



**HAL**  
open science

# Applications semi-conformes et solitons de Ricci

Elsa Ghandour

► **To cite this version:**

Elsa Ghandour. Applications semi-conformes et solitons de Ricci. Catégories et ensembles [math.CT]. Université de Bretagne occidentale - Brest, 2018. Français. NNT : 2018BRES0039 . tel-01890945

**HAL Id: tel-01890945**

**<https://theses.hal.science/tel-01890945>**

Submitted on 9 Oct 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE DE DOCTORAT DE

L'UNIVERSITE  
DE BRETAGNE OCCIDENTALE  
COMUE UNIVERSITÉ BRETAGNE LOIRE

ECOLE DOCTORALE N° 601  
*Mathématiques et Sciences et Technologies  
de l'Information et de la Communication*  
Spécialité : *Mathématiques*

Par

**Elsa GHANDOUR**

## **Applications semi-conformes et solitons de Ricci**

Thèse présentée et soutenue à Brest, le 09 Juillet 2018

Unité de recherche : Laboratoire de Mathématiques de Bretagne Atlantique (LMBA/UMR 6205)

Thèse N° :

### **Rapporteurs avant soutenance :**

Marina Ville    Chargée de recherche CNRS, Université de  
Tours- Université d'Orléans  
Chris Wood    Senior Lecturer, University of York

### **Composition du Jury :**

Eric Loubeau, Maître de conférences, Université de Bretagne Occidentale, Brest  
Etienne Sandier, Professeur, Université de Paris XII  
Marina Ville,    Chargée de recherche CNRS, Université de Tours – Université d'Orléans  
Chris Wood,    Senior Lecturer, University of York, UK  
John C. Wood, Professeur, University of Leeds, UK (Président du jury)

### **Directeur de thèse**

Paul Baird, Professeur, Université de Bretagne Occidentale, Brest

### **Invité**

Rachid Regbaoui, Maître de conférences, Université de Bretagne Occidentale, Brest

## Remerciements

Ces remerciements clôturent mes travaux de thèse, réalisés au Laboratoire de Mathématiques de Bretagne Atlantique (LMBA) dont je tiens à remercier chaleureusement tous les membres. À ce titre, je tiens à exprimer ma gratitude à Benoît Saussol, directeur du LMBA, d'avoir accepté de m'accueillir au sein de son laboratoire.

Si cette thèse s'est accomplie dans de si bonnes conditions c'est avant tout grâce à mon directeur de thèse, Paul Baird. Je ne saurais trouver les mots pour le remercier. Je suis fier d'avoir travaillé avec une personne très compétente dans le domaine de la géométrie mais aussi d'autres domaines. Je lui suis redevable non seulement pour sa grande disponibilité, pour ses multiples conseils, pour le temps qu'il a consacré à diriger cette recherche mais aussi j'ai appris beaucoup de son énorme connaissance, sa patience et sa façon de résoudre les problèmes bloquants. Son énergie, sa capacité d'analyse et son enthousiasme m'ont montré la facette du monde de la recherche qui est un univers passionnant. Enfin, ses relectures et corrections de cette thèse ont été très appréciables. Cette thèse lui doit beaucoup, merci encore une fois.

Je suis infiniment gré à Marina Ville et Chris Wood pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de lire la thèse et d'en être rapporteurs et aussi d'être présents à ma soutenance de thèse. Je les remercie pour leurs remarques pertinentes.

Je souhaiterais exprimer ma gratitude à John C. Wood, dont j'ai apprécié dès notre première rencontre (à Cagliari en 2015) sa grande ouverture d'esprit (pareil pour Marina Ville et Chris Wood). Merci d'avoir accepté de participer au jury de ma thèse et en être le président. Merci aussi pour la lecture attentive du manuscrit et pour vos remarques.

J'adresse des remerciements particuliers à Etienne Sandier, pour avoir accepté d'être membre du jury de ma thèse.

Toute ma reconnaissance à Eric Loubeau et Rachid Regbaoui, d'avoir accepté d'être dans le jury de ma thèse et aussi pour leur gentillesse et leur aide pendant mon séjour à Brest.

Un grand merci à Ali Fardoun, qui m'a proposé en Master 2 de venir faire une thèse à Brest. Je considère qu'il est une des raisons principales qui m'a amenée à ce que j'ai réalisé jusqu'à maintenant.

Je remercie particulièrement Annick, Sabine et Véronique pour leur gentillesse et leur aide dans les différentes démarches. Je remercie aussi Michèle et Rob et je salue également leurs personnalités sympathiques.

J'ai eu la chance de donner des heures de TD à l'université de Brest, pendant lesquelles j'ai travaillé avec Carl. Je le remercie pour sa gentillesse et pour son aide durant cette période, qui m'a aidé à m'intégrer dans le monde de l'enseignement.

Au cours de ma thèse, j'ai eu l'opportunité de faire une mobilité de recherche à Texas A & M University-Commerce. Pour cela, je remercie particulièrement Ye-Lin Ou qui m'a accueillie chaleureusement. Je le remercie pour son aide pendant mon séjour aux États-Unis, pour l'expérience enrichissante qu'il m'a apportée et pour sa sympathie.

La période de rédaction de ma thèse a été particulièrement facilitée par un poste d'ATER à l'université de Valenciennes. Je tiens à exprimer tout particulièrement ma reconnaissance à Luc Vrancken pour son soutien et son aide que j'ai beaucoup appréciés. Je remercie également Olivier Birembaux et je souhaite aussi exprimer ma gratitude au directeur de LAMAV, Felix Mehmeti.

Je remercie tous les thésards et docteurs avec lesquels j'ai été à Brest, pour la bonne ambiance de travail et aussi pour leur amitié, je pense en particulier à Xuan, Tia, Mokdad, Adel, Amine, Xiaochi, Nathalie, Julien, Kamel et Dewi. Et pour ceux de Valenciennes je remercie Fatiha, Hawraa, Tonia, Alaa, Jérôme et Thibaut.

Merci beaucoup pour ceux qui étaient plus qu'une famille à Brest, mes chères Inas, Lara, Nasab et Zeina. Vous avez rendu mon séjour à Brest inoubliable. Nasab, je ne peux pas exprimer ma reconnaissance envers toi pour toutes les aventures, les histoires, les rires et mêmes les pleurs parfois. Je vous souhaite toutes une très bonne continuation.

Enfin, mes plus grands remerciements s'adressent à ma chère famille, mes parents Ali et Mouna, mon frère Hassan. Je vous remercie pour vos sacrifices, pour votre amour infini et pour être toujours avec moi. Pour moi, vous êtes toute la vie. Je termine avec ce qui est le vrai sens de la "joie" pour moi : c'est mon petit neveu Ali, je t'aime fort.

Je suis contente de ce que j'ai accompli jusqu'à maintenant. Mon séjour en France non seulement m'a permis d'avoir un doctorat, mais m'a attribué également une deuxième identité et un deuxième pays dont je suis fière.

# Summary in English of the key results of this thesis

This work is primarily concerned with semi-conformal mappings and their influence in the resolution of important geometric equations such as those for a Ricci soliton and those for a biharmonic map.

A mapping  $\varphi : (M^m, g) \rightarrow (N^n, h)$  between Riemannian manifolds is semi-conformal if at each point  $x \in M^m$  where  $d\varphi_x \neq 0$ , the mapping  $d\varphi_x : (\ker d\varphi_x)^\perp \rightarrow T_{\varphi(x)}N^n$  is conformal and surjective. In the case when  $(N^n, h)$  is Euclidean space  $\mathbb{R}^n$  with its canonical metric and  $m \geq n$ , this is equivalent to the components of  $\varphi$  being *conjugate*; that is, their gradients are mutually orthogonal and of the same length at each point :  $g(\text{grad } \varphi_i, \text{grad } \varphi_j) = \lambda^2 \delta_{ij}$  for each  $i, j = 1, \dots, n$  for some (continuous) function  $\lambda : M^m \rightarrow \mathbb{R}$  called the *dilation* of  $\varphi$ .

**Chapter 2 :** We study an ansatz for the construction of semi-conformal mappings from domains in  $\mathbb{R}^3$  into the plane  $\mathbb{R}^2$ , the latter identified with the complex plane  $\mathbb{C}$ . If we let  $(x, y, z)$  be the canonical coordinates for  $\mathbb{R}^3$  and write  $u = \frac{x^2+y^2}{2}$ , then the ansatz consists of supposing  $\varphi$  can be written in the form  $\varphi(x, y, z) = (x + iy)u^{-q}\psi(u, z)$ , for some *complex*-valued function  $\psi$  *real*-analytic in a neighbourhood of  $(u, z) = (0, 0)$  and for some integer  $q \geq 0$ . One is led to consider two cases :  $q = 0$  or  $q = 1$  for which the condition  $\varphi$  be semi-conformal becomes the following equations in  $\psi$  :

$$\psi\psi_u + u\psi_u^2 + \frac{1}{2}\psi_z^2 = 0 \quad (q = 0) \quad (2.5)$$

$$-\psi\psi_u + u\psi_u^2 + \frac{1}{2}\psi_z^2 = 0 \quad (q = 1) \quad (2.6)$$

We look for solutions of the form

$$\psi(u, z) = \sum_{k,\ell=0}^{\infty} a_{k,\ell} u^k z^\ell, \quad (2.7)$$

for constants  $a_{k,\ell}$ . Set

$$\psi_{k,\ell} = \frac{\partial^{k+\ell}\psi}{\partial u^k \partial z^\ell}(0, 0).$$

**Theorem 2.2.3.** *Solutions to (2.5) and (2.6) of the form (2.7) with  $\psi_{0,0} \neq 0$  and  $\psi_{0,1} \neq 0$  are uniquely characterized by the given data :  $\psi_{0,\ell}$ , for  $\ell = 0, 1, 2, \dots$*

We then proceed to find explicit solutions to the ansatz. In the first case, we take the data to be

$$\psi_{0,0} = 1, \quad \psi_{0,1} = c, \quad \psi_{0,\ell} = 0 \text{ for } \ell \geq 2 \quad (2.19)$$

**Theorem 2.3.1.** *For the given data (2.19), the solution  $\psi(u, z) = \sum_{k,\ell=0}^{\infty} a_{k,\ell} u^k z^\ell$  to (2.5) has the form*

$$\psi(u, z) = 1 + cz + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^{\ell+1} c^{\ell+2k} \binom{\ell + 2k - 2}{\ell} \frac{3^{k-1} (2k - 2)!}{2^{k-1} (k + 1)! (k - 1)!} u^k z^\ell. \quad (2.20)$$

The solution to (2.6) has the form

$$\psi(u, z) = 1 + cz + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^{\ell+k-1} c^{\ell+2k} \binom{\ell + 2k - 2}{\ell} \frac{(2k - 2)!}{2^k k! (k - 1)!} u^k z^\ell. \quad (2.21)$$

Furthermore, these power series expressions converge absolutely for all  $(u, z)$  in a neighbourhood of the origin  $(0, 0)$ .

One particular solution of (2.20) can be expressed in closed form :

$$\psi(u, z) = \frac{2}{3}(1 + cz) - \frac{\{(1 + cz)^2 - 6c^2u\}^{3/2}}{3^3 c^2 u} + \frac{(1 + cz)^3}{3^3 c^2 u}.$$

The singularity when  $u = 0$  is removable, so this represents an entire analytic solution provided that  $3c^2u/2(1 + cz)^2$  is defined for all  $(u, z) \in \mathbb{R}^2$  ( $u \geq 0$ ) and that  $(1 + cz)^2 - 6c^2u \neq 0$  for all  $(u, z) \in \mathbb{R}^2$  ( $u \geq 0$ ). A judicious choice of the constant ensures that this is the case, for example  $c = i$ . It can be checked that this is not harmonic, and so it provides *the first known example of an entire semi-conformal mapping into the plane which is not harmonic.*

Subsequently, we concentrate on (2.6) with two free parameters, which has the Hopf map as a particular case. Consider the given data :

$$\psi_{0,0} = 1, \quad \psi_{0,1} = c_1, \quad \psi_{0,2} = c_2 \quad \psi_{0,\ell} = 0 \text{ for } \ell \geq 3 \quad (2.31)$$

for arbitrary complex constants  $c_1$  and  $c_2$ . By Theorem 2.2.3, this uniquely characterizes the solution. It is convenient to express  $c_1$  and  $c_2$  in the form

$$c_1 = \alpha + \beta \quad c_2 = 2\alpha\beta$$

for constants  $\alpha$  and  $\beta$  satisfying  $\alpha + \beta \neq 0$ . As a particular case, the Hopf map is determined by  $\alpha = \beta = -i$ .

**Theorem 2.4.1.** *The solution  $\psi(u, z) = \sum a_{k,\ell} u^k z^\ell$  to (2.5) with data (2.31) satisfies*

$$\psi(u, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,0} u^k$$

with  $a_{0,0} = 1$ ,  $a_{1,0} = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)^2$ , and

$$a_{k,0} = \frac{(-1)^{k+1}}{2k!} (\alpha - \beta)^2 (\alpha + \beta)^2 Q_k(\alpha, \beta) \quad \forall k \geq 2,$$

where

$$Q_k = \frac{(k-2)!}{2^{k-2}} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(2j-1)!(2k-2j-1)!}{(j-1)!^2(k-j-1)!^2} \alpha^{2k-2j-2} \beta^{2j-2},$$

is a symmetric polynomial in  $\alpha$  and  $\beta$ , homogeneous of degree  $2k - 4$ , whose sum of coefficients of the  $\alpha^{2k-2j-2} \beta^{2j-2}$  ( $j = 1, \dots, k-1$ ) is equal to  $2^{k-3} k!$ . Furthermore, the series converges absolutely for all  $u$  satisfying  $|u| \leq 1/2\mu^2$ , where  $\mu = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$ .

This theorem yields a family of semi-conformal mappings with the Hopf map as a particular case.

**Chapter 3 :** This part of the thesis is devoted to 3-dimensional Ricci solitons. A soliton is a Riemannian metric  $g$  which corresponds to fixed points of the Ricci flow up to dilation and diffeomorphism. Such metrics are determined by the equation :

$$\text{Ric}_g + \frac{1}{2} \mathcal{L}_E g + Ag = 0$$

for some constant  $A$  and vector field  $E$  called the soliton flow. We develop a new way of constructing examples from biconformal transformations which is particularly adapted to understanding the unicity of the soliton structure. We revisit known examples, as well as constructing new ones.

Given a semi-conformal map  $\varphi : (M, g_0) \rightarrow (N, h)$ , for each regular point  $x \in M$  the tangent space splits as the direct sum of the vertical space  $\mathcal{V}_x := \ker d\varphi_x$  and the horizontal space  $\mathcal{H}_x = (\ker d\varphi_x)^\perp : T_x M = \mathcal{H}_x \oplus \mathcal{V}_x$ . The metric can then be written  $g_0 = g_0^{\mathcal{H}} + g_0^{\mathcal{V}}$ , where  $g_0^{\mathcal{H}}$  and  $g_0^{\mathcal{V}}$  are the restriction of  $g_0$  to  $\mathcal{H}$  and  $\mathcal{V}$ , respectively. Then a *biconformal deformation* of  $g_0$  is a metric of the form

$$g = \frac{g_0^{\mathcal{H}}}{\sigma^2} + \frac{g_0^{\mathcal{V}}}{\rho^2},$$

for some smooth positive functions  $\sigma, \rho : M \rightarrow \mathbb{R}$ .

By applying the structure equations to a suitably adapted orthonormal frame field on  $M^3$ , we obtain a neat proof of how the Ricci tensor is expressed in terms of parameters

of the mapping  $\varphi$ .

**Theorem 3.2.5.** *Let  $\varphi : (M^3, g) \rightarrow (N^2, h)$  be a submersive semi-conformal map with dilation  $\lambda$  and integrability coefficient  $a$ . Then the Ricci curvature tensor is given by*

$$\begin{aligned} \text{Ric}_g = & \{ \lambda^2 K^N + \Delta \ln \lambda + \mu(\ln \lambda) \} g^{\mathcal{H}} - 2a^2 g + \frac{1}{2} \mathcal{L}_\mu g \\ & - \left( \mu^\flat + U(\ln \lambda) \theta_3 \right)^2 - U(\ln \lambda)^2 \theta_3^2 + \Delta \theta_3 \odot \theta_3, \end{aligned}$$

where  $\mu$  denotes the mean-curvature of the fibres of  $\varphi$ ,  $K^N$  is the Gauss curvature of  $N$ ,  $\theta_3$  is the unit vertical 1-form and  $\Delta \theta_3 = (\text{dd}^* + \text{d}^* \text{d}) \theta_3$  is the Laplacian on forms.

We then go on to exploit biconformal transformations to firstly study the biconformal equivalence of known soliton structures, to study their rigidity within the biconformal class of metrics and then to construct new examples. One particularly interesting example is given by the following theorem.

**Theorem 3.4.1.** *There is a continuous 1-parameter family of complete expanding soliton metrics on  $\mathbb{R}_+^3$ , each one unique, parametrized by the soliton constant  $A \geq 1$ , given by*

$$g = \frac{\text{d}x_1^2 + \text{d}x_2^2}{x_1^2} + \frac{\text{d}x_3^2}{x_1^{\pm 2\sqrt{A-1}}}$$

which interpolates between hyperbolic space  $H^3$  ( $A = 2$  with positive sign of square root) and the product  $H^2 \times \mathbb{R}$  of the hyperbolic plane with the real line ( $A = 1$ ), and between  $H^2 \times \mathbb{R}$  and the geometry Sol ( $A = 2$  with negative sign of square root).

The soliton flow is given by

$$E = (A - 1 \mp \sqrt{A - 1}) x_1 \partial_1 + \{-A \pm \sqrt{A - 1} \pm (A - 1)^{3/2}\} x_3 \partial_3.$$

This is gradient when and only when either  $A = 2$  with the positive choice of square root (the soliton  $H^3$ ), or  $A = 1$  (the soliton  $H^2 \times \mathbb{R}$ ).

When the integrability coefficient  $a$  of the horizontal distribution is non-zero, examples are harder to find, but we are able to construct the following family of examples.

**Theorem 3.5.1.** *There is a 1-parameter family of expanding soliton metric on  $\mathbb{R}^3$ , given explicitly by*

$$g = \text{d}x_1^2 + \text{d}x_2^2 + \frac{2}{3} A (x_1 \text{d}x_2 + \text{d}x_3)^2$$

with parameter  $A = \frac{3}{2\rho^2}$ , which includes the geometry Nil ( $A = 3/2$ ) as a special case. The soliton flow is given by

$$E = -\frac{x_1}{\rho^2} \partial_1 - \frac{x_2}{\rho^2} \partial_2 - 2\frac{x_1 x_2}{\rho^2} \partial_3.$$

**Chapter 4 :** Harmonic morphisms, mappings which pull back local harmonic functions to harmonic functions, have played an important role in understanding the relation between the geometry and topology of Riemannian manifolds [12]. Various attempts have been made to adapt the notion to other situations : p-harmonic morphisms [41], biharmonic morphisms [39]. None of these have been satisfactory due to the complexity of the characterizing equations and the lack of examples. In this chapter we introduce a new notion of *generalized harmonic morphism*, which, as the name suggests, contain the harmonic morphisms as a special case. These mappings have an elegant characterization which enables the construction of explicit examples, as well as impacting on the theory of biharmonic mappings.

We recall that a map  $\varphi : (M^m, g) \rightarrow (N^n, h)$  is *biharmonic* if it is critical for the bi-energy functional

$$\int_M |\tau_\varphi|^2 dv_g$$

where  $\tau_\varphi$  is the tension field associated to  $\varphi$ . The Euler-Lagrange equations are a 4th order elliptic system which, in the case  $\varphi$  is a real-valued function, reduces to the bi-Laplace equation  $\Delta^2 \varphi = 0$ . Any harmonic mapping is trivially biharmonic.

A mapping  $\varphi : (M^m, g) \rightarrow (N^n, h)$  between Riemannian manifolds is called a *generalized harmonic morphism* if, for every function  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  harmonic on an open subset  $U \subset N$  with  $\varphi^{-1}(U) = V$  non-empty, the composition  $f \circ \varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$  is biharmonic.

Since any harmonic function is biharmonic, we see that a harmonic morphism is a generalized harmonic morphism. Equally, if a mapping pulls back local biharmonic functions to biharmonic functions, it will also pull back local harmonic functions to biharmonic functions, so a biharmonic morphism is also a generalized harmonic morphism. As we shall further see, the class of mappings is very natural due to their simple characterization when they take values in the complex plane : *A mapping  $\varphi : (M^m, g) \rightarrow \mathbb{C}$  is a generalized harmonic morphism if and only if  $\varphi$  is semi-conformal with both  $\varphi$  and  $\varphi^2$  biharmonic* (see below). This can be compared to the case of complex valued-harmonic morphisms which are characterized as mappings with both  $\varphi$  and  $\varphi^2$  harmonic (in the latter case the two conditions imply semi-conformality). More generally, we prove

**Theorem 4.1.3.** *Let  $\varphi : (M^m, g) \rightarrow \mathbb{R}^n$  be a mapping from a Riemannian manifold into Euclidean space endowed with its canonical metric. Set  $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^n)$ . Then the following statements are equivalent :*

- (i)  $\varphi$  is a generalized harmonic morphism ;
- (ii)  $\varphi$  is a semi-conformal biharmonic mapping with  $(\varphi^\alpha + i\varphi^\beta)^2 : M^m \rightarrow \mathbb{C}$  biharmonic for all  $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n, \alpha \neq \beta$  ;

(iii) there exists a function  $\lambda : M^m \rightarrow [0, \infty)$  such that

$$\begin{aligned} \Delta^2(f \circ \varphi) &= \lambda^4(\Delta^2 f) \circ \varphi + 2\{\lambda^2 \Delta \varphi^\alpha + g(\nabla \lambda^2, \nabla \varphi^\alpha)\}(\partial_\alpha \Delta f) \circ \varphi \\ &\quad + \{\Delta \lambda^2 + 2g(\nabla \varphi^\beta, \nabla \Delta \varphi^\beta) + (\Delta \varphi^\beta)^2\}(\Delta f) \circ \varphi \end{aligned}$$

for any  $\beta = 1, 2, \dots, n$ .

An example of a generalized harmonic morphism which is not a harmonic morphism is given by the mapping  $\varphi : \mathbb{R}^4 \setminus \{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0\}$  :

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, x_4).$$

Further examples are given by the following theorem.

**Theorem 4.1.11** *The Riemannian submersion defined by the projection from a warped product*

$$\begin{aligned} \pi : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, dx^2 + dy^2 + e^{2\lambda(x,y)} dz^2) &\rightarrow (\mathbb{R}^2, dx^2 + dy^2) \\ \pi(x, y, z) &= (x, y) \end{aligned}$$

is a generalized harmonic morphism which is not a harmonic morphism if and only if, up to an orthogonal change of coordinates,  $\pi$  restricts to

$$\begin{aligned} \pi : (\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}, dx^2 + dy^2 + Cy^4 dx^2) &\rightarrow (\mathbb{R}_+^2, dx^2 + dy^2) \\ \pi(x, y, z) &= (x, y) \end{aligned}$$

where  $C$  is an arbitrary positive constant and  $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ .

We go on to show how to construct new generalized harmonic morphisms from old.

**Corollary 4.2.1.** (i) *Let  $\varphi : (M^m, g) \rightarrow (N^n, h)$  be a generalized harmonic morphism and let  $\psi : (N^n, h) \rightarrow (Q^l, k)$  be a harmonic morphism. Then the composition  $\psi \circ \varphi : (M^m, g) \rightarrow (Q^l, k)$  is a generalized harmonic morphism.*

(ii) *Let  $\varphi : (M^m, g) \rightarrow (N^n, h)$  be a generalized harmonic morphism and let  $\psi : (N^n, h) \rightarrow (Q^l, k)$  be a biharmonic morphism. Then the composition  $\psi \circ \varphi : (M^m, g) \rightarrow (Q^l, k)$  is a generalized harmonic morphism.*

The direct sum of two mappings  $\psi : (M^m, g) \rightarrow \mathbb{R}^k$  and  $\varphi : (N^n, h) \rightarrow \mathbb{R}^k$  is defined by

$$\begin{aligned} \psi \oplus \varphi : (M^m \times N^n, g \times h) &\rightarrow \mathbb{R}^k \\ (x, y) &\mapsto \psi(x) + \varphi(y). \end{aligned}$$

**Proposition 4.2.7.** *Let  $\psi : (M^m, g) \rightarrow \mathbb{R}^k$  be a generalized harmonic morphism and let  $\varphi : (N^n, h) \rightarrow \mathbb{R}^k$  be a harmonic morphism. Then their direct sum  $\psi \oplus \varphi : (M^m \times N^n, g \times h) \rightarrow \mathbb{R}^k$  is a generalized harmonic morphism. In the case when  $\psi$  is proper biharmonic*

*SUMMARY IN ENGLISH OF THE KEY RESULTS OF THIS THESIS*

---

*(i.e. non-harmonic), then  $\psi \oplus \varphi$  is proper biharmonic.*

These two constructions enable us to find a number of explicit examples which in particular yield proper biharmonic maps.

*SUMMARY IN ENGLISH OF THE KEY RESULTS OF THIS THESIS*

---

# Table des matières

<b>Summary in English of the key results of this thesis</b>	<b>1</b>
<b>Introduction</b>	<b>13</b>
<b>1 Variétés riemanniennes et géométrie conforme</b>	<b>21</b>
1.1 Variétés riemanniennes et courbure de Ricci	22
1.1.1 Métrique et Connexion de Levi-Civita	22
1.1.2 Courbure	23
1.2 Champs de Killing	25
1.2.1 Définition	25
1.2.2 Champs de Killing sur la sphère $S^2$	26
1.3 Les géométries en dimension 3	27
1.3.1 Définition des géométries	28
1.3.2 Classification des géométries en dimensions 3	28
1.4 Structure conforme	30
1.4.1 Classe d'équivalence d'une métrique	30
1.4.2 Projection stéréographique	32
1.4.3 Transformation de Möbius	33
1.5 Applications semi-conformes et fonctions conjuguées	34
1.5.1 Applications semi-conformes	34
1.5.2 Applications semi-conformes définies sur les géométries en dimension 3	38
1.5.3 Fonctions conjuguées	39
1.5.4 Lien avec les feuilletages conformes	41
1.5.5 Invariants conformes	41
1.6 Caractérisation des fonctions conjuguées en dimension 3	44
1.6.1 Condition nécessaire	44
1.6.2 Normalisation	45
1.6.3 Intégrabilité des directions conjuguées (Conditions suffisantes)	46

TABLE DES MATIÈRES

---

1.7	Applications harmoniques, biharmoniques et morphismes harmoniques . . .	47
1.7.1	Applications harmoniques entre variétés riemanniennes . . . . .	47
1.7.2	Morphismes harmoniques . . . . .	49
1.7.3	Applications biharmoniques et morphismes biharmoniques . . . . .	50
<b>2</b>	<b>Une classe de fonctions conjuguées réelles analytiques</b>	<b>53</b>
2.1	Un ansatz pour obtenir des solutions . . . . .	54
2.1.1	La méthode suivie en général . . . . .	54
2.1.2	Application du théorème de Cauchy-Kowalewski (Existence des solutions) . . . . .	56
2.2	Caractérisation des solutions . . . . .	57
2.2.1	Les paramètres caractérisant les solutions . . . . .	57
2.3	Solutions particulières avec un seul paramètre . . . . .	60
2.3.1	Explicitation de la solution . . . . .	60
2.3.2	Reformulation de l’expression de la solution . . . . .	66
2.4	Solutions particulières avec deux paramètres . . . . .	68
2.4.1	Explicitation de la solution . . . . .	68
2.4.2	Généralisation de l’application de Hopf . . . . .	72
<b>3</b>	<b>Equivalence biconforme entre les solitons de Ricci en dimension 3</b>	<b>73</b>
3.1	Equations de structure de Cartan pour une submersion semi-conforme en dimension 3 . . . . .	74
3.1.1	Premiers calculs . . . . .	74
3.1.2	Les équations de structure . . . . .	77
3.2	Solitons de Ricci . . . . .	82
3.2.1	Courbure de Ricci . . . . .	83
3.2.2	Cas où la surface d’arrivée est de courbure arbitraire : une forme invariante pour la courbure de Ricci . . . . .	84
3.3	Déformations biconformes . . . . .	88
3.3.1	L’effet d’une déformation biconforme sur la courbure de Ricci . . .	88
3.4	Cas où la distribution horizontale est intégrable . . . . .	90
3.4.1	Le soliton de Bryant . . . . .	90
3.4.2	Solitons de type “warped-product” . . . . .	91
3.4.3	Solitons de type hyperbolique . . . . .	95
3.5	Cas où la distribution horizontale est non-intégrable . . . . .	100
3.5.1	Le soliton Nil . . . . .	101
3.5.2	Déformation de Nil . . . . .	104

TABLE DES MATIÈRES

---

3.5.3	Une classe de métriques n'admettant pas des structures de soliton locales . . . . .	109
<b>4</b>	<b>Morphismes harmoniques généralisés et applications semi-conformes biharmoniques</b>	<b>115</b>
4.1	Caractérisation des morphismes harmoniques généralisés à valeurs dans l'espace euclidien . . . . .	116
4.2	Constructions et exemples de morphismes harmoniques généralisés . . . . .	127
4.3	Applications pour lesquelles le pull-back d'une fonction biharmonique est une fonction harmonique . . . . .	130
<b>5</b>	<b>Perspectives d'avenir</b>	<b>133</b>
5.1	Les fonctions conjuguées en dimension 4 . . . . .	133
5.2	Les solitons de Ricci en dimension 4 . . . . .	135
5.3	Caractérisation des morphismes harmoniques généralisés à valeurs complexes . . . . .	136

## TABLE DES MATIÈRES

---

# Introduction

Cette thèse est consacrée à l'étude des applications semi-conformes (applications définies par des fonctions conjuguées) et à l'étude de leur influence dans la résolution de certaines équations géométriques fondamentales, notamment l'équation d'un soliton de Ricci et les équations de biharmonicité entre variétés riemanniennes.

On va montrer comment trouver toutes les solutions réelles analytiques d'un ansatz qui produit des fonctions conjuguées en dimension 3, ce qui nous amène à la construction de nouveaux exemples importants. On va voir comment les équations d'un soliton de Ricci se modifient sous l'effet d'une déformation biconforme par rapport à une application semi-conforme et par suite, on va construire de nouveaux exemples de solitons complets en démontrant en plus leur unicité. On va généraliser la notion de morphisme harmonique de manière naturelle afin de donner des méthodes de constructions d'applications biharmoniques à partir d'applications harmoniques.

Le texte présenté est constitué de quatre chapitres. Dans le premier chapitre on donne les notions de base nécessaires pour la compréhension du reste du texte. On caractérise les champs de Killing (champs dont le flot est un flot d'isométries) sur la sphère  $S^2$  en termes de champs holomorphes (Proposition 1.2.7), ce qui sera utile pour le Chapitre 3. On présente ici les applications semi-conformes qui constituent une base essentielle dans toutes les parties de cette thèse. Il s'agit d'une application  $\varphi : M^m \rightarrow N^n$  entre deux variétés riemanniennes telle que la dérivée  $d\varphi_x$  en un point  $x$  où  $d\varphi_x \neq 0$ , est conforme et surjective sur le complément de  $\ker d\varphi_x$  (l'espace horizontal). Dans le cas d'une application de  $\mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{C}$ , cette condition équivaut à l'équation

$$\sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^2 = 0, \quad (1)$$

où  $(x_1, \dots, x_m)$  sont les coordonnées canoniques dans  $\mathbb{R}^m$ .

Lorsque  $n = 3$ , suivant le travail de P. Nurowski [43], il a été démontré par P. Baird et M. G. Eastwood en [6], qu'une solution de l'équation (1) se prolonge localement en une structure hermitienne intégrable sur un domaine de  $\mathbb{R}^4$ . On ne sait pas si toute

variété riemannienne de dimension 3 supporte une application semi-conforme dans une surface, même localement. Pour aborder le problème d'existence des applications semi-conformes dans une surface, on exploite la notion de *fonctions conjuguées* ; deux fonctions  $f, g : (M, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$  sont dites conjuguées si en chaque point de la variété, elles ont des gradients orthogonaux et de même longueur :

$$\|\text{grad } f(x)\| = \|\text{grad } g(x)\| \quad \text{et} \quad \delta(\text{grad } f(x), \text{grad } g(x)) = 0 \quad \forall x \in M.$$

Il est clair que  $f$  et  $g$  sont conjuguées si et seulement si  $\varphi = f + ig : M \rightarrow \mathbb{C}$  est semi-conforme. On peut alors se demander s'il existe des conditions différentielles sur  $f$  afin qu'elle admette une fonction conjuguée. Lorsque  $\dim M = 2$ ,  $f$  admet une fonction conjuguée si et seulement si  $f$  est harmonique car dans ce cas, (1) s'écrit sous la forme

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + i \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - i \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right) = 0,$$

ce qui signifie que les solutions sont les applications holomorphes ou anti-holomorphes. Dans [7], P. Baird et M.G. Eastwood ont montré qu'en dimension 3,  $f$  admet une conjuguée si et seulement si  $f$  satisfait une inégalité différentielle d'ordre 2 et trois équations différentielles d'ordre 3 (toutes conformément invariantes). La complexité de ces équations révèle la difficulté de trouver des solutions.

On met en évidence les transformations conformes. Ces transformations jouent un rôle fondamental dans l'étude de la géométrie et la topologie des surfaces. D'une part, toute surface riemannienne est localement conformément équivalente à un domaine du plan euclidien ; ceci est dû à la construction des coordonnées isothermes locales. D'autre part, le théorème d'uniformisation affirme que toute surface riemannienne est conformément équivalente à une surface de courbure constante. En particulier, toute surface riemannienne fermée est conformément équivalente au quotient par un groupe discret d'isométries de l'une des trois géométries : la sphère  $S^2$ , le plan complexe  $\mathbb{C}$  ou le plan hyperbolique  $H^2$ . En dimension 3, la situation est plus compliquée.

On présente dans ce chapitre aussi les morphismes harmoniques qui correspondent à des applications entre variétés riemanniennes qui préservent les solutions de l'équation de Laplace (ou qui préservent le mouvement Brownien [13]), dans le sens que le pull-back d'une fonction harmonique (définie localement) par de telles applications, est aussi une fonction harmonique. Les morphismes harmoniques ont été introduits par B. Fuglede et T. Ishihara indépendamment ; tout morphisme harmonique continu est lisse et caractérisé par la propriété qu'il est à la fois semi-conforme et harmonique [28, 33]. Les morphismes biharmoniques ont été introduits et étudiés dans [44], [39] et [40]. Ces applications préservent les solutions de l'équation de bi-Laplace, dans le sens que le pull-back par un morphisme biharmonique d'une fonction biharmonique définie localement,

est une fonction biharmonique. Dans [40], les auteurs caractérisent les morphismes biharmoniques comme des applications semi-conformes, biharmoniques, 4-harmoniques et satisfaisant une équation supplémentaire. On remarque que les morphismes biharmoniques correspondent à une classe d'applications semi-conformes biharmoniques très restreinte.

Dans le Chapitre 2, on étudie un ansatz qui permet de construire des applications semi-conformes définies sur des domaines de  $\mathbb{R}^3$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ . Plus précisément, on caractérise les solutions réelles analytiques qui se produisent de cet ansatz. Bien qu'on donne dans [7] des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence des applications semi-conformes définies sur des domaines ouverts de  $\mathbb{R}^3$ , il est difficile d'exhiber des exemples à partir de ces équations.

Soient  $(x, y, z)$  les coordonnées canoniques sur  $\mathbb{R}^3$  et soit  $u = \frac{x^2+y^2}{2}$ . L'ansatz consiste à considérer une application  $\varphi = f + ig$  de la forme  $\varphi(x, y, z) = (x + iy)u^{-q}\psi(u, z)$  où  $q$  est un entier naturel et  $\psi$  est une fonction à valeurs complexes, réelle-analytique dans un voisinage de  $(u, z) = (0, 0)$ . D'après (1),  $\varphi$  est semi-conforme (et donc  $f$  et  $g$  sont conjuguées) si et seulement si

$$q(q-1)\psi^2 + u(1-2q)\psi\psi_u + u^2\psi_u^2 + \frac{1}{2}u\psi_z^2 = 0.$$

En supposant que  $\psi(0, 0) \neq 0$  et en substituant  $u$  par 0 dans l'équation ci-dessus, on trouve  $q = 0$  ou 1. Par suite notre problème se réduit à trouver des solutions pour les deux équations

$$\psi\psi_u + u\psi_u^2 + \frac{1}{2}\psi_z^2 = 0 \quad (q = 0) \quad (2)$$

$$-\psi\psi_u + u\psi_u^2 + \frac{1}{2}\psi_z^2 = 0 \quad (q = 1) \quad (3)$$

Une solution particulière de (3) est l'application de Hopf  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ; elle est donnée par  $\psi(u, z) = 1 - 2u - z^2 - 2iz$ . Cette application est obtenue en pré-composant la fibration de Hopf  $S^3 \rightarrow S^2$  avec l'inverse de la projection stéréographique  $\mathbb{R}^3 \rightarrow S^3$  et post-composant avec la projection stéréographique  $S^2 \setminus \{\text{pôle nord}\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

On démontre que toute solution réelle-analytique  $\psi$  de ces deux équations, telle que  $\psi_{0,0} \neq 0$  et  $\psi_{0,1} \neq 0$ , est uniquement déterminée par les dérivées  $\psi_{0,\ell}$  pour  $\ell = 0, 1, 2, \dots$  (Théorème 2.2.3). Trouver des solutions explicites de (2) et (3) reste un problème difficile. Mais en surmontant des problèmes algébriques, on trouve des séries entières, solutions explicites correspondant aux données

$$\psi_z(\vec{0}) = c, \text{ et } \frac{\partial^\ell \psi}{\partial z^\ell}(\vec{0}) = 0 \text{ pour } \ell \geq 2$$

et

$$\psi_z(\vec{0}) = c_1, \psi_{zz}(\vec{0}) = c_2 \text{ et } \frac{\partial^\ell \psi}{\partial z^\ell}(\vec{0}) = 0 \text{ pour } \ell \geq 3 \quad (4)$$

avec  $c$ ,  $c_1$  et  $c_2$  des constantes complexes arbitraires (Théorèmes 2.3.1 et 2.4.1). On précise aussi le domaine de convergence des séries qui en résultent. En effet, on peut dès le début voir avec le théorème de Cauchy-Kowalewski l'existence et l'unicité des solutions réelles analytiques associées aux EDPs (2) et (3). Dans certains cas, on peut exprimer les séries entières obtenues sous forme fermée.

Les solutions obtenues présentent des propriétés importantes. En effet, on a d'après [1], que toute application semi-conforme polynomiale est harmonique et d'après [11], que tout morphisme harmonique défini sur  $\mathbb{R}^3$  entièrement à valeurs dans une surface n'est autre que la projection orthogonale suivie d'une application (faiblement) conforme. Dans §2.3 on construit à l'aide de l'ansatz des applications semi-conformes réelles analytiques définies sur  $\mathbb{R}^3$  tout entier à valeurs dans une surface, qui ne sont pas harmoniques. Ce sont des exemples significatifs puisqu'ils ne s'agissent pas des simples projections. Dans §2.4, on construit une famille de solutions réelles analytiques paramétrée par deux constantes arbitraires dont l'application de Hopf est un cas particulier.

Dans le troisième chapitre on aborde les solitons de Ricci. La conjecture de géométrisation de Thurston (1976) affirme que toute variété compacte de dimension 3 est composée des morceaux (séparés par des sphères et des tores) tels que chaque morceau est difféomorphe au quotient par un groupe discret d'isométries à l'une des huit géométries :  $S^3, \mathbb{R}^3, H^3, S^2 \times \mathbb{R}, H^2 \times \mathbb{R}, \text{Nil}, \text{Sol}, \widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$  [52]. Suite au programme de Hamilton, développé pendant les années 80 et 90, la résolution de cette conjecture a été achevée par G. Perelman en 2004 [49, 50, 51]; son travail est l'un des travaux les plus remarquables dans le domaine de la géométrie. Ce qui constitue l'outil de base dans cette résolution est le flot de Ricci. Lancé par R. Hamilton au début des années 1980 [31], le flot de Ricci est l'équation d'évolution de la métrique

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = -2\text{Ric}(g(t)), \quad g(0) = g_0,$$

de donnée initiale  $g_0$ . Cette équation présente des difficultés techniques considérables pour comprendre le comportement des solutions. Lorsque le flot évolue, la métrique s'homogénéise, mais en temps fini, des singularités peuvent se former dans le sens que la norme de la courbure riemannienne devient infinie en certains points. Autour de ces points, en dilatant la métrique, on observe l'apparition d'un soliton.

Un *soliton de Ricci* est un point fixe du flot de Ricci à une dilatation et à un difféomorphisme près. Plus précisément,  $g(t)$  est dite soliton de Ricci s'il existe une famille de fonctions lisses  $\{c(t)\}_{0 \leq t \leq T}$  et une famille de difféomorphismes de la variété  $\{\psi_t\}_{0 \leq t \leq T}$  telles que

$$g(t) = c(t)\psi_t^*(g_0), \tag{5}$$

avec  $c(0) = 1$  et  $\psi_0 = \text{id}$ . On peut voir facilement que cette condition est équivalente à dire que la métrique initiale  $g_0$  satisfait l'équation

$$\text{Ric}(g_0) + \frac{1}{2}\mathcal{L}_E g_0 + A g_0 = 0, \quad (6)$$

pour un certain champ de vecteurs  $E$ , dit flot de soliton, et une certaine constante  $A$ . On note que le flot de soliton est défini à l'ajout d'un champ de Killing près. Les solitons où se forment les singularités sont de type spécial, dits solitons *gradients*. Ils sont tels que le flot de soliton  $E$  est le gradient d'une certaine fonction. D'autre part, dans certaines situations spéciales, les solutions immortelles (qui existent pour tout temps futur) du flot de Ricci convergent dans le sens de la convergence pointée de Hausdorff-Gromov-Hamilton vers un soliton non-gradient [41] et [14]. On dit que le soliton est *contractant*, *stationnaire* ou *dilatant* si la constante  $A$  est  $< 0$ ,  $= 0$ , ou  $> 0$  respectivement.

Il est clair que toute variété d'Einstein est un soliton. D'autre part, le seul soliton compact en dimension 3 est la sphère euclidienne  $S^3$ . On s'intéresse aux solitons complets, cependant les métriques solitons peuvent ne pas exister même localement. Par exemple, la géométrie  $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$  n'admet aucune structure de soliton (même localement) [5]. T. Ivey a étudié les équations de solitons d'un point de vue du système différentiel extérieur [35], mais cette méthode n'est pas pratique pour pouvoir construire des exemples explicites.

D'après un résultat de P. Baird et R. Pantilie [10], toute variété de dimension 3 analytique admet localement une application semi-conforme. D'autre part, d'après un résultat de T. Ivey, toute structure de soliton est analytique [35] donc, en principe, tout soliton de Ricci de dimension 3 peut être décrit au moins localement en termes d'une application semi-conforme. Une telle application fournit une décomposition orthogonale de l'espace tangent de la variété  $M$ ,  $TM = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}$  et de la métrique  $g = g^{\mathcal{H}} + g^{\mathcal{V}}$ . Une transformation *biconforme* sur  $M$  change  $g$  en la métrique  $\tilde{g} = \sigma^{-2}g^{\mathcal{H}} + \rho^{-2}g^{\mathcal{V}}$ , où  $\sigma$  et  $\rho$  sont des fonctions positives lisses sur  $M$ .

Une utilisation remarquable de ces déformations a été adaptée par L. Danielo [22, 23] pour construire des métriques d'Einstein en dimension 4. Aussi dans [5], P. Baird et L. Danielo donnent une classification complète des structures de soliton sur toute les géométries de dimension 3. L'idée clé dans ces articles est d'exprimer la courbure de Ricci en fonction d'objets géométriques associés à l'application semi-conforme définie sur la variété (la dilatation, la courbure moyenne des fibres, la fonction d'intégrabilité associée à la distribution horizontale). Notre approche dans ce chapitre est d'étudier les solitons de dimension 3 suite à des déformations biconformes.

Notre perspective est que les applications biconformes devraient jouer un rôle important dans la compréhension des variétés de dimension 3. Dans ce travail, on applique cette approche aux solitons de Ricci. Suivant le flot de Ricci, toute métrique de soliton évolue en des métriques du type soliton. Pourtant, ce n'est que dans des circonstances

exceptionnelles que ce flot préserve la classe biconforme de la métrique (par rapport à une application semi-conforme fixe). Un premier objectif est de comprendre la rigidité de la métrique de soliton dans la classe biconforme. Plus précisément, on étudie si une métrique de soliton peut être déformée continument en d'autres métriques de soliton par une déformation biconforme de la métrique originale. Notre deuxième objectif principal est de construire par déformations biconformes de nouveaux exemples de métriques de soliton à partir d'une application semi-conforme et d'étudier leur unicité (par rapport à une métrique fixe).

On commence par étudier les équations de structure d'une submersion semi-conforme définie de  $M^3$  dans  $N^2$ . Ceci permet d'exprimer le tenseur de Ricci en termes de l'application (§3.1.2). La formule obtenue est la même que celle établie dans [12] et [5]. Cependant notre méthode est spécifique aux applications définies sur une variété de dimension 3 à valeurs dans une surface et donne une preuve élémentaire de la formule de la courbure de Ricci citée ci-dessus. R. Bryant a exploité les équations de structure sur une variété de courbure sectionnelle constante de dimension  $\geq 4$  lorsque les fibres sont de dimension 1, avec la condition supplémentaire que l'application soit harmonique (et donc, un morphisme harmonique) [17]. Ensuite, on en déduit les équations de soliton qui en résultent suite à une déformation biconforme de la métrique. L'un des termes clés est le flot de soliton  $E$ . Dans [5], plusieurs hypothèses ont été posées sur  $E$ , plus précisément les auteurs ont supposé que la composante horizontale de  $E$  est gradient. Dans §3.3.1, on développe les outils nécessaires pour traiter un flot de soliton quelconque. Cette approche est importante pour montrer l'unicité de la structure de soliton, un aspect central dans ce travail.

On distingue les deux cas : solitons admettant une application semi-conforme dans une surface avec distribution horizontale intégrable et ceux avec distribution horizontale non-intégrable. Dans §3.4, on montre que dans le premier cas, tous les exemples explicites des solitons connus à ce jour sont obtenus par une transformation biconforme de la projection orthogonale canonique  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . On commence par le soliton de Bryant puis plus généralement, on étudie les solitons de type "warped-product". L'un des résultats les plus surprenants est obtenu dans le Théorème 3.4.1. On y démontre qu'il existe une famille à un paramètre de solitons dilatants qui s'intercale entre l'espace hyperbolique  $H^3$ , le produit  $H^2 \times \mathbb{R}$  et la géométrie Sol. Ce qui signifie que, en ce qui concerne notre premier objectif, ces géométries sont continument déformées à travers des solitons, où ces déformations ne sont pas de type (5).

L'avantage de la méthode suivie, est qu'elle peut établir l'unicité de la structure de soliton (le flot  $E$  et la constante  $A$ ) dans la plupart des cas. Le seul cas connu de structure de soliton non-unique sur une variété riemannienne est la famille de solitons de Gauss sur l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ . Notre étude de l'unicité permet de mettre en relief

dans §3.4.2 une question ouverte sur l'unicité de la structure de soliton sur un produit de type général  $\Sigma^2 \times \mathbb{R}$ , où  $\Sigma^2$  est un soliton de dimension 2. Cependant on montre que les cas particuliers  $S^2 \times \mathbb{R}$  et  $H^2 \times \mathbb{R}$  admettent des structures de soliton uniques.

Le cas des distributions non-intégrables est difficile à aborder. On étudie notamment la géométrie Nil. On trouve sur Nil une famille à un paramètre de déformations non-triviales des métriques solitons (Théorème 3.5.1). Finalement, on montre la non-existence de la structure de soliton sur la géométrie  $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ , déjà démontrée dans [5], mais on souligne que notre démonstration est beaucoup plus efficace que celle donnée dans [5].

Dans le quatrième chapitre on introduit la notion de *morphisme harmonique généralisé*. Un morphisme harmonique généralisé est défini comme une application entre variétés riemanniennes pour laquelle le pull-back d'une fonction harmonique définie localement est une fonction biharmonique.

À la fin des années 1970, B. Fuglede et T. Ishihara ont écrit les premiers articles sur les morphismes harmoniques entre variétés riemanniennes [28, 33]. Les morphismes harmoniques ont occupé une place importante en géométrie et en analyse géométrique depuis les années 1990, particulièrement dans la façon dont ils relient la géométrie et la topologie des variétés. Plusieurs généralisations ont été proposées : morphismes  $p$ -harmoniques, morphismes biharmoniques... Comme déjà indiqué, les morphismes biharmoniques sont difficiles à aborder à cause de la complexité de leurs équations et on note aussi qu'un morphisme harmonique n'est pas nécessairement un morphisme biharmonique. D'autre part, récemment, les applications biharmoniques ont pris une place centrale en analyse géométrique. D'un point de vue appliqué, elles sont intéressantes du fait de leur relation avec les corps élastiques. Pourtant les équations d'Euler-Lagrange sont un système d'équations elliptiques d'ordre 4, difficile à résoudre et ne satisfaisant aucune théorie générale adéquate. Des exemples explicites d'applications biharmoniques non-harmoniques sont rares.

Dans ce chapitre, on montre que les morphismes harmoniques généralisés sont une généralisation naturelle des morphismes harmoniques ; on verra aussi que ces applications portent sur l'étude des applications biharmoniques. D'après la définition d'un morphisme harmonique généralisé, on voit que cette classe contient les morphismes harmoniques ainsi que les morphismes biharmoniques . Notons que la notion de morphisme harmonique revient à Jacobi [34] qui, pour trouver des nouvelles solutions de l'équation de Laplace dans  $\mathbb{R}^3$ , a abordé la question suivante : Quelles conditions une application  $\varphi$  doit satisfaire afin que la composée  $f \circ \varphi$  soit harmonique pour toute application holomorphe  $f : V \rightarrow \mathbb{C}$  définie sur un ouvert  $V$  de  $\mathbb{C}$ ? La réponse à cette question est que  $\varphi$  doit être à la fois harmonique et vérifier l'équation (1) avec  $m = 3$ . Cela est équivalent

à dire qu'une application lisse  $\varphi$  définie sur un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  à valeurs complexes est un morphisme harmonique si et seulement si  $\varphi$  et  $\varphi^2$  sont harmoniques.

De manière analogue, on montre dans ce chapitre qu'une application lisse  $\varphi$  définie sur un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  à valeurs complexes est un morphisme harmonique généralisé si et seulement si  $\varphi$  est semi-conforme et les applications  $\varphi$  et  $\varphi^2$  sont biharmoniques. Plus généralement, on démontre dans le Théorème 4.1.3, que si  $\varphi$  est définie d'une variété riemannienne  $M^m$  à valeurs dans l'espace euclidien de dimension  $n$ , alors  $\varphi$  est un morphisme harmonique généralisé si et seulement si  $\varphi$  est une application semi-conforme biharmonique et  $(\varphi^\alpha + i\varphi^\beta)^2 : (M^m, g) \rightarrow \mathbb{C}$  est aussi biharmonique pour tous  $\alpha \neq \beta = 1, 2, \dots, n$ . On présente des exemples explicites de morphismes harmoniques généralisés et on montre que le concept d'un morphisme harmonique généralisé à valeurs dans une surface de Riemann est bien défini (Remarque 4.2.2).

Une classification complète des morphismes harmoniques généralisés correspondant à des projections d'un espace de type "warped-product", est donnée dans le Théorème 4.1.11. Cette classification permet l'obtention d'une infinité d'exemples des submersions riemanniennes biharmoniques et non-harmoniques. Ensuite on présente deux méthodes de constructions qui permettent d'obtenir de nouveaux morphismes harmoniques généralisés à partir d'un morphisme harmonique généralisé initial. Une méthode consiste à composer le morphisme harmonique généralisé donné avec un morphisme harmonique ou biharmonique (Corollaire 4.2.1), l'autre consiste à prendre la somme directe avec un morphisme harmonique (Proposition 4.2.7). Par suite plusieurs exemples de morphismes harmoniques généralisés qui ne sont pas des morphismes harmoniques sont construits. Notre étude montre que les morphismes harmoniques généralisés sont non seulement une généralisation naturelle des morphismes harmoniques, mais aussi que cette classe d'applications propose des méthodes efficaces de construction d'une infinité d'applications semi-conformes biharmoniques, non-harmoniques (Théorème 4.1.11 et Remarque 4.1.12).

