Modélisation numérique des ondes atmosphériques issues des couplages solide/océan/atmosphère et applications

Quentin Brissaud

▶ **To cite this version:**

Quentin Brissaud. Modélisation numérique des ondes atmosphériques issues des couplages solide/océan/atmosphère et applications. Planétologie. ISAE, 2017. Français. NNT : . tel-01893951

HAL Id: tel-01893951
https://theses.hal.science/tel-01893951

Submitted on 11 Oct 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Fédérale
Toulouse Midi-Pyrénées

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace

Présentée et soutenue par :
Quentin BRISSAUD

le lundi 9 octobre 2017

Titre :

Modélisation numérique des ondes atmosphériques issues des couplages solide/océan/atmosphère et applications

---

École doctorale et discipline ou spécialité :

ED SDU2E : Astrophysique, sciences de l'espace, planétologie

Unité de recherche :

Hors équipe d'accueil ISAE-ONERA et ICA, précisez : SSPA

Directeur(s) de Thèse :

M. Raphaël GARCIA (directeur de thèse)
M. Roland MARTIN (co-directeur de thèse)

Jury :

M. Denis MATIGNON Professeur ISAE-SUPAERO - Président
Mme Elvira ASTAFYEVA Chargée de Recherche Institut de Physique du Globe de Paris
M. Christophe BAILLY Professeur Ecole Centrale de Lyon - Rapporteur
M. François COULOUVRAT Directeur de recherche Institut Jean le Rond d'Alembert - Rapporteur
M. Raphaël GARCIA Ingénieur-chercheur ISAE-SUPAERO - Directeur de thèse
M. Dimitri KOMATITSCH Directeur de Recherche Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique
M. Roland MARTIN Ingénieur de recherche OMP - Co-directeur de thèse

Remerciements

Je souhaiterais tout d'abord remercier mes directeurs de thèse, Raphaël Garcia et Roland Martin, qui m'ont étroitement encadré et encouragé tout au long de ces trois dernières années. Leur patience et leur grande disponibilité furent les éléments clés pour l'accomplissement de cette thèse.
Je souhaiterais exprimer ma profonde gratitude à Dimitri Komatitsch, son expertise, ses suggestions et le temps qu'il m'accorda furent absolument décisifs pour ce projet.
Je tiens à remercier Lucie Roland et Anthony Sladen dont les collaborations furent fructueuses et déterminantes.
Je remercie François Coulouvrat et Christophe Bailly qui ont accepté d'être rapporteurs de cette thèse.
Je remercie chaleureusement Régine Leconte avec laquelle nous nous sommes confrontés régulièrement aux aléas de la programmation parallèle.
Je souhaite aussi remercier vivement l'ensemble de l'équipe SSPA : Stefanie Hempel, David Mimoun, Naomi Murdoch, Anthony Sournac, Alexandre Cadu et Laurent Pou, pour toutes ces discussions scientifiques (et parfois politiques) très enrichissantes.
je remercie l'ensemble du personnel du DEOS qui participèrent à rendre agréable ces dernières années à l'ISAE.
Enfin, je remercie l'université fédérale de Toulouse pour son soutien financier à cette thèse.

Table des matières

Table des sigles et acronymes **xv**

Introduction **1**

1 Modélisation des ondes gravito-acoustiques dans l'atmosphère **27**

1.1 Introduction 27

1.2 Article publié dans "Geophysical Journal International" 38

1.3 Limitations et perspectives 59

2 Cas d'étude des ondes atmosphériques issues d'impacts de météores sur Mars **67**

2.1 Introduction 67

2.2 Article publié dans "Space Science Reviews" 72

2.3 Limites et perspectives 99

3 Cas d'étude des ondes atmosphériques issues du tsunami de Sumatra en 2004 **105**

3.1 Introduction 105

3.2 Article en cours de préparation pour "Geophysical Research Letters" 106

3.3 Perspectives 115

4 Modélisation du système couplé Terre-atmosphère **117**

4.1 Introduction 117

4.2 Article publié dans "Geophysical Journal International" 128

4.3 Limites et perspectives 152

Conclusion **169**

Bibliographie **203**

Table des figures

1 Représentation schématique du trajet de propagation des ondes atmosphériques issues du tsunami de Tohoku en 2011 et du chemin du satellite GOCE. Crédit : ESA/IRAP/CNES/TU Delft/HTG/Planetary Visions 2

2 Exemple de simulation numérique de la propagation d'onde de gravité en perturbation vitesse verticale après $t = 1000$ s d'oscillation du sol sur 80 km et à 900 s de période principale. Le domaine est de 400×160 km et l'atmosphère est basée sur le modèle MSISE-00 (Picone et al., 2002). La couleur rouge correspond à une amplitude positive et bleue à une amplitude négative. . . . 6

3 A gauche, le domaine fréquentiel des différents modes de propagation basse fréquence dans l'atmosphère en fonction du nombre d'onde horizontal. ω_c est la fréquence de coupure acoustique, N la fréquence de Brunt-Väisälä. Figure extraite de (Evers et Haak, 2010). A droite, les domaines temporels (en minutes) des modes de propagation acoustiques et de gravité dans l'atmosphère en fonction de l'altitude (en km). t_a = correspond à la période de coupure acoustique et t_B la période de Brunt-Väisälä. Figure extraite de Knížová et Mošna, 2011. 7

4 Au dessus, les coefficients d'absorption vibrationnelle $\{\alpha_{vib}\}$ et la somme entre les coefficients d'absorption volumique (absorption rotationnelle et classique) en fonction de l'altitude sur Mars à plusieurs fréquences. Ainsi que l'absorption classique en fonction de l'altitude pour les mêmes fréquences sur Terre. En bas, les coefficients d'absorption vibrationnelle et d'absorption volumique sur Mars et à différentes altitudes en fonction de la fréquence. Image extraite de l'article (Garcia et al., 2016). 8

5 De gauche à droite, les profils de fréquence de Brunt-Väisälä ($\mathrm{rad}^2.\mathrm{s}^{-2}$), de vitesse du son adiabatique ($\mathrm{m.s}^{-2}$) et de densité atmosphérique ($\log[\mathrm{kg.m}^{-3}]$) en fonction de l'altitude. Ces profils sont extraits du modèle empirique MSISE-00 (Picone et al., 2002). 9

6 Résumé des différentes sources d'infrasons et d'ondes de gravité sur Terre. Les valeurs indiquées correspondent à la gamme de fréquence moyenne pour chacun des évènements ainsi que les valeurs maximums moyennes observées. Ces valeurs sont extraites de (Campus et Christie, 2010). 10

7 Représentation schématique de la génération d'ondes gravito-acoustiques liées à un évènement sismique et couplage à l'ionosphère. 11

8 Perturbations verticales liées à la propagation d'une onde plane dans une atmosphère isothermale à différentes altitudes $z = 20.3$, 96.6 and 198.3 km. L'onde plane propagée est initialement d'amplitude (en vitesse verticale) faible pour le signal en bleu ("Solution ($\times 10^4$) with small forcing amplitude") et d'amplitude plus élevée pour le signal rouge ("Solution with large forcing amplitude"). Le signal d'amplitude faible est multiplié par 10^4 afin de pouvoir le comparer au signal d'amplitude élevé. On peut observer la déformation du front d'onde liée à un nombre de Mach élevé (signal rouge) comparée à la propagation linéaire d'une onde à nombre de Mach faible (signal bleu). La théorie linéaire aurait prédit une forme d'onde erronée dans le cas d'un nombre de Mach élevé. . . . 13

9 Trajectoires de rais à la surface de Mars vers l'Ouest (gauche) et l'Est (droite) à 90° longitude solaire et 12h heure locale. Les couleurs de fond indiquent la vitesse effective du son, les nuances sombres et claires correspondant respectivement aux valeurs les plus fortes et les plus faibles de vitesse. 22

1.1 Solutions numériques et analytiques pour une onde plane se propageant dans un milieu atténuant (dissipation classique uniquement avec $\eta_V = 10^{-4}\,\mathrm{kg.m^{-1}.s^{-1}}$) et avec décroissance de la densité avec l'altitude (hauteur d'échelle $H = 29$ km). Déplacement vertical pour une solution par différences finies ('Numerical') et la solution analytique correspondante ('A_1 : Analytical') ainsi que la différence entre les deux ('$A_1 - N$') ; La solution numérique dans le cas sans viscosité ('A_2 : Analytical'). Les signaux sont représentés à différentes altitudes $z = 254.4, 290.8, 345.2$ km. La figure est extraite de l'article (Brissaud et al., 2016). La dispersion et l'atténuation sont clairement visibles par, respectivement, la modification de la forme d'onde et la réduction de son amplitude au cours de la propagation par rapport à la solution dans un milieu non visqueux. 29

1.2 Coefficients d'absorption classique α_{cl} en fonction de la fréquence sur Terre et aux altitudes $z = 10, 30, 50$ km et issus du modèle MSIS. On observe que les basses fréquences sont davantage absorbées que les hautes fréquences sur Terre par les phénomènes d'absorption classique. 30

1.3 Schéma représentant la réfraction d'une onde plane à l'interface entre deux milieux pour lesquels la vitesse effective du son est différente. L'onde incidente fait un angle ϕ_I avec l'horizontal et se propage à une vitesse c_I. L'onde réfractée se propage à une vitesse c_R et est représentée dans deux configurations différentes : dans le cas $c_I < c_R$ (couleur verte) l'onde fait un angle $\phi_R > \phi_I$ avec l'horizontal et dans le cas $c_I > c_R$ (couleur orange) l'onde fait un angle $\phi_R < \phi_I$ avec l'horizontal. 31

1.4 Exemple de simulation de la propagation d'ondes acoustiques dans un domaine 20×5 km. L'atmosphère est isothermale sans viscosité et avec un vent homogène sur le domaine tel que $v_{0,x} = 100$ m.s^{-1}. La source est une dérivée de gaussienne de fréquence principale $f_0 = 0.2$ Hz et située à la position $(x, z) = (10, 2.5)$ km. Perturbations de pression simulées numériquement dans le sens du vent ('Downwind solution'), contre le vent ('Upwind solution'). Les signaux sont montrés en temps et à deux stations situées à la même altitude $z = 2.5$ km et à la position $x = 4.5$ km et $x = 15.5$ km. 32

1.5 Résultat de simulation de la propagation linéaire d'ondes de gravité près d'un niveau critique d à un gradient de vent. L'image est montrée en perturbation de pression. Le domaine est de 400×108 km et l'atmosphère est isothermale avec une hauteur d'échelle $H = 10$ km. Le profil de vitesse du vent est tel que $v_{0,x} = 100.53e^{-\left(\frac{z-z_0}{10000}\right)^2}$ où z (km) est l'altitude et $z_0 = 30$ km est l'altitude du guide d'onde. Trois zones de propagation sont visibles sur cette image : la propagation d'ondes contre le vent (à gauche) qui traversent le guide d'onde, la propagation d'ondes de gravité près du niveau critique (dont la longueur d'onde verticale tend progressivement vers 0) et la propagation d'ondes de gravité au delà du niveau critique pour des vitesses de phase ou des amplitudes fortes. La couleur rouge correspond à une amplitude positive et bleue à une amplitude négative. Les nuances de gris en fond correspondent aux variations de vent, les plus sombres correspondant aux valeurs les plus élevées du vent. Les lignes jaunes sont les limites des zones PML jouant le rôle de conditions absorbantes. 35

1.6 Exemple de grille 2-D en quinconce utilisée pour résoudre les équations d'Euler en pression-vitesse et initialement développée pour la résolution des équations de Maxwell (Yee, 1966). La pression est calculée à une demi-maille de la vitesse horizontale et verticale. (i, j) correspondent aux coordonnées de la maille dans la grille de différences finies. 37

1.7 Longueur d'onde verticale en fonction de la longueur d'onde horizontale pour plusieurs intensités de vent $w_x = 0, 10, 100$ m.s^{-1} et pour une fréquence $f = 10^{-3}$ Hz. On observe que les longueurs d'ondes verticales augmentent pour les longueurs d'ondes verticales croissantes. On note une singularité liée à une vitesse effective du vent nulle $\Omega = 0$ et des ondes évanescentes pour des ondes de fréquence et/ou des longueurs d'onde trop faibles par rapport à la fréquence de stratification $\Omega^2 > N^2$. 62

1.8 Exemple de discrétisation par différences finies conventionnelles d'une surface courbée. En rouge est visible l'approximation numérique de la surface et l'effet d'escalier induit. 62

1.9 Exemple de maillage avec raffinement de grille où les grilles les plus fines sont contenues dans les altitudes les plus faibles. A la jonction entre deux maillages il est nécessaire d'interpoler-extrapoler les inconnues vers le maillage le plus grossier. 65

2.1 Modélisation par ordinateur de l'atterrisseur déployé à la surface de Mars, les sismomètres seront installés dans la sphère sous vide située sur le sol à gauche de l'image. Crédit image : NASA/JPL-Caltech. 68

2.2 Propagation d'ondes sismo-acoustiques associées à l'entrée hyper-sonique d'une météorite et à son explosion ou son impact. Image inspirée de Edwards, Eaton et Brown, 2008. 69

2.3 Exemple d'un impact de météorite récent (moins de cinq ans) sur Mars ayant généré un cratère de 100 à 150 mètres. Crédit image : JPL/NASA/University of Arizona. 70

2.4 En haut, images extraites d'une simulation de la propagation linéaire d'ondes de gravité avec un tunnel de vent à $t = 2200$ s (première ligne) et $t = 4800$ s (deuxième ligne). Les images sont montrées en perturbation de vitesse verticale. Le domaine est de 400×108 km et l'atmosphère est isothermale avec une hauteur d'échelle $H = 10$ km. Le profil de vitesse du vent est tel que $v_{0,x} = 100.53e^{-\left(\frac{z-z_0}{10000}\right)^2}$ où z (km) est l'altitude et $z_0 = 30$ km est l'altitude du guide d'onde. Le forçage de la frontière inférieure est en déplacement vertical et tel que $u_z(x, z = 0, t) = exp(-(\frac{t-(t_0-P/4)}{P/4})^2)exp(-(\frac{x-(x_0-S/4)}{S/4})^2)$ où u_z le déplacement vertical, t le temps, $t_0 = 600$ s le temps de début de forçage, $T = 500$ s la période temporelle principale, x la position horizontale, $x_0 = 100$ km la position en x du forçage et $S = 8$ km la période spatiale principale. La fréquence principale de la frontière PML est $f_0 = 0.002$ s. Le carré vert correspond à la position de la station dont les signaux sont présentés en bas. Les lignes jaunes correspondent aux frontières du milieu PML. En bas, comparaisons en perturbation de vitesse verticale entre la solution exacte ("Exact solution in an open domain") et la solution numérique avec frontières PML ("Numerical solution with a PML layer") pour la station située à la position $x = 350$ km et $z = 62$ km. 104

3.1 Résultats de simulation pour la propagation d'ondes atmosphérique en 3-D au dessus de l'Océan indien. A gauche, images de perturbations de vitesse verticale à latitude constante $5°N$ et à longitude constante $90°E$ aux temps $t = 2470, 2670, 3280$ s avec, respectivement, les amplitudes maximum $A_{max} \approx 200, 500, 1000$ m.s^{-1}, situées au sein des rectangles verts. A droite, profils de vitesses de vents zonaux et méridionaux pour la simulation 3-D correspondant à l'image de la simulation 3-D au temps $t = 3280$ s. 116

4.1 A gauche, nombres de Richardson pour les vents zonaux (rouge) et méridionaux (bleu) pour le modèle MSIS au dessus de l'océan indien et, à droite, les valeurs correspondantes des vents zonaux et méridionaux (orange) et de la fréquence de Brunt-Vaïsälä (bleu). La limite $Ri = 1$ est indiquée par une ligne noire hachurée. 126

4.2 Évolution d'une instabilité à l'interface entre deux strates de densité et de vitesse moyenne (vent) différentes. Représentation en temps t et distance ξ sans dimensions. A partir de $t = 0.40\lambda/U$ s, on observe le renversement de l'interface et la génération du vortex qui s'en suit. Figure extraite de (Nappo, 2002, Ch. 5.3.2, p. 127). 127

4.3 Exemple de simulation de convection par instabilité de Rayleigh-Taylor à $t = 0.005, 7.5, 10$ s. Représentation en densité normalisée sur la plus forte valeur du domaine. Les teintes les plus sombres sont les densité les plus faibles et les plus claires sont les valeurs les plus élevées. Par l'effet de la gravité la discontinuité en densité provoque le développement de vortex liés à une instabilité de Rayleigh-Taylor. 127

4.4 Comparaison entre des simulations 2-D de l'évolution du champ de vitesse "cross-ridge" (m.s^{-1}) au dessus d'une colline après 48 h. La solution de gauche est calculée avec une condition "free slip" alors que la figure de droite avec une condition "no-slip". Figures extraites de (Peng et Thompson, 2003). La stratification initiale est donnée telle que $N = 1.3 \times 10^{-2}$ s^{-1} et le modèle de vent est uniforme $u_0 = 10$ m.s^{-1}. La colline est définie telle que $h(x) = \frac{h_{max}}{\left\{1+\left(\frac{x}{L_x}\right)^2\right\}^{3/2}}$ où x est la position horizontale, $h_{max} = 1$ km et $L_x = 126$ km. . 153

4.5 Réprésentation des propriétés moyennes de l'atmosphère reposant sur le modèle MSIS et HWM93 au niveau de l'océan indien. De gauche à droite, dérivée du tenseur visqueux de l'équation d'énergie correspondant à l'équation (4.10)-3 $\partial_z(v_{0,x}\mu\partial_z v_{0,x} + \kappa\partial_z T)$ (en violet) et profil de densité multipliée par la valeur absolue de l'accélération de la gravité $\rho \times g_z$ (en orange) et dérivée du tenseur visqueux correspondant aux équations du moment correspondant à l'équation 4.10-2 $\partial_z(\mu\partial_z v_{0,x})$ (en bleu). 155

4.6 A gauche, profils de pression (Pa) après régularisation par la méthode proposée dans (Hanique-Cockenpot, 2011) en utilisant le schéma de différences finies d'ordre élevé de (Hanique-Cockenpot, 2011, Annexe C.1). La précision h est fixée à $h = 10^{-14}$ N. A droite, évolution de l'erreur avec les itérations de l'algorithme de régularisation. 158

4.7 Comparaison à $t = 0.1$ s entre le résultat de simulations 2-D d'une instabilité de Rayleigh-Taylor (identique à celle présentée dans la figure 4.3) avec, à droite, un limiteur de pente "MUSCL-2" (Hesthaven et Warburton, 2007, Ch. 5, p. 150, eq. 5.27) et, à gauche, un limiteur de pente de type "MUSCL-1" (Van Leer, 1977). Les images sont représentées en densité. On observe que la diffusion de l'interface est plus importante pour le schéma de type "MUSCL-1". 161

4.8 En haut, les perturbation de pression pour la méthode de Galerkin discontinue ('Numerical') et la solution analytique ('Analytical') pour des pas d'espace $\Delta x = 250, 500, 1000$ m, ainsi que la différence absolue, multipliée par 10, ('Error×10') entre la solution analytique et numérique pour la résolution $\Delta x = 1000$ m. Les signaux sont montrés en temps pour la Simulation présentée dans la tableau 4.1 à deux stations aux altitudes, de gauche à droite, $z = 26$ km et $z = 79$ km, leur position en x étant $x = 500$ m. L'atmosphère est isothermale (Table 4.1). En bas, l'amplitude, en fonction du temps, de l'erreur absolue entre la perturbation de pression et le signal analytique pour divers pas d'espace $\Delta x = 250, 500, 1000$ m et, de gauche à droite, de deux altitude $z = 26$ km et $z = 79$ km. Pour les deux stations, l'amplitude de l'erreur décroît avec la diminution du pas d'espace. 163

4.9 Représentation des conditions de stabilité sur la résolution de la simulation numérique $\frac{\Delta t}{\Delta x}$, où Δt est le pas de temps et Δx le pas d'espace, en fonction du ratio de la densité atmosphérique sur le coefficient de viscosité dynamique $\frac{\rho}{\mu}$, où ρ est la densité atmosphérique et μ le coefficient de viscosité dynamique. La simulation considérée est la propagation d'une onde plane acoustique issue d'un forçage de la frontière inférieure sous forme d'une dérivée de gaussienne de période principale $P = 5$ s sur un domaine de dimensions 5×100 km dans une atmosphère homogène. Les croix rouges correspondent aux simulations instables et les triangles verts correspondent aux simulations stables. La ligne hachurée noire représente la limite de stabilité empirique des simulations numériques. 165

Liste des tableaux

1 Discrétisation et expression de la solution numérique employées par différentes méthodes pour l'équation de conservation de la masse en 1-D (ρ est la densité et v_x la vitesse). "DF" correspond à Différences Finies, "VF" à Volumes finis, "EFC" Éléments Finis Continus et "EFD" Éléments Finis Discontinus. Δx est le pas d'espace dans le cas des différences finies. L'indice i correspond au noeud x^i et l'indice k correspond à l'élément Ω^k. $\Omega = \cup_{k=1,K}\Omega^k$ correspond au domaine de calcul, Γ étant sa frontière, avec Ω^k le k-ème élément, Γ^k sa frontière, K le nombre d'éléments. $\mathbf{n}$ est la normale extérieure. Φ est une fonction test, Ψ est une fonction de forme et $(b_i^k)_{k=1,K;i=1,N_c}$ sont les coefficients de la base de discrétisation polynomiale des méthodes "EFC" et "EFD". Enfin, $(N^k)_{k=1;K}$ sont les fonctions de forme pour la formulation continue "EFC". 19

4.1 H est la hauteur d'échelle, g_z l'accélération de gravité, γ le ratio de capacité thermique, c la vitesse adiabatique du son et P la période principale de forçage. 163

Table des sigles et acronymes

DG	Discontinuous Galerkin
EFD	Elements Finis Discontinus
FEM	Finite Element Method
EFC	Elements Finis Continus
VF	Volumes Finis
FD	Finite differences
SEM	Spectral Element Method
CFL	Courant-Friedrichs-Lewy
GCM	Global Circulation Model
PML	Perfectly Matched Layer
MUSCL	Monotonic Upstream-Centered Scheme for Conservation Laws
ENO	Essentially Non-Oscillatory
WENO	Weighted Essentially Non-Oscillatory
TVD	Total variation diminishing
TVDM	Total variation diminishing in the Mean
CTBT	Comprehensive nuclear-Test-Ban Treaty
GPS	Global Positioning System
MSIS	Mass Spectrometer Incoherent Scatter radar
NRL	Naval Research Laboratory
G2S	Ground to Space
HWM	Horizontal Wind Model
NWP	Numerical Weather Prediction
ISAE	Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace
INSIGHT	Interior Exploration using Seismic Investigations, Geodesy and Heat Transport
NASA	National Aeronautics and Space Administration
GJI	Geophysical Journal International
SSR	Space Science Reviews
GRL	Geophysical Research Letters

Introduction

Le 11 mars 2011, le séisme de Tohoku de magnitude 9.1 dont l'épicentre se situait près de la côte est de la plus grande île du Japon, Honshu, fut l'un des plus puissants et destructeurs tremblement de Terre depuis le début du siècle dernier (Mori et al., 2011). Le glissement de terrain induit par le séisme provoqua un changement brutal du niveau de l'océan pacifique sur plusieurs centaines de kilomètres ce qui donna naissance à un tsunami qui frappa les côtes japonaises avec une hauteur de près de 38 m à son maximum dans la zone de Tohoku (Chum et al., 2012).

Malgré les dommages matériels, l'ampleur de cette catastrophe permit néanmoins à la communauté scientifique d'étudier avec précision les phénomènes géophysiques qu'elle a induits d'un point de vue sismique (Koper et al., 2011 ; Matsuo et Heki, 2011 ; Simons et al., 2011) et à la surface grâce à l'imagerie satellite (Pour, Hashim et Marghany, 2011) mais aussi son impact atmosphérique avec la propagation d'infrasons et d'ondes de gravité liées au tsunami. Cet évènement permit d'utiliser plusieurs techniques indirectes d'observations en haute altitude du tsunami, des détections de perturbations ionosphériques grâce au réseau GPS (Rolland et al., 2011) et de valider les méthodes de détection par airglow (Makela et al., 2011 ; Occhipinti et al., 2011).

De plus, pour la première fois, des mesures directes du passage des infrasons et ondes de gravité post-sismiques furent réalisées. En effet, le satellite GOCE orbitant à 270 km d'altitude, et initialement conçu pour calculer les perturbations du champs de gravité (Drinkwater et al., 2003), croisa et mesura à trois reprises les fronts d'ondes acoustiques et de gravité induits par le tsunami (Garcia et al., 2013). Équipé d'une plate-forme de compensation de traînée et de trois accéléromètres de très grande précision (Floberghagen et al., 2011), il permit de relever de fortes perturbations de densité (perturbations jusqu'à 11% de la densité de l'air) à très basse fréquence entre 6 et 14 mHz, marqueurs de l'oscillation de l'océan due au raz-de-marée de Tohoku (Garcia et al., 2014). Une représentation graphique des phénomènes de propagation atmosphérique liés au déplacement tsunami est visible dans la figure 1.

Les ondes atmosphériques issues des phénomènes sismiques sont de précieuses informations en complément des systèmes temps réel déjà implémentés (Titov et al., 2005) afin de comprendre, prédire, voire alerter sur l'impact d'un tsunami (Raveloson et al., 2012). En effet, ces signaux basses fréquences contiennent les caractéristiques du tsunami et de la structure de l'atmosphère. Déterminer ces formes d'onde permet donc, tout comme l'étude des ondes de surface de Rayleigh (Ducic, Artru et Lognonné, 2003), de remonter à la dynamique du tsunami lui-même voire son origine et/ou compléter des mesures de surface (Artru et al., 2005 ; Romanowicz, 2002).

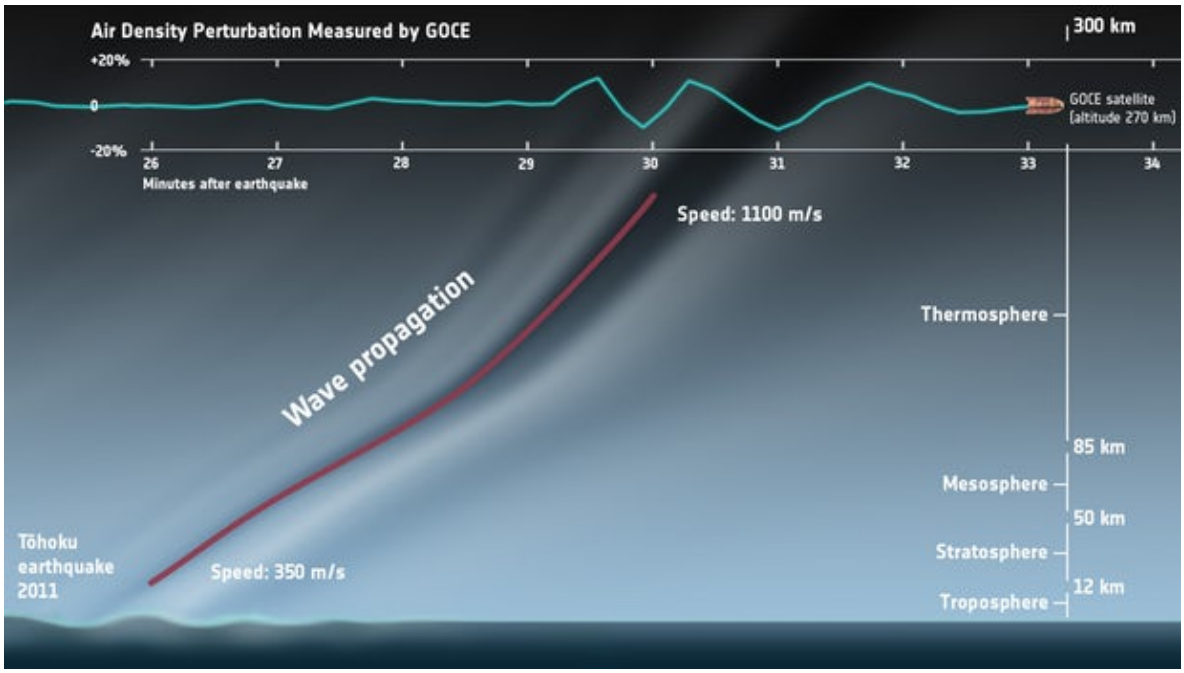

FIGURE 1 – Représentation schématique du trajet de propagation des ondes atmosphériques issues du tsunami de Tohoku en 2011 et du chemin du satellite GOCE. Crédit : ESA/IRAP/CNES/TU Delft/HTG/Planetary Visions

Le satellite GOCE, capturant avec précision pour la première fois les ondes acoustiques depuis l'atmosphère et étendu plus tard aux ondes de gravité (GARCIA et al., 2014), ranima une fois encore l'intérêt et l'importance de l'étude des infrasons et des ondes de gravité comme marqueurs de l'activité tectonique et facteurs capitaux dans la dynamique atmosphérique.

Couplage entre la Terre et l'atmosphère

Afin de comprendre la dynamique des ondes atmosphériques, il est nécessaire d'étudier le couplage entre la Terre ou l'océan et l'atmosphère. Traditionnellement, les sismologues considèrent la frontière Terre-atmosphère comme une frontière libre et les climatologues comme une frontière rigide car le contraste de densité ($\approx$ 1.2 kg.m^{-3} et 2700 kg.m^{-3}) et de vitesse des ondes de pression ($\approx$ 300 m.s^{-1} et 6000 m.s^{-1}) est extrêmement élevé. Mais cette approximation n'est pas la plus rigoureuse car bien qu'une partie de l'énergie soit réfléchie, un faible pourcentage est transmis dans l'atmosphère. La Terre et l'atmosphère sont ainsi couplées mécaniquement (LOGNONNÉ, CLÉVÉDÉ et KANAMORI, 1998b) par la propagation d'ondes de surface sur leur interface et par différents phénomènes de rupture (éruptions volcaniques, effondrement de terrain). Ce couplage se traduit alors par la propagation d'ondes atmosphériques dont les caractéristiques dépendent des propriétés des phénomènes sismiques les ayant générées.

Développement de la théorie des infrasons et des ondes de gravité

Préalablement à la découverte des ondes de gravité, les infrasons, gamme basse fréquence des ondes acoustiques, sont connues depuis plusieurs siècles. Les observations remontent à la fin du 19ème siècle lors de l'éruption volcanique de Krakatoa en Indonésie en juillet 1883. Suite à cet évènement, Verbeek, ingénieur hollandais contemporain de l'explosion, s'est intéressé aux perturbations relevées par les baromètres à travers le monde et fut amené à découvrir l'existence des ces ondes basses fréquences se propageant sur de très longues distances (Symons 1888). Mais à cette époque, aucun signe d'ondes de gravité ne fut capturé et il fallut attendre le siècle suivant pour voir l'avènement d'une nouvelle théorie regroupant infrasons et ondes de gravité.

De nombreuses études furent réalisées depuis la première moitié du 20ème siècle sur la propagation des ondes atmosphériques. Pour une grande majorité d'entre elles leur motivation initiale s'inscrivait dans la surveillance des explosions et notamment des explosions nucléaires à l'origine de signaux atmosphériques sur un très large spectre de fréquence (Hines, 1972). Néanmoins, parallèlement, certaines études se concentrèrent sur d'autres aspects de la propagation notamment liés à la topographie (Gossard et Munk, 1954 ; Queney, 1948 ; Sawyer, 1959 ; Scorer, 1949). Une avancée significative sur la théorie des ondes de gravité fut apportée grâce au travail de Hines (Hines, 1960) tentant d'expliquer l'origine de certains phénomènes de turbulences dans l'ionosphère. Son article de 1965 (Hines, 1965) regroupe d'ailleurs presque la globalité de la théorie linéaire sur la propagation des ondes de gravité.

Cette théorie repose sur de fortes hypothèses sur le milieu de propagation. Afin de supporter la propagation d'ondes de gravité, un fluide doit être stratifié stablement. Les fluides stratifiés stablement correspondent, en approche adiabatique, à un milieu pour lequel la densité décroît avec l'altitude, à l'inverse d'un fluide instable tel qu'un fluide en convection. En dehors des premiers kilomètres d'altitude, c'est à dire la troposphère, on peut considérer l'atmosphère comme un fluide stratifié stablement. Dans ce cadre, une parcelle d'air déplacée verticalement dans l'atmosphère se voit exercer une force opposée à son mouvement appelée portée d'Archimède, de la même manière qu'un ressort subit une force de contraction lorsqu'on l'étire et d'expansion lorsqu'on le compresse.

Ainsi, lorsqu'une interface entre deux fluides stratifiés ou un fluide stratifié et un solide se déforme, les parcelles déplacées verticalement vont subir une force restauratrice liée à la force de portée. Si cette parcelle dépasse sa position d'équilibre, elle va alors être déplacée de nouveau par la force de gravité. Ce mouvement de ressort va donc provoquer une oscillation de l'interface en temps et en espace qui est à l'origine des ondes de gravité (dont le nom provient de cette force restauratrice). Mais tous les mouvements oscillatoires ne supportent pas la propagation d'ondes de gravité, et il existe une borne supérieure pour leur fréquence d'oscillation, appelée fréquence de Brunt-Väisälä. Cette borne est déterminée par les propriétés de stratification du milieu (variation de densité principalement) et est définie par $N \approx \sqrt{-\frac{g}{\rho}\partial_z \rho}$

où ρ est la densité atmosphérique et g la norme de la force de gravité. Si l'oscillation est de fréquence supérieure à N, les ondes générées seront évanescentes et ne se propageront pas dans le milieu. Si la variation de densité est négative, i.e $\partial_z \rho < 0$, le fluide n'est plus stratifié stablement et rentrera en convection.

Afin d'expliquer plus clairement ce point, nous pouvons étudier la relation de dispersion des ondes gravito-acoustiques en 2-D dans une atmosphère non atténuante avec un vent constant en espace. La relation de dispersion est une relation entre les nombre d'ondes horizontaux (k, l) et le nombre d'onde vertical m (par rapport à la direction de la force de gravité) et la fréquence de l'onde. On commence par écrire les équations d'Euler régissant la propagation d'ondes acoustiques et de gravité telles que

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{v} + \mathbf{V}_0.\nabla \mathbf{v} &= -\tfrac{1}{\rho_0}\nabla p - \mathbf{g}, \\ \partial_t p + \mathbf{V}_0.\nabla p &= -\rho_0 c^2 \nabla.\mathbf{v} - \rho_0 \mathbf{v}.\mathbf{g}, \\ \partial_t \rho + \mathbf{V}_0.\nabla \rho &= -\rho_0 \nabla.\mathbf{v}, \end{aligned} \tag{1}$$

où $\mathbf{v}$ est la perturbation de la vitesse des particules, ρ la perturbation en densité atmosphérique, $\rho_0 = \tilde{\rho}_0 e^{-\frac{z}{H}}$ la densité atmosphérique avec $\tilde{\rho}_0$ la densité de surface et H la hauteur d'échelle, p la perturbation en pression, $\mathbf{V}_0 = (u_0, v_0)$ le vent horizontal, c la vitesse adiabatique du son et $\mathbf{g}$ est l'accélération par la force de gravité. On considère alors une solution d'onde plane sous la forme

$$u(x, z, t) = A e^{\frac{z}{2H}} e^{i(kx - \Omega t)}, \tag{2}$$

où $\mathbf{k} = (k, m)$ est le vecteur d'onde, A l'amplitude de l'onde plane, i un nombre complexe, t le temps et Ω la fréquence intrinsèque telle que

$$\Omega = \omega - k u_0. \tag{3}$$

La fréquence définie dans (3) correspond à la fréquence observée dans un référentiel se déplaçant avec le vent. On peut tout d'abord observer que le vent a un impact majeur en modifiant le contenu fréquentiel d'une onde lorsque observée depuis un référentiel fixe, effet nommé effet Doppler. Les ondes dans le sens du vent ayant une fréquence plus importante que dans le sens opposé au vent. Cela se traduit aussi par la réfraction des ondes lorsqu'il y a de forts gradients de vent. Nous reviendrons sur ces points dans la section 1. Dans l'expression de la solution (2) on considère une dépendance exponentielle de l'amplitude avec l'altitude. Ceci se justifie avec le profil de densité $\rho_0 \approx e^{-\frac{z}{H}}$ et en déterminant les solutions d'ondes planes propagatrices en altitude (Nappo, 2002, Ch. 2.1) .
Dans cette configuration si l'on injecte la solution dans le système (1), la relation de dispersion des infrasons et des ondes de gravité est donnée par l'équation suivante (Hines, 1960)

$$m^2 = \frac{k^2(N^2 - \Omega^2)}{\Omega^2} - \frac{1}{4H^2} + \frac{\Omega^2}{c^2}. \tag{4}$$

On peut dégager plusieurs modes de propagation depuis la relation de dispersion (4). Tout d'abord si l'on étudie les mouvements basses fréquences telles que $\Omega < N$, on décrit

alors les ondes de gravité. L'équation de dispersion (4) se simplifie donc en négligeant le terme acoustique

$$m^2 = \frac{k^2(N^2 - \Omega^2)}{\Omega^2} - \frac{1}{4H^2}. \tag{5}$$

De la relation de dispersion (5) on peut déduire la vitesse de groupe v_g pour des nombres d'onde horizontaux et verticaux positif $\mathbf{k} > \mathbf{0}$ (les résultats sont similaires quelques soient des nombres d'onde non nuls) (Nappo, 2002)

$$\mathbf{v}_{g,m} = v_0\mathbf{e}_x + \begin{cases} \frac{m^2}{N^2}(c - u_0)^3, \\ \frac{-km}{N}(c - u_0)^3, \end{cases} \tag{6}$$

où $\mathbf{e}_x = (10)$ est le vecteur unitaire dans la direction x, β est l'angle fait par le vecteur d'onde avec l'horizontale tel que $\cos\beta = \frac{\omega}{N}$. Quelle que soit la vitesse du vent on observe alors que vitesses de groupe et de phase sont orthogonales. En effet, si l'on considère la vitesse de groupe dans le référentiel inertiel $\tilde{\mathbf{v}}_{g,m} = \mathbf{v}_{g,m} - \mathbf{V}_0$ et sachant que la vitesse de phase est dans la direction du nombre d'onde $\mathbf{k}$, on obtient

$$\tilde{\mathbf{v}}_{g,m}.\mathbf{k} = k(u_0 + \frac{m^2}{N^2}(c - u_0)^3) + m(\frac{-km}{N}(c - u_0)^3) - u_0k = 0. \tag{7}$$

La relation de dispersion (5) et les vitesses définies dans (6) signifient, d'une part, que les ondes de gravité se propagent en deça de la vitesse du son (Godin, 2012) et, d'autre part, que lorsqu'un front d'onde de gravité se propage de manière descendante, l'énergie se propage de manière ascendante. Ceci peut être observé dans la figure 2 présentant la propagation d'une onde de gravité lors d'une simulation numérique où est clairement visible l'orthogonalité entre vitesse de groupe et vitesse de phase. Ces ondes internes sont des éléments importants dans la dynamique de l'atmosphère, elles se propagent sur de longues distances et, étant peu atténuées, participent à distribuer l'énergie sur l'ensemble de l'atmosphère (Fritts et Alexander, 2003). Il est important de noter que nous nous sommes restreints à l'impact des forces de gravité et de portée mais pour des ondes de gravité de très grande échelle temporelle (de l'ordre du jour), les effets de la force de Coriolis deviennent non négligeables et doivent être pris en compte dans la description du mouvement des particules, on nomme alors ces mouvements, ondes inertielles. Ce mouvement de rotation induit une limite basse fréquence pour la propagation des ondes de gravité caractérisée par la fréquence inertielle ω_{cor} telle que $N < \omega < \omega_{cor}$ pour ω la fréquence de l'onde de gravité. Mais nous n'aborderons pas ce point dans cette thèse.

Ce mouvement particulier, lié aux ondes de gravité, couvre uniquement les modes très basses fréquences (en deçà de la fréquence de Brunt-Väisälä) mais ce n'est pas le seul mouvement mécanique supporté dans l'atmosphère. En effet, si l'on considère maintenant une approche haute fréquence, c'est à dire $\Omega >> N$, l'équation se simplifie et laisse apparaître la relation de dispersion purement acoustique telle que

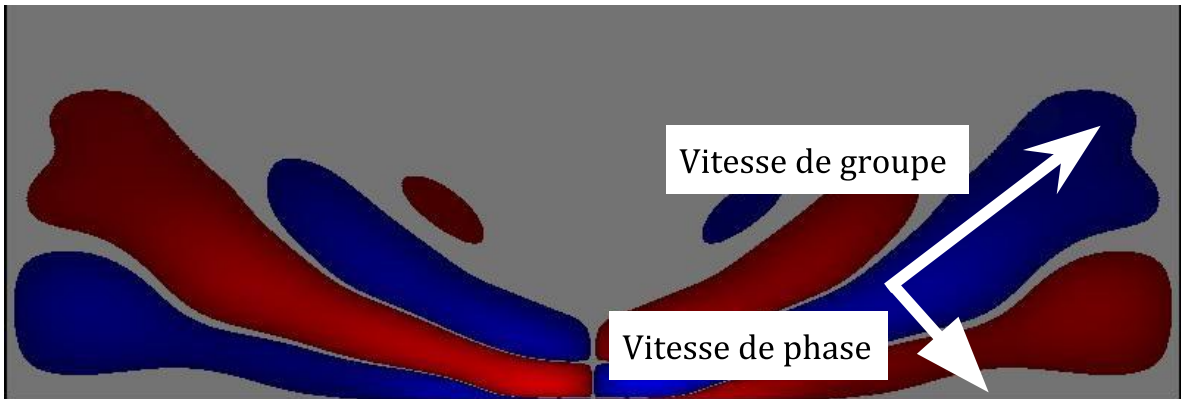

FIGURE 2 – Exemple de simulation numérique de la propagation d'onde de gravité en perturbation vitesse verticale après $t = 1000$ s d'oscillation du sol sur 80 km et à 900 s de période principale. Le domaine est de 400×160 km et l'atmosphère est basée sur le modèle MSISE-00 (PICONE et al., 2002). La couleur rouge correspond à une amplitude positive et bleue à une amplitude négative.

$$m^2 + k^2 = -\frac{1}{4H^2} + \frac{\Omega^2}{c^2}. \tag{8}$$

Afin d'obtenir une solution propagatrice en altitude, dont le nombre d'onde vertical est purement réel, cela impose la condition suivante sur l'équation (8)

$$\frac{\Omega^2}{c^2} > \frac{1}{4H^2} \Leftrightarrow \Omega > \frac{c}{2H} = \omega_c, \tag{9}$$

où $\omega_c = \frac{c}{2H}$ est la fréquence de coupure acoustique. La compressibilité induite par le terme $\frac{1}{4H^2}$ implique la dispersion des ondes acoustiques lors de leur propagation, c'est à dire que leur vitesse de phase est dépendante de la fréquence. Si l'on calcule la vitesse de phase verticale $v_{\Phi,m}$, on obtient

$$\begin{aligned} v_{\Phi,m} = \frac{\Omega}{m} &= \frac{\Omega}{\sqrt{-\frac{1}{4H^2} + \frac{\Omega^2}{c^2} - k^2}}, \\ &= \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\Omega^2} - \frac{c^2 k^2}{\Omega^2}}}. \end{aligned} \tag{10}$$

Afin de voir cet effet plus clairement, on considère une onde plane telle que $k = 0$. L'équation (10) devient donc

$$v_{\Phi,m} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\Omega^2}}}. \tag{11}$$

En considérant $\Omega \to \omega_c$ dans l'équation (11), on obtient $v_{\Phi,m} \to +\infty$, c'est à dire que les composantes les plus basses fréquences de la gamme acoustique sont les plus véloces. On comprend alors que les ondes acoustiques se propagent, par compression et raréfaction des particules (PAIN et WATERHOUSE, 1970), à une vitesse supérieure à la vitesse adiabatique du son (343 m.s^{-1} à 20° dans l'air) et sont bornées inférieurement par la fréquence de coupure

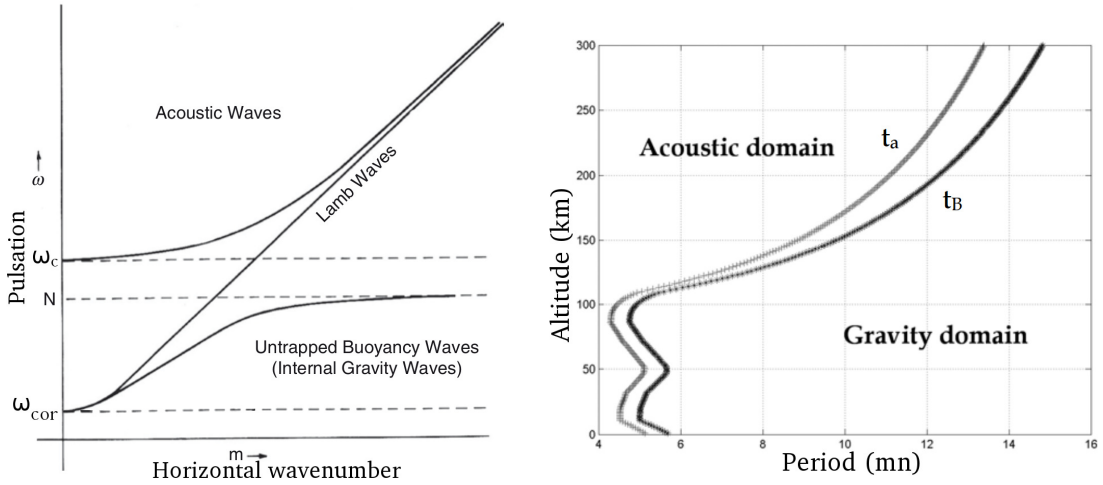

FIGURE 3 – A gauche, le domaine fréquentiel des différents modes de propagation basse fréquence dans l'atmosphère en fonction du nombre d'onde horizontal. ω_c est la fréquence de coupure acoustique, N la fréquence de Brunt-Väisälä. Figure extraite de (EVERS et HAAK, 2010). A droite, les domaines temporels (en minutes) des modes de propagation acoustiques et de gravité dans l'atmosphère en fonction de l'altitude (en km). t_a = correspond à la période de coupure acoustique et t_B la période de Brunt-Väisälä. Figure extraite de KNÍŽOVÁ et MOŠNA, 2011.

acoustique ω_c. Ceci est visible dans la figure de droite de la figure 3 sur laquelle sont représentés les domaines temporels de propagation des modes acoustiques et de gravité en fonction de l'altitude. On observe que les fréquences de coupure acoustique et de gravité (fréquence de Brunt-Väisälä) changent avec l'altitude du fait de la stratification non homogène de l'atmosphère en température, densité et composition.

Il est important de noter qu'entre la fréquence de coupure acoustique et la fréquence de Brunt-Väisälä, les modes de propagation d'ondes acoustiques et de gravité sont évanescents, un autre mode de propagation rentre alors en jeu, le mode de Lamb. Une représentation graphique des domaines de propagation dans le plan fréquence et nombre d'onde horizontal est donnée dans la figure de gauche de la figure 3 où le mode de Lamb intervient entre les fréquences de coupure acoustique et de gravité. En effet, si l'on retourne à l'équation (4) pour la gamme de fréquence $N > \Omega > w_c$, on obtient $m^2 < 0$, m est donc purement complexe et cela implique que les ondes de Lamb sont evanescentes en altitude. De plus, contenues près de la surface, ces dernières se propagent à la vitesse du son et de manière non-dispersive et ne sont donc pas des facteurs importants dans la dynamique de l'atmosphère. Par conséquent, nous ne nous pencherons pas sur cet aspect.

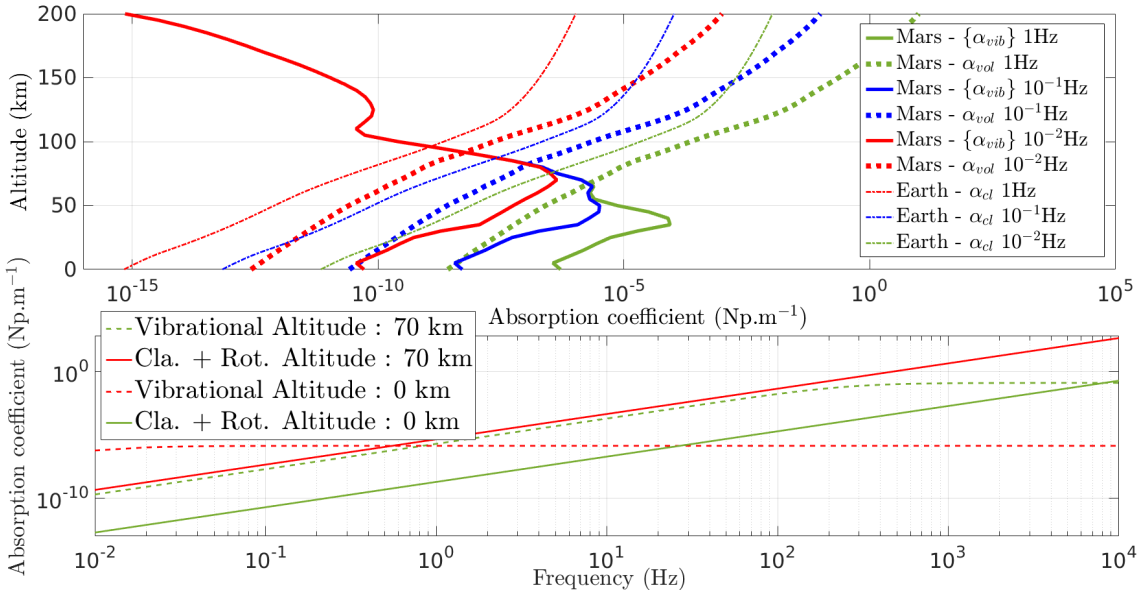

FIGURE 4 – Au dessus, les coefficients d'absorption vibrationnelle $\{\alpha_{vib}\}$ et la somme entre les coefficients d'absorption volumique (absorption rotationnelle et classique) en fonction de l'altitude sur Mars à plusieurs fréquences. Ainsi que l'absorption classique en fonction de l'altitude pour les mêmes fréquences sur Terre. En bas, les coefficients d'absorption vibrationnelle et d'absorption volumique sur Mars et à différentes altitudes en fonction de la fréquence. Image extraite de l'article (GARCIA et al., 2016).

Propriétés de l'atmosphère et propagation des ondes gravito-acoustiques

Lorsqu'on étudie les traces atmosphériques d'explosions ou de phénomènes sismiques nous pouvons alors nous restreindre à deux classes principales d'ondes de pression atmosphériques : les ondes de gravité et les infrasons. Deux propriétés physiques de l'atmosphère permettent l'observation des ondes gravito-acoustiques sur de grandes distances : les effets visqueux et de relaxation faibles à basse fréquence (BASS et al., 1995) et la décroissance de la densité avec l'altitude. Le premier s'explique par la dépendance fréquentielle des deux phénomènes principaux de dissipation dans l'atmosphère, l'un dû au transport au sein du gaz (diffusion moléculaire, friction interne et conduction thermique) et l'autre à la relaxation liée à l'énergie de compression. Ces phénomènes sont dépendants de la fréquence et sur Terre s'expriment en inverse de la fréquence au carré agissant donc comme un filtre passe-bas. Cette affirmation n'est valable que sur Terre. Par contre, pour d'autres atmosphères planétaires, telle que l'atmosphère de Mars qui est composée principalement de CO_2, les mouvements de particules subissent une relaxation vibrationnelle forte autour d'une fréquence de relaxation principale et l'absorption ne suit donc pas la même loi en fréquence que sur Terre ce que nous pouvons observer dans la figure 4 (BASS et CHAMBERS, 2001b).

La seconde contribution majeure correspond à la décroissance exponentielle de la densité avec l'altitude visible sur la figure 5 qui provoque, par conservation de l'énergie cinétique et

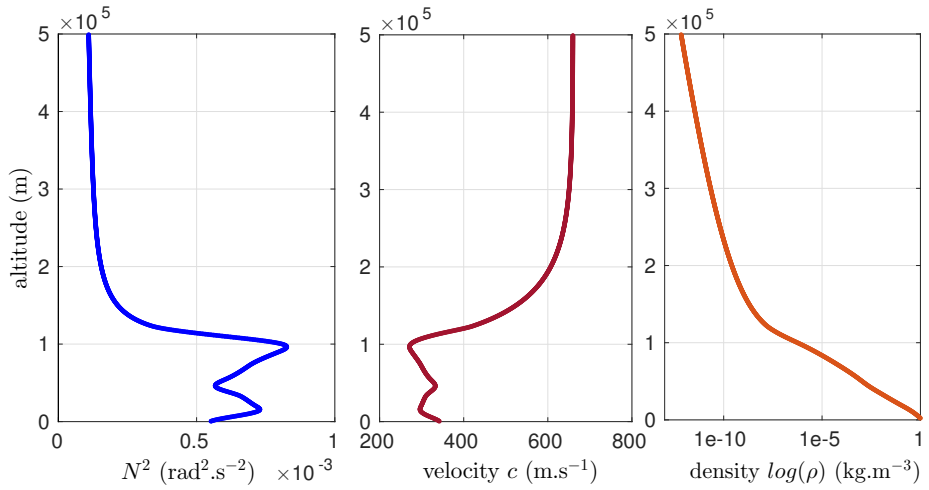

FIGURE 5 – De gauche à droite, les profils de fréquence de Brunt-Väisälä (rad^2.s^{-2}), de vitesse du son adiabatique (m.s^{-2}) et de densité atmosphérique (log[kg.m^{-3}]) en fonction de l'altitude. Ces profils sont extraits du modèle empirique MSISE-00 (PICONE et al., 2002).

en l'absence de phénomènes de dissipation internes (BASS et al., 1984), l'augmentation de la vitesse locale des particules au passage de l'onde.

Ce sont principalement pour ces raisons que les ondes basses fréquences, infrasons et ondes de gravité, sont amplifiées et peuvent se propager sur de longues distances.

Sources terrestres d'infrasons et d'ondes de gravité

Sur Terre, un très grand nombre d'évènements géophysiques peuvent générer ces infrasons et ondes de gravité et ainsi être observés dans la haute atmosphère, un résumé schématique en est d'ailleurs présenté dans la figure 6. Parmi ces sources d'infrasons, les phénomènes de couplage entre la Terre et l'atmosphère sont à l'origine de détections dans la haute atmosphère voire dans l'ionosphère (BLANC, 1985a ; LIU et al., 2006).

On peut déceler trois mécanismes de couplage sismique donnant lieu à des ondes atmosphériques. Ces phénomènes sont représentés sous forme schématique dans la figure 7. Premièrement, les mouvements soudains du niveau du sol dus aux tremblements de terre peu profonds sont une première source d'infrasons en modifiant brutalement le niveau de pression au dessus de la surface (HARKRIDER, 1964), cette "discontinuité" générant par conséquent des ondes acoustiques sur une large gamme de fréquences mais principalement dans les hautes fréquences. Ces phénomènes sont observés depuis les années 1930 (BENIOFF et GUTENBERG, 1939 ; BENIOFF, 1951 ; CHRZANOWSKI et COOK, 1960), mais les observations restèrent limitées jusque dans les années 1960 et le tremblement de Terre d'Alaska en 1964 de magnitude

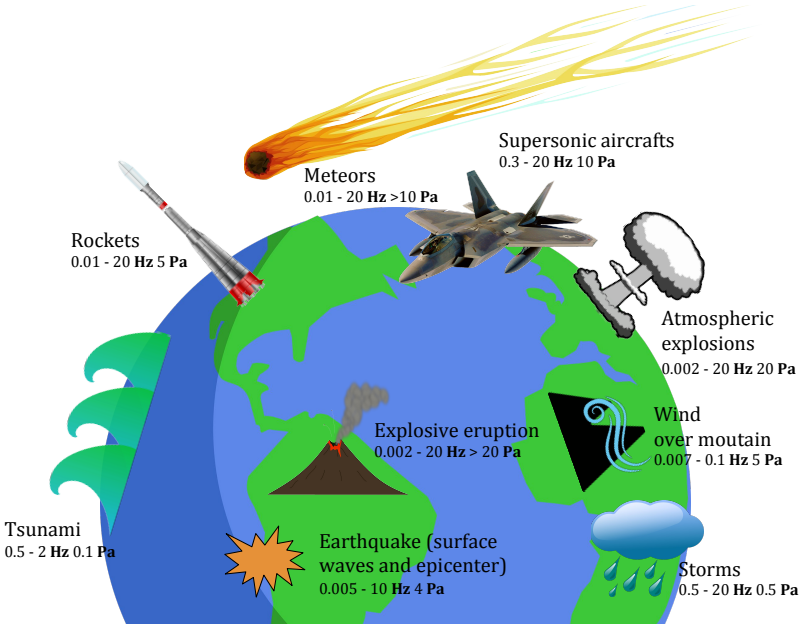

FIGURE 6 – Résumé des différentes sources d'infrasons et d'ondes de gravité sur Terre. Les valeurs indiquées correspondent à la gamme de fréquence moyenne pour chacun des évènements ainsi que les valeurs maximums moyennes observées. Ces valeurs sont extraites de (CAMPUS et CHRISTIE, 2010).

≈ 9 qui généra des ondes jusqu'à 10^{-3} Hz se propageant sur de longues distances (MIKUMO, 1968 ; YOUNG et GREENE, 1982). Dès lors, la meilleure compréhension des phénomènes de propagation ainsi que les avancées techniques dans l'instrumentation (avec notamment le déploiement du réseau IMS, International Monitoring System (BRACHET et al., 2010)), rendirent possibles de nombreuses nouvelles observations (BOWMAN et BEDARD, 1971 ; COOK, 1971 ; LE PICHON et al., 2003 ; TAKAHASHI, KOYAMA et ISEI, 1994).

Deuxièmement, la propagation d'ondes de surface sismiques (ondes de Rayleigh) peut induire l'émission d'infrasons (WATADA et al., 2006). En 1964, Donn et Posmentier (DONN et POSMENTIER, 1964) ont montré que le déplacement du sol dû aux ondes de Rayleigh a provoqué des changements de pression sur leurs instruments de mesure après le grand séisme en Alaska. Ces infrasons se propagent de manière quasi-verticale et à de grandes vitesses (entre 1 à 8 km.s^{-1}) du fait du couplage entre la vitesse horizontale des ondes à l'interface fluide-solide. De surcroît depuis l'évènement de Sumatra en 2004 de magnitude $M_w = 9$ (ALCOVERRO, MARTYSEVICH et STAROVOIT, 2005 ; KIM, HAYWARD et STUMP, 2004 ; LE PICHON et al., 2005), un grand nombre de signaux générés par les ondes de surface de Rayleigh furent observés (ROLLAND, LOGNONNÉ et MUNEKANE, 2011). Les ondes de Rayleigh ne sont pas simplement générées par des tremblements de Terre mais aussi par un certain nombre d'évènements géophysiques tels que les éruptions volcaniques (KANAMORI et MORI, 1992 ; WIDMER et ZÜRN, 1992) ou les turbulences atmosphériques (KOBAYASHI et NISHIDA, 1998 ; SUDA, NAWA et FUKAO, 1998 ; TANIMOTO, 1999).

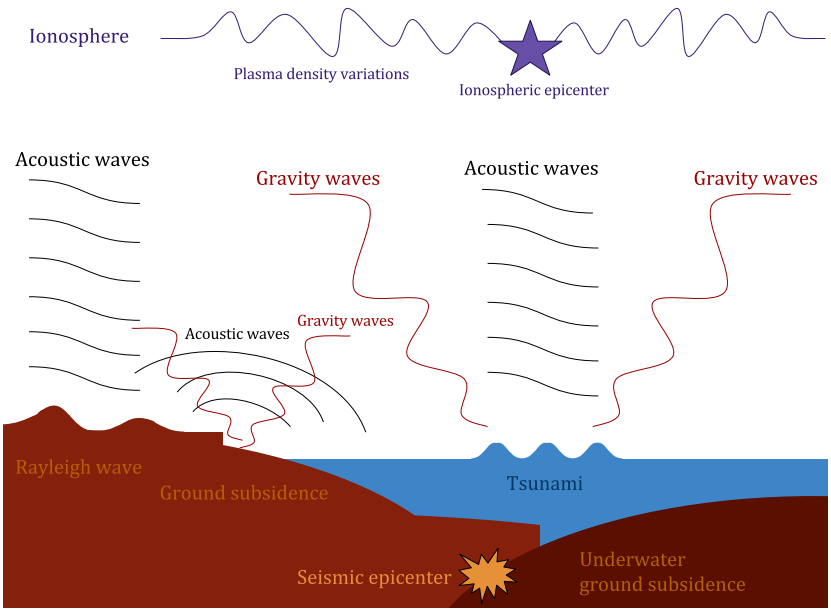

FIGURE 7 – Représentation schématique de la génération d'ondes gravito-acoustiques liées à un évènement sismique et couplage à l'ionosphère.

Enfin les tsunamis, ondes de surface océaniques résultant d'un tremblement de Terre ou d'un changement du niveau du plancher océanique, et oscillant à très basse fréquence à la surface de la mer, génèrent des infrasons et des ondes de gravité. La description théorique du couplage entre l'océan et l'atmosphère fut contemporaine de Hines (DONN et MCGUINNESS, 1960), mais c'est lors du grand séisme d'Alaska que des observations d'infrasons permirent de conjecturer, à partir de leur temps d'arrivée, que les tsunami agissaient comme source secondaire d'ondes atmosphériques (MIKUMO, 1968). Ce type d'onde de surface est appelée onde de surface de gravité et est associée à l'écoulement de l'océan sous l'effet de la pesanteur terrestre (LANDER et LOCKRIDGE, 1989). L'évènement de Sumatra en 2004 permis d'affiner notre compréhension de ce phénomène et de réaliser les première observations claires d'ondes gravito-acoustiques induites par le tsunami (ARTRU et al., 2005 ; LIU et al., 2006 ; LIU et al., 2006 ; OCCHIPINTI et al., 2006). Ces dernières observations s'avèrent très riches et importantes afin de déterminer la dynamique des tsunamis et celle de la source sismique (OCCHIPINTI et al., 2013).
Pour une liste plus exhaustive de l'historique de ces observations, le lecteur peut se référer à (CAMPUS et CHRISTIE, 2010).

Puisque notre intérêt principal est d'étudier l'impact sur l'atmosphère des phénomènes sismiques, nous nous sommes concentrés jusqu'à présent sur les problèmes de couplage, mais d'autres phénomènes, principalement liés à la topographie et aux explosions, sont à l'origine d'infrasons voire d'ondes de gravité. Les éruptions volcaniques génèrent des infrasons avec l'éjection explosive de gaz et de lave. Cette quantité de matière éjectée pendant l'éruption

est dépendante de la taille de l'explosion et va déterminer, en fonction de la distance à la source, l'amplitude ainsi que la fréquence principale des infrasons émis (Dabrowa et al., 2011 ; Douglass et Knox, 2005 ; Evers et Haak, 2001, 2005 ; Goerke, Young et Cook, 1965 ; Liszka et Garces, 2002).
Beaucoup d'études se sont concentrées depuis les années 1970 sur la propagation d'infrasons liés à la topographie. Le déplacement des masses d'air au dessus des chaînes de montagne est à l'origine d'ondes très basses fréquences (de 0.007 à 0.1 Hz), de faible amplitude et se propageant sur parfois plus de 10000 km (Chimonas, 1977), nommées ondes de montagne. Ces ondes sont statiques par rapport à la topographie qui les a générées mais peuvent transporter de l'énergie depuis la basse atmosphère jusque dans la moyenne atmosphère. Nous ne nous concentrerons par sur cet aspect, car indépendant des phénomènes sismiques, mais ces ondes jouent un rôle important dans la dynamique de l'atmosphère (Larson et al., 1971 ; Lott et Teitelbaum, 1993 ; Smith, 1979 ; Wilson, Szuberla et Olson, 2010).
Pour une revue plus complète de l'origine des infrasons dans l'atmosphère (orages, activité humaine, aurores boréales), un résumé clair est proposé dans (Le Pichon, Blanc et Hauchecorne, 2010).

Phénomènes de propagation non-linéaires et limites de la théorie linéaire

Les évènements précédemment cités sont en général étudiés à l'aide de la théorie linéaire des ondes de gravité mais ceci peut présenter des inconvénients majeurs lors de l'interprétation d'observations réelles ou des résultats de modélisation. En effet, comme discuté dans plusieurs ouvrages (Finnigan, 1988 ; Hunt, Kaimal et Gaynor, 1985), certaines des observations ne peuvent pas être expliquées par la théorie linéaire, notamment les phénomènes turbulents liés à l'effondrement ("breaking" en anglais) des ondes de gravité (Dörnbrack, 1998). Le choix de la théorie linéaire se justifie alors par deux raisons principales : lorsque les vents zonaux et méridionaux restent faibles (comparés à l'amplitude de l'onde) et qu'ils varient peu en temps (hypothèse des petites perturbations), la propagation d'ondes basses fréquences à nombre de Mach faible est bien capturée par la théorie linéaire (Dörnbrack et Nappo, 1997). Mais dès que le nombre de Mach tend vers 1, c'est-à-dire que la vitesse locale des particules liées au déplacement de l'onde tend vers la vitesse du son adiabatique (dans la haute atmosphère par exemple), cette hypothèse n'est plus valable et l'explication de certaines observations dans l'atmosphère requiert l'extension aux non-linéarités. Ceci peut par exemple être observé dans la figure 8 sur laquelle la forme d'onde de l'onde plane d'amplitude initiale élevée ne s'explique que par son effondrement au cours de sa propagation. Nous exposerons notamment les limites de la théorie linéaire dans les sections 1.1.2 et 3.3.1.

Les tremblements de Terre de large magnitude (Calais et Minster, 1995b), les lancements de fusées (Calais et Minster, 1996) et les explosions de surface (Blanc, 1985b ; Calais et al., 1998 ; Fitzgerald, 1997) peuvent générer des ondes de choc se propageant jusque dans la haute atmosphère, une partie de l'énergie étant transférée à l'ionosphère (Afraimovich et al., 2001a). Dans la haute atmosphère, lors du couplage à l'ionosphère, ces ondes atteignent des périodes de 30 à 300 s et des vitesses jusqu'à 1200 $\mathrm{m.s^{-1}}$. Les ondes de gravité,

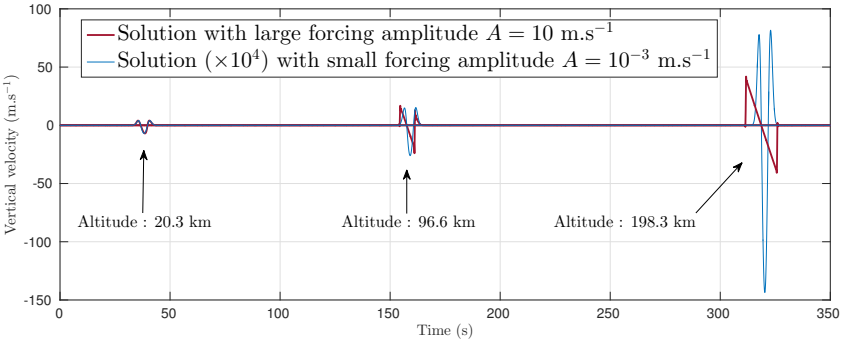

FIGURE 8 – Perturbations verticales liées à la propagation d'une onde plane dans une atmosphère isothermale à différentes altitudes $z = 20.3$, 96.6 and 198.3 km. L'onde plane propagée est initialement d'amplitude (en vitesse verticale) faible pour le signal en bleu ("Solution ($\times 10^4$) with small forcing amplitude") et d'amplitude plus élevée pour le signal rouge ("Solution with large forcing amplitude"). Le signal d'amplitude faible est multiplié par 10^4 afin de pouvoir le comparer au signal d'amplitude élevé. On peut observer la déformation du front d'onde liée à un nombre de Mach élevé (signal rouge) comparée à la propagation linéaire d'une onde à nombre de Mach faible (signal bleu). La théorie linéaire aurait prédit une forme d'onde erronée dans le cas d'un nombre de Mach élevé.

à l'instar des infrasons, peuvent s'effondrer et donner lieu à des phénomènes non-linéaires à travers divers mécanismes tels que le cisaillement, l'interaction avec le vent ou par raidissement de la forme d'onde ("steepening" en anglais) (STAQUET et SOMMERIA, 2002).

Les effets non-linéaires sont en effet les seuls mécanismes permettant la propagation de chocs ainsi que de dissiper l'énergie lorsque la viscosité et la diffusion moléculaire sont négligeables (à basse fréquence et en dehors de la thermosphère). Ces non-linéarités peuvent donc se traduire par un amortissement radiatif (FELS, 1984), des interactions entre ondes (ALEXANDER et DUNKERTON, 1999 ; SUTHERLAND, 2000 ; SUTHERLAND, 2001) et le "wave-breaking" (GAVRILOV et KSHEVETSKII, 2013).

Notamment en se propageant en altitude les ondes de gravité peuvent générer des turbulences (Kelvin-Helmoltz) dans la haute atmosphère propageant des ondes de gravité de courte période (pour des ondes initialement de très forte amplitude) (KSHEVETSKII et GAVRILOV, 2005). Ce phénomène est d'ailleurs simulé numériquement dans cette thèse et présenté dans le chapitre 4.

Certains phénomènes non-linéaires peuvent être, à leur tour, sources d'infrasons et d'ondes de gravité. Les phénomènes convectifs tels que les nuages de profonde convection (en anglais "deep convective clouds") (LANE, REEDER et CLARK, 2001) génèrent des infrasons sur un large spectre de fréquence et vitesses de phase. Ces ondes induites par les zones de convection

sont difficiles à estimer du fait de leur forte variabilité en temps et en espace (McLandress, Alexander et Wu, 2000 ; Piani et al., 2000). Les scientifiques ont pu néanmoins expliquer l'origine et l'impact de ces ondes dans des zones sans topographies majeures tels que les tropiques (Lane, Reeder et Clark, 2001 ; Vincent et Joan Alexander, 2000). Les phénomènes de cisaillement ou phénomènes de Kelvin-Helmoltz, cité précédemment, peuvent aussi donner lieu à des ondes gravito-acoustiques (Bühler, McIntyre et Scinocca, 1999). Enfin, les interactions entre ondes de gravité sont une source majeure de perturbations et l'échelle des ondes générées n'est pas directement reliée à celles des sources des ondes de gravité originelles ce qui peut alors être difficile à interpréter. Notez qu'il existe d'autres phénomènes non-linéaires plus complexes (tels que l'ajustement géostrophique) dont le lecteur peut trouver un résumé dans le papier de revue par Fritts (Fritts et Alexander, 2003).

Forçage atmosphérique

Nous nous sommes jusqu'à présent focalisés sur la propagation d'ondes liée au couplage du solide vers le fluide et au sein du fluide ou dans la haute atmosphère mais il est nécessaire de préciser que le couplage des ondes se propageant du fluide vers le solide est possible. Le vent est générateur de bruit sismique soit directement par le forçage qu'il exerce sur la partie solide (Withers et al., 1996) soit indirectement via son action sur l'océan (Gimbert et Tsai, 2015). L'interaction non-linéaire d'ondes à la surface des océans générées par des orages est la source d'ondes stationnaires propageant de manière continue des ondes sismiques dans la partie solide, appelé micro-séismes. Ce phénomène se traduit par deux pics fréquentiels dans le bruit sismique autour de 0.14 Hz et 0.07 Hz. Le premier est du à l'interaction des vagues avec les lignes de côte (Haubrich, Munk et Snodgrass, 1963). Le second, d'amplitude plus élevée, est provoqué par le déplacement de la colonne d'eau par les ondes stationnaires précédemment citées (Longuet-Higgins, 1950). Mais ces interactions non-linéaires à la surface de l'océan sont aussi génératrices d'infrasons dans la gamme $0.15-0.35$ Hz, appelés microbaroms (Arendt et Fritts, 2000 ; Benioff et Gutenberg, 1939 ; Gutenberg et Benioff, 1941 ; Posmentier, 1967). Notez que d'autres phénomènes sont à l'origine de microbaroms : les ondes stationnaires dues à l'interaction entre deux orages générant des infrasons autour de 0.2 Hz (Aucan, Fee et Garcés, 2006) ainsi que le "wave-breaking" près des côtes à la base d'infrasons dans une gamme plus haute fréquence $0.5-20$ Hz (Garcés et al., 2004). L'observation de ces signaux atmosphériques est pertinente notamment pour l'étude tomographique par cross-corrélation du bruit enregistré sur les instruments (Lin, Tsai et Schmandt, 2014). Enfin, les ondes de choc acoustiques, liées aux explosions atmosphériques (Ben-Menahem, 1975) ou à l'entrée et l'impact de météorites (Cevolani, 1994) peuvent être sources d'ondes sismiques près de la surface et être utilisées pour déterminer les structures locales de vitesse sismique (Langston, 2004). Nous reviendrons sur ce point dans le chapitre 2 de cette thèse.

Instrumentation pour l'observation des ondes atmosphériques

L'étude des signaux atmosphériques fut rendue possible avec l'amélioration de la précision de l'instrumentation. Ainsi de grandes avancées furent réalisées à ce niveau depuis les années 1960 et les premiers relevés par baromètres et marégraphes (Harkrider et Press, 1967).

Les observations des signaux atmosphériques générés par des sources sismiques sont essentiellement réalisées à la surface (sismographes, barographes, réseau d'infrasons) ou dans la haute altitude en étudiant la réponse de l'ionosphère à la propagation d'ondes internes. Malheureusement, cette dernière technique n'est viable que pour une gamme de fréquence limitée pour laquelle le couplage entre l'ionosphère et les couches plus basses de la thermosphère est possible (Lognonné, 2010). Ces signaux sont en général générés par les tsunamis ou les ondes de Rayleigh, les autres phénomènes de surface générant des ondes trop hautes fréquences pour atteindre la haute atmosphère (Arendt et Fritts, 2000).

Les mesures de surface reposent principalement sur les capteurs de pression et les sismographes. Ceux-ci ont pris un essor important avec le développement du réseau international IMS (International Monitoring System) permettant la détection de perturbations de pression entre 0.1 et 10 Hz. Ce réseau permet de déterminer, en plus de l'amplitude et la phase, l'azimuth et la vitesse des signaux et ainsi d'identifier les caractéristiques de la source (Brachet et al., 2010). Ces caractéristiques rendent possible la détection de plusieurs types d'infrasons : les ondes sismiques couplées à l'interface fluide-solide dont nous avons déjà discutées, les explosions atmosphériques et les ondes générées au niveau de l'épicentre du séisme par un mouvement brutal du niveau du sol ou dispersées par les chaînes de montagne (Le Pichon et al., 2002a).

Il est en général difficile de détecter des infrasons et ondes de gravité directement depuis la basse et moyenne atmosphère car les mesures in-situ manquent souvent de résolution. Mais comme indiqué en début de cette introduction, les satellites basse orbite ou en fin de vie tels que GOCE, CHAMP ou GRACE (Bruinsma et Fedrizzi, 2012) ont capturé les perturbations d'accélération et/ou de densité. Plusieurs contraintes sont néanmoins à prendre en compte : lorsque les évènements sismiques sont d'amplitude trop faible et/ou que le satellite se déplace à trop haute altitude les signaux peuvent être atténués avant de pouvoir être observés. De plus la dynamique des zones polaires étant très importante, il n'est alors pas possible d'analyser les données si le front d'onde lié à un évènement sismique croise le satellite dans cette zone (Bruinsma et Fedrizzi, 2012). Dernièrement, un certain intérêt fut porté par les réseaux d'observations par ballons car ceux-ci peuvent être l'une des seules sources d'information sur l'activité sismique lors de missions spatiales planétaires (Jones et al., 2015 ; Stevenson et al., 2015) mais aussi être témoins de phénomènes exclusifs à la moyenne atmosphère (tels que la turbulence ou les ondes océaniques non-linéaires) ainsi que compléter les données récoltées par les réseaux d'infrasons au sol (Bowman et Lees, 2015 ; Jewtoukoff et al., 2015 ; Stump et al., 2009).

A des altitudes plus élevées, du fait de l'amplification de l'amplitude des ondes, les interactions avec le plasma de l'ionosphère sont détectables grâce aux systèmes radio-sondes. De 60 à 1500 km d'altitude, l'ionosphère est partiellement ionisée (du fait des rayons X et rayonnements UV solaires) avec un maximum de concentration électronique entre 300 et 400 km d'altitude. En se propageant, les ondes atmosphériques perturbent les molécules qui peuvent alors rentrer en collision avec les particules chargées ionosphériques (les ions principalement) résultant en un transfert de moment. Le déplacement de ces ions, et ainsi des électrons, génère des perturbations dans le champ électro-magnétique. Afin de détecter ces évènements les sondeurs Doppler, dont l'origine remonte aux années 1960 (Davies et Baker, 1965 ; Leonard et Barnes, 1965 ; Yuen et al., 1969), ont permis de fournir des observations continues avec une précision de plus en plus importante (Blanc, 1985b ; Namazov, Novikov et Khmelnitskii, 1975 ; Parrot et al., 1993 ; Tanaka et al., 1984). Les sondeurs récents peuvent détecter la plupart des évènements de magnitude supérieure à 6.5 (Artru, Farges et Lognonné, 2004). Malheureusement, du fait d'une résolution relativement faible il est difficile de déterminer les structures 3D des perturbations.
Plus récemment, les radars Au-Dessus-de-l'Horizon ("Over-The-Horizon radars" en anglais) qui fournissent une cartographie des mouvements de l'ionosphère (Occhipinti et al., 2006) permirent d'obtenir une précision similaire aux sondeurs Doppler et peuvent donc être un moyen d'augmenter la résolution spatiale de ces derniers.
Les réseaux GPS pouvant mesurer la densité électronique (TEC) permirent d'étudier un grand nombre d'évènements depuis le tremblement de Terre de Northridge en 1994 (Calais et Minster, 1995a) jusqu'à beaucoup plus récemment le tsunami de Tohoku (Liu et al., 2011). La forte densité de réseaux GPS en Europe, aux États-Unis et au Japon permet de nombreuses détections et notamment la discrimination entre les ondes acoustiques provenant de l'épicentre du séisme et les ondes induites par les ondes de surface de Rayleigh (Ducic, Artru et Lognonné, 2003).

Enfin, d'autres phénomènes atmosphériques peuvent être exploités pour observer ces évènements sismiques. Notamment l'émission par airglow qui est particulièrement influencée par les ondes induites par les tsunamis (Hickey, Schubert et Walterscheid, 2010). Cette méthode consiste dans l'étude du rayonnement atmosphérique (excitation par résonance, photodissociation, impact photoélectronique et recombinaison) dûe à l'absorption du rayonnement solaire dans la gamme UV (Slanger et Wolven, 2002). Certaines études ont réussi dans ce cadre à observer l'émission OH et O de nuit depuis la mésopause à 87 km d'altitude et depuis la thermosphère à 250 - 300 km d'altitude (Makela et al., 2011). Cette technique permet d'obtenir des images sans recours à des réseaux denses d'instruments mais les caméras au sol doivent être utilisées dans des conditions atmosphériques précises, lorsque le ciel est clair et que le soleil et la lune sont sous l'horizon local. Ces conditions ne sont pas forcément satisfaites lors de tous les évènements sismiques.

Modélisation numérique des ondes gravito-acoustiques

L'amélioration des méthodes d'observations permirent d'affiner notre compréhension de la dynamique climatique, mais certains phénomènes physiques restèrent et restent encore difficile à interpréter. Que les obstacles soient liés à l'instrumentation ou à la complexité des interactions dans un milieu aussi dynamique que l'atmosphère le 20ème siècle a vu l'avènement d'une nouvelle discipline scientifique, la simulation numérique, et plus précisément dans le cadre de l'atmosphère la mécanique des fluides numérique (ou "computational fluid dynamics" en anglais). Depuis le 17-18ème siècle avec l'établissement des lois de Newton ainsi que des équations d'Euler (puis des travaux de Laplace, Riemann et Rankine et Hugoniot) et plus tard leur extension prenant le nom du système de Navier-Stokes, les aspects physiques macroscopiques du phénomène de transport dans un fluide Newtonien ainsi que de conservation de la masse et de l'énergie sont connus et décrits sous formes d'équations différentielles.

Les équations de Navier-Stokes, équations décrivant le mouvement non-linéaire d'un fluide Newtonien sous l'hypothèse des milieux continus, sont la pierre angulaire de la mécanique des fluides. Elles peuvent être résolues analytiquement dans des cas simplifiés (l'écoulement de Poiseuille ou de Couette en linéaire ou le vortex de Taylor-Green en incompressible) mais ne disposent pas de solution générale (l'existence d'une telle solution en 3 dimensions est d'ailleurs l'un des problèmes du millénaire). Afin de pallier ce manque de solutions plus générales, des solutions semi-analytiques furent initialement développées (méthode de perturbation (Van Dyke, 1975), approche par similarité (Howarth, 1938), méthode intégrale (Schlichting et al., 1960), méthode par caractéristique (Von Mises, Geiringer et Ludford, 2004)). Les différences finies furent aussi l'une de ces techniques de résolution et étaient déjà utilisées avant la seconde guerre mondiale. En effet, en 1910, Richardson introduisit cette méthode (Richardson, 1910) afin d'effectuer un calcul d'effort sur un barrage, mais l'indisponibilité de machines de calculs imposait de faire les calculs à la main. Cette méthode consiste à remplacer les équations différentielles par des équations discrétisées sur un nombre fini de noeuds sur lesquels sont calculés les champs de vecteur solutions et où les opérateurs sont remplacés par un développement de Taylor autour du noeud considéré. Une grande étape du développement des applications numériques fut apportée par les travaux de Courant et Levy qui présentèrent, dans les années 20, des critères de stabilité pour les équations hyperboliques par discrétisation par différences finies et toujours pertinents aujourd'hui (Courant, Friedrichs et Lewy, 1928). Cette étude fut étendue notamment avec la participation de Von-Neumann qui proposa une méthode pour l'analyse de stabilité des méthodes de différences finies (Charney, Fjörtoft et Neumann, 1950).

Avec le développement de la puissance de calcul, les simulations par différences finies, plus coûteuses mais plus précises et polyvalentes que les méthodes semi-analytiques, prirent un essor important notamment grâce à Yee dans les années 60 (Yee, 1966) qui proposa une méthode par grille en quinconce permettant d'atteindre une précision importante avec davantage de flexibilité géométrique que les formules classiques. Puis cette méthode fut appliquée au calcul de dynamique des fluides (Godunov, 1959 ; Lax et Wendroff, 1960 ; MacCor-

mack, 1976 ; Roe, 1981 ; Van Leer, 1974). Son essor s'explique en particulier grâce à la prise en compte, au sein du schéma numérique, de la turbulence et des effets non-linéaires ainsi que de permettre de faire évoluer les équations en temps. C'est à partir des années 70, les équations de Navier-Stokes compressibles furent résolues en différences finies (MacCormack, 1976 ; Peyret et Taylor, 1985). Bien que la dynamique des structures fut l'un des piliers du progrès apporté aux différences finies, les applications aux fluides furent aussi un élément clé notamment afin de réaliser des prédictions climatiques (Richardson, 1922). Les méthodes furent par la suite adaptées aux topographies complexes et à la prise en compte de l'advection par le vent (Groot-Hedlin, 2014 ; Groot-Hedlin, Hedlin et Walker, 2011 ; Ostashev, Chunchuzov et Wilson, 2005). Cette méthode pâtit malheureusement d'un manque de flexibilité géométrique et de la difficulté d'augmenter le degré d'approximation de la solution. Nous reviendrons sur les caractéristiques de cette méthode dans le chapitre 1 de cette thèse.

Une extension des différences finies, permettant davantage de flexibilité géométrique, fut proposée sous la forme de la méthode des volumes finis. Cette méthode fut initialement introduite pour l'étude de mouvements de fluides à travers une turbine de gaz (McDonald, 1971), puis employée sur de la dynamique des problèmes de convection-diffusion (Bertolazzi et Manzini, 2005 ; Cai, Mandel et McCormick, 1991 ; Ewing, Lin et Lin, 2002 ; Lazarov, Mishev et Vassilevski, 1996). Cette technique consiste à décomposer le domaine de calcul en volumes finis sur lesquels la solution est intégrée en espace. Un exemple de discrétisation via cette méthode est montré dans le tableau 1, sous le label "VF", pour l'équation de conservation de la masse. Cette méthode est particulièrement adaptée aux lois de conservation car les intégrales sont intégrées à l'aide de la formule de Stokes, les intégrales de volume étant alors converties en intégrale de bord. Les intégrales de surface d'un volume élémentaire sont par la suite calculées en utilisant diverses formules de flux ou en résolvant le problème de Riemann exact (Eymard, Gallouët et Herbin, 2000). Puis la méthode fut appliquée à la résolution des équations de Navier-Stokes (He et He, 2007 ; He, He et Chen, 2008), des problèmes d'aéroacoustiques (Abalakin, Dervieux et Kozubskaya, 2006 ; Daru et Tenaud, 2004 ; Munz, Fortenbach et Dumbser, 2005) et plus récemment à la propagation d'infrasons et d'ondes de gravité (Del Pino et al., 2009 ; Laughman, Fritts et Lund, 2017 ; Whitaker, 2008). De nouveau, certaines limitations liées à l'augmentation du degré d'approximation et la prise en compte de maillages non conformes peuvent affecter cette méthode et nous reviendrons en détail sur ces aspects dans le chapitre 4 de cette thèse.

Parallèlement, l'idée d'utiliser une formulation variationnelle (c'est-à-dire une formulation faible en opposition aux formulations fortes telles que les différences finies ou volumes finis) pour résoudre un problème de valeurs limites fut introduite par Lord Rayleigh (1894, 1896) et Ritz (1908) (« Approximate Methods of Higher Analysis, Interscience, New York (1958) »). C'est ce dernier qui imagina décomposer la solution sous forme d'une combinaison linéaire de fonctions. Ce sont les travaux de Turner qui introduisirent la notion d'éléments finis pour le calcul de contraintes sur un avion (Turner., 1956). L'idée étant d'approcher la forme particulière d'une aile d'avion par un assemblage d'éléments triangulaires et en se basant

Nom	Forme	Discrétisation
DF	Forte	$\partial_t \rho^k + \frac{(\rho v_x)^{k+1} - (\rho v_x)^k}{\Delta x} = 0$
VF	Forte	$\int_{\Omega^k} \partial_t \rho^k d\Omega^k + [\rho v](x^{k+1/2}) - [\rho v](x^{k-1/2}) = 0$
EFC	Faible	$\int_\Omega \partial_t \rho \Phi d\Omega - \int_\Omega \rho \mathbf{v}.\nabla\Phi d\Omega + \int_\Gamma \rho \mathbf{v}.\mathbf{n}\Phi d\Gamma = 0$
EFD	Faible	$\int_{\Omega^k} \partial_t \rho^k \Phi d\Omega^k - \int_{\Omega^k} (\rho v)^k.\nabla\Phi d\Omega^k + \int_{\Gamma^k} \rho \mathbf{v}.\mathbf{n}\Phi d\Gamma^k = 0$
	Nb d'inconnues	Expression de la solution
DF	$N+1$	for $i = [1, N+1], v_h(x^i) = v^i$
VF	N	$\forall x \in \Omega^k, v_h(x) = \overline{v}^k$ $\forall x \in \Omega^k \cap \Gamma^{k+1}, v_h(x) = v^{k+1/2} = \frac{\overline{v}^{k+1} + \overline{v}^{k-1}}{2}$
EFC	$N+1$	$\forall x \in \Omega^k, v_h(x) = \sum_{i=1}^{N_c} b_i^k \Psi_i^k(x)$ $\forall x \in \Omega, v_h(x) = \sum_{k=1}^{K+1} v(x^k) N^k(x)$
EFD	$2N$	$\forall x \in \Omega^k, v_h(x) = \sum_{i=1}^{N_c} b_i^k \Psi_i^k(x)$ $v_h(x) = \begin{cases} b_{N_c}^k \Psi_{N_c}^k(x) & \forall x \in \Omega^k \cap \Gamma^k \\ b^{k+1} k_1 \Psi_1^{k+1}(x) & \forall x \in \Omega^{k+1} \cap \Gamma^k \end{cases}$

TABLE 1 – Discrétisation et expression de la solution numérique employées par différentes méthodes pour l'équation de conservation de la masse en 1-D (ρ est la densité et v_x la vitesse). "DF" correspond à Différences Finies, "VF" à Volumes finis, "EFC" Éléments Finis Continus et "EFD" Éléments Finis Discontinus. Δx est le pas d'espace dans le cas des différences finies. L'indice i correspond au noeud x^i et l'indice k correspond à l'élément Ω^k. $\Omega = \cup_{k=1,K}\Omega^k$ correspond au domaine de calcul, Γ étant sa frontière, avec Ω^k le k-ème élément, Γ^k sa frontière, K le nombre d'éléments. $\mathbf{n}$ est la normale extérieure. Φ est une fonction test, Ψ est une fonction de forme et $(b_i^k)_{k=1,K;i=1,N_c}$ sont les coefficients de la base de discrétisation polynomiale des méthodes "EFC" et "EFD". Enfin, $(N^k)_{k=1;K}$ sont les fonctions de forme pour la formulation continue "EFC".

sur une écriture matricielle afin de simplifier les calculs tout en satisfaisant les conditions de continuité aux interfaces entre éléments (Clough, 1990). Le domaine de calcul est décomposé en éléments distincts, de manière similaire aux volumes finis, mais on réalise ensuite le produit scalaire de la solution avec une fonction test avant de l'intégrer en espace afin d'obtenir davantage de régularité et de flexibilité géométrique. Cette opération est visible dans le tableau 1 sous le label "EFC" où la fonction test est indiquée par ϕ. C'est le choix de la base pour cette fonction test qui déterminera la régularité de la solution numérique calculée (Hughes, 2012). En ce qui concerne la mécanique des fluides on vit durant les années 70 les premières résolutions des équations de Navier-Stokes sous forme potentielle (Chung, 1978 ; Oden, 1969 ; Thomasset, 1981). En addition à ce travail numérique, des travaux plus théoriques se penchèrent sur les conditions de convergence et de stabilité de ces méthodes, donnant une légitimité certaine à la méthode par éléments finis. On peut notamment citer les travaux de Céa (Céa, 1964) qui détermina les formules d'erreur des méthodes de Galerkin sur les problèmes variationnels avec décomposition polynomiale. Les travaux de Babuška et Aziz furent aussi une étape essentielle, traitant de la convergence des méthodes par éléments finis, en établissant la condition inf-sup sur l'unicité de la solution des problèmes mixtes (c'est-à-dire lorsqu'on résout un système différentiel avec conditions de bords et initiales, Babuska et Aziz, 1972).

Durant les années 80, la méthode par élément finis fut étendue à de nouveaux espaces de discrétisation, bénéficiant ainsi d'une convergence spectrale en modifiant la base de fonction utilisée pour la décomposition de la solution (Patera, 1984). Nous y reviendrons plus en détail dans le chapitre 4 de cette thèse. De nombreuses applications de cette méthode donnèrent des résultats convaincants pour la propagation d'ondes sismiques (Komatitsch et Tromp, 1999), pour la prédiction climatique (Fournier, Taylor et Tribbia, 2004), la dynamique océanique (Iskandarani, Haidvogel et Levin, 2003).

Puis, afin de bénéficier des propriétés de conservation des schémas de volumes finis et des propriétés de convergence des méthodes spectrales, Reed (Reed et Hill, 1973) proposa une dernière évolution des méthodes variationnelles sous la forme d'une formulation discontinue, les éléments finis discontinus (DG-FEM). Aujourd'hui de nombreuses adaptations furent réalisées afin de prendre en compte la dynamique de l'atmosphère avec les éléments discontinus (Restelli et Giraldo, 2009).

Les méthodes par différences finies et les méthodes de Galerkin ne sont pas les seules méthodes numériques utilisées aujourd'hui bien que nous nous concentrerons uniquement sur ces dernières durant cette thèse. La méthode par tracé de rayons, initialement développée pour la balistique (Esclangon, 1925) et dans la communauté optique afin de prédire le chemin des rais de lumière à travers les lentilles, fut adaptée depuis les années 70 aux problèmes géophysiques (Jones, Riley et Georges, 1986). Elle est très populaire dans la communauté infrason car elle nécessite peu de puissance de calcul par rapport aux autres méthodes de modélisation. L'interprétation physique des résultats est facilitée par la représentation visuelle

des tracés de rais (il est notamment facile d'identifier les phases en comparant les points de réflexion/réfraction) et son extension en 3D est directe. Cette méthode consiste en deux étapes principales : la résolution de l'équation Eikonal (afin de calculer les réfractions/réflexions) puis la résolution des équations de transport (pour déterminer l'amplitude). On dérive les équations d'évolution du nombre d'onde et de la position, à partir des équations Eikonal, sous la forme suivante (Lighthill, 1978)

$$\begin{array}{rcl} \frac{d\mathbf{k}}{dt} & = & \nabla_x \omega, \\ \frac{d\mathbf{x}}{dt} & = & \nabla_k \omega + \mathbf{v}_0, \end{array} \tag{12}$$

où la solution, en terme de perturbation, est considérée de la forme $\xi = \hat{\xi}(\mathbf{x}, t)e^{i(\mathbf{k}.\mathbf{x}-\omega t)}$ où $\mathbf{k}$ est le nombre d'onde, $\mathbf{x}$ la position, ω est la fréquence de l'onde déterminée à partir de la relation de dispersion du problème étudié (par exemple la relation de dispersion donnée dans l'équation (4)) et $\mathbf{v}_0$ est le vent. La première équation du système (12) correspond à la réfraction des ondes tandis que la deuxième décrit la vitesse de groupe.

Il est important de noter que la méthode par tracé de rayons est initialement une approximation haute fréquence des ondes acoustiques et ne résout pas directement les ondes de gravité. Mais plusieurs auteurs se sont donc penchés sur la propagation d'ondes au sein d'atmosphères réalistes (Dessa, Virieux et Lambotte, 2005 ; Garcés, Hansen et Lindquist, 1998 ; Le Pichon et al., 2002b ; Matoza et al., 2011).
En revanche la dispersion et la diffusion (création de zones d'ombre) sont des phénomènes plus difficiles à prendre en compte et plusieurs méthodes additionnelles sont utilisées dans ce but (HARPA (Jones, Riley et Georges, 1986), WASP-3D (Dessa, Virieux et Lambotte, 2005) et tau_P (Buland et Chapman, 1983 ; Garcés, Hansen et Lindquist, 1998)). Un exemple de tracé de rayons est visible dans la Figure 9 où est représenté un ensemble de rais avec plusieurs angles d'incidence à la surface de Mars dans la cadre d'une explosion de surface dans une atmosphère atténuante et subissant une advection par le vent.
Enfin, il est plus délicat de déterminer la forme d'onde avec la méthode de tracé de rayons par rapport à une méthode sur maillage (différences finies, méthodes de Galerkin) (Norris et Gibson, 2004). La complexité de ces dernières améliorations ainsi que la nécessité de réaliser parfois un grand nombre de tracés pour déterminer avec précision la propagation d'onde dans un milieu complexe et la potentielle difficulté à coupler une partie solide et fluide peuvent faire de cette méthode une moins bonne candidate que les méthodes classiques pour nos applications.

La méthode par modes normaux fut aussi communément utilisée dans la communauté géophysique pour modéliser la propagation d'ondes sismiques à l'échelle de la Terre. Cette technique consiste à calculer un nombre fini de modes d'oscillations libres de la Terre en résolvant l'équation de l'élasto-dynamique en 3 dimensions dans le domaine des fréquences (Dahlen et Tromp, 1998). Le modèle fut étendu au couplage avec une atmosphère réaliste pour une Terre sphérique et des conditions de bord de radiation dans la haute atmosphère

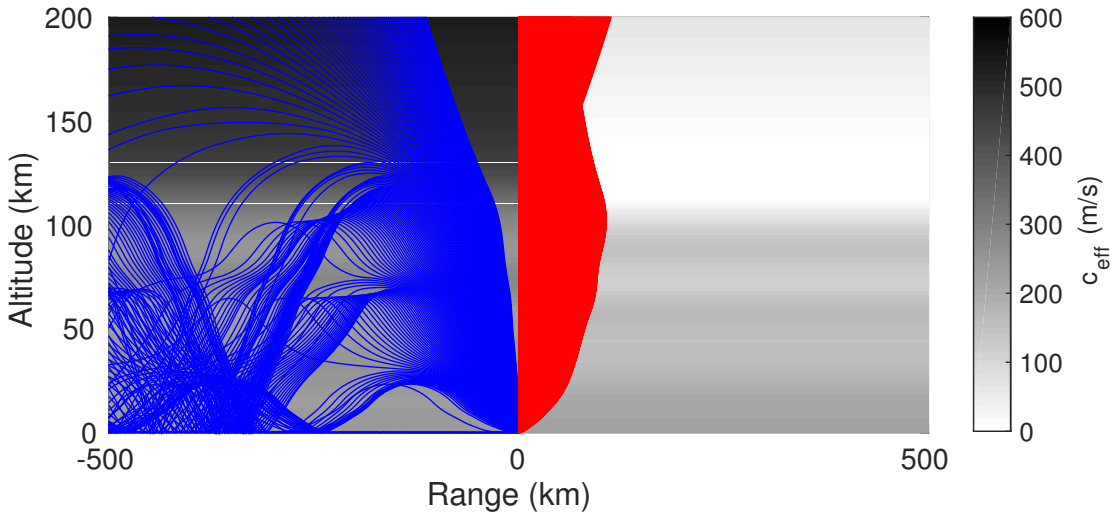

FIGURE 9 – Trajectoires de rais à la surface de Mars vers l'Ouest (gauche) et l'Est (droite) à 90° longitude solaire et 12h heure locale. Les couleurs de fond indiquent la vitesse effective du son, les nuances sombres et claires correspondant respectivement aux valeurs les plus fortes et les plus faibles de vitesse.

