

Synthèse d'observateurs intervalles à entrées inconnues pour les systèmes linéaires à paramètres variants

Nicolas Ellero

▶ **To cite this version:**

Nicolas Ellero. Synthèse d'observateurs intervalles à entrées inconnues pour les systèmes linéaires à paramètres variants. Automatique / Robotique. Université de Bordeaux, 2018. Français. NNT : 2018BORD0106 . tel-01898944

HAL Id: tel-01898944
https://theses.hal.science/tel-01898944

Submitted on 19 Oct 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

université de BORDEAUX

THÈSE PRÉSENTÉE

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES PHYSIQUES ET DE L'INGÉNIEUR

SPÉCIALITÉ : Automatique, productique,
signal et image, ingénierie cognitique

Par Nicolas ELLERO

Synthèse d'observateurs intervalles à entrées inconnues pour les systèmes linéaires à paramètres variants

.....

Sous la direction de David HENRY
Co-encadrant : David GUCIK-DERIGNY

Soutenue le 12 Juillet 2018

Membres du jury :

M. COCQUEMPOT Vincent	Professeur	Université de Lille	Président
M. ZOLGHADRI Ali	Professeur	Université de Bordeaux	Examinateur
M. RAÏSSI Tarek	Professeur	CNAM	Rapporteur
M. RAGOT José	Professeur	Université de Lorraine	Rapporteur
M. GUCIK-DERIGNY David	Maître de Conférences	Université de Bordeaux	Co-encadrant
M. HENRY David	Professeur	Université de Bordeaux	Dir. de thèse

Titre : Synthèse d'observateurs intervalles à entrées inconnues pour les systèmes linéaires à paramètres variants

Réssumé : Cette thèse porte sur la conception d'une classe particulière d'estimateurs d'état, les observateurs intervalles. L'objectif est d'estimer de manière garantie, les bornes supérieure et inférieure de l'ensemble admissible de l'état d'un système, à chaque instant de temps. L'approche considérée repose sur la connaissance *a priori* du domaine d'appartenance, supposé borné, des incertitudes du système (incertitudes de modélisation, perturbations, bruits, etc). Une classe d'observateurs intervalles à entrées inconnues est proposée pour la classe des systèmes Linéaires à Paramètres Variants (LPV). La synthèse des paramètres de l'observateur repose sur la résolution d'un problème d'optimisation sous contraintes de type inégalités matricielles linéaires (LMI) permettant de garantir simultanément les conditions d'existence de l'observateur ainsi qu'un niveau de performance, soit dans un contexte énergie, soit dans un contexte amplitude ou soit dans un contexte mixte énergie/amplitude. Plus particulièrement, la performance de l'observateur repose sur une technique de découplage pour annuler les effets des entrées inconnues et une technique d'optimisation destinée à minimiser, au sens de critères de type gain $\mathcal{L}_2$ et/ou gain $\mathcal{L}_\infty$, les effets des perturbations sur la largeur totale de l'enveloppe de l'état du système LPV. La méthodologie de synthèse proposée est illustrée sur un exemple académique. Enfin, la méthodologie est appliquée au cas de la phase d'atterrissage du véhicule spatial HL20, sous des conditions de simulations réalistes.
Mots clés : Observateurs intervalles, Systèmes LPV, Entrées inconnues, Inégalités matricielles linéaires, gain $\mathcal{L}_2$, gain $\mathcal{L}_\infty$.

Title : Unknown input interval observer for linear parameter varying systems

Abstract : This thesis addresses the design of a class of estimator, named interval observer, which evaluates in a guaranteed way, a set for the state of the system at each instant of time. The proposed approach is based on a priori knowledge of bounded sets for the system uncertainties (modeling uncertainties, disturbances, noise, etc.). A methodology to design an interval observer is proposed for the class of Linear Parameter Varying (LPV) Systems. The feasibility of the latter is based on the resolution of linear Matrix Inequalities (LMI) constraints allowing to simultaneously get the existence conditions of the interval observer and a certain level of a priori given performance for the state estimation of the system. Specifically, the estimate performance level is based on a decoupling technique to avoid the unknown inputs effect propagation and an optimization technique to minimize, in the $\mathcal{L}_2$ and/or $\mathcal{L}_\infty$ gain sense, the effects of disturbances on the estimated interval length for the state of the LPV system. The design methodology is illustrated on academic examples. Finally, the methodology is applied on the landing phase of the HL20 shuttle
Keywords : Interval observer, LPV systems, Unknown inputs, Linear Matrix Inequality, $\mathcal{L}_2$-gain, $\mathcal{L}_\infty$-gain

---

Laboratoire de l'Intégration du Matériau au Système [IMS UMR CNRS 5218 IMS]
351 Cours de la libération, 33405, Talence, France

Remerciements

Ce mémoire marque la fin des travaux de recherche effectués au sein de l'équipe Approche Robuste et Intégrée de l'Automatique (ARIA) du laboratoire de l'Intégration du Matériau au Système (IMS).

Je tiens à remercier tout particulièrement mon directeur de thèse Monsieur David HENRY, Professeur à l'Université de Bordeaux et responsable de l'équipe de recherche ARIA ainsi que mon co-encadrant de thèse Monsieur David GUCIK-DERIGNY, Maître de conférences à l'Université de Bordeaux, pour la disponibilité, le soutien et la confiance qu'ils m'ont accordés tout au long de cette thèse. La qualité de l'encadrement et les précieux conseils m'ont permis de mener à bien ce travail.

J'adresse également mes remerciements aux membres du jury qui ont accepté d'évaluer ce mémoire.

Je remercie Monsieur Tarek RAÏSSI, Professeur au Conservatoire National des Arts et Métiers (CNAM) et Monsieur José RAGOT, Professeur à l'Université de Lorraine pour m'avoir fait l'honneur d'accepter de rapporter ce travail, permettant, par leurs remarques et leurs conseils, d'améliorer la qualité du mémoire.

Je remercie également Monsieur Ali ZOLGHADRI, Professeur à l'Université de Bordeaux, et Monsieur Vincent COCQUEMPOT, Professeur à l'Université de Lille pour avoir accepté de participer au jury de cette thèse.

Enfin, mes remerciements s'adressent à mes proches qui m'ont toujours soutenu et encouragé dans mes choix tout au long de ces années d'études.

Table des matières

Remerciements i

Table des matières iii

Acronymes et symboles vii

Table des figures ix

Liste des tableaux xi

Publications de l'auteur xiii

Introduction Générale 1

1 État de l'art 5
- 1.1 Notations . . . 5
- 1.2 Stabilité et performance des systèmes LPV . . . 6
  - 1.2.1 Stabilité . . . 8
  - 1.2.2 Performance . . . 11
- 1.3 Théorie des observateurs intervalles . . . 15
  - 1.3.1 Systèmes monotones . . . 16
  - 1.3.2 Application à la conception d'observateurs intervalles . . . 17
- 1.4 Observateurs intervalles pour les systèmes LTI . . . 19
  - 1.4.1 Approche par transformation en système positif . . . 19
  - 1.4.2 Approche par changement de base d'état . . . 22
  - 1.4.3 Extension aux systèmes à entrées inconnues . . . 29
  - 1.4.4 Synthèse sous contrainte de gain $\mathcal{L}_\infty$ . . . 36
- 1.5 Observateurs intervalles pour les systèmes LTV . . . 38
  - 1.5.1 Approche par changement de coordonnées invariant dans le temps . . . 38
  - 1.5.2 Approche par changement de coordonnées variant dans le temps . . . 40
- 1.6 Observateurs intervalles pour les systèmes LPV . . . 46
  - 1.6.1 Première approche . . . 46
  - 1.6.2 Deuxième approche . . . 49
- 1.7 Positionnement des contributions de la thèse . . . 53
  - 1.7.1 Critères de comparaison . . . 53
  - 1.7.2 Analyse critique de l'état de l'art . . . 53

1.7.3 Objectifs de la thèse 55

2 Synthèse d'observateurs intervalles pour les systèmes LTI incertains à entrées inconnues 57
2.1 Notations et prérequis 58
2.1.1 Encadrement de fonctions 58
2.1.2 Stabilité et performance des systèmes LTI incertains 60
2.2 Formulation du problème 60
2.3 Première approche 61
2.3.1 Structure de l'observateur intervalle 61
2.3.2 Conditions d'existence de l'observateur intervalle 62
2.3.3 Limites de l'approche 65
2.4 Deuxième approche 65
2.4.1 Structure de l'observateur intervalle 66
2.4.2 Changement de coordonnées LTI 67
2.4.3 Conditions d'existence de l'observateur intervalle 67
2.4.4 Performance de l'observateur intervalle 74
2.5 Application académique 79
2.5.1 Formulation du problème 79
2.5.2 Synthèse de l'observateur intervalle 80
2.5.3 Simulations et résultats 80
2.6 Limites de l'approche 83
2.7 Conclusion 83

3 Synthèse d'observateurs intervalles pour les systèmes LPV à entrées inconnues 85
3.1 Notations et prérequis 85
3.2 Formulation du problème 86
3.3 Conception de l'observateur intervalle 88
3.3.1 Résultat préliminaire 88
3.3.2 Conditions nécessaires et suffisantes d'existence 89
3.3.3 Formulation LMI de la performance en gain $\mathcal{L}_2/\mathcal{L}_\infty$ 91
3.3.4 Algorithme de conception de l'observateur intervalle 102
3.4 Exemple académique 103
3.4.1 Présentation du système 103
3.4.2 Synthèse de l'observateur intervalle 104
3.4.3 Simulations et résultats 106
3.5 Conclusion 108

4 Application à l'estimation d'états du HL20 au cours de la phase d'atterrissage 111
4.1 Mission de rentrée atmosphérique 111
4.1.1 Phase hypersonique 112
4.1.2 Phase de dissipation d'énergie en zone terminale (TAEM) 113
4.1.3 Phase d'approche et d'atterrissage automatique (A&L) 113
4.2 Modélisation du véhicule HL20 114
4.2.1 Descriptif général 114
4.2.2 Caractéristiques géométriques 115

4.2.3 Actionneurs . . . 115
4.2.4 Appareils de mesure . . . 116
4.2.5 Modèle non-linéaire du HL20 . . . 116
4.3 Description du simulateur HL20 . . . 120
4.3.1 Modèle dynamique du HL20 . . . 121
4.3.2 Algorithme de contrôle/commande . . . 121
4.4 Estimation d'états du HL20 . . . 122
4.4.1 Formulation du problème . . . 122
4.4.2 Modèle LPV de synthèse . . . 123
4.4.3 Synthèse de l'observateur intervalle à entrées inconnues . . . 127
4.4.4 Simulations et résultats . . . 128
4.5 Conclusion . . . 128

Conclusion générale et perspectives **131**

A Complément sur les LMIs **133**
A.1 Complément de Schur . . . 133
A.2 Lemme de projection . . . 134
A.3 Régions LMI et $\mathcal{D}$-stabilité . . . 134
A.3.1 Région LMI . . . 134
A.3.2 $\mathcal{D}$-stabilité . . . 136

Bibliographie **i**

Acronymes et symboles

Acronymes

AQP	*Affine Quadratic $\mathcal{H}_\infty$ Performance* - Performance $\mathcal{H}_\infty$ quadratique affine
AQS	*Affine Quadratic Stability* - Stabilité quadratique affine
EDO	Équation Différentielle Ordinaire
HOSM	*High Order Sliding Modes*
LMI	*Linear Matrix Inequality* - Inégalité matricielle linéaire
LPV	*Linear Parameter-Varying* - Linéaire à paramètres variants
LTI	*Linear Time-Invariant* - Linéaire à temps invariant
LTV	*Linear Time-Varying* - Linéaire à temps variant
PLMI	*Parametrized Linear Matrix Inequality* - Inégalité matricielle linéaire paramétrée
SDP	*Semi Definite Programming* - Programmation semi-définie

Ensembles et sous-espaces

$\mathbb{R}, \mathbb{C}$	Corps des nombres réels (resp. complexes)
$\mathbb{R}_+, \mathbb{C}_+$	Espace des nombres réels (resp. complexes) positifs
$\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$	Espace des vecteurs réels (resp. complexes) de dimension n
$\mathbb{R}^{m\times n}, \mathbb{C}^{m\times n}$	Espace des matrices réelles (resp. complexes) de dimension $m \times n$
$\mathcal{L}_2\left([0,\infty), \mathbb{R}^n\right)$	Espace des signaux continus de carré-intégrables sur $[0,\infty)$ vers $\mathbb{R}^n$
$\mathcal{L}_\infty\left([0,\infty), \mathbb{R}^n\right)$	Espace des signaux continus à amplitude finie sur $[0,\infty)$ vers $\mathbb{R}^n$
$[a, b]$	$\triangleq \{x \in \mathbb{R}^n \mid a \leq x \leq b\}$
s	Variable de la transformée de Laplace d'un signal continu
$G_{u\to y}(s)$	Fonction de transfert d'un système LTI continu d'entrée u et de sortie y.

Notations

$\mathbb{1}_n$	Vecteur de dimension n dont tous les éléments sont égaux à 1
I_n	Matrice identité de dimension $n \times n$ (notation implicite simplifiée $\mathbf{I}$)
E_n	Matrice de dimension $n \times n$ dont tous les éléments sont égaux à 1
0_n	Vecteur de dimension n dont tous les éléments sont égaux à 0

$0_{m\times n}$	Matrice de dimension $m \times n$ dont tous les éléments sont égaux à 0 (notation implicite simplifiée $\mathbf{0}$)
$\star$	Élément induit par symétrie dans une matrice symétrique par bloc

Opérateurs

$\|x\|$	Valeur absolue de x
$sign(x)$	Opérateur signe de x i.e. $\forall x \in \mathbb{R}$, $sign(x) = -1$ si $x < 0$, $sign(x) = 0$ si $x = 0$, $sign(x) = 1$ si $x > 0$.
$Diag(x)$	Matrice diagonale composée des éléments de x
A^+	$\triangleq max\{A, 0\}$ au sens d'une comparaison élément par élément
A^-	$\triangleq max\{-A, 0\}$ au sens d'une comparaison élément par élément
$\lambda(A)$	Valeurs propres de la matrice A
$\overline{\lambda}(A)$	Valeur propre maximale de la matrice A
$\sigma(A)$	Valeurs singulières de la matrice A
$\overline{\sigma}(A)$	Valeur singulière maximale de la matrice A
A^{-1}	Inverse de la matrice A
$A^\dagger$	Pseudo-inverse de Moore-Penrose de la matrice A
A^T	Transposée de la matrice A
$tr(A)$	Trace de la matrice A
$det(A)$	Déterminant de la matrice A
$rang(A)$	Rang de la matrice A
$Vec(A)$	Vectorisation de la matrice A i.e. pour $A = [a_{i,j}]_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$ alors $Vec(A) \triangleq [a_{11}, \ldots, a_{m1}, a_{12}, \ldots, a_{m2}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{mn}]^T$.
$Sign(A)$	Opérateur signe défini élément par élément pour la matrice A i.e. pour $A = [a_{i,j}]_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$ alors $Sign(A) \triangleq [sign(a_{ij})]$
$A \succeq 0$ ($\preceq 0$)	Matrice A semi-définie positive (resp. négative)
$A \succ 0$ ($\prec 0$)	Matrice A définie positive (resp. négative)
$\otimes$	Opérateur de Kronecker
$\mathcal{R}_e(z)$	Partie réelle du nombre complexe z
$\mathcal{I}_m(z)$	Partie imaginaire du nombre complexe z

Normes vectorielles et matricielles

$\|x\|_{\mathcal{L}_p}$	Norme $\mathcal{L}_p$ d'un signal $x \in \mathcal{L}_p([0, \infty), \mathbb{R}^n)$
$\|\cdot\|_p$	Norme p d'un vecteur ou norme induite d'une matrice par la norme p d'un vecteur
$\|A\|_{max}$	$\triangleq \max_{ij} \|a_{ij}\|$: Max des valeurs absolues des éléments de A
$\|G_{u\to y}(s)\|_2$	Norme $\mathcal{H}_2$ du transfert d'un système LTI continu $G_{u\to y}(s)$
$\|G_{u\to y}(s)\|_\infty$	Norme $\mathcal{H}_\infty$ du transfert d'un système LTI continu $G_{u\to y}(s)$

Table des figures

2.1 Évolution temporelle de l'état x pour une perturbation w_1 nulle 81
2.2 Évolution temporelle de l'état x pour une entrée inconnue d nulle 81
2.3 Estimation par intervalle de l'état x 82

3.1 Graphe $\kappa - \gamma_{opt}$ 105
3.2 Évolution temporelle des paramètres ρ 106
3.3 Évolution temporelle de l'état x pour une perturbation w_1 nulle 107
3.4 Évolution temporelle de l'état x pour une entrée inconnue d nulle 107
3.5 Estimation par intervalle de l'état x 109

4.1 Mission de rentrée atmosphérique terrestre 112
4.2 Phase de dissipation d'énergie en zone terminale (TAEM) 113
4.3 Phase d'atterrissage du HL20 114
4.4 Présentation du Véhicule HL20 et comparaison avec la navette spatiale. . . 115
4.5 Présentation du simulateur HL20 120
4.6 Évolution temporelle des vents atmosphériques 128
4.7 Estimation par intervalle de la vitesse longitudinale 129
4.8 Estimation par intervalle de la vitesse latérale 130
4.9 Estimation par intervalle de la vitesse verticale 130

A.1 Régions LMI : a) α-stabilité , b) Disque, c) Secteur conique 136
A.2 Union des régions LMI α-stabilité, disque et secteur conique 136

Liste des tableaux

1.1 Comparaison des approches existantes pour la synthèse d'observateur intervalle 56

4.1 Caractéristiques physiques et géométriques du HL20. 115
4.2 Surfaces de contrôle du HL20. 116
4.3 Plage de variations des paramètres du véhicule HL20 en phase d'atterrissage. 123

Publications de l'auteur

Conférences internationales

- N. Ellero, D. Gucik-Derigny, and D. Henry. Unknown input interval observer with $\mathcal{H}_\infty$ and $\mathcal{D}$-stability performance. *IFAC-PapersOnLine,20th IFAC World Congress*, 50(1):6251–6258, 2017

- N. Ellero, D. Gucik-Derigny, and D. Henry. Multiobjective interval observer via LMI techniques for fault detection. In *3rd Conference on Control and Fault-Tolerant Systems (SysTol)*, pages 485–490, 2016

- N. Ellero, D. Gucik-Derigny, and D. Henry. Unknown input interval observer for uncertain linear time invariant systems. In *UKACC 11th International Conference on Control (CONTROL)*, pages 1–6, 2016

- N. Ellero, D. Gucik-Derigny, and D. Henry. Interval observer for Linear Time Invariant (LTI) uncertain systems with state and unknown input estimations. *Journal of Physics: Conference Series,12th European Workshop on Advanced Control and Diagnosis (ACD)*, 659(1), 2015

Revues internationales

- N. Ellero, D. Gucik-Derigny, and D. Henry. An unknown input interval observer for LPV systems under a mixed $\mathcal{L}_2/\mathcal{L}_\infty$-gain criterion. *Automatica*, (Révisé)

Introduction Générale

Sur les dernières décennies, nous assistons à une très forte progression des travaux de recherche de la communauté automaticienne dans les domaines du contrôle et de la surveillance basée sur des modèles. Un grand nombre de méthodes développées sont basées sur la connaissance de l'état du système et d'un ensemble de paramètres internes. Pour des raisons économiques, de faisabilité ou encore technologiques, ces variables ne sont pas toujours mesurables. Une solution possible consiste à mettre en œuvre un processus d'estimation en utilisant un système dynamique auxiliaire, appelé observateur. L'estimation de l'état du système est alors effectuée en temps réel. Son principe méthodologique repose sur la mesure des entrées, des sorties et la connaissance du modèle dynamique du système.

Le problème d'estimation d'état basé sur des modèles linéaires a largement été étudié dans la littérature en considérant, notamment, l'observateur de Luenberger [67, 68] dans le cadre déterministe et le filtre de Kalman [58, 59] dans le cadre stochastique. Le principe fondamental du filtre de Kalman repose sur la minimisation de la variance de l'erreur d'observation sous des hypothèses stochastiques pour les bruits d'état et de sortie affectant le système, fournissant *de facto*, une estimation optimale de l'état, au sens de ces hypothèses. Par la suite, ces approches ont été étendues à l'estimation d'état des systèmes non linéaires, voir par exemple l'ouvrage [11]. Parmi ces approches, nous pouvons citer le filtre de Kalman étendu [91], le filtre de Kalman sans parfum [99], le filtre de Kalman aux différences divisées [77], le "cubature Kalman filter" [6] pour le cadre stochastique, ou encore les observateurs à grand gain [61] pour le cadre déterministe.

Une approche alternative aux précédentes est l'approche dite par intervalles ou encore appelée ensembliste ("set-membership approaches" en anglais). Cette approche repose sur la connaissance d'un domaine d'appartenance, supposé connu et borné, des incertitudes du modèle (incertitudes de modélisation, perturbations, bruits, etc). Dans certains cas, comme nous le verrons plus tard, il est aussi indispensable de connaître la nature stationnaire ou non des incertitudes de modélisation. Dans ce contexte à erreurs inconnues mais bornées, la stratégie consiste à évaluer de manière garantie, un ensemble admissible pour le vecteur d'état à chaque instant de temps.

Les différentes méthodes d'estimation qui existent dans la littérature peuvent être regroupées sous deux principales catégories [84].

- La première catégorie [57, 83] repose sur le mécanisme de prédiction/correction que l'on retrouve également dans le principe du filtre de Kalman. L'étape de prédiction

consiste à évaluer l'ensemble admissible de l'état d'un système, à l'instant de temps suivant, par la résolution numérique garantie d'une équation différentielle ordinaire (EDO) qui exploite la connaissance des incertitudes du modèle et le domaine admissible par l'état à l'instant présent. L'étape de correction réduit le domaine prédit en supprimant les valeurs de l'état incompatibles avec le vecteur des mesures du système. Néanmoins, l'existence d'un phénomène numérique lié à la propagation des incertitudes appelé "wrapping effect" en anglais, limite le domaine d'application de ce type d'approche à des incertitudes de faibles amplitudes, voir par exemple [98]. L'approche proposée par [62] tente de palier ce problème en exploitant le théorème de Müller [76]. L'idée consiste à transformer le modèle incertain en deux modèles ne présentant aucune incertitude. Le lecteur intéressé pourra se référer à la publication [62] pour de plus amples détails.

- La deuxième catégorie, appelée observateur intervalle [32], repose sur la théorie des systèmes monotones. Initialement introduite dans [45], la stratégie repose sur l'utilisation de deux observateurs, chacun de structure de type observateur de Luenberger. L'un assure l'estimation de la borne supérieure de l'état et l'autre est en charge d'estimer sa borne inférieure. Une propriété centrale utilisée dans cette théorie est la propriété de coopérativité de la dynamique des erreurs d'observation [92] (appelée aussi familièrement la propriété Metzler car la matrice d'évolution de l'équation dynamique des erreurs d'observation est recherchée Metzler).

Un avantage non négligeable des observateurs intervalles par rapport à l'approche reposant sur le mécanisme de prédiction/correction, réside dans la possibilité de déterminer les paramètres des observateurs afin de satisfaire des contraintes *a priori* fixées, comme la vitesse de convergence de l'encadrement de l'état ou encore des critères de type "minimisation de la taille de l'enveloppe par rapport à des entrées éxogènes", au sens d'une norme.

Les travaux présentés dans ce manuscrit s'inscrivent dans cette dynamique. Plus particulièrement, nos travaux de recherche abordent la problématique de synthèse d'observateurs intervalles pour les systèmes à temps continu, modélisés par une représentation d'état à Paramètres Variants (LPV, acronyme du terme anglo-saxon Linear Parameter Varying). Cette classe de modèles représente un intérêt tout particulier, car elle permet d'exprimer la dynamique de nombreux systèmes non linéaires (parfois de façon équivalente au modèle non linéaire), sous un formalisme permettant d'utiliser les outils de la théorie des systèmes linéaires tels que les normes induites de vecteurs pour l'analyse et la formulation des performances, etc.

Nos travaux de recherche sont présentés dans ce manuscrit au travers de quatre chapitres :

Le **chapitre 1** débute par la présentation du formalisme LPV. Nous rappelons alors les propriétés de stabilité ainsi que les critères de performance pour cette classe de modèles. Nous abordons ensuite les notions fondamentales associées à la théorie des observateurs intervalles, en particulier les notions de monotonie et de coopérativité, voir [45]. La suite est dédiée à l'état de l'art sur la conception d'observateurs intervalles pour les systèmes Linéaires à Temps Invariant (LTI), puis les systèmes Linéaires à Temps Variant (LTV) et finalement les systèmes Linéaires à Paramètres Variants (LPV). L'objectif est de présenter les contributions majeures de la littérature permettant d'étendre la théorie des observateurs intervalles à une classe de systèmes toujours plus large. Plus particulièrement, cette

partie aborde les méthodes dédiées à la relaxation des conditions d'existence d'un observateur intervalle (méthodes par changement de coordonnées, méthodes par transformation en système positif, méthodes de découplage des entrées inconnues) et à la performance au sens d'une norme induite par les vecteurs (i.e. gains $\mathcal{L}_1$,$\mathcal{L}_2$,$\mathcal{L}_\infty$).
Dans une seconde partie, une étude comparative de ces méthodes est réalisée, afin de mettre en évidence certains verrous théoriques existant. Comme nous allons le voir, cette analyse justifie les axes de recherche retenus, à savoir :

1. la problématique de synthèse d'observateurs intervalles pour la classe des systèmes LPV à entrées inconnues.
2. la problématique de synthèse d'observateurs intervalles vérifiant simultanément les conditions d'existence de ceux-ci et permettant de satisfaire un certain niveau de performance pour l'encadrement estimé, au sens de critères de type gain $\mathcal{L}_2$,$\mathcal{L}_\infty$.

Ces deux problématiques sont celles que nous abordons dans les chapitres 2 et 3 de ce manuscrit. Nous y présentons des solutions méthodologiques qui constituent les contributions principales de nos travaux de recherche.

Le **chapitre 2** présente ainsi un résultat intermédiaire avant la contribution principale de ce manuscrit (chapitre 3), en étendant certains résultats de la littérature sur la synthèse d'observateurs intervalles à entrées inconnues pour la classe des systèmes LTI. Plus particulièrement, les développements méthodologiques établis visent à proposer une solution au problème de synthèse des observateurs intervalles sous contraintes simultanées d'existence et de performance. La synthèse des paramètres de l'observateur intervalle repose alors sur une méthode combinant une technique de découplage pour annuler l'effet des entrées inconnues et la minimisation d'un critère $\mathcal{H}_\infty$, permettant d'atténuer l'influence des bruits et des perturbations, sur l'estimation par intervalle, dans un contexte "pire-cas". Nous montrons alors que le problème peut se formuler comme un problème d'optimisation semi-défini SDP (acronyme anglo-saxon pour Semi Definite Programming), c'est à dire comme un problème d'optimisation convexe sous contraintes LMI (acronyme anglo-saxon pour Linear Matrix Inequalities). Le processus d'optimisation est complété par une contrainte de placement de pôles formulée par une performance $\mathcal{D}$-stabilité, afin de contraindre la vitesse de convergence de la dynamique de l'encadrement. La propriété de cooperativité des erreurs d'observation est assurée *a priori* par une transformation de coordonnées sur l'état du système. La méthode proposée est illustrée sur un exemple académique.

Le **chapitre 3** présente la principale contribution de cette thèse. Une nouvelle méthodologie de synthèse d'observateurs intervalles pour les systèmes LPV à entrées inconnues, est proposée. L'originalité de la méthode proposée réside dans la synthèse des paramètres de l'observateur intervalle qui permet de garantir simultanément les conditions d'existence de l'observateur (stabilité, cooperativité), de découplage des entrées inconnues et un niveau de performance pour l'encadrement estimé, au sens de critères de type gain $\mathcal{L}_2$ et/ou gain $\mathcal{L}_\infty$. La synthèse des paramètres repose sur un processus d'optimisation, formulé en contraintes LMI, pour atténuer l'influence des perturbations non découplées, au sens énergétique (gain $\mathcal{L}_2$) et/ou au sens amplitude (gain $\mathcal{L}_\infty$). Il est à noter que cette méthode ne nécessite aucune transformation du système (transformation par changement de variables, transformation en système positif) pour assurer la coopérativité des erreurs d'observation. En d'autres termes, nous montrons comment la résolution d'un problème SDP permet de garantir simultanément la coopérativité des erreurs d'observation, le découplage des entrées inconnues et des niveaux de performance au sens de critères de type

gain $\mathcal{L}_2$ et/ou gain $\mathcal{L}_\infty$. La méthodologie développée est illustrée au travers d'une application académique.

Le **chapitre 4** est dédié à la mise en œuvre de la méthodologie développée dans le chapitre 3, au cas de la phase d'atterrissage automatique du véhicule HL20 au cours d'une mission de rentrée atmosphérique [10, 54, 55]. L'objectif consiste à estimer de manière garantie, les vitesses longitudinale, latérale et verticale du véhicule HL20 tout au long de sa phase de vol. La validation de l'approche proposée est faite au travers d'un simulateur haute fidélité développé sous Matlab-Simulink qui tient compte de tous les phénomènes dynamiques et aérodynamiques non linéaires liés, non seulement aux caractéristiques du véhicule lui même, mais encore aux conditions atmosphériques (vents de cisaillement, turbulences atmosphérique, etc.). Ce chapitre se termine par la présentation des résultats obtenus. Ces derniers permettent de souligner le potentiel de l'approche développée.

Le manuscrit se termine alors par une conclusion générale dans laquelle nous rappelons les contributions majeures de nos travaux et énumérons des perspectives de recherche.

Chapitre 1

État de l'art

Ce chapitre a pour objectif dans un premier temps, de dresser un panorama des outils méthodologiques permettant d'aborder le problème d'analyse de stabilité et de mesure de performance pour la classe des systèmes LPV. Il présente également la théorie des systèmes monotones que nous utiliserons tout au long de ce mémoire, pour aborder le problème de synthèse des observateurs intervalles LPV. Dans un deuxième temps, il dresse un état de l'art sur la théorie des observateurs intervalles, pour la classe des systèmes LTI, LTV et LPV. Ce diaporama des méthodes recensées dans la littérature, nous a permis de mettre en perspective les différentes relaxations théoriques possibles afin de proposer un cadre méthodologique novateur pour la synthèse d'observateurs intervalles sous contraintes de performance, pour la classe des systèmes LPV, ce qui constitue les contributions de nos travaux de recherche. Il est à noter que les classes des systèmes à retard et à commutations ne font pas l'objet de nos travaux de thèse. Le lecteur intéressé peut se référer à la liste non exhaustive des travaux suivant : [81, 31, 15, 40].

1.1 Notations

Les opérateurs $>$, $<$, $\geq$ et $\leq$ représentent des opérateurs d'inégalité définis élément par élément. Soient deux matrices $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $B = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$, nous définissons :

$$\forall \bullet \in \{>, <, \geq, \leq\},\ A \bullet B \Leftrightarrow a_{ij} \bullet b_{ij},\ \forall\, i \in \{1, \cdots, m\}, \forall\, j \in \{1, \cdots, n\}. \quad (1.1)$$

Il est à noter que ces opérateurs ne doivent pas être confondus avec les opérateurs permettant de définir une matrice définie positive ($A \succ 0$), négative ($A \prec 0$), semi-définie positive ($A \succeq 0$) ou semi-définie négative ($A \preceq 0$).

Dans nos travaux, nous utilisons les normes de vecteurs. Celles-ci sont définies de la façon suivante [66, 89, 78] :

Définition 1.1 (p-norme de vecteurs)**.** La p-norme d'un vecteur $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^n$ est définie par :

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, & \text{pour } 1 \leq p < \infty \\ \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i|, & \text{pour } p = \infty \end{cases} \quad (1.2)$$

Définition 1.2 (norme $\mathcal{L}_p$ et espace $\mathcal{L}_p$ de signaux)**.** L'espace $\mathcal{L}_p\left([0,\infty),\mathbb{R}^n\right)$ désigne l'espace de Lebesgue des fonctions mesurables $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}^n$ tel que

$$\mathcal{L}_p\left([0,\infty),\mathbb{R}^n\right)=\{f:[0,\infty)\to\mathbb{R}^n \mid \|f\|_{\mathcal{L}_p}<\infty\} \tag{1.3}$$

où la norme $\mathcal{L}_p$ est définie par :

$$\|f\|_{\mathcal{L}_p}=\begin{cases}\left(\int_0^\infty \|f(t)\|_2^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}, & \text{pour } 1\leq p<\infty\\ \sup_{t\geq 0}\|f(t)\|_2, & \text{pour } p=\infty\end{cases} \tag{1.4}$$

Afin d'alléger la notation du manuscrit, la notation $\mathcal{L}_p^n$ est privilégiée pour définir l'espace $\mathcal{L}_p\left([0,\infty),\mathbb{R}^n\right)$. Il est à noter que cette définition est communément utilisée [66, 89] et adaptée aux travaux de recherche présentés dans ce manuscrit, mais constitue toutefois un cas particulier de la définition énoncée dans [78].

1.2 Stabilité et performance des systèmes LPV

Dans cette sous-section, nous présenterons les notions de stabilité et de performance pour la classe des systèmes [1] LPV [101, 66, 88, 28]. Ces dernières sont couramment considérées dans la littérature et ont fait l'objet de nombreux travaux [74, 90] que ce soit dans un contexte de contrôle, de diagnostic ou encore d'estimation d'état.

Les modèles LPV représentent une classe de modèles permettant de modéliser, sous certaines conditions, des procédés dont les caractéristiques dynamiques peuvent varier avec les conditions de fonctionnement. La représentation d'état d'un tel modèle est donnée par

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=A(\theta(t))x(t)+B(\theta(t))u(t)\\ y(t)=C(\theta(t))x(t)+D(\theta(t))u(t)\end{cases} \tag{1.5}$$

où $x\in\mathbb{R}^n$, $u\in\mathbb{R}^m$, $y\in\mathbb{R}^p$ représentent respectivement les vecteurs d'état, d'entrée et de sortie du système. $\theta(t)=\left[\theta_1(t),\theta_2(t),\cdots,\theta_l(t)\right]^T\in\mathbb{R}^l$ désigne le vecteur des paramètres susceptible d'évoluer au cours du temps dans un compact Θ dont les bornes sont connues *a priori*. Les matrices sont définies par $A:\Theta\to\mathbb{R}^{n\times n}$, $B:\Theta\to\mathbb{R}^{n\times m}$, $C:\Theta\to\mathbb{R}^{p\times n}$, $D:\Theta\to\mathbb{R}^{p\times m}$.

Selon les hypothèses faites sur la structure de la dépendance paramétrique en θ du modèle (1.5), il existe deux formalismes permettant d'aborder les problèmes de stabilité et de mesure de performance, i.e. le formalisme LFT (acronyme anglo-saxion pour Linear Fractionnal Transformation) [69, 24, 50, 51] et le formalisme polytopique [7, 46, 14].

Dans nos travaux, nous nous intéresserons plus particulièrement aux classes suivantes :

1. Dans ce mémoire et comme souvent cela est fait dans la litterature, nous utiliserons indifféremment la terminologie "système LPV" et "modèle LPV", sachant que, bien entendu, il s'agit fondamentalement d'un modèle.

(i) La représentation affine est caractérisée par une représentation d'état où les matrices $A(\theta(t))$, $B(\theta(t))$, $C(\theta(t))$ et $D(\theta(t))$ admettent la structure :

$$\begin{bmatrix} A(\theta(t)) & B(\theta(t)) \\ C(\theta(t)) & D(\theta(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{l} \theta_i(t) \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

où $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C_i \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $D_i \in \mathbb{R}^{p\times m}$, $i \in \{0, \cdots, l\}$ et pour tout $\theta \in \Theta$.

(ii) La représentation polytopique est caractérisée par une représentation d'état où les matrices $A(\theta(t))$, $B(\theta(t))$, $C(\theta(t))$, et $D(\theta(t))$ admettent la structure :

$$\begin{bmatrix} A(\theta(t)) & B(\theta(t)) \\ C(\theta(t)) & D(\theta(t)) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{2^l} \mu_i(\theta(t)) \begin{bmatrix} \hat{A}_i & \hat{B}_i \\ \hat{C}_i & \hat{D}_i \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

où $\mu_i(\theta(t)) \geq 0$, $\sum_{i=1}^{2^l} \mu_i(\theta(t)) = 1$ et les matrices $\hat{A}_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\hat{B}_i \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\hat{C}_i \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $\hat{D}_i \in \mathbb{R}^{p\times m}$, $i \in \{1, \cdots, 2^l\}$ représentent les sommets du polytope.

Remarque 1.1. Une représentation d'état est dite quasi-LPV (q-LPV) lorsque le vecteur de paramètres θ dépend explicitement de l'état x. Cette classe de systèmes ne fait pas l'objet des travaux concernés par cette thèse et ne sera donc pas considérée pour la suite.

On pourra noter que la classe des systèmes LPV présente plusieurs intérêts. Elle englobe notamment, les classes des modèles LTI et LTV. En effet :

- lorsque la trajectoire du vecteur de paramètres θ est parfaitement connue pour chaque instant de temps t alors la représentation d'état d'un système LPV (1.5) peut se réécrire sous la forme d'une représentation d'état d'un système LTV décrite par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases} \tag{1.8}$$

- lorsque le vecteur de paramètres θ est fixé à une valeur particulière alors le modèle (1.5) est réduit à une représentation d'état d'un système LTI :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{1.9}$$

Un autre avantage de la représentation LPV est de permettre, sous certaines conditions, l'étude des systèmes non linéaires via les fondements de la théorie des systèmes linéaires. L'idée principale consiste à transformer un modèle non linéaire en un modèle LPV ou q-LPV équivalent, en utilisant par exemple des techniques basées sur la linéarisation, la transformation d'état ou encore la substitution [90, 96]. A titre d'illustration, on peut citer les travaux présentés dans [84], qui introduisent une méthodologie de conception d'observateurs intervalles pour les systèmes non linéaires, en utilisant une méthode par linéarisation garantie autour d'un domaine de fonctionnement. La méthode proposée, basée sur l'analyse par intervalle, est garantie au sens où elle assure que la trajectoire du système non linéaire est encadrée par l'ensemble des trajectoires admissibles du modèle q-LPV.

1.2.1 Stabilité

Intéressons nous à présent aux propriétés de stabilité des systèmes LPV. Notre objectif est de rappeler les théorèmes importants dans ce domaine. Rappelons que ces théorèmes sont basés sur la théorie de Lyapunov permettant d'établir la propriété de stabilité asymptotique intrinsèque des systèmes. Pour plus de détails sur les différentes formes de stabilité d'un système, le lecteur peut se référer à [14, 60].

1.2.1.1 Principe

Le principe général est énoncé dans le Théorème 1.1.

Théorème 1.1 (Théorème de stabilité au sens de Lyapunov. Théorème 2.2.2 page 39 [14] et Théorème 4.1 page 114 [60])**.** *Soit un système dynamique décrit par :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1.10}$$

où $f : D \to \mathbb{R}^n$ est une fonction localement Lipschitz sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$.

Soient un point d'équilibre $x_e = 0 \in D$ (c'est à dire qui vérifie $f(x_e)) = 0$) et une fonction continûment différentiable $V : D \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{array}{ll} (i) & : V(0) = 0 \\ (ii) & : V(x) > 0 \text{ sur le domaine } D - \{0\} \\ (iii) & : \dot{V}(x) \leq 0 \text{ sur le domaine } D \end{array} \tag{1.11}$$

Alors x_e est un point d'équilibre stable et la fonction V est appelée fonction de Lyapunov pour le système (1.10). De plus si $\dot{V}(x) < 0$ sur le domaine $D - \{0\}$ alors x_e est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

Considérons à présent le système dynamique décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\theta(t))x(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1.12}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^l$ est le vecteur de paramètres et la fonction matricielle $A : \Theta \to \mathbb{R}^{n \times n}$.

Les propriétés de stabilité quadratique et de stabilité quadratique robuste, se déduisent alors du Théorème 1.1.

1.2.1.2 Stabilité quadratique

Définition 1.3 (Stabilité quadratique)**.** Le système (1.12) est dit quadratiquement stable s'il existe une matrice $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ où $P = P^T \succ 0$ telle que $V(x) = x^T P x$ est une fonction de Lyapunov pour le système (1.12).

D'après la structure de la fonction $V(x)$, les conditions *(i)* et *(ii)* du Théorème 1.1 sont satisfaites. Par conséquent, la fonction $V(x)$ est une fonction de Lyapunov pour le système (1.12) si la condition *(iii)* du Théorème 1.1 est vérifiée. Ainsi, une définition équivalente de la stabilité quadratique est :

Définition 1.4. Le système (1.12) est dit quadratiquement stable s'il existe une matrice $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ où $P = P^T \succ 0$ vérifiant pour toutes les trajectoires possibles du vecteur de paramètres $\theta(t) \in \Theta$:

$$A(\theta(t))^T P + PA(\theta(t)) \prec 0 \tag{1.13}$$

En admettant que la matrice $A(\theta(t))$ soit polytopique, alors la stabilité quadratique du système (1.12) présentée dans la Définition 1.4, est réduite à un nombre fini de contraintes.

Lemme 1.1. *Le système* (1.12) *avec* $A(\theta(t)) = \sum_{i=1}^{2^l} \mu_i(\theta(t))\hat{A}_i$ *est dit quadratiquement stable s'il existe une matrice* $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *où* $P = P^T \succ 0$ *telle que :*

$$\hat{A}_i^T P + P\hat{A}_i \prec 0,\ i \in \{1, \cdots, 2^l\} \tag{1.14}$$

Démonstration. La preuve est directe en utilisant la structure de la matrice $A(\theta(t))$ et la Définition 1.4. ■

Notons que lorsque la matrice $A(\theta(t))$ est affine en θ et lorsque les bornes de son compact sont connues, alors il est toujours possible de transformer la matrice $A(\theta(t))$ et d'appliquer le Lemme 1.1. De plus, on pourra vérifier que les définitions et le lemme précédents sont tout à fait valides aussi bien dans le cas des paramètres invariants dans le temps que variants dans le temps, d'où le caractère conservateur bien connu de la propriété de stabilité quadratique.

1.2.1.3 Stabilité quadratique robuste

Dans certains cas et bien que le système soit asymptotiquement stable, nous ne pouvons pas le démontrer à l'aide de la théorie de la stabilité quadratique (voir exemple 2.3.3 p45 [14]). Pour pallier ce problème, la notion de stabilité quadratique a été étendue à la notion de stabilité quadratique robuste.

La stabilité quadratique robuste repose sur l'utilisation d'une fonction de Lyapunov dépendant du vecteur de paramètres θ. Cette modification assure la prise en compte des informations sur la vitesse de variation du vecteur de paramètres et permet, par conséquent, de différencier les paramètres variants et invariants dans le temps.

Définition 1.5 (Stabilité robuste)**.** Le système (1.12) est dit robustement stable s'il existe une matrice $P(\theta(t)) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ où $P(\theta(t)) = P(\theta(t))^T \succ 0$ telle que, $\forall\theta \in \Theta$, $V(x) = x^T P(\theta(t))x$ est une fonction de Lyapunov pour le système (1.12).

De manière similaire à la définition de la stabilité quadratique, on déduit la définition suivante.

Définition 1.6. Le système (1.12) est dit robustement stable s'il existe une matrice $P(\theta(t)) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ où $P(\theta(t)) = P(\theta(t))^T \succ 0$ vérifiant pour toutes les trajectoires possibles du vecteur de paramètres $\theta(t) \in \Theta$:

$$A(\theta(t))^T P(\theta(t)) + P(\theta(t))A(\theta(t)) + \dot{P}(\theta(t)) \prec 0 \tag{1.15}$$

La vérification de la Définition 1.6 est généralement difficile pour une matrice $P(\theta(t))$ quelconque. Ce problème peut être résolu en considérant la classe des matrices de Lyapunov à dépendance affine en θ, ce qui conduit à la notion de la stabilité quadratique affine initialement proposée dans [42].

Définition 1.7 (Stabilité quadratique affine, Définition 2.1 dans [42])**.** Le système (1.12) est affine quadratiquement stable (AQS) s'il existe $K+1$ matrices symétriques P_0, $P_1, \cdots, P_K \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telles que les inégalités

$$P(\theta(t)) = P_0 + \theta_1(t)P_1 + \theta_2(t)P_2 + \cdots + \theta_l(t)P_l \succ 0 \tag{1.16}$$

$$A(\theta(t))^T P(\theta(t)) + P(\theta(t))A(\theta(t)) + P(\dot{\theta}(t)) - P_0 \prec 0 \tag{1.17}$$

sont satisfaites pour toutes les trajectoires du vecteur des paramètres $\theta \in \Theta$.

Il est à noter que la stabilité quadratique, présentée dans la Définition 1.4, est un cas particulier de la stabilité quadratique affine avec $P = P_0$. De plus, lorsque la matrice $A(\theta)$ est à dépendance affine en θ, alors les contraintes (1.16)-(1.17) de la Définition 1.7 peuvent se réduire à un nombre fini de LMIs. Pour y parvenir, les bornes supérieure et inférieure de chaque élément $\theta_i(t)$, $\dot{\theta}_i(t)$, $i \in \{1, \cdots, l\}$ du vecteur de paramètre $\theta(t) = \left[\theta_1(t), \cdots, \theta_l(t)\right]^T$ et sa dérivée $\dot{\theta}(t) = \left[\dot{\theta}_1(t), \cdots, \dot{\theta}_l(t)\right]^T$ doivent satisfaire les conditions suivantes :

(i) chaque paramètre θ_i, $i \in \{1, \cdots, l\}$ appartient à un ensemble borné et connu

$$\theta_i \in \left[\underline{\theta_i}, \overline{\theta_i}\right] \tag{1.18}$$

(ii) chaque paramètre $\dot{\theta}_i$, $i \in \{1, \cdots, l\}$ appartient à un ensemble borné et connu

$$\dot{\theta}_i \in \left[\underline{\dot{\theta}_i}, \overline{\dot{\theta}_i}\right] \tag{1.19}$$

(iii) les vecteurs θ et $\dot{\theta}$ évoluent dans des hyper-rectangles délimités par l'ensemble des 2^l sommets :

$$\mathscr{V} = \left\{(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) \mid \alpha_i \in \left\{\underline{\theta_i}, \overline{\theta_i}\right\}\right\}, \tag{1.20}$$

$$\mathscr{R} = \left\{(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s) \mid \beta_i \in \left\{\underline{\dot{\theta}_i}, \overline{\dot{\theta}_i}\right\}\right\}, \tag{1.21}$$

où $\underline{\theta_i}, \overline{\theta_i}, \underline{\dot{\theta}_i}, \overline{\dot{\theta}_i}$ représentent les bornes inférieure et supérieure de θ_i, $\dot{\theta}_i$, $i \in \{1, \cdots, l\}$.

La propriété de multiconvexité peut alors être utilisée pour réécrire le problème initial en un problème LMI numériquement solvable. Nous rappelons ici brièvement cette théorie.

Définition 1.8 (Multiconvexité, Lemme 3.1 dans [42])**.** Soit une fonction quadratique scalaire f de $\theta \in \mathbb{R}^l$ telle que :

$$f(\theta_1, \cdots, \theta_l) = a_0 + \sum_{i=1}^{l} \theta_i a_i + \sum_{i=1, i<j}^{l} \theta_i \theta_j b_{ij} + \sum_{i=1}^{l} \theta_i^2 c_i \tag{1.22}$$

et supposons que f soit multiconvexe c'est-à-dire :

$$\frac{\partial^2 f(\theta)}{\partial \theta_i^2} = 2c_i \geq 0, \ i \in \{1, \cdots, l\} \tag{1.23}$$

Alors f est négative sur l'hyper-rectangle (1.18) si et seulement si la fonction $f(\cdot)$ est négative sur les sommets de l'hyper-rectangle (1.18). Cette contrainte consiste à vérifier que $f(\alpha) < 0$ pour tout $\alpha \in \mathscr{V}$.

L'application de la propriété de multiconvexité aux inégalités (1.16)-(1.17) conduit alors à ré-écrire ces dernières comme un problème d'optimisation SDP, ce qui conduit au théorème suivant [42] :

Théorème 1.2 ([42]). *Soit le système décrit par :*

$$\dot{x}(t) = \left(A_0 + \sum_{i=1}^{l} \theta_i(t) A_i \right) x(t) \tag{1.24}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ désigne le vecteur d'état, $\theta \in \mathbb{R}^l$ est le vecteur de paramètres et $A_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $j \in \{0, 1, \cdots, l\}$.

En admettant que les trajectoires du vecteur de paramètres θ et de sa dérivée $\dot{\theta}$ évoluent dans des hyper-rectangles (1.18) et (1.19) dont l'ensemble des sommets est défini par (1.20) et (1.21), alors le système (1.24) est affine quadratiquement stable s'il existe des matrices symétriques $P_0, \cdots, P_l$, telles que, pour $i = \{1, \cdots, l\}$ et $\forall (\alpha, \beta) \in \mathscr{V} \times \mathscr{R}$,

$$P(\alpha) = P_0 + \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \cdots + \alpha_l P_l \succ 0 \tag{1.25}$$

$$P(\alpha) A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) + P(\beta) - P_0 \prec 0 \tag{1.26}$$

$$P_i A_i + A_i^T P_i \succeq 0 \tag{1.27}$$

1.2.2 Performance

Cette sous-section aborde la notion de performance pour les systèmes LPV décrits par la représentation d'état (1.5). La notion de performance est généralement associée à la minimisation de l'influence de l'entrée exogène u sur la sortie du système y, au sens d'un critère. Dans le cas des observateurs, u joue le rôle des perturbations et des bruits et y celui de l'erreur d'estimation. Le critère de performance est généralement défini à l'aide de normes induites par les vecteurs entrée-sortie $\mathcal{L}_p$, $\mathcal{L}_q$, $p, q \in \{1, 2, \cdots, \infty\}$ aux conditions initiales nulles, tel que :

$$\gamma_{p,q} = \sup_{\theta \in \Theta} \sup_{\substack{u \in \mathcal{L}_q^m \\ \|u\|_{\mathcal{L}_q} \neq 0}} \frac{\|y\|_{\mathcal{L}_p}}{\|u\|_{\mathcal{L}_q}} \tag{1.28}$$

Dans nos travaux, nous utiliserons particulièrement les critères basés sur les normes $\mathcal{L}_2$ (i.e $p = q = 2$) et $\mathcal{L}_\infty$ (i.e $p = q = \infty$) qui sont appelés dans la littérature, les gains $\mathcal{L}_2$ et $\mathcal{L}_\infty$. Notons que, pour la classe des systèmes LTI, ces critères sont équivalents aux normes $\mathcal{H}_\infty$ et $\mathcal{H}_1$, respectivement. Le gain $\mathcal{L}_2$ est donc un critère énergétique tandis que le gain $\mathcal{L}_\infty$ est un critère d'amplitude.

1.2.2.1 Gain $\mathcal{L}_2$

Le gain $\mathcal{L}_2$ caractérise le pire ratio entre l'énergie du signal d'entrée u et l'énergie du signal de sortie y. Pour un système LPV (1.5), le gain $\mathcal{L}_2$ est défini par

$$\sup_{\theta \in \Theta} \sup_{\substack{u \in \mathcal{L}_2^m \\ \|u\|_{\mathcal{L}_2} \neq 0}} \frac{\|y\|_{\mathcal{L}_2}}{\|u\|_{\mathcal{L}_2}} \tag{1.29}$$

Cette définition ne permet généralement pas de calculer le gain $\mathcal{L}_2$. Pour palier ce problème, on utilise la définition et le lemme suivants :

Définition 1.9 (Définition 1.1.12, page 16 dans [7])**.** Le gain $\mathcal{L}_2$ du système LPV (1.5) est borné par γ si

$$\forall u \in \mathcal{L}_2^m, \quad \int_0^T y(t)^T y(t) dt \leq \gamma^2 \int_0^T u(t)^T u(t) dt \tag{1.30}$$

pour toutes les trajectoires possibles du vecteur de paramètres $\theta(t) \in \Theta$.

Lemme 1.2 (Lemme 3.3.1 , page 62, [101])**.** *Étant donné un système LPV (1.5) robustement stable, il existe un scalaire réel fini $\gamma > 0$ tel que, pour des conditions intitiales nulles, i.e. x(0)=0,*

$$\sup_{\theta \in \Theta} \sup_{\substack{u \in \mathcal{L}_2^m \\ \|u\|_{\mathcal{L}_2} \neq 0}} \frac{\|y\|_{\mathcal{L}_2}}{\|u\|_{\mathcal{L}_2}} \leq \gamma < \infty \tag{1.31}$$

Pour approcher le plus finement possible la valeur du gain $\mathcal{L}_2$, l'idée consiste tout simplement à minimiser γ. Pour cela, il suffit d'appliquer l'extension du lemme réel borné aux cas des systèmes LPV [2, 3] (on parle de performance $\mathcal{H}_\infty$ quadratique).

Définition 1.10 (Performance $\mathcal{H}_\infty$ quadratique)**.** Le système LPV (1.5) possède une performance $\mathcal{H}_\infty$ quadratique γ si et seulement si, il existe une matrice $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P = P^T \succ 0$ vérifiant le nombre infini d'inégalités

$$\begin{bmatrix} PA(\theta(t)) + A(\theta(t))^T P & PB(\theta(t)) & C(\theta(t))^T \\ B(\theta(t))^T P & -\gamma I & D(\theta(t))^T \\ C(\theta(t)) & D(\theta(t)) & -\gamma I \end{bmatrix} \prec 0 \tag{1.32}$$

pour toutes les trajectoires possibles du vecteur de paramètres $\theta(t) \in \Theta$. Alors, la fonction de Lyapunov $V(x) = x^T P x$ assure la stabilité asymptotique du système (1.5) et le gain $\mathcal{L}_2$ du système LPV (1.5) est borné par γ i.e

$$\|y\|_{\mathcal{L}_2} < \gamma \|u\|_{\mathcal{L}_2} \tag{1.33}$$

De manière similaire à la stabilité quadratique, les résultats de la Définition 1.10 admettent une extension au cas des fonctions de Lyapunov quadratiques affines, c'est à dire lorsque la matrice P dépend affinement du vecteur de paramètre θ [42].

Définition 1.11 (Performance $\mathcal{H}_\infty$ quadratique affine (AQP, acronyme anglo-saxon pour Affine Quadratic Performance))**.** Le système LPV (1.5) possède une performance $\mathcal{H}_\infty$ quadratique affine γ si et seulement si, il existe $l+1$ matrices symétriques $P_0, \cdots, P_l \in \mathbb{R}^{n \times n}$, telles que pour toutes les trajectoires possibles du vecteur de paramètres $\theta(t) \in \Theta$:

$$P(\theta(t)) = P_0 + \theta_1(t) P_1 + \theta_2(t) P_2 + \cdots + \theta_l(t) P_l \succ 0 \tag{1.34}$$

$$\begin{bmatrix} L(\theta(t), \dot{\theta}(t)) & P(\theta(t))B(\theta(t)) & C(\theta(t))^T \\ B(\theta(t))^T P(\theta(t)) & -\gamma I & D(\theta(t))^T \\ C(\theta(t)) & D(\theta(t)) & -\gamma I \end{bmatrix} \prec 0 \tag{1.35}$$

où $L(\theta(t), \dot{\theta}(t)) = P(\theta(t))A(\theta(t)) + A(\theta(t))^T P(\theta(t)) + P(\dot{\theta}(t)) - P_0$.

Il est à noter que les contraintes (1.34)-(1.35) peuvent être réduites à un nombre fini de LMIs, de manière similaire à la Définition 1.7, en utilisant la propriété de multiconvexité sous les hypothèses (1.18)-(1.21), i.e.

Théorème 1.3 (Théorème 4.2 dans [42]). *Soit le système LPV (1.5) décrit sous la forme affine (1.6) et soit les hypothèses (1.18)-(1.21). Le système LPV (1.5) vérifie le critère de performance $\mathcal{H}_\infty$ quadratique affine si et seulement si, il existe un scalaire réel $\gamma > 0$ et des matrices symétriques $P_0, \cdots, P_l$, tels que, pour $i = \{1, \cdots, l\}$ et $\forall(\alpha, \beta) \in \mathscr{V} \times \mathscr{R}$,*

$$P(\alpha) = P_0 + \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \cdots + \alpha_l P_l \succ 0 \tag{1.36}$$

$$\begin{bmatrix} P(\alpha)A(\alpha) + A(\alpha)^T P(\alpha) + P(\beta) - P_0 & P(\alpha)B(\alpha) & C(\alpha)^T \\ B(\alpha)^T P(\alpha) & -\gamma I & D(\alpha)^T \\ C(\alpha) & D(\alpha) & -\gamma I \end{bmatrix} \prec 0 \tag{1.37}$$

$$\begin{bmatrix} P_i A_i + A_i^T P_i & P_i B_i \\ B_i^T P_i & \mathbf{0} \end{bmatrix} \succeq 0 \tag{1.38}$$

Dans le cas des systèmes LTI, l'ensemble des définitions et des propriétés précédentes admettent des formulations équivalentes, définies autour de la norme $\mathcal{H}_\infty$, comme suit (nous pourrons noter que les conditions suivantes sont nécessaires et suffisantes, tout simplement car non dépendantes de θ) :

Soit le système LTI décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{1.39}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$ désignent respectivement le vecteur d'état, d'entrées et de sorties du système. Les matrices sont définies telles que $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$. Dans ce cas particulier, le gain $\mathcal{L}_2$ coïncide avec la norme $\mathcal{H}_\infty$, voir Théorème 5.4, page 210 de [60], dont une définition équivalente est donnée par :

Définition 1.12 (Norme $\mathcal{H}_\infty$). La norme $\mathcal{H}_\infty$ du transfert $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ pour le système LTI (1.39) est définie ci-dessous.

$$\|G\|_\infty = \sup_{\omega\in\mathbb{R}} \overline{\sigma}(G(j\omega)) \tag{1.40}$$

où $\overline{\sigma}(\cdot)$ désigne la valeur singulière maximale.

Proposition 1.1. *Soit le transfert $G(s) = C(sI - A)^{-1}B+D$ supposé asymptotiquement stable. Pour un scalaire réel $\gamma > 0$ alors les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) $\|G\|_\infty \leq \gamma$

(ii) $\int_0^\infty y(t)^T y(t)dt \leq \gamma^2 \int_0^\infty u(t)^T u(t)dt$

Ainsi, estimer γ, une valeur supérieure de $\|G\|_\infty$, se formule comme un problème LMI :

Lemme 1.3 (Lemme réel borné[13]). *Soit le transfert* $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ *du système LTI* (1.39). *S'il existe une matrice* P *telle que* $P = P^T \succ 0$ *et un scalaire* $\gamma > 0$ *tels que :*

$$\begin{bmatrix} PA + A^TP & PB & C^T \\ B^TP & -\gamma\mathbf{I} & D^T \\ C & D & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec 0 \tag{1.41}$$

alors $\|G\|_\infty < \gamma$.

On pourra noter ici :

- qu'approcher $\|G\|_\infty$ par valeur supérieure, consiste simplement à minimiser γ ;
- que pour un paramètre θ fixé, la définition de la performance $\mathcal{H}_\infty$ quadratique présentée dans la Définition 1.10 est équivalente à celle du Lemme 1.3.

Le gain $\mathcal{L}_2$ permet donc d'étendre les résultats de la performance $\mathcal{H}_\infty$ aux systèmes LPV puisque tous deux traduisent un ratio entre l'énergie du signal d'entrée et l'énergie du signal de sortie, dans un contexte "pire-cas".

1.2.2.2 Gain $\mathcal{L}_\infty$

Le gain $\mathcal{L}_\infty$ caractérise le pire ratio entre l'amplitude du signal d'entrée u et l'amplitude du signal de sortie y. Pour un système LPV (1.5), le gain $\mathcal{L}_\infty$ est défini tel que :

$$\sup_{\theta\in\Theta} \sup_{\substack{u\in\mathcal{L}_\infty^m \\ \|u\|_{\mathcal{L}_\infty}\neq 0}} \frac{\|y\|_{\mathcal{L}_\infty}}{\|u\|_{\mathcal{L}_\infty}} \tag{1.42}$$

Cette définition ne permet pas de calculer le gain $\mathcal{L}_\infty$. Pour palier ce problème, on utilise le lemme suivant qui donne une condition suffisante pour déterminer une borne supérieure [66, 89].

Lemme 1.4. *Soit le système LPV* (1.5). *S'il existe trois scalaires* $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $\gamma > 0$ *et une matrice* $P(\theta(t)) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *où* $P(\theta(t)) = P(\theta(t))^T \succ 0$ *tels que pour toutes les trajectoires possibles du vecteur de paramètres* $\theta(t) \in \Theta$ *:*

$$\begin{bmatrix} P(\theta(t))A(\theta(t)) + A(\theta(t))^TP(\theta(t)) + \dot{P}(\theta(t)) + \lambda P(\theta(t)) & P(\theta(t))B(\theta(t)) \\ B(\theta(t))^TP(\theta(t) & -\mu\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec 0 \tag{1.43}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda P(\theta(t)) & \mathbf{0} & C(\theta(t))^T \\ \mathbf{0} & (\gamma-\mu)\mathbf{I} & D(\theta(t))^T \\ C(\theta(t)) & D(\theta(t)) & \gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} \succ 0 \tag{1.44}$$

alors le système LPV (1.5) *est asymptotiquement stable et son gain* $\mathcal{L}_\infty$ *est inférieur à* γ.

Démonstration. La démonstration de ce lemme est donnée page 74 dans [89]. Nous la rappelons néanmoins ici car elle est selon nous moins connue que celle du gain $\mathcal{L}_2$. De plus, le gain $\mathcal{L}_\infty$ va prendre une place importante dans la suite de nos travaux puisque c'est ce critère qui va permettre de travailler sur l'amplitude des enveloppes estimées dans l'approche par observateur intervalle.

Soit la fonction de Lyapunov $V(\theta(t), x(t)) = x(t)^TP(\theta(t))x(t)$. La contrainte (1.43) implique alors :

$$\dot{V}(\theta(t), x(t)) + \lambda V(\theta(t), x(t)) - \mu u(t)^Tu(t) < 0 \tag{1.45}$$

En intégrant le résultat, il vient

$$\begin{aligned} V(\theta(t),x(t)) < & \quad V(\theta(0),x(0))e^{-\lambda t} + \mu\|u\|^2_{\mathcal{L}_\infty}\int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}d\tau \\ \leq & \quad V(\theta(0),x(0))e^{-\lambda t} + \tfrac{\mu}{\lambda}\|u\|^2_{\mathcal{L}_\infty} \end{aligned} \tag{1.46}$$

En notant que la contrainte (1.44) est équivalente à l'inégalité $-\frac{1}{\gamma}y(t)^Ty(t)+\lambda V(\theta(t),x(t))+(\gamma-\mu)u(t)^Tu(t)>0$, il vient alors

$$y(t)^Ty(t) < \gamma\left(\lambda V(\theta(t),x(t)) + (\gamma-\mu)u(t)^Tu(t)\right) \tag{1.47}$$

En injectant (1.46) dans (1.47), il en résulte que, pour des conditions initiales nulles (i.e. $x(0)=0$),

$$y(t)^Ty(t) < \gamma^2\|u\|^2_{\mathcal{L}_\infty} \tag{1.48}$$

En notant que la contrainte de stabilité est intégrée dans la contrainte (1.43), on établit le résultat du lemme précédent. ■

1.3 Théorie des observateurs intervalles

Cette section est dédiée à la présentation des outils méthodologiques utilisés dans la théorie des intervalles. Après avoir rappelé les notions de monotonie et de coopérativité, nous présentons les étapes de conception de l'observateur intervalle proposé dans [45]. Dans ce cadre, les notations et les définitions suivantes sont introduites.

Pour $\vartheta \in \{A \in \mathbb{R}^{m\times n}, x \in \mathbb{R}^n\}$, les opérateurs $\bullet^+$ et $\bullet^-$ sont définis par :

$$\vartheta^+ = \frac{1}{2}\left(|\vartheta| + \vartheta\right) = max(\vartheta, 0), \tag{1.49}$$

$$\vartheta^- = \frac{1}{2}\left(|\vartheta| - \vartheta\right) = max(-\vartheta, 0), \tag{1.50}$$

Soient deux vecteurs connus $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ définissant la notion d'intervalle pour le vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ tels que :

$$\underline{x}(t) \leq x(t) \leq \overline{x}(t),\ \forall\ t \geq t_0. \tag{1.51}$$

Le lemme suivant, donné dans [30], permet d'encadrer le produit d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ par un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$.

Lemme 1.5 (Lemme 2 dans [30]). *Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\underline{x} \leq x \leq \overline{x}$, où $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$.*

1. Pour une matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, l'encadrement du produit Ax est donné par :

$$A^+\underline{x} - A^-\overline{x} \ \leq\ Ax\ \leq\ A^+\overline{x} - A^-\underline{x} \tag{1.52}$$

2. Pour une matrice $A(\theta) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ telle que $\underline{A} \leq A(\theta) \leq \overline{A}$, $\forall\theta \in \Theta$ où $\underline{A}, \overline{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, l'encadrement du produit Ax est donné par :

$$\underline{A}^*x^* \ \leq\ A(\theta)x\ \leq \overline{A}^*x^* \tag{1.53}$$

où
$x^* = \begin{bmatrix}\overline{x}^{+T} & \overline{x}^{-T} & \underline{x}^{+T} & \underline{x}^{-T}\end{bmatrix}^T$, $\underline{A}^* = \begin{bmatrix}-\underline{A}^- & \overline{A}^- & \underline{A}^+ & -\overline{A}^+\end{bmatrix}$, $\overline{A}^* = \begin{bmatrix}\overline{A}^+ & -\underline{A}^+ & -\overline{A}^- & \underline{A}^-\end{bmatrix}$.

1.3.1 Systèmes monotones

Basés sur la théorie des équations différentielles ordinaires, les systèmes monotones représentent une classe particulière de systèmes dont les solutions préservent, sur un domaine de définition, une relation d'ordre fixée par les conditions initiales [1, 92, 93, 52].

Soit le système décrit par :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \tag{1.54}$$

alors le système (1.54) est dit monotone [52] si

$$x_a(t_0) \leq x_b(t_0) \;\Rightarrow\; x_a(t) \leq x_b(t),\ \forall t \geq t_0 \tag{1.55}$$

où $x_a(t)$ et $x_b(t)$ sont deux trajectoires, solutions du système (1.54), partant des conditions initiales respectivement données par $x_a(t_0)$ et $x_b(t_0)$.

La conservation de la relation d'ordre fixée par les conditions initiales est une propriété intéressante de la théorie des systèmes monotones, utilisée dans la conception d'un observateur intervalle, pour garantir la construction d'un encadrement à chaque instant de temps. Plus particulièrement, la théorie des observateurs intervalles repose sur une sous-classe de systèmes monotones, appelée systèmes coopératifs.

En considérant le système (1.54) réécrit sous la forme :

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_1(t), \cdots, x_n(t)),\ i \in \{1, \cdots, n\} \tag{1.56}$$

alors le système (1.56) est dit coopératif si les dérivées partielles $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ vérifient

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \geq 0,\ \forall\, i \neq j,\ i, j \in \{1, \cdots, n\} \tag{1.57}$$

Dans le cadre particulier des systèmes linéaires, soit

$$\dot{x}(t) = Ax(t),\ x \in \mathbb{R}^n,\ A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n} \tag{1.58}$$

alors la propriété de coopérativité est garantie si et seulement si $a_{ij} \geq 0,\ \forall\, i \neq j,\ i, j \in \{1, \cdots, n\}$, c'est à dire si et seulement si la matrice A est Metzler :

Définition 1.13. Une matrice carrée $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est dite Metzler si et seulement si $a_{ij} \geq 0,\ \forall\, i \neq j$.