# Chapitre 1

## Variétés riemanniennes et géométrie conforme

Dans ce chapitre on donne quelques notions de base de la géométrie riemannienne, on étudie notamment la courbure de Ricci et les champs de Killing sur la sphère  $S^2$ , ce qui sera utile pour le Chapitre 3. Après on passe à introduire les applications semi-conformes (ou bien horizontalement conforme) qui constituent la base essentielle de tout le travail dans cette thèse.

La notion de *fonction conjuguée* est une généralisation aux dimensions plus grandes ou égales à 3 des applications holomorphes ou anti-holomorphes dans le plan. On présente dans ce chapitre le sujet qui a été abordé par P. Baird et M. Eastwood [7], qui consiste à trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur une fonction donnée  $f$  définie sur un ouvert de l'espace euclidien de dimension 3 afin qu'elle admette une fonction conjuguée. Il s'agit d'une inégalité différentielle d'ordre 2 et un système d'équations d'ordre 3, pour lesquels le problème de trouver des solutions paraît extrêmement difficile. On montre aussi la relation entre les applications semi-conformes et les fonctions conjuguées. Ceci constitue une introduction et une motivation pour le sujet abordé dans le Chapitre 2.

On présente aussi les géométries en dimension 3 (les 8 géométries de Thurston), qui naturellement, supportent des applications semi-conformes à valeurs dans une surface, (ce fait permet de trouver la structure de soliton sur ces géométries, on exploitera ce sujet dans le Chapitre 3). Finalement, on définit les morphismes harmoniques et les applications biharmoniques, qu'on abordera plus tard dans le Chapitre 4.

## 1.1 Variétés riemanniennes et courbure de Ricci

### 1.1.1 Métrique et Connexion de Levi-Civita

Une variété riemannienne est une variété différentielle ayant une structure supplémentaire permettant de définir la longueur d'un chemin entre deux points de la variété. Dans cette section  $M$  désigne toujours une variété lisse de dimension  $m$ .

**Définition 1.1.1.** *Une métrique riemannienne sur  $M$  est la donnée en chaque point  $x \in M$  d'un produit scalaire  $g_x$  sur l'espace tangent de  $M$  en  $x$ ,  $T_xM$ , qui dépend de façon lisse de  $x$ .*

$$\begin{aligned} g_x & : T_xM \times T_xM \rightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) & \mapsto g_x(v, w), \end{aligned}$$

est une forme bilinéaire symétrique définie positive, et pour tous champs de vecteurs lisses  $E$  et  $F$ , la fonction  $x \mapsto g_x(E_x, F_x)$  est lisse.

Suivant des coordonnées locales  $(x^1, \dots, x^m)$  sur  $M$ , on écrit

$$g = g_{ij} dx^i dx^j,$$

où les fonctions  $g_{ij} = g(\partial/\partial x^i, \partial/\partial x^j)$  sont  $C^\infty$ . On dit que  $M$  munie de la métrique  $g$  est une variété riemannienne ; on la note  $(M, g)$ .

**Définition 1.1.2.** *Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne. La connexion de Levi-Civita sur  $M$  est l'unique connexion  $\nabla$  qui vérifie :*

(i)  $\nabla$  est de torsion nulle :

$$\nabla_E F - \nabla_F E = [E, F], \quad (1.1)$$

(ii)  $\nabla$  est compatible avec  $g$  :

$$E(g(F, G)) = g(\nabla_E F, G) + g(F, \nabla_E G), \quad (1.2)$$

pour tous champs de vecteurs  $E, F$  et  $G \in \Gamma(TM)$ .

La connexion  $\nabla$  est déterminée par la formule

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_E F, G) & = E(g(F, G)) + F(g(G, E)) - G(g(E, F)) - g(E, [F, G]) \\ & \quad + g(F, [G, E]) + g(G, [E, F]), \text{ pour } E, F, G \in \Gamma(TM). \end{aligned} \quad (1.3)$$

La connexion de Levi-Civita s'étend aux 1-formes par la règle de Leibniz, en posant

$$E(\theta(F)) = (\nabla_E \theta)(F) + \theta(\nabla_E F). \quad (1.4)$$

## 1.1. VARIÉTÉS RIEMANNIENNES ET COURBURE DE RICCI

---

De même, on peut étendre  $\nabla$  aux tenseurs de type  $(p, q)$ , (tenseurs  $p$ -covariants,  $q$ -contravariants). Suivant des coordonnées locales  $(x^1, \dots, x^m)$ , les symboles de Christoffel  $\Gamma_{ij}^k$  sont définis par :

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}. \quad (1.5)$$

Alors d'après (1.3),

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left( \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right), \quad (1.6)$$

pour tous  $i, j$  et  $k \in \{1, \dots, m\}$ .

### 1.1.2 Courbure

Les dérivations usuelles satisfont la règle de Schwarz

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i},$$

où  $f$  est une fonction scalaire. Ceci est faux en général pour la connexion de Levi-Civita  $\nabla$  (même pour une connexion quelconque) :

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \alpha \neq \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \alpha$$

où  $\alpha$  est un tenseur. Le tenseur de courbure est l'objet qui mesure ce défaut de commutativité.

**Définition 1.1.3.** *Le tenseur de courbure riemannienne de  $(M, g)$  est le tenseur 3-covariant, 1-contravariant  $R = R^M$  défini par :*

$$R(E, F)G = \nabla_E \nabla_F G - \nabla_F \nabla_E G - \nabla_{[E, F]} G, \quad (1.7)$$

pour  $E, F, G \in \Gamma(TM)$ .

Suivant des coordonnées locales  $(x^1, \dots, x^m)$ , en notant  $R_{ijk}^l$  la  $l$ -ième composante de  $R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \frac{\partial}{\partial x^k}$ , les composantes du tenseur de courbure sont données par

$$R_{ijk}^l = \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^j} + \Gamma_{jk}^n \Gamma_{in}^l - \Gamma_{ik}^n \Gamma_{jn}^l.$$

Il est clair que  $R(E, F) = -R(F, E)$  (et que  $R_{ijk}^l = -R_{jik}^l$ ).

Par contraction avec la métrique, on peut transformer ce tenseur qui est de type  $(3, 1)$  en un tenseur de type  $(4, 0)$  que l'on notera aussi  $R$  :

$$R(E, F, G, H) = g(R(E, F)G, H), \quad (1.8)$$

## 1.1. VARIÉTÉS RIEMANNIENNES ET COURBURE DE RICCI

---

pour  $E, F, G \in \Gamma(TM)$ . Suivant des coordonnées locales  $(x^1, \dots, x^m)$ , les composantes de  $R$ , comme un tenseur de type  $(4, 0)$ , sont

$$R_{ijkl} := g \left( R \left( \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_l} \right) = g_{lm} R_{ijk}^m$$

Les propriétés algébriques du tenseur de courbure sont résumées dans la proposition suivante.

**Proposition 1.1.4.** *Pour tous  $E, F, G, H \in \Gamma(TM)$ , on a :*

- (i)  $R(E, F, G, H) = -R(F, E, G, H) = -R(E, F, H, G)$ .
- (ii)  $R(E, F, G, H) = R(G, H, E, F)$ .
- (iii)  $R(E, F, G, H) + R(F, G, E, H) + R(G, E, F, H) = 0$ .

**Définition 1.1.5.** *La courbure de Ricci (ou le tenseur de Ricci) de  $(M, g)$  est le champ de tenseur symétrique 2-covariant,  $\text{Ric} = \text{Ric}^M$  défini par :*

$$\text{Ric}(E, F) = \text{Trace } g(R(E, \cdot), \cdot, F) = \sum_{i=1}^m R(E, e_i, e_i, F), \quad (1.9)$$

où  $\{e_i\}_i$  est une base orthonormée et  $E, F \in \Gamma(TM)$ .

L'opérateur de Ricci est le tenseur 1-covariant, 1-contravariant qu'on note aussi  $\text{Ric} = \text{Ric}^M$  donné par :

$$g(\text{Ric}(E), F) = \text{Ric}(E, F) \quad (1.10)$$

Les composantes de la courbure de Ricci sont données par

$$R_{ij} = \text{Ric} \left( \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = R_{kij}^k.$$

Le tenseur de Ricci est symétrique :

$$R_{ij} = g^{lk} R_{kijl} = g^{lk} R_{jlk i} = g^{lk} R_{l j i k} = R_{ji}.$$

**Définition 1.1.6.** *La courbure scalaire de  $(M, g)$  est la fonction  $S = S^M$  définie par*

$$S = \text{Trace}(\text{Ric}) = \sum_{i=1}^m \text{Ric}(e_i, e_i), \quad (1.11)$$

où  $\{e_i\}_i$  est une base orthonormée.

On va voir dans le Chapitre 3 qu'il est pratique de calculer les termes de la courbure de Ricci à partir des équations de structure de Cartan : Soient  $(M, g)$  une variété riemannienne munie d'un repère orthonormé  $\{e_1, \dots, e_m\}$  et  $\{\theta_1, \dots, \theta_m\}$  le repère formé des 1-formes  $\theta_1, \dots, \theta_m$  duales de  $e_1, \dots, e_m$  respectivement. Soit

$$\nabla e_i = \sum_j \omega_{ij} e_j.$$

## 1.2. CHAMPS DE KILLING

---

La matrice  $(\omega_{ij})$  s'appelle la forme de la connexion et les équations de structure prennent la forme :

$$d\theta_i = \sum_j \omega_{ij} \wedge \theta_j \quad (1.12)$$

$$d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \Omega_{ij}. \quad (1.13)$$

où  $\Omega_{ij}(E, F) = g(R(E, F)e_i, e_j)$  pour tous  $E, F \in \Gamma(TM)$

## 1.2 Champs de Killing

### 1.2.1 Définition

La dérivée de Lie est une notion de dérivation différente de la connexion. Soit  $E$  un champ de vecteurs sur une variété  $M$ . On note  $\varphi : I \times M \rightarrow M$ , où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ , le flot associé à  $E$ , c'est à dire la solution de l'équation

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\varphi_t(x) &= E(\varphi_t(x)), \\ \varphi_0(x) &= x. \end{aligned}$$

Pour tout  $t$  dans un intervalle assez petit,  $\varphi_t$  est un difféomorphisme local.

**Définition 1.2.1.** *La dérivée de Lie d'un tenseur  $\alpha$  dans la direction  $E$  est*

$$\mathcal{L}_E \alpha = \frac{d}{dt}(\varphi_{-t}^* \alpha) |_{t=0}$$

où  $\varphi_{-t}^* \alpha$  est le pull-back de  $\alpha$  par le difféomorphisme  $\varphi_{-t}$ .

**Remarque 1.2.2.** (i) *La dérivée de Lie ainsi définie satisfait la règle de Leibniz.*

(ii) *Contrairement à la dérivée covariante,  $\mathcal{L}_E$  n'est pas  $C^\infty$  linéaire par rapport à  $E$  (voir (3.23)).*

**Proposition 1.2.3.** *Soit  $g$  une métrique sur  $M$ . Pour tous champs de vecteurs  $E, F$  et  $G$ , on a*

$$(\mathcal{L}_G g)(E, F) = G(g(E, F)) - g([G, E], F) - g(E, [G, F]).$$

**Définition 1.2.4.** *Soit  $M$  une variété riemannienne munie d'une métrique  $g$ . Un champ de vecteurs  $E$  est un champ de Killing si son flot est un flot d'isométries, ou de manière équivalente si*

$$\mathcal{L}_E g = 0.$$

## 1.2. CHAMPS DE KILLING

---

**Proposition 1.2.5.** *Soit  $E$  un champ de vecteurs sur une variété riemannienne  $(M, g)$ .  $E$  est un champ de Killing si et seulement si  $\nabla E$  est anti-symétrique, c'est à dire pour tous champs de vecteurs  $F, G$ ,*

$$g(\nabla_F E, G) + g(\nabla_G E, F) = 0.$$

**Exemple 1.2.6.** (i) *Soit  $\mathbb{R}^3$  l'espace euclidien de dimension 3 muni des coordonnées cartésiennes  $(x_1, x_2, x_3)$ , les trois champs de vecteurs suivants sont des champs de Killing :*

$$E_1 = -x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad E_2 = -x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad E_3 = -x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

(ii) *Soit  $\mathbb{R}^4$  muni des coordonnées cartésiennes  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ ,*

$$E = -x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_4 \frac{\partial}{\partial x_3} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_4}$$

*est un champ de Killing.*

### 1.2.2 Champs de Killing sur la sphère $S^2$

Considérons la sphère  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ , dont les points sont paramétrés par les coordonnées sphériques  $(X_1, X_2, X_3) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$  ( $\theta \in [0, \pi]$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$ ). Sous l'action de la projection stéréographique, on a

$$(X_1, X_2, X_3) \rightarrow (X_1, X_2)/(1 - X_3) = (\cot \frac{\theta}{2} \cos \varphi, \cot \frac{\theta}{2} \sin \varphi) \in \mathbb{R}^2.$$

On utilisera les coordonnées  $(x_1, x_2)$  sur le plan  $\mathbb{R}^2$ . La métrique canonique sur  $S^2$  est donnée par

$$h = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

On peut vérifier qu'une base de champs de Killing sur  $S^2$  est donnée par

$$X = \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad Y = \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cos \varphi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad Z = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \sin \varphi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

On expliquera comment ces champs de vecteurs sont exprimés en termes des fonctions holomorphes sous l'action de la projection stéréographique.

D'après  $x_1 = \cot \frac{\theta}{2} \cos \varphi$ ,  $x_2 = \cot \frac{\theta}{2} \sin \varphi$ , on peut écrire

$$\varphi = \arctan \frac{x_2}{x_1}, \quad \theta = \arctan \left( \frac{2|x|}{|x|^2 - 1} \right)$$

où  $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ . Ce qui donne

$$d\theta = -2 \frac{x_1 dx_1 + x_2 dx_2}{|x|(1 + |x|^2)}, \quad d\varphi = \frac{x_1 dx_2 - x_2 dx_1}{|x|^2},$$

### 1.3. LES GÉOMÉTRIES EN DIMENSION 3

---

et la métrique sphérique  $h$  est donnée suivant les coordonnées  $(x_1, x_2)$  par

$$h = 4 \frac{(dx_1^2 + dx_2^2)}{(1 + |x|^2)^2}.$$

Aussi, suivant les coordonnées  $(x_1, x_2)$ , les vecteurs  $\frac{\partial}{\partial\varphi}$  et  $\frac{\partial}{\partial\theta}$  s'écrivent sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial\varphi} = -x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial}{\partial\theta} = -\frac{(1 + |x|^2)}{2|x|} \left( x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right),$$

et la base des champs de vecteurs de Killing devient

$$\begin{aligned} X &= -x_2 \partial_1 + x_1 \partial_2 \\ Y &= -\frac{1}{2} \{ 2x_1 x_2 \partial_1 + (1 - x_1^2 + x_2^2) \partial_2 \} \\ Z &= -\frac{1}{2} \{ 2x_1 x_2 \partial_2 + (1 + x_1^2 - x_2^2) \partial_1 \} \end{aligned}$$

Identifions maintenant  $\mathbb{R}^2$  avec le plan complexe  $\mathbb{C}$  de la manière standard, et notons  $z = x_1 + ix_2$ . Une combinaison linéaire arbitraire  $aX + bY + cZ$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ ), peut être écrite suivant les coordonnées complexes comme  $(-\frac{c}{2} - \frac{b}{2}i) + iaz + (\frac{b}{2}i - \frac{c}{2})z^2$ . On a donc la conclusion suivante.

**Proposition 1.2.7.** *Soit  $\mathbb{R}^2$  muni des coordonnées canoniques  $(x_1, x_2)$  et de la métrique sphérique canonique  $h = 4(dx_1^2 + dx_2^2)/(1 + |x|^2)^2$ . Les champs de Killing sur  $(\mathbb{R}^2, h)$  sont de la forme*

$$\alpha + icz + \bar{\alpha}z^2 \quad (\alpha \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{R}),$$

où  $z = x_1 + ix_2$  et où on a identifié l'espace tangent à  $\mathbb{R}^2$  avec le plan complexe  $\mathbb{C}$  en chaque point.

Il est connu que les champs de vecteurs holomorphes sur la sphère  $S^2$ , c'est à dire les sections holomorphes du fibré tangent  $TS^2$ , sont de la forme

$$\alpha + \beta z + \gamma z^2,$$

où  $\alpha, \beta, \gamma$  sont des constantes complexes arbitraires (voir par exemple [27]). En particulier, les champs de vecteurs de Killing forment un sous-espace réel de dimension 3. Ceci est important pour l'étude du flot de soliton associé à un espace de type "warped-product", comme on va voir dans §3.4.2.

### 1.3 Les géométries en dimension 3

Il est connu d'après le théorème d'uniformisation de Poincaré que toute surface riemannienne est en bijection conforme avec une autre de courbure de Gauss constante. En

### 1.3. LES GÉOMÉTRIES EN DIMENSION 3

---

particulier, toute surface riemannienne fermée (compacte sans bord) est conformément équivalente au quotient par un groupe discret d'isométries de l'une des trois géométries suivantes : le plan complexe  $\mathbb{C}$ , la sphère  $S^2$  et le plan hyperbolique  $H^2$  munies de leurs métriques canoniques, de courbure de Gauss 0, 1 et  $-1$  respectivement. Ces métriques ont la propriété que l'espace est pareil en chaque point et dans toutes les directions. Par contre, en dimension 3 la situation est plus compliquée.

#### 1.3.1 Définition des géométries

Une variété riemannienne est dite homogène si pour tous  $x$  et  $y$  dans  $M$  il existe une isométrie de  $M$  qui applique  $x$  à  $y$ . Autrement dit, l'action du groupe d'isométries  $G = \text{Isom}(M)$  sur  $M$  est transitive. Les exemples de base des variétés homogènes sont l'espace euclidien, la sphère et l'espace hyperbolique.

**Définition 1.3.1.** Soit  $\mathbb{E}^m$  une variété riemannienne de dimension  $m$  homogène simplement connexe.

- On dit que  $\mathbb{E}^m$  est une géométrie s'il existe un sous-groupe  $H$  de son groupe d'isométries  $G$  tel que le quotient  $\mathbb{E}^m/H$  est compact.
- Deux géométries sont dites équivalentes s'il existe un difféomorphisme équivariant entre eux, i.e. un difféomorphisme qui préserve les actions de leurs groupes d'isométries.

#### 1.3.2 Classification des géométries en dimensions 3

**Théorème 1.3.2.** [54] En dimension 3, il existe exactement huit géométries, à une équivalence près, connues sous le nom de huit géométries de Thurston.

##### Les huit géométries de Thurston

1. L'espace euclidien  $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$  muni de la métrique euclidienne  $dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$ .
2. La sphère  $S^3$  munie de sa métrique canonique de courbure constante égale à 1.
3. L'espace hyperbolique  $H^3$  munie de sa métrique canonique de courbure constante égale à  $-1$ .
4. La géométrie  $S^2 \times \mathbb{R}$  munie du produit des métriques canoniques sur  $S^2$  et  $\mathbb{R}$ .
5. La géométrie  $H^2 \times \mathbb{R}$  munie du produit des métriques canoniques sur  $H^2$  et  $\mathbb{R}$ .
6. Le groupe de Heisenberg Nil :

C'est le groupe multiplicatif des matrices triangulaires supérieures de dimension  $3 \times 3$  et qui sont de la forme suivante

$$\begin{pmatrix} 1 & -x_1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### 1.3. LES GÉOMÉTRIES EN DIMENSION 3

---

Cela fournit une loi (non-commutative) sur  $\mathbb{R}^3$  donnée par :

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, -x_1 + y_3 + x_3 y_2)$$

Nil est ce groupe muni de la métrique invariante à gauche qui se réduit à  $dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$  en la matrice identité. Cette métrique est donnée par  $dx_1^2 + dx_2^2 + (x_1 dx_2 + dx_3)^2$ . On peut alors identifier Nil à

$$(\mathbb{R}^3, dx_1^2 + dx_2^2 + (x_1 dx_2 + dx_3)^2)$$

7. La géométrie  $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$  qui désigne le revêtement universel du groupe de Lie  $SL_2(\mathbb{R})$  muni de sa métrique canonique (1.14). En effet :  
 c'est un fibré ayant pour base le plan hyperbolique  $H^2 = (\mathbb{R}_+^2, g_+^H)$  où  $\mathbb{R}_+^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1 > 0\}$  et  $g_+^H = \frac{dx_1^2 + dx_2^2}{x_1^2}$ . Posons  $z = x_1 + ix_2$ , alors d'après la section 1.4.3, toute isométrie de  $H^2$  est de la forme

$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d}$$

pour une certaine matrice  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$ .

Ce qui identifie le groupe d'isométries de  $H^2$ ,  $\text{Isom}(H^2)$  à son groupe quotient  $PSL_2(\mathbb{R}) = SL_2(\mathbb{R})/\{\pm I\}$ . D'autre part, soit  $T^1 H^2$  le fibré tangent unitaire de  $H^2$  muni de la métrique de Sasaki (la métrique canonique provenant de la métrique sur la variété) donc la projection naturelle est une submersion riemannienne avec des fibres totalement géodésiques et alors par transitivité  $\text{Isom}(H^2)$  agit sur  $T^1 H^2$  et le stabilisateur des points de la variété est trivial.

Comme on peut identifier  $\text{Isom}(H^2)$  avec  $T^1 H^2$ , cela permet de définir naturellement une métrique sur  $\text{Isom}(H^2)$  et par suite sur  $PSL_2(\mathbb{R})$ , qui est par construction invariante à gauche. Aussi cette métrique fournit une métrique sur  $SL_2(\mathbb{R})$  et donc sur son revêtement universel.

L'identification du plan hyperbolique  $H^2$  à  $(\mathbb{R}_+^2, g_+^H)$  induit une identification de  $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$  à  $\mathbb{R}_+^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^2$ .

La métrique de Sasaki donne la métrique sur  $\mathbb{R}_+^3$  sous la forme

$$g = \frac{dx_1^2 + dx_2^2}{x_1^2} + \frac{(dx_2 + x_1 dx_3)^2}{x_1^2}. \quad (1.14)$$

Donc

$$\widetilde{SL}_2(\mathbb{R}) \cong (\mathbb{R}_+^3, g).$$

8. La géométrie Sol : Considérons le groupe de Lie donné par  $\mathbb{R}^3$  muni de la multiplication

$$(x_1, x_2, x_3)(y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + e^{-x_1}y_2, x_3 + e^{x_1}y_3).$$

La géométrie Sol correspond à ce groupe de Lie muni de la métrique invariante à gauche qui se réduit à  $dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$  en l'élément unité  $(0, 0, 0)$ . Cette métrique est donnée par  $dx_1^2 + e^{2x_1}dx_2^2 + e^{-2x_1}dx_3^2$ . Donc on peut identifier Sol à

$$(\mathbb{R}^3, dx_1^2 + e^{2x_1}dx_2^2 + e^{-2x_1}dx_3^2)$$

D'une manière analogue (mais plus complexe) au théorème d'uniformisation de Poincaré en dimension 2, la conjecture de géométrisation de Thurston (en 1976) affirme que toute variété compacte de dimension 3 peut être décomposée en des sous-variétés (séparées par des sphères et des tores) telles que chacune de ces sous-variétés est équivalente au quotient par un groupe discret d'isométries de l'une des huit géométries indiquées ci-dessus. Cette conjecture a été démontrée par G. Perelman en 2003 [49], [50], [51].

## 1.4 Structure conforme

Un des théorèmes les plus célèbres en géométrie est le théorème d'existence de coordonnées isothermes, dû à Gauss en 1822. Il s'agit d'un problème motivé par la cartographie, qui consiste à représenter les parties d'une surface donnée sur une autre surface de telle sorte que la représentation soit localement semblable à l'originale, autrement dit, une représentation conforme. Un exemple de telle représentation est la projection stéréographique, une manière de représenter la sphère ronde sur un plan. La propriété remarquable de cette projection est qu'elle préserve les angles entre les courbes. Cette propriété est dite conforme.

### 1.4.1 Classe d'équivalence d'une métrique

**Définition 1.4.1.** Soient  $g$  et  $\tilde{g}$  deux métriques riemanniennes définies sur une variété lisse  $M$ . On dit que  $g$  et  $\tilde{g}$  sont conformément équivalentes s'il existe une fonction lisse  $\alpha : M \rightarrow ]0, \infty)$  telle que  $\tilde{g} = \alpha^2 g$ .

Il est clair que c'est une relation d'équivalence.

**Définition 1.4.2.** Une classe d'équivalence d'une métrique est dite une structure conforme, et une variété munie d'une structure conforme est dite une variété conforme.

## 1.4. STRUCTURE CONFORME

---

Cette notion a une importance particulière quand  $M$  est une surface riemannienne, (i.e. une variété riemannienne de dimension 2), c'est que dans ce cas la structure conforme sur la variété est unique (toute métrique est localement conforme à toute autre métrique sur la variété) et cela est dû à l'existence des coordonnées isothermes.

**Théorème 1.4.3.** (*Existence des coordonnées isothermes*)

Soit  $(M^2, g)$  une surface riemannienne.

(i) En chaque point  $p$  de  $M$  il existe un voisinage ouvert  $U$  et des coordonnées locales  $(x, y)$  dans  $U$  tels que

$$g = \mu^2(dx^2 + dy^2)$$

où  $\mu$  est une fonction lisse positive sur  $U$ . Ces coordonnées  $(x, y)$  sont dites coordonnées isothermes [53].

(ii) Pour les coordonnées isothermes  $(x, y)$  on a

$$\nabla_{\partial/\partial x}^M \frac{\partial}{\partial x} + \nabla_{\partial/\partial y}^M \frac{\partial}{\partial y} = 0.$$

**Remarque 1.4.4.** [38] La notion de "isotherme" est due à Lamé qui a étudié les problèmes liés à l'équation de chaleur sur les surfaces, où ce genre de coordonnées apparaît.

**Définition 1.4.5.** Soit  $\varphi : (M, g) \mapsto (N, h)$  une application lisse entre deux variétés riemanniennes et soit  $x \in M$ . On dit que  $\varphi$  est (faiblement) conforme en  $x$  s'il existe un réel  $\Lambda(x)$  tel que

$$h(d\varphi_x(E), d\varphi_x(F)) = \Lambda(x)g(E, F) \quad \text{pour tous } E, F \in T_x M.$$

Bien évidemment  $\Lambda(x) \geq 0$ , en particulier, il existe une fonction continue  $\lambda : M \rightarrow [0, \infty)$  telle que  $\lambda(x)^2 = \Lambda(x)$  est lisse.  $\lambda(x)$  est dit le facteur de conformalité de  $\varphi$  en  $x$ .

**Exemple 1.4.6.** L'exemple trivial d'une application conforme est l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_m) &\mapsto (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

où  $m \leq n$ . On dit que c'est une immersion isométrique (ou immersion riemannienne), i.e. une application conforme avec un facteur de conformalité constant égal à 1.

**Exemple 1.4.7.** Toute application holomorphe (ou anti-holomorphe) définie sur un ouvert de  $\mathbb{C}$ , à valeurs dans  $\mathbb{C}^m$  est conforme.

**Exemple 1.4.8.** L'application identique  $(M, g) \rightarrow (M, h)$  est conforme si et seulement si les métriques  $g$  et  $h$  sont conformément équivalentes.

### 1.4.2 Projection stéréographique

La projection stéréographique est une manière de représenter la sphère ronde sur un plan. Autrement dit, c'est une application conforme qui donne l'identification de la sphère unité  $S^2$  avec le plan complexe compactifié  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Elle a été décrite par W. Atkinson en 1912 ; elle a la propriété que les cercles sur la sphère restent des cercles après la projection sur le plan.

**Définition 1.4.9.** *La projection stéréographique (du pôle nord) est l'application  $\pi : S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  donnée par*

$$\pi(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} = \frac{1 + x_3}{x_1 - ix_2},$$

son inverse est donné par

$$\pi^{-1}(z) = \frac{1}{1 + |z|^2} (2z, |z|^2 - 1) \text{ pour tout } z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Géométriquement, l'image d'un point  $x \in S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$  par  $\pi$  est l'intersection de la droite qui relie le pôle nord  $N(0, 0, 1)$  et le point  $x$ , avec le plan équatorial,  $x_3 = 0$  dans  $\mathbb{R}^3$ .

Par cette transformation, tous les méridiens (les grands cercles qui passent par le pôle nord et le pôle sud) s'étalent en des droites et tous les cercles parallèles se transforment en d'autres cercles du plan tout en restant orthogonaux aux droites images des méridiens. La propriété remarquable de cette projection est qu'elle préserve les angles entre les courbes, autrement dit, elle est conforme.

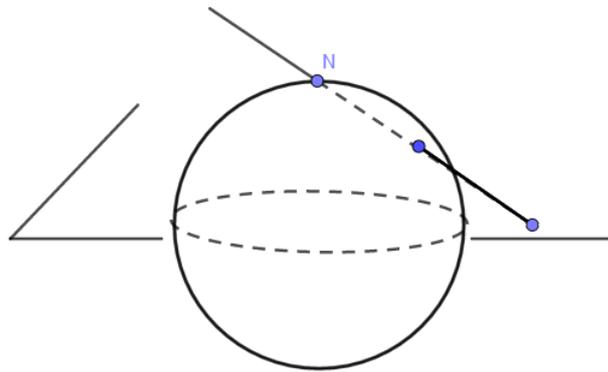


FIGURE 1.1 – La projection stéréographique du pôle nord

## 1.4. STRUCTURE CONFORME

---

Plus généralement, on peut définir la projection stéréographique en dimension  $m$ .

**Définition 1.4.10.** *La projection stéréographique  $\pi : S^m \setminus \{(0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^m$  est définie par*

$$\pi(x) = \frac{\tilde{x}}{1 - x_m} \text{ avec } x = (\tilde{x}, x_m) = (x_0, x_1, \dots, x_m) \in S^m.$$

### 1.4.3 Transformation de Möbius

En analyse complexe, les transformations de Möbius sont des applications conformes spéciales qui correspondent aux difféomorphismes de la sphère de Riemann.

**Définition 1.4.11.** *Une transformation de Möbius du plan complexe est une application de la forme*

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ tels que } ad - bc \neq 0.$$

(La condition  $ad - bc \neq 0$  garantit que  $f$  ne soit pas constante).

Quand  $z \rightarrow \infty$ ,  $f(z) \rightarrow \frac{a}{c}$  si  $c \neq 0$  et  $f(z) \rightarrow \infty$  si  $c = 0$ ; avec  $f(-\frac{d}{c}) = \infty$ . On peut alors voir  $f$  comme une application du plan complexe compactifié  $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  dans  $\widehat{\mathbb{C}}$ . De manière générale, les transformations de Möbius sont des automorphismes de  $\widehat{\mathbb{R}^m}$  (la compactification de l'espace euclidien de dimension  $m$ ) définies comme la composée d'un nombre fini d'inversions par rapport à des hyperplans ou des hypersphères.

**Proposition 1.4.12.** [57] *Chaque transformation de Möbius dans  $\widehat{\mathbb{R}^m}$  est de la forme*

$$\varphi(x) = b + \frac{\alpha A(x - a)}{|x - a|^\epsilon}$$

où  $a, b \in \mathbb{R}^m$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $A$  est une matrice orthogonale et  $\epsilon \in \{0, 2\}$ .

Le théorème de Liouville affirme qu'en dimension  $m \geq 3$ , toute transformation conforme localement définie dans  $\mathbb{R}^m$  est la restriction d'une transformation de Möbius.

**Proposition 1.4.13.** [12] *(Théorème de Liouville)*

*Soit  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  ou  $S^m$  une application conforme définie sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^m$  ou  $S^m$ , avec  $m \geq 3$ , alors  $\varphi$  est identifiée à un élément du groupe de Möbius, i.e. c'est une composition d'homothéties et d'inversions.*

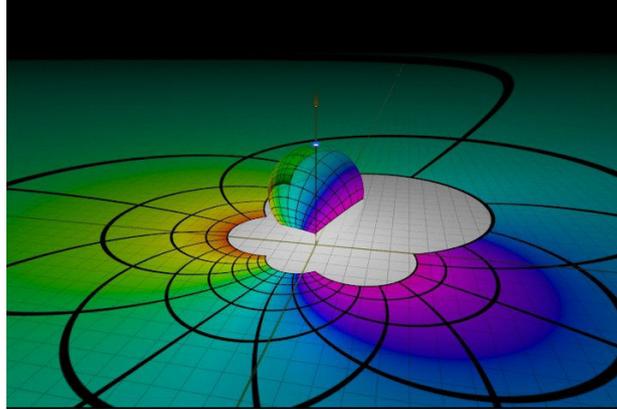


FIGURE 1.2 – La partie colorée sur le plan est l’image d’un simple carré dans le plan après une transformation de Möbius : la partie colorée sur la sphère est l’image du carré original après application de l’inverse de la projection stéréographique, après on effectue une rotation sur la sphère et on projette de nouveau sur le plan.

## 1.5 Applications semi-conformes et fonctions conjuguées

Les applications semi-conformes sont des applications définies sur une variété riemannienne qui sont conformes sur le complément orthogonal des fibres. On va caractériser ces applications en termes de coordonnées locales et en termes d’une base orthonormée adaptée, on va donner des exemples et puis on va expliquer le lien avec les fonctions conjuguées.

### 1.5.1 Applications semi-conformes

**Définition 1.5.1.** Soient  $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$  une application lisse et  $x \in M$ . On dit que  $\varphi$  est semi-conforme ou horizontalement (faiblement) conforme en  $x$  si elle satisfait l’une des deux conditions suivantes :

- (i)  $d\varphi_x = 0$  (i.e.  $x$  est un point singulier),
- (ii)  $d\varphi_x$  est surjective et il existe  $\Lambda(x) \neq 0$ , tel que

$$h(d\varphi_x(X), d\varphi_x(Y)) = \Lambda(x)g(X, Y), \quad (1.15)$$

où  $X$  et  $Y$  sont des vecteurs dans l’espace horizontal  $\text{Ker}(d\varphi_x)^\perp$ .

Un point de  $M$  de type (ii) est dit un point régulier. Suivant des coordonnées locales  $(x_1, \dots, x_m)$  et  $(y_1, \dots, y_n)$  au voisinage des points  $x$  et  $\varphi(x)$  respectivement, on peut écrire

(1.15) comme

$$g^{ij}(x) \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x_i}(x) \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x_j}(x) = \Lambda(x) h^{\alpha\beta}(\varphi(x)) \quad \forall \alpha, \beta = 1, \dots, n \quad (1.16)$$

Dans toute la suite, on optera pour la dénomination semi-conforme.

**Définition 1.5.2.** Soit  $\varphi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$  une application lisse. On dit que  $\varphi$  est semi-conforme sur  $M$  si elle est semi-conforme en tout point de  $M$ . Si tous les points de  $M$  sont réguliers, on dit que  $M$  est une submersion (semi-)conforme.

On désigne par  $\mathcal{V}_x$  l'espace vertical  $\text{Ker}(d\varphi_x)$  et  $\mathcal{H}_x$  son orthogonal, l'espace horizontal  $\text{Ker}(d\varphi_x)^\perp$ . En posant  $\Lambda(x) = 0$  si  $x$  est un point singulier, on a

$$\Lambda(x) = \frac{1}{n} |d\varphi_x|^2,$$

où  $|d\varphi_x|^2$  est la norme de Hilbert-Schmidt donnée par

$$|d\varphi_x|^2 = \sum_{i=1}^m h(d\varphi_x(e_i), d\varphi_x(e_i)) \quad (1.17)$$

avec  $\{e_i\}$  une base orthonormée du plan tangent  $T_x M$ . La fonction  $\Lambda$  est alors lisse sur  $M$ , même aux points critiques. Sa racine carrée  $\lambda = \sqrt{\Lambda}$  est appelée la dilatation de l'application  $\varphi$ .

L'exemple trivial d'une submersion conforme est :

**Exemple 1.5.3.** (La projection orthogonale)

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_m) &\mapsto (x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

où  $m \geq n \geq 1$ . On dit que c'est une submersion riemannienne, c'est à dire une application semi-conforme de dilatation constante égale à 1.

Notons qu'une application semi-conforme de dilatation constante non-nulle n'est autre qu'une submersion riemannienne à un scalaire près.

**Exemple 1.5.4.** (La fibration de Hopf)

Soit  $S^2$  la sphère canonique de courbure sectionnelle constante égale à 1. La fibration de Hopf est donnée par

$$\begin{aligned} S^3 &\longrightarrow S^2 \\ (z_0, z_1) &\mapsto (|z_0|^2 - |z_1|^2, 2\bar{z}_0 z_1) \end{aligned} \quad (1.18)$$

pour  $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$  tels que  $|z_0|^2 + |z_1|^2 = 1$ . C'est une submersion conforme de dilatation constante égale à 2.

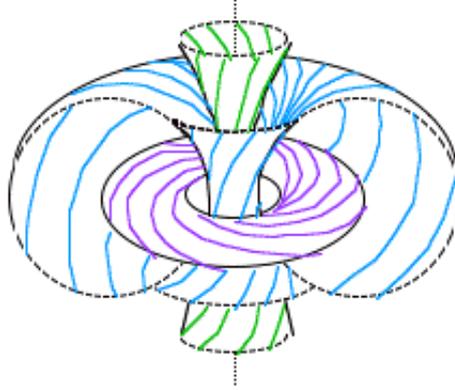


FIGURE 1.3 – Fibration de Hopf de  $S^3$  représentée par projection dans  $\mathbb{R}^3$

**Exemple 1.5.5.** (*La projection radiale*)

Pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ , l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^m \setminus \{0\} &\rightarrow S^{m-1} \\ x &\mapsto \frac{x}{|x|} \end{aligned}$$

est une submersion semi-conforme de dilatation  $\lambda(x) = \frac{1}{|x|}$ .

**Proposition 1.5.6.** Soit  $\varphi : (M^m, g) \rightarrow (N^n, h)$  une application lisse entre deux variétés riemanniennes et soit  $x \in M$ , alors  $\varphi$  est semi-conforme en  $x$  de dilatation  $\lambda(x)$  si et seulement si soit  $d\varphi(x) = 0$  soit, pour toute base orthonormée  $\{Y_\alpha\}$  en  $\varphi(x)$ , il existe une base orthonormée  $\{X_i\}$  en  $x$  telle que

$$d\varphi_x(X_i) = \begin{cases} \lambda(x)Y_i & \text{pour } i = 1, \dots, n \\ 0 & \text{pour } i > n \end{cases}$$

Il est clair que la notion de semi-conformalité généralise naturellement la notion de conformalité.

**Proposition 1.5.7.** Soit  $\varphi : (M^m, g) \rightarrow (N^m, h)$  une application lisse, alors  $\varphi$  est semi-conforme si et seulement si  $\varphi$  est conforme.

Dans le cas d'une application définie sur une variété riemannienne à valeurs complexes, on a la proposition suivante :

**Proposition 1.5.8.** [12] *Soit  $\varphi : (M^m, g) \rightarrow \mathbb{C}$  une application différentiable, alors  $\varphi$  est semi-conforme si et seulement si*

$$\sum_{i,j=1}^m g^{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = 0, \quad (1.19)$$

où  $(x_1, \dots, x_m)$  est un système de coordonnées locales sur  $M$ .

En particulier, si  $M = \mathbb{R}^m$  muni de la métrique canonique, l'équation (1.19) est équivalente à l'équation du premier ordre

$$\sum_{i=1}^m \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^2 = 0, \quad (1.20)$$

où  $(x_1, \dots, x_m)$  sont les coordonnées canoniques sur  $\mathbb{R}^m$ .

On indique ci-dessous quelques objets géométriques associés à une application semi-conforme  $\varphi : (M^m, g) \rightarrow (N^n, h)$ , qu'on utilisera dans la suite.

- On désigne par  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{H}$  les distributions verticale et horizontale données par  $\text{Ker } d\varphi$  et son orthogonal  $(\text{Ker } d\varphi)^\perp$  respectivement. Pour un champ de vecteurs  $E$ , on désigne par  $\mathcal{V}E$  et  $\mathcal{H}E$  les projections orthogonales de  $E$  sur les distributions  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{H}$  respectivement.
- Pour  $x \in M$ ,  $\{e_i\}_{i=1, \dots, m}$  désigne une base orthonormée en  $x$ , de même  $\{e_a\}_{a=1, \dots, n}$  et  $\{e_r\}_{r=n+1, \dots, m}$  désignent des bases orthonormées horizontale et verticale en  $x$ , adaptées aux distributions  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{V}$ .
- $\mu$  est la courbure moyenne des fibres i.e. c'est le champ de vecteurs donné par

$$\mu = \frac{1}{m-n} \sum_{r=1}^{m-n} \mathcal{H} \nabla_{e_r} e_r$$

- $I$  désigne le tenseur d'intégrabilité de la distribution horizontale  $\mathcal{H}$  :

$$\begin{aligned} I : TM \times TM &\rightarrow TM \\ (X, Y) &\mapsto \mathcal{V}[\mathcal{H}X, \mathcal{H}Y] \end{aligned}$$

- $\tau(\varphi)$  est le champ de tension de  $\varphi$ , c'est la section  $\tau(\varphi) \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$  définie par

$$\tau(\varphi) = \text{div } d\varphi = -d^*d\varphi = \text{Trace}_g \nabla d\varphi = \sum_{i=1}^m \nabla d\varphi(e_i, e_i),$$

L'équation fondamentale d'une submersion semi-conforme qui donne la relation entre le champ de tension, la dilatation et la courbure moyenne des fibres est la suivante [12] :

$$\tau(\varphi) = -(n-2)d\varphi(\text{grad } \ln \lambda) - (m-n)d\varphi(\mu). \quad (1.21)$$

### 1.5.2 Applications semi-conformes définies sur les géométries en dimension 3

Dans le Chapitre 3, on va construire des solitons de Ricci en déformant la métrique par rapport à une application semi-conforme. Les géométries de Thurston vont jouer un rôle important dans cette construction. Parmi les huit géométries définies dans §1.3.2, les produits  $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ ,  $S^2 \times \mathbb{R}$  et  $H^2 \times \mathbb{R}$  admettent des projections canoniques sur le premier facteur qui sont tous des submersions riemanniennes. L'application de Hopf, qu'on a étudié dans §1.5.1, détermine une submersion semi-conforme (avec dilatation constante) de  $S^3$  dans  $S^2$ .

Il y a plusieurs projections semi-conformes naturelles de l'espace hyperbolique dans une surface, par exemple, la projection radiale sur la sphère et la projection orthogonale sur  $H^2$  (voir [12]). Lorsqu'on prend le modèle du demi-espace  $(\mathbb{R}_+^3, g)$  muni de la métrique  $g = (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)/x_1^2$ , la projection à l'hyperplan à l'infini donnée par  $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3)$  est semi-conforme avec dilatation  $\lambda(x) = e^s$  où  $s$  est la distance hyperbolique de  $x$  à l'hyperplan  $x_1 = 1$  [12].

Lorsqu'on identifie la géométrie Nil avec  $(\mathbb{R}^3, g)$  où  $g$  est la métrique

$$g = dx_1^2 + dx_2^2 + (x_1 dx_2 + dx_3)^2$$

(voir §1.3.2), la projection  $\varphi : \text{Nil} \rightarrow \mathbb{R}^2$  donnée par  $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$  est une submersion riemannienne (une application semi-conforme avec dilatation identiquement égale à 1). On remarque que par rapport à cette projection, les fibres sont minimaux et la distribution horizontale n'est pas intégrable (comme pour l'application de Hopf). La géométrie Sol =  $(\mathbb{R}^3, g)$  où  $g = dx_1^2 + e^{2x_1} dx_2^2 + e^{-2x_1} dx_3^2$  est munie d'une projection semi-conforme  $\varphi : \text{Sol} \rightarrow (\mathbb{R}^2, h)$  où  $h = dx_1^2 + e^{2x_1} dx_2^2$  donnée par  $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$ . Dans ce cas la dilatation  $\lambda \equiv 1$  et la distribution horizontale est intégrable, pourtant les fibres ne sont pas minimaux [12]. On remarque qu'après le changement de variable  $u = e^{-x_1}$ , la métrique du codomaine se transforme en  $h = (du^2 + dx_2^2)/u^2$  avec  $u > 0$ , ce qui correspond à la métrique hyperbolique sur le demi-plan.

Enfin, lorsqu'on identifie la géométrie  $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$  avec  $(\mathbb{R}^3, g)$  où

$$g = \frac{dx_1^2 + dx_2^2}{x_1^2} + \left( \frac{dx_2}{x_1} + dx_3 \right)^2,$$

la projection  $\varphi : \widetilde{SL_2(\mathbb{R})} \rightarrow (\mathbb{R}_+^2, h)$  donnée par  $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$  est semi-conforme par rapport à la métrique hyperbolique  $h = (dx_1^2 + dx_2^2)/x_1^2$  sur le codomaine.

### 1.5.3 Fonctions conjuguées

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions réelles définies sur une variété riemannienne  $(M^m, \delta)$ .

**Définition 1.5.9.**  $f$  et  $g$  sont dites conjuguées si

$$\forall x \in M, \quad |\nabla f(x)| = |\nabla g(x)| \quad \text{et} \quad \delta(\nabla f(x), \nabla g(x)) = 0,$$

**Exemple 1.5.10.** Soit  $\mathbb{R}^3$  muni des coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$ . Les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}^3 \setminus \{x_2 = x_3 = 0\}$  par :

$$f = x_2 \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{x_2^2 + x_3^2} \quad g = x_3 \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{x_2^2 + x_3^2},$$

sont des fonctions conjuguées. De même pour les deux fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  par :

$$f = \log \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \quad g = \arccos \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}.$$

D'après la définition (1.5.9), on peut dire que  $f$  et  $g$  sont conjuguées, si et seulement si,

$$(\nabla \varphi)^2 = 0, \tag{1.22}$$

où  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{C}$  est donnée par  $\varphi := f + ig$  et  $(\nabla \varphi)^2 = \langle \nabla \varphi, \nabla \varphi \rangle$  où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le prolongement  $\mathbb{C}$ -linéaire de  $\delta$  à l'espace tangent complexifié  $T^{\mathbb{C}}M$ . L'équation (1.22) signifie que le champ de vecteurs (complexe)  $\nabla \varphi$  est isotropique en chaque point. D'après les équations (1.19) et (1.22) on a la proposition suivante :

**Proposition 1.5.11.** Soit  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{C}$  une application différentiable à valeurs dans une surface telle que  $\varphi := f + ig$  où  $f$  et  $g$  sont deux fonctions réelles différentiables définies sur  $M$ . Alors,

$\varphi$  est semi-conforme si et seulement si  $f$  et  $g$  sont conjuguées.

**Exemple 1.5.12.** (Les cercles de Villarceau)

Soit

$$H : \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\sigma^{-1}} \mathbb{S}^3 \xrightarrow{\pi} \mathbb{S}^2 \xrightarrow{\sigma} \mathbb{R}^2$$

où  $\sigma$  désigne la projection stéréographique de  $\mathbb{S}^k$  dans  $\mathbb{R}^k \cup \{\infty\}$ ,  $\sigma^{-1}$  son inverse et  $\pi$  est la fibration de Hopf de  $\mathbb{S}^3$  dans  $\mathbb{S}^2$  donnée par (1.18).

$H$  est une application semi-conforme puisqu'elle s'agit de la composée d'applications semi-conformes.

Soit  $\mathbb{R}^3$  muni des coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$ . On peut expliciter  $H = (f, g)$  avec les expressions

$$f = \frac{(1 - \frac{|x|^2}{2})x_2 + \sqrt{2}x_1x_3}{x_2^2 + x_3^2} \quad \text{et} \quad g = \frac{(1 - \frac{|x|^2}{2})x_3 - \sqrt{2}x_1x_2}{x_2^2 + x_3^2}.$$

## 1.5. APPLICATIONS SEMI-CONFORMES ET FONCTIONS CONJUGUÉES

---

Comme  $H$  est semi-conforme, ses composantes  $f$  et  $g$  sont conjuguées. Les fibres de cette application sont des cercles, appelés cercles de Villarceau, sur des tores dans l'espace comme le montre la figure 1.3.

**Remarque 1.5.13.** (i) Il est clair que la propriété que deux fonctions soient conjuguées est une propriété conformément invariante.

(ii) Pour la définition des fonctions conjuguées, la régularité des fonctions n'est pas nécessaire, il suffit que ces fonctions soient Lipschitziennes pour que cette propriété soit bien définie, comme par exemple les deux fonctions conjuguées sur  $\mathbb{R}^3$ ,  $f$  et  $g$  suivantes :

$$f = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad g = x_2.$$

En effet, d'après le théorème de Radamacher, la dérivée de toute application Lipschitzienne existe presque partout. Or, il suffit que la dérivée existe en un point pour parler de la notion de semi-conformalité en ce point. Comme Lipschitz entraîne la continuité, l'application se prolonge continument à travers les points où la dérivée n'est pas définie.

**Théorème 1.5.14.** Soit  $f$  une fonction lisse définie sur une variété  $M$  de dimension 2, alors  $f$  admet, localement, une conjuguée si et seulement si  $f$  est harmonique, i.e.  $f$  vérifie l'équation de Laplace  $\Delta f = 0$ .

*Démonstration.* Si  $f$  admet une fonction conjuguée  $g$ , alors  $\varphi = f + ig$  est une application semi-conforme et donc d'après (4.35) on a

$$(\nabla\varphi)^2 = 0,$$

ce qui est équivalent à

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}} = 0,$$

où  $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$  et  $\frac{\partial}{\partial\bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ , ce qui signifie que  $\varphi$  est ou bien holomorphe ou bien anti-holomorphe et par suite sa partie réelle  $f$  est harmonique.

Réciproquement, si  $f$  est harmonique alors la 1-forme

$$\theta = -\frac{\partial f}{\partial y} dx + \frac{\partial f}{\partial x} dy,$$

est fermée, il s'ensuit qu'il existe une fonction  $g$  telle que  $\theta = dg$  sur un certain domaine simplement connexe, et dans ce cas  $\varphi = f + ig$  est holomorphe puisqu'elle vérifie les conditions de Cauchy-Riemann, donc  $\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}} = 0$ , et par suite  $f$  et  $g$  sont conjuguées.  $\square$

### 1.5.4 Lien avec les feuilletages conformes

La notion de feuilletage conforme a été introduite par Vaisman en 1979 (voir [12]). Il s'agit d'un feuilletage pour lequel le transport de Lie de la métrique le long d'une feuille est conforme sur l'espace orthogonal. Des cas particuliers sont des feuilletages différentiables de codimension 1.

**Définition 1.5.15.** *On dit que  $\mathcal{F}$  est un feuilletage  $C^\infty$  d'une variété riemannienne  $(M^m, g)$  de codimension  $n$  si  $\mathcal{F}$  détermine une décomposition de  $M$  en sous-ensembles connexes  $L_\alpha$  (dits les feuilles), tel que pour chaque  $x \in M$ , il existe un voisinage  $W$  de  $x$  et une submersion  $\varphi : W \rightarrow N^n$  à valeurs dans une variété de dimension  $n$ , tels que les fibres de  $\varphi$  correspondent aux composantes connexes de  $W \cap L_\alpha$ . L'application  $\varphi$  est dite submersion distinguée par rapport à  $\mathcal{F}$ .*

Notons que les feuilles  $L_\alpha$  déterminent une décomposition de l'espace tangent  $T_x M = \mathcal{H}_x \oplus \mathcal{V}_x$  en chaque point, où  $\mathcal{V}_x$  est tangent aux feuilles et  $\mathcal{H}_x = \mathcal{V}_x^\perp$ .

**Définition 1.5.16.** *Un feuilletage  $\mathcal{F}$  est dit conforme si pour tous  $x \in M$ ,  $V \in \mathcal{V}_x$ ,  $X, Y \in \mathcal{H}_x$ ,*

$$(\mathcal{L}_V g)(X, Y) = \nu(V)g(X, Y)$$

où  $\nu$  est une fonction qui dépend uniquement de  $x$  et de  $V$ .

**Théorème 1.5.17.** [12] *Soit  $\varphi : (M^m, g) \rightarrow (N^n, h)$  une submersion semi-conforme. Alors les fibres de  $\varphi$  déterminent un feuilletage conforme de  $M^m$ . Réciproquement, si  $\mathcal{F}$  est un feuilletage conforme de  $(M^m, g)$ , alors pour tout  $x \in M$ , il existe un voisinage  $W$  de  $x$ , une submersion distinguée  $\varphi : W \rightarrow N^n$  et une métrique  $h$  sur  $N^n$  par rapport à laquelle  $\varphi : (W, g|_W) \rightarrow (N^n, h)$  est semi-conforme.*

On montre dans le Chapitre 3 que si  $\mathcal{F}$  est un feuilletage conforme de dimension 1,

$$(\mathcal{L}_V g)(X, Y) = -2V(\ln \lambda)g(X, Y) \quad \text{pour } V \in \mathcal{V}_x, \text{ et } X, Y \in \mathcal{H}_x,$$

où  $\lambda$  est la dilatation associée à la submersion distinguée dans le théorème précédent.