(LOGNONNÉ, CLÉVÉDÉ et KANAMORI, 1998a) ainsi que pour les phénomènes de dissipation dans l'atmosphère (ARTRU, LOGNONNÉ et BLANC, 2001). Cette technique permet de déterminer les modes normaux sismiques, acoustiques, de gravité ainsi que les modes océaniques et les transferts d'énergie entre ces derniers (ARTRU, FARGES et LOGNONNÉ, 2004 ; LOGNONNÉ, CLÉVÉDÉ et KANAMORI, 1998a ; LOGNONNÉ et al., 2016). Dans un repère sphérique la solution du problème linéarisé de l'élasto-dynamique en fréquence (WOODHOUSE et DAHLEN, 1978) s'écrit de la manière suivante

$$\begin{aligned} -\rho(r)\omega^2\mathbf{u}(\mathbf{r},\omega) &= A(\mathbf{r})\mathbf{u}(\mathbf{r},\omega), \\ A(r)\mathbf{u}(\mathbf{r},\omega) &= \nabla.\sigma - [\nabla(\rho\mathbf{u})](\mathbf{r},\omega).\mathbf{g}(r) + \nabla(\rho\mathbf{u}.\mathbf{g})(\mathbf{r},\omega) - \rho(r)\nabla\Psi(\mathbf{r},\omega), \end{aligned} \tag{13}$$

où $\mathbf{r}$ est le vecteur position, ω est la fréquence, σ est le tenseur des contraintes, $\mathbf{u}$ le déplacement, ρ la densité, Ψ le potentiel de la perturbation de gravité, $\mathbf{g}$ l'accélération de la gravité, (r,θ,ϕ) sont les coordonnées sphériques, A est l'opérateur de l'élasto-dynamique On résout alors le système (13) en cherchant des solutions, en fonction des modes propres, sous la forme (ZHAO et DAHLEN, 1995)

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{r},\omega) &= \textstyle\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{m=l}[U_l^m(\mathbf{r},\omega).\mathbf{e}_r + V_l^m(\mathbf{r},\omega)\nabla_1 - W_l^m(\mathbf{r},\omega)(\mathbf{e}_r\times\nabla_1)]Y_l^m(\theta,\phi), \\ Y_l^m(\theta,\phi) &= (-1)^m\left[\tfrac{2l+l(l-m)!}{4\pi(l+m)!}\right]^{1/2}P_l^m(\cos\theta)e^{im\phi}, \\ \sigma.\mathbf{e}_r &= [R_l^m(\mathbf{r},\omega).\mathbf{e}_r + S_l^m(\mathbf{r},\omega)\nabla_1 - T_l^m(\mathbf{r},\omega)(\mathbf{e}_r\times\nabla_1)]Y_l^m(\theta,\phi), \end{aligned} \tag{14}$$

où la première équation de (14) correspond à l'expression de la solution sous forme harmonique. ∇_1 est le gradient horizontal sur la sphère unité, Y_l^m désigne l'harmonique sphérique d'ordre angulaire l et d'ordre azimutal m où $P_l^m(\cos\theta)$ désigne les polynômes de Legendre. La troisième équation de (14) correspond à la traction radiale. Le problème à résoudre se pose donc en 6 équations de 6 inconnues correspondant aux fonctions propres. Malheureusement, cette méthode est limitée aux problèmes linéaires et certains phénomènes dispersifs ainsi que les in-homogénéités horizontales (notamment les interactions entre ondes) ne peuvent être prises en compte directement et limitent cette technique lors de l'étude d'infrasons sur un large spectre de fréquences et d'une atmosphère avec de fortes variations de vitesse du son et de vitesse du vent (Millet, Robinet et Roblin, 2007 ; Ponomarev et al., 2006).

Enfin, avant l'ascension des différences finies pour la résolution des problèmes de propagation d'ondes, deux méthodes furent couramment utilisées, la FFP (Fast Field Program) (Attenborough et al., 1995) et la PE (Parabolic equation) (Lingevitch et al., 2002). Ces dernières sont des méthodes dans l'espace des fréquences et sont peu coûteuses et efficaces dans des configurations simples (topographie simple et phénomènes visqueux et d'advection faibles). Le vent est pris en compte avec le calcul de la vitesse effective du son (addition entre la vitesse du vent et du son adiabatique) et la viscosité en ajoutant un terme imaginaire non physique dans la vitesse du son. Mais lorsque le modèle comporte des rhéologies plus subtiles (relaxation moléculaire par exemple), des géométries complexes ou des variations fortes de vitesse du vent cette approche devient délicate à mettre en place. On peut tout de même noter l'utilisation récente des méthodes paraboliques pour l'étude la propagation d'infrasons dans des cas d'applications réalistes (Del Bene, Lingevitch et Doschek, 2016 ; Hall et al., 2016 ; Tailpied et al., 2017).

Développement des modèles atmosphériques

Les méthodes numériques, essentielles à l'heure actuelle pour comprendre des phénomènes physiques complexes, nécessitent néanmoins une compréhension préalable des facteurs impactant la propagation d'onde dans l'atmosphère. La propagation d'infrasons est fortement affectée par la température (donnant lieu à la vitesse du son adiabatique), le vent horizontal et, dans une moindre mesure, par sa composition moléculaire. Nous reviendrons sur ces points dans le chapitre 1 de cette thèse. Les simulations de propagation d'ondes atmosphériques, qu'elles soient linéaires ou non-linéaires et quelque soit la technique numérique employée, se doivent donc de capturer les variations spatiales des caractéristiques de l'atmosphère et nécessitent aussi d'être contraintes par l'addition de conditions initiales.

La création de tels modèles est intimement liée au développement de la prévision météorologique. La première tentative de prédiction météorologique date de 1922 par Lewis Fry Richardson (Richardson, 1922) mais bien qu'il ait mis en place une méthodologie efficace et posé les bases pour de futurs développements, ne disposant pas des outils de calcul né-

cessaires, les résultats furent non réalistes et inutilisables. Les premiers modèles climatiques furent générés dans les années 50, notamment par Norman Phillips qui développa un modèle de prédiction mensuel pour la troposphère (Phillips, 1956). Aujourd'hui ces modèles prédisent les valeurs moyennes de l'atmosphère, en fonction de la latitude et de la longitude et des conditions magnétiques et solaires, en procédant à une assimilation de données sur plusieurs dizaines d'années de relevés météorologiques. Il est important de préciser qu'il existe deux grandes classes de modèles : les modèles empiriques et les modèles par assimilation de données. Le premier consiste à extrapoler en espace les observations réalisées à un temps t grâce à certaines lois analytiques sur la composition et la dynamique de la moyenne et haute atmosphère. Le second, plus rigoureux mais en général limité à la basse atmosphère, extrapole lui aussi les données empiriques de la même manière que pour le premier modèle mais tient aussi compte de l'historique des mesures grâce à un processus d'assimilation de données. Ce dernier processus permet d'affiner les paramètres physiques pour l'extrapolation en espace.

Deux modèles empiriques furent principalement utilisés au cours des dernières années pour la moyenne et haute atmosphère, le modèle MSIS (Mass Spectrometer Incoherent Scatter radar) (Hedin et al., 1996 ; Hedin, 1991 ; Picone et al., 2002) et le "Horizontal Wind Model" (HWM) (Hedin et al., 1996). Ces modèles peuvent être utilisés conjointement, le premier fournissant, en fonction des flux solaires et des perturbations magnétiques, les données de température, densité et composition et le second les variations zonales et méridionales du vent. Mais, ne se basant que sur des données historiques, ces modèles ne capturent pas les structures plus fines. Plusieurs phénomènes ont été observés, tels que l'oscillation de la surface de l'océan (Garcés et al., 2004 ; Hetzer et al., 2010), qui n'étaient pas prévus par ces modèles mais ayant un impact fort sur la propagation des infrasons et leur prise en compte a permis d'améliorer la modélisation climatique grâce, notamment, à des relevés temps-réels (radiosondes, relevés par fusée) (Drob, Picone et Garcés, 2003 ; Lott et Millet, 2010).

Il existe un très grand nombre de modèles prédictifs se concentrant sur la troposphère et permettant de réaliser l'assimilation de données climatiques, on nomme en général ces modèles NWP (Numerical Weather Prediction). On peut par exemple citer les modèles Arpege (Kleist et Ide, 2015) ou GFS (Berre, Varella et Desroziers, 2015) utilisant une méthode par différences finies et transformée spectrale et qui varient par leur méthode d'assimilation. Pour un historique et un état de l'art des outils de modélisation et de prédiction climatique, le lecteur peut se référer à Marras et al., 2016 ainsi qu'à Bannister, 2016 pour les détails techniques sur l'assimilation de données. L'intérêt de ces méthodes vient de leur approche couplée entre prise en compte des observations, via l'assimilation de données, et des modèles numériques résolvant les problèmes directs de dynamique climatique. Il en résulte une grande cohérence entre les lois physiques et les observations.

Le modèle actuel le plus précis est fourni par la Naval Research Laboratory (NRL) et appelé "Ground to Space" (NRL-G2S) dont la validation pour la basse atmosphère est déjà réalisée (Le Pichon, Antier et Drob, 2006). C'est un modèle semi-empirique qui est consis-

tant avec les résultats des modèles d'assimilation de données de la basse atmosphère (basé en général sur les données du modèle GFS (Drob, Picone et Garcés, 2003)) et avec les modèles de la moyenne et haute atmosphère (MSIS, HWM).

Objectifs

A l'heure actuelle, il n'existe pas d'outil de modélisation à l'échelle régionale et de la Terre globale pour la propagation simultanée des ondes sismiques, acoustiques et de gravité dans des milieux réalistes. Dans le contexte de cette thèse nous nous sommes donc intéressés au développement d'une nouvelle approche numérique pour la propagation d'ondes mécaniques liées au couplage solide-fluide. Dans un premier temps, nous avons choisi de nous concentrer sur l'étude de l'atmosphère grâce au développement et la validation d'une méthode par différences finies d'ordre élevé dans une atmosphère complexe. Nous avons, par la suite, employé cette méthode pour étudier deux cas réels : l'étude de l'impact d'un météore à la surface de Mars afin de quantifier la possibilité d'observer de tels évènements lors de la mission INSIGHT en 2018 et l'étude de la propagation d'ondes gravito-acoustiques suite à l'évènement de Sumatra en 2004. Dans un second temps, nous avons opté pour une méthode couplée d'ordre élevé de Galerkin continue pour résoudre la partie fluide et de Galerkin discontinue pour résoudre la partie solide. Ce choix permet de prendre en compte les effets linéaires et de visco-élasticité dans le milieu solide et les effets non-linéaires, visqueux et de relaxation dans la partie fluide.

Plan

Comme expliqué lors de cette rapide synthèse, de nombreux éléments sont à prendre en compte lorsqu'on souhaite modéliser de manière réaliste la propagation d'ondes gravito-acoustiques et ce travail va donc progressivement tenter d'aborder tous ces points.

Dans une première partie, nous nous intéresserons à la théorie linéaire des ondes acoustiques et de gravité dans une atmosphère complexe. Nous commencerons par présenter les propriétés essentielles de l'atmosphère pour la propagation des ondes atmosphériques linéaires. Puis nous expliquerons le développement d'un outil de modélisation numérique d'ordre élevé par différences finies en 2-D et 3-D pour la propagation d'ondes gravito-acoustiques dans une atmosphère atténuante et avec advection par le vent.

Dans une seconde partie, nous nous pencherons sur deux cas d'étude. Le premier s'inscrit dans le cadre de la mission INSIGHT afin de déterminer les effets atmosphériques issus de l'impact d'un météore à la surface de Mars. La seconde application s'intéresse aux ondes gravito-acoustiques issues de la propagation du tsunami de Sumatra en 2004 et leur dynamique dans la haute atmosphère ainsi que proche des côtes indiennes et du Sri-lanka.

Enfin, la dernière partie traitera de la théorie non-linéaire des ondes de gravité, ainsi que de l'impact de la topographie sur la propagation des infrasons en 2-D et du couplage mécanique entre l'atmosphère et la Terre. Ce couplage sera étudié grâce à une méthode numérique hybride, une méthode par éléments spectraux continus pour résoudre les ondes sismiques et une méthode de Galerkin discontinue pour résoudre les ondes atmosphériques. Nous nous intéresserons donc à l'impact des ondes sismiques sur une atmosphère complexe (advection par le vent et atténuation) et au phénomène de "wave-breaking" des infrasons et des ondes de gravité issus de ce couplage solide-fluide.

Chapitre 1

Modélisation des ondes gravito-acoustiques dans l'atmosphère

Sommaire

1.1 Introduction 27
1.1.1 Propagation d'ondes gravito-acoustiques dans une atmosphère réaliste . . 28
1.1.2 Niveaux critiques 33
1.1.3 Validité des équations de Navier-Stokes dans la thermosphère 34
1.1.4 Modélisation numérique des ondes gravito-acoustiques linéaires 36
1.2 Article publié dans "Geophysical Journal International" 38
1.3 Limitations et perspectives 59
1.3.1 Viscosité et relaxation 59
1.3.2 Etude de stabilité 60
1.3.3 Géométries complexes 61
1.3.4 Raffinement de maillage 64
1.3.5 Aspects non-linéaires 65

1.1 Introduction

Avant de se pencher sur le système couplé solide-fluide, que l'on abordera dans le chapitre 4, il est crucial d'avoir une compréhension globale de la propagation des ondes atmosphériques d'un point de vue théorique et numérique. C'est pourquoi nous présentons dans ce chapitre les caractéristiques principales de la propagation des ondes gravito-acoustique dans une atmosphère réaliste ainsi qu'un outil de modélisation numérique afin d'étudier les phénomènes linéaires. Les avantages de disposer d'un outil précis et polyvalent portent sur deux aspects : la possibilité de réaliser des études sur la dynamique des ondes atmosphériques dans des cas réalistes (comme présentés dans le chapitre 2) ainsi que de fournir un outil simple de validation de solutions numériques pour de futurs développements. Le deuxième point est crucial pour l'évaluation de la qualité d'outils numériques. En effet, cela permet de quantifier l'erreur générée par une méthode et ainsi justifier l'intégrité des résultats de cette dernière lors d'applications à des cas réalistes.

1.1.1 Propagation d'ondes gravito-acoustiques dans une atmosphère réaliste

Comme indiqué dans l'introduction, un grand nombre de caractéristiques (température, vent, viscosité et variation de la densité) impactent la propagation des ondes acoustiques et de gravité. Cinq phénomènes principaux sont à prendre en compte : l'augmentation de l'amplitude des ondes se propageant en altitude, la dispersion (vitesse de phase dépendante de la fréquence), l'atténuation (effets de dissipation et de relaxation), la réfraction (gradients de température, de vitesse du vent et de fréquence de Brünt-Vaisala) et l'advection causée par le vent (effet Doppler).

Le premier effet, correspondant à l'augmentation de l'amplitude des ondes atmosphériques, résulte directement de la décroissance de la densité avec l'altitude (par conservation de l'énergie cinétique) et a été déjà mentionné dans l'introduction. L'augmentation de l'amplitude avec l'altitude est visible, pour le signal A_2 qui se propage dans un milieu non-visqueux avec une hauteur d'échelle $H = 29$ km, sur la figure 1.1.

Les effets atténuants se caractérisent pas deux phénomènes : la diminution de l'amplitude par absorption et effet géométrique, et la dispersion de l'onde au cours de sa propagation. Il existe deux modes principaux d'absorption de l'énergie dans un fluide (Bass et al., 1984) : la dissipation classique et les phénomènes de relaxation. Le premier traduit le transfert d'énergie entre les molécules dont les causes premières sont les phénomènes de translation et de cisaillement mais il existe aussi une contribution associée à la conduction thermique. Le second est purement dû à la structure des molécules composant l'atmosphère et lié à la rotation et la vibration de ces dernières. Notez que, sur Terre en dehors de la haute atmosphère les phénomènes de dissipation classique sont les plus importants (Sutherland et Bass, 2004). L'effet de la dissipation classique est visible dans la figure 1.1 avec la diminution de l'amplitude de l'onde plane, par rapport à la solution de référence dans un milieu non visqueux, lorsqu'elle se propage avec l'altitude. Enfin, l'atténuation géométrique, correspondant à la distribution de l'énergie dans l'espace, va se traduire par la diminution de l'amplitude des ondes avec la distance.

Par l'ajout des processus atténuants, les équations de dispersion (5)-(8) présentées dans la section précédente, sont modifiées. En considérant, par simplicité, l'approximation acoustique et sans variation de densité, on obtient (Godin, 2014a),

$$\begin{aligned} \rho\partial_t \mathbf{v} &= -\nabla p + \nabla.\Sigma_v + \rho\mathbf{g}, \\ (\Sigma_v)_{ij} &= (\eta_V - \tfrac{2}{3}\mu + \tfrac{(\gamma-1)\kappa}{C_p})\nabla.\mathbf{v}\delta_{ij} + \mu(\partial_{x_i} v_j + \partial_{x_j} v_i), \quad \text{for } i,j = 1,2 \end{aligned} \tag{1.1}$$

où $(\delta_{ij})_{i,j=1,2}$ est le symbôle de Kronecker, η_V est le coefficient de viscosité de volume, μ est le coefficient de viscosité de cisaillement, κ est le coefficient de conduction thermique, C_p est le coefficient de capacité calorifique à volume constant et γ est le ratio spécifique de capacité

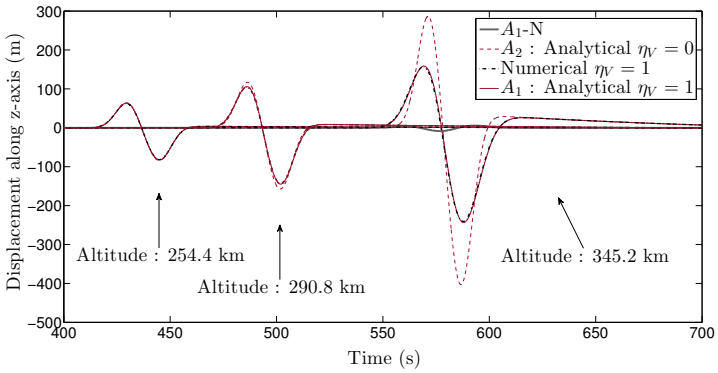

FIGURE 1.1 – Solutions numériques et analytiques pour une onde plane se propageant dans un milieu atténuant (dissipation classique uniquement avec $\eta_V = 10^{-4}$ kg.m^{-1}.s^{-1}) et avec décroissance de la densité avec l'altitude (hauteur d'échelle $H = 29$ km). Déplacement vertical pour une solution par différences finies ('Numerical') et la solution analytique correspondante ('A_1 : Analytical') ainsi que la différence entre les deux ('$A_1 - N$') ; La solution numérique dans le cas sans viscosité ('A_2 : Analytical'). Les signaux sont représentés à différentes altitudes $z = 254.4, 290.8, 345.2$ km. La figure est extraite de l'article (BRISSAUD et al., 2016). La dispersion et l'atténuation sont clairement visibles par, respectivement, la modification de la forme d'onde et la réduction de son amplitude au cours de la propagation par rapport à la solution dans un milieu non visqueux.

calorifique. Ce qui se traduit, pour une onde décrite sous la forme définie par l'équation (2), à la relation de dispersion suivante

$$\sqrt{k^2 + m^2} = \frac{\Omega}{c}\left[1 + \frac{i\Omega}{2\rho c^2}\left(\eta_V + \frac{4}{3}\mu + \frac{(\gamma-1)\kappa}{C_p}\right)\right], \tag{1.2}$$

On observe alors, dans l'équation (1.2), que les effets visqueux vont induire une dépendance en fréquence de la vitesse de phase et ainsi la dispersion des ondes. Les coefficients d'absorption, correspondant aux phénomènes de dissipation classique, ζ, μ s'expriment au carré de la fréquence telles que $\alpha_{cl}(f) = A(\mu, \kappa)f^2$ où f est la fréquence et A le facteur d'absorption défini à partir des coefficients de viscosité du milieu (BASS et al., 1984). Cela implique que la dissipation classique va jouer le rôle d'un filtre passe-bas, comme visible dans la figure 1.2, et uniquement les basses fréquences ne pourront se propager sur de longues distances. Il est important de préciser que les phénomènes de relaxation, notamment les phénomènes de relaxation vibrationnelle (dont une description est donnée dans le chapitre 2) ne se comportent pas de la même manière en fréquence et tels que $\alpha_{relax}(f) = B(f_0, A_r)f^2/(C(f_0, A_r) + f^2)$ où B, C sont les facteurs d'absorption définis à partir des propriétés de relaxation du milieu (f_0 et A_r, respectivement, la fréquence de relaxation et la puissance de relaxation, BASS et al., 1984). Ils agissent donc comme un filtre passe-bande autour d'une fréquence de relaxation donnée.

Enfin, on peut noter que les phénomènes de relaxation auront un impact plus fort sur

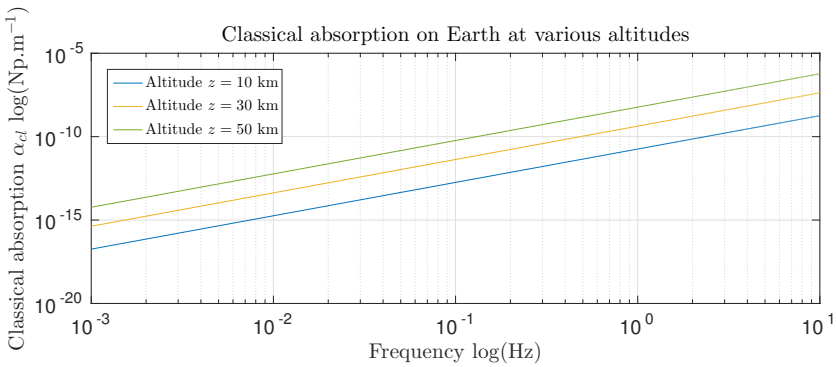

FIGURE 1.2 – Coefficients d'absorption classique α_{cl} en fonction de la fréquence sur Terre et aux altitudes $z = 10, 30, 50$ km et issus du modèle MSIS. On observe que les basses fréquences sont davantage absorbées que les hautes fréquences sur Terre par les phénomènes d'absorption classique.

les ondes acoustiques que sur les ondes de gravité pour lesquelles ils peuvent être en général négligés. En effet, l'approche linéaire des ondes de gravité sous l'approximation de Boussinesq permet de traiter, sous l'hypothèse $\frac{\rho_1}{\rho_0} << 1$ (les indices 0 et 1 correspondent, sous l'hypothèse des petites perturbations, respectivement, les valeurs moyennes et perturbées) les ondes de gravité comme quasi-incompressibles. Par conséquent, dans l'équation (1.1) les termes en facteur de $\nabla.\mathbf{v}$ seront négligeables. De plus, les ondes de gravité correspondant à des modes de propagation très basses fréquences, elles seront, en général, peu impactées par la viscosité atmosphérique en dehors de la haute atmosphère.

La dispersion atmosphérique, qui caractérise la dépendance en fréquence de la vitesse de phase, est due aux phénomènes atténuants, comme mentionnés précédemment, ainsi qu'aux variations de densité dans l'atmosphère. Celle-ci est observable dans la figure 1.1 au travers de la modification de la forme d'onde au cours de la propagation. En effet, les différentes composantes fréquentielles d'une onde ne se déplaçant pas à la même vitesse la forme d'onde va être fortement impactée au cours de la propagation.

La réfraction caractérise le changement de direction, ou fléchissement, d'un front d'onde lors du changement des caractéristiques du milieu de propagation. A l'interface entre deux milieux de propagation, une partie de l'énergie sera réfractée et une autre réfléchie. Dans l'atmosphère, ces interfaces sont caractérisées par les changements de température, de vent et de densité avec l'altitude (BLIGHT, 1997). En effet, sans l'effet de la force de gravité, l'atmosphère s'organise en strates de densités différentes (les variations de densité vont alors induire des variations de fréquence de Brunt-Väisälä avec l'altitude), les strates les plus proches de la surface étant les plus denses. Au delà de varier en densité, ces différentes strates peuvent varier par leur vitesse moyenne (vent) et en température, ayant ainsi une influence sur la vitesse effective du son. Les variations de température, et donc de vitesse du son, sont dues à l'équilibre thermique de l'atmosphère. L'onde réfractée va se propager dans un milieu où

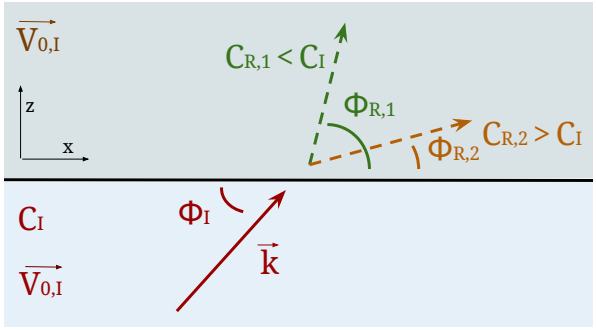

FIGURE 1.3 – Schéma représentant la réfraction d'une onde plane à l'interface entre deux milieux pour lesquels la vitesse effective du son est différente. L'onde incidente fait un angle ϕ_I avec l'horizontal et se propage à une vitesse c_I. L'onde réfractée se propage à une vitesse c_R et est représentée dans deux configurations différentes : dans le cas $c_I < c_R$ (couleur verte) l'onde fait un angle $\phi_R > \phi_I$ avec l'horizontal et dans le cas $c_I > c_R$ (couleur orange) l'onde fait un angle $\phi_R < \phi_I$ avec l'horizontal.

la vitesse effective du son et la fréquence de Brunt-Väisälä vont être différentes, par rapport au milieu précédent, et peut ainsi voir son contenu fréquentiel modifié au passage de l'interface.

Pour une onde plane acoustique, il est alors possible de déterminer les angles de réfraction et réflexion à partir de l'angle d'incidence. L'équivalent de la loi de Snell, relation entre entre les angles formés par les vecteurs d'ondes incidentes et réfractées, par rapport à l'horizontal en 2-D est donné par (voir par exemple, PIERCE, 1981)

$$\frac{\sin\phi_I}{c_I + \mathbf{U}_{0,I}.\mathbf{k}_I} = \frac{\sin\phi_I}{c_R + \mathbf{U}_{0,R}.\mathbf{k}_R}, \tag{1.3}$$

où ϕ_I et ϕ_R sont les angles d'incidence et de réfraction, c_I et c_R les vitesses du son dans le milieu de propagation de l'onde incidente et de l'onde réfracrée et $\mathbf{U}_{0,I}$ et $\mathbf{U}_{0,R}$ les vitesses du vent dans le milieu de propagation de l'onde incidente et de l'onde réfracrée. Enfin $\mathbf{k}_I$ et $\mathbf{k}_R$ sont les nombres d'onde des ondes incidente et réfractée. Si l'on suit l'évolution de la normale $\mathbf{n}$ du front d'une onde émise dans l'atmosphère grâce à la théorie de tracé de rayons (WILSON, 2003), on obtient à partir de la relation (1.3),

$$\partial_t \mathbf{n} = -\nabla_{\|} c_{eff}, \tag{1.4}$$

où c_{eff} la vitesse effective du son telle que $c_{eff} = c + \mathbf{U}_0.\mathbf{k}$ et $\nabla_{\|} = \nabla - \mathbf{n}(\mathbf{n}.\nabla)$ le gradient parallèle au front d'onde. On observe alors, comme représenté dans la figure 1.3, que dans le cas où $\partial_z c_{eff} < 0$ l'onde sera réfractée de manière ascendante et dans le cas contraire $\partial_z c_{eff} > 0$ l'onde sera réfractée de manière descendante. Notez que nous avons décrit l'effet du vent sur la réfraction des ondes mais les variations de température, et donc de la vitesse du son, provoquent des phénomènes de réflexion-réfraction similaires (NAPPO, 2002, chap. 4.3).

Notez qu'une relation entre angles incidents et réfractés est aussi accessible pour les ondes

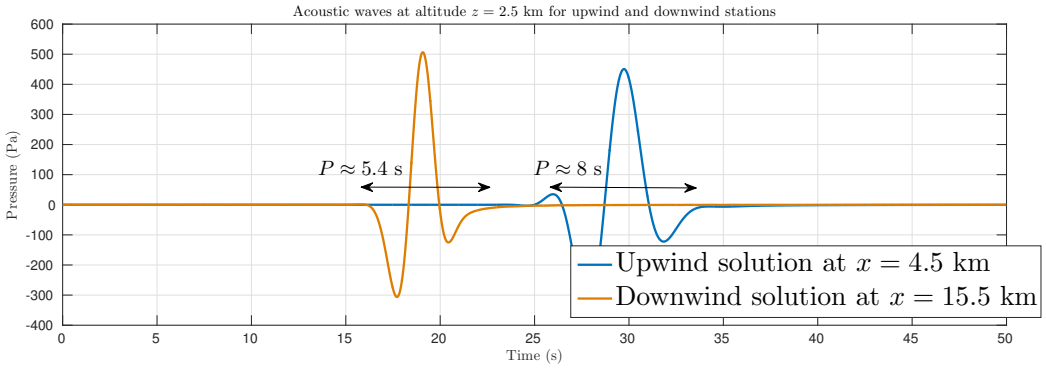

FIGURE 1.4 – Exemple de simulation de la propagation d'ondes acoustiques dans un domaine 20×5 km. L'atmosphère est isothermale sans viscosité et avec un vent homogène sur le domaine tel que $v_{0,x} = 100$ m.s^{-1}. La source est une dérivée de gaussienne de fréquence principale $f_0 = 0.2$ Hz et située à la position $(x, z) = (10, 2.5)$ km. Perturbations de pression simulées numériquement dans le sens du vent ('Downwind solution'), contre le vent ('Upwind solution'). Les signaux sont montrés en temps et à deux stations situées à la même altitude $z = 2.5$ km et à la position $x = 4.5$ km et $x = 15.5$ km.

de gravité et telle que

$$\frac{\sin \phi_I}{N_I} = \frac{\sin \phi_I}{N_R}, \tag{1.5}$$

où N_I et N_R sont les fréquences de Brunt-Väisälä des milieux d'incidence et de réfraction, jouant le rôle d'angles d'incidence et de réfraction entre le nombre d'onde et l'horizontale.

Enfin, l'effet Doppler, dû à l'advection des ondes par le vent, est essentiel à prendre en compte lorsqu'on réalise des observations à partir d'un référentiel fixe par rapport à un milieu en mouvement. Il se caractérise par la dépendance de la fréquence intrinsèque à la vitesse du vent $\Omega = \omega - \mathbf{k}.\mathbf{U}_0$ telle que définie par l'équation de dispersion (5). On observe de fortes variations en amplitude et en fréquence lorsque l'observateur se situe dans le sens du vent ou à l'inverse. Une onde advectée par le vent et mesurée depuis un observateur fixe dans le sens du vent va voir sa fréquence principale translatée vers les hautes fréquences et ainsi être davantage impactée par la viscosité atmosphérique et voir son amplitude diminuée en addition à l'effet Doppler. Ces phénomènes sont visibles dans la figure 1.4 dans laquelle on observe, en premier lieu, des temps d'arrivée plus précoces dans le sens du vent que dans le sens contraire. De plus, on note une fréquence principale plus basse contre le vent (≈ 8 s) que dans le sens opposé (≈ 5.4 s). Ces phénomènes, couplés à ceux de dissipation, peuvent radicalement changer les résultats de modélisation (GODIN, 2014b ; OSTASHEV et al., 2005a).

Comme indiqué dans l'introduction, nous avons négligé les effets de la force Coriolis. Ce choix est motivé par deux points : le choix d'une approche régionale et non globale en premier lieu et les longueurs d'ondes "restreintes" des phénomènes étudiés. En effet, la force de Coriolis a un impact majeur sur les ondes de périodes spatiales très importante. Il est rapporté

dans l'article de Hickey (Hickey, 1988), que la force de Coriolis peut être négligée pour les longueurs d'ondes horizontales inférieures à 10000 km, contrainte que nous respecterons durant cette thèse.

1.1.2 Niveaux critiques

Une subtilité pour la propagation d'ondes de gravité, et concernant les changements de de vitesse du vent avec l'altitude, réside dans les niveaux critiques. Les niveaux critiques sont des singularités dans la relation de dispersion associée aux équations d'Euler (5) lorsque la vitesse de phase d'un paquet d'ondes de gravité atteint la vitesse du vent. On peut analyser ce phénomène dans le cadre de la méthode des tracés de rais. On obtient alors le trajet d'une onde acoustique, dans le plan 2-D (x, z), de l'onde suivant z tel que (Sutherland, 2010, chap. 6.5, p. 327)

$$\partial_x z = \frac{v_{g,m}}{v_{\phi,l} + v_0} \tag{1.6}$$

où on rappelle que v_0 correspond au vent horizontal (selon x) et $v_{g,m}$ et $v_{\phi,l}$ sont, respectivement, la vitesse de groupe verticale et la vitesse de phase horizontale déterminées à partir de l'équation de dispersion (5) du chapitre précédent. L'équation (1.6) donne une condition limite sur la vitesse de phase horizontale telle que $v_{\phi,l} < v_0$. L'altitude z_c pour laquelle $v_{\phi,l} = v_0$ se nomme "niveau critique" ("critical level" en anglais). Pour les ondes de gravité, si l'on considère un profil de vent linéaire avec l'altitude $v_0 = Az$ où A est un coefficient constant et z l'altitude, pour une fréquence de Brunt-Väisälä N constante on obient

$$z_c = \begin{cases} \frac{N}{Ak}\cos\theta & \text{si } A \geq 0 \\ \frac{N}{-Ak}(1-\cos\theta) & \text{si } A < 0 \end{cases} \tag{1.7}$$

où θ est l'angle formé par le vecteur d'onde et l'horizontale. Ce niveau z_c dans (1.7) correspond à une limite asymptotique menant vers la divergence de l'énergie portée par l'onde. Proche de ce niveau critique on peut définir l'approximation des perturbations de vitesse des ondes de gravité (se propageant de manière ascendante) telles que (Nappo, 2002, chap. 5.3, p. 120)

$$\begin{aligned} v_x &= |z - z_c|^{1/2} \sin\left[R_c - 0.25\right]^{1/2} ln|z - z_c| \\ v_z &= |z - z_c|^{-1/2} \sin\left[R_c - 0.25\right]^{1/2} ln|z - z_c| \end{aligned} \tag{1.8}$$

où z est l'altitude et $R_c = \frac{N^2}{\partial_z u_0|^2_{z=z_c}}$ le nombre de Richardson au niveau critique. Au fur et à mesure de sa propagation en direction du niveau critique le paquet d'onde défini par l'équation (1.8) va voir la perturbation de vitesse verticale tendre vers zéro alors que la perturbation horizontale et le nombre d'onde vertical vont diverger se traduisant par une oscillation de plus en plus rapide (Bretherton, 1966). Ceci est visible dans la figure 1.5 où l'on observe les perturbations de pression linéaires associées à un forçage en déplacement vertical de la frontière inférieure du domaine telle que $u_z(x, z = 0, t) = exp(-(\frac{t-(t_0-P/4)}{P/4})^2)exp(-(\frac{x-(x_0-S/4)}{S/4})^2)$ où

u_z est le déplacement vertical, t le temps, $t_0 = 600$ s le temps de début de forçage, $T = 500$ s la période temporelle principale, x la position horizontale, $x_0 = 100$ km la position en x du forçage et $S = 8$ km la période spatiale principale. Le profil de vent non-linéaire associé au niveau critique est tel que $v_{0,x} = 100.53e^{-\left(\frac{z-z_0}{10000}\right)^2}$. On voit alors se propager un paquet d'ondes de gravité vers la hauteur du niveau critique (indiqué par la ligne jaune hachurée) et l'inclinaison croissante de la vitesse de groupe dans la direction du vent (indiquée par le vecteur d'onde k en vert) ainsi que l'augmentation de l'oscillation liée à la diminution de la longueur d'onde verticale. De plus, on observe que certaines ondes de gravité peuvent traverser le niveau critique. Ceci est possible pour deux raisons, tout d'abord le forçage de la frontière inférieure ne génère pas des ondes mono-chromatiques mais sur un large panel de fréquence dont la vitesse de phase peut être différente de celle du vent et correspondant au niveau z_c indiqué. En outre, près du niveau critique, certains paquets d'ondes de gravité seront réfléchis. Les perturbations de vitesse induites par ces ondes réfléchies vont participer à la modification temporaire de la vitesse effective du son dans cette zone. Dans ce cas, par l'effet Doppler on obtiendra la modification du contenu fréquentiel des ondes incidentes qui suivent le paquet d'onde réfléchi. Ainsi, si la fréquence de l'onde altérée par l'effet Doppler est suffisamment faible par rapport à la fréquence de Brunt-Väisälä dans le milieu au dessus du niveau critique, une onde pourra se propager au delà du niveau critique (Sutherland, 1996).

Cette singularité dans l'équation de dispersion n'est en réalité pas physique et disparaît lorsqu'on inclut les non-linéarités. En effet, l'augmentation drastique de l'amplitude va mener à l'effondrement de l'onde de gravité, résultant en la dissipation de l'énergie via la génération de turbulences (Sutherland, 2000) (des précisions seront apportées sur ce point dans le chapitre 4). Ceci peut alors se traduire par le dépôt d'énergie de l'onde dans le flux moyen et l'augmentation de la vitesse du vent. De telles propriétés furent d'ailleurs relevées dans les simulations numériques non-linéaires réalisées pour l'étude de perturbations atmosphériques issues de tsunamis (Laughman, Fritts et Lund, 2017). L'ajout de forts gradients de vents dans leur modèle atmosphérique menait vers de très fortes amplitudes à proximité de ces guides d'ondes dont seuls les effets non-linéaires dissipait l'énergie. De plus, et bien que les phénomènes non-linéaires soient en général les mécanismes principaux pour dissiper l'énergie près d'un niveau critique (Booker et Bretherton, 1967), les effets de la viscosité et de la relaxation atmosphérique sont des moyens supplémentaires pour atténuer l'onde de gravité bien avant l'arrivée au niveau critique.

1.1.3 Validité des équations de Navier-Stokes dans la thermosphère

Les équations de Navier-Stokes reposent sur l'hypothèse des milieux continus et dans la haute atmosphère cette approximation peut ne plus être valide. Une étude de l'impact de la non-continuité sur la propagation d'infrasons est proposée dans (Akintunde et Petculescu, 2014) via l'étude des équations généralisées de Navier-Stokes, les équations de Burnett. L'impact de la non-continuité se traduira notamment par la modification du libre parcours moyen et aura des conséquences sur l'atténuation et la dispersion des ondes. Cette étude conclut

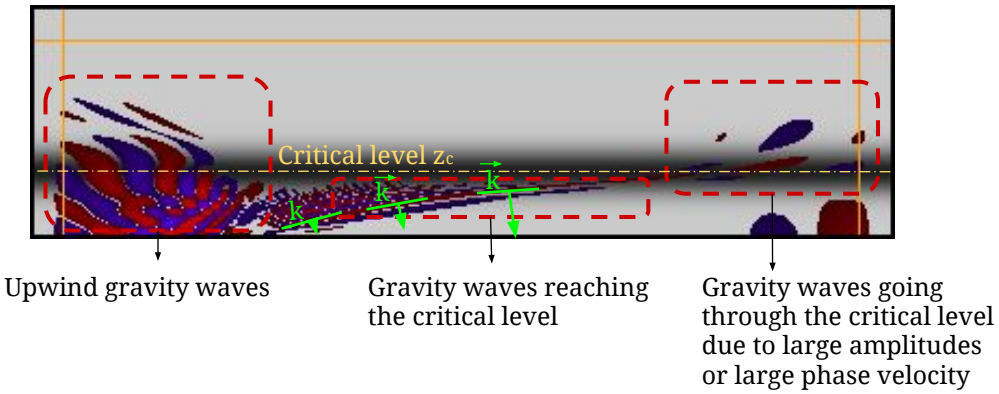

FIGURE 1.5 – Résultat de simulation de la propagation linéaire d'ondes de gravité près d'un niveau critique d à un gradient de vent. L'image est montrée en perturbation de pression. Le domaine est de 400×108 km et l'atmosphère est isothermale avec une hauteur d'échelle $H = 10$ km. Le profil de vitesse du vent est tel que $v_{0,x} = 100.53e^{-\left(\frac{z-z_0}{10000}\right)^2}$ où z (km) est l'altitude et $z_0 = 30$ km est l'altitude du guide d'onde. Trois zones de propagation sont visibles sur cette image : la propagation d'ondes contre le vent (à gauche) qui traversent le guide d'onde, la propagation d'ondes de gravité près du niveau critique (dont la longueur d'onde verticale tend progressivement vers 0) et la propagation d'ondes de gravité au delà du niveau critique pour des vitesses de phase ou des amplitudes fortes. La couleur rouge correspond à une amplitude positive et bleue à une amplitude négative. Les nuances de gris en fond correspondent aux variations de vent, les plus sombres correspondant aux valeurs les plus élevées du vent. Les lignes jaunes sont les limites des zones PML jouant le rôle de conditions absorbantes.

que, en deçà de 0.1 Hz, les effets atténuants (couplés au modèle d'atmosphère "U.S Standard Atmosphere") semblent en réalité plus faible que ceux donnés par les équations de Navier-Stokes mais de manière minime avec une réduction de 0.1 $\mathrm{dB.km^{-1}}$. Enfin, dans l'ionosphère les collisions entre les atomes et molécules neutres avec les particules chargées vont avoir un effet non-négligeable. Les particules atmosphériques vont alors transférer leur quantité de mouvement aux ions dont le trajet suit préférentiellement les lignes du champ géomagnétique (Hickey, Schubert et Walterscheid, 2009). Pour une modélisation complète et à haute altitude, il est donc nécessaire de prendre en compte les interactions avec la magnétosphère sous forme des équations de la magnéto-hydrodynamique (Khelfi, 2016 ; Kherani et al., 2015).

1.1.4 Modélisation numérique des ondes gravito-acoustiques linéaires

Les sections précédentes présentent les points importants à prendre en compte numériquement pour une représentation précise des solutions. Un certain nombre de modèles numériques, présentés dans l'introduction de cette thèse, peuvent répondre à ces contraintes : les différences finies, volumes finis, éléments finis, équations paraboliques, modes normaux et le tracé de rayons. Mais notre but étant d'obtenir une méthode combinant précision et résolution (à l'opposé des équations paraboliques et des modes normaux), simplicité (en opposition à la complexité du développement et du coût élevé en terme de calcul des éléments finis) et permettent la représentation complète des formes d'ondes et sans zone d'ombre (contrairement aux méthodes "naïves" de tracé de rayons qui sont, de surcroît, limitées aux hautes fréquences), la méthode par différences finies semble la plus adaptée pour répondre aux contraintes. Une description des avantages et inconvénients qui incombent aux différences finies, concernant notamment les aspects de couplage fluide-solide, est réalisée dans le chapitre 4 de cette thèse.

On doit notamment le développement des différences finies pour les problèmes de propagation d'ondes à Vichnevetsky (Vichnevetsky et Bowles, 1982) et à la communauté de sismologie dans les années 80. Une grande avancée fut faite par Madriaga et Virieux utilsant des différences finies avec une grille en quinconce, basée sur le travail de Yee (Yee, 1966), pour résoudre les équations linéaires de l'élastodynamique (Madariaga, 1976 ; Ohminato et Chouet, 1997 ; Virieux, 1986). Cette méthode consiste à calculer les inconnues en différents points de l'espace et permet l'utilisation de schémas de discrétisation plus compacts tout en atteignant un degré élevé. Dans la figure 1.6 est visible un exemple, dans le cadre de la résolution des équations d'Euler (1) (sans vent et dans l'approximation acoustique), de ce genre de schéma en quinconce pour lequel la vitesse est calculée à une demi-maille de la pression. Cette grille, en 2-D, s'associe typiquement avec un schéma centré tel que (Groot-Hedlin,

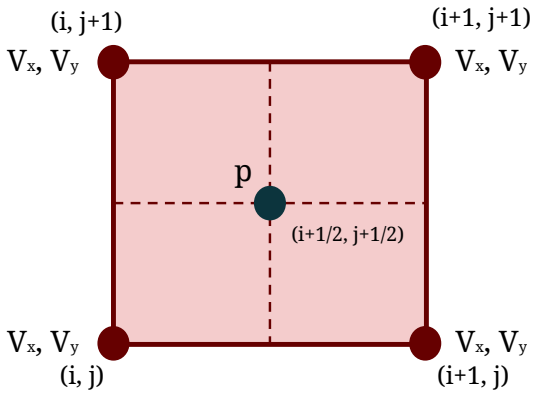

FIGURE 1.6 – Exemple de grille 2-D en quinconce utilisée pour résoudre les équations d'Euler en pression-vitesse et initialement développée pour la résolution des équations de Maxwell (YEE, 1966). La pression est calculée à une demi-maille de la vitesse horizontale et verticale. (i, j) correspondent aux coordonnées de la maille dans la grille de différences finies.

HEDLIN et WALKER, 2011 ; OSTASHEV et al., 2005b)

$$\begin{aligned} (\nabla.\mathbf{v})_{i+1/2,j+1/2} &= \frac{(v_x)_{i+1,j}-(v_x)_{i,j}}{\Delta x} + \frac{(v_y)_{i,j+1}-(v_y)_{i,j}}{\Delta y} \\ (\partial_x p)_{i,j} &= \frac{(p)_{i+1/2,j}-(p)_{i-1/2,j}}{\Delta x} \\ (\partial_y p)_{i,j} &= \frac{(p)_{i,j+1/2}-(p)_{i,j-1/2}}{\Delta y} \end{aligned} \tag{1.9}$$

La discrétisation définie dans l'équation (1.9) permet d'atteindre l'ordre deux tout en utilisant un schéma centré ce qui serait impossible sans utiliser une grille en quinconce.

En revanche, le calcul en quinconce peut entraîner un traitement délicat des interfaces et conditions de bord, les inconnues n'étant pas calculés sur le point de l'espace. On peut noter que d'autres méthodes furent introduites pour les problèmes de dynamique des fluides, à savoir les schémas compacts (LELE, 1992). Ces derniers permettent davantage de flexibilité géométrique en soustrayant la nécessité d'augmenter le nombre de points de discrétisation, pour améliorer la précision, par la résolution d'un système linéaire dans chaque direction de l'espace dont les inconnues sont les dérivées spatiales. Mais l'inversion de ce système linéaire dans chacune des directions de l'espace augmente la complexité algébrique du problème mathématique.

Notez que les termes advectifs (c'est-à-dire ceux qui s'expriment avec l'opérateur $\mathbf{v}.\nabla$) nécessitent un traitement particulier. En effet une approche traditionnelle centrée sur un noeud en différences finies avec poids équirépartis donnera des résultats instables. Les différences finies correspondant à un développement tronqué de Taylor des opérateurs spatiaux en chaque point de la grille, les erreurs de troncature réalisées s'exprimeront sous forme d'une dérivée impaire qui générera de la dispersion pouvant mener au développement d'instabilités numériques (KAJISHIMA et TAIRA., 2017, Ch. 2.3). C'est pourquoi il est nécessaire de prendre

en compte des formules centrées sur plusieurs noeuds (Salomons, Blumrich et Heimann, 2002) ou non centrées pour les termes d'advection qui, bien qu'introduisant de la diffusion numérique, conserveront le profil de la solution au cours du temps.

Avec l'utilisation croissante des différences finies pour les problèmes de dynamique des fluides dans les années 90 (Smolarkiewicz et Margolin, 1998), le développement des moyens de calcul et les limitations des méthodes classiques (équations paraboliques et tracé de raies), cette méthode prit son essor pour la résolution des problèmes atmosphériques. Dans ce cadre, les études se sont initialement portées sur les problèmes de propagation du son près de la surface mais dans des géométries complexes et avec des interactions avec le sol (Blumrich et Heimann, 2002 ; Salomons, Blumrich et Heimann, 2002 ; Van Renterghem et Botteldooren, 2003). Les auteurs se sont ensuite concentrés spécifiquement sur les effets d'advection par le vent (Van Renterghem, 2003 ; Wilson et Liu, 2004 ; Wilson et al., 2003) puis à leur extension en 3-D (Kim et Lees, 2014 ; Liu et Moran, 2002). Enfin certains auteurs adaptèrent ces outils pour la propagation d'ondes acoustiques basse fréquence (Groot-Hedlin, 2008 ; Ostashev et al., 2005b), les problèmes couplés élastique-fluide (Petersson et Sjögreen, 2017), la modélisation d'explosions et d'entrées de météores dans l'atmosphère (Groot-Hedlin, Hedlin et Walker, 2011 ; Matoza et al., 2009) et les explosions volcaniques (Kim et Lees, 2011 ; Kim, Lees et Ruiz, 2012). Les phénomènes non-linéaires associés aux équations de Navier-Stokes furent un sujet d'étude important avec le développement des moyens de calcul (Berland et al., 2007 ; Marsden, Bogey et Bailly, 2014 ; Sabatini et al., 2015). Enfin, il est important de noter que l'étude des ondes de gravité par cette méthode fut un sujet peu exploré au cours des dernières années (Ostashev et al., 2005a).

C'est dans cette logique que nous avons développé un outil numérique en différences finies en quinconce et d'ordre élevé pour la propagation d'ondes acoustiques et de gravité dans une atmosphère visqueuse et en mouvement. Cet outil sert donc plusieurs objectifs : créer une solution simple et rapide à mettre en place, permettre une première analyse des ondes atmosphériques provenant d'explosions ou d'ondes de surface, et enfin fournir des solutions de référence pour valider des modèles numériques plus complexes.

1.2 Article publié dans "Geophysical Journal International"

Un article fut publié dans GJI ("Geophysical Journal International") pour présenter la méthode numérique par différences finies ainsi que plusieurs cas de validations et d'applications : Brissaud et al., 2016. Les validations sont effectuées en comparant à des solutions quasi-analytiques correspondant à la résolution des équations de dispersions associées au système de Navier-Stokes pour une atmosphère stratifiée.

Geophysical Journal International

Geophys. J. Int. (2016) **206,** 308–327
Advance Access publication 2016 April 4
GJI Seismology

doi: 10.1093/gji/ggw121

Finite-difference numerical modelling of gravitoacoustic wave propagation in a windy and attenuating atmosphere

Quentin Brissaud,[1] Roland Martin,[2] Raphaël F. Garcia[1] and Dimitri Komatitsch[3]

[1] *Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace (ISAE-SUPAERO), Université de Toulouse,* 31055 *Toulouse cedex* 4, *France. E-mail: quentin.brissaud@isae.fr*
[2] *Laboratoire de Géosciences Environnement Toulouse GET, UMR CNRS* 5563, *Observatoire Midi-Pyrénées, Université Paul Sabatier,* 14 *avenue Édouard Belin,* 31400 *Toulouse, France*
[3] *LMA, CNRS UPR* 7051, *Aix-Marseille University, Centrale Marseille,* 13453 *Marseille cedex* 13, *France*

Accepted 2016 March 30. Received 2016 March 30; in original form 2015 October 27

SUMMARY

Acoustic and gravity waves propagating in planetary atmospheres have been studied intensively as markers of specific phenomena such as tectonic events or explosions or as contributors to atmosphere dynamics. To get a better understanding of the physics behind these dynamic processes, both acoustic and gravity waves propagation should be modelled in a 3-D attenuating and windy atmosphere extending from the ground to the upper thermosphere. Thus, in order to provide an efficient numerical tool at the regional or global scale, we introduce a finite difference in the time domain (FDTD) approach that relies on the linearized compressible Navier–Stokes equations with a background flow (wind). One significant benefit of such a method is its versatility because it handles both acoustic and gravity waves in the same simulation, which enables one to observe interactions between them. Simulations can be performed for 2-D or 3-D realistic cases such as tsunamis in a full MSISE-00 atmosphere or gravity-wave generation by atmospheric explosions. We validate the computations by comparing them to analytical solutions based on dispersion relations in specific benchmark cases: an atmospheric explosion, and a ground displacement forcing.

Key words: Numerical solutions; Acoustic-gravity waves; Tsunamis; Earthquake ground motions; Computational seismology; Wave propagation.

1 INTRODUCTION

Propagation of acoustic and gravity waves in the atmosphere of planets has a wide range of scientific interests, from the interplay between these waves and atmosphere dynamics to the detection of tectonic events. Historically, this research topic was initially supported by ground-based observations of atmospheric infrasounds (see Le Pichon *et al.* (2010) for a review) and observations of thermospheric gravity waves through air-glow measurements, or electron content variations in the ionosphere (Hines 1960). Over the past twenty years the development of new observation tools allowing to recover electron density variations in the ionosphere (such as GNSS receivers located on the ground or in satellites, ionosondes, over-the-horizon and incoherent scattering radars...) has enabled the study of additional phenomena such as the emission of infrasounds by seismic surface waves or volcanic eruptions, as well as the emission of gravity waves by tsunamis or by large-scale atmospheric disturbances. Understanding these physical processes required the development of new tools capable of modelling wave propagation from the ground to the upper thermosphere (Lognonné *et al.* 1998; Occhipinti *et al.* 2006), and coupling with the ionosphere (Kherani *et al.* 2009). Recently, new types of observations based on air-glow emissions (Garcia *et al.* 2009 Makela *et al.* 2011;) or *in-situ* measurements of air density in very low Earth-orbit satellites (Garcia *et al.* 2013, 2014) have provided respectively an increase of space/time coverage and resolution. Making optimal use of such improved precision and resolution in observations requires more sophisticated and accurate modelling tools. Thus, the propagation of both acoustic and gravity waves should be studied in a windy 3-D atmosphere model, including the thermosphere.

In order to provide realistic modelling at the regional or the global scale, physical simulations should include effects of attenuation, heterogeneous and realistic atmosphere models and strong wind perturbations. In this paper, we present a first step towards this complex goal through the modelling of acoustic and gravity wave propagation in a planetary atmosphere based on a finite-difference numerical technique.

In a fluid two main approaches can be used, one based on a linearization of the full Navier–Stokes equations (Nappo 2002) and another one based on a decomposition of the gravitoacoustic equations in terms of potentials (Chaljub 2000). A third one, the full Navier–Stokes equations embedding nonlinearities is also sometimes used (e.g. for shock capturing or the study of turbulence) for atmospheric applications. In the context of nonlinearities, Lecoanet

© The Authors 2016. Published by Oxford University Press on behalf of The Royal Astronomical Society.

Downloaded from http://gji.oxfordjournals.org/ at Biblio Planets on June 10, 2016

et al. (2015) studied gravity wave generated by interface or Reynolds stress forcing in a coupled ocean/atmosphere model. Taking into account nonlinearities they solved the 2-D incompressible Navier–Stokes equations in a Fourier domain along x and over a Chebyshev grid along z. Wilson *et al.* (2004) studied 3-D acoustic inviscid wave propagation based on finite differences and included turbulence and wind in their modelling. They provided a tool to study scattering phenomena affecting atmospheric remote-sensing systems. Finally, Snively & Pasko (2008) solved 2-D Navier–Stokes equations for gravity waves with both wind and viscosity based on a finite volume method and focused on ducted gravity waves in the lower thermosphere. Another approach called the General Circulation Model, based on the compressible Navier–Stokes equations taking into account the Coriolis force but without gravity, gives interesting results about gravity wave propagation in a windy atmosphere (Miyoshi *et al.* 2014).

In the potential formulation, one makes the time evolution of the perturbations derive from a displacement potential and a gravity potential. In the presence of bulk attenuation only, such a decomposition into potentials can easily be applied (Chaljub 2000). However, in the presence of deviatoric stress and/or of wind, this field representation is not valid anymore because the potentials will not fully describe the solution of the Navier–Stokes equations (Valette 1987).

In this work, we thus use the acoustic and advection parts of the compressible and viscous linearized version of the Navier–Stokes equations. As we will see below this system of equations allows one to couple gravity, wind velocity effects and acoustic wave propagation in the same unified numerical framework. Accuracy and limitations of the linear approximation were studied by Dörnbrack & Nappo (1997) by comparing the results of a linear model with a nonlinear, time-dependent, hydrodynamic numerical model. They pointed out that similar results are obtained from linear and nonlinear models for wave stress, wave breaking height and wave dissipation through the critical level (Nappo 2002).

Linearization of the Navier–Stokes equations has been proposed by different authors: de Groot-Hedlin *et al.* (2011) resorted to a 2-D finite-difference discretization but focused only on acoustic waves for realistic atmosphere models with wind and sound speed gradients. Ostashev *et al.* (2005) used the same discretization and considered 2-D gravity waves but without atmospheric viscosity. Both articles considered atmospheric sources only. Mikhailenko & Mikhailov (2014) relied on 2-D Laguerre/Fourier discretization to study low-altitude inviscid gravity waves in simple atmosphere models. Finally, Wei *et al.* (2015) focused on the tropopause and inviscid gravitoacoustic waves in the low atmosphere by means of a spectral/Laplace method. That study used a ground forcing technique in order to model tsunami-induced gravity waves: however to our knowledge acoustic-gravity wave propagation with stratified profiles of wind and strongly varying density, sound speed and viscosity has never been implemented in 3-D.

Atmospheric attenuation is crucial for realistic simulations. Landau & Lifshitz (1959), Coulouvrat (2012) and Godin (2014) have established a formulation of the dynamic and volume viscosities and also developed analytical solutions for the evolution of pressure in the frequency domain in the presence of bulk and/or shear viscosity. In our simulations, we will take into account both processes and their fluctuations through altitude because attenuation parameters vary strongly owing to the drastic density decrease when altitude increases (Godin 2014).

In terms of numerical implementation, for spatial discretization we will use a classical staggered grid (Yee 1966; Madariaga 1976) because it provides an efficient and stable way of reaching high order for the discretization. This grid is widely used for wave propagation in solid and fluid media (Graves 1996; Chaljub *et al.* 2007) but to our knowledge the fourth-order implementation has not been used before for atmospheric studies. Another version of a staggered grid for the atmosphere has been used in Ostashev *et al.* (2005) and de Groot-Hedlin *et al.* (2011) in particular to treat advection terms. Contrary to these articles, here we perform the implementation of advection terms through upwind (non-centred backward/forward) schemes (Ferziger & Peric 2012) to take into account wind velocities of different signs and to avoid possible stability issues, mainly at outgoing boundaries. We will validate our numerical technique by making comparisons with analytical solutions derived for benchmark cases for the different physical features involved.

In this paper, we first recall the governing equations, including their linearization and decomposition in terms of wind advective components and propagative perturbation components (acoustic and gravity waves). We then describe the wave attenuation parameters and link them to the parameters usually used in the acoustic and geophysics communities. We also introduce the finite-difference numerical implementation and validate the 2-D code by performing comparisons to analytical solutions in simplified atmosphere models. We present examples of 2-D applications for atmosphere bottom forcing by tsunamis and by seismic waves, and then for atmospheric explosions in realistic atmosphere models. We finally validate the 3-D code by performing comparisons to analytical solutions in simplified atmosphere models.

2 LINEAR GRAVITO-ACOUSTIC PROPAGATION IN A WINDY, ABSORPTIVE MEDIUM STABLY STRATIFIED

2.1 Governing equations

In this section, we recall how the Eulerian form of the equations of motion is derived from the Eulerian momentum, mass conservation and state equations. One starts from the conservation of energy (Vallis 2006)

$$D_t I = D_t Q - P D_t(1/\rho_T)\,, \tag{1}$$

where $D_t = \partial_t + \mathbf{V}\cdot\nabla$ denotes the Lagrangian derivative, I is the internal energy, Q is the heat input to the body, P the pressure, and ρ_T the atmospheric density. From the Eulerian formulation of the momentum equation (Landau & Lifshitz 1959),

$$\rho_T D_t \mathbf{V} - \nabla\cdot\mathbf{\Sigma}_T = \mathcal{F}_{\text{ext}} = \rho_T \mathbf{G}\,, \tag{2}$$

in which $\mathbf{V}$ is the velocity, $\mathbf{\Sigma}_T$ the Eulerian stress tensor and $\mathcal{F}_{\text{ext}}$ an external volumic force, equal to gravity forces in our case, where $\mathbf{G}$ is the gravitational acceleration, and from the mass conservation equation

$$D_t \rho_T = -\rho_T \nabla\cdot\mathbf{V} \tag{3}$$

the following assumptions are then made:

(i) The atmosphere is considered as a Newtonian fluid. Thus in the Eulerian description, the stress tensor reads

$$(\mathbf{\Sigma}_T)_{ij} = -P\delta_{ij} + (\mathbf{\Sigma}'_T)_{ij}\,, \tag{4}$$

where P is the pressure, $\mathbf{\Sigma}'_T$ is the viscous stress tensor and δ the Kronecker symbol.

(ii) The atmosphere is considered as an ideal gas

$$dI = C_v dT \;\text{ and }\; P = \rho_T R T\,, \tag{5}$$

Downloaded from http://gji.oxfordjournals.org/ at Biblio Planets on June 10, 2016

where P is the pressure, $R = C_p - C_v$ the gas constant, C_v the heat capacity at constant volume, C_p the heat capacity at constant pressure, T the temperature and ρ_T the atmospheric density.

(iii) State variables can be split into a stationary component (subscript 0) and a small space/time variable component (subscript 1):

$$P = P_0 + P_1; \quad \rho_T = \rho_0 + \rho_1; \quad \mathbf{G} = \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_1;$$
$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 + \mathbf{U}_1; \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_1; \quad \mathbf{\Sigma}_T = \mathbf{\Sigma}_0 + \mathbf{\Sigma}_1 \tag{6}$$

where $P, \rho_T, \mathbf{G}, \mathbf{U}, \mathbf{V}$ are respectively the pressure, atmospheric density, gravitational acceleration, displacement and velocity.

(iv) The atmosphere is stratified and thus physical parameters $\rho_0, \mathbf{G}_0, \eta_V, \mu, \mathbf{V}_0$ (respectively the atmospheric density, volume viscosity, dynamic viscosity and wind velocity) only vary along z.

(v) The background velocity $\mathbf{V}_0$ is a stationary stratified horizontal wind, that is, $\mathbf{V}_0(\mathbf{x}) = V_{0,x}(z) \cdot \mathbf{e}_x + V_{0,y}(z) \cdot \mathbf{e}_y$, where $\mathbf{x} = (x, y, z)$. This assumption will lead to a divergence-free wind ($\nabla \cdot \mathbf{V}_0 = 0$) and remove the influence of background wind on the hydrostatic equilibrium specified in assumption (vi).

(vi) The hydrostatic equilibrium is considered as a reference state

$$\mathbf{\Sigma}_0 = -P_0 \mathbf{I_d} \tag{7}$$

with $\mathbf{\Sigma}_0$ the reference state tensor, P_0 the background pressure and $\mathbf{I_d}$ the identity tensor in $\mathbb{R}^3$. By assuming that the initial atmosphere is stratified and at hydrostatic equilibrium (2) one can formulate an equation describing this initial state as

$$\nabla \cdot \mathbf{\Sigma}_0 + \rho_0 \mathbf{G}_0 = 0. \tag{8}$$

By injecting eq. (7) into eq. (8) one obtains

$$\rho_0 \mathbf{G}_0 = \nabla P_0. \tag{9}$$

(vii) We will make a linear assumption, that is, we will neglect second-order terms by removing the $O(\mathbf{u}^2)$ terms.

(viii) The wave perturbations are considered close to the adiabatic condition: $D_t Q = 0$.

(ix) One makes the Cowling approximation (Cowling 1941) for the gravitational field. It consists in ignoring perturbations in the gravitational field, such that

$$\rho_T \mathbf{G} = \rho_0 \mathbf{G}_0 + \rho_1 \mathbf{G}_0. \tag{10}$$

(x) We consider a regional scale domain and neglect the Coriolis force.

Hypothesis (ii) can be recast in a more convenient form

$$D_t I = C_v D_t T \quad \text{and} \quad T = \frac{P}{\rho_T R} \Leftrightarrow D_t I = \frac{C_v}{R} D_t (P/\rho_T). \tag{11}$$

Injecting it into the energy conservation eq. (1) and taking into account the adiabatic condition (viii) with P_a being the adiabatic pressure, this yields

$$\frac{C_v}{R} D_t \left(\frac{P_a}{\rho_T} \right) = -P D_t (1/\rho_T)$$
$$\frac{C_v}{R} [(1/\rho_T) D_t P_a + P_a D_t (1/\rho_T)] = -P_a D_t (1/\rho_T)$$
$$\frac{C_v}{R} [(1/\rho_T) D_t P_a - P_a D_t \rho_T / \rho_T^2] = P_a D_t \rho_T / \rho_T^2$$
$$D_t P_a = P_a \frac{D_t \rho_T}{\rho_T} \left(\frac{R}{C_v} + 1 \right). \tag{12}$$

Since we used the adiabatic assumption to get eq. (12), we will only work with the adiabatic pressure P_a. Thenceforth, we will use the notation $P = P_a$, where P will refer to the adiabatic pressure.

Combining this with the mass conservation eq. (3) yields

$$D_t P = -P \gamma \nabla \cdot \mathbf{V} \tag{13}$$

where $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ is the specific heat ratio.

One then gets a coupled system of equations: the pressure evolution eq. (13) and the Eulerian form of the momentum eq. (2) (details can be found in Vallis (2006) and Chaljub (2000)):

$$\begin{aligned} D_t P &= -P \gamma \nabla \cdot \mathbf{V} \\ \rho_T D_t \mathbf{V} - \nabla \cdot \mathbf{\Sigma}_T &= \rho_T \mathbf{G}. \end{aligned} \tag{14}$$

Unknowns are then split into ambient and perturbation values (iii), and from the linear hypothesis (vii), the reference state considered (vi) and the Cowling approximation (ix), eq. (14)-1 then reads (see e.g. Chaljub (2000))

$$\begin{aligned} \partial_t P_1 + (\mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_1) \nabla (P_0 + P_1) &= -(P_0 + P_1) \gamma \nabla \cdot \mathbf{V}_1 \\ \partial_t P_1 &= -\mathbf{V}_0 \cdot \nabla P_1 - \rho_0 c^2 \nabla \cdot \mathbf{V}_1 \\ &\quad - \rho_0 \mathbf{V}_1 \mathbf{G}_0, \end{aligned} \tag{15}$$

where c is the adiabatic sound speed

$$c = \left(\gamma \frac{P_0}{\rho_0} \right)^{1/2}. \tag{16}$$

Splitting the mass conservation eq. (3) into ambient and perturbation values according to (iii) yields

$$D_t \rho_T = -\rho_T \nabla \cdot \mathbf{V} \tag{17}$$
$$\partial_t \rho_T = -\nabla \cdot (\rho_T \mathbf{V}) \tag{17}$$
$$\partial_t \rho_1 = -\nabla \cdot (\mathbf{V_0} \rho_0 + \mathbf{V_0} \rho_1 + \mathbf{V_1} \rho_0 + \mathbf{V_1} \rho_1). \tag{17}$$

Considering the divergence-free background wind (v) and the linear assumption (vii) one then has

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_1 &= -\nabla \cdot (\mathbf{V_0} \rho_1 + \mathbf{V_1} \rho_0) \\ \partial_t \rho_1 &= -\nabla \rho_1 \cdot \mathbf{V_0} - \nabla \cdot (\mathbf{V_1} \rho_0). \end{aligned} \tag{18}$$

Now turning to the momentum equation, considering the divergence-free background wind (v) and the linear assumption (vii), (14)-2 reads

$$\rho_T D_t \mathbf{V} = \nabla \cdot \mathbf{\Sigma}_T + \rho_T \mathbf{G}$$
$$\rho_0 \partial_t \mathbf{V}_1 + \rho_0 \{(\mathbf{V}_1 \cdot \nabla) \mathbf{V}_0 + (\mathbf{V}_0 \cdot \nabla) \mathbf{V}_1\} = \nabla \cdot \mathbf{\Sigma}_1 + \nabla \cdot \mathbf{\Sigma}_0$$
$$- \mathbf{G}_0 \rho_1 - \mathbf{G}_0 \rho_0. \tag{19}$$

Combined with the static equilibrium eq. (8) this yields

$$\rho_0 \partial_t \mathbf{V}_1 = -\rho_0 \{(\mathbf{V}_1 \cdot \nabla) \mathbf{V}_0 + (\mathbf{V}_0 \cdot \nabla) \mathbf{V}_1\} + \nabla \cdot \mathbf{\Sigma}_1 + \mathbf{G}_0 \rho_1. \tag{20}$$

Using eqs (15), (18) and (20), the whole system (14) then reduces to:

$$\begin{aligned} \partial_t P_1 &= -\mathbf{V}_0 \cdot \nabla P_1 - \rho_0 c^2 \nabla \cdot \mathbf{V}_1 - \rho_0 \mathbf{V}_1 \mathbf{G}_0 \\ \partial_t \rho_1 &= -\mathbf{V}_0 \cdot \nabla \rho_1 - \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{V}_1) \\ \rho_0 \partial_t \mathbf{V}_1 &= -\rho_0 \{(\mathbf{V}_1 \cdot \nabla) \mathbf{V}_0 + (\mathbf{V}_0 \cdot \nabla) \mathbf{V}_1\} + \nabla \cdot \mathbf{\Sigma}_1 + \mathbf{G}_0 \rho_1, \end{aligned} \tag{21}$$

Downloaded from http://gji.oxfordjournals.org/ at Biblio Planets on June 10, 2016

where the stress tensor $\mathbf{\Sigma}_1$, under assumption (i), reads, $\forall(i,j) \in [1, 3] \times [1, 3]$

$$(\mathbf{\Sigma}_1)_{ij} = -P_1\delta_{ij} + \mu\left(\partial_j V_i + \partial_i V_j - \frac{2}{3}\delta_{ij}\nabla\cdot\mathbf{V}\right) + \eta_V\delta_{ij}\nabla\cdot\mathbf{V}\,, \tag{22}$$

where δ is the Kronecker symbol.

To simplify the writing in what follows we will drop subscripts and write

$$\rho_0 = \rho;\ \rho_1 = \rho_p;\ \mathbf{G}_0 = \mathbf{g};\ P_1 = p;\ \mathbf{V}_1 = \mathbf{v};$$
$$\mathbf{V}_0 = \mathbf{w};\ \mathbf{U}_1 = \mathbf{u};\ \mathbf{\Sigma}_1 = \mathbf{\Sigma}\,. \tag{23}$$

Eq. (21) then reads

$$\begin{aligned}\partial_t p &= -\mathbf{w}\cdot\nabla p - \rho c^2\nabla\cdot\mathbf{v} - \rho\mathbf{v}\mathbf{g}\\ \partial_t\rho_p &= -\mathbf{w}\cdot\nabla\rho_p - \nabla\cdot(\rho\mathbf{v})\\ \rho\partial_t\mathbf{v} &= -\rho\{(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{w} + (\mathbf{w}\cdot\nabla)\mathbf{v}\} + \nabla\cdot\mathbf{\Sigma} + \mathbf{g}\rho_p.\end{aligned} \tag{24}$$

With these notations (23) the stress tensor $\mathbf{\Sigma}$ then reads, $\forall(i,j) \in [1, 3] \times [1, 3]$,

$$(\mathbf{\Sigma})_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu\left(\partial_j(\mathbf{v}+\mathbf{w})_i + \partial_i(\mathbf{v}+\mathbf{w})_j - \frac{2}{3}\delta_{ij}\nabla\cdot\mathbf{v}\right) + \eta_V\delta_{ij}\nabla\cdot\mathbf{v}\,. \tag{25}$$

The system of eq. (24) describes simultaneously the propagation of both acoustic and gravity waves in a viscous fluid subject to wind. Note that in order to establish eq. (24), we did not use the stratified atmosphere assumption (iv) for density, adiabatic sound speed, viscosity nor gravity but only for wind profiles. It means that any 3-D varying profile of atmosphere can be considered for background parameters besides background wind. However, in simulations presented later on in this paper, for validations or applications, we only considered stratified media since it enabled us to get simple analytical solutions. Expansion of eq. (24) in component form can be found in Appendix A. In the remainder of this paper, we will refer by 'wind-convective' terms to the following terms in eq. (A1):

(a) $\mathbf{w}\cdot\nabla p, \mathbf{w}\cdot\nabla\rho_p$
(b) $(\mathbf{w}\cdot\nabla)\mathbf{v}$
(c) $(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{w}$.

2.2 Atmospheric viscosity and acoustic attenuation

Atmospheric absorption can occur by two main mechanisms (Bass *et al.* 1984): classical losses due to dissipation of mechanical energy and relaxation losses due to the conduction of heat energy. The dynamic viscosity μ, due to shear stress applied to a fluid, reads (Zuckerwar & Ash 2006; Bass & Chambers 2001)

$$\mu = \frac{2}{3}L\rho c\sqrt{2/\pi\gamma}, \tag{26}$$

where L is the mean free path, c the adiabatic sound speed (16) and $\gamma = C_p/C_v$ the specific heat ratio. The volume viscosity η_V due to the relaxation of dilatational disturbances (i.e. heat conduction and molecular relaxations) reads

$$\eta_V = \frac{4}{3}\mu + \frac{(\gamma-1)\kappa}{\gamma C_v}, \tag{27}$$

where μ is the dynamic viscosity, $\gamma = C_p/C_v$ the specific heat ratio, C_v the molar low-frequency specific heat at constant volume and κ the thermal conductivity. The acoustic absorption coefficient α (in m^{-1}) describes the frequency dependence of the attenuation process. This coefficient is the imaginary part of the wavenumber $k = Re(k) - i\alpha$ (Landau & Lifshitz 1959); From Bass & Chambers (2001), it writes

$$\alpha(f) = \frac{2(\pi f)^2}{\rho c^3}\eta_V\,. \tag{28}$$

When acoustic or seismic waves are modelled, Zener, Maxwell or Kelvin–Voigt are commonly used to introduce attenuation effects in the time domain (Moczo & Kristek (2005) show that several of these models are equivalent). Viscoelasticity in solids, modelled using the Zener model in the time domain, is introduced in the discretized equations through memory variables (Carcione 2014). Doing so avoids having to explicitly handle a convolution process with the whole past of the viscoelastic material, which is a complicated process from a numerical point of view (Carcione *et al.* 1988; Moczo 1989; Robertsson *et al.* 1994). However, in the Earth atmosphere, volume and dynamic viscosities tend to act as a Kelvin–Voigt viscoelastic mechanism. For a Kelvin–Voigt solid, one can represent the absorption coefficient, which is proportional to the inverse of its quality factor, as a function of frequency. Using this formulation, we will show in a simple case that this choice of viscoelastic mechanism is reasonable by comparing its absorption coefficient to the theoretical one in eq. (28).

We consider a simple homogeneous (i.e. with constant density and sound velocity) atmosphere model in which the volume viscosity η_V is constant and the shear viscosity is not taken into account (for $\tilde{}i \neq j$, $\tilde{}\Sigma_{ij} = 0$). We also neglect background velocity ($\mathbf{w} = \mathbf{0}$) and gravitation ($\mathbf{g} = \mathbf{0}$). Eq. (24) then yields

$$\begin{aligned}\partial_t p &= -\rho c^2\nabla\cdot\mathbf{v}\\ \partial_t\rho_p &= -\nabla\cdot(\rho\mathbf{v})\\ \rho\partial_t\mathbf{v} &= \nabla\cdot\Sigma,\end{aligned} \tag{29}$$

where

$$\mathbf{\Sigma} = (-p + \eta_V\nabla\cdot\mathbf{v})\mathbf{I_d}\,, \tag{30}$$

$\mathbf{I_d}$ being the identity tensor in $\mathbb{R}^3$. After replacing the pressure term in eq. (29)-3 with the primitive of eq. (29)-1, one obtains the formulation of the stress–strain relationship for a Kelvin–Voigt solid, as described for instance by Carcione (2014), eq. (2.159):

$$(\Sigma)_{ij,1<=i,j<=3} = (M_R\epsilon + \eta\dot{\epsilon})\delta_{ij}\,, \tag{31}$$

where Σ is the stress tensor, $M_R = \rho c^2$ the bulk modulus, $\eta = \eta_V$ the bulk viscosity and ϵ the strain, defined from the displacement $\mathbf{u}$ by $\epsilon = \nabla\cdot\mathbf{u}$. Unknowns are assumed to be Fourier functions in time and space such that

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = u_0 e^{i(\mathbf{kx}-wt)}\,. \tag{32}$$

From eq. (29), the dispersion relation in this case reads

$$k^2\left(1 - \frac{i}{D}\right) - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = 0\,, \tag{33}$$

where $D = \frac{\rho c^2}{w\eta_V}$, which yields

$$k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\frac{(1+\frac{i}{D})}{(1+\frac{1}{D^2})}\,. \tag{34}$$

The quality factor then reads (Carcione *et al.* 1988)

$$Q = \frac{Re(k^2)}{Im(k^2)} = D = \frac{\rho c^2}{2\pi f\eta_V}\,. \tag{35}$$

Downloaded from http://gji.oxfordjournals.org/ at Biblio Planets on June 10, 2016

One then gets the final dispersion relation by taking the square root of eq. (34):

$$k = \frac{w}{\sqrt{2}c}\left\{\frac{1}{1+(1/Q)^2}+\frac{1}{[1+(1/Q)^2]^{1/2}}\right\}^{1/2} + i\frac{w}{\sqrt{2}c}\left\{\frac{1}{1+(1/Q)^2}-\frac{1}{[1+(1/Q)^2]^{1/2}}\right\}^{1/2}. \quad (36)$$

This expression enables one to compute both the phase velocity and the absorption coefficient. From Carcione (2014), the phase velocity reads

$$v_\phi = \frac{\omega}{Re(k)}, \quad (37)$$

where $Re(k)$ is the real part of the wavenumber k. Eq. (36) then yields

$$v_\phi = \sqrt{2}c\left(\frac{1}{1+(1/Q)^2}+\frac{1}{[1+(1/Q)^2]^{1/2}}\right)^{-1/2}. \quad (38)$$

Considering altitudes below typically 400 km and low-frequency signals smaller than typically 1 Hz, it is reasonable to make the assumption $Q \gg 1$ and then to develop this expression to the second order in $\frac{1}{Q}$. Doing so the phase velocity (38) can then be written as

$$v_\phi \approx \frac{c}{1-\frac{3}{8}\left(\frac{1}{Q}\right)^2}. \quad (39)$$

This expression is the one given by Blackstock (2000), page 306. Consequently, acoustic wave propagation in an attenuated medium with bulk viscosity follows the Kelvin–Voigt relation and is dispersive. However, the $(1/Q)^2$ term is usually ignored in acoustics because it is a second-order term in $1/Q$. The wavenumber reads $k = Re(k) - i\alpha$, where α is the absorption coefficient

$$\alpha^2 = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{1}{2(1+(1/Q)^2)}(1-\sqrt{1+(1/Q)^2}). \quad (40)$$

By a Taylor expansion when $Q \gg 1$, one then gets

$$\alpha \approx \left(\frac{\omega}{c}\right)\frac{1}{2Q} \quad (41)$$

$$\alpha \approx \frac{2(\pi f)^2}{\rho c^3}\eta_V. \quad (42)$$

The Kelvin–Voigt absorption coefficients α and Q can thus be defined in terms of volume viscosity and frequency according to formulae (35) and (42). This result has been extended by Godin (2014) to the full absorption process, choosing into account both shear and volume viscosities. Eq. (9) in Godin (2014) shows that the traditional choice of picking constant coefficients leads to substantial quantitative errors, and in the infrasound limit Eq. (12) in that article gives a similar result as eq. (28). Finally, the background flow that causes the Doppler effect will shift the wave frequency and will thus impact its absorption. Variations of viscosity coefficients (μ and η_V) with altitude and background flows will be taken into account in our numerical simulations.

3 ATMOSPHERE MODELS

We will simulate wave propagation in several atmosphere models. We will first use simplified models for validation of our numerical technique with respect to analytical solutions. In these first models, all atmospheric parameters will be set to constant values. We will then design an isothermal atmosphere model to test the stability of the calculations relative to the exponential density decrease in the atmosphere. We will finally build a more realistic atmosphere model from empirical atmosphere models with only vertical variations of the parameters.

Table 1. Constant parameters of the isothermal model: from left to right, scale height, gravity, sound speed, square of the Brunt–Väisälä frequency, ratio of calorific capacities, and temperature. Volumic mass and pressure at the surface are set respectively to 0.4083 kg m^{-3} and 10^5 Pa. We use a constant molar mass of 28.96 g mol^{-1}.

H (km)	g_z(m s^{-2})	c (m s^{-1})	N^2(rad^2 s^{-2})	γ (no unit)	T (K)
29	−9.831	639.5	10^{-4}	1.67	1000

3.1 Isothermal model

In order to infer the validity of our computations relative to the exponential density decrease in the atmosphere, we first create an isothermal model. Air density and pressure decrease exponentially with a constant scale height, all other parameters being constant. The values of these constant parameters are representative of those observed in the thermosphere and are summarized in Table 1. The model is built assuming an ideal gas in hydrostatic equilibrium at constant temperature (Nappo 2002).

3.2 Realistic atmosphere model

In order to verify the stability of our calculations relative to realistic vertical variations of atmospheric parameters, we create a model that exhibits only vertical variations of the atmospheric parameters that are extracted from the MSISE-00 atmosphere model (Picone *et al.* 2002), and from the HWM93 atmospheric wind model (Hedin 1991) when atmospheric winds are included. The thermodynamic properties of the atmospheric compounds are extracted from the NIST web-book database (http://webbook.nist.gov/chemistry/). We extracted a vertical profile of these atmospheric parameters for conditions corresponding to a surface point at latitude 36.5°, longitude 158.7° at 7:47:40 UTC on 2011 March 11. This space and time location corresponds to the coordinates of the crossing between the post-seismic infrasonic waves generated by the Tohoku earthquake in Japan and the GOCE satellite (Garcia *et al.* 2013). This vertical profile is extended in 2-D and 3-D by invariant prolongation of the whole set of physical properties in the direction orthogonal to the 2-D plane. Density, adiabatic sound speed and Brunt–Väisälä frequency versus altitude are presented in Fig. 1. Other charts can be found in Appendix C.

4 NUMERICAL DISCRETIZATION

Time discretization is carried out based on a fourth-order Runge–Kutta scheme and spatial discretization is based on a fourth-order staggered scheme. We have performed comparisons, not shown here, that demonstrate that in our case there is no significant benefit of using a more sophisticated scheme such as a low-dissipation and low-dispersion fourth-order Runge–Kutta algorithm (LDDRK; Berland *et al.* (2006)). For spatial discretization, we use the following stencil (Fig. 2):

For a scalar unknown u computed at time step m and at grid point (i, j, k),

$$u_m^{i,j,k} = u(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, m\Delta t), \quad (43)$$

Downloaded from http://gji.oxfordjournals.org/ at Biblio Planets on June 10, 2016

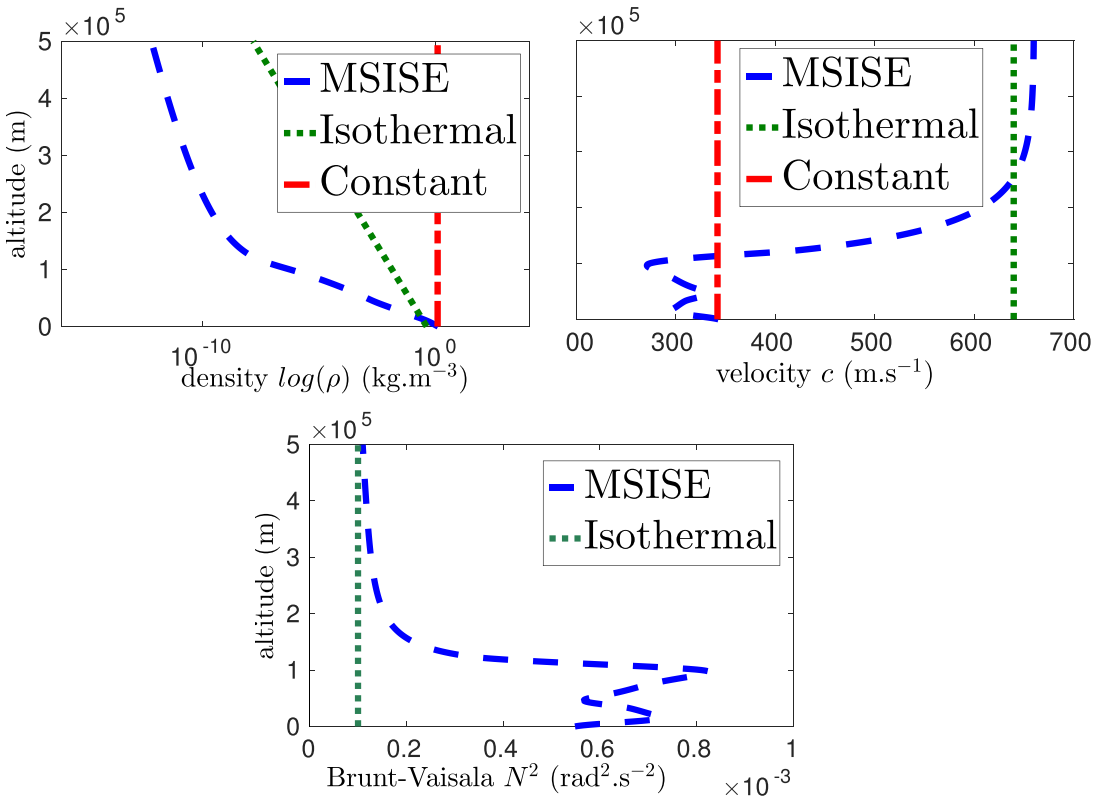

Figure 1. Vertical profiles of mean density, sound velocity and square of Brunt–Väisälä frequency extracted from empirical atmosphere model *MSISE − 00* (Picone *et al.* 2002) and isothermal models in Table 1.

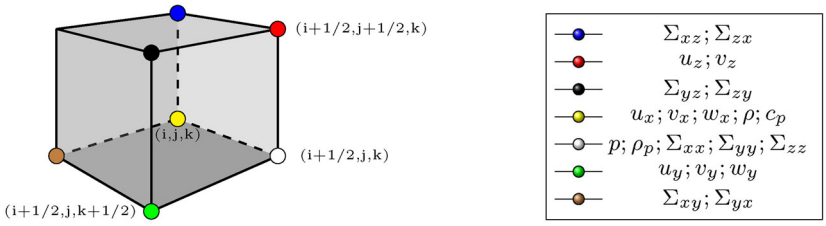

Figure 2. Stencil showing where unknowns are computed in the mesh.

within the domain Ω the finite-difference operators read

$$(\partial_x u)_m^{(i,j,k)} = \frac{27\,u_m^{(i+1,j,k)} - 27u_m^{(i,j,k)} - u_m^{(i+2,j,k)} + u_m^{(i-1,j,k)}}{24\Delta x}$$

$$(\partial_y u)_m^{(i,j,k)} = \frac{27\,u_m^{(i,j,k)} - 27u_m^{(i,j-1,k)} - u_m^{(i,j+1,k)} + u_m^{(j,j-2,k)}}{24\Delta y}$$

$$(\partial_z u)_m^{(i,j,k)} = \frac{27\,u_m^{(i,j,k)} - 27u_m^{(i,j,k-1)} - u_m^{(i,j,k+1)} + u_m^{(j,j,k-2)}}{24\Delta z}. \quad (44)$$

Note that in eq. (24) the pressure and density perturbation evolution equations require the calculation of ∇p and $\nabla\rho_p$ at the same spatial location as, respectively, p and ρ_p, in term (a). We select a non-staggered upwind or downwind scheme depending on the sign of w_x in order to properly treat the advective terms (Ferziger & Peric 2012). The instability that can otherwise arise from a centred scheme comes from the fact that the flow goes from upstream to downstream and thus the derivative computed at any point should not take into account information downstream since it has no physical meaning. Similar instabilities appear when using the staggered grid described in eq. (44). This upwind/downwind scheme writes:

$$\text{if } w_x < 0 \quad (\partial_x p)_m^{(i,j,k)} = \frac{1}{6\Delta x}\{2(p_m^{(i,j,k)} - p_m^{(i-1,j,k)}) + 6(p_m^{(i+1,j,k)} - p_m^{(i,j,k)}) - (p_m^{(i+2,j,k)} - p_m^{(i,j,k)})\}$$

$$\text{if } w_x > 0 \quad (\partial_x p)_m^{(i,j,k)} = \frac{1}{6\Delta x}\{2(p_m^{(i+1,j,k)} - p_m^{(i,j,k)}) + 6(p_m^{(i,j,k)} - p_m^{(i-1,j,k)}) - (p_m^{(i,j,k)} - p_m^{(i-2,j,k)})\}. \quad (45)$$

We apply the same kind of approach to other 'wind-convective' terms involving ρ_p, (v_x, v_y), w_x, respectively in terms (a), (b)(c) and (c).

Note that other authors have used different staggered grids for spatial discretization. In order to choose the numerical method, we implemented the spatial discretization presented in de Groot-Hedlin *et al.* (2011) coupled with the fourth-order Runge–Kutta scheme (in their publication they implemented a less accurate second-order

Downloaded from http://gji.oxfordjournals.org/ at Biblio Planets on June 10, 2016

scheme). It exhibited instabilities when performing various tests on atmospheric backgrounds with a strong wind (of about 100 m s^{-1}) and a 'high-frequency' wave generated by a point source (of about 5 s dominant time period). We thus choose to use the discretization (44)-(45) instead.

Regarding boundary conditions, we perform simulations in a simple Cartesian mesh in which $\Delta x = \Delta y = \Delta z$. On the left and right boundaries of the domain we implement periodic boundary conditions. This implies that the atmosphere model should be continuous between the right and left boundaries, which is the case since our models only vary along z. On the top edge of the grid, referred to as Γ_D, we enforce a homogeneous Dirichlet boundary condition that consists in imposing, at any time t, for $\mathbf{x} \in \Gamma_D$,

$$u(\mathbf{x}, t) = 0\,. \tag{46}$$

This choice has no real physical meaning but is implemented here for simplicity. It will lead to reflection when waves hit the boundary, but for large-enough meshes this choice has no measurable impact on signals observed. When simulating an atmospheric explosion, that is, when the source is located inside the grid, we apply Dirichlet boundary conditions (46) on the bottom boundary as well.

In the other cases, that is, when the seismic source is located outside the grid, we apply a forcing boundary condition along the bottom edge of the grid to simulate incoming seismic waves impinging from the bottom: at any time t, for $\mathbf{x} \in \Gamma_F$, for $f \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)\,, \tag{47}$$

where $\mathbf{f}$ is the forcing function.

At the edges of the computational grid, the discretization (44) requires the computation of unknown terms at position $j = 0, -1$. We compute these terms using a mirror condition, meaning that $\forall m, i, k$

$$p_m^{(i,0,k)} = 2p_m^{(i,1,k)} - p_m^{(i,2,k)} \tag{48}$$

which is the linear interpolation of $p_m^{(i,1,k)}$ from neighbouring values $p_m^{(i,0,k)}$, $p_m^{(i,2,k)}$ expressed in terms of $p_m^{(i,0,k)}$. The same holds for $p_m^{(i,-1,k)}$, such that

$$p_m^{(i,-1,k)} = 2p_m^{(i,0,k)} - p_m^{(i,1,k)} \tag{49}$$

Since we will often perform simulations over large domains we resort to parallel computing implemented using the Message-Passing Interface libraries (Gropp *et al.* 1994), decomposing the mesh into regular slices cut along the x-coordinate axis.

5 2-D ACOUSTIC WAVE VALIDATION

5.1 Construction of the analytical solutions

We compute the analytical solution in the time domain for validation purposes for each test case using the following process:

(i) Calculation of the forcing signal for the whole time domain along the forcing boundary or at the point source,
(ii) Calculation of the 3-D (or 2-D) Fourier transform (spatial and time transformations) of that function,
(iii) Calculation of wavenumbers $k_x = 2\pi/\lambda_x$ and $k_y = 2\pi/\lambda_y$ for all spatial wavelengths $\lambda_{x,y}$
(iv) Calculation of k_z from dispersion relations for all wavenumbers k_x, k_y and time frequencies (see Appendix B),
(v) Multiplication, in the Fourier domain, of the forcing function with a complex filter based on the representation of the solution in the case of an harmonic source or forcing term (see Appendix B for more details),
(vi) Calculation of the inverse Fourier transform of the result at the recording stations to obtain the solution in the time domain.

Table 2. Simulation parameters for the isothermal model 3.1 without considering attenuation, used in Simulation 5.2, that is, the case of a Bottom 'high-frequency' forcing in a windless atmosphere with exponentially decaying density and without attenuation. In this table, we express parameters with the following dimensions: ρ (kg m^{-3}), c (m s^{-1}), η_V(kg m^{-1} s^{-1}), μ(kg m^{-1} s^{-1}), g_z(m s^{-2}) and w_x(m s^{-1}).

$L_x \times L_z$ (km)	Δx (m)	Δt (s)	ρ	c	η_V	μ	g_z	w_x
20 × 800	250	10^{-2}	varying	652.82	0	0	−9.831	0

5.2 Bottom 'high-frequency' forcing in a windless atmosphere with exponentially decaying density and without attenuation

The first validation step concerns acoustic waves and the underlying physical processes of dispersion and amplitude growth with altitude. We consider the following forcing function, $\forall \mathbf{x} \in \Gamma_F$:

$$f(\mathbf{x}, t) = e^{-\left[\frac{t-(t_0-P/4)}{P/4}\right]^2} - e^{-\left[\frac{t-(t_0+P/4)}{P/4}\right]^2}\,, \tag{50}$$

where P is the time period of the forcing signal and t_0 the starting forcing time. We set $P = 60$ s and $t_0 = 55$ s. The atmosphere is considered isothermal and described in Table 2.

Two particular features for atmospheric waves associated with density variations can be noticed in Fig. 3: first, the amplification of vertical velocity/displacement amplitude due to the decrease of atmospheric density, since kinetic energy $E_c \propto \rho|\mathbf{v}|^2$ is conserved; second, the dispersion effect on the waveform. This latter point is due to the frequency dependence of phase velocity $v_p = v_p(\omega, c, H)$ (Landau & Lifshitz 1959).

5.3 Bottom 'high-frequency' forcing in an attenuating, windless atmosphere with exponentially decaying density

Here let us study and validate the effect of viscosity on acoustic waves. To do so in eq. (50), we set $P = 15$ s and $t_0 = 30$ s. These parameters are slightly different from the previous case because the absorption coefficient α in (28) is frequency dependent and thus in order to clearly see its effect we need to select a frequency larger than in the previous case. The atmosphere is considered isothermal and described in Table 3.

Fig. 4 shows a good fit between the analytical and numerical signals in terms of both wave amplitude and traveltime, the error being less than 5 per cent in maximum amplitude over time. Several physical phenomena can be observed: first, the decay in amplitude due to the atmospheric viscosity. In this case, only the volumic viscosity impacts the propagation because acoustic (pressure) waves are not sensitive to shear stress. The other phenomenon is the apparent frequency dispersion, coming from the fact that the absorption coefficient (28) is frequency dependent and thus high frequencies are more attenuated than lower ones, which leads to a larger apparent period for the attenuated signal than for the non-attenuated one.

Downloaded from http://gji.oxfordjournals.org/ at Biblio Planets on June 10, 2016

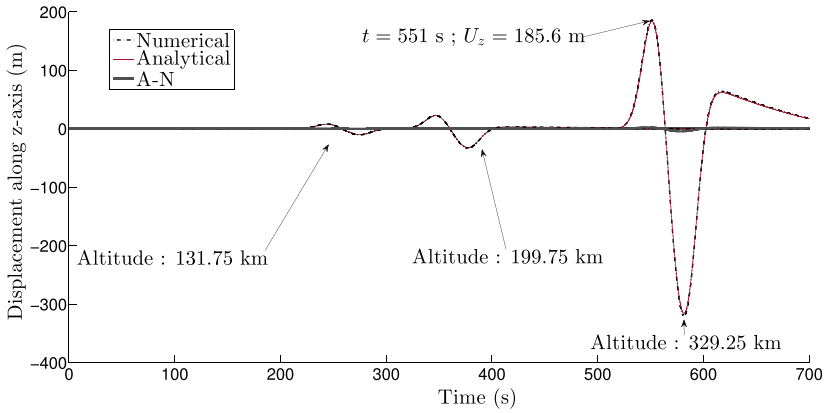

Figure 3. Vertical displacement for the finite-difference solution ('Numerical'), the analytical solution ('Analytical') and the difference between the two ('A-N') through time for Simulation 5.2 , that is, the case of a bottom 'high-frequency' forcing in a windless atmosphere with exponentially decaying density and without attenuation and for three recording stations located at altitudes $z = 131.75$, 199.75 and 329.25 km. The atmosphere is considered isothermal (Table 2).

Table 3. Simulation parameters corresponding to the full isothermal model 3.1 for Simulation 5.3 , that is, the case of a bottom 'high-frequency' forcing in a windless atmosphere with exponentially decaying density and without attenuation. In this table, we express parameters with the following dimensions: ρ (kg m^{-3}), c (m s^{-1}), η_V(kg m^{-1} s^{-1}), μ(kg m^{-1} s^{-1}), g_z(m s^{-2}) and w_x(m s^{-1}).

$L_x \times L_z$ (km)	Δx (m)	Δt (s)	ρ	c	η_V	μ	g_z	w_x
20×800	250	10^{-2}	varying	652.82	10^{-4}	0	-9.831	0

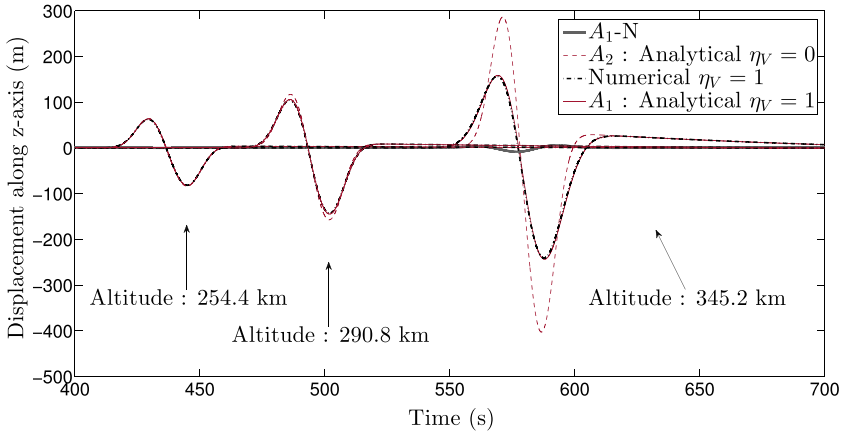

Figure 4. Vertical displacement for the finite-difference solution ('Numerical') and the analytical solution ('Analytical A_1') as well as the difference between the two ('A_1-N'); we also show the case without viscosity ('Analytical A_2'). The signals are shown through time for Simulation 5.3 , that is, the case of a bottom 'high-frequency' forcing in a windless atmosphere with exponentially decaying density and without attenuation, and for three recording stations located at altitudes $z = 2544$, 290.8 and 345.2 km. The atmosphere is considered isothermal (Table 3).

