



HAL
open science

Diffusion multiple et retournement temporel des ondes ultrasonores dans les milieux granulaires secs et immergés

Maxime Harazi

► **To cite this version:**

Maxime Harazi. Diffusion multiple et retournement temporel des ondes ultrasonores dans les milieux granulaires secs et immergés. Acoustique [physics.class-ph]. Université Sorbonne Paris Cité, 2017. Français. NNT : 2017USPCC024 . tel-01876079

HAL Id: tel-01876079

<https://theses.hal.science/tel-01876079>

Submitted on 18 Sep 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Institut **Langevin**
ONDES ET IMAGES

ESPCI  PARIS
EDUCATION SCIENCE INNOVATION



THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ SORBONNE PARIS CITÉ
PRÉPARÉE À L'UNIVERSITÉ PARIS DENIS DIDEROT
ÉCOLE DOCTORALE N°564 - PHYSIQUE EN ÎLE-DE-FRANCE
SPÉCIALITÉ : ACOUSTIQUE PHYSIQUE

DIFFUSION MULTIPLE
ET RETOURNEMENT TEMPOREL
DES ONDES ULTRASONORES DANS LES
MILIEUX GRANULAIRES SECS ET IMMERGÉS

Par **Maxime Harazi**

sous la direction de **Xiaoping Jia** et **Arnaud Tourin**
Institut Langevin - Ondes et Images

Soutenue le 23 novembre 2017 devant le jury composé de :

Michel Campillo	Professeur à l'Université Grenoble-Alpes	Rapporteur
Rémi Carminati	Professeur à l'ESPCI Paris	Invité
Annie Colin	Professeure à l'ESPCI Paris	Présidente du jury
Eric Falcon	Directeur de recherche au CNRS	Examineur
Xiaoping Jia	Professeur à l'Université Paris-Est Marne-la-Vallée	Co-directeur de thèse
Jean Rajchenbach	Directeur de recherche au CNRS	Rapporteur
Arnaud Tourin	Professeur à l'ESPCI Paris	Co-directeur de thèse

Institut Langevin, CNRS – UMR 7587
ESPCI Paris, Université Paris Diderot (Paris 7)
1 rue Jussieu
75005 Paris
FRANCE

École doctorale n°564 « Physique en Île-de-France »
École normale supérieure
24 rue Lhomond
75005 Paris
FRANCE

Table des matières

Résumé	i
Remerciements	iii
Motivations et plan de la thèse	vii
1 Notions fondamentales	1
1.1 Généralités sur la diffusion multiple	2
1.1.1 La diffusion multiple	2
1.1.2 Du régime balistique au régime diffusif	2
1.1.3 Le régime diffusif	3
1.1.4 Quelques exemples	6
1.1.5 Limite de l'équation de la diffusion	10
1.2 Le retournement temporel	11
1.2.1 Fondements	11
1.2.2 Réalisation pratique : le miroir à retournement temporel	14
1.2.3 Le retournement temporel en régime de diffusion multiple	15
1.2.4 Deux exemples	18
1.3 Généralités sur les milieux granulaires	20
1.3.1 Élasticité	20
1.3.2 Désordres	21
1.3.3 Blocage et déblocage	24
1.3.4 Fragilité	26
1.3.5 Ondes élastiques	26
2 Retournement temporel en régime linéaire dans les milieux granulaires secs	37
2.1 Réalisation expérimentale	38
2.1.1 Présentation du dispositif expérimental	38
2.1.2 Réponse du milieu	39
2.1.3 Vérification de la stationnarité	41
2.1.4 Vérification de la réciprocity spatiale	43
2.1.5 Retournement temporel monovoie	44
2.1.6 Retournement temporel multivoies	50
2.2 Simulation numérique	54
2.2.1 Principales méthodes existantes	54
2.2.2 Description du modèle : système masses-ressorts percolé	55
2.2.3 Réciprocity spatiale	60
2.2.4 Retournement temporel monovoie	62

2.2.5	Retournement temporel multivoies	63
2.2.6	Retournement temporel dynamique	67
2.2.7	Influence de la polarisation des signaux retournés	67
2.3	Conclusions	69
3	Étude du transport des ondes dans les milieux granulaires : expériences et simulations	73
3.1	Transport diffusif dans les milieux granulaires secs et mouillés	74
3.1.1	Modèle	74
3.1.2	Influence de la dissipation	75
3.1.3	Anomalie aux temps longs	76
3.2	Simulations numériques	78
3.2.1	Détermination du libre parcours moyen élastique	79
3.2.2	Étalement du halo diffusif	83
3.2.3	Influence de la dissipation à fréquence centrale fixe	88
3.2.4	Influence de la fréquence à dissipation fixée	92
3.2.5	Influence de l'amplitude de la source sur le spectre transmis	95
3.2.6	Conclusions sur les apports du modèle numérique à l'étude du transport	98
3.3	Transport et retournement temporel dans les milieux granulaires immergés	98
3.3.1	Rétrodiffusion cohérente en champ lointain	98
3.3.2	Rétrodiffusion cohérente en champ proche	103
3.3.3	Étude du transport par retournement temporel	107
3.3.4	Retournement temporel en régime stationnaire	111
3.3.5	Retournement temporel dynamique	114
3.4	Conclusions	117
4	Retournement temporel en régime non-linéaire dans les milieux granulaires secs	125
4.1	Non-linéarité dans la phase aller : expériences et simulations	126
4.1.1	Influence de l'amplitude source sur le retournement temporel	126
4.1.2	Localisation des réarrangements	129
4.1.3	Cas d'un échantillon vieilli	132
4.1.4	Simulations numériques	132
4.2	Non-linéarité dans la phase retour : déclenchement contrôlé des réarrangements sous forte contrainte	137
4.2.1	Influence de l'amplitude au miroir à retournement temporel	137
4.2.2	Localisation des réarrangements	142
4.2.3	Influence de la taille des billes	143
4.2.4	Cas d'un échantillon vieilli	144
4.3	Déclenchement sous faible contrainte	145
4.3.1	Dispositif expérimental	145
4.3.2	Signal transmis	147
4.3.3	Vieillissement	147
4.3.4	Déclenchement des réarrangements	148
4.4	Conclusions	152
5	Conclusions	157
5.1	Synthèse des résultats	157
5.2	Conclusion et perspectives	158
	Appendices	159

A	Implémentation de l'expérience numérique	161
A.1	Retournement temporel linéaire	161
A.2	Propagation d'une onde	164
A.3	Calcul de l'accélération	168
A.4	Création d'un réseau tendu	170
A.5	Création de la matrice d'adjacence	172
A.6	Calcul des longueurs des ressorts	173
B	Calcul des modes propres d'un système masses-ressorts désordonné en géométrie quelconque	175
B.1	Mise sous la forme d'un système linéaire	175
B.1.1	Un cas particulier	178
B.2	Mise sous la forme d'un système matriciel	179
B.3	Résolution des modes propres	181
B.3.1	Un premier exemple : modes longitudinaux dans une chaîne régulière	182
B.3.2	Un deuxième exemple : modes transverses dans une chaîne régulière	182
B.3.3	Modes dans un réseau bi-dimensionnel désordonné	182

Résumé

Le retournement temporel (RT) est une méthode qui permet de faire revivre à une onde sa vie passée et de la faire ainsi reconverger sur la source qui lui a donné naissance. Au cours de cette thèse, nous avons étudié – expérimentalement et numériquement – le RT des ondes ultrasonores dans des milieux granulaires. En se propageant de grains en grains, les ondes ultrasonores fournissent une sonde unique du réseau hétérogène 3D des contacts. Pour des ondes se propageant en régime de diffusion multiple, nous montrons que la focalisation est globalement robuste mais toutefois sensible à des mouvements des grains à des échelles spatiales bien plus fines que la longueur d’onde. À cet égard, la propagation d’une onde ultrasonore à travers le réseau discret et métastable des contacts entre grains apparaît comme une situation intermédiaire entre l’instabilité du mouvement d’une particule dans un gaz de Lorentz et la propagation d’une onde ultrasonore dans une matrice homogène remplie d’obstacles diffusants. Lorsque l’amplitude de la source augmente, nous entrons dans un régime non-linéaire où l’onde elle-même provoque des réarrangements du milieu, ce qui conduit à la dégradation de la focalisation obtenue par retournement temporel de ladite onde. Celle-ci n’agit alors plus seulement comme une sonde, mais aussi comme une « pompe ». Enfin, nous montrons que le RT d’une onde de faible amplitude, mais allongée dans le temps par la diffusion multiple, peut être utilisé pour focaliser une onde de grande amplitude en un point du milieu et y déclencher ainsi de façon contrôlée des réarrangements irréversibles du réseau des contacts. L’ensemble de ces résultats est supporté par un modèle numérique vectoriel fondé sur un système masses-ressorts percolé bidimensionnel.

Abstract

Time reversal (TR) is a technique which gives the possibility to make a wave relive its life in reverse chronology, and to focus back to its source. In this thesis, TR of ultrasound in granular media has been investigated experimentally and numerically. By propagating from grain to grain, ultrasounds provide a unique probe of the heterogeneous 3D contact network. We show that for multiply scattered waves, the focusing is essentially robust but sensitive to displacements of grains on a scale much smaller than the wavelength. In this respect, the ultrasound propagation through the discrete and metastable contact network between the grains appears to represent an intermediary situation between the instability in the propagation of a particle in a Lorentz gas and the propagation of ultrasounds in an homogeneous medium filled with scatterers. When the source amplitude is increased, a non-linear regime is reached where the wave itself triggers rearrangements in the medium, thus degrading the quality of the TR focusing. In this regime, the wave acts not only as a probe, but also as a « pump ». Finally, we show that the TR of a small-amplitude multiply-scattered wave can be used to focus a high-amplitude wave in the medium and trigger in a controlled way irreversible rearrangements of the contact network. These results are supported by a vectorial numerical model based on a 2D percolated masses-springs network.

Remerciements

On m’a souvent dit que les deux étapes les plus difficiles durant la préparation d’une thèse étaient l’inscription administrative, qui marque le début de la thèse, et la rédaction des remerciements, qui en marque la fin. Il est donc maintenant temps pour moi d’attaquer la deuxième difficulté de ma thèse.

Je tiens tout d’abord à adresser mes sincères remerciements à Xiaoping et Arnaud pour leur excellent encadrement, leur rigueur scientifique et leur grande disponibilité. Arnaud, Xiaoping, être à vos côtés ces trois années et demi fut un plaisir. Merci encore de m’avoir accueilli à l’Institut et plus particulièrement dans le groupe “granulaires”. J’aurai plaisir à vous recroiser au détour de collaborations ou de conférences.

J’ai ici une pensée chaleureuse pour les autres membres du groupe “granulaires” de l’Institut Langevin : Yougu Yang, doctorant qui m’a précédé et aidé dans les premiers mois de ma thèse ; Siet van den Wildenberg, en postdoc au début de cette dernière – je te souhaite beaucoup de courage avec tes jumeaux ! ; et enfin Julien Léopoldès, avec qui j’ai eu le plaisir de discuter tout au long de mes aventures. Plusieurs stagiaires ont marché à nos côtés durant cette thèse et ont été d’une grande assistance pour la réalisation de certaines expériences : Yamil Abraham, étudiant à l’Université de la République (Montevideo, Uruguay), Gabriel Guyard et Tanguy de Lavigerie, étudiants à l’ESPCI Paris, et enfin Flavien Bureau, étudiant à SupOptique mais qui a compris que les ondes acoustiques étaient plus sympathiques ! Je vous souhaite de vous épanouir dans vos futures carrières, qu’elles soient granulaires ou pas, académiques ou non.

Je tiens ensuite à remercier les membres de mon jury : Jean Rajchenbach et Michel Campillo pour avoir bien accepté d’être rapporteurs de mon manuscrit, ainsi que Annie Colin, Eric Falcon et Rémi Carminati. Je suis particulièrement content que mes résultats soient passés de façon claire et agréable, à la fois dans ce manuscrit, mais aussi durant la soutenance.

J’ai par ailleurs eu la chance de croiser et d’échanger – en conférences ou ailleurs – avec d’autres chercheurs passionnés et passionnants : Patrick Rasolofosaon, Paul A. Johnson, Robert Guyer, James A. Ten Cate, Rudolf Sprik et Emmanuel Fort. Merci à vous pour toutes ces discussions stimulantes.

Bien sûr, à côté des aspects purement scientifiques, une thèse ne peut pas se dérouler sans un certain nombre d’acteurs. J’aimerais en premier lieu remercier très chaleureusement Abdelhak Souilah, notre mécanicien aux habiles mains, et dont le savoir-faire et la patience m’impressionneront toujours. Merci aussi à Christian Dorme et Jérôme Laurent pour le temps qu’ils ont investi pour m’aider à domestiquer les machines et circuits électriques. Aller embêter Romain Pierrat et Johnny Pinson à la moindre coupure internet me manquera assurément, mais ils savent que je les remercie pour leur patience.

Un grand merci à Marjolaine Vernier, Christelle Jacquet, Laurine Simandre, Catherine Dupuy et Warda Faidoli pour leur disponibilité pour tous les aspects administratifs. Enfin, merci à Patricia Daenens et Emmanuel Labbey nos précieux aide de laboratoire.

De même, sans argent, pas de recherche : un grand merci donc à l’École doctorale « Physique en Île-de-France » et à l’Université Paris Diderot pour la confiance accordée, matérialisée par ma bourse de thèse. Merci par ailleurs à Sylvie Hénon, Joëlle Taieb et Monia Mesta pour leur patience dans la gestion administrative des étudiants.

Merci à mes cobureaux du bureau 227 : Hugo, Yasmina, Soichi et Julie. Bonne continuation aux autres doctorants/docteurs de la promo 2014 de l’Institut : Nikos, Justine, Marc, Clément D., Elodie,

Dorian, Peng, Clément A. et Aurélien.

Celles et ceux qui me connaissent savent que j'ai une tendance à multiplier les casquettes et à m'investir dans de nombreux projets en parallèle de mon activité professionnelle.

Je me suis en particulier investi dans l'organisation de l'International Physicists' Tournament (IPT) et j'aimerais remercier les amis qui m'ont accompagné dans cette grande aventure : "Handsome" Erwan Allys, Nathanaël Cottet, Cyrille "Heenok" Doux, Charlie Duclut, Guillaume d'Hardemare, Marguerite Jossic, Roland Lehoucq, Arnaud Raoux et Daniel Suchet. Merci d'avoir accepté de me suivre dans ce superbe projet, cela a été un très grand plaisir et j'espère vous recroiser pour d'autres aventures ! Un grand merci à Jean-François Joanny et Jean-Baptiste Hennequin, respectivement directeur et secrétaire général de l'ESPCI Paris, pour avoir accepté d'héberger l'édition 2016 du tournoi et m'avoir fait pleinement confiance dans l'organisation.

Ce tournoi est l'une des actions que j'ai menées au nom de la Société Française de Physique (SFP), dans laquelle je me suis impliqué de façon croissante durant ma thèse. J'y ai trouvé beaucoup de plaisir à agir bénévolement pour la communauté de la physique en France, en particulier en présidant la Commission Jeunes, et je suis sûr que j'y trouverai toujours des personnes bienveillantes avec qui collaborer autour de projets fédérateurs. Un grand merci donc à Michel Spiro, Alain Fontaine, Catherine Langlais, Mayline Gautié, Olivier Dulieu, Stéphanie Couvreur, Samuel Guibal, tous les membres de la Commission Jeunes et l'ensemble des membres du bureau et du conseil d'administration. Merci en particulier pour votre confiance en moi et votre énergie communicative.

J'ai une pensée toute particulière pour la famille Combettes, qui a pris grand soin de moi durant une partie de la préparation de ce manuscrit. Les tripous du petit déjeuner, la soupe de fromage, le gâteau à la broche, et bien sûr l'aligot, m'ont fourni l'énergie dont j'avais bien besoin à ce moment là. Votre générosité et votre bonne humeur sont sans égal et j'aurai plaisir à vous recroiser. Un grand merci, donc !

Bien sûr, je remercie aussi l'ensemble de mes amis. Je ne me risquerais pas à tenter d'en dresser une liste, de peur de vexer de nécessaires oubliés. Néanmoins, je pense en particulier à mes camarades de l'ENS – physiciens ou non. Je suis heureux de vous connaître et j'espère vous revoir ! Évidemment, merci Richard !

Ce manuscrit est dédié à mes enseignants et ma famille.

Mes enseignants car je sais que je ne leur ai pas facilité la vie. De la maternelle aux « grandes » classes, j'ai toujours montré quelques difficultés à suivre de façon studieuse mes cours. Mais je sais *a posteriori* que j'ai eu la chance de croiser la route d'enseignants exceptionnels, passionnés et faisant preuve d'une pédagogie remarquable et d'une patience à toute épreuve. Merci à vous. Aux professeurs qui me liront : ne perdez pas espoir, vous êtes tous à votre façon les tuteurs qui permettront aux jeunes pousses – même tordues – de donner de beaux fruits plus tard.

De la même façon, je remercie ma famille pour m'avoir toujours poussé et encouragé dans mes études, malgré les turbulences que je créais sur ma route. C'est bien en partie grâce à vous que je peux dire aujourd'hui que je suis Docteur !

À ma famille

À mes enseignants

Motivations et plan de la thèse

*To see a world in a grain of sand
And a heaven in a wild flower,
Hold infinity in the palm of your hand
And eternity in an hour.*

William Blake, *Auguries of Innocence*, 1803

Contexte et motivations Un *milieu granulaire* est un milieu composé de « beaucoup » de particules solides macroscopiques. Il est alors aisé de constater que cette définition recouvre un grand nombre de milieux, dont les particules peuvent être de matières, de tailles et de formes différentes. De fait, les milieux granulaires constituent après l'eau la deuxième matière la plus manipulée par l'Homme ¹.

Quand on évoque les milieux granulaires, la première image qui vient généralement à l'esprit est celle du sable – encore faudrait-il préciser de quel sable on parle – ou des graviers. S'offrent alors à l'étude de nombreux phénomènes physiques naturels : création et déplacement des dunes, érosion, impacts, etc. Mais à une échelle spatiale plus grande, et aussi plus dramatique pour l'Homme, les géophysiciens étudient les phénomènes d'avalanches, de sables mouvants, de glissement de terrain, et bien sûr les séismes. Il est d'ailleurs notable que ces phénomènes ne sont *a priori* pas spécifiques à la Terre. Ayons d'ailleurs ici une pensée pour le robot Opportunity, enlisé depuis mai 2009 dans les dunes martiennes.

Mais comme nous l'avons dit, l'industrie manipule elle aussi massivement des milieux granulaires : celles du bâtiment et du génie civil (ciments, ballast, remblais, mines, etc.), les industries agro-alimentaire et agricole (céréales, sel, sucre, ingrédients sous forme de poudre, etc.), cosmétique, pharmaceutique, ainsi que les industries du verre et de la chimie bien sûr. Dans l'ensemble de ces domaines, les problématiques du stockage, du transport, du mélange et de la transformation des matériaux granulaires sont d'importance capitale et ont la plupart du temps été résolues de façon empirique. Vu les volumes manipulés, on comprend alors aisément qu'une amélioration de quelques pourcent du rendement du transport (par exemple) des matériaux granulaires ferait économiser beaucoup d'énergie et d'argent.

L'étude des milieux granulaires pose de plus des problèmes fondamentaux ^{2 3}. En effet, la description et la modélisation même des milieux granulaires ne sont pas évidentes. Du sable posé sur une table est bien solide – dans le sens où les grains ne bougent pas – mais alors comment décrire le tas qui s'écoule tel un liquide lorsque la table est inclinée ? Et que dire de la transition de phase de déblocage (« unjamming ») correspondante ? Vu le grand nombre de particules impliquées, il pourrait être tentant d'appliquer les outils de la physique statistique et de la thermodynamique, mais qui joue alors le rôle de la température, qui permet habituellement au système d'explorer différents états ? Contrai-

1. P. G. de Gennes. Granular matter : a tentative view. Rev. Mod. Phys. 71(2), 1999.

2. J. Duran. Sables, poudres et grains : Introduction à la physique des milieux granulaires. Eyrolles, 1999.

3. B. Andreotti, Y. Forterre et O. Pouliquen. Les milieux granulaires : entre fluide et solide. EDP Sciences, 2011.

rement à un gaz moléculaire, les grains sont en effet trop lourds – de par leurs tailles typiquement supérieures à $10\ \mu\text{m}$ – pour subir le mouvement brownien induit par la température, et le milieu est alors athermique et hors d'équilibre. Et quelle est l'influence de la friction ou du mouillage entre les grains ? Par ailleurs, dans le cas « solide », comment prendre en compte le caractère *discret* du milieu et les différentes échelles en jeu (celle d'un grain, de plusieurs grains formant une « chaîne de force », ou de l'empilement dans son ensemble) ?

Nous le voyons, malgré leur apparente simplicité, les milieux granulaires continuent de poser de nombreux défis théoriques et pratiques.

Dans ce contexte, l'étude de la propagation des ondes ultrasonores dans ces milieux apporte un éclairage intéressant comme l'ont déjà montré plusieurs travaux dans le passé. En se propageant de grains en grains, les ondes ultrasonores fournissent en effet une sonde unique du réseau hétérogène 3D des contacts⁴. En général, les ondes transmises se composent d'une onde directe basse fréquence (appelée onde balistique), qui « voit » un milieu effectif, suivie d'une onde multiples fois diffusée, très sensible à l'état de l'empilement granulaire. Dans cette thèse, nous nous sommes posés la question de la réversibilité de la propagation de ces ondes.

C'est en cherchant à répondre à cette question pour d'autres types de milieux – plus classiques – que Mathias Fink a imaginé, au début des années 90, une méthode permettant de faire revivre à une onde sa vie passée et de la faire ainsi reconverger sur la source qui lui a donné naissance : le retournement temporel (RT)⁵. D'abord éprouvé pour les ultrasons avant d'être transposé aux micro-ondes, ce concept a trouvé sa déclinaison en optique avec la technique de contrôle de front d'ondes qui permet de « voir » à travers des milieux opaques. Au milieu des années 1990, des travaux ont montré que la focalisation est d'autant plus efficace que le milieu traversé est plus complexe. Ce résultat surprenant a contribué à faire émerger un nouveau paradigme pour le contrôle d'ondes : loin de n'être qu'un inconvénient, le désordre du milieu de propagation peut être mis à profit pour concevoir des instruments d'imagerie et de communication plus performants.

Si le RT a été étudié pour différents types d'ondes (ultrasons, ondes acoustiques audibles, ondes élastiques, micro-ondes) et dans différents contextes, aucune expérience de RT n'avait été réalisée dans un matériau granulaire. Or, un matériau granulaire présente des particularités qui constituent autant de défis, théoriques et pratiques, pour la réalisation de ce type d'expériences. D'une part, le caractère métastable et fragile d'un tel milieu, ainsi que sa propension au vieillissement, posent d'emblée la question de la réversibilité des ondes qui peuvent s'y propager. D'autre part, il n'existe même pas d'équation de propagation à l'échelle du réseau discret des contacts.

Le premier objectif de cette thèse était donc de tester la réversibilité de la propagation acoustique dans un matériau granulaire sec sous contrainte. En l'occurrence, lorsque l'amplitude de la source n'est pas trop importante, nous verrons que la focalisation par retournement temporel dans un matériau granulaire s'avère globalement robuste. Elle est toutefois sensible à des mouvements des grains à des échelles spatiales bien plus fines que la longueur d'onde. À cet égard, la propagation d'une onde ultrasonore au travers du réseau discret des contacts apparaît comme une situation intermédiaire entre l'instabilité du mouvement d'une particule dans un gaz de Lorentz (i.e. une particule matérielle se déplaçant entre des diffuseurs immobiles) et la propagation d'une onde ultrasonore dans une matrice homogène remplie d'obstacles diffusants.

Compte tenu de la mise en évidence de la robustesse du RT comme moyen de focaliser de l'énergie élastique au sein d'un matériau granulaire, un deuxième objectif a été poursuivi : tester la capacité du RT à focaliser une onde de grande amplitude en un point du milieu et d'y déclencher ainsi, de façon contrôlée, des réarrangements irréversibles du réseau des contacts.

Enfin, au cours de cette thèse, nous nous sommes aussi intéressés à des milieux granulaires immergés, autrement dit des suspensions de particules. La physique est alors différente car les ondes ultrasonores ne se propagent plus à travers les contacts, mais au sein la matrice liquide entre les grains. Dans ce contexte, nous verrons alors une autre utilisation originale du RT comme méthode d'investigation des propriétés de transport des ultrasons dans le milieu. Nous montrerons en effet que l'évolution au cours du temps de la tache focale obtenue par RT peut nous renseigner sur l'évolution

4. X. Jia et al. Ultrasound Propagation in Externally Stressed Granular Media. Phys. Rev. Lett. 82(9), 1999.

5. M. Fink. Time-Reversed Acoustics. Sci. Am. 281, 1999.

du halo de diffusion à l’instar de l’effet, bien connu, du cône de rétrodiffusion cohérente.

Plan Dans le premier chapitre, nous introduirons les trois notions au cœur de cette thèse : la diffusion multiple des ondes, le retournement temporel des ondes acoustiques en milieux hétérogènes puis la physique et l’acoustique des milieux granulaires.

Dans le second chapitre, nous testerons la réversibilité de la propagation dans des milieux granulaires secs sous contrainte. Les résultats obtenus seront supportés par une simulation numérique dans un réseau 2D masses-ressorts percolé.

Dans le troisième chapitre, nous aborderons le transport des ondes ultrasonores dans les milieux granulaires. Dans un premier temps, après avoir décrit l’influence de l’ajout de liquide interstitiel et de petites particules sur l’atténuation des ondes ultrasonores multiples diffusées, nous présentons une analyse détaillée du transport, analyse supportée par des expériences numériques. Dans un second temps, nous étudierons expérimentalement le transport des ondes dans un matériau granulaire immergé. À cette fin, nous présenterons des mesures de l’effet de rétrodiffusion cohérente qui donnent accès au libre parcours moyen de transport et à la constante de diffusion dans le milieu. Plus original, nous montrerons qu’une expérience de retournement temporel peut apporter le même type d’information.

Dans le quatrième chapitre, nous tirerons parti de la technique du retournement temporel pour apprendre à déclencher des réarrangements contrôlés dans des milieux granulaires secs fortement ou faiblement contraints.

Le dernier chapitre résume les résultats principaux et présente des perspectives à ces résultats.

Enfin, deux annexes techniques complètent le manuscrit.

J’ai toujours aimé le désert. On s’assoit sur une dune de sable. On ne voit rien. On n’entend rien. Et cependant quelque chose rayonne en silence...

Antoine de Saint-Exupéry, *Le petit prince*, 1943

Sommaire

1.1	Généralités sur la diffusion multiple	2
1.1.1	La diffusion multiple	2
1.1.2	Du régime balistique au régime diffusif	2
1.1.3	Le régime diffusif	3
1.1.4	Quelques exemples	6
1.1.5	Limite de l'équation de la diffusion	10
1.2	Le retournement temporel	11
1.2.1	Fondements	11
1.2.2	Réalisation pratique : le miroir à retournement temporel	14
1.2.3	Le retournement temporel en régime de diffusion multiple	15
1.2.4	Deux exemples	18
1.3	Généralités sur les milieux granulaires	20
1.3.1	Élasticité	20
1.3.2	Désordres	21
1.3.3	Blocage et déblocage	24
1.3.4	Fragilité	26
1.3.5	Ondes élastiques	26

Ce premier chapitre introduit les trois notions fondamentales qui sont au cœur de cette thèse : la diffusion multiple des ondes, le retournement temporel et les milieux granulaires.

1.1 Généralités sur la diffusion multiple

1.1.1 La diffusion multiple

On parle de régime de *diffusion multiple* lorsqu'une onde traverse un milieu désordonné en y étant diffusée en moyenne plus d'une fois. On entre dans ce régime lorsque la taille du milieu devient plus grande que le *libre parcours moyen élastique*, paramètre qui représente la distance moyenne entre deux événements de diffusion. Ainsi, la couleur blanche du lait, d'une peinture ou d'un nuage s'explique-t-elle par la diffusion multiple de la lumière produite par des hétérogénéités de tailles comparables aux longueurs d'onde mises en jeu. C'est aussi la diffusion multiple de la lumière par les gouttes d'eau du brouillard qui rend invisible le sommet de la Tour Eiffel sur la figure 1.1.

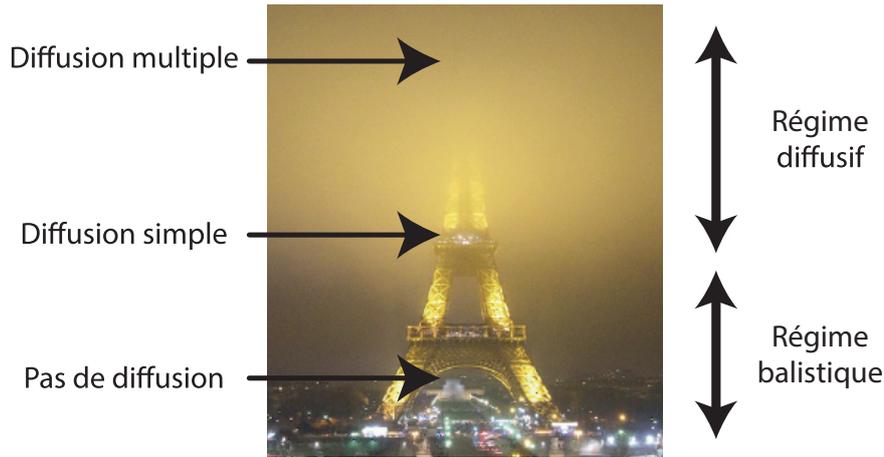


FIGURE 1.1 – Une belle illustration de la transition entre le régime balistique et le régime diffusif. (Photographie : annima.fr)

De façon générale, la propagation des ondes (classiques ou quantiques) en régime de diffusion multiple revêt une grande importance, théorique comme pratique, dans de nombreux domaines de la physique. En physique du solide, la diffusion multiple des électrons (décrits par leurs fonctions d'onde) sur les impuretés du réseau cristallin permet par exemple de comprendre la dépendance de la conductance d'un fil métallique en fonction de sa longueur (loi d'ohm) et son éventuelle annulation par des effets d'interférences entre fonctions d'onde (localisation d'Anderson [And58, Tho74]). De même, la prise en compte de la diffusion multiple des phonons permet de rendre compte de la conduction de la chaleur dans les solides amorphes [She91]. Enfin, en sismologie, il est désormais bien connu que le signal très allongé (baptisé « coda »), qui suit les arrivées balistiques (ondes P et S), est lié à la diffusion multiple des ondes sismiques sur les hétérogénéités rencontrées dans la croûte et le manteau terrestres, et que des informations utiles peuvent en être extraites [Aki69, Aki75, Cam92].

1.1.2 Du régime balistique au régime diffusif

Considérons un milieu homogène dans lequel sont disposés des diffuseurs répartis aléatoirement. L'amplitude de l'onde dans le milieu $G(\mathbf{r}, t)$ est alors une fonction aléatoire de la position \mathbf{r} et du temps t . Elle peut s'écrire comme la somme de sa moyenne et de fluctuations autour de celle-ci :

$$G(\mathbf{r}, t) = \langle G(\mathbf{r}, t) \rangle + G_f(\mathbf{r}, t), \quad (1.1)$$

où $\langle G(\mathbf{r}, t) \rangle$ définit l'onde cohérente ($\langle \cdot \rangle$ étant une moyenne d'ensemble). L'intensité moyenne peut alors s'écrire comme la somme de deux contributions :

$$I = I_{\text{coh}} + I_{\text{incoh}} \quad (1.2)$$

où le premier terme représente l'intensité de l'onde cohérente tandis que le second terme, $I_{\text{incoh}} = \langle |G_f(\mathbf{r}, t)|^2 \rangle$, définit l'intensité incohérente.

L'importance relative de ces deux contributions, cohérente et incohérente, va dépendre de trois échelles caractéristiques : la longueur d'onde λ de l'onde incidente, la taille R des hétérogénéités (qui, dans le cas d'un milieu concentré, est aussi de l'ordre de la distance moyenne qui les sépare) et enfin la taille D du milieu. Le rapport entre la longueur d'onde λ et la taille des diffuseurs R donne une idée de l'importance de la diffusion (au sens anglais de *scattering*) de l'onde par les obstacles qu'elle rencontre. Pour de grandes longueurs d'onde ($\lambda \gg R$), le *scattering* est peu efficace sauf à considérer des diffuseurs résonants sub-longueur d'onde possédant des degrés de liberté internes, à l'instar d'une bulle en acoustique. Tout se passe alors comme si « l'onde ne voyait presque pas les diffuseurs ». Dans ce régime, dit « balistique », l'intensité moyenne est dominée par l'intensité de l'onde cohérente. Cette dernière voit un *milieu effectif* : elle s'y propage comme dans un milieu homogène, mais sa vitesse de phase est renormalisée par rapport à celle du milieu homogène sous-jacent et son intensité décroît exponentiellement sur une distance caractéristique qui définit le *libre parcours moyen élastique*, noté l_e . Classiquement, dans un milieu homogène en présence de diffuseurs (concentration n), le libre parcours moyen élastique est donné par l'inverse du produit de la concentration et de la section efficace σ de diffusion d'un diffuseur :

$$l_e = \frac{1}{n\sigma}. \quad (1.3)$$

Il est donc généralement d'autant plus petit que la longueur d'onde devient voisine de R et que le milieu est plus concentré.

Pour des tailles de milieux qui deviennent bien plus grandes que le libre parcours moyen, l'intensité est dominée par l'intensité incohérente [Zha99]. Pour des milieux suffisamment épais, le transport devient alors diffusif, c'est-à-dire que l'intensité incohérente obéit à l'équation de la diffusion que nous introduirons dans le prochain paragraphe.

La transition entre les régimes balistique et diffusif est joliment illustrée sur la figure 1.1. Le brouillard qui enveloppe la Tour Eiffel consiste en une assemblée de gouttelettes d'eau en suspension dans l'air qui constituent autant de diffuseurs pour la lumière. La concentration en gouttelettes augmente avec l'altitude, si bien que le libre parcours du brouillard diminue avec celle-ci. Ainsi, au sommet de la Tour, la taille de la nappe de brouillard est plus grande que le libre parcours moyen : la propagation y est diffusif et le sommet n'est donc pas visible. Aux pieds de la tour, le libre parcours moyen devient plus grand que la taille de la nappe de brouillard ; le transport y est balistique et les pieds apparaissent donc clairement sur la photo. Entre les deux, le libre parcours moyen est de l'ordre de la taille de la nappe de brouillard.

1.1.3 Le régime diffusif

Lorsque la distance de propagation devient grande devant le libre parcours moyen l_e , la densité d'énergie $W(\mathbf{r}, t)$ obéit à l'équation de la diffusion [Ryz96, She06] :

$$\frac{\partial W(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - D\Delta W(\mathbf{r}, t) + \frac{W(\mathbf{r}, t)}{\tau_a} = s(\mathbf{r}, t), \quad (1.4)$$

où :

- D est le coefficient de diffusion
- τ_a est le temps caractéristique de dissipation de l'énergie
- $s(\mathbf{r}, t)$ est la distribution des sources.

Lorsqu'une impulsion d'énergie U_0 localisée dans l'espace et dans le temps est émise dans le milieu à la position $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ et au temps $t = 0$ ($s(\mathbf{r}, t) = U_0\delta(\mathbf{r})\delta(t)$), l'intensité au point \mathbf{r} est donnée, dans un milieu de dimension d , par :

$$W(\mathbf{r}, t) = \frac{U_0}{(4\pi Dt)^{d/2}} e^{-\left(\frac{\|\mathbf{r}\|}{\sqrt{4Dt}}\right)^2} e^{-\frac{t}{\tau_a}}. \quad (1.5)$$

Cette formule décrit l'étalement de la densité d'énergie, sous la forme d'un halo de diffusion dont la taille croît comme la racine du temps, exactement comme une augmentation de température localisée

se propagerait dans un solide ou un fluide, ou comme du colorant se diffuserait dans un fluide (figure 1.2). Cette description est aussi celle d'une marche aléatoire : la formule (1.5) donne la probabilité pour un marcheur aléatoire d'arriver à la position \mathbf{r} au bout d'un temps t . Le temps de parcours n'est plus proportionnel à la distance mais varie comme la distance quadratique moyenne.

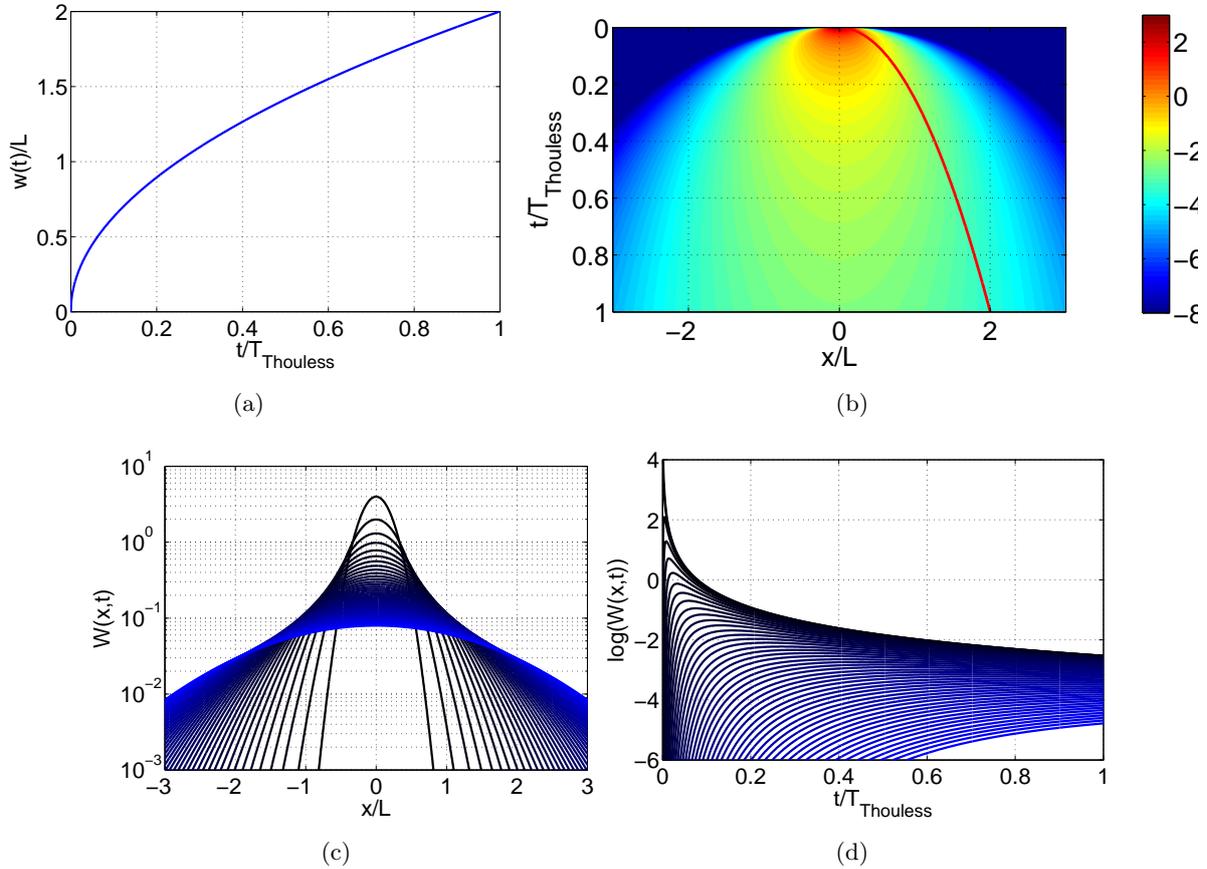


FIGURE 1.2 – Solution analytique de l'équation de la diffusion non-dissipative ($\tau_a \rightarrow +\infty$) bidimensionnelle en espace libre. On a posé $L = 1$ et $T_{Thouless} = L^2/D$, temps caractéristique nécessaire pour que l'intensité soit homogène dans un domaine de taille L . (a) Largeur du halo $w(t)$ en fonction du temps (équation (1.8)). Ce dernier croît de façon proportionnelle à \sqrt{t} , ce qui est caractéristique des phénomènes de diffusion (marcheur aléatoire, etc.). (b) Densité d'énergie (échelle logarithmique) en fonction de l'espace et du temps. On voit bien l'étalement de la densité d'énergie avec le temps. La courbe $w(t)$ de la largeur caractéristique du halo est superposée. On constate effectivement qu'au bout d'un temps $T_{Thouless}$, la densité d'énergie est homogène sur le domaine $[x = -L, x = L]$. (c) Quelques profils de densité (échelle logarithmique) en fonction de la position, pour des instants compris entre $t = 0$ et $t = T_{Thouless}$ (respectivement du noir au bleu). On voit bien la forme gaussienne du halo (parabole en échelle logarithmique) ainsi que sa diminution d'amplitude – l'aire sous la courbe restant constante par conservation de l'énergie. Là encore, on voit bien le profil plat de la densité d'énergie entre $[x = -L, x = L]$ pour le temps $t = T_{Thouless}$. (d) Profil de densité en fonction du temps pour des positions allant de $x = 0$ à $x = 3L$ (respectivement du noir au bleu).

La constante de diffusion peut s'exprimer comme le produit d'une distance par une vitesse :

$$D = \frac{1}{d} v_e l^* \quad (1.6)$$

où v_e est la vitesse de transport de l'énergie [vA91] et l^* le libre parcours moyen *de transport* (d est la dimension de l'espace). Ce dernier correspond à la distance caractéristique au delà de laquelle l'onde a totalement perdu sa mémoire de sa direction initiale à cause des diffusions et est relié au libre parcours moyen élastique l_e par la relation

$$l^* = \frac{l_e}{1 - \langle \cos \theta \rangle_\theta} \quad (1.7)$$

où $\langle \cdot \rangle_\theta$ représente la moyenne sur les angles de *scattering*. Pour des diffuseurs strictement isotropes $\langle \cos \theta \rangle_\theta = 0$ et donc $l_e = l^*$: la propagation sur un libre parcours moyen l^* (il n'y a donc en moyenne qu'un événement de diffusion) suffit à perdre l'information sur la direction initiale de l'onde. Pour des diffusions non isotropes, $\langle \cos \theta \rangle_\theta \neq 0$, ce qui conduit à $l^* > l_e$: il faut que l'onde subisse plus qu'un événement de diffusion pour espérer voir sa direction changer de façon notable.

La vitesse de transport v_e correspond quant à elle à la vitesse de propagation de l'énergie. Cette dernière coïncide en général avec la vitesse de groupe, sauf dans le cas particulier de diffuseurs résonnants.

On peut de plus poser

$$w(t) = \sqrt{4Dt} \quad (1.8)$$

qui correspond à la taille caractéristique du halo diffusif¹. Nous voyons, et cela est caractéristique des phénomènes diffusifs, que ce dernier croît de façon proportionnel à \sqrt{t} (figure 1.2). En régime balistique, l'énergie se propage bien sûr linéairement avec le temps, et l'évolution de la largeur w sera donc un indice du régime dans lequel nous nous trouvons.

De même, on peut poser

$$T_{Thouless} = \frac{L^2}{D}, \quad (1.9)$$

homogène à un temps, que l'on appelle *temps de Thouless*, et qui est le temps caractéristique nécessaire pour que la densité d'énergie soit homogène dans un domaine de taille L autour de la source (voir figure 1.2).

Valeur du coefficient de diffusion

Le coefficient de diffusion D de l'équation (1.4) traduit la vitesse de diffusion de l'énergie dans le milieu et dépend du degré de désordre dans le milieu, mais aussi de la longueur d'onde utilisée.

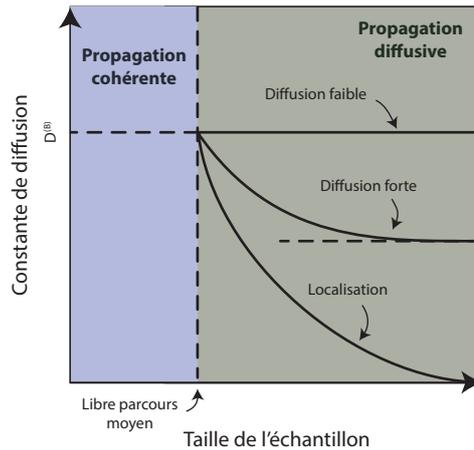


FIGURE 1.3 – Représentation schématique de l'évolution du coefficient de diffusion en fonction de la taille du milieu, dans les cas de faible diffusion (courbe du haut), diffusion forte (courbe du milieu) et localisation (courbe du bas). Dans le régime faiblement diffusant, le coefficient de diffusion est indépendant de la taille du milieu, alors que dans le cas de la localisation, le coefficient de diffusion décroît avec la taille du milieu, jusqu'à s'annuler pour une valeur finie de la taille du milieu. Noter que pour être dans le régime diffusif, le milieu (la distance d'observation) doit être plus grand que le libre parcours moyen. Figure adaptée de [She06].

1. En toute rigueur, il faut calculer le second moment de l'intensité sur l'espace : $\langle R^2(t) \rangle = \int \|\mathbf{r}\|^2 W(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} = 2dDt$. Cela donne une distance caractéristique du halo de $\sqrt{2dDt}$.

De plus, selon le régime de diffusion (faible, forte ou localisation), sa valeur peut aussi dépendre de la taille du milieu (figure 1.3). Ainsi, en régime de diffusion forte, sa valeur décroît avec la taille du milieu jusqu'à atteindre une valeur seuil non-nulle. En revanche, en régime de localisation forte, sa valeur peut aller jusqu'à s'annuler pour une taille finie du milieu. Tout se passe alors comme si l'énergie était ralentie, voire arrêtée. Ces phénomènes ne peuvent s'expliquer qu'en prenant en compte la phase des ondes et les interférences qui en découlent, et montrent la limite du modèle diffusif lorsque le désordre du milieu est très fort.

Influence de la polarisation

En général, les ondes peuvent avoir plusieurs polarisations possibles, et des conversions entre ces dernières peuvent avoir lieu au cours de la propagation ; comme nous le verrons, cela est particulièrement vrai dans les milieux élastiques hétérogènes, dont font partie les milieux granulaires. Il est possible d'obtenir des équations (couplées) de diffusion prenant en compte des polarisations éventuelles ainsi que leurs conversions, comme l'a fait Chandrasekhar dans les années 1960 pour décrire la propagation des ondes électro-magnétiques dans l'atmosphère [Cha60]. De même, Weaver [Wea90] et Ryzhik [Ryz96] ont établi indépendamment les équations de transfert radiatif des ondes élastiques dans un solide hétérogène. Par la suite, ces résultats ont été appliqués en sismologie pour la diffusion des ondes P et S [Lac01, Mar05].

Cependant, il a été montré théoriquement que dans le cas des ondes élastiques, le champ diffusif était dominé par les ondes de cisaillement [Aki92], ce qui est bien observé expérimentalement [Aki80]. Un résultat important permet même d'être quantitatif et montre que, dans la limite des temps longs, le rapport des densités spatiales d'énergie des ondes P et S – respectivement E_P et E_S – tend vers une constante [Wea82, Pap96], et ce indépendamment des détails des processus de diffusion en place. En espace libre, on a en effet :

$$\frac{E_S(t, \mathbf{r})}{E_P(t, \mathbf{r})} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 2 \left(\frac{v_P}{v_S} \right)^3 = 2K^3 \quad (1.10)$$

où $K = \frac{v_P}{v_S}$ est le rapport des vitesses de compression et de cisaillement.

Or, on a typiquement $\frac{v_P}{v_S} \simeq \sqrt{3}$, ce qui mène à un rapport $E_S/E_P \simeq 10$. Des mesures de terrain ont été effectuées et sont en bon accord quantitatif avec ce résultat [Sha00, Hen01].

Ainsi, on peut se restreindre à l'utilisation d'une équation de diffusion scalaire pour modéliser la propagation du champ diffusif. Le coefficient de diffusion D correspond alors à une moyenne pondérée des coefficients de diffusion des ondes P et S [Mar05] :

$$D = \frac{1}{1 + 2K^3} (D_P + 2K^3 D_S). \quad (1.11)$$

où

$$\begin{cases} D_P = \frac{1}{3} v_P l_P^* & (1.12) \\ D_S = \frac{1}{3} v_S l_S^* & (1.13) \end{cases}$$

et l_P^* et l_S^* sont respectivement les libres parcours moyens des ondes de compression et de cisaillement.

Cela justifie l'utilisation d'une équation de diffusion *scalaire* pour modéliser la diffusion de l'énergie élastique.

1.1.4 Quelques exemples

Présentons maintenant brièvement quatre exemples de propagation diffusif des ondes pour convaincre le lecteur que la diffusion multiple des ondes est bien décrite par l'équation de la diffusion dans la plupart des cas.

Diffusion optique dans une poudre compressée

Le premier exemple que nous présentons est celui de la propagation d'une impulsion lumineuse dans une poudre d'oxyde de titane compressée (figure 1.4(a)), expérience réalisée par Störzer et al. en 2006 [Stö06]. Précisons néanmoins qu'une des premières expériences résolues en temps visant à tester l'approximation de la diffusion en optique a été réalisée par Li et al. en 1993 [Li93].

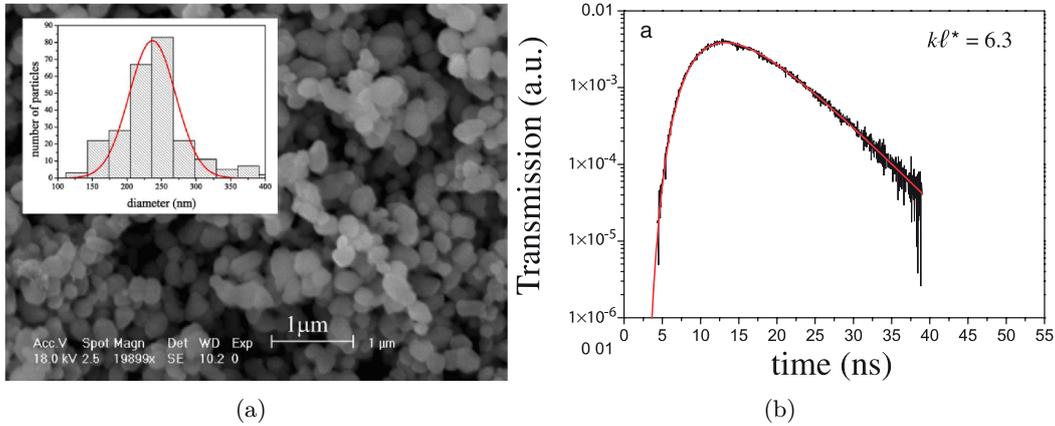


FIGURE 1.4 – Le transport des photons dans une poudre d'oxyde de titane (TiO₂) obéit à l'équation de la diffusion (a) Photographie en microscopie électronique d'un échantillon (histogramme des tailles des grains en encart). La taille typique des grains est de l'ordre de 250 nm, alors que la longueur d'onde utilisée est de 590 nm. On peut donc espérer être en régime de forte diffusion. (b) Profil temporel de l'intensité dans un échantillon de poudre de TiO₂. En pointillés est présentée la régression théorique basée sur l'équation de la diffusion, qui permet d'extraire le coefficient de diffusion $D = 22 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ et la longueur d'absorption $l_a = 2.6 \text{ m}$. Figures extraites de [Stö06].

La figure 1.4(b) montre l'évolution temporelle de l'intensité lumineuse². Cette dernière est très bien approximée par une solution de l'équation de la diffusion (courbe rouge). Cela est consistant avec le fait que les échantillons ont ici des dimensions latérales de $10^5 \times 10^5 \times 10^4$ en unités de l^* . Le coefficient de diffusion extrait vaut ici $D = 22 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ et la longueur d'absorption est $l_a = 2.6 \text{ m}$.³

Diffusion acoustique dans une assemblée de billes de verre immergées

Passons du domaine de l'optique à celui de l'acoustique et présentons maintenant l'expérience réalisée en 1995 par Page et al. [Pag95]. Celle-ci consiste à envoyer une brève impulsion ultrasonore dans une assemblée de billes de verres immergées dans l'eau (figure 1.5(a)). Les billes ont un diamètre de 0.5 mm et sont contenues dans une cellule elle-même remplie d'eau. La longueur d'onde incidente est de l'ordre de $\lambda \simeq 0.6 \text{ mm}$, ce qui laisse espérer un régime fortement diffusant. La propagation de l'onde se fait principalement dans l'eau, et les billes agissent comme des diffuseurs, exactement comme les gouttes de notre brouillard de la figure 1.1 diffusent la lumière⁴ de la tour. Un hydrophone placé de l'autre côté de l'échantillon permet alors de suivre l'amplitude acoustique transmise, et donc l'intensité.

En moyennant alors l'intensité transmise sur différentes configurations (en pratique l'échantillon est translaté), on obtient alors un profil temporel de l'intensité transmise moyenne. La figure 1.5(b) montre ces profils pour différentes épaisseurs d'échantillons sur lesquels sont superposées en traits pleins des régressions par la solution de l'équation de la diffusion avec des conditions aux limites temporelles et spatiales adéquates. Nous constatons alors un excellent accord. De plus, un argument additionnel sur la pertinence de cette modélisation est que les valeurs de coefficient de diffusion et de temps d'absorption sont indépendantes de l'épaisseur du milieu : $D = 0.43 \pm 0.02 \text{ mm}^2\mu\text{s}^{-1}$ et

2. Souvent appelée « distribution des temps de vol ».

3. La longueur d'absorption l_a est la transposition de notre temps caractéristique de dissipation de l'énergie τ_a . On a simplement $l_a = c\tau_a$ où c est la vitesse de l'onde, ici la vitesse de la lumière.

4. Qui se propage dans l'air.

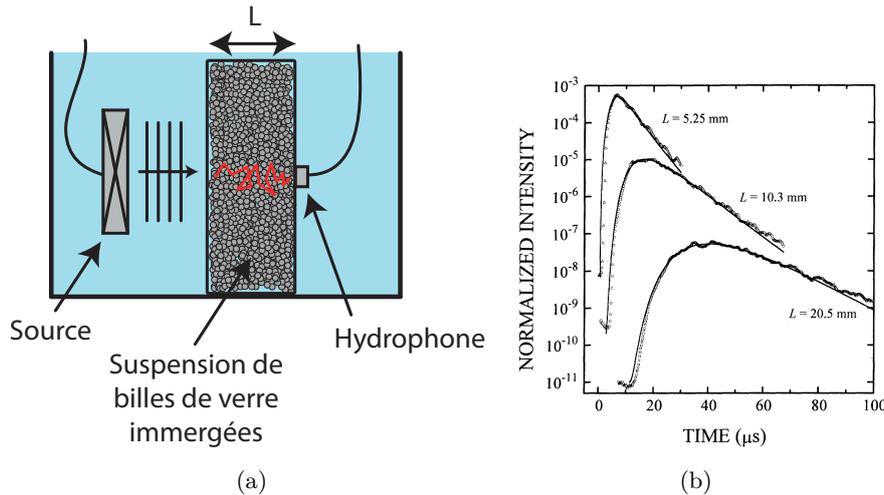


FIGURE 1.5 – Expérience de diffusion dans un échantillon de billes de verres immergées (a) Représentation schématique de l'expérience (adaptée de [Pag95]). Une onde acoustique est envoyée dans l'eau et rencontre l'assemblée de billes. L'intensité transmise est mesurée en sortie de l'échantillon. (b) L'évolution de l'intensité moyenne transmise au cours du temps est bien décrite par une solution de l'équation de la diffusion (courbes en traits pleins) avec un unique jeu de paramètres D et τ_a , et ce pour différentes épaisseurs d'échantillons : $D = 0.43 \pm 0.02 \text{ mm}^2 \mu\text{s}^{-1}$ et $\tau_a = 12 \pm 1 \mu\text{s}$. Figure extraite de [Pag95].