Définissons les erreurs supérieure et inférieure suivantes :

$$\overline{e}_x(t) = \overline{x}(t) - x(t) \quad \underline{e}_x(t) = x(t) - \underline{x}(t) \tag{1.59}$$

L'inégalité (1.51) est alors vérifiée si et seulement si

$$\underline{e}_x(t) \geq 0 \;\text{ et } \overline{e}_x(t) \geq 0,\ \forall t \geq t_0 \tag{1.60}$$

ce qui est vrai si et seulement si les dynamiques des erreurs inférieure $\underline{e}_x(t)$ et supérieure $\overline{e}_x(t)$ sont monotones et les conditions initiales vérifient $\underline{x}(t_0) \leq x(t_0) \leq \overline{x}(t_0)$, puisqu'elles impliquent $\underline{e}_x(t_0) \geq 0$, $\overline{e}_x(t_0) \geq 0$.

Le principe d'un observateur intervalle repose sur ce raisonnement et consiste à construire des bornes supérieure $\overline{x}(t)$ et inférieure $\underline{x}(t)$ de l'état x du système étudié, en assurant que les erreurs inférieure $\underline{e}_x(t)$ et supérieure $\overline{e}_x(t)$ satisfont la relation (1.60).

Généralement, les dynamiques des erreurs $\underline{e}_x$, $\overline{e}_x$ dépendent d'entrées exogènes. La vérification des contraintes (1.60) est alors basée sur le Théorème 1.4.

Théorème 1.4 ([92]). *Soit le système linéaire perturbé décrit par :*

$$\dot{e}(t) = Ae(t) + w(t) \tag{1.61}$$

où $e \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est une matrice Metzler et où $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ est une entrée de perturbation. Si $e(t_0) \geq 0$ et $w(t) \geq 0$, $\forall t \geq t_0$ alors $e(t) \geq 0$, $\forall t \geq t_0$.

1.3.2 Application à la conception d'observateurs intervalles

Historiquement, la conception des observateurs intervalles a été initiée par [45, 86] pour l'estimation garantie des variables non mesurables d'une classe de systèmes biologiques incertains. Afin d'illustrer le principe de conception d'un observateur intervalle, nous rappelons ici les travaux fondateurs présentés dans [45, 86].

1.3.2.1 Formulation du problème

Soit la classe des systèmes linéaires à injection de sortie décrite par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \varphi(t, y(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{1.62}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^p$ représentent respectivement les vecteurs d'état et de sorties du système. Les matrices sont définies telles que $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ et la fonction $\varphi : \mathbb{R}^{p+1} \to \mathbb{R}^n$.

L'étude se place sous les hypothèses suivantes :

Hypothèse 1.1. La paire (A,C) est détectable.

Hypothèse 1.2. Il existe une matrice $L \in \mathbb{R}^{n\times p}$ telle que la matrice $A - LC$ soit Metzler (L est donc le gain de l'observateur intervalle).

Hypothèse 1.3. Il existe deux fonctions connues $\underline{\varphi} : \mathbb{R}^{p+1} \to \mathbb{R}^n$, $\overline{\varphi} : \mathbb{R}^{p+1} \to \mathbb{R}^n$ telles que

$$\underline{\varphi}(t, y(t)) \leq \varphi(t, y(t)) \leq \overline{\varphi}(t, y(t)),\ \forall\ (t, y) \in [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^p \tag{1.63}$$

1.3.2.2 Structure de l'observateur intervalle

L'estimation garantie d'une borne supérieure $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ et d'une borne inférieure $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ de l'état x du système (1.62) est réalisée en utilisant un observateur intervalle formé de deux systèmes dynamiques similaires à la structure de l'observateur de Luenberger, soit :

$$\begin{cases} \dot{\overline{x}}(t) = A\overline{x}(t) + \overline{\varphi}(t, y(t)) + L(y(t) - C\overline{x}(t)) \\ \dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + \underline{\varphi}(t, y(t)) + L(y(t) - C\underline{x}(t)) \\ \underline{x}(t_0) \leq x(t_0) \leq \overline{x}(t_0) \end{cases} \tag{1.64}$$

1.3.2.3 Conditions d'existence de l'encadrement

En définissant l'erreur d'observation supérieure par $\overline{e}_x(t) = \overline{x}(t) - x(t)$ et l'erreur d'observation inférieure par $\underline{e}_x(t) = x(t) - \underline{x}(t)$ alors l'état x du système (1.62) est estimé de manière garantie, i.e. $x(t) \in \left[\underline{x}(t), \overline{x}(t)\right]$, $\forall t \geq t_0$, si et seulement si (1.60) est vérifiée.

En effet, considérons les dynamiques de $\overline{e}$, $\underline{e}$, i.e. :

$$\dot{\overline{e}}_x(t) = (A - LC)\,\overline{e}_x(t) + \overline{\varphi}(t, y(t)) - \varphi(t, y(t)) \tag{1.65}$$

$$\dot{\underline{e}}_x(t) = (A - LC)\,\underline{e}_x(t) + \varphi(t, y(t)) - \underline{\varphi}(t, y(t)) \tag{1.66}$$

En appliquant le Théorème 1.4 à chacune de ces équations alors, sous les hypothèses 1.2 et 1.3 et sous les conditions initiales $\underline{x}(t_0) \leq x(t_0) \leq \overline{x}(t_0)$, les propriétés données par l'équation (1.60) sont vérifiées, garantissant ainsi que le système (1.64) est bien un observateur intervalle.

1.3.2.4 Stabilité de l'observateur et majorant de l'enveloppe

Intéressons nous maintenant aux conditions de stabilité de l'observateur (1.64). Soit la dynamique de l'erreur totale $e(t) = \overline{e}_x(t) + \underline{e}_x(t)$ définie par :

$$\dot{e}(t) = (A - LC)\,e(t) + \overline{\varphi}(t, y(t)) - \underline{\varphi}(t, y(t)) \tag{1.67}$$

En supposant qu'il existe un gain L tel que que la matrice $A - LC$ soit simultanément Hurwitz et Metzler et qu'il existe un vecteur $\nu \in \mathbb{R}^n_+$ tel que

$$0 \leq \overline{\varphi}(t, y(t)) - \underline{\varphi}(t, y(t)) \leq \nu,\ \forall\ (t, y) \in [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^p$$

alors la dynamique de l'erreur totale $e(t)$ est stable. De plus, $e(t)$ converge asymptotiquement vers une valeur inférieure à $e_\infty = -(A - LC)^{-1}\nu$.

Dans cette approche, on pourra noter que :

(i) il est nécessaire de déterminer un gain L tel que la matrice $A - LC$ soit simultanément Hurwitz et Metzler. Dans certains cas, cette condition est impossible à satisfaire, ce qui limite considérablement l'approche proposée. Prenons comme exemple le cas suivant :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\ ,\ L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix},$$

alors

$$A - LC = \begin{bmatrix} l_1 + 1 & -0.5 \\ l_2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Il est alors évident qu'il n'existe aucune valeur de $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ qui conduirait à une matrice $A - LC$ Metzler.

(ii) le degré de conservatisme de l'observateur intervalle (1.64) se mesure par la taille de l'enveloppe $\overline{x} - \underline{x}$. Dans la littérature, il existe très peu de travaux qui considèrent cette problématique. Minimiser l'effet des perturbations et des incertitudes de modélisation sur la taille de l'enveloppe $\overline{x} - \underline{x}$ (au sens d'un critère) semble pourtant une évidence. En réalité, les quelques travaux dans ce domaine se résument souvent à

itérer sur le gain L. Celui-ci étant fortement contraint par les conditions de stabilité et de monotonie, cette solution conduit fatalement à des performances médiocres. On pourra également noter que les fonctions majorantes $\overline{\varphi}$ et $\underline{\varphi}$ conditionnent la taille de l'enveloppe $\overline{x} - \underline{x}$. Un choix judicieux de ces fonctions est donc primordiale pour réduire le degré de conservatisme de la solution.

Certains auteurs ont alors proposé des solutions à ces problèmes. Nous proposons maintenant de dresser un bref diaporama de ces dernières pour les classes des systèmes LTI, LTV et LPV.

1.4 Observateurs intervalles pour les systèmes LTI

La coopérativité des erreurs d'observation est une contrainte forte de la théorie des observateurs intervalles. La principale restriction est liée à la détermination d'une matrice L telle que la matrice $A - LC$ soit simultanément Hurwitz et Metzler. Dans le cas général, cette condition n'existe pas. Toutefois, des travaux récents ont permis de relaxer cette contrainte pour les systèmes LTI en utilisant :

(i) une transformation en système positif [17, 18],
(ii) un changement de coordonnées invariant dans le temps [82],
(iii) un changement de coordonnées variant dans le temps [71, 72, 26, 25].

Nous proposons maintenant d'expliciter ces approches. Nous aborderons également le cas des observateurs intervalles pour les systèmes à entrées inconnues puis nous finirons par les travaux présentés dans [15], qui présentent une méthode permettant de guarantir les conditions d'existence de l'observateur intervalle et d'imposer des contraintes de performance au sens du gain $\mathcal{L}_\infty$ [2].

1.4.1 Approche par transformation en système positif

1.4.1.1 Préliminaires

Commençons par rappeler des définitions et des lemmes importants :

Définition 1.14 (Définition 3 dans [18])**.** La représentation positive d'un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur $X \in \mathbb{R}^{2n}_+$ tel que :

$$x = \Delta_n X \quad \text{avec} \quad \Delta_n = \begin{bmatrix} I_n & -I_n \end{bmatrix} \tag{1.68}$$

La représentation min-positive d'un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur positif $\pi(x) \in \mathbb{R}^{2n}_+$ défini par :

$$\pi(x) = \begin{bmatrix} x^+ \\ x^- \end{bmatrix} \tag{1.69}$$

La représentation min-positive d'une matrice $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est une matrice positive $\widetilde{M} \in \mathbb{R}^{2m \times 2n}_+$ définie par :

$$\widetilde{M} = \begin{bmatrix} M^+ & M^- \\ M^- & M^+ \end{bmatrix} \tag{1.70}$$

2. Dans [15], une définition alternative de la norme $\mathcal{L}_\infty$ est considérée. Pour un signal $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ alors $\|f\|_{\mathcal{L}_\infty} = \underset{1 \le i \le n}{max} \left(\underset{0 \le t}{sup} |f_i(t)| \right)$

D'après la Définition 1.14, nous pouvons vérifier que :

$$x = \Delta_n \pi(x),\ \Delta_n \widetilde{M} = M\Delta_n,\ Mx = \Delta_n \widetilde{M}\pi(x) \tag{1.71}$$

pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ et toute matrice $M \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

De plus, en considérant la matrice $\hat{I}_n = \begin{bmatrix} I_n & I_n \end{bmatrix}^T$ alors, pour un vecteur $v \in \mathbb{R}^n_+$, le vecteur $\pi(x)+\hat{I}_n v$ est une représentation positive du vecteur $x \in \mathbb{R}^n$. En effet $x = \Delta_n \left(\pi(x) + \hat{I}_n v\right)$ étant donné que $\Delta_n \hat{I}_n = 0_{n\times n}$.

Définition 1.15. La représentation Metzler $[M] \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ d'une matrice $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est définie par

$$[M] = \begin{bmatrix} d^M + \left(M - d^M\right)^+ & \left(M - d^M\right)^- \\ \left(M - d^M\right)^- & d^M + \left(M - d^M\right)^+ \end{bmatrix} \tag{1.72}$$

où d^M correspond à une matrice (diagonale) qui possède la même diagonale que la matrice M et 0 pour tous les autres éléments.

La matrice $[M]$ possède les mêmes propriétés que la représentation positive, notamment : $\Delta_n[M] = M\Delta_n$ et $Mx = \Delta_n[M]\pi(x)$.

La représentation min-positive des vecteurs ne préserve pas les inégalités puisque pour deux vecteurs $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, l'inégalité $x_1 \leq x_2$ n'implique pas l'inégalité $\pi(x_1) \leq \pi(x_2)$. Cette propriété a motivé la définition de nouveaux opérateurs.

Définition 1.16. Pour des vecteurs $a, x \in \mathbb{R}^n$, on définit l'opérateur $\phi_a(x)$ suivant :

$$\phi_a(x) = \begin{bmatrix} x + a^- \\ a^- \end{bmatrix} \tag{1.73}$$

Le lemme suivant est alors immédiat, voir [18] :

Lemme 1.6 (Lemme 3 dans [18])**.** *La fonction $\phi_a(x)$ définie dans (1.73) satisfait la relation :*

$$\Delta_n \phi_a(x) = x,\ \forall x \in R^n \tag{1.74}$$

Pour trois vecteurs $a, b, x \in \mathbb{R}^n$ tels que $a \leq x \leq b$ alors

$$\phi_a(a) \leq \phi_a(x) \leq \phi_a(b) \tag{1.75}$$

Nous terminons ce paragraphe en présentant deux lemmes sur les valeurs propres de la représentation Metzler d'une matrice A.

Lemme 1.7 (Lemme 7 dans [18])**.** *Le spectre de la représentation Metzler d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est*

$$\lambda([A]) = \lambda(A) \cup \lambda\left(d^A + |A - d^A|\right) \tag{1.76}$$

Lemme 1.8 (Lemme 8 dans [18])**.** *Soit $\mathcal{S} \subset \mathbb{C}_-$ définie par :*

$$\mathcal{S} = \{z \in \mathbb{C}\ :\ \mathcal{R}_e(z) + |\mathcal{I}_m(z)| < 0\} \tag{1.77}$$

où $\mathcal{R}_e(z)$ et $\mathcal{I}_m(z)$ désignent respectivement les parties réelle et imaginaire du complexe z. Si une matrice A est dans sa forme de Jordan réelle, alors sa représentation Metzler $[A]$ est Hurwitz si et seulement si $\lambda(A) \in \mathcal{S}$.

1.4.1.2 Formulation du problème

Soit le système décrit par

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + v^s(t) \\ y(t) = Cx(t) + v^m(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1.78}$$

où $x, v^s \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^p$ et $y, v^m \in \mathbb{R}^q$ représentent respectivement les vecteurs d'état, de bruits d'état, d'entrées, de sorties et de bruits de mesure du système. Les vecteurs u et v^s sont continus par morceaux pour garantir l'existence de la solution $x(t)$ sur $[0, \infty)$. On suppose que $v^s(t)$ et $v^m(t)$ sont bornés en amplitude, i.e. qu'il existe des bornes connues $\underline{v^s}(t), \overline{v^s}(t) \in \mathbb{R}^n$ et $\underline{v^m}(t), \overline{v^m}(t) \in \mathbb{R}^q$ telles que $v^s(t) \in \left[\underline{v^s}(t), \overline{v^s}(t)\right]$ et $v^m(t) \in \left[\underline{v^m}(t), \overline{v^m}(t)\right]$. On suppose également que l'état initial $x(0)$ est borné en amplitude, i.e. il existe deux bornes connues $\underline{x_0}$ et $\overline{x_0}$ telles que $\underline{x_0} \leq x_0 \leq \overline{x_0}$.

L'objectif est de construire un observateur intervalle qui estime des bornes supérieure $\overline{x}$ et inférieure $\underline{x}$ de l'état x du système (1.78), i.e. $\underline{x}(t) \leq x(t) \leq \overline{x}(t), \forall t \geq t_0$.

1.4.1.3 Conception de l'observateur intervalle

La solution au problème est donnée par le théorème 1.5.

Théorème 1.5 (Théorème 11 dans [18]). *Soient le système (1.78), une matrice $K \in \mathbb{R}^{n \times q}$ telle que $[A_K]$ est Hurwitz où $A_K = A - KC$ et des bornes connues $\underline{w}(t), \overline{w}(t) \in \mathbb{R}^n$ pour le vecteur des perturbations $w(t) = v^s(t) - Kv^m(t)$ alors le système :*

$$\begin{cases} \dot{\overline{Z}}(t) = [A_K]\overline{Z}(t) + \widetilde{B}\pi(u(t)) + \widetilde{K}\pi(y(t)) + \phi_{\underline{w}}(\overline{w}(t)) \\ \dot{\underline{Z}}(t) = [A_K]\underline{Z}(t) + \widetilde{B}\pi(u(t)) + \widetilde{K}\pi(y(t)) + \phi_{\underline{w}}(\underline{w}(t)) \\ \overline{x}(t) = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n\times n} \end{bmatrix} \overline{Z}(t) - \begin{bmatrix} 0_{n\times n} & I_n \end{bmatrix} \underline{Z}(t) \\ \underline{x}(t) = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n\times n} \end{bmatrix} \underline{Z}(t) - \begin{bmatrix} 0_{n\times n} & I_n \end{bmatrix} \overline{Z}(t) \\ \underline{Z}(0) = \phi_{\underline{x_0}}(\underline{x_0}), \ \overline{Z}(0) = \phi_{\underline{x_0}}(\overline{x_0}) \end{cases} \tag{1.79}$$

est un observateur intervalle pour le système (1.78).

Démonstration. La démonstration de ce théorème est donnée dans [18]. Nous la rappelons ici brièvement.

Étant donné que la matrice $[A_K]$ est Hurwitz par hypothèse, alors $Z(t) = \begin{bmatrix} \underline{Z}(t)^T & \overline{Z}(t)^T \end{bmatrix}^T$ est uniformément borné si u, y, $\underline{w}$ et $\overline{w}$ sont uniformément bornés.

La première étape de la démonstration consiste à utiliser l'égalité $x(t) = \Delta_n \zeta(t)$ et à vérifier que l'égalité $\dot{x}(t) = \Delta_n \dot{\zeta}(t)$ est vraie avec :

$$\begin{cases} \dot{\zeta}(t) = [A_K]\zeta(t) + \widetilde{B}\pi(u(t)) + \widetilde{K}\pi(y(t)) + \phi_{\underline{w}}(w(t)) \\ \zeta(0) = \phi_{\underline{x_0}}(x_0) \end{cases} \tag{1.80}$$

En développant $\Delta_n\dot{\zeta}(t)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\Delta_n\dot{\zeta}(t) &= \Delta_n[A_K]\zeta(t) + \Delta_n\widetilde{B}\pi(u(t)) + \Delta_n\widetilde{K}\pi(y(t)) + \Delta_n\phi_{\underline{w}}(w(t)) && (1.81)\\
&= A_K\Delta_n\zeta(t) + B\Delta_n\pi(u(t)) + K\Delta_n\pi(y(t)) + w(t) && (1.82)\\
&= A_K x(t) + Bu(t) + Ky(t) + w(t) && (1.83)\\
&= (A - KC)x(t) + Bu(t) + Ky(t) + v^s(t) - Kv^m(t) && (1.84)\\
&= Ax(t) + Bu(t) + v^s(t) + Ky(t) - K\left(Cx(t) + v^m(t)\right) && (1.85)\\
&= Ax(t) + Bu(t) + v^s(t) && (1.86)
\end{aligned}$$

Étant donné que la matrice $[A_K]$ est Hurwitz et Metzler, que les conditions initiales vérifient l'inégalité $\underline{Z}(0) \leq \zeta(0) \leq \overline{Z}(0)$ et que l'encadrement $\phi_{\underline{w}(t)}(\underline{w}(t)) \leq \phi_{\underline{w}}(w(t)) \leq \phi_{\underline{w}}(\overline{w}(t))$ est vérifié d'après le Lemme 1.6, il vient d'après le Théorème 1.4 :

$$\underline{Z}(t) \leq \zeta(t) \leq \overline{Z}(t),\ \forall t \geq 0. \tag{1.87}$$

En appliquant le Lemme 1.5 sur la relation $x(t) = \Delta_n\zeta(t)$, nous obtenons alors :

$$\underline{x}(t) \leq x(t) \leq \overline{x}(t). \tag{1.88}$$

■

Dans cette approche, la principale difficulté réside dans la synthèse du gain K qui rend la matrice $[A - KC]$ Hurwitz. Il est montré dans [18] que ce problème peut être résolu en utilisant le Lemme 1.8 et la représentation de Jordan positive des matrices. Le lecteur intéressé pourra se référer à [18] pour de plus amples détails.

1.4.2 Approche par changement de base d'état

1.4.2.1 Formulation du problème

Soit le système décrit par

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + w(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{1.89}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^p$ sont respectivement les vecteurs d'état et de sortie du système. $w \in \mathbb{R}^n$ représente le vecteur de perturbations tel que $w(t) \in \left[\underline{w}(t), \overline{w}(t)\right]$ où les vecteurs $\underline{w}, \overline{w} \in \mathbb{R}^n$ sont *a priori* connus. Les matrices sont définies par $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$.

Dans les approches basées sur un changement de base d'état, on peut distinguer deux cas :

- le cas où le changement ne dépend pas du temps ;
- le cas où le changement dépend du temps.

1.4.2.2 Approche par changement de base d'état invariant dans le temps

La première approche repose sur un changement de coordonnées (non singulier) $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tel que $r(t) = Px(t)$. Ainsi, le modèle d'état (1.89) s'écrit

$$\begin{cases} \dot{r}(t) = PAP^{-1}r(t) + Pw(t) \\ y(t) = CP^{-1}r(t) \end{cases} \tag{1.90}$$

La démarche consiste alors à estimer une borne supérieure $\overline{r}(t)$ et inférieure $\underline{r}(t)$ de l'état dans cette nouvelle base, en utilisant un observateur intervalle défini tel que

$$\begin{cases} \dot{\overline{r}}(t) = PAP^{-1}\overline{r}(t) + PL(y(t) - CP^{-1}\overline{r}(t)) + \overline{\phi}(t) \\ \dot{\underline{r}}(t) = PAP^{-1}\underline{r}(t) + PL(y(t) - CP^{-1}\underline{r}(t)) + \underline{\phi}(t) \\ \underline{r}(t_0) \leq r(t_0) \leq \overline{r}(t_0) \end{cases} \tag{1.91}$$

où $\overline{\phi}(t) = P^+\overline{w}(t) - P^-\underline{w}(t)$ et $\underline{\phi}(t) = P^+\underline{w}(t) - P^-\overline{w}(t)$.

Les dynamiques des erreurs d'observation $\overline{e}_r(t) = \overline{r}(t) - r(t)$ et $\underline{e}_r(t) = r(t) - \underline{r}(t)$ sont alors données par :

$$\dot{\overline{e}}_r(t) = P\left(A - LC\right)P^{-1}\overline{e}_r(t) + \overline{\phi}(t) - \phi(t) \tag{1.92}$$

$$\dot{\underline{e}}_r(t) = P\left(A - LC\right)P^{-1}\underline{e}_r(t) + \phi(t) - \underline{\phi}(t) \tag{1.93}$$

où $\phi(t) = Pw(t)$. L'application du Lemme 1.5 sur $Pw(t)$ garantie que l'inégalité $\underline{\phi}(t) \leq \phi(t) \leq \overline{\phi}(t)$ est toujours vraie. Sous la contrainte d'un gain $L \in \mathbb{R}^{n\times p}$ et d'une matrice de changement de base $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tels que la matrice $P\left(A - LC\right)P^{-1}$ soit Hurwitz et Metzler, et sous les conditions initiales $\underline{r}(t_0) \leq r(t_0) \leq \overline{r}(t_0)$, alors il vient, d'après le Théorème 1.4, que les erreurs d'observation vérifient $\overline{e}_r(t) \geq 0$ et $\underline{e}_r(t) \geq 0$ pour tout $t \geq t_0$. Ainsi, l'état r du système (1.90) appartient à l'intervalle $\left[\underline{r}(t), \overline{r}(t)\right]$, $\forall\ t \geq t_0$. Finalement, l'application du Lemme 1.5 sur le changement de base $x(t) = P^{-1}r(t)$ permet de déduire un encadrement dans la base d'origine x du système (1.89) :

$$\underline{x}(t) \leq x(t) \leq \overline{x}(t) \tag{1.94}$$

où $\underline{x}(t) = M^+\underline{r}(t) - M^-\overline{r}(t)$ et $\overline{x}(t) = M^+\overline{r}(t) - M^-\underline{r}(t)$ avec $M = P^{-1}$.

Contrairement à l'approche présentée dans la partie 1.3.2, la démarche repose maintenant sur le choix approprié du changement de base (invariant dans le temps) P et du gain L tels que les erreurs d'observation soient stables et coopératives.

1.4.2.2.1 Solution par placement de pôles et diagonalisation

Nous présentons dans ce paragraphe une méthode simple, basée sur l'utilisation des techniques de placement de pôles qui permet de déterminer L et P.

En supposant que la paire (A, C) est observable, il existe alors un gain L tel que la matrice $A - LC$ soit diagonalisable et Hurwitz avec des pôles réels. Par conséquent, il existe une transformation de coordonnées P qui diagonalise la matrice $A - LC$ dans la nouvelle base. Une matrice diagonale satisfaisant les propriétés d'une matrice Metzler, il

vient que la matrice $P(A - LC)P^{-1}$ est Hurwitz et Metzler.

L'hypothèse d'observabilité de la paire (A, C) peut être relaxée en considérant qu'elle est détectable et que la matrice $A - LC$ conserve les mêmes contraintes que celles précédemment données. Cette approche, bien que très simple, s'avère restrictive, puisque le cas des pôles complexes conjugués n'est pas traité. Les approches suivantes permettent de palier ce problème.

1.4.2.2.2 Solution par résolution d'une équation de Sylvester

Les travaux présentés dans [82] proposent une méthode moins restrictive que celle par placement de pôles et diagonalisation. Nous rappelons ici les étapes clés de cette approche.

La matrice P étant non singulière alors l'égalité matricielle $N = P(A - LC)P^{-1}$ est equivalente à la forme :

$$PA - NP = QC,\ Q = PL \tag{1.95}$$

En fixant la matrice Q et en choisissant N Hurwitz et Metzler, alors l'équation (1.95) est une équation de Sylvester dont l'inconnue à déterminer est la matrice P. Lorsque les matrices A et N ne partagent aucune valeur propre, alors la solution est unique pour tout Q. La solution d'une équation de Sylvester peut être obtenue en utilisant, par exemple, les travaux de [9, 44].

Le lemme suivant donne la solution au problème dans le cas contraire (non unicité de la solution P).

Lemme 1.9 (Lemme 1 dans [82])**.** *Soient une matrice $A - LC$ et une matrice Metzler N ayant les mêmes valeurs propres pour une matrice donnée L. S'il existe deux vecteurs v_1 et v_2 tels que les paires $(A - LC, v_1)$ et (N, v_2) sont observables alors :*

$$P = O_2^{-1}O_1 \text{ et } Q = PL,$$

satisfont l'équation de Sylvester (1.95) avec :

$$O_1 = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_1(A - LC)^{n-1} \end{bmatrix},\ O_2 = \begin{bmatrix} v_2 \\ \vdots \\ v_2N^{n-1} \end{bmatrix} \tag{1.96}$$

Démonstration. Étant donné que les paires $(A - LC, v_1)$ et (N, v_2) sont observables alors les matrices O_1 et O_2 sont non singulières. De plus, les transformations O_1 et O_2 transforment les matrices $A - LC$ et N sous leurs formes canoniques observables. On a alors :

$$O_1(A - LC)O_1^{-1} = O_2NO_2^{-1} \tag{1.97}$$

En remplaçant la matrice N par son expression $P(A - LC)P^{-1}$ alors, par identification, nous obtenons l'égalité $P = O_2^{-1}O_1$. ■

1.4.2.2.3 Résolution par optimisation non lisse

Les approches précédentes donnent un moyen de déterminer les matrices L et P de l'observateur intervalle (1.91), mais malheureusement, aucune contrainte de performance n'est formulée dans la procédure de synthèse. Pour palier ce problème, les auteurs des publications [19, 20] proposent de formuler le problème, comme un problème d'optimisation non lisse. L'idée consiste à déterminer conjointement les matrices P et L, tout en satisfaisant un critère de performance relatif à la largeur de l'intervalle, au sens des normes $\mathcal{H}_2$ ou $\mathcal{H}_\infty$. Nous proposons ici d'expliciter le principe de cette approche.

Considérons la proposition suivante :

Proposition 1.2 (Proposition 1 dans [20]). *Soit la paire (A, C) détectable et deux matrices $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $L \in \mathbb{R}^{n\times p}$ telles que*

$$m_{ij}(P, L) = \left[P\left(A - LC\right)P^{-1}\right]_{ij} \tag{1.98}$$

Si le système décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}_a(t) = (A - LC)\, x_a(t) \\ \dot{x}_{ij}(t) = -m_{ij}(P, L)x_{ij}(t),\ i \neq j \end{cases} \tag{1.99}$$

est stable pour des matrices P et L alors $P\left(A - LC\right)P^{-1}$ est Hurwitz et Metzler.

La Proposition 1.2 transforme le problème initial en un problème de stabilisation de systèmes autonomes dont la matrice d'état est donnée par $-m_{ij}(P, L) \in \mathbb{R}$. Cette reformulation du problème peut être couplée avec des contraintes de performance telles que minimiser l'influence des perturbations sur les erreurs d'observation $\overline{e}_r(t)$ et $\underline{e}_r(t)$, au sens des normes $\mathcal{H}_2$ ou $\mathcal{H}_\infty$. Le problème se formule alors ainsi :

Problème 1.1 (Problème 4.1 dans [19]). *Soit une collection de systèmes LTI $\Sigma(s, p)$ dépendant de paramètres réglables $p \in \Xi$ et de vecteurs $w_i, z_i \in \mathbb{R}^{n_a+b_b}$, $i \in \{1, \cdots, n_a+b_b\}$, n_a, $n_b \in \mathbb{R}_+$ représentant les vecteurs d'entrées et de sorties de synthèse. Le problème consiste à trouver $p \in \Xi$ tel que*

$$\min_{p\in\Xi} \max_{i=\{1,\cdots,n_a\}} \|G_{w_i\to z_i}\|_{2/\infty} \tag{1.100}$$

sous les contraintes $\|G_{w_j\to z_j}\|_{2/\infty} < 1$, $j = \{1, \cdots, n_b\}$.

Les fonctions $f_k(\omega) = \|G_{w_i\to z_i}\|_k, k = 2, \infty$ étant des fonctions non-lisses, les techniques d'optimisation non-lisse proposées dans [4, 5, 16] sont utilisables afin de résoudre le problème.

1.4.2.3 Approche par changement de coordonnées variant dans le temps

Les approches précédentes sont basées sur l'utilisation d'un changement de base stationnaire (i.e. P est invariant dans le temps), ce qui peut limiter l'existence de solutions dans certains cas. Pour relaxer cette contrainte, l'idée consiste à utiliser un changement de

base (non singulier) variant dans le temps $P(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tel que $r(t) = P(t)x(t)$. L'équation (1.89) s'écrit alors sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{r}(t) = \left(P(t)AP(t)^{-1} + \dot{P}(t)P(t)^{-1}\right) r(t) + P(t)w(t) \\ y(t) = CP(t)^{-1}r(t) \end{cases} \tag{1.101}$$

La démarche est alors très similaire au cas précédent, puisqu'elle repose sur l'observateur intervalle donné par :

$$\begin{cases} \dot{\overline{r}}(t) = \left(P(t)AP(t)^{-1} + \dot{P}(t)P(t)^{-1}\right) \overline{r}(t) + P(t)L(y(t) - CP(t)^{-1}\overline{r}(t)) + \overline{\phi}(t) \\ \dot{\underline{r}}(t) = \left(P(t)AP(t)^{-1} + \dot{P}(t)P(t)^{-1}\right) \underline{r}(t) + P(t)L(y(t) - CP(t)^{-1}\underline{r}(t)) + \underline{\phi}(t) \\ \underline{r}(t_0) \leq r(t_0) \leq \overline{r}(t_0) \end{cases} \tag{1.102}$$

où $\overline{\phi}(t) = P(t)^{+}\overline{w}(t) - P(t)^{-}\underline{w}(t)$ et $\underline{\phi}(t) = P(t)^{+}\underline{w}(t) - P(t)^{-}\overline{w}(t)$.

Les dynamiques des erreurs d'observation $\overline{e}_r(t) = \overline{r}(t) - r(t)$ et $\underline{e}_r(t) = r(t) - \underline{r}(t)$ sont alors données par :

$$\dot{\overline{e}}_r(t) = \aleph(t)\overline{e}_r(t) + \overline{\phi}(t) - \phi(t) \tag{1.103}$$

$$\dot{\underline{e}}_r(t) = \aleph(t)\underline{e}_r(t) + \phi(t) - \underline{\phi}(t) \tag{1.104}$$

où $\aleph(t) = P(t)\left(A - LC\right)P(t)^{-1} + \dot{P}(t)P(t)^{-1}$ et $\phi(t) = P(t)w(t)$.

L'application du Lemme 1.5 sur $P(t)w(t)$ garantie que l'inégalité $\underline{\phi}(t) \leq \phi(t) \leq \overline{\phi}(t)$ est toujours vraie. Sous la contrainte d'un gain $L \in \mathbb{R}^{n\times p}$ et d'un changement de base $P(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tels que la matrice $P(t)\left(A - LC\right)P(t)^{-1} + \dot{P}(t)P(t)^{-1}$ soit Hurwitz et Metzler, et sous les conditions initiales $\underline{r}(t_0) \leq r(t_0) \leq \overline{r}(t_0)$, il vient, d'après le Théorème 1.4, que les erreurs d'observation vérifient $\overline{e}_r(t) \geq 0$ et $\underline{e}_r(t) \geq 0$, $\forall t \geq t_0$. Ainsi, l'état r du système (1.101) appartient à l'intervalle $\left[\underline{r}(t), \overline{r}(t)\right]$, $\forall t \geq t_0$. L'application du Lemme 1.5 sur le changement de base $x(t) = P(t)^{-1}r(t)$ permet de déduire un encadrement dans la base d'origine x du système (1.89) :

$$\underline{x}(t) \leq x(t) \leq \overline{x}(t) \tag{1.105}$$

où $\underline{x}(t) = M(t)^{+}\underline{r}(t) - M(t)^{-}\overline{r}(t)$ et $\overline{x}(t) = M(t)^{+}\overline{r}(t) - M(t)^{-}\underline{r}(t)$ avec $M(t) = P(t)^{-1}$.

La difficulté réside ici dans la détermination du changement de base $P(t)$. La solution proposée dans [71, 72] permet de résoudre ce problème. Elle repose sur la détermination de $P(t)$ telle que la matrice $\aleph$ soit Hurwitz, Metzler et invariante dans le temps. La procédure de transformation est basée sur le fait que toute matrice réelle peut être transformée sous la forme canonique de Jordan. Cette procédure est présentée dans le théorème suivant.

Théorème 1.6 (Théorème 2 dans [72]). *Soit le système décrit par :*

$$\dot{x}(t) = \left(A - LC\right)x(t) \tag{1.106}$$

où le vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ et la matrice $(A - LC) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est constante et Hurwitz.

Il existe alors un changement de base variant dans le temps $r(t) = P(t)x(t)$ où P est une fonction matricielle dont les éléments sont de classe C^∞ et bornés en norme $\mathcal{L}_\infty$ transformant le système (1.106) en un système LTI coopératif et exponentiellement stable.

Démonstration. La détermination de la matrice P est organisée en trois étapes. La première étape consiste à transformer la matrice $A-LC$ dans sa forme canonique de Jordan. Pour cela, un simple changement de base stationnaire $\mathcal{P}$ est utilisé. Le système (1.106) s'écrit alors

$$\dot{\zeta} = J\zeta \tag{1.107}$$

où

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & J_s \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

tel que les matrices J_i, $i \in \{1, \cdots, s\}$ sont partitionnées en deux groupes. Les r premières matrices J_i sont associées aux r valeurs propres réelles de $A-LC$ de multiplicité n_i, les autres matrices sont associées aux valeurs propres complexes de $A-LC$ de multiplicité m_i, i.e.

- pour $i \in \{1, \cdots, r\}$ alors

$$J_i = \begin{bmatrix} -\mu_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & -\mu_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -\mu_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_i\times n_i} \tag{1.108}$$

  où les μ_i sont des nombres réels positifs.

- pour $i \in \{r+1, \cdots, s\}$ alors

$$J_i = \begin{bmatrix} -\Lambda_i & I_2 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\Lambda_i & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & I_2 \\ \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} & -\Lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2m_i\times 2m_i} \quad \text{avec} \quad \Lambda_i = \begin{bmatrix} -\kappa_i & \omega_i \\ -\omega_i & -\kappa_i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \tag{1.109}$$

  où les κ_i sont des nombres réels positifs et les ω_i sont des nombres réels non nuls.

Notons ici que les éléments μ_i et κ_i sont des nombres réels positifs. Il s'agit d'une conséquence directe du fait que la matrice $A-LC$ du système (1.106) est Hurwitz. Par ailleurs, lorsque la matrice $A-LC$ possède uniquement des valeurs propres réelles ($n = \sum_{i=1}^{r} n_i$) alors le changement de coordonnées LTI décrit par la transformation $\zeta = \mathcal{P}x$ transforme le système (1.106) en un système coopératif. Cependant, cette transformation n'est pas suffisante en présence de valeurs propres complexes puisque les termes $-\omega_i$ sont présents hors de la diagonale. De manière générale, il est démontré dans [71] qu'il n'existe pas de changement de coordonnées invariant dans le temps qui transforme le système (1.107) en un système coopératif dans la nouvelle base. Toutefois, il est démontré, dans le même article, que la propriété de coopérativité peut être obtenue en appliquant un changement de coordonnées variant dans le temps. En effet, le changement de base suivant

$$r_i(t) = \mathcal{N}_i(t)\zeta_i(t) \tag{1.110}$$

où

$$\mathcal{N}_i(t) = \begin{bmatrix} \varpi_i(t) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \varpi_i(t) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \varpi_i(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2m_i \times 2m_i} \tag{1.111}$$

avec

$$\varpi_i = \begin{bmatrix} cos(\omega_i t) & -sin(\omega_i t) \\ sin(\omega_i t) & cos(\omega_i t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \tag{1.112}$$

transforme le système

$$\dot{\zeta}_i(t) = \begin{bmatrix} -\Lambda_i & I_2 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\Lambda_i & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & I_2 \\ \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} & -\Lambda_i \end{bmatrix} \zeta_i(t) \tag{1.113}$$

en

$$\dot{r}_i(t) = \mathcal{M}_i r_i(t) \tag{1.114}$$

où

$$\mathcal{M}_i = \begin{bmatrix} -\kappa_i I_2 & I_2 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\kappa_i I_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & I_2 \\ \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} & -\kappa_i I_2 \end{bmatrix} \tag{1.115}$$

En suivant ce raisonnement, tous les systèmes LTI (1.107) possédant des valeurs propres réelles et complexes peuvent être transformés en systèmes coopératifs décrits par :

$$\dot{r}(t) = \aleph r(t) \tag{1.116}$$

avec

$$\aleph = \begin{bmatrix} G & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{M}_{r+1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathcal{M}_s \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} \tag{1.117}$$

telle que pour $q = \sum_{i=1}^{r} n_i$,$\forall j \in \{r+1, \cdots, s\}$,

$$G = \begin{bmatrix} J_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & J_r \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{q\times q},\ \mathcal{M}_j = \begin{bmatrix} -\kappa_j I_2 & I_2 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\kappa_j I_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & I_2 \\ \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} & -\kappa_j I_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2m_j \times 2m_j}. \tag{1.118}$$

Ce changement de base est donné par $r = \eta(t)\mathcal{P}x$ où la matrice $\mathcal{P}$ est la matrice permettant de transformer le système (1.106) sous la forme canonique de Jordan (1.107) et où $\eta(t)$ est donné par

$$\eta(t) = \begin{bmatrix} I_q & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{N}_{r+1}(t) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathcal{N}_s(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} \tag{1.119}$$

tel que, pour $j \in \{r+1, \cdots s\}$,

$$\mathcal{N}_j(t) = \begin{bmatrix} \varpi_j(t) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \varpi_j(t) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \varpi_j(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2m_j\times 2m_j} \tag{1.120}$$

avec

$$\varpi_j = \begin{bmatrix} cos(\omega_j t) & -sin(\omega_j t) \\ sin(\omega_j t) & cos(\omega_j t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \tag{1.121}$$

■

Pour résumer le théorème et ce qu'il démontre, tout système LTI stable peut être transformé en un système LTI coopératif par un changement de coordonnées invariant dans le temps lorsque toutes les valeurs propres de la matrice $(A - LC)$ sont réelles. Dans le cas contraire, un changement de coordonnées supplémentaire et variant dans le temps est nécessaire pour obtenir la forme coopérative.

1.4.3 Extension aux systèmes à entrées inconnues

Les fondements méthodologiques explicités précédemment ont récemment été étendus au cas des systèmes LTI à entrées inconnues. Dans ce contexte, on retrouve les deux grandes familles d'approches qui sont

- les méthodes qui reposent sur la propagation des entrées inconnues, ce qui peut conduire à une sur-estimation des bornes supérieure et inférieure de l'état,
- les méthodes qui reposent sur le principe de découplage des entrées inconnues. Cette approche est basée sur la synthèse d'observateurs intervalles dont l'état évolue dans l'espace orthogonal à celui des entrées inconnues.

Nous proposons ici d'expliciter cette dernière approche en présentant les travaux proposés dans [47, 48].

1.4.3.1 Formulation du problème

Soit le modèle LTI décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + D\xi(t) + \omega(t) \\ y(t) = Cx(t) + \delta(t) \\ \psi(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{1.122}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état du système dont les conditions initiales appartiennent à l'intervalle $\left[\underline{x}(t_0), \overline{x}(t_0)\right]$ avec $\underline{x}(t_0)$ et $\overline{x}(t_0)$ supposés connus. $u \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur d'entrée du système, supposé borné par deux vecteurs $\underline{u}$, $\overline{u}$ *a priori* connus tels que $\underline{u}(t) \leq u(t) \leq \overline{u}(t)$, $\forall t \geq t_0$. $\xi \in \mathcal{E} \subset \mathbb{R}^q$ est le vecteur des entrées inconnues. $y \in \mathbb{R}^p$ et $\psi \in \mathbb{R}^p$ représentent respectivement les vecteurs de sorties bruitées et non bruitées du système. $\omega \in \mathbb{R}^n$ et $\delta \in \mathbb{R}^p$ désignent respectivement les vecteurs des bruits d'état et de sortie, supposés bornés par des bornes connues $\overline{\omega} \in \mathbb{R}^n_+$ et $\overline{\delta} \in \mathbb{R}^p_+$, telles que $-\overline{\omega} \leq \omega(t) \leq \overline{\omega}$ et $-\overline{\delta} \leq \delta(t) \leq \overline{\delta}$, $\forall t \geq t_0$. Les matrices sont définies par $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $D \in \mathbb{R}^{n\times q}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$.

L'objectif est de construire un observateur intervalle qui estime les bornes supérieure $\overline{x}(t)$ et inférieure $\underline{x}(t)$ de l'état x du système (1.122).

1.4.3.2 Première approche

Nous présentons dans ce paragraphe, l'approche proposée dans [47].

Hypothèse 1.4. La dérivée du vecteur des bruits de mesure $\dot{\delta}$ est bornée par un vecteur constant et connu $\overline{\dot{\delta}} \in \mathbb{R}^p_+$ tel que :

$$-\overline{\dot{\delta}} \leq \dot{\delta}(t) \leq \overline{\dot{\delta}},\ \forall t \geq 0 \tag{1.123}$$

Hypothèse 1.5.

$$rang\,(CD) = rang\,(D) = q,\ q \leq p \tag{1.124}$$

Hypothèse 1.6. Il existe une matrice $W \in \mathbb{R}^{n\times p}$ telle que $I_p + CW$ est non singulière et la paire (PA, C) est détectable où $P = I_n + EC$ avec

$$E = -D\,(CD)^{\dagger} + W\left(I_p - CD\,(CD)^{\dagger}\right) \tag{1.125}$$

Hypothèse 1.7. Il existe un gain $K \in \mathbb{R}^{n\times p}$ et une matrice de transformation $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tels que la matrice $T\,(PA - KC)\,T^{-1}$ soit Hurwitz et Metzler.

Les hypothèses 1.4-1.7 permettent de garantir l'existence d'un observateur intervalle stable et de satisfaire les conditions de découplage des entrées inconnues ξ.

Sous l'Hypothèse 1.7, le changement de coordonnées $z(t) = Tx(t)$ transforme le système (1.122) sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = TAT^{-1}z(t) + TBu(t) + TD\xi(t) + T\omega(t) \\ y(t) = CT^{-1}z(t) + \delta(t) \\ \psi(t) = CT^{-1}z(t) \end{cases} \tag{1.126}$$

La solution proposée dans [47] est basée sur la connaissance de la dérivée du vecteur de mesure $y(t)$ ainsi que sur la connaissance de ses bornes supérieure et inférieure. Les auteurs proposent alors d'utiliser une approche par modes glissants d'ordre élevé [64, 65]

pour calculer la dérivée des "p" éléments $y_k(t)$, $k = \{1, \cdots, p\}$ du vecteur $y(t)$, supposés être "s" fois différentiables, i.e.

$$\begin{cases} \dot{q}_0^k(t) & = v_0^k(t) \\ v_0^k(t) & = q_1^k(t) - \lambda_0^k |q_0^k(t) - y_k(t)|^{\frac{s}{s+1}} sign(q_0^k(t) - y_k(t)) \\ \dot{q}_i^k(t) & = v_i^k(t) \\ v_i^k(t) & = q_{i+1}^k(t) - \lambda_i^k |q_i^k(t) - v_{i-1}^k(t)|^{\frac{s-i}{s-i+1}} sign(q_i^k(t) - v_{i-1}^k(t)) \\ \dot{q}_s^k(t) & = -\lambda_s^k sign(q_s^k(t) - v_{s-1}^k(t)) \end{cases} \tag{1.127}$$

où λ_j^k , $\forall j = \{0, \cdots, s\}$ sont des constantes positives qui peuvent être choisies en utilisant la procédure décrite dans [65].

L'utilisation d'un différentiateur HOSM (acronyme du terme anglo-saxion High-Order Sliding Mode) est compatible avec la conception d'un observateur intervalle puisqu'il est causal et garantit que l'erreur d'estimation est bornée après un instant fini $T > 0$. De plus, il est possible de calculer cette borne, comme le stipule le théorème suivant.

Théorème 1.7 ([65]). *Soit le signal $y_k : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ s fois différentiable et $-\overline{\delta} \leq \delta(t) \leq \overline{\delta}$ alors il existe un scalaire $0 \leq T < +\infty$ et des constantes $\mu_j^k > 0$, $j \in \{0, \cdots, s\}$ tels que pour tout $t \geq T$:*

$$\left| q_j^k(t) - \psi_k^{(j)}(t) \right| \leq \mu_j^k |\delta_k|^{\frac{s-j+1}{s+1}}, \ \forall j = \{0, \cdots, s\} \tag{1.128}$$

D'après le Théorème 1.7, il existe un instant $T \in \mathbb{R}_+$ tel que l'erreur d'estimation entre la $j^{\text{ème}}$ dérivée du signal ψ_k notée $\psi_k^{(j)}(t)$ et son estimée q_j^k satisfait la relation :

$$\left| q_j^k(t) - \psi_k^{(j)}(t) \right| \leq \mu_j^k \overline{\delta_k}^{\frac{s-j+1}{s+1}}, \ j \in \{0, \cdots, s\}, \ \forall t \geq T \tag{1.129}$$

Par conséquent, d'après la relation $\dot{y}(t) = q_1(t) + \dot{\delta}(t) - \epsilon(t)$ où $\epsilon(t) = q_1(t) - \dot{\psi}(t)$ alors

$$\underline{\dot{y}}(t) \leq \dot{y}(t) \leq \overline{\dot{y}}(t), \ \forall t \geq T \tag{1.130}$$

où $\underline{\dot{y}}(t) = q_1(t) - \overline{\dot{\delta}} - \mu_1 \overline{\delta}^{\frac{1}{2}}$, $\overline{\dot{y}}(t) = q_1(t) + \overline{\dot{\delta}} + \mu_1 \overline{\delta}^{\frac{1}{2}}$.

1.4.3.2.1 Structure de l'observateur intervalle

La structure de l'observateur intervalle proposée dans [47] est donnée par :

$$\begin{cases} \overline{z}(t) = & TNT^{-1}\overline{z}(t) + (TK)^+\overline{y}(t) + (TK)^-\underline{y}(t) + (TG)^+\overline{u}(t) + (TG)^-\underline{u}(t) \\ & +(-TE)^+\overline{\dot{y}}(t) + (-TE)^-\underline{\dot{y}}(t) + (TP)^+\overline{\omega} - (TP)^-\overline{\omega} \\ \underline{z}(t) = & TNT^{-1}\underline{z}(t) + (TK)^+\underline{y}(t) + (TK)^-\overline{y}(t) + (TG)^+\underline{u}(t) + (TG)^-\overline{u}(t) \\ & +(-TE)^+\underline{\dot{y}}(t) + (-TE)^-\overline{\dot{y}}(t) - (TP)^+\overline{\omega} + (TP)^-\overline{\omega} \end{cases} \tag{1.131}$$

où $\overline{y}(t) = y(t) + \overline{\delta}$, $\underline{y}(t) = y(t) - \overline{\delta}$, $K = L + NE$, $N = PA - KC$ et $G = PB$ avec $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$.

1.4.3.2.2 Conditions d'existence de l'observateur intervalle

Le théorème suivant, proposé dans [47], donne la preuve que le système d'équations (1.131) est un observateur intervalle.

Théorème 1.8 (Théorème 7 dans [47]). *Soient les conditions initiales du système* (1.131) $\underline{z}(0)$, $\overline{z}(0)$ *telles que :*

$$\underline{z}(0) \leq z(0) \leq \overline{z}(0) \tag{1.132}$$

Il existe un instant de temps $T \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq T < +\infty$ *tel que l'état* z, *solution du système* (1.126) *satisfait l'inégalité :*

$$\underline{z}(t) \leq z(t) \leq \overline{z}(t), \forall t \geq T \tag{1.133}$$

Démonstration. Soient les erreurs d'observations supérieure et inférieure définies par :

$$\begin{cases} \overline{e}_z(t) = \overline{z}(t) - z(t) \\ \underline{e}_z(t) = z(t) - \underline{z}(t) \end{cases} \tag{1.134}$$

Les dynamiques de $\overline{e}_z(t)$ et $\underline{e}_z(t)$ sont alors données par :

$$\begin{cases} \dot{\overline{e}}_z(t) = TNT^{-1}\overline{e}_z(t) + T\left(NP - PA + LC\right)T^{-1}z(t) - TPD\xi(t) + H_1(\cdot) \\ \dot{\underline{e}}_z(t) = TNT^{-1}\underline{e}_z(t) - T\left(NP - PA + LC\right)T^{-1}z(t) + TPD\xi(t) + H_2(\cdot) \end{cases} \tag{1.135}$$

$$\begin{aligned} \text{où } H_1(\cdot) =& (TG)^+(\overline{u}(t) - u(t)) - (TG)^-(u(t) - \underline{u}(t)) + (TP)^+(\overline{\omega} - \omega(t)) \\ & - (TP)^-(\overline{\omega} + \omega(t)) + (TK)^+(\overline{\delta} + \delta(t)) - (TK)^-(\overline{\delta} - \delta(t)) \\ & + (-TE)^+\zeta_1(t) - (-TE)^-\zeta_2(t) \\ H_2(\cdot) =& (TG)^+(u(t) - \underline{u}(t)) - (TG)^-(\overline{u}(t) - u(t)) + (TP)^+(\overline{\omega} + \omega(t)) \\ & - (TP)^-(\overline{\omega} - \omega(t)) + (TK)^+(\overline{\delta} - \delta(t)) - (TK)^-(\overline{\delta} + \delta(t)) \\ & + (-TE)^+\zeta_2(t) - (-TE)^-\zeta_1(t) \end{aligned}$$

avec $\zeta_1(t) = \overline{\dot{\delta}} - \dot{\delta}(t) + \mu_1\overline{\delta}^{\frac{1}{2}} + \epsilon(t)$ et $\zeta_2(t) = \overline{\dot{\delta}} + \dot{\delta}(t) + \mu_1\overline{\delta}^{\frac{1}{2}} - \epsilon(t)$. ■

Soient les contraintes algébriques :

$$\begin{cases} NP - PA + LC = N - PA + KC = 0 \\ PD = 0 \end{cases} \tag{1.136}$$

En considérant les expressions des matrices N, K et E alors les contraintes (1.136) sont réécrites sous une forme compacte décrite par l'équation :

$$\begin{bmatrix} N & K & E \end{bmatrix} \Sigma = \Theta \tag{1.137}$$

où $\Sigma = \begin{bmatrix} I_n & \mathbf{0} \\ C & \mathbf{0} \\ -CA & CD \end{bmatrix}$ et $\Theta = \begin{bmatrix} A & -D \end{bmatrix}$.

Sous l'Hypothèse 1.5, les solutions de l'équation (1.137) sont données par :

$$\begin{bmatrix} N & K & E \end{bmatrix} = \Theta\Sigma^\dagger + Z\left(I_{2n+p} - \Sigma\Sigma^\dagger\right) \tag{1.138}$$

où $\Sigma^{\dagger} = \begin{bmatrix} I_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ (CD)^{\dagger}CA & \mathbf{0} & (CD)^{\dagger} \end{bmatrix}$ et où $Z = \begin{bmatrix} Z_1 & K & W \end{bmatrix}$ est un degré de liberté.

Sous les contraintes (1.136) alors le système (1.135) est réduit à la forme :

$$\begin{cases} \overline{e}_z(t) = TNT^{-1}\overline{e}_z(t) + H_1(\cdot) \\ \underline{e}_z(t) = TNT^{-1}\underline{e}_z(t) + H_2(\cdot) \end{cases} \tag{1.139}$$

Il est facile de vérifier que $H_1(\cdot) \geq 0$ et $H_2(\cdot) \geq 0$. De plus, sous l'hypothèse 1.7 alors la matrice TNT^{-1} est Hurwitz et Metzler. Finalement, en considérant les conditions initiales (1.132), alors l'application du théorème 1.4 assure que :

$$\overline{e}_z(t) \geq 0 \text{ et } \underline{e}_z(t) \geq 0, \ \forall t \geq T \ \Leftrightarrow \ \underline{z}(t) \leq z(t) \leq \overline{z}(t), \ \forall t \geq T \tag{1.140}$$

L'application du Lemme 1.5 sur la relation $x(t) = T^{-1}z(t)$ permet alors d'obtenir un encadrement de l'état x du système (1.122), à chaque instant de temps, ce qui conduit au corollaire suivant :

Corollaire 1.1 (Corollaire 8 dans [47])**.** *Sous les conditions du théorème 1.8, l'état x du système (1.122) est borné tel que $\underline{x}(t) \leq x(t) \leq \overline{x}(t)$ avec :*

$$\begin{cases} \overline{x}(t) = R^{+}\overline{z}(t) - R^{-}\underline{z}(t) \\ \underline{x}(t) = R^{+}\underline{z}(t) - R^{-}\overline{z}(t) \end{cases} \tag{1.141}$$

avec $R = T^{-1}$.

1.4.3.3 Deuxième approche

Nous abordons ici les travaux présentés dans [48], basés sur les développements méthodologiques initalement présentés dans [53].

L'idée consiste à appliquer des transformations successives sur l'état et la sortie du système initial pour découpler l'influence du vecteur des entrées inconnues et assurer les propriétés de stabilité et de coopérativité des erreurs d'observation dans la nouvelle base. Contrairement à l'approche précédente, la connaissance de la dérivée des bruits de mesure et l'utilisation d'un différentiateur HOSM ne sont pas nécessaires.

Sous l'Hypothèse 1.5, il existe une transformation d'état (non-singulière) $x(t) = Tz(t)$, $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ où $T = \begin{bmatrix} N & D \end{bmatrix}$ avec $N \in \mathbb{R}^{n\times(n-q)}$ qui transforme le système (1.122) sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \tilde{A}z(t) + \tilde{B}u(t) + \tilde{D}\xi(t) + \tilde{\omega}(t) \\ y(t) = \tilde{C}z(t) + \delta(t) \end{cases} \tag{1.142}$$

où le vecteur $z(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix}$ avec $z_1(t) \in \mathbb{R}^{n-q}$, $z_2(t) \in \mathbb{R}^{q}$ et les matrices sont définies par $\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}$, $\tilde{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix}$, $\tilde{C} = CT = \begin{bmatrix} CN & CD \end{bmatrix}$, $\tilde{D} = T^{-1}D = \begin{bmatrix} 0 \\ I_q \end{bmatrix}$, $\tilde{\omega}(t) = T^{-1}\omega(t) = \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_1(t) \\ \tilde{\omega}_2(t) \end{bmatrix}$.

De plus il existe une transformation de sortie (non singulière) $U = \begin{bmatrix} CD & Q \end{bmatrix}$ où $Q \in \mathbb{R}^{p\times(p-q)}$ telle que $U^{-1} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$ avec $U_1 \in \mathbb{R}^{q\times p}$ $U_2 \in \mathbb{R}^{(p-q)\times p}$. La multiplication de y par U^{-1} conduit à :

$$\begin{cases} U_1 y(t) = U_1 CN z_1(t) + z_2(t) + U_1\delta(t) \\ U_2 y(t) = U_2 CN z_1(t) + U_2\delta(t) \end{cases} \tag{1.143}$$

En injectant $z_2(t) = U_1 y(t) - U_1 CN z_1(t) - U_1\delta(t)$ dans l'expression de z_1 du système (1.142) alors le système réduit (1.144) est obtenu :

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = \tilde{A}_1 z_1(t) + E_1 y(t) - E_1\delta(t) + \tilde{B}_1 u(t) + \tilde{\omega}_1(t) \\ \tilde{y}(t) = \tilde{C}_1 z_1(t) + U_2\delta(t) \end{cases} \tag{1.144}$$

avec $\tilde{A}_1 = \tilde{A}_{11} - \tilde{A}_{12}U_1 CN$, $E_1 = \tilde{A}_{12}U_1$, $\tilde{y}(t) = U_2 y(t)$, $\tilde{C}_1 = U_2 CN$.

L'application des transformations successives sur l'état et la sortie permet ainsi de réécrire le système initial (1.122), sous la forme réduite (1.144) qui ne dépend plus de l'entrée inconnue ξ. La connaissance de l'état z_2 est déduite de la relation $z_2(t) = U_1 y(t) - U_1 CN z_1(t) - U_1\delta(t)$.

Hypothèse 1.8. La paire $\left(\tilde{A}_1, \tilde{C}_1\right)$ est détectable.

L'hypothèse 1.8 assure l'existence d'une matrice de transformation $P \in \mathbb{R}^{(n-q)\times(n-q)}$ et d'un gain $L \in \mathbb{R}^{(n-q)\times(p-q)}$ tels que la matrice $P\left(\tilde{A}_1 - L\tilde{C}_1\right)P^{-1}$ soit Hurwitz et Metzler.

Par conséquent, le changement de coordonnées $r_1(t) = Pz_1(t)$ transforme le système (1.144) sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{r}_1(t) = P\tilde{A}_1 P^{-1} r_1(t) + PE_1 y(t) - PE_1\delta(t) + P\tilde{B}_1 u(t) + P\tilde{\omega}_1(t) \\ \tilde{y}(t) = \tilde{C}_1 P^{-1} r_1(t) + U_2\delta(t) \end{cases} \tag{1.145}$$

L'objectif est maintenant de construire un observateur intervalle pour estimer une borne supérieure $\overline{r}_1 \in \mathbb{R}^{n-q}$ et une borne inférieure $\underline{r}_1 \in \mathbb{R}^{n-q}$ de l'état r_1 du système (1.145). La connaissance des transformations successives permettra de déduire un encadrement pour l'état x du système (1.122).

1.4.3.3.1 Structure de l'observateur intervalle

La structure de l'observateur intervalle proposé dans [48], est donnée par

$$\begin{cases} \dot{\overline{r}}_1(t) = J\overline{r}_1(t) + (PL)^*\overline{\tilde{Y}}(t) + (PE_1)^*\overline{Y}(t) + (-PE_1)^*\overline{\Delta} + (P\tilde{B}_1)^*\overline{U}(t) + P^*\overline{\tilde{\Omega}}_1 \\ \dot{\underline{r}}_1(t) = J\underline{r}_1(t) + (PL)^*\underline{\tilde{Y}}(t) + (PE_1)^*\underline{Y}(t) + (-PE_1)^*\underline{\Delta} + (P\tilde{B}_1)^*\underline{U}(t) + P^*\underline{\tilde{\Omega}}_1 \end{cases} \tag{1.146}$$

avec $J = P\left(\tilde{A}_1 - L\tilde{C}_1\right)P^{-1}$, $\overline{\tilde{Y}}(t) = \begin{bmatrix} \overline{\tilde{y}}(t) \\ \underline{\tilde{y}}(t) \end{bmatrix}$, $\underline{\tilde{Y}}(t) = \begin{bmatrix} \underline{\tilde{y}}(t) \\ \overline{\tilde{y}}(t) \end{bmatrix}$, $\overline{Y}(t) = \begin{bmatrix} \overline{y}(t) \\ \underline{y}(t) \end{bmatrix}$, $\underline{Y}(t) = \begin{bmatrix} \underline{y}(t) \\ \overline{y}(t) \end{bmatrix}$, $\overline{\Delta} = \begin{bmatrix} \overline{\delta} \\ -\underline{\delta} \end{bmatrix}$, $\underline{\Delta} = \begin{bmatrix} -\overline{\delta} \\ \underline{\delta} \end{bmatrix}$, $\overline{U}(t) = \begin{bmatrix} \overline{u}(t) \\ \underline{u}(t) \end{bmatrix}$, $\underline{U}(t) = \begin{bmatrix} \underline{u}(t) \\ \overline{u}(t) \end{bmatrix}$, $\overline{\tilde{\Omega}}_1 = \begin{bmatrix} \overline{\tilde{\omega}}_1 \\ \underline{\tilde{\omega}}_1 \end{bmatrix}$, $\underline{\tilde{\Omega}}_1 = \begin{bmatrix} \underline{\tilde{\omega}}_1 \\ \overline{\tilde{\omega}}_1 \end{bmatrix}$.
L'opérateur $\bullet^*$ est défini par $\bullet^* = \begin{bmatrix} \bullet^+ & \bullet^- \end{bmatrix}$.

1.4.3.3.2 Conditions d'existence de l'observateur intervalle

Le théorème suivant permet d'établir les conditions d'existence de l'observateur intervalle.

Théorème 1.9 (Théorème 2 dans [48]). *En supposant que* $\underline{r}_1(t_0) \leq r_1(t_0) \leq \overline{r}_1(t_0)$ *et en considérant l'observateur intervalle* (1.146) *alors l'état* $r_1(t)$*, solution du système* (1.145)*, satisfait :*

$$r_1(t) \in \left[\underline{r}_1(t), \overline{r}_1(t)\right], \ \forall t \geq t_0. \tag{1.147}$$

De plus, il existe une constante $\rho_{r_1} > 0$ *telle que :*

$$\lim_{t \to +\infty} \begin{bmatrix} \overline{r}_1(t) - r_1(t) \\ r_1(t) - \underline{r}_1(t) \end{bmatrix} < \rho_{r_1}. \tag{1.148}$$

Le corollaire suivant, qui se déduit de ce théorème et du Lemme 1.5 appliqué à la relation $z_1(t) = P^{-1} r_1(t)$, permet de déterminer un encadrement de l'état $z_1(t)$.

Corollaire 1.2 (Corollaire 1 dans [48]). *Sous les conditions du Théorème 1.9, l'état* z_1 *du système* (1.144) *est borné tel que* $\underline{z}_1(t) \leq z_1(t) \leq \overline{z}_1(t)$ *avec*

$$\begin{cases} \overline{z}_1(t) = R^+ \overline{r}_1(t) - R^- \underline{r}_1(t) \\ \underline{z}_1(t) = R^+ \underline{r}_1(t) - R^- \overline{r}_1(t) \end{cases} \tag{1.149}$$

où $R = P^{-1}$.

La connaissance du domaine d'appartenance du vecteur z_1 permet de déduire les bornes supérieure et inférieure de l'état x du système (1.122), en exploitant le Lemme 1.5 et les relations $x(t) = Tz(t)$ avec $z_2(t) = U_1 y(t) - U_1 CN z_1(t) - U_1 \delta(t)$.

Théorème 1.10 (Théorème 3 dans [48]). *En supposant que les conditions du Théorème 1.9 sont satisfaites et* $x(t_0) \in \left[\underline{x}(t_0), \overline{x}(t_0)\right]$ *alors :*

$$x(t) \in \left[\underline{x}(t), \overline{x}(t)\right], \ \forall t \geq t_0. \tag{1.150}$$

De plus, il existe une constante $\rho_x > 0$ *telle que :*

$$\lim_{t \to +\infty} \begin{bmatrix} \overline{x}(t) - x(t) \\ x(t) - \underline{x}(t) \end{bmatrix} < \rho_x \tag{1.151}$$

où $\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} \underline{x}_1(t) \\ \underline{x}_2(t) \end{bmatrix}$ *et* $\overline{x}(t) = \begin{bmatrix} \overline{x}_1(t) \\ \overline{x}_2(t) \end{bmatrix}$ *tels que :*

$$\begin{cases} \overline{x}_1(t) = T_{11}^* \overline{Z}_1(t) + (T_{12}U_1)^* \overline{Y}(t) + (-T_{12}U_1CN)^* \overline{Z}_1(t) + (-T_{12}U_1)^* \overline{\Delta} \\ \underline{x}_1(t) = T_{11}^* \underline{Z}_1(t) + (T_{12}U_1)^* \underline{Y}(t) + (-T_{12}U_1CN)^* \underline{Z}_1(t) + (-T_{12}U_1)^* \underline{\Delta} \\ \overline{x}_2(t) = T_{21}^* \overline{Z}_1(t) + (T_{22}U_1)^* \overline{Y}(t) + (-T_{22}U_1CN)^* \overline{Z}_1(t) + (-T_{22}U_1)^* \overline{\Delta} \\ \underline{x}_2(t) = T_{21}^* \underline{Z}_1(t) + (T_{22}U_1)^* \underline{Y}(t) + (-T_{22}U_1CN)^* \underline{Z}_1(t) + (-T_{22}U_1)^* \underline{\Delta}. \end{cases} \tag{1.152}$$

avec $\overline{Z}_1(t) = \begin{bmatrix} \overline{z}_1(t) \\ \underline{z}_1(t) \end{bmatrix}$, $\underline{Z}_1(t) = \begin{bmatrix} \underline{z}_1(t) \\ \overline{z}_1(t) \end{bmatrix}$ *et les matrices* T_{11}, T_{12}, T_{21}, T_{22} *sont issues de la matrice de transformation* T *telle que* $T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$.

1.4.4 Synthèse sous contrainte de gain $\mathcal{L}_\infty$

Les approches explicitées précédemment, permettent de satisfaire les contraintes de robustesse vis-à-vis des entrées de perturbations exogènes, par découplage "parfait" de celles ci. Une autre stratégie consiste à minimiser l'effet de ces dernières sur les erreurs d'observation. Ce sont les approches basées sur l'utilisation de normes, parfois appelées les approches par découplage approximatif (traduction du terme anglo-saxon "almost decoupling").

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons aux approches basées sur le gain $\mathcal{L}_\infty$, c'est à dire qui considèrent des contraintes de robustesse de type "pire amplitude". Très peu de travaux existent dans ce contexte. Nous présentons ceux proposés dans [15].

1.4.4.1 Formulation du problème

Soit le modèle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Ew(t) \\ y(t) = Cx(t) + Fw(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1.153}$$

où $x, x_0 \in \mathbb{R}^n$, $w \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^p$ désignent respectivement, l'état, l'entrée de perturbations et la sortie du système. w est supposé borné par des bornes connues $\underline{w}(t), \overline{w}(t) \in \mathcal{L}_\infty^m$, i.e $w(t) \in [\underline{w}(t), \overline{w}(t)]$ pour tout $t \geq 0$.

L'objectif consiste à déterminer les bornes inférieure et supérieure de l'état x du système (1.153) en utilisant un observateur intervalle donné par :

$$\begin{cases} \dot{\overline{x}}(t) = A\overline{x}(t) + E\overline{w}(t) + L\overline{m}(t) \\ \overline{m}(t) = y(t) - C\overline{x}(t) - F\overline{w}(t) \\ \overline{x}(0) = \overline{x}_0 \end{cases} \\ \begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + E\underline{w}(t) + L\underline{m}(t) \\ \underline{m}(t) = y(t) - C\underline{x}(t) - F\underline{w}(t) \\ \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \end{cases} \tag{1.154}$$

En définissant les erreurs d'observation $\overline{e}(t) = \overline{x}(t) - x(t)$ et $\underline{e}(t) = x(t) - \underline{x}(t)$, alors il vient :

$$\begin{cases} \dot{\overline{e}}(t) = (A - LC)\overline{e}(t) + (E - LF)\overline{\delta}(t) \\ \overline{\zeta}(t) = M_1\overline{e}(t) \\ \dot{\underline{e}}(t) = (A - LC)\underline{e}(t) + (E - LF)\underline{\delta}(t) \\ \underline{\zeta}(t) = M_2\underline{e}(t) \end{cases} \tag{1.155}$$

où $\overline{\delta}(t) = \overline{w}(t) - w(t)$ et $\underline{\delta}(t) = w(t) - \underline{w}(t)$. Les matrices $M_1, M_2 \in \mathbb{R}_+^{q \times n}$.