5.4 Atmospheric explosion in a windy homogeneous atmosphere

Here let us study and validate the effect of wind on acoustic waves. In this case, we consider an atmospheric explosion, that is, a sudden increase in volume inserted into the pressure equation, such that

$$Q = \frac{-2\pi}{P}(t - t_0)e^{-\left[\frac{\pi}{P}(t-t_0)\right]^2}$$

$$\partial_t p = -\mathbf{w} \cdot \nabla p - \rho c^2(\nabla \cdot \mathbf{v} + Q), \tag{51}$$

where $P = 100$ s is the dominant time period of the explosion and $t_0 = 75$ s is the starting time. The source is located at $x_S = 400$ km and $z_S = 400$ km. The atmosphere is again considered isothermal and described in Table 4.

Fig. 5 shows that the waveform and the traveltime are both computed accurately by the numerical simulation. We have scaled the source amplitude A in eq. (B2) to that recorded at the first station in the far field because the analytical solution (B3) is valid only in the far-field domain. Several aspects of spherical acoustic waves propagation in a moving medium can be noticed. As expected the amplitude decreases as $1/\sqrt{r}$ in terms of geometrical spreading, compared to $1/r$ in a 3-D medium, because this simulation is 2-D.

Table 4. Simulation parameters corresponding to the homogeneous isothermal model 3.1 for Simulation 5.4 , that is, the case of an atmospheric explosion in a windy homogeneous atmosphere. In this table, we express parameters with the following dimensions: ρ (kg m^{-3}), c (m s^{-1}), η_V(kg m^{-1} s^{-1}), μ(kg m^{-1} s^{-1}), g_z(m s^{-2}) and w_x(m s^{-1}).

$L_x \times L_z$ (km)	Δx (km)	Δt (s)	ρ	c	η_V	μ	g_z	w_x
800×800	500	10^{-2}	1.2	652.82	0	0	-9.831	150

Downloaded from http://gji.oxfordjournals.org/ at Biblio Planets on June 10, 2016

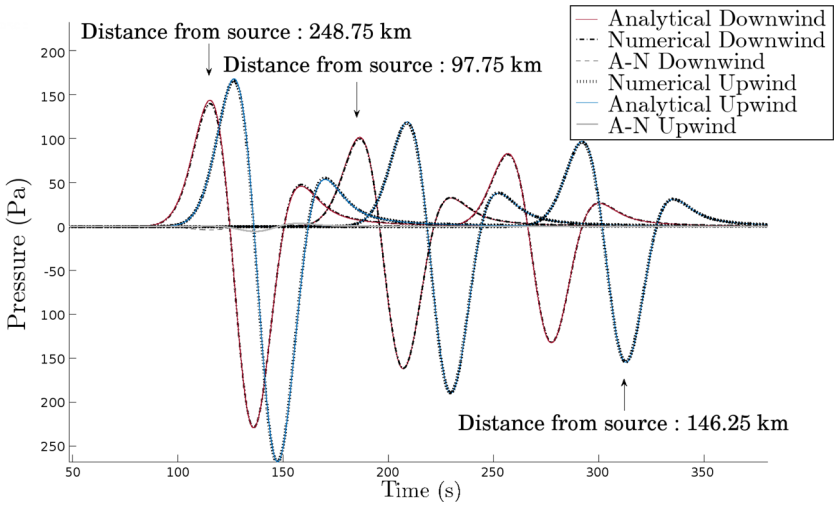

Figure 5. Pressure for the finite-difference upwind and downwind solutions ('Numerical') and the analytical upwind and downwind solutions ('Analytical') as well as the difference between the two upwind and downwind solutions ('A-N'). The signals are shown through time for Simulation 5.4 , that is, the case of an atmospheric explosion in a windy homogeneous atmosphere, at six recording stations (three downwind and three upwind) located at altitude $z = z_S =$ 400 km and at distances $x = 48.75$, 97.75 and 146.25 km away from the source. The atmosphere is considered isothermal (Table 4).

Table 5. Simulation parameters corresponding to the isothermal model 3.1 for Simulation 6.1 , that is, the case of a bottom 'low-frequency' forcing in an atmosphere with exponentially decaying density. In this table, we express parameters with the following dimensions: ρ (kg m^{-3}), c (m s^{-1}), η_V(kg m^{-1} s^{-1}), μ(kg m^{-1} s^{-1}), g_z(m s^{-2}) and w_x(m s^{-1}).

$L_x \times L_z$ (km)	Δx (m)	Δt (s)	ρ	c	η_V	μ	g_z	w_x
1200 × 400	500	10^{-2}	varying	652.82	0	0	−9.831	0

The Doppler shift due to wind is noticed through the frequency shift and amplitude variations between upwind and downwind acoustic propagation. As expected (Nappo 2002), upwind waves have larger periods and amplitudes than downwind ones.

6 2-D GRAVITY WAVES

6.1 Bottom 'low-frequency' forcing in an atmosphere with exponentially decaying density

In order to study and validate gravitoacoustic wave propagation and the underlying physical processes, we consider the forcing function, $\forall \mathbf{x} \in \Gamma_{FS}$:

$$f(\mathbf{x}, t) = \left(e^{-\left[\frac{t-(t_0-P/4)}{P/4}\right]^2} - e^{-\left[\frac{t-(t_0+P/4)}{P/4}\right]^2} \right) \times \left(e^{-\frac{x-(x_0-S/4)^2}{S/4}} - e^{-\frac{x-(x_0+S/4)^2}{S/4}} \right), \quad (52)$$

where $P = 1600$ s is the dominant time period of the forcing signal, $S = 80$ km is the dominant spatial period along x, $t_0 = 1400$ s is the starting forcing time and $x_0 = 600$ km is the position of the bottom forcing along x. The atmosphere is considered isothermal and described in Table 5.

We will now compare numerical and analytical particle displacement at several recording stations. In this case, station locations must be chosen wisely because internal gravity waves do not propagate in all directions. Indeed, the dispersion relation (B4) without wind, that is, with $w_x = 0$ yields the angle of propagation β

$$\cos\beta = \frac{\omega}{N}, \quad (53)$$

where N is the Brunt–Väisälä frequency and β is the angle between the horizontal axis x and the wave vector $\mathbf{k}$, such that

$$\mathbf{k} = |\mathbf{k}|(\cos\beta \mathbf{e}_x + \sin\beta \mathbf{e}_z). \quad (54)$$

We thus only select stations at positions for which $\beta_{stat} < \beta$, where β_{stat} is the angle between the horizontal axis x and the position vector of the station.

In Fig. 6, one can see low-frequency gravity waves propagating in the stratified atmosphere. The figure shows low amplitude errors and a good fit in terms of phase velocity.

6.2 Bottom 'low-frequency' forcing in a windy atmosphere with exponentially decaying density

6.2.1 *Comparison with analytical solution*

In order to study and validate the impact of wind on gravity wave propagation, we use the same forcing (52) as above, with parameters $P = 1600$ s, $S = 80$ km, $t_0 = 1400$ s and $x_0 = 800$ km. The atmosphere is considered isothermal and described in Table 6.

In Fig. 7, as in the acoustic case of Fig. 5, one can notice the impact of the Doppler shift on gravity wave propagation: upwind waves have a larger period and larger amplitude than downwind ones.

In Fig. 8, we present snapshots of the simulation. A typical feature of gravity wave propagation can be observed: the group (V_g) and phase velocities (V_p) are orthogonal. The pictures also illustrate an interesting aspect of our numerical modelling tool, which is that we can compute and show the propagation of gravity and acoustic waves simultaneously. One can thus notice an acoustic wave front propagating from the bottom to the top, ahead of gravity waves owing to the small positive amplitude of displacement perturbation u_z between the bottom forcing function (52) at t_1 and $t_1 + \Delta t$ such

Downloaded from http://gji.oxfordjournals.org/ at Biblio Planets on June 10, 2016

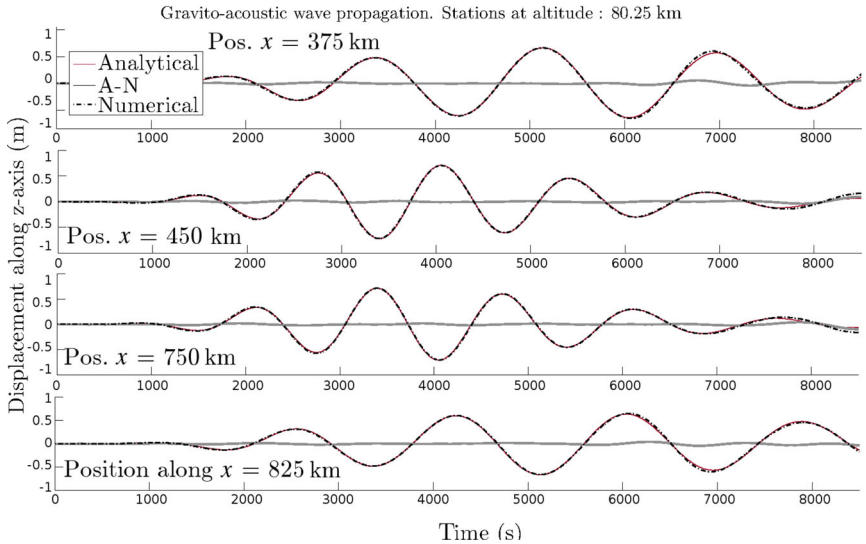

Figure 6. Vertical displacement for the finite-difference solution ('Numerical') and the analytical solution ('Analytical') as well as the difference between the two ('A-N'). The signals are shown through time for Simulation 6.1, that is, the case of a bottom 'low-frequency' forcing in an atmosphere with exponentially decaying density, at the four recording stations located at the same altitude $z = 80.25$ km, their positions along x being, from top to bottom, $x = 375$, 450, 750 and 825 km. The atmosphere is considered isothermal (Table 5).

Table 6. Simulation parameters corresponding to the isothermal model 3.1 subject to wind for Simulation 6.2.1 , that is, the case of a Comparison with analytical solution. In this table, we express parameters with the following dimensions: ρ (kg m^{-3}), c (m s^{-1}), η_V(kg m^{-1} s^{-1}), μ(kg m^{-1} s^{-1}), g_z(m s^{-2}) and w_x(m s^{-1}).

$L_x \times L_z$ (km)	Δx (m)	Δt (s)	ρ	c	η_V	μ	g_z	w_x
1600 × 400	500	10^{-2}	varying	652.82	0	0	−9.831	10

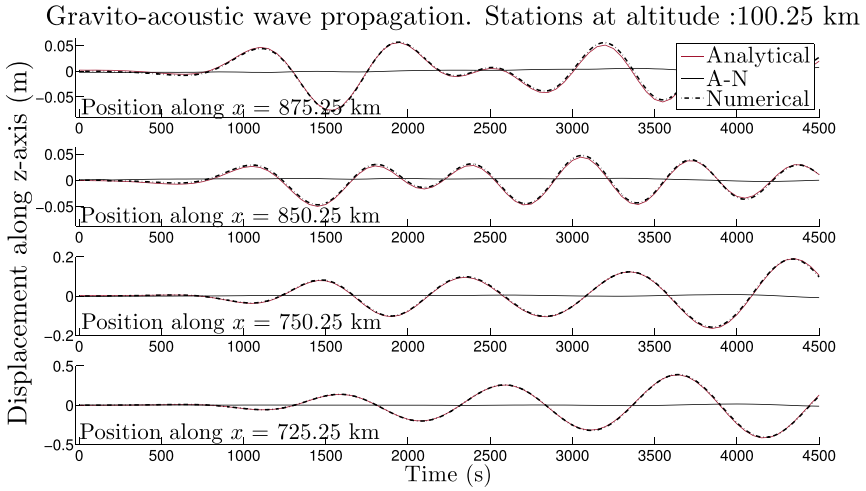

Figure 7. Vertical displacement for the finite-difference numerical solution ('Numerical') and the analytical solution ('Analytical') as well as the difference between the two ('A-N'). The signal is shown through time for Simulation 6.2.1 , that is, the case of a comparison with analytical solution, at four recording stations located at the same altitude $z = 100.25$ km and whose positions along x are, from top to bottom, $x = 875.25$, 850.25, 750.25 and 725.25 km. The atmosphere is considered isothermal (Table 6).

that $f(t_1) = 0; f(t_1 + \Delta t) > 0$. This step, similar to a Dirac, generates a high-frequency wave (an acoustic wave).

Note that in the comparisons presented in Fig. 7 the impact of this 'high-frequency' wave on the seismogram is not seen because its amplitude is tiny compared to that of the gravity wave.

6.2.2 Resolution analysis

In order to see the impact of resolution (spatial and time steps) on the displacement amplitude error, and since we have not performed any rigorous mathematical stability and accuracy analysis of the problem, we perform tests with various resolutions in the case of gravity waves propagating in a windy atmosphere.

We use a similar bottom forcing as in eq. (52), with parameters $P = 800$ s, $S = 25$ km, $t_0 = 800$ s and $x_0 = 250$ km and consider the atmosphere model specified in Table 7. In Fig. 9, the left and right panels show how spatial resolution impacts the amplitude error through time. First, as one decreases the spatial step one can see that the error decreases, in particular for the largest error peaks (i.e. between $t = 2000$ s and $t = 3000$ s in the left panel). Owing to

Downloaded from http://gji.oxfordjournals.org/ at Biblio Planets on June 10, 2016

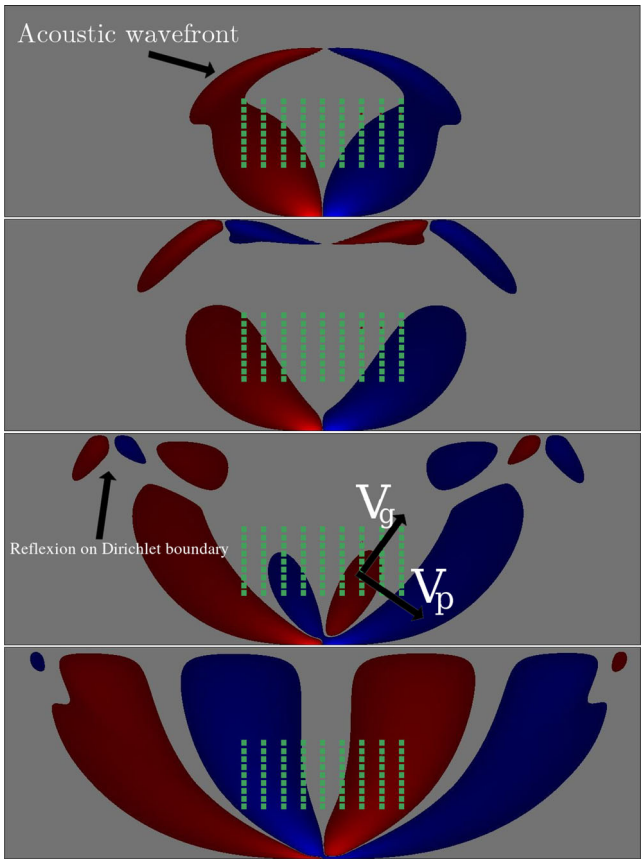

Figure 8. Vertical displacement for the finite-difference numerical solution for Simulation 6.2.1 , that is, the case of a Comparison with analytical solution. Red indicates positive vertical displacements and blue negative ones. The green squares show the location of the recording stations. Snapshots are taken, from top to bottom, at times $t = 500$ s, $t = 700$ s, $t = 900$ s and $t = 1100$ s. The origin of the coordinate system is at the bottom left of the domain. The atmosphere is considered isothermal (Table 6). A small acoustic wave front is also observed. Phase and group velocities are indicated by V_p and V_g respectively in the third snapshot from the top, and are orthogonal.

Table 7. Simulation parameters corresponding to the isothermal model 3.1 subject to wind for Simulation 6.2.2 , that is, the case of a Resolution analysis. In this table, we express parameters with the following dimensions: ρ (kg m^{-3}), c (m s^{-1}), η_V(kg m^{-1} s^{-1}), μ(kg m^{-1} s^{-1}), g_z(m s^{-2}) and w_x(m s^{-1}).

$L_x \times L_z$ (km)	Δx (m)	Δt (s)	ρ	c	η_V	μ	g_z	w_x
1600 × 400	500	10^{-2}	varying	652.82	0	0	−9.831	10

the cumulative nature of such numerical error with time, accuracy is more impacted for long time periods than at the beginning of the simulation, where the error is similar for all spatial resolutions considered. At time $t = 2000$ s in the bottom-left chart one notices that the simulation with a larger spatial step exhibits lower error, but only temporarily. The 'averaging' implied by a large spatial step $\Delta x = 1000$ m seems to, surprisingly, reproduce the phase of the analytical signal well, but as one decreases Δx the error gets lower than that for $\Delta x = 1000$ m. In the right panel, the difference in displacement amplitude between simulations with resolution $\Delta x = 125$ m and $\Delta x = 250$ m shows that for this set of parameters (Table 7) the solution seems to be converging. If one decreases the time step Δt for the resolution $\Delta x = 125$ m one notices an improvement in accuracy at the beginning of the simulation, but after 1600 s both simulations give a similar result. With this resolution ($\Delta x = 125$ m and $\Delta t = 0.01$ s) the numerical solution has converged and decreasing the time step will not decrease the error any longer.

Another source of error comes from the numerical computation of the analytical solution. Indeed, a numerical Fourier transform and then a numerical inverse Fourier transform are required to compute the solution (refer to Section 5.1), which introduces numerical approximations. In Fig. 10, we show the absolute error between numerical evaluations of the analytical solution computed with various resolutions. The resolution impacts directly the Fourier transform since it leads to a lower boundary (specified by the Nyquist frequency) for the number of points required, in order to overcome aliasing, in both spatial and time Fourier transforms. Thus, in the chart one notices that the number of spatial points has a significant impact on the analytical signal: one obtains almost a 5 per cent difference in absolute amplitude between the signal computed for $\Delta x = 125$ m and for $\Delta x = 500$ m. The very small difference (about 10^{-14} m) obtained between spatial resolutions $\Delta x = 125$ m and $\Delta x = 250$ m shows that the solution has converged and then captured low vertical wavelength values.

This illustrates the fact that small errors sometimes observed in the validation cases presented in this work can be explained by the resolution used in these simulations. If we had chosen smaller spatial steps for the numerical and analytical computations we could have decreased the error in phase and amplitude but the computation time would have thus significantly increased. As often with numerical schemes there is a trade-off to find between accuracy and numerical cost.

7 2-D APPLICATIONS

7.1 Bottom 'low-frequency' forcing in an isothermal atmosphere subject to a wind duct

In this case, we set up a wind duct (a strong wind velocity gradient) to show specific gravity-wave features studied by several authors (Ding *et al.* 2003; Nappo 2002). We use the same type of forcing as in Simulation 6.1, with parameters $P = 2800$ s, $S = 80$ km, $t_0 = 1600$ s and $x_0 = 1280$ km. The atmosphere is considered isothermal and described in Table 8.

In this case, the wind profile is a wind duct, that is, a Gaussian bump such that

$$w_x(z) = 10 + w_{x,0} e^{-(\frac{z-\tilde{z}}{\sigma})^2} \tag{55}$$

with $w_{x,0} = 200$ m s^{-1}, $\tilde{z} = 100$ km and $\sigma = 5000$ m.

In Fig. 11, three main features of gravity-wave propagation subject to a wind duct are seen: first, waves can go beyond the wave duct but the altitude reached by the upwind waves is much higher than the downwind ones. Second, some downwind waves seem to be concen trated around the wave duct. Finally, in the bottom left of the upwind waves, one can observe a refracted wave due to reflection on the wave duct owing to the strong wind velocity gradient.

Downloaded from http://gji.oxfordjournals.org/ at Biblio Planets on June 10, 2016

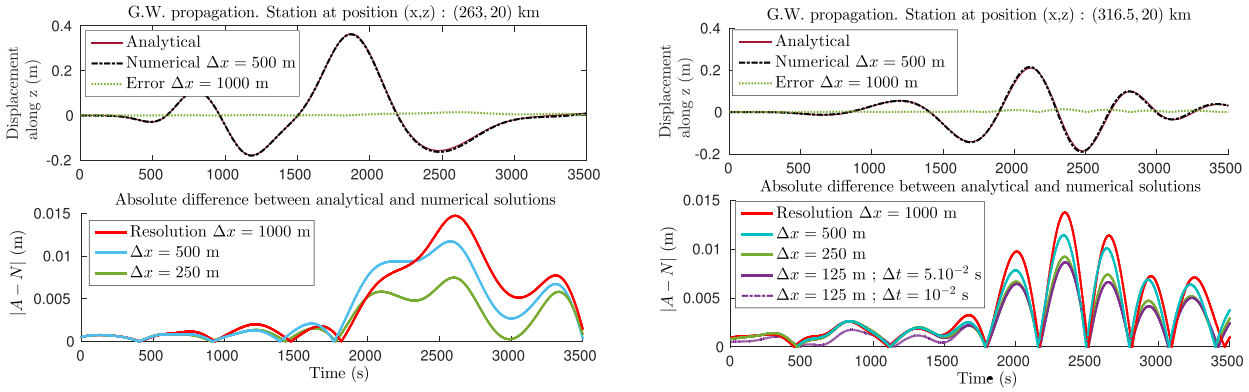

Figure 9. In the top charts, vertical displacement for the finite-difference solution ('Numerical') and the analytical solution ('Analytical') in case of a spatial step $\Delta x = 500$ m, as well as the difference between the two cases ('Error') for a spatial step $\Delta x = 1000$ m. The signals are shown through time for Simulation 6.2.2 at two recording stations located at the same altitude $z = 20$ km, their position along x being, from left to right, $x = 263$ and 316.5 km. The atmosphere is considered isothermal (Table 7). In the bottom charts we display amplitude through time of the absolute difference of vertical displacement between the analytical signal and the numerical one for various spatial steps $\Delta x = 125$, 250, 500, 1000 m and also for $\Delta t = 0.01$ s for the spatial resolution $\Delta x = 125$ m. For both stations, the amplitude of the error decreases with increasing resolution, as expected.

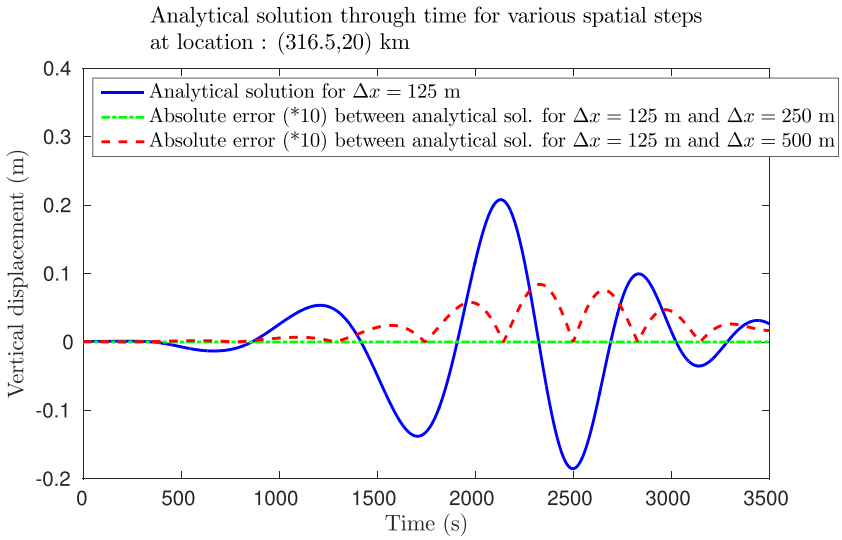

Figure 10. Vertical displacement for the analytical solution ('Analytical solution') in case of a spatial step $\Delta x = 125$ m, and amplitude through time of the absolute difference in vertical displacement ('Absolute error') between the analytical signals for various spatial steps: between signals for $\Delta x = 125$ and $\Delta x = 250$ m and also between signals for $\Delta x = 125$ and $\Delta x = 500$ m. Absolute amplitude errors are multiplied by 10 here in order to be able to see both in each chart. The signals are shown through time for Simulation 6.2.2, at the same recording station located at altitude $z = 20$ km and $x = 316.5$ km. The atmosphere is considered isothermal (Table 7). Errors decrease significantly as one increases the number of points used in the calculation of the numerical Fourier transform. The results also show that for $\Delta x = 250$ m the numerical calculation of the analytical solution has also converged.

7.2 Tsunami-like bottom forcing in a full MSISE-based atmosphere

In this case, let us consider the forcing function, $\forall \mathbf{x} \in \Gamma_F$,

$$f(\mathbf{x},t) = \left(e^{-\left[\frac{t-(t_0-P/4)}{P/4}\right]^2} - e^{-\left[\frac{t-(t_0+P/4)}{P/4}\right]^2}\right) \times \left(e^{-\left[\frac{[x_0+v_t*t]-(x_0-S/4)}{S/4}\right]^2} - e^{-\left[\frac{x-([x_0+v_t*t]+S/4)}{S/4}\right]^2}\right), \qquad (56)$$

where $P = 800$ s is the dominant time period of the forcing signal, $S = 80$ km is the dominant spatial period along x of the forcing signal, $t_0 = 800$ s is the starting forcing time and $x_0 = 266.5$ km is the position of the bottom forcing along x. The tsunami wave velocity is $v_t = 100$ m s^{-1}. We define the atmosphere according to the MSISE-00 model described in Table 10.

Table 8. Simulation parameters corresponding to the isothermal model 3.1 subject to wind for Simulation 7.1, that is, the case of a Bottom 'low-frequency' forcing in an isothermal atmosphere subject to a wind duct. In this table we express parameters with the following dimensions: ρ (kg m^{-3}), c (m s^{-1}), η_V(kg m^{-1} s^{-1}), μ(kg m^{-1} s^{-1}), g_z(m s^{-2}) and w_x(m s^{-1}).

$L_x \times L_z$ (km)	Δx (m)	Δt (s)	ρ	c	η_V	μ	g_z	w_x
2560 × 450	1000	10^{-2}	varying	652.82	0	0	−9.831	var

In Fig. 12, gravity waves propagate in a realistic atmosphere, which highlights the fact that simulations are stable in a relatively complex medium with strong gradients of the physical parameters. Waves coming from the right of the domain are due to the periodic boundary conditions implemented on the left and right boundaries. One can notice that gradients in sound and wind velocities (see Table 9) have a strong effect on the gravity wave curvature. Also,

Downloaded from http://gji.oxfordjournals.org/ at Biblio Planets on June 10, 2016

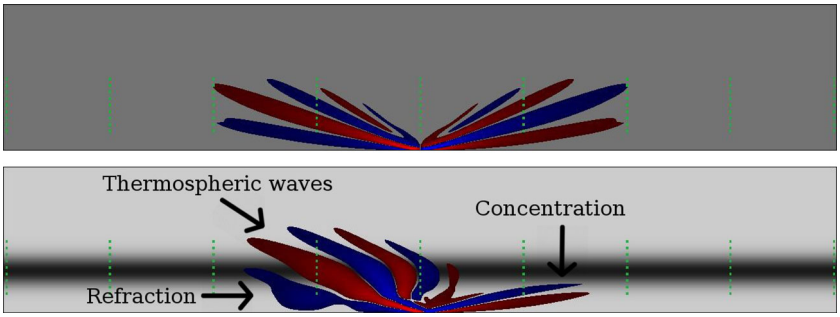

Figure 11. Normalized vertical displacement (the amplitude has been multiplied by $\sqrt{\rho}$ for visualization purposes) of the finite-difference numerical solution for the windless case (top) and the wind duct case (bottom) in Simulation 7.1 , that is, the case of a bottom 'low-frequency' forcing in an isothermal atmosphere subject to a wind duct. Both snapshots are taken at time $t = 2850$ s. Red indicates positive vertical displacements and blue negative ones. The green squares show the location of the recording stations. The origin of the coordinate system is at the bottom left of the domain. The atmosphere is considered isothermal (Table 8).

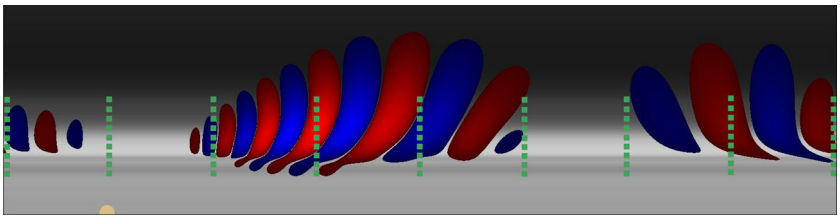

Figure 12. Vertical displacement for the finite-difference numerical solution for Simulation 7.2 , that is, the case of a Tsunami-like bottom forcing in a full MSISE-based atmosphere. Red indicates positive vertical displacements and blue negative ones. Background grey shades display variations with altitude of the horizontal wind velocity, white being the minimum value and black/dark grey the maximum value of the wind velocity described in Section 3.2. The green squares show the location of the recording stations. The yellow circle at the bottom left of the domain indicates the position x_0 of the forcing at time $t = 0$ s. The snapshot is taken at time $t = 2400$ s. The origin of the coordinate system is at the bottom left of the domain. The atmosphere model is based on *MSISE − 00* (Table 9).

Table 9. Simulation parameters corresponding to the MSISE model 3.2 subject to wind for Simulation 7.2 , that is, the case of a Tsunami-like bottom forcing in a full MSISE-based atmosphere. In this table, we express parameters with the following dimensions: ρ (kg m^{-3}), c (m s^{-1}), η_V(kg m^{-1} s^{-1}), μ(kg m^{-1} s^{-1}), g_z(m s^{-2}) and w_x(m s^{-1}).

$L_x \times L_z$ (km)	Δx (m)	Δt (s)	ρ	c	η_V	μ	g_z	w_x
1600 × 400	500	10^{-3}	varying	varying	varying	varying	varying	varying

the Doppler shift is visible as one observes that the right part of the wave front has a smaller apparent spatial period than the left part.

7.3 Seismic-like bottom forcing in a full MSISE-based atmosphere

In this case, we implement a large bottom x-velocity forcing v_t and a dominant time period P smaller than in eq. (56), such that, $\forall \mathbf{x} \in \Gamma_F$,

$$\begin{cases} f(\mathbf{x},t) = e^{-\left[\frac{t-(t_0-P/2)}{P/2}\right]^2}\left(e^{-\left[\frac{[x_0+v_t*t]-(x_0-S/4)}{S/4}\right]^2} - e^{-\left[\frac{x-([x_0+v_t*t]+S/4)}{S/4}\right]^2}\right) & \text{if } t <= t_0 - P/2\,, \\ f(\mathbf{x},t) = e^{-\left[\frac{[x_0+v_t*t]-(x_0-S/4)}{S/4}\right]^2} - e^{-\left[\frac{x-([x_0+v_t*t]+S/4)}{S/4}\right]^2} & \text{if } t > t_0 - P/2 \end{cases} \quad (57)$$

with $P = 60$ s, $t_0 = 200$ s, $S = 320$ km, $x_0 = 266.5$ km, and $v_t = 4000$ m s^{-1}. We define the atmosphere according to the MSISE-00 model described in Table 10.

In Fig. 13, one can notice that the large ground forcing velocity v_t (see (57)) has a strong impact on the direction of wave propagation. We obtain almost horizontal wave fronts that can propagate in the upper atmosphere, with their trajectory impacted by wind and sound velocity gradients. The curvature of the wave front in the thermosphere is due to the sudden increase of sound velocity.

7.4 Atmospheric explosion in a full MSISE-based atmosphere

In this simulation, we consider the same source as in Simulation 5.4 but with parameters $P = 20$ s as the dominant time period of the explosion and $t_0 = 50$ s as its starting time. The source Q is located at $x_S = 500$ km and $z_S = 100$ km. We define the atmosphere according to the MSISE-00 model described in Table 11.

In Simulation 7.4 (Fig. 14), one can notice that a point source with a small dominant time period compared to the gravity wave frequency range still generates both acoustic and gravity waves in the atmosphere, the latter propagating around the source location only, as predicted by observations and theory (Ben-Menahem & Singh 2012). Gravity waves are seen as this 'low-frequency' oscillating signal that follows the acoustic wave front and that has a similar shape as in the gravity-wave Simulation 6.1. Once again one can observe the impact of wind that shifts the frequency spectrum

Downloaded from http://gji.oxfordjournals.org/ at Biblio Planets on June 10, 2016

Table 10. Simulation parameters corresponding to the MSISE model 3.2 subject to wind for Simulation 7.3, that is, the case of a Seismic-like bottom forcing in a full MSISE-based atmosphere. In this table, we express parameters with the following dimensions: ρ (kg m^{-3}), c (m s^{-1}), η_V(kg m^{-1} s^{-1}), μ(kg m^{-1} s^{-1}), g_z(m s^{-2}) and w_x(m s^{-1}).

$L_x \times L_z$ (km)	Δx (m)	Δt (s)	ρ	c	η_V	μ	g_z	w_x
1000 × 400	500	10^{-3}	varying	varying	varying	varying	varying	varying

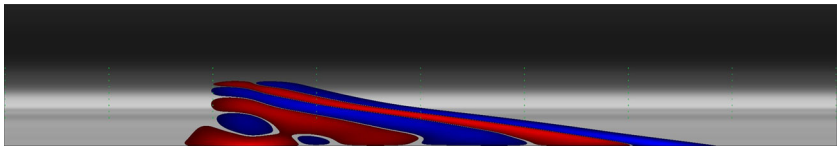

Figure 13. Vertical displacement for the finite-difference numerical solution. Red indicates positive vertical displacements and blue negative ones. The background grey shades indicate variations with altitude of the horizontal wind velocity, white being the minimum value and black/dark grey the maximum value of the wind velocity described in Section 3.2. The green squares show the location of the recording stations. The snapshot is taken at time $t = 680$ s. The origin of the coordinate system is at the bottom left of the domain. The atmosphere model is based on *MSISE*-00 (Table 10).

Table 11. Simulation parameters corresponding to the MSISE model 3.2 subject to wind for Simulation 7.4, that is, the case of an atmospheric explosion in a full MSISE-based atmosphere. In this table, we express parameters with the following dimensions: ρ (kg m^{-3}), c (m s^{-1}), η_V(kg m^{-1} s^{-1}), μ(kg m^{-1} s^{-1}), g_z(m s^{-2}) and w_x(m s^{-1}).

$L_x \times L_z$ (km)	Δx (m)	Δt (s)	ρ	c	η_V	μ	g_z	w_x
4000 × 400	400	10^{-3}	varying	varying	varying	varying	varying	varying

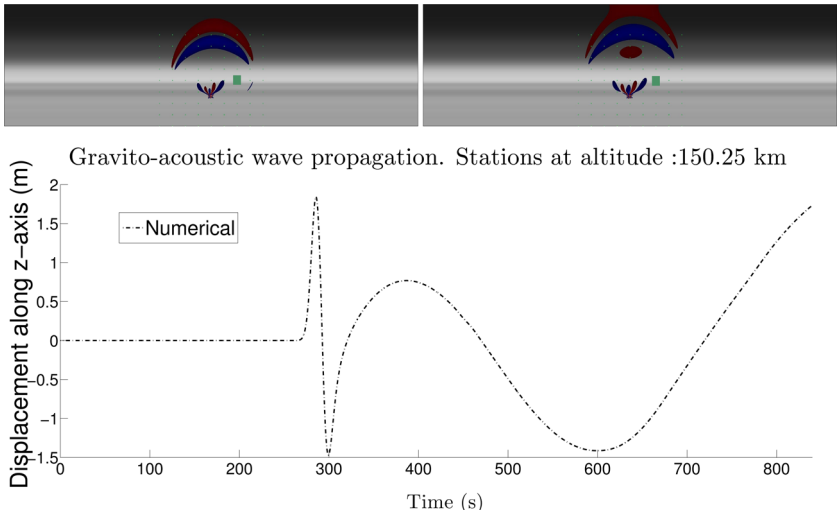

Figure 14. Vertical displacement for the numerical finite-difference solution at $t = 400$ s (left), $t = 450$ s (right) and over time at the station located at $x = 900.25$km; $z = 150.25$ km (bottom) for Simulation 7.4 , that is, the case of an atmospheric explosion in a full MSISE-based atmosphere. Red indicates positive vertical displacements and blue negative ones. The background grey shades indicate variations with altitude of the horizontal wind velocity, white being the minimum value and black/dark grey the maximum value of the wind velocity described in Section 3.2. The green squares show the location of the recording stations and the yellow cross is the source location. The origin of the coordinate system is at the bottom left of the domain. The atmosphere model is based on *MSISE*-00 (Table 11).

of the gravity wave. Finally, when wind and sound velocity gradients are present they lead to atmospheric waveguides that impose a direction of propagation for acoustic and gravity waves.

8 3-D VALIDATION

8.1 Atmospheric explosion in a 3-D homogeneous atmosphere

We perform a validation test in the 3-D case by checking the impact of geometrical attenuation due to a point source generating a spherical wave. The pressure pulse is the same as in the 2-D Simulation 5.4 but with parameters $P = 30$ s and $t_0 = 25$ s. The source is located at $x_S = 65$ km, $y_S = 65$ km and $z_S = 100$ km. The atmosphere is considered isothermal and described in Table 12.

In Fig. 15, the waveform and traveltime accurately match the analytical solution in this simple case. The maximum error over time is around 2 per cent. This could be further reduced by increasing the spatial resolution, at the expense of larger computational times. The analytical pressure solution is not the same as in Simulation 5.4 but rather described by eq. (B5). This comparison validates the geometrical spreading of acoustic waves in a 3-D case.

Downloaded from http://gji.oxfordjournals.org/ at Biblio Planets on June 10, 2016

Table 12. Simulation parameters corresponding to the isothermal model 3.1 not subject to wind for Simulation 8.1 , that is, the case of an atmospheric explosion in a 3-D homogeneous atmosphere. In this table, we express parameters with the following dimensions: ρ (kg m^{-3}), c (m s^{-1}), η_V(kg m^{-1} s^{-1}), μ(kg m^{-1} s^{-1}), g_z(m s^{-2}) and w_x(m s^{-1}).

$L_x \times L_z$ (km)	Δx (m)	Δt (s)	ρ	c	η_V	μ	g_z	w_x
130 × 130 × 200	500	10^{-2}	1.2	652.82	0	0	0	0

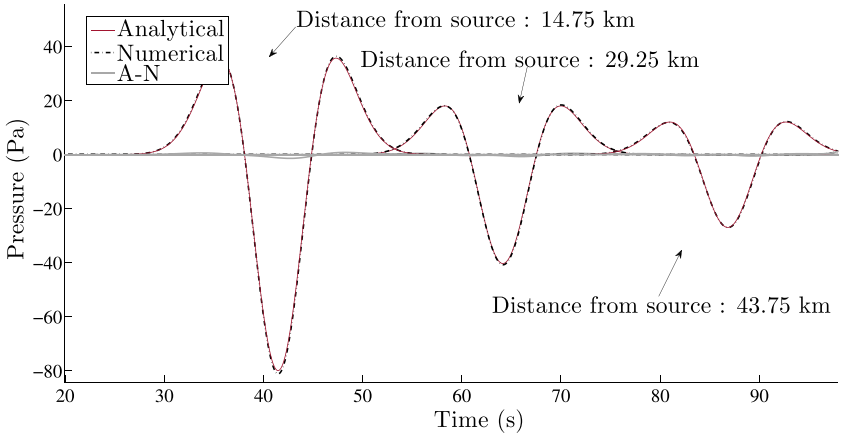

Figure 15. Pressure for the finite-difference numerical solution ('Numerical') and the analytical solution ('Analytical') as well as the difference between the two ('A-N'). The signals are shown through time for Simulation 8.1 , that is, the case of an atmospheric explosion in a 3-D homogeneous atmosphere, and for three recording stations located at altitude $z = z_S = 65$ km and at $y = y_S = 100$ km, and at distances $x = 14.75$, 29.25 and 43.75 km away from the source. The atmosphere is considered isothermal (Table 12).

8.2 Bottom 1-D 'low-frequency' forcing in a 3-D windy atmosphere with exponentially decaying density

To validate 3-D gravity wave propagation, we first perform a test with a ground forcing identical to the 2-D gravity Simulation 6.2.1, that is, the case of a Comparison with analytical solution. By '1-D' here we mean that the ground forcing function only depends on x. By using this ground forcing uniform along y in the 3-D simulation one should retrieve the same signal as in the 2-D case.

The atmosphere is considered isothermal and described in Table 13.

As expected, in Fig. 16 we obtain a good fit in terms of amplitude and phase between the 2-D analytical signal and the 3-D numerical one. Results could be made even more accurate if one picked a smaller spatial step (identical to Simulation 6.2.1) Δx for numerical simulation.

8.3 Bottom 2-D 'low-frequency' forcing in a 3-D windy atmosphere with exponentially decaying density

In order to further validate 3-D gravity wave propagation, let us now use a similar approach than for the 2-D gravity wave Simulation 6.2.1. Using a 2-D ground forcing that depends on x and y in order to validate the propagation in the y direction. We will compare results to the analytical solution based on dispersion relation (B4). Thus, in contrast to the 2-D validation case we will perform a three dimensional Fourier Transform to take into account propagation in the (x, y). We take a similar ground forcing as in Simulation 6.2.1 but convolved with a Gaussian that depends on x and y. We thus consider the following 3-D forcing, $\forall \mathbf{x} \in \Gamma_{FS}$:

$$f(\mathbf{x}, t) = \left(e^{-\left[\frac{t-(t_0-P/4)}{P/4}\right]^2} - e^{-\left[\frac{t-(t_0+P/4)}{P/4}\right]^2} \right) \times \left(e^{-\left[\frac{x-(x_0-S/4)}{S/4}\right]^2} - e^{-\left[\frac{x-(x_0+S/4)}{S/4}\right]^2} \right) e^{-\left(\frac{d(\mathbf{x})}{S/4}\right)^2}; \quad (58)$$

where $P = 1600$ s is the dominant time period of the forcing signal, $S = 80$ km is the dominant spatial period along x of the forcing signal, $t_0 = 1400$ s is the starting forcing time, $x_0 = y_0 = 500$ km is the position of the bottom forcing in the (x, y) plane and d is the distance from the point (x_0, y_0) such that $d(\mathbf{x}) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

The atmosphere is considered isothermal and described in Table 14.

In Fig. 17, one notes a good fit between the 3-D numerical and 3-D analytical signals in terms of phase and vertical displacement amplitude, with a maximum amplitude error of less than 5 per cent over time. Geometrical spreading is visible since amplitudes in this case are smaller than in the previous validation case 6.2.1, that is, the case of Bottom 2-D 'low-frequency' forcing in a 3-D windy atmosphere with exponentially decaying density. The Doppler effect also impacts gravity wave propagation: upwind waves have a larger period and larger amplitude than downwind ones.

9 CONCLUSIONS AND FUTURE WORK

We have considered the linearized Navier–Stokes system of equations for acoustic and gravity wave propagation in a stratified and viscous moving medium. We have implemented a high-order

Downloaded from http://gji.oxfordjournals.org/ at Biblio Planets on June 10, 2016

Table 13. Simulation parameters corresponding to the isothermal model 3.1 subject to wind for Simulation 8.2 , that is, the case of a bottom 1-D 'low-frequency' forcing in a 3-D windy atmosphere with exponentially decaying density. In this table, we express parameters with the following dimensions: ρ (kg m^{-3}), c (m s^{-1}), η_V(kg m^{-1} s^{-1}), μ(kg m^{-1} s^{-1}), g_z(m s^{-2}) and w_x(m s^{-1}).

$L_x \times L_y \times L_z$ (km)	Δx (m)	Δt (s)	ρ	c	η_V	μ	g_z	w_x
1600 × 1600 × 400	5000	10^{-1}	varying	652.82	0	0	−9.831	10

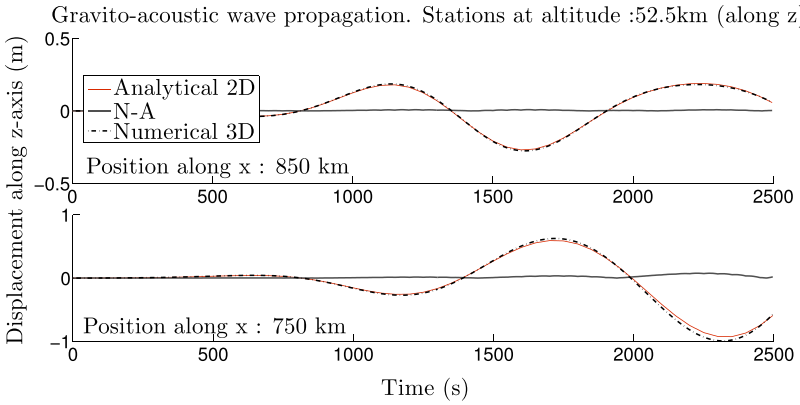

Figure 16. Vertical displacement for the 3-D finite-difference numerical solution ('Numerical 3-D'), and the 2-D analytical solution ('Analytical 2-D') as well as the difference between the 3-D analytical signal and the 2-D analytical one ('N-A'). Signals are shown through time for Simulation 8.2, that is, the case of a bottom 1-D 'low-frequency' forcing in a 3-D windy atmosphere with exponentially decaying density, with uniform forcing along y (52) at two recording stations located at the same altitude $z = 52.5$ km and whose positions along x are, from top to bottom, $x = 850$ and 750 km, and position along y is $y = 500$ km. The solid line in the bottom frame is the arrival time of both 2-D and 3-D gravity waves. The atmosphere is considered isothermal (Table 13).

Table 14. Simulation parameters corresponding to the isothermal model 3.1 subject to wind for Simulation 8.3, that is, the case of a bottom 2-D 'low-frequency' forcing in a 3-D windy atmosphere with exponentially decaying density. In this table, we express parameters with the following dimensions: ρ (kg m^{-3}), c (m s^{-1}), η_V(kg m^{-1} s^{-1}), μ(kg m^{-1} s^{-1}), g_z(m s^{-2}) and w_x(m s^{-1}).

$L_x \times L_y \times L_z$ (km)	Δx (m)	Δt (s)	ρ	c	η_V	μ	g_z	w_x
1000 × 1000 × 400	2500	5.10^{-2}	varying	652.82	0	0	−9.831	10

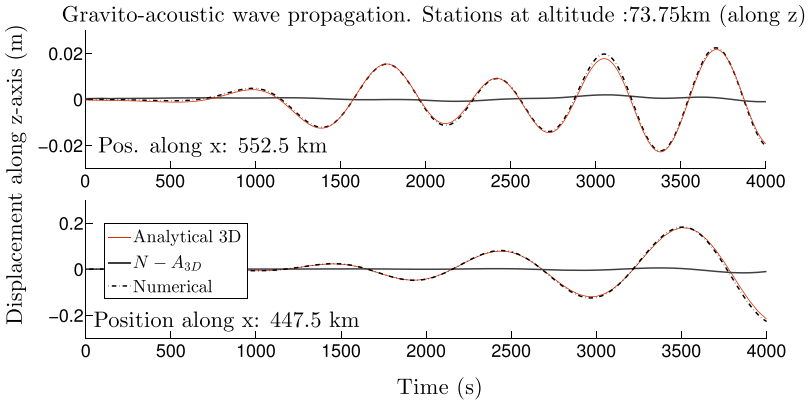

Figure 17. Vertical displacement for the 3-D finite-difference numerical solution ('Numerical 3-D') and the analytical 3-D solution ('Analytical 3-D') as well as the difference between the 3-D numerical signal and the 3-D analytical one ('N-A_{3D}'). Signals are shown through time for Simulation 8.3, that is, the case of a bottom 2-D 'low-frequency' forcing in a 3-D windy atmosphere with exponentially decaying density, at two recording stations located at the same altitude $z = 73.75$ km and whose positions along x are, from top to bottom, $x = 552.5$ and 447.5 km, and position along y is $y = 500$ km. The atmosphere is considered isothermal (Table 14).

finite-difference scheme that handles both acoustic and gravity waves simultaneously, in 2-D or 3-D media. We have also taken into account complex atmosphere models with strongly varying wind and adiabatic sound velocities.

We validated the simulations by comparison to analytical solutions in several benchmark cases involving acoustic and gravity waves in a stratified windy and viscous atmosphere. We obtained very good agreement in terms of vertical displacement and

Downloaded from http://gji.oxfordjournals.org/ at Biblio Planets on June 10, 2016

pressure. The simulation results for validation cases exhibit interesting gravity wave characteristics and show the expected features: wave amplitude increases in vertical displacement with decrease of atmospheric density with altitude, and conversely wave amplitude tends to decrease with altitude due to viscosity, which mainly impacts high frequencies.

We also presented simulation results for an atmosphere model based on *MSISE*-00 and for the cases of tsunami and seismic waves, and finally for an atmospheric explosion in the lower thermosphere. This showed that simulations are stable for complex media and exhibit interesting physical features such as change in wave front curvatures with gradients in wind and sound velocities. Both acoustic and gravity waves propagate up to the upper-atmosphere. However, with strong gradients in sound and wind velocities, one also observes wave refraction and wave concentration in the thermosphere. Finally, one notices that the Doppler shift of the wave frequency spectrum has a significant impact on wave shape and arrival times.

This new numerical modelling tool can thus give insights on gravity wave dynamics in the atmosphere and enable one to study real signals such as those recorded by the GOCE satellite. It can also provide benchmark solutions in complex cases (such as the *MSISE* − 00 empirical atmosphere model) for future numerical developments.

Future developments should include absorbing boundary conditions instead of non-realistic horizontal periodic conditions in order to properly model wave propagation in the upper atmosphere. The technique should also take into account topography because it has an impact on the generation and propagation of gravity waves. Finally, coupling with a solid Earth and an ocean should be implemented to better model the whole process from seismic underground perturbation to atmospheric wave propagation.

ACKNOWLEDGEMENTS

The authors thank Bruno Voisin for discussion about his work (Voisin 1994) and for giving them more details on the pressure response of an explosion in a moving medium. They are also grateful to Bernard Valette for mathematical discussion about the Euler equations. We acknowledge two anonymous reviewers for their constructive reviews improving this study. Computer resources were provided by granted projects no. p1138 at CALMIP computing centre (Toulouse France), nos. t2014046351 and t2015046351 at CEA centre (Bruyères, France). This work was also granted access to the French HPC resources of TGCC under allocations t2015-gen6351 and 2015-gen7165 made by GENCI. They also thank the 'Région Midi-Pyrénées' (France) and 'Université de Toulouse' for funding the PhD grant of Quentin Brissaud. This study was also supported by CNES/TOSCA through space research scientific projects.

REFERENCES

Bass, H., Sutherland, L., Piercy, J. & Evans, L., 1984. Absorption of sound by the atmosphere, in *Physical Acoustics: Principles and Methods,* vol. 17, pp. 145–232, eds Mason, W. P. & Thurston, R. N., Academic Press.

Bass, H.E. & Chambers, J.P., 2001. Absorption of sound in the Martian atmosphere, *J. acoust. Soc. Am.,* **109,** 3069–3071.

Ben-Menahem, A. & Singh, S.J., 2012. *Seismic Waves and Sources,* Springer Science & Business Media.

Berland, J., Bogey, C. & Bailly, C., 2006. Low-dissipation and low-dispersion fourth-order Runge-Kutta algorithm, *Comput. Fluids,* **35**(10), 1459–1463.

Blackstock, D.T., 2000. *Fundamentals of Physical Acoustics,* John Wiley & Sons.

Carcione, J.M., 2014. *Wave Fields in Real Media: Wave Propagation in Anisotropic, Anelastic, Porous and Electromagnetic Media,* Elsevier.

Carcione, J.M., Kosloff, D. & Kosloff, R., 1988. Wave propagation simulation in a linear viscoelastic medium, *Geophys. J. Int.,* **95**(3), 597–611.

Chaljub, E., 2000. Modélisation numérique de la propagation d'ondes sismiques en géométrie sphérique : application à la sismologie globale (Numerical modeling of the propagation of seismic waves in spherical geometry: application to global seismology), *PhD thesis,* Université Paris VII Denis Diderot, Paris, France.

Chaljub, E., Komatitsch, D., Vilotte, J.-P., Capdeville, Y., Valette, B. & Festa, G., 2007. Spectral-element analysis in seismology, *Adv. Geophys.,* **48,** 365–419.

Coulouvrat, F., 2012. New equations for nonlinear acoustics in a low Mach number and weakly heterogeneous atmosphere, *Wave Motion,* **49**(1), 50–63.

Cowling, T.G., 1941. The non-radial oscillations of polytropic stars, *Mon. Not. R. astr. Soc.,* **101,** 369–373.

de Groot-Hedlin, C., Hedlin, M.A.H. & Walker, K., 2011. Finite difference synthesis of infrasound propagation through a windy, viscous atmosphere: application to a bolide explosion detected by seismic networks, *Geophys. J. Int.,* **185**(1), 305–320.

Ding, F., Wan, W. & Yuan, H., 2003. The influence of background winds and attenuation on the propagation of atmospheric gravity waves, *J. Atmos. Sol.-Terr. Phys.,* **65**(7), 857–869.

Dörnbrack, A. & Nappo, C.J., 1997. A note on the application of linear wave theory at a critical level, *Bound.-Layer Meteorol.,* **82**(3), 399–416.

Ferziger, J.H. & Peric, M., 2012. *Computational Methods for Fluid Dynamics,* Springer Science.

Garcia, R.F., Drossart, P., Piccioni, G., López-Valverde, M. & Occhipinti, G., 2009. Gravity waves in the upper atmosphere of Venus revealed by CO2 nonlocal thermodynamic equilibrium emissions, *J. geophys. Res.,* **114**(E13), E00B32, doi:10.1029/2008JE003073.

Garcia, R.F., Bruinsma, S., Lognonné, P., Doornbos, E. & Cachoux, F., 2013. GOCE: the first seismometer in orbit around the Earth, *Geophys. Res. Lett.,* **40,** 1015–1020.

Garcia, R.F., Doornbos, E., Bruinsma, S. & Hebert, H., 2014. Atmospheric gravity waves due to the Tohoku-Oki tsunami observed in the thermosphere by GOCE, *J. geophys. Res.,* **119,** 4498–4506.

Godin, O.A., 2014. Dissipation of acoustic-gravity waves: An asymptotic approach, *J. acoust. Soc. Am.,* **136**(6), EL411–EL417.

Godin, O.A. & Fuks, I.M., 2012. Transmission of acoustic-gravity waves through gas–liquid interfaces, *J. Fluid Mech.,* **709,** 313–340.

Goldstein, M.E., 1976. *Aeroacoustics,* McGraw-Hill.

Graves, R.W., 1996. Simulating seismic wave propagation in 3D elastic media using staggered-grid finite differences, *Bull. seism. Soc. Am.,* **86**(4), 1091–1106.

Gropp, W., Lusk, E. & Skjellum, A., 1994. *Using MPI, Portable Parallel Programming with the Message-Passing Interface,* MIT Press.

Hedin, A., 1991. Extension of the MSIS thermosphere model into the middle and lower atmosphere, *J. geophys. Res.,* **96,** 1159–1171.

Hines, C.O., 1960. Internal atmospheric gravity waves at ionospheric heights, *Can. J. Phys.,* **38,** 1441–1481.

Kherani, E.A., Lognonné, P., Kamath, N., Crespon, F. & Garcia, R.F., 2009. Response of the ionosphere to the seismic triggered acoustic waves: electron density and electromagnetic fluctuations, *Geophys. J. Int.,* **176,** 1–13.

Landau, L.D. & Lifshitz, E.M., 1959. *Fluid Mechanics,* Pergamon Press.

Lecoanet, D., Le Bars, M., Burns, K.J., Vasil, G.M., Brown, B.P., Quataert, E. & Oishi, J.S., 2015. Numerical simulations of internal wave generation by convection in water, *Phys. Rev. E,* **91,** 063016, doi:10.1103/PhysRevE.91.063016.

Le Pichon, A., Blanc, E. & Hauchecorne, A., 2010. *Infrasound Monitoring for Atmospheric Studies,* Springer.

Lognonné, P., Clévédé, E. & Kanamori, H., 1998. Normal-mode summation of seismograms and barograms in a spherical earth with realistic atmosphere, *Geophys. J. Int.,* **135,** 388–406.

Downloaded from http://gji.oxfordjournals.org/ at Biblio Planets on June 10, 2016

Madariaga, R., 1976. Dynamics of an expanding circular fault, *Bull. seism. Soc. Am.,* **66**(3), 639–666.

Makela, J.J. *et al.*, 2011. Imaging and modeling the ionospheric airglow response over Hawaii to the tsunami generated by the Tohoku earthquake of 11 March 2011, *Geophys. Res. Lett.,* **38**(24), L00G02, doi:10.1029/2011GL047860.

Mikhailenko, B. & Mikhailov, A., 2014. Numerical modeling of seismic and acoustic-gravity waves propagation in an "earth-atmosphere" model in the presence of wind in the air, *Numer. Anal. Appl.,* **7**(2), 124–135.

Miyoshi, Y., Fujiwara, H., Jin, H. & Shinagawa, H., 2014. A global view of gravity waves in the thermosphere simulated by a general circulation model, *J. geophys. Res.,* **119**(7), 5807–5820.

Moczo, P., 1989. Finite-difference technique for *SH* waves in 2-D media using irregular grids, application to the seismic response problem, *Geophys. J. Int.,* **99,** 321–329.

Moczo, P. & Kristek, J., 2005. On the rheological models used for time-domain methods of seismic wave propagation, *Geophys. Res. Lett.,* **32,** L01306, doi:10.1029/2004GL021598.

Nappo, C., 2002. *An Introduction to Atmospheric Gravity Waves,* Academic Press.

Occhipinti, G., Lognonné, P., Kherani, E. & Hébert, H., 2006. Three-dimensional waveform modeling of ionospheric signature induced by the 2004 Sumatra tsunami, *Geophys. Res. Lett.,* **33,** L20104, doi:10.1029/2006GL026865.

Ostashev, V.E., Wilson, D.K., Liu, L., Aldridge, D.F., Symons, N.P. & Marlin, D., 2005. Equations for finite-difference, time-domain simulation of sound propagation in moving inhomogeneous media and numerical implementation, *J. acoust. Soc. Am.,* **117**(2), 503–517.

Picone, J.M., Hedin, A.E., Drob, D.P. & Aikin, A.C., 2002. NRLMSISE-00 empirical model of the atmosphere: statistical comparisons and scientific issues, *J. geophys. Res.,* **107,** SIA 15-1–SIA 15-16.

Robertsson, J. O.A., Blanch, J.O. & Symes, W.W., 1994. Viscoelastic finite-difference modeling, *Geophysics,* **59,** 1444–1456.

Snively, J.B. & Pasko, V.P., 2008. Excitation of ducted gravity waves in the lower thermosphere by tropospheric sources, *J. geophys. Res.,* **113**(A6), 6303, doi:10.1029/2007JA012693.

Valette, B., 1987. Spectre des oscillations libres de la Terre: aspects mathématiques et géophysiques (Spectrum of the free oscillations of the Earth: mathematical and geophysical aspects), *PhD thesis,* Université Paris VI Jussieu, Paris, thèse d'état.

Vallis, G.K., 2006. *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics: Fundamentals and Large-scale Circulation,* Cambridge Univ. Press.

Voisin, B., 1994. Internal wave generation in uniformly stratified fluids, Part 2: Moving point sources, *J. Fluid Mech.,* **261,** 333–374.

Wei, C., Bühler, O. & Tabak, E.G., 2015. Evolution of tsunami-induced internal acoustic–gravity waves, *J. Atmos. Sci.,* **72**(6), 2303–2317.

Wilson, D.K., Symons, N.P., Patton, E.G., Ketcham, S.A., Andreas, E.L. & Collier, R.L., 2004. Simulation of sound propagation through high-resolution atmospheric boundary layer turbulence fields, in *Proceedings of AMS Symp. Boundary Layers and Turbulence,* American Meteorological Society, CD-ROM P2.2, 6 pp.

Yee, K.S., 1966. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations, *IEEE Trans. Antennas Propag.,* **14,** 302–307.

Zuckerwar, A.J. & Ash, R.L., 2006. Variational approach to the volume viscosity of fluids, *Phys. Fluids,* **18**(4), 047101, doi:10.1063/1.2180780.

APPENDIX A: EXPANSION OF THE MOMENTUM EQUATION IN COMPONENT FORM

Here let us give the component form of Eq. (24) that has been implemented into our finite difference in the time domain code:

$$\begin{aligned}
\partial_t p &= -(w_x\partial_x p + w_y\partial_y p) - \rho c^2(\partial_x v_x + \partial_y v_y + \partial_z v_z) \\
&\quad -\rho v_z g_z \\
\partial_t \rho_p &= -(w_x\partial_x \rho_p + w_y\partial_y \rho_p) - \{\partial_x(\rho v_x) + \partial_y(\rho v_y) \\
&\quad + \partial_z(\rho v_z)\} \\
\rho\partial_t v_x &= -\rho(v_z\partial_z w_x + w_x\partial_x v_x + w_y\partial_y v_x) - \partial_x p \\
&\quad + \left(\eta_V - \frac{2}{3}\mu\right)\partial_x\{(\partial_x v_x + \partial_y v_y + \partial_z v_z)\} \\
&\quad + \mu[2\partial_x^2\{v_x + w_x\} + \partial_y\{\partial_x v_y + \partial_y v_x\} \\
&\quad + \partial_z\{\partial_x v_z + \partial_z(v_x + w_x)\}] \\
\rho\partial_t v_y &= -\rho(v_z\partial_z w_y + w_x\partial_x v_y + w_y\partial_y v_y) - \partial_y p \\
&\quad + \left(\eta_V - \frac{2}{3}\mu\right)\partial_y\{(\partial_x v_x + \partial_y v_y + \partial_z v_z)\} \\
&\quad + \mu[\partial_x\{\partial_x v_y + \partial_y v_x\} + 2\partial_y^2 v_y \\
&\quad + \partial_z\{\partial_y v_z + \partial_z(v_y + w_y)\}] \\
\rho\partial_t v_z &= -\rho(w_x\partial_x v_z + w_y\partial_y v_z) - \partial_z p \\
&\quad + \partial_z\left\{\left(\eta_V - \frac{2}{3}\mu\right)(\partial_x v_x + \partial_y v_y + \partial_z v_z)\right\} \\
&\quad + \mu[\partial_x\{\partial_x v_z + \partial_z v_x\} + \partial_y\{\partial_y v_z + \partial_z v_y\} \\
&\quad + 2\partial_z^2 v_z] \\
&\quad + g_z\rho_p
\end{aligned} \tag{A1}$$

APPENDIX B: DISPERSION RELATIONS FOR THE VALIDATION CASES

The three validation cases presented above involve the following analytical formulation of the dispersion equations.

B1 Acoustic wave forcing in a 2-D heterogeneous windless atmosphere

The dispersion equation, without any source inside the domain and when one considers a windless atmosphere with varying density, sound velocity and viscosity (not considering shear viscosity), reads

$$k_z^2\left(1 - \frac{i}{D}\right) - \frac{D}{H}k + \frac{1}{4H^2}\left(1 + \frac{i}{D}\right) - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = 0\,, \tag{B1}$$

where $D = \frac{\rho c^2}{\omega\eta_V}$.

B2 Atmospheric explosion in 2-D windy atmosphere

We consider a monochromatic point source Q that reads

$$Q = \frac{2iA}{\rho\omega}e^{-i\omega t}\delta(x)\delta(z)$$

$$\partial_t p = -\mathbf{w}\cdot\nabla p - \rho c^2(\nabla\cdot\mathbf{v} + Q)\,, \tag{B2}$$

where A is the amplitude of the source pulse and δ the Kronecker symbol, from Ostashev *et al.* (2005), in the far-field approximation $k_x R \gg 1$, we get

$$\begin{aligned}
\hat{p} &= \frac{A(\sqrt{1 - M^2\sin\beta^2} - M\cos\beta)}{\sqrt{2\pi k R}(1 - M^2)(1 - M^2\sin\beta^2)^{3/4}} \\
&\quad \times e^{\frac{i}{1-M^2}(\sqrt{1-M^2\sin\beta^2} - M\cos\beta)kR + \frac{i\pi}{4}}\,,
\end{aligned} \tag{B3}$$

Downloaded from http://gji.oxfordjournals.org/ at Biblio Planets on June 10, 2016

where $k = \frac{\omega}{c}$, M is the Mach number ($M = \frac{w}{c}$), β the angle between the x axis and the receiver and $R = \sqrt{(x - x_S)^2 + (z - z_S)^2}$ the source–receiver distance, with (x_S, z_S) the Cartesian coordinates of the source.

The theoretical pressure response for gravity waves for an explosion in a stratified windy atmosphere is more difficult to implement and can be found for instance in Voisin (1994) and Godin & Fuks (2012).

B3 Gravity-wave forcing in a 3-D stratified windy isothermal atmosphere

The dispersion equation, without any source inside the domain and when one considers a windy and inviscid atmosphere with varying density and sound velocity, reads

$$k_z^2 = \frac{(k_x^2 + k_y^2)N^2}{\Omega^2} - \frac{1}{4H^2} - k_x^2 - k_y^2, \tag{B4}$$

where k_x, k_y are the wavenumbers respectively along x and y, such that $k_x = \frac{2\pi}{\lambda_x}$ and $k_y = \frac{2\pi}{\lambda_y}$, λ_x, λ_y the wavelengths respectively along x and y, Ω is the intrinsic frequency such that $\Omega = \omega - w_x k_x - w_y k_y$, and H the scale height.

B4 Atmospheric explosion in a 3-D atmosphere

For a monochromatic point source $\hat{Q}$ in a system following eq. (B2) from Goldstein (1976) one has

$$\hat{p} = \frac{A}{4\pi R} e^{ikR} \tag{B5}$$

where $k = \frac{\omega}{c}$ and $R = \sqrt{(x - x_S)^2 + (y - y_S)^2 + (z - z_S)^2}$ is the source–receiver distance, with (x_S, z_S) the Cartesian coordinates of the source. In this case, no far-field assumption needs to be made because the full analytical solution is known in the whole domain.

APPENDIX C: REALISTIC ATMOSPHERE MODEL

In Fig. C1, we present all the physical parameters plotted against altitude extracted from the MSISE-00 atmosphere model (Section 3.2).

APPENDIX D: VARIABLES

Table D1 summarizes all the variables used in the article. By 'Total' in Table D1 we refer to the sum of the mean and fluctuating parts, see Hypothesis (iii).

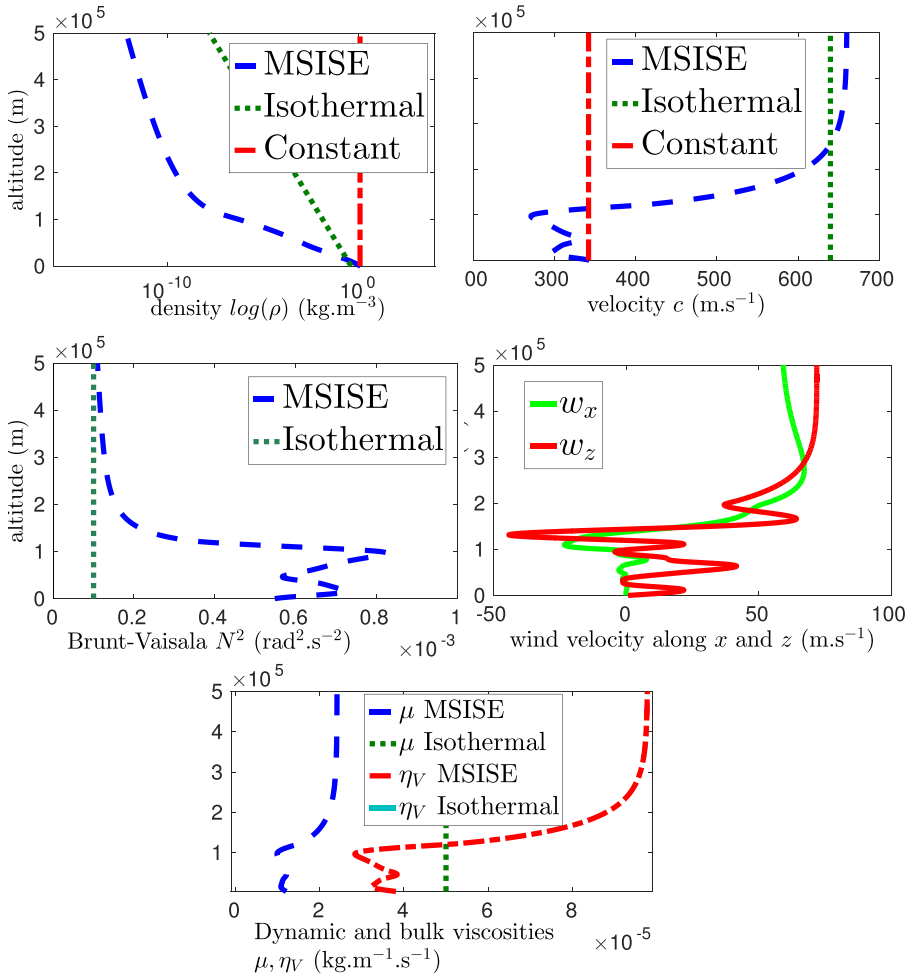

Figure C1. Vertical profiles extracted from the MSISE-00 atmosphere model and used for construction of the realistic atmosphere models in Section 3.2.

Downloaded from http://gji.oxfordjournals.org/ at Biblio Planets on June 10, 2016

Table D1. The main variables used in our article.

Name	Meaning	Name	Meaning
$\mathbf{u}$	Displacement perturbation	c	Sound speed
$\mathbf{v}$	Velocity perturbation	ρ	Atmosphere mean density
$\mathbf{w} = (w_x, 0, 0)$	Wind background velocity	ρ_p	Density perturbation
p	Pressure perturbation	η_V	Volume viscosity
$\mathbf{I_d}$	Identity tensor in $\mathbb{R}^3$	μ	Dynamic viscosity
$\mathbf{\Sigma}$	Eulerian stress tensor	$\mathbf{g}$	Gravitational acceleration
I	Internal energy	C_v	Heat capacity at constant volume
Q	Heat input	C_p	Heat capacity at constant pressure
T	Temperature	ρ_T	Total atmospheric density
$\mathbf{U}$	Total displacement	P	Total adiabatic atmospheric pressure
$\mathbf{V}$	Total velocity	$\mathbf{G}$	Total gravitational acceleration
$\mathcal{F}_{ext}$	External volumic forces	R	Gas constant
γ	Ratio of specific heat	L	Mean free path
κ	Thermal conductivity	α	Absorption coefficient
f, w	Frequency, Pulsation	Q	Quality factor
$\mathbf{k}$	Wavenumber	N	Brunt–Väisälä frequency
Δx, Δy, Δz	Spatial step along x, y and z	Δt	Time step
L_x, L_y, L_z	Mesh dimension along x, y and z	β	Angle between the x axis and the receiver position
Γ_F	Forcing boundary	Γ_D	Dirichlet boundary

Downloaded from http://gji.oxfordjournals.org/ at Biblio Planets on June 10, 2016

1.3 Limitations et perspectives

Ce travail de modélisation peut mettre en exergue certaines limitations techniques qui devraient être corrigés afin d'obtenir une représentation plus réaliste des ondes gravito-acoustiques à l'échelle de la Terre.

1.3.1 Viscosité et relaxation

Une confusion, sur la définition des termes liés aux phénomènes visqueux et de relaxation, s'est glissée dans l'article publié et présenté dans la section 1.2. En effet, dans l'équation (25) et (27) il y a une incompatibilité dans la définition de la seconde viscosité (volume or second viscosity en anglais) et de la viscosité de volume (bulk viscosity en anglais). On note que le terme de *volume viscosity* en anglais est similaire à celui de *viscosité de volume* en français tout en ne caractérisant pas le même phénomène, d'où la confusion. Cette confusion est d'ailleurs présente dans des ouvrages publiés tels que Landau et Lifshitz (2013, p. 308) et Chorin, Marsden et Marsden, 1990, p. 33 où la définition de la seconde viscosité n'est pas identique. Afin de clarifier ce problème, il est important de redéfinir correctement les phénomènes atténuants intervenants dans les équations de Navier-Stokes. Le tenseur des contraintes Σ de l'équation du moment dans le système de Navier-Stokes est défini par

$$(\Sigma)_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu(\partial_i v_j + \partial_j v_i - \frac{2}{3}\nabla.\mathbf{v}\delta_{ij}) + \zeta\nabla.\mathbf{v}\delta_{ij}, \tag{1.10}$$

où μ est la viscosité dynamique (ou de cisaillement) et $\zeta = \zeta_{therm} + \zeta_{relax}$ la seconde viscosité avec une contribution thermique ζ_{therm} et de relaxation ζ_{relax}. On peut alors définir une viscosité de volume η_V telle que $\eta_V = \zeta + \frac{2}{3}\mu$.

La première viscosité, μ, déterminée par la formule de Sutherland, caractérise les effets classiques de viscosité dans un fluide et la seconde viscosité, ζ, peut traduire plusieurs phénomènes : le premier est classique et est résultant de la conduction thermique entre les pics de températures (par rapport à la température moyenne) liée au passage de l'onde. On écrit alors la contribution thermique de la seconde viscosité sous la forme suivante

$$\zeta_{therm} = \frac{(\gamma - 1)\kappa}{\gamma C_v}, \tag{1.11}$$

où les termes sont définis dans la section (2.2) de l'article avec κ le coefficient de conduction thermique. Notez que cette modélisation des effets thermiques intervient *ad-hoc* et ne s'appuie pas directement sur les variations de température mais indirectement sur les variations de volume. La manière plus rigoureuse de l'introduire consiste à résoudre l'équation du bilan d'énergie comme présenté dans le chapitre 4 de cette thèse.

La deuxième contribution (ζ_{relax}) est, quant à elle, dépendante des effets de relaxation (rotationnels et vibrationnels). Ces effets correspondent à la transmission provenant de l'énergie de collision de particules entre le mode de translation de la molécule avec ses différents modes de internes (rotation et vibration). A faible fréquence (par rapport aux fréquences principales de rotation et de vibration), les variations d'énergie étant lentes, les échanges d'énergie entre ces modes peuvent être considérés quasi instantanés et ne sont pas atténuants. En revanche, à plus haute fréquence, les variations d'énergies liées aux collisions entre molécules sont plus rapides et les échanges entre les modes internes sont alors plus lents et deviennent alors atténuants. Sur Terre et à basses fréquences, la relaxation est en générale négligeable (Bass et al., 1984, Ch.3), mais sur d'autres planètes (telle que Mars) il est absolument essentiel de la prendre en compte (Bass et Chambers, 2001a). Nous reviendrons sur ces aspects dans le chapitre 3 de cette thèse.

Dans l'article présenté dans la section 1.2, ces aspects de relaxation furent négligés tels que $\zeta_{relax} = 0$. Néanmoins, la viscosité et la conduction thermique (bien que prise en compte ad hoc) furent ajoutées, mais de manière erronée, en définissant la seconde viscosité (η_V dans le papier) sous la forme de viscosité de volume et telle que

$$\eta_V = \frac{4}{3}\mu + \frac{(\gamma-1)\kappa}{\gamma C_v}. \tag{1.12}$$

La viscosité η_V introduite dans l'équation (22) de l'article correspond à la seconde viscosité telle que $\eta_V = \zeta$ alors que, de manière contradictoire, la viscosité η_V définie dans l'équation (27) correspond davantage à la viscosité de volume (car elle intègre la contribution de la viscosité dynamique). Pour être consistant, l'équation (27) devrait alors s'écrire

$$\eta_V = \frac{(\gamma-1)\kappa}{\gamma C_v}, \tag{1.13}$$

où η_V serait défini comme coefficient de seconde viscosité.

1.3.2 Etude de stabilité

L'étude de stabilité par analyse de Von Neumann n'a pas encore été menée. Elle consiste à décomposer la solution numérique du système (1.1) en onde plane telle que

$$v_i^n = \tilde{v}_i e^{\omega n\Delta t - \mathbf{M}.\mathbf{K}\Delta x}, \tag{1.14}$$

où $\mathbf{K} = (k_x, k_y, k_z)$ est le vecteur d'onde et $\mathbf{M} = (m, l, o)$ sont les indices de discrétisation spatiale tels que $x = \Delta x \times m; y = \Delta y \times l; z = \Delta z \times o$ avec $\Delta x = \Delta y = \Delta z$. Puis l'étape suivante nécessite la discrétisation des opérateurs spatiaux et temporels du système (1.1) suivant les définitions données dans l'article de la section 1.2. Enfin, il est nécessaire de calculer le facteur d'amplification A tel que

$$A = \left| \frac{v_i^{n+1}}{v_i^n} \right| < 1, \tag{1.15}$$

où $||\dot{|}$ est la norme 2 ou la norme infinie. Ce facteur doit en effet être borné afin d'obtenir la stabilité du schéma numérique et empêcher le développement de solutions parasites exponentielles (Smith, 1985, chap. 2, p.51). Ce calcul est néanmoins laborieux car il fait intervenir de nombreux opérateurs et plusieurs équations. On peut en revanche noter que les schémas en quinquonce et colloqués étant inspirés de travaux précédents, des conditions de stabilité ont déjà été recherchées sur ces derniers (Levander, 1988 ; Thompson, 1990).

Outre la stabilité numérique, il est important de pouvoir déterminer, en amont de la simulation numérique, le pas de maillage à utiliser afin de représenter correctement les longueurs d'ondes principales qui vont intervenir. Trois contraintes principales vont conduire au choix du pas de maillage : la vitesse effective du son, les propriétés de stratification et les longueurs d'ondes horizontales des ondes de gravité. En effet, bien que les ondes de gravité ont une importante longueur d'onde horizontale par rapport aux longueurs caractéristiques des ondes acoustiques, les longueurs d'ondes verticales sont bien plus faibles et vont contraindre la taille du maillage. Il est alors possible de déterminer les longueurs d'ondes verticales attendues à partir de l'équation de dispersion (4) du chapitre 1. Par exemple et par simplicité, en se concentrant sur les ondes de gravité 2-D, on peut se ramener à l'équation de dispersion suivante

$$m = \left((\frac{kN}{\Omega})^2 - k^2 \right)^{1/2}, \tag{1.16}$$

avec $\Omega = \omega - u_0 k$ et (k, m) les nombres d'ondes horizontaux et verticaux. Ainsi on représente dans la figure 1.7 les longueurs d'ondes horizontales $\lambda_x = \frac{2\pi}{k}$ en fonction des longueurs d'ondes verticales $\lambda_z = \frac{2\pi}{m}$ pour plusieurs valeurs de la vitesse du vent et à une fréquence donnée $f = 10^{-3}$ Hz. On observe tout d'abord que les longueurs d'ondes verticales sont plus faibles que les longueurs d'ondes horizontales mais qu'elles augmentent pour les λ_z croissantes. En revanche, on note une gamme de longueur d'onde horizontale $\Omega^2 > N^2$ pour lesquelles la propagation est évanescente. On peut alors choisir le pas de maillage telle que $\Delta x < 2\lambda_{x,min}$ où $\lambda_{x,min}$ est la longueur d'onde minimale attendue grâce au graphique 1.7.

1.3.3 Géométries complexes

Les simulations de propagation d'ondes au sein de modèles avec topographie nécessitent une description précise de la géométrie du domaine. Le schéma de différences finies sur grille non-déformée, mis en place durant ce chapitre, se voit drastiquement impacté à la surface par l'effet "marche d'escalier" ("stair-step approximation" en anglais) lorsqu'on discrétise la frontière à l'aide de coordonnées cartésiennes classiques. Cet effet est visible dans la figure 1.8 où l'on observe l'effet marche d'escalier sur la courbe rouge de discrétisation de la frontière.

Ce phénomène va donc induire de multiples réflections et conversions parasites entre ondes de surface et ondes de volume (Hu, 2016). Afin de limiter son effet, tout en utilisant une grille non déformée, il est alors nécessaire de raffiner le maillage de manière importante près de la frontière.

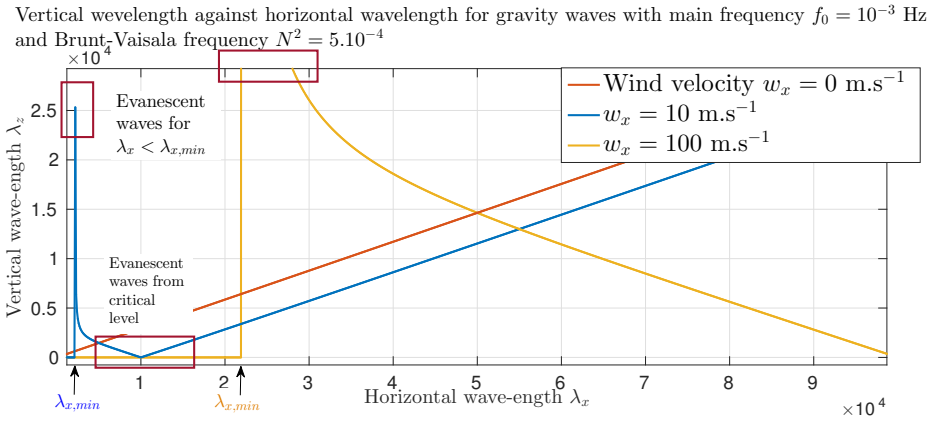

FIGURE 1.7 – Longueur d'onde verticale en fonction de la longueur d'onde horizontale pour plusieurs intensités de vent $w_x = 0, 10, 100$ m.s^{-1} et pour une fréquence $f = 10^{-3}$ Hz. On observe que les longueurs d'ondes verticales augmentent pour les longueurs d'ondes verticales croissantes. On note une singularité liée à une vitesse effective du vent nulle $\Omega = 0$ et des ondes évanescentes pour des ondes de fréquence et/ou des longueurs d'onde trop faibles par rapport à la fréquence de stratification $\Omega^2 > N^2$.

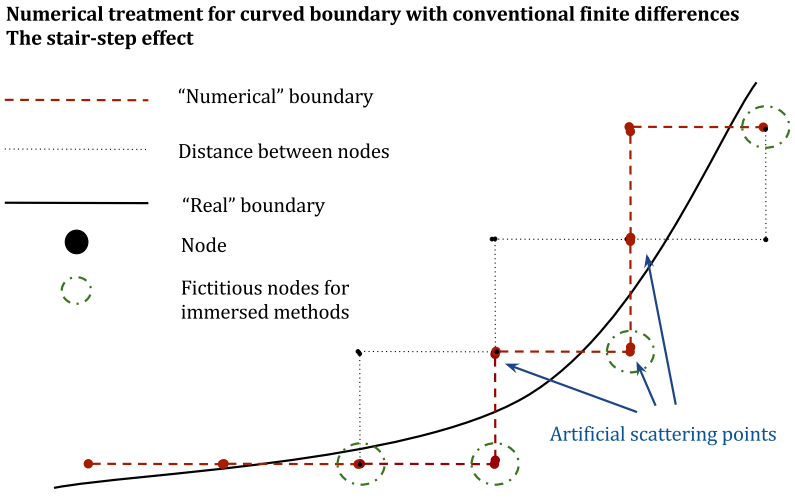

FIGURE 1.8 – Exemple de discrétisation par différences finies conventionnelles d'une surface courbée. En rouge est visible l'approximation numérique de la surface et l'effet d'escalier induit.

Plusieurs méthodes ont été proposées au cours des années afin de corriger ce problème tout en limitant le nombre de noeuds utilisés. La méthode par frontières immergées ("immersed boundary" en anglais), initialement proposée par Peskin en 1972 (Peskin, 1972), est une technique communément utilisée (Hu, 2016 ; Mittal et Iaccarino, 2005). Plusieurs variantes existent (un résumé est proposé dans Hovnanian, 2012), mais la méthode principale, par cellule fantôme (Mohd-Yusof, 1997), consiste à considérer les noeuds en dehors du domaine réel comme des points fantômes, c'est-à-dire comme une combinaison linéaire du champ à l'intérieur du domaine réel et des conditions de bord (surface libre ou surface réfléchissante). Les méthodes d'images généralisées et formulation par le vide pour les grilles en quinconce ("generalized image method" et "vaccuum formulation" en anglais) (Hayashi, Burns et Toksöz, 2001 ; Vishnevsky et al., 2014) consistent à adapter les valeurs du tenseur des contraintes et des vitesses en fonction de la position par rapport à l'interface. Malheureusement ces méthodes ne bénéficient pas d'un support théorique suffisant pour s'assurer de leur stabilité et l'extension à la 3-D peut être délicate (Lisitsa, Tcheverda et Botter, 2016).
Enfin, une approche consistant en l'utilisation de grilles déformées non cartésiennes et s'adaptant donc aux contraintes de la topographie, prit son essor ces 20 dernières années (Hestholm et Ruud, 1994 ; Jianfeng, 1997 ; Lombard et al., 2008 ; O Hestholm et Ruud, 2000 ; Puente et al., 2014 ; Tarrass, Giraud et Thore, 2011). Cette méthode bénéficie de la simplicité de son implémentation, gardant les propriétés initiales des schémas utilisés sur l'élément de référence, et permettant une parallélisation de calculs similaire aux schémas classiques. Malheureusement, l'utilisation de coordonnées locales est plus coûteuse en termes de calcul car elles requièrent une étape de transformation en espace à chaque pas de temps (grilles de Lebedev, grilles en rotation (Vishnevsky et al., 2014)). De plus, la définition des paramètres du modèle (densité, vitesse adiabatique du son, viscosité) peut être délicate lorsque ces derniers sont initialement donnés sur une grille régulière mais que la grille utilisée par le schéma numérique est non conventionnelle. Enfin, ces méthodes peuvent mener, lorsque la déformation induite par la géométrie de surface est complexe, vers des maillages de mauvaise qualité.

Dans le cadre de géométries complexes, les méthodes variationnelles telles que les méthodes par volumes finis et éléments finis continus ou discontinus sont, en général plus précises. Bien que plus coûteuses en terme de calcul, elles bénéficient d'avantages non négligeables en traitant les interfaces sous forme de flux et disposent de bien meilleures propriétés de dispersion (Zhebel et al., 2014). Cette caractéristique des méthodes par éléments finis justifie le choix de la technique employée dans le chapitre 4 de cette thèse. Enfin, les méthodes sans maillage, ou par particules, (Takekawa, Mikada et Goto, 2014) dont l'idée est de représenter les interactions entre particules afin de calculer les déformations au sein du domaine de calcul, peuvent permettre de considérer des géométries complexes. Les interfaces sont alors simplement traitées en supprimant les particules qui se situent au delà de la frontière avec topographie. Mais ces méthodes ne bénéficient pas non plus d'une base théorique assez solide pour conclure sur leur efficacité globale.

Il est important de noter que certains auteurs ont abordé les problèmes de topographie

d'une manière hybride. En effet, l'utilisation de méthodes plus sophistiquées, telles que les méthodes de Galerkin, induisent un coût plus élevé en terme de calcul et ne sont donc pas nécessairement viables à grande échelle. Afin de bénéficier de l'efficacité des méthodes par différences finies (ou volumes finis) et de la flexibilité géométrique des méthodes de Galerkin, certaines méthodes hybrides différences finies/Galerkin furent proposées (Galis, Moczo et Kristek, 2008 ; Léger, Peyret et Piperno, 2012 ; Lisitsa, Tcheverda et Botter, 2016 ; Vachiratienchai, Boonchaisuk et Siripunvaraporn, 2010). Bien qu'un travail d'étude des conditions de stabilité, sur la discrétisation en temps et sur les conditions de flux entre domaines reste à mener lorsqu'une méthode de Galerkin discontinue est utilisée, les résultats semblent prometteurs. Ils peuvent notamment apporter une solution efficace lorsque les deux méthodes (différences finies et méthode de Galerkin) sont déjà développées et validées. Nous reviendrons brièvement sur cet aspect de couplage entre méthodes dans le chapitre 4 de cette thèse.

1.3.4 Raffinement de maillage

En introduction de ce chapitre, nous avons rappelé les différentes propriétés de l'atmosphère impactant la propagation d'ondes gravito-acoustiques. Notamment, le fait que l'atmosphère est dispersive et qu'elle agit comme un filtre passe-bas avec l'altitude. Ceci a de lourdes conséquences sur le contenu fréquentiel des signaux atmosphériques en fonction de l'altitude. Par exemple, lorsqu'on étudie l'impact d'un phénomène sismique sur l'atmosphère, nous observerons majoritairement dans la haute atmosphère la propagation d'ondes basses fréquences et, à contrario, des ondes plus hautes fréquences dans la basse atmosphère. Nous n'avons pas exploité ces caractéristiques de l'atmosphère durant cette thèse mais ceci peut permettre de réduire drastiquement le coût en terme de calculs de nos simulations. En effet, en utilisant des techniques de raffinement de grille ("sub-gridding" en anglais) (Chang et Jeng, 2001 ; Thoma et Weiland, 1996 ; Wang, 2007 ; Ye et al., 2016) nous pourrions définir plusieurs "zones" de propagation en fonction de l'altitude, le maillage devenant de plus en plus grossier avec l'altitude. Cette idée est visible dans la figure 1.9 où est présenté un maillage hybride dépendant de l'altitude.

Ceci se justifie d'autant plus que nous résolvons un problème linéaire, et que nous ne rencontrerons pas les soucis multi-échelles des simulations non-linéaires associés aux turbulences. Dans ce genre de technique multi-grilles il est nécessaire en premier lieu d'interpoler les inconnues à la jonction entre deux grilles mais aussi de déterminer des schémas numériques efficaces pour calculer les gradients à l'interface entre deux grilles. Bien que certains schémas soient déjà disponibles (Nehrbass et Lee, 2000 ; Virta, 2016), il faut redoubler d'attention dans le cas d'une grille en quinconce qui fera se juxtaposer deux grilles avec des résolutions différentes (Lisitsa, Reshetova et Tcheverda, 2012). Ce travail n'a pas été mené pour l'instant mais serait une avancée certaine pour cette méthode de différences finies.

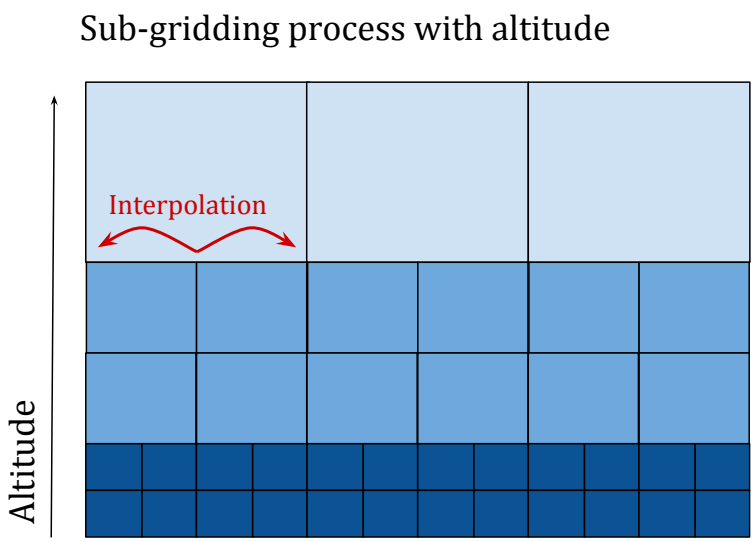

FIGURE 1.9 – Exemple de maillage avec raffinement de grille où les grilles les plus fines sont contenues dans les altitudes les plus faibles. A la jonction entre deux maillages il est nécessaire d'interpoler-extrapoler les inconnues vers le maillage le plus grossier.

1.3.5 Aspects non-linéaires

Un autre aspect limitant de cette méthode vient du manque de prise en compte des non-linéarités. Ceci était un choix fait en amont et dont les limites et hypothèses étaient discutées dans l'introduction. Mais lorsque nous sommes confrontés à des ondes d'amplitude élevée notamment liées à un tremblement de Terre de surface ou à une explosion, les résultats fournis par une méthode linéaire ne sont plus fiables. C'est pourquoi nous répondons à cette contrainte dans le chapitre 4 de cette thèse avec le développement d'une méthode de Galerkin discontinue qui capture avec précision les phénomènes non-linéaires.

Chapitre 2

Cas d'étude des ondes atmosphériques issues d'impacts de météores sur Mars

Sommaire

2.1 Introduction 67
2.2 Article publié dans "Space Science Reviews" 72
2.3 Limites et perspectives 99
2.3.1 Paramétrisation de la source et validité des équations de Navier-Stokes sur Mars 99
2.3.2 Conditions absorbantes sur les ondes de gravité 101

2.1 Introduction

La mission INSIGHT (Interior Exploration using Seismic Investigations, Geodesy and Heat Transport) est une mission "Discovery" de la NASA (Banerdt et al., 2013) qui souhaite envoyer en 2018 un atterrisseur à la surface de Mars afin d'étudier sa formation et sa différenciation. Les instruments à bord vont aussi fournir des données sur la pression de l'atmosphère, la température de l'air et la vitesse du vent. Une représentation de l'atterrisseur à la surface de Mars est donnée dans la figure 2.1. La qualité de son capteur de pression (niveau de bruit de l'ordre de 5 mPa et son échantillonnage 20 Hz) va permettre d'étudier la propagation d'ondes gravito-acoustiques à la surface de Mars et les caractéristiques des sources qui y sont associées. Embarquant, en plus du micro-baromètre, des sismomètres large bande et courte période, il sera possible d'associer les ondes sismiques et acoustiques liées aux phénomènes sismiques. La mesure des ondes basses fréquences va alors permettre d'affiner la construction des modèles sismiques, des propriétés de la basse atmosphère ainsi que de mesurer les entrées de météorites sur Mars.

L'atmosphère martienne dispose de propriétés physiques différentes de celles de la Terre. De nombreuses missions (orbiteurs, atterrisseurs) ont pu fournir une image claire de ses caractéristiques. Elle s'avère moins dense (≈ 6 mbar) que celle de la Terre, subit des vents très

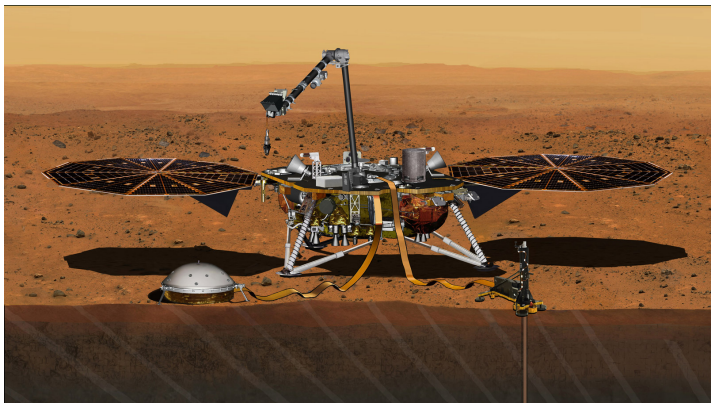

FIGURE 2.1 – Modélisation par ordinateur de l'atterrisseur déployé à la surface de Mars, les sismomètres seront installés dans la sphère sous vide située sur le sol à gauche de l'image. Crédit image : NASA/JPL-Caltech.

forts et est riche en dioxyde de carbone ce qui va se traduire principalement par une relaxation vibrationnelle bien plus importante que sur Terre. Plusieurs auteurs ont estimé les caractéristiques de l'atmosphère de Mars dans le cadre de la propagation d'ondes acoustiques (BASS et CHAMBERS, 2001a ; PETCULESCU, 2016 ; WILLIAMS, 2001). L'une des principales différences de Mars par rapport à la Terre vient de l'atténuation très prononcée des ondes acoustiques dans le domaine audible, ne pouvant se propager sur plus de quelques kilomètres. Mais à basse fréquence, en dessous de 0.1 Hz, les infrasons, notamment générés par les ondes de Rayleigh, pourraient se propager jusqu'à une centaine de kilomètres d'altitude (LOGNONNÉ et al., 2016).

Plusieurs phénomènes physiques de surface et à l'intérieur de Mars vont pouvoir générer des signaux sismiques dans le sous-sol et se coupler à l'atmosphère. Trois évènements majeurs pourraient se traduire par une activité sismique détectable (KNAPMEYER et al., 2006) : l'activité tectonique, l'activité volcanique et l'impact de météorites à la surface. L'activité photonique est liée au refroidissement de la lithosphère et va induire la propagation d'ondes à travers toute la planète. En revanche le volcanisme, moins probable, est considéré comme n'étant principalement qu'un phénomène local (tel que sur "Alba Patera", voir par exemple CAILLEAU et al., 2003). Enfin, l'impact de météorites (DAVIS, 1993 ; STEVANOVIĆ et al., 2017 ; TEANBY, 2015), notre sujet d'étude, est une source importante de signal sismique sur Mars et il est estimé à quelques centaines d'évènements détectables par an (LOGNONNÉ et JOHNSON, 2010). Notez que la mesure des ondes atmosphériques sera alors principalement "utilisée" afin de localiser des impacts pour faciliter le traitement des données sismiques.

De plus, estimer la distribution et le nombre d'impacts de météorites est l'un des buts scientifiques de la mission INSIGHT (DEHANT et al., 2012) et sert deux objectifs. En mesurant l'activité sismique liée aux impacts il est possible d'étudier la structure interne de Mars. De plus, la connaissance des propriétés des météorites martiennes à la surface pourrait permettre de déterminer l'origine de l'atmosphère martienne et ainsi d'extrapoler à celle de

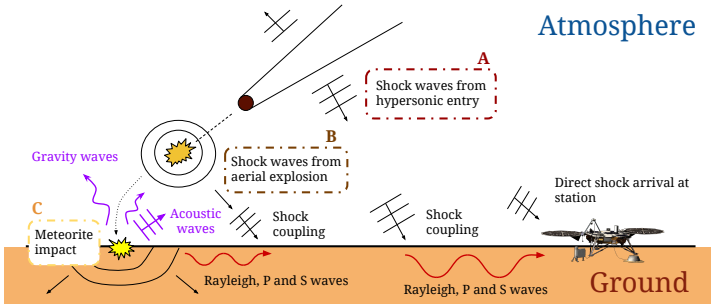

FIGURE 2.2 – Propagation d'ondes sismo-acoustiques associées à l'entrée hyper-sonique d'une météorite et à son explosion ou son impact. Image inspirée de EDWARDS, EATON et BROWN, 2008.

l'atmosphère terrestre, ces deux planètes présentant des similarités importantes (DEHANT et al., 2012). Pour le premier objectif, il est nécessaire de caractériser la source sismique et ainsi de comprendre les phénomènes physiques résultants de l'entrée et de l'impact de météorites sur la planète.

