HAL
open science

Contraintes expérimentales sur des modèles avec champ scalaire léger dans le secteur sombre en cosmologie et physique des particules

Clément Leloup

▶ **To cite this version:**

Clément Leloup. Contraintes expérimentales sur des modèles avec champ scalaire léger dans le secteur sombre en cosmologie et physique des particules. Cosmologie et astrophysique extra-galactique [astro-ph.CO]. Université Paris Saclay (COmUE), 2018. Français. NNT : 2018SACLS303 . tel-01920518

HAL Id: tel-01920518

https://theses.hal.science/tel-01920518

Submitted on 13 Nov 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NNT : 2018SACLS303

Thèse de doctorat de l'Université Paris-Saclay préparée à l'Université Paris-Sud

CEA/Irfu/DPhP

École doctorale n°576
Particules, Hadrons, Énergie, Noyau, Instrumentation, Imagerie, Cosmos et Simulation (PHENIICS)
Spécialité de doctorat : Astroparticules et cosmologie

par

Clément Leloup

Contraintes expérimentales sur des modèles avec champ scalaire léger dans le secteur sombre en cosmologie et physique des particules

Thèse présentée et soutenue à Gif-sur-Yvette le 26 septembre 2018.

Composition du jury :

M.	Dirk Zerwas	Université Paris-Sud, LAL	Président du Jury
Pr	David Langlois	Université Sorbonne Paris Cité, APC	Rapporteur
Pr	Susan Gascon-Shotkin	Institut de Physique Nucléaire de Lyon	Rapportrice
M.	Cédric Deffayet	Institut d'Astrophysique de Paris	Examinateur
M.	Alexandre Barreira	Institut Max Planck pour l'Astrophysique	Examinateur
M.	Marc Besancon	CEA-Saclay	Co-Directeur de thèse
Mme	Vanina Ruhlmann-Kleider	CEA-Saclay	Co-Directrice de thèse

Table des matières

Table des matières **1**

Remerciements **7**

Introduction **9**

1 Les modèles standards **13**
1.1 Le modèle standard de la cosmologie 14
1.1.1 La relativité générale, une théorie de l'espace-temps 14
1.1.2 L'Univers homogène et isotrope 20
1.1.3 Le modèle de concordance 23
1.2 Le modèle standard de la physique des particules 25
1.2.1 Un soupçon de théorie quantique des champs 26
1.2.2 Les théories de jauge 29
1.2.3 Le mécanisme de Brout-Englert-Higgs 33
1.2.4 Le modèle et ses limites 35
Bibliographie 38

2 Perturbations cosmologiques **41**
2.1 La théorie des perturbations en cosmologie 42
2.1.1 Perturbations de la métrique 42
2.1.2 Le problème de la jauge 44
2.1.3 Perturbations du tenseur énergie-impulsion 45
2.1.4 Équations d'évolution perturbées 48
2.1.5 Le choix de la jauge 50
2.2 Le fond diffus cosmologique 58
2.2.1 La formule de Sachs-Wolfe 58
2.2.2 Interaction entre baryons et photons 62
2.2.3 Le spectre de puissance angulaire des anisotropies 65
2.2.4 Approche cinétique 69
Bibliographie 77

3 Le modèle du galileon **81**
3.1 Vers un modèle de l'énergie noire 82
3.1.1 La constante cosmologique 82
3.1.2 À la recherche d'une autre approche 86
3.2 Principe de construction du modèle du galileon 87
3.2.1 Développement du modèle du galileon 88

3.2.2 L'effet Vainshtein . . . 93
3.2.3 Le galileon comme limite d'autres modèles . . . 96
3.3 Un Univers galileon homogène . . . 99
3.3.1 Équations dans la métrique FLRW . . . 99
3.3.2 Évolution de l'Univers . . . 103
3.4 Les perturbations du galileon . . . 105
3.4.1 Équations perturbées . . . 105
3.4.2 Évolution des perturbations . . . 110
3.4.3 Les spectres de puissance . . . 114
3.4.4 Contraintes théoriques . . . 118
Bibliographie . . . 119

4 Contraintes expérimentales sur le modèle du galileon 125
4.1 Données utilisées . . . 126
4.1.1 Supernovae de type Ia . . . 126
4.1.2 Oscillations acoustiques de baryons . . . 129
4.1.3 Fond diffus cosmologique . . . 133
4.1.4 Observation de la fusion d'un système binaire d'étoiles à neutrons . . . 134
4.2 Exploration de l'espace des paramètres . . . 138
4.2.1 Méthode de Monte-Carlo par chaînes de Markov . . . 138
4.2.2 Contraintes cosmologiques sur les paramètres des modèles de base . . . 146
4.2.3 Extensions des modèles de base . . . 160
4.2.4 Contraintes sur la vitesse des ondes gravitationnelles . . . 167
4.3 Discussion . . . 170
4.3.1 Tensions entre les différentes sondes . . . 171
4.3.2 Les solutions trackers . . . 175
4.3.3 Le statut du galileon . . . 177
Bibliographie . . . 179

5 Le modèle du branon 183
5.1 Le problème de la matière noire . . . 184
5.1.1 Indices d'existence de la matière noire . . . 184
5.1.2 Les caractéristiques de la matière noire . . . 191
5.1.3 Les WIMPs . . . 193
5.2 Les théories à dimensions supplémentaires . . . 199
5.2.1 Les théories de Kaluza-Klein . . . 199
5.2.2 Des dimensions supplémentaires universelles aux univers branaires . . . 205
5.2.3 Le modèle ADD et les KK-gravitons . . . 206
5.3 Le modèle du branon . . . 209
5.3.1 Brisure spontanée de symétrie . . . 209
5.3.2 Construction de l'action du branon . . . 213
5.3.3 État de la recherche en 2015 . . . 220
Bibliographie . . . 222

6 Le détecteur CMS au LHC 229
6.1 Le Grand Collisionneur de Hadrons . . . 230
6.1.1 Caractéristiques principales . . . 230

6.1.2 Collisions proton-proton au LHC . . . 232
6.2 Le Solénoide Compact à Muons . . . 234
6.2.1 Géométrie de CMS . . . 234
6.2.2 Les sous-systèmes . . . 237
6.2.3 Chaîne d'acquisition . . . 243
6.3 Reconstruction des objets physiques . . . 243
6.3.1 Algorithme de flux de particules . . . 244
6.3.2 Reconstruction des photons et des électrons . . . 244
6.3.3 Reconstruction des muons . . . 245
6.3.4 Reconstruction des leptons tau . . . 246
6.3.5 Reconstruction des jets . . . 246
6.3.6 Reconstruction de l'Énergie Transverse Manquante . . . 251
Bibliographie . . . 252

7 Recherche d'évènements Mono-jet et Mono-V 255
7.1 Sélection des évènements . . . 256
7.1.1 Signal et bruits de fond . . . 256
7.1.2 Sélection commune aux deux catégories . . . 259
7.1.3 Sélections des catégories . . . 260
7.2 Simulations Monte-Carlo d'évènements branons . . . 262
7.2.1 Un peu de phénoménologie . . . 262
7.2.2 Production à l'échelle partonique . . . 265
7.2.3 Simulations des distributions du signal branon . . . 269
7.3 Exploration des données . . . 271
7.3.1 Contrôle des bruits de fond . . . 271
7.3.2 Estimation par les données des bruits de fond électrofaibles . . . 274
7.3.3 Incertitudes systématiques . . . 275
7.3.4 Contraintes sur le modèle du branon . . . 280
Bibliographie . . . 285

Conclusion 287

A Le modèle du galileon en équations 291
A.1 Le tenseur énergie-impusion . . . 291
A.2 Les perturbations du galileon . . . 292

B Validation des prédictions pour le modèle du galileon 295
B.1 Perturbations cosmologiques . . . 295
B.2 Spectres de puissance . . . 296

C Formalisme CCWZ 303
C.1 Position du problème . . . 303
C.1.1 La réalisation non-linéaire . . . 305
C.2 La construction des invariants . . . 307
C.3 Interprétation géométrique . . . 309

D Objets physiques pour la recherche de branons 311
D.1 Électrons . . . 311

D.1.1 Sélection standard 311
D.1.2 Sélection stricte 312
D.2 Photons 312
D.2.1 Sélection standard 313
D.2.2 Sélection stricte 313
D.3 Muons 313
D.3.1 Sélection standard 314
D.3.2 Sélection stricte 314
D.4 Leptons tau 314
D.5 Jets 315

Résumé/Abstract **317**

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier l'ensemble des membres de mon jury pour avoir accepté d'examiner mon travail de thèse. En particulier, je voudrais remercier mes deux rapporteurs, le Professeur David Langlois et le Professeur Susan Gascon-Shotkin, pour leurs commentaires constructifs qui m'ont permis d'améliorer la qualité finale du présent document. Je n'oublie évidemment pas mes deux directeurs de thèses, Marc Besancon et Vanina Ruhlmann-Kleider, pour ces trois années que nous avons passées ensemble à partager des moments d'incompréhension, de galère, mais aussi de succès et de joie.

Je remercie l'Institut de recherche sur les lois fondamentales de l'Univers de m'avoir hébergé pendant trois ans, au centre du CEA de Saclay, et d'avoir finané mon travail. La période passée entre ces murs aura sans aucun doute été l'une des plus enrichissante scientifiquement et humainement. Merci également à l'ensemble des membres du Département de Physique des Particules, je pense notamment aux membre, permanents et non-permanents, du groupe CMS et du groupe Cosmologie. En particulier, je tiens à remercier Philippe Gras et Christophe Magneville pour leur aide précieuse ainsi qu'à Etienne Burtin pour avoir rit plus d'une fois à certaines de mes blagues qui ne le méritaient pas. Je tiens également à dire merci au 41B pour la couleur ocre, plus généralement au 41BF pour les quelques goûters salvateurs, à Giulia Negro et Pauline Zarrouk pour m'avoir supporté pendant trois ans et m'avoir fourni des mètres cubes de thé, et enfin à tous les irréductibles du Friday Lunch.

Je n'oublie évidemment pas les actions déterminantes de Johann See, d'Elisabeth Vangioni, Jean-Philippe Uzan, Noël Camarcat et d'autres au cours de mon parcours scolaire qui m'ont guidé sur la voie de la physique fondamentale.

J'aimerais enfin remercier mes amis et ma famille pour leur soutien et leurs incessantes questions concernant l'avenir de la branologie.

Il ne me reste plus qu'à remercier tous ceux qui prendront le temps de lire quelques unes des pages de l'aboutissement de ces trois années inoubliables.

Introduction

La vision du monde proposée par la physique d'aujourd'hui est basée sur les modèles standards de la cosmologie et de la physique des particules qui permettent de rendre compte avec une étonnante précision des phénomènes observés dans la nature. Le modèle standard de la physique des particules décrit les constituants matériels de l'Univers les plus fondamentaux connus à ce jour ainsi que trois des quatres interactions fondamentales. Le modèle standard de la cosmologie décrit l'histoire de l'Univers déterminée par son contenu matériel et l'interaction gravitationnelle décrite par la Relativité Générale. Néanmoins, certains aspects de ces modèles sont encore mal compris. En particulier, le modèle standard de la cosmologie fait l'hypothèse de l'existence d'un secteur sombre composé de matière noire et d'énergie noire, qui représenteraient respectivement environ 25% et 70% du contenu de l'Univers. Ces constituants dont la nature est inconnue, mais dont l'existence est très bien motivée par les observations astrophysiques et cosmologiques, posent problème à la fois pour la cosmologie et la physique des particules. La matière noire est décrite en cosmologie comme un fluide de matière non-baryonique et permet d'expliquer le comportement de certains objets sous l'influence de la gravitation (la rotation des galaxies par exemple [1, 2]). Cependant, de telles particules de matière non-baryonique sont absentes du modèle standard de la physique des particules. L'énergie noire permet, quant à elle, d'expliquer l'accélération de l'expansion de l'Univers découverte en 1998 [3, 4]. L'existence d'une constante cosmologique, supposée dans le modèle standard de la cosmologie, peut expliquer cette accélération mais soulève de nombreuses autres questions théoriques.

Pour résoudre les problèmes liés au secteur sombre, de nombreuses extensions des modèles standards ont été proposées. Une approche simple, naturelle et riche consiste à inclure l'effet d'un champ scalaire additionnel dans la théorie. Les modèles à champ scalaire sont très présents dans l'éventail des extensions existantes, à la fois pour la cosmologie (avec des champs classiques dans ce cas) et pour la physique des particules (avec des champs quantiques). Cette approche semble d'autant plus pertinente que l'existence d'une particule relique d'un champ scalaire, candidate au boson de Higgs prédit par le modèle standard de la physique des particules, a été découverte au Grand Collisionneur de Hadrons en 2012 [5, 6]. Cette thèse présente

l'étude d'un modèle à champ scalaire en cosmologie pour expliquer l'accélération de l'expansion de l'Univers, le modèle du galileon [7], et d'un modèle à champ scalaire en physique des particules qui fournit un candidat à la matière noire, le modèle du branon [8, 9]. En plus de supposer tous deux l'existence d'un champ scalaire, ces deux modèles ont en commun de pouvoir trouver leurs origines dans les théories supposant l'existence de dimensions spatiales supplémentaires. Ces théories à dimensions supplémentaires ont été développées tout au long du XXe siècle et font récemment l'objet de recherches intenses du fait de leur richesse. Le cadre conceptuel de ces théories est, en effet, l'un des rares dont on dispose aujourd'hui capable d'expliquer la nature des deux constituants du secteur sombre.

Après avoir décrit brièvement les principes généraux des modèles standards de la cosmologie et de la physique des particules dans le chapitre 1, les travaux présentés dans ce manuscrit feront l'objet de deux parties indépendantes. La première partie traite l'étude des perturbations cosmologiques dans le chapitre 2. Celles-ci serviront à étudier le modèle du galileon qui propose une alternative à la constante cosmologique. Les problèmes posés par cette dernière ainsi que le modèle du galileon sont présentés au chapitre 3. Les résultats de mon étude du modèle du galileon à la lumière des observations cosmologiques et astrophysiques récentes sera le sujet du chapitre 4. Dans la seconde partie, les tenants et les aboutissants du problème de la matière noire ainsi qu'une proposition théorique originale pour le résoudre, le modèle du branon, seront présentés dans le chapitre 5. La recherche de branons que j'ai effectuée à l'aide des mesures expérimentales obtenues par le solénoïde compact à muons, lui-même décrit au chapitre 6, sont présentées au chapitre 7.

Bibliographie

[1] Vera C. Rubin and W. Kent Ford, Jr. Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions. *Astrophys. J.*, 159 :379–403, 1970.

[2] Vera C. Rubin, W. Kent Ford, Jr., and Norbert Thonnard. Extended rotation curves of high-luminosity spiral galaxies. IV. Systematic dynamical properties, Sa through Sc. *Astrophys. J.*, 225 :L107–L111, 1978.

[3] Adam G. Riess et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *Astron. J.*, 116 :1009–1038, 1998.

[4] S. Perlmutter et al. Measurements of Omega and Lambda from 42 high redshift supernovae. *Astrophys. J.*, 517 :565–586, 1999.

[5] CMS Collaboration. Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC. *Phys. Lett.*, B716 :30–61, 2012.

[6] ATLAS Collaboration. Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC. *Phys. Lett.*, B716 :1–29, 2012.

[7] Alberto Nicolis, Riccardo Rattazzi, and Enrico Trincherini. The Galileon as a local modification of gravity. *Phys. Rev.*, D79 :064036, 2009.

[8] Antonio Dobado and Antonio Lopez Maroto. The Dynamics of the Goldstone bosons on the brane. *Nucl. Phys.*, B592 :203–218, 2001.

[9] J. Alcaraz, J. A. R. Cembranos, A. Dobado, and Antonio Lopez Maroto. Limits on the brane fluctuations mass and on the brane tension scale from electron positron colliders. *Phys. Rev.*, D67 :075010, 2003.

Chapitre 1

Les modèles standards

Sommaire

1.1 Le modèle standard de la cosmologie 14

1.1.1 La relativité générale, une théorie de l'espace-temps 14

1.1.2 L'Univers homogène et isotrope 20

1.1.3 Le modèle de concordance 23

1.2 Le modèle standard de la physique des particules 25

1.2.1 Un soupçon de théorie quantique des champs 26

1.2.2 Les théories de jauge 29

1.2.3 Le mécanisme de Brout-Englert-Higgs 33

1.2.4 Le modèle et ses limites 35

Bibliographie 38

La meilleure description scientifique que nous avons aujourd'hui de la réalité tient dans deux modèles : un modèle de l'infiniment grand (cosmologie) et un modèle de l'infiniment petit (physique des particules). L'accord impressionnant entre ces deux modèles et les observations en font des théories incontournables, si bien qu'on les appelle des modèles standards. Ces modèles standards reposent sur deux révolutions théoriques qui ont bouleversé notre compréhension du monde tout au long du XXe siècle : la relativité générale et la physique quantique. Dans ce chapitre, nous présenterons succintement la construction des modèles standards basée sur ces théories, en mettant l'accent sur le concept de symétries cher aux physiciens. Nous en profiterons pour pointer les quelques difficultés rencontrées par ces modèles, qui bien que standards, ne sont pas parfaits.

1.1 Le modèle standard de la cosmologie

La cosmologie, qui s'attaque à des questions qui ont intrigué les hommes aussi loin que les écrits remontent, est en fait un domaine récent de la physique puisqu'elle commence à se développer en tant que discipline scientifique au cours du XXe siècle. L'avancée ayant permis d'apporter une réponse scientifique à l'histoire de l'Univers est le développement d'une théorie dynamique de l'espace-temps dans laquelle ce dernier devient un acteur qui interagit avec son contenu materiel et évolue. En faisant des hypothèses supplémentaires de symétrie de cet espace-temps et en peuplant celui-ci de matière, on obtient un modèle cosmologique. Nous allons présenter ici le modèle cosmologique moderne, que l'on appelle modèle standard ou modèle de concordance, de la cosmologie. Il est, cependant, important de noter que la cosmologie est une discipline scientifique un peu à part. En effet, nous n'observons qu'un unique Univers à partir d'une position unique de l'espace et du temps, qui plus est dans des conditions que nous ne maîtrisons pas. Il est donc difficile de se passer, en cosmologie, d'hypothèses invérifiables.

1.1.1 La relativité générale, une théorie de l'espace-temps

L'espace et le temps en mécanique newtonienne

Dans ses Principia Mathematica [1], Isaac Newton fut le premier à mathématiser l'espace et le temps. L'objectif était simplement de décrire le mouvement des points matériels. L'espace y est décrit mathématiquement comme un espace euclidien à trois dimensions. On peut construire un repère absolu à l'aide d'un point d'origine et de trois axes de référence. Le temps est lui aussi absolu, il est le même pour tout observateur et joue le rôle d'un paramètre externe. Ainsi, le caractère absolu du temps entraîne l'existence d'une notion de simultanéité. Pour deux évènements distincts, s'il est possible de voyager du premier au second, alors le premier est dans le passé du second (et inversement). Si c'est impossible, alors les deux évènements sont simultanés. Cette structure causale est résumée sur le schéma 1.1.

Comme l'espace est euclidien, dans une base cartésienne $\left(x^1, x^2, x^3\right)$ on peut calculer la distance ds entre deux points voisins en utilisant le théorème de Pythagore :

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{3} \left(dx^i\right)^2 = \delta_{ij} x^i x^j \tag{1.1}$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker, et où on a utilisé la notation d'Einstein pour les sommes, selon laquelle les indices répétés sont implicitement sommés. De plus, le temps pour aller d'un point A à un point B est indépendant de l'observateur et est simplement $\delta t = t_B - t_A$.

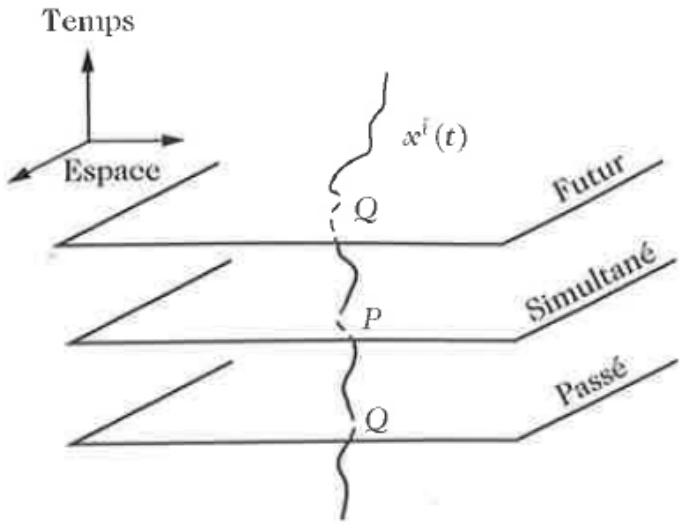

FIGURE 1.1 Représentation de la structure causale dans un espace-temps newtonien tirée de[2]. S'il existe une trajectoire définie par $x^i(t)$ de vitesse finie reliant deux évènements P et Q, alors Q se situe dans le passé ou dans le futur de P. Sinon, les deux évènements sont simultanés.

Le choix d'un repère et d'une origine du temps, c'est-à-dire d'un référentiel, est arbitraire. Ainsi, les transformations qui conservent l'élément de distance (1.1), transforment un référentiel en un autre référentiel physiquement équivalent. Ces transformations correspondent aux rotations rigides (qui ne dépendent pas de la position) et aux translations de l'origine :

$$x^i \to x'^i = R^i_j(t)\, x^j + T^i(t) \tag{1.2}$$

Le sous-groupe pour lequel les translations sont de la forme $T^i = T^i_0 + v^i t$ est le groupe de Galilée, et il transforme les référentiels inertiels en d'autres référentiels inertiels. Les référentiels inertiels sont les référentiels dans lesquels le principe d'inertie est vérifié, c'est-à-dire que tous les corps ponctuels libres sont dans un mouvement de translation rectiligne uniforme. En mécanique newtonienne, les lois de la physique sont supposées être les mêmes dans tout référentiel inertiel, c'est-à-dire que les lois de la physique sont invariantes sous l'action d'une transformation galiléenne.

L'espace-temps de la relativité restreinte

Cependant, les lois de l'électromagnétisme de Maxwell ne sont pas invariantes lors d'une transformation du groupe de Galilée. Par exemple, une charge au repos dans un référentiel ne crée pas de force magnétique, mais en produit une dans un référentiel en mouvement inertiel par rapport au premier. De plus, les lois de Maxwell prédisent une vitesse de la lumière

dans le vide indépendante du référentiel, ce que les interprétations des expériences de Michelson et Morley [3] ont confirmé. Ainsi, puisque la vitesse de la lumière dans le vide est la même dans tous les référentiels, les lois de la physique ne peuvent pas être invariantes selon les transformations du groupe de Galilée.

Les transformations de coordonnées pour lesquelles il existe une vitesse invariante (la vitesse de la lumière c dans notre cas) et qui se réduisent aux transformations galiléennes lorsque la vitesse est faible par rapport à c sont les transformations de Lorentz [4–6]. Un observateur inertiel peut repérer un évènement, à l'aide d'un référentiel euclidien ainsi que d'une horloge, par le quadruplet $\left(t, x^1, x^2, x^3\right)$. Si un second observateur se déplace à une vitesse v constante selon l'axe Ox, et qu'il repère les évènements par le quadruplet $\left(t', x'^1, x'^2, x'^3\right)$, alors les deux quadruplets sont reliés par la transformation de Lorentz :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

où on a défini le facteur de Lorentz $\gamma = \left[1 - (v/c)^2\right]^{-1/2}$ et $\beta = v/c$. On note ici que le temps n'est plus absolu et dépend du référentiel, ce qui est une particularité de la relativité restreinte par rapport à la physique newtonienne. De plus, la vitesse de la lumière dans le vide c apparaît comme une vitesse limite impossible à dépasser pour les objets physiques. La quantité invariante par changement de référentiel n'est plus la distance dans l'espace euclidien à trois dimensions, mais un analogue qui prend en compte la coordonnée temporelle et qui est invariant sous une transformation de Lorentz :

$$ds^2 = -\left(cdt\right)^2 + \sum_{i=1}^{3} \left(dx^i\right)^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{1.4}$$

On a ici défini $x^0 = ct$ de sorte que les indices grecs vont de 0 à 4, et la métrique de Minkowski $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}\left(-1, 1, 1, 1\right)$ [1]. L'élément de longueur entre deux évènements d'espace-temps peut ici être positif, négatif ou nul. L'ensemble des points tels que $ds^2 = 0$ est le cône de lumière passé et futur, illustré par 1.2.

Il représente l'ensemble des points d'espace-temps qui peuvent être rejoints par un faisceau lumineux. Le cône de lumière sépare l'ensemble des points d'espace-temps qui peuvent être causalement reliés, pour lesquels $ds^2 < 0$ (on dit alors que la distance est de genre temps) des

1. Dans toute la suite, on utilise la signature $(-, +, +, +)$ pour la métrique. Attention, l'utilisation de cette signature est standard en cosmologie, mais pas en physique des particules. Cela a pour effet de modifier occasionnellement les signes des formules, vous voilà prévenus.

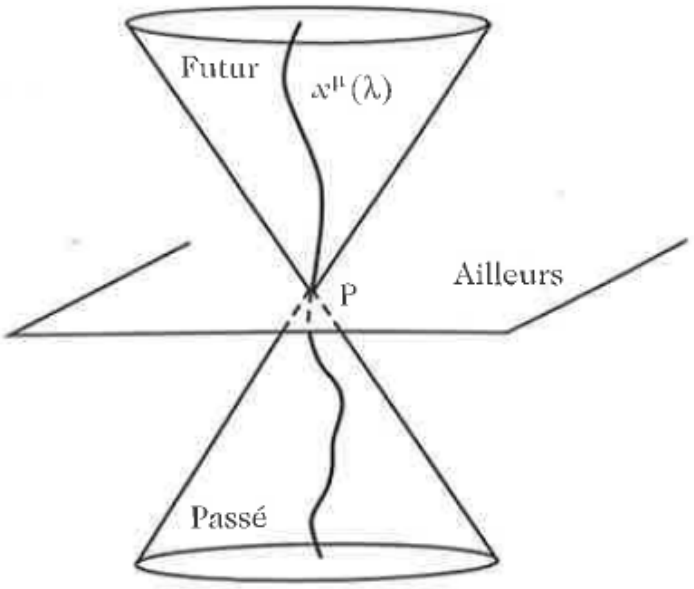

FIGURE 1.2 Représentation de la structure causale dans un espace-temps minkowskien tirée de [2]. La notion de simultanéité est ici remplacée par le cône de lumière défini par $ds^2 = 0$. Les trajectoires, appelées maintenant lignes d'univers, $x^\mu(\lambda)$ se trouvent à l'intérieur du cône de lumière et sont dites de genre temps. Au contraire, les points à l'extérieur du cône de lumière ne peuvent pas être atteints à partir de P par une ligne d'univers. Les intervalles séparant ces points de P sont tels que $ds^2 > 0$, ils sont dits de genre espace.

points qui ne peuvent être reliés par aucune trajectoire dont la vitesse est inférieure à c, pour lesquels $ds^2 > 0$ (on dit alors que la distance est de genre espace).

Alors que pour l'espace-temps euclidien, on considérait les transformations qui laissaient invariante la distance euclidienne (1.1), on s'intéresse en relativité restreinte à celles qui conservent l'élément de longueur d'espace-temps (1.4). Ces transformations correspondent aux transformations de Lorentz, qui ne concernent que les changement de référentiels en mouvement les uns par rapport aux autres, et aux translations. L'ensemble de ces tranformations forme le groupe de Poincaré :

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + T^\mu \tag{1.5}$$

où Λ^μ_ν est un élément du groupe de Lorentz qui comprend les rotations et les boosts, et T^μ est une translation. Ici, Λ^μ_ν et T^μ ne dépendent pas du temps, contrairement au cas de la mécanique newtonienne, ce qui implique que le groupe des transformations qui conservent l'élément de longueur est plus petit. D'après le principe de relativité restreinte, les lois de la physique sont les mêmes pour tous les référentiels inertiels. Elles sont donc invariantes sous toute transformation du groupe de Poincaré.

Vers une géométrisation de l'espace-temps en relativité générale

Cependant, une nouvelle incohérence émerge du principe de relativité restreinte. En effet, la force de gravitation newtonienne exerce une action à distance de manière instantanée, ce qui est incompatible avec l'existence d'une vitesse limite. Les nombreux succès de la relativité restreinte obligent donc à repenser la nature de l'interaction gravitationnelle, ce que fit Albert Einstein au début du XXe siecle.

Einstein base sa réflexion sur la remarque selon laquelle tous les corps tombent de la même façon dans un champ de gravitation. En effet, pour un point matériel soumis à un champ gravitationnel constant $\vec{g}$, le principe fondamental de la dynamique appliqué dans un référentiel galiléen nous permet de prédire sa position $\vec{x}$ à l'instant t :

$$m_i \frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = m_g \vec{g} \tag{1.6}$$

où on a défini la masse inerte du point matériel m_i et sa masse grave m_g. Si ces deux masses sont égales, ce que l'on observe expérimentalement à une très grande précision [7], alors le mouvement de chute libre est universel. L'égalité entre masse grave et masse inerte $m_g = m_i = m$, purement fortuite en physique newtonienne, est ici centrale et sera posée par Einstein comme principe premier de construction sous le nom de principe d'équivalence [8]. Il suit du principe d'équivalence que l'on peut faire disparaître l'effet de la gravitation en se plaçant dans un référentiel accéléré par la transformation de coordonnées suivante :

$$\vec{x} \to \vec{x}' = \vec{x} - \frac{1}{2}\vec{g}t^2 \qquad \text{et} \qquad t' = t \tag{1.7}$$

Le mouvement dans ce référentiel en chute libre est alors simplement donné par :

$$\frac{d^2\vec{x}'}{dt'^2} = 0 \tag{1.8}$$

La force de gravitation apparaît similaire aux forces fictives que l'on introduit en mécanique newtonienne dans les référentiels accélérés telles que la force d'inertie et la force de Coriolis, puisque l'on peut s'en affranchir pourvu que l'on se place dans un référentiel en chute libre. Ce n'est possible que si le principe d'équivalence est vérifié, auquel cas on peut toujours trouver (localement) un référentiel dans lequel il n'y a pas de force de gravitation. Cependant, dans un espace-temps plat, il n'est possible d'annuler la gravitation que pour un seul corps, ce qui est en contradiction avec l'universalité de la chute libre qui découle du principe d'équivalence. Cette incohérence peut se résoudre en considérant un espace-temps courbe, où la gravitation a disparu localement pour tous les corps. Tout référentiel, inertiel ou non, est alors équivalent,

ce qui réconcilie la gravitation et la relativité restreinte dans un principe de relativité plus général. La gravitation s'y interprète comme la manifestation de la courbure de l'espace-temps, et le fait que l'on puisse toujours trouver un référentiel dans lequel la gravitation a disparu, c'est-à-dire un référentiel localement inertiel, nous invite à utiliser le formalisme de la géométrie pseudo-riemanienne. Dans ce formalisme, on peut associer à l'espace-temps un système de coordonnées locales pour décrire la variété de l'espace-temps qui est localement minkowskien. Le principe de relativité générale stipule donc que les équations sont invariantes sous un changement général de coordonnées. Les corps en chute libre suivent des trajectoires de plus court chemin dans l'espace courbe, appelées géodésiques, c'est-à-dire des trajectoires qui minimisent l'élément de longueur :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{1.9}$$

On a ici défini la métrique $g_{\mu\nu}$ qui décrit la géométrie de l'espace-temps. L'équation des géodésiques s'obtient en déterminant les lignes de plus court chemin, c'est-à-dire qui minimise la distance parcourue. Comme ds peut prendre des valeurs négatives, les chemins correspondants sont forcément favorisés ; pour éviter cela, on minimise la distance au carré $\int \left(\frac{ds^2}{d\lambda^2}\right) d\lambda$, où λ est un paramètre parcourant la trajectoire. L'équation des géodésiques dans un espace courbe est alors :

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \dot{x}^\nu \dot{x}^\lambda = 0 \tag{1.10}$$

On a ici défini les symboles de Christoffel $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ qui sont une connexion, c'est-à-dire qu'ils permettent de transporter un système de coordonnées locales d'un point à un autre. Ils sont donnés par :

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} \left(\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}\right) \tag{1.11}$$

À partir de ces connexions, on peut définir la notion de dérivée covariante ∇_μ, qui généralise la dérivée spatiale. En effet, celle-ci correspond à la variation d'une grandeur entre deux points infiniment proches. Cependant, comme on n'utilise que des systèmes de coordonnées locales, cela n'a de sens que si l'on prend soin au préalable de transporter le système de coordonnées. Les scalaires, vecteurs et tenseurs ayant des comportement différents par changement de coordonnées, l'expression de la dérivée covariante est différente d'un cas à l'autre. Pour un scalaire ϕ, un vecteur A_μ et un tenseur d'ordre 2 $T_{\mu\nu}$, qui seront les cas utilisés dans cette thèse, elle s'exprime selon :

$$\nabla_\mu \phi = \partial_\mu \phi \tag{1.12}$$

$$\nabla_\mu A_\nu = \partial_\mu A_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} A_\lambda \tag{1.13}$$

$$\nabla_\mu T_{\nu\rho} = \partial_\mu T_{\nu\rho} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} T_{\lambda\rho} - \Gamma^\lambda_{\mu\rho} T_{\nu\lambda} \tag{1.14}$$

L'interaction gravitationnelle est générée par les corps massifs qui modifient la géométrie de l'espace-temps dans leur voisinnage. La métrique devient en relativité générale un objet dynamique, dont les équations d'évolution dépendent du contenu matériel de l'espace-temps. Ces équations d'évolution sont obtenues en utilisant l'action pour la gravité la plus simple construite à partir de la métrique et qui soit invariante par changement général de coordonnées, l'action d'Einstein-Hilbert [9] :

$$\mathcal{S}_{EH} = \frac{1}{16\pi G_N} \int d^4x \sqrt{-g}\,(R - 2\Lambda) \tag{1.15}$$

où G_N est la constante de gravitation, $d^4x\sqrt{-g}$ est l'élément de volume d'espace-temps, R est le scalaire de Ricci et Λ est une constante arbitraire appelée constante cosmologique. Ainsi, l'action totale qui décrit la dynamique de la matière dans un champ de gravité est donnée par :

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_{EH} + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{mat} \tag{1.16}$$

avec $\mathcal{L}_{mat}$ le lagrangien décrivant le contenu matériel de l'espace-temps. On applique le principe variationnel en faisant varier cette action par rapport à $g_{\mu\nu}$ pour obtenir les équations d'évolution de la métrique :

$$\frac{\delta S_{EH}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{16\pi G_N} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \right) \tag{1.17}$$

$$\frac{\delta S_{mat}}{\delta g^{\mu\nu}} = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{\delta \mathcal{L}_{mat}}{\delta g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2} \mathcal{L}_{mat} g_{\mu\nu} \right) \tag{1.18}$$

On obtient alors les équations d'Einstein, qui sont les équations de la gravitation en relativité générale dont la métrique est solution :

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G_N T_{\mu\nu} \tag{1.19}$$

où on a défini le tenseur d'Einstein $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$ et le tenseur énergie-impulsion de la matière $T_{\mu\nu} = \mathcal{L}_{mat} g_{\mu\nu} - 2\frac{\delta \mathcal{L}_{mat}}{\delta g^{\mu\nu}}$.

1.1.2 L'Univers homogène et isotrope

La relativité générale étant une théorie dans laquelle l'espace-temps est dynamique, elle constitue un cadre adapté pour la cosmologie. En effet, l'Univers observable est un espace-temps contenant de la matière, il doit donc suivre les équations d'Einstein (1.19). Pour poursuivre l'étude, on fait des hypothèses supplémentaires de symétrie sur la répartition de matière dans l'Univers. Ces hypothèses se regroupent derrière l'appellation de principe cosmologique :

1. **Homogénéité :** aucune position n'est privilégiée dans l'Univers, la métrique ne dépend donc pas de la position. Cette hypothèse n'est vérifiée qu'à de très grandes échelles [10], car on observe que la matière s'est agglomérée pour former des structures complexes (étoiles, galaxies, amas de galaxies, par exemples).
2. **Isotropie :** aucune direction n'est privilégiée, la métrique peut donc s'exprimer en coordonnées sphériques. Là encore, cette hypothèse n'est vérifiée que statistiquement, notamment dans les cartes de température du fond diffus cosmologique dans lesquelles on observe des anisotropies de l'ordre de $\frac{\Delta T}{T} \sim 10^{-5}$ [11].

La solution des équations d'Einstein pour la répartition de matière supposée homogène et isotrope est la solution de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), exprimée en coordonnées sphériques (χ, θ, ϕ) [12, 13] :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t) f_K^2(\chi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t) f_K^2(\chi) \sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{1.20}$$

avec a une fonction inconnue du temps appelée facteur d'échelle, K la courbure de l'espace-temps qui est identique en tout point du fait des symétries de l'espace-temps et $f_K(\chi)$ une fonction qui dépend de la courbure K, c'est-à-dire de la géométrie de l'espace-temps. Trois familles d'espaces sont possibles en fonction de la valeur de K qui, par un changement de coordonnées peut toujours être prise égale à -1, 0 ou 1 : respectivement un univers hyperbolique, plat ou sphérique.

Dans la métrique FLRW, la distance physique est la quantité $a(t)\, r$, elle évolue donc au cours du temps. Le facteur d'échelle a décrit l'évolution, contraction ou dilatation, des distances en fonction du temps. On appelle χ la distance comobile, c'est-à-dire la distance à laquelle se situerait un objet si le facteur d'échelle était constant. De même, on peut définir le temps conforme τ tel que $d\tau = \frac{dt}{a(t)}$, de manière à écrire la métrique sous la forme :

$$ds^2 = a^2(\tau)\left[-c^2 d\tau^2 + \gamma_{ij} dx^i dx^j\right] \tag{1.21}$$

où γ_{ij} est tel qu'on retrouve la forme (1.20) en coordonnées sphériques. On peut alors définir des observateurs comobiles, dont la quadrivitesse u^μ n'est due qu'à l'évolution du facteur d'échelle :

$$u^\mu = \frac{1}{a}(1, 0, 0, 0) \tag{1.22}$$

De plus, le tenseur énergie-impulsion de la matière vérifiant les principes cosmologiques est celui d'un fluide parfait $T^\mu_\nu = \mathrm{diag}(-\rho, P, P, P)$ avec ρ la densité d'énergie du fluide et P sa pression. En introduisant la métrique FLRW et le tenseur énergie-impulsion pour un fluide

parfait dans les équations d'Einstein, on obtient les deux équations de Friedmann [12], qui sont les deux seules équations ayant des termes non-nuls :

$$H^2 = \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G_N}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{K}{a^2} \tag{1.23}$$

$$\dot{H} + H^2 = \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{8\pi G_N}{6}\left(\rho + 3P\right) + \frac{\Lambda}{3} \tag{1.24}$$

où un point désigne une dérivée par rapport au temps t et où on a défini le taux d'expansion de Hubble $H = \dot{a}/a$. Les équations de Friedmann décrivent l'évolution du facteur d'échelle a, donc des distances cosmologiques, en fonction du temps. On peut également obtenir une équation d'évolution, qui n'est pas indépendante des deux équations de Friedmann, en utilisant la conservation de l'énergie $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$:

$$\dot{\rho} + 3H\left(\rho + P\right) = 0 \tag{1.25}$$

Puisque les distances se dilatent ou se contractent avec le temps, par un effet purement géométrique, les longueurs d'onde des photons sont altérées par l'expansion de l'Univers. Cette variation de longueur d'onde est un analogue d'origine gravitationnelle de l'effet Doppler, et peut être caractérisée par le paramètre de décalage vers le rouge z (redshift) selon :

$$1 + z = \frac{\lambda_{\text{observation}}}{\lambda_{\text{émission}}} = \frac{a\left(t_{\text{observation}}\right)}{a\left(t_{\text{émission}}\right)} \tag{1.26}$$

Ainsi, toute observation cosmologique nécessite d'être interprétée dans un modèle cosmologique donné En particulier, les distances et le temps physiques sont différents pour tout univers de Friedmann-Lemaître, à travers les définitions des temps conformes et des distances comobiles. Ces univers sont caractérisés par l'évolution du facteur a à travers le taux d'expansion H. On peut en fait définir un certain nombre de grandeurs associées aux notions de durées et de distances à partir du taux d'expansion, utiles pour interpréter les observations cosmologiques et dont les évolutions sont propres à une cosmologie donnée (voir par exemple [2] pour plus de détails à propos des notions de distances). Premièrement, le temps de regard en arrière correspond au temps mis par un photon émis à $t\left(z_*\right)$ pour nous atteindre :

$$\Delta t\left(z_*\right) = \int_0^{z_*} \frac{dz}{\left(1+z\right)H\left(z\right)} \tag{1.27}$$

La distance radiale comobile χ d'un objet ayant émis un photon à z_*, reçu par un observateur situé à $z = 0$ correspond à la distance comobile parcourue par la lumière suivant une géodésique radiale de genre lumière, c'est-à-dire pour laquelle :

$$ds^2 = 0 = -c^2 dt^2 + a^2\left(\tau\right) d\chi^2 \tag{1.28}$$

Cette expression détermine la relation entre distance radiale comobile et temps de parcours à travers $d\chi = cdt/a$, ce qui se traduit pour la distance comobile par :

$$\chi(z_*) = \int_0^{z_*} \frac{cdz}{a_0 H(z)} \tag{1.29}$$

De la même manière, on peut définir la distance angulaire, qui généralise le concept de parallaxe, comme le rapport entre la taille transverse physique d'un objet, et l'angle solide sous lequel il est observé :

$$D_A = \sqrt{\frac{dS_{\text{source}}}{d\Omega^2_{\text{obs}}}} = a_0 \frac{f_K(\chi)}{1+z} \tag{1.30}$$

Enfin, la dernière distance importante en cosmologie est la distance de luminosité, qui met en lien la luminosité L d'un objet situé à une distance comobile χ au flux observé ϕ_{obs} par la relation :

$$d_L = \sqrt{\frac{L(\chi)}{4\pi\phi_{\text{obs}}}} = a_0 (1+z) f_K(\chi) \tag{1.31}$$

Ces distances, qui sont les grandeurs que l'on observe directement, dépendent toutes de l'évolution du taux d'expansion de Hubble H, déterminé par les équations (1.23) et (1.24). Pour calculer cette évolution, il faut néanmoins faire quelques hypothèses supplémentaires sur le contenu en matière de l'Univers, la présence ou non d'une constante cosmologique ainsi que sur la courbure de l'Univers.

1.1.3 Le modèle de concordance

Le modèle de concordance de la cosmologie moderne, parfois appelé modèle standard de la cosmologie, est un modèle d'univers homogène et isotrope, qui contient de la matière baryonique, de la matière noire froide (CDM pour Cold Dark Matter), une constante cosmologique et qui est plat :

1. homogène et isotrope car sa géométrie est donnée par une métrique FLRW (1.21) ;
2. cet univers contient de la matière baryonique, c'est-à-dire la matière du modèle standard de la physique des particules, que l'on détaillera dans la partie 1.2. Les constituants les plus importants pour la cosmologie sont les photons et les baryons, ces derniers étant majoritairement sous forme de galaxies et de nuages de gaz. Un autre composant important de l'Univers est la matière noire froide, qui est un fluide de matière non-relativiste dont on ignore la nature précise. On regroupe l'ensemble de ces constituants en deux groupes aux comportements différents dans un espace-temps en expansion : la radiation ou le rayonnement (matière relativiste, donc les photons et une partie des neutrinos) et la matière (matière non-relativiste, donc principalement les baryons et la matière noire froide).

Leurs comportements respectifs peuvent être compris en adoptant une description sous forme de fluide. Dans ce cas, le rayonnement et la matière vérifient une équation d'état caractérisée par un paramètre w propre à chaque fluide :

$$P = w\rho \tag{1.32}$$

La thermodynamique des gaz de photons indique que pour la radiation $w_r = 1/3$ [14]. De plus, la matière non-relativiste étant froide, on la modélise par un fluide sans pression, c'est-à-dire pour lequel $w_m = 0$. On observe donc que $w =$ cste pour les fluides qui nous intéressent, la résolution de l'équation (1.25) permet dans ce cas de déduire l'évolution de la densité d'énergie du fluide considéré :

$$\rho \propto a^{-3(1+w)} \tag{1.33}$$

Ainsi, la densité de radiation évolue selon $\rho_r \propto a^{-4}$, et la densité de matière non-relativiste évolue selon $\rho_m \propto a^{-3}$;

3. le modèle suppose de plus la présence d'une constante cosmologique Λ. Cette constante peut s'interpréter comme un fluide de densité d'énergie constante d'après (1.23) et (1.24), c'est-à-dire comme un fluide d'équation d'état $P = -\rho$. La constante cosmologique permet, dans le modèle de concordance, de rendre compte de l'accélération de l'expansion de l'Univers observée en 1998 par les équipes de Brian Schmidt [15] et de Saul Perlmutter [16] ;
4. plat car il est de courbure nulle. A priori, il n'est pas nécessaire de faire l'hypothèse d'une courbure spécifique pour l'Univers, mais les observations cosmologiques sont compatibles avec l'hypothèse d'une courbure nulle [17]. Il se trouve en fait qu'un Univers plat nécessite une densité d'énergie très précise, appelée densité critique, définie par l'équation (1.23) où l'on a integré la contribution de la constante cosmologique à la densité d'énergie totale :

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G_N} \tag{1.34}$$

Le caractère plat de l'Univers se traduit par la relation suivante sur les quantités réduites tirée de (1.23) :

$$\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda = 1 \tag{1.35}$$

où on a défini $\Omega_{m,r} = \frac{\rho_{m,r}}{\rho_c}$ et $\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G_N \rho_c}$. Si la courbure est nulle, la relation précédente doit être vérifiée à tout z, ce qui pose un problème d'ajustement fin résolu par le concept d'inflation cosmique en 1979 par Alan Guth [18].

Dans le modèle de concordance ΛCDM, les équations de Friedmann deviennent donc :

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \Omega_m^0 a^{-3} + \Omega_r^0 a^{-3} + \Omega_\Lambda^0 \tag{1.36}$$

$$\frac{\dot{H}}{H_0^2} + \left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = -\frac{1}{2}\Omega_m^0 a^{-3} - 4\Omega_r^0 a^{-4} + \Omega_\Lambda^0 \tag{1.37}$$

où les quantités ayant un 0 en exposant ou en indice représentent les quantités correspondantes aujourd'hui. Le modèle ΛCDM est un modèle à six paramètres (le détail de ces paramètres est explicité dans [19]) :

— Ω_b^0 : la densité d'énergie des baryons aujourd'hui ;

— Ω_c^0 : la densité d'énergie de la matière noire froide aujourd'hui ;

— H_0 : le taux d'expansion de Hubble aujourd'hui ;

— A_s : l'amplitude spectrale des fluctuations primordiales à l'issue de la phase inflationnaire ;

— n_s : l'indice spectral de ces mêmes fluctuations primordiales ;

— τ : la profondeur optique due à la réionisation.

Les valeurs de ces paramètres sont aujourd'hui contraintes à l'échelle du % par les observations cosmologiques [17] dont le modèle rend très bien compte, malgré quelques points de tension. Néanmoins, comme tout modèle de la réalité, il répond à autant de questions qu'il en pose, parmi lesquelles deux sont particulièrement importantes et difficiles. En effet, la présence de la constante cosmologique, et en particulier la valeur très spécifique de celle-ci dans notre Univers pose des problèmes théoriques. De plus, alors que la nature de la matière baryonique, qui constitue environ 5% de l'énergie totale de l'Univers, est très bien connue, celle de la matière noire, qui en constitue environ 25%, nous échappe encore. Le détail des questions posées par la constante cosmologique et par la matière noire est développé dans les chapitres 3 et 5 respectivement.

1.2 Le modèle standard de la physique des particules

Le modèle standard de la physique des particules est sans doute l'une des plus belles réussites théoriques de la physique du XXe siècle, le modèle physique le mieux vérifié expérimentalement aujourd'hui, et un socle solide sur lequel se baser avec confiance pour développer les modèles de demain. Il décrit le comportement de la matière baryonique et de trois des quatres interactions fondamentales (électromagnétique, nucléaire faible et nucléaire forte), l'interaction gravitationnelle n'étant pas incluse. Nous allons ici introduire ce pilier qui décrit l'ensemble de la matière connue à ce jour en plaçant le concept de symétrie au coeur de notre réflexion.

1.2.1 Un soupçon de théorie quantique des champs

Le modèle standard de la physique des particules s'appuie sur la théorie quantique des champs, une théorie quantique relativiste extrêmement riche. Nous allons ici décrire brièvement les concepts les plus simples et généraux, une description plus détaillée étant bien en dehors du cadre de cette thèse. Pour un développement (beaucoup) plus complet et rigoureux, on pourra consulter [20, 21].

Les ingrédients d'une théorie quantique

La théorie quantique des champs est elle-même un cas particulier de la classe plus générale des théories quantiques. En tant que théorie quantique, elle décrit le comportement d'objets quantiques, dont la caractérisation constitue la première étape de la construction de la théorie. En effet, certains ingrédients sont nécessaires pour qu'une théorie quantique soit complètement définie [22] :

1. il faut tout d'abord définir un ensemble irréductible d'opérateurs hermitiens (par exemple les opérateurs $\hat{X}$, $\hat{P}$ et $\hat{S}$ pour le modèle de la particule à spin). Toutes les observables se construisent à partir de ces opérateurs ;
2. puis, on définit l'espace des états du système, qui a la structure d'un espace de Hilbert ;
3. il faut déterminer les relations de commutation entre les opérateurs de l'ensemble irréductible. Il se trouve que ces relations de commutation sont déterminées par les symétries du système. Ces symétries permettent également de caractériser l'ensemble irréductible, qui est composé des générateurs de ces symétries, et l'espace des états, qui sont des représentations du groupe de symétries. On comprend alors pourquoi la notion de symétrie est si importante en théorie quantique des champs, et a fortiori dans le modèle standard de la physique des particules ;
4. enfin, on a besoin d'un lagrangien ou de manière équivalente d'un hamiltonien, défini à partir des opérateurs de l'ensemble irréductible, pour décrire la dynamique du système. L'évolution temporelle du système peut être décrit à partir de son hamiltonien. Les valeurs propres des opérateurs qui commutent avec ce dernier sont donc des grandeurs conservées qui caractérisent le système, et sont appelées nombres quantiques. En particulier, les valeurs propres des opérateurs de Casimir, qui sont les opérateurs qui commutent avec tous ceux de l'ensemble irréductible, sont des nombres quantiques. En théorie quantique des champs, on utilise classiquement plutôt l'approche lagrangienne qui permet d'obtenir facilement les équations de conservation liées aux symétries par le théorème de Noether [23] et dont l'exploitation est grandement facilitée par le formalisme des intégrales de chemin [24].

Ainsi, la donnée d'un ensemble de symétries vérifiées par le système permet de définir tous les éléments nécessaires à la construction d'une théorie quantique. Pour construire le modèle standard de la physique des particules dans la suite de ce chapitre, nous allons partir des symétries dont nous déduirons les éléments de la théorie et leur dynamique, qui est une approche bien différente de la réalité historique mais qui gagne en clarté.

Une théorie quantique relativiste

Les symétries les plus naturelles qui sont vérifiées par les systèmes quantiques ont été introduites dans la section 1.1.1, il s'agit des symétries d'espace-temps. Si l'on considère le groupe de Galilée comme groupe des symétries d'espace-temps, on obtient la mécanique quantique non-relativiste avec le modèle de la particule à spin. Cependant, nous avons vu que cette approche n'est valable que lorsque les vitesses des objets sont négligeables devant la vitesse de la lumière dans le vide. Or, les particules se déplacent typiquement à des vitesses très proches de c, d'où la nécessité de se placer dans le cadre de la relativité restreinte (et pas la relativité générale car l'interaction gravitationnelle n'est pas incluse dans le modèle standard de la physique des particules).

La structure particulière de l'espace-temps en relativité restreinte a de nombreuses conséquences. En effet, si les états de la théorie quantique galiléenne sont des particules individuelles, ce n'est plus possible dans le cadre relativiste pour de nombreuses raisons. Parmi les incohérences qui apparaissent lorsqu'on essaye de quantifier individuellement des particules relativistes, on peut citer l'apparition d'états dont l'énergie est négative, ou encore le fait que la structure causale sous forme de cônes de lumière ne peut pas être respectée [21]. Une manière élégante et très efficace de résoudre ces incohérences est de considérer la quantification d'états de plusieurs particules relativistes, sous la forme de champs relativistes. Les particules individuelles de même type sont alors interprétées comme des excitations d'un unique champ fondamental.

Comme nous l'avons vu dans la section 1.1.1, le groupe des symétries d'espace-temps en relativité restreinte est le groupe de Poincaré, dont les transformations sont données par (1.5). Les opérateurs de l'ensemble irréductible sont les générateurs de ces transformations lorsqu'elles sont appliquées à des champs, au sein desquels on peut distinguer les générateurs des transformations de Lorentz $L_{\mu\nu}$ et les générateurs des translations P_μ, qui sont donnés par :

$$L_{\mu\nu} = i\left(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu\right) \tag{1.38}$$

$$P_\mu = i\partial_\mu \tag{1.39}$$

Les relations de commutations entre ces opérateurs sont les suivantes :

$$[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] = -i\left(\eta_{\nu\rho}L_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho}L_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}L_{\nu\rho} - \eta_{\nu\sigma}L_{\mu\rho}\right) \tag{1.40}$$

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \tag{1.41}$$

$$[P_\mu, L_{\rho\sigma}] = -i\left(\eta_{\mu\rho}P_\sigma - \eta_{\mu\sigma}P_\rho\right) \tag{1.42}$$

Un opérateur de Casimir de l'ensemble $(L_{\mu\nu}, P_\mu)$ est l'opérateur P^2, dont la valeur propre s'interprète, en s'inspirant de la mécanique relativiste non-quantique, comme le carré de la masse m^2. On peut également trouver un second opérateur de Casimir, qui est différent selon que la masse est nulle ou non. Que le champ soit massif ou non, les valeurs propres de ce second opérateur de Casimir correspondent au spin s qui peut prendre des valeurs entières ou demi-entières La projection du spin sur l'impulsion peut prendre les valeurs entre $-s$ et $+s$ par saut de une unité dans le cas massif, et seulement les valeurs $-s$ ou $+s$ dans le cas non-massif. Cela explique pourquoi le photon, qui est de masse nulle et de spin 1 ne possède que deux degrés de liberté de spin. On a un résultat similaire pour le graviton, qui est de spin 2, lorsqu'il est de masse nulle (voir la section 3.2.3 pour plus de détails). Les états des champs sont donc étiquetés par leur masse qui caractérise leur comportement sous une translation, et par leur spin qui caractérise leur comportement sous une transformation de Lorentz. Les champs de spin 0 sont des champs scalaires car ils sont invariants sous une transformation de Lorentz, les champs de spin 1/2 sont des bi-spineurs de Dirac constitués d'un spineur dit "gauche" et d'un spineur dit "droit", les champs de spin 1 sont des champs vectoriels et les champs de spin 2 des champs tensoriels d'ordre 2. Les champs de spin différents des précédents n'interviennent pas dans le modèle standard de la physique des particules et ne seront donc pas utilisés dans cette thèse.

L'action de la théorie doit être invariante selon les symétries que l'on a supposé, et donc ici doit être invariante sous une transformation de Poincaré. L'action résulte de l'intégration sur tout l'espace de Minkowski M^2 d'une densité de lagrangien selon :

$$\mathcal{S} = \int_{M^4} \mathcal{L} d^4x \tag{1.43}$$

L'action est donc, par construction, toujours invariante par translation dès lors que le lagrangien est local (tous les termes sont évalués au même point). Pour que la théorie soit invariante sous le groupe de Poincaré, il suffit donc que le lagrangien soit invariant de Lorentz. Par exemple, pour un champ ψ de spin 1/2 et de masse m, sans interaction, le lagrangien invariant par transformation de Lorentz est le lagrangien de Dirac [25] :

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = -\bar{\psi}\left(i\gamma^\mu\partial_\mu + m\right)\psi \tag{1.44}$$

où on a défini les matrices de Dirac γ^μ et le bi-spineur conjugué $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ qui s'interprète comme l'anti-particule de ψ.

La théorie quantique des champs dans laquelle on ne considère que les symétries d'espace-temps sans interaction décrit donc la propagation de champs relativistes caractérisés par leur spin et leur masse. Ce modèle sert de base aux théories quantiques des champs avec interactions, qui sont celles qui nous intéressent pour la construction du modèle standard de la physique des particules, et dans lesquelles on suppose l'existence de symétries additionnelles.

1.2.2 Les théories de jauge

Les théories de jauge, qui décrivent les interactions dans le modèle standard de la physique des particules, partent du postulat de l'existence d'une symétrie interne locale dite de jauge. Il s'agit de supposer que la théorie est invariante par une transformation du type suivant, pour un bi-spineur ψ :

$$\psi(x) \to \exp\left[i\alpha^a(x)\, t^a\right] \psi(x) \tag{1.45}$$

Les $\alpha^a(x)$ sont les paramètres des transformations et les t^a les générateurs du groupe de symétrie. Le caractère local des transformations réside dans la dépendance en x^μ des paramètres α^a.

Cas d'un groupe commutatif

Par souci de simplicité, nous développerons ici le cas du groupe de symétrie $U(1)$ qui correspond à un simple changement de phase :

$$\psi(x) \to e^{i\alpha(x)} \psi(x) \tag{1.46}$$

Le cas de ce groupe est particulier car celui-ci est commutatif mais les résultats se généralisent avec peu de modifications au cas des groupes non-commutatifs. On remarque que le terme de masse de (1.44) $m\bar{\psi}\psi$ est déjà invariant sous une transformation (1.46). De plus, lorsque le paramètre α est indépendant de la position, c'est-à-dire dans le cas d'une symétrie globale, le terme dérivatif $\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$ l'est également. La subtilité vient donc du fait que la symétrie est locale et l'angle α dépend de la position, ce qui pose problème lorsqu'on essaye de dériver ψ. La définition même de dérivée spatiale suivant une direction n^μ est ambigüe dans ce cas :

$$-\, n^\mu \partial_\mu \psi(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\left[\psi(x + \epsilon n) - \psi(x)\right]}{\epsilon} \tag{1.47}$$

En effet, $\psi(x+\epsilon n)$ et $\psi(x)$ se transforment de façon complètement différente sous (1.46). L'astuce pour résoudre ce problème est de définir une quantité $U(y,x)$ qui transporte la transformation de jauge du point x au point y, c'est-à-dire qui se transforme selon :

$$U(y,x) \to e^{i\alpha(y)} U(y,x) e^{-i\alpha(x)} \tag{1.48}$$

On constate dans ce cas que $\psi(y)$ et $U(y)\psi(x)$ se transforment de la même manière sous la transformation de jauge (1.46). Si, de plus, $U(y,y)=1$ et $U(y,x)$ est continue selon x et y, alors on peut écrire pour une séparation infinitésimale :

$$U(x+\epsilon n, x) \simeq 1 - ig\epsilon n^{\mu} A_{\mu}(x) \tag{1.49}$$

où on a extrait une constante arbitraire g et défini un champ vectoriel, donc un boson de spin 1, A_μ qui décrit le transport infinitésimal de la transformation de jauge, et qui est appelé connexion, champ de jauge ou encore boson vecteur. Cette connexion se transforme sous une transformation de jauge du type (1.46) par :

$$A_{\mu}(x) \to A_{\mu}(x) + \frac{1}{g}\partial_{\mu}\alpha(x) \tag{1.50}$$

On peut alors définir le concept de dérivée covariante, dans laquelle on compare des objets qui se transforment de la même manière :

$$\begin{aligned} -n^{\mu} D_{\mu}\psi(x) &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{[\psi(x+\epsilon n) - U(x+\epsilon n)\psi(x)]}{\epsilon} \\ &= -n^{\mu}\left(\partial_{\mu}\psi(x) - igA_{\mu}\psi(x)\right) \end{aligned} \tag{1.51}$$

Tout calcul fait, on constate que $D_\mu\psi(x)$ se transforme ainsi de la même manière que $\psi(x)$, de sorte que $\bar{\psi}\gamma^{\mu}D_{\mu}\psi$ est invariant sous une transformation de jauge, de même que sous une transformation de Lorentz car A_μ est un champ vectoriel. Il reste à déterminer un terme de propagation du champ de jauge, construit à partir de A_μ et invariant sous la transformation (1.50). On peut montrer [21] qu'un tel terme doit être construit à partir du tenseur antisymétrique de Maxwell :

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu} \tag{1.52}$$

Le lagrangien le plus général qui soit invariant de Lorentz et invariant sous une symétrie de jauge de $U(1)$, dont le lagrangien de l'électrodynamique quantique (QED) est un bon exemple, est donné par :

$$\mathcal{L}_{U(1)} = -\bar{\psi}\left(i\gamma^{\mu}D_{\mu} + m\right)\psi - \frac{1}{4}\left(F_{\mu\nu}\right)^2 \tag{1.53}$$

On a alors une interaction entre les fermions ψ et le champ de jauge A_μ à travers la dérivée covariante, de constante de couplage g. Il est intéressant de remarquer qu'un terme de masse pour A_μ de la forme $m^2 A_\mu A^\mu$ n'est pas invariant de jauge.

Cas général

Dans le cas général, le groupe de symétrie n'est pas commutatif, ce qui se traduit par des relations de commutation sur les générateurs t^a du groupe :

$$\left[t^a, t^b\right] = i f^{abc} t^c \tag{1.54}$$

Les f^{abc} sont des nombres appelés constantes de structure. Il y a alors autant de champs de jauge A^a_μ que de générateurs du groupe, et leur transformation sous la transformation de jauge généralise (1.50) :

$$A^a_\mu \to A^a_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu \alpha^a + f^{abc} A^b_\mu \alpha^c \tag{1.55}$$

La dérivée covariante est donnée par :

$$D_\mu = \partial_\mu - i g A^a_\mu t^a \tag{1.56}$$

Le tenseur de Maxwell correspondant n'est plus invariant sous la transformation de jauge :

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu \to F^a_{\mu\nu} - f^{abc} \alpha^b F^c_{\mu\nu} \tag{1.57}$$

Toutefois, on peut construire un terme invariant de jauge et de Lorentz à partir de ce tenseur, par exemple le terme de Yang-Mills $\left(F^a_{\mu\nu}\right)^2$ [26]. Le lagrangien pour un groupe de jauge non-commutatif est alors donné par :

$$\mathcal{L}_{\text{Gauge}} = -\bar{\psi}\left(i\gamma^\mu D_\mu + m\right)\psi - \frac{1}{4}\left(F^a_{\mu\nu}\right)^2 \tag{1.58}$$

La principale nouveauté par rapport à (1.53) vient de ce qu'il y a des interactions entre les champs de jauge dans le terme de Yang-Mills d'après la définition de $F^a_{\mu\nu}$.

Les symétries de jauge du modèle standard

Les trois interactions présentes dans le modèle standard peuvent toutes êtres décrites par des théories de jauge. L'interaction nucléaire forte, décrite par la chromodynamique quantique

(QCD pour Quantum ChromoDynamics), est intégrée au modèle standard de la physique des particules sous la forme d'une symétrie de jauge de $SU(3)$. Ce groupe possède 8 générateurs, donc 8 bosons de jauge G_μ appelés gluons, dont la représentation matricielle la plus simple est donnée par les matrices de Gell-Mann λ^a [27]. Ces matrices sont de dimension 3, donc les fermions sensibles à cette interaction doivent être écrits sous formes de vecteurs de fermions de dimension 3. On introduit une base d'états pour ces fermions, que l'on appelle états de couleur :

$$|r\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |g\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |b\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.59}$$

Les fermions sensibles à l'interaction forte se décomposent alors en triplets de couleur :

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_r \\ \psi_g \\ \psi_b \end{pmatrix} \tag{1.60}$$

L'interaction électrofaible, qui décrit dans un cadre unifié l'interaction électromagnétique et l'interaction nucléaire faible correspond à une théorie de jauge dont le groupe de symétrie est $SU(2) \times U(1)$. Les transformations de $U(1)$ agissent sur tous les fermions qui possèdent un nombre d'hypercharge Y non nul (on note alors le groupe $U(1)_Y$), et le boson de jauge correspondant est noté B_μ. Les transformations de $SU(2)$ n'agissent que sur les spineurs gauches (on note alors le groupe $SU(2)_L$), elles possèdent 3 générateurs, donc 3 bosons de jauge notés $W^{1,2,3}$. De manière similaire au cas de $SU(3)$, la représentation matricielle de $SU(2)$ la plus simple est de dimension 2 et donnée par les matrices de Pauli σ^a. Les fermions gauches ψ_L, sensibles à cette interaction, sont donc représentés sous forme de vecteurs de dimension 2 notés L, de la même manière que pour la représentation des états de spin :

$$L = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi'_L \end{pmatrix} \tag{1.61}$$

Les propriétés de l'électromagnétisme et de l'interaction faible sont obtenues par mélange des champs de jauge de la théorie électrofaible, en fonction de l'angle de Weinberg θ_w, selon :

$$\begin{pmatrix} W_\mu^+ \\ W_\mu^- \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^1 \\ W_\mu^2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_w & \sin\theta_w \\ -\sin\theta_w & \cos\theta_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^3 \end{pmatrix} \tag{1.62}$$

Le photon A_μ, qui est le boson de jauge de l'interaction électromagnétique est couplé de la même manière à toutes les particules chargées. Les bosons de l'interaction faible sont les $W_\mu^\pm$ qui se couplent aux fermions gauches mais également au photon car ils sont chargés, et Z_μ

dont les couplages avec les fermions gauches et droits sont différents et dépendent de l'angle θ_w.

Le modèle de l'interaction électrofaible propose une solution très élégante qui unifie l'interaction électromagnétique et l'interaction faible. Il pose toutefois deux problèmes. Premièrement, les bosons $W^{\pm}$ et Z observés expérimentalement possèdent une masse. Or, nous avons vu qu'un terme de masse pour les bosons vecteurs n'est pas invariant de jauge. Deuxièmement, le terme de masse des fermions $m\bar{\psi}\psi$, qui ne posait pas de problème pour les interactions précédemment étudiées, n'est plus invariant de jauge dans le cadre de l'interaction électrofaible. Ce terme de masse se décompose en termes de fermions gauches ψ_L et droits ψ_R selon :

$$m\bar{\psi}\psi = m\bar{\psi}_L\psi_R + m\bar{\psi}_R\psi_L \tag{1.63}$$

Comme ψ_L appartient à un doublet de $SU(2)$, mais pas ψ_R, une telle combinaison n'est pas invariante sous le groupe de jauge de la théorie électrofaible. Ainsi, aucune particule ne devrait avoir de masse dans le cadre de la théorie électrofaible, ce qui est contraire aux observations faites depuis les débuts de la physique des particules. Heureusement, il existe une solution à cet épineux problème : le mécanisme de Brout-Englert-Higgs [28, 29].

1.2.3 Le mécanisme de Brout-Englert-Higgs

Le mécanisme de Brout-Englert-Higgs se base sur le principe fondamental de brisure spontanée de symétrie, qui sera développé en détail au chapitre 5, selon lequel l'état fondamental d'un des champs du modèle acquiert une valeur moyenne non nulle appelée vev (pour vacuum expectation value). Afin de préserver l'invariance de Lorentz, seuls les champs scalaires peuvent avoir une vev. De plus, l'invariance par translation interdit à cette vev de dépendre de la position, elle doit donc être constante.

Pour engendrer le mécanisme de Brout-Englert-Higgs, on introduit un champ scalaire complexe, qui doit être sensible aux groupes de jauge qu'il va briser, donc il doit être un doublet chargé :

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix} \tag{1.64}$$

Ce champ scalaire complexe ($\phi_{1,2,3,4}$ sont réels) est un doublet de $SU(2)_L$ composé d'un champ chargé ϕ^+ et d'un champ neutre ϕ^0 qui est différent de son anti-particule car complexe. Il suit le lagrangien suivant, qui est invariant sous une transformation locale de $SU(2)_L \times U(1)_Y$:

$$\mathcal{L}_\phi = -D_\mu\phi^\dagger D^\mu\phi + \mu^2\phi^\dagger\phi - \lambda\left(\phi^\dagger\phi\right)^2 \tag{1.65}$$

où μ et λ sont deux paramètres positifs. Comme ϕ est sensible aux transformations de $SU(2)_L \times U(1)_Y$, la dérivée covariante est donnée par :

$$D_\mu = \partial_\mu - ic_1 \frac{\sigma^a}{2} W_\mu^a - ic_2 B_\mu \tag{1.66}$$

où c_1 et c_2 dépendent notamment des constantes de couplages de $SU(2)_L$ et de $U(1)_Y$. La vev v minimise l'énergie de l'état fondamental (pour lequel la valeur moyenne des champs des bosons de jauge est nulle) et est donnée par :

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2 = \frac{\mu^2}{\lambda} \equiv v^2 \tag{1.67}$$

Une infinité de choix est possible pour l'état fondamental, mais si l'on veut que celui-ci soit neutre, et que le photon soit de masse nulle, ce qui semble correspondre à notre Univers, alors l'état fondamental est le suivant :

$$\phi_{ef} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \tag{1.68}$$

Cet état fondamental n'est pas invariant sous une transformation de $SU(2)_L \times U(1)_Y$, cette symétrie est donc brisée spontanément. Il est néanmoins invariant sous une transformation d'un groupe $U(1)_{em}$ différent de $U(1)_Y$, associé à la charge électrique. La brisure spontanée de symétrie suit donc le schéma suivant :

$$SU(2)_L \times U(1)_Y \to U(1)_{em} \tag{1.69}$$

Il faut toutefois noter que la théorie fondamentale est invariante sous une transformation de $SU(2)_L \times U(1)_Y$, ce n'est que le choix de l'état fondamental parmi un ensemble de choix équivalents qui brise cette symétrie.

Le champ ϕ correspond à des excitations autour de l'état fondamental, que l'on paramétrise sous forme d'excitations "azimutales" θ^a et d'une excitation "radiale" h, de sorte que le champ ϕ s'écrit :

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\theta^a(x)\sigma^a} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix} \tag{1.70}$$

Or, la théorie étant invariante sous une transformation de $SU(2)_L \times U(1)_Y$, on peut effectuer une transformation locale de jauge qui élimine les excitations θ^a :

$$\phi \to \phi' = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left[\left(\theta^a(x) - \frac{\alpha^a(x)}{2}\right)\sigma^a\right] \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix} \tag{1.71}$$

Les degrés de liberté azimutaux sont donc absorbés par la liberté de jauge. On dit parfois que les champs de jauge "mangent" ces degrés de liberté. Le champ ϕ se réduit alors à son composant du bas, c'est-à-dire que $\phi^+ = 0$ et $\phi^0 = [v + h(x)]/\sqrt{2}$. Le quantum d'excitation du champ de higgs $h(x)$ est associé à la particule appelée boson de Higgs, découverte au CERN en 2012 [30, 31], qui a valu l'attribution du prix Nobel en 2013 à Peter Higgs et François Englert. Les masses des bosons vecteurs, de la forme $\propto v^2 \left(W_\mu^-\right)^\dagger W_\mu^-$ pour le boson W^- par exemple, sont générées par la dérivée covariante du terme cinétique de ϕ dans (1.65). Les termes de masse pour les fermions, de la forme $\propto v\bar{\psi}\psi$ sont introduits sous forme de termes de Yukawa dans le lagrangien [32] :

$$\mathcal{L}_{\text{Yuk}} = -y'_{ij}\bar{L}_i\phi\psi'_{jR} - y_{ij}\bar{L}_i\phi^c\psi_{jR} - h.c. \tag{1.72}$$

où y'_{ij} et y_{ij} sont les matrices des couplages de Yukawa qui interviennent dans les masses des fermions, $\phi^c = i\sigma_2\phi^*$ est le conjugué de charge de ϕ (on rappelle que ϕ n'est pas sa propre anti-particule) et l'inscription $h.c$ indique qu'il faut ajouter les conjugués hermitiens de ces termes.

1.2.4 Le modèle et ses limites

Maintenant que nous avons précisé la description des interactions présentes dans le modèle standard de la physique des particules en terme de théories de jauges, et que nous avons résolu le problème de la masse des particules posé par l'interaction électrofaible à l'aide du mécanisme de Brout-Englert-Higgs, il reste à préciser quelles particules interagissent par l'échange de champs de jauge, c'est-à-dire quel est le contenu fermionique du modèle standard. Les fermions sont présents dans le modèle standard en trois exemplaires, ou familles, aux propriétés identiques à l'exception de la masse, elles-mêmes regroupées en deux grandes catégories :

— **Les quarks** qui sont des fermions sensibles à toutes les interactions. Les quarks gauches sont donc des doublets de la forme :

$$Q = \begin{pmatrix} q_L \\ q'_L \end{pmatrix} \tag{1.73}$$

Les éléments du doublet ainsi que les quarks droits q_R et q'_R sont des triplets de couleur. Les quarks q ont des charges électriques égales à $+2/3$ et les quarks q' ont des charges égales à $-1/3$ en unité de charge élémentaire e ;

— **Les leptons** qui sont tous sensibles à l'interaction faible mais dont une partie seulement est chargée électriquement. Les leptons gauches sont des doublets de la forme :

$$L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ \ell_L \end{pmatrix} \tag{1.74}$$

Les états ν sont appelés des neutrinos, et ils ont la particularité d'être de charge électrique nulle. Ainsi, seule leur composante gauche interagit par l'interaction faible. Puisque des neutrinos droits ne pourraient pas interagir avec les particules du modèle standard, on fait l'hypothèse qu'ils n'existent pas. Il n'est alors pas possible de leur fournir une masse par le mécanisme de Brout-Englert-Higgs, et dans le modèle standard à stricement parler, les neutrinos sont sans masse. Cependant, les observations d'oscillations de neutrinos indiquent que ces derniers possèdent une masse [33], ce qui est intriguant mais se résout facilement en supposant l'existence de neutrinos droits. À l'inverse, les états ℓ ont une charge électrique égale à -1 en unité de e, et sont donc massifs.

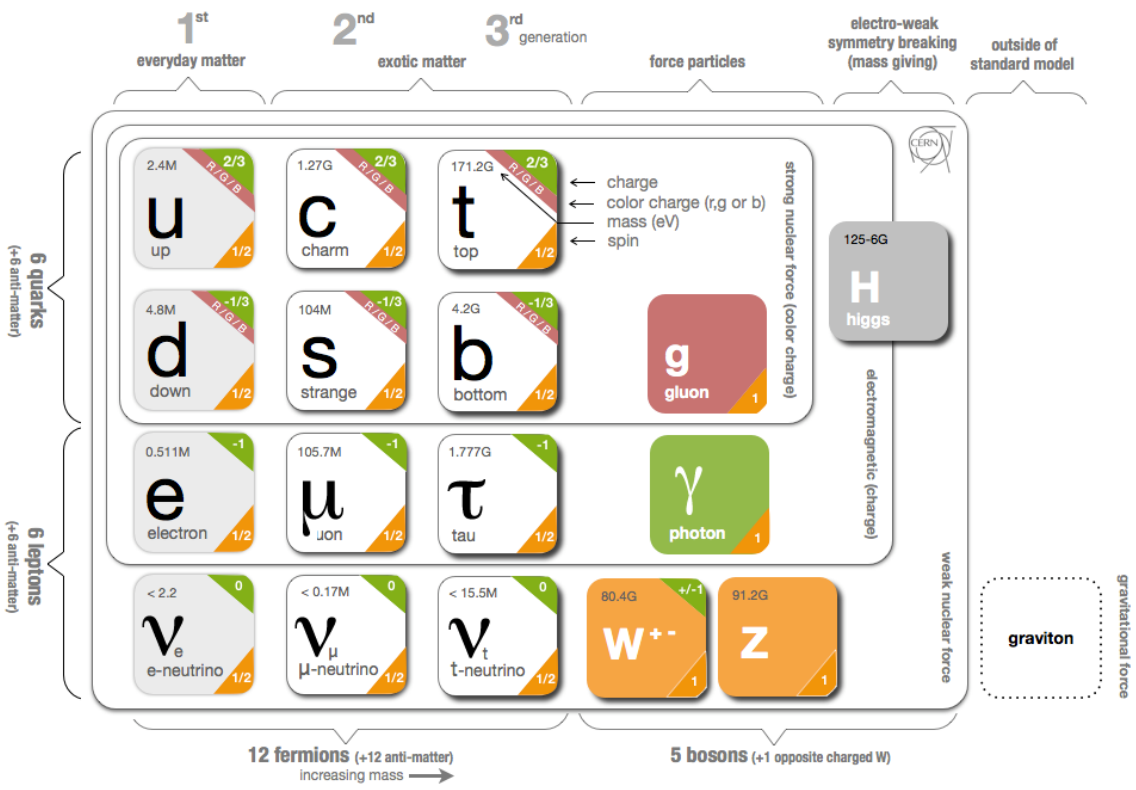

FIGURE 1.3 Résumé des particules présentes dans le modèle standard de la physique des particules ainsi que leurs principales propriétés.

La donnée des symétries d'espace-temps, des symétries de jauge, du mécanisme de brisure spontanée de symétrie et des constituants fermioniques détermine complètement le modèle standard, résumé dans la figure 1.3, et dont la dynamique est décrite par le lagrangien suivant :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{SM} = & -i\bar{L}\gamma^\mu D_\mu L - i\bar{\ell}_R\gamma^\mu D_\mu \ell_R - i\bar{Q}\gamma^\mu D_\mu Q - i\bar{q}_R\gamma^\mu D_\mu q_R - i\bar{q}'_R\gamma^\mu D_\mu q'_R \\ & -\frac{1}{4}\left(B_{\mu\nu}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(W^i_{\mu\nu}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(G^a_{\mu\nu}\right)^2 - D_\mu\phi^\dagger D^\mu\phi + \mu^2\phi^\dagger\phi - \lambda\left(\phi^\dagger\phi\right)^2 \\ & -y^{\ell}_{ij}{}'\bar{L}_i\phi\ell_{jR} - y^{q}_{kl}{}'\bar{Q}_k\phi q'_{lR} - y^q_{kl}\bar{L}_k\phi^c q_{lR} - h.c. \end{aligned} \tag{1.75}$$

Ce modèle décrit l'ensemble de la matière connue ainsi que 3 des 4 interactions fondamentales, dont l'interaction électromagnétique et l'interaction faible apparaissent dans le cadre unifié de la théorie électrofaible. Il n'a à ce jour jamais été mis en défaut expérimentalement et n'a eu de cesse d'être confirmé depuis son développement dans les années 1960.

Cependant, il apparaît clair que le modèle standard de la physique des particules reste incomplet. Évoquons quelques raisons de le penser, la liste présentée ici n'étant pas du tout exhaustive.
L'élément manquant le plus flagrant est l'interaction gravitationnelle actuellement décrite par la relativité générale. Malheureusement, à l'heure actuelle, nous n'avons pas assez d'éléments experimentaux permettant de discriminer entre les différentes descriptions quantiques de la relativité développées jusqu'à aujourd'hui. Cependant, ce problème est pour l'instant surtout important du point de vue théorique, les dispositifs expérimentaux de physique des particules ne permettant pas d'aller à des énergies importantes au point de nécessiter de prendre en compte l'interaction gravitationnelle.
On peut également citer le problème de la matière noire, dont l'existence est très bien motivée par les observations astrophysiques et cosmologiques qui seront décrites au chapitre 5. Elle n'est, cependant, pas encore incluse dans le modèle standard de la physique des particules qui a pourtant pour vocation de décrire les constituants matériels de l'Univers. De nombreux candidats aujourd'hui activement recherchés ont été proposés à partir d'extensions du modèle standard, dont la plus connue est la supersymétrie [34]. Mais jusqu'à aujourd'hui, toujours aucune trace de particules de matière noire.
Nous finirons par un problème du modèle standard plus subtil, appelé problème de la hiérarchie, qui concerne la masse du boson de Higgs $m_H = \sqrt{2}\mu = 125.09 \pm 0.21\,(\text{stat.}) \pm 0.11\,(\text{stat.})$ GeV [35]. En effet, le vide de la théorie quantique des champs est le théâtre de fluctuations incessantes, si bien que l'on n'observe jamais les particules "nues". Ainsi, les valeurs observées des paramètres de ces particules ne correspondent pas aux valeurs de ces paramètres s'il n'y avait pas ces fluctuations, et en particulier elles dépendent de l'échelle d'énergie à laquelle a lieu l'interaction. On appelle ce phénomène la renormalisation. Pour le cas qui nous intéresse, la renormalisation dans le cadre du modèle standard de la physique des particules devrait faire diverger la masse observée du boson de Higgs. Celle-ci devrait alors être observée à la masse de Planck qui correspond à l'énergie limite en théorie quantique, ce qui n'est pas le cas comme illustré en figure 1.4. Si l'on reformule le problème de la hiérarchie, il s'agit de se demander pourquoi l'échelle de Planck, qui est l'échelle d'énergie caractéristique de la gravitation, est si grande comparée à l'échelle électrofaible, donnée par la masse du boson de Higgs.

Les masses des autres particules du modèle standard sont protégées contre une telle divergence de leur masse par la renormalisation grâce aux symétries de la théorie. Ce n'est pas le cas du boson de Higgs, à moins qu'existent des symétries impliquant ce dernier et des particules de

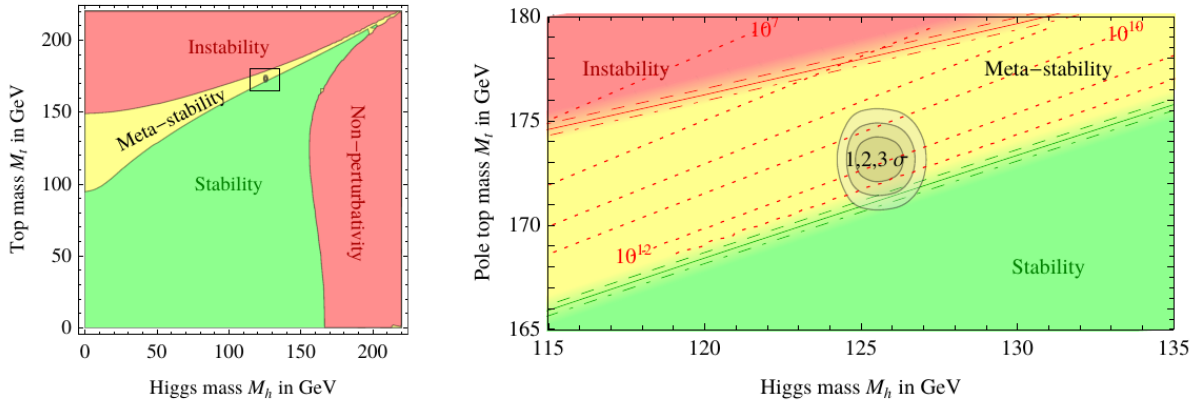

FIGURE 1.4 Régions de stabilité, méta-stabilité et instabilité du vide quantique dans le plan (masse du quark top M_t, masse du boson de Higgs M_h). Le contour de confiance correspond aux observations expérimentales qui déterminent les paramètres du modèle standard. La figure est tirée de [36].

masses plus élevées, activement recherchées. Cela semble à nouveau indiquer que le spectre du modèle standard n'est pas complet.

Bibliographie

[1] Isaac Newton. *Philosophiae naturalis principia mathematica*. J. Societatis Regiae ac Typis J. Streater, 1687.

[2] Jean-Philippe Uzan and Patrick Peter. *Cosmologie Primordiale*. Belin, 2012.

[3] Albert Abraham Michelson and Edward Williams Morley. On the Relative Motion of the Earth and the Luminiferous Ether. *Am. J. Sci.*, 34 :333–345, 1887.

[4] Hendrik Antoon Lorentz. Elektromagnetische vorgänge in einem systeme, das sich mit einer willkürlichen geschwindigkeit (kleiner als die des lichtes) bewegt. *Proceedings of the Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences*, pages 809–831, 1904.

[5] Henri Poincaré. *Sur la dynamique de l'électron*. Circolo Matematico di Palermo, 1906.

[6] Albert Einstein. Zur Elektrodynamik bewegter Körper. *Annalen der Physik*, 322(10) :891–921.

[7] Stephan Schlamminger, K. Y. Choi, T. A. Wagner, J. H. Gundlach, and E. G. Adelberger. Test of the equivalence principle using a rotating torsion balance. *Phys. Rev. Lett.*, 100 :041101, 2008.

[8] Albert Einstein. Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen. *Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik*, 4, 1908.

[9] David Hilbert. Die Grundlagen der Physik. 1. *Gott. Nachr.*, 27 :395–407, 1915. [,120(1915)].

[10] Pierre Laurent et al. A 14 h^{-3} Gpc^3 study of cosmic homogeneity using BOSS DR12 quasar sample. *JCAP*, 1611(11) :060, 2016.

[11] Planck Collaboration. Planck 2015 results. XVI. Isotropy and statistics of the CMB. *Astron. Astrophys.*, 594 :A16, 2016.

[12] Alexandre Friedmann. Über die Krümmung des Raumes. *Zeitschrift fur Physik*, 10 :377–386, 1922.

[13] Georges Lemaître. Un Univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques. *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, 47 :49–59, 1927.

[14] Christophe Texier and Guillaume Roux. *Physique statistique : des processus élémentaires aux pheénomènes collectifs*. Dunod, 2017.

[15] Adam G. Riess et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *Astron. J.*, 116 :1009–1038, 1998.

[16] S. Perlmutter et al. Measurements of Omega and Lambda from 42 high redshift supernovae. *Astrophys. J.*, 517 :565–586, 1999.

[17] Planck Collaboration. Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters. *Astron. Astrophys.*, 594 :A13, 2016.

[18] Alan H. Guth. The Inflationary Universe : A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems. *Phys. Rev.*, D23 :347–356, 1981. [Adv. Ser. Astrophys. Cosmol.3,139(1987)].

[19] Planck Collaboration. Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters. *Astron. Astrophys.*, 571 :A16, 2014.

[20] Steven Weinberg. *The Quantum Theory of Fields*. Number vol.2. Cambridge University Press, 1995.

[21] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder. *An Introduction to quantum field theory*. Addison-Wesley, Reading, USA, 1995.

[22] Bertrand Delamotte. Un soupçon de théorie des groupes : groupe des rotations et groupe de Poincaré. Lecture, September 2006.

[23] Emmy Noether. Invariant Variation Problems. *Gott. Nachr.*, 1918 :235–257, 1918. [Transp. Theory Statist. Phys.1,186(1971)].

[24] R. P. Feynman. Space-time approach to nonrelativistic quantum mechanics. *Rev. Mod. Phys.*, 20 :367–387, 1948.

[25] Paul A. M. Dirac. The quantum theory of the electron. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A117 :610–624, 1928.

[26] Chen-Ning Yang and Robert L. Mills. Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance. *Phys. Rev.*, 96 :191–195, 1954. [,150(1954)].

[27] Murray Gell-Mann. Symmetries of baryons and mesons. *Phys. Rev.*, 125 :1067–1084, 1962.

[28] Peter W. Higgs. Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons. *Phys. Rev. Lett.*, 13 :508–509, 1964. [,160(1964)].

[29] F. Englert and R. Brout. Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons. *Phys. Rev. Lett.*, 13 :321–323, 1964. [,157(1964)].

[30] CMS Collaboration. Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC. *Phys. Lett.*, B716 :30–61, 2012.

[31] ATLAS Collaboration. Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC. *Phys. Lett.*, B716 :1–29, 2012.

[32] Hideki Yukawa. On the Interaction of Elementary Particles I. *Proc. Phys. Math. Soc. Jap.*, 17 :48–57, 1935. [Prog. Theor. Phys. Suppl.1,1(1935)].

[33] Takaaki Kajita. Atmospheric neutrino results from Super-Kamiokande and Kamiokande : Evidence for neutrino(mu) oscillations. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 77 :123–132, 1999. [,123(1998)].

[34] Howard E. Haber. Introductory low-energy supersymmetry. In *Proceedings, Theoretical Advanced Study Institute (TASI 92) : From Black Holes and Strings to Particles : Boulder, USA, June 1-26, 1992*, pages 589–686, 1993.

[35] ATLAS and CMS Collaborations. Combined Measurement of the Higgs Boson Mass in pp Collisions at $\sqrt{s} = 7$ and 8 TeV with the ATLAS and CMS Experiments. *Phys. Rev. Lett.*, 114 :191803, 2015.

[36] Giuseppe Degrassi et al. Higgs mass and vacuum stability in the Standard Model at NNLO. *JHEP*, 08 :098, 2012.

Chapitre 2

Perturbations cosmologiques

Sommaire

2.1 La théorie des perturbations en cosmologie **42**
2.1.1 Perturbations de la métrique 42
2.1.2 Le problème de la jauge 44
2.1.3 Perturbations du tenseur énergie-impulsion 45
2.1.4 Équations d'évolution perturbées 48
2.1.5 Le choix de la jauge 50
2.2 Le fond diffus cosmologique **58**
2.2.1 La formule de Sachs-Wolfe 58
2.2.2 Interaction entre baryons et photons 62
2.2.3 Le spectre de puissance angulaire des anisotropies 65
2.2.4 Approche cinétique 69
Bibliographie **77**

Comme nous l'avons vu au chapitre 1, la relativité générale permet de décrire l'évolution globale de notre Univers. Néanmoins, tout le développement précédent s'appuie sur l'hypothèse de symétrie maximale de l'espace-temps. En d'autres termes, on a supposé que l'Univers était parfaitement homogène et isotrope. Or, l'existence des étoiles, des galaxies, des amas de galaxies et, plus généralement, des grandes structures de l'Univers contredisent l'hypothèse d'homogénéité.

Un espoir de conserver cette approche subsiste cependant. En effet, bien que l'Univers ne soit manifestement pas homogène à petite échelle, les observations à grande échelle nous assurent qu'il l'est pour des échelles plus grandes que la distance moyenne intergalactique, soit environ 100 Mpc [1] (1 pc $=$ 3.262 années lumière $= 3.086 \times 10^{16}$ m). Comment, alors, tenir compte de l'homogénéité de l'Univers à grande échelle, tout en permettant à la théorie de prédire la formation des grandes structures jusqu'aux galaxies et aux étoiles ?

Si l'on reformule plus formellement le problème, nous cherchons ici à exprimer que l'espace-temps de notre Univers $\mathcal{M}$, décrit par sa métrique $g_{\mu\nu}$, est proche d'un espace-temps de Friedmann-Lemaître $(\bar{\mathcal{M}}, \bar{g}_{\mu\nu})$, où l'écart entre les deux métriques est une petite perturbation $\delta g_{\mu\nu}$. Pour cela, nous allons partir des équations d'Einstein dans la métrique FLRW, puis nous exprimerons ces équations à l'ordre linéaire dans les perturbations. Cette théorie est appelée la théorie des perturbations cosmologiques, et nous la développerons dans la section 2.1. A priori, cette procédure a toutes les chances de ne pas aboutir à un résultat pertinent. En effet, si l'on note $E(g_{\mu\nu}) = 0$ l'ensemble des équations d'Einstein, qui sont hautement non-linéaires, alors a priori il n'y a pas de raison pour que $E(g_{\mu\nu}) = E(\bar{g}_{\mu\nu}) + E(\delta g_{\mu\nu})$.
Néanmoins, comme le montreront les sections 2.1 et 2.2, les résultats de cette théorie offrent des prédictions conformes aux observations, et ce à des précisions encore inégalées. Ces deux parties s'inspirent très largement de [2] et de [3].

2.1 La théorie des perturbations en cosmologie

Les équations d'Einstein (1.19) décrivent l'interaction entre la géométrie de l'espace-temps (à travers sa métrique) et son contenu matériel (par le tenseur énergie-impulsion). Afin d'obtenir les équations d'Einstein perturbées, nous allons donc devoir commencer par perturber chacun de ces deux ingrédients.

2.1.1 Perturbations de la métrique

Nous commencerons par nous intéresser à la métrique d'espace-temps perturbée. Nous allons ici partir de la métrique FLRW dont on rappelle qu'elle est donnée par [1] :

$$ds^2 = a^2(\tau)\left[-d\tau^2 + \gamma_{ij}dx^i dx^j\right] \tag{2.1}$$

où a est le facteur d'échelle et τ le temps conforme. Nous perturbons ensuite cette métrique de la manière la plus générale qui soit :

$$ds^2 = a^2(\tau)\left[-(1+2A)\,d\tau^2 + 2B_i dx^i d\tau + (\gamma_{ij} + h_{ij})\,dx^i dx^j\right] \tag{2.2}$$

où nous avons introduit les perturbations A (scalaire), B_i (vectorielle) et h_{ij} (tensorielle). Cela revient à utiliser une nouvelle métrique donnée par :

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} \tag{2.3}$$

1. À partir d'ici, nous utiliserons la convention $c = \bar{h} = 1$.

avec $\bar{g}$ la métrique FLRW et δg la perturbation de métrique (les quantités précédées d'un δ dans la suite seront implicitement des perturbations). Cependant, les perturbations vectorielles et tensorielles précédemment introduites contiennent des contributions scalaires, vectorielles et tensorielles, que l'on aimerait extraire. Nous effectuons alors une décomposition scalaire-vecteur-tenseur (SVT) des perturbations [4]. Il est en fait possible de décomposer tout vecteur comme la somme de la divergence d'un scalaire et d'un vecteur de divergence nulle :

$$B_i = \nabla_i B + \bar{B}_i \tag{2.4}$$

où ∇ indique une dérivée covariante comme définie en (1.14). La barre sur le vecteur indique qu'il est de divergence nulle ($\nabla^i \bar{B}_i = 0$). Dans la suite, toutes les perturbations de vecteurs seront décomposées de la sorte en une partie scalaire (sans indice) et une partie vectorielle de divergence nulle (surmontée d'une barre). Il est également possible de décomposer tout tenseur d'ordre 2 selon :

$$h_{ij} = 2C\gamma_{ij} + 2\nabla_i\nabla_j E + 2\nabla_{(i}\bar{E}_{j)} + 2\bar{E}_{ij} \tag{2.5}$$

où de nouveau $\nabla^i \bar{E}_i = 0$, mais également $\nabla^i \bar{E}_{ij} = 0$ et $\bar{E}^i_i = 0$. On a par ailleurs introduit la notation qui indique que l'on extrait la partie symétrique d'un tenseur $T_{\mu\nu}$: $T_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu})$. On définit également la notation analogue pour la partie anti-symétrique : $T_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu})$. L'intérêt de la décomposition SVT vient du fait que si l'on se limite au premier ordre dans les perturbations, ce que l'on fait dans la plupart des applications de la théorie des perturbations cosmologiques (mais pas toutes), ces trois types de perturbations sont découplées et peuvent être traitées séparément [4]. Ainsi décomposée, nous pouvons voir que la nouvelle métrique possède 10 nouveaux degrés de liberté : 4 degrés de liberté scalaires, 4 degrés de liberté vectoriels (2 vecteurs de divergence nulle) et 2 degrés de liberté tensoriels (1 tenseur sans trace et de divergences nulles), résumés dans la table 2.1.

Scalaires	Vecteurs	Tenseurs
A	$\bar{B}_i$	$\bar{E}_{ij}$
B	$\bar{E}_i$	
C		
E		

TABLE 2.1 Perturbations de la métrique autour d'un univers décrit par la métrique FLRW.

2.1.2 Le problème de la jauge

Nous venons de voir que lorsque l'on introduit les perturbations les plus générales possibles à la métrique, nous obtenons 10 nouveaux degrés de liberté. Néanmoins, certains de ces degrés de liberté ne sont pas physiques. En effet, on cherche à exprimer ici que l'espace-temps $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$ est proche de celui d'un univers de Friedmann-Lemaitre $(\bar{\mathcal{M}}, \bar{g}_{\mu\nu})$. Il subsiste alors un arbitraire lié à la manière d'identifier les points de ces deux espaces-temps, c'est-à-dire lié au choix du système de coordonnées, illustré par la figure 2.1 et qu'on appelle problème de la jauge. On peut néanmoins noter que la relativité générale est censée tendre vers la théorie newtonienne de la gravitation à petite échelle, théorie pour laquelle il n'y a pas de problème de jauge, donc les différences entre les jauges ne se voient qu'à grande échelle.

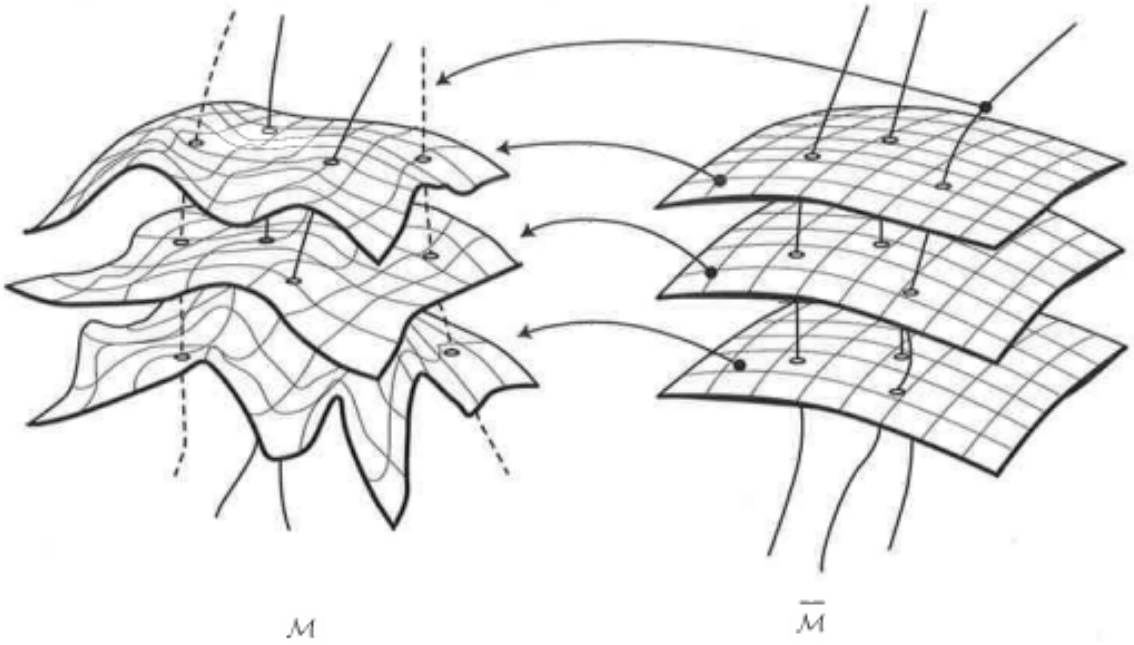

FIGURE 2.1 Les quantités perturbées sont définies à travers une cartographie entre les espace-temps $\bar{\mathcal{M}}$ et $\mathcal{M}$.

Il serait alors pratique de pouvoir exprimer les perturbations introduites précédemment en fonction de nouvelles variables qui ne dépendent pas de la jauge, approche notamment développée dans les années 80 par James Bardeen [5]. On peut montrer que toute quantité qui est nulle dans le cadre d'un univers non-perturbé est invariante de jauge. Il s'agit d'un cas particulier du Lemme de Stewart-Walker [6]. Ainsi, comme les équations relativistes peuvent toujours s'écrire comme une quantité $Q = 0$, il est toujours possible de les écrire uniquement en fonction de variables indépendantes de jauge.

Quantités invariantes de jauge pour les perturbations de la métrique

On cherche à construire des variables indépendantes de jauge à partir des perturbations définies dans la table 2.1. Toutes les équations qui suivent devront alors être exprimées en fonction de ces variables indépendantes de jauge. Pour faire cette construction, on va considérer le changement de variable suivant : $x^\mu \to x^\mu + \xi^\mu$, où ξ^μ est tel que $\xi^0 = T$ et $\xi^i = \nabla^i L + \bar{L}^i$. Sous une telle transformation, qui est simplement une transformation générale de coordonnées, la perturbation de métrique devient :

$$\delta g_{\mu\nu} \to \delta g_{\mu\nu} + \pounds_\xi g_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu} + 2\nabla_{(\mu}\xi_{\nu)} \tag{2.6}$$

où $\pounds_\xi$ est appelé dérivée de Lie dans la direction de ξ^μ. Cela se traduit pour les perturbations scalaires, vectorielles et tensorielle par :

$$\begin{aligned}
&A \to A + T' + \mathcal{H}T && \bar{B}_i \to \bar{B}_i + \bar{L}_i' && \bar{E}_{ij} \to \bar{E}_{ij} \\
&B \to B - T + L' && \bar{E}_i \to \bar{E}_i + \bar{L}_i \\
&C \to C + \mathcal{H}T \\
&E \to E + L
\end{aligned} \tag{2.7}$$

où $\mathcal{H} = \frac{d\ln(a)}{d\tau}$, et la notation prime indique une dérivée par rapport au temps conforme. On remarque que la perturbation tensorielle $\bar{E}^{ij}$ est d'ores et déjà invariante de jauge. Pour les autres types de perturbations, on définit les variables invariantes de jauge suivantes :

$$\begin{aligned}
&\Phi = A + \mathcal{H}\left(B - E'\right) + \left(B - E'\right)' && \bar{\Phi}^i = \bar{E}^{i\prime} - \bar{B}^i && \bar{E}^{ij} \\
&\Psi = -C - \mathcal{H}\left(B - E'\right)
\end{aligned} \tag{2.8}$$

On peut également définir d'autres variables indépendantes de jauge, mais ces dernières pourront toujours être exprimées à partir de celles définies ci-dessus.

Nous avions initialement 10 degrés de liberté pour les perturbations de la métrique, mais après avoir extrait les 4 degrés de liberté de jauge (2 scalaires T et L, et un vecteur de divergence nulle $\bar{L}^i$), les perturbations ne possèdent plus que 6 degrés de liberté et sont paramétrées par les variables résumées dans la table 2.2.

2.1.3 Perturbations du tenseur énergie-impulsion

Une fois le tenseur métrique perturbé, nous allons devoir perturber le second ingrédient des équations d'Einstein : le tenseur énergie-impulsion. Nous avons vu au chapitre 1 que, dans

Scalaires	Vecteurs	Tenseurs
Φ	$\bar{\Phi}_i$	$\bar{E}_{ij}$
Ψ		

TABLE 2.2 Variables de perturbation de la métrique FLRW invariantes par changement de jauge.

un univers homogène et isotrope, la forme générale du tenseur énergie-impulsion d'un fluide parfait de densité $\bar{\rho}$ et de pression $\bar{p}$ est donné par $T^{\mu}_{\nu} = \mathrm{diag}\left(-\bar{\rho}, \bar{p}, \bar{p}, \bar{p}\right)$. Cela se traduit, dans le référentiel d'un observateur de quadri-vitesse $\bar{u}_\mu$, par :

$$T_{\mu\nu} = \left(\bar{\rho} + \bar{p}\right) \bar{u}_\mu \bar{u}_\nu + \bar{p}\bar{g}_{\mu\nu} \tag{2.9}$$

On peut perturber ce tenseur de la même manière que pour la métrique en introduisant 4 degrés de liberté scalaires, 4 degrés de liberté vectoriels et 2 degrés de liberté tensoriels. Mais pour garder une interprétation physique intuitive de ces perturbations, il est préférable d'introduire les 10 degrés de liberté sous la forme de 5 degrés de liberté associés aux perturbations du tenseur énergie-impulsion pour un fluide parfait et 5 degrés de libertés associés à celles caractérisant le caractère non-parfait du fluide :

$$\delta T_{\mu\nu} = \left(\delta\rho + \delta p\right) \bar{u}_\mu \bar{u}_\nu + \delta p \bar{g}_{\mu\nu} + 2\left(\bar{\rho} + \bar{p}\right) \bar{u}_{(\mu}\, \delta u_{\nu)} + \bar{p}\delta g_{\mu\nu} + a^2 \bar{p} \pi_{\mu\nu} \tag{2.10}$$

avec $u^\mu = \bar{u}^\mu + \delta u^\mu$ la quadri-vitesse de l'observateur, qui, puisque celui-ci est comobile, vérifie $g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -1$. On peut remarquer que la perturbation du tenseur énergie-impulsion fait intervenir la perturbation de la métrique $\delta g_{\mu\nu}$. Ainsi, en utilisant la métrique perturbée (2.2), on peut écrire la perturbation de quadri-vitesse selon :

$$u^\mu = \frac{1}{a}\left(1 - A, v^i\right) \ , \qquad u_\mu = -a\left(1 + A, v_i + B_i\right) \tag{2.11}$$

où on a défini la perturbation de vitesse v_i que l'on décompose selon $v_i = \nabla_i v + \bar{v}_i$, et où interviennent les perturbations de la métrique A et B_i. Dans la décomposition (2.10), $\pi_{\mu\nu}$ est appelé tenseur de pression anisotrope. Il est symétrique, et est choisi sans trace et orthogonal à u^μ. Il caractérise l'écart du fluide à un fluide parfait, et possède donc 5 degrés de liberté. On le décompose également en parties scalaire, vectorielle et tensorielle :

$$\pi_{ij} = \Delta_{ij}\pi + \nabla_{(i}\bar{\pi}_{j)} + \bar{\pi}_{ij} \ , \qquad \text{où} \quad \Delta_{ij} = \nabla_i \nabla_j - \frac{1}{3}\gamma_{ij}\Delta \tag{2.12}$$

Les perturbations introduites ci-dessus sont résumées dans la table 2.3. On peut alors déterminer les composantes du tenseur énergie-impulsion perturbé à partir de ces dernières, de celles

introduites dans la partie 2.1.1, et en utilisant l'équation d'état du fluide considéré $\bar{p} = w\bar{\rho}$:

$$\begin{aligned}
\delta T_{00} &= \bar{\rho} a^2 \left(\delta + 2A\right) \\
\delta T_{0i} &= -\bar{\rho} a^2 \left[(1+w)\, v_i + B_i\right] \\
\delta T_{ij} &= \bar{p} a^2 \left(h_{ij} + \frac{\delta p}{\bar{p}} \gamma_{ij} + \pi_{ij}\right)
\end{aligned} \tag{2.13}$$

où l'on a définit le contraste de densité δ par $\delta\rho = \bar{\rho}\delta$.

Scalaires	Vecteurs	Tenseurs
δ	$\bar{\pi}_i$	$\bar{\pi}_{ij}$
δp	$\bar{v}_i$	
v		
π		

TABLE 2.3 Perturbations du tenseur énergie-impulsion d'un fluide autour de la description d'un fluide parfait.

Quantités invariantes de jauge pour les perturbations du tenseur énergie-impulsion

De la même manière que pour le tenseur métrique, les perturbations du tenseur énergie-impulsion vont dépendre du choix du système de coordonnées, il faut donc les exprimer en fonction de variables indépendantes de jauge. Lorsqu'on effectue la transformation générale de coordonnées $x^\mu \to x^\mu + \xi^\mu$, les perturbations du tenseur énergie-impulsion deviennent :

$$\begin{aligned}
&\delta \to \delta + \frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}} T \qquad \bar{v}_i \to \bar{v}_i - \bar{L}_i' \qquad \pi_{ij} \to \pi_{ij} \\
&\delta p \to \delta p + \bar{p}' T \\
&v \to v - L'
\end{aligned} \tag{2.14}$$

On peut remarquer que π_{ij} est invariant de jauge. Nous aurions pu le déduire du lemme de Stewart-Walker ; puisque sa contribution est nulle dans le cas d'un univers non-perturbé. On complète maintenant le jeu de variables indépendantes de jauge nécessaires pour la description du tenseur énergie-impulsion :

$$\begin{aligned}
&\delta^C = \delta + \frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}} (v + B) \qquad \bar{V}_i = \bar{v}_i + \bar{B}_i \qquad \pi_{ij} \\
&\mathrm{p}^C = \frac{\delta p}{\bar{p}} + \frac{\bar{p}'}{\bar{p}} (v + B) \\
&V = v + E'
\end{aligned} \tag{2.15}$$

L'exposant C indique que les variables indépendantes de jauge δ^C et p^C correspondent au contraste de densité et au contraste de pression lorsque l'on se place dans la jauge comobile (voir partie 2.1.5). Ainsi, dans la jauge comobile, δ^C correspond au contraste de densité et p^C à la perturbation de pression.

On sera également amenés, dans les parties 2.2.1 et 2.2.2 à utiliser d'autres variables indépendantes de jauge, qui correspondent aux variables habituelles losqu'on se place dans la jauge newtonienne :

$$\delta^N = \frac{\delta\rho}{\bar{\rho}} + \frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}}\left(B - E'\right) = \delta^C - \frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}}V \quad \text{et} \quad \mathrm{p}^N = \mathrm{p}^C - \frac{\bar{p}'}{\bar{p}}V \tag{2.16}$$

Les variables indépendantes de jauge pour les perturbations du tenseur énergie-impulsion sont résumées dans la table 2.4.

Scalaires	Vecteurs	Tenseurs
δ^C, δ^N	$\bar{\pi}_i$	$\bar{\pi}_{ij}$
$\mathrm{p}^C, \mathrm{p}^N$	$\bar{V}_i$	
V		
π		

TABLE 2.4 Perturbations du tenseur énergie-impulsion invariantes de jauge.

2.1.4 Équations d'évolution perturbées

Maintenant que nous avons perturbé le tenseur métrique et le tenseur énergie-impulsion, nous possédons tous les ingrédients nécessaires pour écrire les équations d'évolution perturbées, et ce en fonction uniquement de variables indépendantes de jauge. Ces équations correspondent aux équations d'Einstein, ainsi qu'aux équations de conservation :

$$\delta G_{\mu\nu} = \kappa \delta T_{\mu\nu} \ , \qquad \nabla^\mu \left[\delta T_{\mu\nu}\right] = 0 \tag{2.17}$$

où $\kappa = 8\pi G_N = M_P^{-2}$. De plus, comme les composantes tensorielles, vectorielles et scalaires sont indépendantes à l'ordre linéaire dans les perturbations, nous pouvons les traiter séparément.

Modes tensoriels

D'après (2.7) et (2.14), les composantes tensorielles du tenseur métrique et du tenseur énergie-impulsion sont invariantes de jauge. Les équations d'Einstein invariantes de jauge pour les

composantes tensorielles s'obtiennent donc sans avoir à changer de variables :

$$\bar{E}''_{ij} + 2\mathcal{H}\bar{E}'_{ij} - \Delta\bar{E}_{ij} = \kappa a^2 \bar{p}\bar{\pi}_{ij} \tag{2.18}$$

Il s'agit d'équations analogues aux équations d'évolution des ondes gravitationnelles. Et pour cause, les ondes gravitationnelles correspondent à des perturbations tensorielles de la métrique, mais autour de la métrique de Minkowski et non pas de la métrique FLRW.

Il n'y a pas d'équation de conservation pour les modes tensoriels.

Modes vectoriels

Après quelques transformations pour faire apparaître les variables indépendantes de jauge, on obtient les équations d'Einstein perturbées pour les composantes vectorielles :

$$\Delta\bar{\Phi}_i = -2\kappa a^2 \bar{\rho}\,(1+w)\,\bar{V}_i \tag{2.19}$$

$$\bar{\Phi}'_i + 2\mathcal{H}\bar{\Phi}_i = \kappa a^2 \bar{p}\bar{\pi}_i \tag{2.20}$$

On obtient également l'équation de conservation des modes vectoriels :

$$\bar{V}'_i + \mathcal{H}\left(1 - 3c_s^2\right)\bar{V}_i = -\frac{1}{2}\frac{w}{1+w}\Delta\bar{\pi}_i \tag{2.21}$$

où c_s est la vitesse du son dans le mélange de fluides dont l'Univers est constitué, définie par $c_s^2 = \frac{\bar{p}'}{\bar{\rho}'}$. On note que $\bar{p} = 0$ pour un fluide non-relativiste, ce qui implique que la vitesse du son y est nulle.

Les équations (2.20) et (2.21) indiquent que si l'on s'intéresse à un fluide parfait, c'est-à-dire pour lequel $\bar{\pi}_i$ est nul ou négligeable (ce qui est une très bonne approximation pour la matière non-relativiste),

$$\bar{\Phi}_i \propto a^{-2} \quad \text{et} \quad \bar{V}_i \propto a^{-\left(1-3c_s^2\right)} \tag{2.22}$$

Du fait de leur décroissance avec a, les perturbations vectorielles de la métrique ($\bar{\Phi}_i$) et de la vorticité du fluide ($\bar{V}_i$), s'il est non-relativiste, sont donc effacées par l'expansion de l'Univers. Ces modes ne vont donc pas contribuer à la formation des grandes structures, et par conséquent ne seront plus traités par la suite.

Modes scalaires

Les équations d'Einstein donnent quatre équations d'évolution des perturbations scalaires :

$$\Delta\Psi = \frac{\kappa}{2}a^2\bar{\rho}\delta^C \tag{2.23}$$

$$\Psi - \Phi = \kappa a^2\bar{p}\bar{\pi} \tag{2.24}$$

$$\Psi' + \mathcal{H}\Phi = -\frac{\kappa}{2}a^2\bar{\rho}\left(1+w\right)V \tag{2.25}$$

$$\Psi'' + \mathcal{H}\left(2+3c_s^2\right)\Psi' + \mathcal{H}\Phi' + 3\left(c_s^2 - w\right)\mathcal{H}^2\Phi + \frac{1}{3}\Delta\left(\Phi - \Psi\right) = \frac{1}{2}\kappa a^2\delta p^C \tag{2.26}$$

La première équation est analogue à l'équation de Poisson de la mécanique newtonienne, et sera donc appelée ainsi dans la suite. Néanmoins, contrairement au cadre newtonien, nous avons ici deux potentiels scalaires Ψ et Φ. La deuxième équation indique, toutefois, que pour un fluide parfait ($\bar{\pi} = 0$), ces deux potentiels sont égaux. Les deux autres équations décrivent l'évolution temporelle et spatiale des potentiels Ψ et Φ.

Les équations de conservation pour les modes scalaires aboutissent à un analogue de l'équation de conservation de la matière et à un analogue de l'équation d'Euler :

$$\begin{aligned} & \delta^{C\prime} - 3\mathcal{H}w\delta^C = -\left(1+w\right)\Delta V + 2\mathcal{H}w\Delta\bar{\pi} \\ \text{ou} \quad & \delta^{N\prime} + 3\mathcal{H}\left(\frac{\delta p^N}{\bar{\rho}} - w\delta^N\right) = -\left(1+w\right)\left(\Delta V - 3\Psi'\right) \end{aligned} \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned} & V' + \mathcal{H}V = -\Phi - \frac{\delta p^C}{\bar{\rho}+\bar{p}} - \frac{2}{3}\frac{w}{1+w}\Delta\bar{\pi} \\ \text{ou} \quad & V' + \mathcal{H}\left(1-w\right)V + \frac{w'}{1+w}V = -\Phi - \frac{\delta p^N}{\bar{\rho}+\bar{p}} - \frac{2}{3}\frac{w}{1+w}\Delta\bar{\pi} \end{aligned} \tag{2.28}$$

2.1.5 Le choix de la jauge

Un point important qui n'a pas encore été abordé est le choix de la jauge dans laquelle on va se placer. En effet, si les calculs peuvent s'effectuer dans n'importe quelle jauge à l'aide de variables indépendantes de jauge par exemple, ces dernières n'ont pas, a priori, le sens physique intuitif que l'on pourrait vouloir leur donner. Par exemple, δ^C ne correspond pas au contraste de densité δ en général. Ainsi, lorsqu'on cherche à interpréter les résultats physiquement, il va falloir se placer dans une jauge spécifique où les variables indépendantes de jauge seront en correspondance avec les grandeurs physiques. Nous avons vu précédemment que les perturbations possédent 10 degrés de libertés, dont 6 degrés de liberté physique, et 4 degrés de liberté de jauge. Pour fixer la jauge, il faut donc fixer ces 4 degrés de liberté.

La jauge qui sera présentée ici est la jauge comobile, qui est celle utilisée par le logiciel CAMB [7], qui constituera notre base de départ pour calculer le spectre de puissance du fond diffus

cosmologique (CMB pour Cosmic Microwave Background) dans le cadre du modèle du galileon, comme nous le verrons dans le chapitre 3. Nous allons construire cette jauge en plusieurs étapes, puis nous verrons quelles formes ont les équations dérivées précédemment dans cette jauge.

La décomposition 3+1

Nous allons ici développer brièvement une approche générique dans laquelle l'espace-temps est décomposé en une partie de genre espace et une partie de genre temps, appelée décomposition 3+1 ou formalisme ADM [8]. Cette description nous permettra de définir les conditions dans lesquelles se place la jauge comobile. Pour plus de détails concernant cette approche, voir [9].

On commence par décomposer l'espace-temps $\mathcal{M}$ en une famille d'hypersurfaces de genre espace Σ_τ définies par $\{\tau = cste\}$, où τ est le temps conforme :

$$\mathcal{M} = \biguplus_{\tau} \Sigma_\tau \tag{2.29}$$

On considère le champ de vecteur n_μ de genre temps, orthogonal aux hypersurfaces Σ_τ, unitaire et orienté vers le futur, on a alors :

$$n_\mu = -\alpha \nabla_\mu \tau \quad \text{et} \quad g_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = -1 \tag{2.30}$$

où α est appelé la fonction de laps associée à la famille Σ_τ. Cette décomposition de l'espace-temps est illustrée par la figure 2.2.

Pour un observateur de quadri-vitesse n_μ, les hypersurfaces Σ_τ correspondent localement à l'ensemble des évènements qui apparaissent simultanés. De plus, si t est le temps propre mesuré par cet observateur entre un point de Σ_τ et un point de $\Sigma_{\tau+\delta\tau}$, alors on a la relation $\delta t = \alpha \delta\tau$. On a ainsi fabriqué une foliation de l'espace-temps, où les hypersurfaces sont liées par un filetage défini par le champ de vecteur n_μ, comme illustré par la figure 2.3.

On peut, par ailleurs, définir la métrique induite sur les hypersurfaces Σ_τ, qui est la projection du tenseur métrique sur les hypersurfaces, par :

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu \tag{2.31}$$

Il s'agit bien de la projection sur Σ_τ, car on peut vérifier que :

$$n^\nu h_{\mu\nu} = 0 \quad \text{et} \quad h^\rho_\mu h^\nu_\rho = h^\nu_\mu \tag{2.32}$$

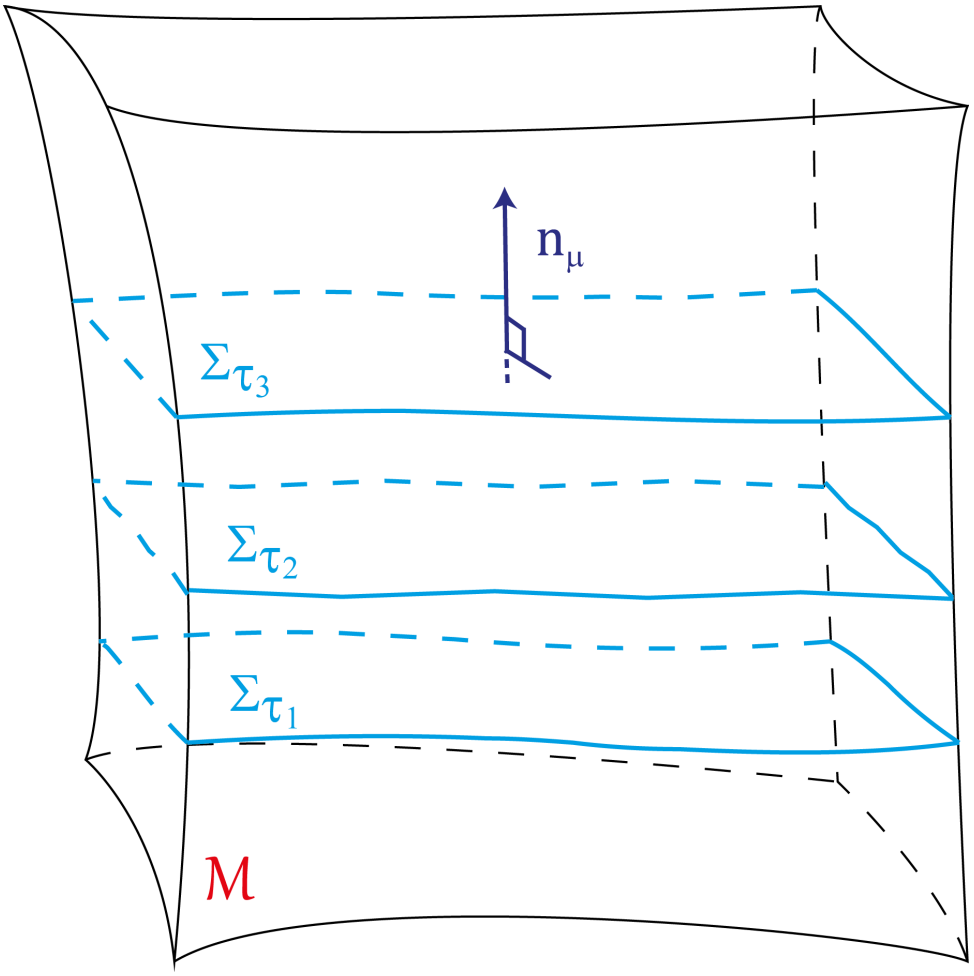

FIGURE 2.2 Décomposition de l'espace-temps $\mathcal{M}$ en une famille d'hypersurfaces de genre espace Σ_τ et d'un champ de vecteur de genre temps n_μ. Notons que pour que cette décomposition soit possible, il faut que l'espace-temps ne soit pas fini, c'est-à-dire hyperbolique ou plat.

On peut alors définir une notion naturelle d'espace et de temps pour l'observateur de quadrivitesse n_μ car la métrique s'écrit comme la somme d'une composante "temporelle" suivant n_μ et d'une composante "spatiale" sur Σ_τ :

$$ds^2 = -\left(n_\mu dx^\mu\right)^2 + h_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{2.33}$$

Cette écriture de la métrique est générique, et nous n'avons pas encore spécifié de système de coordonnées. On peut doter chaque hypersurface d'un système de coordonnées $x^i = \left(x^1, x^2, x^3\right)$. Si ces coordonnées varient continûment d'une hypersurface aux hypersurfaces voisines, on peut définir le système de coordonnées $\left(\tau, x^1, x^2, x^3\right)$ sur $\mathcal{M}$. Si on appelle $(e^\mu_\tau, e^\mu_1, e^\mu_2, e^\mu_3)$ la base canonique associée à ce système de coordonnées, alors :

$$e^\mu_\tau \nabla_\mu \tau = 1 \tag{2.34}$$

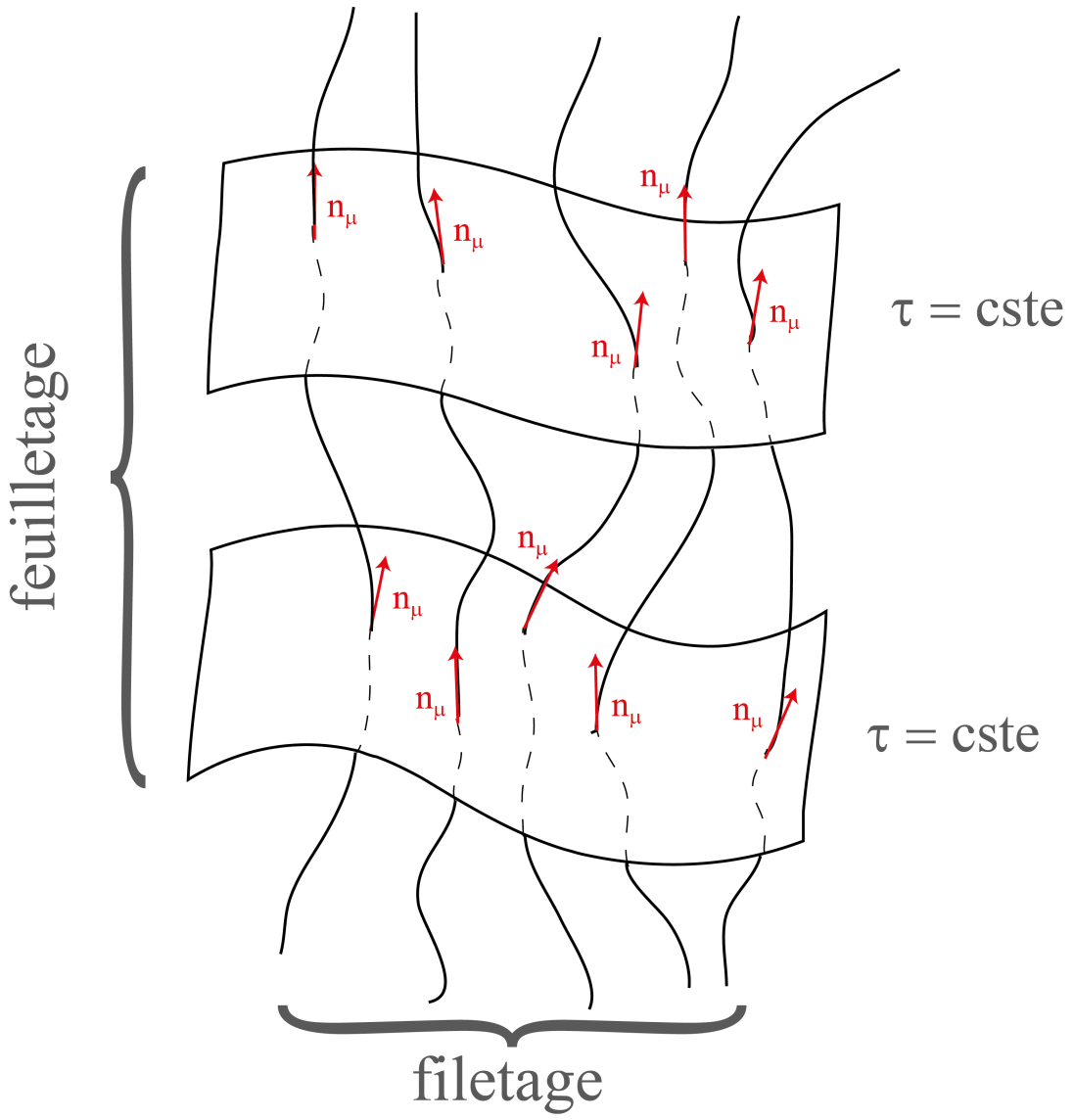

FIGURE 2.3 Représentation du feuilletage et du filetage, donc de la foliation, de l'espace-temps.