### 1.5.5 Invariants conformes

Dans la section qui suit, on étudiera la caractérisation des fonctions conjuguées en dimension 3. Ce qui jouent un rôle essentiel dans cette étude sont les invariants différentiables conformes. Une liste d'invariants conformes essentiels pour la caractérisation complète de ces fonctions est donnée dans [7], de façon que toutes les conditions nécessaires et suffisantes dans les différents cas sont exprimées en fonction de ces invariants.

## 1.5. APPLICATIONS SEMI-CONFORMES ET FONCTIONS CONJUGUÉES

---

Soit  $f$  une fonction lisse définie sur un ouvert  $U \subseteq \mathbb{R}^3$ . Considérons la notation des dérivées partielles de  $f$  suivante :

$$f_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}, \quad f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}, \quad f_{ijk} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k}, \quad \dots$$

C'est équivalent à

$$f_i = \nabla_i f, \quad f_{ij} = \nabla_i \nabla_j f, \quad f_{ijk} = \nabla_i \nabla_j \nabla_k f, \quad \dots$$

où  $\nabla_i$  est la connexion plate sur  $\mathbb{R}^3$ , ou en cas plus général, la connexion de Levi-Civita sur une variété riemannienne. Dans la suite on adoptera la convention de sommation d'Einstein. On fait monter et descendre les indices avec la métrique euclidienne  $\delta_{ij}$  et un indice répété signale la contraction suivant cet indice. Considérons le changement conforme de la métrique  $\delta_{ij}$  en  $\widehat{\delta}_{ij}$  suivant

$$\widehat{\delta}_{ij} = \Omega^2 \delta_{ij},$$

où  $\Omega$  est une fonction lisse non-nulle en chaque point de  $U$ , et  $\widehat{\delta}_{ij}$  est aussi plate. Notons  $\widehat{\nabla}_i$  la connexion associée à  $\widehat{\delta}_{ij}$  et

$$\widehat{f}_i = \widehat{\nabla}_i f, \quad \widehat{f}_{ij} = \widehat{\nabla}_i \widehat{\nabla}_j f, \quad \widehat{f}_{ijk} = \widehat{\nabla}_i \widehat{\nabla}_j \widehat{\nabla}_k f, \quad \dots$$

La connexion  $\widehat{\nabla}_i$  est exprimée en fonction de  $\nabla_i$  par :

$$\widehat{\nabla}_i \Phi_j = \nabla_i \Phi_j - \Upsilon_i \Phi_j - \Upsilon_j \Phi_i + \delta_{ij} \Upsilon^k \Phi_k,$$

pour toute 1-forme  $\Phi_j$ , où  $\Upsilon_i = \nabla_i \log \Omega$  (voir [12]) sont les solutions de

$$\nabla_i \Upsilon_j = \Upsilon_i \Upsilon_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \Upsilon^k \Upsilon_k.$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \widehat{f}_i &= f_i \\ \widehat{f}_{ij} &= f_{ij} - 2\Upsilon_{(i} f_{j)} + \delta_{ij} \Upsilon^k f_k \\ \widehat{f}_{ijk} &= f_{ijk} - 6\Upsilon_{(i} f_{jk)} + 3\delta_{(ij} \Upsilon^p f_{k)p} \\ &\quad + 6\Upsilon_{(i} \Upsilon_j f_{k)} - 3\delta_{(ij} \Upsilon_k) \Upsilon^p f_p - \frac{3}{2} \Upsilon^p \Upsilon_p \delta_{(ij} f_{k)} \end{aligned}$$

où la notation de parenthèses dans les indices désigne la symétrisation suivant les indices qui sont inclus dans la parenthèse, par exemple :  $\Upsilon_{(i} f_{j)} = \frac{1}{2} (\Upsilon_i f_j + \Upsilon_j f_i)$ .

**Définition 1.5.18.** *Un invariant conforme de  $f$  de densité  $w$  est un polynôme*

$$I = I(\delta^{ij}, f, f_i, f_{ij}, f_{ijk}, \dots),$$

qui, après un changement conforme de la métrique  $\hat{\delta}_{ij} = \Omega^2 \delta_{ij}$ , change de la façon suivante :

$$I(\hat{\delta}^{ij}, \hat{f}, \hat{f}_i, \hat{f}_{ij}, \hat{f}_{ijk}, \dots) = \Omega^w I(\delta^{ij}, f, f_i, f_{ij}, f_{ijk}, \dots),$$

pour tout scalaire conforme  $\Omega$  produisant une métrique plate à partir de la métrique plate initiale.

Dans [7] il y a une grande liste d'invariants conformes et il y a une explication détaillée des différentes manières pour la construction de ces invariants. Dans notre cas on s'intéresse notamment aux trois invariants conformes  $X, Y, Z$  suivants, qui sont de densité  $-6, -8$  et  $-4$  respectivement :

$$X := 2f_i^j f_j f^{ik} f_k - f^i f_i f^{jk} f_{jk} + f^i f_i (f_j^j)^2, \quad (1.23)$$

$$Y := Z^2 - 2JX, \quad (1.24)$$

$$Z := f^{ij} f_i f_j + f^i f_i f_j^j, \quad (1.25)$$

avec  $J$  l'invariant conforme élémentaire de densité  $-2$  donné par :

$$J := f^i f_i.$$

**Remarque 1.5.19.**  *$Z$  n'est autre que le 3-Laplacien à un multiple près.*

$$Z = \sqrt{J} \operatorname{div}(|\nabla f| \nabla f)$$

Pour la construction de  $Z$  par exemple, on a la proposition suivante :

**Proposition 1.5.20.** *Si  $\varphi_i$  est un invariant conforme de densité  $-1$ , alors  $\varphi_i \mapsto \nabla^i \varphi_i$  est aussi un invariant conforme.*

On applique cette proposition pour la 1-forme  $J^{1/2} f_i$  qui est un invariant conforme de densité  $-1$ , ce qui implique que  $J^{1/2} \nabla^j [J^{1/2} f_j]$  est aussi un invariant conforme (étant le produit de deux invariants conformes) avec

$$J^{1/2} \nabla^j [J^{1/2} f_j] = \frac{1}{2} [\nabla^j J] f_j + J \nabla^j f_j = f^{ij} f_i f_j + f^i f_i f_j^j = Z.$$

Il y a d'autres propriétés, comme par exemple, si  $\varphi_j$  est un invariant conforme de densité  $2$ , alors  $\varphi_j \mapsto \nabla_{(i} \varphi_{j)} - \frac{1}{3} \nabla^k \varphi_k \delta_{ij}$  est un invariant conforme.

On verra dans la section suivante comment ces trois invariants  $X, Y$  et  $Z$  jouent un rôle essentiel dans la caractérisation des fonctions conjuguées.

## 1.6 Caractérisation des fonctions conjuguées en dimension 3

Comme on a déjà mentionné au début de ce chapitre, la question importante qui se pose est : étant donnée une fonction réelle  $f$  lisse définie sur une variété riemannienne  $M$  de dimension 3, quand est-ce que  $f$  admet-elle une fonction conjuguée  $g$ ? Dans cette section on va donner des conditions nécessaires pour qu'une fonction admette une conjuguée dans un domaine de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$ . Dans cette dimension, toutes les conditions nécessaires et suffisantes ont été déterminées dans [7]. Pour les dimensions plus grandes le problème est non-résolu.

Dans toute cette section,  $M$  désigne un domaine de  $\mathbb{R}^3$  et  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction lisse sur  $M$ .

### 1.6.1 Condition nécessaire

**Théorème 1.6.1.** [7] (*Une condition nécessaire*)

*Si  $f$  admet une conjuguée, alors  $f$  vérifie l'inégalité différentielle suivante :*

$$X := 2f_i^j f_j f^{ik} f_k - f^i f_i f^{jk} f_{jk} + f^i f_i (f_j^j)^2 \leq 0. \quad (1.26)$$

D'après la définition (1.5.9), si  $f$  admet une conjuguée, alors il existe une 1-forme fermée  $\omega_j$  (cette notation veut dire  $\omega_j dx^j$  qui serait la forme duale de la conjuguée de  $f$ ) telle que :

$$f^j \omega_j = 0 \quad \text{et} \quad \omega^j \omega_j = f^j f_j. \quad (1.27)$$

Pour que la réciproque soit vrai, il faut que  $\omega_j$  soit localement exacte.

En dérivant (1.27) par  $\nabla^i$ , on a :

$$f^{ij} + \omega^{ij} f_j = 0 \quad \text{et} \quad \omega^{ij} \omega_j = f^{ij} f_j. \quad (1.28)$$

En appliquant une transvection par  $f_i$  à la deuxième équation de (1.28), puis en utilisant la première pour éliminer le terme  $\omega^{ij} f_i$  et en utilisant que  $\omega_{ij} = \nabla_i \omega_j$  est symétrique, on a l'équation :

$$f^{ij} \omega_i \omega_j + f^{ij} f_i f_j = 0. \quad (1.29)$$

**Proposition 1.6.2.** *Si  $f$  admet une fonction conjuguée, alors il existe une 1-forme  $\omega_j$  telle qu'on a le système d'équations suivant :*

$$\begin{cases} f^i \omega_i = 0 \\ \omega^i \omega_i = f^i f_i \\ f^{ij} \omega_i \omega_j + f^{ij} f_i f_j = 0 \end{cases} \quad (1.30)$$

**Remarque 1.6.3.** *Toute solution de (1.30) est dite une direction conjuguée de  $f$ .*

### 1.6.2 Normalisation

Pour simplifier les choses on peut procéder en utilisant les coordonnées normalisées autour d'un point fixe  $x$ . Supposons que  $f_3 \neq 0$ , alors on peut faire une rotation du gradient de  $f$  pour qu'il soit dirigé dans la direction de l'axe des  $x_3$ . En plus, comme la forme quadratique  $f_{ij}$  est symétrique, on peut faire une diagonalisation orthogonale de sa restriction au plan orthogonal à  $f_3$ . Autrement dit, suivant les coordonnées normalisées, on peut supposer qu'au point  $x$  :

$$f_1 = f_2 = 0 \quad \text{et} \quad f_{12} = 0. \quad (1.31)$$

Dans ce cas, les expressions de  $X$ ,  $Y$ , et  $Z$  données dans (1.23) se simplifient en

$$\begin{aligned} X &= 2(f_3)^2(f_{11} + f_{33})(f_{22} + f_{33}), \\ Y &= (f_3)^4(f_{11} - f_{22})^2, \\ Z &= (f_3)^2(f_{11} + f_{22} + 2f_{33}), \end{aligned}$$

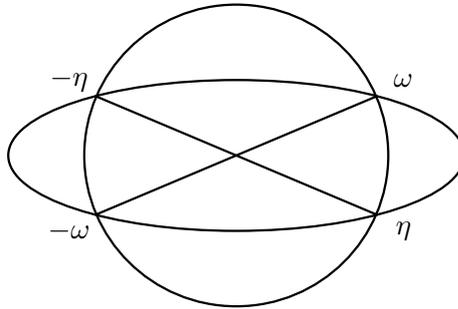
et le système (1.30) devient :

$$\begin{cases} \omega_3 = 0 \\ \omega_1^2 + \omega_2^2 = f_3^2 \\ f_{11}\omega_1^2 + f_{22}\omega_2^2 + f_{33}f_3^2 = 0 \end{cases} \quad (1.32)$$

On distingue les trois cas suivants :

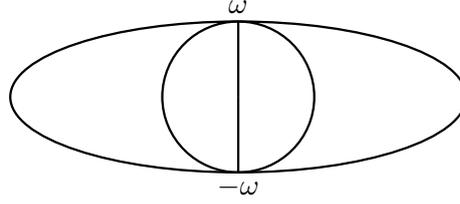
- 1er cas :  $X < 0$  :

Dans ce cas, il existe exactement 4 directions conjuguées distinctes  $(\omega, \eta, -\omega, -\eta)$ .



- 2ème cas :  $X = 0$  et  $Y \neq 0$  :

Dans ce cas, il existe exactement 2 directions conjuguées distinctes  $(\omega$  et  $-\omega)$ .



- 3ème cas :  $X = 0$  et  $Y = 0$  : Dans ce cas, les deux équations se confondent et alors on a une infinité de solutions.

### 1.6.3 Intégrabilité des directions conjuguées (Conditions suffisantes)

On peut caractériser les fonctions ayant  $X = Y = 0$  et admettant une conjuguée par le théorème suivant :

**Théorème 1.6.4.** [7] *Soit  $f$  une fonction réelle lisse (non-constante) telle que  $X(f) = Y(f) = 0$ , alors  $f$  est l'une des quatre fonctions suivantes (à un multiple scalaire et à des transformations conformes près) :*

$$x_1 \quad \frac{1}{2} \log(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \quad \arctan\left(\frac{x_3}{x_2}\right) \quad \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

ayant les conjuguées correspondantes suivantes

$$x_2 \quad \arctan\left(\frac{x_3}{x_2}\right) \quad \frac{1}{2} \log(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \quad \frac{x_2 \cos \theta + x_3 \sin \theta}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Pour le cas générique  $X < 0$ , on donne dans [7] la preuve qu'il existe trois équations qui complètent la caractérisation des fonctions ayant une conjuguée avec  $X < 0$  (notons que la fonction et sa conjuguée ont le même  $X$ ). Mais vu la complexité de ces équations, on va présenter seulement celle qui est la plus simple parmi les trois :

**Proposition 1.6.5.** *Soient  $S$ ,  $R$  et  $V$  les invariants conformes donnés par*

$$\begin{aligned} S &= f^i (J \nabla_i X - 3X \nabla_i J) \\ R &= f^i (J \nabla_i Z - 2Z \nabla_i J) \\ V &= 4J \epsilon^{jkl} (J f_k^i Q_{ij} - f^i Q_{ij} f_{km} f^m) f_l \end{aligned}$$

où  $Q^{ij} = f^{ijk} f_k - 2f^{ik} f_k^j$ . Localement, une fonction  $f$  lisse telle que  $X(f) < 0$  admet une fonction conjuguée si et seulement si  $f$  vérifie (1.26),

$$P := 2(ZS - 2XR + 2XY)^2 + XV^2 = 0$$

et deux autres équations, toutes exprimées en fonction d'une longue liste d'invariants conformes.

On remarque que les équations caractérisant les fonctions conjuguées en dimension trois sont assez compliquées de façon qu'il est presque impossible d'obtenir des solutions à partir d'une résolution directe de ces équations. Ce qui motive l'ansatz considéré dans le Chapitre 2.

## 1.7 Applications harmoniques, biharmoniques et morphismes harmoniques

Dans le concept des espaces harmoniques de BreLOT, les morphismes harmoniques ont été introduits par Constantinescu et Cornea en 1965 [21]. Une propriété des applications holomorphes entre surfaces de Riemann est qu'elles préservent les fonctions harmoniques dans le sens que le pull-back d'une fonction harmonique (définie localement) par une telle application est harmonique. Un morphisme harmonique entre variétés riemanniennes est défini comme une application continue qui préserve les fonctions harmoniques. Dans le Chapitre 4 on va étudier des applications pour lesquelles le pull-back d'une fonction harmonique est biharmonique. On verra qu'il s'agit d'une condition très naturelle qui porte sur la théorie des applications biharmoniques.

### 1.7.1 Applications harmoniques entre variétés riemanniennes

On définit le Laplacien (ou l'opérateur de Laplace-Beltrami)  $\Delta = \Delta^M = \Delta_g$  sur une variété riemannienne  $(M^m, g)$  par

$$\Delta f = \text{Trace}_g \nabla df,$$

où  $f$  est une fonction à valeurs réelles définie sur un ouvert  $U$  de  $M$ . Suivant des coordonnées locales  $(x^1, \dots, x^m)$  on a

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{|g|} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) = g^{ij} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k} \right). \quad (1.33)$$

Les solutions de l'équation de Laplace  $\Delta f = 0$  sont dites fonctions harmoniques sur  $U$ ; comme par exemple la fonction  $f$  définie sur la sphère  $S^2 \setminus \{(\pm 1, 0, 0)\}$  par  $f(\theta, \varphi) = \ln \tan(\theta/2)$ .

Soient maintenant  $(M^m, g)$  et  $(N^n, h)$  deux variétés riemanniennes,  $\varphi : M \rightarrow N$  une application de classe  $C^2$ , et  $D$  un domaine compact de  $M$ . L'énergie de  $\varphi$  sur  $D$  est définie par :

$$E(\varphi; D) = \int_D e(\varphi) v_g = \frac{1}{2} \int_D |d\varphi|^2 v_g,$$

## 1.7. APPLICATIONS HARMONIQUES, BIHARMONIQUES ET MORPHISMES HARMONIQUES

---

où  $e(\varphi) : M \rightarrow [0, \infty)$  est la densité d'énergie de  $\varphi$  donnée par

$$e(\varphi)_x = \frac{1}{2} |d\varphi_x|^2 \quad \text{pour tout } x \in M$$

avec  $|d\varphi_x|$  la norme de Hilbert-Schmidt donnée par (1.17). Dans le cas où  $M$  est compact, on note  $E(\varphi) = E(\varphi; M)$ . Notons que si  $\dim M = 2$ , l'énergie est conformément invariante.

**Définition 1.7.1.** *On dit que  $\varphi : M \rightarrow N$  est harmonique si elle est un point critique de la fonctionnelle d'énergie  $E$ . Plus précisément, si*

$$\frac{d}{dt} E(\varphi_t; D) \Big|_{t=0} = 0 \tag{1.34}$$

pour tout domaine compact  $D$  et toute variation  $\{\varphi_t\}$  de  $\varphi$  à support  $D$  (i.e. une famille d'applications lisses qui dépendent d'une façon lisse du paramètre  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ , avec  $\varphi_0 = \varphi$ ).

Par un théorème de J. Eells et J. H. Sampson on a :

**Théorème 1.7.2.** [25] *Soit  $\varphi : M \rightarrow N$  une application lisse, alors*

$$\varphi \text{ est harmonique si et seulement si } \tau(\varphi) = 0.$$

Notons que localement,

$$\tau^\alpha(\varphi) = g^{ij} \left( \frac{\partial^2 \varphi^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} - {}^M \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^k} + {}^N \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi^\gamma}{\partial x^j} \right)$$

où  ${}^M \Gamma_{ij}^k$  et  ${}^N \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$  sont les symboles de Christoffel associés aux connections de Levi-Civita sur  $(M, g)$  et  $(N, h)$  respectivement. On peut alors voir que les applications harmoniques généralisent les fonctions harmoniques ( $N = \mathbb{R}$ ) et les géodésiques ( $M = S^1$ ).

**Exemple 1.7.3.** *Toute application holomorphe ou anti-holomorphe définie sur un ouvert de  $\mathbb{C}$  (ou une surface de Riemann) à valeurs dans  $\mathbb{C}^m$  est harmonique.*

**Exemple 1.7.4.** *(La projection radiale)*

*La projection radiale donnée par*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^m \setminus \{0\} &\rightarrow S^{m-1} \\ x &\mapsto \frac{x}{|x|} \end{aligned}$$

pour  $m = 2, 3, \dots$  est harmonique.

**Exemple 1.7.5.** *La fibration de Hopf  $S^3 \rightarrow S^2$  donnée par (1.18) est une application harmonique.*

### 1.7.2 Morphismes harmoniques

Un morphisme harmonique est une application qui préserve les solutions de l'équation de Laplace : explicitement il s'agit d'une application pour laquelle le pull-back d'une fonction harmonique (définie localement) est harmonique. Une caractérisation complète des telles applications a été établie dans [28], [33] et [12].

**Définition 1.7.6.** *Une application  $\varphi : (M^m, g) \rightarrow (N^n, h)$  entre deux variétés riemanniennes est dite morphisme harmonique, si pour toute fonction harmonique  $f$  définie sur un ouvert  $U$  de  $N$ ,  $f : U \subseteq N^n \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\varphi^{-1}(U) = V$  non-vide, la composée  $f \circ \varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$  est aussi harmonique sur  $V \subseteq M$ .*

On peut déduire immédiatement de cette définition que la composée de deux morphismes harmoniques est un morphisme harmonique.

**Remarque 1.7.7.** *Comme le Laplacien est (2 fois) le générateur de mouvement Brownien, la définition implique qu'en théorie stochastique, un morphisme harmonique applique un mouvement Brownien sur  $M$  en un mouvement Brownien sur  $N$ . Or, l'image d'un mouvement Brownien est un ensemble dense, donc si  $\varphi$  est un morphisme harmonique non-constant de  $M$  dans  $N$ , alors  $\dim M \geq \dim N$  [13].*

Dans le théorème suivant, on donne la caractérisation de Fuglede-Ishihara des morphismes harmoniques.

**Théorème 1.7.8.** [28][33] *Une application entre deux variétés riemanniennes est un morphisme harmonique si et seulement si elle est semi-conforme et harmonique.*

De cette caractérisation, on a une autre façon de voir que la dimension de  $M$  doit être supérieure ou égale à la dimension de  $N$  car toute application semi-conforme avec  $m < n$  est constante, voir §1.5.1. On donnera une caractérisation similaire pour les morphismes harmoniques généralisés dans le Chapitre 4.

**Exemple 1.7.9.** *Voici quelques exemples simples de morphismes harmoniques :*

- (i) *Toute fonction holomorphe sur  $\mathbb{C}^m$  (ou sur une variété Kählérienne) à valeurs dans  $\mathbb{C}$  est un morphisme harmonique de dilatation  $\lambda = |f'|$ .*
- (ii) *Les projections de  $M \times N \rightarrow M$  ou  $N$  sont des morphismes harmoniques de dilatation  $\lambda = 1$ .*
- (iii) *La projection radiale  $\varphi : \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \rightarrow S^{m-1}$  est un morphisme harmonique de dilatation  $\lambda(x) = 1/|x|$ .*

**Exemple 1.7.10.** (i) *Les projections définies dans §1.5.2 sur sept des huit géométries en dimension 3 (toutes les géométries sauf la géométrie Sol qui ne supporte aucun morphisme harmonique, même localement [12]) sont des morphismes harmoniques.*

## 1.7. APPLICATIONS HARMONIQUES, BIHARMONIQUES ET MORPHISMES HARMONIQUES

---

(ii) L'application donnée par la composition suivante

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} & \xrightarrow{P} & \mathbb{C}P^1 & \xrightarrow{I} & \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\ (q_1, q_2) & \mapsto & [q_1, q_2] & \mapsto & q_1/q_2 \end{array}$$

est un morphisme harmonique qui se restreint à la fibration de Hopf sur  $S^3 \subset \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ .

On présente ci-dessous quelques théorèmes sur les morphismes harmoniques qui seront utiles dans la suite. Une simple conclusion du Théorème 1.7.8 en ce qui concerne les fonctions conjuguées est donnée dans le corollaire ci-dessous.

**Corollaire 1.7.11.** *Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions harmoniques conjuguées définies sur une variété riemannienne  $(M^m, g)$ , alors  $\varphi = (f, g) : M^m \rightarrow \mathbb{R}^2$  est un morphisme harmonique.*

**Théorème 1.7.12.** [1] *Soit  $P : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application semi-conforme polynomiale. Alors  $P$  est harmonique et par suite un morphisme harmonique.*

Une interprétation géométrique de la caractérisation indiquée dans 1.7.8 transforme le problème d'harmonicité en minimalité des fibres comme on l'explique ci-dessous.

**Théorème 1.7.13.** [8] *Soit  $\varphi : (M^m, g) \rightarrow (N^n, h)$  une application lisse semi-conforme (non-constante) entre deux variétés riemanniennes de dimensions  $m, n \geq 1$ . Alors  $\varphi$  est harmonique, et donc un morphisme harmonique si en tout point régulier, la courbure moyenne des fibres  $\mu^\mathcal{V}$  est exprimée en fonction du gradient de la dilatation  $\lambda$  par*

$$(n-2)\mathcal{H}(\text{grad } \ln \lambda) + (m-n)\mu^\mathcal{V} = 0.$$

*En particulier, si  $n = 2$ , alors  $\varphi$  est harmonique, et donc un morphisme harmonique si et seulement si en chaque point régulier les fibres de  $\varphi$  sont minimales.*

**Théorème 1.7.14.** [11] *Si  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow (N^2, h)$  est un morphisme harmonique entier défini sur  $\mathbb{R}^3$ , alors  $\varphi$  est la composée d'une projection orthogonale à valeurs dans  $\mathbb{C}$  et d'une transformation conforme dans  $N^2$ .*

### 1.7.3 Applications biharmoniques et morphismes biharmoniques

Une fonction biharmonique sur une variété riemannienne  $(M, g)$  (aussi dite fonction de stress) est une solution de l'équation  $\Delta^2 f = 0$ . L'opérateur  $\Delta^2$  s'appelle le bi-Laplacien. Ces fonctions jouent un rôle essentiel dans l'élasticité et l'hydrodynamique. D'autre part, les courbes élastiques, appelées *elastica* ont été introduites par L. Euler en 1744 [26]; il s'agit des courbes qui extrémisent la fonctionnelle de bi-énergie (voir ci-dessous) avec la contrainte que la longueur reste fixe. Dans cette partie on donne d'une façon analogue aux parties précédentes, la définition des applications biharmoniques et des morphismes biharmoniques.

## 1.7. APPLICATIONS HARMONIQUES, BIHARMONIQUES ET MORPHISMES HARMONIQUES

---

**Définition 1.7.15.** Soit  $\varphi : (M, g) \rightarrow (N, h)$  une application lisse entre deux variétés riemanniennes et  $D$  un domaine compact de  $M$ . La bi-énergie de  $\varphi$  sur  $D$  est définie par :

$$E^2(\varphi) = \frac{1}{2} \int_D |\tau(\varphi)|^2 v_g$$

avec  $\tau(\varphi)$  le champ de tension donné par (??).

Les points critiques de la fonctionnelle de bi-énergie  $E^2$  sont dits applications biharmoniques.

L'équation d'Euler-Lagrange associée à  $E^2$  est

$$\tau^2(\varphi) := \text{Trace}_g (\nabla^\varphi \nabla^\varphi - \nabla_{\nabla_M}^\varphi) \tau(\varphi) - \text{Trace}_g R^N(d\varphi, \tau(\varphi))d\varphi = 0, \quad (1.35)$$

avec  $R^N$  le tenseur de courbure de  $(N, h)$  défini dans (1.7). Notons que

$$\tau^2(\varphi) = -J^\varphi(\tau(\varphi))$$

où  $J^\varphi$  est l'opérateur de Jacobi associé à  $\varphi$ .

**Remarque 1.7.16.** Il est clair que toute application harmonique est biharmonique, mais la réciproque n'est pas vraie. En général il est difficile de trouver des exemples d'applications biharmoniques non-harmoniques. Les équations d'Euler-Lagrange est un système elliptique d'ordre 4 difficile à résoudre explicitement et des théorèmes généraux n'existent que dans des situations très particulières. Pourtant, il existe des exemples géométriques inattendus.

**Exemple 1.7.17.** [56] L'application de l'Exemple 1.5.12, dont les fibres sont les cercles de Villarceau, est une application biharmonique non-harmonique. On peut le vérifier par un calcul direct.

**Exemple 1.7.18.** [9] On considère la composée de l'application de Hopf de  $\mathbb{R}^4$  dans  $\mathbb{R}^3$  avec l'inversion dans  $\mathbb{R}^3$ , explicitement

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\longmapsto \frac{1}{(|x|^2 + |y|^2)^2} (|x|^2 - |y|^2, 2xy), \end{aligned}$$

avec  $x, y \in \mathbb{C}$ . Il s'agit d'une application semi-conforme biharmonique non-harmonique.

Le sujet de biharmonicité des applications semi-conformes a été étudié dans [9] où on donne une relation entre la dilatation et la courbure moyenne des fibres qui caractérise ces applications. On peut adapter aussi la définition des morphismes harmoniques pour la biharmonicité :

## 1.7. APPLICATIONS HARMONIQUES, BIHARMONIQUES ET MORPHISMES HARMONIQUES

---

**Définition 1.7.19.** Une application  $\varphi : (M^m, g) \rightarrow (N^n, h)$  entre deux variétés riemanniennes est dite *morphisme biharmonique* si pour toute fonction biharmonique  $f$  définie sur un ouvert de  $N$ ,  $f : U \subseteq N \rightarrow \mathbb{R}$ , telle que  $\varphi^{-1}(U) = V$  non-vide, son pull-back par  $\varphi$ ,  $f \circ \varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$  est aussi biharmonique sur  $V \subseteq M$ .

**Exemple 1.7.20.** [40] L'inversion donnée par

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto \frac{x}{|x|^2} \end{aligned}$$

est un morphisme biharmonique si et seulement si  $n = 4$ .

E. Loubeau et Y-L. Ou ont étudié la caractérisation des morphismes biharmoniques dans [39] et [40]. On présente ci-dessous un théorème qui généralise aux morphismes biharmoniques, la caractérisation des morphismes harmoniques donnée dans le Théorème 1.7.8.

**Théorème 1.7.21.** [40] Soit  $\varphi : (M, g) \rightarrow (N, h)$  une application lisse entre deux variétés riemanniennes. Alors  $\varphi$  est un morphisme biharmonique si et seulement si  $\varphi$  est :

- (i) *semi-conforme*,
- (ii) *biharmonique*,
- (iii) *4-harmonique* (une application  $\varphi$  est dite *p-harmonique* si elle est un point critique de la fonctionnelle de *p-énergie*  $E_p$  donnée par  $E_p(\varphi) = \frac{1}{p} \int_M |\mathrm{d}\varphi|^p v_g$  où  $M$  est compact).
- (iv)

$$\begin{aligned} |\tau(\varphi)|^4 - 2\Delta\lambda^2|\tau(\varphi)|^2 + 4\Delta\lambda^2\mathrm{div}\langle\mathrm{d}\varphi, \tau(\varphi)\rangle + n(\Delta\lambda^2)^2 \\ + 2\langle\mathrm{d}\varphi, \tau(\varphi)\rangle(\nabla|\tau(\varphi)|^2) + |S|^2 = 0, \end{aligned}$$

où  $S \in \odot^2\varphi^{-1}TN$  est la symétrisation de  $\mathrm{Trace}_g \mathrm{d}\varphi \otimes \nabla^\varphi\tau(\varphi)$  et  $\langle\mathrm{d}\varphi, \tau(\varphi)\rangle(X) = \langle\mathrm{d}\varphi(X), \theta(\varphi)\rangle$ .

On remarque d'après le Théorème 1.7.21 que les morphismes biharmoniques correspondent à une classe d'applications semi-conformes biharmoniques très limitée. Il est difficile d'expliciter des exemples à partir de ce théorème. Dans le Chapitre 4, on introduit une généralisation naturelle des morphismes harmoniques (notons aussi qu'un morphisme harmonique n'est pas nécessairement un morphisme biharmonique). Ce qui nous ramène à la construction d'une infinité d'exemples d'applications semi-conformes biharmoniques, non-harmoniques.

## Chapitre 2

# Une classe de fonctions conjuguées réelles analytiques

On rappelle qu'il existe une inégalité différentielle de second ordre et trois équations différentielles d'ordre 3 qui caractérisent les fonctions admettant des conjuguées en dimension 3. Toutes ces conditions sont conformément invariantes et il existe une liste exhaustive des opérateurs d'invariants conformes en fonction desquels on peut exprimer ces équations. Par contre, on remarque que ces équations sont très compliquées à résoudre, ce qui motive le problème de trouver des méthodes plus pratiques pour engendrer des exemples.

Dans l'article [7], on caractérise les fonctions conjuguées admettant une symétrie sphérique ou cylindrique. En plus, les auteurs ont remarqué un ansatz qui permet d'en déduire des solutions à partir d'une équation différentielle en une fonction de deux variables. Pourtant cette équation est aussi difficile à résoudre, et il n'y avait que quelques solutions obtenues par des méthodes ad hoc.

Le but de ce chapitre est d'étudier cet ansatz en caractérisant des classes de solutions réelles analytiques. Pour cela, il faut surmonter des problèmes algébriques difficiles qu'on expliquera dans la suite. Parmi les exemples obtenus, on trouve une famille contenant l'application de Hopf (Exemple 1.5.12), ainsi qu'une famille d'applications semi-conformes définies entièrement sur  $\mathbb{R}^3$  qui ne sont pas des projections suivies par une application conforme dans le plan. En effet, tout morphisme harmonique (voir §1.7.2) est nécessairement de ce type, propriété connue sous le nom *Théorème de Bernstein* pour les morphismes harmoniques [11].

## 2.1 Un ansatz pour obtenir des solutions

Rappelons que les applications semi-conformes à trois variables réelles  $(x, y, z)$  définies sur  $\mathbb{R}^3$  à valeurs complexes sont les solutions de l'équation

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 = 0. \quad (2.1)$$

Notons que cette EDP est conformément invariante par des transformations conformes appliquées sur le domaine  $\mathbb{R}^3$  et le codomaine  $\mathbb{C}$ ; elle est motivée par son lien avec les morphismes harmoniques (puisque c'est une des deux conditions caractérisant les morphismes harmoniques), son lien avec les feuilletages conformes et sa représentation de la généralisation de l'holomorphie dans le plan. En effet, en dimension 2, pour les applications à deux variables, cette équation se factorise en

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - i\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = 0$$

dont les solutions correspondent aux fonctions holomorphes ou anti-holomorphes.

Par contre en dimension 3 on ne peut pas séparer (2.1) en un produit des conditions linéaires.

### 2.1.1 La méthode suivie en général

On note que dans le cas où  $\varphi$  est une application semi-conforme à valeurs dans une surface, par invariance conforme, en considérant les coordonnées isothermes, on peut supposer que localement,  $\varphi$  prend ses valeurs dans le plan complexe et donc qu'elle s'écrit sous la forme

$$\varphi = f + ig$$

où  $f$  et  $g$  sont deux fonctions réelles conjuguées.

Soit  $\mathbb{R}^3$  muni des coordonnées  $(x, y, z)$ . On définit la variable  $u$  par :

$$u = \frac{x^2 + y^2}{2},$$

et soit  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ , définie sur un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ , telle que  $\varphi = f + ig$ . Supposons que  $\varphi$  s'exprime sous la forme

$$\varphi(x, y, z) = (x + iy)u^{-q}\psi(u, z), \quad (2.2)$$

où  $q$  est un entier naturel positif et  $\psi$  est une fonction à valeurs complexes, réelle-analytique dans un voisinage de  $(u, z) = (0, 0)$  et qui ne peut pas être factorisée par  $u$ ,

## 2.1. UN ANSATZ POUR OBTENIR DES SOLUTIONS

---

autrement dit,  $q$  est le plus petit entier naturel tel que  $\varphi$  s'écrit sous la forme (2.2). On note  $\varphi_x := \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ , ... Alors :

$$\begin{aligned}\varphi_x &= u^{-q-1}[u\psi + x(x + iy)(-q\psi + u\psi_u)], \\ \varphi_y &= u^{-q-1}[iu\psi + y(x + iy)(-q\psi + u\psi_u)], \\ \varphi_z &= u^{-q}(x + iy)\psi_z,\end{aligned}$$

et

$$\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2 = 2(x + iy)^2 u^{-2q-1} \{q(q-1)\psi^2 + u(1-2q)\psi\psi_u + u^2\psi_u^2 + \frac{1}{2}u\psi_z^2\}.$$

Ce qui entraîne, en utilisant (2.1), que  $\varphi$  est semi-conforme si et seulement si

$$q(q-1)\psi^2 + u(1-2q)\psi\psi_u + u^2\psi_u^2 + \frac{1}{2}u\psi_z^2 = 0. \quad (2.3)$$

On a réduit notre problème à un problème à deux variables. Notons que toute solution  $\varphi$  de (2.1) peut être multipliée par une constante pour donner une autre solution ; ce qui permet, dans le cas où  $\psi(0,0) \neq 0$ , de supposer que  $\psi(0,0) = 1$ . Par ailleurs, si  $\psi(0,0) \neq 0$ , en considérant (2.3) en  $(u, z) = (0,0)$ , on obtient  $q(q-1)\psi(0,0)^2 = 0$ , et donc  $q = 0$  ou 1.

Dans la suite, on va supposer que  $\psi(0,0) \neq 0$  (donc on peut supposer  $\psi(0,0) = 1$ ) et par suite on va considérer les deux équations suivantes :

$$\psi\psi_u + u\psi_u^2 + \frac{1}{2}\psi_z^2 = 0 \quad (q = 0) \quad (2.4)$$

$$-\psi\psi_u + u\psi_u^2 + \frac{1}{2}\psi_z^2 = 0 \quad (q = 1) \quad (2.5)$$

Notre problème revient alors à expliciter des solutions pour les deux équations (2.4) et (2.5).

**Remarque 2.1.1.** *L'application de Hopf  $\varphi : \mathbb{R}^3 \setminus \{u = 0\} \rightarrow \mathbb{C}$ , dont les fibres sont les cercles de Villarceau, correspond à la solution polynomiale de (2.5),*

$$\psi(u, z) = 1 - 2u - z^2 - 2iz. \quad (2.6)$$

Dans les sections qui suivent on montrera comment on peut déduire des solutions analytiques (développables en séries entières) de (2.4) et (2.5). On démontre dans le Théorème 2.2.3 que les paramètres qui jouent le rôle essentiel dans la caractérisation des solutions sont les dérivées partielles à l'origine successives  $\psi_z, \psi_{zz}, \psi_{zzz}, \dots$ . On donnera des relations de récurrence générales qui permettent en principe de donner des solutions. Pourtant, trouver les solutions explicitement reste un problème difficile. On étudiera en détail

## 2.1. UN ANSATZ POUR OBTENIR DES SOLUTIONS

---

deux cas particuliers permettant de donner des solutions explicites correspondantes aux données

$$\psi_z(\vec{0}) = c, \text{ et } \frac{\partial^\ell \psi}{\partial z^\ell}(\vec{0}) = 0 \text{ pour } \ell \geq 2$$

et

$$\psi_z(\vec{0}) = c_1, \psi_{zz}(\vec{0}) = c_2 \text{ et } \frac{\partial^\ell \psi}{\partial z^\ell}(\vec{0}) = 0 \text{ pour } \ell \geq 3$$

avec  $c$ ,  $c_1$  et  $c_2$  des constantes complexes arbitraires (Théorèmes 2.3.1 et 2.4.1). L'application de Hopf appartient à cette famille de solutions d'applications semi-conformes dépendant de deux paramètres complexes.

### 2.1.2 Application du théorème de Cauchy-Kowalewski (Existence des solutions)

Soit  $\psi(u, z)$  une fonction réelle-analytique à valeurs complexes exprimée sous la forme suivante

$$\psi(u, z) = \sum_{k, \ell=0}^{\infty} a_{k, \ell} u^k z^\ell, \quad (2.7)$$

où  $a_{k, \ell}$  sont des constantes complexes. Pour plus d'informations sur les fonctions réelles-analytiques à plusieurs variables on peut se référer au §9 du texte classique de J. Dieudonné [24]. En particulier, une série qui converge absolument sur un domaine ouvert détermine une fonction bien définie infiniment différentiable sur ce domaine. On s'intéresse aux domaines de convergence voisinages de  $(0, 0)$ . Selon l'ansatz suivi, pour déterminer une application semi-conforme sur un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ , il faut que  $u \geq 0$ .

Il est intéressant de signaler qu'il existe au moins une solution de ces équations. Par exemple, une solution de (2.4) donnée dans [7] correspond à la fonction

$$\psi(u, z) = \frac{be^{cz} e^{\sqrt{1-2c^2u}}}{1 + \sqrt{1-2c^2u}},$$

où  $b$  et  $c$  sont deux constantes arbitraires. Il s'agit de l'unique solution sous forme d'un produit  $\alpha(z)\beta(u)$ , et qui est analytique au voisinage de l'origine.

Le théorème de Cauchy-Kowalewski affirme que le problème de Cauchy a une solution analytique unique si les fonctions apparaissant dans l'équation différentielle, ainsi que les données initiales et la surface initiale sont analytiques. On donne le théorème uniquement pour le cas qui nous intéresse. Dans toute situation, analytique veut dire *réelle-analytique* :

**Théorème 2.1.2.** [32] *On considère l'EDP*

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = F(u, z, \psi, \psi_u)$$

## 2.2. CARACTÉRISATION DES SOLUTIONS

---

en une fonction complexe  $\psi(u, z)$  ( $(u, z) \in \mathbb{R}^2$ ) où  $F$  est analytique. On suppose que  $\psi(u, 0) = \xi(u)$  pour une fonction  $\xi(u)$  analytique ( $u \in U$  ouvert dans  $\mathbb{R}$ ). Alors il existe une solution unique analytique sur un domaine  $W$  dans  $\mathbb{R}^2$  contenant  $U \times ]-\epsilon, \epsilon[$ .

Pour déduire l'existence de solutions réelles analytiques des deux équations (2.4) et (2.5) on peut appliquer le théorème de Cauchy-Kowalewski. En effet, on peut écrire ces deux équations sous la forme

$$\psi_z = (\pm 2\psi\psi_u - 2u\psi_u^2)^{1/2}, \quad (2.8)$$

sous la condition sur le bord  $\psi(u, 0) = \xi(u)$  pour une certaine fonction réelle-analytique  $\xi$  définie dans un voisinage de  $u = 0$  avec  $\xi(0)\xi'(0) \neq 0$ , cette fonction peut être prolongée en une fonction unique,  $\psi(u, z)$ , réelle-analytique dans un voisinage du point  $(u, z) = (0, 0)$  [37].

## 2.2 Caractérisation des solutions

Dans cette section on montre que les solutions des équations (2.4) et (2.5) sont complètement caractérisées par les dérivées partielles d'ordre supérieures à l'origine par rapport à la variable  $z$ .

### 2.2.1 Les paramètres caractérisant les solutions

La méthode considérée qui permet l'obtention de solutions consiste à trouver des relations de récurrence entre les coefficients  $a_{k,\ell}$  de (2.7). Pour établir ces récurrences on procède à calculer les dérivées d'ordre  $n$  à l'origine

$$\frac{\partial^n}{\partial u^k \partial z^\ell} \left\{ \pm \psi\psi_u + u\psi_u^2 + \frac{1}{2}\psi_z^2 \right\} \Big|_{(u,z)=0} \quad (k + \ell = n) \quad (2.9)$$

Pour simplifier la notation, on note

$$\psi_{k,\ell} = \frac{\partial^{k+\ell}\psi}{\partial u^k \partial z^\ell} (0, 0).$$

et donc

$$a_{k,\ell} = \frac{\psi_{k,\ell}}{k!\ell!}.$$

On donne dans la Proposition 2.2.2 l'identité fondamentale appliquée. Dans cette proposition on utilise le lemme suivant :

**Lemme 2.2.1.** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions lisses, on a

$$\forall k, \ell \geq 0, \quad \frac{\partial^{k+\ell}(fg)}{\partial u^k \partial z^\ell} = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^{\ell} \binom{k}{r} \binom{\ell}{s} \frac{\partial^{k+\ell-r-s} f}{\partial^{k-r} u \partial^{\ell-s} z} \frac{\partial^{r+s} g}{\partial u^r \partial z^s}.$$

## 2.2. CARACTÉRISATION DES SOLUTIONS

---

**Proposition 2.2.2.** *Une condition nécessaire et suffisante pour que (2.9) s'annule, c'est que pour tout  $k \geq 1$  et  $\ell \geq 0$ , on a*

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{\ell} \sum_{i=0}^k (k-i \pm 1) \binom{\ell}{j} \binom{k}{i} \psi_{k-i, \ell-j} \psi_{i+1, j} \\ & + \sum_{j=0}^{\ell} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{\ell}{j} \binom{k-1}{i} \psi_{k-i-1, \ell-j+1} \psi_{i+1, j+1} = 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Notons que le signe du premier terme dans (2.9) est incorporé dedans les premiers parenthèses de (2.10)

*Démonstration.* Calculons (2.9) en utilisant le Lemme 2.2.1.

Pour  $k \geq 1$  et  $l \geq 0$ , avec  $n = k + l$ , on a pour le premier terme de l'équation

$$\frac{\partial^n}{\partial u^k \partial z^\ell} (\psi \psi_u) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{\ell} \binom{k}{i} \binom{\ell}{j} \partial_u^{k-i} \partial_z^{\ell-j} \psi \cdot \partial_u^{i+1} \partial_z^j \psi,$$

qui devient en  $(u, z) = (0, 0)$

$$\sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{\ell} \binom{k}{i} \binom{\ell}{j} \psi_{k-i, \ell-j} \psi_{i+1, j}. \quad (2.11)$$

Pour le deuxième terme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n}{\partial u^k \partial z^\ell} (u \psi_u^2) &= \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{\ell} \binom{k}{i} \binom{\ell}{j} \partial_u^i \partial_z^j (u) \cdot \partial_u^{k-i} \partial_z^{\ell-j} (\psi_u^2) \\ &= u \partial_u^k \partial_z^\ell (\psi_u^2) + k \partial_u^{k-1} \partial_z^\ell (\psi_u^2) \\ &= u \partial_u^k \partial_z^\ell (\psi_u^2) + k \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{\ell} \binom{k-1}{i} \binom{\ell}{j} \partial_u^{k-i} \partial_z^{\ell-j} \psi \cdot \partial_u^{i+1} \partial_z^j \psi. \end{aligned}$$

En  $(u, z) = (0, 0)$  ça devient

$$k \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{\ell} \binom{k-1}{i} \binom{\ell}{j} \psi_{k-i, \ell-j} \psi_{i+1, j}. \quad (2.12)$$

Pour le dernier terme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n}{\partial u^k \partial z^\ell} \left( \frac{1}{2} \psi_z^2 \right) &= \frac{\partial^{n-1}}{\partial u^{k-1} \partial z^\ell} (\psi_z \psi_{uz}) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{\ell} \binom{k-1}{i} \binom{\ell}{j} \partial_u^{k-i-1} \partial_z^{\ell-j+1} \psi \cdot \partial_u^{i+1} \partial_z^{j+1} \psi, \end{aligned}$$

## 2.2. CARACTÉRISATION DES SOLUTIONS

---

qui devient en  $(u, z) = (0, 0)$

$$\sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{\ell} \binom{k-1}{i} \binom{\ell}{j} \psi_{k-i-1, \ell-j+1} \psi_{i+1, j+1} \quad (2.13)$$

Donc (2.9) = 0 équivaut à (2.11) + (2.12) + (2.13) = 0.

Enfin, en utilisant que

$$k \binom{k-1}{i} \pm \binom{k}{i} = (k-i \pm 1) \binom{k}{i},$$

en prenant  $\binom{\ell}{j} \psi_{k-i, \ell-j} \psi_{i+1, j}$  facteur commun dans (2.11) et (2.12) et en ajoutant (2.13), on obtient l'égalité (2.10).  $\square$

**Théorème 2.2.3.** *Toute solution analytique  $\psi$  des équations (2.4) et (2.5) telle que  $\psi_{0,0} \neq 0$  et  $\psi_{0,1} \neq 0$ , est uniquement déterminée par les dérivées  $\psi_{0,\ell}$  pour  $\ell = 0, 1, 2, \dots$*

Notons que d'après (2.4) ou (2.5), si  $\psi_{0,0}$  et  $\psi_{0,1} \neq 0$  alors  $\psi \psi_u \neq 0$  en  $(u, z) = (0, 0)$ , et alors le terme  $\pm 2\psi \psi_u - 2u\psi_u^2$  qui est entre les parenthèses dans (2.8) est non-nul ce qui nous permet de déduire d'après le théorème de Cauchy-Kowalewski, qu'il existe des solutions réelles-analytiques au voisinage de  $(u, z) = (0, 0)$ . Rappelons que comme  $\psi_{0,0} \neq 0$ , on peut supposer que  $\psi_{0,0} = 1$ .

*Démonstration.* Appliquons la Proposition 2.2.2 pour isoler les dérivées de  $\psi$  qui sont de plus grand ordre (c'est à dire d'ordre  $n+1$ ) dans (2.9). Les termes de plus grand ordre apparaissent dans la première somme de la proposition avec  $i = k$  et  $j = \ell$  ( $k + \ell = n$ ) et dans la deuxième somme avec  $i = k-1$  et  $j = \ell$ , donc on peut écrire pour tout  $n \geq 1$  et  $k = 1, \dots, n$  :

$$\pm \psi_{0,0} \psi_{k+1, n-k} + \psi_{0,1} \psi_{k, n-k+1} + R(n, k) = 0 \quad (2.14)$$

avec  $R(n, k)$  le reste qui contient les dérivées de  $\psi$  qui sont d'ordre  $\leq n$ .

Pour  $k = 0$ , on a

$$\frac{\partial^n}{\partial z^n} \{ \pm \psi \psi_u + u \psi_u^2 + \frac{1}{2} \psi_z^2 \} |_{(u,z)=0} = \quad (2.15)$$

$$\pm \psi \partial_u \partial_z^n \psi \pm \sum_{i=1}^n \partial_z^{n-i} (\partial_z \psi \cdot \partial_u \partial_z^{i-1} \psi) + u \partial_z^n (\psi_u^2) + \quad (2.16)$$

$$\partial_z \psi \cdot \partial_z^{n+1} \psi + \sum_{i=2}^n \partial_z^{n-i} (\partial_z^2 \partial_z^i \psi), \quad (2.17)$$

ce qui devient en  $(u, z) = (0, 0)$

$$\pm \psi_{0,0} \psi_{1, n} + \psi_{0,1} \psi_{0, n+1} + R(n, 0) = 0,$$

## 2.3. SOLUTIONS PARTICULIÈRES AVEC UN SEUL PARAMÈTRE

---

où

$$R(n, 0) = \pm \sum_{i=1}^n \partial_z^{n-i} (\partial_z \psi \cdot \partial_u \partial_z^{i-1} \psi) + \sum_{i=2}^n \partial_z^{n-i} (\partial_z^2 \partial_z^i \psi).$$

On revient alors à la même forme que l'équation (2.14) et par suite on a pour tout  $n \geq 1$  et  $k = 0, \dots, n$ ,

$$\pm \psi_{0,0} \psi_{k+1,n-k} + \psi_{0,1} \psi_{k,n-k+1} + R(n, k) = 0.$$

Notons que  $\psi_{0,1} \neq 0$  par hypothèse. On combine les équations successives :

$$\begin{aligned} \pm \psi_{0,0} \psi_{k+1,n-k} + \psi_{0,1} \psi_{k,n-k+1} + R(n, k) &= 0 \\ \pm \psi_{0,0} \psi_{k+2,n-k-1} + \psi_{0,1} \psi_{k+1,n-k} + R(n, k+1) &= 0 \end{aligned}$$

de la façon suivante : on commence par  $k = 0$  ; on multiplie la première équation par  $\psi_{0,1}$ , la deuxième par  $\psi_{0,0}$  et ensuite, on additionne ou on soustrait, suivant le signe. On continue avec  $k = 1$ , etc. pour déduire l'identité

$$\pm (\psi_{0,1})^{k+1} \psi_{0,n+1} + (-1)^k (\psi_{0,0})^{k+1} \psi_{k+1,n-k} + \sum_{j=0}^k (-1)^j (\psi_{0,1})^{k-j} (\psi_{0,0})^j R(n, j) = 0. \quad (2.18)$$

pour tout  $k = 0, \dots, n$ . Maintenant on obtient l'assertion du théorème par récurrence sur  $n$  :

Pour  $n = 1$ , d'après (2.3),  $\psi_{1,0}$  est déterminée par  $\psi_{0,0}$  et  $\psi_{0,1}$ . Supposons que pour  $k + \ell = n$ , toute dérivée  $\psi_{k,\ell}$  est déterminée par  $\psi_{0,0}, \psi_{0,1}, \dots, \psi_{0,n}$ . D'après (2.18), on remarque que pour tout  $k = 0, \dots, n$ , la dérivée à l'origine  $\psi_{k+1,n-k}$  est déterminée par  $\psi_{0,0}, \psi_{0,1}, \dots, \psi_{0,n}, \psi_{0,n+1}$ , donc la récurrence est vrai pour  $n + 1$  et donc c'est vrai pour tout  $n$ .  $\square$

## 2.3 Solutions particulières avec un seul paramètre

### 2.3.1 Explicitation de la solution

Notre but est de déterminer explicitement des solutions de (2.4) et (2.5) de la forme (2.7). Dans des certains cas, on verra qu'on peut trouver le développement de la solution en série entière (et l'exprimer sous forme de fonctions connues). Afin d'expliciter la solution, on a besoin de calculer quelques sommes qui contiennent des termes combinatoires, on procède donc aux fonctions génératrices. Tout d'abord, considérons le cas :

$$\psi_{0,0} = 1, \quad \psi_{0,1} = c, \quad \psi_{0,\ell} = 0 \text{ pour tout } \ell \geq 2 \quad (2.19)$$

où  $c$  est une constante complexe arbitraire. On sait par le Théorème 2.2.3 que ces données caractérisent une solution unique. En plus, d'après les équations (2.4) et (2.5) en

### 2.3. SOLUTIONS PARTICULIÈRES AVEC UN SEUL PARAMÈTRE

---

$(u, z) = (0, 0)$ , on a  $\psi\psi_u = -\frac{1}{2}c^2$  et  $\psi\psi_z = \frac{1}{2}c^2$  respectivement. En particulier, si  $c \neq 0$ , l'expression dedans les parenthèses dans (2.8) est non-nulle et donc par le théorème de Cauchy-Kowalewski on peut savoir d'avance que la solution va être convergente au voisinage de l'origine.