$\tau_a = 12 \pm 1 \mu\text{s}$. Enfin, une valeur de l^* peut être proposée, et les auteurs trouvent $l^* = 0.85 \pm 0.2 \text{ mm}$. Cela est consistant avec l'approximation de la diffusion faite, puisque l'épaisseur minimale étudiée est de 5.25 mm, soit un peu plus de $6l^*$: en sortant de l'échantillon, l'onde a totalement perdu la mémoire de sa direction initiale.

Diffusion acoustique dans un fritté

Faisons un pas de plus vers les milieux granulaires secs, en présentant l'expérience de Hu et al. [Hu08], réalisée en 2008. Dans cette dernière, le milieu est un « fritté » métallique : un empilement de billes soudées grâce à la fusion thermique (voir figure 1.6(a)). Les billes font environ 4 mm de diamètre et l'échantillon entier est un disque de 12 cm de diamètre, pour une épaisseur variant entre 8 et 23 mm. La différence fondamentale avec l'expérience précédente est que les ondes étudiées sont ici celles qui se propagent dans les *billes* et pas dans l'eau. Contrairement à l'expérience précédente, dans laquelle l'onde se propageait dans l'eau et rencontrait sur sa route des diffuseurs, il s'agit ici d'un milieu élastique hétérogène et c'est la topologie elle-même du milieu poreux qui est responsable de la diffusion multiple. C'est une différence majeure et l'équation de la diffusion permet encore une fois de modéliser la propagation de l'intensité des ondes élastiques dans ce milieu.

En effet, la figure 1.6(b) présente l'intensité moyenne transmise au travers de l'échantillon ainsi qu'une régression (courbe rouge) par une solution de l'équation de la diffusion. Comme nous le voyons, la régression est excellente. Cela est en accord avec le fait que la longueur d'onde utilisée est très proche de la taille des grains et que le libre parcours moyen vaut $l^* = 2.5 \text{ mm}$, alors que l'échantillon a une épaisseur de 14.5 mm. Le coefficient de diffusion extrait vaut $D = 33 \text{ m}^2 \text{s}^{-1}$.

Diffusion des ondes sismiques

Concluons notre tour d'horizon des applications du modèle diffusif en discutant brièvement ce qui constitue peut-être le meilleur exemple d'application : la sismologie. En effet, depuis que Aki et Chouet ont fait – au début des années 70 – l'hypothèse que les longs signaux sismiques qui suivent les ondes directes (la *coda*) pouvaient être interprétés comme de la diffusion multiple sur les hétérogénéités de la Terre [Aki69, Aki75], les équations du transfert radiatif et de la diffusion ont été traduites dans le domaine sismique (voir [Mar05] pour un exemple de dérivation complète de l'équation du transfert

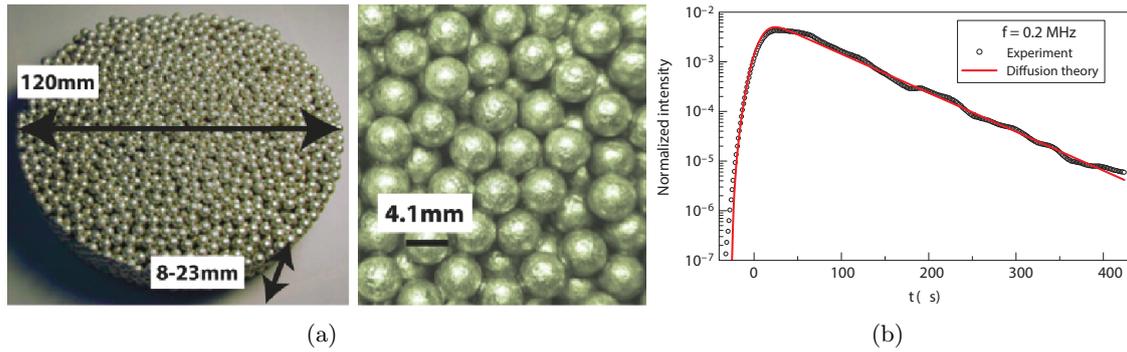


FIGURE 1.6 – Diffusion acoustique dans un empilement de billes métalliques frittées (a) Photographies de l'échantillon. L'échantillon se compose de billes métalliques de diamètre $d \approx 4$ mm soudées. (b) L'intensité moyenne transmise dans le réseau obéit bien à l'équation de la diffusion pour la fréquence ici considérée (0.2 MHz). Figures extraites de [Hu08].

radiatif dans ce cadre) et appliquées à de nombreux signaux réels [Sat82, Wu85, Mar99, Lac01, Tré02]. Nous présentons ici un exemple d'application originale qui montre que même sur la Lune, les signaux sismiques sont bien modélisés par l'équation de la diffusion, ce qui permet d'obtenir des informations autrement difficiles, voire impossibles, à obtenir.

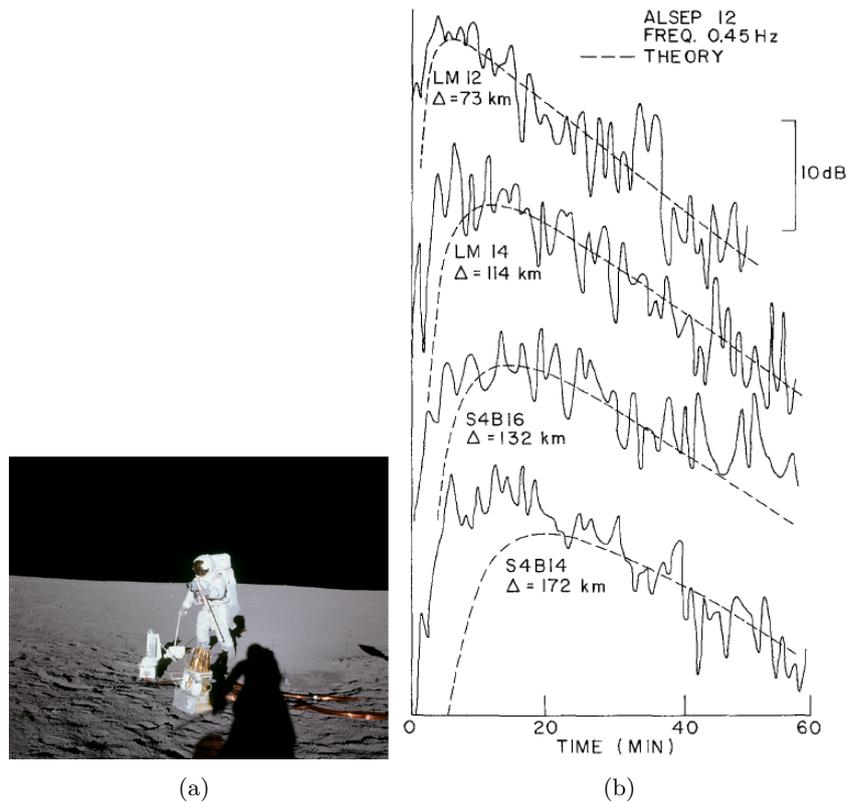


FIGURE 1.7 – Les codas sismiques typiques présentent aussi un caractère diffusif, aussi bien sur la Terre que sur la Lune. (a) L'astronaute Charles 'Pete' Conrad, troisième homme à marcher sur la Lune (Apollo 12), travaille sur l'expérience ALSEP. "Man, that may have been a small one for Neil, but that's a long one for me." (b) Les enveloppes des signaux sismiques lunaires (ici créés par des impacts de modules lunaires ou de boosters) sont très bien approximés par l'équation de la diffusion, et ce pour un unique jeu de paramètres de coefficient de dissipation et d'atténuation : $D_{\text{horiz}} = 8 \text{ km}^2\text{s}^{-1}$, $D_{\text{vert}} = 0.9 \text{ km}^2\text{s}^{-1}$ et $Q = 5000$. Figure extraite de [Dai74].

De Apollo 11 (juillet 1969) à Apollo 16 (avril 1972), les sismomètres ont toujours fait partie

des instruments déposés sur la Lune et ont souvent été utilisés avec succès, de façon active (avec un marteau ou une charge par exemple) ou passive (avec des impacts de météorites sur le sol, ou l’effet de marée, par exemple) [Lat71]. La figure 1.7 correspond aux résultats de la mission Apollo 12, durant laquelle Charles ‘Pete’ Conrad – troisième homme à marcher sur la Lune – posa un sismomètre (figure 1.7(a)), dans le cadre de l’ALSEP (“Apollo Lunar Surface Experiments Package”), un ensemble d’expériences scientifiques lunaires. La figure 1.7(b) – extraite de [Dai74] – présente les enveloppes d’énergie transmises (en échelle logarithmique) au sismomètre à la suite d’impacts des modules lunaires Apollo 12 et Apollo 14 (“LM 12” et “LM 14”) et des boosters Saturn (“S4B16” et “S4B14”) sur la surface lunaire, qui auraient été de toute manière perdus après le retour des astronautes. Sur ces signaux sont superposés les signaux théoriques issus d’un modèle diffusif (traits pointillés), et ce pour un unique jeu de paramètres. Comme nous le voyons, les signaux réels reçus (ici filtrés à 0.45 Hz) sont dans l’ensemble très bien approximés par les signaux issus du modèle diffusif. Cependant, nous constatons que pour certains événements (S4B14 par exemple), des écarts significatifs entre les deux courbes sont présents. Les auteurs expliquent alors que cela est probablement dû au fait que le milieu ne peut pas entièrement être considéré comme diffusif, mais que sous la croûte (considérée comme diffuse) se trouve un milieu plus homogène dans lequel les ondes peuvent se propager sans subir de diffusions. Ce modèle implique alors une certaine classification entre les événements selon leurs distances au sismomètre : les signaux enregistrés pour les événements proches correspondent principalement à des ondes qui se propagent dans la croûte diffuse (LM12, par exemple), et sont donc très bien approximés par l’équation de la diffusion ; les événements plus lointain correspondent à un mélange d’ondes diffusives et d’ondes directes, ce qui mène à des écarts avec le modèle diffusif (S2B14 par exemple).

Comme nous le voyons, l’application du modèle diffusif aux ondes sismiques de la *coda* semble fonctionner pour les signaux lunaires [Dai74, Dai77]. Cela permet alors d’obtenir de précieuses informations sur le sol lunaire, comme par exemple la taille typique des hétérogénéités du sous-sol, et ce en fonction de la profondeur.

Signalons aussi qu’une comparaison entre les *codas* terrestres et lunaires est possible [Dai81] et a permis, par comparaison des paramètres d’absorption (les facteurs de qualité Q sont en général beaucoup plus faibles sur Terre que sur la Lune), d’en déduire la très faible teneur en eau du sol lunaire relativement au sol terrestre.

1.1.5 Limite de l’équation de la diffusion

Nous le voyons, l’équation de la diffusion modélise dans la plupart des cas très bien la propagation de l’intensité moyenne des ondes dans le régime fortement diffusant, et ce pour des ondes de natures très variées (lumineuses, acoustiques, élastiques). Cependant, trois ingrédients fondamentaux manquent à cette description des ondes par l’équation de la diffusion. Le premier est la phase des ondes, le second est la causalité⁵ et le dernier est l’invariance par retournement du temps (dans le cas sans pertes). En effet, même en régime diffusif, la propagation des ondes obéit à l’équation de d’Alembert, qui est dérivée des premiers principes. Or, cette dernière garantit les trois ingrédients susmentionnés. La phase est bien sûr une caractéristique importante des ondes, responsable des phénomènes d’interférences. La causalité assure normalement qu’une onde se propage toujours à vitesse *finie*. L’invariance par retournement du temps est assurée par l’absence de dérivée d’ordre impair dans l’équation des ondes (dans le cas non-dissipatif). Ainsi, on peut s’attendre à ce que des écarts subsistent entre la diffusion *classique* et la diffusion *des ondes*. Cela est confirmé notamment par les phénomènes de localisation faible (rétrodiffusion cohérente) qui correspond une diffusion anormale de l’intensité vers l’arrière, et s’accompagne d’une réduction du coefficient de diffusion [Tsa84, Alb85, Wol85, Akk88, Bay93, Sak97, Tou97] ou de localisation d’Anderson, qui correspond quant à elle à un arrêt complet de l’étalement du halo diffusif (annulation du coefficient de diffusion) [And58, Wie97, Cha00, Hu08].

Nous verrons dans le chapitre 3 que de tels écarts à l’équation de la diffusion peuvent aussi apparaître dans les milieux granulaires.

5. Les solutions de l’équation de la diffusion étant non-causales, comme le montre par exemple la solution donnée par l’équation (1.5).

1.2 Le retournement temporel

Nous introduisons maintenant le principe du retournement temporel (RT), ainsi que les concepts nécessaires à sa mise en application pratique. Nous discutons ensuite les particularités du retournement temporel en régime de diffusion multiple – cas qui nous concernera – et concluons en présentant deux applications d'intérêt pour notre cas. Ces concepts seront appliqués aux milieux granulaires dans les trois chapitres de cette thèse, avec trois objectifs différents.

1.2.1 Fondements

L'équation des ondes acoustique

En régime linéaire Dans un milieu fluide non dissipatif de masse volumique $\rho(\mathbf{r})$ et de compressibilité $\kappa(\mathbf{r})$, l'évolution en régime linéaire du champ de pression $p(\mathbf{r}, t)$ en présence d'une distribution de sources $S(\mathbf{r}, t)$ est régie par l'équation des ondes [Mor92]

$$\left[\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{1}}{\rho(\mathbf{r})} \nabla \right) - \kappa(\mathbf{r}) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] p(\mathbf{r}, t) = S(\mathbf{r}, t). \quad (1.14)$$

Nous pouvons reformuler cette équation en termes d'opérateurs différentiels linéaires :

$$(L_r + L_t) p(\mathbf{r}, t) = S(\mathbf{r}, t) \quad (1.15)$$

où

$$\begin{cases} L_r = \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{1}}{\rho(\mathbf{r})} \nabla \right) \\ L_t = -\kappa(\mathbf{r}) \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \end{cases} \quad (1.16)$$

$$(1.17)$$

On remarque alors que d'une part l'opérateur L_t est auto-adjoint en temps – de par l'absence de dérivé d'ordre impair, signe que l'équation est réversible en temps ; et que d'autre part l'opérateur L_r est auto-adjoint en espace, signe que l'équation est spatialement réciproque (intervertir une source ponctuelle et un détecteur ne change pas la solution) [Bar89].

L'absence de dérivée temporelle d'ordre impair dans l'équation (1.14) montre qu'il est en théorie possible de créer pour tout champ $p(\mathbf{r}, t)$ solution son retourné temporel $p(\mathbf{r}, -t)$. Ce dernier correspond précisément au champ initial en chronologie inversée.

En régime non-linéaire De fait, dans un milieu non-dissipatif, même dans un régime non-linéaire dans lequel la distance de propagation est inférieure à la distance de choc, les équations de propagation sont elles-aussi réversibles en temps. En effet, on peut montrer qu'on a en première approximation [Ham97] :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + (c_0 + \beta v) \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \text{ pour les ondes se propageant vers les } x \text{ positifs} \\ -\frac{\partial v}{\partial t} + (c_0 - \beta v) \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \text{ pour les ondes se propageant vers les } x \text{ négatifs} \end{cases} \quad (1.18)$$

$$(1.19)$$

où v est la vitesse instantanée (variable) particulière, c_0 la vitesse dans le cas linéaire et β le paramètre de non-linéarité. On peut alors vérifier que si $v(x, t)$ est solution de l'équation (1.18), alors $-v(x, -t)$ est solution de l'équation (1.19). Il a été vérifié expérimentalement qu'on pouvait faire revivre à une onde se propageant en régime non-linéaire sa vie passée [Tan01]. La conversion du fondamental vers les harmoniques qui se produit lors de la phase aller – qui mène à une distorsion du signal – s'inverse alors dans la phase retour, et on retrouve *in fine* la forme non-distordue du signal.

Bien sûr, dès que la distance de choc est atteinte, l'énergie est dissipée, et l'équation n'est plus réversible [Tan01].

La cavité à retournement temporel

Concrètement, on peut montrer, grâce au théorème intégral de Helmholtz-Kirchhoff, que la ré-émission conjointe du champ de pression $p(\mathbf{r}, -t)$ et de sa dérivée normale $\frac{\partial p(\mathbf{r}, -t)}{\partial n}$ en tout point de la surface d'une cavité fermée (appelée « cavité à retournement temporel ») entourant la ou les sources oblige l'onde à revivre sa vie passée (figure 1.8). Cette idée d'une « cavité à retournement temporel » a été introduite au début des années 90 par Fink, Cassereau et Wu. Nous verrons qu'elle est liée à une idée provenant du traitement du signal, introduite dans les années 50.

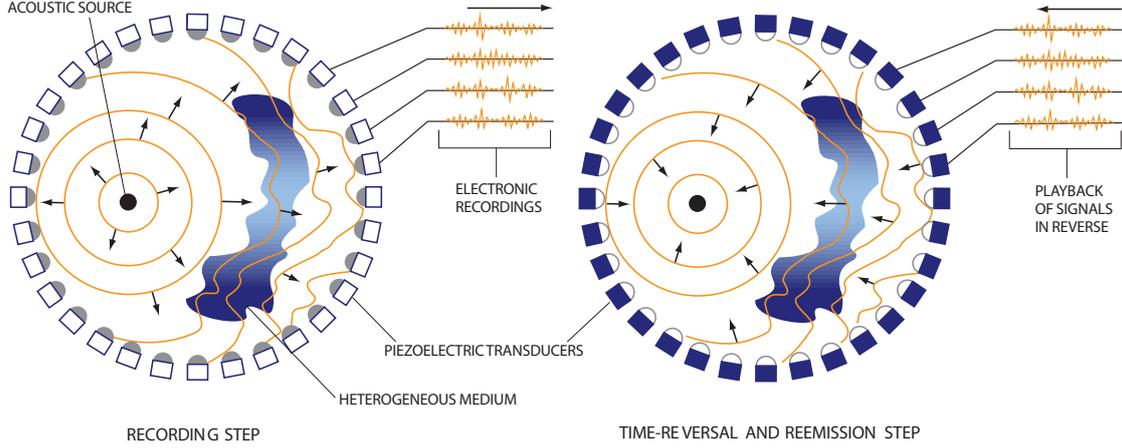


FIGURE 1.8 – Principe de la cavité à retournement temporel. Dans une première phase (à gauche), on fait émettre une brève impulsion à une source. L'onde se propage alors, en subissant éventuellement des diffusions. L'onde est enregistrée par un réseau de transducteurs tapissant une surface fermée entourant la source (cavité à retournement temporel). Dans la seconde phase (à droite), les signaux enregistrés sont retournés temporellement et émis grâce aux transducteurs de la cavité. L'onde revit alors sa vie passée et reconverge à la source. Figure extraite de [Fin99].

Plus précisément, si le champ initial $p(\mathbf{r}, t)$ créé par une source située en $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ émettant le signal source $\phi(t)$, est enregistré pendant une durée T , et que l'on fait émettre à la cavité le retourné temporel de la pression $p(\mathbf{r}, -t)$ et sa dérivée normale $\frac{\partial p(\mathbf{r}, -t)}{\partial n}$, on peut montrer [Cas92] que le champ créé résultant p_{tr} peut s'écrire

$$p_{\text{tr}}(\mathbf{r}, t) = \underbrace{\phi(T-t) \star G(\mathbf{r}, -t)}_{p_{\text{conv}}(\mathbf{r}, t)} - \underbrace{\phi(T-t) \star G(\mathbf{r}, t)}_{p_{\text{div}}(\mathbf{r}, t)} \quad (1.20)$$

où \star désigne la convolution temporelle, et G est la fonction de Green, i.e. la solution de l'équation

$$\left[\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho(\mathbf{r})} \nabla \right) - \kappa(\mathbf{r}) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] G(\mathbf{r}, t) = \delta(\mathbf{r}) \delta(t). \quad (1.21)$$

Le champ p_{tr} reconstruit (donné par l'équation (1.20)) se compose alors de deux parties : une première partie $p_{\text{conv}}(\mathbf{r}, t) = \phi(T-t) \star G(\mathbf{r}, -t)$ qui correspond à la propagation de l'onde initiale $p(\mathbf{r}, t)$ en chronologie inversée, et qui converge donc sur la source et lui fait revivre sa vie initiale en chronologie inversée ; et une seconde partie $p_{\text{div}}(\mathbf{r}, t) = \phi(T-t) \star G(\mathbf{r}, t)$ qui correspond exactement au champ initialement émis (avec la bonne chronologie) – et donc diverge depuis la source – mais avec une inversion de signe. L'interférence de ces deux ondes au voisinage de la source produit une tache dont la taille est de $\lambda/2$ dans le cas d'un milieu localement homogène autour de la source [Cas92].

Champ reconstruit à la source

Nous nous intéressons maintenant au champ reconstruit à la source ($\mathbf{r} = \mathbf{0}$).

D'après l'équation (1.20), on a

$$p_{\text{tr}}(\mathbf{0}, t) = \phi(T-t) \star G(\mathbf{0}, -t) - \phi(T-t) \star G(\mathbf{0}, t). \quad (1.22)$$

Si le milieu est localement homogène au voisinage de la source et tridimensionnel, on a

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}|} \delta\left(t - \frac{|\mathbf{r}|}{c}\right) \quad (1.23)$$

et l'équation (1.22) donne alors

$$p_{\text{tr}}(\mathbf{0}, t) = -\frac{1}{2\pi c} \phi'(T - t). \quad (1.24)$$

Ainsi, le champ reconstruit à la source est simplement la dérivée du signal source ϕ . Il est à noter que le champ reconstruit à la source n'est *pas* le signal ϕ initialement émis par la source. Cela est dû à l'interférence des ondes convergente et divergente, p_{conv} et p_{div} . Pour recréer parfaitement le champ de la source ϕ , il faudrait en effet placer un « puits acoustique » à la place de la source dans la phase retour, de façon à annuler l'onde p_{div} . L'utilisation d'un tel puits permet de reproduire les conditions aux limites exactement identiques de celles de la phase aller, et il a alors été montré que la limite de diffraction était dans ce cas battue [dR02].

Le retournement temporel vu comme un filtre adapté

Le retournement temporel présente un lien étroit avec la notion de *filtre adapté*, introduite dans les années 50 [Eri52, Eli53, Bla58, Par61, Par65].

Considérons un milieu quelconque, éventuellement dissipatif, mais stationnaire et la propagation linéaire d'un signal quelconque ϕ émis par une source ponctuelle et enregistré en un *unique* autre point du milieu (contrairement au cas précédent où le champ était enregistré sur tout le pourtour de la cavité). Nous pouvons modéliser cette propagation par l'action d'un filtre linéaire et invariant par translation dans le temps (FLIT) [Dor95, Tan00]. Notons la réponse impulsionnelle de ce filtre h . Il est alors connu que la réponse du filtre à l'entrée ϕ est

$$s = h \star \phi \quad (1.25)$$

c'est-à-dire le produit de convolution de la réponse impulsionnelle h par le signal d'entrée ϕ .

Nous allons maintenant ré-injecter dans ce filtre le retourné temporel du signal s . Introduisons pour cela l'opérateur de retournement temporel

$$\bullet_- : \Psi \mapsto \Psi_- \text{ tel que } \Psi_-(t) = \Psi(-t). \quad (1.26)$$

On peut écrire que la réponse RT_ϕ du filtre à l'injection du signal s_- est égale à

$$\text{RT}_\phi = h \star s_- = h \star (h \star \phi)_- \quad (1.27)$$

Mais on montre sans difficulté que $(h \star \phi)_- = h_- \star \phi_-$ et donc le signal issu de l'opération de retournement temporel est

$$\text{RT}_\phi = h \star h_- \star \phi_-. \quad (1.28)$$

Nous pouvons réécrire ce résultat grâce à l'autocorrélation de la réponse impulsionnelle h , que nous noterons $R_{hh} = h \star h_-$:

$$\text{RT}_\phi = R_{hh} \star \phi_-. \quad (1.29)$$

Mais en remarquant que R_{hh} n'est autre que le résultat d'une opération de RT dans le cas d'un signal source impulsionnel ($\phi = \phi_- = \delta$), nous pouvons encore écrire

$$\text{RT}_\phi = \text{RT}_\delta \star \phi_-. \quad (1.30)$$

Nous constatons alors que le signal issu d'une opération de retournement temporel en mode mono-voie (une entrée et une sortie), dans le cas d'une propagation linéaire, dans un milieu stationnaire éventuellement dissipatif, peut s'exprimer de deux façons simples : en tant que la corrélation croisée

entre l'autocorrélation R_{hh} de la réponse impulsionnelle et le signal source ϕ – équation (1.29), ou encore, entre la réponse à l'opération de RT dans le cas impulsionnel RT_δ et le signal source lui-même ϕ – équation (1.30). Notons au passage que cela implique que le maximum du signal n'est pas forcément en $t = 0$ mais dépend de la forme du signal source ϕ .

Dans le cas où $\phi = \delta$, on obtient $RT_\phi = RT_\delta = R_{hh} = h \star h_-$. Le résultat de l'opération de RT dans le cas impulsionnel RT_δ est alors égal à l'autocorrélation $h \star h_-$ de la réponse impulsionnelle. Ce signal est toujours pair et maximal en $t = 0$. On dit alors que le signal est bien *recompressé* et que le filtre est *adapté*, dans le sens où il maximise l'énergie au temps $t = 0$. Lorsque le signal source n'est pas du type Dirac, le signal de recompression correspond, comme nous venons de l'expliquer, à la corrélation croisée entre le pic de recompression dans le cas impulsionnel et le signal d'excitation. Cela mène alors à un signal de recompression qui n'est pas forcément maximal en $t = 0$.

Il est remarquable de constater que ce traitement est valable aussi dans le cas où le milieu est dissipatif, puisqu'il ne repose que sur la linéarité de la propagation, la réciprocité spatiale, et la stationnarité. En effet, si le milieu est dissipatif, l'onde subit la dissipation aussi bien en phase aller qu'en phase retour, et cela ne brise en rien la réciprocité ni les autres ingrédients nécessaires.

Bien sûr, il y a cependant un prix à payer : si le signal de recompression reste maximal à $t = 0$ (dans le cas d'une source impulsionnelle), le rapport entre l'amplitude du pic de recompression et le reste du signal (lobes) est diminué en présence de dissipation. Physiquement, cela correspond à une diminution de la probabilité de retour de l'onde à la source.

Enfin, on peut montrer que le retournement temporel fournit un estimateur de la corrélation spatiale du champ transmis [Der01]. La taille de la tache focale est alors donnée par la longueur de corrélation spatiale du champ.

1.2.2 Réalisation pratique : le miroir à retournement temporel

En pratique, même s'il a été montré qu'il n'était pas nécessaire d'enregistrer à la fois la pression *et* le déplacement normal à la surface de la cavité [Cas93], le concept de cavité à retournement temporel est difficile à implémenter car il requiert notamment d'entourer toute la zone d'intérêt par une surface fermée. De plus, même si dans le cas des ondes il est suffisant d'enregistrer le champ avec une résolution spatiale de $\lambda/2$ (où λ est la plus petite longueur d'onde du champ), cela représente tout de même en général un nombre très important de capteurs.

C'est pourquoi le concept de *miroir à retournement temporel* (MRT) a été introduit. L'idée consiste alors à utiliser un réseau de transducteurs (« éléments ») disposés sur une surface spatialement limitée. Pour chaque élément i du miroir à retournement temporel, le formalisme des filtres linéaires décrit précédemment s'applique, et la ré-émission par l'élément i du signal enregistré en phase aller (retourné temporellement) donne un champ recréé $RT_{\delta,i}$ à la source :

$$RT_{\delta,i} = R_{h_i h_i} \star \delta_- = h_i \star h_{i-} \quad (1.31)$$

où h_i est la réponse impulsionnelle enregistrée à l'élément i (incluant la réponse électro-acoustique des transducteurs). Comme nous l'avons expliqué, ce champ est toujours maximal en $t = 0$ puisqu'il correspond à une autocorrélation. Par linéarité, la ré-émission par tous les éléments du miroir à retournement temporel donne un champ recréé à la source

$$RT_\delta = \sum_i RT_{\delta,i} = \sum_i h_i \star h_{i-} \quad (1.32)$$

qui est donc lui aussi maximal à $t = 0$.

Bien sûr, en utilisant un tel dispositif – limité à une surface n'entourant *pas* la source, il est clair qu'une partie de l'information de l'onde initiale est perdue. Comme expliqué précédemment, cette perte d'information mène à une diminution du rapport entre l'amplitude du pic de recompression (à l'instant focal $t = 0$) et les lobes du signal en dehors de l'instant focal ainsi qu'à une dégradation de la tache focale. Augmenter le nombre d'éléments dans le miroir à retournement temporel (tout en veillant à toujours les espacer de plus de $\lambda/2$) permet alors d'augmenter ce rapport, qui quantifie la probabilité de retour de l'onde à la source.

1.2.3 Le retournement temporel en régime de diffusion multiple

Nous voulons maintenant montrer deux effets spectaculaires liés à l'utilisation du retournement temporel en régime de diffusion multiple, et discuter un aspect fondamental concernant la sensibilité du retournement temporel à des perturbations.

Compression temporelle

Comme nous l'avons vu, le signal retrouvé à la source à l'issue d'une opération de retournement temporel correspond à l'autocorrélation $h \star h_*$ de la réponse impulsionnelle h (si la source émet un signal d'excitation infiniment bref). Or, dans le cas d'un milieu multiplement diffusant, cette réponse impulsionnelle s'étale en général sur une durée très grande devant la durée d'émission, de par une distribution très étalée des longueurs des chemins parcourus par l'onde. L'autocorrélation conduit alors à un très fort signal au temps $t = 0$, et donc à une très grande amplitude à la source à l'issue du retournement temporel. Physiquement, cette très grande amplitude correspond à l'interférence constructive à la source de tous les chemins repris par l'onde en chronologie inverse.

Nous présentons brièvement l'expérience historique qui a prouvé que même dans le régime de diffusion multiple, le retournement temporel fonctionnait, i.e. qu'une brève impulsion émise par une source ponctuelle était capable de retourner à sa source, même après de nombreux événements de diffusion dans le milieu.

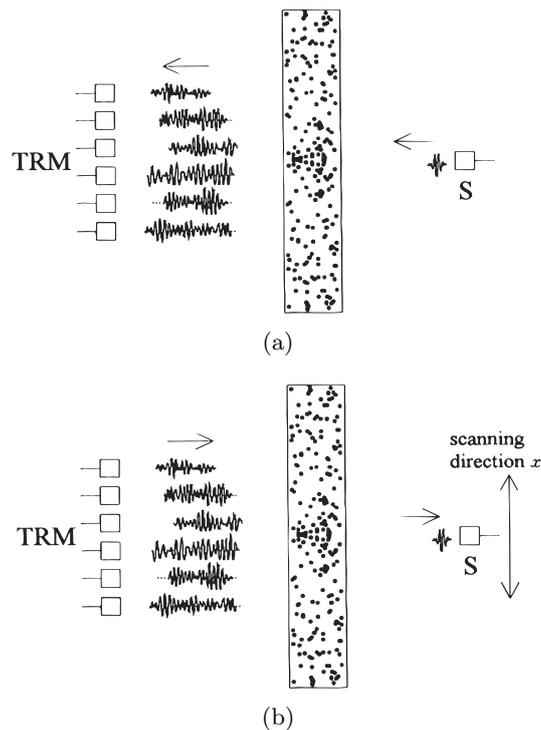


FIGURE 1.9 – Retournement temporel d'une onde acoustique multiplement diffusée par une assemblée de tiges cylindriques immergées dans l'eau. (a) Une brève impulsion est émise grâce à un transducteur (S , à droite). L'onde créée est alors multiplement diffusée par les tiges et enregistrée par un réseau de transducteurs (miroir à retournement temporel, « TRM » sur la figure) situé de l'autre côté du milieu (voir figure 1.10(a) pour un exemple de signal transmis). (b) Les signaux sont alors retournés temporellement et tronqués temporellement, puis émis par chacun des éléments du miroir à retournement temporel. Le transducteur source S enregistre alors le signal reçu, et peut être translaté pour étudier la variation spatiale du champ recréé. Figure extraite de [Der95].

Le dispositif expérimental (figure 1.9) se compose d'une assemblée de tiges cylindriques métalliques, immergées dans l'eau. Le libre parcours moyen est $l_e \simeq 9$ mm, et le milieu a une épaisseur de $L = 45$ mm, ce qui assure d'être en régime de diffusion multiple. Un transducteur ultrasonore S placé d'un

côté de l'échantillon et un réseau de 96 transducteurs (miroir à retournement temporel, « TRM » sur la 1.9(a)), permettent d'envoyer de recevoir des signaux.

Dans un premier temps (phase aller, figure 1.9(a)), une brève impulsion (durée d'environ $1 \mu\text{s}$) est alors émise par le transducteur S et on enregistre le champ transmis sur le miroir à retournement temporel. On obtient alors un signal beaucoup plus long que le signal source (la figure 1.10(a) montre le signal reçu par un élément du miroir), ce qui confirme le régime de diffusion multiple.

Dans un second temps (phase retour, figure 1.9(b)), les signaux enregistrés sont tronqués, retournés temporellement puis ré-émis grâce au miroir à retournement temporel et le champ créé est alors enregistré à la source S . Le transducteur S peut alors être translaté le long de l'axe parallèle à l'échantillon de façon à observer la focalisation spatiale de l'onde.

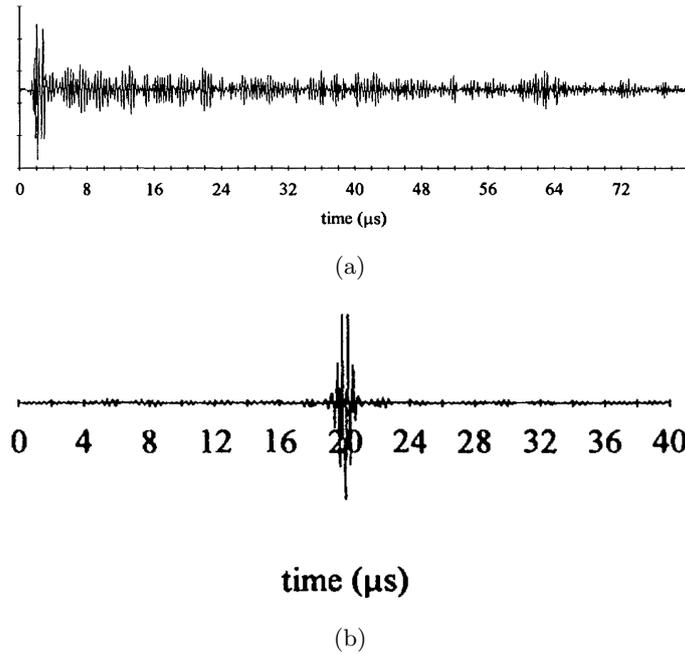


FIGURE 1.10 – Recompression temporelle d'un signal multiples diffusé par une assemblée de tiges métalliques. (a) Le signal traversant l'assemblée des tiges (figure 1.9) est beaucoup plus long que le signal source ($1 \mu\text{s}$), signe que l'onde incidente est multiples diffusée. (b) Le signal reçu à la source S après l'opération de retournement temporel présente un pic de très grande amplitude et de durée très brève (environ $1 \mu\text{s}$) : c'est la recompression temporelle. Figure extraite de [Der95].

La figure 1.10(b) montre le signal temporel enregistré alors à la source S (axe temporel arbitraire). Nous constatons que ce signal présente un pic d'amplitude importante et de durée très brève (de l'ordre de la micro-seconde), signe que tous les signaux émis par les éléments du miroir à retournement temporel arrivent en phase à la source à cet instant. Ce signal correspond en fait à la somme des autocorrélations introduite précédemment (équation (1.32)) et forme le pic de recompression temporelle.

Il est remarquable de constater que même dans un régime fortement diffusant, l'onde est capable de revivre sa vie passée et de reprendre en sens inverse tous les chemins suivis dans la phase aller. Bien que théoriquement possible, une telle réversibilité est en pratique impossible à obtenir dans le cas de particules, comme nous l'expliquerons par la suite.

Hyperfocalisation

En translatant le transducteur source S durant la phase retour, le profil du champ recréé peut être obtenu (figure 1.11, trait épais). Nous constatons alors que le champ est focalisé sur la source S , et ce de façon beaucoup plus fine que les lois de la diffraction en milieu homogène ne l'autorisent (trait fin).

En effet, la présence du milieu multiples diffusant permet au miroir à retournement temporel de capter plus de vecteurs d'ondes de la source que ce qu'il capterait en l'absence du milieu (comparer

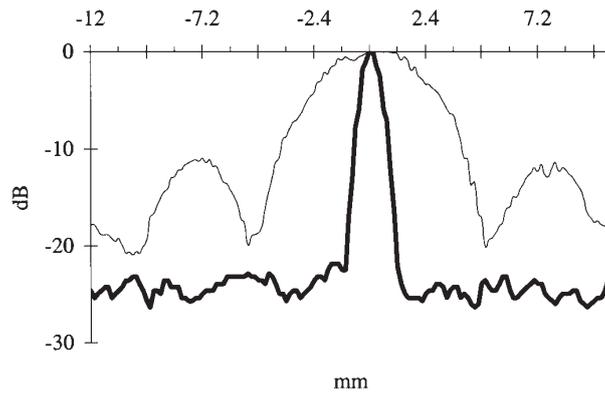


FIGURE 1.11 – Hyperfocalisation induite par l'utilisation du retournement temporel en milieu multiple-ment diffusant (trait épais). Le retournement temporel dans l'eau mène à une tache focale plus grande (trait fin), conforme à la théorie de la diffraction. La diffusion multiple permet d'enrichir le spectre angulaire perçu par le miroir à retournement temporel, et donc de focaliser sur une zone beaucoup plus petite que ce qui est permis par la diffraction (voir figure 1.12). Figure extraite de [Der95].

les ouvertures en vert et en orange sur la figure 1.12). Tout se passe alors comme si l'onde qui revient à la source avait été émise par une source beaucoup plus grande qu'elle ne l'est vraiment. La taille de la tache focale n'est alors plus donnée par la limite de la diffraction mais par la taille du milieu diffusant [Tou99b].

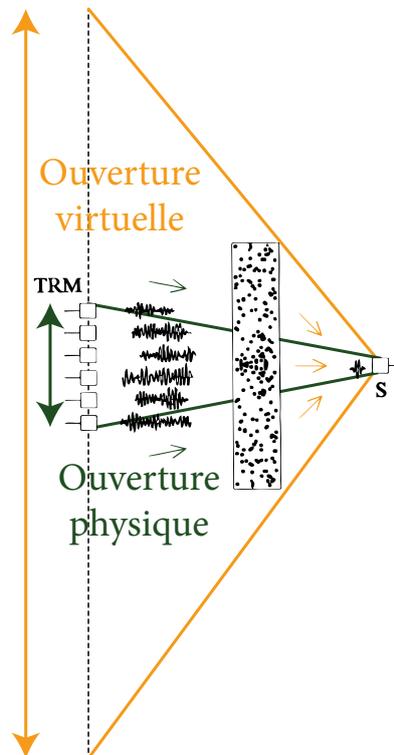


FIGURE 1.12 – La diffusion multiple permet d'enrichir le spectre angulaire perçu par le miroir à retournement temporel, et tout se passe alors comme si on utilisait une source d'ouverture bien plus grande (en orange) que l'ouverture réelle du miroir à retournement temporel (en vert). Cela mène alors à une tache focale dont la taille dépend de la taille du milieu diffusant, et plus petite que la limite de diffraction en milieu homogène. Figure adaptée de [Der95].

Sensibilité aux perturbations

Le dernier point que nous aimerions discuter concernant le retournement temporel en régime de diffusion multiple est la sensibilité aux perturbations.

En effet, nous venons de voir qu'il était possible de faire revivre aux ondes leurs vies passées, et ce même lorsque ces dernières subissent un grand nombre de diffusions. Il a été montré que même en présence de perturbations dans le milieu entre la phase aller et la phase retour, l'onde était toujours capable de revenir à sa source [Tou99a, Tou01]. Cela est en opposition radicale avec l'irréversibilité du mouvement de particules. En effet, il est connu que malgré le caractère réversible de la seconde loi de Newton, il est en pratique impossible de faire revivre à une particule sa vie passée, à cause de l'extrême sensibilité aux conditions initiales [Bal96, Sni98].

En revanche, une onde est beaucoup moins sensible qu'une particule aux perturbations du milieu. Deux arguments physiques vont dans ce sens. Le premier est que contrairement à une particule, qui n'emprunte qu'*un seul* chemin pour aller d'un point du milieu à un autre, une onde emprunte en général *une multitude* de chemins (d'autant plus en régime multiplement diffusant). Ainsi, lorsqu'une perturbation est introduite dans le milieu, l'influence de cette dernière est beaucoup plus grande sur une particule que sur une onde. Le second argument est que contrairement au cas particulaire, l'opérateur d'évolution d'une onde est *linéaire*. Ainsi, une petite erreur faite lors de la propagation (à cause d'une perturbation dans le milieu ou d'une erreur sur les conditions initiales du champ retourné) se propage de façon linéaire sans s'amplifier. On peut en fait montrer quantitativement qu'une particule est sensible de façon exponentielle aux perturbations, alors qu'une onde est sensible de façon algébrique [Sni98].

1.2.4 Deux exemples

Nous le voyons, le retournement temporel est une méthode robuste pour faire revivre à une onde sa vie passée, ou – autrement dit – focaliser de l'énergie en temps et en espace. De plus, même si nous sommes partis de l'équation des ondes non-dissipative dans un *fluide*, la méthode est en fait très générale et s'applique à tout type d'onde, même avec de la dissipation : acoustiques bien sûr, mais aussi élastiques (dans les solides), ou électromagnétiques.

Nous présentons maintenant deux autres exemples d'étude du retournement temporel, en nous concentrant sur des applications dans les solides, puisque c'est le cadre de cette thèse. D'autres exemples d'applications, notamment en télécommunication ou en imagerie et thérapie médicales sont disponibles dans [Fin99].

Dans une cavité chaotique

Nous présentons un premier exemple de retournement temporel d'ondes élastiques dans une cavité chaotique [Dra97b]. Le dispositif expérimental (figure 1.13) se compose d'une plaque (2D) de silice de forme chaotique (stade coupé), très faiblement dissipative. Deux transducteurs quasi-ponctuels sont en contact avec la plaque respectivement aux points A et B et peuvent émettre et enregistrer des ondes élastiques.

Dans une première phase, le transducteur situé en A émet une brève impulsion (de durée $1\ \mu\text{s}$), excitant plusieurs modes dans la cavité. Le transducteur en B enregistre alors un signal très long (voir figure) – de plusieurs dizaines de millisecondes – qui correspond aux multiples « rebonds » de l'onde sur les bords de la cavité (réverbération).

Dans une seconde phase, une tranche du signal enregistré en B est sélectionnée, retournée temporellement puis émise par le transducteur en B . Le transducteur en A enregistre alors le signal reçu. De plus, un interféromètre optique permet d'obtenir une image de l'onde recréée (uniquement le mode A_0), en particulier en *dehors* du point A . Au bout d'un certain temps, on observe alors une très forte amplitude en A , signe de la refocalisation spatiale et de la recompression temporelle : l'onde est bien revenue à sa source.

Cette expérience est remarquable pour plusieurs raisons. Tout d'abord, elle prouve que le retournement temporel fonctionne avec les ondes élastiques, et ce même en se limitant à l'enregistrement ou la ré-émission partielle du signal (voir [Dra97a, Ulr09] pour plus de détails). Ensuite, elle démontre

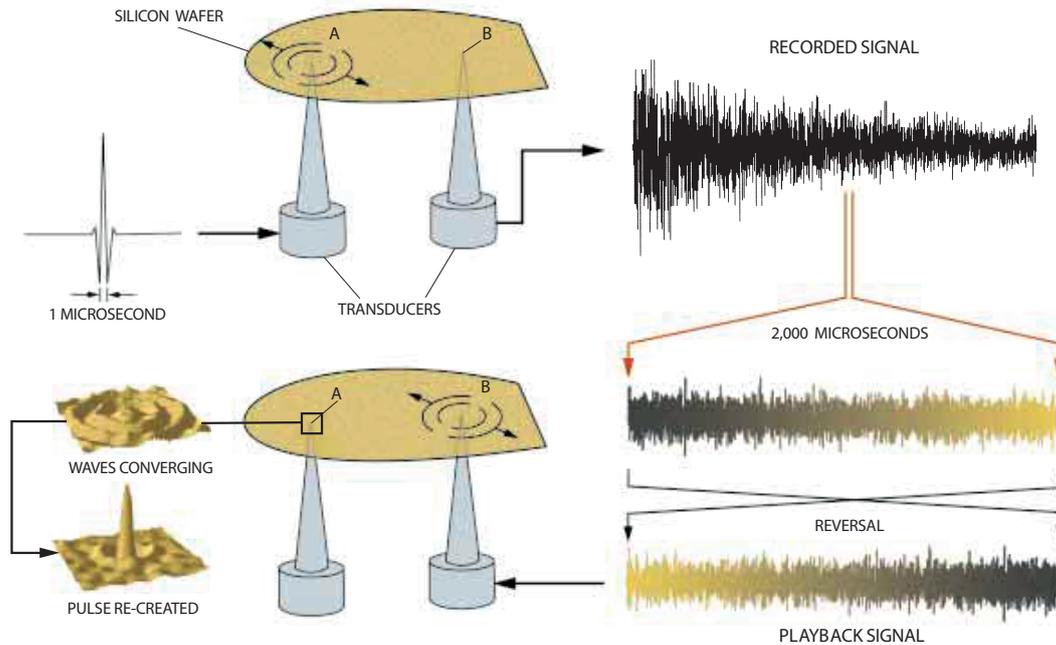


FIGURE 1.13 – Retournement temporel d’ondes élastiques dans une cavité chaotique grâce à un miroir à retournement temporel mono-élément. On émet dans une cavité chaotique (stade tronqué) une onde élastique grâce à une source quasi-ponctuelle (en A , en haut à gauche) et on enregistre le signal reçu en B (en haut à droite). Le caractère chaotique et la faible dissipation de la cavité induisent un signal beaucoup plus long que le signal source. Le signal est alors tronqué, retourné temporellement (en bas à droite) et émis par le transducteur B , et le champ induit est enregistré en tout point de la cavité grâce à un interféromètre. On constate alors une refocalisation spatiale et une recompression temporelle (en bas à gauche). Figure extraite de [Fin99].

que dans certains cas, un unique élément suffit à renvoyer une onde à sa source. La clef réside ici dans le fait que la cavité est ergodique et très peu dissipative. Cela permet d’acquérir (quasiment) toute l’information sur la vie de l’onde grâce à une unique sonde (en B). Enfin, il a été montré que l’amplitude du pic de recompression croissait de façon linéaire avec la taille de la fenêtre renvoyée (ce qui est consistant avec la vision autocorrélation présentée précédemment – équation (1.28)). Cela est d’autant plus intéressant que c’est une façon d’obtenir des amplitudes très fortes en A alors même que la puissance instantanée qu’il est possible d’émettre par les transducteurs est limitée.

En sismologie

Nous voulons maintenant montrer une application du retournement temporel à la sismologie. Cela représente en effet une application concrète intéressante à plusieurs égards : tout d’abord, les sismologues disposent de réseaux de capteurs (sismomètres) très fournis tout autour du globe, et ce pour les différentes polarisations des ondes (élastiques) ; ensuite, même si les méthodes classiques de localisation des séismes (basées sur les ondes balistiques) fonctionnent en général très bien, les mécanismes de rupture ne sont pas bien résolus (un séisme n’est pas une excitation localisée en temps et en espace !) ; de plus, certains événements sismiques ne présentent pas d’ondes balistiques franches, ce qui rend difficile les estimations des temps d’arrivée (« tremor », « slow-silent slip », « glacial earthquakes », et « hum » notamment), et donc les localisations par triangulation [Lok09, Lar09, Lar10] ; enfin, la Terre pouvant être vue comme une cavité fermée, on peut s’attendre à ce que le champ soit bien reconstruit par retournement temporel, même si l’épicentre n’est pas totalement entouré de sismomètres.

Bien sûr, une difficulté du retournement temporel appliqué à la Terre est que dans ce cas il est impossible de renvoyer *physiquement* les ondes enregistrées dans la phase aller (i.e. durant le séisme), contrairement à la majorité des autres expériences de retournement temporel. Cependant, les sismologues disposent de modèles très précis des hétérogénéités de l’intérieur de la Terre, au moins aux

grandes longueurs d'ondes. Il est alors possible d'effectuer *numériquement* la phase retour dans ces modèles, de façon à observer la propagation en chronologie inversée.

La figure 1.14 montre trois images d'un film de la rétro-propagation du champ vertical enregistré suite au grande séisme de Sumatra (26 décembre 2004). Nous observons alors la reconstruction d'une onde convergente qui focalise en une zone, puis rediverge. La position de la tache focale et l'instant de la recompression temporelle coïncident en fait parfaitement avec la position de l'épicentre et la date du séisme trouvées par les méthodes plus classiques. De plus, en analysant finement le champ recréé à l'épicentre au voisinage de l'instant de recompression, on peut alors accéder à la dynamique de la rupture de la faille.

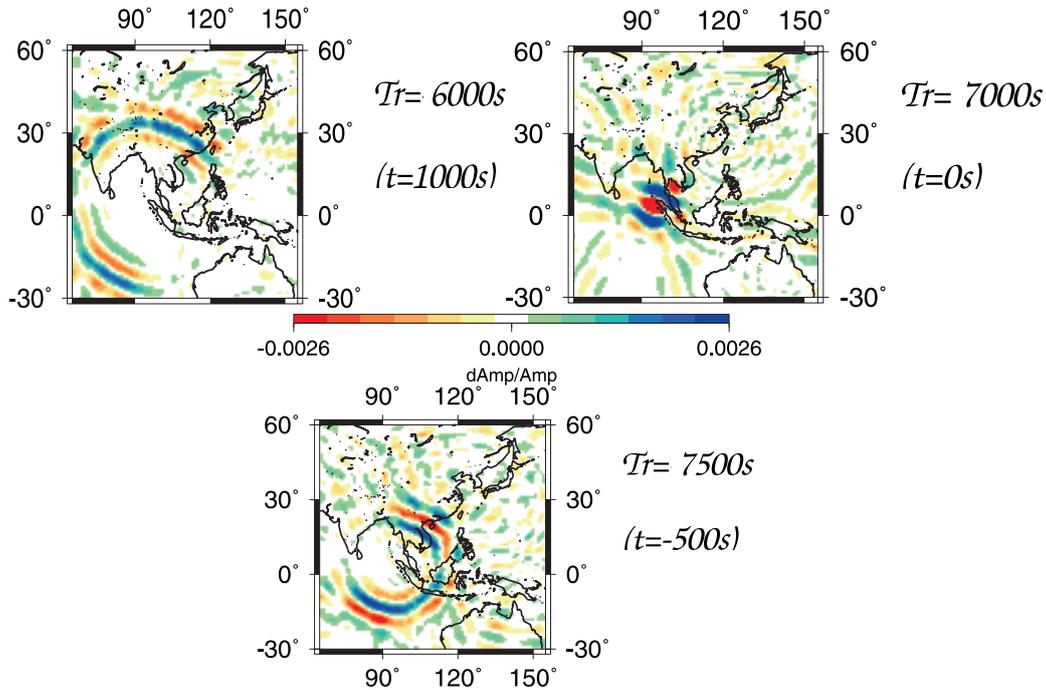


FIGURE 1.14 – Application du retournement temporel à la localisation d'un séisme. La ré-émission de signaux sismiques réels (retournés temporellement) dans un modèle numérique de Terre permet de suivre la chronologie inverse d'une onde sismique et donc de localiser et caractériser sa source. On voit ici l'onde reconverger progressivement (en haut à gauche), revenir à sa source (en haut à droite) et diverger (en bas). Figure extraite de [Lar06].

Cet exemple montre notamment que même dans l'impossibilité d'effectuer physiquement la phase de retour de l'onde, si l'on dispose d'un modèle du milieu, on peut réaliser cette phase numériquement et espérer voir l'onde retourner à sa source. Cela trouve notamment de nombreuses applications concrètes dans le domaine du contrôle non-destructif et de l'imagerie.

1.3 Généralités sur les milieux granulaires

Nous introduisons finalement le milieu qui sera la « matière première » de cette thèse, en présentant les concepts clefs qui nous seront utiles tout au long du manuscrit.

1.3.1 Élasticité

Les grains composant un milieu granulaire sont *élastiques*, dans le sens où ils répondent à une contrainte externe (force) en se *déformant* (figure 1.15). Bien sûr, pour certains phénomènes étudiés, comme les écoulements rapides [Jae96, Raj00, Mid04], on peut négliger l'élasticité des grains, et supposer que ces derniers sont infiniment rigides (en intégrant éventuellement un coefficient de restitution). Cependant, puisque nous sommes dans cette thèse intéressés par la propagation d'ondes, i.e. de *déformations élastiques*, nous ne pouvons bien sûr pas nous placer dans l'hypothèse de grains rigides.

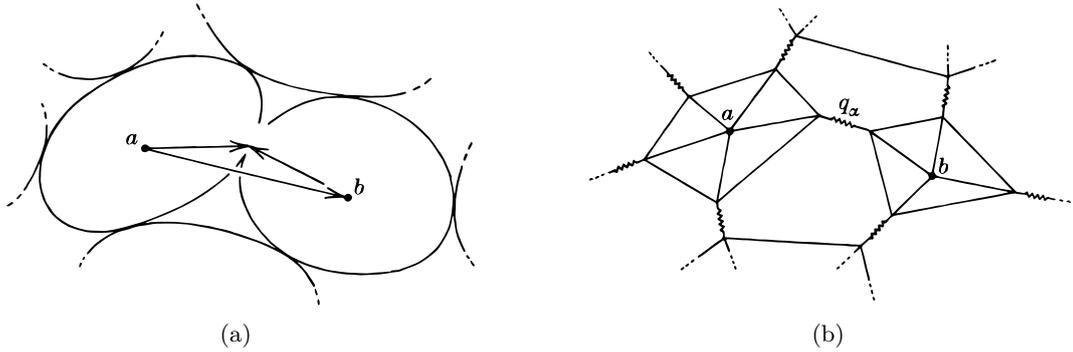


FIGURE 1.15 – (a) Des grains élastiques se déforment sous l’action d’une contrainte. (b) Si la déformation n’est pas trop grande, on peut alors modéliser le contact entre deux grains par un système masses-ressorts. Figure adaptée de [God90].

De nombreux modèles existent alors pour rendre compte de la relation entre la contrainte et la déformation entre deux corps en contact [Lan59, Joh85]. Le plus simple d’entre eux est le modèle du contact de Hertz [Her82], qui permet de relier la force *normale* s’appliquant entre deux surfaces (sans friction) à leurs déformations⁶. La prise en compte de la friction (force tangentielle) mène au modèle de Hertz-Mindlin [Duf57]. D’autres lois peuvent permettre de prendre en compte les aspérités des grains, l’ajout d’un éventuel fluide, la dissipation visco-élastique (dissipation interne dans les grains), les déformations plastiques (fissures, par exemple), la présence de charges électriques à la surface des grains, etc.

Des contraintes au niveau des grains, on peut en général définir un tenseur des contraintes, défini à une échelle mésoscopique (quelques dizaines de grains) à l’aide d’un processus d’homogénéisation, qui permet alors de décrire le milieu comme un milieu « effectif » continu [Duf57, Dig81, God90, Gol02a, Gol02b, Mak04, Wya05, And11]. Cette description pratique permet alors d’utiliser les outils classiques de la mécanique des milieux continus, et notamment de définir des paramètres macroscopiques effectifs [Duf57, Wal87], en particulier des modules élastiques.