Le vecteur e^μ_τ se décompose alors comme :

$$e^\mu_\tau = \alpha n^\mu + \beta^\mu \tag{2.35}$$

où $\beta^\nu = h^\nu_\mu e^\mu_\tau \in \Sigma_\tau$ est appelé le vecteur de décalage ou shift. Le shift indique comment est transporté le système de coordonnées entre Σ_τ et $\Sigma_{\tau+\delta\tau}$. Un décalage peut apparaître du fait du choix des systèmes de coordonnées x^i. $\beta^\mu \neq 0$ lorsque les lignes $\{x^i = cste\}$ ne sont pas perpendiculaires aux hypersurfaces.

Avec ce choix de coordonnées et la paramétrisation en fonction du laps et du shift, on obtient

les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} n_\mu &= (-\alpha, 0) \\ n^\mu &= g^{\mu\nu} n_\nu = \left(\frac{1}{\alpha}, -\frac{\beta^i}{\alpha}\right) \\ \beta^\mu &= \left(0, \beta^i\right) \end{aligned} \tag{2.36}$$

On peut alors exprimer les 10 composantes de la métrique en fonction du laps α, du vecteur de shift β^i et de la métrique spatiale h_{ij} :

$$ds^2 = -\left(\alpha^2 + \beta_i\beta^i\right) d\tau^2 + 2\beta_i dx^i d\tau + h_{ij} dx^i dx^j \tag{2.37}$$

On constate alors que la perturbation B_i introduite dans l'équation (2.2) de la partie 2.1.1 est analogue à β_i et peut s'interpréter comme un shift.

La description de l'espace-temps que nous venons de décrire est générique, et nous n'avons pas, jusqu'à maintenant, choisi de jauge. Dans ce formalisme, le choix de la jauge se fait par le choix du champ de vecteur de genre temps n_μ et du choix d'une hypersurface initiale de genre espace $\Sigma_{\tau_{ini}}$.

La jauge comobile

La jauge comobile, comme son nom l'indique, suit le mouvement d'ensemble de la matière, ou d'un certain fluide. Dans notre cas, nous allons suivre le fluide de matière noire. Pour construire la jauge comobile, on impose deux conditions sur la foliation précédemment effectuée.

Premièrement, on va chercher à s'assurer que les hypersurfaces de temps constant Σ_τ, sont orthogonales à la quadri-vitesse u_μ du fluide considéré, c'est-à-dire associer le champ de vecteur n_μ à la quadri-vitesse du fluide. Il se trouve que cette condition revient à imposer que la perturbation de vitesse du fluide compense le décalage introduit par B_i [9] :

$$u_\mu \perp \Sigma_\tau \Leftrightarrow v_i + B_i = 0 \tag{2.38}$$

Il est important de noter que cette condition ne peut pas toujours être remplie. En effet, bien qu'il soit toujours possible de remplir cette condition pour les modes scalaires v et B, ce n'est pas le cas concernant la partie vectorielle. Il peut exister des boucles de courant qui ne peuvent être supprimées par changement de coordonnées. Mais, comme nous négligeons les modes

vectoriels, il nous sera toujours possible de remplir la condition (2.38) qui devient alors :

$$v + B = 0 \tag{2.39}$$

Deuxièmement, on veut que le filetage corresponde à des lignes d'univers, c'est-à-dire aux trajectoires d'espace-temps, du fluide considéré, ici la matière noire. Ainsi, il s'agit de se placer dans un référentiel où les perturbations de vitesse du fluide sont nulles :

$$v = 0 \quad \text{(pour les modes scalaires)} \tag{2.40}$$

La jauge comobile est donc obtenue en imposant la condition $v = B = 0$. Les lignes d'univers du fluide ne sont, en général, pas des géodésiques, puisque le gradient de pression fait dévier le fluide de sa trajectoire de chute libre. Mais, dans le cas du fluide de matière noire, ces lignes d'univers sont effectivement des géodésiques (car $\bar{p} = 0$ pour la matière noire froide).

Il est intéressant de remarquer que dans cette jauge, la variable δ^C correspond directement à la perturbation de densité δ, ce qui implique que l'équation (2.23), s'interprète véritablement comme l'équation de Poisson, qui a la même forme que dans le cadre newtonien.

En se reportant aux transformations (2.7) et (2.14), on voit que l'on passe d'une jauge quelconque à la jauge comobile par une transformation vérifiant :

$$L' = v \quad \text{et} \quad T = v + B \tag{2.41}$$

On remarque alors que la jauge n'est pas totalement fixée. En effet, seul L' est déterminé dans la jauge comobile, pas L. Il est alors possible d'effectuer des changements de variables indépendants du temps sur les coordonnées spatiales tout en restant dans la jauge comobile, ce qui revient simplement à reparamétrer les lignes d'univers sans changer la foliation.

Lien avec la jauge synchrone

Nous allons maintenant nous intéresser à une autre jauge, la jauge synchrone, qui va nous apporter quelques interprétations physiques intuitives et intéressantes concernant la jauge comobile.

La jauge synchrone est définie en imposant :

$$A = 0 \,, \quad B_i = 0 \tag{2.42}$$

Ces conditions impliquent que seules les sections spatiales de la métrique (2.2) sont perturbées (ce qui explique d'où la jauge tire son nom) :

$$ds^2 = a^2(\tau)\left\{-d\tau^2 + \left[\gamma_{ij} + h^S_{ij} + 2\bar{E}_{ij}\right] dx^i dx^j\right\} \tag{2.43}$$

où on a défini $h^S_{ij} = 2C\gamma_{ij} + 2\nabla_i\nabla_j E$, qui correspond aux perturbations scalaires restantes de la métrique, et où on a négligé les perturbations vectorielles. L'exposant S indique qu'on se place dans la jauge synchrone.

Pour un observateur qui suit les lignes de coordonnées spatiales constantes $\{x^i = cste\}$, le temps propre correspond au temps cosmique t tel que $dt = ad\tau$. De plus, on peut montrer que les lignes $\{x^i = cste\}$ sont des géodésiques [3]. Il s'agit donc d'un système de coordonnées dans lequel chaque point correspond à un observateur en chute libre.

On passe d'une jauge quelconque à la jauge synchrone en effectuant une transformation vérifiant :

$$L' = T - B \quad \text{et} \quad T' + \mathcal{H} = -A \tag{2.44}$$

On voit que, de la même manière que pour la jauge comobile, cette jauge n'est pas entièrement fixée puisque seul L' est fixé, pas L. La jauge possède donc une liberté sur la paramétrisation du filetage. Néanmoins, T n'est pas déterminé totalement non plus, puisqu'il subsiste une liberté sur la valeur de la constante d'intégration de l'équation $T' + \mathcal{H} = -A$. Il existe donc un arbitraire lié au choix de l'origine du temps propre de chaque observateur.

Pour construire le système de coordonnées de la jauge synchrone, on commence par choisir une hypersurface initiale de genre espace (le choix est libre d'après la liberté sur T), on choisit ensuite un ensemble d'observateurs dont la quadri-vitesse est orthogonale à l'hypersurface. Il faut ensuite synchroniser les horloges des observateurs, puis les laisser en chute libre. Les lignes d'univers de ces observateurs correspondent aux lignes $\{x^i = cste\}$, et leur horloge indique la coordonnée temporelle.

On peut alors remarquer que, dans le cas où l'on suit le fluide de matière noire, les lignes d'univers du fluide sont des géodésiques, auquel cas la jauge synchrone et la jauge comobile sont identiques.

Les équations d'évolution

Puisque la jauge comobile liée au fluide de matière noire est équivalente à la jauge synchrone, nous pouvons utiliser les équations d'évolution exprimées dans cette dernière. En effet, le logiciel CAMB que nous utiliserons dans la suite exprime ces équations dans la formalisme de la jauge synchrone, tout en se plaçant dans la jauge comobile.

Il est d'usage d'introduire les notations suivantes pour les perturbations de métrique scalaires résiduelles [10] :

$$h^S = 6C + 2\Delta E \ , \quad \eta^S = -C \quad \text{et} \quad \mu^S = 2E \tag{2.45}$$

Ainsi, on peut réécrire les perturbations scalaires de la métrique comme :

$$h^S_{ij} = \tfrac{1}{3} h^S \gamma_{ij} + \left(\nabla_i \nabla_j - \tfrac{1}{3}\gamma_{ij}\Delta\right)\mu^S \tag{2.46}$$

$$= -2\eta^S \gamma_{ij} + \nabla_i \nabla_j \mu^S \tag{2.47}$$

Les équations d'évolution sont usuellement exprimées en fonction du couple de variables $\left(h^S, \eta^S\right)$. Pour cela on va exprimer μ^S en fonction de ces deux variables en utilisant la relation $\eta^S = \frac{1}{6}\left(-h^S + \Delta\mu^S\right)$. Malheureusement, cette relation ne s'inverse pas facilement dans l'espace réel, il faut donc se placer dans l'espace de Fourier en décomposant les perturbations selon :

$$\eta^S(\tau, \vec{x}) = \sum_k \eta^S_{\vec{k}}(\tau)\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tag{2.48}$$

$$h^S(\tau, \vec{x}) = \sum_k h^S_{\vec{k}}(\tau)\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tag{2.49}$$

$$\mu^S(\tau, \vec{x}) = \sum_k \frac{\mu^S_{\vec{k}}(\tau)}{k^2} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \tag{2.50}$$

Avec ces décompositions, $\eta^S_{\vec{k}} = -\frac{1}{6}\left(h^S_{\vec{k}} + \mu^S_{\vec{k}}\right)$ et les perturbations scalaires se réécrivent :

$$h^S_{ij} = \int d^3 e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \left[\hat{k}_i \hat{k}_j h^S_{\vec{k}}(\tau) + 6\left(\hat{k}_i\hat{k}_j - \frac{1}{3}\gamma_{ij}\right)\eta^S_{\vec{k}}(\tau)\right] \tag{2.51}$$

où $\hat{k}_i = \frac{k_i}{k}$. Dans la suite, dès lors que nous utiliserons les variables h^S et η^S, nous nous placerons implicitement dans l'espace de Fourier, et donc nous ne préciserons plus en indice leur dépendance en $\vec{k}$. Les équations d'Einstein écrites dans la jauge synchrone dans l'espace de Fourier sont alors :

$$k^2\eta^S - \frac{1}{2}\mathcal{H}h^{S\prime} = -\frac{\bar{\rho}}{2}\kappa a^2 \delta^C \tag{2.52}$$

$$k\eta^{S\prime} = \frac{1}{2}\kappa\left(\bar{\rho} + \bar{p}\right)V \tag{2.53}$$

$$h^{S\prime\prime} + 2\mathcal{H}h^{S\prime} - 2k^2\eta^S = -3\bar{p}\kappa a^2 \mathrm{p}^C \tag{2.54}$$

$$h^{S\prime\prime} + 6\eta^{S\prime\prime} + 2\mathcal{H}h^{S\prime} + 12\mathcal{H}\eta^{S\prime} - 2k^2\eta^S = -2\bar{p}\kappa a^2 \pi \tag{2.55}$$

De même, les équations de conservation (2.27) et (2.28) s'écrivent :

$$\bar{\rho}\delta^{C\prime} = -3\mathcal{H}\left(\bar{\rho}\delta^{C} + \bar{p}\mathrm{p}^{C}\right) - \left(\bar{\rho}+\bar{p}\right)\left(\frac{1}{2}h^{S\prime} + kV\right) \tag{2.56}$$

$$\left(\bar{\rho}+\bar{p}\right)V' = -\left(\bar{\rho}+\bar{p}\right)'V - 4\mathcal{H}\left(\bar{\rho}+\bar{p}\right)V + k\bar{p}\mathrm{p}^{C} - \frac{2}{3}k\bar{p}\pi \tag{2.57}$$

Ce sont ces équations qui seront effectivement résolues par le logiciel CAMB pour obtenir l'évolution des perturbations. Elles seront également utilisées dans le chapitre 3.

2.2 Le fond diffus cosmologique

Prédit à la fin des années 1940 et détecté en 1964 par Arno Allan Penwias et Robert Woodrow Wilson [11], ce qui leur a valu le Prix Nobel en 1978, le fond diffus cosmologique est sans doute l'observable la mieux mesurée de la cosmologie actuelle, et donc la plus à même de nous informer sur la nature de notre Univers. Le cadre théorique de l'étude des perturbations cosmologiques développé en 2.1 est particulièrement adapté à l'étude des anisotropies du CMB. En effet, bien qu'il apparaisse au premier abord comme étant un spectre de corps noir parfaitement homogène quelle que soit la direction dans laquelle on l'observe, le CMB présente en fait des anisotropies de température de l'ordre de $\frac{\Delta T}{T} \approx 10^{-5}$ [12].

Nous allons commencer par exposer une version simplifiée du calcul des fluctuations de température, qui nous apportera une vision qualitative relativement précise des phénomènes physiques en jeu dans le CMB. La description détaillée en sera faite dans la partie 2.2.4.

2.2.1 La formule de Sachs-Wolfe

Les photons du CMB sont les plus anciens à nous parvenir. Ils ont été émis lorsque les électrons et les nucléons, précédemment à l'état de plasma fortement couplé aux photons, se sont combinés pour former des atomes (d'hydrogène et d'hélium principalement) peu couplés aux photons qui peuvent alors se propager jusqu'à nous. Pendant ce temps, la matière noire continue à s'effondrer sous l'influence de la gravitation, et à former les surdensités qui constituent les germes des grandes structures de l'Univers. Cette phase s'appelle la recombinaison et est représentée sur la figure 2.4.

Pour décrire le CMB, on peut commencer par étudier la propagation d'un photon dans un espace-temps perturbé dont la métrique est donnée par (2.2), avant de s'intéresser à ses interactions avec le fluide de baryons. La trajectoire du photon est une ligne d'univers et sa

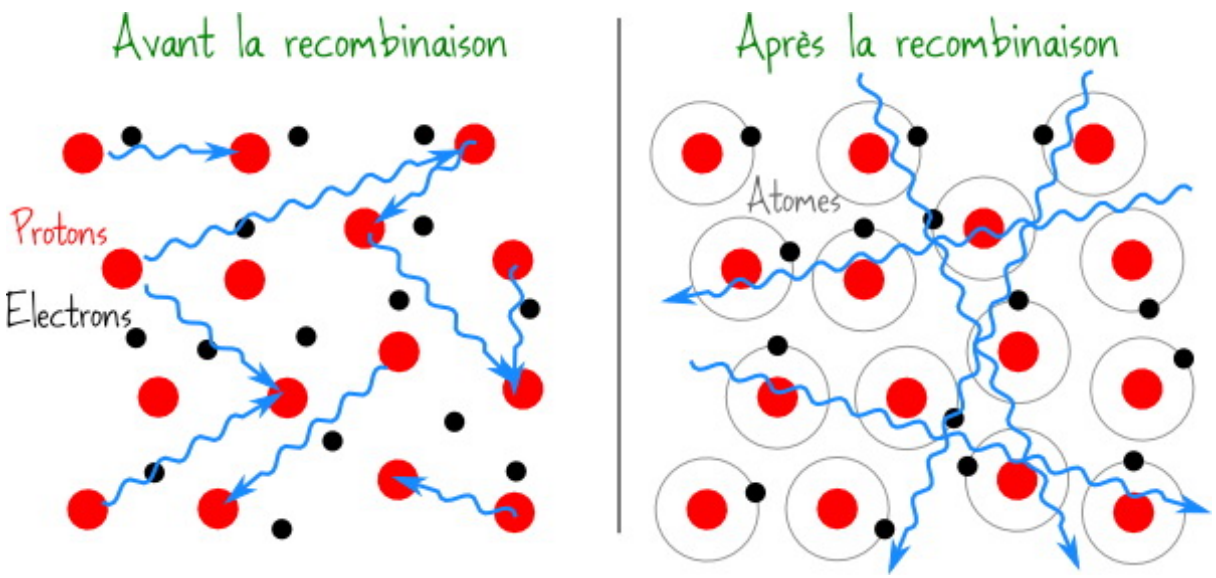

FIGURE 2.4 (gauche) Avant la recombinaison, les baryons (ici des protons) et les électrons sont à l'état de plasma en forte interaction avec le bain de photons. Le libre parcours moyen de ces derniers est donc très faible. (droite) Après la recombinaison, les nucléons et les électrons se sont combinés pour former des atomes neutres, qui ne réagissent que très peu avec les photons environnants. Ces derniers peuvent donc se propager et arriver jusqu'à nous.

quadri-impulsion k^μ, tangente à la trajectoire, vérifie :

$$g_{\mu\nu}k^\mu k^\nu = 0 \quad \text{et} \quad k^\mu \nabla_\mu k^\nu = 0 \tag{2.58}$$

On perturbe k^μ de manière générale en introduisant de nouvelles perturbations :

$$k^\mu = \frac{E_\gamma}{a^2}\left(1 + M, e^i + \delta e^i\right) \tag{2.59}$$

où E_γ est l'énergie du photon, M est la perturbation de la partie temporelle de k^μ, e^i sa direction spatiale, et δe^i la perturbation de cette dernière.

En première approximation, les photons suivent des géodésiques nulles (de genre lumière). En pratique cette hypothèse n'est pas vérifiée car les photons subissent des interactions, mais est suffisante pour avoir une description qualitative de la physique du CMB. On peut alors utiliser l'équation des géodésiques pour décrire l'évolution de la perturbation d'énergie du photon :

$$\frac{d\delta k^\nu}{ds} = -\delta\Gamma^\nu_{\mu\rho}k^\mu k^\rho \quad \Rightarrow \quad \frac{dM}{ds} = -A' - 2\partial_i A e^i - \frac{1}{2}h'_{ij}e^i e^j + \partial_i B_j e^i e^j \tag{2.60}$$

Or l'énergie du photon mesurée dans une direction $\vec{e}$ par un observateur de quadri-vitesse u_μ est donnée par :

$$E_\gamma = -k^\mu u_\mu \tag{2.61}$$

On peut alors relier l'énergie mesurée d'un photon (désignée par un exposant 0) à l'énergie qu'avait ce photon lorsqu'il a été émis (désignée par un exposant E) :

$$\frac{E_\gamma\left(x^0,\tau^0,\vec{e}\right)}{E_\gamma\left(x^E,\tau^E\right)}=\frac{T\left(x^0,\tau^0,\vec{e}\right)}{T\left(x^E,\tau^E\right)}=\frac{\left(k^\mu u_\mu\right)^0}{\left(k^\mu u_\mu\right)^E} \tag{2.62}$$

Les points d'émission et d'absorption sont sur la même ligne de visée caractérisée par la direction $\vec{e}$. Ils sont donc reliés par $x^E = x^0 + \left(\tau^0 - \tau^E\right)\vec{e}$, où τ est le temps conforme. Cela revient à évaluer toutes les grandeurs le long de la trajectoire non perturbée. Si l'on insère ici les expressions (2.59) et (2.11), et en se limitant au premier ordre, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{T\left(x^0,\tau^0,\vec{e}\right)}{T\left(x^E,\tau^E\right)} &= \frac{a\left(\tau^E\right)}{a\left(\tau^0\right)}\{1+\left[M+A-e^i\left(v_{bi}+B_i\right)\right]^0-\left[M+A-e^i\left(v_{bi}+B_i\right)\right]^E\}\\ &= \frac{a\left(\tau^E\right)}{a\left(\tau^0\right)}\{1+\left[M+A-e^i\left(v_{bi}+B_i\right)\right]_E^0\}\end{aligned} \tag{2.63}$$

où v_{bi} est le champ de vitesse du fluide de baryons. Nous sommes ici intéressés par l'étude des perturbations, nous allons donc décomposer les deux températures selon :

$$T\left(x^E,\tau^E\right)=\bar{T}\left(\tau^E\right)\left(1+\Theta\left(x^E,\tau^E\right)\right) \quad \text{et} \quad T\left(x^0,\tau^0,\vec{e}\right)=\bar{T}\left(\tau^0\right)\left(1+\Theta\left(x^0,\tau^0,\vec{e}\right)\right) \tag{2.64}$$

où $\bar{T}$ est la température moyenne et Θ est le contraste de température. On déduit alors de (2.63) que le contraste de température observé dans la direction $\vec{e}$ est donné par :

$$\Theta\left(x^0,\tau^0,\vec{e}\right)=\Theta\left(x^E,\tau^E\right)+\left[M+A-e^i\left(v_{bi}+B_i\right)\right]_E^0 \tag{2.65}$$

Il faut maintenant évaluer les contributions venant des deux termes du membre de droite de (2.65). On peut utiliser la loi de Stefan-Boltzmann [13] développée au premier ordre dans les perturbations pour déterminer le premier :

$$\rho_\gamma=\sigma T^4 \quad \Rightarrow \quad \Theta\left(x^E,\tau^E\right)=\frac{1}{4}\delta_\gamma\left(x^E,\tau^E\right) \tag{2.66}$$

On peut exprimer une partie du second terme en intégrant (2.60) le long de la trajectoire du photon :

$$[M]_E^0=-2\,[A]_E^0+\int_E^0\left(A'-\frac{1}{2}h'_{ij}e^ie^j+\partial_iB_je^ie^j\right)ds \tag{2.67}$$

Il suit, en utilisant la décomposition (2.5), que le contraste de température observé est donné par :

$$\begin{aligned}\Theta\left(x^0,\bar{\tau}^0,\vec{e}\right) = &\left[\frac{1}{4}\delta_\gamma + A + e^i\left(v_{bi}+B_i\right)\right]\left(x^E,\tau^E\right)\\ &+\int_E^0\left[A'-C'-e^ie^j\left(\partial_i\partial_jE'+\partial_i\bar{E}'_j-\partial_iB_j+\bar{E}'_{ij}\right)\right]ds\\ &-\left[A+e^i\left(v_{bi}+B_i\right)\right]^0\end{aligned} \tag{2.68}$$

Le dernier terme de cette expression dépend du point d'observation et n'est pas mesurable, il sera donc omis par la suite. Il ne nous reste donc qu'à exprimer le contraste de température en fonction des variables indépendantes de jauge (2.8) et (2.15) pour obtenir l'équation connue sous le nom d'équation de Sachs-Wolfe [14] :

$$\begin{aligned}\Theta\left(x^0,\bar{\tau}^0,\vec{e}\right) = &\left[\frac{1}{4}\delta_\gamma^N + \Phi + e^i\left(V_{bi}+\bar{\Phi}_i\right)\right]\left(x^E,\tau^E\right)\\ &+\int_E^0\left(\Phi'+\Psi'\right)d\tau+\int_E^0 e^i\bar{\Phi}'_id\tau-\int_E^0 e^ie^j\bar{E}'_{ij}d\tau\end{aligned} \tag{2.69}$$

Cette expression peut se décomposer en une somme de trois termes :

$$\Theta_{SW} = \left[\frac{1}{4}\delta_\gamma^N + \Phi\right]\left(x^E,\tau^E\right) \tag{2.70}$$

$$\Theta_{dop} = \left[e^i\left(V_{bi}+\bar{\Phi}_i\right)\right]\left(x^E,\tau^E\right) \tag{2.71}$$

$$\Theta_{ISW} = \int_E^0\left[\Phi'+\Psi'+e^i\bar{\Phi}'_i-e^ie^j\bar{E}'_{ij}\right]d\tau \tag{2.72}$$

Le terme Θ_{SW}, appelé terme de Sachs-Wolfe propre, est évalué à l'émission des photons. Il nous renseigne donc sur le contraste de température déjà présent à cette époque, et résume deux contributions. Premièrement, celle du contraste de densité des photons, car les zones les plus denses sont plus chaudes selon la loi de Stefan-Boltzmann. La deuxième est celle du potentiel gravitationnel, car un photon émis dans un puit de potentiel possède un décalage spectral supplémentaire et est donc plus froid, c'est l'effet Einstein.

Le terme Θ_{dop} tient compte de l'effet Doppler qui traduit l'existence d'un décalage spectral dû à une différence de vitesse entre émetteur et récepteur.

Enfin, le dernier terme Θ_{ISW}, appelé effet Sachs-Wolfe Intégré (ou ISW pour Integrated Sachs-Wolfe) dépend de l'histoire du photon entre son émission et sa réception. En effet, il s'agit d'intégrer la dérivée temporelle des potentiels gravitationnels sur la trajectoire des photons depuis leur émission. Ainsi, tous les phénomènes qui entraînent une variation temporelle des potentiels gravitationnels vont contribuer à cet effet. Dans notre Univers, ces contributions proviennent principalement de deux sources : les grandes structures traversées par les photons et

la présence d'une constante cosmologique ou de tout autre ingrédient entraînant une accélération de l'expansion de l'univers. Ainsi, on peut d'ores et déjà anticiper le fait que cet effet sera primordial dans l'étude de modèles d'énergie noire au-delà du modèle ΛCDM.

2.2.2 Interaction entre baryons et photons

Afin de pouvoir exploiter (2.69) pour décrire le contraste de température, on va chercher à calculer l'évolution de δ_γ, V_b, Φ, Ψ et $\bar{E}_{ij}$. Il faut alors décrire l'interaction entre le fluide de baryons et les photons. Pour simplifier les équations et leurs résolutions, et sachant que, comme indiqué à la fin de la section 2.1.5, l'évolution des perturbations seront toutes calculées dans l'espace de Fourier, nous allons nous placer ici dans cet espace.

Le couplage entre les photons et les baryons se fait par la diffusion Thomson représentée schématiquement dans la figure 2.5, au cours de laquelle va s'opérer un transfert d'impulsion.

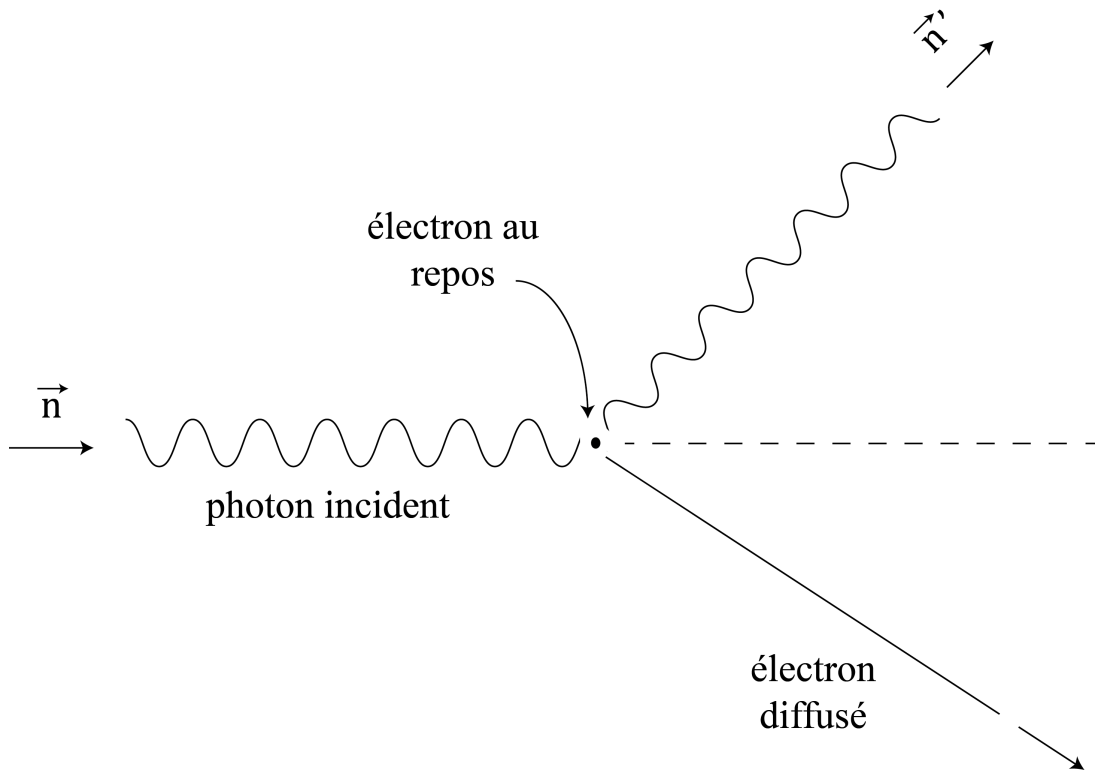

FIGURE 2.5 Illustration schématique d'une réaction de diffusion Thomson d'un photon incident sur un électron au repos.

Il faut donc prendre en compte ce transfert d'impulsion, en ajoutant un terme faisant intervenir la vitesse des photons dans le plasma. Si l'on écrit les deux équations de conservation (2.27) et (2.28) pour le fluide de baryons dans l'espace de Fourier, avec ce terme tenant compte de la

diffusion Thomson, on obtient :

$$\delta_b^{N\prime} = k^2 V_b + 3\Psi' \tag{2.73}$$

$$V_b' = -\mathcal{H} V_b - \Phi + \frac{\tau'}{R}\left(V_\gamma - V_b\right) \tag{2.74}$$

où on a défini $\tau' = a n_e \sigma_T$, avec n_e la densité d'électrons dans le plasma et σ_T la section efficace de diffusion Thomson, et $R = \frac{3\rho_b}{4\rho_\gamma}$ avec ρ_b la densité d'énergie des baryons et ρ_γ celle des photons.

Pour les photons, nous allons ici adopter une approche en terme de fluide, sachant qu'il faut en toute rigueur adopter une description cinétique qui sera abordée dans la partie 2.2.4. Il s'agit donc de dire que le fluide de photons vérifie les équations (2.27) et (2.28). Il faut à cela rajouter la contribution due à la diffusion Thomson (qui fera ici intervenir la vitesse du fluide de baryons). Nous allons par ailleurs nous autoriser un raffinement supplémentaire dont l'origine sera claire lorsque nous adopterons l'approche cinétique, en ajoutant un terme de pression anisotrope. On obtient alors les équations suivantes, toujours dans l'espace de Fourier :

$$\delta_\gamma^{N\prime} = \frac{4}{3} k^2 V_\gamma + 4\Psi' \tag{2.75}$$

$$V_\gamma' = -\frac{1}{4}\delta_\gamma^N - \Phi + \frac{1}{6} k^2 \pi_\gamma + \tau'\left(V_b - V_\gamma\right) \tag{2.76}$$

où on admet que le terme de pression anisotrope des photons π_γ est relié à la vitesse de la radiation par $\frac{k^2}{12}\pi_\gamma = -\frac{8k^2}{45\tau'} V_\gamma$ [15]. En résolvant ces équations dans certains cas particuliers, on pourra obtenir l'évolution de certaines des grandeurs intéressantes précédemment citées pour ensuite pouvoir décrire le contraste de température.

Il faut noter cependant que ces équations dépendent de k, et en particulier lorsque l'échelle est plus grande que le libre parcours moyen des photons, il n'y a pas d'interaction entre ces derniers et les baryons.

Hypothèse de couplage fort

On commence par s'intéresser aux échelles telles que $\mathcal{H} \ll k \ll \tau'$, c'est-à-dire grandes devant le libre parcours moyen des photons. Sous cette hypothèse, les deux fluides sont liés par :

$$V_b = V_\gamma \quad \text{et} \quad \delta_\gamma^{N\prime} - \frac{4}{3}\delta_b^{N\prime} = 0 \tag{2.77}$$

En utilisant les équations des fluides de baryons et de photons (2.73) à (2.76) ainsi que la condition (2.77), on obtient alors l'équation d'évolution du contraste de densité des photons :

$$\delta_\gamma^{N\prime\prime} + \frac{R'}{1+R}\delta_\gamma^{N\prime} + k^2 c_s^2 \delta_\gamma^N = 4\left[\Psi'' + \frac{R'}{1+R}\Psi - \frac{1}{3}k^2\Phi\right] \equiv 4F\left(\Phi,\Psi\right) \tag{2.78}$$

où c_s est la vitesse du son dans le plasma de baryons et de photons. Il s'agit de l'équation d'évolution d'un oscillateur forcé amorti. Le contraste de densité oscille du fait des effets opposés de l'effondrement gravitationnel et de la pression de radiation. La fréquence de ces oscillations est $\omega_s = kc_s$. La solution générale est donnée par :

$$\begin{aligned}\left[1+R\left(\tau\right)\right]^{\frac{1}{4}}\delta_\gamma^N &= \delta_\gamma\left(0\right)\cos\left[kr_s\left(\tau\right)\right] + \frac{\sqrt{3}}{k}\left[\delta_\gamma'\left(0\right) + \frac{1}{4}R'\left(0\right)\delta_\gamma\left(0\right)\right]\sin\left[kr_s\left(\tau\right)\right] \\ &+ 4\frac{\sqrt{3}}{k}\int_0^\tau \left[1+R\left(\tau^*\right)\right]^{\frac{3}{4}}\sin\left[kr_s\left(\tau\right) - kr_s\left(\tau^*\right)\right]F\left(\tau^*\right)d\tau^*\end{aligned} \tag{2.79}$$

où τ est le temps conforme et r_s est l'horizon sonique définit par $r_s\left(\tau\right) = \int_0^\tau c_s d\tau^*$.

Ces oscillations correspondent à des ondes sonores qui se propagent à la célérité c_s. Comme $\Theta_{SW} = \frac{1}{4}\delta_\gamma^N + \Phi$, le terme Sachs-Wolfe va également subir des oscillations au cours du temps. Leur amplitude décroît comme $\left[1+R\left(\tau\right)\right]^{-\frac{1}{4}}$. De plus, en utilisant l'équation de continuité des photons (2.75), on observe que :

$$\frac{k^2}{3}V_\gamma = \Theta_{SW}' - \left(\Psi+\Phi\right)' \tag{2.80}$$

Donc si les potentiels gravitationnels sont constants, ce qui est une bonne approximation durant l'ère de matière (durant laquelle la recombinaison a lieu), le terme $\frac{k^2}{3}V_\gamma$ sera en quadrature de phase avec Θ_{SW}, avec une amplitude réduite. De plus, comme la direction des baryons est aléatoire, on peut estimer que le terme Doppler sera donné par $\Theta_{dop} \approx \frac{kV_\gamma}{\sqrt{3}}$. Les termes Sachs-Wolfe et Doppler sont donc en quadrature de phase, ce qui va avoir pour influence d'atténuer les oscillations du contraste de température.

Petites échelles

Pour des échelles suffisamment petites, telles que $k \gtrsim \tau'$, le libre parcours moyen des photons devient alors du même ordre de grandeur que la longueur d'onde des perturbations et il faut aller au-delà de l'hypothèse de couplage fort. Dans le cadre d'une analyse qualitative telle que celle-ci, on peut procéder à quelques approximations. Tout d'abord, comme nous l'avons déjà dit dans la section 2.1.2, les jauges sont identiques à cette échelle. Il est donc raisonnable de négliger leurs différences et de ne plus faire de distinction dans ce cas. De plus, du fait de la petite taille des échelles en question, le temps caractéristique de leurs oscillations est très faible

comparé au temps de Hubble, on peut alors négliger les effets de l'expansion et considérer R constant. On admettra enfin que, ces modes étant devenus plus petits que le rayon de Hubble il y a très longtemps dans l'ère de radiation, les potentiels gravitationnels ont fortement diminué et sont devenus négligeables [16]. Les équations d'Euler deviennent alors :

$$V_\gamma' = -\frac{1}{4}\delta_\gamma + \frac{1}{6}k^2\pi_\gamma - \tau'\left(V_\gamma - V_b\right) \tag{2.81}$$

$$V_b' = \frac{\tau'}{R}\left(V_\gamma - V_b\right) \tag{2.82}$$

En combinant ces équations, et en utilisant l'équation de continuité pour la radiation, on obtient l'équation d'évolution du contraste de densité de la radiation :

$$\delta_\gamma'' + \frac{k^2 c_s^2}{\tau'}\left[\frac{16}{15} + \frac{R^2}{R+1}\right]\delta_\gamma' + k^2 c_s^2 \delta_\gamma = 0 \tag{2.83}$$

La solution de cette équation est proportionnelle à :

$$\delta_\gamma \propto \exp\left(-\frac{k^2}{k_D^2}\right)\exp\left(\pm ikr_s\right) \tag{2.84}$$

où k_D est une longueur caractéristique, qui dépend de R mais qui varie très peu entre $R = 0$ et $R \to \infty$. Les oscillations sont donc amorties et le spectre subit une décroissance exponentielle qui va fixer la résolution angulaire maximale des observations. Pour $\ell \gtrsim 2200$, le spectre est totalement atténué. Cet effet est appelé l'amortissement Silk [17].

2.2.3 Le spectre de puissance angulaire des anisotropies

L'équation de Sachs-Wolfe (2.69) relie le contraste de température observée aux perturbations cosmologiques. Comme $\Theta\left(x^0, \tau^0, \vec{e}\right)$ est une variable stochastique, on peut l'étudier en utilisant des outils statistiques. L'observable qui va nous intéresser est la fonction de corrélation à deux points :

$$C\left(\alpha\right) = \langle\Theta\left(x^0, \tau^0, \vec{e_1}\right)\Theta\left(x^0, \tau^0, \vec{e_2}\right)\rangle \tag{2.85}$$

où α est l'angle entre les directions $\vec{e_1}$ et $\vec{e_1}$. L'hypothèse d'isotropie statistique de l'Univers entraîne que cette fonction de corrélation ne dépend que de l'angle relatif entre les directions $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$. On peut alors développer la fonction de corrélation sur une base de polynômes de Legendre P_ℓ [18] suivant :

$$C\left(\alpha\right) = \sum_\ell \frac{2\ell+1}{4\pi} C_\ell P_\ell\left(\cos\left(\alpha\right)\right) \tag{2.86}$$

où les C_ℓ sont les coefficients de la décomposition. Un multipôle ℓ correspond à une échelle angulaire $\frac{\pi}{\alpha}$ et les C_ℓ mesurent la variance des fluctuations de température à cette échelle.

Si le contraste de température est un champ gaussien, la fonction de corrélation caractérise complètement la distribution de température.

Par ailleurs, comme le contraste de température $\Theta\left(x^0, \tau^0, \vec{e}\right)$ ne dépend que de la direction $\vec{e}$ (c'est-à-dire qu'on peut l'interpréter comme une projection sur une sphère), on peut le développer sur une base d'harmoniques sphériques $Y_{\ell m}$ [18] :

$$\Theta\left(x^0, \tau^0, \vec{e}\right) = \sum_{\ell m} a_{\ell m}\left(x^0, \tau^0\right) Y_{\ell m}\left(\vec{e}\right) \tag{2.87}$$

où les $a_{\ell m}$ sont les coefficients de la décomposition, et sont donc indépendants de $\vec{e}$. On a alors une relation entre les coefficients de ces deux décompositions :

$$\left(2\ell + 1\right) C_\ell = \sum_m \langle a_{\ell m} a^*_{\ell m} \rangle \tag{2.88}$$

Or, les coefficients $a_{\ell m}$ peuvent s'exprimer en fonction de $\Theta\left(x^0, \tau^0, \vec{e}\right)$. Pour cela, on se place dans l'espace de Fourier en effectuant la transformation :

$$\Theta\left(x^0, \tau^0, \vec{e}\right) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \hat{\Theta}\left(\tau^0, \vec{k}, \vec{e}\right) \tag{2.89}$$

où le coefficient $e^{ik\cdot x^0}$ est pris en compte dans $\hat{\Theta}\left(\tau^0, k, \vec{e}\right)$. Les coefficients de la décomposition en harmoniques sphériques sont alors donnés par :

$$a_{\ell m}\left(x^0, \tau^0\right) = \int d^2\vec{e} \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \hat{\Theta}\left(\tau^0, \vec{k}, \vec{e}\right) Y^*_{\ell m}\left(\vec{e}\right) \tag{2.90}$$

Il est donc possible d'exprimer les C_ℓ à partir de l'expression du contraste de température tirée de la formule de Sachs-Wolfe (2.69) écrite dans l'espace de Fourier.

De même que précédemment, nous allons traiter séparément les contributions scalaires et tensorielles aux C_ℓ du spectre de puissance angulaire.

Modes scalaires

Si on traduit les contributions scalaires de (2.69) dans l'espace de Fourier, cela nous donne :

$$\hat{\Theta}^{(S)}\left(\tau^0, \vec{k}, \vec{e}\right) = \left[\hat{\Theta}_{SW}\left(\vec{k}\right) + ik\mu\hat{V}_b\left(\vec{k}\right)\right] e^{ik\mu\left(\tau^0 - \tau^E\right)} + \int \left(\hat{\Phi}' + \hat{\Psi}'\right) e^{ik\mu\left(\tau^0 - \tau\right)} d\tau \tag{2.91}$$

où on a défini $k\mu = \vec{k} \cdot \vec{e}$ et l'exposant (S) indique qu'il s'agit des contributions scalaires. Chacun des termes de cette expression est une variable aléatoire que l'on peut décomposer

en une variable dépendant de la direction et une variable ne dépendant que de la norme de $\vec{k}$ selon $X\left(\vec{k},\tau\right) = X\left(k,\tau\right)\chi\left(\vec{k}\right)$, où χ est également une variable aléatoire telle que $\left\langle \chi\left(\vec{k}\right)\chi^*\left(\vec{k}\right)\right\rangle = \delta^{(3)}\left(\vec{k}-\vec{k'}\right)$. On a alors :

$$\hat{\Theta}^{(S)}\left(\tau^0,\vec{k},\vec{e}\right) = \left[4\pi\sum_{\ell m} i^\ell \hat{\Theta}_\ell^{(S)}\left(k\right) Y_{\ell m}^*\left(\hat{k}\right) Y_{\ell m}\left(\vec{e}\right)\right]\chi\left(\vec{k}\right) \tag{2.92}$$

$$\text{où} \quad \hat{\Theta}_\ell^{(S)} = \hat{\Theta}_{SW}\left(k\right) j_\ell\left(k\left(\tau^0-\tau^E\right)\right) + \hat{V}_b\left(k\right) k j_\ell'\left(k\left(\tau^0-\tau^E\right)\right) + \int\left(\hat{\Phi}'+\hat{\Psi}'\right) j_\ell\left(k\left(\tau^0-\tau\right)\right) d\tau \tag{2.93}$$

avec j_ℓ les fonctions de Bessel sphériques [18]. On peut maintenant exprimer les C_ℓ pour les contributions scalaires en fonction du contraste de température, d'après (2.88) et (2.90) :

$$C_\ell^{(S)} = \frac{2}{\pi}\int\left|\hat{\Theta}_\ell^{(S)}\left(k\right)\right|^2 k^2 dk \tag{2.94}$$

Modes tensoriels

De la même manière que pour les modes scalaires, on peut calculer les contributions tensorielles au spectre de puissance angulaire. Le calcul est essentiellement le même, il faut néanmoins prendre en compte les deux polarisations des modes tensoriels. Les contributions des modes tensoriels dans l'espace de Fourier sont données par :

$$\hat{\Theta}\left(\tau^0,\vec{k},\vec{e}\right) = -\int e^j e^i \bar{E}_{ij}' e^{ik\mu\left(\tau^0-\tau\right)} d\tau \tag{2.95}$$

Comme $\bar{E}_{ij}$ est de divergences et de trace nulles, on peut le décomposer sur la base perpendiculaire à $\vec{k}$: $(\vec{e}_+,\vec{e}_\times)$. Les deux polarisations sont alors $h_\pm^i = e_+^i \pm ie_\times^i$, si bien que $h_\pm^i e_i = \sin\left(\alpha\right) e^{\pm i\phi}$, et $\bar{E}_{ij}$ se décompose selon :

$$\bar{E}_{ij}\left(\vec{k},\tau\right) = \sum_\lambda \bar{E}_\lambda\left(k,\tau\right)\epsilon_{ij}^\lambda \chi_\lambda\left(\vec{k}\right) \tag{2.96}$$

avec $\epsilon_{ij}^\lambda = h_i^+ h_j^+ \delta_+^\lambda + h_i^\times h_j^\times \delta_\times^\lambda$, et $\chi_\lambda\left(\vec{k}\right)$ satisfait $\left\langle \chi_\lambda\left(\vec{k}\right)\chi_{\lambda'}^*\left(\vec{k'}\right)\right\rangle = \delta^{(3)}\left(\vec{k}-\vec{k'}\right)\delta_{\lambda\lambda'}$. On a alors :

$$\hat{\Theta}\left(\tau^0,\vec{k},\vec{e}\right) = \sum_{\lambda=\pm}\left[4\pi\sum_{\ell m}\left(\sin^2\left(\alpha\right)e^{2i\lambda\phi}\right)\tilde{\Theta}_{\lambda\ell}^{(T)}\left(k\right) Y_{\ell m}\left(\vec{k}\right) Y_{\ell m}^*\left(\vec{e}\right)\right]\chi_\lambda\left(\vec{k}\right) \tag{2.97}$$

$$\text{où} \quad \tilde{\Theta}_{\lambda\ell}^{(T)}\left(k\right) = -\int \bar{E}_\lambda'\left(k\right) j_\ell\left(k\left(\tau^0-\tau\right)\right) d\tau \tag{2.98}$$

Finalement, les C_ℓ pour les contributions tensorielles sont données par :

$$C_\ell^{(T)} = \frac{1}{\pi} \int \sum_\lambda \left| \hat{\Theta}_{\lambda\ell}^{(T)}(k) \right|^2 k^2 dk \tag{2.99}$$

$$\text{où} \quad \hat{\Theta}_{\lambda\ell}^{(T)}(k) = -\int \bar{E}'_\lambda(k) \sqrt{\frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!}} \frac{j_\ell\left(\left(\tau^0-\tau\right)\right)}{\left(\left(\tau^0-\tau\right)\right)^2} d\tau \tag{2.100}$$

Lorsqu'on calcule les contributions scalaires et tensorielles du spectre de puissance angulaire en température du CMB, on constate que ces dernières sont négligeables par rapport aux contributions scalaires (voir figure 2.6). Ainsi, de même que pour les contributions vectorielles, nous négligerons les contributions tensorielles à partir de maintenant, et nous ne nous intéresserons qu'aux modes scalaires.

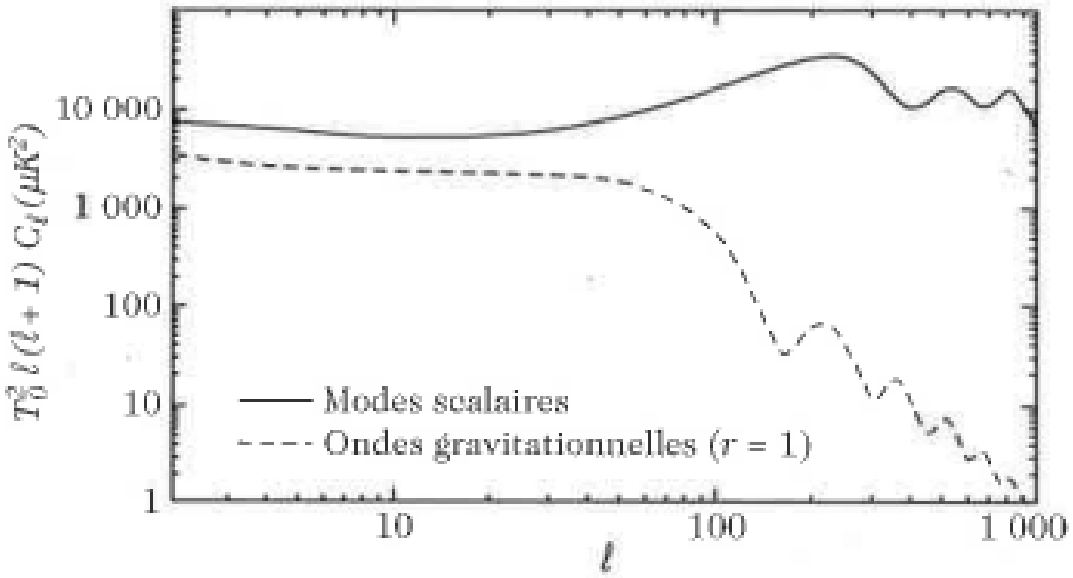

FIGURE 2.6 Comparaison des spectres de puissance angulaire du CMB entre les contributions des modes scalaires et tensoriels pour un rapport $r = 1$ entre les spectres primordiaux des deux modes. La limite actuelle sur ce rapport est $r < 0.11$ [19].

Les pics acoustiques dans le spectre de puissance

Comme nous l'avions anticipé dans la partie 2.2.2, on peut voir sur la figure 2.6 que les spectres de puissance angulaires des contributions scalaires et tensorielles aux anisotropies de température présentent des pics qui correspondent au mode fondamental et aux harmoniques des oscillations acoustiques. A ce titre, ces pics sont appelées pics acoustiques. Nous allons nous intéresser à la position de ces pics dans le spectre de puissance angulaire, qui peuvent nous en apprendre plus sur l'Univers primordial.

En dessous de l'horizon sonique ($kr_s > 1$), les potentiels gravitationnels sont devenus négligeables [2]. Ainsi, d'après (2.70), (2.79) et (2.84), on peut écrire le terme Sachs-Wolfe comme :

$$\hat{\Theta}_{SW} = \left[\frac{\mathcal{C}_A}{(1+R)^{\frac{1}{4}}} \cos(kr_s) + \frac{\mathcal{C}_I}{(1+R)^{\frac{1}{4}}} \sin(kr_s) \right] e^{\frac{-k^2}{k_D^2}} \tag{2.101}$$

où $\mathcal{C}_A$ et $\mathcal{C}_I$ sont des constantes d'intégration qui dépendent des conditions initiales. On peut donc trouver des conditions initiales telles que $\mathcal{C}_A$ ou $\mathcal{C}_I$ soit nulle, appelées respectivement conditions initiales adiabatiques ou isocourbures. La position des pics dépend donc de la nature des conditions initiales (adiabatiques ou isocourbures) et on constate que les observations tendent à privilégier les conditions initiales adiabatiques [20]. Pour ces conditions, au moment du découplage (c'est-à-dire à $\tau = \tau_{LSS}$, où LSS signifie Last Scattering Surface ou surface de dernière diffusion), le contraste de température est maximum pour :

$$k_p r_s(\tau_{LSS}) = p\pi \qquad \text{avec} \quad p \in \mathbb{N}^* \tag{2.102}$$

Cette échelle est observée sous un angle $\theta_p = \pi / (d_A(\tau_{LSS}) k_p)$, où d_A est la distance angulaire comobile. L'échelle angulaire correspondante est $\ell_p = \pi/\theta_p$. Finalement, les pics acoustiques sont situés à des échelles angulaires données par :

$$\ell_p = \frac{\pi d_A(\tau_{LSS})}{r_s(\tau_{LSS})} p \tag{2.103}$$

Les positions des pics acoustiques du spectre de puissance angulaire nous renseignent donc sur l'Univers primordial à travers la distance angulaire comobile et l'horizon acoustique. À ce titre, elles permettent de contraindre les modèles cosmologiques en comparant les prédictions des modèles aux données observationnelles [21]. Il ne s'agit ici que d'un exemple, puisque le CMB renferme bien plus d'information à travers la forme complète de son spectre de puissance.

À travers cet exemple, on comprend que le CMB est une observable de premier ordre dans la cosmologie moderne, du fait du nombre prodigieux d'informations qu'il contient à propos de l'univers tel qu'il était au moment de la recombinaison, quelques centaines de milliers d'années après le Big-Bang, mais également de son évolution depuis l'époque de la recombinaison jusqu'à aujourd'hui.

2.2.4 Approche cinétique

L'étude menée précédemment permet de décrire qualitativement les principales propriétés du spectre de puissance du CMB. Cependant, les photons étant relativistes, on peut montrer qu'ils évoluent dans un état hors équilibre [22], et l'approximation d'un fluide de photons n'est plus

valide. Il faut aller au-delà de la description en termes de fluides et adopter une approche cinétique. Ce développement est d'autant plus justifié que c'est l'approche qui est effectivement utilisée dans les codes de calcul du CMB tels que CAMB.

L'équation de Boltzmann

Pour décrire les propriétés du bain de photons, on introduit la fonction de distribution $f\left(x^{\mu}, k_{\mu}\right)$ qui dépend de la position et de l'impulsion qui est telle que $k^{\mu}k_{\mu} = 0$. De même que dans la section 2.1.5, on décompose les quadri-vecteurs sur les hypersurfaces $\{\tau = cste\}$ et sur le champ de vecteur N^{μ} normal à ces hypersurfaces. Pour une métrique de la forme de (2.2), le champ de vecteur normal est :

$$N_{\mu} = -a\left(1 + A, 0\right) \quad \text{et} \quad N^{\mu} = a^{-1}\left(1 - A, -B^{i}\right) \tag{2.104}$$

On peut alors décomposer l'impulsion des photons k^{μ} selon :

$$k^{\mu} = \frac{E_{\gamma}}{a}\left(1 - A, n^{i} - \left[B_{j}n^{j} + \frac{1}{2}h_{jk}n^{j}n^{k}\right]n^{i}\right) \tag{2.105}$$

où on introduit le champ de vecteur n^{i} tel que $\gamma_{ij}n^{i}n^{j} = 1$. Du fait de l'isotropie et de l'homogénéité de l'Univers, f peut être décomposée en une valeur moyenne ne dépendant que de τ et E_{γ} et une perturbation :

$$f\left(x^{\mu}, k_{\mu}\right) = \bar{f}\left(\tau, E_{\gamma}\right) + \delta f\left(\tau, x^{i}, E_{\gamma}, n^{j}\right) \tag{2.106}$$

L'évolution de cette fonction de distribution est régie par l'équation de Boltzmann :

$$\mathcal{L}\left[f\right] = C\left[f\right] \tag{2.107}$$

où $\mathcal{L} \equiv \frac{d}{d\tau}$ est l'opérateur de Liouville et $C\left[f\right]$ est le terme de collision. L'objet de l'étude qui va suivre sera d'exprimer cette équation de Boltzmann, très générale en l'état, en fonction de variables physiques usuelles telles que la densité d'énergie des photons ou bien leur pression anisotrope, et de manière adaptée au cas du plasma de baryons et de photons qui nous intéresse présentement, en détaillant le terme de collision correspondant à la diffusion Thomson.

Quantités macroscopiques et brillance

Il est possible d'exprimer le tenseur énergie-impulsion à partir de la fonction de distribution selon :

$$T^{\mu\nu} = \int k^\mu k^\nu f\left(x^\mu, k_\mu\right) \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 E_\gamma} = \int k^\mu k^\nu f\left(\tau, x^i, E_\gamma, n^j\right) E_\gamma dE_\gamma d^2\vec{n} \tag{2.108}$$

où, dans la dernière étape, on a inclus le facteur $(2\pi)^3$ dans f. On peut alors exprimer la densité d'énergie, la pression et le tenseur de pression anisotrope relatifs aux photons à partir de la fonction de partition en décomposant selon (2.10) :

$$\rho_\gamma = \int \left(k^\mu u_\mu\right)^2 f E_\gamma dE_\gamma d^2\vec{n} \tag{2.109}$$

$$p_\gamma = \frac{1}{3} \int k^\mu k^\nu \perp_{\mu\nu} f E_\gamma dE_\gamma d^2\vec{n} \tag{2.110}$$

$$\Pi_\gamma^{\mu\nu} = \bar{p}_\gamma \pi_\gamma^{\mu\nu} = \int k^\alpha k^\beta \left(\perp_\alpha^\mu \perp_\beta^\nu - \frac{1}{3} \perp_{\alpha\beta} \perp^{\mu\nu}\right) f E_\gamma dE_\gamma d^2\vec{n} \tag{2.111}$$

où $\perp_{\mu\nu}$ est défini en fonction de la quadrivitesse de l'observateur u_μ par $\perp_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu$. Dans la suite, on se place dans la jauge comobile détaillée dans la partie 2.1.5, c'est-à-dire que l'observateur, qui est comobile avec le fluide de matière noire, a sa quadri-vitesse u_μ orthogonale aux hypersurfaces $\{\tau = cste\}$, donc $u_\mu \parallel N_\mu$, et de plus $B^i = 0$.

Si l'on s'intéresse plus particulièrement aux perturbations, en utilisant la décomposition (2.106) et le fait que $\bar{f}$ ne dépend pas de n^i, on obtient :

$$\delta\rho_\gamma = \int \delta f E_\gamma^3 dE_\gamma d^2\vec{n} \tag{2.112}$$

$$\left(\bar{\rho}_\gamma + \bar{p}_\gamma\right) v^i = \int n^i \delta f E_\gamma^3 dE_\gamma d^2\vec{n} \tag{2.113}$$

$$\Pi_\gamma^{ij} = \bar{p}_\gamma \pi_\gamma^{ij} = \int \left(n^i n^j - \frac{1}{3}\gamma^{ij}\right) \delta f E_\gamma^3 dE_\gamma d^2\vec{n} = \int n^{ij} \delta f E_\gamma^3 dE_\gamma d^2\vec{n} \tag{2.114}$$

On remarque que les quantités macroscopiques exprimées dans (2.112) à (2.114) peuvent s'exprimer comme les moments multipolaires de la perturbation d'une même fonction appelée brillance et définie par :

$$I\left(\tau, x^i, n^j\right) = 4\pi \int f\left(\tau, x^i, E_\gamma, n^j\right) E_\gamma^3 dE_\gamma \tag{2.115}$$

De même que pour la fonction de distribution, on décompose la brillance selon $I\left(\tau, x^i, n^j\right) = \bar{I}\left(\tau\right) + \delta I\left(\tau, x^i, n^j\right)$. Dans ce cas, on peut réécrire les perturbations en fonction de $\bar{I}$ et δI :

$$\delta\rho_\gamma = \int \delta I \frac{d^2\vec{n}}{4\pi}\,, \quad \left(\bar{\rho}_\gamma + \bar{p}_\gamma\right) v^i = \int n^i \delta I \frac{d^2\vec{n}}{4\pi} \quad \text{et} \quad \bar{p}_\gamma \pi_\gamma^{ij} = \frac{\bar{\rho}_\gamma}{3}\pi_\gamma^{ij} = \int n^{ij}\delta I \frac{d^2\vec{n}}{4\pi} \tag{2.116}$$

$\delta\rho_\gamma$ est donc le monopôle de la perturbation de brillance, $\left(\bar{\rho}_\gamma + \bar{p}_\gamma\right) v^i$ son dipôle et $\bar{p}_\gamma \pi_\gamma^{ij}$ son quadrupôle.

On va alors définir un opérateur de Liouville ainsi qu'un terme de collision pour la fonction de brillance, afin d'obtenir une expression pour l'équation de Boltzmann qui ne dépend plus que de cette dernière :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[I\right] &= 4\pi \int \mathcal{L}\left[f\right] E_\gamma^3 dE_\gamma = \mathcal{L}\left[\bar{I}\right] + \mathcal{L}\left[\delta I\right] \\ C\left[I\right] &= 4\pi \int C\left[f\right] E_\gamma^3 dE_\gamma = C\left[\bar{I}\right] + C\left[\delta I\right] \end{aligned} \tag{2.117}$$

Terme de collision

Pour obtenir une expression explicite de l'équation de Boltzmann, on commence par déterminer le terme de collision. De manière générale, on peut décomposer ce terme selon :

$$C\left[f\right] = \frac{df_+}{d\tau} - \frac{df_-}{d\tau} \tag{2.118}$$

où les fonctions f_+ et f_- décrivent respectivement la production et la disparition des photons dans une région donnée de l'espace des phases. Elles décrivent l'interaction entre les photons et le fluide de baryons et d'électrons, c'est-à-dire la diffusion Thomson. Ainsi, dans le référentiel où les baryons et les électrons sont au repos, ces deux termes sont donnés par [15] :

$$\frac{df_+}{d\tau} = \tau' \int f\left(1 + \frac{3}{4}n^{ij}n'_{ij}\right)\frac{d^2\vec{n}}{4\pi} \quad \text{et} \quad \frac{df_-}{d\tau} = \tau' f \tag{2.119}$$

Comme l'intégrale sur l'élément de surface de $\left(1 + \frac{3}{4}n^{ij}n'_{ij}\right)$ vaut 1, la partie non perturbée du terme de collision $C\left[\bar{f}\right]$ est nulle, donc d'après le lemme de Stewart-Walker, le terme de collision est invariant de jauge. Les perturbations du terme de collision sont, elles, données par :

$$\begin{aligned} C\left[\delta f\right] = \tau' \Bigg[&\int \delta f\left(\tau, x^i, \bar{E}_\gamma, \vec{n}'\right)\frac{d^2\vec{n}'}{4\pi} - \delta f\left(\tau, x^i, \bar{E}_\gamma, \vec{n}\right) \\ &+ \frac{3}{4}\int n^{ij}\delta f\left(\tau, x^i, \bar{E}_\gamma, \vec{n}'\right) n'_{ij}\frac{d^2\vec{n}'}{4\pi}\Bigg] \end{aligned} \tag{2.120}$$

$\bar{E}_\gamma$ est l'énergie des photons dans le référentiel où les baryons et les électrons sont au repos. Or, pour obtenir la brillance à partir de la fonction de distribution, il faut intégrer sur l'énergie des photons E_γ dans le référentiel de l'observateur de quadri-vitesse u_μ. Il faut donc exprimer le terme de collision (2.120) en fonction de E_γ. Il suffit pour cela d'exploiter la conservation de l'énergie et d'exprimer l'énergie des photons dans le référentiel de l'observateur selon $\bar{E}_\gamma = -k_\mu u_b^\mu$, où u_b^μ la quadri-vitesse des baryons dans ce référentiel. Tous calculs faits et après intégration sur E_γ, le terme de collision devient :

$$C\left[\delta I\right] = 4\pi \int C\left[\delta f\right] E_\gamma^3 dE_\gamma = \tau' \left[\int \delta I \frac{d^2\vec{n}'}{4\pi} + \frac{3}{4} n^{ij} \int \delta I n'_{ij} \frac{d^2\vec{n}'}{4\pi} - \delta I + 4\bar{I} V_b^i n_i\right] \tag{2.121}$$

Et finalement, en identifiant les moments multipolaires de la brillance, on peut exprimer le terme de collision selon :

$$C\left[\delta I\right] = \tau' \left[I_0 - \delta I + 4\bar{I} V_b^i n_i + \frac{3}{4} I_{ij}\right] \tag{2.122}$$

où $I_0 = \delta\rho_\gamma$ est le monopôle de la perturbation de brillance et $I_{ij} = n^{ij}\bar{p}\pi_{ij}$ son quadrupôle (en utilisant les expressions (2.116) des moments multipolaires de δI). Si par ailleurs on prend en compte l'influence de la polarisation, on peut montrer que seul le quadrupôle des modes $\mathcal{E}$ de polarisation $\mathcal{E}_{ij}$ intervient. Le terme de collision est alors légèrement modifié et prend la forme [23] :

$$C\left[\delta I\right] = \tau' \left[I_0 - \delta I + 4\bar{I} V_b^i n_i + \zeta_{ij} n^i n^j\right] \tag{2.123}$$

On a ici défini la quantité $\zeta_{ij} = \frac{3}{4} I_{ij} + \frac{9}{2}\mathcal{E}_{ij}$.

Nous venons d'exprimer le membre de droite de l'équation de Boltzmann (2.107) en fonction de la perturbation de brillance et de ses moments multipôlaires que nous avons reliés aux variables des usuelles des fluides. Il faut maintenant faire de même avec le membre de gauche.

Opérateur de Liouville

On commence simplement par développer l'opérateur de Liouville en utilisant la règle de la chaîne :

$$\mathcal{L}\left[f\right] = \frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{dx^i}{d\tau}\frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{dE_\gamma}{d\tau}\frac{\partial f}{\partial E_\gamma} + \frac{dn^i}{d\tau}\frac{\partial f}{\partial n^i} \tag{2.124}$$

L'équation géodésique, $\frac{dk^\nu}{ds} = -\Gamma^\nu_{\mu\rho} k^\mu k^\rho$, appliquée à la partie spatiale de k^μ nous indique que :

$$\frac{dn^i}{d\tau}\frac{\partial f}{\partial n^i} = -{}^{(3)}\Gamma^k_{ij} n^i n^j \frac{\partial f}{\partial n^k} \tag{2.125}$$

où ${}^{(3)}\Gamma^k_{ij}$ désigne les symboles de Christoffel associés à la métrique spatiale.

Pour ce qui est du terme $\frac{dE_\gamma}{d\tau}$, on peut commencer par le décomposer selon

$$\frac{dE_\gamma}{d\tau} = \frac{ds}{d\tau}\frac{dE_\gamma}{ds} \tag{2.126}$$

où s est l'abscisse curviligne sur la trajectoire du photon. Comme le vecteur k^μ est tangent à cette trajectoire :

$$\begin{aligned} &\frac{ds}{d\tau} = \left(\frac{dx^0}{ds}\right)^{-1} = \frac{1}{k^0} \\ \text{et} \quad &\frac{dE_\gamma}{ds} = k^\mu \nabla_\mu E_\gamma = k^\mu k^\nu \nabla_\mu u_\nu \end{aligned} \tag{2.127}$$

On a utilisé $E_\gamma = -k^\mu u_\mu$ dans la dernière étape de la seconde ligne et la propriété selon laquelle $k^\mu \nabla_\mu k^\nu = 0$. On décompose maintenant la dérivée covariante du champ de vecteur u^μ décrivant un flot de matière de la manière usuelle :

$$\nabla_\mu u_\nu = \sigma_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu} + \frac{1}{3}\theta \perp_{\mu\nu} - u_\mu A_\nu \tag{2.128}$$

$\sigma_{\mu\nu}$ est le tenseur de cisaillement, symétrique, sans trace et orthogonal au champ de vecteur u^μ. $\omega_{\mu\nu}$ est le tenseur de vorticité, il est antisymétrique et décrit la rotation du flot de matière. La grandeur $\theta = \nabla_\mu u^\mu$ décrit la déformation isotrope du volume de matière, c'est-à-dire son expansion, sa valeur moyenne est donnée par $\bar{\theta} = 3H$. $\perp_{\mu\nu}$ est défini comme en (2.110). Enfin, A_ν est le vecteur d'accélération du flot de matière.

On peut alors montrer en utilisant (2.127) et (2.128) que [24] :

$$\frac{dE_\gamma}{d\tau} = -E_\gamma \left[\frac{1}{3}\theta + A_i n^i + \sigma_{ij} n^i n^j\right] \tag{2.129}$$

Enfin, comme $\bar{f}$ ne dépend pas de la position, $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ est d'ordre 1 dans les perturbations. On se restreint donc à l'ordre 0 pour $\frac{dx^i}{d\tau} = \frac{k^i}{k^0}$. L'opérateur de Liouville est alors donné par :

$$\mathcal{L}[f] = f' + n^i \partial_i f - \left[\frac{1}{3}\theta + A_i n^i + \sigma_{ij} n^i n^j\right] E_\gamma \frac{\partial f}{\partial E_\gamma} -^{(3)} \Gamma^k_{ij} n^i n^j \frac{\partial f}{\partial n^k} \tag{2.130}$$

Finalement, en intégrant sur l'énergie, on obtient l'équation de Boltzmann pour la perturbation de brillance :

$$\begin{aligned} &\delta I' + n^i \partial_i \delta I + 4\left[\frac{1}{3}\theta + A_i n^i + \sigma_{ij} n^i n^j\right] \bar{I} -^{(3)} \Gamma^k_{ij} n^i n^j \frac{\partial \delta I}{\partial n^k} \\ &= \tau' \left[I_0 - \delta I + 4\bar{I} V_b^i n_i + \zeta_{ij} n^i n^j\right] \end{aligned} \tag{2.131}$$

Développement multipôlaire, en fonctions harmoniques et spectre de puissance

Comme nous l'avons vu précédemment, les deux membres de l'équation de Boltzmann peuvent s'exprimer en fonction de la perturbation de la fonction de brillance et de certains de ses moments. Il semble alors intéressant de décomposer la perturbation de brillance comme la somme de ses moments multipolaires :

$$\delta I\left(\tau, x^i, n^j\right) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(2\ell+1)!}{(-2)^\ell (\ell!)^2} \left(n^{i_1}...n^{i_\ell}\right) \mathcal{I}_{i_1...i_\ell}\left(\tau, x^i\right) \equiv \sum_{\ell} \frac{(2\ell+1)!}{(-2)^\ell (\ell!)^2} n^{A_\ell} \mathcal{I}_{A_\ell} \tag{2.132}$$

où on a définit $A_\ell = i_1...i_\ell$ et les $\mathcal{I}_{A_\ell}$ sont les moments successifs de la perturbation de brillance. Cette décomposition n'est malheureusement pas unique, à moins que nous n'imposions aux $\mathcal{I}_{A_\ell}$ d'être symétriques et de trace nulle (ou STF pour Symmetric Trace Free), ce que nous supposerons à partir de maintenant. Avec cette décomposition, les deuxième et dernier termes de l'opérateur de Liouville peuvent se combiner pour faire apparaître des dérivées covariantes, car $\mathcal{I}_{A_\ell}$ ne dépend pas de n^i.

On obtient alors une famille infinie d'équations, appelée hiérarchie de Boltzmann pour les moments de la perturbation de brillance, qui peut être résumée sous la forme :

$$\begin{aligned} &\mathcal{I}'_{A_\ell} + \frac{4}{3}\theta \mathcal{I}_{A_\ell} + \hat{\nabla}^j \mathcal{I}_{jA_\ell} - \frac{\ell}{2\ell+1}\left[\hat{\nabla}_{i_\ell} \mathcal{I}_{A_{\ell-1}}\right]^{STF} + \frac{4}{3}\bar{I} A_{i_1} \delta^1_\ell - \frac{8}{15}\bar{I}\sigma_{i_1 i_2}\delta^2_\ell \\ &= \tau'\left[\mathcal{I}_0 \delta^0_\ell - \mathcal{I}_{A_\ell} + \frac{4}{3}\bar{I} V_{i_1}\delta^1_\ell - \frac{2}{15}\zeta_{i_1 i_2}\delta^2_\ell\right] \end{aligned} \tag{2.133}$$

où l'exposant STF indique que l'on a extrait la partie symétrique sans trace du tenseur entre crochets.

À partir de ces tenseurs d'ordre ℓ, on cherche à extraire la contribution des modes scalaires (on rappelle que les autres contributions sont négligées dans la suite). Il convient donc de généraliser à tous les ordres la décomposition SVT effectuée dans la partie 2.1.1 [2] :

$$\mathcal{I}_{A_\ell} = \sum_{m=0}^{\ell} \mathcal{I}^{(m)}_{A_\ell} = \sum_{m=0}^{\ell} \left[\nabla_{i_1}...\nabla_{i_{\ell-m}} \mathcal{I}^{(m)}_{\ell, i_{\ell-m+1}...i_\ell}\right]^{STF} \tag{2.135}$$

Notons que les modes scalaires sont ceux pour lesquels $m = 0$. On choisit de décomposer chaque multipôle sur une base de fonctions propres du laplacien, $Q_{A^{m\pm}_m}$ telles que :

$$\Delta Q^{m\pm}_{A_m} = \frac{k^2}{a^2} Q^{m\pm}_{A_m} \tag{2.136}$$

2. Cette décomposition est générale et d'applique à tout tenseur. Pour le tenseur de pression anisotrope π_{ij} :

$$\pi_{ij} = \left[\nabla_i \nabla_j \pi\right]^{STF} + \left[\nabla_i \pi_j\right]^{STF} + \left[\pi_{ij}\right]^{STF} \tag{2.134}$$

En extrayant les parties symétriques sans trace, on retrouve la décomposition (2.12).

L'intérêt de ces fonctions réside dans le fait qu'on puisse construire un tenseur d'ordre ℓ symétrique de trace nulle selon :

$$Q^{m\pm}_{A_\ell} = \left(\frac{a}{k}\right)^{\ell-m} \left[\nabla_{i_1} ... \nabla_{i_{\ell-m}} Q^{m\pm}_{A_m}\right]^{STF} \tag{2.137}$$

On décompose donc toutes les grandeurs tensorielles qui interviennent dans (2.133) sur la base des $Q^{m\pm}_{A_\ell}$ selon :

$$\begin{aligned}
I^{(m)}_{A_\ell} &= \bar{\rho}_\gamma \sum_{k,\pm} I^{(m\pm)}_\ell Q^{m\pm}_{A_\ell} \\
\sigma^{(m)}_{ij} &= \sum_{k,\pm} \frac{k}{a} \sigma^{(m\pm)} Q^{m\pm}_{ij} \\
\pi^{(m)}_{ij} &= \sum_{k,\pm} \Pi^{(m\pm)} Q^{m\pm}_{ij} \\
A^{(m)}_i &= \sum_{k,\pm} \frac{k}{a} A^{(m\pm)} Q^{m\pm}_i \\
v^{(m)}_i &= \sum_{k,\pm} v^{(m\pm)} Q^{m\pm}_{ij}
\end{aligned} \tag{2.138}$$

La hiérarchie de Boltzmann pour les modes scalaires est alors donnée par [25]

$$I'_\ell + \frac{k}{2\ell+1}\left[(\ell+1) I_{\ell+1} - \ell I_{\ell-1}\right] = \tau' \left[I_0 \delta^0_\ell - I_\ell + \frac{4}{3} v \delta^1_\ell + \frac{2}{15} \zeta \delta^2_\ell\right] + \frac{8}{15} \sigma \delta^2_\ell - 4h' \delta^0_\ell - \frac{4}{3} A \delta^1_\ell \tag{2.139}$$

avec $h' = \left(\frac{\delta a}{a}\right)'$. On remarque qu'il s'agit d'équations couplées, les modes successifs dépendent les uns des autres (le mode d'ordre ℓ dépend des modes d'ordre $\ell - 1$ et $\ell + 1$). Ainsi, il faudrait en théorie intégrer simultanément toute la hiérarchie de Boltzmann pour obtenir chaque mode. En fait, l'existence d'une solution formelle sous forme intégrale [26] permet de se limiter au calcul d'une dizaine de termes.

Il est alors possible, à partir des solutions de la hiérarchie de Boltzmann, de calculer la contribution des modes scalaires au spectre de puissance en température du CMB :

$$C^{(S)}_\ell = \frac{\pi}{4} \frac{(2\ell)!}{(-2)^\ell (\ell!)^2} \sum_{k,k'} \langle I_{\ell,k} I_{\ell,k'} \rangle Q_{A_\ell,k} Q^{A_\ell}_{k'} \tag{2.140}$$

C'est la méthode utilisée par les codes de calcul tels que CAMB pour obtenir les spectres de puissance du CMB, dont un exemple calculé par CAMB est donné en figure 2.7.

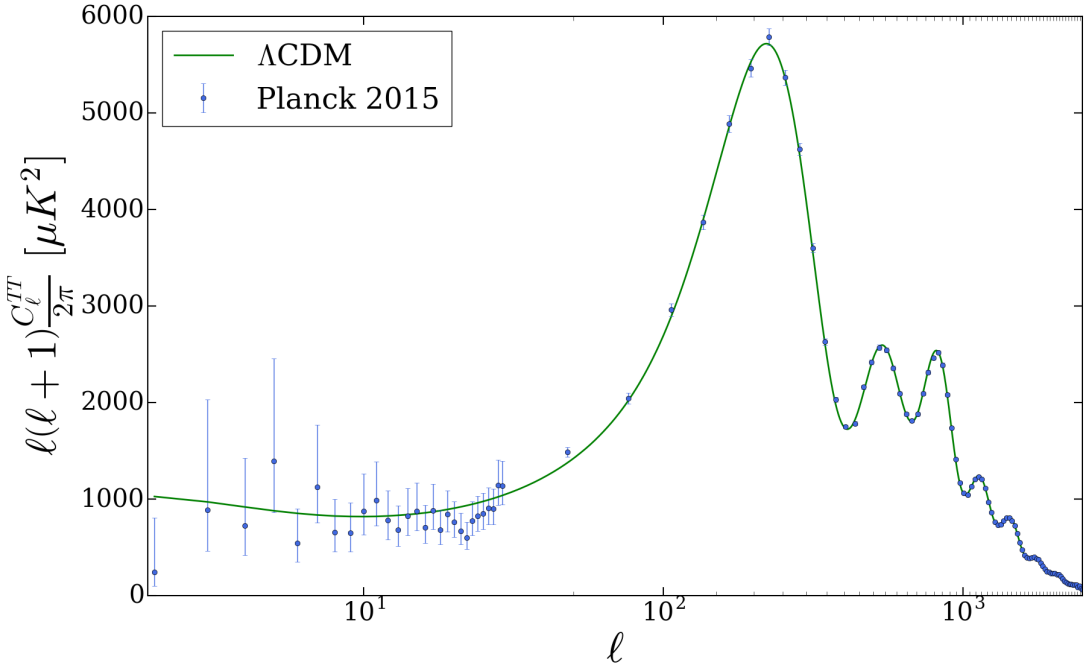

FIGURE 2.7 Modes scalaires du spectre de puissance en température du CMB calculé par CAMB, dans le cadre du modèle ΛCDM et mesures de Planck 2015 [19]. Les paramètres du modèle ΛCDM utilisé sont ceux du meilleur ajustement aux données du CMB, présenté dans la section 4.2.2.

Dans le but de contraindre le modèle du galileon, le fond diffus cosmologique est une sonde de première importance, étant donnée la grande quantité de mesures d'une très grande précision. Mais, pour pouvoir comparer prédictions et observations, il faut avoir les prédictions à disposition. Après avoir présenté en détail le modèle du galileon, le chapitre 3 détaillera comment calculer les perturbations cosmologiques et les prédictions des modes scalaires du CMB pour ce modèle.

Bibliographie

[1] Pierre Laurent et al. A 14 h^{-3} Gpc^3 study of cosmic homogeneity using BOSS DR12 quasar sample. *JCAP*, 1611(11) :060, 2016.

[2] Jean-Philippe Uzan and Patrick Peter. *Cosmologie Primordiale*. Belin, 2012.

[3] Hannu Kurki-Suonio. University of helsinki, lecture notes : Cosmological perturbation theory, part 1, 2015.

[4] E. Lifshitz. Republication of : On the gravitational stability of the expanding universe. *J. Phys.(USSR)*, 10 :116, 1946. [Gen. Rel. Grav.49,no.2,18(2017)].

[5] James M. Bardeen. Gauge Invariant Cosmological Perturbations. *Phys. Rev.*, D22 :1882–1905, 1980.

[6] J. M. Stewart and M. Walker. Perturbations of spacetimes in general relativity. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A341 :49–74, 1974.

[7] Cullan Howlett, Antony Lewis, Alex Hall, and Anthony Challinor. Cmb power spectrum parameter degeneracies in the era of precision cosmology. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2012.

[8] Richard L. Arnowitt, Stanley Deser, and Charles W. Misner. Dynamical Structure and Definition of Energy in General Relativity. *Phys. Rev.*, 116 :1322–1330, 1959.

[9] Eric Gourgoulhon. 3+1 formalism and bases of numerical relativity. 2007.

[10] Chung-Pei Ma and Edmund Bertschinger. Cosmological perturbation theory in the synchronous versus conformal Newtonian gauge. *Submitted to : Astrophys. J.*, 1994.

[11] Arno A. Penzias and Robert Woodrow Wilson. A Measurement of excess antenna temperature at 4080-Mc/s. *Astrophys. J.*, 142 :419–421, 1965.

[12] Planck Collaboration. Planck 2015 results. XVI. Isotropy and statistics of the CMB. *Astron. Astrophys.*, 594 :A16, 2016.

[13] Ludwig Boltzmann. Ableitung des stefan'schen gesetzes, betreffend die abhängigkeit der wärmestrahlung von der temperatur aus der electromagnetischen lichttheorie. *Annalen der Physik*, 258(6) :291–294, 1884.

[14] R. K. Sachs and A. M. Wolfe. Perturbations of a cosmological model and angular variations of the microwave background. *Astrophys. J.*, 147 :73–90, 1967. [Gen. Rel. Grav.39,1929(2007)].

[15] Wayne Hu and Martin J. White. CMB anisotropies : Total angular momentum method. *Phys. Rev.*, D56 :596–615, 1997.

[16] Scott Dodelson. *Modern cosmology*. Academic Press, San Diego, CA, 2003.

[17] Joseph Silk. Cosmic black body radiation and galaxy formation. *Astrophys. J.*, 151 :459–471, 1968.

[18] Milton Abramowitz. *Handbook of Mathematical Functions, With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover Publications, Inc., New York, NY, USA, 1974.

[19] Planck Collaboration. Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters. *Astron. Astrophys.*, 594 :A13, 2016.

[20] Planck Collaboration. Planck 2015 results. XX. Constraints on inflation. *Astron. Astrophys.*, 594 :A20, 2016.

[21] Jeremy Neveu. *Experimental constraints on light scalar field models in cosmology and particle physics (SNLS and CMS experiments)*. Theses, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, July 2014.

[22] J. Bernstein. *KINETIC THEORY IN THE EXPANDING UNIVERSE*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 1988.

[23] Anthony Challinor. Microwave background polarization in cosmological models. *Phys. Rev.*, D62 :043004, 2000.

[24] R. Treciokas and G. F. R. Ellis. Isotropic solutions of the einstein-boltzmann equations. *Comm. Math. Phys.*, 23(1) :1–22, 1971.

[25] Antony Lewis. *Geometric algebra and covariant methods in physics and cosmology*. PhD thesis, University of Cambridge, 2000.

[26] Uros Seljak and Matias Zaldarriaga. A Line of sight integration approach to cosmic microwave background anisotropies. *Astrophys. J.*, 469 :437–444, 1996.

Chapitre 3

Le modèle du galileon

Sommaire

3.1 Vers un modèle de l'énergie noire . . . 82
3.1.1 La constante cosmologique . . . 82
3.1.2 À la recherche d'une autre approche . . . 86
3.2 Principe de construction du modèle du galileon . . . 87
3.2.1 Développement du modèle du galileon . . . 88
3.2.2 L'effet Vainshtein . . . 93
3.2.3 Le galileon comme limite d'autres modèles . . . 96
3.3 Un Univers galileon homogène . . . 99
3.3.1 Équations dans la métrique FLRW . . . 99
3.3.2 Évolution de l'Univers . . . 103
3.4 Les perturbations du galileon . . . 105
3.4.1 Équations perturbées . . . 105
3.4.2 Évolution des perturbations . . . 110
3.4.3 Les spectres de puissance . . . 114
3.4.4 Contraintes théoriques . . . 118
Bibliographie . . . 119

Ce n'est qu'à la fin du XXe siècle que l'accélération de l'expansion de l'Univers s'est imposée à nous, comme nous l'avons évoqué au chapitre 1. Ce fût une grande surprise car le modèle cosmologique qui faisait consensus à l'époque de cette découverte prédisait une expansion de l'Univers en décélération. La manière la plus simple de modifier le modèle pour que celui-ci prédise une expansion de l'Univers accélérée est d'avoir recours à la constante cosmologique Λ. L'introduction de cette constante cosmologique, bien que motivée théoriquement par des arguments de symétrie, pose un grand nombre de problèmes. Nous détaillerons les succès et difficultés de la constante cosmologique dans la section 3.1.

Ainsi, même si le modèle ΛCDM n'est actuellement remis en cause par aucune observation, un effort important a été produit de la part de la communauté des cosmologues pour fournir des modèles alternatifs au modèle ΛCDM qui s'accorderaient aussi bien, voire mieux, aux mesures cosmologiques. Ces modèles supposent que la relativité générale n'est qu'une approximation de la théorie de la gravitation, et vont donc la modifier pour reproduire notamment l'accélération de l'expansion de l'Univers. L'approche la plus explorée à ce jour pour modifier la relativité générale est d'introduire un champ scalaire. Le modèle du galileon, que nous allons étudier dans les chapitres 3 et 4 fait partie de ces classes de modèles de gravité modifiée par l'introduction d'un champ scalaire, le champ du galileon. La construction du modèle du galileon sera détaillée dans la section 3.2. Mon travail concernant la modification du code de calcul CAMB pour l'obtention des principales prédictions de ce modèle sera présenté dans les sections 3.3 et 3.4. Il se base sur les méthodes de calcul de J. Neveu et al. [1–3] et Barreira et al. [4–6].

3.1 Vers un modèle de l'énergie noire

3.1.1 La constante cosmologique

Un peu d'histoire

La question de la constante cosmologique est très liée à la relativité générale elle-même. En effet, la possibilité de l'introduire dans les équations de la théorie est évoquée dès 1916 par Einstein (voir la note en bas de la page 180 dans [7]). En effet, après avoir tâtonné plusieurs années pour trouver la bonne forme pour les équations de la relativité générale, Einstein s'est reposé sur un principe de symétrie pour obtenir les équations aujourd'hui connues sous le nom d'équations d'Einstein. Cette symétrie est ce qu'Einstein appelait le principe de covariance générale, que l'on appelle invariance par difféomorphisme dans les développements récents. Elle consiste à dire que les systèmes de coordonnées utilisés, et par extension les géométries correspondantes, ne sont qu'un artifice mathématique de la théorie mais n'ont pas de réalité physique. Ainsi, il s'agit d'imposer que les équations de la gravité soient invariantes par tout changement de coordonnées $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu$, quel que soit le champ de vecteur ξ^μ. Cette symétrie est à l'origine de l'invariance de jauge que nous avons mise en évidence dans le chapitre 2. Il se trouve que les deux seuls tenseurs qui vérifient cette symétrie et qui sont construits à partir de la métrique sont le tenseur d'Einstein ($G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$) et le tenseur où apparaît la constante cosmologique ($\Lambda g_{\mu\nu}$).

Ainsi, la forme des équations gouvernant la relativité générale est totalement contrainte par un principe de symétrie. Cette approche très prisée par les physiciens, qui en ont fait l'un

des principes fondateurs du modèle standard de la physique des particules, aurait pu faire les heures de gloire de la constante cosmologique. Malheureusement, son histoire chaotique en a plutôt fait un objet de controverse. En effet, la première réaction d'Einstein vis à vis de la constante cosmologique fut de la négliger, ses effets n'ayant pas encore été observés à l'époque. Seulement, peu après avoir publié les fondations de la théorie de la relativité générale sans constante cosmologique, Einstein s'est rendu compte que cette théorie, ne pouvait s'accorder avec l'hypothèse d'un Univers statique qui faisait consensus à l'époque.

On peut s'en rendre compte en prenant le cas d'un univers homogène et composé uniquement de matière. Comme nous l'avons vu dans le chapitre 1, celui-ci doit vérifier les équations (1.23) et (1.24) qui s'écrivent alors sous la forme :

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = \frac{\kappa}{3}a^2\rho_m - K = \frac{\kappa}{3}\frac{\rho_m^0}{a} - K \tag{3.1}$$

$$\frac{d^2a}{dt^2} = -\frac{\kappa}{6}a\rho_m\left(1+3w_m\right) = -\frac{\kappa}{6}\frac{\rho_m^0}{a^2} \tag{3.2}$$

où ρ_m^0 est la densité d'énergie de la matière aujourd'hui et K la courbure. On voit alors qu'il n'est pas possible d'obtenir un facteur d'échelle constant sauf en imposant une densité d'énergie de la matière nulle, c'est-à-dire un univers complètement vide.

Pour rétablir l'accord du modèle avec l'hypothèse d'un univers statique, Einstein a alors décidé, dans ses travaux de cosmologie relativiste de 1917 [8], de réintroduire la constante cosmologique dans les équations. Les équations (3.1) et (3.2) deviennent :

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = \frac{\kappa}{3}\frac{\rho_m^0}{a} - K + \frac{\Lambda}{3}a^2 \tag{3.3}$$

$$\frac{d^2a}{dt^2} = -\frac{\kappa}{6}\frac{\rho_m^0}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}a \tag{3.4}$$

Cet univers a alors une courbure positive, donc une géométrie sphérique, et il peut être statique, c'est-à-dire que $\frac{da}{dt} = 0$ et $a = 1$, si la valeur de la constante cosmologique est précisément :

$$\Lambda = \frac{\kappa}{2}\rho_m^0 \tag{3.5}$$

Au-delà du fait qu'Einstein avait alors imposé à la constante cosmologique une valeur exactement choisie pour compenser l'effet de la matière, ce qui n'est pas très naturel pour un paramètre qui peut a priori prendre n'importe quelle valeur, l'équilibre ainsi obtenu entre matière et constante cosmologique est instable. Une infime variation du facteur d'échelle autour de cet équilibre aurait entraîné une phase d'expansion ou de contraction.

Einstein appellera plus tard cette réintroduction de la constante cosmologique la "plus grande erreur de sa carrière". Il ne faudra pas attendre plus longtemps que 1929 pour qu'Edwin

Hubble découvre l'expansion de l'Univers [9], et fasse peu à peu oublier la constante cosmologique.

L'accélération de l'expansion de l'Univers

Durant la suite du XXe siècle, bien que la constante cosmologique puisse théoriquement être non-nulle si l'on se fie à l'invariance par difféomorphisme, elle était toujours supposée nulle.

C'est en 1998 que la situation de la constante cosmologique va radicalement changer. En effet, l'équipe du Supernova Cosmology Project [10] menée par Saul Perlmutter et la High-z Supernova Search Team [11] menée par Brian Schmidt et Adam Riess ont découvert que l'Univers était entré dans une phase d'expansion accélérée à partir du redshift $z \sim 0.5$.

Or, si l'on utilise la seconde équation de Friedmann en l'absence de constante cosmologique (3.2), l'accélération de l'expansion de l'Univers vérifie :

$$\frac{d^2a}{dt^2} = -\frac{\kappa\rho_m^0}{6a^2} < 0 \tag{3.6}$$

Ainsi, dans le cas d'un Univers où la matière domine, l'expansion est forcément décélérée. L'idée d'un Univers composé majoritairement de matière qui prévalait à l'époque devait donc être corrigée. Si maintenant on considère un univers possédant une constante cosmologique non-nulle, l'accélération de l'expansion y est donnée par (3.4) et peut donc être positive.

Les deux équipes ont alors constaté que, contrairement aux modèles d'univers constitués uniquement de matière, un modèle d'univers contenant de la matière et une constante cosmologique pouvait s'accorder aux observations [10, 11].

La constante cosmologique aujourd'hui

La constante cosmologique a ainsi été remise au goût du jour et fait maintenant partie intégrante du modèle de concordance de la cosmologie, le modèle ΛCDM, auquel elle donne une partie de son nom. Dans ce modèle, la constante cosmologique constitue l'ingrédient dominant de l'Univers, et sa densité d'énergie est donnée par $\Omega_\Lambda^0 = \frac{\Lambda}{3H_0^2}$ dont la mesure récente donne $\Omega_\Lambda^0 = 0.692 \pm 0.012$ [12]. Ce qui rend la constante cosmologique si séduisante, outre le fait qu'elle soit bien motivée théoriquement, réside dans la simplicité du modèle car l'accélération de l'expansion de l'Univers s'explique par un unique paramètre : la constante cosmologique elle-même. Malheureusement, elle introduit des problèmes théoriques sérieux qui viennent assombrir le tableau.

Le principal problème théorique nous vient, de manière assez surprenante, de la Théorie Quantique des Champs (QFT pour Quantum Field Theory). En effet, la QFT prédit l'existence d'une densité d'énergie du vide, qui a la particularité de se comporter comme une constante cosmologique. On peut donc dire que la QFT prédit l'existence d'une constante cosmologique, ce qui paraît prometteur. Le tenseur énergie-impulsion associé au vide quantique est donné par [13] :

$$T^v_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho_v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho_v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho_v \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

Premièrement, on constate qu'effectivement $p_v = -\rho_v$. Deuxièmement, il est possible d'estimer grossièrement la densité d'énergie du vide quantique comme la somme des énergies de point zéro d'oscillateurs harmoniques :

$$\rho_v = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3}\sqrt{k^2+m^2} \tag{3.8}$$

A priori, il faut intégrer sur tous les modes k de 0 à $+\infty$, ce qui fait diverger l'intégrale (3.8). Cependant, on sait que la QFT n'est valable au mieux jusqu'à l'échelle de Planck M_P, on peut alors introduire une coupure en impulsion et n'intégrer que de 0 à M_P.

Si l'on suppose que $m \ll M_P$, ce qui est vérifié pour toutes les particules du modèle standard de la physique des particules, on obtient $\rho_v \approx \frac{M_P^4}{16\pi^2}$. La première équation de Friedmann nous indique que l'énergie du vide peut s'identifier à une constante cosmologique provenant de la QFT selon :

$$H^2 = \frac{1}{3}\frac{(\rho+\rho_v)}{M_P^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad \Rightarrow \quad \Lambda_{QFT} = \frac{\rho_v}{M_P^2} = \frac{M_P^2}{16\pi^2} \tag{3.9}$$

Malheureusement, cette estimation n'est pas en accord avec la valeur mesurée Λ_{mes} de la constante cosmologique puisque $\Lambda_{QFT} \approx 10^{120}\Lambda_{mes}$ (certains parlent de la pire prédiction théorique de l'histoire de la physique [14]) !

De manière un peu moins grossière et brutale, un modèle en QFT avec une coupure M à haute énergie peut s'interpréter comme une théorie effective qui ne serait valide qu'à des échelles d'énergie très inférieures à M et obtenue en extrayant les contributions des modes de haute énergie. Cette procédure introduit une renormalisation des paramètres physiques, que nous avons déjà évoquée dans la section 1.2.4 et qui est due aux corrections apportées par l'extraction des contributions de ces modes de haute énergie. On applique cette procédure à l'action

qui décrit le mieux notre compréhension actuelle de la nature :

$$\mathcal{S}[\phi, g] = \mathcal{S}_{SM}[\phi, g] + \frac{M_P^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R[g] + 2\Lambda_{RG} \right) \tag{3.10}$$

où ϕ prend en compte tous les champs de matière connus (fermions, champs de jauge et champ de Higgs), $\mathcal{S}_{SM}$ est l'action du modèle standard de la physique des particules et Λ_{RG} est la constante cosmologique qui provient de la relativité générale avant renormalisation et que l'on appellera donc paramètre nu.

On peut alors montrer que dans ce cadre, $\mathcal{S}_{SM}$ va introduire, du fait de la renormalisation, un terme de la forme $\int d^4x \sqrt{-g} \Lambda(M)$ [15], où $\Lambda(M) = O\left(M^4\right)$. Ainsi, la constante cosmologique est renormalisée suivant :

$$M_P^2 \Lambda_{RG} \to M_P^2 \Lambda_{RG} + \Lambda(M) \equiv M_P^2 \Lambda_{QFT} \tag{3.11}$$

Λ_{QFT} tient donc compte du paramètre nu et de l'effet dû à la renormalisation. Si la coupure se fait à la masse de Planck, on retrouve le résultat (3.9) à moins que la constante $M_P^2 \Lambda_{RG}$ ne soit telle qu'elle élimine quasi-exactement $\Lambda(M)$, ce qui est conceptuellement difficilement acceptable. Mais nous ne sommes pas obligés de supposer que la théorie actuelle est valide jusqu'à la masse de Planck. Si l'on suppose qu'elle est valide jusqu'à une échelle $M \sim 100GeV$ bien testée exprimentalement au LHC par exemple, on a toujours un désaccord de l'ordre de $\Lambda_{QFT} \approx 10^{55} \Lambda_{mes}$.

Ce désaccord extrême entre la valeur mesurée de la constante cosmologique et la valeur calculée peut provenir de deux origines. Soit le calcul précédent est faux, et il faut trouver une autre méthode pour calculer la valeur de la constante cosmologique, ou bien c'est l'existence-même de la constante cosmologique qui est à repenser. Si la première approche est tout à fait légitime et féconde, nous allons ici nous concentrer sur la seconde. Un certain nombre de théories alternatives, dites de gravité modifiée, ne faisant pas appel à la constante cosmologique ont été imaginées pour résoudre les problèmes théoriques qu'elle pose.

3.1.2 À la recherche d'une autre approche

Il existe plusieurs manières de modifier la loi décrivant l'interaction gravitationnelle. Les plus populaires se rangent en trois catégories.
La première regroupe les modèles dans lesquelles on rajoute de manière ad hoc des champs supplémentaires qui peuvent être scalaires, vectoriels ou tensoriels. La plupart des modèles sont basés sur l'introduction d'un unique champ scalaire supplémentaire. Il s'agit par exemple des modèles de quintessence [16] ou des modèles de gravité $f(R)$ [17].

Les modèles au sein de la deuxième catégorie sont des théories à dimensions supplémentaires, et supposent l'existence de plus de trois dimensions spatiales. Le modèle DGP [18] en est un exemple.
Enfin, une dernière approche possible consiste à supposer que l'invariance par difféomorphisme que nous avons introduit dans la section 3.1.1 est brisée. On citera par exemple le modèle de gravité massive [19, 20] ou encore les modèles de gravité bimétrique [21–23].

Face à la grande diversité des modèles de gravité modifiée, il existe des critères théoriques pour tester leur pertinence. Ainsi, chacun de ces modèles doit vérifier au moins deux critères.
Premièrement, les modèles doivent être cohérents avec les principes fondamentaux de la physique. En particulier, ils ne doivent pas présenter de problèmes de fantôme d'Ostrogradski ou d'instabilité de Laplace. Les fantômes d'Ostrogradski sont des degrés de liberté d'énergie négative. Ils apparaissent lorsque le lagrangien du modèle dépend des dérivées d'un champ d'ordre supérieur ou égal à deux. D'après le théorème d'Ostrogradski [24], dans ce cas l'Hamiltonien n'est pas minoré par 0, et il est possible de créer des particules à partir du vide tout en vérifiant la conservation de l'énergie. Le vide est alors instable, ce qui n'est pas physiquement acceptable. Les instabilités de Laplace interviennent lorsque l'on effectue un développement perturbatif du lagrangien. Il s'agit de dire qu'une petite perturbation du champ ne doit pas croître exponentiellement.
Deuxièmement, la relativité générale ayant été très bien testée dans le système solaire [25], les modèles de gravité modifiée doivent reproduire ces résultats. Ce deuxième point est très délicat car les modèles de gravité modifiée introduisent un effet que l'on peut assimiler à une "cinquième force", qui a priori modifie fortement la dynamique du système solaire. Or, cette cinquième force constitue précisément ce qui va permettre aux modèles de prédire une accélération de l'expansion de l'Univers. Il faut donc conserver ce comportement aux échelles cosmologiques, mais atténuer suffisamment cet effet à l'échelle du système solaire. Pour arriver à concilier ces deux comportements qui semblent opposés, il faut que le modèle présente un mécanisme d'"écrantage" de la cinquième force près des corps massifs.

Nous allons illustrer toutes ces considérations abstraites dans la section suivante, en présentant la construction d'un modèle de gravité modifié à l'interface entre les modèles à champ scalaire, les modèles à dimensions supplémentaires et les modèles de gravité massive : le modèle du galileon.

3.2 Principe de construction du modèle du galileon

Le modèle du galileon, proposé en 2009 par Alberto Nicolis, Ricardo Rattazzi et Enrico Trincherini [26], est un modèle de gravité modifiée à champ scalaire sans constante cosmologique qui s'appuie sur les atouts de modèles antérieurs tels que le modèle DGP (voir la section 3.2.3).

Bien que construit de manière indépendante, l'étude de ce modèle aura permis de redécouvrir les modèles plus riches développés par Gregory Walter Horndeski en 1974 [27] dont il est un cas particulier. Sa construction se rapproche de celle du modèle standard, c'est-à-dire basée sur un principe de symétrie, ce qui en fait un modèle aussi élégant que pertinent.

3.2.1 Développement du modèle du galileon

La symétrie galiléenne

L'idée originale des auteurs est de considérer un modèle avec un champ scalaire π dont le lagrangien et les équations du mouvement sont invariants sous une transformation galiléenne (d'où le modèle tire son nom) :

$$\pi \to \pi + c + b_\mu x^\mu \tag{3.12}$$

où c est une constante et b_μ est un vecteur. Le choix de cette symétrie vient du fait que plusieurs autres modèles exhibent cette symétrie dans leurs équations (des exemples seront donnés dans la section 3.2.3). Par ailleurs, il a historiquement été imposé que l'équation du mouvement de π et les équations d'Einstein soient au plus du second, ordre, pour éviter les problèmes de fantômes d'Ostrogradski. Cette condition combinée à l'invariance des équations du mouvement sous une transformation galiléenne implique que l'équation du mouvement du champ π est une fonction de ses dérivées secondes uniquement :

$$\frac{\delta \mathcal{L}_\pi}{\delta \pi} = F\left(\partial_\mu \partial_\nu \pi\right) = 0 \tag{3.13}$$

Notons, cependant, qu'il a été découvert après la construction du modèle du galileon qu'il est, en fait, possible de développer des théories à champs scalaire dont les équations du mouvements sont d'ordre supérieur, mais qui ne possèdent pas de degré de liberté fantôme. En effet, une classe de tels modèles, qui étendent donc les modèles Horndeski à des modèles comportant des équations du mouvement d'ordre supérieur à deux, a d'abord été exhibée [28–30]. Puis, il a été démontré dans [31, 32] que les modèles sans fantômes qui présentent des équations du mouvement d'ordre supérieur à deux doivent avoir un lagrangien dégénéré (ce qui se traduit par une relation sur les coefficients des termes d'ordre supérieur). Cette découverte a alors permis de développer les modèles DHOST (Degenerate Higher-Order Scalar-Tensor), qui généralisent les extensions des modèles Horndeski précédentes (la classification a été faite jusqu'à l'ordre cubique à ce jour [33]). Ainsi, même si des termes qui aboutissent à des équations du mouvement d'ordre trois ou plus sont théoriquement viables, on ne les considère pas dans le cadre du modèle du galileon.

L'intérêt de telles conditions pour le modèle du galileon est que dans un espace-temps à quatre dimensions, cinq termes seulement peuvent rentrer dans le lagrangien. Le plus simple est le terme dit de "tadpole" : $\mathcal{L}_1 = \pi$. Il est invariant par transformation galiléenne à une dérivée totale près qui disparaît lorsque l'on considère la variation de l'action :

$$\delta\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_1\left[\pi + c + b_\mu x^\mu\right] - \mathcal{L}_1\left[\pi\right] = c + b_\mu x^\mu = \partial_\nu\left[\frac{c}{4}x^\nu + \frac{b_\mu}{4}x^\mu x^\nu\right] \tag{3.14}$$

Le second terme est un terme cinétique : $\mathcal{L}_2 = \partial_\mu\pi\partial^\mu\pi$. Sa variation par une transformation galiléenne est également une dérivée totale :

$$\delta\mathcal{L}_2 = 2b_\mu\partial^\mu\pi + b_\mu b^\mu = \partial_\nu\left[2b^\nu\pi + \frac{1}{4}b_\mu b^\mu x^\nu\right] \tag{3.15}$$

Il existe trois autres termes possibles plus compliqués explicités plus loin. Le lagrangien du galileon s'écrit alors :

$$\mathcal{L}_\pi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{5}\frac{c_i}{M^{3(i-2)}}\mathcal{L}_i \tag{3.16}$$

Les c_i sont des coefficients sans dimension qui constituent les paramètres du modèle et $M^3 \equiv M_P H_0^2$, de telle sorte que M ait la dimension d'une masse et π la dimension d'une énergie. Les $\mathcal{L}_i$ sont :

$$\mathcal{L}_1 = \pi \tag{3.17}$$

$$\mathcal{L}_2 = \partial_\mu\pi\partial^\mu\pi \tag{3.18}$$

$$\mathcal{L}_3 = \partial_\mu\pi\partial^\mu\pi\Box\pi \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_4 = \Big[&(\Box\pi)^2\left(\partial_\mu\pi\partial^\mu\pi\right) - 2\left(\Box\pi\right)\left(\partial_\mu\pi\partial^\mu\partial^\nu\pi\partial_\nu\pi\right) - \left(\partial_\mu\partial_\nu\pi\partial^\mu\partial^\nu\pi\right)\left(\partial_\rho\pi\partial^\rho\pi\right)\\ &+2\left(\partial_\mu\pi\partial^\mu\partial^\nu\pi\partial_\nu\pi\right)\Big]\end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_5 = \Big[&(\Box\pi)^3\left(\partial_\mu\pi\partial^\mu\pi\right) - 3\left(\Box\pi\right)^2\left(\partial_\mu\pi\partial^\mu\partial^\nu\pi\partial_\nu\pi\right) - 3\left(\Box\pi\right)\left(\partial_\mu\partial_\nu\pi\partial^\mu\partial^\nu\pi\right)\left(\partial_\rho\pi\partial^\rho\pi\right)\\ &+6\left(\Box\pi\right)\left(\partial_\mu\pi\partial^\mu\partial^\nu\pi\partial_\rho\partial_\nu\pi\partial^\rho\pi\right) + 2\left(\partial_\mu\partial^\nu\pi\partial_\nu\partial^\rho\pi\partial_\rho\partial^\mu\pi\right)\Big(\partial_\lambda\pi\partial^\lambda\pi\Big)\\ &+3\left(\partial_\mu\partial_\nu\pi\partial^\mu\partial^\nu\pi\right)\Big(\partial_\rho\pi\partial^\lambda\partial^\rho\pi\partial_\lambda\pi\Big) - 6\Big(\partial_\mu\pi\partial^\mu\partial^\nu\pi\partial_\rho\partial_\nu\pi\partial^\lambda\partial^\rho\pi\partial_\lambda\pi\Big)\Big]\end{aligned} \tag{3.21}$$

L'écriture covariante

Le développement précédent, tiré de l'article original [26], présente la construction du modèle dans un univers plat doté de la métrique de Minkowski. Cependant, pour que le modèle du galileon constitue une théorie de la gravité, il doit être invariant par changement de référentiel, c'est-à-dire être covariant. L'écriture covariante nous permettra notamment d'étudier le modèle du galileon dans le cadre de la cosmologie, c'est-à-dire dans la métrique FLRW.

Pour rendre le modèle covariant, la procédure est très simple au premier abord. En effet, il suffit, a priori, de remplacer les dérivées partielles intervenant dans les équations (3.17) à (3.21) par des dérivées covariantes. Il faut néanmoins vérifier que cette "covariantisation" conserve les bonnes propriétés du modèle. Le point le plus important est d'éviter tout problème de fantôme, il faut donc s'assurer que les équations du mouvement soient au plus d'ordre deux.

Le lagrangien $\mathcal{L}_1$ est identique pour un univers plat ou non, et on sait déjà que les équations du mouvement correspondantes sont de degré inférieur à deux. L'équation du mouvement du champ du galileon correspondante est tout simplement $\frac{\delta\mathcal{L}_1}{\delta\pi} = 1$, ce qui a le même effet qu'une constante cosmologique. Si l'on conserve ce terme, le modèle ΛCDM est inclus dans le modèle du galileon, ce qui rend leur comparaison délicate. Ainsi, ce terme sera omis pour le modèle du galileon en imposant $c_1 = 0$ dans toute la suite . Le modèle du galileon constitue, dans ce cas, une véritable alternative au modèle ΛCDM.

Le lagrangien $\mathcal{L}_2$ sous sa forme covariante est donné par :

$$\mathcal{L}_2 = \nabla_\mu\pi\nabla^\mu\pi = g_{\mu\nu}\nabla^\mu\pi\nabla^\nu\pi \tag{3.22}$$

L'équation du mouvement et le tenseur énergie-impulsion correspondants sont bien d'ordre inférieur à deux et sont donnés par :

$$\frac{\delta\mathcal{L}_2}{\delta\pi} = -2\Box\pi \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= -2\frac{\delta\mathcal{L}_2}{\delta g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu}\mathcal{L}_2 \\ &= -2\nabla_\mu\pi\nabla_\nu\pi + g_{\mu\nu}\nabla_\rho\pi\nabla^\rho\pi \end{aligned} \tag{3.24}$$

De même, l'équation du mouvement et le tenseur énergie-impulsion correspondants à $\mathcal{L}_3 = \nabla_\mu\pi\nabla^\mu\pi\Box\pi$ contiennent bien des dérivées d'ordre inférieur à 2 :

$$\begin{aligned} \frac{\delta\mathcal{L}_3}{\delta\pi} &= -2\left[(\Box\pi)^2 - \nabla_\mu\nabla_\nu\pi\nabla^\mu\nabla^\nu\pi + \nabla_\mu\pi\nabla_\nu\pi R^{\mu\nu}\right] \\ T_{\mu\nu} &= 2\nabla_\mu\pi\nabla_\nu\pi\Box\pi + g_{\mu\nu}\nabla_\lambda\pi\nabla^\lambda\left(\nabla^\rho\pi\nabla_\rho\pi\right) \\ &\quad -\nabla_\mu\pi\nabla_\nu\left(\nabla_\lambda\pi\nabla^\lambda\pi\right) - \nabla_\nu\pi\nabla_\mu\left(\nabla_\lambda\pi\nabla^\lambda\pi\right) \end{aligned} \tag{3.25}$$

où l'on a introduit le tenseur de Ricci $R^{\mu\nu}$ tel que $[\nabla^\mu, \Box] = R^{\mu\nu}\nabla_\nu$.

Malheureusement, si l'on effectue ces mêmes vérifications pour $\mathcal{L}_4$ et $\mathcal{L}_5$, ce que nous ne ferons pas ici car ce serait trop long (voir [34] pour le développement complet), on observe que l'équation du mouvement du champ du galileon et le tenseur énergie-impulsion contiennent des dérivées du champ du galileon et de la métrique d'ordre supérieur à deux. Il a été montré [34] que l'on peut éliminer les termes d'ordre supérieur, de manière à respecter les principes de

construction du modèle, en ajoutant une combinaison unique de termes de couplage entre le champ du galileon et la métrique. Les lagrangiens obtenus suite à ces ajouts et après quelques simplifications (intégration par parties, commutations et extraction de dérivées totales) sont :

$$\mathcal{L}_4 = \nabla_\mu \pi \nabla^\mu \pi \left[2 (\Box \pi)^2 - 2 (\nabla_\mu \nabla_\nu \pi \nabla_\mu \nabla^\nu \pi) - \frac{1}{2} (\nabla_\mu \pi \nabla^\mu \pi) R \right] \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_5 = \nabla_\mu \pi \nabla^\mu \pi \Big[& (\Box \pi)^3 - 3 (\Box \pi) (\nabla_\mu \nabla_\nu \pi \nabla_\mu \nabla^\nu \pi) \\ & + 2 (\nabla_\mu \nabla^\nu \pi \nabla_\nu \nabla^\rho \pi \nabla_\rho \nabla^\mu \pi) - 6 (\nabla_\mu \pi \nabla^\mu \nabla^\nu \pi G_{\nu\rho} \nabla^\rho \pi) \Big] \end{aligned} \tag{3.27}$$

avec $G_{\mu\nu}$ le tenseur d'Einstein. Le couplage entre le galileon et la métrique se fait par le terme $(\nabla_\mu \pi \nabla^\mu \pi) R$ de $\mathcal{L}_4$ et le terme $\nabla_\mu \pi \nabla^\mu \nabla^\nu \pi G_{\nu\rho} \nabla^\rho \pi$ de $\mathcal{L}_5$. Avec ces lagrangiens, les équations du mouvement font cependant intervenir des dérivées d'ordre un de π, ce qui brise la symétrie galiléenne du modèle, mais reste un moindre mal pour éviter les problèmes de fantômes. L'action du galileon covariant s'écrit alors :

$$\mathcal{S} [\phi, g] = \mathcal{S}_{SM} [\phi, \tilde{g}] + \frac{M_P^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R [g] - \mathcal{L}_\pi \right) \tag{3.28}$$

où $\mathcal{L}_\pi$ est défini par (3.16) avec les lagrangiens covariants présentés ci-dessus.

Le couplage à la matière

Il est important de noter que la dynamique des champs de matière du modèle standard dépend également du champ du galileon. En effet, les champs de matière sont sensibles à une métrique effective $\tilde{g}_{\mu\nu}$ qui dépend de la vraie métrique $g_{\mu\nu}$, donc de la géométrie de l'espace-temps, et du champ scalaire ainsi que de ses dérivées [35]. Si l'on suppose que la métrique effective doit respecter la causalité, le principe d'équivalence faible et ne pas dépendre des dérivées secondes du champ scalaire [1], alors on peut montrer qu'elle est de la forme [36] :

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = A (\pi, X) g_{\mu\nu} + B (\pi, X) \nabla_\mu \pi \nabla_\nu \pi \tag{3.29}$$

où X est le terme canonique pour un champ scalaire $X = -\frac{(\nabla \pi)^2}{2}$.
Si $A (\pi) = e^{\pi / M_P}$ et $B = 0$, cas d'une transformation dite conforme et très étudiée dans le cadre d'autres modèles de gravité modifiée à champ scalaire, alors le développement du lagrangien introduit un nouveau terme de couplage conforme $\propto \pi T^\mu_\mu$.
Si $A = 0$ et $B = 1$, cas d'une transformation disformelle, alors le développement du lagrangien introduit un nouveau terme de couplage disformel de la forme $\propto \nabla_\mu \pi \nabla_\nu \pi T^{\mu\nu}$.

1. Dans [36], les termes possédant des dérivées secondes et plus du champ scalaire ont été exclus, car ils étaient alors supposés introduire des fantômes. Nous savons aujourd'hui que ce n'est pas forcément le cas, le modèle du galileon en étant un exemple flagrant. Il est alors possible que la métrique (3.29) puisse être étendue en ajoutant des termes d'ordre supérieur. Cependant, de telles extensions n'ont pas encore été développées, on ne considèrera donc dans cette thèse que les métriques effectives de la forme ci-dessus.

En gardant toute la généralité du modèle, on peut donc ajouter ces termes de couplage à l'action du galileon, ce qui revient à extraire l'interaction avec le champ du galileon de $\mathcal{S}_{SM}$. De plus, ces termes d'interaction entre le champ du galileon et les champs de matière apparaissent naturellement dans les développements plus généraux qui redonnent le modèle du galileon (voir section 3.2.3), ce qui apporte une justification théorique supplémentaire à leur introduction. L'action devient alors :

$$\mathcal{S}_E\left[\phi, g, \pi\right] = \mathcal{S}_{SM}\left[\phi, g\right] + \int d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{M_P^2}{2}R - \mathcal{L}_\pi - \frac{c_0}{M_P}\pi T^\mu_\mu - \frac{c_G}{M_P M^3}\nabla_\mu\pi\nabla_\nu\pi T^{\mu\nu}\right) \quad (3.30)$$

Les termes de couplage directs des champs de matière et du champ du galileon impliquent que la matière va interagir différemment avec la gravité selon sa nature, ce qui conduit à la non-conservation du tenseur énergie-impulsion de la matière. Il est heureusement possible de transformer cette action pour l'écrire sous une forme dans laquelle il n'y a pas de couplage direct entre les champs de matière et le champ du galileon. Pour cela, on effectue une transformation astucieuse de la métrique, de la forme (3.29) [2]. Suite à ce changement de référentiel, l'action s'écrit :

$$\mathcal{S}_J\left[\phi, \tilde{g}, \pi\right] = \mathcal{S}_{SM}\left[\phi, \tilde{g}\right] + \int d^4x\sqrt{-\tilde{g}}\left[\left(1 - 2c_0\frac{\pi}{M_P}\right)\frac{M_P^2}{2}\tilde{R} - \mathcal{L}_\pi - \frac{M_P}{M^3}c_G\tilde{G}^{\mu\nu}\nabla_\mu\pi\nabla_\nu\pi\right] \quad (3.31)$$

Il n'y a alors plus de couplage direct entre la matière et le champ du galileon, leur interaction s'effectue par l'intermédiaire de la gravité. On dit alors que le couplage est minimal entre la matière et la gravité. Cette transformation qui restore le principe d'équivalence faible et la conservation du tenseur énergie-impulsion de la matière a toutefois un prix, puisqu'il introduit un couplage supplémentaire entre la métrique et π. Ce prix est néanmoins faible dans le cas du modèle du galileon covariant qui nécessite déjà l'introduction d'un couplage entre le galileon et la métrique dans $\mathcal{L}_4$ et $\mathcal{L}_5$.

Les deux actions (3.30) et (3.31) représentent la même physique, mais leur usage est plus ou moins pertinent selon la situation à l'étude. L'action (3.30) pour laquelle le scalaire de Ricci n'est pas couplé à π est écrite dans le référentiel d'Einstein, et est intéressante si l'on s'intéresse à la dynamique de la gravité qui vérifie les équations d'Einstein. L'action (3.31) pour laquelle la matière n'est pas couplée directement à π est écrite dans le référentiel de Jordan, et est intéressante si l'on s'intéresse à la dynamique de la matière qui a alors un mouvement de chute libre et suit donc les géodésiques. Dans cette étude, à l'exception de la section suivante où l'on explicite l'effet de la cinquième force, nous nous placerons toujours dans le référentiel de Jordan.

2. Il faut s'assurer néanmoins que la transformation conserve les propriétés du modèle, c'est-à-dire qu'un modèle de galileon transformé reste un modèle de galileon. Il a été montré dans [37] que les théories DHOST sont stables par une transformation de la forme (3.29). Cependant, ce n'est également le cas des théories Horndeski, et donc en particulier du modèle du galileon, que lorsque $A\left(\pi, X\right) = A\left(\pi\right)$ et $B\left(\pi, X\right) = B\left(\pi\right)$ [38].

3.2.2 L'effet Vainshtein

La cinquième force

Comme nous l'avions évoqué à la fin de la section 3.1.2, le modèle du galileon introduit un effet que l'on peut interpréter comme une "cinquième force". Un bon moyen de se rendre compte de cet effet est de considérer un espace-temps plat (les dérivées covariantes se réduisent alors à des dérivées partielles) et statique dans lequel est placé un objet massif ponctuel, la terre ou une étoile par exemple, de masse M_*. L'action du galileon est, dans ce cas, donnée par :

$$\mathcal{S}_\pi = \int d^4x\sqrt{-g}\left(-\mathcal{L}_\pi - \frac{c_0}{M_P}\pi T^\mu_\mu - \frac{c_G}{M_P M^3}\partial_\mu\pi\partial_\nu\pi T^{\mu\nu}\right) \tag{3.32}$$

où l'on s'est placés dans le référentiel d'Einstein dans lequel l'émergence de la cinquième force ainsi que ses caractéristiques, qui concernent la dynamique de la gravité elle-même, apparaissent plus clairement. Insistons tout de même sur le fait que les référentiels d'Einstein et de Jordan sont équivalents et que les calculs présentés dans la suite de cette section pourraient être effectués dans ce dernier. La dynamique du galileon est dictée par son équation du mouvement :

$$-\frac{\delta\mathcal{L}_\pi}{\delta\pi} = -\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{5}\frac{c_i}{M^{3(1-2)}}\frac{\delta\mathcal{L}_i}{\delta\pi} = \frac{c_0}{M_P}T^\mu_\mu - \frac{2c_G}{M_P M^3}\partial_\mu\left(\partial_\nu\pi T^{\mu\nu}\right) \tag{3.33}$$

Si l'on veut que le modèle du galileon soit un bon modèle pour la cosmologie, il faut qu'en l'absence de matière on retrouve la métrique FLRW avec une expansion accélérée, c'est-à-dire un espace de de Sitter [39]. Il a été montré dans l'article original introduisant le modèle [26] qu'une solution pour π vérifiant ces conditions existe et est donnée par :

$$\pi_{dS}(x) = -\frac{M_P}{4c_0}H^2 x_\mu x^\mu \quad \text{et} \quad \partial_\mu\partial_\nu\pi_{dS} = -\frac{M_P}{4c_0}H^2\eta_{\mu\nu} \tag{3.34}$$

avec $\eta_{\mu\nu}$ la métrique de Minkowski. Pour le cas qui nous intéresse ici, nous sommes en présence d'un objet massif, le champ du galileon peut alors s'écrire comme $\pi \to \pi_{dS} + \pi$, où π désigne maintenant la contribution au champ du galileon provenant de l'objet massif, considéré comme une contribution additionnelle à la solution cosmologique π_{dS}. Cela va avoir pour conséquence de modifier les coefficients qui interviennent dans l'équation du mouvement du galileon $c_i \to d_i$ [40], avec :

$$\begin{pmatrix} d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3\frac{M_P}{c_0}H^2 & \frac{9}{2}\left(\frac{M_P}{c_0}\right)^2 H^4 & -3\left(\frac{M_P}{c_0}\right)^3 H^6 \\ 0 & 1 & -3\frac{M_P}{c_0}H^2 & 3\left(\frac{M_P}{c_0}\right)^2 H^4 \\ 0 & 0 & 1 & -2\frac{M_P}{c_0}H^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 \\ \frac{c_3}{M^3} \\ \frac{c_4}{M^6} \\ \frac{c_5}{M^9} \end{pmatrix} \tag{3.35}$$

Comme l'objet massif est statique, ponctuel et non-relativiste, on peut négliger sa pression par rapport à sa densité d'énergie de masse. Son tenseur énergie-impulsion est alors donné par :

$$T_{\mu\nu}(r) = \begin{pmatrix} M_* \delta(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.36}$$

Ainsi, pour une solution à symétrie sphérique et statique, $\pi(t, x, y, z) = \pi(r)$. L'équation du mouvement de π s'en trouve grandement simplifiée et est donnée, tous calculs faits après une première intégration sur r, par :

$$d_2 \left(\frac{1}{r}\frac{d\pi}{dr}\right) + 2d_3 \left(\frac{1}{r}\frac{d\pi}{dr}\right)^2 + 2d_4 \left(\frac{1}{r}\frac{d\pi}{dr}\right)^3 = c_0 \frac{M_*}{M_P}\frac{1}{4\pi r^3} \tag{3.37}$$

Il est intéressant de noter que dans le cas d'un espace-temps plat et statique dans lequel est placé un objet massif ponctuel, le lagrangien $\mathcal{L}_5$ et le terme de couplage disformel n'interviennent pas. Ce n'est pas le cas en général.

Si $d_3 = d_4 = 0$, on se retrouve dans le régime linéaire, et l'équation précédente se réécrit :

$$\frac{d\pi}{dr} = \frac{c_0}{M_P}\frac{M_*}{4\pi r^2 d_2} \tag{3.38}$$

Comme π a la dimension d'une énergie, on peut interpréter sa variation en fonction du rayon comme une cinquième force $F_\pi = \frac{1}{M_P}\frac{d\pi}{dr}$ telle que :

$$\frac{F_\pi}{F_N} = \frac{c_0}{4\pi d_2} \tag{3.39}$$

où F_N est la force de gravitation newtonienne. Dans le cadre général, où $d_3 \neq 0$ ou $d_4 \neq 0$, les non-linéarités deviennent importantes et on écrit :

$$\frac{d\pi}{dr} = \frac{c_0}{M_P}\frac{M_*}{4\pi r^2 d_2} g(r) \quad \text{et} \quad \frac{F_\pi}{F_N} = \frac{c_0}{4\pi d_2} g(r) \tag{3.40}$$

Le mécanisme d'écrantage

Nous venons de voir que le champ du galileon introduit une cinquième force qui va venir perturber la dynamique des corps dans un champ de gravité. En effet, si $d_3 = d_4 = 0$, c'est-à-dire si $g(r) = 1$, et si $c_0 \sim d_2 \sim 1$, alors la cinquième force engendrée par le galileon est du même ordre de grandeur que la force d'attraction gravitationnelle newtonienne.

