est alors contrôlée par les coins formés par la déformation d'une membrane flexible. Egalement, Aristoff *et al.* [2011] et Duprat *et al.* [2011] ont étudié la dynamique de l'imbibition

entre deux membranes flexibles et identifié différents régimes dynamiques selon la flexibilité du système et les conditions limites employées.

Enfin, certains se sont focalisés sur l'étude de "comportement de groupe" des lames ou fibres, comme par exemple Wei [2014] qui ont déterminé les modes propres de déformation d'un lit texturé initialement saturé de liquide et qui s'évapore au fur et à mesure. Ou encore Gat et Gharib [2013] qui ont réalisé l'analyse de stabilité linéaire d'un ensemble de lames parallèles trempées dans un bain de liquide et encastrées à leurs sommets.

Globalement, ces études montrent que l'élasto-capillarité permet l'observation de mécanismes diversifiés qui dépendent fortement de la géométrie du problème. Si l'imbibition entre plusieurs lames a déjà été étudiée dynamiquement, elle ne l'a été que pour des systèmes simplifiés (imbibition entre deux lames flexibles) ou dans les premiers instants (via l'analyse de stabilité linéaire). Ces études ne permettent pas de tirer des conclusions directes sur l'imbibition d'un milieu poreux qui serait composé d'un ensemble de ces systèmes. De plus, certaines configurations, comme l'encastrement de lames parallèles à leurs deux extrémités, n'ont jamais été étudiées. Cette disposition correspond pourtant (très qualitativement) à celle d'un toron dans un textile où l'encastrement correspondrait au chevauchement des torons de trame et de chaîne. La modélisation par des lames permet de simplifier grandement le problème et de réaliser une première approche de ce type de problématique puisque la modélisation des torons de fibres est assez complexe (géométrie 3D, contacts, frottements, irrégularités spatiales, etc.). La qualité de l'imbibition des textiles est importante dans diverses applications, notamment dans la mise en œuvre des matériaux composites où une imbibition incomplète peut mener à la formation de porosités [Patel et Lee, 1996] qui affectent fortement les propriétés mécaniques de la pièce [Costa *et al.*, 2001].

Dans ce chapitre nous allons nous concentrer sur l'imbibition élasto-capillaire d'un milieu composé d'un ensemble de lames flexibles. L'étude est réalisée en trois temps, un système réduit est traité numériquement puis expérimentalement, enfin, le système complet est étudié numériquement.

IV.2 Modèle et simulation

IV.2.1 Description du système réduit

Le système étudié consiste en une lame flexible disposée entre deux lames rigides. Il s'agit d'un système réduit qui se focalise sur l'asymétrie locale entre deux capillaires déformables. La lame peut être encastrée à son extrémité supérieure, inférieure ou aux deux. Par mesure de concision, seul le cas où la lame est soumise à un encastrement opposé à la source est représenté sur la figure IV.1. L'espacement de la lame à chacune des paroi n'est pas symétrique, on note h_1, l'espacement entre la lame et la paroi supérieure et h_2, celui avec la paroi inférieure. On notera systématiquement par la suite, h_1 et h_2 de manière à avoir, $h_1 < h_2$. La lame est supposée avoir un comportement élastique linéaire isotrope caractérisé par un module d'Young E et un coefficient de Poisson ν_P. L'épaisseur de la lame e_l est constante sur sa longueur L. Le liquide employé est Newtonien, de viscosité μ, de densité ρ et de tension de surface γ. Il est supposé incompressible et complètement mouillant vis-à-vis de la lame et des parois rigides, $\theta_e = 0$ avec θ_e, l'angle de contact statique. On supposera que la phase déplacée n'influence pas l'écoulement. La lame ne peut pas traverser les parois rigides, elle est stoppée lorsqu'elle arrive au contact de celles-ci. Les parois rigides sont supposées strictement indéformables et fixes.

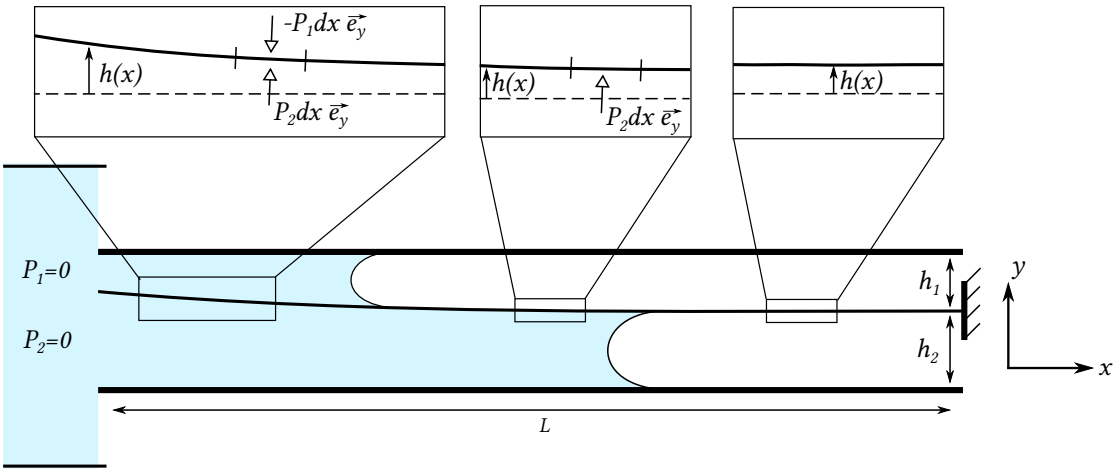

FIGURE IV.1: Schéma de la membrane flexible encastrée à son extrémité opposée à la source et soumise à l'imbibition spontanée des capillaires avoisinants

IV.2.2 Modélisation du système réduit

On modélise le système réduit en le séparant en trois domaines, le pseudo-capillaire 1 d'épaisseur sans déformation h_1, le pseudo-capillaire 2 d'épaisseur sans déformation h_2 et enfin la lame flexible. Les équations appliquées à chacun de ces domaines sont décrites dans cette partie.

IV.2.2.1 Modélisation de l'écoulement

Dans les deux pseudo-capillaires, on suppose que la perte de charge visqueuse domine largement les effets inertiels ($O_h \gg 1$). Ces derniers seront donc négligés. Le système est supposé très élancé, $L \gg max(h_1, h_2)$, on supposera donc que l'hypothèse de lubrification décrit correctement le système [Gat et Gharib, 2013]. C'est-à-dire que la dissipation visqueuse se produit uniquement à cause du gradient de vitesse normal à la direction principale de l'écoulement. On peut donc écrire, en utilisant l'hypothèse de lubrification dans les pseudo-capillaires :

$$v_1(x,t) = -\frac{(h_1 - h)^2}{12\mu}\frac{\partial P_1}{\partial x} \tag{IV.3}$$

$$v_2(x,t) = -\frac{(h_2 + h)^2}{12\mu}\frac{\partial P_2}{\partial x} \tag{IV.4}$$

Avec v_i, la vitesse (moyenne) de l'écoulement dans le capillaire i à la position x, h, le déplacement (voir figure IV.1) de la membrane et P_i la pression dans le capillaire i. Le liquide est incompressible et doit donc vérifier l'équation de conservation du volume :

$$\dot{h} = \frac{\partial}{\partial x}\left(v_1(h_1 - h)\right) \tag{IV.5}$$

$$\dot{h} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(v_2(h_2 + h)\right) \tag{IV.6}$$

En utilisant les équations de perte de charge et de conservation du volume on obtient le système suivant :

$$\dot{h} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{(h_1 - h)^3}{12\mu}\frac{\partial P_1}{\partial x}\right) \tag{IV.7}$$

$$\dot{h} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{(h_2 + h)^3}{12\mu}\frac{\partial P_2}{\partial x}\right) \tag{IV.8}$$

Ces équations sont respectivement valides dans les domaines allant de l'origine, $x = 0$, jusqu'aux positions des ménisques dans les capillaires, $x = X_i$, pour le capillaire i.

IV.2.2.2 Conditions limites appliquées à l'écoulement

Au niveau de l'origine ($x = 0$), le liquide est supposé au contact d'une source infinie de pression invariable et nulle. La condition qui s'applique pour le capillaire i s'écrit donc :

$$P_i(x = 0, t) = 0 \tag{IV.9}$$

À l'autre extrémité, la pression est imposée par le ménisque présent entre la lame et la paroi rigide, soit :

$$P_1(x = X_1, t) = \frac{-2\gamma}{h_1 - h(X_1)} \tag{IV.10}$$

$$P_2(x = X_2, t) = \frac{-2\gamma}{h_2 + h(X_2)} \tag{IV.11}$$

L'équation ci-dessus suppose que la pente locale de la membrane n'influence pas la pression capillaire, soit, $|\frac{\partial h}{\partial x}| \ll 1$. Cette hypothèse est appuyée par l'élancement important du système. Les conditions limites en pression dépendent quand même du déplacement local de la lame via le déplacement de celle-ci h.

IV.2.2.3 Modélisation de la membrane

La membrane est élastique et invariante selon sa longueur, elle possède donc une rigidité de flexion :

$$B = \frac{E e_l^3}{12(1 - \nu_P^2)} \tag{IV.12}$$

Avec e_l, l'épaisseur de la lame, E le module d'Young du matériau et ν_P^2 le coefficient de Poisson. Les effets inertiels sont négligés devant les effets élastiques. On suppose que le système est suffisamment élancé pour que la théorie des poutres de Bernoulli puisse être appliquée (petits déplacements, petites rotations, cisaillement négligeable), ce qui permet d'écrire :

$$B\frac{\partial^4 h}{\partial x^4} = P(x) \tag{IV.13}$$

Avec P une fonction dont l'expression dépend de la configuration courante du système et des domaines fluides :

$$P\begin{cases} P(x) = P_1(x) - P_2(x), \quad si\, x \in [0, min(X_1, X_2)] \\ P(x) = P_1(x), \quad si\, x \in]X_2, X_1] \\ P(x) = -P_2(x), \quad si\, x \in]X_1, X_2] \\ P(x) = 0, \quad si\, x \in]max(X_1, X_2), L] \end{cases} \tag{IV.14}$$

Contrairement aux domaines fluides, la longueur de la membrane n'évolue pas dans le temps donc le domaine correspondant est invariant. La force appliquée par le ménisque sur la membrane est nulle car l'angle de contact est supposé nul, la force est donc tangente à la membrane[2].Comme cela a été évoqué dans la partie IV.1, il existe également un excès de pression exercé par le liquide au contact de la membrane à cause de sa courbure, il est de l'ordre de $\gamma h_1/L^2$. Il est donc faible par rapport à la pression capillaire γ/h_1 et sera négligé en raison de l'élancement du système.

IV.2.2.4 Conditions limites appliquées à la membrane

Deux types de conditions limites sont imposés à la membrane, l'encastrement et l'absence de contrainte (libre). L'encastrement se traduit par l'annulation du déplacement et de sa dérivée première :

$$h(X_l, t) = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial x}(X_l, t) = 0 \tag{IV.15}$$

Avec X_l, la position où s'applique la condition limite. Les conditions limites imposées à la membrane sont invariantes en fonction du temps. La membrane ne peut pas être libre à ces deux extrémités, il existe donc trois possibilités :

La membrane peut être encastrée à l'extrémité au contact de la source et libre du côté opposé :

$$h(0, t) = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial x}(0, t) = 0 \tag{IV.16}$$

Encastrée du côté opposée et libre au niveau de la source :

$$h(L, t) = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial x}(L, t) = 0 \tag{IV.17}$$

Et enfin encastrée des deux côtés :

2. De toutes manière elle est d'intensité négligeable devant la pression exercée sur le système.

$$h(0,t) = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial x}(0,t) = 0 \tag{IV.18}$$

$$h(L,t) = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial x}(L,t) = 0 \tag{IV.19}$$

Dans ce dernier cas, la lame est dans un état hyperstatique, on supposera alors que les extrémités des lames sont capables de se translater selon l'axe $\vec{e}_x$ si bien qu'il n'existe pas de tension mécanique selon cet axe [3]. Ces trois cas seront étudiés par la suite. Les dérivées d'ordre deux et trois du déplacement sont continues entre les différents domaines.

IV.2.2.5 Condition initiale

À l'instant initial, les pseudo-capillaires sont vides et la membrane est droite. Le fait que les pseudo-capillaires soient vides implique que les limites soulevées dans la partie I.7.2 sont susceptibles d'intervenir. La membrane est placée au contact du bain à l'instant $t = 0$.

IV.2.2.6 Adimensionalisation

Pour dégager les degrés de liberté réels des paramètres du problème, on cherche à calculer la longueur l_e pour laquelle la lame se déplace sur l'épaisseur h_1 lorsqu'elle est soumise à une pression $\frac{\gamma}{h_1}$ sur sa longueur L :

$$l_e = \left(\frac{h_1^2 B}{\gamma}\right)^{1/4} \tag{IV.20}$$

Cette longueur se nomme la longueur élasto-capillaire est a déjà été employée par de nombreux auteurs ([Bico *et al.*, 2004], [Kim et Mahadevan, 2006]). En suivant la même méthodologie, on calcule le temps caractéristique t_e à l'aide des équations IV.7 et IV.13 :

$$t_e = \frac{12\mu l_e^6}{B h_1^3} \tag{IV.21}$$

Enfin, les équations de conservation et de membrane sont adimensionnées en utilisant, la longueur du système L pour les longueurs (selon x), l'épaisseur la plus fine h_1 et la pression caractéristique γ/h_1. Les équations, IV.7, IV.8 et IV.12 prennent alors la forme suivante :

3. Sans cette hypothèse il faudrait considérer le couplage entre flexion et tension

$$\widetilde{\dot{h}} = -\left(\frac{l_e}{L}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}} \left(\left(1-\widetilde{h}\right)^3 \frac{\partial \widetilde{P}_1}{\partial \widetilde{x}} \right) \tag{IV.22}$$

$$\widetilde{\dot{h}} = \left(\frac{l_e}{L}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}} \left(\left(\frac{h_2}{h_1}+\widetilde{h}\right)^3 \frac{\partial \widetilde{P}_2}{\partial \widetilde{x}} \right) \tag{IV.23}$$

$$\frac{\partial^4 \widetilde{h}}{\partial \widetilde{x}^4} = \left(\frac{L}{l_e}\right)^4 \widetilde{P} \tag{IV.24}$$

Pour déplacer l'interface d'un instant à l'autre, les équations IV.3 et IV.4 doivent également être adimensionnées.

$$\widetilde{v_1} = -\left(\frac{l_e}{L}\right)^2 \left(\left(1-\widetilde{h}\right)^2 \frac{\partial \widetilde{P}_1}{\partial \widetilde{x}} \right) \tag{IV.25}$$

$$\widetilde{v_2} = -\left(\frac{l_e}{L}\right)^2 \left(\left(\frac{h_2}{h_1}+\widetilde{h}\right)^2 \frac{\partial \widetilde{P}_2}{\partial \widetilde{x}} \right) \tag{IV.26}$$

Les paramètres de l'étude se limitent donc à l'épaisseur de la seconde membrane, par rapport à la première h_2/h_1 et au ratio de la longueur élastique sur la longueur totale du système l_e/L.

IV.2.3 Résolution numérique

La résolution du problème n'est pas triviale ; les conditions limites évoluent en fonction du temps et les équations sont fortement non-linéaires. Elle est réalisée numériquement par la méthode des éléments finis. Le choix de la méthode se justifie par l'emploi d'éléments poutres pour la résolution de l'équation d'équilibre des lames. La méthodologie employée est développée dans les parties qui suivent.

IV.2.3.1 Formulation faible

La formulation faible du problème est obtenue en multipliant les équations par trois fonctions tests associées à chacune des variables et en intégrant sur le domaine de définition de chacune des équations :

$$\int_{\widetilde{x}=0}^{\widetilde{x}=\widetilde{X}_1} \left(\dot{\widetilde{h}} + \left(\frac{l_e}{L}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}} \left(\left(1-\widetilde{h}\right)^3 \frac{\partial \widetilde{P}_1}{\partial \widetilde{x}} \right) \right) \widetilde{P}_1^* d\widetilde{x} = 0 \tag{IV.27}$$

$$\int_{\widetilde{x}=0}^{\widetilde{x}=\widetilde{X}_2} \left(\dot{\widetilde{h}} - \left(\frac{l_e}{L}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}} \left(\left(\frac{h_2}{h_1}+\widetilde{h}\right)^3 \frac{\partial \widetilde{P}_2}{\partial \widetilde{x}} \right) \right) \widetilde{P}_2^* d\widetilde{x} = 0 \tag{IV.28}$$

$$\int_{\widetilde{x}=0}^{\widetilde{x}=1} \left(\frac{\partial^4 \widetilde{h}}{\partial \widetilde{x}^4} - \left(\frac{L}{l_e}\right)^4 \widetilde{P} \right) \widetilde{h}^* d\widetilde{x} = 0 \tag{IV.29}$$

L'intégration par parties (IPP) est effectuée deux fois sur l'équation d'équilibre de la membrane et une fois sur les équations de conservation :

$$\int_{\widetilde{x}=0}^{\widetilde{x}=\widetilde{X}_1} \left(\dot{\widetilde{h}} \widetilde{P_1}^* - \left(\frac{l_e}{L}\right)^2 \left(\left(1-\widetilde{h}\right)^3 \frac{\partial \widetilde{P}_1}{\partial \widetilde{x}} \right) \frac{\partial \widetilde{P}_1^*}{\partial \widetilde{x}} \right) d\widetilde{x} = 0 \tag{IV.30}$$

$$\int_{\widetilde{x}=0}^{\widetilde{x}=\widetilde{X}_2} \left(\dot{\widetilde{h}} \widetilde{P_2}^* + \left(\frac{l_e}{L}\right)^2 \left(\left(\frac{h_2}{h_1}+\widetilde{h}\right)^3 \frac{\partial \widetilde{P}_2}{\partial \widetilde{x}} \right) \frac{\partial \widetilde{P}_2^*}{\partial \widetilde{x}} \right) d\widetilde{x} = 0 \tag{IV.31}$$

$$\int_{\widetilde{x}=0}^{\widetilde{x}=1} \left(\frac{\partial^2 \widetilde{h}}{\partial \widetilde{x}^2} \frac{\partial^2 \widetilde{h}}{\partial \widetilde{x}^2} - \left(\frac{L}{l_e}\right)^4 \widetilde{P} \widetilde{h}^* \right) d\widetilde{x} = 0 \tag{IV.32}$$

Les termes manquants, suite à l'IPP, sont tous nuls dans le cas étudié [4].

IV.2.3.2 Choix des éléments et maillage

Le maillage est 1D et régulier loin de la zone où les ménisques se situent. A proximité des ménisques (1-2 éléments), le maillage est adapté de manière à avoir un degré de liberté au niveau de ceux-ci. Trois types d'éléments ont été employés ; des éléments poutre de Bernoulli classiques pour l'équation d'équilibre de la membrane, des éléments d'ordre 1 classiques pour les équations de conservation loin des ménisques et des éléments asymétriques à proximité. Ces derniers sont la seule spécificité du maillage, leur intérêt est de posséder un degré de liberté en gradient de pression au niveau du ménisque qui permet d'évaluer la vitesse de transport de celui-ci avec précision (ils jouent également un rôle important pour la prise en compte de l'angle de contact dynamique). Un schéma du maillage avec les éléments utiles à la résolution de l'équation fluide est présenté sur la figure IV.2. Le lien entre le maillage et les positions des ménisques implique un remaillage à chaque pas de temps et le transport des valeurs. En pratique, le maillage employé contient 200 éléments pour la membrane et un nombre variable pour les domaines fluides.

4. Il n'y a pas de force ou de moment appliqué sur les extrémités de la poutre et il n'y a pas de débit imposé

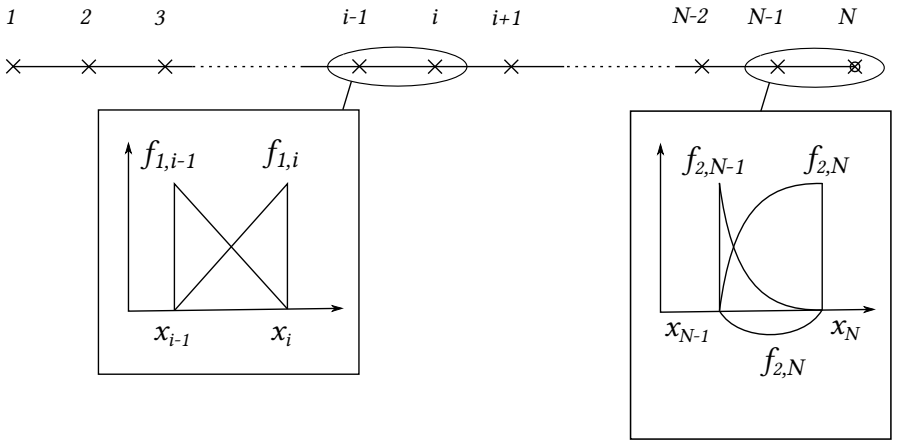

FIGURE IV.2: Représentation schématique des deux types d'éléments employés pour les équations de conservation

IV.2.3.3 Application des conditions limites

Les conditions limites de l'équation d'équilibre de la membrane sont imposées par pénalisation de la matrice tangente au niveau des degrés de liberté concernés. Les conditions limites des équations de conservation sont plus complexes à imposer car elles sont dépendantes du degré de liberté en déplacement. En supposant que le ménisque du capillaire 1 soit au niveau du degré de liberté k :

$$\widetilde{P}_{1,k} = \frac{-2}{1 - \widetilde{h}_k} \tag{IV.33}$$

Avec $\widetilde{P}_{1,k}$ le degré de liberté en pression et $\widetilde{h}_k$ le degré de liberté en déplacement. En faisant les mêmes hypothèses dans le cas du capillaire 2 :

$$\widetilde{P}_{2,k} = \frac{-2}{\frac{h_2}{h_1} + \widetilde{h}_k} \tag{IV.34}$$

Ces équations sont différentiées puis imposées par pénalisation dans la matrice tangente et le second membre.

IV.2.3.4 Application des contacts

La modélisation numérique des contacts est réalisée via une force de répulsion. Lorsque les nœuds de la membrane sont proches de la paroi (distance inférieure à $\Delta\widetilde{h}$) la force est non-nulle. Son expression est :

$$F_c \begin{cases} F_c(x) = C_F \left(1 - \widetilde{h} - \Delta\widetilde{h}\right)^4, \quad si\, \widetilde{h} \in [1 - \Delta\widetilde{h}, 1] \\ F_c(x) = 0, \quad si\, \widetilde{h} \in]-\dfrac{h_2}{h_1} + \Delta\widetilde{h}, 1 - \Delta\widetilde{h}[\\ F_c(x) = C_F \left(\dfrac{h_2}{h_1} - \widetilde{h} + \Delta\widetilde{h}\right)^4, \quad si\, \widetilde{h} \in [-\dfrac{h_2}{h_1}, -\dfrac{h_2}{h_1} + \Delta\widetilde{h}] \end{cases} \tag{IV.35}$$

Ce terme est ajouté aux nœuds du maillage de la membrane indépendamment de l'équation d'équilibre de celle-ci. La forme de la force a été choisie de manière à avoir une fonction strictement convexe continue et dérivable. Le coefficient C_F a été choisi empiriquement de manière à bloquer le déplacement de la membrane et à conserver un conditionnement acceptable de la matrice tangente. En pratique, le paramètre $\Delta\widetilde{h}$ a été fixé à 0.025.

IV.2.3.5 Résolution par Newton-Raphson

Les équations à résoudre sont non-linéaires, la solution ne peut donc être obtenue par la résolution d'un unique système. En écrivant les degrés de liberté du système $\vec{q}$, et le résidu $\vec{R}$, il est possible de réaliser un développement limité à l'ordre 1 de $\vec{R}$ en fonction $\vec{q}$:

$$\vec{R}(\vec{q} + \Delta\vec{q}) \approx \vec{R}(\vec{q}) + \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{q}}.\Delta\vec{q} \tag{IV.36}$$

L'objectif est l'annulation du résidu, soit la recherche de $\Delta\vec{q}$ tel que $\vec{R}(\vec{q} + \Delta\vec{q}) = \vec{0}$. En utilisant le développement limité réalisé ci-dessus on peut écrire que :

$$\vec{R}(\vec{q} + \Delta\vec{q}) \approx \vec{R}(\vec{q}) + \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{q}}.\Delta\vec{q} = \vec{0} \tag{IV.37}$$

Soit,

$$\Delta\vec{q} = -\left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{q}}\right)^{-1} \vec{R}(\vec{q}) \tag{IV.38}$$

Les degrés de liberté peuvent ensuite être mis-à-jour en utilisant le déplacement $\Delta\vec{q}$. En les indexant en fonction de l'itération à laquelle ils appartiennent, on écrit :

$$\vec{q}_{k+1} = \vec{q}_k + \Delta\vec{q} \tag{IV.39}$$

Cette méthode permet de converger au bout d'un certain nombre d'itérations vers une solution acceptable. Deux remarques sont importantes à faire. Premièrement, cette méthode n'est pas inconditionnellement stable et peut s'éloigner d'une solution plutôt que de s'en rapprocher. C'est en particulier vrai lorsque la solution est très irrégulière ou possède des points d'inflexion. L'astuce classique pour pallier à ce genre de problème c'est d'introduire un coefficient a d'amortissement dans l'équation de mise-à-jour :

$$\vec{q}_{k+1} = \vec{q}_k + a\Delta\vec{q} \tag{IV.40}$$

Avec, $0 < a < 1$. Ce coefficient permet d'accroitre la stabilité de la résolution mais il augmente le nombre d'itérations nécessaires. Secondement, une résolution numérique n'est jamais parfaite mais approchée[5], il faut donc établir un critère de convergence. Le critère de convergence qui a été choisi s'écrit :

$$\|\vec{R}(\vec{q}_k)\| < \epsilon \tag{IV.41}$$

Avec ϵ, le critère de convergence et $\|\cdot\|$ la norme usuelle. En pratique ϵ a été fixé à 1×10^{-7}.

IV.2.3.6 Transport des interfaces

Dans notre modèle réduit 1D, le transport des interfaces ne demande pas d'employer de méthodes complexes contrairement aux cas 2D et 3D. Les interfaces sont transportées après chaque résolution d'équation en calculant la vitesse moyenne au niveau du ménisque (en utilisant le degré de liberté supplémentaire). Le déplacement est alors calculé de manière à prendre en compte l'inclinaison locale de l'interface :

$$(1-\widetilde{h})\widetilde{v}_1\Delta\widetilde{t} = \left((1-\widetilde{h})\Delta\widetilde{X} - \frac{\partial\widetilde{h}}{\partial\widetilde{X}}\frac{\Delta\widetilde{X}^2}{2}\right) \tag{IV.42}$$

$$(\frac{h_2}{h_1}+\widetilde{h})\widetilde{v}_2\Delta\widetilde{t} = \left((\frac{h_2}{h_1}+\widetilde{h})\Delta\widetilde{X} + \frac{\partial\widetilde{h}}{\partial\widetilde{X}}\frac{\Delta\widetilde{X}^2}{2}\right) \tag{IV.43}$$

5. il existe toujours une certaines erreur numérique après une résolution, bien que très faible

Avec, $\widetilde{v_i}$ calculé selon les équations IV.25 et IV.26. Sans l'influence locale de la pente de la membrane, les équations ci-dessus se ramènent à celles du transport d'une particule. L'intérêt du terme correctif est d'améliorer la conservation du volume lors de la résolution.

IV.2.3.7 Conditions initiales

Toutes les simulations sont démarrées avec la position des deux ménisques $\widetilde{X}_1 = 0.05$ et $\widetilde{X}_2 = 0.05$. Ces conditions permettent de s'affranchir du problème classique de l'équation de Washburn qui intervient lorsque, $X_i \to 0$ (voir partie I.7.2). A l'instant initial, la lame est indéformée.

IV.2.3.8 Condition finale

Les simulations peuvent s'arrêter dans deux situations possibles, si l'un des ménisques atteint une position $\widetilde{X}_i > 0.96$ ou si le nombre de pas de temps dépasse une limite arbitraire (~ 1000). Le second critère est adapté aux cas où la gravité intervient et où l'imbibition n'est pas nécessairement complète (voir section I.7.3).