Bien sûr, il est aisé de comprendre qu’une description d’un milieu granulaire par un milieu élastique continu ne capture pas toute la physique des empilements granulaires. Il est par exemple connu qu’à basses contraintes, là où le modèle de Hertz prédit une évolution du module élastique en $P^{1/3}$ – où P est la pression de confinement, on obtient expérimentalement une variation en $P^{1/2}$. Plusieurs études montrent alors la nécessité de prendre en compte la variation du nombre de contacts en fonction de la contrainte, notamment par un mécanisme de « recrutement des contacts » à faible contrainte au fur et à mesure que la contrainte augmente [Tra87, Her87, Mak99]. Les réseaux de forces décrits ci-dessous ne sont pas non plus capturés par ces modèles continus. De même, on comprend bien qu’une telle modélisation par un milieu effectif ne permet pas de rendre compte des phénomènes de réarrangements ou de fracture.

1.3.2 Désordres

Un empilement de grains est en général désordonné. Cependant, nous devons préciser ce que nous entendons par « désordre ». En effet, plusieurs types de désordres peuvent coexister au sein d’un empilement granulaire (figure 1.16).

Partant du cas théorique de l’empilement régulier (cristallin) de grains (atomes, grains de sable, sphères solides, etc.) parfaitement identiques, nous pouvons construire plusieurs variations. Nous pouvons dans un premier temps modifier les propriétés physiques des *grains* en chaque site (figure 1.16(a)). Dans le cas d’un empilement régulier de billes solides, cela correspond par exemple à changer les densités des billes (sans changer leurs tailles ni leurs positions). Une autre possibilité serait de changer

6. Le modèle de Hertz repose sur trois hypothèses : la contrainte maximale au centre du contact ne doit pas dépasser la limite élastique du matériau, la taille de la zone de contact doit être petite devant le rayon de courbure des grains, et le temps caractéristique du phénomène étudié doit être grand devant la période propre d’oscillation des grains ($\simeq R/c$ où R est la taille du grain et c la vitesse acoustique du matériau).

les *liens* entre les grains, i.e. les interactions (figure 1.16(b)). Dans l'exemple de l'empilement régulier des billes solides, cela correspondrait par exemple à changer l'état de surface des grains (friction) ou à mouiller certains contact. Une troisième possibilité, peut-être la plus naturelle, serait tout simplement de mélanger les grains, de façon à changer la *topologie* de l'empilement (figure 1.16(c)).

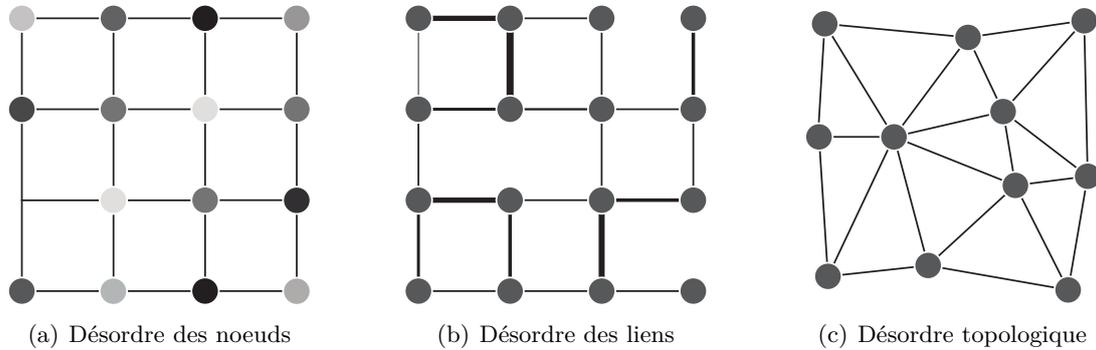


FIGURE 1.16 – Représentation schématique de trois types de désordre d'un réseau. Un milieu granulaire comprend en général les trois types de désordre.

De façon générale, un milieu granulaire correspond en fait aux trois types de désordre pré-cités : topologique, de masse, et de lien.

Les chaînes de force

Contrairement à un solide plus classique, dans un empilement granulaire contraint par une force externe les contraintes internes (forces inter-grains) se répartissent en général de façon extrêmement hétérogènes.

Si l'Homme manipule les milieux granulaires depuis des millénaires, ce n'est qu'à la fin des années 1960 – grâce à Dantu, puis plus tard de façon quantitative par Behringer et al. – que l'on a pu pour la première fois avoir un aperçu visuel de la complexité de la distribution de leurs forces internes [Dan67]. Ce dernier a en effet considéré des petits cylindres de verre (pyrex, dans ce cas) empilés, sur lesquels il a appliqué une contrainte. Grâce à un effet photo-élastique⁷, entraînant une modification de l'indice optique des cylindres en fonction de la contrainte qui leur est appliquée, il a pu obtenir une *image* des forces au sein du milieu (la figure 1.17(a) présente une telle image, acquise plus récemment – voir aussi [Maj05, Dan17]). Sur une telle image, les grains subissant une grande contrainte apparaissent en clair, et les grains subissant une petite contrainte en plus sombre. Il faut néanmoins avoir en tête que l'intensité lumineuse n'est pas proportionnelle à la contrainte mais à son carré, ce qui augmente le contraste entre les petites et les grandes contraintes par rapport aux valeurs réelles.⁸

On observe alors que les forces se répartissent selon un réseau hétérogène complexe, selon ce qui ressemble à des « chaînes », que l'on nomme alors « chaînes de forces ». Cela a été confirmé par des simulations numériques (figure 1.17(b)) [Rad96, Mak00] et des méthodes plus récentes de visualisations expérimentales, notamment en 3D (figure 1.17(d)) [Bro15]. Deux informations essentielles peuvent alors être extraites : la topologie du réseau des contacts et la distribution des forces [Jon06, Kun83, Liu95, Rad96, Rad98]. Il est de plus remarquable que même dans le cas d'un empilement régulier (par exemple selon un réseau hexagonal), le réseau des forces est en pratique désordonné [Tra87, Gil03]. Cela s'explique par les aspérités des grains, qui induisent des forces de friction entre les grains. Cela prouve que le désordre du réseau des forces dépend bien sûr du désordre topologique du réseau granulaire, mais aussi du désordre des contacts à cause de la friction (désordre des « liens »).

De plus, la distribution des forces inter-grains dépend de la contrainte externe (figure 1.17(c)) [Mak00] : lorsque la contrainte externe est faible, la distribution des forces est exponentiellement décroissante dès lors que les forces sont supérieures à la moyenne des forces (courbe du haut sur la

7. Le Plexiglas et certains polymères sont aussi photo-élastiques.

8. Une autre façon d'obtenir un aperçu des forces exercées sur les grains consiste à recouvrir les faces internes d'une cellule contenant l'échantillon par du papier carbone [Kun83, Liu95, Mue98]. Les grains qui appuient sur la cellule laissent une trace sur le papier, et une calibration permet alors d'en déduire les forces correspondantes.

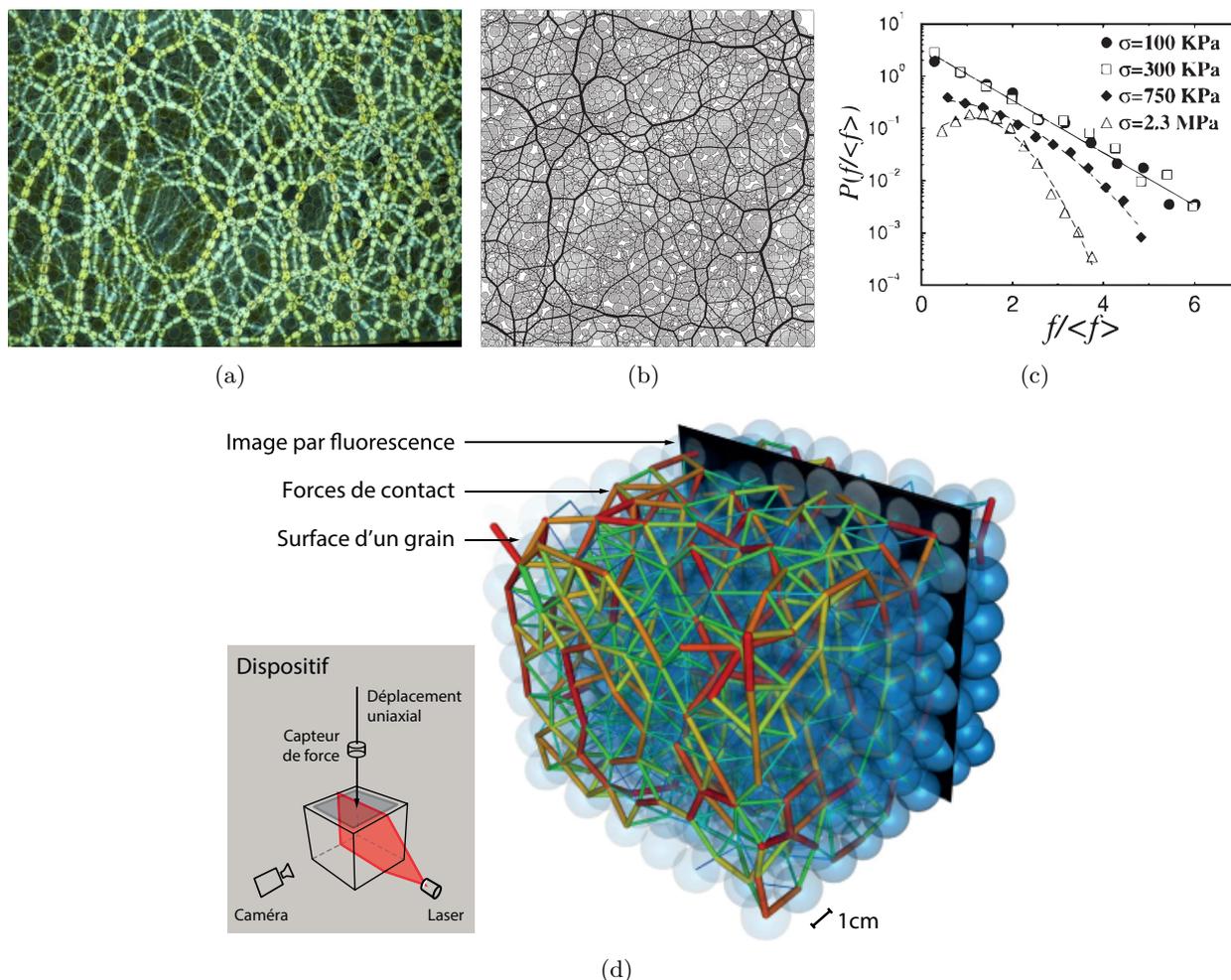


FIGURE 1.17 – Les contraintes internes au sein d’un milieu granulaire se répartissent de façon très hétérogène, le long de « chaînes de forces ». (a) On peut visualiser ces chaînes dans un empilement de cylindres photo-élastiques, i.e. qui agissent sur la lumière en fonction des contraintes qui leur sont appliquées : les grains les plus lumineux sont ceux qui subissent les contraintes les plus fortes, et les grains sombres les contraintes les moins fortes. On observe alors que la contrainte se répartit dans le milieu de façon très hétérogène, le long de « chaînes de forces ». Crédits : Bob Behringer [Jac96]. (b) Des simulations numériques confirment cette distribution très hétérogène des contraintes. Les traits entre les grains montrent les forces de contact, et leurs épaisseurs sont proportionnelles à ces dernières. Figure extraite de [Rad96]. (c) On peut alors, expérimentalement ou numériquement, en déduire la distribution des forces au sein du milieu, pour différentes contraintes de confinement. On constate alors qu’aux faibles contraintes (courbe du haut), la contrainte externe se distribue sur un petit nombre de chaînes supportant de grandes forces, et sur un grand nombre de chaînes supportant de petites forces. Lorsque la contrainte de confinement est augmentée (deux autres courbes), la distribution se pique : le réseau de force s’homogénéise et les chaînes ont tendance à supporter à peu près toute la même force. Figure extraite de [Mak00]. (d) Des méthodes récentes permettent de sonder le réseau de force en 3D. Figure extraite de [Bro15].

figure 1.17(c) ; lorsque la contrainte est augmentée (les deux autres courbes), la distribution décroît plus vite et devient gaussienne, signe que les forces dans le réseau tendent vers une homogénéisation (la distribution devient plus piquée). On obtient alors une vision plus précise du réseau des chaînes de forces : à basse contrainte, le réseau est constitué de quelques chaînes supportant une part importante de la contrainte (une sorte de « squelette » de l’empilement), et de beaucoup de chaînes supportant une petite fraction de la contrainte ; à grande contrainte, le réseau est beaucoup plus homogène et est constitué de chaînes supportant à peu près toutes la même contrainte. Il est par ailleurs à noter que ce comportement dépend peu de la nature de l’empilement (régulier ou non) et des grains qui le

composent (friction, forme, etc.).

Comme nous le verrons en détail plus loin (section 1.3.5), une onde élastique est bien sûr sensible à la topologie du réseau dans lequel elle se propage mais aussi – et ce de façon dramatique – aux *liens* (i.e. contacts) entre les nœuds (les grains) [Jia99, Gil03], ces derniers dictant l'élasticité locale du milieu.

La prise en compte de la friction entre les grains enrichit sensiblement la physique des milieux granulaires.

Comme nous l'avons déjà mentionné, la friction entre les grains implique notamment que, même dans un empilement ordonné, les forces entre les grains sont hétérogènes [Tra87, Gil03].

De plus, la friction change la stabilité d'un empilement contraint. En effet, la force de frottement entre deux grains est une force à seuil : le contact est stable uniquement si la force tangentielle reste en deçà d'une certaine valeur, fixée par la force normale et le coefficient de friction. Ainsi, pour un empilement frictionnel donné, il y a une indétermination dans les forces et il est impossible de connaître ces dernières si l'*histoire* du milieu – notamment sa préparation – est inconnue. L'équilibre est alors dit *hyperstatique* et plusieurs réseaux de forces différents correspondent à un empilement topologique donné [Sil02]. Les relations constitutives ne sont alors définies que de façon incrémentales, i.e. à partir d'un état donné et pour savoir quel réseau de force est « le bon », il faut connaître l'histoire de l'échantillon. En l'absence de friction, les forces entre les grains sont *normales* aux contacts, et on peut montrer que pour une configuration géométrique donnée des grains, les équations d'équilibre des forces n'admettent qu'une unique solution : le système est alors dit iso-statique. L'équilibre du réseau est alors fragile, dans le sens où la moindre force externe brise l'équilibre global. La friction, en faisant apparaître des solutions « alternatives », permet alors d'avoir une rigidité du milieu même à contrainte de confinement nulle [Hec10].

1.3.3 Blocage et déblocage

Une autre particularité des milieux granulaires est que si l'on peut généralement les considérer comme des solides – dans le sens où le milieu est stable et répond élastiquement aux contraintes – ils peuvent néanmoins présenter des caractéristiques propres aux liquides – dans le sens où ils peuvent s'écouler librement – en réaction à certaines contraintes *mécaniques* même très faibles. Ils sont en quelque sorte « mal condensés » [Guy94].

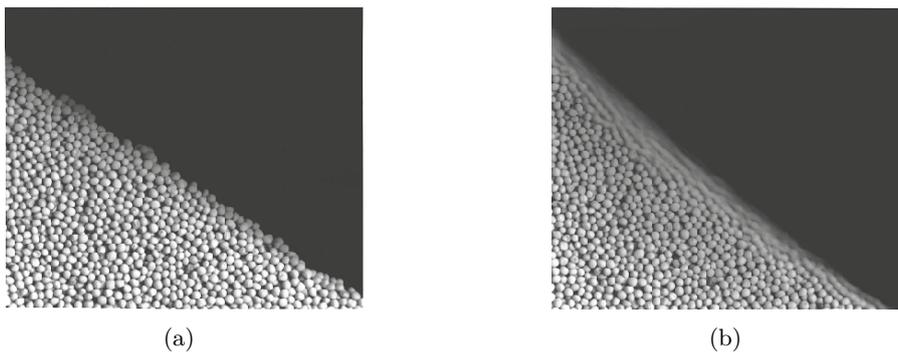


FIGURE 1.18 – Un milieu granulaire peut passer d'un état (a) « bloqué » (solide) à un état (b) « déblocé » (liquide) lorsqu'on lui applique certaines contraintes mécaniques. Ici le cas d'un empilement au repos posé sur un support : lorsque le support est incliné, une avalanche est déclenchée et les grains en surface s'écoulent comme le ferait un fluide. Figure extraite de [Jac96].

L'exemple le plus naturel est probablement celui de l'avalanche ou du glissement de terrain (figure 1.18) : au repos, les grains sont immobiles et dans un état solide (figure 1.18(a)), mais si le support est légèrement incliné, une avalanche est déclenchée et les grains en surface s'écoulent comme un fluide (figure 1.18(b)). Cet exemple correspond à ce qui s'appelle la transition de « déblocage » (*unjamming* en anglais) : les grains initialement bloqués dans un état métastable ont reçu une énergie extérieure suffisante pour aller vers un autre état, en s'écoulant.

En fait, cette transition de blocage/déblocage revêt un caractère universel spectaculaire [Liu98, Cat98, O'H03, Lec07, Bir07, Mar09, Hec10] : elle s'applique aux grains en situation d'avalanche, mais aussi aux voitures bloquées aux péages les jours de départ en vacances, à la mousse à raser que l'on cisaille, ou au verre liquide qui se refroidit (transition « vitreuse »). Le blocage correspond à une divergence de la viscosité, entraînant un ralentissement extrême de la dynamique, jusqu'à arriver à son arrêt total [Ols07].

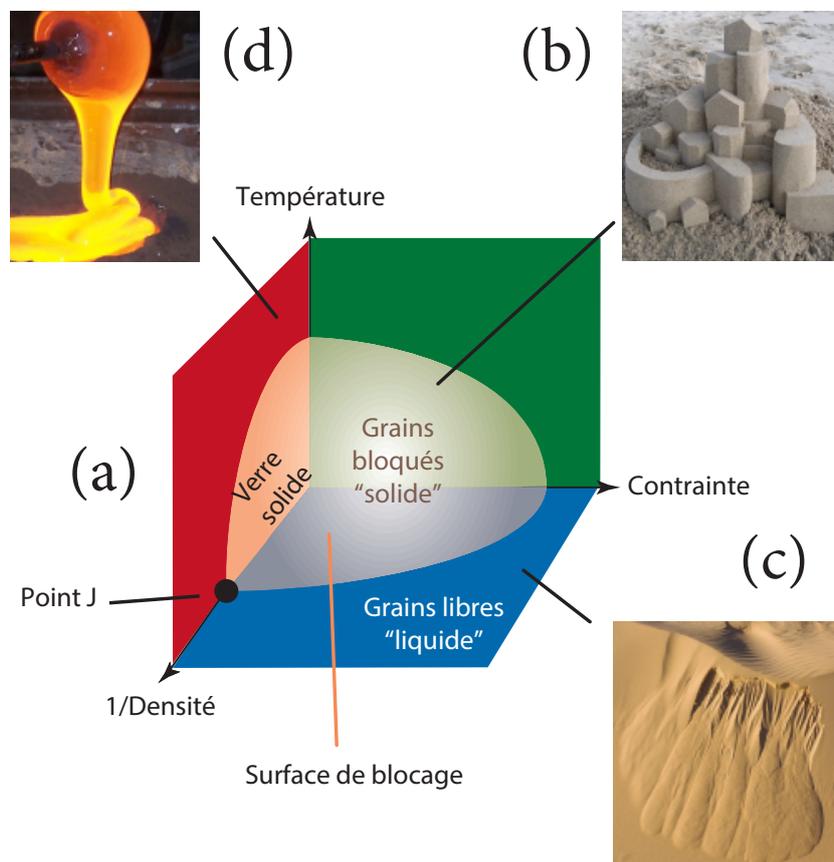


FIGURE 1.19 – La transition de « blocage/déblocage » revêt un caractère universel, et semble aussi s'appliquer à la transition vitreuse. (a) Une proposition de diagramme de phase de la transition de blocage/déblocage. Selon la température (système thermique), la contrainte (système athermique) et la densité, le système peut être dans un état bloqué ou non. Une « surface de blocage » limite alors l'espace des états : à l'intérieur le système est bloqué (faible contrainte, par exemple (b) le château de sable ; ou du verre solide, à faible température) ; à l'extérieur, le système est déblocé ((c) avalanche de sable, à forte contrainte ; ou (d) verre liquide, à haute température). Figure adaptée de [Liu98].

Liu et Nagel [Liu98] ont proposé un diagramme de phase regroupant les différentes routes vers la transition de blocage (figure 1.19(a)). Ce dernier considère trois variables : la température, la contrainte, et l'inverse de la densité. Il présente alors deux zones : une zone centrale fermée, représentant les états bloqués : un verre solide (dans le plan de contrainte nulle), un empilement granulaire stable (1.19(b)), etc. En dehors de cette zone, limitée par une « surface de blocage », le système est déblocé : le verre devient liquide lorsque la température est trop élevée (1.19(d)), le sable coule lorsque la contrainte est trop grande (1.19(c)).

Dans un milieu vitreux, comme le verre, le passage d'un état bloqué à un état déblocé est activé par l'énergie *thermique*, alors que dans les milieux granulaires, le passage est enclenché par une énergie externe *mécanique*. En effet, de par la masse des grains, l'énergie thermique $k_B T$ est négligeable devant l'énergie nécessaire pour déplacer un grain : on dit alors que le milieu est athermique. L'empilement granulaire ne peut alors pas explorer *spontanément* les différents états métastables à son voisinage, contrairement au cas d'un liquide ou d'un gaz. C'est la sollicitation externe qui permet au milieu d'explorer différents états, et en ce sens, elle joue le rôle de la température.

1.3.4 Fragilité

Du point de vue mécanique, la transition de déblocage peut être corrélée à la fragilité du réseau des contacts [Cat98, Cat99]. Cates et al. prennent l'exemple d'une chaîne linéaire de grains (figure 1.20) et montrent que si les contacts entre les grains sont ponctuels, cette dernière ne peut supporter une force non-colinéaire à l'axe de la chaîne – aussi petite soit-elle – sans subir de déformation plastique.

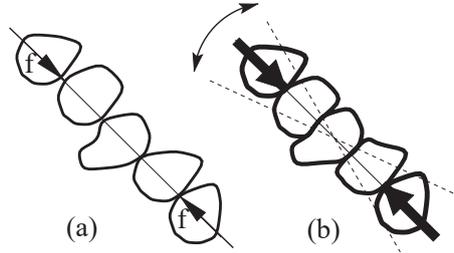


FIGURE 1.20 – Un matériau issu d'un processus de blocage est *fragile*. (a) De façon statique, une chaîne linéaire de particules indéformables en interactions ponctuelles ne peut supporter qu'une force strictement longitudinale à la chaîne. (b) Si les particules sont déformables, la contrainte de colinéarité par rapport à l'axe de la chaîne est légèrement réduite, et il est possible d'imposer une force non-longitudinale sans déclencher de réorganisation plastique. Figure extraite de [Cat98].

Si les grains peuvent se déformer (figure 1.20(b)), la contrainte de colinéarité par rapport à l'axe de la chaîne est légèrement réduite et il est possible d'imposer une force non longitudinale sans que la chaîne se brise.

On peut donc imaginer pouvoir déclencher des « réarrangements » avec de petites contraintes dans un milieu granulaire bloqué. Une démonstration spectaculaire a été apportée avec des ondes acoustiques [Liu92, Jia11]. La figure 1.21 montre le cas d'une onde d'amplitude croissante se propageant dans un milieu granulaire sous contrainte. On constate alors que pour de grandes amplitudes d'excitation, le milieu subit des modifications irréversibles : la vitesse d'onde diminue, et la hauteur de l'échantillon aussi (compaction). Le milieu étant contraint, et les amplitudes de vibration restant négligeables devant la déformation statique des grains, cela ne peut ici être attribué qu'à des modifications du réseau des *contacts*, provoqués par l'onde de grande amplitude.

Le déclenchement de réarrangements au sein d'un milieu granulaire constitue l'objet du chapitre 4, grâce à la focalisation d'énergie acoustique en un endroit du milieu, par l'utilisation du retournement temporel des ondes élastiques multiples diffusées.

1.3.5 Ondes élastiques

De par leur élasticité, les milieux granulaires peuvent supporter la propagation d'ondes élastiques.

Cas d'une chaîne unidimensionnelle

L'exemple le plus connu de propagation d'une onde dans un milieu granulaire est probablement celui d'une onde de compression dans une chaîne uni-dimensionnelle de billes identiques parfaitement élastiques comprimées [Lan59, Nes83, Cos97, Bil99, Hui11]. Cet exemple a été traité de nombreuses fois, et nous suivons ici le formalisme et les notations de [Cos97].

Écrasement du contact La théorie du contact de Hertz nous indique alors que lorsque deux sphères parfaitement élastiques de rayon a sont en contact et soumises à une force statique F_0 , elles s'écrasent, et leurs centres se rapprochent d'une distance δ_0 [Lan59] :

$$\delta_0 = \frac{2(\theta F_0)^{2/3}}{a} \quad (1.33)$$

où $\theta = \frac{3(1-\mu^2)}{4E}$, E étant le module d'Young du matériau constituant les billes, et μ le coefficient de Poisson. Cette expression reste valide dans le cas dynamique (force variable) si les temps carac-

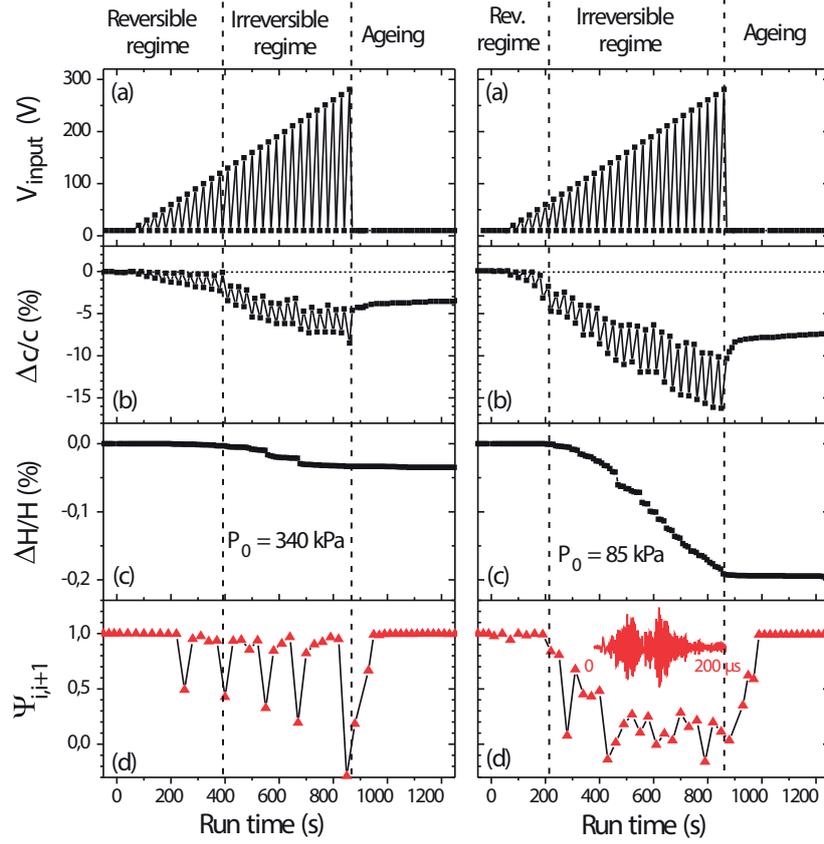


FIGURE 1.21 – Interaction onde-matière irréversible dans le cas d'un milieu granulaire sous contrainte (gauche : 340 kPa, droite : 85 kPa). (a) Protocole d'excitation. (b) Variation de la vitesse du son. (c) Variation de la hauteur de l'échantillon. (d) Coefficient de corrélation entre deux signaux acoustiques successifs. On constate que pour de petites amplitudes d'excitation, les réarrangements induits sont réversibles, alors que pour de grandes amplitudes d'excitation, les réarrangements sont irréversibles. De plus, plus la contrainte de confinement est importante et plus il est difficile de provoquer les réarrangements. Figure extraite de [Jia11].

téristiques d'évolution des déplacements sont plus grands que le temps nécessaire pour qu'une onde interne à une bille se propage d'un bout à l'autre de la bille⁹, ce qui sera le cas dans nos expériences.

Équation du mouvement Si l'écrasement δ_0 est petit devant le rayon a (ce qui sera toujours le cas dans nos expériences), on peut alors modéliser le système par un système masses-ressorts, et on obtient dans ce cas un système d'équations non-linéaires couplées :

$$\frac{d^2 u_n}{dt^2} = \frac{\sqrt{a/2}}{2m\theta} \left\{ [\delta_0 - (u_n - u_{n-1})]^{3/2} - [\delta_0 - (u_{n+1} - u_n)]^{3/2} \right\} \quad (1.34)$$

où u_n est le déplacement de la bille n par rapport à sa position d'équilibre. Il faut ici noter que la non-linéarité provient ici uniquement de la non-linéarité *géométrique* du contact de Hertz (la surface de contact – et donc la raideur du contact – entre les grains dépend de l'écrasement).

Par ailleurs, notons que cette modélisation ne tient pas compte d'une éventuelle dissipation (aux contacts ou dans le volume des billes).

Relation de dispersion L'équation (1.34) décrit en particulier la propagation d'une onde élastique dans la chaîne. Dans l'approximation des petites amplitudes, on peut linéariser l'équation et en déduire

9. Période propre fondamentale d'oscillation de la bille, de l'ordre de $2a/c$, avec c la vitesse d'onde du matériau composant la bille.

une relation de dispersion liant la pulsation ω de l'onde à la longueur d'onde λ (ou de façon équivalente au vecteur d'onde $q = 2\pi/\lambda$) :

$$\omega(q) = 2\sqrt{\frac{k}{m}} |\sin(qa)| \quad (1.35)$$

où k est la raideur du contact défini par $k = \frac{\partial F}{\partial \delta_0} = \frac{3}{4} \frac{(aF_0)^{1/3}}{\theta^{2/3}}$, m la masse des billes, et a leur rayon.

On peut par ailleurs montrer, grâce à la théorie du contact de Hertz, que la vitesse c de l'onde croît avec la pression de confinement P , comme $c \simeq P^{1/6}$, tout comme le prévoit la théorie des milieux effectifs dans un systèmes à 3D [Dig81, Wal87].

De plus, on constate que la vitesse de groupe $\frac{d\omega}{dk}$ s'annule lorsque la longueur d'onde λ est égale à $4a$, i.e. est du même ordre que la taille des grains, ce qui correspond à une fréquence de coupure du milieu – c'est-à-dire la fréquence du mode propre de plus haute fréquence :

$$f_c = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (1.36)$$

Notons cependant que lorsque la contrainte de confinement P est nulle (la raideur des contacts est dans ce cas nulle), il n'est pas possible de faire se propager des ondes élastiques. Il a en revanche été montré que des ondes « solitaires » peuvent se propager [Nes83, Cos97, Hui11].

De façon plus générale, les solutions du système (1.34) peuvent mathématiquement toutes être décomposées sur ses modes propres. S'il est possible de calculer analytiquement ces derniers dans le cas d'une chaîne régulière, cela est en général impossible dans le cas désordonné (masses et/ou raideurs différentes d'une bille à l'autre) et il faut alors recourir à des simulations numériques pour obtenir les différentes solutions.

Dans le cas des grandes amplitudes, des phénomènes non-linéaires « classiques » peuvent apparaître (génération de seconde harmonique [Tou04, Bru08] et solitons [Cos97], notamment).

Cas d'un empilement désordonné

Le cas d'un *empilement* granulaire, qu'il soit à deux ou à trois dimensions, est sensiblement plus complexe que celui de la *chaîne unidimensionnelle* décrit ci-dessus.

La complication la plus évidente est bien sûr celle de la topologie de l'empilement, qui est en général non triviale. De plus, même dans le cas d'un empilement régulier (hexagonal ou cubique, par exemple), la texture des contacts entre les grains (et donc les raideurs effectives) est en pratique hétérogène [Gil03], et très sensible à l'histoire du milieu. De même, les grains eux-mêmes présentent toujours certaines hétérogénéités (masses et tailles notamment). Comme expliqué plus haut, ces trois désordres sont en général présents dans un empilement granulaire.

Pour toutes ces raisons, aucun modèle analytique ne permet de décrire exactement la propagation des ondes élastiques dans les empilements granulaires réels. Cependant, comme nous l'avons expliqué (section 1.3.1), on peut modéliser l'élasticité des milieux granulaires *via* une approche de milieux effectifs, qui fournit une moyenne des propriétés élastiques à une échelle macroscopique. Cette approche permet alors d'obtenir une bonne approximation des ondes basses fréquences qui peuvent se propager de façon cohérente [Dig81, God98].

Jia, Caroli et Velický ont montré en 1999 [Jia99] qu'il y avait en fait en général *deux* ondes élastiques qui se propageaient dans un milieu granulaire confiné (figure 1.22) : une onde dite « cohérente » (E sur la figure), qui correspond précisément à l'onde auto-moyennée qui se propage de façon balistique dans le milieu effectif, et qui est très peu sensible à la position précise des grains ; et une onde « multiplesment diffusée » (S sur la figure) qui est issue de la diffusion de l'onde cohérente sur les hétérogénéités dans le milieu, et qui au contraire est extrêmement sensible à la moindre modification de l'empilement et de ses chaînes de forces. Bien sûr, ces deux ondes sont à rapprocher de celles décrites dans la section 1.1.

Ils ont de plus montré que la taille relative entre le transducteur utilisé pour recevoir l'onde transmise et la taille des grains était cruciale et régissait les poids relatifs des deux ondes enregistrées. En effet, le transducteur effectue implicitement une moyenne du champ élastique à sa surface : l'onde

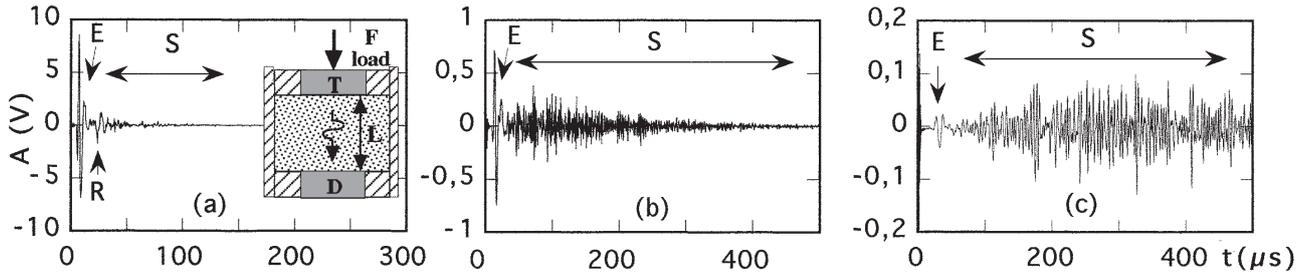


FIGURE 1.22 – Ondes élastiques transmises dans un milieu granulaire contraint et influence de la taille relative entre le transducteur et les billes. Une brève impulsion ultrasonore est émise par un transducteur piezoélectrique T et reçue, après propagation dans le milieu, par un transducteur D de diamètre 12 mm. Ce dernier effectue alors une moyenne du champ élastique à sa surface et somme de façon cohérente l'onde cohérente et incohérente l'onde multiple diffusée. (a) Lorsque les billes sont beaucoup plus petites (ici diamètre de 0.2 – 0.3 mm) que le transducteur, l'onde cohérente domine alors. (b) Pour des billes plus grandes (diamètre 0.4 – 0.8 mm), les deux ondes ont des amplitudes comparables. (c) Pour des billes encore plus grandes (diamètre 1.5 mm), l'onde multiple diffusée est alors dominante. Figure extraite de [Jia99].

multiplement diffusée est alors sommée de façon incohérente (croissance de l'amplitude proportionnelle à la racine du nombre de contacts), alors que l'onde cohérente est sommée de façon cohérente (croissance proportionnelle au nombre de grains en contact). Ainsi, lorsque le transducteur est grand par rapport à la taille des billes (figure 1.22(a)), de nombreux grains sont en contact avec le transducteur et l'onde cohérente l'emporte sur l'onde multiple diffusée. Au contraire, lorsque la taille du transducteur est comparable à la taille des grains (figure 1.22(c)), l'amplitude de l'onde cohérente est du même ordre que celle de l'onde multiple diffusée (voire plus petite, en fonction de la distance de propagation). Dans le cas intermédiaire (1.22(b)), l'onde enregistrée est bien sûr un mélange entre l'onde cohérente et l'onde multiple diffusée.

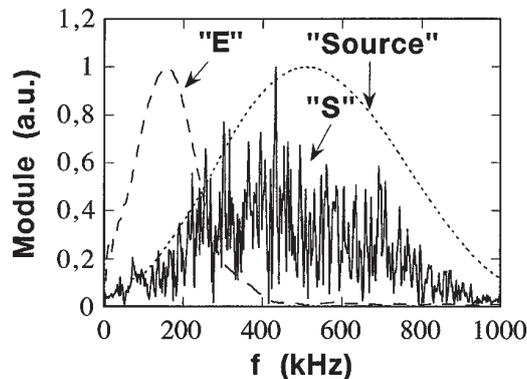


FIGURE 1.23 – Spectre de l'onde élastique transmise dans un milieu granulaire sous contrainte. L'onde cohérente (E) est plus basses fréquences que l'onde multiple diffusée (S). Cela est consistant avec le fait que l'onde multiple diffusée est de plus petite longueur d'onde que l'onde cohérente. Figure extraite de [Jia99].

Le spectre des deux ondes est aussi intéressant (figure 1.23) : il montre que l'onde cohérente (E) est beaucoup plus basses fréquences que l'onde multiple diffusée (S), ce qui est en accord avec la vision *diffusion multiple* que nous avons présentée dans la section 1.1. L'onde cohérente, plus basses fréquences, correspond à une longueur d'onde plus grande que celle de l'onde multiple diffusée. Elle « voit » alors un milieu globalement homogène, le milieu effectif, et se propage de façon balistique. *A contrario*, l'onde multiple diffusée, de longueur d'onde beaucoup plus petite et comparable à la taille des grains, subit un grand nombre de diffusions.

Comme nous le verrons au chapitre 3, l'intensité de l'onde multiple diffusée est alors très bien décrite par l'équation de la diffusion, même si nous montrerons que certaines précautions sont à prendre.

Bibliographie

- [Aki69] K. AKI. ‘Analysis of the seismic coda of local earthquakes as scattered waves.’ *Journal of Geophysical Research*, **74** (2), 615–631. 1969.
- [Aki75] K. AKI & B. CHOUET. ‘Origin of coda waves : Source, attenuation, and scattering effects.’ *Journal of Geophysical Research*, **80** (23), 3322–3342. 1975.
- [Aki80] K. AKI. ‘Scattering and attenuation of shear waves in the lithosphere.’ *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **85** (B11), 6496–6504. 1980.
- [Aki92] K. AKI. ‘Scattering conversions P to S versus S to P.’ *Bulletin of the Seismological Society of America*, **82** (4), 1969–1972. 1992.
- [Akk88] E. AKKERMANS, P. WOLF, R. MAYNARD & G. MARET. ‘Theoretical study of the coherent backscattering of light by disordered media.’ *Journal de Physique*, **49** (1), 77–98. 1988.
- [Alb85] M. P. V. ALBADA & A. LAGENDIJK. ‘Observation of Weak Localization of Light in a Random Medium.’ *Physical Review Letters*, **55** (24), 2692–2695. 1985.
- [And58] P. W. ANDERSON. ‘Absence of Diffusion in Certain Random Lattices.’ *Physical Review*, **109** (5), 1492–1505. 1958.
- [And11] B. ANDREOTTI, Y. L. FORTERRE, O. POULIQUEN & Y. FORTERRE. *Les milieux granulaires : entre fluide et solide*, EDP Sciences, Les Ulis. 2011.
- [Bal96] L. E. BALLENTINE & J. P. ZIBIN. ‘Classical state sensitivity from quantum mechanics.’ *Physical Review A*, **54** (5), 3813–3819. 1996.
- [Bar89] G. BARTON. *Elements of Green’s Functions and Propagation : Potentials, Diffusion, and Waves*, Clarendon Press, Oxford : New York. 1989.
- [Bay93] G. BAYER & T. NIEDERDRÄNK. ‘Weak localization of acoustic waves in strongly scattering media.’ *Physical Review Letters*, **70** (25), 3884–3887. 1993.
- [Bil99] M. D. BILLY. ‘Experimental analysis of the propagation of elastic waves in a chain of spherical beads.’ *The Journal of the Acoustical Society of America*, **105** (2), 1147–1147. 1999.
- [Bir07] G. BIROLI. ‘Jamming : A new kind of phase transition?’ *Nature Physics*, **3** (4), 222–223. 2007.
- [Bla58] F. G. BLAKE. ‘Method and apparatus for eliminating phase distortion in seismic signals.’ 1958.
- [Bro15] N. BRODU, J. A. DIJKSMAN & R. P. BEHRINGER. ‘Spanning the scales of granular materials through microscopic force imaging.’ *Nature Communications*, **6**, ncomms7361. 2015.
- [Bru08] T. BRUNET, X. JIA & P. A. JOHNSON. ‘Transitional nonlinear elastic behaviour in dense granular media.’ *Geophysical Research Letters*, **35** (19), L19308. 2008.

- [Cam92] M. CAMPILLO & A. PAUL. ‘Influence of the lower crustal structure on the early coda of regional seismograms.’ *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **97** (B3), 3405–3416. 1992.
- [Cas92] D. CASSEREAU & M. FINK. ‘Time-reversal of ultrasonic fields. III. Theory of the closed time-reversal cavity.’ *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, **39** (5), 579–592. 1992.
- [Cas93] D. CASSEREAU & M. FINK. ‘Focusing with plane time-reversal mirrors : An efficient alternative to closed cavities.’ *The Journal of the Acoustical Society of America*, **94** (4), 2373–2386. 1993.
- [Cat98] M. E. CATES, J. P. WITTMER, J.-P. BOUCHAUD & P. CLAUDIN. ‘Jamming, Force Chains, and Fragile Matter.’ *Physical Review Letters*, **81** (9), 1841–1844. 1998.
- [Cat99] M. E. CATES, J. P. WITTMER, J.-P. BOUCHAUD & P. CLAUDIN. ‘Jamming and static stress transmission in granular materials.’ *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **9** (3), 511–522. 1999.
- [Cha60] S. CHANDRASEKHAR. *Radiative Transfer*, Oxford University Press. 1960.
- [Cha00] A. A. CHABANOV, M. STOYTCHEV & A. Z. GENACK. ‘Statistical signatures of photon localization.’ *Nature*, **404** (6780), 850–853. 2000.
- [Cos97] C. COSTE, E. FALCON & S. FAUVE. ‘Solitary waves in a chain of beads under Hertz contact.’ *Physical Review E*, **56** (5), 6104–6117. 1997.
- [Dai74] A. M. DAINTY, M. N. TOKSÖZ, K. R. ANDERSON, P. J. PINES, Y. NAKAMURA & G. LATHAM. ‘Seismic scattering and shallow structure of the moon in oceanus procellarum.’ *The moon*, **9** (1-2), 11–29. 1974.
- [Dai77] A. M. DAINTY & M. N. TOKSOZ. ‘Elastic wave propagation in a highly scattering medium - A diffusion approach.’ *Journal of Geophysics Zeitschrift Geophysik*, **43**, 375–388. 1977.
- [Dai81] A. M. DAINTY & M. N. TOKSOZ. ‘Seismic codas on the earth and the moon - A comparison.’ *Physics of the Earth and Planetary Interiors*. 1981.
- [Dan67] P. DANTU. ‘Etude expérimentale d’un milieu pulvérulent compris entre deux plans verticaux et parallèles.’ *Annales des Ponts et Chaussées*, **4**, 193–202. 1967.
- [Dan17] K. E. DANIELS, J. E. KOLLMER & J. G. PUCKETT. ‘Photoelastic force measurements in granular materials.’ *Review of Scientific Instruments*, **88** (5), 051808. 2017.
- [Der95] A. DERODE, P. ROUX & M. FINK. ‘Robust Acoustic Time Reversal with High-Order Multiple Scattering.’ *Physical Review Letters*, **75** (23), 4206–4209. 1995.
- [Der01] A. DERODE, A. TOURIN & M. FINK. ‘Random multiple scattering of ultrasound. II. Is time reversal a self-averaging process?’ *Physical Review E*, **64** (3), 036606. 2001.
- [Dig81] P. J. DIGBY. ‘The Effective Elastic Moduli of Porous Granular Rocks.’ *Journal of Applied Mechanics*, **48** (4), 803–808. 1981.
- [Dor95] C. DORME & M. FINK. ‘Focusing in transmit-receive mode through inhomogeneous media : The time reversal matched filter approach.’ *The Journal of the Acoustical Society of America*, **98** (2), 1155–1162. 1995.
- [dR02] J. DE ROSNY & M. FINK. ‘Overcoming the Diffraction Limit in Wave Physics Using a Time-Reversal Mirror and a Novel Acoustic Sink.’ *Physical Review Letters*, **89** (12), 124301. 2002.
- [Dra97a] C. DRAEGER, D. CASSEREAU & M. FINK. ‘Theory of the time-reversal process in solids.’ *The Journal of the Acoustical Society of America*, **102** (3), 1289–1295. 1997.
- [Dra97b] C. DRAEGER & M. FINK. ‘One-Channel Time Reversal of Elastic Waves in a Chaotic 2d-Silicon Cavity.’ *Physical Review Letters*, **79** (3), 407–410. 1997.
- [Duf57] J. DUFFY & R. D. MINDLIN. ‘Stress-strain relations and vibrations of a granular medium.’ *Journal of Applied Mechanics*, **24**, 585–593. 1957.

- [Eli53] W. A. ELIOT & W. H. ERIKSON. ‘Method and means for obtaining a predetermined phase shift characteristic.’ 1953.
- [Eri52] W. H. ERIKSON. ‘Means for obtaining predetermined phase shift characteristics.’ 1952.
- [Fin99] M. FINK. ‘Time-Reversed Acoustics.’ *Scientific American*, **281**, 91–97. 1999.
- [Gil03] B. GILLES & C. COSTE. ‘Low-Frequency Behavior of Beads Constrained on a Lattice.’ *Physical Review Letters*, **90** (17), 174302. 2003.
- [God90] J. D. GODDARD. ‘Nonlinear Elasticity and Pressure-Dependent Wave Speeds in Granular Media.’ *Proceedings of the Royal Society of London. Series A : Mathematical and Physical Sciences*, **430** (1878), 105–131. 1990.
- [God98] J. D. GODDARD. ‘Continuum Modeling of Granular Assemblies.’ in *Physics of Dry Granular Media*, NATO ASI Series, p. 1–24, Springer, Dordrecht. 1998.
- [Gol02a] C. GOLDENBERG & I. GOLDBIRSCH. ‘Force Chains, Microelasticity, and Macroelasticity.’ *Physical Review Letters*, **89** (8), 084302. 2002.
- [Gol02b] I. GOLDBIRSCH & C. GOLDENBERG. ‘On the microscopic foundations of elasticity.’ *The European Physical Journal E*, **9** (3), 245–251. 2002.
- [Guy94] E. GUYON & J.-P. TROADEC. *Du sac de billes au tas de sable*, Odile Jacob. 1994.
- [Ham97] M. F. HAMILTON & D. T. BLACKSTOCK. *Nonlinear Acoustics*, Academic Press, San Diego, CA. 1997.
- [Hec10] M. v. HECKE. ‘Jamming of soft particles : geometry, mechanics, scaling and isostaticity.’ *Journal of Physics : Condensed Matter*, **22** (3), 033101. 2010.
- [Hen01] R. HENNINO, N. TRÉGOURÈS, N. M. SHAPIRO, L. MARGERIN, M. CAMPILLO, B. A. VAN TIGGELEN & R. L. WEAVER. ‘Observation of Equipartition of Seismic Waves.’ *Physical Review Letters*, **86** (15), 3447–3450. 2001.
- [Her82] H. HERTZ. ‘Ueber die Berührung fester elastischer Körper.’ *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, **1882** (92), 156–171. 1882.
- [Her87] H. J. HERRMANN, D. STAUFFER & S. ROUX. ‘Violation of Linear Elasticity Due to Randomness.’ *EPL (Europhysics Letters)*, **3** (3), 265. 1987.
- [Hu08] H. HU, A. STRYBULEVYCH, J. H. PAGE, S. E. SKIPETROV & B. A. VAN TIGGELEN. ‘Localization of ultrasound in a three-dimensional elastic network.’ *Nature Physics*, **4** (12), 945–948. 2008.
- [Hui11] G. HUILLARD, X. NOBLIN & J. RAJCHENBACH. ‘Propagation of acoustic waves in a one-dimensional array of noncohesive cylinders.’ *Physical Review E*, **84** (1), 016602. 2011.
- [Jae96] H. M. JAEGER, S. R. NAGEL & R. P. BEHRINGER. ‘Granular solids, liquids, and gases.’ *Reviews of Modern Physics*, **68** (4), 1259–1273. 1996.
- [Jia99] X. JIA, C. CAROLI & B. VELICKY. ‘Ultrasound Propagation in Externally Stressed Granular Media.’ *Physical Review Letters*, **82** (9), 1863–1866. 1999.
- [Jia11] X. JIA, T. BRUNET & J. LAURENT. ‘Elastic weakening of a dense granular pack by acoustic fluidization : Slipping, compaction, and aging.’ *Physical Review E*, **84** (2), 020301. 2011.
- [Joh85] K. L. JOHNSON. *Contact Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge. 1985.
- [Jon06] G. D. J. D. JONG. ‘Étude photo-élastique d’un empilement de disques.’ in *Soil Mechanics and Transport in Porous Media*, Theory and Applications of Transport in Porous Media, p. 148–161, Springer, Dordrecht. 2006.
- [Kun83] H. KUNO & I. KURI. ‘Study on the pressure distribution at the bottom of a pressed powder bed by pressure-detecting sheets.’ *Powder Technology*, **34** (1), 87–91. 1983.
- [Lac01] C. LACOMBE. *Propagation des ondes élastiques dans la lithosphère hétérogène : modélisations et applications*, Université Joseph Fourier (Grenoble). 2001.
- [Lan59] L. D. LANDAU & E. M. LIFSHITZ. *Theory of Elasticity*. N° 7 in Course of Theoretical Physics, Pergamon Press. 1959.

- [Lar06] C. LARMAT, J.-P. MONTAGNER, M. FINK, Y. CAPDEVILLE, A. TOURIN & E. CLÉVÉDÉ. ‘Time-reversal imaging of seismic sources and application to the great Sumatra earthquake.’ *Geophysical Research Letters*, **33** (19), L19312. 2006.
- [Lar09] C. S. LARMAT, R. A. GUYER & P. A. JOHNSON. ‘Tremor source location using time reversal : Selecting the appropriate imaging field.’ *Geophysical Research Letters*, **36** (22), L22304. 2009.
- [Lar10] C. S. LARMAT, R. A. GUYER & P. A. JOHNSON. ‘Time-reversal methods in geophysics.’ *Physics Today*, **63** (8), 31–35. 2010.
- [Lat71] G. V. LATHAM. ‘Lunar Seismology.’ *Eos, Transactions American Geophysical Union*, **52** (5), IUGG 162–IUGG 165. 1971.
- [Lec07] F. LECHENAULT. ‘La transition de Jamming dans un milieu granulaire bidimensionnel : Statique et dynamique d’un système athermique modèle.’ 2007.
- [Li93] J. H. LI, A. A. LISYANSKY, T. D. CHEUNG, D. LIVDAN & A. Z. GENACK. ‘Transmission and Surface Intensity Profiles in Random Media.’ *EPL (Europhysics Letters)*, **22** (9), 675. 1993.
- [Liu92] C.-H. LIU & S. R. NAGEL. ‘Sound in sand.’ *Physical Review Letters*, **68** (15), 2301–2304. 1992.
- [Liu95] C.-H. LIU, S. R. NAGEL, D. A. SCHECTER, S. N. COPPERSMITH, S. MAJUMDAR, O. NARAYAN & T. A. WITTEN. ‘Force Fluctuations in Bead Packs.’ *Science*, **269** (5223), 513–515. 1995.
- [Liu98] A. J. LIU & S. R. NAGEL. ‘Nonlinear dynamics : Jamming is not just cool any more.’ *Nature*, **396** (6706), 21–22. 1998.
- [Lok09] I. LOKMER, G. S. O’BRIEN, D. STICH & C. J. BEAN. ‘Time reversal imaging of synthetic volcanic tremor sources.’ *Geophysical Research Letters*, **36** (12), L12308. 2009.
- [Maj05] T. S. MAJUMDAR & R. P. BEHRINGER. ‘Contact force measurements and stress-induced anisotropy in granular materials.’ *Nature*, **435** (7045), 1079–1082. 2005.
- [Mak99] H. A. MAKSE, N. GLAND, D. L. JOHNSON & L. M. SCHWARTZ. ‘Why Effective Medium Theory Fails in Granular Materials.’ *Physical Review Letters*, **83** (24), 5070–5073. 1999.
- [Mak00] H. A. MAKSE, D. L. JOHNSON & L. M. SCHWARTZ. ‘Packing of Compressible Granular Materials.’ *Physical Review Letters*, **84** (18), 4160–4163. 2000.
- [Mak04] H. A. MAKSE, N. GLAND, D. L. JOHNSON & L. SCHWARTZ. ‘Granular packings : Nonlinear elasticity, sound propagation, and collective relaxation dynamics.’ *Physical Review E*, **70** (6), 061302. 2004.
- [Mar99] L. MARGERIN, M. CAMPILLO, N. M. SHAPIRO & B. VAN TIGGELEN. ‘Residence time of diffuse waves in the crust as a physical interpretation of coda Q : application to seismograms recorded in Mexico.’ *Geophysical Journal International*, **138** (2), 343–352. 1999.
- [Mar05] L. MARGERIN. ‘Introduction to Radiative Transfer of Seismic Waves.’ in A. LEVANDER & G. NOLET, édition, *Seismic Earth : Array Analysis of Broadband Seismograms*, p. 229–252, American Geophysical Union. 2005.
- [Mar09] R. MARI, F. KRZAKALA & J. KURCHAN. ‘Jamming versus Glass Transitions.’ *Physical Review Letters*, **103** (2), 025701. 2009.
- [Mid04] G. MIDI. ‘On dense granular flows.’ *The European Physical Journal E*, **14** (4), 341–365. 2004.
- [Mor92] P. M. MORSE & K. U. INGARD. *Theoretical Acoustics*, Princeton University Press, Princeton, N.J. 1992.
- [Mue98] D. M. MUETH, H. M. JAEGER & S. R. NAGEL. ‘Force distribution in a granular medium.’ *Physical Review E*, **57** (3), 3164–3169. 1998.
- [Nes83] V. F. NESTERENKO. ‘Propagation of nonlinear compression pulses in granular media.’ *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, **24** (5), 733–743. 1983.