Le problème de synthèse de l'observateur se formule alors comme suit :

Problème 1.2 (Problème 8 dans [15]). *Trouver un observateur intervalle de la forme (1.154) tel que :*

a) La matrice $A - LC$ est Metzler et la matrice $E - LF$ est non négative.

b) La matrice $A - LC$ est Hurwitz.

c) Le gain $\mathcal{L}_\infty$ des transferts $\underline{\delta} \mapsto \underline{\zeta}$ et $\overline{\delta} \mapsto \overline{\zeta}$ est minimal.

1.4.4.2 Résolution du problème

Afin de développer un cadre générique pour des problèmes similaires au Problème 1.2, les auteurs se proposent de raisonner sur le modèle suivant :

$$G : \begin{cases} \dot{\xi}(t) = (A - LC)\xi(t) + (E - LF)\omega(t) \\ \chi(t) = M\xi(t) + N\omega(t) \end{cases} \tag{1.156}$$

où $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\omega \in \mathbb{R}^m_+$ et $\chi \in \mathbb{R}^q$ et les matrices sont de dimensions appropriées. Il est supposé que les matrices M et N sont non-négatives et la matrice M est non nulle.

Dans cette formulation, (ξ, ω, χ) va jouer le rôle successif de $(\overline{e}, \overline{\delta}, \overline{\zeta})$, puis de $(\underline{e}, \underline{\delta}, \underline{\zeta})$ dans le Problème 1.2. Le côté générique de la définition de G vient du fait qu'il existe un couplage entre la sortie χ et l'entrée ω, ce qui n'est pas le cas dans le Problème 1.2. En d'autres termes, les développements méthodologiques proposés dans [15] sont valables pour les systèmes propres et pas uniquement strictement propres.

L'objectif consiste à résoudre le problème

$$\gamma_{opt} = \inf_{L \in \mathcal{L}} \|G_{\omega \mapsto \chi}\|_{\mathcal{L}_\infty} \tag{1.157}$$

où

$$\mathcal{L} = \left\{ L \in \mathbb{R}^{n \times p} \mid A - LC \text{ est Hurwitz et Metzler et } E - LF \geq 0 \right\} \tag{1.158}$$

et à déterminer la matrice L_{opt} associée à la valeur minimale du critère, i.e. γ_{opt}.

La solution à ce problème est donnée par le théorème suivant.

Théorème 1.11 (Théorème 14 dans [15]). *Les énoncés suivants sont équivalents :*

(a) Il existe un observateur intervalle de gain $\mathcal{L}_\infty$ optimal de la forme (1.154) pour le système (1.153),

(b) Pour tout $(M, N) \in \mathbb{R}^{q \times n}_+ \times \mathbb{R}^{q \times m}_+$,

$$L_{opt}(G(\mathbb{1}_n^T, \mathbb{1}_m^T)) \in \mathcal{L}_{opt}(G(M, N)) \tag{1.159}$$

De plus, le gain optimal est donné par $L_{opt}(G(\mathbb{1}_n^T, \mathbb{1}_m^T)) = (X_{opt})^{-1} U_{opt}$ où la paire (X_{opt}, U_{opt}) désigne la solution optimale au programme linéaire

$$\inf_{X, U, \alpha, \gamma} \gamma \tag{1.160}$$

sous les contraintes

$$\begin{bmatrix} \mathbb{1}_n \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} XA - UC & (XE - UF)\mathbb{1}_m \\ \mathbb{1}_n^T & q - \gamma \end{bmatrix} < 0, \tag{1.161}$$

$$XA - UC + \alpha I_n \geq 0, \tag{1.162}$$

$$XE - UF \geq 0 \tag{1.163}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$, $U \in \mathbb{R}^{n \times p}$ et $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est diagonale, $X\mathbb{1}_n > 0$ et où $\gamma_{opt} := \gamma_{opt}(G(M, N))$ et $L_{opt} := L_{opt}(G(M, N))$.

Ce théorème montre que résoudre le Problème 1.2 est équivalent à résoudre un problème d'optimisation sous contraintes LMI.

1.5 Observateurs intervalles pour les systèmes LTV

Dans les paragraphes précédents, nous avons dressé un panorama relativement exhaustif des méthodes de synthèse d'observateurs intervalles pour la classe des systèmes LTI. Nous proposons maintenant d'étudier les solutions qui existent dans la litérature, pour la classe des systèmes LTV (acronyme du terme anglo-saxon Linear Time Varying).

Contrairement aux systèmes LTI, les systèmes LTV permettent de tenir compte de variations de la dynamique du système au cours du temps. Un modèle LTV est caractérisé par une représentation d'état où les matrices dépendent de la variable du temps t :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases} \tag{1.164}$$

De manière similaire aux approches pour les systèmes LTI, des techniques par changement de base d'état invariant et variant dans le temps ont été proposées pour la synthèse d'observateurs intervalles. Nous présentons ici ces approches.

1.5.1 Approche par changement de coordonnées invariant dans le temps

Il existe relativement peu de travaux qui abordent le problème de synthèse d'observateurs intervalles par changement de coordonnées invariant dans le temps. Nous proposons de rappeler ici les travaux présentés dans [33].

1.5.1.1 Formulation du problème

Soit le modèle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t,y,u)x(t) + f(t,x,u,\theta) \\ y(t) = C(t,u)x(t) \end{cases} \tag{1.165}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^p$ désignent respectivement, l'état, l'entrée et la sortie du système. $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^q$ est un vecteur de paramètres inconnus appartenant à un compact Θ connu *a priori*. Les matrices du modèle (1.165) sont telles que $A : \mathbb{R}^{p+m+1} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $C : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^{p\times n}$ et la fonction $f : \mathbb{R}^{n+m+q+1} \to \mathbb{R}^n$ est donnée.

Comme on pourra le constater dans la définition du modèle (1.165), le bruit de mesure n'est pas considéré.

Les hypothèses suivantes sont faites :

Hypothèse 1.9. L'état x, l'entrée u et la sortie y sont bornées, c.-à-d. $\|x\|_{\mathcal{L}_\infty} \leq X$, $\|u\|_{\mathcal{L}_\infty} \leq U$ et $\|y\|_{\mathcal{L}_\infty} \leq Y$ pour des constantes $X > 0$, $U > 0$, $Y > 0$ données.

Hypothèse 1.10. Soit l'inégalité $\underline{x} \leq x \leq \overline{x}$ pour des vecteurs $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ donnés alors il est possible de construire deux fonctions $\overline{f} : \mathbb{R}^{2n+m+1} \to \mathbb{R}^n$ et $\underline{f} : \mathbb{R}^{2n+m+1} \to \mathbb{R}^n$ telles que :

$$\underline{f}\,(t,\underline{x},\overline{x},u) \leq f\,(t,x,u,\theta) \leq \overline{f}\,(t,\underline{x},\overline{x},u)\,,\ \forall t \geq 0,\ \|u\|_{\mathcal{L}_\infty} \leq U,\ \theta \in \Theta.$$

Hypothèse 1.11. Il existe des fonctions matricielles $L : \mathbb{R}^{p+m+1} \to \mathbb{R}^{n\times p}$, $P : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$ avec $P(\cdot) = P(\cdot)^T \succ 0$ telles que pour tout $t \geq 0$, $\|u\|_{\mathcal{L}_\infty} \leq U$, $\|y\|_{\mathcal{L}_\infty} \leq Y$:

$$\begin{gathered} p_1 I_n \preceq P(t) \preceq p_2 I_n,\ p_1, p_2 > 0, \\ \dot{P}(t) + D(t,y,u)^T P(t) + P(t) D(t,y,u) + P(t)^2 + Q \preceq 0, \\ D(t,y,u) = A(t,y,u) - L(t,y,u)C(t,u),\ Q = Q^T \succ 0. \end{gathered}$$

1.5.1.2 Structure de l'observateur intervalle

Sous les hypothèses 1.9-1.11 et sous l'hypothèse qu'il existe une matrice L telle que la matrice D soit Metzler, alors un observateur intervalle basé sur la structure de Luenberger peut être construit tel que :

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = A(t,y,u)\underline{x}(t) + \underline{f}\,(t,\underline{x},\overline{x},u) + L(t,y,u)\,(y(t) - C(t,u)\underline{x}(t)) \\ \dot{\overline{x}}(t) = A(t,y,u)\overline{x}(t) + \overline{f}\,(t,\underline{x},\overline{x},u) + L(t,y,u)\,(y(t) - C(t,u)\overline{x}(t)) \end{cases} \tag{1.166}$$

Les conditions d'existence et de stabilité de cet observateur sont présentées dans le Théorème 3 de [33].

L'hypothèse Metzler faite sur la matrice D peut être relaxée en utilisant le Lemme 1.9 lorsque celle-ci est constante. En effet, sous l'Hypothèse 1.11 la matrice D est Hurwitz et le changement de coordonnées invariant dans le temps T assure que $T^{-1}DT$ est Metzler, tout en conservant la propriété Hurwitz de D.

Dans le cas d'une matrice variable $D(t,y,u)$, le lemme suivant permet de proposer une solution :

Lemme 1.10 (Lemme 4 dans [33]). *Soit une matrice variable $Z \in \Xi \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ avec $\Xi = \{\ Z \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \ Z_a - \Delta \leq Z \leq Z_a + \Delta\ \}$, pour deux matrices $Z_a = Z_a^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $\Delta \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$. Si pour une constante $\mu \in \mathbb{R}$ et une matrice diagonale $\Upsilon \in \mathbb{R}^{n\times n}$, la matrice Metzler $R = \mu E_n - \Upsilon$ possède les mêmes valeurs propres que la matrice Z_a, alors il existe une matrice orthogonale $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telle que toutes les matrices $S^T Z S$ soient Metzler avec $Z \in \Xi$, sous la condition donnée par $\mu > n\,\|\Delta\|_{max}$ où $\|\Delta\|_{max} = \max_{ij} |\Delta_{ij}|$.*

Pour la suite, l'hypothèse suivante est faite :

Hypothèse 1.12. La matrice $D(t,y,u) \in \Xi$ pour $t \geq 0$, $\|u\|_{\mathcal{L}_\infty} \leq U$, $\|y\|_{\mathcal{L}_\infty} \leq Y$ telle que

$$\Xi = \left\{\ D \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid D_a - \Delta \leq D \leq D_a + \Delta\ \right\},\ D_a = D_a^T \in \mathbb{R}^{n\times n},\quad \Delta \in \mathbb{R}_+^{n\times n}.$$

Pour une constante réelle $\mu > n\,\|\Delta\|_{max}$ et une matrice diagonale $\Upsilon \in \mathbb{R}^{n\times n}$, la matrice Metzler $R = \mu E_n - \Upsilon$ possède les mêmes valeurs propres que la matrice Z_a.

L'Hypothèse 1.12 implique l'existence d'une matrice orthogonale $S = S^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telle que la matrice $S^T D(t,y,u) S$ soit Metzler pour tout $D(t,y,u) \in \Xi$.

En considérant le changement de coordonnées invariant dans le temps $z(t) = S^T x(t)$ alors le système (1.165) peut être réécrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = S^T A(t,y,u) S z(t) + \phi(t,z,u,\theta) \\ y(t) = C(t,u) S z(t) \end{cases} \tag{1.167}$$

où $\phi(t,z,u,\theta) = S^T f(t,Sz,u,\theta)$.

Dans la nouvelle base, les bornes supérieure $\overline{z} \in \mathbb{R}^n$ et inférieure $\underline{z} \in \mathbb{R}^n$ de l'état z du système (1.167) sont estimées en utilisant un observateur intervalle décrit par :

$$\begin{cases} \dot{\underline{z}}(t) = S^T A(t,y,u) S\underline{z}(t) + \underline{\phi}\,(t,\underline{z},\overline{z},u) + S^T L(t,y,u)\,(y(t) - C(t,u)S\underline{z}(t)) \\ \dot{\overline{z}}(t) = S^T A(t,y,u) S\overline{z}(t) + \overline{\phi}\,(t,\underline{z},\overline{z},u) + S^T L(t,y,u)\,(y(t) - C(t,u)S\overline{z}(t)) \end{cases} \tag{1.168}$$

où $\underline{\phi}\,(t,\underline{z},\overline{z},u) = \left(S^T\right)^+ \underline{f}\,(t,\underline{x},\overline{x},u) - \left(S^T\right)^- \overline{f}\,(t,\underline{x},\overline{x},u)\,,$

$\overline{\phi}\,(t,\underline{z},\overline{z},u) = \left(S^T\right)^+ \overline{f}\,(t,\underline{x},\overline{x},u) - \left(S^T\right)^- \underline{f}\,(t,\underline{x},\overline{x},u)\,.$

avec $\underline{x}(t) = S^+\underline{z}(t) - S^-\overline{z}(t)$ et $\overline{x}(t) = S^+\overline{z}(t) - S^-\underline{z}(t)$.

Remarque 1.2. Les expressions $\underline{x}$, $\overline{x}$, $\underline{\phi}$ et $\overline{\phi}$ sont déduites de l'application du Lemme 1.5 sur les relations $x = Sz$ et $\phi(t,z,u,\theta) = S^T f(t,x,u,\theta)$.

Finalement, les conditions d'existence de l'observateur intervalle sont données dans le théorème suivant.

Théorème 1.12 (Théorème 5 dans [33])**.** *Soient les hypothèses 1.9-1.12. L'une des conditions suivantes étant vérifiée*

1. *Pour tout* $t \geq 0$, $\|u\|_{\mathcal{L}_\infty} \leq U$ *et tout* $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$\left\|\underline{f}\,(t,\underline{x},\overline{x},u)\right\|_2 < +\infty, \quad \left\|\overline{f}\,(t,\underline{x},\overline{x},u)\right\|_2 < +\infty$$

2. *Pour tout* $t \geq 0$, $\|x\|_{\mathcal{L}_\infty} \leq X$, $\|u\|_{\mathcal{L}_\infty} \leq U$, $\theta \in \Theta$ *et tout* $\underline{z} \in \mathbb{R}^n$, $\overline{z} \in \mathbb{R}^n$,

$$\left\|\phi\,(t,z,u,\theta) - \underline{\phi}\,(t,\underline{z},\overline{z},u)\right\|_2^2 + \left\|\overline{\phi}\,(t,\underline{z},\overline{z},u) - \phi\,(t,z,u,\theta)\right\|_2^2 \leq \beta\,\|z-\underline{z}\|_2^2 + \beta\,\|\overline{z}-z\|_2^2 + \alpha,$$

où $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\beta \in \mathbb{R}_+$ *et* $\beta I_n - S^T Q S + R \preceq 0$, $R = R^T \succ 0$.

il vient que les vecteurs $\underline{x}$ *et* $\overline{x}$ *dans* (1.168) *sont finis pour tout* $t > 0$.

De plus, sous la condition $\underline{z}(0) \leq z(0) \leq \overline{z}(0)$ *alors l'état* x *du système* (1.165) *est borné tel que :*

$$\underline{x}(t) \leq x(t) \leq \overline{x}(t) \tag{1.169}$$

La construction de l'observateur intervalle (1.168) repose alors sur la procédure suivante : Dans un premier temps, un gain L est choisi de manière à satisfaire l'Hypothèse 1.11. Finalement, s'il est possible de déterminer des matrices D_a et Δ vérifiant l'Hypothèse 1.12 pour la matrice $D(t,y,u)$, alors il existe une transformation orthogonale S telle que $S^T D(t,y,u) S$ soit Hurwitz et Metzler pour tout $D(t,y,u) \in \Xi$. L'observateur intervalle (1.168) peut alors être construit.

1.5.2 Approche par changement de coordonnées variant dans le temps

Parmi les limitations de la méthode par changement de coordonnées invariant dans le temps présentée précédemment, on peut citer les suivantes :

- il n'existe pas de méthode générique et systématique permettant de déterminer un gain L et un changement de coordonnées S tels que la matrice $S^T\left(A(t)-L(t)C(t)\right)S$ soit Hurwitz et Metzler ;
- la matrice $D(t)$ est supposée appartenir à un domaine de faible amplitude.

Afin de palier ces limitations, une approche par changement de coordonnées variant dans le temps a été proposée dans [95]. Nous proposons ici d'expliciter les grandes lignes de cette approche.

1.5.2.1 Formulation du problème

Soit le système décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + \varphi(t) \\ x(0) \in \left[\underline{x}(0), \overline{x}(0)\right] \\ \forall t,\ f(t) \in \left[\underline{f}(t), \overline{f}(t)\right],\ \varphi(t) \in \left[\underline{\varphi}(t), \overline{\varphi}(t)\right] \end{cases} \tag{1.170}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $f \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^p$ et $\varphi \in \mathbb{R}^p$ désignent respectivement les vecteurs d'état, d'entrées inconnues bornées, de la sortie et des bruits de mesure bornés du système. Les matrices sont définies par : $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{p\times n}$.

Hypothèse 1.13. Il existe des fonctions matricielles $L_{obs} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times p}$, $P : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$ avec $P(t) = P(t)^T \succ 0$ telles que pour tout $t \geq 0$:

$$\dot{P}(t) + D(t)^T P(t) + P(t)D(t) \prec 0,$$

où $D(t) = A(t) - L_{obs}(t)C(t)$.

L'Hypothèse 1.13 permet d'assurer la stabilité du système $\dot{x}(t) = D(t)x(t)$ par l'utilisation d'une fonction de Lyapunov $V(t) = x^T(t)P(t)x(t)$.

Le système (1.170) peut être réécrit, en introduisant le gain L_{obs}, sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = D(t)x(t) + \phi(t) \\ y(t) = C(t)x(t) + \varphi(t) \end{cases} \tag{1.171}$$

où $D(t) = A(t) - L_{obs}(t)C(t)$ et $\phi(t) = f(t) + L_{obs}(t)\left(y(t) - \varphi(t)\right)$.

La construction d'un observateur intervalle pour le système (1.170) repose sur un changement de coordonnées variant dans le temps qui transforme la matrice $D(t)$ en une matrice Metzler dans le nouvelle base.

1.5.2.2 Transformation d'une matrice quelconque variant dans le temps en matrice Metzler

Le changement de coordonnées proposé dans [95] est basé sur la notion de transformation par D-similarité développée dans [102].

Lemme 1.11 ([102]). *Soient deux matrices $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $B(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. S'il existe une matrice $L(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ avec $det(L(t)) \equiv constant \neq 0$ telle que :*

$$B(t) = L(t)^{-1}\left(A(t)L(t) - \dot{L}(t)\right) \tag{1.172}$$

alors les matrices A et B sont dites D-similaires par la transformation de D-similarité L.

Lemme 1.12 (Lemme 2.1 dans [103]). *Deux matrices $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $B(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sont D-similaires si :*

$$tr(A(t)) = tr(B(t)) \tag{1.173}$$

Par la suite, les travaux développés dans [103, 104] ont montré qu'il existe un changement de coordonnées composé de transformations successives convertissant, dans la nouvelle base, une matrice variant dans le temps $D(t)$ en une matrice Metzler $\Gamma(t)$ de structure

$$\Gamma(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1(t) & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2(t) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n(t) \end{bmatrix} \tag{1.174}$$

où λ_i, $i \in \{1, \cdots, n\}$ représentent les D-valeurs propres essentielles (ED-eigenvalues [3]).

La première étape du processus consiste à transformer la matrice $D(t)$ en une matrice compagne $\tilde{C}(t)$. Cette transformation, détaillée dans le Lemme 1.13 et la Proposition 1.3 ci-après, est assurée par l'utilisation de deux transformations successives, à savoir la transformation de $D(t)$ en une matrice quasi-compagne $Q(t)$ et la transformation de $Q(t)$ en $\tilde{C}(t)$.

Définition 1.17. Une matrice $\tilde{C}(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est sous une forme canonique compagne si et seulement si elle s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} \tilde{C}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -\beta_1(t) & -\beta_2(t) & \cdots & \cdots & -\beta_n(t) \end{bmatrix} \\ &= comp([-\beta_1(t), -\beta_2(t), \cdots, -\beta_n(t)]) \end{aligned} \tag{1.175}$$

Définition 1.18 (Définition 5.4 dans [103]). Une matrice $Q(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est dite de forme quasi-compagne s'il existe une matrice canonique compage $\tilde{C}(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et une fonction scalaire $\xi(t) \in \mathbb{R}$ telles que :

$$Q(t) = \tilde{C}(t) - \xi(t)I_n \tag{1.176}$$

Pour la suite, nous considérons les opérateurs suivants.

Définition 1.19 (Définition 5.3 dans [103]). Soient une matrice $D(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et un vecteur $b(t) \in \mathbb{R}^n$ alors :

3. La définition est présentée dans le Lemme 3.1 de [103]

(i) l'opérateur $\mathcal{P}_D$ est défini par :

$$\mathcal{P}_D\{x\} = D(t)x - \dot{x} \tag{1.177}$$

(ii) l'orbite de la paire $(\mathcal{P}_D, b(t))$, notée $orb\,(\mathcal{P}_D, b(t))$ est définie comme la matrice $n \times n$ telle que :

$$orb\,(\mathcal{P}_D, b(t)) = \left[b(t) \mid \mathcal{P}_D(b(t)) \mid \mathcal{P}_D^2(b(t)) \mid \cdots \mid \mathcal{P}_D^{n-1}(b(t))\right] \tag{1.178}$$

où $\mathcal{P}_D^k = \mathcal{P}_D\mathcal{P}_D^{k-1}$ et $\left[\cdots \mid \cdots\right]$ désigne l'opérateur de concaténation horizontale.

Le processus de transformation d'une matrice $D(t)$ en une matrice quasi-compagne $Q(t)$ est présenté dans le Lemme 1.13.

Lemme 1.13 (Lemme 4 dans [95]). *Soit une matrice $K(t) = orb\left(\mathcal{P}_{D(t)}, b(t)\right)$ où $b(t) \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur réel tel que :*

$$det\,(K(t)) = \rho(t) \neq 0 \tag{1.179}$$

et soit e_n le $n^{ème}$ vecteur colonne de la matrice identité I_n et $\tilde{C}(t)$ est définie dans (1.175). Alors la matrice $D(t)$ peut se transformer sous une forme quasi-compagne $Q(t)$ définie par :

$$Q(t) = L_0(t)^{-1}\left(D(t)L_0(t) - \dot{L}_0(t)\right) = \tilde{C}(t) - \xi(t)I_n \tag{1.180}$$

où

$$\begin{aligned} L_0(t) &= \rho(t)^{\frac{-1}{n}} K(t)H^{-1}(\beta(t)), \\ \beta(t) &= \begin{bmatrix}\beta_1(t) & \beta_2(t) & \cdots & \beta_n(t)\end{bmatrix}, \\ H(\beta(t)) &= orb(\mathcal{P}_{\tilde{C}}, e_n), \\ \xi(t) &= -\frac{1}{n}\dot{\rho}(t)\rho^{-1}(t), \end{aligned}$$

et les fonctions β_i, $i \in \{1, \cdots, n\}$ sont calculées en résolvant l'équation

$$H(\beta(t))K^{-1}(t)\left(D(t)K(t) - \dot{K}(t)\right)e_n = \mathcal{P}_{\tilde{C}}^n\{e_n\}. \tag{1.181}$$

Le Lemme 1.13 assure l'existence d'un premier changement de coordonnées $L_0(t)$ qui transforme la matrice $D(t)$ en une matrice quasi-compagne $Q(t)$. La transformation de la matrice Q(t) en une matrice compagne $\tilde{C}(t)$ est présentée dans la proposition suivante :

Proposition 1.3 (Proposition 2 dans [95]). *La matrice quasi-compagne $Q(t)$ peut se transformer en une matrice compagne $\tilde{C}(t)$ donnée par :*

$$\begin{aligned} \tilde{C}(t) &= R_n^{-1}(\xi(t))[Q(t)R_n(\xi(t)) - \dot{R}_n(\xi(t))] \\ &= Comp([-\alpha_{n,1}(t), -\alpha_{n,2}(t), \cdots, -\alpha_{n,n}(t)]) \end{aligned} \tag{1.182}$$

où

$$R_n(\xi(t)) = \begin{bmatrix} R_{n-1}^{-1}(\xi(t)) & 0_{n-1,1} \\ -\gamma_{n-1}R_{n-1}^{-1}(\xi(t)) & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} \tag{1.183}$$

avec

$$\begin{cases} R_1^{-1} = [1], \\ \forall n \geq 2,\ \gamma_{n-1} = \begin{bmatrix}\gamma_{n-1,1} & \gamma_{n-1,2} & \cdots & \gamma_{n-1,n-1}\end{bmatrix} \\ où \quad \gamma_{n-1,k} = \dot{\gamma}_{n-2,k} - \xi(t)\gamma_{n-2,k} + \gamma_{n-2,k-1},\ \forall k = 1, \cdots, n-1 \\ avec \quad \gamma_{j,0} = 0\ \gamma_{j,j+1} = 1,\ \forall j = 0, \cdots, n-1. \end{cases} \tag{1.184}$$

Les éléments $\alpha_{n,i}(t)$ de la matrice $\tilde{C}(t)$ peuvent être calculés de manière récursive en utilisant les $\lambda_i(t)$, $i \in \{1, \cdots, n\}$ (voir (1.174)) et la relation (1.185) avec $\alpha_{k,0} = 0$ et $\alpha_{k,k+1} = 1$ pour $k \in \{0, \cdots, n-1\}$ [103, 104] décrite par :

$$\alpha_{n,j}(t) = \dot{\alpha}_{n-1,j}(t) - \lambda_n(t)\alpha_{n-1,j}(t) + \alpha_{n-1,j-1}(t), \ j \in \{1, \cdots, n\}. \tag{1.185}$$

Le Théorème 1.13 détaille une solution pour transformer la matrice $D(t)$ en une matrice compagne $\tilde{C}(t)$ avec $R(\xi(t) = R_n(\xi(t)$.

Théorème 1.13 (Théorème 3 dans [95]). *La matrice de passage assurant la transformation de $D(t)$ en $\tilde{C}(t)$ est donnée par :*

$$L(t) = L_0(t)R(\xi(t)), \tag{1.186}$$

et l'expression de la matrice compagne $\tilde{C}(t)$ est décrite par :

$$\tilde{C}(t) = L^{-1}(t)\left(D(t)L(t) - \dot{L}(t)\right) \tag{1.187}$$

La dernière étape du processus consiste à transformer la matrice compagne $\tilde{C}(t)$ en une matrice Metzler $\Gamma(t)$. Le Théorème 1.14 propose une méthode de conception pour calculer la matrice de passage.

Théorème 1.14 (Théorème 4 dans [95]). *Toute matrice compagne $\tilde{C}(t)$ peut être transformée en une matrice Metzler $\Gamma(t)$ en utilisant le changement de variables donné par :*

$$\Gamma(t) = \left(P(t)\tilde{C}(t) + \dot{P}(t)\right)P^{-1}(t) \tag{1.188}$$

où la matrice de passage $P(t)$ est construite de manière récursive telle que :

$$\begin{cases} P_1(t) & = [1] \\ & \vdots \\ P_n(t) = & = \begin{bmatrix} P_{n-1}(t) & 0_{n-1,1} \\ \alpha_{n-1}(t) & 1 \end{bmatrix} \end{cases} \tag{1.189}$$

Le $j^{ème}$ élément $\alpha_{n-1,j}(t)$ dans le vecteur ligne $\alpha_{n-1}(t)$ est défini dans (1.185) comme une fonction explicite de $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $\cdots$, $\lambda_{n-1}(t)$ et de leurs dérivées.

Finalement, la transformation d'une matrice $D(t)$ en une matrice Metzler $\Gamma(t)$ est donnée par la proposition ci-dessous.

Proposition 1.4 (Proposition 3 dans [95]). *La transformation $D(t)$ en une matrice Metzler $\Gamma(t)$ définie dans (1.174) est assurée par les deux matrices de passage $L(t)$ et $P(t)$, données respectivement par (1.186) et (1.189), à travers la relation :*

$$\Gamma(t) = T(t)\left(D(t)T^{-1}(t) - \dot{T}(t)\right) \tag{1.190}$$

où $T(t) = P(t)L^{-1}(t)$.

1.5.2.3 Structure de l'observateur intervalle

Les développements présentés précédemment donnent les fondements méthodologiques qui permettent de transformer une matrice dépendant du temps, en une matrice Metzler. Nous allons voir maintenant comment ce résultat peut être utilisé pour synthétiser un observateur intervalle pour la classe des systèmes LTV, comme présenté dans [95].

Dans un premier temps, la démarche consiste à réécrire le modèle (1.170) sous la forme (1.171) en choisissant le gain $L_{obs}(t)$ tel que la matrice $D(t) = A(t) - L_{obs}(t)C(t)$ soit Hurwitz.

Dans un deuxième temps, le changement de coordonnées $z(t) = T(t)x(t)$, où la matrice $T(t) = P(t)L^{-1}(t)$ est calculée en suivant la méthode présentée dans le paragraphe 1.5.2.2, puis appliquée au modèle (1.171) pour assurer la coopérativité des erreurs d'observation.

Hypothèse 1.14 (Hypothèse 5 dans [95]). Supposons que $f(t) \in \left[\underline{f}(t), \overline{f}(t)\right]$, $\varphi(t) \in \left[\underline{\varphi}(t), \overline{\varphi}(t)\right]$, $\|y\|_{\mathcal{L}_\infty} \leq Y$, $\forall t \geq 0$, où la constante $Y > 0$ est connue et les fonctions $\underline{f}(t)$, $\overline{f}(t)$, $\underline{\varphi}(t)$, $\overline{\varphi}(t)$ sont bornées. De plus, il existe un scalaire $M_3 \in \mathbb{R}_+$ tel que, $\forall t \geq t_0$, $\|T(t)\|_{\mathcal{L}_\infty} \leq M_3$, $\|T^{-1}(t)\|_{\mathcal{L}_\infty} \leq M_3$.

La structure et les conditions d'existence de l'observateur intervalle sont présentées dans le théorème suivant :

Théorème 1.15 (Théorème 6 dans [95]). *Soient un système décrit par (1.170) et soit le changement de base $T(t)$ explicité précédemment. Sous les hypothèses 1.13 et 1.14, le système d'équations dynamiques*

$$\begin{cases} \dot{\underline{z}}(t) = \Gamma(t)\underline{z}(t) + \underline{\phi}_{obs}(t) + \underline{\Psi}_{obs}(t) + T_{obs}(t)y(t) \\ \dot{\overline{z}}(t) = \Gamma(t)\overline{z}(t) + \overline{\phi}_{obs}(t) + \overline{\Psi}_{obs}(t) + T_{obs}(t)y(t) \end{cases} \tag{1.191}$$

$$\underline{z}(t) \leq T(t)x(t) \leq \overline{z}(t), \ \forall t \geq t_0, \tag{1.192}$$

où $\underline{\phi}_{obs}(t) = T^+(t)\underline{f}(t) - T^-(t)\overline{f}(t)$, $\overline{\phi}_{obs}(t) = T^+(t)\overline{f}(t) - T^-(t)\underline{f}(t)$, $T_{obs} = T(t)L_{obs}(t)$, $\underline{\Psi}_{obs}(t) = T^-_{obs}(t)\underline{\varphi}(t) - T^+_{obs}(t)\overline{\varphi}(t)$, $\overline{\Psi}_{obs}(t) = T^-_{obs}(t)\overline{\varphi}(t) - T^+_{obs}(t)\underline{\varphi}(t)$, est un observateur intervalle pour le système (1.171) dans la base $z(t)$. La matrice $\Gamma(t)$ est définie dans (1.174) et (1.190). Les matrices de passage $L(t)$ et $P(t)$ sont respectivement données par (1.186) et (1.189).

Une conséquence directe du Théorème 1.15 est présentée dans le corollaire suivant qui se déduit en appliquant le Lemme 1.5 à la relation $x(t) = T(t)^{-1}z(t)$.

Corollaire 1.3 (Corollaire 1 dans [95]). *Sous les hypothèses du Théorème 1.15, les bornes supérieure et inférieure de l'état $x(t)$ dans la base de départ sont données par*

$$\begin{cases} \overline{x}(t) = \left(T^{-1}(t)\right)^+ \overline{z}(t) - \left(T^{-1}(t)\right)^- \underline{z}(t) \\ \underline{x}(t) = \left(T^{-1}(t)\right)^+ \underline{z}(t) - \left(T^{-1}(t)\right)^- \overline{z}(t) \end{cases} \tag{1.193}$$

et la propriété d'inclusion (1.194) est vérifiée :

$$\underline{x}(t) \leq x(t) \leq \overline{x}(t), \ \forall t \geq t_0 \tag{1.194}$$

Ce corollaire conclut sur l'utilisation de l'observateur intervalle (1.191) pour estimer les bornes supérieure et inférieure de l'état x, dans le cas des systèmes LTV (1.170).

1.6 Observateurs intervalles pour les systèmes LPV

La dernière classe des systèmes à laquelle nous allons nous intéresser est la classe des systèmes LPV (acronyme anglo-saxon pour Linear Paramter Varying.)

De nombreuses méthodes de conception d'observateurs intervalles pour les systèmes LPV existent dans la littérature. A titre d'exemple, on peut citer les travaux présentés dans [30]. Dans ce papier, les auteurs proposent une méthode combinant les techniques des observateurs intervalles et du différenciateur d'ordre supérieur. De manière similaire aux approches développées pour les systèmes LTI et LTV, les approches présentées dans [94, 63] reposent sur un changement de base d'état variant dans le temps, sous l'hypothèse d'un vecteur d'ordonnancement parfaitement connu à chaque instant de temps. Les travaux développés dans [85, 12, 84, 34, 100, 21] relaxent cette hypothèse et considèrent que les composantes du vecteur d'ordonnancement appartiennent à un compact dont les bornes sont connues *a priori*.

Les méthodologogies présentées dans les paragraphes suivants s'inscrivent dans ce contexte. Plus précisément, nous nous intéressons aux travaux récents proposés dans [21, 100] qui abordent une problématique fondamentale, la synthèse d'observateurs intervalles pour la classe des systèmes LPV, sous contrainte de performance (de type gain $\mathcal{L}_2$ en l'occurrence).

1.6.1 Première approche

Nous présentons dans ce paragraphe, l'approche proposée dans [21].

Soit la classe des systèmes LPV modélisés par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \left(A_0 + \Delta A(\rho(t))\right) x(t) + b(t) \\ y(t) = Cx(t) + v(t) \end{cases} \tag{1.195}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^p$ représentent respectivement les vecteurs d'état et de sortie. $\rho(t) \in \Pi \subset \mathbb{R}^l$ tel que $\rho \in \mathcal{L}_\infty^l$ est un vecteur de paramètres d'ordonnancement. Les valeurs du vecteur ρ sont supposées non mesurables. Seules les valeurs admissibles pour le domaine Π sont supposées connues. Les matrices sont définies par $A_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ et $\Delta A : \Pi \to \mathbb{R}^{n\times n}$ est une fonction matricielle continue par morceau. Les signaux $b : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ et $v : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^p$ représentent respectivement les entrées externes et le bruit de mesure.

Les hypothèses suivantes sont considérées :

Hypothèse 1.15. $x \in \mathcal{L}_\infty^n$, $\underline{b}(t) \leq b(t) \leq \overline{b}(t)$ et $|v(t)| \leq V$ pour tout $t \geq 0$ où les vecteurs $\underline{b}(t), \overline{b}(t) \in \mathcal{L}_\infty^n$ et la constante $V \geq 0$ sont connus.

Hypothèse 1.16. Il existe deux matrices connues $\underline{\Delta A}, \overline{\Delta A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telles que :

$$\underline{\Delta A} \leq \Delta A(\rho) \leq \overline{\Delta A}, \ \forall \rho \in \Pi$$

Les hypothèses 1.15 et 1.16 considèrent que l'état x du système (1.195) est borné, que le bruit de mesure v possède une borne supérieure V, que l'entrée b appartient à l'intervalle connu $\left[\underline{b}(t), \overline{b}(t)\right]$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$ et finalement que la matrice ΔA appartient à l'intervalle connu

$\left[\underline{\Delta A}, \overline{\Delta A}\right]$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$.

Sous ces conditions, la structure de l'observateur intervalle proposée par les auteurs est :

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = & (A_0 - \underline{L}C)\,\underline{x}(t) + \left(\underline{\Delta A}^+ \underline{x}^+(t) - \overline{\Delta A}^+ \underline{x}^-(t) - \underline{\Delta A}^- \overline{x}^+(t) + \overline{\Delta A}^- \overline{x}^-(t)\right) \\ & + \underline{L}y(t) - |\underline{L}|\, V\mathbb{1}_p + \underline{b}(t) \\ \dot{\overline{x}}(t) = & \left(A_0 - \overline{L}C\right)\overline{x}(t) + \left(\overline{\Delta A}^+ \overline{x}^+(t) - \underline{\Delta A}^+ \overline{x}^-(t) - \overline{\Delta A}^- \underline{x}^+(t) + \underline{\Delta A}^- \underline{x}^-(t)\right) \\ & + \overline{L}y(t) - \left|\overline{L}\right| V\mathbb{1}_p + \overline{b}(t) \end{cases} \tag{1.196}$$

Les conditions d'existence de l'observateur intervalle sont présentées ci-dessous dans le Théorème 1.16.

Théorème 1.16 (Théorème 7 dans [21])**.** *Sous les hypothèses 1.15 et 1.16 et sous l'hypothèse que les matrices $A_0 - \underline{L}C$ et $A_0 - \overline{L}C$ soient Metzler alors la relation $\underline{x}(t) \leq x(t) \leq \overline{x}(t)$, $\forall t \geq 0$ est garantie sous la condition $\underline{x}(0) \leq x(0) \leq \overline{x}(0)$ où les vecteurs x, $\underline{x}$ et $\overline{x}$ sont définis dans (1.195) et (1.196) . S'il existe une matrice $P \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ où $P = P^T \succ 0$ et un scalaire réel $\gamma > 0$ tels que l'inégalité matricielle de Riccati suivante est vérifiée*

$$G^T P + PG + 2\gamma^{-2}P^2 + \gamma^2\eta^2 I_{2n} + Z^T Z \prec 0 \tag{1.197}$$

où le scalaire $\eta = 2n\|\overline{\Delta A} - \underline{\Delta A}\|_{max}$, la matrice $Z \in \mathbb{R}^{s\times 2n}$ avec $0 < s \leq 2n$ et la matrice $G = \begin{bmatrix} A_0 - \underline{L}C + \underline{\Delta A}^+ & -\underline{\Delta A}^- \\ -\overline{\Delta A}^- & A_0 - \overline{L}C + \overline{\Delta A}^+ \end{bmatrix}$.

Alors $\underline{x}$, $\overline{x} \in \mathcal{L}_\infty^n$. De plus, le transfert $\begin{bmatrix} \underline{b} \\ \overline{b} \end{bmatrix} \to Z \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \overline{x} \end{bmatrix}$ dans (1.196) possède un gain $\mathcal{L}_2$ inférieur à γ.

Démonstration. D'après les données du problème, les dynamiques des erreurs d'observation $\underline{e}(t) = x(t) - \underline{x}(t)$ et $\overline{e}(t) = \overline{x}(t) - x(t)$ sont données par :

$$\dot{\underline{e}}(t) = (A_0 - \underline{L}C)\,\underline{e} + \sum_{i=1}^{3} \underline{d}_i(t) \tag{1.198}$$

$$\dot{\overline{e}}(t) = \left(A_0 - \overline{L}C\right)\overline{e} + \sum_{i=1}^{3} \overline{d}_i(t) \tag{1.199}$$

où $\underline{d}_1(t) = \Delta A(\rho(t))x(t) - \left(\underline{\Delta A}^+ \underline{x}^+(t) - \overline{\Delta A}^+ \underline{x}^-(t) - \underline{\Delta A}^- \overline{x}^+(t) + \overline{\Delta A}^- \overline{x}^-(t)\right)$,

$\underline{d}_2(t) = |\underline{L}|\, V\mathbb{1}_p - \underline{L}v(t)$,

$\underline{d}_3(t) = b(t) - \underline{b}(t)$,

$\overline{d}_1(t) = \left(\overline{\Delta A}^+ \overline{x}^+(t) - \underline{\Delta A}^+ \overline{x}^-(t) - \overline{\Delta A}^- \underline{x}^+(t) + \underline{\Delta A}^- \underline{x}^-(t)\right) - \Delta A(\rho(t))x(t)$

$\overline{d}_2(t) = \overline{L}v(t) - \left|\overline{L}\right| V\mathbb{1}_p$,

$\overline{d}_3(t) = \overline{b}(t) - b(t)$.

Étant donné que les matrices $A_0 - \underline{L}C$ et $A_0 - \overline{L}C$ sont Metzler et $\underline{d}_i(t), \overline{d}_i(t) \geq 0$, $i \in \{1, \cdots, 3\}$, alors, sous les conditions initiales $\underline{x}(0) \leq x(0) \leq \overline{x}(0)$, il est facilement déduit d'après le Théorème 1.4, que :

$$\underline{x}(t) \leq x(t) \leq \overline{x}(t), \ \forall t \geq 0 \tag{1.200}$$

L'objectif est maintenant de démontrer que les vecteurs $\underline{x}(t)$ et $\overline{x}(t)$ sont finis pour tout $t \geq 0$. Considérons la forme équivalente à l'observateur intervalle (1.196) décrite par :

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = & \left(A_0 - \underline{L}C + \underline{\Delta A}^+\right)\underline{x}(t) - \underline{\Delta A}^-\overline{x}(t) + \underline{f}\left(\underline{x}(t), \overline{x}(t)\right) + \underline{L}y(t) - |\underline{L}|\, V\mathbb{1}_p + \underline{b}(t) \\ \dot{\overline{x}}(t) = & \left(A_0 - \overline{L}C + \overline{\Delta A}^+\right)\overline{x}(t) - \overline{\Delta A}^-\underline{x}(t) + \overline{f}\left(\underline{x}(t), \overline{x}(t)\right) + \overline{L}y(t) - \left|\overline{L}\right| V\mathbb{1}_p + \overline{b}(t) \end{cases} \tag{1.201}$$

où $\underline{f}\left(\underline{x}(t), \overline{x}(t)\right) = \Delta^-\overline{x}^-(t) - \Delta^+\underline{x}^-(t)$, $\overline{f}\left(\underline{x}(t), \overline{x}(t)\right) = \Delta^+\overline{x}^-(t) - \Delta^-\underline{x}^-(t)$,
avec $\Delta^+ = \overline{\Delta A}^+ - \underline{\Delta A}^+$, $\Delta^- = \overline{\Delta A}^- - \underline{\Delta A}^-$.

Pour démontrer que les solutions de l'observateur intervalle $\underline{x}$ et $\overline{x}$ sont finies, introduisons le système décrit par :

$$\dot{\xi}(t) = G\xi(t) + \phi(\xi(t)) + \delta(t) \tag{1.202}$$

où $\xi(t)\begin{bmatrix}\underline{x}(t)\\ \overline{x}(t)\end{bmatrix}$ et $\phi(\xi(t)) = \begin{bmatrix}\underline{f}\left(\underline{x}(t), \overline{x}(t)\right)\\ \overline{f}\left(\underline{x}(t), \overline{x}(t)\right)\end{bmatrix}$ et $\delta(t) \in \mathcal{L}_\infty^{2n}$ est une entrée auxiliaire représentant l'influence des vecteurs y, u et $\underline{b}$, $\overline{b}$.

Par définition, $\phi(\xi(t)) = \mathcal{A}\begin{bmatrix}\overline{x}(t)^-\\ \underline{x}(t)^-\end{bmatrix}$ avec $\mathcal{A} = \begin{bmatrix}\Delta^- & -\Delta^+\\ \Delta^+ & -\Delta^-\end{bmatrix}$ alors

$$\|\phi(\xi(t))\|_2 \leq \|\mathcal{A}\|_2\|\xi(t)\|_2$$

Or, comme $\|\mathcal{A}\|_2 \leq 2n\|\mathcal{A}\|_{max}$ et $\|\mathcal{A}\|_{max} \leq \|\overline{\Delta A} - \underline{\Delta A}\|_{max}$ alors

$$\|\phi(\xi(t))\|_2 \leq \eta\,\|\xi(t)\|_2 \tag{1.203}$$

Considérons maintenant, la fonction de Lyapunov $V(t) = \xi(t)^T P\xi(t)$ alors

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \xi(t)^T\left(G^TP + PG\right)\xi(t) + \left(\phi(\xi(t)) + \delta\right)^T P\xi(t) + \xi(t)^T P\left(\phi(\xi(t)) + \delta\right) \\ &\leq \xi(t)^T\left(G^TP + PG\right)\xi(t) + 2\gamma^{-2}\xi(t)^TP^2\xi(t) + \gamma^2\phi(\xi(t))^T\phi(\xi(t)) + \gamma^2\delta(t)^T\delta(t) \\ &\leq \xi(t)^T\left(G^TP + PG + 2\gamma^{-2}P^2 + \gamma^2\eta^2I_{2n} + Z^TZ\right)\xi(t) - \xi(t)^TZ^TZ\xi(t) + \gamma^2\delta(t)^T\delta(t) \end{aligned} \tag{1.204}$$

Par conséquent, la vérification de l'inégalité (1.197) assure que les vecteurs $\overline{x}$ et $\underline{x}$ restent bornés pour tout $t \geq 0$ et le gain $\mathcal{L}_2$ de l'opérateur $\delta \to Z\xi$ est inférieur à γ.

■

Remarque 1.3. L'hypothèse restrictive sur l'existence des gains $\underline{L}$ et $\overline{L}$ telle que les matrices $A_0 - \underline{L}C$ et $A_0 - \overline{L}C$ soient Metzler peut être relaxée par l'utilisation d'un changement de coordonnées.

L'inégalité matricielle de Riccati (1.197) peut être réécrite sous la forme d'une contrainte LMI. Considérons dans un premier temps, l'écriture équivalente de la matrice G :

$$G = D - \lambda\Upsilon \tag{1.205}$$

où $D = \begin{bmatrix}A_0 + \underline{\Delta A}^+ & -\underline{\Delta A}^-\\ -\overline{\Delta A}^- & A_0 + \overline{\Delta A}^+\end{bmatrix}$, $\Lambda = \begin{bmatrix}\underline{L} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \overline{L}\end{bmatrix}$ et $\Upsilon = \begin{bmatrix}C & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & C\end{bmatrix}$.

En utilisant la relation (1.205) et en utilisant le complément de Schur, l'inégalité matricielle de Riccati (1.197) est équivalente à la formulation LMI suivante

$$\begin{bmatrix}0.5\gamma^2I_{2n} & P\\ P & \Upsilon^TW^T + W\Upsilon - D^TP - PD - \gamma^2\eta^2I_{2n} - Z^TZ\end{bmatrix} \succ 0 \tag{1.206}$$

où la variable LMI est $W = P\Lambda$.

De plus, les contraintes liées à la propriété Metzler des matrices $A_0 - \underline{L}C$ et $A_0 - \overline{L}C$ sont équivalentes à la formulation LMI suivante :

$$P\begin{bmatrix} A_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_0 \end{bmatrix} - W\Upsilon + PS \geq 0 \tag{1.207}$$

où $S \in \mathbb{R}_+^{2n\times 2n}$ et P sont des matrices diagonales.

1.6.2 Deuxième approche

L'inconvénient majeur de l'approche présentée précédemment est lié à l'Hypothèse 1.16, i.e. les matrices qui dépendent du vecteur de paramètres $\rho(t)$ sont supposées bornées par des matrices constantes. Ainsi, le problème qui est fondamentalement LPV est reformulé comme un problème LTI incertain ensembliste pouvant conduire à une solution conservative. Pour palier ce problème, les auteurs de l'article [100] proposent une approche basée sur la structure de la dépendance des composantes du vecteur de paramètres $\rho(t)$, qu'il soit mesuré ou non mesuré. L'approche est développée dans un contexte "pire-cas énergétique", c'est à dire en utilisant un critère de type gain $\mathcal{L}_2$.

1.6.2.1 Formulation du problème

Soit le modèle donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\eta(t),\xi(t))x(t) + B(\eta(t),\xi(t))u(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{1.208}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^l$, $y \in \mathbb{R}^m$ désigne respectivement les vecteurs d'état, d'entrée et de sortie du système. Les matrices sont définies par $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times l}$ et $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$. $\xi = \left[\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_s\right]$ représente le vecteur de paramètres non mesurés à temps variant, supposé évoluer dans un polytope Ξ de sommets $\xi^{(j)}$, $j \in \{1, 2, \cdots, h\}$. $\eta = \left[\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_r\right]$ représente le vecteur de paramètres mesuré, à temps variant, qui est supposé évoluer dans un polytope E de sommets $\eta^{(j)}$, $j \in \{1, 2, \cdots, g\}$.

Pour des raisons de simplification d'écriture, la dépendance temporelle des vecteurs de paramètres η et ξ n'est pas considérée par la suite.

Hypothèse 1.17. $\forall \xi \in \Xi$ et $\forall \eta \in E$, la paire $(A(\eta,\xi), C)$ est observable

Hypothèse 1.18. Les matrices $A(\eta,\xi)$ et $B(\eta,\xi)$ sont décrites par les structures :

$$A(\eta,\xi) = A_0(\eta) + \xi_1 A_1(\eta) + \cdots + \xi_s A_s(\eta) \tag{1.209}$$
$$B(\eta,\xi) = B_0(\eta) + \xi_1 B_1(\eta) + \cdots + \xi_s B_s(\eta) \tag{1.210}$$

où les matrices $A_i(\eta)$, $B_i(\eta)$, $i \in \{0, 1, \cdots, s\}$ sont affines en η :

$$A_i(\eta) = A_{i,0} + \eta_1 A_{i,1} + \cdots + \eta_r A_{i,r} \tag{1.211}$$
$$B_i(\eta) = B_{i,0} + \eta_1 B_{i,1} + \cdots + \eta_r B_{i,r} \tag{1.212}$$

Hypothèse 1.19. Les signaux d'entrée u et de sortie y sont bornés.

L'objectif est de construire un observateur intervalle qui estime des bornes supérieure $\overline{x}$ et inférieure $\underline{x}$ de l'état x du système (1.208).

1.6.2.2 Structure de l'observateur intervalle

Pour mener à bien cet objectif, les auteurs proposent d'utiliser l'observateur intervalle suivant

$$\begin{cases} \dot{\overline{x}}(t) = A(\eta,\xi_0)\overline{x}(t) + B(\eta,\xi_0)u(t) + \overline{w}(\overline{x},\eta,\overline{\xi_e},u) + L(\eta)\left(y(t) - C\overline{x}(t)\right) \\ \dot{\underline{x}}(t) = A(\eta,\xi_0)\underline{x}(t) + B(\eta,\xi_0)u(t) + \underline{w}(\underline{x},\eta,\underline{\xi_e},u) + L(\eta)\left(y(t) - C\underline{x}(t)\right) \end{cases} \tag{1.213}$$

où ξ_0 est la valeur nominale du vecteur $\xi \in \Xi$. Le gain de l'observateur $L(\eta)$ est de forme affine en η tel que

$$L(\eta) = L_0 + \eta_1 L_1 + \cdots + \eta_r L_r \tag{1.214}$$

où $L_i \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $i \in \{1,\cdots,r\}$.

$\underline{w}(\underline{x},\eta,\underline{\xi_e},u)$ et $\overline{w}(\overline{x},\eta,\overline{\xi_e},u)$ représentent des fonctions limites supérieure et inférieure, du domaine d'opération, décrites par :

$$\overline{w}(\overline{x},\eta,\overline{\xi_e^*},u) = \underset{\xi_e}{max}\left(\left(\hat{A}(\eta,\xi_e) - A(\eta,\xi_0)\right)\overline{x}(t) + \left(\hat{B}(\eta,\xi_e) - B(\eta,\xi_0)\right)u(t)\right) \tag{1.215}$$

$$\underline{w}(\underline{x},\eta,\underline{\xi_e^*},u) = \underset{\xi_e}{max}\left(\left(\hat{A}(\eta,\xi_e) - A(\eta,\xi_0)\right)\underline{x}(t) + \left(\hat{B}(\eta,\xi_e) - B(\eta,\xi_0)\right)u(t)\right) \tag{1.216}$$

où $max(\cdot)$ et $min(\cdot)$ sont des opérateurs de maximisation et de minimisation élément par élément sur le domaine ξ_e. Les vecteurs $\underline{\xi_e^*}$, $\overline{\xi_e^*}$ représentent les variables optimales de décision où le vecteur de paramètres incertains $\xi_e \in \mathbb{R}^{(sn)\times 1}$ est défini par :

$$\xi_e = \xi \otimes \mathbb{1}_n = \left[\xi_1,\cdots,\xi_1,\cdots,\xi_s,\cdots,\xi_s\right]^T \tag{1.217}$$

La représentation polytopique associée est notée Ξ_e avec h^n sommets.

Les matrices $\hat{A}(\eta,\xi_e)$ et $\hat{A}(\eta,\xi_e)$ sont définies par :

$$\hat{A}(\eta,\xi_e) = A_0(\eta) + \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n}\xi_e((i-1)n+j)A_{ij}(\eta) \tag{1.218}$$

$$\hat{B}(\eta,\xi_e) = B_0(\eta) + \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n}\xi_e((i-1)n+j)B_{ij}(\eta) \tag{1.219}$$

où les matrices $A_{ij} = D_j A_i(\eta)$ et $B_{ij} = D_j B_i(\eta)$, $i \in \{1,\cdots,s\}$, $j \in \{1,\cdots,n\}$ avec une matrice D_j dont tous les éléments sont égaux à 0, excepté le $j^{\text{ème}}$ élément de la diagonale dont la valeur est 1.

1.6.2.3 Conditions d'existence de l'observateur intervalle

Considérons dans un premier temps, les deux lemmes suivant, dont nous rappelons les démonstrations à des fins pédagogiques :

Lemme 1.14 (Lemme 3 dans [100]). *Si la matrice $\hat{A}(\eta,\xi_e) - L(\eta)C$ est une matrice Hurwitz, $\forall\eta \in E$, $\forall\xi_e \in \Xi_e$ alors la matrice $A(\eta,\xi) - L(\eta)C$ est aussi une matrice Hurwitz, $\forall\eta \in E$, $\forall\xi \in \Xi$.*

Démonstration. Étant donné la définition de la matrice $\hat{A}(\eta, \xi_e)$ définie dans (1.218), il est vérifiable que $A_i(\eta) = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(\eta)$ où $A_i(\eta)$ est définie dans (1.211). Si chacun des éléments $\xi(i)$, $i \in \{1, \cdots, s\}$ du vecteur augmenté ξ_e défini dans (1.217) est tel que

$$\xi_i = \xi_e((i-1)n + j), \ j \in \{1, \cdots, n\} \tag{1.220}$$

alors la matrice $A(\eta, \xi)$ est équivalente à :

$$A(\eta, \xi) = A_0(\eta) + \sum_{i=1}^{s} \xi_i A_i(\eta) = A_0(\eta) + \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n} \xi_i A_{ij}(\eta) = \hat{A}(\eta, \xi_e) \tag{1.221}$$

Par conséquent, l'énoncé du Lemme 1.14 est facilement déduit. ■

Lemme 1.15 (Lemme 4 dans [100]). *Soit une matrice diagonale $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ avec $P \succ 0$. La matrice $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est Metzler si et seulement si la matrice PR est Metzler.*

Démonstration. Étant donné que la matrice P^{-1} est une matrice diagonale et satisfait $P^{-1} \geq 0$ alors la preuve est évidente. ■

Les conditions d'existence de l'observateur intervalle sont données dans le théorème suivant :

Théorème 1.17 (Théorème 2 dans [100]). *Soit le système (1.208) et soit les hypothèses 1.17, 1.18 et 1.19 . S'il existe des matrices $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $Q_i \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $i \in \{0, \cdots, r\}$ telles que les trois conditions suivantes sont satisfaites*

(i) La matrice P est diagonale et définie positive,

(ii) $\forall \eta \in E$ et $\forall \xi_e^j \in \Xi_e$, les conditions LMI suivantes sont vérifiées :

$$\hat{A}(\eta, \xi_e^{(j)})^T P + P\hat{A}(\eta, \xi_e^{(j)}) - \left(C^T Q(\eta)^T + Q(\eta)C\right) \prec 0, \ j \in \{1, \cdots, h^n\}$$

où ξ_e^j représente le $j^{ème}$ sommet de Ξ_e et $Q(\eta) = Q_0 + \eta_1 Q_1 + \cdots + \eta_r Q_r$.

(iii) $\forall \eta \in E$ et $\forall \xi \in \Xi$, la matrice $PA(\eta, \xi) - Q(\eta)C$ est une matrice Metzler.

alors le système d'équation (1.213) est un observateur intervalle pour le système (1.208) et les matrices L_i, $i \in \{0, \cdots, r\}$ qui composent le gain $L(\eta)$ sont données par la relation $L_i = P^{-1}Q_i$.

Démonstration. Soit la variable d'optimisation $\xi_{\overline{e}}^*$ de l'opérateur $max(\cdot)$ alors la dynamique de $\overline{x}$ définie dans (1.213) est équivalente à la forme :

$$\dot{\overline{x}}(t) = \left(\hat{A}(\eta, \xi_{\overline{e}}^*) - L(\eta)C\right)\overline{x}(t) + \hat{B}(\eta, \xi_{\overline{e}}^*)u + L(\eta)y \tag{1.222}$$

En considérant la variable LMI $Q(\eta) = PL(\eta)$ alors il est facilement déduit que les contraintes LMI *(i)* et *(ii)* garantissent qu'il existe une matrice de lyapunov P, ce qui assure la stabilité quadratique de la dynamique de $\overline{x}$. Étant donné que les vecteurs u et y sont bornés, d'après l'Hypothèse 1.19, alors le vecteur $\overline{x}$ est aussi borné.

Considérons maintenant la dynamique de l'erreur d'observation supérieure $\overline{e} = \overline{x}(t) - x(t)$:

$$\dot{\overline{e}}(t) = \left(A(\eta, \xi) - L(\eta)C\right)\overline{e}(t) + \overline{w}(\overline{x}, \eta, \xi_{\overline{e}}^*, u) - w(\overline{x}, \eta, \xi, \xi_0, u) \tag{1.223}$$

où $w(\overline{x},\eta,\xi,\xi_0,u) = (A(\eta,\xi) - A(\eta,\xi_0))\,\overline{x}(t) + (B(\eta,\xi) - B(\eta,\xi_0))\,u(t)$.

Par construction, il est facilement vérifiable que $\overline{w}(\overline{x},\eta,\xi_e^{\overline{*}},u) - w(\overline{x},\eta,\xi,u) \geq 0$. En appliquant le Lemme 1.15 avec P vérifiant la contrainte *(i)* et $R = P\,(A(\eta,\xi) - L(\eta)C)$, alors nous obtenons les contraintes LMI *(iii)*. Ainsi, la matrice $A(\eta,\xi) - L(\eta)C$ est Metzler et l'application du Théorème 1.4 assure que $\overline{e}(t) \geq 0$, $\forall t \geq t_0$ si les conditions initiales vérifient $\underline{x}(t_0) \leq x(t_0) \leq \overline{x}(t_0)$.

Une démarche similaire pour $\underline{x}(t)$ et $\underline{e}(t) = x(t) - \underline{x}(t)$ permet de compléter la démonstrations du théorème. ■

Notons que la contrainte *(iii)* du Théorème 1.17 est un problème de dimension infinie qui peut être transformé en un problème de dimension finie en utilisant le corollaire 1 dans [100].

1.6.2.4 Performance de l'observateur intervalle

Afin d'améliorer les performances de l'observateur intervalle, les auteurs proposent de minimiser l'influence des incertitudes du modèle sur la largeur de l'intervalle $\overline{x} - \underline{x}$, au sens d'un critère de type gain $\mathcal{L}_2$. Le théorème suivant donne la solution à ce problème.

Théorème 1.18 (Théorème 3 dans [100])**.** *Soient les vecteurs d'entrée u et de sortie y du système (1.208) supposés appartenir aux espaces $\mathcal{L}_2$ et $\mathcal{L}_\infty$ et un scalaire $\gamma > 0$. En considérant le problème d'optimisation*

Minimiser γ sous les contraintes

(i) La matrice $P = diag(p_{11},\cdots,p_{nn}) \succ 0$,

(ii) $\forall \xi_e^j \in \Xi_e$, les conditions LMI suivantes sont vérifiées :

$$\left(\hat{A}(\eta,\xi_e^{(j)}) - L(\eta)C\right)^T P + P\left(\hat{A}(\eta,\xi_e^{(j)}) - L(\eta)C\right) \prec 0,\ j \in \{1,\cdots,h^n\}$$

(iii) $\forall \eta \in E$ et $\forall \xi \in \Xi$,

$$\begin{bmatrix} A_L(\eta,\xi)^T P + P A_L(\eta,\xi) & P & \mathbf{I} \\ P & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec 0,$$

(iv) $\forall \eta \in E$ et $\forall \xi \in \Xi$, la matrice $PA_L(\eta,\xi)$ est une matrice Metzler,

où $A_L(\eta,\xi) = A(\eta,\xi) - L(\eta)C$, alors le gain $\mathcal{L}_2$ de d vers $\overline{x} - \underline{x}$, est inférieur ou égal à γ où $d(t) = \overline{w}(\overline{x},\eta,\xi_e^{\overline{*}},u) - w(\overline{x},\eta,\xi,\xi_0,u) + w(\underline{x},\eta,\xi,\xi_0,u) - \underline{w}(\underline{x},\eta,\xi_e^{\overline{*}},u)$.

Démonstration. De manière similaire au Théorème 1.17, les contraintes *(i)* et *(ii)* assurent que les bornes estimées $\underline{x}$ et $\overline{x}$ sont finies. Ainsi, la dynamique des erreurs d'observation s'exprime par :

$$\begin{cases} \dot{\overline{e}}(t) = (A(\eta,\xi) - L(\eta)C)\,\overline{e}(t) + \overline{w}(\overline{x},\eta,\xi_e^{\overline{*}},u) - w(\overline{x},\eta,\xi,\xi_0,u) \\ \dot{\underline{e}}(t) = (A(\eta,\xi) - L(\eta)C)\,\underline{e}(t) + w(\underline{x},\eta,\xi,\xi_0,u) - \underline{w}(\underline{x},\eta,\xi_e^{\overline{*}},u) \end{cases} \tag{1.224}$$

où $\overline{e}(t) = \overline{x}(t) - x(t), \underline{e}(t) = x(t) - \underline{x}(t)$,
$w(\overline{x},\eta,\xi,\xi_0,u) = (A(\eta,\xi) - A(\eta,\xi_0))\,\overline{x}(t) + (B(\eta,\xi) - B(\eta,\xi_0))\,u(t)$,
$w(\underline{x},\eta,\xi,\xi_0,u) = (A(\eta,\xi) - A(\eta,\xi_0))\,\underline{x}(t) + (B(\eta,\xi) - B(\eta,\xi_0))\,u(t)$.

La contrainte *(iv)* assure que la matrice $A(\eta,\xi) - L(\eta)C$ soit Metzler. Cette propriété est nécessaire pour démontrer la monotonie des erreurs d'observation. Finalement, la contrainte *(iii)* correspond à l'application directe du lemme réel borné sur le modèle dynamique de $\overline{x} - \underline{x}$ décrit par :

$$\begin{cases} \dot{\overline{x}}(t) - \dot{\underline{x}}(t) = (A(\eta,\xi) - L(\eta)C)\,(\overline{x}(t) - \underline{x}(t)) + d(t) \\ y(t) = \overline{x}(t) - \underline{x}(t) \end{cases} \tag{1.225}$$

où $d(t) = \overline{w}(\overline{x},\eta,\xi_e^{\overline{*}},u) - w(\overline{x},\eta,\xi,\xi_0,u) + w(\underline{x},\eta,\xi,\xi_0,u) - \underline{w}(\underline{x},\eta,\xi_e^{\overline{*}},u)$ ■

1.7 Positionnement des contributions de la thèse

Comme nous venons de le voir, plusieurs approches de synthèse d'observateur intervalle ont été développées ces dernières années, et ce pour une large classe de systèmes puisque les méthodes développées couvrent les systèmes LTI, LTV et LPV. Toutefois, la théorie des observateurs intervalles présente encore des verrous théoriques que nous proposons maintenant de mettre en évidence.

1.7.1 Critères de comparaison

Commençons par établir des critères de comparaison. Deux catégories de critères sont pour cela définies :

- La première catégorie est constituée de critères portant sur la classe des systèmes que la théorie des observateurs intervalles est capable de traiter. Notre attention se focalisera sur deux points en particulier. Le premier concerne les méthodes permettant de traiter la présence d'entrées inconnues. Le second point concerne les méthodes apportant une solution aux modèles constitués d'incertitudes paramétriques caractérisant les variations possibles de la dynamique du système au cours du temps. Nous nous intéresserons en particulier aux matrices de la représentation d'état.
- La seconde catégorie est constituée de critères portant sur la performance de l'estimation par intervalle. Le premier critère concerne la position des pôles de l'observateur. Cette information est primordiale dans notre contexte car elle permet d'analyser (et donc de contrainte le cas échéant) la vitesse de convergence de l'intervalle estimé. Différentes méthodes existent pour satisfaire ces contraintes telles que le placement de pôles ou encore les méthodes basées sur la théorie de Lyapunov (stabilité quadratique, stabilité quadratique robuste, $\mathcal{D}$-stabilité). Le second critère concerne la performance au sens d'une mesure donnée. Ce critère est essentiel pour évaluer l'influence des paramètres de l'observateur intervalle sur la robustesse de l'estimation par intervalle, vis-à-vis des entrées exogènes (bruits, incertitudes approximées, etc.). Le dernier critère étudiera si le niveau de performance de l'intervalle estimé et les conditions d'existence de l'observateur intervalle sont simultanément satisfaits au cours de la synthèse ou nécessite une vérification *a posteriori*.

1.7.2 Analyse critique de l'état de l'art

Dans un contexte LTI, les méthodes développées permettent d'aborder la problématique de l'estimation par intervalle pour une large classe de systèmes puisqu'il est possible

de tenir compte, par exemple, d'incertitudes paramétriques, d'entrées inconnues, de retard, etc... De plus, et comme nous l'avons vu, certaines approches permettent la prise en compte de contraintes de performance, notamment dans un contexte $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$ ou encore $\mathcal{L}_\infty$. La principale restriction de ces approches repose sur l'hypothèse de stationnarité des matrices de la représentation d'état, i.e. elles ne permettent pas de tenir compte des variations dans le temps dans la dynamique du système.

En ce qui concerne la classe des systèmes LTV, les approches développées ne permettent pas de traiter le problème des entrées inconnues. Un autre inconvénient est lié à l'absence d'un processus d'optimisation qui permettrait de garantir que la solution trouvée est une solution optimale, au sens d'un critère. En effet, aucun critère de performance n'est considéré dans le processus de synthèse. Le niveau de performance est évalué *a posteriori*. Pour finir, bien que les systèmes LTV permettent de tenir compte de la variation des dynamiques du système au cours du temps, les développements existants ne permettent pas de considérer les incertitudes de modélisation, contrairement au formalisme LPV.

Pour la classe des systèmes LPV, il est rare que le processus de synthèse soit basé sur la minimisation d'un critère qui permettrait de garantir que la solution trouvée soit une solution optimale, au sens de ce critère. Dans la majorité des cas, les méthodologies développées se contentent d'assurer la stabilité des erreurs supérieure et inférieure estimées. Là encore, le niveau de performance est évalué *a posteriori*. Ceci peut se comprendre assez aisément : non seulement, la structure de l'observateur intervalle présente peu de degrés de libertés (souvent, il n'existe que son gain L), mais encore nombre de degrés de liberté sont utilisés pour satisfaire la coopérativité des erreurs d'estimation. La méthode présentée dans [21] tente de proposer une solution à ces problèmes, en considérant notamment un critère de performance de type gain $\mathcal{L}_2$. L'objectif visé consiste à minimiser l'influence des perturbations sur les bornes supérieure et inférieure estimées. Toutefois, cette approche présente plusieurs inconvénients.