**Théorème 2.3.1.** *Pour les données (2.19), la solution de (2.4),*

$\psi(u, z) = \sum_{k, \ell=0}^{\infty} a_{k, \ell} u^k z^\ell$  *est de la forme*

$$\psi(u, z) = 1 + cz + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^{\ell+1} c^{\ell+2k} \binom{\ell + 2k - 2}{\ell} \frac{3^{k-1} (2k - 2)!}{2^{k-1} (k+1)! (k-1)!} u^k z^\ell. \quad (2.20)$$

*Et celle de (2.5) est de la forme*

$$\psi(u, z) = 1 + cz + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^{\ell+k-1} c^{\ell+2k} \binom{\ell + 2k - 2}{\ell} \frac{(2k - 2)!}{2^k k! (k-1)!} u^k z^\ell. \quad (2.21)$$

*De plus, ces séries entières convergent absolument pour tout  $(u, z)$  dans un voisinage de  $(0, 0)$ .*

Pour la preuve de notre théorème, nous avons besoin de calculer quelques sommes en utilisant la méthode des fonctions génératrices. Pour cela, on commence par les lemmes suivants :

**Lemme 2.3.2.**

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{(m+1)(k-m+1)} \binom{2m}{m} \binom{2k-2m-2}{k-m-1} = \\ & \frac{1}{12(k+2)} \binom{2k+2}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)} \binom{2k}{k} - \frac{1}{k+1} \binom{2k-2}{k-1} \end{aligned}$$

*Démonstration.* On sait que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} t^k = \frac{1}{\sqrt{1-4t}},$$

donc

$$S(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} t^{k+1} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-4t}} = -\frac{\sqrt{1-4t}}{2} + \frac{1}{2},$$

et

$$R(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+2} \binom{2k}{k} t^{k+2} = \int \frac{tdt}{\sqrt{1-4t}} = -\frac{\sqrt{1-4t}}{8} + \frac{(1-4t)^{\frac{3}{2}}}{24} + \frac{1}{12}.$$

### 2.3. SOLUTIONS PARTICULIÈRES AVEC UN SEUL PARAMÈTRE

---

Par suite

$$S(t)R(t) = t^3 \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k \text{ où } c_k = \sum_{m=0}^k \frac{1}{(m+1)(k-m+2)} \binom{2m}{m} \binom{2k-2m}{k-m}$$

Alors d'une part,

$$S(t)R(t) = tR(t) + t^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{(m+1)(k-m+1)} \binom{2m}{m} \binom{2k-2m-2}{k-m-1} \right\} t^k, \quad (2.22)$$

et d'autre part,

$$R(t)(S(t) - t) = \frac{1}{48} \left( 4 - 8t - 16t^2 - (5 - 6t)\sqrt{1-4t} + (1-2t)(1-4t)^{3/2} \right).$$

Or,

$$\sqrt{1-4t} = -2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} t^{k+1} + 1$$

et

$$(1-4t)^{3/2} = 24 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+2} \binom{2k}{k} t^{k+2} - 6 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} t^{k+1} + 1.$$

Il s'ensuit que  $R(t)(S(t) - t) =$

$$\frac{1}{12} \left\{ -t - 4t^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \binom{2k-2}{k-1} t^k + 6 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} \binom{2k-2}{k-1} t^{k+1} - 12 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} \binom{2k-2}{k-1} t^{k+2} \right\}$$

En identifiant les coefficients de  $t^{k+2}$  dans cette dernière égalité avec ceux de (2.22), on obtient l'égalité dans le Lemme 2.3.2.  $\square$

**Lemme 2.3.3.**

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{(m+1)(k-m)(k-m+1)} \binom{2m}{m} \binom{2k-2m-2}{k-m-1} \\ &= \frac{1}{6} \left\{ -\frac{k-1}{(k+2)(2k+1)} \binom{2k+2}{k+1} + \frac{6(k-1)}{(k+1)(2k-1)} \binom{2k}{k} \right\} \end{aligned}$$

*Démonstration.* La preuve est similaire à celle du lemme précédent.

Soit

$$T(t) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \binom{2k-2}{k-1} t^{k+1}.$$

Alors

$$T'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{2k-2}{k-1} t^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} t^k = \frac{1}{\sqrt{1-4t}},$$

### 2.3. SOLUTIONS PARTICULIÈRES AVEC UN SEUL PARAMÈTRE

---

d'où,

$$T(t) = -\frac{1}{12} + \frac{t}{2} + \frac{1}{12}(1-4t)^{3/2}.$$

En suivant la même démarche appliquée dans la preuve du Lemme 2.3.2, on a

$$t^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{(m+1)(k-m)(k-m+1)} \binom{2m}{m} \binom{2k-2m-2}{k-m-1} \right\} t^k = T(t)(S(t)-t)$$

d'où on a la formule dans le lemme.  $\square$

**Lemme 2.3.4.** *Le terme général de la relation de récurrence suivante*

$$(k+1)v_{k+1} = \sum_{m=0}^k \left\{ (m+2)(k-m)v_{m+1}v_{k-m} + \frac{1}{2}(2m-1)(2k-2m-1)v_m v_{k-m} \right\}$$

avec  $v_0 = -1$  est donné par

$$v_k = \frac{3^{k-1}(2k-2)!}{2^{k-1}(k+1)!(k-1)!} \text{ pour tout } k \geq 1. \quad (2.23)$$

*Démonstration.* En séparant les termes qui contiennent  $v_0$ , cette relation de récurrence devient :

$$(k+1)v_{k+1} - (3k-1)v_k = \sum_{m=1}^{k-1} \left\{ (m+2)(k-m)v_{m+1}v_{k-m} + \frac{1}{2}(2m-1)(2k-2m-1)v_m v_{k-m} \right\}. \quad (2.24)$$

Mais la solution 2.23 est caractérisée par la relation de récurrence

$$v_{k+1} = \frac{3(2k-1)}{k+2}v_k \text{ pour tout } k \geq 1, \text{ avec } v_1 = \frac{1}{2}.$$

En utilisant cette relation dans le deuxième terme de la somme dans (2.24), on obtient la relation équivalente à (2.24) suivante :

$$(k+1)v_{k+1} - (3k-1)v_k = \frac{1}{6} \sum_{m=1}^{k-1} (m+2)(8(k-m)-1)v_{m+1}v_{k-m} \quad (2.25)$$

On peut vérifier maintenant que (2.23) qui est égale à

$$\frac{1}{k(k+1)} \binom{2k-2}{k-1} \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1},$$

### 2.3. SOLUTIONS PARTICULIÈRES AVEC UN SEUL PARAMÈTRE

---

est une solution de (2.25) : en la substituant, le deuxième membre de l'égalité dans (2.25) devient

$$\frac{1}{6} \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} \sum_{m=1}^{k-1} \frac{8(k-m)-1}{(m+1)(k-m)(k-m+1)} \binom{2m}{m} \binom{2k-2m-2}{k-m-1}$$

qui est, d'après les deux lemmes précédents, égal à

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} \frac{(3k+1)(2k-2)!}{(k-2)!(k+2)!}.$$

Maintenant par un simple calcul on peut vérifier que (2.23) est une solution de (2.25).  $\square$

*Démonstration.* (du Théorème 2.3.1)- Considérons tout d'abord l'équation (2.4) : En dérivant cette équation par rapport à  $z^\ell$ , on obtient

$$\psi_{1,\ell} = (-1)^{\ell+1} \frac{\ell!}{2} c^{\ell+2},$$

en la dérivant maintenant par rapport à  $u$  et ensuite à  $z^\ell$ , on obtient

$$\psi_{2,\ell} = (-1)^\ell \frac{(\ell+2)!}{2} c^{\ell+4}.$$

On continue de cette façon à considérer les dérivées successives de (2.4). On remarque la forme générale des dérivées  $\psi_{k,\ell}$ , plus précisément,

$$\frac{\partial^{k+\ell-1}}{\partial u^{k-1} \partial z^\ell} (\psi \psi_u + u \psi_u^2 + \frac{1}{2} \psi_z^2)|_{(0,0)} = 0 \Rightarrow \psi_{k,\ell} = (-1)^{\ell+1} \frac{(\ell+2k-2)!}{(2k-2)!} c^{\ell+2k} k! f(k),$$

où  $f$  est une fonction dépendant seulement de  $k$ , et donc on peut déduire que la série est de la forme

$$\psi(u, z) = 1 + cz + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^{\ell+1} c^{\ell+2k} \binom{\ell+2k-2}{\ell} f(k) u^k z^\ell.$$

Pour trouver  $f$ , on procède de cette façon :

on pose  $f(0) = -1$ , donc :

$$\begin{aligned} \psi|_{z=0} &= - \sum_{k=0}^{\infty} c^{2k} f(k) u^k \\ \psi_u|_{z=0} &= - \sum_{k=0}^{\infty} c^{2k+2} (k+1) f(k+1) u^k \\ \psi_z|_{z=0} &= c \sum_{k=0}^{\infty} c^{2k} (1+2k-2) f(k) u^k \end{aligned}$$

En appliquant le produit de Cauchy de deux séries entières :

$$\left( \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j \right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,$$

### 2.3. SOLUTIONS PARTICULIÈRES AVEC UN SEUL PARAMÈTRE

---

où  $c_k = \sum_{m=0}^k a_m b_{k-m}$ , on a en  $z = 0$  :

$$\begin{aligned}\psi\psi_u &= \sum_{k=0}^{\infty} c^{2k+2} \left( \sum_{m=0}^k (k-m+1)f(m)f(k-m+1) \right) u^k \\ \psi_u^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} c^{2k+4} \left( \sum_{m=0}^k (m+1)(k-m+1)f(m+1)f(k-m+1) \right) u^k \\ \psi_z^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} c^{2k+2} \left( \sum_{m=0}^k (2m-1)(2k-2m-1)f(m)f(k-m) \right) u^k\end{aligned}$$

En particulier, (en  $z = 0$ )

$$\begin{aligned}u\psi_u^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} c^{2k+4} \left( \sum_{m=0}^k (m+1)(k-m+1)f(m+1)f(k-m+1) \right) u^{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} c^{2k+2} \left( \sum_{m=0}^{k-1} (m+1)(k-m)f(m+1)f(k-m) \right) u^k.\end{aligned}$$

$\psi\psi_u + u\psi_u^2 + \frac{1}{2}\psi_z^2 = 0 \Leftrightarrow$  le coefficient de  $u^k$  dans la série entière est nul. En identifiant le coefficient constant à 0 (c'est à dire pour  $k = 0$ ), on obtient  $f(1) = \frac{1}{2}$  et pour  $k \geq 1$ , on a

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^k \left\{ (k-m+1)f(m)f(k-m+1) + (m+1)(k-m)f(m+1)f(k-m) \right. \\ \left. + \frac{1}{2}(2m-1)(2k-2m-1)f(m)f(k-m) \right\} = 0\end{aligned}$$

En séparant  $m = 0$  dans le premier terme et en remplaçant  $m$  par  $m-1$  dans le deuxième, on obtient la formule de récurrence suivante :

$$\begin{aligned}(k+1)f(k+1) &= \sum_{m=0}^k \left\{ (m+2)(k-m)f(m+1)f(k-m) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(2m-1)(2k-2m-1)f(m)f(k-m) \right\},\end{aligned}\tag{2.26}$$

qui, d'après le Lemme 2.3.4, a une solution

$$f(k) = \frac{3^{k-1}(2k-2)!}{2^{k-1}(k+1)!(k-1)!} = \frac{1}{k(k+1)} \binom{2k-2}{k-1} \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} \quad \forall k \geq 1.\tag{2.27}$$

Pour l'équation (2.5) :

On suit la même méthode adaptée pour expliciter la solution de (2.4). Dans ce cas on obtient la formule de récurrence suivante

$$\begin{aligned}(k+1)f(k+1) &= - \sum_{m=0}^k \left\{ m(k-m)f(m+1)f(k-m) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(2m-1)(2k-2m-1)f(m)f(k-m) \right\},\end{aligned}\tag{2.28}$$

### 2.3. SOLUTIONS PARTICULIÈRES AVEC UN SEUL PARAMÈTRE

---

qui a une solution

$$f(k) = (-1)^k \frac{(2k-2)!}{2^k k! (k-1)!} \quad \forall k \geq 1.$$

Pour la convergence, il suffit de prendre  $z = 0$  dans (2.20), pour obtenir la série en une seule variable  $u$  :

$$\xi(u) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} c^{2k} \frac{3^{k-1} (2k-2)!}{2^{k-1} (k+1)! (k-1)!} u^k.$$

Par une application du test d'Alembert, cette série converge absolument pour

$$|u| < 1/6|c|^2$$

Or, le théorème de Cauchy-Kowalewski nous garantit la convergence du prolongement de la solution déterminée par (2.8) dans le plan  $(u, z)$ . En particulier, ce prolongement contient un voisinage de l'origine.  $\square$

#### 2.3.2 Reformulation de l'expression de la solution

Dans la section précédente on a exprimé les solutions sous forme de séries entières. On reformule dans cette partie les expressions des solutions. Tout d'abord on rappelle la formule du binôme de Newton généralisée

$$\frac{1}{(1-t)^r} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r-1} t^n, \quad (2.29)$$

où la série de terme général  $t^n$  converge absolument pour  $|t| < 1$ . On peut réécrire (2.20) de la forme suivante

$$\psi(u, z) = 1 + cz - \sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{\ell=0}^{\infty} \binom{\ell+2k-2}{2k-2} (-cz)^\ell \right) \frac{2(2k-2)!}{3(k+1)!(k-1)!} \left( \frac{3c^2 u}{2} \right)^k.$$

D'après la formule de Newton, on a

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \binom{\ell+2k-2}{2k-2} (-cz)^\ell = \frac{1}{(1+cz)^{2k-1}}$$

(avec une convergence absolue de la série pour  $|cz| < 1$ ), il s'ensuit que

$$\psi(u, z) = 1 + cz - \frac{2}{3}(1+cz) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-2)!}{(k+1)!(k-1)!} \left( \frac{3c^2 u}{2(1+cz)^2} \right)^k.$$

Ceci nous donne maintenant une information plus précise sur le domaine de convergence. Encore par le test d'Alembert, pour qu'on ait une convergence, il faut que

$$\left| \frac{3c^2 u}{2(1+cz)^2} \right| < 1/4 \quad \Rightarrow \quad |u| < |1+cz|^2/6|c|^2,$$

### 2.3. SOLUTIONS PARTICULIÈRES AVEC UN SEUL PARAMÈTRE

---

(avec  $|z| < 1/|c|$ ) ce qui vérifie, pour  $z = 0$ , l'intervalle de convergence établi dans le théorème précédent.

Considérons maintenant la somme

$$S(t) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \binom{2k-2}{k-1} t^k. \quad (2.30)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(tS(t)) = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{2k-2}{k-1} t^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} t^k = \frac{1}{\sqrt{1-4t}}.$$

La dernière égalité est encore une fois une conséquence de la formule du binôme de Newton et la série converge absolument pour  $|t| < 1/4$ . En intégrant cette expression on obtient

$$S(t) = \frac{1}{12t}(1-4t)^{3/2} + c_1 + \frac{c_2}{t},$$

on choisit les constantes  $c_1$  et  $c_2$  de façon que cette expression soit la même que celle dans (2.30), explicitement

$$S(t) = \frac{1}{12t}(1-4t)^{3/2} - \frac{1}{12t} + \frac{1}{2}.$$

En substituant  $t = 3c^2u/2(1+cz)^2$ , on obtient une solution de la forme

$$\psi(u, z) = \frac{2}{3}(1+cz) - \frac{\{(1+cz)^2 - 6c^2u\}^{3/2}}{3^3c^2u} + \frac{(1+cz)^3}{3^3c^2u}.$$

La singularité en  $u = 0$  est éliminable donc  $\psi$  représente une solution analytique dans le cas où  $t$  est définie pour tout  $(u, z) \in \mathbb{R}^2$  ( $u \geq 0$ ) et avec  $(1+cz)^2 - 6c^2u \neq 0$  pour tout  $(u, z) \in \mathbb{R}^2$  ( $u \geq 0$ ). Un choix convenable de la constante  $c$ , permet de satisfaire à ces conditions, par exemple  $c = i$ .

Or, toute application de la forme  $\varphi(x, y, z) = (x + iy)u^{-q}\psi(u, z)$  est harmonique si et seulement si

$$q(q-1)\psi - 2(q-1)u\psi_u + u^2\psi_{uu} + \frac{1}{2}u\psi_{zz} = 0.$$

Par un simple calcul on peut vérifier que la solution ci-dessus est non-harmonique. Il s'agit alors d'un exemple d'une application semi-conforme analytique qui se prolonge entièrement dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ . Jusqu'à ce jour, les seuls exemples de telles applications sont les morphismes harmoniques qui sont des projections orthogonales  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  suivies d'une application conforme  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  (voir Théorème 1.7.14). On peut comparer avec l'application  $\varphi(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} + iz$  qui est définie et continue sur tout  $\mathbb{R}^3$  mais elle est semi-conforme et analytique seulement aux points tels que  $x^2 + y^2 \neq 0$ .

On procède de la même manière pour l'équation (2.21). On multiplie la solution par 2 pour simplifier l'expression. On obtient alors :

$$\psi(u, z) = 1 + cz + \sqrt{2c^2u + (1+cz)^2}.$$

Or  $c$  est une constante arbitraire donc on peut la choisir de façon que  $2c^2u + (1 + cz)^2$  soit non-nulle. On peut vérifier que dans ce cas les fibres de  $\varphi$  sont des lignes droites et donc  $\varphi$  est harmonique et par suite c'est un morphisme harmonique.

## 2.4 Solutions particulières avec deux paramètres

### 2.4.1 Explicitation de la solution

On s'intéresse dans cette section à l'équation (2.5), notamment on trouve une famille de solutions à deux paramètres qui généralise l'application de Hopf qui en est une solution particulière. On considère les données suivantes

$$\psi_{0,0} = 1, \quad \psi_{0,1} = c_1, \quad \psi_{0,2} = c_2 \quad \psi_{0,\ell} = 0 \text{ pour } \ell \geq 3 \quad (2.31)$$

où  $c_1$  et  $c_2$  sont deux constantes complexes arbitraires.

On sait, d'après le Théorème 2.2.3, que ces données caractérisent une solution unique. Déterminons l'expression explicite de cette solution. Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux constantes complexes telles que

$$c_1 = \alpha + \beta, \quad c_2 = 2\alpha\beta$$

avec  $\alpha + \beta \neq 0$ . Notons que l'application de Hopf correspond à  $\alpha = \beta = -i$ .

Fixons  $k \geq 1$ . On va établir une relation de récurrence en  $\ell$  pour les termes  $\psi_{k,\ell}$ . On commence par  $k = 1$  :

D'après (2.5), on a

$$\psi_{1,0} = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)^2.$$

En utilisant (2.31), on a

$$\partial_z^\ell(\psi\psi_u) = \sum_{s=0}^2 \binom{\ell}{s} \partial_z^s \psi \partial_z^{\ell-s} \psi_u = \psi_{1,\ell} + \ell\psi_{0,1}\psi_{1,\ell-1} + \frac{1}{2}\ell(\ell-1)\psi_{0,2}\psi_{1,\ell-2},$$

où  $\partial_z^\ell$  désigne  $\partial^\ell / \partial z^\ell$ . Par ailleurs,

$$\partial_z^\ell(\frac{1}{2}\psi_z^2) = \partial_z^{\ell-1}(\psi_z\psi_{zz})$$

s'annule pour tout  $\ell \geq 3$ . On en déduit que

$$\psi_{1,1} = -\frac{1}{2}(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)^2, \quad \psi_{1,2} = (\alpha - \beta)^2(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$

et que pour tout  $\ell \geq 3$

$$\begin{aligned} \psi_{1,\ell} &= -\ell(\alpha + \beta)\psi_{1,\ell-1} - \ell(\ell-1)\alpha\beta\psi_{1,\ell-2} \\ \Rightarrow \psi_{1,\ell} + \ell\alpha\psi_{1,\ell-1} &= -\beta\ell(\psi_{1,\ell-1} + \alpha(\ell-1)\psi_{1,\ell-2}). \end{aligned}$$

## 2.4. SOLUTIONS PARTICULIÈRES AVEC DEUX PARAMÈTRES

---

Soit  $u_\ell := \psi_{1,\ell} + \alpha\ell\psi_{1,\ell-1}$ , alors

$$u_\ell = -\beta\ell u_{\ell-1}.$$

Le terme général de cette relation de récurrence est donné par

$$u_\ell = \frac{(-1)^\ell}{2} \ell! \beta^{\ell-2} u_2 \quad \text{avec} \quad u_2 = \psi_{1,2} + 2\alpha\psi_{1,1} = \beta^2(\alpha - \beta)^2;$$

par suite

$$u_\ell = \frac{(-1)^\ell}{2} \ell! (\alpha - \beta)^2 \beta^\ell \quad \Rightarrow \quad \psi_{1,\ell} + \alpha\ell\psi_{1,\ell-1} = \frac{(-1)^\ell}{2} \ell! (\alpha - \beta)^2 \beta^\ell$$

et alors

$$\psi_{1,\ell} = \frac{(-1)^\ell}{2} \ell! (\alpha - \beta)^2 \sum_{r=0}^{\ell} \alpha^{\ell-r} \beta^r = \frac{(-1)^\ell}{2} \ell! (\alpha - \beta) (\alpha^{\ell+1} - \beta^{\ell+1})$$

pour tout  $\ell \geq 1$ . Notons que suivant le choix des deux constantes  $\alpha$  et  $\beta$ , toutes les expressions de ces dérivées sont homogènes et symétriques en  $\alpha$  et  $\beta$ .

Pour  $k = 2$  : On a la récurrence

$$\psi_{2,\ell} + \ell(\alpha + \beta)\psi_{2,\ell-1} + \ell(\ell - 1)\alpha\beta\psi_{2,\ell-2} = \frac{(-1)^{\ell+1}}{2} \ell! (\alpha - \beta)^2 \left\{ (\ell + 1)\alpha^{\ell+2} + 2\alpha^{\ell+1}\beta + 2\alpha^\ell\beta^2 + \dots + 2\alpha\beta^{\ell+1} + (\ell + 1)\beta^{\ell+2} \right\}$$

en posant  $v_\ell := \psi_{2,\ell} + \ell\alpha\psi_{2,\ell-1}$  cette dernière égalité devient :

$$v_\ell + \ell\beta v_{\ell-1} = \frac{(-1)^{\ell+1}}{2} \ell! (\alpha - \beta)^2 \left\{ (\ell + 1)\alpha^{\ell+2} + 2\alpha^{\ell+1}\beta + 2\alpha^\ell\beta^2 + \dots + 2\alpha\beta^{\ell+1} + (\ell + 1)\beta^{\ell+2} \right\}$$

qui a une solution

$$\psi_{2,\ell} = \frac{(-1)^{\ell+1}}{2} \ell! (\alpha - \beta) \left\{ \frac{1}{2}(\ell + 1)(\ell + 2)\alpha^{\ell+3} + (\ell + 1)\alpha^{\ell+2}\beta + (\ell - 1)\alpha^{\ell+1}\beta^2 + \dots \right. \\ \left. \dots + (-\ell + 3)\alpha^3\beta^\ell + (-\ell + 1)\alpha^2\beta^{\ell+1} - (\ell + 1)\alpha\beta^{\ell+2} - \frac{1}{2}(\ell + 1)(\ell + 2)\beta^{\ell+3} \right\}$$

pour tout  $\ell \geq 0$ . On procède de cette façon pour déduire que

$$\psi_{k,\ell} = \frac{(-1)^{k+\ell+1}}{2} \ell! (\alpha - \beta)^2 g_{k,\ell}(\alpha, \beta),$$

où  $g_{k,\ell}(\alpha, \beta)$  est un polynôme homogène, symétrique en  $\alpha$  et  $\beta$  de degré  $\ell + 2(k - 1)$ . Il est difficile d'expliciter une formule générale pour  $g_{k,\ell}(\alpha, \beta)$ , mais on peut le faire pour  $\ell = 0$ .

## 2.4. SOLUTIONS PARTICULIÈRES AVEC DEUX PARAMÈTRES

---

**Théorème 2.4.1.** *La solution  $\psi(u, z) = \sum a_{k,\ell} u^k z^\ell$  de (2.5) qui correspond à (2.31) vérifie*

$$\psi(u, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,0} u^k$$

avec  $a_{0,0} = 1$ ,  $a_{1,0} = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)^2$ , et

$$a_{k,0} = \frac{(-1)^{k+1}}{2k!} (\alpha - \beta)^2 (\alpha + \beta)^2 Q_k(\alpha, \beta) \quad \forall k \geq 2,$$

où

$$Q_k = \frac{(k-2)!}{2^{k-2}} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(2j-1)! (2k-2j-1)!}{(j-1)!^2 (k-j-1)!^2} \alpha^{2k-2j-2} \beta^{2j-2},$$

est un polynôme symétrique en  $\alpha$  et  $\beta$ , homogène de degré  $2k-4$ , tel que la somme des coefficients correspondants à  $\alpha^{2k-2j-2} \beta^{2j-2}$  ( $j = 1, \dots, k-1$ ) est égale à  $2^{k-3} k!$ . En plus, la série converge absolument pour tout  $u$  tel que  $|u| \leq 1/2\mu^2$ , où  $\mu = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$ .

Notons que si on pose  $\alpha = 0$ , et donc  $c_2 = 0$  (on revient au cas des solutions avec un seul paramètre), le rayon de convergence sera le même que celui obtenu dans la section précédente.

*Démonstration.* On commence par calculer explicitement les dérivées  $\psi_{k,0}$ . En utilisant le logiciel MAPLE, on obtient les quantités suivantes :

$$\begin{aligned} \psi_{1,0} &= \frac{1}{2}(\alpha + \beta)^2 & (2.32) \\ \psi_{2,0} &= -\frac{1}{2}(\alpha - \beta)^2 (\alpha + \beta)^2 \\ \psi_{3,0} &= \frac{1}{2}(\alpha - \beta)^2 (\alpha + \beta)^2 (3\alpha^2 + 3\beta^2) \\ \psi_{4,0} &= -\frac{1}{2}(\alpha - \beta)^2 (\alpha + \beta)^2 (15\alpha^4 + 18\alpha^2\beta^2 + 15\beta^4) \\ \psi_{5,0} &= \frac{1}{2}(\alpha - \beta)^2 (\alpha + \beta)^2 (105\alpha^6 + 135\alpha^4\beta^2 + 135\alpha^2\beta^4 + 105\beta^6) \\ &\vdots \end{aligned}$$

On en déduit que les coefficients  $a_{k,0}$  sont de la forme

$$a_{k,0} = \frac{(-1)^{k+1}}{2k!} (\alpha - \beta)^2 (\alpha + \beta)^2 Q_k(\alpha, \beta) \quad \forall k \geq 2,$$

avec

$$Q_k = \frac{(k-2)!}{2^{k-2}} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(2j-1)! (2k-2j-1)!}{(j-1)!^2 (k-j-1)!^2} \alpha^{2k-2j-2} \beta^{2j-2}.$$

## 2.4. SOLUTIONS PARTICULIÈRES AVEC DEUX PARAMÈTRES

---

La démonstration de cette affirmation se fait par récurrence de façon similaire à la preuve du Théorème 2.3.1 dans la section précédente. Pour obtenir l'expression de la somme des coefficients, on peut utiliser encore les fonctions génératrices. On va démontrer que

$$S_k := \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(2j-1)! (2k-2j-1)!}{(j-1)!^2 (k-j-1)!^2} = 2^{2k-5} k(k-1), \quad (2.33)$$

pour tout  $k \geq 2$ , ce qui va compléter alors la preuve du théorème. En effet,

$$\begin{aligned} S_k &= \sum_{j=1}^{k-1} (2j-1)(2k-2j-1) \binom{2j-2}{j-1} \binom{2k-2j-2}{k-j-1} \\ &= \sum_{j=0}^m (2j+1)(2m-2j+1) \binom{2j}{j} \binom{2m-2j}{m-j} \end{aligned}$$

où on a posé  $m = k - 2$ . Or, c'est le coefficient  $c_m$  du produit de Cauchy

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m t^m = S(t)^2$$

avec

$$S(t) = \sum_{j=0}^{\infty} (2j+1) \binom{2j}{j} t^j.$$

Mais on peut écrire

$$S(t) = 2 \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) \binom{2j}{j} t^j - \sum_{j=0}^{\infty} \binom{2j}{j} t^j,$$

avec

$$\sum_{j=0}^{\infty} (j+1) \binom{2j}{j} t^j = \frac{d}{dt} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{2j}{j} t^{j+1} = \frac{d}{dt} \frac{t}{\sqrt{1-4t}} = \frac{1-2t}{(1-4t)^{3/2}}.$$

On en déduit que

$$S(t) = \frac{2-4t}{(1-4t)^{3/2}} - \frac{1}{\sqrt{1-4t}} = \frac{1}{(1-4t)^{3/2}}$$

et d'après la formule du binôme de Newton (2.29), on a

$$S(t)^2 = \frac{1}{(1-4t)^3} = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+2}{2} (4t)^m = \sum_{m=0}^{\infty} 2^{2m-1} (m+2)(m+1) t^m.$$

En remplaçant  $m$  par  $k - 2$ , on a

$$S(t)^2 = \sum_{k=2}^{\infty} 2^{2k-5} k(k-1) t^{k-2}.$$

## 2.4. SOLUTIONS PARTICULIÈRES AVEC DEUX PARAMÈTRES

---

En comparant les coefficients on en déduit (2.33).

Pour déterminer le rayon de convergence on utilise le test de la  $k$ -ième racine pour les séries entières :

$$|a_{k,0}u^k| = \frac{|\alpha - \beta|^2 |\alpha + \beta|^2}{2k!} |Q_k(\alpha, \beta)| |u|^k,$$

Comme il y a une symétrie entre  $\alpha$  et  $\beta$ , on peut supposer que  $|\alpha/\beta| \leq 1$ . Si on écrit

$$Q_k(\alpha, \beta) = b_0 \alpha^{2k-4} + b_1 \alpha^{2k-6} \beta^2 + \dots + b_{k-2} \beta^{2k-4},$$

on a d'après la formule de la somme des coefficients (2.33),

$$\begin{aligned} |Q_k(\alpha, \beta)| &\leq |\beta|^{2k-4} \left\{ b_0 \left| \frac{\alpha}{\beta} \right|^{2k-4} + b_1 \left| \frac{\alpha}{\beta} \right|^{2k-6} + \dots + b_{k-3} \left| \frac{\alpha}{\beta} \right|^2 + b_{k-2} \right\} \\ &\leq |\beta|^{2k-4} (b_0 + b_1 + \dots + b_{k-2}) = |\beta|^{2k-4} 2^{k-3} k!, \end{aligned}$$

et donc

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |a_{k,0}u^k|^{1/k} = 2|\beta|^2 |u| \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(\alpha - \beta)^2 (\alpha + \beta)^2}{2^4 \beta^4} \right|^{1/k},$$

Pour qu'on ait une convergence il faut que  $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_{k,0}u^k|^{1/k} < 1$ . Si  $\alpha = \beta$ , on a une convergence pour tout  $u$ . Sinon, une condition suffisante pour avoir une convergence est que  $2|\beta|^2 |u| < 1$ .  $\square$

### 2.4.2 Généralisation de l'application de Hopf

Considérons le cas de solution correspondant à la famille qui dépend d'un seul paramètre complexe, défini par  $\alpha = \beta$  (dans ce cas l'application de Hopf provient du cas particulier  $\alpha = \beta = -i$ ), i.e. ça correspond aux données

$$\psi_{0,0} = 1, \quad \psi_{0,1} = 2\alpha, \quad \psi_{0,2} = 2\alpha^2, \quad \psi_{0,3} = 0, \dots$$

Dans ce cas  $\psi_{1,0} = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)^2$  et toutes les autres dérivées  $\psi_{k,\ell} = 0$ . Il s'ensuit que

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{x - iy} \{ \alpha^2 (x^2 + y^2) + (1 + \alpha z)^2 \}.$$

Les fibres de  $\varphi$  sont données par les équations

$$\alpha^2 (x^2 + y^2 + z^2) + 2\alpha z - 2\eta(x - iy) + 1 = 0$$

où  $\eta$  est un paramètre variable dans  $\mathbb{C}$ . Soit  $\xi$  le vecteur complexe

$$\xi := \frac{1}{\alpha^2} (-\eta, i\eta, \alpha).$$

On remarque que les fibres sont des cercles dans le plan de centre  $-\operatorname{Re} \xi$  et de normal  $\operatorname{Im} \xi$ . La famille d'applications qui se déduit est une déformation continue de l'application de Hopf, avec cas limite lorsque  $\alpha$  est réel. Dans le cas limite, tous les cercles passent par le point  $x = y = 0, z = -1/\alpha$  et appartiennent aux plans contenant l'axe des  $z$ ; ce qu'on appelle un *bouquet* de cercles.

## Chapitre 3

# Equivalence biconforme entre les solitons de Ricci en dimension 3

Ce chapitre est consacré à étudier les solitons de Ricci qui, par définition, correspondent aux points fixes du flot de Ricci

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2\text{Ricci}(g)$$

où  $g = g(t)$  est une métrique riemannienne qui dépend du temps  $t$ , définie sur une variété  $M$ , avec une métrique initiale  $g(0) = g_0$ . Il est naturel de chercher les points fixes à un difféomorphisme de  $M$  et à une dilatation de  $g$  près. Soit  $g(t)$  une solution du flot de Ricci de la forme

$$g(t) = c(t)\psi_t^* g_0 \tag{3.1}$$

où  $c(t)$  est une fonction  $C^\infty$  réelle positive avec  $c(0) = 1$  et  $\psi_t$  est une famille de difféomorphismes de  $M$  telle que  $\psi_0 = \text{id}$ ; alors

$$\frac{\partial g}{\partial t} \Big|_{t=0} = c'(0)g_0 + \frac{\partial \psi_t^* g_0}{\partial t} \Big|_{t=0}.$$

En posant  $2A = c'(0)$  et  $E(x) = \frac{\partial \psi_t(x)}{\partial t} \Big|_{t=0}$  pour tout  $x \in M$  on obtient l'équation d'un soliton de Ricci :

$$-2\text{Ricci}(g_0) = \mathcal{L}_E g_0 + 2A g_0,$$

où  $E$  est un champ de vecteurs sur  $M$ ,  $\mathcal{L}_E g$  est la dérivée de Lie de  $g$  par rapport à  $E$ , et  $A$  est une constante.

On exploite dans ce chapitre la modification de l'équation d'un soliton suite à une déformation biconforme. Une telle déformation sur une variété de dimension 3 est définie dans la présence d'une application semi-conforme à valeurs dans une surface dont les

### 3.1. EQUATIONS DE STRUCTURE DE CARTAN POUR UNE SUBMERSION SEMI-CONFORME EN DIMENSION 3

---

fibres aux points réguliers forment un feuilletage conforme par des courbes. On considère dans ce cas les équations de structure de la submersion semi-conforme ; ce qui permet de simplifier considérablement le calcul des équations de soliton après des déformations biconformes. Ensuite, on montre que tous les exemples explicites des solitons connus à ce jour, admettant une application semi-conforme dans une surface, de distribution horizontale intégrable, proviennent d'une déformation biconforme de la projection orthogonale  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

Par suite, on montre qu'il existe une famille à un paramètre de solitons dilatants qui s'intercale entre l'espace hyperbolique  $H^3$ , le produit  $H^2 \times \mathbb{R}$  et la géométrie Sol. Par conséquent, ces géométries peuvent être continument déformées à travers des solitons. À noter que ces déformations ne sont pas du type (3.1).

Un avantage de la méthode adaptée est qu'elle permet d'établir l'unicité de la structure de soliton (le flot de soliton  $E$  et la constante  $A$ ) dans la plupart des cas ; le seul cas connu d'une structure de soliton non-unique étant le cas des solitons de Gauss sur  $\mathbb{R}^n$ .

## 3.1 Equations de structure de Cartan pour une submersion semi-conforme en dimension 3

### 3.1.1 Premiers calculs

Soient  $\varphi : (M^3, g) \rightarrow (N^2, h)$  une submersion semi-conforme de dilatation  $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}^+$ , avec  $M^3$  et  $N^2$  orientées, et  $\{f_1, f_2\}$  une base orthonormée directe sur  $N^2$ . Alors

$$\nabla f_1 = \rho_{12} f_2 \quad \text{et} \quad \nabla f_2 = \rho_{21} f_1$$

où  $\rho_{12} = -\rho_{21}$  est la 1-forme de Cartan associée. Soit  $\{e_1, e_2, U\}$  une base orthonormée directe sur  $M^3$  telle que

$$d\varphi(e_i) = \lambda f_i \quad \text{pour} \quad i \in \{1, 2\}.$$

D'après la Proposition 1.5.6, l'existence d'une telle base est assurée.

**Lemme 3.1.1.**

$$g([U, e_i], e_j) = U(\ln \lambda)g(e_i, e_j) \quad \forall i, j \in \{1, 2\}$$

*Démonstration.* D'une part on a

$$\nabla d\varphi(e_i, U) = -d\varphi(\nabla_{e_i} U),$$

d'autre part, la seconde forme fondamentale est symétrique, donc

$$\begin{aligned} \nabla d\varphi(e_i, U) = \nabla d\varphi(U, e_i) &= -d\varphi(\nabla_U e_i) + \nabla_U^{\varphi^{-1}} d\varphi(e_i) \\ &= -d\varphi(\nabla_U e_i) + U(\ln \lambda)d\varphi(e_i). \end{aligned}$$

### 3.1. EQUATIONS DE STRUCTURE DE CARTAN POUR UNE SUBMERSION SEMI-CONFORME EN DIMENSION 3

---

Ainsi

$$d\varphi(\nabla_{e_i}U) = d\varphi(\nabla_U e_i) - U(\ln \lambda)d\varphi(e_i)$$

et alors

$$d\varphi([U, e_i]) = U(\ln \lambda)d\varphi(e_i)$$

Ce qui donne

$$h(d\varphi([U, e_i], f_j) = U(\ln \lambda)h(d\varphi(e_i), f_j)$$

Comme  $\varphi$  est semi-conforme, cette équation entraîne d'après la Définition 1.5.1 que

$$g([U, e_i], e_j) = U(\ln \lambda)g(e_i, e_j).$$

□

**Corollaire 3.1.2.**

$$g(U, \nabla_{e_i}e_j + \nabla_{e_j}e_i) = 2U(\ln \lambda)g(e_i, e_j) \quad \forall i, j \in \{1, 2\}.$$

*Démonstration.* D'après le lemme précédent, on a

$$\begin{aligned} -g(\nabla_{e_i}e_j, U) &= g(e_j, \nabla_{e_i}U) = g(e_j, \nabla_U e_i) - U(\ln \lambda)g(e_j, e_i) \\ -g(\nabla_{e_j}e_i, U) &= g(e_i, \nabla_{e_j}U) = g(e_i, \nabla_U e_j) - U(\ln \lambda)g(e_i, e_j) \end{aligned}$$

Il suffit donc d'additionner ces deux équations et d'utiliser le fait que

$$g(\nabla_U e_i, e_j) + g(e_i, \nabla_U e_j) = U(g(e_i, e_j)) = 0$$

□

**Lemme 3.1.3.**

$$\begin{aligned} g(e_1, \nabla_{e_2}e_2) &= e_1(\ln \lambda) - \varphi^* \rho_{12}(e_2) \\ g(e_2, \nabla_{e_1}e_1) &= e_2(\ln \lambda) + \varphi^* \rho_{12}(e_1) \end{aligned}$$

*Démonstration.* D'après l'équation fondamentale d'une submersion semi-conforme (voir [12], Chap 4, page 120),

$$\tau_\varphi = -d\varphi(\mu).$$

où  $\mu$  est la courbure moyenne des fibres. Or  $\nabla d\varphi(U, U) = -d\varphi(\nabla_U U) = -d\varphi(\mu)$ , donc

$$\sum_{i=1,2} \nabla d\varphi(e_i, e_i) = \tau_\varphi - \nabla d\varphi(U, U) = 0.$$

### 3.1. EQUATIONS DE STRUCTURE DE CARTAN POUR UNE SUBMERSION SEMI-CONFORME EN DIMENSION 3

---

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1,2} \nabla d\varphi(e_i, e_i) \\
&= \sum_{i=1,2} \left( -d\varphi(\nabla_{e_i} e_i) + \nabla_{e_i}^{\varphi^{-1}} d\varphi(e_i) \right) \\
&= \sum_{i=1,2} \left( -d\varphi(\nabla_{e_i} e_i) + e_i(\ln \lambda) d\varphi(e_i) + \lambda^2 \nabla_{f_i}^N f_i \right) \\
&= \sum_{i=1,2} \left( -d\varphi(\nabla_{e_i} e_i) + e_i(\ln \lambda) d\varphi(e_i) \right) + \lambda \rho_{12}(f_1) d\varphi(e_2) + \lambda \rho_{21}(f_2) d\varphi(e_1) \\
&= \sum_{i=1,2} \left( -d\varphi(\nabla_{e_i} e_i) + e_i(\ln \lambda) d\varphi(e_i) \right) + \varphi^* \rho_{12}(e_1) d\varphi(e_2) - \varphi^* \rho_{12}(e_2) d\varphi(e_1).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
0 &= -h(d\varphi(\nabla_{e_1} e_1), d\varphi(e_1)) - h(d\varphi(\nabla_{e_2} e_2), d\varphi(e_1)) \\
&\quad + e_1(\ln \lambda) h(d\varphi(e_1), d\varphi(e_1)) + e_2(\ln \lambda) h(d\varphi(e_2), d\varphi(e_1)) \\
&\quad + \varphi^* \rho_{12}(e_1) h(d\varphi(e_2), d\varphi(e_1)) - \varphi^* \rho_{12}(e_2) h(d\varphi(e_1), d\varphi(e_1)).
\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned}
0 &= -g(\nabla_{e_1} e_1, e_1) - g(\nabla_{e_2} e_2, e_1) + e_1(\ln \lambda) g(e_1, e_1) + e_2(\ln \lambda) g(e_2, e_1) \\
&\quad + \varphi^* \rho_{12}(e_1) g(e_2, e_1) - \varphi^* \rho_{12}(e_2) g(e_1, e_1),
\end{aligned}$$

avec  $g(e_1, \nabla_{e_1} e_1) = 0$ , donc :

$$-g(\nabla_{e_2} e_2, e_1) + e_1(\ln \lambda) - \varphi^* \rho_{12}(e_2) = 0.$$

De même, on peut démontrer que

$$g(e_2, \nabla_{e_1} e_1) = e_2(\ln \lambda) + \varphi^* \rho_{12}(e_1).$$

□

**Remarque 3.1.4.** Considérons l'application de Weingarten sur la distribution horizontale  $H := (\ker d\varphi)^\perp$  :

$$\psi : v \mapsto -\nabla_v U \in H, \quad \forall v \in H$$

D'après le Corollaire 3.1.2 on a

$$\psi(e_1) = U(\ln \lambda) e_1 + g(U, \nabla_{e_1} e_2) e_2 \quad \text{et} \quad \psi(e_2) = -g(U, \nabla_{e_1} e_2) e_1 + U(\ln \lambda) e_2.$$

### 3.1. EQUATIONS DE STRUCTURE DE CARTAN POUR UNE SUBMERSION SEMI-CONFORME EN DIMENSION 3

---

Sa matrice suivant la base  $\{e_1, e_2\}$  est

$$\begin{pmatrix} U(\ln \lambda) & a \\ -a & U(\ln \lambda) \end{pmatrix}$$

où  $a = g(U, \nabla_{e_1} e_2)$ . Notons qu'elle est symétrique si la distribution horizontale est intégrable, donc si  $g(U, [e_1, e_2]) = 0$ , ce qui implique avec le Corollaire 3.1.2 que  $a = g(U, \nabla_{e_1} e_2) = 0$ . En général, les valeurs propres de  $\psi$  sont les racines du polynôme :

$$k^2 - 2U(\ln \lambda)k + U(\ln \lambda)^2 + a^2$$

i.e.  $k = U(\ln \lambda) \pm ia$ .

Dans la suite on aura souvent besoin de la fonction  $a$  définie ci-dessus et donc on lui attribue une définition formelle.

**Définition 3.1.5.** Soit  $\varphi : (M^3, g) \rightarrow (N^2, h)$  une submersion semi-conforme avec  $M^3$  et  $N^2$  orientées. On définit le coefficient d'intégrabilité  $a : M \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$a := g(\nabla_{e_1} e_2, U) = \frac{1}{2}g([e_1, e_2], U),$$

où  $\{e_1, e_2, U\}$  est une base orthonormée adaptée sur  $M$ . Notons que la deuxième égalité se déduit du Corollaire 3.1.2. En particulier,  $a$  est bien définie indépendamment de la base horizontale orthonormée (directe)  $\{e_1, e_2\}$  et s'annule si et seulement si la distribution horizontale est intégrable.

**Corollaire 3.1.6.**

$$g(\nabla_{e_1}, e_2) = d \ln \lambda (J(\cdot)) + \varphi^* \rho_{12} - aU^\flat$$

où  $J$  est la structure presque complexe sur la distribution horizontale, donnée par  $J(e_1) = e_2$  et  $J(e_2) = -e_1$  et  $a := g(\nabla_{e_1} e_2, U)$ .

*Démonstration.* D'après la formule dans le Lemme 3.1.3 on peut calculer  $g(\nabla_{e_2} e_1, e_2) = -g(\nabla_{e_2} e_2, e_1)$  etc.. D'autre part, d'après le Lemme 3.1.1

$$g(\nabla_U e_1, e_2) = g(\nabla_{e_1} U, e_2) = -g(U, \nabla_{e_1} e_2) = -a.$$

□

#### 3.1.2 Les équations de structure

Considérons la base  $\{e_1, e_2, e_3 = U\}$  présentée dans la section précédente et soit  $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$  la base formée des 1-formes  $\theta_1, \theta_2$  et  $\theta_3$ , duales à  $e_1, e_2$  et  $e_3$  respectivement. Posons maintenant

$$\nabla e_i = \sum_j \omega_{ij} e_j,$$

### 3.1. EQUATIONS DE STRUCTURE DE CARTAN POUR UNE SUBMERSION SEMI-CONFORME EN DIMENSION 3

---

avec  $(\omega_{ij})$  la forme de connexion (donc  $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ ). On désire calculer  $\omega_{12}$ ,  $\omega_{13}$  et  $\omega_{23}$ . Comme ci-dessus, posons  $a := g(\nabla_{e_1} e_2, U)$ . Posons aussi  $\mu = \nabla_U U = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2$  la courbure moyenne des fibres. D'après le Corollaire 3.1.6,

$$\omega_{12} = g(\nabla_{e_1}, e_2) = d \ln \lambda \circ J - a\theta_3 + \varphi^*(\rho_{12}) = e_2(\ln \lambda)\theta_1 - e_1(\ln \lambda)\theta_2 - a\theta_3 + \varphi^*(\rho_{12}).$$

Aussi en appliquant le Corollaire 3.1.2, on a

$$\begin{aligned} \omega_{13} = g(\nabla_{e_1}, U) &= g(\nabla_{e_1} e_1, U)\theta_1 + g(\nabla_{e_2} e_1, U)\theta_2 + g(\nabla_{e_3} e_1, U)\theta_3 \\ &= U(\ln \lambda)\theta_1 - a\theta_2 - \mu_1\theta_3. \end{aligned}$$

De même,

$$\omega_{23} = a\theta_1 + U(\ln \lambda)\theta_2 - \mu_2\theta_3.$$

Les équations de structure de Cartan s'écrivent sous la forme :

$$d\theta_i = \sum_j \omega_{ij} \wedge \theta_j \quad (3.2)$$

$$d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \Omega_{ij}. \quad (3.3)$$

où  $\Omega_{ij}(X, Y) = g(R(X, Y)e_i, e_j)$  pour tous vecteurs  $X$  et  $Y$ , avec  $R$  la courbure riemannienne. Pour plus de compréhension on va démontrer (3.3). Étudions les informations que les équations de structure contiennent. On rappelle que la semi-conformalité d'une application est invariante par des déformations conformes du domaine et du codomaine. Or toute surface est localement conformément équivalente au plan euclidien, donc on peut supposer que  $(N, h)$  est une variété plate et que la base  $\{f_1, f_2\}$  est la base canonique dans  $\mathbb{R}^2$ , en particulier,  $\rho_{12} \equiv 0$ . D'abord, la première équation (3.2) donne

$$\begin{cases} d\theta_1 &= e_2(\ln \lambda)\theta_1 \wedge \theta_2 + U(\ln \lambda)\theta_1 \wedge \theta_3 \\ d\theta_2 &= -e_1(\ln \lambda)\theta_1 \wedge \theta_2 + U(\ln \lambda)\theta_2 \wedge \theta_3 \\ d\theta_3 &= -2a\theta_1 \wedge \theta_2 - \mu^b \wedge \theta_3. \end{cases} \quad (3.4)$$

Notons que la dernière équation est bien déjà connue (équation (5) dans [5]).

Calculons maintenant les deux parties de la seconde équation de structure. D'une part,

$$\begin{aligned} d\omega_{12} &= d(e_2(\ln \lambda)) \wedge \theta_1 + e_2(\ln \lambda)d\theta_1 - d(e_1(\ln \lambda)) \wedge \theta_2 - e_1(\ln \lambda)d\theta_2 - da \wedge \theta_3 - a d\theta_3 \\ &= \{-e_2(e_2(\ln \lambda)) - e_1(e_1(\ln \lambda)) + e_2(\ln \lambda)^2 + e_1(\ln \lambda)^2 + 2a^2\} \theta_1 \wedge \theta_2 \\ &+ \{-e_3(e_2(\ln \lambda)) + e_2(\ln \lambda)U(\ln \lambda) - e_1(a) + a\mu_1\} \theta_1 \wedge \theta_3 \\ &+ \{e_3(e_1(\ln \lambda)) - e_1(\ln \lambda)U(\ln \lambda) - e_2(a) + a\mu_2\} \theta_2 \wedge \theta_3, \end{aligned}$$

### 3.1. EQUATIONS DE STRUCTURE DE CARTAN POUR UNE SUBMERSION SEMI-CONFORME EN DIMENSION 3

---

d'autre part

$$\begin{aligned}
d\omega_{12} &= \omega_{13} \wedge \omega_{32} + \Omega_{12} \\
&= -\{U(\ln \lambda)^2 + a^2\} \theta_1 \wedge \theta_2 + \{\mu_2 U(\ln \lambda) - a\mu_1\} \theta_1 \wedge \theta_3 - \{\mu_1 U(\ln \lambda) + a\mu_2\} \theta_2 \wedge \theta_3 \\
&\quad + g(R(\cdot, \cdot)e_1, e_2) \\
&= -\{U(\ln \lambda)^2 + a^2\} \theta_1 \wedge \theta_2 + \{\mu_2 U(\ln \lambda) - a\mu_1\} \theta_1 \wedge \theta_3 - \{\mu_1 U(\ln \lambda) + a\mu_2\} \theta_2 \wedge \theta_3 \\
&\quad + R_{1212}\theta_1 \wedge \theta_2 + R_{1312}\theta_1 \wedge \theta_3 + R_{2312}\theta_2 \wedge \theta_3,
\end{aligned}$$

avec  $R_{ijkl} = g(R(e_i, e_j)e_k, e_l)$ .