- [O'H03] C. S. O'HERN, L. E. SILBERT, A. J. LIU & S. R. NAGEL. 'Jamming at zero temperature and zero applied stress : The epitome of disorder.' *Physical Review E*, **68** (1), 011306. 2003.
- [Ols07] P. OLSSON & S. TEITEL. 'Critical Scaling of Shear Viscosity at the Jamming Transition.' *Physical Review Letters*, **99** (17), 178001. 2007.
- [Pag95] J. H. PAGE, H. P. SCHRIEMER, A. E. BAILEY & D. A. WEITZ. 'Experimental test of the diffusion approximation for multiply scattered sound.' *Physical Review E*, **52** (3), 3106–3114. 1995.
- [Pap96] G. C. PAPANICOLAOU, L. V. RYZHIK & J. B. KELLER. 'Stability of the P-to-S energy ratio in the diffusive regime.' *Bulletin of the Seismological Society of America*, **86** (4), 1107–1115. 1996.
- [Par61] A. PARVULESCU. 'Signal Detection in a Multipath Medium by M.E.S.S. Processing.' *The Journal of the Acoustical Society of America*, **33** (11), 1674–1674. 1961.
- [Par65] A. PARVULESCU & C. S. CLAY. 'Reproducibility of signal transmissions in the ocean.' *Radio and Electronic Engineer*, **29** (4), 223–228. 1965.
- [Rad96] F. RADJAI, M. JEAN, J.-J. MOREAU & S. ROUX. 'Force Distributions in Dense Two-Dimensional Granular Systems.' *Physical Review Letters*, **77** (2), 274–277. 1996.
- [Rad98] F. RADJAI, D. E. WOLF, M. JEAN & J.-J. MOREAU. 'Bimodal Character of Stress Transmission in Granular Packings.' *Physical Review Letters*, **80** (1), 61–64. 1998.
- [Raj00] J. RAJCHENBACH. 'Granular flows.' *Advances in Physics*, **49** (2), 229–256. 2000.
- [Ryz96] L. RYZHIK, G. PAPANICOLAOU & J. B. KELLER. 'Transport equations for elastic and other waves in random media.' *Wave Motion*, p. 327–370. 1996.
- [Sak97] K. SAKAI, K. YAMAMOTO & K. TAKAGI. 'Observation of acoustic coherent backscattering.' *Physical Review B*, **56** (17), 10930–10933. 1997.
- [Sat82] H. SATO. 'Coda wave excitation due to nonisotropic scattering and nonspherical source radiation.' *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **87** (B10), 8665–8674. 1982.
- [Sha00] N. M. SHAPIRO. 'The Energy Partitioning and the Diffusive Character of the Seismic Coda.' *The Bulletin of the Seismological Society of America*, **90**, 655–665. 2000.
- [She91] P. SHENG & M. ZHOU. 'Heat conductivity of amorphous solids : simulation results on model structures.' *Science (New York, N.Y.)*, **253** (5019), 539–542. 1991.
- [She06] P. SHENG. *Introduction to Wave Scattering, Localization and Mesoscopic Phenomena*, Springer. 2006.
- [Sil02] L. E. SILBERT, D. ERTAS, G. S. GREY, T. C. HALSEY & D. LEVINE. 'Geometry of frictionless and frictional sphere packings.' *Physical Review E*, **65** (3), 031304. 2002.
- [Sni98] R. K. SNIEDER & J. A. SCALES. 'Time-reversed imaging as a diagnostic of wave and particle chaos.' *Physical Review E*, **58** (5), 5668–5675. 1998.
- [Stö06] M. STÖRZER, P. GROSS, C. M. AEGERTER & G. MARET. 'Observation of the Critical Regime Near Anderson Localization of Light.' *Physical Review Letters*, **96** (6), 063904. 2006.
- [Tan00] M. TANTER, J.-L. THOMAS & M. FINK. 'Time reversal and the inverse filter.' *The Journal of the Acoustical Society of America*, **108** (1), 223–234. 2000.
- [Tan01] M. TANTER, J. L. THOMAS, F. COULOUVRAT & M. FINK. 'Breaking of time reversal invariance in nonlinear acoustics.' *Physical Review. E, Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, **64** (1 Pt 2), 016602. 2001.
- [Tho74] D. J. THOULESS. 'Electrons in disordered systems and the theory of localization.' *Physics Reports*, **13** (3), 93–142. 1974.
- [Tou97] A. TOURIN, A. DERODE, P. ROUX, B. A. VAN TIGGELEN & M. FINK. 'Time-Dependent Coherent Backscattering of Acoustic Waves.' *Physical Review Letters*, **79** (19), 3637–3639. 1997.

- [Tou99a] A. TOURIN. *Diffusion multiple et renversement du temps des ondes ultrasonores*. Thèse, Université Paris Diderot - Paris 7. 1999.
- [Tou99b] A. TOURIN, A. DERODE & M. FINK. ‘Dynamic time reversal of randomly backscattered acoustic waves.’ *Europhysics Letters*, **47** (2), 175–181. 1999.
- [Tou01] A. TOURIN, A. DERODE & M. FINK. ‘Sensitivity to Perturbations of a Time-Reversed Acoustic Wave in a Multiple Scattering Medium.’ *Physical Review Letters*, **87** (27), 274301. 2001.
- [Tou04] V. TOURNAT, V. E. GUSEV, V. Y. ZAITSEV & B. CASTAGNÈDE. ‘Acoustic second-harmonic generation with shear to longitudinal mode conversion in granular media.’ *Europhysics Letters*, **66** (6), 798–804. 2004.
- [Tré02] N. TRÉGOURÈS, R. HENNINO, C. LACOMBE, N. M. SHAPIRO, L. MARGERIN, M. CAMPILLO & B. A. VAN TIGGELEN. ‘Multiple scattering of seismic waves.’ *Ultrasonics*, **40** (1), 269–274. 2002.
- [Tra87] T. TRAVERS, M. AMMI, D. BIDEAU, A. GERVOIS, J. C. MESSENGER & J. P. TROADEC. ‘Uniaxial Compression of 2d Packings of Cylinders. Effects of Weak Disorder.’ *EPL (Europhysics Letters)*, **4** (3), 329. 1987.
- [Tsa84] L. TSANG & A. ISHIMARU. ‘Backscattering enhancement of random discrete scatterers.’ *JOSA A*, **1** (8), 836–839. 1984.
- [Ulr09] T. J. ULRICH, K. V. D. ABEELE, P.-Y. L. BAS, M. GRIFFA, B. E. ANDERSON & R. A. GUYER. ‘Three component time reversal : Focusing vector components using a scalar source.’ *Journal of Applied Physics*, **106** (11), 113504. 2009.
- [vA91] M. P. VAN ALBADA, B. A. VAN TIGGELEN, A. LAGENDIJK & A. TIP. ‘Speed of propagation of classical waves in strongly scattering media.’ *Physical Review Letters*, **66** (24), 3132–3135. 1991.
- [Wal87] K. WALTON. ‘The effective elastic moduli of a random packing of spheres.’ *Journal of Mechanics Physics of Solids*, **35**, 213–226. 1987.
- [Wea82] R. L. WEAVER. ‘On diffuse waves in solid media.’ *The Journal of the Acoustical Society of America*, **71** (6), 1608–1609. 1982.
- [Wea90] R. L. WEAVER. ‘Diffusivity of ultrasound in polycrystals.’ *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **38** (1), 55–86. 1990.
- [Wie97] D. S. WIERSMA, P. BARTOLINI, A. LAGENDIJK & R. RIGHINI. ‘Localization of light in a disordered medium.’ *Nature*, **390** (6661), 671–673. 1997.
- [Wol85] P.-E. WOLF & G. MARET. ‘Weak Localization and Coherent Backscattering of Photons in Disordered Media.’ *Physical Review Letters*, **55** (24), 2696–2699. 1985.
- [Wu85] R.-S. WU. ‘Multiple scattering and energy transfer of seismic waves - separation of scattering effect from intrinsic attenuation - I. Theoretical modelling.’ *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **82** (1), 57–80. 1985.
- [Wya05] M. WYART. ‘On the rigidity of amorphous solids.’ *Annales de Physique*, **30** (3), 1–96. 2005.
- [Zha99] Z. Q. ZHANG, I. P. JONES, H. P. SCHRIEMER, J. H. PAGE, D. A. WEITZ & P. SHENG. ‘Wave transport in random media : The ballistic to diffusive transition.’ *Physical Review E*, **60** (4), 4843–4850. 1999.

Retournement temporel en régime linéaire dans les milieux granulaires secs

Le passé, plus ou moins fantastique, ou plus ou moins organisé après coup, agit sur le futur avec une puissance comparable à celle du présent même.

Paul Valéry, *Regards sur le monde actuel*, 1931

Sommaire

2.1	Réalisation expérimentale	38
2.1.1	Présentation du dispositif expérimental	38
2.1.2	Réponse du milieu	39
2.1.3	Vérification de la stationnarité	41
2.1.4	Vérification de la réciprocité spatiale	43
2.1.5	Retournement temporel monovoie	44
2.1.6	Retournement temporel multivoies	50
2.2	Simulation numérique	54
2.2.1	Principales méthodes existantes	54
2.2.2	Description du modèle : système masses-ressorts percolé	55
2.2.3	Réciprocité spatiale	60
2.2.4	Retournement temporel monovoie	62
2.2.5	Retournement temporel multivoies	63
2.2.6	Retournement temporel dynamique	67
2.2.7	Influence de la polarisation des signaux retournés	67
2.3	Conclusions	69

Dans ce chapitre, nous testons la réversibilité des ondes élastiques dans les milieux granulaires secs sous contrainte. En effet, deux ingrédients rendent non-triviale la question de la réversibilité des ondes ultrasonores dans ces milieux : leur fragilité, i.e. leur impossibilité à supporter certaines contraintes – même faibles – sans réarrangements irréversibles (section 1.3.4) et l'absence de modèle analytique pour décrire la propagation des ondes élastiques dans ces milieux (section 1.3.5).

Nous commençons par décrire le dispositif expérimental qui servira dans toute la suite, puis déterminons la réponse acoustique du milieu. En l'absence d'équation des ondes pour nous garantir la réversibilité des ondes, nous nous intéressons aux deux ingrédients clés nécessaires au succès du retournement temporel (section 1.2.1) : la stationnarité du milieu et sa réciprocité spatiale. Nous mettons alors en œuvre la technique du retournement temporel, et nous étudions la focalisation spatiale en fonction de l'onde retournée choisie (cohérente ou multiplement diffusée).

Nous introduisons enfin un modèle numérique basé sur un réseau 2D percolé de masses et ressorts, dans lequel nous propageons des ondes, et vérifions que les résultats numériques sont en accord avec les résultats expérimentaux.

2.1 Réalisation expérimentale

2.1.1 Présentation du dispositif expérimental

Nous présentons tout d’abord le dispositif expérimental qui sera utilisé dans toute la suite de cette thèse.

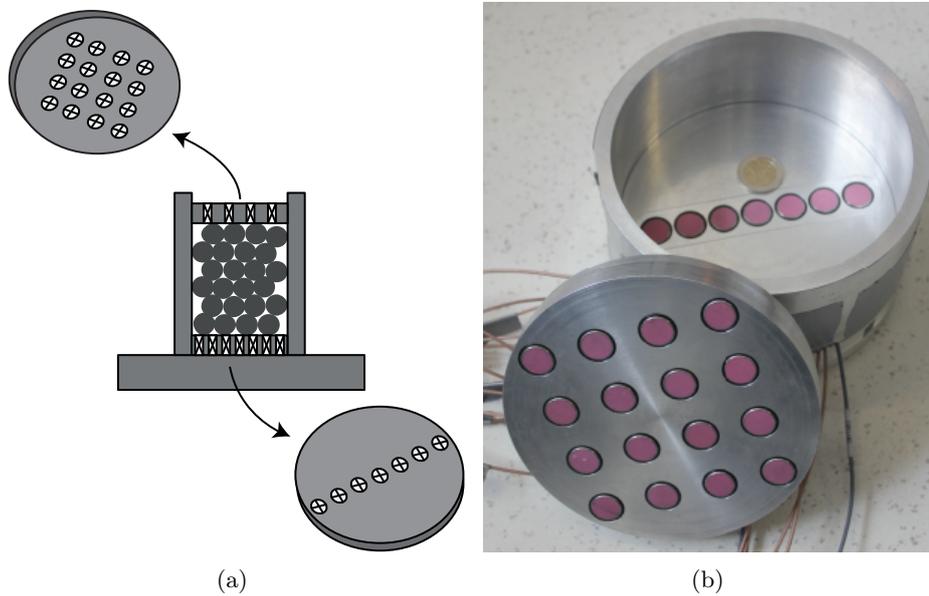


FIGURE 2.1 – Schéma et photo de la cellule utilisée pour nos expériences. (a) Représentation schématique de la cellule : la face inférieure comporte sept transducteurs piézoélectriques alignés selon un diamètre, la face supérieure en comporte 16, répartis sur un réseau carré 4×4 . (b) Photographie de la cellule (vide). Une pièce de 2 € donne l’échelle.

Celui-ci se compose principalement d’une cellule cylindrique en acier de hauteur 6 cm et de diamètre 15 cm (figure 2.1). Une des faces est conçue de telle façon à pouvoir recevoir sept transducteurs piezo-électriques de diamètre $d = 15$ mm, avec une distance centre à centre de $l_c = 19$ mm répartis sur un diamètre du disque, et l’autre seize transducteurs identiques, répartis sur un réseau 4×4 – la distance centre à centre des transducteurs étant de 30 mm.

Les transducteurs ont été choisis avec beaucoup de soin, en accord avec les remarques de la section 1.3.5 : assez petits pour éviter un moyennage spatial trop important des ondes élastiques à leurs surfaces ($d \approx \lambda$) – qui détruirait totalement les ondes multiples diffusées – et assez grand pour avoir assez de contacts de billes à leurs surfaces et garantir un bon rapport signal à bruit. Avec des billes de diamètre 1.5 mm, on peut en effet espérer au moins une dizaine de contacts entre le milieu et chaque transducteur.

Les seize transducteurs composant le miroir à retournement temporel ont été espacés de telle façon que deux transducteurs voisins reçoivent des signaux décorrélés (i.e. ils sont espacés d’au moins une demi-longueur d’onde). Cela sera d’autant plus important lorsque nous utiliserons plusieurs éléments dans le miroir à retournement temporel. Les sept transducteurs alignés composant la face opposée ont quant à eux été rapprochés le plus possible, de façon à maximiser la résolution spatiale du champ enregistré.

Le dispositif peut être utilisé en « mono-canal » ou en « multi-canaux ». Le premier mode d’utilisation utilise un transducteur sur une face, et un transducteur sur l’autre face ; les deux transducteurs étant alors connectés à une électronique permettant de mettre en forme correctement les signaux émis et reçus (voir figure 2.2 et figure 2.4). Le signal source est formé *via* MATLAB, envoyé à un générateur basses-fréquences, amplifié, puis transmis à un transducteur piézoélectrique. Le signal reçu après propagation dans le milieu est alors injecté dans un pré-amplificateur – qui dispose d’un filtre passe-bas analogique de fréquence de coupure 500 kHz et d’un filtre passe-haut de fréquence de coupure 10 kHz – puis visualisé grâce à un oscilloscope. Le signal est alors enregistré *via* MATLAB pour analyse.

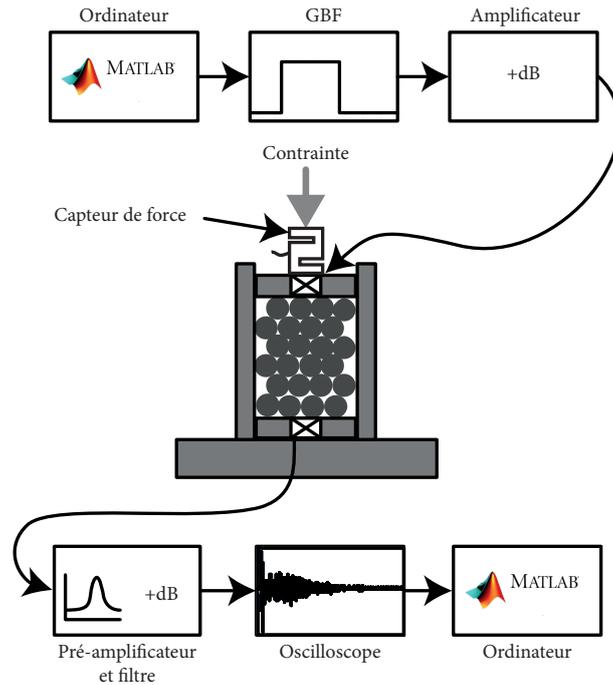


FIGURE 2.2 – Représentation schématique d’une de nos expériences de transmission ultrasonore dans un milieu granulaire en mode mono-canal (un transducteur source, et un autre transducteur récepteur). Le signal imposé à un transducteur est créé *via* MATLAB, envoyé à un générateur basses-fréquences, amplifié, puis transmis à un transducteur piézoélectrique. Le signal reçu est alors injecté dans un pré-amplificateur – qui peut aussi filtrer – puis visualisé grâce à un oscilloscope. Le signal après propagation dans le milieu est alors enregistré *via* MATLAB.

Le mode multi-canaux sera utilisé pour générer des focalisations d’amplitudes plus importantes et nécessite l’utilisation d’une électronique beaucoup plus lourde, qui sera détaillée plus tard (section 2.1.6), matérialisée par une baie de marque « Lecoecor ». L’utilisation de cette baie permet le branchement de 16 voies à l’émission, et 16 voies à la réception. Nous nous limiterons ici à 7 et 16 transducteurs sur chaque face de la cellule.

La cellule contient l’empilement granulaire à étudier, et est mise sous contrainte verticale au moyen d’une presse automatique ou d’une presse manuelle. Un capteur de force permet de suivre la force appliquée par la presse. La figure 2.3 montre la cellule instrumentée durant une expérience (avec la presse manuelle).

Dans cette thèse, nous nous restreignons à un milieu granulaire modèle, à savoir un échantillon composé de billes de verre ou d’acier. Nous avons à notre disposition des billes de diamètres variés : 1.5 mm, 3 mm, 5 mm, 8 mm et 10 mm (figure 2.5).

Nous disposons de transducteurs piezo-électriques de compression (Olympus Centrascan Panametrics C106-RM, de fréquence centrale 2.25 MHz) ou de cisaillement (Olympus Centrascan Panametrics V153-RM, de fréquence centrale 1 MHz) (voir figure 2.6).

2.1.2 Réponse du milieu

Nous présentons la réponse impulsionnelle pour notre milieu (billes de 1.5 mm sous 113 kPa) sur la figure 2.7. Le signal électrique utilisé pour la source est une brève impulsion rectangulaire (figure 2.7(a)) de 2 μ s et de faible amplitude (5 V). Ce signal est bien sûr modulé par la réponse électro-acoustique du transducteur et correspond à un déplacement mécanique de la surface du transducteur, d’amplitude de quelques nanomètres. Comme prévu (section 1.3.5), la réponse impulsionnelle se décompose en deux parties (figure 2.7(b) : la première arrivée (0 – 0.3 ms environ) est l’onde cohérente (bien visible sur la figure 2.7(c)) ; elle est suivie par l’onde multiples diffusée (0.3 – 6 ms environ).

Le spectre de la réponse impulsionnelle (figure 2.7(d)) s’étend de 3 kHz à 150 kHz environ, avec une nette décroissance de la puissance spectrale dans les hautes fréquences, due à la dissipation. Nous



FIGURE 2.3 – Vue de la cellule instrumentée : la cellule est mise sous contrainte verticale grâce à une presse (manuelle ici) et la force est mesurée grâce à un capteur de force.

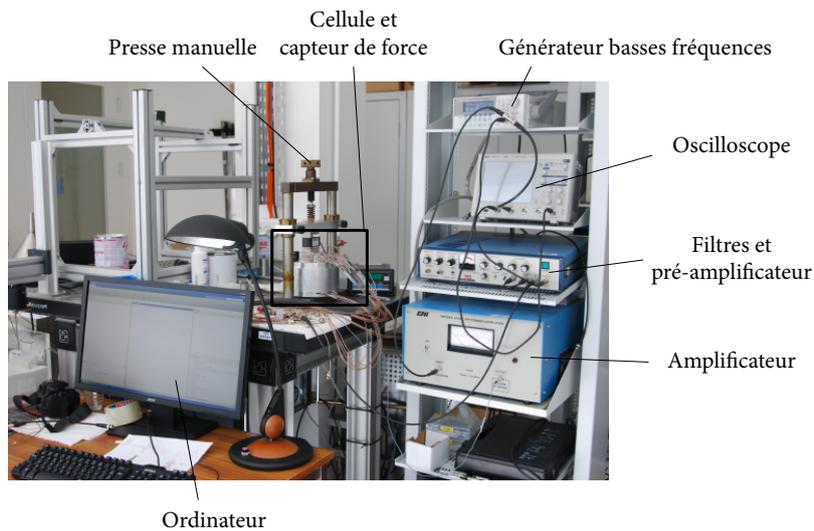


FIGURE 2.4 – Vue d'ensemble du dispositif expérimental.



FIGURE 2.5 – Quelques billes utilisées dans cette thèse. Diamètres (de gauche à droite) : 1.5 mm, 3 mm, 5 mm, 8 mm et 10 mm.

pouvons être plus précis en nous intéressant notamment à l'évolution du contenu spectral au cours du temps. La figure 2.7(e) présente la décomposition en ondelettes continue de la réponse impulsionnelle, en échelle logarithmique pour la puissance spectrale (de façon à compenser la dissipation). La première arrivée correspond à l'onde cohérente, plutôt basse fréquence (5 – 40 kHz environ) ; les plus hautes fréquences apparaissent ensuite rapidement (40 – 150 kHz), correspondant à la mise en place du régime de diffusion multiple ; enfin aux temps longs, nous constatons logiquement que les hautes fréquences sont les plus rapidement atténuées.

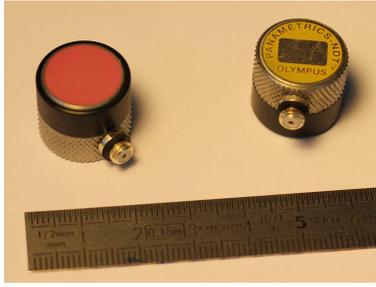


FIGURE 2.6 – Transducteurs typiques utilisés dans cette thèse : Olympus Centrascan Panametrics C106-RM (compression), de fréquence centrale 2.25 MHz et Olympus Centrascan Panametrics V153-RM (cisaillement), de fréquence centrale 1 MHz.

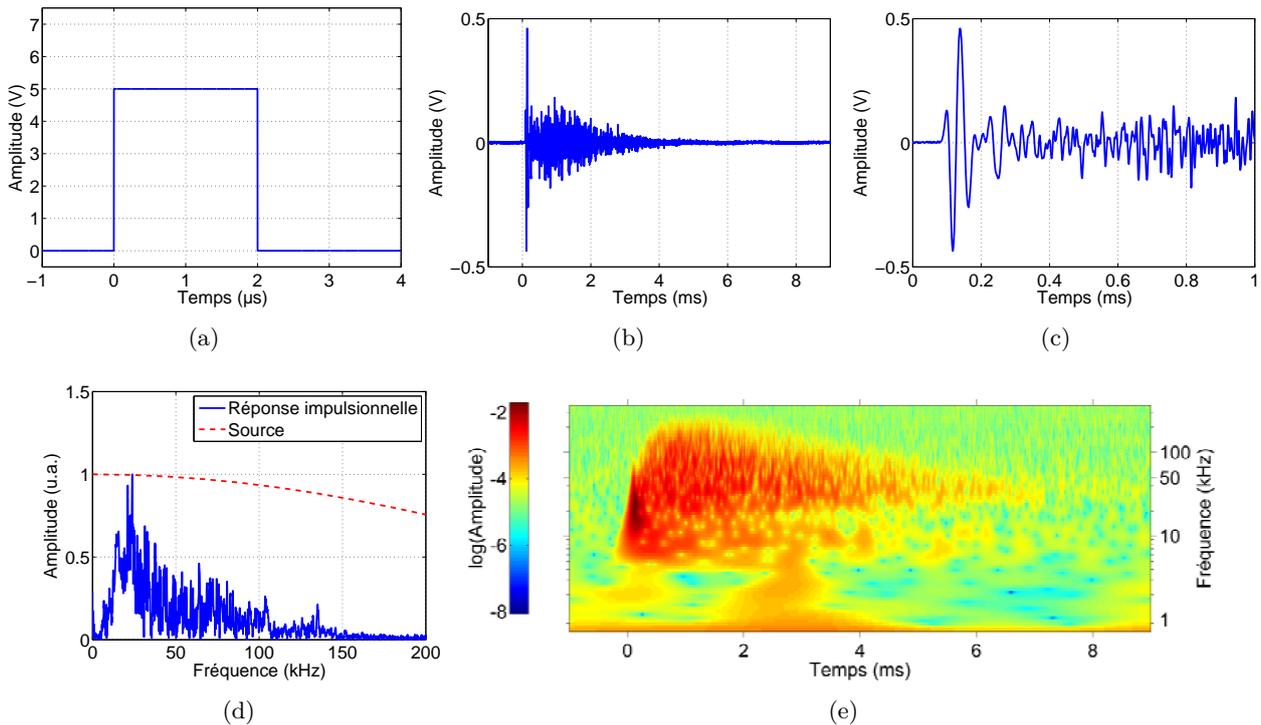


FIGURE 2.7 – Réponse impulsionnelle d'un milieu granulaire constitué de billes de 1.5 mm sous 113 kPa. (a) Le signal électrique utilisé est une brève impulsion carrée de 2 μ s. (b) Le signal transmis, d'allure complexe, est environ 3000 fois plus long que le signal injecté. (c) L'onde cohérente est bien visible au début du signal. (d) Le spectre s'étale entre 3 kHz et 150 kHz environ. (e) Une décomposition en ondelettes continue (en échelle logarithmique) montre clairement l'onde cohérente basses fréquences aux temps courts puis un enrichissement rapide vers les hautes fréquences – à cause de la diffusion multiple. Aux temps longs, la dissipation entre en jeu, et ce de façon d'autant plus importante que la fréquence est élevée.

2.1.3 Vérification de la stationnarité

Comme expliqué dans le chapitre introductif (section 1.2.1), une condition nécessaire au succès du retournement temporel est la stationnarité du milieu. En effet, pour revenir à sa source, une onde doit être capable de revivre sa vie en chronologie inversée, ce qui nécessite que le milieu soit inchangé (i.e. stationnaire) entre la phase aller et la phase retour.

Or comme nous l'avons aussi expliqué, une des spécificités des milieux granulaires réside dans leur caractère *fragile* (section 1.3). Cette fragilité implique alors notamment que de petites perturbations mécaniques involontaires (relaxation thermique, vibrations de la table d'expérience, etc.) peuvent affecter l'équilibre de l'empilement, et donc le milieu lui-même. Par ailleurs, même sous forte contrainte, sans que les positions macroscopiques des grains évoluent, le réseau des contacts peut évoluer au cours

du temps, « vieillir ». Du point de vue de la propagation, le milieu n'est alors plus vraiment stationnaire.

Il nous faut donc évaluer la stationnarité de notre échantillon. Pour cela, nous utilisons les ondes transmises dans le milieu, véritables *signatures* de la topologie mais aussi du réseau des contacts [Jia99]. Nous envoyons alors, *via* un transducteur A situé sur une des faces de la cellule, à des instants T_i régulièrement espacés, une brève impulsion composée de trois périodes de sinusoïde de fréquence centrale 100 kHz et d'amplitude 20 mV, et nousregistrons le signal $\Psi_i(t)$ reçu par un transducteur B situé sur la face opposée à l'instant T_i . Le milieu est toujours le même que précédemment : un empilement granulaire de billes de diamètre 1.5 mm, sous une contrainte de 113 kPa.

Nous suivons alors l'évolution du signal transmis. Pour quantifier cette évolution, nous calculons deux coefficients de corrélation :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{0,i} = \frac{\max_{\tau} \int \Psi_0(t) \Psi_i(t + \tau) dt}{\sqrt{\int \Psi_0^2(t) dt \int \Psi_i^2(t) dt}} \end{array} \right. \quad (2.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{i,i+1} = \frac{\max_{\tau} \int \Psi_i(t) \Psi_{i+1}(t + \tau) dt}{\sqrt{\int \Psi_i^2(t) dt \int \Psi_{i+1}^2(t) dt}}. \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Le premier coefficient de corrélation $C_{0,i}$ quantifie la similarité entre l'onde Ψ_0 transmise à l'instant initial T_0 et l'onde Ψ_i transmise à l'instant T_i . Il renseigne donc sur l'évolution du milieu par rapport à l'instant initial.

Le deuxième coefficient de corrélation $C_{i,i+1}$ quantifie quant à lui la similarité entre les ondes transmises entre deux instants successifs T_i et T_{i+1} . Il renseigne donc sur l'évolution du milieu sur une échelle beaucoup plus petite (20 s s'écoulent entre chaque acquisition).

Comme nous pouvons le voir (figure 2.8), même après plus de 30 min, le milieu évolue toujours ($C_{0,i}$, en bleu). Cependant, nous constatons que cette évolution est très lente, puisque le coefficient de corrélation $C_{i,i+1}$ est très proche de 1, indiquant qu'en 20 s, le milieu a très peu évolué.

Une autre constatation est que le milieu évolue rapidement dans les premières minutes de l'expérience ($C_{i,i+1} \simeq 0.8$ dans les premiers instants), mais qu'au bout de quelques minutes, l'évolution – toujours présente – est beaucoup plus lente ($C_{i,i+1} \simeq 0.98$ au bout de deux minutes).

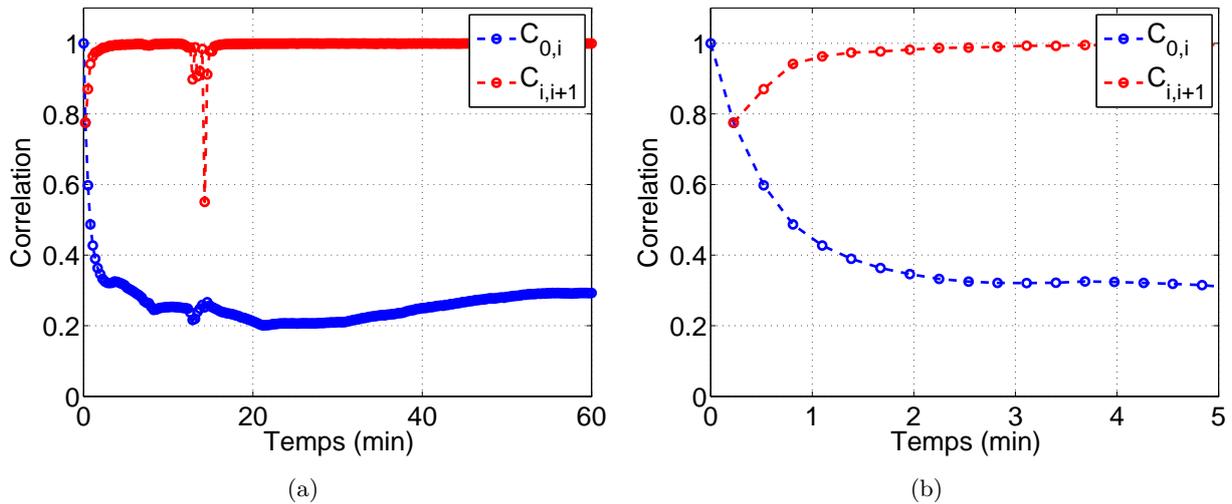


FIGURE 2.8 – Suivi du vieillissement du milieu par inter-corrélation de l'onde transmise. Le coefficient de corrélation $C_{0,i}$ (en bleu) entre un signal transmis à un instant T_0 et le signal transmis à un instant T_i renseigne sur le vieillissement de l'échantillon. Le vieillissement est rapide dans les premières minutes de vie de l'échantillon, mais très lent ensuite. Cela est confirmé par l'évolution du coefficient de corrélation $C_{i,i+1}$ (en rouge) entre les signaux transmis aux instants T_i et T_{i+1} (espacés d'une vingtaine de secondes environ). La figure (b) est un zoom autour des premiers instants de l'expérience.

Nous remarquons par ailleurs que le coefficient $C_{0,i}$ évolue de façon non-monotone, et est en particulier croissant à partir de $t \simeq 30$ min. Cela s'explique par le fait qu'à partir de cet instant,

le signal transmis est très différent du signal transmis à l’instant initial, à cause d’une perturbation externe importante (voir ci-dessous).

Enfin, nous pouvons remarquer une brutale diminution du coefficient $C_{i,i+1}$ au voisinage de l’instant $t \simeq 14$ min, qui est vraisemblablement à attribuer à une perturbation externe à l’expérience : un objet qui tombe sur la table de la cellule. C’est là une preuve de l’extrême sensibilité des ondes multiples diffusées dans les milieux granulaires (effet « sonde »).

Ces résultats confirment le fait qu’un milieu granulaire, d’une part est sensible à de faibles perturbations, et, d’autre part, est sujet au vieillissement. Physiquement, les contacts entre les grains évoluent au cours du temps, et ont tendance à se stabiliser.

La conclusion à tirer est alors que malgré ce vieillissement, notre milieu peut être considéré comme stationnaire sous les deux conditions suivantes : attendre quelques minutes après avoir mis l’échantillon sous contrainte, pour que la dynamique du vieillissement soit assez lente, avant d’effectuer nos expériences ; et effectuer la phase retour de nos expériences de retournement temporel assez rapidement après avoir effectué la phase aller (concrètement, la durée typique entre les deux phases est de l’ordre de la dizaine de secondes). Dans ces conditions, on peut alors considérer que l’état du milieu dans la phase retour est quasi-identique à celui dans la phase aller.

2.1.4 Vérification de la réciprocité spatiale

Le deuxième ingrédient essentiel au bon fonctionnement du retournement temporel est la réciprocité spatiale du milieu (section 1.2.1). Cette hypothèse consiste à dire que pour deux positions \mathbf{r}_A et \mathbf{r}_B dans le milieu, la fonction de Green $G(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B, t)$ enregistrée en \mathbf{r}_B si une source située en \mathbf{r}_A émet une impulsion de type Dirac, est égale à la fonction de Green $G(\mathbf{r}_B, \mathbf{r}_A, t)$ enregistrée en \mathbf{r}_A si une source placée en \mathbf{r}_B émet la même brève impulsion. Dans un milieu réciproque on a alors $G(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B, t) = G(\mathbf{r}_B, \mathbf{r}_A, t)$. Avant de mener nos premières expériences de retournement temporel, nous nous assurons donc tout d’abord que l’hypothèse de réciprocité spatiale est vérifiée dans nos échantillons et dans nos conditions expérimentales.

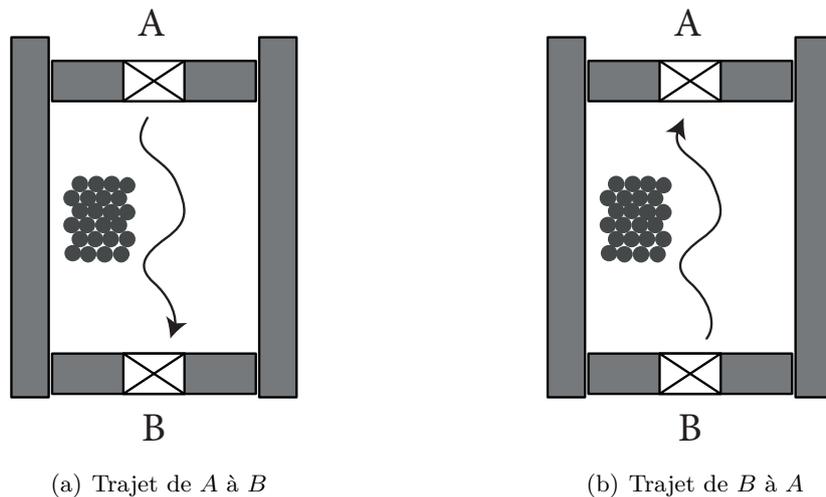


FIGURE 2.9 – Schéma du principe de réciprocité spatiale. Si le milieu est bien spatialement réciproque, les fonctions de Green $G(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B, t)$ et $G(\mathbf{r}_B, \mathbf{r}_A, t)$ enregistrées respectivement (a) de A à B ou (b) de B à A sont les mêmes.

Nous considérons ici un échantillon composé de billes de 1.5 mm placées dans la cellule, sous une contrainte statique de 113 kPa. Nous envoyons une impulsion $e(t)$ constituée d’une période de sinusöide centrée sur 50 kHz et d’amplitude 5 V pic-pic (sans amplification supplémentaire) grâce à un transducteur A situé sur une des faces de la cellule et enregistrons le signal reçu $s_{AB}(t) = G(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B, t) \otimes e(t)$ par un autre transducteur B situé sur la face opposée (figure 2.9(a)). Puis, juste après, sans changer la forme du signal électrique source, nous inversons simplement les branchements entre les deux transducteurs, de manière que le transducteur A (qui était la source) devienne récepteur (nous notons alors $s_{BA}(t) = G(\mathbf{r}_B, \mathbf{r}_A, t) \otimes e(t)$ le signal enregistré), et le transducteur B (qui était

récepteur) devienne la source (figure 2.9(b)). Nous comparons alors les deux signaux $s_{AB}(t)$ et $s_{BA}(t)$ (figures 2.10).

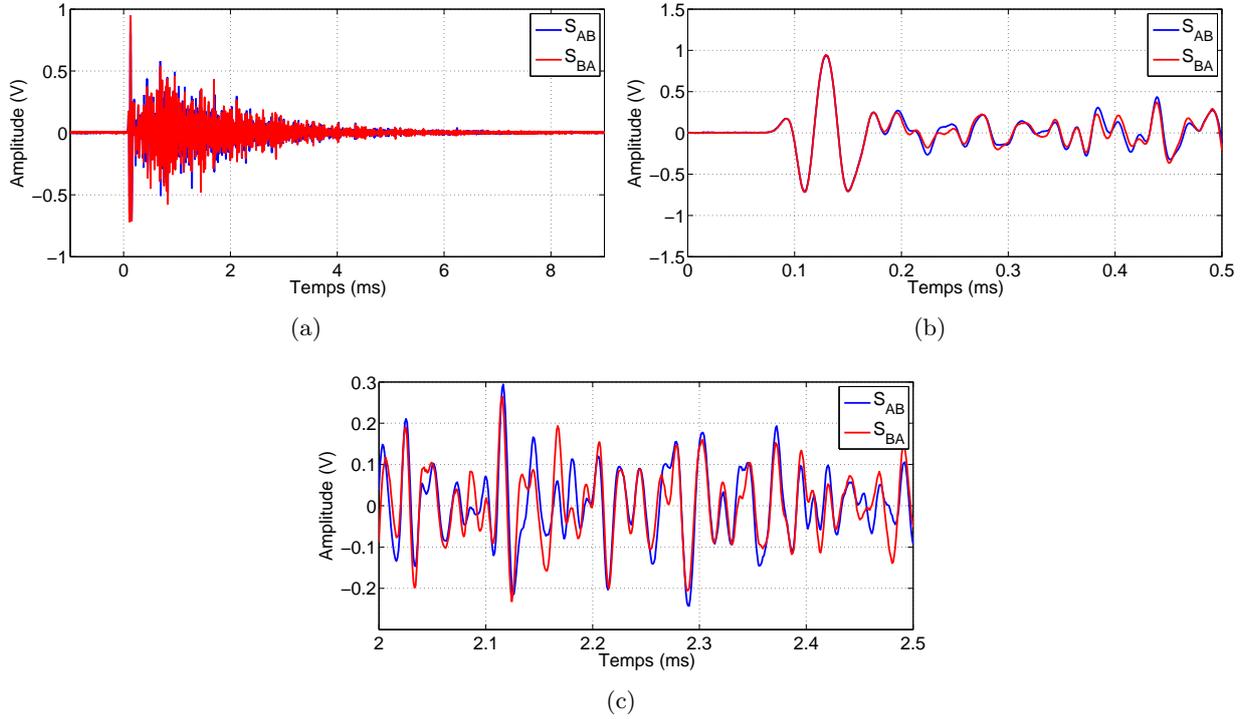


FIGURE 2.10 – Comparaison des ondes directe et réciproque entre deux points A et B d'un milieu granulaire composé de billes de 1.5 mm. (a) Le coefficient de corrélation des deux ondes est de 0.92. (b) On constate que les premières arrivées sont bien identiques mais (c) que les signaux se décorrèlent au fur et à mesure de la propagation.

Nous pouvons constater que les deux signaux sont très proches mais pas tout à fait identiques (coefficient de corrélation de 0.92). Nous attribuons cette légère décorrélacion au vieillissement du milieu entre la phase aller et la phase retour.

De plus, il apparaît que les premières arrivées – l'onde cohérente – se superposent de façon excellente (figure 2.10(b)) et que la décorrélacion croît lorsque l'on regarde les parties plus tardives des signaux – l'onde multiplesment diffusée (figure 2.10(c)). Cela est cohérent avec le fait que l'onde cohérente voit un milieu effectif, et est donc très peu sensible à la configuration exacte du milieu, alors que l'onde multiplesment diffusée est au contraire sensible aux moindres variations du réseau des contacts [Jia99].

Néanmoins, on peut considérer qu'au vieillissement près, on a en première approximation $G(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B, t) = G(\mathbf{r}_B, \mathbf{r}_A, t)$, et donc que le milieu est bien spatialement réciproque.

2.1.5 Retournement temporel monovoie

Maintenant que la stationnarité et la réciprocity spatiale du milieu sont vérifiées, nous nous intéressons à l'opération de retournement temporel à proprement parler.

Nous considérons dans la suite de ce chapitre des billes de 1.5 mm et la même cellule que précédemment, de façon à obtenir une onde composée à la fois d'une onde cohérente et d'une onde multiplesment diffusée (section 1.3.5).

Dans un premier temps, nous n'utilisons qu'un seul élément dans le miroir à retournement temporel sur les seize disponibles et nous nous intéressons à la focalisation spatiale en fonction de l'onde choisie pour le retournement temporel (la totalité de l'onde, uniquement l'onde cohérente, ou uniquement l'onde multiplesment diffusée).

La première étape consiste à envoyer une brève impulsion $e(t)$ (figure 2.11(a)) grâce à un transducteur S_1 (figure 2.12(a)) et à enregistrer le signal $\Psi(t)$ reçu par un transducteur R situé en face. On vérifie que l'onde reçue (figure 2.11(b)) se divise bien en une première arrivée brève, plutôt basses

fréquences (l'onde cohérente), puis une onde beaucoup plus longue et plus hautes fréquences (l'onde multiplement diffusée).

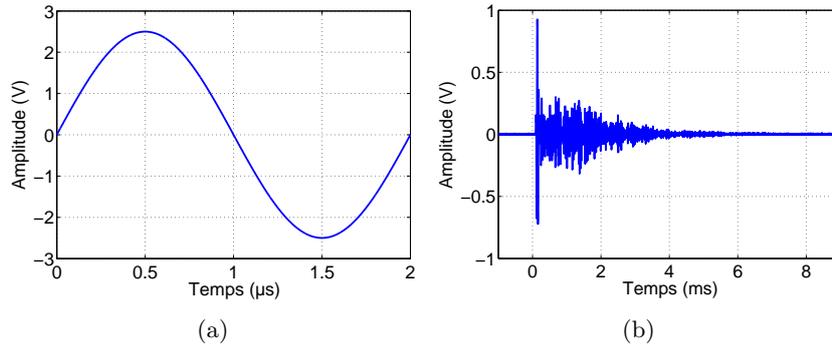


FIGURE 2.11 – Signaux utilisés pour le retournement temporel monovoie dans un milieu granulaire composé de billes de diamètre 1.5 mm sous 113 kPa. (a) Le signal source se compose d'une période de sinusoïde centrée sur 50 kHz (b) le signal reçu présente les caractéristiques habituelles des ondes en milieux granulaires : une brève onde cohérente basse fréquence suivie d'une très longue *coda* plus hautes fréquences.

On peut alors retourner tout ou partie du signal reçu et le renvoyer grâce au transducteur R et enregistrer les signaux reçus par S_1 , S_2 et S_3 pour étudier la focalisation spatiale (figure 2.12(b)) grâce aux trois transducteurs S_1 , S_2 et S_3 .

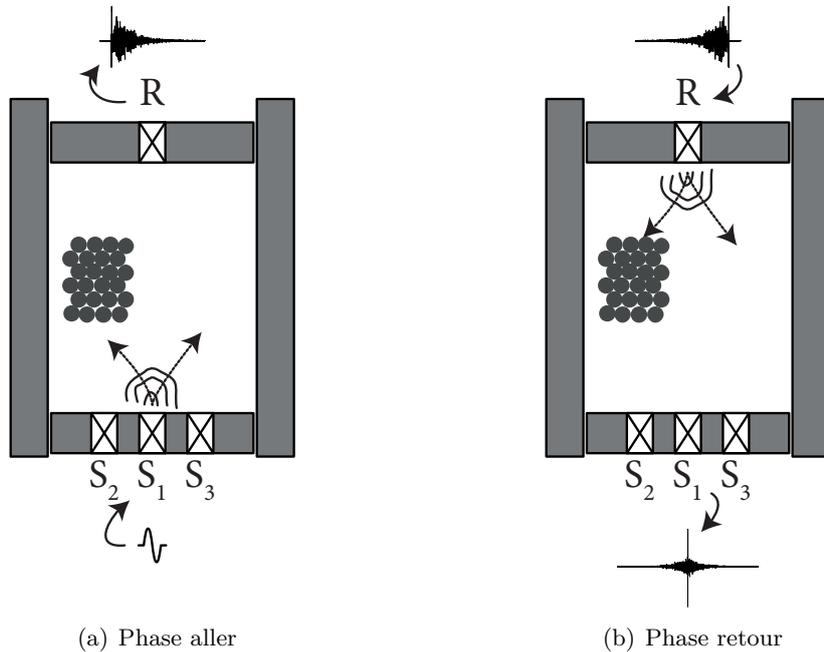


FIGURE 2.12 – Schéma de principe du retournement temporel monovoie dans un milieu granulaire sec. (a) On envoie tout d'abord une brève impulsion grâce à un transducteur S_1 , et l'on enregistre le signal reçu $\Psi(t)$ par un autre transducteur R; (b) on retourne temporellement le signal $\Psi(t)$ et on le renvoie grâce au transducteur R, en enregistrant maintenant l'onde reçue en S_1 , S_2 et S_3 pour étudier la focalisation spatiale.

Avec toute l'onde

Si on renvoie la totalité du signal reçu par R, on obtient bien une recompression temporelle sur le transducteur S_1 (figure 2.13(b)) – nous notons $RT_{\text{COH}+\text{INCOH}}$ le signal reçu par S_1 . Nous constatons cependant qu'il y a aussi un pic de recompression temporelle sur les transducteurs S_2 et S_3

(respectivement figures 2.13(a) et 2.13(c)). Autrement dit, la tache focale recréée à l'issue du retournement temporel est bien centrée sur S_1 comme prévu, mais est légèrement plus grande que la taille du transducteur : au lieu de revenir uniquement à la source (S_1), l'onde « déborde » un peu.

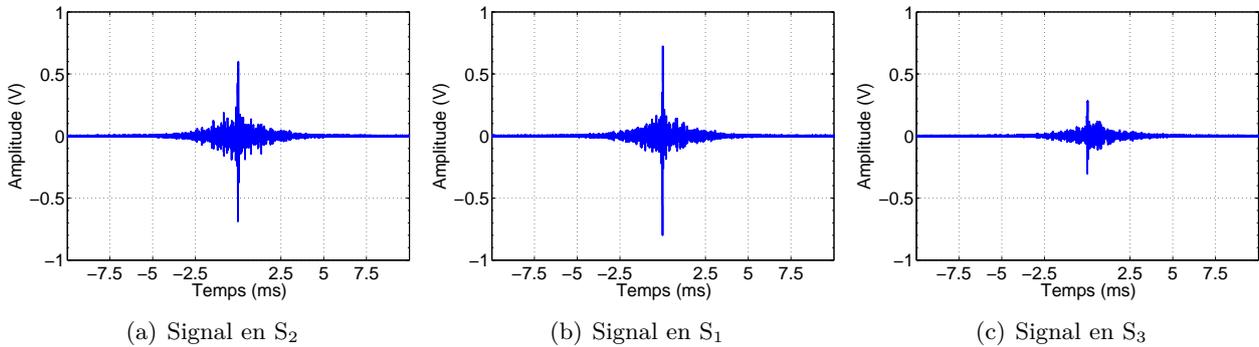


FIGURE 2.13 – Signaux recompressés par retournement temporel en utilisant la totalité de l'onde transmise. (b) L'onde est bien recompressée à la source (a) et (c) mais la tache focale « déborde » sur les transducteurs voisins.

Pour comprendre cela, nous effectuons maintenant l'opération de retournement temporel en renvoyant séparément les ondes cohérente et multiplement diffusée.

Avec l'onde cohérente

Comme expliqué précédemment (sections 1.3.5), l'onde cohérente correspond à l'onde qui se propage de façon balistique dans un milieu effectif. Elle est plus basses fréquences que l'onde multiplement diffusée, et arrive en premier.

Nous isolons donc l'onde cohérente en tronquant temporellement le signal reçu Ψ entre 0 et 0.17 ms (figure 2.14(a) et 2.14(b)). Nous vérifions effectivement que cette dernière correspond à des basses fréquences en comparant son spectre au spectre du signal total (respectivement en rouge et bleu sur la figure 2.14(c)).

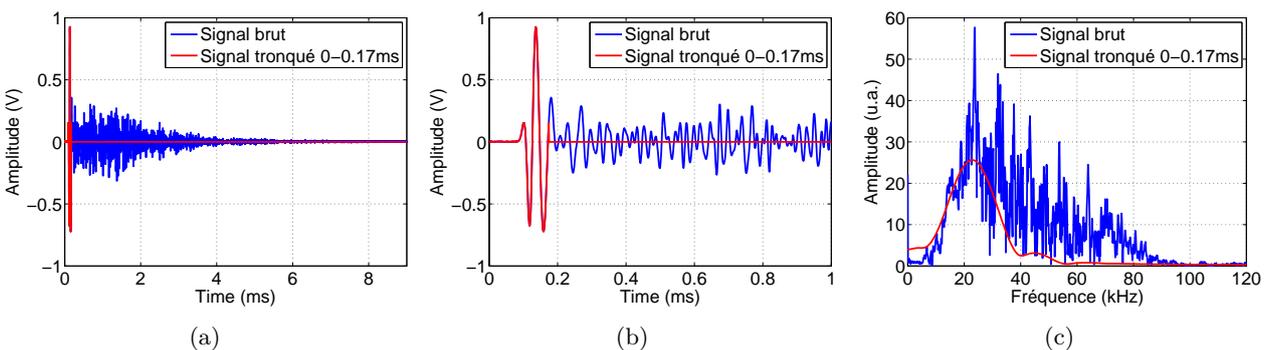


FIGURE 2.14 – Traitement du signal transmis pour isoler l'onde cohérente. (a) et (b) L'onde cohérente est sélectionnée en tronquant le signal reçu entre 0 et 0.17 ms. (c) On vérifie sur les spectres que l'onde cohérente (rouge) correspond à des basses fréquences par rapport au signal entier (bleu).

Nous renvoyons maintenant le signal tronqué *via* le transducteur R et enregistrons les signaux reçus par les transducteurs S_1, S_2 et S_3 (figure 2.15) – nous notons RT_{COH} le signal reçu par S_1 .

Nous constatons qu'il y a bien recompression temporelle sur le transducteur S_1 (figure 2.15(b)) mais aussi sur les transducteurs voisins S_2 et S_3 (respectivement figures 2.15(a) et 2.15(c)). En fait le champ reconstruit n'est pas focalisé mais correspond à celui émis par une source quasi ponctuelle dans un milieu homogène. Nous verrons plus loin la raison de cette absence de focalisation.

De même, la forte asymétrie temporelle des signaux sera expliquée dans la suite.

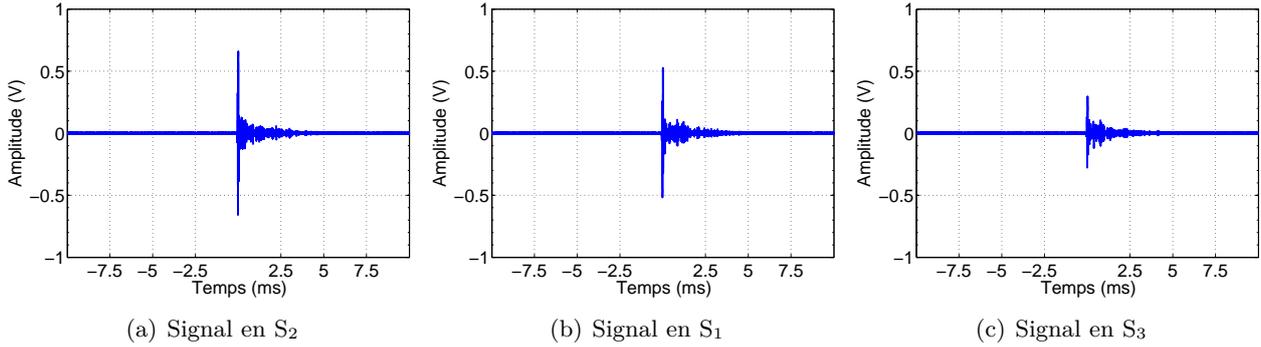


FIGURE 2.15 – Signaux recompressés par retournement temporel en utilisant uniquement l’onde cohérente. (b) L’onde est bien recompressée à la source ; (a) et (c) mais n’est pas focalisée. L’asymétrie temporelle des signaux est expliquée dans le texte.

Avec l’onde multiplement diffusée

Nous voulons maintenant comparer le résultat précédent avec le cas où l’on ne renvoie que l’onde multiplement diffusée.

Comme expliqué, nous séparons cette onde de l’onde totale transmise en tronquant le signal entre 0.17 ms et 9 ms (figures 2.16(a) et 2.16(b)). Nous vérifions que l’onde multiplement diffusée correspond bien aux plus hautes fréquences du signal transmis en comparant les spectres du signal entier et du signal tronqué (respectivement en bleu et rouge sur la figure 2.16(c)).

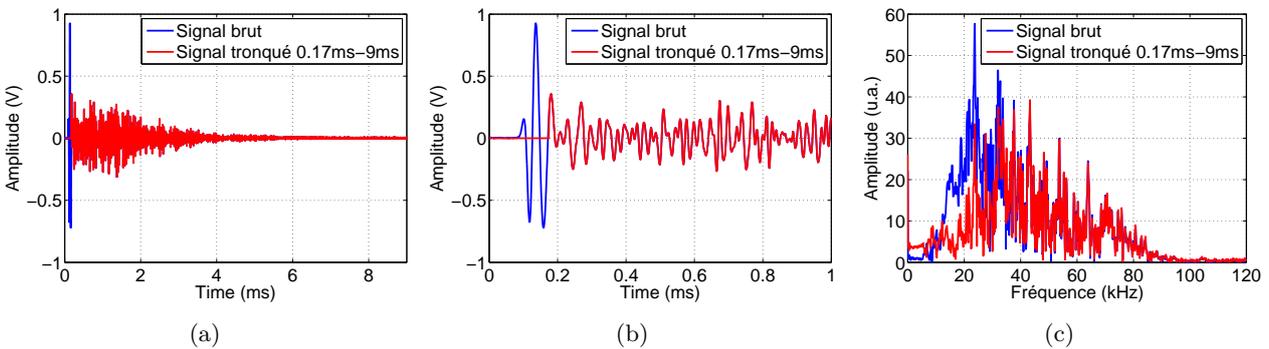


FIGURE 2.16 – Traitement du signal transmis pour isoler l’onde multiplement diffusée. (a)-(b) Le signal est tronqué entre 0.17 ms et 9 ms. (c) On vérifie que l’onde ainsi tronquée correspond aux plus hautes fréquences du signal total.