- Bien que ces travaux introduisent une notion de performance dans le processus de conception, le critère qui est minimisé n'est pas directement associé à la minimisation de la taille de l'intervalle estimé.
- La propriété Metzler, pourtant nécessaire pour assurer la coopérativité des erreurs d'observation, n'est pas directement considérée dans le processus de synthèse lorsqu'il n'existe aucun gain L tel que la matrice $A - LC$ soit Hurwitz et Metzler.
- Comme nous l'avons déjà souligné, les matrices qui dépendent du vecteur de paramètres sont supposées bornées par des matrices constantes. Ainsi, le problème qui est fondamentalement de nature LPV, est reformulé comme un problème LTI incertain ensembliste.

Contrairement à cette approche, la solution proposée dans [100] est construite de manière à tenir compte, d'une part, de la structure des matrices du modèle et, d'autre part, de la présence de paramètres mesurés et non mesurés. De plus, le gain de l'observateur est déterminé par un processus d'optimisation, basé sur un critère de type gain $\mathcal{L}_2$, qui vise à minimiser l'influence des incertitudes du modèle sur la largeur de l'intervalle. La principale contrainte de cette approche est liée au gain L de l'observateur intervalle dont sa détermination doit simultanément satisfaire la stabilité de l'encadrement et la propriété Metzler, ce qui se révèle pratiquement difficile à satisfaire.

Notons que ces deux approches sont restreintes à une sous-classe de systèmes LPV ne

présentant aucune entrée inconnue et dont l'équation de sortie est linéaire à temps invariant. Finalement, la formulation du problème d'optimisation, garantissant la propriété de stabilité et assurant une performance pour l'estimé au sens du gain induit $\mathcal{L}_2$, repose sur une matrice de Lyapunov unique et diagonale conduisant à une solution plus conservative.

1.7.3 Objectifs de la thèse

L'analyse précédente, résumée dans le tableau 1.1, justifie pleinement les directions prises dans nos travaux de recherche. Ceux-ci ont en effet pour objectif central de développer une nouvelle classe d'observateur intervalle, pour la classe des systèmes LPV, qui lève certains problèmes énoncés précédemment. En particulier, nous cherchons

- à garantir les propriétés de stabilité et de performance, en tenant compte de la nature variante dans le temps du vecteur de paramètres du modèle LPV. Dans ce contexte, on évitera les propriétés de stabilité et de performance quadratique qui sont basées sur une matrice de Lyapunov unique. Bien au contraire, nous cherchons une matrice de Lyapunov qui dépend du vecteur de paramètres.
- à s'affranchir du problème des entrées inconnues
- à contraindre l'observateur intervalle à satisfaire des niveaux de performance exigés (nous utiliserons pour cela les critères de type gain $\mathcal{L}_2$ et gain $\mathcal{L}_\infty$).
- à formuler la propriété Meztler comme une contrainte du problème d'optimisation de telle sorte qu'à l'issue de la procédure d'optimisation, nous obtenions tous les paramètres de l'observateur intervalle avec preuve formelle d'optimalité (au sens du critère d'optimisation, bien évidemment)

Ce sont ici, les contributions de nos travaux de thèse.

Articles		Systèmes			Performances		
		Incertitudes paramétriques		entrées inconnues	Stabilité	Performance au sens d'une norme	Étude de la performance
		Équations d'état	Équations de sortie				
Systèmes LTI	[19, 20, 15]	NON	NON	NON	Stabilité quadratique	$\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty/\mathcal{L}_\infty$	Au cours de la synthèse
Systèmes LTI à entrées inconnues	[47, 48]	NON	NON	OUI	Placement de pôles		*A posteriori*
Systèmes LTV	[33, 95]	NON	NON	NON	Théorie de Lyapunov		*A posteriori*
Systèmes LPV	[84]	OUI	OUI	NON	Placement de pôles		*A posteriori*
	[21, 100]	OUI	NON	NON	Stabilité quadratique	Gain $\mathcal{L}_2$	Au cours de la synthèse
	[87]	OUI	NON	OUI (connaisance du domaine de définition)	Stabilité quadratique	Robustesse stochastique	*A posteriori*

TABLEAU 1.1 – Comparaison des approches existantes pour la synthèse d'observateur intervalle

Chapitre 2

Synthèse d'observateurs intervalles pour les systèmes LTI incertains à entrées inconnues

L'enjeu pour la synthèse d'un observateur intervalle réside généralement dans sa capacité à satisfaire simultanément les conditions d'existence de l'observateur intervalle et un certain niveau de performance fixé *a priori* pour l'intervalle estimé. En effet, la détermination d'un changement de coordonnées nécessite la connaissance du gain de l'observateur. Ainsi, le processus classique de conception d'un observateur intervalle consiste à choisir un changement de coordonnées pour assurer la coopérativité des erreurs d'observation puis à évaluer le conservatisme de l'estimation associé. Pour rappel, une solution à ce problème a été proposée par [20], en utilisant une approche basée sur une optimisation non lisse. Actuellement, cette approche ne considère ni la présence d'incertitude paramétrique et/ou de modélisation, ni d'entrée inconnue. De plus, les approches classiques de synthèse d'observateurs intervalles considèrent les entrées inconnues comme des signaux bornés, dont les bornes de l'intervalle d'appartenance sont connues. Il en résulte une augmentation du conservatisme de l'estimation par intervalle, inhérente à la propagation des incertitudes des entrées inconnues pour garantir les conditions d'existence de l'observateur intervalle. Dans [47, 48], une solution a été proposée en utilisant une méthode de découplage qui, sous certaines conditions, permet d'éliminer le conservatisme lié à l'influence des entrées inconnues. Le principal avantage de cette approche est lié au fait que la propagation de l'influence des entrées inconnues n'est plus nécessaire, améliorant ainsi la performance de l'estimation. Ainsi, la théorie des observateurs à entrées inconnues a été étendue au contexte à erreurs bornées. Cependant, cette approche est limitée à la classe de système LTI sans incertitude paramétrique et n'utilise aucun critère de performance au cours du processus de conception.

Ce chapitre constitue un résultat intermédiaire avant la présentation de la contribution principale sur les systèmes LPV au cours du chapitre suivant. L'objectif est d'étendre les travaux existants sur les systèmes LTI, en proposant une méthode de synthèse, qui satisfait simultanément les conditions d'existence de l'observateur intervalle et un certain niveau de performance pour l'intervalle estimé. Plus particulièrement, la réduction du conservatisme est assurée au cours de la synthèse des paramètres de l'observateur intervalle, en combinant une technique de découplage pour annuler l'effet des entrées inconnues et une technique

d'optimisation, au sens de la norme $\mathcal{H}_\infty$, pour minimiser l'influence des bruits et des perturbations bornées sur l'estimation par intervalle. De plus, l'utilisation de la technique de la $\mathcal{D}$-stabilité, permet de contraindre la vitesse de convergence de la dynamique de l'encadrement.

Nous introduirons dans un premier temps, les notations, les prérequis puis la classe des systèmes considérés. Nous poursuivrons, en présentant la première contribution qui étend les travaux de [43] sur la conception d'observateur à entrées inconnues au contexte à erreurs bornées. Après avoir présenté les limites associées, nous introduirons une nouvelle structure d'observateur intervalle ainsi que la méthode d'optimisation associée.

2.1 Notations et prérequis

Cette section est dédiée à la présentation des techniques liées aux approches à erreurs bornées ainsi qu'aux techniques LMI nécessaires à l'étude de la stabilité et des performances au sens de la norme $\mathcal{H}_\infty$ d'un système LTI incertain.

2.1.1 Encadrement de fonctions

Dans ces travaux, nous introduisons deux nouveaux opérateurs $\mathbb{W}_1$ et $\mathbb{W}_2$ définis de la manière suivante.

Définition 2.1. Pour tout vecteur de paramètres $\rho \in \Theta \subset \mathbb{R}^l$, considérons des matrices $\mathcal{X}_1(\rho) \in \mathbb{R}^{q\times n}$, $\mathcal{X}_2(\rho) \in \mathbb{R}^{r\times n}$, $\mathcal{Z}_1 \in \mathbb{R}^{m\times q}$, $\mathcal{Z}_2 \in \mathbb{R}^{m\times r}$ $\mathcal{Z}_3 \in \mathbb{R}^{m\times r}$. Alors

$$\mathbb{W}_1\left(\mathcal{X}_1(\rho), \mathcal{X}_2(\rho), \mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2, \mathcal{Z}_3\right) = \begin{bmatrix} X_1 & -X_2 & -X_3 & X_4 \end{bmatrix}, \tag{2.1}$$

$$\mathbb{W}_2\left(\mathcal{X}_1(\rho), \mathcal{X}_2(\rho), \mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2, \mathcal{Z}_3\right) = \begin{bmatrix} -X_4 & X_3 & X_2 & -X_1 \end{bmatrix}, \tag{2.2}$$

où $X_1 = \mathcal{Z}_1\overline{\mathcal{X}_1}^+ + \mathcal{Z}_2\overline{\mathcal{X}_2}^+ + \mathcal{Z}_3\underline{\mathcal{X}_2}^-$, $X_2 = \mathcal{Z}_1\underline{\mathcal{X}_1}^+ + \mathcal{Z}_2\underline{\mathcal{X}_2}^+ + \mathcal{Z}_3\overline{\mathcal{X}_2}^-$,
$X_3 = \mathcal{Z}_1\overline{\mathcal{X}_1}^- + \mathcal{Z}_2\overline{\mathcal{X}_2}^- + \mathcal{Z}_3\underline{\mathcal{X}_2}^+$, $X_4 = \mathcal{Z}_1\underline{\mathcal{X}_1}^- + \mathcal{Z}_2\underline{\mathcal{X}_2}^- + \mathcal{Z}_3\overline{\mathcal{X}_2}^+$.

Pour rappel, le Lemme 1.5 présenté à la page 15 détaille une méthode pour encadrer le produit d'une matrice incertaine $A(\rho) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et d'un vecteur incertain $x \in \mathbb{R}^n$, en utilisant la connaissance des bornes du domaine d'appartenance. Sous l'hypothèse d'existence d'une matrice A vérifiant la décomposition $A(\rho) = \mathcal{X}_1(\rho) + (\mathcal{Z}_2 - \mathcal{Z}_3)\,\mathcal{X}_2(\rho)$ où $\mathcal{X}_1(\rho) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathcal{X}_2(\rho) \in \mathbb{R}^{r\times n}$ et les matrices $\mathcal{Z}_2 \in \mathbb{R}^{m\times r}$, $\mathcal{Z}_3 \in \mathbb{R}^{m\times r}$ sont des degrés de liberté utilisables dans un processus d'optimisation convexe, alors, nous proposons dans le lemme suivant, une nouvelle méthode basée sur l'utilisation des opérateurs $\mathbb{W}_1$ et $\mathbb{W}_2$.

Lemme 2.1. *Considérons un vecteur incertain $x \in \left[\underline{x}, \overline{x}\right] \subset \mathbb{R}^n$ où $\underline{x}, \overline{x} \in \mathbb{R}^n$ et, pour tout vecteur de paramètres $\rho \in \Theta \subset \mathbb{R}^l$, des matrices $\mathcal{X}_1(\rho) \in \left[\underline{\mathcal{X}}_1, \overline{\mathcal{X}}_1\right] \subset \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathcal{X}_2(\rho) \in \left[\underline{\mathcal{X}}_1, \overline{\mathcal{X}}_1\right] \subset \mathbb{R}^{r\times n}$, $\mathcal{Z}_2 \in \mathbb{R}^{m\times r}$, $\mathcal{Z}_3 \in \mathbb{R}^{m\times r}$. Si les matrices $\mathcal{Z}_2 \geq 0$, $\mathcal{Z}_3 \geq 0$ et $A(\rho) = \mathcal{X}_1(\rho) + (\mathcal{Z}_2 - \mathcal{Z}_3)\,\mathcal{X}_2(\rho)$ alors :*

$$\mathbb{W}_2\left(\mathcal{X}_1(\rho), \mathcal{X}_2(\rho), I_m, \mathcal{Z}_2, \mathcal{Z}_3\right) x^* \leq A(\rho)x \leq \mathbb{W}_1\left(\mathcal{X}_1(\rho), \mathcal{X}_2(\rho), I_m, \mathcal{Z}_2, \mathcal{Z}_3\right) x^* \tag{2.3}$$

où $x^* = \begin{bmatrix} (\overline{x}^+)^T & (\overline{x}^-)^T & (\underline{x}^+)^T & (\underline{x}^-)^T \end{bmatrix}^T$.

Démonstration. En rappelant que toute matrice (et vecteur) admet la décomposition $K = K^+ - K^-$ où les opérateurs $\bullet^+$ et $\bullet^-$ sont définis dans (1.49) et (1.50), alors, étant donné que $\mathcal{Z}_2 \geq 0$, $\mathcal{Z}_3 \geq 0$, la matrice $A(\rho) = \mathcal{X}_1(\rho) + (\mathcal{Z}_2 - \mathcal{Z}_3)\,\mathcal{X}_2(\rho)$ admet la décomposition

$$A(\rho) = A_a(\rho) - A_b(\rho) \tag{2.4}$$

où $A_a(\rho) = \mathcal{X}_1(\rho)^+ + \mathcal{Z}_2\mathcal{X}_2(\rho)^+ + \mathcal{Z}_3\mathcal{X}_2(\rho)^-$, $A_b(\rho) = \mathcal{X}_1(\rho)^- + \mathcal{Z}_2\mathcal{X}_2(\rho)^- + \mathcal{Z}_3\mathcal{X}_2(\rho)^+$.

De manière similaire, il est possible de décomposer le terme $A(\rho)x$ tel que :

$$\begin{aligned} A(\rho)x(t) &= (A_a(\rho) - A_b(\rho))\,(x^+ - x^-) \\ &= A_a(\rho)x^+ - A_a(\rho)x^- - A_b(\rho)x^+ + A_b(\rho)x^- \end{aligned} \tag{2.5}$$

L'utilisation du Lemme 1.5 permet de construire un encadrement pour chaque terme $A_a(\rho)x^+$, $A_a(\rho)x^-$, $A_b(\rho)x^+$, $A_b(\rho)x^-$. Dans un premier temps, l'encadrement des matrices $A_a(\rho)$ et $A_b(\rho)$ est réalisée :

$$0 \leq \underline{A_a} \leq A_a(\rho) \leq \overline{A_a}, \tag{2.6}$$
$$0 \leq \underline{A_b} \leq A_b(\rho) \leq \overline{A_b}, \tag{2.7}$$

où $\overline{A_a} = \overline{\mathcal{X}_1}^+ + \mathcal{Z}_2\overline{\mathcal{X}_2}^+ + \mathcal{Z}_3\underline{\mathcal{X}_2}^-$, $\quad \underline{A_a} = \underline{\mathcal{X}_1}^+ + \mathcal{Z}_2\underline{\mathcal{X}_2}^+ + \mathcal{Z}_3\overline{\mathcal{X}_2}^-$,
$\overline{A_b} = \underline{\mathcal{X}_1}^- + \mathcal{Z}_2\underline{\mathcal{X}_2}^- + \mathcal{Z}_3\overline{\mathcal{X}_2}^+$, $\quad \underline{A_b} = \overline{\mathcal{X}_1}^- + \mathcal{Z}_2\overline{\mathcal{X}_2}^- + \mathcal{Z}_3\underline{\mathcal{X}_2}^+$.

Étant donné que $0 \leq \underline{x}^+ \leq x^+ \leq \overline{x}^+$, $0 \leq \overline{x}^- \leq x^- \leq \underline{x}^-$, il est déduit que :

$$\underline{A_a}\underline{x}^+ \leq A_a(\rho)x^+ \leq \overline{A_a}\overline{x}^+, \tag{2.8}$$
$$\underline{A_a}\overline{x}^- \leq A_a(\rho)x^- \leq \overline{A_a}\underline{x}^-, \tag{2.9}$$
$$\underline{A_b}\underline{x}^+ \leq A_b(\rho)x^+ \leq \overline{A_b}\overline{x}^+, \tag{2.10}$$
$$\underline{A_b}\overline{x}^- \leq A_b(\rho)x^- \leq \overline{A_b}\underline{x}^-. \tag{2.11}$$

Finalement, l'encadrement du produit de la matrice $A(\rho)$ et du vecteur x défini dans (2.5) est donné par l'inégalité :

$$\underline{A_a}\underline{x}^+ - \overline{A_a}\underline{x}^- - \overline{A_b}\overline{x}^+ + \underline{A_b}\overline{x}^- \;\leq\; A(\rho)x \;\leq \overline{A_a}\overline{x}^+ - \underline{A_a}\overline{x}^- - \underline{A_b}\underline{x}^+ + \overline{A_b}\underline{x}^- \tag{2.12}$$

En adoptant la notation des opérateurs $\mathbb{W}_1$ et $\mathbb{W}_2$ définis respectivement en (2.1) et (2.2), l'inégalité (2.3) est facilement déduite. ■

Il est à noter que la conception d'un encadrement basé sur le Lemme 1.5 nécessite l'utilisation des opérateurs non-linéaires $\bullet^+$et $\bullet^-$. Cette approche présente donc un inconvénient lorsque l'objectif final est d'inclure les majorants dans un processus d'optimisation. Ainsi, le Lemme 2.1 repose sur le principe qu'une matrice réelle peut être décomposée par deux (non uniques) matrices dont tous les éléments sont positifs. En tenant compte de cette particularité lorsque des degrés de liberté sont impliqués dans le processus de conception des majorants, il en résulte que la structure finale des bornes supérieure et inférieure est linéaire par rapport aux degrés de liberté (i.e. $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_2 - \mathcal{Z}_3$).

2.1.2 Stabilité et performance des systèmes LTI incertains

Dans cette sous-section, nous rappelons des techniques LMI nécessaires à la compréhension du chapitre.

Lemme 2.2. *Soit une région LMI décrite par :*

$$\mathcal{D} = \left\{ z \in \mathbb{C}, f_{\mathcal{D}}(z) = S + zR + z^* R^T \prec 0 \right\}, \ S = S^T \tag{2.13}$$

où z^* désigne ici le conjugué transposé de z.
Soit un vecteur de paramètres $\rho \in \Theta \subset \mathbb{R}^l$ alors une matrice carrée $A(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est dite $\mathcal{D}$-stable si et seulement si il existe une matrice $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ où $P = P^T \succ 0$ telle que :

$$M_{\mathcal{D}}(A(\rho), P) := S \otimes P + R \otimes (PA(\rho)) + R^T \otimes (A(\rho)^T P) \prec 0, \ \forall \rho \in \Theta \tag{2.14}$$

Lemme 2.3. *Soit $M(\rho) = \begin{bmatrix} M_1(\rho) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M_2(\rho) \end{bmatrix}$ où $M_1 \in \mathbb{R}^{k \times l}$ et $M_2 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sont des matrices incertaines LTI. D'après une légère adaptation de [89], s'il existe un scalaire $\gamma \geq 0$ qui pour tout $\rho \in \Theta$ assure que :*

$$\begin{bmatrix} \gamma \mathbf{I} & M(\rho) \\ M(\rho)^T & \gamma \mathbf{I} \end{bmatrix} \succ 0 \tag{2.15}$$

alors $\|M_1(\rho)\|_2 < \gamma$, $\|M_2(\rho)\|_2 < \gamma$.

Démonstration. Par définition, $\|M(\rho)\|_2 = \overline{\sigma}(M(\rho)) = \sqrt{\overline{\lambda}(M(\rho)^T M(\rho))}$. Par conséquent, la contrainte $\|M(\rho)\|_2 < \gamma$, $\forall \rho \in \Theta$, est équivalente à :

$$M(\rho)^T M(\rho) - \gamma^2 I \prec 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\gamma} M(\rho)^T M(\rho) - \gamma I \prec 0, \ \forall \rho \in \Theta \tag{2.16}$$

L'application du complément de Schur conduit à la contrainte (2.15). La démonstration est complétée en utilisant la structure de la matrice $M(\rho)$. ■

Finalement, la stabilité et la performance au sens de la norme $\mathcal{H}_\infty$ d'un système LTI incertain reposera sur le cas particulier de la méthode présentée pour les systèmes LPV dans la Définition 1.10.

2.2 Formulation du problème

Soit un système LTI incertain décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + \Delta A(\rho))\, x(t) + B(\rho) w(t) + E d(t) \\ y(t) = C x(t) + D(\rho) w(t) \end{cases} \tag{2.17}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^p$ représentent respectivement les vecteurs d'état et de sortie du système. Les conditions initiales de l'état x sont supposées bornées, par deux vecteurs connus $\underline{x}(0), \overline{x}(0) \in \mathbb{R}^n$, telles que $\underline{x}(0) \leq x(0) \leq \overline{x}(0)$. $d \in \mathbb{R}^q$ désigne un vecteur d'entrées inconnues et $w \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur des entrées bornées tel que $w(t) \in \begin{bmatrix} \underline{w}(t) & \overline{w}(t) \end{bmatrix}$, $\forall t \geq 0$ où les vecteurs $\underline{w}(t), \overline{w}(t) \in \mathbb{R}^m$ sont supposés connus *a priori*. $\rho \in \left[\underline{\rho}, \overline{\rho}\right]$ est un

vecteur de paramètres bornés où les vecteurs $\underline{\rho}, \overline{\rho} \in \mathbb{R}^l$ sont supposés connus *a priori*. Les matrices sont définies par $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\Delta A(\rho) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B(\rho) \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $E \in \mathbb{R}^{n\times q}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ et $D(\rho) \in \mathbb{R}^{p\times m}$.

L'objectif est de construire un observateur intervalle qui estime des bornes supérieure $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ et inférieure $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ de l'état x du système (2.17). De manière équivalente, il s'agit de vérifier l'inégalité :

$$\underline{x}(t) \leq x(t) \leq \overline{x}(t), \ \forall t \geq 0 \tag{2.18}$$

La conception de l'observateur intervalle pour le système (2.17) nécessite la vérification des hypothèses suivantes.

Hypothèse 2.1. Le système (2.17) est robustement stable pour tout $\rho \in \left[\underline{\rho}, \overline{\rho}\right]$.

Hypothèse 2.2. La structure du système satisfait $\Delta A(\rho) = \begin{bmatrix}\Delta A_1(\rho) & 0_{n\times(n-p)}\end{bmatrix}$ avec $\Delta A_1(\rho) \in \mathbb{R}^{n\times p}$ et $C = \begin{bmatrix}C_1 & 0_{p\times(n-p)}\end{bmatrix}$ où la matrice $C_1 \in \mathbb{R}^{p\times p}$ est inversible.

Il est à noter que la structure de la matrice C peut être obtenue en utilisant une transformation d'état. La contrainte de structure de la matrice ΔA est une contrainte plus forte qui limite la classe des systèmes LTI incertains.

Hypothèse 2.3. La paire (A,C) est observable (ou au moins détectable).

Hypothèse 2.4. La matrice E est de plein rang colonne et la condition $rang(CE) = rang(E) = q$ est vérifiée.

Il est à noter que l'Hypothèse 2.4 est communément admise pour la synthèse d'observateurs à entrées inconnues, voir [53, 27] si nécessaire.

Avant de présenter la principale contribution de ce chapitre, nous introduisons des résultats intermédiaires.

2.3 Première approche

Cette section détaille des résultats intermédiaires qui étendent les travaux de [43] à la conception d'un observateur intervalle à entrées inconnues.

2.3.1 Structure de l'observateur intervalle

Soit l'observateur par intervalle décrit par

$$\begin{cases} \dot{\overline{z}}(t) &= T\mathcal{A}T^{-1}\overline{z}(t) + T\mathcal{K}y(t) + \overline{\delta}(t) \\ \overline{r}(t) &= \overline{z}(t) + T\mathcal{S}y(t) + \overline{\phi}(t) \end{cases} \tag{2.19a}$$

$$\begin{cases} \dot{\underline{z}}(t) &= T\mathcal{A}T^{-1}\underline{z}(t) + T\mathcal{K}y(t) + \underline{\delta}(t) \\ \underline{r}(t) &= \underline{z}(t) + T\mathcal{S}y(t) + \underline{\phi}(t) \end{cases} \tag{2.19b}$$

où $\overline{z}(t), \underline{z}(t) \in \mathbb{R}^{2n}$, $\overline{r}(t), \underline{r}(t) \in \mathbb{R}^{2n}$, $\mathcal{A} = \begin{bmatrix}N & M \\ L & G\end{bmatrix}$, $\mathcal{K} = \begin{bmatrix}J \\ Q\end{bmatrix}$, $\mathcal{S} = \begin{bmatrix}S \\ 0_{n\times p}\end{bmatrix}$.

L'enjeu consiste à déterminer les matrices $T \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, $N, M, L, G \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $J, Q, S \in$

$\mathbb{R}^{n\times p}$ et les fonctions $\underline{\delta}, \overline{\delta}, \underline{\phi}, \overline{\phi} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{2n\times 1}$ telles que le système (2.19a)-(2.19b) soit un observateur intervalle pour l'état r vérifiant la relation :

$$x(t) = \mathscr{T} r(t) \tag{2.20}$$

où $\mathscr{T} = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n\times n} \end{bmatrix} T^{-1}$.

L'utilisation de l'observateur intervalle (2.19a)-(2.19b) pour estimer des bornes supérieure $\overline{r}$ et inférieure $\underline{r}$ de l'état r est une solution pour déduire des bornes supérieure $\overline{x}$ et inférieure $\underline{x}$ de l'état x au travers de la relation (2.20).

2.3.2 Conditions d'existence de l'observateur intervalle

Les conditions d'existence de l'observateur intervalle (2.19a)-(2.19b) sont données par le théorème suivant.

Théorème 2.1. *Le système (2.19a)-(2.19b) est un observateur intervalle à entrées inconnues pour l'état r vérifiant la relation (2.20), si et seulement si les trois conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) Il existe des matrices S, R, N, J, L, Q, M, G et T définies dans (2.19a)-(2.19b) qui vérifient :

$$S = E(CE)^\dagger + Z_S\left(I_p - CE(CE)^\dagger\right) \tag{2.21a}$$
$$R = I_n - SC \tag{2.21b}$$
$$N = RA + Z_N C \tag{2.21c}$$
$$J = NS - Z_N \tag{2.21d}$$
$$L = Z_L C \tag{2.21e}$$
$$Q = LS - Z_L \tag{2.21f}$$
$$T\begin{bmatrix} N & M \\ L & G \end{bmatrix} T^{-1} \text{ est Hurwitz et Metzler} \tag{2.21g}$$

où Z_S, Z_N, Z_L sont des matrices d'optimisation de dimensions appropriées.

(ii) $\forall t \geq 0$, $\forall \rho \in \left[\underline{\rho}, \overline{\rho}\right]$, il existe des fonctions $\underline{\delta}$, $\overline{\delta}$, $\underline{\phi}$, $\overline{\phi}$ telles que :

$$\underline{\delta}(t) \leq TH(\rho)v(t) \leq \overline{\delta}(t) \tag{2.21h}$$
$$\underline{\phi}(t) \leq TV(\rho)v(t) \leq \overline{\phi}(t) \tag{2.21i}$$

où $v(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$, $V(\rho) = \begin{bmatrix} 0_{n\times n} & -SD(\rho) \\ 0_{n\times n} & 0_{n\times m} \end{bmatrix}$, $H(\rho) = \begin{bmatrix} R\Delta A(\rho) & RB(\rho) - JD(\rho) \\ 0_{n\times n} & -QD(\rho) \end{bmatrix}$.

(iii) Les conditions initiales des vecteurs $\underline{z}$, $\overline{z}$ sont définies par :

$$\overline{z}(0) = \overline{\Psi}^* x(0)^*, \quad \underline{z}(0) = \underline{\Psi}^* x(0)^* \tag{2.21j}$$

où $\Psi = T\begin{bmatrix} R \\ 0_{n\times n} \end{bmatrix}$ *et les notations sont définies dans le Lemme 1.5, page 15.*

Alors l'inégalité suivante est satisfaite

$$\underline{r}(t) \leq r(t) \leq \overline{r}(t), \ \forall\, t \geq 0 \tag{2.22}$$

Démonstration. La preuve est basée sur l'utilisation des erreurs $\overline{e}_z$, $\underline{e}_z$ définies par :

$$\overline{e}_z(t) = \overline{z}(t) - z(t) \tag{2.23a}$$
$$\underline{e}_z(t) = z(t) - \underline{z}(t) \tag{2.23b}$$

où $z(t) = \Psi x(t)$ avec la matrice Ψ définie dans (2.21j).

La première étape consiste à réécrire les expressions de $\overline{r}$, $\underline{r}$ définies dans (2.19a)-(2.19b) en utilisant les relations (2.23a)-(2.23b) :

$$\overline{r}(t) = \quad \overline{e}_z(t) + T \begin{bmatrix} R + SC \\ 0_{n\times n} \end{bmatrix} x(t) + \overline{\phi}(t) + T \begin{bmatrix} SD(\rho) \\ 0_{n\times m} \end{bmatrix} w(t) \tag{2.24a}$$
$$\underline{r}(t) = -\underline{e}_z(t) + T \begin{bmatrix} R + SC \\ 0_{n\times n} \end{bmatrix} x(t) + \underline{\phi}(t) + T \begin{bmatrix} SD(\rho) \\ 0_{n\times m} \end{bmatrix} w(t) \tag{2.24b}$$

En supposant que la relation (2.21b) est satisfaite alors :

$$\overline{r}(t) = \quad \overline{e}_z(t) + T \begin{bmatrix} I_n \\ 0_{n\times n} \end{bmatrix} x(t) + \overline{\phi}(t) + T \begin{bmatrix} SD(\rho) \\ 0_{n\times m} \end{bmatrix} w(t) \tag{2.25a}$$
$$\underline{r}(t) = -\underline{e}_z(t) + T \begin{bmatrix} I_n \\ 0_{n\times n} \end{bmatrix} x(t) + \underline{\phi}(t) + T \begin{bmatrix} SD(\rho) \\ 0_{n\times m} \end{bmatrix} w(t) \tag{2.25b}$$

D'après la relation (2.20), il est facilement déduit que :

$$r(t) = T \begin{bmatrix} I_n \\ 0_{n\times n} \end{bmatrix} x(t) \tag{2.26}$$

Ainsi, la relation (2.26) et les expressions de la matrice V et du vecteur v définies dans (2.21i) permettent de réduire les relations (2.25a)-(2.25b) aux formes définies par :

$$\overline{r}(t) = \quad \overline{e}_z(t) + r(t) + \overline{\phi}(t) - TV(\rho)v(t) \tag{2.27a}$$
$$\underline{r}(t) = -\underline{e}_z(t) + r(t) + \underline{\phi}(t) - TV(\rho)v(t) \tag{2.27b}$$

Les expressions des erreurs d'observation déduites de (2.27a) et (2.27b) sont données par :

$$\overline{r}(t) - r(t) = \overline{e}_z(t) + \overline{\phi}(t) - TV(\rho)v(t) \tag{2.28a}$$
$$r(t) - \underline{r}(t) = \underline{e}_z(t) + TV(\rho)v(t) - \underline{\phi}(t) \tag{2.28b}$$

Par conséquent, l'inégalité (2.22) est vérifiée si, pour tout $t \geq 0$, les conditions $\underline{e}_z(t) \geq 0$, $\overline{e}_z(t) \geq 0$ et $\underline{\phi}(t) \leq TV(\rho)v(t) \leq \overline{\phi}(t)$ sont vérifiées.

En admettant que l'inégalité (2.21i) est satisfaite alors la seconde étape consiste à démontrer que $\underline{e}_z(t) \geq 0$, $\overline{e}_z(t) \geq 0$, $\forall t \geq 0$. Le processus est basé sur le développement des

expressions des dynamiques de $\overline{e}_z$ et $\underline{e}_z$:

$$\begin{aligned}
\dot{\overline{e}}_z(t) &= \dot{\overline{z}}(t) - \dot{z}(t) \\
&= T\mathcal{A}T^{-1}\overline{z}(t) + T\mathcal{K}y(t) + \overline{\delta}(t) - T\begin{bmatrix} R \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}\dot{x}(t) + T\mathcal{A}T^{-1}z(t) - T\mathcal{A}T^{-1}z(t) \\
&= T\mathcal{A}T^{-1}\overline{e}_z(t) + T\begin{bmatrix} NR + JC - RA \\ LR + QC \end{bmatrix}x(t) + \overline{\delta}(t) \\
&\quad - T\begin{bmatrix} R\Delta A(\rho) & RB(\rho) - JD(\rho) \\ \mathbf{0} & -QD(\rho) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} - T\begin{bmatrix} RE \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}d(t)
\end{aligned} \tag{2.29}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\underline{e}}_z(t) &= \dot{z}(t) - \dot{\underline{z}}(t) \\
&= T\begin{bmatrix} R \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}\dot{x}(t) - \left(T\mathcal{A}T^{-1}\underline{z}(t) + T\mathcal{K}y(t) + \underline{\delta}(t)\right) + T\mathcal{A}T^{-1}z(t) - T\mathcal{A}T^{-1}z(t) \\
&= T\mathcal{A}T^{-1}\underline{e}_z(t) - T\begin{bmatrix} NR + JC - RA \\ LR + QC \end{bmatrix}x(t) - \underline{\delta}(t) \\
&\quad + T\begin{bmatrix} R\Delta A(\rho) & RB(\rho) - JD(\rho) \\ \mathbf{0} & -QD(\rho) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} + T\begin{bmatrix} RE \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}d(t)
\end{aligned} \tag{2.30}$$

L'objectif suivant consiste à déterminer les matrices S, N, L, J et Q qui permettent de vérifier les conditions de découplage données par :

$$\begin{cases} RE = \mathbf{0} & (2.31) \\ NR + JC - RA = \mathbf{0} & (2.32) \\ LR + QC = \mathbf{0} & (2.33) \end{cases}$$

En considérant la matrice R sous la forme (2.21b) alors la contrainte algébrique (2.31) est réduite à la détermination d'une matrice S qui vérifie la contrainte :

$$RE = (I_n - SC)\,E = \mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; SCE = E \tag{2.34}$$

Sous l'Hypothèse 2.4, la contrainte (2.34) est équivalente à la détermination d'une matrice S dont la structure est définie par (2.21a).

De plus, l'expression de la matrice R est utilisée pour réécrire les contraintes (2.32)-(2.33) et en extraire les matrices N et L :

$$\begin{cases} NR + JC - RA = N\,(I_n - SC) + JC - RA = \mathbf{0} \\ LR + QC = L\,(I_n - SC) + QC = \mathbf{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} N = RA + Z_N C \\ L = Z_L C \end{cases} \tag{2.35}$$

où $Z_N = NS - J$ et $Z_L = LS - Q$.

Les matrices J et Q sont facilement déduites et équivalentes aux expressions respectivement données par (2.21d) et (2.21f).

En admettant que les conditions de découplage sont vérifiées et en considérant les notations de la matrice H et du vecteur v, définies dans (2.21h), alors les dynamiques des erreurs $\overline{e}_z$ et $\underline{e}_z$ sont réduites aux formes :

$$\dot{\overline{e}}_z(t) = T\mathcal{A}T^{-1}\overline{e}_z(t) + \overline{\delta}(t) - TH(\rho)v(t) \tag{2.36a}$$
$$\dot{\underline{e}}_z(t) = T\mathcal{A}T^{-1}\underline{e}_z(t) + TH(\rho)v(t) - \underline{\delta}(t) \tag{2.36b}$$

En utilisant les contraintes liées à la propriété Metzler (2.21g), à l'encadrement (2.21h) et aux conditions initiales (2.21j) alors, d'après le Théorème 1.4 présenté à la page 17, les erreurs d'observation vérifient $\underline{e}_z(t) \geq 0$, $\overline{e}_z(t) \geq 0$, $\forall t \geq 0$. Ainsi le système d'équations (2.19a)-(2.19b) est un observateur intervalle pour la variable r. La méthode de découplage utilisée pour annuler l'effet du vecteur des entrées inconnues d sur les estimations supérieure et inférieure de l'état r permet de considérer que le système (2.19a)-(2.19b) est un observateur intervalle à entrées inconnues. ■

Finalement, l'encadrement de l'état x du système (2.17) est obtenu en appliquant le Lemme 1.5 sur la relation (2.20).

Corollaire 2.1. *Si le Théorème 2.1 est satisfait alors il existe deux vecteurs* $\underline{x}(t), \overline{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ *tels que :*

$$\underline{x}(t) \leq x(t) \leq \overline{x}(t), \quad \forall t \geq 0 \tag{2.37}$$

où $\overline{x}(t) = \mathscr{T}^+\overline{r}(t) - \mathscr{T}^-\underline{r}(t)$, $\underline{x}(t) = \mathscr{T}^+\underline{r}(t) - \mathscr{T}^-\overline{r}(t)$.

Démonstration. En supposant que le Théorème 2.1 est vérifié alors $\underline{r}(t) \leq r(t) \leq \overline{r}(t)$, $\forall t \geq 0$. En appliquant le Lemme 1.5 sur la relation $x(t) = \mathscr{T}r(t)$ alors l'inégalité (2.37) est déduite. ■

2.3.3 Limites de l'approche

Nous venons de montrer que le système d'équations (2.19a)-(2.19b) est un observateur intervalle à entrées inconnues pour le système (2.17). En effet, il estime des bornes supérieure $\overline{x}$ et inférieure $\underline{x}$, pour l'état x (au travers du Corollaire 2.1) qui sont découplées du vecteur des entrées inconnues d par les propriétés du Théorème 2.1. Cependant, il est important de noter, à partir des inégalités (2.21h) et (2.21i), que les fonctions $\underline{\delta}$, $\overline{\delta}$, $\underline{\phi}$, $\overline{\phi}$ dépendent de la connaissance des matrices de l'observateur intervalle (2.19a)-(2.19b). Plus particulièrement, notons la dépendance liée à la matrice T qui garantit la propriété Metzler nécessaire pour assurer la coopérativité des erreurs d'observation. Or, le processus de conception de l'observateur intervalle détermine la matrice T *a posteriori*, en utilisant la connaissance des matrices N, M, L, G. Par conséquent, la solution peut conduire à une estimation intervalle très conservative puisqu'elle ne permet pas d'imposer des contraintes de performance au cours du processus de conception. Pour toutes ces raisons, nous introduisons une structure modifiée de l'observateur intervalle (2.19a)-(2.19b).

2.4 Deuxième approche

Dans cette section, nous présentons les travaux basés sur un nouvel observateur intervalle reposant sur les principes de l'observateur intervalle (2.19a)-(2.19b). Les principales différences concernent la structure de l'observateur intervalle et le choix particulier d'un changement de coordonnées pour satisfaire la coopérativité des erreurs d'observation dans la nouvelle base. Ces nouvelles caractéristiques sont fondamentales pour le processus de conception. Elles permettent de simultanément satisfaire les conditions d'existence de l'observateur intervalle et réduire le conservatisme de l'estimation par intervalle en résolvant un problème d'optimisation de performance au sens de la norme $\mathcal{H}_\infty$ et de la $\mathcal{D}$-stabilité.

2.4.1 Structure de l'observateur intervalle

La structure de l'observateur intervalle repose sur l'utilisation d'un changement de coordonnées non singulier $\Sigma \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$. Soit le changement de variables défini par :

$$r(t) = \Sigma \begin{bmatrix} x(t) \\ 0_{n\times 1} \end{bmatrix} \tag{2.38}$$

Étant donné que la matrice Σ est inversible, alors d'après le Lemme 1.5, il est facilement déduit que l'existence d'une borne supérieure $\overline{r} \in \mathbb{R}^{2n}$ et d'une borne inférieure $\underline{r} \in \mathbb{R}^{2n}$ pour l'état r telles que $\underline{r}(t) \leq r(t) \leq \overline{r}(t)$, $\forall t \geq 0$ assure que

$$\underline{x}(t) \leq x(t) \leq \overline{x}(t), \quad \forall t \geq 0 \tag{2.39}$$

où $\overline{x} = \mathscr{T}^{+}\overline{r}(t) - \mathscr{T}^{-}\underline{r}(t)$, $\underline{x} = \mathscr{T}^{+}\underline{r}(t) - \mathscr{T}^{-}\overline{r}(t)$ avec $\mathscr{T} = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n\times n} \end{bmatrix} \Sigma^{-1}$.

L'objectif de ces travaux est de construire les variables $\underline{r}$ et $\overline{r}$, en utilisant un observateur intervalle à entrées inconnues décrit par la structure :

$$\begin{cases} \dot{\overline{z}}(t) &= \mathcal{T}\mathcal{A}\mathcal{T}^{-1}\overline{z}(t) + \mathcal{T}\mathcal{K}y(t) + \mathcal{T}\overline{\delta}(t) \\ \overline{r}(t) &= \mathcal{I}\overline{z}(t) + \mathcal{I}\mathcal{T}\mathcal{S}y(t) + \mathcal{I}\mathcal{T}\overline{\phi}(t) \end{cases} \tag{2.40a}$$

$$\begin{cases} \dot{\underline{z}}(t) &= \mathcal{T}\mathcal{A}\mathcal{T}^{-1}\underline{z}(t) + \mathcal{T}\mathcal{K}y(t) + \mathcal{T}\underline{\delta}(t) \\ \underline{r}(t) &= \mathcal{I}\underline{z}(t) + \mathcal{I}\mathcal{T}\mathcal{S}y(t) + \mathcal{I}\mathcal{T}\underline{\phi}(t) \end{cases} \tag{2.40b}$$

où $\overline{z}(t), \underline{z}(t) \in \mathbb{R}^{4n^2}$, $\overline{r}(t), \underline{r}(t) \in \mathbb{R}^{2n}$ et les matrices $\mathcal{A} = I_{2n} \otimes \begin{bmatrix} N & M \\ L & G \end{bmatrix}$, $\mathcal{K} = \mathbb{1}_{2n} \otimes \begin{bmatrix} J \\ Q \end{bmatrix}$, $\mathcal{S} = \mathbb{1}_{2n} \otimes \begin{bmatrix} S \\ 0_{n\times p} \end{bmatrix}$, $\mathcal{I} = \begin{bmatrix} I_{2n} & 0_{2n\times(4n^2-2n)} \end{bmatrix}$.

La détermination des matrices $\mathcal{T} \in \mathbb{R}^{4n^2\times 4n^2}$, $N, M, L, G \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $J, Q, S \in \mathbb{R}^{n\times p}$ et des fonctions $\underline{\delta}$, $\overline{\delta}$, $\underline{\phi}$, $\overline{\phi} \in \mathbb{R}^{4n^2}$ est soumise à la vérification des contraintes définies par :

(i) le vecteur des entrées inconnues d n'affecte pas l'estimation par intervalle,

(ii) l'influence des vecteurs w, y et de leurs majorants sur les demi-intervalles $\overline{x} - x$ et $x - \underline{x}$ est minimale au sens de la norme $\mathcal{H}_\infty$,

(iii) Les pôles de la matrice $\mathcal{T}\mathcal{A}\mathcal{T}^{-1}$ appartiennent à une région spécifique au sens de la $\mathcal{D}$-stabilité.

Les contraintes (i) et (ii) permettent de réduire le conservatisme de l'estimation par intervalle, en découplant l'influence des entrées inconnues et en minimisant l'effet des perturbations sur les demi-intervalles. La contrainte (iii) permet d'ajuster le comportement transitoire de l'observateur intervalle à entrées inconnues.

Il est à noter que la structure de l'observateur intervalle repose sur un état augmenté. Nous retrouvons ce principe dans les travaux de [17] pour garantir la propriété Metzler nécessaire à la coopérativité des erreurs d'observation. Dans l'approche proposée, cette particularité sera exploitée pour réduire le conservatisme de l'estimation par intervalle en formulant un problème d'optimisation convexe.

2.4.2 Changement de coordonnées LTI

En suivant un raisonnement similaire à la section précédente, il est évident que la matrice $\mathcal{T}$ joue un rôle primordial dans le processus de conception de l'observateur intervalle, notamment pour les fonctions $\underline{\delta}$, $\overline{\delta}$, $\underline{\phi}$, $\overline{\phi}$. Pour ce problème, considérons la matrice inversible Σ telle que la matrice $\Sigma \begin{bmatrix} N & \overline{M} \\ L & G \end{bmatrix} \Sigma^{-1}$ soit diagonale. Alors la matrice $\mathcal{T}$ est définie par la structure

$$\mathcal{T} = \mathcal{X}(I_{2n} \otimes \Sigma) \tag{2.41}$$

où $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{4n^2 \times 4n^2}$ représente une matrice symétrique et unitaire définie par :

$$\mathcal{X} = \begin{bmatrix} \mathcal{X}_1 & \mathcal{X}_2 & \mathcal{X}_3 & \cdots & \mathcal{X}_{2n} \\ \mathcal{X}_2 & \mathcal{X}_3 & \ddots & & \mathcal{X}_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \mathcal{X}_{2n-2} \\ \mathcal{X}_{2n} & \mathcal{X}_1 & \cdots & \mathcal{X}_{2n-2} & \mathcal{X}_{2n-1} \end{bmatrix} \tag{2.42}$$

où $\mathcal{X}_k = [x_{ij}]_k$, $\forall k = 1, \cdots, 2n$, telles que $\begin{cases} x_{ij} = 1 & si\ i = j = k,\ \forall i, j = 1, \cdots, 2n \\ x_{ij} = 0 & si\ i \neq j,\ \forall i, j = 1, \cdots, 2n \end{cases}$.

Exemple

Pour illustrer la structure de la matrice $\mathcal{X}$, considérons les cas où n=1 qui conduit à la forme :

$$\mathcal{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ et } \mathcal{X}^T\mathcal{X} = \mathcal{X}\mathcal{X}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.4.3 Conditions d'existence de l'observateur intervalle

Les conditions d'existence de l'observateur intervalle à entrées inconnues sont présentées dans le Lemme 2.4.

Lemme 2.4. *Le système d'équations* (2.40a)-(2.40b) *est un observateur intervalle à entrées inconnues pour le système* (2.17) *dans le système de coordonnées défini par* (2.38)*, si et seulement si les trois conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) Il existe des matrices S, R, N, J, L, Q, M, G et $\mathcal{T}$ dans le système (2.40a)-

(2.40b) *telles que :*

$$S = E(CE)^\dagger + Z_S\left(I_p - CE(CE)^\dagger\right) \tag{2.43a}$$
$$R = I_n - SC \tag{2.43b}$$
$$N = RA + Z_N C \tag{2.43c}$$
$$J = NS - Z_N \tag{2.43d}$$
$$L = Z_L C \tag{2.43e}$$
$$Q = LS - Z_L \tag{2.43f}$$
$$\mathcal{T}\left(I_{2n} \otimes \begin{bmatrix} N & M \\ L & G \end{bmatrix}\right)\mathcal{T}^{-1} \text{ est Hurwitz et diagonale} \tag{2.43g}$$

où Z_S, Z_N, Z_L sont des matrices d'optimisation. La détermination de ces matrices sera abordée dans la suite de ce chapitre.

(ii) $\forall t \geq 0$, $\forall \rho \in \left[\underline{\rho}, \overline{\rho}\right]$, *il existe des fonctions* $\underline{\delta}$, $\overline{\delta}$, $\underline{\phi}$, $\overline{\phi}$ *telles que :*

$$\mathcal{IT}\underline{\delta}(t) \leq \mathcal{IT}\alpha(\rho, t) \leq \mathcal{IT}\overline{\delta}(t) \tag{2.43h}$$
$$\mathcal{IT}\underline{\phi}(t) \leq \mathcal{IT}\beta(\rho, t) \leq \mathcal{IT}\overline{\phi}(t) \tag{2.43i}$$

où $\alpha(\rho, t) = \mathbb{1}_{2n} \otimes H_1(\rho)x(t) + \mathbb{1}_{2n} \otimes H_2(\rho)w(t)$, $\beta(\rho, t) = \mathbb{1}_{2n} \otimes V(\rho)w(t)$, $H_1(\rho) = \begin{bmatrix} R\Delta A(\rho) \\ 0_{n\times n} \end{bmatrix}$, $H_2(\rho) = \begin{bmatrix} RB(\rho) - JD(\rho) \\ -QD(\rho) \end{bmatrix}$, $V(\rho) = \begin{bmatrix} -SD(\rho) \\ 0_{n\times m} \end{bmatrix}$.

(iii) les conditions initiales pour $\underline{z}$, $\overline{z}$ *sont données par :*

$$\overline{z}(0) = \overline{\Psi}^* x(0)^*, \quad \underline{z}(0) = \underline{\Psi}^* x(0)^* \tag{2.43j}$$

où $\Psi = \mathcal{T}\left(\mathbb{1}_{2n} \otimes \begin{bmatrix} R \\ 0_{n\times n} \end{bmatrix}\right)$ *et les notations sont définies dans le Lemme 1.5, page 15.*

Alors, la propriété suivante est satisfaite :

$$\underline{r}(t) \leq r(t) \leq \overline{r}(t), \ \forall t \geq 0 \tag{2.44}$$

Démonstration. La preuve du Lemme 2.4 est similaire à celle du Théorème 2.1. Soient les erreurs $\overline{e}_z$, $\underline{e}_z$ définies par :

$$\overline{e}_z(t) = \overline{z}(t) - z(t) \tag{2.45a}$$
$$\underline{e}_z(t) = z(t) - \underline{z}(t) \tag{2.45b}$$

où $z(t) = \Psi x(t)$ avec la matrice Ψ définie dans le système (2.43j).

La première étape consiste à réécrire les bornes $\overline{r}$, $\underline{r}$ définies dans (2.40a)-(2.40b) en utilisant les relations (2.45a) et (2.45b) :

$$\overline{r}(t) = \mathcal{I}\overline{e}_z(t) + \mathcal{IT}\left(\mathbb{1}_{2n} \otimes \begin{bmatrix} R + SC \\ 0_{n\times n} \end{bmatrix}\right)x(t) + \mathcal{IT}\overline{\phi}(t) + \mathcal{IT}\left(\mathbb{1}_{2n} \otimes \begin{bmatrix} SD(\rho) \\ 0_{n\times m} \end{bmatrix}\right)w(t) \tag{2.46a}$$

$$\underline{r}(t) = \mathcal{I}\underline{e}_z(t) + \mathcal{IT}\left(\mathbb{1}_{2n} \otimes \begin{bmatrix} R + SC \\ 0_{n\times n} \end{bmatrix}\right)x(t) + \mathcal{IT}\underline{\phi}(t) + \mathcal{IT}\left(\mathbb{1}_{2n} \otimes \begin{bmatrix} SD(\rho) \\ 0_{n\times m} \end{bmatrix}\right)w(t) \tag{2.46b}$$

En supposant que la contrainte (2.43b) est satisfaite et en utilisant les expressions des matrices $\mathcal{I}$, $\mathcal{T}$ et $\mathcal{X}$ définies respectivement dans (2.40a)-(2.40b), (2.41) et (2.42) alors :

$$\begin{aligned}\mathcal{I}\mathcal{T}\left(\mathbb{1}_{2n}\otimes\begin{bmatrix}R+SC\\0_{n\times n}\end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix}I_{2n} & 0_{2n\times(4n^2-2n)}\end{bmatrix}\mathcal{X}(I_{2n}\otimes\Sigma)\left(\mathbb{1}_{2n}\otimes\begin{bmatrix}I_n\\0_{n\times n}\end{bmatrix}\right)\\ &= \begin{bmatrix}\mathcal{X}_1 & \mathcal{X}_2 & \cdots & \mathcal{X}_{2n}\end{bmatrix}(I_{2n}\otimes\Sigma)\left(\mathbb{1}_{2n}\otimes\begin{bmatrix}I_n\\0_{n\times n}\end{bmatrix}\right)\end{aligned} \tag{2.47}$$

En admettant que la matrice Σ est partitionnée en $\Sigma_i\in\mathbb{R}^{1\times 2n}$, $i\in\{1,\cdots 2n\}$ telle que $\Sigma=\begin{bmatrix}\Sigma_1\\\vdots\\\Sigma_{2n}\end{bmatrix}$ alors :

$$\begin{aligned}\mathcal{I}\mathcal{T}\left(\mathbb{1}_{2n}\otimes\begin{bmatrix}R+SC\\0_{n\times n}\end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix}\Sigma_1 & 0_{1\times 2n} & \cdots & 0_{1\times 2n}\\ 0_{1\times 2n} & \Sigma_2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_{1\times 2n}\\ 0_{1\times 2n} & \cdots & 0_{1\times 2n} & \Sigma_{2n}\end{bmatrix}\left(\mathbb{1}_{2n}\otimes\begin{bmatrix}I_n\\0_{n\times n}\end{bmatrix}\right)\\ &= \Sigma\begin{bmatrix}I_n\\0_{n\times n}\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{2.48}$$

Finalement, en considérant les expressions de la variable r et du vecteur β définies respectivement dans (2.38) et (2.43i), alors les relations (2.46a) et (2.46b) sont réduites aux formes :

$$\overline{r}(t) = \mathcal{I}\overline{e}_z(t)+r(t)+\mathcal{I}\mathcal{T}\overline{\phi}(t)-\mathcal{I}\mathcal{T}\beta(\rho,t) \tag{2.49a}$$
$$\underline{r}(t) = -\mathcal{I}\underline{e}_z(t)+r(t)+\mathcal{I}\mathcal{T}\underline{\phi}(t)-\mathcal{I}\mathcal{T}\beta(\rho,t) \tag{2.49b}$$

Ainsi, les expressions des erreurs d'observation sont données par :

$$\overline{r}(t)-r(t) = \mathcal{I}\overline{e}_z(t)+\mathcal{I}\mathcal{T}\overline{\phi}(t)-\mathcal{I}\mathcal{T}\beta(\rho,t) \tag{2.50a}$$
$$r(t)-\underline{r}(t) = \mathcal{I}\underline{e}_z(t)+\mathcal{I}\mathcal{T}\beta(\rho,t)-\mathcal{I}\mathcal{T}\underline{\phi}(t) \tag{2.50b}$$

Par conséquent, l'inégalité (2.44) est satisfaite si, pour tout $t\geq 0$, les conditions $\mathcal{I}\underline{e}_z(t)\geq 0$, $\mathcal{I}\overline{e}_z(t)\geq 0$ et $\mathcal{I}\mathcal{T}\underline{\phi}(t)\leq\mathcal{I}\mathcal{T}\beta(\rho,t)\leq\mathcal{I}\mathcal{T}\overline{\phi}(t)$ sont vérifiées.

En admettant que l'inégalité (2.43i) est vérifiée alors la seconde étape consiste à démontrer que $\mathcal{I}\underline{e}_z(t)\geq 0, \mathcal{I}\overline{e}_z(t)\geq 0, \forall t\geq 0$. Le processus repose sur les expressions des dynamiques de $\overline{e}_z$ et $\underline{e}_z$:

$$\begin{aligned}\dot{\overline{e}}_z(t) &= \dot{\overline{z}}(t)-\dot{z}(t)\\ &= \mathcal{T}\mathcal{A}\mathcal{T}^{-1}\overline{z}(t)+\mathcal{T}\mathcal{K}y(t)+\mathcal{T}\overline{\delta}(t)-\mathcal{T}\left(\mathbb{1}_{2n}\otimes\begin{bmatrix}R\\\mathbf{0}\end{bmatrix}\right)\dot{x}(t)+\mathcal{T}\mathcal{A}\mathcal{T}^{-1}\left(z(t)-z(t)\right)\\ &= \mathcal{T}\mathcal{A}\mathcal{T}^{-1}\overline{e}_z(t)+\mathcal{T}\left(\mathbb{1}_{2n}\otimes\begin{bmatrix}NR+JC-RA\\LR+QC\end{bmatrix}\right)x(t)+\mathcal{T}\overline{\delta}(t)\\ &\quad-\mathcal{T}\left(\mathbb{1}_{2n}\otimes\begin{bmatrix}R\Delta A(\rho) & RB(\rho)-JD(\rho)\\ \mathbf{0} & -QD(\rho)\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}x(t)\\w(t)\end{bmatrix}-\mathcal{T}\left(\mathbb{1}_{2n}\otimes\begin{bmatrix}RE\\\mathbf{0}\end{bmatrix}\right)d(t)\end{aligned} \tag{2.51}$$

$$\begin{aligned}\dot{\underline{e}}_z(t) &= \dot{z}(t) - \dot{\underline{z}}(t)\\ &= \mathcal{T}\left(\mathbb{1}_{2n} \otimes \begin{bmatrix} R \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}\right)\dot{x}(t) - \left(\mathcal{T}\mathcal{A}\mathcal{T}^{-1}\underline{z}(t) + \mathcal{T}\mathcal{K}y(t) + \mathcal{T}\underline{\delta}(t)\right) + \mathcal{T}\mathcal{A}\mathcal{T}^{-1}\left(z(t) - z(t)\right)\\ &= \mathcal{T}\mathcal{A}\mathcal{T}^{-1}\underline{e}_z(t) - \mathcal{T}\left(\mathbb{1}_{2n} \otimes \begin{bmatrix} NR + JC - RA \\ LR + QC \end{bmatrix}\right)x(t) - \mathcal{T}\underline{\delta}(t)\\ &\quad + \mathcal{T}\left(\mathbb{1}_{2n} \otimes \begin{bmatrix} R\Delta A(\rho) & RB(\rho) - JD(\rho) \\ \mathbf{0} & -QD(\rho) \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} + \mathcal{T}\left(\mathbb{1}_{2n} \otimes \begin{bmatrix} RE \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}\right)d(t)\end{aligned} \tag{2.52}$$

L'objectif est maintenant de déterminer les matrices S, N, L, J et Q qui permettent de vérifier les conditions de découplage données par :

$$\begin{cases} RE = \mathbf{0} & (2.53)\\ NR + JC - RA = \mathbf{0} & (2.54)\\ LR + QC = \mathbf{0} & (2.55)\end{cases}$$

De manière similaire au Théorème 2.1, il est facilement démontré que les conditions (2.43a) à (2.43f) permettent de vérifier les contraintes algébriques (2.53) à (2.55). En considérant la notation du vecteur α définie dans (2.43h), alors les dynamiques des erreurs $\overline{e}$ et $\underline{e}$ sont réduites aux formes :

$$\dot{\overline{e}}_z(t) = \mathcal{T}\mathcal{A}\mathcal{T}^{-1}\overline{e}_z(t) + \mathcal{T}\left(\overline{\delta}(t) - \alpha(\rho,t)\right) \tag{2.56a}$$
$$\dot{\underline{e}}_z(t) = \mathcal{T}\mathcal{A}\mathcal{T}^{-1}\underline{e}_z(t) + \mathcal{T}\left(\alpha(\rho,t) - \underline{\delta}(t)\right) \tag{2.56b}$$

Par conséquent, les dynamiques de $\mathcal{I}\overline{e}_z(t)$ et $\mathcal{I}\underline{e}_z(t)$ sont déduites de (2.56a)-(2.56b) :

$$\mathcal{I}\dot{\overline{e}}_z(t) = \mathcal{I}\mathcal{T}\mathcal{A}\mathcal{T}^{-1}\overline{e}_z(t) + \mathcal{I}\mathcal{T}\left(\overline{\delta}(t) - \alpha(\rho,t)\right) \tag{2.57a}$$
$$\mathcal{I}\dot{\underline{e}}_z(t) = \mathcal{I}\mathcal{T}\mathcal{A}\mathcal{T}^{-1}\underline{e}_z(t) + \mathcal{I}\mathcal{T}\left(\alpha(\rho,t) - \underline{\delta}(t)\right) \tag{2.57b}$$

En utilisant la contrainte (2.43g) liée à la structure de la matrice $\mathcal{T}\mathcal{A}\mathcal{T}^{-1}$ alors les dynamiques de $\overline{e}_1(t) = \mathcal{I}\overline{e}_z(t)$ et $\underline{e}_1(t) = \mathcal{I}\underline{e}_z(t)$ sont données par :

$$\dot{\overline{e}}_1(t) = \mathcal{I}\mathcal{T}\mathcal{A}\mathcal{T}^{-1}\mathcal{I}^T\overline{e}_1(t) + \mathcal{I}\mathcal{T}\left(\overline{\delta}(t) - \alpha(\rho,t)\right) \tag{2.58a}$$
$$\dot{\underline{e}}_1(t) = \mathcal{I}\mathcal{T}\mathcal{A}\mathcal{T}^{-1}\mathcal{I}^T\underline{e}_1(t) + \mathcal{I}\mathcal{T}\left(\alpha(\rho,t) - \underline{\delta}(t)\right) \tag{2.58b}$$

Étant donné que la matrice $\mathcal{I}\mathcal{T}\mathcal{A}\mathcal{T}^{-1}\mathcal{I}^T$ est diagonale (sous-classe des matrices Metzler) alors en combinant ce résultat avec les contraintes liées à l'encadrement (2.43h) et aux conditions initiales (2.43j), le Théorème 1.4 garantit que les erreurs d'observation vérifient $\mathcal{I}\underline{e}_z(t) \geq 0$, $\mathcal{I}\overline{e}_z(t) \geq 0$, $\forall t \geq 0$. Ainsi le système d'équations (2.40a)-(2.40b) est un observateur intervalle pour l'état x du système (2.17) dans le système de coordonnées (2.38). La méthode de découplage utilisée pour annuler l'effet du vecteur des entrées inconnues d sur l'estimation permet de considérer que le système (2.40a)-(2.40b) est un observateur intervalle à entrées inconnues. ■

Les résultats du Théorème 2.4 permettent de déduire un encadrement de l'état x du système (2.17) en appliquant le Lemme 1.5 sur la relation $x(t) = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n\times n} \end{bmatrix}\Sigma^{-1}r(t)$.

Corollaire 2.2. *Si le Lemme 2.4 est satisfait, alors il existe deux vecteurs* $\underline{x}(t), \overline{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ *tels que :*

$$\underline{x}(t) \leq x(t) \leq \overline{x}(t), \quad \forall t \geq 0 \tag{2.59}$$

où $\overline{x} = \mathscr{T}^{+}\overline{r}(t) - \mathscr{T}^{-}\underline{r}(t)$, $\underline{x} = \mathscr{T}^{+}\underline{r}(t) - \mathscr{T}^{-}\overline{r}(t)$ *avec* $\mathscr{T} = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n\times n} \end{bmatrix} \Sigma^{-1}$.

Démonstration. En supposant que le Lemme 2.4 est satisfait alors $\underline{r}(t) \leq r(t) \leq \overline{r}(t)$, $\forall t \geq 0$. Finalement, l'application du Lemme 1.5 sur la relation $x(t) = \mathscr{T} r(t)$ obtenue à partir de la relation (2.38) conduit à l'inégalité (2.59). ■

Cependant, une limite du Lemme 2.4 repose sur le fait que seules les conditions d'existence des fonctions $\underline{\delta}$, $\overline{\delta}$, $\underline{\phi}$, $\overline{\phi}$ sont données sans proposer une méthode de conception. Une solution à ce problème est donnée dans le lemme suivant.

Lemme 2.5. *Soient le Lemme 2.4 supposé satisfait et les matrices* Z_S, Z_N, Z_L *définies par :*

$$\begin{bmatrix} Z_N \\ Z_L \end{bmatrix} = K_1 - K_2, \quad \begin{bmatrix} Z_S \\ 0_{n\times p} \end{bmatrix} = K_3 - K_4, \tag{2.60}$$

où les matrices $K_1, K_2, K_3, K_4 \in \mathbb{R}^{2n\times p}$ *telles que* $K_1, K_2, K_3, K_4 \geq 0$,
avec $K_3 = \begin{bmatrix} K_{31} \\ 0_{n\times p} \end{bmatrix}$, $K_4 = \begin{bmatrix} K_{41} \\ 0_{n\times p} \end{bmatrix}$ *avec* $K_{31}, K_{41} \in \mathbb{R}_{+}^{n\times p}$.

En définissant les fonctions $\underline{\delta}, \overline{\delta}, \underline{\phi}, \overline{\phi} \in \mathbb{R}^{4n^2}$ *telles que :*

$$\underline{\delta}(t) = \left(\mathbb{1}_{2n} \otimes \mathcal{H}_1 - \Omega\left(\mathbb{1}_{2n} \otimes \mathcal{H}_2\right)\right) \eta^*(t) \tag{2.61}$$

$$\overline{\delta}(t) = \left(\mathbb{1}_{2n} \otimes \mathcal{H}_1 + \Omega\left(\mathbb{1}_{2n} \otimes \mathcal{H}_2\right)\right) \eta^*(t) \tag{2.62}$$

$$\underline{\phi}(t) = \left(\mathbb{1}_{2n} \otimes \mathcal{V}_1 - \Omega\left(\mathbb{1}_{2n} \otimes \mathcal{V}_2\right)\right) \eta^*(t) \tag{2.63}$$

$$\overline{\phi}(t) = \left(\mathbb{1}_{2n} \otimes \mathcal{V}_1 + \Omega\left(\mathbb{1}_{2n} \otimes \mathcal{V}_2\right)\right) \eta^*(t) \tag{2.64}$$

où $\eta(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$ *et les matrices sont données par :*

$$\mathcal{H}_1 = \frac{1}{2}\left(\mathbb{W}_1\left(X_1(\rho), X_2(\rho), I_{2n}, K_1, K_2\right) + \mathbb{W}_2\left(X_1(\rho), X_2(\rho), I_{2n}, K_1, K_2\right)\right),$$

$$\mathcal{H}_2 = \frac{1}{2}\left(\mathbb{W}_1\left(X_1(\rho), X_2(\rho), I_{2n}, K_1, K_2\right) - \mathbb{W}_2\left(X_1(\rho), X_2(\rho), I_{2n}, K_1, K_2\right)\right),$$

$$\mathcal{V}_1 = \frac{1}{2}\left(\mathbb{W}_1\left(X_3(\rho), X_4(\rho), I_{2n}, K_3, K_4\right) + \mathbb{W}_2\left(X_3(\rho), X_4(\rho), I_{2n}, K_3, K_4\right)\right),$$

$$\mathcal{V}_2 = \frac{1}{2}\left(\mathbb{W}_1\left(X_3(\rho), X_4(\rho), I_{2n}, K_3, K_4\right) - \mathbb{W}_2\left(X_3(\rho), X_4(\rho), I_{2n}, K_3, K_4\right)\right),$$

$$\Omega = Sign\left(Diag\left(Vec\left(\Sigma^T\right)\right)\right),$$

avec $X_1(\rho) = \begin{bmatrix} R\Delta A_1(\rho)C_1^{-1} & RB(\rho) - R\Delta A_1(\rho)C_1^{-1}D(\rho) - RASD(\rho) \\ 0_{n\times p} & 0_{n\times m} \end{bmatrix}$,

$$X_2(\rho) = \begin{bmatrix} 0_{p\times p} & \left(I_p - CS\right)D(\rho) \end{bmatrix},$$

$$X_3(\rho) = \begin{bmatrix} 0_{n\times p} & -E(CE)^{\dagger}D(\rho) \\ 0_{n\times p} & 0_{n\times m} \end{bmatrix},$$

$$X_4(\rho) = \begin{bmatrix} 0_{p\times p} & \left(CE(CE)^{\dagger} - I_p\right)D(\rho) \end{bmatrix},$$

alors les inégalités (2.43h) et (2.43i) sont satisfaites.