Dans le cas général, on introduit les longueurs caractéristiques suivantes :

$$R_1^3 = \frac{c_0}{M_P}\frac{M_* d_3}{2\pi d_2^2} \tag{3.41}$$

$$R_2^6 = \frac{c_0^2}{M_P^2}\frac{M_*^2 d_4}{8\pi^2 d_2^3} \tag{3.42}$$

On peut alors réécrire (3.37) en fonction de ces longueurs :

$$g + \left(\frac{R_1}{r}\right)^3 g^2 + \left(\frac{R_2}{r}\right)^6 g^3 = 1 \tag{3.43}$$

On voit alors que si R_1 ou R_2 est non nul, alors nécessairement, $g(r)$ doit tendre rapidement vers 0 lorsque $r \to 0$, c'est-à-dire lorsque l'on se rapproche de l'objet massif. Ainsi, la force générée par le galileon est écrantée par l'effet des non-linéarités du modèle, pour un rayon $r < r_v$, où r_v est appelé le rayon de Vainshtein. Une bonne estimation du rayon de Vainshtein est donnée par $r_v \sim \max(R_1, R_2)$, il peut donc être rendu arbitrairement grand en jouant sur les paramètres du lagrangien du galileon.

Il a été démontré dans [40] que pour que des solutions stables de l'équation du mouvement existent, il faut que $R_1 > R_2$ (dans ce cas, $r_v = R_1$). On introduit alors le paramètre $\alpha = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3$, qui quantifie la hiérarchie entre R_1 et R_2, et qui va nous permettre de déterminer deux régimes au sein du rayon de Vainshtein pour lesquels le résultat peut être approché :

— $\alpha R_2 \ll r \ll R_1$:

$$g(r) \sim \left(\frac{r}{R_1}\right)^{\frac{3}{2}} \quad \text{et} \quad \frac{F_\pi}{F_N} = \frac{c_0}{4\pi d_2}\left(\frac{r}{R_1}\right)^{\frac{3}{2}} \tag{3.44}$$

— $r \ll \alpha R_2$:

$$g(r) \sim \left(\frac{r}{R_2}\right)^{2} \quad \text{et} \quad \frac{F_\pi}{F_N} = \frac{c_0}{4\pi d_2}\left(\frac{r}{R_2}\right)^{2} \tag{3.45}$$

La force engendrée par le galileon est donc d'autant plus négligeable par rapport à la force newtonienne que l'on se trouve loin à l'intérieur du rayon de Vainshtein. Si l'on veut que le modèle du galileon passe les tests de gravité effectués dans le système solaire, il faut que les rayons de Vainshtein des corps célestes le composant soient bien plus grands que la taille du système solaire. Nous avons vu qu'il était toujours possible de trouver des valeurs des paramètres pour que ce soit le cas, cet argument va néanmoins permettre de contraindre l'espace des paramètres du modèle du galileon. Par exemple, [35] met des limites sur les paramètres c_i à partir de l'effet Vainshtein, en utilisant les résultats de l'expérience Lunar Laser Ranging [41].

3.2.3 Le galileon comme limite d'autres modèles

Au-delà de l'intérêt que peut avoir le modèle du galileon en lui-même, son étude est particulièrement intéressante car le comportement de plusieurs autres modèles de gravité modifiée se réduit à celui d'un modèle de galileon dans une certaine limite. C'est notamment le cas des modèles de gravité massive et du modèle DGP que nous exposerons ici.

La gravité massive

Pour donner un sens au concept de masse pour la gravité, il faut formuler la relativité générale comme une théorie des champs en interactions(la masse sera alors celle du champ représentant la gravité) ce qui n'est a priori pas le cas. L'approche perturbative est assez naturelle, et on étudie les petites perturbations de la métrique autour d'un espace-temps plat :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} + ... \tag{3.46}$$

où $\eta_{\mu\nu}$ est la métrique de Minkowski et $h_{\mu\nu}$ correspond aux perturbations de la métrique. La relativité générale peut être alors pensée comme une théorie des interactions du champ $h_{\mu\nu}$ dans un espace-temps plat. Le champ $h_{\mu\nu}$ est un champ tensoriel de spin 2, auquel on associe une particule de masse m que l'on appellera graviton, et qui vérifie, après linéarisation, l'équation du mouvement suivante :

$$\left(\Box + m^2\right) h_{\mu\nu} = 0 \tag{3.47}$$

Cette équation du mouvement peut être obtenue à partir du lagrangien de Pauli-Fierz [42] :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{PF} &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{mass} \\
&= \frac{1}{2}\partial_\lambda h_{\mu\nu}\partial^\lambda h^{\mu\nu} + \partial_\mu h_{\nu\lambda}\partial^\nu h^{\mu\lambda} - \partial_\mu h^{\mu\nu}\partial_\nu h + \frac{1}{2}\partial_\lambda h \partial_\lambda h - \frac{1}{2}m^2\left(h_{\mu\nu}h^{\mu\nu} - h^2\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left[\left(\partial_a h_{bB}\right)\left(\partial_A h_{cC}\right) + \frac{m^2}{4}h_{aA}h_{bB}\eta_{cC}\right]\eta_{dD}\epsilon^{abcd}\epsilon^{ABCD}
\end{aligned} \tag{3.48}$$

où ϵ est le symbole de Levi-Civita.

Le champ du graviton $h_{\mu\nu}$ est un champ tensoriel symétrique et possède donc a priori 10 degrés de liberté. Cependant, l'identité de Bianchi $\nabla_{\mu\nu}G^{\mu\nu} = 0$ impose 4 contraintes. De plus, lorsque le graviton est sans masse, le lagrangien (3.48) est invariant par tout changement de coordonnées $x^\mu \to x^\mu + \xi^\mu$, ce qui correspond à la transformation :

$$h_{\mu\nu} \to h_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu \tag{3.49}$$

Finalement, le graviton sans masse possède 2 degrés de liberté. Ce n'est pas le cas du graviton massif car le terme de masse brise l'invariance du lagrangien par changement général de coordonnées. Ainsi le lagrangien du graviton massif possède en général 6 degrés de liberté, soit 1 de plus qu'un boson de spin $s = 2$ dont le nombre de degré de liberté est $2s + 1 = 5$. Le degré de liberté supplémentaire correspond à un fantôme, mais le choix astucieux, fait par Fierz et Pauli, du terme de masse en $h_{\mu\nu}h^{\mu\nu} - h^2$ dans le lagrangien permet de se débarrasser de ce dernier [42].

Explicitons les contributions provenant des 5 degrés de liberté de $h_{\mu\nu}$. Dans ce but, on commence par restaurer la symétrie brisée par le terme de masse, en introduisant de nouveaux champs pour extraire les degrés de liberté, dans le formalisme de Stueckelberg [43, 44]. On commence par redéfinir le champ du graviton en introduisant un champ vectoriel A_μ, restaurant l'invariance par changement de coordonnées :

$$h_{\mu\nu} = H_{\mu\nu} + \frac{\partial_\mu A_\nu + \partial_\nu A_\mu}{2m} \tag{3.50}$$

Le terme de masse du lagrangien devient alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{mass} &= \frac{m^2}{4} h_{aA} h_{bB} \eta_{cC} \eta_{dD} \epsilon^{abcd} \epsilon^{ABCD} \\ &= \left(\frac{m^2}{4} H_{aA} H_{bB} - \frac{m}{2} A_A \partial_a H_{bB} \right) \eta_{cC} \eta_{dD} \epsilon^{abcd} \epsilon^{ABCD} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \end{aligned} \tag{3.51}$$

où $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. La symétrie $U(1)$ pour le champ vectoriel A_μ est elle-même brisée par le terme de masse. De même que précédemment, on la restaure en redéfinissant le champ vectoriel à l'aide d'un nouveau champ scalaire π :

$$A_A = V_A - \frac{\partial_A \pi}{m} \tag{3.52}$$

Le terme brisant la symétrie pour A_μ devient alors :

$$-mA_A \partial_a H_{bB} = -mV_A \partial_a H_{bB} + \pi \partial_a \partial_A H_{bB} \tag{3.53}$$

La dernière redéfinition $H_{aA} = h^c_{aA} + \frac{\pi}{2}\eta_{aA}$, permet d'obtenir le lagrangien du modèle :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - 3 (\partial\pi)^2 + \frac{m}{2} \left[m h^c_{aA} h^c_{bB} - V_A \partial_a h^c_{bB} - \frac{1}{2} V_A \partial_a \pi \eta_{bB} \right] \eta_{cC} \eta_{dD} \epsilon^{abcd} \epsilon^{ABCD} \tag{3.54}$$

On a ainsi décomposé les 5 degrés de liberté du graviton en un mode d'hélicité 2, $h^c_{\mu\nu}$, un mode d'hélicité 1, V_μ, et un mode d'hélicité 0, π, selon :

$$h_{\mu\nu} = h^c_{\mu\nu} + \frac{1}{2m}\left(\partial_\mu V_\nu + \partial_\nu V_\mu\right) + \frac{\pi}{2}\eta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu\partial_\nu\pi}{m^2} \tag{3.55}$$

Comme la gravité est attractive même à très grande échelle, la masse du graviton est nécessairement très faible, ce qui nous pousse à nous placer dans la limite de découplage où, entre autres, $m \to 0$. On voit d'après la décomposition (3.55) que c'est le mode d'hélicité 0 qui domine alors, et celui-ci vérifie la symétrie galiléenne. Le lagrangien devient alors :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - 3\left(\partial\pi\right)^2 \tag{3.56}$$

On s'est ici limités aux termes ne contenant que des dérivées premières du champ, mais si on s'autorise des dérivées d'ordre supérieur, on retrouve alors le lagrangien du galileon.

Le modèle DGP

Le modèle DGP, du nom de ses auteurs G. Dvali, G. Gabadadze et M. Porrati [18] est un modèle de gravité modifiée dans lequel l'Univers possède une dimension spatiale supplémentaire. Cette dimension n'est pas compactifiée, elle est de taille infinie, et plate. Notre espace-temps à 4 dimensions constitue alors une hypersurface contenue dans l'espace-temps à 5 dimensions, appelée brane (un développement plus détaillé des modèles d'univers branaires est fait dans le chapitre 5). Il s'agit alors de faire en sorte que la gravité émergente sur la brane, due à la propagation de la gravité dans les 5 dimensions, reproduise le comportement de la relativité générale aux échelles auxquelles la gravité a été testée. Cela peut être obtenu grâce au terme de courbure sur la brane, donné ci-après :

$$M_P^2 \int d^4x\sqrt{-g}R \tag{3.57}$$

Ce terme introduit un potentiel gravitationnel en $1/r$ aux petites échelles sur la brane. De plus, même s'il est absent dans la théorie classique, ce terme peut apparaître sur la brane grâce à des corrections quantiques. Le lagrangien du modèle DGP s'écrit donc :

$$\mathcal{S}_{DGP} = \frac{M_5^3}{2}\int d^5X\sqrt{-G}\mathcal{R}^{(5)} + \frac{M_P^2}{2}\int d^4x\sqrt{-g}R \tag{3.58}$$

où M_5 est la masse de Planck à 5 dimensions, a priori différente de M_P, X est la variable de coordonnées à 5 dimensions, G est la métrique dans l'espace complet et $\mathcal{R}^{(5)}$ est le scalaire de

Ricci associé. Par ailleurs, g est la métrique induite sur la brane par G et R le scalaire de Ricci associé.

Le terme à 5 dimensions est écranté grâce à l'effet Vainshtein produit par les non-linéarités, ce qui permet au terme sur la brane de dominer à petites échelles. De même que pour la gravité massive, l'effet de la dimension supplémentaire sur la gravité aux petites échelles peut être décrite par un scalaire additionnel π. On constate, a posteriori, que l'action du modèle est invariant par une transformation galiléenne du champ scalaire. Bien que le modèle DGP conduisant à un univers en expansion accélérée soit entaché de problèmes de fantômes, c'est en considérant l'efficacité de l'écrantage par effet Vainshtein que le modèle du galileon a été historiquement développé. Le modèle DGP aura également inspiré les constructions branaires du galileon développées par la suite [45].

3.3 Un Univers galileon homogène

Maintenant que nous avons présenté comment est construit le modèle du galileon, nous allons étudier le comportement de ce dernier dans le contexte de la cosmologie. Pour ce faire, nous allons d'abord étudier l'évolution du fond cosmologique, c'est-à-dire en prenant en compte un univers homogène sans perturbations. Celles-ci serons prises en compte dans la partie 3.4.
Au sein de cette partie seront présentées les méthodes de calcul utilisées par J. Neveu et al. [1–3] et A. Barreira et al. [4–6]. La première méthode est celle que j'ai utilisé pour comparer prédictions et observations cosmologiques, et la seconde m'a permis de valider les prédictions à la fois pour le fond cosmologique et pour les perturbations obtenues avec ma version modifiée de CAMB.

3.3.1 Équations dans la métrique FLRW

Pour obtenir les équations d'évolution d'un univers contenant un galileon, on part de l'action dans le référentiel de Jordan (3.31) :

$$\mathcal{S}\left[\phi, g, \pi\right] = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\left(1 - 2c_0\frac{\pi}{M_P}\right)\frac{M_P^2}{2}R - \mathcal{L}_\pi - \frac{M_P}{M^3}c_G G^{\mu\nu}\nabla_\mu\pi\nabla_\nu\pi - \mathcal{L}_{SM}\left[\phi, g\right]\right] \tag{3.59}$$

L'équation du mouvement du champ du galileon et les équations d'Einstein sont données par :

$$0 = \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{5}\frac{c_i}{M^{3(i-2)}}\frac{\delta\mathcal{L}_i}{\delta\pi} + M_P c_0 R - 2\frac{c_G M_P}{M^3}G^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\pi \tag{3.60}$$

$$\begin{aligned} 0 = &-\left(1 - 2c_0\frac{\pi}{M_P}\right)G^{\mu\nu} + T_\mu^{SM} - 2M_P c_0\left(\nabla_\mu\nabla_\nu\pi - g_{\mu\nu}\Box\pi\right) \\ &+\sum_{i=2}^{5}\frac{c_i}{M^{3(1-2)}}T_{\mu\nu}^{(c_i)} + \frac{c_G M_P}{M^3}T_{\mu\nu}^{(c_G)} \end{aligned} \tag{3.61}$$

où les $T_{\mu\nu}^{(c_i)}$ sont donnés par (3.24) pour c_2 et (3.25) pour c_3, les autres termes étant donnés en annexe A. Comme on suppose pour l'instant que l'Univers est homogène et isotrope, et qu'en plus on fait l'hypothèse d'un espace-temps plat, on utilise la métrique FLRW sans courbure :

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\,\delta_{ij}dx^i dx^j \tag{3.62}$$

De plus, l'Univers étant supposé homogène et isotrope, le champ du galileon ne dépend plus que du temps : $\pi(t,\vec{x}) = \pi(t)$. Dans ce cas, l'équation d'Einstein (00) s'écrit :

$$\begin{aligned} M_P^2 H^2\left(1 - 2c_0\frac{\pi}{M_P}\right) = \frac{1}{3}\Bigg[&\rho_m + \rho_\gamma + \rho_\nu + 6\frac{c_0}{M_P}H\dot{\pi} + \frac{c_2}{2}\dot{\pi}^2 - 6\frac{c_3}{M^3}H\dot{\pi}^3 \\ &+\frac{45}{2}\frac{c_4}{M^6}H^2\dot{\pi}^4 - 21\frac{c_5}{M^9}H^3\dot{\pi}^5 - 9\frac{c_G M_P}{M^3}H^2\dot{\pi}^2\Bigg] \end{aligned} \tag{3.63}$$

où les quantités surmontées d'un point indiquent une dérivée par rapport au temps t.

On voit qu'il s'agit d'une équation différentielle non-linéaire faisant intervenir les fonctions inconnues $(\pi, \dot{\pi}, H)$, et dont la résolution sera très gourmande en temps de calcul. Néanmoins, il a été montré dans [3], que les modèles de galileon avec un couplage conforme sont défavorisés par rapport aux autres. C'est pourquoi dans cette thèse nous ne considérerons que les modèles pour lesquels $c_0 = 0$, c'est-à-dire pour lesquels le système d'équations différentielles à intégrer ne fait intervenir que les fonctions inconnues $(\dot{\pi}, H)$. On pourrait s'inquiéter de ce que ce choix rendrait fausse la discussion de la section 3.2.2 concernant le mécanisme d'écrantage. Heureusement, il a été montré dans [46] que même en l'absence d'un terme de couplage conforme dans le lagrangien, un tel couplage peut être induit autour d'un corps massif par les variations temporelles du galileon, avec un couplage effectif de la forme $c_0^{eff} \propto \dot{\pi}_{dS}$, rendant à nouveau efficace le mécanisme de Vainshtein.

Lorsque $c_0 = 0$, les équations d'Einstein se réduisent aux deux équations de Friedmann :

$$3M_P^2 H^2 = \rho_{tot} = \rho_m + \rho_\gamma + \rho_\nu + \rho_\pi \tag{3.64}$$

$$3M_P^2 H^2 + 2M_P^2\dot{H} = -p_{tot} = -p_\gamma - p_\nu - p_\pi \tag{3.65}$$

où ρ_π et p_π sont la densité d'énergie et la pression associés au galileon. Ces grandeurs sont obtenues à partir des $T_{\mu\nu}^{(c_i)}$ et sont données par :

$$\begin{aligned}
\rho_\pi &= \frac{c_2}{2}\dot{\pi}^2 - 6\frac{c_3}{M^3}H\dot{\pi}^3 + \frac{45}{2}\frac{c_4}{M^6}H^2\dot{\pi}^4 - 21\frac{c_5}{M^9}H^3\dot{\pi}^5 - 9\frac{c_G M_P}{M^3}H^2\dot{\pi}^2 \\
p_\pi &= \frac{c_2}{2}\dot{\pi}^2 + 2\frac{c_3}{M^3}\dot{\pi}^2\ddot{\pi} - 3\frac{c_4}{M^6}\left[4H\dot{\pi}^3\ddot{\pi} + \dot{\pi}^4\dot{H} + \frac{3}{2}H^2\dot{\pi}^4\right] \\
&\quad +3\frac{c_5}{M^9}\left[5H^2\dot{\pi}^4\ddot{\pi} + 2H\dot{\pi}^5\dot{H} + 2H^3\dot{\pi}^5\right] + \frac{c_G M_P}{M^3}\left[4H\dot{\pi}\ddot{\pi} + 2\dot{\pi}^2\dot{H} + 3H^2\dot{\pi}^2\right]
\end{aligned} \tag{3.66}$$

L'équation du mouvement du galileon est quant à elle donnée par :

$$\begin{aligned}
0 &= c_2\left[\ddot{\pi} + 3H\dot{\pi}\right] - 3\frac{c_3}{M^3}\left[4H\dot{\pi}\ddot{\pi} + 6H^2\dot{\pi}^2 + 2\dot{\pi}^2\dot{H}\right] + 18\frac{c_4}{M^6}\left[3H^2\dot{\pi}^2\ddot{\pi} + 2H\dot{\pi}^3\dot{H} + 3H^3\dot{\pi}^3\right] \\
&\quad -15\frac{c_5}{M^9}\left[3H^4\dot{\pi}^4 + 4H^3\dot{\pi}^3\ddot{\pi} + 3H^2\dot{\pi}^4\dot{H}\right] - 6\frac{c_G M_P}{M^3}\left[H^2\ddot{\pi} + 2H\dot{\pi}\ddot{\pi} + 3H^3\dot{\pi}\right]
\end{aligned} \tag{3.67}$$

À ce stade, on dispose de trois équations pour deux fonctions inconnues, il est donc a priori possible de résoudre ce systèmes d'équations différentielles pour obtenir l'évolution du galileon et du taux d'expansion de l'Univers. Pour cela, on va mettre le système sous la forme d'équations différentielles ordinaires :

$$\frac{dy_i(t)}{dt} = f_i\left(t, y_1(t), ..., y_n(t)\right) \tag{3.68}$$

où ici $n = 2$, la variable d'évolution t est le taux d'expansion a et les y_i sont les deux fonctions inconnues π et H.

On commence par effectuer un changement de fonctions inconnues en introduisant une nouvelle fonction $x = \frac{1}{M_P}\frac{d\pi}{d\,\ln a}$, et $\bar{H} = \frac{H}{H_0}$. Les fonctions à déterminer sont maintenant $\left(x, \bar{H}\right)$, ce qui implique de réécrire les dérivées temporelles du champ du galileon selon :

$$\begin{aligned}
\dot{\pi} &= \frac{d\,\ln a}{dt}\frac{d\pi}{d\,\ln a} = M_P H x = M_P H_0 \bar{H} x \\
\ddot{\pi} &= \frac{d\,\ln a}{dt}\frac{d\dot{\pi}}{d\,\ln a} = M_P H_0^2 \bar{H}\left(\overset{o}{\bar{H}} x\right)
\end{aligned} \tag{3.69}$$

où une quantité surmonté d'un cercle indique une dérivée par rapport à $\ln(a)$.

Pour résoudre un système d'équations différentielles ordinaires, il faut fixer les conditions initiales pour les fonctions inconnues. Puisque l'on dispose de trois équations pour seulement deux inconnues, on pourrait penser que l'une des équations peut être utilisée pour fixer la condition initiale. Cette approche ne fonctionne pas ici car il existe une dégénérescence entre les paramètres c_i et la condition initiale sur x que nous noterons x_i. En effet, il a été montré dans

[47] que toutes les équations d'évolutions sont invariantes par la transformation suivante :

$$\begin{aligned} c_i &\to \bar{c}_i \equiv c_i A^i, \quad i = 2, ..., 5 \\ c_G &\to \bar{c}_G \equiv c_G A^2 \\ x &\to \bar{x} \equiv x/A \end{aligned} \tag{3.70}$$

où A est arbitraire et doit être fixé avant de faire le choix de la condition initiale. Comme nous le verrons dans la suite, des choix de paramétrisations différents ont été faits par J. Neveu et al. et A. Barreira et al. Il conviendra donc de préciser le choix de A pour chaque paramétrisation ainsi que la transformation à effectuer pour passer de l'une à l'autre.

Supposons le choix de A fait, les nouvelles fonctions inconnues sont alors $(\bar{x}, \bar{H})$ et en fonction de ces dernières, la densité d'énergie du galileon, sa pression et son équation du mouvement se réécrivent :

$$\rho_\pi = H_0^2 M_P^2 \left[\frac{\bar{c}_2}{2} \bar{H}^2 \bar{x}^2 - 6\bar{c}_3 \bar{H}^4 \bar{x}^3 + \frac{45}{2} \bar{c}_4 \bar{H}^6 \bar{x}^4 - 21\bar{c}_5 \bar{H}^8 \bar{x}^5 - 9\bar{c}_G \bar{H}^4 \bar{x}^2 \right] \tag{3.71}$$

$$\begin{aligned} p_\pi = H_0^2 M_P^2 \Bigg[& \frac{\bar{c}_2}{2} \bar{H}^2 \bar{x}^2 + 2\bar{c}_3 \bar{H}^3 \bar{x}^2 \big(\overset{o}{\bar{H}} \bar{x}\big) - \bar{c}_4 \left(\frac{9}{2} \bar{H}^6 \bar{x}^4 + 12 \bar{H}^6 \bar{x}^3 \overset{o}{\bar{x}} + 15 \bar{H}^5 \bar{x}^4 \overset{o}{\bar{H}} \right) \\ & + 3\bar{c}_5 \bar{H}^7 \bar{x}^4 \left(5\bar{H} \overset{o}{\bar{x}} + 7\bar{x} \overset{o}{\bar{H}} + 2\bar{H}\bar{x} \right) + \bar{c}_G \left(6\bar{H}^3 \bar{x}^2 \overset{o}{\bar{H}} + 4\bar{H}^4 \bar{x} \overset{o}{\bar{x}} + 3\bar{H}^4 \bar{x}^2 \right) \Bigg] \end{aligned} \tag{3.72}$$

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{\bar{c}_2}{6} \left(3\bar{H}^2 \bar{x} + \bar{H} \big(\overset{o}{\bar{H}} \bar{x}\big) \right) - \bar{c}_3 \left(2\bar{H}^4 \bar{x} \overset{o}{\bar{x}} + 3\bar{H}^2 \bar{x}^2 + 3\bar{H}^3 \bar{x}^2 \overset{o}{\bar{H}} \right) + 3\bar{c}_4 \left(3\bar{H}^6 \bar{x}^2 \overset{o}{\bar{x}} + 3\bar{H}^6 \bar{x}^3 + 5\bar{H}^5 \bar{x}^3 \overset{o}{\bar{H}} \right) \\ & - \frac{5}{2} \bar{c}_5 \left(4\bar{H}^8 \bar{x}^3 \overset{o}{\bar{x}} + 3\bar{H}^8 \bar{x}^4 + 7\bar{H}^7 \bar{x}^4 \overset{o}{\bar{H}} \right) - \bar{c}_G \left(\bar{H}^4 \overset{o}{\bar{x}} + 3\bar{H}^4 \bar{x} + 3\bar{H}^3 \bar{x} \overset{o}{\bar{H}} \right) \end{aligned} \tag{3.73}$$

En combinant l'équation du mouvement de π (3.67) ainsi que les équations de Friedmann (3.64) et (3.65), on peut mettre le système d'équations différentielles sous la forme d'équations différentielles ordinaires [48] :

$$\begin{aligned} \overset{o}{\bar{x}} &= -\bar{x} + \frac{\alpha\lambda - \sigma\gamma}{\sigma\beta - \alpha\omega} \\ \overset{o}{\bar{H}} &= \frac{\omega\gamma - \lambda\beta}{\sigma\beta - \alpha\omega} \end{aligned} \tag{3.74}$$

où α, β, γ, σ, λ et ω sont des fonctions de $\bar{H}$ et $\bar{x}$ définies par :

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{\bar{c}_2}{6}\bar{H}\bar{x} - 3\bar{c}_3\bar{H}^3\bar{x}^2 + 15\bar{c}_4\bar{H}^5\bar{x}^3 - \frac{35}{2}\bar{c}_5\bar{H}^7\bar{x}^4 - 3\bar{c}_G\bar{H}^3\bar{x} \\
\gamma &= \frac{\bar{c}_2}{3}\bar{H}^2\bar{x} - \bar{c}_3\bar{H}^4\bar{x}^2 + 5\frac{5}{2}\bar{c}_5\bar{H}^8\bar{x}^4 - 2\bar{c}_G\bar{H}^4\bar{x} \\
\beta &= \frac{\bar{c}_2}{6}\bar{H}^2 - 2\bar{c}_3\bar{H}^4\bar{x} + 9\bar{c}_4\bar{H}^6\bar{x}^2 - 10\bar{c}_5\bar{H}^8\bar{x}^3 - \bar{c}_G\bar{H}^4 \\
\sigma &= 2\bar{H} + 2\bar{c}_3\bar{H}^3\bar{x}^3 - 15\bar{c}_4\bar{H}^5\bar{x}^4 + 21\bar{c}_5\bar{H}^7\bar{x}^5 + 6\bar{c}_G\bar{H}^3\bar{x}^2 \\
\lambda &= 3\bar{H}^2 + \frac{\Omega_\gamma^0}{a^4} + \frac{p_\nu}{M_{Pl}^2 H_0^2} + \frac{\bar{c}_2}{2}\bar{H}^2\bar{x}^2 - 2\bar{c}_3\bar{H}^4\bar{x}^3 + \frac{15}{2}\bar{c}_4\bar{H}^6\bar{x}^4 - 9\bar{c}_5\bar{H}^8\bar{x}^5 - \bar{c}_G\bar{H}^4\bar{x}^2 \\
\omega &= 2\bar{c}_3\bar{H}^4\bar{x}^2 - 12\bar{c}_4\bar{H}^6\bar{x}^3 + 15\bar{c}_5\bar{H}^8\bar{x}^4 + 4\bar{c}_G\bar{H}^4\bar{x}
\end{aligned} \tag{3.75}$$

Comme le système est surdéterminé, on dispose également d'une équation indépendante supplémentaire qui est en fait l'équation (3.64) exprimée en fonction des nouvelles variables :

$$\bar{H}^2 = \frac{\Omega_m^0}{a^3} + \frac{\Omega_\gamma^0}{a^4} + \frac{\rho_\nu}{3M_P^2 H_0^2} + \frac{\bar{c}_2}{6}\bar{H}^2\bar{x}^2 - 2\bar{c}_3\bar{H}^4\bar{x}^3 + \frac{15}{2}\bar{c}_4\bar{H}^6\bar{x}^4 - 7\bar{c}_5\bar{H}^8\bar{x}^5 - 3\bar{c}_G\bar{H}^4\bar{x}^2 \tag{3.76}$$

Cette équation doit être vérifiée tout au long de l'évolution de l'Univers par les solutions de (3.74), ce que nous vérifions tout au long de l'intégration numérique du système. De plus, on peut l'utiliser pour fixer un des paramètres du modèle en l'exprimant en $a = 1$, contrainte que l'on appellera "condition de platitude" dans la suite.

3.3.2 Évolution de l'Univers

Comme l'évolution de l'Univers homogène est dictée par le système d'équations différentielles (3.74) écrit sous la forme (3.68), on peut le résoudre numériquement à l'aide d'un algorithme de résolution numérique pas à pas de type Runge-Kutta d'ordre 4 [49, 50]. On effectue la résolution numérique pour un certain intervalle en a, puis on stocke $\left(\bar{x}, \bar{H}\right)$ pour certaines valeurs de a prédéfinies de cet intervalle, puis on effectue des interpolations en spline entre les valeurs précalculées, les variations des deux fonctions étant suffisamment faibles. Cependant, il faut avoir fixé une condition initiale pour résoudre numériquement le système, c'est-à-dire avoir fait le choix de A dans la reparamétrisation (3.70). Nous allons ici exposer les deux choix que nous allons utiliser dans la suite :

1. **Paramétrisation de Barreira et al.**[3] **:** on choisit $A = c_3$, ce qui fixe $\bar{c}_3 = 1$. On choisit par ailleurs la condition initiale $\bar{x}_i$ à $z_i = 10^6$ en imposant le ratio $\frac{\rho_{\pi,i}}{\rho_{m,i}} = \frac{\rho_\pi}{\rho_m}(z_i)$. La condition initiale sur $\bar{H}$ est obtenue en calculant sa valeur pour un univers contenant

3. La paramétrisation décrite ci-dessus n'est en fait utilisée que dans [4] et [5]. Dans la suite des travaux du groupe [6, 51], la paramétrisation choisie permet de fixer $\bar{c}_2 = -1$. Un autre des $\bar{c}_i$ est fixé par la condition de platitude. Enfin, la condition initiale $\bar{x}_i$ est déterminée par la contrainte supplémentaire selon laquelle la condition tracker (voir section 4.3.2) doit être vérifiée de tous temps.

uniquement de la matière et de la radiation car on ne considère que des scénarios où le galileon est négligeable à cette époque. On utilise enfin la condition de platitude pour fixer le paramètre $\bar{c}_2$. Les paramètres libres propres au galileon sont ici $\left(\frac{\rho_{\pi,i}}{\rho_{m,i}}, \bar{c}_4, \bar{c}_5, \bar{c}_G\right)$. Cette paramétrisation est utilisée dans cette thèse pour vérifier la validité des prédictions que j'ai obtenues avec ma version modifiée de CAMB et sera celle utilisée dans la suite de ce chapitre sauf mention contraire.

2. **Paramétrisation de Neveu et al. :** on choisit $A = x_0$, ce qui permet de fixer la condition initiale à $z = 0$, $\bar{x}_i = \bar{x}_0 = 1$ et $\bar{H}_i = \bar{H}_0 = 1$. Ainsi, les équations d'évolution du galileon ne dépendent plus de la condition initiale sur celui-ci, dont on n'a a priori aucune connaissance. Cela nécessite cependant d'intégrer le système d'équations différentielles à rebours dans le temps, ce qui n'est pas vraiment un problème. On vérifie a posteriori que la physique des premiers instants de l'Univers n'est pas modifiée sensiblement (c'est-à-dire que Ω_π est petit dans le passé lointain). On utilise enfin la condition de platitude pour fixer le paramètre $\bar{c}_5$. Les paramètres libres propres au galileon sont alors $(\bar{c}_2, \bar{c}_3, \bar{c}_4, \bar{c}_G)$. Cette paramétrisation est utilisée dans cette thèse pour comparer les observations cosmologiques aux prédictions du modèle du galileon (voir chapitre 4).

Pour valider mes résultats, j'ai calculé l'évolution de $\bar{H}$ et $\bar{x}$ pour des jeux de paramètres prédéfinis détaillés dans la table 3.1. Cette évolution est représentée sur la figure 3.1 et est en parfait accord avec les résultats de [4].

Modèle	$\bar{c}_3$	$\bar{c}_4$	$\bar{c}_5$	$\bar{c}_G$
Galileon 1	-12.8	-1.7	-1.0	0.0
Galileon 2	-6.239	-2.159	-1.0	0.0
Galileon 3	-5.73	-1.2	-1.0	0.0
Galileon 4	-5.73	-1.2	-1.0	0.4

TABLE 3.1 Jeux de paramètres utilisés pour vérifier la validité de ma version modifiée de CAMB, pour différentes valeurs du ratio $\rho_{\pi,i}/\rho_{m,i}$ (voir par exemple figure 3.1), où on a pris $\Omega_m = 0.265$. Le paramètre $\bar{c}_2$ est fixé par la condition de platitude. Ici $\bar{c}_3 \neq 1$ par souci de conformité avec l'article de référence [4]. Pour obtenir les valeurs des paramètres pour la paramétrisation dans le texte en 1., il faut effectuer la transformation (3.70) avec $A = \bar{c}_3^{-1/3}$.

Plusieurs caractéristiques de l'évolution d'un univers comportant un galileon se dégagent de ces exemples. Tout d'abord, l'évolution de H est très proche de celle du modèle ΛCDM, particulièrement si la densité d'énergie du galileon est faible ($\rho_{\pi,i}/\rho_{m,i} \leq 10^{-5}$, on se placera dans ce cas dans la suite de ce chapitre) dans l'Univers primitif, la différence entre les deux se fait ressentir à partir de $a \gtrsim 10^{-1}$. Par ailleurs, l'équation d'état du galileon indique qu'il s'agit d'un bon candidat pour l'énergie noire, puisque $w_{eff} < -1/3$ dans le passé récent, même si contrairement au cas ΛCDM $w_{eff} \neq -1$. En effet, pour $a \lesssim 10^{-2}$, w_{eff} est constant et relativement faible, et le galileon n'a un effet répulsif important que pour $a \gtrsim 10^{-2} - 10^{-1}$ (selon le scénario) où le galileon a une équation d'état fantôme $w_{eff} < -1$.

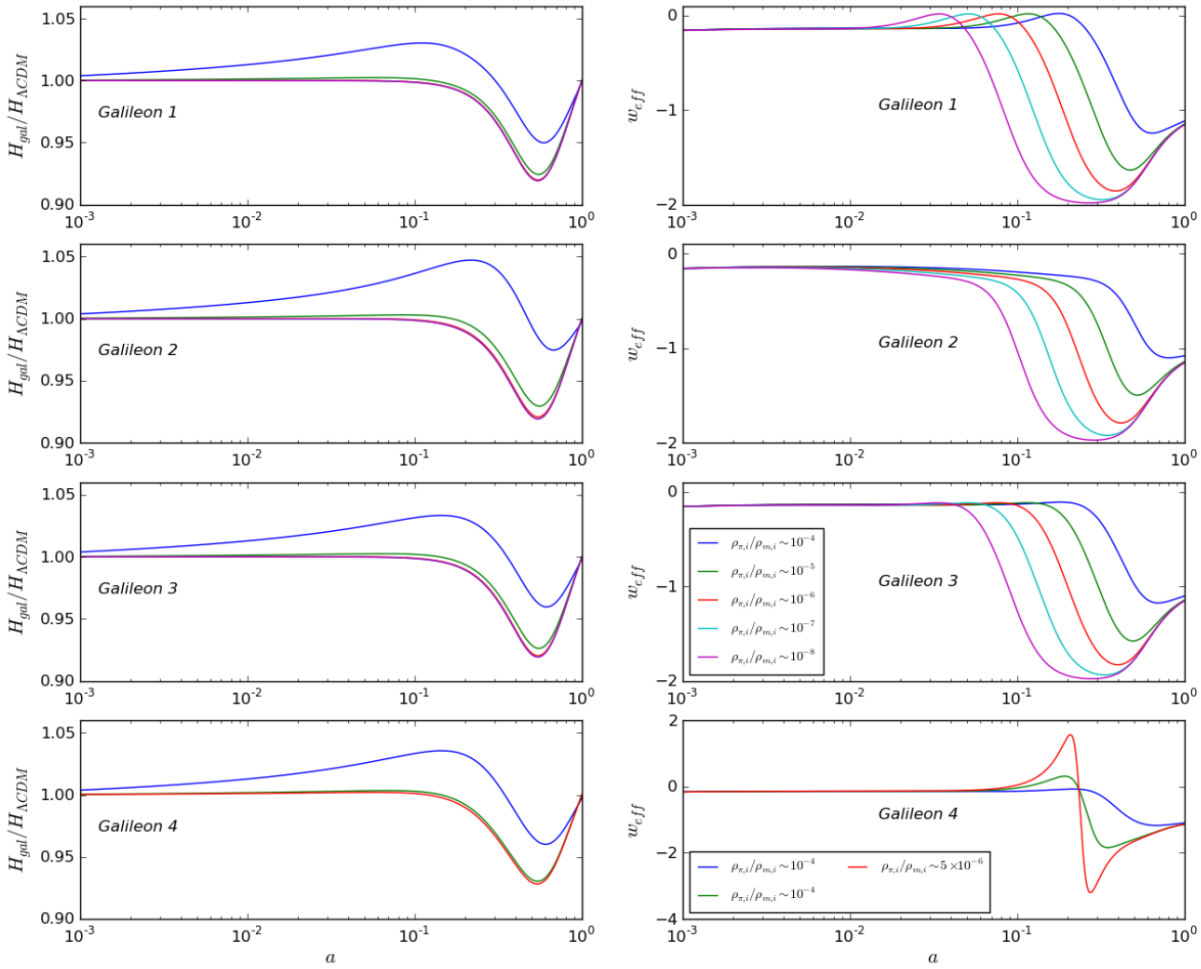

FIGURE 3.1 Évolution de deux grandeurs caractérisant l'Univers homogène en présence d'un galileon pour les différents jeux de paramètres présentés dans la table 3.1. (Gauche) Rapport entre le paramètre de Hubble du modèle du galileon et celui du modèle ΛCDM. (Droite) Paramètre effectif de l'équation d'état $p_\pi = w_{eff} \cdot \rho_\pi$.

3.4 Les perturbations du galileon

Maintenant que l'on a détaillé les implications cosmologiques du modèle du galileon sur le fond cosmologique, il convient d'étudier le cas d'un univers présentant des petites perturbations autour de l'état homogène et isotrope. Pour cela, nous allons utiliser très largement les résultats du chapitre 2.

3.4.1 Équations perturbées

Pour obtenir les contributions du galileon aux équations cosmologiques perturbées, nous allons utiliser une décomposition 3+1 suivant la quadri-vitesse u^μ d'un observateur pour un

instant quelconque, ce qui rend l'approche invariante de jauge, comme argumenté dans la section 2.1.5. On peut alors définir le tenseur de projection sur les hypersurfaces de genre espace $\perp_{\mu\nu}= g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu$, qui peut être utilisé pour obtenir des tenseurs qui existent sur les hypersurfaces (que l'on notera surmontés d'un ˆ) à partir de tenseurs existant dans l'espace-temps à 4 dimensions. En particulier, on pourra écrire la dérivée covariante spatiale à partir de la dérivée covariante selon :

$$\hat{\nabla}_\mu =\perp_\mu^\alpha \nabla_\alpha = \nabla_\mu + u_\mu u^\alpha \nabla_\alpha \tag{3.77}$$

où l'opérateur $u^\alpha \nabla_\alpha$ est une projection de l'opérateur ∇_α sur u^α qui est de genre temps, c'est à dire une dérivée temporelle. On décompose la dérivée covariante de la quadri-vitesse de l'observateur selon (2.128), et de la même manière on peut décomposer le tenseur énergie impulsion selon :

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + p \perp_{\mu\nu} +2q_{(\mu} u_{\nu)} + \pi_{\mu\nu} \tag{3.78}$$

qui n'est qu'une autre manière d'écrire (2.10) où $q_\mu = (\bar{\rho} + \bar{p})\, \delta u_\mu$ est le flux de chaleur. On peut alors exprimer ces différentes composantes du tenseur énergie-impulsion en fonction de ce dernier selon :

$$\begin{aligned} \rho &= T_{\mu\nu} u^\mu u^\nu & q_\mu &= \perp_\mu^\nu u^\rho T_{\nu\rho} \\ p &= \frac{1}{3} \perp^{\mu\nu} T_{\mu\nu} & \pi_{\mu\nu} &= \perp_\mu^\rho \perp_\nu^\lambda T_{\rho\lambda} - p \perp_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{3.79}$$

On décompose chacune de ces composantes en contributions venant des champs du modèle standard et du galileon : $\rho = \rho^f + \rho^G$, $p = p^f + p^G$, $q_\mu = q_\mu^f + q_\mu^G$ et $\pi_{\mu\nu} = \pi_{\mu\nu}^f + \pi_{\mu\nu}^G$. Pour décrire l'évolution des perturbations en présence du galileon, il suffit de déterminer les contributions du galileon à partir des tenseurs énergie-impulsion $T_{\mu\nu}^{(c_i)}$, de les intégrer aux équations perturbées déjà détaillées dans le chapitre 2, et d'inclure la dynamique du galileon en ajoutant l'équation du mouvement de π. Pour cela, il va être utile d'introduire le scalaire de Ricci projeté sur les hypersurfaces, donné par :

$$\hat{R} = 2\kappa\rho - \frac{2}{3}\theta^2 \tag{3.80}$$

On rappelle que θ correspond à l'expansion d'un élément de volume de matière (voir (2.128)), sa valeur moyenne correspond simplement au taux d'expansion, $\bar{\theta} = 3H$. On introduit enfin la partie symétrique, aussi appelée partie électrique, du tenseur de Weyl $\mathcal{W}_{\mu\nu\alpha\beta}$ (tenseur qui représente la partie sans trace du tenseur de Riemann) :

$$\mathcal{E}_{\mu\nu} = u^\alpha u^\beta \mathcal{W}_{\mu\nu\alpha\beta} \tag{3.81}$$

En se limitant au premier ordre, les contributions du galileon aux composantes du tenseur énergie-impulsion sont données par [4] [4]

$$\begin{aligned}
\rho^G &= \frac{c_2}{2}\dot{\pi}^2 - \frac{c_3}{M^3}\left(2\dot{\pi}^3\theta + 2\dot{\pi}^2\hat{\Box}\pi\right) + \frac{c_4}{M^6}\left(\frac{5}{2}\dot{\pi}^4\theta^2 + 4\dot{\pi}^3\theta\hat{\Box}\pi + \frac{3}{4}\dot{\pi}^4\hat{R}\right) \\
&\quad -\frac{c_5}{M^9}\left(\frac{7}{9}\dot{\pi}^5\theta^3 + \frac{5}{3}\dot{\pi}^4\theta^2\hat{\Box}\pi + \frac{1}{2}\dot{\pi}^5\theta\hat{R}\right) - \frac{c_G M_P}{M^3}\left(\dot{\pi}^2\theta^2 + \frac{4}{3}\dot{\pi}\theta\hat{\Box}\pi + \frac{1}{2}\dot{\pi}^2\hat{R}\right) \qquad (3.82) \\
p^G &= \frac{c_2}{2}\dot{\pi}^2 + 2\frac{c_3}{M^3}\dot{\pi}^2\ddot{\pi} - \frac{c_4}{M^6}\left(4\dot{\pi}^3\theta\ddot{\pi} + \dot{\pi}^4\dot{\theta} + \frac{1}{2}\dot{\pi}^4\theta^2 + 4\dot{\pi}^2\ddot{\pi}\hat{\Box}\pi + \frac{4}{9}\dot{\pi}^3\theta\hat{\Box}\pi - \dot{\pi}^4\hat{\nabla}_\mu A^\mu - \frac{1}{12}\dot{\pi}^4\hat{R}\right) \\
&\quad +\frac{c_5}{M^9}\left(\frac{5}{3}\dot{\pi}^4\theta^2\ddot{\pi} + \frac{2}{3}\dot{\pi}^5\theta\dot{\theta} + \frac{2}{9}\dot{\pi}^4\theta^2\hat{\Box}\pi + \frac{8}{3}\dot{\pi}^3\theta\ddot{\pi}\hat{\Box}\pi + \frac{1}{2}\dot{\pi}^4\ddot{\pi}\hat{R} + \frac{2}{3}\dot{\pi}^4\dot{\theta}\hat{\Box}\pi - \frac{2}{3}\dot{\pi}^5\theta\hat{\nabla}_\mu A^\mu\right) \\
&\quad +\frac{c_G M_P}{M^3}\left(\frac{4}{3}\dot{\pi}\theta\ddot{\pi} + \frac{2}{3}\dot{\pi}^2\dot{\theta} + \frac{1}{3}\dot{\pi}^2\theta^2 - \frac{2}{3}\dot{\pi}^2\hat{\nabla}_\mu A^\mu + \frac{4}{3}\ddot{\pi}\hat{\Box}\pi + \frac{4}{9}\dot{\pi}\theta\hat{\Box}\pi - \frac{1}{6}\dot{\pi}^2\hat{R}\right) \qquad (3.83) \\
q^G_\mu &= c_2\dot{\pi}\hat{\nabla}_\mu\pi - \frac{c_3}{M^3}\left(2\dot{\pi}^2\theta\hat{\nabla}_\mu\pi - 2\dot{\pi}^2\hat{\nabla}_\mu\dot{\pi}\right) \\
&\quad +\frac{c_4}{M^6}\left(-4\dot{\pi}^3\theta\hat{\nabla}_\mu\dot{\pi} + 2\dot{\pi}^3\theta^2\hat{\nabla}_\mu\pi - \dot{\pi}^4\hat{\nabla}_\mu\theta + \frac{3}{2}\frac{3}{2}\dot{\pi}^4\hat{\nabla}^\alpha\sigma_{\mu\alpha}\right) \\
&\quad -\frac{c_5}{M^9}\left(-\frac{5}{3}\dot{\pi}^4\theta^2\hat{\nabla}_\mu\dot{\pi} + \frac{5}{9}\dot{\pi}^4\theta^3\hat{\nabla}_\mu\pi - \frac{2}{3}\dot{\pi}^5\theta\hat{\nabla}_\mu\theta + \dot{\pi}^5\theta\hat{\nabla}^\alpha\sigma_{\mu\alpha}\right) \\
&\quad -\frac{c_G M_P}{M^3}\left(-\frac{4}{3}\dot{\pi}\theta\hat{\nabla}_\mu\dot{\pi} + \frac{2}{3}\dot{\pi}\theta^2\hat{\nabla}_\mu\pi - \frac{2}{3}\dot{\pi}^2\hat{\nabla}_\mu\theta + \dot{\pi}^2\hat{\nabla}^\alpha\sigma_{\mu\alpha}\right) \qquad (3.84) \\
\pi^G_{\mu\nu} &= \frac{c_4}{M^6}\left(-\dot{\pi}^4\left[\dot{\sigma}_{\mu\nu} - \left[\hat{\nabla}_\mu A_\nu\right]^{STF} - \mathcal{E}_{\mu\nu}\right] - \left[6\dot{\pi}^2\ddot{\pi} + \frac{2}{3}\dot{\pi}^3\theta\right]\left[\hat{\nabla}_\mu\hat{\nabla}_\nu\pi\right]^{STF} - \left[6\dot{\pi}^3\ddot{\pi} + \frac{4}{3}\dot{\pi}^4\theta\right]\sigma_{\mu\nu}\right) \\
&\quad -\frac{c_5}{M^9}\left(-\left[-\dot{\pi}^5\dot{\theta} + \dot{\pi}^5\theta^2 + 6\dot{\pi}^4\theta\ddot{\pi}\right]\sigma_{\mu\nu} - \left[\dot{\pi}^5\theta + 3\dot{\pi}^4\ddot{\pi}\right]\dot{\sigma}_{\mu\nu} - \left[4\dot{\pi}^3\theta\ddot{\pi} + \dot{\pi}^4\dot{\theta} + \frac{1}{3}\dot{\pi}^4\theta^2\right]\left[\hat{\nabla}_\mu\hat{\nabla}_\nu\pi\right]^{STF}\right. \\
&\quad \left. + \left[\dot{\pi}^5\theta + 3\dot{\pi}^4\ddot{\pi}\right]\left[\hat{\nabla}_\mu A_\nu\right]^{STF} - 6\dot{\pi}^4\ddot{\pi}\mathcal{E}_{\mu\nu}\right) \\
&\quad -\frac{c_G M_P}{M^3}\left(-\left[2\dot{\pi}\ddot{\pi} + \frac{2}{3}\dot{\pi}\theta\right]\sigma_{\mu\nu} - \left[\frac{2}{3}\dot{\pi}\theta + 2\ddot{\pi}\right]\left[\hat{\nabla}_\mu\hat{\nabla}_\nu\pi\right]^{STF} + 2\dot{\pi}^2\mathcal{E}_{\mu\nu}\right) \qquad (3.85)
\end{aligned}$$

L'évolution du champ π est donnée par son équation du mouvement au premier ordre :

$$\begin{aligned}
0 &= c_2\left(\ddot{\pi} + \hat{\Box}\pi + \dot{\pi}\theta\right) - \frac{c_3}{M^3}\left(4\dot{\pi}\theta\ddot{\pi} + \frac{8}{3}\dot{\pi}\theta\hat{\Box}\pi + 4\ddot{\pi}\hat{\Box}\pi + 2\dot{\pi}^2\theta^2 + 2\dot{\pi}^2\dot{\theta} - 2\dot{\pi}^2\hat{\nabla}_\mu A^\mu\right) \\
&\quad +\frac{c_4}{M^6}\left(6\dot{\pi}^2\theta^2\ddot{\pi} + 4\dot{\pi}^3\theta\dot{\theta} + 2\dot{\pi}^3\theta^3 + 8\ddot{\pi}\theta\ddot{\pi}\hat{\Box}\pi + \frac{26}{9}\dot{\pi}^2\theta^2\hat{\Box}\pi - 4\dot{\pi}^3\theta\hat{\nabla}_\mu A^\mu + 4\dot{\pi}^2\dot{\theta}\hat{\Box}\pi + 3\dot{\pi}^2\ddot{\pi}\hat{R} + \frac{1}{3}\dot{\pi}^3\theta\hat{R}\right) \\
&\quad -\frac{c_5}{M^9}\left(\frac{5}{9}\dot{\pi}^4\theta^4 + \frac{20}{9}\dot{\pi}^3\theta^3\ddot{\pi} + \frac{5}{3}\dot{\pi}^4\theta^2\dot{\theta} + \frac{8}{9}\dot{\pi}^3\theta^3\hat{\Box}\pi + \frac{1}{2}\dot{\pi}^4\dot{\theta}\hat{R} + \frac{1}{6}\dot{\pi}^4\theta^2\hat{R}\right. \\
&\quad \left. +4\dot{\pi}^2\theta^2\ddot{\pi}\hat{\Box}\pi + \frac{8}{3}\dot{\pi}^3\theta\dot{\theta}\hat{\Box}\pi + 2\dot{\pi}^3\theta\ddot{\pi}\hat{R}\right) \\
&\quad -\frac{5}{3}\dot{\pi}^4\theta^2\hat{\nabla}_\mu A^\mu - \frac{c_G M_P}{M^3}\left(\frac{2}{3}\theta^2\ddot{\pi} + \frac{4}{3}\dot{\theta}\hat{\Box}\pi + \frac{2}{3}\theta^2\hat{\Box}\pi + \frac{4}{3}\dot{\pi}\theta\dot{\theta} + \frac{2}{3}\dot{\pi}\theta^3 - \frac{4}{3}\dot{\pi}\theta\hat{\nabla}_\mu A^\mu + \ddot{\pi}\hat{R} + \frac{1}{3}\dot{\pi}\theta\hat{R}\right) \qquad (3.86)
\end{aligned}$$

Comme on peut le voir, si l'on se restreint à l'ordre le plus bas, on retrouve les équations (3.66) et (3.67) décrivant le fond cosmologique. On peut éliminer cette contribution en prenant la

4. On rappelle que $[...]^{STF}$ indique que l'on a pris la partie symétrique et sans trace du tenseur (voir (2.134)).

dérivée covariante spatiale (3.77) de ρ^G, de p^G et de l'équation du mouvement, la contribution homogène étant indépendante de l'espace.

Pour que ces grandeurs puissent être utilisées dans un code de calcul basé sur l'équation de Boltzmann, on va les décomposer sur la base des fonctions définies en (2.136). Comme argumenté dans le chapitre 2, on ne s'intéresse qu'aux perturbations scalaires, c'est-à-dire pour lesquelles l'indice du multipôle vaut $m = 0$. On peut montrer que pour les modes scalaires, la vorticité $\omega_{\mu\nu}$ est au moins d'ordre deux [52], ce qui permet de la négliger. Par ailleurs, comme annoncé dans la partie 2.1.5, on se place dans la jauge comobile avec le fluide de matière noire qui est équivalent à la jauge synchrone. Dans cette jauge, l'observateur suit des géodésiques, ce qui signifie que son accélération est nulle. De plus, dans cette même jauge, la perturbation de pression n'est pas nécessaire pour calculer l'évolution des perturbations, nous ne détaillerons donc pas son expression. On commence donc par décomposer les grandeurs pertinentes sur les fonctions définies en (2.136) selon :

$$\begin{aligned}
\hat{\nabla}_\mu \pi &= \sum_k \frac{k}{a} M_P \gamma Q^k_\mu & \hat{\nabla}_\mu \theta &= \sum_k \frac{k^2}{a^2} \mathcal{Z} Q^k_\mu \\
\hat{\nabla}_\mu \rho &= \sum_k \frac{k}{a} \chi Q^k_\mu & q_\mu &= \sum_k q Q^k_\mu \\
\pi_{\mu\nu} &= \sum_k \Pi Q^k_{\mu\nu} & \sigma_{\mu\nu} &= \sum_k \frac{k}{a} \sigma Q^k_{\mu\nu} \\
\hat{\nabla}_\mu \hat{R} &= 2 \sum_k \frac{k^3}{a^3} \eta Q^k_\mu & \mathcal{E}_{\mu\nu} &= -\sum_k \frac{k^2}{a^2} \phi Q^k_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{3.87}$$

où γ représente la perturbation scalaire adimensionnée du champ du galileon, χ celle de la densité d'énergie, $\mathcal{Z}$ celle de l'expansion. η et ϕ sont des perturbations de la géométrie et peuvent être interprétés comme des perturbations gravitationnelles. Les perturbations scalaire q, Π et σ sont respectivement celles du flux de chaleur, du tenseur de pression anisotrope et du cisaillement.

J'ai alors remarqué qu'une reparamétrisation telle que discutée dans la section 3.3.1 pour le fond cosmologique implique également une reparamétrisation sur la perturbation du galileon. En effet, une transformation de la forme (3.70) laisse les équations invariantes si la perturbation du galileon se transforme selon :

$$\gamma \to \bar{\gamma} \equiv \gamma / A \tag{3.88}$$

En effectuant cette décomposition et après reparamétrisation des équations (3.82) à (3.86), j'ai obtenu :

$$\chi^G = f_1^\chi + \frac{1}{\kappa a^2}\left(f_2^\chi \cdot k\mathcal{H}\mathcal{Z} + f_3^\chi \cdot k^2\eta\right) \tag{3.89}$$

$$q^G = f_1^q + \frac{1}{\kappa a^2} f_2^q \cdot k^2\left(\sigma - \mathcal{Z}\right) \tag{3.90}$$

$$\Pi^G = f_1^\Pi + \frac{1}{\kappa a^2}\left(f_2^\Pi \cdot k\mathcal{H}\sigma - f_3^\Pi \cdot k\sigma' + f_4^\Pi \cdot k^2\phi\right) \tag{3.91}$$

$$0 = f_1^{eom} \cdot \bar{\gamma}'' + f_2^{eom} \cdot \bar{\gamma}' + f_3^{eom} \cdot k^2\bar{\gamma} + f_4^{eom} \cdot k\mathcal{H}\mathcal{Z} + f_5^{eom} \cdot k\mathcal{Z}' + f_6^{eom} \cdot k^2\eta \tag{3.92}$$

Dans ces équations, les $f_i^{\chi,\Pi,eom}$ sont des fonctions dont les expressions sont détaillées en annexe A, où on a introduit $\mathcal{H} = \frac{a'}{a}$ avec la notation $'$ qui indique une dérivée par rapport au temps conforme τ. Il est intéressant de noter que, $f_1^\chi = g_1^\chi\bar{\gamma} + g_2^\chi\bar{\gamma}'$, où g_1^χ et g_2^χ sont également donnés en annexe A.

Malheureusement, les membres de gauche et de droite des équations (3.89) à (3.92) ne sont pas indépendants les uns des autres. Il convient donc de reformuler ces équations pour extraire ces dépendances. Pour cela, on va utiliser les équations d'Einstein écrites dans la jauge synchrone (2.52) à (2.55), et les correspondances entre les variables de la jauge synchrone désignée par l'exposant ^{S} et les variables de (3.89) à (3.92) :

$$\begin{aligned} \eta &= -2\eta^S & \sigma &= \frac{1}{k}\left(6\eta'^S + h'^S\right) \\ \phi &= \frac{1}{4k^2}\left(6\eta''^S + h''^S\right) - \frac{1}{4}\eta^S & \mathcal{Z} &= \frac{h'^S}{2k} \end{aligned} \tag{3.93}$$

Les équations d'Einstein s'écrivent alors de la manière suivante (certaines de ces équations sont redondantes mais néanmoins utiles) :

$$\frac{2}{3}k^2\left(\sigma - \mathcal{Z}\right) = \kappa a^2 q \tag{3.94}$$

$$k^3\phi = -\frac{1}{2}\kappa a^2\left[k\left(\Pi + \chi\right) + 3\mathcal{H}q\right] \tag{3.95}$$

$$k\left(\sigma' + \mathcal{H}\sigma\right) = k^2\phi - \frac{1}{2}\kappa a^2\Pi \tag{3.96}$$

$$k^2\left(\phi' + \mathcal{H}\phi\right) = \frac{1}{2}\kappa a^2\left[k\left(\bar{\rho} + \bar{p}\right)\sigma + kq - \Pi' - \mathcal{H}\Pi\right] \tag{3.97}$$

$$k^2\eta = \kappa a^2\chi - 2k\mathcal{H}\mathcal{Z} \tag{3.98}$$

$$k\eta' = -\kappa a^2 q \tag{3.99}$$

En utilisant ces dernières équations pour reformuler (3.89) à (3.92), j'ai obtenu les expressions

suivantes, que j'ai implémentées dans la version galileon du logiciel CAMB que j'ai développée :

$$\chi^G = \frac{2}{2-f_2^\chi}\left[f_1^\chi + \frac{f_2^\chi}{2} + \frac{f_2^\chi \cdot \chi^f - 2f_3^\chi}{\kappa a^2}\cdot k^2\eta^S\right] \tag{3.100}$$

$$q^G = \frac{2}{2-3f_2^q}\left[f_1^q + \frac{3}{2}f_2^q \cdot q^f\right] \tag{3.101}$$

$$\begin{aligned}\Pi^G = &\frac{2}{2-2f_3^\Pi + f_4^\Pi}\left[f_1^\Pi + \frac{2f_3^\Pi - f_4^\Pi}{2}\Pi^f\right.\\ &\left.+\frac{f_2^\Pi + 2f_3^\Pi - f_4^\Pi}{2}\left(\chi + \frac{3}{k}\mathcal{H}q\right) + \frac{f_2^\Pi + 2f_3^\Pi - f_4^\Pi}{2}\left(\chi + \frac{3}{k}\mathcal{H}q\right) + \left(f_2^\Pi + f_3^\Pi\right)k^2\eta^S\right]\end{aligned} \tag{3.102}$$

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}'' = &-\frac{1}{f_1^{eom} + g_2^\chi\xi}\left[f_3^{eom}\mathcal{H}\bar{\gamma}' + f_3^{eom}k^2\bar{\gamma} + \xi\left(\kappa a^2\chi^{f\prime} + \kappa a^2 g_1^{\chi\prime}\bar{\gamma} + \kappa a^2 g_1^\chi\bar{\gamma}' + \kappa a^2 g_2^{\chi\prime}\bar{\gamma}' + \left(1-f_3^\chi\right)k\kappa a^2 q\right)\right.\\ &+\left(\frac{f_4^{eom}}{2} + \xi\left[\frac{\kappa a^2\left(\bar{\rho}+\bar{p}\right)}{2\mathcal{H}} + \mathcal{H} - f_2^\chi\mathcal{H} + \frac{f_2^{\chi\prime} + f_2^\chi\overset{o}{\mathcal{H}}}{2}\right]\right)\kappa a^2\chi\\ &\left.+\left(f_4^{eom} - 2f_6^{eom} + \xi\left[\frac{\kappa a^2\left(\bar{\rho}+\bar{p}\right)}{\mathcal{H}} - 2\mathcal{H} + f_2^{\chi\prime} + f_2^\chi\overset{o}{\mathcal{H}} - 2f_2^\chi\mathcal{H} - 2f_3^{\chi\prime} + 4f_3^\chi\mathcal{H}\right]\right)k^2\eta^s\right]\end{aligned} \tag{3.103}$$

avec $\xi = \frac{f_5^{eom}}{\left(2-f_2^\chi\right)\mathcal{H}}$. Pour calculer numériquement l'évolution des perturbations, on part du système d'équations présent dans la version originale de CAMB sans galileon, de la forme (3.68). On ajoute les contributions χ^f, q^f et Π^f du galileon aux perturbations existantes afin obtenir les perturbations totales dans le cadre du modèle du galileon. Ces dernières nous permettent alors d'exprimer membre de droite de (3.68). Enfin, l'équation (3.103) est ajoutée au système d'équations différentielles, en la réduisant à deux équations différentielles du premier ordre dans les fonctions $(\bar{\gamma}, \bar{\gamma}')$. Il faut donc par ailleurs imposer une condition initiale pour $\bar{\gamma}$ et $\bar{\gamma}'$, que l'on supposera nulle, sachant qu'il a été vérifié dans [4] que la valeur exacte de la condition initiale n'avait pas d'influence sur l'évolution de la perturbation du galileon.

3.4.2 Évolution des perturbations

Une fois les équations (3.100) à (3.103) introduites dans le logiciel CAMB, ce dernier est utilisé pour faire évoluer les perturbations du galileon en même temps que celles de la métrique et des autres constituants de l'Univers. De plus, nous disposons des deux équations de conservation (2.56) et (2.57) :

$$\chi' + \left(\bar{\rho}+\bar{p}\right)k\mathcal{Z} + 3\mathcal{H}\left(\chi + \chi^p\right) + kq = 0 \tag{3.104}$$

$$q' + 4\mathcal{H}q - k\chi^p + \frac{2}{3}k\Pi = 0 \tag{3.105}$$

où χ^p est la perturbation de pression obtenue à l'aide de l'équation d'Einstein (2.54), qui s'écrit ici :

$$\kappa a^2\chi^p = -\frac{1}{3}\left[2k\mathcal{Z}' + 2k\mathcal{H}\mathcal{Z} + \kappa a^2\chi\right] \tag{3.106}$$

Ces équations de conservation sont indépendantes des équations utilisées pour faire évoluer les perturbations, ce qui nous a permis de les utiliser pour nous assurer que les solutions numériques obtenues les vérifient à tous les temps et toutes les échelles. Ce test supplémentaire visant à nous conforter dans la validité des prédictions obtenues n'a été utilisé qu'au cours de la phase de comparaison avec les prédictions de [4], dont les résultats constituent la suite de cette partie.

Des exemples d'évolution de la perturbation γ pour les scénarios de la table 3.1 pour certaines valeurs de k sont données dans la figure 3.2.

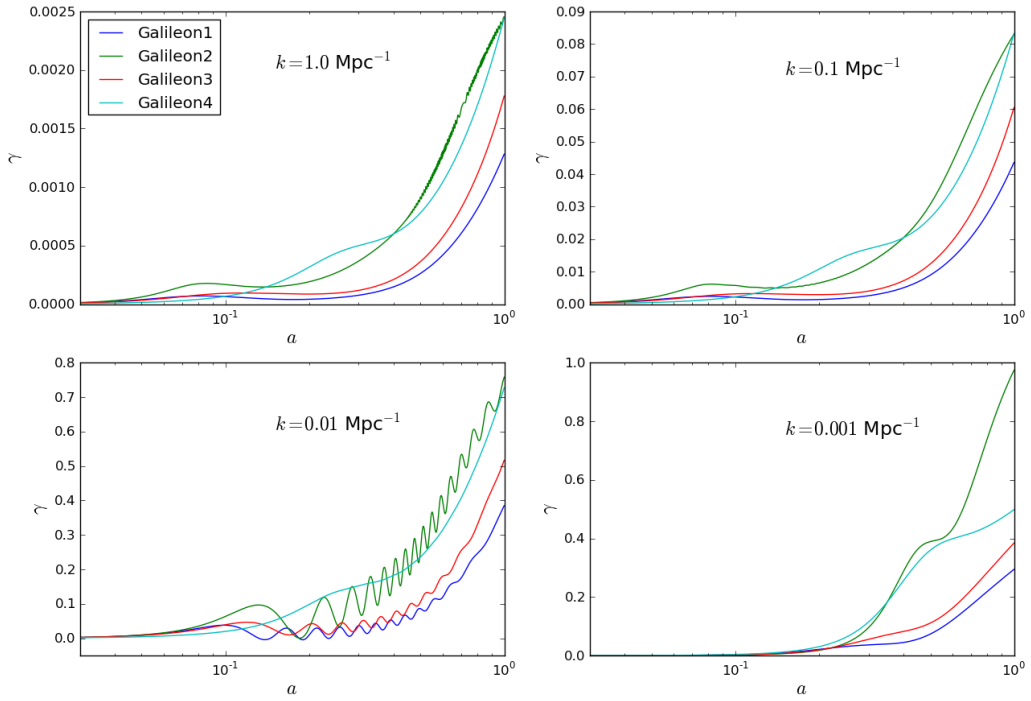

FIGURE 3.2 Évolution de la perturbation du champ du galileon γ pour différentes échelles. Pour tous les scénarios, la condition initiale sur la densité d'énergie du galileon est prise telle que $\frac{\rho_{\pi,i}}{\rho_{m,i}} \sim 10^{-5}$.

Tout d'abord, il est important de noter que les perturbations du galileon ne deviennent ici importantes que dans le passé récent, comme nous l'avions vu pour le fond cosmologiques (voir figure 3.1). En effet, pour que les calculs précédents soient valides, il faut que les perturbations restent petites par rapport aux valeurs moyennes, et notamment il ne faut pas que les perturbations du galileon soient significatives lorsque ce dernier a encore une densité moyenne d'énergie négligeable. On remarque de plus que la diversité des comportements est très importante selon la valeur des paramètres du galileon et selon l'échelle. En ce sens la modèle du galileon est très riche et permet de tester des comportements variés.

On s'intéresse à l'effet induit par les perturbations du galileon sur les observables cosmologiques liées aux perturbations telles que les spectres de puissance angulaire du CMB ou le spectre de puissance de la matière. Il est alors utile d'étudier l'évolution des quantités perturbées qui interviennent dans leur calcul. En particulier, l'évolution du contraste de densité total $\delta = \delta^f + \delta^G$ présentée en figure 3.3 est particulièrement intéressante.

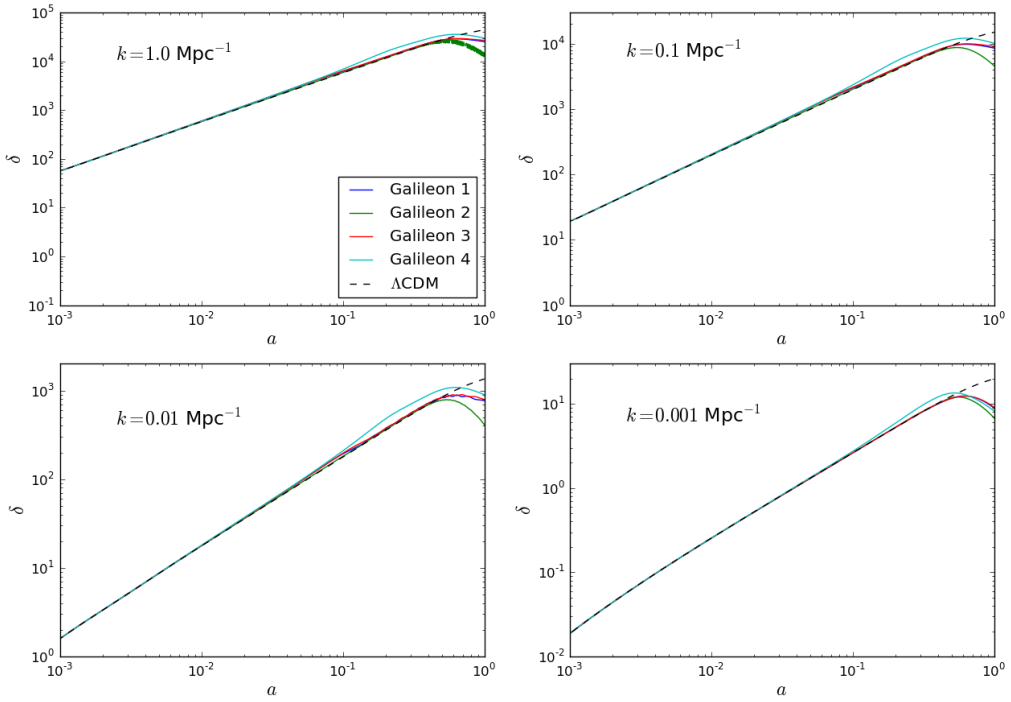

FIGURE 3.3 Évolution du contraste de densité total $\delta = \frac{\chi}{\bar{\rho}}$ pour différentes échelles. La condition initiale sur la densité d'énergie du galileon est prise telle que $\frac{\rho_{\pi,i}}{\rho_{m,i}} \sim 10^{-5}$ pour tous les scénarios.

Le contraste de densité traduit la tendance des constituants de l'Univers à former des zones de surdensité. Dans le cas des scénarios galileon précédemment étudiés, le contraste de densité est très similaire à celui correspondant au modèle ΛCDM dans le passé lointain, mais en devient sensiblement différent dans le passé récent de l'Univers, sous l'effet des perturbations du champ du galileon qui deviennent significatives tardivement. Cette différence dans les contrastes de densité entre les deux modèles a un impact dramatique sur l'évolution du potentiel gravitationnel de Weyl ϕ présentée en figure 3.4.

Le potentiel de Weyl est très différent dans les scénarios galileon étudiés et par rapport au modèle ΛCDM dans le passé récent de l'Univers, et ce à toutes les échelles. Si l'on reprend les trois contributions au contraste de température (2.70) à (2.72) obtenues par la formule de Sachs-Wolfe, l'effet principal du galileon sur le spectre de puissance angulaire en température du

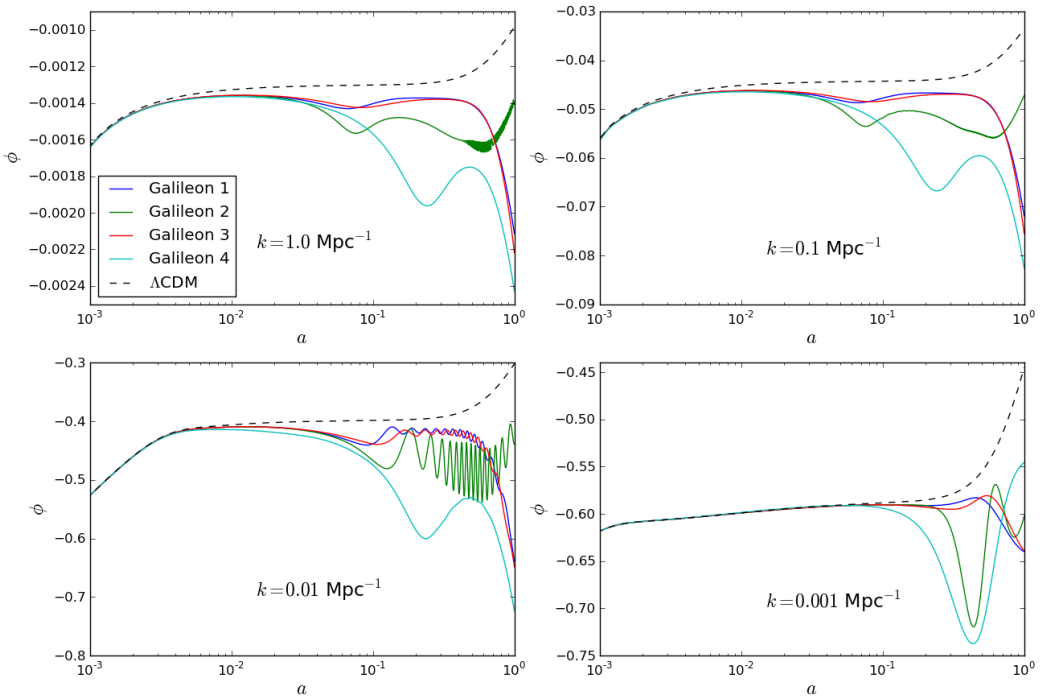

FIGURE 3.4 Évolution du potentiel de Weyl $\phi = \frac{1}{2}(\Phi + \Psi)$, où Φ et Ψ sont les potentiels gravitationnels définis par (2.8), pour différentes échelles. Pour tous les scénarios, la condition initiale sur la densité d'énergie du galileon est prise telle que $\frac{\rho_{\pi,i}}{\rho_{m,i}} \sim 10^{-5}$.

CMB porte sur le terme ISW. En effet, les deux autres contributions proviennent des perturbations présentes lors de l'émission du CMB, à une époque où le galileon est encore négligeable. Ainsi, on s'attend à ce que le spectre de puissance en température soit différent du cas ΛCDM aux grandes échelles, c'est-à-dire aux petits ℓ. Par ailleurs, on peut extraire un signal de l'effet de lentille gravitationnel (lensing) des anisotropies du CMB [53, 54]. Ce signal est déterminé par un potentiel effectif ψ obtenu en intégrant le potentiel de Weyl entre le moment de l'émission des photons du CMB et aujourd'hui. On s'attend donc à ce que le spectre de puissance du lensing soit également différent entre le modèle du galileon et le modèle ΛCDM.

L'évolution des grandeurs précédentes à différentes échelles a été comparée aux résultats de Barreira et al. (2012) [4], et trouvée compatible à une précision inférieure au % pour toutes les valeurs de a. Cette comparaison est présentée en annexe B.

3.4.3 Les spectres de puissance

L'objectif visé par le calcul des perturbations cosmologiques est de confronter les prédictions aux observations cosmologiques. Cependant, ces dernières ne sont pas les perturbations elles-mêmes puisqu'elles ne peuvent pas être mesurées directement, mais sont les spectres de puissance du fond diffus cosmologique (voir partie 2.2) ainsi que le spectre de puissance linéaire de la matière et autre variables relatives à la formation des grandes structures. Il faut donc calculer les prédictions pour ces observables à partir des perturbations cosmologiques. Les spectres de puissance angulaires des anisotropies de température du CMB correspondant aux scénarios de la table 3.1, tels que calculés par ma version modifiée de CAMB, sont présentés dans la figure 3.5.

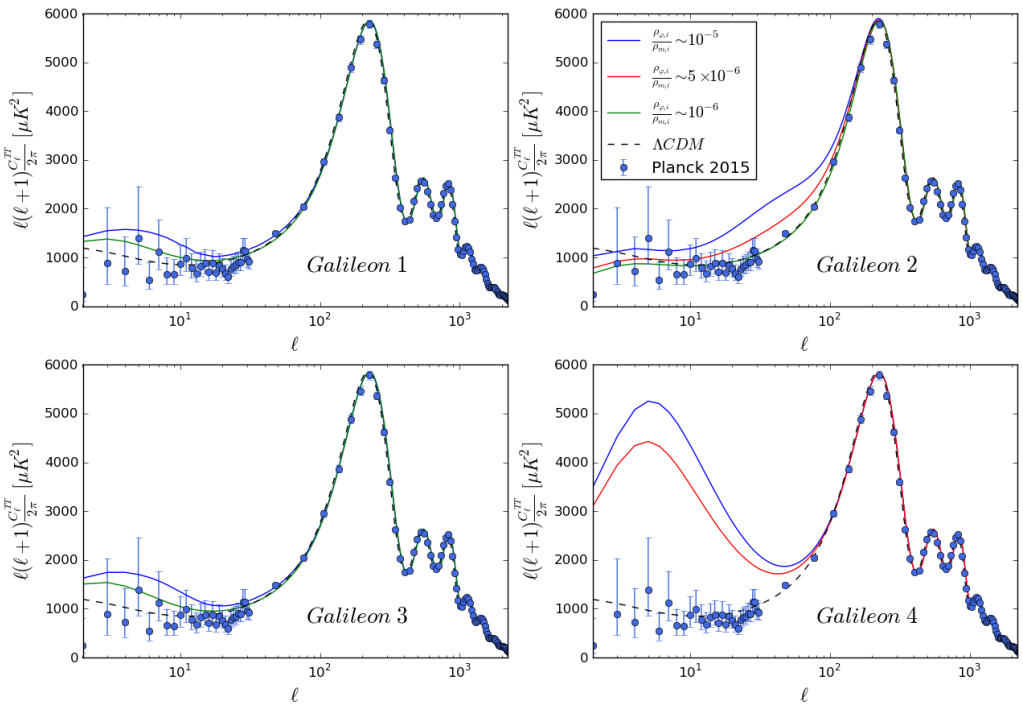

FIGURE 3.5 Spectres de puissance angulaire des anisotropies de température du CMB pour les scénarios de la table 3.1 et différentes conditions initiales. Les points correspondent aux mesures de Planck 2015 [12].

Comme nous l'avions anticipé, sur les scénarios étudiés, les principales différences avec les prédictions du modèle ΛCDM se font aux petits ℓ, pour lesquels l'effet ISW est plus important dans le modèle du galileon. On remarque que c'est notamment le cas pour le scénario avec $c_G \neq 0$, c'est-à-dire pour un galileon directement couplé à la matière. L'effet ISW y est si important que la puissance à grande échelle est comparable à celle du premier pic acoustique. Le reste du spectre n'est que peu impacté par la présence du galileon et l'absence de la constante

cosmologique. Enfin, bien qu'il ne s'agisse pas ici d'ajuster le modèle aux observations mais simplement de présenter les principales caractéristiques des prédictions du modèle du galileon en prenant des scénarios particuliers en exemple, on remarque que l'on peut trouver des jeux de paramètres pour lesquels la prédiction du spectre de puissance en température reproduit très fidèlement les observations (par exemple le scénario "Galileon 2" avec $\frac{\rho_{\pi,i}}{\rho_{m,i}} \sim 10^{-6}$, ou les scénarios "Galileon 1" et "Galileon 3" avec les conditions initiales présentées ici).

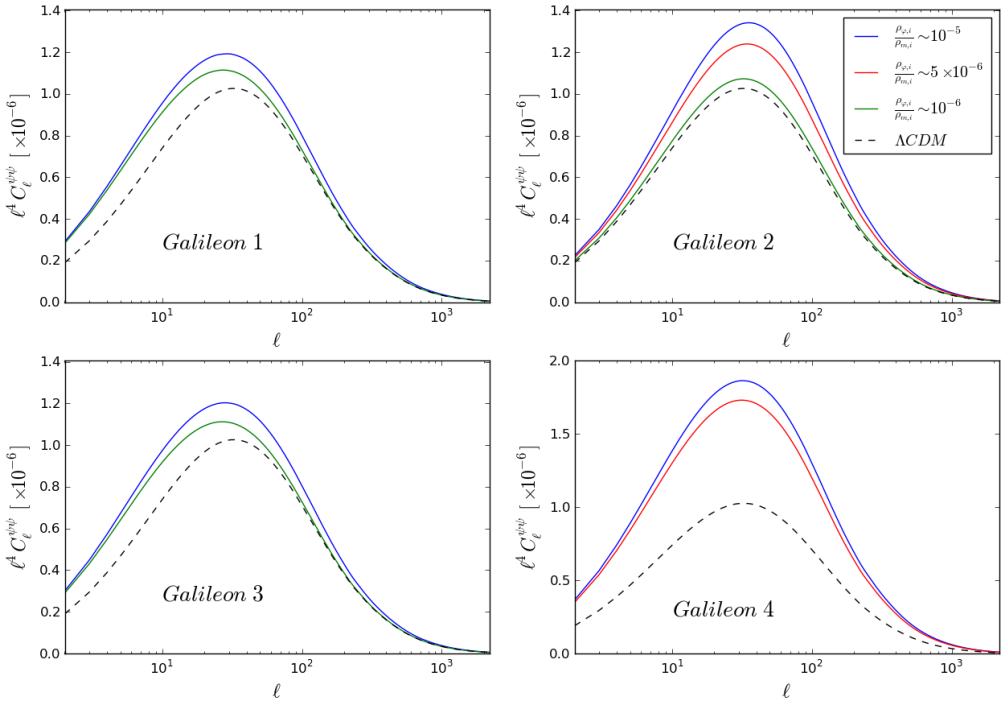

FIGURE 3.6 Spectres de puissance angulaire de l'effet de lentille gravitationnel dans le CMB pour les scénarios de la table 3.1.

Dans la figure 3.6, on peut voir les spectres de puissance de l'effet de lentille gravitationnelle (lensing) correspondants. Il est intéressant de remarquer que même pour des jeux de paramètres du galileon pour lesquels le spectre de puissance en température est proche de celui du modèle ΛCDM, le spectre du lensing peut être très différent (par exemple les scénarios "Galileon 1" et "Galileon 3"). L'ajout de la donnée du lensing par rapport au spectre de puissance en température seul devrait donc apporter une contrainte supplémentaire forte sur les paramètres du modèle.

Enfin, les dernières observations sont celles dérivées du spectre de puissance linéaire de la matière, noté P_k, dont les prédictions sont représentées dans la figure 3.7. Ce dernier est défini comme la transformée de Fourier de la fonction de corrélation à deux points du contraste de

densité de matière dans le régime linéaire :

$$\xi(r) = \langle \delta(\vec{x})\, \delta(\vec{x} + \vec{r}) \rangle \tag{3.107}$$

où δ correspond au contraste de densité de la matière, c'est-à-dire de la matière noire et de la matière baryonique. Le spectre de puissance de la matière contient les informations relatives à la formation des grandes structures de l'Univers dans le régime linéaire.

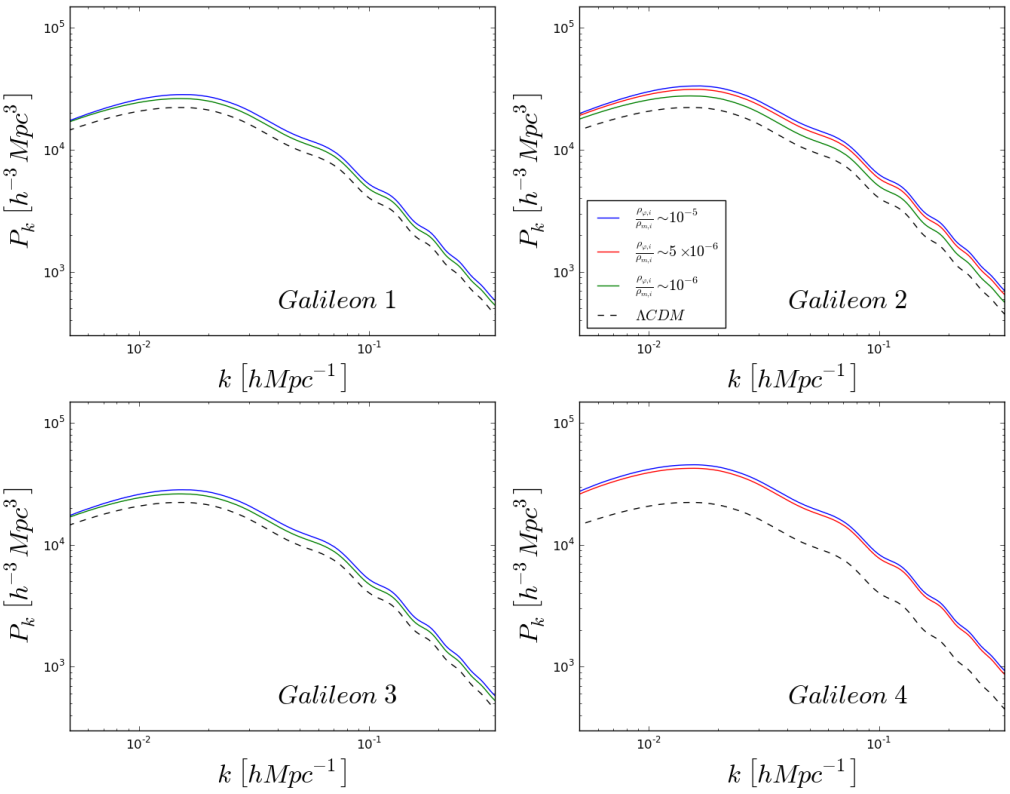

FIGURE 3.7 Spectres de puissance linéaire de la matière à $z = 0.31$ pour les scénarios de la table 3.1.

Les différences dues au galileon par rapport au modèle ΛCDM sont ici plus faibles que pour les autres spectres de puissance. Il est cependant intéressant de noter que ces différences se font surtout ressentir lorsque le terme de couplage disformel n'est pas nul, c'est-à-dire lorsque $\bar{c}_G \neq 0$.

De même que pour l'évolution des principales grandeurs physiques, les prédictions des spectres du modèle du galileon ont été comparées aux résultats de Barreira et al. (2012) [4], et trouvées compatibles à une précision de l'ordre du %. Cette comparaison est présentée en annexe B.

La comparaison aux résultats d'A. Barreira et al. [4] a permis de valider ma version modifiée de CAMB. Elle a nécessité l'utilisation d'une paramétrisation spécifique (voir la partie 3.3.2). Il convient maintenant de revenir à la paramétrisation avec laquelle nous présenterons tous les résultats par la suite, qui s'affranchit du choix d'une condition initiale. Comme décrit par (3.70), cela revient simplement à un changement dans les paramètres $\bar{c}_i$ du modèle, laissant toutes les équations inchangées. Ma version de CAMB est donc encore tout à fait valide avec cette nouvelle paramétrisation. À titre d'exemple, la figure 3.8 présente le spectre de puissance angulaire des anisotropies de température du CMB correspondant au meilleur ajustement obtenu dans [3], pour le modèle du galileon sans couplage, avec la paramétrisation indépendante de la condition initiale.

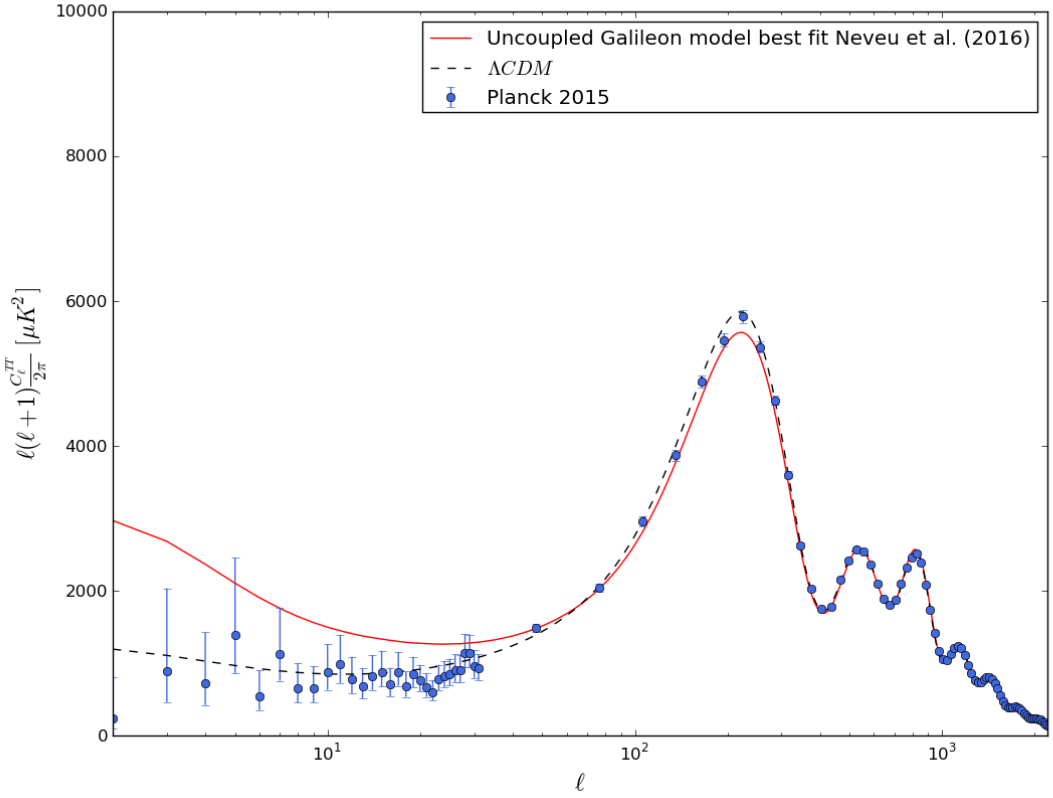

FIGURE 3.8 Spectre de puissance angulaire des anisotropies de température du CMB obtenu avec la paramétrisation indépendante de la condition initiale. Le jeu de paramètres utilisés est celui du meilleur ajustement du modèle du galileon non-couplé aux données obtenu dans Neveu et al. (2016) [3].

Cet ajustement a été obtenu sans utiliser les spectres du CMB en entier, mais en utilisant des variables plus simples, dérivées du spectre de puissance en température, notamment la position du premier pic mais pas son amplitude. Par ailleurs, de nombreuses autres sondes (Supernovae, BAO, taux de formation des grandes structures, ...) ont été utilisées pour effectuer cet

ajustement, il n'est donc pas anodin de constater que ce scénario ne s'ajuste pas bien aux observations du spectre de puissance en température du satellite Planck. L'ajout des contraintes tirées des spectres de puissance angulaire complets rendu possible par le développement de ma version modifiée de CAMB nous permettra d'augmenter drastiquement le nombre de mesures auxquelles comparer prédiction du modèle et observations par rapport à l'étude ayant abouti à l'ajustement précédent.

3.4.4 Contraintes théoriques

Nous allons, dans le chapitre 4, utiliser ma version modifiée de CAMB pour apporter des contraintes sur le modèle du galileon. Cependant, en l'état, l'espace des paramètres à explorer est trop vaste. En effet, celui-ci est constitué des paramètres propres au galileon et de ceux des perturbations (voir chapitre 1) : $\left(\Omega_b h^2, \Omega_c h^2, \theta_{MC}, \tau, A_s, n_s, \Omega_\nu^0, \bar{c}_2, \bar{c}_3, \bar{c}_4, \bar{c}_G\right)$. Face à autant de paramètres à contraindre, il est important de restreindre l'espace des paramètres à explorer autant que possible.
Premièrement, on va explorer le sous-espace où $\Omega_\nu^0 =$ cste, c'est-à-dire pour lequel $\sum m_\nu =$ cste $= 0.06$eV (nous relacherons cependant cette hypothèse dans un second temps, voir section 4.2.3), ce qui correspond à la masse minimum des neutrinos donnée par les expériences d'oscillations de neutrinos [55, 56].
Deuxièmement, un certain nombre de contraintes d'origine théorique peuvent être utilisées pour restreindre la taille de l'espace des paramètres. Les jeux de paramètres ne vérifiant pas ces contraintes théoriques ne sont pas viables et sont par conséquent rejetés. Les contraintes théoriques en question sont les suivantes :

1. on impose que la densité d'énergie pour le galileon donnée par (3.71) soit positive durant toute l'histoire de l'Univers.
2. il a été montré dans [48] et [57] que les perturbations scalaires donnent lieu à deux contraintes théoriques. Si on écrit l'action du galileon linéarisée autour d'une métrique FLRW :
$$\delta S_\pi^S = \frac{1}{2}\int dt d^3x a^3 Q_s \left[\frac{1}{2}\dot{\gamma}^2 - \frac{c_s^2}{a^2}\left(\nabla\gamma\right)^2\right] \tag{3.108}$$
La condition de stabilité de Laplace (voir section 3.1.2) impose à la vitesse du son d'être de carré positif, avec :
$$c_s^2 = \frac{4\kappa_1\kappa_4\kappa_5 - 2\kappa_3\kappa_5^2 - 2\kappa_4^2\kappa_6}{\kappa_4\left(2\kappa_4\kappa_2 + 3\kappa_5^2\right)} \tag{3.109}$$

où les κ_i sont des fonctions de $\left(\bar{H}, \bar{x}\right)$ données par :

$$\kappa_1 = -6\bar{c}_4\bar{H}^3\bar{x}^3\left(\left(\overset{o}{\bar{H}\bar{x}}\right) + \frac{\bar{H}\bar{x}}{3}\right) + \bar{c}_5\bar{H}^5\bar{x}^3\left(12\bar{H}\overset{o}{\bar{x}} + 15\bar{x}\overset{o}{\bar{H}} + 3\bar{H}\bar{x}\right)$$
$$+2\bar{c}_G\left(\bar{H}\left(\overset{o}{\bar{H}\bar{x}}\right) + \bar{H}^2\bar{x}\right) \tag{3.110}$$
$$\kappa_2 = -\frac{\bar{c}_2}{2} + 6\bar{c}_3\bar{H}^2\bar{x} - 27\bar{c}_4\bar{H}^4\bar{x}^2 + 30\bar{c}_5\bar{H}^6\bar{x}^3 + 3\bar{c}_G\bar{H}^2 \tag{3.111}$$
$$\kappa_3 = -1 - \frac{\bar{c}_4}{2}\bar{H}^4\bar{x}^4 - 5\bar{c}_5\bar{H}^5\bar{x}^4\left(\overset{o}{\bar{H}\bar{x}}\right) + \bar{c}_G\bar{H}^2\bar{x}^2 \tag{3.112}$$
$$\kappa_4 = -2 + 3\bar{c}_4\bar{H}^4\bar{x}^3 - 6\bar{c}_5\bar{H}^6\bar{x}^5 - 2\bar{c}_G\bar{H}^2\bar{x}^2 \tag{3.113}$$
$$\kappa_5 = 2\bar{c}_3\bar{H}^2\bar{x}^2 - 12\bar{c}_4\bar{H}^4\bar{x}^3 + 15\bar{c}_5\bar{H}^6\bar{x}^4 + 4\bar{c}_G\bar{H}^2\bar{x} \tag{3.114}$$
$$\kappa_6 = \frac{\bar{c}_2}{2} - 2\bar{c}_3\left(\bar{H}\left(\overset{o}{\bar{H}\bar{x}}\right) + 2\bar{H}^2\bar{x}\right) + \bar{c}_4\left(12\bar{H}^4\bar{x}\overset{o}{\bar{x}} + 18\bar{H}^3\bar{x}^2\overset{o}{\bar{H}} + 13\bar{H}^4\bar{x}^2\right)$$
$$-\bar{c}_5\left(18\bar{H}^6\bar{x}^2\overset{o}{\bar{x}} + 30\bar{H}^5\bar{x}^3\overset{o}{\bar{H}} + 12\bar{H}^6\bar{x}^3\right) - \bar{c}_G\left(2\bar{H}\overset{o}{\bar{H}} + 3\bar{H}^2\right) \tag{3.115}$$
$$\tag{3.116}$$

La condition anti-fantôme nécessite d'avoir un terme cinétique positif avec la signature $(-,+,+,+)$, ce qui impose :

$$Q_s = -\kappa_2 - \frac{3\kappa_5^2}{2\kappa_4} > 0 \tag{3.117}$$

3. même si l'on n'utilise pas les perturbations tensorielles dans le calcul des observables, car nous avons montré dans le chapitre 2 que leurs contributions étaient négligeables, on peut les utiliser pour rejeter des scénarios physiquement inacceptables. Si l'on considère une perturbation tensorielle de la métrique de la forme $\delta g_{ij} = a^2 h_{ij}$ (voir section 2.1.1), on peut obtenir deux actions linéarisées décrivant la propagation des deux modes de polarisations $h_\oplus$ et $h_\otimes$:

$$\delta S_\pi^T = \frac{1}{2}\int dt d^3x a^3 Q_T\left[\frac{1}{2}\dot{h}_{\oplus,\otimes}^2 - \frac{c_T^2}{a^2}\left(\nabla h_{\oplus,\otimes}\right)^2\right] \tag{3.118}$$

La condition anti-fantôme impose :

$$\frac{Q_T}{M_P^2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\bar{c}_4\bar{H}^4\bar{x}^4 + \frac{3}{2}\bar{c}_5\bar{H}^5\bar{x}^5 + \frac{1}{2}\bar{c}_G\bar{H}^2\bar{x}^2 > 0 \tag{3.119}$$

La condition de stabilité de Laplace se traduit par une vitesse des ondes gravitationnelles de carré positif, avec [57] :

$$c_T^2 = \frac{M_P^2}{Q_T}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\bar{c}_4\bar{H}^4\bar{x}^4 + \frac{3}{2}\bar{c}_5\bar{H}^5\bar{x}^4\left(\overset{o}{\bar{H}\bar{x}}\right) - \frac{1}{2}\bar{c}_G\bar{H}^2\bar{x}^2\right] \tag{3.120}$$

L'ensemble des scénarios étudiés devront vérifier ces conditions théoriques, qui ne dépendent que du fond, tout au long de l'histoire de l'Univers.

Bibliographie

[1] J. Neveu et al. Experimental constraints on the uncoupled Galileon model from SNLS3 data and other cosmological probes. *Astron. Astrophys.*, 555 :A53, 2013.

[2] J. Neveu et al. First experimental constraints on the disformally coupled Galileon model. *Astron. Astrophys.*, 569 :A90, 2014.

[3] J. Neveu et al. Constraining the ΛCDM and Galileon models with recent cosmological data. *Astron. Astrophys.*, 600 :A40, 2017.

[4] Alexandre Barreira, Baojiu Li, Carlton M. Baugh, and Silvia Pascoli. Linear perturbations in Galileon gravity models. *Phys. Rev.*, D86 :124016, 2012.

[5] Alexandre Barreira, Baojiu Li, Ariel Sanchez, Carlton M. Baugh, and Silvia Pascoli. Parameter space in Galileon gravity models. *Phys. Rev.*, D87 :103511, 2013.

[6] Alexandre Barreira, Baojiu Li, Carlton Baugh, and Silvia Pascoli. The observational status of Galileon gravity after Planck. *JCAP*, 1408 :059, 2014.

[7] Albert Einstein. The Foundation of the General Theory of Relativity. *Annalen Phys.*, 49(7) :769–822, 1916. [Annalen Phys.14,517(2005)].

[8] Albert Einstein. Cosmological Considerations in the General Theory of Relativity. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, 1917.

[9] Edwin Hubble. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 15 :168–173, 1929.

[10] S. Perlmutter et al. Measurements of Omega and Lambda from 42 high redshift supernovae. *Astrophys. J.*, 517 :565–586, 1999.

[11] Adam G. Riess et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *Astron. J.*, 116 :1009–1038, 1998.

[12] Planck Collaboration. Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters. *Astron. Astrophys.*, 594 :A13, 2016.

[13] A. D. Sakharov. Vacuum quantum fluctuations in curved space and the theory of gravitation. *Sov. Phys. Dokl.*, 12 :1040–1041, 1968. [,51(1967)].

[14] M.P. Hobson, G. Efstathiou, and A.N. Lasemby. *General Relativity : An Introduction for Physicists*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2006.

[15] Eugenio Bianchi and Carlo Rovelli. Why all these prejudices against a constant ? 2010.

[16] Shinji Tsujikawa. Quintessence : A Review. *Class. Quant. Grav.*, 30 :214003, 2013.

[17] Antonio De Felice and Shinji Tsujikawa. f(R) theories. *Living Rev. Rel.*, 13 :3, 2010.

[18] G. R. Dvali, Gregory Gabadadze, and Massimo Porrati. 4-D gravity on a brane in 5-D Minkowski space. *Phys. Lett.*, B485 :208–214, 2000.

[19] Claudia de Rham and Gregory Gabadadze. Generalization of the Fierz-Pauli Action. *Phys. Rev.*, D82 :044020, 2010.

[20] Claudia de Rham, Gregory Gabadadze, and Andrew J. Tolley. Resummation of Massive Gravity. *Phys. Rev. Lett.*, 106 :231101, 2011.

[21] S. F. Hassan, Rachel A. Rosen, and Angnis Schmidt-May. Ghost-free Massive Gravity with a General Reference Metric. *JHEP*, 02 :026, 2012.

[22] S. F. Hassan and Rachel A. Rosen. Bimetric Gravity from Ghost-free Massive Gravity. *JHEP*, 02 :126, 2012.

[23] S. F. Hassan and Rachel A. Rosen. Confirmation of the Secondary Constraint and Absence of Ghost in Massive Gravity and Bimetric Gravity. *JHEP*, 04 :123, 2012.

[24] Richard P. Woodard. Ostrogradsky's theorem on Hamiltonian instability. *Scholarpedia*, 10(8) :32243, 2015.

[25] Serge Reynaud and Marc-Thierry Jaekel. Tests of general relativity in the solar system. *Proc. Int. Sch. Phys. Fermi*, 168 :203–217, 2009.

[26] Alberto Nicolis, Riccardo Rattazzi, and Enrico Trincherini. The Galileon as a local modification of gravity. *Phys. Rev.*, D79 :064036, 2009.

[27] Gregory Walter Horndeski. Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space. *Int. J. Theor. Phys.*, 10 :363–384, 1974.

[28] Miguel Zumalacárregui and Juan García-Bellido. Transforming gravity : from derivative couplings to matter to second-order scalar-tensor theories beyond the Horndeski Lagrangian. *Phys. Rev.*, D89 :064046, 2014.

[29] Jérôme Gleyzes, David Langlois, Federico Piazza, and Filippo Vernizzi. Healthy theories beyond Horndeski. *Phys. Rev. Lett.*, 114(21) :211101, 2015.

[30] Jérôme Gleyzes, David Langlois, Federico Piazza, and Filippo Vernizzi. Exploring gravitational theories beyond Horndeski. *JCAP*, 1502 :018, 2015.

[31] David Langlois and Karim Noui. Degenerate higher derivative theories beyond Horndeski : evading the Ostrogradski instability. *JCAP*, 1602(02) :034, 2016.

[32] David Langlois and Karim Noui. Hamiltonian analysis of higher derivative scalar-tensor theories. *JCAP*, 1607(07) :016, 2016.

[33] Jibril Ben Achour et al. Degenerate higher order scalar-tensor theories beyond Horndeski up to cubic order. *JHEP*, 12 :100, 2016.

[34] C. Deffayet, Gilles Esposito-Farese, and A. Vikman. Covariant Galileon. *Phys. Rev.*, D79 :084003, 2009.

[35] Philippe Brax, Clare Burrage, and Anne-Christine Davis. Shining Light on Modifications of Gravity. *JCAP*, 1210 :016, 2012.

[36] Jacob D. Bekenstein. The Relation between physical and gravitational geometry. *Phys. Rev.*, D48 :3641–3647, 1993.

[37] Jibril Ben Achour, David Langlois, and Karim Noui. Degenerate higher order scalar-tensor theories beyond Horndeski and disformal transformations. *Phys. Rev.*, D93(12) :124005, 2016.

[38] Dario Bettoni and Stefano Liberati. Disformal invariance of second order scalar-tensor theories : Framing the Horndeski action. *Phys. Rev.*, D88 :084020, 2013.

[39] Willem de Sitter. The expanding universe. Discussion of Lemaître's solution of the equations of the inertial field (Errata : 5 V). 5 :211, June 1930.

[40] Clare Burrage and David Seery. Revisiting fifth forces in the Galileon model. *JCAP*, 1008 :011, 2010.

[41] James G. Williams, Slava G. Turyshev, and Dale H. Boggs. Progress in lunar laser ranging tests of relativistic gravity. *Phys. Rev. Lett.*, 93 :261101, 2004.

[42] M. Fierz and W. Pauli. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A173 :211–232, 1939.

[43] E. C. G. Stueckelberg. Theory of the radiation of photons of small arbitrary mass. *Helv. Phys. Acta*, 30 :209–215, 1957.

[44] Henri Ruegg and Marti Ruiz-Altaba. The Stueckelberg field. *Int. J. Mod. Phys.*, A19 :3265–3348, 2004.

[45] Claudia de Rham and Andrew J. Tolley. DBI and the Galileon reunited. *JCAP*, 1005 :015, 2010.

[46] Eugeny Babichev and Gilles Esposito-Farèse. Time-Dependent Spherically Symmetric Covariant Galileons. *Phys. Rev.*, D87 :044032, 2013.

[47] Antonio De Felice and Shinji Tsujikawa. Cosmology of a covariant Galileon field. *Phys. Rev. Lett.*, 105 :111301, 2010.

[48] Stephen Appleby and Eric V. Linder. The Paths of Gravity in Galileon Cosmology. *JCAP*, 1203 :043, 2012.

[49] Carl Runge. Ueber die numerische auflösung von differentialgleichungen. *Mathematische Annalen*, 46(2) :167–178, Jun 1895.

[50] Martin W. Kutta. Beitrag zur näherungsweisen Integration totaler Differentialgleichungen. *Zeit. Math. Phys.*, 46 :435–53, 1901.

[51] Janina Renk, Miguel Zumalacárregui, Francesco Montanari, and Alexandre Barreira. Galileon gravity in light of ISW, CMB, BAO and H_0 data. *JCAP*, 1710(10) :020, 2017.

[52] Anthony Challinor and Anthony Lasenby. Cosmic microwave background anisotropies in the CDM model : A Covariant and gauge invariant approach. *Astrophys. J.*, 513 :1–22, 1999.

[53] Anthony Challinor and Antony Lewis. Lensed CMB power spectra from all-sky correlation functions. *Phys. Rev.*, D71 :103010, 2005.

[54] Antony Lewis and Anthony Challinor. Weak gravitational lensing of the CMB. *Phys. Rept.*, 429 :1–65, 2006.

[55] M. Maltoni, T. Schwetz, M. A. Tortola, and J. W. F. Valle. Status of global fits to neutrino oscillations. *New J. Phys.*, 6 :122, 2004.

[56] G. L. Fogli, E. Lisi, A. Marrone, and A. Palazzo. Global analysis of three-flavor neutrino masses and mixings. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, 57 :742–795, 2006.

[57] Antonio De Felice and Shinji Tsujikawa. Generalized Galileon cosmology. *Phys. Rev.*, D84 :124029, 2011.

Chapitre 4

Contraintes expérimentales sur le modèle du galileon

Sommaire

4.1 Données utilisées . . . 126
4.1.1 Supernovae de type Ia . . . 126
4.1.2 Oscillations acoustiques de baryons . . . 129
4.1.3 Fond diffus cosmologique . . . 133
4.1.4 Observation de la fusion d'un système binaire d'étoiles à neutrons . . . 134
4.2 Exploration de l'espace des paramètres . . . 138
4.2.1 Méthode de Monte-Carlo par chaînes de Markov . . . 138
4.2.2 Contraintes cosmologiques sur les paramètres des modèles de base . . . 146
4.2.3 Extensions des modèles de base . . . 160
4.2.4 Contraintes sur la vitesse des ondes gravitationnelles . . . 167
4.3 Discussion . . . 170
4.3.1 Tensions entre les différentes sondes . . . 171
4.3.2 Les solutions trackers . . . 175
4.3.3 Le statut du galileon . . . 177
Bibliographie . . . 179

Pour que le modèle du galileon constitue une explication crédible au phénomène d'accélération de l'expansion de l'Univers, ses prédictions doivent être en accord avec les observations. Ainsi, pour pouvoir discuter de la validité ou non du modèle du galileon, il faut comparer ses prédictions aux observations pour toutes les valeurs possibles des paramètres du modèle. C'est impossible en pratique, ce qui nous pousse à échantillonner l'espace des paramètres afin d'explorer uniquement les zones pour lesquelles les prédictions sont les plus proches des observations. Dans ce chapitre, nous allons commencer par décrire dans la section 4.1 les données

observationnelles auxquelles seront confrontées les prédictions du modèle. Puis, nous décrirons les résultats obtenus lors de l'exploration de l'espace des paramètres en section 4.2. Enfin, nous statuerons sur la validité du modèle du galileon en section 4.3 à la lumière des résultats de la comparaison des prédictions aux observations.

4.1 Données utilisées

Les données observationnelles utilisées pour contraindre le modèle du galileon se classent dans trois catégories : des mesures de distances cosmologiques qui tracent l'histoire de l'expansion de l'Univers, des observations des perturbations cosmologiques qui décrivent l'évolution des structures de l'Univers jeune, et l'observation d'un évènement astrophysique dans l'Univers proche.

4.1.1 Supernovae de type Ia

Afin de mesurer des distances cosmologiques, une méthode possible est d'utiliser ce que l'on appelle des chandelles standards. Il s'agit d'objets idéaux qui possèdent une luminosité intrinsèque connue et la même pour tous ces objets. Dans ce cas, on peut directement mettre en relation la luminosité de l'objet observé avec sa distance. Plus l'objet est distant plus la luminosité apparente est faible, et la relation entre cette luminosité apparente et le redshift de l'objet, donnée par (1.31) pour une cosmologie donnée, permet de tracer l'évolution du fond cosmologique.

Les chandelles standards ici utilisées sont les supernovae de type Ia. Les supernovae sont des évènements transitoires qui correspondent à des explosions d'étoiles. Ces évènements sont extrêmement brillants, visibles à des distances cosmologiques, et leur durée est de plusieurs semaines en moyenne. La similitude des spectres et des courbes de lumière des supernovae de type Ia indique que ces objets sont de bons candidats au statut de chandelle standard. Ces explosions semblent toutes avoir pour origine le même phénomène qui, dans l'hypothèse la plus communément admise, est une chaîne de réactions thermonucléaires bien identifiée et identique d'une supernovae de type Ia à une autre. Plusieurs scénarios ont été proposés pour expliquer l'origine de tels évènements [1, 2]. Le scénario le plus couramment admis suppose que ces évènements sont produits par un système binaire composé d'une naine blanche, résultat de l'effondrement d'une étoile peu massive (moins de $8M_\odot$), et d'une géante rouge suffisamment proche. La naine blanche accrète les couches externes de la seconde étoile, ce qui augmente progressivement sa masse. Lorsque celle-ci approche la masse de Chandrasekhar $\sim 1.4M_\odot$ [3], la chaîne de réactions thermonucléaires s'amorce, ce qui entraîne l'explosion de la naine blanche. En pratique, les supernovae sont d'abord identifiées à l'aide d'observations

photométriques dans différentes bandes spectrales, puis on valide cette identification et on mesure le redshift par des observations spectroscopiques proche du maximum de luminosité des supernovae. Ainsi, on mesure le spectre près du maximum de luminosité pour chaque supernova (illustré en figure 4.1) et la courbe de lumière, c'est-à-dire le flux de lumière dans les bandes spectrales observées en fonction du temps.

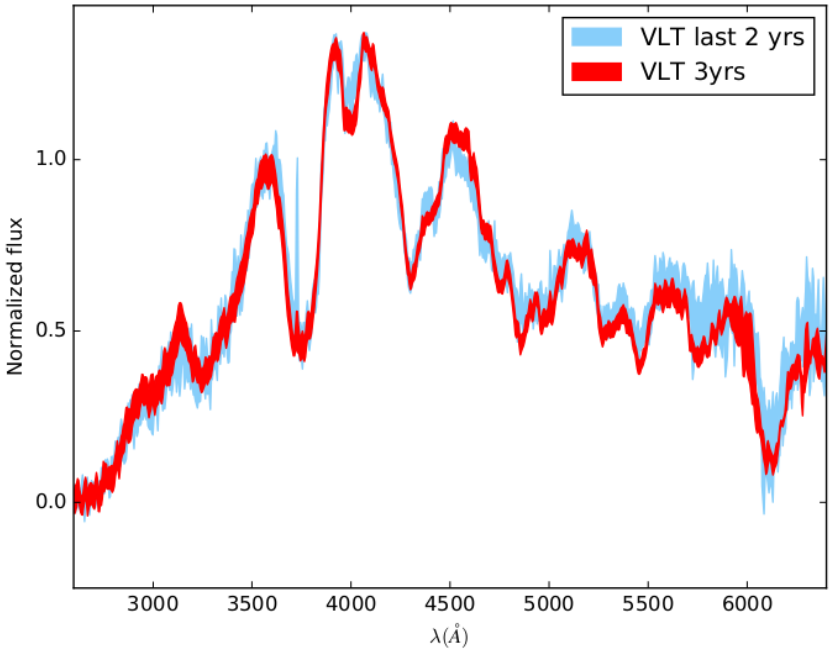

FIGURE 4.1 Spectres moyens des supernovae de SNLS observées avec le VLT pendant les trois premières années de prise de données (à un redshift moyen $z = 0.64 \pm 0.02$), en rouge, et spectre moyens de celles observées pendant les deux dernières années de prise de données (à un redshift moyen $z = 0.62 \pm 0.02$), en bleu, tirés de la publication finale des spectres de SNLS [4]. Les spectres ont été corrigés de l'effet dû au redshift et à la distance à l'observateur. On constate que les deux spectres moyens sont semblables, ce qui nous conforte dans l'idée que les supernovae de type Ia sont des chandelles standards.

Puis, on détermine la magnitude apparente m au maximum de luminosité de la supernova, définie par :

$$m = -2.5\log\left(\frac{F}{F_{ref}}\right) \tag{4.1}$$

où F est le flux mesuré dans une certaine bande spectrale et F_{ref} un flux de référence. La bande spectrale de référence qui est considérée ici est la bande bleue (on note alors la magnitude m_B) définie par sa longueur d'onde moyenne $\lambda = 430$ nm et sa largeur $\Delta\lambda = 72$ nm.

La magnitude intrinsèque, c'est-à-dire la magnitude dans le référentiel de repos de la supernova, est supposée être la même pour toutes les supernovae de type Ia, mais la magnitude apparente n'étant pas observée dans ce référentiel, elle subit deux effets additionnels. Tout d'abord, il y a une diminution de l'amplitude due à l'éloigement, qui est l'effet que l'on cherche

à mesurer. Il y a également un décalage vers le rouge du spectre dû à l'expansion de l'Univers, ce qui peut affecter la magnitude dans la bande bleue de référence. Il faut donc prendre en compte l'effet du redshift dans la mesure de la magnitude apparente. On définit alors une magnitude apparente m_B^* pour laquelle on a enlevé la contribution du décalage vers le rouge. Pour définir m_B^*, on mesure la magnitude apparente d'un spectre "déredshifté", c'est-à-dire comme si toutes les supernovae étaient au même redshift. On peut alors directement relier cette nouvelle magnitude à la distance de luminosité de la supernova (définie en (1.31)) par la relation :

$$m_B^*(z) = 5\log\left(\frac{d_L(z)}{10\text{ pc}}\right) + M_B \tag{4.2}$$

où M_B est la magnitude absolue de la supernova. Il est important de noter que la procédure evoquée précédemment ne rend pas la magnitude totalement indépendante du redshift, mais corrige simplement d'un effet de mesure. La magnitude dépend du redshift à travers la distance de luminosité, ce qui nous renseigne sur l'histoire de l'expansion de l'Univers.

En principe, la magnitude absolue M_B est la même pour toutes les supernovae, du fait de leur nature de chandelle standard. Malheureusement, on observe une dispersion sur les mesures de magnitudes apparentes au maximum de luminosité d'une supernova à une autre, même après prise en compte de l'effet du décalage vers le rouge. Les supernovae de type Ia ne sont donc pas à proprement parler des chandelles standards. Cela met-il à mal l'utilisation de supernovae comme méthode d'observation de l'histoire de notre Univers ? Heureusement, cette dispersion peut se comprendre, au moins qualitativement, par l'étude de la production et de la décroissance du nickel ^{56}Ni à l'origine de la production du flux lumineux de la supernova. En effet, plus la SNIa produit de ^{56}Ni, plus elle sera brillante, bleue, et rayonnera pendant longtemps, ce que l'on résume par la règle du "brighter-bluer", et la règle du "brighter-slower" [5]. La magnitude apparente de la supernova dépend donc de sa production de ^{56}Ni, selon une dépendance que l'on peut corriger, on dit alors que l'on "standardise" les supernovae Ia. Pour cela, on définit le module de distance μ_B qui corrige la magnitude mesurée $m_{B,mes}^*$ en introduisant deux paramètres de nuisance α et β communs à toutes les supernovae :

$$\mu_B = m_{B,mes}^* - (M_B - \alpha(s-1) + \beta c) \tag{4.3}$$

s est ici le paramètre de "stretch" qui correspond à l'écart entre la largeur de la courbe de lumière de la supernova et celle d'un patron de référence, et la couleur c qui correspondant à l'écart entre la couleur $B - V = m_B - m_V$ de la supernova et la couleur moyenne $\bar{B} - \bar{V}$ de l'échantillon de supernovae Ia (m_V correspond à la magnitude dans la bande verte, pour laquelle $\lambda = 550$ nm et $\Delta\lambda = 86$ nm). Le bien fondé de ces corrections est illustré par la figure 4.2.

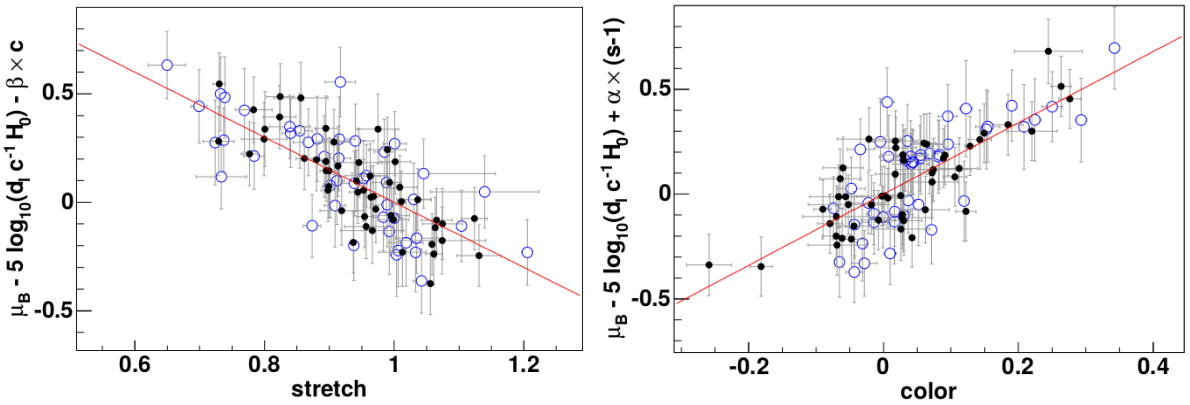

FIGURE 4.2 (Gauche) Module de distance sans la correction de l'effet du stretch en fonction de ce dernier, qui met en évidence la relation brighter-slower ainsi que la pertinence d'une correction linéaire. (Droite) Module de distance sans la correction de l'effet de la couleur en fonction de cette dernière, qui met en évidence la relation brighter-bluer ainsi que la pertinence d'une correction linéaire. Les points bleus creux correspondent à des supernovae proches, et les points noirs pleins à des supernovae lointaines. On voit donc que les relations précédentes ne dépendent pas de la distance. Ces figures sont tirées de l'analyse des données de SNLS de première année [6].

L'échantillon de supernovae de type Ia utilisé dans cette thèse est le catalogue de JLA [7] (pour Joint Light-curve Analysis), composé de 740 supernovae spectroscopiques. Ce catalogue est le produit d'une collaboration entre les expériences SNLS et SDSS-II supernova survey. Il contient 374 supernovae observées par le télescope SDSS [8, 9], 242 supernovae provenant des trois premières années de prise de données de SNLS [10] avec le téléscope CFHT (Canada-France-Hawaii Telescope), 110 supernovae à bas redshift $z < 0.08$ observée au Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics [11], et enfin 14 supernovae à très haut redshift $0.7 < z < 1.4$ observées par le télescope spatial Hubble (HST) [12]. Le programme SALT2 [13] d'ajustement des courbes de lumières mesurées dans les différents filtres extrait les caractéristiques intrinsèques de chaque supernova à partir de ses courbes de lumière : $m^*_{B,mes}$, c et $x_1 = 10\,(s-1)$.

On peut alors ajuster les prédictions d'un modèle cosmologique pour μ_B en utilisant (4.2) et en marginalisant sur les paramètres de nuisance. Il est d'usage de représenter le résultat sur un diagramme de Hubble comme le montre la figure 4.3 pour le modèle ΛCDM.

4.1.2 Oscillations acoustiques de baryons

Une autre méthode possible pour mesurer des distances cosmologiques est de se baser sur une longueur comobile caractéristique de l'Univers. Si une telle longueure existe et s'il est possible de la mesurer à différentes époques de l'histoire de l'Univers, on peut en extraire l'information concernant l'évolution du taux d'expansion de l'Univers. Il se trouve qu'en effet, une telle longueur existe, il s'agit de l'échelle des oscillations acoustiques de baryons (BAO pour Baryonic Acoustic Oscillations).

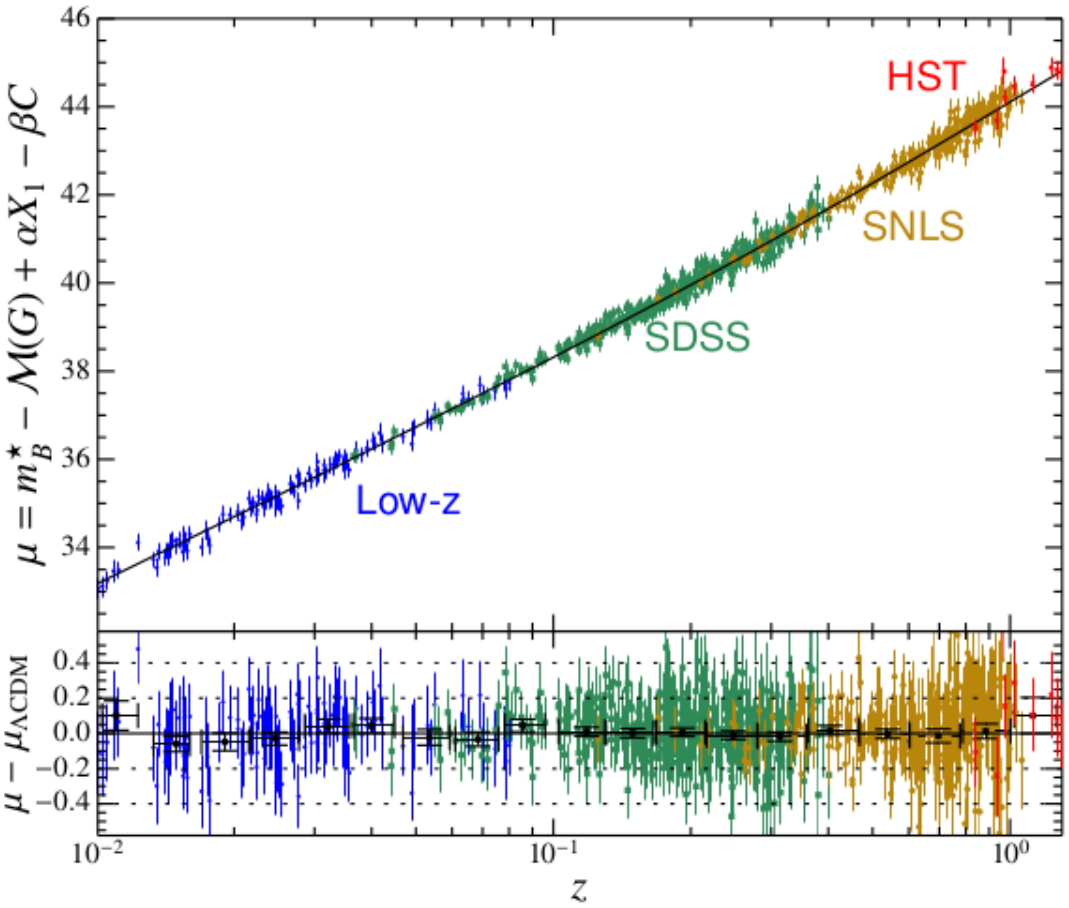

FIGURE 4.3 (Haut) Diagramme de Hubble de l'échantillon de supernovae de type Ia JLA [7]. La ligne noire correspond à la prédiction du meilleur ajustement dans le modèle ΛCDM pour une constante de Hubble fixée à $H_0 = 70$ km s^{-1} Mpc^{-1}. (Bas) Résidus du meilleur ajustement dans le modèle ΛCDM. Les points noirs correspondent aux moyennes des résidus sur des intervalles logarithmiques en redshift.