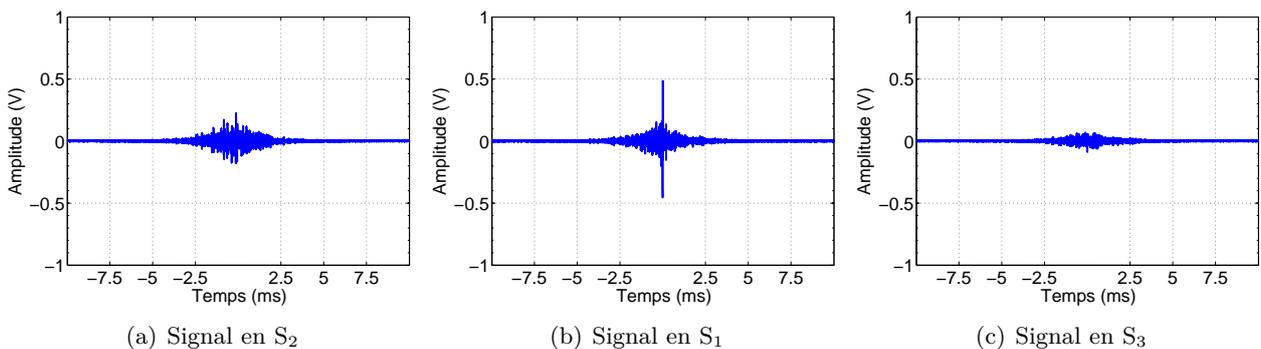


FIGURE 2.17 – Signaux recompressés par retournement temporel en utilisant uniquement l’onde multiplement diffusée. (b) L’onde est bien recompressée à la source (a)-(c) mais cette fois-ci la compression temporelle ne « déborde » pas sur les transducteurs voisins.

Ensuite, nous renvoyons cette onde grâce au transducteur R et enregistrons les trois signaux reçus par S_1 , S_2 et S_3 (figure 2.17) – nous notons RT_{INCOH} le signal reçu par S_1 .

Nous constatons qu'il y a bien recompression temporelle sur S_1 , et que cette fois-ci, aucune recompression temporelle n'est visible sur S_2 et S_3 .

Discussion sur la focalisation spatiale

Comme nous venons de le voir, le retournement temporel avec l'onde cohérente seule mène à un champ non focalisé sur la source S_1 , alors que dans le cas où seule l'onde multiple diffusée est renvoyée, le champ est bien focalisé.

Ce résultat est en accord avec les résultats expérimentaux relatifs au retournement temporel dans des tiges d'acier immergées [Der95] (voir section 1.2.3). En effet, l'onde cohérente correspondant à une onde se propageant dans un milieu homogène, il n'y a pas de redistribution des vecteurs d'onde lors de la propagation et tout se passe alors comme si l'on essayait de faire converger une onde émise par une source ponctuelle dans un milieu homogène (figure 2.18(a)) : c'est impossible et cela mène à une onde non-focalisée, dont l'extension spatiale typique est simplement donnée par la diffraction. Le champ reconstruit dans le plan de la source a alors l'allure d'un sinus cardinal d'extension de l'ordre de $\lambda z/D$, où λ est la longueur d'onde, z la distance entre le miroir et la source, et D la taille du transducteur composant le miroir à retournement temporel (mono-élément). En revanche, la diffusion multiple conduit à une redistribution importante des vecteurs d'onde lors de la propagation, et tout se passe alors comme si au lieu de renvoyer le signal retourné depuis un miroir ponctuel, on l'avait émis depuis un miroir étendu (section 1.2.3) : on peut alors focaliser l'onde (figure 2.18(b)).

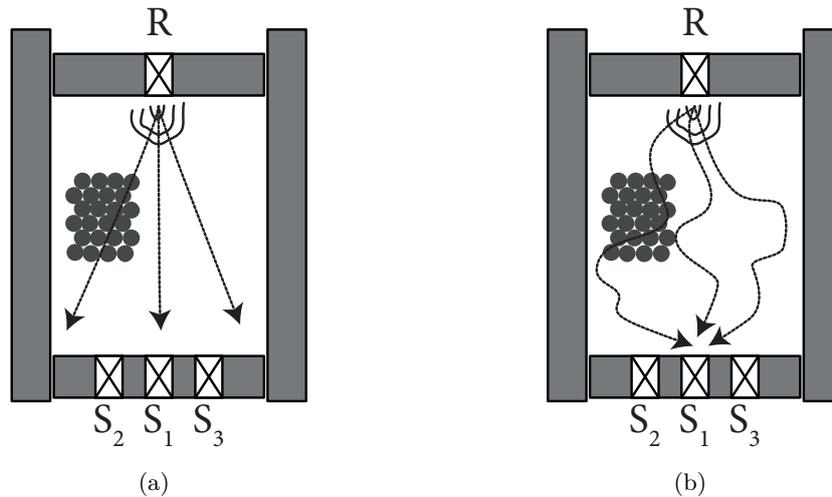


FIGURE 2.18 – Retournement temporel avec les ondes cohérente et multiple diffusée séparément. (a) Ne renvoyer que l'onde cohérente revient à essayer de focaliser une onde dans un milieu homogène : avec un unique élément, c'est impossible. (b) En revanche, l'onde multiple diffusée ayant bénéficié d'une redistribution des vecteurs d'onde, tout se passe comme si au lieu d'une source ponctuelle on avait utilisé une source étendue : il est alors possible de focaliser l'onde.

Comparaison avec le résultat théorique

Nous souhaitons maintenant vérifier que le résultat expérimental du retournement temporel coïncide avec le résultat théorique attendu, à savoir que le signal de recompression obtenu en S_1 correspond à la convolution entre l'autocorrélation de la réponse impulsionnelle et le signal source utilisé pour le retournement temporel (voir section 1.2.1). En d'autres termes, nous voulons vérifier que le processus de retournement temporel effectuée ici est bien linéaire et que :

$$RT_{\text{HF+BF}} = e_- \star h_- \star h \quad (2.3)$$

où :

- e_- est le retourné temporel du signal source e (par définition : $e_-(t) = e(-t)$) utilisé pour le retournement temporel (voir 2.11(a))
- h est la réponse impulsionnelle du milieu (voir 2.7(b))
- h_- est le retourné temporel de h (par définition : $h_-(t) = h(-t)$).

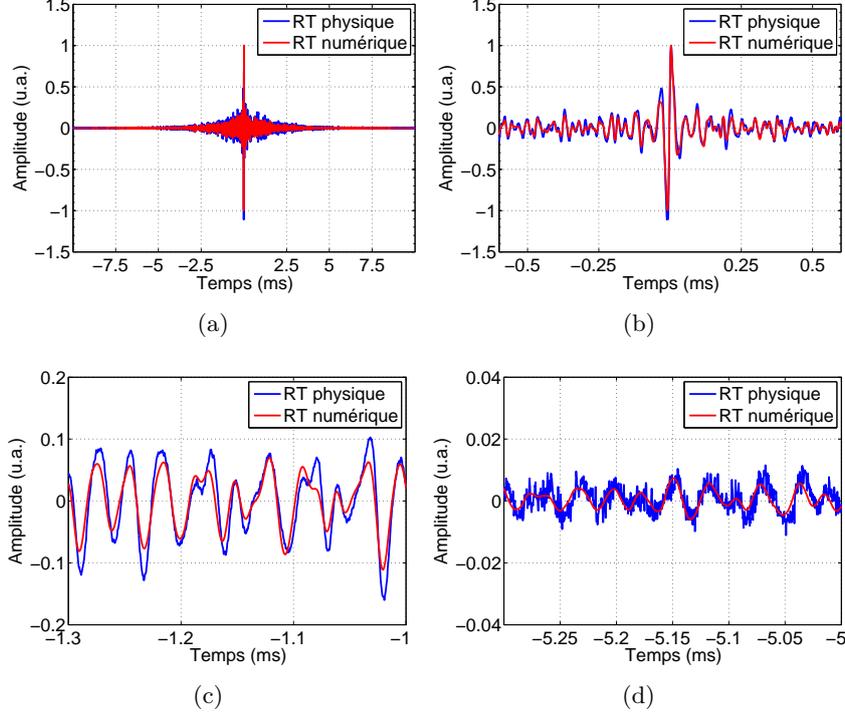


FIGURE 2.19 – Comparaison entre le retournement temporel « physique » (courbe bleue) et le retournement temporel « numérique » (courbe rouge). (a) Intégralité du signal de recompression. (b) Zoom autour de l’instant focal. (c) et (d) Zooms sur des instants en dehors du temps focal. Nous constatons que le résultat de l’opération de retournement temporel « physique » (renvoyer effectivement le signal enregistré) coïncide de façon excellente avec le retournement temporel « numérique » (calculer le produit de convolution $e_- \star h_- \star h$).

Nous pouvons constater (figure 2.19) que le signal de recompression temporel issu de l’expérience « physique » (courbe bleue) coïncide très bien avec le résultat attendu par une opération de retournement temporel « numérique » (courbe rouge), et ce même pour des temps tardifs par rapport à l’instant de recompression (voir par exemple la figure 2.19(d)). Cela est une preuve que les « lobes » de recompression ne sont pas du bruit mais sont bien déterministes et liés à l’autocorrélation de la réponse impulsionnelle ($h \star h_-$) et au signal source utilisé (e) (voir section 1.2.1).

Nous vérifions par ailleurs que la somme des signaux de recompression RT_{COH} et RT_{INCOH} respectivement obtenus en renvoyant les ondes cohérente et multiples diffusées séparées est égale au signal de recompression $RT_{\text{COH+INCOH}}$ obtenu lorsque l’intégralité du signal est renvoyé (figure 2.20). Cela confirme la linéarité du processus.

Influence de la fenêtre retournée

Nous nous intéressons maintenant à l’influence de la fenêtre temporelle choisie pour effectuer l’opération de retournement temporel. Nous travaillons toujours sur le signal Ψ , mais en renvoyant une tranche temporelle choisie de plus en plus grande à partir de $t = 0$. Les tranches renvoyées sont de la forme $[0, 0.2 \text{ ms}]$, $[0, 0.4 \text{ ms}]$, jusqu’à $[0, 7 \text{ ms}]$ (figure 2.21).

Nous constatons que même pour des tranches très petites (par exemple la tranche $[0, 0.2 \text{ ms}]$, voir 2.21(a) et 2.21(b)) le pic de recompression est bien visible. Cependant, le signal de recompression est très asymétrique. En effet, si l’on commence à renvoyer une tranche du type $[0, \Delta_T]$ à un instant $t = t_0$, on doit s’attendre à observer un pic de recompression au voisinage de l’instant $t = t_0 + \Delta_T$, avec des

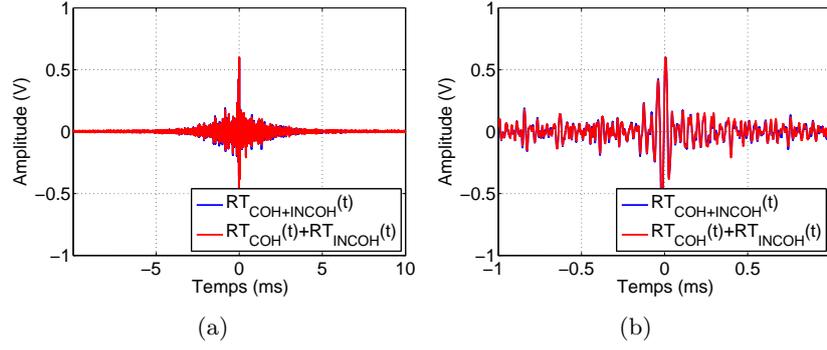


FIGURE 2.20 – Vérification de la linéarité du retournement temporel : la somme des deux signaux de recompression RT_{COH} et RT_{INCOH} obtenus respectivement avec les ondes cohérente et multiplement diffusées est bien égale au signal de recompression $RT_{\text{COH+INCOH}}$ obtenu en retournant l'intégralité du signal. Cela confirme la linéarité du processus.

lobes ne pouvant pas commencer avant l'instant $t = t_0$ pour des raisons de causalité. Si maintenant nous décalons l'axe des temps de façon à ce que l'instant de recompression corresponde à $t' = 0$ (c'est-à-dire que nous soustrayons Δ_T à tous les temps), comme c'est le cas sur les courbes présentées ici, nous obtenons alors un signal qui est strictement nul – au bruit expérimental près – avant $t' = -\Delta_T$, puis qui présente des lobes croissant à partir de $t' = -\Delta_T$, ensuite le pic de recompression en $t' = 0$ (par définition du nouvel axe des temps t'), finalement suivi par les lobes décroissants (à cause de la dissipation).

Ainsi, pour de faibles valeurs de Δ_T , le pic de recompression présente une forte asymétrie, pour une raison fondamentale de causalité. En augmentant la valeur de Δ_T , la contribution au pic pour des valeurs négatives de t' augmente, rendant le signal de recompression de plus en plus symétrique.

Enfin, pour de grandes valeurs de Δ_T , utiliser une fenêtre plus longue du type $[0, \Delta_T + \delta_T]$ n'a que peu d'influence sur le signal recompressé (comparer les figures 2.21(j) et 2.21(l)). En effet, aux temps longs, le signal transmis de la fenêtre $[\Delta_T, \Delta_T + \delta_T]$ présente une amplitude réduite par la dissipation dans la phase aller, d'un facteur environ $e^{-\beta\Delta_T}$ (où β est le coefficient de dissipation) par rapport à l'amplitude source. Lors du renvoi de la fenêtre, la contribution de cette petite tranche additionnelle, déjà petite car la tranche est tardive, est encore réduite par la propagation dans la phase retour. Au final, la contribution de la petite fenêtre additionnelle $[\Delta_T, \Delta_T + \delta_T]$ est pondérée par un facteur $e^{-2\beta\Delta_T}$ dans le signal de recompression, la rendant négligeable par rapport aux zones moins tardives de la tranche. Cela est confirmé par le tracé de l'évolution de l'amplitude du pic en fonction de la taille de la fenêtre Δ_T (figure 2.22(a)).

Par ailleurs, nous constatons aussi que le rapport entre l'amplitude du pic de recompression et l'écart-type du signal en dehors de l'instant focal (fenêtre $[0.2, 4 \text{ ms}]$), qui quantifie la qualité de la recompression temporelle, augmente lui aussi avec le temps, puis finit par saturer (figure 2.22(b)). Cela est en accord avec des résultats précédents [Der94]. En effet, plus la fenêtre retournée est grande et plus le signal enregistré contient d'informations sur l'onde, ce qui augmente la probabilité de retour à la source. On peut alors montrer [Der94] que le rapport pic/lobes évolue en $\propto \sqrt{\Delta_T}$ (le pic croissant en $\propto \Delta_T$ et les lobes en $\propto \sqrt{\Delta_T}$). Pour des fenêtres très grandes, le rapport sature à cause de la dissipation, comme expliqué ci-dessus. Enfin, notons que pour les fenêtres tout au début du signal le rapport pic à lobes est à peu près constant, car dans ce cas seule l'onde cohérente est renvoyée.

2.1.6 Retournement temporel multivoies

Nous voulons maintenant tirer parti du réseau de transducteurs dont nous disposons pour le miroir à retournement temporel. Nous envoyons donc une impulsion composée de trois périodes (de façon à obtenir préférentiellement des ondes multiplement diffusées) de sinusoides de fréquence centrale 50 kHz, avec le transducteur central de la face inférieure (S_1), et nous enregistrons les signaux reçus par les 16 transducteurs de la face supérieure. Nous filtrons alors les signaux entre 35 kHz et 65 kHz, les retournons temporellement, et les renvoyons, en ne connectant qu'un nombre limité de transducteurs,

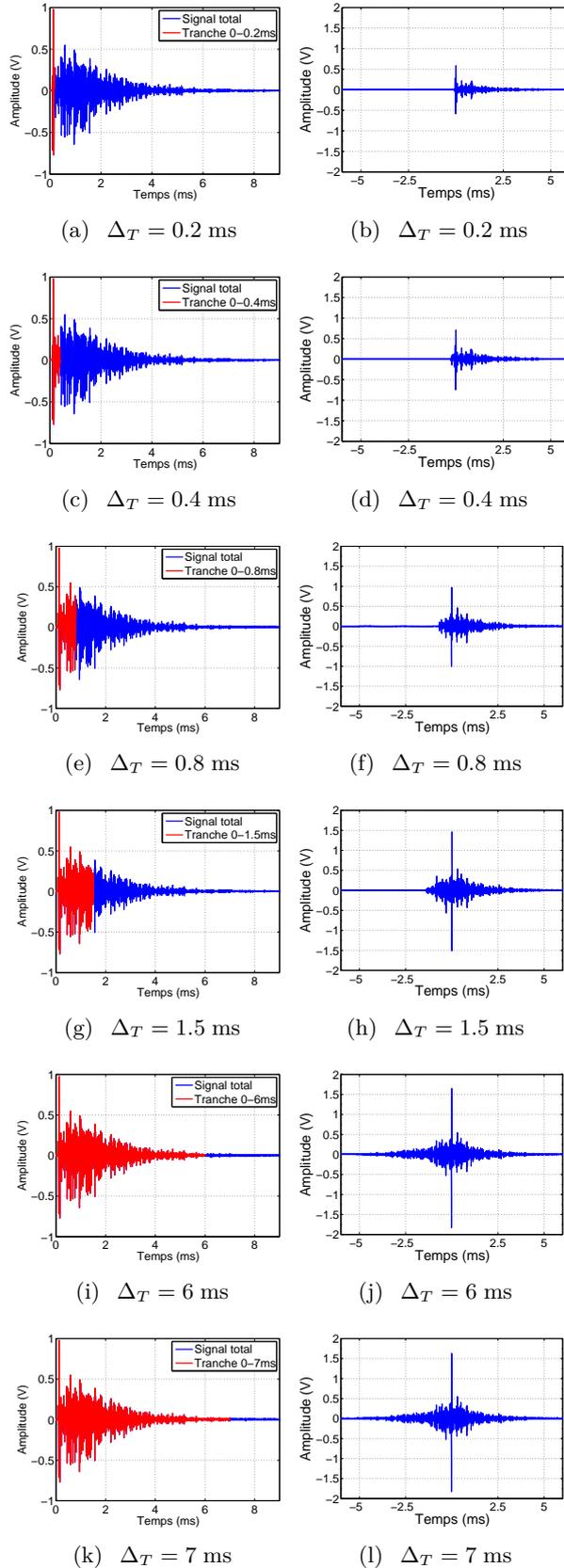


FIGURE 2.21 – Retournement temporel monovoie par tranches temporelles de la forme $[0, \Delta_T]$. La première colonne montre les tranches utilisées, et la seconde colonne montre les signaux recompressés correspondant. (a)-(f) Nous constatons que pour des petites fenêtres aux temps courts, il y a bien un pic de recompression, qui est cependant très asymétrique. (g)-(l) Lorsque Δ_T augmente, le pic de recompression devient de plus en plus symétrique. Cela est lié à la causalité et expliqué plus en détail dans le texte. De plus, plus Δ_T est grand et plus l'amplitude du pic est importante, signe que la probabilité de retour à la source augmente.

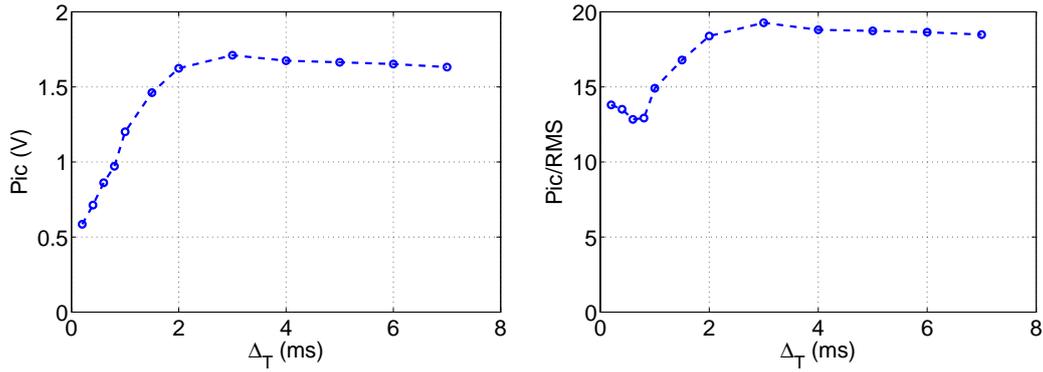


FIGURE 2.22 – Évolution du retournement temporel en fonction de la longueur Δ_T de la fenêtre renvoyée. (a) Plus la fenêtre temporelle renvoyée est grande et plus l’amplitude du pic de recompression augmente. Cette dernière finit par saturer à cause de la dissipation. (b) De même, le rapport entre l’amplitude du pic de recompression et l’écart type des lobes augmente, car la fenêtre contient alors plus d’informations sur le champ, ce qui augmente la probabilité de retour à la source.

en prenant le soin d’enregistrer le pic de recompression en S_1 pour chaque nombre de transducteur testé. Les transducteurs sont connectés dans l’ordre indiqué par la figure 2.23 et il est à noter qu’ils ne sont pas tous à la même distance de la source S_1 et donc ne reçoivent pas tous la même intensité acoustique (les quatre premiers transducteurs reçoivent plus d’énergie que les suivants).

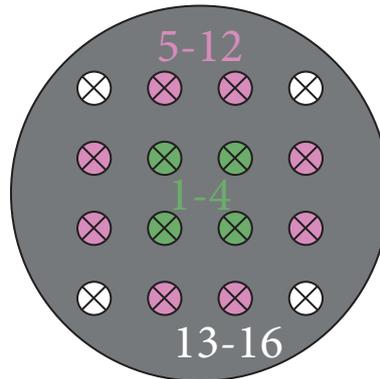


FIGURE 2.23 – Numérotation des transducteurs composant le miroir à retournement temporel. Les quatre premiers transducteurs (en vert) sont situés au centre du miroir, donc juste en face de la source, et reçoivent donc plus d’énergie acoustique que les transducteurs périphériques (en rose et blanc).

Comme nous pouvons le constater sur la figure 2.24, plus il y a de transducteurs dans le miroir à retournement temporel et plus l’amplitude du pic augmente. Cela se comprend aisément en considérant que chaque élément du miroir à retournement temporel contribue à créer un pic de recompression en S_1 . Le champ total produit en S_1 lors de l’ajout de transducteurs est alors simplement la superposition linéaire des différents champs créés par chacun des éléments du miroir, qui correspondent tous à un pic de recompression à l’instant focal. Ainsi, le champ total créé doit croître linéairement avec le nombre d’éléments dans le miroir à retournement temporel.

Si nous traçons l’amplitude du pic en fonction du nombre d’éléments dans le miroir (figure 2.25(a)), nous constatons effectivement une croissance linéaire par morceaux. La rupture de pente correspond à l’ajout du cinquième transducteur, qui est le début de la série des transducteurs périphériques (voir figure 2.23), qui reçoivent moins d’énergie que les quatre premiers transducteurs centraux. Les quatre premiers transducteurs créent donc chacun des pics de recompression plus grands que les transducteurs périphériques, ce qui mène à une croissance plus rapide au début de la courbe qu’à la fin.

De même, nous pouvons tracer l’évolution du rapport entre l’amplitude du pic et l’écart-type du signal de recompression en dehors de l’instant focal (en rouge sur la figure 2.24). Ce rapport quantifie la qualité de la recompression temporelle, puisqu’il renseigne sur la façon dont le pic de

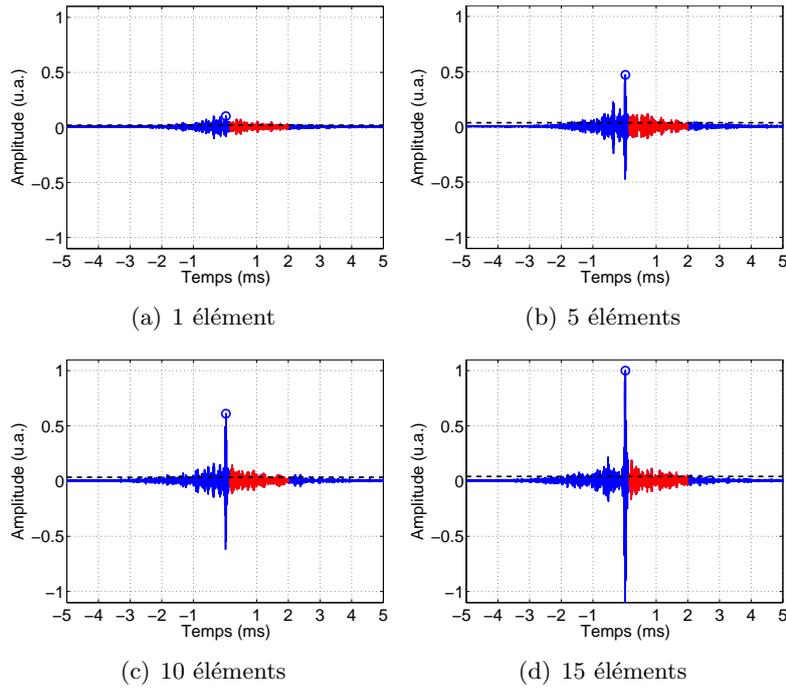


FIGURE 2.24 – Influence du nombre d'éléments dans le miroir à retournement temporel sur le signal de recompression. Sur chaque figure est indiquée en rouge la fenêtre dans laquelle l'écart-type des lobes est évalué. Ce dernier est indiqué par les traits horizontaux pointillés. Le pic de recompression est mis en évidence grâce à un marqueur circulaire bleu. Nous constatons logiquement que plus le nombre d'éléments dans le miroir à retournement temporel est important et plus l'amplitude du pic de recompression est importante. En effet, chaque élément du miroir à retournement temporel participe à la création d'un petit pic de recompression à la source, et les pics de recompression créés par chacun des éléments se somment de façon cohérente à l'instant focal.

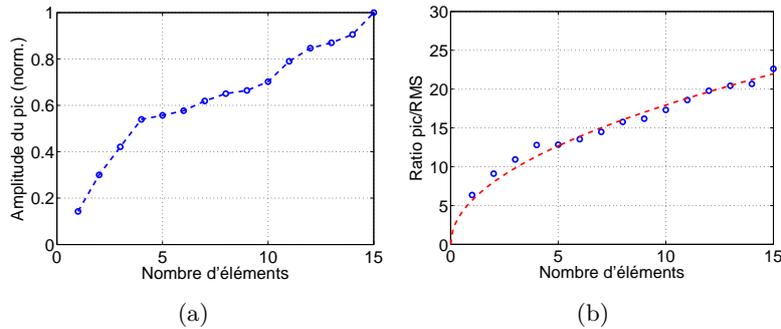


FIGURE 2.25 – Influence du nombre d'éléments dans le miroir à retournement temporel sur l'amplitude du pic de recompression et la qualité de la recompression temporelle. (a) L'amplitude du pic croît de façon linéaire par morceaux. Cela est dû au fait que les transducteurs ne sont pas tous situés à la même distance de la source, et donc reçoivent une intensité acoustique différente (voir texte et figure 2.23). (b) La qualité de la recompression temporelle, quantifiée par le rapport entre l'amplitude du pic de recompression et l'écart-type des lobes, croît proportionnellement à la racine du nombre d'éléments dans le miroir (pointillés rouges). Cela prouve que tous les éléments de notre miroir à retournement temporel reçoivent bien chacun des champs acoustiques décorrélés entre eux.

recompression se démarque du reste du signal temporel. Comme nous pouvons le constater (figure 2.25(b)), le rapport croît proportionnellement à \sqrt{n} , où n est le nombre d'éléments dans le miroir (courbe en pointillés rouges). Cela est consistant avec le fait que plus il y a d'éléments dans le miroir à retournement temporel et plus nous enregistrons d'informations sur le champ acoustique, ce qui augmente la probabilité de retour de l'onde à la source S_1 . En effet, chaque élément contribue à créer

un signal recompressé sur la source, constitué d'un signal incohérent en dehors du temps focal, et d'un signal cohérent au voisinage de l'instant focal $t = 0$. Lors de l'ajout d'éléments dans le miroir, les différents signaux de recompression se somment donc de façon incohérente en dehors de l'instant focal (et donc la somme croît en $\propto \sqrt{n}$), et les pics de recompression se somment de façon cohérente (et donc la somme croît en $\propto n$). Le rapport entre le pic et les lobes augmente donc en $n/\sqrt{n} = \sqrt{n}$.

Enfin, nous pouvons noter que le rapport ne sature pas, ce qui indique que notre miroir à retournement temporel est bien conçu, dans le sens où chaque élément participe à l'amélioration de la qualité de la recompression. En effet, si nous avons par exemple trop d'éléments, ou des éléments trop proches (plus proches que $\lambda/2$), ces derniers enregistreraient des signaux corrélés, et donc contribueraient certes à augmenter l'amplitude du pic, mais aussi à augmenter l'amplitude des lobes dans le même rapport, ce qui n'augmenterait pas la qualité de la recompression (elle resterait constante). Nous pourrions donc encore augmenter la qualité de la recompression en rajoutant des transducteurs, non pas sur la face supérieure (qui en est déjà recouverte), mais sur la face latérale, par exemple.

2.2 Simulation numérique

En l'absence de modèle analytique pour décrire la propagation des ondes dans les milieux granulaires (en particulier l'onde multiples diffusée), nous mettons en œuvre une simulation numérique dans le but de nous aider à mieux comprendre nos résultats expérimentaux. Après avoir introduit les principales méthodes numériques existantes, nous présentons notre modèle et ses caractéristiques, vérifions sa pertinence pour décrire la transmission d'une onde, puis mettons en application la technique du retournement temporel en régime linéaire.

Le modèle sera ensuite ré-utilisé dans le chapitre 3 pour décrire le transport dans les milieux granulaires et apporter un regard nouveau sur des résultats expérimentaux antérieurs, et dans le chapitre 4 pour modéliser le retournement temporel en régime non-linéaire.

2.2.1 Principales méthodes existantes

Deux grandes familles de méthodes existent pour simuler la dynamique d'un système granulaire : les méthodes en éléments discrets (« Discrete Element Methods », ou DEM) et les méthodes basées sur la dynamique moléculaire (« Molecular Dynamic », ou MD).

Comme son nom l'indique, la première famille de méthodes repose sur la simulation du mouvement d'un grand nombre de particules discrètes élastiques, modélisées par des masses reliées par des ressorts (normaux et/ou tangentiels). Introduites par Cundall et Strack¹ dans les années 70 [Cun71, Cun79], ces méthodes modélisent les forces entre grains de façon explicite, et ce au niveau du *contact* entre les grains (généralement de type Hertz-Mindlin). L'astuce essentielle des DEM consiste à choisir un pas de temps suffisamment petit pour pouvoir considérer qu'une perturbation ne se propage pas sur une distance plus grande qu'un grain entre deux pas de temps. Cette hypothèse permet de rendre le schéma numérique explicite. À un pas de temps t_i donné, les forces (accélérations) sont calculées grâce aux positions des grains, *via* une relation force-déplacement donnée (typiquement du type force de rappel d'un ressort), puis les grains déplacés par double intégration de la seconde loi de Newton. Il est à noter que les grains peuvent avoir des tailles et des formes variées, et que de la dissipation (friction) peut être introduite [Rin12]. De plus, les grains peuvent tourner sur eux-mêmes. Ces méthodes se sont montrées pertinentes pour étudier les propriétés mécaniques des milieux granulaires (module élastique [Mak99], réseau de forces [Rad96, Ost06, Kon12], etc.) et ont notamment été utilisées pour simuler la propagation des ondes élastiques dans ces milieux [Som05].

La deuxième famille de méthodes est issue du monde de la chimie physique [Ald59]. Ces méthodes modélisent elles aussi un ensemble de particules discrètes, mais – contrairement aux DEM – en interaction *via* un potentiel, déduit de principes fondamentaux, ou de façon empirique. Par définition,

1. En toute rigueur, on pourrait attribuer à Fermi, Pasta, Ulam et Tsingou [Fer55] la première simulation DEM – qui est aussi considérée comme la première simulation numérique en général. Ces derniers ont en effet étudié au début des années 50 la relaxation thermique d'un cristal en modélisant le comportement non-linéaire d'une chaîne unidimensionnelle de masses (64 au maximum) reliées par des ressorts. Voir [Dau05] pour une revue historique à ce sujet.

ces dernières s'appliquent très bien aux systèmes atomiques ou moléculaires. Cependant, elles ne s'appliquent qu'à des éléments sphériques ou cylindriques, et ne peuvent pas rendre directement compte des phénomènes liés à la friction.

2.2.2 Description du modèle : système masses-ressorts percolé

Les fréquences utilisées dans nos expériences étant bien inférieures aux fréquences de résonance des billes individuelles (≈ 1 MHz), nous pouvons modéliser nos empilements granulaires comme des réseaux désordonnés de masses ponctuelles reliées par des ressorts (voir section 1.3.5). Nous avons donc fait le choix de baser nos simulations numériques sur un système "toy model" 2D masses-ressorts percolé (de la famille des DEM, donc), inspiré de celui utilisé par Sheng et Zhou [She91] pour modéliser la diffusion thermique dans les solides amorphes et celui proposé par Leibig [Lei94] pour modéliser la propagation du son dans les matériaux granulaires et les phénomènes de localisation. Ce type de modèle a aussi été utilisé par Feng et al. au milieu des années 80 pour étudier les propriétés mécaniques macroscopiques des systèmes percolés [Fen84a, Sch84, Fen84b, Fen85, Fen87]. Nous verrons que ce modèle « naïf » permet de rendre compte qualitativement de la majorité des phénomènes expérimentaux que nous mettons en évidence dans cette thèse, tout en limitant la complexité du modèle.

Le code de la simulation a été entièrement développé et implémenté par mes soins (l'annexe A montre les fonctions principales), et a l'avantage de pouvoir être exécuté sur un ordinateur de bureau classique. Il permet de simuler la propagation dans le domaine temporel d'une brève impulsion dans un réseau de plusieurs milliers de masses et ce en quelques dizaines de secondes. De plus, contrairement à la plupart des autres codes existants, il simule la propagation des ondes *vectorielles*. Cette propriété est bien sûr d'importance au vu des ondes *élastiques* (polarisées) qui nous intéressent dans les milieux granulaires.

Équation dynamique

Dans ce modèle, nous assimilons les grains d'un empilement granulaire à des masses ponctuelles en interaction *via* des ressorts linéaires, éventuellement soumises à de la dissipation frictionnelle. Une masse i obéit alors à l'équation de la dynamique :

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \sum_{i' \in V_i} K_{ii'} (r_{ii'} - a_0) \frac{\mathbf{r}_{ii'}}{r_{ii'}} + \sum_{i'} \beta \left(\frac{d\mathbf{r}_{i'}}{dt} - \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right) \quad (2.4)$$

où :

- m est la masse des particules (la même pour toutes les particules). Dans toute la suite, on prendra $m = 1$.
- \mathbf{r}_i est le vecteur position de la masse i
- V_i est l'ensemble des masses voisines de la masse i (en général, V_i est un ensemble à 8 éléments)
- $K_{ii'}$ est la raideur du ressort reliant les masses i et i' (pouvant varier d'un ressort à l'autre)
- $r_{ii'} = \|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'_i\|$ est la distance entre les masses i et i'
- a_0 est la longueur à vide des ressorts (la même pour tous les ressorts). Dans toute la suite, on prendra $a_0 = 1$.
- β est un coefficient régissant la dissipation frictionnelle entre les masses.

L'équation (2.4) est en fait la version vectorielle et linéarisée de l'équation correspondant à la chaîne de billes présentée au chapitre introductif (équation (1.34)). Sauf mention contraire, nous nous restreindrons en effet au régime où le déplacement dynamique des masses est négligeable devant l'écrasement statique.

La propagation d'une onde dans le milieu granulaire correspond alors au déplacement des masses induit par la mise en mouvement d'une ou plusieurs masses choisies comme sources. On peut alors suivre la propagation de l'onde en intégrant simplement l'équation 2.4 de façon itérative (méthode d'Euler).

Structure du réseau

Bien que l'équation (2.4) soit indépendante de la dimension du réseau, nous effectuons deux simplifications importantes concernant la structure de ce dernier pour faciliter l'implémentation numérique.

Tout d'abord, nous nous restreignons à un système 2D dont les masses peuvent se déplacer dans un plan (O, x, y) (figure 2.26(a)). Même s'il est clair que cette simplification a des conséquences sur les propriétés des ondes (transport et diffusion multiple, notamment), nous verrons que les simulations bi-dimensionnelles donnent des résultats avec un bon accord qualitatif par rapport aux expériences. La propagation d'une onde dans le réseau correspond donc aux déplacements de toutes les masses selon les axes x et y .

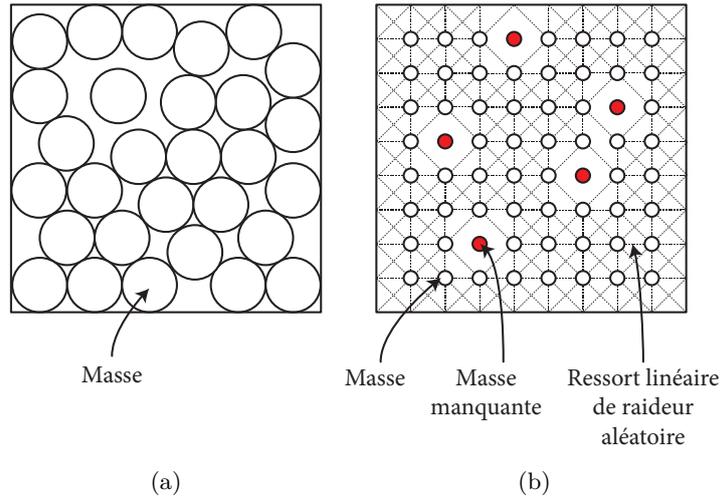


FIGURE 2.26 – Modèle utilisé pour la simulation numérique. (a) Une première approximation consiste à se restreindre à des échantillons de dimension deux. (b) Le modèle consiste alors à assimiler les grains de l'empilement à des masses ponctuelles en interaction *via* des ressorts linéaires de raideurs aléatoires. Pour faciliter l'implémentation, les masses sont prises sur un réseau carré. Le désordre sur la position des masses est alors modélisé en retirant de façon aléatoire des masses au réseau.

Ensuite, nous modélisons le désordre structurel d'un empilement granulaire « réel » en partant d'un réseau régulier carré auquel l'on retire certaines masses avec une probabilité p , de façon à obtenir *in fine* un réseau percolé (figure 2.26(b)). Cela permet de simplifier très fortement l'implémentation numérique, car dans ce cas, il est possible d'organiser toutes les variables (statiques ou dynamiques) relatives aux masses et ressorts (déplacements, forces, raideurs, etc.) dans des matrices qui coïncident de façon biunivoque avec la topologie du réseau des masses. Les masses manquantes font alors partie des matrices, mais n'interviennent pas dans les calculs.

Un exemple de réseau 70×70 utilisé dans nos simulations est donné en figure 2.27.

Désordre des contacts

Nous modélisons le désordre sur les contacts entre les billes 1.3.5 par un désordre sur les *raideurs* des ressorts reliant les masses (figure 2.28).

Comme expliqué dans le chapitre introductif (section 1.3.5), c'est par les contacts entre les billes que les ondes se propagent dans le milieu. Makse et al. [Mak00] ont montré que dans un empilement de sphères comprimées, la distribution des forces entre les grains est exponentiellement décroissante avec la force, à basse contrainte de confinement, et devient gaussienne – beaucoup plus piquée – à haute contrainte. De plus, comme les raideurs des contacts sont proportionnelles aux forces à la puissance $1/3$ (voir section 1.3.5), la distribution des raideurs est plus piquée que celle des forces.

Au final, pour simplifier, nous décidons donc d'utiliser une distribution uniforme pour les raideurs K_{ij} centrée autour d'une valeur moyenne K_0 . Sauf mention contraire, la distribution est prise entre 0.5 et 1.5, et donc on aura $K_0=1$.

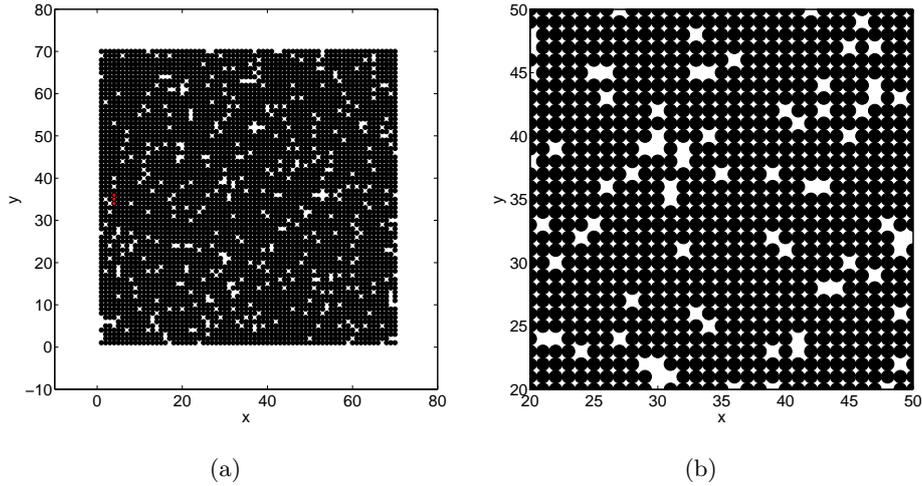


FIGURE 2.27 – Un exemple de réseau utilisé dans nos simulations, avant mise sous tension et application de l'équation dynamique. Dans cet exemple, la probabilité de présence d'une masse en un site (percolation) est de $p = 0.91$. Il faut noter que les masses se trouvent toujours sur le maillage régulier du réseau, malgré les masses retirées, car l'équation de la dynamique n'a pas encore été appliquée. La figure (b) représente un zoom autour du centre du réseau.

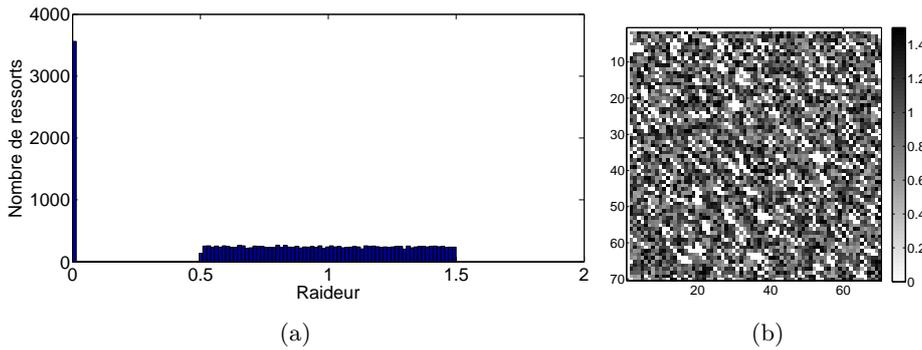


FIGURE 2.28 – Distribution typique des raideurs des ressorts. (a) Sauf mention contraire, on utilise une distribution uniforme entre 0.5 et 1.5. L'excès de ressorts de raideurs nulles correspond aux masses manquantes : pour enlever une masse du réseau, on annule simplement les raideurs des huit ressorts l'entourant. (b) Représentation de la distribution spatiale des raideurs pour les ressorts de la direction bas-gauche pour une configuration particulière.

Pré-contrainte dans le réseau

Avant d'envoyer des ondes dans le milieu, nous voulons d'abord le mettre sous tension, ce qui permet alors à ce dernier d'avoir une réponse élastique tangentielle. Ainsi, à partir du réseau initial « gelé » (figures 2.27(a) et 2.27(b)), on tire les quatre murs du domaine vers l'extérieur, en suivant les normales aux murs, de façon à imposer une déformation statique $\varepsilon = 0.2$. Une fois les murs déplacés, on laisse le réseau se relaxer suivant l'équation dynamique (2.4) en imposant une dissipation frictionnelle (coefficient β). On attend alors suffisamment longtemps pour que l'amplitude de vibration des masses devienne négligeable devant les amplitudes étudiées dans la suite (les ondes étudiées par la suite ayant une amplitude de l'ordre de $0.1a_0$, on attend que l'amplitude de vibration résiduelle du réseau soit de l'ordre de $10^{-7}a_0$); on considère alors que le réseau est à l'équilibre, et son état constitue alors notre milieu de propagation à proprement parler.

Après la phase de relaxation, on obtient donc un réseau tendu désordonné (figure 2.29). On note \mathbf{r}_i^0 les positions des masses à l'issue de la phase de relaxation et avant propagation d'une onde.

La figure 2.30 présente un exemple d'état typique de réseau après mise sous tension : le champ de déplacement u^x (resp. u^y) en figure 2.30(a) (resp. figure 2.30(b)) et du^x/dt (resp. du^y/dt) en figure

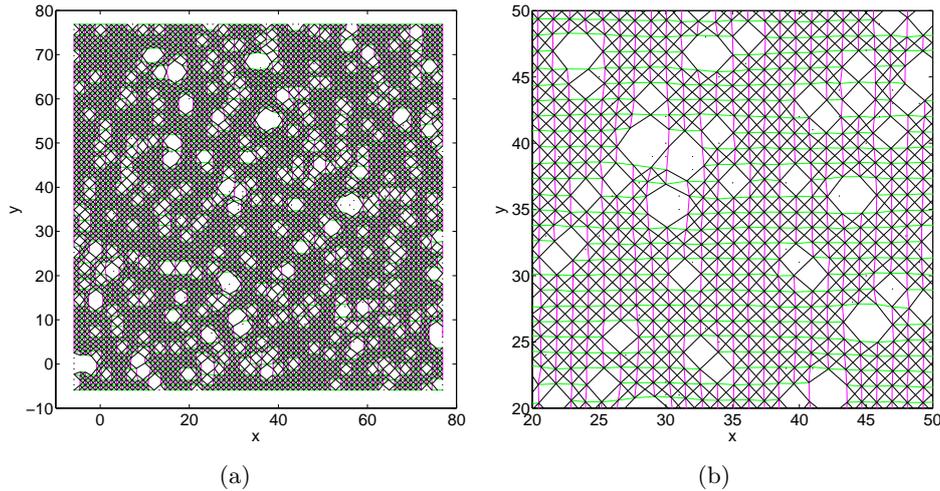


FIGURE 2.29 – Exemple de configuration de réseau tendu. Ici $p = 0.91$. Noter que l’extension du réseau est plus grande que sur la figure 2.27(a), car les quatre murs ont été tirés de façon à tendre le réseau. De même, noter que les masses ne forment plus un réseau régulier, puisque l’équation de la dynamique a été appliquée et les forces localement équilibrées. La figure (b) présente un zoom autour du centre du réseau.

2.30(c) (resp. figure 2.30(d)) des masses après la phase de mise sous tension, par rapport à l’état du réseau régulier initial (figure 2.27). Noter que sur ces représentations, l’axe vertical est orienté vers le bas.

Nous nous intéresserons alors à la propagation d’une perturbation notée $\mathbf{u}_i(t)$ par rapport au déplacement statique \mathbf{r}_i^0 . Au final, les positions des masses par rapport au réseau régulier sont donc données par

$$\mathbf{r}_i(t) = \mathbf{u}_i(t) + \mathbf{r}_i^0. \quad (2.5)$$

Notre implémentation reposant sur les déplacements $\mathbf{r}_i(t)$ (déplacement total par rapport au réseau régulier), il nous faudra bien sûr soustraire les déplacements statiques \mathbf{r}_i^0 pour obtenir la composante « dynamique » du déplacement lié à l’onde à proprement parler.

Il est à noter que la phase de relaxation est la phase qui prend le plus de temps dans nos simulations (de l’ordre de la dizaine de minutes pour un réseau 70×70 sur un PC portable classique).

Transmission d’une impulsion

Nous commençons par envoyer une brève impulsion dans le réseau, en prenant le soin d’enlever la dissipation ($\beta = 0$). Nous choisissons trois masses situées près du mur gauche – en $(x = 4, y = 34), (x = 4, y = 35)$ et $(x = 4, y = 36)$ (points rouges sur la figure 2.27(a)) – et leur imposons un déplacement selon l’axe horizontal x , $u_S^x(\mathbf{r}_0, t)$ composé d’une période de sinusoïde à $f = 0.35f_0$, avec $f_0 = \sqrt{K_0/m} = 1$. La fréquence f_0 est une fréquence caractéristique du système mais ne peut cependant pas être directement reliée à une fréquence physique. En effet, il faut bien avoir en tête que cette dernière est construite avec la *moyenne* K_0 des raideurs, et que chacune des masses du réseau a autour d’elle un nombre de masses voisines pouvant varier entre 1 et 8. On peut cependant montrer que dans le cas idéal où toutes les raideurs sont identiques ($k_i = K_0, \forall i$) et il y a des masses à tous les sites (la percolation p vaut 1), la fréquence de coupure du réseau est proche de $f_0/2$ (voir l’annexe B pour plus de détails sur la densité de modes.).

La figure 2.31 montre l’évolution temporelle de la composante u^x enregistrée sur une masse près du mur droit, en $(x = 66, y = 30)$ (la composante u^y n’est pas montrée car présente les mêmes propriétés). La figure 2.32 montre l’évolution temporelle des composantes u^x (colonne de gauche) et u^y (colonne de droite) pour l’ensemble du réseau.

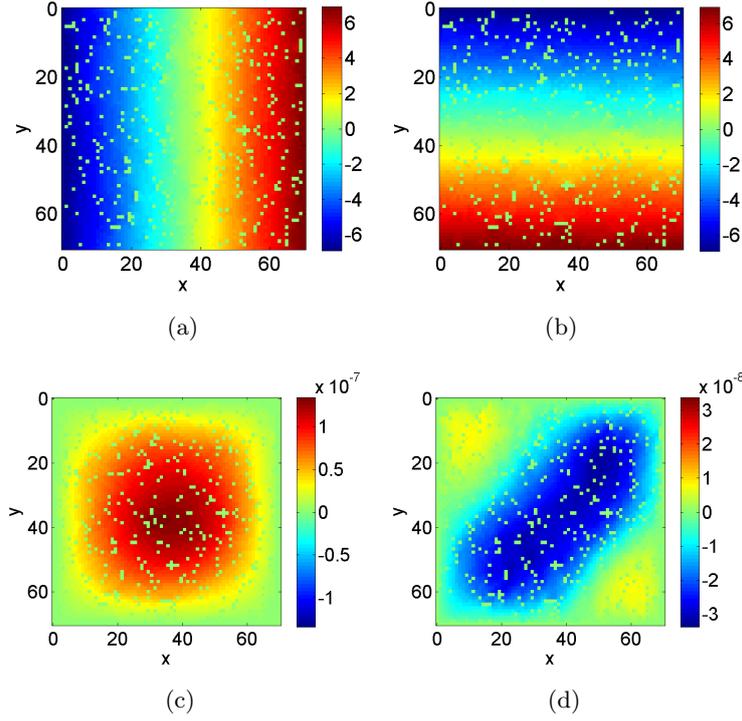


FIGURE 2.30 – Pré-contrainte dans le réseau avant propagation d’une onde. (a) Composante $r^{0,x}$ du déplacement des masses par rapport à l’état initial, après mise sous tension. Les déplacements sont donnés en unités de a_0 (longueur à vide des ressorts). (b) Composante $r^{0,y}$. (c) Composante $dr^{0,x}/dt$ de la vitesse des masses après la phase de relaxation qui suit la mise en tension. (d) Composante $dr^{0,y}/dt$ de la vitesse. Les vitesses sont données en unités de a_0/T_0 (longueur à vide des ressorts/période propre moyenne des ressorts)

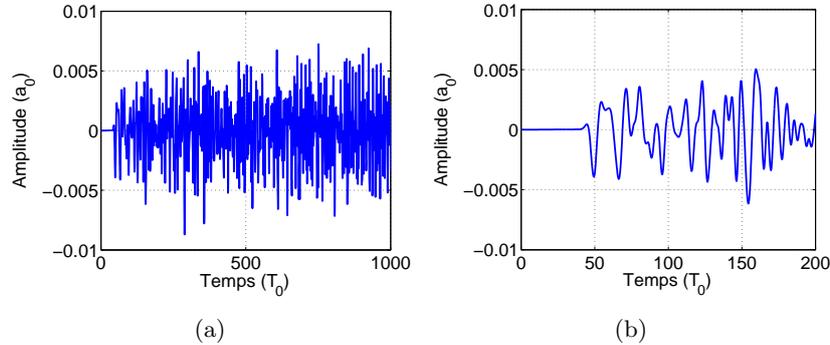


FIGURE 2.31 – Signal u^x typique reçu après envoi d’une brève impulsion (d’une durée d’environ $3T_0$) dans le réseau. La source est ici constituée de trois masses oscillantes situées en $(x = 4, y = 34)$, $(x = 4, y = 35)$ et $(x = 4, y = 36)$ (points rouges sur la figure 2.27(a)). Le signal présenté ici est enregistré en $(x = 66, y = 30)$.

Nous constatons sur l’évolution temporelle du champ total la présence d’une onde cohérente de compression (figure 2.32(e), vers $x = 45$) et de cisaillement (figure 2.32(f)) d’amplitude très faible. La longueur d’onde correspondante est $\lambda \approx 9a_0$. Ces ondes sont suivies par un motif d’interférences complexe, causé par la diffusion sur les défauts du réseau. Cela est confirmé par le signal temporel de la figure 2.31. Comme nous le verrons au chapitre suivant, le libre parcours moyen élastique est ici de l’ordre de $5a_0$, beaucoup plus petit que la distance entre la source et le récepteur ($70a_0$), ce qui confirme le régime de diffusion multiple.

Bien sûr, étant donnée la taille finie du réseau, l’onde (cohérente ou multiplement diffusée) se réfléchit sur les bords du domaine. Sur la figure 2.32(g), on voit par exemple très bien la réflexion de

l'onde cohérente sur les bords supérieur et inférieur du domaine.

Au bout d'un temps suffisamment long, l'onde cohérente est totalement convertie dans l'onde multiplement diffusée (figure 2.32(i)) et le champ est complètement réparti dans le réseau, suivant un motif d'interférences très irrégulier (« speckle ») caractéristique de la diffusion multiple (voir chapitre 3 pour plus de détails).

Enfin, le signal perdure indéfiniment, puisqu'il n'y a ici pas de dissipation. L'effet de la dissipation (coefficient β) sera étudié en détail dans le chapitre 3.

2.2.3 Réciprocité spatiale

Avant de nous intéresser au retournement temporel dans notre modèle, nous voulons vérifier l'hypothèse de réciprocité spatiale, de la même façon que nous l'avons fait dans notre partie expérimentale (section 2.1.4).

Expérimentalement, on dit qu'il y a réciprocité spatiale s'il y a équivalence entre l'envoi d'un signal source e grâce à un transducteur situé en \mathbf{r}_A , et enregistré grâce à un transducteur situé en \mathbf{r}_B (trajet de A à B) et l'envoi du même signal source e grâce au transducteur en \mathbf{r}_B enregistré grâce au transducteur situé en \mathbf{r}_A (trajet de B à A).

Or, lors d'une mesure d'un champ par un transducteur, le signal enregistré correspond en fait à une projection du champ vectoriel selon une polarisation intrinsèque au transducteur (normale à la surface du transducteur en général, mais pas forcément).

Nous plaçons donc deux « capteurs » dans notre réseau, notés A et B , situés à des positions choisies au hasard \mathbf{r}_A et \mathbf{r}_B et avec des polarisations quelconques \mathbf{p}_A et \mathbf{p}_B (voir figure 2.33(a)). Nous envoyons une brève impulsion sinusoïdale grâce au capteur A , avec la polarisation \mathbf{p}_A , que nous enregistrons en \mathbf{r}_B (le champ en ce point est noté $\mathbf{u}_{A \rightarrow B}(\mathbf{r}_B, t)$), avec la polarisation \mathbf{p}_B (le signal correspondant est donc $\mathbf{u}_{A \rightarrow B}(\mathbf{r}_B, t) \cdot \mathbf{p}_B$). Puis nous envoyons la même impulsion grâce au capteur B , avec la polarisation \mathbf{p}_B et nous l'enregistrons en \mathbf{r}_A , avec la polarisation \mathbf{p}_A (le signal correspondant est $\mathbf{u}_{B \rightarrow A}(\mathbf{r}_A, t) \cdot \mathbf{p}_A$).