Démonstration. Soit la matrice $\mathcal{P} = \mathcal{I}\mathcal{T}$. Il est facilement vérifiable, qu'en appliquant le Lemme 1.5 sur les expressions $\mathcal{P}\alpha(\rho,t)$, $\mathcal{P}\beta(\rho,t)$ définies dans (2.43h) et (2.43i) :

$$\mathcal{P}^+\underline{\alpha}(t) - \mathcal{P}^-\overline{\alpha}(t) \leq \mathcal{P}\alpha(\rho,t) \leq \mathcal{P}^+\overline{\alpha}(t) - \mathcal{P}^-\underline{\alpha}(t) \tag{2.65}$$
$$\mathcal{P}^+\underline{\beta}(t) - \mathcal{P}^-\overline{\beta}(t) \leq \mathcal{P}\beta(\rho,t) \leq \mathcal{P}^+\overline{\beta}(t) - \mathcal{P}^-\underline{\beta}(t) \tag{2.66}$$

En rappelant que pour toute matrice $\mathcal{P}^+ = \frac{1}{2}\left(|\mathcal{P}| + \mathcal{P}\right)$ et $\mathcal{P}^- = \frac{1}{2}\left(|\mathcal{P}| - \mathcal{P}\right)$ alors pour $\vartheta \in \{\alpha(\rho,t), \beta(\rho,t)\}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^+\underline{\vartheta}(t) - \mathcal{P}^-\overline{\vartheta}(t) &= \frac{1}{2}\left(|\mathcal{P}| + \mathcal{P}\right)\underline{\vartheta}(t) - \frac{1}{2}\left(|\mathcal{P}| - \mathcal{P}\right)\overline{\vartheta}(t) \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{P}\left(\overline{\vartheta}(t) + \underline{\vartheta}(t)\right) - \frac{1}{2}|\mathcal{P}|\left(\overline{\vartheta}(t) - \underline{\vartheta}(t)\right) \\
\mathcal{P}^+\overline{\vartheta}(t) - \mathcal{P}^-\underline{\vartheta}(t) &= \frac{1}{2}\left(|\mathcal{P}| + \mathcal{P}\right)\overline{\vartheta}(t) - \frac{1}{2}\left(|\mathcal{P}| - \mathcal{P}\right)\underline{\vartheta}(t) \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{P}\left(\overline{\vartheta}(t) + \underline{\vartheta}(t)\right) + \frac{1}{2}|\mathcal{P}|\left(\overline{\vartheta}(t) - \underline{\vartheta}(t)\right)
\end{aligned}$$

Par conséquent, les inégalités (2.65) et (2.66) sont équivalentes à la forme :

$$\mathcal{P}\epsilon_1(t) - |\mathcal{P}|\epsilon_2(t) \leq \mathcal{P}\alpha(\rho,t) \leq \mathcal{P}\epsilon_1(t) + |\mathcal{P}|\epsilon_2(t) \tag{2.67}$$
$$\mathcal{P}\epsilon_3(t) - |\mathcal{P}|\epsilon_4(t) \leq \mathcal{P}\beta(\rho,t) \leq \mathcal{P}\epsilon_3(t) + |\mathcal{P}|\epsilon_4(t) \tag{2.68}$$

où $\epsilon_1(t) = \frac{1}{2}\left(\overline{\alpha}(t) + \underline{\alpha}(t)\right)$, $\epsilon_2(t) = \frac{1}{2}\left(\overline{\alpha}(t) - \underline{\alpha}(t)\right)$,
$\epsilon_3(t) = \frac{1}{2}\left(\overline{\beta}(t) + \underline{\beta}(t)\right)$, $\epsilon_4(t) = \frac{1}{2}\left(\overline{\beta}(t) - \underline{\beta}(t)\right)$.

La suite de la démonstration est composée de deux principales étapes qui consistent à déterminer les éléments ϵ_1, ϵ_2, ϵ_3 et ϵ_4 et à réécrire $|\mathcal{P}|$.

Détermination de ϵ_1, ϵ_2, ϵ_3, ϵ_4

Étant donné que la variable x est une inconnue, il est nécessaire de procéder à une transformation de l'expression du vecteur α utilisé dans (2.43h) pour parvenir à déterminer les expressions des vecteurs $\underline{\alpha}(t)$, $\overline{\alpha}(t)$ qui constituent ϵ_1, ϵ_2. Sous l'Hypothèse 2.2, il est facilement vérifiable que :

$$\begin{aligned}
R\Delta A(\rho)x(t) &= R\begin{bmatrix}\Delta A_1(\rho) & 0_{n\times(n-p)}\end{bmatrix}x(t) \\
&= R\Delta A_1(\rho)C_1^{-1}\begin{bmatrix}C_1 & 0_{n\times(n-p)}\end{bmatrix}x(t) \\
&= R\Delta A_1(\rho)C_1^{-1}\left(y(t) - D(\rho)w(t)\right)
\end{aligned} \tag{2.69}$$

En rappelant l'expression du vecteur α :

$$\alpha(\rho,t) = \mathbb{1}_{2n} \otimes \begin{bmatrix}R\Delta A(\rho) & RB(\rho) - JD(\rho) \\ \mathbf{0} & -QD(\rho)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t) \\ w(t)\end{bmatrix} \tag{2.70}$$

alors l'utilisation de la relation (2.69) conduit à :

$$\alpha(\rho,t) = \mathbb{1}_{2n} \otimes \begin{bmatrix}R\Delta A_1(\rho)C_1^{-1} & RB(\rho) - JD(\rho) - R\Delta A_1(\rho)C_1^{-1}D(\rho) \\ 0_{n\times p} & -QD(\rho)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y(t) \\ w(t)\end{bmatrix} \tag{2.71}$$

Les expressions des matrices N et L définies dans (2.43c) et (2.43e) permettent de réécrire les expressions des matrices J, Q définies respectivement dans (2.43d) et (2.43f) telles que :

$$J = NS - Z_N = (RA + Z_N C)\, S - Z_N = RAS + Z_N(CS - I_p) \tag{2.72}$$
$$Q = LS - Z_L = (Z_L C)\, S - Z_L = Z_L(CS - I_p) \tag{2.73}$$

En injectant les expressions de J et Q définies par (2.72) et (2.73) dans les expressions du vecteur α défini dans (2.71) et du vecteur β utilisé dans (2.43i) alors :

$$\alpha(\rho, t) = (X_1(\rho) + Z_{NL} X_2(\rho))\, \eta(t),\ \ \beta(\rho, t) = (X_3(\rho) + Z_{S0} X_4(\rho))\, \eta(t), \tag{2.74}$$

où $\eta(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$, $Z_{NL} = \begin{bmatrix} Z_N \\ Z_L \end{bmatrix}$ et $Z_{S0} = \begin{bmatrix} Z_S \\ 0_{n\times p} \end{bmatrix}$ et les matrices $X_i(\rho)$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ sont définies dans le Lemme 2.5.

En considérant les relations (2.60), alors l'application du Lemme 2.1 sur les vecteurs α et β conduit aux expressions de ϵ_1, ϵ_2, ϵ_3 et ϵ_4 :

$$\epsilon_1(t) = (\mathbb{1}_{2n} \otimes \mathcal{H}_1)\, \eta^*(t), \quad \epsilon_2(t) = (\mathbb{1}_{2n} \otimes \mathcal{H}_2)\, \eta^*(t), \tag{2.75}$$
$$\epsilon_3(t) = (\mathbb{1}_{2n} \otimes \mathcal{V}_1)\, \eta^*(t), \quad \epsilon_4(t) = (\mathbb{1}_{2n} \otimes \mathcal{V}_2)\, \eta^*(t). \tag{2.76}$$

où les matrices $\mathcal{H}_i, \mathcal{V}_i$, $i \in \{1, 2\}$ sont définies dans le Lemme 2.5.

Réécriture de $|\mathcal{P}|$

La dernière étape de la démonstration est liée à une caractéristique clé de la structure de la matrice $\mathcal{P} = \mathcal{I}\mathcal{T}$ et consiste à démontrer que :

$$|\mathcal{I}\mathcal{T}| = \mathcal{I}\mathcal{T}\Omega \tag{2.77}$$

En utilisant les expressions des matrices $\mathcal{I}$, $\mathcal{T}$ définies respectivement dans le système (2.40a)-(2.40b) et (2.41) et en considérant que la matrice Σ est partitionnée en $\Sigma_i \in \mathbb{R}^{1\times 2n}$, $i \in \{1, \cdots 2n\}$ telle que $\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 \\ \vdots \\ \Sigma_{2n} \end{bmatrix}$ alors :

$$|\mathcal{I}\mathcal{T}| = \left|\begin{bmatrix} I_{2n} & 0_{2n\times(4n^2-2n)} \end{bmatrix} \mathcal{X}(I_{2n} \otimes \Sigma)\right| = \left|\begin{bmatrix} \mathcal{X}_1 & \mathcal{X}_2 & \cdots & \mathcal{X}_{2n} \end{bmatrix} (I_{2n} \otimes \Sigma)\right|$$
$$= \begin{bmatrix} |\Sigma_1| & 0_{1\times 2n} & \cdots & 0_{1\times 2n} \\ 0_{1\times 2n} & |\Sigma_2| & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_{1\times 2n} \\ 0_{1\times 2n} & \cdots & 0_{1\times 2n} & |\Sigma_{2n}| \end{bmatrix}$$

En rappelant que la valeur absolue d'un scalaire k satisfait la relation $|k| = k\ sign(k)$ alors :

$$|\mathcal{I}\mathcal{T}| = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0_{1\times 2n} & \cdots & 0_{1\times 2n} \\ 0_{1\times 2n} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_{1\times 2n} \\ 0_{1\times 2n} & \cdots & 0_{1\times 2n} & \Sigma_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Sign(Diag(\Sigma_1)) & 0_{2n\times 2n} & \cdots & 0_{2n\times 2n} \\ 0_{2n\times 2n} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_{2n\times 2n} \\ 0_{2n\times 2n} & \cdots & 0_{2n\times 2n} & Sign(Diag(\Sigma_{2n})) \end{bmatrix}$$

Par identification, nous obtenons l'égalité (2.77).

Exemple

Un exemple simple pour la vérification de l'égalité (2.77) est proposé. Considérons le cas n=1 alors :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \ \mathcal{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathcal{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ce qui conduit à :

$$\mathcal{T} = \mathcal{X}(I_2 \otimes \Sigma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & a & b \\ c & d & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ainsi, il est facilement déduit que :

$$|\mathcal{I}\mathcal{T}| = \begin{bmatrix} |a| & |b| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |c| & |d| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sign(a) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sign(b) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sign(c) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & sign(d) \end{bmatrix}$$

Par conséquent,

$$|\mathcal{I}\mathcal{T}| = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0_{1\times 2} \\ 0_{1\times 2} & \Sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Sign(Diag(\Sigma_1)) & 0_{2\times 2} \\ 0_{2\times 2} & Sign(Diag(\Sigma_2)) \end{bmatrix} = \mathcal{I}\mathcal{T}\Omega \qquad (2.78)$$

où $\Sigma_1 = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$ et $\Sigma_2 = \begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix}$.

Détermination de $\underline{\delta}$, $\overline{\delta}$, $\underline{\phi}$, $\overline{\phi}$

L'utilisation des résultats (2.75), (2.76) et (2.77) permet de réécrire les inégalités (2.67) et (2.68) sous les formes :

$$\mathcal{P}\left(\epsilon_1(t) - \Omega\epsilon_2(t)\right) \leq \mathcal{P}\alpha(\rho, t) \leq \mathcal{P}\left(\epsilon_1(t) + \Omega\epsilon_2(t)\right) \qquad (2.79)$$
$$\mathcal{P}\left(\epsilon_3(t) - \Omega\epsilon_4(t)\right) \leq \mathcal{P}\beta(\rho, t) \leq \mathcal{P}\left(\epsilon_3(t) + \Omega\epsilon_4(t)\right) \qquad (2.80)$$

Finalemment, les expressions (2.61)-(2.64) sont déduites en remplaçant $\mathcal{P} = \mathcal{I}\mathcal{T}$ dans (2.79),(2.80) et en identifiant à (2.43h), (2.43i). ■

2.4.4 Performance de l'observateur intervalle

Cette sous-section détaille une méthode qui détermine les matrices Z_N, Z_L, Z_S, M et G sous la contrainte de satisfaire simultanément les conditions d'existence de l'observateur intervalle et des performances au sens de la norme $\mathcal{H}_\infty$ et de la $\mathcal{D}$-stabilité.

Dans un premier temps, considérons le vecteur d'état augmenté défini par :

$$\zeta(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \mathcal{T}^{-1}\overline{e}_z(t) \\ \mathcal{T}^{-1}\underline{e}_z(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+8n^2} \tag{2.81}$$

La dérivation temporelle du vecteur (2.81) est obtenue en suivant la procédure suivante. L'expression de $\dot{x}$ est directement donnée par l'équation d'état du système (2.17) :

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A(\rho))\, x(t) + B(\rho)w(t) + Ed(t) \tag{2.82}$$

En multipliant par $\mathcal{T}^{-1}$ les expressions de $\dot{\overline{e}}_z$, $\dot{\underline{e}}_z$ définies respectivement par (2.56a), (2.56b) alors :

$$\mathcal{T}^{-1}\dot{\overline{e}}_z(t) = \mathcal{A}\mathcal{T}^{-1}\overline{e}_z(t) + \overline{\delta}(t) - \alpha(\rho, t) \tag{2.83}$$
$$\mathcal{T}^{-1}\dot{\underline{e}}_z(t) = \mathcal{A}\mathcal{T}^{-1}\underline{e}_z(t) + \alpha(\rho, t) - \underline{\delta}(t) \tag{2.84}$$

Puis, en utilisant les expressions de α, $\underline{\delta}$ et $\overline{\delta}$ définies respectivement par (2.43h), (2.61) et (2.62) alors

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{-1}\dot{\overline{e}}_z(t) =& \mathcal{A}\mathcal{T}^{-1}\overline{e}_z(t) + (\mathbb{1}_{2n} \otimes \mathcal{H}_1 + \Omega\,(\mathbb{1}_{2n} \otimes \mathcal{H}_2))\,\eta^*(t) && (2.85)\\ & - (\mathbb{1}_{2n} \otimes H_1(\rho)x(t) + \mathbb{1}_{2n} \otimes H_2(\rho)w(t)) && (2.86)\\ \mathcal{T}^{-1}\dot{\underline{e}}_z(t) =& \mathcal{A}\mathcal{T}^{-1}\underline{e}_z(t) + (\mathbb{1}_{2n} \otimes H_1(\rho)x(t) + \mathbb{1}_{2n} \otimes H_2(\rho)w(t)) && (2.87)\\ & - (\mathbb{1}_{2n} \otimes \mathcal{H}_1 - \Omega\,(\mathbb{1}_{2n} \otimes \mathcal{H}_2))\,\eta^*(t) && (2.88) \end{aligned}$$

Finalement, en considérant que la partie affectée par la matrice Ω devient une entrée exogène, alors nous obtenons la forme compacte décrite par :

$$\dot{\zeta}(t) = \mathscr{A}(\rho)\zeta(t) + \mathscr{B}(\rho)\psi(t) \tag{2.89}$$

with $\psi = \begin{bmatrix} d(t) \\ w(t) \\ \eta^*(t) \\ \Omega\,(\mathbb{1}_{2n} \otimes \mathcal{H}_2)\,\eta^*(t) \\ \Omega\,(\mathbb{1}_{2n} \otimes \mathcal{V}_2)\,\eta^*(t) \end{bmatrix}$, $\mathscr{A}(\rho) = \begin{bmatrix} A + \Delta A(\rho) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbb{1}_{2n} \otimes H_1(\rho) & \mathcal{A} & \mathbf{0} \\ \mathbb{1}_{2n} \otimes H_1(\rho) & \mathbf{0} & \mathcal{A} \end{bmatrix}$,

$\mathscr{B}(\rho) = \begin{bmatrix} E & B(\rho) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbb{1}_{2n} \otimes H_2(\rho) & \mathbb{1}_{2n} \otimes \mathcal{H}_1 & I_{4n^2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{1}_{2n} \otimes H_2(\rho) & -\mathbb{1}_{2n} \otimes \mathcal{H}_1 & I_{4n^2} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$.

Dans un second temps, il est facilement vérifiable, en utilisant le Corollaire 2.2, la relation $x(t) = \mathscr{T} r(t)$ et la décomposition $\mathscr{T} = \mathscr{T}^+ - \mathscr{T}^-$, que :

$$\begin{bmatrix} \overline{x}(t) - x(t) \\ x(t) - \underline{x}(t) \end{bmatrix} = \mathcal{F} \begin{bmatrix} \overline{r}(t) - r(t) \\ r(t) - \underline{r}(t) \end{bmatrix} \tag{2.90}$$

avec $\mathcal{F} = \begin{bmatrix} \mathscr{T}^+ & \mathscr{T}^- \\ \mathscr{T}^- & \mathscr{T}^+ \end{bmatrix}$.

D'après l'égalité (2.48), la relation $r(t) = \mathcal{I}\mathcal{T}\left(\mathbb{1}_{2n} \otimes \begin{bmatrix} x(t) \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ est vérifiée. En considérant $\overline{r}(t) = \mathcal{I}\overline{\overline{r}}(t)$ et $\underline{r}(t) = \mathcal{I}\underline{\overline{r}}(t)$ alors :

$$\begin{bmatrix} \overline{r}(t) - r(t) \\ r(t) - \underline{r}(t) \end{bmatrix} = \mathcal{Q}\xi(t) \tag{2.91}$$

avec $\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} \mathcal{I}\mathcal{T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{I}\mathcal{T} \end{bmatrix}$ et $\xi(t) = \begin{bmatrix} \mathcal{T}^{-1}\overline{\overline{r}}(t) - \mathbb{1}_{2n} \otimes \begin{bmatrix} x(t) \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbb{1}_{2n} \otimes \begin{bmatrix} x(t) \\ 0 \end{bmatrix} - \mathcal{T}^{-1}\underline{\underline{r}}(t) \end{bmatrix}$.

En remplaçant les expressions de $\underline{\phi}$ et $\overline{\phi}$ définies respectivement par (2.63) et (2.64) dans (2.50a),(2.50b) alors (2.90) est équivalente à :

$$\mathcal{F}\mathcal{Q}\xi(t) = \mathcal{F}\mathcal{Q}\mathscr{C}\zeta(t) + \mathcal{F}\mathcal{Q}\mathscr{D}(\rho)\psi(t) \tag{2.92}$$

où $\mathscr{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & I_{4n^2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{4n^2} \end{bmatrix}$, $\mathscr{D}(\rho) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbb{1}_{2n} \otimes V(\rho) & \mathbb{1}_{2n} \otimes \mathcal{V}_1 & \mathbf{0} & I_{4n^2} \\ \mathbf{0} & \mathbb{1}_{2n} \otimes V(\rho) & -\mathbb{1}_{2n} \otimes \mathcal{V}_1 & \mathbf{0} & I_{4n^2} \end{bmatrix}$.

En couplant (2.89) et (2.92) alors la représentation d'état suivante est formée :

$$\begin{cases} \dot{\zeta}(t) = & \mathscr{A}(\rho)\zeta(t) + \mathscr{B}(\rho)\psi(t) \\ \mathcal{F}\mathcal{Q}\xi(t) = & \mathcal{F}\mathcal{Q}\mathscr{C}\zeta(t) + \mathcal{F}\mathcal{Q}\mathscr{D}(\rho)\psi(t) \end{cases} \tag{2.93}$$

L'objectif est de minimiser les effets de l'entrée ψ sur le signal $\mathcal{F}\mathcal{Q}\xi(t) = \begin{bmatrix} \overline{x}(t) - x(t) \\ x(t) - \underline{x}(t) \end{bmatrix}$ au sens de la norme H_∞. De manière équivalente, il s'agit de minimiser $\|G_{\psi \to \mathcal{F}\mathcal{Q}\xi}\|_\infty$. Cependant, la solution au problème d'optimisation nécessite la connaissance de la matrice $\mathcal{T}$ qui ne peut être déterminée qu'en ayant la connaissance des matrices N, M, L et G de l'observateur intervalle. Par conséquent, la minimisation de $\|G_{\psi \to \mathcal{F}\mathcal{Q}\xi}\|_\infty$ n'est pas un problème convexe. En utilisant les propriétés des normes (inégalité triangulaire et sous-multiplicativité), une solution au problème est donnée par l'inégalité :

$$\|G_{\psi \to \mathcal{F}\mathcal{Q}\xi}\|_\infty \leq \|\mathcal{F}\mathcal{Q}\|_2 \|G_{\psi \to \xi}\|_\infty \tag{2.94}$$

où

$$G_{\psi \to \xi}(s) = \mathscr{C}\left(sI - \mathscr{A}(\rho)\right)^{-1}\mathscr{B}(\rho) + \mathscr{D}(\rho) \tag{2.95}$$

Ainsi, une condition suffisante pour la minimisation de $\|G_{\psi \to \mathcal{F}\mathcal{Q}\xi}\|_\infty$ consiste à minimiser $\|G_{\psi \to \xi}\|_\infty$. Étant donné que le transfert $G_{\psi \to \xi}$ ne dépend pas de la connaissance de la matrice $\mathcal{T}$, alors, d'après la Définition 1.10, présentée à la page 12, la minimisation de la norme H_∞ du transfert $G_{\psi \to \xi}$ est équivalente au problème d'optimisation suivant.

Soit une matrice $P \in \mathbb{R}^{(n+8n^2)\times(n+8n^2)} = P^T \succ 0$ et un scalaire $\gamma > 0$. Le problème d'optimisation est donné par :

$$\min \gamma \text{ s.c. } \begin{bmatrix} \mathscr{A}(\rho)^T P + P\mathscr{A}(\rho) & P\mathscr{B}(\rho) & \mathscr{C}^T \\ \mathscr{B}(\rho)^T P & -\gamma\mathbf{I} & \mathscr{D}(\rho)^T \\ \mathscr{C} & \mathscr{D}(\rho) & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec 0, \ \forall \rho \in \left[\underline{\rho}, \overline{\rho}\right] \tag{2.96}$$

L'étude de cette inégalité montre qu'elle n'est pas linéairement dépendante par rapport aux matrices P, Z_S, Z_N, Z_L, M, G. Nous allons montrer que le problème (2.96) peut être transformé en un problème convexe dont la solution est donnée par des techniques LMI qui utilisent la représentation d'état sous forme polytopique. Ainsi, nous considérons qu'il existe des scalaires $\mu_1(\rho) \geq 0, \mu_2(\rho) \geq 0, \cdots, \mu_{2^l}(\rho) \geq 0$ tels que $\sum_{i=1}^{2^l} \mu_i(\rho) = 1$ et

$$\begin{bmatrix} A & B(\rho) & \Delta A(\rho) \\ C & D(\rho) & E \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{2^l} \mu_i(\rho) \begin{bmatrix} A & B_i & \Delta A_i \\ C & D_i & E \end{bmatrix} \tag{2.97}$$

En utilisant l'inégalité triangulaire alors la norme $\mathcal{H}_\infty$ du transfert $G_{\psi\to\xi}$ satisfait l'inégalité :

$$\|G_{\psi\to\xi}\|_\infty \leq \left\|G_{\psi\to\tilde{\xi}}\right\|_\infty + \|\mathscr{D}(\rho)\|_2 \tag{2.98}$$

où $G_{\psi\to\tilde{\xi}}(s) = \mathscr{C}\left(sI - \mathscr{A}\right)^{-1}\mathscr{B}(\rho)$.

Par conséquent, une condition suffisante pour minimiser $\|G_{\psi\to\xi}\|_\infty$ consiste à minimiser $\left\|G_{\psi\to\tilde{\xi}}\right\|_\infty$ et $\|\mathscr{D}(\rho)\|_2$.

Le problème de la minimisation de $\|\mathscr{D}(\rho)\|_2$ est donné par le lemme suivant.

Lemme 2.6. *Soit le modèle polytopique (2.97). S'il existe des matrices $K_3 \in \mathbb{R}^{2n\times p} \geq 0$, $K_4 \in \mathbb{R}^{2n\times p} \geq 0$ et un scalaire réel $\gamma_1 > 0$ tels que :*

$$\begin{bmatrix} \gamma_1\mathbf{I} & \mathscr{M}_i \\ \mathscr{M}_i^T & \gamma_1\mathbf{I} \end{bmatrix} \succ 0, \quad i = 1, \cdots, 2^l \tag{2.99}$$

$$\text{où } \mathscr{M}_i = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbb{1}_{2n}\otimes V_i & \mathbb{1}_{2n}\otimes\mathcal{V}_1 & \mathbf{0} & I_{4n^2} \\ \mathbf{0} & \mathbb{1}_{2n}\otimes V_i & -\mathbb{1}_{2n}\otimes\mathcal{V}_1 & \mathbf{0} & I_{4n^2} \end{bmatrix} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{V}_2 \end{bmatrix},$$

$$V_i = \begin{bmatrix} -E(CE)^\dagger D_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + (K_3 - K_4)\left(CE(CE)^\dagger - I_p\right)D_i,$$

alors $\|\mathscr{D}(\rho)\|_2 \leq \gamma_1$, $\|\mathcal{V}_2\|_2 \leq \gamma_1$ et $Z_S = \begin{bmatrix} I_n & \mathbf{0} \end{bmatrix}(K_3 - K_4)$.

Démonstration. La démonstration est immédiate en appliquant le Lemme 2.3 à la matrice $\mathscr{M}(\rho) = \begin{bmatrix} \mathscr{D}(\rho) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{V}_2 \end{bmatrix}$ et en considérant le formalisme de la représentation polytopique. Les conditions $K_3, K_4 \geq 0$ sont liées aux conditions d'existence du Lemme 2.5. ■

La minimisation de la variable γ_1 implique la détermination de la matrice Z_S qui minimise $\|\mathscr{D}(\rho)\|_2$ et $\|\mathcal{V}_2\|_2$. Cette connaissance est utilisée pour déterminer la matrice S dont l'expression est donnée par (2.43a), puis pour en déduire la matrice R définie par (2.43b).

Finalement, le Théorème 2.2 permet de minimiser la norme $\mathcal{H}_\infty$ du transfert $G_{\psi\to\tilde{\xi}}$ tout en imposant des contraintes sur son transitoire en utilisant un placement de pôles basé sur la technique de $\mathcal{D}$-stabilité.

Théorème 2.2. *Soient une matrice Z_S supposée connue et des matrices de dimensions appropriées S_k, R_k, $k = 1, \cdots, n_R$ qui caractérisent la région LMI notée $\mathcal{D}$ et caractérisée par l'interconnexion des régions LMI élémentaires notées $\mathcal{D}_k, k = 1, ..., n_R$ telles que $\mathcal{D} = \cap_{k=1}^{n_R}\mathcal{D}_k$. Considérons la représentation polytopique donnée par (2.97). S'il existe des matrices $P_1 \in \mathbb{R}^{n\times n} = P_1^T \succ 0$, $Y_1 \in \mathbb{R}^{2n\times p} \geq 0$, $Y_2 \in \mathbb{R}^{2n\times n}$, $Y_3 \in \mathbb{R}^{2n\times p} \geq 0$, une M-matrice $P_2 \in \mathbb{R}^{2n\times 2n} = P_2^T \succ 0$ [79] et un scalaire γ_2 tels que les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

$$(i) \qquad \begin{bmatrix} \mathscr{N}_i^T + \mathscr{N}_i & \mathscr{U}_i & \mathscr{C}^T \\ \mathscr{U}_i^T & -\gamma_2\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathscr{C} & \mathbf{0} & -\gamma_2\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec 0, \qquad i = 1, ..., 2^l \tag{2.100}$$

$$(ii) \qquad S_k \otimes P_2 + R_k \otimes \mathscr{M} + R_k^T \otimes \mathscr{M}^T \prec 0, \qquad k = 1, ..., n_R \tag{2.101}$$

$$\text{où } \mathscr{N}_i = \begin{bmatrix} P_1\left(A+\Delta A_i\right) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbb{1}_{2n}\otimes\mathscr{L}_{1i} & I_{2n}\otimes\mathscr{M} & \mathbf{0} \\ \mathbb{1}_{2n}\otimes\mathscr{L}_{1i} & \mathbf{0} & I_{2n}\otimes\mathscr{M} \end{bmatrix}, \mathscr{L}_{1i} = P_2\begin{bmatrix} R\Delta A_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$\mathscr{M} = P_2\begin{bmatrix} RA & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (Y_1 - Y_3) & Y_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_n \end{bmatrix},$$

$$\mathscr{U}_i = \begin{bmatrix} P_1E & P_1B_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbb{1}_{2n}\otimes\mathscr{J}_i & \mathbb{1}_{2n}\otimes\mathcal{K} & \mathbb{1}_{2n}\otimes P_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{1}_{2n}\otimes\mathscr{J}_i & -\mathbb{1}_{2n}\otimes\mathcal{K} & \mathbb{1}_{2n}\otimes P_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$\mathscr{J}_i = P_2\begin{bmatrix} RB_i - RASD_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \left(Y_1 - Y_3\right)\left(I_p - CS\right)D_i,$$

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}\left(\mathbb{W}_1\left(X_1, X_2, P_2, Y_1, Y_3\right) + \mathbb{W}_2\left(X_1, X_2, P_2, Y_1, Y_3\right)\right),$$

$$\text{alors } \left\|G_{\psi\to\tilde{\xi}}\right\|_\infty < \gamma_2,\ \begin{bmatrix} Z_N \\ Z_L \end{bmatrix} = P_2^{-1}\left(Y_1 - Y_3\right),\ \begin{bmatrix} M \\ G \end{bmatrix} = P_2^{-1}Y_2.$$

Démonstration. Soient les matrices $Z_{NL} = \begin{bmatrix} Z_N \\ Z_L \end{bmatrix}$, $Z_{MG} = \begin{bmatrix} M \\ G \end{bmatrix}$ et les variables LMI $Y_1 = P_2K_1$, $Y_2 = P_2Z_{MG}$, $Y_3 = P_2K_2$.

Dans un premier temps, les contraintes (2.100) sont obtenues en appliquant directement la Définition 1.10, présentée à la page 12, sur le transfert $G_{\psi\to\tilde{\xi}}$, défini dans l'inégalité (2.98), et en considérant la matrice :

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{2n}\otimes P_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I_{2n}\otimes P_2 \end{bmatrix}$$

En effet, il est facilement vérifiable, en utilisant la représentation polytopique des matrices, formulée dans (2.97) et les variables LMI Y_1, Y_2 et Y_3 que :

$$\begin{bmatrix} P\mathscr{A}(\rho) + \mathscr{A}(\rho)^TP & P\mathscr{B}(\rho) & \mathscr{C}^T \\ \mathscr{B}(\rho)^TP & -\gamma_2\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathscr{C} & \mathbf{0} & -\gamma_2\mathbf{I} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{2^l}\mu_i(\rho)\begin{bmatrix} \mathscr{N}_i^T + \mathscr{N}_i & \mathscr{U}_i & \mathscr{C}^T \\ \mathscr{U}_i^T & -\gamma_2\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathscr{C} & \mathbf{0} & -\gamma_2\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (2.102)$$

Par conséquent, si les contraintes *(i)* sont vérifiées alors $\left\|G_{\psi\to\tilde{\xi}}\right\|_\infty < \gamma_2$.

Les contraintes *(ii)* sont obtenues par l'application directe du Lemme 2.2 sur la matrice $\begin{bmatrix} N & M \\ L & G \end{bmatrix}$. Les dynamiques du système (2.93) sont fixées par les pôles de la matrice $\mathscr{A}(\rho)$ définie dans (2.89). Étant donné la structure de cette matrice, seuls les pôles liés à la matrices $\mathcal{A}$ peuvent être modifiés. En rappelant que $\mathcal{A}$ est une matrice diagonale par bloc telle que $\mathcal{A} = I_{2n}\otimes\begin{bmatrix} N & M \\ L & G \end{bmatrix}$, alors il est possible d'imposer des contraintes sur le placement de pôles en utilisant la contrainte :

$$S_k\otimes P_2 + R_k\otimes P_2\begin{bmatrix} N & M \\ L & G \end{bmatrix} + R_k^T\otimes\left(P_2\begin{bmatrix} N & M \\ L & G \end{bmatrix}\right)^T \prec 0,\ k = 1, ..., n_R \quad (2.103)$$

qui est équivalente à la formulation définie par :

$$S_k \otimes P_2 + R_k \otimes \mathscr{M} + R_k^T \otimes \mathscr{M}^T \prec 0, \;\; k = 1, ..., n_R \tag{2.104}$$

Ainsi, les conditions *(ii)* permettent d'imposer des contraintes sur le transitoire des erreurs d'observation $x(t) - \underline{x}(t)$ et $\overline{x}(t) - x(t)$.

Finalement, la dernière étape de la démonstration concerne l'existence de la matrice $\mathcal{H}_1$ impliquée dans la structure de la matrice $\mathscr{B}(\rho)$ définie dans (2.89). Nous avons montré dans la section précédente que la structure de la matrice $\mathcal{H}_1$ est obtenue en utilisant le Lemme 2.5 qui repose sur la condition $K_1 \geq 0$ et $K_2 \geq 0$. Étant donné que la matrice P_2 est une M-matrice alors $P_2^{-1} \geq 0$. Les conditions $Y_1 \geq 0$ et $Y_3 \geq 0$ impliquent que $K_1 = P_2^{-1} Y_1 \geq 0$ et $K_2 = P_2^{-1} Y_3 \geq 0$. ■

Le Théorème 2.2 et le Lemme 2.6 sont basés sur des méthodes LMI pour déterminer les matrices Z_S et Z_N, Z_L, M, G afin de satisfaire des contraintes de minimisation au sens de la norme $\mathcal{H}_\infty$, tout en imposant des contraintes sur le placement des pôles pour garantir le comportement transitoire des erreurs d'observation et assurer l'existence de la matrice Σ qui satisfait la contrainte (2.43g).

2.5 Application académique

Cette section propose un exemple académique pour illustrer la pertinence de l'observateur intervalle à entrées inconnues proposé dans ces travaux. L'objectif est de démontrer la capacité de la méthode à fournir un intervalle restreint pour l'état x, malgré la présence d'entrées inconnues, de bruits et d'incertitudes de modélisation.

2.5.1 Formulation du problème

Soit le système décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A(\rho)x(t) + Bw(t) + Ed(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Dw(t) \end{cases} \tag{2.105}$$

où le vecteur de paramètres ρ est incertain tel que $\rho \in \left[-1, 1\right]$ et les matrices sont définies par :

$$A(\rho) = \begin{bmatrix} -1.6 + 0.1\rho & 1 & -0.15 \\ 0.1 & -0.8 + 0.1\rho & -0.7 \\ 0.8 & 0 + 0.1\rho & -1.8 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; E = \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \; D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Étant donné la structure du système (2.105), il est facilement vérifiable qu'il existe une formulation polytopique des matrices. Il existe des scalaires $\mu_1(\rho) \geq 0$, $\mu_2(\rho) \geq 0$ tels que $\sum_{i=1}^{2} \mu_i(\rho) = 1$ et

$$\begin{bmatrix} A & B & \Delta A(\rho) \\ C & D & E \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{2} \mu_i(\rho) \begin{bmatrix} A & B & \Delta A_i \\ C & D & E \end{bmatrix} \tag{2.106}$$

où $\Delta A_1 = -\Delta A_2 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1 & 0 \\ 0 & -0.1 & 0 \end{bmatrix}$.

L'objectif est de construire un observateur intervalle (2.40a)-(2.40b) qui estime des bornes supérieure $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ et inférieure $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ de l'état x du système (2.105).

2.5.2 Synthèse de l'observateur intervalle

Dans cette sous-section, nous détaillons les solutions pour les matrices Z_S, Z_N et Z_L obtenues en résolvant le Lemme 2.6 puis le Théorème 2.2. La toolbox Yalmip du logiciel Matlab est utilisée pour résoudre le problème d'optimisation en utilisant le solver SDPT3. La résolution des LMI du Lemme 2.6 conduit au critère de performance $\gamma_1 = 4.6$ et la matrice Z_S est donnée par :

$$Z_S = 0_{3\times 2} \tag{2.107}$$

Après avoir déterminé les matrices S et R définies par les expressions (2.21a) et (2.21b), nous abordons la résolution du Théorème 2.2. Pour cet exemple, nous imposons que les pôles de la matrice $\mathcal{A}$ soient réels, non multiples et dans l'intervalle $\left[-100, -1.7\right]$. La solution des LMI conduit au critère de performance $\gamma_2 = 4.32$. Les matrices Z_{NL}, Z_{MG} sont données par :

$$Z_{NL} = \begin{bmatrix} -11.415 & 4.501 \\ 4.941 & -4.884 \\ -0.839 & -0.077 \\ -0.034 & 0.016 \\ -0.034 & 0.016 \\ -0.034 & 0.016 \end{bmatrix}, \; Z_{MG} = \begin{bmatrix} -0.018 & -0.018 & -0.018 \\ -0.005 & -0.005 & -0.005 \\ -0.073 & -0.072 & -0.072 \\ -29.158 & -16.416 & -16.416 \\ -16.416 & -29.158 & -16.416 \\ -16.416 & -16.416 & -29.158 \end{bmatrix}. \tag{2.108}$$

Finalement, les matrices N, M, L, G, J, Q, S et les fonctions $\underline{\delta}$, $\overline{\delta}$, $\underline{\phi}$, $\overline{\phi}$ sont facilement déduites en utilisant le Lemme 2.4 et le Lemme 2.5. La matrice $\overline{\Sigma}$ est obtenue en diagonalisant la matrice $\begin{bmatrix} N & M \\ L & G \end{bmatrix}$.

2.5.3 Simulations et résultats

La simulation de l'estimation par intervalle de l'état x du système (2.105) est réalisée en considérant que l'entrée bornée $w(t)$ est composée du signal $w_1(t) = 5sin(0.1t)cos(0.5t)$ et deux bruits w_2,w_3 inconnus mais bornés par deux vecteurs connus $\overline{w_2} = \overline{w_3} = 0.1$, $\underline{w_2} = \underline{w_3} = -0.1$. Le vecteur des entrées inconnues d est décrit par le signal $d(t) = sin(0.01t) + 3cos(0.1t)$ et le paramètre incertain $\rho = 0.95$.

Cette sous-section, dédiée aux résultats de l'estimation par intervalle de l'état x du système (2.105), débute par la présentation des figures 2.1 et 2.2 illustrant l'influence de la perturbation w_1 et de l'entrée inconnue d sur l'état du système. L'influence des perturbations w_2 et w_3 n'est pas présentée car elles représentent des bruits de mesure. Par conséquent, elles n'affectent pas le comportement de l'état du système.

La figure 2.3 illustre les résultats de la simulation. Il en résulte que l'état x reste borné par l'intervalle $\left[\underline{x}(t), \overline{x}(t)\right]$ et l'intervalle estimé converge asymptotiquement vers un intervalle de faible amplitude.

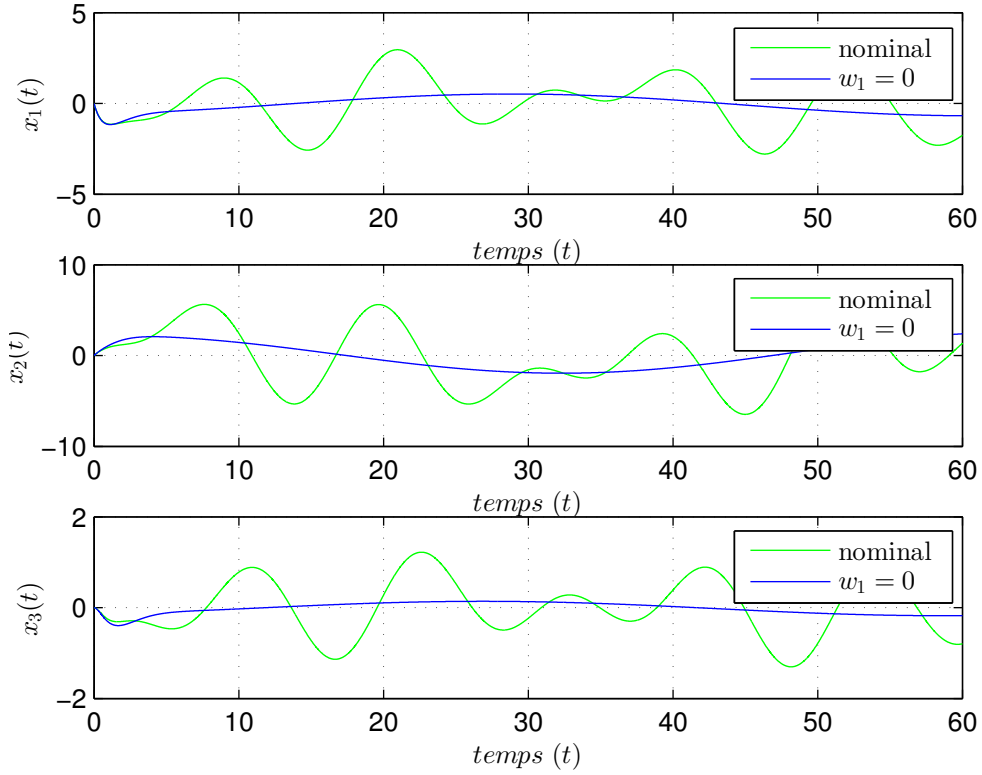


FIGURE 2.1 – Évolution temporelle de l'état x pour une perturbation w_1 nulle

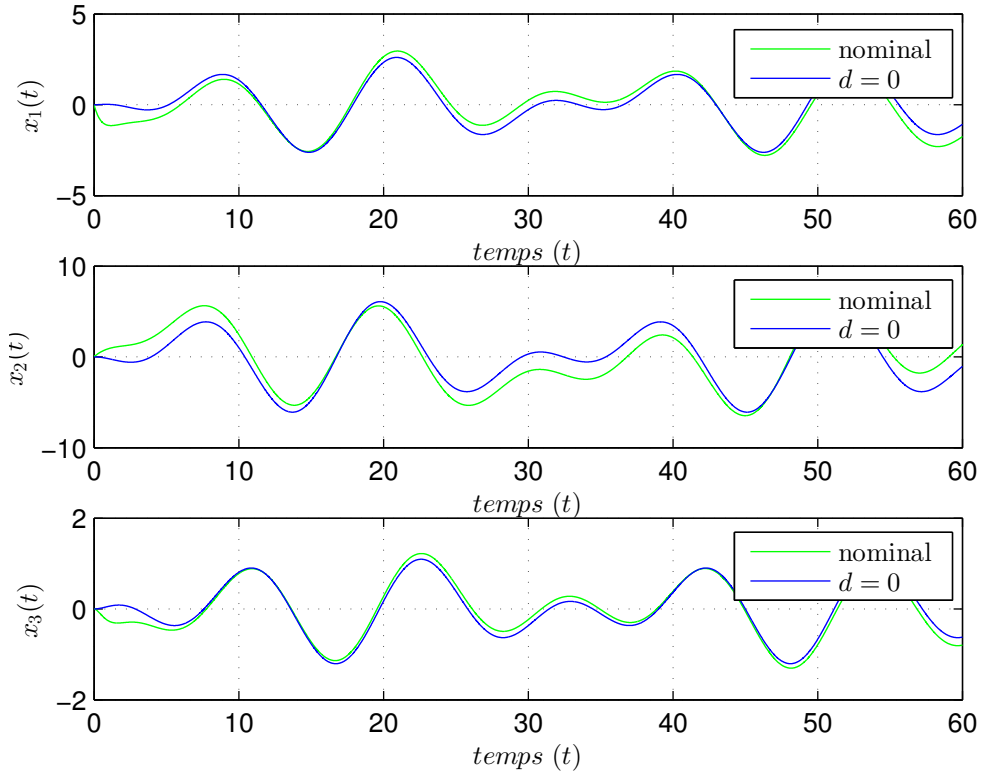


FIGURE 2.2 – Évolution temporelle de l'état x pour une entrée inconnue d nulle

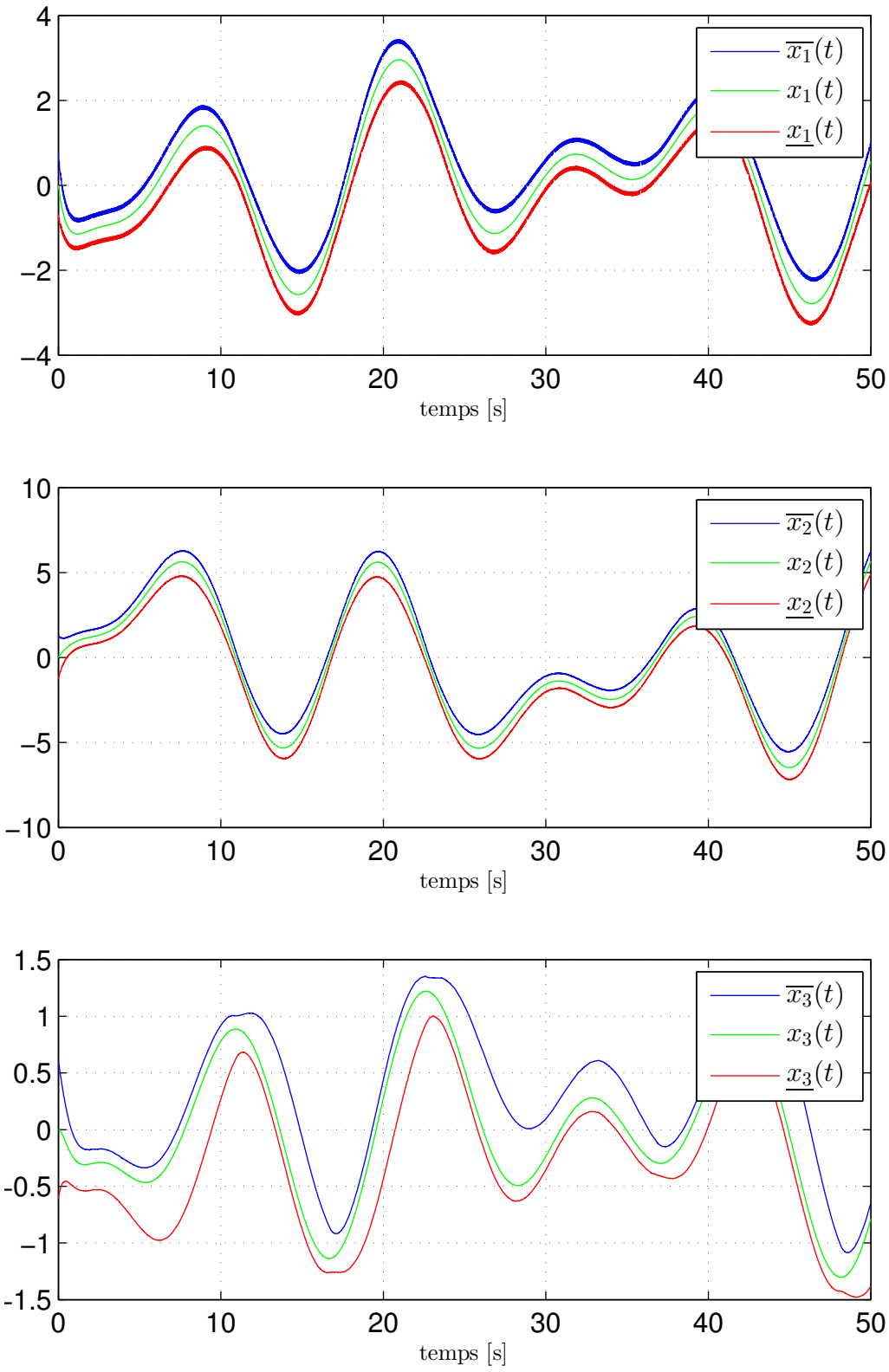


FIGURE 2.3 – Estimation par intervalle de l'état x

2.6 Limites de l'approche

Bien que cette approche permette de satisfaire simultanément les conditions d'existence de l'observateur intervalle et un certain niveau de performance pour l'intervalle estimé, des verrous théoriques persistent.

- La première restriction abordée concernent la structure du système étudié. La classe des modèles considérés est restreinte aux systèmes LTI dont les incertitudes paramétriques sont contraintes par la structure fixée dans les hypothèses 2.1 à 2.4.
- La seconde restriction abordée concerne la structure de l'observateur. Le changement de coordonnées permettant de satisfaire la propriété de coopérativité des erreurs d'observation nécessite que la matrice considérée contienne uniquement des pôles réels. Il en résulte une introduction de conservatisme dans le processus de conception. De plus, étant donné que la dimension de l'observateur est liée au carré de la dimension de l'état du système à observer, la faisabilité de résolution numérique du problème repose sur une augmentation du temps de calcul associé, ce qui peut devenir problématique, si l'ordre du système devient élevé.
- Finalement, un point concernant les contraintes liées au processus d'optimisation est à soulever. Étant donné que le changement de coordonnées nécessite la connaissance des autres matrices de l'observateur intervalle, le problème d'optimisation $\mathcal{H}_\infty$ initial (nécessaire et suffisant) est transformé en un problème dont les conditions sont suffisantes. Par conséquent, il est possible que du conservatisme soit introduit dans les résultats proposés. De plus, il est à noter que le problème d'optimisation n'est pas directement associé à l'enveloppe totale $\overline{x} - \underline{x}$ mais aux demi-enveloppes $\overline{x} - x$ et $x - \underline{x}$. Ainsi, en notant que x est une fonction du vecteur des entrées inconnues d et bien qu'une technique de découplage soit utilisée pour déterminer les bornes supérieure et inférieure $\overline{x}/\underline{x}$, il est à noter que des contraintes d'atténuation des effets du vecteur des entrées inconnues sont présentes dans le processus d'optimisation $\mathcal{H}_\infty$ reposant sur les demi-enveloppes $\overline{x} - x$ et $x - \underline{x}$.

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une nouvelle méthode de conception d'observateurs intervalles pour les systèmes incertains LTI à entrées inconnues. Cette approche permet de satisfaire simultanément, les conditions d'existence de l'observateur intervalle et un certain niveau de performance pour l'intervalle estimé. La réduction du conservatisme est assurée par une technique de découplage et un processus d'optimisation qui, simultanément, annulent l'effet des entrées inconnues, réduisent l'influence des perturbations non découplées et imposent des contraintes sur le transitoire des erreurs d'observation. Afin d'éviter l'ensemble des restrictions de cette méthode que nous avons évoqué dans la sous-section précédente, nous présentons la principale contribution de ce manuscrit dans le chapitre suivant.

Chapitre 3

Synthèse d'observateurs intervalles pour les systèmes LPV à entrées inconnues

Ce chapitre constitue la principale contribution des travaux de recherche présentés et introduit une nouvelle méthode permettant de construire un observateur intervalle pour une large classe de systèmes LPV à entrées inconnues. Outre le fait que cette contribution étend la théorie des observateurs intervalles à une plus large classe de systèmes, cette approche apporte une nouvelle solution à la problématique concernant la vérification simultanée des conditions d'existence de l'observateur intervalle (plus particulièrement, la condition de coopérativité des erreurs d'observation) et un certain niveau de performance pour l'encadrement estimé. Pour y parvenir, cette contribution ne nécessite aucune transformation d'état pour garantir la coopérativité des erreurs d'observation contrairement à la majorité des approches de la littérature et à celle présentée dans le chapitre précédent. La réduction du conservatisme d'estimation repose sur une procédure de conception combinant la propriété de découplage pour annuler l'effet des entrées inconnues et un processus d'optimisation, au sens de critères de type gain $\mathcal{L}_2$ et/ou $\mathcal{L}_\infty$, formulé en contraintes LMI, pour atténuer l'influence des entrées non découplées. La propriété de coopérativité des erreurs d'observation est assurée par une contrainte LMI additionnelle.

Dans un premier temps, les lemmes et les corollaires nécessaires au développement de l'approche proposée sont introduits. Nous poursuivrons en précisant la classe des systèmes LPV considérés et les hypothèses associées. Finalement, la présentation de la structure de l'observateur intervalle et la méthode de conception des paramètres associés sera illustrée sur un exemple académique détaillant, étape par étape, la procédure de conception et démontrant l'efficacité de la méthode.

3.1 Notations et prérequis

Le présentation de la méthode développée dans ce chapitre est basée sur les notions introduites dans la section 1.3.1. Une nouvelle méthode, reposant sur la notion de M-matrice, est considérée pour déterminer une matrice Metzler.

Définition 3.1. [79] (Théorème 2.1 p.420). Soit une matrice carrée $W = [w_{i,j}]$ vérifiant

$w_{ij} \leq 0$, $\forall i \neq j$ et $w_{ij} > 0$ $\forall i = j$ alors W est dite être une M-matrice si W^{-1} existe et $W^{-1} \geq 0$.

Lemme 3.1. *Soient une matrice à dépendance paramétrique connue $L(\rho) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ où $\rho \in \Psi \subset \mathbb{R}^s$, une M-matrice inversible $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et un scalaire réel $\mu \geq 0$. Alors la matrice $L(\rho)$ est une matrice Metzler si*

$$WL(\rho) + \mu W \geq 0, \forall \rho \in \Psi \tag{3.1}$$

Démonstration. Étant donné que la matrice W est une M-matrice alors $W^{-1} \geq 0$. En multipliant $WL(\rho) + \mu W$ par W^{-1} alors il est déduit que $L(\rho) + \mu I_n \geq 0$, ce qui termine la démonstration. ■

3.2 Formulation du problème

Soit la classe des systèmes LPV décrite par

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\theta(t))x(t) + B(\theta(t))w(t) + E(\theta(t))d(t) & \text{(3.2a)} \\ y(t) = C(\theta(t))x(t) + D(\theta(t))w(t) & \text{(3.2b)} \end{cases}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $y(t) \in \mathbb{R}^p$ désignent respectivement l'état et la sortie mesurée. $w(t) \in \mathbb{R}^m$ et $d(t) \in \mathbb{R}^q$ sont des entrées inconnues. Il est à noter que $w(t)$ est supposé être borné par des valeurs connues $\underline{w}(t), \overline{w}(t)$, alors qu'il n'y a aucune hypothèse associée à la connaissance des bornes pour $d(t)$. Le vecteur de paramètres $\theta(t) \in \Theta \subset \mathbb{R}^l$ et sa dérivée temporelle $\dot{\theta}(t) \in \Gamma_\theta$ sont supposés être bornés par des valeurs connues *a priori*. Les matrices sont définies par $A : \Theta \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $B : \Theta \to \mathbb{R}^{n\times m}$, $E : \Theta \to \mathbb{R}^{n\times q}$, $C : \Theta \to \mathbb{R}^{p\times n}$, $D : \Theta \to \mathbb{R}^{p\times m}$.

La conception d'un observateur intervalle pour le système (3.2a)-(3.2b) nécessite la vérification des hypothèses suivantes.

Hypothèse 3.1. Il est supposé que $\theta_m(t) = [\theta_1(t)\ \theta_2(t)\ \cdots\ \theta_s(t)]^T \in \Theta_m$, $0 \leq s \leq l$, est mesuré au travers de $\rho(t) = [\rho_1(t)\ \rho_2(t)\ \cdots\ \rho_s(t)]^T \in \Psi$ où $\rho_i(t) = \lambda_i(t)\theta_i(t) + \delta_i(t)$ avec $\lambda_i \neq 0$, δ_i désignant les éléments des vecteurs $\lambda \in \Delta_\lambda \subset \mathbb{R}^s$, $\delta \in \Delta_\delta \subset \mathbb{R}^s$. Les vecteurs λ, δ sont supposés continûment différentiables tels que $\dot{\lambda} \in \Gamma_\lambda \subset \mathbb{R}^s$, $\dot{\delta} \in \Gamma_\delta \subset \mathbb{R}^s$. Il est aussi supposé que le vecteur de paramètres ρ et sa dérivée temporelle $\dot{\rho}$ sont continus, définis à chaque instant de temps et évoluant dans des hyper-rectangles délimités par 2^s sommets tels que

$$\mathscr{V} = \left\{(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) \mid \alpha_i \in \left\{\underline{\rho_i}, \overline{\rho_i}\right\}\right\} \tag{3.3}$$

$$\mathscr{R} = \left\{(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s) \mid \beta_i \in \left\{\underline{\dot{\rho}_i}, \overline{\dot{\rho}_i}\right\}\right\} \tag{3.4}$$

Ici, $\underline{\rho_i}, \overline{\rho_i}, \underline{\dot{\rho}_i}, \overline{\dot{\rho}_i}$ représentent les bornes connues de ρ_i et $\dot{\rho}_i$. Le domaine de définition de $\dot{\rho}$ est noté Γ_ρ.

Cette hypothèse est commune et couvre une large classe de systèmes LPV incertains, voir [42].

Afin d'améliorer la lisibilité de la suite du chapitre, la dépendance temporelle des signaux et des paramètres est omise pour la suite. Cependant, il est à rappeler que tous les vecteurs (incluant les bornes) dépendent généralement de la variable temporelle t. Dans le cas contraire, l'information sera précisée explicitement dans le texte.

Hypothèse 3.2. La matrice $E(\theta)$ est supposée être de plein rang colonne et $rang(C(\theta)E(\theta)) = rang(E(\theta)) = q, \ \forall\theta \in \Theta$. Il est aussi supposé que $q \leq p$.

Il est à noter que l'Hypothèse 3.2 est commune pour la conception des observateurs à entrées inconnues, voir [27] si nécessaire.

Le problème consiste à estimer, de manière garantie, l'état x du système (3.2a)-(3.2b) en utilisant l'observateur intervalle défini par la structure

$$\begin{cases} \dot{\overline{z}} = L(\rho)\overline{z} + (M(\rho) + L(\rho)N)y + \overline{\eta}(\overline{r}, \underline{r}, \overline{w}, \underline{w}, \rho) & (3.5a) \\ \overline{r} = \overline{z} + Ny + \overline{\varphi}(\overline{w}, \underline{w}, \rho) & (3.5b) \\ \overline{x} = \overline{g}\,(\overline{r}, \underline{r}, \rho) & (3.5c) \\ \dot{\underline{z}} = L(\rho)\underline{z} + (M(\rho) + L(\rho)N)y + \underline{\eta}(\overline{r}, \underline{r}, \overline{w}, \underline{w}, \rho) & (3.5d) \\ \underline{r} = \underline{z} + Ny + \underline{\varphi}(\overline{w}, \underline{w}, \rho) & (3.5e) \\ \underline{x} = \underline{g}\,(\overline{r}, \underline{r}, \rho) & (3.5f) \end{cases}$$

où $\overline{\eta}, \underline{\eta} : \mathbb{R}^{2n+2m+s} \to \mathbb{R}^n$, $\overline{\varphi}, \underline{\varphi} : \mathbb{R}^{2m+s} \to \mathbb{R}^n$, $\overline{g}, \underline{g} : \mathbb{R}^{2n+s} \to \mathbb{R}^n$, $L(\rho) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $M(\rho), N \in \mathbb{R}^{n\times p}$. $\overline{z}, \underline{z} \in \mathbb{R}^n$ désignent, respectivement, les bornes supérieure et inférieure de l'état $z \in \mathbb{R}^n$ défini par :

$$z = R(\theta)x \tag{3.6}$$

Dans cette formulation, z représente l'état découplé et satisfait, par conséquent, l'égalité

$$R(\theta)E(\theta) = 0 \tag{3.7}$$

Ainsi, d'après la théorie des observateurs à entrées inconnues (voir [27]), il peut être montré qu'il existe une solution à l'équation (3.7) si et seulement si $R(\theta) = K(\theta)\,(I_n - S(\theta)C(\theta))$ où $S(\theta) = E(\theta)(C(\theta)E(\theta))^\dagger$ et où $K(\theta) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est une matrice arbitraire, introduite ici comme degré de liberté. Dans la théorie des observateurs à entrées inconnues, un choix classique pour la matrice $K(\theta)$ est $K(\theta) = I_n$.

Il est considéré que $\overline{x}, \underline{x} \in \mathbb{R}^n$ représentent, respectivement, les bornes supérieure et inférieure de l'état $x \in \mathbb{R}^n$ défini par la relation :

$$x = Q(\theta)r \tag{3.8}$$

telle que les vecteurs $\overline{r}, \underline{r} \in \mathbb{R}^n$, définis dans (3.5b) et (3.5e), soient respectivement les bornes supérieure et inférieure de $r \in \mathbb{R}^n$ et la matrice $Q(\theta)$ vérifie l'hypothèse de structure suivante :

Hypothèse 3.3. Il est supposé que les matrices $K(\theta)$ et N sont connues telles que $Q(\theta)$ dans (3.8) soit inversible et admette la décomposition $Q(\theta)^{-1} = R(\theta) + NC(\theta)$.

Étant donné que la matrice $C(\theta)$ est supposée de plein rang ligne $\forall\theta \in \Theta$, il est toujours possible de déterminer une matrice N qui compense la perte de rang liée à la matrice $S(\theta)$ puisque la condition $q \leq p$ est garantie par l'Hypothèse 3.2. Il est à noter que le cas particulier $p = q$ est couvert par la définition de la matrice $R(\theta)$ puisqu'il correspond à une paramétrisation particulière de la matrice $K(\theta)$, comme démontré dans [27].

Il est à noter que la largeur de l'enveloppe $\tilde{x} = \overline{x} - \underline{x}$ dépend uniquement des bornes supérieure et inférieure $\overline{z}/\underline{z}$ de z et de paramètres connus (voir ci-après l'équation (3.46b)). Ainsi, il en résulte que la taille de l'enveloppe $\tilde{x} = \overline{x} - \underline{x}$ est découplée de l'influence du vecteur des entrées inconnues d.

Dans la suite, l'objectif est de construire un observateur intervalle à entrées inconnues (3.5a)-(3.5f), i.e. les fonctions $\overline{\eta}$, $\underline{\eta}$, $\overline{\varphi}$, $\underline{\varphi}$, $\overline{g}$, $\underline{g}$ et les matrices $L(\rho), M(\rho)$. Dans le cadre de cet objectif, nous cherchons à minimiser les effets du signal w sur la largeur de l'enveloppe totale $\tilde{x} = \overline{x} - \underline{x}$, au sens de critères de type gain $\mathcal{L}_2$ et/ou $\mathcal{L}_\infty$.

Remarque 3.1. Il est important de noter que considérer les matrices $K(\theta)$ et N connues *a priori* peut conduire à une solution conservative pour l'observateur intervalle à entrées inconnues (3.5a)-(3.5f). En effet, le choix de ces matrices peut impacter la performance de l'observateur intervalle à entrées inconnues dans le sens qu'elles modifient les gains $\mathcal{L}_2$ et/ou $\mathcal{L}_\infty$ liés aux effets de w sur la taille de l'enveloppe $\tilde{x} = \overline{x} - \underline{x}$. Une solution à ce problème est abordée dans la section 3.4 sur un exemple académique. Une méthode est proposée pour choisir judicieusement les matrices $K(\theta)$ et N, telle que la performance, au sens de critères de type gain $\mathcal{L}_2$ et/ou $\mathcal{L}_\infty$, soit peu impacté.

3.3 Conception de l'observateur intervalle

Cette section est dédiée à la conception de l'observateur intervalle. Dans un premier temps, un résultat préliminaire est proposé pour déterminer des bornes supérieure et inférieure du produit d'une matrice incertaine à dépendance paramétrique et d'un vecteur incertain. Puis, les conditions nécessaires et suffisantes, pour que le système (3.5a)-(3.5f) soit un observateur intervalle à entrées inconnues pour le système (3.2a)-(3.2b), sont présentées. Finalement, une dernière sous-section est dédiée au processus d'optimisation, formulé en contraintes LMI, permettant la détermination des paramètres de l'observateur intervalle.

3.3.1 Résultat préliminaire

Le lemme suivant propose une méthode pour construire des bornes supérieure et inférieure au produit d'une matrice incertaine à dépendance paramétrique et d'un vecteur incertain dans un contexte ensembliste. L'élément clé repose sur le fait que toutes les matrices réelles peuvent être décomposées en deux matrices (non uniques) dont tous les éléments sont positifs.

Lemme 3.2. *Soient un vecteur* $v \in [\underline{v}, \overline{v}] \subset \mathbb{R}^n$ *et des matrices* $\mathcal{X}_k(\theta) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\theta \in \Theta$, $k \in \{a, b\}$, *tels que* $\mathcal{X}(\theta) = \mathcal{X}_a(\theta) - \mathcal{X}_b(\theta)$. *Alors les énoncés suivants sont considérés :*

1) $\forall \theta \in \Theta$, *il est supposé qu'il existe des matrices* $\mathcal{X}_k(\theta) \in \left[\underline{\mathcal{X}_k}, \overline{\mathcal{X}_k}\right] \subset \mathbb{R}^{m\times n}$ *avec* $\underline{\mathcal{X}_k} \geq 0$, *alors*

$$\underline{\mathcal{X}}^\bullet v^* \leq \mathcal{X}(\theta) v \leq \overline{\mathcal{X}}^\bullet v^* \tag{3.9}$$

où les matrices $\overline{\mathcal{X}}^\bullet = \begin{bmatrix} \overline{\mathcal{X}_a} & -\underline{\mathcal{X}_a} & -\underline{\mathcal{X}_b} & \overline{\mathcal{X}_b} \end{bmatrix}$, $\underline{\mathcal{X}}^\bullet = \begin{bmatrix} -\overline{\mathcal{X}_b} & \underline{\mathcal{X}_b} & \underline{\mathcal{X}_a} & -\overline{\mathcal{X}_a} \end{bmatrix}$ *et le vecteur* $v^* = \begin{bmatrix} (\overline{v}^+)^T & (\overline{v}^-)^T & (\underline{v}^+)^T & (\underline{v}^-)^T \end{bmatrix}^T$.

2) En supposant qu'un sous-espace de $\theta \in \Theta$ est connu au travers de $\rho \in \Psi$, $0 < s \leq l$ et qu'il existe des matrices $\mathcal{X}_k(\theta) \in \left[\underline{\mathcal{X}_k}(\rho), \overline{\mathcal{X}_k}(\rho)\right]$ avec $\underline{\mathcal{X}_k}(\rho) \geq 0$, alors

$$\underline{\mathcal{X}}^{\bullet}(\rho)v^* \leq \mathcal{X}(\theta)v \leq \overline{\mathcal{X}}^{\bullet}(\rho)v^* \tag{3.10}$$

où $\overline{\mathcal{X}}^{\bullet}(\rho) = \begin{bmatrix}\overline{\mathcal{X}_a}(\rho) & -\underline{\mathcal{X}_a}(\rho) & -\underline{\mathcal{X}_b}(\rho) & \overline{\mathcal{X}_b}(\rho)\end{bmatrix}$, $\underline{\mathcal{X}}^{\bullet}(\rho) = \begin{bmatrix}-\overline{\mathcal{X}_b}(\rho) & \underline{\mathcal{X}_b}(\rho) & \underline{\mathcal{X}_a}(\rho) & -\overline{\mathcal{X}_a}(\rho)\end{bmatrix}$ *et le vecteur v^* est défini dans 1) .*

Démonstration. Dans un premier temps, la démonstration de *1) est proposée. Étant donné que $v \in [\underline{v}, \overline{v}]$ alors*

$$0 \leq \underline{v}^+ \leq v^+ \leq \overline{v}^+, \quad 0 \leq \overline{v}^- \leq v^- \leq \underline{v}^- \tag{3.11}$$

À présent, en considérant l'inégalité $0 \leq \underline{\mathcal{X}_k} \leq \mathcal{X}_k(\theta) \leq \overline{\mathcal{X}_k}$, $k \in \{a, b\}$, alors

$$\underline{\mathcal{X}_k}\underline{v}^+ \leq \mathcal{X}_k(\theta)v^+ \leq \overline{\mathcal{X}_k}\overline{v}^+, \quad \underline{\mathcal{X}_k}\overline{v}^- \leq \mathcal{X}_k(\theta)v^- \leq \overline{\mathcal{X}_k}\underline{v}^- \tag{3.12}$$

Finalement, en développant l'expression $\mathcal{X}(\theta)v$, i.e.

$$\mathcal{X}(\theta)v = \mathcal{X}_a(\theta)v^+ - \mathcal{X}_a(\theta)v^- - \mathcal{X}_b(\theta)v^+ + \mathcal{X}_b(\theta)v^- \tag{3.13}$$

alors, il est déduit que $\underline{\mathcal{X}}^{\bullet}v^* \leq \mathcal{X}(\theta)v \leq \overline{\mathcal{X}}^{\bullet}v^*$. La démonstration pour 2) est similaire à la démonstration de 1) en adaptant le développement pour tenir compte de la dépendance paramétrique en ρ. ■

Il est à noter que le Lemme 3.2 généralise le Lemme 2 dans [30] (voir un rappel dans Lemme 1.5 présenté à la page 15). En effet, dans le cas particulier où $\mathcal{X}_a(\theta) = \mathcal{X}(\theta)^+$, $\mathcal{X}_b(\theta) = \mathcal{X}(\theta)^-$ et $\mathcal{X}(\theta) \in \left[\underline{\mathcal{X}}, \overline{\mathcal{X}}\right]$ alors le Lemme 2 dans [30] est équivalent au Lemme 3.2. Ce nouveau lemme permet de construire des bornes telles que la structure liée à la partie matricielle, i.e. $\mathcal{X}(\theta)$, ne soit pas unique et ne dépende pas nécessairement des opérateurs non-linéaires $\bullet^+$ et $\bullet^-$. Ces avantages sont des caractéristiques clés pour concevoir un observateur intervalle à entrées inconnues reposant sur un processus d'optimisation formulé sous des contraintes LMI.