L'entrée de météorites dans une atmosphère planétaire est un phénomène complexe pouvant se traduire par une dynamique infrasonique non-linéaire et une activité sismique importante. Ces divers phénomènes sont visibles sur la figure 2.2 dans la partie atmosphérique pour les zones A, B et C, à savoir la génération d'ondes de choc dues à la friction avec l'atmosphère, d'ondes de choc sphériques dues à la déflagration de la météorite (REVELLE, 1976) et enfin, éventuellement, son impact à la surface (EDWARDS, 2010). Les deux premiers mécanismes seront probablement négligeables à la surface de Mars (WILLIAMS, 2001) si ils sont caractérisés par des fréquences supérieures à 0.1 Hz et s'ils se situent à des altitudes supérieures à 30 km, et seront absorbés avant d'atteindre la surface. En revanche, l'impact au sol, au delà de générer des ondes sismiques, générera une sur-pression détectable sur de longues distances. L'approximation de l'explosion finale sous forme d'un point source reste viable pour des bolides avec une énergie > 7 kT sur Terre (EDWARDS, 2010) ce qui sera probablement le cas dans le cadre de la mission INSIGHT. Alors, des ondes acoustiques, sur une large bande de fréquences, vont se propager dans l'atmosphère sous forme d'ondes sphériques et il est possible d'estimer leur amplitude et leur période à la source via l'énergie délivrée à l'impact (CEPLECHA et al., 1998). Mais, dans un contexte plus général, l'étude des signaux sismo-acoustiques permettrait d'aider à la détermination des propriétés acoustiques de l'atmosphère, des propriétés sismiques de sub-surface ainsi que de la composition et énergie de la météorite à son impact (EDWARDS, EATON et BROWN, 2008). Sur Terre, de nombreux travaux de modélisation furent menés pour caractériser les effets infrasoniques de l'entrée de bolides en hypervélocité (≈ 3 km.s^{-1}) et se concentrant sur la reconstruction des trajectoires et des propriétés des météorites (GAINVILLE, HENNETON et COULOUVRAT, 2017 ; GROOT-HEDLIN, HEDLIN et WALKER, 2011).

Comme mentionné préalablement, les météorites peuvent générer des ondes sismiques par

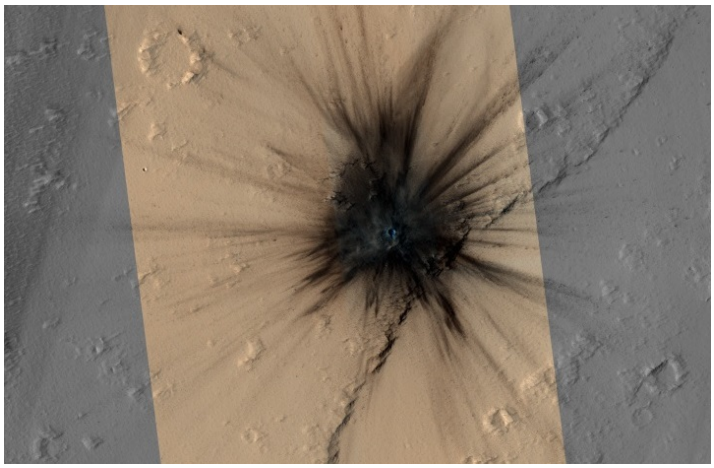

FIGURE 2.3 – Exemple d'un impact de météorite récent (moins de cinq ans) sur Mars ayant généré un cratère de 100 à 150 mètres. Crédit image : JPL/NASA/University of Arizona.

leur impact direct au sol ou par le couplage des chocs avec la partie solide lors de leur fragmentation en proche surface (KITOV et al., 1997 ; LOGNONNÉ et al., 2016). L'énergie apportée par la météorite sera alors libérée sous forme d'ondes de surfaces et d'ondes de volume dans le solide. Celles-ci sont schématisées sur la figure 2.2 dans la partie solide. Ces phénomènes furent peu étudiés dans le cadre de Mars mais les impacts de projectiles à la surface de la Lune furent détectés par les sismomètres de la mission Appolo depuis de nombreuses années (DAVIS, 1993 ; OBERST et NAKAMURA, 1987). Sur Mars, bien que l'entrée de météorites soit plus importante que sur la Terre ou la Lune (DAVIS, 1993), la vitesse d'impact est, en revanche, moitié plus faible que sur ces planètes. Mais l'étude de Davis suggéra, néanmoins, qu'il serait possible d'extrapoler ces données sur Mars en concluant que les impacts seraient une source importante d'ondes sismiques et permettant l'étude des profondeurs de la planète. Plus récemment TEANBY et WOOKEY, 2011 modérèrent les conclusions issues des missions Appolo en se basant sur un modèle d'atmosphère martienne plus précis et donna une conclusion plus pessimiste. Il serait très peu probable d'étudier les zones très profondes de Mars avec une estimation d'un impact tous les dix ans permettant une détection précise des ondes sismiques ayant traversé la planète (de magnitude ≈ 4.5). Un impact de ce type est d'ailleurs visible sur la figure 2.3 ayant généré un cratère de plus de 100 m. Récemment, LOGNONNÉ et KAWAMURA (2015) et STEVANOVIĆ et al. (2017) évaluèrent la possibilité d'utiliser les impacts d'ampleur moins importante (magnitude inférieure 4.5) pour aider à la détection et la quantification des entrées de météorites ainsi que d'étudier le couplage solide-atmosphère sur Mars.

Enfin les phénomènes d'ondes couplées à l'interface solide-atmosphère, dont nous avons parlé précédemment, seront aussi une source importante d'infrasons. Les ondes de Rayleigh, se propageant à la surface, vont exciter les modes de propagation basse fréquence des ondes acoustiques pouvant se propager de manière quasi-verticale dans l'atmosphère et à haute altitude. Peu de papiers ont traité des ondes gravito-acoustiques issues de ce couplage sur Mars. Du côté solide, les précurseurs furent (GARCIA, LOGNONNÉ et BONNIN, 2005 ; KOBAYASHI et NISHIDA, 1998) qui estimèrent l'amplitude des oscillations et des ondes sismiques sur Mars

et Vénus. De l'autre côté, (Lognonné, 2005) se concentra sur la détection des ondes de surface dans l'atmosphère. Enfin, un travail important fut effectué par Lognonné et al., 2016 s'inspirant des travaux précédemment cités. Il se pencha sur le couplage des parties solides des planètes Mars et Vénus pour la propagation d'infrasons issus du déplacement des ondes de Rayleigh. Cet article conclut notamment que les ondes acoustiques générées par ces ondes de surface peuvent se propager jusqu'à une altitude de 120 km avant d'être complètement absorbées. Ceci est dû à l'impact de la viscosité plus fort en dessous de 100 km sur Mars et le contraste d'impédance plus fort que sur Terre, entre l'atmosphère et la partie solide sur Mars, qui va induire une transmission plus faible de l'énergie sismique. Ils notèrent aussi que davantage de travail doit être mené pour quantifier plus précisément l'occurence et l'amplitude des évènements sismiques et ondes de Rayleigh mais qu'une première estimation donnait que la détection d'ondes de Rayleigh détectables et liées aux impacts seraient de l'ordre de 5 par an (Lognonné et Kawamura, 2015).

Il est important de noter que certains évènements moins conventionnels (Williams, 2001) peuvent avoir lieu sur Mars et être parfois détectables dans des conditions favorables ou participeront au bruit sismique : la charge atmosphérique (Dehant et al., 2012), les "dust-devil" (Lorenz et al., 2015), les orages (Petculescu, 2016) et les marées de Phobos (Van Hoolst et al., 2003). De plus, hors du domaine infrasonique, les mouvements de l'atterrisseur et ses interactions avec le vent ainsi que la dynamique des dunes à la surface vont potentiellement générer des ondes de 8 à 200 Hz. Mais, comme mentionné précédemment, ces signaux "hautes fréquences" vont être fortement impactés par la viscosité et la relaxation vibrationnelle et ne pourront probablement pas être exploités pour tirer des conclusions sur les caractéristiques des phénomènes sources ou les propriétés de la basse atmosphère.

Enfin, tout comme sur Terre, les ondes de gravité peuvent se propager dans l'atmosphère martienne dues aux fortes perturbations de température entre le jour et la nuit, aux zones de convection, aux orages et aux phénomènes topographiques. Les missions Mariner 9 et l'atterrisseur Viking mirent en évidence des ondes de gravité dans l'atmosphère martienne (Briggs et Leovy, 1974 ; Seiff et Kirk, 1977). Celles-ci ne sont probablement pas générées par la topographie (Creasey, Forbes et Keating, 2006) mais ont un impact fort sur le réchauffement-refroidissement à des altitudes entre 40 et 70 km (Parish et al., 2009).

Nous allons quantifier numériquement l'amplitude et les temps d'arrivées des ondes acoustiques liés aux impacts en fonction des caractéristiques principales de l'atmosphère martienne qui altèrent leur propagation. Nous utilisons la méthode présentée et validée au chapitre 1 afin de pouvoir modéliser de manière réaliste les vents et les phénomènes atténuants à la surface de Mars.

2.2 Article publié dans "Space Science Reviews"

L'article présenté dans cette section fut soumis dans la revue "Space Science Reviews" dans le cadre de l'édition spéciale dédiée à la mission INSIGHT de 2018 qui sera mise en ligne courant 2017 : Garcia et al., 2016. Le travail présenté dans cet article repose sur la méthode par différences finies présentée dans le chapitre 1. Cet article propose aussi une nouvelle façon de prendre en compte numériquement les phénomènes de relaxation vibrationnelle grâce à l'utilisation de variables en mémoire (de manière similaire à ce que est utilisé pour la modélisation sismique, Carcione, Kosloff et Kosloff, 1988). Des simulations sont réalisées pour différentes conditions atmosphériques martiennes et comparées à des solutions par tracés de raies afin de valider les temps d'arrivées.

Space Science Reviews manuscript No.
(will be inserted by the editor)

Finite-difference modeling of acoustic and gravity wave propagation in Mars atmosphere: application to infrasounds emitted by meteor impacts

Raphael F. Garcia · Quentin Brissaud · Lucie Rolland · Roland Martin · Dimitri Komatitsch · Aymeric Spiga

Received: date / Accepted: date

Abstract The propagation of acoustic and gravity waves in planetary atmospheres is strongly dependent on both wind conditions and attenuation properties. This study presents a finite-difference modeling tool tailored for acoustic-gravity wave applications that takes into account the effect of background winds, attenuation phenomena (including relaxation effects specific to carbon dioxide atmospheres) and wave amplification by exponential density decrease with height. The simulation tool is implemented in 2D Cartesian coordinates and first validated by comparison with analytical solutions for benchmark problems. It is then applied to surface explosions simulating meteor impacts on Mars in various Martian atmospheric conditions inferred from global climate models. The acoustic wave travel times are validated by comparison with 2D ray tracing in a windy atmosphere. Our simulations predict that acoustic waves generated by impacts can refract back to

R.F. Garcia
Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace (ISAE-SUPAERO), Université de Toulouse, 10 Ave E. Belin 31400 Toulouse, France

Institut de Recherche en Astrophysique et Planétologie, Université de Toulouse, 14 Ave E. Belin, 31400 Toulouse, France

Q. Brissaud
Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace (ISAE-SUPAERO), Université de Toulouse, 10 Ave E. Belin 31400 Toulouse, France

L. Rolland
Univ. Nice Sophia Antipolis, CNRS, IRD, Observatoire de la Cte dAzur, Goazur UMR 7329, 250 rue Albert Einstein, Sophia Antipolis 06560 Valbonne, France

R. Martin
Laboratoire de Géosciences Environnement Toulouse GET, UMR CNRS 5563, Observatoire Midi-Pyrénées, Université Paul Sabatier, 14 avenue Édouard Belin, 31400 Toulouse, France

D. Komatitsch
LMA, CNRS UPR 7051, Aix-Marseille University, Centrale Marseille, Marseille, France

A. Spiga
Laboratoire de Météorologie Dynamique, UMR CNRS 8539, Institut Pierre-Simon Laplace, Sorbonne Universités, UPMC Univ Paris 06, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France

the surface on wind ducts at high altitude. In addition, due to the strong nighttime near-surface temperature gradient on Mars, the acoustic waves are trapped in a waveguide close to the surface, which allows a night-side detection of impacts at large distances in Mars plains. Such theoretical predictions are directly applicable to future measurements by the INSIGHT NASA Discovery mission.

1 Introduction

Measurements of pressure perturbations from infrasounds and gravity waves in the atmosphere of Mars provide a way to locate in space and time the infrasonic sources and to infer the Martian atmospheric properties from the wave propagation. The two main differences between Mars and Earth in terms of the infrasonic wave propagation are the following. First, the day-side temperature structure of Mars atmosphere is such that the sound velocity continuously decreases from the surface up to the thermosphere, preventing acoustic signals, generated at the bottom of the atmosphere, from refracting back to the surface. Second, the attenuation of acoustic waves by carbon dioxide molecular relaxation must be accounted for on Mars (Bass and Chambers, 2001; Williams, 2001; Petculescu and Lueptow, 2007; Hanford and Long, 2009). In particular, the relaxation frequency of vibrational modes of CO_2 molecules is within the acoustic-infrasonic range below 80 km of altitude. Thus the attenuation of infrasounds is higher than for the Earth. A consequence of those two differences is that Mars appears less favorable than the Earth for ground measurement of infrasonic signals coming from sources located at the surface. Yet, those effects remain to be quantified especially in the context of the INSIGHT mission that will deploy pressure and seismic sensors on the surface.

Infrasound and gravity wave propagation on Earth has been studied since the seventies (Hines, 1960) but this topic regained interest recently when infrasonic and gravity waves were detected in the thermosphere (Artru et al., 2004, 2005; Liu et al., 2006; Bruinsma and Forbes, 2008; Rolland et al., 2010). Simulations of acoustic and gravity wave propagation in Earth's atmosphere have been carried out by various authors (Ostashev et al., 2005; de Groot-Hedlin et al., 2011; Mikhailenko and Mikhailov, 2014; Brissaud et al., 2016). But to our knowledge, numerical simulations for acoustic and gravity wave propagation in a windy martian atmosphere including vibrational relaxation have never been performed.

This study first presents a numerical method which is able to simulate acoustic and gravity wave propagation in a windy and attenuating Martian atmosphere. The numerical simulations are validated with respect to analytical solutions, and also compared to ray tracing results (Dessa et al., 2005). The method is then applied to a surface explosion in realistic Mars atmosphere models, which enables inference of the variability of wave propagation conditions with respect to Mars climate.

2 Finite-difference modeling of acoustic and gravity waves in a carbon dioxide planetary atmosphere

2.1 Governing equations

In this study we use the linearized Navier-Stokes equations for acoustic and gravity wave propagation in an attenuating atmosphere subject to bulk, shear and vibrational relaxation. We consider the same physical assumptions as in Brissaud et al. (2016). Only vertically stratified atmosphere models and horizontal winds are considered. In this case, the equations are

$$\begin{aligned} \partial_t p &= -\mathbf{w}.\nabla p - M_U(\nabla.\mathbf{v} - e_1) - \rho \mathbf{v}\mathbf{g} \\ \partial_t \rho_p &= -\mathbf{w}.\nabla \rho_p - \nabla.(\rho \mathbf{v}) \\ \rho \partial_t \mathbf{v} &= -\rho\{(\mathbf{v}.\nabla)\mathbf{w} + (\mathbf{w}.\nabla)\mathbf{v}\} + \nabla.\mathbf{\Sigma} + \mathbf{g}\rho_p \end{aligned} \tag{1}$$

where ρ is the background density, $\mathbf{w}$ the horizontal wind velocity, $M_U = \rho c^2 \frac{\tau_\epsilon}{\tau_\sigma}$ the unrelaxed modulus, c the adiabatic sound velocity, τ_ϵ and τ_σ, respectively, strain and stress relaxation times, $\mathbf{g}$ the gravity acceleration, p the pressure perturbation, $\mathbf{v}$ the velocity perturbation, ρ_p the density perturbation, e_1 a memory variable taking into account relaxation effects due to carbon dioxide vibrational relaxation (see Sect. 2.2) and $\mathbf{\Sigma}$ is the stress tensor, which reads,

$$(\mathbf{\Sigma})_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu(\partial_j(\mathbf{v}+\mathbf{w})_i + \partial_i(\mathbf{v}+\mathbf{w})_j - \frac{2}{3}\delta_{ij}\nabla.\mathbf{v}) + \eta_V \delta_{ij}\nabla.\mathbf{v}\,. \tag{2}$$

where (i,j) indices indicate space directions, μ is the shear viscosity and η_V the volume viscosity. Note that, due to the memory variable, equation system (1) lacks constraint and an extra equation needs to be added as explained in Sect. 2.2.3.

The system of equations (1) describes the propagation of acoustic and gravity waves in a viscous atmospheric fluid subject to wind (Nappo, 2002).

2.2 Acoustic attenuation in Mars atmosphere

2.2.1 Analytical formulation of absorption coefficients

Additional attenuation processes must be considered for Mars with respect to Earth due to the presence of CO_2. In this section, we will recall results from Bass and Chambers (2001) for the atmosphere composition as well as absorption coefficient equations. Thus, we will assume that the composition of the Martian atmosphere is 95.3% CO_2 and, accordingly, we will include the effects of sound relaxation by vibrational and rotational modes of CO_2 molecules. On Mars, three kinds of absorption have an impact on wave propagation, and we detail here the analytical formulation of the three distinct absorption coefficients. These analytical expressions were validated by Direct Simulation Monte Carlo method (Hanford and Long, 2009).

First, classical absorption, also present on Earth, due to viscosity and thermal conduction reads

$$\alpha_{cl} = \frac{\omega^2}{2\rho c^3}\left(\frac{4}{3}\mu + \frac{(\gamma-1)\kappa}{\gamma C_v}\right), \tag{3}$$

where ω in $2\pi.s^{-1}$ is the wave angular frequency, c in $m.s^{-1}$ the adiabatic sound speed, μ in $kg.m^{-1}.s^{-1}$ the dynamic viscosity, $\gamma = C_p/C_v$ the specific heat ratio, C_v in $J.(kg.mol)^{-1}.K^{-1}$ the molar low-frequency specific heat at constant volume, and κ in $J.(kg.mol)^{-1}.K^{-1}.kg.m^{-1}.s^{-1}$ the thermal conductivity.

The absorption process caused by rotational modes of CO_2 molecules is specific to Mars. It reads

$$\alpha_{rot} = \frac{\omega^2}{2\rho c^3}\mu\frac{\gamma(\gamma-1)R}{1.25C_p^0}Z_{rot}, \tag{4}$$

where $C_p^0 = 7/2$ in $J.(kg.mol)^{-1}.K^{-1}$ is the specific heat at constant pressure, $R = 8.31432.10^3$ in $J(kmol^{-1})K^{-1}$ is the gas constant and zero frequency and Z_{rot} is the rotational collision number. The above two attenuation mechanisms have a similar frequency dependence. So, the attenuation induced by rotational modes of CO_2 molecules is simply taken into account by defining the volume viscosity as:

$$\eta_V = \left(\frac{4}{3} + \frac{\gamma(\gamma-1)R}{1.25C_p^0}Z_{rot}\right)\mu + \frac{(\gamma-1)\kappa}{\gamma C_v} \tag{5}$$

The third absorption process is the vibrational relaxation that reads, in the case of a CO_2 atmosphere

$$\alpha_{vib} = \frac{\frac{\pi S_{vib}}{c}\left(\frac{f^2}{f_r}\right)}{1+\left(\frac{f}{f_r}\right)^2}, \tag{6}$$

where,

$$S_{vib} = C'_j\frac{R}{C_p^\infty(C_v^\infty+C'_j)} \quad \text{(Relaxation strength)}$$
$$f_r = \frac{1}{2\pi\tau'_{vs}} \quad \text{(Relaxation frequency)}$$

with τ'_{vs} being the relaxation time at constant volume and temperature for a single energy-transfer reaction, it determines the rate of the relaxation process. The smaller the relaxation time, the faster the relaxation process. C_p^∞ in $J(kmol^{-1})K^{-1})$ is the constant pressure specific heat at frequencies well above the relaxation frequency f_r in s^{-1}, C_p^0 its value well below f_r and C'_j in $J(kmol^{-1})K^{-1})$ is the specific heat of the relaxing mode.

Fig. 1, shows that below 80 km altitude on Mars the main attenuation factor comes from the CO_2 vibrational relaxation. Thus, taking this effect into account in simulations is crucial to correctly model infrasound propagation. Also, as one notices in Fig. 1, the vibrational absorption coefficient does not follow the trend of classical and rotational absorption, presenting a peak relaxation frequency. Consequently, this attenuation process must be analytically and numerically integrated into the equations in a different way than classical and rotational absorptions. In the next section, we demonstrate that the Zener rheology model (Carcione et al., 1988) is equivalent to the attenuation mechanism induced by CO_2 vibrational modes. Then, the Zener relaxation times are used to define a memory variable that will numerically model the CO_2 vibrational relaxation process.

2.2.2 A Zener model for carbon dioxide vibrational relaxation

We demonstrate in this section that the vibrational absorption coefficient in eq. (6) is equivalent to the one induced by a Zener attenuation mechanism (Carcione,

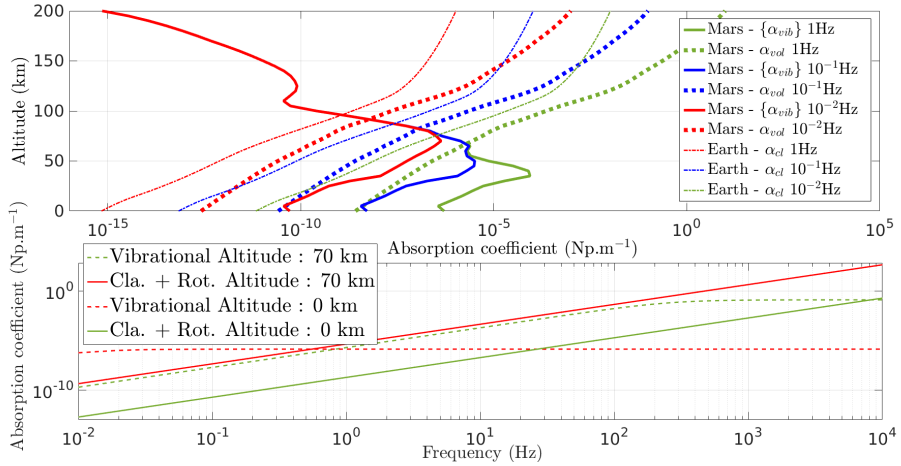

Fig. 1 On top, vibrational absorption coefficient from equation (6) $\{\alpha_{vib}\}$ and the sum between volume absorption coefficients (which is the sum of classical and rotational relaxations $\alpha_{vol} = \alpha_{cl} + \alpha_{rot}$) from equations (3)-(4) against altitude on Mars at various frequencies $f = 10^{-2}, 10^{-1}, 1$ Hz; and classical absorption coefficients against altitude on Earth $\{\alpha_{cl}\}$ at same frequencies. On the bottom, sum of the classical and rotational absorption coefficients; and vibrational absorption coefficient, presented in the range $(10^{-2} - 10^{4})$ Hz at various altitudes $z = 0, 70$ km.

2007) (Sect. 2.4.3). In that book further details can be found about the Zener rheology and we will thus only present the relationship between the absorption coefficient induced by a Zener attenuation mechanism and the analytical one from eq. (6).
The quality factor, for a Zener linear solid, reads (Carcione, 2007) eq. (2.159),

$$Q(\omega) = \frac{1 + \omega^2 \tau_\epsilon \tau_\sigma}{\omega(\tau_\epsilon - \tau_\sigma)}. \tag{7}$$

where τ_ϵ and τ_σ are, respectively, strain and stress relaxation times. The time τ_σ characterizes the time during which stress decreases by a characteristic value and the terminology strain relaxation time τ_ϵ, also called retardation time, comes from the exponential dependence of the creep function (refer to Carcione (2007)). As pointed out in (Carcione et al., 1988), at very low frequencies, visco-elastic media tend to act elastically. This condition is reached when both relaxation times tend to zero $\tau_\epsilon \to 0, \tau_\sigma \to 0$ or when $\tau_\epsilon = \tau_\sigma$. Then the unrelaxed modulus (M_U) and the acoustic modulus (ρc^2) coincide.
Considering a low-viscosity approximation ($Q >> 1$), the approximate coefficient can be written as (Carcione, 2007) eq. (2.123)

$$\alpha \approx \frac{\omega}{2c} Q^{-1}. \tag{8}$$

Thus, from equations (7)-(8), one can establish a relationship between the analytical and Zener absorption coefficients

$$\alpha \approx \frac{\omega}{2c} Q^{-1} = \frac{1}{2c} \frac{\omega^2(\tau_\epsilon - \tau_\sigma)}{1 + \omega^2 \tau_\epsilon \tau_\sigma} = \frac{(\tau_\epsilon - \tau_\sigma)}{2c\sqrt{\tau_\epsilon \tau_\sigma}} \frac{\omega^2 \sqrt{\tau_\epsilon \tau_\sigma}}{1 + \omega^2 \tau_\epsilon \tau_\sigma} = \frac{\frac{\pi S_{vib}}{c} \left(\frac{f^2}{f_r}\right)}{1 + \left(\frac{f}{f_r}\right)^2} = \alpha_{vib}, \tag{9}$$

where one can identify relaxation times $\tau_\epsilon, \tau_\sigma$ with relaxation frequencies f_r and relaxation strengths S_{vib} using eq. (6) as

$$f_r = \frac{1}{2\pi\tau_r} \quad \text{and} \quad S_{vib} = \frac{(\tau_\epsilon - \tau_\sigma)}{\tau_r}, \tag{10}$$

where $\tau_r = \sqrt{\tau_\epsilon \tau_\sigma}$. Since atmospheric models will provide relaxation frequencies and relaxation strengths, the remaining task in order to model the attenuation process consists in finding relaxation times in terms of those variables. From (10), one needs to solve a second-order ordinary differential equation, which finally gives

$$\tau_\sigma = \frac{1}{2}\left(-\frac{S_{vib}}{2\pi f_r} + \sqrt{\left(\frac{S_{vib}}{2\pi f_r}\right)^2 + \frac{4}{(2\pi f_r)^2}}\right); \quad \tau_\epsilon = \tau_\sigma + \frac{S_{vib}}{2\pi f_r}. \tag{11}$$

2.2.3 Memory variables for carbon dioxide vibrational relaxation processes

In order to integrate numerically the CO_2 vibrational relaxation, we use the concept of memory variables. The general form of stress-strain relation is from eq. (2.9) in Carcione (2007)

$$\Sigma(\mathbf{x}, t) = \Psi(\mathbf{x}, t) * \partial_t \epsilon(\mathbf{x}, t), \tag{12}$$

where $*$ is the convolution product, Σ the stress tensor (as in eq. (2)), Ψ the relaxation tensor (scalars in 1D) and ϵ the strain.

The convolution kernel in the stress-strain relation (12) is difficult to implement in the linearized Navier-Stokes equations in time-domain methods. In this paper we will use a standard method (Carcione, 2007) that consists in computing memory kernels based on a chain of linearly coupled memory variables whose frequencies correspond to moments of the memory kernel spectrum. To justify the introduction of memory variables we should go back to the main constitutive equations. In order to compute the time derivative of the convolution product in eq. (12), we first recall the Boltzmann operation, that reads for any function g and f of the Heaviside type (meaning that $\forall t > 0, f(t) = \tilde{f}H(t)$ where H is the Heaviside function)

$$f \odot g = \partial_t (f * g) = f(0)g + (\partial_t \tilde{f} H) * g. \tag{13}$$

Then, applying this operation to eq. (12) and considering Ψ to be of the Heaviside type (i.e $\forall t > 0, \Psi(t) = \tilde{\Psi} H(t)$), one gets

$$\Sigma = \Psi * \partial_t \epsilon = \partial_t \Psi * \epsilon = \partial_t (\Psi * \epsilon) = \Psi(0)(\epsilon + \frac{\partial_t \tilde{\Psi} H}{\Psi(0)} * \epsilon) = \Psi(0)(\epsilon + \phi * \epsilon), \tag{14}$$

where the response function ϕ reads

$$\phi = \tilde{\phi} H; \quad \tilde{\phi} = \frac{\partial_t \tilde{\Psi}}{\Psi(0)} \tag{15}$$

In the case of a Zener model one has from eq. (2.231) in Carcione (2007)

$$\tilde{\phi} = \frac{1}{\tau_\epsilon}(1 - \frac{\tau_\epsilon}{\tau_\sigma}) e^{-\frac{t}{\tau_\sigma}}, \tag{16}$$

where τ_ϵ and τ_σ are relaxation times. Then we define the strain memory variable e_1 as

$$e_1 = \phi * \epsilon. \tag{17}$$

We apply again the Boltzmann operation to the time derivative of eq. (17) and combining with the response function (16) we obtain a first-order differential equation in time

$$\partial_t e_1 = \phi(0)\epsilon - \frac{\epsilon}{\tau_\sigma} = -\frac{1}{\tau_\sigma}\left[(1 - \frac{\tau_\sigma}{\tau_\epsilon})\epsilon + e_1\right] \tag{18}$$

Thus, the introduction of a Zener solid mechanism adds a first order in time equation to solve. The final equation system is

$$\begin{array}{l} \partial_t p = -\mathbf{w}.\nabla p - M_U(\nabla.\mathbf{v} - e_1) - \rho\mathbf{v}\mathbf{g} \\ \partial_t \rho_p = -\mathbf{w}.\nabla\rho_p - \nabla.(\rho\mathbf{v}) \\ \rho\partial_t\mathbf{v} = -\rho\{(\mathbf{v}.\nabla)\mathbf{w} + (\mathbf{w}.\nabla)\mathbf{v}\} + \nabla.\mathbf{\Sigma} + \mathbf{g}\rho_p \\ \partial_t e_1 = -\frac{1}{\tau_\sigma}[(1 - \frac{\tau_\sigma}{\tau_\epsilon})\nabla.\mathbf{v} + e_1] \end{array} \tag{19}$$

with

$$(\mathbf{\Sigma})_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu(\partial_j(\mathbf{v} + \mathbf{w})_i + \partial_i(\mathbf{v} + \mathbf{w})_j - \frac{2}{3}\delta_{ij}\nabla.\mathbf{v}) + \eta_V\delta_{ij}\nabla.\mathbf{v}\,,$$

and $M_U = \rho c^2 \frac{\tau_\epsilon}{\tau_\sigma}$.

3 Numerical implementation

Time discretization is based on a fourth-order Runge-Kutta scheme and spatial discretization is based on a fourth-order staggered finite-difference scheme coupled with an upwind scheme for advective terms. The method is the same as in Brissaud et al. (2016) and we refer to that paper for more details.

We perform simulations in a 2D vertical Cartesian mesh in which $\Delta x = \Delta z$. We use a point source within the domain and consider a rigid boundary condition along the bottom edge of the grid, which imposes zero vertical and horizontal velocity (Brissaud et al., 2016). The only variable imposed at the boundary is the vertical velocity while pressure p and density perturbation ρ_p are not constrained. In order to enforce boundary conditions, the method of images, described for instance by Wilson and Liu (2004), is relevant to our equations (appendix 7.3).

To absorb outgoing waves in an efficient way we use an absorbing boundary layer called ADE-PML (Auxiliary Differential Equation Perfectly Matched Layer) (Martin et al., 2010) at the fictitious outer edges of the mesh. We adapted it to media subject to gravity (Appendix 7.2).

Since we often perform simulations over a large number of grid points we resort to parallel computing implemented using the Message-Passing Interface (MPI) libraries (Gropp et al., 1994), decomposing the mesh into regular slices cut along the $z-$coordinate axis.

4 Validation of the numerical technique

In order to validate the implementation of vibrational relaxation, we perform two tests for acoustic wave propagation only, one with a background flow and the other without. We do not present validation for gravity waves since the impact of vibrational relaxation on their propagation is very weak (relaxation frequencies of CO_2 on Mars are much larger than the expected dominant frequencies of gravity waves) and gravity waves without such relaxation process were already validated in Brissaud et al. (2016).
The source is set as a pressure fluctuation and is implemented in eq. (1)-1 as

$$\partial_t p = -\mathbf{w}.\nabla p - M_U(\nabla.\mathbf{v} - e_1) + \rho c^2 S - \rho \mathbf{v}\mathbf{g}, \tag{20}$$

where the source S is time-dependent variable and reads

$$S(\mathbf{x}, t) = -2(t - t_0)e^{-\{\pi f_0(t-t_0)\}^2}\delta(\mathbf{x_s}), \tag{21}$$

where δ is the Kronecker symbol, $\mathbf{x_s}$ the source position, $t_0 = 5$ s the source onset time and $f_0 = 5$ Hz the source dominant frequency. Using the formulation of the pressure response in appendix 7.1 for a viscous medium subject to wind, one can compute an analytical solution for this simulation case.

4.1 Vibrational relaxation windless validation case

$L_x \times L_z(km)$	$\Delta x(km)$	$\Delta t(s)$	ρ	c	(η_V, μ)	$(\tau_\epsilon, \tau_\sigma)$	g_z	w_x
200×100	100	10^{-2}	1.77×10^{-2}	236	$(0, 0)$	$(1.5, 1)$	0	0

Table 1 Simulation parameters corresponding to the homogeneous isothermal model for the validation case in Sect. 4. The parameters have the following dimensions: ρ (kg.m^{-3}), c (m.s^{-1}), η_V(kg.m^{-1}.s^{-1}), μ(kg.m^{-1}.s^{-1}), $\tau_\epsilon, \tau_\sigma$(s), g_z(m.s^{-2}) and w_x(m.s^{-1}).

Table 1 summarizes the physical and numerical parameters used for the simulation. The choice of relaxation times $(\tau_\epsilon, \tau_\sigma)$ corresponds to a relaxation frequency $f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{\tau_\epsilon \tau_\sigma}} = 0.13$ Hz close to the dominant frequency of the source, in order to clearly see the effect of the vibrational relaxation.

In Fig. 2, results show a very good fit in terms of amplitude, with a maximum error that is less than 4%. Vibrational relaxation clearly impacts the amplitude but also the velocity of the wave.

In Fig. 3 one notices that as the frequency increases the group velocity of the wave packet increases as well and becomes larger than the adiabatic sound velocity. This means that waves undergoing vibrational effects will propagate faster than waves in a non-attenuating model. This figure also shows the inverse quality factor as a function of frequency due to vibrational relaxation. It validates the high-Q assumption ($Q >> 1 \Leftrightarrow Q^{-1} << 1$) for our frequency range since at any altitude $Q^{-1} < 0.05$.

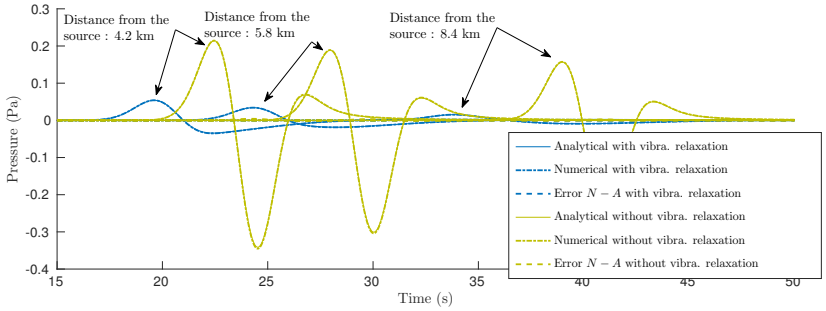

Fig. 2 Pressure from the numerical solution with vibrational relaxation set to $\tau_\epsilon = 1.5$ s and $\tau_\sigma = 1$ s ('Numerical with vibra. relaxation') and the analytical solution with vibrational relaxation ('Analytical with vibra. relaxation') as well as the difference between the two ('Error N-A with vibra. relaxation'). The numerical solution without vibrational relaxation ('Numerical without vibra. relaxation'), the analytical solution without vibrational relaxation ('Analytical without vibrat. relaxation') as well as the difference between the two ('Error N-A without vibra. relaxation') are also presented. The signals are shown through time for the simulation in Sect. 4.1, i.e the windless validation case, at three recording stations located at the same altitude $z = 10$ km, their position along x being $x = 4.2$, 5.8 and 8.4 km from left to right. The atmosphere is considered isothermal (Table 1).

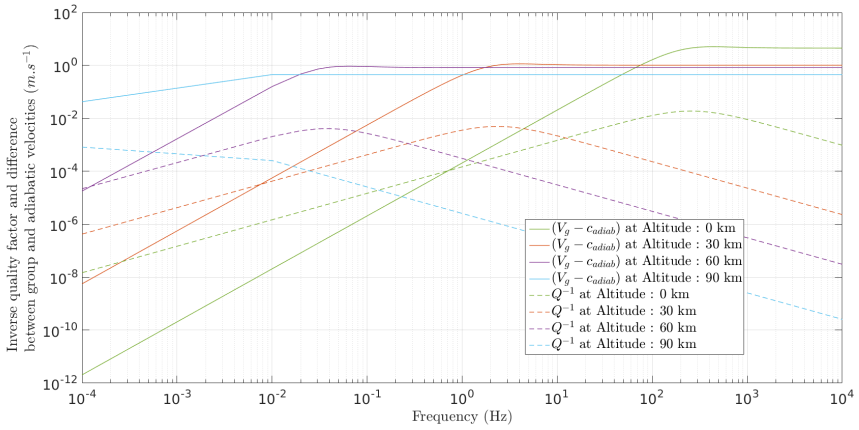

Fig. 3 Difference between the group and adiabatic velocity and inverse quality factor versus frequency in the range $[10^{-4}, 10^4]$ Hz in an atmosphere subject to vibrational relaxation at various altitudes $z = 0, 30, 60, 90$ km. The atmosphere model is based on the Mars Climate Database. One notices that as frequency increases the group velocity of the wave packet increases as well and becomes larger than the adiabatic sound velocity.

$L_x \times L_z$ (km)	Δx (m)	Δt (s)	ρ	c	(η_V, μ)	$(\tau_\epsilon, \tau_\sigma)$	g_z	w_x
200×100	100	10^{-2}	1.77×10^{-2}	236	$(0, 0)$	$(1.5, 1)$	0	40

Table 2 Simulation parameters corresponding to the homogeneous isothermal model for the validation case in Sect. 4.2. The parameters have the following dimensions: ρ (kg.m^{-3}), c (m.s^{-1}), η_V(kg.m^{-1}.s^{-1}), μ(kg.m^{-1}.s^{-1}), $\tau_\epsilon, \tau_\sigma$(s), g_z(m.s^{-2}) and w_x(m.s^{-1}).

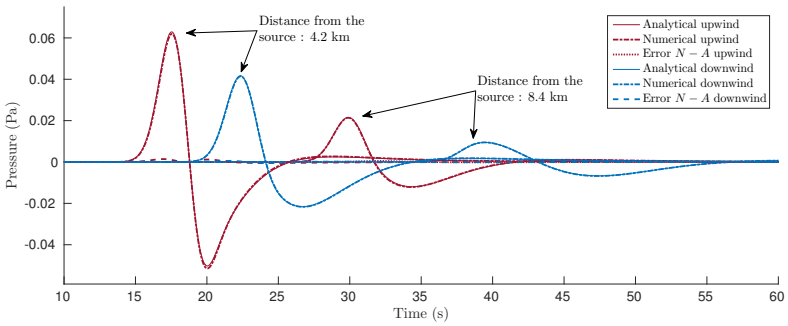

Fig. 4 Pressure from the numerical solution at downwind recording stations ('Numerical downwind'), at upwind stations ('Numerical upwind') and the corresponding analytical signals ('Analytical downwind' and 'Analytical upwind') as well as the difference between them ('Error N-A downwind' and 'Error N-A upwind'). The signals are shown through time for the simulation in Sect. 4.2, i.e the windy validation case, at two recording stations located at the same altitude $z = 10$ km, their position along x being $x = 4.2$ and 8.4 km from left to right. The atmosphere is considered isothermal with vibrational relaxation $\tau_\epsilon = 1.5$ s and $\tau_\sigma = 1$ s (Table 2).

4.2 Vibrational relaxation windy validation case

Table 2 summarizes the physical and numerical parameters used for the simulation.

In Fig. 4, results show a very good fit in terms of maximum amplitude error which is less than 4%. As in the simulation in Sec. 4.1, vibrational relaxation impacts the propagation by damping the wave amplitude and by increasing phase and group velocities. But, in this case the wind also plays a significant role by shifting the wave apparent frequency and then by modifying its phase and amplitude. One interesting feature is that upwind waves, which should have larger amplitudes than downwind ones (see signal 'Upwind without vibrational relaxation' in Fig. 5 which is a typical feature of the Doppler shift), have lower amplitude here due to vibrational relaxation. Indeed, as the wind shifts the upwind wave dominant frequency into the vibrational relaxation frequency range where its impact is significant, the upwind wave will undergo more damping from vibrations of CO_2 than the downwind one.

Fig. 5 shows simulation results at the same locations with and without vibrational relaxation. One notices that waves in the medium without vibrational relaxation have a larger amplitude than in the medium with vibrational relaxation, as expected, where the amplitude becomes strongly damped and the wave apparent frequency shifted as the wave travels through the medium.

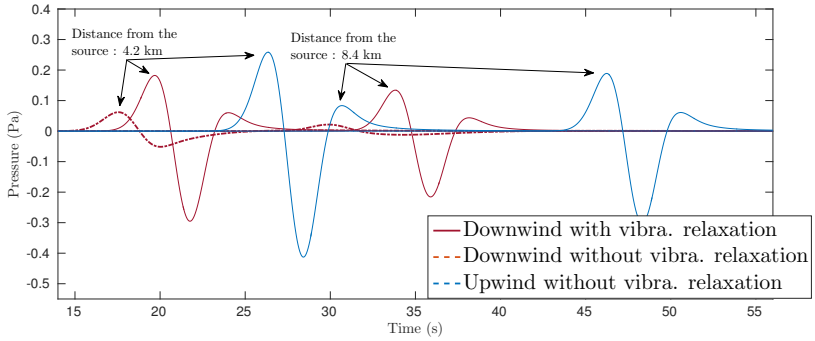

Fig. 5 Pressure from the numerical solution at downwind recording stations with vibrational relaxation set to $\tau_\epsilon = 1.5$ s and $\tau_\sigma = 1$ s ('Downwind with vibra. relaxation') and the solution at upwind and downwind stations without vibrational relaxation ('Upwind without vibra. relaxation' and 'Downwind without vibra. relaxation'). The signals are shown through time for the simulation in Sect. 4.2, i.e the windy validation case, at two recording stations located at the same altitude $z = 10$ km, their position along x being $x = 4.2$ and 8.4 km from left to right. The atmosphere is considered isothermal (Table 2).

5 Applications to Mars atmospheric signals

In this section, we explore applications of our simulation tool to the pressure signals generated by a meteor impact on Mars ground.

5.1 Pressure signal from a meteor impact

Acoustic and gravity waves emitted by a meteor are either due to the shock wave along the track during re-entry, to atmospheric explosions corresponding to fragmentation of the meteor during re-entry, or to meteor and target vaporisation at the impact (Edwards, 2010). Even if our simulation tool allows to insert pressure sources anywhere in the domain, we will only consider pressure waves created by meteor impacts on the ground. The reason for this choice is that most of the meteors that will generate direct seismic waves detectable by INSIGHT seismometer will impact the ground (Popova et al., 2003; Chappelow and Sharpton, 2006). The characteristics of the atmospheric pressure signals emitted during a hyper-velocity impact on the ground are poorly documented because such signals are rarely observed on Earth, for which pressure signals emitted during meteor events is coming from airbursts (explosions in the atmosphere) (Edwards, 2010). To our knowledge, only two observations of pressure waves associated with the impact of a meteor on the ground are documented, for the 1908 Tunguska event in Siberia (Whipple, 1930) and for the 2007 Carancas event in Bolivia (Pichon et al., 2008; Tancredi et al., 2009). The interpretation of these measurements are still debated, with a poorly known proportion of the signal coming either from a low altitude airburst or from the surface impact. However, the radiation pattern of an hyper-velocity impact source in the solid is close to the one of an explosion (Walker, 2003). Consequently, the atmospheric acoustic source is simulated here through an explosion. The scaling of over-pressure and dominant period of the signal with the character-

istics of the impactor is also difficult to evaluate because these parameters strongly depend respectively on the impactor trajectory and impactor diameter (Haynes and Millet, 2013).
Thus, we postpone the quantification of source parameters to future studies. The source used in our simulations is the one described by eq. (21), which corresponds to a volume decrease, at constant mass, due to the additional air mass provided by the vaporisation of the impactor and of part of the target, followed by a volume increase. No additional scaling is provided for its amplitude, and a dominant frequency of 0.1 Hz is chosen to fit values expected in the far field (Haynes and Millet, 2013). Our simulations are linear, so the amplitude of simulated records can be multiplied by the expected over-pressure at the source to obtain true amplitudes.

5.2 Mars atmosphere models

Typical vertical profiles of thermodynamical properties, composition and winds in the Martian atmosphere are extracted from the Mars Climate database (MCD) (Lewis et al., 1999) which compiles the outputs from simulations performed with the Laboratoire de Météorologie Dynamique (LMD) Global Climate Model (GCM) (Forget et al., 1999). The latest version (v5.2) of the MCD is employed here to benefit from the latest improvements. The treatment of near-surface (Colaïtis et al., 2013) and thermosphere (González-Galindo et al., 2009) processes are of peculiar interest in this study. The location at which the atmospheric profiles are extracted from the MCD is chosen to be equatorial, at the approximate INSIGHT lander location (135.7°E, 4.4°N). From pressure, density, temperature and composition values, we compute the sound speed, Brunt-Väisälä frequency, and attenuation parameters (Bass and Chambers, 2001).

A first model going from the surface to 200 km altitude is presented in Fig. 6 at midday and midnight for solar longitudes of 90° and 240°. Those values of solar longitude correspond to, respectively, northern summer solstice and late southern spring seasons (martian solar longitude is 0° for northern spring equinox), and were chosen as both typical from a climatic standpoint (i.e. diurnal and seasonal variability) and extreme from an acoustic standpoint (different altitudes for sound speed and wind extrema). Fig. 6 illustrates how diurnal and seasonal variability impact the parameters relevant to acoustic-gravity waves. The sound speed decreases from the surface to about 120 km altitude. The wind components are positive in the Eastward and Northward directions. The horizontal wind vector is strong and variable above 20 km, but still significant for acoustic propagation in the first 10 km. The profile of Brunt-Väisälä frequency continuously increases up to 120 km altitude, which favors gravity wave trapping close to this altitude. The overall shapes of sound speed and Brunt-Väisälä frequency profiles imply that, in the absence of wind, acoustic and gravity waves emitted on ground are not ducted back to the surface until they reach about 120 km altitude. The peak frequency of CO_2 vibrational relaxation affects the infrasonic frequency range in the altitude range starting from 35-50 km up to 80-90 km, depending on the season.

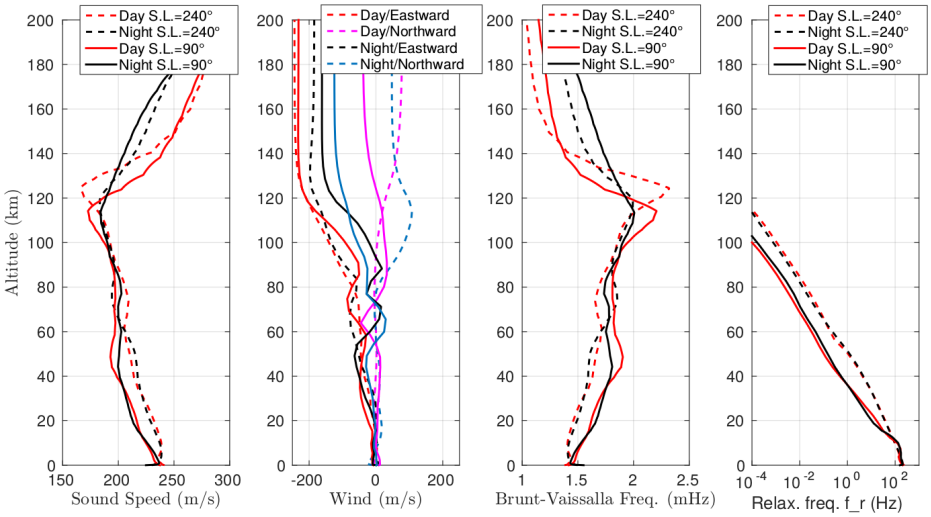

Fig. 6 From left to right, sound speed (in m.s^{-1}), Eastward and Northward winds (in m.s^{-1}) corresponding to positive values of respectively zonal and meridional wind components, Brunt-Väisälä frequency (in mHz) and peak relaxation frequency of CO_2 vibrational modes (in Hz) as a function of altitude (in km). Results are presented for 12h (red or magenta) and 0h (black or cyan) Local Times (LT), and for 240° (dashed lines) and 90° (solid lines) of solar longitude. These parameters are computed from values extracted from Mars Climate Data base version 5.2 (MCD5.2) and (Bass and Chambers, 2001).

5.3 Wave refraction by high-altitude wind ducts

Ray trajectories and travel times (Dessa et al., 2005), and simulated waveforms of acoustic signals generated by a meteor impact on the ground are presented in Fig. 7, 8 and 9. These simulations are performed for the day-side model (12h Local Time) at 90° of solar longitude along a West-East plane (solid red curves in Fig. 6). Grid cells of 250 m x 250 m, over a 1000 km x 200 km domain with a time step of 2x10^{-3} s are used for a source of 10 s dominant period. The effective sound speed (sound velocity corrected for the horizontal wind effect) increases upward for a downwind propagation. Therefore, the records in this direction (blue curves, West direction) present, in addition to direct wave arrivals, late arrivals that correspond to wave refractions at local maxima of wind at 30, 70 and 130 km altitudes whereas none of the simulated rays are ducted back to the surface in the case of an upwind propagation (red curves, East propagation). In Fig. 9, the ray arrival times of waves refracted back to the surface are also indicated for both Cartesian and spherical geometries. The Cartesian arrival times correctly fit the wave packet arrivals, even if ray theory does not reproduce all the waveform complexities. The delays between Cartesian and spherical geometry increase with arrival time, reaching up to 30 seconds.

Meteor impacts generate also gravity waves which are observed in our simulations. Fig. 10 presents snapshots of gravity wave propagation near the source. One notices that the energy propagates towards the top left and top right of the domain whereas the phase propagates orthogonally to it, a typical feature of gravity waves. The wave pattern is strongly influenced by winds, with downwind waves

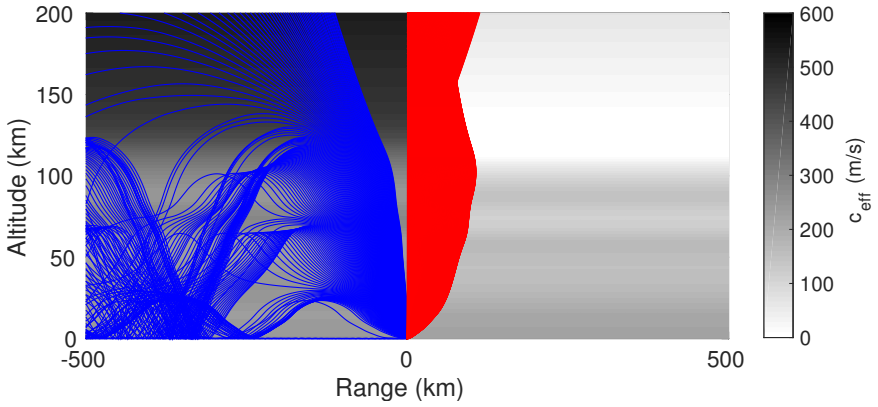

Fig. 7 Ray trajectories in the West (left) to East (right) plane at 90° solar longitude and 12h local time. The background color scale indicates effective sound velocity with black and white colors indicating highest and lowest effective velocities respectively.

ducted back to the surface, and upwind waves propagation upward (Ding et al., 2003). Another effect of background wind is the displacement of the whole gravity wave train in the downwind direction. As a consequence, the downwind records at the surface present both acoustic and gravity wave trains. The gravity wave signals arrive much later than acoustic waves, and present lower frequencies. Due to the dominant period of the source, chosen in the acoustic range, the gravity wave amplitude is low on pressure records. That is why surface records are plotted here for vertical displacement for which direct and horizontally propagating acoustic waves have a low amplitude. However, for the true meteor impact source, we expect the excited frequency range to be larger than in our simulation, thus generating gravity waves with larger amplitudes than the ones presented here. If the impact space/time location is known, the arrival times of both wave types can be used to infer wind profiles along the path. The sensitivity of differential arrival times between acoustic and gravity waves to source location and wind profiles will be inferred in future studies.

5.4 Acoustic wave trapping close to the surface at night

In this section, we present simulation results for acoustic wave propagation in the first 10 km of the atmosphere on the night-side. Fig. 11 presents the evolution of sound speed and winds as a function of the season (solar longitude) at midnight. Due to the radiative cooling of the surface at night, the atmosphere presents a strong thermal gradient in its first kilometers. Consequently, sound speed increases from the cold surface to a maximum value comprised between 0.8 and 6 km altitude depending on the season. This feature creates a waveguide close to the surface (at minimum sound speed). Acoustic wave propagation is also sensitive to wind profiles. As shown in Fig. 11 the wind significantly varies with the season, both in direction and amplitude. However, the wind amplitude decreases to values lower than 8 m.s^{-1} around 6 km altitude in all cases. Fig. 12 presents the effective sound speed profiles (sound speed plus wind) as a function of altitude

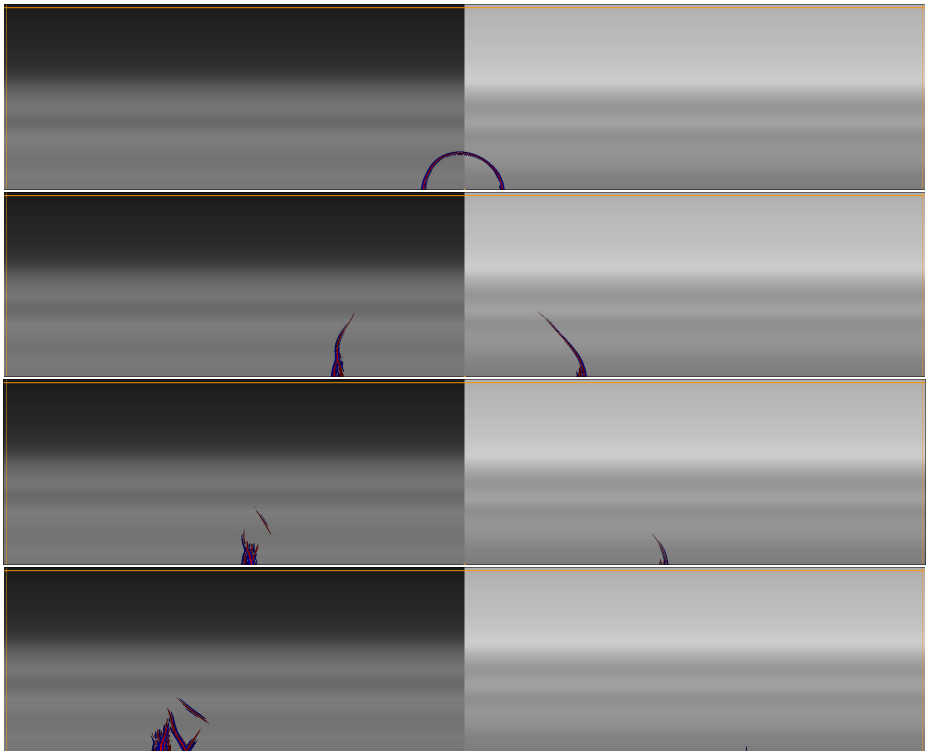

Fig. 8 Snapshots of simulated pressure perturbations (in Pa, scaled independently to maximum value over the whole domain) at times 200 s, 600 s, 1000 s and 1400 s from top to bottom. Blue and red colors indicate negative and positive pressure perturbations respectively. The background color scale indicates effective sound velocity (sound speed plus wind) in the two different propagation directions (West and downwind on the left, East and upwind on the right) with black and white colors indicating highest and lowest effective velocities respectively. Simulation domain is 1000 km wide and 200 km high, and the surface impact source is located in the middle. The orange lines indicate the entrance of the PML regions.

and season for different wave propagation directions. The various wind patterns induce very different situations depending on the season and propagation directions. However, some common patterns can be described. Solar longitudes close to 90° (blueish colors, low winds) generate sound waveguides in the first kilometer of Mars atmosphere. Solar longitudes close to 240° (reddish colors, high winds) generate waveguides of 5-6 km thickness, except for downwind propagation in the southern direction, for which the waveguide in the first kilometer is mainly controlled by the strong vertical wind gradient.

In order to illustrate acoustic wave trapping close to the surface at night, Figs. 13 and 14 present simulations for night-side conditions (0h Local Time) at a solar longitude of 240° in the North-South plane close to the surface. These simulations are performed with grid cells of 50 m x 50 m, over a 200 km x 40 km domain with a time step of 10^{-3} s for a source of 10 s dominant period. For wave propagation in the southern direction (blue color), the kilometer scale waveguide traps rays, as observed at the bottom of figure 13, but the numerical simulation does not

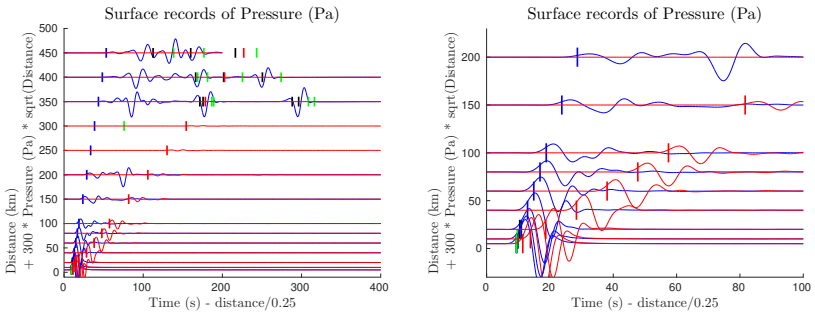

Fig. 9 Simulated surface records sorted by distance (in km) as a function of reduced time (in s) for all the simulated surface records (left) and for a zoom on the closest distances to the source (right). Reduced time induces a shift of the records in the left direction by Distance/0.25 seconds to ensure a better readability of the figure. The amplitude of the records is scaled according to the formula provided in the y-axis label for the same reason. Downwind/West (resp. upwind/East) records are indicated in blue (resp. in red). Rays theoretical arrival times for direct waves are indicated by thick blue and red tags. For waves refracted on the 30 km, 70 km and 130 km wind ducts, ray arrival times are indicated both for computations in Cartesian (black tags) and in spherical (green tags) geometry.

reproduce this wave trapping because the dominant wavelength (about 2.5 km) is larger than the waveguide thickness. If the effect of the kilometer scale waveguide is neglected, the waves emitted at the surface in the southern direction propagate upward and do not come back to the surface. On the contrary, the waves emitted in the northern direction are trapped in a waveguide in the first 10 km of the atmosphere. In Fig. 14(a) the first wave reflected back to the surface at the top of the waveguide clearly appears for distances larger than 30 km. As shown in Fig. 14(b), due to the wave trapping and to upwind propagation of direct waves, the amplitude of pressure signals in the northern direction remains almost constant in the 20 to 90 km distance-range. The surface waveguides will efficiently trap waves depending on their frequency content. The single dominant frequency simulated here is sensitive to waveguide thicknesses larger than about 3 km. But more realistic broad band impact sources will generate high frequency waves that will be trapped in kilometer scale waveguides.

5.5 Future application to the INSIGHT mission

The INSIGHT NASA discovery mission will deploy seismic, pressure, wind and magnetic sensors in the Elysium planitia region (Banerdt et al., 2013). The low topography of this region is favorable to detect acoustic waves trapped in the night-side waveguide. The pressure sensor is designed to correct the seismometer for pressure effects. Therefore, it has a high sampling rate (20 Hz), a low noise in the seismic/infrasonic frequency range, a wind filtering inlet and continuous recordings synchronized with seismic recordings (Banfield and InSight Science Team, 2014). In addition, a wind sensor will provide wind amplitude and direction 1 m above the surface. Consequently, the INSIGHT instruments are suited to detect acoustic waves from meteor impacts. Our study demonstrates that this may be possible at night. In addition, the wind sensor will allow vertical wind profiles provided

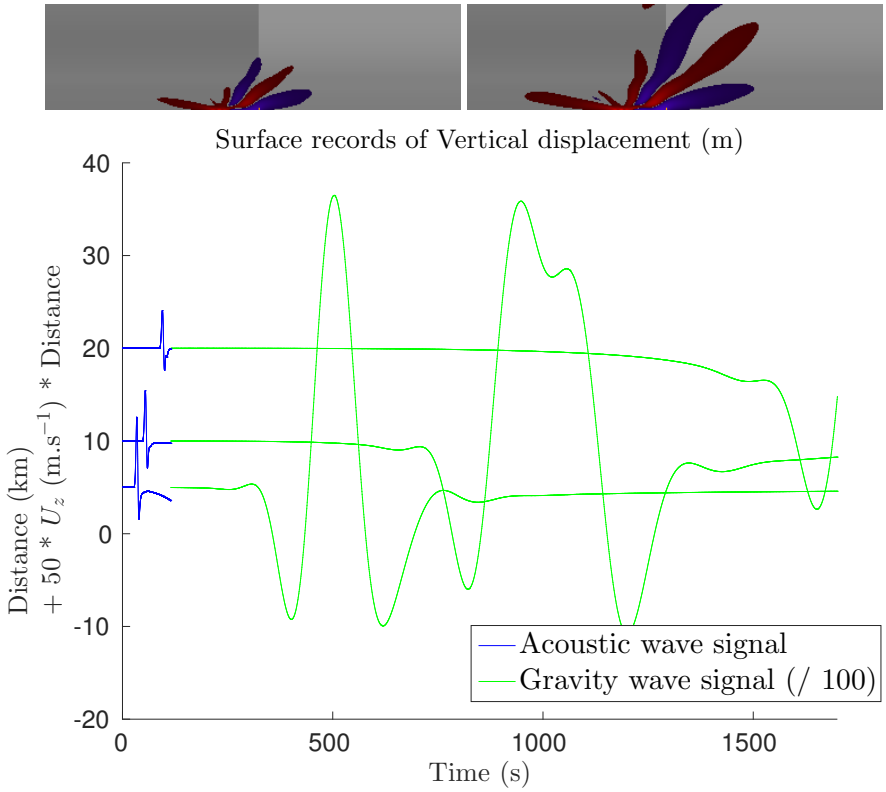

Fig. 10 On the top, two snapshots of vertical displacement (in m) at $t = 1600$ s (left) and $t = 1800$ s (right) focused on a domain of size 184x23.25 km around the source. The red and blue colors indicate positive and negative vertical displacements respectively. The background color scale indicates effective sound velocity with black and white colors indicating highest and lowest effective velocities respectively. On the bottom, zoom on simulated vertical displacement records close to the impact source as a function of distance (in km) and time (in s). The first 115 seconds of the records are presented in blue with a scale given in the label of the vertical axis. The latter part of the same records are presented in green with a scaling 100 times smaller.

by climate models to be calibrated, thus improving the reliability of atmosphere models at impact times. Finally, the thermal noise on the pressure sensor, which is the dominant noise source at low frequencies, will be minimized by its design, thus long period gravity waves created by impacts may also be detected by the sensor.

6 Conclusions and future work

We have presented a finite-difference full wave simulation tool for acoustic and gravity wave propagation in Mars atmosphere, and have validated it by comparing with analytical solutions and with acoustic ray tracing. This code properly takes into account the effects of exponential density decay, sound velocity variations, wave attenuation and horizontal winds. The application of this numerical

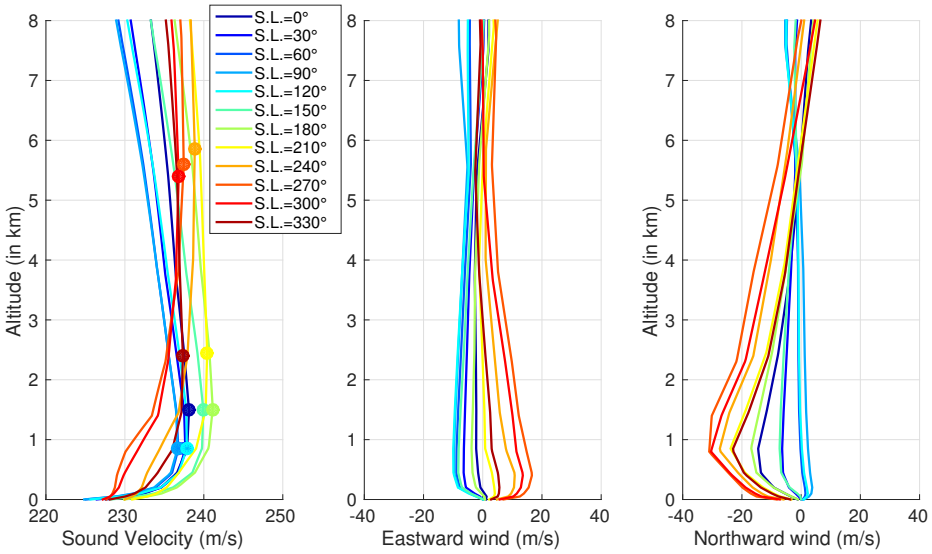

Fig. 11 From left to right, sound speed (in m.s^{-1}), Eastward and Northward winds (in m.s^{-1}) as a function of altitude (in km) for different values of solar longitude (the different colors) for nightside conditions (0h local time). Filled circles indicate the altitude of maximum sound speed.

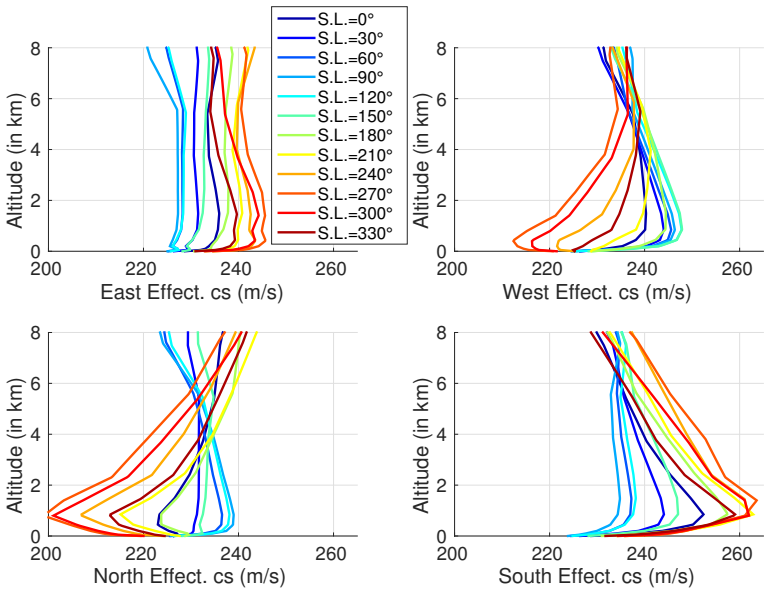

Fig. 12 Effective sound speed (in m.s^{-1}) for nightside conditions (0h local time) as a function of altitude (in km) and solar longitude (the different colors) for different wave propagation directions: East (top left), West (top right), North (bottom left) and South (bottom right).

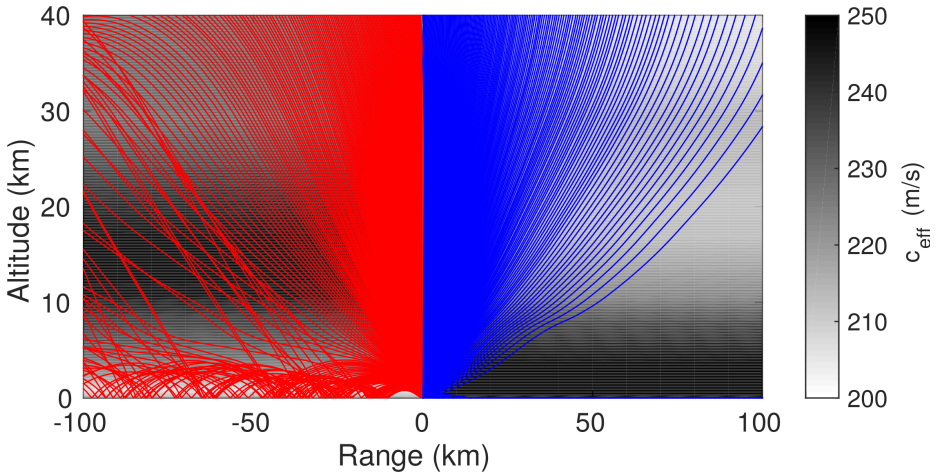

Fig. 13 Ray trajectories in the North (left) to South (right) plane at 240° solar longitude and 0h local time. The background color scale indicates effective sound velocity with black and white color indicating highest and lowest effective velocities respectively.

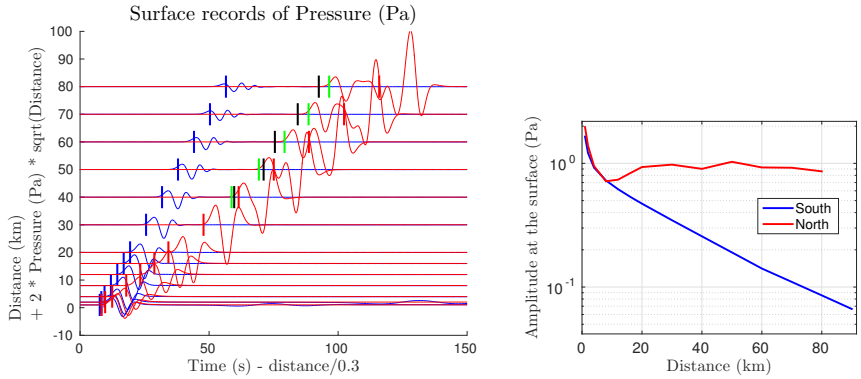

Fig. 14 On the left, simulated surface records sorted by distance (in km) as a function of reduced time (in s). Reduced time induces a shift of the records in the left direction by Distance/0.25 seconds to ensure a better readability of the figure. The amplitude of the records is scaled according to the formula provided in y-axis label for the same reason. Rays theoretical arrival times for direct waves are indicated by thick blue and red tags. The arrival times of rays reflected back to the surface at the top of the waveguide are indicated both for computations in Cartesian (black tags) and in spherical (green tags) geometry. On the right, maximum amplitude (in Pa) measured on simulated records as a function of distance to the source (in km). North (resp. South) stations are indicated in red (resp. in blue).

technique to realistic Mars atmosphere models has allowed us to study the potential interest of a surface infrasonic sensor for the detection of meteor impacts on the surface. Our simulations demonstrate that such a detection for day-side conditions is only possible for waves propagating downwind, for which a part of the acoustic wavefront is refracted back to the surface by wind ducts. However, at night, a waveguide is present close to the surface that would allow for long distance propagation of acoustic signals in flat areas. Such theoretical results should soon be applicable to pressure measurements from the INSIGHT NASA Discovery

mission.
In the near future, this study will be completed by a sensitivity study of acoustic and gravity waves to source location and wind profiles. In addition, for a more direct application to INSIGHT measurements, the pressure wave amplitude as a function of meteor impact parameters will be estimated and compared to the expected background noise.

Acknowledgements We acknowledge the two anonymous reviewers for their detailed review of the manuscript. We thank the INSIGHT science team for fruitful discussions. We also thank the "Région Midi-Pyréenées" (France) and "Université fédérale de Toulouse" for funding the PhD grant of Quentin Brissaud. This study was also supported by CNES through space research scientific projects.

7 Appendices

7.1 Analytical solution for acoustic wave propagation in a windy homogeneous atmosphere with vibrational relaxation

In the framework of acoustic wave propagation in a windy homogeneous medium with vibrational relaxation, the state and momentum equations read

$$\begin{aligned} (\partial_t + \mathbf{w}.\nabla)p &= -\nabla.\mathbf{v} * \Phi - \rho c^2 S \\ \rho(\partial_t + \mathbf{w}.\nabla)\mathbf{v} &= -\nabla p, \end{aligned} \tag{22}$$

where, $\forall t \in \mathbb{R}^+$

$$\Phi(t) = H(t) * \psi(t), \tag{23}$$

with H the Heaviside function and ψ the relaxation function of the viscoelastic medium considered.

Taking the divergence of (22)-2 yields

$$(\partial_t + \mathbf{w}.\nabla)\nabla.\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\Delta p, \tag{24}$$

where Δ is the Laplacian operator. Thus, taking the total derivative D_t (where $D_t = \partial_t + \mathbf{v}.\nabla$) of eq. (22)-1 yields

$$\begin{aligned} (\partial_t + \mathbf{w}.\nabla)^2 p &= -\nabla.(\partial_t + \mathbf{w}.\nabla)\mathbf{v} * \Phi - (\partial_t + \mathbf{w}.\nabla)S \\ &= \tfrac{1}{\rho}\Delta p * \Phi - \rho c^2(\partial_t + \mathbf{w}.\nabla)S. \end{aligned} \tag{25}$$

By considering, in eq. (25), plane wave solutions of the form $p = \tilde{p}e^{-i\omega t}$ and Ψ, defined in eq. (16), the relaxation function for a Zener mechanism (Carcione et al., 1988), we can perform the complex integration of the convolution term

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{p}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\tilde{\Phi}H dt &= \Delta\tilde{p}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\tfrac{1}{\tau_\epsilon}(1-\tfrac{\tau_\epsilon}{\tau_\sigma})e^{-\frac{t}{\tau_\sigma}}H dt \\ &= \Delta\tilde{p}\tfrac{1}{\tau_\epsilon}(1-\tfrac{\tau_\epsilon}{\tau_\sigma})\int_0^{\infty} e^{-(i\omega+\frac{1}{\tau_\sigma})t}dt \\ &= \Delta\tilde{p}\tfrac{1}{\tau_\epsilon}(1-\tfrac{\tau_\epsilon}{\tau_\sigma})\tfrac{1+i\omega\tau_\epsilon}{1+i\omega\tau_\sigma} \end{aligned} \tag{26}$$

then, from the plane wave form in the Fourier space ($\partial_t = -i\omega$), and one can recast (25) as

$$(-i\omega + \mathbf{w}.\nabla)^2\tilde{p} = \tfrac{\hat{K_e}}{\rho}\Delta\tilde{p} - \rho c^2(-i\omega + \mathbf{w}.\nabla)\tilde{S}. \tag{27}$$

The tilde denotes the time Fourier transform and $\hat{K_c}$ is the complex bulk modulus, in the case of a single relaxation mechanism, which reads (Carcione et al., 1988)

$$\hat{K_c} = \rho c^2 \frac{1 + i\omega\tau_\epsilon}{1 + i\omega\tau_\sigma} = \rho \hat{c}^2. \tag{28}$$

where the complex velocity $\hat{c}$ reads

$$\hat{c}^2 = c^2 \frac{1 + i\omega\tau_\epsilon}{1 + i\omega\tau_\sigma} \tag{29}$$

The complex equation (27) can then be expanded as

$$\begin{aligned}
(-\omega^2 + w_x^2\partial_x^2 - 2i\omega w_x\partial_x)\tilde{p} &= \tfrac{\hat{K_c}}{\rho}(\partial_x^2 + \partial_z^2)\tilde{p} - \rho c^2(-i\omega + \mathbf{w}.\nabla)\tilde{S} \\
\left\{\tfrac{\rho}{\hat{K_c}}(-\omega^2 + w_x^2\partial_x^2 - 2i\omega w_x\partial_x) - \partial_x^2 - \partial_z^2\right\}\tilde{p} &= -\tfrac{\rho^2}{\hat{K_c}}c^2(-i\omega + \mathbf{w}.\nabla)\tilde{S} \\
\left\{\tfrac{\rho}{\hat{K_c}}(\omega^2 - w_x^2\partial_x^2 + 2i\omega w_x\partial_x) + \partial_x^2 + \partial_z^2\right\}\tilde{p} &= \tfrac{\rho^2}{\hat{K_c}}c^2(-i\omega + \mathbf{w}.\nabla)\tilde{S} \\
\left\{\tfrac{1}{\hat{c}^2}(\omega^2 - w_x^2\partial_x^2 + 2i\omega w_x\partial_x) + \partial_x^2 + \partial_z^2\right\}\tilde{p} &= \tfrac{\rho c^2}{\hat{c}^2}(-i\omega + \mathbf{w}.\nabla)\tilde{S} \\
(\partial_x^2 + \partial_z^2 + \hat{k}^2 + 2i\hat{k}\hat{M}\partial_x - \hat{M}^2\partial_x^2)\tilde{p} &= -\tfrac{\rho c^2}{\hat{c}^2}(-i\omega + \mathbf{w}.\nabla)\tilde{S},
\end{aligned} \tag{30}$$

with k is the wavenumber $\hat{k} = \frac{\omega}{\hat{c}}$, $\hat{M}$ the Mach number, that is,

$$\hat{M} = \frac{w_x}{\hat{c}}, \tag{31}$$

where $\hat{c}$ is the complex velocity. The hat over $\hat{M}$ and $\hat{k}$ is introduced to differentiate from the usual Mach and wave numbers in an inviscid medium.

Finally, we will consider

$$\tilde{S} = \frac{2i\tilde{A}\hat{K_c}}{\omega\rho c^2} e^{-i\omega t}\delta_x\delta_z, \tag{32}$$

where δ_x, δ_z are the Kronecker delta symbols, and $\tilde{A}$ is the Fourier transform of the amplitude of the time-dependent source function, that is,

$$A(t) = -2(\pi f_0)^2(t - t_0)e^{-\{\pi f_0(t-t_0)\}^2}. \tag{33}$$

We use the same method as in Ostashev et al. (2005) to obtain the pressure response in this framework, that is

$$\tilde{p} = \frac{iA}{2(1-\tilde{M})^{3/2}} \left(H_0^1(\xi) - \frac{i\tilde{M}cos\beta}{\sqrt{1 - \tilde{M}^2\sin\beta^2}} H_1^1(\xi) \right) e^{\frac{-i\tilde{k}\tilde{M}R\cos\beta}{1-\tilde{M}^2}}, \tag{34}$$

where $(H_i^1)_{i=1,2}$ are the Hankel functions of first kind, and ξ reads

$$\xi = \frac{\tilde{k}R\sqrt{1 - \tilde{M}^2\sin\beta^2}}{1 - \tilde{M}^2}. \tag{35}$$

Using Hankel function asymptotic (Abramowitz and Stegun, 1964) by considering the approximation $|\tilde{k}R| >> 1$, yields

$$\tilde{p} = \frac{A(\sqrt{1 - \tilde{M}^2\sin\beta^2} - \tilde{M}\cos\beta)}{\sqrt{2\pi\tilde{k}R}(1 - \tilde{M}^2)(1 - \tilde{M}^2\sin\beta^2)^{3/4}} e^{\frac{i}{1-\tilde{M}^2}(\sqrt{1-\tilde{M}^2\sin\beta^2} - \tilde{M}\cos\beta)\tilde{k}R + \frac{i\pi}{4}}. \tag{36}$$

7.2 Numerical implementation of ADE-PML for a medium subject to gravity

This boundary condition corresponds to mesh stretching in the boundary layer which requires to recast the derivatives in the new stretched set of complex-valued coordinates (Komatitsch and Martin, 2007). We do this using ADE-PML memory variables. In this new reference frame eq. (19) read

$$\begin{aligned}
\partial_t p &= -\mathbf{w}.\tilde{\nabla} p - \rho c^2 \tilde{\nabla}.\mathbf{v} - \tilde{\nabla} p_0 \mathbf{v} + e_1 \\
\partial_t \rho_p &= -\mathbf{w}.\tilde{\nabla}\rho_p - \tilde{\nabla}.(\rho\mathbf{v}) \\
\rho\partial_t \mathbf{v} &= -\rho\{(\mathbf{v}.\tilde{\nabla})\mathbf{w} + (\mathbf{w}.\tilde{\nabla})\mathbf{v}\} + \tilde{\nabla}.\mathbf{\Sigma} + \tilde{\mathbf{g}}\rho_p \\
\partial_t e_1 &= -\tfrac{1}{\tau_\sigma}[(1 - \tfrac{\tau_\sigma}{\tau_\epsilon}) + e_1],
\end{aligned} \tag{37}$$

with

$$(\mathbf{\Sigma})_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu(\tilde{\partial}_j(\mathbf{v}+\mathbf{w})_i + \tilde{\partial}_i(\mathbf{v}+\mathbf{w})_j - \frac{2}{3}\delta_{ij}\tilde{\nabla}.\mathbf{v}) + \eta_V \delta_{ij}\tilde{\nabla}.\mathbf{v}.$$

Note that we wrote the pressure equation (37)-1 in terms of the ambient pressure p_0 rather than in terms of its value coming from hydrostatic equilibrium (i.e in the interior domain $\nabla p_0 = \rho\mathbf{g}$). Indeed, as we stretch coordinates the hydrostatic equilibrium equation is also modified as

$$\tilde{\nabla} p_0 = \rho\mathbf{g}. \tag{38}$$

In this new reference frame derivatives will read, for any unknown ϕ

$$\tilde{\partial}_x \phi = \frac{1}{\kappa_x}\partial_x\phi + Q_x^\phi; \quad \tilde{\partial}_z \phi = \frac{1}{\kappa_z}\partial_z\phi + Q_z^\phi, \tag{39}$$

where the memory variable is denoted $Q_{x,z}^\phi$. Memory variables obey a first-order in time differential equation for $x-$derivatives and $z-$derivatives. We will only give details for the $x-$derivative since it is similar for the $z-$derivatives. We consider the four time sub-steps $(t^{n,i})_{i=1,4}$ as $t^{n,i} = \Delta t(n+\nu_i)$ for the four RK4 stages where $\nu_i = 0, \nu_2 = 0.5, \nu_3 = 0.5$ and $\nu_4 = 1$. Then the memory variable Q_x^ϕ obey the following differential equation

$$Q_x^\phi(t^{n,i}) = b_{x,i} Q_z^\phi(t^{n,1}) + a_{x,i}\partial_x\phi(t^{n,i}), \tag{40}$$

where

$$a_{x,i} = -d_x \frac{\Delta t\nu_i}{\kappa_x\kappa_x(1 + \Delta t\theta\nu_i(\frac{d_x}{\kappa_x} + b_x))}; \quad b_x = \frac{\kappa_x - \theta\Delta t\nu_i(d_x + \kappa_x\alpha_x)}{\kappa_x + \theta\Delta t\nu_i(d_x + \kappa_x\alpha_x)}, \tag{41}$$

with

$$\tau_x = \frac{1}{\frac{d_x}{\kappa_x} + \alpha_x}; \quad \kappa_x = 1 + (\kappa_{max} - 1)^m; \quad d_x = d_0(\frac{x}{L})^N; \quad \alpha_x = \alpha_{max}[1 - (\frac{x}{L})^p], \tag{42}$$

where the θ parameter indicates if the computation is performed explicitly ($\theta = 0$), semi-implicitly ($\theta = 0.5$) or implicitly ($\theta = 1$). Here this parameter is taken as $\theta = 0.5$. Since we are mainly interested in damping acoustic waves (most of the

waves reaching the boundary will be acoustic waves) we take the same parameters as in Martin et al. (2010), meaning that

$$N = 2; \quad m = 2; \quad p = 1; \quad \alpha_{max} = \pi f_0; \quad \kappa_{max} = 7; \quad d_0 = -\frac{(N+1)c_{max,x} log(R_c)}{2L}. \tag{43}$$

where f_0 is the dominant frequency of the source, $c_{max,x}$ the maximum effective velocity along x (sum of background flow velocity and adiabatic sound speed) and R_c the theoretical reflection coefficient taken as $R_c = 0.0001$. The same formulation holds for derivatives along z.

7.3 "Image" boundary conditions

This boundary condition consists in duplicating the physical domain and sources at ghost points located below the bottom boundary in order to obtain a wave interference ensuring zero vertical velocity at the boundary (Morse and Ingard (1968), Sec. 7.4). One enforces that the pressure is equal on each side of the boundary

$$p(-\mathbf{x}, t) = p(\mathbf{x}, t), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \backslash \Gamma \tag{44}$$

and the sign of gravity and wind is changed in the ghost domain as

$$\begin{array}{l} g_y(-\mathbf{x}) = -g_y(\mathbf{x}) \\ w_x(-\mathbf{x}) = -w_x(-\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \backslash \Gamma. \end{array} \tag{45}$$

while all other unknowns are duplicated from the real domain to the ghost one

$$\begin{array}{l} \mu(-\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}), \eta_V(-\mathbf{x}) = \eta_V(\mathbf{x}), \\ \tau_\epsilon(-\mathbf{x}) = \tau_\epsilon(\mathbf{x}), \tau_\sigma(-\mathbf{x}) = \tau_\sigma(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \backslash \Gamma \end{array} \tag{46}$$

As a consequence, the pressure being equal on both sides of the boundary, the pressure gradient in the momentum equation is zero at the boundary. Also, setting opposite gravity directions above and below the boundary leads to zero gravity at the surface, hence the gravity term in the momentum equation vanishes. Therefore, at the boundary, the momentum equation is verified since the zero velocity condition is imposed. Finally, we impose the boundary to be motionless and we choose

$$\begin{array}{l} v_x(x, -z) = -v_x(x, z) \\ v_z(x, -z) = -v_z(x, z), \quad \forall z \in \Omega \end{array} \tag{47}$$

References

M. Abramowitz, I.A. Stegun, *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables*, vol. 55 (Courier Corporation, ???, 1964)

J. Artru, T. Farges, P. Lognonné, Acoustic waves generated from seismic surface waves: propagation properties determined from doppler sounding observation and normal-modes modeling. Geophys. J. Int. **158**, 1067–1077 (2004). doi:10.1111/j.1365-246X.2004.02377.x

J. Artru, V. Ducic, H. Kanamori, P. Lognonné, M. Murakami, Ionospheric detection of gravity waves induced by tsunamis. Geophys. J. Int. **160**, 840–848 (2005). doi:10.1111/j.1365-246X.2005.02552.x

W.B. Banerdt, S. Smrekar, P. Lognonné, T. Spohn, S.W. Asmar, D. Banfield, L. Boschi, U. Christensen, V. Dehant, W. Folkner, D. Giardini, W. Goetze, M. Golombek, M. Grott, T. Hudson, C. Johnson, G. Kargl, N. Kobayashi, J. Maki, D. Mimoun, A. Mocquet, P. Morgan, M. Panning, W.T. Pike, J. Tromp, T. van Zoest, R. Weber, M.A. Wieczorek, R. Garcia, K. Hurst, InSight: A Discovery Mission to Explore the Interior of Mars, in *Lunar and Planetary Science Conference*. Lunar and Planetary Science Conference, vol. 44, 2013, p. 1915

D. Banfield, InSight Science Team, Atmospheric Observations from the Mars Insight Mission, in *Mars Atmosphere: Modelling and Observation, 5th International Workshop*, ed. by F. Forget, M. Millour, 2014, p. 4304

H.E. Bass, J.P. Chambers, Absorption of sound in the Martian atmosphere. J. Acoust. Soc. Am. **109**, 3069–3071 (2001)

Q. Brissaud, R. Martin, R. Garcia, D. Komatitsch, Finite-difference numerical modelling of gravito-acoustic wave propagation in a windy and attenuating atmosphere. Geophys. J. Int. (2016). doi:10.1093/gji/ggw121

S.L. Bruinsma, J.M. Forbes, Medium- to large-scale density variability as observed by CHAMP. Space Weather **6**, 08002 (2008). doi:10.1029/2008SW000411

J.M. Carcione, *Wave fields in real media: Wave propagation in anisotropic, anelastic, porous and electromagnetic media, 2nd Edition* (Elsevier, Oxford, 2007)

J.M. Carcione, D. Kosloff, R. Kosloff, Wave propagation simulation in a linear viscoelastic medium. Geophysical Journal International **95**(3), 597–611 (1988)

J.E. Chappelow, V.L. Sharpton, Atmospheric variations and meteorite production on Mars. Icarus **184**, 424–435 (2006). doi:10.1016/j.icarus.2006.05.013

A. Colaïtis, A. Spiga, F. Hourdin, C. Rio, F. Forget, E. Millour, A thermal plume model for the Martian convective boundary layer. Journal of Geophysical Research (Planets) **118**, 1468–1487 (2013). doi:10.1002/jgre.20104

C. de Groot-Hedlin, M.A.H. Hedlin, K. Walker, Finite difference synthesis of infrasound propagation through a windy, viscous atmosphere: Application to a bolide explosion detected by seismic networks. Geophysical Journal International **185**(1), 305–320 (2011). doi:10.1111/j.1365-246X.2010.04925.x

J.-X. Dessa, J. Virieux, S. Lambotte, Infrasound modeling in a spherical heterogeneous atmosphere. Geophys. Res. Lett. **32**, 12808 (2005). doi:10.1029/2005GL022867

F. Ding, W. Wan, H. Yuan, The influence of background winds and attenuation on the propagation of atmospheric gravity waves. Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics **65**, 857–869 (2003). doi:10.1016/S1364-6826(03)00090-7

W.N. Edwards, Meteor generated infrasound: theory and observation, in *Infrasound monitoring for atmospheric studies* (Springer, Netherlands, 2010), pp. 361–414

F. Forget, F. Hourdin, R. Fournier, C. Hourdin, O. Talagrand, M. Collins, S.R. Lewis, P.L. Read, J.-P. Huot, Improved general circulation models of the Martian atmosphere from the surface to above 80 km. J. Geophys. Res. **104**, 24155–24176 (1999). doi:10.1029/1999JE001025

F. González-Galindo, F. Forget, M.A. López-Valverde, M. Angelats i Coll, E. Millour, A ground-to-exosphere Martian general circulation model: 1. Seasonal,

diurnal, and solar cycle variation of thermospheric temperatures. Journal of Geophysical Research (Planets) **114**, 04001 (2009). doi:10.1029/2008JE003246

W. Gropp, E. Lusk, A. Skjellum, *Using MPI, portable parallel programming with the Message-Passing Interface* (MIT Press, Cambridge, USA, 1994)

A.D. Hanford, L.N. Long, The direct simulation of acoustics on Earth, Mars, and Titan. Acoustical Society of America Journal **125**, 640 (2009). doi:10.1121/1.3050279

C.P. Haynes, C. Millet, A sensitivity analysis of meteoric infrasound. Journal of Geophysical Research (Planets) **118**, 2073–2082 (2013). doi:10.1002/jgre.20116

C.O. Hines, Internal atmospheric gravity waves at ionospheric heights. Canadian Journal of Physics **38**, 1441 (1960). doi:10.1139/p60-150

D. Komatitsch, R. Martin, An unsplit convolutional perfectly matched layer improved at grazing incidence for the seismic wave equation. Geophysics **72**(5), 155–167 (2007)

S.R. Lewis, M. Collins, P.L. Read, F. Forget, F. Hourdin, R. Fournier, C. Hourdin, O. Talagrand, J.-P. Huot, A climate database for mars. J. Geophys. Res. **104**, 24177–24194 (1999). doi:10.1029/1999JE001024

J.Y. Liu, Y.B. Tsai, S.W. Chen, C.P. Lee, Y.C. Chen, H.Y. Yen, W.Y. Chang, C. Liu, Giant ionospheric disturbances excited by the M9.3 Sumatra earthquake of 26 December 2004. Geophys. Res. Lett. **33**, 2103 (2006). doi:10.1029/2005GL023963

R. Martin, D. Komatitsch, S.D. Gedney, E. Bruthiaux, A high-order time and space formulation of the unsplit perfectly matched layer for the seismic wave equation using auxiliary differential equations (ADE-PML). Computer Modeling in Engineering and Sciences (CMES) **56**(1), 17 (2010). doi:doi:10.3970/cmes.2010.056.017

B. Mikhailenko, A. Mikhailov, Numerical modeling of seismic and acoustic-gravity waves propagation in an ???earth-atmosphere??? model in the presence of wind in the air. Numerical Analysis and Applications **7**(2), 124–135 (2014)

P.M. Morse, K.U. Ingard, *Theoretical acoustics* (Princeton university press, New Jersey, USA, 1968)

C.J. Nappo, *An introduction to atmospheric gravity waves* (Academic Press, Netherlands, 2002), p. 276

V.E. Ostashev, D.K. Wilson, L. Liu, D.F. Aldridge, N.P. Symons, D. Marlin, Equations for finite-difference, time-domain simulation of sound propagation in moving inhomogeneous media and numerical implementation. Journal of the Acoustical Society of America **117**(2), 503–517 (2005). doi:10.1121/1.1841531

A. Petculescu, R.M. Lueptow, Atmospheric acoustics of Titan, Mars, Venus, and Earth. Icarus **186**, 413–419 (2007). doi:10.1016/j.icarus.2006.09.014

A.L. Pichon, K. Antier, Y. Cansi, B. Hernandez, E. Minaya, B. Burgoa, D. Drob, L.G. Evers, J. Vaubaillon, Evidence for a meteoritic origin of the September 15, 2007, Carancas crater. Meteoritics and Planetary Science **43**, 1797–1809 (2008). doi:10.1111/j.1945-5100.2008.tb00644.x

O. Popova, I. Nemtchinov, W.K. Hartmann, Bolides in the present and past martian atmosphere and effects on cratering processes. Meteoritics and Planetary Science **38**, 905–925 (2003). doi:10.1111/j.1945-5100.2003.tb00287.x

L.M. Rolland, G. Occhipinti, P. Lognonné, A. Loevenbruck, Ionospheric gravity waves detected offshore Hawaii after tsunamis. Geophys. Res. Lett. **37**, 17101 (2010). doi:10.1029/2010GL044479

G. Tancredi, J. Ishitsuka, P.H. Schultz, R.S. Harris, P. Brown, D.O. Revelle, K. Antier, A. Le Pichon, D. Rosales, E. Vidal, M.E. Varela, L. Sánchez, S. Benavente, J. Bojorquez, D. Cabezas, A. Dalmau, A meteorite crater on Earth formed on September 15, 2007: The Carancas hypervelocity impact. Meteoritics and Planetary Science **44**, 1967–1984 (2009). doi:10.1111/j.1945-5100.2009.tb02006.x

J.D. Walker, Loading sources for seismological investigations of asteroids and comets. Int. J. Impact Eng. **29**, 757–769 (2003). doi:doi:10.1016/j.ijimpeng.2003.10.022

F.J.W. Whipple, The great Siberian meteor and the waves, seismic and aerial, which it produced. Quaterly Journal of the Royal Meteorological Society **56**, 287–304 (1930)

J.-P. Williams, Acoustic environment of the Martian surface. J. Geophys. Res. **106**, 5033–5042 (2001). doi:10.1029/1999JE001174

D.K. Wilson, L. Liu, Finite-difference, time-domain simulation of sound propagation in a dynamic atmosphere, Technical report, Cold Regions Research and Engineering Lab, Hanover Netherlands, 2004

2.3 Limites et perspectives

Les résultats de simulations fournirent des premières estimations qualitatives, voire quantitatives (si l'amplitude de la source est mise à l'échelle), de l'impact du refroidissement de la surface et des guides d'ondes ainsi créés sur la propagation des ondes gravito-acoustiques sur Mars. Néanmoins, afin d'affiner nos modèles, certains points seraient à explorer. Tout d'abord, une représentation plus précise des phénomènes de relaxation prenant en compte l'advection des variables en mémoire ainsi que des phénomènes de dissipation de la chaleur (**aubin1998ondes**) permettrait d'obtenir des résultats plus réalistes.
De plus, bien que la méthode développée dans le chapitre 1 soit disponible en 3-D, les simulations furent réalisées en 2-D pour des questions de puissance de calcul. Mais il serait intéressant d'étendre notre étude en 3-D afin de prendre en compte une structure des vents (importants sur Mars) plus complexe qui pourrait avoir un impact fort sur l'amplitude et les temps d'arrivées des infrasons.
En outre, et nous aborderons ces points dans les sections qui suivent, nous avons considéré une fonction source ponctuelle sous la forme d'une surpression gaussienne mais peut-être n'est-ce pas la meilleur représentation. Enfin, numériquement, nous avons choisi des zones PML afin d'absorber les ondes sortantes et de simuler un domaine infini. Ceci n'est pas adapté à la dispersion des ondes acoustiques et de gravité simultanément et devrait être amélioré dans de futurs développements.

2.3.1 Paramétrisation de la source et validité des équations de Navier-Stokes sur Mars

Les résultats obtenus sont liés à la définition du signal source. Dans cette étude nous nous sommes basés sur un point source représentant une surpression gaussienne de fréquence $f = 0.1$ Hz. Mais comme précisé dans la section précédente, il est difficile d'obtenir un support théorique précis sur les caractéristiques du signal source liées à l'impact des météorites en hyper-vélocité (vitesse du bolide supérieure à 3 km.s^{-1}) car cet évènement est très rare sur Terre (Kirin Meteorite Shower, 1977 ; Pichon et al., 2008 ; Whipple, 1930). Ce choix est motivé par plusieurs relevés réalisés dans le passé justifiant l'utilisation de l'approximation de l'explosion d'une météorite à celle d'une explosion de surface (Edwards, Eaton et Brown, 2008 ; Edwards, 2010 ; Opik, 1958). Ainsi que sur des études de modélisation (Groot-Hedlin, Hedlin et Walker, 2011 ; Hedlin et al., 2010) comparant les formes d'ondes des simulations effectuées avec un signal source similaire à celui utilisé dans notre papier et des données du réseau sismique IMS en 2008 dans le Pacifique. Dans ces études l'impact n'a pas lieu au sol mais sous forme d'une explosion dans l'atmosphère. Ce choix de point source à des fréquences ≤ 1 Hz fut aussi choisi dans l'étude du cratère formé par une météorite à Carancas en septembre 2007 (Pichon et al., 2008). Ce travail se base sur une explosion de fréquence dominante 1 Hz et obtint des bons résultats en terme de temps d'arrivées. Certaines hautes fréquences visibles sur les données IMS, mais non reproduites par les simulations, dans la thermosphère peuvent être dues à l'absence de non-linéarité (impliquant une modification du contenu fréquentiel des ondes lors de leur effondrement) dans le modèle

numérique et/ou par une représentation trop limitée du phénomène à la source. Notez que d'autres représentations de la source furent utilisées afin d'étudier des explosions. Notamment dans le cadre de l'expérience "Misty picture" (Gainville et al., 2010) qui, s'inspirant des travaux de Reed (Reed, 1977), le signal source fut défini comme un pulse de pression non-linéaire puis mis à l'échelle grâce à des modèles empiriques (sur l'amplitude maximum et le temps de phase).

En outre, bien que la perspective de la localisation d'un impact à l'aide d'une simple station à la surface puisse paraître peu probable, on bénéficie de deux atouts majeurs : l'utilisation simultanée d'un sismomètre et d'un capteur de pression aide à la discrimination des signaux observés et la connaissance précise de l'atmosphère martienne et sa stabilité près de la surface la nuit peut permettre de simplifier ce calcul.