On constate sur la figure 2.33 que les deux signaux sont quasiment identiques (coefficient de corrélation de 0.90) :

$$\mathbf{u}_{A \rightarrow B}(\mathbf{r}_B, t) \cdot \mathbf{p}_B = \mathbf{u}_{B \rightarrow A}(\mathbf{r}_A, t) \cdot \mathbf{p}_A. \quad (2.6)$$

Cela signifie bien qu'il y a réciprocité entre les points A et B . Comme ces points et les polarisations on été choisis aléatoirement dans le milieu, on peut donc supposer que le milieu est globalement spatialement réciproque.

Il est cependant à noter que d'autres essais ont montré que plus la percolation (probabilité p de présence d'une masse en un site) diminue, et moins la réciprocité spatiale est vérifiée (le coefficient de corrélation entre les signaux diminue). La même tendance apparaît si la fréquence centrale de l'impulsion est élevée.

Nous pensons que cela est lié au fait que dans ce cas, on favorise les ondes multiplement diffusées, qui sont justement les plus sensibles à la positions des masses. En effet, même si nous avons pris le soin d'attendre assez longtemps dans la phase de relaxation, pour que l'amplitude résiduelle de vibration du réseau soit négligeable devant celle de l'onde transmise, il est clair que le milieu n'est rigoureusement pas totalement relaxé et évolue encore – exactement comme dans nos expériences (voir section 2.1.3). Ainsi, les ondes ne voient pas exactement le même milieu au cours de leurs propagation, et les petites différences du milieu se cumulent alors au cours de la propagation pour *in fine* mener à des différences de signaux notables sur les ondes multiplement diffusées. C'est pourquoi la réciprocité spatiale semble d'autant moins bonne avec des ondes de plus hautes fréquences (on favorise alors les ondes multiplement diffusées) ou avec une percolation p réduite (la relaxation est alors plus lente). En fait, tout comme dans la partie expérimentale 2.1.4, c'est la stationnarité du milieu qui est ici la cause de ce phénomène.

Dans la suite, nous resterons au voisinage de ces conditions ($p = 0.91$ et $f \approx 0.35$), ce qui nous permettra de rester dans l'hypothèse de réciprocité spatiale, au « vieillissement » près du milieu.

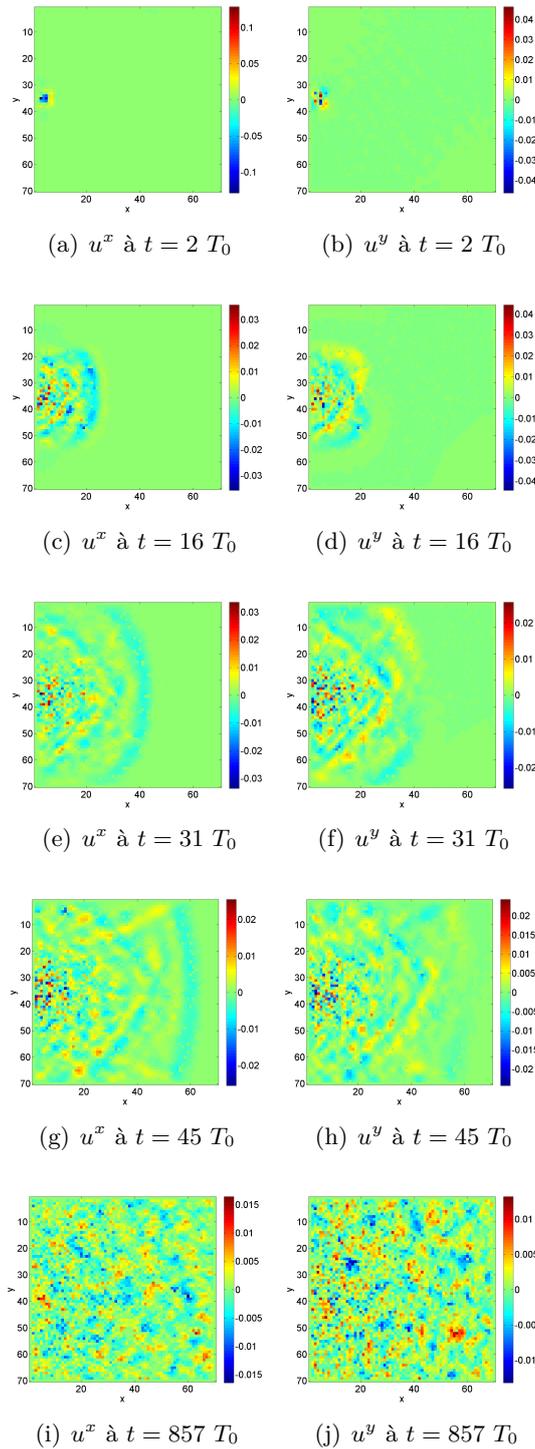


FIGURE 2.32 – Champs u^x (première colonne) et u^y (seconde colonne) résultant de la propagation d’une brève impulsion polarisée selon x et émise grâce à trois masses situées en $(x = 4, y = 34)$, $(x = 4, y = 35)$, $(x = 4, y = 36)$. (a) à (d) Aux temps courts, on distingue un front d’onde cohérent caractéristique d’une onde cylindrique divergente, suivi par un motif d’interférences complexe. La différence entre les fronts d’onde u^x et u^y est bien visible. (g) et (h) Au fil de la propagation, l’intensité du front d’onde diminue, à la fois par diffraction géométrique, mais aussi par diffusion sur les défauts (masses manquantes et hétérogénéités des raideurs) du réseau. (i) et (j) Aux temps très longs, les fronts d’ondes cohérents ne sont plus visibles, et le motif d’interférences complexe a rempli l’intégralité du domaine, signe que la distance de propagation est bien plus grande que le libre parcours moyen. De plus, les champs u^x et u^y partagent des amplitudes comparables.

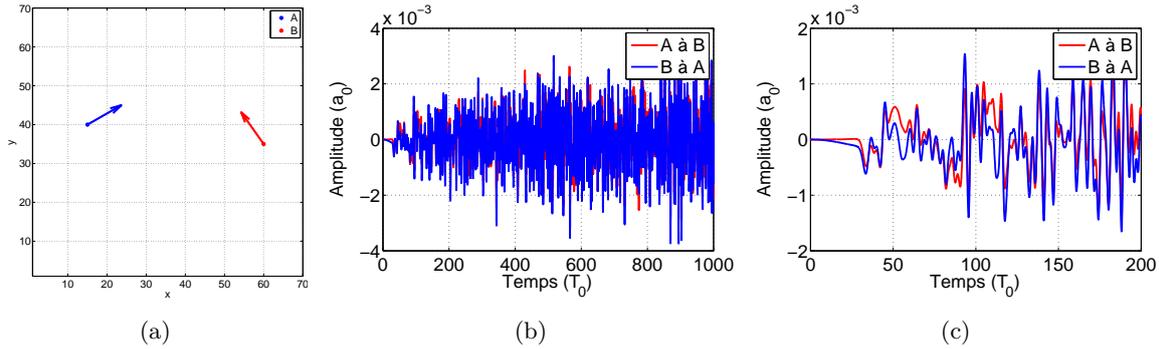


FIGURE 2.33 – Vérification de la réciprocité spatiale dans nos simulations. (a) Configuration utilisée : on place deux capteurs A et B respectivement en \mathbf{r}_A et \mathbf{r}_B . On envoie une impulsion grâce à la source A (polarisée \mathbf{p}_A), que l’on enregistre en B (avec la polarisation \mathbf{p}_B) puis on envoie la même impulsion grâce à la source en B (avec la polarisation \mathbf{p}_B) et l’on enregistre le signal reçu en A (avec la polarisation \mathbf{p}_A). Si le milieu est réciproque, les deux signaux doivent être identiques. (b) et (c) Les signaux enregistrés lors de la propagation de A à B (en rouge) et de B à A (en bleu) sont effectivement quasiment identiques (coefficient de corrélation est de 0.90).

2.2.4 Retournement temporel monovoie

Nous mettons maintenant en œuvre la méthode du retournement temporel à proprement parler. Dans un premier temps, nous nous contentons d’utiliser un unique élément pour renvoyer l’onde. Nous ré-utilisons le milieu et l’onde transmise dans la partie 2.2.2 et faisons alors revivre à la masse située près du mur droit – en $(x = 66, y = 35)$ – sa vie passée : nous imposons à cette masse le déplacement (vectoriel) $\mathbf{u}(-t) = u^x(-t)\mathbf{e}^x + u^y(-t)\mathbf{e}^y$, où $\mathbf{u}(t)$ est le déplacement de la masse dans la phase de transmission.

Nous pouvons alors suivre le déplacement (vectoriel) moyenné sur les trois masses qui ont servi de sources dans la phase aller de la partie 2.2.2 (figure 2.34) : la première ligne présente le déplacement selon l’axe x au cours du temps ; la seconde le déplacement selon l’axe y . Rappelons que dans la phase aller, la source avait émis une onde polarisée selon l’axe x .

Nous constatons sur la figure 2.34 que le déplacement moyen des trois masses est d’abord complexe et d’amplitude assez faible ($\sim 5 \cdot 10^{-3}a_0$) puis que la composante u^x présente une amplitude importante ($\sim 3 \cdot 10^{-2}a_0$) au voisinage de l’instant focal $t = 0$ (voir le zoom sur la figure 2.34(b)) puis redevient de faible amplitude ; la composante u^y restant quant à elle faible durant toute la propagation.

De façon plus précise, le déplacement selon l’axe x montre que le signal source injecté dans la phase aller (une période de sinuséide de fréquence centrale $0.35f_0$) est bien reconstruit (figure 2.34(b)), et il y a donc bien recompression temporelle de la composante u^x (le rapport entre l’amplitude du pic de recompression et l’écart-type des lobes est de 12). Le déplacement selon l’axe y ne présente pas de pic de recompression (figure 2.34(d)). Cela est logique puisque la source utilisée dans la première phase était polarisée selon l’axe x (voir 2.2.7).

Nous pouvons aussi suivre l’évolution du champ de déplacement selon l’axe x en fonction du temps (figure 2.35). Nous constatons qu’au début de la ré-émission du signal (figure 2.35(a)), le champ u^x est complexe et incohérent. Puis, au fur et à mesure de la ré-émission, des fronts d’onde cohérents apparaissent au voisinage de la source initiale (figure 2.35(c) – noter cependant la grande différence de temps par rapport à la figure 2.35(a)), et finissent par converger vers cette dernière (figure 2.35(d)), pour finalement, à $t = 0$, y arriver en phase de façon à créer une interférence constructive (figure 2.35(e)). Il y a donc refocalisation spatiale : l’onde revient de là où elle vient. Ensuite, l’onde diverge (figure 2.35(f)) puis le champ redevient rapidement incohérent (figure 2.35(h)), pour *in fine* devenir complètement diffus (figure 2.35(i)).

Comme nous l’avons rappelé dans le chapitre introductif (section 1.2.1), la largeur de la tache focale à l’instant $t = 0$ est liée à la longueur de corrélation du champ transmis (le retournement temporel agit comme un corrélateur). Or dans notre cas, cette dernière diminue au cours du temps (du fait de la diffusion multiple) puis finit par saturer (la diffraction agissant comme un filtre passe-

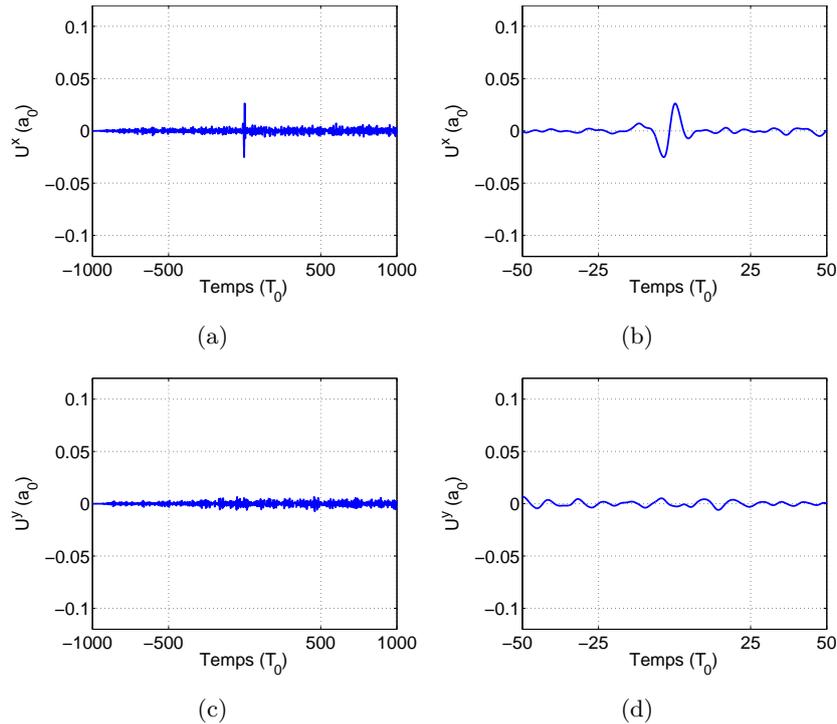


FIGURE 2.34 – Signaux recompressés par retournement temporel monovoie dans notre modèle et zoom autour de l’instant $t = 0$ (deuxième colonne). La première (resp. seconde) ligne montre la composante u^x (resp. u^y) du déplacement. (a) et (b) Nous constatons que le déplacement selon l’axe x est bien recompressé (le rapport pic/lobes vaut 12). Le déplacement selon l’axe y ne présente pas de recompression, puisque la source était initialement polarisée selon l’axe x .

bas), comme on peut le constater sur les images de la propagation (figure 2.32). Ainsi, lorsque nous renvoyons l’intégralité du signal transmis, comme nous venons de le faire, nous créons en fait un pic de recompression sur la source qui est la somme de pics de largeurs variables. Au final, la largeur de la tache focale créée (figure 2.35(e)) est donc une moyenne des longueurs de corrélation du champ transmis au cours du temps. Nous étudierons un peu plus loin l’évolution de la tache focale avec le temps.

Ainsi, notre modèle permet de mettre en œuvre avec succès la méthode du retournement temporel, même avec un unique élément.

2.2.5 Retournement temporel multivoies

Nous voulons maintenant étudier l’influence du nombre d’éléments dans le miroir à retournement temporel. À cette fin, au lieu de choisir l’unique masse située en $(x = 66, y = 35)$ pour renvoyer le déplacement, nous choisissons toutes les masses à la même verticale : de la masse $(x = 66, y = 1)$ (au bord supérieur), à la masse $(x = 66, y = 70)$.

Nous répétons la même opération que dans le cas monovoie 2.2.4 et enregistrons le déplacement moyenne à la source (figure 2.36).

Nous constatons la même chose que dans le cas monovoie : il y a recompression temporelle pour la composante x initialement envoyée (première ligne de la figure), et aucune recompression pour la composante y . Cependant, l’amplitude relative du pic de recompression par rapport aux lobes est plus grande : dans ce cas, le rapport entre l’amplitude du pic de recompression et l’écart-type des lobes est de 25.7 (contre une valeur de 12 dans le cas monovoie).

Ce résultat est attendu et rejoint nos résultats expérimentaux (section 2.1.6) : comme expliqué dans le chapitre introductif (section 1.2.1), lors de l’ajout d’un élément dans le miroir à retournement temporel, deux cas peuvent se produire. Soit le nouvel élément reçoit un signal décorrélé du premier élément, et dans ce cas, les deux pics de recompression – respectivement créés par les deux éléments

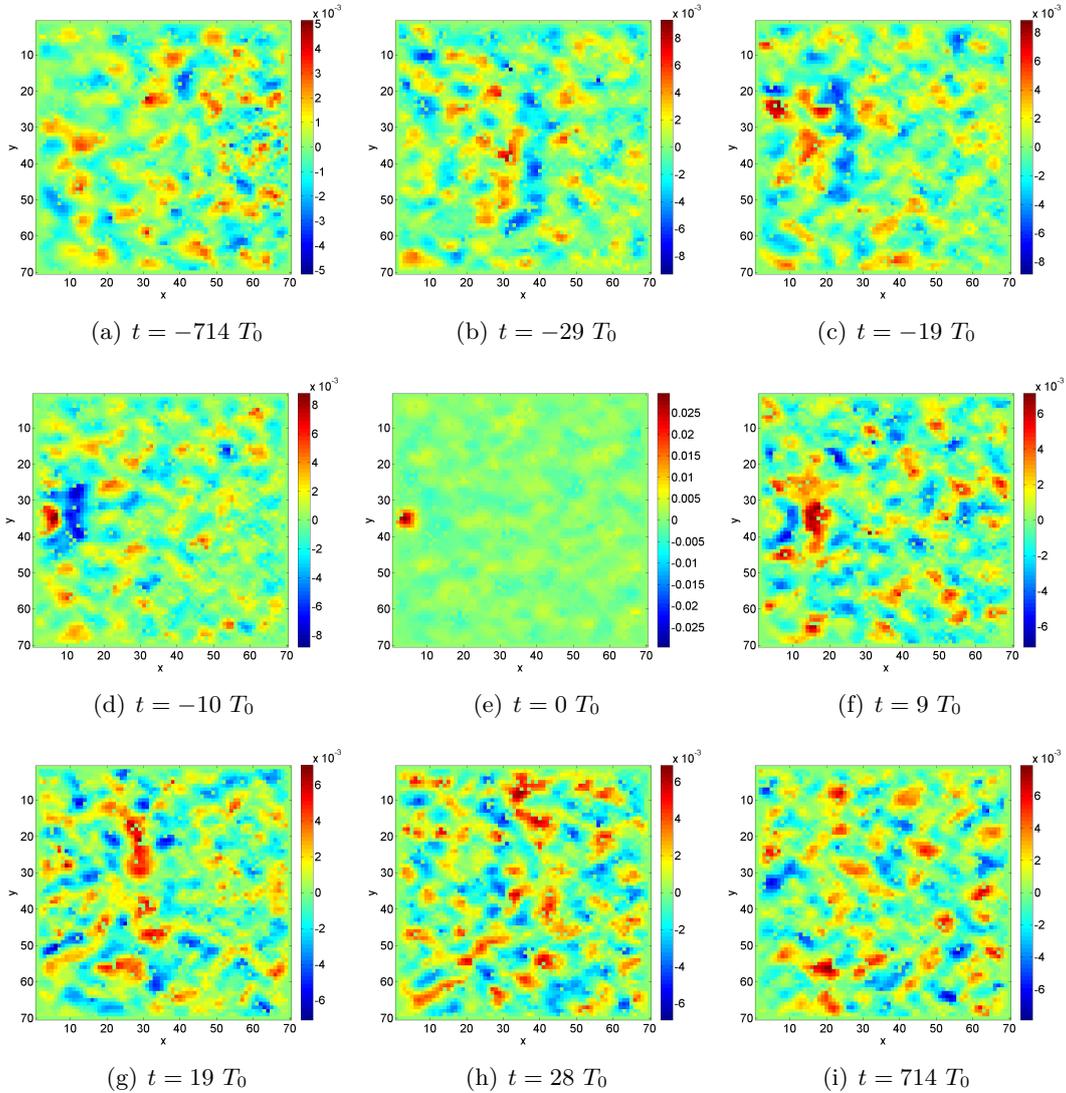


FIGURE 2.35 – Évolution au cours du temps de la composante u^x du champ retourné temporellement dans notre modèle numérique, avec un unique élément en $(x = 66, y = 35)$ dans le miroir à retournement temporel. Lors de la phase « aller » l'onde a été émise par trois masses situées en $(x = 4, y = 34), (x = 4, y = 35), (x = 4, y = 36)$. (a) Peu de temps après le début de la ré-émission de l'onde, le champ présente un motif d'interférences complexe et apparemment incohérent. (b) à (d) Au fur et à mesure de la ré-émission, des fronts d'onde cohérents commencent à apparaître. (e) À l'instant focal $t = 0$, les fronts d'onde convergent à la source et interfèrent constructivement, il y a alors recompression temporelle et refocalisation spatiale : l'onde est bien revenue à la source. (f) à (h) L'onde qui avait convergé à la source se met alors à diverger à partir de cette dernière. (i) Aux temps très longs, les fronts d'onde cohérents ont disparu, et le champ est redevenu diffus.

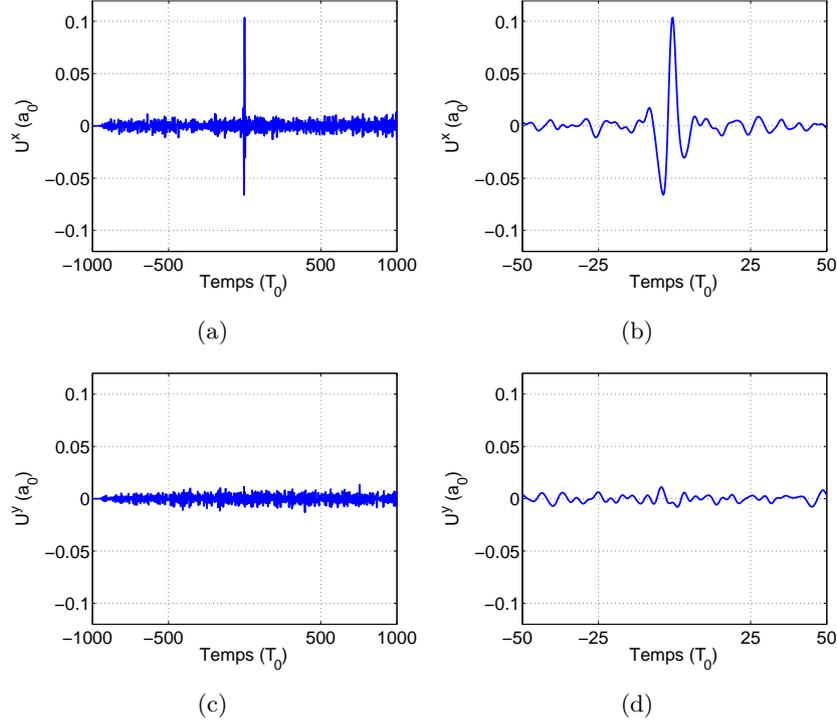


FIGURE 2.36 – Signaux recompressés par retournement temporel multivoies dans notre modèle. La première (resp. seconde) ligne montre la composante u^x (resp. u^y) du déplacement. (a) et (b) Comme dans le cas de la figure 2.34, nous constatons que le déplacement selon l’axe x est bien recompressé. La différence principale réside dans le rapport pic/lobes qui vaut maintenant 25.7 (contre 12 dans le cas monovoie). Comme dans le cas monovoie, le déplacement selon l’axe y ne présente pas de recompression, puisque la source était initialement polarisée selon l’axe x .

– vont s’additionner de façon cohérente, alors que les lobes – décorrélés – vont s’ajouter de façon incohérente. Dans ce cas, le rapport entre l’amplitude du pic et le niveau de lobes va augmenter d’un facteur $\sim \sqrt{2}$. Un autre cas possible est celui où le nouvel élément ajouté dans le miroir reçoit un signal non-décorrélé du signal reçu par le premier élément. Dans ce cas, les pics s’ajoutent toujours de façon cohérente, mais les lobes ne s’ajoutent pas de façon parfaitement incohérente, ce qui mène à une augmentation du niveau de lobes d’un facteur un peu plus grand que $\sim \sqrt{2}$. Le « pire » des cas est celui où le nouvel élément ajouté reçoit exactement le même signal que le premier élément du miroir : dans ce cas, l’amplitude du pic reconstruit est simplement le double du pic reconstruit avec un seul élément, et de même pour le niveau de lobes. Cela mène alors à un rapport pic/lobes identique avec les deux éléments ou avec un seul.

Ici, nous pouvons d’ailleurs remarquer que passer de un à 70 éléments dans le miroir à retournement temporel ne fait passer le rapport pic à lobes que de 12 à 25.7. Si les 70 éléments avaient reçu 70 signaux décorrélés, nous aurions du obtenir un rapport pic à lobes d’amplitude $\sim 12\sqrt{70} \simeq 100$. Cela nous montre que nous pourrions nous contenter d’un élément sur trois pour enregistrer le champ et reconstruire la source avec la même qualité.

Comme nous l’avons fait pour le cas monovoie, nous pouvons suivre l’évolution du champ u^x au cours du temps (figure 2.37). Les mêmes étapes se produisent, et l’énergie est bien refocalisée à la source au voisinage du temps $t = 0$. Comme noté sur le signal temporel recompressé, nous constatons que le pic se démarque plus par rapport au champ en dehors de la tache focale que dans le cas monovoie.

Il est à noter que la taille de la tache focale est sensiblement la même que celle dans le cas monovoie (source ponctuelle). Preuve supplémentaire que cette dernière n’est pas gouvernée par les lois de la diffraction en milieu homogène, mais bien par la diffusion multiple. En effet, si la taille δ de la tache était liée à la diffraction, cette dernière devrait décroître avec l’extension de la source (selon la formule $\delta = \lambda z/D$ où λ est la longueur d’onde, z la distance entre le miroir et la source, et D l’extension spatiale du miroir). Au contraire, la taille de la tache focale est ici liée à la longueur de

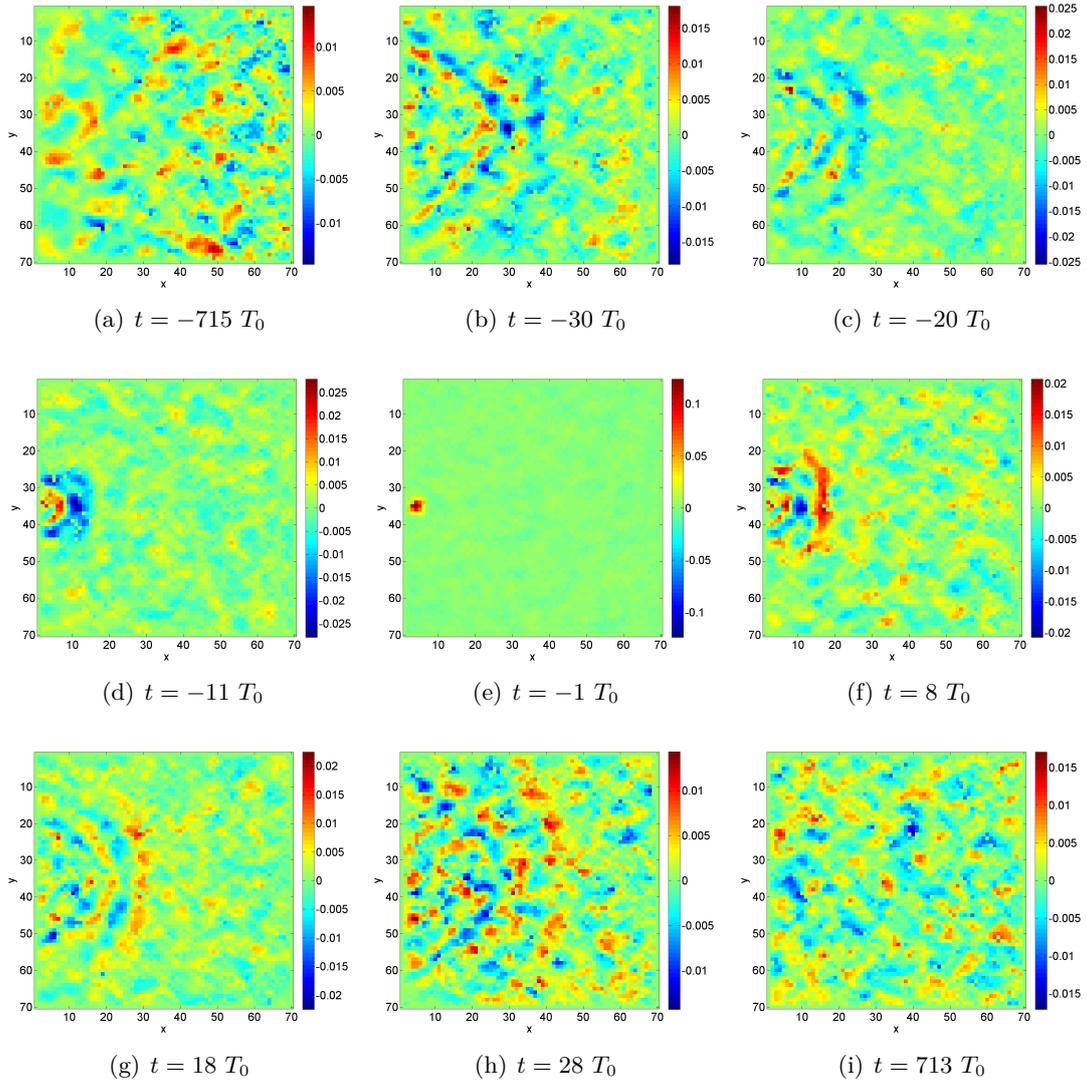


FIGURE 2.37 – Évolution au cours du temps de la composante u^x du champ retourné temporellement dans notre modèle, avec l'ensemble des masses à $x = 66$ dans le miroir à retournement temporel. La chronologie est sensiblement la même que dans le cas monovoie (figure 2.35). La différence principale réside dans le rapport pic/lobe : la tache focale se démarque mieux par rapport au reste du domaine que dans le cas monovoie (comparer (e) à 2.35(e)).

corrélation du champ transmis [Der01].

2.2.6 Retournement temporel dynamique

Comme nous l'avons fait dans le cas expérimental, nous voulons maintenant étudier l'influence du signal choisi sur le champ recréé. Dans le cas expérimental, par manque de résolution spatiale, nous nous sommes limités à montrer que le retournement temporel avec l'onde cohérente uniquement ne conduisait pas à une focalisation spatiale, contrairement au cas où l'on renvoyait uniquement l'onde multiplement diffusée (section 2.1.5). Avec la simulation numérique, nous avons une résolution spatiale bien meilleure, nous permettant d'étudier plus finement la taille de la tache en fonction de la position de la fenêtre retournée.

Nous découpons donc nos signaux transmis (nous sommes ici dans le cas multi-voies) en fines tranches de longueur $30T_0$ et les renvoyons les unes après les autres, en prenant le soin d'enregistrer à chaque fois le champ produit au temps focal ainsi que le déplacement u^x recréé à la source, toujours moyenné sur les trois masses sources (figure 2.38).

Nous constatons que pour une fenêtre située au tout début du signal ($40 - 70T_0$, figure 2.38(a)), la tache focale créée est très large (figure 2.38(b)). Nous vérifions cependant qu'il y a bien recompression temporelle à la source (figure 2.38(c)). Cette fenêtre contient l'onde cohérente et le champ n'est donc pas vraiment focalisé.

Pour une fenêtre légèrement plus tardive ($90 - 120T_0$, figure 2.38(d)), la tache focale est beaucoup plus petite (figure 2.38(e)). Cette tendance se confirme lorsque la fenêtre est encore décalée vers les temps longs, mais la taille de la tache semble cependant saturer vers une valeur limite (figures 2.38(k) et 2.38(n)).

Pour être plus quantitatif, nous pouvons tracer l'évolution de la largeur de la tache focale à mi-hauteur en fonction de la position de la fenêtre temporelle retournée (figure 2.39). Nous constatons effectivement que plus les fenêtres sont tardives et plus la tache focale est fine. La première fenêtre ($40 - 70T_0$), qui inclue l'onde cohérente, mène à une tache de largeur très grande, de l'ordre de $14a_0$. Les fenêtres suivantes donnent des taches beaucoup plus fines, dont la largeur à mi-hauteur va de 5 à $3a_0$ environ. Pour les fenêtres les plus tardives, la taille de la tache sature effectivement, à une valeur d'environ $3a_0$, soit précisément la taille de la source.

Ces résultats numériques sont en accord avec ceux de nos expériences et d'autres ([Der95, Tou99] par exemple) et coïncident avec l'idée que plus les ondes arrivent tardivement, plus leurs vecteurs d'onde ont été redistribués (par diffusion multiple), et donc plus la taille de la tache focale sera petite. Une façon un peu différente, mais fondamentalement équivalente, de dire est les choses est que la longueur de corrélation du champ diminue au cours du temps (et donc la tache focale aussi, puisque le retournement temporel agit comme un corrélateur spatio-temporel).

2.2.7 Influence de la polarisation des signaux retournés

Nous finissons cette étude du retournement temporel en régime linéaire dans notre système modèle de masses et ressorts en insistant sur l'aspect *vectorel* des ondes qui nous intéressent. En effet, alors que dans nos expériences nous avons simplement renvoyé les signaux (scalaires) enregistrés par nos transducteurs – malgré le caractère élastique (vectorel) des ondes qui se propagent dans nos échantillons, nous avons dans nos simulations renvoyé les *deux* composantes u^x et u^y des déplacements des masses du miroir à retournement temporel. Nous proposons ici de montrer que les deux approches sont compatibles.

Nous revenons à l'expérience numérique en mode monovoie (section 2.2.4). Cependant, au lieu de renvoyer l'intégralité du déplacement $\mathbf{u} = u^x \mathbf{e}^x + u^y \mathbf{e}^y$, nous renvoyons de façon sélective uniquement la composante u^x puis la composante u^y . Nous enregistrons dans les deux cas la composante selon l'axe x à la source – car la source était polarisée selon x dans la phase aller (figure 2.40). Nous notons RT_x et RT_y les signaux respectivement obtenus.

Nous constatons que lors du renvoi de la composante u^x seule, il y a bien recompression temporelle à la source (figure 2.40(a)), ce qui prouve que les conversions de modes qui ont été effectuées dans la phase aller s'effectuent bien en sens inverse dans la phase retour. De même, si l'on ne renvoie

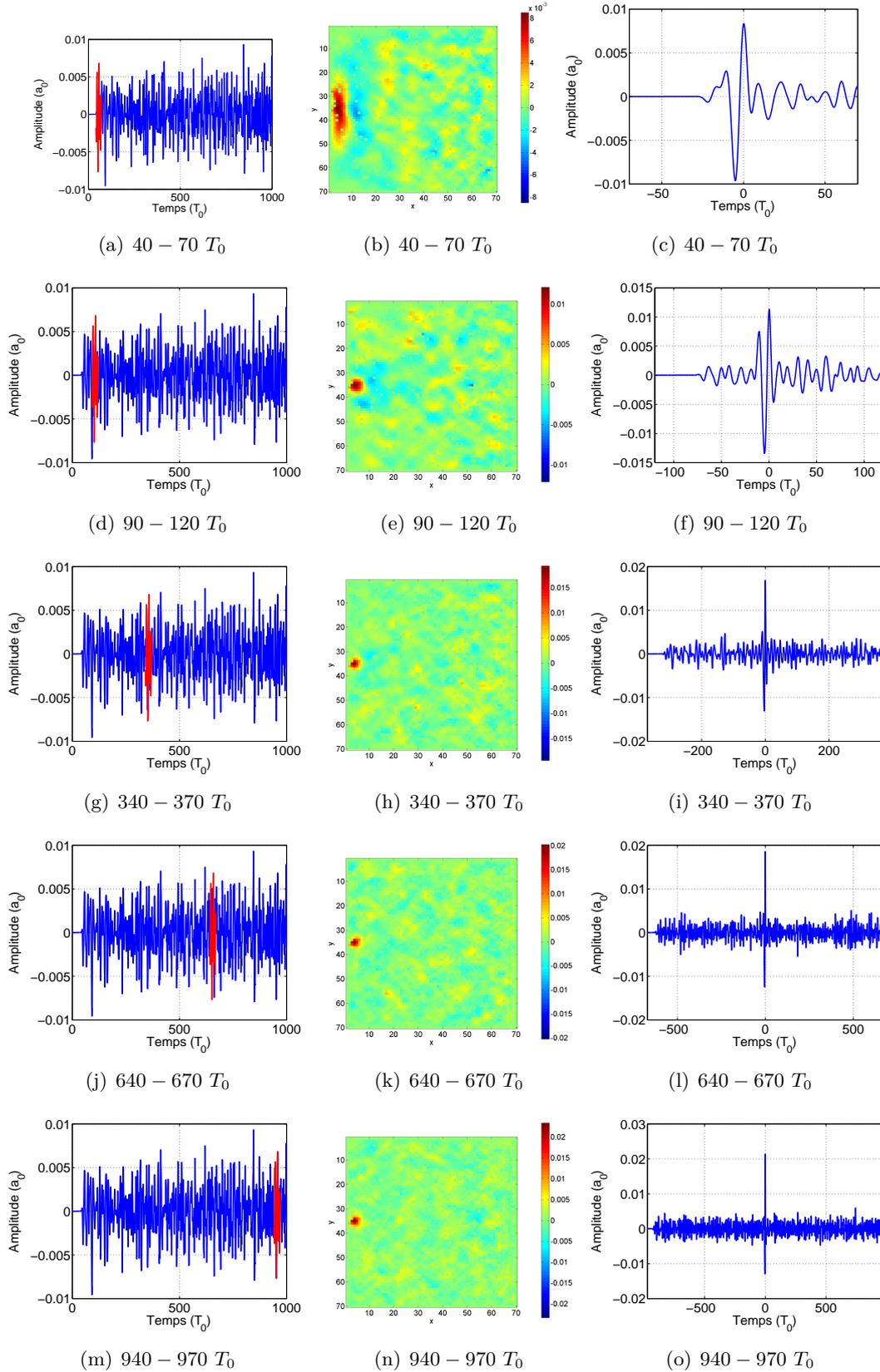


FIGURE 2.38 – Retournement temporel multivoies dynamique dans notre modèle. Une tranche de longueur $30T_0$ est sélectionnée avant le renvoi des déplacements enregistrés. La première colonne montre les fenêtres utilisées, la seconde montre le champ u^x à l’instant focal, et la troisième le signal enregistré à la source. (a) à (c) Pour une fenêtre se situant au tout début du signal transmis, il y a bien recompression temporelle, mais la tache focale est très large. (d) à (i) Lorsque la fenêtre devient plus tardive, la tache focale devient plus petite. (j) à (o) Cependant, à partir d’un moment, la taille de la tache semble saturer.

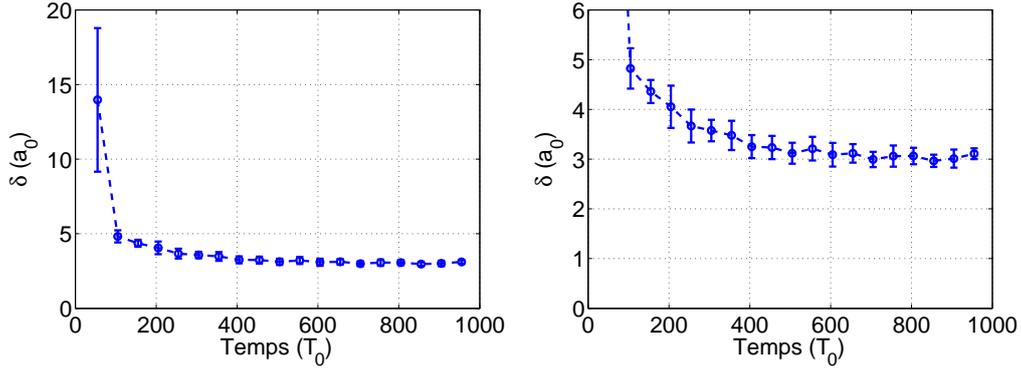


FIGURE 2.39 – Évolution de la largeur de la tache focale créée à l’issue du retournement temporel en fonction de la fenêtre retournée. La tache devient de plus en plus fine à mesure que la fenêtre retournée est tardive, mais sa taille finit par saturer à $3a_0$, qui correspond à la taille de la source. La figure (b) est un zoom de la figure (a). Les largeurs ont été moyennées sur neuf configurations.

que la composante u^y (figure 2.40(b)). Il est de plus à noter que les pics recréés sont d’amplitudes comparables.

Enfin, nous pouvons vérifier que la somme $RT_x + RT_y$ des signaux recompressés avec u^x et u^y séparément est égale au signal recompressé en utilisant les deux composantes – notons RT_{x+y} ce signal (figures 2.40(c) et 2.40(d)), l’erreur relative étant de 0.13%. Cela confirme la linéarité de la propagation.

Ces résultats sont en accord avec des résultats théoriques et expérimentaux précédents [Dra97, Sut04, Ulr09], montrant que même dans un milieu solide – avec des ondes élastiques et d’éventuelles conversions de modes – le principe du retournement temporel fonctionne, et ce même en ne renvoyant qu’un nombre limité de composantes dans la phase retour. La conséquence de limiter le nombre de composantes est d’empêcher l’onde de prendre certains chemins pour retourner à sa source, diminuant en conséquence l’amplitude du pic recompressé.

Dans nos expériences (section 2.1), nous utilisons un ou plusieurs transducteurs qui projettent le champ élastique sur leurs propres polarisations intrinsèques, ce qui donne un signal scalaire. Mais comme nous l’avons vu, cela n’empêche effectivement pas les ondes de revivre leurs vies passées.

Bien sûr, la simulation numérique nous permet d’accéder à toutes les composantes du champ, et est donc plus complète que notre expérience à cet égard.

2.3 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons testé la réversibilité des ondes ultrasonores dans un milieu granulaire modèle composé de billes de diamètre 1.5 mm sous contrainte, au moyen de la technique du retournement temporel. Nous avons de plus implémenté un modèle numérique simple, mais original, basé sur un réseau percolé de masses ponctuelles reliées par des ressorts linéaires de raideurs aléatoires.

Nos résultats expérimentaux ont montré que le retournement temporel dans les milieux granulaires fonctionnait de façon robuste, et ce que l’on retourne uniquement l’onde cohérente ou uniquement l’onde multiplement diffusée. Nous avons de plus montré que, contrairement à l’onde cohérente, l’onde multiplement diffusée revient à la source de façon focalisée, et ce indépendamment de la taille du miroir à retournement temporel. Cela est à attribuer à une redistribution efficace des vecteurs d’onde – causée par la diffusion multiple – qui donne au miroir au retournement temporel une ouverture virtuelle plus grande que son ouverture physique. De plus, bien que naïf, notre modèle numérique a permis de retrouver qualitativement l’ensemble de nos résultats expérimentaux.

Ces résultats montrent que malgré le caractère complexe des ondes dans les milieux granulaires (lié à la grande hétérogénéité du réseau des contacts entre les grains), et l’absence de modèle analytique pour décrire la propagation des ondes élastiques dans ces milieux, la réversibilité des ondes est vérifiée et robuste. Cela est d’autant moins évident que notre milieu est *discret* et donc que la propagation d’une

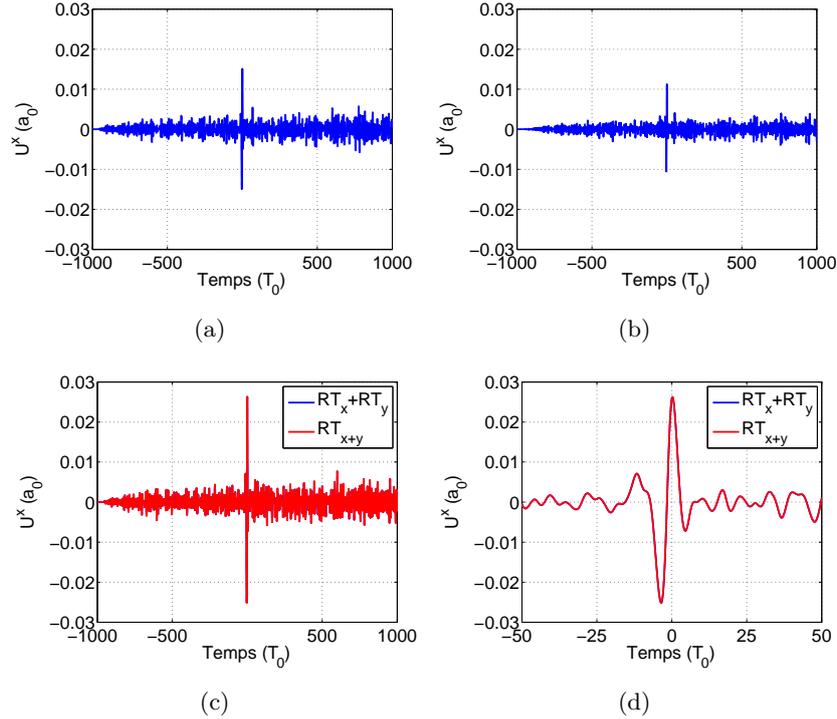


FIGURE 2.40 – Signaux recompressés par retournement temporel en renvoyant sélectivement les composantes u^x ou u^y des déplacements et comparaison au cas où les deux composantes sont renvoyées en même temps. Rappelons que la source était initialement polarisée selon x . (a) Signal RT_x recompressé à la source (composante u^x du déplacement) en ne renvoyant que la composante u^x du déplacement des masses du miroir à retournement temporel. (b) Signal RT_y recompressé (composante u^x du déplacement) en ne renvoyant que la composante u^y . Ces deux figures montrent que les conversions de modes s’effectuent bien en sens inverse dans la phase retour. (c) et (d) Comparaison de la somme $RT_x + RT_y$ des signaux recompressés dans le cas des renvois séparés des deux composantes u^x et u^y , avec le cas où les deux composantes sont renvoyées en même temps (signal noté RT_{x+y}). Nous constatons un accord parfait entre les deux signaux recompressés, signe de la linéarité de la propagation.

perturbation élastique se fait à mi-chemin entre celle d’une onde et d’une particule. Dans ce dernier cas l’extrême sensibilité aux conditions initiales empêche habituellement le retournement temporel de fonctionner [Sni98]. Ils prouvent de plus que malgré leur aspect fragile et le phénomène de vieillissement inhérent aux milieux granulaires (qui implique une non-stationnarité du milieu), les ondes sont dans une certaine mesure capables de revivre leurs vies passées – de grains en grains – pour *in fine* retourner en phase à leur source et créer alors un pic de recompression d’amplitude importante dans l’espace et dans le temps.

Cette possibilité de focaliser spatialement et temporellement de l’énergie acoustique dans les milieux granulaires sera utilisée de façon contrôlée dans le chapitre 4 en vue de provoquer des réarrangements du réseau de contacts entre les grains. Le modèle numérique sera quant à lui ré-utilisé dans le chapitre 3 pour apporter un éclairage nouveau sur des résultats expérimentaux relatifs au transport dans les milieux granulaires mal compris dans le passé.

Bibliographie

- [Ald59] B. J. ALDER & T. E. WAINWRIGHT. ‘Studies in Molecular Dynamics. I. General Method.’ *Journal of Chemical Physics*, **31**, 459–466. 1959.
- [Cun71] J. A. CUNDALL, P. A. CUNDALL & P. A. CUNDALL. ‘A computer model for simulating progressive, large-scale movements in blocky rock systems.’ in *Proc. Symp. Int. Soc. Rock Mech*, vol. 9, Nancy. 1971.
- [Cun79] P. A. CUNDALL & O. D. L. STRACK. ‘A discrete numerical model for granular assemblies.’ *Géotechnique*, **29** (1), 47–65. 1979.
- [Dau05] T. DAUXOIS, M. PEYRARD & S. RUFFO. ‘The Fermi-Pasta-Ulam ‘numerical experiment’ : history and pedagogical perspectives.’ *European Journal of Physics*, **26** (5), S3. 2005.
- [Der94] A. DERODE. *La coherence des ondes ultrasonores en milieu heterogene*, Paris 7. 1994.
- [Der95] A. DERODE, P. ROUX & M. FINK. ‘Robust Acoustic Time Reversal with High-Order Multiple Scattering.’ *Physical Review Letters*, **75** (23), 4206–4209. 1995.
- [Der01] A. DERODE, A. TOURIN & M. FINK. ‘Random multiple scattering of ultrasound. II. Is time reversal a self-averaging process?’ *Physical Review E*, **64** (3), 036606. 2001.
- [Dra97] C. DRAEGER, D. CASSEREAU & M. FINK. ‘Theory of the time-reversal process in solids.’ *The Journal of the Acoustical Society of America*, **102** (3), 1289–1295. 1997.
- [Fen84a] S. FENG & P. N. SEN. ‘Percolation on Elastic Networks : New Exponent and Threshold.’ *Physical Review Letters*, **52** (3), 216–219. 1984.
- [Fen84b] S. FENG, P. N. SEN, B. I. HALPERIN & C. J. LOBB. ‘Percolation on two-dimensional elastic networks with rotationally invariant bond-bending forces.’ *Physical Review B*, **30** (9), 5386–5389. 1984.
- [Fen85] S. FENG, M. F. THORPE & E. GARBOCZI. ‘Effective-medium theory of percolation on central-force elastic networks.’ *Physical Review B*, **31** (1), 276–280. 1985.
- [Fen87] S. FENG, B. I. HALPERIN & P. N. SEN. ‘Transport properties of continuum systems near the percolation threshold.’ *Physical Review B*, **35** (1), 197–214. 1987.
- [Fer55] E. FERMI, J. PASTA & S. ULAM. ‘Studies of Non Linear Problems.’ Rapport technique, University of California, Los Alamos Scientific Laboratory. 1955.
- [Jia99] X. JIA, C. CAROLI & B. VELICKY. ‘Ultrasound Propagation in Externally Stressed Granular Media.’ *Physical Review Letters*, **82** (9), 1863–1866. 1999.
- [Kon12] L. KONDIC, A. GOULLET, C. S. O’HERN, M. KRAMAR, K. MISCHAIKOW & R. P. BEHRINGER. ‘Topology of force networks in compressed granular media.’ *EPL*, **97** (5), 54001. 2012.
- [Lei94] M. LEIBIG. ‘Model for the propagation of sound in granular materials.’ *Physical Review E*, **49** (2), 1647–1656. 1994.

- [Mak99] H. A. MAKSE, N. GLAND, D. L. JOHNSON & L. M. SCHWARTZ. ‘Why Effective Medium Theory Fails in Granular Materials.’ *Physical Review Letters*, **83** (24), 5070–5073. 1999.
- [Mak00] H. A. MAKSE, D. L. JOHNSON & L. M. SCHWARTZ. ‘Packing of Compressible Granular Materials.’ *Physical Review Letters*, **84** (18), 4160–4163. 2000.
- [Ost06] S. OSTOJIC, E. SOMFAI & B. NIENHUIS. ‘Scale invariance and universality of force networks in static granular matter.’ *Nature*, **439** (7078), 828–830. 2006.
- [Rad96] F. RADJAI, M. JEAN, J.-J. MOREAU & S. ROUX. ‘Force Distributions in Dense Two-Dimensional Granular Systems.’ *Physical Review Letters*, **77** (2), 274–277. 1996.
- [Rin12] C. RINGL & H. M. URBASSEK. ‘A LAMMPS implementation of granular mechanics : Inclusion of adhesive and microscopic friction forces.’ *Computer Physics Communications*, **183** (4), 986–992. 2012.
- [Sch84] L. M. SCHWARTZ, D. L. JOHNSON & S. FENG. ‘Vibrational Modes in Granular Materials.’ *Physical Review Letters*, **52** (10), 831–834. 1984.
- [She91] P. SHENG & M. ZHOU. ‘Heat conductivity of amorphous solids : simulation results on model structures.’ *Science (New York, N.Y.)*, **253** (5019), 539–542. 1991.
- [Sni98] R. K. SNIEDER & J. A. SCALES. ‘Time-reversed imaging as a diagnostic of wave and particle chaos.’ *Physical Review E*, **58** (5), 5668–5675. 1998.
- [Som05] E. SOMFAI, J.-N. ROUX, J. H. SNOEIJER, M. VAN HECKE & W. VAN SAARLOOS. ‘Elastic wave propagation in confined granular systems.’ *Physical Review E*, **72** (2), 021301. 2005.
- [Sut04] A. M. SUTIN, J. A. TENCATE & P. A. JOHNSON. ‘Single-channel time reversal in elastic solids.’ *The Journal of the Acoustical Society of America*, **116** (5), 2779–2784. 2004.
- [Tou99] A. TOURIN, A. DERODE & M. FINK. ‘Dynamic time reversal of randomly backscattered acoustic waves.’ *Europhysics Letters*, **47** (2), 175–181. 1999.
- [Ulr09] T. J. ULRICH, K. V. D. ABEELE, P.-Y. L. BAS, M. GRIFFA, B. E. ANDERSON & R. A. GUYER. ‘Three component time reversal : Focusing vector components using a scalar source.’ *Journal of Applied Physics*, **106** (11), 113504. 2009.

Étude du transport des ondes dans les milieux granulaires : expériences et simulations

There are some enterprises in which a careful disorderliness is the true method.

Herman Melville, *Moby Dick*, 1851

Sommaire

3.1 Transport diffusif dans les milieux granulaires secs et mouillés	74
3.1.1 Modèle	74
3.1.2 Influence de la dissipation	75
3.1.3 Anomalie aux temps longs	76
3.2 Simulations numériques	78
3.2.1 Détermination du libre parcours moyen élastique	79
3.2.2 Étalement du halo diffusif	83
3.2.3 Influence de la dissipation à fréquence centrale fixe	88
3.2.4 Influence de la fréquence à dissipation fixée	92
3.2.5 Influence de l'amplitude de la source sur le spectre transmis	95
3.2.6 Conclusions sur les apports du modèle numérique à l'étude du transport	98
3.3 Transport et retournement temporel dans les milieux granulaires immergés	98
3.3.1 Rétrodiffusion cohérente en champ lointain	98
3.3.2 Rétrodiffusion cohérente en champ proche	103
3.3.3 Étude du transport par retournement temporel	107
3.3.4 Retournement temporel en régime stationnaire	111
3.3.5 Retournement temporel dynamique	114
3.4 Conclusions	117

Dans ce chapitre, nous portons tout d'abord notre attention sur des résultats expérimentaux obtenus dans des milieux granulaires secs et mouillés. Nous verrons qu'un modèle de diffusion permet de rendre compte de ces résultats mais que certains d'entre eux mettent toutefois en évidence un écart par rapport aux prédictions théoriques. Nous verrons que notre modèle numérique apporte à cet égard un éclairage nouveau.

Nous nous intéresserons ensuite au transport des ondes multiples diffusées dans un milieu granulaire totalement immergé dans l'eau. Dans un premier temps nous déterminons les paramètres de transport (coefficient de diffusion D et libre parcours moyen de transport l^*) grâce à l'étude du cône de rétro-diffusion cohérente. Dans un second temps, nous montrerons qu'une expérience de retournement temporel réalisée dans une configuration bien choisie est sensible à la taille du halo diffusif dans le milieu.

3.1 Transport diffusif dans les milieux granulaires secs et mouillés

3.1.1 Modèle

X. Jia a montré que la propagation des ondes multiples diffusées dans les milieux granulaires obéissait en général à l'équation de la diffusion [Jia04]. En effet, le profil temporel de l'intensité moyenne multiple diffusée transmise au travers d'un échantillon granulaire placé dans une cellule sous contrainte (même dispositif expérimental que nos expériences) peut être approximé par une solution de l'équation de la diffusion (figure 3.1).

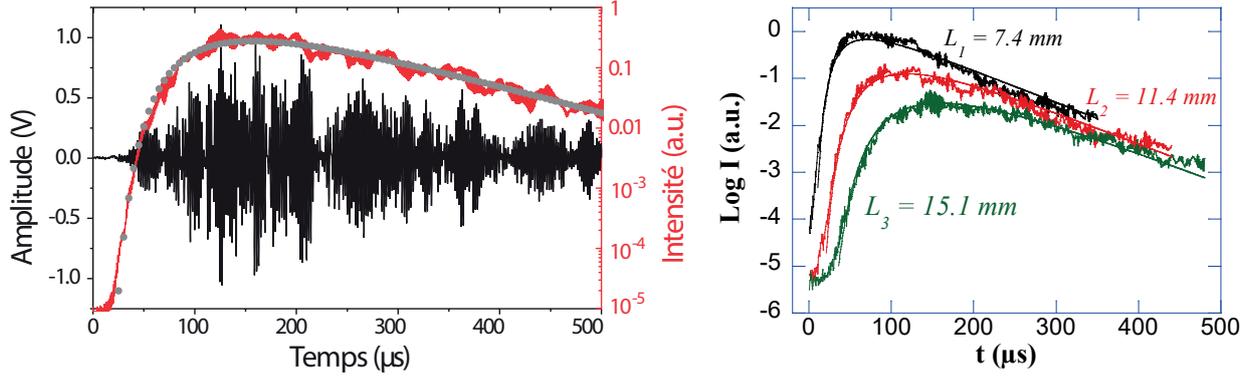


FIGURE 3.1 – L'intensité acoustique moyenne transmise dans un échantillon granulaire sec sous contrainte est bien modélisée par l'équation de la diffusion. (a) L'intensité est calculée en moyennant le carré de l'amplitude transmise (courbe noire) pour plusieurs configurations (courbe rouge, en échelle logarithmique). On peut alors effectuer une régression suivant la solution de l'équation de la diffusion (ronds gris). Figure extraite de [Bru08]. (b) Les profils d'intensité sont très bien décrits par la solution de l'équation de la diffusion, pour différentes distance de propagation. Il est de plus à noter que le coefficient de diffusion D et le facteur de qualité $Q_a = 2\pi f\tau_a$ sont les mêmes pour les trois échantillons : $D = 0.13 \pm 0.01 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ et $Q_a = 200 \pm 10$. Figure extraite de [Jia04].