Afin de simplifier la présentation, les notations suivantes sont adoptées pour le reste du chapitre :

$$\begin{array}{ll}\overline{\mathcal{X}}(\rho) = \overline{\mathcal{X}_a}(\rho) - \underline{\mathcal{X}_b}(\rho), & \underline{\mathcal{X}}(\rho) = \underline{\mathcal{X}_a}(\rho) - \overline{\mathcal{X}_b}(\rho), \\ \widetilde{\mathcal{X}}(\rho) = \overline{\mathcal{X}}(\rho) - \underline{\mathcal{X}}(\rho), & \breve{\mathcal{X}}(\rho) = \overline{\mathcal{X}_a}(\rho) + \overline{\mathcal{X}_b}(\rho).\end{array} \tag{3.14}$$

3.3.2 Conditions nécessaires et suffisantes d'existence

Cette sous-section aborde les conditions d'existence pour que le système (3.5a) -(3.5f) soit un observateur intervalle à entrées inconnues pour le système (3.2a)-(3.2b). La solution est présentée dans le théorème suivant.

Théorème 3.1. *Sous les hypothèses 3.2 et 3.3, l'état x du système (3.2a)-(3.2b) est borné par les vecteurs $\overline{x}$, $\underline{x}$ définis par (3.5c), (3.5f) i.e.*

$$x(t) \in [\underline{x}(t), \overline{x}(t)], \ \forall t \geq 0 \tag{3.15}$$

si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées pour le système (3.5a)-(3.5f) :

(i) $\forall \rho \in \Psi$, *il existe une matrice* $L(\rho)$ *telle que*

$$L(\rho) \text{ est Metzler} \tag{3.16a}$$

(ii) $\forall \rho \in \Psi$, $\forall \theta \in \Theta$, $\forall \dot{\theta} \in \Gamma_\theta$, *il existe des fonctions* $\overline{\eta}$, $\underline{\eta}$, $\overline{\varphi}$, $\underline{\varphi}$, $\overline{g}$, $\underline{g}$ *telles que*

$$\underline{\eta}(\overline{r}, \underline{r}, \overline{w}, \underline{w}, \rho) \leq \eta(r, w, \rho, \theta, \dot{\theta}) \leq \overline{\eta}(\overline{r}, \underline{r}, \overline{w}, \underline{w}, \rho) \tag{3.16b}$$

$$\underline{\varphi}(\overline{w}, \underline{w}, \rho) \leq \varphi(w, \theta) \leq \overline{\varphi}(\overline{w}, \underline{w}, \rho) \tag{3.16c}$$

$$\underline{g}(\overline{r}, \underline{r}, \rho) \leq g(r, \theta) \leq \overline{g}(\overline{r}, \underline{r}, \rho) \tag{3.16d}$$

où $\eta(r, w, \rho, \theta, \dot{\theta}) = F(\rho, \theta, \dot{\theta})r + G(\rho, \theta)w$,
$\varphi(w, \theta) = H(\theta)w$,
$g(r, \theta) = Q(\theta)r$
avec $F(\rho, \theta, \dot{\theta}) = T(\rho)Y(\theta, \dot{\theta}) - L(\rho)$, $G(\rho, \theta) = T(\rho)Z(\theta)$, $H(\theta) = -ND(\theta)$,

$$T(\rho) = \begin{bmatrix} L(\rho) & M(\rho) & \mathbf{I} \end{bmatrix},\ Y(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -C(\theta)Q(\theta) \\ \Big(R(\theta)A(\theta) + \dot{R}(\theta)\Big)Q(\theta) \end{bmatrix} \text{ et } Z(\theta) = \begin{bmatrix} -ND(\theta) \\ -D(\theta) \\ R(\theta)B(\theta) \end{bmatrix}.$$

(iii) Les conditions initiales pour $\underline{z}$, $\overline{z}$ *sont données par*

$$\underline{z}(0) \leq \underline{R}^{\bullet}(\rho(0))x(0)^*, \quad \overline{z}(0) \geq \overline{R}^{\bullet}(\rho(0))x(0)^* \tag{3.16e}$$

où les notations $\underline{(\cdot)}^{\bullet}, \overline{(\cdot)}^{\bullet}$ *sont définies dans le Lemme 3.2.*

Démonstration. Soient les deux erreurs d'observation définies par :

$$\overline{e}_z = \overline{z} - z, \quad \underline{e}_z = z - \underline{z} \tag{3.17}$$

La détermination de la dérivée temporelle de $\overline{e}_z$ et $\underline{e}_z$ conduit à :

$$\begin{aligned}
\dot{\overline{e}}_z = \ & \dot{\overline{z}} - \dot{z} \\
= \ & L(\rho)\overline{z} + (M(\rho) + L(\rho)N)\, y + \overline{\eta}(\overline{r}, \underline{r}, \overline{w}, \underline{w}, \rho) - \dot{R}(\theta)x - R(\theta)\dot{x} \\
= \ & L(\rho)\overline{z} + (M(\rho) + L(\rho)N)\,(C(\theta)x + D(\theta)w) + \overline{\eta}(\overline{r}, \underline{r}, \overline{w}, \underline{w}, \rho) \\
& -\dot{R}(\theta)x - R(\theta)\,(A(\theta)x + B(\theta)w + E(\theta)d) + (L(\rho)R(\theta)x - L(\rho)z) \\
= \ & L(\rho)\overline{e}_z - R(\theta)E(\theta)d + \overline{\eta}(\overline{r}, \underline{r}, \overline{w}, \underline{w}, \rho) \\
& - \begin{bmatrix} L(\rho) & M(\rho) & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\left(R(\theta) + NC(\theta)\right) \\ -C(\theta) \\ \Big(R(\theta)A(\theta) + \dot{R}(\theta)\Big) \end{bmatrix} x \\
& - \begin{bmatrix} L(\rho) & M(\rho) & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -ND(\theta) \\ -D(\theta) \\ R(\theta)B(\theta) \end{bmatrix} w
\end{aligned} \tag{3.18a}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\underline{e}}_z = \ & \dot{z} - \dot{\underline{z}} \\
= \ & \dot{R}(\theta)x + R(\theta)\dot{x} - \Big(L(\rho)\underline{z} + (M(\rho) + L(\rho)N)\, y + \underline{\eta}(\overline{r}, \underline{r}, \overline{w}, \underline{w}, \rho)\Big) \\
= \ & \dot{R}(\theta)x + R(\theta)\,(A(\theta)x + B(\theta)w + E(\theta)d) + (L(\rho)z - L(\rho)R(\theta)x) \\
& - \Big(L(\rho)\underline{z} + (M(\rho) + L(\rho)N)\,(C(\theta)x + D(\theta)w) + \underline{\eta}(\overline{r}, \underline{r}, \overline{w}, \underline{w}, \rho)\Big) \\
= \ & L(\rho)\underline{e}_z + R(\theta)E(\theta)d - \underline{\eta}(\overline{r}, \underline{r}, \overline{w}, \underline{w}, \rho) \\
& + \begin{bmatrix} L(\rho) & M(\rho) & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\left(R(\theta) + NC(\theta)\right) \\ -C(\theta) \\ \Big(R(\theta)A(\theta) + \dot{R}(\theta)\Big) \end{bmatrix} x \\
& + \begin{bmatrix} L(\rho) & M(\rho) & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -ND(\theta) \\ -D(\theta) \\ R(\theta)B(\theta) \end{bmatrix} w
\end{aligned} \tag{3.18b}$$

D'après la condition de découplage (3.7), la relation (3.8) et l'Hypothèse 3.3 alors, en adoptant les notations du Théorème 3.1, il est déduit que (3.18a) et (3.18b) sont réduites à :

$$\dot{\overline{e}}_z = L(\rho)\overline{e}_z + \overline{\eta}(\overline{r}, \underline{r}, \overline{w}, \underline{w}, \rho) - \eta(r, w, \rho, \theta, \dot{\theta}) \tag{3.19a}$$
$$\dot{\underline{e}}_z = L(\rho)\underline{e}_z + \eta(r, w, \rho, \theta, \dot{\theta}) - \underline{\eta}(\overline{r}, \underline{r}, \overline{w}, \underline{w}, \rho) \tag{3.19b}$$

où la fonction $\eta(r, w, \rho, \theta, \dot{\theta})$ est utilisée dans (3.16b).

Sous la condition (3.16b), la propriété Metzler (3.16a) et les conditions intitiales (3.16e), il peut être vérifié que (3.19a)-(3.19b) satisfont les propriétés des systèmes coopératifs et par conséquent que

$$\overline{e}_z(t), \underline{e}_z(t) \geq 0, \ \forall t \geq 0 \tag{3.20}$$

À présent, en combinant (3.6) et (3.17), il est déduit que $\overline{z}$, $\underline{z}$ sont équivalents à

$$\overline{z} = \overline{e}_z + R(\theta)x, \quad \underline{z} = R(\theta)x - \underline{e}_z \tag{3.21}$$

Puis, en utilisant (3.21) et (3.2b) pour remplacer $\overline{z}$, $\underline{z}$, y dans (3.5b),(3.5e) alors

$$\begin{aligned} \overline{r} = & \ \overline{z} + Ny + \overline{\varphi}(\overline{w}, \underline{w}, \rho) \\ = & \ \overline{e}_z + (R(\theta) + NC(\theta))\, x + \overline{\varphi}(\overline{w}, \underline{w}, \rho) + ND(\theta)w \end{aligned} \tag{3.22a}$$

$$\begin{aligned} \underline{r} = & \ \underline{z} + Ny + \underline{\varphi}(\overline{w}, \underline{w}, \rho) \\ = & \ -\underline{e}_z + (R(\theta) + NC(\theta))\, x + \underline{\varphi}(\overline{w}, \underline{w}, \rho) + ND(\theta)w \end{aligned} \tag{3.22b}$$

Par conséquent, en considérant l'inverse de la relation (3.8) (i.e. $r = (R(\theta) + NC(\theta))\, x$) et en adoptant les notations du Théorème 3.1 alors, d'après les relations (3.22a)-(3.22b), il est déduit que

$$\overline{r} - r = \overline{e}_z + \overline{\varphi}(\overline{w}, \underline{w}, \rho) - \varphi(w, \theta) \tag{3.23a}$$
$$r - \underline{r} = \underline{e}_z + \varphi(w, \theta) - \underline{\varphi}(\overline{w}, \underline{w}, \rho) \tag{3.23b}$$

Sous les conditions (3.16c) et (3.20), il est déduit que $r(t) \in [\underline{r}(t), \overline{r}(t)]\,, \ \forall t \geq 0$. Finalement, en considérant la relation (3.8) et en rappelant que $g(r, \theta) = Q(\theta)r$ dans (3.16d) alors $x(t) \in [\underline{x}(t), \overline{x}(t)]\,, \ \forall t \geq 0$ où les bornes sont définies dans (3.5c),(3.5f), ce qui conclut la démonstration. ■

3.3.3 Formulation LMI de la performance en gain $\mathcal{L}_2/\mathcal{L}_\infty$

À présent, l'objectif est de proposer une méthode pour déterminer les matrices $L(\rho)$, $M(\rho)$ et les fonctions $\overline{\eta}$, $\underline{\eta}$, $\overline{\varphi}$, $\underline{\varphi}$, $\overline{g}$, $\underline{g}$ en résolvant des contraintes LMI suffisantes.

Dans un premier temps, il est déduit, en utilisant les relations (3.23a)-(3.23b) et les notations $\tilde{r} = \overline{r} - \underline{r}$, $\tilde{z} = \overline{e}_z + \underline{e}_z$, que

$$\tilde{r} = \tilde{z} + \overline{\varphi}(\overline{w}, \underline{w}, \rho) - \underline{\varphi}(\overline{w}, \underline{w}, \rho) \tag{3.24}$$

Dans un second temps, le lemme suivant est considéré pour déterminer les fonctions $\overline{g}$, $\underline{g}$.

Lemme 3.3. *Soit la matrice $Q(\theta)$, définie dans (3.8), vérifiant la décomposition $Q(\theta) = Q_a(\theta) - Q_b(\theta)$ telle que, pour $k \in \{a, b\}$, $Q_k(\theta) \in \left[\underline{Q_k}(\rho), \overline{Q_k}(\rho)\right]$ avec $\underline{Q_k}(\rho) \geq 0$, $\forall \rho \in \Psi$. Alors, pour $r \in [\underline{r},\ \overline{r}]$, l'inégalité (3.16d) du Théorème 3.1 est satisfaite avec $\overline{g}(\overline{r}, \underline{r}, \rho) = \overline{Q}^{\bullet}(\rho)r^*$ et $\underline{g}(\overline{r}, \underline{r}, \rho) = \underline{Q}^{\bullet}(\rho)r^*$.*

Démonstration. Une application directe du Lemme 3.2 sur (3.8) conduit à (3.16d). ■

Puis, en développant $\tilde{x} = \overline{x} - \underline{x}$ où les vecteurs $\overline{x}, \underline{x}$ sont définis dans (3.5c),(3.5f) avec les expressions données dans le Lemme 3.3, alors

$$\tilde{x} = \breve{Q}(\rho)\tilde{r} + \tilde{Q}(\rho)\hat{r} \tag{3.25}$$

où les notations $\breve{Q}(\rho)$, $\tilde{Q}(\rho)$ sont définies dans (3.14). La démonstration de la relation (3.25) est détaillée ci-dessous :

$$\begin{aligned}
\overline{x} - \underline{x} =& \overline{Q}^{\bullet}(\rho)r^* - \underline{Q}^{\bullet}(\rho)r^* \\
=& \overline{Q_a}(\rho)\overline{r}^+ - \underline{Q_a}(\rho)\overline{r}^- - \underline{Q_b}(\rho)\underline{r}^+ + \overline{Q_b}(\rho)\underline{r}^- \\
& - \left(-\overline{Q_b}(\rho)\overline{r}^+ + \underline{Q_b}(\rho)\overline{r}^- + \underline{Q_a}(\rho)\underline{r}^+ - \overline{Q_a}(\rho)\underline{r}^-\right) \\
=& \left(\overline{Q_a}(\rho) + \overline{Q_b}(\rho)\right)\left(\overline{r}^+ + \underline{r}^-\right) - \left(\underline{Q_a}(\rho) + \underline{Q_b}(\rho)\right)\left(\overline{r}^- + \underline{r}^+\right) \\
=& \left(\overline{Q_a}(\rho) + \overline{Q_b}(\rho)\right)\left(\left(\overline{r}^+ + \underline{r}^-\right) - \left(\overline{r}^- + \underline{r}^+\right)\right) \\
& + \left(\left(\overline{Q_a}(\rho) + \overline{Q_b}(\rho)\right) - \left(\underline{Q_a}(\rho) + \underline{Q_b}(\rho)\right)\right)\left(\overline{r}^- + \underline{r}^+\right) \\
=& \breve{Q}(\rho)\tilde{r} + \tilde{Q}(\rho)\hat{r}
\end{aligned}$$

Dans un troisième temps, en utilisant (3.19a)-(3.19b), il est déduit que la dérivée temporelle de $\tilde{z} = \overline{e}_z + \underline{e}_z$ est donnée par

$$\dot{\tilde{z}} = L(\rho)\tilde{z} + \overline{\eta}(\overline{r}, \underline{r}, \overline{w}, \underline{w}, \rho) - \underline{\eta}(\overline{r}, \underline{r}, \overline{w}, \underline{w}, \rho) \tag{3.26}$$

Finalement, en injectant (3.24) dans (3.25) et en combinant le résultat avec (3.26) alors la représentation d'état suivante est obtenue :

$$\begin{cases}
\dot{\tilde{z}} = L(\rho)\tilde{z} + \overline{\eta}(\overline{r}, \underline{r}, \overline{w}, \underline{w}, \rho) - \underline{\eta}(\overline{r}, \underline{r}, \overline{w}, \underline{w}, \rho) & \text{(3.27a)} \\
\tilde{x} = \breve{Q}(\rho)\left(\tilde{z} + \overline{\varphi}(\overline{w}, \underline{w}, \rho) - \underline{\varphi}(\overline{w}, \underline{w}, \rho)\right) + \tilde{Q}(\rho)\hat{r} & \text{(3.27b)}
\end{cases}$$

À présent, le problème à résoudre, avant d'appréhender la conception de l'observateur, consiste à déterminer les fonctions $\overline{\eta}$, $\underline{\eta}$, $\overline{\varphi}$, $\underline{\varphi}$. Il est à noter qu'il est toujours possible de construire des bornes pour η et φ, en ignorant le couplage des variables dont elles dépendent, mais il semble évident que cette méthode peut conduire à une solution conservative pour les inégalités (3.16b), (3.16c) et, par conséquent, peut augmenter la largeur de l'intervalle $\tilde{x} = \overline{x} - \underline{x}$. Cette méthode pourrait être un avantage d'un point de vue numérique. Cependant, cette solution n'est pas retenue puisqu'il est préférable de conserver la dépendance paramétrique des variables entrant dans η et φ, afin de minimiser la largeur de l'intervalle $\tilde{x} = \overline{x} - \underline{x}$. Comme il sera démontré par la suite, le prix à payer est une procédure de conception plus complexe pour les matrices $L(\rho)$ et $M(\rho)$.

3.3.3.1 Détermination de $\overline{\eta}$, $\underline{\eta}$, $\overline{\varphi}$, $\underline{\varphi}$

La détermination de $\overline{\eta}$, $\underline{\eta}$, $\overline{\varphi}$, $\underline{\varphi}$ repose sur une adaptation du Lemme 3.2 appliqué sur les fonctions η, φ utilisées dans (3.16b), (3.16c). Pour y parvenir, l'application de ce dernier sur chaque élément des fonctions η, φ est basée sur les décompositions suivantes

$$F(\rho,\theta,\dot{\theta}) = F_a(\rho,\theta,\dot{\theta}) - F_b(\rho,\theta,\dot{\theta}) \tag{3.28}$$
$$G(\rho,\theta) = G_a(\rho,\theta) - G_b(\rho,\theta) \tag{3.29}$$
$$H(\rho,\theta) = H_a(\rho,\theta) - H_b(\rho,\theta) \tag{3.30}$$

En suivant le raisonnement présenté dans le Lemme 3.2, les matrices $F_k(\rho,\theta,\dot{\theta})$, $G_k(\rho,\theta)$, $H_k(\rho,\theta)$, $k \in \{a,b\}$, doivent être définies telles que chaque élément de la borne inférieure de ces dernières soit positif. Des candidates possibles pour ces matrices sont, à présent, proposées.

Soient les décompositions suivantes

$$T(\rho) = T_a(\rho) - T_b(\rho) \tag{3.31}$$

où les matrices $T_a(\rho) = \begin{bmatrix} L_a(\rho) & M_a(\rho) & \mathbf{I} \end{bmatrix}$, $T_b(\rho) = \begin{bmatrix} L_b(\rho) & M_b(\rho) & \mathbf{0} \end{bmatrix}$, telles que $L_a(\rho), L_b(\rho), M_a(\rho), M_b(\rho) \geq 0$, $\forall \rho \in \Psi$.

• Concernant la matrice $F(\rho,\theta,\dot{\theta})$, la forme suivante pour les matrices $F_a(\rho,\theta,\dot{\theta})$ et $F_b(\rho,\theta,\dot{\theta})$ est retenue :

$$\begin{aligned} F_a(\rho,\theta,\dot{\theta}) &= L_b(\rho) + (T_a(\rho) - T_b(\rho))\, Y(\theta,\dot{\theta}), \\ F_b(\rho,\theta,\dot{\theta}) &= F_b(\rho) = L_a(\rho), \end{aligned} \tag{3.32}$$

où la matrice $Y(\theta,\dot{\theta})$ satisfait la décomposition $Y(\theta,\dot{\theta}) = Y_a(\theta,\dot{\theta}) - Y_b(\theta,\dot{\theta})$ telle que, pour $k \in \{a,b\}$, $Y_k(\theta,\dot{\theta}) \in \left[\underline{Y_k}(\rho), \overline{Y_k}(\rho)\right]$ avec $\underline{Y_k}(\rho) \geq 0$, $\forall \rho \in \Psi$, $\forall \dot{\theta} \in \Gamma_\theta$ et la contrainte $L_b(\rho) + T_a(\rho)\underline{Y}(\rho) - T_b(\rho)\overline{Y}(\rho) \geq 0$ soit vérifiée pour tout $\rho \in \Psi$. Les notations $\underline{Y}(\rho)$, $\overline{Y}(\rho)$ sont définies dans (3.14).

• Concernant la matrice $G(\rho,\theta)$, la forme suivante pour les matrices $G_a(\rho,\theta)$ et $G_b(\rho,\theta)$ est retenue

$$\begin{aligned} G_a(\rho,\theta) &= T_a(\rho) Z_a(\theta) + T_b(\rho) Z_b(\theta), \\ G_b(\rho,\theta) &= T_a(\rho) Z_b(\theta) + T_b(\rho) Z_a(\theta) \end{aligned} \tag{3.33}$$

où les matrices $Z_a(\theta), Z_b(\theta)$ sont données par la décomposition $Z(\theta) = Z_a(\theta) - Z_b(\theta)$ telles que, pour $k \in \{a,b\}$, $Z_k(\theta) \in \left[\underline{Z_k}(\rho), \overline{Z_k}(\rho)\right]$ avec $\underline{Z_k}(\rho) \geq 0$ pour tout $\rho \in \Psi$.

• Finalement, concernant la matrice $H(\theta)$, les conditions suivantes pour $H_k(\theta)$, $k \in \{a,b\}$ sont considérées

$$H_k(\theta) \in \left[\underline{H_k}(\rho), \overline{H_k}(\rho)\right], \ \underline{H_k}(\rho) \geq 0, \forall \rho \in \Psi \tag{3.34}$$

À présent, le lemme suivant propose une solution pour la conception des fonctions $\overline{\eta}$, $\underline{\eta}$, $\overline{\varphi}$, $\underline{\varphi}$.

Lemme 3.4. *Soient les matrices $F_k(\rho,\theta,\dot{\theta})$, $G_k(\rho,\theta)$, $H_k(\rho,\theta)$, $k \in \{a,b\}$ définies dans (3.32), (3.33), (3.34). Alors, pour $r \in [\underline{r}, \overline{r}]$, les inégalités (3.16b) et (3.16c) du Théorème*

3.1 sont vérifiées avec

$$\overline{\eta}(\overline{r},\underline{r},\overline{w},\underline{w},\rho) = \overline{F}^{\bullet}(\rho)r^* + \overline{G}^{\bullet}(\rho)w^* \tag{3.35}$$
$$\underline{\eta}(\overline{r},\underline{r},\overline{w},\underline{w},\rho) = \underline{F}^{\bullet}(\rho)r^* + \underline{G}^{\bullet}(\rho)w^* \tag{3.36}$$
$$\overline{\varphi}(\overline{w},\underline{w},\rho) = \overline{H}^{\bullet}(\rho)w^* \tag{3.37}$$
$$\underline{\varphi}(\overline{w},\underline{w},\rho) = \underline{H}^{\bullet}(\rho)w^* \tag{3.38}$$

où
$$\begin{array}{lll} \underline{F_a}(\rho) = L_b(\rho) + T_a(\rho)\underline{Y}(\rho) - T_b(\rho)\overline{Y}(\rho) & , & \overline{F_a}(\rho) = L_b(\rho) + T_a(\rho)\overline{Y}(\rho) - T_b(\rho)\underline{Y}(\rho), \\ \underline{F_b}(\rho) = L_a(\rho) & , & \overline{F_b}(\rho) = L_a(\rho) \\ \underline{G_a}(\rho) = T_a(\rho)\underline{Z_a}(\rho) + T_b(\rho)\underline{Z_b}(\rho) & , & \overline{G_a}(\rho) = T_a(\rho)\overline{Z_a}(\rho) + T_b(\rho)\overline{Z_b}(\rho), \\ \underline{G_b}(\rho) = T_a(\rho)\underline{Z_b}(\rho) + T_b(\rho)\underline{Z_a}(\rho) & , & \overline{G_b}(\rho) = T_a(\rho)\overline{Z_b}(\rho) + T_b(\rho)\overline{Z_a}(\rho) \end{array}$$

Démonstration. Dans un premier temps, il est à noter que des bornes de $F_k(\cdot)$, $G_k(\cdot)$, $H_k(\cdot)$, $k \in \{a,b\}$ vérifient les conditions du Lemme 3.2. Puis, en appliquant le Lemme 3.2 sur les parties $F(\rho,\theta,\dot{\theta})r$, $G(\rho,\theta)w$ et $H(\theta)w$, voir (respectivement) les inégalités (3.16b) et (3.16c), alors (3.35)-(3.36) et (3.37)-(3.38) sont déduites. ■

Le système (3.27a)-(3.27b) peut être réécrit en utilisant les expressions de $\overline{\eta}$, $\underline{\eta}$, $\overline{\varphi}$, $\underline{\varphi}$ pour dépendre uniquement des matrices $L(\rho), M(\rho)$. La méthode proposée pour déterminer ces matrices est à présent abordée.

3.3.3.2 LMI suffisante pour $L(\rho)$ et $M(\rho)$

Dans un premier temps, le système (3.27a)-(3.27b) est réécrit en utilisant les expressions de $\overline{\eta}$, $\underline{\eta}$, $\overline{\varphi}$, $\underline{\varphi}$ définies dans (3.35)-(3.38). De manière similaire à (3.25), il est déduit que

$$\overline{\eta}(\overline{r},\underline{r},\overline{w},\underline{w},\rho) - \underline{\eta}(\overline{r},\underline{r},\overline{w},\underline{w},\rho) = \breve{F}(\rho)\tilde{r} + \widetilde{F}(\rho)\hat{r} + \breve{G}(\rho)\tilde{w} + \widetilde{G}(\rho)\hat{w} \tag{3.39}$$
$$\overline{\varphi}(\overline{w},\underline{w},\rho) - \underline{\varphi}(\overline{w},\underline{w},\rho) = \breve{H}(\rho)\tilde{w} + \widetilde{H}(\rho)\hat{w} \tag{3.40}$$

Puis, en utilisant les expressions de $\underline{F_k}(\rho)$, $\overline{F_k}(\rho)$, $\underline{G_k}(\rho)$, $\overline{G_k}(\rho)$, $\forall k \in \{a,b\}$, et les notations $\widetilde{(\cdot)}$ et $\breve{(\cdot)}$ définies dans (3.14) alors

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\rho) &= \left(\overline{F_a}(\rho) - \underline{F_b}(\rho)\right) - \left(\underline{F_a}(\rho) - \overline{F_b}(\rho)\right) \\ &= \overline{F_a}(\rho) - \underline{F_a}(\rho) + \overline{F_b}(\rho) - \underline{F_b}(\rho) \\ &= \left(T_a(\rho) + T_b(\rho)\right)\left(\overline{Y}(\rho) - \underline{Y}(\rho)\right) \\ &= \left(T_a(\rho) + T_b(\rho)\right)\breve{Y}(\rho) \end{aligned} \tag{3.41}$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}(\rho) &= \left(\overline{G_a}(\rho) - \underline{G_b}(\rho)\right) - \left(\underline{G_a}(\rho) - \overline{G_b}(\rho)\right) \\ &= \left(T_a(\rho) + T_b(\rho)\right)\left(\overline{Z_a}(\rho) + \overline{Z_b}(\rho)\right) - \left(T_a(\rho) + T_b(\rho)\right)\left(\underline{Z_a}(\rho) + \underline{Z_b}(\rho)\right) \\ &= \left(T_a(\rho) + T_b(\rho)\right)\left(\overline{Z_a}(\rho) + \overline{Z_b}(\rho) - \left(\underline{Z_a}(\rho) + \underline{Z_b}(\rho)\right)\right) \\ &= \left(T_a(\rho) + T_b(\rho)\right)\breve{Z}(\rho) \end{aligned} \tag{3.42}$$

$$\begin{aligned} \breve{G}(\rho) &= \overline{G_a}(\rho) + \overline{G_b}(\rho) \\ &= \left(T_a(\rho) + T_b(\rho)\right)\left(\overline{Z_a}(\rho) + \overline{Z_b}(\rho)\right) \\ &= \left(T_a(\rho) + T_b(\rho)\right)\breve{Z}(\rho) \end{aligned} \tag{3.43}$$

Ainsi, les expressions (3.39)-(3.40) sont équivalentes à :

$$\begin{aligned}\overline{\eta}(\overline{r},\underline{r},\overline{w},\underline{w},\rho)-\underline{\eta}(\overline{r},\underline{r},\overline{w},\underline{w},\rho)=&\breve{F}(\rho)\tilde{r}+\left(T_a(\rho)+T_b(\rho)\right)\widetilde{Y}(\rho)\hat{r}\\&+\left(T_a(\rho)+T_b(\rho)\right)\breve{Z}(\rho)\tilde{w}\\&+\left(T_a(\rho)+T_b(\rho)\right)\widetilde{Z}(\rho)\hat{w}\end{aligned}\tag{3.44}$$

$$\overline{\varphi}(\overline{w},\underline{w},\rho)-\underline{\varphi}(\overline{w},\underline{w},\rho)=\breve{H}(\rho)\tilde{w}+\widetilde{H}(\rho)\hat{w}\tag{3.45}$$

où les notations $\widetilde{(\cdot)}, \breve{(\cdot)}$ sont définies dans (3.14).

Finalement, en considérant l'expression de $\tilde{r}$ définie dans (3.24), puis en injectant (3.44)-(3.45) dans le système (3.27a)-(3.27b) alors :

$$\begin{cases}\dot{\tilde{z}}= \mathcal{A}(\rho)\tilde{z}+f(\tilde{z})+\breve{F}(\rho)\left(\breve{H}(\rho)\tilde{w}+\widetilde{H}(\rho)\hat{w}\right)\\ \qquad +\left(T_a(\rho)+T_b(\rho)\right)\left(\breve{Z}(\rho)\tilde{w}+\widetilde{Z}(\rho)\hat{w}\right) & \text{(3.46a)}\\ \tilde{x}=\breve{Q}(\rho)\tilde{z}+g(\tilde{z})+\breve{Q}(\rho)\left(\breve{H}(\rho)\tilde{w}+\widetilde{H}(\rho)\hat{w}\right) & \text{(3.46b)}\\ \tilde{z}(0)=\overline{R}^{\bullet}(\rho(0))x(0)^*-\underline{R}^{\bullet}(\rho(0))x(0)^* & \text{(3.46c)}\end{cases}$$

où $f(\tilde{z})=\left(T_a(\rho)+T_b(\rho)\right)\widetilde{Y}(\rho)\hat{r}(\overline{z},\underline{z})$, $g(\tilde{z})=\widetilde{Q}(\rho)\hat{r}(\overline{z},\underline{z})$, la matrice $\mathcal{A}(\rho)=L(\rho)+\breve{F}(\rho)$ et les notations $\underline{(\cdot)}^{\bullet}$, $\overline{(\cdot)}^{\bullet}$, $(\cdot)^*$ sont présentées dans le Lemme 3.2.

Ainsi, le nouveau problème consiste à déterminer les matrices $L(\rho)$ et $M(\rho)$ pour que les effets de la largeur de l'intervalle $\tilde{w}=\overline{w}-\underline{w}$ et de l'amplitude $\hat{w}$ sur la largeur de l'intervalle $\tilde{x}=\overline{x}-\underline{x}$ soient minimisés au sens d'un critère de type gain $\mathcal{L}_2$ et/ou $\mathcal{L}_\infty$. Étant donné que le système (3.46a)-(3.46c) est non-linéaire, la méthode proposée repose sur la propriété de coopérativité pour démontrer que l'état $\tilde{z}(t)$ et la sortie $\tilde{x}(t)$ du système (3.46a)-(3.46c) peuvent être bornés par l'état et la sortie d'un système LPV fictif, stable, qui est fonction du vecteur de paramètres ρ et dont le vecteur d'entrées contient $\tilde{w}$ et $\hat{w}$. Puis en démontrant qu'un critère de type gain $\mathcal{L}_2$ et/ou gain $\mathcal{L}_\infty$ du système LPV fictif est une borne supérieure pour le critère de type gain $\mathcal{L}_2$ et/ou gain $\mathcal{L}_\infty$ du système (3.46a)-(3.46c) alors il est déduit que le système (3.46a)-(3.46c) est stable et de performance donnée par un critère de gain $\mathcal{L}_2$ et/ou gain $\mathcal{L}_\infty$.

Dans un premier temps, le lemme suivant est considéré pour obtenir la décomposition $\mathcal{K}(\theta,\dot{\theta})=\mathcal{K}_a(\theta,\dot{\theta})-\mathcal{K}_b(\theta,\dot{\theta})$ pour les matrices $\mathcal{K}\in\{Q,Y,Z,H\}$ définies dans les lemmes 3.3 et 3.4.

Lemme 3.5. *Soient une partie du vecteur θ définie par $\theta_m\in\mathbb{R}^s$ et mesurée au travers de $\rho\in\mathbb{R}^s$ (voir la section 3.2) et des fonctions n_i pour $i=\{1,\cdots,s\}$ telles que $h_i=\dfrac{\rho_i}{\lambda_i}-n_i\geq 0$, $\forall\rho_i\in\Psi_i$. Pour une matrice $\mathcal{K}(\theta,\dot{\theta})$ telle que*

$$\mathcal{K}(\theta,\dot{\theta})=\mathcal{K}_0(\theta,\dot{\theta})+\sum_{i=1}^{s}\theta_i\mathcal{K}_i(\theta,\dot{\theta})\tag{3.47}$$

alors, sous l'Hypothèse 3.1 i.e $\theta_i=\dfrac{\rho_i-\delta_i}{\lambda_i}$, la décomposition $\mathcal{K}(\theta,\dot{\theta})=\mathcal{K}_a(\theta,\dot{\theta})-\mathcal{K}_b(\theta,\dot{\theta})$ est vérifiée pour la matrice (3.47) en adoptant, pour $k\in\{a,b\}$,

$$\mathcal{K}_k(\theta,\dot{\theta})=\mathcal{K}_{k0}(\theta,\dot{\theta})+\sum_{i=1}^{s}h_i\mathcal{K}_{ki}(\theta,\dot{\theta})\tag{3.48}$$

où $\begin{array}{ll} \mathcal{K}_{a0}(\theta,\dot\theta)=\Sigma(\theta,\dot\theta)^+ & , \quad \mathcal{K}_{ai}(\theta,\dot\theta)=\mathcal{K}_i(\theta,\dot\theta)^+, \\ \mathcal{K}_{b0}(\theta,\dot\theta)=\Sigma(\theta,\dot\theta)^- & , \quad \mathcal{K}_{bi}(\theta,\dot\theta)=\mathcal{K}_i(\theta,\dot\theta)^-, \end{array}$

avec $\Sigma(\theta,\dot\theta)=\mathcal{K}_0(\theta,\dot\theta)+\sum_{i=1}^{s}\varepsilon_i\mathcal{K}_i(\theta,\dot\theta)$, *et* $\varepsilon_i=n_i-\dfrac{\delta_i}{\lambda_i}$.

Finalement, pour $\mathcal{K}_j(\theta,\dot\theta)\in\left[\underline{\mathcal{K}_j},\overline{\mathcal{K}_j}\right]\subset\mathbb{R}^{m\times n}$, $j\in\{0,\cdots,s\}$, *les bornes supérieure et inférieure de* $\mathcal{K}_k(\theta,\dot\theta)$ *sont données par*

$$\begin{bmatrix}\underline{\mathcal{K}_a}(\rho) & \overline{\mathcal{K}_a}(\rho)\\ \underline{\mathcal{K}_b}(\rho) & \overline{\mathcal{K}_b}(\rho)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\underline{\Sigma}^+ & \overline{\Sigma}^+\\ \overline{\Sigma}^- & \underline{\Sigma}^-\end{bmatrix}+\sum_{i=1}^{s}h_i\begin{bmatrix}\underline{\mathcal{K}_i}^+ & \overline{\mathcal{K}_i}^+\\ \overline{\mathcal{K}_i}^- & \underline{\mathcal{K}_i}^-\end{bmatrix} \tag{3.49}$$

où $\underline{\Sigma}=\underline{\mathcal{K}_0}+\sum_{i=1}^{s}\underline{\mathcal{K}_i}^{\bullet}\varepsilon_i^*$, $\overline{\Sigma}=\overline{\mathcal{K}_0}+\sum_{i=1}^{s}\overline{\mathcal{K}_i}^{\bullet}\varepsilon_i^*$.

Démonstration. Il est évident que la matrice (3.47) est équivalente à la forme $\mathcal{K}(\theta,\dot\theta)=\mathcal{K}_a(\theta,\dot\theta)-\mathcal{K}_b(\theta,\dot\theta)$ où, pour $k\in\{a,b\}$, les matrices $\mathcal{K}_k(\theta,\dot\theta)$ sont définies dans (3.48). En effet,

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}(\theta,\dot\theta) &= \mathcal{K}_a(\theta,\dot\theta)-\mathcal{K}_b(\theta,\dot\theta)\\
&= \Sigma(\theta,\dot\theta)^+ + \sum_{i=1}^{s}h_i\mathcal{K}_i(\theta,\dot\theta)^+ - \left(\Sigma(\theta,\dot\theta)^- + \sum_{i=1}^{s}h_i\mathcal{K}_i(\theta,\dot\theta)^-\right)\\
&= \Sigma(\theta,\dot\theta)+\sum_{i=1}^{s}h_i\mathcal{K}_i(\theta,\dot\theta)\\
&= \mathcal{K}_0(\theta,\dot\theta)+\sum_{i=1}^{s}\left(n_i-\frac{\delta_i}{\lambda_i}\right)\mathcal{K}_i(\theta,\dot\theta)+\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\rho_i}{\lambda_i}-n_i\right)\mathcal{K}_i(\theta,\dot\theta)\\
&= \mathcal{K}_0(\theta,\dot\theta)+\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\rho_i}{\lambda_i}-\frac{\delta_i}{\lambda_i}\right)\mathcal{K}_i(\theta,\dot\theta)+\sum_{i=1}^{s}\left(n_i-n_i\right)\mathcal{K}_i(\theta,\dot\theta)\\
&= \mathcal{K}_0(\theta,\dot\theta)+\sum_{i=1}^{s}\theta_i\mathcal{K}_i(\theta,\dot\theta)
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Étant donné que $h_i=\dfrac{\rho_i}{\lambda_i}-n_i\geq 0$, $\forall\rho_i\in\Psi_i$, alors la conception terme à terme des bornes de (3.48) conduit à (3.49) et $\underline{\mathcal{K}_k}(\rho)\geq 0$, $\forall\rho\in\Psi$. ■

Il est à noter que la détermination des bornes $\underline{\mathcal{K}_j}$, $\overline{\mathcal{K}_j}$ pour $j\in\{0,\cdots,s\}$ est possible puisque les matrices $K(\theta)$ et N sont supposées être connues *a priori*, voir l'Hypothèse 3.3.

À présent, deux théorèmes sont proposés pour déterminer les matrices $L(\rho)$ et $M(\rho)$. Le Théorème 3.2 et le Théorème 3.3 présentent, respectivement, des solutions sous des contraintes de performance au sens du gain $\mathcal{L}_\infty$ et du gain $\mathcal{L}_2$. Le problème initial à résoudre est transformé en un problème LPV (fictif) linéarisé en utilisant une matrice additionnelle comme degré de liberté (slack matrix en anglais), voir [8]. Afin de réduire le conservatisme lié à la stabilité quadratique reposant sur une matrice de Lyapunov constante pour tout le domaine de variation du vecteur de paramètres, la méthode proposée repose sur une matrice de Lyapunov dépendante des paramètres et sur le concept de multi-convexité, voir [42]. Pour cet objectif, l'Hypothèse 3.1 est considérée.

Théorème 3.2. *Supposons les hypothèses 3.1-3.3 vérifiées et considérons le système LPV décrit par*

$$\begin{cases} \dot{\nu} = \mathcal{A}(\rho)\nu + \mathcal{B}(\rho)\psi & (3.51a) \\ \xi = \mathcal{C}(\rho)\nu + \mathcal{D}(\rho)\psi & (3.51b) \\ \nu(0) \geq \tilde{z}(0) & (3.51c) \end{cases}$$

où $\nu, \xi \in \mathbb{R}^n$, $\psi = \begin{bmatrix} \tilde{w}^T & \hat{w}^T & |r|^T \end{bmatrix}^T$ *et les matrices sont définies par* $\mathcal{C}(\rho) = \breve{Q}(\rho)$, $\mathcal{D}(\rho) = \begin{bmatrix} \breve{Q}(\rho)\breve{H}(\rho) & \breve{Q}(\rho)\widetilde{H}(\rho) & \widetilde{Q}(\rho) \end{bmatrix}$, $\mathcal{A}(\rho) = L(\rho) + \breve{F}(\rho)$, $\mathcal{B}(\rho) = (T_a(\rho) + T_b(\rho))\,\Omega(\rho) + \breve{F}(\rho)\Phi(\rho)$ *avec* $\Omega(\rho) = \begin{bmatrix} \breve{Z}(\rho) & \widetilde{Z}(\rho) & \widetilde{Y}(\rho) \end{bmatrix}$, $\Phi(\rho) = \begin{bmatrix} \breve{H}(\rho) & \widetilde{H}(\rho) & 0_{n,n} \end{bmatrix}$ *et les notations* $\widetilde{(\cdot)}, \breve{(\cdot)}$ *sont définies dans (3.14).*

Soient des matrices $P_j = P_j^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *et* $\mathscr{I}_j = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{aj} & \mathcal{L}_{bj} & \mathcal{M}_{aj} & \mathcal{M}_{bj} \end{bmatrix}$ *où* $\mathcal{L}_{aj}, \mathcal{L}_{bj} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathcal{M}_{aj}$, $\mathcal{M}_{bj} \in \mathbb{R}^{n\times p}$, *pour* $j \in \{0, \cdots, s\}$, *telles que*

$$P(\alpha) = P_0 + \alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_s P_s \succ 0, \forall \alpha \in \mathscr{V} \quad (3.52)$$
$$\mathscr{I}(\alpha) = \mathscr{I}_0 + \alpha_1 \mathscr{I}_1 + \cdots + \alpha_s \mathscr{I}_s > 0, \forall \alpha \in \mathscr{V} \quad (3.53)$$

et des matrices $\mathcal{E}_{ii} = \mathcal{E}_{ii}^T \succeq 0$, $\mathcal{F}_{ii} = \mathcal{F}_{ii}^T \succeq 0$, $\mathcal{H}_{ii} > 0$ *pour que*

$$\mathcal{E}(\alpha) = \alpha_1^2 \mathcal{E}_{11} + \cdots + \alpha_s^2 \mathcal{E}_{ss} \succeq 0, \forall \alpha \in \mathscr{V} \quad (3.54)$$
$$\mathcal{F}(\alpha) = \alpha_1^2 \mathcal{F}_{11} + \cdots + \alpha_s^2 \mathcal{F}_{ss} \succeq 0, \forall \alpha \in \mathscr{V} \quad (3.55)$$
$$\mathcal{H}(\alpha) = \alpha_1^2 \mathcal{H}_{11} + \cdots + \alpha_s^2 \mathcal{H}_{ss} > 0, \forall \alpha \in \mathscr{V}. \quad (3.56)$$

S'il existe des scalaires $\mu \geq 0$, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 > 0$ *et une M-matrice* $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *tels que les contraintes suivantes sont vérifiées :*
(i) $\forall (\alpha, \beta) \in \mathscr{V} \times \mathscr{R}$,

$$\Upsilon(\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2) + \mathcal{E}(\alpha) \prec 0 \quad (3.57)$$
$$\Xi(\alpha, \gamma_3, \gamma_4) + \mathcal{F}(\alpha) \prec 0 \quad (3.58)$$
$$-(\mathcal{L}_a(\alpha) - \mathcal{L}_b(\alpha)) - \mu W < 0 \quad (3.59)$$
$$-\left(\mathcal{L}_b(\alpha) + \mathcal{T}_a(\alpha)\underline{Y}(\alpha) - \mathcal{T}_b(\alpha)\overline{Y}(\alpha)\right) + \mathcal{H}(\alpha) < 0 \quad (3.60)$$

avec $\Upsilon(\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2) = \begin{bmatrix} -\mathcal{H}e\{W\} & \star & \star & \star \\ \Upsilon_{2,1}(\alpha)^T & \Upsilon_{2,2}(\alpha, \gamma_2) & \star & \star \\ \Upsilon_{3,1}(\alpha)^T & \mathbf{0} & \Upsilon_{3,3}(\alpha, \beta, \gamma_1) & \star \\ W^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -P(\alpha) \end{bmatrix}$,

$\Upsilon_{2,1}(\alpha) = \begin{bmatrix} (\mathcal{T}_a(\alpha) + \mathcal{T}_b(\alpha))\,\Omega(\alpha) & \mathcal{J}(\alpha) \end{bmatrix}$,
$\Upsilon_{3,1}(\alpha) = P(\alpha) + \mathcal{L}_a(\alpha) - \mathcal{L}_b(\alpha) + \mathcal{J}(\alpha)$,
$\mathcal{J}(\alpha) = \mathcal{L}_b(\alpha) + \mathcal{T}_a(\alpha)\overline{Y}(\alpha) - \mathcal{T}_b(\alpha)\underline{Y}(\alpha) + \mathcal{L}_a(\alpha)$,
$\mathcal{T}_a(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_a(\alpha) & \mathcal{M}_a(\alpha) & W \end{bmatrix}$, $\mathcal{T}_b(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_b(\alpha) & \mathcal{M}_b(\alpha) & \mathbf{0} \end{bmatrix}$,
$\Upsilon_{2,2}(\alpha, \gamma_2) = \begin{bmatrix} -\gamma_2 \mathbf{I} & \star \\ \Phi(\alpha) & -\mathbf{I} \end{bmatrix}$,
$\Upsilon_{3,3}(\alpha, \beta, \gamma_1) = (\gamma_1 - 1)P(\alpha) + P(\beta) - P_0$,
$\Xi(\alpha, \gamma_3, \gamma_4) = \begin{bmatrix} -\gamma_3 P(\alpha) & \star & \star \\ \mathbf{0} & -\gamma_4 \mathbf{I} & \star \\ \mathcal{C}(\alpha) & \mathcal{D}(\alpha) & -\mathbf{I} \end{bmatrix}$.

(ii) pour $i \in \{1, \cdots, s\}$,

$$\Upsilon_{ii} + \mathcal{E}_{ii} \succeq 0 \tag{3.61}$$

$$\Xi_{ii} + \mathcal{F}_{ii} \prec 0 \tag{3.62}$$

$$-\left(\mathcal{T}_{ai}\underline{Y}_i - \mathcal{T}_{bi}\overline{Y}_i\right) + \mathcal{H}_{ii} > 0 \tag{3.63}$$

où $\Upsilon_{ii} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \star & \star & \star \\ (\Upsilon_{ii})_{2,1}{}^T & \mathbf{0} & \star & \star \\ \mathcal{J}_{ii} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \star \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$, $\Xi(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \star & \star \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \star \\ \mathbf{0} & \mathcal{D}_{ii} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$,
$(\Upsilon_{ii})_{2,1} = \begin{bmatrix} (\mathcal{T}_{ai} + \mathcal{T}_{bi})\,\Omega_i & \mathcal{J}_{ii} \end{bmatrix}$, $\mathcal{J}_{ii} = \mathcal{T}_{ai}\overline{Y}_i - \mathcal{T}_{bi}\underline{Y}_i$, $\Omega_i = \begin{bmatrix} \breve{Z}_i & \widetilde{Z}_i & \widetilde{Y}_i \end{bmatrix}$, $\mathcal{T}_{ai} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{ai} & \mathcal{M}_{ai} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$,
$\mathcal{T}_{bi} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{bi} & \mathcal{M}_{bi} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$, $\mathcal{D}_{ii} = \begin{bmatrix} \breve{Q}_i\breve{H}_i & \breve{Q}_i\widetilde{H}_i & \mathbf{0} \end{bmatrix}$, *où* $\widetilde{\mathcal{K}}_i$, $\breve{\mathcal{K}}_i$, $\underline{\mathcal{K}}_i$, $\underline{\mathcal{K}}_i$ *pour* $\mathcal{K} \in \{Q, Y, Z, H\}$ *déduit de la décomposition*

$$\begin{bmatrix} \widetilde{\mathcal{K}}(\rho) & \breve{\mathcal{K}}(\rho) \\ \underline{\mathcal{K}}(\rho) & \overline{\mathcal{K}}(\rho) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathcal{K}}_0 & \breve{\mathcal{K}}_0 \\ \underline{\mathcal{K}}_0 & \overline{\mathcal{K}}_0 \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{s} \rho_i \begin{bmatrix} \widetilde{\mathcal{K}}_i & \breve{\mathcal{K}}_i \\ \underline{\mathcal{K}}_i & \overline{\mathcal{K}}_i \end{bmatrix} \tag{3.64}$$

Alors, les matrices de l'observateur intervalle à entrées inconnues $L(\rho) = L_a(\rho) - L_b(\rho)$ *et* $M(\rho) = M_a(\rho) - M_b(\rho)$ *sont définies par,* $k \in \{a, b\}$,

$$\begin{bmatrix} L_k(\rho) & M_k(\rho) \end{bmatrix} = W^{-1} \begin{bmatrix} \mathcal{L}_k(\rho) & \mathcal{M}_k(\rho) \end{bmatrix}, \tag{3.65}$$

et le système (3.46a)-(3.46c) *est stable avec un niveau de performance associé au gain* $\mathcal{L}_\infty$ *inférieur à* $\gamma_{\mathcal{L}_\infty} = \sqrt{\frac{\gamma_3\gamma_2}{\gamma_1} + \gamma_4}$.

Démonstration. La démonstration est organisée en deux principales étapes :

a) Dans un premier temps, il est montré qu'en considérant la structure (3.65), le système LPV (3.51a)-(3.51c) est stable $\forall \rho \in \Psi$ et $\forall \dot{\rho} \in \Gamma_\rho$ et possède une performance au sens du gain $\mathcal{L}_\infty$ inférieure $\gamma_{\mathcal{L}_\infty}$ (conditions suffisantes).

b) Dans un second temps, il est montré qu'il s'agit d'une condition suffisante pour que le système (3.46a)-(3.46c) soit stable avec une performance au sens du gain $\mathcal{L}_\infty$ inférieure à $\gamma_{\mathcal{L}_\infty}$.

Étape a) : Performance au sens du gain $\mathcal{L}_\infty$:
Dans un premier temps, il est considéré que $\mathcal{E}(\alpha) = 0$, $\mathcal{F}(\alpha) = 0$, $\mathcal{E}_{ii} = 0$ et $\mathcal{F}_{ii} = 0$ dans (3.57), (3.58), (3.61) et (3.62). Cette simplification sera justifiée, par la suite, dans la remarque 3.2. Il est à noter que, dans le Théorème 3.2, les matrices $\mathcal{L}_k(\rho) = WL_k(\rho)$ et $\mathcal{M}_k(\rho) = WM_k(\rho)$ pour $k \in \{a, b\}$ sont des variables LMI. Ainsi, d'après la méthode décrite dans [42], l'ensemble des contraintes (3.52)-(3.63) impliquent que, $\forall \rho \in \Psi$, $\forall \dot{\rho} \in \Gamma_\rho$,

$$\Upsilon(\rho, \dot{\rho}, \gamma_1, \gamma_2) \prec 0 \tag{3.66}$$

$$\Xi(\rho, \gamma_3, \gamma_4) \prec 0 \tag{3.67}$$

$$W\left(L_a(\rho) - L_b(\rho)\right) + \mu W > 0 \tag{3.68}$$

$$W\begin{bmatrix} L_a(\rho) & L_b(\rho) & M_a(\rho) & M_b(\rho) \end{bmatrix} > 0 \tag{3.69}$$

$$W\left(L_b(\rho) + T_a(\rho)\underline{Y}(\rho) - T_b(\rho)\overline{Y}(\rho)\right) - \mathcal{H}(\rho) > 0 \tag{3.70}$$

Étant donné que $W^{-1} \geq 0$, les contraintes (3.68)-(3.69) garantissent que la matrice $L(\rho)$ est Metzler et les matrices $L(\rho)$, $M(\rho)$ vérifient la décomposition (3.31). La contrainte (3.70) garantit la décomposition (3.32) et les conditions (3.66)-(3.67) garantissent la performance au sens du gain $\mathcal{L}_\infty$ pour le système (3.51a)-(3.51c).

À présent, la condition (3.66) est abordée. Étant donné que par définition, $\Upsilon_{2,1}(\rho) = W\mathcal{G}(\rho)$ et $\Upsilon_{3,1}(\rho) = P(\rho) + W\mathcal{A}(\rho)$ avec $\mathcal{G}(\rho) = \begin{bmatrix}(T_a(\rho) + T_b(\rho))\,\Omega(\rho) & \breve{F}(\rho)\end{bmatrix}$, alors en appliquant le complément de Schur à (3.66), il est déduit que

$$\Lambda(\rho, \dot{\rho}) + \mathcal{Q}(\rho)^T W^T \mathcal{I} + \mathcal{I}^T W \mathcal{Q}(\rho) \prec 0 \tag{3.71}$$

où les matrices sont définies par $\mathcal{I} = \begin{bmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{0}\end{bmatrix}$, $\mathcal{Q}(\rho) = \begin{bmatrix}-\mathbf{I} & \mathcal{G}(\rho) & \mathcal{A}(\rho) & \mathbf{I}\end{bmatrix}$ et

$$\Lambda(\rho, \dot{\rho}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \star & \star & \star \\ \mathbf{0} & \Upsilon_{2,2}(\rho, \gamma_2) & \star & \star \\ P(\rho) & \mathbf{0} & \Upsilon_{3,3}(\rho, \dot{\rho}, \gamma_1) & \star \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -P(\rho) \end{bmatrix}.$$

D'après le lemme de projection [13], il existe une solution à la contrainte (3.71) pour une matrice W si et seulement si

$$N_{\mathcal{Q}}(\rho)^T \Lambda(\rho) N_{\mathcal{Q}}(\rho) \prec 0, \tag{3.72}$$

$$N_{\mathcal{I}}(\rho)^T \Lambda(\rho) N_{\mathcal{I}}(\rho) \prec 0, \tag{3.73}$$

où les espaces nuls $N_{\mathcal{Q}}(\rho) = \begin{bmatrix} \mathcal{A}(\rho)^T & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathcal{G}(\rho)^T & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}^T$ et $N_{\mathcal{I}}(\rho) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}^T$.

Dans un premier temps, en développant la contrainte (3.72) alors

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}(\rho)^T & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathcal{G}(\rho)^T & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & P(\rho) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Upsilon_{2,2}(\rho, \gamma_2) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ P(\rho) & \mathbf{0} & \Upsilon_{3,3}(\rho, \dot{\rho}, \gamma_1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -P(\rho) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{A}(\rho) & \mathcal{G}(\rho) & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \prec 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} P(\rho) & \mathbf{0} & \mathcal{A}(\rho)^T P(\rho) + \Upsilon_{3,3}(\rho, \dot{\rho}, \gamma_1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Upsilon_{2,2}(\rho, \gamma_2) & \mathcal{G}(\rho)^T P(\rho) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & P(\rho) & -P(\rho) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{A}(\rho) & \mathcal{G}(\rho) & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \prec 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} P(\rho)\mathcal{A}(\rho) + \mathcal{A}(\rho)^T P(\rho) + \Upsilon_{3,3}(\rho, \dot{\rho}, \gamma_1) & P(\rho)\mathcal{G}(\rho) & P(\rho) \\ \mathcal{G}(\rho)^T P(\rho) & \Upsilon_{2,2}(\rho, \gamma_2) & \mathbf{0} \\ P(\rho) & \mathbf{0} & -P(\rho) \end{bmatrix} \prec 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} P(\rho)\mathcal{A}(\rho) + \mathcal{A}(\rho)^T P(\rho) + \gamma_1 P(\rho) + \dot{P}(\rho) & \star & \star \\ \left((T_a(\rho) + T_b(\rho))\,\Omega(\rho)\right)^T P(\rho) & -\gamma_2 \mathbf{I} & \star \\ \breve{F}(\rho)^T P(\rho) & \Phi(\rho) & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathcal{H}e\{P(\rho)\mathcal{A}(\rho)\} + \gamma_1 P(\rho) + \dot{P}(\rho) & \star \\ \left((T_a(\rho) + T_b(\rho))\,\Omega(\rho)\right)^T P(\rho) & -\gamma_2 \mathbf{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P(\rho)\breve{F}(\rho) \\ \Phi(\rho)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \breve{F}(\rho)^T P(\rho) & \Phi(\rho) \end{bmatrix} \prec 0$$

Puis, en rappelant que $\mathcal{B}(\rho) = (T_a(\rho) + T_b(\rho))\,\Omega(\rho) + \breve{F}(\rho)\Phi(\rho)$ (voir le système (3.51a)-(3.51c)) alors il est déduit que la contrainte (3.72) est équivalente à

$$\mathscr{A}(\rho, \dot{\rho}, \gamma_1, \gamma_2) + \mathscr{B}(\rho) \prec 0 \tag{3.74}$$

où $\mathscr{A}(\rho,\dot{\rho},\gamma_1,\gamma_2) = \begin{bmatrix} \mathcal{H}e\{P(\rho)\mathcal{A}(\rho)\} + \dot{P}(\rho) + \gamma_1 P(\rho) & \star \\ \mathcal{B}^T(\rho)P(\rho) & -\gamma_2\mathbf{I} \end{bmatrix}$,

$\mathscr{B}(\rho) = \begin{bmatrix} P(\rho)\breve{F}(\rho)\breve{F}(\rho)^T P(\rho) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi(\rho)^T\Phi(\rho) \end{bmatrix}$.

Étant donné que la matrice $\mathscr{B}(\rho)$ est strictement définie positive, il est déduit que $\mathscr{A}(\rho,\dot{\rho}) \prec 0$ (condition suffisante). Puis en notant que la matrice $\mathscr{A}(\rho,\dot{\rho})$ est liée à la matrice de Lyapunov $V(\rho,\nu) = \nu^T P(\rho)\nu$ et caractérise

$$\dot{V}(\rho,\nu) + \gamma_1 V(\rho,\nu) - \gamma_2\psi^T\psi < 0 \tag{3.75}$$

alors $\dot{V}(\rho,\nu) < -\gamma_1 V(\rho,\nu) + \gamma_2\|\psi\|^2_\infty$ et par intégration

$$\begin{aligned} V(\rho(t),\nu(t)) < \; & V(\rho(0),\nu(0))e^{-\gamma_1 t} \\ & +\gamma_2\|\psi\|^2_{\mathcal{L}_\infty}\int_0^t e^{-\gamma_1(t-\tau)}d\tau \\ < \; & V(\rho(0),\nu(0))e^{-\gamma_1 t} + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\|\psi\|^2_{\mathcal{L}_\infty} \end{aligned} \tag{3.76}$$

À présent, en notant que (3.67) est équivalente à la contrainte $\xi^T\xi - \gamma_3 V(\rho,\nu) - \gamma_4\psi^T\psi < 0$ alors

$$\xi(t)^T\xi(t) < \gamma_3 V(\rho(t),\nu(t)) + \gamma_4\|\psi\|^2_{\mathcal{L}_\infty} \tag{3.77}$$

Finalement, en injectant (3.76) dans (3.77) il est déduit que

$$\xi(t)^T\xi(t) < \gamma^2_{\mathcal{L}_\infty}\|\psi\|^2_{\mathcal{L}_\infty} + \gamma_3 V(\rho(0),\nu(0))e^{-\gamma_1 t} \tag{3.78}$$

Cette dernière contrainte caractérise le gain $\mathcal{L}_\infty$ pour le système (3.51a)-(3.51c). Ainsi, le modèle LPV (3.51a)-(3.51c) est stable $\forall\rho \in \Psi$ et $\forall\dot{\rho} \in \Gamma_\rho$ et sa performance au sens du gain $\mathcal{L}_\infty$ est inférieure à $\gamma_{\mathcal{L}_\infty}$.

À présent, en revenant sur l'inégalité (3.73) et en notant qu'il s'agit simplement d'une contrainte additionnelle à l'inégalité de la performance au sens du gain $\mathcal{L}_\infty$, cette dernière reste toujours valide. Cependant, il est important de noter que cette contrainte additionnelle peut introduire du conservatisme dans la solution. En d'autres termes, les LMI (3.52)-(3.63) constituent uniquement une condition suffisante pour que le modèle LPV (3.51a)-(3.51c) vérifie le niveau de performance $\gamma_{\mathcal{L}_\infty}$ au sens du gain $\mathcal{L}_\infty$.

Il est à noter qu'il existe un couplage entre la matrice de Lyapunov $P(\rho)$ et les matrices $L_a(\rho)$, $L_b(\rho)$, $M_a(\rho)$, $M_b(\rho)$ dans l'inégalité (3.75). Pour linéariser le problème, l'inégalité (3.74) est considérée dans un premier temps, puis une approche introduisant des degrés de liberté additionnels (slack matrix) est utilisée pour obtenir la formulation LMI (3.66).

Remarque 3.2. Comme il est expliqué dans [42], il est possible de réduire le conservatisme des contraintes (3.66)-(3.67) en relaxant les contraintes de multiconvexité (3.61)-(3.62). Pour y parvenir, les matrices $\mathcal{E}(\alpha)$, $\mathcal{F}(\alpha)$, $\mathcal{E}_{ii}$ et $\mathcal{F}_{ii}$ dans (3.57)-(3.58) et (3.61)-(3.62) sont introduites. Les nouvelles inegalités sont généralement moins conservatisves puisque (3.66)-(3.67) correspond au cas particulier $\mathcal{E}_1 = ... = \mathcal{E}_s = 0$ and $\mathcal{F}_1 = ... = \mathcal{F}_s = 0$. Toutefois, cette amélioration augmente le coût calculatoire de la résolution numérique étant donné que le nombre de variables d'optimisation augmente. Un compromis possible consiste à utiliser une structure diagonale $\mathcal{E}_i = \vartheta_i I$, $\mathcal{F}_i = \varrho_i I$ où ϑ_i, ϱ_i sont des scalaires positifs.

Étape b) : stabilité et gain $\mathcal{L}_\infty$:
Dans un premier temps, l'objectif est de démontrer que $0 \leq \tilde{x}(t) \leq \xi(t)$, $\forall t \geq 0$. La démonstration est composée de deux parties.

La première partie est dédiée à la démonstration de $0 \leq \tilde{x}(t)$, $\forall t \geq 0$ en vérifiant que le Théorème 3.1 est satisfait. Sous la contrainte (3.68) et le Lemme 3.1, il est déduit que la condition (i) du Théorème 3.1 est vérifiée. Étant donné que W est une M-matrice, il en résulte que $W^{-1} \geq 0$. Ainsi les contraintes (3.69)-(3.70) garantissent l'existence des conditions du Lemme 3.4. En combinant les expressions de $\overline{\eta}$, $\underline{\eta}$, $\overline{\varphi}$, $\underline{\varphi}$ définies dans le Lemme 3.4 et les conditions initiales (3.46c), alors le Théorème 3.1 est satisfait. Une conséquence directe déduite est que $0 \leq \tilde{x}(t)$, $\forall t \geq 0$.

La deuxième partie est dédiée à la démonstration de $\tilde{x}(t) \leq \xi(t)$, $\forall t \geq 0$. En utilisant les systèmes (3.46a)-(3.46c) et (3.51a)-(3.51c), le système suivant est déduit :

$$\begin{cases} \dot{\nu} - \dot{\tilde{z}} = \mathcal{A}(\rho)\,(\nu - \tilde{z}) + \widetilde{F}(\rho)\,(|r| - \hat{r}) & \text{(3.79a)} \\ \xi - \tilde{x} = \breve{Q}(\rho)\,(\nu - \tilde{z}) + \widetilde{Q}(\rho)\,(|r| - \hat{r}) & \text{(3.79b)} \\ \nu(0) - \tilde{z}(0) \geq 0 & \text{(3.79c)} \end{cases}$$

où $|r| = r^+ + r^-$, $\hat{r} = \overline{r}^- + \underline{r}^+$, $\mathcal{A}(\rho) = L(\rho) + \breve{F}(\rho)$.

Dans un premier temps, il est démontré que (3.79a) est un système coopératif. En effet, pour le vecteur $r \in [\underline{r}, \overline{r}]$ alors $0 \leq \underline{r}^+ \leq r^+$, $0 \leq \overline{r}^- \leq r^-$ et, par définition, $\widetilde{F}(\rho) \geq 0$, $\forall \rho \in \Psi$. Ainsi, il est déduit que $\widetilde{F}(\rho)(|r| - \hat{r}) \geq 0$. Étant donné que la matrice $L(\rho)$ est Metzler et, par définition, $\breve{F}(\rho) \geq 0$, $\forall \rho \in \Psi$ alors $\mathcal{A}(\rho)$ est une matrice Metzler. En considérant le raisonnement précédent et les conditions initiales (3.79c) alors, d'après la théorie des systèmes coopératifs, il est déduit que $\nu - \tilde{z} \geq 0$, $\forall t \geq 0$.
Dans un second temps, il est montré que (3.79b) est positif. Étant donné, que par définition, $\breve{Q}(\rho)$,$\widetilde{Q}(\rho) \geq 0$, $\forall \rho \in \Psi$ alors l'inégalité $\tilde{x}(t) \leq \xi(t)$, $\forall t \geq 0$ est démontrée.

Finalement, en combinant les résultats précédents, i.e. $0 \leq \tilde{x}(t) \leq \xi(t)$, $\forall t \geq 0$ et la performance de la première étape, i.e. $\|\xi\|_\infty \leq \gamma_{\mathcal{L}_\infty} \|\psi\|_\infty$ $\forall \rho \in \Psi$, $\forall \dot{\rho} \in \Gamma_\rho$, il est déduit que $\gamma_{\mathcal{L}_\infty}$ est une borne supérieure de la performance au sens du gain $\mathcal{L}_\infty$ pour le système (3.46a)-(3.46c). De plus, puisque $0 \leq \tilde{z}(t) \leq \nu(t)$, $\forall t \geq 0$ où la démonstration $0 \leq \tilde{z}(t)$ se déduit facilement de l'application sur (3.46a) de la théorie des systèmes coopératifs et puisqu'il a été prouvé dans la précédente étape, en utilisant une matrice de Lyapunov à dépendance paramétrique affine, que $\nu(t)$ est stable, il est alors déduit que (3.46a)-(3.46c) est stable. ■

À présent, le théorème suivant est dédié à la performance au sens du gain $\mathcal{L}_2$.

Théorème 3.3. *Sous les hypothèses 3.1-3.3, en considérant le modèle LPV (3.51a)-(3.51c), les inégalités (3.52)-(3.53), (3.56) et les matrices $\mathcal{G}_{ii} = \mathcal{G}_{ii}^T \succeq 0$, telles que*

$$\mathcal{G}(\alpha) = \alpha_1^2 \mathcal{G}_{11} + \cdots + \alpha_s^2 \mathcal{G}_{ss} \succeq 0, \forall \alpha \in \mathscr{V} \tag{3.80}$$

S'il existe des scalaires réels $\mu \geq 0$, $\gamma > 0$ et une M-matrice $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tels que les contraintes suivantes sont vérifiées :

(i) $\forall(\alpha,\beta)\in\mathscr{V}\times\mathscr{R}$, *en considérant les inégalités* (3.59)-(3.60) *dans le Théorème 3.2 et*

$$\Pi(\alpha,\beta,\gamma)+\mathcal{G}(\alpha)\prec 0 \tag{3.81}$$

où $\Pi(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{bmatrix}\Upsilon(\alpha,\beta,0,\gamma) & \star\\ \Pi_{2,1}(\alpha) & -\mathbf{I}\end{bmatrix}$ *avec la matrice* Υ *définie dans* (3.57) *et la matrice* $\Pi_{2,1}(\alpha)=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathcal{D}(\alpha) & \mathbf{0} & \mathcal{C}(\alpha) & \mathbf{0}\end{bmatrix}$

(ii) pour $i\in\{1,\cdots,s\}$, *en considérant les inégalités* (3.63) *et*

$$\Pi_{ii}+\mathcal{G}_{ii}\succeq 0 \tag{3.82}$$

où $\Pi_{ii}=\begin{bmatrix}\Upsilon_{ii} & \star\\ (\Pi_{ii})_{2,1} & \mathbf{0}\end{bmatrix}$, $(\Pi_{ii})_{2,1}=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathcal{D}_{ii} & \mathbf{0}\end{bmatrix}$ *avec les matrices* Υ_{ii}, $\mathcal{D}_{ii}$ *définies dans* (3.61), (3.62).