Cette échelle caractéristique est la trace de l'échelle qui correspond au premier pic des oscillations acoustiques que l'on peut voir dans le spectre de température du CMB. Cette échelle correspond à la distance à laquelle les températures de deux points de la carte des anisotropies de température sont les plus corrélées, d'après (2.85). Cela peut se traduire, dans une certaine mesure, comme la distance caractéristique des corrélations du champ de densité des photons en exploitant la relation (2.70), donc du champ de densité des baryons encore couplés à la radiation avant la recombinaison. Cette échelle caractéristique est le résultat des effets antagonistes dans le plasma de baryons et de photons de l'effondrement des baryons dans les puits de potentiels gravitationnels et de la pression de radiation du bain de photons, produisant ainsi des ondes acoustiques comme nous l'avons vu dans la partie 2.2.2. Lorsque les baryons et les photons sont découplés, la pression de radiation n'agit plus sur les baryons alors soumis uniquement à l'effondrement gravitationnel, ce qui a pour effet de geler les oscillations acoustiques et donc l'échelle du premier pic. Cette échelle se retrouve donc dans la distribution de

matière baryonique jusque dans l'Univers récent sous la forme de l'échelle BAO.

La manière la plus naturelle de mesurer l'échelle BAO consiste à exploiter la fonction de corrélation à deux points du champ de densité d'un traceur de la matière baryonique (par exemple des galaxies, des quasars ou bien des nuages de gaz d'hydrogène neutre tracés par les forêts Lyman-α) définie par (3.107). Cette fonction de corrélation, dont un exemple est représenté figure 4.4, présente une structure globale décroissante avec un pic à faible distance, du fait de l'effondrement gravitationnel dans les puits de potentiels, et un pic à une distance comobile de l'ordre de $r = 150$ Mpc qui correspond à l'échelle BAO.

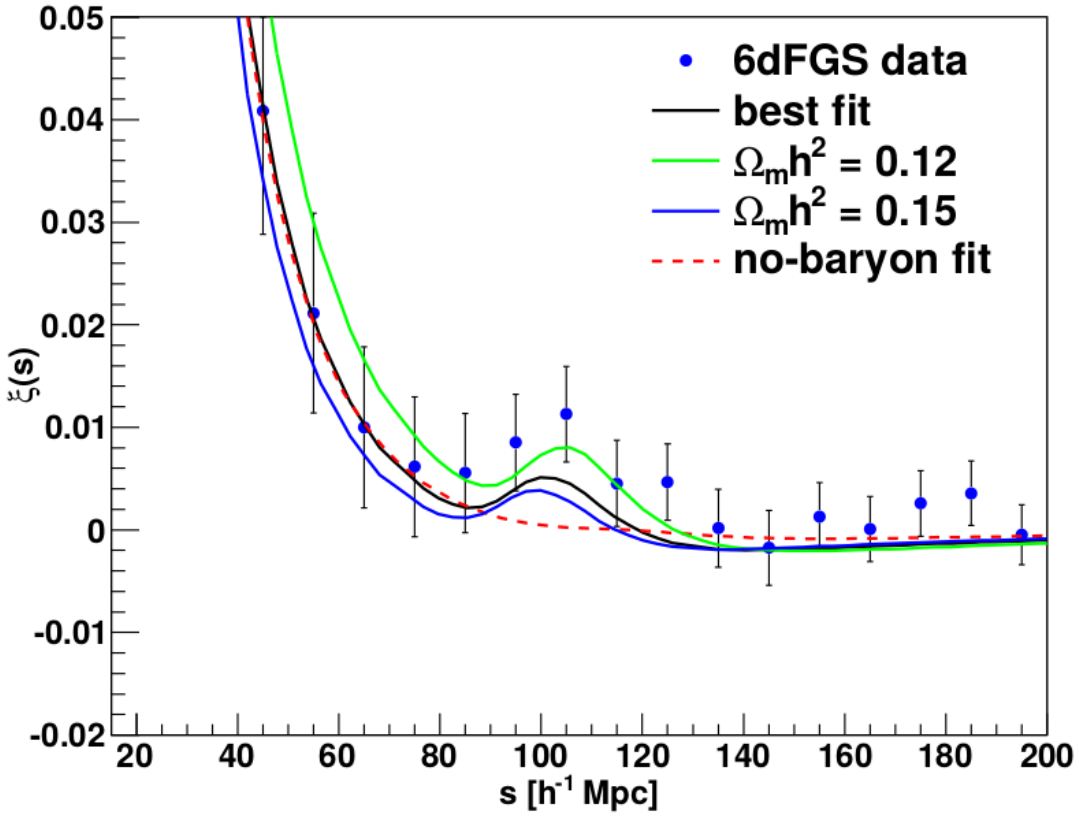

FIGURE 4.4 Fonction de correlation à deux points des galaxies provenant du 6dF Galaxy Survey [14] en fonction de la distance comobile s. Le pic à $s \sim 150$ Mpc correspond à l'échelle BAO. La courbe noire correspond au meilleur ajustement du modèle ΛCDM, pour lequel $\Omega_m h^2 = 0.138 \pm 0.020$, les courbes bleues et vertes sont obtenues en faisant varier $\Omega_m h^2$, à $\Omega_b h^2$ constant. La courbe en pointillés rouge correspond à la prédiction d'un univers sans baryon, pour lequel l'échelle BAO a disparu, d'où l'appellation d'oscillations acoustiques des baryons.

L'échelle BAO est mesurée pour différentes tranches en redshift de manière anisotrope à partir de la fonction de corrélation exprimée dans l'espace des redshifts, ou de manière équivalente à partir du spectre de puissance de la matière. On mesure l'écart entre la position du pic BAO observée et celle prédite par une cosmologie de référence, dite cosmologie fiducielle, que l'on caractérise par les paramètres $\alpha_\perp$ et $\alpha_\parallel$. Le premier caractérise l'écart perpendiculairement à la

ligne de visée et le second caractérise l'écart le long de la ligne de visée. Comme expliqué précédemment, la position du pic BAO correspond à l'horizon acoustique au redshift considéré, on peut alors exprimer $\alpha_\perp$ et $\alpha_\parallel$ selon :

$$\alpha_\perp(z) = \frac{D_M(z)\, r_{d,fid}}{D_{M,fid}(z)\, r_d} \quad \text{et} \quad \alpha_\parallel(z) = \frac{H_{fid}(z)\, r_{d,fid}}{H(z)\, r_d} \tag{4.4}$$

où D_M est la distance angulaire comobile, reliée à la distance angulaire physique (définie par (1.30)) par $D_M = (1+z)\, D_A$, et r_d est l'horizon acoustique comobile lorsque les baryons et les photons sont totalement découplés. On considère r_d plutôt que r_s car le découplage n'est pas instantané, et on a encore des oscillations acoustiques pendant le découplage. Les relations (4.4) expriment le fait qu'outre l'écart entre l'horizon acoustique mesuré et celui de la cosmologie fiducielle, l'échelle BAO mesurée diffère de l'échelle BAO fiducielle par le rapport des distances angulaires perpendiculairement à la ligne de visée et par le rapport des taux d'expansion le long de la ligne de visée. On peut aussi utiliser les paramètres suivants, plus physiques que $\alpha_\perp$ et $\alpha_\parallel$, obtenus à partir de ces derniers :

$$D_V(z) = \left(D_M^2(z) \frac{cz}{H(z)} \right)^{1/3} \tag{4.5}$$

$$F_{AP}(z) = D_M(z) \frac{H(z)}{c} \tag{4.6}$$

Le paramètre d'Alcock-Paczynski F_{AP} [15] décrit l'apparence d'un objet sphérique dans l'espace comobile, dont l'apparence peut être déformée en un ellipsoïde par l'effet de la cosmologie. Notons qu'historiquement, les analyses des observations se faisaient sous une hypothèse d'isotropie ($\alpha_\perp = \alpha_\parallel$, c'est-à-dire que F_{AP} est celui de la cosmologie fiducielle) par manque de sensibilité. Ainsi, certaines mesures de l'échelle BAO sont données en terme de D_V uniquement, sans mesure du paramètre d'Alcock-Paczynski F_{AP}. On peut extraire de D_V et F_{AP}, ou de manière équivalente de $\alpha_\perp$ et $\alpha_\parallel$, les mesures de $D_M(z)$ et $D_H = c/H(z)$ qui sont les paramètres physiques fondamentaux. Cependant, les mesures de BAO sont en fait sensibles aux paramètres $D_M(z)/r_d$ et $H(z)\, r_d$. Les résultats seront donc présentés dans cette thèse sous la forme des distances D_M, D_H et D_V exprimées en unités de r_d.

Les mesures d'échelles BAO utilisées dans cette thèse proviennent de différentes sources. Tout d'abord, nous disposons d'une mesure à un redshift $z = 0.106$ fournie par le catalogue de galaxies du 6dF Galaxy Survey (6dFGS) [14] composé de 75117 galaxies. Nous utilisons également une mesure de l'échelle BAO à un redshift $z = 0.15$ obtenue à partir du SDSS DR7 Main Galaxy Sample (MGS) [16]. Enfin, nous utilisons trois mesures récentes supplémentaires à des redshifts $z = 0.38$, 0.51 et 0.61 obtenues à partir du catalogue de galaxies du relevé BOSS DR12 [17] contenant 1.2 millions de galaxies. Il est important de noter que ces trois dernières mesures ne sont pas indépendantes du fait de recouvrements entre les échantillons de galaxies

à ces trois redshifts moyens. Ces données correspondent à celles qui font consensus en cosmologie, et qui sont intégrées dans la version standard de CosmoMC. Elles sont résumées dans la table 4.1.

Données	z_{eff}	$D_V\,(r_{d,fid}/r_d)$ [Mpc]	$D_M\,(r_{d,fid}/r_d)$ [Mpc]	$H\,(r_d/r_{d,fid})$ $\left[\text{km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}\right]$
6dFGS [14]	0.106	456 ± 27	-	-
MGS [16]	0.15	664 ± 25	-	-
BOSS DR12 [17]	0.38	-	1512 ± 33	81.2 ± 3.2
	0.51	-	1975 ± 41	90.9 ± 3.2
	0.61	-	2307 ± 50	99.0 ± 3.4

TABLE 4.1 Résumé des mesures d'échelle BAO utilisées dans cette thèse. Celles-ci proviennent de différentes analyses et expériences, et sont données sous forme de D_V (cas d'une analyse isotrope) ou bien en termes de D_M et H.

Il existe également des mesures des échelles BAO à plus haut redshift obtenus en utilisant les forêts Lyman-α [18, 19]. Celles-ci ne sont pas utilisées dans les analyses standards, aussi avons nous décidé de ne pas les utiliser pour contraindre le modèle du galileon.

4.1.3 Fond diffus cosmologique

En plus des mesures de distances cosmologiques, qui nous renseignent sur l'évolution du fond cosmologique, il est crucial de considérer les observations qui nous informent sur l'évolution des perturbations cosmologiques. On s'intéresse alors au fond diffus cosmologique dont les anisotropies, comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, sont produites par les perturbations cosmologiques. Pour tracer les anisotropies du fond diffus cosmologique, on utilise les spectres de puissance angulaire des anisotropies de température, des modes E de polarisation, de leurs corrélations croisées, et enfin de l'effet de lentille gravitationnelle (lensing). La physique des premières a été décrite dans la partie 2.2. Pour une description détaillée des autres types d'anisotropies du CMB, voir par exemple [20, 21].

Malheureusement, en pratique, lorsque l'on cherche à mesurer ces spectres de puissance, nous sommes confrontés à un problème de taille. En effet, pour obtenir le spectre de puissance angulaire de température par exemple, c'est-à-dire les coefficients de la décomposition en polynômes de Legendre de la fonction de corrélation à deux points (2.85), on utilise la relation (2.88). Ainsi, le spectre de puissance renseigne sur les propriétés statistiques du champ de température. Or, nous ne disposons que d'un unique univers à observer, c'est-à-dire d'une unique réalisation du processus stochastique qui mène au champ de température. La comparaison entre les prédictions théoriques (obtenues à partir d'une moyenne sur plusieurs réalisations) et les observations (obtenues en faisant une moyenne sur notre univers spatial) fait donc intervenir une hypothèse d'ergodicité spatiale. Dans le cas de fluctuations gaussiennes, l'estimateur

sans biais de variance minimale est donné par :

$$\hat{C}_\ell = \frac{1}{2\ell+1} \sum_m a_{\ell m} a^*_{\ell m} \tag{4.7}$$

L'efficacité de cet estimateur est intrinsèquement limitée par le fait que pour un multipôle ℓ, il n'existe que $2\ell + 1$ directions indépendantes. La variance relative est alors donnée par :

$$\frac{\langle \hat{C}_\ell^2 \rangle - \langle \hat{C}_\ell \rangle^2}{C_\ell^2} = \frac{2}{2\ell+1} \tag{4.8}$$

Cette limite statistique insurmontable est appelée variance cosmique. Elle est très importante aux petits multipôles où elle domine largement toutes les autres sources d'incertitude, ainsi qu'au niveau du premier pic où C_ℓ est élevé. D'autres difficultés observationnelles, notamment liées aux émissions d'avant-plan telles que celles de notre galaxie, rendent difficile les mesures précises des spectres de puissance angulaires du fond diffus cosmologique. Néanmoins, étant donné le grand nombre d'observables (on peut comparer théorie et observations pour chaque C_ℓ) et la précision des prédictions qui ne font intervenir que des perturbations linéaires, de gros efforts ont été déployés pour mesurer avec précision les anisotropies du CMB. Le fond diffus cosmologique constitue aujourd'hui une sonde incontournable, et les mesures des anisotropies faites par le satellite Planck en sont la référence.

Les données utilisées dans cette thèse sont celles obtenues par la collaboration Planck en 2015 [22, 23]. Ces données proviennent des observations du satellite Planck composé des instruments LFI (Low Frequency Instrument) et HFI (High Frequency Instrument) qui observent dans des bandes spectrales différentes, présentées dans la figure 4.5. Planck étant un satellite, il a pu effectuer une carte complète du rayonnement du fond diffus cosmologique sur tout le ciel, en s'affranchissant des effets atmosphériques, ce qui permet notamment de sonder les corrélations à très grandes échelles dans le CMB. Le LFI observe trois bandes spectrales à 30, 44 et 70 GHz, c'est-à-dire à des fréquences inférieures au pic du CMB, mais qui permettent d'améliorer la qualité de la carte du CMB et fournissent des informations sur les émissions galactiques et extra galactiques situées en avant plan. Le HFI observe les bandes de fréquence à 100, 143, 217, 353, 545 et 857 GHz, soit aux fréquences où l'on observe le mieux le CMB ainsi qu'à des fréquences plus élevées, là encore pour traiter les contributions d'avant plan.

4.1.4 Observation de la fusion d'un système binaire d'étoiles à neutrons

Un évènement survenu pendant ma thèse nous a poussé à utiliser une sonde supplémentaire, de nature astrophysique plus que cosmologique, pour contraindre le modèle du galileon. En effet, après la mise en service de l'interféromètre LIGO en 2015 [24] et plus récemment de

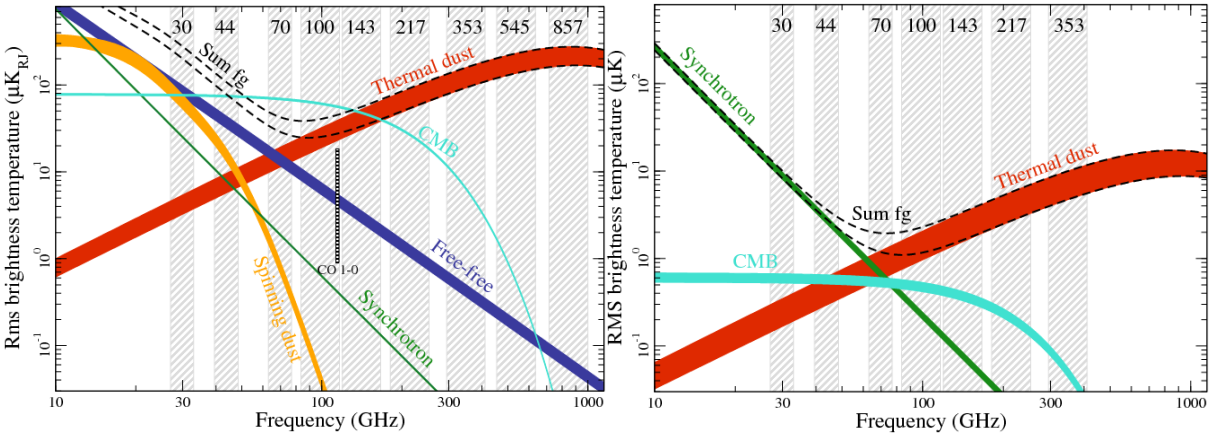

FIGURE 4.5 (Gauche) Amplitude des anisotropies de températures des différentes sources en fonction de la fréquence. (Droite) Amplitude des anisotropies de polarisation des différentes sources en fonction de la fréquence. Les bandes verticales indiquent les bandes de fréquences des instruments LFI et HFI du satellite Planck [22].

l'interféromètre Virgo en 2017 [25], il est désormais possible de détecter des ondes gravitationnelles qui ont une fréquence de l'ordre de 100 Hz. Cela permet de détecter, grâce aux ondes gravitationnelles, la fusion de systèmes binaires de trous noirs de quelques dizaines de masses solaires ou bien la fusion de systèmes binaires d'étoiles à neutrons, par exemple. Ainsi, le 17 août 2017, les deux interféromètres de LIGO ont détecté un signal d'ondes gravitationnelles (GW170817) dont la mise en service récente de Virgo a permis de localiser la source (voir figure 4.6).

En fait, il se trouve que c'est l'absence de signal détecté par Virgo qui a permis cette localisation, indiquant que la source se trouvait dans la direction parallèle aux deux miroirs de l'instrument [28]. Le fait de connaître la région du ciel dans laquelle se trouve la source de l'émission d'ondes gravitationnelles a permis de mettre en lien cet évènement avec la source d'une rafale de rayons gammas (GRB pour Gamma Ray Burst) détectée quelques secondes après. Les téléscopes du monde entier ont pointé sur cette source pendant plusieurs semaines [26] afin d'en savoir plus sur cet évènement. Les données ainsi recueillies favorisent l'hypothèse d'une fusion d'un système binaire d'étoiles à neutrons situé à $z = 0.009787$ (redshift de la galaxie hôte NGC4993) et dont la signature électromagnétique est appelée une kilonova [29].

Une telle observation d'un même évènement à la fois à l'aide d'ondes gravitationnelles et d'ondes électromagnétiques, avec un écart temporel illustré figure 4.7 de $\Delta t = 1.74 \pm 0.05$ s [27], implique que les vitesses de propagation de ces deux ondes sont, si ce n'est égales, du moins extrêmement proches.

Or, comme nous l'avons vu dans la section 3.4.4, le modèle du galileon prédit une vitesse pour les ondes gravitationnelles qui diffère de c du fait de la présence des termes $\mathcal{L}_4$, $\mathcal{L}_5$ et du terme de couplage disformel. On cherche alors à décrire l'écart temporel entre l'arrivée des photons

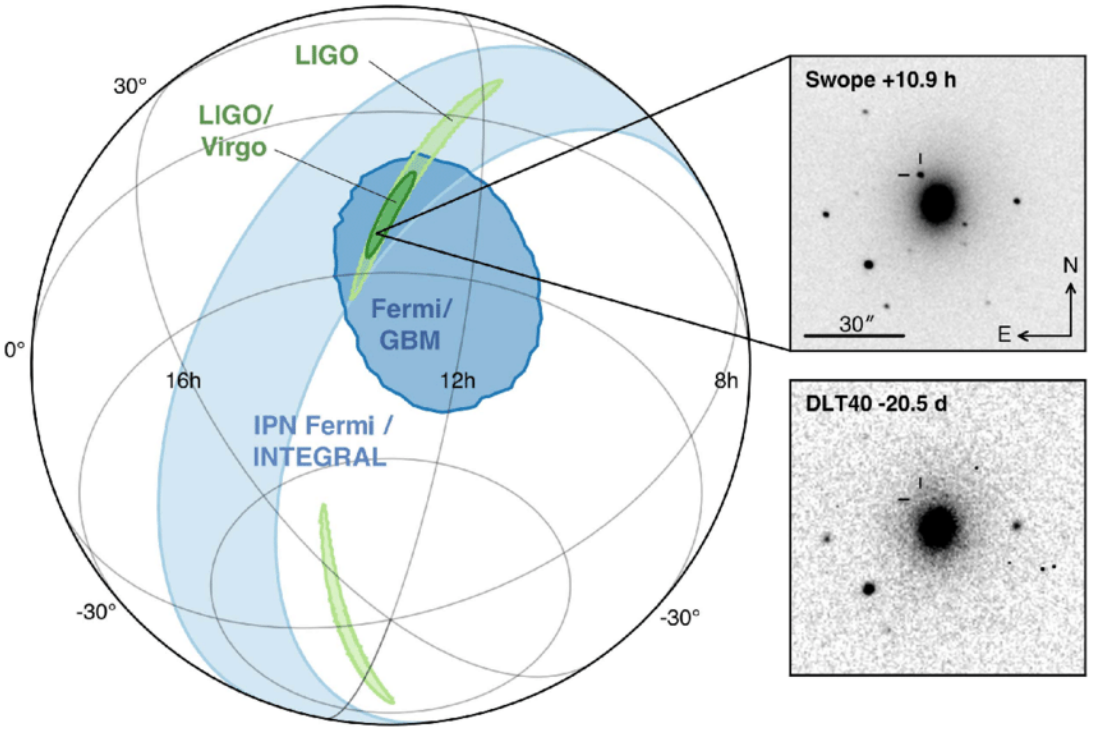

FIGURE 4.6 Localisation de la source d'ondes gravitationnelles de l'évènement GW170817 par la combinaison des observations des deux détecteurs de LIGO et de l'absence d'observation par l'interféromètre de Virgo (en vert). En bleu est indiquée la localisation indépendante de la source du GRB coïncidant avec GW170817 par la combinaison des téléscopes FERMI, INTEGRAL et GBM [26]. La probabilité d'une telle coïncidence spatiale et temporelle ayant lieu par hasard est de $5.0 \cdot 10^{-8}$ [27], ce qui ne laisse aucune ambiguité sur le fait que les deux observations proviennent de la même source.

et des ondes gravitationnelles défini par :

$$\Delta t = t_\gamma - t_g \tag{4.9}$$

avec t_γ et t_g les dates d'arrivées respectivement des photons et des ondes gravitationnelles, de sorte que $\Delta t > 0$ car ces dernières arrivent les premières. Or, les photons vont à la même vitesse ou plus vite que les ondes gravitationnelles, donc leur temps de parcours est plus petit. Il y a donc nécessairement un décalage entre les dates d'émission, que l'on notera δt et qui est défini tel que $\delta t > 0$ si la lumière est émise avant les ondes gravitationnelles. L'hypothèse faite usuellement est de considérer $\delta t \lesssim 10$ s, mais certains scénarios vont jusqu'à proposer $\delta t \in [-100\text{ s}, 1000\text{ s}]$ [30–32]. On peut alors réécrire l'écart de temps à l'arrivée selon :

$$\Delta t = \Delta t_\gamma - \Delta t_g + \delta t \tag{4.10}$$

où Δt_γ et Δt_g sont ici les temps de parcours. En faisant l'hypothèse raisonnable selon laquelle la distance comobile qui nous sépare du système binaire d'étoiles à neutrons émetteur est la même à l'instant de l'émission des ondes gravitationnelles et à celui de l'émission des photons,

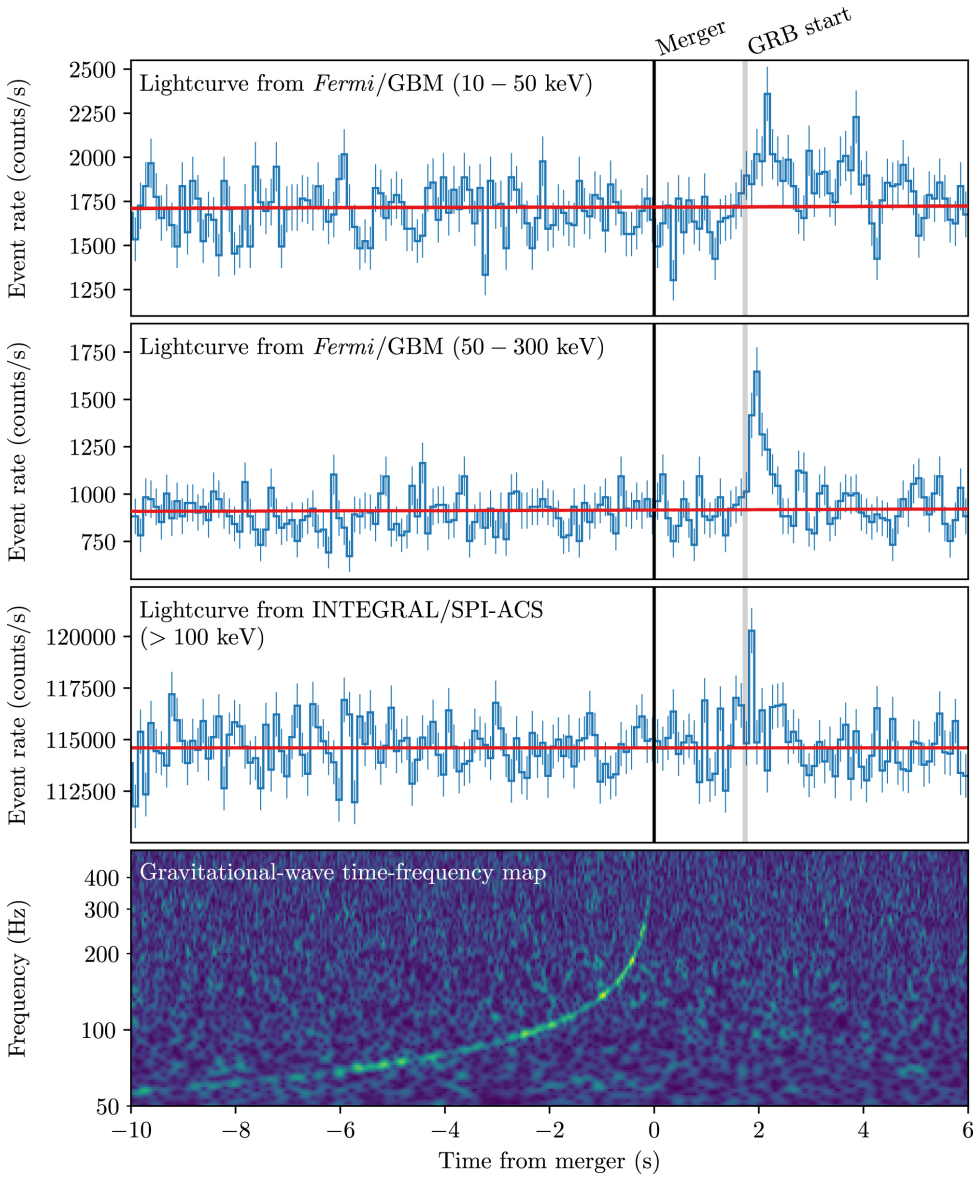

FIGURE 4.7 Détection à plusieurs sondes de la fusion d'un système binaire d'étoiles à neutrons [27] en astronomie à rayons X avec les télescopes Fermi et Integral (haut) et en ondes gravitationnelles avec les interféromètres LIGO-Hanford et LIGO-Livingstone (bas).

on peut exprimer les temps de parcours par :

$$\Delta t_\gamma = \int_0^{\chi_e} \frac{a d\chi}{c} \qquad \text{et} \qquad \Delta t_g = \int_0^{\chi_e} \frac{a d\chi}{c_g(\chi)} \tag{4.11}$$

avec χ_e la distance comobile entre l'observateur et le système binaire d'étoiles à neutrons émetteur, et c_g la vitesse des ondes gravitationnelles dans un modèle quelconque, qui dépend a priori du facteur d'échelle a. Ainsi, comme $d\chi = c\frac{dt}{a} = \frac{c}{H_0}\frac{da}{a^2 H}$, on a finalement :

$$\Delta t = \frac{1}{H_0} \int_{a_e}^{1} \frac{da}{a\bar{H}} \left(1 - \frac{c}{c_g(a)}\right) + \delta t \tag{4.12}$$

Si on est dans le cas ΛCDM, alors $c_g(a) = c$ et donc $\Delta t = \delta t$. Ainsi, le modèle ΛCDM est compatible avec cette observation sous l'hypothèse communément admise $\delta t \lesssim 10$ s.

4.2 Exploration de l'espace des paramètres

4.2.1 Méthode de Monte-Carlo par chaînes de Markov

Position du problème

Nous cherchons à contraindre les paramètres du modèle du galileon à la lumière des observations cosmologiques. Pour un paramètre θ, on cherche donc à déterminer la densité de probabilité pour le paramètre θ, connaissant les données cosmologiques x : $P(\theta|x)$. Cette formulation de la contrainte en terme de probabilité conditionnelle nous invite à nous placer dans le contexte de l'inférence bayesienne (pour plus de détails, voir par exemple [33]), où l'on met à profit la formule de Bayes [34] qui s'écrit ici :

$$P(\theta|x) = \frac{L(x|\theta)\,\pi(\theta)}{\int L(x|\theta')\,\pi(\theta')\,d\theta'} \tag{4.13}$$

L'expression ci-dessus fait apparaître la probabilité $L(x|\theta)$ d'observer les données x sous l'hypothèse selon laquelle le paramètre est à la valeur θ, la probabilité a priori (prior) $\pi(\theta)$ que le paramètre soit à la valeur θ, la probabilité $\int L(x|\theta')\,\pi(\theta')\,d\theta'$ que les données soient ce qu'elles sont en prenant en compte toutes les valeurs possibles du paramètre et enfin la probabilité a posteriori (posterior) $P(\theta|x)$ qui correspond à la connaissance que l'on a sur le paramètre θ mise à jour en prenant en compte les données. Pour calculer la probabilité qui nous intéresse $P(\theta|x)$, il faut donc préciser un prior, $\pi(\theta)$, arbitraire qui décrit le degré de confiance dans la valeur du paramètre avant la comparaison aux données. L'absence de connaissances a priori correspond à un prior uniforme. Il faut de plus calculer la fonction de vraisemblance $L(x|\theta)$ des données sous une hypothèse sur la valeur de θ qui est donnée par :

$$L(x|\theta) = \exp\left[-\frac{\chi^2(\theta, x)}{2}\right] \tag{4.14}$$

Il faut donc calculer la prédiction du modèle pour un grand nombre de valeurs du paramètre θ, pour pouvoir évaluer la distribution $P(\theta|x)$, et notamment pour estimer l'intégrale au dénominateur de (4.13). De plus, le modèle que l'on cherche à contraindre possède en général plusieurs paramètres. Si l'on se place par exemple dans le cas où le modèle possède deux paramètres θ_0 et θ_1, alors la comparaison directe entre les prédictions du modèle et les données nous permet uniquement de calculer $L(x|\theta_0, \theta_1)$. Si θ_0 et θ_1 sont indépendants, l'utilisation de

la formule de Bayes donne :

$$P\left(\theta_0, \theta_1 | x\right) = \frac{L\left(x|\theta_0, \theta_1\right) \pi\left(\theta_0, \theta_1\right)}{\int L\left(x|\theta'_0, \theta'_1\right) \pi\left(\theta'_0, \theta'_1\right) d\theta'_0 d\theta'_1} \tag{4.15}$$

On n'a donc pas directement accès aux densités de probabilité qui nous intéressent $P\left(\theta_0|x\right)$ et $P\left(\theta_1|x\right)$, que l'on obtient en marginalisant selon les autres paramètres. Par exemple pour θ_0 :

$$P\left(\theta_0|x\right) = \int P\left(\theta_0, \theta_1|x\right) d\theta_1 \tag{4.16}$$

On se retrouve à devoir calculer numériquement des intégrales multiples sur l'espace de variation des paramètres du modèle, ce qui peut être très gourmand en temps de calcul lorsque le nombre de paramètres et l'espace de variation de ces derniers sont grands, comme dans le cas du modèle du galileon. En particulier, la question de l'échantillonnage de la fonction de vraisemblance $L\left(x|\theta_0, \theta_1\right)$, est centrale car il faut disposer de suffisamment de points où cette fonction est évaluée pour pouvoir estimer $P\left(\theta_0|x\right)$ et l'intégrale (4.16), mais chaque point nécessite la comparaison des prédictions aux données. La nécessité d'échantillonner cette densité de probabilité en un temps raisonnable pour comparer les prédictions aux observations cosmologiques nous a poussé à utiliser un code de calcul utilisant la méthode de Monte-Carlo par chaînes de Markov (MCMC) que nous allons détailler dans la suite. Pour plus de développements concernant les méthodes de MCMC, on pourra consulter [35] par exemple.

Les chaînes de Markov

Une chaîne de Markov est un processus du même nom [36], c'est-à-dire un processus stochastique pour lequel l'information nécessaire à la prédiction de l'état futur est entièrement contenue dans l'état présent (on dit que le système est sans mémoire), à temps discret. Il s'agit donc d'une suite de variables aléatoires X_1, X_2, ... à valeurs dans l'espace des états. Dans le cas qui nous concerne, les X_i sont des vecteurs des n paramètres du modèle que l'on teste (et sont donc des variables aléatoires continues) :

$$X_i = \left(\theta_0^i, ..., \theta_n^i\right) \tag{4.17}$$

La propriété de Markov se traduit dans le cas spécifique des chaînes de Markov par la relation :

$$P\left(X_{n+1}|X_n, ..., X_0\right) = P\left(X_{n+1}|X_n\right) \tag{4.18}$$

De plus, les chaînes de Markov utilisées dans les méthodes MCMC sont des chaînes de Markov dites homogènes, c'est-à-dire que la probabilité de passer d'un état i à un état j est indépendante de n :

$$P\left(X_{n+1}=j|X_n=i\right)=P\left(X_n=j|X_{n-1}=i\right) \tag{4.19}$$

Les chaînes de Markov homogènes possèdent une propriété cruciale pour les méthodes MCMC selon laquelle, sous certaines hypothèses additionnelles (que la chaîne soit irreductible et apériodique), la loi de probabilité de X_n converge vers une distribution limite, appelée distribution stationnaire de la chaîne, indépendamment de la loi de probabilité initiale de X_0. Tout l'enjeu pour les méthodes MCMC est donc de choisir la loi de probabilité de transition de manière à ce que la chaîne vérifie les hypothèses précédentes, et que la distribution stationnaire corresponde à la distribution de probabilité que l'on cherche à échantillonner.

L'intérêt de l'utilisation des chaînes de Markov vient de ce que les points auxquels on évalue la densité de probabilité que l'on cherche à échantillonner suivent précisément cette densité de probabilité. Ainsi, la chaîne de Markov s'attarde dans les zones de l'espace des paramètres qui apportent une contribution importante à l'intégrale que l'on cherche à calculer, en ignorant celles dont la contribution est négligeable. L'utilisation des méthodes MCMC est donc beaucoup plus efficace que la plupart des méthodes d'échantillonnages, lorsque l'espace à explorer possède un grand nombre de dimensions, rendant possible la comparaison de modèles ayant de nombreux paramètres avec un grand nombre de données.

L'algorithme de Metropolis-Hastings

L'algorithme de Metropolis-Hastings, du nom de ses développeurs Nicolas Metropolis [37] et Wilfred Keith Hastings [38], est une méthode MCMC qui implémente les principes précédemment discutés. Il s'agit de construire une chaîne de Markov dont la distribution stationnaire est une certaine distribution $P\left(X\right)$ que l'on cherche à échantillonner. Le point de départ de l'algorithme de Metropolis-Hastings est l'égalité suivante, qui découle simplement de la définition de $P\left(X,X_n\right)=P\left(X\cap X_n\right)$:

$$\frac{P\left(X|X_n\right)}{P\left(X_n|X\right)}=\frac{P\left(X\right)}{P\left(X_n\right)} \tag{4.20}$$

On choisit ensuite d'effectuer la transition d'un état X_n à l'état suivant X_{n+1} en deux étapes : la proposition et l'acceptation. On définit une distribution de tirage que l'on note $g\left(X|X_n\right)$ qui correspond à la probabilité de proposer X connaissant le point précédent de la chaîne, et une distribution d'acceptance que l'on note $A\left(X|X_n\right)$ qui est la probabilité d'accepter le point X comme point suivant de la chaîne connaissant le point précédent. La probabilité de transition s'écrit alors :

$$P\left(X|X_n\right)=g\left(X|X_n\right)A\left(X|X_n\right) \tag{4.21}$$

En introduisant ces nouvelles distributions dans l'équation (4.20), on obtient le rapport des distributions d'acceptances :

$$\frac{A\left(X|X_n\right)}{A\left(X_n|X\right)} = \frac{P\left(X\right)g\left(X_n|X\right)}{P\left(X_n\right)g\left(X|X_n\right)} \tag{4.22}$$

Il faut donc choisir une distribution d'acceptance qui vérifie la relation précédente. Le choix usuel est celui du rapport de Hastings donné par :

$$A\left(X|X_n\right) = \min\left(1, \frac{P\left(X\right)g\left(X_n|X\right)}{P\left(X_n\right)g\left(X|X_n\right)}\right) \tag{4.23}$$

Avec cette distribution d'acceptance, on accepte toujours X lorsque l'acceptance est supérieure à 1, et on accepte le point avec la probabilité correspondant à l'acceptance lorsque celle-ci est inférieure à 1. En pratique, l'implémentation de l'algorithme de Metropolis-Hastings se fait de la manière suivante :

1. Phase d'initialisation : on démarre à un point X_0 tiré aléatoirement, typiquement suivant la distribution de probabilité du prior sur les paramètres $\pi\left(\theta\right)$.
2. Phase de génération de la chaîne : on génère aléatoirement un point candidat X suivant la distribution de tirage $g\left(X|X_n\right)$. Puis, on calcule le rapport de Hastings $A\left(X|X_n\right)$ correspondant. On génère alors un nombre aléatoire u suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. Si $u \leq A\left(X|X_n\right)$, alors on accepte le point proposé, de sorte que $X_{n+1} = X$. Si au contraire $u > A\left(X|X_n\right)$, alors on rejette le point proposé, et on répète le point précédent, de sorte que $X_{n+1} = X_n$. Enfin, on passe au point suivant et on répète la procédure.

On peut faire plusieurs remarques concernant cet algorithme. Premièrement, le calcul de la probabilité du point proposé $P\left(X\right)$ n'intervient que dans le calcul de l'acceptance à travers le rapport $P\left(X\right)/P\left(X_n\right)$, ce qui permet de se contenter de calculer une fonction proportionnelle à P. Ainsi, dans le cas qui nous intéresse où la distribution de probabilité que l'on cherche à échantillonner est (4.15), on peut se passer d'évaluer l'intégrale du dénominateur qui est une constante souvent extrêmement complexe à calculer. Par ailleurs, la distribution de tirage n'est pas donnée dans la description de l'algorithme et est à déterminer au cas par cas selon le contexte. Cependant, on choisit classiquement des gaussiennes centrées autour de X_n, qui sont des distributions symétriques ($g\left(X_n|X\right) = g\left(X|X_n\right)$), ce qui simplifie le calcul de l'acceptance. Enfin, même si la chaîne de Markov converge vers la distribution désirée, la distribution de départ peut être très différente de celle-ci, ce qui oblige à rejeter les premiers points de la chaîne, au cours d'une phase dite de burn-in. De plus, comme toutes les méthodes MCMC, cet algorithme produit des suites de points corrélés entre eux avec une certaine longueur de corrélation (nombres de points minimum entre deux points non-corrélés), ce qui oblige à jeter encore d'autres points. Néanmoins, malgré un certain manque d'efficacité dans l'exploitation

final de la chaîne, cette méthode est beaucoup plus performante que toutes les alternatives lorsque l'on cherche à explorer un espace de grande dimensionnalité, comme c'est notre cas.

Illustration sur des exemples

Nous allons ici illustrer les concepts précédemment introduits par deux exemples concrets de chaînes de Markov. Pour que le premier exemple reste simple, je me suis limité à deux paramètres x et y qui suivent une loi gaussienne à deux dimensions donnée par la densité de probabilité :

$$P(x,y) = \frac{1}{2\pi \det\Sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}(x-\mu_x, y-\mu_y)^T \Sigma^{-1} (x-\mu_x, y-\mu_y)\right] \tag{4.24}$$

où $\mu_x = 2$ et $\mu_y = 1$ sont les moyennes respectivement de x et y, et la matrice de covariance Σ est donnée par :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.3 \\ 0.3 & 0.5 \end{pmatrix} \tag{4.25}$$

La distribution de tirage du couple (x_{n+1}, y_{n+1}) est simplement un produit de gaussiennes centrées sur (x_n, y_n), et de même variance $\sigma = 0.01$, que j'ai choisie pour que l'évolution de la chaîne soit relativement lente et que les effets intéressants soient bien visibles. Le point de départ est fixé à $(-50, -50)$, afin que la chaîne démarre loin du point de maximum de probabilité $(2, 1)$. En effet, en pratique, on ne connaît pas la distribution de probabilité que l'on échantillonne, et la chaîne peut démarrer très loin du minimum de χ^2. L'évolution de x_n et y_n en fonction de n pour une telle chaîne est donnée en figure 4.8. On voit bien sur cette figure que la distribution des ~ 4000 premiers points de la chaîne ne suit pas la distribution stationnaire. Celle-ci n'est atteinte qu'après une phase d'exploration plus ou moins longue, appelée phase de 'burn-in'. Lorsque l'on se sert de la chaîne pour décrire la distribution stationnaire, il faut donc supprimer les points de la phase de burn-in. Il est d'usage de supprimer la moitié des points de la chaîne, ce que nous ferons également dans cette thèse.

De plus, comme nous l'avons évoqué précédemment, et comme on peut le constater sur la figure 4.9, les chaînes de Markov sont des suites de points qui sont corrélés entre eux à travers la distribution de tirage et l'algorithme d'acceptation du point proposé. Cette auto-corrélation le long de la chaîne disparaît après un certain nombre d'itérations donc ce n'est qu'un problème mineur lorsque la taille de la chaîne est grande par rapport à cette longueur d'auto-corrélation. Cependant, comme ce n'est pas toujours le cas, on préfère ne garder qu'un point dans la chaîne tous les dix points acceptés.

Une fois ces précautions prises, on peut exploiter la chaîne de Markov pour décrire la distribution stationnaire que l'on cherche à caractériser. Dans cet exemple simple, on connaît cette

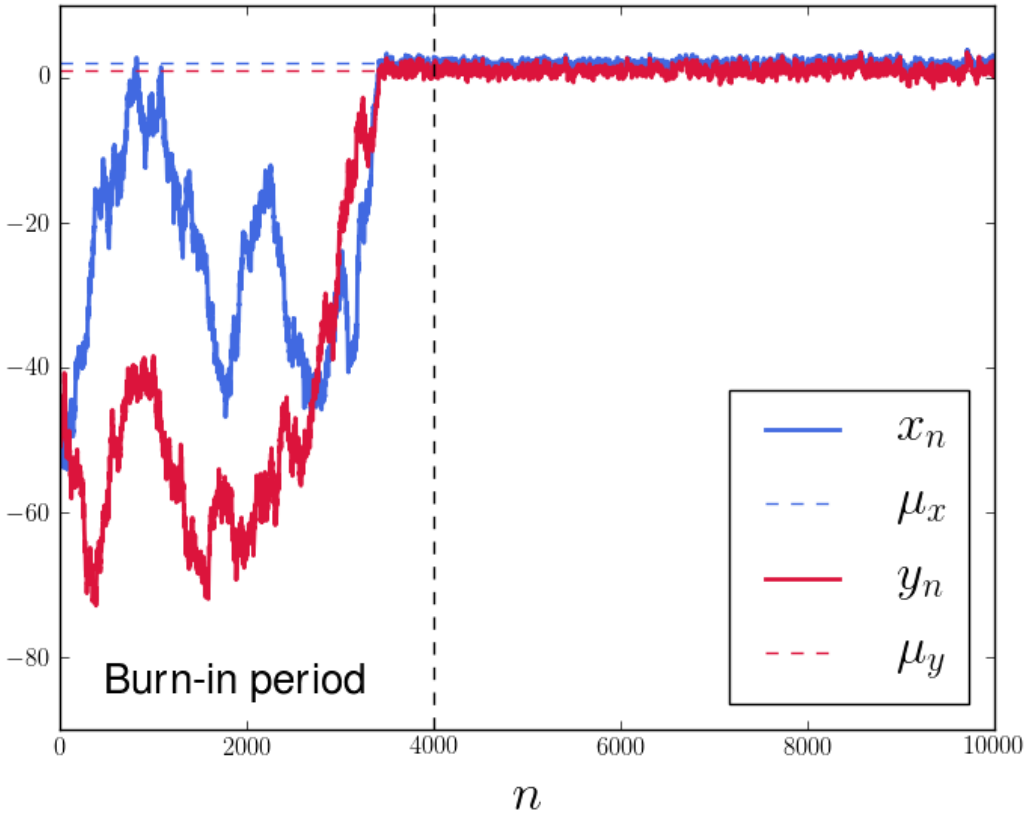

FIGURE 4.8 Évolution des valeurs des paramètres x_n et y_n pour les 10000 premiers points de la chaîne de Markov décrite plus haut. Les lignes horizontales pointillées représentent les moyennes des distributions de probabilités pour x et y échantillonnés par la chaîne de Markov. Avant de converger vers la distribution stationnaire, la chaîne explore aléatoirement une portion peu intéressante à la manière d'un marcheur aléatoire, c'est la phase de burn-in.

distribution, et on peut facilement l'évaluer selon une grille très fine, ce qui n'est évidemment possible que parce que cet exemple se place en dimension 2. Néanmoins, cet exemple permet de se convaincre de l'efficacité de l'algorithme à reproduire la distribution cherchée, comme on peut le constater sur la figure 4.10, son avantage par rapport aux autres méthodes n'apparaîssant que pour des espaces de grande dimensionnalité.

Le second exemple, plus réaliste, est celui de la première chaîne de Markov que j'ai produite pour obtenir des contraintes sur le modèle du galileon en le comparant aux spectres du puissances des anisotropies du CMB en température et en lensing [23], que l'on note ici $data$. Les paramètres correspondent à $H = \left(\Omega_b h^2, \Omega_c h^2, \theta_{MC}, \tau, A_s, n_s, \bar{c}_2, \bar{c}_3, \bar{c}_4, \bar{c}_G\right)$, qui suivent la loi de probabilité inconnue :

$$P\left(H|data\right) \propto L\left(data|H\right)\pi\left(H\right) \tag{4.26}$$

où la fonction de vraisemblance est donnée par (4.14). La distribution de tirage est à nouveau une gaussienne multidimensionnelle, mais qui est plus sophistiquée car les corrélations

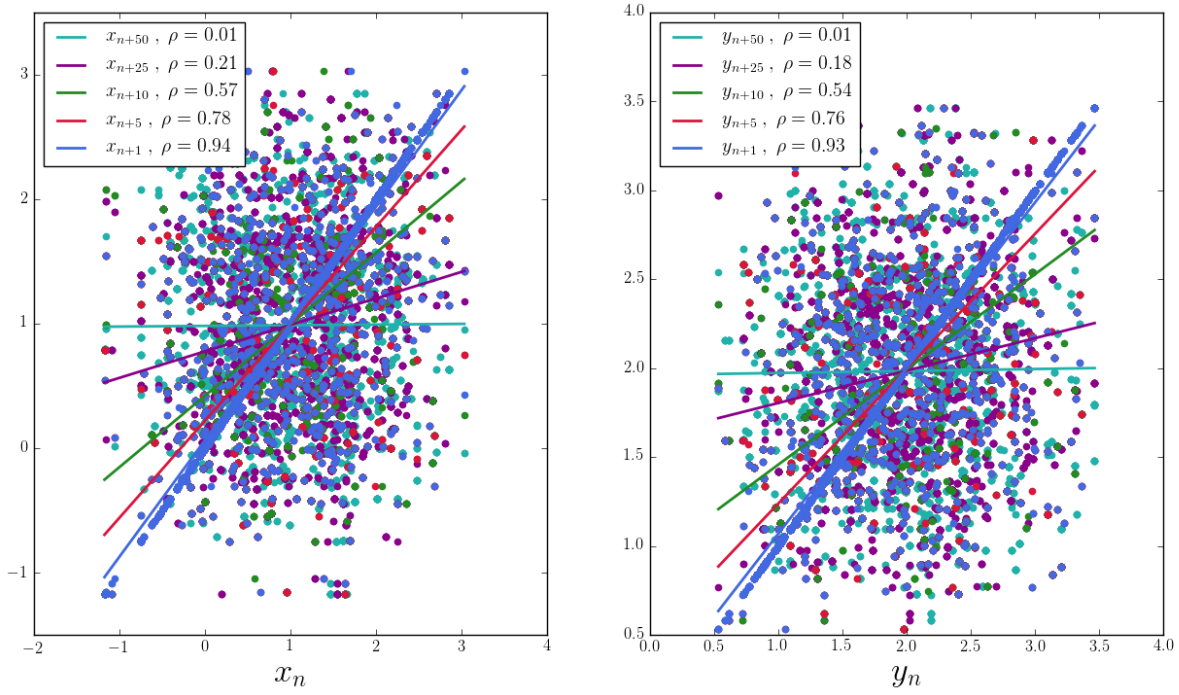

FIGURE 4.9 Nuage de points définis par les coordonnées (x_{n+i}, x_n) à gauche, et (y_{n+i}, y_n) à droite, pour différentes valeurs de i et pour n parcourant la chaîne, après suppression des points de la phase de burn-in. Sont données en plus les coefficients de corrélations linéaires ρ correspondants, et les régressions linéaires passant par les nuages de points. On remarque que les points consécutifs sont extrêmement corrélés, mais plus l'éloignement entre les deux points de la chaîne que l'on compare est grand, moins les corrélations sont importantes.

entre paramètres sont prises en compte, de telle sorte qu'au fur et à mesure de l'avancée de la chaîne, la distribution de tirage s'adapte pour faire varier les paramètres selon les directions des vecteurs propres de la matrice de covariance des paramètres, que l'on appellera dans la suite matrice de tirage.

L'exemple de cette chaîne est assez parlant, car le point de départ choisi, qui correspond au meilleur ajustement de [39], était en fait très loin du point de minimum de χ^2 de l'espace des paramètres. De plus, certaines dégénerescences entre paramètres, notamment les paramètres du galileon, ont dû être apprises par la chaîne de Markov à partir de zéro, c'est-à-dire que nous avons utilisé un prior plat pour ces paramètres. En conséquence, la chaîne a mis beaucoup de temps avant de converger vers la distribution stationnaire recherchée. En d'autres termes, la phase de burn-in a été très longue, comme l'illustre la figure 4.11, ce qui est très coûteux lorsque l'avancée de la chaîne est lente comme c'est le cas ici (~ 250 pts par jour). Heureusement, cette longue phase de burn-in n'a pas eu lieu pour toutes les chaînes que j'ai calculées. En effet, l'approche bayesienne permet d'utiliser le posterior calculé par cette chaîne comme prior pour les chaînes ultérieures à travers le point de minimum de χ^2 ainsi que la matrice de covariance des paramètres héritée de la matrice de tirage mise à jour progressivement le long de cette chaîne. Cela permet de réduire considérablement la phase de burn-in pour les chaînes ultérieures et

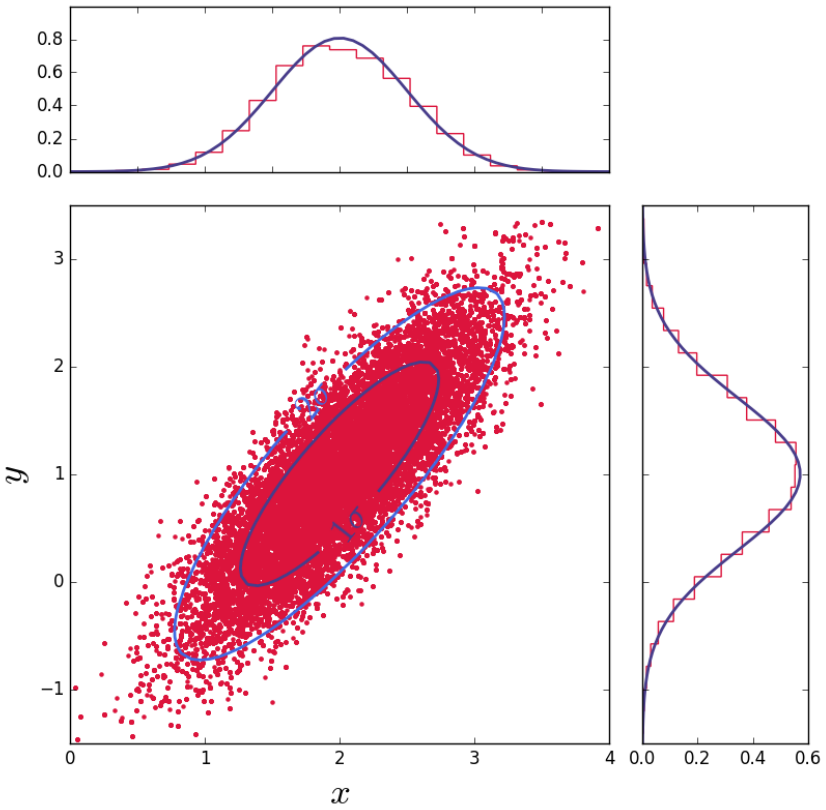

FIGURE 4.10 Figure triangle pour les deux paramètres x et y de la distribution (4.24). La figure en bas à gauche représente la distribution $P(x, y)$ par les deux ellipses à 1σ et 2σ ainsi que le nuage des points de la chaîne de Markov. La densité de ces derniers suit bien la densité de probabilité $P(x, y)$. La figure du haut correspond à la distribution marginalisée $P(x)$ (voir (4.16)), la courbe étant obtenue par le calcul numérique et l'histogramme étant obtenu par la chaîne de Markov. De même pour la figure de droite qui représente la distribution marginalisée $P(y)$.

donc de diminuer le nombre de points à calculer par chaîne, c'est-à-dire diminuer le temps de calcul.

De plus, en pratique, on calcule plusieurs chaînes en parallèle avec les mêmes paramètres mais qui partent de points différents pour augmenter la statistique et la robustesse du résultat. En effet, on a d'autant plus confiance dans le fait que la chaîne a atteint la distribution stationnaire que plusieurs chaînes indépendantes ont atteint cette même distribution. On définit un critère de convergence des chaînes, appelé critère de Gelman-Rubin [40], pour un ensemble de chaînes $\mathcal{C}_i$:

$$R - 1 = \frac{\text{Var}\left(\overline{\mathcal{C}_i}\right)}{\overline{\text{Var}\left(\mathcal{C}_i\right)}} < \alpha \tag{4.27}$$

avec α le seuil qui définit le critère de convergence des chaînes, et qui dans cette thèse vaut $\alpha = 0.03$. Lorsque ce critère est rempli, cela indique que l'écart entre les moyennes de toutes les chaînes est environ trente fois plus petit que la dispersion des points au sein des chaînes,

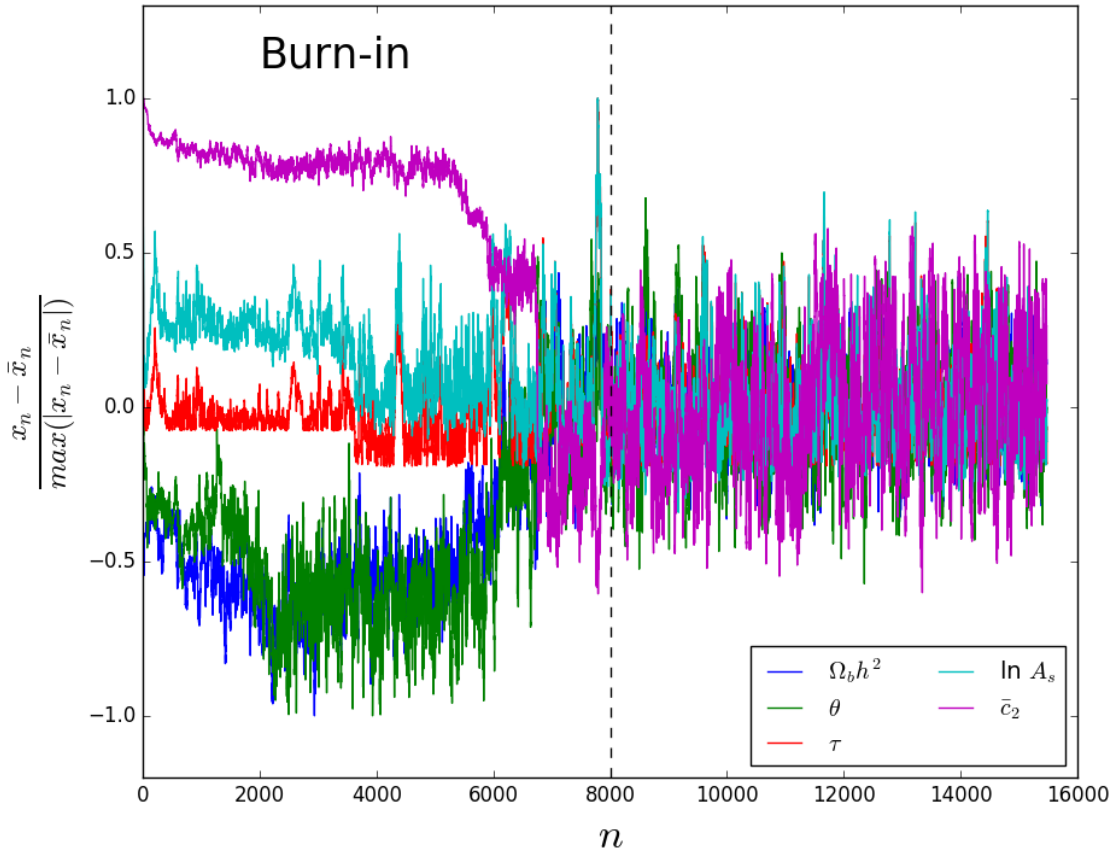

FIGURE 4.11 Évolution de quelques paramètres représentatifs de la chaîne de Markov décrite dans le second exemple. Par souci d'échelle et de lisibilité, les paramètres sont exprimés comme $\frac{x_n - \bar{x}_n}{max(x_n - \bar{x}_n)}$, où x correspond aux paramètres $\Omega_b h^2$, θ, τ, $\ln(A_s)$ et $\bar{c}_2$. On constate que le calcul de 8000 points, soit une trentaine de jours environ, est nécessaire pour sortir de la phase de burn-in dans cet exemple.

et on décide d'arrêter celles-ci. Une fois les chaînes arrêtées, les contraintes sur les paramètres sont obtenues comme dans l'exemple précédent (voir figure 4.10), c'est-à-dire à partir de l'histogramme des points de la chaîne auquel on applique un lissage gaussien. Les contraintes sur tous les paramètres du modèle, qui peuvent en général être plus compliquées que de simples gaussiennes, sont alors représentées comme en figure 4.12 pour le cas de la chaîne du second exemple. Notons que cette chaîne n'est pas utilisée pour obtenir les résultats présentés dans la section suivante.

4.2.2 Contraintes cosmologiques sur les paramètres des modèles de base

Dans cette partie, nous allons présenter les résultats obtenus en comparant les modèles de base aux observations cosmologiques présentées dans la partie 4.1. Nous considérons ici trois

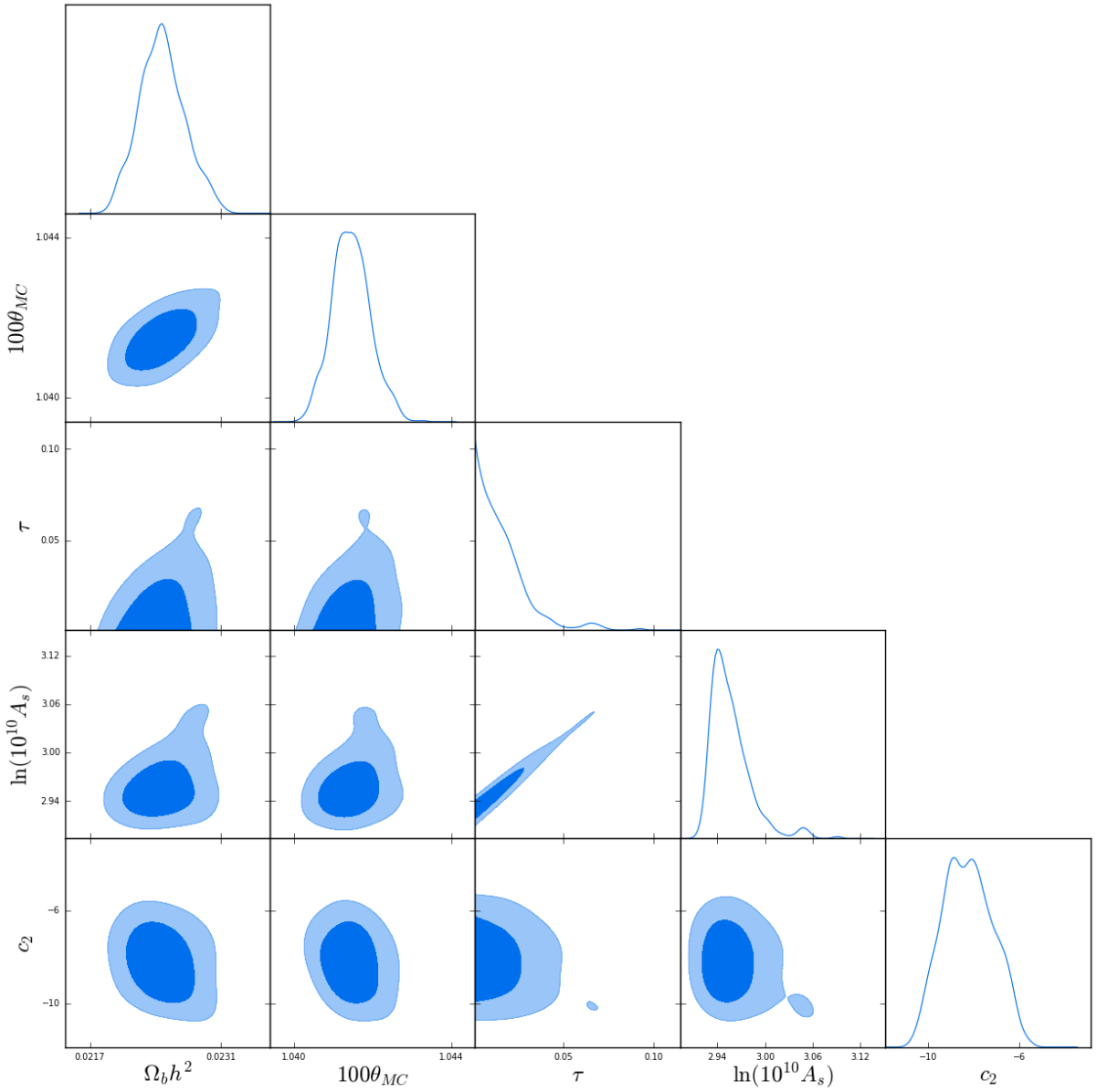

FIGURE 4.12 Distributions de probabilité pour certains paramètres de la chaîne de Markov (voir figure 4.11) ainsi que toutes les projections à deux dimensions. Les contours foncés représentent les contours à 1σ, et les contours clairs les contours à 2σ.

modèles :

— **ΛCDM :** qui est le modèle de référence, dont on fait varier les paramètres $\{\Omega_b h^2, \Omega_c h^2, 100\theta_{MC}, \tau, n_s, A_s\}$;

— **Full galileon :** qui est le modèle du galileon complet décrit au chapitre 3, dont les paramètres libres sont $\{\Omega_b h^2, \Omega_c h^2, 100\theta_{MC}, \tau, n_s, A_s, \bar{c}_2, \bar{c}_3, \bar{c}_4, \bar{c}_G\}$;

— **Cubic galileon :** qui est un modèle de galileon réduit dans lequel on ne garde que les lagrangiens les plus simples tout en assurant l'efficacité de l'effet Vainshtein, c'est-à-dire $\mathcal{L}_2$ et $\mathcal{L}_3$. Ce modèle a de plus la particularité d'être un modèle de galileon dans lequel

la vitesse des ondes gravitationnelles est égale à la vitesse de la lumière dans le vide. En fixant $\bar{c}_3$ par la condition de platitude ((3.76) pour $a = 1$), les paramètres libres du galileon cubique sont $\{\Omega_b h^2, \Omega_c h^2, 100\theta_{MC}, \tau, n_s, A_s, \bar{c}_2\}$.

Dans un premier temps, nous allons décrire les contraintes apportées sur ces trois modèles par chacune des sondes introduites dans la section 4.1 séparément. Puis, nous présenterons les contraintes apportées par la confrontation des modèles à toutes les sondes simultanément.

Données du CMB

Les contraintes apportées par les données de Planck [23] sur les paramètres libres et quelques paramètres dérivés des trois modèles cités précédemment sont données dans la table 4.2 et dans la figure 4.13 pour les paramètres libres communs aux trois modèles. Les spectres de puissance angulaire des anisotropies de température, de polarisation, de l'effet de lentille gravitationnelle, et de la corrélation croisée entre température et polarisation qui correspondent aux prédictions du meilleur ajustement de chacun des trois modèles considérés sont donnés dans la figure 4.14.

	ΛCDM	Full galileon	Cubic galileon
$\Omega_b h^2$	0.02222 ± 0.00016	0.02237 ± 0.00016	0.02231 ± 0.00016
$\Omega_c h^2$	0.1195 ± 0.0014	0.1179 ± 0.0014	0.1193 ± 0.0014
$100\theta_{MC}$	1.04085 ± 0.00032	1.04110 ± 0.00032	1.04179 ± 0.00049
τ	0.065 ± 0.013	0.018 ± 0.012	0.0144 ± 0.0093
$\ln(10^{10} A_s)$	3.062 ± 0.024	2.964 ± 0.022	2.956 ± 0.018
n_s	0.9646 ± 0.0047	0.9685 ± 0.0046	0.9722 ± 0.0049
$\bar{c}_2$	-	-7.9 ± 1.0	-4.628 ± 0.039
$\bar{c}_3$	-	-2.83 ± 0.67	-0.7710 ± 0.0066
$\bar{c}_4$	-	-0.74 ± 0.27	-
$\bar{c}_5$	-	-0.29 ± 0.13	-
$\bar{c}_G$	-	0.0120 ± 0.0099	-
H_0	67.40 ± 0.63	78.09 ± 0.77	78.97 ± 0.88
σ_8	0.8170 ± 0.0086	0.903 ± 0.013	0.8929 ± 0.0078
z_{rei}	8.7 ± 1.3	3.2 ± 1.7	2.6 ± 1.5
$10^9 A_s e^{-2\tau}$	1.878 ± 0.016	1.868 ± 0.011	1.867 ± 0.011
χ^2(CMB)	12943	12949	12976

TABLE 4.2 Contraintes sur les paramètres libres et quelques paramètres dérivés des trois modèles présentés dans le texte obtenues à partir des données de Planck 2015 [23]. La valeur centrale correspond à la moyenne des distributions marginalisées de chaque paramètre et l'incertitude à leur écart-type. Les valeurs de χ^2 sont données pour le meilleur ajustement du modèle correspondant.

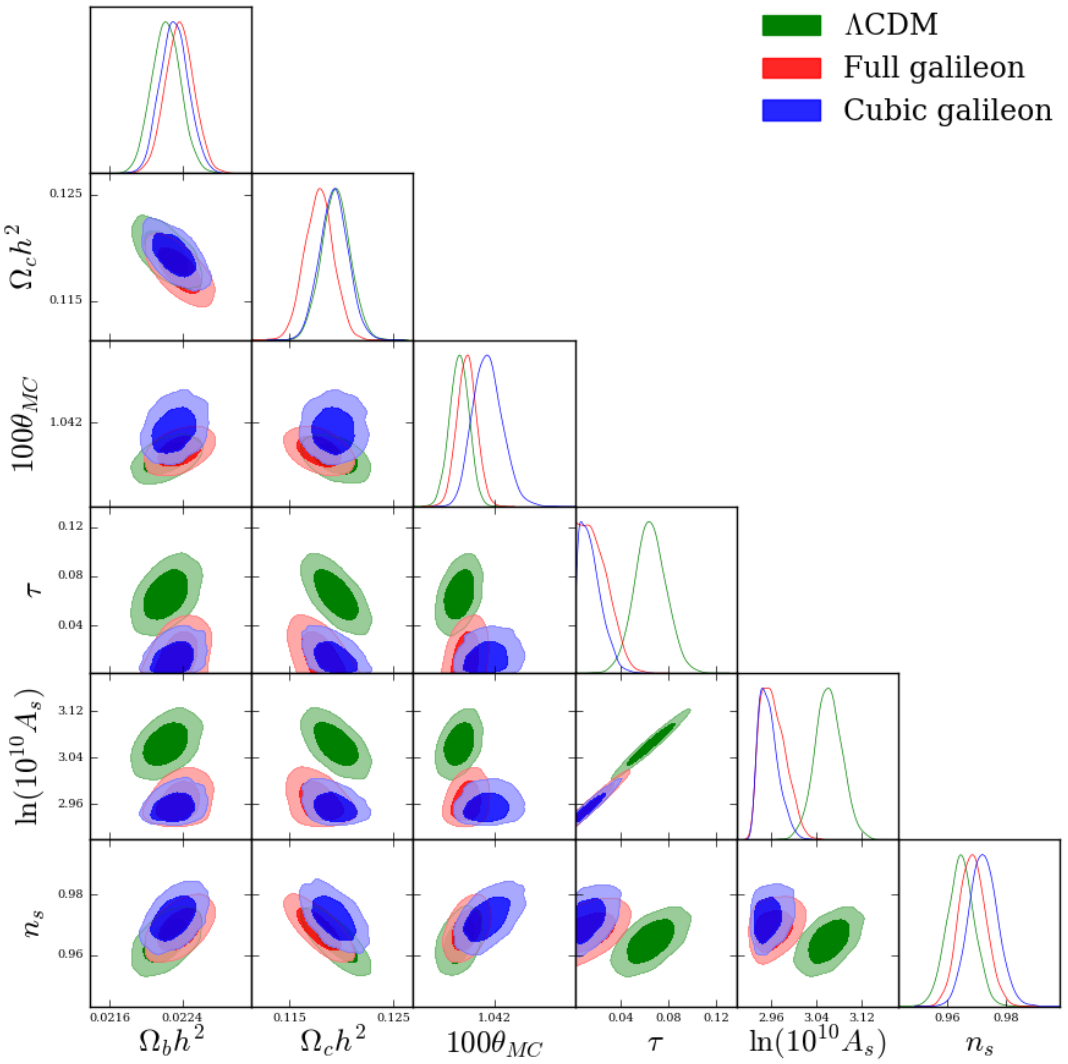

FIGURE 4.13 Figure triangle présentant les contraintes marginalisées à deux dimensions pour les paramètres communs aux trois modèles étudiés ici pour des niveaux de confiance à 1σ (couleurs foncées) et 2σ (couleurs claires). Les distributions marginalisées à une dimension sont également présentées pour chacun de ces paramètres.

On constate immédiatement que les trois modèles reproduisent relativement bien les observations du satellite Planck, avec quelques difficultés pour le modèle du galileon cubique pour le spectre en température à bas ℓ et dans une moindre mesure pour le spectre de lensing. On peut quantifier l'ajustement aux observations grâce au χ^2, et il apparaît que les modèles de galileon s'ajustent moins bien aux données du CMB que le modèle ΛCDM. La différence est toutefois acceptable pour le modèle du galileon complet qui compte 6 points de χ^2 supplémentaires sur plus de 12000, mais commence à devenir importante pour le modèle du galileon cubique, qui compte $\sim$ 30 points de χ^2 supplémentaires. On peut faire quelques remarques supplémentaires intéressantes sur ces premières contraintes. Tout d'abord, malgré la grande différence entre les modèles, notamment les deux modèles de galileon et le modèle ΛCDM, la plupart des

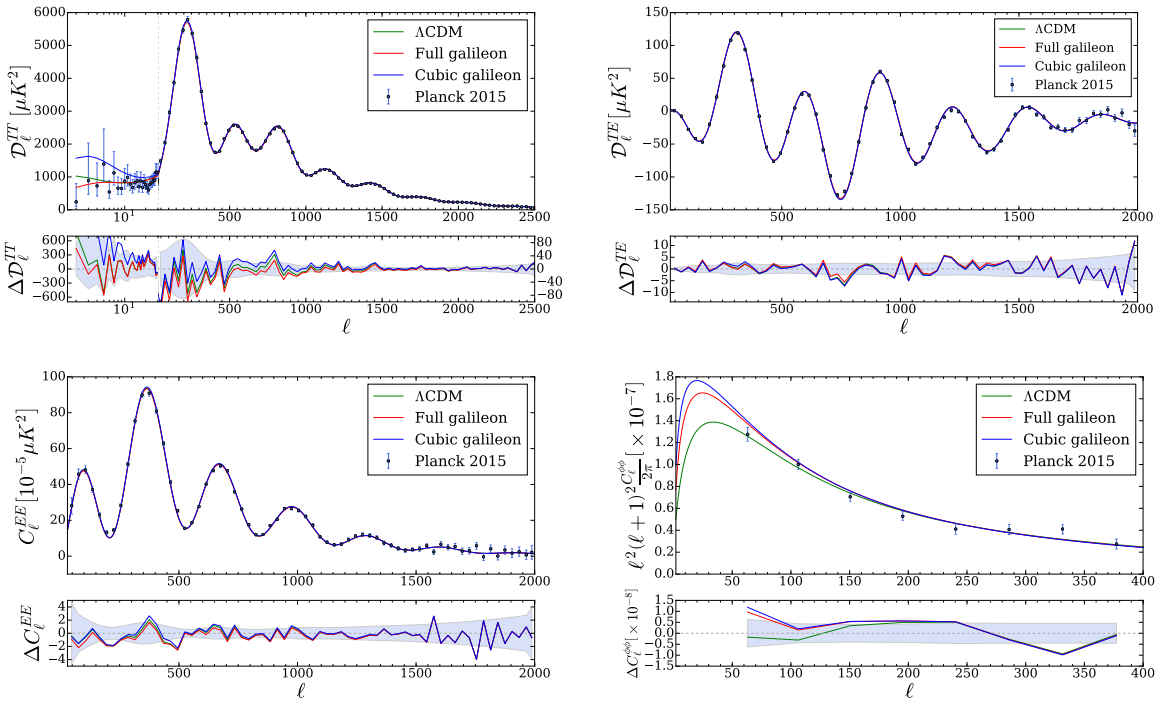

FIGURE 4.14 Prédictions du spectre de puissance en température (en haut à gauche), de la corrélation croisée entre température et polarisation (en haut à droite), du spectre de puissance en polarisation (en bas à gauche) et du lensing (en bas à droite) pour le meilleur ajustement (traits pleins) aux données de Planck [23] (points bleus) pour les trois modèles considérés. En dessous de ces spectres de puissances sont représentées les différences entre la valeur moyenne des observations et les prédictions des différents modèles, l'aire en bleue représente l'incertitude sur les observations.

paramètres cosmologiques communs à ces modèles ont des distributions très proches. C'est notamment le cas de manière flagrante pour les paramètres $\Omega_b h^2$, $\Omega_c h^2$, θ_{MC} et n_s. En effet, les contraintes proviennent de la position du premier pic, pour θ_{MC}, et de l'amplitude relative des premier, deuxième et troisième pics du spectre des anisotropies de température [41], pour $\Omega_b h^2$ et $\Omega_c h^2$. En d'autres termes, ces paramètres sont uniquement contraints par la dynamique du plasma de baryons et de photons avant la recombinaison. On se rend compte a posteriori que les scénarios du modèle galileon qui s'ajustent le mieux aux observations du CMB ne modifient pas la physique de l'Univers jeune, ce qui explique donc cette similitude. Cependant, si $\Omega_b h^2$ et $\Omega_c h^2$ changent peu entre les modèles, les modèles de galileon privilégient des hautes valeurs pour le taux d'expansion de Hubble H_0, et par conséquent de plus faibles valeurs pour Ω_m, ce qu'illustre la figure 4.15. Cette prédiction très différente pour les modèles de galileon est particulièrement intéressante car il existe une tension entre la prédiction de H_0 fournie par les contraintes du CMB sur le modèle ΛCDM et celles obtenues à partir d'observations directes indépendantes de la cosmologie [42, 43].

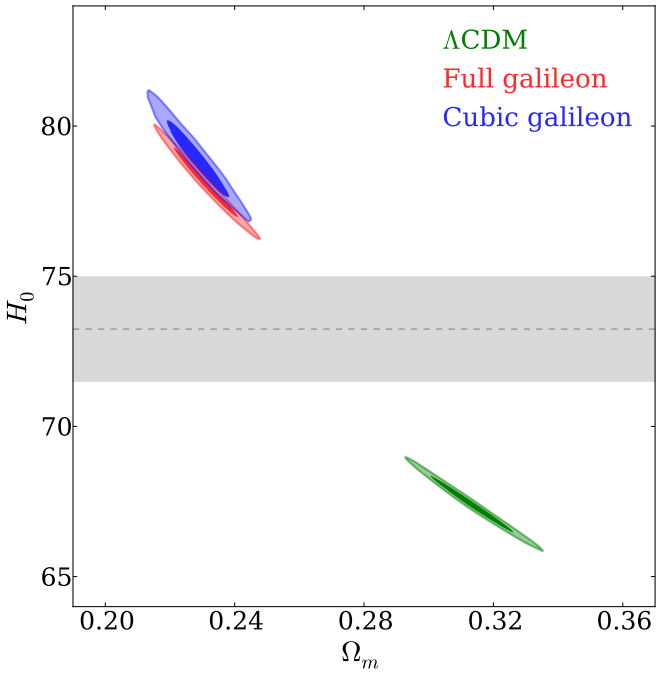

FIGURE 4.15 Contours de confiance à 1σ (couleurs foncées) et à 2σ (couleurs claires) dans l'espace à deux dimensions des paramètres H_0 et Ω_m pour les trois modèles étudiés. La bande grise correspond à l'intervalle de confiance à 68% de la mesure directe de H_0 de [43].

On remarque également que les paramètres τ et A_s ont des distributions sensiblement différentes entre le modèle ΛCDM et les deux modèle de galileon. En effet, les deux modèles de galileon prédisent une profondeur optique due à la réionisation plus faible que le modèle ΛCDM, qui est même compatible avec 0. Ces faibles valeurs de τ sont induites par le spectre de puissance du lensing. En effet, les modèles de galileon prédisent un effet de lentille gravitationnel plus intense que le modèle ΛCDM. Cela signifie que le potentiel de Weyl, qui détermine l'effet de lensing, est plus profond pour les modèles de galileon, ce qui généralise l'observation que nous avions faite dans la section 3.4.2. Pour contrebalancer cet effet et rester en bon accord avec les observations du spectre de puissance du lensing, il faut donc jouer sur les paramètres qui peuvent influencer sa normalisation. Les $C_\ell^{\phi\phi}$ sont directement proportionnels au paramètre A_s [44], une solution simple est donc de diminuer ce dernier. Et comme les observations du CMB, autres que les grandes échelles des modes E de polarisation et le lensing, sont sensibles à la combinaison $A_s e^{-2\tau}$, la diminution de A_s peut être compensée par une diminution de τ sans modifier $A_s e^{-2\tau}$, comme on peut le voir dans la table 4.2. Un fort effet de lensing dans le modèle entraîne donc naturellement de faibles valeurs de τ.

On peut légitimement se demander si cette valeur de τ pose problème ou si une valeur aussi basse constitue simplement une curiosité dont on peut s'accomoder. En fait, la profondeur optique due à la réionisation permet de déterminer le redshift de réionisation z_{rei}, qui correspond au redshift à partir duquel une portion significative de l'Univers est réionisée. Ce redshift de

réionisation peut également être contraint par des observations astrophysiques, de galaxies ou de quasars à haut redshift par exemple, qui indiquent une réionisation partielle de l'Univers à cette époque. Ces contraintes sont assez peu quantitatives, mais un consensus semble se dégager autour de la contrainte $z_{rei} \gtrsim 6$ [45, 46]. La densité de probabilité marginalisée pour z_{rei} pour chacun des trois modèles étudiés est décrite dans la figure 4.16.

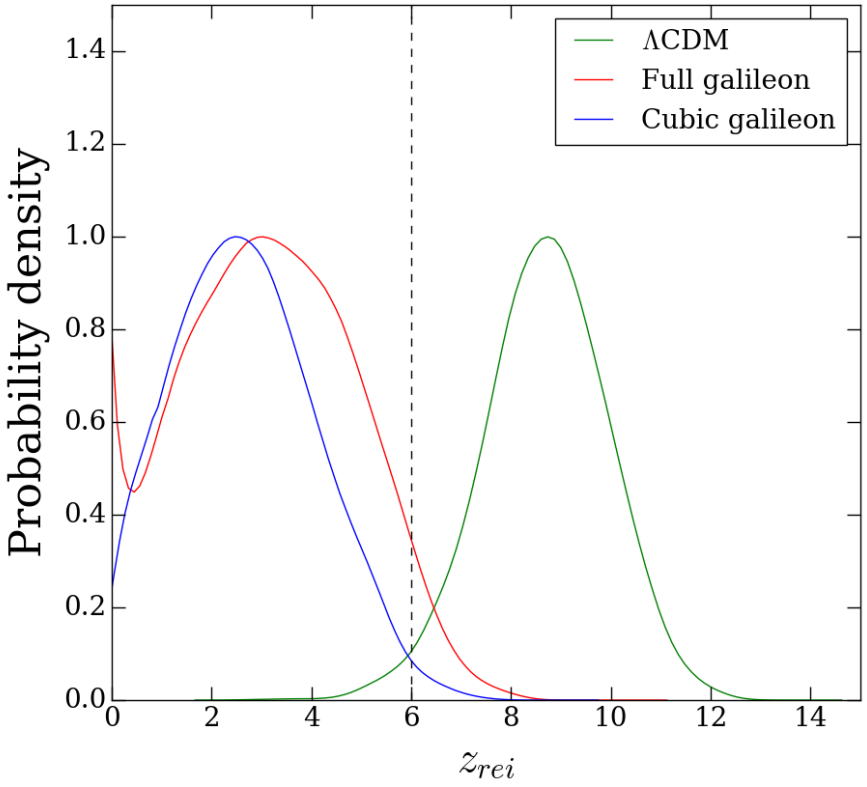

FIGURE 4.16 Densités de probabilité marginalisées du paramètre dérivé z_{rei} pour les modèles ΛCDM, galileon complet et galileon cubique contraints par les données du CMB. La limite inférieure à $z_{rei} > 6$ est indiquée par la droite verticale pointillée.

Alors que le modèle ΛCDM est parfaitement en accord avec la limite inférieure sur le redshift de réionisation, il semble que cette contrainte additionnelle soit en tension avec les contraintes mises par le CMB sur les modèles de galileon. Cette tension est toute relative pour le modèle de galileon complet puisque ce dernier est tout de même compatible avec cette limite inférieure à $\sim 1.5\sigma$. Cela monte à $\sim 3.5\sigma$ pour le modèle du galileon cubique, ce qui est beaucoup plus sérieux.

Enfin, concernant les paramètres spécifiques aux modèles de galileon dans le cas du galileon complet, tous les $\bar{c}_i$ sont significativement différents de 0, à l'exception de $\bar{c}_G$. Il semble donc que les observations du CMB favorisent les scénarios de galileon sans couplage disformel. Dans l'ensemble, les valeurs des $\bar{c}_i$ sont toutefois assez peu contraintes. Dans le cas du galileon

cubique, les valeurs de $\bar{c}_i$ sont complètement différentes, ce qui prouve que les deux modèles de galileon considérés ont vraiment des comportement différents. De plus, les valeurs de $\bar{c}_2$ et $\bar{c}_3$ sont extrêmement bien contraintes par les observations du CMB.

Données du JLA

Comme nous l'avons vu dans la section 4.1.1, les observations de supernovae nous renseignent sur l'évolution de la distance de luminosité en fonction du redshift à travers la relation (4.2). Ainsi, elles contraignent l'évolution du taux de Hubble H, donc en particulier Ω_m pour les trois modèles, et également les c_i pour les deux modèles de galileon. Cependant, le taux de Hubble aujourd'hui, H_0, a un effet de normalisation sur la magnitude des supernovae. Ce paramètre est donc dégénéré avec M_B, si bien que les observations de supernovae n'y sont pas sensibles. Les contraintes sur les paramètres des trois modèles étudiés apportées par les observations de supernovae de l'échantillon JLA sont données dans la table 4.3.

On remarque d'emblée que l'ajustement est aussi bon pour les trois modèles, ce qui est illustré dans la figure 4.17 qui présente le diagramme de Hubble des supernovae de l'échantillon JLA ainsi que les prédictions des distances de luminosité pour le meilleur ajustement de chacun des modèles.

	ΛCDM	Full galileon	Cubic galileon
Ω_m	0.297 ± 0.034	0.326 ± 0.046	0.19 ± 0.11
$\bar{c}_2$	-	-3.8 ± 1.8	-4.00 ± 0.29
$\bar{c}_3$	-	-0.98 ± 0.99	-0.735 ± 0.076
$\bar{c}_4$	-	-0.30 ± 0.35	-
$\bar{c}_5$	-	-0.31 ± 0.17	-
$\bar{c}_G$	-	0.20 ± 0.17	-
χ^2(JLA)	695	696	696

TABLE 4.3 Contraintes sur les paramètres libres des trois modèles obtenues à partir des données des supernovae de l'échantillon JLA. L'incertitude correspond à l'écart-type des distributions marginalisées de chaque paramètre. Les valeurs de χ^2 sont données pour le meilleur ajustement du modèle correspondant.

Par ailleurs, si l'on regarde plus précisément, on constate quelques détails intéressants. Premièrement, les observations de supernovae permettent de contraindre relativement bien Ω_m pour le modèle ΛCDM et le modèle de galileon complet, à des valeurs similaires, mais pas pour le modèle de galileon cubique. Les densités de probabilité obtenues en confrontant les modèles aux observations de supernovae sont présentées dans la figure 4.18, où l'on constate effectivement que ce paramètre est très peu contraint dans le modèle de galileon cubique.

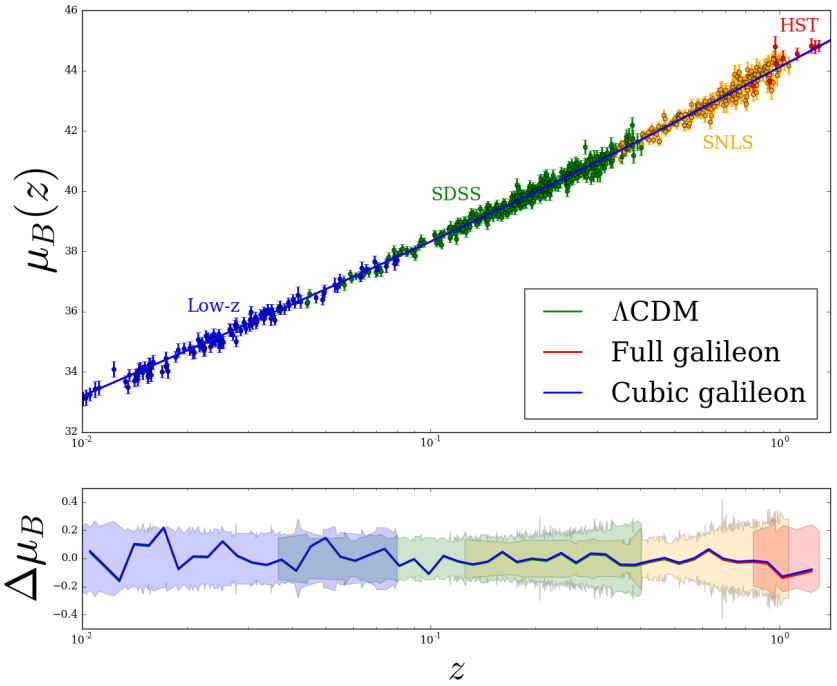

FIGURE 4.17 (Haut) Diagramme de Hubble des supernovae de l'échantillon JLA. Les couleurs des points représentent la provenance des supernovae. Les courbes (pratiquement confondues) représentent les prédictions des distances de luminosité pour le meilleur ajustement aux observations des supernovae pour chacun des trois modèles testés. (Bas) Différences entre les observations et la valeur moyenne des prédictions sur des intervalles logarithmiques en z pour les différents modèles, les aires colorées représentent l'incertitude sur les observations pour les différents lots de supernovae.

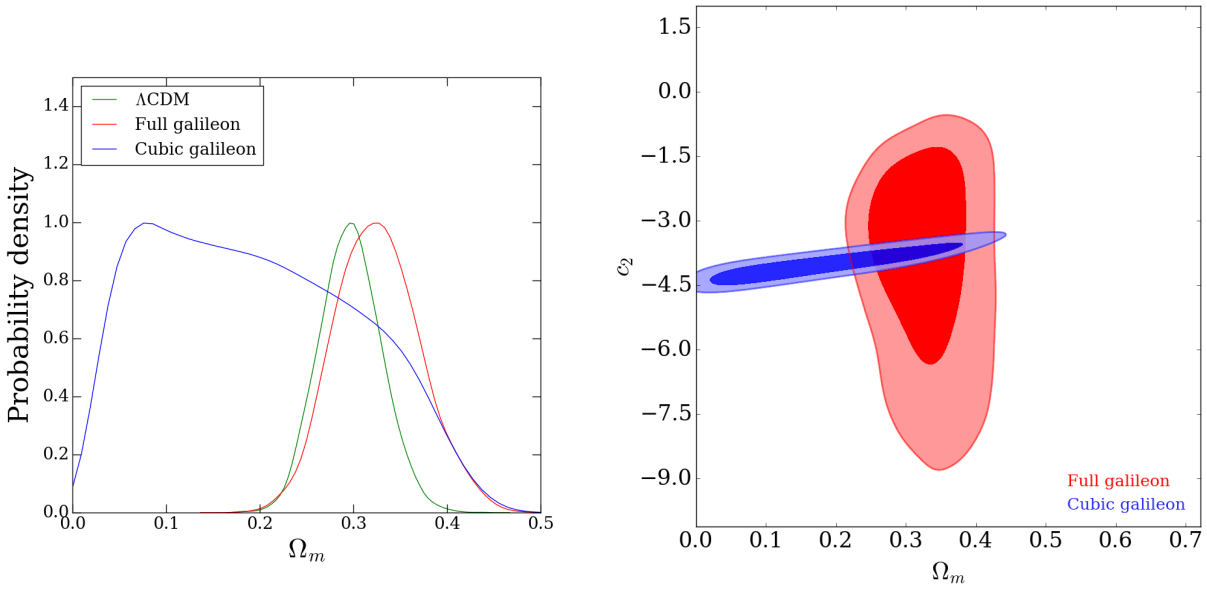

FIGURE 4.18 (Gauche) Densités de probabilité marginalisées du paramètre Ω_m issues de la confrontation des modèles ΛCDM, galileon complet et galileon cubique aux observations des supernovae de l'échantillon JLA. (Droite) Contraintes marginalisées à deux dimensions dans le plan $(\Omega_m, \bar{c}_2)$ pour les deux modèles de galileon.

Cela se comprend en revenant à l'équation de Friedmann dans le modèle du galileon (3.76) qui décrit l'évolution de $\bar{H}$. Ainsi, un décalage de Ω_m peut dans une certaine mesure être compensé dans le cas du galileon cubique par un décalage de $\bar{c}_2$ (en gardant $\bar{c}_3$ similaire), ce qui rend les supernovae moins contraignantes. Dans le cas du galileon complet, la relation (3.76) est beaucoup plus complexe, et un décalage de Ω_m ne peut pas être compensé aussi simplement. En d'autres termes, Ω_m et $\bar{c}_2$ sont dégénérés pour les supernovae dans le modèle de galileon cubique mais pas dans le modèle de galileon complet, comme le montre la figure 4.18. Les observations des supernovae redeviennent contraignantes pour le modèle de galileon complet, même si elles le sont légèrement moins que dans le cas ΛCDM. Cet effet sur Ω_m s'accompagne, assez naturellement, d'une grande liberté sur les paramètres du galileon. Néanmoins, malgré cette grande liberté, les intervalles de confiance pour les paramètres du galileon obtenus par les supernovae sont assez éloignés de ceux obtenus par le CMB. En effet, pour le galileon complet, seul le paramètre $\bar{c}_2$ n'est pas compatible avec 0, le modèle de galileon complet se rapproche donc du modèle de galileon cubique sous l'influence des observations de supernovae.

Cela indique une potentielle tension entre ces sondes. Si tension il y a, cela sera manifeste lorsque nous effectuerons les combinaisons des sondes.

Mesures de l'échelle BAO

De manière complémentaire aux observations de supernovae, les mesures de l'échelle BAO contraignent l'évolution du taux de Hubble à travers les mesures de distances. Cependant, nous avons déjà évoqué dans la section 4.1.2 le fait que les mesures de BAO sont en fait des mesures de distances en unité de r_d. Ainsi, les mesures de BAO sont en fait sensibles au paramètre adimensionné $P = c/(H_0 r_d)$ [47], si bien que H_0 et r_d sont dégénérés de manière similaire à H_0 et M_B dans le cas des supernovae. Cependant, dans un modèle cosmologique donné, on peut donner une prédiction pour r_d. Cette prédiction ne dépend que de la physique pré-recombinaison, dont on suppose qu'elle n'est pas modifiée entre le modèle ΛCDM et les modèles de galileon testés, hypothèse qui est vérifiée pour les meilleurs ajustements obtenus en considérant uniquement les données du CMB. Dans ce cas, la prédiction pour r_d est la même entre tous ces modèles et dépend des paramètres $\Omega_b h^2$ et $\Omega_c h^2$, ce qui permet de lever partiellement la dégénerescence et de contraindre H_0 (remplacé par θ_{MC} dans notre paramétrisation). Les contraintes sur les paramètres sensibles aux mesures de BAO pour les trois modèles sont données dans la table 4.4, les contraintes dans l'espace à deux dimensions sont présentées dans la figure 4.19.

L'accord avec les données est très bon dans les trois cas, ce qui n'est pas très surprenant puisqu'on ajuste des modèles avec au moins 3 paramètres à 8 mesures. De plus, les mesures de BAO sont assez peu contraignantes lorsqu'elles sont prises en compte seules du fait du faible

	ΛCDM	Full galileon	Cubic galileon
$\Omega_b h^2$	0.031 ± 0.016	0.026 ± 0.012	0.0122 ± 0.0074
$\Omega_c h^2$	0.221 ± 0.082	0.2822 ± 0.0995	0.338 ± 0.082
$100\theta_{MC}$	1.101 ± 0.059	1.151 ± 0.043	1.117 ± 0.064
$\bar{c}_2$	-	-2.5 ± 1.9	-3.26 ± 0.28
$\bar{c}_3$	-	0.01 ± 1.22	-0.545 ± 0.047
$\bar{c}_4$	-	0.16 ± 0.50	-
$\bar{c}_5$	-	-0.20 ± 0.15	-
$\bar{c}_G$	-	0.52 ± 0.40	-
χ^2(BAO)	3.0	2.5	2.5

TABLE 4.4 Contraintes sur les paramètres libres des trois modèles obtenues à partir des mesures de BAO. Les valeurs de χ^2 sont données pour le meilleur ajustement du modèle correspondant.

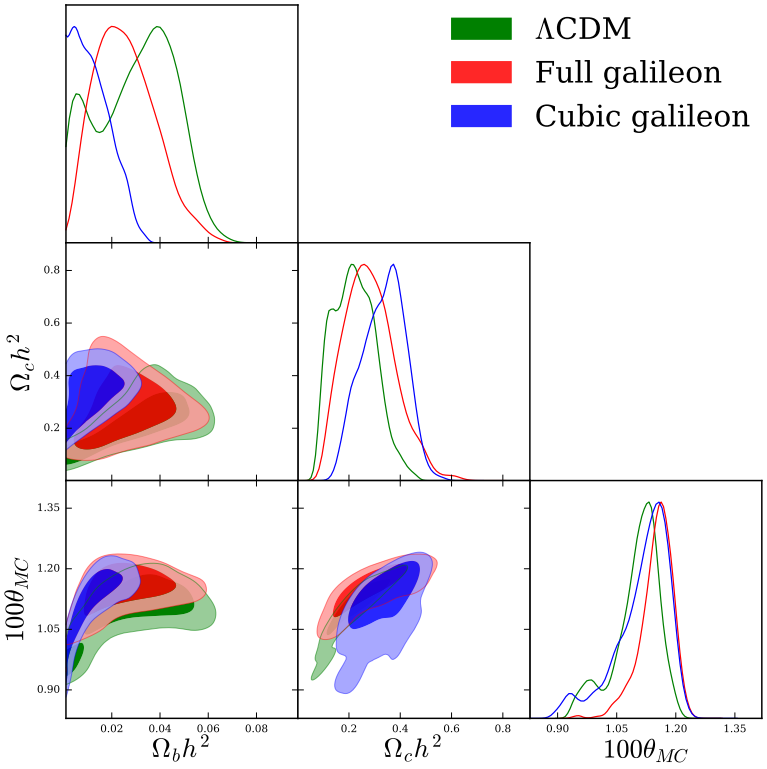

FIGURE 4.19 Contraintes marginalisées à une et deux dimensions sur les paramètres communs aux trois modèles étudiés, comparés aux mesures de l'échelle BAO.

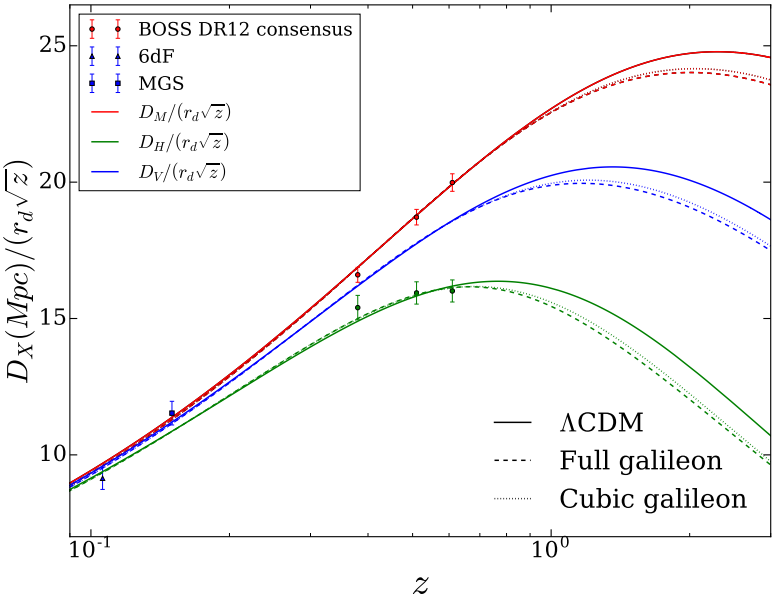

FIGURE 4.20 Prédictions des distances D_M, D_V et D_H, définies dans la section 4.1.2, pour le scénario qui s'ajuste le mieux aux mesures de l'échelle BAO dans chacun des trois modèles étudiés.

nombre de points. L'intérêt des mesures de BAO tient dans leur complémentarité avec les autres sondes. Les prédictions des distances par les meilleurs ajustements des trois modèles comparées aux observations sont présentées dans la figure 4.20. Cependant, malgré le caractère faiblement contraignant des mesures de BAO prises seules, on constate une fois encore que les valeurs des paramètres $\bar{c}_i$ privilégiées par ces mesures pour les modèles de galileon sont assez éloignées de celles favorisées par le CMB. Les $\bar{c}_i$ pour le modèle de galileon complet contraint par les mesures de BAO seules sont, en effet, tous compatibles avec 0 (même $\bar{c}_2$). Pour ce qui est du modèle de galileon cubique, les valeurs privilégiées par les mesures de BAO du paramètre $\bar{c}_2$ sont très éloignés de celles privilégiées par le CMB, ce qui ne laisse présager rien de bon étant données les très faibles barres d'erreurs sur ce paramètre.

Tout se passe comme si les scénarios des modèles de galileon compatibles avec les contraintes posées par les perturbations cosmologiques prédisaient une évolution du fond cosmologique qui n'est pas en accord avec les observations du fond cosmologique et inversement. Si c'est effectivement le cas, les modèles de galileon devraient avoir du mal à reproduire de manière satisfaisante les observations des trois sondes combinées.

Combinaisons des différentes sondes

Nous venons de voir que les trois modèles étudiés s'ajustent bien aux données provenant du CMB, aux mesures d'échelles BAO et aux observations de supernovae, indépendamment. Cependant, ce n'est pas suffisant pour qu'un modèle cosmologique soit considéré comme valide du point de vue observationnel. Il faut en fait que ces modèles soient compatibles lorsqu'ils sont confrontés à toutes les observations simultanément. Les contraintes obtenues sur les modèles étudiés lorsqu'ils sont confrontés aux trois jeux de données simultanément sont présentés dans la table 4.5 et dans la figure 4.21 pour les corrélations entre paramètres communs.

	ΛCDM	Full galileon	Cubic galileon
$\Omega_b h^2$	0.02228 ± 0.00014	0.02197 ± 0.00013	0.02189 ± 0.00013
$\Omega_c h^2$	0.1187 ± 0.0010	0.1231 ± 0.0010	0.12429 ± 0.00097
$100\theta_{MC}$	1.04091 ± 0.00029	1.04051 ± 0.00029	1.04075 ± 0.00037
τ	0.069 ± 0.012	0.0054 ± 0.0041	0.0051 ± 0.0036
$\ln(10^{10} A_s)$	3.070 ± 0.023	2.9478 ± 0.0094	2.9481 ± 0.0089
n_s	0.9662 ± 0.0040	0.9564 ± 0.0037	0.9575 ± 0.0035
$\bar{c}_2$	-	-7.30 ± 0.88	-4.454 ± 0.029
$\bar{c}_3$	-	-2.54 ± 0.60	-0.7420 ± 0.0047
$\bar{c}_4$	-	-0.65 ± 0.25	-
$\bar{c}_5$	-	-0.29 ± 0.13	-
$\bar{c}_G$	-	0.0100 ± 0.0071	-
H_0	67.73 ± 0.63	75.24 ± 0.49	75.53 ± 0.88
σ_8	0.8180 ± 0.0086	0.904 ± 0.011	0.8994 ± 0.0050
z_{rei}	9.1 ± 1.1	1.07 ± 0.88	1.01 ± 0.80
$10^9 A_s e^{-2\tau}$	1.875 ± 0.011	1.886 ± 0.011	1.888 ± 0.011
χ^2(CMB)	12946	12966	12993
χ^2(BAO)	5.6	30.4	29.9
χ^2(JLA)	706.7	723.3	723.6

TABLE 4.5 Contraintes sur les paramètres libres et quelques paramètres dérivés des trois modèles étudiés obtenues à partir des données du CMB, du JLA et des mesures de BAO. Les valeurs de χ^2 sont données pour chaque sonde et pour le meilleur ajustement du modèle correspondant.

Alors que le meilleur ajustement du modèle ΛCDM a des χ^2 à peine moins bons pour chacune des sondes lorsque le modèle est confronté à chacune d'elles indépendamment ou simultanément, ceux-ci se déteriorent dans le cas des deux modèles de galileon. Les prédictions des meilleurs ajustements combinés de ces modèles sont présentés dans les figures 4.22 pour les spectres de puissance du CMB, dans la figure 4.23 pour les distances de luminosité des supernovae, et dans les figures 4.24 pour les mesures de BAO. L'ajustement aux supernovae est moins bon mais reste correct (voire très correct pour le modèle ΛCDM). On fait le même constat

concernant l'ajustement aux spectres de puissance du CMB, la dégradation affectant principalement le spectre de puissance de lensing. Cependant, l'ajustement des modèles de galileon aux mesures de BAO s'est fortement dégradé avec des $\chi^2 \sim 30$ pour une comparaison à 8 points de données. Le modèle du galileon tel qu'étudié dans cette section semble donc en mauvaise posture lorsqu'on compare ses prédictions aux observations cosmologiques présentées dans cette thèse.

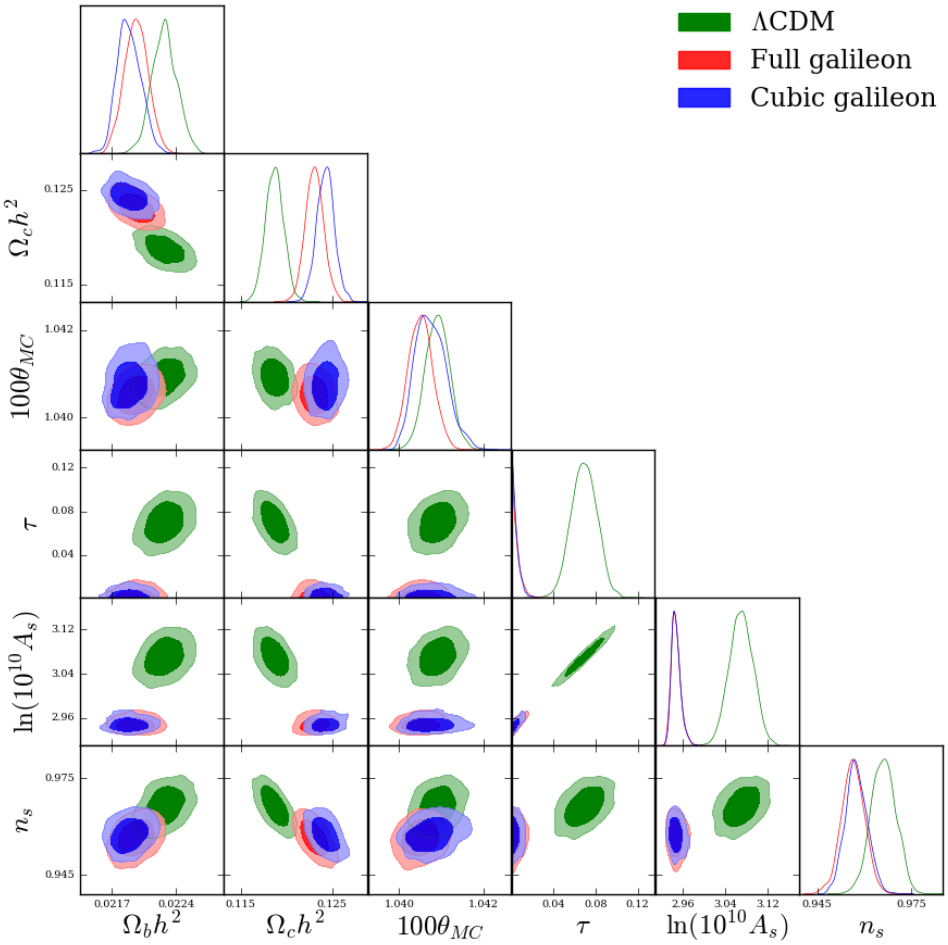

FIGURE 4.21 Contraintes marginalisées à une et deux dimensions pour les paramètres communs aux trois modèles étudiés lorsqu'on essaye d'ajuster ceux-ci à toutes les observations cosmologiques simultanément.

Par ailleurs, on peut revenir sur la tension que nous avions observée (voir la figure 4.16) entre les contraintes mises sur le redshift de réionisation par le CMB dans le cas du modèle du galileon et celles mises par les observations astrophysiques [45, 46]. Les nouvelles densités de probabilité marginalisées du redshift de réionisation z_{rei}, contraintes par l'ensemble des observations cosmologiques sont décrites dans la figure 4.25. Le désaccord entre les contraintes obtenues grâce aux données cosmologiques et la contrainte astrophysique pour les modèles de galileon est ici flagrant. Parmi tous les scénarios des modèles de galileon retenues dans les

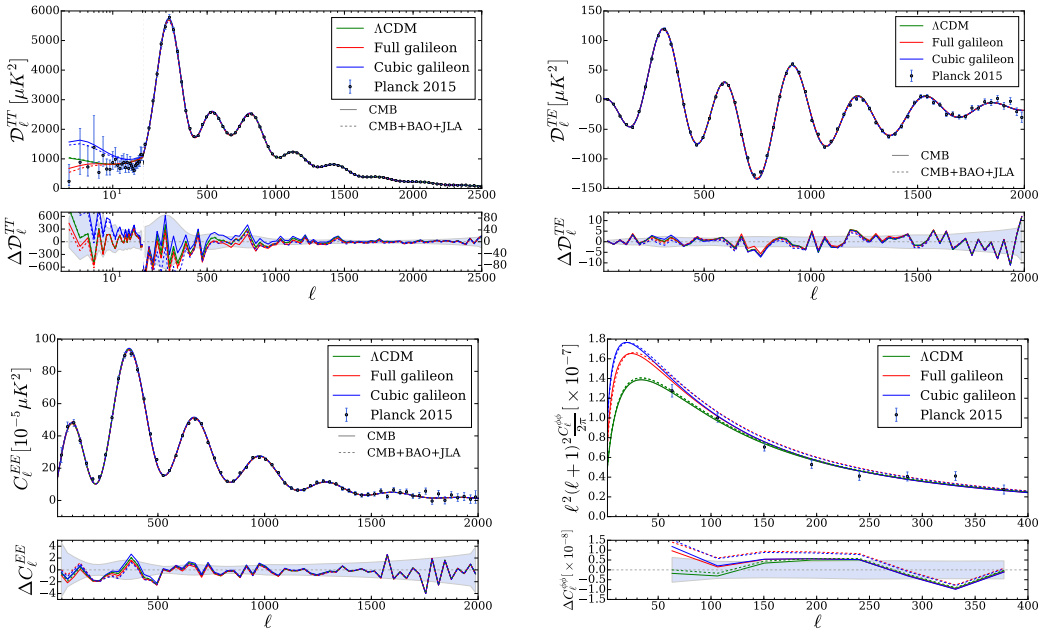

FIGURE 4.22 Prédictions des spectres de puissance angulaires des anisotropies du CMB pour les meilleurs ajustements des trois modèles lorsque ceux-ci sont confrontés uniquement aux observations du CMB et lorsqu'ils sont confrontés simultanément à toutes les observations cosmologiques.

chaînes, aucun ne prédit un $z_{rei} > 6$, si bien qu'on ne peut même pas calculer de valeur p pour quantifier ce désaccord.

Les valeurs des paramètres du galileon $\bar{c}_i$ pour le galileon complet et le galileon cubique favorisées par la combinaison des sondes sont très proches de celles favorisées par le CMB seul. Cela indique que le CMB est trop contraignant en ce qui concerne les $\bar{c}_i$ pour pouvoir tolérer des valeurs des $\bar{c}_i$ aussi faibles que celles des tables 4.3 et 4.4.

4.2.3 Extensions des modèles de base

Enfin, es modèles de galileon complet et galileon cubique de base sont donc très largement défavorisés par les observations cosmologiques, comme cela avait déjà été observé dans [48] pour un sous-espace des paramètres du modèle du galileon. Cependant, il avait également été noté qu'une extension de ce modèle laissant libre la somme des masses des neutrinos actifs permettait de retrouver un bon accord avec les observations cosmologiques. Il est donc naturel de considérer des extensions aux modèles de base en introduisant un paramètre supplémentaire susceptible de régler les incompatibilités observées précédemment.

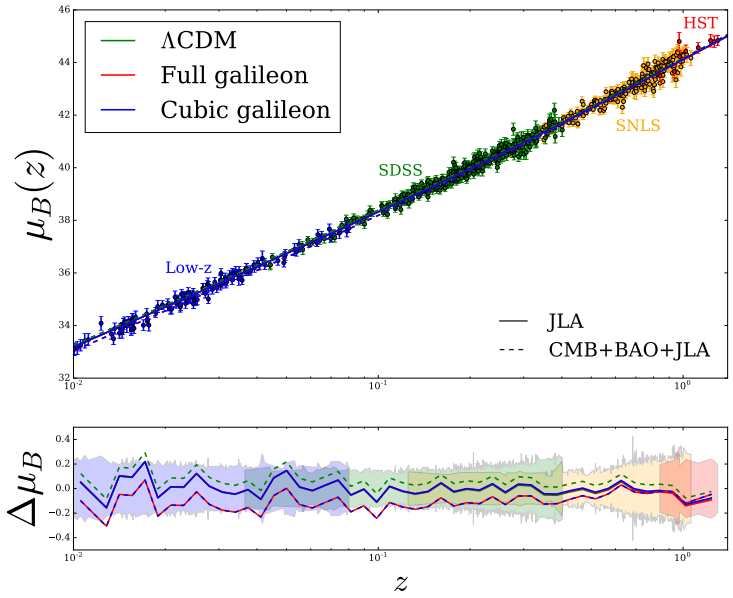

FIGURE 4.23 (Haut) Diagramme de Hubble des supernovae de l'échantillon JLA ainsi que les prédictions des distances de luminosité pour les trois modèles testés. (Bas) Différences entre les observations et la valeur moyenne des prédictions sur des intervalles logarithmiques en z pour les différents modèles, les aires colorées représentent l'incertitude sur les observations pour les différents lots de supernovae. Les courbes continues, toutes superposées, représentent les scénarios qui s'ajustent le mieux aux observations de supernovae uniquement et les courbes en tirets les scénarios qui s'ajustent le mieux à toutes les observations cosmologiques simultanément.

Normalisation de l'effet de lentille gravitationnelle

Les extensions des modèles de base que l'on considère, sont celles susceptibles de diminuer l'incompatibilité provenant de la réionisation dans les modèles de galileon. Cette incompatibilité a pour origine les très faibles valeurs de τ favorisées par le CMB, et notamment par le spectre de puissance de l'effet de lentille gravitationnelle. Celui-ci est mesuré par la collaboration Planck de deux manières différentes détaillées dans [44]. La première méthode, qui fournit le spectre de référence, utilise les anisotropies statistiques introduites par le potentiel de lensing sur les anisotropies de température gaussiennes. La seconde exploite les non-gaussianités introduites par le lensing sur les anisotropies de température. Ces méthodes sont censées être équivalentes, et donc aboutir à des mesures du spectre de puissance de lensing compatibles. Pour juger de la cohérence entre les deux méthodes d'estimation du spectre de puissance du lensing, la collaboration Planck a introduit le paramètre A_L qui normalise directement les $C_\ell^{\phi\phi}$, mais module également l'effet du lensing sur le spectre de puissance en température. Si les deux méthodes sont cohérentes, alors $A_L = 1$. Cependant il a été observé dans les analyses de la collaboration Planck que $A_L = 1.22 \pm 0.11$ [23] pour le modèle ΛCDM lorsqu'on laisse varier ce paramètre. Cela peut indiquer la présence d'une systématique mal comprise dans

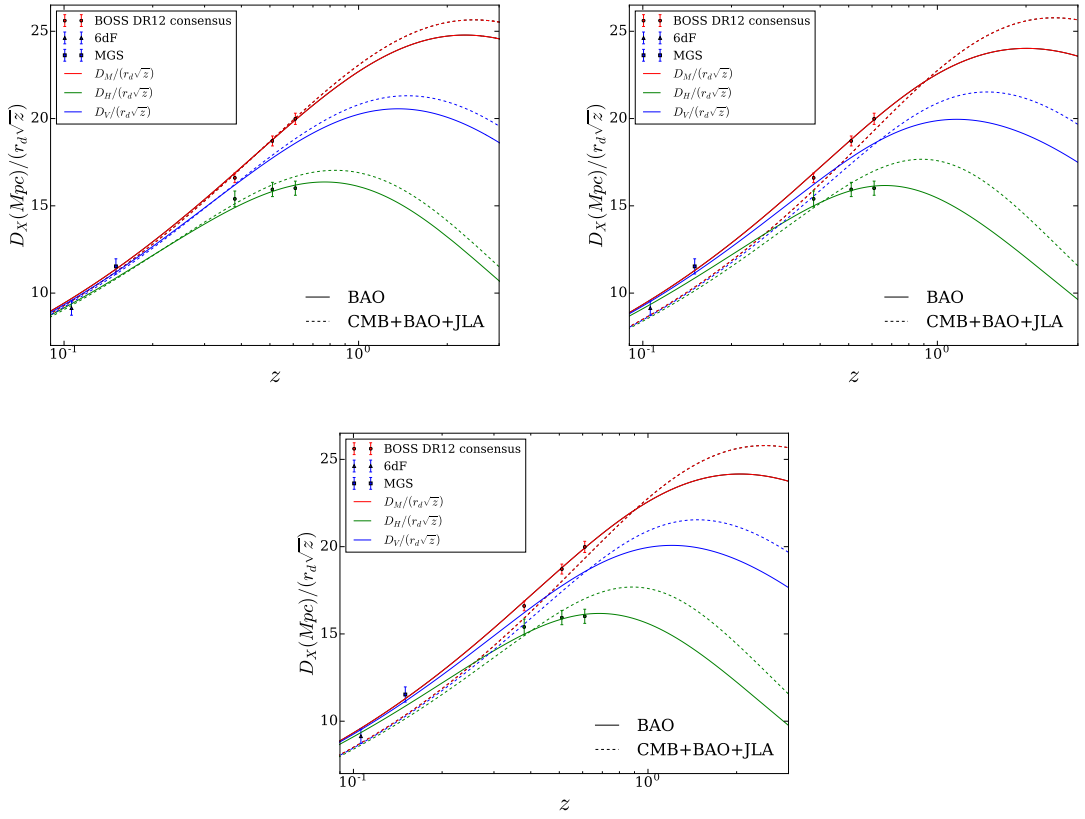

FIGURE 4.24 Prédictions des distances D_M, D_V et D_H pour le scénario qui s'ajuste le mieux aux mesures d'échelles BAO et celui qui s'ajuste le mieux à toutes les observations cosmologiques simultanément, dans le modèle ΛCDM (en haut à gauche), dans le modèle de galileon complet (en haut à droite) et dans le modèle de galileon cubique (en bas).

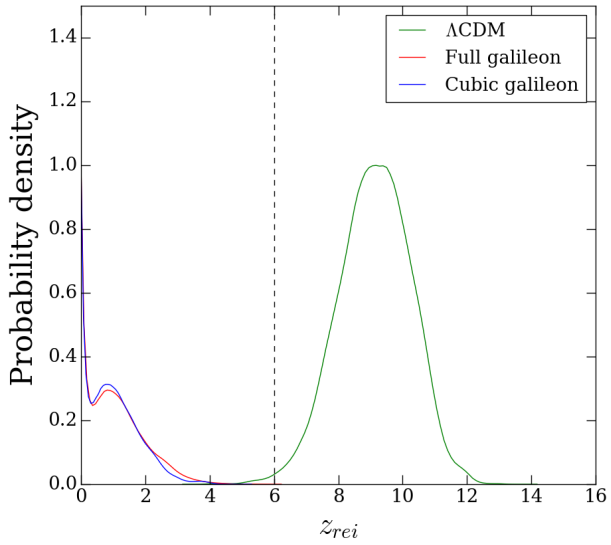

FIGURE 4.25 Densités de probabilité marginalisées du paramètre dérivé z_{rei} obtenues en confrontant les modèles ΛCDM, galileon complet et galileon cubique à toutes les observations cosmologiques. La limite inférieure à $z_{rei} > 6$ est indiquée par la droite verticale pointillée.

les données, et il est alors légitime de laisser libre ce paramètre lors d'un ajustement aux observations du CMB. Les contraintes obtenues sur les trois modèles en élargissant l'espace des paramètres à A_L et en combinant les trois sondes cosmologiques sont présentées dans la table 4.6 (à comparer à la table 4.5).

	ΛCDM	Full galileon	Cubic galileon
$\Omega_b h^2$	0.02230 ± 0.00014	0.02190 ± 0.00015	0.02174 ± 0.00013
$\Omega_c h^2$	0.1185 ± 0.0011	0.1240 ± 0.0012	0.1263 ± 0.0012
$100\theta_{MC}$	1.04096 ± 0.00030	1.04035 ± 0.00030	1.04051 ± 0.00038
τ	0.055 ± 0.021	0.052 ± 0.027	0.037 ± 0.018
$\ln(10^{10} A_s)$	3.041 ± 0.042	3.048 ± 0.044	3.010 ± 0.037
n_s	0.9668 ± 0.0040	0.9534 ± 0.0040	0.9520 ± 0.0040
A_L	1.043 ± 0.052	0.763 ± 0.049	0.852 ± 0.041
$\bar{c}_2$	-	-7.74 ± 0.69	-4.388 ± 0.036
$\bar{c}_3$	-	-2.87 ± 0.47	-
$\bar{c}_4$	-	-0.79 ± 0.19	-
$\bar{c}_5$	-	-0.320 ± 0.090	-
$\bar{c}_G$	-	0.022 ± 0.010	-
H_0	67.86 ± 0.48	73.68 ± 0.59	74.44 ± 0.61
σ_8	0.806 ± 0.017	0.987 ± 0.027	0.936 ± 0.018
z_{rei}	7.6 ± 2.2	7.4 ± 2.4	5.7 ± 2.3
$10^9 A_s e^{-2\tau}$	1.873 ± 0.011	1.898 ± 0.011	1.904 ± 0.011
χ^2(CMB)	12945	12960	12982
χ^2(BAO)	5.2	18.4	25.2
χ^2(JLA)	706.6	718.9	722.4

TABLE 4.6 Contraintes sur les paramètres libres et quelques paramètres dérivés des trois modèles étudiés avec A_L laissé libre. Ces contraintes sont obtenues à partir des données du CMB, du JLA et des mesures de BAO. Les chaînes correspondantes pour le modèle de galileon cubique ne sont malheureusement pas, à l'heure actuelle, dans un état assez avancé pour être exploitées.

Comme on pouvait s'y attendre, les valeurs de τ favorisées pour le modèles de galileon complet par les observations cosmologiques sont ici plus hautes que précédemment et semblables à celles favorisées pour le modèle ΛCDM, de même que A_s. En conséquence, les valeurs de z_{rei} sont désormais compatibles avec la contrainte relativement souple mise par les observations astrophysiques. Le fait que les modèles de galileon prédisent un fort effet de lensing est totalement absorbé par une diminution du paramètre A_L. Il y a alors une plus grande liberté sur les paramètres A_s et τ qui se trouvent déterminés par la contrainte sur τ des grandes échelles de polarisation. Ainsi, les paramètres A_L, A_s et τ sont très corrélés comme l'indique la figure 4.26.

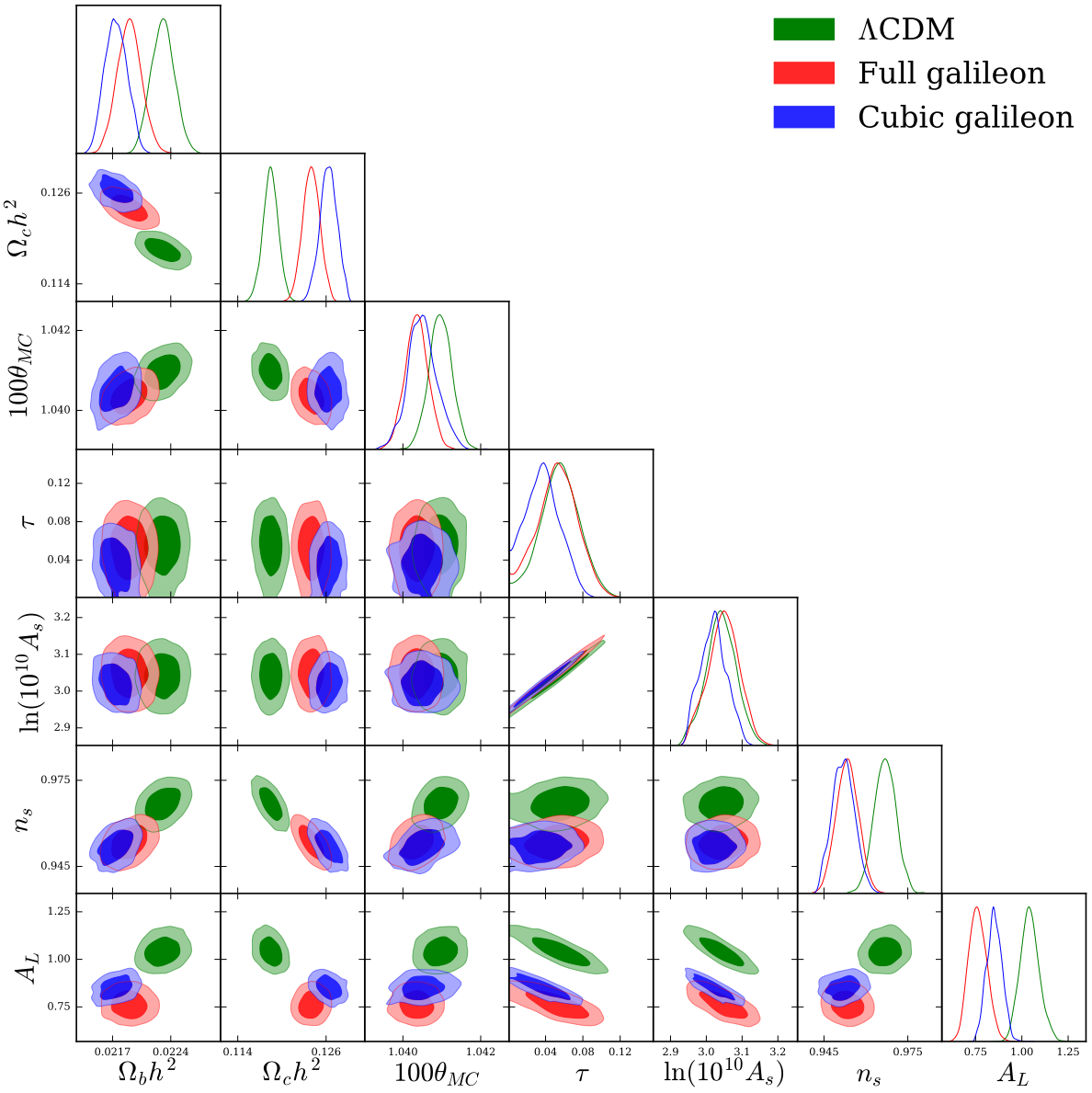

FIGURE 4.26 Contraintes marginalisées à une et deux dimensions pour les paramètres libres, dont le paramètre A_L, pour les trois modèles étudiés lorsqu'on essaye d'ajuster ceux-ci à toutes les observations cosmologiques simultanément.