IV.2.3.9 Cas tests

Équilibre de la poutre De nombreux cas tests ont été réalisés pour vérifier le bon fonctionnement du code de résolution développé. Le premier a été réalisé sans mise-à-jour des positions ("statique") pour vérifier la validité de l'équation d'équilibre de la membrane. En l'absence de déformation, le chargement P subi par la membrane est linéaire :

$$P \begin{cases} P(x) = 2px, & si\, x \in [0, \dfrac{L}{2}] \\ P(x) = 0, & si\, x \in]\dfrac{L}{2}, L] \end{cases} \tag{IV.44}$$

Dans le cas d'un encastrement en $\widetilde{x} = 1$, la solution analytique prend alors la forme :

$$h \begin{cases} h(x) = p(\dfrac{L^5}{64} + \dfrac{1}{960}((L-2x)(36L(L-x)^3) + 49L^3(L-x) \\ \qquad + 12L^4 - 8(L-x)^4 - 62L^2(L-x)^2))), \quad si\, x \in [0, \dfrac{L}{2}] \\ h(x) = \dfrac{p}{24}(L^2(L+x)(L-x)^2), \quad si\, x \in]\dfrac{L}{2}, L] \end{cases} \tag{IV.45}$$

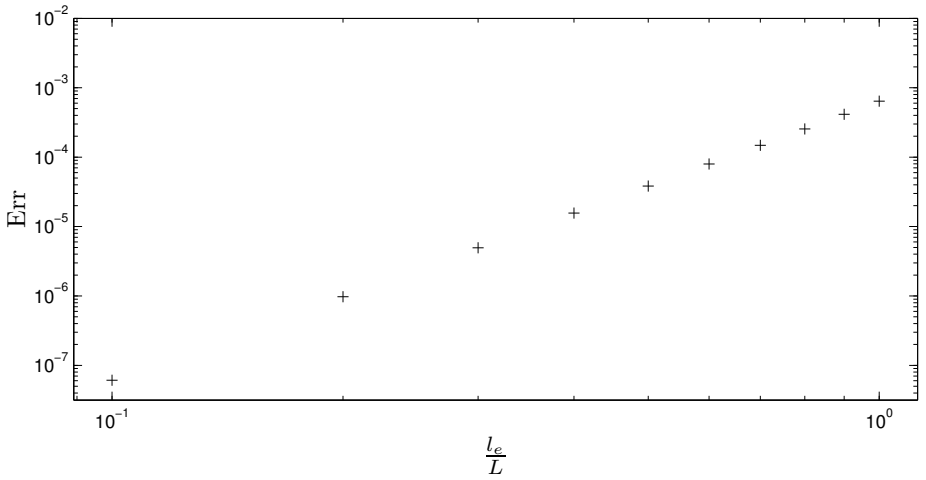

FIGURE IV.3: Représentation de l'erreur relative Err en fonction de $\frac{L}{l_e}$

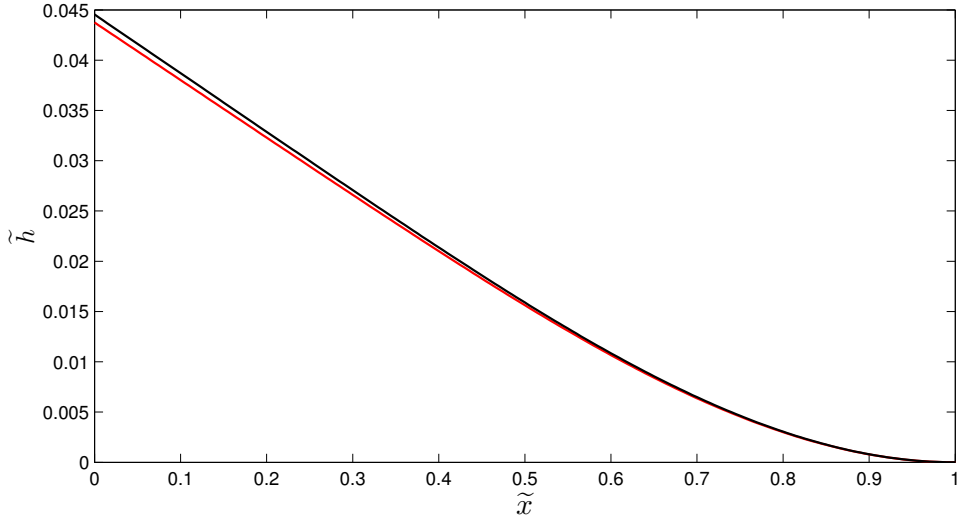

FIGURE IV.4: Représentation de la position de la membrane $\widetilde{h}$ en fonction de la position $\widetilde{x}$ pour un paramètre $\frac{L}{l_e} = 1$. Le résultat théorique est en (−) et le résultat du calcul en (-)

Des simulations ont été réalisées pour un ratio l_e/L variant de 0.1 à 1 par pas de 0.1. La résolution étant couplée, l'équilibre statique n'est pas équivalent à celui d'une poutre seule[6]. Les résultats de l'erreur, mesurée comme la somme des différences à la solution analytique, sont représentés sur la figure IV.3. On remarque que l'erreur tend vers 0 lorsque l_e/L tend vers 0. Un exemple de profil déformé de la membrane est présenté sur la figure IV.4.

6. La déformation de la poutre impacte la forme du champ de pression

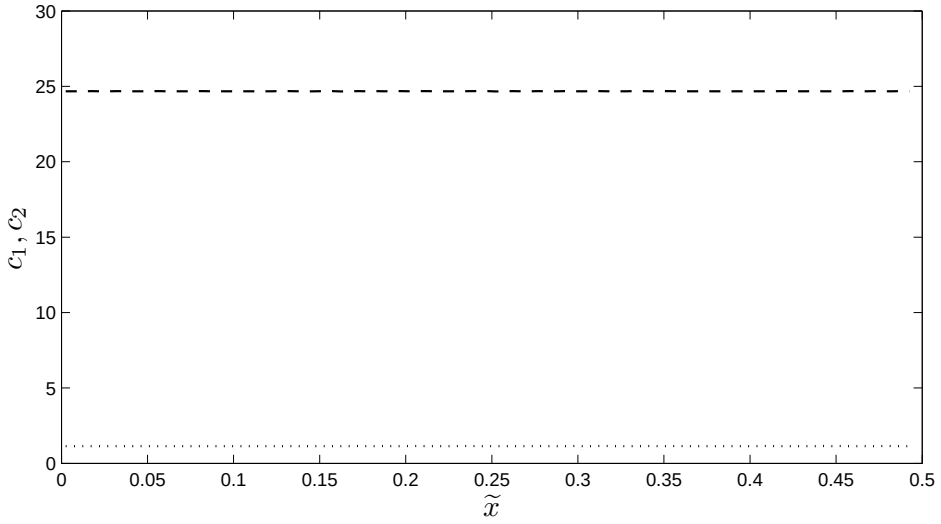

FIGURE IV.5: Critère de validité de l'équation de conservation dans les capillaires 1 et 2 (c_1 ($\cdot\cdot$) et c_2 ($--$)) en fonction de la position $\widetilde{x}$ ($\frac{L}{l_e} = 1.6$)

Équation de conservation La validité de la résolution des équations de conservation a été vérifiée en atteignant le régime stationnaire en l'absence de transport des interfaces. Les équations de conservation se résument alors à une divergence nulle qui peut être intégrée spatialement :

$$\left(1-\widetilde{h}\right)^3 \frac{\partial \widetilde{P}_1}{\partial \widetilde{x}} = c_1 \tag{IV.46}$$

$$\left(\frac{h_2}{h_1}+\widetilde{h}\right)^3 \frac{\partial \widetilde{P}_2}{\partial \widetilde{x}} = c_2 \tag{IV.47}$$

Les coefficients c_1 et c_2 ont été calculés sur leurs domaines de définition respectifs ($[0, 0.5]$ dans le cas présenté sur la figure) et sont représentés sur la figure IV.5. Il apparait que la conservation est bien vérifiée dans les capillaires.

Équation de Washburn On prend maintenant en compte le transport des interfaces. Si la membrane est fixe et indéformée, l'imbibition doit suivre la loi de Washburn [1921]. La position dans le capillaire i suit alors l'équation :

$$X_i(t) = 2\sqrt{\frac{h_i \gamma}{12\mu} t} \tag{IV.48}$$

En utilisant les paramètres d'adimensionalisation vus plus haut, on peut mettre l'équation IV.48 sous la forme suivante :

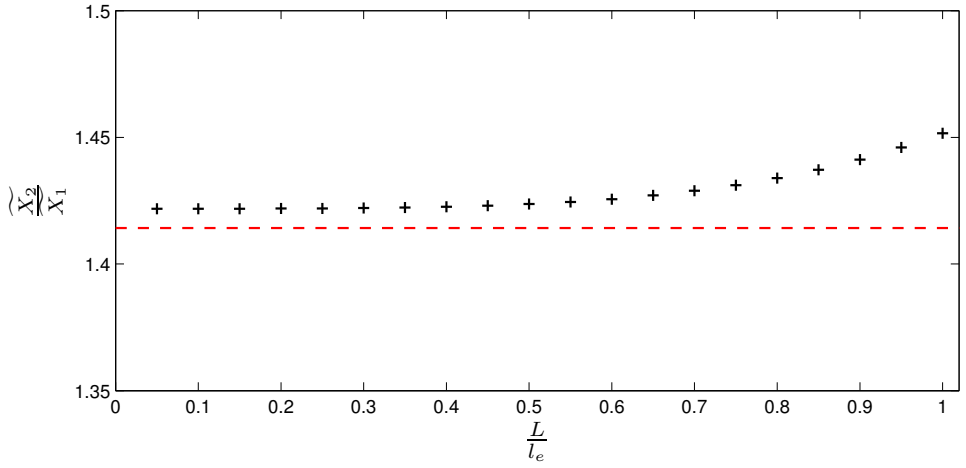

FIGURE IV.6: Ratio entre les positions $\widetilde{X}_1$ et $\widetilde{X}_2$ à $\widetilde{t} = (1/8)(L/l_e)^2$ ($h_2 = 2h_1$, $\widetilde{X}_1(0) = \widetilde{X}_2(0) = 0.05$). Résultat en (+) et prédiction théorique en (−−)

$$\widetilde{X_i}(\widetilde{t}) = 2\left(\frac{l_e}{L}\right)\sqrt{\frac{h_i}{h_1}\widetilde{t}} \tag{IV.49}$$

Ce résultat permet de changer le pas de temps de manière à avoir des simulations invariantes (qualitativement) en nombre de pas de temps. C'est la méthode d'adaptation du pas de temps qui a été utilisée. Le ratio des positions $\widetilde{X}_2/\widetilde{X}_1$ est tracé en fonction de L/l_e sur la figure IV.6. Il apparait que lorsque la lame tant à devenir indéformable ($L \ll l_e$) le ratio tant vers $\sqrt{2}$ [7]. Les positions des ménisques en fonction du temps sont tracées sur la figure IV.7. Les résultats obtenus sont très proches de la prédiction analytique. Il faut cependant remarquer que les simulations sont temporellement translatées ce qui est une conséquence des conditions initiales.

Bilan sur les cas tests La méthode numérique utilisée est donc validée par les simulations des cas tests réalisés, car ceux-ci sont conformes aux résultats attendus. D'autres tests ont été réalisés, notamment pour évaluer la qualité de la modélisation des contacts et pour fixer le nombre d'éléments à utiliser ainsi que le pas de temps.

IV.2.3.10 Angle de contact dynamique

La description qui précède ne concerne pas l'ensemble des simulations réalisées. Deux variantes ont été introduites. La première fait l'objet de cette sous-partie et consiste à ne plus négliger la dissipation visqueuse qui se produit à proximité de la ligne de contact

7. En réalité l'asymptote est légèrement supérieure à $\sqrt{2}$ ce qui découle des conditions initiales.

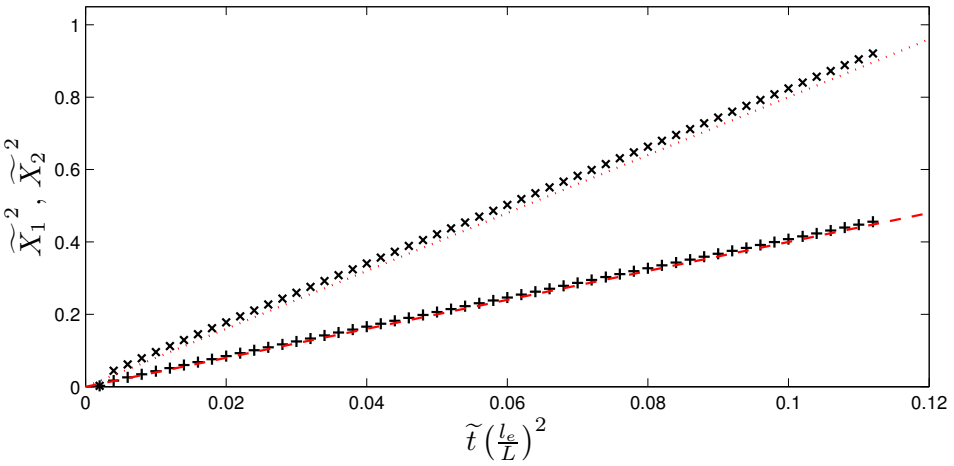

FIGURE IV.7: Positions au carré $\widetilde{X}_1^2$ et $\widetilde{X}_2^2$ en fonction de $\widetilde{t}\left(\frac{l_e}{L}\right)^2$ ($h_2 = 2h_1$, $\widetilde{X}_1(0) = \widetilde{X}_2(0) = 0.05$). Les résultats numériques sont en (+) pour le capillaire 1 et (×) pour le capillaire 2 et les prédictions en (−−) et (· · ·) respectivement

triple. Comme explicité précédemment (voir partie I.6.2), les coins de ménisques plutôt mouillants sont des zones où la dissipation visqueuse se produit dans des proportions importantes. L'angle de contact dynamique ou apparent évolue alors selon l'intensité de l'écoulement, résumée dans le nombre capillaire. D'après le modèle hydrodynamique :

$$\theta_d = (6\Gamma C_a)^{1/3} \tag{IV.50}$$

Où, θ_d est l'angle de contact dynamique et Γ le logarithme du ratio de deux longueurs du système : $ln(h_1/l_m)$, avec h_1 l'épaisseur du capillaire 1 et l_m une taille moléculaire. Le nombre capillaire prend dans ce cas sa forme classique :

$$C_a = \frac{\mu v}{\gamma} \tag{IV.51}$$

L'angle dynamique impacte uniquement la condition limite au niveau des ménisques. Cette condition se réécrit :

$$\widetilde{P}_1(\widetilde{X}_1, \widetilde{t}) = \frac{-2}{1-\widetilde{h}} cos(\theta_{d,1}) \tag{IV.52}$$

$$\widetilde{P}_2(\widetilde{X}_2, \widetilde{t}) = \frac{-2}{\frac{h_2}{h_1}+\widetilde{h}} cos(\theta_{d,2}) \tag{IV.53}$$

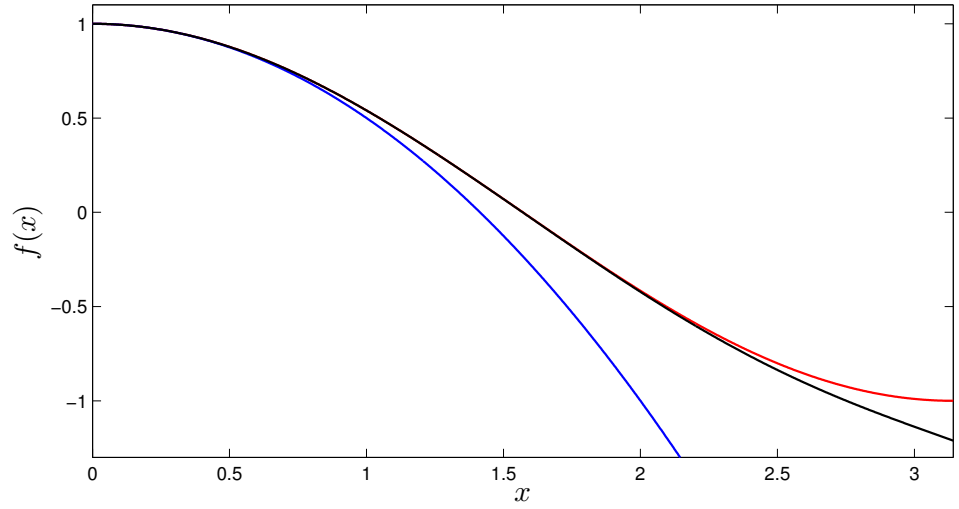

FIGURE IV.8: Fonction cosinus (−) et développements limités à l'ordre 2 (−) et 6 (-) sur l'intervalle $[0, \pi]$

Avec $\theta_{d,i}$ l'angle de contact dynamique dans le pseudo-capillaire i. Le nombre capillaire peut être exprimé en fonction du gradient de pression local adimensionné dans les pseudo-capillaires 1 et 2 :

$$C_{a,1} = -\frac{h_1}{12L}\left(1-\widetilde{h}\right)^2 \frac{\partial \widetilde{P}_1}{\partial \widetilde{x}} \tag{IV.54}$$

$$C_{a,2} = -\frac{h_1}{12L}\left(\widetilde{h}+\frac{h_2}{h_1}\right)^2 \frac{\partial \widetilde{P}_2}{\partial \widetilde{x}} \tag{IV.55}$$

Comme nous l'avons vu plus haut, le nombre capillaire intervient à la puissance 1/3 dans un cosinus. Le problème c'est que la fonction cosinus n'est pas strictement monotone et possède des points d'inflexion, ce n'est donc pas la fonction la plus simple à employer pour une résolution par Newton-Raphson. L'astuce a été de passer par un développement limité à l'ordre 6 du cosinus en 0 pour obtenir une fonction monotone (et de plus polynomiale) :

$$cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^7) \tag{IV.56}$$

Une comparaison graphique de la fonction cosinus avec les développements limités d'ordre 2 et 6 est présentée sur la figure IV.8. Il apparait que l'approximation et assez précise jusqu'à $x \sim \frac{2\pi}{3}$. Ce qui est largement suffisant puisque ce modèle n'a plus de sens dès qu'il approche $\frac{\pi}{2}$.

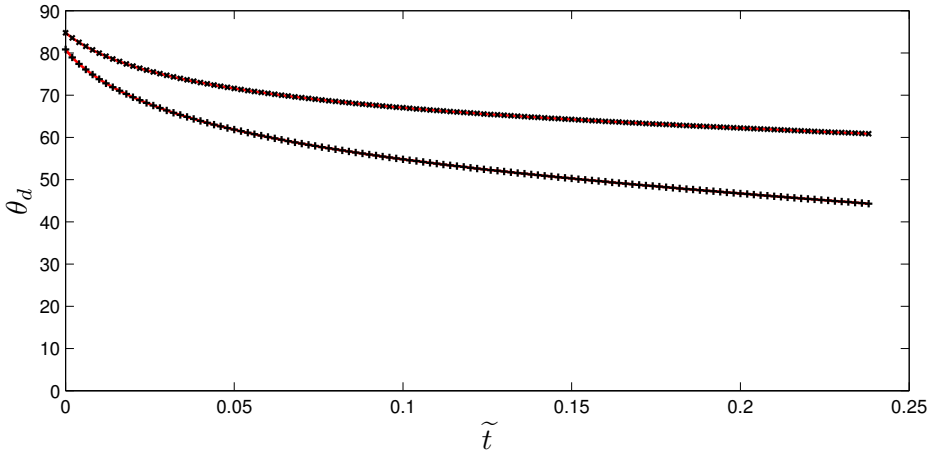

FIGURE IV.9: Angles dynamiques représentés selon deux définitions, l'une basée sur le DL d'ordre 6 (−) et l'autre sur le cosinus(+,×). Dans cette simulation, $\frac{L}{le} = 1.8$, $h_2 = 2h_1$ et $\Gamma\frac{h_1}{L} = 0.88$

Une remarque s'impose, l'expression de θ_d fait apparaitre un nouveau paramètre indépendant, $\widetilde{\Gamma} = \Gamma\frac{h_1}{L}$. L'expression de ce paramètre dépend du rapport d'aspect du système et du paramètre de la loi de De Gennes. Des tests de convergence numériques ont été réalisés et ont montré que la convergence est plus lente mais ne compromet pas la résolution numérique. Ce résultat n'est pas trivial dans la mesure où la dérivée en 0 de la fonction cos est nulle, ce qui peut rapidement causer des problèmes de conditionnement et donc d'inversibilité de la matrice tangente.

Un résultat typique est présenté sur la figure IV.9. Les angles de contact dynamiques évoluent au cours du temps. Sur la figure, les résultats avec la fonction *cos* calculés avec le gradient de pression et avec le développement limité sont comparés. La correspondance est très bonne comme attendu d'après la figure IV.8.

IV.2.3.11 Gravité

Toute expérience réalisée de manière fixe dans le référentiel terrestre est soumise à l'influence du champ de gravité terrestre. L'influence de la gravité est variable et est généralement résumée dans le nombre Bond. Dans le cas d'étude traité, le nombre qui apparait naturellement n'est pas le nombre de Bond mais le ratio de L sur la hauteur de Jurin d'un pseudo-capillaire, on nomme ce ratio, L/l_j :

$$\frac{L}{l_j} = \frac{\rho g h_1 L}{\gamma} \tag{IV.57}$$

Avec g l'intensité du champ de pesanteur et ρ la masse volumique du fluide. Ce nombre adimensionné est lié au nombre de Bond par l'expression :

$$\frac{L}{l_j} = B_o \frac{L}{h_1} \tag{IV.58}$$

Lorsque la gravité doit être prise en compte, les équations vues précédemment ne tiennent plus. Les équations de conservation adimensionnées s'écrivent alors :

$$\dot{\widetilde{h}} = -\left(\frac{l_e}{L}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}} \left(\left(1-\widetilde{h}\right)^3 \left(\frac{\partial \widetilde{P}_1}{\partial \widetilde{x}} + \frac{L}{l_j} \right) \right) \tag{IV.59}$$

$$\dot{\widetilde{h}} = \left(\frac{l_e}{L}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}} \left(\left(\frac{h_2}{h_1}+\widetilde{h}\right)^3 \left(\frac{\partial \widetilde{P}_2}{\partial \widetilde{x}} + \frac{L}{l_j} \right) \right) \tag{IV.60}$$

Les équations responsables du déplacement des interfaces doivent également être modifiées :

$$\widetilde{v_1} = -\left(\frac{l_e}{L}\right)^2 \left(1-\widetilde{h}\right)^2 \left(\frac{\partial \widetilde{P}_1}{\partial \widetilde{x}} + \frac{L}{l_j} \right) \tag{IV.61}$$

$$\widetilde{v_2} = -\left(\frac{l_e}{L}\right)^2 \left(\frac{h_2}{h_1}+\widetilde{h}\right)^2 \left(\frac{\partial \widetilde{P}_2}{\partial \widetilde{x}} + \frac{L}{l_j} \right) \tag{IV.62}$$

Lorsque la membrane est indéformable, les capillaires sont indépendants et les équations prennent la forme :

$$\dot{\widetilde{X}}_i \widetilde{X}_i \left(\frac{L}{l_e}\right)^2 \left(\frac{h_1}{h_i}\right)^2 = 2\frac{h_i}{h_1} - \frac{L}{l_j}\widetilde{X}_i \tag{IV.63}$$

Cette équation peut être intégrée, ce qui donne le résultat :

$$\left(\frac{L}{l_e}\right)^2 \left(\frac{h_1}{h_i}\right)^2 \left(-2\frac{h_1}{h_i}\frac{l_j}{L} ln\left(1 - \frac{Lh_i}{2l_j h_1}\widetilde{X}_i\right) - \left(\frac{L}{l_e}\right)^2 \widetilde{X}_i \right) = \frac{L}{l_j}\widetilde{t} \tag{IV.64}$$

Ce résultat a été comparé à des simulations réalisées avec une membrane indéformable. Un résultat est présenté sur la figure IV.10. La correspondance avec le résultat analytique est bonne. La gravité est surtout importante à prendre en compte pour la vérification expérimentale qui a été réalisée et où elle ne pouvait pas être négligée.

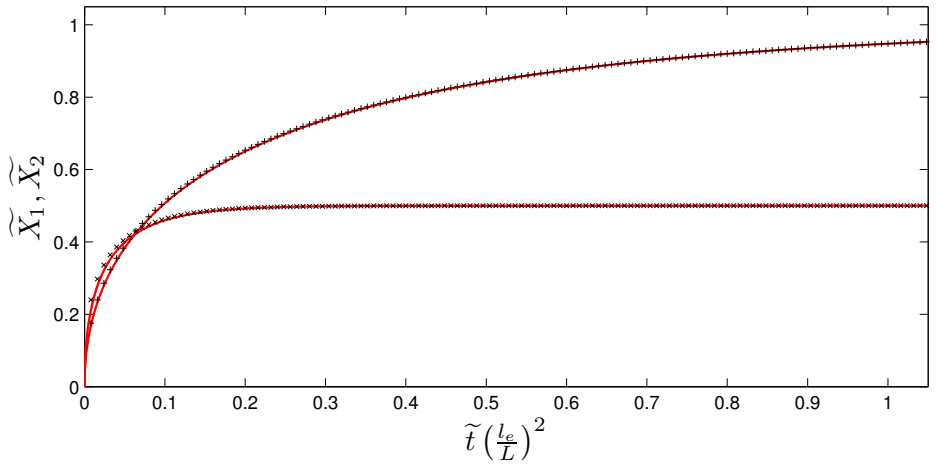

FIGURE IV.10: Position des ménisques dans le capillaire 1 (+) et 2 (×) en fonction de $\widetilde{t}\left(\frac{l_e}{L}\right)^2$ par rapport aux résultats analytiques (-). Dans cette simulation, $\frac{L}{l_e} = 0.05$, $h_2 = 2h_1$ et $L/l_j = 2$

IV.3 Résultats sur le système réduit

De nombreuses simulations ont été réalisées avec le système réduit, on peut les séparer en trois parties distinctes. La première a été réalisée en l'absence de gravité et en l'absence d'angle de contact dynamique. Elle permet d'analyser l'impact des paramètres du problème et d'observer les différents comportements du système. La deuxième a été réalisée pour évaluer l'influence de l'angle de contact dynamique sur les résultats et la dernière pour tester l'influence de la gravité sur le système en vue d'une vérification expérimentale. La même méthodologie d'analyse a été employée pour chacune des sous-parties et est décrite dans la section suivante.

IV.3.1 Méthodologie de l'analyse des résultats

Pour étudier les résultats de manière systématique et à l'échelle du système, on étudiera l'évolution de six grandeurs en fonction des paramètres qui influencent notre système. L'objectif de l'étude étant de s'intéresser à la qualité de l'imbibition, les grandeurs choisies tentent de caractériser celle-ci. Toutes les valeurs se focalisent sur l'état du système après l'imbibition et plus spécifiquement à l'instant de la fin de l'imbibition. Elles sont décrites en détail ci-dessous.

IV.3.1.1 Le déplacement maximum

Le premier paramètre de l'étude permet de quantifier l'importance du déplacement de la membrane. Il s'agit du maximum en valeur absolue du déplacement de la membrane à la fin de l'imbibition. Cette grandeur sera notée $\widetilde{h}_{max}$ et est adimensionnée par h_1.

IV.3.1.2 Durée de l'imbibition

La durée de l'imbibition correspond au temps $\widetilde{t}_T$ nécessaire pour que l'un des capillaires soit totalement rempli. Cette grandeur est divisée par le résultat attendu d'après Washburn [1921], soit par, $(h_1/4h_2)(L/l_e)^2$. Cette grandeur n'est pas définie dans certains cas, notamment lorsque la gravité doit être prise en compte.

IV.3.1.3 Position relative des ménisques

La position relative des ménisques $\Delta\widetilde{X} = \left(\widetilde{X}_2 - \widetilde{X}_1\right)$ est divisée par le résultat attendu pour une membrane indéformable, soit une division par $\left(\sqrt{h_2/h_1} - 1\right)$.

IV.3.1.4 Volume occupé dans le pseudo-capillaire 1

Cette grandeur, notée $\widetilde{V}_1$, correspond au volume de liquide présent dans le capillaire 1 en fin d'imbibition. Elle est divisée par le résultat attendu pour une membrane indéformable, $1/\sqrt{h_2/h_1}$.

IV.3.1.5 Volume occupé dans le pseudo-capillaire 2

Cette autre grandeur, $\widetilde{V}_2$, est équivalente à $\widetilde{V}_1$ mais pour le capillaire 2. Elle est divisée par le résultat attendu pour une membrane indéformable, h_2/h_1.

IV.3.1.6 Volume total occupé

Le volume total, noté $\widetilde{V}_T$, correspond au volume de liquide dans le système en fin d'imbibition. Il est divisé par le volume total qui peut être occupé, $1 + h_2/h_1$.

IV.3.2 Résultats de simulation sur les systèmes réduits

Les résultats se divisent en trois sous-catégories selon les conditions limites employées. Par la suite, on les étudiera systématiquement en commençant par l'encastrement du côté du bain de liquide, puis l'encastrement du côté opposé et enfin l'encastrement des deux côtés.

IV.3.2.1 Encastrement au niveau de la source

Dans le cas de l'encastrement à la source, le paramètre L/l_e a été varié de 1 à 4.5 sur 31 valeurs. Le paramètre h_2/h_1 a été varié de 1.125 à 2 sur 8 valeurs. Les résultats obtenus sont présentés sur les figures IV.12 et IV.13. Sur les graphiques présentés, les jeux de valeurs obtenus pour h_2/h_1 constant sont représentés continument. Une représentation graphique de quelques résultats est présentée sur la figure IV.11.