Alors, les matrices de l'observateur intervalle à entrées inconnues $L(\rho)=L_a(\rho)-L_b(\rho)$ *et* $M(\rho)=M_a(\rho)-M_b(\rho)$ *sont définies par,* $k\in\{a,b\}$,

$$\begin{bmatrix}L_k(\rho) & M_k(\rho)\end{bmatrix}=W^{-1}\begin{bmatrix}\mathcal{L}_k(\rho) & \mathcal{M}_k(\rho)\end{bmatrix}, \tag{3.83}$$

et le système (3.46a)-(3.46c) *est stable avec un niveau de performance associé au gain* L_2 *inférieur ou égal à* $\gamma_{\mathcal{L}_2}=\sqrt{\gamma}$.

Démonstration. La démonstration de ce théorème est similaire à la démonstration du Théorème 3.2 en l'adaptant pour la performance au sens du gain $\mathcal{L}_2$. ■

Finalement, les paramètres de l'observateur intervalle peuvent être déterminés en utilisant un critère de performance au sens du gain $\mathcal{L}_2$ et/ou du gain $\mathcal{L}_\infty$, en résolvant un problème d'optimisation reposant sur des contraintes LMI présentées dans le Théorème 3.2 et le Théorème 3.3. Il est à noter que différentes fonctions de Lyapunov peuvent être considérées pour chaque théorème afin de réduire le conservatisme de l'approche.

3.3.4 Algorithme de conception de l'observateur intervalle

Cette sous-section résume les principales étapes de la procédure de conception de l'observateur intervalle à entrées inconnues (3.5a)-(3.5e) sous contraintes de performance au sens du gain $\mathcal{L}_\infty$. Il est à noter qu'il est possible d'en déduire facilement la procédure de conception sous contraintes de performance au sens du gain $\mathcal{L}_2$.

i). Vérification des hypothèses 3.1 et 3.2,

ii). Détermination de la matrice S (3.7)

iii). Pour chaque choix des matrices $K(\theta)$ et N

- *iii).a.* Vérification que l'hypothèse 3.3 est satisfaite
- *iii).b.* Déduction de la matrice $Q(\theta)$ (voir hypothèse 3.3)
- *iii).c.* Détermination des matrices $Y(\theta,\dot\theta)$, $Z(\theta)$, $H(\theta)$, voir (3.16b) et (3.16c)
- *iii).d.* Détermination de la décomposition $\mathcal{K}(\theta,\dot\theta)=\mathcal{K}_a(\theta,\dot\theta)-\mathcal{K}_b(\theta,\dot\theta)$ pour les matrices $\mathcal{K}\in\{Q,Y,Z,H\}$ en appliquant le Lemme 3.5

iii).e. Programmation des variables LMI du Théorème 3.2 :

- Matrices de Lyapunov (3.52) : P_j , $\forall j \in \{0, \cdots, s\}$,
- Matrices $\mathcal{L}_a$, $\mathcal{L}_b$, $\mathcal{M}_a$, $\mathcal{M}_b$ (3.53) : $\mathcal{L}_{aj}$, $\mathcal{L}_{bj}$, $\mathcal{M}_{aj}$, $\mathcal{M}_{bj}$ $\forall j \in \{0, \cdots, s\}$
- Matrices $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{H}$ ((3.54), (3.55),(3.56)) : $\mathcal{E}_{ii}$, $\mathcal{F}_{ii}$, $\mathcal{H}_{ii}$ $\forall i \in \{1, \cdots, s\}$
- Critère de performance γ
- M-matrice W

iii).f. Minimisation de γ sous les contraintes (3.52)-(3.63) du Théorème 3.2

iii).g. Déduction des matrices $L_a(\rho)$, $L_b(\rho)$, $M_a(\rho)$, $M_b(\rho)$ (3.65)

iv). Choix des matrices $K(\theta)$, N, $L_a(\rho)$, $L_b(\rho)$, $M_a(\rho)$, $M_b(\rho)$ permettant d'obtenir le meilleur critère de performance γ

v). Déduction des fonctions $\overline{g}$, $\underline{g}$, $\overline{\eta}$, $\underline{\eta}$, $\overline{\varphi}$, $\underline{\varphi}$ en appliquant les Lemmes 3.3 et 3.4

3.4 Exemple académique

La procédure de conception de l'observateur intervalle à entrées inconnues est à présent illustrée sur un exemple académique.

3.4.1 Présentation du système

Pour cette application, le modèle considéré est décrit par (3.2a)-(3.2b) où les matrices A, B, C, D, E sont définies par :

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} \theta_3 - 2 & -0.5 & 0 \\ \theta_4 & \theta_1 - 1 & -0.2 \\ 0.1 & 0 & \theta_2 - 2 \end{bmatrix}, B(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0.2 \\ \theta_4 - 0.1 & 0 & 0 \\ 2 & \theta_2 & 0 \end{bmatrix}, E(\theta) = \begin{bmatrix} \theta_3 + 2 \\ 0 \\ \theta_1 \end{bmatrix}, \\ C(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \theta_1 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.84}$$

Le vecteur de paramètres θ et sa dérivée temporelle $\dot{\theta}$ sont inconnus mais supposés bornés par les ensembles connus *a priori* suivants

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} -0.15, 0.15 \\ -0.25, 0.25 \\ -0.15, 0.15 \\ 0.2, 0.8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} -0.30, 0.30 \\ -0.25, 0.25 \\ -0.75, 0.75 \\ 0, 0 \end{bmatrix}. \tag{3.85}$$

Les paramètres θ_1 et θ_2 sont respectivement mesurés au travers de $\rho_1 = \theta_1 + \delta_1$, $\rho_2 = \theta_2 + \delta_2$ où $\delta_1 \in \left[-0.03, 0.03\right]$ et $\delta_2 \in \left[-0.03, 0.03\right]$ sont des bruits bornés tels que $\dot{\delta}_1 \in \left[-10^3, 10^3\right]$, $\dot{\delta}_2 \in \left[-10^3, 10^3\right]$. Il est déduit que le vecteur ρ et sa dérivée $\dot{\rho}$ sont bornés par les ensembles

$$\begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} -0.18, 0.18 \\ -0.28, 0.28 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \dot{\rho}_1 \\ \dot{\rho}_2 \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} -1000.30, 1000.30 \\ -1000.25, 1000.25 \end{bmatrix}. \tag{3.86}$$

Par conséquent, l'hypothèse 3.1 est vérifiée.

3.4.2 Synthèse de l'observateur intervalle

En suivant le raisonnement de la Remarque 3.1, les matrices N et $K(\rho)$ doivent être choisies de manière adéquate, afin de ne pas introduire de conservatisme inutilement dans la solution au problème de synthèse des paramètres de l'observateur intervalle.

Pour la matrice $K(\theta)$, il est proposé de retenir, pour cet exemple, la structure $K(\theta) = \kappa I_n$ avec $\kappa \neq 0$. Alors un choix possible pour la matrice N est

$$N = K(\theta)\overline{S} = \kappa \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.081 & 0 \end{bmatrix}$$

où la matrice $\overline{S}$ est une borne supérieure de la matrice $S(\theta) = E(\theta)(C(\theta)E(\theta))^{\dagger}$, voir (3.7).

Étant donné que $rang(C(\theta)E(\theta)) = rang(E(\theta)) = 1, \ \forall\theta \in \Theta$ alors l'Hypothèse 3.2 est vérifiée et les matrices $R(\theta)$ et $Q^{-1}(\theta)$ utilisées dans (3.6) et (3.8) sont alors définies par :

$$R(\theta) = \kappa \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\dfrac{\theta_1}{\theta_3 + 2} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ Q^{-1}(\theta) = R(\theta) + NC(\theta) = \kappa \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.081 - \dfrac{\theta_1}{\theta_3 + 2} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Le paramètre κ étant non nul, il est évident que la matrice $Q(\theta)$ est inversible $\forall\theta \in \Theta$ et, par conséquent, que l'Hypothèse 3.3 est vérifiée.

L'étape suivante consiste à concevoir les matrices $\mathcal{A}(\rho)$, $\mathcal{B}(\rho)$, $\mathcal{C}(\rho)$, $\mathcal{D}(\rho)$ du système (3.51a)-(3.51c), en utilisant la méthode proposée dans le Lemme 3.5 avec $n_i = -\underline{\rho_i}$, $i \in \{1, 2\}$ pour toutes les matrices. De plus, le problème de conception est pondéré, comme généralement considéré dans les problème de synthèse H_∞, en introduisant une fonction de pondération constante $W_\psi = diag(w_{\psi_i})$, $i = 1, ..., 2m + n$ tel que $\psi = W_\psi b_\psi$ où b_ψ est un vecteur fictif. Les scalaires w_{ψ_i}, $i = 1, ..., 2m + n$ sont introduits pour gérer séparément le niveau de robustesse de chaque entrée.

Puis, en notant que les scalaires γ, γ_2, γ_4 ont une dépendance linéaire dans les contraintes (3.52)-(3.63), (3.80)-(3.82) alors, pour $\gamma_{opt} = \gamma + \gamma_2 + \gamma_4$, le problème d'optimisation proposé pour synthétiser les paramètres de l'observateur intervalle à entrées inconnues est donné par

$$\min \gamma_{opt} \text{ t.q. } (3.52)\text{-}(3.63), \ (3.80)\text{-}(3.82) \tag{3.87}$$

Étant donné que les inégalités (3.52)-(3.63), (3.80)-(3.82) dépendent non-linéairement des paramètres κ, γ_1, γ_3 et des variables LMI alors le problème (3.87) ne définit pas un problème d'optimisation convexe. Une solution simple pour transformer (3.52)-(3.63), (3.80)-(3.82) en un nombre fini d'inégalités matricielles linéaires est d'évaluer le paramètre κ sur un nombre suffisant de valeurs et de minimiser γ_{opt} pour chaque point. Dans notre cas, en fixant $\gamma_1 = 0.6$, $\gamma_3 = 1$, les résultats sont présentés sur le graphe $\kappa - \gamma_{opt}$ de la figure 3.1 où il est possible d'observer les valeurs de κ qui conduisent à un minimum pour la valeur de γ_{opt}. Ainsi, cette procédure conduit à deux minimums locaux $\gamma_{opt} \approx 65.7$ pour des valeurs $\kappa \approx 1.4$ et $\kappa \approx -1.4$.

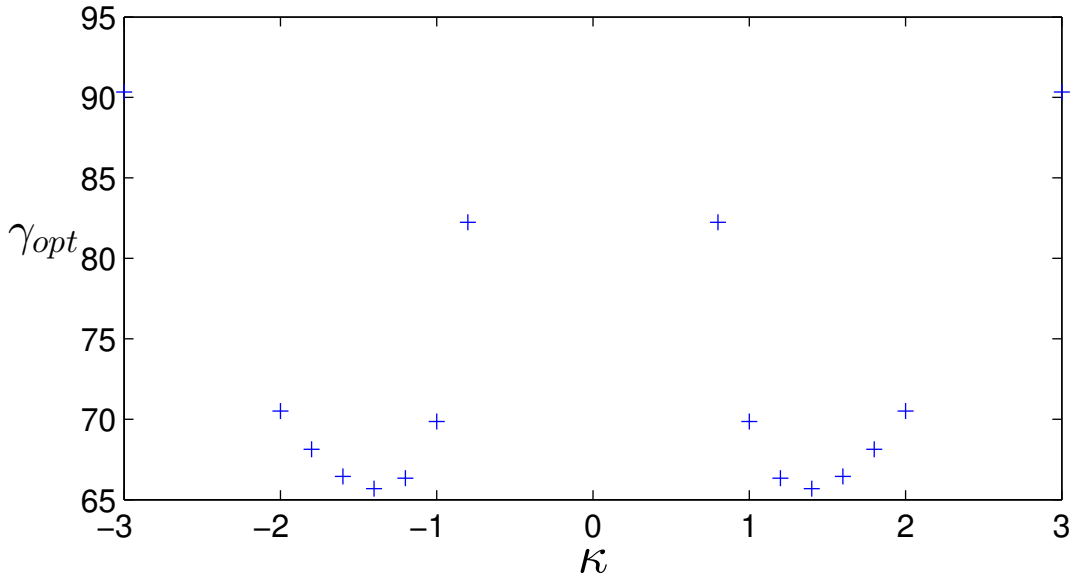


FIGURE 3.1 – Graphe $\kappa - \gamma_{opt}$

En choisissant $\kappa \approx 1.4$ alors $\gamma_{\mathcal{L}_\infty} = 7.15$, $\gamma_{L_2} = 5.81$ et les matrices $L_k(\rho)$, $M_k(\rho)$, $k \in \{a, b\}$, voir (3.65) (ou (3.83)) , sont données par :

$$
\begin{aligned}
L_a(\rho) = &\begin{bmatrix} 0.002 & 0.006 & 0.015 \\ 0.082 & 0 & 0.282 \\ 0.026 & 0.053 & 0.116 \end{bmatrix} + \rho_1 \begin{bmatrix} -0.009 & -0.011 & -0.048 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.158 & 0 \end{bmatrix} \\
&+\rho_2 \begin{bmatrix} -0.001 & -0.002 & -0.011 \\ -0.004 & -0.001 & -0.003 \\ -0.007 & -0.001 & -0.415 \end{bmatrix}, \\
L_b(\rho) = &\begin{bmatrix} 0.76 & 0.001 & 0.006 \\ 0.001 & 5.420 & 0.200 \\ 0.001 & 0.029 & 2.030 \end{bmatrix} + \rho_1 \begin{bmatrix} -0.331 & -0.007 & -0.025 \\ 0 & 1.160 & 0 \\ 0 & -0.158 & 0 \end{bmatrix} \\
&+\rho_2 \begin{bmatrix} 0.012 & -0.001 & -0.006 \\ -0.002 & 0.096 & -0.001 \\ -0.002 & 0 & -1.000 \end{bmatrix}, \\
M_a(\rho) = &\begin{bmatrix} 1.070 & 0.004 \\ 0.298 & 5.960 \\ 0.022 & 0.016 \end{bmatrix} + \rho_1 \begin{bmatrix} -0.498 & -0.018 \\ -0.151 & -2.890 \\ 0 & 0.087 \end{bmatrix} + \rho_2 \begin{bmatrix} 0.013 & -0.003 \\ -0.011 & 0.161 \\ -0.079 & -0.001 \end{bmatrix}, \\
M_b(\rho) = &\begin{bmatrix} 0.013 & 0.004 \\ 0.004 & 0.001 \\ 0.102 & 0.001 \end{bmatrix} + \rho_1 \begin{bmatrix} -0.058 & -0.018 \\ 0 & 0 \\ 0.488 & 0 \end{bmatrix} + \rho_2 \begin{bmatrix} -0.007 & -0.004 \\ -0.012 & -0.001 \\ 0.033 & -0.002 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Les fonctions $\overline{\eta}$, $\underline{\eta}$, $\overline{\varphi}$, $\underline{\varphi}$ sont alors déduites en appliquant le Lemme 3.4. Finalement, les bornes de l'état x du système (3.2a)-(3.2b) sont obtenues en utilisant l'observateur intervalle (3.5a)-(3.5f).

3.4.3 Simulations et résultats

Dans le cadre de la simulation, la trajectoire du vecteur de paramètres est donnée par $\theta_1(t) = 0.15sin(2t + \frac{\pi}{2})$, $\theta_2(t) = 0.25sin(t + \frac{\pi}{4})$, $\theta_3(t) = 0.15sin(5t + \frac{\pi}{3})$ et $\theta_4 = 0.5$. L'entrée inconnue $d(t)$ est fixée à $d(t) = 2cos(2t)$ et le vecteur $w(t)$ est composé de $w_1(t) = -2sin(\frac{t}{2})$ et de deux bruits $w_2(t)$, $w_3(t)$ bornés par des valeurs connues $\overline{w_2} = \overline{w_3} = 0.1$, $\underline{w_2} = \underline{w_3} = -0.1$.

Cette sous-section, dédiée aux résultats de l'estimation par intervalle de l'état x du système (3.84), débute par la présentation de la figure 3.2 illustrant les signaux d'entrée de l'observateur intervalle à entrées inconnues associés aux paramètres mesurés ρ_1, ρ_2 et à la sortie y.

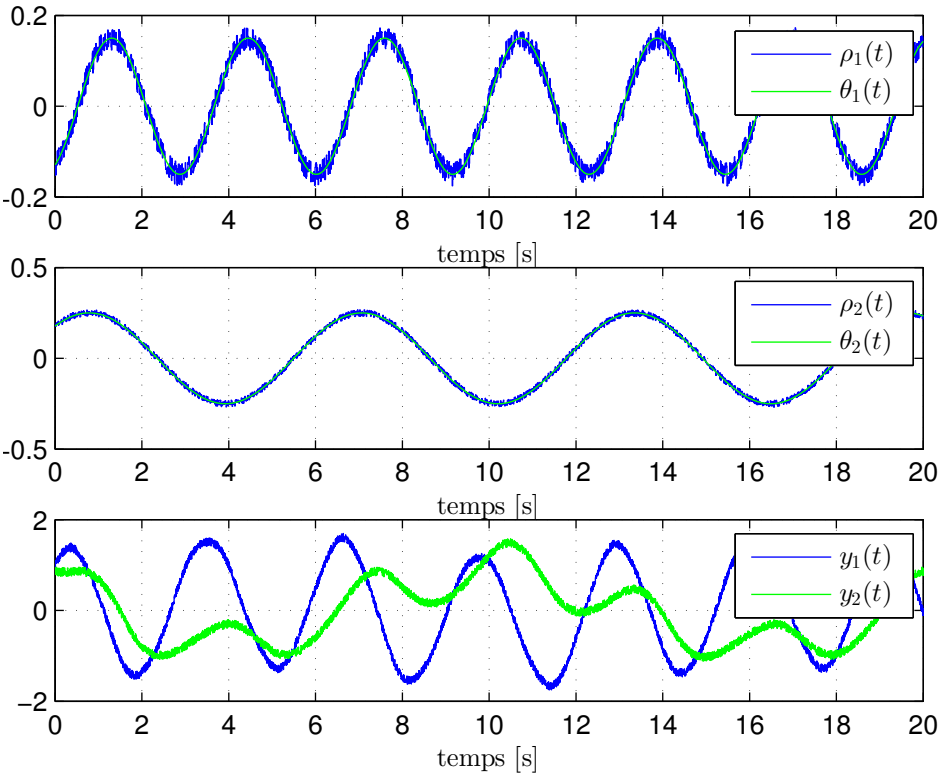


FIGURE 3.2 – Évolution temporelle des paramètres ρ

Á présent, les figures 3.3 et 3.4 présentent l'influence de la perturbation w_1 et de l'entrée inconnue d sur l'état du système. L'influence des perturbations w_2 et w_3 n'est pas présentée car elles affectent faiblement le comportement de l'état du système.

Les résultats de l'estimation de l'état x sont, à présent, illustrés sur la figure 3.5. Comme nous pouvons l'observer sur les figures, l'état x est borné i.e. $x(t) \in [\underline{x}(t), \overline{x}(t)]$, $\forall t \geq 0$ et l'intervalle $\tilde{x} = \overline{x} - \underline{x}$ converge asymptotiquement. Finalement, il est observé que la largeur de l'intervalle $\tilde{x}$ est faible, démontrant l'efficacité de la méthodologie de conception proposée.

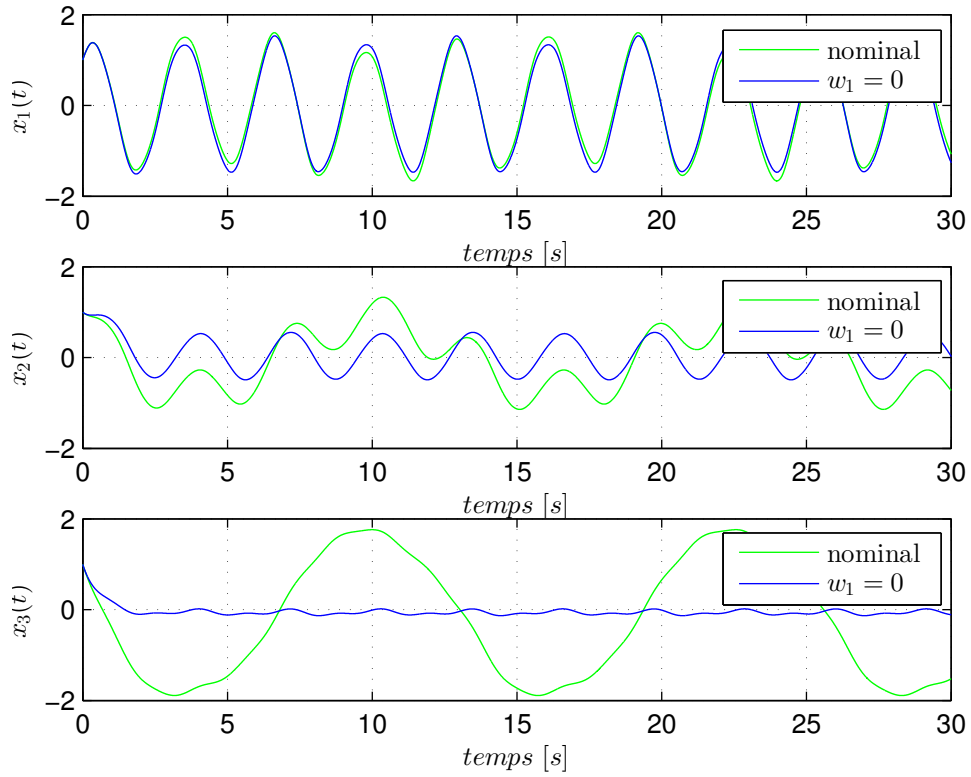


FIGURE 3.3 – Évolution temporelle de l'état x pour une perturbation w_1 nulle

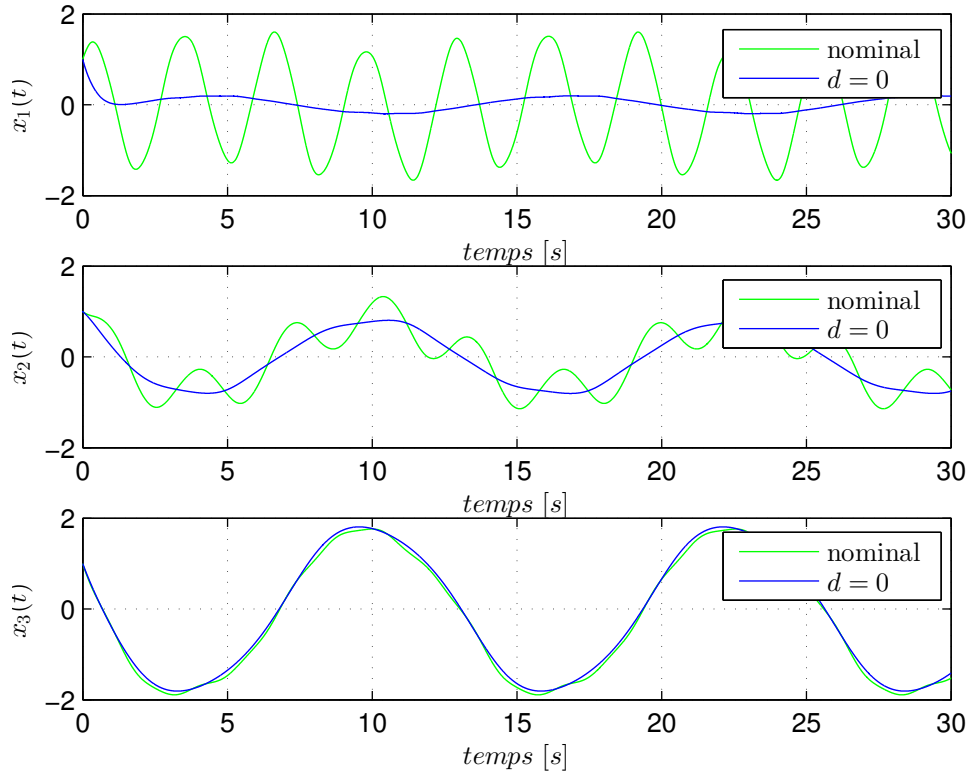


FIGURE 3.4 – Évolution temporelle de l'état x pour une entrée inconnue d nulle

3.5 Conclusion

Ce chapitre propose une nouvelle approche de synthèse d'observateurs intervalles à entrées inconnues pour estimer robustement l'état des systèmes Linéaires à Paramètres Variants (LPV), de manière garantie et sous la contrainte de satisfaire un niveau de performance au sens du gain $\mathcal{L}_2$, du gain $\mathcal{L}_\infty$, ou d'un critère mixte associé. La propriété de découplage des observateurs à entrées inconnues et le processus d'optimisation permettent de réduire le conservatisme de l'estimation par intervalle, en évitant les effets liés aux entrées inconnues et en atténuant les effets des perturbations non découplées. La conception des paramètres de l'observateur intervalle à entrées inconnues est formulée en un problème d'optimisation basé sur des contraintes LMI. Cette formulation présente la particularité de ne nécessiter aucune transformation d'état pour assurer la coopérativité des erreurs d'observation. Il est montré que cette contrainte peut être ajoutée aux contraintes $\mathcal{L}_2/\mathcal{L}_\infty$ pour être formulée comme une partie du processus d'optimisation.

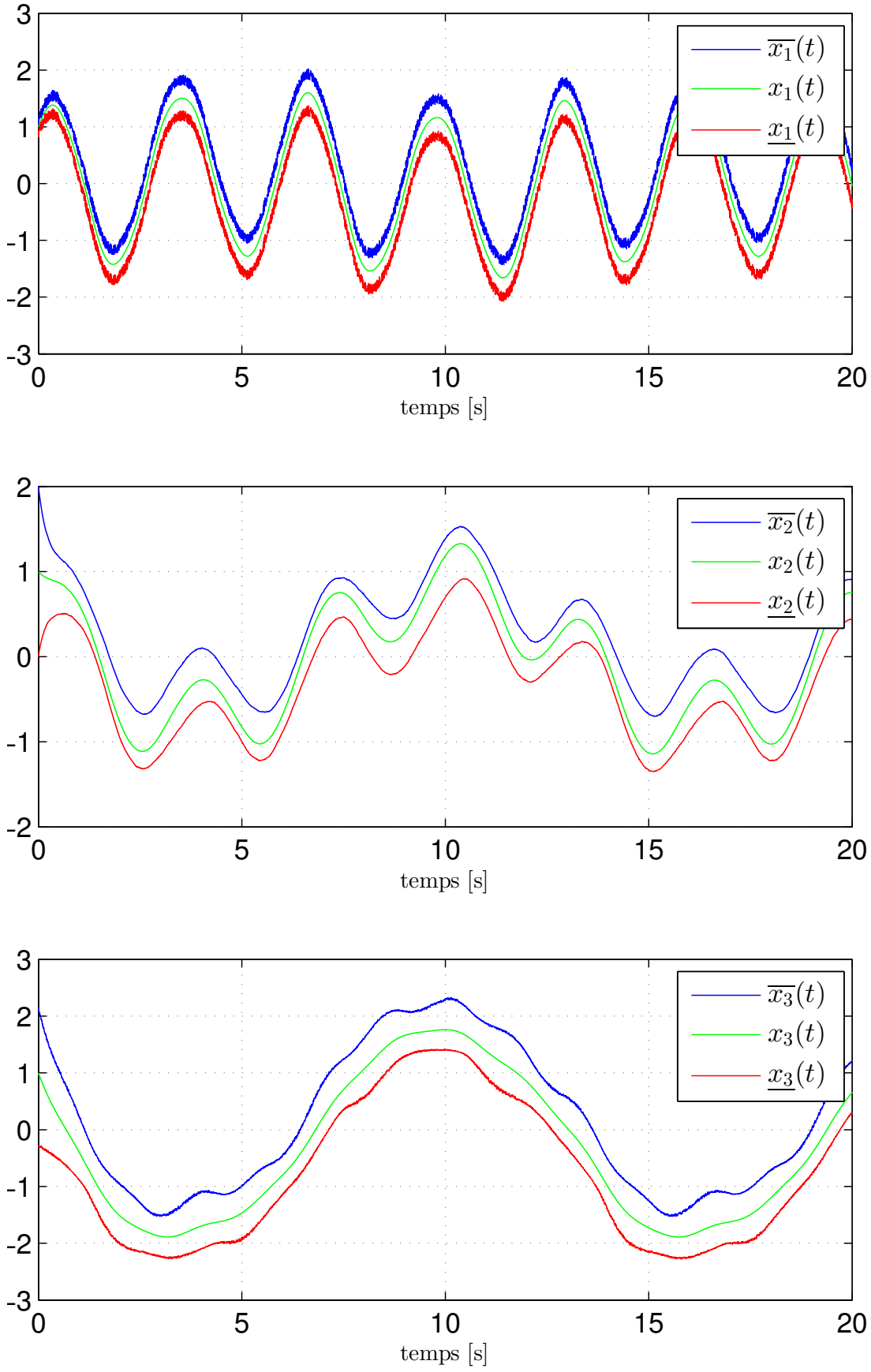


FIGURE 3.5 – Estimation par intervalle de l'état x

Chapitre 4

Application à l'estimation d'états du HL20 au cours de la phase d'atterrissage

La méthodologie de conception d'un observateur intervalle à entrées inconnues, détaillée dans le chapitre précédent, est à présent appliquée à la mission de rentrée atmosphérique terrestre. Plus particulièrement, ce chapitre repose sur l'utilisation d'un benchmark développé sous Matlab/Simulink permettant de simuler dans un milieu perturbé le comportement dynamique d'un véhicule de type HL20 au cours de la phase d'atterrissage d'une mission de rentrée atmosphérique terrestre. Ce benchmark a notamment été utilisé, dans des travaux scientifiques, pour l'étude de méthodes de diagnostic [41], la génération de trajectoire [56] ou encore la synthèse et l'analyse de lois de commande [97, 80, 70].

Ce chapitre débutera par la présentation des principales étapes d'une mission de rentrée atmosphérique, du véhicule HL20 et du simulateur. Ce descriptif reposera sur la reprise de la présentation effectuée dans les travaux de thèse [41]. L'objectif n'est pas d'effectuer une présentation complète mais simplement de donner au lecteur les éléments clés à la compréhension de l'application et à la mise en œuvre de la méthodologie de synthèse de l'observateur intervalle à entrées inconnues. Le lecteur peut se référer au chapitre 3 des travaux de thèse [41] pour des informations complémentaires. Dans un second temps, la procédure de conception de l'observateur intervalle sera détaillée. Ce chapitre se terminera par la présentation des résultats de simulation.

4.1 Mission de rentrée atmosphérique

Une mission de rentrée atmosphérique est organisée en trois phases de vol successives appelées phase hypersonique, phase de dissipation d'énergie en zone terminale (TAEM) et, finalement, phase d'approche et d'atterrissage automatique (A&L). Les étapes d'une mission de rentrée atmosphérique, illustrées sur la figure 4.1, sont à présent abordées plus en détails.

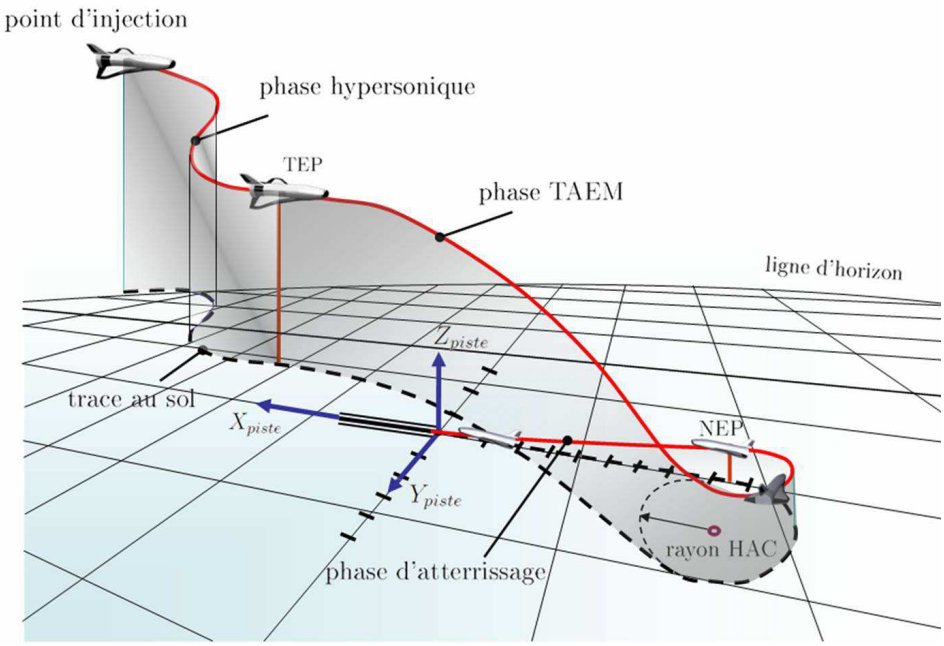


FIGURE 4.1 – Mission de rentrée atmosphérique terrestre [41].

4.1.1 Phase hypersonique

Suite à une manœuvre de désorbitation [1] permettant de "décrocher" le véhicule de son orbite et de préparer sa rentrée atmosphérique en positionnant le bouclier thermique face à l'atmosphère selon un angle d'attaque précis [2], la phase hypersonique, qui débute vers 120km d'altitude avec une vitesse au sol avoisinant Mach25 (i.e. $\approx 28000 km/h$), consiste à déplacer le véhicule vers un point connu, appelé TEP (TAEM Entry Point) et caractérisé par une vitesse égale à Mach 2. Au cours de cette phase, le guidage longitudinal et latéral du véhicule est classiquement effectué de manière découplée.

Plus particulièrement, le contrôle longitudinal est réalisé par une modulation des angles d'incidence et/ou de gîte de façon à asservir le véhicule sur un profil "trainé/vitesse" spécifié et pré-calculé de manière à satisfaire des contraintes aérothermodynamiques et structurelles définies en terme de flux thermique, de facteur de charge et de pression dynamique [49, 75, 73]. L'appareil évolue ainsi dans un "couloir de vol longitudinal" scindé en trois segments principaux :

1. une phase à flux thermique constant en début de trajectoire où les flux sont les plus importants,
2. une phase à trainée constante lorsque le facteur de charge est à son maximum,
3. une phase à trainée décroissante lorsque la pression dynamique augmente.

Le contrôle latéral de l'appareil est assuré par des manœuvres de prise de gîte à $\pm 90°$ (rotation autour du vecteur vitesse) autorisant un déport latéral gauche ou droit selon le

1. La manœuvre de désorbitation est couramment réalisée au moyen d'un moteur fonctionnant en rétrofusée et délivrant un incrément de vitesse opposé à la vitesse d'évolution orbitale de l'engin.

2. Bien qu'une marge de quelques degrés soit tolérée, le véhicule risque de rebondir sur les hautes couches de l'atmosphère lorsque l'angle d'attaque est trop aigu ou de se désintégrer lorsque celui-ci est trop direct.

signe de cette dernière par effet de portance longitudinale. De telles manœuvres dégradent la finesse verticale. Par conséquent, elles sont limitées en nombre et uniquement utilisées lorsque l'angle formé par le vecteur vitesse de l'appareil et le point visé sort d'un couloir de vol prédéfini appelé "couloir latéral".

4.1.2 Phase de dissipation d'énergie en zone terminale (TAEM)

La phase TAEM, présentée dans la figure 4.2, définit la phase de vol débutant au point TEP (i.e. lorsque le véhicule atteint la "porte Mach2") jusqu'au point NEP (Nominal Exit Point) caractérisé par une altitude, une vitesse et une distance par rapport au seuil de piste. Cette phase a pour objectif d'éliminer l'énergie cinétique non évacuée au cours de la phase hypersonique (friction du bouclier thermique sur l'atmosphère), en soumettant le véhicule à des virages de dissipation (virage en 'S' de dissipation). Lorsque l'énergie résiduelle est dissipée, le véhicule débute alors une manœuvre d'alignement (virage en 'S') suivie d'un vol rectiligne descendant et perpendiculaire à l'axe de la piste afin d'intercepter un cylindre d'alignement horizontal fictif (HAC [3]). Finalement une manœuvre d'enroulement (HAC tracking) à virage constant est effectuée jusqu'au point NEP dont les conditions géographiques et cinématiques permettent de débuter la phase d'atterrissage automatique en toute sécurité.

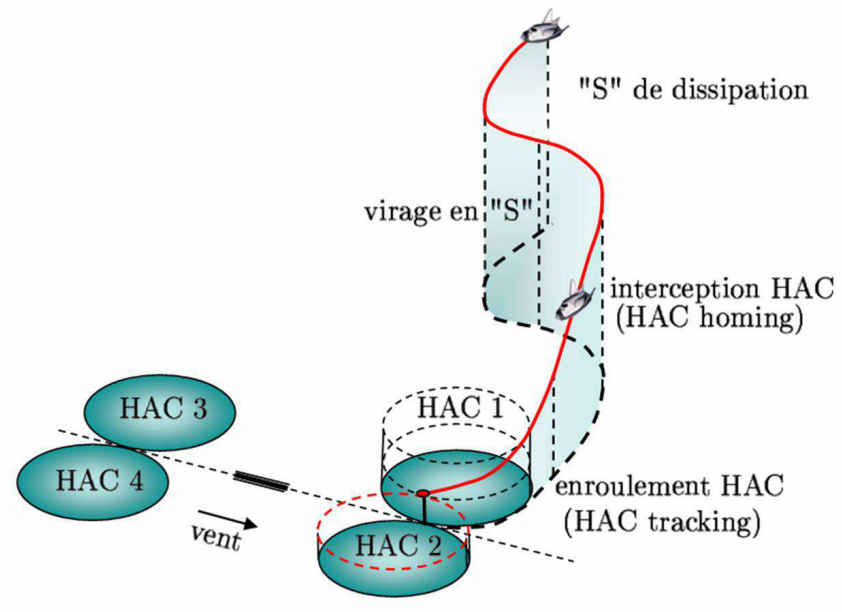


FIGURE 4.2 – Phase TAEM [41].

4.1.3 Phase d'approche et d'atterrissage automatique (A&L)

Après avoir parcouru près de 4000Km en moins de 30 minutes, le véhicule aborde la dernière phase qui débute au point NEP et se termine lorsque les roues touchent la piste d'atterrissage. Pour notre application, la trajectoire du véhicule HL20, présentée dans la figure 4.3, est composée de trois principales parties :

3. Horizontal Alignment Cylinder

1. une approche initiale à forte pente ($\gamma_1 = -17°$ - Outer Glideslope Angle) pour annuler les dispersions sur les conditions cinématiques initiales,
2. une manœuvre initiée à $V = 500ft/s$ dont la trajectoire est de forme parabolique et le facteur de charge est constant,
3. une approche terminale à pente plus faible ($\gamma_2 = -1°$ - Inner Glideslope Angle) qui débute lorsque le véhicule atteint une altitude $h_2 = 75ft$ et se termine lorsque les roues touchent la piste.

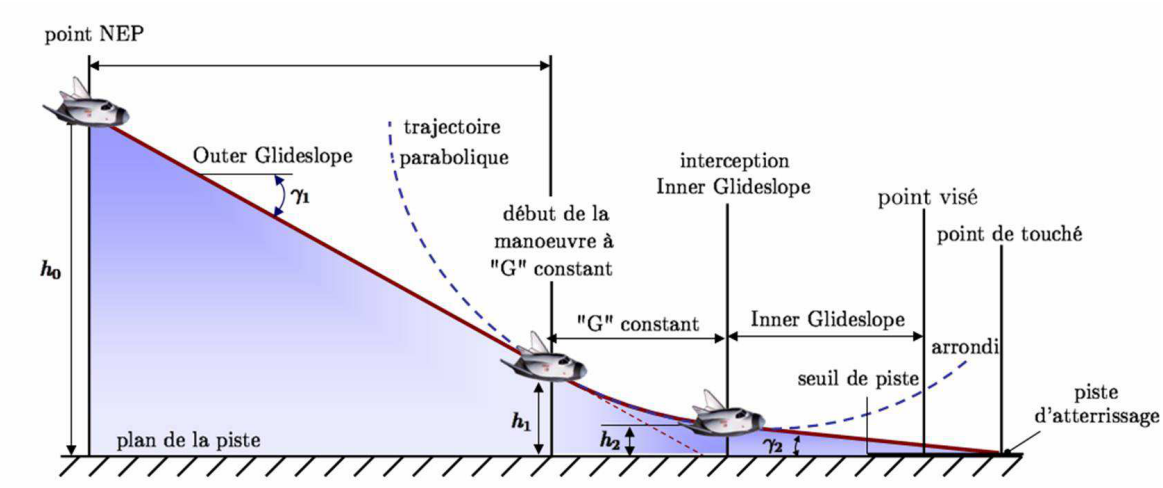


FIGURE 4.3 – Phase d'atterrissage du HL20 [41].

4.2 Modélisation du véhicule HL20

Au cours de cette sous-section, les caractéristiques physiques et géométriques du véhicule HL20 sont abordées. Outre le fait de présenter au lecteur le véhicule HL20, l'objectif est de fournir l'ensemble des informations permettant d'extraire, pour la suite, un modèle LPV destiné à la synthèse de l'observateur intervalle à entrées inconnues.

4.2.1 Descriptif général

Initié par le centre de recherche Langley (LaRC NASA) à la fin des années 80, le HL20 (Horizontal Lander 20) était un projet dédié à l'étude d'un véhicule réutilisable, fiable et sûr, capable d'effectuer des missions depuis et vers les orbites basses de la Terre pour un coût réduit comparé à la navette spatiale américaine. Ce véhicule était principalement destiné aux missions liées à la station spatiale telles que le secours et le transfert des équipages (capacité de transporter jusqu'à 10 personnes) ou encore la maintenance et le ravitaillement. La mise en orbite de ce véhicule devait s'effectuer par l'utilisation d'un lanceur et son retour par une rentrée atmosphérique en planant jusqu'à venir se poser sur une piste d'atterrissage.

Bien que le projet fut abandonné, l'avancement de l'étude [54, 55] a permis de développer une plateforme du simulation réaliste sous Matlab/Simulink. Ce support constitue donc

une bonne plateforme pour appliquer la méthodologie de synthèse de l'observateur intervalle proposée dans le chapitre précédent.

Pour plus de renseignements, le lecteur peut se référer à [10] ou encore se rendre sur le site internet de la NASA qui contient une page dédiée au véhicule HL20.

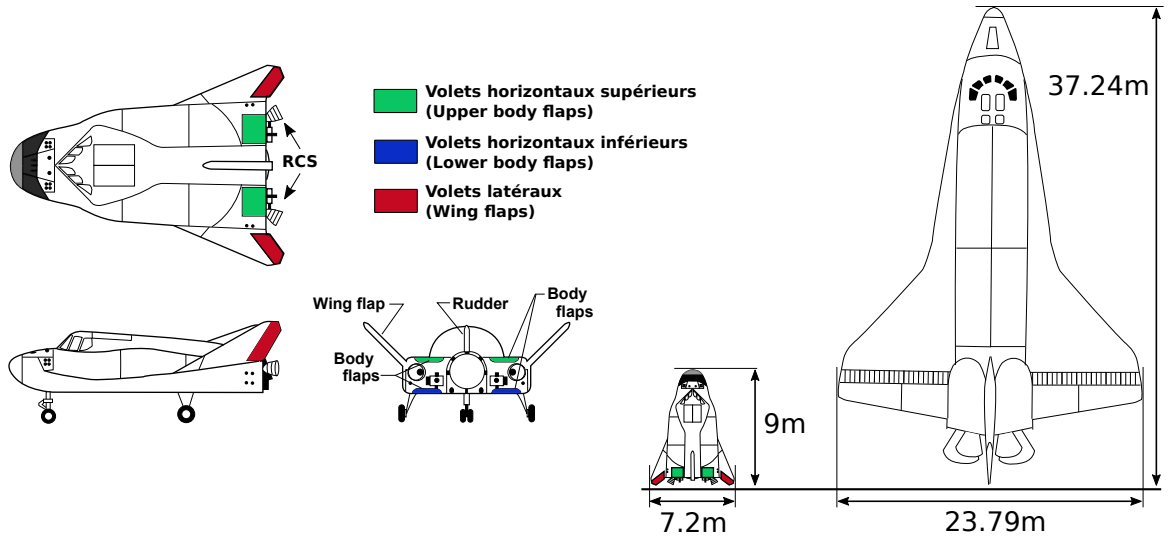


FIGURE 4.4 – Présentation du Véhicule HL20 et comparaison avec la navette spatiale.

4.2.2 Caractéristiques géométriques

Le tableau 4.1 regroupe les caractéristiques physiques liées à la géométrie du véhicule HL20.

Symbole	Nom	Valeur [unité]
S	Surface alaire	26.61 $[m^2]$
m	Masse	11740 $[Kg]$
b	Envergure	4.23 $[m]$
L	Longueur de l'appareil	8.32 $[m]$
X_{cg}	Coordonnée du centre de gravité	4.78 $[m]$
X_{cp}	Coordonnée du centre de pression	4.49 $[m]$
$\overline{c}$	Corde aérodynamique	8.61 $[m]$
I_{xx}	Moment d'inertie selon l'axe x	12435 $[Kg.m^2]$
I_{yy}	Moment d'inertie selon l'axe y	67716 $[Kg.m^2]$
I_{zz}	Moment d'inertie selon l'axe z	67716 $[Kg.m^2]$

TABLEAU 4.1 – Caractéristiques physiques et géométriques du HL20.

4.2.3 Actionneurs

Le contrôle du véhicule HL20 repose sur des propulseurs (RCS [4]) et sept surfaces de contrôle indépendantes et réparties à l'arrière du véhicule (2 volets latéraux, 2 volets

4. Reaction Control Systems

horizontaux supérieurs , 2 volets horizontaux inférieurs et 1 gouverne). Les moteurs RCS sont principalement utilisés lors de la phase hypersonique lorsque l'absence d'atmosphère rend l'utilisation des surfaces aérodynamiques inefficaces. Ils peuvent être couplés aux surfaces de contrôles aérodynamiques au début de la phase TAEM pour atteindre des attitudes de vol extrêmes ou suite à une défaillance de gouverne. Lorsque le contrôle repose uniquement sur les surfaces aérodynamiques, la gouverne de direction assure le contrôle latéral du véhicule tandis que les deux volets d'aile latéraux et les quatre volets de corps arrières assurent les contrôles en profondeur et en gauchissement. La plage de débattement relative à chaque surface de contrôle est détaillée dans le tableau 4.2.

Symbole	**Nom**	**Plage de variations**	
		Min [deg]	**Max [deg]**
δ_{wfl}	Volet latéral gauche	-30	30
δ_{wfr}	Volet latéral droit	-30	30
δ_{bfll}	Volet de corps arrière inférieur gauche	0	60
δ_{bflr}	Volet de corps arrière inférieur droit	0	60
δ_{bful}	Volet de corps arrière supérieur gauche	-60	0
δ_{bfur}	Volet de corps arrière supérieur droit	-60	0
δ_r	Gouverne de direction	-30	30

TABLEAU 4.2 – Surfaces de contrôle du HL20.

4.2.4 Appareils de mesure

La navigation du HL20 est réalisée à l'aide d'un module constitué de deux centrales inertielles redondantes à composantes liées (IMU - Inertial Measurement Unit), équipées (chacune) de trois gyromètres dédiés au calcul des vitesses angulaires (le taux de roulis, le taux de tangage et le taux de lacet) et de trois accéléromètres fournissant les accélérations longitudinale, latérale et verticale. Les données d'attitude (incidence, dérapage, ...), de pressions dynamiques et de vitesses sont renseignées par une centrale aérodynamique. Finalement, la position géographique du véhicule et le cap sont retournés par un GPS dont les informations sont couplées avec celles renseignées par les centrales inertielles.

4.2.5 Modèle non-linéaire du HL20

L'application des relations fondamentales de la dynamique permet de déterminer les équations du mouvement régissant la dynamique non-linéaire du véhicule HL20, au cours de la phase d'atterrissage. Il est à noter que certaines hypothèses simplificatrices seront introduites au fur et à mesure du développement. Les différents repères utilisés pour la modélisation sont présentés dans l'annexe C de [41].

4.2.5.1 Equations des forces

D'après les relations fondamentales de la dynamique, la résultante des forces extérieures s'appliquant sur le véhicule est définie par la relation suivante (exprimée dans le

repère véhicule noté $[R_b]$) :

$$\sum \overrightarrow{F}_{ext}^{[R_b]} = m\left(\frac{d\overrightarrow{V}^{[R_b]}}{dt} + \overrightarrow{\omega}_{R_b/R_e}^{[R_b]} \wedge \overrightarrow{V}^{[R_b]}\right) \tag{4.1}$$

où $[R_b]$ et $[R_e]$ désignent respectivement le repère véhicule et le repère terrestre. Le vecteur $\overrightarrow{\omega}_{R_b/R_e}^{[R_b]} = p.\overrightarrow{x}_b + q.\overrightarrow{y}_b + r.\overrightarrow{z}_b$ définit le vecteur de rotation du véhicule autour de son centre de gravité. Les composantes p, q, r (exprimées en rad/s) représentent respectivement le taux de roulis, de tangage et de lacet. Le vecteur $\overrightarrow{V}^{[R_b]} = u\overrightarrow{x}_b + v\overrightarrow{y}_b + w\overrightarrow{z}_b$ représente le vecteur vitesse du véhicule où les composantes u, v et w désignent respectivement les vitesses longitudinale, latérale et verticale.

Au cours de la phase d'atterrissage, il est supposé, d'une part, que la terre est plate et non rotative [5] et, d'autre part, que les moteurs RCS sont inactifs (voir figure 4.4). Par conséquent, il en résulte que les forces d'Euler, de Coriolis et celles liées à la poussée des moteurs peuvent être négligées. Ainsi, les forces extérieures $\overrightarrow{F}_{ext}^{[R_b]}$ s'appliquant sur véhicule HL20 sont réduites aux forces de gravité et aérodynamiques :

1. Les forces de gravité définies par le vecteur $\overrightarrow{F}_g$:

$$\overrightarrow{F}_g = F_{xg}\overrightarrow{x}_b + F_{yg}\overrightarrow{y}_b + F_{zg}\overrightarrow{z}_b \tag{4.2}$$

2. Les forces aérodynamiques engendrées par les surfaces de contrôle aérodynamique définies par le vecteur $\overrightarrow{F}_{aero}$:

$$\overrightarrow{F}_{aero} = X_{aero}\overrightarrow{x}_b + Y_{aero}\overrightarrow{y}_b + Z_{aero}\overrightarrow{z}_b \tag{4.3}$$

D'après la relation (4.1), il est facilement déduit l'expression des composantes du vecteur d'accélération $\frac{d\overrightarrow{V}^{[R_b]}}{dt}$:

$$\begin{bmatrix}\dot{u}\\ \dot{v}\\ \dot{w}\end{bmatrix} = m^{-1}\left(\begin{bmatrix}X_{aero}\\ Y_{aero}\\ Z_{aero}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}F_{xg}\\ F_{yg}\\ F_{zg}\end{bmatrix}\right) - \begin{bmatrix}p\\ q\\ r\end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix}u\\ v\\ w\end{bmatrix} \tag{4.4}$$

où m désigne la masse du véhicule HL20 (voir tableau 4.1).

4.2.5.2 Equations des moments

D'après le théorème du moment cinétique, la somme des moments extérieurs s'appliquant au centre de gravité du véhicule peut s'exprimer par la relation :

$$\sum \overrightarrow{M}_{ext}^{[R_e]} = \frac{d(I\overrightarrow{\omega})^{[R_b]}}{dt} + \overrightarrow{\omega}_{R_b/R_e}^{[R_b]} \wedge \overrightarrow{H}^{[R_b]} \tag{4.5}$$

où $\overrightarrow{H} = I.\overrightarrow{\omega}_{R_b/R_e}^{[R_b]}$ désigne le moment cinétique exprimé dans le repère véhicule $[R_b]$ et I est la matrice d'inertie . Étant donné la géométrie du véhicule HL20, la matrice d'inertie

5. Ces hypothèses se justifient par le fait que la phase d'atterrissage s'effectue, d'une part, sur une faible durée de temps vis-à-vis de la vitesse de rotation de la terre et, d'autre part, sur une faible dimension de l'espace.

est diagonale, i.e. $I = diag(I_{xx}, I_{yy}, I_{zz})$. En supposant que cette dernière est constante, i.e. $\dot{I} = 0$, il est déduit que la résultante des moments extérieurs $\overrightarrow{M}_{ext}$ se limite aux moments aérodynamiques engendrés par les surfaces de contrôle :

$$\overrightarrow{M}_{aero} = L\overrightarrow{x}_b + M\overrightarrow{y}_b + N\overrightarrow{z}_b \tag{4.6}$$

D'après la relation (4.5), les équations d'état relatives aux vitesses angulaires de l'appareil sont alors déduites de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = I^{-1} \left(\begin{bmatrix} L \\ M \\ N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \wedge \left(I \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \right) \right) \tag{4.7}$$

4.2.5.3 Relations cinématiques

Les six équations d'état relatives à la cinématique du véhicule HL20 sont à présent introduites. Les dérivées temporelles des angles d'Euler dans le repère véhicule sont données par :

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin\phi\tan\theta & \cos\phi\tan\theta \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \dfrac{-\sin\phi}{\cos\theta} & \dfrac{-\cos\phi}{\cos\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

La dérivée de la position inertielle de l'appareil, déduite en appliquant la matrice de passage R_{be} sur le vecteur vitesse $\overrightarrow{V}^{[R_b]}$, conduit à :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = R_{be} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

La matrice de passage R_{be} qui assure le passage du repère véhicule $[R_b]$ au repère terrestre $[R_e]$, est définie par la relation suivante :

$$R_{be} = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & \sin\phi\cos\theta\cos\psi - \cos\phi\sin\psi & \cos\phi\sin\theta\cos\psi + \sin\phi\sin\psi \\ \cos\theta\sin\psi & \sin\phi\sin\theta\sin\psi + \cos\phi\cos\psi & \cos\phi\sin\theta\sin\psi - \sin\theta\cos\psi \\ -\sin\theta & \sin\phi\cos\theta & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

4.2.5.4 Expressions des forces et des moments

Étant donné les hypothèses simplificatrices, les forces et les moments s'appliquant sur le véhicule HL20 sont principalement liés à l'attraction terrestre et aux effets des surfaces de contrôle. Par conséquent, les forces et les moments, exprimés dans le repère véhicule $[R_b]$ et appliqués au centre de gravité du véhicule, sont donnés par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} L &= \overline{q}SbC_l(\alpha, \beta, p, r, V, \delta) \\ M &= \overline{q}S\overline{c}C_m(\alpha, \beta, q, V, \delta) + \overline{q}SC_z(\alpha, \beta, \delta)(X_{cp} - X_{cg}) \\ N &= \overline{q}SbC_n(\alpha, \beta, p, r, V, \delta) - \overline{q}SC_y(\alpha, \beta, \delta)(X_{cp} - X_{cg}) \\ F_x &= X_{aero} + F_{gx} = \overline{q}SC_x(\alpha, \beta, \delta) - mg\sin\theta \\ F_y &= Y_{aero} + F_{gy} = \overline{q}SC_y(\alpha, \beta, \delta) + mg\sin\theta\cos\theta \\ F_z &= Z_{aero} + F_{gz} = \overline{q}SC_z(\alpha, \beta, \delta) + mg\cos\theta\cos\phi \end{aligned} \tag{4.11}$$

où les paramètres physiques et géométriques de l'appareil, i.e S, $\bar{c}$, b, X_{cp}, X_{cg} et m sont présentés dans le tableau 4.1. Le paramètre $\overline{q} = \frac{1}{2}\rho S V^2$ correspond à la pression dynamique avec ρ désignant la densité de l'air définie par $\rho = \rho_0 \exp^{-z/H}$ où $\rho_0 = 1,293$ Kg/m^3 et $H = 7100m$ définissent, respectivement, la densité de l'air au niveau moyen de la mer et l'altitude de référence. Le vecteur $\delta = [\delta_a, \delta_e, \delta_r, \delta_{f^+}, \delta_{f^-}, \delta_{\Delta_f}]^T$ représente le vecteur des commandes aérodynamiques déduit de la relation

$$\delta(t) = M\zeta(t) \tag{4.12}$$

où M représente la matrice de passage et $\zeta = [\delta_{wfl}, \delta_{wfr}, \delta_{ulbf}, \delta_{urbf}, \delta_{llbf}, \delta_{lrbf}, \delta_r]^T$ désigne le vecteur de commandes actionneurs (voir le tableau 4.2).

La matrice de passage est définie par :

$$M = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & -0.5 & 0.5 & -0.5 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

À présent, en définissant le vecteur vitesse du vent $\vartheta = [u_w, v_w, w_w]^T$ projeté dans le repère véhicule $[R_b]$ où u_w, v_w, w_w désigne les composantes longitudinale, latérale et verticale alors les expressions de la norme du vecteur vitesse V, de l'angle d'incidence α et de l'angle de dérapage β sont définies par les relations suivantes :

$$V = \sqrt{(u-u_w)^2 + (v-v_w)^2 + (w-w_w)^2} \tag{4.14}$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{w-w_w}{u-u_w}\right) \tag{4.15}$$

$$\beta = \arcsin\left(\frac{v-v_w}{V}\right) \tag{4.16}$$

Finalement, les paramètres $C_x(\cdot), C_y(\cdot), C_z(\cdot)$ représentent respectivement le coefficient de trainée, le coefficient de force latérale et le coefficient de portance longitudinale. Les paramètres $C_l(\cdot), C_m(\cdot), C_n(\cdot)$ caractérisent respectivement les coefficients des moments de roulis, de lacet et de tangage. Ces coefficients sont regroupés dans un vecteur de coefficients aérodynamiques noté C_{aero}, défini par :

$$C_{aero}(\cdot) = \begin{bmatrix} C_x(\cdot) & C_y(\cdot) & C_z(\cdot) & C_l(\cdot) & C_m(\cdot) & C_n(\cdot) \end{bmatrix}^T = \sum_{i=0}^{7} C_i(\cdot) \tag{4.17}$$

Les coefficients $C_i(\cdot)$ représentent les effets aérodynamiques engendrés par les surfaces de contrôle et la mise en rotation du véhicule. Plus particulièrement, pour $i = 1, ..., 6$, les coefficients $C_i(\cdot)$ sont paramétrés par δ_i i.e. la $i^{ème}$ composante du vecteur de commande aérodynamique δ. Le coefficient $C_0(\cdot)$ contient les effets dits "en configuration lisse" i.e. pour $\delta = 0$ (position neutre des gouvernes) et le coefficient C_7 contient les coefficients aérodynamiques dépendants des taux angulaires du véhicule. Les expressions des coefficients $C_i(\cdot)$, pour $i = 0, ..., 7$, sont regroupées dans (4.18).

$$C_0 = \begin{bmatrix} C_{x0}(\alpha,\beta) \\ C_{y0}(\beta) \\ C_{z0}(\alpha,\beta) \\ C_{l\beta}(\beta) \\ C_{m0}(\alpha,\beta) \\ C_{n0}(\alpha,\beta) \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} C_{x_{\delta_a}}(\alpha).|\delta_a| \\ C_{y_{\delta_a}}(\alpha).\delta_a \\ C_{z_{\delta_a}}(\alpha).|\delta_a| \\ C_{l_{\delta_a}}(\alpha).\delta_a \\ C_{m_{\delta_a}}(\alpha).|\delta_a| \\ C_{n_{\delta_a}}(\alpha).\delta_a \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} C_{x_{\delta_e}}(\alpha).\delta_e \\ 0 \\ C_{z_{\delta_e}}(\alpha).\delta_e \\ 0 \\ C_{m_{\delta_e}}(\alpha).|\delta_e| \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} C_{x_{\delta_r}}(\alpha).|\delta_r| \\ C_{y_{\delta_r}}(\alpha).\delta_r \\ C_{z_{\delta_r}}(\alpha).|\delta_r| \\ C_{l_{\delta_r}}(\alpha).\delta_r \\ C_{m_{\delta_r}}(\alpha).|\delta_r| \\ C_{n_{\delta_r}}(\alpha)\delta_r \end{bmatrix} \forall \alpha \geq 0, C_4 = \begin{bmatrix} C_{x_{\delta_{f+}}}(\alpha).\delta_{f+} \\ 0 \\ C_{z_{\delta_{f+}}}(\alpha).\delta_{f+} \\ 0 \\ C_{m_{\delta_{f+}}}(\alpha).|\delta_{f+}| \\ 0 \end{bmatrix}, C_5 = \begin{bmatrix} C_{x_{\delta_{f-}}}(\alpha).\delta_{f-} \\ 0 \\ C_{z_{\delta_{f-}}}(\alpha).\delta_{f-} \\ 0 \\ C_{m_{\delta_{f-}}}(\alpha).|\delta_{f-}| \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

$$C_6 = \begin{bmatrix} C_{xd\Delta_f}(\alpha).|\delta_{\Delta_f}| \\ C_{y_{\Delta_f}}(\alpha).\delta_{\Delta_f} \\ 0 \\ C_{l_{\Delta_f}}(\alpha).\delta_{\Delta_f} \\ 0 \\ C_{n\Delta_f}(\alpha)\delta_{\Delta_f} \end{bmatrix}, C_7 = \frac{b.p}{2V} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ C_{lp}(\alpha) \\ 0 \\ -C_{np}(\alpha) \end{bmatrix} + \frac{\bar{c}.q}{2V} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ C_{mq}(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{b.r}{2V} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ C_{lr}(\alpha) \\ 0 \\ C_{nr}(\alpha) \end{bmatrix}$$

La détermination des coefficients aérodynamiques a été réalisée à l'aide d'essais expérimentaux effectués en soufflerie. Les données sont présentées sous la forme de tableaux multi-dimensionnels (Look Up Table) [54, 55]. Un modèle analytique de chaque coefficient a été proposé dans [41] en utilisant une technique d'analyse en composante principale et une technique d'interpolation polynomiale.

4.3 Description du simulateur HL20

Les simulations de la phase d'atterrissage d'une mission de rentrée atmosphérique terrestre du véhicule HL20 sont réalisées à l'aide d'un benchmark développé sous Matlab/Simulink. Une description de l'architecture du simulateur est donnée par la figure 4.5.

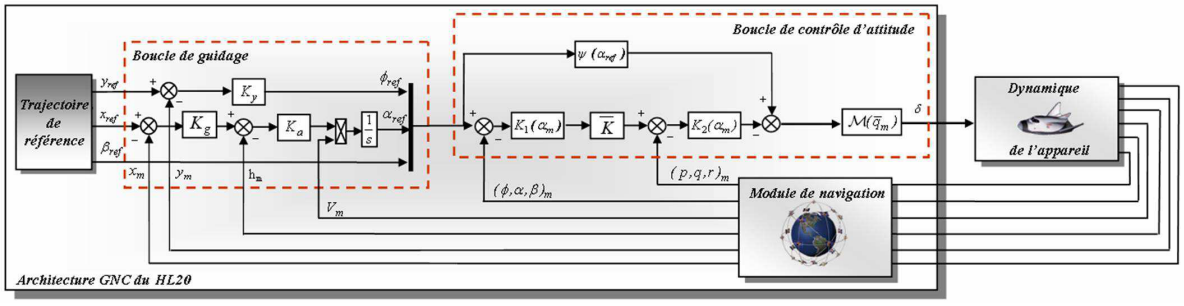


FIGURE 4.5 – Présentation du simulateur HL20 [41].

Ce simulateur est principalement composé de deux modules :

1. un module contenant le modèle dynamique non-linéaire du HL20 couplé au modèle des perturbations liées aux vents et turbulences atmosphériques,
2. un module GNC [6] pour l'architecture du contrôle/commande qui regroupe un module de génération de trajectoire, un module de navigation et l'algorithme d'asservissement, composés d'une boucle externe (boucle de guide ou boucle de tracking) et d'une boucle interne (boucle de contrôle d'attitude ou boucle de pilotage).

4.3.1 Modèle dynamique du HL20

En combinant les informations de modélisation présentées dans la description du HL20 (voir partie 4.2), il en résulte que la représentation non-linéaire complète de la dynamique du HL20 pour la phase d'atterrissage est définie par :

$$\begin{cases} \dot{x}_{NL} = f(x_{NL}, \delta, \vartheta) \\ y = x_{NL} \end{cases} \tag{4.19}$$

où l'état $x_{NL} = [u, v, w, p, q, r, \phi, \theta, \psi, x, y, z]^T$, la commande actionneurs δ est définie dans (4.12) et ϑ désignent le vecteur vitesse du vent projeté dans le repère véhicule $[R_b]$. La fonction non-linéaire f est obtenue en combinant les relations définies par (4.4), (4.7), (4.8) et (4.9).

4.3.2 Algorithme de contrôle/commande

4.3.2.1 Algorithme de guidage

L'algorithme de guidage assure l'asservissement de la position du véhicule HL20 sur sa trajectoire de vol définie par un profil altitude/position de référence (voir figure 4.3). La boucle de guidage délivre des signaux définis en terme d'angles de gîte (ϕ_{ref}), d'incidence (α_{ref}) et de dérapage (β_{ref}) déterminés d'après les relations suivantes :

$$\begin{cases} \phi_{ref} = K_y(y_{ref} - y_m) \\ \alpha_{ref} = \int V_m(t) K_a(K_g \Delta_x - h_m) dt \\ \beta_{ref} = 0 \end{cases} \tag{4.20}$$

où $K_g = f(\Delta x, h_m)$ est une fonction non-linéaire dépendante de l'altitude de vol h_m (mesurée par le module de navigation) et de l'écart longitudinal du véhicule par rapport au point visé Δ_x ($\Delta_x = x_{ref} - x_m$). Les signaux y_{ref} et y_m représentent respectivement les déports latéraux de référence et ceux mesurés. Le signal V_m désigne la vitesse mesurée du véhicule. Finalement, K_a et K_y désignent des correcteurs dynamiques de type PID synthétisés de manière à garantir la stabilité et un certain niveau de performance en terme de suivi de trajectoire.

4.3.2.2 Algorithme de contrôle d'attitude

La boucle de contrôle d'attitude détermine les commandes des actionneurs nécessaires pour asservir le véhicule sur les signaux de guidage ϕ_{ref}, α_{ref}, β_{ref} (4.20). Le contrôleur d'attitude est composé d'un correcteur à gains séquencés par la pression dynamique $\overline{q}_m$

6. Guidance-Navigation-Control

et l'angle d'incidence α_m dont les valeurs sont retournées par le module de navigation. Les paramètres $K_1(\alpha_m)$ et $K_2(\alpha_m)$ représentent deux gains variables. Le paramètre $\overline{K}(s)$ est un correcteur dynamique synthétisé pour garantir la stabilité et un niveau de performance pour le vol au cours de la phase d'atterrissage tel que le maintien du véhicule dans son enveloppe de vol, le respect du facteur de charge, la marge de décrochage, etc... . Le paramètre $\psi(\alpha_{ref})$ correspond à une boucle de pré-compensation déterminant les couples de référence et $\mathcal{M}(\overline{q}_m)$ représente un module d'allocation dépendant de la pression dynamique mesurée $\overline{q}_m$ (par le module de navigation). La boucle d'attitude est définie par :

$$\zeta = \mathcal{M}(\overline{q}_m)\left(\psi(\alpha_{ref}) + K_2(\alpha_m)\left(\overline{K}K_1(\alpha_m)\begin{bmatrix}\phi_{ref}-\phi_m\\ \alpha_{ref}-\alpha_m\\ \beta_{ref}-\beta_m\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}p_m\\ q_m\\ r_m\end{bmatrix}\right)\right) \tag{4.21}$$

où $\zeta = [\delta_{wfl}, \delta_{wfr}, \delta_{ulbf}, \delta_{urbf}, \delta_{llbf}, \delta_{lrbf}, \delta_r]^T$ désigne le vecteur des commandes des actionneurs (voir le tableau 4.2).