Dans ce papier, nous nous sommes concentrés uniquement sur le milieu atmosphérique, mais le couplage des infrasons issus de météorites et leur fragmentation peuvent mener à un couplage efficace avec la partie solide (Pichon et al., 2008) mais fortement dépendant de la fréquence du signal (Edwards, Brown et Eaton, 2009). De plus, nous n'avons considéré que les ondes linéaires générées par une explosion. Cependant, les ondes de chocs générées par l'entrée atmosphérique et la fragmentation ont été observées sur Terre et peuvent avoir un impact prononcé dans les données infrasoniques et sismiques (Heimann et al., 2013 ; Nemec, Aftosmis et Brown, 2017 ; ReVelle, Edwards et Sandoval, 2005). La fragmentation joue un rôle important dans le couplage des ondes acoustiques avec la partie solide (Heimann et al., 2013 ; Lognonné et al., 2016 ; Nemec, Aftosmis et Brown, 2017) et davantage que les ondes de choc liées au déplacement du bolide dans le cas de Carancas (Pichon et al., 2008). Ce couplage va être la source d'ondes de Rayleigh générant à leur tour des infrasons dans l'atmosphère qui ne sont pas représentés dans notre travail mais qui devraient être pris en compte pour une description réaliste de la dynamique des infrasons liée à un impact. En outre, la transition des ondes de choc en ondes linéaires par les phénomènes de relaxation vont avoir un effet important sur le contenu fréquentiel des signaux (Nemec, Aftosmis et Brown, 2017). Enfin, le déplacement de la météorite devrait être pris en compte correctement pour modéliser l'ensemble des signaux infrasons en phase et amplitude.

Enfin, comme mentionné dans le chapitre 1, les équations de Navier-Stokes reposent sur l'hypothèse des milieux continus et nous avions abordé les limites de cette approximation pour la haute atmosphère sur Terre (Petculescu, 2016). La même problématique va se poser sur Mars (au dessus de la couche limite planétaire) pour laquelle le nombre de Kudsen est du même ordre que sur Terre jusqu'à 250 km d'altitude (Hanford et Long, 2009). Il serait alors important d'estimer les conséquences de la mécanique non-continue définie par les équations de Burnett, voire de Boltzmann pour les nombres de Knudsen élevés $Kn = \frac{\lambda}{L} > 1$ où λ (m) est le libre parcourt moyen des particules et L (m) la longueur caractéristique représentative du problème physique.

2.3.2 Conditions absorbantes sur les ondes de gravité

Pour cette étude nous avons utilisé des conditions absorbantes de type ADE-PML. Ces dernières bénéficient de deux avantages majeurs dans le cadre des méthodes par différences finies : la simplicité de sa mise en oeuvre et son efficacité pour l'absorption des ondes acoustiques à incidences rasantes (Komatitsch et Martin, 2007).

Cette technique, initialement développée pour les ondes électromagnétiques (Berenger, 1994 ; Kuzuoglu et Mittra, 1996), fut appliquée aux ondes sismiques (Chew et Liu, 1996 ; Komatitsch et Tromp, 2003 ; Moczo, Robertsson et Eisner, 2007) et aux ondes acoustiques (Yuan et al., 1997). Ces applications furent particulièrement réussies car les relations de dispersion, intervenant pour les équations de l'élastodynamique ou de l'acoustique, permettent de paramétriser facilement le milieu PML. En effet, ces relations donnent lieu à des solutions compatibles lorsqu'on souhaite déterminer les coefficients de réflexion-transmission dans la couche PML.

Cette tâche est plus délicate dans la cadre des ondes acoustiques et de gravité pour une grille en quinconce. En effet, à la frontière entre deux milieux fluides, l'indice de réfraction est différent pour une onde acoustique ou de gravité, comme rappelé au chapitre 1 de cette thèse. Pour les ondes acoustiques, la vitesse effective du son $c_{eff} = c + \mathbf{U}_0.\mathbf{k}$ sera déterminante pour calculer les angles entre les ondes incidentes, réfléchies et transmises, tandis que, pour les ondes de gravité, ce sera la fréquence de Brunt-Väisälä qui sera prise en compte, telle que

$$\frac{\sin\phi_I}{N_I} = \frac{\sin\phi_I}{N_R}. \tag{2.1}$$

Dans le cas acoustique on ne considère que des ondes de pression, les paramètres PML sont alors directement fixés à partir de la polarisation de ces dernières et, dans le cas élastique, les ondes P et S font intervenir des similarités dans les coefficients de réflexion à l'interface entre deux milieux qui peuvent donc être fixés simplement analytiquement. En effet, en résolvant l'équation de dispersion de l'élasto-dynamique en prenant des solutions sous formes d'ondes planes, on obtient par exemple pour les coefficients de réflexion entre ondes P et S (Collino et Tsogka, 2001)

$$\begin{aligned} R^{\delta}_{pp} &= R_{pp} e^{\left\{-2\frac{\cos\theta}{V_p}\int_O^{\delta} d(s)ds\right\}}, \\ R^{\delta}_{ps} &= R_{ps} e^{\left\{-2\frac{\cos\theta}{V_p}\int_O^{\delta} d(s)ds\right\}}, \\ R^{\delta}_{ss} &= R_{ss} e^{\left\{-2\frac{\cos\theta}{V_s}\int_O^{\delta} d(s)ds\right\}}, \\ R^{\delta}_{sp} &= R_{sp} e^{\left\{-2\frac{\cos\theta}{V_s}\int_O^{\delta} d(s)ds\right\}}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

où $d(x)$ est le coefficient d'atténuation de la couche PML et V_p, V_s sont la vitesse des ondes P et vitesse des ondes S. $R_{pp}, R_{ps}, R_{ss}, R_{sp}$ sont les coefficients de réflexion pour la transmission, respectivement, d'une onde P vers une onde P, d'une onde P vers une onde S, d'une onde S

vers une onde S et d'une onde S vers une onde P. θ est l'angle d'incidence et δ est la longueur parcourue par l'onde dans la couche PML.

Ainsi, il s'agit de fixer $d(x)$ afin que la réflexion soit minimisée et donc, d'après (2.2), la plus grande valeur possible est analytiquement la plus efficace. Mais la discrétisation numérique va avoir un impact majeur sur le choix de $d(x)$. En se basant sur un schéma en quinconce simple du second ordre (similaire à celui présenté dans le chapitre 1) on obtient les coefficients de réflexion numériques

$$\begin{aligned} R_{pp} &= \frac{d_\infty - 2d_{\frac{1}{2}}}{4\omega} A(V_p, V_s, h, k_y) + O(h^2), \\ R_{ps} &= \frac{d_\infty - 2d_{\frac{1}{2}}}{4\omega} B(V_p, V_s, h, k_y) + O(h^2), \\ R_{ss} &= \frac{d_\infty - 2d_{\frac{1}{2}}}{4\omega} C(V_p, V_s, h, k_y) + O(h^2), \\ R_{sp} &= \frac{d_\infty - 2d_{\frac{1}{2}}}{4\omega} D(V_p, V_s, h, k_y) + O(h^2), \end{aligned} \tag{2.3}$$

où d_∞ est le paramètre d'atténuation de la PML à l'infini et $d_{\frac{1}{2}}$ le même coefficient pour la demi-maille. h, k_y sont, respectivement, le pas du maillage en espace et le nombre d'onde vertical. $0(h^2)$ est l'erreur faite par l'approximation numérique par rapport au pas d'espace. Enfin, A, B, C, D sont des coefficients associés à chacune des réflexions et ne dépendant pas du paramètre d'atténuation.

Pour réduire la quantité d'énergie réfléchie nous devons minimiser chacun des coefficients de réflexion $R_{pp}, R_{ps}, R_{ss}, R_{sp}$ en fixant, grâce aux équations (2.3), les coefficients d'atténuation $d_{\frac{1}{2}}$ et d_∞. Ainsi en choisissant le coefficient $d_{\frac{1}{2}} = \frac{d_\infty}{2}$ et d_∞ toujours le plus grand possible (de part l'équation (2.2)), on voit qu'en fonction du pas de maillage on peut toujours trouver une atténuation semblable pour les ondes P et S.

On observe alors deux problèmes qu'amène l'étude de la propagation simultanée des ondes acoustiques et de gravité. Tout d'abord il est beaucoup plus difficile de trouver une forme de dispersion unifiée pour les coefficients de réflexion R^δ car les ondes acoustiques et de gravité ne dépendent pas des mêmes propriétés physiques (vitesse effective du son pour l'une et fréquence de Brunt-Vaïsälä pour l'autre) lors de la réflexion. Donc, nous ne pouvons conclure, a priori, si le choix d'un d_∞ grand, comme dans le cas élastique, est le plus efficace analytiquement. De plus, n'ayant pas accès à une relation similaire entre les coefficients de réflexion, il est d'autant plus difficile d'accéder à une forme unifiée pour un schéma numérique en quinconce, comme pour les équations (2.3). Donc, au delà du choix délicat de d_∞ va se rajouter le choix de $d_{\frac{1}{2}}$ qui, non correctement fixé, va induire de la dispersion numérique.

Dans la figure 2.4 on observe la réflexion d'ondes de gravité sur le milieu PML à partir de $t = 1200$ s. La simulation avec frontières PML montre une amplitude plus forte des perturbations de vitesse verticale d'environ 36% à son maximum du fait de la superposition

des ondes incidentes et réfléchies. On remarque aussi que la zone impactée par les réflexions sur la zone PML est fortement dépendante de la longueur d'onde horizontale des ondes de gravité. En effet, dans la même simulation mais pour le deuxième train d'ondes, visible à $t = 4800$ s, les résultats sont conformes entre la simulation avec PML et la solution exacte.

Il serait alors important de mener l'étude des équations de dispersion (comme données dans l'équation (4)) associé au schéma donné dans le chapitre 1 afin de trouver les paramètres d'atténuation les plus efficaces. Il faut néanmoins noter que dans le cadre des ondes atmosphériques issues d'impacts, les ondes de gravité sont générées uniquement à proximité de la source et n'atteignèrent pas les zones PML dans nos simulations.

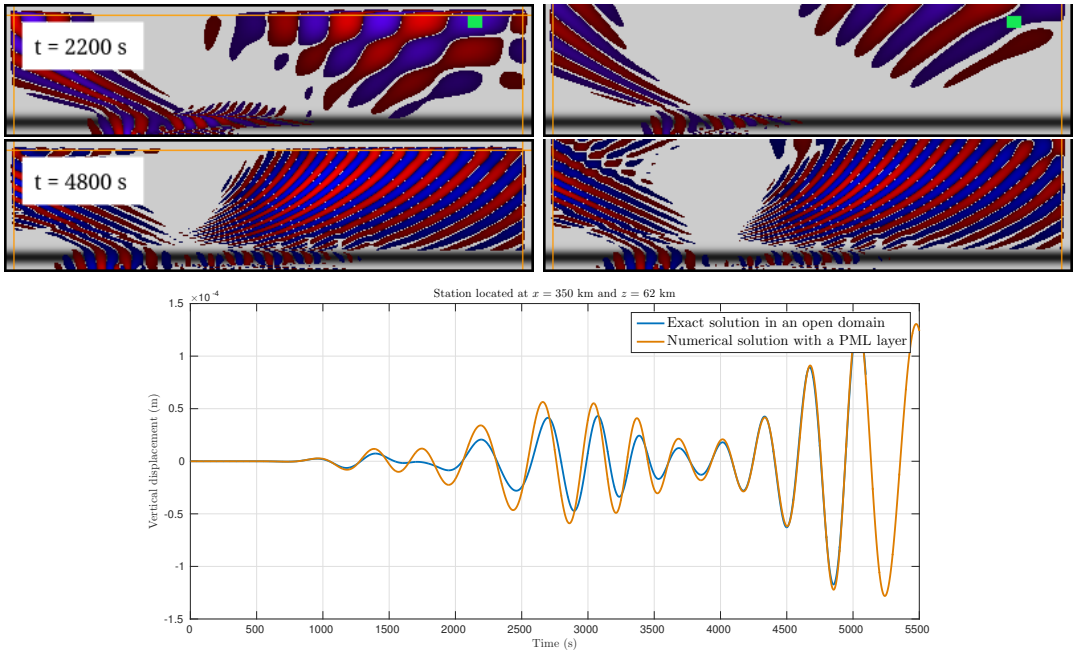

FIGURE 2.4 – En haut, images extraites d'une simulation de la propagation linéaire d'ondes de gravité avec un tunnel de vent à $t = 2200$ s (première ligne) et $t = 4800$ s (deuxième ligne). Les images sont montrées en perturbation de vitesse verticale. Le domaine est de 400×108 km et l'atmosphère est isothermale avec une hauteur d'échelle $H = 10$ km. Le profil de vitesse du vent est tel que $v_{0,x} = 100.53e^{-\left(\frac{z-z_0}{10000}\right)^2}$ où z (km) est l'altitude et $z_0 = 30$ km est l'altitude du guide d'onde. Le forçage de la frontière inférieure est en déplacement vertical et tel que $u_z(x, z = 0, t) = exp(-(\frac{t-(t_0-P/4)}{P/4})^2)exp(-(\frac{x-(x_0-S/4)}{S/4})^2)$ où u_z le déplacement vertical, t le temps, $t_0 = 600$ s le temps de début de forçage, $T = 500$ s la période temporelle principale, x la position horizontale, $x_0 = 100$ km la position en x du forçage et $S = 8$ km la période spatiale principale. La fréquence principale de la frontière PML est $f_0 = 0.002$ s. Le carré vert correspond à la position de la station dont les signaux sont présentés en bas. Les lignes jaunes correspondent aux frontières du milieu PML. En bas, comparaisons en perturbation de vitesse verticale entre la solution exacte ("Exact solution in an open domain") et la solution numérique avec frontières PML ("Numerical solution with a PML layer") pour la station située à la position $x = 350$ km et $z = 62$ km.

Chapitre 3

Cas d'étude des ondes atmosphériques issues du tsunami de Sumatra en 2004

Sommaire

3.1 Introduction 105

3.2 Article en cours de préparation pour "Geophysical Research Letters" 106

3.3 Perspectives 115

3.3.1 Niveaux critiques et résolution linéaire 115

3.3.2 Futurs développements 115

3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous nous penchons sur l'étude des ondes acoustiques et de gravité dans l'atmosphère issues de la propagation du tsunami de Sumatra en 2004. Comme mentionné dans l'introduction de cette thèse, l'oscillation basse fréquence de l'océan, par le déplacement d'un tsunami, va permettre la propagation d'ondes de gravité dans la haute atmosphère. De plus les variations du niveau de l'océan à plus haute fréquence vont être génératrices d'ondes acoustiques se propageant le long de la surface mais aussi dans la haute atmosphère. Sans modélisation directe des ondes atmosphériques par un forçage tsunami réaliste il est parfois difficile de discriminer les signaux provenant directement du phénomène sismique des autres sources à travers le globe (Occhipinti et al., 2013). C'est pourquoi nous présentons des résultats numériques issus d'un forçage tsunami reconstruit à partir de données sismiques et des simulations océaniques (Hébert, Sladen et Schindelé, 2007). Il est important de préciser que ce travail est toujours en cours à l'heure où ce manuscrit est délivré du fait de deux problématiques majeures : la taille importante du domaine de simulation qui induit un coût très élevé en terme de calcul ainsi que la limitation de la théorie linéaire pour les hautes altitudes ainsi que les forts gradients de vent (voir section 3.3.1).

3.2 Article en cours de préparation pour "Geophysical Research Letters"

Nous présentons, dans cette section, un article non publié pour lequel nous nous sommes penchés sur la simulation de la propagation d'ondes, en 2-D et 3-D et par différences finies, issue du tsunami de Sumatra en 2004. Comme précisé dans l'introduction, ce travail nécessite des résultats de simulations 3-D supplémentaires, en particulier non-linéaires, afin de compléter notre analyse des observations dans la haute atmosphère. Nous avons, en effet, manqué de temps de calcul et rencontré quelques difficultés numériques notamment liées à l'approximation linéaire. A court terme, nous rajouterons des résultats de simulations 3-D par différences finies et grâce à l'outil présenté dans le chapitre 4 sur la propagation des ondes de gravité dans la haute atmosphère. Ce travail sera présenté alors sous la forme d'une lettre dans le journal GRL ("Geophysical Research Letters").

Geophys. J. Int. (0000) **000**, 000–000

Applications of acoustic-gravity waves numerical modelling to tsunami signals observed by gravimetry satellites in very low orbit.

Quentin Brissaud[1], Raphaël F. Garcia[1], Anthony Sladen[2], Roland Martin[3]

[1] *Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace (ISAE-SUPAERO), Université de Toulouse, 31055 Toulouse cedex 4, France*

[2] *Université Côte d'Azur, IRD, CNRS, Observatoire de la Côte d'Azur, Geoazur, F06560 Valbonne, France*

[3] *Laboratoire de Géosciences Environnement Toulouse GET, UMR CNRS 5563, Observatoire Midi-Pyrénées, Université Paul Sabatier, 14 avenue Édouard Belin, 31400 Toulouse, France*

17 October 2017

SUMMARY

The 2004 Sumatra tsunami has generated acoustic and gravity waves over a large region and up to the thermosphere. Using a realistic tsunami forcing we model the 2-D and 3-D linear propagation of atmospheric waves in a windy and attenuating atmosphere. We then compare acoustic waveforms and gravity wave amplitudes and arrival times with GPS observations, surface pressure recordings and low-orbit sattelite's density variation mesurements. We obtain good qualitative comparisons with observations in terms of arrival times and waveforms, especially for acoustic waves, but an overshoot of about $\approx 10\%$ in terms of density perturbation for gravity waves. We also noticed very large gravity wave amplitudes near the strong stratospheric and thermospheric waveguides due to the limitation of the linear theory at critical levels. This study needs to be pursued with 3-D non-linear simulations that could properly recover gravity wave arrival times and amplitudes.

Key words: Acoustic-gravity waves – Wave propagation – Numerical solutions – Tsunamis

1 INTRODUCTION

At 00:58:53 UTC December 26, 2004, the west coast of Sumatra (3.31°N, 95.95°E), in Indonesia, was the epicenter of a very large Earthquake ($M_w = 9.2$). This event led to large coseismic crustal deformations over 1500×200 km, from Sumatra to the Andaman Islands, and triggered multiple tsunamis around the source region. This powerful Earthquake provided numerous remote sensing observations at the surface and in the atmosphere, giving the opportunity to investigate tsunami detection from a large data set.

Seismic waves from the epicentral displacement were detected by seismic networks (Garcés et al. 2005; Le Pichon et al. 2005), ocean surface variations have been measured by space altimetry (Smith et al. 2005) and ionospheric disturbances have been detected in the variation of total electron content, from GPS observations, geomagnetic pulsations and also from Doppler sounding (Heki et al. 2006). Finally, low frequency acoustic-gravity waves (with group velocity around 300–314 m.s^{-1} and pressure amplitudes between 1 and 12 Pa) have also been observed by microbarographs at several stations from the Japanese islands and the International Monitoring System (IMS) (Le Pichon et al. 2005).

The mechanical coupling between large Earthquakes and the atmosphere is a well known and heavily studied phenomena (Occhipinti et al. 2013), and various mechanisms can generate low frequency acoustic and gravity signals (Le Pichon et al. 2005). First, the sudden ground motion or ocean surface displacement over long distances generate waves in the atmosphere over a large frequency range. Then, as seismic Rayleigh waves propagate on the surface, they will radiate acoustic waves. Also, if those surface waves travel through high mountains, an important acoustic scattering will occur. In the case of the Sumatra Earthquake, infrasounds arrivals prior to the main signal have been generated by surface waves as they show a good coherence with seismic signals (Raveloson et al. 2012). Finally, when the ocean level decreases, it is subject to the buoyancy restoring force which is then counterbalanced by gravity forces and the surface starts to oscillate until the equilibrium between those two forces is restored. If this

oscillation happens at sufficiently low frequencies (below the Brünt-Vaïsäla frequency), it enables internal gravity waves to propagate in the atmosphere in addition to the acoustic waves (Hines 1960). Waves with periods around $400 - 700$ s, mainly to the west of the Nicobar islands, are thought to be driven by the 2004 tsunami (Mikumo et al. 2008; Raveloson et al. 2012). In the upper atmosphere (above 300 km altitude), most of the tsunami-generated gravity waves energy, with periods between 22 and 33 min, arrive one hour after the tsunami generation.

This event and the subsequent observations highlighted once again the importance of tsunami monitoring and the underlying acoustic and gravity wave modeling. Significant progress has been achieved since then (Artru et al. 2005; Hickey et al. 2010; Occhipinti et al. 2013; Vadas et al. 2015; Laughman et al. 2017). Unfortunately, despite the fact that ionospheric disturbances have been captured by various techniques, few post-seismic direct atmospheric signals have been recorded directly for the 2004 Sumatra event. Ionospheric signals are indirect traces of gravity waves and require complex recovery techniques to obtain the neutral wavefield (Occhipinti et al. 2011; Kherani et al. 2012). The complexity of the coupling between the atmosphere and the magnetic field (Occhipinti et al. 2008), the superimposed signals associated to traveling ionospheric disturbances and the effect of observational geometry can be strong limitations (Occhipinti et al. 2013) for those ionospheric techniques. While, infrasounds generated by Rayleigh waves (with velocities ≈ 3.5 km.s^{-1}) are highly recognizable structures in the observations, work still need to be done to discriminate between acoustic-gravity waves generated by the source co-seismic deformation and the the tsunami (Occhipinti et al. 2013). Also, Raveloson et al. (2012) mentioned that an accurate modeling of tsunami-induced infrasounds from realistic sea motion may be used for tsunami early warning purposes. Fortunately, in-situ measurements by CHAMP, a low-orbit gravimetry satellites, provide direct observations for tsunami-induced infrasounds and gravity waves after the 2004 Sumatra Earthquake.

In order to better understand tsunami dynamics and help constraining sources and rupture mechanisms from observations many authors tried to describe analytically and numerically the tsunami-induced wave propagation. Several issues prevented scientists to fully resolve the tsunami-induced acoustic and gravity wave propagation in the atmosphere. First, one needs to be able to compute the impact of the seismic rupture on the oceanic floor and the underlying ocean surface oscillation as wave amplitudes at high altitudes are highly sensitive to this factor Laughman et al. (2017). This problem has been solved in various studies by the use of the elastic dislocation linear theory and the resolution of the shallow water equations (Sladen & Hébert 2008). Second, to properly model the wave propagation several atmospheric features need to be taken into account Le Pichon et al. (2010), namely, dispersion, attenuation and wind advection. Dispersion denotes the frequency dependence of the phase velocity (due to viscosity and atmosphere stratification) and thus deforms the wavefront as the wave propagates in the atmosphere Nappo (2002). It can also explain gravity waves direction of propagation in the observations of Vadas et al. (2015). Besides, dispersing wavefronts, attenuation impacts the wave amplitude from mechanical and thermal energy dissipation Bass et al. (1984). Even though dissipation acts as a low-pass filter, it is crucial to take it into account to properly recover the wave shape Pitteway & Hines (1963). Background winds are an essential feature of the atmosphere as it affects the transmission and reflection of waves (Pierce 1965; Laughman et al. 2017) and shifts the wave intrinsic frequency (Godin 2014).

To fully model the tsunami-induced gravity-acoustic wave propagation, one of the most complete description is offered by the normal modes technique (Lognonné et al. 1998; Artru 2001) that includes attenuation effects to study the Earth-atmosphere-ionosphere coupling. Perturbations in the TEC content from atmospheric waves can also be modeled with a pseudo-spectral method without attenuation nor wind advection (Occhipinti et al. 2008). The authors found a good agreement between their modeled TEC and the measurements of TOPEX-Poseidon and Jason for the 2004 Sumatra event. A 2-D compressible windless model (Shinagawa et al. 2007) has been employed to conclude that although numerical results have successfully resolved middle and upper atmosphere features, a 3-D model should be used to fully predict wavefronts in a complex wind structure and spatially localized tsunami-induced effects. A 3-D finite-difference compressible dissipative model for atmosphere and ionosphere is used in Kherani et al. (2016) to demonstrate that tsunami-induced acoustic and gravity waves could generate ionospheric disturbances with main amplitude peak both before and after the tsunami. Hickey et al. (2009) described the propagation of linear, steady-state acoustic-gravity waves through a realistic atmosphere (eddy and molecular diffusion of heat and momentum, ion drag, Coriolis force, and height-dependent mean winds) with a linear spectral full-wave model and examined their impacts by coupling the neutral dynamics to their Electron-Ion Response Model. They concluded that mean winds have a strong impact on the propagation of ionospheric gravity waves but they found non-realistic wave amplitude with very large velocities (≤ 1 km.s^{-1}) for artificially low viscosity. They also found that the impact of ion drag does not dissipate significantly gravity waves with periods of ≈ 33 min. More recently, the 2-D propagation of tsunami-induced gravity waves through a windy inviscid atmosphere with vertically varying stratification has been studied (Broutman et al. 2014), then extended to 3-D Wu et al. (2016), using a Fourier-ray model and a WKB approximation. They concluded that a $\approx 50\%$ of gravity wave energy can reach altitudes ≥ 150 km even in the presence of complex wind structures (HWM07 model) and multiple turning points. Note that Eckermann et al. (2016) showed that the Fourier Ray model could not fully resolve critical levels and turning points. Wei et al. (2015), employing a semi-analytic Fourier-Laplace method, examined the two-dimensional propagation of internal waves from an idealized tsunami forcing with time evolution in an atmosphere with piecewise background winds. They demonstrated that reflection at the tropopause is a significant factor for the structure of gravity waves and

that the first arrivals in the ionospheric observations are infrasounds generated by sudden impulsive formation of the tsunami. A spatially and temporally localized description of a tsunami forcing have been used (Vadas et al. 2015) in a windless, inviscid and isothermal atmospheric model to study compressible effects on gravity waves and found that the gravity waves locations were due to dispersion. Finally, Laughman et al. (2017) used a 2-D nonlinear anelastic finite-volume method to propagate atmospheric waves in a neutral atmosphere. They found that, with realistic background profiles, gravity waves could always reach ionospheric altitudes with large amplitudes before being strongly dissipated and becoming evanescent above 300 km. The most significant process that governed gravity wave propagation up to thermospheric altitudes was refraction to larger and smaller vertical scales that also resulted in, respectively, low and high viscous dissipation. They showed that non-linear effects become significant after $2-5$ h of propagation at high altitudes and from strong wind shear where gravity waves can reach very high amplitudes. But they moderated their conclusion since large amplitudes that lead to non-linear effects are highly dependent on the sea motion height and they did not use a realistic forcing.

In this paper we present full-wave numerical simulations based on a realistic sea surface displacement forcing for the 2004 Sumatra tsunami in a complex atmosphere. We provide new insights on acoustic and gravity waves arrival times, waveforms and amplitudes at various near-surface locations and at thermospheric height.

1.1 Acoustic and gravity wave propagation modeling in a realistic atmosphere

To model the simultaneous linear acoustic and gravity wave propagation in a complex stratified atmospheric medium (viscous effects induced by mechanical and thermal effects and fluctuating background wind) we solve the linearized Navier-Stokes (LNS) equations. Equations are described in details in Brissaud et al. (2016) and we only recall here the main modeling assumptions. We only consider linear perturbations from a stationnary mean value, the atmosphere model is stratified and we will consider divergence free wind profiles. The LNS equations then read

$$\begin{aligned} \partial_t p &= -\mathbf{w}.\nabla p - \rho c^2 \nabla.\mathbf{v} - \rho \mathbf{v}\mathbf{g} \\ \partial_t \rho_p &= -\mathbf{w}.\nabla \rho_p - \nabla.(\rho \mathbf{v}) \\ \rho \partial_t \mathbf{v} &= -\rho\{(\mathbf{v}.\nabla)\mathbf{w} + (\mathbf{w}.\nabla)\mathbf{v}\} + \nabla.\mathbf{\Sigma} + \mathbf{g}\rho_p \end{aligned} \quad (1)$$

where ρ_p is the density perturbation, ρ the mean density, c the adiabatic sound velocity, $\mathbf{v}$ the velocity perturbation, $\mathbf{w}$ the wind velocity, p the pressure perturbation, $\mathbf{g}$ the gravity acceleration and $\mathbf{\Sigma}$ the stress tensor. The stress tensor $\mathbf{\Sigma}$ reads, $\forall (i,j) \in [1,3]\times[1,3]$,

$$(\mathbf{\Sigma})_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu(\partial_j(\mathbf{v}+\mathbf{w})_i + \partial_i(\mathbf{v}+\mathbf{w})_j - \frac{2}{3}\delta_{ij}\nabla.\mathbf{v}) + \eta_V \delta_{ij}\nabla.\mathbf{v}\,. \quad (2)$$

Atmospheric absorption can occur by two main mechanisms (Bass et al. 1984): classical losses due to dissipation of mechanical energy and relaxation losses due to the conduction of heat energy. The dynamic viscosity μ, due to shear stress applied to a fluid, reads (Zuckerwar & Ash 2006; Bass & Chambers 2001)

$$\mu = \frac{2}{3} L \rho c \sqrt{2/\pi\gamma}, \quad (3)$$

where L is the mean free path, c the adiabatic sound speed and γ the specific heat ratio. The volume viscosity η_V due to the relaxation of dilatational disturbances (i.e., heat conduction and molecular relaxations) reads

$$\eta_V = \frac{4}{3}\mu + \frac{(\gamma-1)\kappa}{\gamma C_v}, \quad (4)$$

where μ is the dynamic viscosity, $\gamma = C_p/C_v$ the specific heat ratio, C_v the molar low-frequency specific heat at constant volume and κ the thermal conductivity.

2 NUMERICAL METHOD

The numerical method used in this paper is a high-order finite difference method (high order staggered grid and upwind operators) on Cartesian grids with a 4^{th} order Runge-Kutta time stepping method. This method enables the simultaneous propagation of acoustic and gravity waves in a windy and attenuating 3D atmosphere. Technical details and validations are presented in Brissaud et al. (2016).

To fully constrain the problem and simulate the tsunami wave we will use two kinds of boundary conditions: absorbing boundary conditions on the top and lateral boundaries and a tsunami-forcing boundary condition on the bottom.

Absorbing boundary conditions rely on the ADE-PML technique (Martin et al. 2010) and are presented in the context of acoustic and gravity wave propagation in Garcia et al. (2016). We use a 8 nodes absorbing boundary layer with a main frequency $f_0 = 10^{-3}$ Hz and a damping coefficient $\kappa = 0.01$. Classical PML layer depths are about $10-15$ nodes but as a 8 nodes layer damps well the incoming atmospheric waves and because we have strong limitations regarding computational power we will keep this PML depth.

The bottom boundary conditions simulates the ocean surface forcing on the atmosphere. At the boundary we impose the velocity at each time step. The ocean surface displacement is based on a shallow-water simulation presented in Hébert et al. (2007). In this paper, authors employed a 3D spherical non-linear finite-difference technique using the linear theory of elastic dislocation to simulate the sea bottom deformation. The source has been computed through a finite-fault slip joint inversion providing an accurate representation of the source mechanism of the 2004 Sumatra Eartquake (Sladen & Hébert 2008). The initial forcing is visible in figure 1.

3 SIMULATION DOMAINS AND ATMOSPHERE MODEL

The 3-D simulation domain is taken between latitudes 80° and 98° and longitudes -18° and 20° that corresponds to

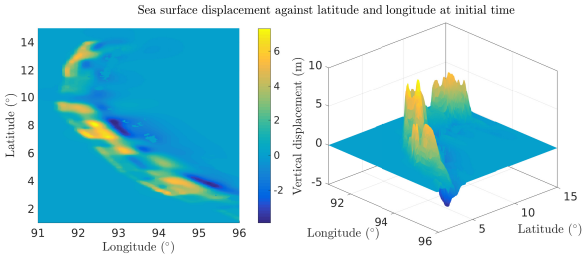

Figure 1. Sea surface displacement (m) against latitudes and longitudes at initial time corresponding to the Sumatra 2004 tsunami.

a large area over the Indian Ocean between the coasts of Sri-lanka to the coasts of Thailand. The 2-D simulation domain is taken as a slice between location (82°, 100°) and location (1°, 11°). These domains are visible in figure 2 and correspond, respectively, for the 3-D simulation and 2-D simulation to the domain bounded by the dashed black line and defined by the black solid line. This enables us to compute the numerical solution at the approximate location of CHAMP satellite pass after the 2004 Sumatra Earthquake and shown as red circles in figure 2.

To constrain background parameters in the finite difference method we need to provide an atmosphere model. The atmosphere stratification is based on the MSISE-90 atmosphere model (Picone et al. 2002) and the HWM-93 wind model (Hedin et al. 1996). As the numerical method does not account for lateral variations of background parameters we extract a 1-D profile computed at latitude 5°N and longitude 90°E. These profiles are shown in figure 3 against altitude up to 500 km.

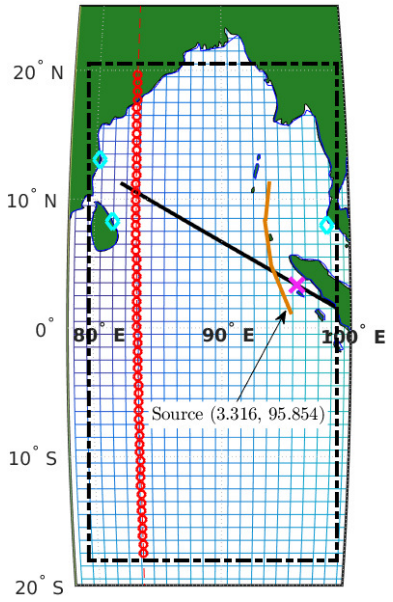

Figure 2. Simulation domains for 2-D and 3-D simulations. The black dashed line corresponds to the 3-D domain boundary. The black solid line corresponds to the 2-D domain. The pink cross is the the seismic epicenter. The orange solid lines are the initial ocean bottom coseismic deformation (Hébert et al. 2007). The blue diamonds are the Chennai, Sri-lanka coast and Thailand coast stations. The red circles are stations along the CHAMP's satellite path.

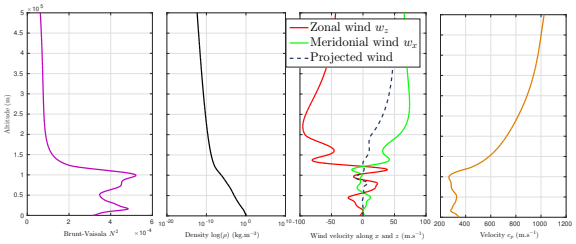

Figure 3. Background parameters against altitude. From left to right, Brunt-Vaïsäla frequency (rad.s^{-1}), density (kg.m^{-3}), zonal and meridional wind velocities (m.s^{-1}) and adiabatic sound speed (m.s^{-1}).

Finally, we will rely on the numerical parameters defined in table 1 for both the 2-D and 3-D simulations.

4 TSUNAMI-GENERATED INFRASOUNDS

To study tsunami-generated infrasounds we relied on the 2-D simulation that enabled us to use more refined grid (as defined in table 1) and focus on small wavelengths. In figure 4 the perturbations of vertical displacement, normalized pressure and sea surface displacement are visible. One observes that large period acoustic and gravity waves propagating continuously above the tsunami wave up to thermospheric heights. Also, one notices a large acoustic wavefront propagating in front and faster than the tsunami wave.

The first strong acoustic wave arrives in the region of the Sri-Lanka coasts at location (1°, 11°) ≈ 30 mn after the initial tsunami forcing with a peak-to-peak pressure amplitude of ≈ 10 Pa and a duration ≈ 500 s. The acoustic signals are shown in figure 5. This result corresponds qualitatively, in terms of arrival time and main period, to the pressure signals measured by the Diego Garcia infrasound station IS52 (-7.38°, 72.48°) in the British Indian Ocean Territory, 1560 km south of the tip of India (Le Pichon et al. 2005; Raveloson et al. 2012). Note that wave amplitude over-prediction in the modeling than in observations could be explained by geometrical spreading.

In the 3-D simulation, we obtained similar results near the surface at the Phuket (Thailand) and (Sri-Lanka) stations. We observe in figure 7 a head-wave with main period ≈ 500 s with a velocity of v_p ≈ 330 m.s^{-1} similar

	$L_x \times L_z$ (km)	Δx (m)	Δt (s)	$N_x \times N_z$
2-D	4230 × 390	1500	2.5×10^{-2}	2820 × 260
	$L_x \times L_z$ (km)	Δx (m)	Δt (s)	$N_x \times N_y \times N_z$
3-D	4380 × 2040 × 420	5000	10^{-1}	876 × 408 × 84

Table 1. Simulation parameters corresponding to the 2-D and 3-D simulations. L_x, L_z are the horizontal and vertical domain size, Δx is the mesh spatial step size, Δt is the time step, $N_x \times N_y$ are the number of elements along the horizontal directions and N_z the number of elements along the vertical direction.

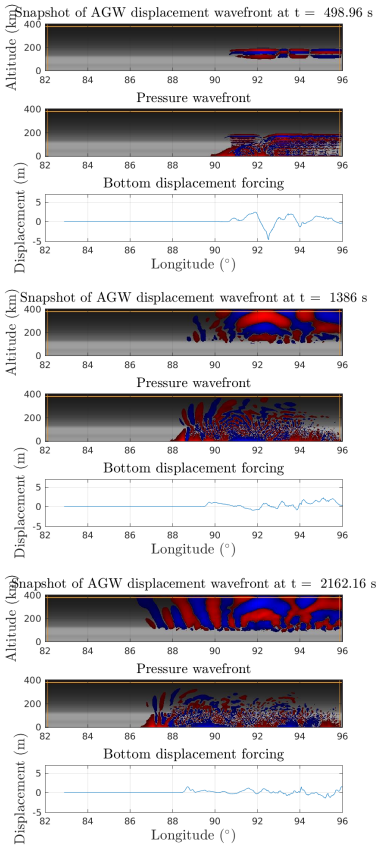

Figure 4. For each snapshot group, on the top, perturbations in displacement (m), in the middle, the normalized pressure ($\sqrt{\rho_0}p$, $\mathrm{kg}^{1/2}.\mathrm{m}^{3/2}.\mathrm{Pa}$) and, on the bottom, the sea surface displacement (m) against altitude (m). Snapshots are shown, from top to bottom, at various times $t = 498.6, 1386, 2462.16$ s. Red colors indicate positive amplitude and blue colors negative ones. The yellow lines are the boundaries of the PML layers. The grey shadings correspond to the amplitude of the effective sound velocity.

to the one estimated in (Raveloson et al. 2012). The arrival times designated by red lines at $t \approx 2500$ s (Phuket, Thailand) and $t = 3900$ s (Trincomalee, Sri-Lanka) are calculated from the estimated wave velocity. Amplitudes are still over-predicted probably due to 3-D tsunami forcing interpolation that gives an overshoot in sea height.

Finally, in the figure 7 the acoustic signal with main period 500 s at station Phuket, Thailand shows similar waveform and arrival times than TEC variations captured by GPS measurements at SAMP from satellite 13 from the coseismic perturbations (Heki et al. 2006). The TEC variations are visible in figure **??**. This acoustic wave is a direct arrival from the sudden sea surface displacement right after the earthquake. As the wave will propagate in altitude, its low-frequency content will be amplificated by the density decrease and then strongly damped in the stratosphere which will be in agreement with GPS observations.

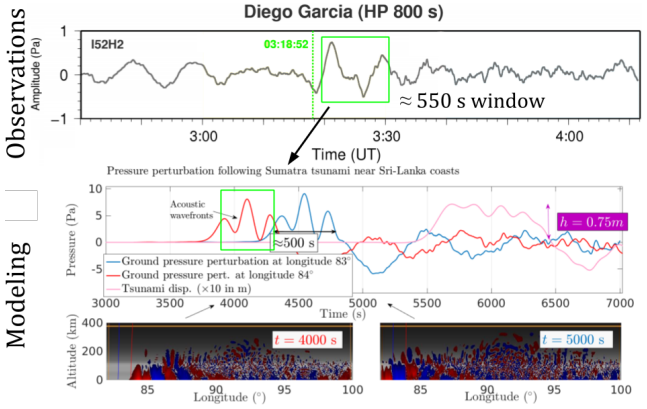

Figure 5. On the top, data from the Diego Garcia infrasound array (Latitude -7.378°, Longitude 72.484°) in pressure against time. The green box shows the first wave-packet arriving at the station from the sudden initial sea displacement. On the middle, modeled pressure perturbations (Pa) at ground level and for longitudes 83° (blue) and 84° (red) and sea surface displacement (m) against time. The surface dispalcement has been multiplied by 20 in order to compare to the pressure signals on the same figure.

5 GRAVITO-ACOUSTIC WAVES COMPUTED AT THERMOSPHERIC HEIGHT

Our modeling tool enables us to propagate both acoustic and gravity waves simultaneously, we can then study the low-frequency wave propagation in the upper atmosphere. We show in figure 8 the percentage of density variation at CHAMP's estimated location (13.16°, 83.21°) and at altitude $z = 366$ km. We obtain an approximate arrival time of $t = 4800$ s and a peak to peak perturbation density from mean density of 10%. From CHAMP's data at the same location, the estimated density fluctuation is $\approx 5\%$. We have an overshoot of about 5% that can be explained mainly by the use of 2-D domain instead of a more realistic 3-D simulation that could take into account the full geometrical attenuation. We also used an over-simplified wind structure that is a projection of meridional and zonal wind onto the 2-D simulation domain and thus does not account properly for advection and Doppler effect.

At thermospheric height, low-frequency acoustic waves can also propagate on long distances. In figure 9 one observes acoustic signals with main period $\approx 3-5$ mn visible at various locations at altitude ≈ 360 km. This result is similar to GPS observations measured in the TEC content of acoustic

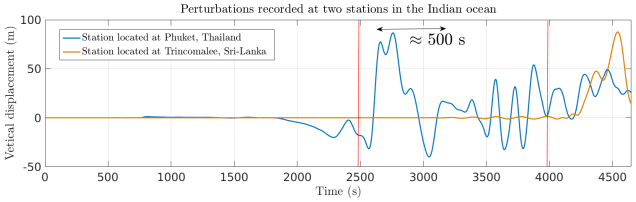

Figure 6. Modeled vertical displacement (m) against time at two stations: in blue, Phuket, Thailand (Latitude 7.9°, Longitude 98.2°) at altitude $z = 3$ km, and in red, Trincomalee, Sri-Lanka (Latitude 8.27°, Longitude 81.44°) at altitude $z = 3$ km.

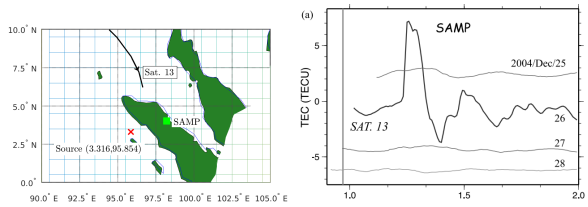

Figure 7. On the left, map of Sumatra showing the path of satellite 13 (black solid line) and the GPS station SAMP (green square). On the right, TEC variation against time from satellite 13 and SAMP station extracted from Heki et al. (2006). The solid line shows the initial rupture time.

signals of 5 mn periods occuring ≈ 1 h after the earthquake (Choosakul et al. 2009). This corresponds to energy leaking from the mesosphere duct and lower-atmosphere acoustic resonance or direct waves (Shinagawa et al. 2007).

6 CONCLUSION

This study provides new insights on the Sumatra 2004 tsunami-generated atmospheric waves from a full-wave model based on a high-order finite difference method. This method accounts for wind advection, viscosity, density decrease with altitude and a realistic ocean surface forcing corresponding to the tsunami wave. We have a qualitative agreement between our numerical simulations and observed signals near the surface and at thermospheric height. The gravity waves should be modeled in 3-D in order to better fit arrival times and amplitudes. Finally, in the upper atmosphere, as density decreases, waves amplitudes get larger and when strong wind gradients are present, non-linear effects become significant and should be included to properly recover amplitudes and arrival times.

ACKNOWLEDGMENTS

Computer resources were provided by projects # p1404 at CALMIP computing centre (Toulouse France). This work was also granted access to the French HPC resources of TGCC under allocation 2016-gen7646 made by GENCI. The authors also thank the "Région Midi-Pyrénées" (France) and "Université de Toulouse" for funding the Ph.D. grant of Quentin Brissaud.

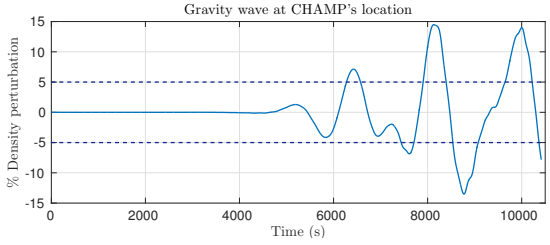

Figure 8. Density ratio ($100 \times \rho/\rho_0$) for the 2-D simulation between the perturbation and the mean state against time at location (13.16°, 83.21°) and altitude $z = 366$ km.

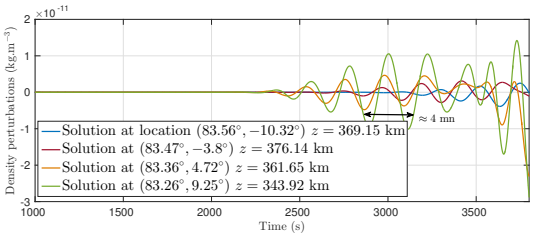

Figure 9. Density perturbations at various locations against time. The blue signal corresponds to the solution at location (83.56°, −10.32°) and altitude $z = 369.15$ km, the red signal at location (83.47°, −3.8°) and altitude $z = 376.14$ km, the orange signal at location (83.36°, 4.72°) and altitude $z = 361.65$ km and the yellow signal at location (83.26°, 9.25°) and altitude $z = 343.92$ km.

REFERENCES

Artru, J., 2001. *Observations au sol ou par satellite et modelisation des signaux ionospheriques post-sismiques*, Ph.D. thesis, Institut de Physique du Globe de Paris http://www.ipgp.jussieu.fr/docs/publications/theses/20011109-artru.pdf.

Artru, J., Ducic, V., Kanamori, H., Lognonné, P., & Murakami, M., 2005. Ionospheric detection of gravity waves induced by tsunamis, *Geophys. J. Int.*, **160**, 840–848.

Bass, H., Sutherland, L., Piercy, J., & Evans, L., 1984. Absorption of sound by the atmosphere, in *Physical acoustics: Principles and methods. Volume 17. Orlando, Florida, USA, Academic Press*, vol. 17, pp. 145–232.

Bass, H. E. & Chambers, J. P., 2001. Absorption of sound in the Martian atmosphere, *J. Acoust. Soc. Am.*, **109**, 3069–3071.

Brissaud, Q., Martin, R., Garcia, R. F., & Komatitsch, D., 2016. Finite-difference numerical modelling of gravitoacoustic wave propagation in a windy and attenuating atmosphere, *Geophysical Journal International*, **206**(1), 308–327.

Broutman, D., Eckermann, S. D., & Drob, D. P., 2014. The partial reflection of tsunami-generated gravity waves, *Journal of the Atmospheric Sciences*, **71**(9), 3416–3426.

Choosakul, N., Saito, A., Iyemori, T., & Hashizume, M., 2009. Excitation of 4-min periodic ionospheric variations following the great sumatra-andaman earthquake in 2004, *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, **114**(A10).

Eckermann, S. D., Broutman, D., Ma, J., Doyle, J. D., Pautet, P.-D., Taylor, M. J., Bossert, K., Williams, B. P., Fritts, D. C., & Smith, R. B., 2016. Dynamics of orographic gravity waves observed in the mesosphere over the auckland islands during the deep propagating gravity wave experiment (deepwave), *Journal of the Atmospheric Sciences*, **73**(10), 3855–3876.

Garcés, M., Caron, P., Hetzer, C., Le Pichon, A., Bass, H., Drob, D., & Bhattacharyya, J., 2005. Deep infrasound radiated by the sumatra earthquake and tsunami, *Eos, Transactions American Geophysical Union*, **86**(35), 317–320.

Garcia, R. F., Brissaud, Q., Rolland, L., Martin, R., Komatitsch, D., Spiga, A., Lognonné, P., & Banerdt, B., 2016. Finite-difference modeling of acoustic and gravity wave propagation in mars atmosphere: application to infrasounds emitted by meteor impacts, *Space Science Reviews*, pp. 1–24.

Godin, O. A., 2014. Dissipation of acoustic-gravity waves: An asymptotic approach, *The Journal of the Acoustical Society of America*, **136**(6), EL411–EL417.

Hébert, H., Sladen, A., & Schindelé, F., 2007. Numerical modeling of the great 2004 indian ocean tsunami: focus on the mascarene islands, *Bulletin of the Seismological Society of America*, **97**(1A), S208–S222.

Hedin, A. E., Fleming, E. L., Manson, A. H., Schmidlin, F. J., Avery, S. K., Clark, R. R., Franke, S. J., Fraser, G. J., Tsuda, T., Vial, F., & Vincent, R. A., 1996. Empirical wind model for the upper, middle and lower atmosphere., *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics*, **58**, 1421–1447.

Heki, K., Otsuka, Y., Choosakul, N., Hemmakorn, N., Komolmis, T., & Maruyama, T., 2006. Detection of ruptures of andaman fault segments in the 2004 great sumatra earthquake with coseismic ionospheric disturbances, *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, **111**(B9).

Hickey, M. P., Schubert, G., & Walterscheid, R., 2009. Propagation of tsunami-driven gravity waves into the thermosphere and ionosphere, *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, **114**(A8).

Hickey, M. P., Schubert, G., & Walterscheid, R. L., 2010. Atmospheric airglow fluctuations due to a tsunami-driven gravity wave disturbance, *Journal of Geophysical Research (Space Physics)*, **115**, 6308.

Hines, C. O., 1960. Internal atmospheric gravity waves at ionospheric heights, *Canadian Journal of Physics*, **38**, 1441.

Kherani, E., Rolland, L., Lognonne, P., Sladen, A., Klausner, V., & De Paula, E., 2016. Traveling ionospheric disturbances propagating ahead of the tohoku-oki tsunami: a case study, *Geophysical Journal International*, **204**(2), 1148–1158.

Kherani, E. A., Lognonné, P., Hébert, H., Rolland, L., Astafyeva, E., Occhipinti, G., Coïsson, P., Walwer, D., & de Paula, E. R., 2012. Modelling of the total electronic content and magnetic field anomalies generated by the 2011 Tohoku-Oki tsunami and associated acoustic-gravity waves, *Geophysical Journal International*, **191**, 1049–1066.

Laughman, B., Fritts, D. C., & Lund, T. S., 2017. Tsunami-driven gravity waves in the presence of vertically varying background and tidal wind structures, *Journal of Geophysical Research: Atmospheres*, pp. n/a–n/a, 2016JD025673.

Le Pichon, A., Herry, P., Mialle, P., Vergoz, J., Brachet, N., Garcés, M., Drob, D., & Ceranna, L., 2005. Infrasound associated with 2004–2005 large sumatra earthquakes and tsunami, *Geophysical Research Letters*, **32**(19).

Le Pichon, A., Blanc, E., & Hauchecorne, A., 2010. *Infrasound monitoring for atmospheric studies*, Springer.

Lognonné, P., Clévédé, E., & Kanamori, H., 1998. Computation of seismograms and atmospheric oscillations by normal-mode summation for a spherical earth model with realistic atmosphere, *Geophysical Journal International*, **135**(2), 388–406.

Martin, R., Komatitsch, D., Gedney, S. D., & Bruthiaux, E., 2010. A high-order time and space formulation of the unsplit perfectly matched layer for the seismic wave equation using Auxiliary Differential Equations (ADE-PML), *Comput. Model. Eng. Sci.*, **56**(1), 17–42.

Mikumo, T., Shibutani, T., Le Pichon, A., Garces, M., Fee, D., Tsuyuki, T., Watada, S., & Morii, W., 2008. Low-frequency acoustic-gravity waves from coseismic vertical deformation associated with the 2004 sumatra-andaman earthquake (mw= 9.2), *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, **113**(B12).

Nappo, C., 2002. *An introduction to atmospheric gravity waves*, Academic Press.

Occhipinti, G., Kherani, E. A., & Lognonné, P., 2008. Geomagnetic dependence of ionospheric disturbances induced by tsunamigenic internal gravity waves, *Geophysical Journal International*, **173**(3), 753–765.

Occhipinti, G., Coïsson, P., Makela, J. J., Allgeyer, S., Kherani, A., Hébert, H., & Lognonné, P., 2011. Three-dimensional numerical modeling of tsunami-related internal gravity waves in the Hawaiian atmosphere, *Earth, Planets, and Space*, **63**, 847–851.

Occhipinti, G., Rolland, L., Lognonné, P., & Watada, S., 2013. From sumatra 2004 to tohoku-oki 2011: The systematic gps detection of the ionospheric signature induced by tsunamigenic earthquakes, *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, **118**(6), 3626–3636.

Picone, J. M., Hedin, A. E., Drob, D. P., & Aikin, A. C., 2002. NRLMSISE-00 empirical model of the atmosphere: Statistical comparisons and scientific issues, *Journal of Geophysical Research (Space Physics)*, **107**, 1468.

Pierce, A. D., 1965. Propagation of acoustic-gravity waves in a temperature-and wind-stratified atmosphere, *The Journal of the Acoustical Society of America*, **37**(2), 218–227.

Pitteway, M. & Hines, C., 1963. The viscous damping of atmospheric gravity waves, *Canadian Journal of Physics*, **41**(12), 1935–1948.

Raveloson, A., Wang, R., Kind, R., Ceranna, L., & Yuan, X., 2012. Brief communication" seismic and acoustic-gravity signals from the source of the 2004 indian ocean tsunami", *Natural Hazards and Earth System Sciences*, **12**(2), 287–294.

Shinagawa, H., Iyemori, T., Saito, S., & Maruyama, T., 2007. A numerical simulation of ionospheric and atmospheric variations associated with the sumatra earthquake on december 26, 2004,

Earth, planets and space, **59**(9), 1015–1026.

Sladen, A. & Hébert, H., 2008. On the use of satellite altimetry to infer the earthquake rupture characteristics: application to the 2004 sumatra event, *Geophysical Journal International*, **172**(2), 707–714.

Smith, W. H., Scharroo, R., Titov, V. V., Arcas, D., & Arbic, B. K., 2005. Satellite altimeters measure tsunami, *Oceanography*, **18**(2), 11–13.

Vadas, S. L., Makela, J. J., Nicolls, M. J., & Milliff, R. F., 2015. Excitation of gravity waves by ocean surface wave packets: Upward propagation and reconstruction of the thermospheric gravity wave field, *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, **120**(11), 9748–9780.

Wei, C., Bühler, O., & Tabak, E. G., 2015. Evolution of tsunami-induced internal acoustic–gravity waves, *Journal of the Atmospheric Sciences*, **72**(6), 2303–2317.

Wu, Y., Llewellyn Smith, S., Rottman, J., Broutman, D., & Minster, J.-B., 2016. The three-dimensional propagation of tsunami-generated acoustic-gravity waves in the atmosphere, in *VIIIth International Symposium on Stratified Flows*, vol. 1.

Zuckerwar, A. J. & Ash, R. L., 2006. Variational approach to the volume viscosity of fluids, *Physics of Fluids*, **18**(4), 047101.

3.3 Perspectives

Ce travail en cours a mis en évidence plusieurs limitations de la méthode par différences finies utilisée dans notre étude comme nous allons le voir dans les sections suivantes.

3.3.1 Niveaux critiques et résolution linéaire

L'utilisation d'une méthode linéaire pour résoudre la propagation gravito-acoustique dans la haute atmosphère avec de forts gradients de vents présente certaines limitations. L'oscillation de l'ocean liée au déplacement du tsunami va générer de manière continue des ondes sur un très large panel de fréquence. Les forts gradients de vents stratosphériques et du bas de la thermosphère vont avoir un rôle important sur la réflexion-réfraction des ondes de gravité lorsqu'elles se propagent en altitude. Comme décrit dans la section 1.1.2, pour chaque guide d'onde il existe une singularité dans l'équation de dispersion associée au système de Navier-Stokes linéarisé. Cette singularité est présente pour les ondes de gravité présentant une vitesse de phase identique à celle du vent au sein du guide d'onde. Cette singularité mène vers l'augmentation drastique du nombre d'onde vertical et la diminution progressive du nombre d'onde horizontal au fur et à mesure que l'onde approche du niveau critique.

Comme indiqué précédemment, cette singularité est résolue, au sein des équations de Navier-Stokes complètes, par les effets non-linéaires et la génération de turbulences. Malheureusement, lorsqu'on résout le système linéarisé, et si l'impact de l'atténuation atmosphérique n'est pas assez prononcé, l'amplitude des ondes de gravité va pouvoir augmenter sans limite au sein de ces guides d'ondes. Ce phénomène est visible dans la figure 3.1 avec la concentration progressive de l'énergie dans le guide d'onde thermosphérique pour les ondes de gravité dont la vitesse de phase est proche de 40 $\mathrm{m.s^{-1}}$. Cette augmentation importante de l'amplitude mène progressivement vers l'instabilité de la simulation numérique.

L'impact des gradients de vents sur le développement de phénomènes non-linéaires a déjà été observé dans des simulations par volumes finis (Laughman, Fritts et Lund, 2017) étudiant les signaux atmosphériques issus d'un tsunami. La comparaison entre leur simulation sans vent et avec des gradients de vents montre des amplitudes bien plus importantes dans ce dernier cas à l'approche du guide d'onde.

3.3.2 Futurs développements

L'une des principales limitations liées à la simulation d'ondes atmosphériques à des échelles de plusieurs centaines de kilomètres et, de surcroît, en 3-D est l'augmentation drastique du temps de calcul. Déjà mentionné dans la section 1.3.4 le développement d'une méthode multi-grilles permettrait de diminuer de manière importante le coût des simulations. En outre, ce travail met en évidence l'intérêt d'utiliser une méthode de résolution complète des équations de Navier-Stokes avec l'inclusion des non-linéarités. Enfin, les phénomènes topographiques, telles que les chaînes de montagnes, jouent un rôle importante dans la diffusion des ondes acous-

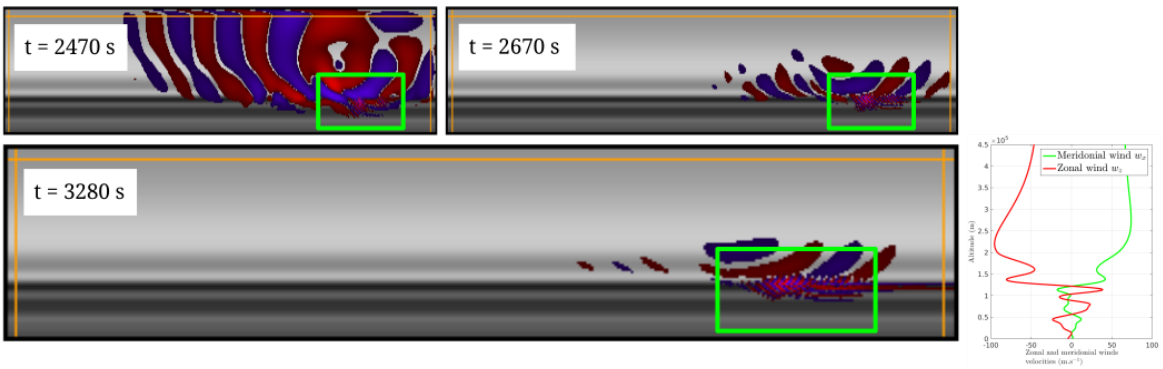

FIGURE 3.1 – Résultats de simulation pour la propagation d'ondes atmosphérique en 3-D au dessus de l'Océan indien. A gauche, images de perturbations de vitesse verticale à latitude constante $5°N$ et à longitude constante $90°E$ aux temps $t = 2470, 2670, 3280$ s avec, respectivement, les amplitudes maximum $A_{max} \approx 200, 500, 1000$ m.s^{-1}, situées au sein des rectangles verts. A droite, profils de vitesses de vents zonaux et méridionaux pour la simulation 3-D correspondant à l'image de la simulation 3-D au temps $t = 3280$ s.

tiques dans l'atmosphère et leur prise en compte permettrait d'expliquer les temps d'arrivées de certains trains d'ondes dans les observations (LE PICHON et al., 2005). C'est pourquoi, dans le chapitre suivant, nous présentons une nouvelle méthode en éléments finis discontinus permettant de résoudre l'effondrement des ondes acoustiques et de gravité, ainsi que de prendre en compte la topographie, phénomènes cruciaux pour correctement simuler la propagation d'ondes dans une atmosphère réaliste.

Chapitre 4

Modélisation du système couplé Terre-atmosphère

Sommaire

4.1 Introduction 117
4.1.1 Méthodes numériques pour le système couplé Terre-atmosphère 117
4.1.2 Limitations de la méthode par élements finis continus 123
4.1.3 Phénomènes non-linéaires 125
4.2 Article publié dans "Geophysical Journal International" 128
4.3 Limites et perspectives 152
4.3.1 Conditions de bord 152
4.3.2 Équilibre hydrostatique 153
4.3.3 Capture de chocs 159
4.3.4 Raffinement de maillage 161
4.3.5 Stabilité et convergence de la méthode 162
4.3.6 Perspectives d'applications 165

4.1 Introduction

Dans ce chapitre nous souhaitons étudier la propagation d'ondes atmosphériques issues du couplage entre la Terre et l'atmosphère. Le chapitre 1 présentait une méthode par différences finies pour résoudre des problèmes de propagation atmosphérique mais dans le cadre de la propagation d'ondes dans le système couplé Terre-atmosphère cette méthode peut poser des difficultés de stabilité et de précision comme nous allons le voir par la suite.

4.1.1 Méthodes numériques pour le système couplé Terre-atmosphère

Afin de clarifier le choix possible des méthodes de résolution des équations de Navier-Stokes couplées aux équations de l'élastodynamique nous allons réaliser un rapide inventaire des avantages et inconvénients de chacune d'entre elles. Nous nous concentrerons sur quatre méthodes classiques : les différences finies, les volumes finis et les éléments spectraux continus

et discontinus. Elles reposent toutes sur la représentation discrète des opérateurs différentiels en espace mais présentent différents avantages dont les arguments sont avancés dans différents ouvrages (Cockburn, Karniadakis et Shu, 2000 ; Giraldo et Restelli, 2008 ; Hesthaven et Warburton, 2007). Notez que nous nous concentrerons uniquement sur la discrétisation des problèmes hyperboliques sous forme conservative.

Modélisation de l'atmosphère

En différences finies les opérateurs spatiaux sont discrétisés, comme son nom l'indique, avec une méthode par différences se basant sur un développement de Taylor (Ryskin et Leal, 1984). On considère alors que la solution est suffisamment bien approchée par ces polynômes définis localement. Puisque l'on utilise une approximation de Taylor cela implique nécessairement un résidu entre la solution exacte et la solution approchée. Afin d'obtenir la meilleure approximation il est naturel de vouloir réduire cette erreur au maximum sur l'ensemble du domaine. Dans ce but, de nombreuses stratégies furent mises en place pour augmenter l'ordre d'approximation de la solution. Dans le chapitre 1 nous avons présenté une méthode de ce type, en quinconce et d'ordre 4, qui vérifiait pour la dérivée première

$$(\partial_x u)^{(i+1/2,j,k)} = \frac{27u^{(i+1,j,k)} - 27u^{(i,j,k)} - u^{(i+2,j,k)} + u^{(i-1,j,k)}}{24\Delta x}. \tag{4.1}$$

où u est une inconnue, (i, j, k) sont les coordonnées des points de grille au sein de la méthode de différences finies et Δx le pas de grille dans la direction x. Il existe plusieurs avantages dans l'utilisation de cette approche : sa simplicité et son efficacité pour discrétiser un grand nombre de problèmes physiques, la facilité de la mise en place d'une approximation d'ordre élevé et enfin une base théorique disponible très étendue. Malheureusement, l'augmentation du degré d'approximation polynomiale se fait au prix de la prise en compte de plus de points dans chacune des directions de l'espace afin de calculer les opérateurs spatiaux (référez vous par exemple à Bogey et Bailly, 2004). Cela limite donc grandement l'approche classique des différences finies pour des géométries complexes. De surcroît, la nécessité de décomposer les opérateurs séparément dans chaque dimension de l'espace peut poser des difficultés à prendre en compte correctement les conditions de bord et les interfaces entre deux milieux discontinus (Vossen, Robertsson et Chapman, 2002).

Afin de relâcher cette dernière contrainte et prendre en compte plus facilement des maillages complexes, l'idée émergea de décomposer le domaine en un ensemble d'éléments (triangles ou quadrilatères en deux dimensions) organisés de manière structurée ou non-structurée (la forme des éléments n'est pas contrainte mais doit respecter certaines conditions, Diskin et Thomas, 2012). La méthode par volumes finis propose cette approche telle que la solution soit décomposée sur l'ensemble des éléments et assumée constante sur chacun d'entre eux. Dans ce cas l'approximation est purement locale et n'impose aucune condition sur le domaine de calcul. Comme indiqué dans le tableau présenté dans l'introduction 1, les termes de volumes sont intégrés par partie, afin de résoudre un problème de flux aux interfaces entre les éléments

au lieu d'un problème sur le volume de l'élément. Ainsi, il est nécessaire de définir un schéma afin de calculer les intégrales de surface. Par exemple, en reprenant l'équation de conservation de la masse, on peut définir

$$\int_{\Gamma^k \cap \Gamma^{k+1}} [\rho v](x)dx = [\rho v](x^{k+1/2}) \approx [\rho v]^{k+1/2} = \frac{\overline{\rho}^k \overline{v}^k + \overline{\rho}^{k+1}\overline{v}^{k+1}}{2}. \tag{4.2}$$

Ce choix n'est évidemment pas unique mais dans l'équation (4.2) on observe que le schéma choisi est identique à celui d'une méthode par différences finies. Notez par ailleurs que ce schéma, étant centré, n'est pas adapté aux problèmes non-linéaires. Mais il existe de nombreuses possibilités pour discrétiser les termes de surface et prendre en compte les chocs (Godunov, 1959 ; Roe, 1981 ; Van Leer, 1974 et pour une revue plus détaillée Versteeg et Malalasekera, 2007). La simplicité de cette méthode en fait un outil puissant d'étude des lois de conservation non-linéaires. Mais si l'on souhaite augmenter le degré d'approximation polynomial, le problème d'intégration aux interfaces entre éléments devient sous-déterminé. En effet, si l'on veut déterminer les inconnues à l'interface entre deux éléments voisins sur $[x^{k-1/2}, x^{k+3/2}]$ avec un degré d'ordre N, on doit résoudre le système

$$\begin{array}{l} \forall x \in [x^{k-1/2}, x^{k+3/2}], \quad [\rho v](x) = \sum_{j=0}^{N} a_j (x - x^k)^j, \\ \qquad\qquad \text{tel que} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \overline{\rho v}^k & = & \frac{1}{x^{k+1} - x^k} \int_{x^{k-1/2}}^{x^{k+1/2}} [\rho v](x)dx \\ \overline{\rho v}^{k+1} & = & \frac{1}{x^{k+2} - x^{k+1}} \int_{x^{k+1/2}}^{x^{k+3/2}} [\rho v](x)dx \end{array} \right. , \end{array} \tag{4.3}$$

où $(a_j)_{j=0,N}$ sont les coefficients d'approximation polynomiale de la solution sur deux éléments voisins. Dans ce cadre, on obtiendra $[\rho v]^{k+1/2} = [\rho v](x^{k+1/2})$. Malheureusement, résoudre (4.3) pour $N > 1$, demandera de déterminer au moins trois coefficients $(a_j)_{j=0,N}$ avec seulement 2 équations. Afin de palier ce problème il est possible d'augmenter le nombre de points utilisés dans l'équation (4.2) mais nous sommes alors ,de nouveau, confrontés aux mêmes limitations que la méthode par différences finies.

Afin d'augmenter le degré d'approximation polynomial tout en conservant la stabilité et permettre de résoudre des problèmes à géométrie complexe, il est possible d'utiliser la méthode des éléments finis (voir par exemple Chung, 2010). Toujours basée sur la décomposition du domaine physique en éléments, il s'agit maintenant d'augmenter le degré d'interpolation sur chaque élément, grâce à un ensemble de noeuds et une base de fonctions de discrétisation bien choisis. Les points d'interpolation sur la frontière entre deux éléments sont alors partagés par ces deux éléments. La résolution des équations différentielles est alors effectuée sous forme variationnelle, c'est-à-dire que chaque équation est multipliée par une fonction test, choisie en général dans le même espace de fonction que la solution (ce n'est pas toujours le cas et la méthode "Petrov-Galerkin" fait le choix contraire afin d'obtenir des résultats satisfaisants pour les problèmes de convection (Brooks et Hughes, 1982)), puis intégrée sur le domaine. Cette méthode repose donc sur le choix de cette base de fonctions, appelées fonctions de forme, dont les contraintes sont les suivantes : elles doivent être définies sur l'ensemble du domaine et le résidu doit être orthogonal à toutes les fonctions tests tel que $\int_\Omega \mathcal{R}\Phi d\Omega = \int_\Omega (\partial_t \rho - \rho \mathbf{v}.\nabla)\, \Phi d\Omega = 0$ où $\mathcal{R}$ est le résidu et Φ les fonctions tests. Il est alors

simple d'augmenter le degré d'approximation tout en gardant la flexibilité géométrique en ajoutant des points d'interpolation sur chaque élément (Karniadakis et Sherwin, 2013). Mais cette amélioration a un prix, car les restrictions imposées à l'espace fonctionnel nous obligent à résoudre un problème linéaire contenant autant d'équations que de points d'interpolation. En effet, si on résout de nouveau l'équation de conservation de la masse du tableau 1.1.4, on obtient le système matriciel suivant en éléments finis et avant intégration par parties

$$\begin{array}{rcl} M.[\partial_t \rho] & = & S.[\rho \mathbf{v}] \\ \forall x \in \Omega, [\rho v](x) & = & \sum_{k=1}^{K+1} [\rho v]^k N^k(x), \\ \forall x \in \Omega, \phi(x) & = & \sum_{k=1}^{K+1} \Phi^k N^k(x), \end{array} \tag{4.4}$$

où $K+1$ est le nombre d'éléments, $[\partial_t \rho]_{i=1,L} = \partial_t \rho(x^i)$ est le vecteur de taille L de dérivée temporelle de la densité avec L le nombre de noeuds, $[\rho \mathbf{v}]_{i=1,L} = \rho \mathbf{v}(x^i)$ est le vecteur de taille L du moment, les vecteurs $(N^k)_{k=1,K+1}$ sont les fonctions de forme, $(\Phi^k)_{k=1,K+1}$ les valeurs des fonctions tests et M est la matrice de masse telle que

$$\forall i = 1, K+1, M_{ij} = \int_\Omega N^i N^j d\Omega. \tag{4.5}$$

Et S la matrice de rigidité, telle que

$$\forall i = 1, K+1, S_{ij} = \int_\Omega N^i \partial_x N^j d\Omega. \tag{4.6}$$

Afin de déterminer l'évolution de la densité $\partial_t \rho$, il est nécessaire d'effectuer l'inversion de la matrice M à chaque pas de temps ce qui peut être extrêmement coûteux en fonction de la taille du domaine. En outre, cette méthode souffre de phénomènes parasites lorsque confrontée à des forts gradients dans la solution. Il existe des techniques de stabilisation telles que la "streamline diffusion method" (Brooks et Hughes, 1982), la "Galerkin least squares method" (Jiang, 2013), les méthodes d'"operator splitting" (Bristeau, Glowinski et Periaux, 1987) ou des méthodes de capture de choc (John et Knobloch, 2007) mais ces dernières peuvent être compliquées à mettre en place et limiter le degré d'approximation des solutions. En outre, comme nous le verrons dans la section 4.1.2, la résolution des perturbations acoustiques dans des milieux advectifs peut poser des problèmes de stabilité. Notez que ce problème est aussi présent dans les méthodes par différences finies et volumes finis et corrigé en modifiant légèrement le développement de Taylor des opérateurs spatiaux (la méthode d'"upwinding" par exemple (Barth et Jespersen, 1989 ; Spalding, 1972) utilisée aussi pour les opérateurs d'advection dans le chapitre 1 de cette thèse).

Une amélioration à la méthode précédente, pour augmenter la précision tout en limitant le temps de calcul, fut apportée en s'inspirant de la méthode spectrale. La méthode spectrale repose, notamment, sur la décomposition des solutions sur une base de Fourier (méthode spectrale (Gazdag, 1981 ; Orszag, 1971)). La méthode fut perfectionnée en utilisant une base de fonctions orthogonales d'ordre élevé (méthode pseudo-spectrale (Fornberg, 1988)). Cette dernière donne de meilleurs résultats en terme de précision et de prise en compte des conditions de bord (Wang, Nakamura et Yasuhara, 1990). En combinant les éléments finis

avec une base de fonctions orthogonales inspirée des méthodes spectrales, Patera développa la méthode d'éléments finis spectraux (Patera, 1984) qui bénéficie de propriétés de convergence bien meilleures que les éléments finis classiques. Initialement élaborée avec des fonctions de Chebychev, la méthode fut étendue aux fonctions de Legendre couplées à une quadrature de Gauss-Lobatto-Legendre (Maday et Patera, 1989) et appliquée, avec succès, aux problèmes géophysiques pour les problèmes de propagation élastique et acoustique (Komatitsch, 1997). Notez que les mêmes soucis de résolution des non-linéarités sont présents avec cette méthode.

Pour obtenir de la flexibilité géométrique avec la possibilité d'augmenter localement le degré d'approximation polynomial tout en permettant la discrétisation de problèmes physiques non-linéaires, il existe une dernière méthode, la méthode de Galerkin discontinue (DG) (Reed et Hill, 1973). Cette méthode est très proche de la méthode par éléments finis continus à la différence de l'intégration qui n'est pas réalisée sur tout le domaine mais individuellement sur chaque élément. La solution générale est ensuite reconstruite en calculant les flux entre chaque élément de manière similaire à la méthode par volumes finis. On bénéficie alors de la précision et de la flexibilité géométrique des méthodes par éléments finis tout en permettant la prise en compte de phénomènes de convection de manière simple via le calcul de flux (Hesthaven et Warburton, 2007) comme pour la méthode des volumes finis. De plus, par la non imposition de la continuité aux interfaces les perturbations acoustiques dans des milieux advectifs sont correctement résolues. L'inconvénient majeur de cette méthode discontinue vient de son coût élevé en terme de calcul. En effet puisque l'on utilise des flux afin de reconstruire la solution entre les éléments il est nécessaire de dupliquer les points d'interpolation sur la frontière de chaque élément (en utilisant des noeuds locaux à chaque élément) à la différence des éléments finis continus qui fusionnent ces points (en utilisant donc des noeuds globaux et plus locaux).

Afin de réduire le temps de calcul, des tentatives d'hybridation entre ces méthodes sont possibles et furent explorées ces dernières années en divisant le domaine en fonction des méthodes utilisées (Ducellier et Aochi, 2009 ; Giraldo, 2013 ; Léger, 2011 ; Paluszny, Matthäi et Hohmeyer, 2007) ou en discrétisant les opérateurs de convection-diffusion différemment (technique intitulée "HDG" (Nguyen, Peraire et Cockburn, 2009)).

Ce rapide résumé des avantages et inconvénients met en avant l'intérêt d'utiliser la technique de Galerkin spectrale discontinue pour les fluides complexes. La méthode de Galerkin discontinue fut utilisée depuis une vingtaine d'années pour résoudre les équations de l'élastodynamique (De Basabe, Sen et Wheeler, 2008 ; Etienne et al., 2010 ; Rivière et Wheeler, 2000) ou les équations acoustiques (Chung et Engquist, 2006 ; Grote, Schneebeli et Schötzau, 2006). Les premières applications à la résolution des équations d'Euler furent réalisées dans les années 1990 pour la dynamique des gaz (Bet et Oden, 1991 ; Vegt et Ven, 1998). La flexibilité géométrique ainsi que la prise en compte des phénomènes non-linéaires de la méthode de Galerkin discontinue sont des avantages importants pour les applications géophysiques complexes (ondes de surface océaniques, ondes de montagne, chocs, vortex). Ainsi on a vu le développement d'un certain nombre de modèles hydrostatiques ou

non-hydrostatiques pour l'étude des fluides (Giraldo, Hesthaven et Warburton, 2002 ; Giraldo et Restelli, 2008 ; Giraldo, 2013 ; Marras et al., 2013 ; Müller et al., 2013 ; Yelash et al., 2014).

Couplage fluide-solide

Le traitement des interfaces fluides-solides est un problème de longue date en mécanique des fluides et fut principalement traité dans le calcul des interactions fluides-structures pour l'ingénierie (Ferziger, Peric et Leonard, 1997 ; Minkowycz et Haji-Sheikh, 2006 ; Noh, 1963 ; Pletcher, Tannehill et Anderson, 2012). Dans ce cadre, les méthodes par différences finies pêchent par leur manque de flexibilité géométrique bien que certaines approches puissent porter leurs fruits dans des configurations simples (Wilson et al., 2007) ou complexes (Borazjani, Ge et Sotiropoulos, 2008 ; Lombard et Piraux, 2004 ; Matoza et al., 2009 ; Vossen, Robertsson et Chapman, 2002) mais cela au prix d'une précision réduite aux interfaces et d'une prise en compte parfois difficile des ondes couplées de surface. Une méthode par différences finies multi-blocs avec imposition faible des conditions de bord fut proposée afin de résoudre des problèmes hétérogènes (Kozdon, Dunham et Nordström, 2013).

En volumes finis, un grand nombre de méthodes de couplage furent développées pour les interactions fluides-solides (Bermúdez et Rodríguez, 1994 ; Hamdi, Ousset et Verchery, 1978 ; Wang et Bathe, 1997). On note d'ailleurs le développement d'une méthode de volumes finis couplée à une méthode par éléments finis pour l'étude des structures (Errera et al., 2011). Enfin, plusieurs modèles climatiques reposent sur une méthode par volumes finis (Marras et al., 2016) et les équations de la magnéto-hydro-dynamique furent aussi résolues avec cette méthode (Tanaka, 1994).

En éléments finis, plusieurs études furent menées sur le couplage entre un milieu acoustique et un milieu élastique en imposant faiblement la continuité de la composante normale du tenseur des contraintes (Bermúdez et Rodríguez, 1999 ; Zienkiewicz et Bettess, 1978). De grandes avancées sur la propagation d'ondes sismiques et sur les milieux couplés ont été réalisées grâce aux éléments finis spectraux (Chaljub, Capdeville et Vilotte, 2003). Cette méthode repose sur une formulation potentielle du champ de déplacement (ou de vitesse) des équations acoustiques. Cela permet un couplage direct, à l'interface, entre le potentiel acoustique (équivalent à la pression) et la vitesse normale côté solide. La résolution des problèmes de propagation d'ondes grâce à une méthode par éléments spectraux permet d'obtenir un rapport intéressant entre précision et temps de calcul (Komatitsch et Tromp, 1999) et est un choix courant ces dernières années (Blanc et al., 2016 ; Bottero et al., 2016 ; Khelfi, 2016 ; Wang et al., 2016).

La méthode de Galerkin discontinue fut aussi étendue aux problèmes de couplages pour la

propagation d'ondes sismiques et acoustiques (Käser et Dumbser, 2008 ; Utzmann et al., 2009). Cette méthode se base sur une approche non-conservative et un flux "upwind" aux interfaces qui, à la jonction entre le milieu acoustique et élastique est déterminé à partir des propriétés physiques des milieux (vitesses d'ondes P, d'ondes S et densité). Il peut être noté une spécificité dans ce travail qui est l'utilisation d'un schéma ADER pour l'évolution en temps particulièrement efficace pour les géométries complexes et maillages non-structurés (Utzmann et al., 2009). Cette méthode n'est pas exclusive à ce travail (Schwartzkopff, Dumbser et Munz, 2004 ; Titarev et Toro, 2005) mais est assez peu utilisée dans la communauté géophysique et consiste à exprimer la dérivée temporelle sous forme de développement de Taylor. D'autres études reposent sur une approche plus classique, résolvant le problème de Riemann exact à chaque interface fluide-solide (Wilcox et al., 2010). Des couplages hybrides, éléments continus et discontinus, furent aussi proposés pour les problèmes d'évolutions de fluides (Cockburn et Dawson, 2002 ; Dawson et Proft, 2002).

La stratégie choisie pour cette thèse consiste à coupler une méthode de Galerkin discontinue à une méthode de Galerkin continue. Dans le domaine fluide, on bénéficie des propriétés de convergence de DG, de la flexibilité géométrique sur le maillage ainsi que de la prise en compte des phénomènes non-linéaires. Dans le domaine solide, on dispose des mêmes propriétés géométriques que dans la partie fluide, permettant un couplage aisé entre les deux milieux, tout en limitant le côut en terme de calcul par rapport à la méthode discontinue car nous ne sommes intéressés qu'aux perturbations linéaires. Notez que, très récemment, d'autres auteurs ont proposé une technique similaire dans le contexte des interactions fluides-structures (Jin et al., 2017). Ils réalisent le couplage d'une méthode de Galerkin discontinue pour résoudre les milieux fluides et une méthode continue pour la partie solide. Cependant, ils prennent en compte des rhéologies de gaz plus complexes et résolvent aussi la déformation de la partie solide. Ces déformations donnent lieu à un problème de Riemann aux interfaces plus délicat à résoudre.

4.1.2 Limitations de la méthode par élements finis continus

Plusieurs formulations des équations de Navier-Stokes pour l'aéro-acoustique (aucun terme de gravité) sont disponibles : une formulation potentielle (Chaljub, Capdeville et Vilotte, 2003), la formulation analogue à celle de Lighthill (Lighthill, 1952), les équations de perturbation acoustique (Munz, Dumbser et Roller, 2007) et une formulation en pression-vitesse (ou formulation de Galbrun, Treyssede, Gabard et Ben Tahar, 2003). Ces deux dernières furent communément utilisées dans la communauté infrasons, notamment en différences finies (Groot-Hedlin, 2008 ; Ostashev et al., 2005b ; Wilson et al., 2007), en éléments finis continus (Hueppe et Kaltenbacher, 2012) et en éléments finis discontinus (Arina, 2016 ; Castel, Cohen et Duruflé, 2009). Dans la formulation par éléments finis continus, certaines précautions sont à prendre pour définir le problème de propagation acoustique dans un fluide en mouvement.

Les solutions générales des équations linéaires d'Euler supportent trois modes de propagation (Chu et Kovásznay, 1958) : les modes acoustiques, d'entropie et de vorticité. La nature de chacun de ces modes dépend de la nature du mouvement moyen du fluide (Prax, Golanski et Nadal, 2008). Ces modes ont une réalité physique (Chu et Kovásznay, 1958) et une simulation numérique doit pouvoir correctement les représenter. L'absence de contrôle de ces derniers peut provoquer des phénomènes parasites (Bonnet-Ben Dhia et al., 2012 ; Feng, Ben Tahar et Baccouche, 2016 ; Kiefling et Feng, 1976) notamment via le développement des modes de vorticité qui sont des modes convectifs se déplaçant avec le mouvement du fluide. Dans une approximation par éléments finis, le choix des espaces fonctionnels est crucial et une formulation classique (solutions dans $\mathcal{H}^1$ ou $\mathcal{H}(div)$) ne discrétise pas correctement tous les modes et peut mener à des instabilités (Hüppe et al., 2016 ; Wang et Bathe, 1997). De surcroît, lorsque le mouvement du fluide est non constant à travers le domaine, les modes de vorticité rendent la simulation instable très rapidement (Arina, 2016). Notez que physiquement ces modes sont contrôlés naturellement par les non-linéarités (Prax, Golanski et Nadal, 2008).

Plusieurs approches sont alors possibles afin de supprimer ces parasites. L'utilisation d'éléments mixtes ce qui correspond à l'évaluation des différentes inconnues (pression et vitesse) dans différents espaces fonctionnels (Cohen et Fauqueux, 2000). Mais les éléments mixtes peuvent dans des cas critiques ne pas respecter la condition inf-sup (donnant l'unicité de la solution après discrétisation) et mener vers le développement d'instabilités numériques (Bathe, 2001). L'utilisation d'une méthode de type "Petrov-Galerkin" (Brooks et Hughes, 1982), d'une méthode par pénalisation des termes rotationnels (Hamdi, Ousset et Verchery, 1978) ou d'autres méthodes de pénalisations (Bonnet-Ben Dhia, Legendre et Lunéville, 2001) peuvent imposer numériquement la coercivité des opérateurs mais augmentent considérablement le temps de calcul (Hüppe et al., 2016). L'utilisation d'une grille colloquée pouvant mener vers des modes stationnaires parasites (Melvin, Staniforth et Thuburn, 2012), des solutions ont été proposées en utilisant des grilles en quinconce (Guerra et Ullrich, 2016). En outre, la nature des termes sources semble essentielle pour limiter le développement des modes de vorticité. L'implémentation de termes sources irrotationnels, n'excitant pas les modes de circulation, peut limiter le développement des instabilités (Prax, Golanski et Nadal, 2008). Enfin, la discontinuité des espaces fonctionnels au sein de la méthode de Galerkin discontinue permet un traitement adapté des équations d'Euler (Hüppe et al., 2016). C'est cette propriété qui justifie notamment l'utilisation de la méthode discontinue dans ce chapitre.

Une formulation des équations d'Euler linéaires très utilisée dans le milieu acoustique, et résolvant le problème des modes parasites, repose sur une formulation potentielle. Le champ de déplacement des particules soumises à la force de gravité s'exprime sous forme d'un gradient et est donc, pour les modes acoustiques, à rotationnel nul (Chaljub, Capdeville et Vilotte, 2003). La méthode n'est alors plus sensible au développement des modes de vorticité. De plus, cette dernière permet de réduire significativement le temps de calcul en ne calculant qu'un potentiel pour tout le champ de déplacement. Malheureusement deux problèmes importants limitent cette formulation : l'absence de viscosité dynamique et des phénomènes d'advection.

En effet dans ce cadre le champ de déplacement s'écrit

$$\rho \mathbf{u} = \nabla \mathcal{X} + \rho \mathbf{g} \tag{4.7}$$

Cette formulation repose sur la décomposition du noyau de l'opérateur propageant les ondes dans un fluide non visqueux soumis à la force de gravité (Valette, 1987) et décrit donc totalement la propagation d'ondes acoustiques et de gravité. Malheureusement, si l'on considère une viscosité de cisaillement et/ou du vent, les termes d'advection ainsi que les termes non diagonaux du tenseur des contraintes ne peuvent être représentées par la forme précédente (4.7) et ne peuvent donc être inclus.

4.1.3 Phénomènes non-linéaires

Comme mentionné dans l'introduction, une grande variété de phénomènes non-linéaires peuvent impacter la propagation d'ondes acoustiques et de gravité. Pour les perturbations acoustiques, les phénomènes non-linéaires principaux sont attribués au phénomène "d'effondrement". Lorsque le déplacement local des particules, dû à une onde acoustique, est suffisamment important pour modifier la vitesse locale du son, alors les zones de sur-pression se déplaceront plus vite que les zones de dé-pression. Ainsi, la forme d'onde va se déformer jusqu'à atteindre un choc avec une forme en N ("N-wave" en anglais) qui va progressivement s'"étendre" (les surpressions se déplaçant plus vite que les dépressions) en espace. Ce type d'onde fut d'ailleurs observé pour un grand nombre d'évènements : les rentrées de météorites (Stevanović et al., 2017), les explosions (Rogers et Gardner, 1980) et les séismes de forte amplitude (Afraimovich et al., 2001b). Cette distorsion du train d'onde va donc avoir deux impacts majeurs : modifier l'amplitude de l'onde ainsi que son contenu fréquentiel. De plus, au cours de sa propagation et avant d'être dissipé par les phénomènes visqueux cette "N-wave" va voir sa période principale (écart de temps entre les dépressions et surpressions) s'élargir au cours du temps du fait de la vitesse plus importante des surpressions par rapport aux dépressions. Des observations de ce type furent réalisées dans le contenu électronique de l'ionosphère après de forts séismes où l'on capture des signaux de période parfois supérieures à 1 h (Rolland et al., 2011). De manière similaire, via sondage Doppler, la trace de "N-wave" fut capturée à une altitude de 195 km liée au soudain mouvement vertical du sol pour le tremblement de Terre de Illapel au Chili le 16 septembre 2015 (Chum et al., 2016).

En ce qui concerne les ondes de gravité, trois phénomènes non-linéaires principaux agissent sur leur propagation : les instabilités dynamiques, les instabilités convectives et les interactions entre ondes de gravité. Dans les deux premiers cas on peut caractériser l'instabilité d'un milieu grâce au nombre de Richardson Ri défini par

$$Ri = \left(\frac{N}{\partial_z v_x} \right)^2, \tag{4.8}$$

où v_z est la vitesse verticale des particules. Ce nombre caractérise la stabilité de la stratifica-

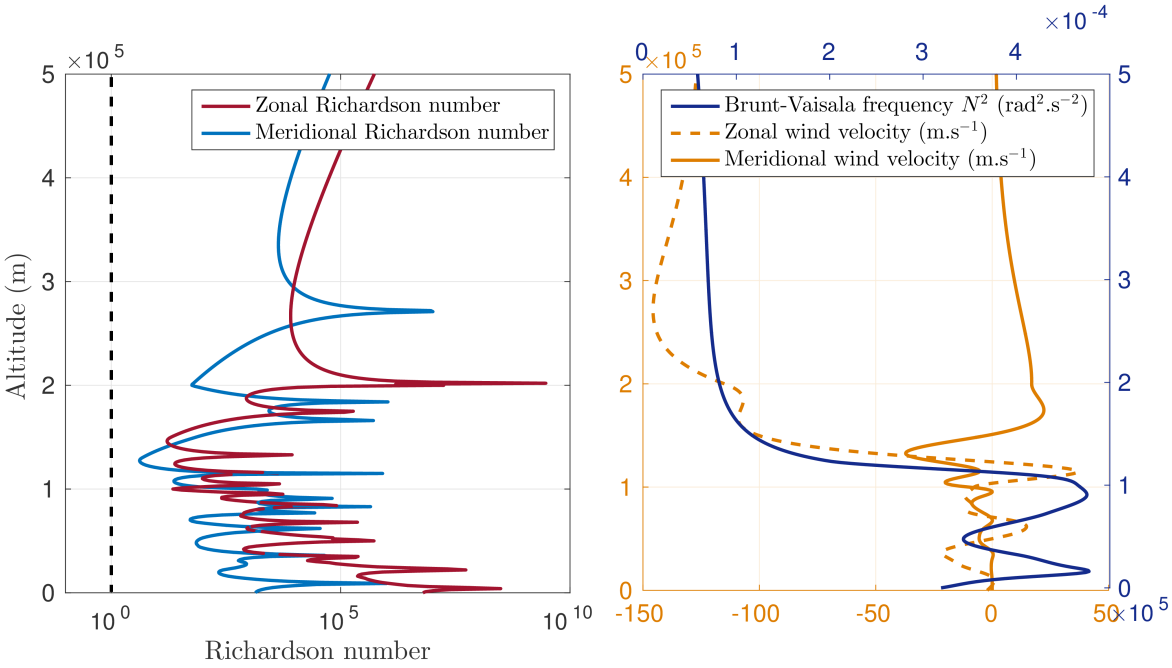

FIGURE 4.1 – A gauche, nombres de Richardson pour les vents zonaux (rouge) et méridionaux (bleu) pour le modèle MSIS au dessus de l'océan indien et, à droite, les valeurs correspondantes des vents zonaux et méridionaux (orange) et de la fréquence de Brunt-Vaïsälä (bleu). La limite $Ri = 1$ est indiquée par une ligne noire hachurée.

tion par rapport aux phénomènes de cisaillement. En effet, lorsque $Ri < 1$ l'écoulement dans un fluide n'est plus considéré laminaire. Dans le cadre de l'atmosphère, si $Ri < 1$, sa stratification n'est alors plus stable. Sur la figure 4.1, les nombres de Richardson pour le modèle MSIS sont visibles dans une configuration de stratification stable en cisaillement car $Ri > 1$.

Deux domaines d'instabilité se dégagent pour $Ri < 1$ (FRITTS et RASTOGI, 1985) : les instabilités dynamiques pour $0 < Ri < \frac{1}{4}$ et les instabilités convectives pour $Ri < 0$. Les premières correspondent en général à une fréquence de stratification N faible et des strates en advection à des vitesses différentes.

Dans le cas des instabilités dynamiques, le phénomène principal se nomme l'instabilité de Kelvin-Helmholtz et correspond au mouvement de deux strates se déplaçant l'une par rapport à l'autre à deux vitesses horizontales différentes. Ce type d'instabilité est visible dans la figure 4.2 où l'on voit l'établissement progressif d'un vortex lorsque le déplacement de l'interface entre les strates franchit un seuil critique et les phénomènes de cisaillement ne sont plus compensés par la force de portée. Dans le cas des instabilités convectives, cela correspond au cas particulier où un fluide plus dense se situe au dessus d'un fluide moins dense et, par l'effet de la gravité, induit l'instabilité de Rayleigh-Taylor. Cette fois-ci, le phénomène de vortex, visible dans la figure 4.3, est dû au fait que les gradients de pression ne sont plus compensés par les gradients de densité générant un effort de cisaillement sur l'interface et provoquant son renversement.

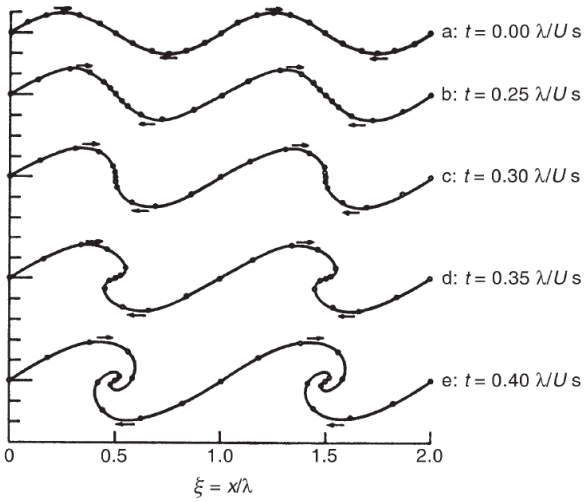

FIGURE 4.2 – Évolution d'une instabilité à l'interface entre deux strates de densité et de vitesse moyenne (vent) différentes. Représentation en temps t et distance ξ sans dimensions. A partir de $t = 0.40\lambda/U$ s, on observe le renversement de l'interface et la génération du vortex qui s'en suit. Figure extraite de (NAPPO, 2002, Ch. 5.3.2, p. 127).

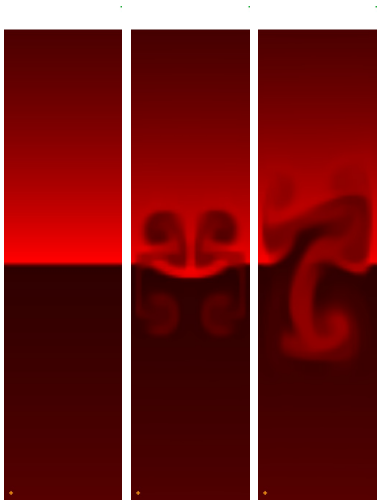

FIGURE 4.3 – Exemple de simulation de convection par instabilité de Rayleigh-Taylor à $t = 0.005, 7.5, 10$ s. Représentation en densité normalisée sur la plus forte valeur du domaine. Les teintes les plus sombres sont les densité les plus faibles et les plus claires sont les valeurs les plus élevées. Par l'effet de la gravité la discontinuité en densité provoque le développement de vortex liés à une instabilité de Rayleigh-Taylor.

Il est important de noter que cette dissipation d'énergie par les phénomènes turbulents, au delà d'altérer la propagation d'ondes de gravité dans la moyenne et haute atmosphère, va aussi jouer un rôle majeur dans les effets dynamiques de circulation à grande échelle et sur la structure thermique de la mésosphère et de la basse thermosphère (Fritts et Rastogi, 1985 ; Lindzen, 1981 ; Salby, 1984).

Enfin, les interactions entre paquets d'ondes de gravité sous forme d'instabilités paramétriques subharmoniques (PSI ou "Parametric Subharmonic Instability" en anglais) semblent être des mécanismes importants dans l'atmosphère, transférant l'énergie des grandes vers les petites échelles (Fritts, Wang et Werne, 2013). Ce phénomène correspond à la déstabilisation d'une onde principale par résonance et l'émission d'ondes de fréquence principale plus faible (la moitié de la fréquence de l'onde initiale) et dans des directions différentes. Ce transfert d'énergie est considéré comme ayant un effet stabilisant sur les instabilités dynamiques et convectives pour les ondes planes de faible fréquence (Sutherland, 2006). Bien que courante dans l'océan, son impact pour l'atmosphère fut moins évident (McComas et Müller, 1981 ; Yeh et Liu, 1981) mais aujourd'hui établi et systématique entre les ondes de faibles et larges amplitudes (Koudella et Staquet, 2006 ; Staquet et Sommeria, 2002 ; Sutherland, 2006).

4.2 Article publié dans "Geophysical Journal International"

Afin d'étudier la propagation d'ondes atmosphériques dans une atmosphère complexe (équations de Navier-Stokes) couplée à un milieu solide visco-élastique, nous proposons maintenant une méthode hybride Galerkin continue et discontinue. Ce modèle numérique permet de propager des ondes élastiques linéaires dans la partie solide et des ondes acoustiques et de gravité non-linéaires dans la partie fluide. Afin de valider l'implémentation de cet outil nous comparons les résultats numériques (notamment les effets de la viscosité et des gradients de vent) avec des solutions quasi-analytiques ainsi que les résultats de la méthode par différences finies présentés dans le chapitre 1. L'article présentant cette méthode a été publié dans le journal "Geophysical Journal International" (GJI) : Brissaud et al., 2017.

Geophysical Journal International

Geophys. J. Int. (2017) **210,** 1047–1069
Advance Access publication 2017 May 4
GJI Seismology

doi: 10.1093/gji/ggx185

Hybrid Galerkin numerical modelling of elastodynamics and compressible Navier–Stokes couplings: applications to seismo-gravito acoustic waves

Quentin Brissaud,[1] Roland Martin,[2] Raphaël F. Garcia[1] and Dimitri Komatitsch[3]

[1] *Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace (ISAE-SUPAERO), Université de Toulouse, Toulouse, France. E-mail: quentin.brissaud@isae.fr*
[2] *Laboratoire de Géosciences Environnement Toulouse (GET), UMR CNRS* 5563, *Observatoire Midi-Pyrénées, Université Paul Sabatier, Toulouse, France*
[3] *Aix Marseille Univ., CNRS, Centrale Marseille, LMA, Marseille, France*

Accepted 2017 May 3. Received 2017 March 28; in original form 2017 January 9

SUMMARY

We introduce a hybrid Galerkin modelling tool for the nonlinear acoustic and gravity wave propagation in planetary atmospheres coupled through topography to a solid medium. We rely on a 2-D spectral-element technique to model linear visco-elastic solid media and couple it to a discontinuous Galerkin method for the atmosphere modelled by the fully nonlinear Navier–Stokes equations. Significant benefits of such a method are, first, its versatility because it handles both acoustic and gravity waves in the same simulation, second, it enables one to observe nonlinear effects as convection or wave-breaking and, finally, it allows one to study the impact of ground-atmosphere coupling for waves propagating from seismic sources. Simulations are performed for 2-D isothermal atmosphere models with complex wind and viscosity profiles. We validate the computations by comparing them to finite-difference solutions, already validated in a previous paper. Specific benchmark validation cases are considered for both acoustic and gravity waves subject to viscosity variations, wind duct and nonlinear wave breaking. We apply this tool to study acoustic and gravity waves generated by a strong seismic source and its nonlinear breaking in the upper atmosphere.