En comparant les coefficients on obtient les trois équations suivantes :

$$0 = -e_1(e_1(\ln \lambda)) - e_2(e_2(\ln \lambda)) + \|\text{grad } \ln \lambda\|^2 + 3a^2 - R_{1212} \quad (3.5)$$

$$0 = -U(e_2(\ln \lambda)) + e_2(\ln \lambda)U(\ln \lambda) - e_1(a) + 2a\mu_1 - \mu_2 U(\ln \lambda) - R_{1312} \quad (3.6)$$

$$0 = U(e_1(\ln \lambda)) - e_1(\ln \lambda)U(\ln \lambda) - e_2(a) + 2a\mu_2 + \mu_1 U(\ln \lambda) - R_{2312} \quad (3.7)$$

La première équation est intéressante, on peut la reformuler d'une manière plus invariante de la façon suivante :

or

$$\Delta \ln \lambda = e_1(e_1(\ln \lambda)) + e_2(e_2(\ln \lambda)) + U(U(\ln \lambda)) - (\nabla_{e_1} e_1 + \nabla_{e_2} e_2 + \nabla_U U)(\ln \lambda)$$

et d'après le calcul dans la section précédente,

$$\nabla_{e_1} e_1 + \nabla_{e_2} e_2 + \nabla_U U = e_1(\ln \lambda)e_1 + e_2(\ln \lambda)e_2 + 2U(\ln \lambda)U + \mu \quad (3.8)$$

donc

$$\Delta \ln \lambda = e_1(e_1(\ln \lambda)) + e_2(e_2(\ln \lambda)) + U(U(\ln \lambda)) - \|\text{grad } \ln \lambda\|^2 - U(\ln \lambda)^2 - \mu(\ln \lambda).$$

On obtient ainsi l'identité :

$$R_{1212} = -\Delta \ln \lambda + U(U(\ln \lambda)) - U(\ln \lambda)^2 - \mu(\ln \lambda) + 3a^2,$$

ce qui représente une expression pour la courbure sectionnelle de la distribution horizontale. On procède de la même façon pour les deux autres équations. On aura

$$\begin{aligned}
d\omega_{23} &= da \wedge \theta_1 + ad\theta_1 + d(U(\ln \lambda)) \wedge \theta_2 + U(\ln \lambda)d\theta_2 - d\mu_2 \wedge \theta_3 - \mu_2 d\theta_3 \\
&= \{-e_2(a) + ae_2(\ln \lambda) + e_1(U(\ln \lambda)) - e_1(\ln \lambda)U(\ln \lambda) + 2a\mu_2\} \theta_1 \wedge \theta_2 \\
&\quad + \{-e_3(a) + aU(\ln \lambda) - e_1(\mu_2) + \mu_1\mu_2\} \theta_1 \wedge \theta_3 \\
&\quad + \{-e_3(U(\ln \lambda)) + U(\ln \lambda)^2 - e_2(\mu_2) + \mu_2^2\} \theta_2 \wedge \theta_3,
\end{aligned}$$

### 3.1. EQUATIONS DE STRUCTURE DE CARTAN POUR UNE SUBMERSION SEMI-CONFORME EN DIMENSION 3

---

aussi

$$\begin{aligned} d\omega_{23} &= \omega_{21} \wedge \omega_{13} + \Omega_{23} \\ &= \{ae_2(\ln \lambda) - e_1(\ln \lambda)U(\ln \lambda) + R_{1223}\} \theta_1 \wedge \theta_2 + \{\mu_1 e_2(\ln \lambda) - aU(\ln \lambda) + R_{1323}\} \theta_1 \wedge \theta_3 \\ &\quad + \{-\mu_1 e_1(\ln \lambda) + a^2 + R_{2323}\} \theta_2 \wedge \theta_3. \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients on obtient

$$0 = -e_2(a) + e_1(U(\ln \lambda)) + 2a\mu_2 - R_{1223} \quad (3.9)$$

$$0 = -U(a) + 2aU(\ln \lambda) - e_1(\mu_2) + \mu_1\mu_2 - \mu_1 e_2(\ln \lambda) - R_{1323} \quad (3.10)$$

$$0 = -U(U(\ln \lambda)) + U(\ln \lambda)^2 - e_2(\mu_2) + \mu_2^2 + \mu_1 e_1(\ln \lambda) - a^2 - R_{2323} \quad (3.11)$$

Finalement,

$$\begin{aligned} d\omega_{13} &= -da \wedge \theta_2 - ad\theta_2 + d(U(\ln \lambda)) \wedge \theta_1 + U(\ln \lambda)d\theta_1 - d\mu_1 \wedge \theta_3 - \mu_1 d\theta_3 \\ &= \{-e_1(a) + ae_1(\ln \lambda) - e_2(U(\ln \lambda)) + e_2(\ln \lambda)U(\ln \lambda) + 2a\mu_1\} \theta_1 \wedge \theta_2 \\ &\quad + \{e_3(a) - aU(\ln \lambda) - e_2(\mu_1) + \mu_1\mu_2\} \theta_2 \wedge \theta_3 \\ &\quad + \{-e_3(U(\ln \lambda)) + U(\ln \lambda)^2 - e_1(\mu_1) + \mu_1^2\} \theta_1 \wedge \theta_3, \end{aligned}$$

aussi

$$\begin{aligned} d\omega_{13} &= \omega_{12} \wedge \omega_{23} + \Omega_{13} \\ &= \{ae_1(\ln \lambda) + e_2(\ln \lambda)U(\ln \lambda) + R_{1213}\} \theta_1 \wedge \theta_2 + \{\mu_2 e_1(\ln \lambda) + aU(\ln \lambda) + R_{2313}\} \theta_2 \wedge \theta_3 \\ &\quad + \{-\mu_2 e_2(\ln \lambda) + a^2 + R_{1313}\} \theta_1 \wedge \theta_3 \end{aligned}$$

Par comparaison,

$$0 = -e_1(a) - e_2(U(\ln \lambda)) + 2a\mu_1 - R_{1213} \quad (3.12)$$

$$0 = U(a) - 2aU(\ln \lambda) - e_2(\mu_1) + \mu_1\mu_2 - \mu_2 e_1(\ln \lambda) - R_{2313} \quad (3.13)$$

$$0 = -U(U(\ln \lambda)) + U(\ln \lambda)^2 - e_1(\mu_1) + \mu_1^2 + \mu_2 e_2(\ln \lambda) - a^2 - R_{1313} \quad (3.14)$$

Ainsi on obtient neuf identités qui donnent la relation entre la dilatation  $\lambda$ , la courbure moyenne des fibres  $\mu$ , le coefficient d'intégrabilité  $a$  et la courbure  $R_{ijkl}$ . On peut réécrire quelques unes de ces équations plus nettement. Par exemple,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mu &= \sum_{a=1}^3 \{e_a(g(\mu, e_a)) - g(\mu, \nabla_{e_a} e_a)\} \\ &= e_1(\mu_1) + e_2(\mu_2) - \mu_1 e_1(\ln \lambda) - \mu_2 e_2(\ln \lambda) - \|\mu\|^2 \\ &= e_1(\mu_1) + e_2(\mu_2) - \mu(\ln \lambda) - \|\mu\|^2 \end{aligned} \quad (3.15)$$

### 3.1. EQUATIONS DE STRUCTURE DE CARTAN POUR UNE SUBMERSION SEMI-CONFORME EN DIMENSION 3

---

En additionnant maintenant (3.11) et (3.14), et en notant que  $R_{1313} + R_{2323} = -\text{Ric}(e_3, e_3)$ , on obtient l'identité suivante :

$$\text{Ric}(e_3, e_3) = 2U(U(\ln \lambda)) - 2U(\ln \lambda)^2 + \text{div } \mu + 2a^2. \quad (3.16)$$

On peut aussi par exemple utiliser les équations (3.10) et (3.13) pour simplifier  $\text{rot } \mu$ , plus précisément

$$\begin{aligned} \text{rot } \mu &= (*(\text{d}\mu^b))^{\sharp} \\ &= \{e_1(\mu_2) + \mu_1 e_2(\ln \lambda) - e_2(\mu_1) - \mu_2 e_1(\ln \lambda)\}U \\ &\quad - \{U(\mu_2) - \mu_2 U(\ln \lambda)\}e_1 + \{U(\mu_1) - \mu_1 U(\ln \lambda)\}e_2 \\ &= \{-2U(a) + 4aU(\ln \lambda)\}U + U(\ln(\lambda/\mu_2))\mu_2 e_1 - U(\ln(\lambda/\mu_1))\mu_1 e_2 \end{aligned}$$

Finalement, si on calcule  $\mu_1 \times (3.9) - \mu_2 \times (3.12)$ , on obtient

$$\begin{aligned} \mu(U(\ln \lambda)) &= J\mu(a) + \mu_1 R_{1223} + \mu_2 R_{2113} \\ &= J\mu(a) + \text{Ric}(\mu, U). \end{aligned}$$

On peut déduire d'après ces neuf équations encore d'autres identités utiles. Par exemple (3.6) et (3.12) contiennent toutes les deux  $R_{1312} = R_{1213}$ , ce qui entraîne

$$[e_2, U](\ln \lambda) + e_2(\ln \lambda)U(\ln \lambda) - \mu_2 U(\ln \lambda) = 0.$$

De même les équations (3.7) et (3.9) donnent

$$[e_1, U](\ln \lambda) + e_1(\ln \lambda)U(\ln \lambda) - \mu_1 U(\ln \lambda) = 0$$

Notons qu'on peut aussi déduire ces deux identités directement par le Lemme 3.1.1.

Les équations (3.10) et (3.13) donnent

$$2U(a) - 4aU(\ln \lambda) + e_1(\mu_2) - e_2(\mu_1) + \mu_1 e_2(\ln \lambda) - \mu_2 e_1(\ln \lambda) = 0 \quad (3.17)$$

ce qu'on a déjà utilisé pour obtenir l'expression de  $\text{rot } \mu$  ci-dessus.

**Lemme 3.1.7.**

$$\text{d}\mu^b(e_1, e_2) = e_1(\mu_2) - e_2(\mu_1) + \mu_1 e_2(\ln \lambda) - \mu_2 e_1(\ln \lambda)$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} \text{d}\mu^b(e_1, e_2) &= e_1(\mu^b(e_2)) - e_2(\mu^b(e_1)) - \mu^b([e_1, e_2]) \\ &= e_1(\mu_2) - e_2(\mu_1) - g(\mu, [e_1, e_2]). \end{aligned} \quad (3.18)$$

### 3.2. SOLITONS DE RICCI

---

On sait par le Lemme 3.1.3 que

$$\begin{aligned} g(\mu, [e_1, e_2]) &= \mu_1 g(e_1, \nabla_{e_1} e_2) - \mu_2 g(e_2, \nabla_{e_2} e_1) \\ &= -\mu_1 g(e_2, \nabla_{e_1} e_1) + \mu_2 g(e_1, \nabla_{e_2} e_2) = -\mu_1 e_2(\ln \lambda) + \mu_2 e_1(\ln \lambda), \end{aligned}$$

d'où on a la preuve de ce lemme.  $\square$

Le lemme ci-dessus représente une autre preuve de (3.17) qu'on indique dans le corollaire ci-dessous.

**Corollaire 3.1.8.**

$$\begin{aligned} 2U(a) - 4aU(\ln \lambda) &= -d\mu^b(e_1, e_2) \\ &= -e_1(\mu_2) + e_2(\mu_1) - \mu_1 e_2(\ln \lambda) + \mu_2 e_1(\ln \lambda) \end{aligned}$$

*Démonstration.* Tout d'abord, notons que par le Corollaire 3.1.2,  $2a = g(U, [e_1, e_2])$ , donc d'après (3.18)

$$\begin{aligned} 2U(a) &= U\{g(U, [e_1, e_2])\} = g(\mu, [e_1, e_2]) + g(U, \nabla_U [e_1, e_2]) \\ &= -d\mu^b(e_1, e_2) + e_1(\mu_2) - e_2(\mu_1) + g(U, \nabla_U [e_1, e_2]). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Or d'après l'identité de Jacobi,

$$g(\nabla_U [e_1, e_2], U) = g([U, [e_1, e_2]], U) = g([[U, e_1], e_2], U) + g([[e_2, U], e_1], U).$$

Mais en utilisant le Lemme 3.1.1 et le fait que  $g([U, e_i], U) = -g(e_i, \nabla_U U) = -\mu_i$  ( $i = 1, 2$ ), on a

$$[U, e_i] = U(\ln \lambda)e_i - \mu_i U \quad (i = 1, 2)$$

Et en général  $[fX, Y] = f[X, Y] - Y(f)X$ , donc

$$\begin{aligned} g([U, [e_1, e_2]], U) &= g([U(\ln \lambda)e_1 - \mu_1 U, e_2], U) - g([U(\ln \lambda)e_2 - \mu_2 U, e_1], U) \\ &= -\mu_1 g([U, e_2], U) + \mu_2 g([U, e_1], U) + e_2(\mu_1) - e_1(\mu_2) + 2U(\ln \lambda)g([e_1, e_2], U) \\ &= \mu_1 \mu_2 - \mu_2 \mu_1 + e_2(\mu_1) - e_1(\mu_2) + 4aU(\ln \lambda) \\ &= e_2(\mu_1) - e_1(\mu_2) + 4aU(\ln \lambda). \end{aligned}$$

En substituant maintenant cette identité dans (3.19) on obtient la formule.  $\square$

## 3.2 Solitons de Ricci

Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction du présent chapitre, un soliton de Ricci est une métrique riemannienne  $g$  sur une variété  $M$  satisfaisant

$$\text{Ric}(g) + \frac{1}{2}\mathcal{L}_E g + Ag = 0,$$

où  $E$  est un champ de vecteurs sur  $M$  et  $A$  est une constante. On va établir dans cette section les étapes nécessaires pour expliciter les termes de cette équation.

### 3.2.1 Courbure de Ricci

On peut calculer par les équations de structure la courbure de Ricci sur  $M$ . Plus précisément on a

$$\text{Ric} = R_{11}\theta_1^2 + R_{22}\theta_2^2 + R_{33}\theta_3^2 + 2R_{12}\theta_1 \odot \theta_2 + 2R_{13}\theta_1 \odot \theta_3 + 2R_{23}\theta_2 \odot \theta_3$$

où

$$R_{11} = R_{1221} + R_{1331}, \quad R_{22} = R_{2112} + R_{2332}, \quad R_{33} = R_{3113} + R_{3223}$$

$$R_{12} = R_{1332}, \quad R_{13} = R_{1223}, \quad R_{23} = R_{2113}.$$

Donc

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{11} = \Delta \ln \lambda + \mu(\ln \lambda) - 2a^2 + e_1(\mu_1) - \mu_1^2 - \mu_2 e_2(\ln \lambda) \\ R_{22} = \Delta \ln \lambda + \mu(\ln \lambda) - 2a^2 + e_2(\mu_2) - \mu_2^2 - \mu_1 e_1(\ln \lambda) \\ R_{33} = 2U(U(\ln \lambda)) - 2U(\ln \lambda)^2 + \text{div } \mu + 2a^2 \\ R_{12} = U(a) - 2aU(\ln \lambda) + e_1(\mu_2) - \mu_1\mu_2 + \mu_1 e_2(\ln \lambda) \\ \quad = -U(a) + 2aU(\ln \lambda) + e_2(\mu_1) - \mu_1\mu_2 + \mu_2 e_1(\ln \lambda) \\ R_{13} = U(e_1(\ln \lambda)) - e_1(\ln \lambda)U(\ln \lambda) - e_2(a) + 2a\mu_2 + \mu_1 U(\ln \lambda) \\ \quad = -e_2(a) + e_1(U(\ln \lambda)) + 2a\mu_2 \\ R_{23} = U(e_2(\ln \lambda)) - e_2(\ln \lambda)U(\ln \lambda) + e_1(a) - 2a\mu_1 + \mu_2 U(\ln \lambda) \\ \quad = e_1(a) + e_2(U(\ln \lambda)) - 2a\mu_1 \end{array} \right. \quad (3.20)$$

Rappelons que d'après (3.15)  $\text{div } \mu$  est donnée par

$$\text{div } \mu = e_1(\mu_1) + e_2(\mu_2) - \mu_1 e_1(\ln \lambda) - \mu_2 e_2(\ln \lambda) - |\mu|^2.$$

En particulier,

$$R_{11} + R_{22} = 2\Delta \ln \lambda + 2\mu(\ln \lambda) - 4a^2 + \text{div } \mu$$

et la courbure scalaire

$$S = R_{11} + R_{22} + R_{33} = 2\Delta \ln \lambda + 2\mu(\ln \lambda) - 2a^2 + 2U(U(\ln \lambda)) - 2U(\ln \lambda)^2 + 2\text{div } \mu.$$

On note que cette expression convient avec la formule donnée dans [12] (11.7.3) dans le cas où les fibres sont minimaux et que l'expression de  $R_{12}$  convient avec celle donnée dans [5], car on a

$$R_{12} = U(a) - 2aU(\ln \lambda) + e_1(\mu_2) - \mu_1\mu_2 + \mu_1 e_2(\ln \lambda)$$

donc d'après le Corollaire 3.1.8,

$$\begin{aligned} R_{12} &= \frac{1}{2}\{e_1(\mu_2) + e_2(\mu_1) + \mu_1 e_2(\ln \lambda) + \mu_2 e_1(\ln \lambda)\} - \mu_1\mu_2 \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{L}_\mu g(e_1, e_2) - g(\mu, e_1)g(\mu, e_2) \end{aligned}$$

### 3.2.2 Cas où la surface d'arrivée est de courbure arbitraire : une forme invariante pour la courbure de Ricci

On a déjà exprimé la courbure de Ricci en cas de présence d'une application semi-conforme à valeurs dans une surface de courbure de Gauss nulle, mais on peut adapter facilement la formule dans le cas où l'application est à valeurs dans une surface de courbure non nécessairement nulle. Pour cela, considérons la composition suivante :

$$M^3 \xrightarrow{\varphi} (U \subset \mathbb{R}^2, h) \xrightarrow{\psi} (N^2, \bar{h})$$

où  $h$  est la métrique canonique sur  $\mathbb{R}^2$  et  $\psi$  est un changement conforme de la métrique, i.e.  $\psi$  est l'application identité et il existe une fonction  $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}^+$  lisse sur  $U$  telle que  $\bar{h} = \alpha^2 h$ . Suivant un tel changement, la courbure de Gauss varie de la façon suivante

$$\bar{K} = \alpha^{-2}(K - \Delta \ln \alpha) = -\alpha^{-2} \Delta \ln \alpha$$

(car  $K = 0$ ).

**Lemme 3.2.1.** *La quantité*

$$\Delta \ln \bar{\lambda} + \bar{\lambda}^2 K^N + \mu(\ln \bar{\lambda})$$

*est invariante par des déformations conformes du codomaine.*

*Démonstration.* La dilatation de la composée est donnée par  $\bar{\lambda}(x) = \alpha(\varphi(x))\lambda(x)$ . Alors

$$\Delta \ln \bar{\lambda} = \Delta \ln(\alpha \circ \varphi) + \Delta \ln \lambda$$

Avec

$$\begin{aligned} \Delta \ln(\alpha \circ \varphi) &= d \ln \alpha(\Delta \varphi) + \text{Tr} \nabla d \ln \alpha(d\varphi, d\varphi) = -d \ln \alpha(d\varphi(\mu)) + \lambda^2 \Delta \ln \alpha \\ &= -d \ln \alpha(d\varphi(\mu)) - \alpha^2 \lambda^2 K^N = -\mu(\ln(\alpha \circ \varphi)) - \bar{\lambda}^2 K^N, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \Delta \ln \lambda + \mu(\ln \lambda) &= \Delta \ln \bar{\lambda} - \Delta \ln(\alpha \circ \varphi) + \mu(\ln \bar{\lambda}) - \mu(\ln(\alpha \circ \varphi)) \\ &= \Delta \ln \bar{\lambda} + \bar{\lambda}^2 K^N + \mu(\ln \bar{\lambda}). \end{aligned}$$

Ce qui complète la preuve de ce lemme. □

On peut donc maintenant déduire une expression invariante pour la courbure de Ricci calculée en cas de présence d'une application semi-conforme  $\varphi : (M^3, g) \rightarrow (N^2, h)$  à valeurs dans une surface de courbure arbitraire :

$$\text{Ric}_g = R_{11}\theta_1^2 + R_{22}\theta_2^2 + R_{33}\theta_3^2 + 2R_{12}\theta_1 \odot \theta_2 + 2R_{13}\theta_1 \odot \theta_3 + 2R_{23}\theta_2 \odot \theta_3.$$

Le lemme suivant sera utile pour le reste du chapitre.

### 3.2. SOLITONS DE RICCI

---

**Lemme 3.2.2.** *Soient  $\theta$  une 1-forme et  $\xi$  un champ de vecteurs. On a*

$$\mathcal{L}_\xi \theta^2 = 2\theta \odot \mathcal{L}_\xi \theta = 2\theta \odot \{d(\theta]\xi) + d\theta]\xi\}$$

*Démonstration.* Soient  $X$  et  $Y$  deux champs de vecteurs,

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_\xi \theta^2)(X, Y) &= \xi(\theta(X)\theta(Y)) - \theta(\mathcal{L}_\xi X)\theta(Y) - \theta(X)\theta(\mathcal{L}_\xi Y) \\ &= \theta(X)\{\xi(\theta(Y)) - \theta(\mathcal{L}_\xi Y)\} + \theta(Y)\{\xi(\theta(X)) - \theta(\mathcal{L}_\xi X)\} \\ &= \theta(X)\mathcal{L}_\xi \theta(Y) + \theta(Y)\mathcal{L}_\xi \theta(X) = 2(\theta \odot \mathcal{L}_\xi \theta)(X, Y) \end{aligned}$$

L'expression de  $\mathcal{L}_\xi \theta$  est l'expression standard de la dérivée de Lie pour une 1-forme.  $\square$

**Lemme 3.2.3.**

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mathcal{L}_\mu g &= \left(e_1(\mu_1) - \mu_2 e_2(\ln \lambda)\right)\theta_1^2 + \left(e_2(\mu_2) - \mu_1 e_1(\ln \lambda)\right)\theta_2^2 - \|\mu\|^2 \theta_3^2 \\ &\quad + \left(e_1(\mu_2) + e_2(\mu_1) + \mu_1 e_2(\ln \lambda) + \mu_2 e_1(\ln \lambda)\right)\theta_1 \odot \theta_2 \\ &\quad + \left(\mu_1 U(\ln \lambda) + U(\mu_1) + 2a\mu_2\right)\theta_1 \odot \theta_3 + \left(\mu_2 U(\ln \lambda) + U(\mu_2) - 2a\mu_1\right)\theta_2 \odot \theta_3 \end{aligned}$$

*Démonstration.* La dérivée de Lie de la métrique  $g$  par rapport à  $\mu$  est donnée par

$$\mathcal{L}_\mu g = \mathcal{L}_\mu(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2).$$

Or d'après le Lemme 3.2.2 et les équations de structure (3.4), on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\mu \theta_1^2 &= 2\theta_1 \odot \{d\mu_1 + e_2(\ln \lambda)\mu_1\theta_2 - e_2(\ln \lambda)\mu_2\theta_1 + U(\ln \lambda)\mu_1\theta_3\} \\ \mathcal{L}_\mu \theta_2^2 &= 2\theta_2 \odot \{d\mu_2 - e_1(\ln \lambda)\mu_1\theta_2 + e_1(\ln \lambda)\mu_2\theta_1 + U(\ln \lambda)\mu_2\theta_3\} \\ \mathcal{L}_\mu \theta_3^2 &= 2\theta_3 \odot \{-2a\mu_1\theta_2 + 2a\mu_2\theta_1 - \|\mu\|^2\theta_3\} \end{aligned}$$

Notons que pour toute fonction  $f$ , on a  $df = e_1(f)\theta_1 + e_2(f)\theta_2 + e_3(f)\theta_3$ . On peut obtenir alors la formule en regroupant les différents coefficients de  $\theta_i \odot \theta_j$ .  $\square$

**Lemme 3.2.4.** *Le Laplacien sur les formes, appliqué sur la 1-forme verticale unitaire :  $\Delta\theta_3 := (dd^* + d^*d)\theta_3$  est donné par*

$$\begin{aligned} \Delta\theta_3 &= \left(2e_1(U(\ln \lambda)) - 2e_2(a) - U(\mu_1) + \mu_1 U(\ln \lambda)\right)\theta_1 \\ &\quad + \left(2e_2(U(\ln \lambda)) + 2e_1(a) - U(\mu_2) + \mu_2 U(\ln \lambda)\right)\theta_2 \\ &\quad + \left(2U(U(\ln \lambda)) + 4a^2 + \operatorname{div}\mu + \|\mu\|^2\right)\theta_3 \end{aligned}$$

On note que ce Laplacien donne le signe opposé de celui qu'on a utilisé pour les fonctions.

### 3.2. SOLITONS DE RICCI

---

*Démonstration.* Tout d'abord, en faisant la somme suivant l'indice répété  $a = 1, 2, 3$ , on a d'après (3.8)

$$d^*\theta_3 = -\left(\nabla_{e_a}\theta_3\right)(e_a) = \theta_3\left(\nabla_{e_a}e_a\right) = 2U(\ln\lambda),$$

donc  $dd^*\theta_3 = 2d(U(\ln\lambda))$ . Et en général, pour toute 2-forme  $\Omega$  et toute fonction  $f$ ,

$$d^*(f\Omega) = -\nabla_{e_a}(f\Omega)(e_a) = -e_a(f)\Omega(e_a, \cdot) + fd^*\Omega = -\Omega\lrcorner\text{grad } f + fd^*\Omega.$$

D'après (3.4),  $d\theta_3 = -2a\theta_1 \wedge \theta_2 - \mu^b \wedge \theta_3$ , alors

$$d^*d\theta_3 = 2e_1(a)\theta_2 - 2e_2(a)\theta_1 - 2ad^*(\theta_1 \wedge \theta_2) - d^*(\mu^b \wedge \theta_3).$$

Avec

$$\begin{aligned} d^*(\theta_1 \wedge \theta_2)(e_1) &= -\nabla_{e_a}(\theta_1 \wedge \theta_2)(e_a, e_1) \\ &= -e_a((\theta_1 \wedge \theta_2)(e_a, e_1)) + (\theta_1 \wedge \theta_2)(\nabla_{e_a}e_a, e_1) + (\theta_1 \wedge \theta_2)(e_a, \nabla_{e_a}e_1) \\ &= -e_2(\ln\lambda) + \theta_2(\nabla_{e_1}e_1) - \theta_1(\nabla_{e_2}e_1) \\ &= -e_2(\ln\lambda) + g(e_2, \nabla_{e_1}e_1) - g(e_1, \nabla_{e_2}e_1) = -e_2(\ln\lambda) + e_2(\ln\lambda) = 0 \end{aligned}$$

De même, on peut démontrer que  $d^*(\theta_1 \wedge \theta_2)(e_2) = 0$  et que  $d^*(\theta_1 \wedge \theta_2)(e_3) = -2a$ , c'est à dire

$$d^*(\theta_1 \wedge \theta_2) = -2a\theta_3.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} d^*(\mu^b \wedge \theta_3)(e_1) &= -e_a\left((\mu^b \wedge \theta_3)(e_a, e_1)\right) + (\mu^b \wedge \theta_3)(\nabla_{e_a}e_a, e_1) + (\mu^b \wedge \theta_3)(e_a, \nabla_{e_a}e_1) \\ &= U(\mu_1) - \mu_1\theta_3(\nabla_{e_a}e_a) + \mu_1\theta_3(\nabla_{e_1}e_1) + \mu_2\theta_3(\nabla_{e_2}e_1) - \mu^b(\nabla_Ue_1) \\ &= U(\mu_1) - \mu_1U(\ln\lambda), \end{aligned}$$

où on a utilisé (3.8), le Corollaire 3.1.2 et le fait que par le Lemme 3.1.1,

$$\mu^b(\nabla_Ue_1) = g(\mu, \nabla_Ue_1) = \mu_2g(e_2, \nabla_Ue_1) = \mu_2g(e_2, \nabla_{e_1}U) = -a\mu_2.$$

De même

$$d^*(\mu^b \wedge \theta_3)(e_2) = U(\mu_2) - \mu_2U(\ln\lambda),$$

et

$$d^*(\mu^b \wedge \theta_3)(e_3) = -e_1(\mu_1) - e_2(\mu_2) + \mu_1e_1(\ln\lambda) + \mu_2e_2(\ln\lambda),$$

donc

$$\begin{aligned} d^*(\mu^b \wedge \theta_3) &= \left(U(\mu_1) - \mu_1U(\ln\lambda)\right)\theta_1 + \left(U(\mu_2) - \mu_2U(\ln\lambda)\right)\theta_2 \\ &+ \left(-e_1(\mu_1) - e_2(\mu_2) + \mu_1e_1(\ln\lambda) + \mu_2e_2(\ln\lambda)\right)\theta_3. \end{aligned}$$

Ce qui donne alors la formule du Laplacien. □

### 3.2. SOLITONS DE RICCI

---

**Théorème 3.2.5.** *Soit  $\varphi : (M^3, g) \rightarrow (N^2, h)$  une submersion semi-conforme de dilatation  $\lambda$  et de coefficient d'intégrabilité  $a$ . Alors la courbure de Ricci est donnée par*

$$\begin{aligned} \text{Ric}_g = & \{ \lambda^2 K^N + \Delta \ln \lambda + \mu(\ln \lambda) \} g^{\mathcal{H}} - 2a^2 g + \frac{1}{2} \mathcal{L}_\mu g \\ & - \left( \mu^\flat + U(\ln \lambda) \theta_3 \right)^2 - U(\ln \lambda)^2 \theta_3^2 + \Delta \theta_3 \odot \theta_3, \end{aligned} \quad (3.21)$$

où  $\mu$  est la courbure moyenne des fibres de  $\varphi$ ,  $K^N$  est la courbure de Gauss de  $N$ ,  $\theta_3$  est la 1-forme verticale unitaire et  $\Delta \theta_3 = (\text{dd}^* + \text{d}^* \text{d}) \theta_3$  est le Laplacien appliqué sur les formes.

*Démonstration.* Pour démontrer ce théorème, on peut commencer par vérifier que la formule est correcte dans le cas où l'application  $\varphi$  est à valeurs dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^2$  et passer après à identifier les termes qui changent par une transformation conforme du codomaine.

Comme le tenseur de Ricci est tensoriel, les formules dans (3.20) sont indépendantes du choix de la base orthonormée  $\{f_1, f_2\}$  sur le codomaine. Ainsi en appliquant les Lemmes 3.2.3 et 3.2.4, on peut vérifier que les formules (3.21) et (3.20) conviennent quand on choisit une base orthonormée  $\{e_1, e_2, e_3\}$ . Par exemple, on peut faire la vérification pour l'expression de  $R_{12}$  : À l'aide du Lemme 3.2.3, (3.21) fournit l'identité

$$2R_{12} = e_1(\mu_2) + e_2(\mu_1) + \mu_1 e_2(\ln \lambda) + \mu_2 e_1(\ln \lambda) - 2\mu_1 \mu_2.$$

Mais grâce au Corollaire 3.1.8 on a

$$2R_{12} = 2U(a) - 4aU(\ln \lambda) + 2e_1(\mu_2) + 2\mu_1 e_2(\ln \lambda) - 2\mu_1 \mu_2,$$

ce qui est exactement l'expression de  $R_{12}$  calculée dans (3.20).

Ayant vérifié que l'expression des composantes (3.20) et celle de la forme invariante (3.21) sont les mêmes quand le codomaine est de courbure de Gauss nulle, on peut maintenant appliquer le raisonnement qu'on a mentionné au début de cette section. Plus précisément, on considère la composition

$$M^3 \xrightarrow{\varphi} (U \subset \mathbb{R}^2, h) \xrightarrow{\psi} (N^2, \bar{h}).$$

On remarque que le seul terme qui dépend de  $\psi$  dans (3.21) est  $\lambda^2 K^N + \Delta \ln \lambda + \mu(\ln \lambda)$ . Alors que tous les autres termes sont intrinsèques dans  $(M, g)$  et le feuilletage déterminé par les fibres de  $\varphi$ , qui ne sont pas affectés par des transformations du codomaine. Mais d'après le Lemme 3.2.1, cette quantité est invariante par rapport aux déformations conformes du codomaine. D'où l'expression du tenseur de Ricci (3.21) est établie.  $\square$

**Corollaire 3.2.6.** *Soit  $\varphi : (M^3, g) \rightarrow (N^2, h)$  une submersion semi-conforme à valeurs dans une surface orientée  $N^2$  de courbure de Gauss  $K^N$  et de dilatation  $\lambda$ . Et soit*

### 3.3. DÉFORMATIONS BICONFORMES

$\{e_1, e_2, e_3\}$  une base orthonormée droite adaptée, où  $e_3$  est le vecteur vertical. Désignons par  $R_{ab} = \text{Ric}(e_a, e_b)$  les composantes du tenseur de Ricci ( $a, b = 1, 2, 3$ ). Alors

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{11} = \lambda^2 K^N + \Delta \ln \lambda + \mu(\ln \lambda) - 2a^2 + e_1(\mu_1) - \mu_1^2 - \mu_2 e_2(\ln \lambda) \\ R_{22} = \lambda^2 K^N + \Delta \ln \lambda + \mu(\ln \lambda) - 2a^2 + e_2(\mu_2) - \mu_2^2 - \mu_1 e_1(\ln \lambda) \\ R_{33} = 2U(U(\ln \lambda)) - 2U(\ln \lambda)^2 + \text{div } \mu + 2a^2 \\ R_{12} = U(a) - 2aU(\ln \lambda) + e_1(\mu_2) - \mu_1 \mu_2 + \mu_1 e_2(\ln \lambda) \\ \quad = -U(a) + 2aU(\ln \lambda) + e_2(\mu_1) - \mu_1 \mu_2 + \mu_2 e_1(\ln \lambda) \\ R_{13} = -e_2(a) + e_1(U(\ln \lambda)) + 2a\mu_2 \\ R_{23} = e_1(a) + e_2(U(\ln \lambda)) - 2a\mu_1 \end{array} \right. \quad (3.22)$$

## 3.3 Déformations biconformes

### 3.3.1 L'effet d'une déformation biconforme sur la courbure de Ricci

Soit  $\varphi : (M^3, g_0) \rightarrow (N^2, h)$  une application semi-conforme entre variétés orientées. Considérons une déformation biconforme de la métrique  $g_0$  de la forme :

$$g = \frac{g_0^{\mathcal{H}}}{\sigma^2} + \frac{g_0^{\mathcal{V}}}{\rho^2}$$

On va écrire les objets suivant  $g_0$  avec un indice 0, soit en bas soit en haut, et on va conserver la même notation des objets dans les parties précédentes pour désigner ces objets suivant  $g$ . Par exemple, on va désigner par  $\{e_1^0, e_2^0, e_3^0\}$  la base orthonormée par rapport à  $g_0$  et par  $\lambda_0$  la dilatation de  $\varphi$  par rapport à  $g_0$ , etc. La nouvelle base de champs de vecteurs et la base formée des 1-formes duales sont données par

$$\{e_1 = \sigma e_1^0, e_2 = \sigma e_2^0, e_3 = \rho e_3^0\} \text{ et } \{\theta_1 = \frac{1}{\sigma} \theta_1^0, \theta_2 = \frac{1}{\sigma} \theta_2^0, \theta_3 = \frac{1}{\rho} \theta_3^0\}.$$

**Lemme 3.3.1.** *La courbure moyenne des fibres, le coefficient d'intégrabilité et la dilatation varient de la façon suivante*

$$\mu = \sigma^2(\mu_0 + \mathcal{H} \text{grad}_{g_0} \ln \rho), \quad a = \frac{\sigma^2}{\rho} a_0, \quad \lambda = \sigma \lambda_0.$$

En particulier

$$\mu_1 = \sigma(\mu_1^0 + e_1^0(\ln \rho)), \quad \mu_2 = \sigma(\mu_2^0 + e_2^0(\ln \rho)).$$

*Démonstration.* En utilisant la première équation de structure (3.4), on a

$$\begin{aligned} d\theta_3 &= d\left(\frac{1}{\rho} \theta_3^0\right) = -\frac{1}{\rho^2} d\rho \wedge \theta_3^0 + \frac{1}{\rho} d\theta_3^0 \\ &= -\frac{1}{\rho} d(\ln \rho) \wedge \theta_3^0 + \frac{1}{\rho} (-2a_0 \theta_1^0 \wedge \theta_2^0 - \mu_0^b \wedge \theta_3^0) \\ &= -d(\ln \rho) \wedge \theta_3 - \mu_0^b \wedge \theta_3 - \frac{2a_0 \sigma^2}{\rho} \theta_1 \wedge \theta_2. \end{aligned}$$

### 3.3. DÉFORMATIONS BICONFORMES

---

Avec  $d\theta_3 = -2a\theta_1 \wedge \theta_2 - \mu^b \wedge \theta_3$ , ce qui montre que  $\mu^b = \mu_0^b + d(\ln \rho)|_{\mathcal{H}}$  et ce qui donne alors l'expression de  $\mu$ . On peut déduire aussi l'expression de  $a$  grâce au calcul ci-dessus et on peut voir facilement l'expression de  $\lambda$  en utilisant le fait que la nouvelle base horizontale est un multiple par  $\sigma$ , de la base horizontale initiale.  $\square$

On peut calculer directement la formule du Laplacien après un changement biconforme, sans se référer à la preuve donnée par L. Daniello dans [23].

**Lemme 3.3.2.** [22, 23]

$$\begin{aligned} \Delta_g f &= \sigma^2 \Delta_{g_0} f + (\rho^2 - \sigma^2) U_0(U_0(f)) - 2(\rho^2 - \sigma^2) U_0(\ln \lambda_0) U_0(f) - 2\rho^2 U_0(\ln \sigma) U_0(f) \\ &\quad + \rho^2 U_0(\ln \rho) U_0(f) - \sigma^2 df(\mathcal{H}\text{grad}_{g_0} \ln \rho) \end{aligned}$$

*Démonstration.* D'après (3.8) on a

$$\begin{aligned} \Delta_g f &= e_1(e_1(f)) + e_2(e_2(f)) + e_3(e_3(f)) - df(\nabla_{e_1} e_1 + \nabla_{e_2} e_2 + \nabla_{e_3} e_3) \\ &= e_1(e_1(f)) + e_2(e_2(f)) + e_3(e_3(f)) - e_1(\ln \lambda) e_1(f) - e_2(\ln \lambda) e_2(f) - 2U(\ln \lambda) U(f) - \mu(f) \\ &= e_1(e_1(f)) + e_2(e_2(f)) + e_3(e_3(f)) - df(\text{grad} \ln \lambda) - U(\ln \lambda) U(f) - \mu(f) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \Delta_g f &= \sigma e_1^0(\sigma e_1^0(f)) + \sigma e_2^0(\sigma e_2^0(f)) + \rho e_3^0(\rho e_3^0(f)) \\ &\quad - \sigma^2 e_1^0(\ln(\sigma \lambda_0)) e_1^0(f) - \sigma^2 e_2^0(\ln(\sigma \lambda_0)) e_2^0(f) - 2\rho^2 U_0(\ln(\sigma \lambda_0)) U_0(f) - \mu(f) \\ &= \sigma^2 \{ e_1^0(e_1^0(f)) + e_2^0(e_2^0(f)) + e_3^0(e_3^0(f)) - df(\text{grad}_{g_0} \ln \lambda_0) - U_0(\ln \lambda_0) U_0(f) - \mu_0(f) \} \\ &\quad + (\rho^2 - \sigma^2) (U_0(U_0(f)) + 2(\sigma^2 - \rho^2) U_0(\ln \lambda_0) U_0(f) \\ &\quad - 2\rho^2 U_0(\ln \sigma) U_0(f) + (\rho^2 + \sigma^2) U_0(\ln \rho) U_0(f) - \sigma^2 df(\text{grad}_{g_0} \ln \rho)). \end{aligned}$$

Ce qui donne ainsi la formule demandée.  $\square$

**Corollaire 3.3.3.**

$$\begin{aligned} \Delta_g(\ln \lambda) &= \sigma^2 \Delta_{g_0}(\ln \lambda_0) + (\rho^2 - \sigma^2) U_0(U_0(\ln \lambda_0)) - 2(\rho^2 - \sigma^2) U_0(\ln \lambda_0)^2 - 2\rho^2 U_0(\ln \sigma) U_0(\ln \lambda_0) \\ &\quad + \rho^2 U_0(\ln \rho) U_0(\ln \lambda_0) - \sigma^2 (d \ln \lambda_0)(\mathcal{H}\text{grad}_{g_0} \ln \rho) \\ &\quad + \sigma^2 \Delta_{g_0}(\ln \sigma) + (\rho^2 - \sigma^2) U_0(U_0(\ln \sigma)) - 2(\rho^2 - \sigma^2) U_0(\ln \lambda_0) U_0(\ln \sigma) - 2\rho^2 U_0(\ln \sigma)^2 \\ &\quad + \rho^2 U_0(\ln \rho) U_0(\ln \sigma) - \sigma^2 (d \ln \sigma)(\mathcal{H}\text{grad}_{g_0} \ln \rho). \end{aligned}$$

On peut voir facilement comment la dérivée de Lie  $\mathcal{L}_{Eg}$  change par des déformations biconformes. En général,

$$\mathcal{L}_{u\xi} g = u \mathcal{L}_\xi g + 2du \odot \xi^b \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_\xi(vk) = \xi(v)k + v \mathcal{L}_\xi k \quad (3.23)$$

pour toutes fonctions  $u$  et  $v$ , tout champ de vecteurs  $\xi$  et tout 2-tenseur covariant symétrique  $k$ . En conséquence du Lemme 3.2.2, on peut déduire la formule suivante.

**Lemme 3.3.4.** *Pour tout champ de vecteurs  $\xi$ , on a*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\xi g &= \sigma^{-2} \{ \mathcal{L}_\xi g_0^{\mathcal{H}} - 2\xi(\ln \sigma) g_0^{\mathcal{H}} \} + \rho^{-2} \{ \mathcal{L}_\xi g_0^{\mathcal{V}} - 2\xi(\ln \rho) g_0^{\mathcal{V}} \} \\ &= \sigma^{-2} \mathcal{L}_\xi g_0 + (\rho^{-2} - \sigma^{-2}) \mathcal{L}_\xi (\theta_3^0)^2 - 2\sigma^{-2} \xi(\ln \sigma) g_0^{\mathcal{H}} - 2\rho^{-2} \xi(\ln \rho) (\theta_3^0)^2.\end{aligned}$$

### 3.4 Cas où la distribution horizontale est intégrable

Dans cette section on va étudier les solitons de Ricci de dimension 3 munis d'une projection semi-conforme dans une surface, de distribution horizontale intégrable. On montrera que tous les exemples explicites de tels solitons connus à ce jour sont biconformément équivalents à la projection orthogonale canonique  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Pour illustrer la méthode suivie, on commence par un exemple bien connu, non-publié de R. Bryant (voir [19]).

#### 3.4.1 Le soliton de Bryant

Le soliton de Bryant peut être obtenu par une déformation biconforme de la projection canonique  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Notons  $(x_1, x_2, t)$  les coordonnées sur  $\mathbb{R}^3$ , et soit

$$\begin{aligned}\varphi : (\mathbb{R}^3, g_0) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, t) &\mapsto (x_1, x_2)\end{aligned}$$

la projection canonique avec  $g_0$  la métrique euclidienne sur  $\mathbb{R}^3$  donnée par  $g_0 = dx_1^2 + dx_2^2 + dt^2$ . Considérons une déformation biconforme du type suivant

$$g = \frac{dx_1^2 + dx_2^2}{\sigma(t)^2} + dt^2$$

i.e.  $\rho \equiv 1$  et  $\sigma = \sigma(t)$ . Donc, d'après le Lemme 3.3.1, suivant  $g$ ,  $\mu \equiv 0$ ,  $a \equiv 0$  et  $\lambda = \sigma$ . Et d'après (3.20), les composantes de la courbure de Ricci sont données par :

$$\begin{aligned}R_{11} = R_{22} &= \Delta_g \ln \sigma, \quad R_{33} = 2U(U(\ln \sigma)) - 2U(\ln \sigma)^2, \\ R_{12} &= 0, \quad R_{13} = e_1(U(\ln \sigma)), \quad R_{23} = e_2(U(\ln \sigma)),\end{aligned}$$

avec  $e_1 = \sigma \partial_1$ ,  $e_2 = \sigma \partial_2$ ,  $U = \partial_t$ , ce qui donne  $R_{13} = R_{23} = 0$ . D'après le Lemme 3.3.2

$$\begin{aligned}\Delta_g \ln \lambda = \Delta_g \ln \sigma &= \sigma^2 \Delta_{g_0} \ln \sigma + (1 - \sigma^2) U(U(\ln \sigma)) - 2U(\ln \sigma)^2 \\ &= (\ln \sigma)'' - 2((\ln \sigma)')^2.\end{aligned}$$

Donc  $\text{Ric}_g$  est donné par

$$\begin{aligned}\text{Ric}_g &= R_{11} \theta_1^2 + R_{22} \theta_2^2 + R_{33} \theta_3^2 \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \{ (\ln \sigma)'' - 2((\ln \sigma)')^2 \} (dx_1^2 + dx_2^2) \\ &\quad + \{ 2(\ln \sigma)'' - 2((\ln \sigma)')^2 \} dt^2\end{aligned}$$

### 3.4. CAS OÙ LA DISTRIBUTION HORIZONTALE EST INTÉGRABLE

---

On prend le flot de soliton  $E$  de la forme  $E = f(t)U = f(t)\partial_t$  – il est clair que c’est du type gradient. Pour calculer  $\mathcal{L}_{(f\partial_t)}g$ , on peut utiliser le Lemme 3.3.4. Bien évidemment  $\mathcal{L}_{\partial_t}g^{\mathcal{H}} = \mathcal{L}_{\partial_t}g^{\mathcal{V}} = 0$ , donc

$$\mathcal{L}_{\partial_t}g = -2\sigma^{-2}(\ln \sigma)'(dx_1^2 + dx_2^2)$$

ce qui donne en utilisant (3.23),

$$\mathcal{L}_{(f\partial_t)}g = -2f\sigma^{-2}(\ln \sigma)'(dx_1^2 + dx_2^2) + 2f'dt^2,$$

alors l’équation de soliton devient :

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\sigma^2} \{ (\ln \sigma)'' - 2((\ln \sigma)')^2 \} (dx_1^2 + dx_2^2) + 2\{ 2(\ln \sigma)'' - 2((\ln \sigma)')^2 \} dt^2 \\ & - 2f \frac{(\ln \sigma)'}{\sigma^2} (dx_1^2 + dx_2^2) + 2f'dt^2 + 2A \left( \frac{dx_1^2 + dx_2^2}{\sigma(t)^2} + dt^2 \right) = 0. \end{aligned}$$

Ce qui est équivalent au système des EDOs :

$$\begin{cases} 0 &= (\ln \sigma)'' - 2((\ln \sigma)')^2 - f(\ln \sigma)' + A \\ 0 &= 2(\ln \sigma)'' - 2((\ln \sigma)')^2 + f' + A. \end{cases}$$

On obtient les mêmes équations du système (9) obtenu dans [5] avec  $K^N = 0$ . On compose maintenant avec une application conforme de  $\mathbb{R}^2 \rightarrow N^2$  à valeurs dans une surface de courbure de Gauss quelconque  $K^N$ . Par conséquence du Corollaire 3.2.6, on a simplement besoin d’ajouter le terme  $\lambda^2 K^N = \sigma^2 K^N$  pour  $R_{11}$  et  $R_{22}$ . On obtient alors les deux EDOs suivantes :

$$\begin{cases} 0 &= \sigma^2 K^N + (\ln \sigma)'' - 2((\ln \sigma)')^2 - f(\ln \sigma)' + A \\ 0 &= 2(\ln \sigma)'' - 2((\ln \sigma)')^2 + f' + A \end{cases} \quad (3.24)$$

Ce qui convient exactement avec le résultat de Baird-Danielo dans [5]. Notons qu’on peut écrire ce système comme un système de premier ordre de la forme  $\frac{dx}{ds} = F(x, y)$ ,  $\frac{dy}{ds} = G(x, y)$ , et cela peut être réalisé en faisant les substitutions :  $\delta = 1/\sigma$ ,  $x = \delta'$ ,  $y = \delta f + 2\delta'$ ,  $ds = dt/\delta$ . Ce système planaire peut être résolu en analysant le portrait de phase [19]. Une orbite particulière correspond au soliton de Bryant.

#### 3.4.2 Solitons de type “warped-product”

Les solitons issus d’un “warped-product” d’une variété d’Einstein par la droite réelle ont été intensivement étudiés et par suite, dans cette section, on se contentera d’étudier certains cas spécifiques.

### 3.4. CAS OÙ LA DISTRIBUTION HORIZONTALE EST INTÉGRABLE

Considérons la projection orthogonale  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  qui est donnée par  $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$ . Désignons par  $t$  la coordonnée  $x_3$  et considérons une déformation biconforme de la forme

$$g = \frac{dx_1^2 + dx_2^2}{r(t)^2 u(x_1, x_2)^2} + dt^2$$

où  $r$  et  $u$  sont des fonctions positives. Il s'agit donc d'un "warped-product" de la surface  $\mathbb{R}^2$  munie de la métrique  $(dx_1^2 + dx_2^2)/u(x_1, x_2)^2$  par la droite réelle  $\mathbb{R}$ , où la fonction  $r(t)$  correspond au paramètre de déformation (warping function). Notons que l'insertion d'un facteur  $dt^2/\rho(t)^2$  dans la composante verticale peut être prise en compte en changeant le paramètre  $t$  en  $\tilde{t} = \int^t (dt/\rho(t))$ . D'après le Lemme 3.3.1, la dilatation est donnée par  $\lambda = ru$ , la courbure moyenne des fibres  $\mu$  et la constante d'intégrabilité  $a$  sont nulles. Une base orthonormée adaptée est donnée par les champs de vecteurs  $e_1 = ru\partial_1, e_2 = ru\partial_2, e_3 = \partial_t$ ; leurs 1-formes duales  $\theta_1 = dx_1/ru, \theta_2 = dx_2/ru, \theta_3 = dt$  sont de dérivées

$$d\theta_1 = \frac{r'}{r}\theta_1 \wedge \theta_3 + r\partial_2 u \theta_1 \wedge \theta_2, \quad d\theta_2 = \frac{r'}{r}\theta_2 \wedge \theta_3 - r\partial_1 u \theta_1 \wedge \theta_2, \quad d\theta_3 = 0.$$

Soit  $g_0$  la métrique canonique sur  $\mathbb{R}^3$ . En conséquence de (3.20) et du Corollaire 3.3.3 (en notant que la dilatation par rapport à  $g_0$ ,  $\lambda_0$ , désignée par  $\lambda$  dans le Corollaire 3.3.3, est identiquement 1), on a

$$\begin{aligned} R_{11} &= R_{22} = \Delta_g \ln ru = \Delta_g \ln r + \Delta_g \ln u \\ &= \sigma^2 \Delta_{g_0} \ln u + \sigma^2 \Delta_{g_0} \ln r + (1 - \sigma^2)(\ln r)'' - 2(\ln r)'^2 \\ &= r^2 u^2 \Delta_{g_0} \ln u + (\ln r)'' - 2(\ln r)'^2 \\ R_{33} &= 2U(U(\ln ru)) - 2(U(\ln ru))^2 = 2(\ln r)'' - 2(\ln r)'^2 \end{aligned}$$

En écrivant le flot de soliton  $E$  de la forme  $E = f_1 e_1 + f_2 e_2 + f_3 e_3$  pour des certaines fonctions  $f_1, f_2$  et  $f_3$ , on a d'après le Lemme 3.2.2,

$$\begin{cases} \mathcal{L}_E \theta_1^2 &= 2\theta_1 \odot \{df_1 + \frac{r'}{r} f_1 \theta_3 - \frac{r'}{r} f_3 \theta_1 + r f_1 \partial_2 u \theta_2 - r f_2 \partial_2 u \theta_1\} \\ \mathcal{L}_E \theta_2^2 &= 2\theta_2 \odot \{df_2 + \frac{r'}{r} f_2 \theta_3 - \frac{r'}{r} f_3 \theta_2 - r f_1 \partial_1 u \theta_2 + r f_2 \partial_1 u \theta_1\} \\ \mathcal{L}_E \theta_3^2 &= 2\theta_3 \odot df_3. \end{cases} \quad (3.25)$$

Par identification des coefficients des différents  $\theta_i \odot \theta_j$  dans l'équation de soliton  $\text{Ric}(g) + \frac{1}{2} \mathcal{L}_E g + Ag = 0$ , on obtient l'ensemble des équations suivantes :

$$\begin{cases} \text{(i)} & \theta_1^2 : r^2 u^2 \Delta_{g_0} \ln u + (\ln r)'' - 2(\ln r)'^2 + A + ru\partial_1 f_1 - \frac{r'}{r} f_3 - r f_2 \partial_2 u = 0 \\ \text{(ii)} & \theta_2^2 : r^2 u^2 \Delta_{g_0} \ln u + (\ln r)'' - 2(\ln r)'^2 + A + ru\partial_2 f_2 - \frac{r'}{r} f_3 - r f_1 \partial_1 u = 0 \\ \text{(iii)} & \theta_3^2 : 2(\ln r)'' - 2(\ln r)'^2 + A + \partial_t f_3 = 0 \\ \text{(iv)} & \theta_1 \theta_2 : \partial_2 (u f_1) + \partial_1 (u f_2) = 0 \\ \text{(v)} & \theta_1 \theta_3 : \partial_t f_1 + \frac{r'}{r} f_1 + ru\partial_1 f_3 = 0 \\ \text{(vi)} & \theta_2 \theta_3 : \partial_t f_2 + \frac{r'}{r} f_2 + ru\partial_2 f_3 = 0 \end{cases} \quad (3.26)$$

### 3.4. CAS OÙ LA DISTRIBUTION HORIZONTALE EST INTÉGRABLE

---

Notons que la différence entre (i) et (ii) montre que

$$\partial_1(uf_1) - \partial_2(uf_2) = 0.$$

Ce qui donne, avec (iv), les équations de Cauchy-Riemann pour la fonction complexe  $u(f_1 + if_2)$ . Soit  $z = x_1 + ix_2$ . On peut déduire alors que pour tout  $t$ , la fonction complexe  $u(z)(f_1 + if_2)(z)$  est holomorphe. Par suite le champ de vecteurs  $f_1e_1 + f_2e_2 = uf_1\partial_1 + uf_2\partial_2$  est *un champ de vecteurs holomorphe* suivant la coordonnée complexe  $z = x_1 + ix_2$  sur  $\mathbb{R}^2$ . On discute à présent quelques cas particuliers de (3.26).