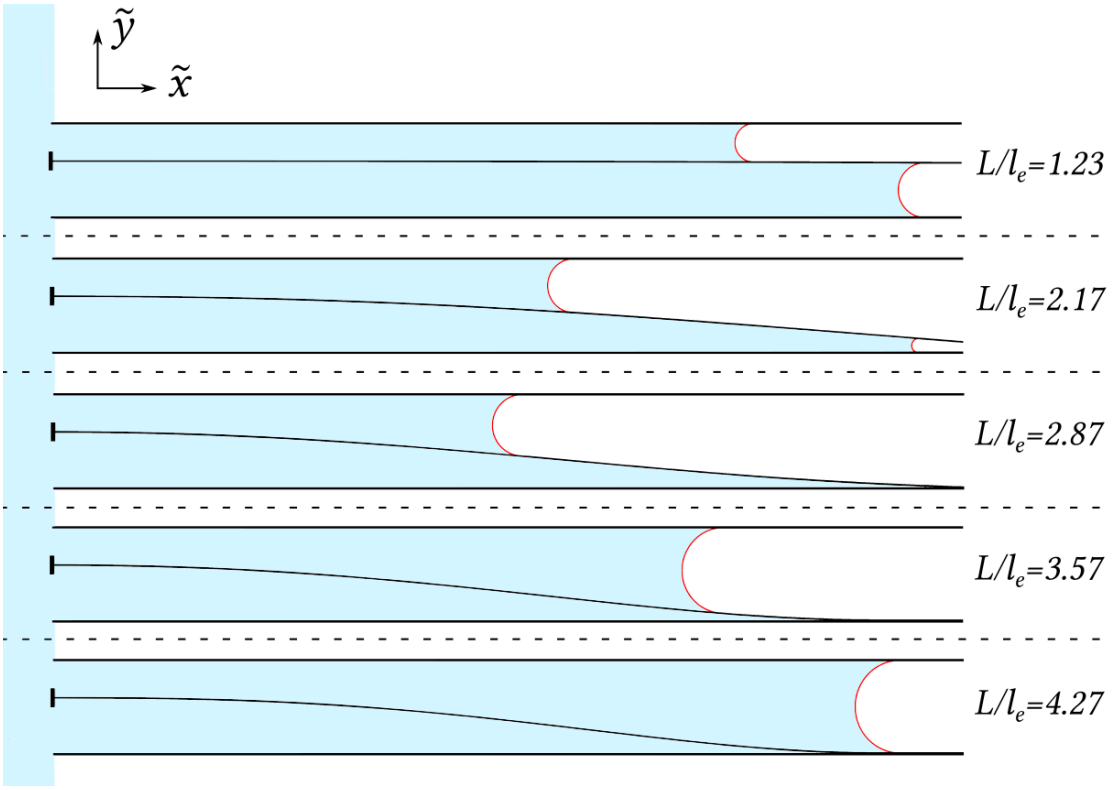

FIGURE IV.11: Représentation schématique de différents résultats dans le cas de l'encastrement à la source, le ratio représenté est $h_2/h_1 = 3/2$

Description qualitative des résultats Tous les résultats indiquent l'existence de différents domaines. Les grandeurs étudiées pour de faibles valeurs de L/l_e ($L/l_e \in$

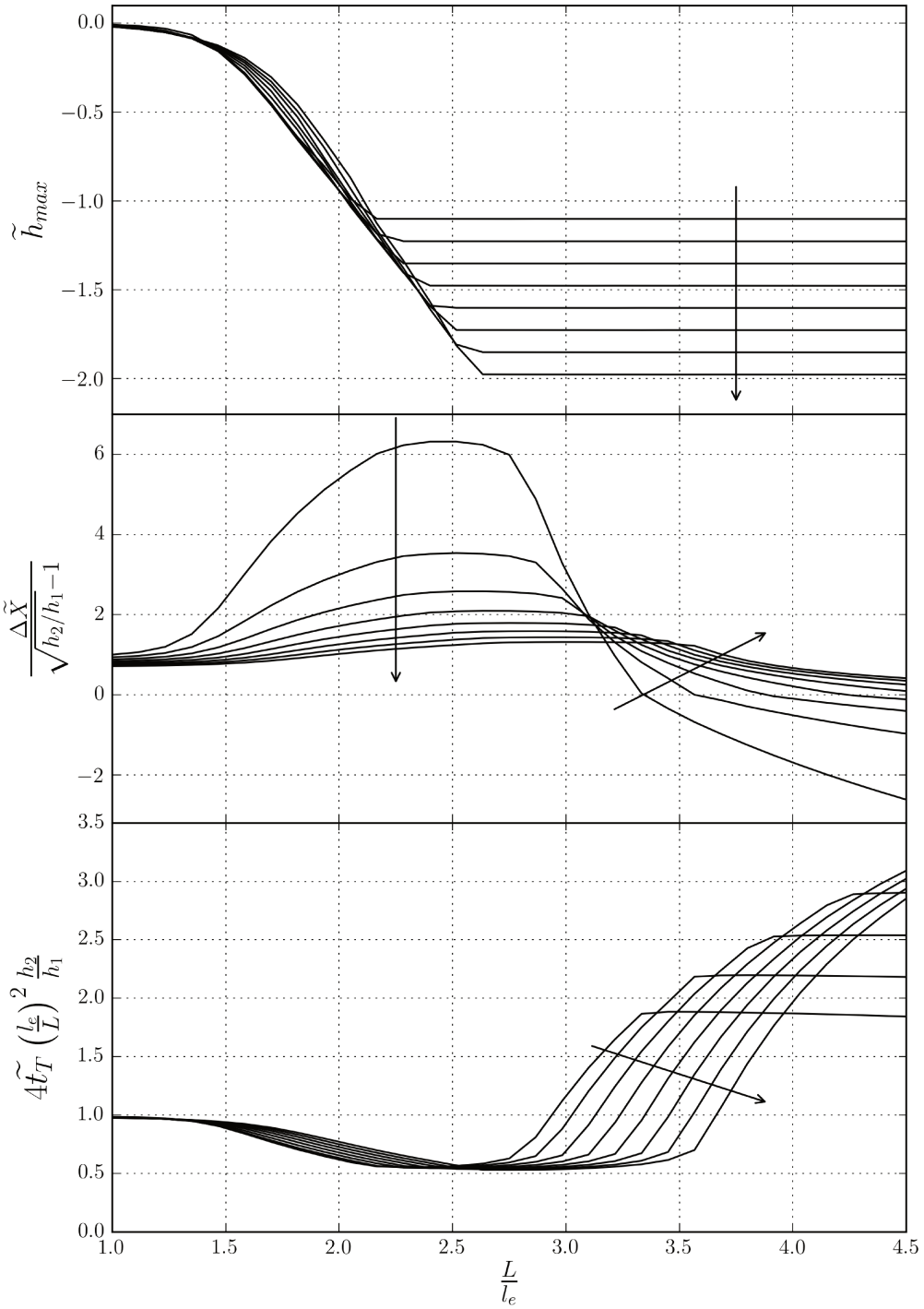

FIGURE IV.12: Représentation des résultats dans le cas de l'encastrement à la source pour les trois première grandeurs en fonction de L/l_e, chaque courbe noire représente une valeur différente de h_2/h_1. La flèche indique le sens croissant du ratio h_2/h_1

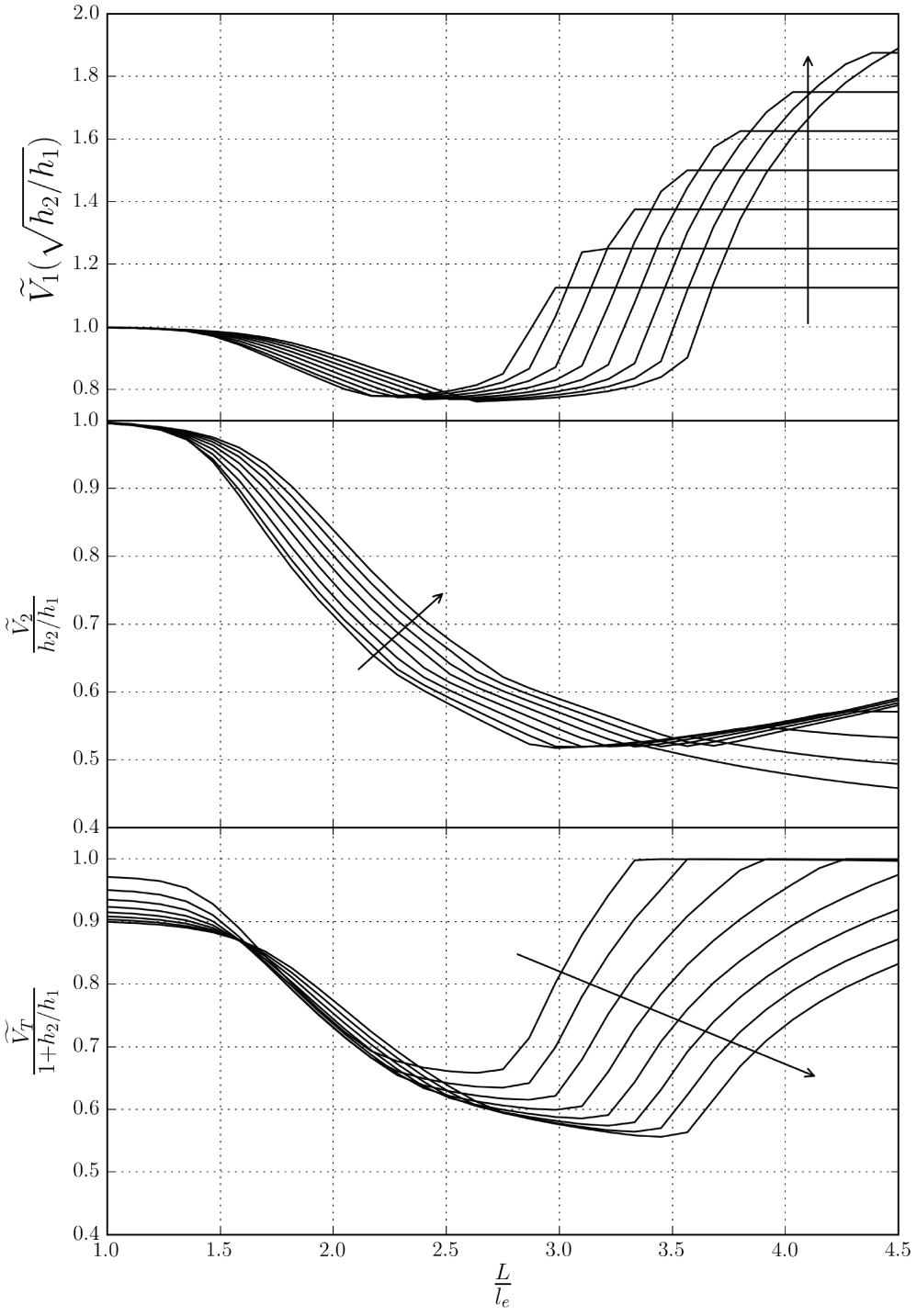

FIGURE IV.13: Représentation des résultats dans le cas de l'encastrement à la source pour les trois dernières grandeurs en fonction de L/l_e, chaque courbe noire représente une valeur différente de h_2/h_1. La flèche indique le sens croissant du ratio h_2/h_1

$[1, 1.5]$) sont faiblement impactées par la variation de L/l_e. A mesure que le ratio augmente ($L/l_e \in [1.5, 2.25]$), le système est influencé par la membrane qui commence à se déformer. La membrane fléchit du côté du capillaire le plus large dans tous les cas simulés, le temps de l'imbibition est réduit par la déformation de la membrane et l'écart des positions des ménisques est progressivement accentué. Ce régime s'achève au moment où la membrane touche la paroi du capillaire 2. Dans le domaine suivant ($L/l_e \in [2.25, 3.25]$), la membrane touche la paroi du capillaire 2 mais ne bloque pas l'écoulement pour autant (elle forme un capillaire convergent), la durée de l'imbibition stagne et la différence de position des ménisques ne varie plus. Enfin, dans le quatrième domaine observé ($L/l_e \in [3.25, 4.5]$), le contact de la membrane à la paroi inférieure se produit toujours mais la paroi se déforme substantiellement, ce qui inhibe l'imbibition. La durée de l'imbibition augmente alors fortement puis stagne lorsque c'est le ménisque du capillaire fin (1) qui détermine la durée de l'imbibition.

Influence de h_2/h_1 Le paramètre h_2/h_1 influence fortement les résultats, lorsqu'il augmente, il retarde la transition d'un domaine au suivant. Cela peut s'expliquer par le fait que les transitions sont dépendantes du contact entre la membrane et la paroi du capillaire le plus large. Lorsque le contact est susceptible de se produire pour un capillaire 2 large, le fléchissement est retardé puisque la pression capillaire est plus faible, le fléchissement total à réaliser est plus important, et la dynamique de l'imbibition est plus rapide, ce qui permet à l'imbibition de s'achever avant que le contact ne se produise.

Remplissage des pseudo-capillaires Le pseudo-capillaire le plus large (2) est clairement défavorisé par la déformabilité de la lame. Ce résultat découle de la déviation de la membrane qui se fait systématiquement de son côté. Pour autant, le capillaire 1 ne bénéficie pas nécessairement de la rétractation de l'autre puisque son imbibition est pénalisée par la forme divergente qu'il prend. C'est seulement dans les deux derniers domaines ($L/l_e > 2.5$) que celui-ci en bénéficie. Ce résultat découle de l'incapacité de l'écoulement dans le capillaire 2 à atteindre l'extrémité du système, ce qui permet au capillaire 1 de se remplir intégralement (dans le dernier domaine) mais très lentement. Globalement, le système s'imbibe donc moins bien lorsque la flexibilité est intermédiaire puis aussi bien, voire mieux, lorsque la flexibilité est importante. Le ratio h_2/h_1 défavorise le remplissage lorsque l'élasticité augmente, ce constat découle du retard à la transition d'un domaine au suivant qui croît avec ce ratio.

IV.3.2.2 Encastrement opposé à la source

On considère maintenant la situation où l'encastrement est du côté opposé à la source. Dans ce cas de figure, le paramètre L/l_e a été varié de 1 à 4.5 sur 31 valeurs comme dans le cas précédent. Le paramètre h_2/h_1 a été varié de 1.125 à 2 sur 8 valeurs. Les résultats obtenus sont représentés sur les figures IV.15 et IV.16. Sur les graphiques présentés, les jeux de valeurs obtenus pour h_2/h_1 constant sont représentés continument. Une représentation graphique des résultats à la fin des simulations est présentée sur la figure IV.14.

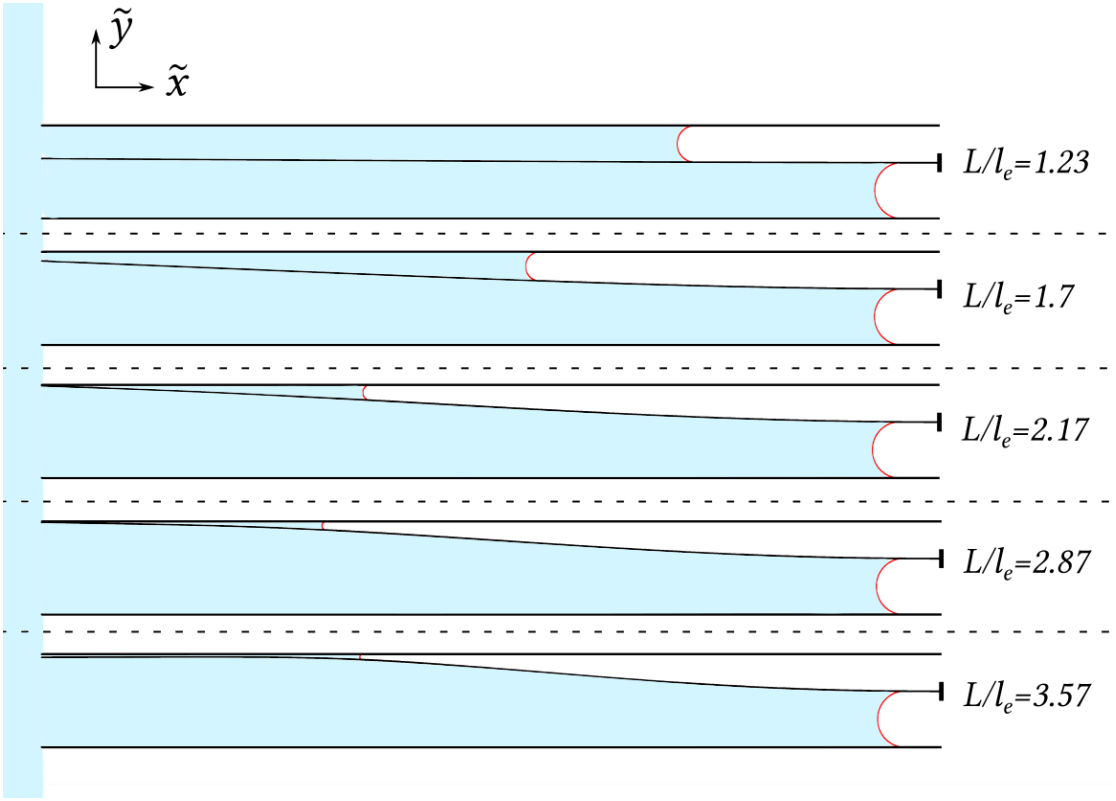

FIGURE IV.14: Représentation schématique de différents résultats dans le cas de l'encastrement opposé à la source, le ratio représenté est $h_2/h_1 = 3/2$

Description qualitative des résultats Le tracé de $\widetilde{h}_{max}$ permet d'identifier les différents régimes observables. Contrairement au cas précédent l'influence de la flexibilité apparait dès $L/l_e \sim 1$. Le premier domaine correspond à de faibles valeurs de L/l_e ($L/l_e < 1.75$) il est marqué par la croissance de la flexion (du côté du capillaire le plus fin) et s'achève lorsque la membrane arrive au contact de la paroi. Un deuxième domaine apparait lorsque L/l_e augmente ($L/l_e \in [1.75, 3.25]$). Ce domaine est caractérisé par le contact de la membrane et de la paroi. Sa limite inférieure est visible sur l'ensemble des graphiques mais sa limite supérieure apparait uniquement clairement sur le premier

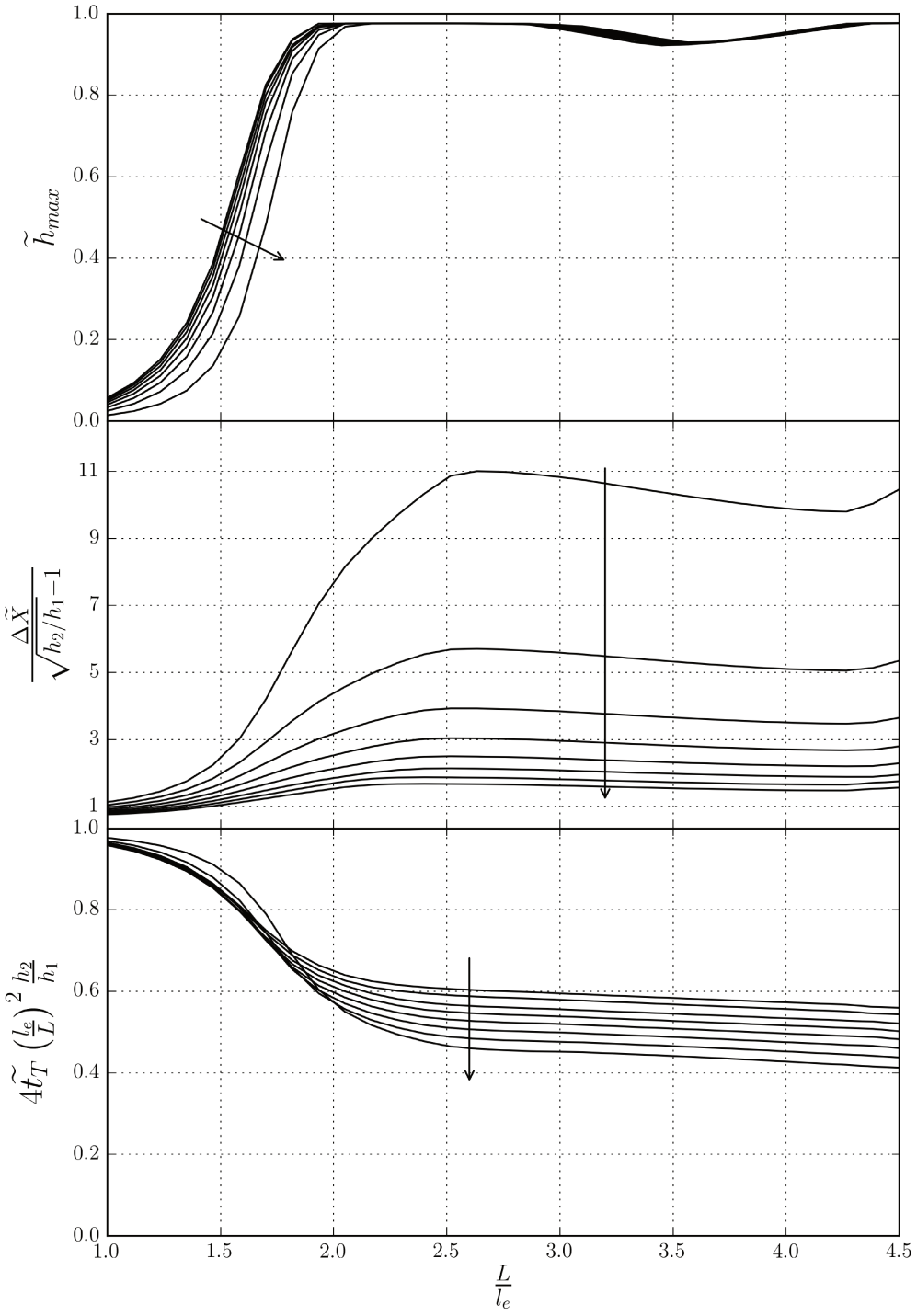

FIGURE IV.15: Représentation des résultats dans le cas de l'encastrement opposé à la source pour les trois première grandeurs en fonction de L/l_e, chaque courbe noire représente une valeur différente de h_2/h_1. La flèche indique le sens croissant du ratio h_2/h_1

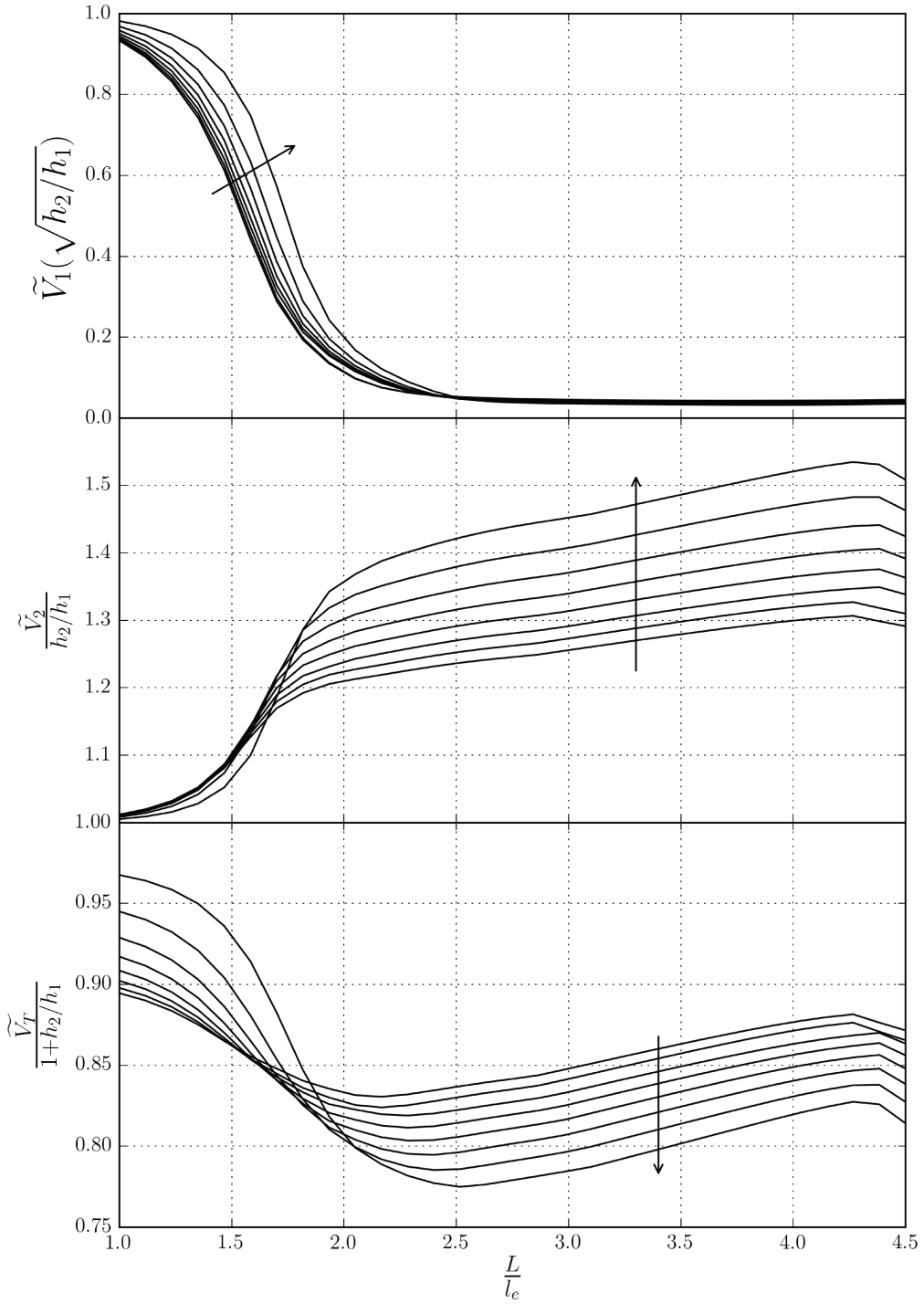

FIGURE IV.16: Représentation des résultats dans le cas de l'encastrement opposé à la source pour les trois dernières grandeurs en fonction de L/l_e, chaque courbe noire représente une valeur différente de h_2/h_1. La flèche indique le sens croissant du ratio h_2/h_1

graphique. Le dernier domaine ($L/l_e > 3.25$) correspond à une déformabilité si forte de la membrane qu'elle se réorganise ce qui inhibe momentanément le contact. Dans cette zone la membrane peut se déformer suffisamment pour s'aplatir parallèlement à la paroi. La durée de l'imbibition diminue dans tous les cas et sature autour d'un facteur fonction de h_2/h_1. Cet effet peut s'interpréter comme la conséquence de l'ouverture du capillaire 2 qui lui donne une forme convergente, une forme connue pour améliorer la vitesse de l'imbibition ([Reyssat *et al.*, 2008], [Gorce *et al.*, 2016]).

Influence de h_2/h_1 Contrairement au cas précédent, l'influence de h_2/h_1 est assez faible voire inexistante pour les valeurs supérieures à 1.5. L'impact existe seulement par l'intermédiaire de la variation du volume à occuper et de la cinétique qui est plus rapide lorsque le capillaire concurrent est plus large.

Remplissage des pseudo-capillaires Le capillaire le plus fin (1) est très fortement pénalisé par le fléchissement puisque c'est de son côté que la déformation se produit. Le volume qu'il contient sature assez vite autour de 0.05, cette valeur possède cependant peu de sens physique car elle dépend des conditions initiales (qui ont été appliquées de manière relativement arbitraire, voir IV.2.2.5). Contrairement au cas précédent, le capillaire 2 bénéficie directement de la déformation de la membrane et voit son volume occupé s'accroitre rapidement puis saturer. Enfin, le volume total est négativement impacté par la flexion de la membrane, qui inhibe l'écoulement dans le capillaire 1 mais permet au capillaire 2 d'occuper sa fraction du volume et de le remplir.

IV.3.2.3 Double encastrement

Enfin, on considère la situation où le système est encastré à ces deux extrémités. Dans ce cas de figure, le paramètre L/l_e a été varié de 1 à 7 sur 31 valeurs. Le paramètre h_2/h_1 a été varié de 1.125 à 2 sur 8 valeurs. Les résultats obtenus sont représentés sur les figures IV.18 et IV.19. Sur les graphiques présentés, les jeux de valeurs obtenus pour h_2/h_1 constant sont représentés continument. Une représentation graphique des résultats à la fin des simulations est présentée sur la figure IV.17.

Description qualitative des résultats A faible ratio, L/l_e, le système est très peu sensible à la déformation de la membrane, cette "indifférence" reste valable tant que $L/l_e < 2.5$. Une valeur beaucoup plus élevée que dans les cas de simple encastrement. Pour des valeurs plus importantes ($L/l_e \in [2.5, 4.5]$), la membrane commence à se déformer. Contrairement aux autres cas, ce régime s'achève avant la mise en place

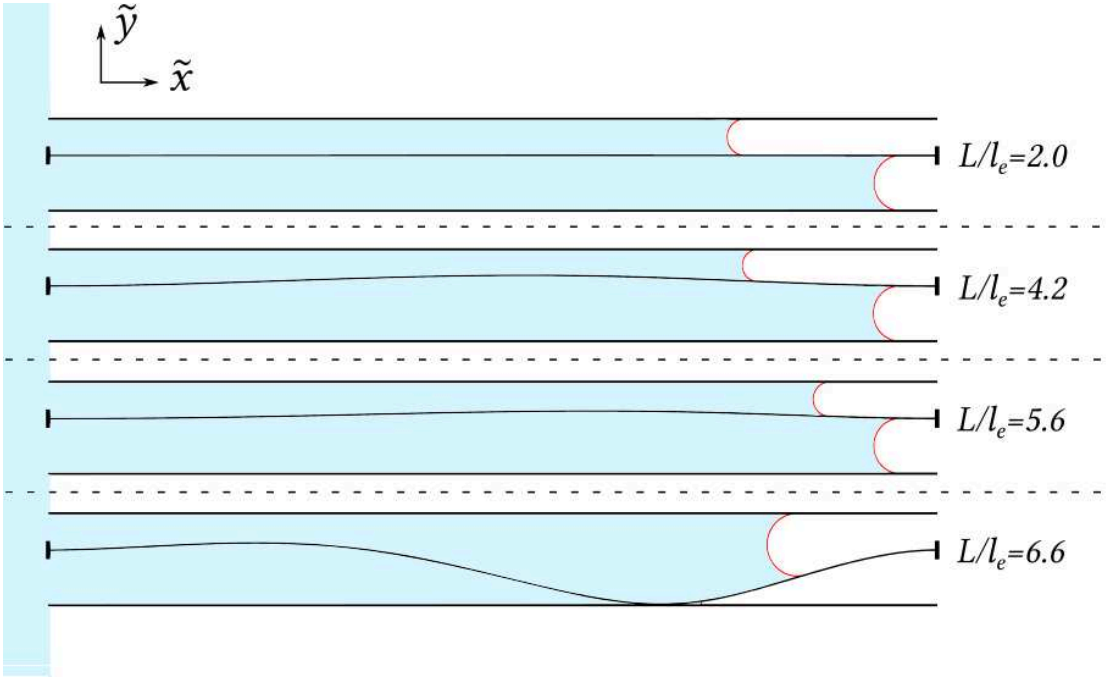

FIGURE IV.17: Représentation schématique de différents résultats dans le cas de l'encastrement double, le ratio représenté est $h_2/h_1 = 3/2$

des contacts, par la transition du basculement de la membrane du capillaire le plus fin vers le plus large. Cette transition est surprenante dans la mesure où elle se fait continument et pas brutalement ce qui implique qu'il existe des zones dans lesquelles il n'y a pratiquement pas de déformation de la membrane malgré une forte élasticité de celle-ci. Dynamiquement, elle correspond à l'apparition d'un mécanisme assez étonnant et représenté schématiquement sur la figure IV.20. Le basculement se produit lorsque le capillaire le plus large est en fin d'imbibition et que le capillaire le plus fin impose le moment le plus important au centre du système. Le capillaire le plus fin alimente alors la fin de son imbibition par la déformation de la membrane. Dans le régime suivant ($L/l_e \in [4.5, 6]$), la durée de l'imbibition augmente fortement alors qu'elle était inchangée jusqu'alors. Cela correspond à la déformation de la membrane dans les deux capillaires qui implique une pénalisation de l'écoulement dans les deux. Dans le dernier régime, $L/l_e > 6$, la durée de l'imbibition augmente de nouveau, le capillaire le plus large contrôle l'imbibition et bloque la membrane de son côté.