Key words: Acoustic-gravity waves; Non-linear differential equations; Numerical modelling; Computational seismology; Earthquake ground motions; Wave propagation.

1 INTRODUCTION

Acoustic and gravity waves propagation in planetary atmospheres provide a way to probe their structure and dynamics but may also offer a window into the internal structure of the planet from the coupling between its fluid and solid parts. In order to better understand the propagation of these waves, many authors have worked on the modelling of linear or nonlinear propagation with different techniques that range from normal-mode computations to ray tracing by solving linearized Navier–Stokes equations or using global circulation models (Yiğit & Medvedev 2015, for a review). One of the motivations behind this work and a main difference between these techniques consists in accounting or not for nonlinear wave propagation. Studies relying on the linear assumption divide the atmospheric variables into slowly varying or stationary background parts and small first-order wave perturbations. A second type of study considers the whole system which implies the propagation of shocks, waves-waves interactions and the resulting transfers of energy and wave-breaking for large-amplitude waves. Many theoretical studies of acoustic and gravity waves have been done using the linear theory (Mikhailenko & Mikhailov 2014; Wei *et al.* 2015; Brissaud *et al.* 2016), since it provides a good understanding of waves dynamics for smooth atmospheric conditions (Dörnbrack & Nappo 1997). On Earth, in the middle and upper atmospheres, the background flows often approach these conditions, but in the troposphere and in the planetary boundary layer this approximation may break. For nonlinear propagation several methods can be used: finite-differences (Kshevetskii & Gavrilov 2005; de Groot-Hedlin 2016) present a great advantage in terms of simplicity of implementation but fail to resolve with good accuracy both strong background velocity fields and contact between different material. The finite volume method (Snively & Pasko 2008) addresses these two issues efficiently but lacks accuracy compared to high-order finite-element methods. Finally, finite elements offer great advantages, even though it is computationally more expensive than finite differences, in terms of accuracy and boundary conditions since it relies on a weak formulation. But it shows instabilities when dealing with strongly varying background (Hüppe *et al.* 2016). In this study, we use a discontinuous Galerkin (DG) method, common in fluid dynamics since it provides great accuracy with harsh background conditions, and efficiently takes into account boundary conditions (Hesthaven & Warburton 2007). Global circulation models, common in

© The Authors 2017. Published by Oxford University Press on behalf of The Royal Astronomical Society.

atmospheric studies, are also based on the full Navier–Stokes equations but they also take into account several other factors such as humidity, clouds or rains (Miyoshi *et al.* 2014). Other less common methods have been used (Lecoanet *et al.* 2015) and give interesting results for specific applications. Different formulations are available for Navier–Stokes equations. Climatologists studying the atmosphere often use a temperature potential or temperature formulation (Ahmad & Lindeman 2007; Müller *et al.* 2010). But the total energy formulation tends to give more stable and less dissipative results than temperature formulations (Giraldo 1995). Another crucial point to understand the propagation of infrasounds from sources in the solid Earth up to the atmosphere is the coupling between those media. Many authors focused either on the atmosphere (Kshevetskii & Gavrilov 2005) or the solid medium (Komatitsch & Tromp 1999), respectively considering solid or free-surface boundary conditions for the solid-fluid boundary. In order to fully couple those media, several options are available: normal-mode techniques (Lognonné *et al.* 1998) take into account free oscillations of the Earth but are limited to a certain range of frequencies and are only 1-D. Most of the Euler or Navier–Stokes solutions, when considering fluid-solid coupling, focus on acoustic modes only and do not resolve gravity modes since they are mainly interested in ocean-Earth or more generally acoustic-elastic couplings (Komatitsch *et al.* 2000; Schäfer & Teschauer 2001; van Vossen *et al.* 2002; Käser & Dumbser 2008).

Regarding numerical aspects, when using the DG method, a numerical procedure is required to resolve discontinuities at element boundaries and also to stabilize the simulations when dealing with strong nonlinearities. The first aspect, the computations of fluxes at element boundaries and the associated Riemann problem, can be approximated in different ways: Roe, Lax-Friedrich or Harten-Lax-van Leer contact based fluxes are common examples but since we will not focus on strong shocks, or shock–shock interactions the choice is not significant and we will choose a simple, stable and efficient one: the Lax-Friedrich flux. The other aspect, for nonlinear stability, usually relies on slope-limiting techniques (Cockburn & Shu 2001). In our case we will again choose a relatively simple first-order 'flux-limiter' (Hesthaven & Warburton 2007) as it gives great results without a high computational cost.

Also, as mentioned earlier, to properly understand the propagation of acoustic and gravity waves due to atmospheric sources or seismic sources one should be able to properly model the Earth-Atmosphere system. Due to the high computational cost of the DG method we couple this method to a less expensive continuous Galerkin method (a spectral-element method) in the solid medium already available in the SPECFEM2D software package and that shares the same polynomial discretization as the DG method. Also, in order to validate the method in the fluid domain, we perform comparisons against a finite-difference method, already validated and published (Brissaud *et al.* 2016), which will provide solutions in complex atmospheric conditions.

In this paper, we first quickly recall the main equations for wave propagation in the fluid and the solid media as well as boundary and interface conditions. We then describe numerical aspects of both continuous and DG methods as well as the fluid-solid interface numerical treatment. Next, we present the different atmosphere and Earth models and validation results (acoustic and gravity waves and absorption under windy atmospheric conditions) against finite-difference solutions. Finally, we simulate post-seismic acoustic and gravity waves and analyse the associated nonlinear breaking.

2 SOLID AND FLUID EQUATIONS

In this section let us recall the different sets of equations for the propagation of acoustic and gravity waves for a viscous fluid and the propagation of compressional and shear waves in a solid medium, as well as the boundary and interface conditions required to close the fully coupled solid-fluid system. To limit the computational cost we will restrict the study to 2-D models and the work will need to be extended to 3-D models in future papers. We consider the following computation domains and boundaries:

(i) The solid (respectively fluid) interior domain Ω_S (respectively Ω_F)
(ii) The fluid–solid boundary Γ_{FS}
(iii) The solid outer boundary $\Gamma_{S,\,\mathrm{ext}}$
(iv) The fluid outer boundary $\Gamma_{F,\,\mathrm{ext}}$
(v) The solid boundary $\Gamma_S = \Gamma_{FS} \cup \Gamma_{S,\,\mathrm{ext}}$
(vi) The fluid boundary $\Gamma_F = \Gamma_{FS} \cup \Gamma_{F,\,\mathrm{ext}}$

We will also make the following assumptions:

(i) the atmosphere is a Newtonian fluid
(ii) the atmosphere is an ideal gas
(iii) the solid is an isotropic linear (i.e. we consider small elastic perturbations only) visco-elastic medium

2.1 Notations

Table 1 summarizes the variables, constants and notations used in the paper.

Table 1. The main variables, constants and notations used in our paper. Main variables have the following dimensions: ρ_T (kg m^{-3}), $\mathbf{v}_F$, $\mathbf{v}_S$ (m s^{-1}), e (J kg^{-1}), T (K), $\mathbf{g}$ (m s^{-2}), C_p, C_v (kg m^2 s^{-2} K^{-1}), κ (W K^{-1} m^{-1}), p (kg m^{-1} s^{-2}), μ (kg m^{-1} s^{-1}), c, $c_{S,p}$, $c_{S,s}$ (m s^{-1}), N (rad Hz), L_x, L_z, h (m).

Name	Meaning	Name	Meaning
Ω_F	Fluid domain	Ω_S	Solid domain
Γ_F	Fluid domain boundary	Γ_S	Solid domain boundary
$\Gamma_{F,\text{ext}}$	Fluid domain outer boundary	$\Gamma_{S,\text{ext}}$	Solid domain outer boundary
Γ_{FS}	Fluid–solid interface		
Ω_F^k	Curvilinear element of the fluid domain	$\partial\Omega_F^k$	Boundary of a curvilinear element
T	Temperature	ρ_S	Background seismic density
ρ	Total atmospheric density	e	Total energy per unit mass
$\mathbf{v}_F$	Total fluid velocity	$\mathbf{v}_{0,F}$, $\mathbf{v}_{1,F}$	Background and perturbation fluid velocities
p	Total atmospheric pressure	p_0, p_1	Background and perturbation atmospheric pressures
Σ_i	Inviscid fluid stress tensor	$\Sigma_{0,i}$, $\Sigma_{1,i}$	Background and perturbation inviscid fluid stress tensors
Σ_v	Viscous fluid stress tensor	$\Sigma_{0,v}$, $\Sigma_{1,v}$	Background and perturbation viscous fluid stress tensors
σ_e	Viscous fluid energy tensor	$\sigma_{0,e}$, $\sigma_{1,e}$	Background and perturbation viscous fluid energy tensors
T	Temperature	γ	Ratio of specific heat
μ	Dynamic viscosity	κ	Thermal conductivity
C_p	Heat capacity at constant pressure	C_v	Heat capacity at constant volume
c	Adiabatic sound velocity	L	Mean free path
$\mathbf{g}$	Gravitational acceleration	N	Brunt-Väisälä frequency
$\mathbf{v}_S$	Total solid velocity	$\mathbf{v}_{S,0}$, $\mathbf{v}_{S,1}$	Background and perturbation solid velocities
S_T	Total solid stress tensor	S_0, S	Background and perturbation solid stress tensors
ϵ_T	Total solid strain tensor	ϵ_0, ϵ	Background and perturbation solid strain tensors
$\mathbf{C}$	Total solid stiffness tensor	λ_S, μ_S	Lamé parameters
$c_{S,p}$	P-wave solid wave velocity	$c_{S,s}$	S-wave solid wave velocity
f_ρ, $\mathbf{f}_v$, f_e	Mass, momentum and energy fluid sources	$\mathbf{f}_S$	Solid source
$\mathbf{n} = (n_x, n_z)$	Unit normal to a surface	$\mathbf{t} = (t_x, t_z)$	Unit tangent vector to a surface
$\mathbf{v}_{F,NT}$	Fluid velocity projected in surface coordinates	$\tilde{\Sigma}_i$	Nonlinear fluid stress tensor
$\mathcal{L}$	Navier–Stokes and Elastodynamics operators		
L_x	Domain size along x	L_z	Domain size along z
Δt	Time step	Δx	Spatial step
P_T	Dominant time period of a source or a forcing	P_S	Dominant wavelength of a source or a forcing
t_0	Initial source or forcing time	A	Source or forcing amplitude (or incident wave angle in Section 4.4)
h	Topography height	T_v, R_v	Velocity transmission and reflexion coefficients
$\mathbf{F}_b$	Fluid bottom momentum forcing	f_b	$z-$component of the fluid bottom momentum forcing

2.2 Atmosphere modelled by the Navier–Stokes equations system

In the fluid domain, Navier–Stokes equations describe the nonlinear motion of viscous fluids. Various formulations exist for this nonlinear set of equations, the main difference lying in the choice of the last equation describing the energy balance from the state equation. Some authors, mainly in the climatology field, rely on the potential temperature (Shamarock *et al.* 2008; Müller *et al.* 2010) and others in the Computational Fluid Dynamics community use total energy as a conservative variable (Giraldo 1995; Bassi & Rebay 1997; Tang & Warnecke 2005; Chandrashekar & Zenk 2017). In our framework these formulations are similar, but considering total energy leads to less dissipative results (Giraldo & Restelli 2008), let us mention that when using alternative numerical methods, such as finite differences, pressure can also be used but the system is not conservative anymore (Kshevetskii & Gavrilov 2005).

Then constitutive variables will be the fluid density ρ (kg m^{-3}), the fluid velocity $\mathbf{v}$ (m s^{-1}) and the total energy per unit mass e (J kg^{-1}). Their evolution in time is described by three conservation equations: the conservation of mass, conservation of momentum and the conservation of energy.

These equations read, for any point in the fluid domain Ω_F and $\forall t > 0$,

$$\begin{aligned}
\partial_t \rho &= -\nabla.(\rho \mathbf{v}_F) + f_\rho, \\
\partial_t \rho \mathbf{v} &= -\nabla.\Sigma_i + \nabla.\Sigma_v + \rho \mathbf{g} + \mathbf{f}_v, \\
\partial_t \rho e &= -\nabla.(\{\rho e + p\}\mathbf{v}_F) + \rho \mathbf{g}.\mathbf{v}_F + \nabla.\sigma_e + f_e,
\end{aligned} \tag{1}$$

where $\mathbf{g}$ (m s^{-2}) is the gravity acceleration, $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ is the gas constant with C_p (kg m^2 s^{-2} K^{-1}) the heat capacity at constant pressure, and C_v the heat capacity at constant volume (kg m^2 s^{-2} K^{-1}), p the pressure (kg m^{-1} s^{-2}), f_ρ (kg m^{-3} s^{-1}) the mass source, $\mathbf{f}_v$ (kg m^{-2} s^{-2}) the momentum source, f_e (kg m^{-1} s^{-3}) the energy source and Σ_i (kg m^{-1} s^{-2}) is the inviscid fluid stress tensor that reads

$$\Sigma_i = \begin{pmatrix} \rho v_{F,x}^2 + p & \rho v_{F,x} v_{F,z} \\ \rho v_{F,x} v_{F,z} & \rho v_{F,z}^2 + p \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Σ_v (kg m^{-1} s^{-2}) is the viscous fluid stress tensor and σ_e (kg s^{-3}) the viscous energy vector that read

$$\Sigma_v = \begin{pmatrix} (\eta_V - \frac{2}{3}\mu)\nabla.\mathbf{v}_F & \mu(\partial_x v_{F,z} + \partial_z v_{F,x}) \\ \mu(\partial_x v_{F,z} + \partial_z v_{F,x}) & (\eta_V - \frac{2}{3}\mu)\nabla.\mathbf{v}_F \end{pmatrix}, \quad \sigma_e = \mathbf{v}_F.\Sigma_v + \kappa\nabla T, \tag{3}$$

where μ (kg m^{-1} s^{-1}) is the shear viscosity. Atmospheric absorption can occur through two main mechanisms (Bass *et al.* 1984): losses due to dissipation of mechanical energy, and relaxation losses due to the conduction of heat energy. The shear (or dynamic) viscosity μ, due to shear stress applied to a fluid and relaxation of dilatational disturbances (i.e. viscous dissipation, heat conduction and molecular relaxations), reads (Zuckerwar & Ash 2006; Bass & Chambers 2001)

$$\mu = \frac{2}{3}L\rho c\sqrt{2/\pi\gamma}, \tag{4}$$

where L is the mean free path and c the adiabatic sound speed. The auxiliary variable η_V reads

$$\eta_V = \frac{4}{3}\mu. \tag{5}$$

Finally, T (K) is the temperature and κ (W K^{-1} m^{-1}) the thermal conductivity that describes the fluid ability to conduct heat. Temperature reads, from the expression of total energy e

$$T = \frac{1}{C_v}\left(e - \frac{1}{2}||\mathbf{v}_F||^2\right), \tag{6}$$

where $||.||$ is the $\mathbb{R}^2$ norm. Also, from the state equation (valid for the fluid considered as an ideal gas) follows a relationship between pressure and energy as

$$p = (\gamma - 1)\rho\left(e - \frac{1}{2}||\mathbf{v}_F||^2\right), \tag{7}$$

and eq. (6) yields

$$\frac{p}{\gamma - 1} = \rho C_v T. \tag{8}$$

2.3 Solid equations system: elastodynamics

For the solid Earth, we will consider a linear isotropic visco-elastic heterogeneous solid. The solution in the solid medium will rely on the small perturbation hypothesis, that is, the hypothesis that the background evolution in time can be neglected. Linear wave equations can then be written as (Komatitsch & Tromp 1999)

$$\rho_S\partial_t^2\mathbf{u}_S = \nabla.S + \mathbf{f}_S, \tag{9}$$

with

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_\infty^t \partial_t\mathbf{C}(t-\tau) : \epsilon(\tau)d\tau = \mathbf{C}^U : \epsilon - \sum_{m=1}^{L}\mathbf{R}^m \\ \partial_t\mathbf{R}^m &= -\mathbf{R}^m/\tau^{Sm} + \delta\mathbf{c}^m : \epsilon/\tau^{Sm} \\ \delta c^m_{ijkl} &= -C^R_{ijkl}\left(1 - \tau^{\epsilon m}_{ijkl}/\tau^{Sm}\right) \\ \epsilon &= \frac{1}{2}\left\{\nabla\mathbf{u}_S + (\nabla\mathbf{u}_S)^T\right\} \\ C_{ijkl} &= C^R_{ijkl}\left[1 - \sum_{m=1}^{L}\left(1 - \tau^{\epsilon m}_{ijkl}/\tau^{Sm}\right)e^{-t/\tau^{Sm}}\right]H(t), \\ C^U_{ijkl} &= C^R_{ijkl}\left[1 - \sum_{m=1}^{L}\left(1 - \tau^{\epsilon m}_{ijkl}/\tau^{Sm}\right)\right], \end{aligned} \tag{10}$$

where $\mathbf{u}_S$ (m) is the solid displacement, S (kg m^{-1} s^{-2}) is the solid stress tensor, ϵ (s^{-1}) is the strain rate tensor, $\mathbf{C}$ (kg m^{-1} s^{-1}) the stiffness tensor, λ_S and μ_S the Lamé parameters, ρ_S the solid density, $\mathbf{f}_S$ (kg m^{-2} s^{-2}) an external force, C^R_{ijkl}, C^U_{ijkl} denote respectively the relaxed and unrelaxed modulus, τ^{Sm} are the stress relaxation times (chosen to be the same for all components of the anelastic tensor), $\tau^{\epsilon m}_{ijkl}$ are the strain relaxation times (unique to each individual component of the anelastic tensor), L is the number of relaxation mechanisms and H is the Heaviside step function.

2.4 Boundary conditions and fluid–solid interface

One needs to provide boundary and interface conditions for both the solid medium and the fluid medium.

First, because we did not implement absorbing boundary conditions for the fluid medium yet we will take periodic boundary conditions on lateral boundaries (boundaries defined at $x = 0$ and $x = x_{\max}$ where $x_{\max}$ is the maximum x-coordinate for the simulation domain) for both fluid and solid media. If we denote by Γ_p the periodic boundaries we now consider the outer solid and fluid exterior boundaries as $\tilde{\Gamma}_{F,\text{ext}} = \Gamma_{F,\text{ext}} \setminus \Gamma_p$ and $\tilde{\Gamma}_{S,\text{ext}} = \Gamma_{S,\text{ext}} \setminus \Gamma_p$. In the following we will simplify the notation and remove the tilde by considering $\Gamma_{F,\,ext}$, $\Gamma_{S,\,ext}$ to be, respectively, the outer fluid and solid boundaries without the periodic boundaries.

For the fluid outer boundary conditions $\Gamma_{F,\,\text{ext}}$ we will consider perfect slip conditions, that is, the velocity field reads

$$\mathbf{v}_F.\mathbf{n} = \mathbf{0} \tag{11}$$

where $\mathbf{n} = (n_x \quad n_z)$ is the outer surface unit normal vector of $\Gamma_{F,\,\text{ext}}$ and $\mathbf{t} = (t_x \quad t_z)$ the unit tangent vector to the surface.

For the solid medium we impose wall boundary conditions on $\Gamma_{S,\,\text{ext}}$ such that all displacement perturbations will be zero at the boundary. However, the SPECFEM2D software allows for absorbing boundary conditions in elastic regions (Komatitsch & Tromp 2003).

At the fluid-solid boundary Γ_{FS} we consider a frictionless slip boundary condition (Aki & Richards 1980) which implies continuity of the traction and normal velocity across the surface and no mass transfer between the two domains

$$\begin{aligned} &\mathbf{v}_F.\mathbf{n} = \mathbf{v}_S.\mathbf{n} \\ &\Sigma_i.\mathbf{n} = S_T.\mathbf{n}, \end{aligned} \tag{12}$$

where $\mathbf{n}$ is the outer unit normal vector of the solid-fluid boundary Γ_{FS}.

2.5 Initial conditions: hydrostatic equilibrium

In order to close the system one should finally provide initial conditions. At the initial time we require hydrodynamic equilibrium, that is, no temporal variation of the initial atmospheric background, in order to prevent from possible extra spurious wave sources due to atmospheric instabilities. We thus focus on models that meet the following requirements

(i) Stratified models (no lateral spatial variations of atmospheric properties),
(ii) No initial vertical velocity field.

At the initial time, from eq. (1), constitutive equations then read:

$$\begin{aligned} \partial_z(\mu \partial_z v_{F,x}) &= 0 \\ \partial_z p &= -\rho g_z \\ \partial_z(\kappa \partial_z T) &= 0 \end{aligned} \tag{13}$$

Eq. (13) shows that any set of initial horizontal velocity field $v_{F,\,x}$ and if the viscosity tensor is diagonal (i.e. if one considers no shear viscosity μ but only bulk viscosity profiles η_V) and has no lateral variations is compatible with the hydrodynamic equilibrium. Also, eq. (13)-3 requires one to consider an adiabatic atmosphere with constant thermal conductivity or an isothermal atmosphere.

3 NUMERICAL METHOD

3.1 Discretization of Navier–Stokes and elastodynamics equations

We consider two numerical methods in order to solve the problem: The DG method to compute the numerical solution in the fluid domain and the continuous Galerkin method (CG), in its spectral form, in the solid domain. We implemented the DG method in the open-source SPECFEM2D software package (Komatitsch & Tromp 1999; Chaljub *et al.* 2007). Other authors have already investigated coupled continuous–discontinuous Galerkin methods for multi-phase flows (Landet *et al.* 2015), coupled Navier–Stokes and Darcy equations (Dawson 2008), fluid-structure interactions (Chidyagwai & Rivière 2010) or acousto-elastic waves (Ye *et al.* 2016), but the coupled Navier–Stokes and elastodynamics equations for acoustic and gravity wave propagation have not been implemented yet to the best of our knowledge.

3.1.1 Fluid domain: discontinuous spectral-element method

The fluid interior domain is discretized using the DG method (Kopriva *et al.* 2002; Kopriva 2006; Hesthaven & Warburton 2007). In order to construct the global approximation we decompose the domain Ω into non-overlapping curvilinear mesh elements such that,

$$\Omega_F = \cup_{k=1}^{N_e} \Omega_F^k, \tag{14}$$

where N_e is the number of elements and Ω_F^k a curvilinear mesh element with $\partial\Omega_F^k$ its boundary. We also define the 2-D reference element $I = [-1, 1]^2$ and introduce for each element $(\Omega_F^k)_{k=1,N_e}$ a smooth, bijective transformation $\mathcal{F}_{\Omega_F^k}(I) = \Omega_F^k$ (this assumes that the Jacobian of the mesh transformation is never singular which is a required condition when building a good-quality mesh). Also, for the sake of simplicity and for consistency with the continuous spectral-element method used in the solid domain, we will assume that the mesh is geometrically conforming. The transformation $\mathcal{F}_{\Omega_F^k}$ needs to be approximated by a polynomial mapping based on a set of N_c control nodes. For generic vectors Ψ and $\mathbf{Q}_k$ that lie, respectively, in I and Ω_F^k this mapping writes

$$\mathbf{Q}_k = \Psi \circ \mathcal{F}_{\Omega_F^k}^{-1}. \tag{15}$$

We introduce the set of Gauss–Lobatto–Legendre (GLL) points and then define a basis of $\mathcal{P}_N$ by considering the Lagrange interpolants $(h_i^N)_{i=1,N+1}$ at the GLL points, that is, the $N+1$ polynomials of order N that satisfy, $\forall(i, j) \in [1, N+1]^2$

$$h_i^N(\zeta_j) = \delta_{ij}. \tag{16}$$

In 2-D we define the Lagrange interpolants as $h_{ij}^N(\zeta) = h_i^N(\xi)h_j^N(\eta)$, where $\zeta = (\xi, \eta)$ is the generic coordinate vector associated with the reference element. We can now construct a polynomial basis $(\Psi_{ij})_{i=1,N+1;\, j=1,N+1}$ such that

$$\Psi_{ij} = h_{ij}^N, \quad i = 1, N+1 \quad j = 1, N+1. \tag{17}$$

Then, the mapping defined in eq. (15) now writes

$$\mathbf{Q}_k = \Psi \circ \mathcal{F}_{\Omega_F^k}^{-1} \approx \sum_{i=1}^{N+1}\sum_{j=1}^{N+1} \mathbf{Q}_k(\mathbf{x}_{ij})\Psi_{ij}\left(\mathcal{F}_{\Omega_F^k}^{-1}\left(\mathbf{x}_{ij}\right)\right), \tag{18}$$

where $\mathbf{x}_{ij} = \mathcal{F}_{\Omega_F^k}(\zeta_{ij}) \in \Omega_F^k$, $i, j = 1, N+1$ are the control nodes coordinates.

We finally introduce the polynomial space for discretization $V_k = \{\Phi \in \mathbb{L}^2(\Omega_F) \cap \mathbb{H}^1(\Omega_F^k) : \Phi|_{\Omega_F^k} = \Psi \circ \mathcal{F}_{\Omega_F^k}^{-1}$, with $\Psi \in \mathcal{P}_N$, $k = 1, N_e\}$.

We numerically solve the system (1) for variables $\mathbf{Q} \in V_k^4$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \rho \\ m_x = \rho v_x \\ m_z = \rho v_z \\ E = \rho e \end{pmatrix}, \tag{19}$$

with the momentum vector $\mathbf{m}$ that reads $\mathbf{m} = (m_x, m_z)$. By multiplication of eq. (1) with a test function $\Phi \in V_k$ and after integration over an element Ω_F^k, we obtain

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_F^k} \partial_t \rho \Phi \mathrm{d}\Omega_k &= -\int_{\Omega_F^k} \nabla.(\rho \mathbf{v}_F)\Phi \mathrm{d}\Omega_k + \int_{\Omega_F^k} f_\rho \Phi \mathrm{d}\Omega_k, \\
\int_{\Omega_F^k} \partial_t \mathbf{m} \Phi \mathrm{d}\Omega_k &= -\int_{\Omega_F^k} \nabla.\Sigma_i \Phi \mathrm{d}\Omega_k + \int_{\Omega_F^k} \nabla.\Sigma_v \Phi \mathrm{d}\Omega_k + \int_{\Omega_F^k} \rho \mathbf{g} \Phi \mathrm{d}\Omega_k + \int_{\Omega_F^k} \mathbf{f}_v \Phi \mathrm{d}\Omega_k, \\
\int_{\Omega_F^k} \partial_t E \Phi \mathrm{d}\Omega_k &= -\int_{\Omega_F^k} \nabla.(\{\rho e + p\}\mathbf{v}_F)\Phi \mathrm{d}\Omega_k + \int_{\Omega_F^k} \nabla.\sigma_e \Phi \mathrm{d}\Omega_k + \int_{\Omega_F^k} \rho \mathbf{g}.\mathbf{v}_F \Phi \mathrm{d}\Omega_k + \int_{\Omega_F^k} f_e \Phi \mathrm{d}\Omega_k.
\end{aligned} \tag{20}$$

Then, by integration by parts,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_F^k} \partial_t \rho \Phi \mathrm{d}\Omega_k &= \int_{\Omega_F^k} \rho \mathbf{v}_F.\nabla \Phi \mathrm{d}\Omega_k - \int_{\partial\Omega_F^k} \rho \mathbf{v}_F.\mathbf{n} \Phi \mathrm{d}\Gamma_k + \int_{\Omega_F^k} f_\rho \Phi \mathrm{d}\Omega_k, \\
\int_{\Omega_F^k} \partial_t \mathbf{m} \Phi \mathrm{d}\Omega_k &= \int_{\Omega_F^k} \Sigma_i.\nabla \Phi \mathrm{d}\Omega_k - \int_{\partial\Omega_F^k} \Sigma_i.\mathbf{n} \Phi \mathrm{d}\Gamma_k - \int_{\Omega_F^k} \Sigma_v.\nabla \Phi \mathrm{d}\Omega_k + \int_{\partial\Omega_F^k} \Sigma_v.\mathbf{n} \Phi \mathrm{d}\Gamma_k + \int_{\Omega_F^k} \rho \mathbf{g} \Phi \mathrm{d}\Omega_k + \int_{\Omega_F^k} \mathbf{f}_v \Phi \mathrm{d}\Omega_k, \\
\int_{\Omega_F^k} \partial_t E \Phi \mathrm{d}\Omega_k &= \int_{\Omega_F^k} \{\rho e + p\}\mathbf{v}_F.\nabla \Phi \mathrm{d}\Omega_k - \int_{\partial\Omega_F^k} \{\rho e + p\}\mathbf{v}_F.\mathbf{n} \Phi \mathrm{d}\Gamma_k - \int_{\Omega_F^k} \sigma_e.\nabla \Phi \mathrm{d}\Omega_k + \int_{\partial\Omega_F^k} \sigma_e.\mathbf{n} \Phi \mathrm{d}\Gamma_k \\
&\quad + \int_{\Omega_F^k} \rho \mathbf{g}.\mathbf{v}_F \Phi \mathrm{d}\Omega_k + \int_{\Omega_F^k} f_e \Phi d\Omega_k.
\end{aligned} \tag{21}$$

This can be written in terms of fluxes as

$$\int_{\Omega_F^k} \partial_t \mathbf{Q} \mathrm{d}\Omega_k = \int_{\Omega_F^k} F_i(\mathbf{Q}).\nabla \Phi \mathrm{d}\Omega_k - \int_{\partial\Omega_F^k} F_i^*(\mathbf{Q}).\mathbf{n} \Phi \mathrm{d}\Gamma_k + \int_{\Omega_F^k} F_v(\mathbf{Q}).\nabla \Phi \mathrm{d}\Omega_k - \int_{\partial\Omega_F^k} F_v^*(\mathbf{Q}).\mathbf{n} \Phi \mathrm{d}\Gamma_k + \int_{\Omega_F^k} \mathbf{G} \Phi \mathrm{d}\Omega_k + \int_{\Omega_F^k} \mathbf{f}_F \Phi \mathrm{d}\Omega_k, \tag{22}$$

where

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho g_z \\ \rho g_z v_{F,z} \end{pmatrix} \quad \mathbf{f}_F = \begin{pmatrix} f_\rho \\ f_{v_x} \\ f_{v_z} \\ f_e \end{pmatrix} \quad F_i = \begin{pmatrix} \rho v_{F,x} & \rho v_{F,z} \\ \rho v_{F,x}^2 + p & \rho v_{F,x} v_{F,z} \\ \rho v_{F,x} v_{F,z} & \rho v_{F,z}^2 + p \\ (\rho e + p) v_x & (\rho e + p) v_z \end{pmatrix} \tag{23}$$

and

$$F_v = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \left(\eta_V - \frac{2}{3}\mu\right) \nabla.\mathbf{v}_F & \mu(\partial_x v_{F,z} + \partial_z v_{F,x}) \\ \mu(\partial_x v_{F,z} + \partial_z v_{F,x}) & (\eta_V - \frac{2}{3}\mu)\nabla.\mathbf{v}_F \\ v_{F,x}\left(\eta_V - \frac{2}{3}\mu\right) \nabla.\mathbf{v}_F + v_{F,z}\mu(\partial_x v_{F,z} + \partial_z v_{F,x}) + \kappa \partial_x T & v_{F,x}\mu\left(\partial_x v_{F,z} + \partial_z v_{F,x}\right) + v_{F,z}\left(\eta_V - \frac{2}{3}\mu\right) \nabla.\mathbf{v}_F) + \kappa \partial_z T \end{pmatrix}. \tag{24}$$

F_i^* and F_v^* denote the value of inviscid and viscous fluxes at the boundary.

Coupling between neighbouring elements is recovered by the interface flux F^* using the Lax-Friedrich approximation. This approach, even though slightly more dissipative than other techniques (e.g. Roe fluxes), works well for both subsonic and super-sonic wave propagation (Hesthaven & Warburton 2007). It reads, for any unknown $q_k \in V_k$ and element Ω_F^k

$$\int_{\partial\Omega_F^k} F^*.\mathbf{n} \mathrm{d}\Gamma_k \approx \int_{\partial\Omega_F^k} \left(\overline{F(q_k)}.\mathbf{n} - \frac{1}{2}\lambda[q_k] \right) \mathrm{d}\Gamma_k, \tag{25}$$

where $\overline{F(q_k)} = \frac{1}{2}(F(q_k^+) + F(q_k^-))$ is the average mean, $[q_k] = (q_k^+ - q_k^-)$ is the jump, and λ is the approximate local maximum linearized acoustic wave speed that reads

$$\lambda = \max_{s\in\{x^-,x^+\}} \left(||\mathbf{v}_F(s)|| + \sqrt{\left|\frac{\gamma p(s)}{\rho(s)}\right|} \right). \tag{26}$$

The '$-$' and '$+$' notations denote the interior and exterior states, and x^-, x^+ are the interior and exterior location along the element boundary Γ_k. Another technique is implemented for viscous terms: following Bassi & Rebay (1997) we use a local DG method. Instead of applying Galerkin identities to temperature and velocity gradients in viscous fluxes F_v in eq. (23), that method consists in using a two-step approach: first we introduce auxiliary variables by defining vector $\mathcal{T}$ and tensor $\mathcal{V}$ as

$$\mathcal{T} = \nabla T; \quad \mathcal{V} = \nabla \mathbf{v}_F. \tag{27}$$

By multiplication of eq. (27) with a test function $\Phi \in V_k^2$ and after integration by parts over an element Ω_F^k one obtains, for the temperature,

$$\int_{\Omega_F^k} \mathcal{T}.\Psi \mathrm{d}\Omega_F^k = \int_{\Omega_F^k} \nabla T.\Psi \mathrm{d}\Omega_F^k = -\int_{\Omega_F^k} T\nabla.\Psi \mathrm{d}\Omega_F^k + \int_{\partial\Omega_F^k} T\Psi.\mathbf{n} \mathrm{d}\Gamma_k, \tag{28}$$

The same holds for the fluid velocity $\mathbf{v}_F$. Note that for viscous numerical fluxes, that do not represent wave propagation, we only take the average between left and right state at the boundary.

Next, after solving eq. (28), it consists in injecting $\mathcal{T}$ and $\mathcal{V}$ in viscous fluxes from eq. (24).

Finally, we use a classical total variation diminishing limiting technique called 'MUSCL' (Monotone Upstream-centred Scheme for Conservation Laws, refer to e.g. LeVeque 2002) in order to avoid spurious oscillations coming from shock propagation (details in Section 3.4).

3.1.2 Solid domain: continuous spectral-element method

We use, in the solid part, a classical continuous Galerkin SEM (e.g. Chaljub *et al.* 2007) with the same polynomial space V_h as in the fluid domain. Let us only recall here the main discretized equations. From eq. (9), by multiplication with a test function $\Phi \in V_h$ and after integration over the domain Ω_S, one obtains

$$\int_{\Omega_S} \rho_S \partial_t \mathbf{v}_S \Phi \mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega_S} \nabla.S\Phi \mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega_S} \mathbf{f}_S \Phi \mathrm{d}\Omega. \tag{29}$$

By integration by parts one obtains

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_S} \rho_S \partial_t \mathbf{v}_S \Phi \mathrm{d}\Omega &= -\int_{\Omega_S} S.\nabla\Phi \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_S} S.\mathbf{n}\Phi \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Omega_S} \mathbf{f}_S \Phi \mathrm{d}\Omega \\ &= -\int_{\Omega_S} S.\nabla\Phi \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_{FS}} S.\mathbf{n}\Phi \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_{S,\mathrm{ext}}} S.\mathbf{n}\Phi \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Omega_S} \mathbf{f}_S \Phi \mathrm{d}\Omega. \end{aligned} \tag{30}$$

We enforce rigid boundary conditions at the exterior solid boundaries $\Gamma_{S,\,\mathrm{ext}}$:

$$\int_{\Omega_S} \rho_S \partial_t \mathbf{v}_S \Phi \mathrm{d}\Omega = -\int_{\Omega_S} S.\nabla\Phi \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_{FS}} S.\mathbf{n}\Phi \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Omega_S} \mathbf{f}_S \Phi \mathrm{d}\Omega. \tag{31}$$

Note that the memory variable equation (10)-2 is a simple ODE that will be only updated in time and does not require a Galerkin discretization.

3.2 Fluid–solid interfaces

The strategy to take into account the coupling between the Earth and the atmosphere consists in imposing perturbations of traction and velocity on both sides of the interface using boundary integrals. The coupling strategy from the solid to the fluid requires a few more steps than from the fluid to the solid because one needs to constrain the energy and the tangential velocity at the boundary.

3.2.1 Fluid to solid

The treatment of mechanical boundary conditions is similar to that in Komatitsch *et al.* (2000) and consists in imposing the stress at the boundary, as described in eq. (12), such that

$$\int_{\Gamma_{FS}} S_T.\mathbf{n}\Phi \mathrm{d}\Gamma = \int_{\Gamma_{FS}} (-\Sigma_i + \Sigma_v).\mathbf{n}\Phi \mathrm{d}\Gamma. \tag{32}$$

We recall that in the solid medium we solve only for linear perturbation and thus we recast eq. (31) in terms of perturbations

$$\int_{\Gamma_{FS}} S.\mathbf{n}\Phi \mathrm{d}\Gamma = \int_{\Gamma_{FS}} (-\Sigma_{1,i} + \Sigma_{1,v}).\mathbf{n}\Phi \mathrm{d}\Gamma. \tag{33}$$

The whole solid system (10) thus reads,

$$\int_{\Omega_S} \rho_S \partial_t \mathbf{v}_S \Phi \mathrm{d}\Omega = -\int_{\Omega_S} S.\nabla\Phi \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_{FS}} (-\Sigma_{1,i} + \Sigma_{1,v}).\mathbf{n}\Phi \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Omega_S} \mathbf{f}\Phi \mathrm{d}\Omega. \tag{34}$$

3.2.2 Solid to fluid

At the solid-fluid boundary one needs to enforce mass, momentum and energy fluxes in eq. (21) from the boundary conditions specified in eq. (12). Note that this boundary condition involves the whole velocity and pressure fields, but as the equations in the solid medium will be solved in terms of small perturbations, we need to specify the conditions upon those perturbations. As long as the propagation in the fluid and close to the surface is linear we can also rely on the perturbation method near the fluid-solid interface. We thus split the fluid fields in mean and perturbation as

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_F &= \mathbf{v}_{0,F} + \mathbf{v}_{1,F} \\ \Sigma_i &= \Sigma_{0,i} + \Sigma_{1,i}. \end{aligned} \tag{35}$$

We also consider the total fluid stress tensor $\Sigma_T = \Sigma_{0,\,T} + \Sigma_{1,\,T}$ as

$$\begin{aligned} \Sigma_T &= -\Sigma_i + \Sigma_v \\ \Sigma_{0,T} &= -\Sigma_{0,i} + \Sigma_{0,v}. \end{aligned} \tag{36}$$

With these notations the condition (12) reads

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_F.\mathbf{n} &= \mathbf{v}_S.\mathbf{n} \\ \Sigma_T &= (\Sigma_{0,T} + \Sigma_{1,T}).\mathbf{n} = (S_0 + S).\mathbf{n}. \end{aligned} \tag{37}$$

The system being at equilibrium at the initial time, there is no initial velocity field in the solid medium ($\mathbf{v}_{0,S} = \mathbf{0}$) and tractions are balanced between the fluid and solid media ($\Sigma_{0,T}.\mathbf{n} = S_0.\mathbf{n}$). We also consider no fluid velocity field at the initial time near the fluid-solid interface, that is, near $\Gamma_{FS}\mathbf{v}_F = \mathbf{v}_{1,F}$. Therefore,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_F.\mathbf{n} &= \mathbf{v}_S.\mathbf{n} \\ \Sigma_{1,T}.\mathbf{n} &= S.\mathbf{n}. \end{aligned} \tag{38}$$

The mass flux on the fluid-solid boundary Γ_{FS} is straightforward to enforce because there is no mass transfer between the media and thus

$$(\rho \mathbf{v}_F.\mathbf{n})|_{\Gamma_{FS}} = (\rho \mathbf{v}_S.\mathbf{n})|_{\Gamma_{FS}} \tag{39}$$

The momentum fluxes will be enforced using the continuity of the traction across the boundary such that, from eq. (37),

$$(\Sigma_T.\mathbf{n})|_{\Gamma_{FS}} = (S_0 + S).\mathbf{n}|_{\Gamma_{FS}} = (\Sigma_{0,T} + S).\mathbf{n}\big|_{\Gamma_{FS}}. \tag{40}$$

From the condition (12) it is possible to determine the velocity at the boundary such that,

$$\mathbf{v}_{F,NT} = A\mathbf{v}_F \Leftrightarrow A^{-1}\mathbf{v}_{NT} = \mathbf{v}_F, \tag{41}$$

where $\mathbf{v}_{F,NT}$ is the fluid velocity projected on the normal $\mathbf{n}$ and tangential $\mathbf{t}$ directions along the boundary. A is the transformation matrix between Cartesian coordinates and fluid-solid interface coordinates

$$A = \begin{pmatrix} n_x & n_z \\ t_x & t_z \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{n_x t_z - t_x n_z}\begin{pmatrix} t_z & -n_z \\ -t_x & n_x \end{pmatrix}. \tag{42}$$

The normal-tangential velocity vector is given by the boundary condition such that

$$\mathbf{v}_{F,NT} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_S.\mathbf{n} \\ \mathbf{v}_F.\mathbf{t} \end{pmatrix}_{NT}. \tag{43}$$

Finally, for the energy flux we need to find a value for the pressure perturbation at the interface. Indeed, at the boundary the energy flux reads

$$\{(\rho e + p)\mathbf{v}_F + \sigma_e\}.\mathbf{n}|_{\Gamma_{FS}} = \{(\rho e + p)\mathbf{v}_F + \Sigma_v.\mathbf{v}_F + \kappa\nabla T\}.\mathbf{n}|_{\Gamma_{FS}}. \tag{44}$$

Since at the fluid-solid interface the temperature is continuous and as the heat flux is negligible under the assumptions made for the solid medium in Section 2 we will neglect the heat flux at the boundary $\nabla T|_{\Gamma_{FS}} = 0$, eq. (44) reads

$$\{(\rho e + p)\mathbf{v}_F + \Sigma_v.\mathbf{v}_F + \kappa\nabla T\}.\mathbf{n}|_{\Gamma_{FS}} = \{(\rho e + p)\mathbf{v}_F + \Sigma_v.\mathbf{v}_F\}.\mathbf{n}|_{\Gamma_{FS}}. \tag{45}$$

Expanding the total energy in terms of pressure, density and velocity, one has

$$\begin{aligned}\{(\rho e + p)\mathbf{v}_F + \Sigma_v.\mathbf{v}_F + \kappa\nabla T\}.\mathbf{n}|_{\Gamma_{FS}} &= \left\{\left(\frac{p}{\gamma - 1} + \frac{\rho}{2}||\mathbf{v}_F||^2 + p\right)\mathbf{v}_S.\mathbf{n} + (\Sigma_v.\mathbf{v}_F).\mathbf{n}\right\}\Big|_{\Gamma_{FS}} \\ &= \left\{\left(\frac{\gamma}{\gamma - 1}p + \frac{\rho}{2}||\mathbf{v}_{F,NT}||^2\right)\mathbf{v}_S.\mathbf{n} + (\Sigma_v.\mathbf{v}_F).\mathbf{n}\right\}\Big|_{\Gamma_{FS}}.\end{aligned} \tag{46}$$

The only remaining unknown is the pressure, which we will enforce with the continuity of the traction. We first define the nonlinear stress tensor $\tilde{\Sigma}_i$

$$\tilde{\Sigma}_i = \rho\begin{pmatrix} v_{F,x}^2 & v_{F,x}v_{F,z} \\ v_{F,x}v_{F,z} & v_{F,z}^2 \end{pmatrix}. \tag{47}$$

Using the notation defined in eq. (47), the total stress tensor now reads: $\Sigma_i = p\mathbf{I} + \tilde{\Sigma}_i$. Then, from eq. (37)

$$\begin{aligned}\Sigma_T.\mathbf{n} &= (\Sigma_{0,T} - \Sigma_{1,i} + \Sigma_{1,v}).\mathbf{n} = (S_0 + S).\mathbf{n} \\ -\Sigma_{1,i}.\mathbf{n} &= (S - \Sigma_{1,v}).\mathbf{n} \\ (p_1\mathbf{I} + \tilde{\Sigma}_{1,i}).\mathbf{n} &= (-S + \Sigma_{1,v}).\mathbf{n} \\ p_1\mathbf{n} &= (-S - \tilde{\Sigma}_{1,i} + \Sigma_{1,v}).\mathbf{n} \\ \mathbf{n}^T.(p_1\mathbf{n}) &= \mathbf{n}^T.(-S - \tilde{\Sigma}_{1,i} + \Sigma_{1,v}).\mathbf{n} \\ p_1 &= \mathbf{n}^T.(-S - \tilde{\Sigma}_{1,i} + \Sigma_{1,v}).\mathbf{n}.\end{aligned} \tag{48}$$

Note that the viscous and nonlinear stress tensor Σ_v and $\tilde{\Sigma}_{1,i}$ are known at the boundary Γ_{FS} since they only depend on the fluid velocity $\mathbf{v}_F$, which is known from eq. (43).

Numerically, we impose weakly these boundary conditions in the DG formulation (22). As the propagation within the solid medium is linear we remove the jump across the interface in eq. (25) such that

$$\int_{\partial\Omega_F^k\cap\Gamma_{FS}} F^*.\mathbf{n}\mathrm{d}\Gamma_k = \int_{\partial\Omega_F^k\cap\Gamma_{FS}} \frac{1}{2}(F|_{FS^-} + F|_{FS^+}).\mathbf{n}\mathrm{d}\Gamma_k, \tag{49}$$

where $F|_{FS}^-$ is the flux at the fluid-solid boundary prescribed from the solid medium by eqs (39)–(40)–(47)–(48) and $F|_{FS}^+$ is the interior flux at the fluid-solid boundary coming from the fluid domain.

3.3 Time discretization

In order to march the solution in time with a certain level of accuracy and enforce the Total Variation Diminishing (TVD) property (Hesthaven & Warburton 2007) we use a fifth-order strong stability preserving Runge–Kutta scheme (Spiteri & Ruuth 2002) that reads, for any constitutive variable $\mathbf{v}$

$$\begin{cases} \mathbf{v}^{(0)} = 0;\ \tilde{\mathbf{v}}^{(0)} = 0, \\ \tilde{\mathbf{v}}^{(i)} = \alpha_i \tilde{\mathbf{v}}^{(i-1)} + \Delta t \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{v}}^{(i-1)}), \\ \mathbf{v}^{(i)} = \mathbf{v}^{(i-1)} + \beta_i \tilde{\mathbf{v}}^{(i)}, \\ \mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^{(5)}. \end{cases} \tag{50}$$

with $\tilde{\mathbf{v}}$ an auxiliary variable and coefficients $(\alpha_i)_{i=1,5}$ and $(\beta_i)_{i=1,5}$ read

$$\begin{cases} i & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \alpha_i & = 0 & -0.418 & -1.1922 & -1.6978 & -1.5142 \\ \beta_i & = 0.1497 & 0.3792 & 0.823 & 0.6995 & 0.1531 \end{cases}, \tag{51}$$

where $\mathcal{L}$ denotes the Navier–Stokes and elastodynamics operators and Δt the time step.

3.4 Slope-limiting procedure

Let us quickly recall the formulation of the solutions at the interfaces given by the slope-limiting procedure in a 1-D case. The reader can refer to Hesthaven & Warburton (2007) for more details. We first define the minmod function m as

$$m(a_1, a_2, a_3) = \begin{cases} s * \min_{1\leq i\leq 3} |a_i|, & |s| = 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}, \tag{52}$$

with $s = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{m} \text{sign}(a_i)$. This minmod function defined in eq. (52) is zero except if the three arguments have the same sign. In this case, the function will return the smallest of the three arguments with the sign defined by s. If the three arguments are taken as the slope of the solution in neighbouring elements, the minmod function will be zero when the signs of the slopes are not the same (different signs indicate that there is an oscillation), and otherwise return the smallest slope. The minmod function acts as a problem identifier and also a slope limiter. From the minmod function we define interface fluxes as

$$\begin{aligned} v_l^k &= \overline{u}_h^k - m\left(\overline{u}_h^k - u_l^k, \overline{u}_h^k - \overline{u}_h^{k-1}, \overline{u}_h^{k+1} - \overline{u}_h^k\right), \\ v_r^k &= \overline{u}_h^k - m\left(u_r^k - \overline{u}_h^k, \overline{u}_h^k - \overline{u}_h^{k-1}, \overline{u}_h^{k+1} - \overline{u}_h^k\right), \end{aligned} \tag{53}$$

where v_l^k and v_r^k are left and right interface solutions that respect the Total Variation Diminishing in the Mean (TVDM, e.g. in Chapter 5 in Hesthaven & Warburton 2007) properties, u_h^k is the discretized solution at element k, $\overline{u}_h^k$ the mean of solution u_h^k on the element k, u_l^k and u_r^k the left and right values of the solution and h is the distance between the centre of two neighbouring elements. For sufficiently small time steps Δt these solutions satisfy the TVDM properties. Considering a first-order slope limiter one assumes that the solution reads

$$u_h^k(x) = \overline{u}_h^k + \left(x - x_0^k\right) \partial_x u_h^k, \tag{54}$$

where x_0 is the location of the centre of element k. Then, in order to satisfy eq. (53) on the interfaces one defines the first-order slope limited solution as

$$\Pi_1 u_h^k(x) = \overline{u}_h^k + \left(x - x_0^k\right) m\left(\partial_x u_h^k, \frac{\overline{u}_h^k - \overline{u}_h^{k-1}}{h/2}, \frac{\overline{u}_h^{k+1} - \overline{u}_h^k}{h/2}\right). \tag{55}$$

In our case we consider a more stable but dissipative approach given by the classic MUSCL limiter (LeVeque 2002) that writes

$$\Pi_1 u_h^k(x) = \overline{u}_h^k + \left(x - x_0^k\right) m\left(\partial_x u_h^k, \frac{\overline{u}_h^k - \overline{u}_h^{k-1}}{h}, \frac{\overline{u}_h^{k+1} - \overline{u}_h^k}{h}\right). \tag{56}$$

In addition to avoid applying the slope limiter and in order to prevent from applying the limiting (but numerically dissipative) procedure in smooth regions, in which we would then lose accuracy, we apply the following procedure:

(1) Compute interface values (v_l^k, v_r^k) of the solution following eq. (53),

(2.a) If we have $(v_l^k, v_r^k) \approx (u_h^k(x_l^k), u_h^k(x_r^k))$ then there is no need for limiting the solution (This is strictly equal because it is dependent on the numerical scheme accuracy),

(2.b) Otherwise, we break the TVDM property and then limit the solution using eq. (56) and thus replacing $u_h^k(x)$ by its limited value $\Pi_1 u_h^k(x)$.

Table 2. Constant parameters of the isothermal model: from left to right, surface density, scale height, gravity, sound speed, square of the Brunt-Väisälä frequency, acoustic cut-off angular frequency, ratio of heat capacities, and temperature. We use a constant molar mass of 28.96 g mol^{-1}.

	ρ_0 (kg m^{-3})	H (km)	g_z (m s^{-2})	c (m s^{-1})	N^2 ($\frac{\text{rad}^2}{s^2}$)	w_c (rad s^{-1})	γ (no unit)	T (°K)
Model 1	1	8.417	9.81	340	3.3×10^{-4}	0.0202	1.4	287.5
Model 2	0.4	29	9.831	631	10^{-4}	0.011	1.4	1000

Finally, to reduce the loss of accuracy around local extrema we modify the minmod function following Shu (1987) as

$$\overline{m}(a_1, a_2, a_3) = m(a_1, a_2 + Mh^2 \,\text{sign}\,(a_2), a_3 + Mh^2 \,\text{sign}\,(a_3)). \tag{57}$$

where M is a constant that represents the upper bound of the second derivative at the local extrema. This constant M can be hard to select in practice because too small values gives the classical minmod function, while too large values reintroduce the oscillations that have been removed by the slope limiter. Based on empirical tests not shown here we set $M = 0.05$.

4 BENCHMARK CASES AND APPLICATIONS TO ACOUSTIC AND GRAVITY WAVES

Let us first validate our DG method against finite-difference solutions already validated and published in Brissaud *et al.* (2016). By doing so we can validate simulations in complex atmospheric cases even though no analytical solutions are available. That finite-difference code is based on a linear approach with a small perturbation approximation and thus will be useful only for smooth background conditions and low amplitude waves. However it takes into account gravity, attenuation and horizontal wind variations with altitude. We thus use this validation process only for linear solutions in a domain without any coupling with the Earth nor topography since the finite-difference code does not account for these issues. Finally, we added in Appendices A and B other benchmark test results of typical fluid dynamics problems produced by our modelling tool.

4.1 Atmosphere and Earth physical models

Let us simulate wave propagation in several atmosphere models. We will design an isothermal model to test the stability of the calculations relative to the exponential density decrease in the atmosphere. We will then build a more realistic model coming from empirical data with only vertical variations of the parameters.

4.1.1 Isothermal model

We first create a model where air density and pressure decrease exponentially with a constant scale height, all other parameters being constant. The values of these parameters are representative of those observed in the low-atmosphere ('Model 1') and the thermosphere ('Model 2') and are summarized in Table 2. The model is built assuming an ideal gas in hydrostatic equilibrium at constant temperature (Nappo 2002) and thus satisfies the hydrostatic equilibrium eqs (13).

4.1.2 Realistic atmosphere model

In order to verify the stability of our calculations relative to realistic vertical variations of atmospheric parameters, we create a model that exhibits only vertical variations of the bulk viscosity profile that is extracted from the MSISE-00 atmosphere model (Picone *et al.* 2002), and from the HWM93 atmospheric wind model (Hedin 1991). The thermodynamic properties of the atmospheric compounds are taken from the NIST web-book data base (Linstrom & Mallard 2015, http://webbook.nist.gov/chemistry, retrieved 31 May 2017). We extracted a vertical viscosity and wind profile for conditions corresponding to a surface point at latitude 36.5°, longitude 158.7° at 7:47:40 UTC on March 11, 2011. This space and time location corresponds to the coordinates of the crossing between the post-seismic infrasonic waves generated by the Tohoku earthquake in Japan and the GOCE satellite (Garcia *et al.* 2013).

We still face three limitations in the construction of atmosphere models. First, when one considers a coupled solid-atmosphere simulation with a non-flat topography, and if the initial horizontal atmosphere velocity field is non-zero at the boundary, the wind acts as a constant force against the solid medium and continuously generates seismic waves. This happens because we do not build a proper boundary layer at the fluid-solid interface. Second, since realistic models, as the MSISE−00 model, are empirical models they do not honour hydrostatic constrains at initial time specified in Section 2.5. This means that a filtering procedure is required on the initial density field to avoid generating instabilities. Then, from eq. (13) the density at the initial time must verify

$$\rho = \frac{\partial_z p}{g_z}. \tag{58}$$

With the initial pressure field provided by the empirical atmosphere model we then compute a new density profile that honours the hydrostatic equilibrium. This works well for low altitude simulations but gives very low densities that are close to the numerical scheme error at altitudes

Table 3. Simulation parameters corresponding to Model 2 from Section 4.1.1 for Simulation 4.2, that is, the case of a plane-wave 'high-frequency' forcing in a viscous atmosphere with exponentially decaying density.

$L_x \times L_z$ (km)	Δx (m)	Δt (s)	ρ (kg m^{-3})	c (m s^{-1})	μ (kg m^{-1} s^{-1})	κ (W K^{-1} m^{-1})	g_z (m s^{-2})	$v_{F,x}$ (m s^{-1})
1×280	100	5.10^{-3}	Varying	631	3/4	0	9.831	0

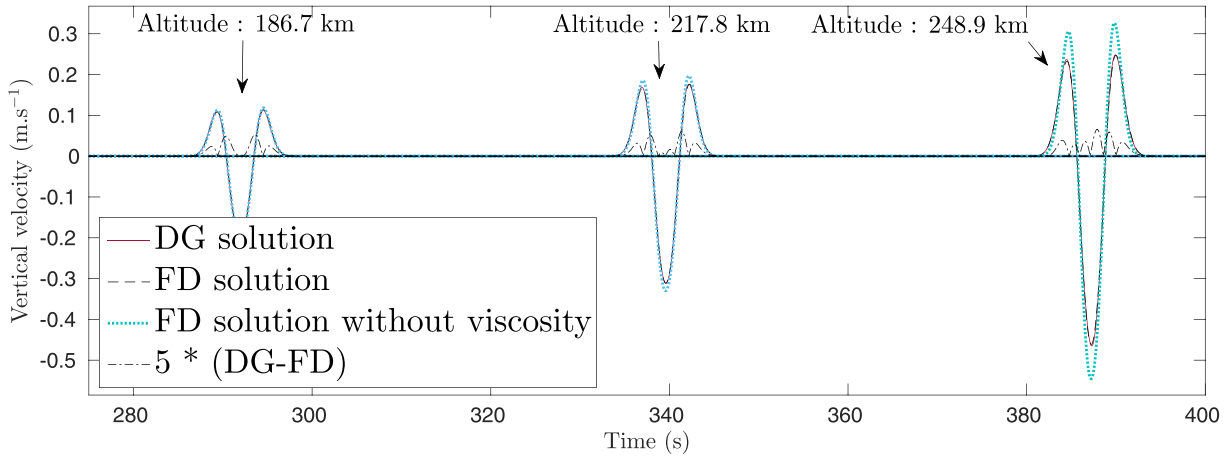

Figure 1. Vertical velocity for the finite-difference solution ('FD solution') and without viscosity ('FD solution without viscosity') and the discontinuous Galerkin solution ('DG solution') as well as the difference between the two multiplied by a factor 5 ('5*(DG-FD)'). The signals are shown through time for Simulation 4.2, that is, the case of a plane-wave 'high-frequency' forcing in a viscous atmosphere with exponentially decaying density. The comparison is shown at the three recording stations located at the same $x = 0.3$ km, their position along z being, from left to right, $z = 186.7$, 217.8 and 248.9 km. The atmosphere is considered isothermal (Table 3).

above 150 km, which leads to instabilities. These two points should be investigated in more details in future work. Finally, as one can note in eq. (13), if there is an initial horizontal velocity field, in order to get hydrostatic equilibrium at the initial time, the shear viscosity and thermal conductivity must be constants or 'compensate' the vertical variations of the initial velocity. Thus, we will only consider the diagonal elements of the viscous stress tensor Σ_v in eq. (1). The MSISE-00 model provides the thermal conductivity, from which we compute the bulk viscosity (that accounts for thermal relaxation). Thermal effects being taken into account by the bulk viscosity, we will thus take in this case $\kappa = 0$.

4.2 Plane-wave 'high-frequency' forcing in a viscous atmosphere with exponentially decaying density

The first validation concerns attenuation processes (both volume and shear viscosity). We consider a high-frequency spatially uniform forcing, $\forall \mathbf{x} \in \Gamma_{FS}$:

$$f(\mathbf{x}, t) = A \left(e^{-\left[\frac{t-(t_0-P_T/4)}{P_T/4}\right]^2} - e^{-\left[\frac{t-(t_0+P_T/4)}{P_T/4}\right]^2} \right), \tag{59}$$

where $P_T = 6$ s is the dominant time period of the forcing signal, $t_0 = 6$ s is the starting forcing time and the forcing amplitude is $A = 0.01$ m s^{-1}. The atmosphere is described by Model 2 in Section 4.1.1 and summarized in Table 3. Let us now compare numerical and analytical particle velocities at several recording stations.

Fig. 1 shows recorded vertical velocity at various altitudes at the same x location. One notes a good agreement in terms of phase and amplitude between the finite-difference and the DG simulations, with a maximum relative error of less than 5 per cent.

4.3 Bottom 'low-frequency' forcing in an atmosphere with exponentially decaying density

In order to study and validate gravito-acoustic wave propagation and the underlying physical processes, we consider the forcing function, $\forall \mathbf{x} \in \Gamma_{FS}$:

$$f(\mathbf{x}, t) = \left(e^{-\left[\frac{t-(t_0-P_T/4)}{P_T/4}\right]^2} - e^{-\left[\frac{t-(t_0+P_T/4)}{P_T/4}\right]^2} \right) \left(e^{-\frac{x-(x_0-P_S/4)^2}{P_S/4}} - e^{-\frac{x-(x_0+P_S/4)^2}{P_S/4}} \right), \tag{60}$$

where $P_T = 400$ s is the dominant time period of the forcing signal, $P_S = 20$ km is the dominant wavelength along x, $t_0 = 450$ s is the starting forcing time, and $x_0 = 75$ km is the position of the bottom forcing along x. The atmosphere is described by Model 1 in Section 4.1.1 and summarized in Table 4 with Brunt-Väisälä squared frequency $N^2 = 3.3 \times 10^{-4}$ rad^2 s^{-2}. We perform a windy simulation for which we set a

Table 4. Simulation parameters corresponding to Model 1 from Section 4.1.1 for Simulation 4.3, that is, the case of a bottom 'low-frequency' forcing in an atmosphere with exponentially decaying density with a wind duct.

$L_x \times L_z$ (km)	Δx (m)	Δt (s)	ρ (kg m^{-3})	c (m s^{-1})	μ (kg m^{-1} s^{-1})	κ (W K^{-1} m^{-1})	g_z (m s^{-2})	$v_{F,x}$ (m s^{-1})
150 × 37.5	250	10^{-2}	Varying	340	$(3/4)10^{-5}$	0	9.81	Varying

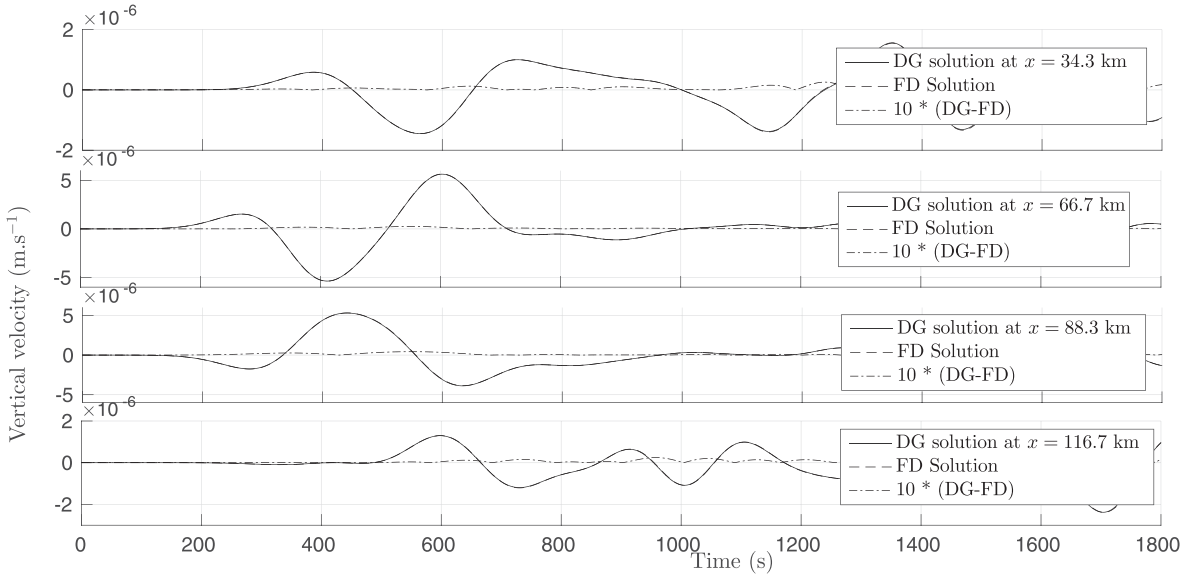

Figure 2. Vertical velocity for the finite-difference ('FD solution') and the discontinuous Galerkin solutions ('DG solution') as well as the difference between the two multiplied by a factor 10 ('10*(DG-FD)'). The signals are shown through time for Simulation 4.3, that is, the case of a bottom 'low-frequency' forcing in an atmosphere with exponentially decaying density with a wind duct. The comparison is shown at the four recording stations located at the same altitude $z = 10$ km, their position along x being, from top to bottom, $x = 34.3$, 66.7, 88.3 and 116.7 km. The atmosphere is considered isothermal (Table 4).

sinusoidal initial background wind as, at $t = 0$

$$v_{F,x}(\mathbf{x}, 0) = 100 \sin\left(\frac{2\pi z}{37500}\right). \tag{61}$$

Let us compare DG and FD particle velocities at several recording stations for a simulation with a strong background wind.

Fig. 2 shows recorded vertical velocity at various locations along the same altitude. One notes a good agreement in terms of phase and amplitude between the finite-difference and DG simulations, with a maximum relative error of less than 2 per cent. One can also note the impact of the Doppler shift on gravity wave propagation: upwind waves have a larger period and larger amplitude than downwind ones. Again, the results show a very good agreement in terms of vertical velocity against the finite-difference solution. Fig. 3 presents snapshots of the DG simulation. A typical feature of gravity wave propagation can be observed: the group and phase velocities are orthogonal.

4.4 Plane wave transmission/reflection from ground to atmosphere

In order to validate the fluid-solid coupling over a hilly terrain, we propagate a plane wave from the solid Earth up to the atmosphere and compare wave amplitudes using the analytical reflection and transmission coefficients.

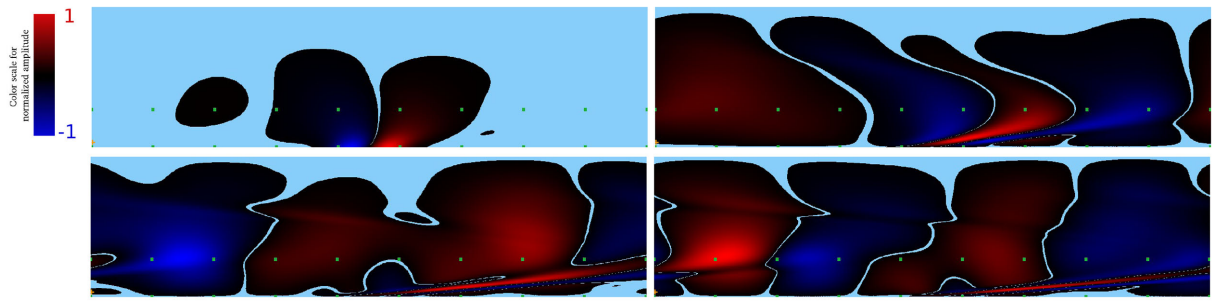

Figure 3. Snapshots of vertical velocity for the discontinuous Galerkin solution for Simulation 4.3, that is, the case of a bottom 'low-frequency' forcing in an atmosphere with exponentially decaying density with a wind duct. Snapshots are shown, on the top, from left to right, at times $t = 400$, 800 and, on the bottom, from left to right, at times $t = 1110$, 1213 s. Red colours indicate positive vertical velocities and blue colours negative ones. The green squares show the location of the recording stations. The atmosphere is considered isothermal (Table 4).

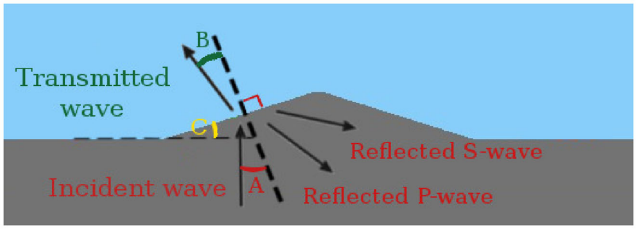

Figure 4. Topography for Simulation 4.4, that is, the case of a plane wave transmission/reflection from ground to atmosphere. Blue corresponds to the fluid medium and grey to the solid medium. A, B and C are respectively the incident and transmitted waves angles, and topography angle. The arrows show the direction of propagation of waves, and the dashed lines are the normal to the surface and the line along the flat terrain.

Table 5. Simulation parameters corresponding to Model 1 from Section 4.1.1 for Simulation 4.4, that is, the case of a plane wave transmission/reflection from ground to atmosphere.

Fluid	$L_x \times L_z$ (km)	Δx (m)	Δt (s)	ρ (kg m^{-3})	c (m s^{-1})	μ (kg m^{-1} s^{-1})	κ (W K^{-1} m^{-1})	g_z (m s^{-2})	$v_{F,x}$ (m s^{-1})
	$6.4 \times 2.4 - h(x)$	89	5.10^{-3}	1	340	0	0	0	0
Solid	$L_x \times L_z$ (km)	Δx (m)	Δt (s)	ρ	$c_{S,p}$	$c_{S,s}$	Q	f_0	–
	$6.4 \times 2.4 + h(x)$	89	5.10^{-3}	2500	3400	1963	0	0	–

To do so we consider a spatially uniform forcing $\mathbf{F}_b = f_b \mathbf{e}_z$ (kg m^{-1} s^{-2}), $\forall x \in \Gamma_S$, $t > 0$

$$f_b(\mathbf{x}, t) = -2\left[\frac{1}{P_T/4}\right]\left[\frac{t-(t_0+P_T/4)}{P_T/4}\right] e^{-\left[\frac{t-(t_0-P_T/4)}{P_T/4}\right]^2} + 2\left[\frac{1}{P_T/4}\right]\left[\frac{t-(t_0+P_T/4)}{P_T/4}\right] e^{-\left[\frac{t-(t_0+P_T/4)}{P_T/4}\right]^2}, \tag{62}$$

where the dominant time period is $P_T = 0.5$ s and the starting time is $t_0 = 0.5$ s. This forcing is introduced as a stress such that from eq. (31)

$$\int_{\Omega_S} \rho_S \partial_t \mathbf{v}_S \Phi \mathrm{d}\Omega = -\int_{\Omega_S} S.\nabla\Phi \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_{FS}} S.\mathbf{n}\Phi \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_S} \mathbf{F}_b.\mathbf{n}\Phi \mathrm{d}\Gamma. \tag{63}$$

We will also consider a triangle-shaped topography h, $\forall x \in \Gamma_S$

$$h(x) = \begin{cases} \frac{h_{\max}}{x_2 - x_1}(x - x_1) & \text{if } x_2 > x >= x_1 \\ \frac{h_{\max}}{x_2 - x_3}(x - x_3) & \text{if } x_3 > x >= x_2 \end{cases}, \tag{64}$$

where $h_{\max} = 500$ m, $x_1 = 1600$ m and $x_2 = 3200$ m. In order to validate the numerical simulations we analytically compute expected amplitudes of transmitted and reflected waves depending on the wave incidence angle.

Fig. 4 shows the incidence wave angle A and transmitted wave angle B relative to the surface inclination. From the angle C, the inclination of the topography, we can easily find the incidence angle A such that $A = C$. Following eq. (64) we find $A = \arctan(\frac{h_{\max}}{x_2 - x_1}) = 0.5586$ rad. Using Snell's law we compute the cosine of angle B as

$$\cos(B) = \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_{S,p}^2} \sin^2 A}, \tag{65}$$

where $c_{S,p}$ is the P-wave velocity in the solid medium. Now, from Aki & Richards (1980), we find velocity transmission T_v and reflexion R_v coefficients as

$$\begin{cases} T_v = \frac{2\rho c_{S,p} \cos A}{\rho_S C_p \cos B + \rho c \cos A} \\ R_v = \frac{\rho c \cos A - \rho_S c_{S,p} \cos B}{\rho_S c_{S,p} \cos B + \rho c \cos A} \end{cases}. \tag{66}$$

Thus for normal incidence ($A = 0$) we obtain $T_v = 1.9999$ and $R_v = 0.9999$ and for oblique incidence ($A = 0.5586$, $\cos(B) = 0.9986$) we get $T_v = 1.6983$.

Let us now compare the amplitude of the numerical solutions to analytical amplitudes using eq. (66) at several recording stations for a simulation in an homogeneous solid and fluid. The atmosphere is described by Model 1 in Section 4.1.1 and summarized in Table 5.

Fig. 5 shows the propagation, at different times, of incident P-wave and reflected P and S waves in the solid as well as acoustic wave fronts in the fluid. One notes normal and oblique plane wave fronts propagating respectively over flat and oblique terrains. We also note spherical waves propagating from the sharp corners of the topography because these ground irregularities act as point sources from the Huygens principle, that is, act as diffraction points. Also, due to the wave speed contrast, waves in the fluid domain have smaller wavelength than in the solid.

Table 6. Simulation parameters corresponding to Model 2 from Section 4.1.1 for Simulation 4.5, that is, the case of the validation of the contact discontinuity for nonlinear acoustic waves: the shock tube test.

$L_x \times L_z$ (km)	Δx (m)	Δt (s)	ρ (kg m^{-3})	c (m s^{-1})	μ (kg m^{-1} s^{-1})	κ (W K^{-1} m^{-1})	g_z (m s^{-2})	$v_{F,x}$ (m s^{-1})
4×1	0.01	10^{-3}	Varying	Varying	0	0	0	0

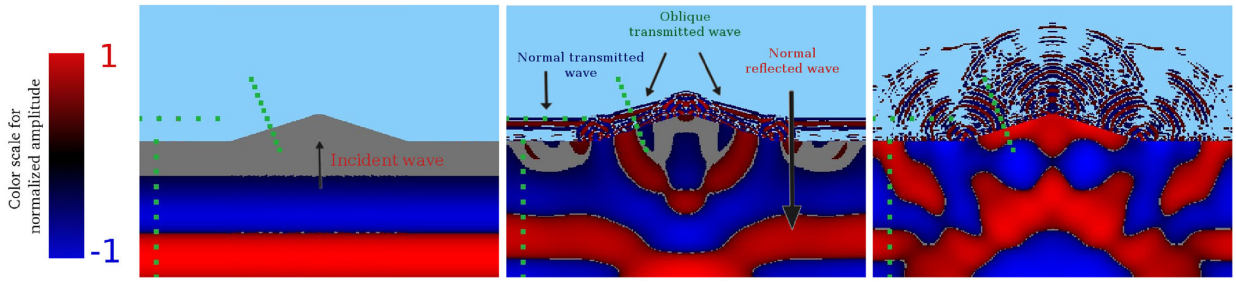

Figure 5. Snapshots of vertical velocity for the discontinuous Galerkin solution for Simulation 4.4, that is, the case of a plane wave transmission/reflection from ground to atmosphere with a wind duct. Snapshots are shown, from left to right, at time $t = 0.6$, 2.1 and 6 s. Fluid and solid vertical velocities are normalized separately. Red colours indicate positive vertical velocities and blue colours negative ones. The green squares show the location of the recording stations. The atmosphere is considered isothermal (Table 5).

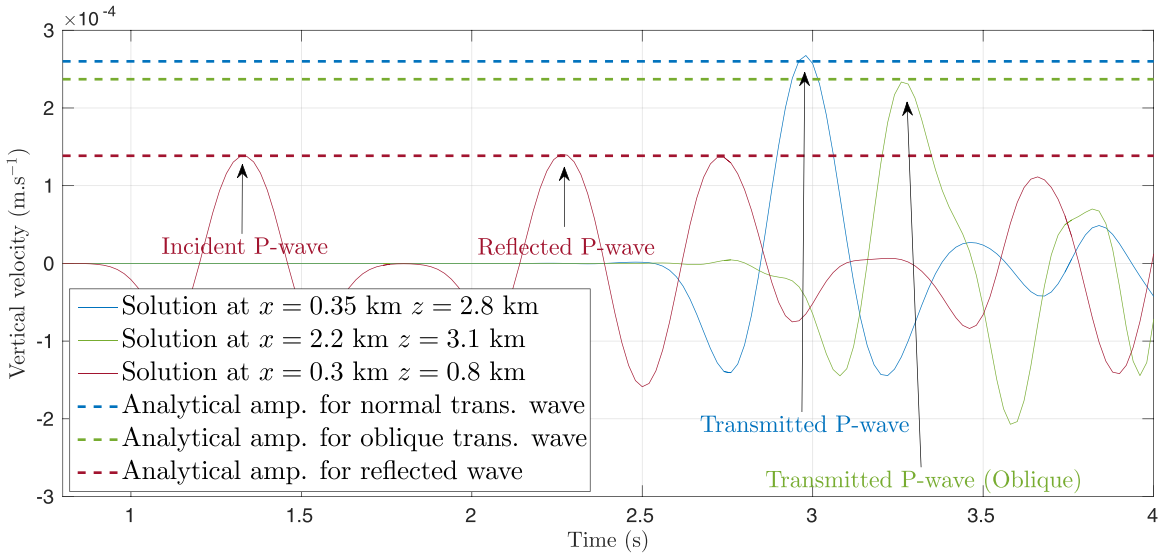

Figure 6. Vertical velocity for the discontinuous Galerkin solution ('Solution') at various locations to observe normal transmitted waves, oblique transmitted waves as well as reflected waves and it also shows analytical amplitudes computed using eq. (66) for normal transmitted waves ('Analytical amp. for normal trans. wave' using T_v with $A = 0$), oblique transmitted waves ('Analytical amp. for oblique trans. wave' using T_v with $A = 0.5586$ rad) and reflected waves ('Analytical amp. for reflected wave' using R_v with $A = 0$). The signals are shown through time for Simulation 4.4, that is, the case of a plane wave transmission/reflection from ground to atmosphere. The comparison is shown at three recording stations located, at $(x, z) = (0.35, 2.8)$ km, $(x, z) = (2.2, 3.1)$ km and $(x, z) = (0.3, 0.8)$ km. The atmosphere is considered isothermal (Table 5).

Fig. 6 shows signals of transmitted and reflected *P*-waves through time. The DG method with topography gives good results in terms of maximum expected amplitude for oblique and normal transmission.

4.5 Validation of the contact discontinuity for nonlinear acoustic waves: the shock tube test

This validation case, called the Sod's shock tube test, first proposed by Sod (1978) corresponds to the generation of shock waves due to density contrast between two fluids. Initial density and pressure profiles can be found in Kursungecmez (2015), and the exact solution is given in Whitham (2011). At the initial time $t = 0$ s, pressure and density read

$$p = \begin{cases} 1 & \text{if } x > 0.5 \\ 0.1 & \text{if } x \leq 0.5 \end{cases}$$
$$\rho = \begin{cases} 1 & \text{if } x > 0.5 \\ 0.125 & \text{if } x \leq 0.5 \end{cases}. \tag{67}$$

This initial state in eq. (67) can be produced by having a diaphragm in the middle of the tube. The gas to the left and right of the diaphragm is initially at rest. The pressure and density are discontinuous across the diaphragm. At $t = 0$ s, the diaphragm is broken. An expansion wave and two types of singularities then propagate through the tube. The initial simulation setup is given by eq. (67) and summarized in Table 6.

Fig. 7 shows that the initial discontinuity in (67) develops into a left moving expansion wave, right moving shock wave and right going contact discontinuity. One notes that numerical dissipation smooths out the contact surface since we only use a first-order slope limiter. But

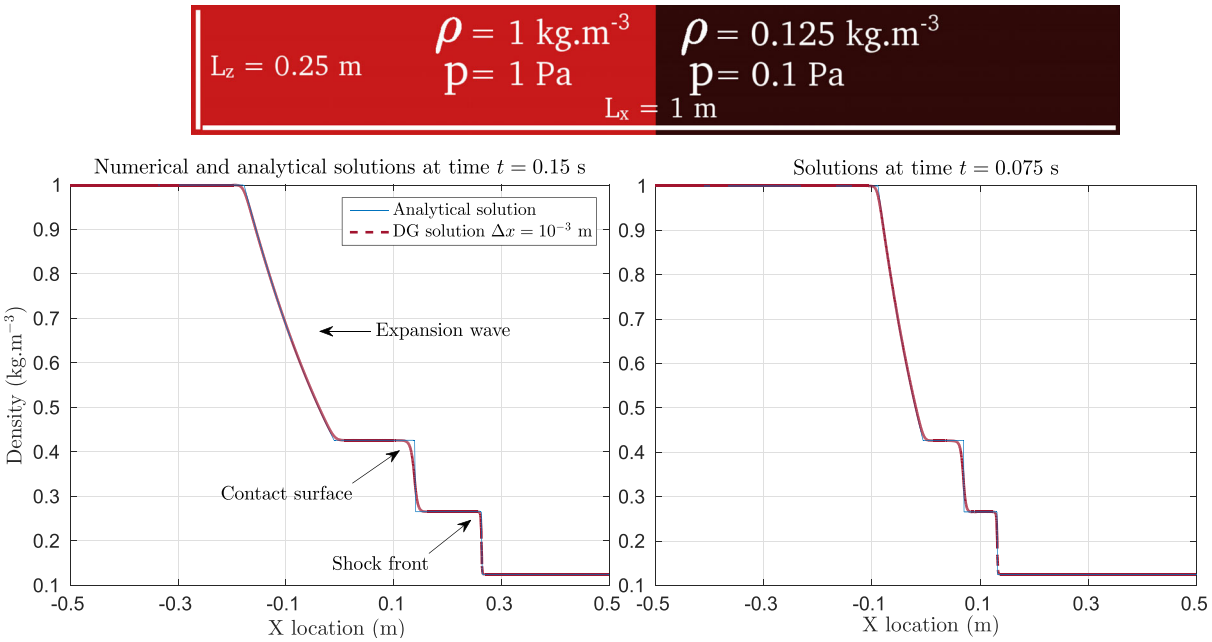

Figure 7. On the top, domain configuration at initial time for Simulation 4.5, that is, the case of a validation of the contact discontinuity for nonlinear acoustic waves: the shock tube test. The high density fluid is represented on the left in red and the low density one in dark-red colour. On the bottom, density signals for the DG simulation. The signals are shown along x for Simulation 4.5, that is, the case of a validation of the contact discontinuity for nonlinear acoustic waves: the shock tube test. The comparison is shown at two times $t = 0.075$ and 0.15 s and along x for same location $z = 0.01$ m. The atmosphere is considered isothermal (Table 6).

Table 7. Simulation parameters corresponding to Model 2 from Section 4.1.1 for Simulation 5.1, that is, the case of nonlinear acoustic waves.

$L_x \times L_z$ (km)	Δx (m)	Δt (s)	ρ (kg m^{-3})	c (m s^{-1})	μ (kg m^{-1} s^{-1})	κ (W K^{-1} m^{-1})	g_z (m s^{-2})	$v_{F,x}$ (m s^{-1})
5×300	100	5.10^{-3}	Varying	631	$(3/4)10^{-4}$	0	9.831	0

because we do not focus on strong shocks, and since there is a trade-off between computation time and accuracy for the slope limiter, the efficiency of the first order slope limiter is sufficient for our applications.

5 APPLICATIONS TO ACOUSTIC AND GRAVITY WAVES PROPAGATION

5.1 Nonlinear acoustic waves

In this subsection we study nonlinear acoustic wave fronts created by strong vertical velocity bottom forcing. We run a simulation similar to that in Section 4.2, but we increase the bottom forcing amplitude in eq. (59), using $A = 10$ m s^{-1}. The atmosphere is described by Model 2 in Section 4.1.1 and summarized in Table 7.

This test demonstrates the numerical method capability to take into account acoustic wave breaking in the atmosphere and measure the experimental limit of linear theory applied to acoustic and gravity wave propagation. In Fig. 8, as the amplitude gets stronger the wave packet slowly distorts (see the signal at the station located at $z = 96.6$ km) leading to a typical 'saw-toothed' shape and, finally, a N-wave shock (Whitham 2011) whereas in the finite-difference linear code the wave front amplitude only increases as the wave propagates in the atmosphere. This should be investigated in a more realistic model in future work because it seems to show that infrasounds can break for low Mach numbers. One also notes Gibbs oscillations in the vicinity of discontinuities due to lack of spatial resolution, but since viscosity is non-zero, they are damped through time.

5.2 Strong seismic wave

We study the propagation of a strong seismic wave from the ground to the atmosphere due to a moment tensor source. We rely on a simple isothermal stratified model and focus on shocks and seismic-generated gravity waves. We will show two simulations results, one with a seismic source located close to the surface in the solid to focus on gravity waves and a second one with a source located deeper in the solid to investigate acoustic shocks. We will first consider a flat fluid-solid interface located at $z = 10$ km over a rectangular domain of dimensions $L_x = 400$ km and $L_z = 100$ km. We consider a moment-tensor source as

$$\mathbf{f}_S = -M.\nabla\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_S)G(t), \tag{68}$$

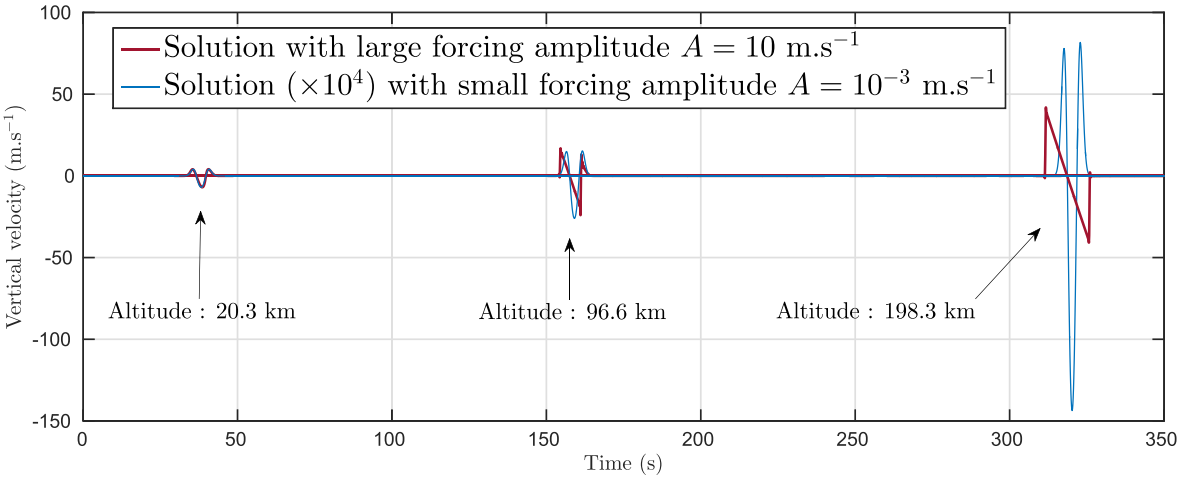

Figure 8. Vertical velocity for the discontinuous Galerkin solution for the large forcing amplitude simulation ('Solution with large forcing amplitude') and the small forcing amplitude simulation ('Solution ($\times$ 10^4) with small forcing amplitude'). The small forcing simulation signal is multiplied by 10^4 in order to see on the same plot both small and large amplitude forcing results. The signals are shown through time for Simulation 5.1, that is, the case of nonlinear acoustic waves. The comparison is shown at the three recording stations located at the same $x = 0.3$ km location, their position along z being, from left to right, $z =$ 20.3, 96.6 and 198.3 km. The atmosphere is considered isothermal (Table 7).

Table 8. Simulation parameters corresponding to Model 1 from Section 4.1.1 for Simulation 5.2, that is, the case of a strong seismic wave.

Fluid	$L_x \times L_z$ (km)	Δx (m)	Δt (s)	ρ (kg m^{-3})	c (m s^{-1})	μ (kg m^{-1} s^{-1})	κ (W K^{-1} m^{-1})	g_z (m s^{-2})	$v_{F,x}$ (m s^{-1})
	400 × 90	1000	0.05	varying	340	$(3/4)10^{-5}$	0	9.81	0
Solid	$L_x \times L_z$ (km)	Δx (m)	Δt (s)	ρ	$c_{S,p}$	$c_{S,s}$	Q	f_0	–
	400 × 10	1000	0.05	2500	3400	1963	1	0.05	–

where δ is the Dirac delta distribution located at $\mathbf{x}_s = (200, 2)$ km, M is a moment tensor

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{69}$$

and G the source time function

$$G(t) = Ae^{-\alpha(t-t_0)^2}, \tag{70}$$

with $A = 10^{16}$ N m, $\alpha = (\pi f_0)^2$ and $t_0 = \frac{1.2}{f_0}$. We consider a low-frequency source having $f_0 = 2 \times 10^{-2}$ Hz. The atmosphere is described by Model 1 in Section 4.1.1 and summarized in Table 9 with Brunt-Väisälä squared frequency $N^2 = 3.3 \times 10^{-4}$ rad^2 s^{-2}.

In Fig. 9, one notes that the strong seismic source generates both acoustic and gravity waves. Acoustic wave fronts propagate first from the solid-fluid interface location right above the source as spherical wave fronts and, as seismic waves propagate in the solid medium, they generate oblique acoustic wave fronts in the atmosphere. Also, right above the seismic source atmospheric gravity waves are generated due to the long-period ground displacements induced by the low-frequency components of the source excitation.

Fig. 10 shows, for the low-frequency source simulation, both acoustic wave fronts ('Main acoustic wave-front'), at two recording stations, and the low-frequency gravity wave that is well visible in the 'filtered' signal (filtered with a low-pass Butterworth filter with a cut-off frequency of $f_0 = 5 \times 10^{-4}$ Hz). The main acoustic wave-front arrival is prior to the main seismic arrival because the location along x of the recording station is closer to the source in the fluid ($x = 204$ km) than in the solid domain ($x = 214$ km). Secondary seismic wave fronts, and their acoustic counter-parts, of 50 s period and visible at $t = 250$, 480 s are due to lateral periodic boundary conditions.

We now turn to the study of acoustic shocks by showing in Fig. 11 the results of two simulations, one with a low amplitude source from eq. (68) with $A = 10^{16}$ N m and another one with a relatively large amplitude source, with $A = 10^{18}$ N m. Both source time functions have the same dominant frequency $f_0 = 2 \times 10^{-2}$ Hz. The domain is still rectangular but we consider a fluid-solid interface located at $z = 100$ km and a larger solid medium in order to set the source deeper in the ground, at $(x, z) = (100, 25)$ km.

Table 9. Simulation parameters corresponding to Model 1 from Section 4.1.1 for Simulation 5.2, that is, the case of a plane wave transmission/reflection from ground to atmosphere.

Fluid	$L_x \times L_z$ (m)	Δx (m)	Δt (s)	ρ (kg m^{-3})	c (m s^{-1})	μ (kg m^{-1} s^{-1})	κ (W K^{-1} m^{-1})	g_z (m s^{-2})	$v_{F,x}$ (m s^{-1})
	200 × 100	1000	0.05	varying	340	$(3/4)10^{-5}$	0	9.81	0
Solid	$L_x \times L_z$ (km)	Δx (m)	Δt (s)	ρ	$c_{S,p}$	$c_{S,s}$	Q	f_0	–
	200 × 100	1000	0.05	2500	3400	1963	1	0.05	–

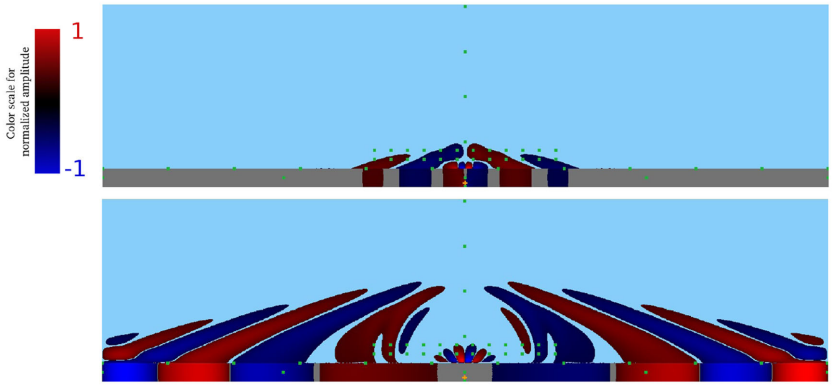

Figure 9. Snapshots of density-scaled vertical velocity ($\sqrt{\rho}v_z$) for the discontinuous Galerkin solution for Simulation 5.2, that is, the case of a strong seismic wave. Snapshots are shown, from top to bottom, at time $t = 75$ and 180 s. Figures show simulation run with a low-frequency source $f_0 = 2 \times 10^{-2}$ Hz. Fluid and solid vertical velocities are normalized separately. Red colours indicate positive vertical velocities and blue colours negative ones. The green squares show the location of the recording stations. The yellow square is the source location. The atmosphere is considered isothermal (Table 8).

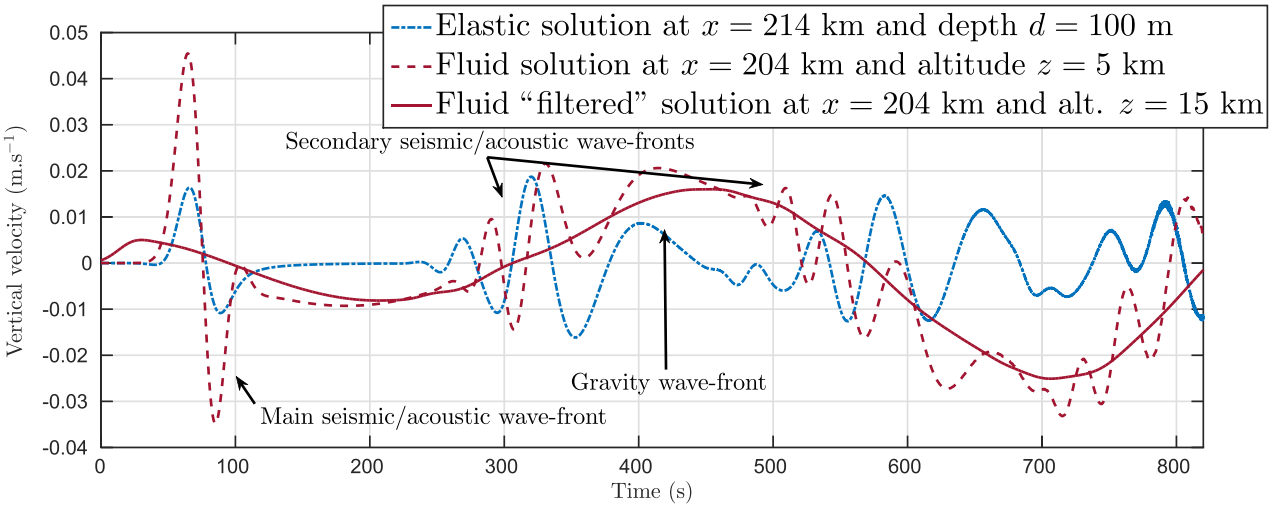

Figure 10. Vertical velocity for the discontinuous Galerkin solution for the low-frequency source $f_0 = 2 \times 10^{-2}$ Hz at a single depth in the solid medium ('Elastic solution') and different altitudes in the atmosphere ('Fluid solution'). The Figure also shows the fluid solution filtered to keep low frequencies only ('Fluid 'filtered' solution'). The signals are shown through time for Simulation 5.2, that is, the case of a strong seismic wave. The comparison is shown at two recording stations located, in the fluid, at $(x, z) = (204, 15)$ km and, in the solid medium, at $(x, z) = (214, 9.9)$ km. The atmosphere is considered isothermal (Table 8).

The right panel of Fig. 11 shows that, for a large-amplitude moment source, a strong wave is generated in the fluid that distorts and breaks as it propagates with altitude. It generates an unstable region in the fluid right above the seismic source shown by the loss of symmetry and the generation of an *N*-wave. This is clearly visible in the bottom of Fig. 11 where the solution for the large amplitude source shows the shock wave front generation through time. These results suggest that, since a shock is still visible at time 150 s and 60 km altitude, the formation of nonlinear acoustic *N*-waves from bottom seismic forcing may appear above the source region of earthquakes of relatively low magnitudes (Moment magnitude 6.0 in this case). However, such hypothesis will need to be validated even further in future work by 3-D simulations and with finite sources in realistic atmosphere models.

5.3 Nonlinear gravity waves

Let us now focus on the breaking of gravity waves due to strong wind shear or convective instabilities, which has been intensively studied in Kshevetskii & Gavrilov (2005). This will help showing that our technique can correctly handle nonlinear effects induced by gravity wave propagation.