La synthèse de l'observateur intervalle, présentée au cours du chapitre précédent, est à présent illustrée sur le modèle du véhicule HL20.

4.4 Estimation d'états du HL20

Cette section présente successivement les objectifs attendus de l'estimation par intervalle de l'état du HL20 et le détails de la procédure de conception de l'observateur (étape par étape).

4.4.1 Formulation du problème

Dans cette sous-section, la conception d'un observateur intervalle est proposée pour estimer les vitesses longitudinale u, latérale v et verticale w du véhicule HL20 au cours de la phase d'atterrissage. Pour y parvenir, cette étude reposera sur un modèle non-linéaire réduit défini par la représentation d'état :

$$\begin{cases} \dot{\nu} = h(\nu, \delta, \vartheta) \\ z = g(\nu, \vartheta) + \epsilon \end{cases} \tag{4.22}$$

où l'état $\nu = [u, v, w, p, q, r]^T$, le vecteur des commandes aérodynamiques δ est définie dans (4.12), ϑ désigne le vecteur vitesse du vent projeté dans le repère véhicule $[R_b]$ et ϵ représente le bruit de mesure. La fonction non-linéaire h est obtenue en combinant les relations définies par (4.4) et (4.7). La fonction non-linéaire $g = [p, q, r, V, \frac{180\alpha}{\pi}, \frac{180\beta}{\pi}]^T$ où V, α et β sont respectivement définis par les relations (4.14), (4.15) et (4.16).

En supposant que la loi de commande permet de contenir l'état du véhicule HL20 dans un domaine connu et borné alors l'estimation de ses états par intervalle reposera sur la construction d'un observateur intervalle qui minimise la taille de l'intervalle estimé. Ainsi, la procédure de conception utilisera un processus d'optimisation au sens d'un critère de type gain $\mathcal{L}_\infty$, dans un contexte de modèle LPV incertain (voir tableaux 4.2 et 4.3).

Symbole	Nom	Plage de variations	
		Min [Unité]	Max [Unité]
u	vitesse longitudinale	$135[m/s]$	$200[m/s]$
v	vitesse latérale	$-3[m/s]$	$3[m/s]$
w	vitesse verticale	$17.5[m/s]$	$30[m/s]$
p	taux de roulis	$-0.17[rad/s]$	$0.17[rad/s]$
q	taux de tangage	$-0.17[rad/s]$	$0.17[rad/s]$
r	taux de lacet	$-0.17[rad/s]$	$0.17[rad/s]$
u_w	vitesse du vent longitudinal	$-3[m/s]$	$3[m/s]$
v_w	vitesse du vent latéral	$-3[m/s]$	$3[m/s]$
w_w	vitesse du vent vertical	$-3[m/s]$	$3[m/s]$

TABLEAU 4.3 – Plage de variations des paramètres du véhicule HL20 en phase d'atterrissage.

4.4.2 Modèle LPV de synthèse

Dans un premier temps, la procédure de conception de l'observateur intervalle nécessite d'extraire un modèle LPV à partir du modèle non-linéaire (4.22). Pour y parvenir, l'approximation q-LPV garantie présentée dans [84] est considérée.

4.4.2.1 Approximation q-LPV garantie

Cette sous-section est dédiée au rappel de la méthode d'approximation q-LPV garantie présentée dans les travaux [84]. Cette méthode repose sur l'utilisation de la notion de fonction d'inclusion et de fonction d'inclusion moyenne.

Définition 4.1 ([84])**.** Soit une fonction $h : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^q$ dont la plage de variation sur un intervalle $\left[\underline{v}, \overline{v}\right]$ où $\underline{v}, \overline{v} \in \mathbb{R}^k$ est donnée par :

$$h(\left[\underline{v}, \overline{v}\right]) = \left\{h(v) \mid v \in \left[\underline{v}, \overline{v}\right]\right\} \tag{4.23}$$

Alors la fonction intervalle $[h] : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^q$ est une fonction d'inclusion pour h si :

$$\forall v \in \left[\underline{v}, \overline{v}\right], \quad h(\left[\underline{v}, \overline{v}\right]) \subseteq [h]\left(\left[\underline{v}, \overline{v}\right]\right) \tag{4.24}$$

À partir de cette définition, la notion de fonction d'inclusion moyenne reposant sur la jacobienne est proposée.

Définition 4.2 ([84])**.** Soient une fonction $h : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^q$ différentiable sur un intervalle $\left[\underline{v}, \overline{v}\right]$ où $\underline{v}, \overline{v} \in \mathbb{R}^k$, la jacobienne de la fonction h, notée J_h, et sa fonction d'inclusion $[J_h]$. En considérant un point $v_c \in \left[\underline{v}, \overline{v}\right]$ (v_c est généralement considéré comme le point milieu de l'intervalle $\left[\underline{v}, \overline{v}\right]$), alors la fonction d'inclusion moyenne $[h_c]$ est définie par :

$$[h_c]([v]) \triangleq h(v_c) + [J_h]([v])([v] - v_c) \tag{4.25}$$

où $[v] = \left[\underline{v}, \overline{v}\right]$.

À présent, la méthode d'approximation q-LPV est présentée.

Soit un système non-linéaire décrit par :

$$\dot{v}(t) = h(v(t), w(t)) \tag{4.26}$$

où $v \in \mathbb{R}^n$ et $w \in \mathbb{R}^m$ représentent respectivement l'état et l'entrée du système. Il est supposé que l'ensemble des variables sont bornées i.e. $v \in \left[\underline{v}, \overline{v}\right]$, $w \in \left[\underline{w}, \overline{w}\right]$, où $\underline{v}, \overline{v} \in \mathbb{R}^n$ et $\underline{w}, \overline{w} \in \mathbb{R}^m$ sont des bornes connues.

L'approximation q-LPV du système (4.26) repose sur une fonction d'inclusion moyenne $[h_c]$ définie par :

$$\begin{aligned}[h_c]\left(v(t), w(t)\right) = \; & h\left(v_c, w_c\right) + \left[J_{hv}\right]\left([v], [w]\right)\left(v(t) - v_c\right) \\ & + \left[J_{hw}\right]\left([v], [w]\right)\left(w(t) - w_c\right)\end{aligned} \tag{4.27}$$

où v_c et w_c sont respectivement les valeurs milieux des intervalles d'appartenance de v et w. Les fonctions $[J_{hv}]$ et $[J_{hw}]$ sont respectivement des fonctions d'inclusion de J_{hv}, J_{hw} définies par :

$$J_{hv} = \frac{\partial h\left(v(t), w(t)\right)}{\partial v(t)}, \quad J_{hw} = \frac{\partial h\left(v(t), w(t)\right)}{\partial w(t)}. \tag{4.28}$$

Ainsi, d'après la notion de fonction d'inclusion moyenne et l'expression (4.27), il est déduit que :

$$h\left(v(t), w(t)\right) \in [h_c]\left(v(t), w(t)\right), \tag{4.29}$$

Par conséquent, $\forall v \in \left[\underline{v}, \overline{v}\right]$, $\forall w \in \left[\underline{w}, \overline{w}\right]$, il existe des matrices

$$A(v(t), w(t)) \in \left[J_{hv}\right], \quad B(v(t), w(t)) \in \left[J_{hw}\right],$$

telles que

$$\dot{x}(t) = A(v(t), w(t))x(t) + B(v(t), w(t))u(t) \tag{4.30}$$

où les vecteurs sont définis par :

$$\dot{x}(t) = h\left(v(t), w(t)\right) - h\left(v_c, w_c\right) \quad , \quad x(t) = v(t) - v_c \quad , \quad u(t) = w(t) - w_c$$

Ainsi, le système (4.30) est une linéarisation garantie du système (4.26)

4.4.2.2 Application de l'approximation q-LPV garantie

La méthode d'approximation q-LPV garantie est à présent appliquée pour linéariser le système (4.22). Il est à noter que les termes non-linéaires dépendants de la fonction valeur absolue, voir (4.18), ne peuvent pas être considérés pour la méthode d'approximation q-LPV. Au préalable, ces termes ont été transformés lorsque la trajectoire de vol le permettait, négligés lorsque le coefficient aérodynamique associé était suffisamment faible ou encore considérés nuls pour la méthode d'approximation q-LPV puis associés à un vecteur borné d'erreurs de modélisation. De plus, une étude plus approfondie de l'algorithme du contrôle d'attitude montre que le vecteur des commandes aérodynamiques repose uniquement sur la connaissance de $\psi = [\delta_a, \delta_e, \delta_r]^T$. Ainsi, il est dans un premier temps admis que le modèle (4.22) peut se réduire et se réécrire sous la forme

$$\begin{cases} \dot{\nu} = h_r(\nu, \psi, \vartheta) + \omega \\ z = g(\nu, \vartheta) + \epsilon \end{cases} \tag{4.31}$$

où h_r est la nouvelle fonction non-linéaire ne tenant pas compte des non-linéarités de type valeur absolue. Le vecteur ω désigne ici l'erreur de modélisation i.e. $\omega = h(\nu, \delta, \vartheta) - h_r(\nu, \psi, \vartheta)$. Étant donné que toutes les variables sont bornées, il est alors possible de déterminer des bornes supérieure $\overline{\omega}$ et inférieure $\underline{\omega}$ pour le vecteur ω. Il est à noter que cette transformation introduit du conservatisme dans le sens où une partie du modèle non-linéaire est à présent traitée comme une incertitude de modélisation (i.e ω) pour laquelle l'observateur intervalle considèrera uniquement les bornes (i.e $\underline{\omega}$ et $\overline{\omega}$).

Dans ce contexte, la méthode d'approximation q-LPV garantie que, $\forall \nu(t) \in [\underline{\nu}, \overline{\nu}]$, $\forall \psi(t) \in \left[\underline{\psi}, \overline{\psi}\right]$, $\forall \vartheta(t) \in \left[\underline{\vartheta}, \overline{\vartheta}\right]$, $\forall \omega(t) \in [\underline{\omega}, \overline{\omega}]$ et $\forall \epsilon(t) \in [\underline{\epsilon}, \overline{\epsilon}]$, il existe des matrices

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}(\nu,\psi,\vartheta) \in \left[\frac{\partial h_r(\nu,\psi,\vartheta)}{\partial \nu}\right]\Bigg|_{\substack{\nu\in[\underline{\nu},\overline{\nu}]\\ \psi\in[\underline{\psi},\overline{\psi}]\\ \vartheta\in[\underline{\vartheta},\overline{\vartheta}]}}, \quad \mathcal{C}(\nu,\psi,\vartheta) \in \left[\frac{\partial g(\nu,\psi,\vartheta)}{\partial \nu}\right]\Bigg|_{\substack{\nu\in[\underline{\nu},\overline{\nu}]\\ \psi\in[\underline{\delta},\overline{\delta}]\\ \vartheta\in[\underline{\vartheta},\overline{\vartheta}]}},\\
&\mathcal{B}(\nu,\delta,\vartheta) \in \left[\frac{\partial h_r(\nu,\psi,\vartheta)}{\partial \psi}\right]\Bigg|_{\substack{\nu\in[\underline{\nu},\overline{\nu}]\\ \psi\in[\underline{\psi},\overline{\psi}]\\ \vartheta\in[\underline{\vartheta},\overline{\vartheta}]}}, \quad \mathcal{D}(\nu,\psi,\vartheta) \in \left[\frac{\partial g(\nu,\psi,\vartheta)}{\partial \psi}\right]\Bigg|_{\substack{\nu\in[\underline{\nu},\overline{\nu}]\\ \psi\in[\underline{\psi},\overline{\psi}]\\ \vartheta\in[\underline{\vartheta},\overline{\vartheta}]}},\\
&\mathcal{E}(\nu,\psi,\vartheta) \in \left[\frac{\partial h_r(\nu,\psi,\vartheta)}{\partial \vartheta}\right]\Bigg|_{\substack{\nu\in[\underline{\nu},\overline{\nu}]\\ \psi\in[\underline{\psi},\overline{\psi}]\\ \vartheta\in[\underline{\vartheta},\overline{\vartheta}]}}, \quad \mathcal{F}(\nu,\psi,\vartheta) \in \left[\frac{\partial g(\nu,\psi,\vartheta)}{\partial \vartheta}\right]\Bigg|_{\substack{\nu\in[\underline{\nu},\overline{\nu}]\\ \psi\in[\underline{\psi},\overline{\psi}]\\ \vartheta\in[\underline{\vartheta},\overline{\vartheta}]}},
\end{aligned} \tag{4.32}$$

telles que la représentation q-LPV du système (4.31) soit donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x} = \mathcal{A}(\nu,\psi,\vartheta)x + \mathcal{B}(\nu,\psi,\vartheta)\xi + \mathcal{E}(\nu,\psi,\vartheta)d + \omega - \omega_c \\ y = \mathcal{C}(\nu,\psi,\vartheta)x + \mathcal{D}(\nu,\psi,\vartheta)\xi + \mathcal{F}(\nu,\psi,\vartheta)d + \epsilon - \epsilon_c \end{cases} \tag{4.33}$$

où les vecteurs $x(t) = \nu(t) - \nu_c$, $\xi(t) = \psi(t) - \psi_c$ et $d(t) = \vartheta(t) - \vartheta_c$. Les vecteurs ν_c, ψ_c, ϑ_c, ω_c et ϵ_c définissent, respectivement, le milieu de l'intervalle d'appartenance de ν, ψ, ϑ, ω et ϵ. Il est à noter que la relation (4.12) est considérée pour calculer ψ_c et la matrice $\mathcal{D}(\nu,\psi,\vartheta)$ est nulle puisque g dépend uniquement de ν et ϑ.

L'approximation q-LPV repose sur l'existence des matrices $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{F}$ dans un domaine de variations pouvant être calculé. Afin de ne pas synthétiser l'observateur en utilisant uniquement la connaissance des bornes du domaine de variations, il est proposé de réduire le conservatisme en procédent par une réécriture du modèle q-LPV (4.33).

Soient les matrices suivantes

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}(\nu,\psi,\vartheta) &= \frac{\partial h_r(\nu,\psi,\vartheta)}{\partial \nu}, \quad \mathscr{B}(\nu,\psi,\vartheta) = \frac{\partial h_r(\nu,\psi,\vartheta)}{\partial \psi},\\
\mathscr{E}(\nu,\psi,\vartheta) &= \frac{\partial h_r(\nu,\psi,\vartheta)}{\partial \vartheta}, \quad \mathscr{C}(\nu,\psi,\vartheta) = \frac{\partial g(\nu,\psi,\vartheta)}{\partial \nu}.
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Pour chaque matrice $\mathscr{K} \in \{\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{E}, \mathscr{C}\}$, il est proposé d'appliquer la décomposition

$$\mathscr{K}(\nu,\psi,\vartheta) = \mathscr{K}_0(\nu,\psi,\vartheta) + \sum_{i=1}^{4} \theta_i \mathscr{K}_i(\nu,\psi,\vartheta). \tag{4.35}$$

où le vecteur $\theta = [\alpha\ p\ q\ r]^T$. Le choix de ce vecteur est motivé par le fait que les paramètres p, q, r sont mesurés et α est un paramètre de la trajectoire de vol (4.20) qui intervient dans tous les coefficients aérodynamiques.

Étant donné la connaissance du domaine de variations des paramètres, il existe alors des matrices $\underline{\mathscr{K}_j}$ et $\overline{\mathscr{K}_j}$ telles que $\mathscr{K}_j \in \left[\underline{\mathscr{K}_j}, \overline{\mathscr{K}_j}\right]$, $\forall i \in \{0, \cdots, 4\}$. En considérant le milieu du domaine de définition de chaque matrice i.e $\mathscr{K}_{j_{mid}} = \frac{\underline{\mathscr{K}_j} + \overline{\mathscr{K}_j}}{2}$, il est alors proposé de définir de nouvelles matrices A, B_ξ, E, C telles que

$$\begin{aligned} A(\theta) &= \mathscr{A}_{0_{mid}} + \sum_{i=1}^{4} \theta_i \mathscr{A}_{i_{mid}}, \quad B_\xi(\theta) = \mathscr{B}_{0_{mid}} + \sum_{i=1}^{4} \theta_i \mathscr{B}_{i_{mid}}, \\ E(\theta) &= \mathscr{E}_{0_{mid}} + \sum_{i=1}^{4} \theta_i \mathscr{E}_{i_{mid}}, \quad C(\theta) = \mathscr{C}_{0_{mid}} + \sum_{i=1}^{4} \theta_i \mathscr{C}_{i_{mid}}. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Étant donné les influences du vecteur de paramètres θ, il est proposé de réduire le modèle q-LPV (4.33) en utilisant la réécriture suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\theta(t))x(t) + B(\theta(t))u(t) + Ed(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{4.37}$$

où le vecteur $u(t) = \left[(\xi(t))^T \quad (\tau(t))^T\right]^T$ et la matrice $B(\theta(t)) = \left[B_\xi(\theta) \quad I_6 \quad 0_{6\times 6}\right]$. Le vecteur $\tau \in \mathbb{R}^{12}$ est constitué des incertitudes de modélisation et des bruits de mesure ϵ i.e :

$$\tau = \begin{bmatrix} (\mathcal{A}(\nu,\delta,\vartheta) - A(\theta))\, x + (\mathcal{B}(\nu,\delta,\vartheta) - B_\xi(\theta))\, \xi + (\mathcal{E}(\nu,\delta,\vartheta) - E)\, d + \omega - \omega_c \\ (\mathcal{C}(\nu,\delta,\vartheta) - C)\, x + \mathcal{D}(\nu,\delta,\vartheta)\xi + \mathcal{F}(\nu,\delta,\vartheta)d + \epsilon - \epsilon_c \end{bmatrix} \tag{4.38}$$

Les matrices $A(\theta(t))$, $B(\theta(t))$, E, C, D sont définies par :

$$A(\theta(t)) = \begin{bmatrix} 2.12\alpha - 1.36 & 0 & 3.87\alpha + 0.87 & 0.01r - 0.01p & -0.43 & 0.02p - 0.01r \\ 0.83r & 0.14\alpha - 0.23 & 0.83p & -0.04\alpha - 0.01 & 0 & 0.18\alpha - 0.03 \\ 0.16 - 0.83q - 0.42\alpha & -0.83p & -0.24\alpha - 0.27 & 0 & 0.04 - 0.05\alpha & 0 \\ 0 & -23.92 & 0 & 0.09\alpha - 0.05 & r & 0.18\alpha - q + 0.02 \\ 23.92 & 0 & -168.08 & -r & -0.17 & p \\ 0 & 168.08 & 0 & q - 1.16\alpha + 0.11 & -p & 0.22\alpha - 0.60 \end{bmatrix},$$

$$B(\theta(t)) = \begin{bmatrix} 0.68 - 0.45\alpha & 0 & 0.22\alpha + 0.03 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.02 - 0.01\alpha & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.11\alpha - 0.08 & 0 & -0.03\alpha - 0.03 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 - 0.03\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.14 - 0.28\alpha & 0 & 0.18\alpha + 0.07 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.18\alpha - 0.24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0.43 & 0 \\ 0.01 & 0 & 0.01 \\ 0 & -0.03 & 0 \\ 0.035 & 0 & -0.05 \\ 0 & 0.17 & 0 \\ 0.069 & 0 & 0.56 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0.16 \\ 0 & 0 & 0 & -0.06 & 0 & 0.36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.35 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Pour cette application, il est considéré $\rho = \theta + \mu$ ou μ désigne un vecteur de bruits bornés tel que $\mu_i \in [-0.001, 0.001]$, $\forall i \in \{1, \cdots, 4\}$.

4.4.3 Synthèse de l'observateur intervalle à entrées inconnues

Cette sous-section est dédiée à la synthèse de l'observateur intervalle à entrées inconnues (3.5a)-(3.5f) sous contraintes de performance au sens d'un critère de type gain $\mathcal{L}_\infty$. Pour rappel, les étapes de la procédure de conception de l'observateur intervalle sont résumées dans l'algorithme proposé dans la sous-section 3.3.4.

État donné la structure des matrices C et E, les hypothèses 3.1 et 3.2, présentées respectivement aux pages 86 et 87, sont vérifiées. À présent, la structure retenue pour la matrice $K(\theta)$ est donnée par $K(\theta) = I_n$. Ainsi, le choix considéré pour la matrice N est donné par :

$$N = KS = \kappa \begin{bmatrix} 0.976 & 0 & -0.070 & 0 & 0 & 0.136 \\ 0 & 0.017 & 0 & 0.130 & -0.011 & 0 \\ -0.070 & 0 & 0.005 & 0 & 0 & -0.010 \\ 0 & 0.134 & 0 & 0.976 & -0.439 & 0 \\ 0.385 & 0 & -0.028 & 0 & 0 & 0.054 \\ 0 & -0.008 & 0 & 0.170 & 2.766 & 0 \end{bmatrix}$$

où la matrice $S = E(CE)^\dagger$.

Les matrices R et Q sont alors définies par :

$$R = \begin{bmatrix} 0.024 & 0 & 0.070 & 0 & -0.048 & 0 \\ 0 & 0.983 & 0 & -0.128 & 0 & -0.017 \\ 0.070 & 0 & 0.995 & 0 & 0.003 & 0 \\ 0 & -0.134 & 0 & 0.017 & 0 & 0.002 \\ -0.385 & 0 & 0.028 & 0 & 0.981 & 0 \\ 0 & 0.008 & 0 & -0.001 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; Q^{-1} = R + NC = I_6.$$

Par conséquent, il est déduit que l'hypothèse 3.3, présentée à la page 87, est vérifiée.

L'étape suivante consiste à concevoir les matrices $\mathcal{A}(\rho)$, $\mathcal{B}(\rho)$, $\mathcal{C}(\rho)$, $\mathcal{D}(\rho)$ du système (3.51a)-(3.51c) en utilisant la méthode proposée dans le Lemme 3.5 avec $n_i = -\underline{\rho_i}$, $i \in \{1, 2\}$ pour toutes les matrices. De plus, le problème de conception est pondéré en introduisant une fonction de pondération constante $W_\psi = diag(w_{\psi_i})$, $i = 1, ..., 2m + n$ telle que $\psi = W_\psi b_\psi$ où b_ψ est un vecteur fictif. Les scalaires w_{ψ_i}, $i = 1, ..., 2m + n$ sont introduits pour gérer séparément le niveau de robustesse à chaque entrée.

Puis, en notant que les scalaires γ_2, γ_4 ont une dépendance linéaire dans les contraintes (3.52)-(3.63) alors, pour $\gamma_{opt} = \gamma_2 + \gamma_4$, le problème d'optimisation proposé pour synthétiser les paramètres de l'observateur intervalle à entrées inconnues est donné par

$$\min \gamma_{opt} \text{ t.q. } (3.52)\text{-}(3.63) \tag{4.39}$$

Étant donné que les inégalités (3.52)-(3.63) dépendent non-linéairement des paramètres γ_1, γ_3 et des variables LMI alors le problème (4.39) ne définit pas un problème d'optimisation convexe. Dans notre cas, la convexité du problème d'optimisation est obtenue en fixant $\gamma_1 = 0.6$, $\gamma_3 = 1$. L'optimisation conduit au critère de performance optimal $\mathcal{L}_\infty = 30$. Les matrices $L_a(\rho)$, $L_b(\rho)$, $M_a(\rho)$ et $M_b(\rho)$ (voir (3.65)) sont alors obtenues et les fonctions $\overline{\eta}$, $\underline{\eta}$, $\overline{\varphi}$, $\underline{\varphi}$ sont déduites en appliquant le Lemme 3.4. Finalement, les bornes supérieure et inférieure de l'état ν du système (4.22) sont déterminées en utilisant un observateur intervalle de structure (3.5a)-(3.5f), implémenté dans le simulateur du HL20.

4.4.4 Simulations et résultats

Les résultats de simulation de la phase d'atterrissage du véhicule HL20 sont illustrés dans cette sous-section.

Pour débuter, les signaux temporels des entrées inconnues désignant, dans cette application, les éléments du vecteur des vents atmosphériques dans le repère véhicule $[R_b]$ sont présentés dans la figure 4.6.

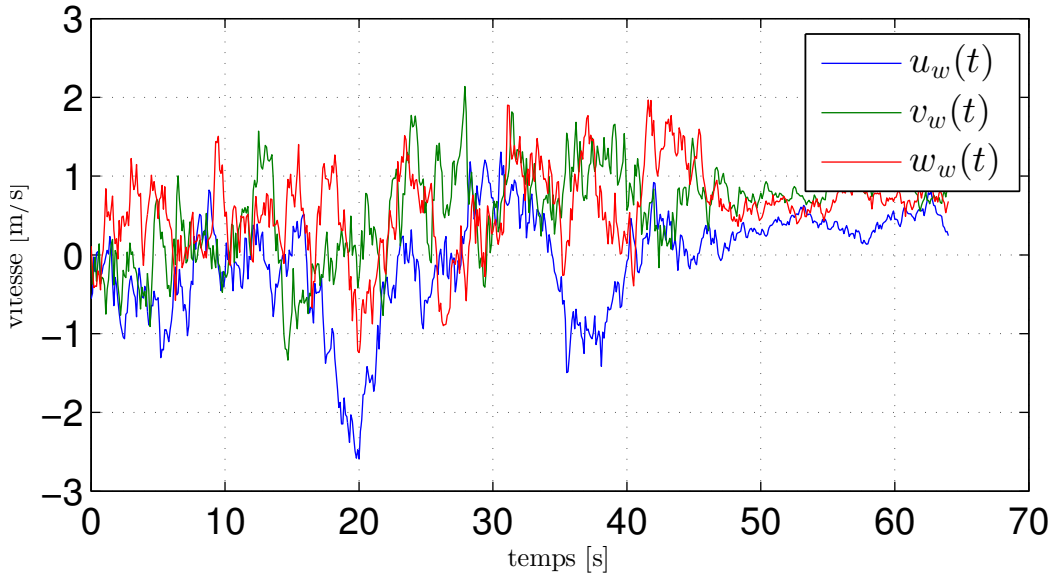


FIGURE 4.6 – Évolution temporelle des vents atmosphériques

Les résultats de l'estimation par intervalle sont à présent abordés. Étant donné que le taux de roulis p, le taux de tangage q et le taux de lacet r sont directement mesurés, les résultats présentés concerneront uniquement l'estimation par intervalle des vitesses longitudinale u, latérale v et verticale w. Le comportement temporel de ces états et de leurs majorants est illustré par les figures 4.7, 4.8 et 4.9. Les observations montrent que les signaux réels sont bien bornés i.e. $u(t) \in [\underline{u}(t), \overline{u}(t)]$, $v(t) \in [\underline{v}(t), \overline{v}(t)]$, $w(t) \in [\underline{w}(t), \overline{w}(t)]$, $\forall t \geq 0$.

Il est à noter que l'estimation par intervalle de l'état du système peut présenter un intérêt dans le cadre de la conception d'une méthodologie de détection de défauts. Le principe consiste à comparer l'intervalle estimé avec le signal mesuré. Lorsque ce dernier est à l'extérieur du domaine estimé alors un défaut est détecté. Pour une illustration de la méthode, le lecteur peut se référer à [84, 29].

4.5 Conclusion

Ce chapitre présente une application de la méthodologie proposée dans le chapitre 3 à l'estimation d'une partie de l'état d'un véhicule de type HL20, au cours de la phase d'atterrissage d'une mission de rentrée atmosphérique terrestre. Cette application présente

l'intérêt de pouvoir valider la méthode proposée sur un système possédant une plateforme de simulation suffisamment développée pour simuler de manière réaliste le comportement dynamique du véhicule dans un environnement perturbé. L'estimation d'état est réalisée de manière à garantir un ensemble admissible pour l'état à chaque instant de temps malgré les variations de la dynamique du système. Il est à noter que les résultats présentés reposent sur la conception d'un unique observateur intervalle pour toute la phase d'atterrissage du HL20. Une solution envisageable pour réduire le conservatisme d'estimation consisterait à segmenter la phase d'atterrissage en plusieurs morceaux puis à synthétiser un observateur intervalle pour chaque segment. Étant donné la connaissance de la trajectoire de vol, la conception de chaque observateur intervalle reposerait sur un domaine d'incertitudes plus faible. Il serait aussi envisageable que la conception de chaque observateur intervalle soit effectuée en tenant compte de plusieurs choix pour les matrices $K(\theta)$ et N afin d'étudier leurs influences sur le critère de performance γ_{opt}. Pour finir, étant donné que le choix du modèle LPV est non unique, il pourrait être intéressant d'investiguer d'autres formes de modèles afin de vérifier son influence sur le conservatisme de l'intervalle estimé pour les états du HL20.

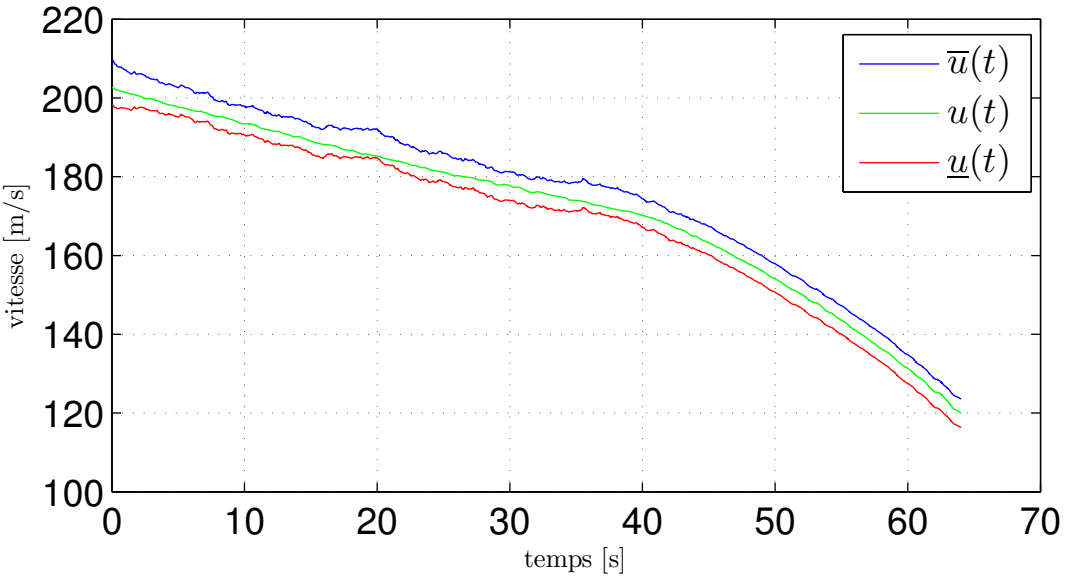


FIGURE 4.7 – Estimation par intervalle de la vitesse longitudinale

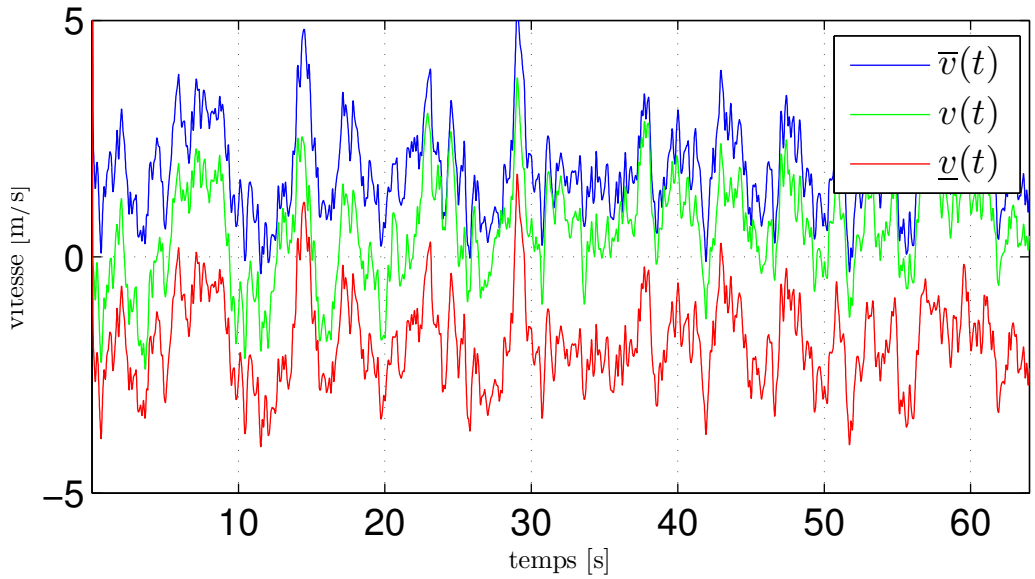


FIGURE 4.8 – Estimation par intervalle de la vitesse latérale

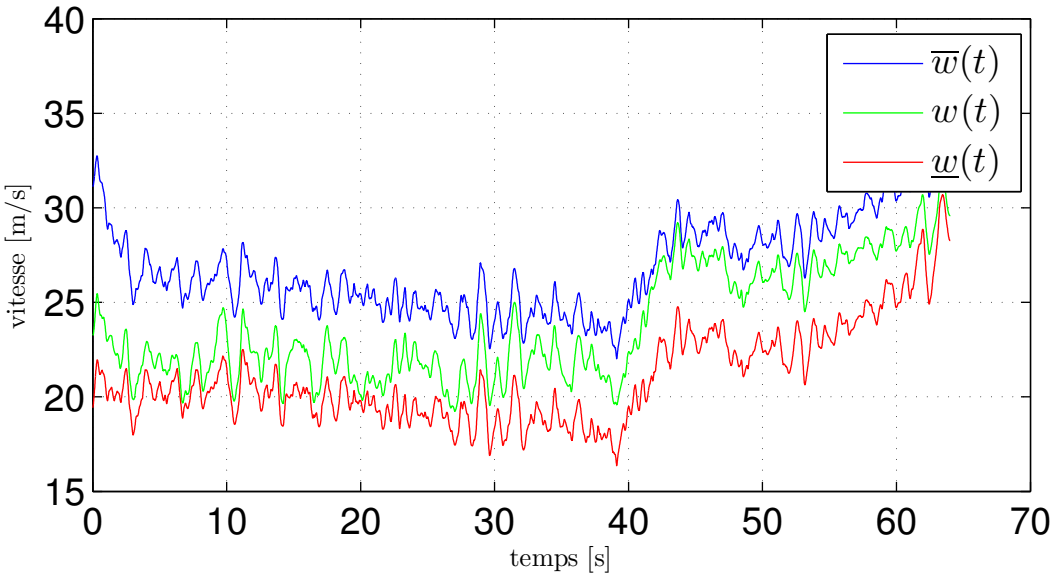


FIGURE 4.9 – Estimation par intervalle de la vitesse verticale

Conclusion générale et perspectives

Les travaux de recherche présentés dans ce manuscrit sont principalement dédiés au problème de conception des observateurs intervalles pour les systèmes LPV à entrées inconnues. Les contributions ont progressivement été introduites au cours des chapitres de cette thèse.

Le chapitre 1 présentait, dans un premier temps, les notions fondamentales de stabilité et de performance pour les systèmes LPV, puis dans un second temps, les méthodes de conception dédiées aux observateurs intervalles pour les classes de systèmes LTI puis LTV et finalement LPV. L'objectif de cet état de l'art était de résumer les développements successifs de la littérature permettant d'étendre la théorie des observateurs intervalles à une large classe de systèmes afin d'en extraire des restrictions existantes pour définir les axes de recherche de cette thèse.

Le chapitre 2 proposait une nouvelle méthode pour étendre la théorie des observateurs intervalles à une plus large classe de systèmes LTI incertains à entrées inconnues. La conception des paramètres de l'observateur combine, simultanément, la vérification des conditions d'existence de l'observateur et un certain niveau de performance au sens d'un critère de type gain $\mathcal{L}_2$ pour l'encadrement estimé de l'état du système. La formulation du problème est basée sur des contraintes LMI. Une application académique a été proposée pour résumer la procédure de conception et démontrer l'efficacité de la méthode. Afin d'éviter les restrictions de cette méthode (classe de systèmes, complexité calculatoire et formulation du problème d'optimisation), une seconde méthode a été proposée dans le chapitre 3.

Le chapitre 3 constituait la principale contribution de ce manuscrit et proposait une méthode dédiée à la conception d'observateurs intervalles pour une classe de système LPV à entrées inconnues. Cette méthode est basée sur une nouvelle classe d'observateurs intervalles dont la procédure de conception assure la vérification, simultanée, des conditions d'existence de l'observateur intervalle (notamment la stabilité et la coopérativité des erreurs d'observation) et un certain niveau de performance pour l'encadrement estimé de l'état du système. La formulation du problème repose sur des contraintes LMI permettant de satisfaire des performances au sens du gain $\mathcal{L}_2$, du gain $\mathcal{L}_\infty$ ou sous forme d'un critère mixte. Toutefois et contrairement à l'approche proposée dans le Chapitre 2, il est à noter que la coopérativité des erreurs d'observation ne nécessite aucun changement de coordonnées. Cette propriété est obtenue par une formulation appropriée en contraintes LMI additionnelles.

Le chapitre 4, était dédié à l'application de la méthode présentée dans le chapitre 3 à la phase d'atterrissage d'un véhicule de type HL20, au cours d'une mission de rentrée atmosphérique terrestre. Un intérêt pour cette application reposait sur le fait qu'il existe une plateforme de simulation développée sous Matlab/Simulink permettant de simuler de manière suffisamment réaliste et dans un environnement perturbé le comportement dynamique du véhicule HL20. L'utilisation de ce benchmark constituait un bon moyen d'étude pour valider la méthodologie proposée.

Dans l'objectif de futur travaux, les perspectives de recherche pourraient s'orienter selon trois axes.

Une première piste concerne l'extension de la méthode à une plus large classe de systèmes incertains afin de pouvoir considérer, par exemple, les systèmes à retard et les systèmes à commutations.

Une deuxième piste concerne la méthode de conception des paramètres de l'observateur intervalle qui pourrait être modifiée ou améliorée en utilisant des techniques développées pour la représentation des systèmes sous la forme LFT et sous la forme de polynômes homogènes.

Finalement une dernière piste pourrait concerner le développement de nouvelles métriques pour l'étude de la performance des observateurs intervalles afin de définir clairement des méthodologies adaptées à chaque cadre applicatif (estimation, contrôle, pronostic, détection de défauts).

Annexe A

Complément sur les LMIs

A.1 Complément de Schur

Lemme A.1 (Complément de Schur)**.** *Soit une matrice symétrique $M \in \mathbb{R}^{l\times l}$ partitionnée telle que :*

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & D \end{bmatrix} \tag{A.1}$$

où $A = A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $D = D^T \in \mathbb{R}^{m\times m}$ et $l = n + m$.

Si A est inversible, alors $M \prec 0$ si et seulement si :

$$\begin{cases} A \prec 0 \\ D - B^T A^{-1} B \prec 0 \end{cases} \tag{A.2}$$

Si D est inversible, alors $M \prec 0$ si et seulement si :

$$\begin{cases} D \prec 0 \\ A - B D^{-1} B^T \prec 0 \end{cases} \tag{A.3}$$

Démonstration. Par définition, la matrice $M \prec 0$ si pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^l - \{0\}$ on a $x^T M x < 0$. Par congruence, pour tout vecteur $y \in \mathbb{R}^l$ et une matrice non singulière $T \in \mathbb{R}^{l\times l}$ tels que $x = Ty$ alors $x^T M x < 0 \Leftrightarrow y^T T^T M T y < 0 \Leftrightarrow T^T M T \prec 0$. En admettant que la matrice A est non singulière et en considérant la matrice T définie par :

$$T = \begin{bmatrix} I_n & -A^{-1}B \\ 0_{m\times n} & I_m \end{bmatrix} \tag{A.4}$$

alors

$$T^T M T = \begin{bmatrix} A & 0_{n\times m} \\ 0_{m\times n} & D - B^T A^{-1} B \end{bmatrix} \tag{A.5}$$

Par conséquent $T^T M T \prec 0$ si et seulement si $A \prec 0$, $D - B^T A^{-1} B \prec 0$.

Lorsque D est inversible alors la démonstration est similaire en considérant :

$$T = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n\times m} \\ -D^{-1}B^T & I_m \end{bmatrix} \tag{A.6}$$

■

A.2 Lemme de projection

Lemme A.2 (Projection lemma [13]). *Considérons l'inégalité*

$$\Omega(z) + Q(z)^T W^T V(z) + V(z)^T W Q(z) \prec 0. \tag{A.7}$$

où le vecteur z et la matrice W sont des variables (indépendantes), une matrice symétrique $\Omega(z) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et deux matrices $Q(z), V(z)$ de dimensions appropriées.

Alors l'inégalité (A.7) possède une solution pour une matrice W et $z = z_0$ si et seulement si les inégalités suivantes sont vérifiées avec $z = z_0$:

$$N_Q(z)^T \Omega(z) N_Q(z) \prec 0, \;\; N_V(z)^T \Omega(\rho) N_V(z) \prec 0, \tag{A.8}$$

où $N_Q(z), N_V(z)$ définissent respectivement des compléments orthogonaux aux matrices $Q(z)$, $V(z)$ avec $\begin{bmatrix} N_Q(z) & Q(z)^T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} N_V(z) & V(z)^T \end{bmatrix}$ sont des matrices de plein rang.

Démonstration. Voir [13] ■

A.3 Régions LMI et $\mathcal{D}$-stabilité

A.3.1 Région LMI

Une région LMI [22, 23] est un sous espace $\mathcal{D}$ du plan complexe défini par :

$$\mathcal{D} = \left\{ z \in \mathbb{C}, f_{\mathcal{D}}(z) = S + zR + z^* R^T \prec 0 \right\}, \tag{A.9}$$

où $S = S^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sont des matrices réelles, $f_{\mathcal{D}}$ est la fonction caractéristique de $\mathcal{D}$ et z^* est le conjugué transposé de z.

Pour exemple, considérons les régions LMI décrites par :

- Demi-plan gauche ouvert :

$$f_{\mathcal{D}}(z) = z + z^* \tag{A.10}$$

  Démonstration :

$$\mathcal{R}_e(z) < 0 \;\Leftrightarrow\; z + z^* < 0$$

  alors $S = 0$ et $R = 1$.

- α-stabilité :

$$f_{\mathcal{D}}(z) = z + z^* + 2\alpha \tag{A.11}$$

  Démonstration :

$$\mathcal{R}_e(z) < -\alpha \;\Leftrightarrow\; 2\alpha + z + z^* < 0$$

  alors $S = 2\alpha$ et $R = 1$.

- Bande verticale :

$$f_{\mathcal{D}}(z) = \begin{bmatrix} 2\alpha_1 - (z + z^*) & 0 \\ 0 & -2\alpha_2 + (z + z^*) \end{bmatrix} \tag{A.12}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}\alpha_1 < \mathcal{R}_e(z) < \alpha_2 \;&\Leftrightarrow\; 2\alpha_1 - (z+z^*) < 0 \;\text{ et }\; -2\alpha_2 + (z+z^*) < 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2\alpha_1 - (z+z^*) & 0 \\ 0 & -2\alpha_2 + (z+z^*) \end{bmatrix} \prec 0\end{aligned}$$

Ainsi $S = \begin{bmatrix} 2\alpha_1 & 0 \\ 0 & -2\alpha_2 \end{bmatrix}$ et $R = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

- Un disque centré en (-q,0) dont le rayon est $r > 0$:

$$f_{\mathcal{D}}(z) = \begin{bmatrix} -r & q+z \\ q+z^* & -r \end{bmatrix} \tag{A.13}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}|z-(-q)| < r \;&\Leftrightarrow\; (z+q)(z+q)^* < r^2 \;\Leftrightarrow\; (z+q)\, r^{-1} (z+q)^* - r < 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -r & z+q \\ z^*+q & -r \end{bmatrix} \prec 0\end{aligned}$$

Cette dernière équivalence est obtenue par une légère adaptation de la démonstration du complément de Schur appliquée aux matrices hermitiennes. Ainsi, nous obtenons $S = \begin{bmatrix} -r & q \\ q & -r \end{bmatrix}$ et $R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

- Un secteur conique avec apex à l'origine et angle intérieur 2β :

$$f_{\mathcal{D}}(z) = \begin{bmatrix} sin(\beta)(z+z^*) & cos(\beta)(z-z^*) \\ cos(\beta)(z^*-z) & sin(\beta)(z+z^*) \end{bmatrix} \tag{A.14}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}|\mathcal{I}_m(z)| < -\mathcal{R}_e(z)\tan(\beta) \;&\Leftrightarrow\; \mathcal{I}_m(z)^2 < \mathcal{R}_e(z)^2 \tan(\beta)^2 \\ &\Leftrightarrow\; -(z-z^*)^2 - (z+z^*)^2 \tan(\beta)^2 < 0 \\ &\Leftrightarrow\; -\cos(\beta)^2 (z-z^*)^2 - \sin(\beta)^2 (z+z^*)^2 < 0\end{aligned}$$

En admettant que $\mathcal{R}_e(z) < 0$ alors $-sin(\theta)(z+z^*) > 0$ et :

$$\begin{aligned}|\mathcal{I}_m(z)| < -\mathcal{R}_e(z)\tan(\beta) \;&\Leftrightarrow\; (z+z^*)\sin(\beta) \\ &\quad - (z^*-z)\cos(\beta)\left((z+z^*)\sin(\beta)\right)^{-1}(z-z^*)\cos(\beta) < 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} sin(\beta)(z+z^*) & cos(\beta)(z-z^*) \\ cos(\beta)(z^*-z) & sin(\beta)(z+z^*) \end{bmatrix} \prec 0 \text{ (Schur)}\end{aligned}$$

alors $S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $R = \begin{bmatrix} sin(\beta) & cos(\beta) \\ -cos(\beta) & sin(\beta) \end{bmatrix}$.

Il est possible d'interconnecter plusieurs régions LMI élémentaires pour former une région LMI spécifique. Pour exemple, l'interconnexion des régions LMI α-stabilité, disque et secteur conique conduit à la région LMI décrite dans la figure A.2.

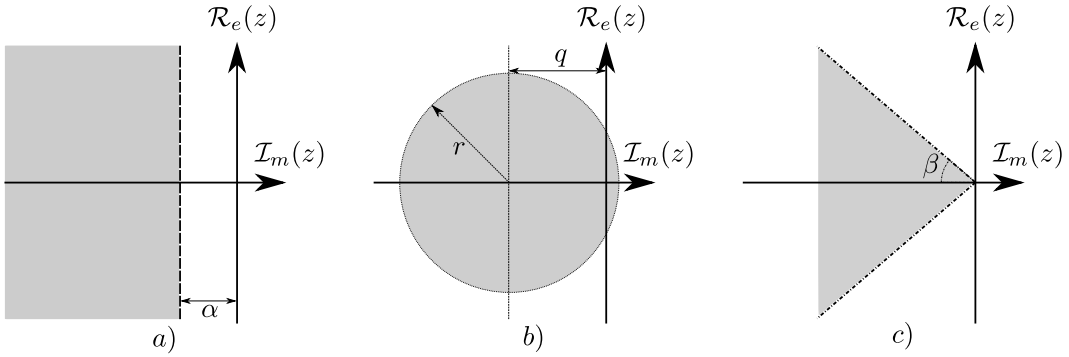


FIGURE A.1 – Régions LMI : a) α-stabilité , b) Disque, c) Secteur conique

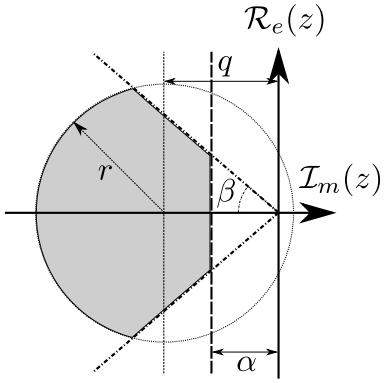


FIGURE A.2 – Union des régions LMI α-stabilité, disque et secteur conique

A.3.2 $\mathcal{D}$-stabilité

Pour de nombreuses applications, il est parfois nécessaire de définir une région d'appartenance pour les pôles d'un système. Des exemples classiques concernent la synthèse de lois de commande où il peux s'avérer nécessaire de contraindre la dynamique en boucle fermé ou encore la synthèse d'un observateur afin d'imposer la vitesse de convergence de l'estimation vers la valeur réelle. Cette contrainte de synthèse peut être formulée en utilisant la notion de $\mathcal{D}$-stabilité [22, 23]. La notion de $\mathcal{D}$-stabilité pour une matrice A est présentée dans le lemme A.3.

Lemme A.3 ($\mathcal{D}$-stabilité, [22])**.** *Soit une région LMI décrite par :*

$$\mathcal{D} = \left\{ z \in \mathbb{C}, f_{\mathcal{D}}(z) = S + zR + z^* R^T \prec 0 \right\}, \; S = S^T \tag{A.15}$$

où z^* désigne ici le conjugué transposé de z.

Alors une matrice carrée $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est dite $\mathcal{D}$-stable si et seulement si il existe une matrice $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ où $P = P^T \succ 0$ telle que :

$$M_{\mathcal{D}}(A, P) := S \otimes P + R \otimes (PA) + R^T \otimes (A^T P) \prec 0 \tag{A.16}$$

Lorsque $f_{\mathcal{D}}(z) = z + z^*$ alors la notion de $\mathcal{D}$-stabilité et la stabilité quadratique de Lyapunov présentée dans la définition 1.4 sont équivalentes. En effet, les matrices de la fonction caractéristique $f_{\mathcal{D}}$ sont $S = 0$ et $R = 1$. Pour une matrice carré $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et une matrice $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ où $P = P^T \succ 0$ alors la contrainte (A.16) est réduite à :

$$A^T P + PA \prec 0 \tag{A.17}$$

Bibliographie

[1] D. Angeli and E. Sontag. Monotone control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(10) :1684–1698, 2003. 16

[2] P. Apkarian, P. Gahinet, and G. Becker. Self-scheduled H_∞ control of linear parameter-varying systems : a design example. *Automatica*, 31(9) :1251 – 1261, 1995. 12

[3] P. Apkarian, P. Gahinet, and J. M. Biannic. Self-scheduled H_∞ ; control of a missile via lmis. In *Proceedings of 1994 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, volume 4, pages 3312–3317 vol.4, Dec 1994. 12

[4] P. Apkarian, P. Gahinet, and C. Buhr. Multi-model, multi-objective tuning of fixed-structure controllers. In *2014 European Control Conference (ECC)*, pages 856–861, June 2014. 25

[5] P. Apkarian and D. Noll. Nonsmooth H_∞ synthesis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(1) :71–86, Jan 2006. 25

[6] I. Arasaratnam and S. Haykin. Cubature kalman filters. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(6) :1254 ?1269, 2009. 1

[7] G. I. Bara. *Estimation d'état des systèmes linéaires à paramètres variants*. PhD thesis, Vandoeuvre-les-Nancy, INPL, 2001. 6, 12

[8] G. I. Bara, J. Daafouz, F. Kratz, and J. Ragot. Parameter-dependent state observer design for affine LPV systems. *International journal of control*, 74(16) :1601–1611, 2001. 96

[9] R. H. Bartels and G. W. Stewart. Solution of the matrix equation $AX + XB = C$ [f4]. *Commun. ACM*, 15(9) :820–826, Sept. 1972. 24

[10] S. F. Beam. The HL-20 as the personnel launch system. 1991. 4, 115

[11] G. Besançon. *Nonlinear observers and applications*, volume 363. Springer. 1

[12] M. Bolajraf, M. A. Rami, and F. Tadeo. Robust interval observer with uncertainties in the output. In *18th Mediterranean Conference on Control and Automation, MED'10*, 2010. 46

[13] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear matrix inequalities in system and control theory*. SIAM, 1994. 14, 99, 134

[14] C. Briat. *Linear parameter-varying and time-delay systems*, volume 3. Springer, 2015. 6, 8, 9

[15] C. Briat and M. Khammash. Interval peak-to-peak observers for continuous- and discrete-time systems with persistent inputs and delays. *Automatica*, 74 :206 – 213, 2016. 5, 19, 36, 37, 56

[16] J. Burke, D. Henrion, A. Lewis, and M. Overton. Hifoo - a matlab package for fixed-order controller design and h_∞ optimization. *IFAC Proceedings Volumes*, 39(9) :339 – 344, 2006. 25

[17] F. Cacace, A. Germani, and C. Manes. A positive observer for linear systems. volume 47, pages 5357 – 5362, 2014. 19th IFAC World Congress. 19, 66

[18] F. Cacace, A. Germani, and C. Manes. A new approach to design interval observers for linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 60(6) :1665–1670, 2015. 19, 20, 21, 22

[19] E. Chambon, P. Apkarian, and L. Burlion. Metzler matrix transform determination using a nonsmooth optimization technique with an application to interval observers*. In *SIAM Conference on Control and its Applications*, 2015. 25, 56

[20] E. Chambon, L. Burlion, and P. Apkarian. Overview of linear time-invariant interval observer design : towards a non-smooth optimisation-based approach. *IET Control Theory Applications*, 10(11) :1258–1268, 2016. 25, 56, 57

[21] S. Chebotarev, D. Efimov, T. Raïssi, and A. Zolghadri. Interval observers for continuous-time LPV systems with L_1/L_2 performance. *Automatica*, 58 :82–89, 2015. 46, 47, 54, 56

[22] M. Chilali and P. Gahinet. H_∞ design with pole placement constraints : an lmi approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(3) :358–367, Mar 1996. 134, 136

[23] M. Chilali, P. Gahinet, and P. Apkarian. Robust pole placement in LMI regions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(12) :2257–2270, Dec 1999. 134, 136

[24] J. Cockburn and B. Morton. Linear fractional representations of uncertain systems. *Automatica*, 33(7) :1263–1271, 1997. 6

[25] C. Combastel. Stable interval observers in $\mathbb{C}$ for linear systems with time-varying input bounds. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 58(2) :481–487, 2013. 19

[26] C. Combastel and S. Raka. A stable interval observer for LTI systems with no multiple poles. *IFAC Proceedings Volumes*, 44(1) :14335 – 14341, 2011. 19

[27] M. Darouach, M. Zasadzinski, and S. J. Xu. Full-order observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(3) :606–609, Mar 1994. 61, 87

[28] Y. Ebihara, D. Peaucelle, and D. Arzelier. *S-variable Approach to LMI-based Robust Control*. Springer, 2015. 6

[29] D. Efimov, L. Fridman, T. Raissi, A. Zolghadri, and R. Seydou. Application of interval observers and hosm differentiators for fault detection. In *8th International Federation of Automatic Control (IFAC) Symposium SAFEPROCESS-2012*, 2012. 128

[30] D. Efimov, L. Fridman, T. Raissi, A. Zolghadri, and R. Seydou. Interval estimation for LPV systems applying high order sliding mode techniques. *Automatica*, 48(9) :2365–2371, 2012. 15, 46, 89

[31] D. Efimov, W. Perruquetti, and J.-P. Richard. Interval estimation for uncertain systems with time-varying delays. *International Journal of Control*, 86(10) :1777–1787, 2013. 5

[32] D. Efimov and T. Raïssi. Design of interval observers for uncertain dynamical systems. *Automation and Remote Control*, 77(2) :191–225, 2016. 2

[33] D. Efimov, T. Raïssi, S. Chebotarev, and A. Zolghadri. Interval state observer for nonlinear time varying systems. *Automatica*, 49(1) :200–205, 2012. 38, 39, 40, 56

[34] D. Efimov, T. Raissi, and A. Zolghadri. Control of nonlinear and LPV systems : Interval observer-based framework. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58(3) :773–778, 2013. 46

[35] N. Ellero, D. Gucik-Derigny, and D. Henry. Interval observer for Linear Time Invariant (LTI) uncertain systems with state and unknown input estimations. *Journal of Physics : Conference Series,12th European Workshop on Advanced Control and Diagnosis (ACD)*, 659(1), 2015.

[36] N. Ellero, D. Gucik-Derigny, and D. Henry. Multiobjective interval observer via LMI techniques for fault detection. In *3rd Conference on Control and Fault-Tolerant Systems (SysTol)*, pages 485–490, 2016.

[37] N. Ellero, D. Gucik-Derigny, and D. Henry. Unknown input interval observer for uncertain linear time invariant systems. In *UKACC 11th International Conference on Control (CONTROL)*, pages 1–6, 2016.

[38] N. Ellero, D. Gucik-Derigny, and D. Henry. Unknown input interval observer with $\mathcal{H}_\infty$ and $\mathcal{D}$-stability performance. *IFAC-PapersOnLine,20th IFAC World Congress*, 50(1) :6251–6258, 2017.

[39] N. Ellero, D. Gucik-Derigny, and D. Henry. An unknown input interval observer for LPV systems under a mixed $\mathcal{L}_2/\mathcal{L}_\infty$-gain criterion. *Automatica*, (Révisé).

[40] H. Ethabet, T. Raissi, M. Amairi, and M. Aoun. Interval observers design for continuous-time linear switched systems. *IFAC-PapersOnLine*, 50(1) :6259–6264, 2017. 5

[41] A. Falcoz. *Contribution au développement de stratégies de diagnostic à base de modèles pour les véhicules spatiaux-Application à une mission de rentrée atmosphérique*. PhD thesis, Université Sciences et Technologies-Bordeaux I, 2009. 111, 112, 113, 114, 116, 120

[42] P. Gahinet, P. Apkarian, and M. Chilali. Affine parameter-dependent lyapunov functions and real parametric uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(3) :436–442, Mar 1996. 10, 11, 12, 13, 86, 96, 98, 100

[43] N. Gao, M. Darouach, H. Voos, and M. Alma. New unified H_∞ dynamic observer design for linear systems with unknown inputs. *Automatica*, 65 :43 – 52, 2016. 58, 61

[44] G. Golub, S. Nash, and C. V. Loan. A hessenberg-schur method for the problem AX + XB= C. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 24(6) :909–913, December 1979. 24

[45] J.-L. Gouzé, A. Rapaport, and M. Z. Hadj-Sadok. Interval observers for uncertain biological systems. *Ecological modelling*, 133(1) :45–56, 2000. 2, 15, 17

[46] S. Grenaille, D. Henry, and A. Zolghadri. A method for designing fault diagnosis filters for LPV polytopic systems. *Journal of Control Science and Engineering - Robustness Issues in Fault Diagnosis and Fault Tolerant Control*, 2008(January 2008) :Article n.1, 2008. 6

[47] D. Gucik-Derigny, T. Raïssi, and A. Zolghadri. Interval state and unknown inputs estimation for linear time-invariant systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 47(3) :7375 – 7381, 2014. 29, 30, 31, 32, 33, 56, 57

[48] D. Gucik-Derigny, T. Raissi, and A. Zolghadri. A note on interval observer design for unknown input estimation. *International Journal of Control*, 89(1) :25–37, 2016. 29, 33, 34, 35, 56, 57

[49] J. C. Harpold and C. A. Graves Jr. Shuttle entry guidance. In *American Astronautical Society, Anniversary Conference, 25th, Houston, Tex., Oct. 30-Nov. 2, 1978, 35 p.*, 1978. 112

[50] S. Hecker, A. Varga, and J. Magni. Enhanced LFR-toolbox for matlab. *Aerospace Science and Technology*, 9 :173–180, 2005. 6

[51] D. Henry. Structured fault detection filters for LPV systems modeled in a LFR manner. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 26(3) :190–207, 2012. 6

[52] M. W. Hirsch and H. L. Smith. *Competitive and Cooperative Systems : A Mini-review*, pages 183–190. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2003. 16

[53] M. Hou and P. Muller. Design of observers for linear systems with unknown inputs. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 37(6) :871–875, 1992. 33, 61

[54] E. B. Jackson and C. I. Cruz. Preliminary subsonic aerodynamic model for simulation studies of the HL-20 lifting body. 1992. 4, 114, 120

[55] E. B. Jackson, C. I. Cruz, and W. Ragsdale. Real-time simulation model of the HL-20 lifting body. 1992. 4, 114, 120

[56] E. B. Jackson, R. A. Rivers, R. S. Chowdhry, W. Ragsdale, and D. W. Geyer. Launch-pad abort capabilities of the HL-20 lifting body. 1994. 111

[57] L. Jaulin. Nonlinear bounded-error state estimation of continuous-time systems. *Automatica*, 38(6) :1079–1082, 2002. 1

[58] R. E. Kalman and R. S. Bucy. New results in linear filtering and prediction theory. *Journal of basic engineering*, 83(3) :95–108, 1961. 1

[59] R. E. Kalman et al. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of basic Engineering*, 82(1) :35–45, 1960. 1

[60] H. K. Khalil and J. Grizzle. *Nonlinear systems, vol. 3*. 2002. 8, 13

[61] H. K. Khalil and L. Praly. High-gain observers in nonlinear feedback control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 24(6) :993–1015, 2014. 1

[62] M. Kieffer and E. Walter. Guaranteed nonlinear state estimation for continuous-time dynamical models from discrete-time measurements. *IFAC Proceedings Volumes*, 39(9) :685 – 690, 2006. 5th IFAC Symposium on Robust Control Design. 2

[63] S. Krebs, M. Pfeifer, S. Fugel, J. Weigold, and S. Hohmann. Interval observer for LPV systems based on time-variant transformations. In *2016 IEEE 55th Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 4090–4096, Dec 2016. 46

[64] A. Levant. Robust exact differentiation via sliding mode technique. *Automatica*, 34(3) :379–384, 1998. 30

[65] A. Levant. Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. *International journal of Control*, 76(9-10) :924–941, 2003. 30, 31

[66] S. Lim. *Analysis and control of linear parameter-varying systems*. PhD thesis, Citeseer, 1998. 5, 6, 14

[67] D. Luenberger. An introduction to observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16(6) :596–602, Dec 1971. 1

[68] D. G. Luenberger. Observing the state of a linear system. *IEEE Transactions on Military Electronics*, 8(2) :74–80, April 1964. 1

[69] J. Magni, S. Bennani, and J. Dijkgraaf. *An Overview of System Modelling in* LFT *Form - Advanced Techniques for Clearance of Flight Control Laws*. Springer Berlin / Heidelberg, 2002. 6

[70] A. Marcos and S. Bennani. A linear parameter varying controller for a re-entry vehicle benchmark. In *Advances in Aerospace Guidance, Navigation and Control*, pages 15–27. Springer, 2011. 111

[71] F. Mazenc and O. Bernard. Asymptotically stable interval observers for planar systems with complex poles. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(2) :523–527, Feb 2010. 19, 26, 27

[72] F. Mazenc and O. Bernard. Interval observers for linear time-invariant systems with disturbances. *Automatica*, 47(1) :140–147, 2011. 19, 26

[73] D. J. McNabb. Investigation of atmospheric reentry for the space maneuver vehicle. Technical report, AIR FORCE INST OF TECH WRIGHT-PATTERSON AFB OH SCHOOL OF ENGINEERING AND MANAGEMENT, 2004. 112

[74] J. Mohammadpour and C. W. Scherer. *Control of linear parameter varying systems with applications*. Springer Science & Business Media, 2012. 6

[75] V. Morio, F. Cazaurang, and P. Vernis. Flatness-based hypersonic reentry guidance of a lifting-body vehicle. *Control Engineering Practice*, 17(5) :588–596, 2009. 112

[76] M. Müller. Über das fundamentaltheorem in der theorie der gewöhnlichen differentialgleichungen. *Mathematische Zeitschrift*, 26(1) :619–645, 1927. 2

[77] M. Norgaard, N. Poulsen, and O. Ravn. New developments in state estimation for nonlinear systems. *Automatica*, 36(11) :1627–1638, 2000. 1

[78] R. M. Palhares and P. L. Peres. Robust filtering with guaranteed energy-to-peak performance — an LMI approach. *Automatica*, 36(6) :851–858, 2000. 5, 6

[79] G. Poole and T. Boullion. A survey on M-matrices. *SIAM review*, 16(4) :419–427, 1974. 77, 85

[80] R. W. Powell. Six-degree-of-freedom guidance and control-entry analysis of the hl-20. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 30(5) :537–542, 1993. 111

[81] T. Raïssi and D. Efimov. Some recent results on the design and implementation of interval observers for uncertain systems. *at-Automatisierungstechnik*, 66(3) :213–224, 2018. 5

[82] T. Raïssi, D. Efimov, and A. Zolghadri. Interval state estimation for a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(1) :260–265, Jan 2012. 19, 24

[83] T. Raïssi, N. Ramdani, and Y. Candau. Set membership state and parameter estimation for systems described by nonlinear differential equations. *Automatica*, 40(10) :1771–1777, 2004. 1

[84] T. Raïssi, G. Videau, and A. Zolghadri. Interval observer design for consistency checks of nonlinear continuous-time systems. *Automatica*, 46(3) :518–527, 2010. 1, 7, 46, 56, 123, 128

[85] M. Rami, C. Cheng, and C. de Prada. Tight robust interval observers : An LP approach. In *Decision and Control, 2008. CDC 2008. 47th IEEE Conference on*, pages 2967–2972, 2008. 46

[86] A. Rapaport and J. L. Gouzé. Practical observers for uncertain affine output injection systems. In *1999 European Control Conference (ECC)*, pages 1505–1510, Aug 1999. 17

[87] D. Rotondo, A. Cristofaro, T. Johansen, F. Nejjari, and V. Puig. State estimation and decoupling of unknown inputs in uncertain LPV systems using interval observers. *International Journal of Control*, pages 1–18, 2017. 56

[88] C. Scherer, P. Gahinet, and M. Chilali. Multiobjective output-feedback control via lmi optimization. *IEEE Transactions on automatic control*, 42(7) :896–911, 1997. 6

[89] C. Scherer and S. Weiland. Linear matrix inequalities in control. *Lecture Notes, Dutch Institute for Systems and Control, Delft, The Netherlands*, 3, 2000. 5, 6, 14, 60

[90] O. Sename, P. Gaspar, and J. Bokor. *Robust control and linear parameter varying approaches : application to vehicle dynamics*, volume 437. Springer, 2013. 6, 7

[91] D. Simon. Kalman filtering with state constraints : a survey of linear and nonlinear algorithms. *IET Control Theory Applications*, 4(8) :1303–1318, August 2010. 1

[92] H. L. Smith. *Monotone dynamical systems : an introduction to the theory of competitive and cooperative systems*. Number 41. American Mathematical Soc., 1995. 2, 16, 17

[93] H. L. Smith. Monotone dynamical systems : an introduction to the theory of competitive and cooperative systems. *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society*, 33 :203–209, 1996. 16

[94] R. Thabet, T. Raissi, C. Combastel, and A. Zolghadri. Design of interval observers for LPV systems subject to exogenous disturbances. In *Control Conference (ECC), 2013 European*, pages 1126–1131, 2013. 46

[95] R. E. H. Thabet, T. Raïssi, C. Combastel, D. Efimov, and A. Zolghadri. An effective method to interval observer design for time-varying systems. *Automatica*, 50(10) :2677–2684, 2014. 41, 43, 44, 45, 56

[96] R. Tóth. *Modeling and identification of linear parameter-varying systems*, volume 403. Springer, 2010. 7

[97] J. Veenman, C. Scherer, and H. Koroglu. IQC-based LPV controller synthesis for the NASA HL20 atmospheric re-entry vehicle. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, page 5636, 2009. 111

[98] G. Videau. *Méthodes garanties pour l'estimation d'état et le contrôle de cohérence des systèmes non linéaires à temps continu.* PhD thesis, Université Sciences et Technologies-Bordeaux I, 2009. 2

[99] E. Wan and R. V. D. Merwe. *The Unscented Kalman Filter*. S. Haykin, chap. 7, John Wiley & Sons, New York, NY, 2001. 1

[100] Y. Wang, D. M. Bevly, and R. Rajamani. Interval observer design for LPV systems with parametric uncertainty. *Automatica*, 60 :79 – 85, 2015. 46, 49, 50, 51, 52, 54, 56

[101] F. Wu. *Control of linear parameter varying systems*. PhD thesis, University of California at Berkeley, Berkeley, California, 1995. 6, 12

[102] J. Zhu and C. D. Johnson. New results in the reduction of linear time-varying dynamical systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 27(3) :476–494, 1989. 41, 42

[103] J. Zhu and C. D. Johnson. Unified canonical forms for linear time-varying dynamical systems under D-similarity transformations. I. In *System Theory, 1989. Proceedings., Twenty-First Southeastern Symposium on*, pages 74–81, 1989. 42, 44

[104] J. Zhu and C. D. Johnson. Unified canonical forms for linear time-varying dynamical systems under D-similarity transformations. II. In *System Theory, 1989. Proceedings., Twenty-First Southeastern Symposium on*, pages 57–63, 1989. 42, 44