Influence de h_2/h_1 Le paramètre h_2/h_1 a une importance très forte dans cette configuration, les valeurs de h_2/h_1 proches de 1 retardent (en termes de L/l_e) le passage d'un régime au suivant. Cet effet rapproche ce cas d'étude du premier, l'encastrement au niveau de la source. Comme précédemment, c'est l'importance de la dynamique de l'imbibition qui justifie l'impact de ce paramètre.

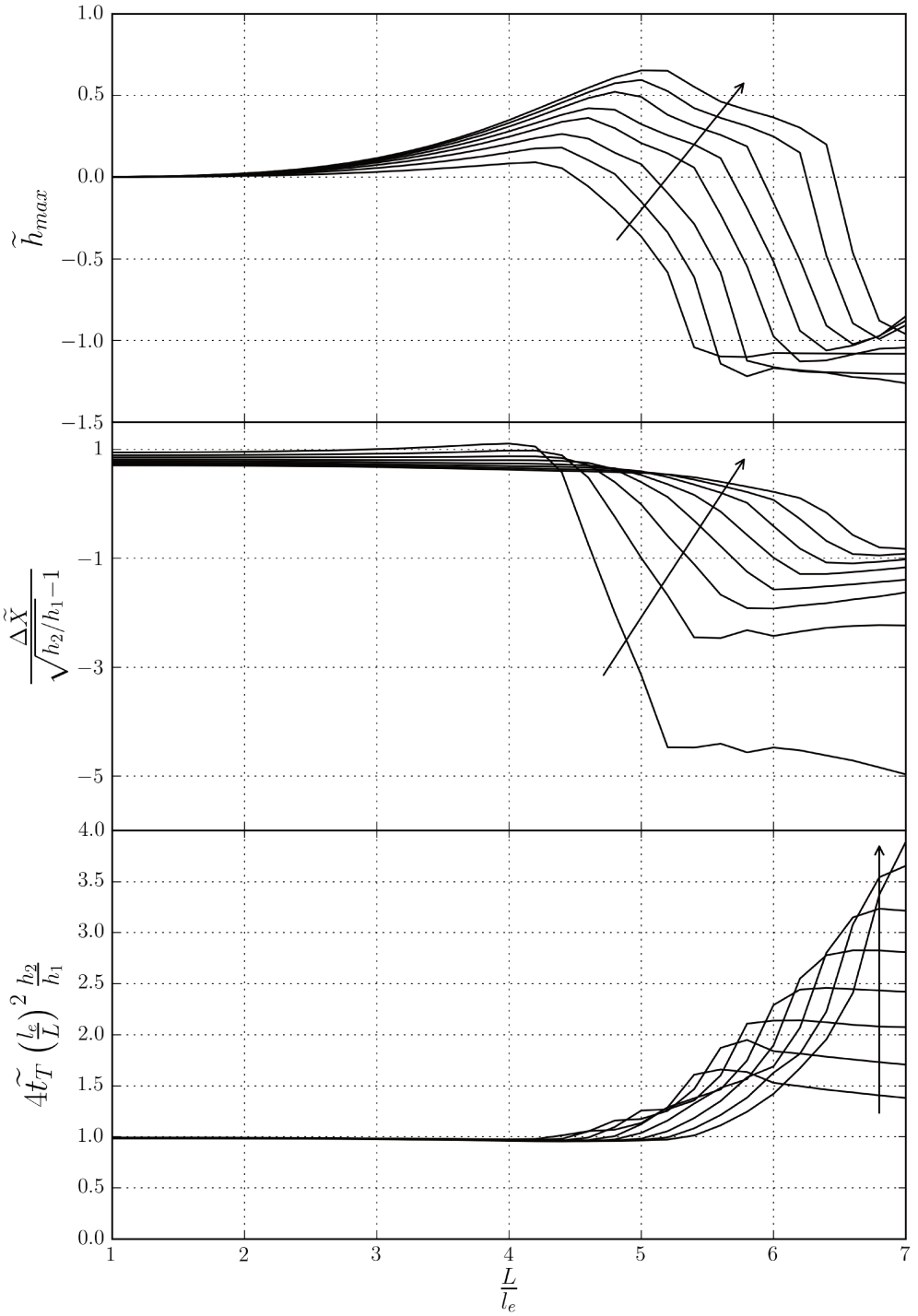

FIGURE IV.18: Représentation des résultats dans le cas du double encastrement pour les trois première grandeurs en fonction de L/l_e, chaque courbe noire représente une valeur différente de h_2/h_1. La flèche indique le sens croissant du ratio h_2/h_1

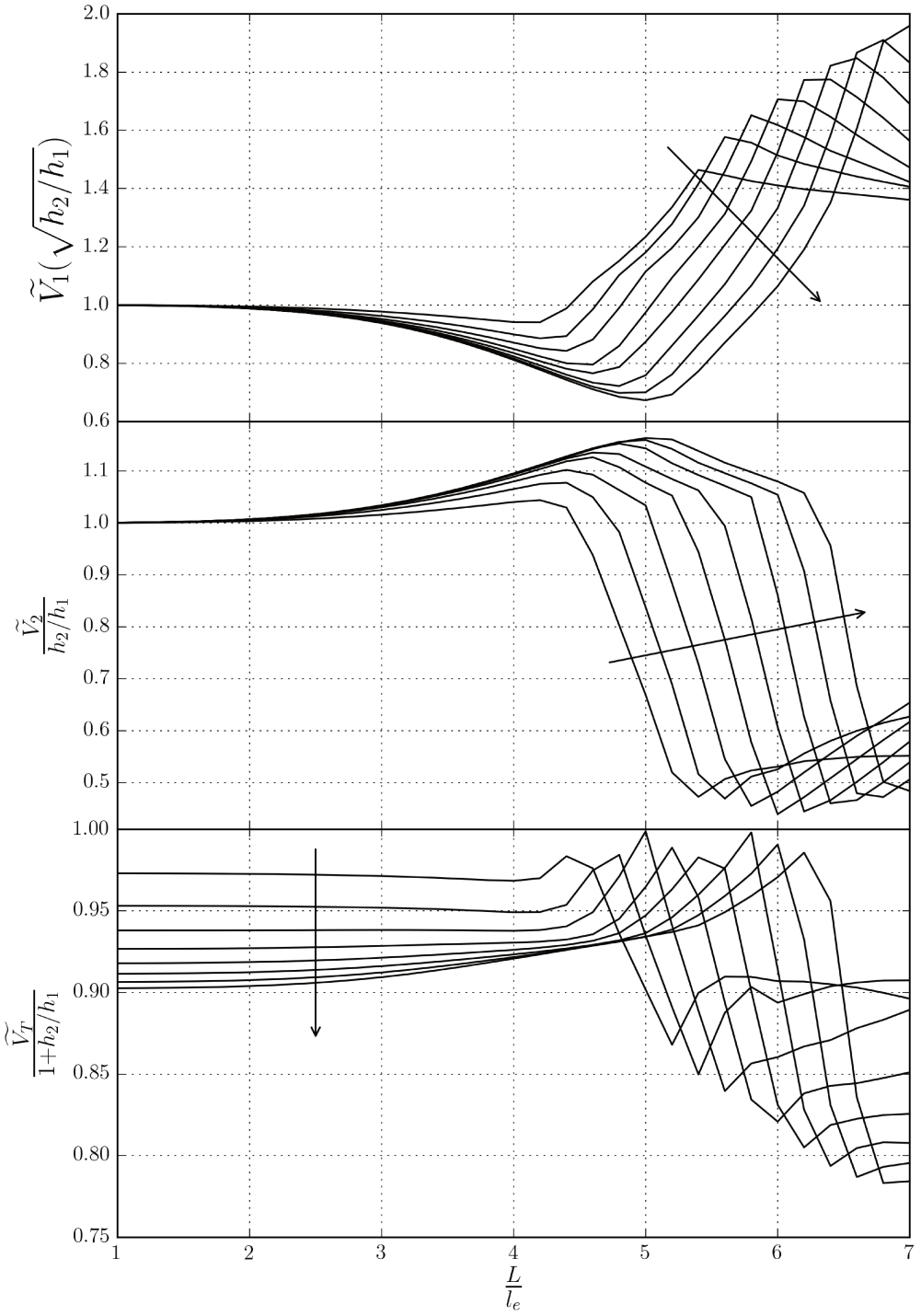

FIGURE IV.19: Représentation des résultats dans le cas du double encastrement pour les trois dernières grandeurs en fonction de L/l_e, chaque courbe noire représente une valeur différente de h_2/h_1. La flèche indique le sens croissant du ratio h_2/h_1

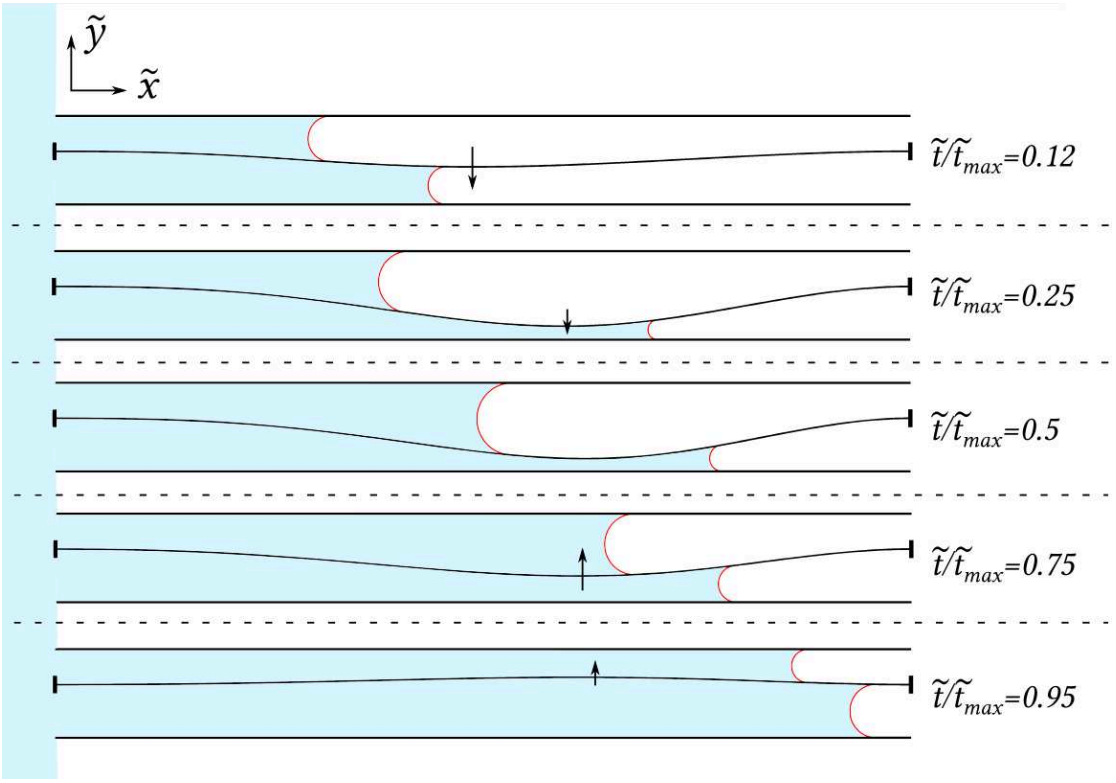

FIGURE IV.20: Représentation schématique à partir des résultats de simulation du mécanisme de basculement

Remplissage des pseudo-capillaires la variation du volume occupé des capillaires est plus complexe que dans les cas précédents à cause du changement de déviation de la membrane en fonction des paramètres. Les deux capillaires subissent des variations opposées à L/l_e équivalent. Le volume total est cependant imposé par l'influence du capillaire le plus large. L'imbibition est donc légèrement pénalisée en termes de remplissage par la déformabilité, bien que les résultats ne soient pas aussi claires que dans les cas précédents et que l'effet ne soit pas très prononcé.

IV.3.3 Influence de l'angle de contact dynamique

L'influence de l'angle dynamique a été prise en compte pour les trois cas de l'étude. Les mêmes simulations ont été réalisées avec un paramètre $\widetilde{\Gamma} = 0.02$. Une seconde valeur a été utilisée pour l'étude, par mesure de clarté et de concision les résultats correspondants ne sont pas représentés.

IV.3.3.1 Encastrement au niveau de la source

Les résultats obtenus avec l'angle de contact dynamique pour un encastrement au niveau de la source sont représentés sur les figures IV.21 et IV.22. Il apparait que sa prise en compte induit un déplacement des différents domaines en fonction de L/l_e. Ce déplacement semble indépendant de h_2/h_1. On peut interpréter ce constat par un argument simple, la pression capillaire est diminuée par la dissipation dans les coins de ménisques. Cette diminution peut être intégrée dans une nouvelle longueur capillaire l_e^d, sous la forme suivante :

$$l_e^d = \left(\frac{B h_1^2}{\gamma cos(\theta_d)} \right)^{1/4} \tag{IV.65}$$

Cette nouvelle forme implique une translation en fonction de l'angle de contact dynamique telle que constatée sur les figures IV.21 et IV.22. Cette description très schématique explique le phénomène mais ne permet pas de faire de prédiction dans la mesure où la valeur de θ_d utilisée dans l'équation ci-dessus n'est pas explicitement donnée et varie dans le temps. Le seul paramètre qui n'est pas simplement translaté c'est la durée de l'imbibition, qui s'accroit à cause de la perte de charge supplémentaire prise en compte dans la dissipation au niveau de l'angle de contact. Cette interprétation n'est pas la seule valable, on peut également supposer que la flexion de la membrane dépend de l'avance-retard, c'est-à-dire de la position relative des ménisques. C'est particulièrement vrai dans ce cas d'étude où la flexion se fait du côté où l'imbibition est la plus rapide. Lorsqu'il est pris en compte, l'angle dynamique diminue l'avance-retard et retarde du même coup les transitions d'un domaine au suivant.

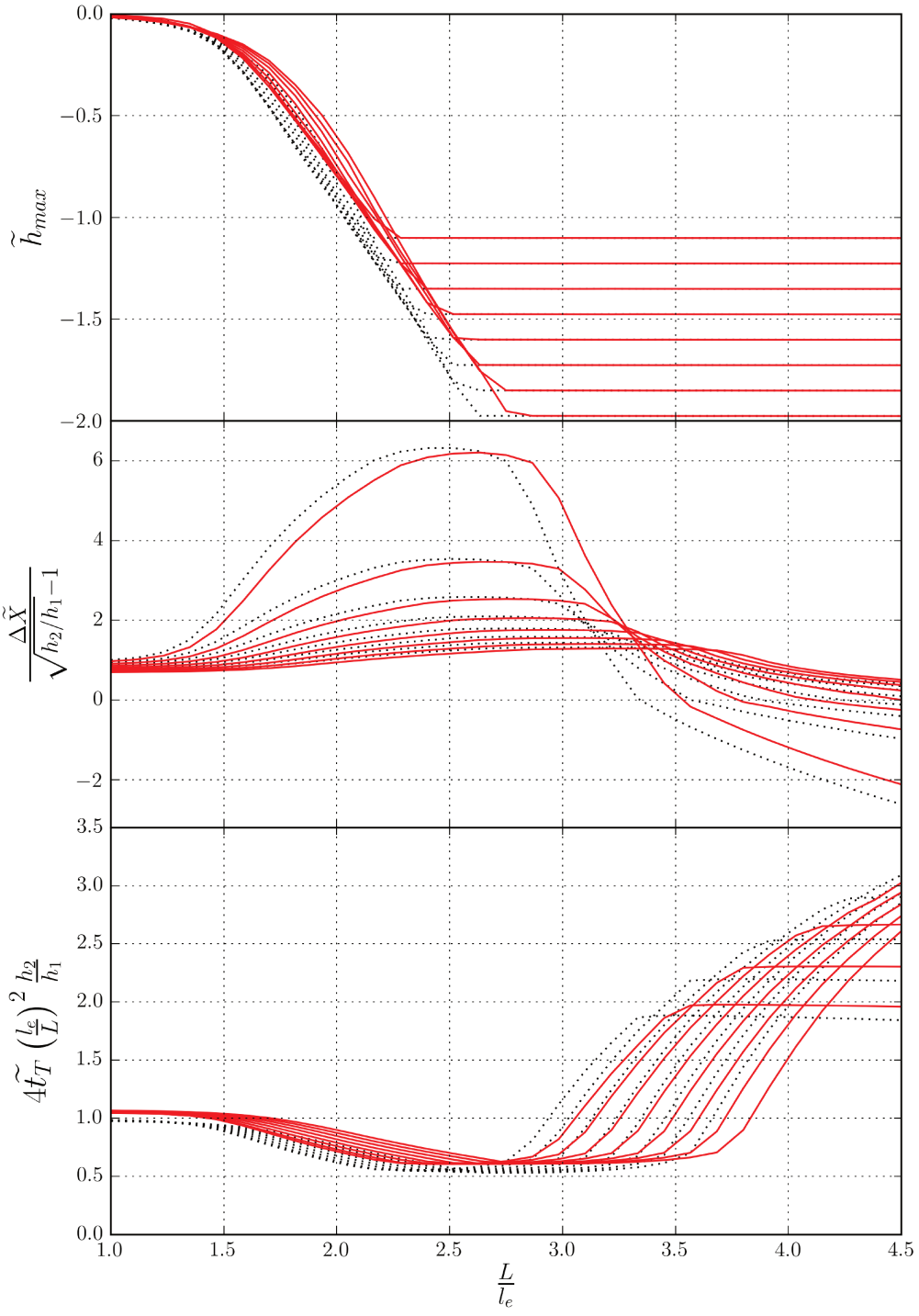

FIGURE IV.21: Représentation des résultats dans le cas de l'encastrement à la source, pour les trois première grandeurs en fonction de L/l_e, chaque courbe en $(\cdots)$ représente une valeur différente de h_2/h_1 sans prise en compte de l'angle dynamique et les courbes en $(-)$ représentes les valeurs avec l'angle dynamique et $\widetilde{\Gamma} = 0.02$

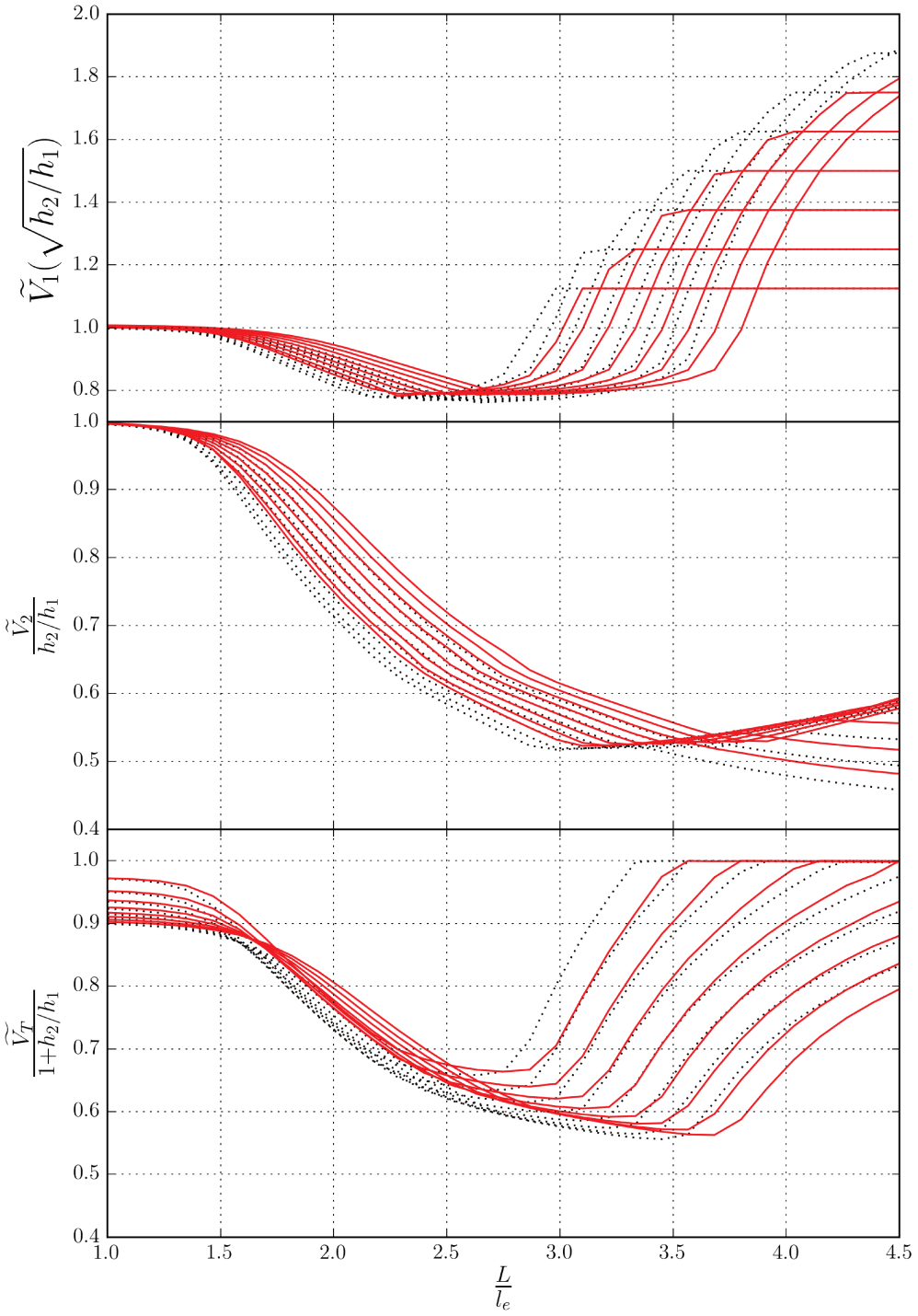

FIGURE IV.22: Représentation des résultats dans le cas de l'encastrement à la source, pour les trois dernières grandeurs en fonction de L/l_e, chaque courbe en $(\cdots)$ représente une valeur différente de h_2/h_1 sans prise en compte de l'angle dynamique et les courbes en $(-)$ représentes les valeurs avec l'angle dynamique et $\widetilde{\Gamma} = 0.02$

IV.3.3.2 Encastrement opposé à la source

Les résultats obtenus avec l'angle de contact dynamique pour un encastrement opposé à la source sont représentés sur les figures IV.23 et IV.24. *A contrario*, il apparait que l'angle de contact dynamique influence peu voire pas les résultats. Le seul impact réel porte sur la durée totale de l'imbibition. Ce résultat appuie le second argument présenté dans la section précédente et est en contradiction avec le premier. L'explication provient de la dynamique de l'imbibition. Dans le cas précédent, la compétition dépendait essentiellement des positions des ménisques[8] alors qu'ici, elle est guidée par la pression capillaire seule, qui dirige la flexion dès l'instant initial. L'angle de contact dynamique abaisse la pression capillaire (en valeur absolue) mais l'écoulement dans le capillaire le plus fin s'achève très rapidement et l'effet ne se matérialise pas de manière claire.

8. Raison pour laquelle le basculement se fait du côté où l'imbibition est la plus rapide

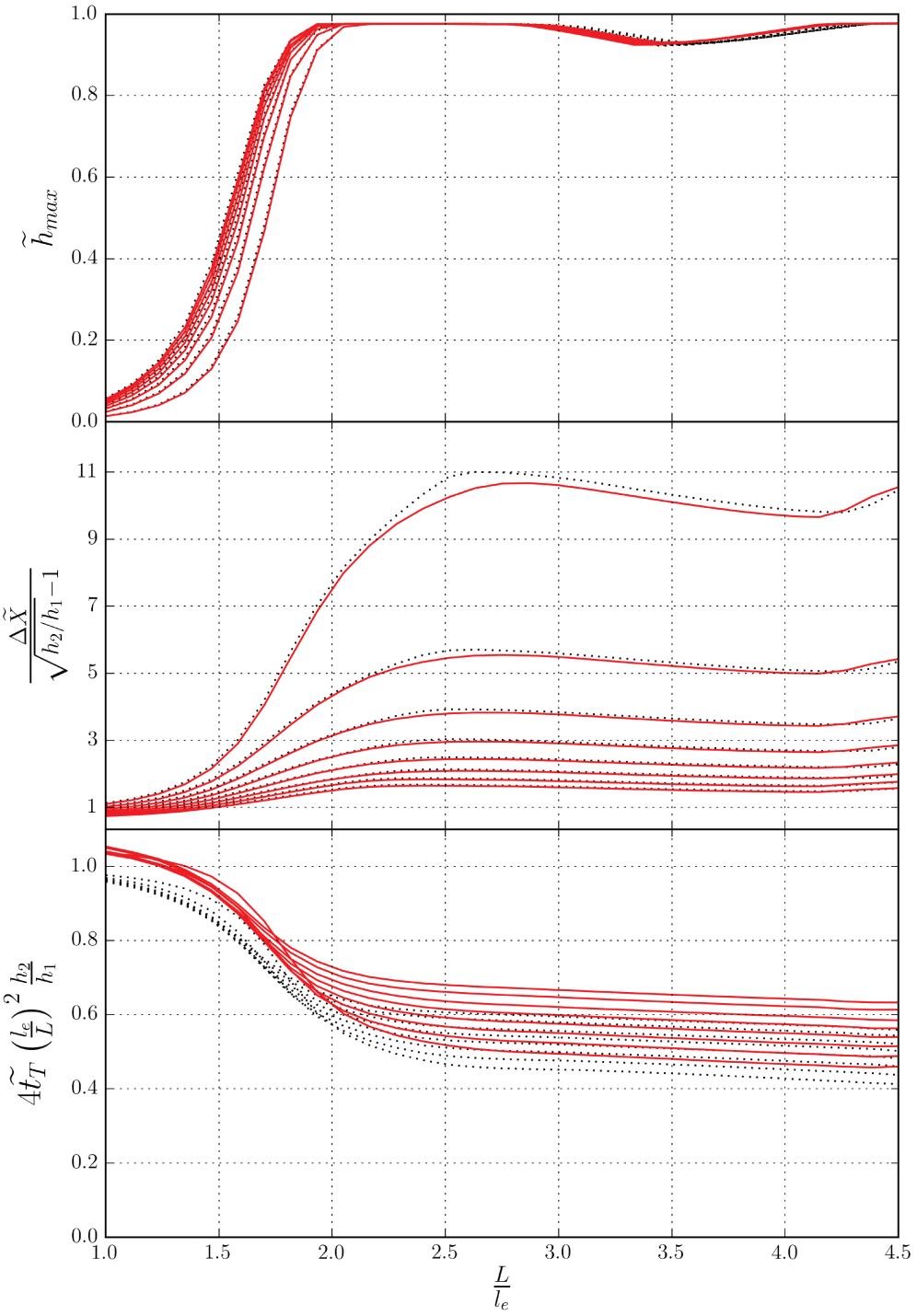

FIGURE IV.23: Représentation des résultats dans le cas de l'encastrement opposé à la source, pour les trois premières grandeurs en fonction de L/l_e, chaque courbe en $(\cdots)$ représente une valeur différente de h_2/h_1 sans prise en compte de l'angle dynamique et les courbes en $(-)$ représentes les valeurs avec l'angle dynamique et $\widetilde{\Gamma} = 0.02$

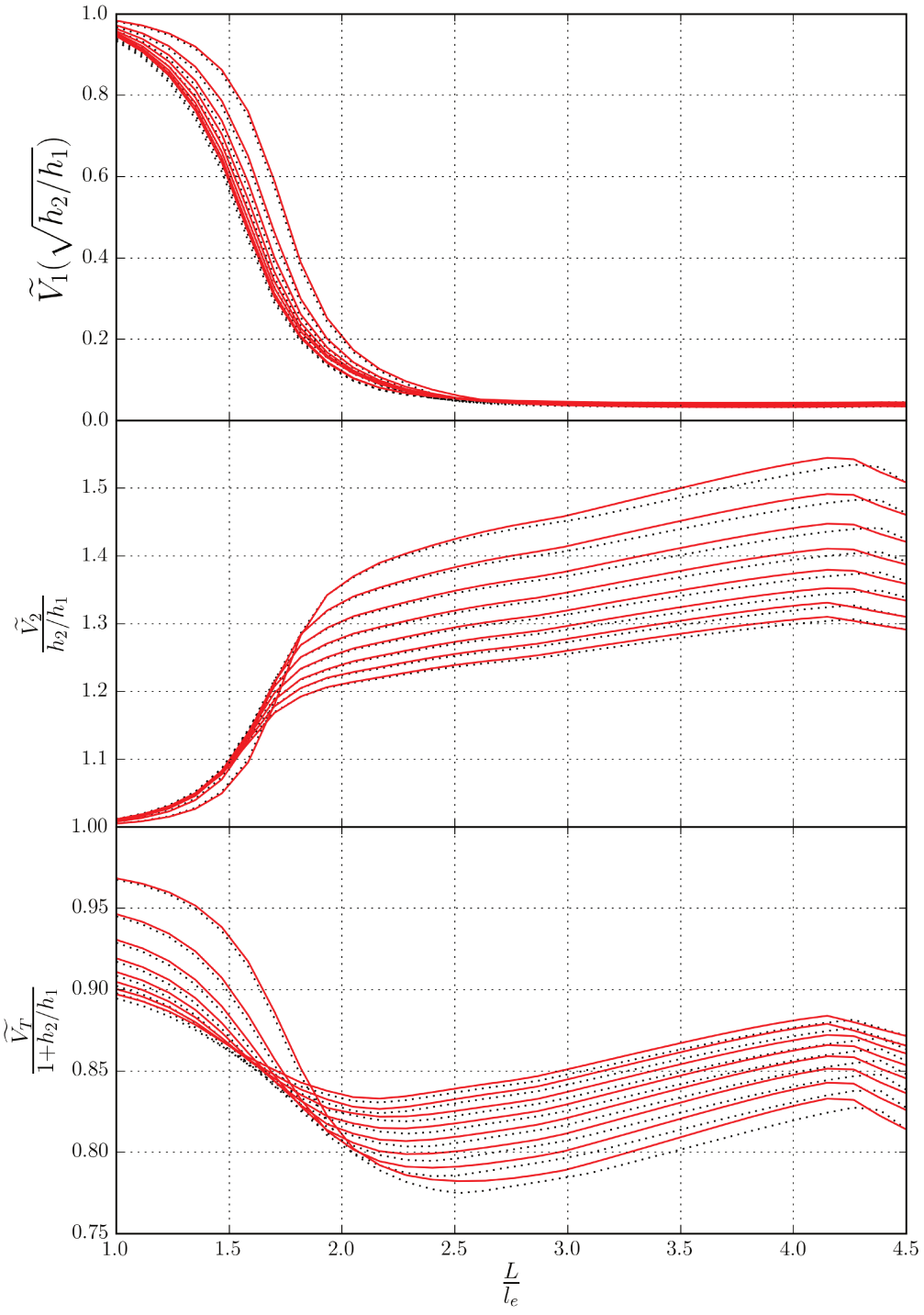

FIGURE IV.24: Représentation des résultats dans le cas de l'encastrement opposé à la source, pour les trois dernières grandeurs en fonction de L/l_e, chaque courbe en $(\cdots)$ représente une valeur différente de h_2/h_1 sans prise en compte de l'angle dynamique et les courbes en $(-)$ représentes les valeurs avec l'angle dynamique et $\widetilde{\Gamma} = 0.02$

IV.3.3.3 Double encastrement

Les résultats obtenus avec l'angle de contact dynamique pour un double encastrement sont représentés sur les figures IV.25 et IV.26. L'effet de l'angle de contact dynamique existe de nouveau et déplace l'apparition des différents régimes vers de plus grandes valeurs du ratio L/l_e. Cet effet est proche de celui observé pour l'encastrement du côté de la source, il découle de l'importance de la dynamique de l'écoulement.