En plus de réconcilier les observations cosmologiques avec la réionisation dans les modèles de galileon, l'ajustement est globalement meilleur en laissant libre le paramètre A_L. Néanmoins, le χ^2 entre les prédictions des échelles BAO et les mesures reste très grand, environ trois fois plus que pour le modèle ΛCDM, comme on peut le constater sur les prédictions des meilleurs ajustements en figure 4.27.

Le modèle de galileon complet ne semble donc pas tiré d'affaire, même si une systématique se cache dans les mesures du spectre de puissance du lensing faites par la collaboration Planck.

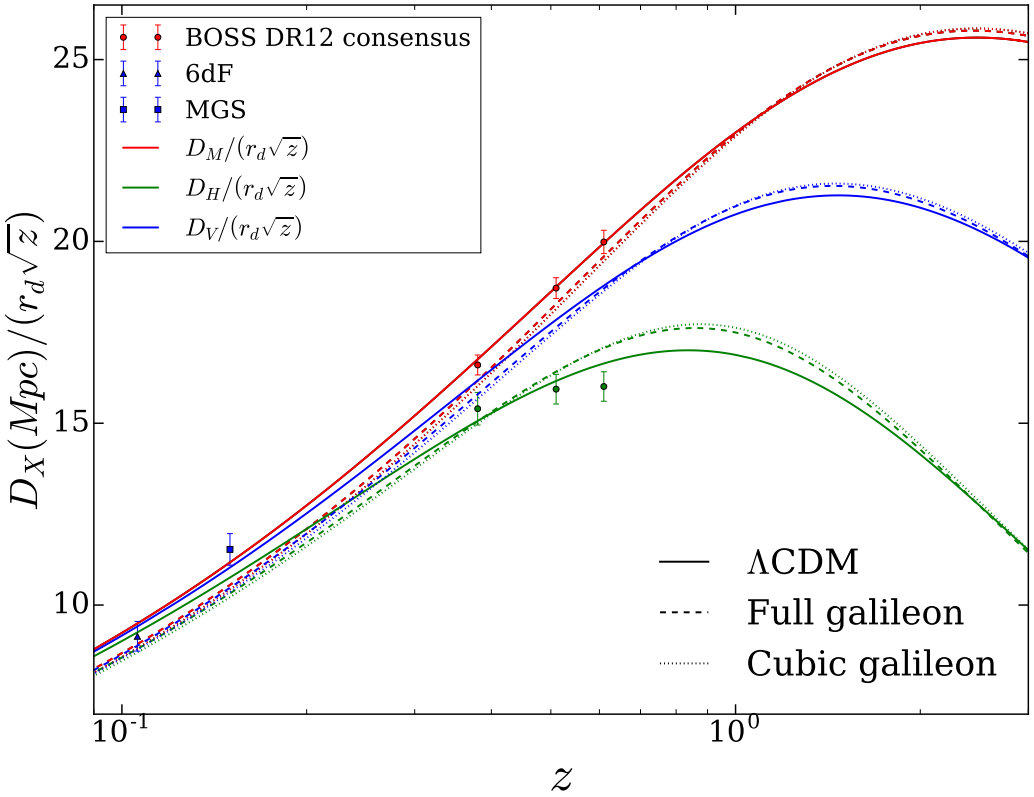

FIGURE 4.27 Prédictions des distances pour le scénario qui s'ajuste le mieux à toutes les mesures cosmologiques dans chacun des trois modèles étudiés lorsque le paramètre A_L est laissé libre.

Masse des neutrinos actifs

Il a été prouvé expérimentalement, par la découverte des oscillations de neutrinos [49], que les trois espèces de neutrinos actifs du modèle standard de la physique des particules possèdent une masse. La valeur absolue de ces masses n'est pas encore connue, mais les mesures des angles de mélange entre espèces permettent de contraindre les carrés des différences de masses Δm^2 entre les trois états de masse [50, 51]. Ces mesures fournissent une limite inférieure sur la somme des masses des trois espèces de neutrinos, $\sum m_\nu > 0.06$ eV, et il est également possible de déterminer une limite supérieure sur la masse de chaque espèce de neutrino à partir d'expériences de mesures directes [52, 53], $m_\nu^i < 2.2$ eV (où $i = e, \mu, \tau$). Cependant, il n'y a, à l'heure actuelle, aucune raison de penser que $\sum m_\nu = 0.06$ eV (ce qui est considéré dans les modèles de base) à partir des mesures directes, si bien que laisser ce paramètre libre semble parfaitement justifié physiquement. Ainsi, il est légitime d'explorer l'intervalle $\sum m_\nu \in [0.06, 6.6]$ eV pour la somme des masses des trois espèces de neutrinos. La raison pour laquelle ce paramètre n'est pas intégré aux analyses standards tient dans le fait que la prédiction du modèle ΛCDM

lorsque ce paramètre est laissé libre est compatible avec $\sum m_\nu = 0.06$ eV (et même avec 0 eV). Néanmoins, il n'y a pas de raison, a priori, que la situation soit la même dans le cadre de modèles de gravité modifiée tels que le modèle du galileon. Il est même raisonnable de penser qu'en augmentant la somme des masses des neutrinos, cela résoudra certains des problèmes rencontrés par les modèles de galileon de base. Si $\sum m_\nu$ est, au plus, de l'ordre de quelques eV, ce qui est le cas d'après les limites supérieures obtenues par des mesures directes [54], les neutrinos ne modifient pas sensiblement la forme des spectres de puissances du CMB à l'exception des grandes échelles (bas ℓ) du spectre en température et en lensing. Le fait que les neutrinos soient plus massifs impliquent qu'ils interagissent plus avec les baryons et la matière noire froide. Cependant, comme ils ne participent pas à la formation des structure, cette interaction a pour effet de limiter l'effondrement de la matière dans les puits de potentiels gravitationnels. Ainsi, des neutrinos plus massifs entraînent un contraste de densité qui augmente moins rapidement et un potentiel gravitationnel plus faible. Cela a pour conséquence intéressante de diminuer l'amplitude du spectre de puissance du lensing, surtout à bas ℓ. Augmenter $\sum m_\nu$ aura donc approximativement le même effet sur le spectre de puissance du lensing que de diminuer A_L.

Cependant, la somme des masses des neutrinos étant un paramètre plus physique, cela affecte également les autres prédictions cosmologiques. En effet, si les neutrinos sont plus massifs, l'évolution du fond cosmologique sera différente (voir (3.76)). Ce changement peut, dans une certaine mesure, être compensé par une modification de H_0, si bien qu'il existe une anticorrélation importante entre les paramètres $\sum m_\nu$ et H_0. L'évolution de l'expansion de l'Univers peut néanmoins être sensiblement différente ce qui donne un espoir de réconcilier les observations des perturbations et du fond cosmologiques. Les contraintes apportées aux paramètres libres des modèles étendues au paramètre $\sum m_\nu$ par la combinaison des trois sondes sont données dans la table 4.7 (à comparer à la table 4.5) et dans la figure 4.28 pour les contraintes à deux dimensions.

Les effets que nous avons évoqués précédemment sont ici bien visibles. Les contraintes sur le modèle ΛCDM sont peu affectées par l'introduction du nouveau paramètre qui est compatible avec la valeur minimum autorisée pour la chaîne de Markov de 0.06 eV. Au contraire, les contraintes sur les modèles de galileon ont beaucoup changé. L'augmentation de $\sum m_\nu$ a effectivement joué un rôle similaire à A_L, puisqu'on retrouve des contraintes raisonnables sur τ et donc sur z_{rei}. La corrélation entre $\sum m_\nu$ et H_0 entraîne de plus faibles valeurs pour la constante de Hubble dans les modèles de galileon, ce qui rend les contraintes sur H_0 à partir des données cosmologiques et des mesures directes compatibles dans les modèles de galileon, comme illustré sur la figure 4.29. En fait, il semble que l'ajout du paramètre $\sum m_\nu$ ait réconcilié les contraintes sur les paramètres cosmologiques entre le modèle ΛCDM et les modèles de galileon, comme l'indique la figure 4.28. Malheureusement, malgré toutes ces améliorations

	ΛCDM	Full galileon	Cubic galileon
$\Omega_b h^2$	0.02230 ± 0.00014	0.02217 ± 0.00016	0.02207 ± 0.00014
$\Omega_c h^2$	0.1184 ± 0.0010	0.1191 ± 0.0014	0.1213 ± 0.0013
$100\theta_{MC}$	1.04093 ± 0.00029	1.04072 ± 0.00033	1.04122 ± 0.00045
τ	0.075 ± 0.014	0.0048 ± 0.019	0.062 ± 0.015
$\ln(10^{10} A_s)$	3.081 ± 0.026	3.027 ± 0.036	3.056 ± 0.027
n_s	0.9673 ± 0.0040	0.9638 ± 0.0047	0.9642 ± 0.0045
$\sum m_\nu$	0.115 ± 0.045	0.610 ± 0.093	0.642 ± 0.080
$\bar{c}_2$	-	-7.37 ± 0.97	-4.238 ± 0.044
$\bar{c}_3$	-	-2.71 ± 0.64	-
$\bar{c}_4$	-	-0.74 ± 0.26	-
$\bar{c}_5$	-	-0.30 ± 0.12	-
$\bar{c}_G$	-	0.017 ± 0.012	-
H_0	67.43 ± 0.52	71.07 ± 0.77	71.60 ± 0.74
σ_8	0.811 ± 0.011	0.799 ± 0.019	0.792 ± 0.015
z_{rei}	9.7 ± 1.2	7.0 ± 2.1	8.5 ± 1.5
$10^9 A_s e^{-2\tau}$	1.874 ± 0.011	1.873 ± 0.011	1.876 ± 0.011
χ^2(CMB)	12946	12950	12963
χ^2(BAO)	5.5	16.8	18.3
χ^2(JLA)	706.7	717.2	716.5

TABLE 4.7 Contraintes sur les paramètres libres et quelques paramètres dérivés des trois modèles étudiés avec $\sum m_\nu$ laissé libre. Ces contraintes sont obtenues à partir des données du CMB, du JLA et des mesures de BAO. Attention, même si elles sont déjà bien avancées, les chaînes pour les modèles de galileon n'ont pas encore totalement convergé, il s'agit donc de résultats préliminaires.

apportées par la variation du paramètre $\sum m_\nu$, les modèles de galileon peinent toujours à reproduire les mesures de BAO, comme on peut le voir sur la figure 4.30.

Une étude plus détaillée de cette tension avec les mesures de BAO est nécessaire afin de déterminer dans quelle mesure cette tension est sérieuse et suffisante pour exclure les modèles de galileon ou non. Une première approche sera présentée dans la section 4.3.

4.2.4 Contraintes sur la vitesse des ondes gravitationnelles

Avant de discuter plus en détails les résultats précédemment exposés, nous allons étudier les contraintes apportées sur le modèle du galileon par l'observation de la fusion du système binaire d'étoiles à neutrons décrite dans la section 4.1.4. Cette observation contraint l'écart entre la vitesse des ondes gravitationnelles c_g et la vitesse de la lumière c. Dans le modèle ΛCDM,

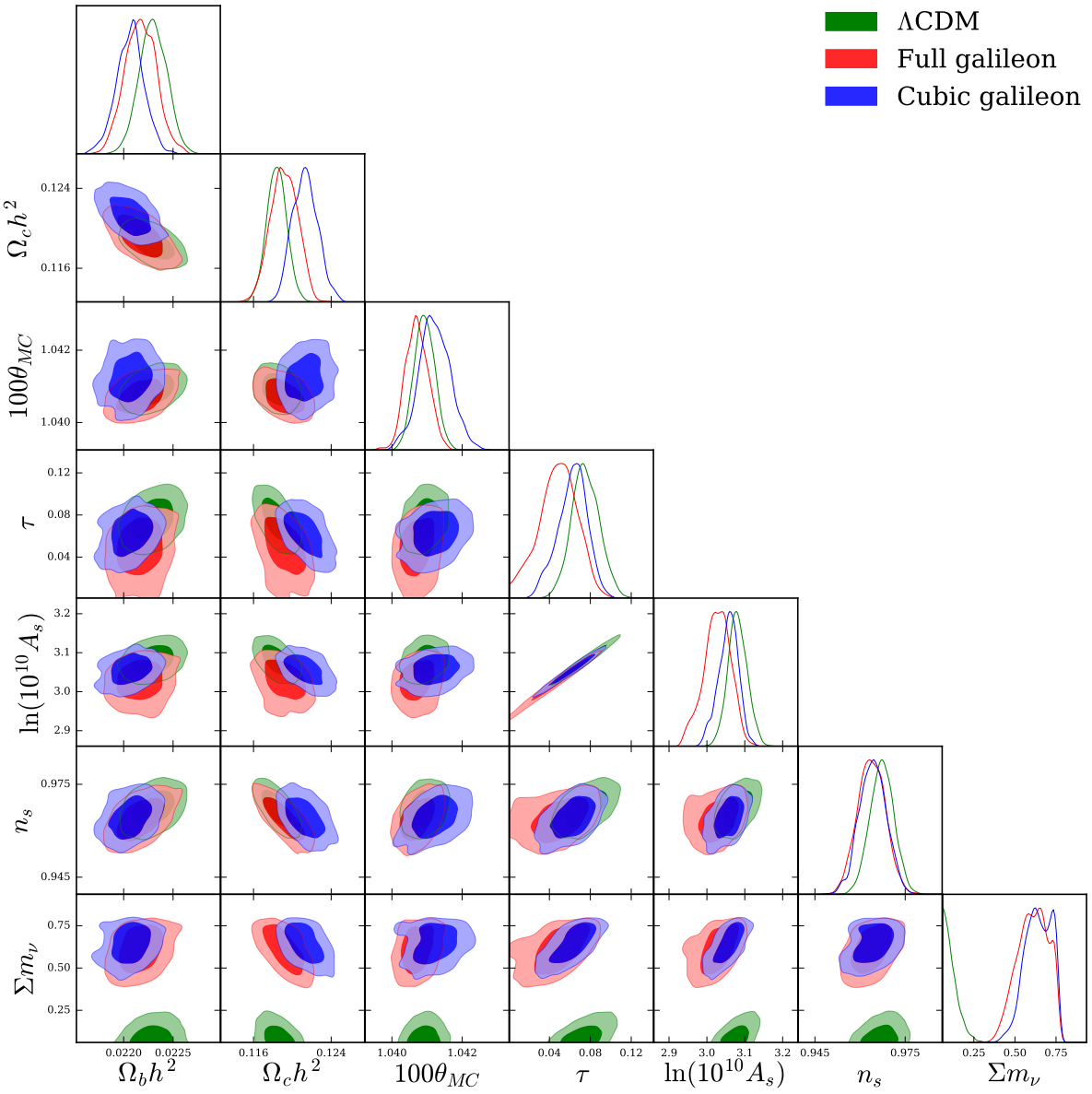

FIGURE 4.28 Contraintes marginalisées à une et deux dimensions pour les paramètres libres, dont le paramètre $\sum m_\nu$, pour les trois modèles étudiés lorsqu'on essaye d'ajuster ceux-ci à toutes les observations cosmologiques simultanément.

$c_g^{\Lambda\text{CDM}} = c$, et on rappelle que dans le modèle du galileon :

$$\frac{c_g^{gal}}{c} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\bar{c}_4\bar{H}^4\bar{x}^4 + \frac{3}{2}\bar{c}_5\bar{H}^5\bar{x}^4\left(\overset{o}{\bar{H}\bar{x}}\right) - \frac{1}{2}\bar{c}_G\bar{H}^2\bar{x}^2\right)^{1/2} \times \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\bar{c}_4\bar{H}^4\bar{x}^4 + \frac{3}{2}\bar{c}_5\bar{H}^5\bar{x}^5 + \frac{1}{2}\bar{c}_G\bar{H}^2\bar{x}^2\right)^{-1/2} \tag{4.28}$$

On constate que c_g^{gal} ne dépend que des paramètres $\bar{c}_4$, $\bar{c}_5$ et $\bar{c}_G$. En conséquence, dans le modèle de galileon cubique, on a également $c_g^{cub} = c$. Comme évoqué dans la section 4.1.4, les modèles

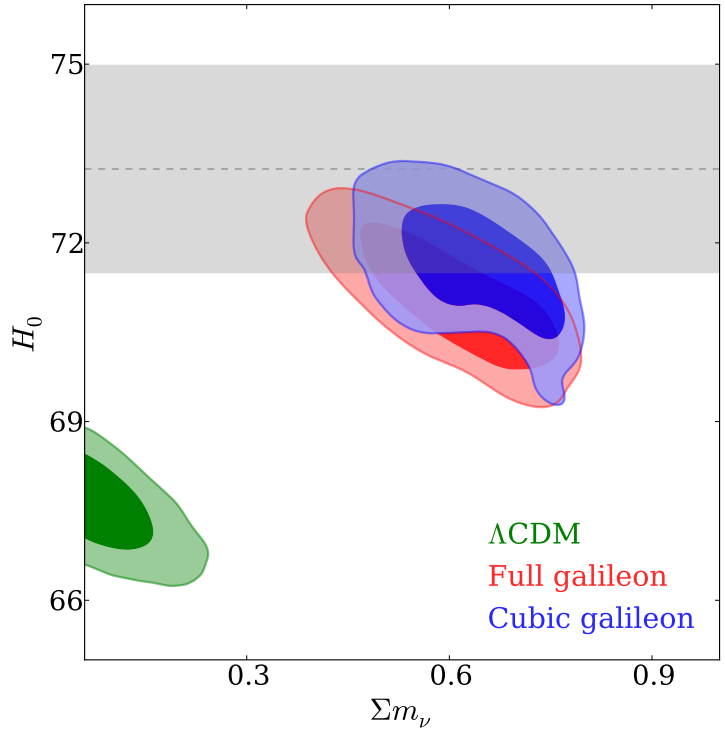

FIGURE 4.29 Contraintes marginalisées à deux dimensions dans le plan $(\sum m_\nu, H_0)$, pour les trois modèles étudiés lorsqu'on essaye d'ajuster ceux-ci à toutes les observations cosmologiques simultanément. La bande grise correspond à l'intervalle de confiance à 68% de la mesure directe de H_0 de [43].

dans lesquels la vitesse des ondes gravitationnelles est égale à la vitesse de la lumière sont compatibles avec cette observation, le retard à l'arrivée des deux signaux Δt étant alors égal au retard à l'émission δt. Ainsi, parmi les trois modèles étudiés, seul le modèle de galileon complet nécessite d'être confronté plus en détail avec cette observation.

Plutôt que d'effectuer un ajustement du modèle à cette observation, ce qui s'avère trop compliqué, on compare a posteriori les prédictions des scénarios retenus dans les chaînes de Markov produites en comparant le modèle aux observations cosmologiques (CMB, BAO et JLA) à la mesure de Δt. Ainsi, on compare directement la prédiction du modèle dans la région de l'espace des paramètres favorisés par les observations cosmologiques, plutôt que de comparer c_g^{gal} et c comme ce qui est fait dans [55]. La distribution des prédictions de $\log(|\Delta t|)$ est représentée dans la figure 4.31 pour le modèle de galileon complet de base, étendu à A_L et étendu à $\sum m_\nu$.

Ainsi, tous les scénarios retenus dans les chaînes prédisent un retard très important, de l'ordre de :

$$\Delta t > 10^{14} \text{ sec} \sim \text{ quelques millions d'années} \tag{4.29}$$

Cette prédiction, cohérente avec les résultats présentés dans [55], est absolument incompatible avec l'observation de l'évènement en ondes gravitationnelles et en ondes électromagnétiques

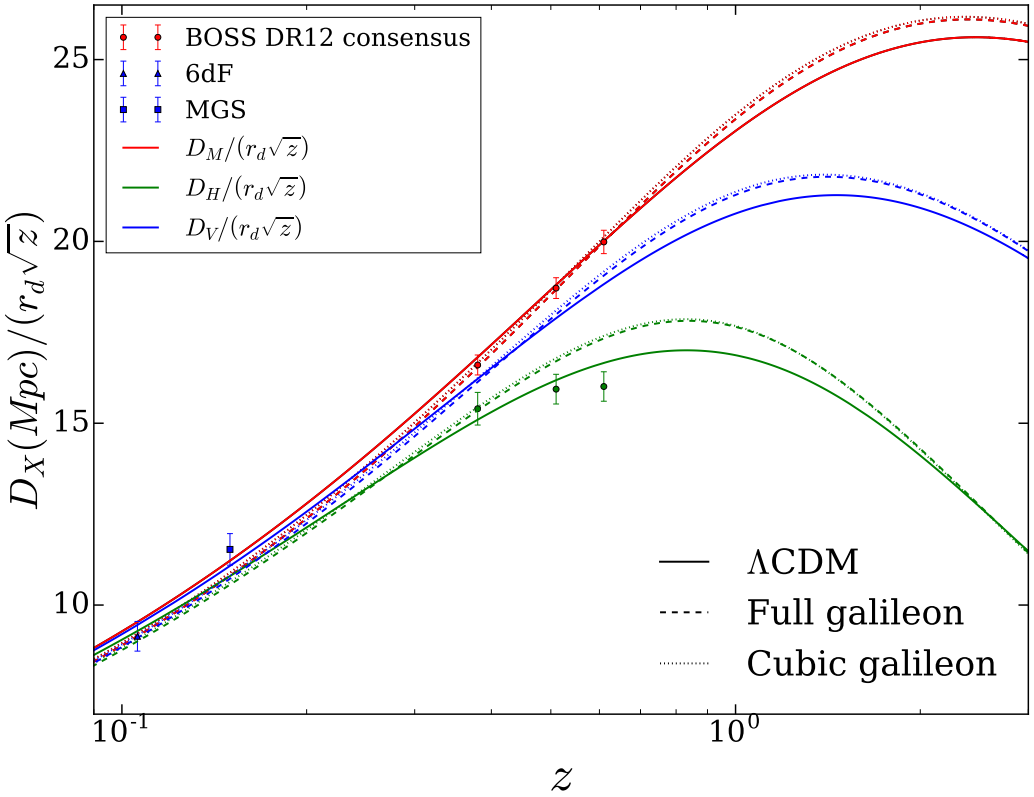

FIGURE 4.30 Prédictions des distances pour le scénario qui s'ajuste le mieux aux mesures d'échelles BAO dans chacun des trois modèles étudiés lorsque le paramètre $\sum m_\nu$ est laissé libre.

à quelques secondes de décalage. La méthode présentée ici permet d'exclure totalement le modèle de galileon complet grâce aux ondes gravitationnelles, plutôt que d'invoquer un argument d'ajustement fin des paramètres [55].

4.3 Discussion

Le modèle du galileon complet, puisqu'il prédit une vitesse des ondes gravitationnelles différente de la vitesse de la lumière, est complètement exclu par l'évènement GW170817 [27]. Cependant, ce n'est pas le cas de la restriction au galileon cubique, et de plus il est intéressant de se pencher sur ce que les observations cosmologiques peuvent nous apprendre sur les modèles d'énergie noire et de gravité modifiée, dont le modèle du galileon est un représentant. Comprendre physiquement les tensions observées et statuer sur la compatibilité ou non des différents modèles de galileon à la lumière des observations cosmologiques sera l'enjeu de cette section.

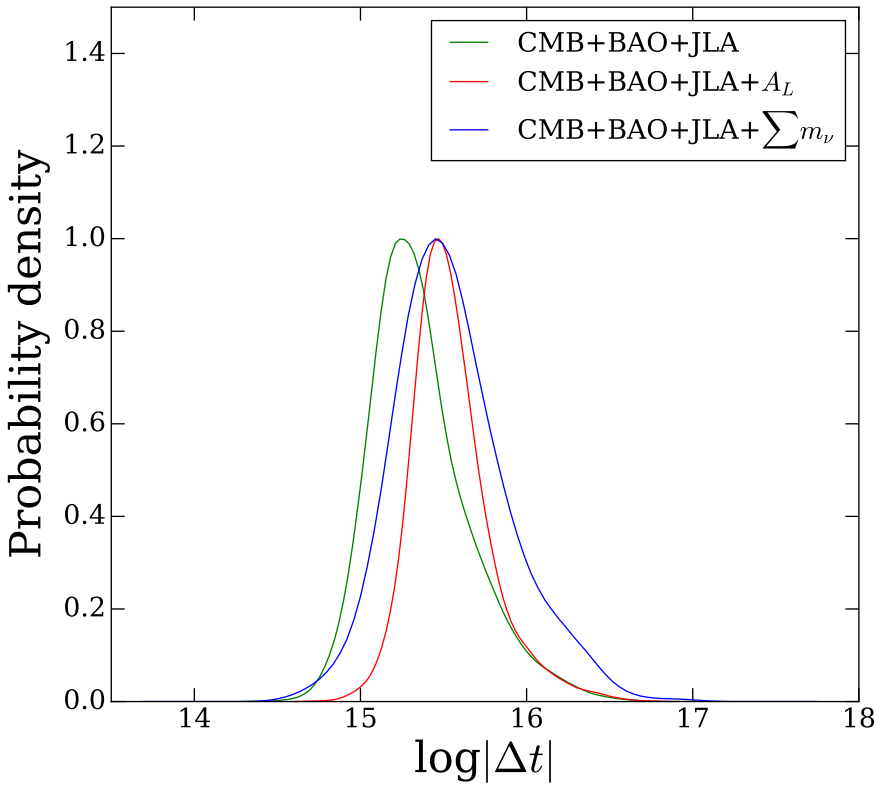

FIGURE 4.31 Prédiction du retard $\log|\Delta t|$ entre l'arrivée des ondes gravitationnelles et de la lumière émises par la fusion des deux étoiles à neutron du système binaire décrit dans la section 4.1.4 pour les scénarios retenus dans les chaînes de Markov des trois modèles de galileon complet étudiés dans la section précédente.

4.3.1 Tensions entre les différentes sondes

Nous avons observé deux tensions importantes dans les contraintes mises par les observations cosmologiques exposées précédemment sur les modèles de galileon. La première a déjà été en partie expliquée et concerne le paramètre de profondeur optique due à la réionisation τ. Seuls les observations du CMB dépendent de ce paramètre, et on peut constater sur la figure 4.32 que la contrainte très forte mise sur τ dans les modèles de galileon de base est imposée par les effets antagonistes des spectres de puissance de polarisation et de lensing. Cet effet est accentué vers les faibles valeurs de τ en ajoutant le BAO.

Comme nous l'avons évoqué précédemment, cette tendance du spectre de puissance du lensing à favoriser de faibles valeurs de τ provient du potentiel gravitationnel qui est plus important dans le cas du modèle du galileon que dans le modèle ΛCDM. De ce fait, le spectre de puissance du lensing est globalement plus élevé pour le modèle du galileon. Il est alors possible de diminuer A_s, et donc τ pour abaisser ce spectre de puissance et être en accord avec les observations. Ce raisonnement est totalement indépendant du modèle cosmologique

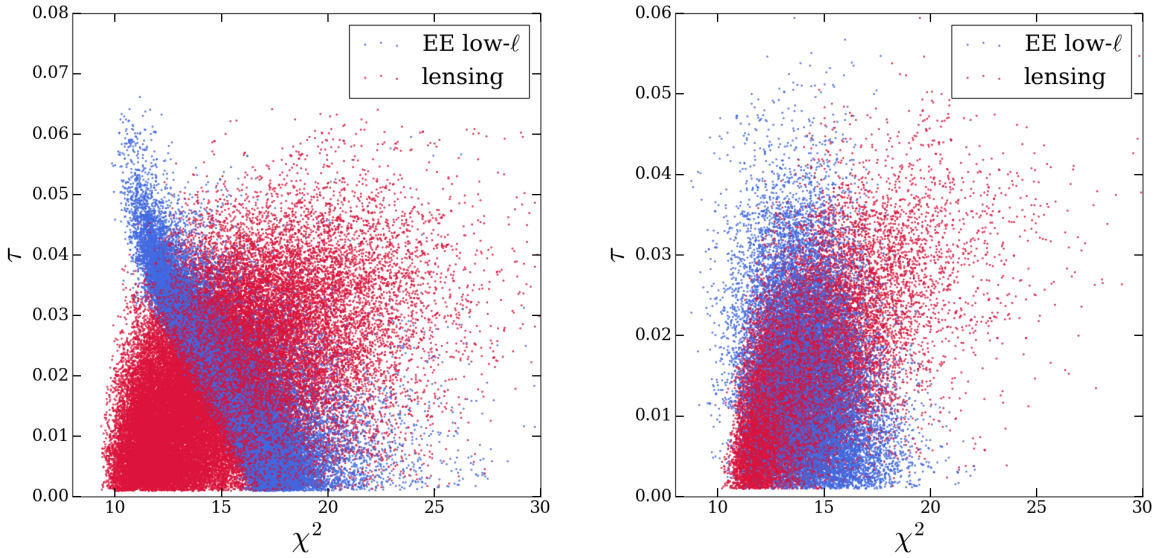

FIGURE 4.32 Nuage de points dans l'espace à deux dimensions (χ^2, τ) avec les χ^2 restreints au spectre du lensing et aux bas ℓ du spectre de polarisation. Chaque point correspond à un scénario retenu dans les chaînes de Markov lors de la confrontation des modèles de galileon complet (gauche) et galileon cubique (droite) aux données du CMB de Planck 2015 [23]. Le χ^2 correspondant aux bas ℓ de la polarisation a été décalé pour être du même ordre de grandeur que celui correspondant au spectre de lensing.

considéré. Ainsi, le spectre de puissance du lensing trace l'évolution du potentiel gravitationnel dans l'histoire de l'Univers. Celle-ci ne peut pas être trop différente de l'évolution dans le modèle ΛCDM, et en particulier le potentiel gravitationnel ne peut pas être beaucoup plus profond que dans le modèle ΛCDM. Si c'est le cas, comme dans le cas du modèle du galileon, alors naturellement le spectre de puissance du lensing favorisera de faibles valeurs de τ, et sera donc en tension vis à vis de la réionisation.

De même que ce qui a été décrit précédemment dans le cas du modèle du galileon, les modèles qui prédisent un potentiel gravitationnel profond doivent trouver un moyen de reproduire les observations du spectre de puissance du lensing sans trop diminuer τ, ce qui peut se faire par exemple au augmentant $\sum m_\nu$. En d'autres termes, on comprend que le spectre du lensing posera des contraintes vers des valeurs plus élevées de $\sum m_\nu$ que dans le modèle ΛCDM pour les modèles dans lesquels le potentiel gravitationnel est plus profond. On peut même aller jusqu'à se demander si la tendance à préférer une masse minimale pour les neutrinos dans le cadre du modèle ΛCDM ne vient pas justement du fait que l'amplitude du spectre de puissance du lensing est déjà relativement faible dans ce modèle.

La seconde tension par rapport aux données observée dans les modèles de galileon concerne les mesures d'échelles BAO. On rappelle que les mesures de BAO sont sensibles à $P = c/(H_0 r_d)$, et dépendent donc des paramètres $(\Omega_b h^2, \Omega_c h^2, 100\theta_{\rm MC})$ dans un modèle cosmologique donné. Ces trois paramètres sont en fait contraints avec une très bonne précision par la forme du

spectre de puissance en température du CMB. Les paramètres $\Omega_b h^2$ et $100\theta_{\rm MC}$ sont fixés par la position et l'amplitude du premier pic, alors que $\Omega_c h^2$ est donné par les amplitudes relatives des deuxième et troisième pics (une explication succinte est donnée dans le chapitre 5). Ces contraintes dépendent relativement peu du modèle et sont donc très robustes. Cependant, l'évolution de l'expansion de l'Univers qui intervient dans le calcul de θ_{MC} dépend, elle, du modèle :

$$\theta_{MC} = \frac{r_s}{D_A(z_*)} = \frac{\int_{z_*}^{+\infty} \frac{c_s}{H} dz}{\int_0^{z_*} \frac{1}{H} dz} \tag{4.30}$$

Si r_s ne dépend que de la physique d'avant la recombinaison, ce n'est pas le cas de D_A qui dépend du passé récent de l'Univers. Or, lorsque l'on cherche à contraindre les modèles d'énergie noire et de gravité modifiée, et en particulier le modèle du galileon, il est souvent supposé que l'évolution pré-recombinaison est inchangée par rapport au modèle ΛCDM, l'accélération de l'expansion de l'Univers n'étant manifeste que dans son passé récent. C'est en particulier ce que l'on fait dans cette étude, en vérifiant a posteriori que les meilleurs ajustements vérifient cette hypothèse. Dans ce cas, le paramètre $D_A(z_*)$, déterminé par l'évolution du taux d'expansion depuis la recombinaison et le redshift à la recombinaison z_* (lui-même déterminé par $\Omega_b h^2$ et $\Omega_c h^2$), est également très bien contraint. Cette évolution est donnée, dans le modèle du galileon par (3.76), qui détermine également les échelles BAO. Ainsi, il faut que l'histoire de l'expansion de l'Univers depuis la recombinaison, à z_*, soit à la fois compatible avec la contrainte forte apportée par le CMB à travers θ_{MC}, et les contraintes posées par les mesures de BAO à plus bas redshift. Cependant, si l'on compare les tables 4.2 et 4.4 pour chaque modèle de galileon, on observe que les régions de l'espace des paramètres favorisées par les données du CMB et les mesures de BAO ne sont pas du tout les mêmes, en particulier dans le secteur du galileon. Ceci est illustré dans la figure 4.33 pour le modèle de galileon complet et dans la figure 4.34 pour le modèle de cubique, dans lesquels sont présentés les contraintes sur les paramètres qui interviennent dans (3.76), en utilisant différents jeux de données.

On voit que, pour le modèle de galileon cubique, les contraintes sur Ω_m sont totalement incompatibles entre le CMB et les mesures de BAO. En fait, les mesures de BAO sont déjà en tension avec les observations des supernovae, qui prédisent une densité de matière Ω_m plus faible. De plus, la forte corrélation entre Ω_m et $\bar{c}_2$ pour l'évolution du fond cosmologique implique que les contraintes sur $\bar{c}_2$ sont également incompatibles entre les mesures de BAO et le CMB. Ces deux paramètres sont corrélés à la fois pour les mesures de BAO, du CMB et des observations de supernovae, mais de manière différente si bien qu'on observe également des tensions pour les contraintes sur $\bar{c}_2$ entre toutes les sondes. En ce qui concerne le modèle de galileon complet, les contraintes apportées sur les $\bar{c}_i$ par les mesures de BAO et les observations des supernovae sont en tension avec celles posées par le CMB, mais restent compatibles. Cependant, une incompatibilité entre ces sondes intervient lorsqu'on considère le paramètre Ω_m. En effet, même si les contraintes sur $\Omega_b h^2$ et $\Omega_c h^2$ sont compatibles d'après les tables 4.2 et 4.4, le CMB favorise

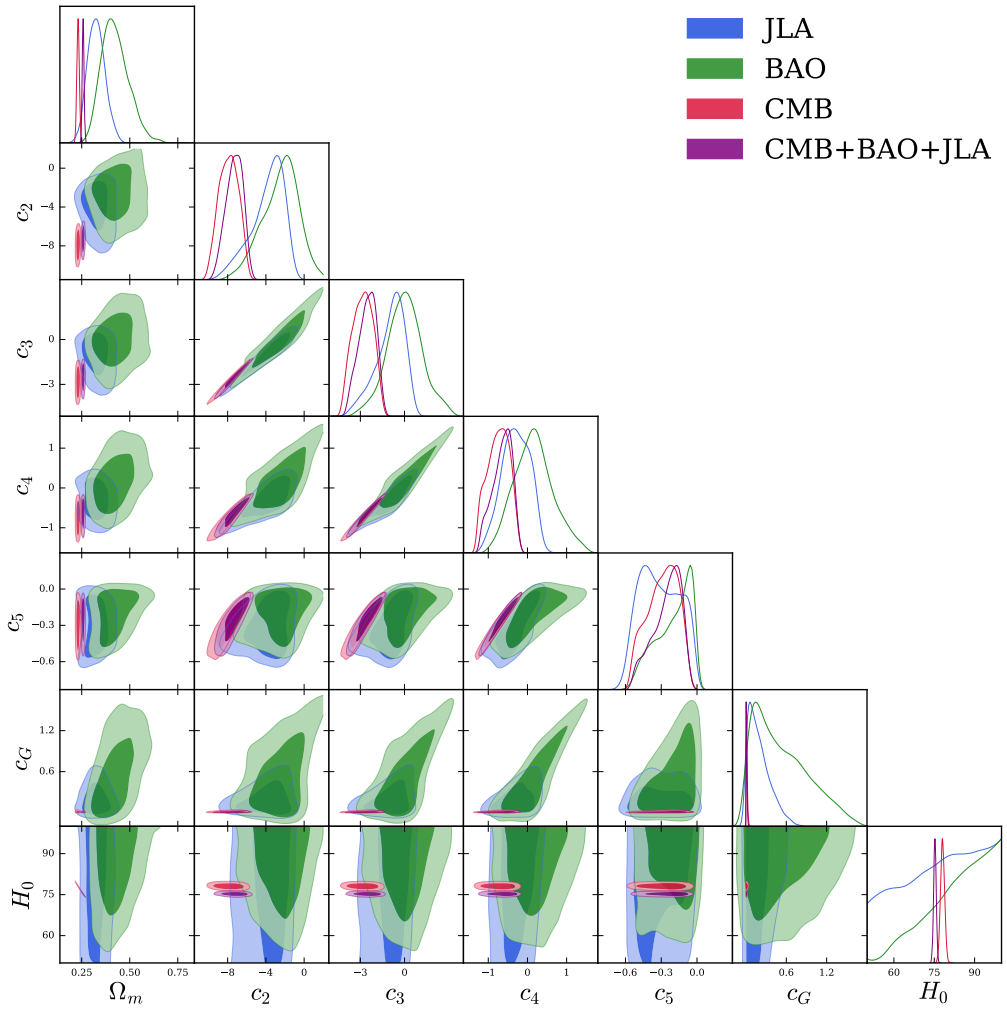

FIGURE 4.33 Contraintes marginalisées à une et deux dimensions pour les paramètres du modèle de galileon complet de base qui influencent l'évolution du fond cosmologique pour différents lots de données.

de plus faibles valeurs de Ω_m et de plus hautes valeurs de H_0, la dégénerescence entre Ω_m et H_0 étant levée grâce à θ_{MC}. Cela signifie que, à Ω_m donné et dans la région favorisée par le CMB en $\bar{c}_i$, $D_A(z_*)$ est trop petit pour être compatible avec les mesures de BAO.

Enfin, lorsqu'on étend les modèles de base aux paramètres A_L ou $\sum m_\nu$, la tension dans les modèles de galileon entre les mesures de BAO et les prédictions diminue légèrement. Cela vient de ce que l'introduction de ce nouveau degré de liberté permet de libérer légèrement les paramètres du galileon et Ω_m, autrement très fortement contraints par les perturbations dans le CMB, qui peuvent alors se rapprocher des valeurs favorisées par les mesures de BAO.

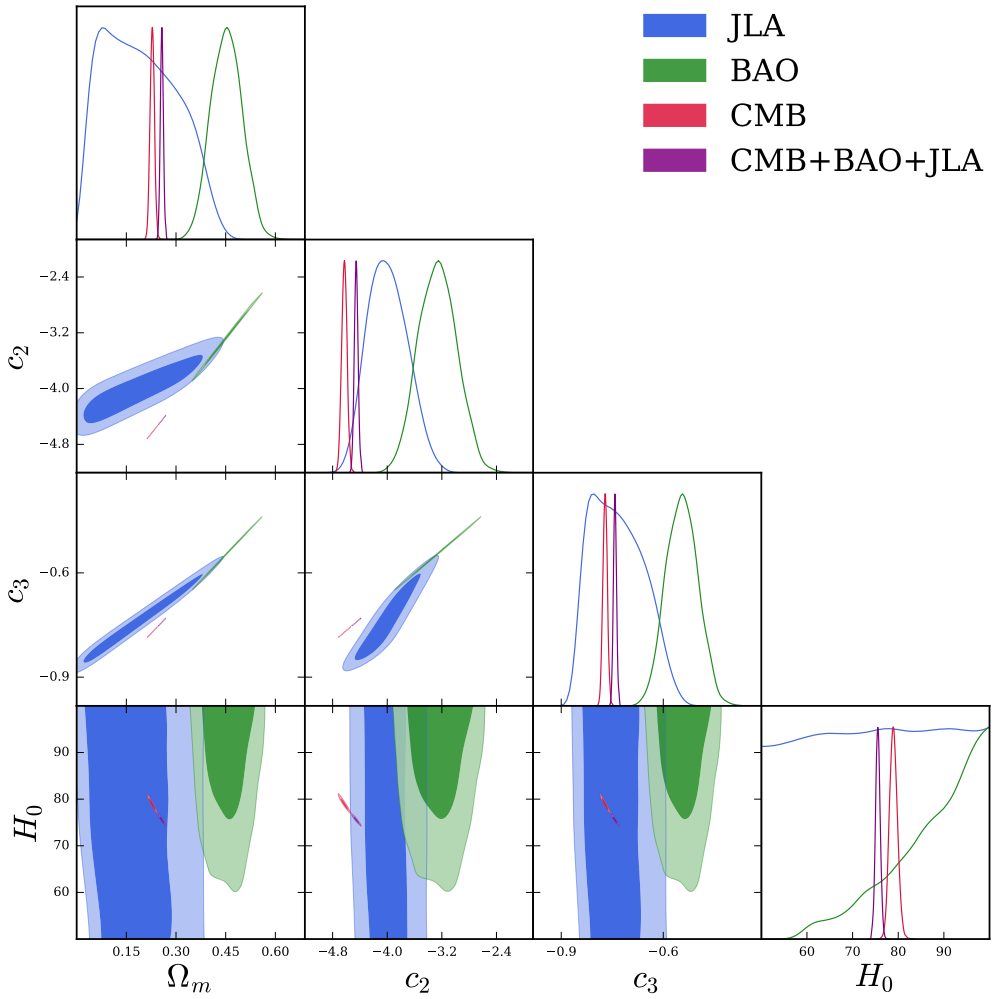

FIGURE 4.34 Contraintes marginalisées à une et deux dimensions pour les paramètres du modèle de galileon cubique de base qui influencent l'évolution du fond cosmologique pour différents lots de données.

4.3.2 Les solutions trackers

L'un des enjeux importants de l'étude que nous avons menée pour contraindre le modèle du galileon était de valider les études antérieures [48, 56], qui avait été faites sur un sous-espace de l'espace des paramètres, en explorant dans cette thèse l'intégralité de l'espace des paramètres. Les études antérieures s'étaient restreintes à l'ensemble des solutions dites de "tracker", qui sont des scénarios de galileon particuliers pour lesquels, tout au long de l'histoire de l'Univers :

$$\bar{H}^2\bar{x} = 1 \tag{4.31}$$

Il a été montré dans [57] que ces solutions constituent des attracteurs, dans le sens où l'évolution des univers galileon finit toujours par tendre vers l'évolution d'une solution tracker.

L'intérêt de se restreindre à ces solutions particulières est multiple. En effet, les solutions trackers sont caractérisées par la relation suivante sur les paramètres du galileon [39] :

$$\bar{c}_2 - 6\bar{c}_3 + 18\bar{c}_4 - 15\bar{c}_5 - 6\bar{c}_G = 0 \tag{4.32}$$

Cela permet de réduire l'espace des paramètres à explorer et apporte un gain considérable de temps de calcul. De plus, l'évolution du fond cosmologique des solutions trackers peut être déterminé analytiquement en utilisant la relation (4.31) dans l'équation de Friedmann (3.76) :

$$\begin{aligned}\bar{H}^2 = \frac{1}{2}\Bigg[&\frac{\Omega_m^0}{a^3} + \frac{\Omega_\gamma^0}{a^4} + \frac{\rho_\nu}{3M_P^2H_0^2} - 3\bar{c}_G \\ &+\sqrt{4\left(\Omega_\pi^0 + 3\bar{c}_G\right) + \left(3\bar{c}_G - \frac{\Omega_m^0}{a^3} - \frac{\Omega_\gamma^0}{a^4} - \frac{\rho_\nu}{3M_P^2H_0^2}\right)^2}\Bigg]\end{aligned} \tag{4.33}$$

La solution tracker correspondante à un scénario galileon donné, défini par l'évolution de $\bar{H}$ est obtenue en modifiant $\bar{c}_2$, $\bar{c}_3$ et $\bar{c}_4$ pour vérifier (4.32) tout en gardant la densité d'énergie du branon aujourd'hui Ω_π^0 (obtenue à partir de (3.71)) constante.

La restriction aux solutions trackers permet donc de s'affranchir de l'intégration numérique chronophage du fond cosmologique. De plus, il avait été argumenté dans [58] que les seuls scénarios de galileon qui s'ajustent de manière satisfaisante au spectre de puissance en température du CMB sont les scénarios qui s'approchent de leur solution tracker associée avant le début de la phase d'accélération de l'expansion, c'est-à-dire pour $a \lesssim 0.5$. Et, puisque le modèle du galileon ne modifie pas sensiblement la physique de l'Univers jeune, on ne perd rien à la généralité de l'étude en ne considérant que les solutions purement trackers. Nous voulions donc confirmer les résultats qui ont été obtenus en se restreignant aux solutions trackers en effectuant l'analyse complète, de peur que l'interprétation précédente ne prenne pas en compte des scénarios qui pourraient s'ajuster aussi bien que des solutions trackers sans en être à toutes les époques. L'ensemble de mes résultats sont globalement en accord avec les études effectuées sur le sous-ensemble des solutions trackers [48, 56].

Cependant, l'évolution de $\bar{H}^2\bar{x}$ des meilleurs ajustements des modèles de galileon complet et galileon cubique, présentées dans la figure 4.35, semble indiquer que nous avons eu raison d'étudier la totalité de l'espace des paramètres. En effet, si on considère qu'une solution générale a rejoint sa solution tracker associée lorsque $\bar{H}^2\bar{x} - 1 \lesssim 5$ %, alors les meilleurs ajustements pour le modèle de galileon complet étendus à A_L et $\sum m_\nu$ ne l'atteignent que pour $a \gtrsim 0.6$. Or, tous ces scénarios reproduisent correctement les spectres de puissance du CMB comme l'attestent leurs χ^2 (CMB) (voir tables 4.5, 4.6 et 4.7). Il semble naturel que, même si les solutions trackers doivent être atteintes suffisamment tôt par les modèles de galileon de base pour

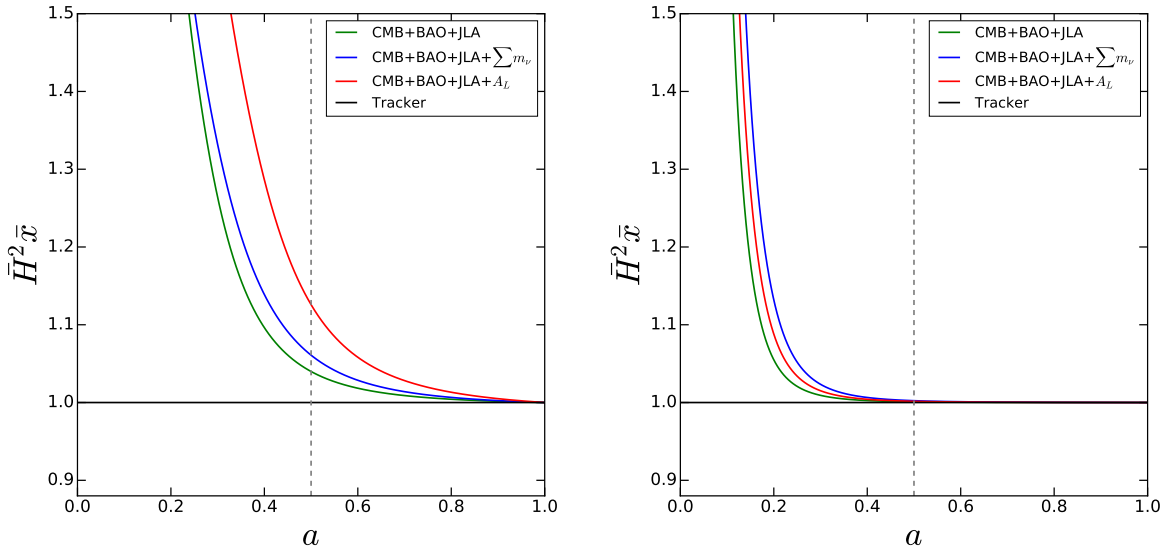

FIGURE 4.35 Évolution de $\bar{H}^2\bar{x}$ en fonction du facteur d'échelle pour les meilleurs ajustements des modèles de galileon complet (gauche) et de galileon cubique (droite). Les solutions tracker sont définies par $\bar{H}^2\bar{x} = 1$. Elles doivent être atteintes pour $a \lesssim 0.5$ pour reproduire correctement le spectre de puissance en température du CMB selon [58].

reproduire le spectre de température du CMB, la liberté introduite par les extensions permet de s'en approcher plus tardivement, et donc offre potentiellement une plus grande richesse de comportements.

4.3.3 Le statut du galileon

Nous avons vu dans la section 4.2.2 que les modèles de bases du galileon présentent une incompatibilité entre les contraintes mises par les sondes cosmologiques et celles mises par les observations astrophysique sur la réionisation. De plus, la confrontation aux trois sondes cosmologiques simultanément pose des contraintes sur les paramètres de ces modèles qui sont incompatibles avec les mesures de BAO effectuées. Il semble donc que les modèles de galileon de base soient totalement exclus à la fois par les observations cosmologiques, et par les contraintes dues à la réionisation. Cette conclusion est en accord avec les résultats précédemment obtenus [48].

Dans la section 4.2.3, nous avons montré que l'accord avec les données sur la réionisation pouvait être rétabli à condition d'étendre les modèles de base à des paramètres qui jouent sur la normalisation du spectre de puissance du lensing, tels que A_L ou la $\sum m_\nu$. Cependant, la tension existante avec les mesures de BAO persiste même dans ces cas là, bien que de moindre importance. Il faut donc déterminer dans quelle mesure l'ajustement des modèles de galileon aux mesures de BAO pose problème. Pour cela, il faudrait effectuer une analyse statistique rigoureuse afin de déterminer si des χ^2 (BAO) $\sim 16-18$ sont réalistes ou non. Cette étude plus

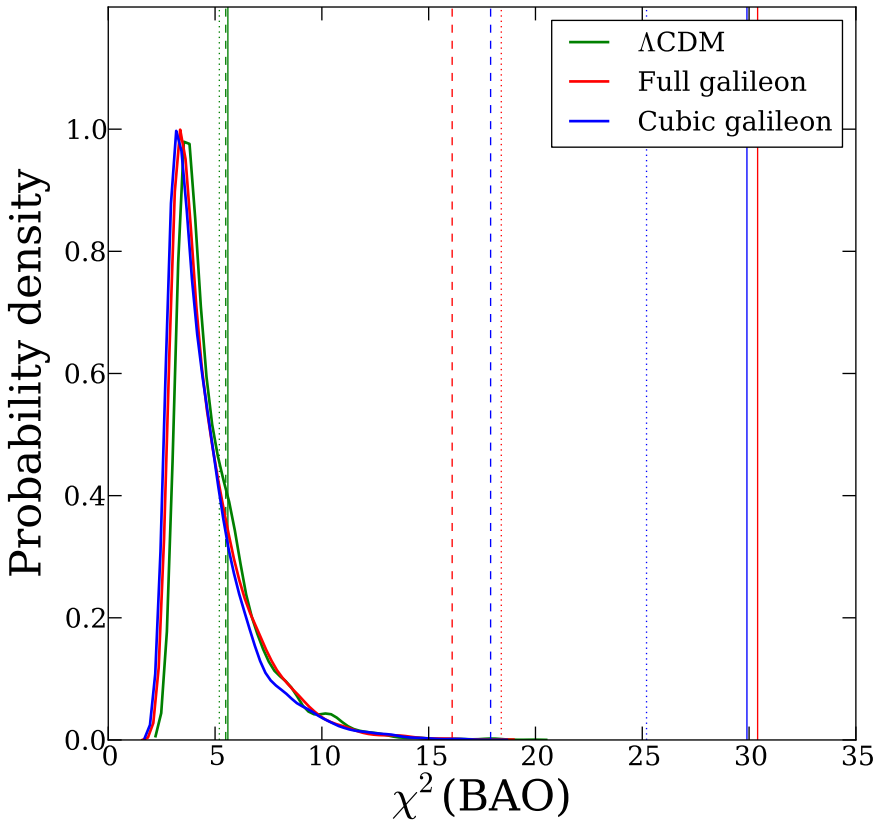

FIGURE 4.36 Distributions de χ^2 des points retenus dans les chaînes de Markov produites en comparant les modèles ΛCDM, galileon complet et galileon cubique aux mesures de BAO seulement. Les χ^2 des meilleurs ajustements de ces trois modèles aux trois sondes cosmologiques sont représentés en traits pleins pour les modèles de base, en pointillés pour l'extension à A_L et en tirets pour l'extension à $\sum m_\nu$.

poussée dépasse le cadre de cette thèse, mais on peut déjà avoir une idée du résultat grâce à la figure 4.36 qui présente les distributions de χ^2 (BAO) pour les scénarios au sein des chaînes obtenues lors de l'ajustement des modèles de base aux mesures de BAO uniquement.

Si l'ajustement était correct, les χ^2 (BAO) des ajustements à toutes les sondes devraient être proches du maximum de ces distributions. Or, on voit que c'est effectivement le cas pour le modèle ΛCDM, mais pas du tout pour les modèles de galileon. Avec cette approche peu rigoureuse, même les χ^2 (BAO) pour les modèles de galileon étendus, qui sont pourtant les plus bas, sont exclus à 3.3σ pour le modèle de galileon complet étendu à A_L, à 3.7σ pour le modèle de galileon complet étendu à $\sum m_\nu$ et à 4.7σ pour le modèle de galileon cubique étendu à $\sum m_\nu$. Une fois encore, il faudrait effectuer une analyse statistique plus rigoureuse pour quantifier la tension introduite dans les modèles de galileon par les mesures de BAO, néanmoins l'incompatibilité entre les modèles de galileon étendus et les mesures de BAO semble claire, notamment pour le modèle de galileon cubique.

Enfin, l'observation d'ondes gravitationnelles avec contrepartie électromagnétique simultanée (ou presque) viennent enfoncer le clou dans le cas du modèle de galileon complet, pour lequel l'écart entre les prédictions et l'observation de Δt est tout simplement insurmontable.

Bibliographie

[1] K. Nomoto, F. K. Thielemann, and K. Yokoi. Accreting white dwarf models of Type I supernovae. 3. Carbon deflagration supernovae. *Astrophys. J.*, 286 :644, 1984.

[2] Ken'ichi Nomoto, Yasuomi Kamiya, and Naohito Nakasato. Type Ia Supernova Models and Progenitor Scenarios. *IAU Symp.*, 281 :253–260, 2013.

[3] Subrahmanyan Chandrasekhar. The maximum mass of ideal white dwarfs. *Astrophys. J.*, 74 :81–82, 1931.

[4] C. Balland et al. The ESO's VLT type Ia supernova spectral set of the final two years of SNLS. *Astron. Astrophys.*, 614 :A134, 2018.

[5] Daniel Kasen and S. E. Woosley. On the Origin of the Type Ia Supernova Width-Luminosity Relation. *Astrophys. J.*, 656 :661–665, 2007.

[6] SNLS Collaboration. The Supernova legacy survey : Measurement of omega(m), omega(lambda) and W from the first year data set. *Astron. Astrophys.*, 447 :31–48, 2006.

[7] M. Betoule et al. Improved cosmological constraints from a joint analysis of the SDSS-II and SNLS supernova samples. *Astron. Astrophys.*, 568 :A22, 2014.

[8] Joshua A. Frieman et al. The Sloan Digital Sky Survey-II Supernova Survey : Technical Summary. *Astron. J.*, 135 :338–347, 2008.

[9] Heather Campbell et al. Cosmology with Photometrically-Classified Type Ia Supernovae from the SDSS-II Supernova Survey. *Astrophys. J.*, 763 :88, 2013.

[10] SNLS Collaboration. The Supernova Legacy Survey 3-year sample : Type Ia Supernovae photometric distances and cosmological constraints. *Astron. Astrophys.*, 523 :A7, 2010.

[11] Malcolm Hicken et al. CfA3 : 185 Type Ia Supernova Light Curves from the CfA. *Astrophys. J.*, 700 :331–357, 2009.

[12] Adam G. Riess et al. New Hubble Space Telescope Discoveries of Type Ia Supernovae at z>=1 : Narrowing Constraints on the Early Behavior of Dark Energy. *Astrophys. J.*, 659 :98–121, 2007.

[13] J. Mosher et al. Cosmological Parameter Uncertainties from SALT-II Type Ia Supernova Light Curve Models. *Astrophys. J.*, 793 :16, 2014.

[14] Florian Beutler et al. The 6dF Galaxy Survey : Baryon Acoustic Oscillations and the Local Hubble Constant. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 416 :3017–3032, 2011.

[15] C. Alcock and B. Paczynski. An evolution free test for non-zero cosmological constant. *Nature*, 281 :358–359, 1979.

[16] Ashley J. Ross, Lado Samushia, Cullan Howlett, Will J. Percival, Angela Burden, and Marc Manera. The clustering of the SDSS DR7 main Galaxy sample – I. A 4 per cent distance measure at $z = 0.15$. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 449(1) :835–847, 2015.

[17] BOSS Collaboration. The clustering of galaxies in the completed SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey : cosmological analysis of the DR12 galaxy sample. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 470(3) :2617–2652, 2017.

[18] BOSS Collaboration. Baryon acoustic oscillations in the Lyα forest of BOSS DR11 quasars. *Astron. Astrophys.*, 574 :A59, 2015.

[19] BOSS Collaboration. Quasar-Lyman α Forest Cross-Correlation from BOSS DR11 : Baryon Acoustic Oscillations. *JCAP*, 1405 :027, 2014.

[20] Jean-Philippe Uzan and Patrick Peter. *Cosmologie Primordiale*. Belin, 2012.

[21] Antony Lewis and Anthony Challinor. Weak gravitational lensing of the CMB. *Phys. Rept.*, 429 :1–65, 2006.

[22] Planck Collaboration. Planck 2015 results. I. Overview of products and scientific results. *Astron. Astrophys.*, 594 :A1, 2016.

[23] Planck Collaboration. Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters. *Astron. Astrophys.*, 594 :A13, 2016.

[24] B. P. Abbott et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Phys. Rev. Lett.*, 116(6) :061102, 2016.

[25] B. P. Abbott et al. GW170814 : A Three-Detector Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Coalescence. *Phys. Rev. Lett.*, 119(14) :141101, 2017.

[26] B. P. Abbott et al. Multi-messenger Observations of a Binary Neutron Star Merger. *Astrophys. J.*, 848(2) :L12, 2017.

[27] B. P. Abbott et al. Gravitational Waves and Gamma-rays from a Binary Neutron Star Merger : GW170817 and GRB 170817A. *Astrophys. J.*, 848(2) :L13, 2017.

[28] B. P. Abbott et al. GW170817 : Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral. *Phys. Rev. Lett.*, 119(16) :161101, 2017.

[29] Stefano Valenti et al. The discovery of the electromagnetic counterpart of GW170817 : kilonova AT 2017gfo/DLT17ck. *Astrophys. J.*, 848(2) :L24, 2017.

[30] Riccardo Ciolfi and Daniel M. Siegel. Short gamma-ray bursts in the "time-reversal" scenario. *Astrophys. J.*, 798(2) :L36, 2015.

[31] Luciano Rezzolla and Pawan Kumar. A novel paradigm for short gamma-ray bursts with extended X-ray emission. *Astrophys. J.*, 802 :95, 2015.

[32] David Tsang, Jocelyn S. Read, Tanja Hinderer, Anthony L. Piro, and Ruxandra Bondarescu. Resonant Shattering of Neutron Star Crusts. *Phys. Rev. Lett.*, 108 :011102, 2012.

[33] E. T. Jaynes. *Probability Theory : The Logic of Science*. Cambridge University Press, 2003.

[34] T. Bayes. LII. An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. By the late Rev. Mr. Bayes, F. R. S. communicated by Mr. Price, in a letter to John Canton, A. M. F. R. S. 53 :370–418, 1763.

[35] Petros Dellaportas and Roberts. An introduction to MCMC. 173, 01 2003.

[36] Andrei Markov. Extension of the Limit Theorems of Probability Theory to a Sum of Variables Connected in a Chain. In R. A. Howard, editor, *Dynamic Probabilistic Systems (Volume I : Markov Models)*, chapter Appendix B, pages 552–577. John Wiley & Sons, Inc., 1971.

[37] Nicholas Metropolis et al. Equation of State Calculations by Fast Computing Machines. *J. Chem. Phys.*, 21 :1087–1092, June 1953.

[38] W. K. Hastings. Monte Carlo Sampling Methods Using Markov Chains and Their Applications. *Biometrika*, 57 :97–109, 1970.

[39] J. Neveu et al. Constraining the ΛCDM and Galileon models with recent cosmological data. *Astron. Astrophys.*, 600 :A40, 2017.

[40] Andrew Gelman and Donald B. Rubin. Inference from Iterative Simulation Using Multiple Sequences. *Statist. Sci.*, 7 :457–472, 1992.

[41] Wayne Hu and Naoshi Sugiyama. Anisotropies in the cosmic microwave background : An Analytic approach. *Astrophys. J.*, 444 :489–506, 1995.

[42] Adam G. Riess et al. A 3% Solution : Determination of the Hubble Constant with the Hubble Space Telescope and Wide Field Camera 3. *Astrophys. J.*, 730 :119, 2011. [Erratum : Astrophys. J.732,129(2011)].

[43] Adam G. Riess et al. A 2.4% Determination of the Local Value of the Hubble Constant. *Astrophys. J.*, 826(1) :56, 2016.

[44] Planck Collaboration. Planck 2013 results. XVII. Gravitational lensing by large-scale structure. *Astron. Astrophys.*, 571 :A17, 2014.

[45] SDSS Collaboration. Evidence for reionization at Z 6 : Detection of a Gunn-Peterson trough in a Z = 6.28 quasar. *Astron. J.*, 122 :2850, 2001.

[46] Xiao-Hui Fan et al. Constraining the evolution of the ionizing background and the epoch of reionization with z 6 quasars. 2. a sample of 19 quasars. *Astron. J.*, 132 :117–136, 2006.

[47] Éric Aubourg et al. Cosmological implications of baryon acoustic oscillation measurements. *Phys. Rev.*, D92(12) :123516, 2015.

[48] Alexandre Barreira, Baojiu Li, Carlton Baugh, and Silvia Pascoli. The observational status of Galileon gravity after Planck. *JCAP*, 1408 :059, 2014.

[49] Takaaki Kajita. Atmospheric neutrino results from Super-Kamiokande and Kamiokande : Evidence for neutrino(mu) oscillations. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 77 :123–132, 1999. [,123(1998)].

[50] M. Maltoni, T. Schwetz, M. A. Tortola, and J. W. F. Valle. Status of global fits to neutrino oscillations. *New J. Phys.*, 6 :122, 2004.

[51] G. L. Fogli, E. Lisi, A. Marrone, and A. Palazzo. Global analysis of three-flavor neutrino masses and mixings. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, 57 :742–795, 2006.

[52] Ch. Kraus et al. Final results from phase II of the Mainz neutrino mass search in tritium beta decay. *Eur. Phys. J.*, C40 :447–468, 2005.

[53] V. N. Aseev et al. An upper limit on electron antineutrino mass from Troitsk experiment. *Phys. Rev.*, D84 :112003, 2011.

[54] Julien Lesgourgues and Sergio Pastor. Neutrino mass from Cosmology. *Adv. High Energy Phys.*, 2012 :608515, 2012.

[55] Jose María Ezquiaga and Miguel Zumalacárregui. Dark Energy After GW170817 : Dead Ends and the Road Ahead. *Phys. Rev. Lett.*, 119(25) :251304, 2017.

[56] Janina Renk, Miguel Zumalacárregui, Francesco Montanari, and Alexandre Barreira. Galileon gravity in light of ISW, CMB, BAO and H_0 data. *JCAP*, 1710(10) :020, 2017.

[57] Antonio De Felice and Shinji Tsujikawa. Generalized Galileon cosmology. *Phys. Rev.*, D84 :124029, 2011.

[58] Alexandre Barreira, Baojiu Li, Ariel Sanchez, Carlton M. Baugh, and Silvia Pascoli. Parameter space in Galileon gravity models. *Phys. Rev.*, D87 :103511, 2013.

Chapitre 5

Le modèle du branon

Sommaire

5.1 Le problème de la matière noire 184

5.1.1 Indices d'existence de la matière noire 184

5.1.2 Les caractéristiques de la matière noire 191

5.1.3 Les WIMPs 193

5.2 Les théories à dimensions supplémentaires 199

5.2.1 Les théories de Kaluza-Klein 199

5.2.2 Des dimensions supplémentaires universelles aux univers branaires . . 205

5.2.3 Le modèle ADD et les KK-gravitons 206

5.3 Le modèle du branon 209

5.3.1 Brisure spontanée de symétrie 209

5.3.2 Construction de l'action du branon 213

5.3.3 État de la recherche en 2015 220

Bibliographie 222

Nous avons vu au chapitre 1 que le modèle standard de la cosmologie nécessite l'ajout de la constante cosmologique, mais aussi de la matière noire. Or, si le modèle standard de la physique des particules ambitionne de décrire le contenu matériel de l'Univers, la matière noire devrait y être décrite, ce qui n'est aujourd'hui pas le cas. Bien que son existence soit désormais très bien attestée par les observations astrophysiques et cosmologiques, le mystère de la nature de la matière noire qui sera exposé en détail dans la section 5.1, n'a pas encore été élucidé. De nombreux modèles prédisant l'existence de candidats ont été imaginés et ces candidats recherchés, dont les plus nombreux font partie de la catégorie des WIMPs (pour Weakly Interactive Massive Particles). Ces modèles sont donc des extensions du modèle standard de la physique des particules, et à ce titre sont basés sur les mêmes principes de symétrie ainsi que sur la théorie quantique des champs. On a ainsi par exemple l'introduction d'une symétrie entre bosons

et fermions dans le cadre de la supersymétrie [1], ou bien une brisure de la symétrie chirale dans le cas des modèles d'axions [2].

Le modèle du branon, que nous allons étudier dans la suite de cette thèse, fournit de manière élégante une solution au problème de la matière noire, sous la forme d'un champ scalaire massif. Il s'inscrit dans le cadre plus général et très riche des théories à dimensions supplémentaires, dont quelques exemples seront détaillés en section 5.2, qui offrent une grande variété d'autres candidats à la matière noire. La construction du modèle du branon à partir du principe de brisure spontanée de symétries d'espace-temps sera expliquée en détails dans la section 5.3.

5.1 Le problème de la matière noire

Si l'idée de l'existence d'une matière qui interagit gravitationnellement sans émettre de lumière avait été évoquée dès 1933 sur la base des observations astrophysiques menées par Fred Zwicky [3], elle s'est véritablement imposée à la communauté scientifique à partir des années 1970, et n'a cessé d'être de plus en plus convaincante depuis. Nous allons ici exposer ce que nous savons à l'heure actuelle de la matière noire, ainsi que les canaux de recherche de cette dernière les plus prometteurs.

5.1.1 Indices d'existence de la matière noire

Bien que la nature de la matière noire soit toujours incomprise, l'hypothèse de son existence repose sur plusieurs observations astrophysiques et cosmologiques, que nous allons présenter ici, dont la combinaison est difficile à reproduire lorsque l'on cherche d'autres explications.

Les courbes de rotation des galaxies

L'idée de la matière noire a historiquement été introduite suite à l'étude des courbes de rotation de nombreuses galaxies et amas de galaxies. Pour bien comprendre ce qu'est une courbe de rotation, on va commencer par se placer dans le système solaire.

Dans le système solaire, plus de 99% de la masse se situe dans le Soleil, on peut donc négliger les interactions entre planètes et considérer que chacune d'elles est un point matériel en interaction gravitationnelle avec le Soleil. Dans ce cas, la mécanique newtonienne nous indique que la vitesse des planètes dans le référentiel héliocentrique est donnée par :

$$v\left(r\right) = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_{\odot}}{r}} \tag{5.1}$$

où $\mathcal{G}$ est la constante de gravitation, $M_\odot$ la masse du soleil et r la distance au Soleil. On peut voir sur la courbe de rotation du système solaire présentée en figure 5.1 que les mesures de vitesses moyennes pour les planètes du système solaire sont tout à fait en accord avec ce modèle simple.

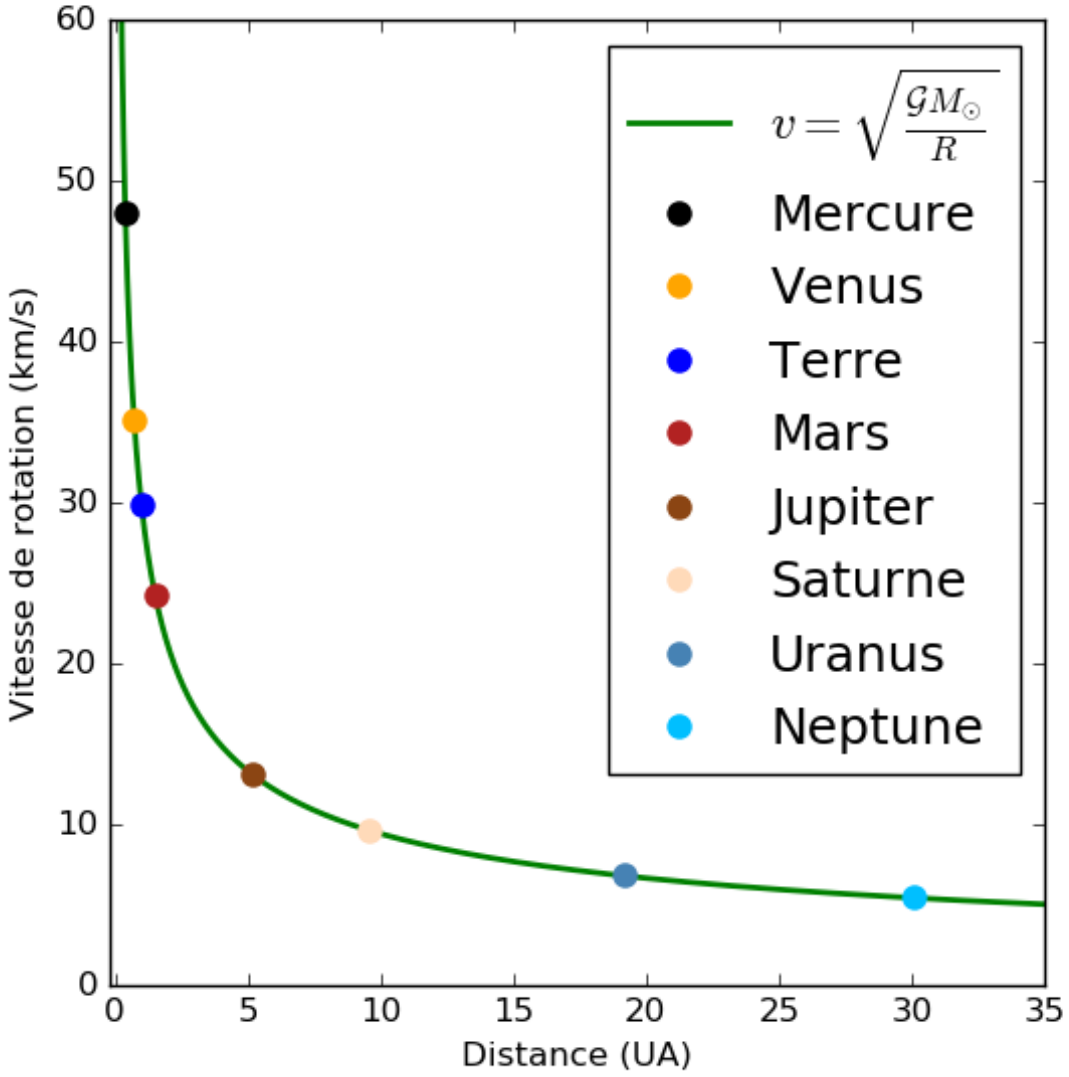

FIGURE 5.1 Courbe de rotation du système solaire. Les distances des planètes au Soleil sont données en Unités Astronomiques, 1 UA = 149597870700 m. Les vitesses moyennes de rotation des planètes autour du Soleil sont calculées à partir des mesures de [4].

La situation pour une galaxie est a priori la même, mis à part le fait que l'on ne peut plus considérer que les étoiles sont attirées par un objet central ponctuel, puisque la distribution de masse d'une galaxie est beaucoup plus diffuse que celle du système solaire. Pour simplifier le problème, on va supposer que la distribution de matière dans la galaxie est à symétrie sphérique, ce qui n'est pas très réaliste car les étoiles et le gaz se situent principalement dans le plan galactique, mais permet d'obtenir des résultats qualitatifs. Dans cette approximation, le

théorème de Gauss nous indique que seule la masse $M_{in}(r)$ contenue à l'intérieur de l'orbite de l'étoile participe à la force gravitationnelle qui s'exerce sur elle :

$$F_g(r) = -\mathcal{G}\frac{M_{in}(r)}{r^2}, \qquad \text{avec} \quad M_{in} = 2\pi \int_0^r \sigma\left(r'\right) r' dr' \tag{5.2}$$

où σ est le profil de masse au sein de la galaxie que l'on suppose ne dépendre que de la distance au centre galactique. Pour un profil de masse homogène, de masse volumique ρ_0, la vitesse de rotation est donnée par :

$$v(r) = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_{in}}{r}} = \sqrt{\frac{4\pi\mathcal{G}\rho_0}{3}}r \tag{5.3}$$

Ces approximations ne sont pas très réalistes, mais permettent de comprendre qualitativement à quoi devrait ressembler la courbe de rotation d'une galaxie en suivant la théorie newtonienne de la gravitation. Proche du centre où la densité d'étoiles et de gaz est importante, la vitesse augmente en fonction de r. Puis, lorsqu'on s'éloigne du centre de la galaxie, la densité d'étoiles et de gaz chute et on retrouve un comportement similaire au système solaire, avec la vitesse qui diminue comme une loi de puissance en fonction de r.

Or, comme l'ont constaté pour la première fois Vera Rubin et Kent Ford dans les années 70 [5, 6] en observant des nuages de gaz d'Hydrogène neutres à différentes distances du centre de plusieurs galaxies, les mesures de courbes de rotation de galaxies sont en fait très différentes. En effet, comme on peut le voir sur la figure 5.2, la vitesse de rotation des étoiles à grande distance du centre galactique est beaucoup plus élevée qu'attendu et atteint un plateau.

Comme nous l'avons vu précédemment, les courbes de rotations dépendent du profil de masse des galaxies. Tout se passe comme si la distribution de masse contribuant au potentiel gravitationnel de la galaxie ne correspondait pas à celle des étoiles et des nuages de gaz visibles. En d'autres termes, comme s'il existait des objets massifs invisibles au sein des galaxies, ce qui mena les auteurs à reprendre l'idée de matière noire. Celle-ci serait répartie en halos sphériques autour des galaxies et des amas de galaxies. On peut par exemple penser que les objets massifs invisibles qui correspondent à la masse manquante dans les galaxies sont des objets compacts difficiles à détecter composés de matière ordinaire, comme des naines brunes, des étoiles à neutron ou encore des trous noirs. De tels objets compacts sont appelés des MACHOs (pour Massive Astrophysical Compact Halo Objects) dans la littérature, et constituent donc des candidats à la matière noire.

Une autre explication possible ne nécessitant pas l'introduction d'un fluide de matière inconnue serait que les lois de la gravitation utilisées pour faire les calculs précédents sont faux, et en particulier que la loi universelle de la gravitation énoncée par Newton ne soit en fait plus valide à la périphérie des galaxies. Cette approche est celle de la théorie MOND (pour MOdified Newtonian Dynamics) développée par Mordehai Milgrom en 1983 [7] dans laquelle la

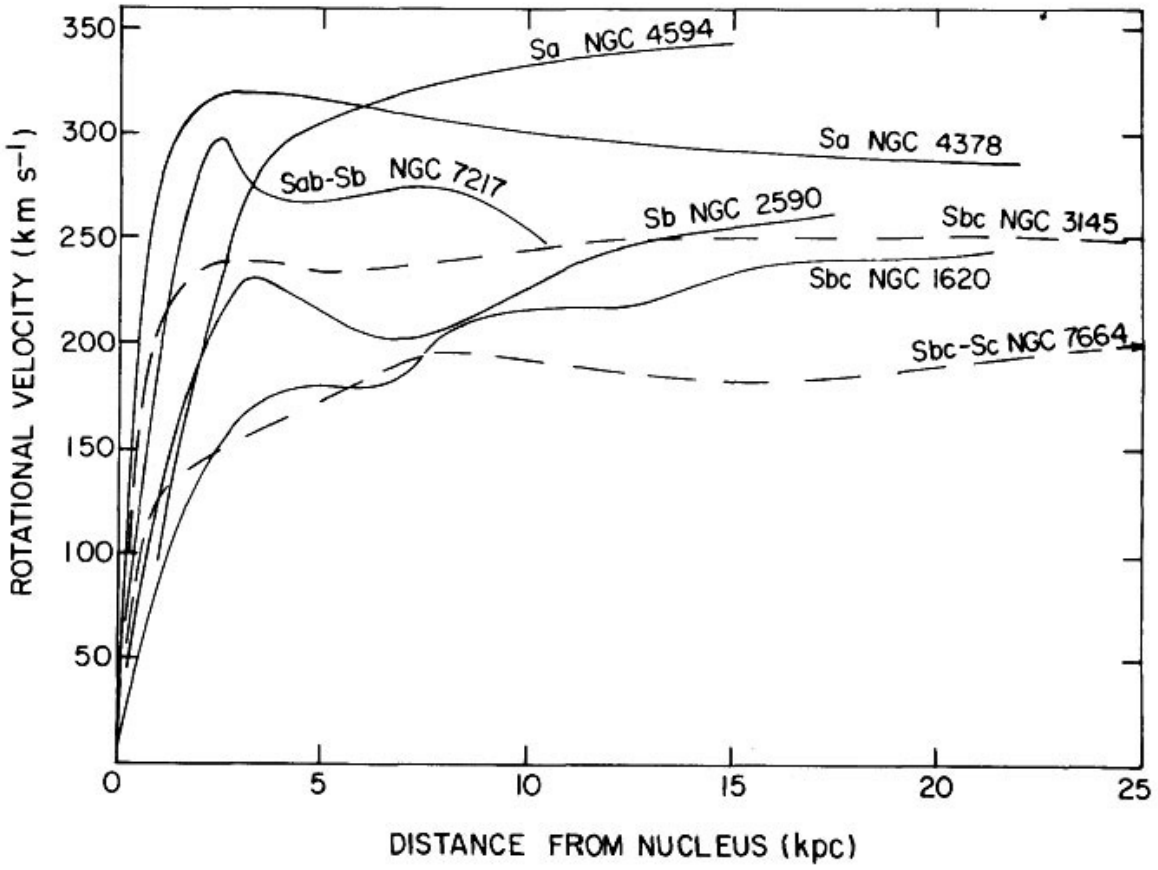

FIGURE 5.2 Courbes de rotation de plusieurs galaxies tirées de [6]. La distance au centre galactique est donnée en kilo parsecs, 1 pc $= 3.085677581 \times 10^{16}$ m.

deuxième loi de Newton est remplacée par :

$$\vec{F} = m\mu\left(x\right)\vec{a} \tag{5.4}$$

avec μ une fonction de la variable $x = \frac{a}{a_0}$ qui caractérise la modification par rapport à la dynamique newtonienne, qui vaut 1 pour les accélérations élevées $a \gg a_0$, de sorte à retrouver le Principe Fondamental de la Dynamique, et x pour $a \ll a_0$.

L'amas du Boulet

L'amas du Boulet est le résultat d'une collision de deux amas de galaxies situés à un redshift d'environ $z \sim 0.296$. Les observations de cette collision apportent des indices forts en faveur de l'existence de la matière noire [8]. En effet, lors de la collision des deux amas, il n'y a que très peu de collisions entre les étoiles des galaxies du fait de leur faible densité. L'influence de la collision entre les amas sur les étoiles n'est qu'un ralentissement par effet gravitationnel. Elles

se retrouvent donc en périphérie du nouvel amas. Au contraire, les nuages de gaz chaud contenus dans les amas, qui constituent l'essentiel de leur masse visible, subissent de nombreuses collisions ce qui a pour effet de les ralentir plus rapidement par dissipation d'énergie. Le gaz chaud aura alors tendance à s'accumuler au centre du nouvel amas. Ainsi, lors de la collision entre amas, on a une séparation entre les objets qui subissent peu de chocs, et le gaz chaud.

La distribution de masse peut être mesurée en utilisant l'effet de lentille gravitationnelle sur les objets d'arrière plan (voir figure 5.3). Pour des théories sans matière noire, ce sont les lois de la gravitation qui sont modifiées, donc l'effet de lentille gravitationnelle devrait suivre la distribution de masse visible. Or, les observations nous indiquent que l'effet de lentille gravitationnelle est plus important en périphérie. Mais l'essentiel de la masse visible correspond au gaz situé au centre du nouvel amas. Donc l'effet de lentille gravitationnelle ne peut être attribué à la matière visible. Cela indique une fois de plus l'existence de matière qui n'émet pas de lumière mais qui interagit gravitationnellement, tout en ayant subi peu de chocs lors de la collision entre amas, c'est-à-dire qui interagit faiblement voire pas du tout par toute autre interaction.

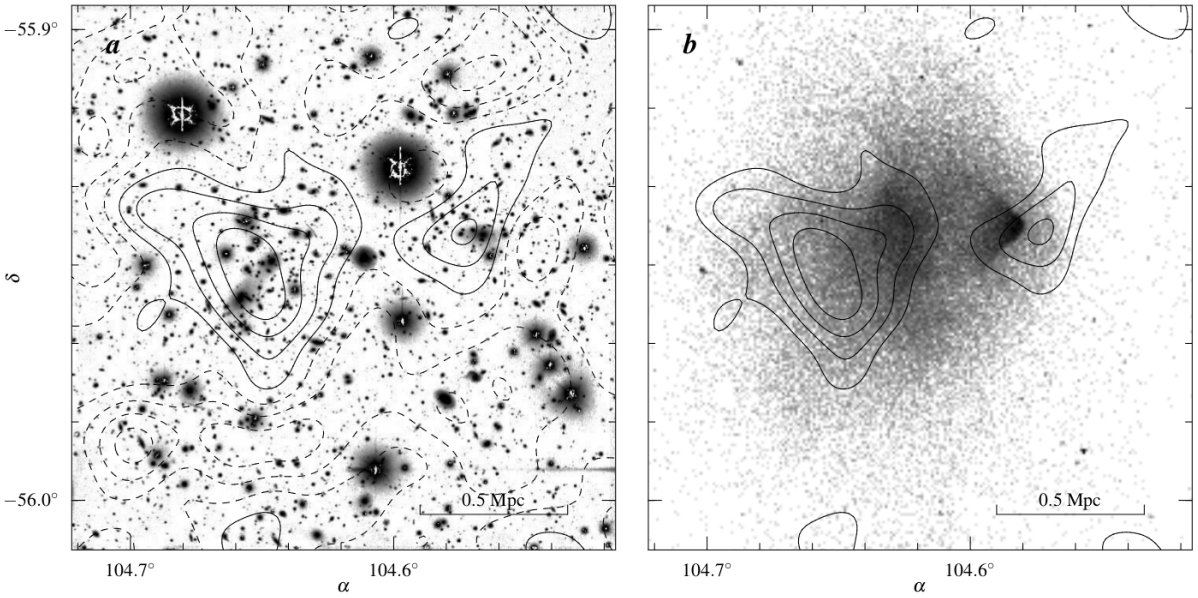

FIGURE 5.3 (a) Contours de masse de l'amas du Boulet obtenu à partir de l'effet de lentille gravitationnelle superposé à l'image obtenue dans le spectre visible, c'est-à-dire correspondant aux étoiles des galaxies.(b) Contours de masse superposé à l'image obtenue dans les rayons X, c'est-à-dire correspondant aux nuages de gaz chaud. Les figures sont tirées de [8].

Ainsi, les théories privilégiant l'option de modifier les lois de la gravité plutôt que d'introduire la matière noire semblent être défavorisées par les observations de l'amas du Boulet et les observations obtenues ultérieurement avec d'autres collisions d'amas de galaxies (voir par exemple [9]). Au contraire, l'hypothèse de MACHOs comme constituants de la matinee noire,

objets compacts et donc faiblement denses dans les amas de galaxies, est tout à fait en accords avec ces observations.

Le fond diffus cosmologique

Le dernier indice majeur en faveur de l'existence de la matière noire nous vient de la cosmologie et plus particulièrement du spectre de puissance angulaire des anisotropies de température du CMB. Pour comprendre l'effet de la matière noire sur ce spectre de puissance, il faut comprendre l'effet du fluide de baryons en interaction avec les photons. Nous avons vu dans le chapitre 2 que cet effet intervient aux échelles intermédiaires, c'est-à-dire dans la région des pics acoustiques du spectre de puissance. À ces échelles, on peut faire l'hypothèse de couplage fort entre les baryons et les photons, ce qui implique que le contraste de densité des photons est donné par (2.79). De plus, comme la recombinaison se fait pendant l'ère de matière, on peut négliger la variation temporelle des potentiels gravitationnels. On va de plus supposer que le rapport baryons-photons $R = \frac{3}{4}\frac{\rho_b}{\rho_\gamma}$ est constant, par souci de simplification et sachant que les résultats qualitatifs restent valides, mais en toute rigueur il faudrait prendre en compte ces variations. Enfin, nous allons nous concentrer sur le cas d'un univers avec des conditions initiales adiabatiques puisque, nous l'avons vu dans le chapitre 2, l'étude du CMB a montré que notre Univers semblait être dans ce cas [10]. On peut alors écrire le champ de température $\Theta_{SW} = \frac{1}{4}\delta_\gamma^N + \Phi$:

$$\Theta_{SW} = [\Theta_{SW}(0) + R\Phi]\cos(kc_s\tau) - R\Phi \tag{5.5}$$

où c_s est la vitesse du son dans le plasma de baryons et de photons. On a bien ici un comportement oscillatoire, mais on constate que la valeur moyenne $-R\Phi$ est décalée par rapport à 0. Ainsi, plus la densité de baryons est élevée, plus R est élevé mais également plus Φ est élevé, ce qui a deux effets. Tout d'abord, cela va introduire une asymétrie entre les pics pairs et impairs. L'amplitude relative des pics impairs par rapport aux pics pairs sera augmentée [11]. Par ailleurs, l'augmentation de la quantité de baryons augmente globalement l'amplitude des oscillations. Ces caractéristiques peuvent se voir directement sur les spectres de puissance présentés en figure 5.4.

Or, si toute la matière n'est constituée que de matière ordinaire, c'est-à-dire de baryons, sa densité est fixée par la position du premier pic (voir (2.103)) et par son amplitude. Cependant, on constate dans ce cas qu'il n'est pas possible de reproduire la hauteur des deuxième et troisième pics que l'on observe dans les données du satellite Planck [12]. Si, maintenant, on ajoute de la matière noire qui n'interagit pas avec les photons, c'est la densité de matière totale qui est fixée par la position du premier pic. On a un degré de liberté supplémentaire qui permet d'augmenter Φ sans augmenter R et ainsi jouer sur l'amplitude relative des pics comme vu

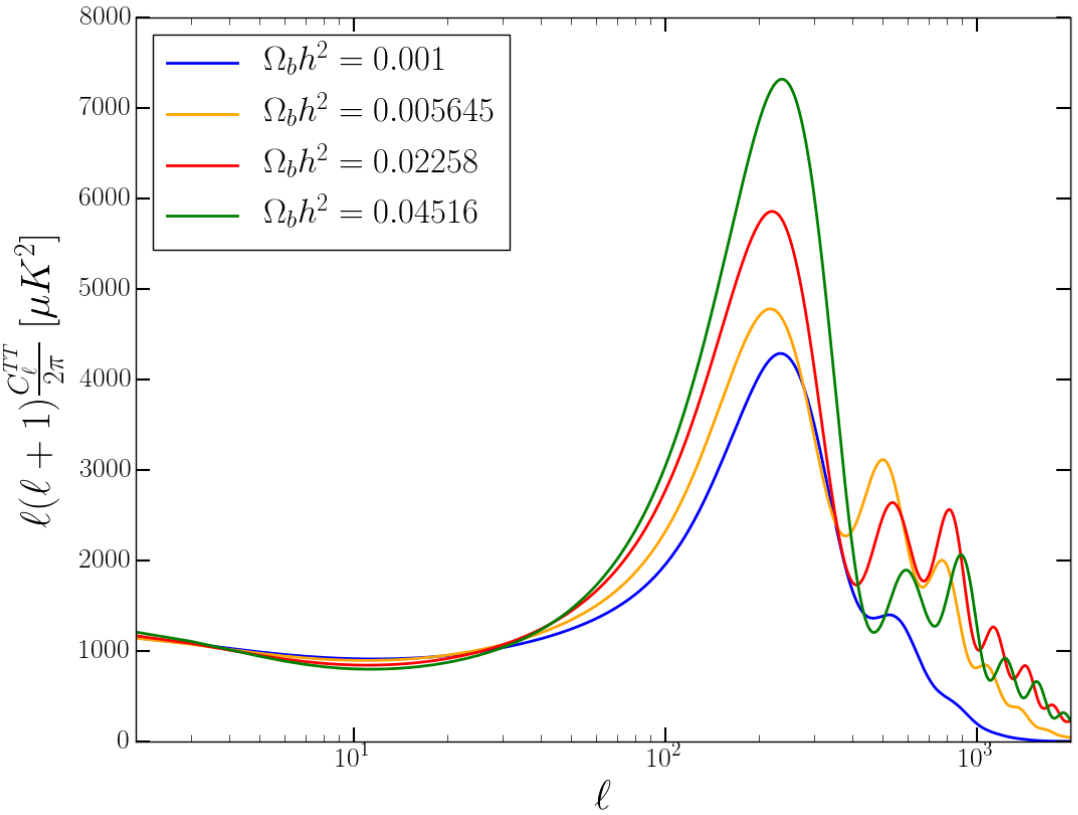

FIGURE 5.4 Spectres de puissance angulaire des anisotropies de température du CMB dans le modèle ΛCDM pour différentes valeurs du paramètre de densité de baryons $\Omega_b h^2$ obtenus à partir de CAMB. Pour extraire au mieux l'influence spécifique des baryons, la densité de matière totale $\Omega_m h^2$, qui détermine notamment la position du premier pic, est fixée à la valeur de [12] pour tous les scénarios, ce qui est possible en jouant sur la densité de matière noire $\Omega_c h^2$. Les autres paramètres sont fixés aux valeurs du meilleur ajustement tiré de [12].

précédemment. La combinaison des effets de la matière baryonique et de la matière noire permet ainsi de reproduire l'intégralité du spectre de puissance des anisotropies en température du CMB.

Notons qu'il est difficile pour les théories qui modifient les lois de la gravitation plutôt que d'introduire de la matière noire de reproduire l'amplitude des pics du CMB [13]. En effet, le raisonnement précédent nous indique que pour reproduire la forme du spectre de puissance en température, il faut que l'on ait des sources créant des puits de potentiel gravitationnel suffisamment profonds sans altérer l'équilibre du plasma de baryons et de photons. De plus, les MACHOs sont des objets compacts formés de matière baryonique, et ont donc besoin de temps pour apparaître en nombre significatif dans l'Univers, à l'exception des trous noirs primordiaux. En conséquence, à l'époque de la recombinaison, ils n'existaient pas encore, et la densité d'énergie de la matière noire sous forme de MACHOs était nulle. Ce type de candidats

à la matière noire semble donc également défavorisés par les observations du fond diffus cosmologique, encore une fois à l'exception des trous noirs primordiaux qu'il faut étudier plus en détail.

5.1.2 Les caractéristiques de la matière noire

Maintenant que nous avons vu les différentes observations qui indiquent l'existence d'un fluide de matière invisible interagissant de manière gravitationnelle que l'on appelle la matière noire, voyons quelles informations générales nous pouvons tirer de ces observations concernant les caractéristiques de cette matière noire.

Les halos de matière noire

Nous avons vu dans la section précédente, que les courbes de rotation des galaxies deviennent plates à grande distance du centre galactique. Cela indique la présence d'un halo de matière noire tel que $M_{in} \sim r$ loin du centre galactique d'après (5.3) et sachant que $v \sim$ cste. On peut supposer que la matière noire suit une distribution à symétrie sphérique, car la matière noire n'interagit a priori pas ou peu avec elle-même et ne dissipe donc pas son énergie, contrairement aux baryons qui peuvent s'effondrer pour former un disque galactique. Dans ce cas, la densité de la matière noire évolue comme $\rho_{DM} = \frac{M_{in}}{r^3} \sim \frac{1}{r^2}$. On peut alors déduire des courbes de rotation la masse totale du halo de matière noire ainsi que sa densité locale. Pour la Voie Lactée, on a $M_{\text{halo}} \sim 10^{12} M_\odot$ et $\rho_0 \sim 0.008\ \text{M}_\odot\text{pc}^{-3}$ [14]. En utilisant ces informations, on peut obtenir une estimation grossière de la taille du halo, en ordre de grandeur :

$$M_{\text{halo}} = 4\pi^2 \int_0^{R_{\text{halo}}} \rho\left(r\right) r^2 dr \quad \Rightarrow \quad R_{\text{halo}} \sim 100\text{kpc} \tag{5.6}$$

Grâce au théorème du viriel selon lequel $2E_c + E_p = 0$ dans un système en équilibre dynamique, où E_c est l'énergie cinétique du système et E_p son énergie potentielle, on peut déterminer la vitesse moyenne au sein du halo de matière noire :

$$\langle v \rangle \sim \sqrt{\frac{\mathcal{G} M_{\text{halo}}}{R_{\text{halo}}}} \sim 200\text{km/s} \tag{5.7}$$

Les estimations faites ici sont très grossières et peuvent être raffinées par une meilleur connaissance de la distribution de masse de matière noire au sein des halos, accessible par exemple par l'effet de lentille gravitationnelle, ainsi que de la relation qui la lie à la distribution de vitesse.

Mais nous allons voir qu'elles sont suffisantes pour obtenir des résultats généraux, et indépendants de toute supposition quant au modèle en question, concernant certaines propriétés de la matière noire.

La matière noire en physique des particules

Nous avons vu dans la section 5.1.1 qu'il était difficile de reproduire toutes les observations astrophysiques et cosmologiques sans introduire de matière noire. De plus, cette matière ne semble pas être composée de MACHOs (du moins pas en totalité, voir par exemple [15] au sujet des trous-noirs primordiaux), et donc être constituée de matière non-baryonique, dont la nature nous échappe à l'heure actuelle. Néanmoins, forts du succès du modèle standard de la physique des particules, c'est sous la forme d'un nouveau type de particule que nous allons chercher la matière noire. Si la matière noire correspond en fait à une nouvelle particule, que l'on notera χ, ce que l'on peut tirer des informations dont on dispose concernant les halos va dépendre de sa nature bosonique ou fermionique.

Si la particule de matière noire est un boson, par exemple un champ scalaire, celle-ci suit une statistique de Bose-Einstein :

$$f(p) = \frac{1}{\exp\left[\left(E - \mu_\chi\right)/T_\chi\right] - 1} \tag{5.8}$$

où T_χ est la température du fluide de matière noire, μ_χ son potentiel chimique et l'énergie est donnée par $E^2 = p^2 + m^2$. Ainsi, rien ne s'oppose à ce que la matière noire s'accumule dans un même point de l'espace des phases, pour former un condensat. L'ensemble des particules du halo devient alors cohérent et se comporte comme une seule macro-particule à laquelle on peut appliquer le principe d'indétermination de Heisenberg $\Delta x \Delta p \sim 1$, avec $\Delta p \sim m_\chi v$ et $\Delta x \sim 2R_{\text{halo}}$. À partir des informations précédemment obtenues sur le halo de matière noire de la Voie Lactée, on obtient :

$$m_\chi \gtrsim 10^{-25}\text{eV} \quad \text{(bosons)} \tag{5.9}$$

Cette borne inférieur est très grossière et peut être améliorée, en utilisant par exemple les contraintes provenant des halos de matière noire autour de galaxies naines [16], pour obtenir $m_\chi \gtrsim 10^{-22}$ eV. Cependant, étant donnée la faible précision dans l'estimation des caractéristiques des halos, on peut se contenter de la limite plus conservative $m_\chi \gtrsim 10^{-25}$eV.

Si la particule de matière noire est un fermion, la situation est drastiquement différente du fait du principe d'exclusion de Pauli. En effet, les particules ne peuvent alors plus se retrouver dans le même état quantique, elles ne suivent plus une statistique de Bose-Einstein mais une

statistique de Fermi-Dirac :

$$f(p) = \frac{1}{\exp\left[\left(E - \mu_\chi\right)/T_\chi\right] + 1} \tag{5.10}$$

La masse du halo est alors donnée par :

$$M_{\text{halo}} = m_\chi V_{\text{halo}} \int f(p)\, d^3p \tag{5.11}$$

Or, comme au plus un fermion peut occuper chaque élément de volume de l'espace des phases, ce qui se traduit par $f(p) \leq 1$, on a l'inégalité suivante :

$$M_{\text{halo}} \leq m_\chi V_{\text{halo}} \int d^3p \sim m_\chi \left(\frac{4}{3}\pi R_{\text{halo}}^3\right)(m_\chi v)^3 \tag{5.12}$$

Si l'on utilise les contraintes provenant de la Voie Lactée, on obtient la limite inférieure sur la masse de la matière noire fermionique :

$$m_\chi \gtrsim 10 \text{ eV} \quad \text{(fermions)} \tag{5.13}$$

De même que pour le cas des bosons, cette contrainte peut être améliorée en utilisant par exemple les contraintes provenant de galaxies naines [17, 18], pour obtenir $m_\chi \gtrsim 0.1$ keV.

Pour les bosons comme pour les fermions, on ne dispose pas de contraintes générales et indépendantes des modèles permettant de mettre une borne supérieure sur la masse de la particule de matière noire autre que la masse de Planck.

5.1.3 Les WIMPs

Dans la section précédente, nous avons pu mettre des limites sur la masse de la particule de matière noire en fonction de sa nature bosonique ou fermionique. Ces contraintes sont les plus générales possibles, car elles ne supposent rien sur la nature même de la particule de matière noire. Nous allons maintenant voir quelles hypothèses raisonnables nous pouvons faire sur cette dernière, ainsi que les conséquences importantes sur le type de particules qui font de bons candidats pour la matière noire.

Tout d'abord, on peut se convaincre du fait que les particules candidates pour la matière noire que l'on peut étudier sont celles qui interagissent au moins faiblement avec les particules du modèle standard, même s'il est envisageable que la matière noire n'interagisse que via la gravitation. Le second cas diminuerait drastiquement l'espoir d'en apprendre plus sur la nature de la matière noire. Ainsi, si les particules de matière noire interagissent avec les particules du

modèle standard, alors il est raisonnable de penser que la matière noire était à l'équilibre thermique avec celles-ci dans les premiers instants de l'Univers, via par exemple les interactions $2 \to 2$ données en figure 5.5.

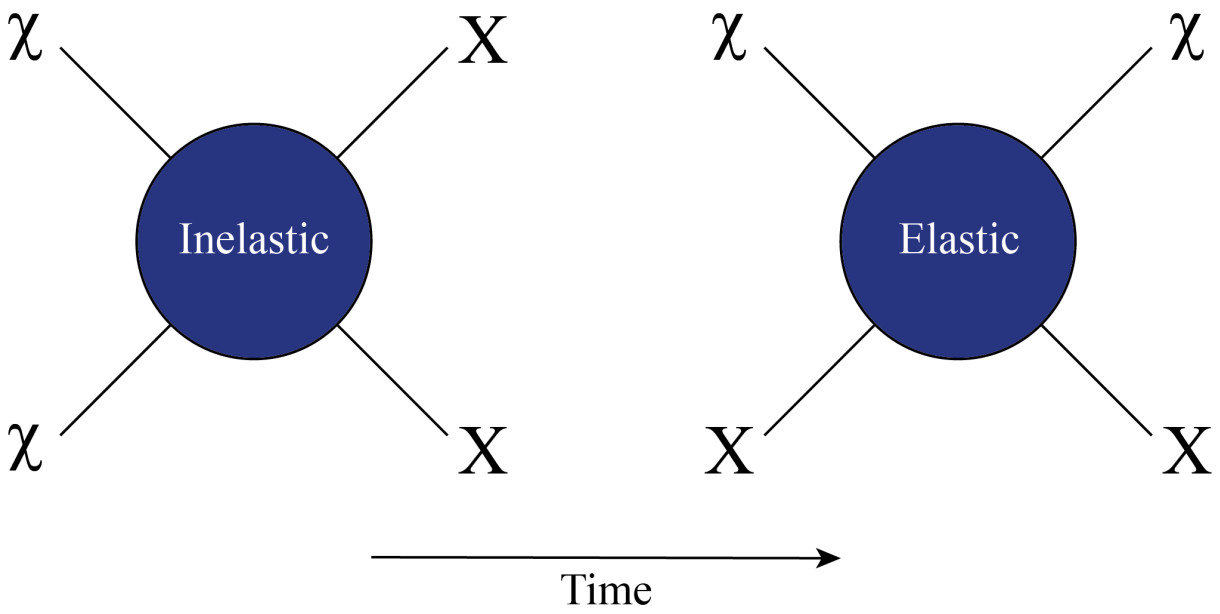

FIGURE 5.5 Illustration des processus de diffusion élastique et inélastique d'une particule de matière noire χ sur une particule du modèle standard X. Ces réactions sont celles qui dictent l'équilibre thermique et cinétique du fluide de matière noire avec la matière baryonique et la radiation.

Dans ce cas, tant que l'interaction $\chi\chi \longleftrightarrow XX$ est à l'équilibre, où X est une particule du modèle standard, des particules de matière noire sont à l'équilibre thermodynamique et sont donc constamment produites et annihilées. Or, si l'on est à l'équilibre thermodynamique, $T_\chi = T$ (température du bain de photons) et la densité de particules s'écrit :

$$n_\chi = g_\chi \int f(p) \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \tag{5.14}$$

où g_χ est le nombre de degrés de liberté de spin de la particule de matière noire et f est donnée par (5.8) ou (5.10). Dans ce cas, l'évolution de la densité de matière dépend de son caractère relativiste ou non :

$$n_\chi \propto T^3 \quad \text{(relativiste)} \qquad \text{ou} \qquad n_\chi \propto T^{3/2} e^{-m_\chi/T} \quad \text{(non-relativiste)} \tag{5.15}$$

Ainsi, si la matière noire reste à l'équilibre thermodynamique durant toute l'histoire de l'Univers, sa densité aujourd'hui sera complètement négligeable et sera incompatible avec les observations détaillées dans la section 5.1.1. Cependant, l'expansion de l'Univers rend plus difficile pour deux particules de matière noire de se retrouver pour s'annihiler et la réaction

$\chi\chi \longleftrightarrow XX$ s'arrête, ce qui gèle la densité de matière noire. L'arrêt de cette réaction s'effectue lorsque le taux d'annihilation Γ est de l'ordre du taux de Hubble :

$$\Gamma = n_\chi \langle \sigma v \rangle \sim H \tag{5.16}$$

Si la réaction s'interrompt alors que la matière noire est relativiste, on parle de matière noire chaude (HDM pour Hot Dark Matter). Si elle s'interrompt lorsque la matière noire n'est plus relativiste, on parle de matière noire froide (CDM pour Cold Dark Matter). Or, le passage de l'état totalement relativiste à totalement non-relativiste n'est pas immédiat, donc si l'interruption a lieu au cours de cette transition, on parle de matière noire tiède (WDM pour Warm Dark Matter). Les observations cosmologiques indiquent que la matière noire serait plutôt froide [19]. Pour calculer la densité relique de matière noire, c'est-à-dire sa densité restante aujourd'hui, il faut s'intéresser plus en détail à la réaction de production et d'annihilation de matière noire.

Évolution de la diffusion inélastique

Pour étudier l'évolution de la fonction de distribution de matière noire au cours de la réaction $\chi\chi \longleftrightarrow XX$, il faut utiliser l'équation de Boltzmann comme nous l'avions fait au cours du chapitre 2. On rappelle que cette équation est donnée par :

$$\mathcal{L}[f] = C[f] \tag{5.17}$$

avec $\mathcal{L}$ l'opérateur de Liouville et C le terme de collision. Heureusement, ici, on ne s'intéresse pas aux perturbations, mais seulement au cas d'un univers homogène et isotrope. La fonction de distribution ne dépend donc que du temps (on prendra ici le temps physique et non pas le temps conforme) et de l'énergie. Cependant, les particules de matière noire sont massives, contrairement aux photons étudiés dans la partie (2.2.4). Si l'on effectue les modifications nécessaires à partir de (2.130), et sans prendre en compte les perturbations, l'opérateur de Liouville s'écrit :

$$\mathcal{L}[f] = \frac{\partial f}{\partial t} - H\frac{p^2}{E}\frac{\partial f}{\partial E} \tag{5.18}$$

À partir de la définition de n_χ, et en effectuant une intégration par partie du deuxième terme de l'opérateur de Liouville, on obtient l'équation de Boltzmann pour la densité de matière noire :

$$\dot{n}_\chi + 3Hn_\chi = \mathcal{C}_\chi, \qquad \text{avec} \quad \mathcal{C}_\chi = g_\chi \int C[f]\,\frac{d^3p}{(2\pi)^3} \tag{5.19}$$

Il nous reste maintenant à évaluer le terme de collision. Pour une réaction de la forme $\chi_1(p_1)\chi_2(p_2) \longleftrightarrow X_1(k_1)X_2(k_2)$, ce terme est donné par :

$$\mathcal{C}_\chi = -\int \left[f_{\chi_1} f_{\chi_2} (1 \pm f_{X_1})(1 \pm f_{X_2}) |\mathcal{M}_{\chi\chi\to XX}|^2 - f_{X_1} f_{X_2} (1 \pm f_{\chi_1})(1 \pm f_{\chi_2}) |\mathcal{M}_{XX\to\chi\chi}|^2 \right] \times \frac{g_{\chi_1} d^3\vec{p}_1}{(2\pi)^3 2E_{\chi_1}} \frac{g_{\chi_2} d^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_{\chi_2}} \frac{g_{X_1} d^3\vec{k}_1}{(2\pi)^3 2E_{X_1}} \frac{g_{X_2} d^3\vec{k}_2}{(2\pi)^3 2E_{X_2}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \tag{5.20}$$

où les f_i sont les fonctions de distribution des différentes particules, les g_i leurs nombres de degrés de liberté de spin et $\mathcal{M}_{ij\to kl}$ sont les éléments de matrice des réactions correspondantes. Les termes de la forme $(1 \pm f)$ dépendent de la nature de la particule en question. On a le signe moins s'il s'agit d'un fermion, ce qui représente le fait qu'il est plus difficile pour un fermion de passer dans un état déjà occupé. S'il s'agit d'un boson, c'est l'effet inverse et on a le signe plus. En l'état, le terme de collision est trop compliqué pour être utilisé, et il est nécessaire de faire des hypothèses supplémentaires pour le simplifier :

1. On suppose que la symétrie CP est vérifiée par cette interaction. La réaction de diffusion inélastique de la matière noire est alors réversible et $|\mathcal{M}_{XX\to\chi\chi}|^2 = |\mathcal{M}_{\chi\chi\to XX}|^2 = |\mathcal{M}|^2$
2. On suppose que $E - \mu \gg T$ pour toutes les espèces en cause. Dans ce cas et étant donné le point précédent, les fonctions de distributions deviennent des distributions de Maxwell-Boltzmann de la forme $f \propto \exp[(\mu - E)/T]$, et on peut négliger les effets quantiques $1 \pm f \simeq 1$

On peut alors écrire le terme de collision comme :

$$\mathcal{C}_\chi = \frac{g_{\chi_1} g_{\chi_2} g_{X_1} g_{X_2}}{(2\pi)^8} \int \frac{d^3\vec{p}_1}{2E_{\chi_1}} \frac{d^3\vec{p}_2}{2E_{\chi_2}} \frac{d^3\vec{k}_1}{2E_{X_1}} \frac{d^3\vec{k}_2}{2E_{X_2}} \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) |\mathcal{M}|^2 (f_{X_1} f_{X_2} - f_{\chi_1} f_{\chi_2}) \tag{5.21}$$

De plus, d'après le second point, on peut exprimer la densité de particules en fonction de celle à potentiel chimique nul, soit celle que l'on aurait si l'espèce restait à l'équilibre thermodynamique tout au long de l'histoire de l'Univers [20] :

$$n_i = e^{\mu_i/T} n_i(\mu_i = 0) \equiv e^{\mu_i/T} \bar{n}_i \tag{5.22}$$

Or, la conservation de l'énergie impose que $E_{\chi_1} + E_{\chi_2} = E_{X_1} + E_{X_2}$, et on peut écrire :

$$\begin{aligned} f_{X_1} f_{X_2} - f_{\chi_1} f_{\chi_2} &= e^{-(E_{X_1}+E_{X_2})/T} \left[e^{(\mu_{X_1}+\mu_{X_2})/T} - e^{2\mu_\chi/T} \right] \\ &= e^{-(E_{X_1}+E_{X_2})/T} \left(\frac{n_{X_1} n_{X_2}}{\bar{n}_{X_1} \bar{n}_{X_1}} - \left(\frac{n_\chi}{\bar{n}_\chi} \right)^2 \right) \end{aligned} \tag{5.23}$$

On écrit alors l'équation de Boltzmann sous la forme suivante :

$$\dot{n}_\chi + 3Hn_\chi = -\langle\sigma v\rangle \left(n_\chi^2 - \frac{\bar{n}_\chi^2}{\bar{n}_{X_1}\bar{n}_{X_2}} n_{X_1} n_{X_2} \right) \tag{5.24}$$

où on a définit de manière standard la section efficace moyennée sur les vitesses :

$$\bar{n}_\chi^2 \langle\sigma v\rangle \equiv \int \frac{d^3\vec{p}_1}{2E_{\chi_1}} \frac{d^3\vec{p}_2}{2E_{\chi_2}} \frac{d^3\vec{k}_1}{2E_{X_1}} \frac{d^3\vec{k}_2}{2E_{X_2}} \delta^{(4)}\left(p_1 + p_2 - k_1 - k_2\right) |\mathcal{M}|^2 \frac{e^{-\left(E_{\chi_1}+E_{\chi_2}\right)/T}}{(2\pi)^8} \tag{5.25}$$

Le gel de l'interaction et le "miracle" des WIMPs

Lorsque $n_\chi\langle\sigma v\rangle \gg H$, l'équation (5.24) ne peut être satisfaite que si le système est à l'équilibre thermodynamique, c'est-à-dire si :

$$\frac{n_\chi^2}{\bar{n}_\chi^2} = \frac{n_{X_1} n_{X_2}}{\bar{n}_{X_1}\bar{n}_{X_2}} \Leftrightarrow 2\mu_\chi = \mu_{X_1} + \mu_{X_2} \tag{5.26}$$

Avec l'expansion de l'Univers arrive un temps où la réaction s'interrompt, la matière noire se découple de la matière baryonique, et l'égalité précédente n'est plus vérifiée. À l'inverse, X_1 et X_2 sont toujours à l'équilibre thermodynamique avec la matière baryonique et on peut négliger leur potentiel chimique. L'équation de Boltzmann devient alors :

$$\dot{n}_\chi + 3Hn_\chi = -\langle\sigma v\rangle \left(n_\chi^2 - \bar{n}_\chi^2 \right) \tag{5.27}$$

Il est intéressant d'effectuer le changement de fonction inconnue $Y_\chi = n_\chi/s$, où s est la densité d'entropie de l'Univers. Or, on peut montrer [20] que sa^3 est une quantité qui se conserve, ce qui implique que $\dot{n}_\chi + 3Hn_\chi = s\dot{Y}_\chi$, et on peut interpréter Y_χ comme la densité comobile de particules de matière noire. On effectue également le changement de variable $x = m_\chi/T$, en sachant que $T \propto a^{-1}$ et donc $dx/dt = Hx$. Finalement, après toutes ces manipulations, on peut écrire l'équation de Boltzmann sous la forme :

$$\frac{dY_\chi}{dx} = -\frac{s}{Hx}\langle\sigma v\rangle \left(Y_\chi^2 - \bar{Y}_\chi^2 \right) \tag{5.28}$$

Enfin, puisqu'on connait l'évolution de $\bar{Y}_\chi \propto x^{3/2}e^{-x}$, d'après (5.15) pour de la matière noire froide, on peut chercher à exprimer l'écart $\Delta = Y_\chi - \bar{Y}_\chi$, qui vérifie l'équation :

$$\frac{d\Delta}{dx} = -\frac{d\bar{Y}_\chi}{dx} - \frac{s}{Hx}\langle\sigma v\rangle\Delta \left(\Delta + 2\bar{Y}_\chi \right) \tag{5.29}$$

Pour de la matière noire froide, le découplage se fait à $x = x_f \gg 1$. Avant le découplage $Y_\chi \sim \bar{Y}_\chi$, donc Δ et sa dérivée sont petits, et on a alors :

$$\Delta \simeq -\frac{Hx}{2s\langle\sigma v\rangle}\frac{d\ln\bar{Y}_\chi}{dx} \simeq \frac{Hx}{2s\langle\sigma v\rangle} \tag{5.30}$$

où on a utilisé le fait que $\bar{Y}_\chi \propto x^{3/2}e^{-x} \Rightarrow d\ln\bar{Y}_\chi \sim 1$ pour $x \gg 1$ pour obtenir la seconde expression. Après le découplage, c'est-à-dire pour $x \gg x_f$, $\bar{Y}_\chi$ continue sa décroissance exponentielle et devient négligeable, de même que sa dérivée. Δ vérifie alors l'équation suivante :

$$\frac{d\Delta}{dx} \simeq -\frac{s}{Hx}\langle\sigma v\rangle\Delta^2 \tag{5.31}$$

En intégrant cette équation entre x_f et $+\infty$:

$$\frac{1}{\Delta_\infty} - \frac{1}{\Delta_f} = \int_{x_f}^{+\infty}\frac{s}{Hx}\langle\sigma v\rangle dx \quad \Rightarrow \quad Y_\chi^\infty \simeq \Delta_\infty \sim \left(\int_{x_f}^{+\infty}\frac{s}{Hx}\langle\sigma v\rangle dx\right)^{-1} \tag{5.32}$$

Or, comme $sa^3 =$ cste et $T \propto a^{-1}$, $s = s_m x^{-3}$ avec s_m la densité d'entropie lorsque la température de l'Univers était $T \sim m_\chi$. On peut également montrer que $H = H_m x^{-2}$ (voir par exemple [21]), où H_m est le taux de Hubble lorsque $T \sim m_\chi$. Si, de plus, on fait l'hypothèse que la section efficace est indépendante du facteur d'échelle, et donc de x, c'est-à-dire que $\langle\sigma v\rangle \sim \frac{\alpha^2}{m^2}$ avec α une constante adimensionnée [1], on peut alors écrire :

$$Y_\chi^\infty \simeq \frac{H_m m^2}{s_m \alpha^2}x_f \tag{5.33}$$

Pour obtenir l'abondance relique de matière noire, il nous reste à déterminer x_f. On exprime le critère de gel $\Gamma(x_f) = H(x_f)$, en utilisant le fait que $n_\chi(x_f) \sim \bar{n}_\chi(x_f) = \frac{g_\chi m_\chi^3}{(2\pi)^{3/2}}x_f^{-3/2}e^{-x_f}$. Pour $\alpha \sim 0.01$ et $m_\chi \sim 100$ GeV, $x_f \sim 10$. On obtient alors finalement l'expression suivante pour l'abondance relique de matière noire :

$$\Omega_\chi h^2 = \frac{m_\chi s_\infty Y_\chi^\infty}{\rho_c}h^2 \sim 0.1\left(\frac{0.01}{\alpha}\right)^2\left(\frac{m_\chi}{100\text{ GeV}}\right)^2 \tag{5.34}$$

On peut voir sur cette dernière formule que pour des particules de matière noire telles que $m_\chi \sim 100$ GeV, et qui interagissent faiblement avec les particules du modèle standard (entendre avec des sections efficaces de l'ordre de celles de l'interaction faible $\langle\sigma v\rangle \sim 100$ pb, que l'on peut donc produire dans des accélérateurs), on obtient le bon ordre de grandeur pour la densité relique de matière noire $\Omega_\chi h^2 \sim 0.1$ [12]. Ce résultat est connu sous le nom de miracle

1. On peut en fait montrer que $\langle\sigma v\rangle$ s'écrit comme une série entière en x [22]. On fait donc l'hypothèse, ici, que les coefficients d'ordre supérieur à 0 sont négligeables tout au long de l'histoire de l'Univers.

des WIMPs, et bien que n'ayant pas grand chose d'un miracle, apporte des motivations importantes pour la recherche de telles particules, si bien que la quasi-totalité des candidats pour la matière noire en physique des particules recherchés aujourd'hui sont des WIMPs. Le modèle étudié dans cette thèse ne fait pas exception.

Bilan des connaissances sur la matière noire

L'ensemble des résultats précédemment obtenus sont résumés sur la figure 5.6.

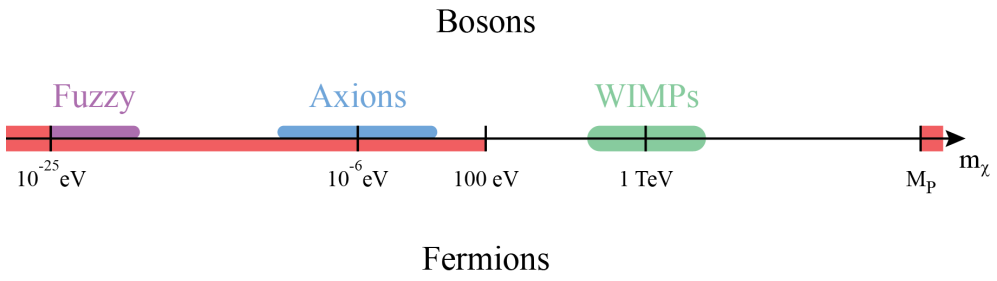

FIGURE 5.6 Résumé de l'état actuel de nos connaissances sur la matière noire. Les zones en rouges sont celles qui sont exclues indépendamment du modèle.

5.2 Les théories à dimensions supplémentaires

Dans cette partie, nous allons introduire à travers des exemples les concepts principaux de la classe des modèles à dimensions supplémentaires. L'idée de base de ces modèles, qui consiste à supposer l'existence d'une ou plusieurs dimensions spatiales supplémentaires, est simple mais a été très fertile depuis son introduction au début du XXe siècle par Théodor Kaluza [23] et Oskar Klein [24]. Bien que la théorie initiale soit affectée par de sérieux problèmes théoriques, certains de ses concepts clés ont été repris par de nombreuses théories plus récentes telles que les théories de supergravité [25–28], les théories des cordes [29–35] et les modèles d'univers branaires [36–38].

5.2.1 Les théories de Kaluza-Klein

Le "miracle" de Kaluza-Klein

Le principe de base de la théorie développée par Théodor Kaluza [23] vient de la remarque brillante qu'il est possible de retrouver les résultats de la relativité générale et les lois de Maxwell pour l'électromagnétisme à 4 dimensions à partir d'une généralisation de la relativité générale dans un espace à 5 dimensions.

Pour construire les modèles dits de Kaluza-Klein, on part donc de l'hypothèse qu'il existe une dimension spatiale supplémentaire. Dans ce cas, le groupe de Lorentz à 5 dimensions est le groupe $SO(4,1)$. Comme $SO(4,1)$ est plus grand que le groupe de Lorentz à 4 dimensions $SO(3,1)$ mais a la même structure, on peut décomposer les représentations de $SO(4,1)$ suivant différentes représentations de $SO(3,1)$. En particulier, le tenseur fondamental de la relativité générale à 5 dimensions G_{MN}, où $M, N \in 0..4$, est un tenseur de $SO(4,1)$. En tant que tenseur symétrique à 5 dimensions, il possède 15 composants indépendants et peut se décomposer selon :

— $g_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} + \frac{G_{4\mu}G_{4\nu}}{G_{44}}$ avec $\mu, \nu \in 0, ..., 3$. Ici, $g_{\mu\nu}$ est la métrique induite (voir l'équation (2.31)) sur l'espace à 4 dimensions orthogonal au vecteur unitaire $n^A = \frac{\delta_4^A}{\sqrt{\lambda G_{44}}}$ tangent à la cinquième dimension. Cette métrique est la métrique usuelle de l'univers apparent à 4 dimensions,

— $A_\mu = \frac{G_{\mu 4}}{G_{44}}$ avec $\mu \in 0, ..., 3$,

— $\lambda\Phi^2 = G_{44}$

$g_{\mu\nu}$, A_μ et Φ sont respectivements un champ tensoriel symétrique, un champ vectoriel de masse nulle et de spin 1 et un champ scalaire sans masse de $SO(3,1)$; λ correspond à une constante de couplage. On peut écrire $g_{\mu\nu}$ comme en (3.46) pour faire apparaître le graviton pour la gravité à 4 dimensions et A_μ peut s'interpréter comme le photon. A priori, ces champs dépendent des 5 coordonnées $\left(x^\mu, x^4\right)$, mais on fait de plus l'hypothèse [2] que tous les champs sont indépendants de la coordonnée supplémentaire x^4. On peut alors faire un choix de coordonnées pour lequel la métrique à 5 dimensions G_{MN} s'écrit :

$$G_{MN} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} - \lambda\Phi^2 A_\mu A_\nu & \lambda\Phi^2 A_\mu \\ \lambda\Phi^2 A_\nu & \lambda\Phi^2 \end{pmatrix} \tag{5.35}$$

Les équations des champs sont obtenues à partir des équations d'Einstein à 5 dimensions sans matière qui se résument à :

$$R_{AB} = 0 \tag{5.36}$$

avec R_{AB} le tenseur de Ricci à 5 dimensions.

2. Le bien fondé de cette condition, connue sous le nom de "cylinder condition", a été longuement débattu dans la littérature [39]. Cette condition permet la simplification des équations ainsi que la suppression de certains degrés de libertés. Des modèles ne l'utilisant pas ont notamment été développés par Paul Wesson [40] où les degrés de libertés supplémentaires peuvent être identifiés aux champs de matière. Dans la construction originale, le tenseur énergie-impulsion des autres constituants que le photon doit être introduit à la main.