Plus précisément, il a été montré que la solution de l'équation de la diffusion unidimensionnelle entre deux plans infinis parfaitement réfléchissants modélisait correctement la diffusion de la densité d'énergie élastique W , le long de l'axe de la source :

$$W(z, t) = \frac{U_0}{L} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi l^*}{L}\right) e^{-\frac{Dn^2\pi^2 t}{L^2}} \right] e^{-t/\tau_a} \quad (3.1)$$

où

- z est la distance le long de l'axe de la source, en partant de cette dernière
- U_0 est l'énergie injectée par la source
- L est l'épaisseur du milieu
- l^* est le libre parcours moyen de transport (voir section 1.1.3).

Il est important de noter ici que le milieu est modélisé par un « slab » (tranche) aux parois totalement réfléchissantes ($\partial W/\partial z|_{z=0,L} = 0$) [Lag89, Zhu91, Yan13]. Cela est physiquement justifié par la forte rupture d'impédance entre les parois (duralumin) et le milieu granulaire.

Le fait que les parois soient dans notre cas très réfléchissantes aux ondes élastiques implique que la décroissance temporelle de l'intensité est liée à la dissipation dans le milieu, et non aux fuites de l'énergie en dehors du milieu, comme cela est habituellement le cas.

Il a par ailleurs été vérifié que les paramètres de transport (coefficient de diffusion D et temps d'absorption τ_a) extraits à partir des profils étaient indépendants de la distance de propagation (voir les différentes courbes sur la figure 3.1(b)), ce qui renforce la confiance dans la validité du modèle diffusif. Une hypothèse est cependant faite, en supposant que le libre parcours moyen de transport l^* est donné par

$$l^* = 3 \frac{D}{v_S} \quad (3.2)$$

où v_S est la vitesse de l'onde *ballistique*. En effet, comme nous l'avons vu dans le chapitre introductif (équation (1.6)), la vitesse à considérer dans l'expression du coefficient de diffusion est normalement celle de *transport de l'énergie*. Cependant, comme nous pouvons le constater, les régressions obtenues semblent bien en accord avec les résultats expérimentaux.

Le fait que l'équation de la diffusion modélise correctement la propagation de l'intensité moyenne multiplement diffusée dans un empilement granulaire n'est pas trivial. En effet, contrairement à la plupart des exemple de diffusion multiple, le milieu n'est ici pas composé d'une matrice dans laquelle sont inclus des diffuseurs (comme c'est le cas du brouillard, où l'onde lumineuse se propage dans l'air et rencontre des gouttes sur sa route), mais c'est la structure elle-même du milieu (réseau hétérogène des contacts entre les grains) qui est responsable de la diffusion multiple (voir section 1.3.5).

3.1.2 Influence de la dissipation

Cette modélisation de la propagation de l'énergie élastique par l'équation de la diffusion permet alors d'étudier la dissipation interne, grâce à l'extraction du facteur de qualité $Q_a = 2\pi f\tau_a$. Ce facteur est d'autant plus grand que le temps de la décroissance temporelle de l'énergie (caractérisée par le temps τ_a caractéristique de la décroissance exponentielle) est long. De façon équivalente, son inverse Q_a^{-1} est d'autant plus petit que la décroissance est lente, et donc que la dissipation est faible. Le facteur Q_a^{-1} quantifie donc directement la dissipation.

Lorsqu'on ajoute une très faible quantité de liquide (huile, typiquement) dans le milieu, le modèle diffusif permet toujours de décrire le profil de l'intensité moyenne diffusée (figure 3.2). Les paramètres de transport sont alors modifiés : notamment, le facteur de qualité Q_a diminue avec l'ajout de liquide, car les ondes sont dissipées plus vite (à la dissipation frictionnelle s'ajoute la dissipation visqueuse [Bru08]) ; et le coefficient de diffusion change, car la vitesse d'onde change [Jia01, Bru06].

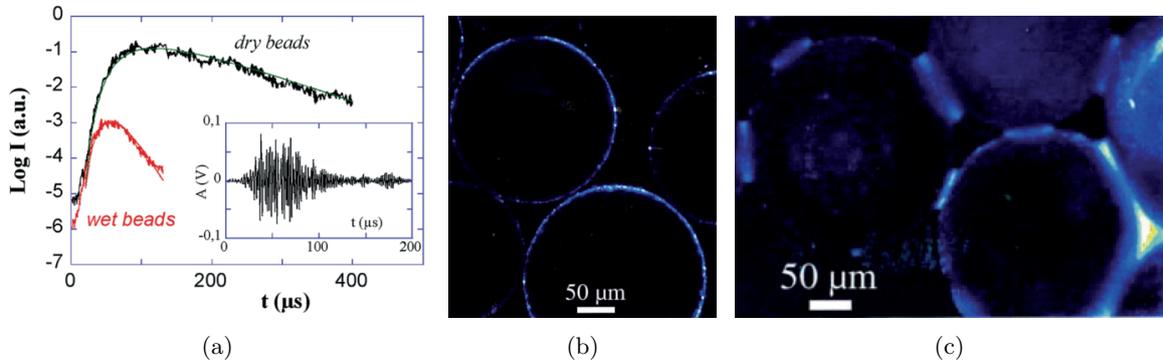


FIGURE 3.2 – Influence du mouillage des grains sur le profil de l'intensité diffusée dans les milieux granulaires. (a) La décroissance de l'intensité aux temps longs est très fortement accélérée ($Q_a \approx 40$ contre 200 dans le cas sec) par l'ajout d'une très faible quantité d'huile dans le milieu (ici une fraction volumique de l'ordre de 10^{-4}). Le coefficient de diffusion augmente de 15% environ, probablement à cause de la lubrification des contacts induite qui augmente la vitesse des ondes dans une proportion similaire. Figure extraite de [Jia04]. (b) et (c) Des images de microscopie en fluorescence montrent que l'ajout d'un peu de liquide dans le milieu (ici des fractions volumiques de (b) $2 \cdot 10^{-4}$ et (c) 10^{-2} à droite) crée une couche autour des grains ou des ponts capillaires entre ces derniers, augmentant considérablement la dissipation, et donc diminuant τ_a . Figures extraites de [Mas99].

Une autre façon d'augmenter la dissipation, consiste à jouer sur la distribution de la taille des grains. Durant sa thèse, Yougu Yang [Yan13] a par exemple montré que l'ajout de petites billes dans un empilement de billes plus grandes (on a alors une distribution bidisperse) permettait de diminuer de façon très importante le facteur de qualité des ondes multiplement diffusées, exactement comme l'ajout d'une petite quantité d'huile (figure 3.3). Cela est à relier au fait que l'ajout de petites billes

augmente considérablement le nombre de contacts dans le milieu, qui sont le lieu privilégié de la dissipation (par friction).

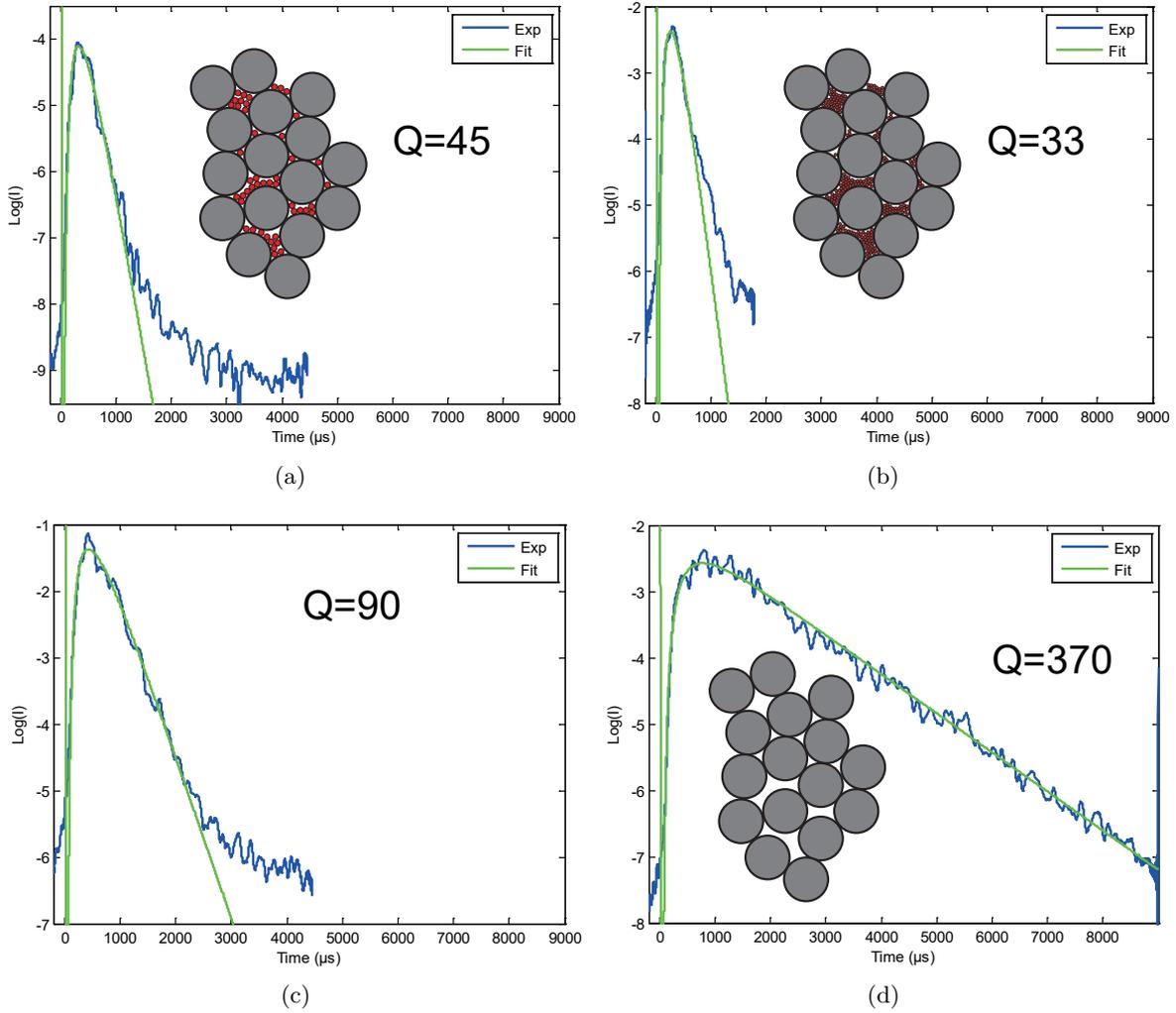


FIGURE 3.3 – Influence de l'introduction de petites billes ou d'huile dans le milieu sur la décroissance de l'intensité. (a) et (b) L'ajout de petites billes (resp. 0.7 mm et 0.3 mm, les grosses billes faisant 5 mm) diminue considérablement le facteur de qualité $Q_a = 2\pi f\tau_a$ – la figure (d) montrant le cas de référence – signe d'une dissipation accrue. Plus la taille des billes ajoutées est petite, et plus le facteur de qualité diminue. (c) Le même phénomène se produit si l'on ajoute de l'huile, comme expliqué à la figure précédente. Dans les quatre cas, le coefficient de diffusion est sensiblement le même : $D = 0.7 \pm 0.05 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$.

3.1.3 Anomalie aux temps longs

Jérôme Laurent [Lau11] et Yougu Yang [Yan13] ont montré que le coefficient de diffusion variait en $f^{-0.9}$ (figure 3.4(b)), ce qui est consistant avec le fait que plus la fréquence est élevée, et plus le libre parcours moyen est petit.

Cependant, en comparant plus finement les signaux expérimentaux et les régressions suivant l'équation de la diffusion, des écarts aux solutions de l'équation de la diffusion semblent apparaître dans certains cas, en particulier aux temps longs : lorsque l'on ajoute de petites billes, nous constatons aux temps très longs une décroissance plus lente que la décroissance exponentielle prévue (figures 3.3(a) et 3.3(b)) ; de même lorsqu'on ajoute un peu d'huile (figure 3.3(c)) ; et lorsque l'on augmente très fortement la fréquence (figure 3.4).

Ces écarts s'accompagnent de résultats difficiles à interpréter physiquement, par exemple l'augmentation du facteur de qualité Q avec la fréquence (figure 3.4(c)). En effet, on s'attend plutôt à ce

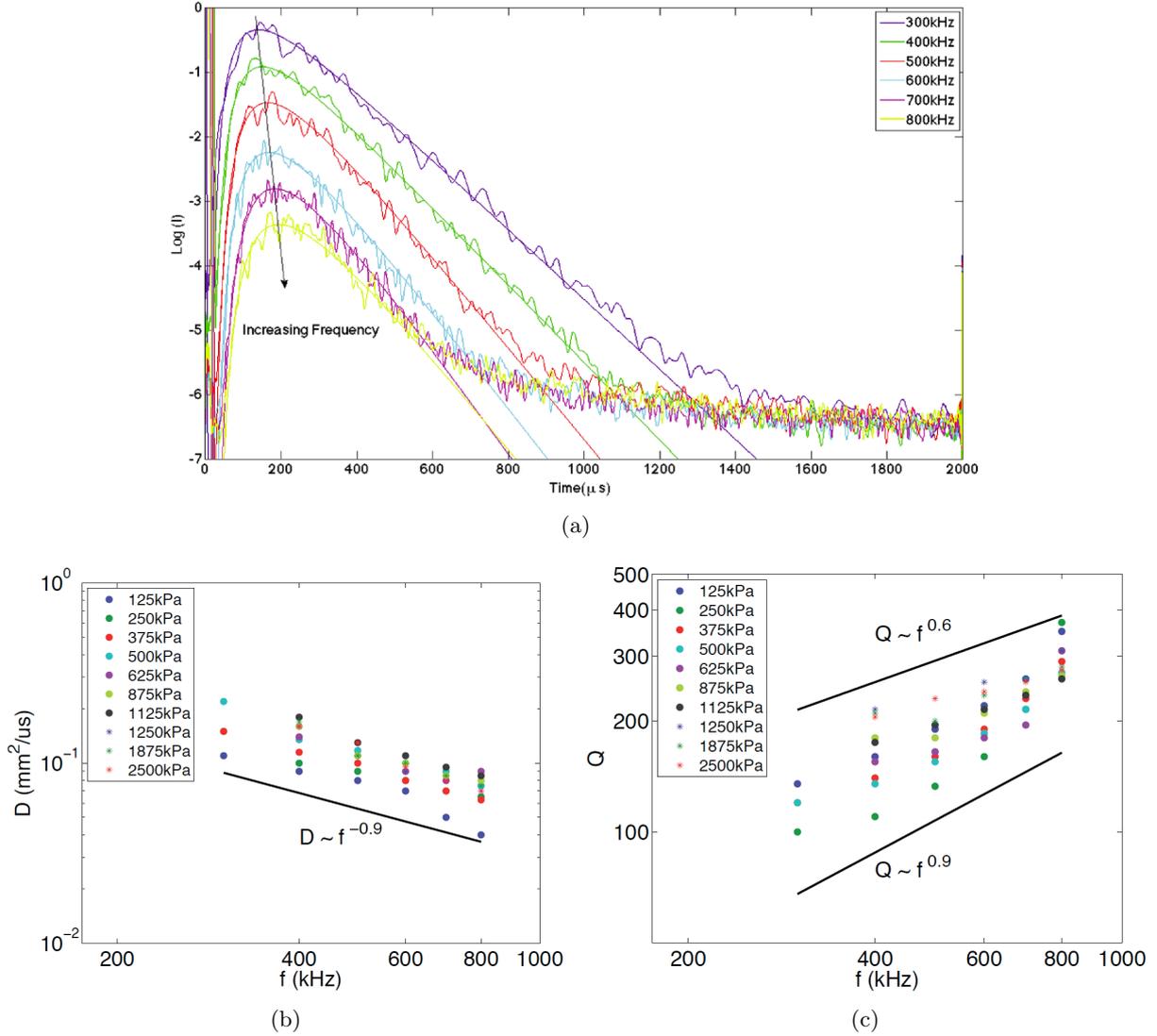


FIGURE 3.4 – Influence de la fréquence sur le profil de l'intensité diffusée dans les milieux granulaires confinés. (a) Les profils sont bien approximés par les solutions de l'équation de la diffusion (traits pleins), et ce pour différentes fréquences. (b) Le coefficient de diffusion D varie à en $f^{-0.9}$. La diminution du coefficient de diffusion avec la fréquence rejoint le fait que plus la fréquence est élevée, et plus le libre parcours moyen est petit, donc plus l'onde subit de diffusions, ce qui ralentit sa propagation. (c) Le facteur de qualité $Q_a = 2\pi f\tau_a$ augmente avec la fréquence, avec une variation entre $Q_a \propto f^{0.6}$ et $Q_a \propto f^{0.9}$. Figures extraite de [Yan13].

que plus la fréquence augmente, et plus le facteur de qualité diminue, puisque ce dernier quantifie la dissipation, qui augmente en général avec la fréquence.

Deux causes possibles

Des écarts par rapport au modèle diffusif ont été trouvés dans d'autres contextes. Par exemple, dans l'expérience de propagation lumineuse dans les poudres d'oxyde de titane (section 1.1.4), lorsque la taille des grains de la poudre est diminuée, le profil présente un écart non-négligeable par rapport à la solution de l'équation de la diffusion (figure 3.5(a)). La même anomalie apparaît dans l'expérience des billes métalliques frittées de Hu et al. lorsque la fréquence est augmentée (figure 3.5(b)).

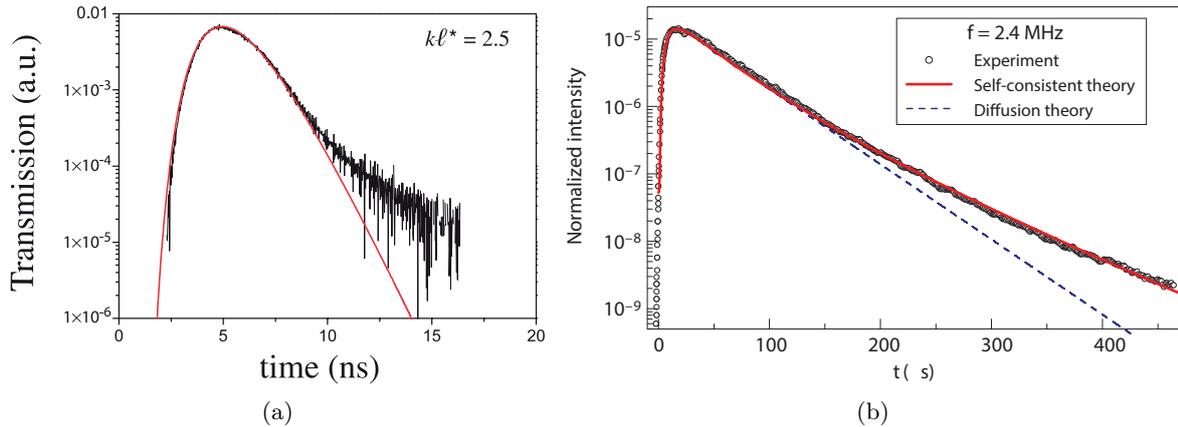


FIGURE 3.5 – Exemples d'écart au modèle diffusif dans l'intensité moyenne transmise (a) Dans le cas de l'impulsion lumineuse dans la poudre d'oxyde de titane, lorsque la taille des grains est diminuée, un écart à la décroissance exponentielle apparaît (en rouge, la solution de l'équation de la diffusion). Figure extraite de [Stö06]. (b) La même anomalie apparaît dans l'échantillon de billes métalliques frittées lorsque la fréquence est augmentée. Figure extraite de [Hu08].

Dans le premier cas, l'écart au modèle diffusif est expliqué par des effets non-linéaires [Sch13]. Dans le second cas, c'est le phénomène de localisation d'Anderson, qui apparaît lorsque la longueur d'onde est de l'ordre du libre parcours moyen (voir section 1.1.5).

Nous allons voir grâce à notre modèle numérique qu'une troisième cause peut expliquer un tel écart.

3.2 Simulations numériques

Nous l'avons vu, l'étude du transport de l'intensité multiples fois diffusée – aussi bien en acoustique qu'en optique ou en sismologie (section 1.1.4) – fournit des informations fondamentales sur le milieu de propagation et ses diffuseurs (taille, pouvoir diffusant, distribution, dissipation etc.), notamment grâce à sa modélisation par l'équation de la diffusion.

Si nous avons montré que ce modèle s'applique en général très bien aux milieux granulaires secs et mouillés (section 3.1), nous avons cependant pointé une anomalie du transport dans le cas des milieux granulaires fortement dissipatifs (section 3.1.2) et nous voulons alors profiter de notre modèle numérique (introduit au chapitre précédent, section 2.2) pour essayer d'apporter un éclairage sur cette anomalie.

La première étape est alors de vérifier si la propagation de l'énergie dans notre simulation suit le modèle diffusif, et d'étudier les différents paramètres de transport en fonction des paramètres qui sont à notre portée (fréquence et dissipation, principalement). Cela nous permettra d'apporter des éléments de comparaison à nos expériences et de mettre en évidence une explication possible à l'anomalie pointée.

3.2.1 Détermination du libre parcours moyen élastique

Dans un premier temps, nous cherchons à déterminer le libre parcours moyen élastique l_e de nos ondes, de façon à caractériser le régime de propagation.

Pour cela, nous allons envoyer une onde plane dans le milieu et suivre l'amplitude du front cohérent. En effet, cette dernière doit décroître de façon exponentielle avec la distance parcourue, à cause bien sûr de la dissipation, mais aussi de la diffusion dans les directions différentes de celles de la direction incidente (voir section 1.1.2). On doit donc avoir une amplitude $A(x)$ du front d'onde cohérent variant avec la distance x de propagation en

$$A(x) \propto e^{-\frac{x}{2l_e}} e^{-\frac{-x}{2l_a}} = e^{-\frac{x}{2l_{\text{ext}}}} \quad (3.3)$$

où

$$\frac{1}{l_{\text{ext}}} = \frac{1}{l_e} + \frac{1}{l_a}. \quad (3.4)$$

avec l_a la distance d'absorption. La longueur l_{ext} est appelée « libre parcours moyen d'extinction ». Les facteurs 1/2 proviennent du fait que cette dernière caractérise la décroissance de l'intensité, et non de l'amplitude.

Pour nous concentrer sur l'influence de la diffusion multiple, nous prenons ici – c'est un luxe permis par la simulation numérique – une dissipation nulle ($\beta = 0$, et donc $\tau_a = +\infty$). Cela nous garantit que le front cohérent ne décroît que suite à la redirection de l'onde dans des directions différentes de la direction incidente.

Nous aurons alors simplement

$$l_{\text{ext}} = l_e. \quad (3.5)$$

La figure 3.6 montre le champ de déplacement u^x dans la direction x à différents instants suite à une période d'oscillation de la paroi gauche du milieu, à une fréquence centrale de $f = 0.3f_0$, avec une amplitude de $0.05a_0$. Le paramètre de percolation est $p = 0.91$. Sur chaque carte de déplacements est superposée une ligne verticale située à la position du maximum de l'onde cohérente. Cette dernière est évaluée en moyennant le déplacement sur la direction y et cela nous permet de suivre sa position ainsi que son amplitude au cours de la propagation.

Comme nous le voyons, l'onde cohérente est bien visible au début de la propagation, mais perd progressivement en amplitude, par diffusion sur les défauts du réseau. L'onde cohérente est alors suivie par un motif complexe de déplacement correspondant à la diffusion multiple. Notons qu'à partir d'une certaine distance (figure 3.6(f)), le maximum de la moyenne dans la direction y (ligne verticale) ne coïncide plus avec l'onde cohérente ; cela est dû au fait que l'amplitude de cette dernière devient plus petite que l'amplitude de l'onde multiple diffusée.

À partir du suivi de l'onde cohérente, nous pouvons évaluer sa vitesse : de l'ordre de $1.35a_0/T_0$ (figure 3.7). Nous avons de plus vérifié que cette vitesse ne variait quasiment pas sur la plage de fréquences étudiées ici (variation de vitesse de moins de 1% entre $f = 0.1f_0$ et $f = 0.4f_0$). Ici, l'onde cohérente se déplace à une vitesse reliée aux paramètres physiques des ressorts et des masses du réseau. Un point intéressant est que la vitesse de l'onde cohérente dans le cas totalement homogène ($p = 1$ et la raideur de tous les ressorts à 1) vaut $1.45a_0/T_0$. Cette augmentation de vitesse de l'onde cohérente avec la percolation est très probablement liée au fait que la rigidité effective du milieu augmente lorsque l'on ajoute des ressorts. Enfin, nous retrouvons là encore le fait que notre méthode de suivi de l'onde cohérente ne permet pas de suivre cette dernière aux temps longs : à partir de $t = 35T_0$ environ, le maximum est trouvé pour des très faibles valeurs de position x . Cela rejoint ce que nous expliquions au paragraphe précédent : à partir d'une certaine distance de propagation, l'amplitude du front d'onde cohérent est du même ordre de grandeur que l'onde multiple diffusée. Nous avons cependant accès à un intervalle assez grand pour pouvoir estimer de façon fiable la vitesse et la décroissance de l'amplitude de l'onde cohérente.

La figure 3.8 présente la superposition de l'onde cohérente en fonction de la distance x , à différents moments de la propagation (en vert aux temps courts, en bleu aux temps longs), et pour une fréquence

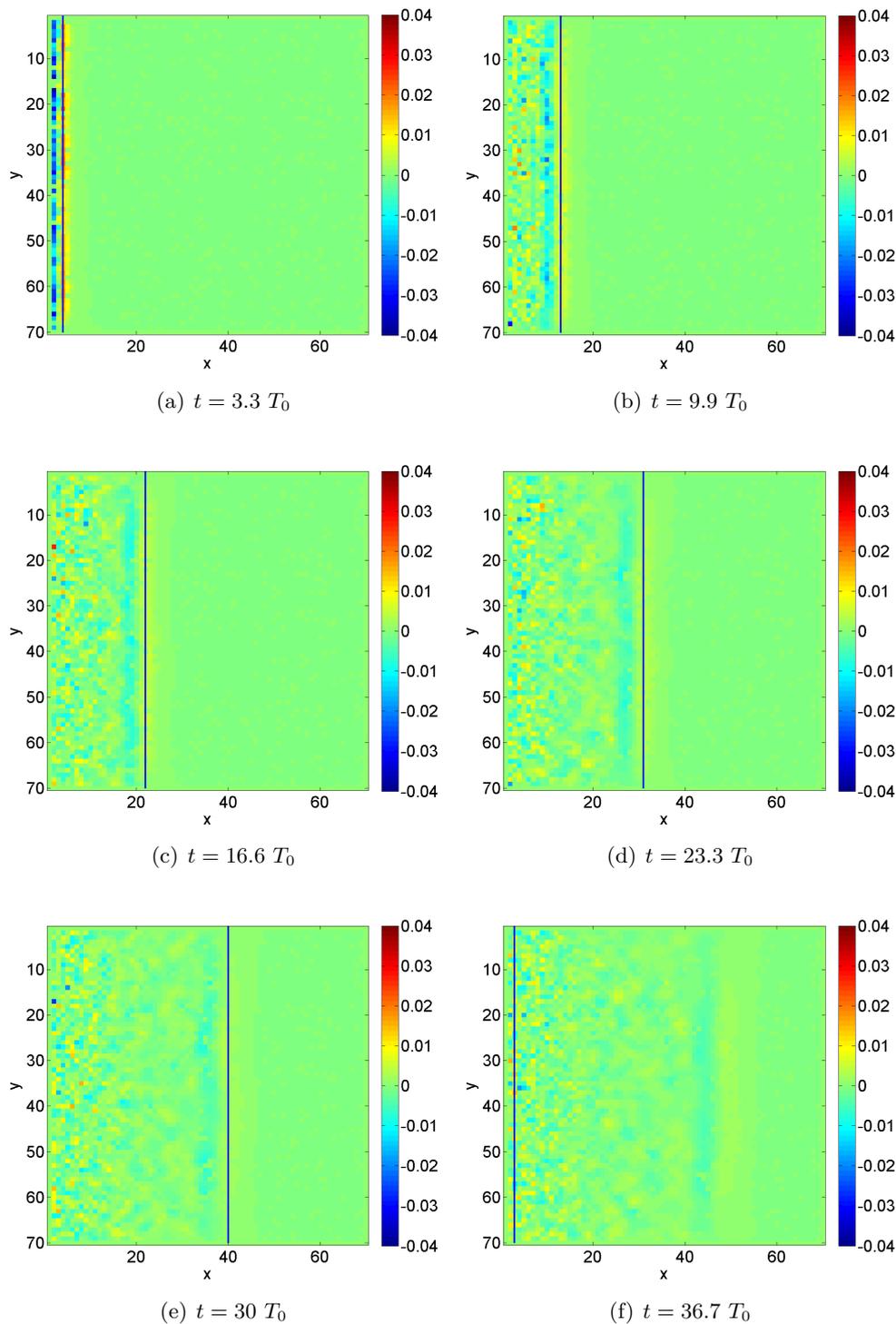


FIGURE 3.6 – Décroissance de l’onde cohérente en fonction de la distance de propagation (composante u^x du champ de déplacement). La source est ici la paroi gauche du domaine ($x = 1$), qui a subi une période d’oscillation à la fréquence $f = 0.3f_0$ dans la direction x . Sur chaque figure est superposée une ligne verticale située à la position du maximum de l’onde cohérente, cette dernière étant évaluée par moyenne du champ selon la direction y . Même sans dissipation – comme c’est le cas ici – l’amplitude de l’onde cohérente décroît au cours de la propagation, par diffusion sur les défauts du réseau dans une direction différente de sa direction initiale. L’énergie de l’onde cohérente est progressivement transférée à l’onde multiplesment diffusée, jusqu’à devenir du même ordre que cette dernière. Nous constatons d’ailleurs sur la figure (f) que le maximum de l’onde cohérente n’est pour cette raison plus bien suivi à partir d’une certaine distance de propagation.

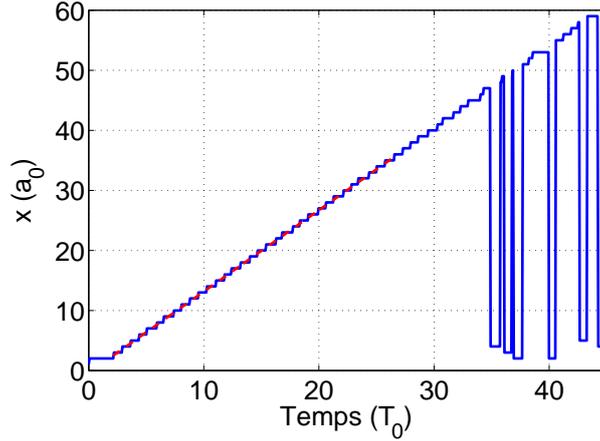


FIGURE 3.7 – Position du front cohérent en fonction du temps. La vitesse est de $1.36a_0/T_0$ et varie de moins de 1% sur la plage de fréquence $0.1f_0-0.4f_0$. La position du front n'est plus bien suivie pour de grandes distances de propagation car l'onde cohérente est alors plus petite que l'onde diffuse qui suit.

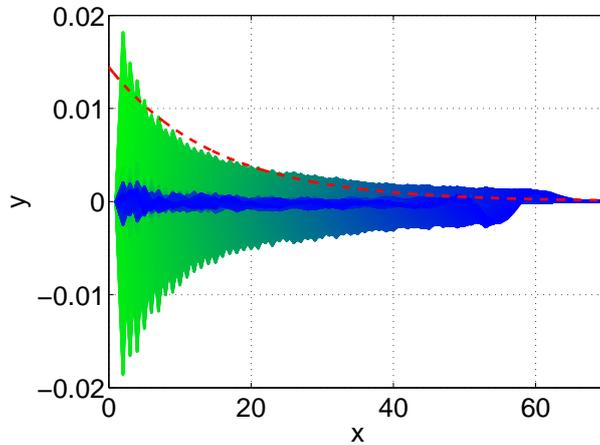


FIGURE 3.8 – Décroissance de l'onde cohérente en fonction de la distance parcourue (du vert au bleu pour une distance de propagation croissante), pour une fréquence centrale de la source de $f = 0.3f_0$. Le libre parcours moyen d'extinction, distance typique de la décroissance exponentielle, est ici de $l_{\text{ext}} = 5.4a_0$. En l'absence de dissipation, cette longueur coïncide avec le libre parcours moyen élastique l_e . Pour les grandes distances de propagation, la régression exponentielle n'est plus valable, car l'onde diffuse est alors dominante, et son intensité moyenne décroît en $1/x$ (voir figure 3.9).

de source de $f = 0.3f_0$. Cette représentation nous permet de bien mettre en évidence l'évolution du maximum de l'onde cohérente. Comme expliqué, cette amplitude doit décroître de façon exponentielle avec la distance de propagation x . Nous superposons alors la meilleure régression exponentielle des maximum de l'onde cohérente en fonction de la distance x (courbe rouge en pointillés). Comme nous le voyons, l'amplitude de l'onde cohérente en fonction de la distance est bien approximée par un profil exponentiel, au moins au temps courts. La régression présentée ici est de la forme

$$A(x) = e^{-x/(2l_{\text{ext}})} \quad (3.6)$$

comme expliqué plus haut. Le paramètre l_{ext} ici extrait vaut $l_{\text{ext}} = l_e = 5.4a_0$. Nous sommes donc dans un régime fortement diffusant, puisque notre échantillon a une dimension latérale de $70a_0$, soit presque 13 fois plus grand que le libre parcours moyen élastique l_e .

Nous constatons cependant que la régression n'est plus correcte aux grandes distances x . En effet, à partir d'une certaine distance de propagation du front d'onde cohérent ($x \simeq 30$) son amplitude devient du même ordre que l'onde incohérente (diffuse) qui est derrière (voir figure 3.6(f), où le maximum suivi ne correspond plus au front cohérent, par exemple). Or, l'amplitude de l'onde diffuse a une décroissance en $1/x$, donc plus lente que e^{-x} (voir figure 3.9, extraite de [vdM88]). La régression exponentielle du

début de l'enveloppe décroît donc logiquement plus vite que cette dernière pour des grandes distances.

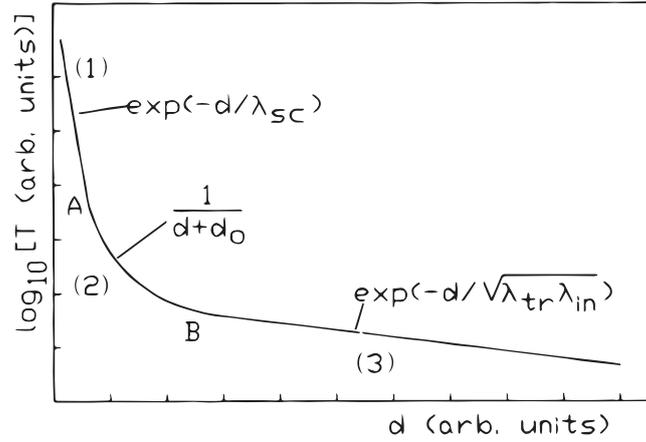


FIGURE 3.9 – Régimes de décroissance de l'intensité transmise (en échelle logarithmique) en fonction de la distance de propagation d . Le régime (1) correspond à la décroissance exponentielle de l'intensité cohérente. (2) À partir d'une certaine distance de propagation, l'intensité du front d'onde cohérent devient plus petite que l'intensité diffusée, et la décroissance de cette dernière est en $1/d$. (3) Pour une distance de propagation encore plus grande, la dissipation devient dominante, et la décroissance redevient exponentielle avec la taille de l'échantillon (la distance caractéristique de décroissance étant *a priori* différente de celle du premier régime). Figure extraite de [vdM88].

Nous pouvons effectuer le même traitement pour des fréquences de source différentes (figure 3.10). Comme nous le constatons, le libre parcours moyen élastique décroît avec la fréquence. Cela est en accord avec l'idée selon laquelle plus la fréquence est élevée et plus l'onde cohérente subit de diffusions, transférant alors d'autant plus vite son énergie à l'onde multiple diffusée en fonction de la distance de propagation. Précisons que pour chaque fréquence de ce graphique, le signal source est composé d'une unique période, menant alors à un spectre de source plus ou moins large en fonction de la fréquence, et donc à une valeur extraite du libre parcours moyen élastique l_e qui est en fait une moyenne sur la bande passante de la source. La meilleure régression en loi de puissance donne $l_e \propto f^{-1.26}$.

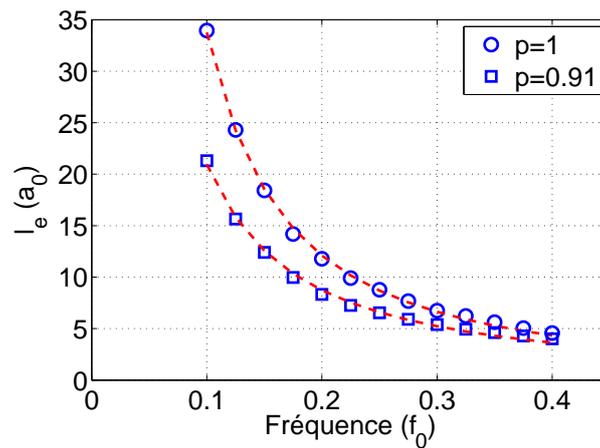


FIGURE 3.10 – Évolution du libre parcours moyen élastique en fonction de la fréquence, pour des percolations $p = 1$ (ronds) et $p = 0.91$ (carrés). Les courbes rouges sont les meilleures régressions en loi de puissance : $l_e \propto f^{-1.48}$ pour $p = 1$ et $l_e \propto f^{-1.26}$ pour $p = 0.91$. Nous constatons sans surprise que plus la fréquence est élevée et plus ce dernier est petit. Cela est consistant avec le fait que plus la fréquence est élevée et plus l'onde subit de diffusions : l'énergie de l'onde cohérente est alors transférée d'autant plus vite dans l'onde multiple diffusée. Pour toutes les fréquences de ce graphique, le signal temporel de la source est une unique période centrée à la fréquence considérée. Le libre parcours moyen élastique est donc une moyenne plus ou moins grossière autour de la fréquence en abscisse.

Enfin, nous avons vérifié que plus la percolation p est grande, et moins l'onde est diffusée (figure 3.10). En effet, nous constatons que pour une percolation $p = 1$ (en gardant toutefois une distribution uniforme entre 0.5 et 1.5 pour les raideurs), le libre parcours moyen élastique l_e est plus grand que dans le cas de la percolation $p = 0.91$. Dans le cas extrême d'un milieu homogène ($p = 1$ et les raideurs toutes identiques), l'onde ne subit aucune diffusion, et le front d'onde continue alors sa route sans être diffracté, et donc sans diminuer d'amplitude. Le libre parcours moyen élastique (et de transport) est alors infini. En toute rigueur, il faut cependant prendre en compte les effets de bords, qui créent des réflexions, et donc diminuent l'amplitude de l'onde balistique. On trouve par exemple pour un milieu totalement uniforme ($p = 1$ et les raideurs des ressorts toutes fixées à 1), $l_e = 39a_0$ pour $f = 0.1f_0$.

3.2.2 Étalement du halo diffusif

Nous nous intéressons maintenant au régime diffusif à proprement parler, i.e. le régime dans lequel nous espérons pouvoir modéliser la diffusion de la densité d'énergie élastique moyenne par l'équation de la diffusion.

Nous considérons alors une source placée au centre de notre milieu en $(x = 35, y = 35)$, et allons lui faire émettre une brève perturbation. La source est rendue isotrope en imposant aux huit masses m_i entourant la masse centrale du domaine un déplacement radial synchrone $\mathbf{r}_i(t)$ (figure 3.11) :

$$\mathbf{r}_i(t) = \sin(2\pi ft)G(t)\mathbf{e}_{r_i} \quad (3.7)$$

où $G(t)$ est une fenêtre gaussienne et \mathbf{e}_{r_i} le vecteur rayon unitaire reliant la masse i à la masse centrale, pointé vers l'extérieur.

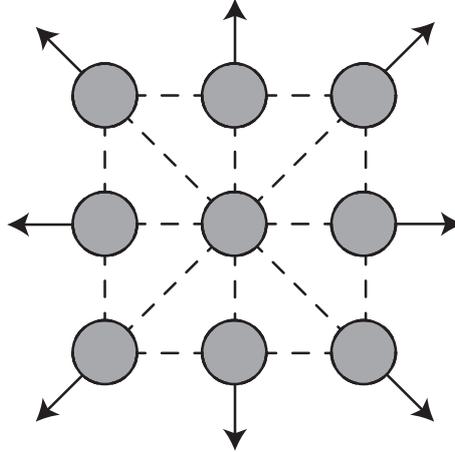


FIGURE 3.11 – Source isotrope utilisée pour l'étude du halo diffusif. Les huit masses entourant la masse centrale du domaine ont un mouvement radial synchrone. Les mouvements imposés pendant l'émission sont symbolisés par les huit flèches.

Nous pouvons alors calculer à tout instant l'énergie totale par site (équivalent de la densité d'énergie), somme de l'énergie potentielle $E_{p,i}$ et de l'énergie cinétique $E_{c,i}$ au site i :

$$\begin{cases} E_{p,i}(t) = \frac{1}{2} \sum_{i' \in V_i} \frac{1}{2} K_{ii'} \|r_{ii'}(t) - r_{ii'}^0\|^2 & (3.8) \\ E_{c,i}(t) = \frac{1}{2} m \|\mathbf{v}_i(t)\|^2 & (3.9) \\ E_i(t) = E_{p,i}(t) + E_{c,i}(t) & (3.10) \end{cases}$$

où :

- V_i est l'ensemble des masses voisines de la masse i
- $K_{ii'}$ est la raideur du ressort reliant les masses i et i'
- $r_{ii'}(t)$ est la distance à l'instant t entre les masses i et i'

- $r_{ii'}^0$ est la distance entre les masses i et i' avant la propagation de l'onde (différente de la longueur à vide des ressorts)
- m est la masse des particules (la même pour toutes les particules)
- \mathbf{v}_i est la vitesse de la masse i .

Le facteur $1/2$ devant la somme de l'énergie potentielle reflète le fait que l'énergie d'un ressort $K_{ii'}$ est distribuée entre *deux* masses. À une masse ne correspond donc que la moitié de l'énergie potentielle du ressort.

De plus, l'énergie potentielle d'un ressort à l'instant t est évaluée en comparant la longueur $r_{ii'}(t)$ du ressort à l'instant t à sa longueur $r_{ii'}^0$ avant la propagation de l'onde, et non à sa longueur à vide. En effet, le réseau étant pré-contraint (tendu), il contient une énergie potentielle statique, qui ne nous intéresse pas ici.

Cas $L/l_e \simeq 4$

Comme expliqué dans le chapitre introductif (section 1.1.3), le régime diffusif apparaît lorsque la distance de propagation L est plus grande que le libre parcours moyen élastique l_e . Dans notre modèle numérique, nous avons considéré un milieu de taille $70a_0 \times 70a_0$, et donc la distance de propagation, distance entre le centre du domaine et les bords, est $L = 35a_0$.

Dans un premier temps, nous prenons une fréquence de la source centrée autour de $f = 0.2f_0$, fréquence à laquelle le libre parcours élastique moyen vaut $l_e \simeq 8.7a_0$ (d'après la figure 3.10). On a donc un rapport $L/l_e \simeq 4$, ce qui indique que l'onde est diffusée en moyenne 4 fois lors de sa propagation du centre aux bords du domaine. On peut donc s'attendre à être dans un régime intermédiaire entre le régime balistique et le régime diffusif.

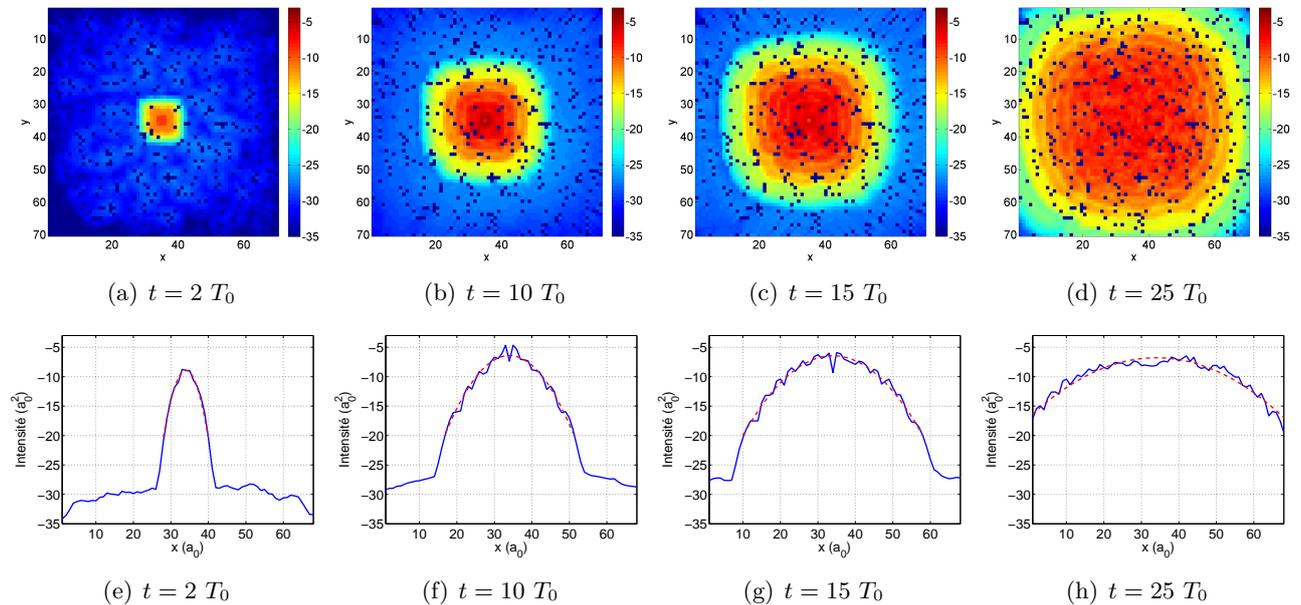


FIGURE 3.12 – Diffusion de l'énergie en fonction du temps à $f = 0.2f_0$. (a) à (d) Étalement de l'énergie totale (énergie cinétique et énergie potentielle) en fonction du temps (échelle logarithmique). (e) à (h) Profil du halo selon une direction radiale et régression du profil par une gaussienne. Le halo diffusif s'étale et son profil est gaussien, en accord avec le modèle de la diffusion.

La figure 3.12 montre les champs d'énergie $E(t)$ à quatre instants de la propagation (figures 3.12(a) à 3.12(d)), ainsi que les profils d'énergie (en échelle logarithmique) moyennés le long des deux axes orthogonaux $x = 35$ et $y = 35$ (figures 3.12(e) à 3.12(h)). Ces profils sont à rapprocher des profils théoriques de la figure 1.2(c). Sur chaque profil est superposé (pointillés rouges) une régression par une parabole (gaussienne en échelle logarithmique) de la forme :

$$A - \left(\frac{|x - x_0|}{B} \right)^2 \quad (3.11)$$

où A et B sont deux paramètres, et $|x - x_0|$ représente la distance entre chaque site situé en x et la source située en $x_0 = 35$. En supposant que le halo n'a pas encore atteint les bords du domaine, on peut considérer que la solution théorique en espace libre (1.5) décrit correctement la densité d'énergie. On doit donc avoir

$$\begin{cases} A = \log(U_0) - \log(4\pi Dt) \\ B = \sqrt{4Dt} = w(t). \end{cases} \quad (3.12)$$

$$(3.13)$$

Précisons de plus que la régression n'est appliquée que sur une plage limitée de valeurs d'abscisse x , car comme expliqué plus tôt et comme nous le voyons par exemple sur la figure 3.12(e), le réseau présente un niveau de « bruit » résiduel (dû à la pré-contrainte) strictement non-nul, qui n'a bien sûr aucun rapport avec le halo diffusif qui nous intéresse ici. La régression gaussienne n'est donc appliquée que dans la plage où il apparaît sur les figures 3.12(e) à 3.12(h), définie par un niveau d'énergie minimal de -20 u.a.

Comme nous le voyons, l'énergie se propage sous la forme d'un halo de forme circulaire. De plus, le profil est très bien approximé à chaque instant par la régression gaussienne.

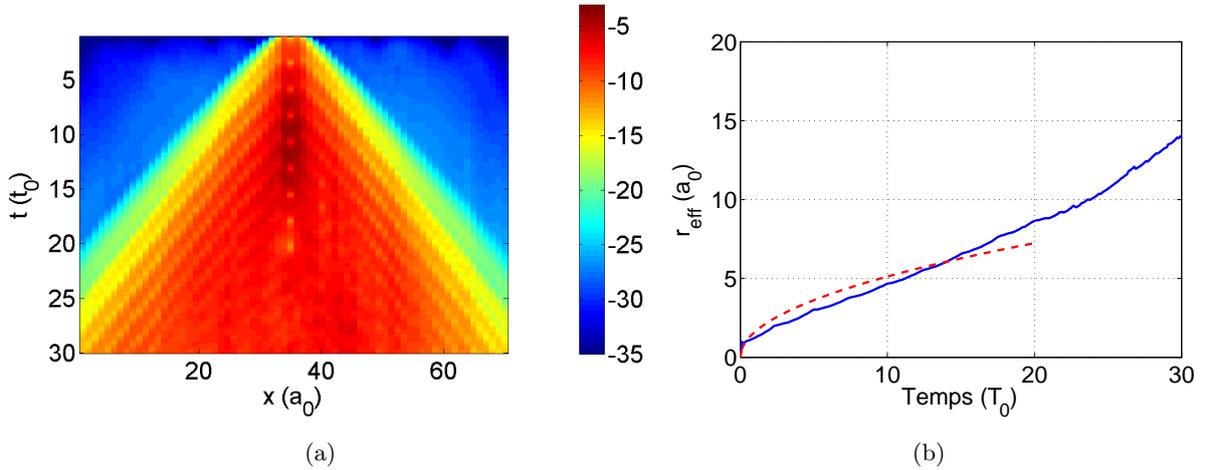


FIGURE 3.13 – Croissance du halo diffusif en fonction du temps à $f = 0.2f_0$. (a) Évolution spatio-temporelle du halo diffusif. (b) Évolution de la largeur $w(t)$ du halo en fonction du temps et régression par une fonction du type $\sqrt{4Dt}$. Le halo croît plutôt de façon linéaire avec le temps, signe que le régime n'est pas totalement diffusif. Il n'est alors pas possible d'extraire un coefficient de diffusion.

Pour mieux nous représenter la façon dont le halo diffusif croît en fonction du temps, nous représentons – comme nous l'avons fait dans la partie théorique (figure 1.2(b)) – l'évolution spatio-temporelle d'une section du halo (figure 3.13(a)). Nous constatons que ce dernier croît plutôt de façon linéaire. Cela est confirmé par le tracé de $w(t)$ (figure 3.13(b)), sur lequel nous avons superposé la meilleure régression par une fonction racine. Comme nous pouvons le constater, la régression est mauvaise et l'étalement du halo semble donc ne pas obéir pleinement à la modélisation par l'équation de la diffusion.

Cela confirme que sur la distance de propagation ici considérée (environ $35a_0$) le régime n'est pas totalement diffusif à cette fréquence, pour laquelle le libre parcours moyen vaut $l_e \simeq 8.7a_0$. Considérer un domaine plus grand permettrait alors à l'onde balistique de se convertir plus dans l'onde multiplesment diffusée.

Cas $L/l_e \simeq 9.7$

Nous nous plaçons maintenant à une fréquence plus élevée, i.e. à $f = 0.4f_0$, et appliquons le même traitement que précédemment. À cette fréquence, on a alors $l_e \simeq 3.5a_0$ (figure 3.10), ce qui donne un

rapport $L/l_e \simeq 9.7$, ce qui laisse espérer un régime de propagation diffusif atteint sur une distance de propagation plus faible que dans le cas précédent.

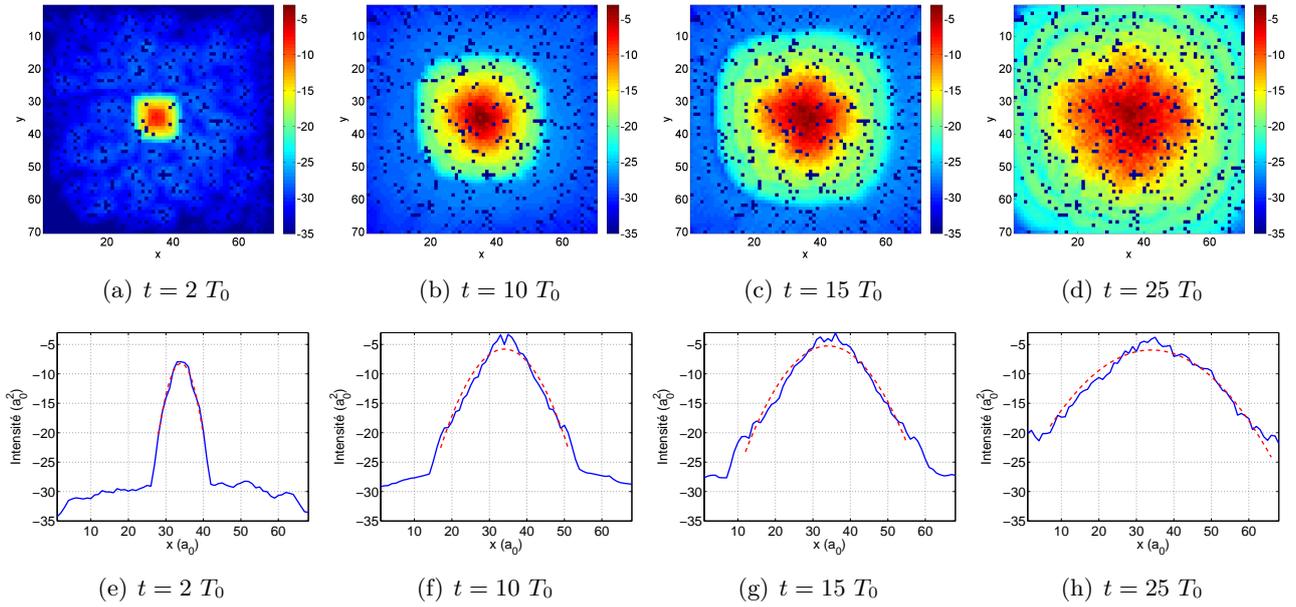


FIGURE 3.14 – Diffusion de l'énergie en fonction du temps à $f = 0.4f_0$. (a) à (d) Étalement de l'énergie totale (énergie cinétique et énergie potentielle) en fonction du temps (échelle logarithmique). (e) à (h) Profil du halo selon une direction radiale et régression du profil par une gaussienne. Le halo diffusif s'étaie et son profil est gaussien, en accord avec le modèle de la diffusion. La croissance est cependant plus lente que dans le cas à $f = 0.2f_0$.