IV.3.3.4 Bilan sur l'influence de l'angle dynamique

L'angle dynamique impacte donc clairement les résultats dès que les systèmes correspondants dépendent de la dynamique de l'imbibition des pseudo-capillaires. L'impact direct n'est pas évident et n'a pas été constaté clairement, comme l'illustre le cas de l'encastrement opposé à la source où les résultats sont quasi-indépendants de la valeur de l'angle de contact dynamique. Si la dynamique est aussi importante dans les deux autres cas c'est parce que la membrane est encastré du côté de la source, il faut donc que le liquide progresse suffisamment pour l'effort qu'il exerce sur la membrane permette sa flexion.

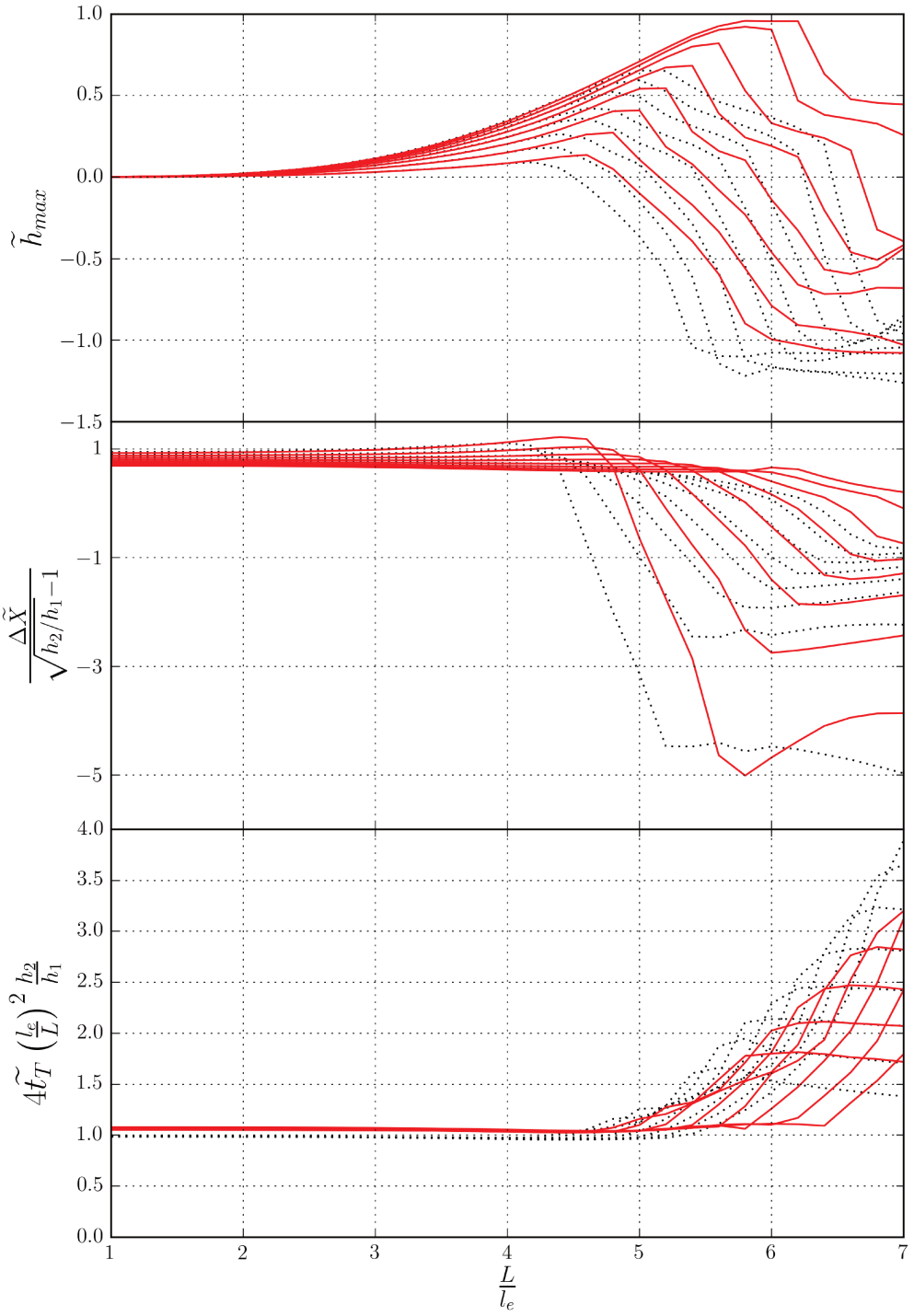

FIGURE IV.25: Représentation des résultats dans le cas de l'encastrement double, pour les trois première grandeurs en fonction de L/l_e, chaque courbe en $(\cdots)$ représente une valeur différente de h_2/h_1 sans prise en compte de l'angle dynamique et les courbes en $(-)$ représentes les valeurs avec l'angle dynamique et $\widetilde{\Gamma} = 0.02$

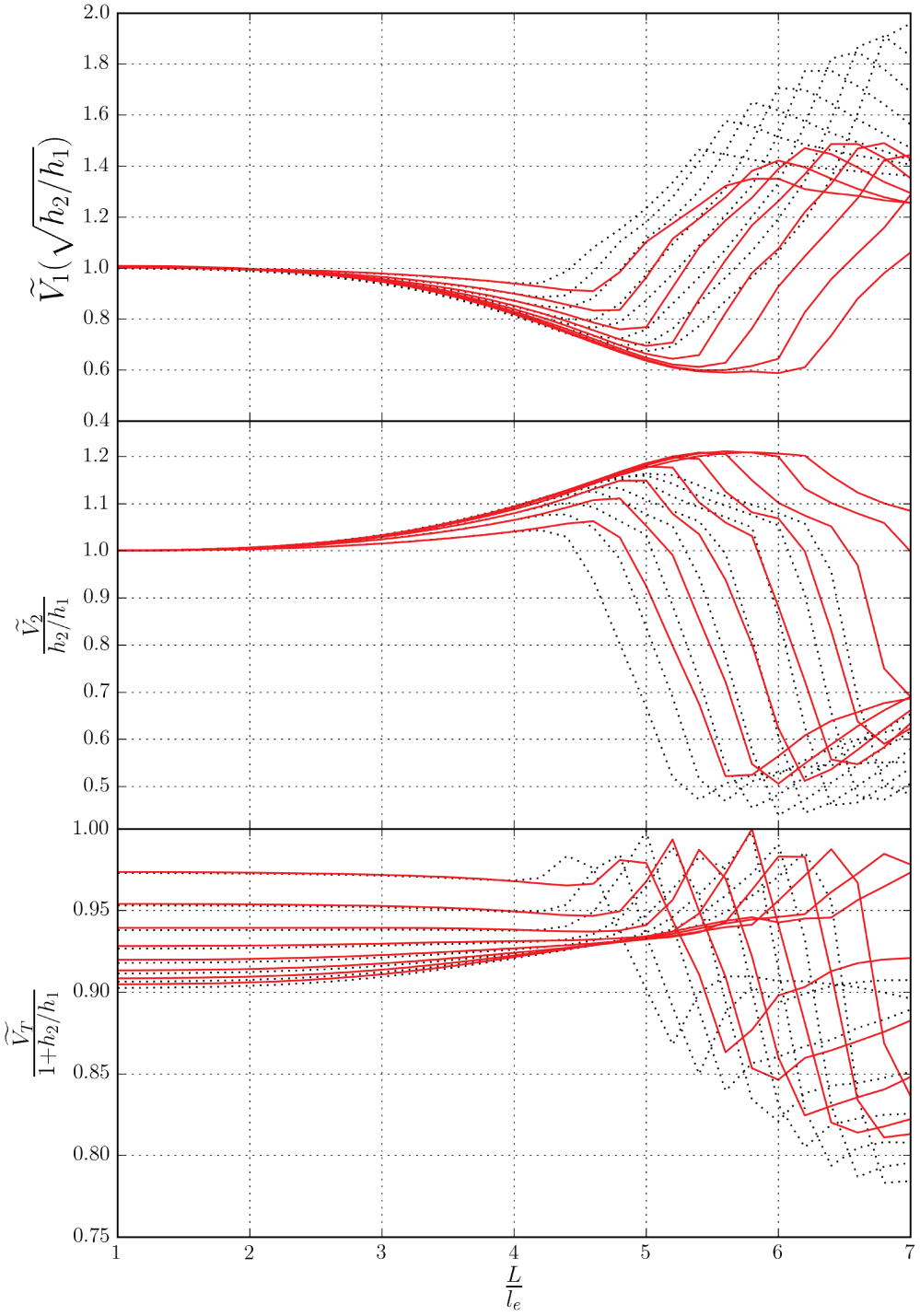

FIGURE IV.26: Représentation des résultats dans le cas de l'encastrement double, pour les trois dernières grandeurs en fonction de L/l_e, chaque courbe en $(\cdots)$ représente une valeur différente de h_2/h_1 sans prise en compte de l'angle dynamique et les courbes en $(-)$ représentes les valeurs avec l'angle dynamique et $\widetilde{\Gamma} = 0.02$

IV.3.4 Influence de la gravité

Lorsque la gravité intervient, les effets observés sont rapidement conséquents, les simulations ont été réalisées pour deux valeurs du ratio L/l_j, 0.4 et 0.8. L'influence de la gravité est singulière dans la mesure où elle peut mener à des situations où l'imbibition est incomplète dans les deux pseudo-capillaires, ce qui pose un problème de définition des grandeurs précédentes puisqu'elles sont définies lorsque l'imbibition d'un des deux capillaires est complète. L'objet de l'étude de l'influence de la gravité est d'anticiper cet élément perturbateur pour la vérification expérimentale. Les résultats sont donc présentés différemment et se focalisent sur la courbe de flexion maximale $\widetilde{h}_{max}$. Les résultats sont représentés sur les figures IV.27, IV.28 et IV.29 pour l'encastrement du côté de la source, du côté opposé et des deux côtés respectivement.

IV.3.4.1 Encastrement du côté de la source

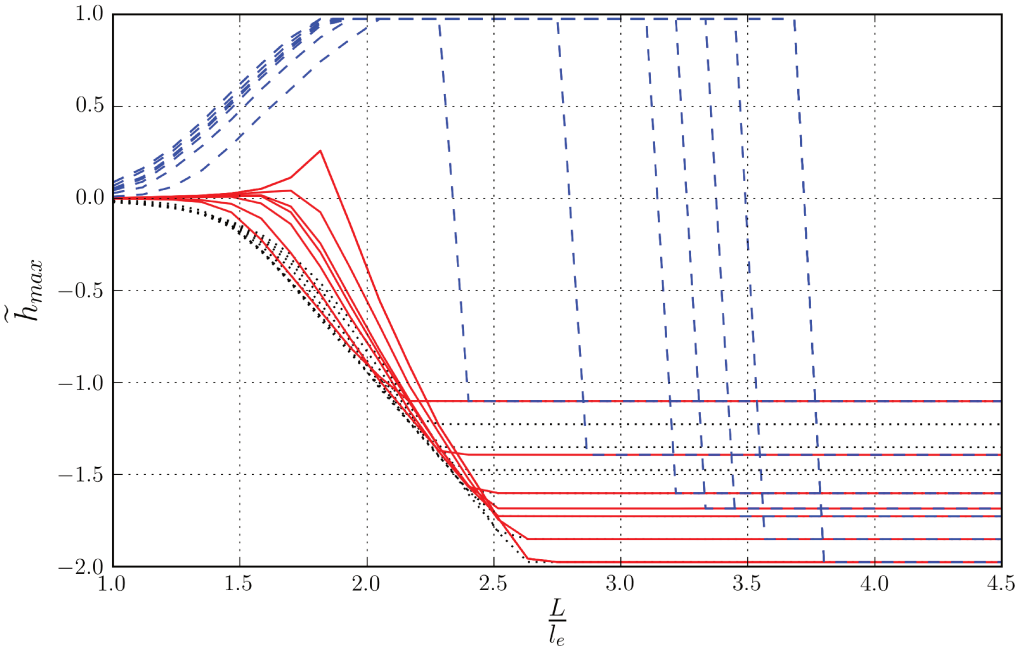

FIGURE IV.27: Représentation de la flexion en fonction de L/l_e dans le cas de l'encastrement à la source, les courbes en $(\cdots)$ correspondent à $L/l_j = 0$, $(-)$ à $L/l_j = 0.4$ et $(- -)$ à $L/l_j = 0.8$

L'influence est très marquée, même lorsque la membrane est peu souple, le côté où la membrane fléchit est impacté par sa présence et inverse la tendance. Cela s'explique par la dynamique de l'imbibition qui est bouleversée par l'existence d'un avance-retard qui change de signe à un instant donné et provoque le basculement de la membrane du côté le plus avancé. Cet effet s'amplifie lorsque le nombre de Bond augmente. Il est fortement sensible au ratio h_2/h_1. Lorsque la membrane est suffisamment souple, l'influence de la

gravité intervient plus tôt et son influence est moindre, les courbes finissent donc par rejoindre les résultats en l'absence de gravité.

IV.3.4.2 Encastrement du côté opposé à la source

Dans le cas de l'encastrement du côté opposé à la source, l'influence de la gravité est très faible. Il n'y a pas de modification de la flexion maximale. On peut cependant observer que les domaines identifiés précédemment sont décalés vers de plus faibles valeurs de L/l_e. Ce résultat est cohérents avec les observations réalisées précédemment, la dynamique de l'imbibition est peu importante et se produit dès le début de l'imbibition, donc avant que la pesanteur n'agisse.

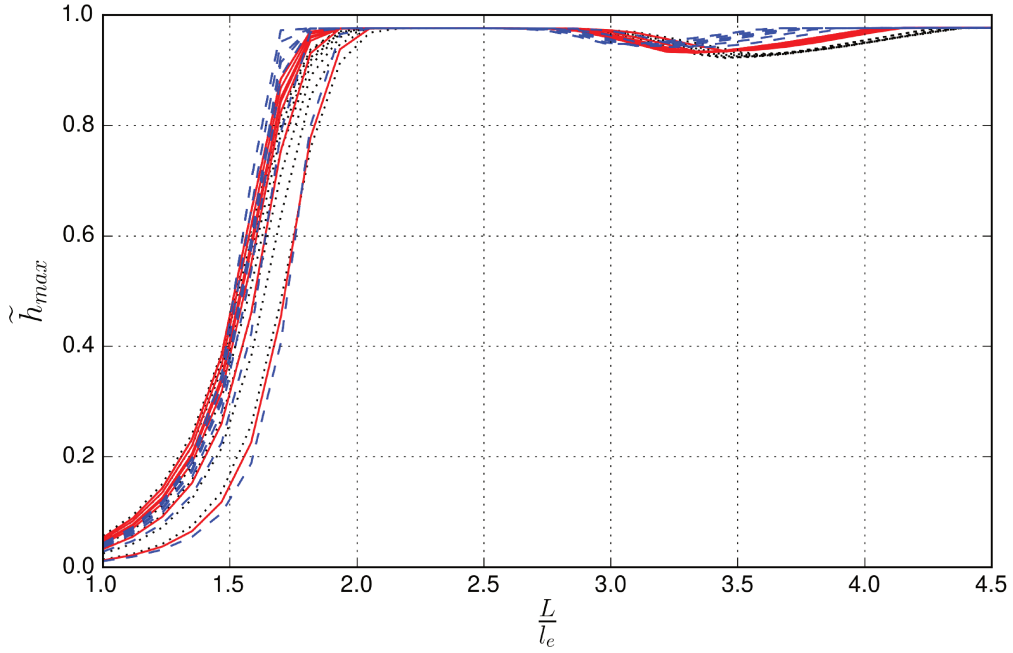

FIGURE IV.28: Représentation de la flexion en fonction de L/l_e dans le cas de l'encastrement opposé à la source, les courbes en $(\cdots)$ correspondent à $L/l_j = 0$, $(-)$ à $L/l_j = 0.4$ et $(- -)$ à $L/l_j = 0.8$

IV.3.4.3 Double encastrement

Dans le cas de l'encastrement double, la gravité renforce la déviation, cet effet découle de la modification de la dynamique de l'imbibition comme dans le cas de l'encastrement du côté de la source. À nouveau, lorsque la flexibilité augmente, l'imbibition se rapproche du comportement en l'absence de gravité.

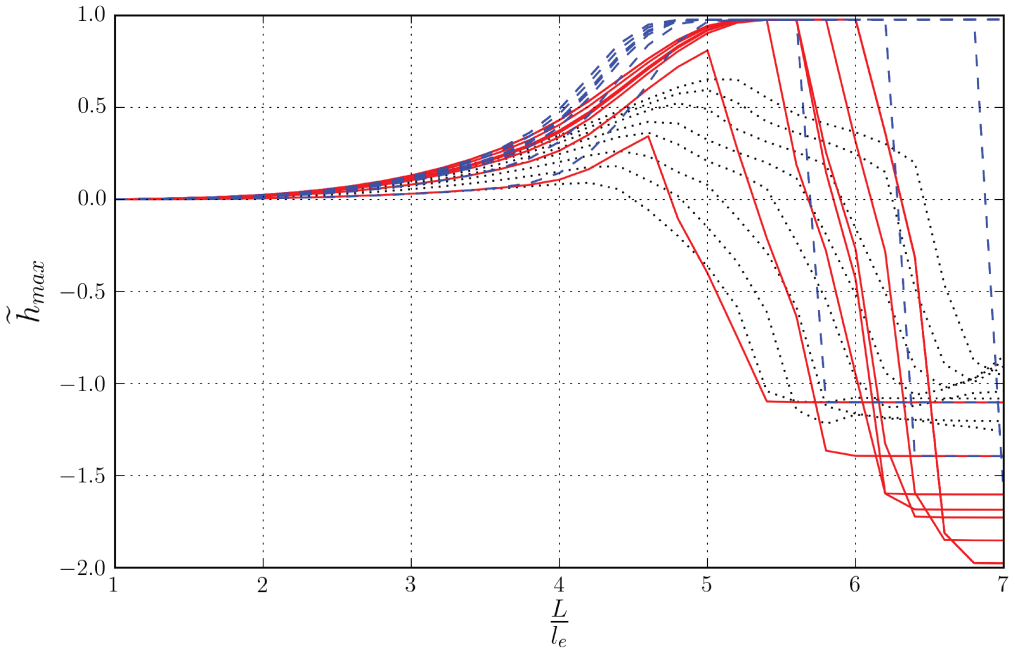

FIGURE IV.29: Représentation de la flexion en fonction de L/l_e dans le cas de l'encastrement double, les courbes en $(\cdots)$ correspondent à $L/l_j = 0$, $(-)$ à $L/l_j = 0.4$ et $(--)$ à $L/l_j = 0.8$

IV.3.4.4 Bilan

Les résultats montrent deux comportements radicalement différents. Le cas où l'encastrement est opposé à la source est assez indifférent à l'influence de la gravité. Tandis que les cas d'encastrement du côté de la source et d'encastrement double sont sensibles à celle-ci. Dans le cadre expérimental employé par la suite, le nombre de Bond ne sera pas négligeable ($L/l_j \sim 1$), la vérification expérimentale sera donc plus aisée pour l'encastrement supérieur, car l'influence de la gravité est moindre.

IV.3.5 Conclusion sur les résultats de simulation de systèmes réduits

Nous avons donc montré que l'impact de la flexibilité dépend des conditions limites. Lorsque la membrane est encastrée au niveau de la source, la durée de l'imbibition et sa qualité[9] décroît puis croît. Ces constats restent valident lorsque la dissipation au niveau de la ligne triple est prise en compte mais ne sont pas transposables lorsque la pesanteur joue un rôle non négligeable. Lorsque la membrane est encastrée du côté opposé à la source, la durée de l'imbibition décroit ainsi que sa qualité en fonction de la flexibilité. La prise en compte d'un angle de contact dynamique semble peu impacter l'écoulement ainsi que l'influence du champ de pesanteur. Enfin, dans le cas du double encastrement,

9. Le taux de remplissage en fin d'imbibition

l'augmentation de la flexibilité fait croitre la durée de l'imbibition et réduit légèrement sa qualité. La dissipation au niveau de la ligne de contact a une influence modérée sur l'écoulement contrairement à la pesanteur.

IV.4 Vérification expérimentale

Lors de l'imbibition d'un toron de fibres de carbone, l'espacement entre les fibres correspond approximativement au rayon de celles-ci, soit de l'ordre de $5\mu m$, pour une rigidité de l'ordre de $300GPa$. En supposant que le liquide employé a une tension de surface de l'ordre de $2 \times 10^{-2} N.m^{-1}$ et une densité de l'ordre de $1000kg.m^3$, La longueur élastique l_e est de l'ordre de $200\mu m$ et la hauteur de Jurin l_j de $0.4m$. Les effets élastiques apparaissent donc bien avant les effets dus à la pesanteur. Cependant, le montage expérimental qui a été utilisé ne permet pas de réduire l'espacement entre les lames jusqu'à des épaisseurs comparables. De plus, on ne peut pas utiliser des lames plus flexibles car elles réduiraient le rapport d'aspect du système (pour un rapport L/l_e) et donc la légitimité de la comparaison avec les simulations numériques. Dans les cas traités expérimentalement, la hauteur de Jurin est donc comparable à la longueur élastique. Les résultats de simulation ont montré que les cas d'encastrement à la source et de double encastrement sont assez sensibles à l'influence du champ de pesanteur. L'encastrement supérieur est donc le plus approprié pour confronter les résultats de simulation à l'expérience dans des conditions proches de celles de l'application.

IV.4.1 Montage expérimental

IV.4.1.1 Système

Le système expérimental est constitué de deux lames de verre rigides entre lesquelles est disposée une lame flexible séparée par des couvres lames. Deux lames flexibles différentes ont été utilisées, une première en acier, $E \approx 210GPa$, et une seconde en verre, $E \approx 70GPa$ de $100\mu m$ d'épaisseur. Le système est maintenu en place par des pinces pendant l'expérience. Avant chaque expérience, les lames sont lavées à l'éthanol, l'acétone et traitées par UV sous balayage d'ozone. De cette manière les lames sont complètement mouillantes vis-à-vis du liquide employé, on peut notamment constater la régularité de l'interface sur la figure IV.30 contrairement à la ligne triple du ménisque autour du système. Les lames ont une profondeur de $26mm$, ce qui permet de négliger les effets de bords qui se produisent sur quelques dizaines de fois l'épaisseur entre les lames. Seul le cas de l'encastrement du côté opposé à la source a été étudié.

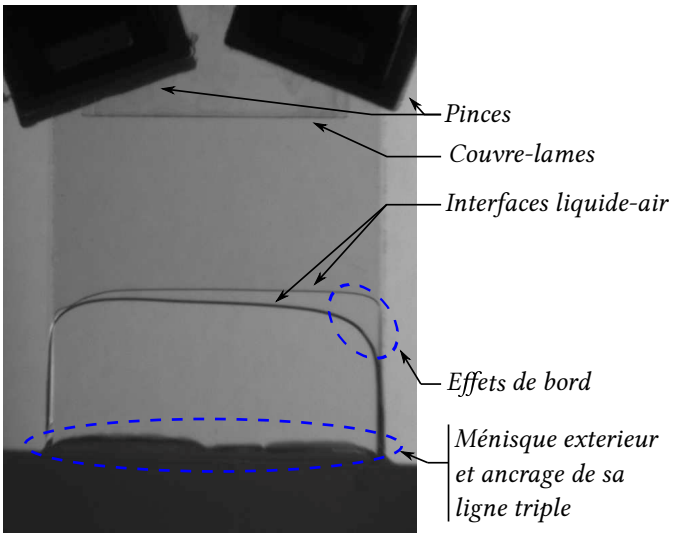

FIGURE IV.30: Visualisation du système sur toute sa profondeur

IV.4.1.2 Liquide

Le liquide employé est l'alcool 1-3 Propanediol, il possède une masse volumique de $1050 kg.m^{-3}$ [10], une tension de surface mesurée à $46.8 \pm 0.5 mN.m^{-1}$ et une viscosité de $52 mPa.s$. La méthode de mesure de la tension de surface a déjà été décrite dans la partie II.4.3.1.

IV.4.1.3 Montage

Un bain de liquide est disposé sur un support élévateur dont le niveau peut être fixé manuellement. Une caméra Génie M1024 est disposée à une distance $\sim 1m$ et filme l'imbibition perpendiculairement au plan des lames du système. La fréquence d'acquisition est de 25 Hz et la résolution de 1024×768. Un fond homogène est éclairé par une lampe pour augmenter le contraste. Une image du dispositif est présentée sur la figure IV.31.

IV.4.1.4 Plan d'expérience

La distance entre les lames rigides et la lame flexible peut être variée ainsi que la longueur du système. Les espacements sont de $h_1 = 300\mu m$ et $h_2 = 450\mu m$ ou $h_1 = 300\mu m$ et $h_2 = 600\mu m$. La longueur du système a été variée de $2cm$ à $3.5cm$ par pas de $0.25cm$ pour la lame d'acier et de $1.5cm$ à $3cm$ par pas de $0.25cm$ pour la lame de verre. Les temps caractéristiques des deux systèmes ont été calculés d'après l'équation IV.21 et sont de $8.5s$ avec la lame d'acier et $4.9s$ avec la lame de verre. Les longueurs élastiques

10. donnée fournisseur

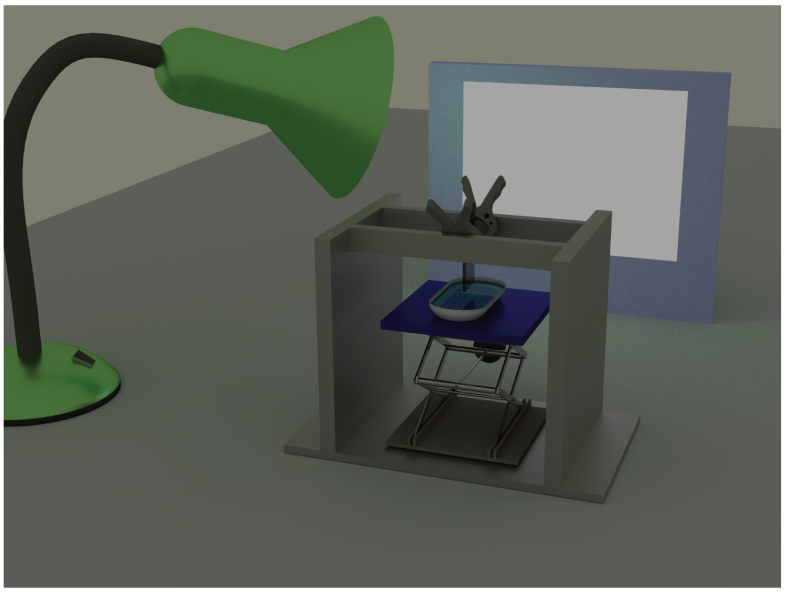

FIGURE IV.31: Représentation infographique du montage, le bain de liquide est posé sur le support mobile, et les pinces maintiennent le système en place

correspondantes sont de $1.36cm$ et $1.03cm$, calculées avec l'équation IV.20. Les couples de paramètres correspondants à chaque expérience sont représentés dans les tableaux IV.1 et IV.2.