Les équations d'évolution des champs sont alors [40] :

$$G_{\mu\nu} = \frac{\lambda\Phi}{2}T_{\mu\nu} - \frac{1}{\Phi}\left(\nabla_\mu\nabla_\nu\Phi - g_{\mu\nu}\Box\Phi\right) \tag{5.37}$$

$$\nabla^\mu F_{\mu\nu} = -3\frac{\nabla^\mu\Phi}{\Phi}F_{\mu\nu} \tag{5.38}$$

$$\Box\Phi = -\frac{\lambda\Phi^3}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{5.39}$$

$G_{\mu\nu}$ est le tenseur d'Einstein à 4 dimensions, $F_{\mu\nu}$ le tenseur de Faraday à 4 dimensions et le tenseur énergie-impulsion, ici pour les photons, est donné par $T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\frac{F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}}{8} - \frac{F_\mu^\rho F_{\nu\rho}}{2}$. Les équations (5.37) sont analogues aux équations d'Einstein en relativité générale en identifiant $\lambda = 16\pi\mathcal{G}/c^4$, et correspondent en fait aux équations d'Einstein dans des modèles de gravité modifiée tenseur-scalaire de Brans-Dicke [41]. On voit néanmoins que si $\Phi = \text{cste} = 1$, on retrouve les équations de la relativité générale à 4 dimensions. Dans ce cas, les équations (5.38) se réduisent aux équations de Maxwell. Cependant, la condition $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 0$ s'ajoute aux deux jeux d'équations précédentes, ce qui pourrait avoir un impact important en physique des particules.

Compactification et tours de Kaluza-Klein

À partir des développements précédents, on peut remarquer que la théorie de Kaluza-Klein contient la propriété d'invariance de jauge de l'électromagnétisme. En effet, si l'on effectue le changement de coordonnées suivant (on rappelle que toutes les quantités sont indépendantes de x^4) :

$$x^4 \to x^{4'} = x^4 + \varepsilon\left(x^\mu\right) \tag{5.40}$$

alors on peut exprimer la nouvelle métrique en fonction de l'ancienne en utilisant la conservation de l'intervalle d'espace-temps :

$$ds^2 = G_{MN}dx^M dx^N = G'_{M'N'}dx'^{M'}dx'^{N'} = G'_{M'N'}\frac{\partial x'^{M'}}{\partial x^M}\frac{\partial x'^{N'}}{\partial x^N}dx^M dx^N \tag{5.41}$$

La relation entre la nouvelle métrique et l'ancienne est alors :

$$G_{MN} = G'_{M'N'}\frac{\partial x'^{M'}}{\partial x^M}\frac{\partial x'^{N'}}{\partial x^N} \tag{5.42}$$

On obtient la transformation pour le photon en prenant $M = N = 4$, soit :

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\varepsilon \tag{5.43}$$

Il s'agit de la transformation de jauge abélienne que l'on attend pour le photon (voir (1.50)). L'invariance par transformation de coordonnées le long de la dimension supplémentaire s'interprète donc comme une symétrie de jauge $U(1)$ pour le photon. Cependant, la transformation de coordonnées (5.40) n'est pas la transformation de coordonnées la plus générale qui soit pour x^4 dans un espace à 5 dimensions car ε ne dépend pas de x^4 du fait de la cylinder condition. Ainsi, ce que nous avons fait dans la section précédente revient à appliquer la relativité générale dans un espace à cinq dimensions où le groupe des transformations générales de coordonnées Diff_5 est spontanément brisé pour donner le produit du groupe des transformations générales de coordonnées à 4 dimensions Diff_4 et du groupe $U(1)$:

$$\text{Diff}_5 \to \text{Diff}_4 \times U(1) \tag{5.44}$$

En termes plus topologiques, il s'agit de dire que l'état fondamental du système, plutôt que d'être un espace de Minkowski à 5 dimensions M^5, est le produit d'un espace de Minkowski à 4 dimensions par un cercle $M^4 \times \mathcal{S}^1$. Il n'y a néanmoins pas de raison, a priori, de préférer l'un ou l'autre des espaces pour être l'état fondamental. L'état fondamental $M^4 \times \mathcal{S}^1$ a cependant le mérite d'expliquer l'apparente absence d'une dimension spatiale différente de la longueur, la largeur et la hauteur. En effet, si l'espace-temps est composé de 5 dimensions, alors il faut expliquer l'absence apparente de la quatrième dimension spatiale. Le fait que celle-ci soit en fait de taille finie et très petite [3], compactifiée sur un cercle est une réponse élégante.

En utilisant cette idée selon lequel la dimension supplémentaire est compactifiée sur un cercle de rayon R, on retrouve les résultats de la théorie originale sans avoir besoin d'introduire arbitrairement la cylinder condition (c'est d'ailleurs initialement ce qui a motivé Oskar Klein à compactifier la dimension supplémentaire [24]), et de nouveaux résultats intéressants viennent s'ajouter. Si l'on part de l'action d'Einstein-Hilbert à 5 dimensions :

$$\mathcal{S}_{KK} = -\frac{M_5^3}{2} \int d^5x \sqrt{-G} \mathcal{R}^{(5)} \tag{5.45}$$

avec M_5 la masse de Planck et $\mathcal{R}^{(5)}$ le scalaire de Ricci à 5 dimensions. De même que précédemment, en identifiant les termes de la métrique, et en intégrant de plus sur la coordonnée supplémentaire, on retrouve une théorie à 4 dimensions qui englobe la relativité générale et la théorie de Maxwell. Un point intéressant, que l'on développera dans 5.2.3 dans un autre cadre, vient du fait que l'action d'Einstein-Hilbert à 4 dimensions est donnée par :

$$\mathcal{S}_{EH} = -\frac{2\pi R M_5^3}{2} \int d^4x \sqrt{-G} \mathcal{R}^{(4)} \tag{5.46}$$

3. Nous verrons dans la partie 5.2.2 comment il est possible de passer outre cet argument et de considérer des dimensions supplémentaires de taille macroscopique.

On constate alors que l'on a une échelle de Planck effective dans l'espace à 4 dimensions qui dépend de la taille de la dimension supplémentaire compactifiée R, et qui n'est donc pas forcément égale à la masse de Planck à 5 dimensions :

$$M_P^2 = 2\pi R M_5^3 \tag{5.47}$$

Enfin, comme la dimension supplémentaire est compactifiée sur un cercle, les champs de matière de la théorie sont tous 2π-périodiques suivant x^4. Tout champ de matière peut alors se développer en série de Fourier, par exemple pour un champ scalaire [42] :

$$\Phi\left(x^\mu, x^4\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \phi_n\left(x^\mu\right) e^{inx^4/R} \tag{5.48}$$

Pour un tel champ de masse m_0, l'action s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{KK}^{\text{scalar}} &= \frac{1}{2}\int d^4x \int_0^{2\pi R} dx^4 \left[-\left(\partial_M \Phi\right)^2 - m_0^2 \left(\Phi\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{2}\int d^4x \left[-\sum_n \left(\partial_\mu \phi_n\right)^2 - \sum_n \left(m_0^2 + \frac{n^2}{R^2}\right)\left(\phi_n\right)^2\right] \end{aligned} \tag{5.49}$$

Ainsi, on a une action effective à 4 dimensions comprenant une infinité de champs scalaires ϕ_n de masse $m^2 = m_0^2 + \frac{n^2}{R^2}$ qui résultent de la compactification de la dimension supplémentaire. Cette famille infinie de champs est appelée une tour de Kaluza-Klein. Ce résultat est valable pour tous types de champs de matière (scalaire, spinoriel, vectoriel ou tensoriel). Les champs du modèle standard sont alors les modes zéros (pour lesquels $n = 0$) et puisque R est supposé être extrêmement petit, par exemple de l'ordre de la longueur de Planck, les états excités ont des masses extrêmement élevées.

Malheureusement, la théorie originale de Kaluza-Klein présente quelques problèmes difficilement surmontables. En effet, en plus de prédire une quantification de la masse des états de Kaluza-Klein, la théorie prédit une quantification de la charge électrique [43]. Cependant, les états fondamentaux sont de charge nulle, et les états chargés sont ceux pour lesquels $n \geq 1$, qui sont des états de masse très élevée, ce qui n'est pas compatible avec la faible masse des électrons $m_e = 511$ keV, par exemple. De plus, la théorie est incapable de prédire l'existence de fermions chiraux [44].

Généralisation de la théorie de Kaluza-Klein

Indépendamment des problèmes évoqués ci-dessus, il est possible de généraliser l'approche de Kaluza et Klein pour inclure l'ensemble des interactions fondamentales du modèle standard à

partir de la relativité générale à $D = 4 + d$ dimensions [45]. Le schéma de brisure de symétrie est alors le suivant :

$$\mathrm{Diff}_D \to \mathrm{Diff}_4 \times SU(3) \times SU(2) \times U(1) \tag{5.50}$$

L'état fondamental du système est alors un espace $M^4 \times C^d$, où $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ est un sous-groupe du groupe d'isométries de C^d, c'est-à-dire du groupe qui laisse invariant l'intervalle d'espace-temps sur C^d :

$$d\sigma^2 = \gamma_{mn} dy^m dy^n \tag{5.51}$$

où γ_{mn} est la métrique dans l'espace à D dimensions. Ainsi, le groupe d'isométries est composé des transformations de coordonnées qui laissent la métrique inchangée. Ces transformations de coordonnées sont de la forme $y^m \to y^m + \xi^m$ donc d'après (2.6), la métrique est inchangée pour les transformations telles que :

$$\nabla_m \xi_n + \nabla_n \xi_m = 0 \tag{5.52}$$

Les vecteurs qui vérifient cette équation, c'est-à-dire les vecteurs qui conservent la métrique, sont appelés des vecteurs de Killing, et sont les générateurs infinitésimaux des isométries. Dans notre cas, avec les vecteurs de Killing ξ_a^m des isométries C^d, la métrique générale peut s'écrire :

$$G_{MN}(x, y) = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu}(x) - \gamma_{mn}(y) B_\mu^m B_\nu^n & B_\mu^n \\ B_\nu^m & \gamma_{mn}(y) \end{pmatrix} \tag{5.53}$$

où on a défini $B_\mu^m = A_\mu^a(x) \xi_a^m(y)$. Les A_μ^a sont alors les champs de jauge correspondant au groupe d'isométries de C^d. On obtient la transformation usuelle pour un champ de jauge à partir d'une transformation de coordonnées sur C^d :

$$(x^\mu, y^m) \to (x^\mu, y^m + \xi_a^m(y) \varepsilon^a(x)) \quad \Longrightarrow \quad A_\mu^a \to A_\mu^a + D_\mu \varepsilon \tag{5.54}$$

Bien que souffrant a priori des mêmes problèmes que la théorie originale de Kaluza et Klein, cette extension a reçu un accueil très interessé de la part de la communauté théoricienne. En effet, il a été démontré par Edward Witten [45] que les espaces compacts les plus petits vérifiant les propriétés ci-dessus étaient de dimension 7, pour un espace-temps total à 11 dimensions. Or, il a été montré [46] que les théories de supergravité ne peuvent exister que pour des espaces-temps de dimension inférieure ou égale à 11. On a ainsi un argument théorique qui impose le nombre de 11 dimensions pour l'espace-temps permettant de combiner l'approche ci-dessus avec les théories de supergravité à 11 dimensions, lesquelles sont fortement considérées avoir un lien avec les théories de supercordes à 10 dimensions [47–54].

5.2.2 Des dimensions supplémentaires universelles aux univers branaires

Malgré les sérieuses difficultés rencontrées par les théories de Kaluza-Klein évoquées précédemment, l'originalité et la richesse des idées de dimensions supplémentaires et de compactification a été mise à profit dans de nombreux scénarios de physique au-delà du modèle standard. Ainsi, de nombreux modèles à dimensions supplémentaires ont été développés partant de postulats différents des théories de Kaluza-Klein, pour lesquelles les interactions du modèle standard s'interprètent comme l'effet de la gravité à D dimensions, tout en introduisant des dimensions supplémentaires, le plus souvent compactifiées. On retrouve alors des phénoménologies similaires aux théories de Kaluza-Klein, notamment avec l'apparition de tours de Kaluza-Klein des champs qui se propagent dans les dimensions supplémentaires. Les modèles à dimension supplémentaires connaissent un regain d'intérêt depuis la fin des années 90, notamment avec les travaux de Dienes, Dudas et Ghergetta [55], et de Arkani-Hamed, Dimopoulos et Dvali [36] . Nous donnons ici une liste de quelques exemples, loin d'être exhaustive.

Universal Extra Dimensions (UED)

Les théories à dimensions supplémentaires universelles UED contiennent tous les champs du modèle standard qui sont libres de se propager selon les dimensions supplémentaires compactifiées [56]. Dans ce scénario, tous les champs du modèle standard produisent des excitations de Kaluza-Klein. Dans le cas où l'espace-temps possèdent une unique dimension supplémentaire, cas que l'on appelle mUED (pour minimal UED), les modes zéros des tours de Kaluza-Klein sont les champs du modèle standard et on peut observer les excitations à des énergies de l'ordre de $1/R \gtrsim 1.4$ TeV [57]. Afin de préserver la chiralité des fermions, la dimensions supplémentaire doit être compactifiée selon une géométrie $\mathcal{S}^1/\mathbb{Z}_2$. Un point intéressant du modèle vient de ce que tous les champs se propagent dans les dimensions supplémentaires, l'impulsion est alors conservée dans l'espace-temps entier. Cela implique la conservation d'un nombre que l'on appelle KK-parité. Cette loi de conservation est très similaire à la R-parité en supersymétrie, les phénoménologies des deux modèles sont de ce fait très similaires. Notamment, de même qu'en supersymétrie, la conservation de la KK-parité permet au mode de Kaluza-Klein le plus léger d'être stable, ce qui en fait un bon candidat pour la matière noire [58].

Il est intéressant de noter que des extensions au mUED ont été développées en supposant l'existence de deux dimensions supplémentaires. Ces modèles UED à deux dimensions supplémentaires différent les uns des autres par la géométrie de compactification [56, 59–64]. Outre des résultats comparables à ceux qui font l'intérêt du mUED, de tels modèles UED à 6 dimensions prédisent un nombre de générations pour les fermions égal à trois [65].

Les modèles d'univers branaires

Une autre grande classe de modèles à dimensions supplémentaires récents est celle des modèles d'univers branaires. Le concept de branes vient des théorie de cordes, dans lesquelles peuvent apparaître des objets appelés branes de Dirichlet [66–68]. Les branes de Dirichlet sont des objets étendus qui peuvent être interprétés comme les hypersurfaces sur lequelles s'attachent l'extrémité des cordes ouvertes. La brane contient alors les degrés de liberté des groupes de jauge. Seule la gravité, qui ne peut être confinée sur la brane, se propage dans l'espace-temps complet. Dans le cas des univers branaires, la brane correspond à l'Univers habituel à 4 dimensions dans lequel sont libres de se propager les champs du modèle standard.

Les développements concernant les branes de Dirichlet ont initié le développement de nombreux modèles phénoménologiques à dimensions supplémentaires. On peut par exemple citer les modèles développés par Lisa Randall et Raman Sundrum, noté modèles RS. Dans la première version de leur modèle [37], l'espace-temps possède 5 dimensions et est constitué de deux branes à 4 dimensions situées à une distance finie. Dans la seconde version [38], la seconde brane est envoyée à l'infini. Dans ces modèles, les champs du modèle standard vivent uniquement sur une des deux branes appelée brane visible. Les modèles RS apportent une solution au problème de la hiérarchie, évoqué au chapitre 1, grâce à la presence de la seconde brane appelée brane cachée. On peut également citer l'exemple du modèle ADD [36] qui sera présenté en section 5.2.3. De même que dans les modèles RS, la géométrie particulière dans l'espace-temps à D dimension permet d'apporter une solution au problème de la hiérarchie.

5.2.3 Le modèle ADD et les KK-gravitons

Comme nous l'avons vu dans la section précédente, le modèle ADD, du nom de ses auteurs originaux Nima Arkani-Hamed, Savas Dimopoulos et Gia Dvali [36], est un modèle d'univers branaire. Dans ce modèle, le nombre de dimensions supplémentaires d est arbitraire, et celles-ci sont compactifiées selon une géométrie à préciser (le cas standard étant la compactification sur un tore à d dimensions T^d). Les champs du modèle standard sont confinés dans l'espace-temps usuel à 4 dimensions, et seule la gravité peut se propager dans les dimensions supplémentaires. Notre Univers constitue la brane à 4 dimensions $\mathcal{M}_4$ qui est plongée dans l'espace à $D = 4 + d$ dimensions. Contrairement aux théories de Kaluza-Klein, comme les champs du modèle standard sont confinés sur la brane, il n'y a pas à justifier qu'on n'observe pas de dimensions supplémentaires par les expériences de physique des particules et celles-ci peuvent être de taille macroscopique. La taille des dimensions supplémentaires peut néanmoins, en principe, être contrainte par des mesures de l'interaction gravitationnelle. Si l'on note R la taille caractéristique des dimensions supplémentaires, comme dans le cadre de la théorie de Kaluza-Klein, la masse de Planck à 4 dimensions, M_P, est une masse de Planck effective qui dépend de la masse

de Planck à D dimensions, M_D, et de la taille caractéristique des dimensions supplémentaires selon :

$$M_P^2 \sim M_D^{d+2} R^d \tag{5.55}$$

La masse de Planck à 4 dimensions n'est alors que le reflet de l'échelle fondamentale de la gravitation M_D, et cette dernière peut être prise du même ordre que l'échelle électrofaible $m_{EW} \sim 1$ TeV résolvant ainsi le problème de la hiérarchie exposé en chapitre 1. C'est d'ailleurs initialement dans ce but que le modèle ADD et les modèles d'univers branaires ont été développés. Dans ce cas, on peut déduire la taille des dimensions supplémentaires ainsi que leur nombre [36] :

$$R \sim \left(\frac{1\text{TeV}}{M_D}\right)^{1+2/d} \times 10^{30/d-17}\text{cm} \tag{5.56}$$

Pour $d = 1$: $M_D \sim 1\text{TeV} \Rightarrow R \sim 10^{13}$ cm, ce qui engendrerait des déviations importantes à la dynamique newtonienne de la gravité au sein du système solaire. Ce cas est donc exclu [36].
Pour $d = 2$: $M_D \sim 1\text{TeV} \Rightarrow R \sim 1$ mm, ce qui correspond à l'ordre de grandeur auquel la gravité est actuellement testée expérimentalement. Ce cas a ainsi été récemment testé et exclu [69, 70].
Le modèle ADD est donc actuellement testé pour $d \geq 3$, pour lesquels $R \leq 10^{-7}$ cm, c'est-à-dire où la gravité est modifiée à des échelles bien plus petites que la limite de sensibilité des tests actuels des expériences de gravitation. Nous allons voir que l'on peut néanmoins tester ces modèles grâce à des expériences de physique des particules, sur accélérateur par exemple.

Pour un espace-temps à D dimensions que l'on peut factoriser selon $\mathcal{M}_D = \mathcal{M}_4 \times K_d$, la métrique G_{MN} est de la forme :

$$G_{MN}(x, y) = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu}(x) & 0 \\ 0 & \gamma_{mn}(y) \end{pmatrix} \tag{5.57}$$

On peut rapprocher cette métrique de (5.53) avec $B_\mu = 0$. Les champs de jauge (ainsi que les fermions et les scalaires), qui ne se propagent ici qu'au sein de la brane, sont pris en compte simplement par le lagrangien du modèle standard sur la brane. L'action générale pour ce modèle s'écrit donc [71] :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{ADD} = & \frac{M_D^{d+2}}{2} \int_{\mathcal{M}_D} d^D X \sqrt{-G} \left[\mathcal{R}^{(D)} - (D-2)\Lambda^{(D)}\right] \\ & + \int_{\mathcal{M}_4} d^4 x \sqrt{-\tilde{g}} \left[-f^4 + \mathcal{L}_{SM}(\tilde{g}_{\mu\nu}, \phi)\right] \end{aligned} \tag{5.58}$$

En plus de l'action pour la relativité générale à D dimensions avec une constante cosmologique $\Lambda^{(D)}$, et l'action du modèle standard de la physique des particules, on a ici défini l'action de Nambu-Goto (initialement introduite par Dirac dans le cadre des membranes [72]) $\mathcal{S}_{NG} = -f^4 \int_{\mathcal{M}_4} d^4x\sqrt{-\tilde{g}}$, qui décrit la dynamique de la brane dans l'espace à D dimensions et correspond à l'action covariante la plus simple que l'on puisse écrire sur la brane. On a défini la tension de la brane f, qui correspond à l'échelle caractéristique des perturbations de position de la brane et est intuitivement reliée à sa rigidité. On a également défini le tenseur métrique induit sur la brane $\tilde{g}_{\mu\nu}$. On va ici utiliser une méthode différente de (2.31) pour définir la métrique induite. Plutôt que d'introduire un champ de vecteurs orthogonaux à la brane, on introduit un système de coordonnées pour la position de la brane dans $\mathcal{M}_D$:

$$Y^M(x) = (x^\mu, Y^m(x)) \quad \Rightarrow \quad d\tilde{s}^2 = G_{MN} dY^M dY^N \tag{5.59}$$

Ainsi, d'après (5.42), la métrique induite sur la brane est donnée par :

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = G_{MN} \frac{\partial Y^M}{\partial x^\mu} \frac{\partial Y^N}{\partial x^\nu} (Y_0) \tag{5.60}$$

Le modèle ADD se place dans le régime d'une brane rigide, c'est-à-dire tel que $M_D \ll f$. On peut alors se placer dans un système de coordonnées telles que $Y^M(x) = (x^\mu, Y^m(x) = 0)$. Dans ce cas, la métrique induite sur la brane est simplement $G_{\mu\nu}$, c'est-à-dire $\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$, et $\mathcal{S}_{NG}$ s'identifie à l'action pour une constante cosmologique à 4 dimensions, qui ne joue pas de rôle dans les expériences de physique des particules. Pour exprimer l'action en terme de gravitons à D dimensions, on exprime la métrique comme en (3.46) :

$$G_{MN} = \eta_{MN} + h_{MN} \tag{5.61}$$

On retrouve l'action de Fierz-Pauli à D dimensions [73] accompagné d'un terme de couplage à 4 dimensions entre le graviton et les champs du modèle standard. De même que pour la théorie de Kaluza-Klein, comme le graviton est libre de se propager sur K_d qui est compact, on a une tour de Kaluza-Klein pour le graviton. Les gravitons de Kaluza-Klein ont une masse $m_n \sim \frac{n}{R}$, le graviton classique sans masse est l'état fondamental pour lequel $n = 0$, et l'écart de masse entre les différents modes est de l'ordre de [73] :

$$\Delta m = \frac{1}{R} \sim \left(\frac{M_D}{1\ \text{TeV}}\right)^{d/2+1} \times 10^{12-31/d}\ \text{eV} \tag{5.62}$$

Les écarts de masses sont donc très faibles pour $M_D \sim 1$ TeV (20 keV pour $d = 4$ par exemple). Ces gravitons massifs peuvent alors être produits en collisionneur, et recherchés à travers leur couplage aux particules du modèle standard [74–76].

5.3 Le modèle du branon

Le modèle du branon est, comme le modèle ADD, un modèle d'univers branaire où les champs du modèle standard sont confinés sur la brane. Dans le modèle ADD présenté en section 5.2.3, nous nous intéressions aux excitations du champ du graviton, libre de se propager dans toutes les dimensions, ce qui a pour effet de produire une tour de Kaluza-Klein sur la brane. Dans le modèle du branon, on s'intéresse à un autre type d'excitations, présentes lorsque la brane est souple, qui sont liées à la brisure des symétries d'espace-temps par la présence de celle-ci. Il est important de noter que, même si le modèle du branon a été développé historiquement à partir du modèle ADD, des branons peuvent apparaître dans tous les modèles d'univers branaire où la brane est souple.

Pour comprendre dans un premier temps comment la brane brise les symétries d'espace-temps, on peut négliger l'effet de la gravité. S'il n'y a pas de gravité, alors la métrique sur $\mathcal{M}_D$ est simplement la métrique de Minkowski η_{MN}, et les symétries d'espace-temps sont celles du groupe de Poincaré à D dimensions. Cependant, l'existence de la brane vient briser certaines de ces symétries car celle-ci vient rendre spéciale un certain sous-espace de $\mathcal{M}_D$, c'est-à-dire $\mathcal{M}_4$. Les symétries du groupe de poincaré à D dimensions brisées par la présence de la brane sont intuitivement les translations dans une direction normale à la brane, et les transformations de Lorentz qui mélangent les coordonnées x^μ et y^m [77].

Pour étudier le modèle du branon, qui est basé sur le traitement des brisures de symétrie, nous allons commencer par exposer à travers deux exemples, dont on pourra généraliser les conséquences, le formalisme lié aux brisures spontanées de symétrie en physique des particules. Une étude systématique des brisures spontanées de symétries connue sous le nom de construction par ensemble coset et tirée de [78–82] est présentée en annexe C.

5.3.1 Brisure spontanée de symétrie

Le modèle sigma linéaire

Supposons que l'on ait un ensemble de N champs scalaires réels ϕ^i dont la dynamique est donnée par le lagrangien suivant :

$$\mathcal{L}_{LSM} = -\frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi_i\right)^2 + \frac{1}{2}\mu^2\left(\phi_i\right)^2 - \frac{\lambda}{4}\left[\left(\phi_i\right)^2\right]^2 \tag{5.63}$$

Ce lagrangien est invariant sous une transformation de $O\left(N\right)$:

$$\phi_i \to R_i^j \phi_j \tag{5.64}$$

où R_i^j est une matrice orthogonale. Le vecteur ϕ se transforme comme un vecteur, c'est-à-dire linéairement, d'où le nom de modèle sigma linéaire. L'hamiltonien pour ce modèle est donné par :

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_i}\dot{\phi}_i - \mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\dot{\phi}_i\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\nabla\phi_i\right)^2 - \frac{\mu^2}{2}\left(\phi_i\right)^2 + \frac{\lambda}{4}\left[\left(\phi_i\right)^2\right]^2 \tag{5.65}$$

On définit le potentiel pour le vecteur ϕ, ce qui permet de réécrire le lagrangien (5.63) :

$$V\left(\phi\right) = -\frac{1}{2}\mu^2\left(\phi_i\right)^2 + \frac{\lambda}{4}\left[\left(\phi_i\right)^2\right]^2 \tag{5.66}$$

$$\mathcal{L}_{LSM} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\phi^i\right)^2 - V\left(\phi\right) \tag{5.67}$$

Comme on peut le voir sur la figure 5.7 qui illustre la forme du potentiel (5.66), le minimum de ce potentiel est atteint pour tout vecteur vérifiant :

$$\left(\phi_0\right)^2 = \frac{\mu^2}{\lambda} \equiv v^2 \neq 0 \tag{5.68}$$

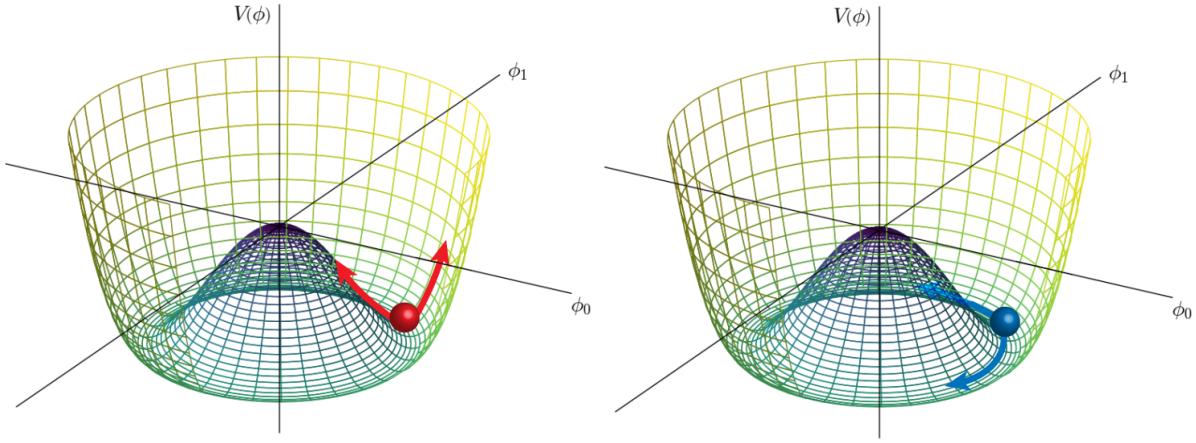

FIGURE 5.7 Illustration du potentiel du modèle sigma linéaire dans le cas simple de 2 champs scalaires ϕ_0 et ϕ_1 : $V\left(\phi\right) = -\frac{1}{2}\mu^2\left[\left(\phi_0\right)^2 + \left(\phi_1\right)^2\right] + \frac{\lambda}{4}\left[\left(\phi_0\right)^2 + \left(\phi_1\right)^2\right]^2$. Les excitations radiales (en rouge à gauche) correspondent à l'excitation massive σ. Les rotations autour de 0 (en bleu à droite) transforment l'état fondamental en un état dégénéré équivalent, elles correspondent à des rotations entre les champs de Goldstone qui sont donc non-massifs.

On constate que l'état fondamental ϕ_0 n'est pas invariant par une transformation de $O\left(N\right)$, la symétrie est spontanément brisée. Cette condition n'impose que la norme de l'état fondamental, sa direction est donc arbitraire et le choix usuel est le suivant :

$$\phi_0 = \left(0, ..., 0, v\right) \tag{5.69}$$

On définit alors les champs décalés :

$$\phi = (\pi_k, v + \sigma) \tag{5.70}$$

Cela nous permet d'exprimer le lagrangien (5.63) en fonction des champs π et σ :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{LSM} = &-\frac{1}{2}\left(\partial_\mu \pi_k\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \sigma\right)^2 - \frac{1}{2}\left(2\mu^2\right)\sigma^2 \\ &-\sqrt{\lambda}\mu\sigma^3 - \sqrt{\lambda}\mu\left(\pi_k\right)^2\sigma - \frac{\lambda}{4}\sigma^4 - \frac{\lambda}{2}\left(\pi_k\right)^2\sigma^2 - \frac{\lambda}{4}\left[\left(\pi_k\right)^2\right]^2\end{aligned} \tag{5.71}$$

On a donc un champ scalaire massif σ, de masse $m_\sigma = \sqrt{2}\mu$, et $N-1$ champs scalaires sans masses π_k. Il n'est plus simple de voir que le lagrangien dont on est parti était invariant sous les transformations de $O(N)$, cette symétrie est cachée et seule reste évidente la symétrie $O(N-1)$ qui transforme les champs π entre eux. Les champs π sont appelés des bosons de Goldstone [83] et sont présents dès lors que l'on a une brisure spontanée de symétrie.

Un tel modèle de brisure spontanée de symétrie est appelé le modèle sigma linéaire et intervient par exemple dans le mécanisme de Brout-Englert-Higgs du modèle standard, où l'on a la brisure spontanée de symétrie $O(4) \to O(3)$ [84]. Les degrés de liberté correspondants aux bosons de Goldstone y sont en fait "mangés" par la liberté de jauge de $SU(2)_L \times U(1)_Y$ de l'interaction électrofaible, conférant leurs masses aux bosons W et Z.

Le modèle sigma non-linéaire

On peut étendre le modèle précédent en considérant que les bosons de Goldstone se transforment de manière non-linéaire. C'est par exemple le cas lorsqu'on part du modèle sigma linéaire, mais où le scalaire σ est très massif. Pour se placer dans ce cas, on envoie $m_\sigma \to \infty$ tout en conservant l'état du vide v, ce qui requiert $\lambda \to \infty$. Le potentiel dans le lagrangien disparaît alors, et la condition sur la norme de ϕ devient la relation non-linéaire suivante :

$$\phi^2 = \pi_i^2 + \sigma^2 = v^2 \tag{5.72}$$

Ainsi, les champs σ et π_i ne sont plus indépendants. En utilisant $\sigma = \left(v - \pi_i^2\right)^{1/2}$, on peut écrire le lagrangien (5.71) en fonction uniquement des bosons de Goldstone selon :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{NLSM} &= -\frac{1}{2}\left(\partial_\mu \pi_i\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \sigma\right)^2 \\ &= -\frac{1}{2}\left(\partial_\mu \pi_i\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\left(\pi_i \partial_\mu \pi_i\right)\left(\pi_j \partial_\mu \pi_j\right)}{v^2 - \pi_k^2} \\ &= -\frac{1}{2} h_{ab} g^{\mu\nu} \partial_\mu \pi_a \partial^\mu \pi_b\end{aligned} \tag{5.73}$$

où l'on a défini $h_{ab} = \delta_{ab} + \frac{\pi_a \pi_b}{v^2 - \pi_k^2}$, et $g^{\mu\nu}$ est simplement la métrique qui permet de monter ou d'abaisser les indices spatiaux. On a ici un lagrangien effectif qui décrit la dynamique des bosons de Goldstone à faible énergie, sans prendre en compte explicitement le champ scalaire σ dont la masse est très élevée. On peut alors se demander comment se manifeste la symétrie $O(N)$ présente dans la lagrangien de départ, ici assurée par la condition (5.72). Si l'on effectue une transformation de $O(N)$ (5.64), les bosons de Goldstone sont transformés selon :

$$\pi_i' = R_i^j \phi_j = R_i^j \pi_j + R_i^N \sqrt{v^2 - \pi_k^2} \tag{5.74}$$

Ainsi, si $R_i^N = 0$, c'est-à-dire s'il s'agit en fait d'une transformation de $O(N-1)$ qui transforme les π_i, les bosons de Goldstone sont transformés linéairement entre eux. Il s'agit des transformations de $O(N)$ qui laissent l'état fondamental (5.69) inchangé, on parle alors du groupe d'isotropie de ϕ_0 [4]. Les symétries correspondantes ne sont donc pas brisées par cet état fondamental.

Au contraire, si $R_i^N \neq 0$, la transformation fait intervenir σ et des π_i, et les bosons de Goldstone se transforment de manière non-linéaire entre eux. C'est en cela qu'il s'agit du modèle sigma non linéaire. Il s'agit des transformations de $O(N)$ qui changent l'état fondamental du système, c'est-à-dire des transformations qui sont spontanément brisées par le choix de ce dernier. Elles sont définies à une transformation qui laisse l'état fondamental inchangé près. En effet, si g est un élément de $O(N)$ et h un élément de $O(N-1)$, l'état fondamental correspondant à la transformation de (5.69) par gh est le même que pour la transformation par g. On définit alors la classe d'équivalence, $\mathcal{C}_g = \{gh \mid h \in O(N-1)\}$. Les symétries brisées sont donc celles qui appartiennent à l'espace quotient :

$$O(N)/O(N-1) = \{\mathcal{C}_g \mid g \in O(N)\} \tag{5.75}$$

Les $N-1$ bosons de Goldstone ne sont en fait rien de plus que les coordonnées sur la sphère à $N-1$ dimensions qui est l'espace correspondant aux symétries brisées par l'état fondamental ($\mathcal{S}^{N-1} = O(N)/O(N-1)$).

Ces conclusions ne sont pas spécifiques au schéma de brisure de symétrie $O(N) \to O(N-1)$ que nous avons présenté ici. Considérons un système ayant une certaine symétrie G spontanément brisée en un sous-groupe H. Alors les symétries brisées de G appartiennent à l'espace quotient G/H, et on se retrouve avec $dim(G/H) = dim(G) - dim(H)$ bosons de Goldstone. Ces derniers peuvent être interprétés comme des coordonnées sur l'espace quotient G/H, et

4. Pour un groupe G agissant sur un ensemble M, le groupe d'isotropie G_m d'un point m de M est l'ensemble des éléments de G qui laissent invariant m :

$$G_m = \{g \in G | gm = m\}$$

sont les seuls degrés de liberté de la théorie effective à basse énergie. Ils se transforment linéairement entre eux sous une transformation de H, et non-linéairement sous une transformation de G/H.

5.3.2 Construction de l'action du branon

Comme nous l'avons évoqué précédemment, le modèle du branon s'intéresse à la brisure spontanée des symétries d'espace-temps de l'espace à D dimensions par la présence de la brane. Il s'agit en fait d'un modèle sigma non-linéaire dont les bosons de Goldstone sont appelés les branons. Nous allons ici construire explicitement l'action du branon à partir de (5.58) dont on néglige le terme lié à la gravité en D dimensions, et des principes liés aux brisures spontanées de symétrie appliqués au cas particulier des symétries d'espace-temps.

Brisure des symétries d'espace-temps

On rappelle que l'espace à D dimensions est supposé pouvoir s'écrire $\mathcal{M}_D = \mathcal{M}_4 \times K_d$ où K_d est un espace compact. La symétrie associée au groupe d'isométrie de $\mathcal{M}_D$ est spontanément brisée par la présence de la brane. Puisque $\mathcal{M}_D$ s'écrit sous forme factorisée, le groupe d'isométrie est de la forme $G(\mathcal{M}_D) = G(\mathcal{M}_4) \times G(K_d)$, et la présence de la brane brise cette symétrie en un sous-groupe $G(\mathcal{M}_4) \times H$. On définit alors l'espace quotient correspondant aux symétries brisées :

$$G(\mathcal{M}_D) / (G(\mathcal{M}_4) \times H) = G(K_d) / H \tag{5.76}$$

On introduit les T_a qui sont les générateurs du groupe d'isométrie sur K_d ($a \in 1..dim(G(K_d))$) et qui vérifient les relations de commutation suivantes :

$$[T_a, T_b] = iC_{abc}T_c \tag{5.77}$$

avec C_{abc} les constantes de structure de l'algèbre de Lie du groupe d'isométrie. Certaines de ces symétries sont brisées par la présence de la brane. En effet, comme pour le modèle ADD, la métrique est donnée par (5.57), et la position de la brane est décrite dans $\mathcal{M}_D$ par $Y^M = (x^\mu, Y^m(x))$. La brane est créée à une position $Y^m(x)$ qui minimise l'action décrivant la dynamique de la brane. On peut choisir un système de coordonnées tel que la brane est à une certaine position $Y^m(x) = Y_0^m$. Les symétries qui sont brisées par la brane sont toutes les isométries de K_d qui ne laissent pas invariant l'état fondamental Y_0. Le sous-groupe H restant après la brisure de symétrie est donc le groupe d'isotropie de Y_0. On peut alors décomposer les générateurs T_a en une famille H_i de $dim(H)$ générateurs de H et une famille X_α de

$dim\left(G\left(K_d\right)\right) - dim\left(H\right)$ générateurs brisés qui appartiennent à $G\left(K_d\right)/H$. Si on appelle g un élément de $G\left(K_d\right)$, on peut écrire :

$$g = e^{i\theta^a T_a} = e^{iv^\alpha X_\alpha} e^{iu^i H_i} \tag{5.78}$$

où v^α correspond à une coordonnée dans l'espace quotient $G\left(K_d\right)/H$. Il s'agit dont des bosons de Goldstone, donc des branons, à une normalisation près.

Comme nous l'avons vu dans la section 5.2.1, les vecteurs de Killing sont les générateurs infinitésimaux des isométries, on peut donc associer un vecteur de Killing à chaque générateur du groupe d'isométries par l'identification $T_a : y^m \rightarrow -i\xi_a^m\left(y\right)$[5]. Les vecteurs de Killing ξ_a vérifient la même algèbre de Lie que les générateurs T_a pour le crochet de Lie défini par $\{\xi_a, \xi_b\} = \xi_b^n \nabla_n \xi_a^m - \xi_a^n \nabla_n \xi_b^m$:

$$\{\xi_a, \xi_b\} = iC_{abc}\xi_c \tag{5.79}$$

Comme pour les générateurs du groupe d'isométrie de K_d que nous avons décomposés selon $T_a = (H_i, X_\alpha)$, on peut décomposer les vecteurs de Killing correspondants selon $\xi_a = (\xi_i, \xi_\alpha)$, où les ξ_α sont les directions correspondantes aux isométries brisées. L'action d'une isométrie de K_d sur l'état fondamental va alors déplacer la brane en un point :

$$Y^m\left(x\right) = e^{iv^\alpha X_\alpha} e^{iu^i H_i}\left(Y_0\right) \tag{5.80}$$

Or, comme les H_i sont les générateurs du groupe d'isotropie de Y_0, $e^{iu^i H_i}$ laisse ce dernier inchangé, et finalement [85] :

$$Y^m\left(x\right) = e^{iv^\alpha X_\alpha}\left(Y_0\right) = Y_0 + \frac{1}{\lambda f^2}\xi_\alpha^m\left(Y_0\right)\pi^\alpha\left(x\right) + \mathcal{O}\left(\pi^2\right) \tag{5.81}$$

On a ici défini les branons correctement normalisés $\pi^\alpha = \lambda f^2 v^\alpha$, où f est la tension de la brane et λ est défini tel que $\lambda^2 = 16\pi/M_P^2$. Cela revient à prendre au sérieux le fait que les bosons de Goldstone peuvent s'interpréter comme des coordonnées sur l'espace quotient $G\left(K_d\right)/H$ et à identifier simplement les branons aux coordonnées le long des ξ_α. La relation (5.81) indique que l'on peut décrire les petites déformations de la brane comme des petits déplacements, d'un paramètre π^α, le long des directions qui correspondent aux isométries brisées.

Maintenant que l'on a obtenu une description de la position de la brane en termes de branons, on peut chercher à décrire la dynamique de ces derniers. Celle-ci est donnée par l'action de Nambu-Goto :

$$\mathcal{S}_{NG} = -f^4 \int_{\mathcal{M}_4} d^4x\sqrt{-\tilde{g}} \tag{5.82}$$

5. En utilisant (5.78), on retrouve bien le fait qu'une isométrie infinitésimale s'écrit sous la forme $g : y^m \rightarrow e^{i\delta\theta^a T_a}\left(y\right) = y^m + \delta\theta^a \xi_a^m\left(y\right)$.

La métrique induite est donnée par (5.60), qui s'écrit en utilisant la métrique (5.57) :

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \gamma_{mn} \frac{\partial Y^m}{\partial x^\mu} \frac{\partial Y^n}{\partial x^\nu} \tag{5.83}$$

On peut exprimer les dérivées partielles de Y^m à l'aide de (5.81) :

$$\frac{\partial Y^m}{\partial x^\mu} \frac{\partial Y^n}{\partial x^\nu} = \frac{\partial Y^m}{\partial \pi^\alpha} \frac{\partial Y^n}{\partial \pi^\beta} \partial_\mu \pi^\alpha \partial_\nu \pi^\beta = \frac{1}{\lambda^2 f^4} \xi^m_\alpha \xi^n_\beta \partial_\mu \pi^\alpha \partial_\nu \pi^\beta \tag{5.84}$$

Si on définit le tenseur $h_{\alpha\beta} = f^4 \gamma_{mn} \frac{\partial Y^m}{\partial \pi^\alpha} \frac{\partial Y^n}{\partial \pi^\beta}$, la métrique induite sur la brane s'écrit simplement :

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \frac{1}{f^4} h_{\alpha\beta} \partial_\mu \pi^\alpha \partial_\nu \pi^\beta \tag{5.85}$$

La racine carrée du déterminant est alors :

$$\sqrt{-\tilde{g}} = \sqrt{-g} \left[1 + \frac{1}{2f^4} g^{\mu\nu} h_{\alpha\beta} \partial_\mu \pi^\alpha \partial_\nu \pi^\beta + \mathcal{O}\left(\pi^3\right) \right] \tag{5.86}$$

L'action décrivant la dynamique du branon est alors simplement l'action correspondant au modèle sigma non-linéaire (voir (5.73)) [85] :

$$\mathcal{S}_{\text{Branon}} = -f^4 \int_{\mathcal{M}_4} d^4x \sqrt{-g} - \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}_4} d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} h_{\alpha\beta} \partial_\mu \pi^\alpha \partial_\nu \pi^\beta \tag{5.87}$$

Terme de masse

Comme nous l'avons vu dans la section 5.3.1, en tant que bosons de Goldstone, les branons sont en principe de masse nulle [86]. Comment, alors, peuvent-ils être de bons candidats à la matière noire nécessairement massive ?

Les bosons de Goldstone issus d'une brisure spontanée de symétrie ne peuvent pas être massifs. Néanmoins, si la symétrie brisée n'est pas une symétrie exacte mais est une symétrie approchée, les bosons de Goldstone sont alors des pseudo-bosons de Goldstone et sont massifs [87]. Dire que la symétrie n'est qu'approchée revient à dire qu'un terme dans le lagrangien brise explicitement cette symétrie, mais que ce terme est petit :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{SSB} + \mathcal{L}_{ESB} \quad (\mathcal{L}_{ESB} \ll \mathcal{L}_{SSB}) \tag{5.88}$$

où $\mathcal{L}_{SSB}$ est invariant mais dont l'état fondamental brise spontanément la symétrie G vers un sous-groupe H et $\mathcal{L}_{ESB}$ qui brise explicitement la symétrie. Dans ce cas, H n'est plus exactement le groupe d'isotropie de l'état fondamental, et ce dernier n'est plus dégénéré. On parle

alors d'alignement du vide, situation illustrée en figure 5.8 dans le cas du modèle sigma linéaire présenté en 5.3.1. L'état obtenu par l'action de H sur l'état fondamental n'est plus équivalent et possède une énergie supérieure, ce qui fait apparaître le terme de masse. Plus le terme qui brise explicitement la symétrie est négligeable, plus la masse des pseudo-bosons de Goldstone est faible, on retrouve la limite des bosons de Goldstone sans masse lorsque ce terme est nul.

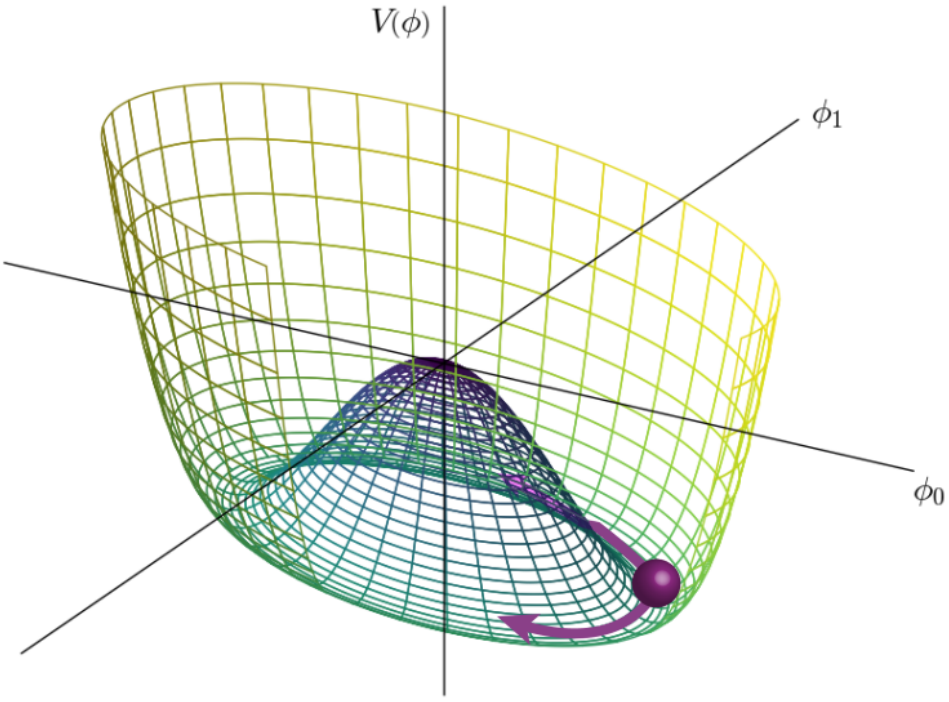

FIGURE 5.8 Illustration de l'effet d'un terme qui brise explicitement mais faiblement la symétrie dans le potentiel du modèle sigma linéaire présenté en 5.3.1 dans le cas simple de deux champs ϕ_0 et ϕ_1 : $V(\phi) = -\frac{1}{2}\mu^2\left[(\phi_0)^2 + (\phi_1)^2\right] + \frac{\lambda}{4}\left[(\phi_0)^2 + (\phi_1)^2\right]^2 - \alpha\phi_0$. Le niveau d'énergie de l'état fondamental n'est alors plus dégénéré, c'est le phénomène d'alignement du vide. Les rotations autour de O ne laissent plus l'état fondamental inchangé, et les champs de Goldstone acquièrent une masse.

Dans le cas du branon, si la symétrie brisée par la présence de la brane n'est pas exacte, alors les symétries brisées par la présence de la brane ne sont des isométries de K_d que de manière approchée. En d'autres termes, la décomposition $G(\mathcal{M}_D) = G(\mathcal{M}_4) \times G(K_d)$ n'est plus exacte et on ne peut plus supposer que $g_{\mu\nu}$ ne dépend que de x et γ_{mn} ne dépend que de y. On perturbe alors $g_{\mu\nu}$ en introduisant une dépendance en y (introduire une dépendance en x de γ_{mn} ne fait pas apparaître de terme de masse pour le branon [88]) :

$$G_{MN}(x,y) = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu}(x,y) & 0 \\ 0 & \gamma_{mn}(y) \end{pmatrix} \tag{5.89}$$

Pour déterminer la masse des branons, on commence par chercher l'état fondamental pour la

position de la brane. Par souci de simplicité, on va se limiter à faire varier l'action de Nambu-Goto à l'ordre le plus bas :

$$\mathcal{S}_{NG}^{[0]} = -f^4 \int_{\mathcal{M}_4} d^4x \sqrt{-g\left(x, Y\left(x\right)\right)} \tag{5.90}$$

L'état fondamental de la brane est alors donné par l'équation dont $Y_0\left(x\right)$ est solution [85] :

$$\frac{\delta \mathcal{S}_{NG}^{[0]}}{\delta Y} = 0 \quad \Rightarrow \quad g^{\mu\nu}\partial_m g_{\mu\nu} = 0 \tag{5.91}$$

Une fois trouvé l'état fondamental de la brane, on peut développer la métrique $g_{\mu\nu}$ autour de ce dernier :

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}\left(x, Y\left(x\right)\right) = {} & g_{\mu\nu}\left(x, Y_o\left(x\right)\right) + \partial_m g_{\mu\nu}\left(x, Y_0\left(x\right)\right)\left(Y^m\left(x\right) - Y_0^m\left(x\right)\right) \\ & + \frac{1}{2}\partial_m\partial_n g_{\mu\nu}\left(x, Y_0\left(x\right)\right)\left(Y^m\left(x\right) - Y_0^m\left(x\right)\right)\left(Y^n\left(x\right) - Y_0^n\left(x\right)\right) + ... \end{aligned} \tag{5.92}$$

Si l'on injecte ce développement de $g_{\mu\nu}$ dans l'expression de la métrique induite (5.85), et en utilisant (5.81), on obtient un développement de la métrique induite qui s'écrit sous la forme $\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \delta\tilde{g}_{\mu\nu}$:

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \frac{1}{\lambda f^2}\xi_\alpha^m \pi^\alpha \partial_m g_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_m\partial_n g_{\mu\nu}\frac{\xi_\alpha^m \xi_\beta^n}{\lambda^2 f^4}\pi^\alpha\pi^\beta + \frac{1}{f^4}h_{\alpha\beta}\partial_\mu\pi^\alpha\partial_\nu\pi^\beta \tag{5.93}$$

À ce niveau, on peut effectuer quelques simplifications de l'expression précédente. Premièrement, comme les branons sont des champs scalaires correctement normalisés, les δY^m sont orthogonaux au voisinage de Y_0, c'est-à-dire pour de petits π^α, et on peut faire l'approximation $h_{\alpha\beta} \approx \delta_{\alpha\beta}$. De plus, pour des expériences de physique des particules, il paraît raisonnable de négliger l'effet de l'interaction gravitationnelle dans l'état fondamental, c'est-à-dire considérer que $g_{\mu\nu}\left(x, Y_0\left(x\right)\right) = \eta_{\mu\nu}$. Dans ce cas, l'invariance de Lorentz dans $\mathcal{M}_D$ n'est vérifiée que si $\partial_m g_{\mu\nu}$ et $\partial_m\partial_n g_{\mu\nu}$ sont proportionnels à $\eta_{\mu\nu}$ [88]. Cela implique premièrement que l'on peut définir une matrice de masse $M_{\alpha\beta}$ pour les branons tels que :

$$\frac{1}{2}\partial_m\partial_n g_{\mu\nu}\frac{\xi_\alpha^m \xi_\beta^n}{\lambda^2 f^4}\pi^\alpha\pi^\beta = \frac{1}{4f^4}\eta_{\mu\nu}M_{\alpha\beta}^2\pi^\alpha\pi^\beta \tag{5.94}$$

De plus, (5.91) ne peut être vérifiée que si $\partial_m g_{\mu\nu}$ est identiquement nul. En appliquant ces simplifications à la métrique induite (5.93), on peut écrire :

$$\delta\tilde{g}_{\mu\nu} = \frac{1}{f^4}\delta_{\alpha\beta}\partial_\mu\pi^\alpha\partial_\nu\pi^\beta + \frac{1}{4f^4}\eta_{\mu\nu}M_{\alpha\beta}^2\pi^\alpha\pi^\beta \tag{5.95}$$

L'action pour les branons massifs est alors simplement [85] :

$$\mathcal{S}_{\text{Branon}} = -f^4 \int_{\mathcal{M}_4} d^4x\sqrt{-g} - \frac{1}{2}\int_{\mathcal{M}_4} d^4x\sqrt{-g}\left[\delta_{\alpha\beta}\partial_\mu\pi^\alpha\partial^\mu\pi^\beta + M^2_{\alpha\beta}\pi^\alpha\pi^\beta\right] \tag{5.96}$$

Interaction avec le modèle standard

Pour étudier la modèle du branon dans des expériences de physique des particules, il est nécessaire de décrire les interactions entre les champs du modèle standard et les branons. Ces interactions sont obtenues à partir de l'action du modèle standard qui, puisque les champs du modèle standard sont confinés sur la brane, a la forme suivante :

$$\mathcal{S}_{SM} = \int d^4x\sqrt{-\tilde{g}}\mathcal{L}_{SM}\left(\tilde{g}_{\mu\nu}, \phi\right) \tag{5.97}$$

Il suffit alors de développer le terme de l'action autour de $g_{\mu\nu}$ en exprimant la métrique induite comme $\tilde{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \delta\tilde{g}_{\mu\nu}$:

$$\sqrt{-\tilde{g}}\mathcal{L}_{SM}\left(\tilde{g}_{\mu\nu}, \phi\right) = \sqrt{-g}\left[\mathcal{L}_{SM}\left(g_{\mu\nu}, \phi\right) + \frac{1}{2}\delta\tilde{g}_{\mu\nu}T^{\mu\nu}_{SM}\right] \tag{5.98}$$

où $T^{\mu\nu}_{SM}$ est le tenseur énergie-impulsion des champs du modèle standard défini par :

$$T^{\mu\nu}_{SM} = g^{\mu\nu}\mathcal{L}_{SM} + 2\frac{\delta\mathcal{L}_{SM}}{\delta g_{\mu\nu}} \tag{5.99}$$

En identifiant $\delta\tilde{g}_{\mu\nu}$ à l'aide de (5.95), on obtient le lagrangien pour le branon en interaction avec les particules du modèle standard [88] :

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{\text{Branon}-SM} = \int d^4x\sqrt{-g}\Big[&-f^4 + \mathcal{L}_{SM}\left(g_{\mu\nu}, \phi\right) - \frac{1}{2}\left(\delta_{\alpha\beta}\partial_\mu\pi^\alpha\partial^\mu\pi^\beta + M^2_{\alpha\beta}\pi^\alpha\pi^\beta\right)\\ &+\frac{1}{8f^4}\left(4\delta_{\alpha\beta}\partial_\mu\pi^\alpha\partial_\nu\pi^\beta + \eta_{\mu\nu}M^2_{\alpha\beta}\pi^\alpha\pi^\beta\right)T^{\mu\nu}_{SM}\Big]\end{aligned} \tag{5.100}$$

Il est intéressant de constater que les branons interagissent avec toutes les particules du modèle standard à travers leur tenseur énergie-impulsion, interaction qui peut rappeller celle entre le graviton et le modèle standard. Cette interaction a une constante de couplage en $1/f^4$, qui peut être très faible selon la valeur de f. Par ailleurs, contrairement au graviton, les branons interagissent toujours par paire avec les particules du modèle standard ce qui en fait des particules stables. Les branons constituent donc un exemple de WIMP, décrits dans la partie 5.1.3,

et peuvent être détectés de manière indirecte, directe ou bien par leur production en collisionneur. L'objectif pour cette thèse est de détecter les branons, ou à défaut de contraindre les paramètres du modèle, à l'aide des données expérimentales de l'expérience CMS. Cette analyse sera présentée au chapitre 7.

Afin de décrire les interactions entre les branons et les particules du modèle standard, il reste à exprimer le tenseur énergie-impulsion pour les différents constituants à partir de (5.99) [88] :

1. **Higgs :**
   Le lagrangien pour le champ de Higgs, qui est un champ scalaire complexe, est donné par :
   $$\mathcal{L}_H = -\left(D_\mu\Phi\right)^\dagger\left(D^\mu\Phi\right) + \mu^2\Phi^\dagger\Phi - \frac{\lambda}{2}\left(\Phi^\dagger\Phi\right)^2 \tag{5.101}$$
   avec D_μ la dérivée covariante définie en (1.66). Le tenseur énergie-impulsion correspondant est alors :
   $$\begin{aligned} T_H^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu}&\left(-\left(D_\rho\Phi\right)^\dagger\left(D^\rho\Phi\right) + \mu^2\Phi^\dagger\Phi - \frac{\lambda}{2}\left(\Phi^\dagger\Phi\right)^2\right) \\ &- \left(D^\mu\Phi\right)^\dagger\left(D^\nu\Phi\right) - \left(D^\nu\Phi\right)^\dagger\left(D^\mu\Phi\right) \end{aligned} \tag{5.102}$$

2. **Fermions :**
   Le lagrangien pour les fermions est le lagrangien de Dirac pour des fermions sans masse, le terme de masse provenant de l'interaction avec le boson de Higgs à travers le lagrangien de Yukawa $\mathcal{L}_{\text{Yuk}} \propto \bar{\psi}\Phi\psi$:
   $$\mathcal{L}_f = -i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi + \mathcal{L}_{\text{Yuk}} \tag{5.103}$$
   Le tenseur énergie-impulsion est donné par :
   $$\begin{aligned} T_f^{\mu\nu} = &-\frac{i}{4}\left[\bar{\psi}\left(\gamma^\mu D^\nu + \gamma^\nu D^\mu\right)\psi - \left(D^\nu\bar{\psi}\gamma^\mu + D^\mu\bar{\psi}\gamma^\nu\right)\psi\right] \\ &+\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\left[-i\left(\bar{\psi}\gamma^\rho D_\rho - D_\rho\bar{\psi}\gamma^\rho\right)\psi + 2\mathcal{L}_{\text{Yuk}}\right] \end{aligned} \tag{5.104}$$

3. **Bosons vecteurs :**
   Le lagrangien pour les bosons de jauge est le lagrangien de Yang-Mills, auquel on ajoute le lagrangien de Fadeev-Popov [89] qui prend en compte les termes fantômes et les termes qui fixent la jauge :
   $$\mathcal{L}_{VB} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{FP} \tag{5.105}$$
   Le tenseur énergie-impulsion correspondant est donné par :
   $$T_{VB}^{\mu\nu} = -F_{\rho\sigma}F_{\lambda\theta}\left(\eta^{\sigma\lambda}\eta^{\rho\mu}\eta^{\theta\nu} + \frac{1}{4}\eta^{\rho\lambda}\eta^{\sigma\theta}\eta^{\mu\nu}\right) + T_{FP}^{\mu\nu} \tag{5.106}$$

5.3.3 État de la recherche en 2015

Au début de ma thèse, en octobre 2015, le modèle du branon avait déjà été étudié. Ces études ont permis de mettre des contraintes sur les valeurs possibles des paramètres du modèle. Ces recherches de branons se placent à nombre de branons N fixé, les paramètres libres sont donc la tension de la brane et la masse du branon (f, M_π). Nous verrons cependant au chapitre 7 que cela ne retire rien à la généralité de l'étude. Les contraintes dans l'espace des paramètres du modèle du branon ont été dérivées à partir de différentes sondes. Premièrement, en utilisant des données qui proviennent d'expériences sur collisionneurs dont la meilleure contrainte, obtenue à l'aide des données du Run I de CMS [90], est présentée en figure 5.9. Des contraintes ont également pu être mises grâce à des expériences de détection directe [91] (voir figure 5.10).

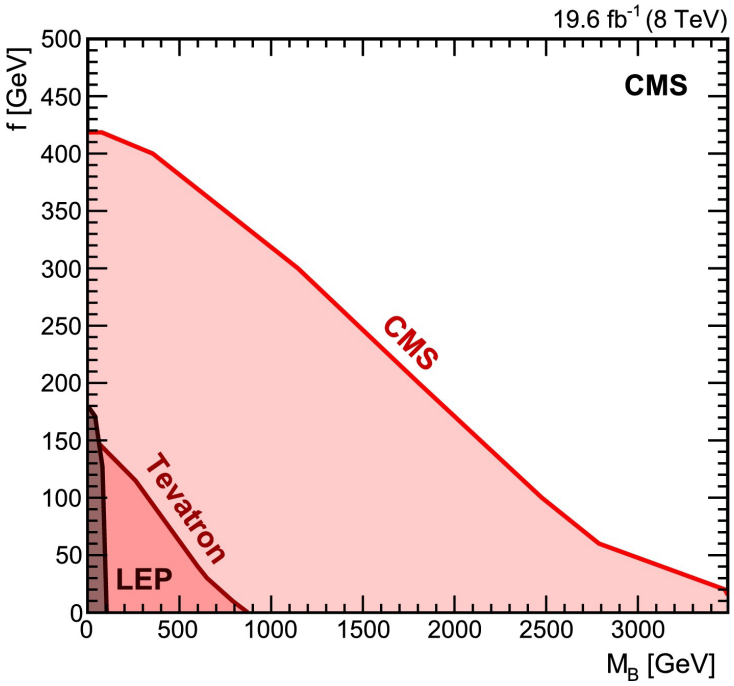

FIGURE 5.9 Contraintes dans l'espace des paramètres du modèle du branon (f, M_π) pour un seul champ de branon $N = 1$. Les zones colorées sont exclues par les données d'expériences sur collisionneur (CMS [90], Tevatron [92], LEP [93]). Les contraintes du LEP et de CMS proviennent d'études effectuées dans le canal de production mono-photon (pour lequel l'état final est composé d'un photon et d'énergie manquante) et celles du Tevatron d'études effectuées dans les canaux mono-photon et mono-jet (l'état final est alors composé d'un jet de hadrons et d'énergie manquante).

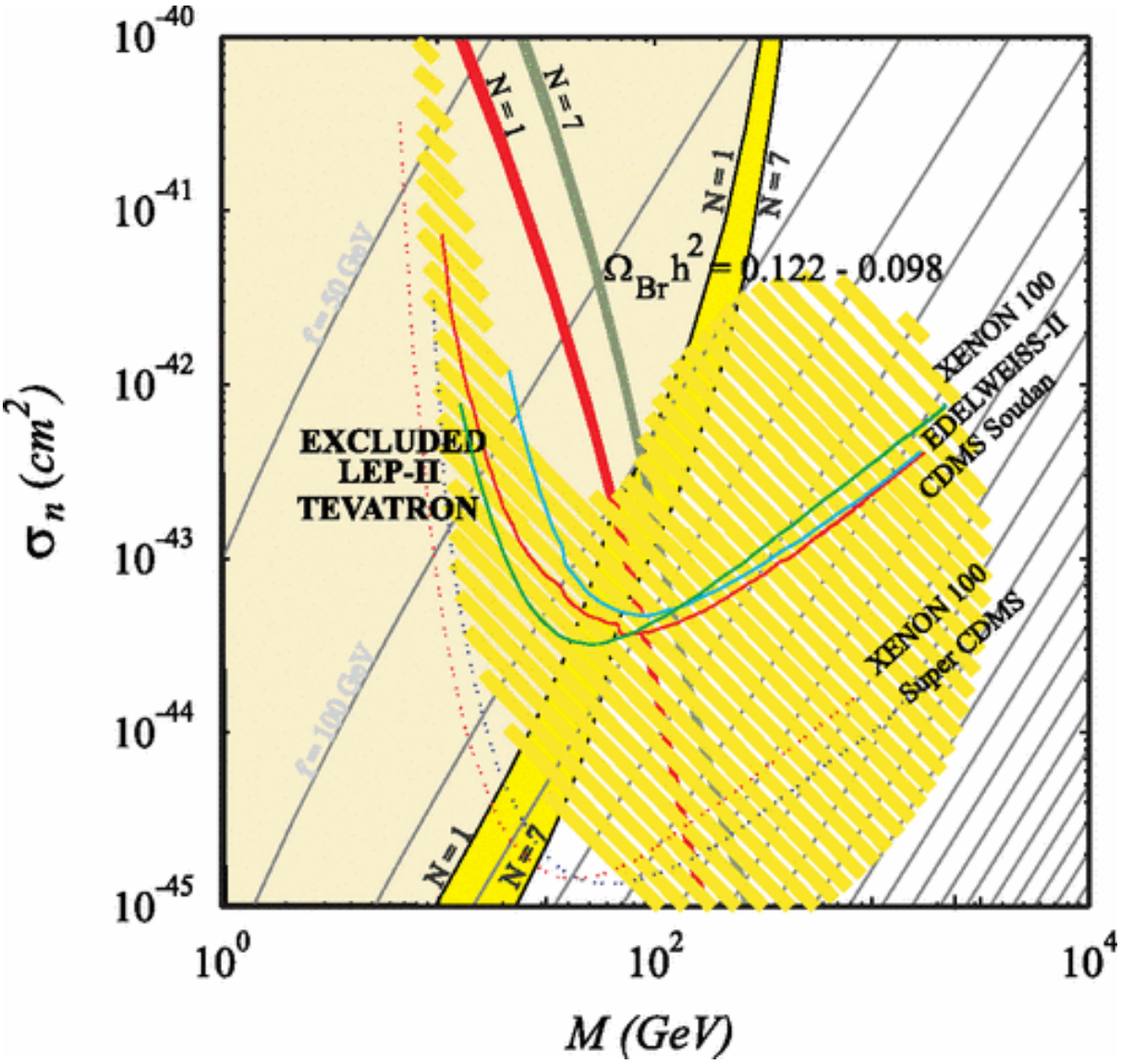

FIGURE 5.10 Section efficace de diffusion élastique de N branons sur des nucléons σ_n en fonction de la masse des branons tirée de [91]. Les deux lignes épaisses rouge et verte correspondent aux zones favorisées pour que les branons expliquent la totalité de la matière noire froide. La région jaune pâle à gauche correspond à l'espace des paramètres exclu par les expériences en collisioneur LEP [93] et Tevatron [92]. Les lignes pleines fines représentent les limites sur la section-efficace spin-indépendante venant des expériences XENON100 [94], EDELWEISS-II [95] et CDMS [96]. La région hachurée en jaune correspond à l'espace des paramètres favorisé par les évènements détéctés par CDMS-II [96], mais exclus par les résultats de Super-CDMS [97]. Les lignes grises diagonales indiquent les courbes de tension de brane f constante avec un pas de 50 GeV et peuvent être utilisées pour comparer ces limites avec celle décrite par la figure 5.9. Celle-ci était, au début de ma thèse, la limite la plus contraignante dans l'espace des paramètres du modèle du branon.

Bibliographie

[1] Howard E. Haber. Introductory low-energy supersymmetry. In *Proceedings, Theoretical Advanced Study Institute (TASI 92) : From Black Holes and Strings to Particles : Boulder, USA, June 1-26, 1992*, pages 589–686, 1993.

[2] R.D. Peccei and Helen R. Quinn. CP Conservation in the Presence of Pseudoparticles. *Phys. Rev. Lett.*, 38 :1440–1443, Jun 1977.

[3] F. Zwicky. Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln. *Helv. Phys. Acta*, 6 :110–127, 1933. [Gen. Rel. Grav.41,207(2009)].

[4] The United States Naval Observatory and Her Majesty's Nautical Almanac Office. *The Astronomical Almanac for the year 2018*. Government Publishing Office, 2018.

[5] Vera C. Rubin and W. Kent Ford, Jr. Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions. *Astrophys. J.*, 159 :379–403, 1970.

[6] Vera C. Rubin, W. Kent Ford, Jr., and Norbert Thonnard. Extended rotation curves of high-luminosity spiral galaxies. IV. Systematic dynamical properties, Sa through Sc. *Astrophys. J.*, 225 :L107–L111, 1978.

[7] M. Milgrom. A Modification of the Newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis. *Astrophys. J.*, 270 :365–370, 1983.

[8] Maxim Markevitch, A. H. Gonzalez, D. Clowe, A. Vikhlinin, L. David, W. Forman, C. Jones, S. Murray, and W. Tucker. Direct constraints on the dark matter self-interaction cross-section from the merging galaxy cluster 1E0657-56. *Astrophys. J.*, 606 :819–824, 2004.

[9] Marusa Bradac et al. Revealing the properties of dark matter in the merging cluster MACSJ0025.4-1222. *Astrophys. J.*, 687 :959, 2008.

[10] Planck Collaboration. Planck 2015 results. XX. Constraints on inflation. *Astron. Astrophys.*, 594 :A20, 2016.

[11] Wayne Hu and Naoshi Sugiyama. Anisotropies in the cosmic microwave background : An Analytic approach. *Astrophys. J.*, 444 :489–506, 1995.

[12] Planck Collaboration. Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters. *Astron. Astrophys.*, 594 :A13, 2016.

[13] Xiao-dong Xu, Bin Wang, and Pengjie Zhang. Testing the tensor-vector-scalar Theory with the latest cosmological observations. *Phys. Rev.*, D92(8) :083505, 2015.

[14] J. I. Read. The Local Dark Matter Density. *J. Phys.*, G41 :063101, 2014.

[15] Miguel Zumalacarregui and Uros Seljak. Limits on stellar-mass compact objects as dark matter from gravitational lensing of type Ia supernovae. *Phys. Rev. Lett.*, 121(14) :141101, 2018.

[16] V. Lora, Juan Magana, Argelia Bernal, F. J. Sanchez-Salcedo, and E. K. Grebel. On the mass of ultra-light bosonic dark matter from galactic dynamics. *JCAP*, 1202 :011, 2012.

[17] Lisa Randall, Jakub Scholtz, and James Unwin. Cores in Dwarf Galaxies from Fermi Repulsion. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 467(2) :1515–1525, 2017.

[18] Chiara Di Paolo, Fabrizio Nesti, and Francesco L. Villante. Phase space mass bound for fermionic dark matter from dwarf spheroidal galaxies. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 475(4) :5385–5397, 2018.

[19] Julien Baur et al. Constraints from Ly-α forests on non-thermal dark matter including resonantly-produced sterile neutrinos. *JCAP*, 1712(12) :013, 2017.

[20] Jean-Philippe Uzan and Patrick Peter. *Cosmologie Primordiale*. Belin, 2012.

[21] Edward W. Kolb and Michael S. Turner. *The Early Universe*, volume 69. 1990.

[22] Paolo Gondolo and Graciela Gelmini. Cosmic abundances of stable particles : Improved analysis. *Nucl. Phys.*, B360 :145–179, 1991.

[23] Theodor Kaluza. Zum Unitätsproblem der Physik. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, 1921 :966–972, 1921.

[24] Oskar Klein. Quantum Theory and Five-Dimensional Theory of Relativity. (In German and English). *Z. Phys.*, 37 :895–906, 1926. [,76(1926)].

[25] Hans Peter Nilles. Supersymmetry, Supergravity and Particle Physics. *Phys. Rept.*, 110 :1–162, 1984.

[26] P. Van Nieuwenhuizen. Supergravity. In *Einstein Centennial Symposium Princeton, New Jersey, March 4-9, 1979*, pages 444–452, 1979.

[27] Julius Wess and Jonathan Bagger. *Supersymmetry and supergravity*. 1992.

[28] Daniel Z. Freedman and Antoine Van Proeyen. *Supergravity*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 2012.

[29] Michael B. Green, John H. Schwarz, and Edward Witten. *Superstring Theory Vol. 1*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2012.

[30] Michael B. Green, John H. Schwarz, and Edward Witten. *Superstring Theory Vol. 2*. 1988.

[31] Joseph Polchinski. *String theory. Vol. 1 : An introduction to the bosonic string*. Cambridge University Press, 2007.

[32] Joseph Polchinski. *String theory. Vol. 2 : Superstring theory and beyond*. Cambridge University Press, 2007.

[33] Barton Zwiebach. *A first course in string theory*. Cambridge University Press, 2006.

[34] D. Bailin and A. Love. *Supersymmetric gauge field theory and string theory*. 1994.

[35] Richard J. Szabo. BUSSTEPP lectures on string theory : An Introduction to string theory and D-brane dynamics. In *31st British Universities Summer School in Theoretical Elementary particle Physics (BUSSTEPP 2001) Manchester, England, August 28-September 12, 2001*, 2002.

[36] Nima Arkani-Hamed, Savas Dimopoulos, and G. R. Dvali. The Hierarchy problem and new dimensions at a millimeter. *Phys. Lett.*, B429 :263–272, 1998.

[37] Lisa Randall and Raman Sundrum. A Large mass hierarchy from a small extra dimension. *Phys. Rev. Lett.*, 83 :3370–3373, 1999.

[38] Lisa Randall and Raman Sundrum. An Alternative to compactification. *Phys. Rev. Lett.*, 83 :4690–4693, 1999.

[39] Yves Thiry. The equations of Kaluza's unified theory. *Compt. Rend. Hebd. Seances Acad. Sci.*, 226(3) :216–218, 1948. [Front. Phys.65,110(1987)].

[40] P. S. Wesson. *Space - Time - Matter : Modern Kaluza-Klein Theory*. World Scientific, 1999.

[41] J. M. Overduin and P. S. Wesson. Kaluza-Klein gravity. *Phys. Rept.*, 283 :303–380, 1997.

[42] K. R. Dienes. New directions for new dimensions : An introduction to Kaluza-Klein theory, large extra dimensions, and the brane world. In *Particle physics and cosmology : The quest for physics beyond the standard model(s). Proceedings, Theoretical Advanced Study Institute, TASI 2002, Boulder, USA, June 3-28, 2002*, pages 447–545, 2002.

[43] D. Bailin and A. Love. KALUZA-KLEIN THEORIES. *Rept. Prog. Phys.*, 50 :1087–1170, 1987.

[44] Edward Witten. FERMION QUANTUM NUMBERS IN KALUZA-KLEIN THEORY. 1983. [Conf. Proc.C8306011,227(1983)].

[45] Edward Witten. Search for a Realistic Kaluza-Klein Theory. *Nucl. Phys.*, B186 :412, 1981. [,29(1981)].

[46] W. Nahm. Supersymmetries and their Representations. *Nucl. Phys.*, B135 :149, 1978. [,7(1977)].

[47] C. M. Hull and P. K. Townsend. Unity of superstring dualities. *Nucl. Phys.*, B438 :109–137, 1995. [,236(1994)].

[48] P. K. Townsend. The eleven-dimensional supermembrane revisited. *Phys. Lett.*, B350 :184–187, 1995. [,265(1995)].

[49] M. J. Duff. Strong / weak coupling duality from the dual string. *Nucl. Phys.*, B442 :47–63, 1995.

[50] Edward Witten. String theory dynamics in various dimensions. *Nucl. Phys.*, B443 :85–126, 1995. [,333(1995)].

[51] Joseph Polchinski and Edward Witten. Evidence for heterotic - type I string duality. *Nucl. Phys.*, B460 :525–540, 1996.

[52] Petr Horava and Edward Witten. Heterotic and type I string dynamics from eleven-dimensions. *Nucl. Phys.*, B460 :506–524, 1996. [,397(1995)].

[53] Stefan Forste and Jan Louis. Duality in string theory. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 61A :3–22, 1998.

[54] Joseph Polchinski. Tasi lectures on D-branes. In *Fields, strings and duality. Proceedings, Summer School, Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics, TASI'96, Boulder, USA, June 2-28, 1996*, pages 293–356, 1996.

[55] Keith R. Dienes, Emilian Dudas, and Tony Gherghetta. Grand unification at intermediate mass scales through extra dimensions. *Nucl. Phys.*, B537 :47–108, 1999.

[56] Thomas Appelquist, Hsin-Chia Cheng, and Bogdan A. Dobrescu. Bounds on universal extra dimensions. *Phys. Rev.*, D64 :035002, 2001.

[57] Nicolas Deutschmann, Thomas Flacke, and Jong Soo Kim. Current LHC Constraints on Minimal Universal Extra Dimensions. *Phys. Lett.*, B771 :515–520, 2017.

[58] Geraldine Servant and Timothy M. P. Tait. Is the lightest Kaluza-Klein particle a viable dark matter candidate ? *Nucl. Phys.*, B650 :391–419, 2003.

[59] Gustavo Burdman, Bogdan A. Dobrescu, and Eduardo Ponton. Six-dimensional gauge theory on the chiral square. *JHEP*, 02 :033, 2006.

[60] Rabindra Nath Mohapatra and Abdel Perez-Lorenzana. Neutrino mass, proton decay and dark matter in TeV scale universal extra dimension models. *Phys. Rev.*, D67 :075015, 2003.

[61] Nobuhito Maru, Takaaki Nomura, Joe Sato, and Masato Yamanaka. The Universal Extra Dimensional Model with S**2/Z(2) extra-space. *Nucl. Phys.*, B830 :414–433, 2010.

[62] Kenji Nishiwaki, Kin-ya Oda, Naoya Okuda, and Ryoutaro Watanabe. A Bound on Universal Extra Dimension Models from up to 2fb^{-1} of LHC Data at 7TeV. *Phys. Lett.*, B707 :506–511, 2012.

[63] Giacomo Cacciapaglia, Aldo Deandrea, and Jeremie Llodra-Perez. A Dark Matter candidate from Lorentz Invariance in 6D. *JHEP*, 03 :083, 2010.

[64] Hideto Dohi and Kin-ya Oda. Universal Extra Dimensions on Real Projective Plane. *Phys. Lett.*, B692 :114–120, 2010.

[65] Bogdan A. Dobrescu and Erich Poppitz. Number of fermion generations derived from anomaly cancellation. *Phys. Rev. Lett.*, 87 :031801, 2001.

[66] Joseph Polchinski. Combinatorics of boundaries in string theory. *Phys. Rev.*, D50 :R6041–R6045, 1994.

[67] C. Bachas. D-brane dynamics. *Phys. Lett.*, B374 :37–42, 1996.

[68] Jin Dai, R. G. Leigh, and Joseph Polchinski. New Connections Between String Theories. *Mod. Phys. Lett.*, A4 :2073–2083, 1989.

[69] C. D. Hoyle et al. Sub-millimeter tests of the gravitational inverse-square law. *Phys. Rev.*, D70 :042004, 2004.

[70] D. J. Kapner et al. Tests of the gravitational inverse-square law below the dark-energy length scale. *Phys. Rev. Lett.*, 98 :021101, 2007.

[71] Jose A. R. Cembranos, Rafael L. Delgado, and Antonio Dobado. Brane-Worlds at the LHC : Branons and KK-gravitons. *Phys. Rev.*, D88 :075021, 2013.

[72] Paul A. M. Dirac. An Extensible model of the electron. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A268 :57–67, 1962.

[73] Gian F. Giudice, Riccardo Rattazzi, and James D. Wells. Quantum gravity and extra dimensions at high-energy colliders. *Nucl. Phys.*, B544 :3–38, 1999.

[74] Eugene A. Mirabelli, Maxim Perelstein, and Michael E. Peskin. Collider signatures of new large space dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 82 :2236–2239, 1999.

[75] Tao Han, Joseph D. Lykken, and Ren-Jie Zhang. On Kaluza-Klein states from large extra dimensions. *Phys. Rev.*, D59 :105006, 1999.

[76] CMS Collaboration. Search for new physics in final states with an energetic jet or a hadronically decaying W or Z boson and transverse momentum imbalance at $\sqrt{s} = 13$ TeV. 2017.

[77] Raman Sundrum. Effective field theory for a three-brane universe. *Phys. Rev.*, D59 :085009, 1999.

[78] Sidney R. Coleman, J. Wess, and Bruno Zumino. Structure of phenomenological Lagrangians. 1. *Phys. Rev.*, 177 :2239–2247, 1969.

[79] Curtis G. Callan, Jr., Sidney R. Coleman, J. Wess, and Bruno Zumino. Structure of phenomenological Lagrangians. 2. *Phys. Rev.*, 177 :2247–2250, 1969.

[80] Masako Bando, Taichiro Kugo, and Koichi Yamawaki. Nonlinear Realization and Hidden Local Symmetries. *Phys. Rept.*, 164 :217–314, 1988.

[81] Radomir Budinek. *Non-supersymmetric extensions of the standard model of electroweak interactions*. PhD thesis, Charles University in Prague, 2004.

[82] Steven Weinberg. *The Quantum Theory of Fields*. Number vol.2. Cambridge University Press, 1995.

[83] J. Goldstone. Field Theories with Superconductor Solutions. *Nuovo Cim.*, 19 :154–164, 1961.

[84] Peter W. Higgs. Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons. *Phys. Rev. Lett.*, 13 :508–509, 1964. [,160(1964)].

[85] Antonio Dobado and Antonio Lopez Maroto. The Dynamics of the Goldstone bosons on the brane. *Nucl. Phys.*, B592 :203–218, 2001.

[86] Jeffrey Goldstone, Abdus Salam, and Steven Weinberg. Broken Symmetries. *Phys. Rev.*, 127 :965–970, 1962.

[87] C. P. Burgess. Goldstone and pseudoGoldstone bosons in nuclear, particle and condensed matter physics. *Phys. Rept.*, 330 :193–261, 2000.

[88] J. Alcaraz, J. A. R. Cembranos, A. Dobado, and Antonio Lopez Maroto. Limits on the brane fluctuations mass and on the brane tension scale from electron positron colliders. *Phys. Rev.*, D67 :075010, 2003.

[89] L. D. Faddeev and V. N. Popov. Feynman Diagrams for the Yang-Mills Field. *Phys. Lett.*, B25 :29–30, 1967. [,325(1967)].

[90] Vardan Khachatryan et al. Search for new phenomena in monophoton final states in proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 8$ TeV. *Phys. Lett.*, B755 :102–124, 2016.

[91] Jose A. R. Cembranos, J. Lorenzo Diaz-Cruz, and Lilian Prado. Impact of DM direct searches and the LHC analyses on branon phenomenology. *Phys. Rev.*, D84 :083522, 2011.

[92] J. A. R. Cembranos, A. Dobado, and Antonio Lopez Maroto. Branon search in hadronic colliders. *Phys. Rev.*, D70 :096001, 2004.

[93] L3 Collaboration. Search for branons at LEP. *Phys. Lett.*, B597 :145–154, 2004.

[94] E. Aprile et al. Dark Matter Results from 100 Live Days of XENON100 Data. *Phys. Rev. Lett.*, 107 :131302, 2011.

[95] EDELWEISS Collaboration. Final results of the EDELWEISS-II WIMP search using a 4-kg array of cryogenic germanium detectors with interleaved electrodes. *Phys. Lett.*, B702 :329–335, 2011.

[96] CDMS-II Collaboration. Dark Matter Search Results from the CDMS II Experiment. *Science*, 327 :1619–1621, 2010.

[97] SuperCDMS Collaboration. Search for Low-Mass Weakly Interacting Massive Particles with SuperCDMS. *Phys. Rev. Lett.*, 112(24) :241302, 2014.

Chapitre 6

Le détecteur CMS au LHC

Sommaire

6.1 Le Grand Collisionneur de Hadrons . . . 230
6.1.1 Caractéristiques principales . . . 230
6.1.2 Collisions proton-proton au LHC . . . 232
6.2 Le Solénoide Compact à Muons . . . 234
6.2.1 Géométrie de CMS . . . 234
6.2.2 Les sous-systèmes . . . 237
6.2.3 Chaîne d'acquisition . . . 243
6.3 Reconstruction des objets physiques . . . 243
6.3.1 Algorithme de flux de particules . . . 244
6.3.2 Reconstruction des photons et des électrons . . . 244
6.3.3 Reconstruction des muons . . . 245
6.3.4 Reconstruction des leptons tau . . . 246
6.3.5 Reconstruction des jets . . . 246
6.3.6 Reconstruction de l'Énergie Transverse Manquante . . . 251
Bibliographie . . . 252

Le grand collisionneur de hadrons, ou LHC, est l'accélérateur de particules le plus puissant construit à ce jour. Réalisé par l'Organisation Européenne pour la Recherche Nucléaire (CERN) à la frontière franco-suisse, son énergie au centre de masse est plus de six fois plus importante qu'au Tevatron du Fermilab, ce qui amène son lot de défis technologiques. Cette augmentation d'énergie permet également d'espérer observer des phénomènes alors inconnus, et notamment de découvrir le boson de Higgs qui constituait son objectif initial. En ce sens, le LHC constitue une réussite car le boson de Higgs a été découvert en 2012 par les collaborations CMS [1] et ATLAS [2], ce qui a valu le prix Nobel en 2013 à Peter Higgs et François Englert. Le LHC est aujourd'hui utilisé pour effectuer des mesures de précisions dans le secteur du Higgs, mais également pour la recherche de nouvelle physique à l'échelle du TeV. Il est donc naturel que la

recherche de branons, qui se place dans ce cadre, se fasse auprès d'une des deux expériences généralistes du LHC. Les données expérimentales utilisées dans cette thèse pour la recherche de branons sont celles collectées par le détecteur CMS.

Ce chapitre commencera par présenter les caractéristiques techniques principales du LHC dans la section 6.1. Puis il décrira plus en détail le détecteur CMS dans la section 6.2. Enfin, seront exposés dans la section 6.3 les principaux algorithmes de reconstruction des objets physiques utiles à la recherche de branon dans CMS.

6.1 Le Grand Collisionneur de Hadrons

Les principales caractéristiques de fonctionnement du LHC sont données dans le rapport technique [3].

6.1.1 Caractéristiques principales

Le LHC est un collisionneur de particules circulaire dont l'énergie nominale dans le centre de masse est 14 TeV. Pour accélérer des particules, celles-ci doivent être chargées électriquement. Afin d'atteindre de tels énergies sans trop en perdre par rayonnement synchrotron, ces particules doivent être lourdes et le rayon de courbure de l'accélérateur doit être grand. Ainsi, le LHC fait 27 km de circonférence, et il accélère des protons plutôt que des électrons. Il peut également accélérer des ions lourds tels que des ions plombs avec une énergie dans le centre de masse de 2.76 TeV par nucléon.

Pour obtenir une énergie de collision proton-proton de 14 TeV, deux faisceaux de protons, constitués de plusieurs paquets de protons, sont accélérés en sens opposés. Les protons qui interagissent ont alors une énergie de 7 TeV chacun lors de la collision. Le LHC n'est que la dernière étape d'une chaîne d'accélération qui démarre par l'ionisation d'un gaz d'hydrogène. Les protons sont alors introduits dans l'accélérateur linéaire LINAC2 qui les amène à une énergie de 50 MeV. En sortie du LINAC2, les protons arrivent dans le Proton Synchrotron Booster puis dans le Proton Synchrotron et dans le Super Proton Synchrotron où ils sont amenés à une énergie de 450 GeV et peuvent enfin entrer dans le LHC. Les protons sont accélérés dans l'anneau jusqu'à 7 TeV par 16 cavités radiofréquence en environ 20 minutes. Les protons suivent une trajectoire circulaire grâce aux 1232 dipôles et 392 quadrupôles magnétiques supraconducteurs, refroidis à 1.9K par environ 96 tonnes d'hélium liquide, installés le long de l'anneau accélérateur.

Les collisions ont lieu aux quatres points de l'accélérateur où les deux faisceaux de protons se croisent, qui correspondent aux lieus des quatres expériences du LHC (voir la figure 6.1) :

— **ATLAS (A Toroidal LHC ApparatuS) :** il s'agit d'un détecteur généraliste à géométrie cylindrique autour des faisceaux de protons. Il est conçu pour un large éventail de recherches, mais optimisé pour la recherche du boson de Higgs. Il se situe au point d'interaction des faisceaux numéro 1 ;

— **ALICE (A Large Ion Collider Experiment) :** il est consacré à l'étude du plasma de quark et gluons lors de la collision d'ions lourds. Il est également à géométrie cylindrique et se situe au point d'interaction numéro 2 ;

— **CMS (Compact Muon Solenoid) :** est un détecteur généraliste à géométrie cylindrique dont l'objectif est similaire à celui d'ATLAS, mais dont les solutions technologiques retenues sont très différentes. Il est situé au point d'interaction numéro 5, le plus éloigné de la zone d'injection des protons ;

— **LHCb (Large Hadron Collider beauty) :** ce détecteur a été conçu pour l'étude approfondie du quark b et de ses mésons. Il a la particularité de ne pas entourer entièrement le point de collision, mais il s'étend vers l'avant pour détecter les mésons b dont on sait qu'ils sont peu déviés par rapport aux faisceaux et qu'ils ont une durée de vie longue. LHCb se situe au point d'interaction numéro 8.

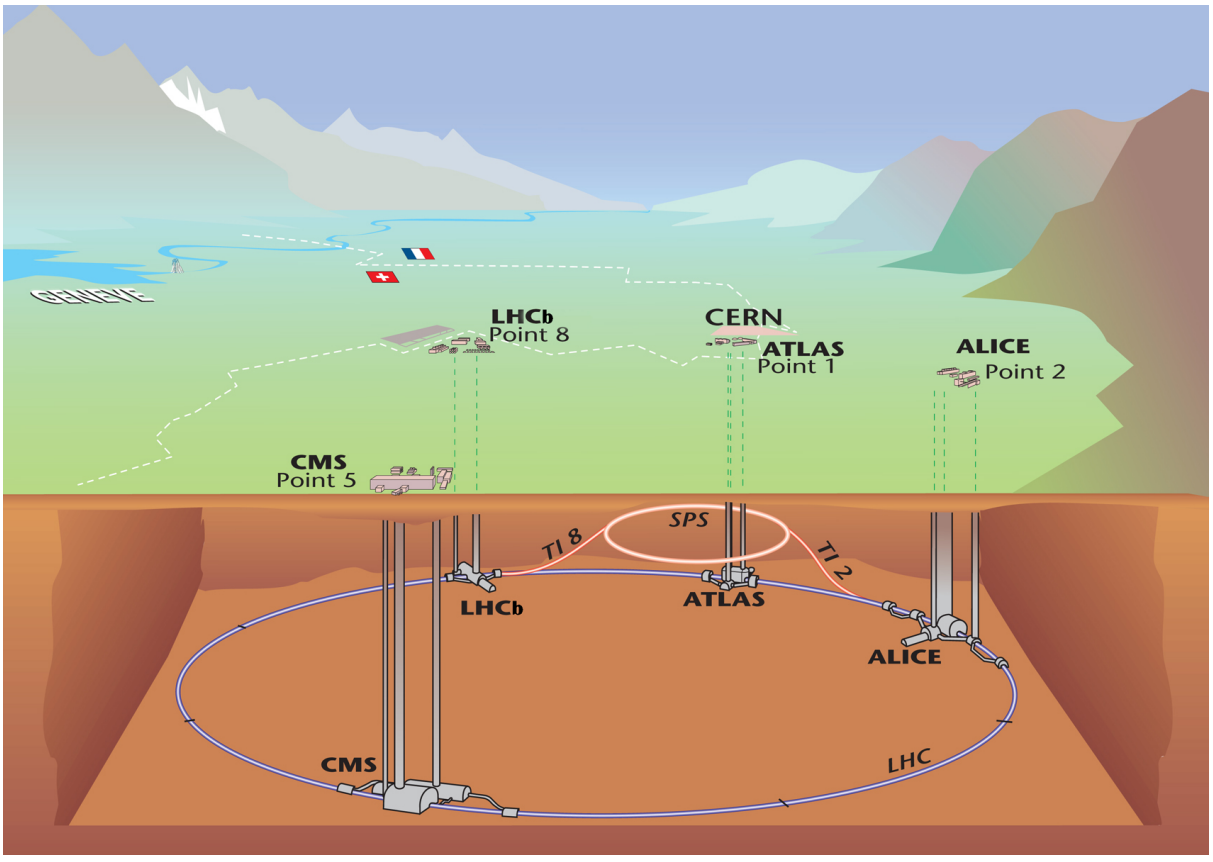

FIGURE 6.1 Illustration de la configuration géographique du SPS, des deux injecteurs TI2 et TI8 qui font la liaison entre le SPS et le LHC, du LHC et de ses quatres détecteurs principaux.

6.1.2 Collisions proton-proton au LHC

Comme nous l'avons évoqué précédemment, des faisceaux de protons circulent avant de se croiser pour entraîner des collisions entre protons à une énergie nominale dans le centre de masse $\sqrt{s} = 14$ TeV. Cependant, le LHC n'a pas encore atteint son énergie nominale, et les données ont été récoltées à 7 TeV en 2010 et 2011, à 8 TeV en 2012 et à 13 TeV à partir de 2016.

Cependant, ce sont les protons qui ont une énergie de 6.5 TeV, pas leurs constituants (trois quarks de valence et une mer de quarks et de gluons) appelés partons. Or, les particules impliquées dans les interactions lors des collisions sont les partons. Chaque parton porte une fraction $x \in [0, 1]$ de l'impulsion du proton, et la distribution de probabilité pour cette fraction d'impulsion est donnée par les fonctions de distribution de partons (PDF), dont un exemple est donné dans la figure 6.2.

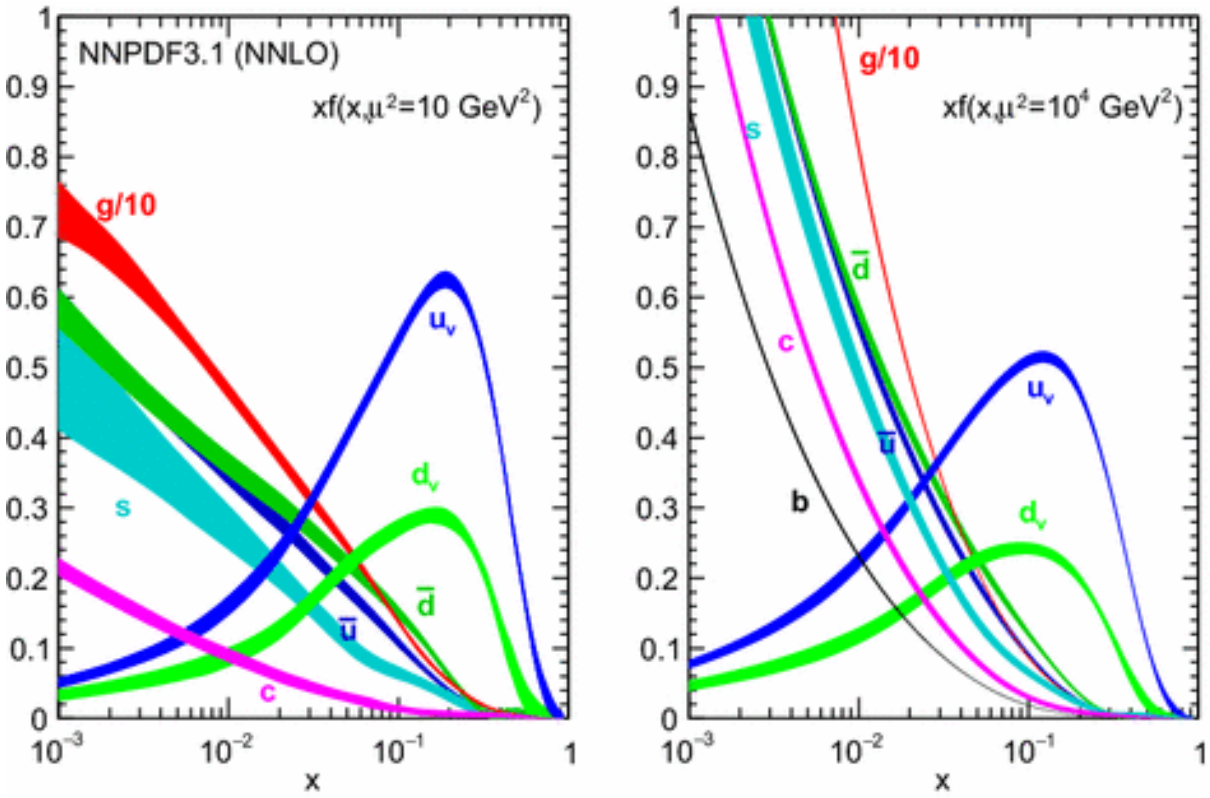

FIGURE 6.2 Fonctions de distribution de partons NNPDF3.1 [4] qui décrivent la probabilité pour un parton donné d'avoir une fraction x de l'impulsion du proton. Ces fonctions sont évaluées à une échelle d'énergie μ^2 donnée : $\mu^2 = 10$ GeV^2 pour la figure de gauche et $\mu^2 = 10^4$ GeV^2 pour la figure de droite. On constate que le quark u a une forte probabilité de porter 2/3 de l'impulsion du proton, et le quark d d'en porter 1/3, ce qui est compatible avec la vision du proton comme d'un état lié de trois quarks uud.

Comme les partons ne portent qu'une fraction de l'impulsion du proton, les interactions lors de la collision des protons ont en général une énergie plus faible dans leur centre de masse,

de l'ordre de $\sqrt{\hat{s}} = \sqrt{x_1 x_2 s} \sim 1 - 2$ TeV. Ainsi, on peut espérer produire des particules inconnues au LHC tant que leurs masses n'excède pas quelques TeV. Pour autant, cela ne signifie pas qu'une particule dont la masse est inférieure à la limite de production au LHC y sera forcément produite. En effet, certaines interactions sont plus fréquentes que d'autres à une énergie donnée, ce qui est décrit par la section efficace σ. La section efficace détermine la probabilité d'interaction pour une réaction donnée en unité de surface, souvent exprimée en barn (1 b $= 10^{-28}$ cm^2). Le nombre d'évènements N pour un processus donné est alors proportionnel à la section efficace du processus σ selon la relation :

$$N = \sigma \int \mathcal{L}(t)\, dt = \sigma L \tag{6.1}$$

où on a défini la luminosité instantanée $\mathcal{L}(t)$ et la luminosité intégrée L mesurée en b^{-1}. La luminosité instantanée correspond au taux d'interactions proton-proton par unité de surface par unité de temps, et peut être calculée à partir des performances du collisionneur :

$$\mathcal{L} \propto N_p^2 N_b f_{rev} \tag{6.2}$$

où N_p est le nombre de protons par paquets, N_b le nombre de paquets et f_{rev} la fréquence de révolution des paquets autour de l'anneau. Pour le LHC en fonctionnement nominal, chaque faisceau contient environ 2800 paquets de protons, qui sont eux-même composés de quelques 10^{11} protons, et les paquets effectuent un tour du LHC à une fréquence $f_{rev} = 11$ kHz. La luminosité dépend également de paramètres liés à la géométrie des paquets. La figure 6.3 décrit l'évolution de la luminosité intégrée pour les collisions proton-proton délivrée par le LHC dans le détecteur CMS pendant l'année 2016.

La luminosité est donc un paramètre crucial que les opérateurs peuvent contrôler pour améliorer le potentiel de découverte de processus rares, dont la section efficace est faible. Cependant, l'augmentation de la luminosité s'accompagne d'un effet secondaire malheureux : l'augmentation de l'effet d'empilement. Les évènements d'empilement sont des interactions proton-proton qui ont lieu lors du croisement de deux paquets de protons mais qui sont moins énergétiques que l'interaction principale et qui n'ont donc pas d'intérêt physique. Il est donc nécessaire de distinguer l'évènement principal et ses propriétés des évènements d'empilement, ce qui est d'autant plus délicat que le nombre de tels évènements est important. La figure 6.4 décrit la distribution du nombre d'évènements d'empilement par croisement de paquets de protons observé en 2016 dans le détecteur CMS, avec une moyenne $\mu = 27$ évènements d'empilement. Avec un tel nombre d'évènements d'empilement, la très importante identification de l'interaction principale, et notamment de la position de son vertex, devient difficile.

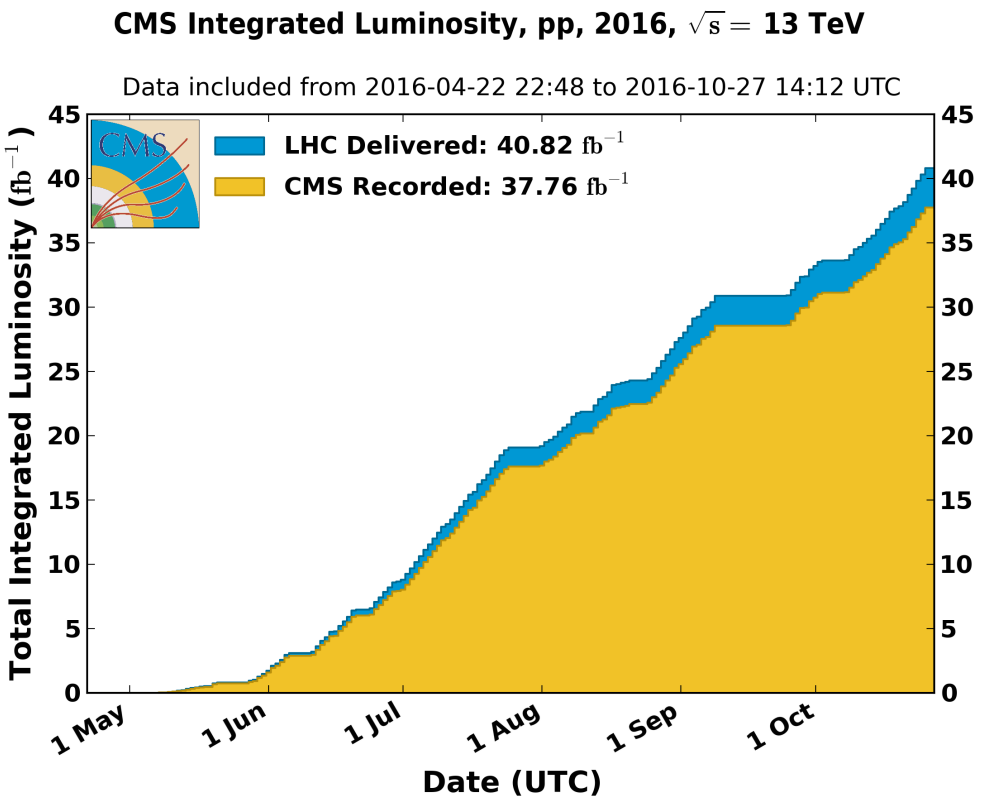

FIGURE 6.3 Évolution de la luminosité intégrée délivrée par le LHC au détecteur CMS durant la phase de prise de données de l'année 2016. Notons qu'une luminosité de 25 fb^{-1} était initialement prévue pour cette année de prise de données.

6.2 Le Solénoide Compact à Muons

Après avoir décrit les caractéristiques principales du LHC, nous allons nous intéresser plus spécifiquement au détecteur CMS, dont j'ai utilisé les données expérimentales pour la recherche de branons. CMS est un détecteur généraliste, de même qu'ATLAS, et doit à ce titre être capable de détecter le maximum de particules de tous types présentes dans l'état final. Nous allons ici présenter les solutions techniques retenues par la collaboration CMS pour atteindre cet objectif, dont une grande partie des détails est décrite dans [5].

6.2.1 Géométrie de CMS

Afin de manquer le moins possible de particules de l'état final d'une interaction ayant lieu lors d'une collision de protons, il semble évident de choisir une géométrie qui entoure au mieux le point de collision. Le détecteur CMS a ainsi une géométrie cylindrique de 21.5m de long et 16m de diamètre. L'aimant supraconducteur, qui est un constituant primordial du détecteur,

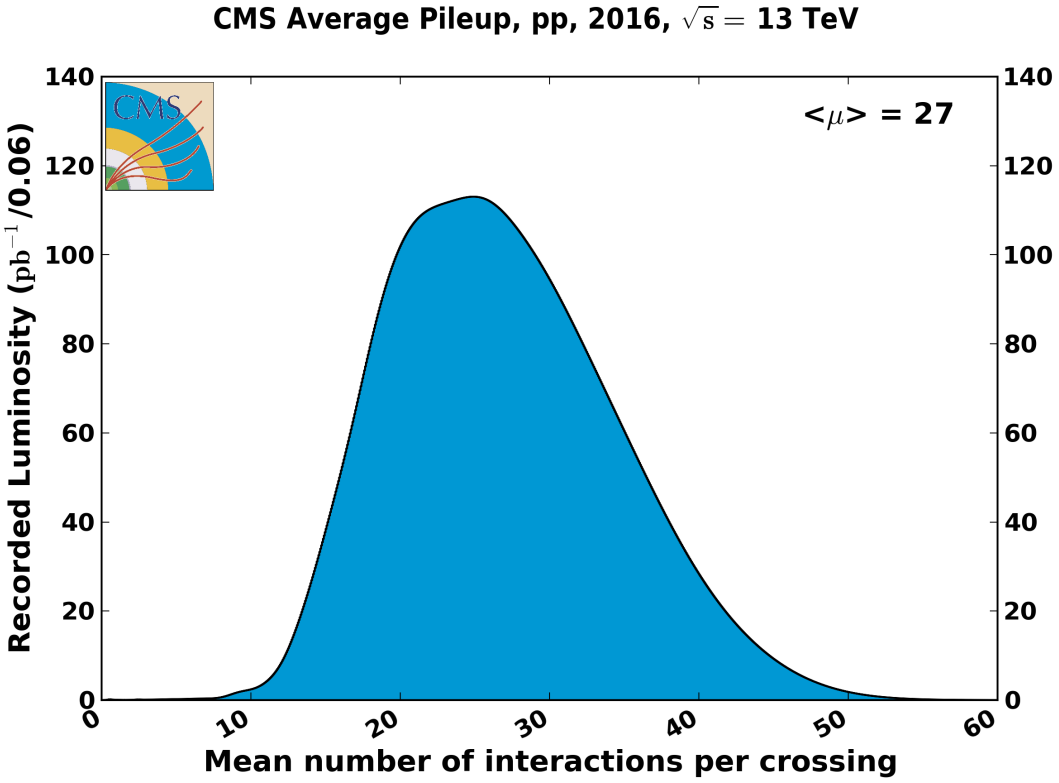

FIGURE 6.4 Distribution du nombre d'évènements d'empilement par croisement de paquets de protons observés dans le détecteur durant la prise de données de l'année 2016, en unité de luminosité intégrée.

fait quant à lui 13m de long et 6m de diamètre. Il fournit un champ magnétique de 3.8 T à l'intérieur du solénoide et 1.9 T à l'extérieur. Ainsi, CMS est composé d'une partie centrale autour du solénoide, appelé le "tonneau", complétée par une partie externe qui comprend les deux "bouchons" et les deux détecteurs à l'avant (un de chaque côté). La géométrie du détecteur et de ses sous-systèmes est illustrée par la figure 6.5.

On associe un repère cartésien au détecteur pour la description des quantités cinématiques. L'origine du repère correspond au point de collision des deux faisceaux (qui est également le centre du détecteur), l'axe z est dirigé le long du faisceau et orienté dans le sens anti-horaire, l'axe x est dirigé vers le centre de l'anneau du LHC, et l'axe y est dirigé perpendiculairement au plan du LHC et orienté vers le haut. On utilise également un système de coordonnées (ϕ, η, r) plus adapté à la description des quantités cinématiques, étant donnée la symétrie cylindrique du détecteur. L'angle ϕ est défini dans le plan xOy perpendiculaire au faisceau à partir de l'axe Ox. La coordonnée r correspond à la distance à l'axe du faisceau. La pseudorapidité η est définie à partir de l'angle θ avec l'axe Oz selon :

$$\eta = -\ln\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{||\vec{p}|| + p_z}{||\vec{p}|| - p_z}\right) \tag{6.3}$$

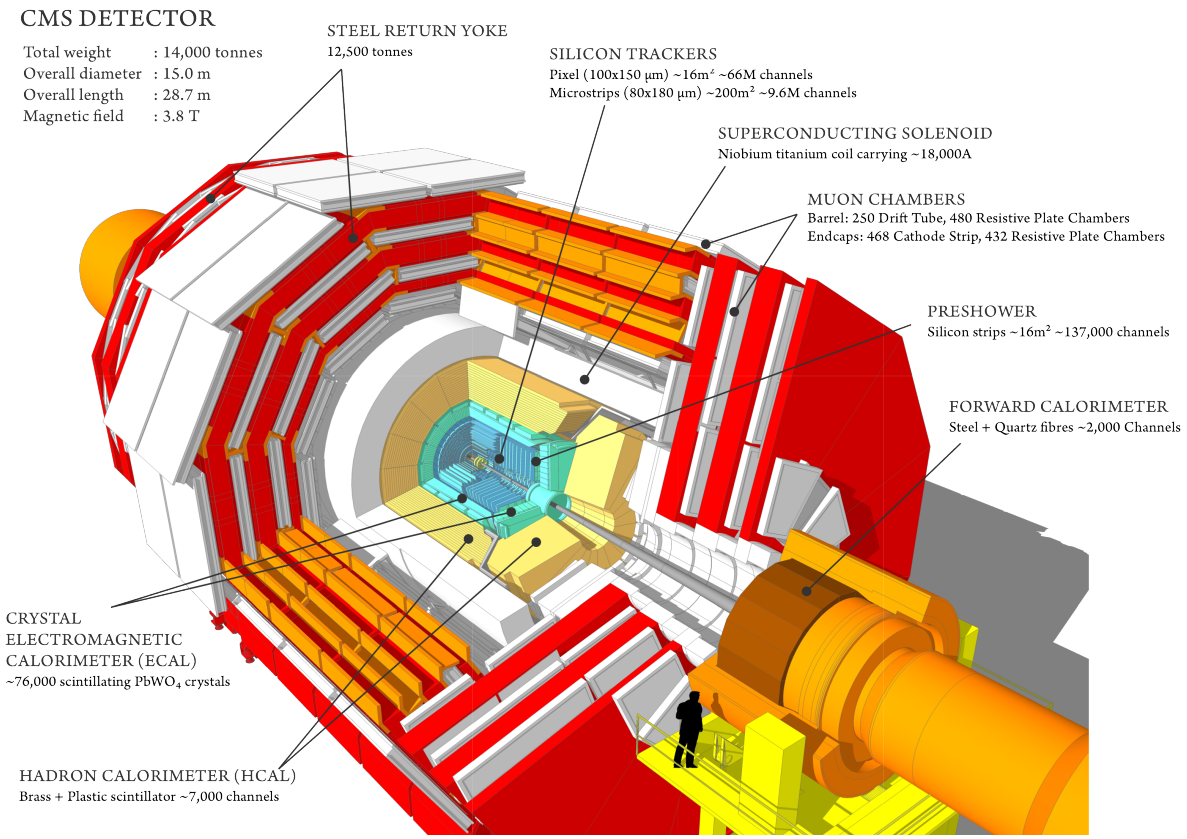

FIGURE 6.5 Géométrie et principales caractéristiques du détecteur CMS et de ses sous-systèmes.

où $\vec{p}$ est un vecteur quelconque, classiquement l'impulsion d'une particule, et p_z sa composante selon l'axe Oz. La pseudorapidité de l'impulsion d'une particule d'énergie E est, dans la limite relativiste où les masses deviennent négligeables, proche de la rapidité y définie par :

$$y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{E+p_z}{E-p_z}\right) \tag{6.4}$$

Les distances en pseudorapidité $\Delta\eta$ sont alors invariantes par une transformation de Lorentz selon l'axe Oz dans la limite $\eta \to y$, ce qui n'est pas le cas de $\Delta\theta$. Dans le détecteur CMS, le tonneau couvre la région $|\eta| \lesssim 1.5$.

Enfin, dans les collisionneurs hadroniques tels que le LHC, il est impossible de connaître l'impulsion des partons avant la collision (on ne connaît que l'impulsion du proton et les PDFs). Les impulsions sont alors souvent exprimées en fonction de l'impulsion transverse, notée p_T,

reliée aux composantes de l'impulsion par :

$$p_x = p_T \cos\phi \tag{6.5}$$

$$p_y = p_T \sin\phi \tag{6.6}$$

$$p_z = p_T \mathrm{sh}\eta \tag{6.7}$$

L'impulsion transverse totale étant nulle dans le référentiel du centre de masse avant la collision, la conservation de l'impulsion indique que les impulsions transverse des particules de l'état final doivent s'équilibrer.

6.2.2 Les sous-systèmes

L'ensemble des sous-systèmes du détecteur CMS respectent la symétrie cylindrique, et sont organisés en couches successives. La plupart d'entre eux se situe à l'intérieur du solénoide, afin de limiter les interactions dans un système qui ne prend pas de données, on parle alors de matière "morte" où se produisent des pertes d'énergie, ce qui pourrait augmenter les incertitudes de mesures. Chaque sous-système a un rôle bien défini, qui permet à l'ensemble de remplir l'objectif de détecter et de mesurer les caractéristiques du maximum de particules de l'état final possible. Le trajectographe mesure les trajectoires des particules chargées proches du point d'interaction. Le calorimètre électromagnétique mesure la position et l'énergie des électrons et des photons. Le calorimètre hadronique mesure la position et l'énergie des hadrons. Enfin, le spectromètre à muons mesure une partie de la trajectoire et de l'énergie des muons avant qu'ils ne s'échappent du détecteur. Mis à part les particules qui sortent de l'acceptance du détecteur, les seules particules stables du modèle standard à ne pas être directement détectées dans CMS sont les neutrinos, car leur probabilité d'interaction dans le détecteur est trop faible. La figure 6.6 illustre et résume les différents sous-systèmes et leur rôle dans la chaîne de détection.

Le trajectographe

Le trajectographe est le détecteur le plus proche du point de collision. Les parties tonneau et bouchons couvrent les régions $|\eta| < 2.5$ et sont composés de différentes couches qui s'étendent sur l'intervalle $4.3 < r < 120$ cm. L'intervalle $4.3 < r < 10$ cm contient trois couches d'un détecteur à pixels en silicium, composé d'environ 66 millions de pixels de $150\ \mu$m $\times$ $100\ \mu$m pour avoir une bonne résolution spatiale dans une région dense en particules et déterminer la position des vertex d'interaction. La partie externe du trajectographe est composée de 10 couches de fines bandes de silicium de tailles variables. Afin d'améliorer la reconstruction des traces des particules et de la position du vertex d'interaction, les cellules de détection (pixels et bandes) sont disposées en quinconce.

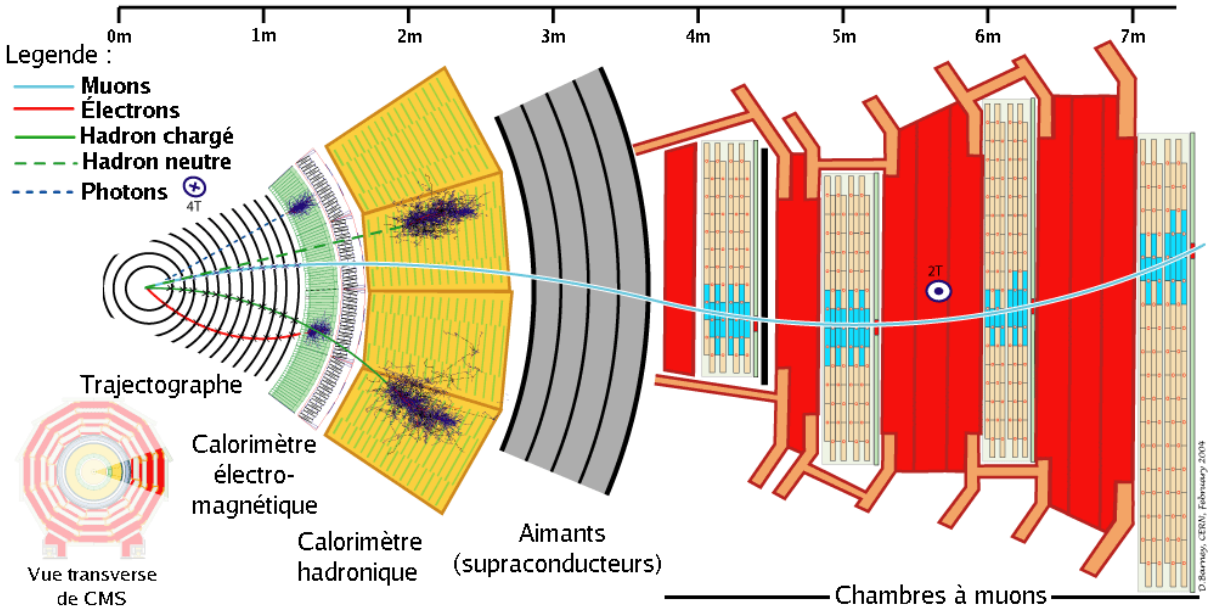

FIGURE 6.6 Tranche d'une coupe transverse du détecteur CMS présentant le détail de ses sous-systèmes. Le rôle de chacun d'entre eux est illustré par la trajectoire : d'un photon qui interagit dans le calorimètre électromagnétique uniquement, d'un électron mesurée dans le trajectographe et qui interagit dans le calorimètre électromagnétique, de hadrons mesurée dans le trajectographe (pour les hadrons chargés) et qui interagissent dans le calorimètre hadronique, et d'un muon mesureé dans le trajectographe et dans le spectromètre à muons. Les trajectoires des particules chargées sont courbées par le champ magnétique de 4 T à l'intérieur du solénoide, et 2 T à l'extérieur, ce qui permet de distinguer les particules chargées des particules neutres, et même de mesurer leur charge.

Le trajectographe présente une très bonne efficacité de reconstruction des traces, d'au moins 95% pour les particules chargées avec $p_T > 10$ GeV, et un taux de fausses traces reconstruites, qui ne correspondent pas à de vrais traces, très faible dans la région $|\eta| < 2.5$. Sa résolution spatiale va de 10 μm à 20 μm, et sa résolution en impulsion pour les traces isolées est :

$$\frac{\delta p_T}{p_T} = (1.5 \times p_T\,[\text{TeV}] \oplus 0.5)\,\% \quad \text{pour } |\eta| < 1.6 \tag{6.8}$$

$$\frac{\delta p_T}{p_T} = (6.0 \times p_T\,[\text{TeV}] \oplus 0.5)\,\% \quad \text{pour } |\eta| < 2.5 \tag{6.9}$$

Ainsi, le trajectographe est un véritable atout pour CMS, sur lequel s'appuie entre autre l'algorithme de flux de particules présenté dans la section 6.3.1.

Le calorimètre électromagnétique

Le rôle du calorimètre électromagnétique (ECAL) est de mesurer précisément l'énergie et la position des photons et des électrons. Afin d'avoir une résolution de moins de 1% sur la masse invariante de deux photons, nécessaire à une mesure satisfaisante de la masse du boson de

Higgs lorsqu'il se désintègre selon $H \rightarrow \gamma\gamma$ (un des critères initiaux de conception du calorimètre), le ECAL doit être homogène et hermétique. Il est constitué de 75848 cristaux de tungstate de plomb $PbWO_4$. Les cristaux de tungstate de plomb sont des cristaux scintillateurs, c'est-à-dire qui restituent l'énergie déposée par une radiation ionisante sous forme de lumière. Leur temps de réponse est rapide et ils sont résistants aux radiations (celles-ci ont néanmoins un effet obscurcissant sur les cristaux qui devient important avec le temps), ce qui est primordial dans une région riche en particules de haute énergie. Leurs propriétés sont remarquables, avec une courte longueur de radiation $X_0 = 0.89$ cm [1], un rayon de Molière $R_M = 2.2$ cm [2], et ils sont suffisamment rapide pour que 80% de la lumière scintillée soit absorbée dans les 25 ns qui séparent deux collisions. La lumière est collectée par des photodétecteurs résistants aux radiations (là encore, dans une certaine limite) et suffisamment rapides pour suivre la fréquence des évènements.

À l'instar du trajectrographe, le ECAL se divise en trois parties : le tonneau composé de 61200 cristaux de 23 cm reliés à des photodiodes à avalanches (APD) et deux bouchons composés chacun de 7324 cristaux de 22 cm reliés à des photo-triodes à vide (VPT). Les cristaux ne pointent pas tout à fait vers le centre du détecteur, mais sont inclinés de 3° dans le tonneau et de 2° à 5° dans les bouchons, de manière à ce qu'une particule provenant de l'interaction principal ne puisse pas passer entre deux cristaux. Par ailleurs, un détecteur de pied de gerbe constitué de deux disques de plomb et de deux plans de bandes de silicium est installé devant chacun des bouchons. Ils permettent d'initier les gerbes électromagnétiques avant l'entrée des particules dans les cristaux pour éliminer les photons qui proviennent de la désintégration de π^0. Cela permet également d'améliorer l'estimation de la direction des photons dans cette région, et ainsi d'améliorer la mesure de la masse invariante d'un système à deux photons pour la recherche du boson de Higgs. La vue en coupe du ECAL présentée dans la figure 6.7 résume les principales caractéristiques géométriques du calorimètre électromagnétique.

La résolution en énergie σ_E du calorimètre est une fonction de l'énergie E, définie en GeV, de la particule incidente. Elle est généralement paramétrisée selon :

$$\frac{\sigma_E}{E} = \frac{S}{\sqrt{E}} \oplus \frac{N}{E} \oplus C \tag{6.10}$$

avec S qui prend en compte les effets statistiques, N le bruit électronique et C qui est une

1. La longueur de radiation correspond à la distance parcourue par une particule dans un matériau à partir de laquelle son énergie a statistiquement été divisée par la constante d'Euler e.
2. Le rayon de Molière est défini comme le rayon d'un cylindre autour d'une particule arrivée dans le calorimètre qui contient en moyenne 90% de l'énergie déposée par la gerbe produite.

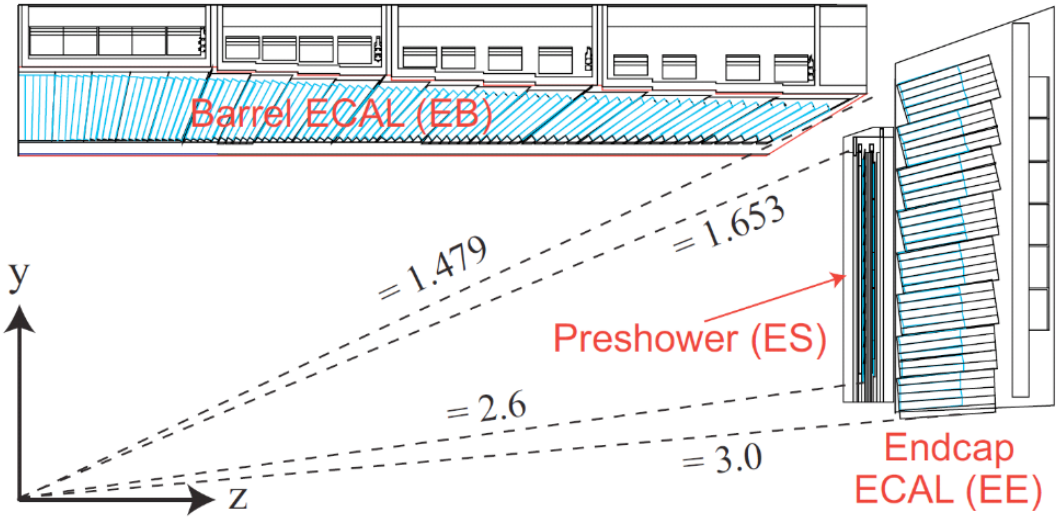

FIGURE 6.7 Vue en coupe transverse du calorimètre électromagnétique de CMS, composé du tonneau (EB), des bouchons (EE) et des détecteurs de pied de gerbe (ES). Les limites en pseudorapidité des trois parties sont indiquées en pointillées, à partir du centre du détecteur.

constante liée à la calibration du calorimètre. Ces paramètres ont été mesurés dans des conditions idéales en utilisant des électrons d'énergie entre 20 et 250 GeV. Pour le tonneau du calorimètre électromagnétique, la résolution en énergie est :

$$\frac{\sigma_E}{E} = \frac{2.8\%}{\sqrt{E}} \oplus \frac{12.8\%}{E} \oplus 0.3\% \tag{6.11}$$

Cela garantie une précision d'environ 0.5% sur l'énergie d'une particule incidente dont l'énergie est $E > 30$ GeV.