On suppose tout d'abord que  $r(t) \equiv 1$  i.e. il s'agit d'un produit riemannien de la surface  $\Sigma := \mathbb{R}^2$  munie de la métrique  $(dx_1^2 + dx_2^2)/u(x_1, x_2)^2$  par la droite réelle. On obtient l'ensemble des équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad u^2\Delta_{g_0} \ln u + A + u\partial_1f_1 - f_2\partial_2u = 0 \\ \text{(ii)} \quad u^2\Delta_{g_0} \ln u + A + u\partial_2f_2 - f_1\partial_1u = 0 \\ \text{(iii)} \quad A + \partial_t f_3 = 0 \\ \text{(iv)} \quad \partial_2(uf_1) + \partial_1(uf_2) = 0 \\ \text{(v)} \quad \partial_t f_1 + u\partial_1f_3 = 0 \\ \text{(vi)} \quad \partial_t f_2 + u\partial_2f_3 = 0 \end{array} \right.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \text{(iii)} & \Rightarrow f_3 = -At + p(x_1, x_2) \\ \text{(v)} & \Rightarrow \partial_t f_1 + u\partial_1p = 0 \Rightarrow f_1 = -ut\partial_1p + q_1(x_1, x_2) \\ \text{(vi)} & \Rightarrow \partial_t f_2 + u\partial_2p = 0 \Rightarrow f_2 = -ut\partial_2p + q_2(x_1, x_2) \end{aligned}$$

avec  $p, q_1, q_2$  des fonctions qui dépendent uniquement de  $x_1$  et  $x_2$ . En substituant ces quantités dans (i), (ii) et (iv) et en identifiant les termes qui dépendent du paramètre  $t$  et ceux qui n'en dépendent pas, on obtient l'ensemble des six équations en  $p, q_1$  et  $q_2$  suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad u\partial_2u\partial_2p - u\partial_1u\partial_1p - u^2\partial_{11}p = 0 \\ \text{(ii)} \quad u^2\Delta_{g_0} \ln u + A + u\partial_1q_1 - q_2\partial_2u = 0 \\ \text{(iii)} \quad u\partial_1u\partial_1p - u\partial_2u\partial_2p - u^2\partial_{22}p = 0 \\ \text{(iv)} \quad u^2\Delta_{g_0} \ln u + A + u\partial_2q_2 - q_1\partial_1u = 0 \\ \text{(v)} \quad \partial_2(u^2\partial_1p) + \partial_1(u^2\partial_2p) = 0 \\ \text{(vi)} \quad \partial_2(uq_1) + \partial_1(uq_2) = 0 \end{array} \right. \quad (3.27)$$

Ensuite en additionnant (3.27) (i) et (iii) on a  $\partial_{11}p + \partial_{22}p = 0$ , i.e.  $\Delta^{\mathbb{R}^2}p = 0$  et  $p$  est harmonique. En particulier, si  $\Sigma$  est la sphère  $S^2$  munie de sa métrique de courbure constante déterminée par

$$u(x_1, x_2) = \frac{1 + x_1^2 + x_2^2}{2}$$

### 3.4. CAS OÙ LA DISTRIBUTION HORIZONTALE EST INTÉGRABLE

---

et si  $p$  se prolonge d'une façon lisse à  $S^2$  alors d'après le principe de maximum et l'invariance conforme de l'équation de Laplace en dimension 2,  $p$  est nécessairement constante. D'autre part,  $\Delta_{g_0} \ln u = 1/u^2$  donc on a l'ensemble des équations suivantes :

$$\begin{cases} \text{(i)} & 1 + A + \partial_1(uq_1) - x_1q_1 - x_2q_2 = 0 \\ \text{(ii)} & 1 + A + \partial_2(uq_2) - x_1q_1 - x_2q_2 = 0 \\ \text{(iii)} & \partial_2(uq_1) + \partial_1(uq_2) = 0. \end{cases} \quad (3.28)$$

Ce système donne les équations de Cauchy–Riemann pour la fonction complexe  $u(q_1 + iq_2)$ , qui est donc holomorphe. En particulier le champ de vecteurs  $q_1e_1 + q_2e_2 = uq_1\partial_1 + uq_2\partial_2$  se prolonge en un champ de vecteurs holomorphe sur  $S^2$ . Posons  $z = x_1 + ix_2$  la coordonnée complexe sur la sphère de Riemann, comme déjà mentionné dans §1.2, on peut écrire ce champ de vecteurs holomorphe sous la forme

$$u(q_1 + iq_2) = \alpha + \beta z + \gamma z^2 \quad (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}).$$

On pose  $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$  etc., donc (3.28)(i) devient

$$\begin{aligned} 0 = & (1 + A)(1 + x_1^2 + x_2^2) + \beta_1(1 + x_1^2 + x_2^2) + 2\gamma_1x_1(1 + x_1^2 + x_2^2) \\ & - 2\gamma_2x_2(1 + x_1^2 + x_2^2) - 2x_1(\alpha_1 + \beta_1x_1 - \beta_2x_2 + \gamma_1(x_1^2 - x_2^2) - 2\gamma_2x_1x_2) \\ & - 2x_2(\alpha_2 + \beta_1x_2 + \beta_2x_1 + \gamma_2(x_1^2 - x_2^2) + 2\gamma_1x_1x_2). \end{aligned}$$

Par identification des coefficients, cette équation est satisfaite si et seulement si

$$A = -1, \quad \beta_1 = 0, \quad \gamma_1 = \alpha_1, \quad \gamma_2 = -\alpha_2.$$

L'équation (3.28)(ii) donne les mêmes conditions ci-dessus donc toute solution de (3.28) est donnée par

$$A = -1 \quad \text{et} \quad u(q_1 + iq_2) = \alpha + icz + \bar{\alpha}z^2.$$

Ce qui correspond, d'après §1.2, à un champ de Killing. On peut alors conclure que pour la sphère  $\Sigma = S^2$ , le flot de soliton est unique, à l'ajout d'un champ de Killing près, et il est donné par  $E = t\partial_t$ .

Plus généralement, lorsque  $p$  est constante on a l'ensemble des équations suivantes :

$$\begin{cases} u^2\Delta_{g_0} \ln u + A + u\partial_1q_1 - q_2\partial_2u = 0 \\ u^2\Delta_{g_0} \ln u + A + u\partial_2q_2 - q_1\partial_1u = 0 \\ \partial_2(uq_1) + \partial_1(uq_2) = 0. \end{cases}$$

Ces équations sont précisément les équations d'une structure de soliton de dimension 2 sur  $\Sigma$  avec une constante  $A$  et un flot de soliton  $F = q_1e_1 + q_2e_2$ . Ce qui confirme le résultat bien connu que le produit d'un soliton de dimension 2 et la droite réelle donne

### 3.4. CAS OÙ LA DISTRIBUTION HORIZONTALE EST INTÉGRABLE

---

un soliton de dimension 3. En revanche, l'unicité n'est pas toujours évidente quand  $\Sigma$  est en général un soliton de dimension 2 non-compact (voir ci-dessous par exemple pour le cas où  $\Sigma = \mathbb{R}^2$  est le plan euclidien).

Dans la section prochaine on montrera que lorsque  $\Sigma$  est un plan hyperbolique  $H^2$  de courbure constante négative, le flot de soliton est unique. D'autre part, quand  $u \equiv 1$  (il s'agit donc de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$ ), on obtient l'ensemble des équations suivantes :

$$\partial_{11}p = \partial_{22}p = \partial_{12}p = 0, \quad A + \partial_1q_1 = A + \partial_2q_2 = 0, \quad \partial_2q_1 + \partial_1q_2 = 0,$$

dont la solution générale est donnée par

$$p = ax_1 + bx_2, \quad q_1 = -Ax_1 + cx_2 + e, \quad q_2 = -Ax_2 - cx_1 + f.$$

où  $a, b, c, e, f$  sont des constantes arbitraires. Tous les termes avec les constantes arbitraires  $a, b, c, e, f$  correspondent à des champs de vecteurs de Killing, qu'on peut supposer nuls, et donc le flot de soliton est donné par le champ de vecteur radial  $E = -Ax_1\partial_1 - Ax_2\partial_2 - At\partial_t$ . Ce qui permet l'obtention d'une infinité de familles de structures de solitons paramétrées par  $A$  dans  $\mathbb{R}^3$ , qui corespondent aux solitons bien connus, les solitons de Gauss.

En revenant maintenant au cas où  $u = \frac{1}{2}(1 + x_1^2 + x_2^2)$  correspondant à la métrique sphérique sur  $\Sigma$  on a  $\Delta_{g_0} \ln u = 1/u^2$ . On considère l'hypothèse  $f_1 = f_2 = 0$ . L'équation (3.26)(i) (ou (v) et (vi)) montre que  $f_3$  dépend uniquement de  $t$  et (3.26) sera équivalent à :

$$\begin{cases} 0 &= r^2 + (\ln r)'' - 2(\ln r)'^2 + A - \frac{r'}{r}f_3 \\ 0 &= 2(\ln r)'' - 2(\ln r)'^2 + A + f_3' \end{cases}$$

Comme prévu, cela coïncide avec (3.24) avec  $K^N = 1$  (où  $\sigma$  est remplacé par  $r$ ) ; et comme on l'a déjà remarqué dans la section 3.4.1, des solutions sont obtenues en étudiant le portrait de phase d'un système de premier ordre dans le plan.

#### 3.4.3 Solitons de type hyperbolique

On commence par la projection canonique  $\varphi : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  sur le demi-espace  $\mathbb{R}_+^3 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 > 0\}$  donnée par  $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$  et on définit la métrique

$$g = \frac{dx_1^2 + dx_2^2}{\sigma(x_1)^2} + \frac{dx_3^2}{\rho(x_1)^2}$$

biconformément équivalente à la métrique euclidienne sur  $\mathbb{R}^3$  où les facteurs  $\sigma$  et  $\rho$  dépendent seulement de  $x_1$ . Une base orthonormée est donnée par  $e_1 = \sigma\partial_1, e_2 =$

### 3.4. CAS OÙ LA DISTRIBUTION HORIZONTALE EST INTÉGRABLE

---

$\sigma\partial_2, e_3 = \rho\partial_3$  avec les 1-formes duales  $\theta_1 = dx_1/\sigma, \theta_2 = dx_2/\sigma, \theta_3 = dx_3/\rho$  dont les dérivées sont données par

$$d\theta_1 = 0, \quad d\theta_2 = -\frac{\sigma'}{\sigma^2} dx_1 \wedge dx_2, \quad d\theta_3 = -\frac{\rho'}{\rho^2} dx_1 \wedge dx_3. \quad (3.29)$$

La dilatation de  $\varphi$  par rapport à  $g$  est donnée par  $\lambda = \sigma$ . D'après le Lemme 3.3.1, la courbure moyenne des fibres est donnée par

$$\mu = \sigma^2 \mathcal{H} \text{grad} \ln \rho = \sigma^2 \frac{\rho'}{\rho} \partial_1 = \sigma \frac{\rho'}{\rho} e_1,$$

dont la divergence peut être calculée par (3.15) :

$$\text{div}_g \mu = e_1(\mu_1) + e_2(\mu_2) - \mu(\ln \sigma) - \|\mu\|_g^2 = \frac{1}{\rho^2} (\sigma^2 \rho \rho'' - 2\sigma^2 (\rho')^2).$$

Notons par  $g_0$  la métrique euclidienne sur  $\mathbb{R}^3$ ; par le Lemme 3.3.2, on a

$$\begin{aligned} \Delta_g \ln \lambda &= \sigma^2 \Delta_{g_0} \ln \lambda - \sigma^2 d \ln \lambda \left( \frac{\rho'}{\rho} \partial_1 \right) \\ &= \sigma^2 \partial_{11} \ln \sigma - \sigma \sigma' \frac{\rho'}{\rho} \\ &= \sigma \sigma'' - (\sigma')^2 - \sigma \sigma' \frac{\rho'}{\rho}. \end{aligned}$$

On peut maintenant appliquer (3.20) pour calculer les composantes de la courbure de Ricci :

$$\begin{aligned} R_{11} &= \sigma \sigma'' - (\sigma')^2 + \sigma \sigma' \frac{\rho'}{\rho} + \sigma^2 \frac{\rho''}{\rho} - 2\sigma^2 \left( \frac{\rho'}{\rho} \right)^2 \\ R_{22} &= \sigma \sigma'' - (\sigma')^2 - \sigma \sigma' \frac{\rho'}{\rho} \\ R_{33} &= \frac{1}{\rho^2} (\sigma^2 \rho \rho'' - 2\sigma^2 (\rho')^2) \\ 0 &= R_{12} = R_{13} = R_{23}. \end{aligned}$$

Supposons que le flot de soliton est donné par  $E = f_1 e_1 + f_2 e_2 + f_3 e_3$ . D'après le Lemme 3.2.2, on a

$$\begin{cases} \mathcal{L}_E \theta_1^2 &= 2\theta_1 \odot df_1 \\ \mathcal{L}_E \theta_2^2 &= 2\theta_2 \odot \{df_2 - \sigma' f_1 \theta_2 + \sigma' f_2 \theta_1\} \\ \mathcal{L}_E \theta_3^2 &= 2\theta_3 \odot \{df_3 - \sigma \frac{\rho'}{\rho} f_1 \theta_3 + \sigma \frac{\rho'}{\rho} f_3 \theta_1\}. \end{cases} \quad (3.30)$$

### 3.4. CAS OÙ LA DISTRIBUTION HORIZONTALE EST INTÉGRABLE

On peut maintenant identifier les coefficients des différents  $\theta_i \odot \theta_j$  dans l'équation de soliton  $\text{Ric}_g + \frac{1}{2}\mathcal{L}_E g + Ag = 0$ ; on obtient l'ensemble des équations à résoudre suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \theta_1^2 : & \text{(i)} \quad \sigma\sigma'' - (\sigma')^2 + \sigma\sigma'\frac{\rho'}{\rho} + \sigma^2\frac{\rho''}{\rho} - 2\sigma^2\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^2 + A + \sigma\partial_1 f_1 = 0 \\ \theta_2^2 : & \text{(ii)} \quad \sigma\sigma'' - (\sigma')^2 - \sigma\sigma'\frac{\rho'}{\rho} + A + \sigma\partial_2 f_2 - \sigma'f_1 = 0 \\ \theta_3^2 : & \text{(iii)} \quad \frac{1}{\rho^2}(\sigma^2\rho\rho'' - 2\sigma^2(\rho')^2) + A + \rho\partial_3 f_3 - f_1\sigma\frac{\rho'}{\rho} = 0 \\ \theta_1\theta_2 : & \text{(iv)} \quad \sigma\partial_2 f_1 + \sigma\partial_1 f_2 + \sigma'f_2 = 0 \\ \theta_1\theta_3 : & \text{(v)} \quad \rho\partial_3 f_1 + \sigma\partial_1 f_3 + f_3\sigma\frac{\rho'}{\rho} = 0 \\ \theta_2\theta_3 : & \text{(vi)} \quad \rho\partial_3 f_2 + \sigma\partial_2 f_3 = 0 \end{array} \right. \quad (3.31)$$

En premier lieu on exhibera une famille de solitons à un paramètre qui s'intercale entre l'espace hyperbolique et la géométrie Sol. On montrera après que la structure de soliton sur Sol est unique à l'ajout d'un champ de Killing près. Supposons que  $\sigma(x_1) = x_1$ , le système (3.31) devient

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{(i)} & -1 + x_1\frac{\rho'}{\rho} + x_1^2\frac{\rho''}{\rho} - 2x_1^2\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^2 + A + x_1\partial_1 f_1 = 0 \\ \text{(ii)} & -1 - x_1\frac{\rho'}{\rho} + A + x_1\partial_2 f_2 - f_1 = 0 \\ \text{(iii)} & x_1^2\frac{\rho''}{\rho} - 2x_1^2\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^2 + A + \rho\partial_3 f_3 - x_1 f_1\frac{\rho'}{\rho} = 0 \\ \text{(iv)} & x_1\partial_2 f_1 + x_1\partial_1 f_2 + f_2 = 0 \\ \text{(v)} & \rho\partial_3 f_1 + x_1\partial_1 f_3 + x_1 f_3\frac{\rho'}{\rho} = 0 \\ \text{(vi)} & \rho\partial_3 f_2 + x_1\partial_2 f_3 = 0. \end{array} \right. \quad (3.32)$$

On fait l'hypothèse que  $f_2 = 0$ . Alors (3.32)(ii) implique

$$f_1 = -1 - x_1\frac{\rho'}{\rho} + A.$$

En substituant cette identité dans (3.32)(i) on a

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{\pm\sqrt{A-1}}{x_1} \Rightarrow \rho = ax_1^{\pm\sqrt{A-1}}$$

où  $a$  est une constante qu'on peut supposer égale à 1 (en l'incorporant dans la variable  $x_3$ ) et où la solution est vérifiée pour les deux signes de la racine carré. Il s'ensuit que

$$f_1 = A - 1 \mp \sqrt{A-1}.$$

Ainsi (3.32)(iii) implique

$$\mp\sqrt{A-1} + A \mp (A-1)^{3/2} + x_1^{\pm\sqrt{A-1}}\partial_3 f_3 = 0.$$

Posons  $-C = A \mp \sqrt{A-1} \mp (A-1)^{3/2}$ . En intégrant, on obtient

$$f_3 = Cx_3x_1^{\mp\sqrt{A-1}} + p(x_1, x_2)$$

### 3.4. CAS OÙ LA DISTRIBUTION HORIZONTALE EST INTÉGRABLE

---

avec  $p(x_1, x_2)$  une fonction indépendante de  $x_3$ . Donc (3.32)(iv) est automatiquement satisfaite et (3.32)(v) implique que  $p(x_1, x_2) = r(x_2)x_1^{\mp\sqrt{A-1}}$  où  $r(x_2)$  est une fonction qui dépend uniquement de  $x_2$ . Ainsi (3.32)(vi) montre que  $r(x_2) = b$  constante. On peut voir (d'après (3.30)) que la composante de  $f_3$  contenant la constante arbitraire  $b$  correspond à un champ de vecteurs de Killing, donc on peut supposer que  $b = 0$ . On a maintenant que le flot de soliton est donné explicitement par

$$E = (A - 1 \mp \sqrt{A - 1})x_1\partial_1 + Cx_3\partial_3.$$

Ce qui fournit une famille de solitons explicites paramétrée par  $A \geq 1$ . Si  $A = 2$ , en considérant le signe positif de la racine carrée dans l'expression de  $\rho$ , la métrique sera de la forme

$$g = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{x_1^2}$$

ce qui correspond au demi-espace de Poincaré avec un flot de soliton nul (et par conséquent la métrique est d'Einstein). Si  $A = 1$ , alors  $\rho = 1$  est constante et la métrique prend la forme

$$g = \frac{dx_1^2 + dx_2^2}{x_1^2} + dx_3^2$$

qui est la métrique du produit du plan hyperbolique par  $\mathbb{R}$ ,  $H^2 \times \mathbb{R}$ , muni du flot de soliton  $E = -x_3\partial_3$ .

On considère maintenant le signe négatif devant la racine carrée dans l'expression de  $\rho$  et on prend encore une fois  $A = 2$ . On obtient la métrique

$$g = \frac{dx_1^2 + dx_2^2}{x_1^2} + \frac{dx_3^2}{x_1^{-2}}$$

En substituant  $x_1 = e^{-t}$  pour  $-\infty < t < \infty$ , on a  $dx_1 = -e^{-t}dt$  et

$$g = dt^2 + e^{2t}dx_2^2 + e^{-2t}dx_3^2,$$

ce qui représente la métrique sur Sol. On a aussi  $\partial_1 = -x_1^{-1}\partial_t$  et le flot de soliton est donné alors par

$$E = -2\partial_t - 4x_3\partial_3,$$

ce qui confirme l'exemple trouvé dans [5]. Il est facile de voir quels solitons parmi cette famille sont du type gradient. Comme le domaine est connexe,  $E$  est du type gradient si et seulement si  $dE^\flat = 0$ .

$$E^\flat = f_1\theta_1 + f_2\theta_2 + f_3\theta_3 = (A - 1 \mp \sqrt{A - 1})\frac{1}{x_1}dx_1 + C\frac{x_3}{\rho^2}dx_3.$$

Sa dérivée

$$dE^\flat = -2Cx_3\frac{\rho'}{\rho^3}dx_1 \wedge dx_3,$$

### 3.4. CAS OÙ LA DISTRIBUTION HORIZONTALE EST INTÉGRABLE

---

s'annule si, soit  $C = 0$ , soit  $\rho' = 0$ . On considère les solutions réelles  $A$  de  $C = 0$ ; dans le cas où  $C = A + \sqrt{A-1} + (A-1)^{3/2}$  il existe une solution unique  $A = 2$  (l'espace hyperbolique) et si  $C = A - \sqrt{A-1} - (A-1)^{3/2}$  donc  $A = 1$  (le produit  $H^2 \times \mathbb{R}$ ).

Les résultats de cette section peuvent être résumés dans le théorème suivant. On montrera dans ce qui suit l'unicité.

**Théorème 3.4.1.** *Il existe une famille de métriques solitons dilatants complètes sur  $\mathbb{R}_+^3$  qui dépendent continument d'un seul paramètre, telles que chacune est unique, paramétrée par la constante de soliton  $A \geq 1$ , donnée par*

$$g = \frac{dx_1^2 + dx_2^2}{x_1^2} + \frac{dx_3^2}{x_1^{\pm 2\sqrt{A-1}}}$$

qui s'intercale entre l'espace hyperbolique  $H^3$  ( $A = 2$  avec un signe positif devant la racine carrée) et le produit du plan hyperbolique et la droite réelle  $H^2 \times \mathbb{R}$  ( $A = 1$ ), et entre  $H^2 \times \mathbb{R}$  et la géométrie Sol ( $A = 2$  avec un signe négatif de la racine carrée).

Le flot de soliton est donné par

$$E = (A - 1 \mp \sqrt{A-1})x_1\partial_1 + \{-A \pm \sqrt{A-1} \pm (A-1)^{3/2}\}x_3\partial_3.$$

Il est du type gradient si soit  $A = 2$  avec un choix positif devant la racine carrée (le soliton  $H^3$ ), soit  $A = 1$  (le soliton  $H^2 \times \mathbb{R}$ ).

*Démonstration de l'unicité.* On considère le système (3.32) avec  $\rho = x_1^{\sqrt{A-1}}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad \partial_1 f_1 = 0 \\ \text{(ii)} \quad -1 - \sqrt{A-1} + A + x_1 \partial_2 f_2 - f_1 = 0 \\ \text{(iii)} \quad 1 - \sqrt{A-1} + x_1^{\sqrt{A-1}} \partial_3 f_3 - \sqrt{A-1} f_1 = 0 \\ \text{(iv)} \quad x_1 \partial_2 f_1 + x_1 \partial_1 f_2 + f_2 = 0 \\ \text{(v)} \quad x_1^{\sqrt{A-1}} \partial_3 f_1 + x_1 \partial_1 f_3 + \sqrt{A-1} f_3 = 0 \\ \text{(vi)} \quad x_1^{\sqrt{A-1}} \partial_3 f_2 + x_1 \partial_2 f_3 = 0. \end{array} \right. \quad (3.33)$$

Montrons que le flot de soliton  $E = f_1 e_1 + f_2 e_2 + f_3 e_3$  est unique à l'ajout d'un champ de Killing près. (3.33)(i) donne  $f_1 = f_1(x_2, x_3)$  indépendante de  $x_1$ . Donc, en identifiant les termes de (ii) qui sont indépendants de  $x_1$  on a

$$f_1 = A - 1 - \sqrt{A-1} \text{ est constante et } \partial_2 f_2 = 0 \Rightarrow f_2 = f_2(x_1, x_3).$$

Aussi (iv) montre que

$$x_1 \partial_1 f_2 + f_2 = 0 \Rightarrow \frac{\partial_1 f_2}{f_2} = -\frac{1}{x_1} \Rightarrow f_2 = \frac{r(x_3)}{x_1}$$

### 3.5. CAS OÙ LA DISTRIBUTION HORIZONTALE EST NON-INTÉGRABLE

---

pour une certaine fonction  $r = r(x_3)$ . D'autre part, (v) donne

$$x_1 \partial_1 f_3 + \sqrt{A-1} f_3 = 0 \Rightarrow \frac{\partial_1 f_3}{f_3} = -\frac{\sqrt{A-1}}{x_1} \Rightarrow f_3 = u(x_2, x_3) x_1^{-\sqrt{A-1}}$$

pour une certaine fonction  $u = u(x_2, x_3)$ . D'une façon similaire à ce qu'on a fait avant, posons  $-C = A \mp \sqrt{A-1} \mp (A-1)^{3/2}$ , (iii) implique

$$\partial_3 u = C \Rightarrow u = Cx_3 + v(x_2)$$

pour une certaine fonction  $v = v(x_2)$ . Ainsi (vi) montre que

$$r'(x_3) + x_1^{2-2\sqrt{A-1}} v'(x_2) = 0. \quad (3.34)$$

Il y a deux possibilités : soit  $\sqrt{A-1} = 1$  (espace hyperbolique) soit  $\sqrt{A-1} \neq 1$ . Tout d'abord supposons que  $\sqrt{A-1} \neq 1$ . D'après (3.34) on a

$$r' = v' = 0 \Rightarrow r = a \text{ const. et } v = b \text{ const.}$$

Par suite

$$f_1 = A - 1 - \sqrt{A-1}, \quad f_2 = \frac{a}{x_1}, \quad f_3 = x_1^{-\sqrt{A-1}}(Cx_3 + b).$$

À l'aide de (3.30) on peut vérifier que pour  $F = \frac{a}{x_1} e_2 + b x_1^{-\sqrt{A-1}} e_3$ ,

$$\mathcal{L}_F \theta_1^2 = \mathcal{L}_F \theta_2^2 = \mathcal{L}_F \theta_3^2 = 0$$

donc  $F$  est un champ de Killing. Dans le cas où  $\sqrt{A-1} = 1$ , on a que  $f_1 = 0$   $C = 0$ . D'autre part  $r'(x_3) = -v'(x_2) = c$  const., donc  $r = cx_3 + d$  et  $v = -cx_2 + e$  où  $c, d, e$  sont des constantes. Ainsi par une vérification similaire de (3.30) on a que  $E$  est Killing, ce qu'on peut prévoir d'avance puisque  $H^3$  est d'Einstein. Ce qui complète la preuve de l'unicité.

### 3.5 Cas où la distribution horizontale est non-intégrable

On considère dans cette section des variétés riemanniennes de dimension 3 qui admettent une application semi-conforme dans une surface, de distribution horizontale non-intégrable. Il existe des variétés admettant à la fois une application semi-conforme de distribution horizontale intégrable et une de distribution horizontale non-intégrable. Par exemple, la sphère euclidienne  $S^3$  peut être considérée comme  $\mathbb{R}^3$  muni de la métrique  $g = 2/(1 + \|x\|^2)^2 dx^2$  où la projection standard  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  est de distribution horizontale intégrable; elle peut être aussi munie de la fibration de Hopf  $S^3 \rightarrow S^2$  qui est de distribution non-intégrable. On rappelle que dans la section précédente, on a montré explicitement que dans le cas où la distribution horizontale est intégrable, tous les exemples

### 3.5. CAS OÙ LA DISTRIBUTION HORIZONTALE EST NON-INTÉGRABLE

---

explicites de solitons connus sont des déformations biconformes de la projection canonique  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Par contre si la distribution horizontale n'est pas intégrable, on verra que l'équivalence biconforme entre solitons est moins claire.

On commence par étudier le soliton Nil, en particulier on montre que la structure de ce soliton est unique, même si c'est déjà indiqué dans [5], aucune preuve n'a été donnée à cause de la complexité des arguments. Dans la suite, en suivant les mêmes techniques des sections précédentes, on peut démontrer l'unicité de manière simple.

#### 3.5.1 Le soliton Nil

La métrique sur la géométrie Nil s'écrit sous la forme

$$g = dx_1^2 + dx_2^2 + (x_1 dx_2 + dx_3)^2.$$

Cette géométrie admet une submersion riemannienne harmonique  $\varphi : \text{Nil} \rightarrow \mathbb{R}^2$  donnée par  $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$ . Une base de champs de vecteurs associée est donnée par

$$e_1 = \partial_1, \quad e_2 = \partial_2 - x_1 \partial_3, \quad e_3 = \partial_3$$

où  $\partial_i = \partial/\partial x_i$  etc., avec la base duale

$$\theta_1 = dx_1, \quad \theta_2 = g(e_2, \cdot) = dx_2, \quad \theta_3 = g(\partial_3, \cdot) = x_1 dx_2 + dx_3.$$

Notons que  $g = \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2$ . Dans ce cas on a  $\lambda \equiv 1$  et  $\mu \equiv 0$ . On calcule  $a$  avec les crochets de Lie :

$$[e_1, e_2](f) = [\partial_1, \partial_2 - x_1 \partial_3](f) = \partial_1(\partial_2 - x_1 \partial_3)(f) - (\partial_2 - x_1 \partial_3)\partial_1(f) = -\partial_3 f$$

donc  $[e_1, e_2] = -\partial_3$  et

$$2a = g(U, [e_1, e_2]) = -g(\partial_3, \partial_3) = -1$$

D'après (3.20), les composantes de la courbure de Ricci sont données par :

$$R_{11} = -1/2, \quad R_{22} = -1/2, \quad R_{33} = 1/2, \quad R_{12} = 0, \quad R_{13} = 0, \quad R_{23} = 0$$

L'équation de soliton

$$\text{Ric}(g) + \frac{1}{2}\mathcal{L}_E g + Ag = 0$$

devient

$$-(\theta_1^2 + \theta_2^2) + \theta_3^2 + 2A\{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2\} + \mathcal{L}_E g = 0 \quad (3.35)$$

Écrivons le flot de soliton  $E$  comme  $E = f_1 e_1 + f_2 e_2 + f_3 e_3$  où  $f_1, f_2$ , et  $f_3$  sont des fonctions à déterminer. Notons que pour une fonction  $f = f(x_1, x_2, x_3)$ , on a

$$df = \partial_1 f dx_1 + \partial_2 f dx_2 + \partial_3 f dx_3 = \partial_1 f \theta_1 + (\partial_2 f - x_1 \partial_3 f) \theta_2 + \partial_3 f \theta_3,$$

### 3.5. CAS OÙ LA DISTRIBUTION HORIZONTALE EST NON-INTÉGRABLE

et

$$d\theta_1 = d\theta_2 = 0 \quad \text{et} \quad d\theta_3 = dx_1 \wedge dx_2 = \theta_1 \wedge \theta_2.$$

D'après le Lemme 3.2.2, pour une 1-forme  $\theta$ ,  $\mathcal{L}_E\theta^2 = 2\theta \odot \{d(\theta|_E) + d\theta|_E\}$ , alors

$$\begin{cases} \mathcal{L}_E\theta_1^2 &= 2\theta_1 \odot df_1 \\ \mathcal{L}_E\theta_2^2 &= 2\theta_2 \odot df_2 \\ \mathcal{L}_E\theta_3^2 &= 2\theta_3 \odot \{df_3 + f_1\theta_2 - f_2\theta_1\} \end{cases} \quad (3.36)$$

et

$$\mathcal{L}_{Eg} = 2\theta_1 \odot df_1 + 2\theta_2 \odot df_2 + 2\theta_3 \odot \{df_3 + f_1\theta_2 - f_2\theta_1\}.$$

On identifie maintenant les coefficients des différents  $\theta_j \odot \theta_k$  à zéro. On aura le système des EDPs en  $f_1, f_2, f_3$  suivant :

$$\begin{cases} \text{(i)} & \theta_1^2 : -1 + 2A + 2\partial_1 f_1 = 0 \\ \text{(ii)} & \theta_2^2 : -1 + 2A + 2(\partial_2 - x_1\partial_3)f_2 = 0 \\ \text{(iii)} & \theta_3^2 : 1 + 2A + 2\partial_3 f_3 = 0 \\ \text{(iv)} & \theta_1\theta_2 : (\partial_2 - x_1\partial_3)f_1 + \partial_1 f_2 = 0 \\ \text{(v)} & \theta_1\theta_3 : \partial_3 f_1 + \partial_1 f_3 - f_2 = 0 \\ \text{(vi)} & \theta_2\theta_3 : \partial_3 f_2 + (\partial_2 - x_1\partial_3)f_3 + f_1 = 0 \end{cases} \quad (3.37)$$

Ces équations peuvent être résolues explicitement : l'intégration de (3.37)(i) et (3.37)(iii) implique

$$f_1 = \frac{1}{2}(1 - 2A)x_1 + p_1(x_2, x_3) \quad \text{et} \quad f_3 = -\frac{1}{2}(1 + 2A)x_3 + p_3(x_1, x_2)$$

où  $p_1$  et  $p_2$  sont des fonctions dépendant chacune de deux variables seulement, comme indiqué dans les formules ci-dessus. Donc (3.37)(v) implique que

$$f_2 = \partial_3 p_1 + \partial_1 p_3.$$

Les équations (3.37)(ii), (3.37)(vi) et (3.37)(iv) donnent par suite (dans l'ordre respectif) le système en  $p_1$  et  $p_3$  suivant :

$$-1 + 2A + 2\partial_2\partial_3 p_1 + 2\partial_2\partial_1 p_3 - 2x_1\partial_3^2 p_1 = 0 \quad (3.38)$$

$$\partial_3^2 p_1 + \partial_2 p_3 + x_1 + p_1 = 0 \quad (3.39)$$

$$\partial_2 p_1 - x_1\partial_3 p_1 + \partial_1^2 p_3 = 0 \quad (3.40)$$

Comme  $p_3$  est indépendante de  $x_3$ , la dérivée de (3.40) par rapport à  $x_3$  donne

$$\partial_2\partial_3 p_1 - x_1\partial_3^2 p_1 = 0,$$

### 3.5. CAS OÙ LA DISTRIBUTION HORIZONTALE EST NON-INTÉGRABLE

---

ce qui implique d'après (3.38) que

$$\partial_2 \partial_1 p_3 = \frac{1}{2} - A \quad (3.41)$$

et d'après (3.39) que

$$\partial_2 \partial_3 p_1 + x_1 p_1 + x_1^2 = -x_1 \partial_2 p_3. \quad (3.42)$$

En intégrant (3.41) par rapport à  $x_2$  et ensuite par rapport à  $x_1$ , on a

$$p_3 = x_1 x_2 \left( \frac{1}{2} - A \right) + u(x_1) + v(x_2) \quad (3.43)$$

où  $u$  et  $v$  sont des fonctions qui dépendent uniquement de  $x_1$  et  $x_2$  respectivement. Soit  $q(x_2, x_3) = \partial_2 \partial_3 p_1$ . Alors, (3.42) donne

$$p_1 + x_1 + \partial_2 p_3 = -\frac{q(x_2, x_3)}{x_1}. \quad (3.44)$$

D'autre part, en dérivant (3.43) par rapport à  $x_2$ , on a

$$\partial_2 p_3 = x_1 \left( \frac{1}{2} - A \right) + v'(x_2),$$

en substituant ce terme dans (3.44), on obtient

$$x_1 p_1 + x_1^2 \left( \frac{3}{2} - A \right) + x_1 v'(x_2) = -q(x_2, x_3).$$

En comparant les coefficients des puissances de  $x_1$  des deux parties de cette équation on a

$$A = 3/2, \quad p_1 + v'(x_2) = 0 \quad \text{et} \quad q(x_2, x_3) = 0.$$

On en déduit que

$$p_1 = -v'(x_2) \quad (\text{indépendante de } x_3) \quad \text{et} \quad p_3 = -x_1 x_2 + u(x_1) + v(x_2).$$

Ensuite (3.40) implique  $-v''(x_2) + u''(x_1) = 0 \Rightarrow v''(x_2) = u''(x_1) = \alpha$  constante. Ce qui donne  $v'(x_2) = \alpha x_2 + \beta$  et alors

$$v(x_2) = \frac{\alpha x_2^2}{2} + \beta x_2 + \gamma \quad \text{et} \quad u(x_1) = \frac{\alpha x_1^2}{2} + \delta x_1 + \eta$$

où  $\beta, \gamma, \delta, \eta$  sont des constantes arbitraires. Donc finalement on a :

$$p_1 = -\alpha x_2 - \beta, \quad p_3 = -x_1 x_2 + \frac{\alpha}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \delta x_1 + \beta x_2 + \nu,$$

où  $\nu$  est une constante et alors

$$f_1 = -x_1 - \alpha x_2 - \beta, \quad f_2 = -x_2 + \alpha x_1 + \delta, \quad f_3 = -2x_3 - x_1 x_2 + \frac{\alpha}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \delta x_1 + \beta x_2 + \nu.$$

### 3.5. CAS OÙ LA DISTRIBUTION HORIZONTALE EST NON-INTÉGRABLE

---

On vérifie que les parties avec des constantes arbitraires correspondent à des champs de Killing. En effet, soit

$$g_1 = -\alpha x_2 - \beta, \quad g_2 = \alpha x_1 + \delta, \quad g_3 = \frac{\alpha}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \delta x_1 + \beta x_2 + \nu,$$

et soit

$$F = g_1 e_1 + g_2 e_2 + g_3 e_3$$

D'après (3.36), on a :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_F \theta_1^2 &= 2\theta_1 \odot dg_1 \\ \mathcal{L}_F \theta_2^2 &= 2\theta_2 \odot dg_2 \\ \mathcal{L}_F \theta_3^2 &= 2\theta_3 \odot \{dg_3 + g_1 \theta_2 - g_2 \theta_1\}. \end{cases}$$

Pour une fonction  $h$ , on a  $dh = \partial_1 h \theta_1 + (\partial_2 h - x_1 \partial_3 h) \theta_2 + \partial_3 h \theta_3$ . Alors

$$dg_1 = -\alpha \theta_2, \quad dg_2 = \alpha \theta_1, \quad dg_3 = (\alpha x_1 + \delta) \theta_1 + (\alpha x_2 + \beta) \theta_2.$$

Par suite

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathcal{L}_F g &= \frac{1}{2} \mathcal{L}_F (\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

On suppose alors que les paramètres arbitraires sont nulles. On obtient le flot de soliton (unique)

$$E = -x_1 \partial_1 - x_2 \partial_2 - 2x_3 \partial_3.$$

Notons qu'on a démontré non pas seulement l'existence du flot de soliton sur Nil mais aussi son unicité à l'ajout d'un champ de Killing près.

#### 3.5.2 Déformation de Nil

Soit  $g_0 = dx_1^2 + dx_2^2 + (x_1 dx_2 + dx_3)^2$  la métrique sur  $\mathbb{R}^3$  indiquée dans la section précédente et considérons une déformation biconforme du type

$$g = \frac{dx_1^2 + dx_2^2}{\sigma(x_1)^2} + \frac{(x_1 dx_2 + dx_3)^2}{\rho(x_1)^2}$$

où les paramètres de la déformation  $\sigma$  et  $\rho$  dépendent uniquement de  $x_1$ . Une base orthonormée adaptée est donc donnée par  $e_1 = \sigma \partial_1, e_2 = \sigma(\partial_2 - x_1 \partial_3), e_3 = \rho \partial_3$  et la base duale est donnée par les 1-formes  $\theta_1 = dx_1/\sigma, \theta_2 = dx_2/\sigma, \theta_3 = (x_1 dx_2 + dx_3)/\rho$  de dérivées respectives

$$\begin{aligned} d\theta_1 &= 0 \\ d\theta_2 &= -\frac{\sigma'}{\sigma^2} dx_1 \wedge dx_2 = -\sigma' \theta_1 \wedge \theta_2 \\ d\theta_3 &= -\frac{\rho'}{\rho^2} dx_1 \wedge (x_1 dx_2 + dx_3) + \frac{1}{\rho} dx_1 \wedge dx_2 = -\frac{\sigma \rho'}{\rho} \theta_1 \wedge \theta_3 + \frac{\sigma^2}{\rho} \theta_1 \wedge \theta_2. \end{aligned}$$

### 3.5. CAS OÙ LA DISTRIBUTION HORIZONTALE EST NON-INTÉGRABLE

D'après §3.3.1, la courbure moyenne des fibres est donnée par

$$\mu = \sigma^2 \mathcal{H} \text{grad}_{g_0} \ln \rho = \frac{\sigma^2 \rho'}{\rho} \partial_1 = \frac{\sigma \rho'}{\rho} e_1 \quad (\Rightarrow \mu_1 = \sigma \rho' / \rho),$$

la dilatation par  $\lambda = \sigma$  et la constante d'intégrabilité par  $a = -\sigma^2/2\rho$ . D'après (3.15),

$$\text{div } \mu = \sigma \partial_1 \left( \frac{\sigma \rho'}{\rho} \right) - \frac{\sigma^2 \rho'}{\rho} \partial_1 (\ln \sigma) - \left( \frac{\sigma \rho'}{\rho} \right)^2 = \frac{\sigma^2 \rho''}{\rho} - 2 \frac{\sigma^2 \rho'^2}{\rho^2}.$$

Pour calculer les composantes du tenseur de Ricci, on a besoin de l'expression du Laplacien. Tout d'abord on peut calculer le Laplacien par rapport à  $g_0$  en utilisant la formule  $\Delta_{g_0} f = g_0^{ij} (\partial_{ij} f - \Gamma_{ij}^k \partial_k f)$  où  $\Gamma_{ij}^k$  sont les symboles de Christoffel suivant la métrique  $g_0$ . Ils sont donnés par  $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g_0^{kl} (\partial_i g_{jl}^0 + \partial_j g_{il}^0 - \partial_l g_{ij}^0)$  où les composantes de la métrique et son inverse sont données par :

$$(g_{ij}^0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+x_1^2 & x_1 \\ 0 & x_1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (g_0^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x_1 \\ 0 & -x_1 & 1+x_1^2 \end{pmatrix}$$

Les symboles de Christoffel non-nuls sont :

$$\Gamma_{23}^1 = -\frac{1}{2}, \quad \Gamma_{22}^1 = -x_1, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{x_1}{2}, \quad \Gamma_{13}^2 = \frac{1}{2}, \quad \Gamma_{12}^3 = \frac{1}{2}(1-x_1^2), \quad \Gamma_{13}^3 = -\frac{x_1}{2},$$

donc

$$\Delta_{g_0} f = \partial_{11} f + \partial_{22} f + (1+x_1^2) \partial_{33} f - 2x_1 \partial_{23} f.$$

Si  $f = f(x_1)$  dépend uniquement de  $x_1$ , on aura

$$\Delta_{g_0} f = f''.$$

Par le Lemme 3.3.2,

$$\begin{aligned} \Delta_g \ln \lambda &= \Delta_g \ln \sigma = \sigma^2 \Delta_{g_0} \ln \sigma - \sigma^2 d \ln \sigma (\mathcal{H} \text{grad}_{g_0} \ln \rho) \\ &= \sigma \sigma'' - \sigma'^2 - \sigma \sigma' \frac{\rho'}{\rho} \end{aligned}$$

D'après §3.2.1, les composantes de la courbure de Ricci sont données par

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{11} = \Delta_g \ln \sigma + \mu(\ln \sigma) - \frac{\sigma^4}{2\rho^2} + \sigma \partial_1 (\sigma \rho' / \rho) - (\sigma \rho' / \rho)^2 \\ \quad = \sigma \sigma'' - \sigma'^2 - \frac{\sigma^4}{2\rho^2} + \frac{\sigma \sigma' \rho'}{\rho} + \frac{\sigma^2 \rho''}{\rho} - 2 \frac{\sigma^2 \rho'^2}{\rho^2} \\ R_{22} = \Delta_g \ln \sigma + \mu(\ln \sigma) - \frac{\sigma^4}{2\rho^2} - \frac{\sigma^2 \rho'}{\rho} \partial_1 (\ln \sigma) \\ \quad = \sigma \sigma'' - \sigma'^2 - \frac{\sigma^4}{2\rho^2} - \frac{\sigma \sigma' \rho'}{\rho} \\ R_{33} = \text{div } \mu + \frac{\sigma^4}{2\rho^2} = \frac{\sigma^2 \rho''}{\rho} - 2 \frac{\sigma^2 \rho'^2}{\rho^2} + \frac{\sigma^4}{2\rho^2} \\ R_{12} = 0 \\ R_{13} = 0 \\ R_{23} = \frac{3\sigma^3 \rho'}{2\rho^2} - \frac{\sigma^2 \sigma'}{\rho} \end{array} \right.$$

### 3.5. CAS OÙ LA DISTRIBUTION HORIZONTALE EST NON-INTÉGRABLE

On écrit le flot de soliton sous la forme  $E = f_1 e_1 + f_2 e_2 + f_3 e_3$  pour des fonctions  $f_1, f_2, f_3$ . Notons que pour toute fonction  $f$ ,

$$df = \partial_1 f dx_1 + \partial_2 f dx_2 + \partial_3 f dx_3 = \sigma \partial_1 f \theta_1 + \sigma(\partial_2 f - x_1 \partial_3 f) \theta_2 + \rho \partial_3 f \theta_3.$$

On applique le Lemme 3.2.2 pour calculer  $\mathcal{L}_E g$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_E \theta_1^2 &= 2\theta_1 \odot df_1 \\ \mathcal{L}_E \theta_2^2 &= 2\theta_2 \odot \{df_2 - \sigma' f_1 \theta_2 + \sigma' f_2 \theta_1\} \\ \mathcal{L}_E \theta_3^2 &= 2\theta_3 \odot \left\{ df_3 - \frac{\sigma \rho'}{\rho} f_1 \theta_3 + \frac{\sigma \rho'}{\rho} f_3 \theta_1 + \frac{\sigma^2}{\rho} f_1 \theta_2 - \frac{\sigma^2}{\rho} f_2 \theta_1 \right\} \end{aligned}$$

On peut maintenant identifier à zéro les différents coefficients de  $\theta_i \odot \theta_j$  dans l'équation de soliton  $\text{Ric}_g + \frac{1}{2} \mathcal{L}_E g + Ag = 0$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad \theta_1^2 : \quad \sigma \sigma'' - \sigma'^2 - \frac{\sigma^4}{2\rho^2} + \frac{\sigma \sigma' \rho'}{\rho} + \frac{\sigma^2 \rho''}{\rho} - 2 \frac{\sigma^2 \rho'^2}{\rho^2} + A + \sigma \partial_1 f_1 = 0 \\ \text{(ii)} \quad \theta_2^2 : \quad \sigma \sigma'' - \sigma'^2 - \frac{\sigma^4}{2\rho^2} - \frac{\sigma \sigma' \rho'}{\rho} + A + \sigma(\partial_2 f_2 - x_1 \partial_3 f_2) - \sigma' f_1 = 0 \\ \text{(iii)} \quad \theta_3^2 : \quad \frac{\sigma^2 \rho''}{\rho} - 2 \frac{\sigma^2 \rho'^2}{\rho^2} + \frac{\sigma^4}{2\rho^2} + A + \rho \partial_3 f_3 - \frac{\sigma \rho'}{\rho} f_1 = 0 \\ \text{(iv)} \quad \theta_1 \theta_2 : \quad \sigma(\partial_2 f_1 - x_1 \partial_3 f_1) + \sigma \partial_1 f_2 + \sigma' f_2 = 0 \\ \text{(v)} \quad \theta_1 \theta_3 : \quad \rho \partial_3 f_1 + \sigma \partial_1 f_3 + \frac{\sigma \rho'}{\rho} f_3 - \frac{\sigma^2}{\rho} f_2 = 0 \\ \text{(vi)} \quad \theta_2 \theta_3 : \quad \frac{3}{2} \frac{\sigma^3 \rho'}{\rho^2} - \frac{\sigma^2 \sigma'}{\rho} + \rho \partial_3 f_2 + \sigma(\partial_2 f_3 - x_1 \partial_3 f_3) + \frac{\sigma^2}{\rho} f_1 = 0 \end{array} \right. \quad (3.45)$$

Ce système d'équations présente une grande difficulté de trouver des solutions particulières. On se limite alors au cas simple quand  $\sigma \equiv 1$  et  $\rho$  est constante. Les équations (3.45) deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad -\frac{1}{2\rho^2} + A + \partial_1 f_1 = 0 \\ \text{(ii)} \quad -\frac{1}{2\rho^2} + A + \partial_2 f_2 - x_1 \partial_3 f_2 = 0 \\ \text{(iii)} \quad \frac{1}{2\rho^2} + A + \rho \partial_3 f_3 = 0 \\ \text{(iv)} \quad \partial_2 f_1 - x_1 \partial_3 f_1 + \partial_1 f_2 = 0 \\ \text{(v)} \quad \rho \partial_3 f_1 + \partial_1 f_3 - \frac{1}{\rho} f_2 = 0 \\ \text{(vi)} \quad \rho \partial_3 f_2 + \partial_2 f_3 - x_1 \partial_3 f_3 + \frac{1}{\rho} f_1 = 0 \end{array} \right. \quad (3.46)$$

Par (i) et (iii) on en déduit que

$$f_1 = \left( \frac{1}{2\rho^2} - A \right) x_1 + q_1(x_2, x_3) \quad \text{et} \quad f_3 = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{1}{2\rho^2} + A \right) x_3 + q_3(x_1, x_2) \quad \text{respectivement,}$$

pour des fonctions  $q_1 = q_1(x_2, x_3)$  et  $q_3 = q_3(x_1, x_2)$ . Par suite l'équation (v) implique

$$f_2 = \rho^2 \partial_3 q_1 + \rho \partial_1 q_3.$$

### 3.5. CAS OÙ LA DISTRIBUTION HORIZONTALE EST NON-INTÉGRABLE

---

D'où (ii), (vi) et (iv) impliquent respectivement

$$\begin{cases} \text{(vii)} & -\frac{1}{2\rho^2} + A + \rho^2 \partial_{23} q_1 + \rho \partial_{12} q_3 - x_1 \rho^2 \partial_{33} q_1 = 0 \\ \text{(viii)} & \rho^3 \partial_{33} q_1 + \partial_2 q_3 + \frac{x_1}{\rho^3} + \frac{1}{\rho} q_1 = 0 \\ \text{(ix)} & \partial_2 q_1 - x_1 \partial_3 q_1 + \rho \partial_{11} q_3 = 0. \end{cases}$$

Dérivons (ix) par rapport à  $x_3$  :

$$\partial_{23} q_1 - x_1 \partial_{33} q_1 = 0. \quad (3.47)$$

En substituant  $\partial_{23} q_1$  par  $x_1 \partial_{33} q_1$  dans (vii), on obtient

$$\partial_{12} q_3 = \frac{1}{\rho} \left( \frac{1}{2\rho^2} - A \right)$$

ce qui donne, en intégrant par rapport à  $x_1$ , ensuite par rapport à  $x_2$  :

$$q_3 = \left( \frac{1}{2\rho^2} - A \right) \frac{x_1 x_2}{\rho} + u(x_1) + v(x_2), \quad (3.48)$$

où  $u(x_1)$  et  $v(x_2)$  sont des fonctions dépendant de  $x_1$  et  $x_2$  respectivement. En utilisant (3.47) et (viii), on a :

$$\rho^3 \partial_{23} q_1 + \frac{x_1^2}{\rho^3} + \frac{x_1}{\rho} q_1 = -x_1 \partial_2 q_3. \quad (3.49)$$

Posons  $\nu(x_2, x_3) = \partial_{23} q_1$ , d'après (3.49) on peut écrire

$$q_1 + \frac{x_1}{\rho^2} + \rho \partial_2 q_3 = -\rho^4 \frac{\nu(x_2, x_3)}{x_1} \quad (3.50)$$

D'autre part, en dérivant (3.48) par rapport à  $x_2$ , on obtient

$$\partial_2 q_3 = \frac{x_1}{\rho} \left( \frac{1}{2\rho^2} - A \right) + v'(x_2),$$

en substituant dans (3.50), on a

$$x_1 q_1 + x_1^2 \left( \frac{3}{2\rho^2} - A \right) + x_1 \rho v'(x_2) = -\rho^4 \nu(x_2, x_3).$$

Il s'agit d'un polynôme en  $x_1$ , dont les coefficients sont indépendants de  $x_1$ . En identifiant les coefficients des différents puissances de  $x_1$  à zero, on a

$$A = \frac{3}{2\rho^2}, \quad q_1 + \rho v'(x_2) = 0, \quad \nu(x_2, x_3) = 0.$$

On en déduit que

$$q_1 = -\rho v'(x_2) \text{ (indépendante de } x_3) \quad \text{et} \quad q_3 = -\frac{x_1 x_2}{\rho^3} + u(x_1) + v(x_2).$$

### 3.5. CAS OÙ LA DISTRIBUTION HORIZONTALE EST NON-INTÉGRABLE

---

Ensuite (ix) implique  $-\rho v''(x_2) + \rho u''(x_1) = 0 \Rightarrow$

$$v''(x_2) = u''(x_1) = \alpha \quad \text{constante,}$$

en particulier,  $v'(x_2) = \alpha x_2 + \beta$  et alors

$$v(x_2) = \frac{\alpha x_2^2}{2} + \beta x_2 + \gamma \quad \text{et} \quad u(x_1) = \frac{\alpha x_1^2}{2} + \delta x_1 + \eta$$

où  $\beta, \gamma, \delta, \eta$  sont des constantes arbitraires. Donc finalement on a :

$$q_1 = -\rho(\alpha x_2 + \beta), \quad q_3 = -\frac{x_1 x_2}{\rho^3} + \frac{\alpha}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \delta x_1 + \beta x_2 + \nu,$$

où  $\nu$  est une constante et alors les composantes du flot de soliton sont :

$$\begin{aligned} f_1 &= -\frac{x_1}{\rho^2} - \rho(\alpha x_2 + \beta), \\ f_2 &= -\frac{x_2}{\rho^2} + \rho(\alpha x_1 + \delta), \\ f_3 &= -\frac{2}{\rho^3} x_3 - \frac{x_1 x_2}{\rho^3} + \frac{\alpha}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \delta x_1 + \beta x_2 + \nu. \end{aligned}$$

On vérifie que les parties avec des constantes arbitraires correspondent à des champs de Killing. En effet, soit

$$g_1 = -\rho(\alpha x_2 + \beta), \quad g_2 = \rho(\alpha x_1 + \delta), \quad g_3 = \frac{\alpha}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \delta x_1 + \beta x_2 + \nu,$$

et soit

$$F = g_1 e_1 + g_2 e_2 + g_3 e_3$$

D'après (3.36), on a :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_F \theta_1^2 &= 2\theta_1 \odot dg_1 \\ \mathcal{L}_F \theta_2^2 &= 2\theta_2 \odot dg_2 \\ \mathcal{L}_F \theta_3^2 &= 2\theta_3 \odot \left\{ dg_3 + \frac{1}{\rho} g_1 \theta_2 - \frac{1}{\rho} g_2 \theta_1 \right\}. \end{cases}$$

Pour une fonction  $h$ , on a  $dh = \partial_1 h \theta_1 + (\partial_2 h - x_1 \partial_3 h) \theta_2 + \rho \partial_3 h \theta_3$ . Alors

$$dg_1 = -\rho \alpha \theta_2, \quad dg_2 = \rho \alpha \theta_1, \quad dg_3 = (\alpha x_1 + \delta) \theta_1 + (\alpha x_2 + \beta) \theta_2.$$

Par suite

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathcal{L}_F g &= \frac{1}{2} \mathcal{L}_F (\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

### 3.5. CAS OÙ LA DISTRIBUTION HORIZONTALE EST NON-INTÉGRABLE

---

On suppose alors que les paramètres arbitraires sont nulles. À l'ajout d'un champ de Killing près le flot de soliton  $E$  est unique et donné par

$$E = -\frac{x_1}{\rho^2}\partial_1 - \frac{x_2}{\rho^2}\partial_2 - 2\frac{x_3}{\rho^2}\partial_3. \quad (3.51)$$

Notons que  $\rho = 1$  donne le flot de soliton de Nil de la section précédente. Cependant, pour  $\rho \neq 1$ , le soliton ne peut pas être isométrique à Nil car on a montré dans la section dernière que la structure de soliton est unique avec la constante  $A = 3/2$ . En plus il ne provient d'aucune évolution de Nil sous le flot de Ricci, puisqu'il est clair que si

$$g(t) = dx_1^2 + dx_2^2 + \frac{(x_1 dx_2 + dx_3)^2}{\rho(t)^2}$$

pour une fonction  $\rho(t)$ , alors d'après les calculs pour le tenseur de Ricci de  $g(t)$ , on ne peut pas obtenir  $\partial g/\partial t = -2\text{Ric}(g(t))$ . Il est intéressant de noter que si  $\rho \rightarrow \infty$ , la composante  $f_3$  du flot de soliton tend rapidement vers 0 et s'approche du flot sur  $\mathbb{R}^2$  donné par  $F = -x_1\partial_1 - x_2\partial_2$  correspondant au soliton de Gauss. On conjecture que la famille de déformations correspond à une "collapse" dans le sens de Gromov-Hausdorff de la variété Nil à  $\mathbb{R}^2$  par solitons de Ricci. Finalement, on peut vérifier facilement que le champ de vecteurs (3.51) n'est pas de type gradient. On résume les résultats de cette section dans le théorème suivant.