We consider the following vertical velocity bottom forcing, $\forall t > 0$ and $x \in \Gamma_{FS}$

$$v_{F,z} = \begin{cases} -A \sin \omega(t - \frac{x}{c}) \exp(-(F(t - t_0))^2) & \text{if } t \leq t_0 \\ -A \sin \omega(t - \frac{x}{c}) & \text{if } t > t_0 \end{cases} \tag{71}$$

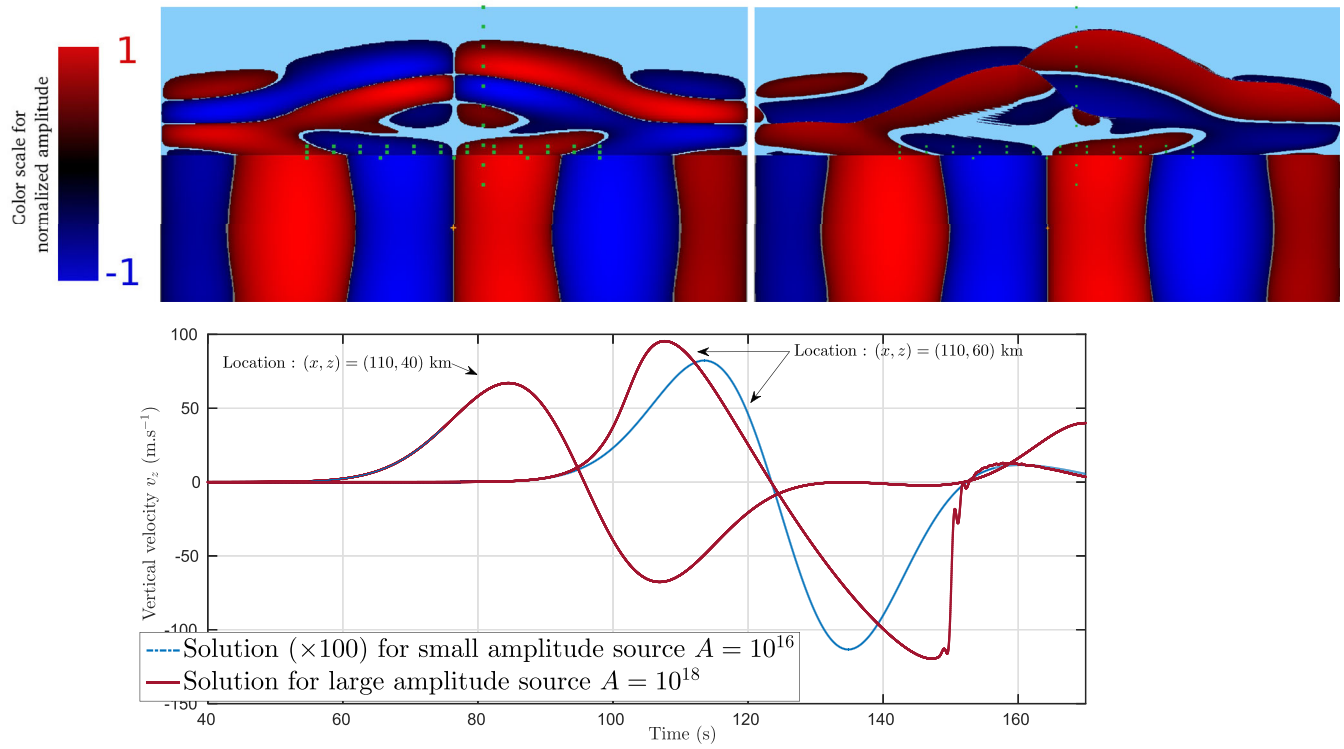

Figure 11. On the top, snapshots of vertical velocity (v_z) for the discontinuous Galerkin solution for Simulation 5.2, that is, the case of a strong seismic wave. Snapshots are shown at time $t = 170$ s. Left Figure show simulation run with a 'small-amplitude' source $A = 10^{16}$ N m and right figure simulation run with a 'large-amplitude' source $A = 10^{18}$ N m. Fluid and solid vertical velocities are normalized separately. Red colours indicate positive vertical velocities and blue colours negative ones. The green squares show the location of the recording stations. The yellow square is the source location. On the bottom, vertical velocity for the discontinuous Galerkin solution for the small amplitude source ('Solution (×100) for small amplitude source') and the large amplitude source ('Solution for large amplitude source') at different altitudes. The signals are shown through time for Simulation 5.2, that is, the case of a strong seismic wave. The comparison is shown at two recording stations located in the fluid at $(x, z) = (110, 40)$ km and at $(x, z) = (110, 60)$ km. The atmosphere is considered isothermal (Table 9).

Table 10. Simulation parameters corresponding to Model 1 from Section 4.1.1 for Simulation 5.3, that is, the case of a nonlinear gravity waves.

$L_x \times L_z$ (km)	Δx (m)	Δt (s)	ρ (kg m^{-3})	c (m s^{-1})	μ (kg m^{-1} s^{-1})	κ (W K^{-1} m^{-1})	g_z (m s^{-2})	$v_{F,x}$ (m s^{-1})
600 × 190	1500	0.1	varying	340	Varying	0	9.81	Varying

with A m s^{-1} the forcing amplitude, $\omega = 1.16 \times 10^{-3}$ rad Hz the source frequency and $c = 150$ m s^{-1} the horizontal phase speed. We select the forcing period $\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 5417$ s. And for the exponential 'envelope' we set $F = \sqrt{\frac{8}{(\tilde{t}_0 - t_0)^2}}$ Hz with $\tilde{t}_0 = 10$ s and $t_0 = 35$ s.

The value of the amplitude forcing a will impact the long-term stability of the initial atmospheric background that will, for large values, generate convective instabilities. To observe these effects we perform two simulations with various values of amplitude $A = 10^{-3}, 10^{-1}$ m s^{-1}. We use the realistic atmosphere model from Section 4.1.2 summarized in Table 10.

Fig. 12 show the results for simulations with small (on the left) and large (on the right) forcing amplitude. Until $t = 1.8$ h simulations are similar and show the typical feature of surfaces of constant phase inclined to the horizontal at angles $\alpha \approx \arcsin\frac{\sigma}{N} \approx 18^\circ$, where N is the Brunt-Väisälä frequency ($N^2 = 3.3 \times 10^{-4}$ rad^2 s^{-2}). Beyond $t = 1.8$ h Kelvin–Helmotz instabilities start to develop, due to the movement of warmer parcels over colder parcels, which leads to the generation of a small-scale convection layer.

In Fig. 13, one notes that signals for the small forcing and large forcing are similar, but as the wave propagates and the amplitude increases wave-breaking occurs and convective instabilities develop.

6 CONCLUSIONS AND FUTURE WORK

We have considered the Navier–Stokes system of equations for acoustic and gravity wave propagation. We have implemented a coupled discontinuous and continuous Galerkin numerical scheme that handles both acoustic and gravity waves simultaneously, in 2-D. We have also taken into account nonlinearities such as acoustic shocks or gravity wave-breaking and topography.

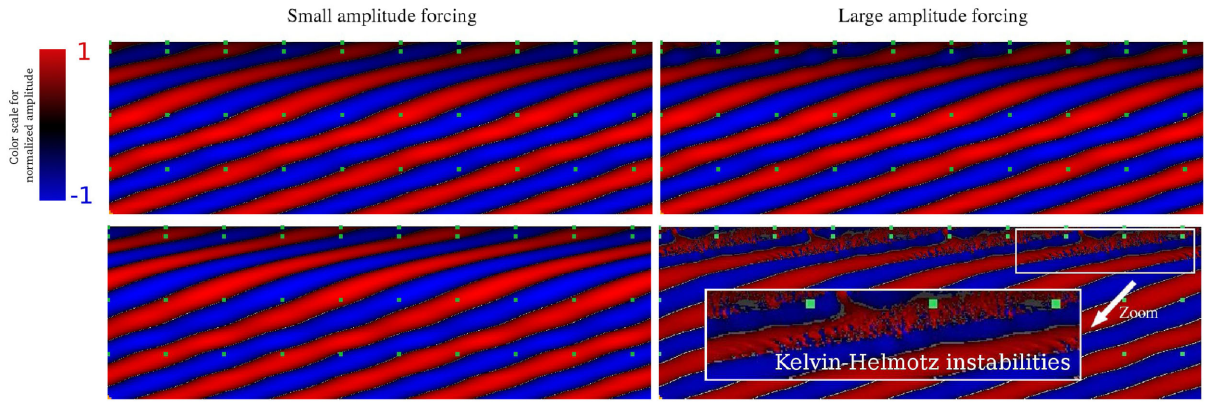

Figure 12. Snapshots of density-scaled vertical velocity ($\sqrt{\rho}v_{F,z}$) for the discontinuous Galerkin solution for Simulation 5.3, that is, the case of nonlinear gravity waves. Snapshots are shown, from top to bottom, at time $t = 1.7, 2.2$ h. Left figures show simulations with a small forcing amplitude $A = 10^{-3}$ (m s^{-1}) and right figures show simulations with strong forcing amplitude $A = 10^{-1}$ (m s^{-1}). Red indicates positive vertical velocity and blue negative ones. The green squares show the location of the recording stations. The atmosphere is considered isothermal (Table 10).

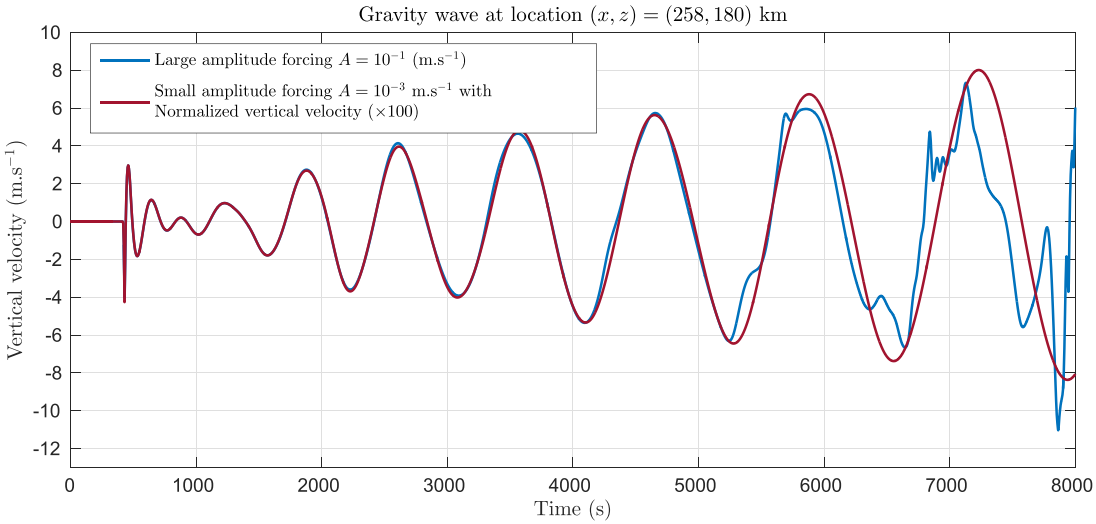

Figure 13. Vertical velocity for the discontinuous Galerkin solution for the small amplitude forcing $A = 10^{-3}$ (m s^{-1}) ('Small amplitude forcing') and the large amplitude forcing $A = 10^{-1}$ (m s^{-1}) ('Large amplitude forcing'). The small forcing signal amplitude is multiplied by 100 in order to compare it with the large amplitude forcing signal. The signals are shown through time for Simulation 5.3, that is, the case of a nonlinear gravity waves. The comparison is shown at the same recording station located at $(x, z) = (258, 180)$ km. The atmosphere is considered isothermal (Table 10).

We have validated the simulations by comparison to numerical finite-difference solutions obtained from previously published numerical technique suitable for the linear case in several benchmark cases involving acoustic and gravity waves in a stratified windy and viscous atmosphere and *P* and *S* waves in a homogeneous elastic medium. We obtained very good agreement in terms of vertical velocity and pressure. The simulation results for validation cases exhibit interesting gravity wave characteristics and show the expected features: the wave amplitude increases in vertical displacement with corresponding decrease of atmospheric density with altitude, viscosity damps high-frequency waves and strong low-frequency seismic events generate gravity waves.

We also presented nonlinear results for strong acoustic waves that convert into *N* waves as the amplitude gets large. This seems to show that waves can break for low Mach number, which needs to be studied and confirmed for more realistic media in future work. We also tackled strongly heterogeneous media with initial conditions and physical parameters based on the bulk viscosity profile from the *MSISE*-00 atmosphere model and HWM93 wind model. This showed that simulations are stable for complex media and exhibit interesting physical features such as wave breaking at high altitude for strong ground displacements due to Kelvin–Helmotz instabilities. This new numerical modelling tool can thus give insights on gravity and acoustic wave linear and nonlinear dynamics in the atmosphere due to seismic sources and/or atmospheric explosion sources.

Future developments should include more realistic non isothermal atmosphere models, absorbing boundary conditions instead of non-realistic rigid or horizontal periodic conditions in order to properly model wave propagation in the upper atmosphere. The technique should

also be extended to 3-D media and from regional to global Earth scale in order to fully understand gravity wave dynamics in planetary atmosphere.

ACKNOWLEDGEMENTS

We thank Vadim Monteiller for helpful discussions on the implementation of the discontinuous Galerkin method. Computer resources were provided by projects # p1404 at CALMIP computing centre (Toulouse, France). This work was also granted access to the French HPC resources of TGCC under allocation 2016-gen7646 made by GENCI. The authors also thank the 'Région Midi-Pyrénées' (France) and 'Université de Toulouse' for funding the PhD grant of Quentin Brissaud.

REFERENCES

Ahmad, N. & Lindeman, J., 2007. Euler solutions using flux-based wave decomposition, *Int. J. Numer. Methods Fluids,* **54**(1), 47–72.

Aki, K. & Richards, P., 1980. *Quantitative Seismology,* vol. II, Freeman & Co.

Bass, H.E. & Chambers, J.P., 2001. Absorption of sound in the Martian atmosphere, *J. acoust. Soc. Am.,* **109,** 3069–3071.

Bass, H., Sutherland, L., Piercy, J. & Evans, L., 1984. Absorption of sound by the atmosphere, in *Physical Acoustics: Principles and Methods,* vol. 17, pp. 145–232, eds Mason, W.P. & Thurston, R.N., Academic Press.

Bassi, F. & Rebay, S., 1997. A high-order accurate discontinuous finite element method for the numerical solution of the compressible Navier–Stokes equations, *J. Comput. Phys.,* **131**(2), 267–279.

Brissaud, Q., Martin, R., Garcia, R.F. & Komatitsch, D., 2016. Finite-difference numerical modelling of gravitoacoustic wave propagation in a windy and attenuating atmosphere, *Geophys. J. Int.,* **206**(1), 308–327.

Chaljub, E., Komatitsch, D., Vilotte, J.-P., Capdeville, Y., Valette, B. & Festa, G., 2007. Spectral-element analysis in seismology, *Adv. Geophys.,* **48,** 365–419.

Chandrashekar, P. & Zenk, M., 2017. Well-balanced nodal discontinuous Galerkin method for Euler equations with gravity, *J. Sci. Comp.,* **71**(3), 1062–1093.

Chidyagwai, P. & Rivière, B., 2010. Numerical modelling of coupled surface and subsurface flow systems, *Adv. Water Resour.,* **33**(1), 92–105.

Cockburn, B. & Shu, C.-W., 2001. Runge–Kutta discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems, *J. Sci. Comput.,* **16**(3), 173–261.

Dawson, C., 2008. A continuous/discontinuous Galerkin framework for modeling coupled subsurface and surface water flow, *Comput. Geosci.,* **12**(4), 451–472.

de Groot-Hedlin, C.D., 2016. Long-range propagation of nonlinear infrasound waves through an absorbing atmosphere, *J. acoust. Soc. Am.,* **139**(4), 1565–1577.

Dörnbrack, A. & Nappo, C.J., 1997. A note on the application of linear wave theory at a critical level, *Bound.-Layer Meteorol.,* **82**(3), 399–416.

Garcia, R.F., Bruinsma, S., Lognonné, P., Doornbos, E. & Cachoux, F., 2013. GOCE: the first seismometer in orbit around the Earth, *Geophys. Res. Lett.,* **40,** 1015–1020.

Giraldo, F.X., 1995. A space marching adaptive remeshing technique applied to the 3D Euler equations for supersonic flow, *PhD thesis,* University of Virginia, USA.

Giraldo, F.X. & Restelli, M., 2008. A study of spectral-element and discontinuous Galerkin methods for the navier–stokes equations in nonhydrostatic mesoscale atmospheric modeling: equation sets and test cases, *J. Comput. Phys.,* **227**(8), 3849–3877.

Hedin, A., 1991. Extension of the MSIS thermosphere model into the middle and lower atmosphere, *J. geophys. Res.,* **96,** 1159–1171.

Hesthaven, J.S. & Warburton, T., 2007. *Nodal Discontinuous Galerkin Methods: Algorithms, Analysis, and Applications,* Springer Science & Business Media.

Hüppe, A., Cohen, G., Imperiale, S. & Kaltenbacher, M., 2016. Construction and analysis of an adapted spectral finite element method to convective acoustic equations, *Commun. Comput. Phys.,* **20**(1), 1–22.

Käser, M. & Dumbser, M., 2008. A highly accurate discontinuous Galerkin method for complex interfaces between solids and moving fluids, *Geophysics,* **73**(3), T23–T35.

Komatitsch, D. & Tromp, J., 1999. Introduction to the spectral-element method for three-dimensional seismic wave propagation, *Geophys. J. Int.,* **139**(3), 806–822.

Komatitsch, D. & Tromp, J., 2003. A perfectly matched layer absorbing boundary condition for the second-order seismic wave equation, *Geophys. J. Int.,* **154**(1), 146–153.

Komatitsch, D., Barnes, C. & Tromp, J., 2000. Wave propagation near a fluid-solid interface: a spectral-element approach, *Geophysics,* **65**(2), 623–631.

Kopriva, D.A., 2006. Metric identities and the discontinuous spectral-element method on curvilinear meshes, *J. Sci. Comput.,* **26**(3), 301–327.

Kopriva, D.A., Woodruff, S.L. & Hussaini, M.Y., 2002. Computation of electromagnetic scattering with a non-conforming discontinuous spectral-element method, *Int. J. Numer. Methods Eng.,* **53**(1), 105–122.

Kshevetskii, S.P. & Gavrilov, N.M., 2005. Vertical propagation, breaking and effects of nonlinear gravity waves in the atmosphere, *J. Atmos. Sol.-Terr. Phys.,* **67**(11), 1014–1030.

Kursungecmez, H., 2015. Numerical simulation of shock propagation in one and two dimensional domains, *PhD thesis,* University of Edinburgh.

Landet, T., Mortensen, M. & Grue, J., 2015. Towards a continuous and discontinuous Galerkin method for multi-phase flows, in *MekIT'15 8th National Conference on Computational Mechanics,* International Center for Numerical Methods in Engineering (CIMNE), Barcelona, Spain, pp. 275–294.

Lecoanet, D., Le Bars, M., Burns, K.J., Vasil, G.M., Brown, B.P., Quataert, E. & Oishi, J.S., 2015. Numerical simulations of internal wave generation by convection in water, *Phys. Rev. E,* **91,** doi:10.1103/PhysRevE.91.063016.

LeVeque, R.J., 2002. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems,* vol. 31, Cambridge Univ. Press.

Linstrom, P.J. & Mallard, W.G. (eds), 2015. *NIST Chemistry WebBook,* NIST Standard Reference Database Number 69, National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, MD (doi:10.18434/T4D303).

Lognonné, P., Clévédé, E. & Kanamori, H., 1998. Computation of seismograms and atmospheric oscillations by normal-mode summation for a spherical earth model with realistic atmosphere, *Geophys. J. Int.,* **135**(2), 388–406.

Mikhailenko, B. & Mikhailov, A., 2014. Numerical modeling of seismic and acoustic-gravity waves propagation in an 'earth-atmosphere' model in the presence of wind in the air, *Numer. Anal. Appl.,* **7**(2), 124–135.

Miyoshi, Y., Fujiwara, H., Jin, H. & Shinagawa, H., 2014. A global view of gravity waves in the thermosphere simulated by a general circulation model, *J. geophys. Res.,* **119**(7), 5807–5820.

Müller, A., Behrens, J., Giraldo, F.X. & Wirth, V., 2010. An adaptive discontinuous Galerkin method for modeling cumulus clouds, in *Fifth European Conference on Computational Fluid Dynamics, ECCOMAS CFD 2010,* Lisbon, Portugal.

Nappo, C., 2002. *An Introduction to Atmospheric Gravity Waves,* Academic Press.

Picone, J.M., Hedin, A.E., Drob, D.P. & Aikin, A.C., 2002. NRLMSISE-00 empirical model of the atmosphere: statistical comparisons and scientific

issues, *J. geophys. Res.,* **107**(A12), 1468, doi:10.1029/2002JA009430.
Remacle, J.-F., Flaherty, J.E. & Shephard, M.S., 2003. An adaptive discontinuous Galerkin technique with an orthogonal basis applied to compressible flow problems, *SIAM Rev.,* **45**(1), 53–72.
Schäfer, M. & Teschauer, I., 2001. Numerical simulation of coupled fluid–solid problems, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.,* **190**(28), 3645–3667.
Shamarock, W. *et al.*, 2008. *A Description of the Advanced Research WRF Version 3: NCAR Technical Note,* National Center for Atmospheric Research.
Shu, C.-W., 1987. TVB uniformly high-order schemes for conservation laws, *Math. Comput.,* **49**(179), 105–121.
Snively, J.B. & Pasko, V.P., 2008. Excitation of ducted gravity waves in the lower thermosphere by tropospheric sources, *J. geophys. Res.,* **113,** A06303, doi:10.1029/2007JA012693
Sod, G.A., 1978. A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws, *J. Comput. Phys.,* **27**(1), 1–31.
Spiteri, R.J. & Ruuth, S.J., 2002. A new class of optimal high-order strong-stability-preserving time discretization methods, *SIAM J. Numer. Anal.,* **40**(2), 469–491.
Tang, H. & Warnecke, G., 2005. A Runge–Kutta discontinuous Galerkin method for the Euler equations, *Comput. Fluids,* **34**(3), 375–398.
van Vossen, R., Robertsson, J.O.A. & Chapman, C.H., 2002. Finite-difference modeling of wave propagation in a fluid-solid configuration, *Geophysics,* **67**(2), 618–624.
Wei, C., Bühler, O. & Tabak, E.G., 2015. Evolution of tsunami-induced internal acoustic–gravity waves, *J. Atmos. Sci.,* **72**(6), 2303–2317.
Whitham, G.B., 2011. *Linear and Nonlinear Waves,* vol. 42, Wiley.
Ye, R., Maarten, V., Petrovitch, C.L., Pyrak-Nolte, L.J. & Wilcox, L.C., 2016. A discontinuous Galerkin method with a modified penalty flux for the propagation and scattering of acousto-elastic waves, *Geophys. J. Int.,* **205**(2), 1267–1289.
Yiğit, E. & Medvedev, A.S., 2015. Internal wave coupling processes in Earth's atmosphere, *Adv. Space Res.,* **55**(4), 983–1003.
Zuckerwar, A.J. & Ash, R.L., 2006. Variational approach to the volume viscosity of fluids, *Phys. Fluids,* **18,**, 047101, doi:10.1063/1.2180780.

APPENDIX A: RAYLEIGH–TAYLOR INSTABILITY

The Rayleigh–Taylor problem involves a heavy (cold) fluid overlying a light (warm) fluid. We consider two inviscid fluids initially in a cavity where upper half of the cavity is a fluid of density 2 while the lower part is a fluid of unit density. The initial pressure corresponds to hydrostatic equilibrium described in Section 2.5. Initial density and pressure profiles read

$$p = \begin{cases} p_0 e^{-\frac{z-z_0}{RT_l}} & \text{if } z > 0.5 \\ p_0 e^{-\frac{z-z_0}{RT_h}} & \text{if } z \leq 0.5 \end{cases}$$

$$\rho = \begin{cases} \frac{p}{RT_l} & \text{if } z > 0.5 \\ \frac{p}{RT_h} & \text{if } z \leq 0.5 \end{cases} \tag{A1}$$

where $R = C_p - C_v = 1$ (kg m^2 s^{-2} K^{-1}) and $T_h = 2$ °C (respectively $T_l = 1$ °C) are temperature of the top heavy fluid (respectively lower light fluid). Other unknowns are described in Table A1.

Fig. A1 shows the physically unstable initial condition configuration where instabilities eventually grow as the heavy fluid penetrates the lighter one due to gravity. No shocks occur in this compressible problem and the only discontinuity is the contact surface separating the fluids of different densities. As pointed out in Remacle *et al.* (2003) the limiting procedure tends to strongly diffuse the interface but as we do not consider strong interface discontinuities in our applications, the numerical method works efficiently enough.

Table A1. Simulation parameters corresponding to Simulation A, that is, the case of a Rayleigh–Taylor instability.

$L_x \times L_z$ (km)	Δx (m)	Δt (s)	ρ (kg m^{-3})	c (m s^{-1})	μ (kg m^{-1} s^{-1})	κ (W K^{-1} m^{-1})	g_z (m s^{-2})	$v_{F,x}$ (m s^{-1})
0.25 × 1	0.01	10^{-3}	Varying	340	0	0	−1	0

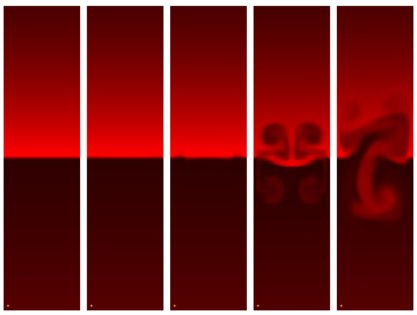

Figure A1. From left to right, snapshots of density at times $t = 0.005$, 2.5, 5, 7.5, 10 s, respectively, for Simulation A, that is, the case of a Rayleigh–Taylor instability. Density values are normalized using the largest density value in the mesh independently at each time step. The darkest red shades represent the smallest density values and, conversely, lightest red shades represent for the largest values. Until $t = 5$ s the boundary remains stable, and then instabilities develop.

APPENDIX B: RISING THERMAL BUBBLE

This classical test case (Giraldo & Restelli 2008) corresponds to the evolution of a warm bubble in constant potential temperature fluid. The bubble will rise in the fluid, since it is warmer than the ambient fluid, and deform due to shearing motion and form mushroom clouds. The initial density and pressure profiles are

$$\begin{aligned}
\theta &= \begin{cases} 300 & \text{if } r > 0.1 \\ 150.25(1+\cos\frac{\pi r}{0.1}) & \text{if } r \le 0.1 \end{cases} \\
\tilde{\pi} &= \frac{-gz}{C_p\theta} + 10^{-2} \\
p &= p_0\tilde{\pi}^{\frac{C_p}{R}} \\
\rho &= \frac{p_0}{R\theta}\tilde{\pi}^{\frac{C_v}{R}}
\end{aligned} \quad , \tag{B1}$$

where $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (z-z_0)^2}$ is the bubble radius with $x_0 = 0.5$ m and $z_0 = 0.35$ m, $R = C_p - C_v = 2$, $\tilde{\pi} = (\frac{p}{p_0})^{\frac{R}{C_p}}$ is the Exner pressure, and $\theta = \frac{T}{\tilde{\pi}}$ is the potential temperature. The simulation setup is given by eq. (B1) and summarized in Table B1.

As described earlier, in the initial neutral atmosphere the smooth potential temperature perturbation generates vertical upward and shear velocities that makes the bubble rising and, through time, deforming, and transitioning to turbulence. This test shows ability to capture the effects of turbulence and turbulent convection. Although no analytical solution is available, the numerical results are physically plausible and are qualitatively similar to the 2-D experiment in Giraldo & Restelli (2008).

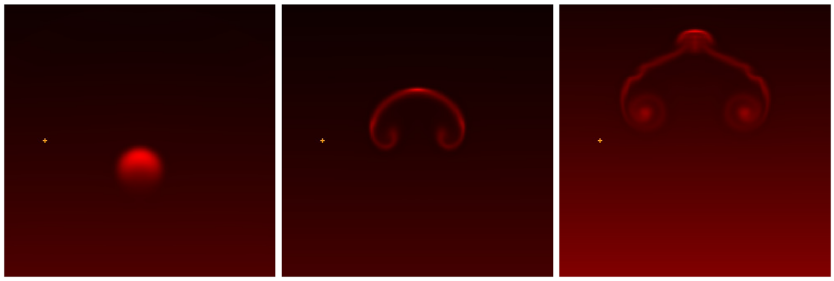

Figure B1. From left to right, snapshots of density at times $t = 0.24$, 0.75, 1.2 s respectively for Simulation B, that is, the case of a rising thermal bubble. Density values are normalized using the largest density value in the mesh at each time step. The darkest red shades are for the smallest density values and the lightest are for the largest values.

Table B1. Simulation parameters corresponding to Simulation B, that is, the case of a rising thermal bubble.

$L_x \times L_z$ (m)	Δx (m)	Δt (s)	ρ (kg m^{-3})	c (m s^{-1})	μ (kg m^{-1} s^{-1})	κ (W K^{-1} m^{-1})	g_z (m s^{-2})	$v_{F,x}$ (m s^{-1})
1×1	0.01	10^{-4}	Varying	Varying	0	0	9.81	0

4.3 Limites et perspectives

4.3.1 Conditions de bord

Dans notre travail nous avons seulement considéré des frontières "solides avec glissement". c'est-à-dire pour lesquelles le mouvement du fluide le long de ces dernières est libre mais à travers lesquelles l'énergie n'est pas transmise.

Ceci peut présenter plusieurs désavantages. Tout d'abord, nous ne pouvons simuler des domaines ouverts, ce qui dans la cadre de la propagation atmosphérique est assez limitant. Un tel modèle requiert l'implémentation de conditions de bord absorbantes afin d'empêcher la réflection des ondes. Nous avons présenté les zones PML dans le chapitre 2, un outil numérique qui consiste à atténuer les ondes avant leur réflection aux bords. Cette méthode fonctionne très bien pour l'atténuation des ondes acoustiques et fut adaptée à la méthode de Galerkin discontinue (Garai et al., 2016 ; Whitney, 2006). En revanche, des problèmes seront rencontrés lors de la propagation d'une onde de gravité vers une zone PML et celle-ci se verra probablement réfléchie et non atténuée. De plus, implémenter la méthode PML demande d'augmenter la taille du domaine de simulation pour ajouter une couche PML de plusieurs éléments dans chacune des directions. Ceci peut être très coûteux, surtout si la simulation est réalisée en 3 dimensions.

Une autre approche est disponible par la méthode des caractéristiques sans l'extension du domaine de simulation. Elle fut appliquée aux équations d'Euler par Thompson (Thompson, 1987, 1990) puis étendue aux équations de Navier-Stokes par Poinsot et Lele (Poinsot et Lelef, 1992) et appliquée dans le cadre de la méthode de Galerkin discontinue (Gokpi, 2013 ; Richter, Stiller et Grundmann, 2007). Cette méthode consiste à transformer l'opérateur du problème hyperbolique (issu des équations de Navier-Stokes dans notre cas), en fonction de ses valeurs propres, afin de se ramener à un système d'équations différentielles ordinaires.

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} + A_x \partial_x \mathbf{u} + A_z \partial_z \mathbf{u} &= \mathbf{f}, \\ \partial_t \mathbf{u} + P\Lambda P^{-1} \mathbf{u} + A_z \partial_z \mathbf{u} &= \mathbf{f}, \\ P^{-1}\partial_t \mathbf{u} + \Lambda P \mathbf{u} + P^{-1} A_z \partial_z \mathbf{u} &= P^{-1}\mathbf{f}, \\ P^{-1}\partial_t \mathbf{u} + \mathcal{L} + P^{-1} A_z \partial_z \mathbf{u} &= P^{-1}\mathbf{f}, \\ \partial_t \mathbf{u} + P\mathcal{L} + A_z \partial_z \mathbf{u} &= \mathbf{f}, \end{aligned} \tag{4.9}$$

où $\mathbf{u}$ sont les inconnues, $\mathbf{f}$ le terme source, A_x, A_z sont les opérateurs de Navier-Stokes dans les directions x et z. $A_x = P\Lambda P^{-1}$ avec P, respectivement, la matrice des vecteurs propres à gauche et à droite et pour $i, j = 1, 5$, $(\Lambda)_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$ la matrice diagonale des valeurs propres (réelles car le système de Navier-Stokes est hyperbolique). Enfin $\mathcal{L} = \Lambda P \mathbf{u}$ sont les caractéristiques. Les valeurs propres Λ correspondent à la vitesse des différents modes de propagation (Thompson, 1990) : λ_1, λ_5 correspondent, respectivement, aux vitesses dans la direction x des ondes acoustiques entrantes et sortantes, λ_2 à la vitesse d'advection de l'entropie et λ_3, λ_4,

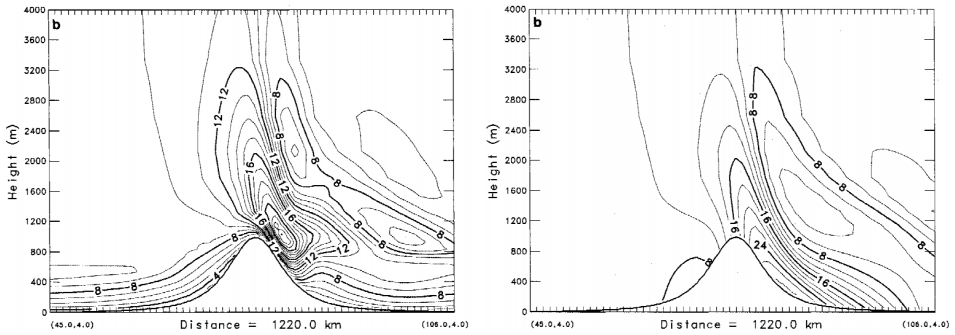

FIGURE 4.4 – Comparaison entre des simulations 2-D de l'évolution du champ de vitesse "cross-ridge" (m.s^{-1}) au dessus d'une colline après 48 h. La solution de gauche est calculée avec une condition "free slip" alors que la figure de droite avec une condition "no-slip". Figures extraites de (PENG et THOMPSON, 2003). La stratification initiale est donnée telle que $N = 1.3 \times 10^{-2}$ s^{-1} et le modèle de vent est uniforme $u_0 = 10$ m.s^{-1}. La colline est définie telle que $h(x) = \frac{h_{max}}{\left\{1+\left(\frac{x}{L_x}\right)^2\right\}^{3/2}}$ où x est la position horizontale, $h_{max} = 1$ km et $L_x = 126$ km.

respectivement, aux vitesses d'advection des quantités u_2 et u_3. En déterminant les caractéristiques du problème dans la direction x on peut plus simplement calculer les solutions du système initial telles qu'elles respectent les conditions de bord souhaitées (HEDSTROM, 1979).

Par simplicité nous avons considéré des frontières "free-slip" jusqu'à présent puisque nous nous intéressions essentiellement à des phénomènes à moyenne et haute altitude ou des modèles sans champ de vitesse initial. Mais dans un fluide visqueux, il y a génération physique d'une couche limite dans laquelle la vitesse du fluide varie progressivement jusqu'à atteindre la vitesse de l'interface. Les conditions de bord ont un impact sur l'évolution des champs de vitesses proches de l'interface, de surcroît lorsqu'on considère de la topographie.

Ceci est visible dans la figure 4.4, extraite de (PENG et THOMPSON, 2003), où l'on observe le champ de vitesse "cross-ridge" après 48 h et la propagation induite d'ondes de montagnes dans un cas sans et avec friction de surface. On voit alors le déplacement du jet généré par le vent initial au dessus de la crête ainsi que l'augmentation importante de son amplitude lorsqu'on utilise des conditions "no-slip". Dans ce cas, il est donc essentiel de correctement prendre en compte les conditions de bord afin de reproduire les perturbations du champ de vitesse.

4.3.2 Équilibre hydrostatique

L'équilibre hydrostatique correspond à l'état d'un fluide sans mouvement ou dont le mouvement est constant au cours du temps, c'est-à-dire à l'état atteint lorsque les forces de gravitation sont compensées par celles des gradients de pression (à l'échelle de la Terre globale il est nécessaire de prendre aussi en compte la force de Coriolis). Cet équilibre s'écrit

donc sous la forme suivante (référez vous à l'article de la section 4.2)

$$\begin{aligned} \nabla p_0 &= \rho_0 \mathbf{g}, \\ \partial_z(\mu \partial_z v_{0,x}) &= 0, \\ \partial_z(\kappa \partial_z T_0 + v_{0,x} \mu \partial_z v_{0,x}) &= 0, \end{aligned} \tag{4.10}$$

où p_0 correspond au champs de pression au temps initial, ρ_0 la densité atmosphérique au temps initial, $v_{0,x}$ le champ de vitesse initial, T_0 la température au temps initial, κ le coefficient de conductivité thermique et $\mathbf{g}$ l'accélération de la gravité. Dans l'atmosphère, cet équilibre n'est jamais parfaitement atteint notamment à cause des phénomènes de turbulences (SAITO et al., 2007). La première équation dans le système (4.10) est la condition classique d'équilibre hydrostratique. En revanche, les deux suivantes sont souvent ignorées car d'amplitudes très faibles comme nous allons le montrer. Dans la figure 4.5, on représente les différents coefficients intervenants dans les équations 4.10. On observe que le tenseur visqueux de l'équation du moment est toujours d'amplitude bien plus faible que le vecteur $\rho \times \mathbf{g}$ ce qui satisfait la condition (4.10)-2. En ce qui concerne les termes visqueux de l'équation de conservation d'énergie on obtient $\partial_z(v_{0,x}\mu\partial_z v_{0,x} + \kappa\partial_z T) \approx \partial_z(\kappa\partial_z T) \approx 10^{-6}$ J.m^{-3}.s^{-1}. Cet ordre de grandeur est bien plus faible que celui de l'énergie totale dont le profil est visible dans la figure 4.5.

Pour notre approximation basse fréquence (infrasons et ondes de gravité), lorsqu'on utilise un modèle climatique empirique comme condition initiale, nous souhaitons négliger les hétérogénéités locales non-hydrostatiques. En effet, si notre modèle initial d'atmosphère ne respecte pas les conditions d'équilibre hydrostatique, l'atmosphère peut se mettre instantanément en mouvement, voire mouvement turbulent et il sera alors difficile d'observer un phénomène particulier au sein de cette dynamique. Comme montré précédemment, nous pouvons négliger les équations liées aux termes visqueux des conditions (4.10) et nous nous concentrerons sur la relation entre gradients de pression et gravité.

Deux techniques sont alors possibles afin de résoudre ces problèmes :

1. la décomposition des inconnues entre une valeur moyenne stationnaire (x_0) et une perturbation (x_1)
2. L'imposition de la densité, ou de la pression, à travers la relation hydrostatique (4.10)

La première méthode est utilisée par un grand nombre de techniques (Giraldo, 2013 ; Marras et al., 2013 ; Müller et al., 2013 ; Yelash et al., 2014), et aussi par notre méthode linéaire du chapitre 1, qui consiste à considérer que la valeur moyenne varie peu au cours du temps ($\partial_t x_0 \approx 0$) et que la perturbation est bien plus faible que la valeur moyenne ($x_1 << x_0$). Les conditions hydrostatiques (4.10) sont alors imposées de manière forte sur le système d'équations. Malheureusement, considérer l'ensemble des inconnues à travers ces hypothèses ne permet pas de prendre en compte les effets non-linéaires qui agissent de manière irréversible sur l'état moyen. Une formule mixte est alors possible pour ce faire (Giraldo, 2013) dans laquelle on décompose tous les termes en dehors du moment. On peut alors prendre en compte certains phénomènes de convection mais la propagation d'onde reste adiabatique.

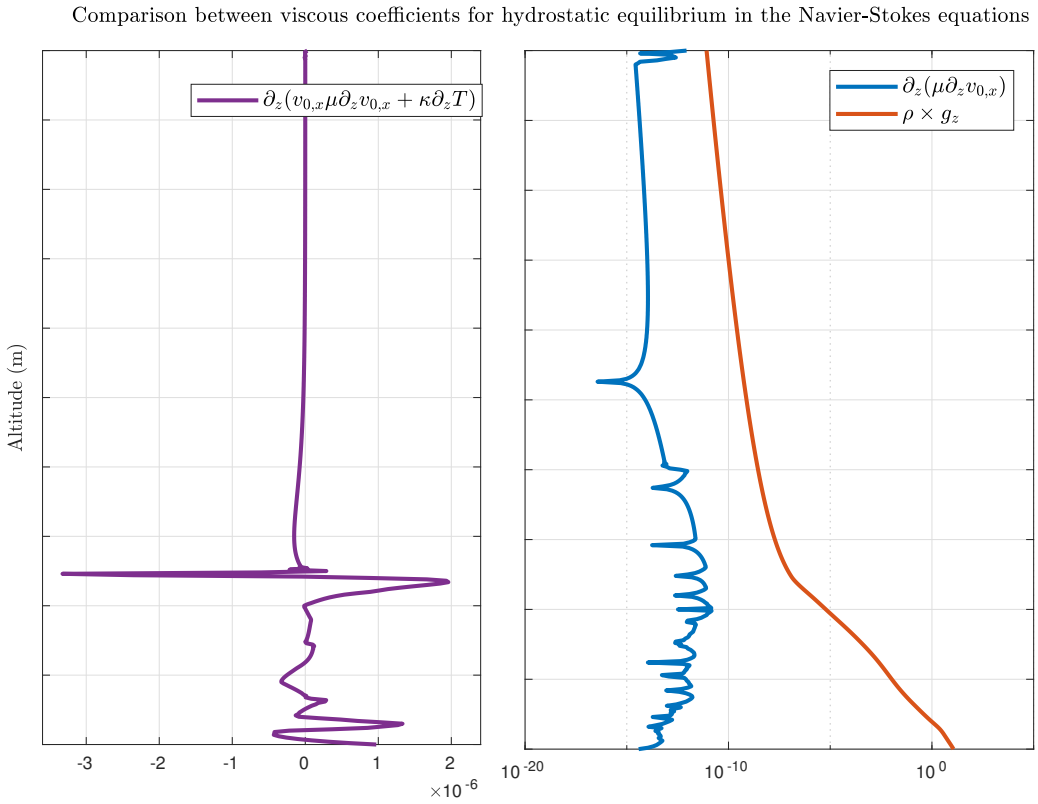

FIGURE 4.5 – Réprésentation des propriétés moyennes de l'atmosphère reposant sur le modèle MSIS et HWM93 au niveau de l'océan indien. De gauche à droite, dérivée du tenseur visqueux de l'équation d'énergie correspondant à l'équation (4.10)-3 $\partial_z(v_{0,x}\mu\partial_z v_{0,x} + \kappa\partial_z T)$ (en violet) et profil de densité multipliée par la valeur absolue de l'accélération de la gravité $\rho \times g_z$ (en orange) et dérivée du tenseur visqueux correspondant aux équations du moment correspondant à l'équation 4.10-2 $\partial_z(\mu\partial_z v_{0,x})$ (en bleu).

La deuxième méthode peut s'effectuer de deux manières. La première consiste à régulariser la densité en la calculant à partir de la pression initiale et de l'accélération de la gravité

$$\rho_0 = \partial_z p_0 g_z. \tag{4.11}$$

La densité est déterminée à partir de la pression car il est direct de calculer la dérivée partielle de la pression, au sein de la méthode de Galerkin, alors que son intégrale n'est pas définie. Notez, qu'afin de limiter les valeurs du gradient $\partial_z p_0$ avant interpolation on peut utiliser une autre formulation, telle que

$$\partial_z ln(p_0) = \frac{\partial_z p_0}{p_0} = \frac{\rho_0 g_z}{p_0} \Leftrightarrow \rho_0 = \frac{\partial_z ln(p_0) p_0}{g_z} \tag{4.12}$$

Deux problèmes peuvent malheureusement émerger avec cette approche : le profil de densité

étant altéré, l'amplitude des ondes va être impactée et l'analyse des résultats numériques doit prendre en compte cette modification. Deuxièmement, le calcul de la dérivée dans l'eq. (4.11) est réalisé grâce à la discrétisation des opérateurs avec une méthode de Galerkin qui peut donner lieu à des artefacts numériques à la frontière entre les éléments. En effet, un modèle atmosphérique est en général limité à une dimension et est fourni en fonction de l'altitude. Disposant donc des inconnues atmosphériques de manière discrète il est nécessaire de les interpoler sur la grille d'éléments finis avant de calculer le gradient. De plus, le degré d'approximation des opérateurs différentiels sur chaque élément est dépendant du nombre de noeuds d'interpolation. Ayant noté ces deux observations, si le degré d'interpolation du modèle d'atmosphère est trop faible et ne capture pas correctement ses variations avec l'altitude, la dérivée peut alors être fortement discontinue aux interfaces entre éléments. Le gradient calculé au sein de la méthode de Galerkin sera lui aussi discontinu et la densité sera alors impactée par de fortes variations locales à la frontière entre les éléments générant des artefacts numériques.

Une troisième autre approche est néanmoins possible et est développée dans Hanique-Cockenpot, 2011. Notre contrainte est le respect des conditions hydrostatiques par les conditions initiales. Mais en souhaitant régulariser les modèles d'atmosphères avec les opérateurs définis dans notre méthode numérique (dérivées au sens des éléments finis spectraux dans notre cas), on ne peut conclure sur la qualité de notre interpolation pour les raisons citées précédemment. Cette méthode consiste alors à optimiser itérativement le modèle d'atmosphère afin qu'il respecte les conditions hydrostatiques tout en se basant sur les opérateurs de la méthode numérique utilisée.

Dans notre cas, sachant que nous souhaitons simplement résoudre un problème stationnaire (le problème de régularisation des conditions hydrostatiques) et que les données sont initialement continues nous nous baserons sur les opérateurs d'éléments finis spectraux continus et non discontinus. Si l'on définit par S la matrice de rigidité et M la matrice de masse de la méthode de Galerkin continue, on obtient à partir de l'équation (4.10)

$$S.[\mathbf{p}_0] = M.[\rho_0 \mathbf{g}_z] \tag{4.13}$$

où l'indice 0 correspond à l'état initial, $[\mathbf{p}_0]$ est le vecteur des inconnues $p_0(z)$ et $[\rho_0 \mathbf{g}_z]$ est le vecteur des inconnues $\rho_0 \mathbf{g}_z$ après discrétisation numérique et le point "." correspond au produit matriciel. Les variations de pression initiales étant importantes dans l'atmosphère nous allons modifier l'éq. (4.13) en repartant de (4.10)

$$\begin{array}{rcl} \partial_z(lnp_0) & = & \frac{\partial_z p_0}{p_0}, \\ \partial_z(lnp_0) & = & \frac{\rho_0 g_z}{p_0}, \\ S.[ln\mathbf{p}_0] & \approx & M.[\frac{\rho_0 g_z}{p_0}] \end{array} \tag{4.14}$$

où ln correspond au logarithme népérien et $[ln\mathbf{p}_0]$ le vecteur des inconnues $lnp_0(z)$ après discrétisation numérique. Ainsi, les variations de pression sont modérées par la composition avec l'opérateur logarithme. L'équation (4.14) représente ainsi un équivalent de l'équilibre

hydrostatique (4.10) qu'on peut réécrire grâce au schéma de Galerkin tel que,

$$S.[ln\mathbf{p}_0] \approx \mathbf{b}, \tag{4.15}$$

où $\mathbf{b} = M.[\frac{\rho_0 \mathbf{g}_z}{p_0}]$. Il est maintenant nécessaire de s'assurer de l'erreur faite par le schéma numérique ϵ lors du calcul de l'éq. (4.15). Dans cette optique on va optimiser itérativement ce système pour une inconnue x avec comme condition initiale $x^0 = ln(p_0)$ tel que pour une étape $k > 0$

1. si $b - Sx^k > h$
2. $\epsilon^k = b - Sx_k$
3. $\delta^k = S^{-1}\epsilon^k$
4. $x^{k+1} = x^k + \delta^k$
5. $k = k + 1$

où S^{-1} est la matrice inverse de S, h est la précision souhaitée, ϵ^k l'erreur à l'étape k et $\delta^k = x^{k+1} - x^k$ la différence des solutions entre deux itérations. Cet algorithme nécessite donc le calcul de l'inverse de S ce qui peut poser quelques difficultés numériques selon la méthode choisie et peut ne pas converger. Par exemple, pour le schéma mentionné dans Hanique-Cockenpot, 2011, le conditionnement de la matrice de rigidité est très mauvais et la matrice quasi non-inversible, la technique alors employée par l'auteur fut de contraindre le système en remplaçant la première ligne de la matrice S par un vecteur pour $j = 1$ du type $\forall i = [1, L]$, $e_i^j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ où L est le nombre de noeuds de discrétisation en altitude. Malheureusement, les profils (de densité et de pression) aux bords sont alors impactés par ce choix et on observe une certaine divergence par rapport au modèle initial. En utilisant le schéma de différences finies proposé dans (Hanique-Cockenpot, 2011) et en fixant la valeur de pression à la surface on obtient les profils présentés dans la figure 4.6 et calculés avec Matlab. La précision souhaitée de $h = 10^{-14}$ N n'est pas atteinte après plus de 130000 itérations en double précision. On notera néanmoins qu'il est conseillé dans (Hanique-Cockenpot, 2011) d'utiliser des langages compilés et non interprétés afin de diminuer drastiquement le temps de calcul.

Enfin, une fois les profils de pression et de densité correctement régularisés, il est possible de contraindre les solutions pour empêcher le développement d'instabilités liées aux erreurs de discrétisation du schéma numérique (Marsden, Bogey et Bailly, 2014). En effet, en retranchant l'état initial hydrostatique aux équations on impose fortement cette condition de stabilité aux solutions. On rappelle que l'état hydrostatique pour une atmosphère stratifiée, dont la divergence du champ de vitesse est initialement à divergence nulle $\nabla.\mathbf{V}_0 = 0$, s'écrit de la manière suivante

$$\begin{aligned} \nabla.\Sigma_0 &= \rho_0 \mathbf{g}, \\ (\Sigma_{v,0})_{i,j=1,2} &= 0, \\ \kappa \nabla T_0 &= 0, \end{aligned} \tag{4.16}$$

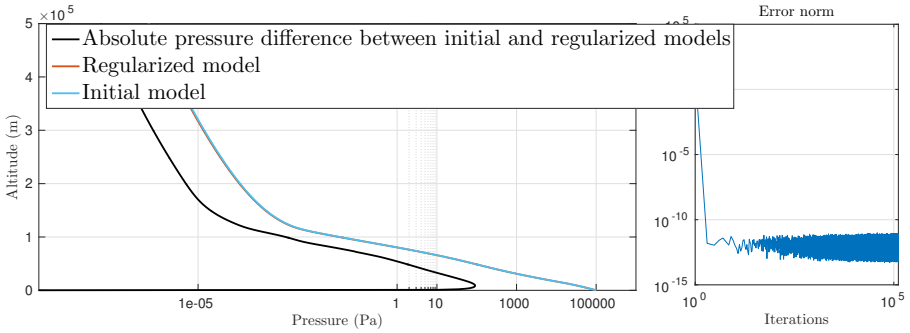

FIGURE 4.6 – A gauche, profils de pression (Pa) après régularisation par la méthode proposée dans (HANIQUE-COCKENPOT, 2011) en utilisant le schéma de différences finies d'ordre élevé de (HANIQUE-COCKENPOT, 2011, Annexe C.1). La précision h est fixée à $h = 10^{-14}$ N. A droite, évolution de l'erreur avec les itérations de l'algorithme de régularisation.

où l'indice 0 correspond aux variables prises à l'état initial et Σ_0 s'écrit

$$\begin{array}{rcl} \Sigma_0 & = & p_0 \mathbf{I}_d + \Sigma_{v,0}, \\ (\Sigma_{v,0})_{i,j=1,2} & = & \mu(\partial_i v_{0,j} + \partial_j v'_{0,i}), \end{array} \tag{4.17}$$

où p_0 est l'état de pression initial, $\mathbf{I}_d$ la matrice identité, $\Sigma_{v,0}$ est le tenseur visqueux initial, μ la viscosité dynamique et $(v_{0,i})_{i=1,2}$ les composantes du vecteur vitesse initial. On peut maintenant réécrire les équations de Navier-Stokes en décomposant, en état initial et état perturbé, certains des termes afin d'imposer fortement les conditions hydro-statiques dans le système. La pression s'écrit alors $p = p' + p_0$, la densité $\rho = \rho' + \rho_0$ et la vitesse $\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}'$. Notez que nous n'imposons alors aucune condition de linéarité ou d'ordre (comme c'était le cas dans la méthode par différences finies) entre les termes initiaux et perturbés. On peut donc maintenant obtenir

$$\begin{array}{rcl} \partial_t \rho & = & -\nabla.\rho\mathbf{v}, \\ \partial_t \rho\mathbf{v} & = & \nabla.\{\Sigma_0 + \Sigma'\} + \rho' + \rho_0\mathbf{g}, \\ \partial_t E & = & -\nabla.(\{E + (p' + p)\}\mathbf{v}) + \nabla.(\sigma'_e + \sigma_{e,0}) + (\rho' + \rho_0)\mathbf{v}.\mathbf{g}, \end{array} \tag{4.18}$$

où le tenseur perturbé Σ' est défini par

$$(\Sigma')_{i,j=1,2} = -p'\delta_{ij} - \rho v_i v_j + \mu\{\partial_i v'_j + \partial_j v'_i - (2/3)\partial_i v'_i \delta_{ij}\}. \tag{4.19}$$

et le vecteur σ_e s'exprime tel que

$$\begin{array}{rcl} \sigma_e & = & \sigma'_e + \sigma_{e,0} \\ \sigma'_e & = & \mathbf{V}.\Sigma'_v + \mathbf{V}'.\Sigma_{v,0} + \kappa\nabla T' \\ \sigma_{e,0} & = & \mathbf{V}_0.\Sigma_{v,0} + \kappa\nabla T_0 \end{array} \tag{4.20}$$

Ce qui se simplifie, en injectant les équations (4.16), de la manière suivante

$$\begin{array}{rcl} \partial_t \rho & = & -\nabla.\rho\mathbf{v}, \\ \partial_t \rho\mathbf{v} & = & \nabla.\Sigma' + \rho'\mathbf{g}, \\ \partial_t E & = & -\nabla.(\{E+p'\}\mathbf{v}) + \nabla.\sigma'_e - \nabla.(p_0\mathbf{v}) + (\rho'+\rho_0)\mathbf{v}.\mathbf{g}, \\ & = & -\nabla.(\{E+p'\}\mathbf{v}) + \nabla.\sigma'_e - p_0\nabla.\mathbf{v}' + \rho'\mathbf{v}.\mathbf{g}, \end{array} \tag{4.21}$$

A chaque pas de temps on résoudra donc le système (4.21) en injectant les variables perturbées, dans les termes de droite, telles que $p' = p - p_0$, $\rho' = \rho - \rho_0$ et $\mathbf{V}' = \mathbf{V} - \mathbf{V}_0$. En faisant ainsi, on ne fait plus intervenir directement l'équilibre hydrostatique (4.16) dans le système (4.21) et on élimine alors les approximations numériques des gradients par la méthode de Galerkin. On rappelle que cette technique n'est valable que pour des conditions initiales respectant les conditions hydrostatiques et si l'état initial est instable le système (4.21) n'est plus valide.

Pour conclure, l'utilisation de techniques de régularisations (soit en calculant la densité à partir de la pression, soit en utilisant l'algorithme présenté précédemment) couplée à la résolution du système (4.21) permet de stabiliser les simulations, et de réduire drastiquement l'erreur, et ainsi d'utiliser des modèles réalistes d'atmosphère.

4.3.3 Capture de chocs

La méthode de Galerkin discontinue, bien que bénéficiant d'avantages liés à la prise en compte de la physique des fluides complexes, pâtit néanmoins d'un inconvénient : son coût en terme de calculs.
En effet, cette méthode repose sur une formulation variationnelle, dont le nombre de noeuds est dédoublé sur chaque interface par rapport à la formulation en éléments finis continus, et utilise un limiteur de flux, ce qui conduit naturellement à un temps de calcul plus important par rapport aux méthodes présentées précédemment.
Plusieurs stratégies peuvent alors être mises en place afin de corriger ce problème : l'optimisation du limiteur de flux et l'utilisation de maillages plus adaptés à notre problème physique.

De nombreuses stratégies sont disponibles afin de limiter les oscillations générées par les forts gradients et adaptées à la méthode de Galerkin discontinue. Il existe essentiellement trois types de limiteurs à l'heure actuelle : les limiteurs de pente ou de moment ("slope or moment limiter" en anglais, par exemple les schémas "Monotonic Upstream-Centered Scheme for Conservation Laws" ou MUSCL), les limiteurs par résidus pondérés ("weighted residuals" en anglais, par exemples les schémas "Essentially Non-Oscillatory" ou ENO et "Weighted Essentially Non-Oscillatory" ou WENO) et enfin l'addition de viscosité articifielle. Plusieurs auteurs ont effectué des comparaisons entre chacune de ces méthodes dont nous résumons les caractéristiques dans le paragraphes suivants (Antoniadis et al., 2011 ; Cockburn et Shu,

1989 ; Farthing et Miller, 2000 ; Iqbal, 2013 ; Michoski et al., 2016 ; Penghui, Pengju et Liang, 2016 ; Zhu, Cheng et Qiu, 2013).

Les schémas par limiteurs de pentes, que nous avons utilisés dans notre étude, ou de moment bénéficient d'une simplicité d'implémentation sur les maillages conformes et de bonnes propriétés en terme de précision par rapport aux schémas par résidus près des chocs d'amplitude et de vitesse "faibles" (faible nombre de Mach). Pour les "forts" chocs certains de ces schémas peuvent présenter une oscillation parasite au niveau des gradients (Hoteit et al., 2004). De plus, l'implémentation sur des maillages non-conformes peut poser des difficultés (Moe, Rossmanith et Seal, 2015). Enfin, l'application du limiteur de pente sur l'ensemble de la solution peut fortement dégrader la précision des signaux lisses (sans forts gradients) (Shu, 1987). Notez néanmoins qu'il existe une grande variété de limiteurs au sein de cette famille qui peuvent participer à corriger ces problèmes (Zhu, Cheng et Qiu, 2013) : les schémas de limiteurs de pente TVDM/TVBM (la différence entre les deux se situant sur la définition de la fonction *minmod*) (Hesthaven et Warburton, 2007, Ch. 5.6) et leur extension sous forme des schémas de Barth-Jespersen (ajoutant notamment une contrainte sur les valeurs minimum et maximum de la solution limitée sur chaque point de quadrature (Antoniadis et al., 2011)) (Barth et Jespersen, 1989), les schémas de limiteurs de moment BDF (Biswas, Devine, Flaherty) (Rider et Margolin, 2001) et les schéma de préservation de la monotonie (MP) (Biswas, Devine et Flaherty, 1994). Le schéma Barth-Jespersen permet d'atteindre une précision plus importante tout en conservant une bonne précision sur des schémas non-conformes (Michalak et Ollivier-Gooch, 2009) bien qu'ils nécessitent un coût plus élevé en termes de calculs que le schéma MUSCL. La condition TVBM, que nous avons utilisée dans notre étude sous forme de la méthode MUSCL, permet de limiter le coût en terme de calcul ainsi que d'améliorer la précision sur les zones lisses en n'activant le limiteur de flux que pour certaines conditions de forts gradients.

Notez que différentes formulations du schéma MUSCL sont possibles pour améliorer la dissipation parasite, en modifiant le calcul du gradient aux interfaces. Dans la figure 4.7, on compare par exemple les propriétés de diffusion numérique d'un schéma du premier ordre de limiteur de pente "MUSCL-2" (Hesthaven et Warburton, 2007, Ch. 5, p. 150, eq. 5.27), et d'un schéma "MUSCL-1" du premier ordre (Van Leer, 1977). Pour le premier, les gradients aux interfaces sont reconstruits à partir de schémas de différences finies en prenant, comme distance de référence, la moitié de la taille d'un élément de maillage telle que $\partial_x u^k \approx \frac{\overline{u^{k+1}} - \overline{u^{k+1}}}{h/2}$ (où h est la taille d'un élément) et pour le schéma "MUSCL-1" on choisit la taille d'un élément comme distance de référence. Le choix d'un schéma "MUSCL" présente davantage de diffusion qu'un schéma classique, ce qui peut être problématique pour le suivi de discontinuités. Mais à l'échelle régionale, pour la progation d'ondes atmosphériques, les effets non-linéaires, bien qu'un peu plus dissipés, ne rendront pas abruptes artificiellement les solutions (Van Leer, 2006).

D'autres méthodes, les ENO, WENO (Zhu et al., 2013) et HWENO (Penghui, Pengju

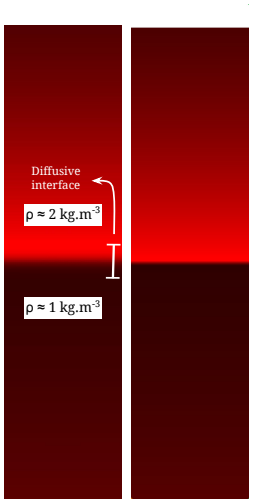

FIGURE 4.7 – Comparaison à $t = 0.1$ s entre le résultat de simulations 2-D d'une instabilité de Rayleigh-Taylor (identique à celle présentée dans la figure 4.3) avec, à droite, un limiteur de pente "MUSCL-2" (HESTHAVEN et WARBURTON, 2007, Ch. 5, p. 150, eq. 5.27) et, à gauche, un limiteur de pente de type "MUSCL-1" (VAN LEER, 1977). Les images sont représentées en densité. On observe que la diffusion de l'interface est plus importante pour le schéma de type "MUSCL-1".

et LIANG, 2016) permettent de conserver la précision sur les zones lisses tout en capturant sans oscillations parasites les forts chocs. Ceci peut venir au prix d'une dissipation plus forte des chocs (ZHU, CHENG et QIU, 2013) mais surtout d'un coût bien plus élevé en termes de calculs (MOE, ROSSMANITH et SEAL, 2015). Enfin, les méthodes par dissipation artificielle (MICHOSKI et al., 2016) permettent d'atteindre une précision élevée si les paramètres sont bien adaptés au problème physique. Mais cela peut aussi être considéré comme l'un de ses principaux inconvénients car l'adaptation doit être réalisée pour chaque problème physique et peut demander une précision importante (MOE, ROSSMANITH et SEAL, 2015). De plus, la valeur des paramètres de viscosité peut contraindre fortement le pas de temps lorsqu'on utilise des schémas en temps explicites à utiliser et ainsi augmenter drastiquement le coût en termes de calculs.

Pour conclure, notre modèle MUSCL avec détecteur de chocs semble être un très bon choix (par rapport à l'équilibre coût de calcul et précision) mais pourrait être amélioré en terme de précision, tout en limitant le coût de calculs, par une méthode de Barth-Jespersen qui est simple d'implémentation (HOTEIT et al., 2004 ; MOE, ROSSMANITH et SEAL, 2015).

4.3.4 Raffinement de maillage

Afin de limiter le temps de calcul et d'améliorer la capture des phénomènes multi-échelles (liés notamment au développement de turbulences) sur de larges domaines de simulation une technique de raffinement de maillage peut être employée par niveau d'interpolation ("p-

refinement" en anglais) et-ou par taille des éléments ("h-refinement" en anglais) comme mentionné dans le chapitre 1 de cette thèse. Si l'on reprend l'expression de la solution numérique, sur un élément de maillage Ω^k, liée à la méthode par éléments finis (tableau 1), on a

$$\text{si } k = [1, K], \forall x \in \Omega^k, v_h(x) = \sum_{i=1}^{N_c} b_i^k \Psi_i^k(x). \tag{4.22}$$

Alors le "p-refinement" correspond à l'augmentation de l'ordre polynomial par l'augmentation du nombre de noeuds N_c et le "h-refinement" en augmentant le nombre d'éléments K. Puisque la méthode de Galerkin discontinue autorise la discontinuité des espaces de discrétisation de la solution entre chaque élément, il est souvent plus rapide de converger vers la solution que pour les méthodes continues (Kubatko et al., 2009). En outre, il est possible de rendre ce raffinement adaptatif, en raffinant, par exemple, le maillage en fonction des valeurs des gradients de la solution numérique au sein des éléments. De nombreux exemples d'utilisation de ces stratégies pour les problèmes de dynamique des fluides sont présents dans la littérature (Nazarov et Hoffman, 2010) et, en général, sont mises en place pour les phénomènes de turbulences au sein de fluides complexes. Il faut tout de même noter que l'utilisation de telles méthodes peut compliquer la mise en place des limiteurs de flux classiques et induire une dissipation numérique importante (Remacle, Flaherty et Shephard, 2003) et nécessite un traitement supplémentaire (Dumbser et al., 2014). Dans le cadre des ondes atmosphériques, de telles stratégies permettraient de raffiner le maillage dans la basse atmosphère et à proximiter des turbulences et de chocs, où sont présentes les plus faibles échelles spatiales, tout en conservant un maillage plus grossier à l'extérieur.

Depuis de nombreuses années, la communauté de modélisation climatique utilise des techniques similaires (Jablonowski, 2004). Dans le cadre des méthodes de Galerkin discontinues, le développement pour les simulations climatiques hydrostatiques et non-hydrostatiques fut récent et initié grâce à Mueller, Kopera et Giraldo (Giraldo, 2013 ; Kopera et Giraldo, 2014, 2015 ; Mueller et al., 2011). En revanche, aucune occurrence ne fut trouvée d'une telle méthode pour la propagation des ondes acoustiques et de gravité. Nous n'avons pas mené ce travail pour l'instant mais il permettrait une avancée non négligeable lorsque les phénomènes non-linéaires sont importants à capturer (simulations dans la haute atmosphère, forts gradients de vent, explosions atmosphériques), d'autant plus que ces méthodes bénéficient d'un grand bagage théorique (Hesthaven et Warburton, 2007).

4.3.5 Stabilité et convergence de la méthode

Une étude de convergence empirique a été menée sur un cas simple de propagation acoustique. On considère les paramètres de simulation donnés dans le tableau 4.1 correspondant à la propagation d'une onde plane de période principale $P = 20$ s dans une atmosphère isothermale stratifiée de hauteur d'échelle $H = 10$ km, une vitesse du son $c = 370$ m.s^{-1}.

Les résultats sont présentés dans la figure 4.8. On observe qu'en deçà de $\Delta x = 250$ m, la

$L_x \times L_z$ (km)	Δt (s)	H (km)	$\lvert g_z \rvert$ (m.s^{-2})	γ	c (m.s^{-1})	P (s)
10×200	10^{-2}	10	9.81	1.4	370	20

TABLE 4.1 – H est la hauteur d'échelle, g_z l'accélération de gravité, γ le ratio de capacité thermique, c la vitesse adiabatique du son et P la période principale de forçage.

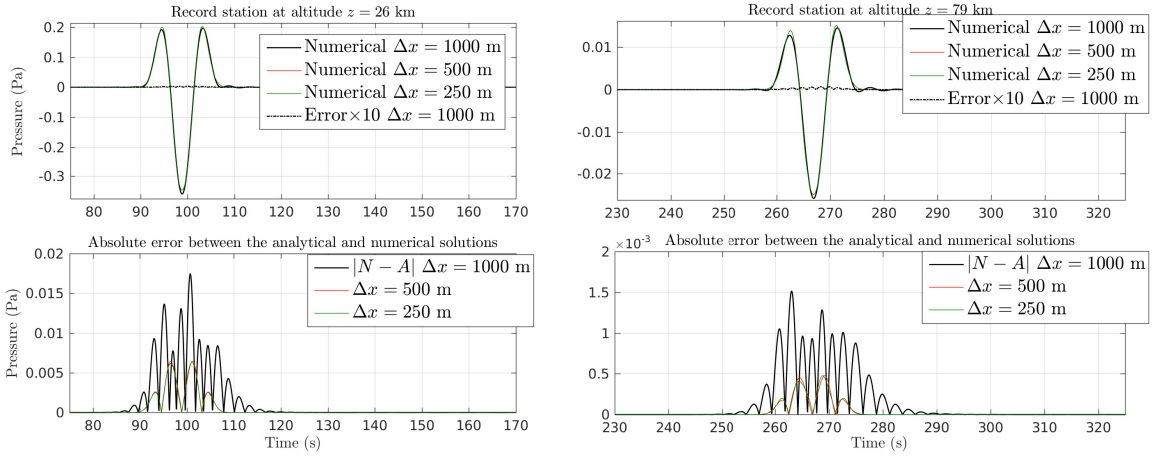

FIGURE 4.8 – En haut, les perturbation de pression pour la méthode de Galerkin discontinue ('Numerical') et la solution analytique ('Analytical') pour des pas d'espace $\Delta x = 250, 500, 1000$ m, ainsi que la différence absolue, multipliée par 10, ('Error×10') entre la solution analytique et numérique pour la résolution $\Delta x = 1000$ m. Les signaux sont montrés en temps pour la Simulation présentée dans la tableau 4.1 à deux stations aux altitudes, de gauche à droite, $z = 26$ km et $z = 79$ km, leur position en x étant $x = 500$ m. L'atmosphère est isothermale (Table 4.1). En bas, l'amplitude, en fonction du temps, de l'erreur absolue entre la perturbation de pression et le signal analytique pour divers pas d'espace $\Delta x = 250, 500, 1000$ m et, de gauche à droite, de deux altitude $z = 26$ km et $z = 79$ km. Pour les deux stations, l'amplitude de l'erreur décroît avec la diminution du pas d'espace.

méthode a convergée. Le ratio de la longueur d'onde de l'onde plane $\lambda_z = cP = 7400$ m et du pas d'espace donne alors $R = \frac{\lambda_z}{\Delta x} = 29.6$ ce qui fournit une limite pour obtenir l'erreur minimum avec la méthode Galerkin discontinue.

Aucune étude de stabilité précise n'a en revanche été menée sur cette méthode couplée. C'est un inconvénient majeur lorsque nous souhaitons résoudre des problèmes sur des temps longs, pour lesquels il est difficile de donner, a priori, un critère de stabilité.

Bien que l'exercice soit plus délicat qu'en différences finies, il est néanmoins possible d'utiliser une formule générale à partir de la taille des éléments du maillage ainsi que de l'espace entre les noeuds de discrétisation. Si l'on considère un problème 1-D correspondant au système des équations de Navier-Stokes tel que

$$\mathcal{L}\mathbf{u} = \mathbf{f}, \tag{4.23}$$

où **f** sont les termes de volume, **u** le vecteur des variables conservatives et $\mathcal{L}$ l'opérateur de Navier-Stokes. On peut alors définir la condition CFL générale de la manière suivante (Hesthaven et Warburton, 2007, Ch. 4.8, p. 97)

$$\Delta t_f \leq \frac{\alpha(N)}{max|\lambda(\mathcal{L})|} min_(\frac{h^k}{2} \Delta_i r), \tag{4.24}$$

où Δt_f est le pas de temps dans le milieu fluide, α est le nombre CFL, N le degré d'interpolation polynomiale, λ les valeurs propres du système de Navier-Stokes, $(h^k)_{k=1,K}$ la taille de l'élément k et $(\Delta_i r)_{i=1,N_c-1}$ l'espacement entre les noeuds sur chaque élément. Notez que la dépendance de la CFL en fonction de la taille des éléments et le degré d'interpolation, souvent contraignante, peut être relâchée en utilisant diverses techniques (Hesthaven et Warburton, 2007, Ch. 4.8.2) et notamment par le recours à des pas de temps locaux ("local time stepping" en anglais). Cette méthode permet d'obtenir un nombre d'itération optimal et ainsi de diminuer le coût de la simulation en terme de calculs lorsqu'on résout un problème multi-échelle (Altmann et al., 2010) et fut notamment appliquée à la méthode par éléments spectraux discontinus (Winters et Kopriva, 2014). Ceci pourrait être facilement adapté à la méthode couplée, dans la partie fluide, afin de sous-discrétiser en temps les hautes altitudes. En considérant le système de Navier-Stokes et un maillage conforme, on peut alors considérer la solution simplifiée suivante pour le pas de temps de la partie fluide Δt_f (Jin et al., 2017)

$$\Delta t_f = \alpha \times min \left(\frac{\Delta x}{max(|u| + c)}, \frac{\Delta z}{max(|v| + c)} \right) \tag{4.25}$$

où $(\Delta x, \Delta z)$ sont les pas d'espace dans la direction horizontale et verticale et $(|u| + c, |v| + c)$ correspondent aux valeurs propres maximum du système de Navier-Stokes pour la vitesse horizontale u et verticale v. Par ailleurs, des valeurs numériques sont disponibles dans l'étude par Toulorge (Toulorge et Desmet, 2011) pour le nombre CFL dans le cadre de la résolution d'un problème d'advection avec des maillages par éléments triangulaires et flux de Lax-Friedrich. Notez que cette étude soulève aussi le problème du développement de schémas en temps de Runge-Kutta adaptés aux méthodes de Galerkin discontinues afin, notamment, de diminuer le coût de ces méthodes en termes de calculs.

Pour la partie solide et la méthode par éléments spectraux continus, les critères de stabilité sur le pas de temps Δt_s sont connus (De Basabe et Sen, 2007). Les contraintes numériques sur la CFL sont alors données en fonction du ratio de la vitesse des ondes P et du pas d'espace dans un solide visco-élastique (Komatitsch et Tromp, 1999).

Afin de déterminer une condition globale pour le système couplé on peut simplement utiliser la formule suivante

$$\Delta t = min(\Delta t_f, \Delta t_s). \tag{4.26}$$

La relation (4.25) ne prend pas en compte l'impact de la viscosité atmosphérique sur la

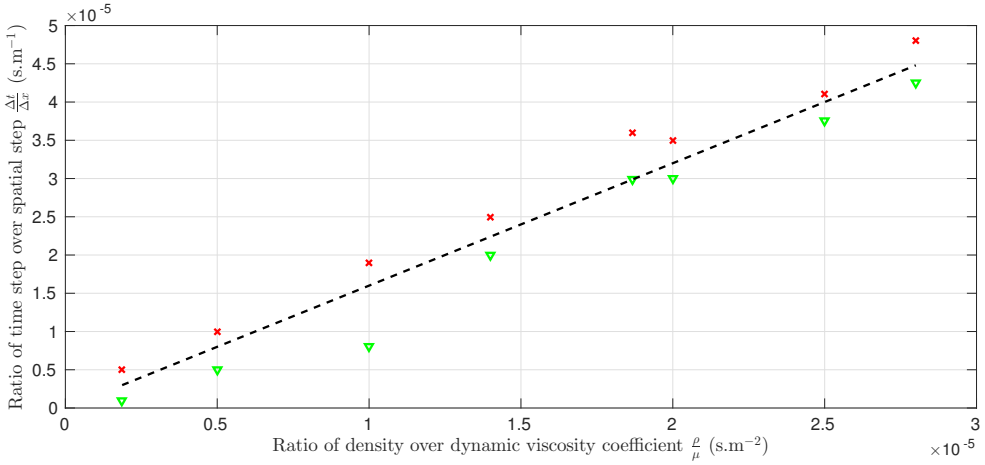

FIGURE 4.9 – Représentation des conditions de stabilité sur la résolution de la simulation numérique $\frac{\Delta t}{\Delta x}$, où Δt est le pas de temps et Δx le pas d'espace, en fonction du ratio de la densité atmosphérique sur le coefficient de viscosité dynamique $\frac{\rho}{\mu}$, où ρ est la densité atmosphérique et μ le coefficient de viscosité dynamique. La simulation considérée est la propagation d'une onde plane acoustique issue d'un forçage de la frontière inférieure sous forme d'une dérivée de gaussienne de période principale $P = 5$ s sur un domaine de dimensions 5×100 km dans une atmosphère homogène. Les croix rouges correspondent aux simulations instables et les triangles verts correspondent aux simulations stables. La ligne hachurée noire représente la limite de stabilité empirique des simulations numériques.

stabilité de la méthode. Il est possible de déterminer empiriquement une condition supplémentaire de stabilité entre la résolution de la simulation, la densité atmosphérique et le coefficient de viscosité dynamique sous la forme suivante

$$\frac{1}{K}\frac{\Delta t_f}{\Delta x}\frac{\mu}{\rho} \leq 1 \tag{4.27}$$

où $K = 1.6$ en 2D est un coefficient empirique de stabilité, Δt le pas de temps, Δx la taille d'un élément du maillage, ρ la densité atmosphérique et μ le coefficient de viscosité dynamique. Afin que les simulations numériques, par la méthode de Galerkin discontinue, soient stables dans une atmosphère avec viscosité, il est nécessaire de respecter la condition 4.27. Plusieurs résultats numériques sur la stabilité des simulations sont visibles dans la figure 4.9. Il est aussi visible, dans cette figure, que la limite de stabilité sur la résolution $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ pour les simulations numériques et représentée par la ligne noire hachurée.

4.3.6 Perspectives d'applications

Un tel outil de modélisation peut permettre l'étude d'une grande variété de phénomènes linéaires et non-linéaires au sein du fluide et leur couplage à la partie solide. On peut dégager trois voies d'études intéressantes à court terme pour cet outil.

Tout d'abord, cet outil peut permettre l'étude de la dynamique des infrasons et des ondes de gravité liés à des sources atmosphériques et sismiques. Ceci s'avère d'importance notamment dans le contexte des missions planétaires pour lesquelles la quantité et les sources d'observations sont limitées. Dans le cadre de la mission INSIGHT, les mesures de pression atmosphérique peuvent permettre de contraindre les phénomènes sources et d'aider au traitement des données sismiques pour construire des modèles structurels de l'intérieur de Mars (Davis, 1993 ; Teanby, 2015). Sur Vénus, un projet de mission est en construction (Stevenson et al., 2015), pour lequel les ondes atmosphériques seraient le seul moyen d'étudier la structure interne de la planète car les conditions de surface sont trop contraignantes pour les instruments de mesures aujourd'hui disponibles.

Il est aussi possible d'étudier la propagation acoustique non-linéaire liée aux explosions et aux seismes de proche surface dans une atmosphère complexe. L'étude des chocs induits par les explosions est un domaine très largement exploré (Gainville et al., 2010, 2012 ; Groot-Hedlin, 2016 ; Lonzaga et al., 2015 ; Rogers et Gardner, 1980 ; Sabatini et al., 2016), notamment dans le cadre du CTBT ("Comprehensive Nuclear-Test-Ban Treaty") et du développement du réseau IMS (Christie et al., 2001). Les couplages des chocs acoustiques avec la partie solide (Langston, 2004) furent aussi un sujet d'intérêt dont les motivations portaient sur la possibilité de reconstruction, d'une part, du phénomène source lorsqu'on connait le milieu de propagation ainsi que, d'autre part, des caractéristiques de la sub-surface si la fonction source est bien contrainte (Stevanović et al., 2017). Notre méthode permettrait de résoudre simultanément et avec précision les caractéristiques de la source ainsi que l'ensemble de ces phénomènes (phase linéaire, formation des chocs, dissipation, influence des gradients de vent et couplages). Néanmoins, dans le cadre d'entrées de météorites, il est nécessaire de représenter une source en mouvement ainsi que sa déflagration progressive. Ces évènements ne pouvant être définis sous forme d'un point source fixe dans l'espace, des développements supplémentaires devront être menés. En outre, les séismes de proche surface génèrent de fortes perturbations dans l'atmosphère, dont les amplitudes peuvent amener l'effondrement des ondes avant que les effets visqueux et de relaxation ne puissent dissiper l'énergie (Afraimovich et al., 2001b ; Astafyeva, Lognonné et Rolland, 2011 ; Chum et al., 2016). La transition vers les non-linéarités va changer drastiquement la sensibilité de l'onde aux propriétés atmosphériques et la simulation complète de ces signaux permettrait notamment l'explication de certains phénomènes ionosphériques (Zettergren et al., 2017).

Dans la section précédente, nous avons mené une étude qualitative du phénomène d'effondrement des ondes de gravité lié aux instabilités de Kelvin-Helmholtz. Ce phénomène participe notamment à la redistribution de l'énergie dans la thermosphère (Lindzen, 1981 ; Yiğit et Medvedev, 2009). Capturer cette dynamique ainsi que les réflections-transmissions (niveaux critiques) liées aux forts gradients de vents et de température participerait à l'explication d'observations climatiques récentes (Cao et al., 2016) ainsi que celles effectuées par les satellites de basse orbite dans le cadre, par exemple, des ondes générées par les tsunamis. Dans ce dernier cas, un grand nombre d'études repose sur une approche linéaire de la propagation mais comme mentionnés à plusieurs reprises, l'amplitude importante des ondes de

gravité dans la haute atmosphère et l'influence des vents peuvent initier la réflection, voire la génération de turbulences. Les amplitudes prédites par les systèmes linéaires seront donc erronées et l'extension aux non-linéarités indispensable (Gavrilov et Kshevetskii, 2014 ; Laughman, Fritts et Lund, 2017).

A plus long terme, il est aussi envisageable de donner une représentation complète de la propagation de tsunamis et des phénomènes de couplage Terre-océan-atmosphère induits. En effet, bien que le couplage entre l'océan et l'atmosphère ne soit pas encore une fonctionnalité existante de l'outil de modélisation, la prise en compte de rhéologies de fluides différentes (atmosphère et océan) au sein d'une même simulation est simple à mettre en place. Les seuls points délicats concerneront la mise en place d'une stratégie efficace pour imposer numériquement la quasi-incompressibilité de l'océan et la limitation de la diffusion numérique à l'interface océan-atmosphère. Une technique de capture d'interface pourra alors être mise en place de manière similaire à la méthode proposée récemment dans Jin et al., 2017.

Conclusion et perspectives

L'objectif de cette thèse est de construire un outil numérique permettant de propager des ondes acoustiques et de gravité dans des atmosphères planétaires issues d'explosions et de phénomènes sismiques. Pour ce faire deux méthodes numériques originales furent développées pour résoudre la propagation d'ondes dans une atmosphère complexe stratifiée, l'une se concentrant sur la partie atmosphérique et l'autre ajoutant le couplage à une partie solide visco-élastique. La première méthode est, par ailleurs, confrontée à plusieurs cas d'applications réalistes : la propagation d'ondes issues de l'impact d'une météorite à la surface de Mars dans le cadre de la mission INSIGHT de 2018 et la propagation d'infrasons et d'ondes de gravité générés par le tsunami de Sumatra en 2004.

La première méthode repose sur des différences finies d'ordre élevé et une grille en quinconce, inspirée des travaux de Virieux (Virieux, 1986), et est présentée dans le chapitre 1. Cet outil permet de propager simultanément des ondes acoustiques et de gravité linéaires dans une atmosphère stratifiée, visqueuse (viscosité dynamique, de volume et relaxation vibrationnelle) et en advection (vent horizontal). Elle fut validée contre des solutions quasi-analytiques et étendue en trois dimensions. Elle donne alors la possibilité d'étudier précisément les perturbations basses fréquences dans des atmosphères planétaires réalistes issues de points sources ou d'un forçage en déplacement, vitesse ou pression par imposition de conditions de bords. Des améliorations pourraient être menées sur la configuration du maillage, pour l'instant cartésienne, en raffinant certaines parties du domaine de calcul en fonction des longueurs d'ondes attendues (typiquement grandes dans la haute atmosphère et faibles dans la basse atmosphère). En outre, au delà de l'échelle régionale, il va être nécessaire d'ajouter les propriétés d'ellipticité de la planète, voire la force de Coriolis, si les longueurs d'ondes de gravité sont très importantes (Hickey, 1988). Enfin, le développement de couches PML adaptées à la polarisation des ondes acoustiques et de gravité serait un ajout important afin de corriger les effets de réflexions parasites.

La méthode par différences finies fut appliquée à deux cas d'études. Le premier se penchait sur la propagation d'ondes atmosphériques issues de l'impact d'une météorite à la surface de Mars dans le contexte de la mission INSIGHT en 2018 (Banerdt et al., 2013). La modélisation numérique s'inscrivait dans la quantification des perturbations de pression infrasoniques, liées à l'impact, dans la basse atmosphère. La mesure de ces signaux permettrait de mieux contraindre le mécanisme source (l'impact) et ainsi de pouvoir mener une étude tomographique de la sub-surface à partir des données sismiques. Nous avons pu observer la génération d'un guide d'onde de basse altitude (lié au refroidissement de la surface la nuit) permettant la propagation d'ondes basses fréquences sur de longues distances sans être trop atténuées par les effets visqueux et de relaxation. La seconde application concernait l'étude des ondes atmosphériques issues de la propagation du tsunami après le tremblement de Terre de Sumatra en 2004. A l'aide de simulations réalistes de l'élévation de la surface océanique, on a pu

estimer quelques propriétés des ondes gravito-acoustiques issues du tsunami ainsi que comparer aux observations déjà réalisées. On note des résultats qualitatifs satisfaisants en terme de temps d'arrivées, de forme d'onde et de contenu fréquentiel proche de la surface ainsi que pour les ondes de gravité dans la thermosphère. Mais les résultats semblent moins précis en terme d'amplitude et ce travail de modélisation mériterait d'être continué en 3-D ainsi que pour une résolution plus fine. Enfin, cette étude a mis en relief l'importance de prendre en compte les phénomènes non-linéaires, essentiels lorsque les ondes se propagent dans la haute altitude et sont soumis à de forts gradients de vents amenant progressivement à la génération de turbulences.

La seconde méthode numérique, présentée dans le chapitre 4, est hybride entre des éléments finis spectraux continus pour résoudre la propagation élastique et des éléments finis spectraux discontinus pour résoudre la propagation atmosphérique. Cette méthode couplée, et pour l'instant en deux dimensions, permet de propager des ondes acoustiques et de gravité non-linéaires et des ondes visco-élastiques linéaires dans un milieu couplé fluide-solide et avec topographie. Cet outil repose sur le logiciel SPECFEM2D (Chaljub, 2000) dans lequel nous avons rajouté les propriétés de couplage fluide-solide ainsi que la méthode de résolution discontinue. On bénéficie alors des nombreux développements déjà réalisés au sein de SPECFEM2D tout en gardant la flexibilité géométrique et la possibilité de prendre en compte facilement les non-linéarités grâce aux éléments discontinus. Elle fut validée par des solutions quasi-analytiques ainsi qu'en comparant avec les résultats numériques de la méthode par différences finies. Un tel outil permet l'étude d'une très grande variété d'applications planétaires tels que les rentrées de météorites (Stevanović et al., 2017), les explosions de surface (Edwards, 2010), la propagation de tsunamis (Smith et al., 2005), les tremblement de Terre de proche surface (Chum et al., 2016) et l'étude des ondes sismiques de surface (Bowden et Tsai, 2017). En outre, la possibilité de résoudre les non-linéarités peut permettre d'étudier, au sein de la même simulation, les transitions entre les phases linéaires et non-linéaires. Celles-ci ont un impact important sur l'amplitude et le contenu fréquentiel des ondes et ainsi jouent un rôle crucial dans la transmission de l'énergie à travers les guides d'ondes en altitude ainsi que sur leur sensibilité aux phénomènes de dissipation atmosphérique (Sabatini et al., 2016). Il serait néanmoins intéressant de perfectionner certaines caractéristiques de la méthode. Tout d'abord l'implémentation de conditions de bord absorbantes (à l'aide de méthodes par caractéristiques (Thompson, 1987) ou zones absorbantes (Garai et al., 2016)) semble essentielle pour résoudre correctement les problèmes de simulations atmosphériques. De plus, tout comme pour la méthode par différences finies, il serait important de pouvoir utiliser des maillages multi-grilles, ou des techniques de "local time-stepping", afin de limiter le temps de calcul. De surcroît, l'utilisation de différentes grilles se justifie parce que nous résolvons la propagation élastique et acoustique simultanément et les longueurs d'ondes seront radicalement différentes entre le milieu solide et fluide. Enfin, étendre l'outil en 3D permettrait de prendre en compte des modèles d'atmosphères plus réalistes et de calculer les effets géométriques dans leur globalité (atténuation géométrique, réflexion et réfractions).

La résolution d'un problème de modélisation direct s'inscrit dans un contexte d'étude plus

large. En effet, ces outils permettent d'obtenir une image plus claire des phénomènes physiques et d'expliquer certaines observations lorsque les mécanismes sources et les propriétés des milieux de propagation sont connus. Mais ces caractéristiques sont souvent inaccessibles ou mal contraintes. Il est néanmoins possible, à partir des formes d'ondes numériques et des observations, d'inférer les propriétés des milieux de propagation ou de la source (pour un exemple d'application tomographique : Monteiller et al., 2015). Ce type de résolution se nomme problème inverse et repose sur la résolution successive de problèmes directs à partir d'un modèle atmosphérique initial (ou modèle sismique ou fonction source). Ce modèle initial est ensuite mis à jour itérativement dans la direction donnée par une fonction coût dépendante de la différence entre les résultats numériques et les observations. Pour résoudre un problème inverse il est alors nécessaire de disposer de deux outils : une méthode de résolution numérique directe et un outil de mesure de la sensibilité de la propagation par rapport à un modèle donné.

Ce second outil peut prendre plusieurs formes : la résolution d'un problème adjoint, l'implémentation de méthodes stochastiques voire l'utilisation de méthodes d'apprentissage par machine ("machine learning" en anglais). La première est déterministe et consiste à résoudre conjointement le problème adjoint de notre problème direct afin de déterminer les propriétés de sensibilité du milieu, appelées noyaux de sensibilité ("sensitivity kernels" en anglais). Cette méthode est couramment utilisée pour la tomographie sismique (Monteiller et al., 2015) et, dans le cadre des équations de Navier-Stokes, pour l'optimisation de structures (Nadarajah et Jameson, 2000) ou le contrôle de flux (Moret, 2009). Elle est intéressante, car bien définie mathématiquement, et peut être ainsi très précise si le problème est correctement contraint. Elle peut, en revanche, être difficile et lourde à mettre en place et à résoudre sur de larges domaines et si le problème est mal contraint et la solution non-unique (minimum local de la fonction coût). Il existe néanmoins, d'autre outils afin de limiter le temps de calcul via l'auto-différentiation (Sambridge et al., 2007). La seconde méthode est une méthode reposant sur des arguments statistiques (et non adjoints) afin de déterminer la sensibilité d'un problème donné. On effectue alors une série de simulations afin de palier le problème de solution non-unique. Cette méthode est donc plus globale mais peut néanmoins être très coûteuse en temps de calcul (Francis, 2005). Elle fut appliquée à de nombreuses reprises durant ces dernières années dans le domaine sismique (Leeuwen, Aravkin et Herrmann, 2011). Enfin la dernière méthode, plus récente, est une extension des méthodes statistiques en ajoutant une couche supplémentaire d'optimisation sous forme d'un réseau de neurones. Ces derniers sont de simples fonctions à paramètres s'échangeant de l'information avec des règles définies a priori et permettant de résoudre une grande variété de problèmes pour un faible coût. Ces fonctions à paramètres sont mises à jours itérativement au cours d'un entraînement durant lequel on injecte des données connues (c'est-à-dire lorsqu'on connaît a priori le résultat exact) dans le réseau et on compare les résultats fournis par ce dernier au résultat exact. On détermine alors l'erreur à l'aide d'une fonction coût puis on met à jour les paramètres de ces neurones grâce à des arguments statistiques. L'idée ici, est de supprimer, à terme, l'étape de modélisation directe et de se baser uniquement sur le réseau de neurones pour résoudre le problème inverse réduisant ainsi drastiquement le temps de calcul. Cette méthode présente un intérêt pour les problèmes mathématiquement mal posés (Jin et al., 2016) et est particulièrement efficace lorsque les données d'entraînement sont en quantité importante et bien

contraintes (Moya et Irikura, 2010). Plusieurs applications récentes furent mises en place dans le cadre de l'inversion de formes d'ondes (Hirooka et al., 2011 ; Moya et Irikura, 2010).

Afin de caractériser les propriétés atmosphériques ou sismiques, notamment dans le cadre de missions planétaires, de telles méthodes d'inversions permettraient d'obtenir de précieuses informations à partir de mesures in-situ. Néanmoins, la variabilité importante du milieu atmosphérique donne lieu à un problème mathématique complexe et lourd à résoudre (autant d'équations en plus à résoudre à chaque pas de temps que pour le système d'équations initiales pour la méthode adjointe, Moret, 2009) pour lequel une méthode de "machine learning" serait pertinente à mettre en oeuvre. Pour des ondes basses fréquences, moins sensibles aux fluctuations locales, il serait aussi imaginable d'employer des techniques similaires à celles utilisées pour le milieu sismique ou dans le cadre de prévisions climatiques (Bannister, 2016).

Bibliographie

Abalakin, Ilya, Alain Dervieux et Tatiana Kozubskaya (2006). « High accuracy finite volume method for solving nonlinear aeroacoustics problems on unstructured meshes ». In : *Chinese Journal of Aeronautics* 19.2, p. 97–104 (cf. p. 18).

Afraimovich, EL et al. (2001a). « Geomagnetic control of the spectrum of traveling ionospheric disturbances based on data from a global GPS network ». In : *Radiophysics and quantum electronics* 44.10, p. 763–773 (cf. p. 12).

Afraimovich, EL et al. (2001b). « The shock-acoustic waves generated by earthquakes ». In : *Annales Geophysicae*. T. 19. 4. Copernicus GmbH, p. 395–409 (cf. p. 125, 166).

Akintunde, Akinjide et Andi Petculescu (2014). « Infrasonic attenuation in the upper mesosphere–lower thermosphere : A comparison between Navier–Stokes and Burnett predictions ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 136.4, p. 1483–1486 (cf. p. 34).

Alcoverro, Benoit, P Martysevich et Y Starovoit (2005). « Mechanical sensitivity of microbarometers MB2000 (DASE, France) and Chaparral 5 (USA) to vertical and horizontal ground motion ». In : *Inframatics* 9, p. 1–10 (cf. p. 10).

Alexander, M. J. et T. J. Dunkerton (1999). « A Spectral Parameterization of Mean-Flow Forcing due to Breaking Gravity Waves ». In : *Journal of the Atmospheric Sciences* 56.24, p. 4167–4182. eprint : `http://dx.doi.org/10.1175/1520-0469(1999)056<4167:ASPOMF>2.0.CO;2` (cf. p. 13).

Altmann, Christoph et al. (2010). « An explicit space-time discontinuous Galerkin scheme with local time-stepping for unsteady flows ». In : *New Results in Numerical and Experimental Fluid Mechanics VII*. Springer, p. 151–158 (cf. p. 164).

Antoniadis, AF et al. (2011). « Comparison of High-order Finite Volume and Discontinuous Galerkin Methods on 3D Unstructured Grids ». In : *AIP Conference Proceedings*. T. 1389. 1. AIP, p. 1886–1889 (cf. p. 159, 160).

Arendt, Steve et David C Fritts (2000). « Acoustic radiation by ocean surface waves ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 415, p. 1–21 (cf. p. 14, 15).

Arina, Renzo (2016). « Validation of a Discontinuous Galerkin Implementation of the Time-Domain Linearized Navier–Stokes Equations for Aeroacoustics ». In : *Aerospace* 3.1, p. 7 (cf. p. 123, 124).

Artru, J., T. Farges et P. Lognonné (2004). « Acoustic waves generated from seismic surface waves : propagation properties determined from Doppler sounding observation and normal-modes modeling ». In : *Geophys. J. Int.* 158, p. 1067–1077 (cf. p. 16, 22).

Artru, J., P. Lognonné et E. Blanc (2001). « Normal modes modelling of post-seimic ionospheric oscillations ». In : *Geophys. Res. Lett.* 28, p. 697–700 (cf. p. 22).

Artru, J. et al. (2005). « Ionospheric detection of gravity waves induced by tsunamis ». In : *Geophys. J. Int.* 160, p. 840–848 (cf. p. 1, 11).

Astafyeva, Elvira, Philippe Lognonné et Lucie Rolland (2011). « First ionospheric images of the seismic fault slip on the example of the Tohoku-oki earthquake ». In : *Geophysical Research Letters* 38.22 (cf. p. 166).

Attenborough, Keith et al. (1995). « Benchmark cases for outdoor sound propagation models ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 97.1, p. 173–191 (cf. p. 23).

Aucan, Jérôme, David Fee et Milton Garcés (2006). « Infrasonic estimation of surf period ». In : *Geophysical research letters* 33.5 (cf. p. 14).

Babuska, Ivo et Abdul K Aziz (1972). *Lectures on mathematical foundations of the finite element method.* Rapp. tech. Maryland univ., college park. inst. for fluid dynamics et applied mathematics. (cf. p. 20).

Banerdt, W. B. et al. (2013). « InSight : A Discovery Mission to Explore the Interior of Mars ». In : *Lunar and Planetary Science Conference*. T. 44. Lunar and Planetary Science Conference, p. 1915 (cf. p. 67, 169).

Bannister, RN (2016). « A review of operational methods of variational and ensemble-variational data assimilation ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* (cf. p. 24, 172).

Barth, Timothy et Dennis Jespersen (1989). « The design and application of upwind schemes on unstructured meshes ». In : *27th Aerospace sciences meeting*, p. 366 (cf. p. 120, 160).

Bass, H. E. et J. P. Chambers (2001a). « Absorption of sound in the Martian atmosphere ». In : *J. Acoust. Soc. Am.* 109, p. 3069–3071 (cf. p. 60, 68).

Bass, H.E. et al. (1984). « Absorption of sound by the atmosphere ». In : *Physical acoustics*. T. XVII. Academic Press Inc., p. 145–232 (cf. p. 9, 28, 29, 60).

Bass, HE et al. (1995). « Atmospheric absorption of sound : Further developments ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 97.1, p. 680–683 (cf. p. 8).

Bass, Henry E et James P Chambers (2001b). « Absorption of sound in the Martian atmosphere ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 109.6, p. 3069–3071 (cf. p. 8).

Bathe, Klaus-Jürgen (2001). « The inf–sup condition and its evaluation for mixed finite element methods ». In : *Computers & structures* 79.2, p. 243–252 (cf. p. 124).

Ben-Menahem, Ari (1975). « Source parameters of the Siberian explosion of June 30, 1908, from analysis and synthesis of seismic signals at four stations ». In : *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 11.1, p. 1–35 (cf. p. 14).

Benioff, H et B Gutenberg (1939). « Observations with electromagnetic microbarographs ». In : *Nature* 144.3645, p. 478 (cf. p. 9, 14).

Benioff, Hugo (1951). « Earthquakes and rock creep :(Part I : Creep characteristics of rocks and the origin of aftershocks) ». In : *Bulletin of the Seismological Society of America* 41.1, p. 31–62 (cf. p. 9).

Berenger, Jean-Pierre (1994). « A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves ». In : *Journal of computational physics* 114.2, p. 185–200 (cf. p. 101).

Berland, Julien et al. (2007). « High-order, low dispersive and low dissipative explicit schemes for multiple-scale and boundary problems ». In : *Journal of Computational Physics* 224.2, p. 637–662 (cf. p. 38).

Bermúdez, Alfredo et Rodolfo Rodríguez (1994). « Finite element computation of the vibration modes of a fluid—solid system ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 119.3-4, p. 355–370 (cf. p. 122).

— (1999). « Modelling and numerical solution of elastoacoustic vibrations with interface damping ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 46.10, p. 1763–1779 (cf. p. 122).

Berre, Loïk, Hubert Varella et Gérald Desroziers (2015). « Modelling of flow-dependent ensemble-based background-error correlations using a wavelet formulation in 4D-Var at Météo-France ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 141.692, p. 2803–2812 (cf. p. 24).

Bertolazzi, Enrico et Gianmarco Manzini (2005). « A second-order maximum principle preserving finite volume method for steady convection-diffusion problems ». In : *SIAM journal on numerical analysis* 43.5, p. 2172–2199 (cf. p. 18).

Bet, K et J Oden (1991). « A Runge-Kutta discontinuous finite element method for high speed flows ». In : *10th Computational Fluid Dynamics Conference*, p. 1575 (cf. p. 121).

Biswas, Rupak, Karen D Devine et Joseph E Flaherty (1994). « Parallel, adaptive finite element methods for conservation laws ». In : *Applied Numerical Mathematics* 14.1-3, p. 255–283 (cf. p. 160).

Blanc, E. (1985a). « Observations in the upper atmosphere of infrasonic waves from natural or artificial sources : A summary ». In : *Ann. Geophysicae* 3, p. 673–688 (cf. p. 9).

Blanc, Elisabeth (1985b). « Observations in the upper atmosphere of infrasonic waves from natural or artificial sources : A summary ». In : *Annales Geophysicae*. T. 3. 6. Gauthier-Villars, p. 673–687 (cf. p. 12, 16).