Comme les cristaux du calorimètre électromagnétique se trouvent dans un milieu très irradié, leur transparence diminue avec le temps, ce qui affecte la mesure de l'énergie déposée. On corrige cet effet en mesurant la transparence de chaque cristal à l'aide d'un système de lasers constitué d'un laser bleu (447 nm), d'un laser vert (527 nm) et d'un laser infrarouge (796 nm). Ces derniers injectent des impulsions lumineuses dans les cristaux dont la mesure par les APD et les VPT est comparée à une mesure effectuée par des photo-détecteurs directement reliés à la source lumineuse. Cette procédure s'effectue entre les collisions de paquets lors de la prise de données ou pendant les périodes de remplissage du LHC, pour chaque cristal toutes les 40 min. Cela permet d'avoir un suivi en temps réel de l'évolution de la transparence des cristaux, et de corriger la mesure de l'énergie déposée en conséquence.

Le calorimètre hadronique

Le calorimètre hadronique (HCAL) a pour rôle la mesure de l'énergie et de la position des hadrons stables, chargés ou neutres. Il s'agit du dernier détecteur avant l'aimant supraconducteur ($178 < r < 288$ cm). Le tonneau du calorimètre hadronique couvre la région $|\eta| < 1.3$ et les bouchons jusqu'à une pseudorapidité $|\eta| < 3$. La partie centrale est composée de 17 couches de scintillateur en plastique alternées avec des couches d'absorbeur en laiton. Les bouchons sont composés de 19 couches de scintillateur alternées avec des couches d'absorbeur. Deux couches de scintillateur supplémentaires sont disposées au même niveau que le tonneau, mais à l'extérieur du solénoide, pour assurer le confinement des gerbes hadroniques dans la partie centrale avant le spectromètre à muons. Afin de rendre le détecteur le plus hermétique possible, deux calorimètres hadroniques très à l'avant, placés à 11m de chaque côté du point d'interaction, qui couvre des pseudorapidités $|\eta| < 5.3$ est ajouté à l'extérieur du solénoide. Pour pouvoir résister au flux de hadrons intense à haute pseudorapidité, la partie très à l'avant utilise des matériaux différents. Une vue en coupe des différentes parties du calorimètre hadronique est présentée dans la figure 6.8.

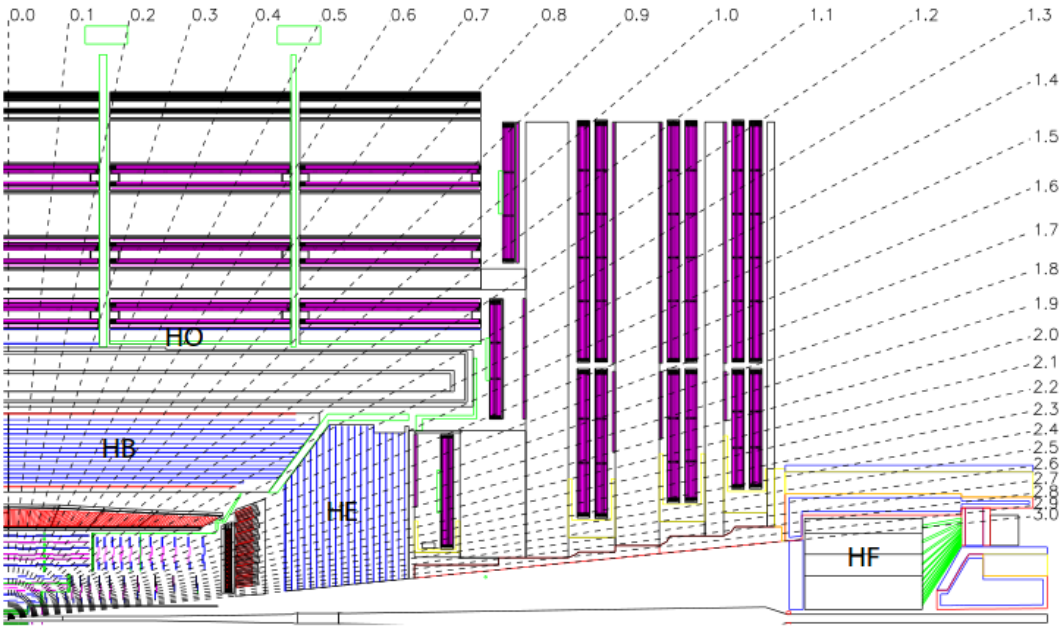

FIGURE 6.8 Vue en coupe transverse des différentes parties du calorimètre hadroniques de CMS, composé du tonneau (HB), des bouchons (HE), de la partie centrale en dehors de l'aimant (HO) et de la partie très à l'avant (HF). Les lignes en pointillées indiquent les pseudorapidités correspondantes.

Le spectromètre à muons

L'objectif du spectromètre à muons est l'identification et la mesure de l'impulsion transverse des muons, qui sont très importants pour de nombreux processus physiques. Comme les muons peuvent traverser plusieurs mètres d'acier sans être stoppés, le système dédié à la détection des muons est situé dans la partie la plus externe de CMS, en particulier à l'extérieur du solénoide. Il est constitué de trois différents types de chambres à muons : les chambres à dérive dans le tonneau ($|\eta| < 1.2$), des chambres à pistes cathodiques dans les bouchons ($0.9 < |\eta| < 2.4$) et des chambres à plaques résistives à la fois dans le tonneau et les bouchons ($|\eta| < 1.6$). La trajectoire des muons est d'abord mesurée dans le trajectographe, avant d'être mesuré à nouveau dans le spectromètre à muons. Les traces provenant des deux sous-systèmes sont alors associées pour obtenir une très bonne résolution de l'impulsion des muons (1-1.5% pour des muons de 10 GeV et 6-17% pour des muons de 1 TeV). Une vue en coupe du système de détection des muons est présentée dans la figure 6.9.

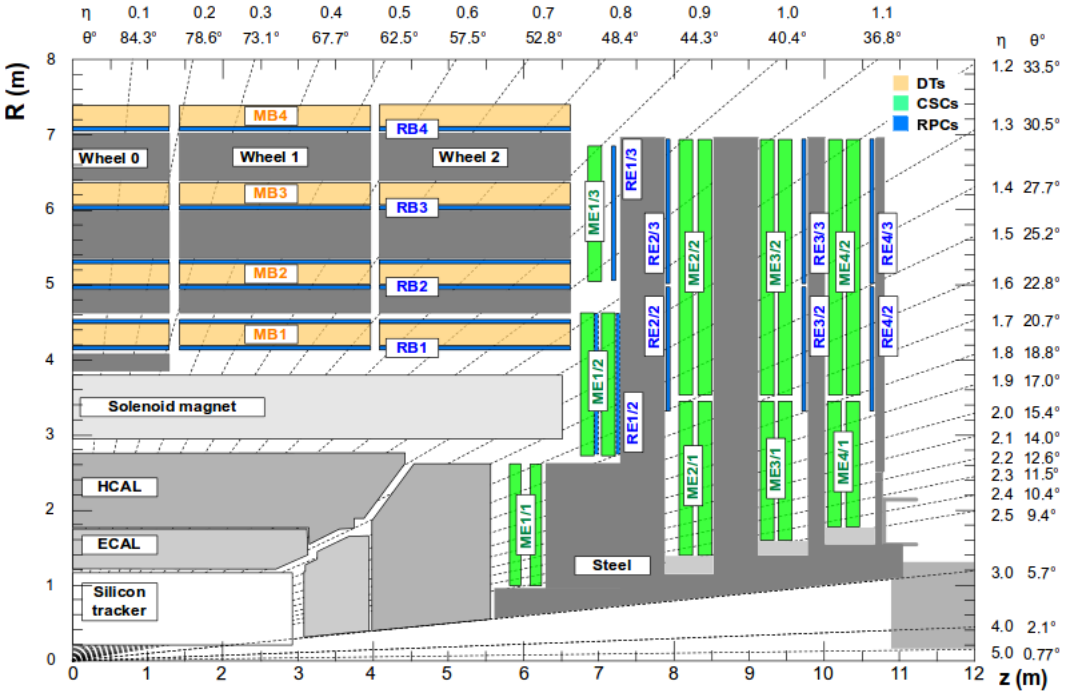

FIGURE 6.9 Vue en coupe transverse du spectromètre à muons du détecteur CMS, tirée de [6]. Les chambres à dérive (DT) sont indiquées en jaune, les chambre à pistes cathodiques (CSC) en vert et les chambres à plaques résistives (RPC) en bleu. Les chambres à muons sont disposées de telle sorte que, si les muons n'ont pas une pseudorapidité trop élevée, ils traversent au moins trois d'entre elles, ce qui permet de reconstruire leur impulsion de manière indépendante du trajectographe.

6.2.3 Chaîne d'acquisition

L'acquisition des données mesurées par le détecteur est divisée en plusieurs étapes, cruciales au bon fonctionnnement de CMS. En effet, la fréquence d'interaction au LHC est très élevée : $f_{int} = 40$ MHz, soit une collision toutes les 25 ns. Avec une quantité de données ~ 1 Mo par évènement, elles ne peuvent pas être sauvegardées et analysées telles quelles. La quantité de données doit d'abord être considérablement réduite. On effectue alors un tri des évènements, dont la décision de les garder ou de les rejeter est prise par le système de déclenchement (trigger) de CMS. L'objectif du système de trigger est de réduire la fréquence de transmission des évènements vers une fréquence suffisament faible pour envisager le stockage. Il se divise en deux étapes : le trigger de premier niveau (L1) et le trigger de haut niveau (HLT).

Le trigger L1 doit réduire le taux d'évènements de 40 MHz à environ 100 kHz, qui est la limite imposée par l'électronique de lecture de CMS. La décision de garder ou de rejeter les évènements doit être prise à une vitesse considérable, les algorithmes de sélection du trigger L1 sont donc directement implémentés au niveau hardware sur des cartes électroniques dédiées. Pour diminuer le temps de prise de décision, le trigger de niveau 1 ne lit pas l'intégralité des informations mesurées par CMS, mais seulement des informations fragmentées provenant des calorimètres et du spectromètre à muons. Les algorithmes de sélection pour le trajectographe étant trop lents, ils ne sont pas utilisés à cette étape. Le trigger L1 fonde sa décision sur la reconstruction de grandeurs physiques appelées "primitives de déclenchement", qui sont des versions simplifiées des objets physiques reconstruits durant les phases postérieures de reconstruction. Si le trigger L1 accepte un évènement, celui-ci est alors envoyé vers les triggers de haut niveau pour un filtrage supplémentaire.

Le trigger HLT réduit encore le taux d'évènements de 100 kHz à environ 1 kHz. Les algorithmes du HLT sont implémentés au niveau software dans une ferme de calcul d'environ 16000 CPU qui traitent l'ensemble des données mesurées par le détecteur pour les évènements qui ont passé le trigger L1 en reconstruisant les objets physiques de la même manière que pour le traitement hors ligne. Le trigger HLT fait passer aux évènements une séquence prédéfinie d'algorithmes qui vont appliquer des sélections différentes, adaptées à différentes caractéristiques d'évènements, ce qui permet de classer les évènements en fonction de leur topologie. Les évènements qui présentent un intérêt physique sont stockés de manière permanente sur disques durs, les évènements qui n'ont passé aucune des sélections sont rejetés.

6.3 Reconstruction des objets physiques

La reconstruction des objets dans CMS se fait à l'aide de plusieurs algorithmes dont nous allons présenter en détail ceux utilisés pour la recherche de branons présentée dans le chapitre 7.

6.3.1 Algorithme de flux de particules

Une des particularités de la reconstruction des objets physiques dans CMS est l'utilisation de l'algorithme de flux de particules. Cet algorithme a pour but de reconstruire l'ensemble des particules de l'état final dans un évènement. Pour atteindre cet objectif, l'information de l'ensemble des sous-détecteurs est utilisée et combinée. Les traces et les dépôts d'énergie sont traités par des algorithmes spécifiques à la méthode de flux de particules. Dans un premier temps, les dépôts d'énergie sont agglomérés dans chaque calorimètre et les traces sont reconstruites de manière indépendante. Puis les traces et dépôts d'énergie reconstruits sont associés. Les traces sont extrapolées vers les calorimètres et sont associées aux dépôts d'énergie cohérents avec leurs positions et impulsions. L'association de tous les sous-systèmes permet de reconstruire toutes les particules stables, mais également de les distinguer entre elles.
Les hadrons chargés, électrons et muons sont reconstruits à partir des traces laissées dans le trajectographe et des dépôts d'énergie dans le ECAL, le HCAL et le spectromètre à muons respectivement. Leur énergie est mesurée à partir d'une combinaison de leur impulsion déterminée par le trajectographe et de l'énergie déposée dans les calorimètre. Les photons et hadrons neutres sont reconstruits à partir des dépôts dans le ECAL et HCAL respectivement, qui mesurent directement leur énergie.

L'algorithme de flux de particules est particulièrement important pour CMS, entre autres choses car il permet de résoudre la sous-structure des jets de hadrons. Il est rendu possible par la bonne résolution spatiale dans le détecteur grâce à l'intensité du champ magnétique produit par le solénoide, par les bonnes performances du trajectographe et la granularité des calorimètres.

Pour plus d'informations concernant l'algorithme de flux de particules et ses performances, on pourra consulter [7].

6.3.2 Reconstruction des photons et des électrons

Les photons et les électrons sont tous deux détectés lorsqu'ils sont absorbés dans le calorimètre ECAL, dont on mesure la réponse des cristaux. Le rôle de l'algorithme de reconstruction est de rassembler les cristaux en aggrégats (ou cluster) afin de rassembler la fraction la plus importante possible de l'énergie des gerbes électromagnétiques dans les cristaux, sans agglomérer l'énergie venant d'une particule voisine, et tout en minimisant le nombre de cristaux, car les cristaux avec peu d'énergie apportent beaucoup de bruit et dégradent la résolution en énergie. Pour faire cela, l'algorithme commence par agglomérer les cristaux en clusters qui sont à la base de la reconstruction (basic clusters) de taille 5×5 cristaux autour de cristaux germes qui

contiennent une énergie supérieure à un certain seuil. Puis, les basic clusters de même pseudorapidité η sont classés dans un même supercluster. Dans le cas d'un électron, cela permet de lui associer les photons de bremsstrahlung émis tangentiellement à sa trajectoire. Dans le cas d'un photon, c'est utile lorsque celui-ci se converti en une paire électron-positron dans le trajectographe, pour associer l'énergie de l'électron et du positron au même objet. Enfin, les informations du trajectographe, qui mesure la trajectoire des particules chargées, donc ici électrons et positrons, sont utilisés pour parfaire la reconstruction.

Les objets considérés comme des photons dans CMS sont les superclusters avec $p_T > 10$ GeV qui ne possède pas de début de trace dans le détecteur à pixels du trajectographe. Les électrons sont les superclusters avec $p_T > 10$ GeV auquel est associé au moins un début de trace dans le détecteur à pixels. Ces définitions sont cependant très larges et ne permettent pas, par exemple, de distinguer les photons et électrons contenus dans un jet hadronique. Pour cela, il est nécessaire de préciser les définitions des électrons et des photons à l'aide de variable additionnelle, telles que des variables d'isolation (voir annexe D pour les définitions utilisées dans la recherche de branons).

Pour plus d'informations concernant les algorithmes de reconstruction et la définition des photons et électrons, on pourra consulter [8, 9].

6.3.3 Reconstruction des muons

Les muons sont reconstruits à partir des informations (charge, masse et impulsion) laissées dans le trajectographe et le spectromètre à muons. On distingue trois types de muons :

— les muons dits "trackers" qui sont reconstruit uniquement sur la base des traces laissées dans le trajectographe ;

— les muons dits "standalones" qui sont reconstruit uniquement sur la base des traces laissées dans le système dédié aux muons ;

— les muons dits "globaux" pour lesquels les traces de muons trackers dans le trajectographe sont associées aux traces de muons standalones dans le spectromètre à muons.

De même que pour le cas des électrons et des photons, ces définitions sont très larges, et il est nécessaire de déterminer des critères d'isolation spécifiques à chaque recherche (voir annexe D pour les définitions utilisées dans la recherche de branons).

Pour plus d'informations concernant les algorithmes de reconstruction et la définition des muons, on pourra consulter [10].

6.3.4 Reconstruction des leptons tau

Le lepton τ est le lepton le plus lourd et qui a la durée de vie la plus courte, avec une masse $m_\tau = 1.777$ GeV et une durée de vie de 290 fs ($c\tau_\tau \sim 87$ μm) [11]. Ainsi, seuls les produits de désintégration du lepton τ sont détectés dans CMS. Celui-ci se désintègre dans environ un tiers des cas en leptons et neutrinos, et dans deux tiers des cas dans des cas en hadrons et neutrinos. L'algorithme de flux de particules permet de reconstruire les leptons τ en vérifiant, pour tous les canaux de désintégrations possibles, si les particules de l'état final peuvent provenir d'un lepton τ, en tirant profit de la connaissance de sa masse et de son temps de parcours non-négligeable. L'identification des leptons τ se fait à l'aide d'un algorithme d'analyse multi-variée auquel on fournit des variables d'isolations, le mode de désintégration et des informations concernant la position du vertex secondaire de désintégration du lepton τ.

Pour plus d'informations concernant les algorithmes de reconstruction et la définition des leptons tau, on pourra consulter [12].

6.3.5 Reconstruction des jets

Définition des jets

Lorsque l'interaction principale produit un quark ou un gluon, le principe de confinement de la couleur implique que celui-ci ne peut pas rester dans un état libre isolé mais doit se recombiner avec d'autres particules colorées au sein de hadrons. Ce processus s'effectue en deux étapes : la fragmentation durant laquelle des processus de l'interaction forte à basse énergie produisent une grande quantité de quarks et de gluons, et l'hadronisation durant laquelle ceux-ci se combinent en hadrons. Ainsi, on n'observe pas directement de quarks ni de gluons dans le détecteur, mais des jets de particules collimatées, comme l'illustre la figure 6.10.

Cependant, les hadrons et photons qui constituent la gerbe sont produits par une unique particule initiale, quark ou gluon. Il faut donc les reconstruire comme un unique objet, que l'on appelle jet. Les jets sont reconstruits à l'aide d'un algorithme de regroupement des objets individuels. L'algorithme de regroupement le plus utilisé est un algorithme de recombinaisons successives dont les étapes sont les suivantes [13] :

— on commence par définir une distance $d_{ij} = \min\left(k_{T,i}^{2p}, k_{T,j}^{2p}\right)\frac{R_{ij}^2}{R^2}$ entre deux particules i et j, et une grandeur $d_{ii} = k_{T,i}^{2p}$ associée à chaque particule i. Le paramètre p est arbitraire, $R_{ij}^2 = \Delta\phi\,(i,j)^2 + \Delta\eta\,(i,j)^2$ la distance euclidienne dans le plan $\phi - \eta$ entre les particules i et j, R un paramètre arbitraire qui décrit la taille du cône du jet et k_T est l'impulsion transverse ;

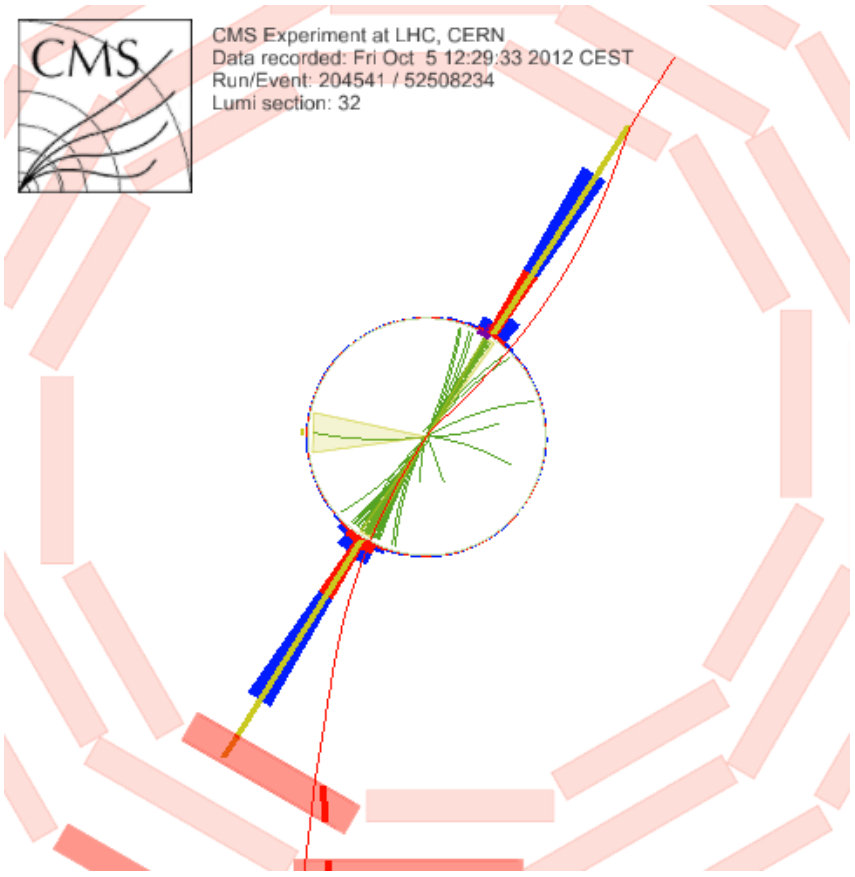

FIGURE 6.10 Reconstruction d'un évènement détecté dans CMS, présenté dans le plan transverse du faisceau de proton, comportant deux jets de hadrons de haute énergie. Les traces vertes indiquent les trajectoires des hadrons, et les columes bleus et rouges représentent l'énergie déposée par les hadrons dans les calorimètres.

— si le minimum des d_{ij} et des d_{ii} est un d_{ij}, on fusionne i et j et on met à jour les distances. Si le minimum est un d_{ii}, on retire i de l'ensemble de particules considérées, il s'agit d'un jet ;

— on répète l'opération jusqu'à avoir associé toutes les particules des gerbes.

La figure 6.11 représente les résultats de plusieurs algorithmes de regroupement, selon la valeur de p. L'algorithme qui présente le plus de caractéristiques intéressantes est l'algorithme anti-k_T (AK), pour lequel $p = -1$, qui est l'algorithme standard pour la collaboration CMS et qui sera celui utilisé dans la suite de cette thèse.

Les jets standards utilisés par la collaboration CMS sont des jets reconstruits avec l'algorithme anti-k_T et $R = 0.4$ (jets AK4), mais il arrive également que l'on utilise des jets pour lesquels $R = 0.8$ (AK8). Ce cas de figure est notamment intéressant lorsqu'on s'intéresse aux jets collimés (ou boostés), c'est-à-dire à des jets qui proviennent de la collimation de plusieurs jets, par exemple lors de la désintégration hadronique d'objets qui ont subi un fort boost de Lorentz tels qu'un boson W ou Z, ou encore un quark top.

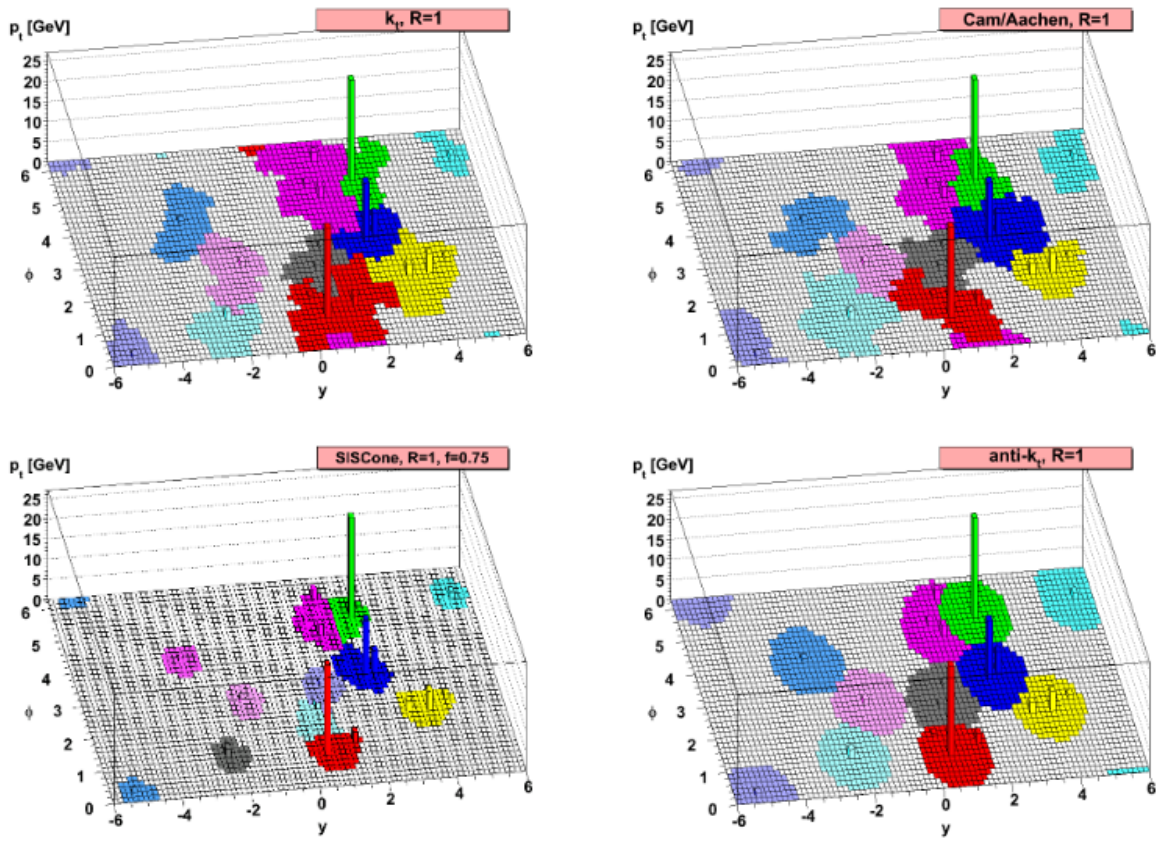

FIGURE 6.11 Comparaison de différents algorithmes de regroupement sur un évènement simulé par le générateur d'évènements Herwig, tirée de [13]. L'algorithme k_T (en haut à gauche), pour lequel $p = 1$, reconstruits des jets dont la forme n'est pas conique, la taille est différente d'un jet à l'autre et quelques particules sont associées à un jet qui n'est pas le plus proche. L'algorithme de Cambridge/Aachen (en haut à droite), pour lequel $p = 0$, présente les mêmes problèmes. L'algorithme SISCone [14] (en bas à gauche) est un algorithme qui ajuste des cônes de taille fixe autour des particules de plus haute énergie, il n'a pas les mêmes problèmes que les précédents mais semble reconstruire un nombre élevé de jets. Enfin, l'algorithme anti-k_T (en bas à droite), pour lequel $p = -1$ résout les principales problèmes de ses concurrents.

On peut également distinguer les jets produits par des quarks lourds b ou c, que l'on peut identifier par rapport aux autres jets du fait de la durée de vie relativement longue de ces quarks. En particulier, ces quarks ont le temps de parcourir une distance non-négligeable avant de s'hadroniser et les particules présentes dans le jet proviennent d'un vertex secondaire, déplacé du vertex de l'interaction principale. Plus de détails concernant l'identification des jets qui proviennent de quarks lourds sont présents dans [15].

Jets boostés et variables de sous-structure

Lorsque l'on utilise des jets AK8 pour l'étude de la désintégration hadronique d'un boson Z ou W ou bien d'un quark top, il faut bien comprendre que l'objet reconstruit a pour origine

plusieurs particules distinctes. Dans le cas des bosons, le jet boosté est produit par la fusion de deux jets de quarks, et dans le cas des quarks top par la fusion de trois jets de quarks. Ainsi, la répartition des particules à l'intérieur même du jet AK8 est différente lorsqu'il s'agit bien d'une fusion de plusieurs jets, en comparaison au cas où il ne s'agit que d'un jet de quark ou gluon très énergétique. On peut alors utiliser des variables de sous-structure pour discriminer entre ces deux cas.

Dans un premier temps, on peut tenter de déterminer la masse du jet AK8, c'est-à-dire la somme des masses de ses constituants. Cependant, ce n'est pas si simple car de nombreuses particules peuvent se retrouver associées à un jet (d'autant plus que le rayon du cône est grand), sans pour autant provenir du même processus. C'est par exemple le cas des particules produites lors des évènements d'empilement. Il faut donc filtrer les particules du jet, pour ne garder idéalement que celles qui proviennent du ou des jets originaux. Plusieurs algorithmes existent, les plus simples étant les suivants (leurs actions sont illustrées dans la figure 6.12 :

— **masse dite "filtered" :** il s'agit d'ajuster des cônes de rayon fixe inférieur à $R = 0.8$ aux particules à l'intérieur du jet AK8 pour reconstruire des sous-jets, et de fixer un nombre n_{filt} maximum de sous-jets. Si le nombre de sous-jets reconstruits est plus grand que n_{filt}, on ne garde que les n_{filt} sous-jets les plus énergétiques ;

— **masse dite "trimmed" :** de même que précédemment, des sous-jets sont reconstruits en ajustant des cônes de rayon fixe aux particules du jet AK8, puis on définit une fraction minimal de l'impulsion transverse des sous-jets p_T^{frac} que doivent avoir les particules pour être gardées ;

— **masse dite "pruned" :** cet algorithme élimine les particules qui vont dans une direction trop différente des autres particules, et dont l'impulsion transverse est trop différente des autres particules qui composent le jet AK8. Pour cela, les particules sont regroupées avec un des algorithmes présentés précédemment, et l'algorithme définit deux paramètres z_{cut} et r_{cut}. À chaque étape de regroupement de deux particules i et j, on vérifie si $\min\left(k_{T,i}, k_{T,j}/\left(k_{T,i} + k_{T,j}\right)\right) < z_{cut}$ et si $R_{ij} > r_{cut} \times 2m_{jet}/k_{T,\text{jet}}$, où m_{jet} est la somme des masse des constituants du jet AK8. Si ces deux critères sont vérifiés, on retire la particule d'impulsion transverse minimum.

La masse du jet AK8 est la variable la plus efficace pour discriminer entre plusieurs jets qui ont fusionné et de simples jets de haute énergie. Il existe néanmoins d'autres variables de sous-structure complémentaires, comme par exemple la N-subjettiness τ_N [16]. Pour définir τ_N, on commence par utiliser un algorithme de regroupement pour les particules à l'intérieur du jet AK8, de sorte à obtenir N sous-jets. La N-subjettiness est alors définie par :

$$\tau_N = \frac{\sum_i k_{T,i} \min\left(R_{1i}, R_{2i} ... R_{Ni}\right)}{\sum_i k_{T,i} R} \tag{6.12}$$

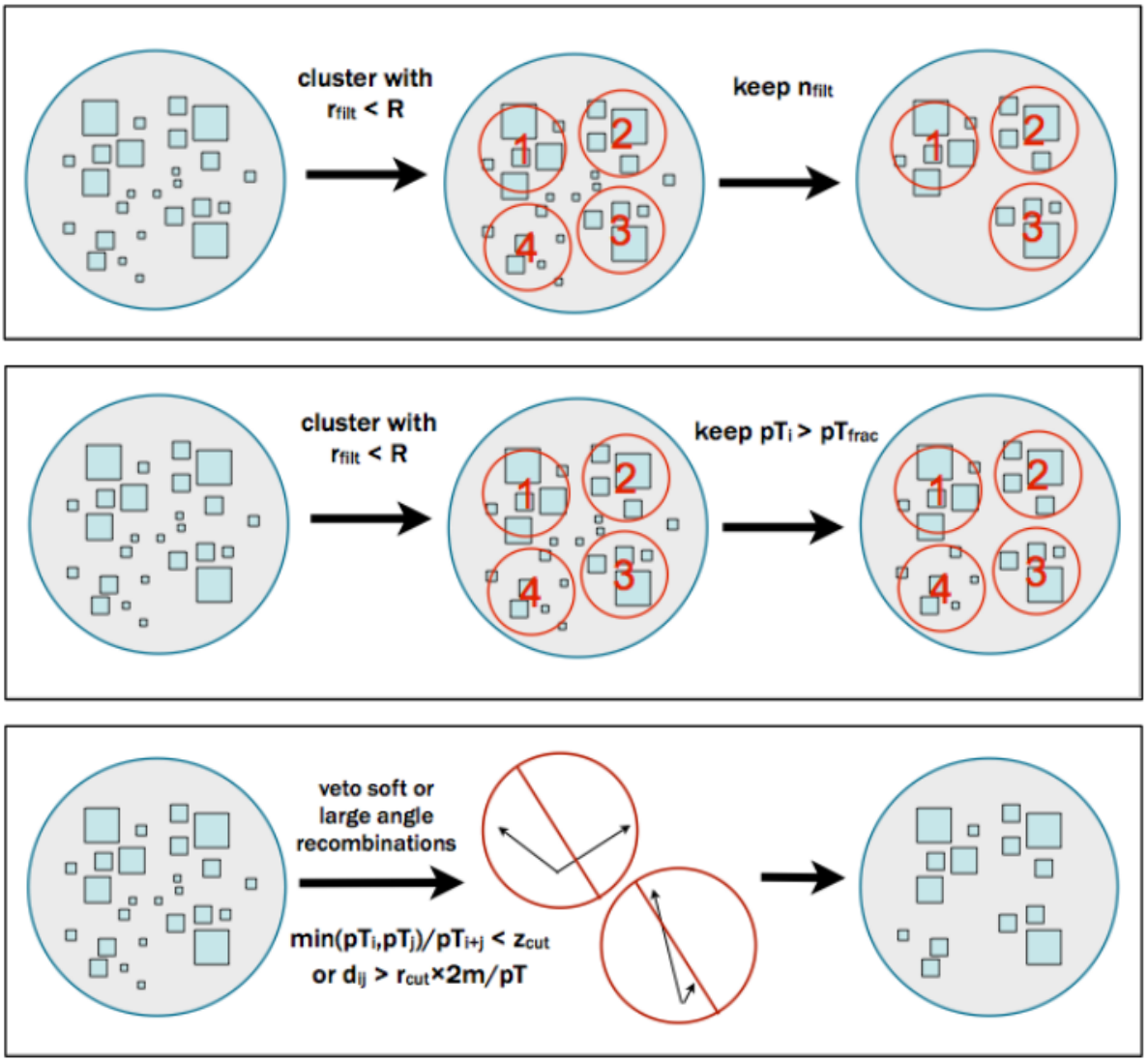

FIGURE 6.12 Action des algorithmes de "filtering" (haut) avec des cônes de rayon $r_{\text{filt}} = 0.3$ et $n_{\text{filt}} = 3$, de "trimming" (milieu) avec des cônes de rayon $r_{\text{filt}} = 0.3$ et $p_T^{\text{frac}} = 0.03$, et de "pruning" (bas) avec les critères $z_{cut} = 0.1$ et $r_{cut} = 0.5$, sur un jet AK8.

où la somme parcourt toutes les particules du jet AK8. Si le jet provient de la fusion de N jets, alors statistiquement $\tau_N < \tau N - 1$, ce qui n'est pas le cas autrement. On peut alors discriminer les deux cas en formant le rapport τ_N/τ_{N-1}

Correction de l'énergie des jets

Il n'est pas simple de relier l'énergie des jets mesurée à l'énergie des partons dont ils sont issus, du fait de la complexité de la réponse du détecteur. Pour effectuer cela, on applique trois étapes de corrections à l'énergie des jets.

La première correction compense l'effet des évènements d'empilement. On considère que les

évènements d'empilement contribuent à créer une densité d'énergie ρ constante dans le détecteur, égale à la moyenne des constributions des évènements d'empilement. Ainsi, on corrige l'énergie des jets par $\rho\times$ l'aire du jet considéré, en fonction du p_T et de η du jet. Les corrections sont déterminées en comparant les prédictions de simulations d'évènements contenant deux jets, avec et sans évènements d'empilement. Les deuxième et troisième étapes de correction prennent en compte l'échelle d'énergie des jets, c'est-à-dire la différence, due à la réponse non-linéaire du détecteur, entre l'énergie des jets mesurée et l'énergie du parton qui en est à l'origine. Pour cela, on compare, dans des simulations d'évènements possédant deux jets, le p_T des jets reconstruits par le détecteur et celui du parton dont ils sont issus (que l'on connaît car il s'agit de simulations). Cette correction est dépendante de η et du p_T. La deuxième correction se charge de fournir une réponse uniforme en η, et la troisième une réponse uniforme en p_T.

Une description détaillée du traitement des correction d'énergie appliquées aux jets dans CMS est fournie dans [17].

6.3.6 Reconstruction de l'Énergie Transverse Manquante

Comment détecter les particules qui n'interagissent pas dans le détecteur ? Cette question est d'une importance cruciale lorsqu'on s'intéresse à des particules dont les sections efficaces d'interaction dans le détecteur sont très faibles, comme les neutrinos ou encore pour la recherche de matière noire. La méthode la plus naturelle consiste à tirer profit de la conservation de l'impulsion. En effet, si on ne connaît pas l'impulsion des particules impliquées dans l'interaction principale, on sait que ces dernières ne possèdent qu'une impulsion transverse négligeable. Ainsi, l'impulsion transverse totale est nulle avant l'interaction, et doit donc l'être dans l'état final :

$$\sum_i \vec{p}_T^{\,i} = 0 \tag{6.13}$$

Cependant, il arrive que toutes les particules ne soient pas détectées, soit parce que les sections efficaces d'interaction dans le détecteur sont trop faibles, soit parce qu'elles sortent de l'acceptance du détecteur. Dans ce cas, les impulsions transverses des particules reconstruites ne se compensent pas, et on définit l'énergie transverse manquante $\vec{\not{E}}_T$ par :

$$\sum_{\text{particules reconstruites } i} \vec{p}_T^{\,i} = -\vec{\not{E}}_T \neq 0 \tag{6.14}$$

Notons que l'énergie transverse manquante est un vecteur dans le plan transverse xOy. On peut donc lui associer un angle ϕ et un module $\not{E}_T$. Les particules utilisées pour le calcul de $\vec{\not{E}}_T$ par la collaboration CMS sont celles qui sont reconstruites par l'algorithme de flux de particules, qui offre la meilleure résolution en énergie. Toute erreur sur l'impulsion transverse des

particules reconstruite se propage à l'énergie transverse manquante, il faut donc corriger au mieux ces erreurs pour que $\vec{\not{E}}_T$ soit utilisable. L'énergie transverse manquante utilisée dans la suite est celle dite de Type-I, qui propage les corrections appliquées aux jets à $\vec{\not{E}}_T$. Ce type d'énergie transverse manquante est particulièrement utile lors de recherches dans des états finaux hadroniques. Cette correction s'effectue en regroupant les particules en jets lors du calcul de $\vec{\not{E}}_T$ selon :

$$-\vec{\not{E}}_T^{\text{Type-I}} = \sum_{\text{jet}} \vec{p}_{T,jet}^{JEC} + \sum_{i \in \text{others}} \vec{p}_T^{\,i} \tag{6.15}$$

où l'exposant JEC indique que l'on a appliqué les corrections d'énergie aux jets. Pour plus de détails concernant la reconstruction de l'énergie transverse manquante et de ses performances dans CMS, on pourra consulter [18].

Il est également pertinent, dans les canaux de recherche hadroniques, de définir une variable dérivée de l'énergie transverse manquante, notée $\not{H}_t$, qui est l'impulsion transverse manquante calculée à partir des jets :

$$-\vec{\not{H}}_T = \sum_{\text{jet}} \vec{p}_{T,jet} \tag{6.16}$$

Bibliographie

[1] CMS Collaboration. Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC. *Phys. Lett.*, B716 :30–61, 2012.

[2] ATLAS Collaboration. Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC. *Phys. Lett.*, B716 :1–29, 2012.

[3] Oliver S. Bruning et al. LHC Design Report Vol.1 : The LHC Main Ring. 2004.

[4] NNPDF Collaboration. Parton distributions from high-precision collider data. *Eur. Phys. J.*, C77(10) :663, 2017.

[5] CMS Collaboration. The CMS Experiment at the CERN LHC. *JINST*, 3 :S08004, 2008.

[6] CMS Collaboration. The CMS muon system in Run2 : preparation, status and first results. *PoS*, EPS-HEP2015 :237, 2015.

[7] CMS Collaboration. Particle-flow reconstruction and global event description with the CMS detector. *JINST*, 12(10) :P10003, 2017.

[8] CMS Collaboration. Performance of Electron Reconstruction and Selection with the CMS Detector in Proton-Proton Collisions at $\sqrt{s} = 8$ TeV. *JINST*, 10(06) :P06005, 2015.

[9] CMS Collaboration. Performance of Photon Reconstruction and Identification with the CMS Detector in Proton-Proton Collisions at sqrt(s) = 8 TeV. *JINST*, 10(08) :P08010, 2015.

[10] CMS Collaboration. Performance of the CMS muon detector and muon reconstruction with proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV. *JINST*, 13(06) :P06015, 2018.

[11] Particle Data Group. Review of Particle Physics. *Chin. Phys.*, C40(10) :100001, 2016.

[12] CMS Collaboration. Reconstruction and identification of τ lepton decays to hadrons and ν_τ at CMS. *JINST*, 11(01) :P01019, 2016.

[13] Matteo Cacciari, Gavin P. Salam, and Gregory Soyez. The anti-k_t jet clustering algorithm. *JHEP*, 04 :063, 2008.

[14] Gavin P. Salam and Gregory Soyez. A Practical Seedless Infrared-Safe Cone jet algorithm. *JHEP*, 05 :086, 2007.

[15] CMS Collaboration. Identification of heavy-flavour jets with the CMS detector in pp collisions at 13 TeV. *JINST*, 13(05) :P05011, 2018.

[16] Jesse Thaler and Ken Van Tilburg. Identifying Boosted Objects with N-subjettiness. *JHEP*, 03 :015, 2011.

[17] CMS Collaboration. Jet energy scale and resolution in the CMS experiment in pp collisions at 8 TeV. *JINST*, 12(02) :P02014, 2017.

[18] CMS Collaboration. Performance of the CMS missing transverse momentum reconstruction in pp data at $\sqrt{s}$ = 8 TeV. *JINST*, 10(02) :P02006, 2015.

Chapitre 7

Recherche d'évènements Mono-jet et Mono-V

Sommaire

7.1 Sélection des évènements 256
7.1.1 Signal et bruits de fond 256
7.1.2 Sélection commune aux deux catégories 259
7.1.3 Sélections des catégories 260
7.2 Simulations Monte-Carlo d'évènements branons 262
7.2.1 Un peu de phénoménologie 262
7.2.2 Production à l'échelle partonique 265
7.2.3 Simulations des distributions du signal branon 269
7.3 Exploration des données 271
7.3.1 Contrôle des bruits de fond 271
7.3.2 Estimation par les données des bruits de fond électrofaibles 274
7.3.3 Incertitudes systématiques 275
7.3.4 Contraintes sur le modèle du branon 280
Bibliographie 285

Le LHC étant un collisionneur proton-proton, les processus faisant intervenir les quarks et les gluons (hadroniques), sont prépondérants. Il est donc naturel que le canal de recherche dans l'état final composé d'un jet et d'une part significative d'énergie transverse manquante constitue un canal privilégié de recherche de matière noire au LHC. Il s'avère que ce canal est particulièrement adapté à la recherche de branons. Cependant, l'analyse des bruits de fond et des systématiques étant difficile, nous avons fait le choix de nous reposer sur une analyse déjà existante de recherche de matière noire dans ce canal [1]. L'étude à mener a alors été plus simple, au détriment de la sensibilité dans la recherche de branons car l'analyse existante n'est

pas optimisée pour cette recherche spécifique mais pour des recherches de matière noire dans le cadre des théories des champs effectives (EFT) [2–5]. Ce chapitre présente la stratégie de recherche adoptée par l'analyse pré-existante ainsi que les résultats obtenus pour la recherche de branons dans ce cadre, avec les données collectées par le détecteur CMS durant l'année 2016 qui représentent une luminosité intégrée de 35.9fb^{-1} à 13 TeV. Nous commencerons par décrire, dans la section 7.1, les grandes lignes de l'analyse, que nous appliquerons au modèle du branon dans la section 7.2. Une fois les prédictions pour le modèle du branon obtenues, leur comparaison avec les données expérimentales sera présentée dans la section 7.3.

7.1 Sélection des évènements

7.1.1 Signal et bruits de fond

L'état final qui nous intéresse, qui est le même que celui de l'analyse pré-existante, est constitué d'une composante importante d'énergie transverse manquante $\not{E}_T$ ainsi que d'au moins un jet d'impulsion transverse p_T élevée. L'énergie transverse manquante provient des particules de matière noire qui sont stables et n'interagissent donc pas dans le détecteur. La présence d'au moins un jet nous permet de reconstruire cette énergie transverse manquante, et de remonter aux mécanismes susceptibles de produire de tels évènements ainsi que des évènements de bruit de fond. Les canaux de production possibles des particules de matière noire dont l'état final est celui-ci se regroupent en deux catégories, que l'on appellera dans toute la suite "catégorie Mono-jet" et "catégorie Mono-V" :

— **Catégorie Mono-jet :** correspond aux évènements qui produisent, en compagnie de la paire de particules de matière noire notées χ, un quark ou un gluon. Ce quark ou ce gluon va ensuite s'hadroniser en un jet de grande énergie dans l'état final. Ces interactions sont du type :

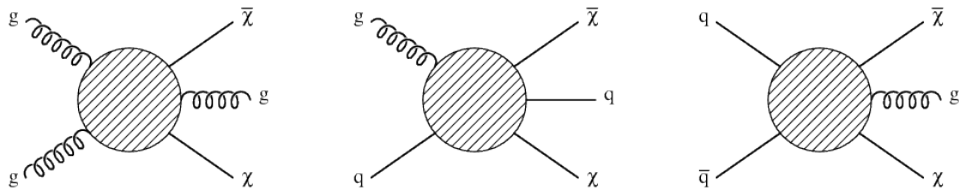

FIGURE 7.1 Diagrammes de Feynman schématiques pour les processus de production du signal considéré dans la catégorie Mono-jet. Le détail de l'interaction en jeu dépend du modèle que l'on teste et sera donné dans la section 7.2 pour le modèle du branon.

— **Catégorie Mono-V :** correspond aux évènements qui produisent, en compagnie de la paire de particules de matière noire, un boson vecteur massif W ou Z. On suppose ensuite que ce boson vecteur se désintègre de manière hadronique, ce qui produit deux

quarks qui vont s'hadroniser. L'état final est néanmoins un unique jet de haute impulsion transverse car le boson vecteur est produit avec un fort boost de Lorentz. Les deux quarks produits seront donc collimatés et reconstruits comme un seul jet boosté. Les interactions correspondantes sont de la forme :

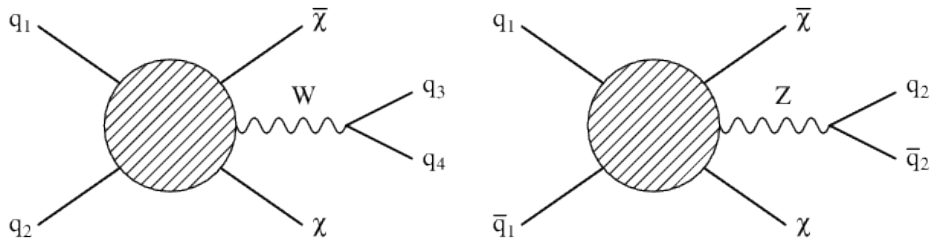

FIGURE 7.2 Diagrammes de Feynman schématiques pour les processus de production du signal considéré dans la catégorie Mono-V.

Cependant, des évènements de bruits de fond qui ne correspondent pas aux processus précédents mais dont l'état final ressemble à celui décrit plus haut, peuvent également se produire et doivent être distingués des évènements du signal qui nous intéresse. Heureusement, ces évènements de bruits de fond sont des processus du modèle standard dont on connaît la nature et qui peuvent donc être estimés dans une certaine mesure. La difficulté principale de la recherche de matière noire dans les canaux Mono-jet et Mono-V vient du nombre important de sources d'évènements de bruits de fond délicats à évaluer. Les sources de bruit de fond considérées dans cette recherche sont les suivantes :

— $\boldsymbol{Z\ (\nu\nu)}$ **+ jets :** il s'agit de la source la plus importante de bruit de fond irréductible, c'est-à-dire dont les évènements qui, par nature, ont le même état final que les évènements de signal. Les évènements correspondants proviennent de la production d'un boson Z par un processus de Drell-Yan [6], ainsi que d'un quark ou un gluon, par un processus de l'interaction forte, qui s'hadronisera en un jet. Le boson Z se désintègre ensuite en deux neutrinos qui échappent à la détection et sont donc une source d'énergie transverse manquante. L'état final correspond donc exactement à celui des évènements de signal ;

— $\boldsymbol{W\ (\ell\nu)}$ **+ jets :** ces évènements sont assez similaires aux précédents. Ils résultent de la production d'un boson $W^{\pm}$ en compagnie d'un jet. Le boson vecteur se désintègre en un neutrino, source d'$\not{E}_T$, et un lepton. L'état final n'est donc pas exactement le même que pour les évènements de signal, ce qui permet de les filtrer. Néanmoins, cette source de bruit de fond devient irréductible lorsque le lepton final n'est pas détecté, car en dehors de l'acceptance du détecteur par exemple. Cela arrive en fait suffisamment souvent pour que cette source de bruit de fond irréductible soit la seconde plus importante ;

— $\boldsymbol{Z/\gamma\ (\ell\ell)}$ **+ jets :** ces évènements ont pour origine la production d'un boson Z ou d'un photon γ, qui se désintègre en deux leptons, en compagnie d'un jet. De même que pour

la source précédente, celle-ci devient irréductible lorsque les deux leptons ne sont pas détectés ;

— $\gamma +$ **jets :** il s'agit ici de tous les évènements dont l'état final est un photon accompagné d'un ou plusieurs jets. Il existe plusieurs cas de figures pour lesquels de tels évènements peuvent ressembler aux évènements de signal, par exemple lorsque le photon est en dehors de l'acceptance du détecteur, et devient une source d'$\not{E}_T$;

— **Top quark :** la production de quarks top peut être une source de bruit de fond pour cette analyse. En effet, le quark top se désintègre dans 99.8% des cas en un quark b et en un boson W [7]. Si ce dernier se désintègre en un lepton qui n'est pas détecté et un neutrino, l'état final est un jet et de l'énergie transverse manquante. Cependant, il s'agit d'un jet de quark b, qui peut être identifié spécifiquement, comme nous l'avons évoqué dans la section 6.3.5. En effet, les quarks b ont un temps de vie relativement long, et les jets correspondants semblent provenir d'un vertex déplacé par rapport au vertex de l'interaction. Ces bruits de fond rassemblent à la fois les évènements de production $t\bar{t}$ dans lesquels une paire de quarks top et anti-top est produite, et les évènements de production d'un quark top seul ;

— **Dibosons :** les évènements dits "dibosons" correspondent à la production d'une paire de bosons vecteurs (WW, WZ ou ZZ) et peuvent constituer une source de bruit de fond pour cette recherche. Lorsque l'un des bosons se désintègre de manière leptonique, par exemple $Z \to \nu\nu$, et l'autre de manière hadronique, l'état final correspond à celui du signal ;

— **QCD :** cette dernière source de bruit de fond comprend les évènements dus à des processus de l'interaction forte (que l'on nommera par la suite évènements de QCD), dans lesquels un certain nombre de jets sont produits. En général, de tels évènements n'ont qu'une faible $\not{E}_T$, mais une très faible fraction d'entre eux en ont une significative lorsque l'impulsion des jets est mal reconstruite ou que l'un d'eux n'est pas détecté. Or, comme les évènements de QCD ont une très grande section efficace, en particulier au LHC, ces évènements sont en nombre important, et donc même cette petite fraction ne doit pas être négligée.

Il est possible de discriminer, jusqu'à un certain point, les évènements de signal de ceux des bruit de fond en utilisant des critères de sélection sur les variables cinématiques, par exemple, lorsque la source du fond n'est pas irréductible. Ces critères sont définis pour maximiser le rapport du nombre d'évènements de signal sur le nombre d'évènements de bruit de fond, tout en gardant une statistique suffisante. On définit deux régions de signal exclusives, avec deux jeux de coupures différentes, enrichies en évènements de signal de la catégorie Mono-jet pour la première et de la catégorie Mono-V pour la seconde.

7.1.2 Sélection commune aux deux catégories

On commence par appliquer des critères généraux qui sélectionnent l'état final qui nous intéresse en limitant le nombre d'évènements de bruits de fond. Ces critères s'appliquent aux deux régions de signal (Mono-jet et Mono-V), puis on appliquera dans un second temps des critères spécifiques pour distinguer les deux catégories. Pour qu'un évènement candidat passe la sélection de signal, celui-ci doit vérifier un certain nombre de conditions.
Premièrement, il doit présenter une énergie transverse manquante $\not{E}_T > 250$ GeV. En effet, les évènements dans les données subissent une pré-sélection à l'aide du système de déclenchement de haut niveau de CMS conçu pour sélectionner des évènements avec une grande $\not{E}_T$ ou un grand $\not{H}_T$. On choisit cette limite inférieure sur l'énergie transverse manquante car, pour $\not{E}_T > 250$ GeV, l'efficacité de sélection des systèmes de déclenchement est meilleure que 97%. On applique, de plus, des filtres pour éliminer les évènements dont l'énergie transverse manquante a pour origine le bruit du détecteur et les effets dus au faisceau.
On requiert également que le jet de type AK4 le plus énergétique soit dans la région centrale couverte par le tonneau et les bouchons des calorimètres $|\eta| < 2.5$ et soit d'impulsion transverse $p_T > 100$ GeV. Par ailleurs, l'énergie du jet le plus énergétique doit venir pour au moins 10% de particules chargées et pour au plus 80% de hadrons neutres, de manière à évacuer les évènements produits par des interactions induites par les protons du halo autour du faisceau.
Pour diminuer le nombre d'évènements du bruit de fond QCD, on impose à l'évènement de vérifier $\Delta\phi\left(\text{jet}, \vec{\not{E}}_T\right) > 0.5$ pour les quatres jets AK4 les plus énergétiques, c'est-à-dire que l'on demande que ceux-ci aient des directions bien séparées de $\vec{\not{E}}_T$. En effet, dans les évènements de bruit de fond QCD, l'énergie transverse manquante a souvent pour origine une mauvaise mesure de l'impulsion transverse d'un des jets les plus énergétiques. Dans ce cas, $\vec{\not{E}}_T$ et l'impulsion du jet mal mesuré ont la même direction.
Il est également possible de supprimer les évènements de bruits de fond qui proviennent de la désintégration d'un quark top en éliminant les évènements dans lesquels un jet de quark b est explicitement identifié. Ceux-ci sont définis comme des jets AK4, de $p_T > 20$ GeV, de $|\eta| < 2.4$ et dont le critère défini par l'algorithme de vertex secondaire combiné [8, 9] (illustré par la figure 7.3) est tel que CSVv2 > 0.84. Ce critère est choisi de manière à ce qu'un jet de quark b soit identifié correctement avec une probabilité de 80%, et qu'un jet de quark c soit identifié de manière erronée comme provenant d'un quark b avec une probabilité de 40%.
Enfin, on élimine une partie des évènements de bruit de fond provenant des autres sources en supprimant les évènements dans lesquels sont identifiés des leptons (électrons, muons ou taus) ou des photons, tels que définis dans l'annexe D. On dit alors qu'on applique un veto contre les leptons et les photons.

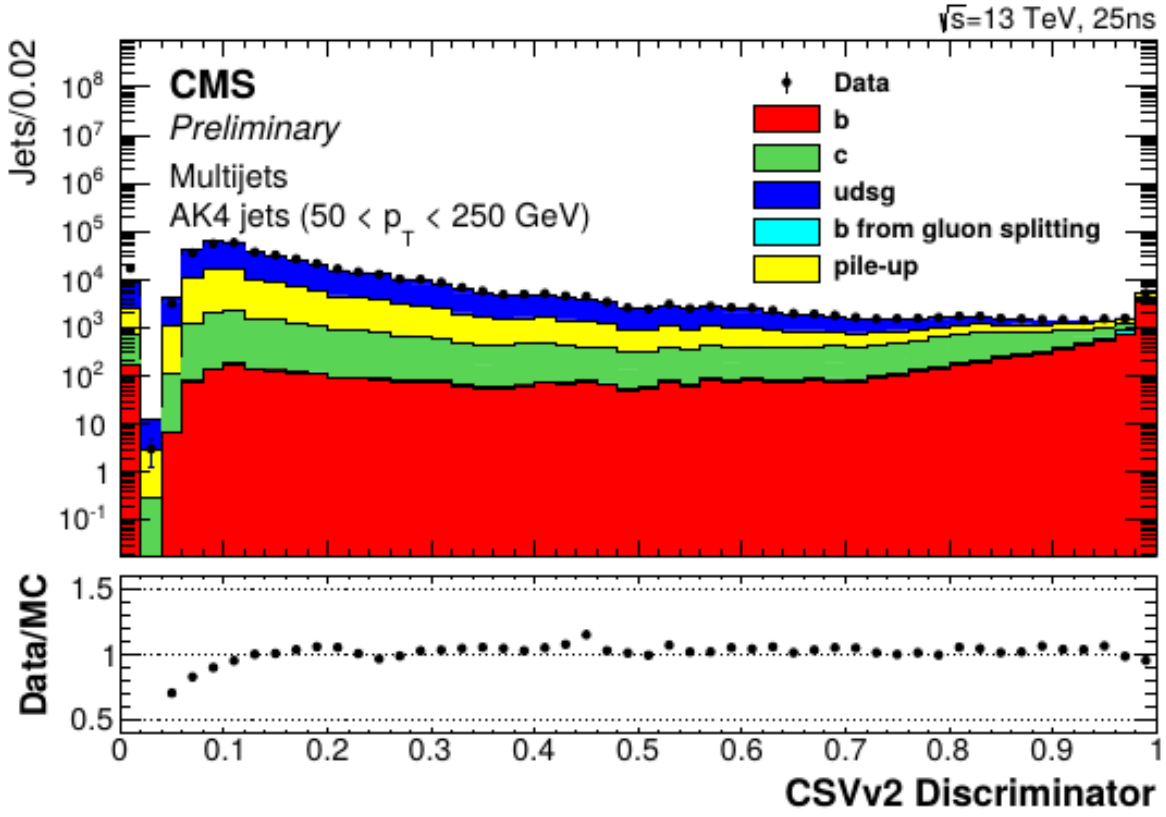

FIGURE 7.3 Distribution du critère CSVv2 pour des jets tels que $50 < p_T < 250$ GeV. Ces jets proviennent d'un échantillon d'évènements contenant au moins un jet AK4 dont le p_T est supérieur à 50 GeV [8, 9]. Les résultats des simulations Monte-Carlo sont représentés par les histogrammes colorés, les données par les points noirs, et les résidus sont représentés dans la figure du bas.

7.1.3 Sélections des catégories

L'ensemble des critères définis précédemment est commun aux régions de signal des deux catégories. Nous allons ici décrire la sélection spécifique à la catégorie Mono-V. Il s'agit de déterminer les critères qui permettent d'identifier des jets provenant d'un boson vecteur V (boson W ou Z), c'est-à-dire de faire ce que l'on appelle de l'étiquetage de boson vecteur, ou V-tagging. Si l'évènement présente un jet identifié comme provenant d'un boson vecteur, alors l'évènement sera placé dans la catégorie Mono-V.

Lors de la désintégration hadronique d'un boson vecteur, deux quarks sont produits avant de s'hadroniser. Si le boson vecteur est très énergétique, alors les deux jets seront collimés jusqu'à ce qu'ils fusionnent, de sorte que la reconstruction de deux jets AK4 peut ne plus être pertinente. Ainsi, lorsqu'on cherche à effectuer du V-tagging, on utilise des jets à topologie boostée, qui sont les jets AK8 décrits dans la section 6.3.5. Or, l'efficacité de reconstruction d'un unique jet AK8 produit par la désintégration d'un boson W ou Z ne devient meilleure que celle de la

reconstruction de deux jets AK4 que lorsque le jet AK8 vérifie $p_T > 250$ GeV. On ne considère donc, pour le V-tagging, que des jets AK8 situés dans la région centrale $|\eta| < 2.4$ pour lesquels $p_T > 250$ GeV. Pour effectuer le V-tagging sur le jet AK8 de plus haute énergie, on s'appuie sur deux variables de sous-structure des jets boostés.
Premièrement, bien que les jets de bosons vecteurs boostés soient reconstruits comme des objets à part entière, ils sont fondamentalement le résultat de la fusion de deux jets de quarks. Cette caractéristique permet de discriminer les jets AK8 qui proviennent d'un boson vecteur à l'aide de la notion de N-subjettiness présentée dans le chapitre 6. En particulier, puisque les jets AK8 produits par la désintégration d'un boson vecteur sont composés de deux sous-jets, le paramètre τ_2/τ_1 doit être inférieur à 1. Pour la sélection de la catégorie Mono-V, on choisit d'imposer $\tau_2/\tau_1 < 0.6$.
Deuxièmement, on utilise la masse dite "pruned" définie dans le chapitre 6. En effet, les jets boostés provenant de la désintégration d'un boson vecteur doivent avoir une masse reconstruite proche de la masse du boson W ou Z d'origine, qui ont des masses suffisamment proches pour qu'on ne les distingue pas pour la sélection (on rappelle que $m_W = 80.379 \pm 0.012$ GeV et $m_Z = 91.1876 \pm 0.0021$ GeV [7]). On sélectionne alors, pour la catégorie Mono-V, les évènements pour lesquels la masse "pruned" du jet AK8 le plus énergétique vérifie la condition $65 < m_{\text{pruned}} < 105$ GeV, qui est l'intervalle dans lequel se concentre une grande partie des jets AK8 provenant de la désintégration d'un boson W (et a fortiori d'un Z), comme l'illustre la figure 7.4.

Ces critères supplémentaires, associés au V-tagging, définissent la catégorie Mono-V. Les évènements qui passent la sélection générale mais ne présentent pas de jet identifié comme provenant de la désintégration d'un boson V sont, eux, placés dans la catégorie Mono-Jet. Les différents critères de sélection pour les deux catégories sont résumés dans la table 7.1.

Catégorie Mono-V	Catégorie Mono-jet
Présence d'un jet AK8 avec :	Présence d'un jet AK4 avec :
$p_T > 250$ GeV	$p_T > 100$ GeV
$\lvert\eta\rvert < 2.4$	$\lvert\eta\rvert < 2.5$
$\tau_2/\tau_1 < 0.6$	
$65 < m_{\text{pruned}} < 105$ GeV	$\notin$ Mono-V
Veto sur les leptons (électrons, muons, taus)	
Veto sur les photons	
Veto sur les jets de quark b	
$\Delta\phi\left(\text{jet}_{1,2,3,4}, \vec{\not{E}}_T\right) > 0.5$	

TABLE 7.1 Résumé des critères de sélection pour les catégories Mono-V et Mono-jet de la recherche de branons.

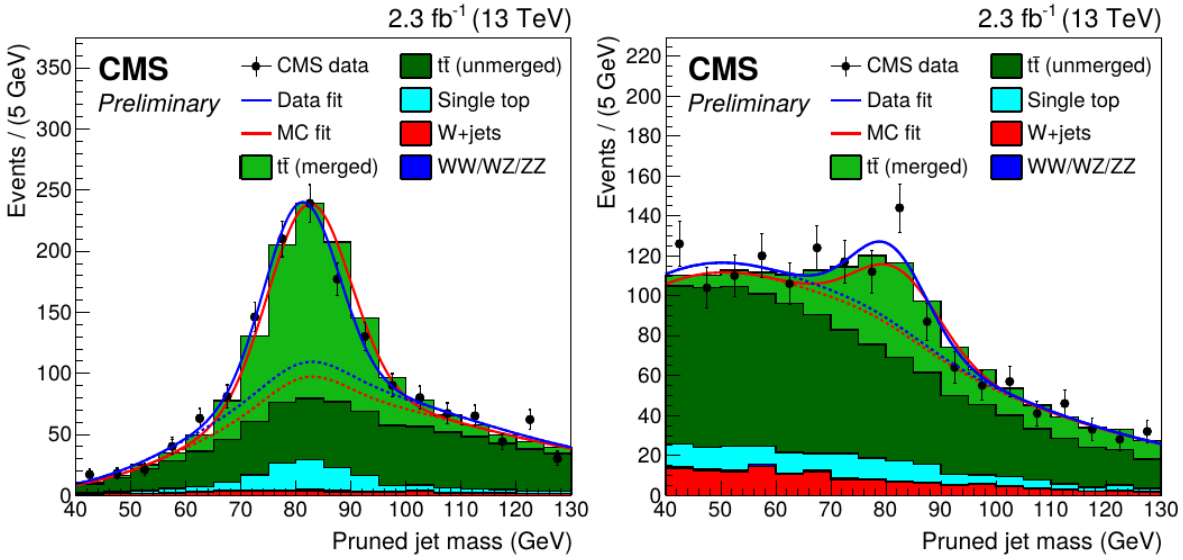

FIGURE 7.4 Distributions de masse "pruned" des jets AK8 dans un échantillon d'évènements $t\bar{t} \to b\bar{b}W^+W^-$, tirées de [10]. Pour le V-tagging, on considère les évènements dans lesquels un des bosons W se désintègre en leptons et l'autre de manière hadronique, ce qui permet de diminuer la combinatoire entre jets et donc de simplifier l'identification des jets de bosons W. On sépare de plus les évènements en fonction du paramètre τ_2/τ_1 qui est inférieur à 0.45 dans la figure de gauche et supérieur à cette valeur dans la figure de droite. Dans ces deux régions, l'intervalle $65 < m_{\text{pruned}} < 105$ GeV est particulièrement riches en jets de bosons W (notés "merged") provenant des évènements $t\bar{t}$.

7.2 Simulations Monte-Carlo d'évènements branons

7.2.1 Un peu de phénoménologie

On rappelle que l'action qui décrit les interactions entre les branons et les particules du modèle standard, déterminée dans le chapitre 5, s'écrit :

$$\mathcal{S}_{\text{SM}-\pi} = \int d^4x \left[\mathcal{L}_{\text{SM}} + \frac{1}{8f^4} \left(4\delta_{\alpha\beta}\partial_\mu\pi^\alpha\partial_\nu\pi^\beta - \eta_{\mu\nu}M^2_{\alpha\beta}\pi^\alpha\pi^\beta \right) T^{\mu\nu}_{\text{SM}} \right] \tag{7.1}$$

où f est la tension de brane, $M_{\alpha\beta}$ est la matrice de masse des branons, et $T^{\mu\nu}_{\text{SM}}$ est le tenseur énergie-impulsion des particules du modèle standard détaillé à la fin de la section 5.3.2. À partir de cette action, on peut déterminer les processus qui peuvent avoir lieu dans un collisionneur proton-proton tel que le LHC. Parmi les processus possibles, ceux qui nous intéressent dans le cas de la présente étude se décomposent en deux familles. La première regroupe les processus de production d'un quark ou d'un gluon qui s'hadronise dans un second temps ; c'est le canal de production mono-jet, à ne pas confondre avec la catégorie Mono-jet, constitué des processus suivants (à l'ordre le plus bas) [11] : $q\bar{q} \to g\pi\pi$, $qg \to q\pi\pi$ et $gg \to g\pi\pi$.

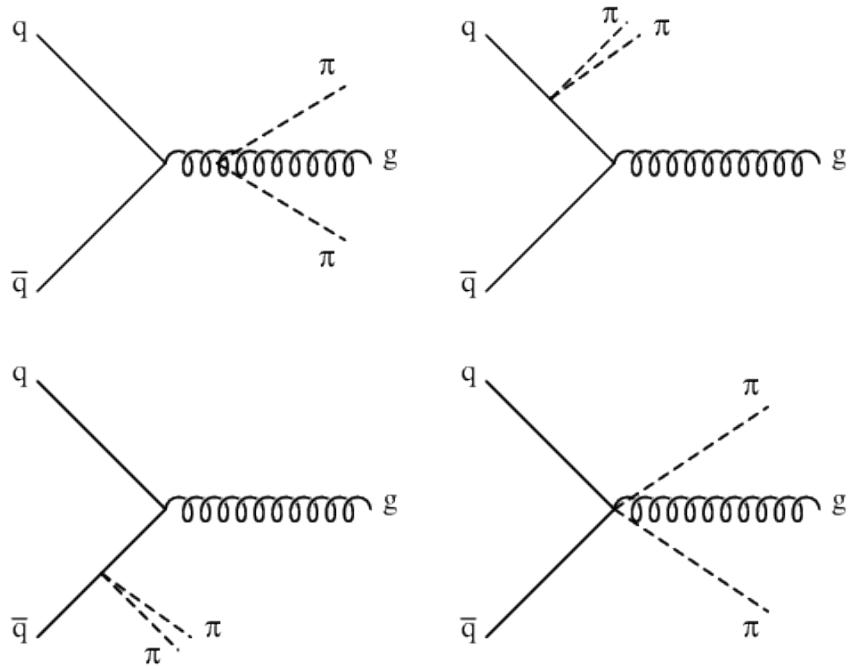

FIGURE 7.5 Diagrammes de Feynman pour le processus de production de branons $q\bar{q} \to g\pi\pi$. Ces diagrammes sont caractéristiques du canal de production mono-jet. On rappelle que les branons sont toujours produits par paire. En plus des diagrammes habituels (en bas à gauche et en haut) le couplage entre les branons et les particules du modèle standard à travers le tenseur énergie-impulsion introduit des diagrammes incluant des vertex à 5 branches (en bas à droite).

Les diagrammes de Feynman correspondants au processus $q\bar{q} \to g\pi\pi$ sont présentés dans la figure 7.5, sachant que les diagrammes de Feynman pour les autres processus sont identiques, en remplaçant un ou tous les quarks par des gluons. La seconde famille regroupe les processus de production d'un boson vecteur seul, qui se désintègre de manière hadronique, ainsi que d'une paire de branons. Il s'agit du canal de production mono-V, à ne pas confondre avec la catégorie Mono-V, constitué des interactions suivantes (à l'ordre le plus bas) : $q\bar{q} \to Z\pi\pi \to q\bar{q}\pi\pi$ et $qq' \to W\pi\pi \to qq'\pi\pi$. Les diagrammes de Feynman pour le premier processus sont présentés dans la figure 7.6, ceux pour le deuxième processus sont similaires.

Il est possible de calculer les sections efficaces de ces processus à partir de l'action d'interaction des branons avec les particules du modèle standard. Pour les processus de production mono-jet (quelques expressions analogues pour les processus de production mono-V peuvent être

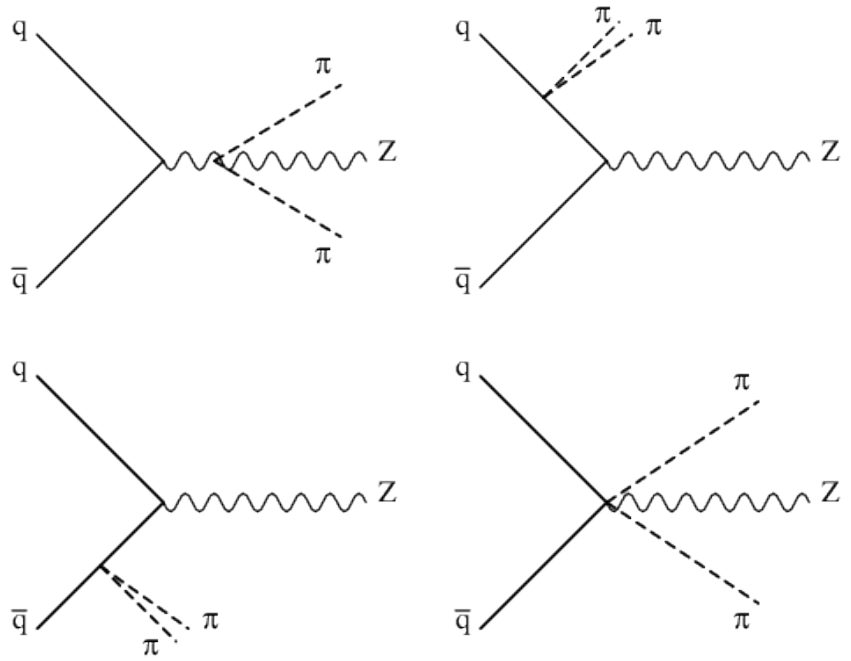

FIGURE 7.6 Diagrammes de Feynman pour le processus de production de branons $q\bar{q} \to Z\pi\pi$, caractéristiques du canal de production mono-V. Le boson vecteur, ici un boson Z, se désintègre ensuite en deux quarks qui vont s'hadroniser en deux jets.

trouvées dans [12]), les sections efficaces différentielles sont données par [11] :

$$\frac{d\sigma\left(q\bar{q} \to g\pi\pi\right)}{dk^2dt} = \frac{4\alpha_s N}{3}\frac{\left(k^2-4M_\pi^2\right)^2}{184320 f^8\pi^2\hat{s}^3tu}\sqrt{1-\frac{4M_\pi^2}{k^2}}\left(\hat{s}k^2+4tu\right)\left(2\hat{s}k^2+t^2+u^2\right) \tag{7.2}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma\left(gg \to g\pi\pi\right)}{dk^2dt} &= \alpha_s N\frac{\left(k^2-4M_\pi^2\right)^2}{40960 f^8\pi^2\hat{s}^3tu}\sqrt{1-\frac{4M_\pi^2}{k^2}} \\ &\quad\times\left[\hat{s}^4+t^4+u^4-k^8+6k^4\left(\hat{s}^2+t^2+u^2\right)-4k^2\left(\hat{s}^3+t^3+u^3\right)\right]\end{aligned} \tag{7.3}$$

$$\frac{d\sigma\left(qg \to q\pi\pi\right)}{dk^2dt} = -\frac{\alpha_s N}{2}\frac{\left(k^2-4M_\pi^2\right)^2}{184320 f^8\pi^2\hat{s}^3tu}\sqrt{1-\frac{4M_\pi^2}{k^2}}\left(uk^2+4t\hat{s}\right)\left(2uk^2+t^2+\hat{s}^2\right) \tag{7.4}$$

où α_s est la constante de couplage de l'interaction forte, N est le nombre de branons au sens du nombre de bosons de Goldstone liés à la brisure de symétrie d'espace-temps. Leur masse est M_π, supposée identique pour tous les branons. On a, de plus, utilisé les variables de Mandelstam :

$$\hat{s} = \left(p_1+p_2\right)^2, \quad t = \left(p_1-q\right)^2, \quad u = \left(p_2-q\right)^2 \quad \text{et} \quad k = \left(k_1+k_2\right)^2 \tag{7.5}$$

avec p_1 et p_2 les quadri-impulsions des particules incidentes, k_1 et k_2 les quadri-impulsions des branons émis, et q la quadri-impulsion de la particule du modèle standard émise. Ces sections efficaces permettent de déterminer les distributions en énergie des branons, et donc de prédire la distribution en énergie transverse manquante des évènements de signal. De plus, la section efficace totale de ces processus peut être obtenue par leur intégration sur l'espace des phases.

Il est intéressant de remarquer que ces sections efficaces (il en va de même pour les processus de production mono-V) sont toutes proportionnelles à :

$$\sigma \propto \frac{N}{f^8} \tag{7.6}$$

Ainsi, le nombre de branons et la tension de brane sont des paramètres dégénérés qui ont pour seul effet de normaliser les distributions. On se place donc, dans la suite, dans le cas d'un unique branon $N = 1$. De plus, comme f n'agit que sur l'amplitude globale des distributions, on peut se limiter à une seule valeur de tension de brane lorsqu'on effectue les simulations d'évènements branons. Les distributions qui correspondent à d'autres valeurs de f sont obtenues en normalisant les distributions simulées par le facteur approprié.

7.2.2 Production à l'échelle partonique

Plusieurs étapes sont nécessaires pour obtenir des prédictions du modèle du branon et les comparer directement aux données expérimentales. La première consiste à effectuer des simulations à l'échelle partonique, c'est-à-dire à l'échelle des particules élémentaires à l'origine de l'interaction fondamentale. En particulier, on ne prend pas en compte, à cette échelle, les aspects non-perturbatifs de QCD. Pour effectuer les simulations à l'échelle partonique, j'ai utilisé dans un premier temps le logiciel FeynRules [13] pour dériver les règles de Feynman à partir du lagrangien du modèle du branon. J'ai ensuite intégré ces règles de Feynman dans le logiciel MadGraph5 [14], qui est un logiciel de simulations Monte-Carlo, pour produire les évènements de production de branons qui nous intéressent.

Afin de valider mon implémentation du modèle du branon dans FeynRules interfacé avec MadGraph5, j'ai commencé par effectuer une comparaison entre les résultats de simulations Monte-Carlo obtenus en sortie de MadGraph5 et les prédictions analytiques pour certaines distributions décrites dans [12]. La première, présentée en figure 7.7, est la section efficace différentielle $d\sigma_Z/dE_Z$ d'évènements du type $\psi\bar{\psi} \to Z\pi\pi$, où ψ est un fermion, en fonction de l'énergie du boson E_Z pour différentes masses du branon M_π. La seconde, illustrée par la figure 7.8, est le taux de désintégration différentiel $d\Gamma_W/dE_\ell$ d'évènements du type $W \to \ell\nu\pi\pi$ en fonction de l'énergie du lepton E_ℓ pour différentes masses du branon.

Ces tests sont très concluants, puisqu'on observe un très bon accord entre les prédictions analytiques et les résultats obtenus par les simulations Monte-Carlo. On peut alors utiliser les résultats obtenus par MadGraph5 avec confiance. En particulier, il est possible de calculer les sections efficaces totales des processus de production de branons qui nous intéressent. Les sections efficaces pour les processus de production mono-jet et mono-V (séparés en canaux de production mono-W et mono-Z) sont présentées dans la figure 7.9.

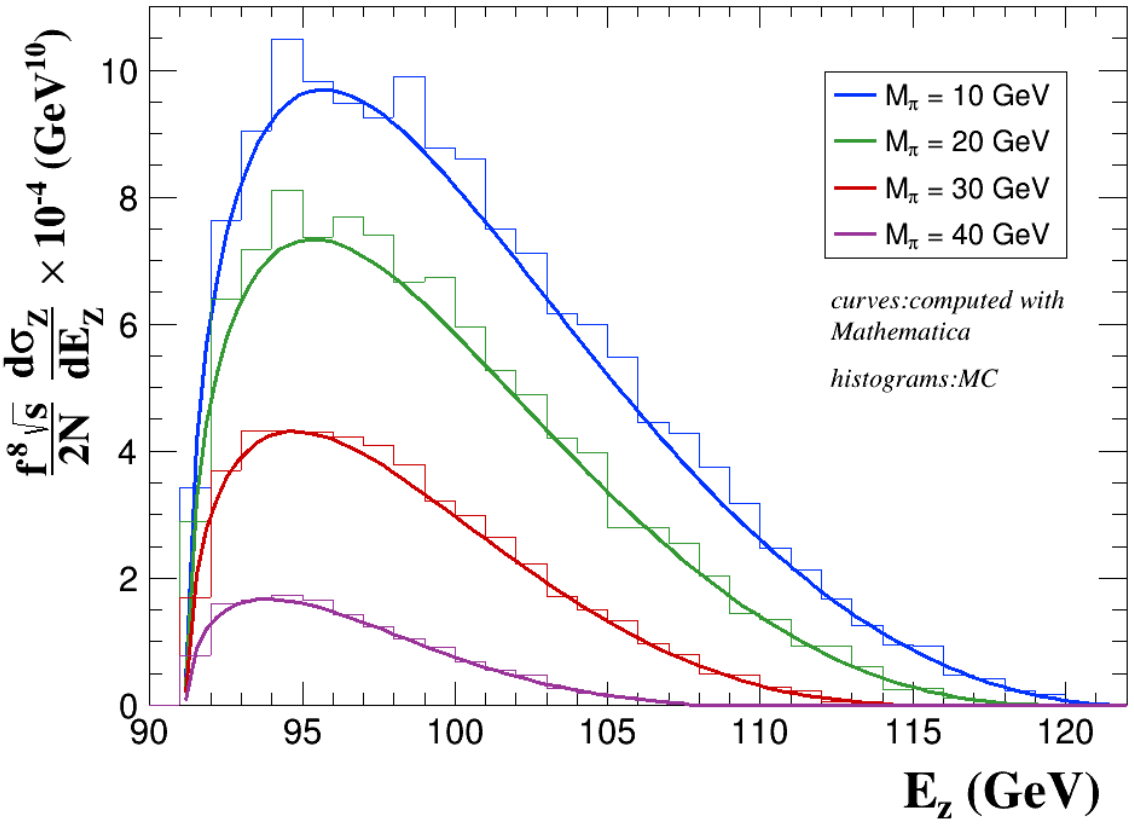

FIGURE 7.7 Les courbes pleines représentent les sections efficaces différentielles d'évènements du type $\psi\bar{\psi} \to Z\pi\pi$ en fonction de l'énergie E_Z du boson émis, pour plusieurs masses du branon. Je les ai obtenues en intégrant numériquement l'expression donnée dans [12] à l'aide de Mathematica. Les histogrammes correspondent aux distributions d'énergie du boson Z pour les évènements obtenus à l'aide du logiciel de simulations Monte-Carlo MadGraph5. Dans les deux cas, la dépendance dans les paramètres différents de la masse du branon a été extraite.

Ces sections efficaces sont inclusives, c'est-à-dire qu'elles prennent en compte tous les processus de production, ainsi que la contribution de toutes les saveurs de quark, à l'exception des quarks de la dernière famille dont la fréquence de production est très faible par rapport à celle des autres saveurs. On confirme grâce à ces valeurs de sections efficaces que le paramètre f n'intervient que par un effet de normalisation. Les sections efficaces sont ici calculées à l'ordre le plus bas (l'ordre le plus bas est noté LO, suivi de l'ordre NLO puis NNLO), ce qui est raisonnable puisque la constante de couplage f^{-8} est très faible pour les tensions de brane considérées. Enfin, on constate que les sections efficaces des processus de production mono-W et mono-Z sont du même ordre de grandeur, bien inférieures à celles des processus de production mono-jet. On s'attend donc à ce que la région de signal la plus sensible pour la recherche de branon soit la catégorie Mono-Jet, la catégorie Mono-V n'apportant qu'une petite correction.

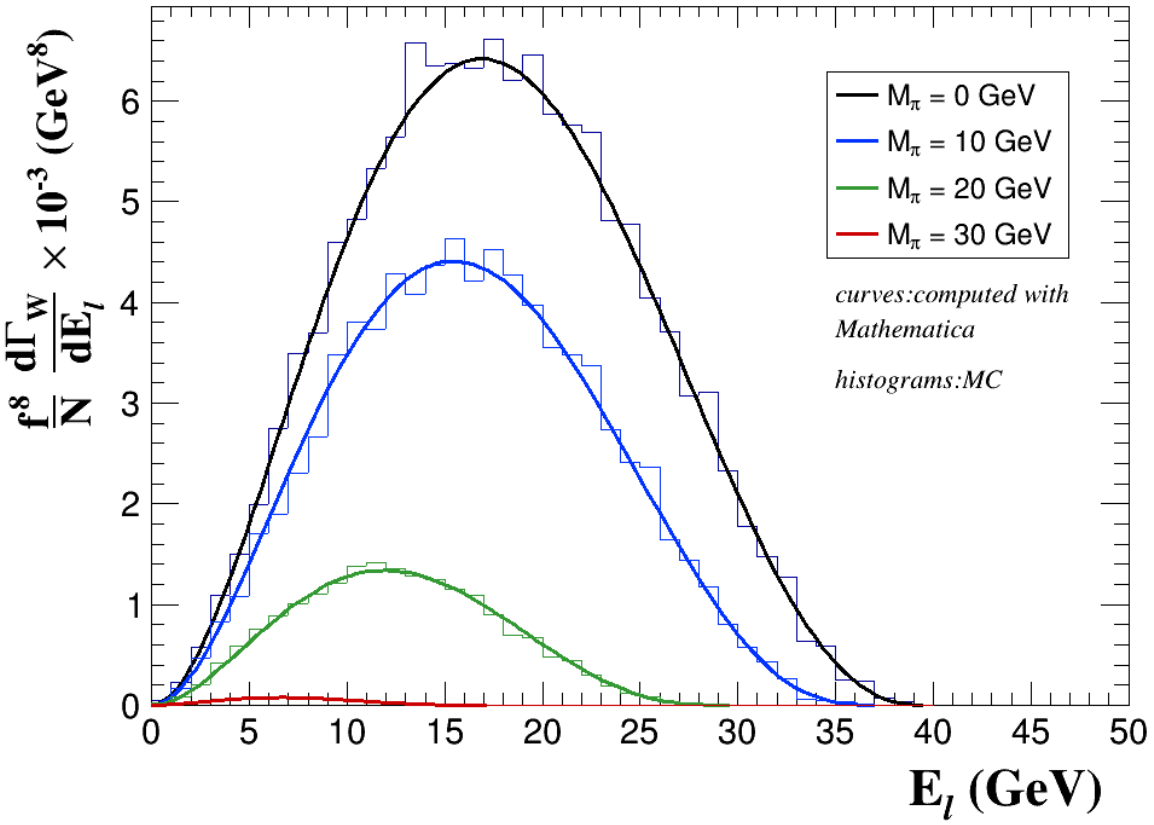

FIGURE 7.8 Les courbes pleines représentent les taux de désintégration différentiels d'évènements du type $W \to \ell\nu\pi\pi$ en fonction de l'énergie E_ℓ du lepton émis, pour plusieurs masses du branon. Je les ai obtenues en intégrant numériquement l'expression donnée dans [12] à l'aide de Mathematica. Les histogrammes correspondent aux distributions d'énergie du lepton ℓ pour les évènements obtenus à l'aide du logiciel de simulations Monte-Carlo MadGraph5. Dans les deux cas, la dépendance dans les paramètres différents de la masse du branon a été extraite.

Afin d'explorer la région la plus grande possible dans l'espace des paramètres du branon, j'ai effectué des simulations pour des masses de branons jusqu'à la limite cinématique des processus de production atteignable au LHC. Pour un tel intervalle en masse du branon, les sections efficaces de ces processus varient fortement avec une diminution en fonction de M_π jusqu'à 10 ordres de grandeurs. Afin de rester dans une gamme de sections efficaces réalistes étant donnée la sensibilité de la recherche, nous avons décidé d'effectuer nos simulations pour une haute valeur de f lorsque M_π est faible, et pour une plus faible valeur de f lorsque M_π est élevé. La liste des jeux de paramètres du branon pour lesquels j'ai effectué des simulations Monte-Carlo complètes, qui prennent en compte la géométrie du détecteur ainsi que les processus de QCD non-perturbatifs tels que l'hadronisation, est donnée dans la table 7.2.

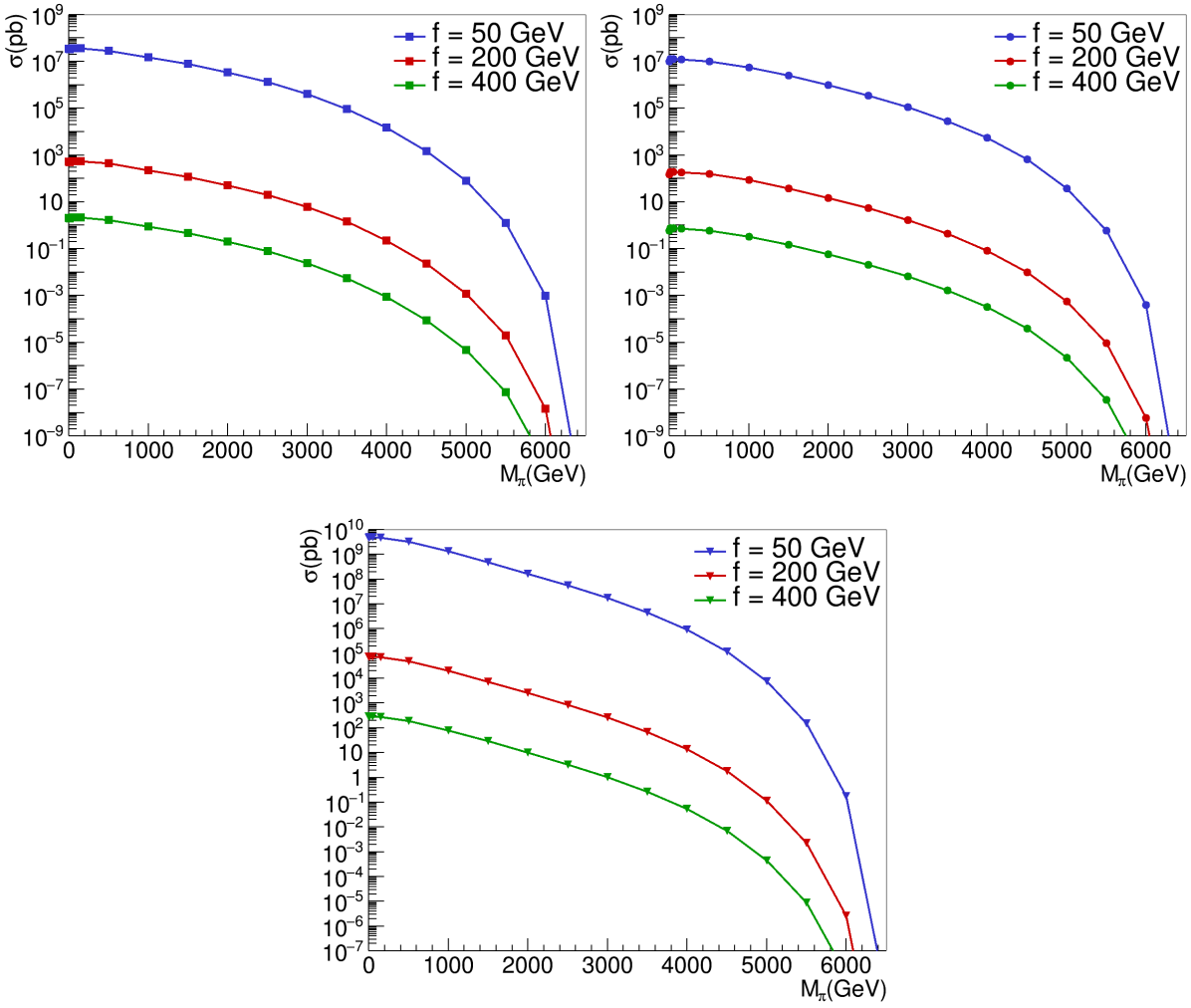

FIGURE 7.9 Sections efficaces inclusives des processus de production dans les canaux de production mono-W (en haut à gauche), mono-Z (en haut à droite) et mono-jet (en bas) en fonction du paramètre de masse des branons M_π pour différentes valeurs de la tension de brane f. On se limite ici aux sections efficaces calculées à l'ordre le plus bas.

Masse du branon	Tension de brane	Section efficace mono-jet	Section efficace mono-W	Section efficace mono-Z
1 GeV	400 GeV	286 ± 11 pb	2.00 ± 0.11 pb	0.585 ± 0.012 pb
10 GeV	400 GeV	287.2 ± 2.8 pb	1.91 ± 0.10 pb	0.752 ± 0.023 pb
50 GeV	400 GeV	288.7 ± 2.6 pb	2.119 ± 0.033 pb	0.7638 ± 0.0066 pb
150 GeV	400 GeV	278.1 ± 1.5 pb	2.118 ± 0.014 pb	0.7271 ± 0.0043 pb
500 GeV	400 GeV	188.90 ± 0.69 pb	1.7120 ± 0.0085 pb	0.6082 ± 0.0033 pb
1000 GeV	50 GeV	$(1.3410 \pm 0.0051) \cdot 10^9$ pb	$(1.452 \pm 0.030) \cdot 10^7$ pb	$(5.591 \pm 0.026) \cdot 10^6$ pb
3000 GeV	50 GeV	$(1.717 \pm 0.020) \cdot 10^7$ pb	$(4.029 \pm 0.015) \cdot 10^5$ pb	$(1.1120 \pm 0.0049) \cdot 10^5$ pb
5000 GeV	50 GeV	7590 ± 34 pb	77.47 ± 0.34 pb	37.76 ± 0.12 pb
6000 GeV	50 GeV	0.17280 ± 0.00056 pb	0.0009564 ± 0.0000082 pb	0.0003930 ± 0.0000018 pb

TABLE 7.2 Jeux de paramètres du branon f, M_π pour lesquels j'ai effectué des simulations Monte-Carlo complètes, et sections efficaces associées pour les canaux de production mono-jet, mono-W et mono-Z. Les incertitudes présentées ici correspondent aux erreurs statistiques liées à la méthode d'estimation des sections efficaces à partir des évènements simulés.

7.2.3 Simulations des distributions du signal branon

Après avoir simulé les évènements de production de branons à l'échelle partonique dans les canaux qui nous intéressent, il reste quelques étapes avant de pouvoir comparer les prédictions des simulations aux données expérimentales. La première consiste à simuler la gerbe de partons produite par les quarks et gluons de haute énergie ainsi que l'hadronisation de ces derniers pour former des jets de hadrons. J'ai effectué ces étapes de simulation à l'aide du logiciel de simulation Pythia8 [15] qui utilise les évènements à l'échelle partonique produits par MadGraph5 comme point de départ. Puis, une fois que le processus est entièrement simulé jusqu'à l'état final physique, il reste à simuler la réponse du détecteur CMS. Cela passe d'abord par la simulation des interactions entre les particules produites lors de la collision et le détecteur à partir d'une simulation de celui-ci basée sur le logiciel Geant4 [16]. Enfin, il faut simuler les étapes de prise de données, de numérisation et de reconstruction.

Les distributions en énergie transverse manquante des simulations complètes pour les points de l'espace des paramètres (M_π, f) décrits dans la table 7.2 sont présentés dans la figure 7.10. Les spectres en $\not{E}_T$ diminuent exponentiellement dans les trois canaux, avec des queues plus ou moins longues. Cependant, comme les sections efficaces des processus de production mono-jet sont beaucoup plus grandes que pour les processus de production mono-W et mono-Z, le nombre d'évènements attendus dans ce premier canal est ~ 100 fois plus élevé que pour le canal de production mono-V. Ainsi, pour que les évènements qui proviennent des processus de production mono-V dominent dans la région de signal de la catégorie Mono-V, il faut que l'efficacité de sélection dans cette catégorie soit ~ 100 fois plus élevée pour les processus du canal mono-V que pour les processus de production mono-jet. Les efficacités de sélection pour les deux catégories et les trois canaux de production sont données dans la table 7.3.

$A \times \epsilon_{MC}$		Processus mono-jet		Processus mono-W		Processus mono-Z	
		Mono-V	Mono-jet	Mono-V	Mono-jet	Mono-V	Mono-jet
$f = 400$ GeV	$M_\pi = 1$ GeV	0.0135 ± 0.0004	0.1769 ± 0.0012	0.0689 ± 0.0011	0.1053 ± 0.0014	0.0600 ± 0.0011	0.1071 ± 0.0014
	$M_\pi = 10$ GeV	0.01267 ± 0.00035	0.1771 ± 0.0012	0.0664 ± 0.0011	0.1027 ± 0.0014	0.0587 ± 0.0011	0.1081 ± 0.0014
	$M_\pi = 50$ GeV	0.0135 ± 0.0004	0.1766 ± 0.0012	0.0661 ± 0.0011	0.1030 ± 0.0014	0.0600 ± 0.0011	0.1095 ± 0.0014
	$M_\pi = 150$ GeV	0.0129 ± 0.0004	0.1775 ± 0.0012	0.0653 ± 0.0011	0.1035 ± 0.0014	0.0598 ± 0.0011	0.1089 ± 0.0014
	$M_\pi = 500$ GeV	0.0141 ± 0.0004	0.1770 ± 0.0012	0.0692 ± 0.0011	0.1047 ± 0.0014	0.0606 ± 0.0011	0.1085 ± 0.0014
$f = 50$ GeV	$M_\pi = 1000$ GeV	0.0135 ± 0.0004	0.1724 ± 0.0012	0.0713 ± 0.0012	0.1093 ± 0.0014	0.0646 ± 0.0011	0.1123 ± 0.0014
	$M_\pi = 3000$ GeV	0.01200 ± 0.00034	0.1351 ± 0.0011	0.0705 ± 0.0011	0.1030 ± 0.0014	0.0651 ± 0.0011	0.1093 ± 0.0014
	$M_\pi = 5000$ GeV	0.00586 ± 0.00024	0.0605 ± 0.0008	0.0486 ± 0.0034	0.058 ± 0.004	0.0415 ± 0.0009	0.0596 ± 0.0011
	$M_\pi = 6000$ GeV	0.00076 ± 0.00009	0.00023 ± 0.00005	0.0081 ± 0.0004	0.0101 ± 0.0004	0.0072 ± 0.0004	0.0143 ± 0.0005

TABLE 7.3 Efficacité de sélection $A \times \epsilon_{MC}$, où A est l'acceptance (qui correspond aux sélections géométriques et cinématiques sur l'énergie transverse manquante), dans les simulations Monte-Carlo de signal Branon pour les catégories Mono-jet et Mono-V, dans les trois canaux de production mono-jet, mono-W et mono-Z en fonction de la masse du branon M_π. Les incertitudes présentées ici sont purement statistiques.

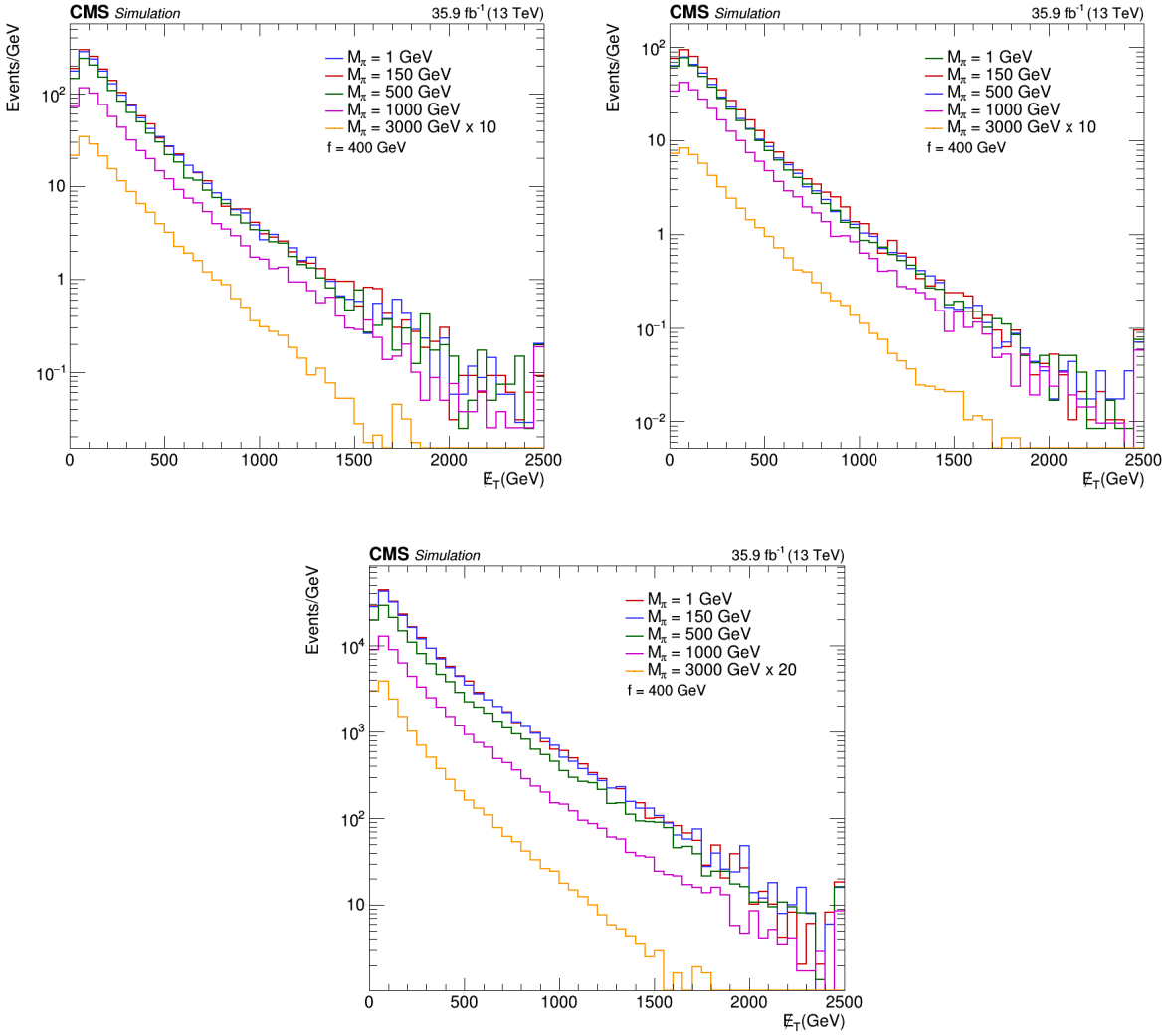

FIGURE 7.10 Distributions en énergie transverse manquante des simulations complètes, avant l'application des critères de sélection, pour différentes valeurs de M_π et pour $f = 400$ GeV avant d'effectuer la sélection des catégories Mono-jet et Mono-V. Les distributions sont normalisées à la luminosité intégrée de l'échantillon de données récoltées en 2016 par CMS $L = 35.9$ fb^{-1}. Elles sont représentées en nombre d'évènements par GeV.

On remarque que les jeux de coupures pour les deux catégories sélectionnent bien préférentiellement les processus de productions ciblés (processus mono-jet pour la catégorie Mono-jet et processus mono-W et mono-Z pour la catégorie Mono-V). Cependant, les efficacités de sélection sont faibles dans tous les cas, et particulièrement pour la catégorie Mono-V où seuls $\sim 6\%$ des évènements des processus mono-W et mono-Z passent les sélections. Cela illustre la difficulté à sélectionner les évènements de signal dans les canaux de recherche hadroniques, mais également le fait que cette analyse n'a pas été développée et optimisée pour la recherche de branons.

De plus, les efficacités de sélection des processus mono-jet dans la catégorie Mono-V ne sont qu'environ deux fois plus petites que les efficacités de sélection des processus mono-W et

mono-Z. Ainsi, ce sont les évènements de production des processus mono-jet qui dominent dans la catégorie Mono-jet, comme on s'y attendrait, mais également dans la catégorie Mono-V. On s'attend alors à ce que l'ajout de la catégorie Mono-V n'améliore pas significativement les contraintes posées sur le modèle du branon par la catégorie Mono-jet.

7.3 Exploration des données

Maintenant que nous avons obtenu les prédictions du modèle, nous pouvons exploiter les données expérimentales pour la recherche de branons. Cela passe dans un premier temps par l'estimation des bruits de fond, avant d'effectuer la comparaison entre prédictions et observations, dans un second temps.

7.3.1 Contrôle des bruits de fond

En principe, les données expérimentales sont composées de la combinaison des évènements de signal et des évènements de bruit de fond. Ainsi, pour pouvoir comparer les prédictions du modèle avec les données expérimentales, il faut disposer d'une estimation fiable du nombre d'évènements de bruit de fond qui ont passé les sélections des régions de signal.

Pour certaines sources de bruit de fond, il est possible d'évaluer le nombre d'évènements présents dans les régions de signal directement à partir de simulations Monte-Carlo. Cela concerne les sources de bruit de fond minoritaires et dont on sait que les simulations Monte-Carlo correspondantes ont des prédictions dont l'accord avec les données expérimentales est satisfaisant. Dans notre cas, le nombre d'évènements de bruit de fond de quark top, dibosons et $Z\,(\ell\ell) + \text{jet}$ sont estimés directement à partir des simulations. Pour prendre en compte les désaccords éventuels entre simulations et données pour ces sources de bruit de fond, on introduit une incertitude de 20% sur la normalisation des bruits de fond.

Au contraire, les autres sources de bruit de fond doivent être évaluées en s'appuyant directement sur les données dans des régions qui possèdent des caractéristiques d'intérêt proches de celles de la région de signal, mais d'intersection vide avec cette dernière, appelées régions de contrôle. La proximité de la région de contrôle assure la pertinence de l'estimation des bruits de fond vis à vis de la région de signal. Le fait que les régions de contrôle soient disjointes de la région de signal assure que l'estimation des bruits de fond n'introduit pas un biais vers les données dans l'analyse qui empêcherait de détecter un signal éventuel.

Bruit de fond QCD

La première source de bruit de fond qui est évaluée directement à partir des données est le bruit de fond QCD, qui correspond aux évènements de production de quarks et de gluons. En général, de tels évènements présentent des impulsions transverses qui s'équilibrent dans le détecteur, mais il arrive que cet équilibre soit rompu. Cela arrive, par exemple, lorsque l'énergie d'un jet de haute énergie est mal reconstruite, ou lorsqu'un jet de haute énergie sort hors de l'acceptance du détecteur. De tels cas sont très rares, mais les sections efficaces des processus intervenant dans le bruit de fond QCD sont tellement grandes, qu'il faut les prendre en compte. La sélection commune aux deux régions de signal présentée dans la section 7.1.2, notamment le critère sur le paramètre $\Delta\phi\left(\text{jets}, \not{E}_T\right)$, permet déjà d'éliminer une large part de ces évènements de bruit de fond, ce qui permet de simplifier l'estimation de cette source de bruit de fond. Cependant, on sait que de tels évènements sont assez mal reproduits par les simulations Monte-Carlo, ce qui oblige à utiliser une méthode alternative, basée sur les données.

Pour cela, on extrapole le nombre d'évènements de bruit de fond QCD dans la région de signal à partir d'une région riche en évènements QCD. Le fait que cette région soit riche en évènements QCD implique que $\min\Delta\phi\left(\text{jets}, \not{E}_T\right)$ y est faible. De plus, pour les évènements QCD, on a une dépendance de $\min\Delta\phi\left(\text{jets}, \not{E}_T\right)$ en l'énergie transverse manquante, qui n'est pas présente pour les autres types d'évènements. En effet, si l'$\not{E}_T$ vient d'une mauvaise mesure de l'énergie d'un jet énergétique dans les évènements QCD, alors plus $\not{E}_T$ sera élevée, plus l'énergie transverse manquante sera alignée avec l'impulsion du jet mal mesuré. En d'autres termes, pour les évènements QCD, $\min\Delta\phi\left(\text{jets}, \not{E}_T\right)$ est une fonction décroissante de $\not{E}_T$. On se sert de cette dépendance pour relier les régions où $\min\Delta\phi$ est faible, des régions où il est élevé à l'aide du rapport suivant, décroissant en fonction de $\not{E}_T$:

$$r = \frac{\min\Delta\phi\left(\text{jets}, \not{E}_T\right) > 0.5}{\min\Delta\phi\left(\text{jets}, \not{E}_T\right) < 0.5} \tag{7.7}$$

On cherche à déterminer le nombre d'évènements QCD pour lesquels $\not{E}_T > 250$ GeV et pour lesquels $\min\Delta\phi\left(\text{jets}, \not{E}_T\right) > 0.5$, ce qui correspond à la région de signal. On effectue un ajustement de r sur un échantillon riche en évènements QCD à basse $\not{E}_T$, et sur les simulations Monte-Carlo à haute $\not{E}_T$ car dans ce cas, ce sont des évènements avec de la vraie énergie transverse manquante qui dominent. Puis, on détermine le nombre d'évènements pour les évènements qui passe les sélections des catégories Mono-jet et Mono-V, à l'exception du critère sur $\Delta\phi\left(\text{jets}, \not{E}_T\right)$ que l'on inverse pour se placer dans une région à bas $\min\Delta\phi$. Enfin, pour obtenir notre estimation du bruit de fond QCD dans les régions de signal, on pondère les évènements de la région à faible $\min\Delta\phi$ par le rapport r ajusté précédemment.

Bruits de fond électrofaibles

Enfin, il reste à évaluer le nombre d'évènements des bruits de fond principaux qui proviennent des processus $Z(\nu\nu)$ + jets et $W(\ell\nu)$ + jets. L'estimation de ces bruits de fond est effectuée en ajustant les distributions prédites par les simulations aux données dans cinq régions de contrôle simultanément, dont notre connaissance de l'interaction faible nous dit qu'elles sont cinématiquement semblables à la région de signal, mais également dans cette dernière. Ces régions de contrôle, que nous allons décrire dans la suite, présentent des évènements avec un ou deux leptons, ou un photon. Il est alors intéressant de définir la variable de recul :

$$\vec{\mathcal{U}} = \vec{\not{E}}_T + \vec{p}_T^{\,\ell\ell,\ell,\gamma} \tag{7.8}$$

avec $\vec{p}_T^{\,\ell\ell,\ell,\gamma}$ l'impulsion transverse des deux leptons, du lepton ou du photon, selon la région de contrôle considérée. Ainsi, en utilisant le recul plutôt que l'énergie transverse manquante dans les régions de contrôle, on considère ces particules comme des sources d'énergie transverse manquante. Comme les particules considérées ont une cinématique semblable aux vraies sources d'$\not{E}_T$ de la région de signal, la distribution du recul dans les évènements des régions de contrôle mime la distribution d'$\not{E}_T$ de la région de signal.

Les évènements qui tombent dans les régions de contrôle sont séléctionnés à l'aide des critères des régions de signal (Mono-jet et Mono-V) définies dans la section 7.1 en utilisant le recul $\vec{\mathcal{U}}$ en lieu et place de $\vec{\not{E}}_T$, et en faisant les modifications suivantes :

— **Muon seul :** dans cette région de contrôle, on cherche à sélectionner des évènements du type $W \to \mu\nu$. Ainsi, on ne supprime pas les évènements qui contiennent des muons, et on sélectionne ceux qui en contiennent exactement un. Le muon doit, de plus, remplir les critères stricts définis dans l'annexe D, pour assurer une grande pureté et limiter le nombre d'évènements de bruit de fond qui viennent polluer l'échantillon de contrôle. De plus, pour limiter le bruit de fond QCD dans cette région de contrôle, les évènements doivent vérifier $M_T < 160$ GeV, où on définit la masse transverse $M_T = \sqrt{2\not{E}_T p_T^{\mu}\left[1 - \cos\Delta\phi\left(\vec{p}_T^{\,\mu}, \vec{\not{E}}_T\right)\right]}$;

— **Électron seul :** dans cette région de contrôle, on s'intéresse aux évènements $W \to e\nu$. On sélectionne alors les évènements qui contiennent exactement un électron. L'électron doit, comme dans le cas précédent, remplir les critères stricts définis dans l'annexe D. Pour réduire le bruit de fond QCD, les évènements de la région de contrôle Électron seul doivent de plus avoir une $\not{E}_T > 50$ GeV (ici pas le recul $\mathcal{U}$) ;

— **Double muons :** on veut ici sélectionner des évènements $Z \to \mu^+\mu^-$. On ne garde donc que les évènements qui contiennent exactement deux muons de charges opposées. De plus, au moins un des muons doit vérifier les contraintes strictes et avoir une impulsion transverse $p_T > 20$ GeV. Enfin, pour sélectionner les évènements pour lesquels les muons

proviennent de la désintégration d'un boson Z, la masse invariante des deux muons doit vérifier $60 < m^{\mu\mu} < 120$ GeV ;

— **Double électrons :** les critères que doivent remplir les évènements pour être classés dans cette région de contrôle, dans laquelle on veut des évènements $Z \to e^+e^-$, sont les mêmes que pour la région Double muons, appliqués aux électrons plutôt qu'aux muons. On impose, de plus, à au moins un électron qui passe les critères stricts d'identification d'avoir une impulsion transverse $p_T > 40$ GeV ;

— $\gamma +$ **jets :** la dernière région de contrôle est constituée d'évènements qui comporte un photon et des jets. Pour cela, on demande que les évènements possèdent exactement un photon qui passe également la sélection stricte définie dans l'annexe D, et dont l'impulsion transverse vérifie $p_T > 175$ GeV.

7.3.2 Estimation par les données des bruits de fond électrofaibles

Le nombre d'évènements de bruit de fond électrofaible sont estimés par un ajustement aux données dans les régions de contrôles décrites dans la section 7.3.1. Cet ajustement est effectué pour la distribution de la variable de recul $\mathcal{U}$ dans chaque région de contrôle et la variable d'ajustement est le nombre d'évènement de bruit de fond $Z\,(\nu\nu)+$jets dans la région de signal, noté $\mu^{Z\to\nu\nu}$. Pour mettre en relation $\mu^{Z\to\nu\nu}$ avec le nombre d'évènements observés dans les régions de contrôle, on utilise des facteurs de transfert R. Par exemple pour la région de contrôle Double muons, si l'on divise la distribution de recul $\mathcal{U}$ en intervalles i, les facteurs de transfert sont donnés par :

$$R_i^{\mu\mu} = \frac{N_{i,MC}^{Z\to\mu^+\mu^-}}{N_{i,MC}^{Z\to\nu\nu}} \tag{7.9}$$

avec $N_{i,MC}$ le nombre d'évènements prédit par les simulations dans l'intervalle i de la distribution de recul $\mathcal{U}$. Les autres facteurs de transfert R_i^{ee}, $R_i^{\mu\nu}$, $R_i^{e\nu}$, R_i^{γ}, sont calculés de la même manière à partir des simulations dans les régions de contrôle correspondantes. Par ailleurs, on utilise également une fonction de transfert f_i pour contraindre le nombre d'évènements de bruit de fond $W\,(\ell\nu)+$ jets selon :

$$\mu^{W\to\ell\nu} = f_i\mu^{Z\to\nu\nu} \tag{7.10}$$

Si l'on ne prend en compte que la région de contrôle Double muons, on peut définir $\mu_i^{Z\to\nu\nu}$ comme le nombre d'évènements qui maximise la probabilité d'observer le nombre d'évènements $d_i^{\mu\mu}$ effectivement observés dans l'intervalle i de la région de contrôle, c'est-à-dire la probabilité suivante :

$$\text{Poisson}\left(d_i^{\mu\mu}|\mathcal{B}_i^{\mu\mu}\left(\theta\right) + R_i^{\mu\mu}\mu_i^{Z\to\nu\nu}\right) \tag{7.11}$$

où on a défini le nombre d'évènements de bruit de fond dans la région de contrôle $\mathcal{B}^{\mu\mu}$ et les incertitudes systématiques θ traitées comme des paramètres de nuisance, c'est-à-dire laissées libres lors de l'ajustement. De plus, on a fait l'hypothèse, raisonnable, selon laquelle la probabilité d'observer un nombre $d_i^{\mu\mu}$ d'évènements suit une loi de Poisson. Finalement, si l'on prend en compte tous les intervalles de la distribution de recul $\mathcal{U}$, les cinq régions de contrôle et la région de signal, la distribution de bruit de fond $\mu^{Z\to\nu\nu}$ est celle qui maximise la probabilité suivante :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(\mu^{Z\to\nu\nu},\rho,\theta\right) = &\prod_i \text{Poisson}\left(d_i^{\mu\mu}|\mathcal{B}_i^{\mu\mu}\left(\theta\right)+R_i^{\mu\mu}\mu_i^{Z\to\nu\nu}\right)\\
&\times\prod_i \text{Poisson}\left(d_i^{ee}|\mathcal{B}_i^{ee}\left(\theta\right)+R_i^{ee}\mu_i^{Z\to\nu\nu}\right)\\
&\times\prod_i \text{Poisson}\left(d_i^{\gamma}|\mathcal{B}_i^{\gamma}\left(\theta\right)+R_i^{\gamma}\mu_i^{Z\to\nu\nu}\right)\\
&\times\prod_i \text{Poisson}\left(d_i^{\mu\nu}|\mathcal{B}_i^{\mu\nu}\left(\theta\right)+R_i^{\mu\nu}f_i\left(\theta\right)\mu_i^{Z\to\nu\nu}\right)\\
&\times\prod_i \text{Poisson}\left(d_i^{e\nu}|\mathcal{B}_i^{e\nu}\left(\theta\right)+R_i^{e\nu}f_i\left(\theta\right)\mu_i^{Z\to\nu\nu}\right)\\
&\times\prod_i \text{Poisson}\left(d_i^{\text{SR}}|\mathcal{B}_i^{\text{SR}}\left(\theta\right)+\left(1+f_i\left(\theta\right)\right)\mu_i^{Z\to\nu\nu}+\rho\mathcal{S}_i\left(\theta\right)\right)
\end{aligned} \tag{7.12}$$

Dans cette expression, l'exposant SR désigne la région de signal, $\mathcal{S}_i$ désigne la distribution du signal que l'on recherche, donc dans notre cas la distribution en $\not{E}_T$ des évènements de production de paires de branons, et ρ l'intensité du signal qui est une variable d'ajustement au même titre que $\mu^{Z\to\nu\nu}$ et θ. On peut remarquer qu'avec ce traitement, les incertitudes systematiques sont prises en compte dans l'estimation des bruits de fond ainsi que dans les prédictions du signal. Les résultats de cet ajustement dans les régions de contrôle en l'absence de signal ($\rho = 0$) sont présentés dans les figures 7.11 à 7.15.

7.3.3 Incertitudes systématiques

Une partie importante de la recherche consiste à déterminer les sources d'incertitudes. En plus des incertitudes dues à la statistique, il faut évaluer les incertitudes systématiques, c'est-à-dire les incertitudes inhérentes à l'expérience. De telles erreurs systématiques peuvent provenir des incertitudes de mesure du détecteur, d'erreurs liées à la méthode d'analyse des données ou encore aux méthodes de simulations. Nous allons décrire ici l'évaluation des principales erreurs systématiques pour notre recherche.

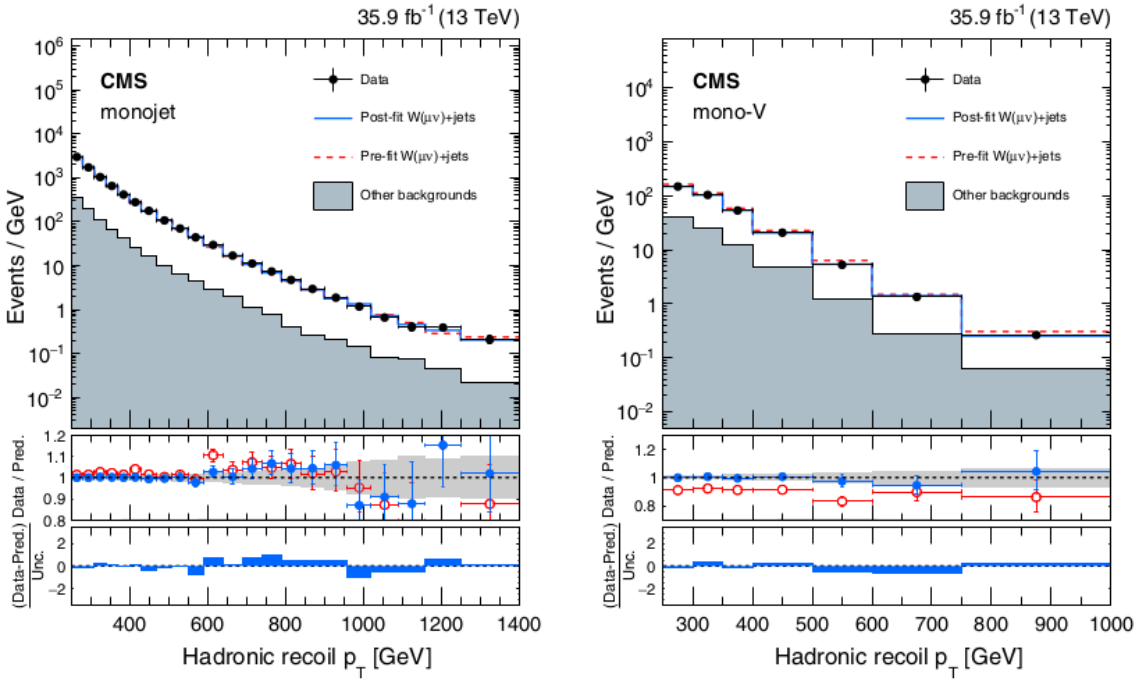

FIGURE 7.11 Comparaison entre données et simulations Monte-Carlo dans la région de contrôle Muon seul, avant et après l'ajustement simultané aux cinq régions de contrôle et à la région de signal, en l'absence de signal ($\rho = 0$). La figure de gauche représente la distributions du recul $\mathcal{U}$ dans la catégorie Mono-jet, et la figure de droite dans la catégorie Mono-V. Le rapport entre les données observées et les simulations sont donnés par les points rouges dans les figures du milieu pour les prédictions avant l'ajustement, et par les points bleus après l'ajustement, dans chaque catégorie. Enfin, les figures du bas présentent les distributions des résidus comparés aux incertitudes (statistiques et systématiques). Ces figures sont tirées de [17].

Incertitudes expérimentales

Les premières sources d'incertitudes systématiques, que nous allons décrire ici, sont celles qui proviennent des limitations du détecteur, c'est-à-dire les incertitudes expérimentales. Ces incertitudes ont un effet direct sur les efficacités de reconstruction et de sélection des objets physiques, qui se traduisent en incertitudes sur les critères de sélection des différentes catégories. Un résumé de ces incertitudes et des échantillons sur lesquelles elles agissent est donné dans la table 7.4.

On distingue des incertitudes systématiques expérimentales liées aux mécanismes de déclenchement dans CMS, à la reconstruction et l'identification des objets physiques, aux simulations Monte-Carlo et enfin à la méthode de la recherche. La majorité de ces effets sont pris en compte comme une incertitude sur la normalisation globale des processus affectés, mais lorsque l'amplitude des incertitudes varie sensiblement en fonction de $\mathcal{U}$, alors cette dépendance est prise en compte.

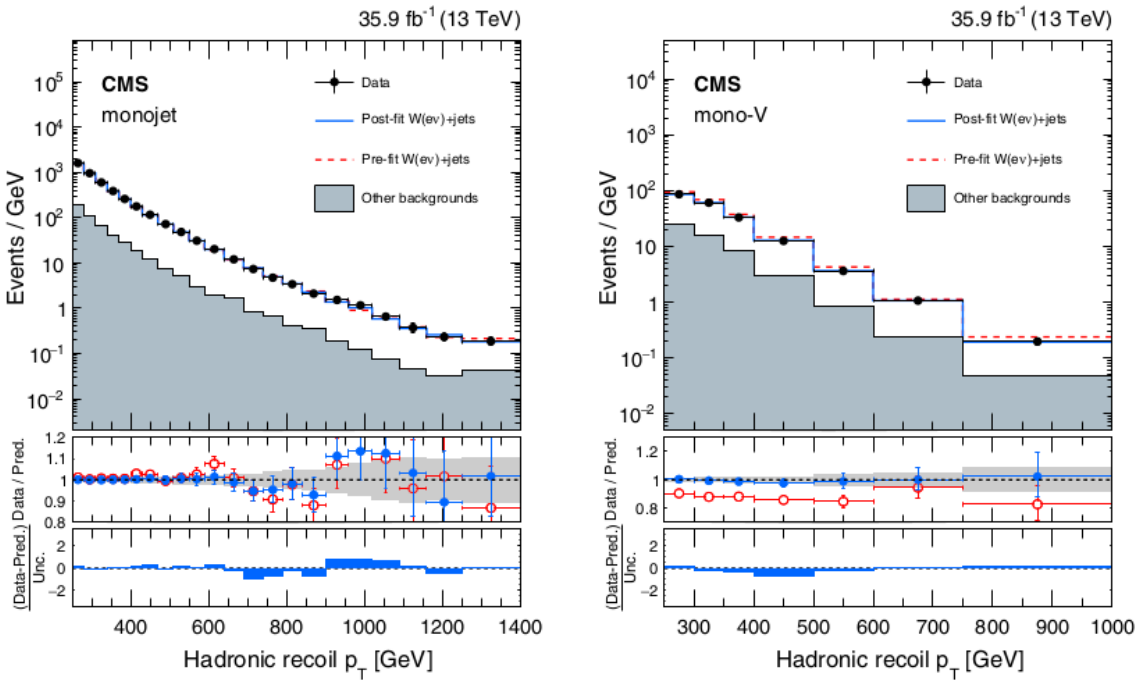

FIGURE 7.12 Comparaison entre données et simulations Monte-Carlo dans la région de contrôle Électron seul, avant et après l'ajustement. La figure de gauche représente la distributions du recul $\mathcal{U}$ dans la catégorie Mono-jet, et la figure de droite dans la catégorie Mono-V. La description des figures du bas est la même que pour la figure 7.11. Ces figures sont tirées de [17].

Incertitudes théoriques

En plus des incertitudes systématiques d'origine expérimentale, il faut également prendre en compte les incertitudes systématiques théoriques, qui correspondent aux erreurs potentielles pour le calcul des prédictions dans les simulations. Ces incertitudes affectent principalement les distributions du signal branon, mais également les distributions des bruits de fond électrofaibles à travers les facteurs de transfert calculés à partir des simulations.