L/l_e	1.47	1.65	1.84	2.02	2.21	2.39	2.57
L/l_j	1.34	1.51	1.68	1.85	2.02	2.18	2.35

TABLE IV.1: Valeurs des nombres adimensionnés de l'écoulement L/l_e et L/l_j pour la lame d'acier

L/l_e	1.45	1.69	1.93	2.18	2.42	2.66	2.90
L/l_j	1.01	1.18	1.34	1.51	1.68	1.85	2.02

TABLE IV.2: Valeurs des nombres adimensionnés de l'écoulement L/l_e et L/l_j pour la lame de verre

IV.4.2 Extraction des résultats

Les fichiers vidéo sont transformés en séries d'images. Pour chaque image la longueur du système est connue et utilisée pour convertir les distances de *pixel* en m. La position des ménisques sur les images est identifiée manuellement à l'instant initial et l'algorithme de Kanade-Lucas-Tomasi a été employé pour suivre le déplacement des ménisques dans le temps, il a été implémenté sur MATLAB. Les positions sont ensuite projetées sur l'axe principal du système.

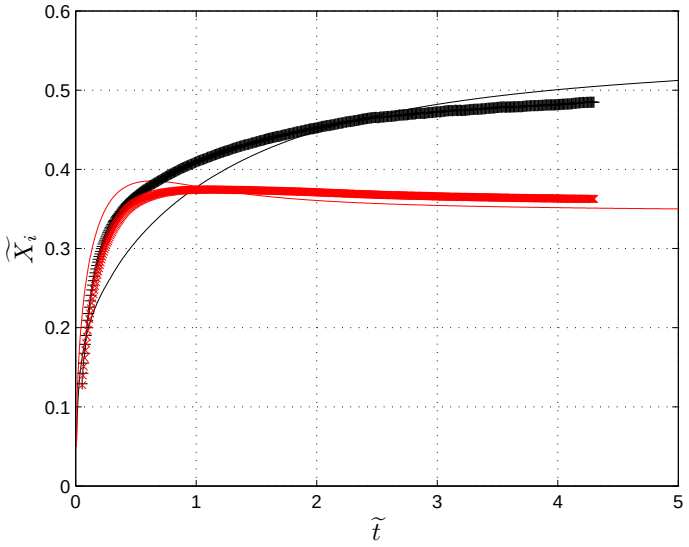

FIGURE IV.32: Positions des ménisques du capillaire fin (+,−) et large (×,−) d'après les résultats numériques et expérimentaux

IV.4.3 Résultats expérimentaux

IV.4.3.1 Résultat typique

Un résultat est présenté sur la figure IV.32 sous forme adimensionnée ainsi que la simulation numérique correspondante, une image de l'imbibition à différents instants est également présentée sur la figure IV.33. Les résultats numériques et expérimentaux se correspondent qualitativement mais pas quantitativement, les raisons de ce constat sont présentées dans la partie IV.4.3.5. Cependant, les caractéristiques principales des courbes d'imbibition simulées et obtenues expérimentalement sont semblables. On distingue, trois grands types de résultats, proches de ceux observés par Duprat *et al.* [2011], ils sont décrits dans les parties suivantes.

IV.4.3.2 Régime sans déformation (I)

Lorsque la flexibilité est faible, la membrane est fixe et ne se déforme pas ou peu. L'écoulement est donc peu impacté. Un graphique des positions obtenues expérimentalement et un autre obtenu numériquement sont représentés sur la figure IV.34. Ce régime ne présente pas un grand intérêt dans la mesure où les écoulements dans les capillaires sont semblables à ceux observés dans des capillaires réguliers indéformables et sont déjà bien connus.

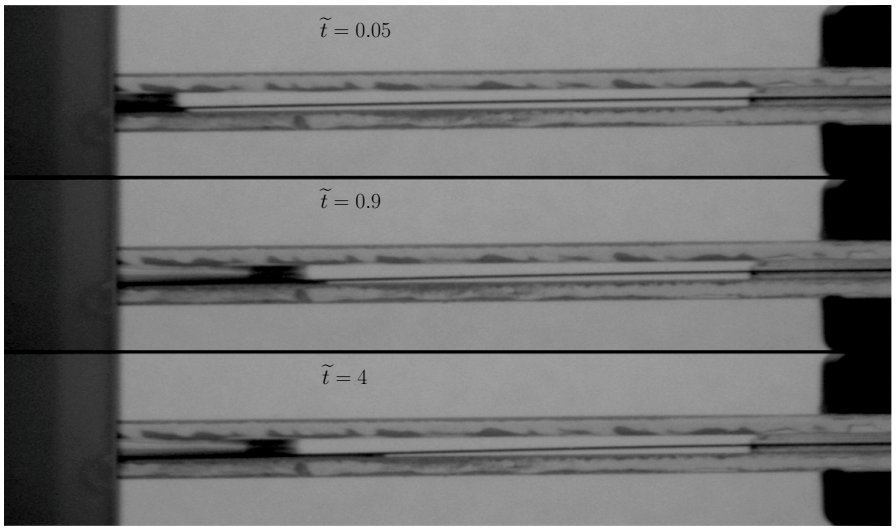

FIGURE IV.33: Images de l'imbibition à différents instants

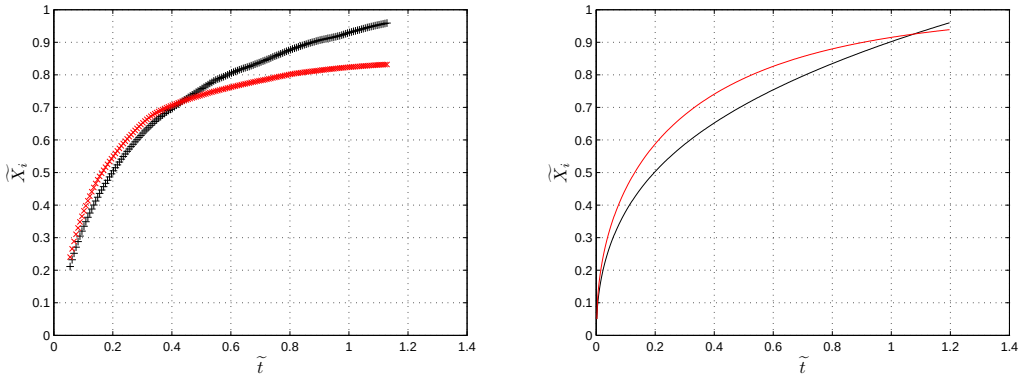

FIGURE IV.34: Position des ménisques en fonction du temps $\widetilde{t}$ expérimentale (gauche) et numérique (droite) dans le régime sans déformation. Le pseudo-capillaire fin est en noir et le pseudo-capillaire large en rouge

IV.4.3.3 Régime avec faible déformation (II)

Lorsque la flexibilité de la membrane augmente, elle fléchit, ce qui impacte l'écoulement dans les deux capillaires. La membrane se déplace vers le capillaire le plus fin jusqu'à fermer celui-ci. La dynamique correspondante est représentée sur la figure IV.35.

IV.4.3.4 Régime avec forte déformation (III)

Lorsque la flexibilité croît encore, la membrane continue de se déformer après être arrivée au contact des parois rigides. Cette déformation forte impacte l'écoulement dans le capillaire le plus large et peut provoquer le démouillage partiel de celui-ci. Un exemple de résultat est présenté sur la figure IV.36.

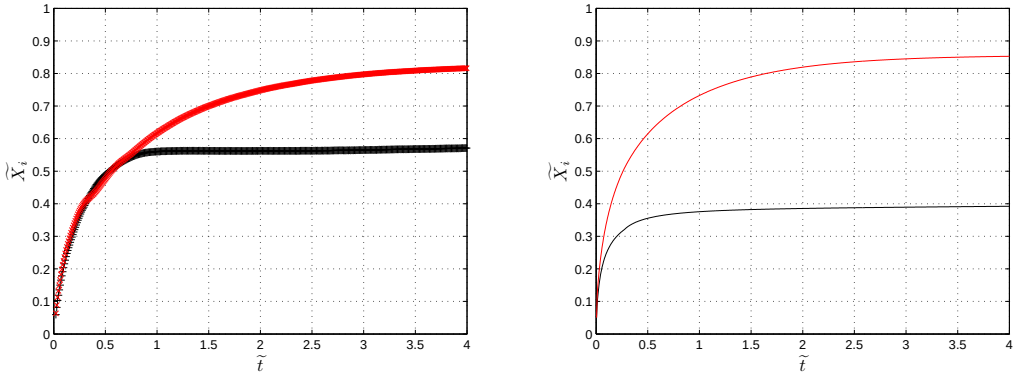

FIGURE IV.35: Position des ménisques en fonction du temps $\widetilde{t}$ expérimentale (gauche) et numérique (droite) dans le régime avec de faibles déformations. Le pseudo-capillaire fin est en noir et le pseudo-capillaire large en rouge

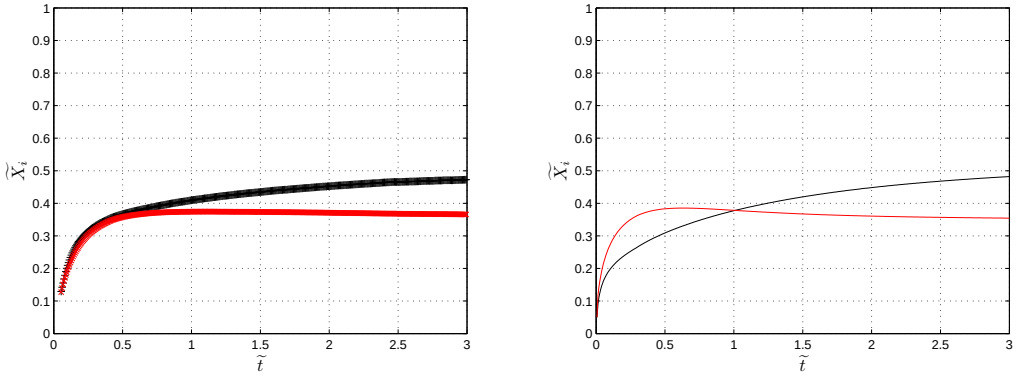

FIGURE IV.36: Position des ménisques en fonction du temps $\widetilde{t}$ expérimentale (gauche) et numérique (droite) dans le régime avec de fortes déformations. Le pseudo-capillaire fin est en noir et le pseudo-capillaire large en rouge

IV.4.3.5 Comparaison numérique expérimental

Les trois régimes décrits ci-dessus peuvent facilement être identifiés expérimentalement et numériquement, le régime I se caractérise par l'absence d'une flexion marquée de la membrane, le régime III par le démouillage partiel et le régime II par une flexion substantielle sans démouillage. Les résultats expérimentaux et numériques ont été rattachés à chacun de ces régimes et sont représentés sur les figures IV.37, IV.38, IV.39 et IV.40.

L'ensemble des résultats montrent la même tendance, le passage d'un régime au suivant se fait par l'augmentation du ratio, L/l_e. Les résultats numériques prédisent systématiquement des transitions précoces, c'est-à-dire, une transition à plus faible ratio, L/l_e que les observations expérimentales.

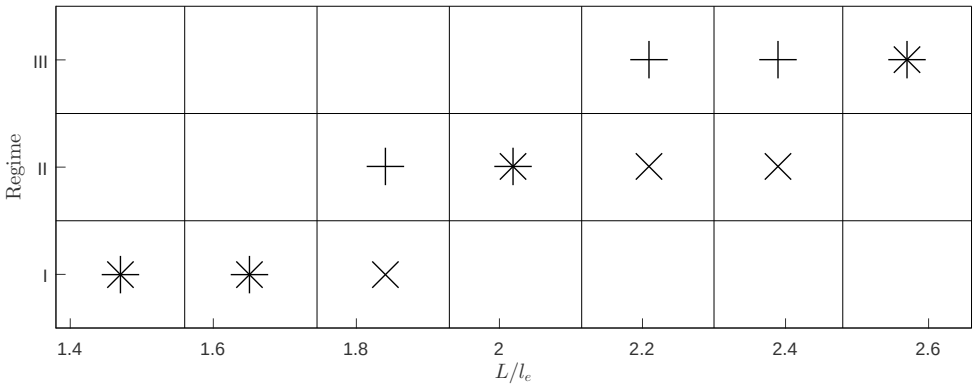

FIGURE IV.37: Représentation du régime en fonction du ratio L/l_e dans le cas ou $h_1/h_2 = 1.5$ et avec la lame d'acier. Les résultats expérimentaux sont représentés par les ($\times$) et les prédictions numériques par les ($+$)

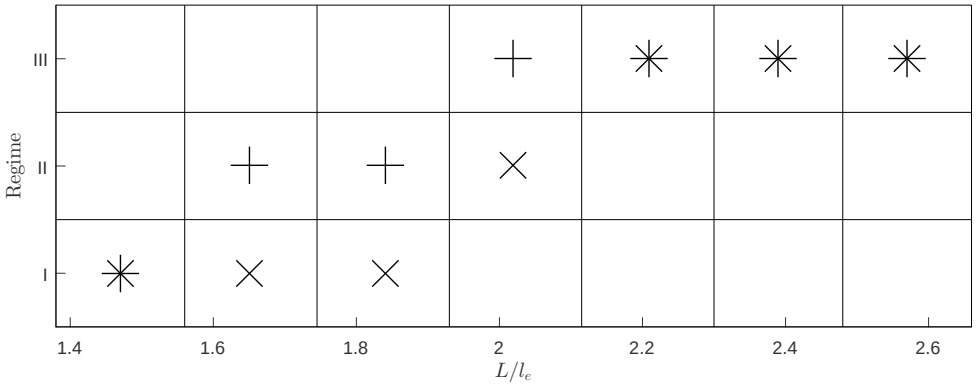

FIGURE IV.38: Représentation du régime en fonction du ratio L/l_e dans le cas ou $h_1/h_2 = 2$ et avec la lame d'acier. Les résultats expérimentaux sont représentés par les ($\times$) et les prédictions numériques par les ($+$)

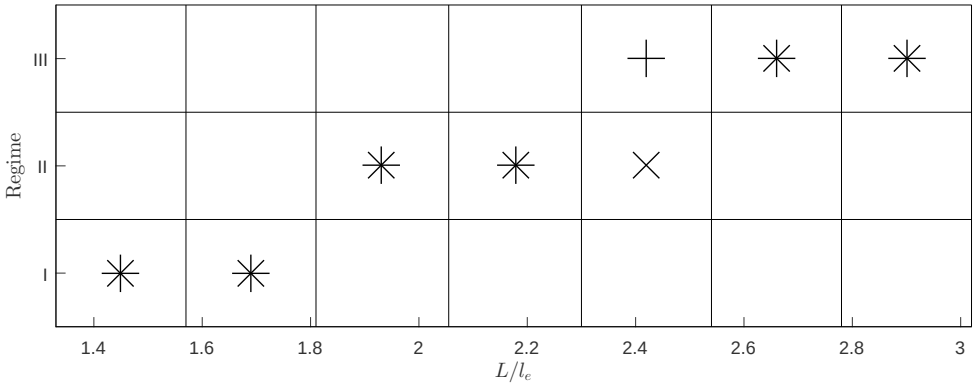

FIGURE IV.39: Représentation du régime en fonction du ratio L/l_e dans le cas ou $h_1/h_2 = 1.5$ et avec la lame de verre. Les résultats expérimentaux sont représentés par les ($\times$) et les prédictions numériques par les ($+$)

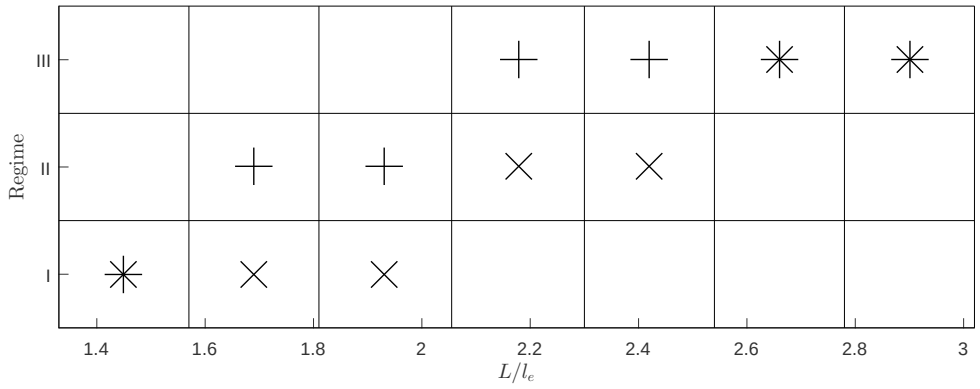

FIGURE IV.40: Représentation du régime en fonction du ratio L/l_e dans le cas ou $h_1/h_2 = 2$ et avec la lame de verre. Les résultats expérimentaux sont représentés par les ($\times$) et les prédictions numériques par les ($+$)

IV.4.3.6 Limites de la comparaison

Les résultats numériques et expérimentaux ne sont pas quantitativement comparables bien que qualitativement semblables. Plusieurs éléments peuvent permettre d'expliquer ce qui a été observé. Premièrement, la dissipation ne se produit pas que dans le corps du liquide mais également au niveau des coins des ménisques, dans les simulations cela n'a pas été pris en compte (à cause de l'absence de données sur le paramètre Γ). L'effet de ce paramètre est de diminuer la pression capillaire et d'égaliser les vitesses d'imbibition aux premiers instants. Les résultats de simulations présentés dans la partie IV.3.3, indiquent cependant que cet effet existe mais n'est pas très prononcé. Deuxièmement, malgré la préparation des lames et parois rigides pour les rendre complètement mouillantes, il peut exister des défauts qui peuvent localement dérégulariser le front d'imbibition, ces effets ont été observés visuellement. Troisièmement, certains paramètres ne sont pas précisément déterminés. Par exemple, les épaisseurs h_1 et h_2 ne sont pas précisément connues dans l'expérience. En pratique, une déviation des lames sur leur longueur a été observée dans certains cas [11]. De plus, la rigidité de flexion des lames a été estimée analytiquement en négligeant l'effet Poisson mais pas vérifiée empiriquement, ce qui peut être à l'origine d'une mauvaise évaluation des paramètres et en particulier du ratio, L/l_e.

IV.4.4 Conclusion sur les résultats expérimentaux

L'étude expérimentale est donc insuffisante pour confirmer les résultats obtenus numériquement. La correspondance est qualitative dans la dynamique de l'imbibition et le rôle joué par la gravité empêche l'observation de certaines quantités, comme le taux de remplissage

11. Le rapport d'aspect du système est supérieur à 100 donc des déviations non-négligeables peuvent rapidement apparaitre

des pseudo-capillaires puisque l'imbibition est incomplète. Or, les moyens expérimentaux utilisés ne permettent pas de dépasser certaines contraintes dimensionnelles et donc de travailler à faible ratio L/l_j. Peu de choses pertinentes vis-à-vis de l'étude peuvent donc être retirées de cette partie.

IV.5 Résultats sur le système complet

Les conclusions tirées des parties précédentes ne permettent pas de prédire avec certitude ce qui va se produire avec un milieu constitué d'un ensemble de lames flexibles parallèles. Un second système a donc été modélisé et simulé pour étudier l'imbibition du milieu modèle. Il est représenté sur la figure IV.41.

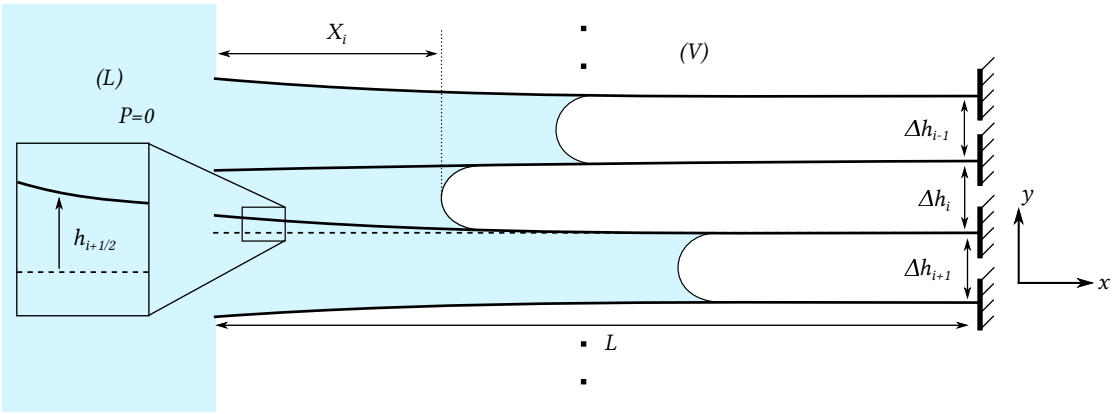

FIGURE IV.41: Représentation schématique du système complet autour du pseudo-capillaire i

IV.5.1 Modélisation du système complet

Les mêmes hypothèses que précédemment sont supposées valables ; le système est très élancé, $L \gg \Delta h$, les effets inertiels sont négligeables et l'hypothèse de lubrification est appliquée. Les lames possèdent toutes la même rigidité de flexion B et l'écart initial entre les lames $i-1/2$ et $i+1/2$, Δh_i, est tiré aléatoirement selon une loi uniforme. A l'instant initial, le milieu est placé au contact d'une source de liquide infinie de pression invariable et nulle. En utilisant les mêmes conventions d'adimensionnalisation que dans les parties précédentes, on peut écrire l'équation de conservation dans le pseudo-capillaire i, entre les lames $i-1/2$ et $i+1/2$:

$$\dot{\widetilde{h}}_{i+1/2} - \dot{\widetilde{h}}_{i-1/2} = -\left(\frac{l_e}{L}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}} \left(\left(\Delta \widetilde{h}_i + \widetilde{h}_{i+1/2} - \widetilde{h}_{i-1/2}\right)^3 \frac{\partial \widetilde{P}_i}{\partial \widetilde{x}} \right) \tag{IV.66}$$

Et le comportement mécanique des lames est modélisé par le modèle de Bernoulli :

$$\frac{\partial^4 \widetilde{h}_{i+1/2}}{\partial x^4} = \left(\frac{L}{l_e}\right)^4 \widetilde{P}_{i+1/2} \tag{IV.67}$$

Avec $\widetilde{P}_{i+1/2} = \widetilde{P}_{i+1} - \widetilde{P}_i$. Ensuite, les positions des ménisques sont mises à jour en utilisant l'équation :

$$\widetilde{v}_i = -\left(\frac{l_e}{L}\right)^2 \left(\Delta\widetilde{h}_i + \widetilde{h}_{i+1/2} - \widetilde{h}_{i-1/2}\right) \frac{\partial \widetilde{P}_i}{\partial \widetilde{x}} \tag{IV.68}$$

Enfin, le système possède une largeur définie par le nombre de lames N_l qui le constitue. Des conditions aux limites périodiques sont appliquées entre les lames $N_l + 1/2$ et $1/2$. En pratique, le nombre de lames à été fixé à $N_l = 30$.

IV.5.2 Simulation numérique du système complet

La méthode numérique employée est la méthode des éléments finis. Les mêmes types d'éléments que pour le modèle réduit ont été utilisés à l'exception des éléments asymétriques et la résolution est faite par Newton-Raphson. Le pas de temps est cette fois adaptatif pour minimiser les coûts de calcul, il est diminué si les variations temporelles des degrés de liberté sont trop importantes et augmenté si elles ne le sont pas assez. Au début de chaque simulation, les ménisques sont à une position $\widetilde{X}_i(0) = 0.05$ avec $\widetilde{X}_i(t)$ la position du ménisque du capillaire i à l'instant $\widetilde{t}$. La simulation est arrêtée dès que le critère $max(\widetilde{X}_i) > 0.96$ est rempli. Les contacts sont pris en compte selon une méthode semblable à celle décrite dans la partie IV.2.3.4. Des cas tests ont été réalisés pour vérifier la validité des équations et fixer différents paramètres.

IV.5.3 Grandeurs étudiées

Comme pour les systèmes réduits, les résultats sont analysés à la fin de l'imbibition à l'aide de trois grandeurs décrites ci-dessous.

IV.5.3.1 Durée de l'imbibition

La durée de l'imbibition $\widetilde{t}_T$ représente le temps nécessaire pour qu'au moins un des deux capillaires soit complètement rempli. Cette grandeur est divisée par le résultat attendu d'après l'équation de Washburn, soit par $(1/4)(L/l_e)^2$.

IV.5.3.2 Qualité de l'imbibition

La qualité de l'imbibition est quantifiée par le taux de remplissage du système qui est noté S car il correspond à la saturation du milieu. Il est calculé comme la somme des volumes

des pseudo-capillaires remplis divisée par le volume total occupable $\widetilde{V}_o = \sum_{i=1}^{N_l} \Delta\widetilde{h}_i$ pour être ramené entre 0 et 1.

IV.5.3.3 Épaisseur de l'interface

L'épaisseur du front adimensionnée est notée $\widetilde{w}$, elle permet d'évaluer la tendance du front à se régulariser lorsqu'elle décroît ou à se déstabiliser lorsqu'elle croît (voir chapitre III). Elle correspond à l'écart type des positions des ménisques adimensionnées $\widetilde{X}_i$.

IV.5.4 Résultats de simulation

Les trois types de conditions limites, l'encastrement à la source, l'encastrement opposé à la source et le double encastrement ont été étudiés numériquement. Les résultats obtenus dans chacun des cas sont présentés dans les parties suivantes.

IV.5.4.1 Encastrement à la source

Quinze simulations ont été réalisées pour L/l_e variant de 1 à 4.5 par pas de 0.25. Certaines simulations ont été réalisées deux fois pour vérifier la répétabilité des résultats (qui n'est pas assurée puisqu'il y a un tirage au sort).

Description qualitative des résultats Dans le cas de l'encastrement à la source une planche de résultat est représentée pour un ratio L/l_e croissant sur la figure IV.42. Les résultats montrent une tendance du système à former des paquets de lames. Le nombre de lame par paquet croit à mesure que le ratio L/l_e augmente. Ce type de résultat avait déjà été observé dans la littérature par différents auteurs ([Bico *et al.*, 2004], [Gat et Gharib, 2013]), mais dans des systèmes plus proches du cas de l'encastrement opposé à la source.

Durée de l'imbibition La durée de l'imbibition en fonction du ratio L/l_e est représentée sur la figure IV.43. Les résultats montrent une diminution de la durée adimensionnée et normalisée puis une augmentation. On peut remarquer que les variations de la durée sont relativement modérées étant donné que le facteur de normalisation varie de 1 à 20. La diminution de cette durée avait déjà été observée sur le système réduit avec les conditions aux limites correspondantes. La diminution est due au rapprochement de couples de lames qui permet une imbibition dans des capillaires convergents. L'augmentation est due à la fermeture de ces capillaires qui inhibe l'imbibition. La correspondance

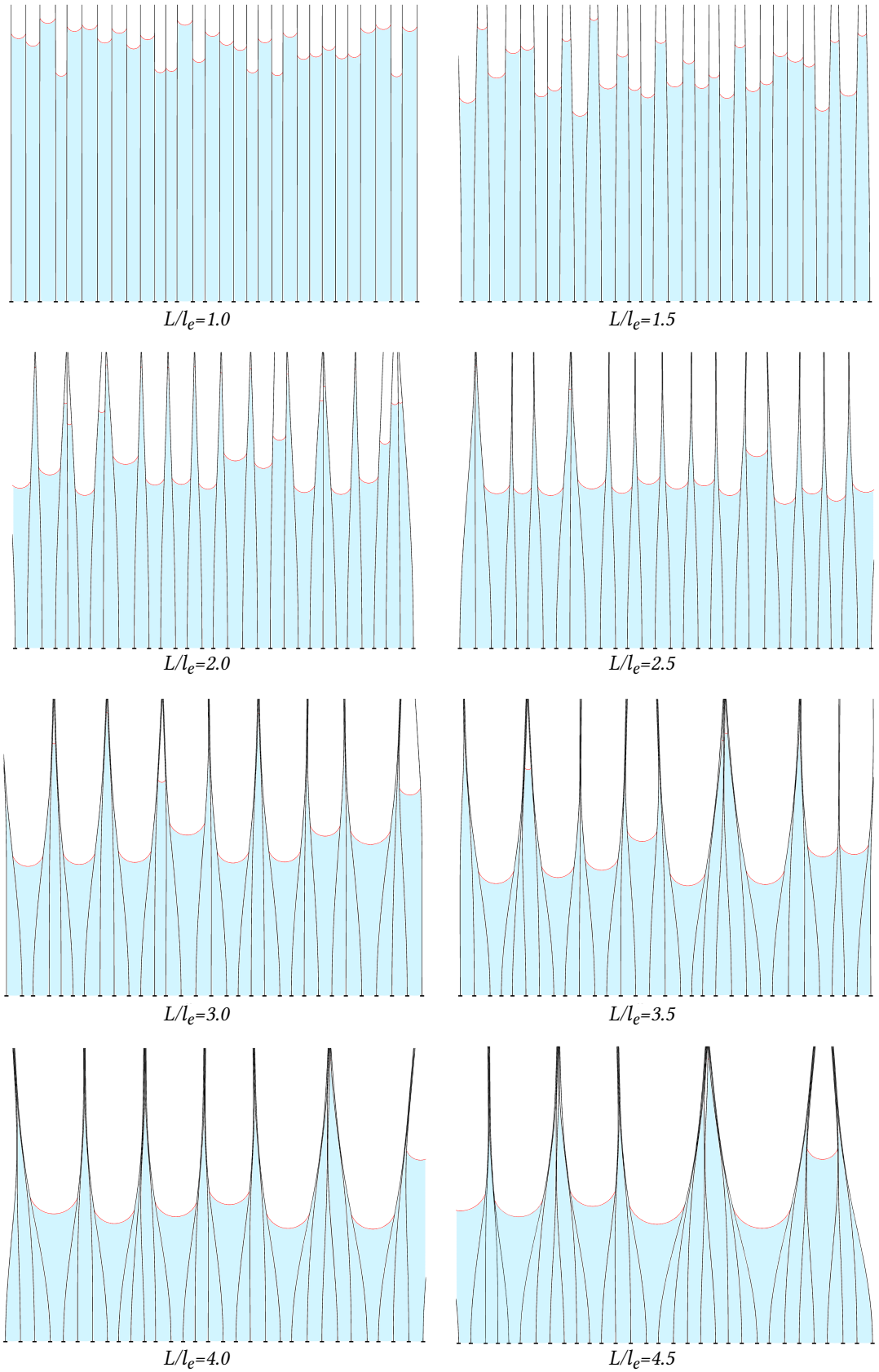

FIGURE IV.42: Représentation du système à la fin de l'imbibition pour différentes valeurs du ratio L/l_e dans le cas de l'encastrement à la source

est assez bonne lors de la diminution et se produit pour des valeurs de L/l_e similaires ($L/l_e \in [2, 3.5]$). En revanche, l'augmentation est beaucoup plus marquée dans le système réduit. Dans le système complet, lorsque des groupes de lames se joignent, l'imbibition est très rapide entre les groupes et c'est ce type de mécanisme qui contrôle la durée $\widetilde{t_T}$. Ce mécanisme est très différent de ce qui se produit dans le système réduit où la lame est fixe et la durée de l'imbibition est contrôlée par celle d'un capillaire divergent.