Blanc, Emilie et al. (2016). « Highly accurate stability-preserving optimization of the Zener viscoelastic model, with application to wave propagation in the presence of strong attenuation ». In : *Geophysical Journal International* 205.1, p. 427–439 (cf. p. 122).

Blight, GE (1997). « Interactions between the atmosphere and the earth ». In : *Geotechnique* 47.4, p. 715–767 (cf. p. 30).

Blumrich, Reinhard et Dietrich Heimann (2002). « A linearized Eulerian sound propagation model for studies of complex meteorological effects ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 112.2, p. 446–455 (cf. p. 38).

Bogey, Christophe et Christophe Bailly (2004). « A family of low dispersive and low dissipative explicit schemes for flow and noise computations ». In : *Journal of Computational Physics* 194.1, p. 194–214 (cf. p. 118).

Bonnet-Ben Dhia, Anne-Sophie, Guillaume Legendre et Éric Lunéville (2001). « Analyse mathématique de l'équation de Galbrun en écoulement uniforme ». In : *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series IIB-Mechanics* 329.8, p. 601–606 (cf. p. 124).

Bonnet-Ben Dhia, Anne-Sophie et al. (2012). « Time-harmonic acoustic scattering in a complex flow : a full coupling between acoustics and hydrodynamics ». In : *Communications in Computational Physics* 11.02, p. 555–572 (cf. p. 124).

Booker, John R et Francis P Bretherton (1967). « The critical layer for internal gravity waves in a shear flow ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 27.03, p. 513–539 (cf. p. 34).

Borazjani, Iman, Liang Ge et Fotis Sotiropoulos (2008). « Curvilinear immersed boundary method for simulating fluid structure interaction with complex 3D rigid bodies ». In : *Journal of Computational physics* 227.16, p. 7587–7620 (cf. p. 122).

Bottero, Alexis et al. (2016). « An axisymmetric time-domain spectral-element method for full-wave simulations : Application to ocean acoustics ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 140.5, p. 3520–3530 (cf. p. 122).

Bowden, Daniel C et Victor C Tsai (2017). « Earthquake ground motion amplification for surface waves ». In : *Geophysical Research Letters* 44.1, p. 121–127 (cf. p. 170).

Bowman, Daniel C. et Jonathan M. Lees (2015). « Infrasound in the middle stratosphere measured with a free-flying acoustic array ». In : *Geophysical Research Letters* 42.22. 2015GL066570, p. 10,010–10,017 (cf. p. 15).

Bowman, Howard S et Alfred J Bedard (1971). « Observations of infrasound and subsonic disturbances related to severe weather ». In : *Geophysical Journal International* 26.1-4, p. 215–242 (cf. p. 10).

Brachet, Nicolas et al. (2010). « Monitoring the earth's atmosphere with the global IMS infrasound network ». In : *Infrasound Monitoring for Atmospheric Studies*. Springer, p. 77–118 (cf. p. 10, 15).

Bretherton, Francis P (1966). « The propagation of groups of internal gravity waves in a shear flow ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 92.394, p. 466–480 (cf. p. 33).

Briggs, Geoffrey A et Conway B Leovy (1974). « Mariner observations of the Mars north polar hood ». In : *Bulletin of the American Meteorological Society* 55.4, p. 278–296 (cf. p. 71).

Brissaud, Quentin et al. (2016). « Finite-difference numerical modelling of gravitoacoustic wave propagation in a windy and attenuating atmosphere ». In : *Geophysical Journal International* 206.1, p. 308–327 (cf. p. 29, 38).

Brissaud, Quentin et al. (2017). « Hybrid Galerkin numerical modeling of elastodynamics and compressible Navier-Stokes couplings : applications to seismo-gravito acoustic waves ». In : *Geophysical Journal International*, ggx185 (cf. p. 128).

Bristeau, Marie Odile, Roland Glowinski et Jacques Periaux (1987). « Numerical methods for the Navier-Stokes equations. Applications to the simulation of compressible and incompressible viscous flows ». In : *Computer Physics Reports* 6.1-6, p. 73–187 (cf. p. 120).

Brooks, Alexander N et Thomas JR Hughes (1982). « Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations ». In : *Computer methods in applied mechanics and engineering* 32.1-3, p. 199–259 (cf. p. 119, 120, 124).

Bruinsma, S. L. et M. Fedrizzi (2012). « Simultaneous Observations of TADs in GOCE, CHAMP and GRACE Density Data Compared with CTIPe ». In : *AGU Fall Meeting Abstracts*, B2 (cf. p. 15).

Bühler, Oliver, Michael E McIntyre et John F Scinocca (1999). « On shear-generated gravity waves that reach the mesosphere. Part I : Wave generation ». In : *Journal of the atmospheric sciences* 56.21, p. 3749–3763 (cf. p. 14).

Buland, Ray et CH Chapman (1983). « The computation of seismic travel times ». In : *Bulletin of the Seismological Society of America* 73.5, p. 1271–1302 (cf. p. 21).

Cai, Zhiqiang, Jan Mandel et Steve McCormick (1991). « The finite volume element method for diffusion equations on general triangulations ». In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 28.2, p. 392–402 (cf. p. 18).

Cailleau, Beatrice et al. (2003). « Modeling volcanic deformation in a regional stress field : Implications for the formation of graben structures on Alba Patera, Mars ». In : *Journal of Geophysical Research : Planets* 108.E12 (cf. p. 68).

Calais, E. et B. Minster (1995a). « GPS detection of ionospheric perturbations following the January 17, 1994, Northridge earthquake ». In : *Geophys. Res. Lett.* 22, p. 1045–1048 (cf. p. 16).

Calais, Eric et J Bernard Minster (1995b). « GPS detection of ionospheric perturbations following ». In : *Geophysical Research Letters* 22.9, p. 1045–1048 (cf. p. 12).

— (1996). « GPS detection of ionospheric perturbations following ». In : *Geophysical research letters* 23.15, p. 1897–1900 (cf. p. 12).

Calais, Eric et al. (1998). « Ionospheric signature of surface mine blasts from Global Positioning System measurements ». In : *Geophysical Journal International* 132.1, p. 191–202 (cf. p. 12).

Campus, P et DR Christie (2010). « Worldwide observations of infrasonic waves ». In : *Infrasound Monitoring for Atmospheric Studies*. Springer, p. 185–234 (cf. p. 10, 11).

Cao, Bing et al. (2016). « Observation and modeling of gravity wave propagation through reflection and critical layers above Andes Lidar Observatory at Cerro Pachón, Chile ». In : *Journal of Geophysical Research : Atmospheres* 121.21 (cf. p. 166).

Carcione, Jose M, Dan Kosloff et Ronnie Kosloff (1988). « Viscoacoustic wave propagation simulation in the earth ». In : *Geophysics* 53.6, p. 769–777 (cf. p. 72).

Castel, Nicolas, Gary Cohen et Marc Duruflé (2009). « Application of discontinuous Galerkin spectral method on hexahedral elements for aeroacoustic ». In : *Journal of Computational Acoustics* 17.02, p. 175–196 (cf. p. 123).

Céa, Jean (1964). « Approximation variationnelle des problèmes aux limites ». In : *Annales de l'institut Fourier*. T. 14. 2, p. 345–444 (cf. p. 20).

Ceplecha, Zdeněk et al. (1998). « Meteor phenomena and bodies ». In : *Space Science Reviews* 84.3-4, p. 327–471 (cf. p. 69).

Cevolani, G (1994). « The explosion of the bolide over Lugo di Romagna (Italy) on 19 January 1993 ». In : *Planetary and Space Science* 42.9, p. 767–775 (cf. p. 14).

Chaljub, E. (2000). « Modélisation numérique de la propagation d'ondes sismiques en géométrie sphérique : application à la sismologie globale (Numerical modeling of the propagation of seismic waves in spherical geometry : application to global seismology) ». Thèse de doct. Paris, France : Université Paris VII Denis Diderot (cf. p. 170).

Chaljub, Emmanuel, Yann Capdeville et Jean-Pierre Vilotte (2003). « Solving elastodynamics in a fluid–solid heterogeneous sphere : a parallel spectral element approximation on non-conforming grids ». In : *Journal of Computational Physics* 187.2, p. 457–491 (cf. p. 122–124).

Chang, Ching-Cheng et Shyh-Kang Jeng (2001). « A multilevel subgridding scheme for two-dimensional finite-difference time-domain method ». In : *Antennas and Propagation Society International Symposium, 2001. IEEE*. T. 1. IEEE, p. 36–39 (cf. p. 64).

Charney, Jules G, Ragnar Fjörtoft et J von Neumann (1950). « Numerical integration of the barotropic vorticity equation ». In : *Tellus* 2.4, p. 237–254 (cf. p. 17).

Chew, WC et QH Liu (1996). « Perfectly matched layers for elastodynamics : A new absorbing boundary condition ». In : *Journal of Computational Acoustics* 4.04, p. 341–359 (cf. p. 101).

Chimonas, George (1977). « A possible source mechanism for mountain-associated infrasound ». In : *Journal of the Atmospheric Sciences* 34.5, p. 806–811 (cf. p. 12).

Chorin, Alexandre Joel, Jerrold E Marsden et Jerrold E Marsden (1990). *A mathematical introduction to fluid mechanics*. T. 3. Springer (cf. p. 59).

Christie, DR et al. (2001). « Detection of atmospheric nuclear explosions : the infrasound component of the International Monitoring System ». In : *Kerntechnik* 66.3, p. 96–101 (cf. p. 166).

Chrzanowski, Peter et Richard K Cook (1960). « Radiation of Sound by Earthquake Waves ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 32.11, p. 1504–1504 (cf. p. 9).

Chu, Boa-Teh et Leslie SG Kovásznay (1958). « Non-linear interactions in a viscous heat-conducting compressible gas ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 3.05, p. 494–514 (cf. p. 124).

Chum, J et al. (2012). « Ionospheric disturbances (infrasound waves) over the Czech Republic excited by the 2011 Tohoku earthquake ». In : *Journal of Geophysical Research : Space Physics* 117.A8 (cf. p. 1).

Chum, J et al. (2016). « Nonlinear acoustic waves in the viscous thermosphere and ionosphere above earthquake ». In : *Journal of Geophysical Research : Space Physics* (cf. p. 125, 166, 170).

Chung, Eric T et Björn Engquist (2006). « Optimal discontinuous Galerkin methods for wave propagation ». In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 44.5, p. 2131–2158 (cf. p. 121).

Chung, TJ (1978). « Finite element analysis in fluid dynamics ». In : *NASA STI/Recon Technical Report A* 78, p. 44102 (cf. p. 20).

— (2010). *Computational fluid dynamics*. Cambridge university press (cf. p. 119).

Clough, Ray W (1990). « Original formulation of the finite element method ». In : *Finite Elements in Analysis and Design* 7.2, p. 89–101 (cf. p. 20).

Cockburn, Bernardo et Clint Dawson (2002). « Approximation of the velocity by coupling discontinuous Galerkin and mixed finite element methods for flow problems ». In : *Computational Geosciences* 6.3, p. 505–522 (cf. p. 123).

Cockburn, Bernardo, George E Karniadakis et Chi-Wang Shu (2000). « The development of discontinuous Galerkin methods ». In : *Discontinuous Galerkin Methods*. Springer, p. 3–50 (cf. p. 118).

Cockburn, Bernardo et Chi-Wang Shu (1989). « TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws. II. General framework ». In : *Mathematics of computation* 52.186, p. 411–435 (cf. p. 159).

Cohen, Gary et Sandrine Fauqueux (2000). « Mixed finite elements with mass-lumping for the transient wave equation ». In : *Journal of Computational Acoustics* 8.01, p. 171–188 (cf. p. 124).

Collino, Francis et Chrysoula Tsogka (2001). « Application of the perfectly matched absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heterogeneous media ». In : *Geophysics* 66.1, p. 294–307 (cf. p. 101).

Cook, Richard K (1971). « Infrasound radiated during the Montana earthquake of 1959 August 18 ». In : *Geophysical Journal International* 26.1-4, p. 191–198 (cf. p. 10).

Courant, Richard, Kurt Friedrichs et Hans Lewy (1928). « Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik ». In : *Mathematische annalen* 100.1, p. 32–74 (cf. p. 17).

Creasey, John E, Jeffrey M Forbes et Gerald M Keating (2006). « Density variability at scales typical of gravity waves observed in Mars' thermosphere by the MGS accelerometer ». In : *Geophysical research letters* 33.22 (cf. p. 71).

Dabrowa, AL et al. (2011). « A global study of volcanic infrasound characteristics and the potential for long-range monitoring ». In : *Earth and Planetary Science Letters* 310.3, p. 369–379 (cf. p. 12).

Dahlen, FAand et Jeroen Tromp (1998). *Theoretical global seismology*. Princeton university press (cf. p. 21).

Daru, V et C Tenaud (2004). « High order one-step monotonicity-preserving schemes for unsteady compressible flow calculations ». In : *Journal of computational physics* 193.2, p. 563–594 (cf. p. 18).

Davies, Kenneth et Donald M Baker (1965). « Ionospheric effects observed around the time of the Alaskan earthquake of March 28, 1964 ». In : *Journal of Geophysical Research* 70.9, p. 2251–2253 (cf. p. 16).

Davis, Paul M (1993). « Meteoroid impacts as seismic sources on Mars ». In : *Icarus* 105.2, p. 469–478 (cf. p. 68, 70, 166).

Dawson, Clint et Jennifer Proft (2002). « Discontinuous and coupled continuous/discontinuous Galerkin methods for the shallow water equations ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 191.41, p. 4721–4746 (cf. p. 123).

De Basabe, Jonás D et Mrinal K Sen (2007). « Grid dispersion and stability criteria of some common finite-element methods for acoustic and elastic wave equations ». In : *Geophysics* 72.6, T81–T95 (cf. p. 164).

De Basabe, Jonás D, Mrinal K Sen et Mary F Wheeler (2008). « The interior penalty discontinuous Galerkin method for elastic wave propagation : grid dispersion ». In : *Geophysical Journal International* 175.1, p. 83–93 (cf. p. 121).

Dehant, Veronique et al. (2012). « Future Mars geophysical observatories for understanding its internal structure, rotation, and evolution ». In : *Planetary and Space Science* 68.1, p. 123–145 (cf. p. 68, 69, 71).

Del Bene, Kevin, Joseph Lingevitch et George Doschek (2016). « A Parabolic Equation Approach to Modeling Acousto-Gravity Waves for Local Helioseismology ». In : *Solar Physics* 291.6, p. 1581–1598 (cf. p. 23).

Del Pino, S et al. (2009). « 3D finite volume simulation of acoustic waves in the earth atmosphere ». In : *Computers & Fluids* 38.4, p. 765–777 (cf. p. 18).

Dessa, J-X, J Virieux et S Lambotte (2005). « Infrasound modeling in a spherical heterogeneous atmosphere ». In : *Geophysical research letters* 32.12 (cf. p. 21).

Diskin, Boris et James L Thomas (2012). « Effects of mesh regularity on accuracy of finite-volume schemes ». In : *50th AIAA Aerospace Sciences Meeting*, p. 2012–0609 (cf. p. 118).

Donn, William L et William T McGuinness (1960). « Air-coupled long waves in the ocean ». In : *Journal of Meteorology* 17.5, p. 515–521 (cf. p. 11).

Donn, William L et Eric S Posmentier (1964). « Ground-coupled air waves from the great Alaskan earthquake ». In : *Journal of Geophysical Research* 69.24, p. 5357–5361 (cf. p. 10).

Dörnbrack, Andreas (1998). « Turbulent mixing by breaking gravity waves ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 375, p. 113–141 (cf. p. 12).

Dörnbrack, Andreas et Carmen J Nappo (1997). « A note on the application of linear wave theory at a critical level ». In : *Boundary-Layer Meteorology* 82.3, p. 399–416 (cf. p. 12).

Douglass, David H et Robert S Knox (2005). « Climate forcing by the volcanic eruption of Mount Pinatubo ». In : *Geophysical Research Letters* 32.5 (cf. p. 12).

Drinkwater, M. R. et al. (2003). « GOCE : ESA's First Earth Explorer Core Mission ». In : *Space Science Reviews* 108, p. 419–432 (cf. p. 1).

Drob, Douglas P, JM Picone et M Garcés (2003). « Global morphology of infrasound propagation ». In : *Journal of Geophysical Research : Atmospheres* 108.D21 (cf. p. 24, 25).

Ducellier, Ariane et Hideo Aochi (2009). « A Coupled 2D Finite-Elements-Finite-Difference Method for Seismic Wave Propagation : Case of a Semi-Circular Canyon ». In : *9th International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Waves Propagation-Waves 09* (cf. p. 121).

Ducic, Vesna, Juliette Artru et Philippe Lognonné (2003). « Ionospheric remote sensing of the Denali Earthquake Rayleigh surface waves ». In : *Geophysical Research Letters* 30.18. 1951, n/a–n/a (cf. p. 1, 16).

Dumbser, Michael et al. (2014). « A posteriori subcell limiting of the discontinuous Galerkin finite element method for hyperbolic conservation laws ». In : *Journal of Computational Physics* 278, p. 47–75 (cf. p. 162).

Edwards, W. N., D. W. Eaton et P. G. Brown (2008). « Seismic observations of meteors : Coupling theory and observations ». In : *Reviews of Geophysics* 46, RG4007, RG4007 (cf. p. 69, 99).

Edwards, Wayne N (2010). « Meteor generated infrasound : Theory and observation ». In : *Infrasound monitoring for atmospheric studies*. Springer, p. 361–414 (cf. p. 69, 99, 170).

Edwards, Wayne N, Peter G Brown et David W Eaton (2009). « Frequency-Dependent Acoustic–Seismic Coupling of Meteor Shock Waves ». In : *Bulletin of the Seismological Society of America* 99.5, p. 3055–3066 (cf. p. 100).

Errera, M et al. (2011). « Multi-Physics Coupling Approaches for Aerospace Numerical Simulations. » In : *AerospaceLab* 2, p–1 (cf. p. 122).

Esclangon, E (1925). « L'acoustique des canons et des projectiles (Imprimerie Nationale, Paris) ». In : (cf. p. 20).

Etienne, V et al. (2010). « An hp-adaptive discontinuous Galerkin finite-element method for 3-D elastic wave modelling ». In : *Geophysical Journal International* 183.2, p. 941–962 (cf. p. 121).

Evers, Läslo G et Hein W Haak (2010). « The characteristics of infrasound, its propagation and some early history ». In : *Infrasound Monitoring for Atmospheric Studies*. Springer, p. 3–27 (cf. p. 7).

Evers, LG et HW Haak (2001). « Listening to sounds from an exploding meteor and oceanic waves ». In : *Geophysical Research Letters* 28.1, p. 41–44 (cf. p. 12).

— (2005). « The detectability of infrasound in The Netherlands from the Italian volcano Mt. Etna ». In : *Journal of atmospheric and solar-terrestrial physics* 67.3, p. 259–268 (cf. p. 12).

Ewing, Richard E, Tao Lin et Yanping Lin (2002). « On the accuracy of the finite volume element method based on piecewise linear polynomials ». In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 39.6, p. 1865–1888 (cf. p. 18).

Eymard, Robert, Thierry Gallouët et Raphaèle Herbin (2000). « Finite volume methods ». In : *Handbook of numerical analysis* 7, p. 713–1018 (cf. p. 18).

Farthing, Matthew W et Cass T Miller (2000). « A comparison of high-resolution, finite-volume, adaptive–stencil schemes for simulating advective–dispersive transport ». In : *Advances in Water Resources* 24.1, p. 29–48 (cf. p. 160).

Fels, Stephen B (1984). « The radiative damping of short vertical scale waves in the mesosphere ». In : *Journal of the atmospheric sciences* 41.10, p. 1755–1764 (cf. p. 13).

Feng, Xue, Mabrouk Ben Tahar et Ryan Baccouche (2016). « The aero-acoustic Galbrun equation in the time domain with perfectly matched layer boundary conditions ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 139.1, p. 320–331 (cf. p. 124).

Ferziger, Joel H, Milovan Peric et Anthony Leonard (1997). *Computational methods for fluid dynamics* (cf. p. 122).

Finnigan, JJ (1988). « Kinetic energy transfer between internal gravity waves and turbulence ». In : *Journal of the atmospheric sciences* 45.3, p. 486–505 (cf. p. 12).

Fitzgerald, T Joseph (1997). « Observations of total electron content perturbations on GPS signals caused by a ground level explosion ». In : *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics* 59.7, p. 829–834 (cf. p. 12).

Floberghagen, R. et al. (2011). « Mission design, operation and exploitation of the gravity field and steady-state ocean circulation explorer mission ». In : *Journal of Geodesy* 85, p. 749–758 (cf. p. 1).

Fornberg, Bengt (1988). « Generation of finite difference formulas on arbitrarily spaced grids ». In : *Mathematics of computation* 51.184, p. 699–706 (cf. p. 120).

Fournier, Aimé, Mark A Taylor et Joseph J Tribbia (2004). « The spectral element atmosphere model (SEAM) : High-resolution parallel computation and localized resolution of regional dynamics ». In : *Monthly Weather Review* 132.3, p. 726–748 (cf. p. 20).

Francis, A (2005). « Limitations of deterministic and advantages of stochastic seismic inversion ». In : *Recorder* 30.1, p. 5–11 (cf. p. 171).

Fritts, David C et M Joan Alexander (2003). « Gravity wave dynamics and effects in the middle atmosphere ». In : *Reviews of geophysics* 41.1 (cf. p. 5, 14).

Fritts, David C et Prabhat K Rastogi (1985). « Convective and dynamical instabilities due to gravity wave motions in the lower and middle atmosphere : Theory and observations ». In : *Radio Science* 20.6, p. 1247–1277 (cf. p. 126, 128).

Fritts, David C, Ling Wang et Joseph A Werne (2013). « Gravity wave–fine structure interactions. Part I : Influences of fine structure form and orientation on flow evolution and instability ». In : *Journal of the Atmospheric Sciences* 70.12, p. 3710–3734 (cf. p. 128).

Gainville, O, M Henneton et F Coulouvrat (2017). « A re-analysis of Carancas meteorite seismic and infrasound data based on sonic boom hypothesis ». In : *Geophysical Journal International* 209.3, p. 1913–1923 (cf. p. 69).

Gainville, Olaf et al. (2010). « Misty picture : a unique experiment for the interpretation of the infrasound propagation from large explosive sources ». In : *Infrasound Monitoring for Atmospheric Studies*. Springer, p. 575–598 (cf. p. 100, 166).

Gainville, Olaf et al. (2012). « Infrasound propagation in realistic atmosphere using nonlinear ray theory ». In : *AIP Conference Proceedings*. T. 1474. 1. AIP, p. 343–346 (cf. p. 166).

Galis, Martin, Peter Moczo et J Kristek (2008). « A 3-D hybrid finite-difference—finite-element viscoelastic modelling of seismic wave motion ». In : *Geophysical Journal International* 175.1, p. 153–184 (cf. p. 64).

Garai, Anirban et al. (2016). « Development of a Perfectly Matched Layer Technique for a Discontinuous-Galerkin Spectral-Element Method ». In : *54th AIAA Aerospace Sciences Meeting*, p. 1338 (cf. p. 152, 170).

Garcés, M et al. (2004). « On using ocean swells for continuous infrasonic measurements of winds and temperature in the lower, middle, and upper atmosphere ». In : *Geophysical research letters* 31.19 (cf. p. 14, 24).

Garcés, Milton A, Roger A Hansen et Kent G Lindquist (1998). « Traveltimes for infrasonic waves propagating in a stratified atmosphere ». In : *Geophysical Journal International* 135.1, p. 255–263 (cf. p. 21).

Garcia, R. F. et al. (2013). « GOCE : The first seismometer in orbit around the Earth ». In : *Geophys. Res. Lett.* 40, p. 1015–1020 (cf. p. 1).

Garcia, R. F. et al. (2014). « Atmospheric gravity waves due to the Tohoku-Oki tsunami observed in the thermosphere by GOCE ». In : *Journal of Geophysical Research (Atmospheres)* 119, p. 4498–4506 (cf. p. 1, 2).

Garcia, Raphaël, Philippe Lognonné et Xavier Bonnin (2005). « Detecting atmospheric perturbations produced by Venus quakes ». In : *Geophysical research letters* 32.16 (cf. p. 70).

Garcia, Raphael F et al. (2016). « Finite-difference modeling of acoustic and gravity wave propagation in Mars atmosphere : application to infrasounds emitted by meteor impacts ». In : *Space Science Reviews*, p. 1–24 (cf. p. 8, 72).

Gavrilov, Nikolai M et Sergey P Kshevetskii (2013). « Numerical modeling of propagation of breaking nonlinear acoustic-gravity waves from the lower to the upper atmosphere ». In : *Advances in Space Research* 51.7, p. 1168–1174 (cf. p. 13).

— (2014). « Three-dimensional numerical simulation of nonlinear acoustic-gravity wave propagation from the troposphere to the thermosphere ». In : *Earth, Planets and Space* 66.1, p. 88 (cf. p. 167).

Gazdag, Jenö (1981). « Modeling of the acoustic wave equation with transform methods ». In : *Geophysics* 46.6, p. 854–859 (cf. p. 120).

Gimbert, Florent et Victor C Tsai (2015). « Predicting short-period, wind-wave-generated seismic noise in coastal regions ». In : *Earth and Planetary Science Letters* 426, p. 280–292 (cf. p. 14).

Giraldo, Francis X, Jan S Hesthaven et Tim Warburton (2002). « Nodal high-order discontinuous Galerkin methods for the spherical shallow water equations ». In : *Journal of Computational Physics* 181.2, p. 499–525 (cf. p. 122).

Giraldo, Francis X et Marco Restelli (2008). « A study of spectral element and discontinuous Galerkin methods for the Navier–Stokes equations in nonhydrostatic mesoscale atmospheric modeling : Equation sets and test cases ». In : *Journal of Computational Physics* 227.8, p. 3849–3877 (cf. p. 118, 122).

Giraldo, Francix X (2013). « Continuous and discontinuous Galerkin methods for atmospheric modeling ». In : *Proceedings of the Recent Developments in Numerical Methods for Atmosphere and Ocean Modelling Seminar*, p. 167–183 (cf. p. 121, 122, 154, 162).

Godin, Oleg A (2012). « Acoustic-gravity waves in atmospheric and oceanic waveguides ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 132.2, p. 657–669 (cf. p. 5).

— (2014a). « Dissipation of acoustic-gravity waves : An asymptotic approach ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 136.6, EL411–EL417 (cf. p. 28).

— (2014b). « Dissipation of acoustic-gravity waves : An asymptotic approach ». In : *Journal of the Acoustical Society of America* 136.6, EL411–EL417 (cf. p. 32).

Godunov, S. K. (1959). « A Difference Scheme for Numerical Solution of Discontinuous Solution of Hydrodynamic Equations ». In : *Math. Sbornik* 47, p. 271–306 (cf. p. 17, 119).

Goerke, VH, JM Young et RK Cook (1965). « Infrasonic observations of the May 16, 1963, volcanic explosion on the Island of Bali ». In : *Journal of Geophysical Research* 70.24, p. 6017–6022 (cf. p. 12).

Gokpi, Kossivi (2013). « Modélisation et Simulation des écoulements compressibles par la méthode des éléments finis Galerkin discontinus ». Thèse de doct. Pau (cf. p. 152).

Gossard, Earl et Walter Munk (1954). « On gravity waves in the atmosphere ». In : *Journal of Meteorology* 11.4, p. 259–269 (cf. p. 3).

Groot-Hedlin, C de (2008). « Finite-difference time-domain synthesis of infrasound propagation through an absorbing atmosphere ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 124.3, p. 1430–1441 (cf. p. 38, 123).

Groot-Hedlin, C. de (2014). « Nonlinear synthesis of infrasound propagation through an inhomogeneous, absorbing atmosphere ». In : *J. Acoust. Soc. Am.* 132.2, p. 646–656 (cf. p. 18).

Groot-Hedlin, C. de (2016). « Long-range propagation of nonlinear infrasound waves through an absorbing atmosphere ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 139.4, p. 1565–1577 (cf. p. 166).

Groot-Hedlin, Catherine de, Michael A. H. Hedlin et Kris Walker (2011). « Finite difference synthesis of infrasound propagation through a windy, viscous atmosphere : Application to a bolide explosion detected by seismic networks ». In : *Geophysical Journal International* 185.1, p. 305–320 (cf. p. 18, 36, 38, 69, 99).

Grote, Marcus J, Anna Schneebeli et Dominik Schötzau (2006). « Discontinuous Galerkin finite element method for the wave equation ». In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 44.6, p. 2408–2431 (cf. p. 121).

Guerra, Jorge E et Paul A Ullrich (2016). « A high-order staggered finite-element vertical discretization for non-hydrostatic atmospheric models ». In : *Geoscientific Model Development* 9.5, p. 2007 (cf. p. 124).

Gutenberg, B et H Benioff (1941). « Atmospheric-pressure waves near Pasadena ». In : *Eos, Transactions American Geophysical Union* 22.2, p. 424–426 (cf. p. 14).

Hall, Melissa A et al. (2016). « Measurement of atmospheric sound propagation and meteorological parameters to support development of an acoustic propagation model ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 140.4, p. 3260–3260 (cf. p. 23).

Hamdi, Mohamed Ali, Yves Ousset et Georges Verchery (1978). « A displacement method for the analysis of vibrations of coupled fluid-structure systems ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 13.1, p. 139–150 (cf. p. 122, 124).

Hanford, Amanda D et Lyle N Long (2009). « The direct simulation of acoustics on Earth, Mars, and Titan ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 125.2, p. 640–650 (cf. p. 100).

Hanique-Cockenpot, Gaël (2011). « Etude numérique de la propagation non linéaire des infrasons dans l'atmosphère ». Thèse de doct. Ecully, Ecole centrale de Lyon (cf. p. 156–158).

Harkrider, David et Frank Press (1967). « The Krakatoa Air—Sea Waves : An Example of Pulse Propagation in Coupled Systems ». In : *Geophysical Journal International* 13.1-3, p. 149–159 (cf. p. 15).

Harkrider, David G (1964). « Surface waves in multilayered elastic media I. Rayleigh and Love waves from buried sources in a multilayered elastic half-space ». In : *Bulletin of the Seismological Society of America* 54.2, p. 627–679 (cf. p. 9).

Haubrich, RA, WH Munk et FE Snodgrass (1963). « Comparative spectra of microseisms and swell ». In : *Bulletin of the Seismological Society of America* 53.1, p. 27–37 (cf. p. 14).

Hayashi, Koichi, Daniel R Burns et M Nafi Toksöz (2001). « Discontinuous-grid finite-difference seismic modeling including surface topography ». In : *Bulletin of the Seismological Society of America* 91.6, p. 1750–1764 (cf. p. 63).

He, Guoliang et Yinnian He (2007). « The finite volume method based on stabilized finite element for the stationary Navier–Stokes problem ». In : *Journal of Computational and Applied Mathematics* 205.1, p. 651–665 (cf. p. 18).

He, Guoliang, Yinnian He et Zhangxin Chen (2008). « A penalty finite volume method for the transient Navier–Stokes equations ». In : *Applied Numerical Mathematics* 58.11, p. 1583–1613 (cf. p. 18).

Hébert, HSAaSF, A Sladen et F Schindelé (2007). « Numerical modeling of the great 2004 Indian Ocean tsunami : focus on the Mascarene Islands ». In : *Bulletin of the Seismological Society of America* 97.1A, S208–S222 (cf. p. 105).

Hedin, A. E. et al. (1996). « Empirical wind model for the upper, middle and lower atmosphere. » In : *Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics* 58, p. 1421–1447 (cf. p. 24).

Hedin, A.E. (1991). « Extension of the MSIS Thermosphere Model into the Middle and Lower Atmosphere ». In : *J. Geophys. Res.* 96, p. 1159–1171 (cf. p. 24).

Hedlin, Michael AH et al. (2010). « A study of acoustic propagation from a large bolide in the atmosphere with a dense seismic network ». In : *Journal of Geophysical Research : Solid Earth* 115.B11 (cf. p. 99).

Hedstrom, GW (1979). « Nonreflecting boundary conditions for nonlinear hyperbolic systems ». In : *Journal of computational Physics* 30.2, p. 222–237 (cf. p. 153).

Heimann, Sebastian et al. (2013). « Seismic characterization of the Chelyabinsk Meteor's terminal explosion ». In : *Seismological Research Letters* 84.6, p. 1021–1025 (cf. p. 100).

Hesthaven, Jan S et Tim Warburton (2007). *Nodal discontinuous Galerkin methods : algorithms, analysis, and applications*. Springer Science & Business Media (cf. p. 118, 121, 160–162, 164).

Hestholm, Stig et Bent Ruud (1994). « 2D finite-difference elastic wave modelling including surface topography ». In : *Geophysical Prospecting* 42.5, p. 371–390 (cf. p. 63).

Hetzer, Claus H et al. (2010). « Generation of microbaroms by deep-ocean hurricanes ». In : *Infrasound Monitoring for Atmospheric Studies*. Springer, p. 249–262 (cf. p. 24).

Hickey, M. P., G. Schubert et R. L. Walterscheid (2009). « Propagation of tsunami-driven gravity waves into the thermosphere and ionosphere ». In : *Journal of Geophysical Research (Space Physics)* 114, A08304, p. 8304 (cf. p. 36).

— (2010). « Atmospheric airglow fluctuations due to a tsunami-driven gravity wave disturbance ». In : *Journal of Geophysical Research (Space Physics)* 115, A06308, p. 6308 (cf. p. 16).

Hickey, Michael P (1988). « Wavelength dependence of eddy dissipation and Coriolis force in the dynamics of gravity wave driven fluctuations in the OH nightglow ». In : *Journal of Geophysical Research : Space Physics* 93.A5, p. 4089–4101 (cf. p. 33, 169).

Hines, C. O. (1960). « Internal atmospheric gravity waves at ionospheric heights ». In : *Canadian Journal of Physics* 38, p. 1441 (cf. p. 3, 4).

Hines, CO (1965). « Dynamical heating of the upper atmosphere ». In : *Journal of Geophysical Research* 70.1, p. 177–183 (cf. p. 3).

— (1972). « Gravity waves in the atmosphere ». In : *Nature* 239, p. 73–78 (cf. p. 3).

Hirooka, S et al. (2011). « Neural network based tomographic approach to detect earthquake-related ionospheric anomalies ». In : *Natural Hazards and Earth System Sciences* 11.8, p. 2341 (cf. p. 172).

Hoteit, Hussein et al. (2004). « New two-dimensional slope limiters for discontinuous Galerkin methods on arbitrary meshes ». In : *International journal for numerical methods in engineering* 61.14, p. 2566–2593 (cf. p. 160, 161).

Hovnanian, Jessica (2012). « Méthode de frontières immergées pour la mécanique des fluides. Application à la simulation de la nage. » Thèse de doct. Université Sciences et Technologies-Bordeaux I (cf. p. 63).

Howarth, Leslie (1938). « On the solution of the laminar boundary layer equations ». In : *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. T. 164. 919. The Royal Society, p. 547–579 (cf. p. 17).

Hu, Wenyi (2016). « An improved immersed boundary finite-difference method for seismic wave propagation modeling with arbitrary surface topography ». In : *Geophysics* 81.6, T311–T322 (cf. p. 61, 63).

Hueppe, Andreas et Manfred Kaltenbacher (2012). « Spectral finite elements for computational aeroacoustics using acoustic perturbation equations ». In : *Journal of Computational Acoustics* 20.02, p. 1240005 (cf. p. 123).

Hughes, Thomas JR (2012). *The finite element method : linear static and dynamic finite element analysis*. Courier Corporation (cf. p. 20).

Hunt, JCR, JC Kaimal et JE Gaynor (1985). « Some observations of turbulence structure in stable layers ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 111.469, p. 793–815 (cf. p. 12).

Hüppe, Andreas et al. (2016). « Construction and analysis of an adapted spectral finite element method to convective acoustic equations ». In : *Communications in Computational Physics* 20.01, p. 1–22 (cf. p. 124).

Iqbal, Kashif H (2013). « Comparison of high-order methods on unstructured grids ». Thèse de doct. Cranfield University (cf. p. 160).

Iskandarani, Mohamed, Dale B Haidvogel et Julia C Levin (2003). « A three-dimensional spectral element model for the solution of the hydrostatic primitive equations ». In : *Journal of Computational Physics* 186.2, p. 397–425 (cf. p. 20).

Jablonowski, Christiane (2004). « Adaptive grids in weather and climate modeling ». Thèse de doct. The University of Michigan (cf. p. 162).

Jewtoukoff, Valérian et al. (2015). « Comparison of Gravity Waves in the Southern Hemisphere Derived from Balloon Observations and the ECMWF Analyses ». In : *Journal of the Atmospheric Sciences* 72.9, p. 3449–3468. eprint : `http://dx.doi.org/10.1175/JAS-D-14-0324.1` (cf. p. 15).

Jianfeng, Zhang (1997). « Quadrangle-grid velocity-stress finite-difference method for elastic-wave-propagation simulation ». In : *Geophysical Journal International* 131.1, p. 127–134 (cf. p. 63).

Jiang, Bo-nan (2013). *The least-squares finite element method : theory and applications in computational fluid dynamics and electromagnetics*. Springer Science & Business Media (cf. p. 120).

Jin, Kyong Hwan et al. (2016). « Deep Convolutional Neural Network for Inverse Problems in Imaging ». In : *arXiv preprint arXiv :1611.03679* (cf. p. 171).

Jin, Zeyu et al. (2017). « Coupling Runge-Kutta discontinuous Galerkin method to finite element method for compressible multi-phase flow interacting with a deformable sandwich structure ». In : *Ocean Engineering* 130, p. 597–610 (cf. p. 123, 164, 167).

John, Volker et Petr Knobloch (2007). « On spurious oscillations at layers diminishing (SOLD) methods for convection–diffusion equations : Part I–A review ». In : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 196.17, p. 2197–2215 (cf. p. 120).

Jones, Kyle Richard et al. (2015). *Infrasound Observations From a Seismo-Acoustic Hammer Source at the Nevada National Security Site*. Rapp. tech. Sandia National Laboratories (SNL-NM), Albuquerque, NM (United States) (cf. p. 15).

Jones, R. M., J. P. Riley et T. M. Georges (1986). « HARPA : A versatile three-dimensional Hamiltonian ray-tracing program for acoustic waves in the atmosphere above irregular terrain ». In : (cf. p. 20, 21).

Kajishima, Takeo et Kunihiko Taira. (2017). *Computational fluid dynamics : incompressible turbulent flows*. T. XV. Springer, p. 358 (cf. p. 37).

Kanamori, Hiroo et Jim Mori (1992). « Harmonic excitation of mantle Rayleigh waves by the 1991 eruption of Mount Pinatubo, Philippines ». In : *Geophysical Research Letters* 19.7, p. 721–724 (cf. p. 10).

Kantorovich, LV et VI Krylov. « Approximate Methods of Higher Analysis, Interscience, New York (1958) ». In : (cf. p. 18).

Karniadakis, George et Spencer Sherwin (2013). *Spectral/hp element methods for computational fluid dynamics*. Oxford University Press (cf. p. 120).

Käser, Martin et Michael Dumbser (2008). « A highly accurate discontinuous Galerkin method for complex interfaces between solids and moving fluids ». In : *Geophysics* 73.3, T23–T35 (cf. p. 123).

Khelfi, K. (2016). « Modélisation en 3D des signaux ionosphériques Tohoku mars 2011 et inversion. » Thèse de doct. Institut de Physique du Globe de Paris (cf. p. 36, 122).

Kherani, EA et al. (2015). « Traveling ionospheric disturbances propagating ahead of the Tohoku-Oki tsunami : a case study ». In : *Geophysical Journal International* 204.2, p. 1148–1158 (cf. p. 36).

Kiefling, L et GC Feng (1976). « Fluid-structure finite element vibrational analysis ». In : *AIAA Journal* 14.2, p. 199–203 (cf. p. 124).

Kim, K et Jonathan M Lees (2011). « Finite-difference time-domain modeling of transient infrasonic wavefields excited by volcanic explosions ». In : *Geophysical Research Letters* 38.6 (cf. p. 38).

Kim, Keehoon et Jonathan M Lees (2014). « Local volcano infrasound and source localization investigated by 3D simulation ». In : *Seismological Research Letters* 85.6, p. 1177–1186 (cf. p. 38).

Kim, Keehoon, Jonathan M Lees et Mario Ruiz (2012). « Acoustic multipole source model for volcanic explosions and inversion for source parameters ». In : *Geophysical Journal International* 191.3, p. 1192–1204 (cf. p. 38).

Kim, Tae Sung, Chris Hayward et Brian Stump (2004). « Local infrasound signals from the Tokachi-Oki earthquake ». In : *Geophysical Research Letters* 31.20 (cf. p. 10).

Kirin Meteorite Shower, Joint Investigation Group of the (1977). « A preliminary survey on the Kirin meteorite shower ». In : *Scientia Sinica* 20, p. 502–512 (cf. p. 99).

Kitov, IO et al. (1997). « An analysis of seismic and acoustic signals measured from a series of atmospheric and near-surface explosions ». In : *Bulletin of the Seismological Society of America* 87.6, p. 1553–1562 (cf. p. 70).

Kleist, Daryl T et Kayo Ide (2015). « An OSSE-based evaluation of hybrid variational–ensemble data assimilation for the NCEP GFS. Part I : System description and 3D-hybrid results ». In : *Monthly Weather Review* 143.2, p. 433–451 (cf. p. 24).

Knapmeyer, M et al. (2006). « Working models for spatial distribution and level of Mars' seismicity ». In : *Journal of Geophysical Research : Planets* 111.E11 (cf. p. 68).

Knížová, Petra Koucká et Zbyšek Mošna (2011). « Acoustic-gravity waves in the ionosphere during solar eclipse events ». In : *Acoustic Waves : from Microdevices to Helioseismology*. InTech, Rijeka, p. 303–320 (cf. p. 7).

Kobayashi, N. et K. Nishida (1998). « Continuous excitation of planetary free oscillations by atmospheric disturbances ». In : *Nature* 395, p. 357–360 (cf. p. 70).

Kobayashi, Naoki et Kiwamu Nishida (1998). « Continuous excitation of planetary free oscillations by atmospheric disturbances ». In : *Nature* 395.6700, p. 357–360 (cf. p. 10).

Komatitsch, Dimitri (1997). « Spectral and spectral-element methods for the 2D and 3D elastodynamics equations in heterogeneous media ». Theses. Institut de physique du globe de paris - IPGP (cf. p. 121).

Komatitsch, Dimitri et Roland Martin (2007). « An unsplit convolutional perfectly matched layer improved at grazing incidence for the seismic wave equation ». In : *Geophysics* 72.5, SM155–SM167 (cf. p. 101).

Komatitsch, Dimitri et Jeroen Tromp (1999). « Introduction to the spectral element method for three-dimensional seismic wave propagation ». In : *Geophysical journal international* 139.3, p. 806–822 (cf. p. 20, 122, 164).

— (2003). « A perfectly matched layer absorbing boundary condition for the second-order seismic wave equation ». In : *Geophysical Journal International* 154.1, p. 146–153 (cf. p. 101).

Koper, Keith D et al. (2011). « Frequency-dependent rupture process of the 2011 M w 9.0 Tohoku Earthquake : Comparison of short-period P wave backprojection images and broadband seismic rupture models ». In : *Earth, planets and space* 63.7, p. 16 (cf. p. 1).

Kopera, Michal A et Francis X Giraldo (2014). « Analysis of adaptive mesh refinement for IMEX discontinuous Galerkin solutions of the compressible Euler equations with application to atmospheric simulations ». In : *Journal of Computational Physics* 275, p. 92–117 (cf. p. 162).

— (2015). « Mass conservation of the unified continuous and discontinuous element-based Galerkin methods on dynamically adaptive grids with application to atmospheric simulations ». In : *Journal of Computational Physics* 297, p. 90–103 (cf. p. 162).

Koudella, CR et Chantal Staquet (2006). « Instability mechanisms of a two-dimensional progressive internal gravity wave ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 548, p. 165–196 (cf. p. 128).

Kozdon, Jeremy E, Eric M Dunham et Jan Nordström (2013). « Simulation of dynamic earthquake ruptures in complex geometries using high-order finite difference methods ». In : *Journal of Scientific Computing* 55.1, p. 92–124 (cf. p. 122).

Kshevetskii, Sergey P. et Nikolai M. Gavrilov (2005). « Vertical propagation, breaking and effects of nonlinear gravity waves in the atmosphere ». In : *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics* 67.11, p. 1014 –1030 (cf. p. 13).

Kubatko, Ethan J et al. (2009). « A performance comparison of continuous and discontinuous finite element shallow water models ». In : *Journal of Scientific Computing* 40.1, p. 315–339 (cf. p. 162).

Kuzuoglu, Mustafa et Raj Mittra (1996). « Frequency dependence of the constitutive parameters of causal perfectly matched anisotropic absorbers ». In : *IEEE Microwave and Guided Wave Letters* 6.12, p. 447–449 (cf. p. 101).

Landau, Lev D et Evgeny Mikhailovich Lifshitz (2013). *Fluid Mechanics : Landau and Lifshitz : Course of Theoretical Physics*. T. 6. Elsevier (cf. p. 59).

Lander, James F et Patricia A Lockridge (1989). *United States Tsunamis :(including United States Possessions) : 1690-1988*. T. 41. 2. US Department of Commerce, National Oceanic, Atmospheric Administration, National Environmental Satellite, Data, et Information Service, National Geophysical Data Center (cf. p. 11).

Lane, Todd P, Michael J Reeder et Terry L Clark (2001). « Numerical modeling of gravity wave generation by deep tropical convection ». In : *Journal of the atmospheric sciences* 58.10, p. 1249–1274 (cf. p. 13, 14).

Langston, Charles A (2004). « Seismic ground motions from a bolide shock wave ». In : *Journal of Geophysical Research : Solid Earth* 109.B12 (cf. p. 14, 166).

Larson, Rallin James et al. (1971). « Correlation of winds and geographic features with production of certain infrasonic signals in the atmosphere ». In : *Geophysical Journal International* 26.1-4, p. 201–214 (cf. p. 12).

Laughman, B., D. C. Fritts et T. S. Lund (2017). « Tsunami-driven gravity waves in the presence of vertically varying background and tidal wind structures ». In : *Journal of Geophysical Research : Atmospheres*. 2016JD025673, n/a–n/a (cf. p. 18, 34, 115, 167).

Lax, Peter et Burton Wendroff (1960). « Systems of conservation laws ». In : *Communications on Pure and Applied mathematics* 13.2, p. 217–237 (cf. p. 17).

Lazarov, RD, Ilya D Mishev et Panayot S Vassilevski (1996). « Finite volume methods for convection-diffusion problems ». In : *SIAM Journal on Numerical Analysis* 33.1, p. 31–55 (cf. p. 18).

Le Pichon, A, K Antier et D Drob (2006). « Multi-year validation of the NRL-G2S wind fields using infrasound from Yasur ». In : *Inframatics* 16, p. 1–9 (cf. p. 24).

Le Pichon, A. et al. (2002a). « Ground-coupled air waves and diffracted infrasound from the Arequipa earthquake of June 23, 2001 ». In : *Geophysical Research Letters* 29.18. 1886, p. 33–1–33–4 (cf. p. 15).

Le Pichon, A et al. (2003). « Infrasonic imaging of the Kunlun Mountains for the great 2001 China earthquake ». In : *Geophysical Research Letters* 30.15 (cf. p. 10).

Le Pichon, A et al. (2005). « Infrasound associated with 2004–2005 large Sumatra earthquakes and tsunami ». In : *Geophysical Research Letters* 32.19 (cf. p. 10, 116).

Le Pichon, Alexis, Elisabeth Blanc et Alain Hauchecorne (2010). *Infrasound monitoring for atmospheric studies*. Springer (cf. p. 12).

Le Pichon, Alexis et al. (2002b). « Ground-coupled air waves and diffracted infrasound from the Arequipa earthquake of June 23, 2001 ». In : *Geophysical Research Letters* 29.18 (cf. p. 21).

Leeuwen, Tristan van, Aleksandr Y Aravkin et Felix J Herrmann (2011). « Seismic waveform inversion by stochastic optimization ». In : *International Journal of Geophysics* 2011 (cf. p. 171).

Léger, Raphaël (2011). « Coupling between finite differences schemes on structured meshes with discontinuous Galerkin schemes on unstructured meshed for computational aeroacoustics ». Theses. Université Paris-Est (cf. p. 121).

Léger, Raphael, Christophe Peyret et Serge Piperno (2012). « Coupled discontinuous galerkin/finite difference solver on hybrid meshes for computational aeroacoustics ». In : *AIAA journal* 50.2, p. 338–349 (cf. p. 64).

Lele, Sanjiva K (1992). « Compact finite difference schemes with spectral-like resolution ». In : *Journal of computational physics* 103.1, p. 16–42 (cf. p. 37).

Leonard, Robert S et RA Barnes (1965). « Observation of ionospheric disturbances following the Alaska earthquake ». In : *Journal of Geophysical Research* 70.5, p. 1250–1253 (cf. p. 16).

Levander, Alan R (1988). « Fourth-order finite-difference P-SV seismograms ». In : *Geophysics* 53.11, p. 1425–1436 (cf. p. 61).

Lighthill, James (1978). « Acoustic streaming ». In : *Journal of sound and vibration* 61.3, p. 391–418 (cf. p. 21).

Lighthill, Michael J (1952). « On sound generated aerodynamically. I. General theory ». In : *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. T. 211. 1107. The Royal Society, p. 564–587 (cf. p. 123).

Lin, Fan-Chi, Victor C Tsai et Brandon Schmandt (2014). « 3-D crustal structure of the western United States : application of Rayleigh-wave ellipticity extracted from noise cross-correlations ». In : *Geophysical Journal International*, ggu160 (cf. p. 14).

Lindzen, Richard S (1981). « Turbulence and stress owing to gravity wave and tidal breakdown ». In : *Journal of Geophysical Research : Oceans* 86.C10, p. 9707–9714 (cf. p. 128, 166).

Lingevitch, Joseph F et al. (2002). « A wide angle and high Mach number parabolic equation ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 111.2, p. 729–734 (cf. p. 23).

Lisitsa, Vadim, Galina Reshetova et Vladimir Tcheverda (2012). « Finite-difference algorithm with local time-space grid refinement for simulation of waves ». In : *Computational geosciences* 16.1, p. 39–54 (cf. p. 64).

Lisitsa, Vadim, Vladimir Tcheverda et Charlotte Botter (2016). « Combination of the discontinuous Galerkin method with finite differences for simulation of seismic wave propagation ». In : *Journal of Computational Physics* 311, p. 142–157 (cf. p. 63, 64).

Liszka, Ludwik et Milton A Garces (2002). « Infrasonic observations of the Hekla eruption of February 26, 2000 ». In : *Journal of low frequency noise, vibration and active control* 21.1, p. 1–8 (cf. p. 12).

Liu, J. Y. et al. (2006). « Giant ionospheric disturbances excited by the M9.3 Sumatra earthquake of 26 December 2004 ». In : *Geophys. Res. Lett.* 33, L02103, p. 2103 (cf. p. 9, 11).

Liu, J.-Y. et al. (2011). « Ionospheric disturbances triggered by the 11 March 2011 M9.0 Tohoku earthquake ». In : *Journal of Geophysical Research (Space Physics)* 116, A06319, p. 6319 (cf. p. 16).

Liu, Jann-Yenq et al. (2006). « Ionospheric GPS total electron content (TEC) disturbances triggered by the 26 December 2004 Indian Ocean tsunami ». In : *Journal of Geophysical Research : Space Physics* 111.A5 (cf. p. 11).

Liu, L. et M. L. Moran (2002). « Acoustic wave propagation in atmospheric boundary layer above a rough terrain ». In : *Acoustical Society of America Journal* 111, p. 2378–2379 (cf. p. 38).

Lognonné, P (2010). « Seismic waves from atmospheric sources and atmospheric/ionospheric signatures of seismic waves ». In : *Infrasound Monitoring for Atmospheric Studies*. Springer, p. 281–304 (cf. p. 15).

Lognonné, P., E. Clévédé et H. Kanamori (1998a). « Normal-mode summation of seismograms and barograms in a spherical Earth with realistic atmosphere ». In : *Geophys. J. Int.* 135, p. 388–406 (cf. p. 22).

Lognonné, P et C Johnson (2010). « Planetary seismology ». In : *Planets and Moons*, p. 69–122 (cf. p. 68).

Lognonné, Philippe (2005). « Planetary seismology ». In : *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.* 33, p. 571–604 (cf. p. 71).

Lognonné, Philippe, Eric Clévédé et Hiroo Kanamori (1998b). « Computation of seismograms and atmospheric oscillations by normal-mode summation for a spherical earth model with realistic atmosphere ». In : *Geophysical Journal International* 135.2, p. 388–406 (cf. p. 2).

Lognonné, Philippe et al. (2016). « Modeling of atmospheric-coupled Rayleigh waves on planets with atmosphere : From Earth observation to Mars and Venus perspectives ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 140.2, p. 1447–1468 (cf. p. 22, 68, 70, 71, 100).

Lognonné, P et T Kawamura (2015). « Impact seismology on terrestrial and giant planets ». In : *Infrasound monitoring for atmospheric studies*. Cambridge University Press. Chap. 18, p. 250–263 (cf. p. 70, 71).

Lombard, Bruno et Joël Piraux (2004). « Numerical treatment of two-dimensional interfaces for acoustic and elastic waves ». In : *Journal of Computational Physics* 195.1, p. 90–116 (cf. p. 122).

Lombard, Bruno et al. (2008). « Free and smooth boundaries in 2-D finite-difference schemes for transient elastic waves ». In : *Geophysical Journal International* 172.1, p. 252–261 (cf. p. 63).

Longuet-Higgins, Michael Selwyn (1950). « A theory of the origin of microseisms ». In : *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 243.857, p. 1–35 (cf. p. 14).

Lonzaga, Joel B et al. (2015). « Modelling waveforms of infrasound arrivals from impulsive sources using weakly non-linear ray theory ». In : *Geophysical Journal International* 200.3, p. 1347–1361 (cf. p. 166).

Lorenz, Ralph D et al. (2015). « Seismometer Detection of Dust Devil Vortices by Ground Tilt ». In : *Bulletin of the Seismological Society of America* 105.6, p. 3015–3023 (cf. p. 71).

Lott, François et Christophe Millet (2010). « The representation of gravity waves in atmospheric general circulation models (GCMs) ». In : *Infrasound monitoring for atmospheric studies*. Springer, p. 685–699 (cf. p. 24).

Lott, François et Hector Teitelbaum (1993). « Topographic waves generated by a transient wind ». In : *Journal of the Atmospheric Sciences* 50.16, p. 2607–2624 (cf. p. 12).

MacCormack, Robert W (1976). *An efficient numerical method for solving the time-dependent compressible Navier-Stokes equations at high Reynolds number*. Rapp. tech. NASA Ames Research Center ; Moffett Field, CA, United States. (cf. p. 17, 18).

Madariaga, R. (1976). « Dynamics of an expanding circular fault ». In : *Bull. Seismol. Soc. Am.* 66.3, p. 639–666 (cf. p. 36).

Maday, Yvon et Anthony T Patera (1989). « Spectral element methods for the incompressible Navier-Stokes equations ». In : *IN : State-of-the-art surveys on computational mechanics (A90-47176 21-64). New York, American Society of Mechanical Engineers, 1989, p. 71-143. Research supported by DARPA.* P. 71–143 (cf. p. 121).

Makela, J. J. et al. (2011). « Imaging and modeling the ionospheric airglow response over Hawaii to the tsunami generated by the Tohoku earthquake of 11 March 2011 ». In : *Geophys. Res. Lett.* 38 :L00G02.24, L00G02 (cf. p. 1, 16).

Marras, Simone et al. (2013). « A variational multiscale stabilized finite element method for the solution of the Euler equations of nonhydrostatic stratified flows ». In : *Journal of Computational Physics* 236, p. 380–407 (cf. p. 122, 154).

Marras, Simone et al. (2016). « A review of element-based Galerkin methods for numerical weather prediction : Finite elements, spectral elements, and discontinuous Galerkin ». In : *Archives of Computational Methods in Engineering* 23.4, p. 673–722 (cf. p. 24, 122).

Marsden, O, C Bogey et C Bailly (2014). « A study of infrasound propagation based on high-order finite difference solutions of the Navier-Stokes equations ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 135.3, p. 1083–1095 (cf. p. 38, 157).

Matoza, Robin S et al. (2009). « The source of infrasound associated with long-period events at Mount St. Helens ». In : *Journal of Geophysical Research : Solid Earth* 114.B4 (cf. p. 38, 122).

Matoza, Robin S et al. (2011). « Infrasonic observations of the June 2009 Sarychev Peak eruption, Kuril Islands : Implications for infrasonic monitoring of remote explosive volcanism ». In : *Journal of Volcanology and Geothermal Research* 200.1, p. 35–48 (cf. p. 21).

Matsuo, Koji et Kosuke Heki (2011). « Coseismic gravity changes of the 2011 Tohoku-Oki earthquake from satellite gravimetry ». In : *Geophysical Research Letters* 38.7 (cf. p. 1).

McComas, C Henry et Peter Müller (1981). « The dynamic balance of internal waves ». In : *Journal of Physical Oceanography* 11.7, p. 970–986 (cf. p. 128).

McDonald, PW et al. (1971). « The computation of transonic flow through two-dimensional gas turbine cascades ». In : ASME New York (cf. p. 18).

McLandress, Charles, M Joan Alexander et Dong L Wu (2000). « Microwave Limb Sounder observations of gravity waves in the stratosphere : A climatology and interpretation ». In : *Journal of Geophysical Research : Atmospheres* 105.D9, p. 11947–11967 (cf. p. 14).

Melvin, Thomas, Andrew Staniforth et John Thuburn (2012). « Dispersion analysis of the spectral element method ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 138.668, p. 1934–1947 (cf. p. 124).

Michalak, Christopher et Carl Ollivier-Gooch (2009). « Accuracy preserving limiter for the high-order accurate solution of the Euler equations ». In : *Journal of Computational Physics* 228.23, p. 8693–8711 (cf. p. 160).

Michoski, Craig et al. (2016). « A comparison of artificial viscosity, limiters, and filters, for high order discontinuous Galerkin solutions in nonlinear settings ». In : *Journal of Scientific Computing* 66.1, p. 406–434 (cf. p. 160, 161).

Mikumo, Takeshi (1968). « Atmospheric pressure waves and tectonic deformation associated with the Alaskan earthquake of March 28, 1964 ». In : *Journal of Geophysical Research* 73.6, p. 2009–2025 (cf. p. 10, 11).

Millet, C., J.-C. Robinet et C. Roblin (2007). « On using computational aeroacoustics for long-range propagation of infrasounds in realistic atmospheres ». In : *Geophysical Research Letters* 34.14. L14814 (cf. p. 23).

Minkowycz, WJ et A Haji-Sheikh (2006). « Heat transfer in parallel plates and circular porous passages with axial conduction ». In : *International journal of heat and mass transfer* 49.13, p. 2381–2390 (cf. p. 122).

Mittal, Rajat et Gianluca Iaccarino (2005). « Immersed boundary methods ». In : *Annu. Rev. Fluid Mech.* 37, p. 239–261 (cf. p. 63).

Moczo, Peter, Johan OA Robertsson et Leo Eisner (2007). « The finite-difference time-domain method for modeling of seismic wave propagation ». In : *Advances in Geophysics* 48, p. 421–516 (cf. p. 101).

Moe, S. A., J. A. Rossmanith et D. C. Seal (2015). « A Simple and Effective High-Order Shock-Capturing Limiter for Discontinuous Galerkin Methods ». In : *ArXiv e-prints*. eprint : 1507.03024 (cf. p. 160, 161).

Mohd-Yusof, J (1997). *Combined immersed boudaries/B-splines methods for simulations in complex geometries* (cf. p. 63).

Monteiller, Vadim et al. (2015). « Three-dimensional full waveform inversion of short-period teleseismic wavefields based upon the SEM–DSM hybrid method ». In : *Geophysical Journal International* 202.2, p. 811–827 (cf. p. 171).

Moret, L (2009). « Aeroacoustic investigation and adjoint analysis of subsonic cavity flows ». Thèse de doct. PhD thesis, Université de Toulouse, France (cf. p. 171, 172).

Mori, Nobuhito et al. (2011). « Survey of 2011 Tohoku earthquake tsunami inundation and run-up ». In : *Geophysical research letters* 38.7 (cf. p. 1).

Moya, Aaron et Kojiro Irikura (2010). « Inversion of a velocity model using artificial neural networks ». In : *Computers & Geosciences* 36.12, p. 1474–1483 (cf. p. 172).

Mueller, Andreas et al. (2011). *Testing refinement criteria in adaptive discontinuous Galerkin simulations of dry atmospheric convection*. Rapp. tech. DTIC Document (cf. p. 162).

Müller, Andreas et al. (2013). « Comparison between adaptive and uniform discontinuous Galerkin simulations in dry 2D bubble experiments ». In : *Journal of Computational Physics* 235, p. 371–393 (cf. p. 122, 154).

Munz, Claus-Dieter, Michael Dumbser et Sabine Roller (2007). « Linearized acoustic perturbation equations for low Mach number flow with variable density and temperature ». In : *Journal of Computational Physics* 224.1, p. 352–364 (cf. p. 123).

Munz, Claus-Dieter, Roland Fortenbach et Michael Dumbser (2005). « Multiple-scale modelling of acoustic sources in low Mach-number flow ». In : *Comptes Rendus Mécanique* 333.9, p. 706–712 (cf. p. 18).

Nadarajah, Siva et Antony Jameson (2000). « A comparison of the continuous and discrete adjoint approach to automatic aerodynamic optimization ». In : *38th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, p. 667 (cf. p. 171).

Namazov, SA, VD Novikov et IA Khmelnitskii (1975). « Doppler frequency shift in ionospheric propagation of decametric radio waves/Review ». In : *Radiofizika* 18, p. 473–500 (cf. p. 16).

Nappo, C.J. (2002). *An introduction to atmospheric gravity waves*. Academic Press, p. 276 (cf. p. 4, 5, 31, 33, 127).

Nazarov, Murtazo et Johan Hoffman (2010). « An adaptive finite element method for the compressible Euler equations ». In : *15th International Conference on Finite Elements in Flow Problems Tokyo, JAPAN, APR 01-03, 2009*. T. 64. 10-12, p. 1102–1128 (cf. p. 162).

Nehrbass, John W et Robert Lee (2000). « Optimal finite-difference sub-gridding techniques applied to the Helmholtz equation ». In : *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* 48.6, p. 976–984 (cf. p. 64).

Nemec, Marian, Michael J Aftosmis et Peter G Brown (2017). « Numerical prediction of meteoric infrasound signatures ». In : *Planetary and Space Science* (cf. p. 100).

Nguyen, Ngoc Cuong, Jaume Peraire et Bernardo Cockburn (2009). « An implicit high-order hybridizable discontinuous Galerkin method for linear convection–diffusion equations ». In : *Journal of Computational Physics* 228.9, p. 3232–3254 (cf. p. 121).

Noh, William F (1963). *CEL : A time-dependent, two-space-dimensional, coupled Eulerian-Lagrange code*. Rapp. tech. Lawrence Radiation Lab., Univ. of California, Livermore (cf. p. 122).

Norris, D et R Gibson (2004). « Advanced tools for infrasonic modeling ». In : *Inframatics* 5, p. 13–19 (cf. p. 21).

O Hestholm, Stig et Bent Ruud (2000). « 2D finite-difference viscoelastic wave modelling including surface topography ». In : *Geophysical Prospecting* 48.2, p. 341–373 (cf. p. 63).

Oberst, Jürgen et Yosio Nakamura (1987). « Distinct meteoroid families identified on the lunar seismograms ». In : *Journal of Geophysical Research : Solid Earth* 92.B4 (cf. p. 70).

Occhipinti, G. et al. (2006). « Three-dimensional waveform modeling of ionospheric signature induced by the 2004 Sumatra tsunami ». In : *Geophys. Res. Lett.* 33, L20104, doi :10.1029/2006GL026865 (cf. p. 11, 16).

Occhipinti, G. et al. (2011). « Three-dimensional numerical modeling of tsunami-related internal gravity waves in the Hawaiian atmosphere ». In : *Earth, Planets, and Space* 63, p. 847–851 (cf. p. 1).

Occhipinti, Giovanni et al. (2013). « From Sumatra 2004 to Tohoku-Oki 2011 : The systematic GPS detection of the ionospheric signature induced by tsunamigenic earthquakes ». In : *Journal of Geophysical Research : Space Physics* 118.6, p. 3626–3636 (cf. p. 11, 105).

Oden, J Tinsley (1969). « A general theory of finite elements. II. Applications ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1.3, p. 247–259 (cf. p. 20).

Ohminato, Takao et Bernard A Chouet (1997). « A free-surface boundary condition for including 3D topography in the finite-difference method ». In : *Bulletin of the Seismological Society of America* 87.2, p. 494–515 (cf. p. 36).

Opik, EJ (1958). « Meteor impact on solid surface ». In : *Irish Astronomical Journal* 5, p. 14 (cf. p. 99).

Orszag, Steven A (1971). « Numerical simulation of incompressible flows within simple boundaries. I. Galerkin (spectral) representations ». In : *Studies in applied mathematics* 50.4, p. 293–327 (cf. p. 120).

Ostashev, Vladimir E., Igor P. Chunchuzov et D. Keith Wilson (2005). « Sound propagation through and scattering by internal gravity waves in a stably stratified atmosphere ». In : *Journal of the Acoustical Society of America* 118, p. 3420–3429 (cf. p. 18).

Ostashev, Vladimir E et al. (2005a). « Equations for finite-difference, time-domain simulation of sound propagation in moving inhomogeneous media and numerical implementation ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 117.2, p. 503–517 (cf. p. 32, 38).

Ostashev, Vladimir E. et al. (2005b). « Equations for finite-difference, time-domain simulation of sound propagation in moving inhomogeneous media and numerical implementation ». In : *Journal of the Acoustical Society of America* 117.2, p. 503–517 (cf. p. 37, 38, 123).

Pain, Herbert John et Richard Waterhouse (1970). *The physics of vibrations and waves* (cf. p. 6).

Paluszny, A, SK Matthäi et M Hohmeyer (2007). « Hybrid finite element–finite volume discretization of complex geologic structures and a new simulation workflow demonstrated on fractured rocks ». In : *Geofluids* 7.2, p. 186–208 (cf. p. 121).

Parish, Helen F et al. (2009). « Propagation of tropospheric gravity waves into the upper atmosphere of Mars ». In : *Icarus* 203.1, p. 28–37 (cf. p. 71).

Parrot, M et al. (1993). « High-frequency seismo-electromagnetic effects ». In : *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 77.1-2, p. 65–83 (cf. p. 16).

Patera, Anthony T (1984). « A spectral element method for fluid dynamics : laminar flow in a channel expansion ». In : *Journal of computational Physics* 54.3, p. 468–488 (cf. p. 20, 121).

Peng, Melinda S et William T Thompson (2003). « Some aspects of the effect of surface friction on flows over mountains ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 129.593, p. 2527–2557 (cf. p. 153).

Penghui, Su, Hu Pengju et Zhang Liang (2016). « Comparisons of Limiters in Discontinuous Galerkin Method ». In : *The 7th International Conference on Computational Methods (ICCM2016)* (cf. p. 160).

Peskin, Charles S (1972). « Flow patterns around heart valves : a numerical method ». In : *Journal of computational physics* 10.2, p. 252–271 (cf. p. 63).

Petculescu, Andi (2016). « Acoustic properties in the low and middle atmospheres of Mars and Venus ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 140.2, p. 1439–1446 (cf. p. 68, 71, 100).

Petersson, N Anders et Björn Sjögreen (2017). « High Order Accurate Finite Difference Modeling of Seismo-Acoustic Wave Propagation in a Moving Atmosphere and a Heterogeneous Earth Model Coupled Across a Realistic Topography ». In : *Journal of Scientific Computing*, p. 1–34 (cf. p. 38).

Peyret, R et TD Taylor (1985). « Computational methods for fluid flow ». In : *New York, Springer-Verlag, 1985, 368 p.* 1 (cf. p. 18).

Phillips, Norman A (1956). « The general circulation of the atmosphere : A numerical experiment ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 82.354, p. 535–539 (cf. p. 24).

Piani, C et al. (2000). « A numerical study of three-dimensional gravity waves triggered by deep tropical convection and their role in the dynamics of the QBO ». In : *Journal of the atmospheric sciences* 57.22, p. 3689–3702 (cf. p. 14).

Pichon, A Le et al. (2008). « Evidence for a meteoritic origin of the September 15, 2007, Carancas crater ». In : *Meteoritics & Planetary Science* 43.11, p. 1797–1809 (cf. p. 99, 100).

Picone, J. M. et al. (2002). « NRLMSISE-00 empirical model of the atmosphere : Statistical comparisons and scientific issues ». In : *Journal of Geophysical Research (Space Physics)* 107, 1468, p. 1468 (cf. p. 6, 9, 24).

Pierce, Allan D et al. (1981). *Acoustics : an introduction to its physical principles and applications*. T. 678. McGraw-Hill New York (cf. p. 31).

Pletcher, Richard H, John C Tannehill et Dale Anderson (2012). *Computational fluid mechanics and heat transfer*. CRC Press (cf. p. 122).

Poinsot, T J&amp et SK Lelef (1992). « Boundary conditions for direct simulations of compressible viscous flows ». In : *Journal of computational physics* 101.1, p. 104–129 (cf. p. 152).

Ponomarev, E.A. et al. (2006). « Using the normal-mode method of probing the infrasonic propagation for purposes of the comprehensive nuclear-test-ban treaty ». In : *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics* 68.6, p. 599 –614 (cf. p. 23).

Posmentier, Eric S (1967). « A theory of microbaroms ». In : *Geophysical Journal International* 13.5, p. 487–501 (cf. p. 14).

Pour, Amin Beiranvnd, Mazlan Hashim et Maged Marghany (2011). « Using spectral mapping techniques on short wave infrared bands of ASTER remote sensing data for alteration mineral mapping in SE Iran ». In : *International Journal of Physical Sciences* 6.4, p. 917–929 (cf. p. 1).

Prax, Christian, François Golanski et Laurent Nadal (2008). « Control of the vorticity mode in the linearized Euler equations for hybrid aeroacoustic prediction ». In : *Journal of Computational Physics* 227.12, p. 6044–6057 (cf. p. 124).

Puente, Josep de la et al. (2014). « Mimetic seismic wave modeling including topography on deformed staggered grids ». In : *Geophysics* 79.3, T125–T141 (cf. p. 63).

Queney, Paul (1948). « The problem of air flow over mountains :{A} summary of theoretical studies ». In : *Bull. Am. Meteorol. Soc.* 29, p. 16–26 (cf. p. 3).

Raveloson, A. et al. (2012). « Locating the Tohoku-Oki 2011 tsunami source using acoustic-gravity waves ». In : *Journal of Seismology* 16, p. 215–219 (cf. p. 1).

Reed, Jack W (1977). « Atmospheric attenuation of explosion waves ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 61.1, p. 39–47 (cf. p. 100).

Reed, Wm H et TR Hill (1973). « Triangularmesh methodsfor the neutrontransportequation ». In : *Los Alamos Report LA-UR-73-479* (cf. p. 20, 121).

Remacle, Jean-François, Joseph E Flaherty et Mark S Shephard (2003). « An adaptive discontinuous Galerkin technique with an orthogonal basis applied to compressible flow problems ». In : *SIAM review* 45.1, p. 53–72 (cf. p. 162).

Restelli, Marco et Francis X Giraldo (2009). « A conservative discontinuous Galerkin semi-implicit formulation for the Navier–Stokes equations in nonhydrostatic mesoscale modeling ». In : *SIAM Journal on Scientific Computing* 31.3, p. 2231–2257 (cf. p. 20).

ReVelle, DO, W Edwards et TD Sandoval (2005). « Genesis—An artificial, low velocity “meteor” fall and recovery : September 8, 2004 ». In : *Meteoritics & Planetary Science* 40.6, p. 895–916 (cf. p. 100).

ReVelle, Douglas O (1976). « On meteor-generated infrasound ». In : *Journal of Geophysical Research* 81.7, p. 1217–1230 (cf. p. 69).

Richardson, Lewis Fry (1910). « On the approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations, with an application to the stresses in a masonry dam ». In : *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. T. 83. 563. The Royal Society, p. 335–336 (cf. p. 17).

— (1922). *Numerical Prediction by Numerical Processes* (cf. p. 18, 23).

Richter, Andreas, Joerg Stiller et Roger Grundmann (2007). « Stabilized discontinuous Galerkin methods for flow–sound interaction ». In : *Journal of Computational Acoustics* 15.01, p. 123–143 (cf. p. 152).

Rider, William J et Len G Margolin (2001). « Simple modifications of monotonicity-preserving limiter ». In : *Journal of Computational Physics* 174.1, p. 473–488 (cf. p. 160).

Rivière, Béatrice et Mary F Wheeler (2000). « A discontinuous Galerkin method applied to nonlinear parabolic equations ». In : *Discontinuous Galerkin methods*. Springer, p. 231–244 (cf. p. 121).

Roe, Philip L (1981). « Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes ». In : *Journal of computational physics* 43.2, p. 357–372 (cf. p. 18, 119).

Rogers, Peter H et JH Gardner (1980). « Propagation of sonic booms in the thermosphere ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 67.1, p. 78–91 (cf. p. 125, 166).

Rolland, L. M. et al. (2011). « The resonant response of the ionosphere imaged after the 2011 off the Pacific coast of Tohoku Earthquake ». In : *Earth, Planets, and Space* 63, p. 853–857 (cf. p. 1, 125).

Rolland, Lucie M, Philippe Lognonné et Hiroshi Munekane (2011). « Detection and modeling of Rayleigh wave induced patterns in the ionosphere ». In : *Journal of Geophysical Research : Space Physics* 116.A5 (cf. p. 10).

Romanowicz, Barbara (2002). « 11 Inversion of surface waves : A review ». In : *International Geophysics* 81, p. 149–173 (cf. p. 1).

Ryskin, G et LG Leal (1984). « Numerical solution of free-boundary problems in fluid mechanics. Part 1. The finite-difference technique ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 148, p. 1–17 (cf. p. 118).

Sabatini, R et al. (2015). « Numerical simulation of infrasound propagation in the Earth's atmosphere : Study of a stratospherical arrival pair ». In : *AIP Conference Proceedings*. T. 1685. 1. AIP Publishing, p. 090002 (cf. p. 38).

Sabatini, Roberto et al. (2016). « A numerical study of nonlinear infrasound propagation in a windy atmosphere ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 140.1, p. 641–656 (cf. p. 166, 170).

SAITO, Kazuo et al. (2007). « Nonhydrostatic atmospheric models and operational development at JMA ». In : *Journal of the Meteorological Society of Japan* 85, p. 271–304 (cf. p. 154).

Salby, Murry L (1984). « Survey of planetary-scale traveling waves : The state of theory and observations ». In : *Reviews of Geophysics* 22.2, p. 209–236 (cf. p. 128).

Salomons, Erik M, Reinhard Blumrich et Dietrich Heimann (2002). « Eulerian time-domain model for sound propagation over a finite-impedance ground surface. Comparison with frequency-domain models ». In : *Acta Acustica united with Acustica* 88.4, p. 483–492 (cf. p. 38).

Sambridge, Malcolm et al. (2007). « Automatic differentiation in geophysical inverse problems ». In : *Geophysical Journal International* 170.1, p. 1–8 (cf. p. 171).

Sawyer, JS (1959). « The introduction of the effects of topography into methods of numerical forecasting ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 85.363, p. 31–43 (cf. p. 3).

Schlichting, Hermann et al. (1960). *Boundary-layer theory*. T. 7. Springer (cf. p. 17).

Schwartzkopff, Thomas, Michael Dumbser et Claus-Dieter Munz (2004). « Fast high order ADER schemes for linear hyperbolic equations ». In : *Journal of Computational Physics* 197.2, p. 532–539 (cf. p. 123).

Scorer, RS (1949). « Theory of waves in the lee of mountains ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 75.323, p. 41–56 (cf. p. 3).

Seiff, Alvin et Donn B Kirk (1977). « Structure of the atmosphere of Mars in summer at mid-latitudes ». In : *Journal of Geophysical Research* 82.28, p. 4364–4378 (cf. p. 71).

Shu, Chi-Wang (1987). « TVB uniformly high-order schemes for conservation laws ». In : *Mathematics of Computation* 49.179, p. 105–121 (cf. p. 160).

Simons, Mark et al. (2011). « The 2011 magnitude 9.0 Tohoku-Oki earthquake : Mosaicking the megathrust from seconds to centuries ». In : *science* 332.6036, p. 1421–1425 (cf. p. 1).

Slanger, TG et BC Wolven (2002). « Airglow processes in planetary atmospheres ». In : *Atmospheres in the Solar System : Comparative Aeronomy*, p. 77–93 (cf. p. 16).

Smith, Gordon D (1985). *Numerical solution of partial differential equations : finite difference methods*. Oxford university press (cf. p. 61).

Smith, R. (1979). « The Influence of the Earth's Rotation on Mountain Wave Drag. » In : *Journal of Atmospheric Sciences* 36, p. 177–180 (cf. p. 12).

Smith, Walter HF et al. (2005). « Satellite altimeters measure tsunami ». In : *Oceanography* 18.2, p. 11–13 (cf. p. 170).

Smolarkiewicz, Piotr K et Len G Margolin (1998). « MPDATA : A finite-difference solver for geophysical flows ». In : *Journal of Computational Physics* 140.2, p. 459–480 (cf. p. 38).

Spalding, Dudley Brian (1972). « A novel finite difference formulation for differential expressions involving both first and second derivatives ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 4.4, p. 551–559 (cf. p. 120).

Staquet, Chantal et Joël Sommeria (2002). « Internal gravity waves : from instabilities to turbulence ». In : *Annual Review of Fluid Mechanics* 34.1, p. 559–593 (cf. p. 13, 128).

Stevanović, J et al. (2017). « Bolide Airbursts as a Seismic Source for the 2018 Mars InSight Mission ». In : *Space Science Reviews*, p. 1–21 (cf. p. 68, 70, 125, 166, 170).

Stevenson, David J et al. (2015). « Probing the Interior Structure of Venus ». In : (cf. p. 15, 166).

Stump, Brian W et al. (2009). *Seismo-acoustic generation by earthquakes and explosions and near-regional propagation*. Rapp. tech. DTIC Document (cf. p. 15).

Suda, Naoki, Kazunari Nawa et Yoshio Fukao (1998). « Earth's background free oscillations ». In : *Science* 279.5359, p. 2089–2091 (cf. p. 10).

Sutherland, BR (1996). « Internal gravity wave radiation into weakly stratified fluid ». In : *Physics of Fluids* 8.2, p. 430–441 (cf. p. 34).

— (2000). « Internal wave reflection in uniform shear ». In : *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 126.570, p. 3255–3286 (cf. p. 13, 34).

— (2006). « Internal wave instability : Wave-wave versus wave-induced mean flow interactions ». In : *Physics of Fluids* 18.7, p. 074107 (cf. p. 128).

Sutherland, Bruce R (2001). « Finite-amplitude internal wavepacket dispersion and breaking ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 429, p. 343–380 (cf. p. 13).

— (2010). *Internal gravity waves*. Cambridge University Press (cf. p. 33).

Sutherland, Louis C et Henry E Bass (2004). « Atmospheric absorption in the atmosphere up to 160 km ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 115.3, p. 1012–1032 (cf. p. 28).

Tailpied, Dorianne et al. (2017). « Assessing and optimizing the performance of infrasound networks to monitor volcanic eruptions ». In : *Geophysical Journal International* 208.1, p. 437–448 (cf. p. 23).

Takahashi, Yasumori, Yasuyori Koyama et Takehiro Isei (1994). « In situ measured infrasound at Sapporo associated with an earthquake occurring offshore in southwest Hokkaido on July 12, 1993 ». In : *Journal of the Acoustical Society of Japan (E)* 15.6, p. 409–411 (cf. p. 10).

Takekawa, Junichi, Hitoshi Mikada et Tada-nori Goto (2014). « An accuracy analysis of a Hamiltonian particle method with the staggered particles for seismic-wave modeling including surface topography ». In : *Geophysics* 79.4, T189–T197 (cf. p. 63).

Tanaka, T (1994). « Finite volume TVD scheme on an unstructured grid system for three-dimensional MHD simulation of inhomogeneous systems including strong background potential fields ». In : *Journal of Computational Physics* 111.2, p. 381–389 (cf. p. 122).

Tanaka, Teruya et al. (1984). « HF-Doppler observations of acoustic waves excited by the Urakawa-Oki earthquake on 21 March 1982 ». In : *Journal of atmospheric and terrestrial physics* 46.3, p. 233239–237245 (cf. p. 16).

Tanimoto, T (1999). « Excitation of normal modes by atmospheric turbulence : source of long-period seismic noise ». In : *Geophysical Journal International* 136.2, p. 395–402 (cf. p. 10).

Tarrass, Issam, Luc Giraud et Pierre Thore (2011). « New curvilinear scheme for elastic wave propagation in presence of curved topography ». In : *Geophysical Prospecting* 59.5, p. 889–906 (cf. p. 63).

Teanby, NA (2015). « Predicted detection rates of regional-scale meteorite impacts on Mars with the InSight short-period seismometer ». In : *Icarus* 256, p. 49–62 (cf. p. 68, 166).

Teanby, NA et J Wookey (2011). « Seismic detection of meteorite impacts on Mars ». In : *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 186.1, p. 70–80 (cf. p. 70).

Thoma, P. et T. Weiland (1996). « A consistent subgridding scheme for the finite difference time domain method ». In : *International Journal of Numerical Modelling : Electronic Networks, Devices and Fields* 9.5, p. 359–374 (cf. p. 64).

Thomasset, François (1981). *Implementation of finite element methods for Navier-Stokes equations*. Springer Series in Computational Physics (cf. p. 20).

Thompson, Kevin W (1987). « Time dependent boundary conditions for hyperbolic systems ». In : *Journal of computational physics* 68.1, p. 1–24 (cf. p. 152, 170).

— (1990). « Time-dependent boundary conditions for hyperbolic systems, II ». In : *Journal of Computational Physics* 89.2, p. 439–461 (cf. p. 61, 152).

Titarev, Vladimir A et Eleuterio F Toro (2005). « ADER schemes for three-dimensional non-linear hyperbolic systems ». In : *Journal of Computational Physics* 204.2, p. 715–736 (cf. p. 123).

Titov, Vasily V et al. (2005). « Real-time tsunami forecasting : Challenges and solutions ». In : *Developing tsunami-resilient communities*. Springer, p. 41–58 (cf. p. 1).

Toulorge, Thomas et Wim Desmet (2011). « CFL conditions for Runge–Kutta discontinuous Galerkin methods on triangular grids ». In : *Journal of Computational Physics* 230.12, p. 4657–4678 (cf. p. 164).

Treyssede, Fabien, Gwénaël Gabard et Mabrouk Ben Tahar (2003). « A mixed finite element method for acoustic wave propagation in moving fluids based on an Eulerian–Lagrangian description ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 113.2, p. 705–716 (cf. p. 123).

Turner., M. J. (1956). « Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures ». In : *Journal of the Aeronautical Sciences* 23.9, p. 805–823 (cf. p. 18).

Utzmann, Jens et al. (2009). « Fluid-Acoustic Coupling and Wave Propagation ». In : *Numerical Simulation of Turbulent Flows and Noise Generation : Results of the DFG/CNRS Research Groups FOR 507 and FOR 508*. Sous la dir. de Christophe Brun et al. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, p. 47–74 (cf. p. 123).

Vachiratienchai, Chatchai, Songkhun Boonchaisuk et Weerachai Siripunvaraporn (2010). « A hybrid finite difference–finite element method to incorporate topography for 2D direct current (DC) resistivity modeling ». In : *Physics of the Earth and Planetary Interiors* 183.3, p. 426–434 (cf. p. 64).

Valette, B. (1987). « Spectre des oscillations libres de la Terre : aspects mathématiques et géophysiques (Spectrum of the free oscillations of the Earth : mathematical and geophysical aspects) ». thèse d'état. Thèse de doct. Paris : Université Paris VI Jussieu (cf. p. 125).

Van Dyke, Milton (1975). « Perturbation methods in fluid mechanics/Annotated edition ». In : *NASA STI/Recon Technical Report A* 75 (cf. p. 17).

Van Hoolst, Tim et al. (2003). « Tidally induced surface displacements, external potential variations, and gravity variations on Mars ». In : *Icarus* 161.2, p. 281–296 (cf. p. 71).

Van Leer, Bram (1974). « Towards the ultimate conservative difference scheme. II. Monotonicity and conservation combined in a second-order scheme ». In : *Journal of computational physics* 14.4, p. 361–370 (cf. p. 18, 119).

— (1977). « Towards the ultimate conservative difference scheme III. Upstream-centered finite-difference schemes for ideal compressible flow ». In : *Journal of Computational Physics* 23.3, p. 263–275 (cf. p. 160, 161).

— (2006). « Upwind and high-resolution methods for compressible flow : From donor cell to residual-distribution schemes ». In : *16th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, p. 3559 (cf. p. 160).

Van Renterghem, T (2003). « The finite-difference time-domain method for simulation of sound propagation in a moving medium ». Thèse de doct. PhD thesis, University of Gent, Belgium (cf. p. 38).

Van Renterghem, Timothy et Dick Botteldooren (2003). « Numerical simulation of the effect of trees on downwind noise barrier performance ». In : *Acta Acustica united with Acustica* 89.5, p. 764–778 (cf. p. 38).

Vegt, JJW Van der et H Van der Ven (1998). « Discontinuous Galerkin finite element method with anisotropic local grid refinement for inviscid compressible flows ». In : *Journal of Computational Physics* 141.1, p. 46–77 (cf. p. 121).

Versteeg, Henk Kaarle et Weeratunge Malalasekera (2007). *An introduction to computational fluid dynamics : the finite volume method*. Pearson Education (cf. p. 119).

Vichnevetsky, Robert et John B Bowles (1982). *Fourier analysis of numerical approximations of hyperbolic equations*. SIAM (cf. p. 36).

Vincent, Robert A et M Joan Alexander (2000). « Gravity waves in the tropical lower stratosphere : An observational study of seasonal and interannual variability ». In : *Journal of Geophysical Research : Atmospheres* 105.D14, p. 17971–17982 (cf. p. 14).

Virieux, Jean (1986). « P-SV wave propagation in heterogeneous media : Velocity-stress finite-difference method ». In : *Geophysics* 51.4, p. 889–901 (cf. p. 36, 169).

Virta, Kristoffer (2016). « Numerics of Elastic and Acoustic Wave Motion ». Thèse de doct. Acta Universitatis Upsaliensis (cf. p. 64).

Vishnevsky, Dmitry et al. (2014). « Numerical study of the interface errors of finite-difference simulations of seismic waves ». In : *Geophysics* 79.4, T219–T232 (cf. p. 63).

Von Mises, Richard, Hilda Geiringer et Geoffrey Stuart Stephen Ludford (2004). *Mathematical theory of compressible fluid flow*. Courier Corporation (cf. p. 17).

Vossen, Robbert van, Johan OA Robertsson et Chris H Chapman (2002). « Finite-difference modeling of wave propagation in a fluid–solid configuration ». In : *Geophysics* 67.2, p. 618–624 (cf. p. 118, 122).

Wang, Jian Ping, Yoshiaki Nakamura et Michiru Yasuhara (1990). « A Chebyshev collocation method for the compressible Navier-Stokes equations in generalized coordinates ». In : *Japan Society of Aeronautical Space Sciences Transactions* 33, p. 120–134 (cf. p. 120).

Wang, Shumin (2007). *Numerical examinations of the stability of FDTD subgridding schemes*. Rapp. tech. DTIC Document (cf. p. 64).

Wang, Xiaodong et KLAUS-JUeRGEN Bathe (1997). « Displacement/pressure based mixed finite element formulations for acoustic fluid-structure interaction problems ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 40.11, p. 2001–2017 (cf. p. 122, 124).

Wang, Yi et al. (2016). « The deep roots of the western Pyrenees revealed by full waveform inversion of teleseismic P waves ». In : *Geology* 44.6, p. 475–478 (cf. p. 122).

Watada, Shingo et al. (2006). « Atmospheric pressure change associated with the 2003 Tokachi-Oki earthquake ». In : *Geophysical research letters* 33.24 (cf. p. 10).

Whipple, F.J.W. (1930). « The great Siberian meteor and the waves, seismic and aerial, which it produced ». In : *Quaterly Journal of the Royal Meteorological Society* 56, p. 287–304 (cf. p. 99).

Whitaker, Rodney W (2008). *Infrasound signals from ground-motion sources*. Rapp. tech. DTIC Document (cf. p. 18).

Whitney, John P (2006). « A Perfectly Matched Layer Method for the Navier-Stokes Equations ». Thèse de doct. Massachusetts Institute of Technology (cf. p. 152).

Widmer, R et W Zürn (1992). « Bichromatic excitation of long-period Rayleigh and air waves by the Mount Pinatubo and El Chichón volcanic eruptions ». In : *Geophysical research letters* 19.8, p. 765–768 (cf. p. 10).

Wilcox, Lucas C et al. (2010). « A high-order discontinuous Galerkin method for wave propagation through coupled elastic–acoustic media ». In : *Journal of Computational Physics* 229.24, p. 9373–9396 (cf. p. 123).

Williams, Jean-Pierre (2001). « Acoustic environment of the Martian surface ». In : *Journal of geophysical research* 106, p. 5033–5041 (cf. p. 68, 69, 71).

Wilson, Charles R, Curt AL Szuberla et John V Olson (2010). « High-latitude observations of infrasound from Alaska and Antarctica : mountain associated waves and geomagnetic/auroral Infrasonic signals ». In : *Infrasound Monitoring for Atmospheric Studies*. Springer, p. 415–454 (cf. p. 12).

Wilson, D Keith (2003). « The sound-speed gradient and refraction in the near-ground atmosphere ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 113.2, p. 750–757 (cf. p. 31).

Wilson, D Keith et Lanbo Liu (2004). *Finite-difference, time-domain simulation of sound propagation in a dynamic atmosphere*. Rapp. tech. DTIC Document (cf. p. 38).

Wilson, D Keith et al. (2003). « Development of a high-fidelity simulation capability for battlefield acoustics ». In : *AeroSense 2003*. International Society for Optics et Photonics, p. 51–60 (cf. p. 38).

Wilson, D Keith et al. (2007). « Time-domain calculations of sound interactions with outdoor ground surfaces ». In : *Applied Acoustics* 68.2, p. 173–200 (cf. p. 122, 123).

Winters, Andrew R et David A Kopriva (2014). « High-order local time stepping on moving DG spectral element meshes ». In : *Journal of Scientific Computing* 58.1, p. 176–202 (cf. p. 164).

Withers, Mitchell M. et al. (1996). « High-frequency analysis of seismic background noise as a function of wind speed and shallow depth ». In : *Bulletin of the Seismological Society of America* 86.5, p. 1507–1515 (cf. p. 14).

Woodhouse, J.H. et F.A. Dahlen (1978). « The effect of a general aspherical perturbation on the free oscillations of the Earth ». In : *Geophys. J. R. astr. Soc.* 53, p. 335–354 (cf. p. 22).

Ye, Zhihong et al. (2016). « A Novel FDTD Subgridding Method with Improved Separated Temporal and Spatial Subgridding Interfaces ». In : *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters* (cf. p. 64).

Yee, Kane S. (1966). « Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems involving Maxwell's Equations ». In : *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 14, p. 302–307 (cf. p. 17, 36, 37).

Yeh, KC et CH Liu (1981). « The instability of atmospheric gravity waves through wave-wave interactions ». In : *Journal of Geophysical Research : Oceans* 86.C10, p. 9722–9728 (cf. p. 128).

Yelash, L et al. (2014). « Adaptive discontinuous evolution Galerkin method for dry atmospheric flow ». In : *Journal of Computational Physics* 268, p. 106–133 (cf. p. 122, 154).

Yiğit, Erdal et Alexander S Medvedev (2009). « Heating and cooling of the thermosphere by internal gravity waves ». In : *Geophysical Research Letters* 36.14 (cf. p. 166).

Young, Jessie M et Gary E Greene (1982). « Anomalous infrasound generated by the Alaskan earthquake of 28 March 1964 ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 71.2, p. 334–339 (cf. p. 10).

Yuan, Xiaojuen et al. (1997). « Formulation and validation of Berenger's PML absorbing boundary for the FDTD simulation of acoustic scattering ». In : *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control* 44.4, p. 816–822 (cf. p. 101).

Yuen, PC et al. (1969). « Continuous, traveling coupling between seismic waves and the ionosphere evident in May 1968 Japan earthquake data ». In : *Journal of Geophysical Research* 74.9, p. 2256–2264 (cf. p. 16).

Zettergren, MD et al. (2017). « Nonlinear ionospheric responses to large-amplitude infrasonic-acoustic waves generated by undersea earthquakes ». In : *Journal of Geophysical Research : Space Physics* 122.2, p. 2272–2291 (cf. p. 166).

Zhao, L. et F. A. Dahlen (1995). « Asymptotic normal modes of the Earth - II. Eigenfunctions. » In : *Geophysical Journal International* 121, p. 585–626 (cf. p. 22).

Zhebel, Elena et al. (2014). « A comparison of continuous mass-lumped finite elements with finite differences for 3-D wave propagation ». In : *Geophysical Prospecting* 62.5, p. 1111–1125 (cf. p. 63).

Zhu, Hongqiang, Yue Cheng et Jianxian Qiu (2013). « A comparison of the performance of limiters for Runge-Kutta discontinuous Galerkin methods ». In : *Adv. Appl. Math. Mech* 5.3, p. 365–390 (cf. p. 160, 161).

Zhu, Jun et al. (2013). « Runge–Kutta discontinuous Galerkin method using a new type of WENO limiters on unstructured meshes ». In : *Journal of Computational Physics* 248, p. 200–220 (cf. p. 160).

Zienkiewicz, OC et P Bettess (1978). « Fluid-structure dynamic interaction and wave forces. An introduction to numerical treatment ». In : *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 13.1, p. 1–16 (cf. p. 122).

AUTEUR : Quentin BRISSAUD
TITRE : Modélisation numérique des ondes atmosphériques issues des couplages solide/océan/atmosphère et applications
présentée et soutenue par
DIRECTEUR DE THESE LIEU ET DATE DE SOUTENANCE : ISAE-SUPAERO, 10 avenue Édouard-Belin, Toulouse le 9 octobre 2017

Résumé — Cette thèse se penche sur la propagation d'ondes au sein du système couplé Terre-océan-atmosphère. La compréhension de ces phénomènes a une importance majeure pour l'étude de perturbations sismiques et d'explosions atmosphériques notamment dans le cadre de missions spatiales planétaires. Les formes d'ondes atmosphériques issues du couplage fluide-solide permettent d'obtenir de précieuses informations sur la source du signal ou les propriétés des milieux de propagation. On développe donc deux outils de modélisation numérique d'ordre élevé pour la propagation d'ondes acoustiques et de gravité. Le premier est en différences finies sur grille en quinconce et se concentre uniquement sur le milieu atmosphérique, permettant la propagation d'ondes linéaires dans un milieu stratifié visqueux et avec du vent. Cette méthode linéaire est validée par des solutions quasi-analytiques reposant sur les équations de dispersion dans une atmosphère stratifiée. Elle est aussi appliquée à deux cas d'études : la propagation d'ondes liée à l'impact d'une météorite à la surface de Mars dans le cadre de la mission de la NASA INSIGHT, et la propagation d'ondes atmosphériques liées au tsunami de Sumatra en 2004. La seconde méthode résout la propagation non-linéaire d'ondes acoustiques et de gravité dans une atmosphère complexe couplée, avec topographie, à la propagation d'ondes élastiques dans un solide visco-élastique. Cette méthode repose sur sur le couplage d'une formulation en éléments finis discontinus, pour résoudre les équations de Navier-Stokes dans la partie fluide, avec une méthode par éléments finis continus pour résoudre les équations de l'élastodynamique dans la partie solide. Elle a été validée grâce à des solutions analytiques ainsi que par des comparaisons avec les résultats de la méthode par différences finies. De nombreuses applications de cette méthode sont alors possibles notamment pour l'étude de séismes de sub-surface, d'explosions atmosphériques liées à la rentrée de météorites ou pour la caractérisation des phénomènes non-linéaires lors de la propagation d'infrasons et d'ondes de gravité dans l'atmosphère.

Mots clés : Ondes atmosphériques, Atmosphères planétaires, Couplage Terre-atmosphère, Méthode de Galerkin discontinue, Différences finies, Tsunamis

Numerical modeling of atmospheric waves due to Earth/Ocean/Atmosphere couplings and applications

Abstract — This thesis deals with the wave propagation problem within the Earth-ocean-atmosphere coupled system. A good understanding of the these phenomena has a major importance for seismic and atmospheric explosion studies, especially for planetary missions. Atmospheric wave-forms generated by explosions or surface oscillations can bring valuable information about the source mechanism or the properties of the various propagation media. We develop two new numerical full-wave high-order modeling tools to model the propagation of acoustic and gravity waves in realistic atmospheres. The first one relies on a high-order staggered finite difference method and focus only on the atmosphere. It enables the simultaneous propagation of linear acoustic and gravity waves in stratified viscous and windy atmosphere. This method is validated against quasi-analytical solutions based on the dispersion equations for a stratified atmosphere. It has also been employed to investigate two cases : the atmospheric propagation generated by a meteor impact on Mars for the INSIGHT NASA mission and for the study of tsunami-induced acoutic and gravity waves following the 2004 Sumatra tsunami. The second numerical method resolves the non-linear acoustic and gravity wave propagation in a realistic atmosphere coupled, with topography, to the elastic wave propagation in a visco-elastic solid. This numerical tool relies on a discontinuous Galerkin method to solve the full Navier-Stokes equations in the fluid domain and a continuous Galerkin method to solve the elastodynamics equations in the solid domain. It is validated against analytical solutions and numerical results provided by the finite-difference method. This method could be employed for numerous applications cases such as near-surface Earthquakes, atmospheric explosions from bolide airburst or to investigate non-linear acoustic and gravity wave propagation in a realistic atmosphere.

Keywords : Atmospheric wave, Planetary atmospheres, Earth-atmosphere coupling, Discontinuous Galerkin method, Finite differences, Tsunamis

---

DISCIPLINE ADMINISTRATIVE : Astrophysique, Sciences de l'Espace, Planétologie
LABORATOIRE : ISAE-SUPAERO / DEOS-SSPA