**Théorème 3.5.1.** *Il existe une famille à un paramètre, de métriques solitons dilatants sur  $\mathbb{R}^3$ , données explicitement par*

$$g = dx_1^2 + dx_2^2 + \frac{2}{3}A(x_1 dx_2 + dx_3)^2$$

*paramétrées par  $A > 0$ , dont la géométrie Nil correspond au cas particulier  $A = 3/2$ . Le flot de soliton est donné par (3.51).*

#### 3.5.3 Une classe de métriques n'admettant pas des structures de soliton locales

Dans [5], P. Baird et L. Daniello montrent que la géométrie  $\widetilde{SL}_2(\mathbb{R})$  n'admet aucune structure de soliton, même localement. On considère une classe de métriques qui contient cette géométrie comme cas particulier.

Considérons  $M = \mathbb{R}_+^3 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 > 0\}$  munie de l'application semi-conforme dans le plan euclidien qui est donnée par  $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$ . Soit  $g$  la métrique sur  $M$  donnée par

$$g = \frac{dx_1^2 + dx_2^2}{\sigma(x_1)^2} + \frac{(dx_2 + x_1 dx_3)^2}{\rho(x_1)^2},$$

### 3.5. CAS OÙ LA DISTRIBUTION HORIZONTALE EST NON-INTÉGRABLE

où  $\sigma$  et  $\rho$  sont des fonctions lisses qui dépendent uniquement de  $x_1$ . Le cas  $\sigma \equiv \rho \equiv x_1$  correspond à la métrique sur  $SL_2(\mathbb{R})$  [52] (voir aussi [12]). Une base orthonormée des champs de vecteurs est donnée par

$$e_1 = \sigma \partial_1, \quad e_2 = \sigma \left( \partial_2 - \frac{1}{x_1} \partial_3 \right), \quad e_3 = \frac{1}{x_1} \rho \partial_3,$$

avec les 1-formes duales associées

$$\theta_1 = \frac{dx_1}{\sigma}, \quad \theta_2 = \frac{dx_2}{\sigma}, \quad \theta_3 = \frac{dx_2 + x_1 dx_3}{\rho},$$

de dérivées respectives

$$d\theta_1 = 0, \quad d\theta_2 = -\sigma' \theta_1 \wedge \theta_2, \quad d\theta_3 = -\frac{\sigma^2}{\rho x_1} \theta_1 \wedge \theta_2 + \sigma \partial_1 \ln \left( \frac{x_1}{\rho} \right) \theta_1 \wedge \theta_3.$$

Par comparaison avec les équations de structure (3.4), on en déduit que le coefficient d'intégrabilité et la forme duale de la courbure moyenne des fibres sont donnés par

$$a = \frac{\sigma^2}{2\rho x_1} \quad \text{et} \quad \mu^b = -\sigma \partial_1 \ln \left( \frac{x_1}{\rho} \right) \theta_1 = -d \ln \left( \frac{x_1}{\rho} \right)$$

respectivement. En particulier

$$\mu = -\text{grad} \ln \left( \frac{x_1}{\rho} \right) = -e_1 \left( \ln \left( \frac{x_1}{\rho} \right) \right) e_1 = -\sigma \partial_1 \ln \left( \frac{x_1}{\rho} \right) e_1.$$

Finalement, la dilatation est donnée par  $\lambda = \sigma$ .

Pour calculer  $\Delta_g \ln \lambda$ , on calcule tout d'abord  $\Delta_{g_0} \ln \lambda$ , où  $g_0 = dx_1^2 + dx_2^2 + (dx_2 + x_1 dx_3)^2$  et on applique ensuite le Lemme 3.3.2. Les composantes de la métrique  $g_0$  et son inverse sont donnés par

$$((g_0)_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & x_1 \\ 0 & x_1 & x_1^2 \end{pmatrix}, \quad ((g_0)^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/x_1 \\ 0 & -1/x_1 & 2/x_1^2 \end{pmatrix}.$$

On peut alors calculer les symboles de Christoffel  $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij})$ . Ceux qui sont non nuls sont donnés par

$$\Gamma_{23}^1 = -\frac{1}{2}, \quad \Gamma_{33}^1 = -x_1, \quad \Gamma_{12}^2 = -\frac{1}{2x_1}, \quad \Gamma_{13}^2 = -\frac{1}{2}, \quad \Gamma_{12}^3 = \frac{1}{x_1^2}, \quad \Gamma_{13}^3 = \frac{3}{2}x_1.$$

Il s'ensuit que le Laplacien d'une fonction  $f$  par rapport à  $g_0$  est donné par

$$\begin{aligned} \Delta_{g_0} f &= (g_0)^{ij} (\partial_{ij} f - \Gamma_{ij}^k \partial_k f) \\ &= \partial_{11} f + \partial_{22} f + \frac{2}{x_1^2} \partial_{33} f - \frac{2}{x_1} \partial_{23} f + \frac{1}{x_1} \partial_1 f. \end{aligned}$$

### 3.5. CAS OÙ LA DISTRIBUTION HORIZONTALE EST NON-INTÉGRABLE

Si  $f$  dépend seulement de  $x_1$  son Laplacien devient  $f'' + \frac{1}{x_1}f'$ . Suivant  $g_0$ , le champ de vecteur vertical unitaire est donné par  $U_0 = \frac{1}{x_1}\partial_3$ . Donc par le Lemme 3.3.2

$$\Delta_g f = \sigma^2 \Delta_{g_0} f - \sigma^2 df(\mathcal{H}\text{grad}_{g_0} \ln \rho),$$

où

$$\text{grad}_{g_0} \ln \rho = (g_0)^{ij} \partial_i(\ln \rho) \partial_j = \partial_1(\ln \rho) \partial_1.$$

On obtient alors

$$\Delta_g \ln \lambda = \sigma \sigma'' - \sigma'^2 + \sigma \sigma' \partial_1 \ln \left( \frac{x_1}{\rho} \right).$$

D'autre part

$$\mu(\ln \lambda) = -\sigma^2 \partial_1 \ln \left( \frac{x_1}{\rho} \right) \partial_1(\ln \sigma) = -\sigma \sigma' \partial_1 \ln \left( \frac{x_1}{\rho} \right).$$

En particulier, le terme  $\Delta_g \ln \lambda + \mu(\ln \lambda)$  qui apparait dans les composantes de la courbure de Ricci est donné par

$$\Delta_g \ln \lambda + \mu(\ln \lambda) = \sigma \sigma'' - \sigma'^2.$$

On peut écrire maintenant les composantes de la courbure de Ricci qui sont données par (3.20) :

$$\begin{cases} R_{11} &= \sigma \sigma'' - \sigma'^2 - \frac{\sigma^4}{2x_1^2 \rho^2} - \sigma \partial_1 \left( \sigma \partial_1 \ln \left( \frac{x_1}{\rho} \right) \right) - \sigma^2 \left( \partial_1 \ln \left( \frac{x_1}{\rho} \right) \right)^2 \\ R_{22} &= \sigma \sigma'' - \sigma'^2 - \frac{\sigma^4}{2x_1^2 \rho^2} + \sigma \sigma' \partial_1 \ln \left( \frac{x_1}{\rho} \right) \\ R_{33} &= -\sigma \partial_1 \left( \sigma \partial_1 \ln \left( \frac{x_1}{\rho} \right) \right) + \sigma \sigma' \partial_1 \ln \left( \frac{x_1}{\rho} \right) - \sigma^2 \left( \partial_1 \ln \left( \frac{x_1}{\rho} \right) \right)^2 + \frac{\sigma^4}{2\rho^2 x_1^2} \\ R_{12} &= 0 \\ R_{13} &= 0 \\ R_{23} &= \sigma \partial_1 \left( \frac{\sigma^2}{2x_1 \rho} \right) + \frac{\sigma^3}{x_1 \rho} \partial_1 \ln \left( \frac{x_1}{\rho} \right) \end{cases}$$

Soit  $E = f_1 e_1 + f_2 e_2 + f_3 e_3$  le flot de soliton. Notons que pour toute fonction  $f$

$$df = \partial_1 f dx_1 + \partial_2 f dx_2 + \partial_3 f dx_3 = \sigma \partial_1 f \theta_1 + \sigma \left( \partial_2 f - \frac{1}{x_1} \partial_3 f \right) \theta_2 + \frac{\rho}{x_1} \partial_3 f \theta_3.$$

D'après le Lemme 3.2.2, les dérivées de Lie sont données par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_E \theta_1^2 &= 2\theta_1 \odot df_1 \\ \mathcal{L}_E \theta_2^2 &= 2\theta_2 \odot \{df_2 - \sigma' f_1 \theta_2 + \sigma' f_2 \theta_1\} \\ \mathcal{L}_E \theta_3^2 &= 2\theta_3 \odot \left\{ df_3 - \frac{\sigma^2}{x_1 \rho} f_1 \theta_2 + \frac{\sigma^2}{x_1 \rho} f_2 \theta_1 + \sigma \partial_1 \ln \left( \frac{x_1}{\rho} \right) f_1 \theta_3 - \sigma \partial_1 \ln \left( \frac{x_1}{\rho} \right) f_3 \theta_1 \right\} \end{aligned}$$

### 3.5. CAS OÙ LA DISTRIBUTION HORIZONTALE EST NON-INTÉGRABLE

On identifie les différents coefficients de  $\theta_i \odot \theta_j$  dans l'équation de soliton  $\text{Ric}_g + \frac{1}{2}\mathcal{L}Eg + Ag = 0$  à zéro :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad \theta_1^2 : \quad A + \sigma\sigma'' - \sigma'^2 - \frac{\sigma^4}{2x_1^2\rho^2} - \sigma\partial_1 \left( \sigma\partial_1 \ln \left( \frac{x_1}{\rho} \right) \right) - \sigma^2 \left( \partial_1 \ln \left( \frac{x_1}{\rho} \right) \right)^2 + \sigma\partial_1 f_1 = 0 \\ \text{(ii)} \quad \theta_2^2 : \quad A + \sigma\sigma'' - \sigma'^2 - \frac{\sigma^4}{2x_1^2\rho^2} + \sigma\sigma'\partial_1 \ln \left( \frac{x_1}{\rho} \right) + \sigma \left( \partial_2 f_2 - \frac{1}{x_1}\partial_3 f_2 \right) - \sigma' f_1 = 0 \\ \text{(iii)} \quad \theta_3^2 : \quad A + \frac{\sigma^4}{2x_1^2\rho^2} - \sigma\partial_1 \left( \sigma\partial_1 \ln \left( \frac{x_1}{\rho} \right) \right) + \sigma\sigma'\partial_1 \ln \left( \frac{x_1}{\rho} \right) - \sigma^2 \left( \partial_1 \ln \left( \frac{x_1}{\rho} \right) \right)^2 \\ \quad \quad \quad + \frac{\rho}{x_1}\partial_3 f_3 + \sigma\partial_1 \ln \left( \frac{x_1}{\rho} \right) f_1 = 0 \\ \text{(iv)} \quad \theta_1\theta_2 : \quad \sigma \left( \partial_2 f_1 - \frac{1}{x_1}\partial_3 f_1 \right) + \sigma\partial_1 f_2 + \sigma' f_2 = 0 \\ \text{(v)} \quad \theta_1\theta_3 : \quad \frac{\rho}{x_1}\partial_3 f_1 + \sigma\partial_1 f_3 + \frac{\sigma^2}{x_1\rho} f_2 - \sigma\partial_1 \ln \left( \frac{x_1}{\rho} \right) f_3 = 0 \\ \text{(vi)} \quad \theta_2\theta_3 : \quad \sigma\partial_1 \left( \frac{\sigma^2}{2x_1\rho} \right) + \frac{\sigma^3}{x_1\rho}\partial_1 \ln \left( \frac{x_1}{\rho} \right) + \frac{\rho}{x_1}\partial_3 f_2 + \sigma \left( \partial_2 f_3 - \frac{1}{x_1}\partial_3 f_3 \right) - \frac{\sigma^2}{x_1\rho} f_1 = 0 \end{array} \right. \quad (3.52)$$

Ces équations peuvent être considérablement simplifiées dans le cas où  $\sigma \equiv \rho \equiv \nu x_1$ , i.e. le cas de la géométrie  $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(i)} \quad A - 1 - \frac{1}{2\nu^2} + x_1\partial_1 f_1 = 0 \\ \text{(ii)} \quad A - 1 - \frac{1}{2\nu^2} + x_1\partial_2 f_2 - \partial_3 f_2 - f_1 = 0 \\ \text{(iii)} \quad A + \frac{1}{2\nu^2} + \nu\partial_3 f_3 = 0 \\ \text{(iv)} \quad x_1\partial_2 f_1 - \partial_3 f_1 + x_1\partial_1 f_2 + f_2 = 0 \\ \text{(v)} \quad \nu\partial_3 f_1 + x_1\partial_1 f_3 + f_2 = 0 \\ \text{(vi)} \quad \nu\partial_3 f_2 + x_1\partial_2 f_3 - \partial_3 f_3 - f_1 = 0 \end{array} \right. \quad (3.53)$$

La non-existence de la structure de soliton sur  $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$  a été montrée dans [5] par un long calcul. Par contre, ici on peut en déduire ce fait d'une manière plus rapide. Les équations (i), (iii) et (v) impliquent qu'il existe des fonctions  $q_1 = q_1(x_2, x_3)$  et  $q_3 = q_3(x_1, x_2)$  telles que

$$\begin{aligned} f_1 &= \left(1 + \frac{1}{2\nu^2} - A\right) \ln x_1 + q_1(x_2, x_3) \\ f_3 &= -\frac{1}{\nu} \left(\frac{1}{2\nu^2} + A\right) x_3 + q_3(x_1, x_2) \\ f_2 &= -\nu^2 \partial_3 q_1 - \nu x_1 \partial_1 q_3, \end{aligned}$$

respectivement. Alors (ii), (iv) and (vi) impliquent respectivement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(vii)} \quad A - 1 - \frac{1}{2\nu^2} - x_1(\nu^2 \partial_2 q_1 + \nu x_1 \partial_1 q_3) + \nu^2 \partial_3 q_1 + \left(A - 1 - \frac{1}{2\nu^2}\right) \ln x_1 - q_1 = 0 \\ \text{(viii)} \quad -(1 + \nu^2) \partial_3 q_1 + x_1(\partial_2 q_1 - 2\nu \partial_1 q_3 - \nu x_1 \partial_1 q_3) = 0 \\ \text{(ix)} \quad -\nu^3 \partial_3 q_1 + x_1 \partial_2 q_3 + \frac{1}{\nu} \left(A + \frac{1}{2\nu^2}\right) + \frac{1}{\nu} \left(A - 1 - \frac{1}{2\nu^2}\right) \ln x_1 - \frac{1}{\nu} q_1 = 0 \end{array} \right. \quad (3.54)$$

Par (viii), on trouve

$$-2\partial_3 q_1 + x_1 \partial_2 q_1 = r(x_1, x_2), \quad (3.55)$$

### 3.5. CAS OÙ LA DISTRIBUTION HORIZONTALE EST NON-INTÉGRABLE

---

où  $r$  est une fonction qui dépend seulement de  $x_1$  et  $x_2$ . Mais, en dérivant par rapport à  $x_1$ , on a

$$\partial_2 q_1 = \frac{\partial r}{\partial x_1} \text{ (avec } q_1 \text{ indépendante de } x_1) \Rightarrow q_1 = u(x_2) + v(x_3)$$

pour des certaines fonctions  $u$  et  $v$  qui dépendent uniquement de  $x_2$  et  $x_3$  respectivement. Alors  $\partial_{23} q_1 = 0$  et en dérivant (3.55) par rapport à  $x_3$  on obtient

$$\partial_{33} q_1 = 0 \Rightarrow v''(x_3) = 0 \Rightarrow v(x_3) = ax_3 + b$$

où  $a, b$  sont des constantes. Maintenant (viii) implique

$$\nu \partial_1 (x_1^2 \partial_1 q_3) = -(1+\nu^2)a + x_1 u'(x_2) \Rightarrow \nu x_1^2 \partial_1 q_3 = -2(1+\nu^2)x_1 + \frac{x_1^2}{2} u'(x_2) + w(x_2),$$

pour une certaine fonction  $w = w(x_2)$ . Ensuite en divisant par  $x_1^2$  et en intégrant par rapport à  $x_1$  on déduit que

$$\nu q_3 = -(1+\nu^2)a \ln x_1 + \frac{x_1}{2} u'(x_2) - \frac{1}{x_1} w(x_2) + t(x_2),$$

pour une certaine fonction  $t = t(x_2)$ . On a donc des formes explicites pour  $q_1$  et  $q_3$ . En les substituant dans (vii) on obtient

$$A - 1 - \frac{1}{2\nu^2} - \nu x_1^2 \left( \frac{1}{2} u''(x_2) + \frac{1}{x_1^2} w'(x_2) \right) + \left( A - 1 - \frac{1}{2\nu^2} \right) \ln x_1 - u(x_2) - ax_3 - b.$$

En identifiant les coefficients des différents puissances de  $x_1$  et aussi ceux de  $\ln x_1$  à zero on a

$$A = 1 + \frac{1}{2\nu^2}, \quad u''(x_2) = 0, \quad -w'(x_2) - u(x_2) - ax_3 - b = 0 (\Rightarrow a = 0).$$

En particulier  $u(x_2) = cx_2 + d$  pour des constantes  $c, d$  et

$$\nu w(x_2) = -\frac{cx_2^2}{2} - (d+b)x_2 + e,$$

pour une constante  $e$ . Finalement, on substitue ceci dans (ix) :

$$x_1 t'(x_2) + \frac{1}{\nu} \left( 1 + \frac{1}{\nu^2} \right) = 0.$$

Ce qui est impossible pour tout  $\nu \neq 0$ , et par suite il n'existe aucune solution locale.

**Théorème 3.5.2.** *Il existe une famille à un paramètre, de métriques sur  $\mathbb{R}_+^3$  données explicitement par*

$$g = \frac{dx_1^2 + dx_2^2}{\sigma(x_1)^2} + \frac{(dx_2 + x_1 dx_3)^2}{\nu^2 x_1^2}$$

*paramétrée par  $\nu \neq 0$ , telle que la géométrie  $\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$  ( $\nu = 1$ ) en est un cas particulier n'admettant aucune structure de soliton, même localement.*

### 3.5. CAS OÙ LA DISTRIBUTION HORIZONTALE EST NON-INTÉGRABLE

---

## Chapitre 4

# Morphismes harmoniques généralisés et applications semi-conformes biharmoniques

Les morphismes harmoniques ont été caractérisés par B. Fuglede [28] et T. Ishihara [33] indépendamment, comme des applications semi-conformes harmoniques. Par analogie, les morphismes biharmoniques ont été introduits et étudiés par E. Loubeau et Y-L Ou dans [45], [39] et [40] comme généralisation de la notion de morphisme harmonique. Dans l'article [40], ils les ont caractérisés comme des applications semi-conformes, biharmoniques, 4-harmonique et satisfaisant une équation supplémentaire (voir le Théorème 1.7.21). Les morphismes biharmoniques correspondent alors à une classe d'applications semi-conformes biharmoniques très restreinte. Notons aussi qu'un morphisme harmonique n'est pas nécessairement un morphisme biharmonique.

Dans ce chapitre, on étudie des applications pour lesquelles le pull-back d'une fonction harmonique (définie localement) est biharmonique. Il est clair que la classe de telles applications contient les morphismes harmoniques. On les appelle *morphismes harmoniques généralisés*.

On donne une caractérisation complète des morphismes harmoniques généralisés à valeurs dans l'espace euclidien. On verra dans la suite qu'il s'agit d'une classe d'applications qui prolonge la notion de morphisme harmonique de manière naturelle et que les équations qui les caractérisent sont plus maniables que, par exemple celles qui caractérisent les morphismes biharmoniques. On présente une classification complète de ces applications lorsqu'elles correspondent à des projections d'un espace de type "warped-product", ainsi que deux méthodes de construction des morphismes harmoniques généralisés. Ce type d'applications permet de construire une infinité d'exemples

#### 4.1. CARACTÉRISATION DES MORPHISMES HARMONIQUES GÉNÉRALISÉS À VALEURS DANS L'ESPACE EUCLIDIEN

---

d'applications semi-conformes biharmoniques propres (non-harmoniques).

### 4.1 Caractérisation des morphismes harmoniques généralisés à valeurs dans l'espace euclidien

On définit dans cette section les morphismes harmoniques généralisés entre des variétés riemanniennes  $(M^m, g)$  et  $(N^n, h)$ , et on les caractérise lorsque  $N^n = \mathbb{R}^n$  muni de la métrique euclidienne. D'après [12], une application lisse  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  définie sur un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  est un morphisme harmonique si et seulement si  $\varphi$  et  $\varphi^2$  sont harmoniques. On verra dans la suite qu'une application lisse  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  définie sur un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  est un morphisme harmonique généralisé si et seulement si  $\varphi$  est semi-conforme,  $\varphi$  et  $\varphi^2$  sont biharmoniques.

**Définition 4.1.1.** *Une application  $\varphi : (M^m, g) \rightarrow (N^n, h)$  entre deux variétés riemanniennes est dite morphisme harmonique généralisé, si pour toute fonction harmonique  $f$  définie sur un ouvert  $U$  de  $N$ ,  $f : U \subseteq N^n \rightarrow \mathbb{R}$ , tel que  $\varphi^{-1}(U) = V$  non-vide, la composée  $f \circ \varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction biharmonique sur  $V \subseteq M$ .*

**Remarque 4.1.2.** *Il est clair d'après la définition des morphismes harmoniques, des morphismes biharmoniques et des morphismes harmoniques généralisés, que tout morphisme harmonique est un morphisme harmonique généralisé et que tout morphisme biharmonique est aussi un morphisme harmonique généralisé. Donc on a les relations d'inclusions suivantes :*

$$\begin{aligned} \{\text{morphismes harmoniques}\} &\subset \{\text{morphismes harmoniques généralisés}\} \text{ et} \\ \{\text{morphismes biharmoniques}\} &\subset \{\text{morphismes harmoniques généralisés}\}. \end{aligned}$$

On présente ci-dessous la caractérisation des morphismes harmoniques généralisés à valeurs dans l'espace euclidien.

**Théorème 4.1.3.** *Soit  $\varphi : (M^m, g) \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que  $\varphi(x) = (\varphi^1(x), \varphi^2(x), \dots, \varphi^n(x))$ , une application définie sur une variété riemannienne à valeurs dans l'espace euclidien muni de sa métrique canonique. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $\varphi$  est un morphisme harmonique généralisé ;
- (ii)  $\varphi$  est une application semi-conforme biharmonique et  $(\varphi^\alpha + i\varphi^\beta)^2 : (M^m, g) \rightarrow \mathbb{C}$  est aussi biharmonique pour tous  $\alpha \neq \beta = 1, 2, \dots, n$  ;
- (iii) Il existe une fonction  $\lambda : M \rightarrow [0, \infty)$  telle que

$$\begin{aligned} \Delta^2(f \circ \varphi) &= \lambda^4(\Delta^2 f) \circ \varphi + 2\{\lambda^2 \Delta \varphi^\alpha + g(\nabla \lambda^2, \nabla \varphi^\alpha)\}(\partial_\alpha \Delta f) \circ \varphi \quad (4.1) \\ &\quad + \{\Delta \lambda^2 + 2g(\nabla \varphi^\beta, \nabla \Delta \varphi^\beta) + (\Delta \varphi^\beta)^2\}(\Delta f) \circ \varphi \end{aligned}$$

pour chaque  $\beta = 1, \dots, n$ .

#### 4.1. CARACTÉRISATION DES MORPHISMES HARMONIQUES GÉNÉRALISÉS À VALEURS DANS L'ESPACE EUCLIDIEN

---

*Démonstration.* Soient  $\varphi : (M^m, g) \rightarrow (N^n, h)$  une application entre deux variétés riemanniennes et  $f$  une fonction sur  $N$ . D'après le Lemme 2.5 dans [45], on a la formule du bi-Laplacien suivante

$$\begin{aligned}
\Delta^2(f \circ \varphi) &= (f_{\alpha\beta\gamma\delta} \circ \varphi) \left\{ g(\nabla\varphi^\alpha, \nabla\varphi^\beta)g(\nabla\varphi^\gamma, \nabla\varphi^\delta) \right\} \\
&\quad + (f_{\alpha\beta\gamma} \circ \varphi) \left\{ g(\nabla\varphi^\alpha, \nabla\varphi^\beta)\Delta\varphi^\gamma + g(\nabla\varphi^\beta, \nabla\varphi^\gamma)\Delta\varphi^\alpha \right. \\
&\quad \left. + 2g(\nabla g(\nabla\varphi^\alpha, \nabla\varphi^\beta), \nabla\varphi^\gamma) \right\} \\
&\quad + (f_{\alpha\beta} \circ \varphi) \left\{ \Delta g(\nabla\varphi^\alpha, \nabla\varphi^\beta) + 2g(\nabla\varphi^\beta, \nabla\Delta\varphi^\alpha) + \Delta\varphi^\alpha\Delta\varphi^\beta \right\} \\
&\quad + (f_\alpha \circ \varphi)\Delta^2\varphi^\alpha,
\end{aligned} \tag{4.2}$$

où on considère la convention de sommation d'Einstein et où  $f_\alpha, f_{\alpha\beta}$  etc. désignent les dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial y^\alpha}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^\alpha \partial y^\beta}$  etc. respectivement. En utilisant le Lemme 2.4 dans [45], on peut réécrire la formule (4.2) de la façon suivante,

$$\begin{aligned}
\Delta^2(f \circ \varphi) &= \sum_{\alpha=1}^n (f_{\alpha\alpha\alpha\alpha} \circ \varphi) |\nabla\varphi^\alpha|^4 + 4 \sum_{1 \leq \alpha \neq \beta \leq n} (f_{\alpha\alpha\alpha\beta} \circ \varphi) |\nabla\varphi^\alpha|^2 g(\nabla\varphi^\alpha, \nabla\varphi^\beta) \\
&\quad + \sum_{1 \leq \alpha \neq \beta \leq n} (f_{\alpha\beta\alpha\beta} \circ \varphi) \left\{ 2|\nabla\varphi^\alpha|^2 |\nabla\varphi^\beta|^2 + 4(g(\nabla\varphi^\alpha, \nabla\varphi^\beta))^2 \right\} \\
&\quad + \sum_{1 \leq \alpha \neq \beta \neq \gamma \leq n} (f_{\alpha\beta\alpha\gamma} \circ \varphi) \left\{ 4g(\nabla\varphi^\alpha, \nabla\varphi^\alpha)g(\nabla\varphi^\beta, \nabla\varphi^\gamma) \right. \\
&\quad \left. + 8g(\nabla\varphi^\alpha, \nabla\varphi^\beta)g(\nabla\varphi^\alpha, \nabla\varphi^\gamma) \right\} \\
&\quad + \sum_{1 \leq \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \delta \leq n} (f_{\alpha\beta\gamma\delta} \circ \varphi) \left\{ g(\nabla\varphi^\alpha, \nabla\varphi^\beta)g(\nabla\varphi^\gamma, \nabla\varphi^\delta) \right\} \\
&\quad + \sum_{1 \leq \alpha \leq n} (f_{\alpha\alpha\alpha} \circ \varphi) \left\{ 2|\nabla\varphi^\alpha|^2 \Delta\varphi^\alpha + 2g(\nabla|\nabla\varphi^\alpha|^2, \nabla\varphi^\alpha) \right\} \\
&\quad + \sum_{1 \leq \alpha \neq \beta \leq n} (f_{\alpha\alpha\beta} \circ \varphi) \left\{ 2|\nabla\varphi^\alpha|^2 \Delta\varphi^\beta + 4g(\nabla\varphi^\alpha, \nabla\varphi^\beta)\Delta\varphi^\alpha \right. \\
&\quad \left. + 2g(\nabla|\nabla\varphi^\alpha|^2, \nabla\varphi^\beta) + 4g(\nabla g(\nabla\varphi^\alpha, \nabla\varphi^\beta), \nabla\varphi^\alpha) \right\} \\
&\quad + \sum_{1 \leq \alpha \neq \beta \neq \gamma \leq n} (f_{\alpha\beta\gamma} \circ \varphi) \left\{ g(\nabla\varphi^\alpha, \nabla\varphi^\beta)\Delta\varphi^\gamma + g(\nabla\varphi^\beta, \nabla\varphi^\gamma)\Delta\varphi^\alpha \right. \\
&\quad \left. + 2g(\nabla g(\nabla\varphi^\alpha, \nabla\varphi^\beta), \nabla\varphi^\gamma) \right\} + \sum_{1 \leq \alpha \leq n} (f_{\alpha\alpha} \circ \varphi) \left\{ \frac{1}{2}\Delta^2(\varphi^\alpha\varphi^\alpha) - \varphi^\alpha\Delta^2\varphi^\alpha \right\} \\
&\quad + \sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq n} (f_{\alpha\beta} \circ \varphi) \left\{ \Delta^2(\varphi^\alpha\varphi^\beta) - \varphi^\alpha\Delta^2\varphi^\beta - \varphi^\beta\Delta^2\varphi^\alpha \right\} \\
&\quad + \sum_{1 \leq \alpha \leq n} (f_\alpha \circ \varphi)\Delta^2\varphi^\alpha.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

#### 4.1. CARACTÉRISATION DES MORPHISMES HARMONIQUES GÉNÉRALISÉS À VALEURS DANS L'ESPACE EUCLIDIEN

---

Supposons maintenant que  $\varphi : (M^m, g) \rightarrow \mathbb{R}^n$  est un morphisme harmonique généralisé. Soient  $\{y^\alpha\}_{\alpha=1, \dots, n}$  les coordonnées cartésiennes sur l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ , donc la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^n$  par  $f(y) = f(y^1, \dots, y^n) = y^\alpha$  est une fonction harmonique pour tout  $\alpha = 1, 2, \dots, n$ . En substituant  $f(y) = y^\alpha$  dans (4.3) on obtient

$$\Delta^2 \varphi^\alpha = 0 \text{ pour tout } \alpha = 1, 2, \dots, n, \quad (4.4)$$

et alors  $\varphi : (M^m, g) \rightarrow \mathbb{R}^n$  est biharmonique.

On choisit maintenant les fonctions harmoniques  $f(y) = (y^\alpha)^2 - (y^\beta)^2$  et  $f(y) = y^\alpha y^\beta$ ,  $\alpha \neq \beta$ ; en les substituant dans (4.3) on a respectivement

$$\begin{aligned} \Delta^2(\varphi^\alpha \varphi^\alpha) - 2\varphi^\alpha \Delta^2 \varphi^\alpha - [\Delta^2(\varphi^\beta \varphi^\beta) - 2\varphi^\beta \Delta^2 \varphi^\beta] &= 0, \\ \Delta^2(\varphi^\alpha \varphi^\beta) - \varphi^\alpha \Delta^2 \varphi^\beta - \varphi^\beta \Delta^2 \varphi^\alpha &= 0. \end{aligned}$$

Ce qui implique, avec (4.4) que

$$\begin{cases} \Delta^2(\varphi^\alpha \varphi^\alpha) - \Delta^2(\varphi^\beta \varphi^\beta) = 0, \\ \Delta^2(\varphi^\alpha \varphi^\beta) = 0, \end{cases} \quad (4.5)$$

cela signifie que l'application  $(\varphi^\alpha + i\varphi^\beta)^2 : (M^m, g) \rightarrow \mathbb{R}^2$  est biharmonique pour tous  $\alpha$  et  $\beta$  telles que  $\alpha \neq \beta$ .

En utilisant les équations (4.4) et (4.5) on peut écrire (4.3) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \Delta^2(f \circ \varphi) &= \sum_{\alpha=1}^n (f_{\alpha\alpha\alpha\alpha} \circ \varphi) |\nabla \varphi^\alpha|^4 + 4 \sum_{1 \leq \alpha \neq \beta \leq n} (f_{\alpha\alpha\alpha\beta} \circ \varphi) |\nabla \varphi^\alpha|^2 g(\nabla \varphi^\alpha, \nabla \varphi^\beta) \\ &+ \sum_{1 \leq \alpha \neq \beta \leq n} (f_{\alpha\beta\alpha\beta} \circ \varphi) \left\{ 2|\nabla \varphi^\alpha|^2 |\nabla \varphi^\beta|^2 + 4(g(\nabla \varphi^\alpha, \nabla \varphi^\beta))^2 \right\} \quad (4.6) \\ &+ \sum_{1 \leq \alpha \neq \beta \neq \gamma \leq n} (f_{\alpha\alpha\beta\gamma} \circ \varphi) \left\{ 4g(\nabla \varphi^\alpha, \nabla \varphi^\alpha) g(\nabla \varphi^\beta, \nabla \varphi^\gamma) \right. \\ &+ \left. 8g(\nabla \varphi^\alpha, \nabla \varphi^\beta) g(\nabla \varphi^\alpha, \nabla \varphi^\gamma) \right\} \\ &+ \sum_{1 \leq \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \delta \leq n} (f_{\alpha\beta\gamma\delta} \circ \varphi) \left\{ g(\nabla \varphi^\alpha, \nabla \varphi^\beta) g(\nabla \varphi^\gamma, \nabla \varphi^\delta) \right\} \\ &+ \sum_{1 \leq \alpha \leq n} (f_{\alpha\alpha\alpha} \circ \varphi) B_{\alpha\alpha\alpha} + \sum_{1 \leq \alpha \neq \beta \leq n} (f_{\beta\beta\alpha} \circ \varphi) B_{\beta\beta\alpha} \\ &+ \sum_{1 \leq \alpha \neq \beta \neq \gamma \leq n} (f_{\alpha\beta\gamma} \circ \varphi) B_{\alpha\beta\gamma} + \frac{1}{2} \{(\Delta f) \circ \varphi\} \Delta^2(\varphi^\omega \varphi^\omega) \end{aligned}$$

#### 4.1. CARACTÉRISATION DES MORPHISMES HARMONIQUES GÉNÉRALISÉS À VALEURS DANS L'ESPACE EUCLIDIEN

---

pour toute fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}^n$  et tout  $\omega = 1, \dots, n$ , avec

$$B_{\alpha\alpha\alpha} = 2|\nabla\varphi^\alpha|^2\Delta\varphi^\alpha + 2g(\nabla|\nabla\varphi^\alpha|^2, \nabla\varphi^\alpha) \quad (4.7)$$

$$B_{\beta\beta\alpha} = 2|\nabla\varphi^\beta|^2\Delta\varphi^\alpha + 4g(\nabla\varphi^\alpha, \nabla\varphi^\beta)\Delta\varphi^\beta + 2g(\nabla|\nabla\varphi^\beta|^2, \nabla\varphi^\alpha) \\ + 4g(\nabla g(\nabla\varphi^\alpha, \nabla\varphi^\beta), \nabla\varphi^\beta), \quad 1 \leq \alpha \neq \beta \leq n. \quad (4.8)$$

$$B_{\alpha\beta\gamma} = g(\nabla\varphi^\alpha, \nabla\varphi^\beta)\Delta\varphi^\gamma + g(\nabla\varphi^\beta, \nabla\varphi^\gamma)\Delta\varphi^\alpha \\ + 2g(\nabla g(\nabla\varphi^\alpha, \nabla\varphi^\beta), \nabla\varphi^\gamma), \quad 1 \leq \alpha \neq \beta \neq \gamma \leq n. \quad (4.9)$$

Mais en substituant la fonction harmonique  $f(y) = y^\alpha y^\beta y^\gamma$  avec  $\alpha \neq \beta \neq \gamma$  dans (4.6) on obtient

$$B_{\alpha\beta\gamma} = 0, \quad \text{pour } 1 \leq \alpha \neq \beta \neq \gamma \leq n. \quad (4.10)$$

D'autre part, par substitution de la fonction harmonique  $f(y) = (y^\alpha)^3 - 3y^\alpha(y^\beta)^2$  dans (4.6) on a,

$$B_{\alpha\alpha\alpha} = B_{\beta\beta\alpha}, \quad \text{pour } 1 \leq \alpha \neq \beta \leq n. \quad (4.11)$$

Substituons (4.10) et (4.11) dans l'équation (4.6); on obtient

$$\Delta^2(f \circ \varphi) = \sum_{\alpha=1}^n (f_{\alpha\alpha\alpha\alpha} \circ \varphi) |\nabla\varphi^\alpha|^4 + 4 \sum_{1 \leq \alpha \neq \beta \leq n} (f_{\alpha\alpha\alpha\beta} \circ \varphi) |\nabla\varphi^\alpha|^2 g(\nabla\varphi^\alpha, \nabla\varphi^\beta) \\ + \sum_{1 \leq \alpha \neq \beta \neq \gamma \leq n} (f_{\alpha\alpha\beta\gamma} \circ \varphi) \left\{ 4g(\nabla\varphi^\alpha, \nabla\varphi^\alpha) g(\nabla\varphi^\beta, \nabla\varphi^\gamma) \right. \\ \left. + 8g(\nabla\varphi^\alpha, \nabla\varphi^\beta) g(\nabla\varphi^\alpha, \nabla\varphi^\gamma) \right\} \\ + \sum_{1 \leq \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \delta \leq n} (f_{\alpha\beta\gamma\delta} \circ \varphi) \left\{ g(\nabla\varphi^\alpha, \nabla\varphi^\beta) g(\nabla\varphi^\gamma, \nabla\varphi^\delta) \right\} \\ + \sum_{1 \leq \alpha \neq \beta \leq n} (f_{\alpha\beta\alpha\beta} \circ \varphi) \left\{ 2|\nabla\varphi^\alpha|^2 |\nabla\varphi^\beta|^2 + 4(g(\nabla\varphi^\alpha, \nabla\varphi^\beta))^2 \right\} \\ + \sum_{\alpha=1}^n \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \Delta f \right) \circ \varphi \right\} B_{\alpha\alpha\alpha} + \frac{1}{2} \left\{ (\Delta f) \circ \varphi \right\} \Delta^2(\varphi^\omega \varphi^\omega) \quad (4.12)$$

pour toute fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}^n$  et tout  $\omega = 1, \dots, n$ .

On choisit maintenant la fonction harmonique  $f(y) = (y^\alpha)^3(y^\beta) - (y^\beta)^3 y^\alpha$ , on la substitue dans (4.12), on aura

$$24(|\nabla\varphi^\alpha|^2 - |\nabla\varphi^\beta|^2)g(\nabla\varphi^\alpha, \nabla\varphi^\beta) = 0, \quad \text{pour } 1 \leq \alpha \neq \beta \leq n. \quad (4.13)$$

Par ailleurs, en choisissant la fonction harmonique  $f(y) = (y^\alpha)^4 - 6(y^\alpha)^2(y^\beta)^2 + (y^\beta)^4$  et en la substituant dans (4.12) on obtient

$$24[(|\nabla\varphi^\alpha|^2 - |\nabla\varphi^\beta|^2)^2 - 4(g(\nabla\varphi^\alpha, \nabla\varphi^\beta))^2] = 0, \quad \text{pour } 1 \leq \alpha \neq \beta \leq n. \quad (4.14)$$

#### 4.1. CARACTÉRISATION DES MORPHISMES HARMONIQUES GÉNÉRALISÉS À VALEURS DANS L'ESPACE EUCLIDIEN

---

On déduit de (4.13) et (4.14) que

$$|\nabla\varphi^\alpha|^2 = |\nabla\varphi^\beta|^2, \quad g(\nabla\varphi^\alpha, \nabla\varphi^\beta) = 0, \quad \text{pour } 1 \leq \alpha \neq \beta \leq n \quad (4.15)$$

ce qui signifie exactement que  $\varphi : (M^m, g) \rightarrow \mathbb{R}^n$  est semi-conforme.

On a alors, avec (4.4) et (4.5), une démonstration complète qu'un morphisme harmonique généralisé  $\varphi : (M^m, g) \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une application semi-conforme biharmonique avec la condition supplémentaire que  $(\varphi^\alpha + i\varphi^\beta)^2 : (M^m, g) \rightarrow \mathbb{C}$  est aussi biharmonique pour tous  $\alpha \neq \beta = 1, 2, \dots, n$ .

Réciproquement, soit  $\varphi : (M^m, g) \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application semi-conforme biharmonique telle que  $(\varphi^\alpha + i\varphi^\beta)^2 : (M^m, g) \rightarrow \mathbb{C}$  est aussi biharmonique pour tous  $\alpha \neq \beta = 1, 2, \dots, n$ .

En utilisant (4.4), (4.5), et (4.15) on peut écrire (4.3) comme suit

$$\begin{aligned} \Delta^2(f \circ \varphi) &= \sum_{\alpha=1}^n (f_{\alpha\alpha\alpha\alpha} \circ \varphi) |\nabla\varphi^\alpha|^4 + \sum_{1 \leq \alpha \neq \beta \leq n} (f_{\alpha\beta\alpha\beta} \circ \varphi) \left\{ 2|\nabla\varphi^\alpha|^2 |\nabla\varphi^\beta|^2 \right\} \\ &\quad + \sum_{1 \leq \alpha \leq n} (f_{\alpha\alpha\alpha} \circ \varphi) \left\{ 2|\nabla\varphi^\alpha|^2 \Delta\varphi^\alpha + 2g(\nabla|\nabla\varphi^\alpha|^2, \nabla\varphi^\alpha) \right\} \\ &\quad + \sum_{1 \leq \alpha \neq \beta \leq n} (f_{\beta\beta\alpha} \circ \varphi) \left\{ 2|\nabla\varphi^\beta|^2 \Delta\varphi^\alpha + 2g(\nabla|\nabla\varphi^\beta|^2, \nabla\varphi^\alpha) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \{ (\Delta f) \circ \varphi \} \Delta^2(\varphi^\omega \varphi^\omega) \\ &= \lambda^4 (\Delta^2 f) \circ \varphi + 2 \left\{ \lambda^2 \Delta\varphi^\alpha + g(\nabla\lambda^2, \nabla\varphi^\alpha) \right\} (\partial_\alpha \Delta f) \circ \varphi \\ &\quad + \left\{ \Delta\lambda^2 + 2g(\nabla\varphi^\omega, \nabla\Delta\varphi^\omega) + (\Delta\varphi^\omega)^2 \right\} (\Delta f) \circ \varphi, \end{aligned} \quad (4.16)$$

pour chaque  $\omega = 1, \dots, n$ , où on a utilisé dans la dernière égalité que  $\lambda^2 = |\nabla\varphi^\alpha|^2 = |\nabla\varphi^\beta|^2$  et l'identité (voir le Lemme 2.4 dans [45])

$$\begin{aligned} \Delta^2(\varphi^\omega \varphi^\omega) &= 2\Delta g(\nabla\varphi^\omega, \nabla\varphi^\omega) + 4g(\nabla\Delta\varphi^\omega, \nabla\varphi^\omega) + 2\varphi^\omega \Delta^2\varphi^\omega + 2(\Delta\varphi^\omega)^2 \\ &= 2\Delta\lambda^2 + 4g(\nabla\varphi^\omega, \nabla\Delta\varphi^\omega) + 2(\Delta\varphi^\omega)^2. \end{aligned}$$

À l'aide de l'équation (4.16), on déduit que le pull-back d'une fonction harmonique par l'application  $\varphi : (M^m, g) \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction biharmonique et par suite  $\varphi$  est un morphisme harmonique généralisé. Ce qui complète la preuve de l'équivalence entre (i) et (ii).

Finalement, l'équivalence entre les assertions (i) et (iii) se déduit clairement d'après la définition d'un morphisme harmonique généralisé et l'équation (4.16). D'où on a une preuve complète du théorème.  $\square$

**Exemple 4.1.4.** Soit  $M^4$  le sous-ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^4$  donné par  $M^4 = \mathbb{R}^4 \setminus \{x_1 = x_2 = x_3 = 0\}$  muni de la métrique canonique. Alors l'application  $\varphi : M^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  donnée par

$$\varphi(x_1, \dots, x_4) = (\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, x_4),$$

#### 4.1. CARACTÉRISATION DES MORPHISMES HARMONIQUES GÉNÉRALISÉS À VALEURS DANS L'ESPACE EUCLIDIEN

---

est un morphisme harmonique généralisé qui n'est pas un morphisme harmonique. Plus précisément,  $\varphi$  est une submersion riemannienne qui est biharmonique, non-harmonique, dont le carré défini sur  $M^4 \subset \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{C}$ , donné par  $(\varphi(x))^2 = (\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} + ix_4)^2$  est biharmonique. En effet, on peut vérifier facilement que

- (i)  $|\nabla\varphi^1| = |\nabla\varphi^2| = 1$  et  $\langle \nabla\varphi^1, \nabla\varphi^2 \rangle = 0$  où  $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2)$ , donc  $\varphi$  est une submersion riemannienne ;
- (ii)  $\Delta\varphi^1 = \frac{2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$ ,  $\Delta^2\varphi^1 = 0$  et  $\Delta\varphi^2 = \Delta^2\varphi^2 = 0$ . Donc  $\varphi$  est biharmonique, non-harmonique ;
- (iii) l'application

$$\begin{aligned} (\varphi(x))^2 &= (\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} + ix_4)^2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 + i(2x_4\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}) \end{aligned} \quad (4.17)$$

est biharmonique sur  $M^4 \subset \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{C}$ .

**Remarque 4.1.5.** On souligne qu'il existe des exemples d'applications semi-conformes biharmoniques qui ne sont pas des morphismes harmoniques généralisés. Par exemple, on sait d'après [9] que l'application  $\varphi : \mathbb{R}^3 \setminus \{x_2 = x_3 = 0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  donnée par

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \left( \frac{(1 - \frac{1}{2}|x|^2)x_2 + \sqrt{2}x_1x_3}{x_2^2 + x_3^2}, \frac{(1 - \frac{1}{2}|x|^2)x_3 - \sqrt{2}x_1x_2}{x_2^2 + x_3^2} \right) \quad (4.18)$$

est une application semi-conforme biharmonique. Mais on peut vérifier facilement que  $\varphi^2 : \mathbb{R}^3 \setminus \{x_2 = x_3 = 0\} \rightarrow \mathbb{C}$  n'est pas biharmonique, donc  $\varphi$  n'est pas un morphisme harmonique généralisé.

Notons que la notion de morphisme harmonique remonte à Jacobi en 1848, qui a proposé de résoudre l'équation de Laplace

$$\Delta\varphi \equiv \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2\varphi}{\partial^2x_i} = 0 \quad (4.19)$$

pour  $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  définie sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^3$ , telle que  $f \circ \varphi$  soit aussi harmonique pour toute fonction complexe-analytique (holomorphe)  $f : V \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ .

Comme les parties réelle et imaginaire d'une fonction holomorphe sont harmoniques, et comme le Laplacien est un opérateur linéaire sur les fonctions, la condition imposée par Jacobi est équivalente à dire que le pull-back d'une fonction harmonique par  $\varphi$  est aussi une fonction harmonique. Ce qui permet d'obtenir facilement le théorème suivant.