Qualité de l'imbibition La saturation du système en fonction du ratio L/l_e est représentée sur la figure IV.43. La courbe montre que la saturation est une fonction décroissante de L/l_e. Cette décroissance était également observée sur le système réduit correspondant mais elle était suivie d'une augmentation qui n'est pas observée dans le cas présent. L'augmentation était due au remplissage du pseudo-capillaire fin qui se réalisait complètement pendant que l'autre était inhibé par sa fermeture. Comme nous l'avons vu dans la section précédente, dans le cas du système complet la durée de l'imbibition est contrôlée par un mécanisme différent et se produit plus tôt. Les capillaires divergents n'ont donc pas le temps de se remplir.

Épaisseur du front L'épaisseur du front d'imbibition $\widetilde{w}$ est représentée en fonction du ratio L/l_e sur la figure IV.43. La courbe est croissante puis légèrement décroissante. La croissance de l'épaisseur correspond à la fermeture de certains pseudo-capillaires, qui se réalise d'abord deux-à-deux, ce qui maximise $\widetilde{w}$. Lorsque les lames forment des paquets plus large, le nombre de pseudo-capillaires entre les paquets (qui se comportent différemment des autres) diminue ce qui tend à réduire $\widetilde{w}$. L'effet de réduction n'est cependant pas très marqué.

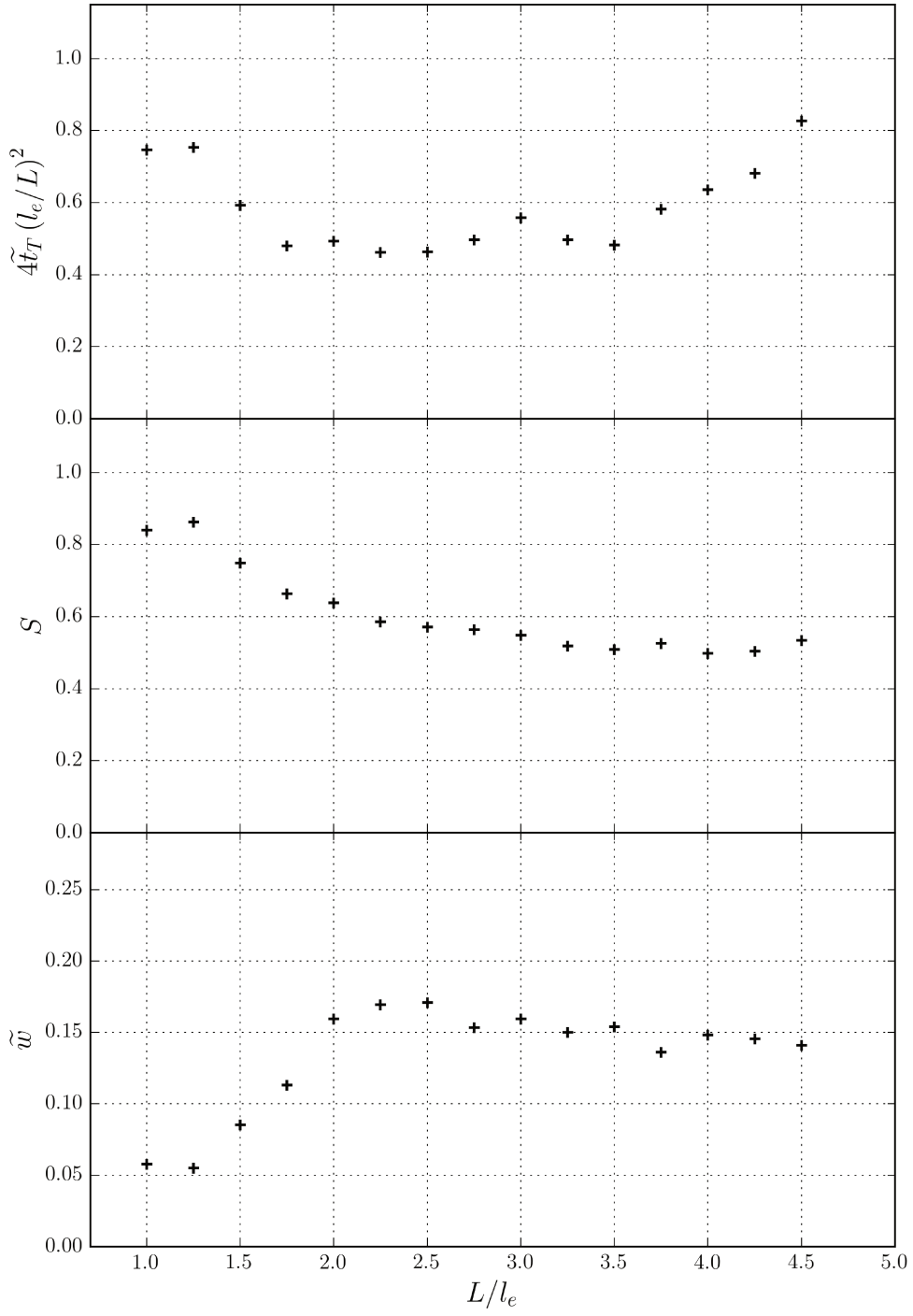

FIGURE IV.43: Représentation des trois grandeurs, $\widetilde{t}_T$, S et $\widetilde{w}$ en fonction du ratio L/l_e dans le cas de l'encastrement à la source

IV.5.4.2 Encastrement opposé à la source

Dans le cas de l'encastrement opposé à la source, quinze simulations ont été réalisées pour L/l_e variant de 1 à 4.5 par pas de 0.25.

Description qualitative des résultats Dans le cas de l'encastrement opposé à la source, une planche de résultat est représentée pour un ratio L/l_e croissant sur la figure IV.44. On observe à nouveau une tendance des lames à former des groupes de plus en plus en plus large lorsque le ratio L/l_e augmente. Cette observation est conforme à celles de la littérature ([Bico *et al.*, 2004], [Gat et Gharib, 2013]).

Durée de l'imbibition La durée de l'imbibition est représentée sur la figure IV.45 en fonction du ratio L/l_e. Sur la figure on observe une diminution importante de cette durée qui semble se stabiliser autour d'une valeur ~ 0.1. Ce résultat avait déjà été observé sur les systèmes réduits (voir figure IV.15) et correspond à la formation d'un capillaire convergent qui facilite l'imbibition.

Qualité de l'imbibition La saturation est représentée sur la figure IV.45. La courbe montre une décroissance en fonction de L/l_e. Ce constat avait été fait sur les systèmes réduits, en revanche il était moins marqué et tendait à se réduire pour de grandes valeurs de L/l_e. Cette différence s'explique à nouveau par le comportement de groupe qu'adoptent les capillaires, lorsque l'élasticité augmente, les paquets s'élargissent et le nombre de capillaire qui se ferment augmente, diminuant ainsi la saturation.

Épaisseur du front L'épaisseur du front est représentée sur la figure IV.45 en fonction de L/l_e. L'épaisseur augmente avec L/l_e puis stagne et enfin diminue légèrement. L'observation est similaire à celle réalisée dans le cas de l'encastrement à la source et les raisons sont les mêmes ; deux types de capillaires se distinguent, ceux dans les paquets et ceux hors de ceux-ci. L'épaisseur est maximale lorsque les capillaires se répartissent équitablement entre les deux types. Lorsque l'élasticité augmente, les paquets s'élargissent, ce qui déséquilibre la répartition des ménisques entre ces deux types. Par conséquent cela diminue l'épaisseur $\widetilde{w}$.

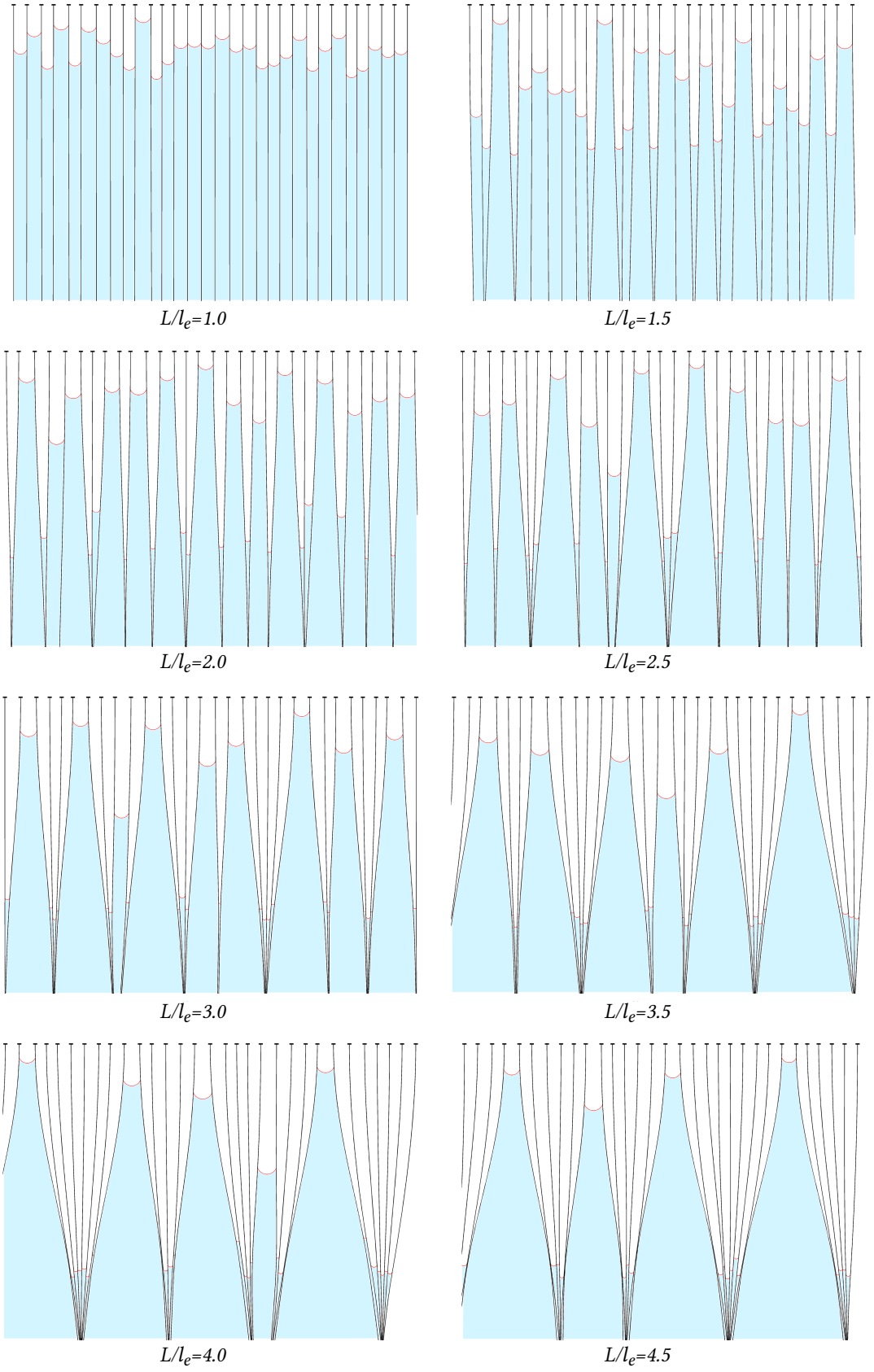

FIGURE IV.44: Représentation du système à la fin de l'imbibition pour différentes valeurs du ratio L/l_e dans le cas de l'encastrement opposé à la source

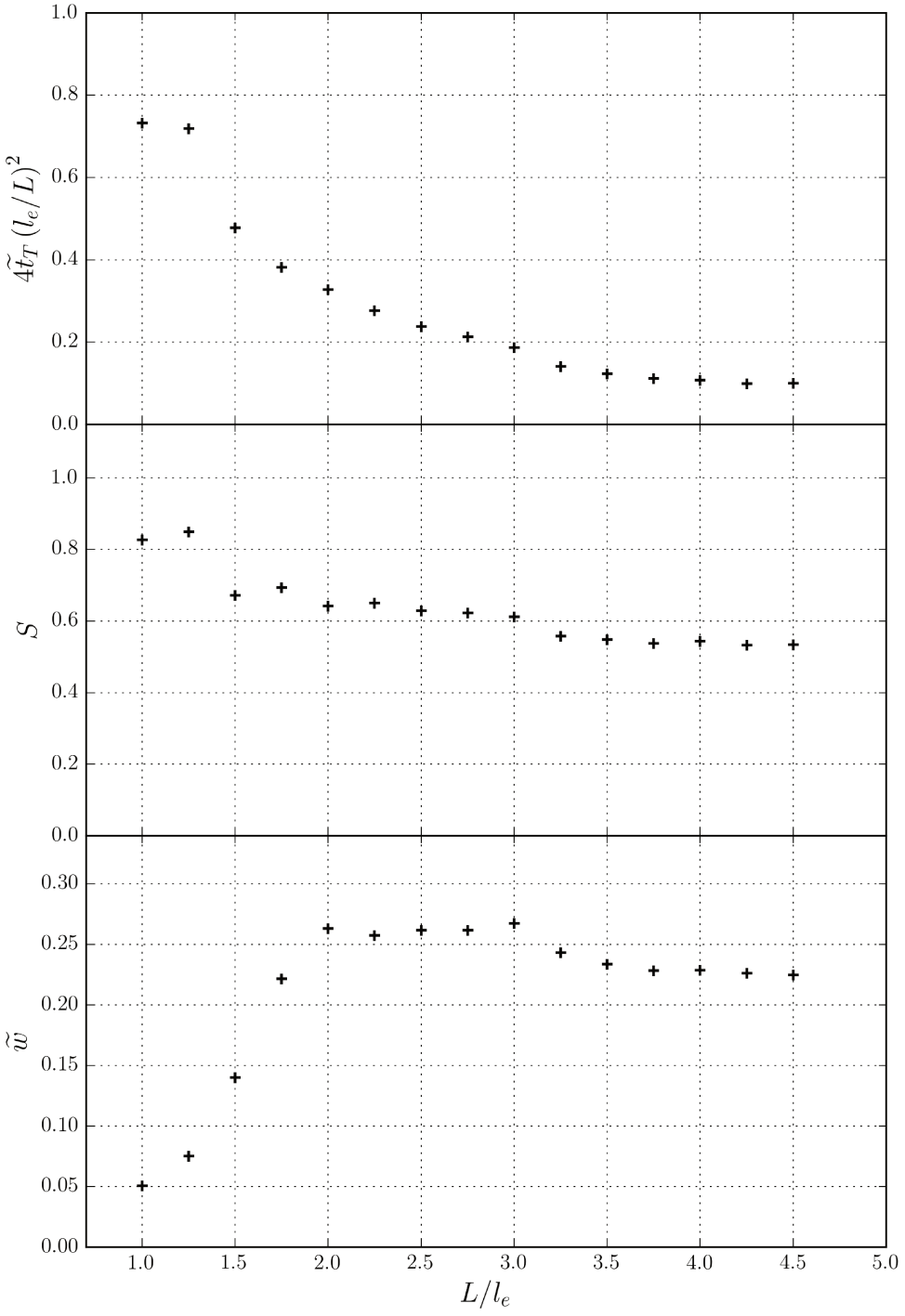

FIGURE IV.45: Représentation des trois grandeurs, $\widetilde{t}_T$, S et $\widetilde{w}$ en fonction du ratio L/l_e dans le cas de l'encastrement opposé à la source

IV.5.4.3 Double Encastrement

Dans le cas de l'encastrement double, 21 simulations ont été réalisées pour L/l_e variant de 2 à 7 par pas de 0.25 ainsi qu'une simulation pour $L/l_e = 1$.

Description qualitative des résultats Dans le cas de l'encastrement double huit résultats sont représentés pour un ratio L/l_e croissant sur la figure IV.46. On observe, cette fois encore, une tendance des lames à former des paquets de plus en plus large à mesure que le ratio L/l_e augmente. Ce constat n'a pas été réalisé dans la littérature pour les conditions limites utilisées ici.

Durée de l'imbibition La durée de l'imbibition en fonction de L/l_e est représentée sur la figure IV.47. Celle-ci est relativement constante malgré une flexibilité assez forte. Ce constat contraste fortement avec les résultats obtenus sur les systèmes réduits. On observait alors une forte augmentation de cette durée (voir figure IV.18). L'augmentation était due à la forme divergente du capillaire qui contrôlait cette durée. Dans le système complet, le mécanisme qui la détermine est identique à celui identifié dans le cas de l'encastrement à la source, et est lié à la formation des paquets de lames.

Qualité de l'imbibition La saturation est représentée en fonction du nombre L/l_e sur la figure IV.47. Une diminution progressive est observée, elle ne correspond pas vraiment aux résultats obtenus avec les systèmes réduits. Cette différence s'explique par le changement de mécanisme de contrôle de la durée de l'imbibition évoqué dans la partie précédente. L'imbibition s'achève alors plus tôt et la saturation est plus faible.

Épaisseur du front L'épaisseur adimensionnée est présentée sur la figure IV.47. La courbe stagne puis croit et enfin décroit légèrement. Ce comportement est similaire à celui observé dans les deux cas précédents et s'explique de la même manière, par la formation des paquets de lames.

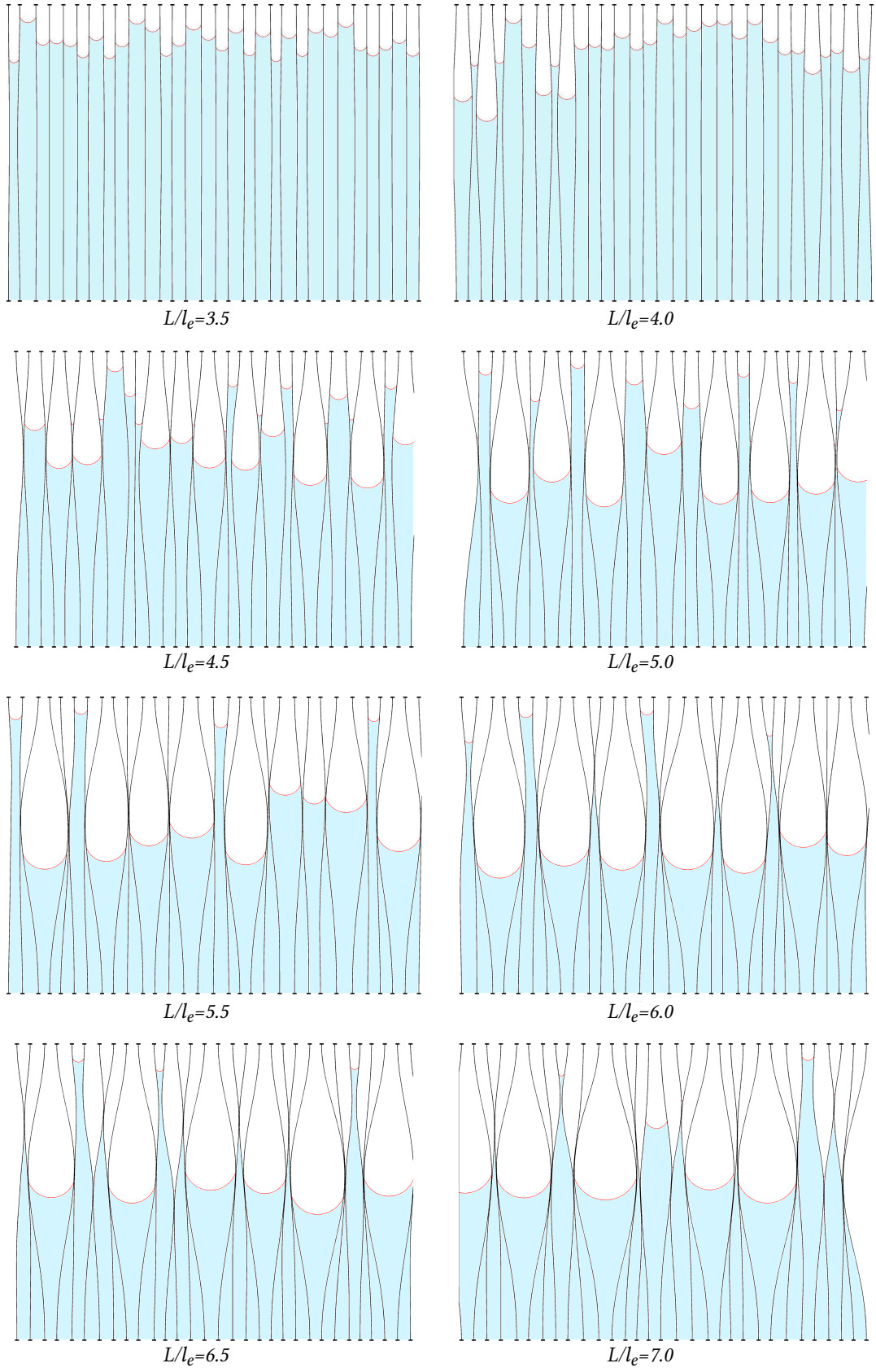

FIGURE IV.46: Représentation du système à la fin de l'imbibition pour différentes valeurs du ratio L/l_e dans le cas de l'encastrement double

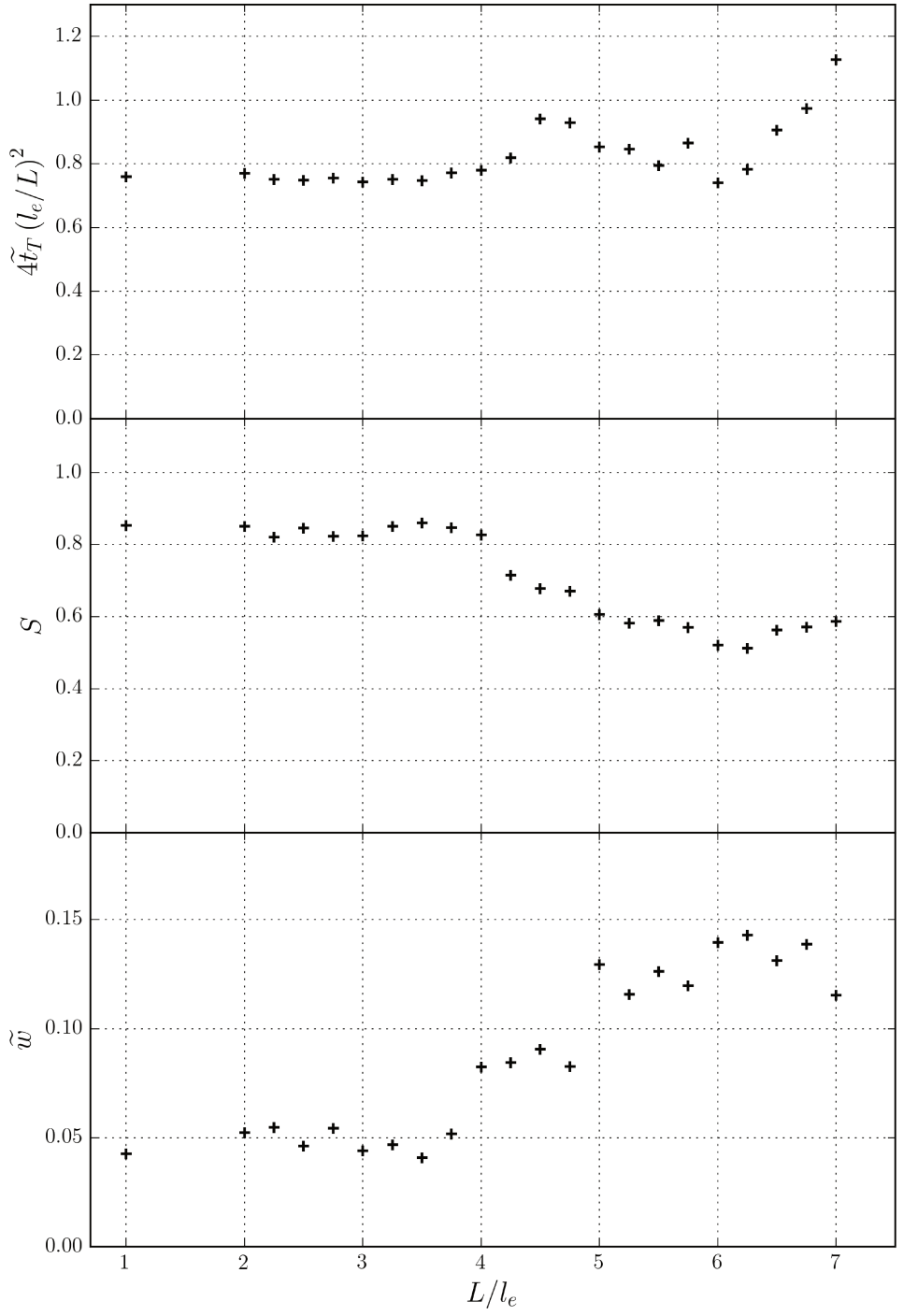

FIGURE IV.47: Représentation des trois grandeurs, $\widetilde{t}_T$, S et $\widetilde{w}$ en fonction du ratio L/l_e dans le cas de l'encastrement double

IV.5.5 Conclusion sur les systèmes complets

Les simulations réalisées sur des systèmes de lames parallèles montrent un comportement, indépendant des conditions limites, de formation de paquets de lames. Le nombre de lames par groupe augmente lorsque le ratio L/l_e augmente. Les observations réalisées avec les systèmes réduits correspondent généralement aux observations faites pour de petits nombres L/l_e. Une déviation importante apparait ensuite, elle s'explique par un effet de bord. Si on note N_p le nombre typique de lames dans un paquet alors on peut définir une largeur correspondante, l_p. Les mouvements des lames sont statistiquement corrélés en-dessous de cette longueur et indépendants au-dessus. On ne peut donc pas espérer représenter correctement ce qui se produit avec le modèle réduit dès que $\widetilde{l}_p > 2$, soit le mode fondamental (rapprochement éloignement deux-à-deux). De plus, la saturation du système est fortement diminuée par l'élasticité et semble tendre vers une limite constante dans la gamme de valeurs étudiée. L'épaisseur du front d'imbibition est augmentée par la flexibilité, le mécanisme sous-jacent étant lié à la formation des paquets de lames. La durée de l'imbibition dépend des conditions limites employées, elle varie de manière modérée pour l'encastrement à la source et l'encastrement double alors qu'elle diminue fortement pour l'encastrement opposé à la source.

IV.6 Discussion

Les résultats obtenus sur le système complet doivent encore être vérifiés expérimentalement et cela risque de ne pas être simple. Comme nous l'avons vu dans la partie expérimentale, la pesanteur ne peut pas être négligée à l'échelle des systèmes employés ($h \sim 300\mu m$, $L \sim 2cm$). Or, la réduction de la taille de ceux-ci semble difficile, elle demande une forte précision qui implique de passer par des procédés de fabrication sophistiqués. De plus, l'angle de contact dynamique risque de jouer un rôle, bien que les simulations montrent que ce rôle n'est pas clé.

La formation des paquets de lames a été observée dans les trois configurations étudiées. Dans la littérature elle n'avait été observée que dans le cas de l'encastrement opposé à la source ([Bico *et al.*, 2004], [Gat et Gharib, 2013]). Les différents raisonnements issus de celle-ci mènent aux mêmes résultats ; la formation des paquets se fait par étapes du mode fondamental (rapprochement éloignement des lames deux-à-deux) vers des modes plus lents (spatialement) qui mènent à la formation de groupes plus larges. Il semblerait que cette description reste valable pour des conditions limites différentes. Cependant, la dynamique de la coalescence est assez différente [12].

12. Données non-présentées

L'un des observations importantes de cette partie c'est la forte diminution de la saturation avec l'augmentation de la flexibilité du système. Cependant, ce constat ne peut pas être transposé directement aux torons de fibres pour différentes raisons (géométrie 3D, écoulement entre les fibres, pas de fermeture complète des pseudo-capillaires, *etc.*). En revanche, nous avons observé que l'épaisseur du front est fixée par le regroupement des lames en paquets, un comportement également observé pour les paquets de fibres [Py *et al.*, 2007a]. En supposant que les mécanismes sous-jacents sont similaires, on peut s'attendre à ce que la courbe obtenue dans le cas étudié soit de même forme que celle d'un toron de fibre. La vérification de cette assertion fera l'objet d'un prochain travail.

IV.7 Conclusion

Une étude de l'imbibition d'un milieu poreux élasto-capillaire a été menée numériquement et appuyée de quelques expériences. L'étude se divise en trois parties, la première est numérique, elle se focalise sur des systèmes réduits, constitués d'une lame flexible entre deux lames rigides. Ces systèmes permettent d'étudier l'influence de l'angle de contact dynamique et de la pesanteur sur les résultats obtenus pour trois conditions limites différentes. Les systèmes réduits les moins sensibles à la pesanteur ont été étudiés expérimentalement dans la deuxième partie. La correspondance avec les simulations numériques a été évaluée et est qualitative. Enfin, la dernière fait l'étude numérique de l'imbibition d'un système constitué de lames flexibles parallèles. Les résultats montrent que l'augmentation de la flexibilité du système provoque la formation de paquets de lames de plus en plus large et la diminution de la saturation du système en fin d'imbibition indépendamment des conditions limitées employées pour les lames. La durée de l'imbibition est également modifiée mais dépend des conditions limites.