Les incertitudes théoriques étudiées ici prennent en compte les effets d'ordre supérieurs dans les processus électrofaibles et les processus de QCD, ainsi que les incertitudes liées à l'utilisation des fonctions de densités partoniques (notées PDF dans la suite). Leur estimation suit les recommendations de [18], que l'on pourra consulter pour plus de détails.
Premièrement, pour les simulations des processus électrofaibles, on applique des corrections liés aux effets d'ordre NLO ainsi que des corrections, sous formes de logarithmes de Sudakov [19], dues à des échanges de bosons W ou Z virtuels et à des divergences lors d'émissions de photons d'extrêmement basse énergie. Cependant, ces corrections ne suffisent par à saisir tous les effets d'ordre supérieurs, et des incertitudes systématiques sont affectées pour prendre en compte les effets d'ordre supérieur au NNLO. Comme les effets électrofaibles sont loin d'être dominants dans les processus de productions de branons, on ne considère pas ces incertitudes

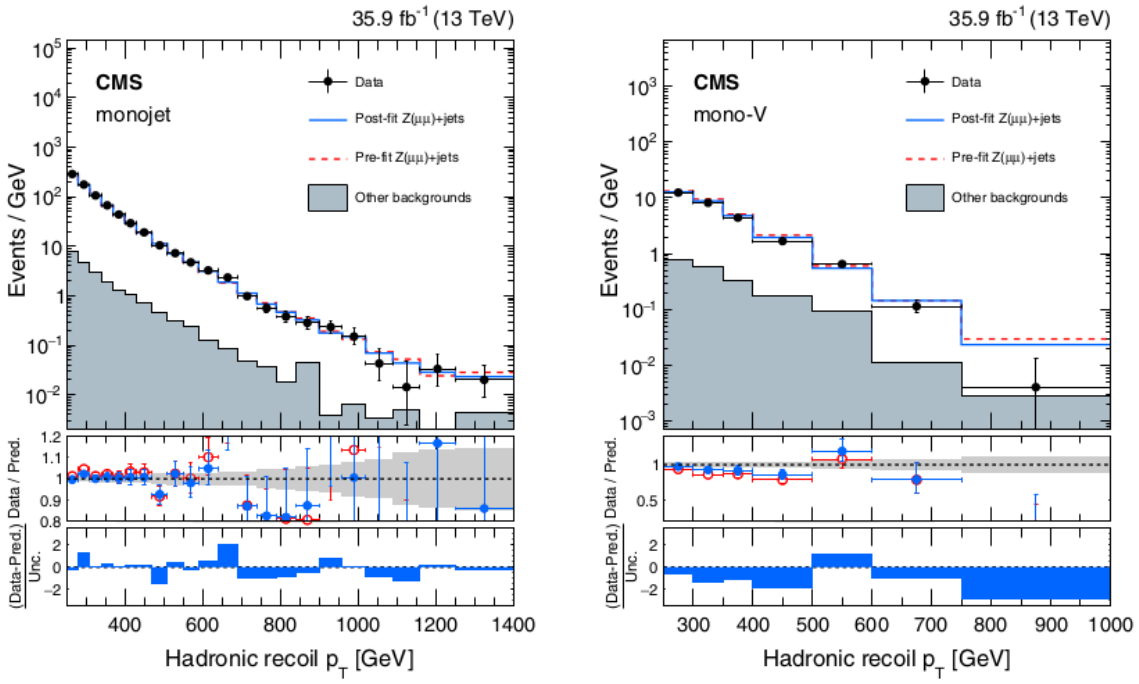

FIGURE 7.13 Comparaison entre données et simulations Monte-Carlo dans la région de contrôle Double muons, avant et après l'ajustement. La figure de gauche représente la distributions du recul $\mathcal{U}$ dans la catégorie Mono-jet, et la figure de droite dans la catégorie Mono-V. La description des figures du bas est la même que pour la figure 7.11. Ces figures sont tirées de [17].

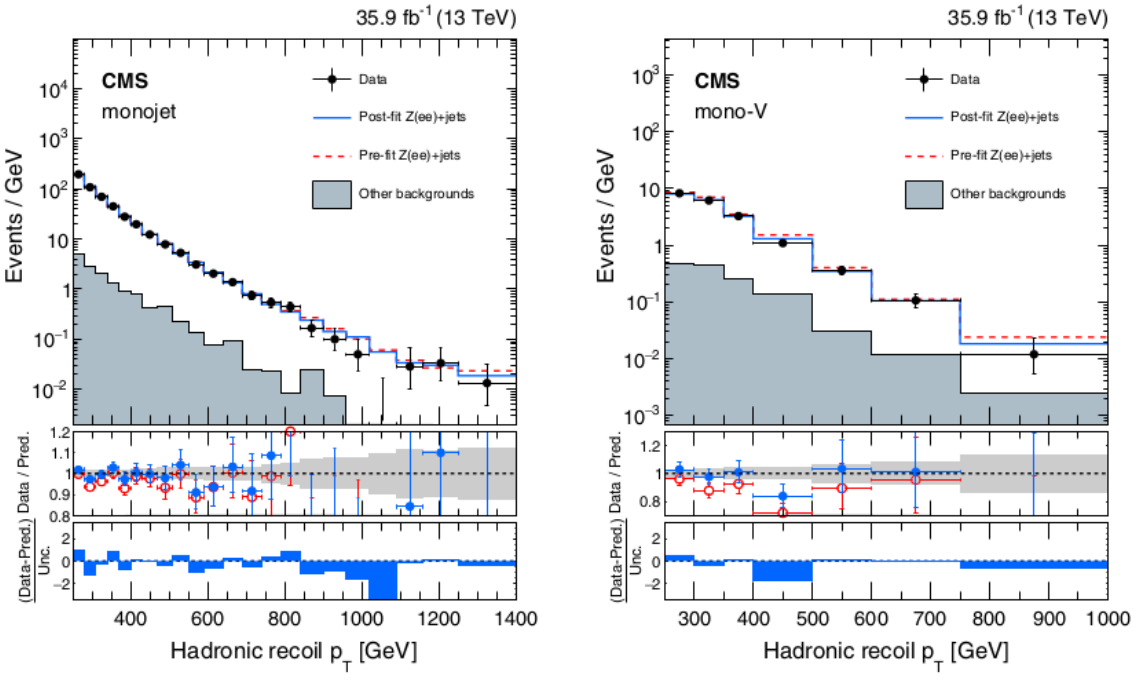

FIGURE 7.14 Comparaison entre données et simulations Monte-Carlo dans la région de contrôle Double électrons, avant et après l'ajustement. La figure de gauche représente la distributions du recul $\mathcal{U}$ dans la catégorie Mono-jet, et la figure de droite dans la catégorie Mono-V. La description des figures du bas est la même que pour la figure 7.11. Ces figures sont tirées de [17].

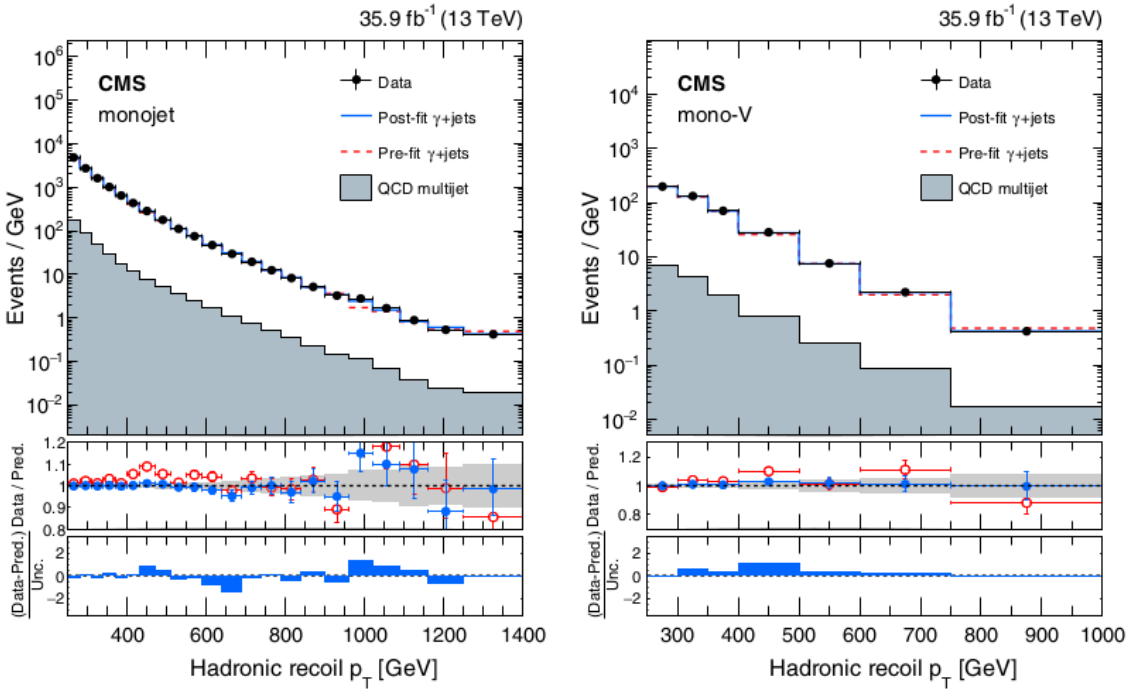

FIGURE 7.15 Comparaison entre données et simulations Monte-Carlo dans la région de contrôle γ + jets, avant et après l'ajustement. La figure de gauche représente la distributions du recul $\mathcal{U}$ dans la catégorie Mono-jet, et la figure de droite dans la catégorie Mono-V. La description des figures du bas est la même que pour la figure 7.11. Ces figures sont tirées de [17].

pour ces derniers.

Les incertitudes systématiques liées aux processus de QCD sont évaluées en changeant leur échelle de renormalisation μ_R et leur échelle de factorisation μ_F. Ces deux échelles sont initialement introduits pour éliminer les divergences, respectivement à haute énergie (ultraviolettes) et à basse énergie (infrarouges) [20], lors de la prédiction d'interactions de QCD dans les simulations. Les échelles μ_R et μ_F sont par défaut prises égales à la masse du boson Z. Pour estimer l'incertitude introduite par les échelles de l'interaction forte, on modifie ces dernières d'un facteur 2 et 1/2 par rapport à la valeur par défaut. Pour le signal du branon, l'incertitude supérieure (respectivement inférieure) correspond à l'enveloppe des distributions obtenues en faisant ces modifications, c'est-à-dire le maximum (minimum) entre ces distributions, pour chaque intervalle de $\not{E}_T$. Les incertitudes systématiques liées aux échelles de QCD pour le signal du branon sont à peu près constantes selon $\not{E}_T$ et M_π, de l'ordre de 20%.

Enfin, il faudrait également prendre en compte les incertitues liées à la PDF (celle utilisée pour les simulations d'évènements de production de branons est NNPDF 3.0 [21]). Cependant, la méthode utilisée pour estimer ces incertitudes se base sur une pondération des évènements de manière à prendre en compte les variations dans leur cinématique dues aux variations dans les PDFs. Cette méthode que nous avions envisagée initialement s'avère très peu fiable lorsque

Source	Processus	Incertitude
Luminosité	Tous sauf bruits de fond estimés par les données	2.6%
Déclenchement pour les électrons	$W \to e\nu$ et $Z \to ee$	1%
Déclenchement pour les photons	$\gamma +$ jets	1%
Déclenchement pour $\not{E}_T$	Bruits de fond et signal dans SR et CRs	-
Échelle d'énergie des jets	Bruits de fond et signal dans SR et CRs	5%
Reconstruction des muons	$W \to \mu\nu$ et $Z \to \mu\mu$	1%
Identification des muons	$W \to \mu\nu$ et $Z \to \mu\mu$	1%
Reconstruction des électrons	$W \to e\nu$ et $Z \to ee$	1%
Identification des électrons	$W \to e\nu$ et $Z \to ee$	2%
Identification des photons	$\gamma +$ jets	2%
Élimination des leptons	$Z \to \ell\ell$, $t\bar{t}$ et VV	-
Pureté des photons	Bruit de fond QCD	40%
Élimination des jets de b	Top	6%
	Autres processus	2%
Efficacité du V-tagging	Top, VV et toute la catégorie Mono-V	7%
Pondération du p_T des tops	Top	10%
Normalisation du bruit de fond top	Top	10%
Normalisation du bruit de fond VV	VV	20%
Normalisation de $Z(\ell\ell) +$ jets	$Z(\ell\ell) +$ jets dans la SR	20%
Normalisation du bruit de fond $\gamma +$ jets	$\gamma +$ jets	20%
Forme du spectre QCD	QCD	100%

TABLE 7.4 Sources d'incertitudes systématiques d'origine expérimentale, processus affectés par ces incertitudes et amplitude de ces dernières. La plupart de ces incertitudes agissent sur la normalisation globale des processus affectés, à l'exception des incertitudes dénotés par un tiret "-" qui ont une dépendance en $\mathcal{U}$. SR correspond à la région de signal et CR aux régions de contrôle.

la statistique est faible, ce qui est le cas dans les régions de signal lorsque la masse du branon est élevée ($M_\pi \gtrsim 1$ TeV). Pour estimer cette erreur, il faudrait donc effectuer de nouvelles simulations complètes en changeant les PDFs, ce qui nécessite beaucoup d'efforts. Ainsi, ces incertitudes ne sont, à l'heure actuelle, pas incluses pour la recherche de branons. On s'attend toutefois à ce que l'inclusion de ces incertitudes ne modifie pas sensiblement les résultats, qui dépendent principalement de l'ordre de grandeur de la section efficace et peu de sa valeur exacte, comme nous le verrons dans la section suivante. Une variation de l'amplitude des distributions d'un facteur 2 ne modifierait les résultats que de quelques %.

7.3.4 Contraintes sur le modèle du branon

Maintenant que nous avons estimé les bruits de fond ainsi que les incertitudes systématiques nécessaires pour notre recherche, il ne reste plus qu'à effectuer l'ajustement décrit dans la section 7.3.2 en prenant en compte les distributions de signal branon, c'est-à-dire avec $\rho \neq 0$. Les distributions de $\not{E}_T$ dans les régions de signal des deux catégories, pour les prédictions et les données sont présentées dans la figure 7.16.

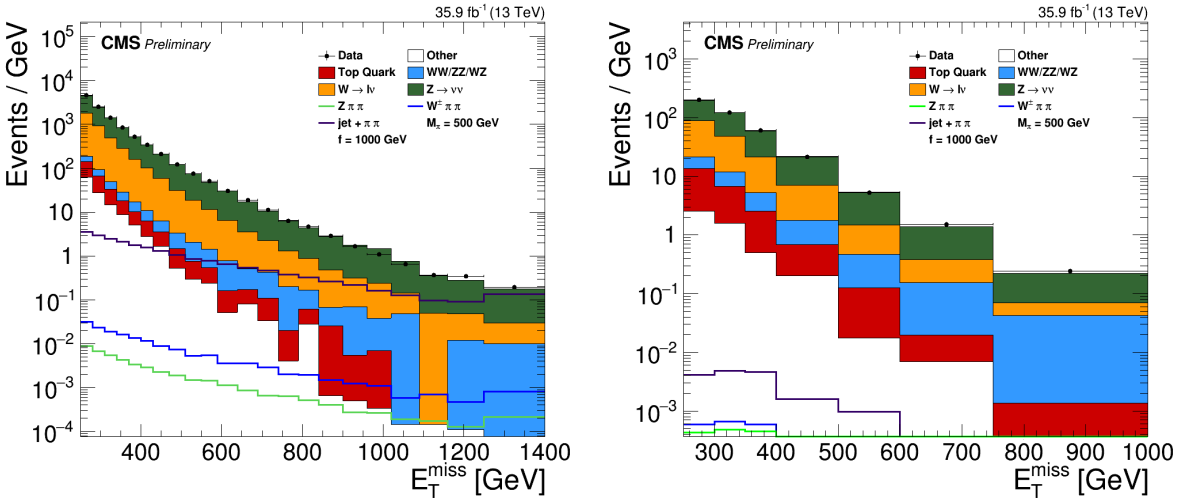

FIGURE 7.16 Comparaison entre données et simulations Monte-Carlo dans la région de signal après l'ajustement, en l'absence de signal. La figure de gauche représente la distributions de $\not{E}_T$ dans la catégorie Mono-jet, et la figure de droite dans la catégorie Mono-V. Les distributions d'évènements de production de branon, pour $f = 1000$ GeV et $M_\pi = 500$ GeV sont présentées à titre indicatif.

On constate que les données expérimentales sont en accord avec l'hypothèse nulle pour laquelle il n'y a pas d'évènement de signal. Cela signifie que le modèle standard de la physique des particules reste suffisant pour expliquer ces observations. À partir de ce résultat, on peut déduire des contraintes dans l'espace des paramètres du modèle du branon. En d'autres termes, on peut déduire quelles valeurs les paramètres ne peuvent pas avoir, étant données l'absence de détection dans notre recherche. On remarque notamment que pour les intervalles à haute $\not{E}_T$ de la catégorie Mono-jet, le nombre d'évènements de bruits de fond à considérablement chuté, et peut devenir comparable au nombre d'évènements de production de branons. Ainsi, les contraintes posées sur le modèle du branon proviennent principalement de l'information dans ces intervalles.

Les contraintes sont directement posées par l'ajustement comme une borne supérieure sur la valeur du paramètre $\rho < \rho_{obs}$. Or, le nombre d'évènements de signal auquel cette borne supérieure correspond est :

$$\mathcal{S}_{obs} = \rho_{obs}\mathcal{S}_{th} \tag{7.13}$$

où $\mathcal{S}_{th}$ correspond au nombre d'évènements de signal prédits par les simulations. Enfin, ces nombres d'évènements $\mathcal{S}$ peuvent être traduits en sections efficaces σ par la relation $\mathcal{S} = L\sigma$, avec L la luminosité intégrée qui est la même pour $\mathcal{S}_{obs}$ et $\mathcal{S}_{th}$. Finalement, il vient ;

$$\rho_{obs} = \frac{\sigma_{th}}{\sigma_{obs}} \tag{7.14}$$

Cette relation indique que les observations expérimentales induisent une limite supérieure sur

la section efficace des processus recherchés. Les limites sur les sections efficaces du branon obtenues dans les deux catégories et leur combinaison par la recherche présentée précédemment pour différentes valeurs de M_π sont données dans la table 7.5, et illustrée dans la figure 7.17.

M_π (GeV)	Limites observées (attendues) sur la section efficace (pb)		
	Catégorie Mono-jet	Catégorie Mono-V	Combinaison
1	0.079 (0.069)	0.56 (0.53)	0.082 (0.056)
10	0.070 (0.064)	0.68 (0.66)	0.073 (0.040)
50	0.076 (0.067)	0.56 (0.54)	0.081 (0.066)
150	0.072 (0.065)	0.58 (0.58)	0.079 (0.066)
500	0.071 (0.063)	0.56 (0.54)	0.076 (0.065)
1000	0.079 (0.069)	0.40 (0.34)	0.082 (0.067)
3000	0.17 (0.14)	0.57 (0.52)	0.17 (0.14)
5000	1.4 (1.4)	2.3 (2.4)	1.8 (1.3)
6000	52 (52)	41 (40)	27 (32)

TABLE 7.5 Limites supérieures sur les sections efficaces des processus de production de branon en utilisant les données de la catégorie Mono-jet, de la catégorie Mono-V et des deux catégories simultanément, pour différentes valeurs de M_π. Comme les sections efficaces pour les interactions avec les branons sont proportionnelles à f^{-8}, les limites sur σ_{obs} ne dépendent pas de f.

Ces limites sur σ_{obs} traduisent de la sensibilité de l'analyse et ne dépendent que de la masse du branon. Elles peuvent être comparées à celles obtenues dans une analyse précédente dans le canal mono-photon auprès du détecteur CMS avec une énergie dans le centre de masse de 8 TeV [22]. On constate que la présente analyse est bien plus contraignante, avec un gain de sensibilité d'un facteur ~ 100 sur la section efficace. On peut également remarquer que les limites observées sont très légèrement supérieures aux limites attendues pour presque tout l'intervalle en masse du branon. Cela vient du fait que cette limite est principalement déterminée par la contrainte provenant des quelques intervalles de plus haute $\not{E}_T$ de la catégorie Mono-jet, pour lesquels on observe un très léger excès dans les données par rapport aux prédictions des bruits de fond. Cet excès reste cependant largement dans la limite des incertitudes.

La limite dans l'espace des paramètres du modèle correspond alors à la frontière entre la région pour laquelle $\sigma_{obs} < \sigma_{th}$, exclue par les données, et celle pour laquelle $\sigma_{obs} > \sigma_{th}$ qui est toujours viable. Dans le cas du modèle du branon, la détermination de cette limite dans l'espace à deux dimensions (M_π, f) est relativement simple. En effet, comme $\sigma_{\text{branon}} \propto f^{-8}$, la relation (7.14) se traduit, pour une valeur de masse donnée, par :

$$f_{obs}\left(M_\pi\right) = f_{th}\left(M_\pi\right) \rho_{obs}^{1/8}\left(M_\pi\right) \tag{7.15}$$

La limite inférieure sur ρ se traduit directement en une limite inférieure sur f, pour une valeur de M_π fixée. Les valeurs de $f_{obs}\left(M_\pi\right)$ obtenues pour les masses de branon que j'ai simulées

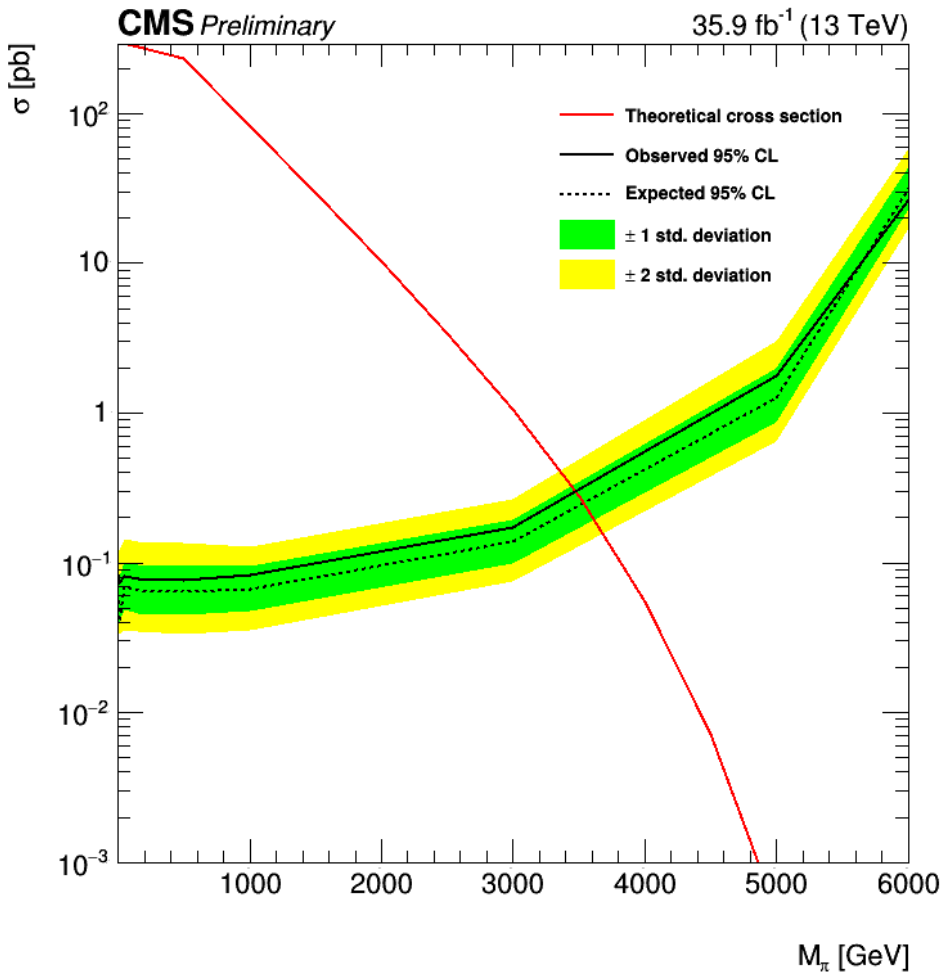

FIGURE 7.17 Limites supérieures observées (trait plein) et attendues (tirets) à un niveau de confiance de 95% sur les sections efficaces des processus de production de branons en fonction de M_π. La courbe rouge représente la section efficace théorique de tels processus en fonction de la masse du branon pour $f = 400$ GeV. La zone d'exclusion du modèle dans l'espace à deux dimensions (M_π, f) se situe, pour une valeur de f donnée, à la masse pour laquelle $\sigma_{th} = \sigma_{obs}$.

M_π (GeV)	Limites inférieures attendues (observées) sur f (GeV)		
	Catégorie Mono-jet	Catégorie Mono-V	Combinaison
1	1115 (1135)	873 (878)	1109 (1165)
10	1133 (1147)	852 (856)	1127 (1214)
50	1122 (1139)	873 (879)	1112 (1135)
150	1123 (1139)	866 (867)	1112 (1137)
500	1073 (1090)	828 (832)	1064 (1086)
1000	952 (968)	776 (792)	946 (971)
3000	502 (513)	432 (437)	502 (515)
5000	140 (146)	138 (137)	143 (148)
6000	25 (25)	25 (25)	27 (26)

TABLE 7.6 Limites supérieures sur la tension de brane f en fonction de la masse du branon M_π obtenues en utilisant les données de la catégorie Mono-jet, de la catégorie Mono-V et des deux catégories simultanément.

sont données dans la table 7.6, et la limite à deux dimension correspondante est illustrée dans la figure 7.18.

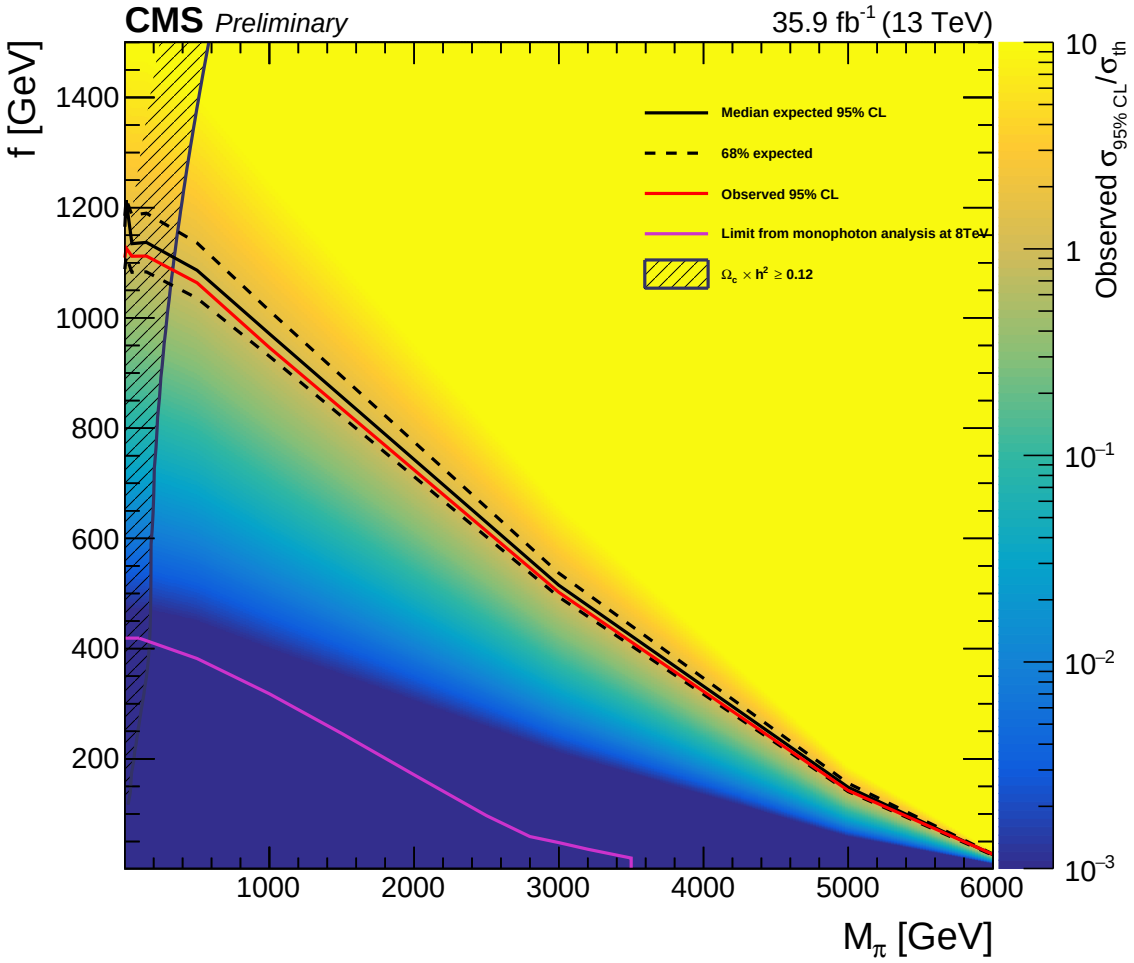

FIGURE 7.18 Contour d'exclusion dans l'espace à deux dimensions des paramètres du branon $(M_{\pi,f})$ à un niveau de confiance de 95%. La région de l'espace des paramètres en dessous de ce contour est exclue par les données expérimentales obtenues dans les catégories Mono-jet et Mono-V combinées. À titre de comparaison, la limite posée par la recherche de branons dans le canal mono-photon à 8 TeV [22] est indiquée par la courbe magenta. La région hachurée correspond à la limite pour laquelle la densité de relique de branons $\Omega_\pi h^2 \geq 0.12$.

J'ai également intégré à cette limite la contrainte posée par les observations cosmologiques sur la densité relique de matière noire, appliquée à la densité relique de branons. La densité relique de branons est calculée avec MadDM v2.0 [23] selon la procédure présentée dans la section 7.1.3, en utilisant les sections efficaces des processus de production et annihilation des branons. Cette contrainte se traduit par une exclusion des plus faibles masses de branons, jusqu'à $M_\pi \sim 500$ GeV pour $f \sim 1500$ GeV, mais laisse le reste de l'espace des paramètres viable.

Cette recherche de branons dans les canaux Mono-jet et Mono-V à l'aide du détecteur CMS au LHC, avec une énergie de 13TeV dans le centre de masse, est la plus contraignante dans l'espace des paramètres du branon à notre connaissance. Elle est, par ailleurs, en accord avec les prévisions de sensibilité faites précédemment, par exemple dans [11].

Bibliographie

[1] CMS Collaboration. Search for new physics in final states with an energetic jet or a hadronically decaying W or Z boson and transverse momentum imbalance at $\sqrt{s} = 13$ TeV. *Phys. Rev.*, D97(9) :092005, 2018.

[2] Yang Bai, Patrick J. Fox, and Roni Harnik. The Tevatron at the Frontier of Dark Matter Direct Detection. *JHEP*, 12 :048, 2010.

[3] Jessica Goodman et al. Constraints on Dark Matter from Colliders. *Phys. Rev.*, D82 :116010, 2010.

[4] Andrea De Simone, Alexander Monin, Andrea Thamm, and Alfredo Urbano. On the effective operators for Dark Matter annihilations. *JCAP*, 1302 :039, 2013.

[5] Jing-Yuan Chen, Edward W. Kolb, and Lian-Tao Wang. Dark matter coupling to electroweak gauge and Higgs bosons : an effective field theory approach. *Phys. Dark Univ.*, 2 :200–218, 2013.

[6] S. D. Drell and Tung-Mow Yan. Massive Lepton Pair Production in Hadron-Hadron Collisions at High-Energies. *Phys. Rev. Lett.*, 25 :316–320, 1970. [Erratum : Phys. Rev. Lett.25,902(1970)].

[7] Particle Data Group. Review of Particle Physics. *Chin. Phys.*, C40(10) :100001, 2016.

[8] CMS Collaboration. Identification of b quark jets at the CMS Experiment in the LHC Run 2. (CMS-PAS-BTV-15-001), 2016.

[9] CMS Collaboration. Identification of heavy-flavour jets with the CMS detector in pp collisions at 13 TeV. *JINST*, 13(05) :P05011, 2018.

[10] CMS Collaboration. Jet algorithms performance in 13 TeV data. (CMS-PAS-JME-16-003), 2017.

[11] J. A. R. Cembranos, A. Dobado, and Antonio Lopez Maroto. Branon search in hadronic colliders. *Phys. Rev.*, D70 :096001, 2004.

[12] J. Alcaraz, J. A. R. Cembranos, A. Dobado, and Antonio Lopez Maroto. Limits on the brane fluctuations mass and on the brane tension scale from electron positron colliders. *Phys. Rev.*, D67 :075010, 2003.

[13] Adam Alloul et al. FeynRules 2.0 - A complete toolbox for tree-level phenomenology. *Comput. Phys. Commun.*, 185 :2250–2300, 2014.

[14] J. Alwall et al. The automated computation of tree-level and next-to-leading order differential cross sections, and their matching to parton shower simulations. *JHEP*, 07 :079, 2014.

[15] Torbjorn Sjostrand, Stephen Mrenna, and Peter Z. Skands. A Brief Introduction to PYTHIA 8.1. *Comput. Phys. Commun.*, 178 :852–867, 2008.

[16] GEANT4 Collaboration. GEANT4 : A Simulation toolkit. *Nucl. Instrum. Meth.*, A506 :250–303, 2003.

[17] CMS Collaboration. Search for new physics in final states with an energetic jet or a hadronically decaying W or Z boson and transverse momentum imbalance at $\sqrt{s} = 13$ TeV. 2017.

[18] J. M. Lindert et al. Precise predictions for $V+$ jets dark matter backgrounds. *Eur. Phys. J.*, C77(12) :829, 2017.

[19] Christian W Bauer and Nicolas Ferland. Resummation of electroweak Sudakov logarithms for real radiation. *JHEP*, 09 :025, 2016.

[20] John C. Collins. Choosing the renormalization / factorization scale. *J. Phys.*, G17 :1547–1549, 1991.

[21] NNPDF Collaboration. Parton distributions for the LHC Run II. *JHEP*, 04 :040, 2015.

[22] Vardan Khachatryan et al. Search for new phenomena in monophoton final states in proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 8$ TeV. *Phys. Lett.*, B755 :102–124, 2016.

[23] Mihailo Backović, Antony Martini, Olivier Mattelaer, Kyoungchul Kong, and Gopolang Mohlabeng. Direct Detection of Dark Matter with MadDM v.2.0. *Phys. Dark Univ.*, 9-10 :37–50, 2015.

Conclusion

Cette thèse présente les résultats de la confrontation de deux modèles au-delà des modèles standards à de nombreuses données expérimentales en cosmologie et physique des particules.

Nous avons commencé par étudier le modèle du galileon, un modèle de gravité modifiée qui offre une alternative au modèle de concordance, sans constante cosmologique, viable du point de vue théorique. Après avoir décrit la théorie des perturbations cosmologique et la construction du modèle du galileon, j'ai pu obtenir les équations décrivant l'évolution des perturbations cosmologique dans ce modèle, avec la paramétrisation originale de J. Neveu [1–3]. J'ai ainsi pu obtenir les prédictions du modèle du galileon pour les spectres de puissances du fond diffus cosmologique en implémentant ces équations dans le logiciel CAMB. L'obtention de ces prédictions m'ont ensuite permis d'utiliser la méthode de Monte Carlo par chaînes de Markov pour explorer l'espace des paramètres à la recherche de scénarios compatibles avec les observations cosmologiques. J'ai alors montré que les modèles de galileon avec les paramètres de base sont incompatibles avec les observations cosmologiques, notamment avec les mesures de l'échelle BAO, mais également avec la réionisation, autrement contrainte par des observations astrophysiques [4, 5]. Après avoir compris que cette incompatibilité avec la réionisation est liée à la prédiction d'un effet de lentille gravitationnelle particulièrement important dans le modèle du galileon par rapport au modèle ΛCDM, j'ai exploré l'effet de l'ajout d'un paramètre, A_L ou $\sum m_\nu$, libre de varier. Si ces extensions permettent de résoudre l'incompatibilité avec la réionisation, elles ne rétablissent cependant pas totalement l'accord avec les mesures de l'échelle BAO et restent en sérieuse tension avec ces dernières. Enfin, la détection d'un signal d'ondes gravitationnelles avec sa contrepartie électromagnétique provenant de la fusion d'un système binaire d'étoiles à neutrons par LIGO et Virgo durant ma thèse a été un important retentissement pour l'étude des modèles de gravité modifiée. Cette observation indique que la vitesse des ondes gravitationnelles doit être égale à la vitesse de la lumière à une extraordinaire précision [6, 7], ce qui n'est souvent pas le cas dans les modèles de gravité modifiée, et en particulier dans le modèle du galileon à l'exception de sa restriction au galileon cubique. Bien que le modèle du galileon semble ne plus être viable, à la lumière des récentes observations cosmologiques et astrophysiques récentes, il est possible d'en retirer d'importantes leçon utiles pour l'étude des modèles de gravité modifiée en générale. Nous avons, par exemple,

compris l'importance des mesures du spectre de puissance du lensing pour discriminer entre modèles qui prédisent des potentiels gravitationnels très différents du modèle ΛCDM, comme une bonne partie des modèles de gravité modifiée.

Nous avons ensuite abordé le cas du modèle du branon, qui est un modèle basé sur les théories à dimensions supplémentaires et à univers branaire. Ce modèle offre une particule candidate pour la matière noire, sous la forme d'un champ scalaire lié à la brisure des symétries d'espace-temps par la présence de la brane. De telles particules peuvent, en principe, être produites lors de collisions de particules à très haute énergie, par exemple au LHC. Pour la recherche de branons, j'ai appliqué les principes de la recherche de matière noire dans les canaux de recherche Mono-jet et Mono-V, dont l'état final est composé d'au moins un jet de haute énergie ainsi que d'une part significative d'énergie transverse manquante, auprès du détecteur CMS [8]. Aucun excès d'évènements par rapport aux estimations obtenues en l'absence de signal n'a été observé lors de cette recherche, j'ai alors posé des contraintes dans l'espace des paramètres du modèle du branon. Cette contrainte provient principalement du canal de recherche Mono-jet, bien plus sensible que le canal Mono-V comme nous l'avons constaté. Bien que la recherche n'ai pas été conçue spécifiquement pour chercher des branons, j'ai tout de même pu exclure une grande partie de l'espace des paramètres, jusqu'à des masses de plusieurs TeV pour de faibles valeurs de tension de brane (jusqu'à $M_\pi \sim 6$ TeV pour $f \sim 50$ GeV), et une tension de brane de l'ordre du TeV pour de faibles valeurs de la masse du branon. Les faibles masses de branons sont, par ailleurs, exclues par les observations cosmologiques de l'abondance relique de matière noire. Le modèle du branon reste néanmoins viable pour des valeurs des paramètres en dehors des limites que j'ai obtenues. La recherche de branons pourrait donc continuer en utilisant les futurs données collectées par le détecteur CMS durant la phase de fonctionnement à Haute Luminosité du LHC (HL-LHC).

Bibliographie

[1] J. Neveu et al. Experimental constraints on the uncoupled Galileon model from SNLS3 data and other cosmological probes. *Astron. Astrophys.*, 555 :A53, 2013.

[2] J. Neveu et al. First experimental constraints on the disformally coupled Galileon model. *Astron. Astrophys.*, 569 :A90, 2014.

[3] J. Neveu et al. Constraining the ΛCDM and Galileon models with recent cosmological data. *Astron. Astrophys.*, 600 :A40, 2017.

[4] SDSS Collaboration. Evidence for reionization at Z 6 : Detection of a Gunn-Peterson trough in a Z = 6.28 quasar. *Astron. J.*, 122 :2850, 2001.

[5] Xiao-Hui Fan et al. Constraining the evolution of the ionizing background and the epoch of reionization with z 6 quasars. 2. a sample of 19 quasars. *Astron. J.*, 132 :117–136, 2006.

[6] B. P. Abbott et al. Gravitational Waves and Gamma-rays from a Binary Neutron Star Merger : GW170817 and GRB 170817A. *Astrophys. J.*, 848(2) :L13, 2017.

[7] Jose María Ezquiaga and Miguel Zumalacárregui. Dark Energy After GW170817 : Dead Ends and the Road Ahead. *Phys. Rev. Lett.*, 119(25) :251304, 2017.

[8] CMS Collaboration. Search for new physics in final states with an energetic jet or a hadronically decaying W or Z boson and transverse momentum imbalance at $\sqrt{s} = 13\ \mathrm{TeV}$. *Phys. Rev.*, D97(9) :092005, 2018.

Annexe A

Le modèle du galileon en équations

A.1 Le tenseur énergie-impusion

Le tenseur énergie-impulsion du galileon est donné par [1] :

$$T_{\mu\nu}^{(c_2)} = \pi_{;\mu}\pi_{;\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\left(\nabla\pi\right)^2 \tag{A.1}$$

$$T_{\mu\nu}^{(c_3)} = 2\pi_{;\mu}\pi_{;\nu}\Box\pi + g_{\mu\nu}\pi_{;\lambda}\pi^{;\lambda\rho}\pi_{;\rho} - 2\pi^{;\rho}\left[\pi_{;\mu}\pi_{;\nu\rho} + 2\pi_{;\nu}\pi_{;\mu\rho}\right] \tag{A.2}$$

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{(c_4)} = & -4\left(\Box\pi\right)\pi^{;\rho}\left[\pi_{;\mu}\pi_{;\rho\nu} + \pi_{;\nu}\pi_{;\rho\mu}\right] + 2\left(\Box\pi\right)^2\left(\pi_{;\mu}\pi_{;\nu}\right) - 2\left(\Box\pi\right)\left(\nabla\pi\right)^2\left(\pi_{;\mu\nu}\right) \\
& -4\left(\pi_{;\lambda}\pi^{;\lambda\rho}\pi_{;\rho}\right)\left(\pi_{;\mu\nu}\right) + 4\left(\pi^{;\lambda}\pi_{;\lambda\mu}\right)\left(\pi^{;\rho}\pi_{;\rho\nu}\right) - 2\left(\pi_{;\lambda\rho}\pi^{;\lambda\rho}\right)\left(\pi_{;\mu}\pi_{;\nu}\right) \\
& +2\left(\nabla\pi\right)^2\left(\pi_{;\mu}^{;\rho}\pi_{;\rho\nu}\right) + 4\pi_{;\lambda}\pi^{;\lambda\rho}\left[\pi_{;\rho\mu}\pi_{;\nu} + \pi_{;\rho\nu}\pi_{;\mu}\right] + \left(\Box\pi\right)^2\left(\nabla\pi\right)^2 g_{\mu\nu} \\
& +4\left(\Box\pi\right)\left(\pi_{;\lambda}\pi^{;\lambda\rho}\pi_{;\rho}\right)g_{\mu\nu} - 4\left(\pi_{;\lambda}\pi^{;\lambda\rho}\pi_{;\rho\sigma}\pi^{;\sigma}\right)g_{\mu\nu} - \left(\nabla\pi\right)^2\left(\pi_{;\rho\sigma}\pi^{;\rho\sigma}\right)g_{\mu\nu} \\
& -\left(\nabla\pi\right)^2\left(\pi_{;\mu}\pi_{;\nu}\right)R + \frac{1}{4}\left(\nabla\pi\right)^4 g_{\mu\nu}R + 2\left(\nabla\pi\right)^2\pi^{;\rho}\left[R_{\rho\mu}\pi_{;\nu} + R_{\rho\nu}\pi_{;\mu}\right] \\
& -\frac{1}{2}\left(\nabla\pi\right)^4 R_{\mu\nu} - 2\left(\nabla\pi\right)^2\left(\pi_{;\rho}R^{\rho\sigma}\pi_{;\sigma}\right)g_{\mu\nu} + 2\left(\nabla\pi\right)^2\left(\pi^{;\rho}\pi^{;\sigma}R_{\mu\rho\nu\sigma}\right)
\end{aligned} \tag{A.3}$$

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{(c_5)} = & \left(\Box\pi\right)^3\left(\pi_{;\mu}\pi_{;\nu}\right) + \left(\Box\pi\right)^3\left(\nabla\pi\right)^2 g_{\mu\nu} - 3\left(\Box\pi\right)^2\left(\nabla\pi\right)^2\pi_{;\mu\nu} \\
& -3\left(\Box\pi\right)^2\pi^{;\rho}\left[\pi_{;\rho\mu}\pi_{;\nu} + \pi_{;\rho\nu}\pi_{;\mu}\right] + 3\left(\Box\pi\right)^2\left(\pi_{;\rho}\pi^{;\rho\sigma}\pi_{;\sigma}\right)g_{\mu\nu} \\
& +6\left(\Box\pi\right)\left(\nabla\pi\right)^2\left(\pi_{;\mu\rho}\pi_{;\nu}^{;\rho}\right) - 6\left(\Box\pi\right)\left(\pi_{;\rho}\pi^{;\rho\sigma}\pi_{;\sigma}\right)\pi_{;\mu\nu} \\
& -3\left(\Box\pi\right)\left(\pi_{;\rho\sigma}\pi^{;\rho\sigma}\right)\left(\pi_{;\mu}\pi_{;\nu}\right) + 6\left(\Box\pi\right)\left(\pi^{;\rho}\pi_{;\rho\mu}\right)\left(\pi^{;\sigma}\pi_{;\sigma\nu}\right) \\
& +6\left(\Box\pi\right)\left(\pi_{;\rho}\pi^{;\rho\sigma}\right)\left[\pi_{;\sigma\mu}\pi_{;\nu} + \pi_{;\sigma\nu}\pi_{;\mu}\right] - 3\left(\Box\pi\right)\left(\nabla\pi\right)^2\left(\pi_{;\sigma\lambda}\pi^{;\sigma\lambda}\right)g_{\mu\nu} \\
& -6\left(\Box\pi\right)\left(\pi_{;\rho}\pi^{;\rho\sigma}\pi_{;\sigma\lambda}\pi^{;\lambda}\right)g_{\mu\nu} - \frac{3}{2}\left(\Box\pi\right)\left(\nabla\pi\right)^2\left(\pi_{;\mu}\pi_{;\nu}\right)R \\
& +3\left(\Box\pi\right)\left(\nabla\pi\right)^2\pi^{;\rho}\left[R_{\sigma\mu}\pi_{;\nu} + R_{\sigma\nu}\pi_{;\mu}\right] \\
& -3\left(\Box\pi\right)\left(\nabla\pi\right)^2\left(\pi_{;\sigma}R^{\sigma\lambda}\pi_{;\lambda}\right)g_{\mu\nu} + 3\left(\Box\pi\right)\left(\nabla\pi\right)^2\left(\pi^{;\sigma}\pi^{;\lambda}R_{\mu\sigma\nu\lambda}\right) \\
& +3\left(\nabla\pi\right)^2\left(\pi_{;\sigma\lambda}\pi^{;\sigma\lambda}\right)\pi_{;\mu\nu} - 6\left(\nabla\pi\right)^2\left(\pi_{;\mu\sigma}\pi^{;\sigma\lambda}\pi_{;\lambda\nu}\right) \\
& +6\left(\pi_{;\rho}\pi^{;\rho\sigma}\pi_{;\sigma}\right)\left(\pi_{;\mu\lambda}\pi_{;\nu}^{;\lambda}\right) + 6\left(\pi_{;\rho}\pi^{;\rho\sigma}\pi_{;\sigma\lambda}\pi^{;\lambda}\right)\pi_{;\mu\nu}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+2\left(\pi^{\sigma}_{;\rho}\pi^{\lambda}_{;\sigma}\pi^{\rho}_{;\lambda}\right)\left(\pi_{;\mu}\pi_{;\nu}\right)+3\left(\pi_{;\sigma\lambda}\pi^{;\sigma\lambda}\right)\pi^{;\rho}\left[\pi_{;\rho\mu}\pi_{;\nu}+\pi_{;\rho\nu}\pi_{;\mu}\right]\\
&-6\pi^{;\rho}\pi_{;\rho\sigma}\pi^{;\sigma\lambda}\left[\pi_{;\lambda\mu}\pi_{;\nu}+\pi_{;\lambda\nu}\pi_{;\mu}\right]-6\pi_{;\rho}\pi^{;\rho\lambda}\pi^{;\sigma}\left[\pi_{;\lambda\mu}\pi_{;\sigma\nu}+\pi_{;\lambda\nu}\pi_{;\sigma\mu}\right]\\
&+2\left(\nabla\pi\right)^2\left(\pi^{\sigma}_{;\rho}\pi^{\lambda}_{;\sigma}\pi^{\rho}_{;\lambda}\right)g_{\mu\nu}-3\left(\pi_{;\rho}\pi^{;\rho\sigma}\pi_{;\sigma}\right)\left(\pi_{;\lambda\kappa}\pi^{;\lambda\kappa}\right)g_{\mu\nu}\\
&+6\left(\pi_{;\rho}\pi^{;\rho\sigma}\pi_{;\sigma\lambda}\pi^{;\lambda\kappa}\pi_{;\kappa}\right)g_{\mu\nu}+\frac{3}{2}\left(\nabla\pi\right)^2\pi^{;\sigma}\left[\pi_{;\sigma\mu}\pi_{;\nu}+\pi_{;\sigma\nu}\pi_{;\mu}\right]R\\
&-\frac{3}{24}\left(\nabla\pi\right)^2\left(\pi_{;\sigma}\pi^{;\sigma\lambda}\pi_{;\lambda}\right)Rg_{\mu\nu}+3\left(\nabla\pi\right)^2\left(\pi_{;\sigma}\pi^{;\sigma\lambda}\pi_{;\lambda}\right)R_{\mu\nu}\\
&+3\left(\nabla\pi\right)^2\left(\pi_{;\sigma}R^{\sigma\lambda}\pi_{;\lambda}\right)\pi_{;\mu\nu}+\frac{15}{2}\left(\nabla\pi\right)^2\left(\pi_{;\sigma\lambda}R^{\sigma\lambda}\right)\left(\pi_{;\mu}\pi_{;\nu}\right)\\
&-3\left(\nabla\pi\right)^2\left(\pi_{;\sigma}\pi^{;\sigma\lambda}\right)\left[R_{\lambda\mu}\pi_{;\nu}+R_{\lambda\nu}\pi_{;\mu}\right]\\
&-3\left(\nabla\pi\right)^2\left(\pi^{;\lambda}\pi^{;\sigma}\right)\left[R_{\lambda\mu}\pi_{;\sigma\nu}+R_{\lambda\nu}\pi_{;\sigma\mu}\right]-3\left(\nabla\pi\right)^2\left(\pi_{;\sigma}R^{\sigma\lambda}\right)\left[\pi_{;\lambda\mu}\pi_{;\nu}+\pi_{;\lambda\nu}\pi_{;\mu}\right]\\
&+6\left(\nabla\pi\right)^2\left(\pi_{;\sigma}\pi^{;\sigma\lambda}R_{\lambda\kappa}\pi^{;\kappa}\right)g_{\mu\nu}-3\left(\nabla\pi\right)^2\left(\pi^{;\sigma}\pi^{;\lambda\kappa}\right)\left[R_{\mu\lambda\sigma\kappa}\pi_{;\nu}+R_{\nu\lambda\sigma\kappa}\pi_{;\mu}\right]\\
&+3\left(\nabla\pi\right)^2\left(\pi^{;\sigma}\pi^{;\lambda}\right)\left[R_{\mu\sigma\lambda\kappa}\pi^{;\kappa}_{\nu}+R_{\nu\sigma\lambda\kappa}\pi^{;\kappa}_{\mu}\right]\\
&-3\left(\nabla\pi\right)^2\left(\pi_{;\sigma}\pi^{;\sigma\lambda}\pi^{;\kappa}\right)\left[R_{\mu\lambda\nu\kappa}+R_{\nu\lambda\mu\kappa}\right]+3\left(\nabla\pi\right)^2\left(\pi_{;\sigma}\pi_{;\lambda}\pi_{;\kappa\tau}R^{\sigma\kappa\lambda\tau}\right)g_{\mu\nu}
\end{aligned}
\tag{A.4}
$$

$$
\begin{aligned}
T^{(c_G)}_{\mu\nu}=\;&g_{\mu\nu}\left(\Box\pi\right)^2-2\Box\pi\pi_{;\mu\nu}+2\pi_{;\mu\lambda}\pi^{;\lambda}_{;\nu}-g_{\mu\nu}\pi_{;\rho\sigma}\pi^{;\rho\sigma}-R_{\mu\nu}\left(\nabla\pi\right)^2-R\pi_{;\mu}\pi_{;\nu}\\
&+\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\left(\nabla\pi\right)^2+2R_{\lambda\nu}\pi^{;\lambda}\pi_{;\mu}+2R_{\lambda\mu}\pi^{;\lambda}\pi_{;\nu}-2g_{\mu\nu}R_{\rho\lambda}\pi^{;\rho}\pi^{;\lambda}+2R^{\sigma}_{\mu\rho\nu}\pi^{;\rho}\pi_{;\sigma}
\end{aligned}
\tag{A.5}
$$

A.2 Les perturbations du galileon

Pour obtenir les expressions des perturbations du galileon décrites dans la partie 3.4.1, je suis parti des équations de [2] que j'ai reparamétrisé selon (3.70) et (3.88). Puis, en utilisant (3.93), on obtient les expressions suivantes pour ces perturbations :

1. $\chi^G = f_1^\chi + \frac{1}{\kappa a^2}\left(f_2^\chi \cdot k\mathcal{H}\mathcal{Z} + f_3^\chi \cdot k^2\eta\right)$ avec :

$$
g_1^\chi = \frac{k^2}{\kappa a^2}\left[-2\frac{\bar{c}_3}{a^2}\bar{x}^2\bar{\mathcal{H}}^2+12\frac{\bar{c}_4}{a^4}\bar{x}^3\bar{\mathcal{H}}^4-15\frac{\bar{c}_5}{a^6}\bar{x}^4\bar{\mathcal{H}}^6-4\frac{\bar{c}_G}{a^2}\bar{x}\bar{\mathcal{H}}^2\right] \tag{A.6}
$$

$$
g_2^\chi = \frac{H_0}{\kappa a^2}\left[\bar{c}_2\bar{x}\bar{\mathcal{H}}-18\frac{\bar{c}_3}{a^2}\bar{x}^2\bar{\mathcal{H}}^3+90\frac{\bar{c}_4}{a^4}\bar{x}^3\bar{\mathcal{H}}^5-105\frac{\bar{c}_5}{a^6}\bar{x}^4\bar{\mathcal{H}}^7-18\frac{\bar{c}_G}{a^2}\bar{x}\bar{\mathcal{H}}^3\right] \tag{A.7}
$$

$$
f_2^\chi = -2\frac{\bar{c}_3}{a^2}\bar{x}^3\bar{\mathcal{H}}^2+15\frac{\bar{c}_4}{a^4}\bar{x}^4\bar{\mathcal{H}}^4-21\frac{\bar{c}_5}{a^6}\bar{x}^5\bar{\mathcal{H}}^6-6\frac{\bar{c}_G}{a^2}\bar{x}^2\bar{\mathcal{H}}^2 \tag{A.8}
$$

$$
f_3^\chi = \frac{3}{2}\frac{\bar{c}_4}{a^4}\bar{x}^4\bar{\mathcal{H}}^4-3\frac{\bar{c}_5}{a^6}\bar{x}5\bar{\mathcal{H}}^6-\frac{\bar{c}_G}{a^2}\bar{x}^2\bar{\mathcal{H}}^2 \tag{A.9}
$$

2. $q^G = f_1^q + \frac{1}{\kappa a^2}f_2^q \cdot k^2\left(\sigma - \mathcal{Z}\right)$ avec :

$$
\begin{aligned}
f_1^q = \frac{k}{\kappa a^2}\Big[&\bar{c}_2H_0\bar{x}\bar{\mathcal{H}}\bar{\gamma}-\frac{\bar{c}_3}{a^2}\left(-2\bar{x}^2\bar{H}^2\bar{\gamma}'+6H_0\bar{x}^2\bar{\mathcal{H}}^3\bar{\gamma}\right)+\frac{\bar{c}_4}{a^4}\left(-12\bar{x}^3\bar{\mathcal{H}}^4\bar{\gamma}'+18H_0\bar{x}^3\bar{\mathcal{H}}^5\bar{\gamma}\right)\\
&-\frac{\bar{c}_5}{a^6}\left(-15\bar{x}^4\bar{\mathcal{H}}^6\bar{\gamma}'+15H_0\bar{x}^4\bar{\mathcal{H}}^7\bar{\gamma}\right)-\frac{\bar{c}_G}{a^2}\left(-4\bar{x}\bar{\mathcal{H}}^2\bar{\gamma}'+6H_0\bar{x}\bar{\mathcal{H}}^3\bar{\gamma}\right)\Big]
\end{aligned}
\tag{A.10}
$$

$$
f_2^q = \frac{\bar{c}_4}{a^4}\bar{x}^4\bar{\mathcal{H}}^4-2\frac{\bar{c}_5}{a^6}\bar{x}^5\bar{\mathcal{H}}^6-\frac{2}{3}\frac{\bar{c}_G}{a^2}\bar{x}^2\bar{\mathcal{H}}^2 \tag{A.11}
$$

3. $\Pi^G = f_1^\Pi + \frac{1}{\kappa a^2}\left(f_2^\Pi \cdot k\mathcal{H}\sigma - f_3^\Pi \cdot k\sigma' + f_4^\Pi \cdot k^2\phi\right)$ avec :

$$f_1^\Pi = \frac{k^2}{\kappa a^2}\left[\frac{\bar{c}_4}{a^4}\left(4\bar{x}^3\bar{\mathcal{H}}^4\bar{\gamma} - 6\bar{x}^2\bar{\mathcal{H}}^3\left(\overset{o}{\bar{x}\bar{\mathcal{H}}}\right)\bar{\gamma}\right) - \frac{\bar{c}_5}{a^6}\left(12\bar{x}^4\bar{\mathcal{H}}^6\bar{\gamma} - 3\bar{x}^4\bar{\mathcal{H}}^5\overset{o}{\bar{\mathcal{H}}}\bar{\gamma} - 12\bar{x}^3\bar{\mathcal{H}}^5\left(\overset{o}{\bar{x}\bar{\mathcal{H}}}\right)\bar{\gamma}\right)\right.$$
$$\left. +2\frac{\bar{c}_G}{a^2}\bar{H}\left(\overset{o}{\bar{x}\bar{\mathcal{H}}}\right)\bar{\gamma}\right] \tag{A.12}$$

$$f_2^\Pi = \frac{\bar{c}_4}{a^4}\left(3\bar{x}^4\bar{\mathcal{H}}^4 - 6\bar{x}^3\bar{\mathcal{H}}^3\left(\overset{o}{\bar{x}\bar{\mathcal{H}}}\right)\right) - \frac{\bar{c}_5}{a^6}\left(12\bar{x}^5\bar{\mathcal{H}}^6 - 3\bar{x}^5\bar{\mathcal{H}}^5\overset{o}{\bar{\mathcal{H}}} - 15\bar{x}^4\bar{\mathcal{H}}^5\left(\overset{o}{\bar{x}\bar{\mathcal{H}}}\right)\right)$$
$$+2\frac{\bar{c}_G}{a^2}\bar{x}\bar{H}\left(\overset{o}{\bar{x}\bar{\mathcal{H}}}\right) \tag{A.13}$$

$$f_3^\Pi = \frac{\bar{c}_4}{a^4}\bar{x}^4\bar{\mathcal{H}}^4 + 3\frac{\bar{c}_5}{a^6}\bar{x}^4\bar{H}^5\left(\overset{o}{\bar{x}\bar{\mathcal{H}}}\right) \tag{A.14}$$

$$f_4^\Pi = -\frac{\bar{c}_4}{a^4}\bar{x}^4\bar{\mathcal{H}}^4 - \frac{\bar{c}_5}{a^6}\left(-6\bar{x}^5\bar{\mathcal{H}}^6 + 6\bar{x}^4\bar{H}^5\left(\overset{o}{\bar{x}\bar{\mathcal{H}}}\right)\right) + 2\frac{\bar{c}_G}{a^2}\bar{x}^2\bar{\mathcal{H}}^2 \tag{A.15}$$

4. $0 = f_1^{eom} \cdot \bar{\gamma}'' + f_2^{eom} \cdot \bar{\gamma}' + f_3^{eom} \cdot k^2\bar{\gamma} + f_4^{eom} \cdot k\mathcal{H}\mathcal{Z} + f_5^{eom} \cdot k\mathcal{Z}' + f_6^{eom} \cdot k^2\eta$ avec :

$$f_1^{eom} = \bar{c}_2 - 12\frac{\bar{c}_3}{a^2}\bar{x}\bar{\mathcal{H}}^2 + 54\frac{\bar{c}_4}{a^4}\bar{x}^2\bar{\mathcal{H}}^4 - 60\frac{\bar{c}_5}{a^6}\bar{x}^3\bar{\mathcal{H}}^6 - 6\frac{\bar{c}_G}{a^2}\bar{\mathcal{H}}^2 \tag{A.16}$$

$$f_2^{eom} = H_0\left[2\bar{c}_2\bar{\mathcal{H}} - \frac{\bar{c}_3}{a^2}\left(12\bar{x}\bar{\mathcal{H}}^2\overset{o}{\bar{\mathcal{H}}} + 12\bar{\mathcal{H}}^2\left(\overset{o}{\bar{x}\bar{\mathcal{H}}}\right)\right) + \frac{\bar{c}_4}{a^4}\left(-108\bar{x}^2\bar{\mathcal{H}}^5 + 108\bar{x}^2\bar{\mathcal{H}}^4\overset{o}{\bar{\mathcal{H}}} + 108\bar{x}\bar{\mathcal{H}}^4\left(\overset{o}{\bar{x}\bar{\mathcal{H}}}\right)\right)\right.$$
$$\left. -\frac{\bar{c}_5}{a^6}\left(-240\bar{x}^3\bar{\mathcal{H}}^7 + 180\bar{x}^3\bar{\mathcal{H}}^6\overset{o}{\bar{\mathcal{H}}} + 180\bar{x}^2\bar{\mathcal{H}}^6\left(\overset{o}{\bar{x}\bar{\mathcal{H}}}\right)\right) - 12\frac{\bar{c}_G}{a^2}\bar{\mathcal{H}}^2\overset{o}{\bar{\mathcal{H}}}\right] \tag{A.17}$$

$$f_3^{eom} = \bar{c}_2 - \frac{\bar{c}_3}{a^2}\left(4\bar{x}\bar{\mathcal{H}}^2 + 4\bar{\mathcal{H}}\left(\overset{o}{\bar{x}\bar{\mathcal{H}}}\right)\right) + \frac{\bar{c}_4}{a^4}\left(-10\bar{x}^2\bar{\mathcal{H}}^4 + 12\bar{x}^2\bar{\mathcal{H}}^3\overset{o}{\bar{\mathcal{H}}} + 24\bar{x}\bar{\mathcal{H}}^3\left(\overset{o}{\bar{x}\bar{\mathcal{H}}}\right)\right)$$
$$-\frac{\bar{c}_5}{a^6}\left(-36\bar{x}^3\bar{\mathcal{H}}^6 + 24\bar{x}^3\bar{\mathcal{H}}^5\left(\overset{o}{\bar{\mathcal{H}}}\right) + 36\bar{x}^2\bar{\mathcal{H}}^5\left(\overset{o}{\bar{x}\bar{\mathcal{H}}}\right)\right) - \frac{\bar{c}_G}{a^2}\left(2\bar{\mathcal{H}}\right) \tag{A.18}$$

$$f_4^{eom} = \bar{c}_2\bar{x} - \frac{\bar{c}_3}{a^2}\left(6\bar{x}^2\bar{\mathcal{H}}^2 + 4\bar{x}\bar{\mathcal{H}}\left(\overset{o}{\bar{x}\bar{\mathcal{H}}}\right)\right) + \frac{\bar{c}_4}{a^4}\left(-6\bar{x}^3\bar{\mathcal{H}}^4 + 12\bar{x}^3\bar{\mathcal{H}}^3\overset{o}{\bar{\mathcal{H}}} + 36\bar{x}^2\bar{\mathcal{H}}^3\left(\overset{o}{\bar{x}\bar{\mathcal{H}}}\right)\right)$$
$$-\frac{\bar{c}_5}{a^6}\left(-45\bar{x}^4\bar{\mathcal{H}}^6 + 30\bar{x}^4\bar{\mathcal{H}}^5\overset{o}{\bar{\mathcal{H}}} + 60\bar{x}^3\bar{\mathcal{H}}^5\left(\overset{o}{\bar{x}\bar{\mathcal{H}}}\right)\right) - \frac{\bar{c}_G}{a^2}\left(6\bar{x}\bar{\mathcal{H}}^2 + 4\bar{x}\bar{\mathcal{H}}\overset{o}{\bar{\mathcal{H}}} + 4\bar{\mathcal{H}}\left(\overset{o}{\bar{x}\bar{\mathcal{H}}}\right)\right) \tag{A.19}$$

$$f_5^{eom} = -2\frac{\bar{c}_3}{a^2}\bar{x}^2\bar{\mathcal{H}}^2 + 12\frac{\bar{c}_4}{a^4}\bar{x}^2\bar{\mathcal{H}}^4 - 15\frac{\bar{c}_5}{a^6}\bar{x}^4\bar{\mathcal{H}}^6 - 4\frac{\bar{c}_G}{a^2}\bar{x}\bar{\mathcal{H}}^2 \tag{A.20}$$

$$f_6^{eom} = \frac{\bar{c}_4}{a^4}\left(-4\bar{x}^3\bar{\mathcal{H}}^4 + 6\bar{x}^2\bar{\mathcal{H}}^3\left(\overset{o}{\bar{x}\bar{\mathcal{H}}}\right)\right) - \frac{\bar{c}_5}{a^6}\left(-12\bar{x}^4\bar{\mathcal{H}}^6 + 3\bar{x}^4\bar{\mathcal{H}}^5\overset{o}{\bar{\mathcal{H}}} + 12\bar{x}^3\bar{\mathcal{H}}^5\left(\overset{o}{\bar{x}\bar{\mathcal{H}}}\right)\right)$$
$$-2\frac{\bar{c}_G}{a^2}\bar{\mathcal{H}}\left(\overset{o}{\bar{x}\bar{\mathcal{H}}}\right) \tag{A.21}$$

Bibliographie

[1] Stephen Appleby and Eric V. Linder. The Paths of Gravity in Galileon Cosmology. *JCAP*, 1203 :043, 2012.

[2] Alexandre Barreira, Baojiu Li, Carlton M. Baugh, and Silvia Pascoli. Linear perturbations in Galileon gravity models. *Phys. Rev.*, D86 :124016, 2012.

Annexe B

Validation des prédictions pour le modèle du galileon

Nous présentons ici les comparaisons directes entre les prédiction pour le modèle du galileon tirées de Barreira et al. [1] et les miennes. Les scénarios présentés ici sont ceux de la table 3.1.

B.1 Perturbations cosmologiques

Ici, on compare les perturbations de certaines grandeurs cosmologiques. Les perturbations du potentiel de Weyl ϕ sont données, pour plusieurs échelles k, en figure B.1 et celles du contraste de densité total δ en figure B.2.

À première vue, l'écart entre mes résultats et ceux de Barreira est important pour les petites échelles ($\sim 5\%$ pour $k = 1.0$ Mpc^{-1} sur ϕ et δ). Cependant, on constate que le rapport $\phi\,(\text{Leloup})\,/\phi\,(\text{Barreira})$ ne dépend pas du scénario galileon choisi (de même pour δ). Cela indique qu'il s'agit peut-être d'une différence indépendante de nos modifications respectives de CAMB, mais qui aurait pour origine une différence dans les versions de CAMB utilisées dans les deux codes. La version de CAMB que j'ai modifiée date de 2016 tandis que celle modifiée par Barreira et al. date de 2006. En fait, si l'on compare les perturbations obtenues pour les deux versions de CAMB pour le modèle ΛCDM, on obtient le même rapport que précédemment. On voit, en effet, sur les figures B.1 et B.2 que les courbes des écarts relatifs se superposent pour les 4 modèles de galileon et également pour le modèle ΛCDM.

Cela nous permet d'appliquer une correction à $\phi\,(\text{Leloup})$, qui permet de prendre en compte la différence entre les versions de CAMB utilisées, et qui est donnée par :

$$\frac{\phi_{old}^{\Lambda CDM}}{\phi_{new}^{\Lambda CDM}} \tag{B.1}$$

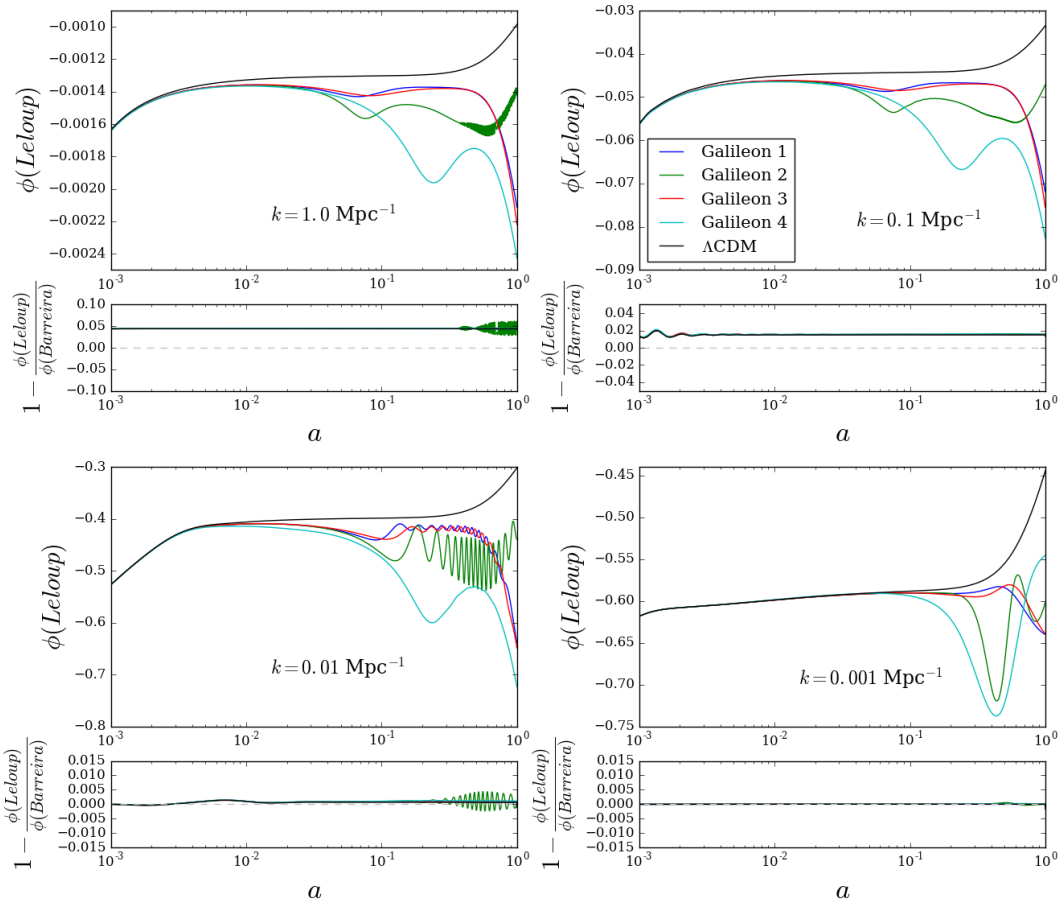

FIGURE B.1 Évolution en fonction de a du potentiel de Weyl obtenue par mon code et comparaison aux résultats de [1]. Le fait que l'écart relatif entre nos résultats soient, pour un k donné, les mêmes quelque soit le modèle (même pour le modèle ΛCDM) semble indiquer que cet écart provient de différences entre les versions de CAMB plutôt que d'un mauvais calcul des perturbations.

On applique également la correction sur δ. Les perturbations corrigées sont données en figure B.3 pour ϕ et B.4 pour δ. On observe que l'écart entre les perturbations obtenues par Barreira et al. et les perturbations que j'ai obtenues, corrigées de la différence des versions de CAMB, est bien inférieur à 1%.

B.2 Spectres de puissance

Comme nous l'avions dit dans la section 3.4.3, les prédictions qui seront directement confrontées aux observations sont les spectres de puissance. Il faut donc s'assurer que ceux-ci sont bien en accords avec les prédictions obtenues par Barreira et al. La comparaison pour le spectre de

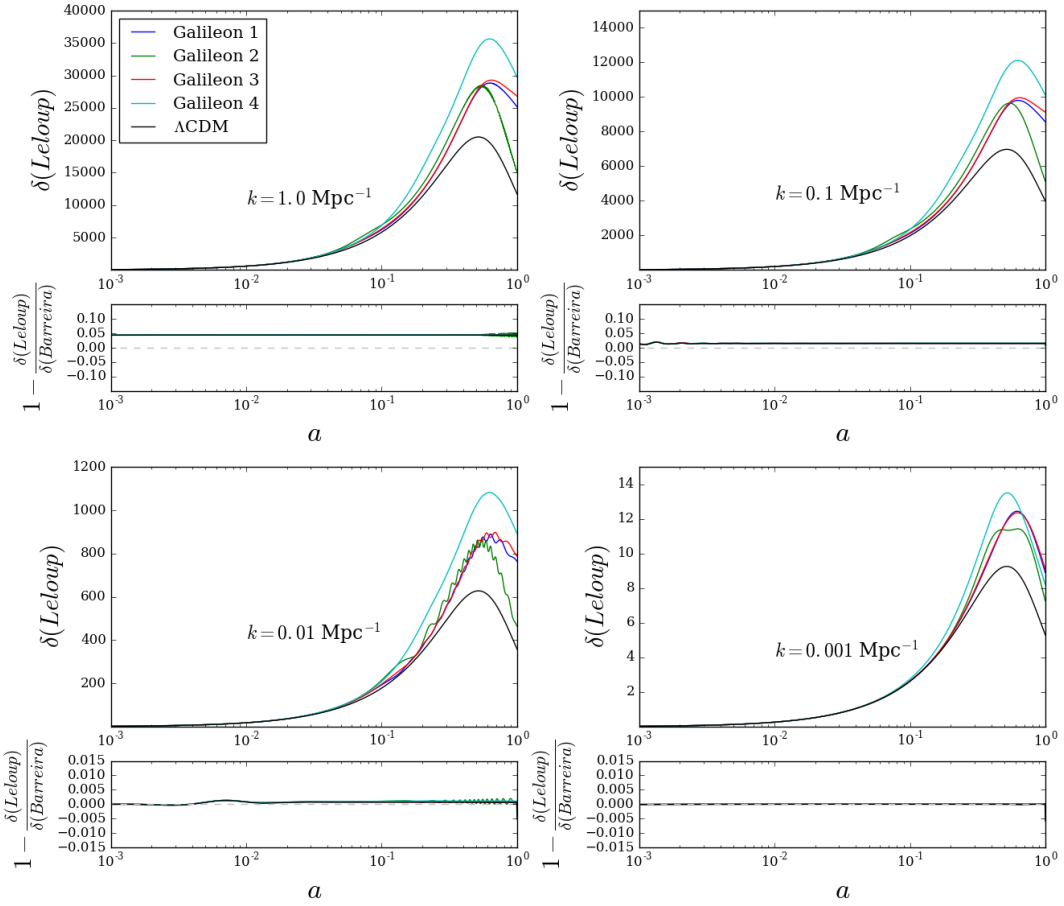

FIGURE B.2 Évolution en fonction de a du contraste de densité total obtenue par mon code et comparaison aux résultats de [1]. On fait le même constat concernant les écarts relatifs que pour la figure B.1.

puissance angulaire des anisotropies de températures est donnée en figure B.5 et celle pour le spectre de puissance de la matière est donnée en figure B.6. On observe un très bon accord inférieur au % pour ces deux spectres, les écarts les plus importants $\sim 1\%$ sont obtenus pour le spectre en température à des échelles où l'erreur observationnelle est donnée par la variance cosmique, on peut donc considérer cet accord comme suffisant (des comparaisons similaires ont été effectuées dans [2] avec des accords de cet ordre de grandeur entre différents codes de calcul). De plus, il semble qu'une partie de l'erreur aux petites échelles (à grand ℓ), soit indépendante des scénarios galileon étudiés et pourrait donc à nouveau provenir d'une différence due aux mises à jour de CAMB.

Enfin, il n'y a pas de comparaison directe au spectre de puissance angulaire de l'effet de lentille gravitationnel car nous ne disposons pas des spectres de puissance de Barreira et al., mais

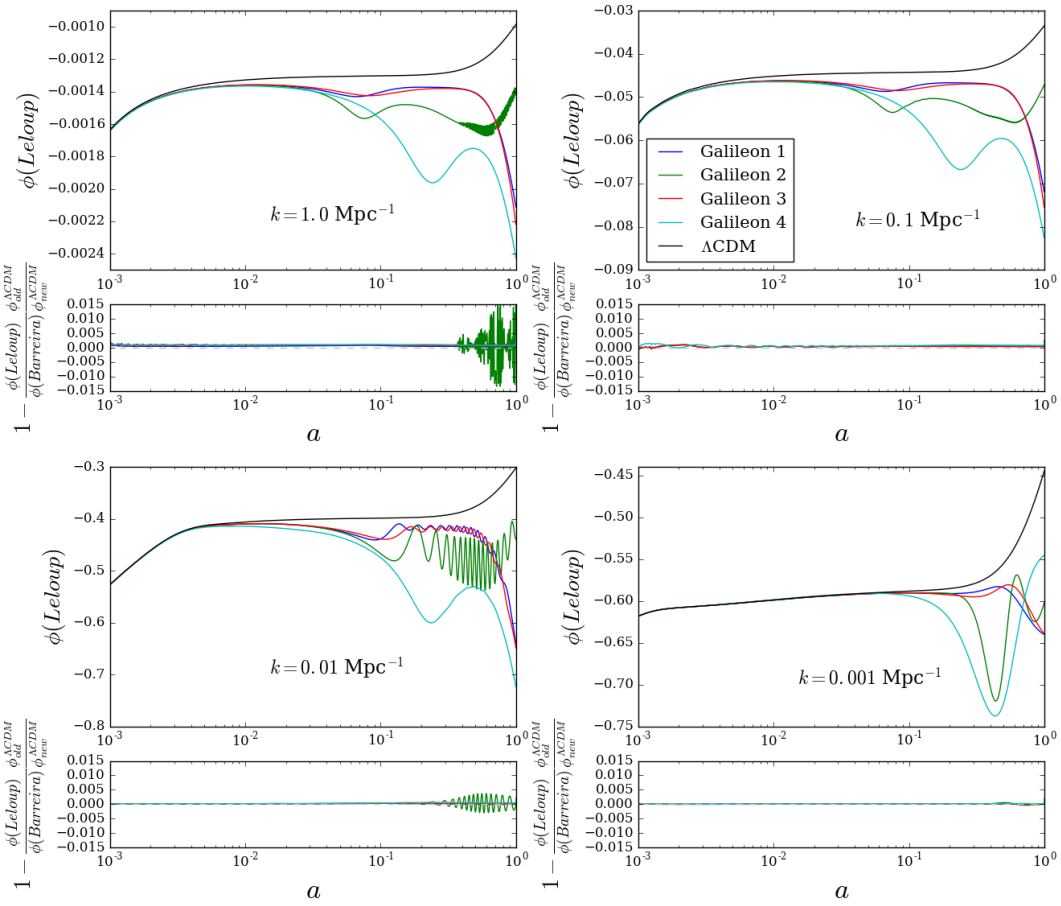

FIGURE B.3 Évolution en fonction de a du potentiel de Weyl obtenue par mon code et comparaison après correction aux résultats de [1]. La correction appliquée à mes résultats est donnée par (B.1), les écarts que nous avions observé avant d'effectuer cette correction ont disparu et l'accord est à un niveau inférieur au %.

sachant que les perturbations entrant dans le calcul de $C_\ell^{\phi\phi}$ sont les mêmes que pour les deux spectres de puissance présentés ici, et que l'on a comparé directement les prédictions pour ϕ qui est l'ingrédient de ce calcul, nous estimons raisonnable de considérer celui-ci comme correct.

Bibliographie

[1] Alexandre Barreira, Baojiu Li, Carlton M. Baugh, and Silvia Pascoli. Linear perturbations in Galileon gravity models. *Phys. Rev.*, D86 :124016, 2012.

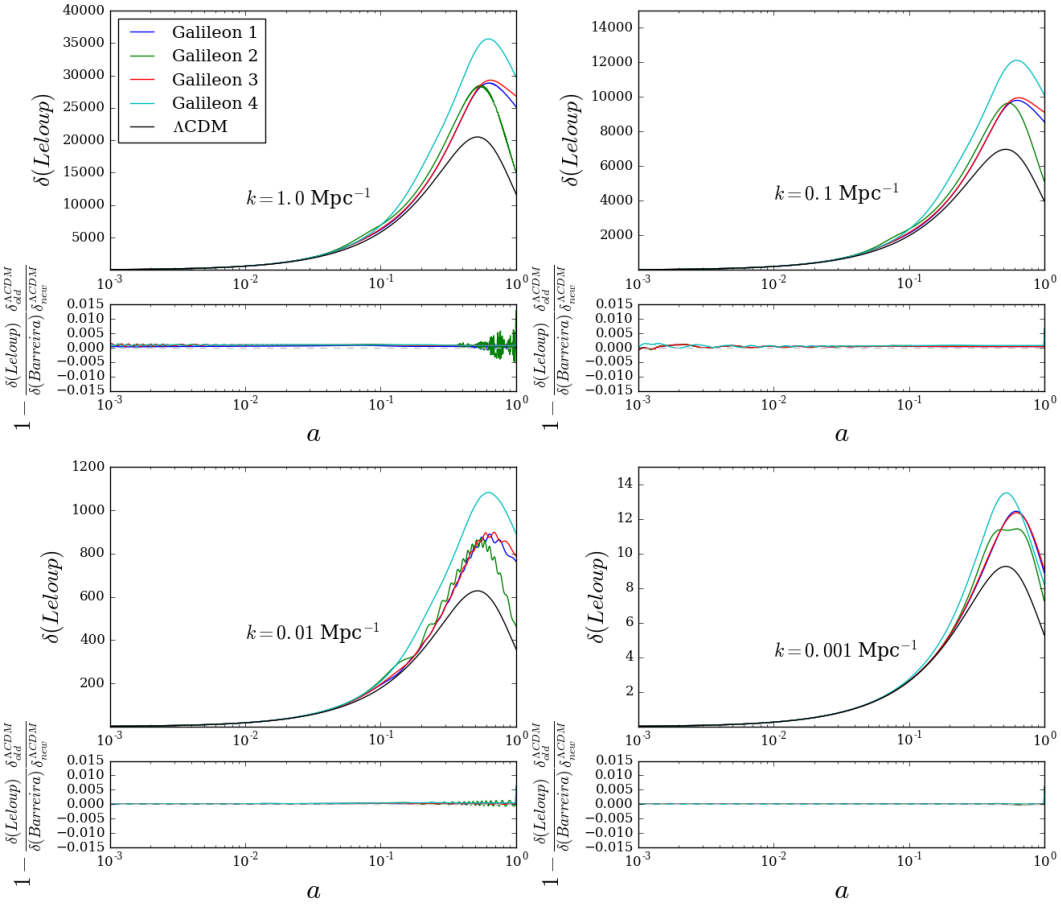

FIGURE B.4 Évolution en fonction de a du contraste de densité total obtenue par mon code et comparaison après correction aux résultats de [1]. La correction appliquée à mes résultats est donnée par une version de (B.1) adaptée au contraste de densité. L'accord est également à un niveau inférieur au %.

[2] E. Bellini et al. Comparison of Einstein-Boltzmann solvers for testing general relativity. *Phys. Rev.*, D97(2) :023520, 2018.

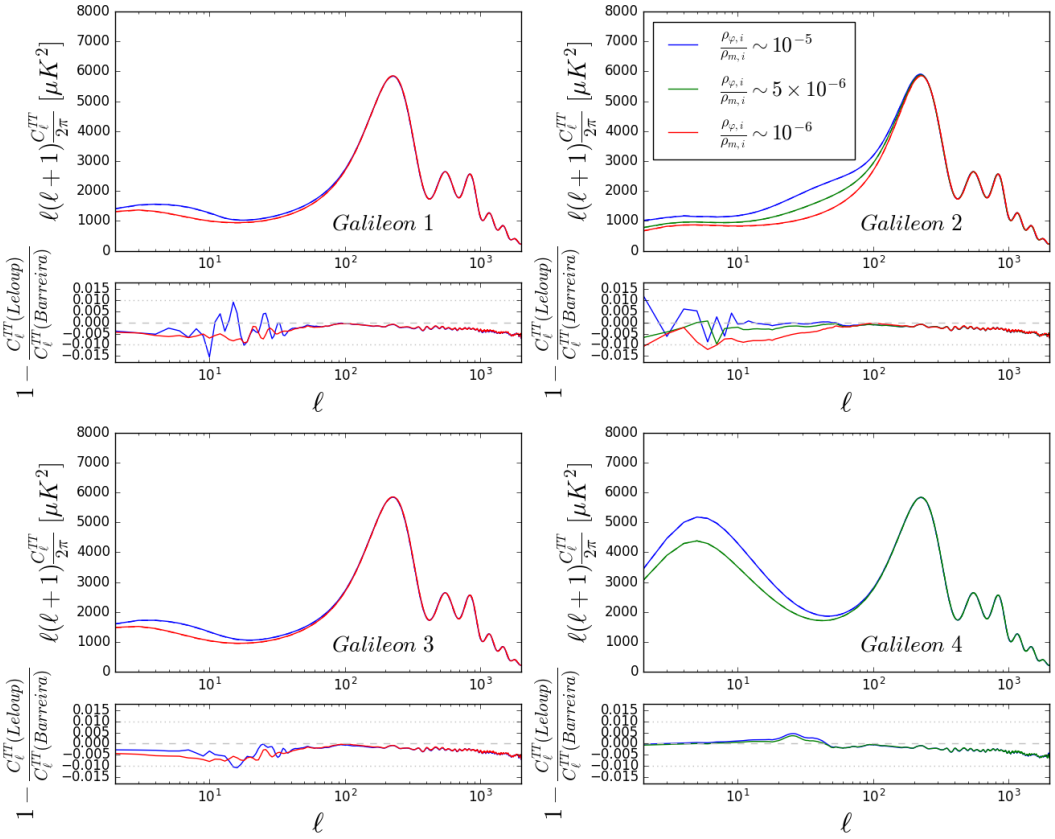

FIGURE B.5 Comparaison de mes résultats de spectres TT avec ceux de [1]. Les différences que l'on observe sont, au plus, de l'ordre du % dans les régions dominées par la variance cosmique. Les différences à haut ℓ sont dues à un traitement différent de la réionisation dans nos version respectives de CAMB.

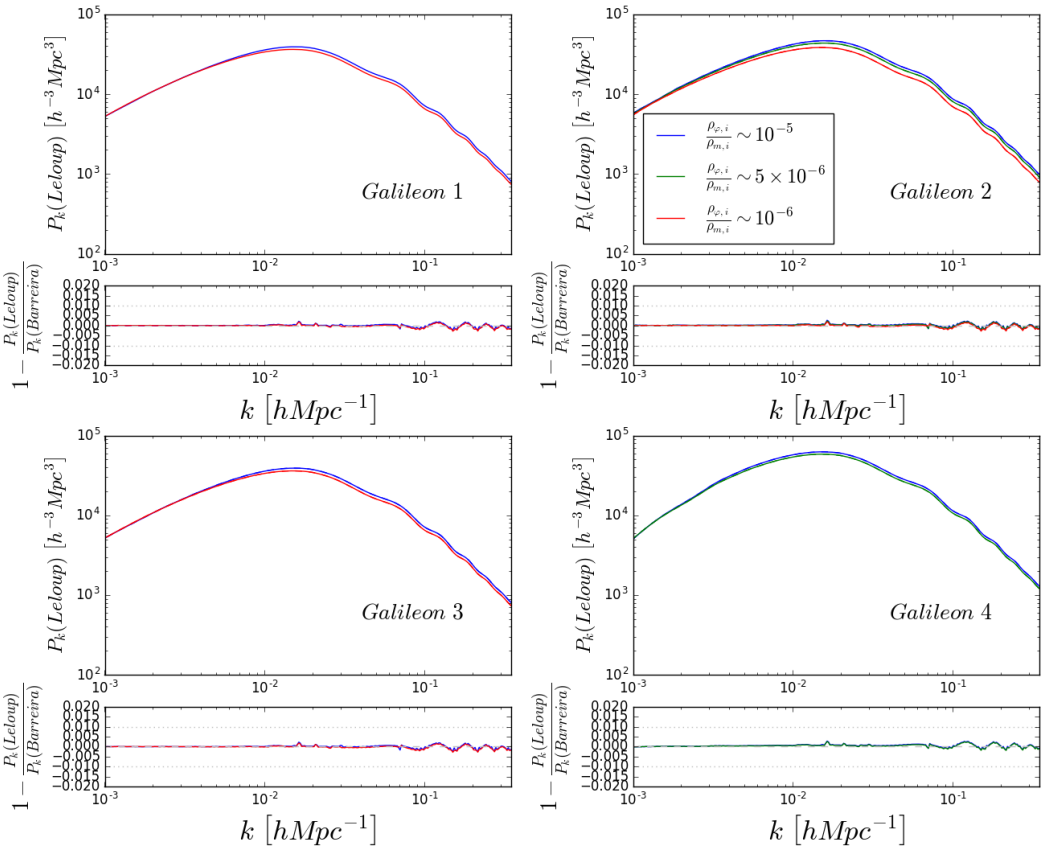

FIGURE B.6 Comparaison de mes résultats de spectres de puissance de la matière avec ceux de [1]. L'accord entre nos résultats est excellent, de l'ordre de quelques ‰, et l'écart semble indépendant du scénario, ce qui pourrait une fois encore provenir de différences dues aux versions de CAMB utilisées.

Annexe C

Formalisme CCWZ

Nous allons ici présenter un traitement générique des brisures spontanées de symétrie qui se place dans le cadre du formalisme CCWZ, du nom de ses auteurs Curtis G. Callan Jr., S. Coleman, J. Wess et B. Zumino [1, 2]. Le modèle du branon présenté dans le chapitre 5 en est un cas particulier et l'étude générique en apporte un point de vue intéressant.

C.1 Position du problème

Le but recherché lors du développement du formalisme CCWZ était de fournir une description systématique des théories dans lesquels les champs, regroupés dans un vecteur ϕ, se transforment de manière non-linéaire selon un groupe de symétrie G donné et se transforment linéairement selon un sous groupe H de G seulement. Ce cas n'est pas sans rappeler le modèle sigma non-linéaire présenté dans la section 5.3.1, et ce n'est pas par hasard car il a été montré dans [1] qu'il y a une correspondance entre cette description et la description effective des brisures spontanées de symétrie qui suivent le schéma $G \to H$. Ainsi, le formalisme CCWZ peut également être considéré comme une étude systématique des mécanismes de brisure spontanée de symétrie d'un groupe G vers un sous-groupe H, et c'est sous ce dernier aspect que nous allons étudier le formalisme CCWZ dans la suite.

Dans le développement original, le groupe G est un groupe de Lie compact, connecté et semi-simple. Nous nous placerons également dans ce cadre dans la suite. Il est néanmoins facile de généraliser le développement suivant au cas des groupes non-compacts (voir par exemple [3]), dont le modèle du branon est un cas particulier. Le groupe étant compact, il est possible d'en trouver des représentations de dimension finie, unitaires et fidèles. De plus, les matrices g correspondantes peuvent être supposées être réelles, le cas de matrices complexes s'en déduisant en les décomposant en une partie réelle et une partie imaginaire. Le groupe étant connecté,

tout élément g de G peut s'écrire comme :

$$g = e^{i\alpha^a T_a} \tag{C.1}$$

Les T_a sont les générateurs du groupe de Lie G et appartiennent à l'algèbre de Lie définie par les constantes de structure C_{abc} qui déterminent les relations de commutation suivantes :

$$[T_a, T_b] = iC_{abc}T_c \tag{C.2}$$

Cette relation implique, en particulier, que les constantes de structure sont antisymétrique selon les deux premiers indices, c'est-à-dire que $C_{abc} = -C_{bac}$. De plus, elles vérifient l'identité de Jacobi suivante :

$$C^{\lambda}_{\alpha\beta}C^{\sigma}_{\gamma\lambda} + C^{\lambda}_{\gamma\alpha}C^{\sigma}_{\beta\lambda} + C^{\lambda}_{\beta\gamma}C^{\sigma}_{\alpha\lambda} = 0 \tag{C.3}$$

Il est possible [4] de prendre un ensemble de générateurs vérifiant :

$$\mathrm{Tr}\left(T^a T^b\right) \propto \delta_{ab} \tag{C.4}$$

Dans ce cas, si l'on décompose l'ensemble des générateurs selon $\{T^a\} = \{H_i, X_\alpha\}$, où les H_i sont les générateurs du sous-groupe H, et les X_α complètent l'ensemble de générateurs de G, alors ceux-ci vérifient les relations de commutation suivantes :

$$[H_i, H_j] = iC_{ijk}H_k \tag{C.5}$$

$$[H_i, X_\alpha] = iC_{i\alpha\beta}X_\beta \tag{C.6}$$

$$[X_\alpha, X_\beta] = iC_{\alpha\beta i}H_i + C_{\alpha\beta\gamma}X_\gamma \tag{C.7}$$

De même que précédemment, la relation (C.6) implique que les constantes de structure sont entièrement antisymétriques, et que les X_α forment une représentation (pas nécessairement irréductible) de H dont les matrices de la représentation sont données par les constantes de structure $(\mathcal{T}_i)_{\alpha\beta} = C_{\alpha i\beta}$. Les relations(C.5) à (C.7) impliquent de plus que l'on peut décomposer tout élément g de G comme le produit d'un élément de H et d'un élément de G/H :

$$g = e^{i\pi'^{\alpha}X_\alpha + iu'^i H_i} = \underbrace{e^{i\pi'^{\alpha}X_\alpha}}_{\in G/H}\underbrace{e^{iu'^i H_i}}_{\in H} \tag{C.8}$$

Les paramètres π' et u' sont, a priori, différents de π et u et peuvent être obtenus en utilisant les relations (C.5) à (C.7) ainsi que la formule Baker-Campbell-Hausdorff :

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\frac{1}{12}[A,[A,B]]+\frac{1}{12}[B,[B,A]]+\ldots} \tag{C.9}$$

Le groupe G étant spontanément brisé en le sous-groupe H généré par les opérateurs H_i, ceux-ci préservent la configuration de l'état fondamental ϕ_0, et vérifient donc $H_i\phi_0 = 0$. Au contraire, les opérateurs X_α correspondent aux symétries brisées spontanément par la présence de cet état fondamental. Elles vérifient donc $X_\alpha\phi_0 \neq 0$.

De même que dans le cas du modèle du branon dans la section 5.3 ou du mécanisme de Higgs dans la section 1.2.3, on décompose le champ ϕ comme l'action d'un élément $U(\theta)$ de G sur un champ χ perpendiculaire à la direction de Goldstone, par exemple l'état fondamental :

$$\phi = U(\theta)\,\chi \tag{C.10}$$

où $U(\theta) = \exp\left[i\theta^\alpha(x)\,X_\alpha\right]$ est défini à une multiplication à droite par un élément de H près. L'intérêt de cette décomposition, dont il a été prouvé [4] qu'elle est toujours possible vient de ce que les degrés de liberté θ sont sans masse et correspondent aux bosons de Goldstone. Nous allons dans la suite déterminer les propriétés de ces nouvelles variables.

C.1.1 La réalisation non-linéaire

L'objectif de cette section est de déterminer comment les nouvelles variables sont transformées par l'action d'un élément de G. En effet, les lois de transformation obtenues contiennent toutes les informations concernant les propriétés des bosons de Goldstone, et les invariants qui s'en déduisent permettent de construire un lagrangien effectif à basse énergie du modèle dont la procédure assure qu'il inclue ces propriétés.

On cherche ainsi à déterminer les lois de transformation de θ et χ sous l'action d'un élément $g \in G$. Pour cela, on part de la transformation suivante :

$$\phi = U(\theta)\,\chi \rightarrow \tilde{\phi} = U\left(\tilde{\theta}\right)\tilde{\chi} = g\phi \tag{C.11}$$

Si l'on définit la matrice $\gamma = \tilde{U}^{-1}gU$, alors celle-ci vérifie :

$$\gamma\chi = \tilde{\chi} \tag{C.12}$$

Or, comme χ et $\tilde{\chi}$ sont perpendiculaires aux directions de Goldstone, cela signifie que $\gamma \in H$ et peut s'écrire $\gamma = \exp\left[iu^i(\theta, g) H_i\right]$. On peut alors en déduire la forme des lois de transformation :

$$\theta \to \tilde{\theta}(\theta, g) \qquad \text{et} \qquad \chi \to \tilde{\chi}(\theta, g, \chi) \tag{C.13}$$

Les fonctions non-linéaires $\tilde{\theta}(\theta, g)$ et $u^i(\theta, g)$ sont définies en décomposant l'élément gU en un élément de G/H et un élément de H, comme en (C.8), selon :

$$ge^{i\theta^\alpha X_\alpha} = e^{i\tilde{\theta}^\alpha X_\alpha} e^{iu^i H_i} \tag{C.14}$$

$$\tilde{\chi} = e^{iu^i H_i} \chi \tag{C.15}$$

Dans le cas où $g = h \in H$, alors γ est simplement donnée par $\gamma = h$, d'après (C.9), (C.6) et comme :

$$he^{i\theta^\alpha X_\alpha} = \left(he^{i\theta^\alpha X_\alpha} h^{-1}\right) h \tag{C.16}$$

On retrouve alors le fait que lois de transformation sont linéaires dans le sous-groupe H. Elles prennent la forme simple suivante :

$$\tilde{\theta}^\alpha X_\alpha = h\theta^\alpha X_\alpha h^{-1} \tag{C.17}$$

$$\tilde{\chi} = h\chi \tag{C.18}$$

Lorsque $g \in G/H$, la situation est plus complexe et on se limite au cas d'une transformation infinitésimale. On écrit alors :

$$g = 1 + i\omega^\alpha X_\alpha + ... \tag{C.19}$$

$$\gamma = 1 + iu^i(\theta, \omega) H_i + ... \tag{C.20}$$

$$U\left(\tilde{\theta}\right) = U(\theta)\left[1 + i\Delta^\alpha(\theta, \omega) X_\alpha + ...\right] \tag{C.21}$$

où les grandeurs $u^i(\theta, \omega)$ et $\Delta^\alpha(\theta, \omega)$ sont infinitésimales et données par (C.14) et (C.15), qui se réécrivent ici :

$$\Delta_\alpha = \text{Tr}\left[X_\alpha e^{-i\theta\cdot X}(\omega \cdot X) e^{i\theta\cdot X}\right] \simeq \omega_\alpha - C_{\alpha\beta\gamma}\omega^\beta\theta^\gamma + ... \tag{C.22}$$

$$u_i = \text{Tr}\left[H_i e^{-i\theta\cdot X}(\omega \cdot X) e^{i\theta\cdot X}\right] \simeq -C_{i\alpha\beta}\omega^\alpha\theta^\beta + ... \tag{C.23}$$

L'expression de Δ_α permet de déterminer comment sont transformés les champs θ. En effet, si l'on définit le déplacement $\xi^\alpha(\theta, \omega) = \tilde{\theta}^\alpha - \theta^\alpha$, alors la relation entre Δ_α et ξ^β est de la forme $\Delta_\alpha = M_{\alpha\beta}(\theta)\xi^\beta$, où $M_{\alpha\beta}$ est une matrice dont les coefficients sont donnés par, tous calculs

faits :

$$M_{\alpha\beta} = \int_0^1 ds \, \mathrm{Tr}\left[X_\alpha e^{-is\theta\cdot X} X_\beta e^{is\theta\cdot X}\right] \tag{C.24}$$

Ainsi, les champs θ se transforment de manière non-linéaire sous l'action d'un élément de G/H, comme c'était le cas pour le modèle sigma non-linéaire dans la section 5.3.1. De plus, même si la symétrie correspondant au groupe G est globale, la dépendance de u^i dans les champs de Goldstone θ^α implique que γ n'est pas une constante. Ainsi, $\partial_\mu \gamma \neq 0$, ce qui complique sensiblement la recherche des invariants pour cette symétrie.

C.2 La construction des invariants

Maintenant que nous disposons des règles de transformation, nous pouvons nous intéresser à la construction de termes invariants, à partir des champs θ et χ, qui peuvent apparaître dans le lagrangien de la théorie.

La principale difficulté provient du terme cinétique, car les lois de transformation dépendent de l'espace-temps comme nous l'avons constaté à la fin de la section précédente. Pour construire le terme cinétique, on part du constat que le terme $\partial_\mu \phi^T \partial^\mu \phi$ est manifestement invariant par une transformation de G, et doit donc le rester après changement de variables. La dérivée spatio-temporelle de ϕ se réécrit avec les nouvelles variables comme :

$$\partial_\mu \phi = U\left[\partial_\mu \chi + \left(U^{-1}\partial_\mu U\right)\chi\right] \tag{C.25}$$

Or, d'après la définition de γ, le terme $U^{-1}\partial_\mu U$ se transforme selon :

$$U^{-1}\partial_\mu U \to \tilde{U}^{-1}\partial_\mu \tilde{U} = \gamma\left(U^{-1}\partial_\mu U\right)\gamma^{-1} - \left(\partial_\mu \gamma\right)\gamma^{-1} \tag{C.26}$$

On constate alors que le terme $\mathcal{D}_\mu \chi = \partial_\mu \chi + \left(U^{-1}\partial_\mu U\right)\chi$ se transforme de manière covariante $\mathcal{D}_\mu \chi \to \gamma \mathcal{D}_\mu \chi$. Il est intéressant de décomposer $U^{-1}\partial_\mu U$ selon sa contribution proportionnelle à H_i et sa contribution proportionnelle à X_α puisque $\left(\partial_\mu \gamma\right)\gamma^{-1}$ est proportionnel à H_i :

$$U^{-1}\partial_\mu U = -i\mathcal{A}^i_\mu H_i + ie^\alpha_\mu X_\alpha \tag{C.27}$$

Ces deux composantes se transforment différemment sous l'action d'un élément de G :

$$-i\mathcal{A}^i_\mu\left(\theta\right)H_i \to -i\mathcal{A}^i_\mu\left(\tilde{\theta}\right)H_i = \gamma\left(-i\mathcal{A}^i_\mu\left(\theta\right)H_i\right)\gamma^{-1} - \left(\partial_\mu \gamma\right)\gamma^{-1} \tag{C.28}$$

$$-ie^\alpha_\mu\left(\theta\right)X_\alpha \to -ie^\alpha_\mu\left(\tilde{\theta}\right)X_\alpha = \gamma\left(-ie^\alpha_\mu\left(\theta\right)X_\alpha\right)\gamma^{-1} \tag{C.29}$$

Pour une transformation infinitésimale $g = 1 + i\omega^\alpha X_\alpha$, les lois de transformation précédentes donnent :

$$\delta\mathcal{A}^i_\mu(\theta) = \partial_\mu u^i(\theta,\omega) - C^i_{jk}u^j(\theta,\omega)\,\mathcal{A}^k_\mu(\theta) \tag{C.30}$$

$$\delta e^\alpha_\mu(\theta) = -C^\alpha_{i\beta}u^i(\theta,\omega)\,e^\beta_\mu(\theta) \tag{C.31}$$

Il est alors facile de construire un lagrangien invariant à partir des quantités e^α_μ qui se transforment de manière covariante, en utilisant des combinaisons invariantes selon H. En effet, la quantité $e_\mu \cdot X$ se transforme selon $e_\mu \cdot X \to \gamma e_\mu \cdot X\gamma^{-1}$ sous une transformation de G. Il est également possible d'inclure tes termes présentant des dérivées en utilisant la dérivée covariante définie par :

$$(D_\mu e_\nu)^\alpha = \partial_\mu e^\alpha_\nu + C^\alpha_{i\beta}\mathcal{A}^i_\mu e^\beta_\nu \tag{C.32}$$

Cette dérivée covariante se transforme comme e^α_μ, selon $\delta(D_\mu e_\nu)^\alpha = -C^\alpha_{i\beta}u^i(D_\mu e_\nu)^\beta$. Un lagrangien de la forme $\mathcal{L}(e_\mu, D_\mu e_\nu, ...)$, où les points de suspension décrivent des dérivées d'ordre supérieur, globalement invariant sous une transformation de H est alors assuré par la procédure d'être invariant sous une transformation de G. La dépendance dans les champs de Goldstone θ se retrouve ensuite en extrayant la contribution de $\partial_\mu\theta^\beta$ des termes $\mathcal{A}^i_\mu$ et e^α_μ selon :

$$\mathcal{A}^i_\mu = \mathcal{A}^i_\beta(\theta)\,\partial_\mu\theta^\beta \tag{C.33}$$

$$e^\alpha_\mu = e^\alpha_\beta(\theta)\,\partial_\mu\theta^\beta \tag{C.34}$$

Si le modèle contient d'autres champs à basse énergie, que l'on note ici χ indifféremment, alors comme la symétrie du sous-groupe H n'est pas brisée par l'état fondamental, χ se transforme linéairement sous une transformation $h \in H$, selon $\chi \to h\chi$. Alors, un lagrangien contenant χ et invariant sous une transformation de H sera également invariant sout une transformation de G si l'on inclue les couplages aux bosons de Goldstone adequats. Pour cela, on considère que le champ χ se transforme selon $\chi \to \gamma\chi$ sous une transformation de G. L'invariance sous une transformation de G est alors obtenue en remplaçant les dérivées spatio-temporelles par des dérivées covariantes $D_\mu\chi = \partial_\mu\chi - i\mathcal{A}^i_\mu H_i\chi$. Dans ce cas, les lagrangiens invariants sous une transformation de G les plus généraux sont les lagrangiens de la forme $\mathcal{L}(e_\mu, \chi, D_\mu e_\nu, D_\mu\chi, ...)$ et qui sont invariants sous une transformation de H.

Le lagrangien invariant sous une transformation du groupe de Poincaré et qui ne fait intervenir que les bosons de Goldstone ainsi que le moins de dérivées est alors simplement :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}h_{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu}e^\alpha_\mu e^\beta_\nu \tag{C.35}$$

On reconnait un lagrangien semblable à celui du modèle du branon (5.87). La positivité de l'énergie cinétique implique que la matrice $h_{\alpha\beta}$ doit être définie positive. De plus, l'invariance sous une transformation de G implique que la matrice $h_{\alpha\beta}$ doit vérifier $h_{\lambda\beta}C^{\lambda}_{i\alpha}+h_{\alpha\lambda}C^{\lambda}_{i\beta}=0$. Or, nous avons vu précédemment que les constantes de structure correspondent aux coefficients des matrices d'une représentation du groupe H, que l'on a noté $\mathcal{T}_i$. La relation orécédente implique donc que $[\mathcal{T}_i, h]=0$ pour tous les $\mathcal{T}_i$. Alors, d'après le lemme de Schur, si la représentation est irréductible, h est proportionnelle à l'identité avec un coefficient positif, $h_{\alpha\beta}=H^2\delta_{\alpha\beta}$. Si la représentation est réductible en n blocs diagonaux, alors la matrice h est diagonale avec n coefficients H_i^2. Le lagrangien (C.35) s'écrit alors :

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\sum_i H_i^2\delta_{\alpha_i\beta_i}\eta^{\mu\nu}e^{\alpha_i}_{\mu}e^{\beta i}_{\nu} \tag{C.36}$$

C.3 Interprétation géométrique

Le lagrangien (C.35) peut s'interpréter à l'aide d'outils qui nous viennent de la géométrie différentielle, interprétation qui s'avère particulièrement pertinente lorsque mise en parallèle avec la construction du modèle du branon dans la section 5.3. En effet, ce lagrangien peut être réécrit comme :

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\left(\theta\right)\partial_\mu\theta^\alpha\partial^\mu\theta^\beta \tag{C.37}$$

où l'on a utilisé les expressions (C.33) et (C.34). De même que précédemment, la positivité de l'énergie cinétique implique que $g_{\alpha\beta}$ est définie positive quel que soit θ. Or, nous avons vu dans la section 5.3 que les bosons de Goldstone, ici notés θ^α, peuvent s'interpréter comme des coordonnées dans l'espace quotient G/H. La matrice $g_{\alpha\beta}$, positive et symétrique, représente alors un tenseur métrique dans l'espace quotient G/H. En effet, $g_{\alpha\beta}$ se transforme lors d'une redéfinition des champs $\xi^\alpha\left(\theta\right)$ comme un tenseur métrique lors d'un changement de coordonnées :

$$g_{\alpha\beta}\rightarrow\tilde{g}_{\alpha\beta}=g_{\alpha\beta}+\pounds_\xi g_{\alpha\beta}=g_{\alpha\beta}+\xi^\lambda\partial_\lambda g_{\alpha\beta}+g_{\lambda\beta}\partial_\alpha\xi^\lambda+g_{\alpha\lambda}\partial_\beta\xi^\lambda \tag{C.38}$$

où $\pounds_\xi$ est la dérivée de Lie dans la direction de ξ^α que nous avions déjà rencontrée dans la section 2.1.2. Notons que les dérivées exprimées ici sont par rapport aux coordonnées dans G/H θ^α, et non par rapport aux coordonnées d'espace-temps x^μ. Si l'on écrit la métrique $g_{\alpha\beta}$ en fonction de la matrice $h_{\alpha\beta}$ et des vecteurs e^α_β, on obtient :

$$g_{\alpha\beta}=h_{\sigma\lambda}e^\sigma_\alpha e^\lambda_\beta=\sum_i H_i^2\delta_{\sigma_i\lambda_i}e^{\sigma_i}_\alpha e^{\lambda_i}_\beta \tag{C.39}$$

Ainsi, les vecteurs e^{α}_{β} ont également une interprétation géométrique. Le champ de vecteur peut, en effet, s'interpréter comme un "vielbein" de l'espace G/H, covariant pour le groupe G. L'utilité de ces vecteurs vient de ce qu'il est toujours possible de construire la métrique $g_{\alpha\beta}$ à partir de ceux-ci en utilisant la relation $g_{\alpha\beta} = \delta_{\sigma\lambda} e^{\sigma}_{\alpha} e^{\lambda}_{\beta}$.

Le problème de trouver les lagrangiens invariants sous une transformation de G devient alors équivalent à celui de trouver une métrique pour laquelle $\pounds_{\xi} g_{\alpha\beta} = 0$ dans toutes les directions qui expriment l'action de G sur G/H. Ainsi, il s'agit de trouver une métrique pour laquelle les ξ^{α} constituent les générateurs des isométries. Le développement que nous avions fait dans le cadre du modèle du branon correspond tout à fait à celui-ci, dans le cas particulier où les bosons de Goldstone correspondent réellement à des coordonnées spatiales pour les dimensions supplémentaires, et les ξ^{α} constituent de véritabes isométries.

Bibliographie

[1] Sidney R. Coleman, J. Wess, and Bruno Zumino. Structure of phenomenological Lagrangians. 1. *Phys. Rev.*, 177 :2239–2247, 1969.

[2] Curtis G. Callan, Jr., Sidney R. Coleman, J. Wess, and Bruno Zumino. Structure of phenomenological Lagrangians. 2. *Phys. Rev.*, 177 :2247–2250, 1969.

[3] Rodrigo Alonso, Elizabeth E. Jenkins, and Aneesh V. Manohar. Geometry of the Scalar Sector. *JHEP*, 08 :101, 2016.

[4] C. P. Burgess. Goldstone and pseudoGoldstone bosons in nuclear, particle and condensed matter physics. *Phys. Rept.*, 330 :193–261, 2000.

Annexe D

Objets physiques pour la recherche de branons

Les définitions des objets physiques utilisés pour la recherche de branons (décrite au chapitre 7) s'appuient sur les objets reconstruits à partir des informations du détecteur CMS (décrits au chapitre 6), en imposant des critères supplémentaires adaptés aux canaux de recherche en question. Les objets physiques qui ne sont pas définis ici (jets de quarks b, jets de bosons vecteurs et énergie transverse manquante) sont décrits dans le chapitre 7.

Dans cette annexe, nous allons décrire ces critères supplémentaires sans rentrer dans le détail de la signification physique. Le lecteur interessé pourra se rapporter à la littérature.

D.1 Électrons

On distingue deux jeux de critères de sélection, utilisés dans les différentes régions de signal et de contrôle de la recherche de branons. La première, sélection standard, a une plus faible efficacité de sélection que la sélection stricte. Toutes deux s'appuient sur les électrons reconstruits à partir des informations du trajectographe et du calorimètre électromagnétique (voir section 6.3.2), mais ne s'intéressent qu'aux candidats pour lesquels $p_T > 10$ GeV et $|\eta| < 2.5$. La description des variables utilisées est donnée dans [1].

D.1.1 Sélection standard

Les critères de la sélection standard des électrons sont donnés dans la table D.3.

Variable	Sélection (tonneau)	Sélection (bouchons)
$5 \times 5\ \sigma_{i\eta i\eta}$	< 0.0115	< 0.0370
$\lvert\Delta\eta_{in}\rvert$	< 0.0749	< 0.0089
$\lvert\Delta\phi_{in}\rvert$	< 0.228	< 0.213
H/E	< 0.356	< 0.211
Isolation relative	< 0.175	< 0.159
$1/E - 1/p$	< 0.229	< 0.150
$\lvert d_{xy}\,(\text{vtx})\,\rvert$	< 0.050	< 0.100
$\lvert d_z\,(\text{vtx})$	< 0.100	< 0.200
Expected Inner Missing Hits	$<= 2$	$<= 3$
Passe les critères de rejet des photons convertis	Oui	Oui

TABLE D.1 Critères de sélection des électrons standards pour la recherche de branons. Notons qu'on ne considère pas ici les électrons provenant de la conversion d'un photon dans le détecteur.

L'isolation relative est calculée dans un cône pour lequel $\Delta R = 0.3$ autour du candidat et est corrigée de l'effet des évènements d'empilement en retirant évènement par évènement la densité d'énergie d'empilement ρ sur l'aire du cône (voir section 6.3.5).

D.1.2 Sélection stricte

Les critères de la sélection stricte des électrons sont donnés dans la table D.4.

Variable	Sélection (tonneau)	Sélection (bouchons)
$5 \times 5\ \sigma_{i\eta i\eta}$	< 0.00998	< 0.0292
$\lvert\Delta\eta_{in}\rvert$	< 0.00308	< 0.00605
$\lvert\Delta\phi_{in}\rvert$	< 0.0816	< 0.0394
H/E	< 0.0414	< 0.0641
Isolation relative	< 0.0588	< 0.0571
$1/E - 1/p$	< 0.0129	< 0.0129
$\lvert d_{xy}\,(\text{vtx})\,\rvert$	< 0.050	< 0.100
$\lvert d_z\,(\text{vtx})$	< 0.100	< 0.200
Expected Inner Missing Hits	$<= 2$	$<= 1$
Passe les critères de rejet des photons convertis	Oui	Oui

TABLE D.2 Critères de sélection strictes pour les électrons pour la recherche de branons.

D.2 Photons

De même que pour les électrons, on distingue un jeu de critères de sélection standard et un autre de sélection stricte. Les deux définitions des photons, standard et stricte, s'appuient sur les photons reconstruits à partir des informations du calorimètre électromagnétique (voir section 6.3.2), mais ne s'intéressent qu'aux candidats pour lesquels $p_T > 15$ GeV et $|\eta| < 2.5$. La description des variables utilisées est donnée dans [2].

D.2.1 Sélection standard

Les critères de la sélection standard des photons sont donnés dans la table D.3.

Variable	Sélection (tonneau)	Sélection (bouchons)
$5 \times 5\ \sigma_{i\eta i\eta}$	< 0.0103	< 0.0301
H/E	< 0.0597	< 0.0481
Isolation par rapport aux hadrons chargés	< 1.295	< 1.011
Isolation par rapport aux hadrons neutres	$< 10.92 + 0.0148 \times p_T + 1.7 \times 10^{-5} \times p_T^2$	$< 5.931 + 0.0163 \times p_T + 1.4 \times 10^{-5} \times p_T^2$
Isolation du photon	$< 3.630 + 0.0053 \times p_T$	$< 6.541 + 0.0034 \times p_T$
Sélection des photons non-convertis	Oui	Oui

TABLE D.3 Critères de sélection des photons standards pour la recherche de branons. Les p_T sont exprimés en GeV.

L'isolation relative est calculée de la même manière que pour les électrons.

D.2.2 Sélection stricte

La sélection stricte des photons rejette tous ceux qui ne sont pas dans le tonneau, pour maintenir un bon niveau de pureté. Les critères de cette sélection, sont donnés dans la table D.4.

Variable	Sélection (tonneau)
$5 \times 5\ \sigma_{i\eta i\eta}$	< 0.0102
H/E	< 0.0396
Isolation par rapport aux hadrons chargés	< 0.441
Isolation par rapport aux hadrons neutres	$< 5.931 + 0.0163 \times p_T + 1.4 \times 10^{-5} \times p_T^2$
Isolation du photon	$< 2.571 + 0.0034 \times p_T$
Sélection des photons non-convertis	Oui

TABLE D.4 Critères de sélection strictes des photons pour la recherche de branons. Les p_T sont exprimés en GeV.

D.3 Muons

De même que pour les électrons et les photons, on distingue un jeu de critères de sélection standard et un autre de sélection stricte. Les deux définitions des muons, standard et stricte, s'appuient sur les différentes définitions des muons reconstruits présentés dans la section 6.3.3, et ne s'intéressent qu'aux candidats pour lesquels $p_T > 10$ GeV et $|\eta| < 2.4$. La description des variables utilisées est donnée dans [3].

D.3.1 Sélection standard

Pour qu'un candidat passe la sélection standard des muons pour la recherche de branons, il faut qu'il vérifie les conditions suivantes :

— le candidat doit être reconstruit comme un muon "tracker" ou comme un muon "global" ;

— il doit également être reconstruit comme un muon par l'algorithme de flux de particules ;

— son isolation relative corrigée de l'empilement doit être inférieur à 0.25. Cette isolation correspond à la somme des p_T des hadrons chargés associés au vertex principal, des hadrons neutres et des photons dans un cône avec $\Delta R = 0.4$ autour de la trace du muon. Elle est calculée relativement au p_T du candidat.

D.3.2 Sélection stricte

Pour qu'un candidat passe la sélection stricte des muons, il doit vérifier les conditions suivantes :

— le candidat doit être reconstruit comme un muon "global" ;

— il doit également être reconstruit comme un muon par l'algorithme de flux de particules ;

— le χ^2 réduit de la trace globale doit être inférieur à 10 ;

— au moins une trace dans une chambre à muons doit être incluse dans l'ajustement de la trace globale ;

— le paramètre d'impact par rapport au vertex principal dans le plan transverse doit être inférieur à 2 mm ;

— le paramètre d'impact par rapport au vertex principal dans la direction longitudinale doit être inférieur à 5 mm ;

— il doit y avoir au moins une détection dans le détecteur à pixel ;

— il doit y avoir des détections dans au moins 5 couches du trajectographe ;

— son isolation relative corrigée de l'empilement doit être inférieur à 0.15. Cette isolation correspond à la somme des p_T des hadrons chargés associés au vertex principal, des hadrons neutres et des photons dans un cône avec $\Delta R = 0.4$ autour de la trace du muon. Elle est calculée relativement au p_T du candidat.

D.4 Leptons tau

Les leptons tau sont rejetés dans toutes les régions utilisées dans la recherche de branons, il n'y a donc qu'un seul ensemble de critères de sélection. Pour qu'une particule soit identifiée comme un lepton tau, il faut que celle-ci vérifie :

— $p_T > 18$ GeV et $|\eta| < 2.3$;

— l'algorithme d'identification des modes de désintégration, décrit dans [4], doit retourner un résultat positif ;

— le candidat doit passer un critère de sélection extrêmement souple sur la variable retournée par l'algorithme d'analyse multi-variée décrit dans [4] et adaptée aux conditions de prise de données à 13 TeV.

D.5 Jets

À moins que ce ne soit explicitement spécifié, les jets standards utilisés pour la recherche de branons sont des jets regroupés à l'aide de l'algorithme anti-k_T, présenté dans la section 6.3.5, avec $R = 0.4$ (jets AK4). De plus, lors du regroupement des constituants du jet par l'algorithme, parmi les particules chargées, seules celles qui proviennent du vertex principal sont utilisées.
L'énergie des jets est corrigée comme décrit à la fin de la section 6.3.5, de sorte à fournir une réponse indépendante de la luminosité et uniforme en p_T et η.
De plus, seuls les jets pour lesquels $p_T > 30$ GeV et $|\eta| < 2.5$ sont considérés, et des critères de sélection supplémentaires sont appliqués.
Enfin, pour retirer les jets qui proviennent de bruits du détecteur ou bien de bruit de fond du faisceau, on impose aux jets d'avoir une fraction de hadrons chargés supérieure à 0.1 et une fraction de hadrons neutres inférieure à 0.8.

Bibliographie

[1] CMS Collaboration. Performance of Electron Reconstruction and Selection with the CMS Detector in Proton-Proton Collisions at $\sqrt{s} = 8$ TeV. *JINST*, 10(06) :P06005, 2015.

[2] CMS Collaboration. Performance of Photon Reconstruction and Identification with the CMS Detector in Proton-Proton Collisions at sqrt(s) = 8 TeV. *JINST*, 10(08) :P08010, 2015.

[3] CMS Collaboration. Performance of the CMS muon detector and muon reconstruction with proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV. *JINST*, 13(06) :P06015, 2018.

[4] CMS Collaboration. Reconstruction and identification of τ lepton decays to hadrons and ν_τ at CMS. *JINST*, 11(01) :P01019, 2016.

université PARIS-SACLAY | ÉCOLE DOCTORALE PHENIICS

Titre : Contraintes expérimentales sur des modèles avec champ scalaire dans le secteur sombre en cosmologie et physique des particules

Mots-clés : *matière noire, branon, CMS, énergie noire, galileon, rayonnement fossile*

Résumé : Les travaux présentés dans cette thèse contraignent les paramètres d'un modèle de cosmologie, le modèle du galileon, et d'un modèle de physique des particules, le modèle du branon, qui sont des extensions des modèles standards. Ces modèles, qui supposent l'existence d'un champ scalaire additionnel et peuvent trouver leurs origines dans les théories à dimensions supplémentaires, offrent des explications élégantes aux questions de la nature de l'énergie noire et de la matière noire respectivement.

La première partie de cette thèse présente les prédictions du modèle du galileon et les résultats obtenus par leur comparaison aux observations cosmologiques et astrophysiques récentes. Cette étude montre que le modèle du galileon a de sérieuses difficultés à reproduire ces observations, qui regroupent le fond diffus cosmologique, les mesures liées aux distances cosmologiques, et l'observation d'un évènement par ondes gravitationnelles et contrepartie électromagnétique.

La seconde partie décrit la recherche de branons dans les collisions proton-proton enregistrées en 2016 par le Solénoïde Compact à Muons au Grand Collisionneur de Hadrons, à une énergie dans le centre de masse de 13 TeV. Des évènements qui présentent un jet de haute énergie, produit par un quark ou gluon ou bien par désintégration hadronique d'un boson vecteur, et de l'énergie transverse manquante dans l'état final sont sélectionnés et comparés aux estimations pour les évènements de bruits de fond. Aucun excès d'évènements n'est observé, ce qui permet de poser des contraintes sur les valeurs possibles des paramètres du modèle du branon.

Title : Experimental constraints on dark sector models with scalar fields in cosmology and particle physics

Keywords : *dark matter, branon, CMS, dark energy, galileon, cosmic microwave background*

Abstract : This PhD thesis presents constraints on the parameters of a cosmological model, the galileon model, and a particle physics model, the branon model. Both are extensions of the standard models that include an additional scalar field and that can be built from extra dimensions theories. The galileon model propose an alternative to the cosmological constant as the nature of dark energy, and the branon model give a dark matter particle candidate.

The first part of this thesis shows the predictions of the galileon model and the results obtained from their comparison with recent cosmological and astrophysical observations. The set of observations used contains the cosmic microwave background, cosmological distances measurements and the detection of gravitational waves along with their electromagnetic counterpart from the merger of a binary star system. The study shows that the galileon model has serious difficulties to reproduce these observations.

The second part describe the search for branons in proton-proton collisions data at 13 TeV collected in 2016 with the Compact Muon Solenoid at the Large Hadron Collider. Events with high energy jets, produced by a quark, a gluon or a vector boson decaying hadronically, and missing transverse energy in the final state are selected and compared to background estimations. No excess of event has been found allowing for experimental constraints to be put in the parameter space of the branon model.

Université Paris-Saclay
Espace Technologique / Immeuble Discovery
Route de l'Orme aux Merisiers RD 128 / 91190, Saint-Aubin, France