**Théorème 4.1.6.** [12] Soit  $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  une application harmonique. Alors  $f \circ \varphi$  est harmonique pour toute fonction complexe-analytique (holomorphe)  $f : V \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

#### 4.1. CARACTÉRISATION DES MORPHISMES HARMONIQUES GÉNÉRALISÉS À VALEURS DANS L'ESPACE EUCLIDIEN

---

si et seulement si  $\varphi$  est une solution de

$$\sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^2 = 0. \quad (4.20)$$

On rappelle que l'équation (4.20) signifie que  $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  est semi-conforme.

De façon analogue à celle donnée par Jacobi, en utilisant le Théorème 4.1.3, on a la proposition suivante.

**Proposition 4.1.7.** *Soit  $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  une application biharmonique définie sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^3$ . Alors  $f \circ \varphi$  est biharmonique pour toute fonction complexe-analytique (holomorphe)  $f : V \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  si et seulement si  $\varphi$  est une solution de*

$$\sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^2 = 0 \quad (4.21)$$

et  $\varphi^2 : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  est aussi biharmonique.

En utilisant le Théorème 4.1.3 et le fait qu'une application semi-conforme entre surfaces riemanniennes est simplement une application conforme qui est harmonique, on obtient le corollaire suivant.

**Corollaire 4.1.8.** (i) *Tout morphisme harmonique généralisé  $\varphi : (M^2, g) \rightarrow \mathbb{R}^2$  est un morphisme harmonique.*

(ii) *Une application  $\varphi : \mathbb{R}^3 \supseteq U \rightarrow \mathbb{C}$  est un morphisme harmonique généralisé si et seulement si elle est semi-conforme et les deux applications  $\varphi$  et  $\varphi^2$  sont biharmoniques.*

**Remarque 4.1.9.** *Il est clair d'après le Théorème 4.1.6, qu'une application  $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  est un morphisme harmonique si et seulement si  $\varphi$  et  $\varphi^2$  sont harmoniques. Donc l'assertion (ii) dans le Corollaire 4.1.8 donne un autre point de vue qui permet de voir comment les morphismes harmoniques généralisés généralisent la notion de morphisme harmonique.*

On termine cette section par la classification suivante des morphismes harmoniques généralisés qui sont des submersions riemanniennes.

**Corollaire 4.1.10.** (i) *Soit  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  une submersion riemannienne pour laquelle le pull-back d'une fonction harmonique est une fonction biharmonique. Alors il s'agit d'une projection orthogonale à une isométrie du domaine et/ou du codomaine près.*

(ii) *Il n'existe aucune submersion riemannienne sur l'espace hyperbolique,  $\varphi : H^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , pour laquelle le pull-back d'une fonction harmonique est une fonction biharmonique.*

#### 4.1. CARACTÉRISATION DES MORPHISMES HARMONIQUES GÉNÉRALISÉS À VALEURS DANS L'ESPACE EUCLIDIEN

---

*Démonstration.* Supposons que le pull-back d'une fonction harmonique par  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ou  $\varphi : H^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  est biharmonique. Il s'ensuit que  $\varphi$  est un morphisme harmonique généralisé, et par le Théorème 4.1.3,  $\varphi$  est biharmonique. Or on sait d'après [47] que toute submersion riemannienne biharmonique  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  est une projection orthogonale à une isométrie du domaine et/ou du codomaine près, et qu'il n'existe pas des submersions riemanniennes biharmoniques sur  $H^3$ . D'où on obtient ce corollaire.  $\square$

Dans [40] une famille de submersions riemanniennes biharmoniques a été construite. Ensuite, il a été prouvé dans [47] que la submersion riemannienne donnée par la projection du "warped-product"

$$\begin{aligned} \pi : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, dx^2 + dy^2 + \beta^{-2}(x, y)dz^2) &\rightarrow (\mathbb{R}^2, dx^2 + dy^2) \\ \pi(x, y, z) &= (x, y) \end{aligned}$$

est biharmonique si et seulement si

$$\Delta u = \Delta v = 0, \quad \text{où } u = (\ln \beta)_x, \quad v = (\ln \beta)_y. \quad (4.22)$$

En supposant  $\beta = e^{\int \varphi(x)dx} e^{\int \varphi(y)dy}$ , les auteurs dans [47] ont trouvé des solutions particulières pour  $\beta(x, y)$ .

Le théorème suivant montre que si on pose une condition supplémentaire que le carré de l'application  $\pi^2$  soit biharmonique (ce qui rend alors  $\pi$  un morphisme harmonique généralisé), le système des équations obtenu peut être résolu explicitement. Ce qui permet d'obtenir une classification complète des morphismes harmoniques généralisés correspondant à des projections des variétés du type "warped-product".

**Théorème 4.1.11.** *La submersion riemannienne définie par la projection d'un "warped-product"*

$$\begin{aligned} \pi : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, dx^2 + dy^2 + e^{2\lambda(x, y)}dz^2) &\rightarrow (\mathbb{R}^2, dx^2 + dy^2) \\ \pi(x, y, z) &= (x, y) \end{aligned} \quad (4.23)$$

est un morphisme harmonique généralisé, qui n'est pas un morphisme harmonique si et seulement si à un changement orthogonal des coordonnées près,  $\pi$  s'écrit comme

$$\begin{aligned} \pi : (\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}, dx^2 + dy^2 + Cy^4dz^2) &\rightarrow (\mathbb{R}_+^2, dx^2 + dy^2) \\ \pi(x, y, z) &= (x, y), \end{aligned} \quad (4.24)$$

où  $C$  est une constante positive et  $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$ .

#### 4.1. CARACTÉRISATION DES MORPHISMES HARMONIQUES GÉNÉRALISÉS À VALEURS DANS L'ESPACE EUCLIDIEN

---

*Démonstration.* D'abord, on peut vérifier que si  $\lambda$  est constante, alors la submersion riemannienne  $\pi$  est un morphisme harmonique. On suppose alors que  $\lambda$  n'est pas constante. Comme dans [47], on choisit une base orthonormée  $\{e_1 = \frac{\partial}{\partial x}, e_2 = \frac{\partial}{\partial y}, e_3 = e^{-\lambda} \frac{\partial}{\partial z}\}$  sur  $M = (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, dx^2 + dy^2 + e^{2\lambda(x,y)} dz^2)$  adaptée à la submersion riemannienne  $\pi$  telle que  $d\pi(e_i) = \varepsilon_i, i = 1, 2$  et  $e_3$  est vertical, où  $\varepsilon_1 = \frac{\partial}{\partial x}$  et  $\varepsilon_2 = \frac{\partial}{\partial y}$  forment une base orthonormée sur  $(\mathbb{R}^2, dx^2 + dy^2)$ . D'après [47],

$$[e_1, e_3] = ue_3, [e_2, e_3] = ve_3, [e_1, e_2] = 0,$$

où  $u = -\lambda_x, v = -\lambda_y$ .

Les données d'intégrabilité de la submersion riemannienne  $\pi$  sont données par

$$f_1 = f_2 = \sigma = 0, \kappa_1 = u, \kappa_2 = v.$$

et donc

$$\nabla_{e_1} e_1 = \nabla_{e_2} e_2 = 0, \nabla_{e_3} e_3 = ue_1 + ve_2, \quad (4.25)$$

où  $\nabla$  désigne la connexion de Levi-Civita associée à la métrique sur le "warped-product". D'après (1.21), le champ de tension de la submersion riemannienne  $\pi$  est donné par

$$\tau(\pi) = -d\pi(\nabla_{e_3}^M e_3) = -u\varepsilon_1 - v\varepsilon_2. \quad (4.26)$$

Or on sait d'après l'Exemple 1 dans [47] que la submersion riemannienne  $\pi$  est biharmonique si et seulement si

$$\Delta_M u = 0, \quad \Delta_M v = 0. \quad (4.27)$$

On peut déduire par le Théorème 4.1.3 que la projection  $\pi$  (étant une submersion riemannienne) est un morphisme harmonique généralisé si et seulement si  $\pi$  et son carré  $(\pi(x, y, z))^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$  sont biharmoniques, ce qui est équivalent à dire que  $\lambda(x, y)$  est une solution de (4.27) et que

$$\begin{cases} \Delta_M^2(x^2 - y^2) = 0, \\ \Delta_M^2(xy) = 0. \end{cases} \quad (4.28)$$

Par un simple calcul, en utilisant (4.25) et (4.27) on a

$$\Delta_M u = u_{xx} + u_{yy} - uu_x - vv_y, \quad (4.29)$$

$$\Delta_M v = v_{xx} + v_{yy} - uv_x - vv_y \quad (4.30)$$

$$\Delta_M(x^2 - y^2) = -2xu + 2yv,$$

$$\Delta_M^2(x^2 - y^2) = -2(-u^2 + 2u_x) + 2(-v^2 + 2v_y), \quad (4.31)$$

$$\Delta_M(xy) = -yu - xv,$$

$$\Delta_M^2(xy) = 2(uv - u_y - v_x). \quad (4.32)$$

#### 4.1. CARACTÉRISATION DES MORPHISMES HARMONIQUES GÉNÉRALISÉS À VALEURS DANS L'ESPACE EUCLIDIEN

---

D'après (4.29), (4.30), (4.31) et (4.32),  $\pi$  est un morphisme harmonique généralisé si et seulement si

$$u_{xx} + u_{yy} - uu_x - vu_y = 0, \quad (4.33)$$

$$v_{xx} + v_{yy} - uv_x - vv_y = 0, \quad (4.34)$$

$$u^2 - 2u_x - v^2 + 2v_y = 0, \quad (4.35)$$

$$uv - u_y - v_x = 0. \quad (4.36)$$

Pour résoudre ce système, d'abord on note que

$$u_y = -\lambda_{xy} = v_x, \quad (4.37)$$

ce qui donne, avec (4.36),

$$u_y = v_x = \frac{1}{2}uv. \quad (4.38)$$

D'autre part, en dérivant les deux parties de (4.35) par rapport à  $x$  et (4.36) par rapport à  $y$ , on obtient

$$2uu_x - 2u_{xx} - 2vv_x + 2v_{xy} = 0 \quad (4.39)$$

$$u_yv + uv_y - u_{yy} - v_{xy} = 0 \quad (4.40)$$

respectivement. En multipliant par 2 la seconde équation puis en additionnant avec la première des deux équations ci-dessus, et en utilisant (4.33) on obtient

$$uv_y - vv_x = 0. \quad (4.41)$$

De même, en dérivant les deux parties de (4.35) par rapport à  $y$  et (4.36) par rapport à  $x$  on obtient

$$2uu_y - 2u_{xy} - 2vv_y + 2v_{yy} = 0 \quad (4.42)$$

$$u_xv + uv_x - u_{xy} - v_{xx} = 0 \quad (4.43)$$

respectivement. Multiplions par  $-2$  la seconde équation puis additionnons avec la première des deux équations ci-dessus, en utilisant (4.34) on a

$$uu_y - vu_x = 0. \quad (4.44)$$

On peut maintenant résoudre le système (4.33)-(4.36) en distinguant les deux cas suivants.

**Cas I :**  $uv = 0$ . Dans ce cas,  $u = u(x), v = 0$  ou  $u = 0, v = v(y)$  et le système se réduit à

$$\begin{cases} v = 0, \\ u' - \frac{1}{2}u^2 = 0, \\ (u' - \frac{1}{2}u^2)' = 0, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} u = 0, \\ v' - \frac{1}{2}v^2 = 0, \\ (v' - \frac{1}{2}v^2)' = 0. \end{cases} \quad (4.45)$$

#### 4.1. CARACTÉRISATION DES MORPHISMES HARMONIQUES GÉNÉRALISÉS À VALEURS DANS L'ESPACE EUCLIDIEN

---

La résolution de ces systèmes donne

$$\lambda(x, y) = \ln(x + C_2)^2 + C_1, \text{ ou } \lambda(x, y) = \ln(y + C_2)^{-2} + C_1. \quad (4.46)$$

**Cas II :**  $uv \neq 0$ . D'abord, on substitue (4.38) dans (4.41) et (4.44) on obtient

$$uv_y - vu_y = 0 \text{ et } uv_x - u_xv = 0 \quad (4.47)$$

respectivement. Comme  $uv \neq 0$ , on divise les deux parties des équations ci-dessus par  $uv$  et on les écrit sous la forme

$$\left(\ln \frac{u}{v}\right)_y = 0 \text{ et } \left(\ln \frac{u}{v}\right)_x = 0. \quad (4.48)$$

Par suite

$$u = C_1v \text{ ou } v = C_1u \quad (4.49)$$

pour une constante  $C_1 \neq 0$ . Substituons  $u = C_1v$  dans (4.38), on obtient

$$\begin{cases} v_x = \frac{1}{2}C_1v^2, \\ C_1v_y = \frac{1}{2}C_1v^2, \end{cases} \quad (4.50)$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} v_x = \frac{1}{2}C_1v^2, \\ v_y = \frac{1}{2}v^2. \end{cases} \quad (4.51)$$

La résolution de ce système donne

$$u(x, y) = \frac{-2C_1}{C_1x + y + C_2}, \quad v(x, y) = \frac{-2}{C_1x + y + C_2} \quad (4.52)$$

avec  $C_2$  une constante arbitraire. De même, en utilisant  $v = C_1u$ , l'équation (4.38) a une autre famille de solutions donnée par

$$u(x, y) = \frac{-2}{x + C_1y + C_2}, \quad v(x, y) = \frac{-2C_1}{x + C_1y + C_2} \quad (4.53)$$

pour une certaine constante  $C_2$ . Une simple vérification montre que toutes les solutions dans (4.52) et (4.53) sont aussi des solutions pour les équations (4.33), (4.34) et (4.35), donc elles sont des solutions pour les équations du morphisme harmonique généralisé.

Substituons  $u(x, y)$  et  $v(x, y)$  donnés dans (4.52) et (4.53) dans les équations  $u = -\lambda_x$  et  $v = -\lambda_y$ . En résolvant les équations qui en résultent, on obtient

$$\lambda(x, y) = \ln(x + C_1y + C_2)^2 + C_3 \text{ ou } \lambda(x, y) = \ln(C_1x + y + C_2)^2 + C_3 \quad (4.54)$$

## 4.2. CONSTRUCTIONS ET EXEMPLES DE MORPHISMES HARMONIQUES GÉNÉRALISÉS

---

avec  $C_2, C_3$  des constantes arbitraires et  $C_1$  une constante telle que  $C_1 \neq 0$ .

On note que la famille de solutions avec  $C_1 = 0$  correspond aux solutions particulières données dans (4.46).

D'après les solutions (4.54), on a que la submersion riemannienne  $\pi$  donnée par (4.23) est un morphisme harmonique généralisé si et seulement si la métrique sur le "warped-product" est de la forme

$$dx^2 + dy^2 + C(x + C_1y + C_2)^4 dz^2 \quad \text{ou} \quad dx^2 + dy^2 + C(C_1x + y + C_2)^4 dz^2. \quad (4.55)$$

Notons que ces métriques sont définies seulement sur un demi-espace de  $\mathbb{R}^3$  privé du plan  $x + C_1y + C_2 = 0$  ou  $C_1x + y + C_2 = 0$ . Finalement, on peut vérifier que par des transformations orthogonales des coordonnées sur  $\mathbb{R}^2$ , la métrique sur le "warped-product" est de la forme

$$dx^2 + dy^2 + Cy^4 dz^2$$

où  $C$  est une constante positive, et cette métrique est définie sur  $\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}$ . D'où on a le théorème.  $\square$

**Remarque 4.1.12.** (i) *On note que le champ de tension de la submersion riemannienne  $\pi$  donnée dans le théorème est  $\tau(\pi) = u\pi(e_1) + v\pi(e_2) \neq 0$  pour toutes les solutions données dans (4.52) et (4.53), donc les morphismes harmoniques généralisés fournis par le Théorème 4.1.11 sont tous des submersions riemanniennes biharmoniques propres.*

(ii) *Il est intéressant de noter qu'on peut vérifier facilement que le carré de l'application,*

$$\begin{aligned} \pi^2 : (\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}, dx^2 + dy^2 + Cy^4 dz^2) &\rightarrow (\mathbb{R}_+^2, dx^2 + dy^2) \\ \pi^2(x, y, z) &= (x^2 - y^2, 2xy) \end{aligned}$$

*du morphisme harmonique généralisé donné dans le Théorème 4.1.11 fournit des familles contenant une infinité d'exemples de submersions conformes biharmoniques propres sur une variété de type "warped-product" de dimension 3.*

## 4.2 Constructions et exemples de morphismes harmoniques généralisés

Dans cette section, on donne deux méthodes qui permettent de construire de nouveaux morphismes harmoniques généralisés à partir d'un morphisme harmonique généralisé donné. L'une est par composition et l'autre en utilisant la somme directe. La composée des morphismes harmoniques (respectivement morphismes biharmoniques) est un morphisme harmonique (respectivement morphisme biharmonique). Par contre ce n'est pas

## 4.2. CONSTRUCTIONS ET EXEMPLES DE MORPHISMES HARMONIQUES GÉNÉRALISÉS

---

le cas pour les morphismes harmoniques généralisés : la composée des morphismes harmoniques généralisés n'est pas nécessairement un morphisme harmonique généralisé. Cependant, par définitions des morphismes harmoniques, des morphismes biharmoniques et des morphismes harmoniques généralisés, on a les règles de composition suivantes qui fournissent des méthodes permettant de construire de nouveaux morphismes harmoniques généralisés à partir d'un morphisme harmonique généralisé donné en le composant avec un morphisme harmonique ou biharmonique.

**Corollaire 4.2.1.** (i) Soient  $\varphi : (M^m, g) \rightarrow (N^n, h)$  un morphisme harmonique généralisé et  $\psi : (N^n, h) \rightarrow (Q^l, k)$  un morphisme harmonique. La composée  $\psi \circ \varphi : (M^m, g) \rightarrow (Q^l, k)$  est un morphisme harmonique généralisé.

(ii) Soient  $\varphi : (M^m, g) \rightarrow (N^n, h)$  un morphisme harmonique généralisé et  $\psi : (Q^l, k) \rightarrow (M^m, g)$  un morphisme biharmonique. La composée  $\varphi \circ \psi : (Q^l, k) \rightarrow (N^n, h)$  est un morphisme harmonique généralisé.

**Remarque 4.2.2.** On note que le concept de morphismes harmoniques généralisés à valeurs dans des surfaces de Riemann est bien défini. Rappelons qu'une surface de Riemann est une surface orientable avec une classe conforme de métriques riemanniennes. D'après (i) du Corollaire 4.2.1, si  $\varphi : (M^m, g) \rightarrow (N^2, h)$  est un morphisme harmonique généralisé, alors  $\varphi : (M^m, g) \rightarrow (N^2, \sigma^2 h)$  l'est aussi, car elle peut être vue comme la composée

$$(M^m, g) \xrightarrow{\varphi} (N^2, h) \xrightarrow{id} (N^2, \sigma^2 h)$$

et l'application identité est un morphisme harmonique. On en déduit alors que le concept de morphismes harmoniques généralisés dans les surfaces de Riemann est bien défini.

**Exemple 4.2.3.** Soit  $\varphi : \mathbb{R}^4 \setminus \{x_1 = x_2 = x_3 = 0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  le morphisme harmonique généralisé donné dans l'Exemple 4.1.4 par  $\varphi(x_1, \dots, x_4) = (\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, x_4)$  et soit  $\sigma^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$  l'inverse de la projection stéréographique. Par le Corollaire 4.2.1, la composée  $\sigma^{-1} \circ \varphi : \mathbb{R}^4 \setminus \{x_1 = x_2 = x_3 = 0\} \rightarrow S^2$  est un morphisme harmonique généralisé. En particulier, c'est une application biharmonique propre de  $\mathbb{R}^4 \setminus \{x_1 = x_2 = x_3 = 0\}$  dans la sphère  $S^2$ .

**Exemple 4.2.4.** Soit  $\psi : \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^4$  l'inversion dans  $\mathbb{R}^4$  donnée par  $\psi(x) = \frac{x}{|x|^2}$ . D'après [40],  $\psi$  est un morphisme biharmonique. Soit  $\varphi : \mathbb{R}^4 \setminus \{x_1 = x_2 = x_3 = 0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  le morphisme harmonique généralisé donné dans l'Exemple 4.1.4 par

$$\varphi(x_1, \dots, x_4) = (\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, x_4)$$

Par (ii) du Corollaire 4.2.1, la composée  $\varphi \circ \psi : \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  donnée par

$$\varphi \circ \psi(x) = \left( \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}{|x|^2}, \frac{x_4}{|x|^2} \right) \quad (4.56)$$

## 4.2. CONSTRUCTIONS ET EXEMPLES DE MORPHISMES HARMONIQUES GÉNÉRALISÉS

---

est un morphisme harmonique généralisé de dilatation  $\lambda = 1/|x|^2$ . En particulier,  $\varphi \circ \psi$  est une application semi-conforme biharmonique. En plus, par le Théorème 4.1.3, l'application

$$\left( \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}{|x|^2} + i \frac{x_4}{|x|^2} \right)^2 = \left( \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2}{|x|^4} + 2i \frac{x_4 \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}{|x|^4} \right) \quad (4.57)$$

est aussi biharmonique de  $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$  dans  $\mathbb{C}$ .

**Exemple 4.2.5.** L'application  $\varphi : \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$  donnée par

$$\varphi(x_1, \dots, x_4) = \left( \frac{x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2}{|x|^2}, \frac{2x_1x_3 - 2x_2x_4}{|x|^2}, \frac{2x_1x_4 + 2x_2x_3}{|x|^2} \right) \quad (4.58)$$

est un morphisme harmonique généralisé. Pour le démontrer, soient  $\psi : \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^4$  l'inversion donnée par  $\psi(x) = \frac{x}{|x|^2}$  qui est un morphisme biharmonique d'après [40] et  $H : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'application de Hopf définie par

$$H(x_1, \dots, x_4) = (x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2, 2x_1x_3 - 2x_2x_4, 2x_1x_4 + 2x_2x_3), \quad (4.59)$$

$\varphi$  n'est autre que la composée  $\varphi = H \circ \psi$ . D'après le Corollaire 4.2.1,  $\varphi$  est un morphisme harmonique généralisé. Notons que  $\varphi$  est une application semi-conforme biharmonique non-harmonique de dilatation  $\lambda = 2/|x|^{3/2}$  (voir [9]).

**Exemple 4.2.6.** Soit  $\varphi : \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$  le morphisme harmonique généralisé donné dans l'Exemple 4.2.5, défini par (4.58). En composant  $\varphi$  avec la projection orthogonale  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$ , on a trois différents morphismes harmoniques généralisés  $\varphi^\alpha + i\varphi^\beta : \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$  pour tous  $\alpha \neq \beta = 1, 2, 3$ .

On rappelle que la somme directe de deux applications (voir [44])  $\psi : (M^m, g) \rightarrow \mathbb{R}^k$ , et  $\varphi : (N^n, h) \rightarrow \mathbb{R}^k$  est par définition l'application  $\psi \oplus \varphi : (M^m \times N^n, g \times h) \rightarrow \mathbb{R}^k$  donnée par

$$\psi \oplus \varphi(x, y) = \psi(x) + \varphi(y) \quad (4.60)$$

La somme directe des applications a été utilisée pour construire des exemples de morphismes harmoniques et d'applications biharmoniques (voir [44], [12] et [46]). Par exemple, d'après [44] et [46], la somme directe des applications semi-conformes biharmoniques est aussi une application semi-conforme biharmonique. Cependant, on peut vérifier qu'en général, la somme directe de deux morphismes harmoniques généralisés n'est pas nécessairement un morphisme harmonique généralisé. Néanmoins, on a la proposition suivante qui présente une méthode de production de plusieurs exemples de morphismes harmoniques généralisés.

### 4.3. APPLICATIONS POUR LESQUELLES LE PULL-BACK D'UNE FONCTION BIHARMONIQUE EST UNE FONCTION HARMONIQUE

---

**Proposition 4.2.7.** *Soit  $\psi : (M^m, g) \rightarrow \mathbb{R}^k$  un morphisme harmonique généralisé et  $\varphi : (N^n, h) \rightarrow \mathbb{R}^k$  un morphisme harmonique. Leur somme directe  $\psi \oplus \varphi : (M^m \times N^n, G = g \times h) \rightarrow \mathbb{R}^k$  est un morphisme harmonique généralisé. Si en plus  $\psi$  est biharmonique propre, il en est de même pour  $\psi \oplus \varphi$ .*

*Démonstration.* D'après le Théorème 4.1.3, il suffit de démontrer l'énoncé de cette proposition pour  $\mathbb{R}^k = \mathbb{C}$ . Soient  $\psi : (M^m, g) \rightarrow \mathbb{C}$  un morphisme harmonique généralisé et  $\varphi : (N^n, h) \rightarrow \mathbb{C}$  un morphisme harmonique. D'après [44], la somme directe de deux morphismes harmoniques est un morphisme harmonique, plus précisément, la somme directe de deux applications semi-conformes de dilatations  $\lambda_1(x)$  et  $\lambda_2(y)$  est une application semi-conforme de dilatation  $\lambda(x, y) = \lambda_1(x) + \lambda_2(y)$ . D'autre part, on a d'après [46] que la somme directe de deux applications biharmoniques est aussi biharmonique. D'après le Théorème 4.1.3, pour démontrer que la somme directe  $\psi \oplus \varphi : (M^m \times N^n, G = g \times h) \rightarrow \mathbb{C}$  est un morphisme harmonique généralisé, il suffit de vérifier que l'application  $(\psi \oplus \varphi)^2 : (M^m \times N^n, G = g \times h) \rightarrow \mathbb{C}$  est biharmonique. Notons que

$$(\psi \oplus \varphi)^2(x, y) = (\psi(x) + \varphi(y))^2 = (\psi(x))^2 + (\varphi(y))^2 + 2\psi(x)\varphi(y).$$

Par ailleurs, le produit des variétés  $M \times N$  est muni du produit des métriques  $G = g \times h$  avec  $\Delta_G^2 = \Delta_g^2 + \Delta_h^2$ . Donc

$$\begin{aligned} \Delta_G^2(\psi \oplus \varphi)^2 &= \Delta_g^2(\psi(x))^2 + \Delta_h^2(\varphi(y))^2 \\ &\quad + 2[\varphi(y)\Delta_g^2\psi(x) + \psi(x)\Delta_h^2\varphi(y) + 2(\Delta_g\psi(x))\Delta_h\varphi(y)] = 0, \end{aligned}$$

où on a utilisé les hypothèses que  $\psi$  est un morphisme harmonique généralisé et que  $\varphi$  est un morphisme harmonique pour obtenir la dernière égalité.  $\square$

**Exemple 4.2.8.** *Soit  $\psi : \mathbb{R}^4 \setminus \{x_1 = x_2 = x_3 = 0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  tel que  $\psi(x_1, \dots, x_4) = (\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, x_4)$  le morphisme harmonique généralisé donné dans l'Exemple 4.1.4, et soit  $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction holomorphe (et donc c'est un morphisme harmonique). Alors  $\psi \oplus \varphi : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  où*

$$\psi \oplus \varphi(x_1, \dots, x_4, z) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} + ix_4 + \varphi(z)$$

*est un morphisme harmonique généralisé et en particulier, c'est une application semi-conforme biharmonique propre.*

### 4.3 Applications pour lesquelles le pull-back d'une fonction biharmonique est une fonction harmonique

Comme on l'a déjà indiqué, les morphismes harmoniques généralisés qu'on a étudiés dans ce chapitre sont des applications entre variétés riemanniennes pour lesquelles le

### 4.3. APPLICATIONS POUR LESQUELLES LE PULL-BACK D'UNE FONCTION BIHARMONIQUE EST UNE FONCTION HARMONIQUE

---

pull-back d'une fonction harmonique est une fonction biharmonique. Mais on peut poser aussi la question suivante : existe-t-il des applications entre variétés riemanniennes pour lesquelles le pull-back d'une fonction biharmonique est une fonction harmonique ? Dans cette dernière section, on démontre qu'une telle application n'est autre qu'une application constante. Plus précisément, on a le théorème suivant.

**Théorème 4.3.1.** *Il n'existe aucune application non-constante entre variétés riemanniennes pour laquelle le pull-back d'une fonction biharmonique (définie localement) est harmonique.*

*Démonstration.* Soit  $\varphi : (M^m, g) \rightarrow (N^n, h)$  une application pour laquelle le pull-back d'une fonction biharmonique (définie localement) est une fonction harmonique. Il s'ensuit que le pull-back d'une fonction harmonique par  $\varphi$  est aussi harmonique. Par suite,  $\varphi$  est un morphisme harmonique (Définition 1.7.6). On en déduit d'après [28] et [33] que

$$\Delta_M(f \circ \varphi) = \lambda^2(\Delta_N f) \circ \varphi \quad (4.61)$$

pour toute fonction  $f$  (définie localement) sur  $N$ . On prend le cas particulier lorsque  $f$  est une fonction quasi-harmonique (voir par exemple [42]), il s'agit d'une fonction biharmonique satisfaisant  $\Delta_N f = C$  constante non-nulle, donc  $f \circ \varphi$  doit être harmonique, par l'hypothèse que le pull-back des fonctions biharmoniques par  $\varphi$  est harmonique. D'après (4.61),  $0 = \Delta_M(f \circ \varphi) = \lambda^2(\Delta_N f) \circ \varphi = C\lambda^2$ , ce qui est possible seulement dans le cas où l'application est constante. D'où le théorème est établi.  $\square$

4.3. APPLICATIONS POUR LESQUELLES LE PULL-BACK D'UNE FONCTION  
BIHARMONIQUE EST UNE FONCTION HARMONIQUE

---

## Chapitre 5

# Perspectives d'avenir

On termine cette thèse avec quelques remarques sur les perspectives d'avenir. Les méthodes qu'on a exploitées ouvrent plusieurs voies pour explorer l'influence des applications semi-conformes dans l'étude de questions importantes de géométrie riemannienne.

### 5.1 Les fonctions conjuguées en dimension 4

Les méthodes adoptées par P. Baird et M. G. Eastwood dans l'article [7] pour le cas de  $\mathbb{R}^3$  sont extrêmement compliquées, par exemple la deuxième équation qui caractérise les fonctions  $f$  admettant une conjuguée (voir §1.6) est donnée par

$$\begin{aligned} 0 = Q \quad := \quad & \frac{1}{6}JZB - \frac{1}{4}JU - \frac{1}{4}ZS^2 \\ & + X(XZ^3 - JX^2Z + 6W + \frac{1}{4}JM - \frac{2}{7}ZXR + \frac{5}{7}RS \\ & - \frac{15}{7}N + \frac{2}{9}ZA - \frac{9}{10}F - \frac{2}{21}ZK + \frac{10}{21}T + \frac{6}{25}G - \frac{17}{42}JD), \end{aligned}$$

où les différentes lettres  $A, B, \dots$  correspondent à des invariants conformes en  $f$ . Cette équation donne une illustration de la difficulté de généraliser ces méthodes à la dimension 4. Il faut une théorie plus efficace, éventuellement issue de la théorie des systèmes différentiels. Or, en dimension 4, il y a des invariants conformes naturels comme l'opérateur de Paneitz [48], qui se réduit au bi-Laplacien  $\Delta^2 f$  dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^4$ .

Les morphismes harmoniques définis sur des variétés d'Einstein en dimension 4 ont été étudiés par J. C. Wood [58] et M. Ville [55]. Plus précisément, Wood a démontré qu'un morphisme harmonique sur  $\mathbb{R}^4$  (plus généralement sur une variété d'Einstein anti-auto-duale) avec points critiques isolés, correspond à une structure hermitienne intégrable; Ville a démontré que cette description est valable quelque soit la condition sur les points critiques. D'un autre côté, on connaît peu sur les applications semi-conformes

non-harmoniques en dimension 4. Pourtant, on peut remarquer que l'ansatz qu'on a étudié dans le Chapitre 2 se généralise aux dimensions plus grandes.

Soit  $\mathbb{R}^4$  muni des coordonnées canoniques  $(x, y, z, t)$ . Comme dans §2.1.1, on écrit  $u = \frac{x^2+y^2}{2}$ . Soit  $\varphi$  une application d'un domaine  $U \subset \mathbb{R}^4$  à valeurs complexes définie comme dans l'équation (2.2) :

$$\varphi(x, y, z, t) = (x + iy)u^{-q}\psi(u, z, t).$$

Ainsi, on est ramené à étudier l'analogue de l'équation (2.3) :

$$q(q-1)\psi^2 + u(1-2q)\psi\psi_u + u^2\psi_u^2 + \frac{1}{2}u(\psi_z^2 + \psi_t^2).$$

Cette équation est bien évidemment difficile à étudier, étant dépendante de trois variables. Ce qui est plus pratique est de poser  $u = \frac{x^2+y^2}{2}$  et  $v = \frac{z^2+t^2}{2}$  et de considérer  $\varphi$  de la forme

$$\varphi(x, y, z, t) = (x + iy)u^{-q}v^{-p}\psi(u, v)$$

La condition que  $\varphi$  soit semi-conforme est maintenant équivalente à l'équation en  $\psi$  :

$$q(q-1)v\psi^2 + uv(1-2q)\psi\psi_u + u^2v\psi_u^2 + p^2u\psi^2 + uv^2\psi_v^2 - 2puv\psi\psi_v = 0.$$

En supposant que  $\psi(0,0) \neq 0$ , on est ramené à considérer les deux cas  $q=0, p=0$  et  $q=1, p=0$ , c'est à dire les deux équations analogues à (2.4) et (2.5) :

$$\pm\psi\psi_u + u\psi_u^2 + v\psi_v^2 = 0. \tag{5.1}$$

Si on prend le signe négatif devant le premier terme, on remarque la solution particulière  $\psi(u, v) = u + v$ . Dans ce cas  $\varphi = (x + iy) \left(1 + \frac{v}{u}\right)$ . Son Laplacien :

$$\Delta\varphi = \frac{(x + iy)}{u} \left(2 + \frac{v}{u}\right),$$

est non-nul et par suite il s'agit d'une application semi-conforme non-harmonique. Il est intéressant de noter que son bi-Laplacien vérifie l'équation

$$\Delta^2\varphi = -2\frac{\varphi}{u^2}.$$

Les équations (5.1) sont tout à fait adaptées à une étude similaire à celles que nous avons traitées dans le Chapitre 2.

## 5.2 Les solitons de Ricci en dimension 4

Dans le Chapitre 3, on a démontré que les exemples explicites de solitons de Ricci de dimension 3 admettant une application semi-conforme à valeurs dans une surface avec distribution horizontale intégrable, sont tous équivalents par déformation biconforme, à la projection canonique  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Lorsque le coefficient d'intégrabilité  $a$  est non-nul, il est peu probable qu'on aura une description aussi nette. Nous avons développé en détail la géométrie Nil, et on remarque que la transformée de Cayley donne une équivalence entre le groupe de Heisenberg et la sphère  $S^{2n+1} \setminus (0, 0, \dots, 0, -1)$  [15]. Il serait intéressant de savoir si cette transformation respecte des projections semi-conformes, et par la suite de voir s'il existe une équivalence des structures de solitons par rapport à la projection canonique  $\text{Nil} \rightarrow \mathbb{R}^2$  et la fibration de Hopf  $S^3 \rightarrow S^2$ .

D'autre part, il est naturel d'essayer de généraliser nos méthodes à la dimension 4. Une des difficultés qu'on rencontre dans cette dimension est la description de la courbure de Ricci par rapport à une projection semi-conforme. Dans [12], on a une description (non-unifiée en une seule expression) de la courbure de Ricci associée à un morphisme harmonique. Lorsque la dimension du domaine  $M$  est  $\geq 4$ , la seule expression pratique de courbure de Ricci jusqu'à ce jour est celle pour un morphisme harmonique dans le cas où les fibres sont de dimension 1.

**Proposition 5.2.1.** [3] *Soit  $\varphi : (M^{n+1}, g) \rightarrow (P^n, k)$  un morphisme harmonique avec fibres de dimension 1, alors*

$$\begin{aligned} \text{Ric}^M &= \varphi^* \text{Ric}^P + \Delta \lambda g^{\mathcal{H}} - \frac{n(n-2)}{2} d \ln \lambda^2 \\ &\quad + (nd(U(\ln \lambda)) + d^* \Omega + n(n-2)U(\ln \lambda)d \ln \lambda) \odot \theta \\ &\quad - \left( \frac{n^2}{2} U(\ln \lambda)^2 + \frac{1}{4} \|\Omega\|^2 \right) \theta^2 - \frac{1}{2} \Omega(e_i, \cdot) \Omega(e_i, \cdot), \end{aligned}$$

où  $\lambda$  est la dilatation,  $\{e_i\}$  est une base orthonormée de l'espace horizontal,  $\theta$  est la forme verticale unitaire,  $\Omega = d\theta$  et  $g^{\mathcal{H}}$  est la partie horizontale de la métrique.

Il y a une classe de transformations biconformes qui respectent l'harmonicité d'une application semi-conforme. Plus précisément, si  $\varphi : (M^m, g) \rightarrow (N^n, h)$  est un morphisme harmonique, alors  $\varphi : (M^m, \tilde{g}) \rightarrow (N^n, \tilde{h})$  est un morphisme harmonique par rapport aux métriques déformées :

$$\tilde{g} = \frac{g^{\mathcal{H}}}{\sigma^2} + \frac{g^{\mathcal{V}}}{\rho^2}, \quad \tilde{h} = \frac{h}{\nu^2}$$

si et seulement si  $\text{grad}(\sigma^{2-n} \rho^{n-m} \nu^{n-2})$  est vertical [12]. Par contre, l'imposition de l'harmonicité lorsque les fibres sont de dimension 1 est contraignante (voir [12] §12). Il

### 5.3. CARACTÉRISATION DES MORPHISMES HARMONIQUES GÉNÉRALISÉS À VALEURS COMPLEXES

---

serait alors intéressant d'avoir une expression pour la courbure de Ricci associée à une submersion semi-conforme  $(M^4, g) \rightarrow (N^2, h)$ .

Puisque la composée de deux applications semi-conformes est semi-conforme, à partir de l'expression de la courbure de Ricci en dimension 3, donnée par le Théorème 3.2.5, il serait alors possible d'obtenir une expression pour la courbure de Ricci en dimension 4 par rapport à une certaine classe d'applications semi-conformes de  $(M^4, g) \rightarrow (N^2, h)$  : les applications semi-conformes  $\varphi : (M^4, g) \rightarrow (N^2, h)$  qui se factorisent comme  $\varphi = \zeta \circ \psi$  où  $\psi : (M^4, g) \rightarrow (P^3, k)$  est un morphisme harmonique et  $\zeta : (P^3, k) \rightarrow (N^2, h)$  est semi-conforme. En effet, il suffit de remplacer la courbure  $\text{Ric}^P$  dans l'expression ci-dessus par l'expression donnée dans le Théorème 3.2.5. Le problème de savoir quand est-ce qu'une application semi-conforme se factorise comme la composée de deux applications semi-conformes est un problème difficile non-résolu [4].

### 5.3 Caractérisation des morphismes harmoniques généralisés à valeurs complexes

Les morphismes harmoniques à valeurs dans une surface sont caractérisés comme des applications semi-conformes avec fibres minimaux [8]. Cette propriété a permis à P. Baird et J. C. Wood de caractériser les morphismes harmoniques des domaines de  $\mathbb{R}^3$  (et plus généralement d'un espace à courbure sectionnelle constante de dimension 3) à valeurs dans une surface en termes des courbes holomorphes [11]. En effet, dans ce cas les fibres sont des segments droits, et l'espace des droites dans  $\mathbb{R}^3$  s'identifie avec la surface complexe  $TS^2$ . On constate alors que dans ce cas, l'harmonicité d'une application semi-conforme correspond à une propriété de ses fibres.

On peut poser la question de savoir si la biharmonicité d'une application semi-conforme correspond elle aussi à une propriété de ses fibres. Dans ce cadre d'idées, P. Baird, A. Fardoun et S. Ouakkas ont montré que cela est vrai, mais la condition étant tellement compliquée, ils n'ont pas pu en déduire des conséquences [9], même dans le cas où le domaine est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^3$ . Suite à l'introduction dans ce travail de la notion de morphisme harmonique généralisé, il nous semble tout à fait abordable, de chercher à caractériser ces morphismes d'un domaine de  $\mathbb{R}^3$  à valeurs dans une surface, en termes de ses fibres.

On a vu dans le Chapitre 4, que les morphismes harmoniques généralisés constituent une classe d'applications très naturelle, avec une caractérisation assez nette, comparable à celle des morphismes harmoniques : si  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  est semi-conforme, elle est un morphisme harmonique généralisé si et seulement si  $\varphi$  et  $\varphi^2$  sont biharmoniques. La deuxième condition que  $\varphi^2$  soit biharmonique va alors porter des informations

### 5.3. CARACTÉRISATION DES MORPHISMES HARMONIQUES GÉNÉRALISÉS À VALEURS COMPLEXES

---

supplémentaires à leur caractérisation en termes de ses fibres, ce qui peut permettre de résoudre ce problème difficile.

### 5.3. CARACTÉRISATION DES MORPHISMES HARMONIQUES GÉNÉRALISÉS À VALEURS COMPLEXES

---

# Bibliographie

- [1] R. Ababou, P. Baird, J. Brossard, *Polynômes semi-conformes et morphismes harmoniques*, Math.Z., 231, 589-604 (1999).
- [2] P. Baird, *Harmonic morphisms onto Riemann surfaces and generalized analytic functions*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **37** (1) (1987), 135-173.
- [3] P. Baird, *Explicit constructions of Ricci solitons*, in : Variational Problems in Differential Geometry, R. Bielawski, K. Houston et M. Speight (eds.), London Math. Soc. Lecture Note Series **394**, Cambridge Univ. Press 2012, pp. 37-55.
- [4] P. Baird and J-M. Burel, *Conformal subfoliations of prescribed geodesic curvature*, Mathematica Scandinavica, **93** (2003), 221-239.
- [5] P. Baird and L. Danielo, *Three-dimensional Ricci solitons which project to surfaces*, Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik, (2007), vol. 608, 65-91.
- [6] P. Baird and M. G. Eastwood, *CR geometry and conformal foliations*, Ann. Global Analysis and Geometry **44** (1) (2013), 73-90.
- [7] P. Baird and M. G. Eastwood, *On functions with a conjugate*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **65** (1) (2015), 277-314.
- [8] P. Baird and J. Eells, *A conservation law for harmonic maps*, Geometry Symp. Utrecht 1980, pp. 125 Lect. Notes in Math., Vol. 894, Springer-Verlag, 1981.
- [9] P. Baird, A. Fardoun and S. Ouakkas, *Conformal and semi-conformal biharmonic maps*, Ann. Glob. Anal. Geom., **34** (2008), no 4, 403-414.
- [10] P. Baird and R. Pantilie, *Harmonic morphisms on heaven spaces*, Bull. London Math. Soc. **41** (2) (2009), 198-204.
- [11] P. Baird and J.C. Wood, *Bernstein Theorems for harmonic morphisms from  $\mathbb{R}^3$  and  $S^3$* , Math. Ann. 280 (1988), 579-603.
- [12] P. Baird and J. C. Wood, *Harmonic morphisms between Riemannian manifolds*, London Math. Soc Monographs, New Series **29**, Oxford Univ. Press 2003.
- [13] A. Bernard, E. Campbell and A. M. Davie, *Brownian motion and generalized analytic and inner functions*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **29** (1) (1979), 207-228.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [14] C. Böhm et R. Lafuente, Immortal homogeneous Ricci flows, arXiv :1701.00628v4 (2017).
- [15] T. P. Branson, L. Fontana et C. Morpurgo, *Moser-Trudinger and Beckner-Onofri's inequalities on the CR sphere*, Annals of Mathematics **177** (1) (2013), 1-52.
- [16] M. Brelot, Lectures on potential theory, 2nd. edn. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1967.
- [17] R. L. Bryant, *Harmonic morphisms with fibres of dimension one*, Comm. Anal. Geom. **8** (2000), 219-265.
- [18] B. Chow and D. Knopf. The Ricci flow : an introduction. Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 110. Amer. math. Soc., Providence RI, 2004.
- [19] B. Chow, S.-C. Chu, D. Glickenstein, C. Guenther, J. Isenberg, T. Ivey, D. Knopf, P. Lu, F. Luo, and L. Ni. The Ricci Flow : Techniques and Applications, Part I : Geometric Aspects. Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 135. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.
- [20] B. Chow, S.-C. Chu, D. Glickenstein, C. Guenther, J. Isenberg, T. Ivey, D. Knopf, P. Lu, F. Luo, and L. Ni. The Ricci Flow : Techniques and Applications, Part II : Analytic Aspects. Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 144. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.
- [21] C. Constantinescu and A. Cornea, *Compactifications of harmonic spaces*, Nagoya Math. J. 25, (1965) 1-57.
- [22] L. Danileo. Structures Conformes, Harmonicité et Métriques d'Einstein. Thesis. Université de Bretagne Occidentale, 2004.
- [23] L. Daniello, *Construction de métriques d'Einstein à partir de transformations biconformes*, Ann. Fac. des Sciences de Toulouse, Sér. 6, **15**, no. 3 (2006), 553-588.
- [24] J. Dieudonné, Foundation of Modern Analysis, Academic Press, 1969.
- [25] J. Eells and J.H. Sampson, Harmonic mappings of Riemannian manifolds. *American Journal of Mathematics*, **86**, p.p 109-160 The Johns Hopkins University Press 1964.
- [26] L. Euler. Methods inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici lattissimo sensu accepti, chapter Additamentum 1. eulerarchive. org E065, 1744.
- [27] A. Fedotov and P. Giuseppe, *Groups and Manifolds*, de Gruyter, 2018.
- [28] B. Fuglede, *Harmonic morphisms between Riemannian manifolds*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **28** (2) (1978), 107-144.
- [29] S. Gudmundsson and J. C. Wood, *Multivalued harmonic morphisms*, Math. Scand. **73** (1993), 127-155.

- [30] C. Guenther, J. Isenberg and D. Knopf, *Linear stability of homogeneous Ricci solitons*, Int. Math. Res. Not. (2006), Article ID 96253, 30 pp.
- [31] R. Hamilton, *Three-manifolds with positive Ricci curvature*, J. Differential Geom. **17** (2) (1982), 255-306.
- [32] L. Hörmander *The analysis of linear partial differential operators*, 1, Springer (1983).
- [33] T. Ishihara, *A mapping of Riemannian manifolds which preserves harmonic functions*, J. Math. Kyoto Univ. **19** (1979), 215-229.
- [34] C.-G.-J. Jacobi *Ueber eine particulre Lsung der partiellen Differentialgleichung  $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$* . Cr. Journal für die reine und angewandte Mathematik, **36** (1848), 113-134.
- [35] T. Ivey, *Local existence of Ricci solitons*, Manuscripta Math. **91** (1996), 151-162.
- [36] J. Kazdan and F. Warner, *Scalar curvature and conformal deformation of Riemannian structure*, J. Differential Geom. **10** (1975), 113-134.
- [37] S. von Kowalevsky, *Zur Theorie der partiellen Differentialgleichung*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, **80** (1875), 132.
- [38] G. Lamé, *Leçons sur la théorie analytique de la chaleur*, Paris : Mallet-Bachelier, 1861.
- [39] E. Loubeau and Y.-L. Ou, *The characterization of biharmonic morphisms*, Differential geometry and its applications (Opava, 2001), Math. Publ., 3(2001),31–41.
- [40] E. Loubeau and Y. -L. Ou, *Biharmonic maps and morphisms from conformal mappings*, Tohoku Math J., 62 (1), (2010), 55-73.
- [41] J. Lott, *On the long-time behavior of type-III Ricci flow solutions*, Math. Annalen **339** (2007), 627-666.
- [42] M. Nakai and L. Sario, *Biharmonic classification of Riemannian manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. 77 (1971), 432–436.
- [43] P. Nurowski, *Construction of conjugate functions*, Ann. Global Anal. Geom. **37** (2010), 321-326.
- [44] Y.-L. Ou. *On constructions of harmonic morphisms into Euclidean spaces*, J. Guangxi University for Nationalities, 2, 1996, 1-6.
- [45] Y.-L. Ou, *Biharmonic morphisms between Riemannian manifolds*, Geometry and topology of submanifolds, X (Beijing/Berlin, 1999), 231–239.
- [46] Y. -L. Ou, *Some constructions of biharmonic maps and Chen’s conjecture on biharmonic hypersurfaces*, Jour. Geom. Phys., 62, (2012), 751-762.
- [47] Y. -L. Ou and Z.-P. Wang , *Biharmonic Riemannian submersions from 3-manifolds*, Math Zeitschrift, 269 (3) (2011), 917-925.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [48] S. M. Paneitz, *A quartic conformally covariant differential operator for arbitrary pseudo-Riemannian manifolds (summary)*, SIGMA. Symmetry, Integrability and Geometry. Methods and Applications, **4** (2008) : Paper 036, 3 (publié à titre posthume).
- [49] G. Perelman, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*, arXiv :0211159.
- [50] G. Perelman, *Ricci flow with surgery on three-manifolds*, arXiv :0303109.
- [51] G. Perelman, *Finite extinction time for solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds*, arXiv :0307245.
- [52] P. Scott, *The geometries of 3-manifolds*, Bull. London Math. Soc. **15** (1983), 401-487.
- [53] Spivak, Volume IV, pp. 455-500, 1979.
- [54] W.P. Thurston, *Three-dimensional Geometry and Topology*, Vol. 1, Princeton University Press, Princeton New Jersey, 1997.
- [55] M. Ville, *Harmonic morphisms from Einstein 4-manifolds to Riemann surfaces*, Internat. J. Math. **14** (3) (2003), 327-337.
- [56] M. Wehbe, *Aspects twistoriels des applications semi-conformes*, Thesis. Mathématiques [math], Université de Bretagne Occidentale - Brest, 2009.
- [57] J.B. Wilker, *Inversive Geometry*, Springer, 1981.
- [58] J. C. Wood, *Harmonic morphisms and Hermitian structures on Einstein 4-manifolds*, Internat. J. Math. **3** (1992), 415-439.

---

**Titre :** Applications Semi-conformes et Solitons de Ricci

**Mots clés :** Applications semi-conformes, solitons de Ricci, déformations biconformes, morphismes harmoniques

**Résumé :** Dans cette thèse, nous étudions principalement les applications semi-conformes et leur influence sur la résolution de certaines équations géométriques importantes comme celle d'un soliton de Ricci et celle d'une application biharmonique. Dans la première partie, nous appliquons un ansatz qui permet de construire des applications semi-conformes à partir d'une équation différentielle en une fonction de deux variables. Nous caractérisons les solutions réelles-analytiques. Parmi les solutions explicites obtenues, nous trouvons le premier exemple d'une application semi-conforme non-harmonique définie entièrement sur  $\mathbb{R}^3$  à valeurs dans le plan complexe. Dans la deuxième partie, nous étudions les solitons de Ricci. Nous nous intéressons aux solitons de dimension 3, où ils peuvent être décrits, au moins localement, en terme d'une application semi-conforme. Nous développons une nouvelle méthode de construction de ces solitons à partir des transformations biconformes, particulièrement adaptées à l'étude de l'unicité de la structure. Finalement, nous introduisons une nouvelle notion de morphisme harmonique généralisé qui, comme son nom l'indique, contient les morphismes harmoniques comme un cas particulier. Cette classe d'applications a une importance dans la théorie d'applications biharmoniques. Les morphismes harmoniques généralisés ont une caractérisation nette qui permet de donner plusieurs exemples et méthodes de construction d'applications biharmoniques non-harmonique.

---

**Title :** Semi-conformal Mappings and Ricci Solitons

**Keywords :** Semi-conformal mappings, Ricci solitons, biconformal deformations, harmonic morphisms.

**Abstract :** In this work, we primarily study semi-conformal mappings and their influence in the resolution of important geometric equations, such as those for a Ricci soliton and those for a biharmonic maps. In the first part of this thesis, we exploit an ansatz for the construction of semi-conformal mappings from a differential equation in a function of two variables. We characterize real-analytic solutions. Among the resulting explicit solutions, we find the first known example of an entire semi-conformal mapping into the plane which is not harmonic. In the second part, we study Ricci solitons.

We are particularly interested in 3-dimensional Ricci solitons, as they can be described at least locally, in terms of a semi-conformal map. We develop a construction method of solitons from biconformal deformations, particularly adapted to the study of the structure unicity. Finally, we introduce a new notion of generalized harmonic morphism, which, as the name suggests, contain the harmonic morphisms as a special case. These mappings have an elegant characterization which enables the construction of explicit examples, as well as impacting on the theory of biharmonic mappings.