Ce travail est un premier pas dans le champ d'étude des écoulements dans les milieux poreux déformables constitués de structures flexibles où l'écoulement est insaturé et couplé à la déformation du milieu. Ce champ d'investigation a été assez peu étudié pour l'instant mais constitue un nœud incontournable de l'étude des écoulements diphasiques dans les milieux poreux.

Conclusion générale

Au travers des différents chapitres de ce manuscrit, nous avons exploré trois problèmes ayant attrait à l'imbibition spontanée des milieux poreux. Ce sujet fait l'objet d'intenses recherches depuis plus d'un siècle déjà. Malgré la quantité importante de résultats obtenus, de nombreuses questions, pertinentes vis-à-vis d'applications industrielles majeures, restent ouvertes. L'une des difficultés principales de cette thématique de recherche est qu'elle fait appel à de nombreuses notions issues de différents domaines. Certaines de ces notions sont présentées dans le chapitre d'introduction. Celui-ci doit permettre à un néophyte d'acquérir les pré-requis nécessaires à la lecture des chapitres suivants.

Le deuxième chapitre se concentre sur un mécanisme de fragmentation de phase induit par la pesanteur. Le mécanisme est d'abord prédit analytiquement via un système idéalisé puis vérifié expérimentalement. il est montré que ce mécanisme se produit lorsque la pesanteur domine les effets de dissipation visqueuse et que deux dynamiques sont envisageables selon la disposition du système dans l'espace.

Le troisième chapitre traite de l'évolution de l'épaisseur du front lors d'une imbibition spontanée dans un réseau de capillaires. Nous partons d'une observation expérimentale réalisée dans la littérature et montrons qu'un modèle déjà existant décrit correctement les propriétés du front d'imbibition en nous appuyant sur des simulations numériques. Nous justifions ensuite la pertinence de l'utilisation de ce modèle qui a été employé en-dehors de son cadre d'application originel.

Le quatrième chapitre traite de la compétition lors de l'imbibition d'un milieu poreux déformable. Le milieu est constitué de lames flexibles parallèles. Le problème est d'abord traité sur un système réduit constitué d'une lame flexibles entre deux parois rigides. Nous étudions l'impact des paramètres du problème puis l'influence de l'angle de contact dynamique et de la pesanteur. Les prédictions réalisées sont comparées à des essais expérimentaux mais la correspondance est seulement qualitative. Enfin, le milieu constitué de lames flexibles parallèles est étudié et nous montrons que les lames ont une tendance à former des paquets de plus en plus larges à mesure que leur flexibilité

augmente. Il est également montré que la régularité du front diminue à mesure que la flexibilité croît.

Si les travaux présentés dans ce manuscrit permettent de répondre à certaines questions, ils en soulèvent encore davantage. Le mécanisme de fragmentation de phase qui a été identifié n'est correctement décrit que dans un système simplifié et en l'absence d'hystérèse de mouillage. Qu'advient-il lorsque l'hystérèse est présente ? Et comment se produit-il dans un réseau de pores irréguliers ? Ces sujets peuvent être étudiés expérimentalement et permettraient de mieux comprendre dans quelles situations ce mécanisme apparait et dans quelle proportion il peut fragmenter la phase mouillante.

Ensuite, nous avons également vu que l'évolution de l'épaisseur d'un front d'imbibition dans un réseau de pores est correctement décrite par le modèle de Wilkinson alors qu'il ne respecte pas les conditions nécessaires à son application. L'argument que nous avons avancé est que la dynamique de l'évolution de l'épaisseur est plus rapide que la variation des conditions de l'écoulement. Cet argument implique que le modèle n'est plus valide lorsque cette condition n'est plus respectée. Que se passe t-il dans cette situation, i.e., comment évolue l'épaisseur du front ? Nombre de milieux poreux sont fortement anisotropes. Est-ce que le modèle de Wilkinson décrit correctement le problème dans ces conditions ?

Enfin, nous avons vu que l'imbibition dans un milieu constitué de lames flexibles parallèles est globalement pénalisée par la flexibilité des lames qui induit une longueur de corrélation dans le milieu. Ce constat n'est pas justifié quantitativement à l'heure actuelle. Il devra l'être avant de s'intéresser à des systèmes plus proches de l'application visée, l'imbibition de torons de fibres par une résine. Le passage à des systèmes plus réalistes pose également de nombreux problèmes : la géométrie est alors tridimensionnelle, l'écoulement peut se produire de différentes manières et le fluide possède une rhéologie complexe. Que ce soit par intérêt ou par curiosité, il reste donc énormément de choses à faire pour parfaire la compréhension des écoulements diphasiques dans les milieux poreux.

Bibliographie

[Aharony et Stauffer 2003] Aharony, A. ; Stauffer, D. : *Introduction to percolation theory.* Taylor & Francis, 2003

[Aris 1956] Aris, R. : On the dispersion of a solute in a fluid flowing through a tube. In : *Proceedings of the Royal Society of London A : mathematical, physical and engineering sciences* Bd. 235 The Royal Society (Veranst.), 1956, S. 67–77

[Aristoff *et al.* 2011] Aristoff, J.M. ; Duprat, C. ; Stone, H.A. : Elastocapillary imbibition. In : *International Journal of Non-Linear Mechanics* 46 (2011), Nr. 4, S. 648–656

[Auradou *et al.* 1999] Auradou, H. ; Måløy, K.J. ; Schmittbuhl, J. ; Hansen, A. ; Bideau, D. : Competition between correlated buoyancy and uncorrelated capillary effects during drainage. In : *Physical Review E* 60 (1999), Nr. 6, S. 7224

[Barabási et Stanley 1995] Barabási, A.L. ; Stanley, H.E. : *Fractal concepts in surface growth.* Cambridge university press, 1995

[Beresnev *et al.* 2009] Beresnev, I. ; Li, W. ; Vigil, R.D. : Condition for break-up of non-wetting fluids in sinusoidally constricted capillary channels. In : *Transport in porous media* 80 (2009), Nr. 3, S. 581

[Berli et Urteaga 2014] Berli, C.L.A. ; Urteaga, R. : Asymmetric capillary filling of non-Newtonian power law fluids. In : *Microfluidics and nanofluidics* 17 (2014), Nr. 6, S. 1079–1084

[Bico 2000] Bico, J. : *Mécanismes d'imprégnation : Surfaces texturées, Bigouttes, Poreux.* 2000

[Bico *et al.* 2004] Bico, J. ; Roman, B. ; Moulin, L. ; Boudaoud, A. : Adhesion : elastocapillary coalescence in wet hair. In : *Nature* 432 (2004), Nr. 7018, S. 690–690

[Bikerman 1978] Bikerman, J.J. : Capillarity before Laplace : Clairaut, Segner, Monge, Young. In : *Archive for history of exact sciences* 18 (1978), Nr. 2, S. 103–122

[Birovljev *et al.* 1991] Birovljev, A. ; Furuberg, L. ; Feder, J. ; Jssang, T. ; K.J., Mly ; A., Aharony : Gravity invasion percolation in two dimensions : Experiment and simulation. In : *Physical Review Letters* 67 (1991), Nr. 5, S. 584

[Birovljev *et al.* 1995] Birovljev, A. ; Wagner, G. ; Meakin, P. ; Feder, J. ; Jøssang, T. : Migration and fragmentation of invasion percolation clusters in two-dimensional porous media. In : *Physical Review E* 51 (1995), Nr. 6, S. 5911

[Blaisot et Adeline 2000] Blaisot, J.B. ; Adeline, S. : Determination of the growth rate of instability of low velocity free falling jets. In : *Experiments in fluids* 29 (2000), Nr. 3, S. 247–256

[Blake et Haynes 1969] Blake, T.D. ; Haynes, J.M. : Kinetics of liquidliquid displacement. In : *Journal of colloid and interface science* 30 (1969), Nr. 3, S. 421–423

[Bodaghi *et al.* 2016] Bodaghi, M. ; Catalanotti, G. ; Correia, N. : On the statistics of transverse permeability of randomly distributed fibers. In : *Composite Structures* 158 (2016), S. 323–332

[Bosanquet 1923] Bosanquet, C.H. : LV. On the flow of liquids into capillary tubes. In : *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 45 (1923), Nr. 267, S. 525–531

[Bouasse 1924] Bouasse, H. : *Capillarité : Phénomènes superficiels*. Librairie Delagrave, 1924

[Bretherton 1961] Bretherton, F.P. : The motion of long bubbles in tubes. In : *Journal of Fluid Mechanics* 10 (1961), Nr. 02, S. 166–188

[Brown et Fatt 1956] Brown, R. ; Fatt, I. : Measurements of fractional wettability of oil fields' rocks by the nuclear magnetic relaxation method. In : *Conference Abstract* (1956)

[Buckingham 1907] Buckingham, E. : Studies on the movement of soil moisture. (1907)

[Buckley et Leverett 1942] Buckley, S.E. ; Leverett, M.C. : Mechanism of fluid displacement in sands. In : *Transactions of the AIME* 146 (1942), Nr. 01, S. 107–116

[Buldyrev *et al.* 1992a] Buldyrev, S.V. ; Barabási, A.L. ; Caserta, F. ; Havlin, S. ; Stanley, H.E. ; Vicsek, T. : Anomalous interface roughening in porous media : Experiment and model. In : *Physical Review A* 45 (1992), Nr. 12, S. R8313

[Buldyrev *et al.* 1992b] Buldyrev, S.V. ; Barabási, A.L. ; Havlin, S. ; Kertész, J. ; Stanley, H.E. ; Xenias, H.S. : Anomalous interface roughening in 3D porous media : experiment and model. In : *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications* 191 (1992), Nr. 1-4, S. 220–226

[Bush et Hu 2006] Bush, J.W.M. ; Hu, D.L. : Walking on water : biolocomotion at the interface. In : *Annu. Rev. Fluid Mech.* 38 (2006), S. 339–369

[Cai *et al.* 2014] Cai, J. ; Perfect, E. ; Cheng, C.L. ; Hu, X. : Generalized modeling of spontaneous imbibition based on Hagen–Poiseuille flow in tortuous capillaries with variably shaped apertures. In : *Langmuir* 30 (2014), Nr. 18, S. 5142–5151

[Cambau *et al.* 2011] Cambau, T. ; Bico, J. ; Reyssat, E. : Capillary rise between flexible walls. In : *EPL (Europhysics Letters)* 96 (2011), Nr. 2, S. 24001

[Cameron et Bell 1906] Cameron, F.K. ; Bell, J.M. : The Flow of Liquids Through Capillary Space. In : *J. phys. Chem* 10 (1906), S. 658–674

[Carman 1937] Carman, P.C. : Fluid flow through granular beds. In : *Chemical Engineering Research and Design* 75 (1937), S. S32–S48

[Cassie et Baxter 1944] Cassie, A.B. ; Baxter, S. : Wettability of porous surfaces. In : *Transactions of the Faraday society* 40 (1944), S. 546–551

[Chatzis et Dullien 1983] Chatzis, I. ; Dullien, F. : Dynamic immiscible displacement mechanisms in pore doublets : theory versus experiment. In : *Journal of Colloid and Interface Science* 91 (1983), Nr. 1, S. 199–222

[Childs et Collis-George 1950] Childs, E.C. ; Collis-George, N. : The permeability of porous materials. In : *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* Bd. 201 The Royal Society (Veranst.), 1950, S. 392–405

[Concus et Finn 1969] Concus, P. ; Finn, R. : On the behavior of a capillary surface in a wedge. In : *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 63 (1969), Nr. 2, S. 292

[Costa *et al.* 2001] Costa, M.L. ; De Almeida, S.F.M. ; Rezende, M.C. : The influence of porosity on the interlaminar shear strength of carbon/epoxy and carbon/bismaleimide fabric laminates. In : *Composites Science and Technology* 61 (2001), Nr. 14, S. 2101–2108

[Csahók et Vicsek 1992] Csahók, Z. ; Vicsek, T. : Kinetic roughening in a model of sedimentation of granular materials. In : *Physical Review A* 46 (1992), Nr. 8, S. 4577

[Darcy 1856] Darcy, H. : *Les fontaines publiques de la ville de Dijon : exposition et application.* Victor Dalmont, 1856

[Dawson et Roberts 1997] Dawson, H.E. ; Roberts, P.V. : Influence of viscous, gravitational, and capillary forces on DNAPL saturation. In : *Ground Water* 35 (1997), Nr. 2, S. 261–269

[Dettre *et al.* 1965] Dettre, R. ; Johnson, J. ; Rulon, E. : Contact Angle Hysteresis. IV. Contact Angle Measurements on Heterogeneous Surfaces1. In : *The journal of physical chemistry* 69 (1965), Nr. 5, S. 1507–1515

[Dias et Payatakes 1986] Dias, M.M. ; Payatakes, A.C. : Network models for two-phase flow in porous media Part 2. Motion of oil ganglia. In : *Journal of Fluid Mechanics* 164 (1986), S. 337–358

[Dullien 1992] Dullien, F. : *Porous media : fluid transport and pore structure.* Academic Press, 1992

[Dullien *et al.* 1989] Dullien, F. ; Zarcone, C. ; Macdonald, I. ; Collins, A. ; Bochard, R. : The effects of surface roughness on the capillary pressure curves and the heights of capillary rise in glass bead packs. In : *Journal of Colloid and Interface Science* 127 (1989), Nr. 2, S. 362–372

[Duprat *et al.* 2011] Duprat, C. ; Aristoff, J.M. ; Stone, H.A. : Dynamics of elastocapillary rise. In : *Journal of Fluid Mechanics* 679 (2011), S. 641–654

[Duprat *et al.* 2012] Duprat, C. ; Protiere, S. ; Beebe, A.Y. ; Stone, H.A. : Wetting of flexible fibre arrays. In : *Nature* 482 (2012), Nr. 7386, S. 510

[Edwards et Wilkinson 1982] Edwards, S.F. ; Wilkinson, D.R. : The surface statistics of a granular aggregate. In : *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* Bd. 381 The Royal Society (Veranst.), 1982, S. 17–31

[Fatt 1956] Fatt, I. : The network model of porous media. (1956)

[Frette *et al.* 1992] Frette, V. ; Feder, J. ; Jøssang, T. ; Meakin, P. : Buoyancy-driven fluid migration in porous media. In : *Physical review letters* 68 (1992), Nr. 21, S. 3164

[Gat et Gharib 2013] Gat, A.D. ; Gharib, M. : Elasto-capillary coalescence of multiple parallel sheets. In : *Journal of Fluid Mechanics* 723 (2013), S. 692–705

[de Gennes 1985] Gennes, P.G. de : Wetting : statics and dynamics. In : *Reviews of modern physics* 57 (1985), Nr. 3, S. 827

[Glass *et al.* 1991] Glass, R.J. ; Parlange, J.Y. ; Steenhuis, T.S. : Immiscible Displacement in Porous Media : Stability Analysis of Three-Dimensional, Axisymmetric Disturbances With Application to Gravity-Driven Wetting Front Instability. In : *Water Resources Research* 27 (1991), Nr. 8, S. 1947–1956

[González *et al.* 2007] González, B. ; Calvar, N. ; Gómez, E. ; Domínguez, A. : Density, dynamic viscosity, and derived properties of binary mixtures of methanol or ethanol with water, ethyl acetate, and methyl acetate at T=(293.15, 298.15, and 303.15) K. In : *The Journal of Chemical Thermodynamics* 39 (2007), Nr. 12, S. 1578–1588

[Gorce *et al.* 2016] Gorce, J.B. ; Hewitt, I.J. ; Vella, D. : Capillary imbibition into converging tubes : Beating washburn's law and the optimal imbibition of liquids. In : *Langmuir* 32 (2016), Nr. 6, S. 1560–1567

[Green et Ampt 1911] Green, W.H. ; Ampt, G.A. : Studies on Soil Phyics. In : *The Journal of Agricultural Science* 4 (1911), Nr. 1, S. 1–24

[Gruener *et al.* 2009] Gruener, S. ; Hofmann, T. ; Wallacher, D. ; Kityk, A.V. ; Huber, P. : Capillary rise of water in hydrophilic nanopores. In : *Physical Review E* 79 (2009), Nr. 6, S. 067301

[Gruener *et al.* 2012] Gruener, S. ; Sadjadi, Z. ; Hermes, H.E. ; Kityk, A.V. ; Knorr, K. ; Egelhaaf, S.U. ; Rieger, H. ; Huber, P. : Anomalous front broadening during spontaneous imbibition in a matrix with elongated pores. In : *Proceedings of the National Academy of Sciences* 109 (2012), Nr. 26, S. 10245–10250

[Haines 1930] Haines, C.G. : *The Revival of Natural Law Concepts : A Study of the Establishment and of the Interpretation of Limits on Legislatures with special reference to the Development of certain phases of American Constitutional Law.* Bd. 4. Russell & Russell Publishers, 1930

[Hervet et de Gennes 1984] Hervet, H. ; Gennes, P.G. de : The dynamics of wetting-Precursor films in the wetting of dry solids. In : *Comptes Rendus De L Academie Des Sciences Serie Ii* 299 (1984), Nr. 9, S. 499–503

[Hoffman 1975] Hoffman, R. : A study of the advancing interface. I. Interface shape in liquid—gas systems. In : *Journal of colloid and interface science* 50 (1975), Nr. 2, S. 228–241

[Huh et Scriven 1971] Huh, C. ; Scriven, L.E. : Hydrodynamic model of steady movement of a solid/liquid/fluid contact line. In : *Journal of Colloid and Interface Science* 35 (1971), Nr. 1, S. 85–101

[Kardar *et al.* 1986] Kardar, M. ; Parisi, G. ; Zhang, Y.C. : Dynamic scaling of growing interfaces. In : *Physical Review Letters* 56 (1986), Nr. 9, S. 889

[Kelemen *et al.* 1995] Kelemen, P.B. ; Whitehead, J.A. ; Aharonov, E. ; Jordahl, K.A. : Experiments on flow focusing in soluble porous media, with applications to melt extraction from the mantle. In : *Journal of Geophysical Research : Solid Earth* 100 (1995), Nr. B1, S. 475–496

[Kim et Mahadevan 2006] Kim, H.Y. ; Mahadevan, L. : Capillary rise between elastic sheets. In : *Journal of Fluid mechanics* 548 (2006), S. 141–150

[Kwon *et al.* 2008] Kwon, H.M. ; Kim, H.Y. ; Puëll, J. ; Mahadevan, L. : Equilibrium of an elastically confined liquid drop. In : *Journal of applied physics* 103 (2008), Nr. 9, S. 093519

[Laplace 1806] Laplace, P.S. : Sur la théorie des tubes capillaires. In : *Journal de Physique* 62 (1806), S. 120–128

[Larson *et al.* 1981] Larson, R.G. ; Davis, H.T. ; Scriven, L.E. : Displacement of residual nonwetting fluid from porous media. In : *Chemical Engineering Science* 36 (1981), Nr. 1, S. 75–85

[Lenormand *et al.* 1988] Lenormand, R. ; Touboul, E. ; Zarcone, C. : Numerical models and experiments on immiscible displacements in porous media. In : *Journal of fluid mechanics* 189 (1988), S. 165–187

[Lenormand et Zarcone 1985] Lenormand, R. ; Zarcone, C. : Invasion percolation in an etched network : measurement of a fractal dimension. In : *Physical review letters* 54 (1985), Nr. 20, S. 2226

[Lenormand *et al.* 1983] Lenormand, R. ; Zarcone, C. ; Sarr, A. : Mechanisms of the displacement of one fluid by another in a network of capillary ducts. In : *Journal of Fluid Mechanics* 135 (1983), S. 337–353

[Leverett 1941] Leverett, M.C. : Capillary behavior in porous solids. In : *Transactions of the AIME* 142 (1941), Nr. 01, S. 152–169

[Løvoll *et al.* 2005] Løvoll, G. ; Méheust, Y. ; Måløy, K.J. ; Aker, E. ; Schmittbuhl, J. : Competition of gravity, capillary and viscous forces during drainage in a two-dimensional porous medium, a pore scale study. In : *Energy* 30 (2005), Nr. 6, S. 861–872

[Marchand 2011] Marchand, A. : *Mouillage statique et dynamique : Influences géométriques aux échelles moléculaires.* 2011

[Marchand *et al.* 2012] Marchand, A. ; Das, S. ; Snoeijer, J. ; Andreotti, B. : Capillary pressure and contact line force on a soft solid. In : *Physical review letters* 108 (2012), Nr. 9, S. 094301

[Martys *et al.* 1991] Martys, N. ; Cieplak, M. ; Robbins, M.O. : Critical phenomena in fluid invasion of porous media. In : *Physical review letters* 66 (1991), Nr. 8, S. 1058

[Matsushita et Fujikawa 1990] Matsushita, M. ; Fujikawa, H. : Diffusion-limited growth in bacterial colony formation. In : *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications* 168 (1990), Nr. 1, S. 498–506

[Méheust *et al.* 2002] Méheust, Y. ; Løvoll, G. ; Måløy, K.J. ; Schmittbuhl, J. : Interface scaling in a two-dimensional porous medium under combined viscous, gravity, and capillary effects. In : *Physical Review E* 66 (2002), Nr. 5, S. 051603

[Mehrabian *et al.* 2011] Mehrabian, H. ; Gao, P. ; Feng, J.J. : Wicking flow through microchannels. In : *Physics of Fluids* 23 (2011), Nr. 12, S. 122108

[Melrose 1974] Melrose, J.C. : Role of capillary forces in detennining microscopic displacement efficiency for oil recovery by waterflooding. In : *Journal of Canadian Petroleum Technology* 13 (1974), Nr. 04

[Morrow 1971] Morrow, N.R. : The retention of connate water in hydrocarbon reservoirs. In : *Journal of Canadian Petroleum Technology* 10 (1971), Nr. 01

[Morrow 1976] Morrow, N.R. : Capillary pressure correlations for uniformly wetted porous media. In : *Journal of Canadian Petroleum Technology* 15 (1976), Nr. 04

[Morrow 1979] Morrow, N.R. : Interplay of capillary, viscous and buoyancy forces in the mobilization of residual oil. In : *Journal of Canadian Petroleum Technology* 18 (1979), Nr. 03

[Nadkarni et Garoff 1992] Nadkarni, G.D. ; Garoff, S. : An investigation of microscopic aspects of contact angle hysteresis : Pinning of the contact line on a single defect. In : *EPL (Europhysics Letters)* 20 (1992), Nr. 6, S. 523

[du Noüy 1925] Noüy, P. du : An interfacial tensiometer for universal use. In : *The Journal of general physiology* 7 (1925), Nr. 5, S. 625

[Or 2008] Or, D. : Scaling of capillary, gravity and viscous forces affecting flow morphology in unsaturated porous media. In : *Advances in water resources* 31 (2008), Nr. 9, S. 1129–1136

[Pak *et al.* 2015] Pak, T. ; Butler, I.B. ; Geiger, S. ; Dijke, M.I.J. van ; Sorbie, K.S. : Droplet fragmentation : 3D imaging of a previously unidentified pore-scale process during multiphase flow in porous media. In : *Proceedings of the National Academy of Sciences* 112 (2015), Nr. 7, S. 1947–1952

[Pang *et al.* 2007] Pang, Fong-Meng ; Seng, Chye-Eng ; Teng, Tjoon-Tow ; Ibrahim, MH : Densities and viscosities of aqueous solutions of 1-propanol and 2-propanol at temperatures from 293.15 K to 333.15 K. In : *Journal of Molecular Liquids* 136 (2007), Nr. 1, S. 71–78

[Park et Kim 2008] Park, K.Y. ; Kim, H.Y. : Bending of floating flexible legs. In : *Journal of Fluid Mechanics* 610 (2008), S. 381–390

[Patel et Lee 1996] Patel, N. ; Lee, L.J. : Modeling of void formation and removal in liquid composite molding. Part II : Model development and implementation. In : *Polymer Composites* 17 (1996), Nr. 1, S. 104–114

[Purcell 1950] Purcell, W.R. : Interpretation of capillary pressure data. In : *Journal of Petroleum Technology* 2 (1950), Nr. 08, S. 11–12

[Py *et al.* 2007a] Py, C. ; Bastien, R. ; Bico, J. ; Roman, B. ; Boudaoud, A. : 3D aggregation of wet fibers. In : *EPL (Europhysics Letters)* 77 (2007), Nr. 4, S. 44005

[Py *et al.* 2007b] Py, C. ; Reverdy, P. ; Doppler, L. ; Bico, J. ; Roman, B. ; Baroud, C.N. : Capillary origami : spontaneous wrapping of a droplet with an elastic sheet. In : *Physical review letters* 98 (2007), Nr. 15, S. 156103

[Quéré 1997] Quéré, D. : Inertial capillarity. In : *EPL (Europhysics Letters)* 39 (1997), Nr. 5, S. 533

[Ransohoff et Radke 1988] Ransohoff, T.C. ; Radke, C.J. : Laminar flow of a wetting liquid along the corners of a predominantly gas-occupied noncircular pore. In : *Journal of colloid and interface science* 121 (1988), Nr. 2, S. 392–401

[Reyssat *et al.* 2008] Reyssat, M. ; Courbin, L. ; Reyssat, E. ; Stone, H.A. : Imbibition in geometries with axial variations. In : *Journal of Fluid Mechanics* 615 (2008), S. 335–344

[Reyssat *et al.* 2009] Reyssat, M. ; Sangne, S.Y. ; Van Nierop, E.A. ; Stone, H.A. : Imbibition in layered systems of packed beads. In : *EPL (Europhysics Letters)* 86 (2009), Nr. 5, S. 56002

[Richards 1931] Richards, L.A. : Capillary conduction of liquids through porous mediums. In : *Physics* 1 (1931), Nr. 5, S. 318–333

[Roof 1970] Roof, J.G. : Snap-off of oil droplets in water-wet pores. In : *Society of Petroleum Engineers Journal* 10 (1970), Nr. 01, S. 85–90

[Rose et Witherspoon 1956] Rose, W. ; Witherspoon, P.A. : Studies of waterflood performance. II. In : *Circular no. 224* (1956)

[Rowlinson et Widom 2002] Rowlinson, J.S. ; Widom, B. : *Molecular Theory of Capillarity*. Bd. 8. Courier Corporation, 2002

[Sadjadi *et al.* 2015] Sadjadi, Z. ; Jung, M. ; Seemann, R. ; Rieger, H. : Meniscus arrest during capillary rise in asymmetric microfluidic pore junctions. In : *Langmuir* 31 (2015), Nr. 8, S. 2600–2608

[Sadjadi et Rieger 2013] Sadjadi, Z. ; Rieger, H. : Scaling theory for spontaneous imbibition in random networks of elongated pores. In : *Physical review letters* 110 (2013), Nr. 14, S. 144502

[Siddique *et al.* 2009] Siddique, J.I. ; Anderson, D.M. ; Bondarev, A. : Capillary rise of a liquid into a deformable porous material. In : *Physics of Fluids* 21 (2009), Nr. 1, S. 013106

[Tabeling 2015] Tabeling, P. : *Introduction à la microfluidique*. Belin, 2015

[Thovert *et al.* 2001] Thovert, J.F. ; Yousefian, F. ; Spanne, P. ; Jacquin, C.G. ; Adler, P.M. : Grain reconstruction of porous media : application to a low-porosity Fontainebleau sandstone. In : *Physical Review E* 63 (2001), Nr. 6, S. 061307

[Van Honschoten *et al.* 2007] Van Honschoten, J.W. ; Escalante, M. ; Tas, N.R. ; Jansen, H.V. ; Elwenspoek, M. : Elastocapillary filling of deformable nanochannels. In : *Journal of applied physics* 101 (2007), Nr. 9, S. 094310

[Vazquez *et al.* 1995] Vazquez, G. ; Alvarez, E. ; Navaza, J.M. : Surface tension of alcohol water+ water from 20 to 50. degree. C. In : *Journal of chemical and engineering data* 40 (1995), Nr. 3, S. 611–614

[Vicsek *et al.* 1990] Vicsek, T. ; Cserző, M. ; Horváth, V.K. : Self-affine growth of bacterial colonies. In : *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications* 167 (1990), Nr. 2, S. 315–321

[Washburn 1921] Washburn, E. : The dynamics of capillary flow. In : *Physical review* 17 (1921), Nr. 3, S. 273

[Wei 2014] Wei, L. : Continuum dynamics of elastocapillary coalescence and arrest. In : *EPL (Europhysics Letters)* 106 (2014), Nr. 1, S. 14002

[Wenzel 1936] Wenzel, R. : Resistance of solid surfaces to wetting by water. In : *Industrial & Engineering Chemistry* 28 (1936), Nr. 8, S. 988–994

[Wilhelmy 1863] Wilhelmy, L. : Ueber die Abhängigkeit der Capillaritäts-Constanten des Alkohols von Substanz und Gestalt des benetzten festen Körpers. In : *Annalen der Physik* 195 (1863), Nr. 6, S. 177–217

[Wilkinson 1984] Wilkinson, D. : Percolation model of immiscible displacement in the presence of buoyancy forces. In : *Physical Review A* 30 (1984), Nr. 1, S. 520

[Wilkinson 1986] Wilkinson, D. : Percolation effects in immiscible displacement. In : *Physical Review A* 34 (1986), Nr. 2, S. 1380

[Wilkinson et Willemsen 1983] Wilkinson, D. ; Willemsen, J.F. : Invasion percolation : a new form of percolation theory. In : *Journal of Physics A : Mathematical and General* 16 (1983), Nr. 14, S. 3365

[Witten et Sander 1981] Witten, T.A. ; Sander, L.M. : Diffusion-limited aggregation, a kinetic critical phenomenon. In : *Physical review letters* 47 (1981), Nr. 19, S. 1400

[Young 1805] Young, T. : An essay on the cohesion of fluids. In : *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 95 (1805), S. 65–87

[Zhang *et al.* 1992] Zhang, J. ; Zhang, Y.C. ; Alstrøm, P. ; Levinsen, M.T. : Modeling forest fire by a paper-burning experiment, a realization of the interface growth mechanism. In : *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications* 189 (1992), Nr. 3-4, S. 383–389