La figure 3.14 montre l'évolution du halo au cours du temps ainsi que les profils d'énergie. Nous constatons une évolution similaire au cas précédent, avec une régression gaussienne approximant bien le profil, en notant que le halo semble croître plus lentement qu'à $f = 0.2f_0$.

Cette impression est confirmée par le tracé de l'évolution spatio-temporelle du halo (figure 3.15(a)) qui montre que le halo croît effectivement moins vite que dans le cas à plus basse fréquence (figure 3.13(a)). De façon plus quantitative, nous constatons que la régression par une fonction racine approxime de façon beaucoup plus fidèle que dans le cas précédent la largeur effective $w(t)$ (figure 3.15(b)), nous donnant une valeur de coefficient de diffusion $D = 0.43a_0^2/T_0$.

Coefficient de diffusion

Comme nous l'avons expliqué, à basses fréquences le régime de propagation n'est pas pleinement diffusif sur la distance de propagation que nous avons considérée (environ $35a_0$) : l'onde balistique ne s'est pas propagée sur une distance assez grande pour se convertir intégralement dans l'onde diffusée.

D'après nos simulations, nous estimons qu'avec la distance de propagation que nous avons fixée ($35a_0$), le régime diffusif est atteint à partir de la fréquence $f = 0.3f_0$. Bien sûr, considérer un domaine plus grand permettrait d'observer le régime diffusif pour des fréquences plus basses.

Nous traçons donc sur la figure 3.16 l'évolution du coefficient de diffusion D extrait par notre méthode, pour différentes fréquences de source entre $0.3f_0$ et $0.4f_0$.

Nous constatons que le coefficient de diffusion diminue lorsque la fréquence augmente, ce qui est en accord avec l'image selon laquelle plus la fréquence est élevée, et plus l'onde subit de diffusions, empêchant en quelque sorte l'énergie d'aller en ligne droite.

Cette décroissance du coefficient de diffusion D en fonction de la fréquence est en accord avec d'autres résultats trouvés dans un modèle similaire, mais scalaire, utilisé par Sheng et Zhou au début des années 90 [She91] (figure 3.17(a)). Ces derniers ont en effet calculé la constante de diffusion des phonons scalaires dans un réseau tri-dimensionnel percolé, pour différentes fréquences et différentes valeurs de percolation p . Comme nous le voyons sur la figure, la constante de diffusion D diminue là

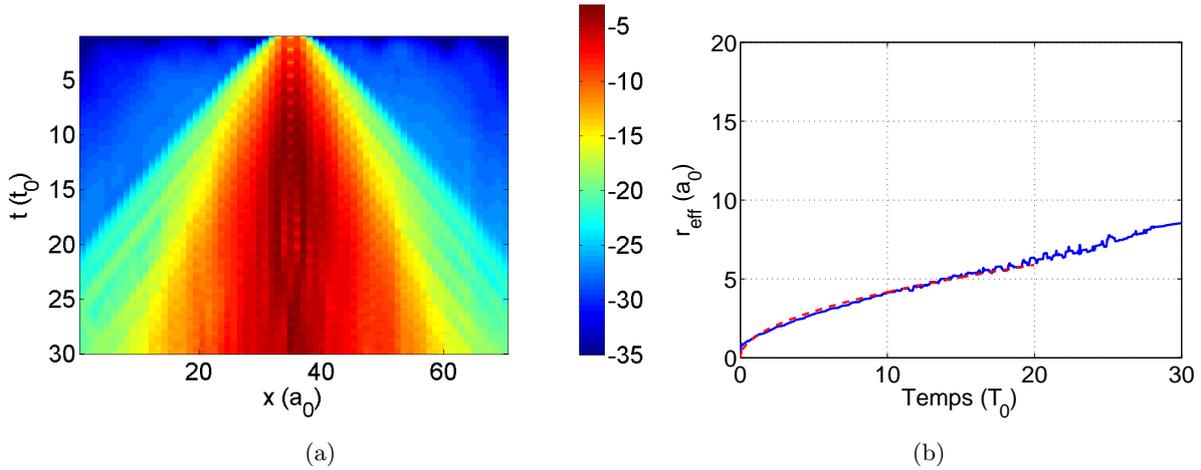


FIGURE 3.15 – Croissance du halo diffusif en fonction du temps à $f = 0.4f_0$. (a) Évolution spatio-temporelle du halo diffusif. (b) Évolution de la largeur $w(t)$ du halo en fonction du temps et régression par une fonction du type $\sqrt{4Dt}$. Le coefficient de diffusion extrait est $D \simeq 0.43$. Contrairement au cas à $f = 0.2f_0$ où w semblait plutôt linéaire, la régression par une fonction racine approche ici beaucoup mieux la fonction w . Cela est consistant avec le fait que l'on se rapproche du régime pleinement diffusif en augmentant la fréquence.

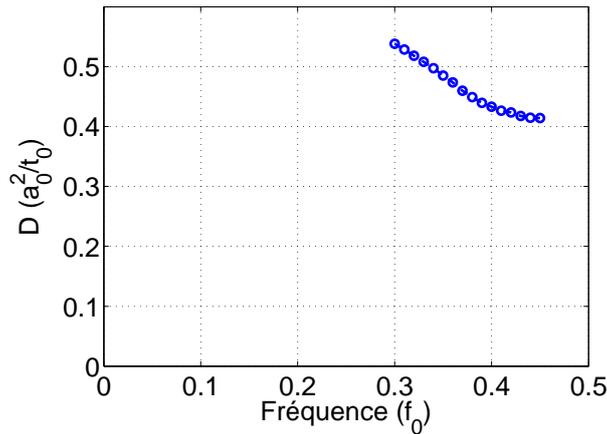


FIGURE 3.16 – Évolution du coefficient de diffusion D avec la fréquence dans notre modèle numérique. La décroissance de D avec la fréquence s'explique par le fait que plus cette dernière est grande, et plus la longueur d'onde λ est petite. L'onde est alors plus « sensible » à la présence des diffuseurs dans le milieu et subit plus de diffusions, ce qui ralentit sa propagation. Il n'est pas possible d'obtenir un coefficient de diffusion pour $f < 0.3f_0$ dans notre cas car notre domaine est alors trop petit pour atteindre le régime diffusif.

aussi avec la fréquence. À basses fréquences, le coefficient de diffusion diverge en ω^{-4} (diffusion de Rayleigh), puis sature à une valeur « plateau », pour finalement s'annuler pour une valeur finie de fréquence, signe de la localisation des phonons.

La même variation a été observée en 2010 dans les simulations numériques de Vitelli et al. [Vit10] (figure 3.17(b)). Ces derniers ont considéré des empilements bi-disperses tri-dimensionnels de 200 à 10 000 particules sphériques soumises à des interactions harmoniques sous contrainte. Cette fois-ci, la diffusivité a été estimée par la formule de Kubo [All93].

Comme expliqué plus haut, la petite taille de notre domaine de simulation nous empêche d'observer le régime diffusif pour les fréquences plus petites que $f = 0.3f_0$, et nous n'avons alors qu'une petite partie de la courbe d'évolution du coefficient de diffusion.

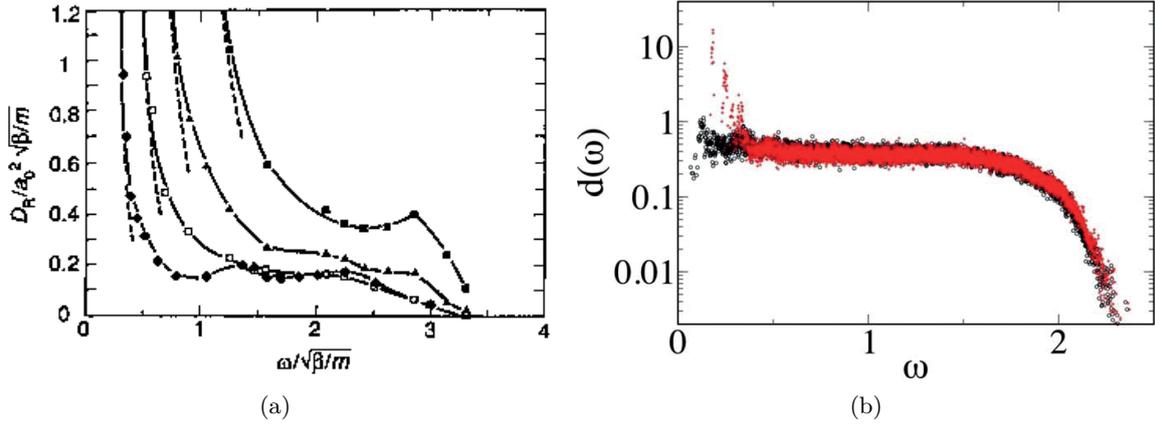


FIGURE 3.17 – Deux exemples d'évolution du coefficient de diffusion en fonction de la fréquence. (a) Diffusivité des phonons scalaires dans un réseau tridimensionnel percolé de taille $79 \times 79 \times 79$ (figure extraite de [She91]). Les quatre courbes représentent différents degrés de désordre, paramétré par la percolation p (\blacksquare $p = 0.85$, \blacktriangle $p = 0.75$, \square $p = 0.65$ et \blacklozenge $p = 0.55$). (b) Diffusivité des phonons (vectoriels) dans un empilement de 1000 masses sphériques reliées par des ressorts, avec (en noir) et sans (en rouge) pré-contrainte (figure extraite de [Vit10]). Dans les deux cas, le coefficient de diffusion décroît avec la fréquence. À très basses fréquences, la décroissance est en ω^{-4} (diffusion de Rayleigh), puis se met à saturer, et finit par s'annuler pour une valeur finie de fréquence, signe de localisation des phonons (arrêt de la diffusion).

Vitesse de transport

D'après l'équation (1.6), la vitesse de transport v_e de l'énergie est donnée par

$$v_e = \frac{dD}{l^*} \quad (3.14)$$

avec d la dimension (ici $d = 2$), D le coefficient de diffusion, et l^* le libre parcours moyen de transport. Plaçons nous à la fréquence $f = 0.4f_0$. À cette fréquence, nous avons trouvé que le coefficient de diffusion $D = 0.43a_0^2/T_0$ (section 3.2.2). Si l'on fait de plus l'hypothèse que les diffusions sont isotropes, on a $l^* = l_e$, ce dernier étant égal à $4a_0$ à cette fréquence (section 3.2.1). Si les diffusions ne sont pas tout à fait isotropes, ce qui est probablement le cas, on a $l^* < l$, et donc v_e est diminué.

Nous trouvons alors que $v_e = \frac{2D}{l_e} = 0.21a_0/T_0$. Nous constatons que cette vitesse est beaucoup plus faible que la vitesse de l'onde cohérente trouvée dans la section précédente (de l'ordre de 6 fois plus faible).

Cela est consistant avec nos observations précédentes et confirme le fait que à cette fréquence, l'onde subit de multiples diffusion, empêchant l'énergie de s'échapper de façon balistique. L'hypothèse du régime diffusif est alors pleinement justifiée.

3.2.3 Influence de la dissipation à fréquence centrale fixe

Les expériences numériques présentées jusqu'à présent dans ce chapitre ont été réalisées *sans* dissipation, de manière à mettre en évidence sans ambiguïté l'influence de la diffusion multiple.

Cependant, la dissipation est un ingrédient inévitable de toute expérience réelle et comme nous l'avons expliqué au début du chapitre (section 3.1.2), c'est elle qui régit la décroissance *exponentielle* de l'intensité diffusée dans les milieux granulaires confinés – étant donné la grande réflectivité des parois des cellules. Nous souhaitons donc maintenant étudier son influence sur les phénomènes de diffusion présentés précédemment et en particulier essayer de comprendre l'écart des résultats expérimentaux au modèle diffusif, i.e. la *décroissance non-exponentielle de l'intensité moyenne au cours du temps*. Un luxe de l'expérience numérique nous permettra notamment d'étudier l'influence de la *quantité* de dissipation sur les signaux transmis.

Nous considérons donc une source constituée de trois masses situées en $(x = 4, y = 34)$, $(x = 4, y = 35)$ et $(x = 4, y = 36)$, et déplaçons ces trois masses dans la direction x avec un mouvement sinusoïdal de 10 périodes centré autour de $f = 0.2f_0$ et d'amplitude $0.05a_0$.

Nous nous concentrons sur le signal transmis, i.e. le déplacement selon x de la masse située en $(x = 66, y = 35)$, et ce pour des valeurs de coefficient de dissipation $\beta \in [0, 10^{-2}]$.

Influence sur le spectre transmis

Nous nous intéressons dans un premier temps à l'influence de la dissipation sur le spectre transmis, et son évolution au cours du temps (figure 3.18). Comme nous le voyons sur le spectre transmis en l'absence de dissipation ($\beta = 0$, figure 3.18(a)), bien que riche, ce dernier est resserré autour de la fréquence source ($f = 0.2f_0$, spectre en pointillés noirs). Au fur et à mesure que la dissipation augmente (figures 3.18(c), 3.18(e) et 3.18(g)), le poids relatif de la composante centrée sur $0.2f_0$ diminue fortement, jusqu'à devenir plus petit que celui des contributions plus basses fréquences (figure 3.18(g)). Cela est consistant avec la dissipation frictionnelle implémentée, du type « $-\beta v$ » (voir l'équation de la dynamique présentée dans le chapitre précédent, section 2.4), puisque dans le domaine fréquentiel, ce terme dissipatif se traduit en $-i\omega\beta$, avec ω la pulsation de la composante considérée. Ainsi, plus la fréquence est grande, et plus le terme de dissipation est important.

Nous pouvons aussi nous intéresser à l'évolution du spectre en fonction du temps, grâce à la décomposition en ondelettes continue (figures 3.18(b), 3.18(d), 3.18(f) et 3.18(h)). Nous voyons très clairement que dès que la dissipation est présente ($\beta \neq 0$), le spectre perd très rapidement ses composantes de plus hautes fréquences, laissant la place aux composantes basses fréquences, qui s'amenuisent néanmoins elles aussi au cours du temps.

Ces résultats sont en bon accord qualitatif avec les résultats expérimentaux de Jia [Jia04] qui montrent que les ondes multiples diffusées (hautes-fréquences) sont très fortement atténuées en présence de dissipation (induite par la présence d'un liquide mouillant, dans le cas des expériences).

Influence sur la forme des signaux transmis

La figure 3.19 montre les amplitudes de déplacement selon l'axe x au cours du temps pour quatre valeurs de coefficient de dissipation, ainsi qu'une vue rapprochée au début des signaux (figure 3.19(b)).

Sans surprise, à t fixé, l'amplitude des signaux décroît lorsque la dissipation augmente. Pour être plus quantitatif, nous pouvons faire appel au modèle fourni par l'équation de la diffusion. Nous calculons alors l'intensité moyenne transmise, en effectuant la même expérience dans 49 échantillons numériques distincts.

Nous devons cependant prendre soin de filtrer nos signaux avant de moyenniser les intensités. En effet, comme nous l'avons expliqué dans la section précédente, la dissipation implique une modification du spectre au cours de la propagation, pouvant entraîner une disparition quasi totale des hautes fréquences au profit des basses fréquences. L'équation de la diffusion décrivant la propagation d'une impulsion centrée autour d'une fréquence centrale, il est important d'être certain que le signal considéré soit bien resserré autour de la fréquence d'intérêt ($0.2f_0$). Nous appliquons donc à chacun des 49 signaux d'amplitude transmis un filtre passe bande entre $0.18f_0$ et $0.22f_0$ (voir la figure 3.20(a) pour un exemple d'effet du filtrage). Comme nous le voyons, l'effet du filtrage est considérable : il réduit énormément l'intensité du signal transmis, et modifie sa forme, faisant pressentir la décroissance exponentielle (droite, en échelle logarithmique) caractéristique de la diffusion avec dissipation.

C'est alors uniquement dans un second temps que nous pouvons moyenniser les intensités (filtrées) transmises (figure 3.20(b)). La décroissance exponentielle est alors claire¹.

Nous appliquons donc ce traitement de filtrage des amplitudes puis moyennage des intensités aux 49 signaux transmis pour différentes valeurs de β (figure 3.21). La figure 3.21(a) compare les profils d'intensités moyennes transmises pour différentes valeurs de β (du noir au bleu, respectivement de $\beta = 0$ à $\beta = 0.01$). Sur chacun des profils est superposé la meilleure régression linéaire sur la partie décroissante (pointillés rouges), permettant de vérifier la décroissance exponentielle et d'accéder au

1. Aux temps très longs, le niveau de bruit numérique est visible.

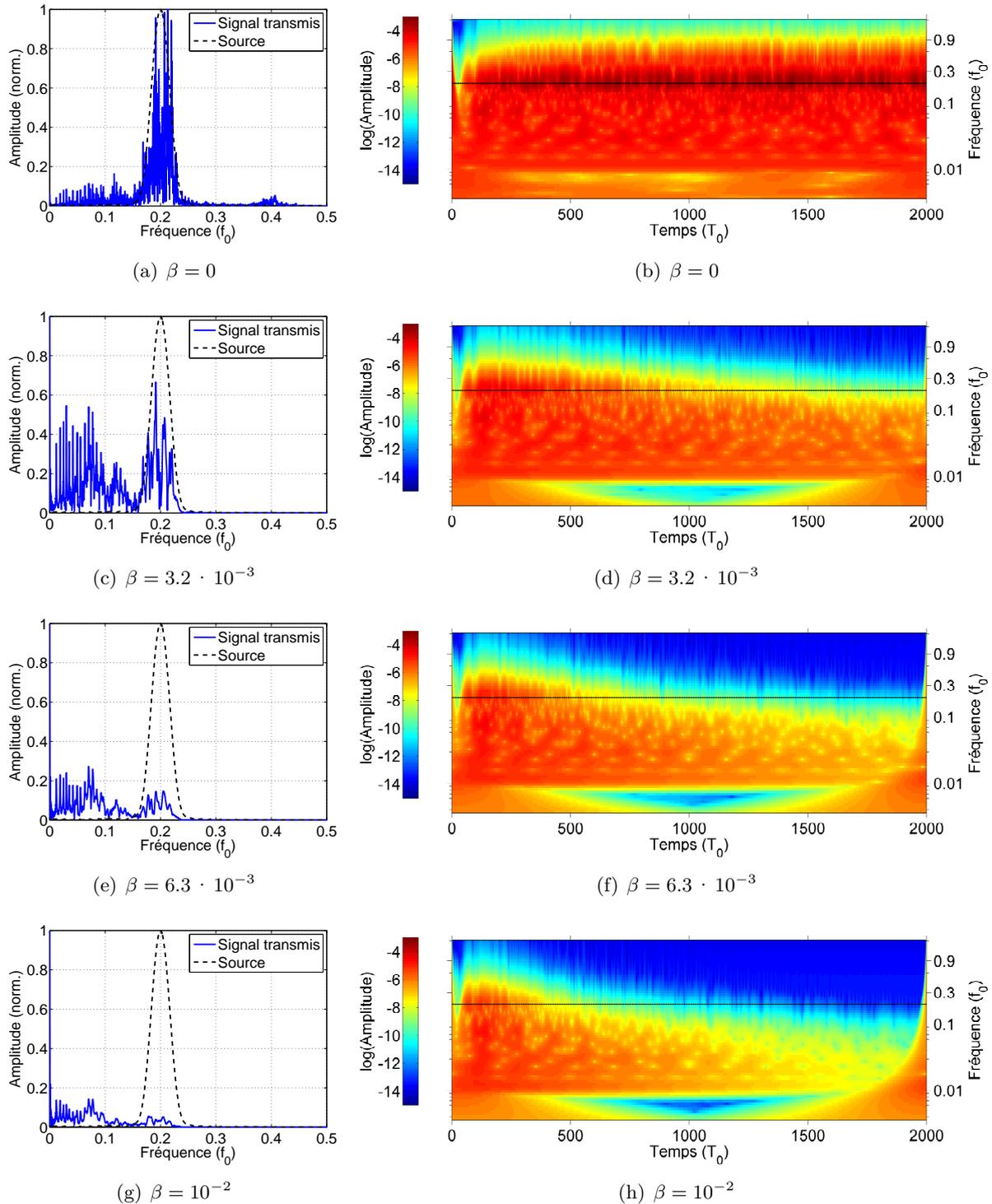


FIGURE 3.18 – Influence de la dissipation sur le spectre du signal transmis. La fréquence de la source est $f = 0.2f_0$. Première colonne : spectres transmis. Deuxième colonne : spectrogrammes transmis (en échelle logarithmique pour l'intensité). (a) et (b) À dissipation nulle, toutes les fréquences se conservent durant la propagation. Le spectre total est alors centré sur la fréquence source (pointillés noirs sur le spectre et le spectrogramme). (c) et (d) L'ajout de la dissipation implique que les fréquences les plus élevées perdent leur énergie au cours de la propagation. Le spectre total perd alors de son poids dans les hautes fréquences. (g) et (h) À forte dissipation (dernière ligne), les hautes fréquences disparaissent totalement aux temps longs, et le spectre total est alors très différent du spectre injecté.

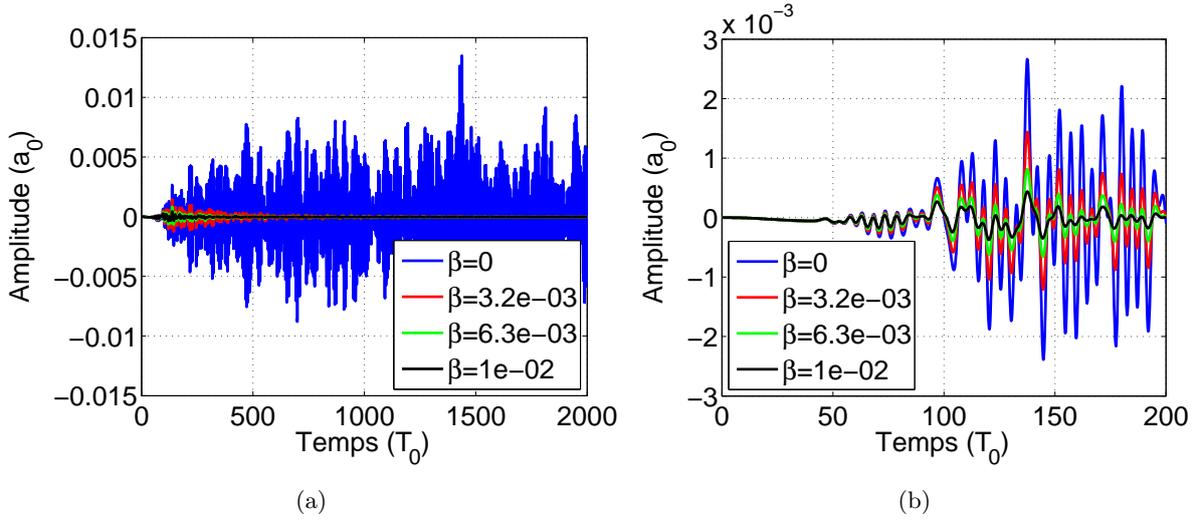


FIGURE 3.19 – Influence de la dissipation sur le signal transmis. Les signaux correspondent à ceux de la figure précédente.

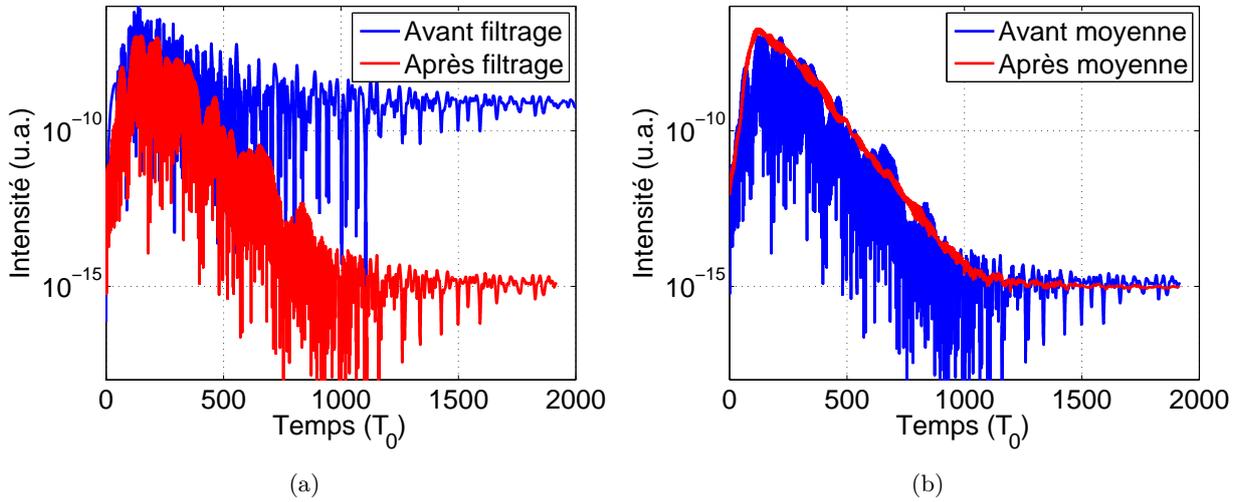


FIGURE 3.20 – Effet du filtrage et de la moyenne sur les configurations, sur l'intensité transmise (dans cet exemple la dissipation vaut $\beta = 4.7 \cdot 10^{-3}$). (a) Le filtre appliqué ici est un filtre passe-bande entre $1.8f_0$ et $2.2f_0$. Le filtrage change drastiquement le profil de l'intensité transmise sur une réalisation. Cela est lié au fait qu'en présence de dissipation, le spectre du signal transmis après la propagation peut être très différent du signal injecté dans le milieu, cette dernière agissant préférentiellement sur les hautes fréquences. (b) Le profil est beaucoup plus net après moyenne de l'intensité filtrée (ici sur 49 échantillons différents). En effet, la modélisation par l'équation de la diffusion n'est en toute rigueur valable que sur une moyenne statistique du désordre dans le milieu.

temps caractéristique de décroissance τ_a (donné par l'inverse de la pente des droites), ou de façon équivalente au facteur de qualité Q_a , défini comme

$$Q_a = 2\pi f\tau_a. \quad (3.15)$$

Le facteur de qualité Q_a quantifie la « qualité » de la transmission, dans le sens où il rend compte de la longueur totale du signal transmis, normalisée par la période source, ou d'une autre manière, la proportion d'énergie dissipée par cycle. Nous constatons que τ_a (et donc Q_a) décroît en β^{-1} . Cela est consistant avec la forme de l'équation de la diffusion (équation (1.4)), dans laquelle le terme de pertes est en $\frac{1}{\tau_a}$, et la dissipation que nous avons choisie dans équation dynamique (équation (2.4)), proportionnelle à β .

Enfin, remarquons que le début des profils d'intensités moyennes transmises semble ne pas dépendre de la dissipation β . Cela est consistant avec le fait que le début des profils temporels dépend principalement du coefficient de diffusion D et que ce dernier ne dépend pas de la dissipation. Cela justifie le fait que nous ayons pris un coefficient de dissipation $\beta = 0$ dans la première partie de ce chapitre pour nous focaliser sur l'étude du halo diffusif.

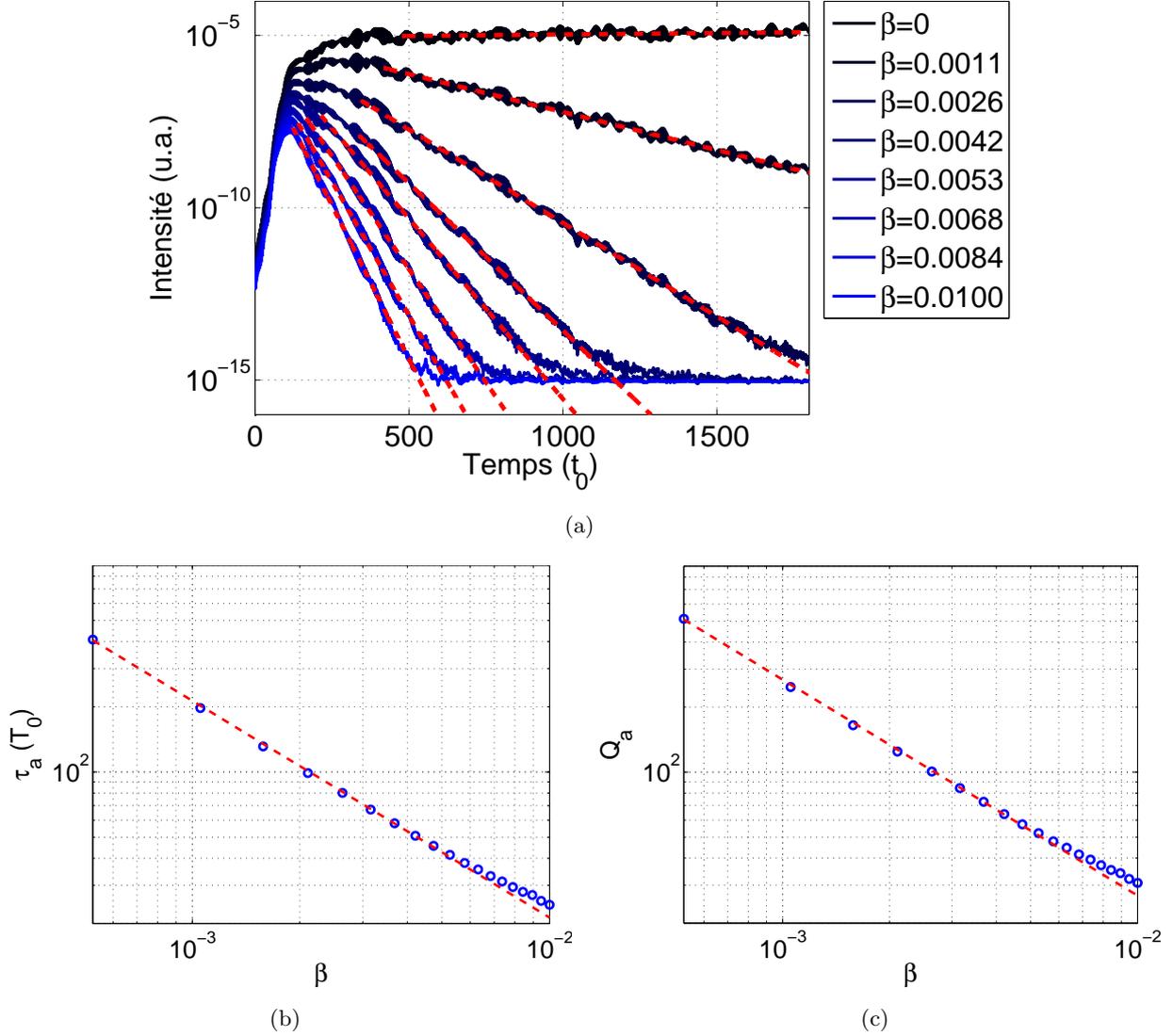


FIGURE 3.21 – Influence de la dissipation sur l'intensité moyenne (filtrée) transmise. La moyenne a été effectuée sur 49 configurations. La source est identique à celle des figures précédentes (trois masses polarisées selon l'axe x , oscillant à $f = 0.2f_0$). (a) L'intensité (échelle logarithmique) décroît de façon exponentielle aux temps longs, en accord avec l'équation de la diffusion avec dissipation (section 3.1.2). Les courbes en pointillés rouges sont les meilleures régressions linéaires. (b) Évolution du temps caractéristique de décroissance τ_a , donné par l'inverse de la pente des droites, en fonction de la dissipation (axes log-log) et régression linéaire (pointillés rouges). On trouve logiquement $\tau_a \propto \beta^{-1}$ (voir texte). (c) Facteurs de qualité $Q_a = 2\pi f\tau_a$ correspondants (axes log-log) et régression linéaire (pointillés rouges). Bien sûr, on a aussi $Q_a \propto \beta^{-1}$ puisque la fréquence est ici fixée. Ces derniers rendent compte quantitativement de la proportion d'énergie dissipée par cycle.

3.2.4 Influence de la fréquence à dissipation fixée

Nous souhaitons maintenant étudier, à dissipation β fixée, l'influence de la fréquence centrale de la source sur les signaux transmis, et en particulier leurs spectres, ainsi que sur les temps caractéristique de décroissance τ_a et les facteurs de qualité Q_a . Nous reprenons donc le protocole précédent, en

fixant le coefficient de dissipation à $\beta = 10^{-3}$, et en prenant une fréquence centrale de la source $f \in [0.05f_0, 0.4f_0]$.

Influence sur les spectres transmis

La figure 3.22 présente les spectres transmis (colonne de gauche) ainsi que les spectrogrammes en échelle logarithmique pour l'intensité (colonne de droite), pour différentes fréquences. Sur les spectres sont superposés en pointillés noirs les spectres de la source (dix oscillations centrées sur la fréquence source).

Comme nous le constatons, plus la fréquence est élevée, et moins il est facile d'injecter de l'énergie dans le milieu. En effet, à basse fréquence (figure 3.22(a)), le spectre transmis suit très bien le spectre de la source, alors qu'à hautes fréquences (figure 3.22(g)), le spectre transmis ne présente qu'un poids très faible à la fréquence source, comparé à celui aux basses fréquences. Cela est confirmé par les décompositions en ondelettes continues des signaux transmis (figures 3.22(b), 3.22(d), 3.22(f) et 3.22(h)).

La raison de cette difficulté à injecter de l'énergie à hautes fréquences est double. Tout d'abord, comme nous l'avons déjà noté dans la section précédente 3.2.3, la dissipation que nous avons implémentée agit d'autant plus que la fréquence est élevée. Cependant, un deuxième ingrédient ajoute une difficulté à l'injection d'énergie dans le milieu à très hautes fréquences : la fréquence de coupure du milieu. En effet, tout comme dans le cas d'une chaîne unidimensionnelle de masses reliées par des ressorts, notre milieu présente un nombre de modes finis, et donc une fréquence maximale au delà de laquelle aucune énergie ne peut être propagée (fin de la première zone de Brillouin). Pour référence, dans le cas d'une chaîne unidimensionnelle de masses m reliées par des ressorts de raideurs k , la fréquence maximale que l'on peut propager (i.e. fréquence du mode de plus haute fréquence) est $f = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \simeq 0.32f_0$ où $f_0 = \sqrt{\langle k \rangle / m}$. Cette fréquence de coupure est naturellement retrouvée dans les expériences et correspond à la fréquence de résonance (premier mode propre) des billes [Jia99] (voir figure 1.23 du chapitre introductif).

Nous pouvons estimer la fréquence de coupure de notre milieu en calculant ses modes (vectoriels), et en cherchant la fréquence du mode de plus haute fréquence. La figure 3.23 présente la densité de mode de notre échantillon (les détails techniques permettant d'extraire les modes sont donnés dans l'annexe B). Nous constatons logiquement que la densité de modes décroît à hautes fréquences (à partir de $f \simeq 0.35f_0$ – rappelons que nous avons défini $f_0 = \sqrt{\langle k \rangle / m}$) et finit par s'annuler (le mode de plus haute fréquence a une fréquence de $f = 0.51f_0$ ²). Ainsi, à amplitude source égale, la capacité du réseau à propager l'énergie décroît à partir de $f = 0.35f_0$, et ce même en l'absence de dissipation. Cependant, remarquons que sur les spectres présentés, l'énergie transmise à $f = 0.27f_0$ (figure 3.22(e)) est plus petite que celle à $f = 0.16f_0$ (figure 3.22(c)), alors que la densité de modes à $f = 0.27f_0$ est plus grande que celle à $f = 0.16f_0$. Cela nous indique que la diminution d'énergie est dominée par la dissipation, plus que par la densité de modes, pour une dissipation $\beta = 10^{-3}$.

Influence sur la forme des signaux transmis

Nous nous intéressons maintenant aux profils temporels de l'intensité moyenne transmise. Pour chaque fréquence centrale de source f , nous filtrons donc l'amplitude entre $0.9f$ et $1.1f$, et moyennons l'intensité filtrée sur 49 configurations (figure 3.24(a)).

Nous constatons que pour toutes les fréquences, les profils d'intensités moyennes sont très bien approximés par des décroissances exponentielles (courbes en pointillés rouges). Nous pouvons alors en extraire les temps caractéristiques de décroissance τ_a (figure 3.24(b), en échelles log-log) ainsi que les facteurs de qualité Q_a correspondants (figure 3.24(c)).

Nous constatons que le temps caractéristique de décroissance τ_a décroît avec la fréquence, et varie en $f^{-1.20}$ (pointillés rouges). Cela confirme nos résultats précédents selon lesquels la dissipation agit d'autant plus que la fréquence est élevée. Le calcul des facteurs de qualité $Q_a = 2\pi f \tau_a$ correspondants nous montre que ce dernier est décroissant à basses fréquences (en dessous de $0.25f_0$ environ). Nous

2. Une étude préliminaire a montré que la valeur de f_c dépendait peu de la configuration et du désordre du milieu, mais une étude plus approfondie doit être poursuivie pour généraliser ce résultat.

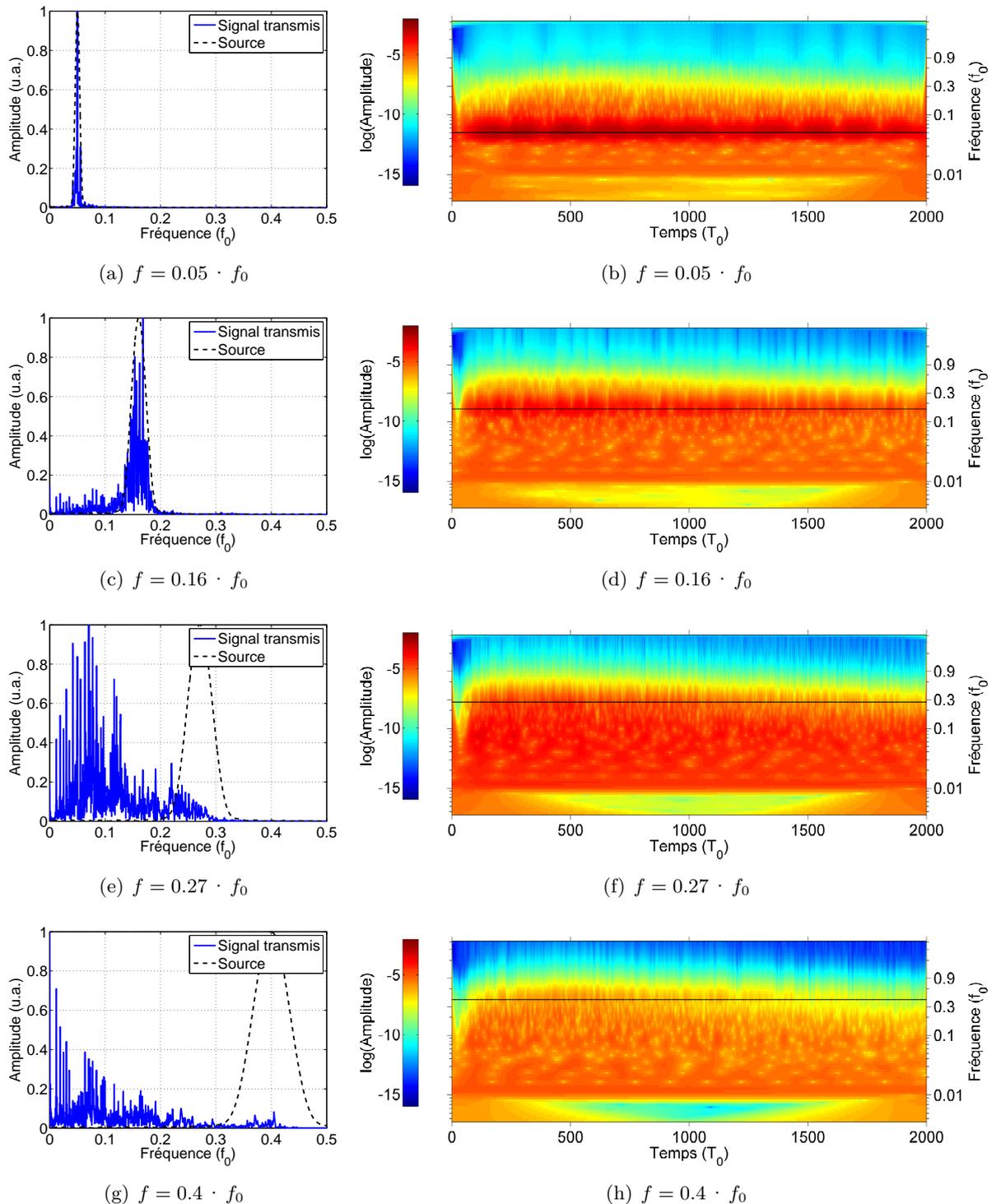


FIGURE 3.22 – Influence de la fréquence sur le spectre du signal transmis. Le coefficient de dissipation vaut ici $\beta = 10^{-3}$. Première colonne : spectres transmis (spectre de la source en pointillés noirs). Deuxième colonne : spectrogrammes transmis (fréquence centrale de la source en pointillés noirs). À basses fréquences (première ligne par exemple), toute l'énergie transmise est centrée sur la fréquence de la source, alors qu'à hautes fréquences (dernière ligne par exemple), l'énergie transmise est beaucoup plus basses fréquences que la fréquence source. Cela est dû à deux effets cumulatifs : la dissipation agit d'autant plus que la fréquence est élevée, et la densité de modes du réseau est faible à hautes fréquences (voir texte).

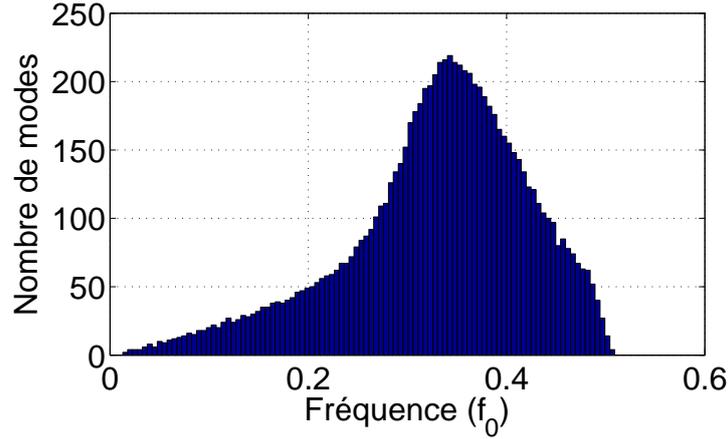


FIGURE 3.23 – Densité de modes (vectoriels) dans notre réseau désordonné. Pour rappel, la percolation vaut $p = 0.91$ et la distribution des raideurs est uniforme entre 0.5 et 1.5. La densité de modes décroît à partir de $f \simeq 0.35f_0$, et s’annule à $f \simeq 0.51f_0$. À partir de $f = 0.35f_0$, la capacité du milieu à propager de l’énergie décroît donc.

remarquons cependant que le temps caractéristique de dissipation τ_a semble devenir constant à partir de $f \simeq 0.3f_0$ et que le facteur de qualité devient croissant à partir de $f \simeq 0.25f_0$ (ce qui est lié à constance de τ_a puisque $Q_a = 2\pi f\tau_a$). Cela est peut-être à attribuer à la densité de modes du réseau (figure 3.23) mais une étude plus approfondie est nécessaire pour s’en assurer et en comprendre la raison physique.

La décroissance du facteur de qualité Q_a en dessous de $f = 0.25f_0$ est en opposition avec les résultats expérimentaux trouvés par le passé (figure 3.4(c)) et confirme leur caractère anormal. En effet, comme nous l’avons noté, on s’attend physiquement à ce que Q_a^{-1} augmente lorsque la fréquence augmente, puisqu’il quantifie directement les pertes, qui sont généralement croissantes avec la fréquence.

Nous pouvons déjà remarquer l’importance de bien filtrer les signaux avant de calculer les intensités moyennées, puisque nous voyons que la pente (inversement proportionnelle à τ_a) dépend fortement de la fréquence : un mauvais filtrage entraînera un mélange de plusieurs pentes, et donc une décroissance non-exponentielle. Nous verrons dans la section suivante que cela est d’autant plus vrai que l’amplitude de la source est importante.

Enfin, remarquons que, contrairement à la section précédente, le début des signaux est fortement dépendant de la fréquence. Cela rejoint le fait que le coefficient de diffusion D dépend de la fréquence (figure 3.16).

3.2.5 Influence de l’amplitude de la source sur le spectre transmis

Les résultats numériques des sections précédentes ont été obtenus avec une amplitude de déplacement de la source de $0.05a_0$, donc négligeable devant la longueur à vide a_0 des ressorts. La figure 3.25 montre l’évolution d’un signal transmis et de son spectre, pour une valeur d’amplitude source de $0.3a_0$ (non-négligeable devant a_0), à une fréquence source f et une dissipation respectivement fixées à $f = 0.2f_0$ et $\beta = 0.01$. Comme nous pouvons le constater, l’augmentation de l’amplitude source modifie sensiblement l’allure du signal transmis (figure 3.25(b)) : en plus d’augmenter logiquement son amplitude (d’un facteur 10 environ), nous remarquons la présence d’une composante basse fréquence très importante par rapport au cas d’une excitation de faible amplitude (figure 3.25(a)). Cela est confirmé par la comparaison des spectres (figure 3.25(c)) normalisés par la composante haute fréquence qui nous intéresse (centrée autour de $0.2f_0$).

Même après filtrage des amplitudes dans une bande de largeur $\Delta f = 20\%f$ (comme précédemment), i.e. autour de $0.18f_0$ et $0.22f_0$, nous constatons alors que l’intensité moyenne transmise présente une décroissance non-exponentielle aux temps longs (figure 3.25(d)). Cela est supporté par l’évolution du temps caractéristique de dissipation τ_a que nous avons mise en évidence à la section précédente

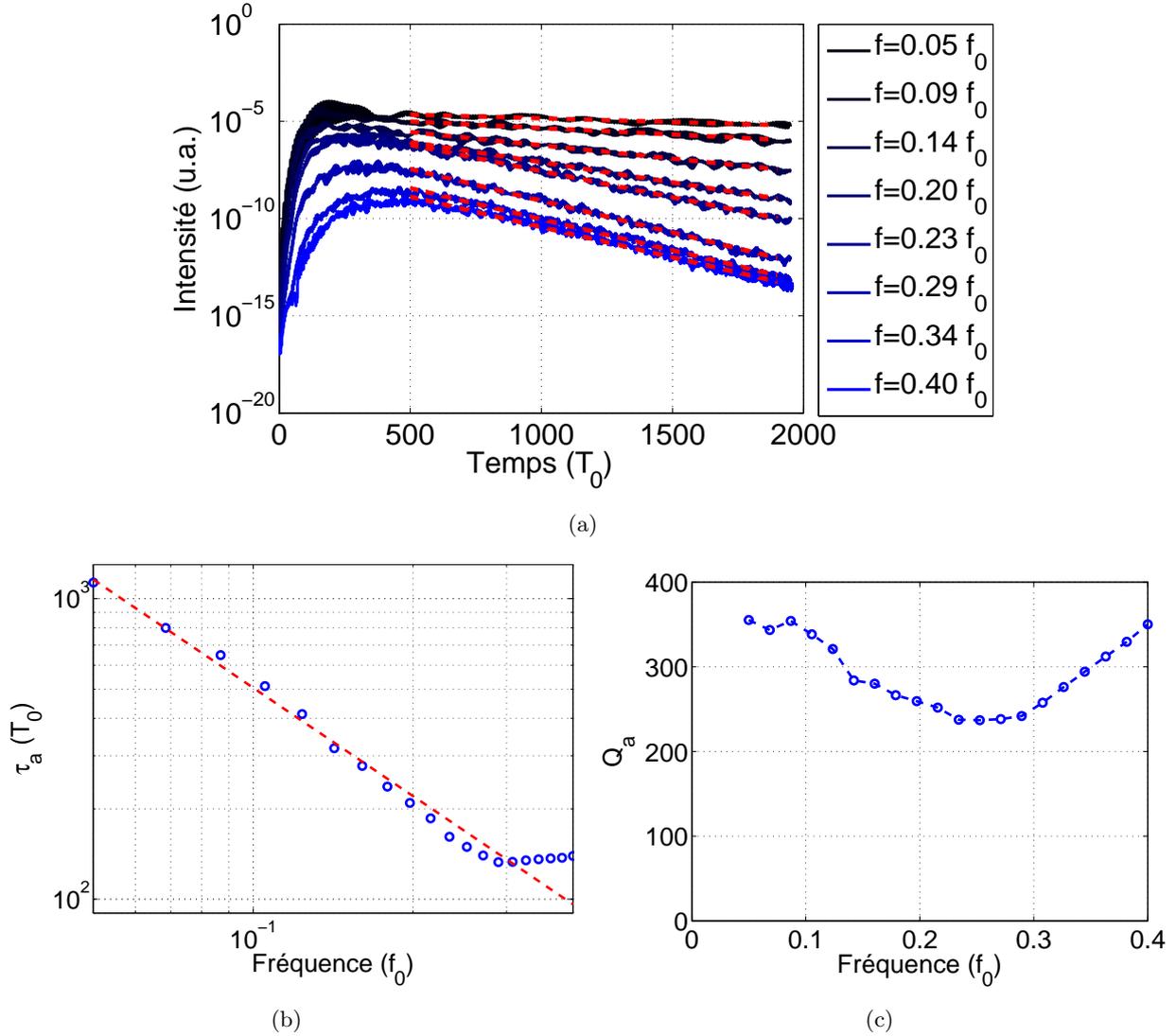


FIGURE 3.24 – Influence de la fréquence sur le profil de l’intensité moyenne transmise. Le coefficient de dissipation vaut ici $\beta = 10^{-3}$. (a) Les décroissances sont très bien approximées par des décroissances exponentielles (pointillés rouges, en échelle logarithmique). Noter que le début des profils dépend fortement de la fréquence, en accord avec le fait que c’est le coefficient de diffusion D qui caractérise les premiers instants du signal et que D dépend de la fréquence. (b) Des pentes de décroissance, on peut en déduire le temps typique de décroissance (inverse des pentes) τ_a (échelles log-log). On trouve que ce dernier décroît avec la fréquence, en $\tau_a \propto f^{-1.20}$ (pointillés rouges). Cela est en accord avec le fait que la dissipation agit plus sur les hautes fréquences que les basses fréquences. (c) On peut normaliser le temps τ_a par la période de la source pour en déduire le facteur de qualité $Q_a = 2\pi f\tau_a$. À basses fréquences, ce dernier décroît avec la fréquence, ce qui est le comportement attendu : les pertes augmentent lorsque la fréquence augmente. Cependant, le facteur de qualité augmente est croissant à hautes fréquences, ce qui reste inexplicé.

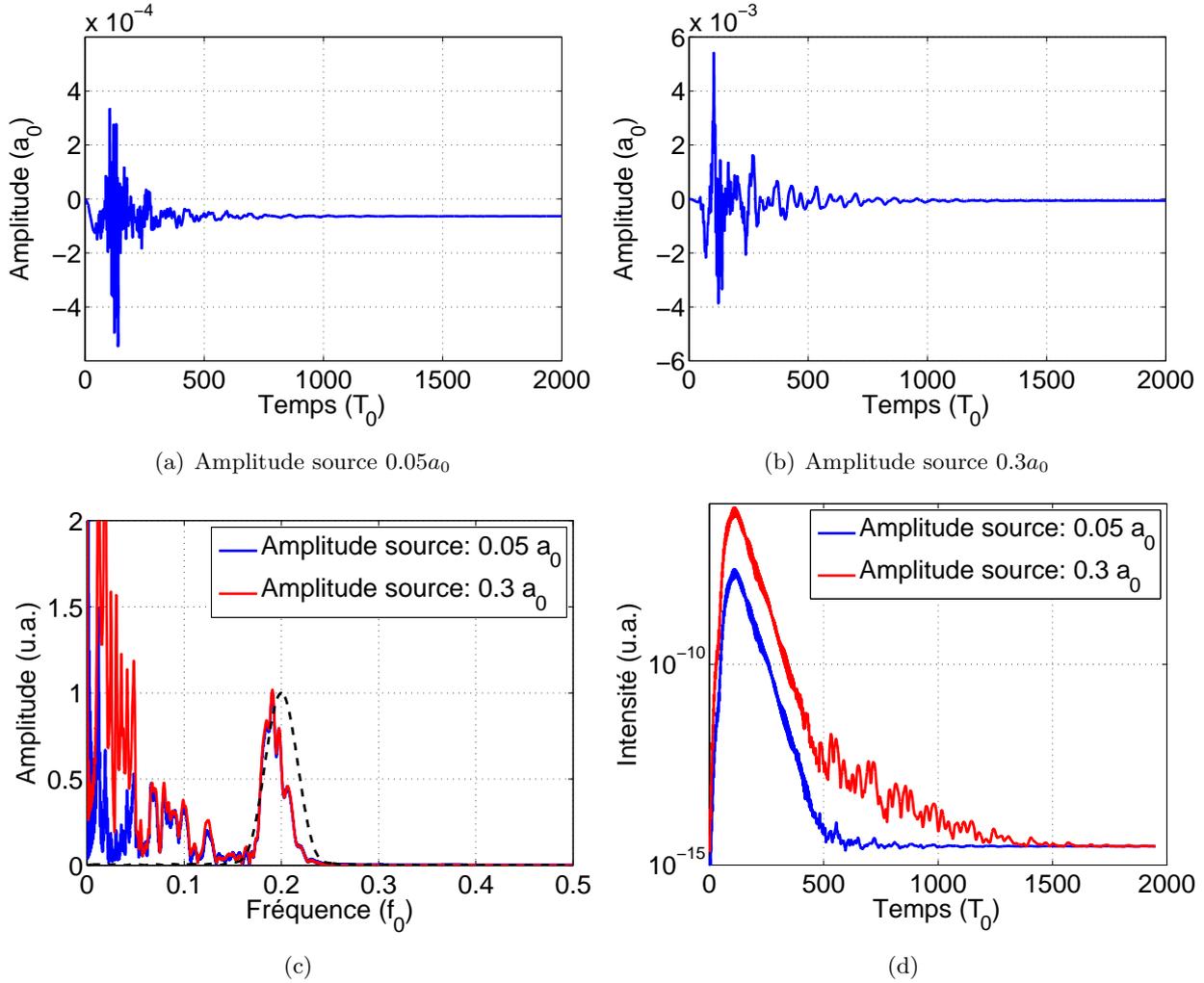


FIGURE 3.25 – Effet de l’amplitude de la source sur les signaux transmis et conséquence sur l’intensité moyenne transmise (on a ici $\beta = 0.01$ et $f = 0.2f_0$). (a)-(c) Une amplitude source trop importante (i.e. non-négligeable devant la longueur des ressorts) entraîne la création d’une composante basse fréquence pouvant noyer la composante haute fréquence d’intérêt, et ce même après filtrage. (d) L’intensité moyenne transmise peut alors présenter un profil non-exponentiel, la pente de la décroissance étant plus faible pour les basses fréquences.

(figure 3.24) : plusieurs fréquences décorréées coexistant dans les signaux (même après filtrage), l’intensité décroît alors avec plusieurs pentes différentes. Ce type de décroissance non-exponentielle fait écho aux résultats expérimentaux anormaux présentés précédemment (figures 3.3(a) et 3.4(a)).

Une interprétation physique possible de cette composante basse fréquence apparaissant pour une grande amplitude d’excitation est qu’en imposant un trop grand déplacement aux masses composant la source, nous entraînons avec elles *collectivement* les autres masses autour de la source. Ce mouvement collectif autour de la source correspond alors à une composante basse fréquence, qui perdure dans le réseau plus longtemps que la composante vibrationnelle (au sens de l’onde acoustique) puisque la dissipation décroît avec la fréquence. Ainsi, aux temps longs, seul le mouvement collectif subsiste, ce qui donne lieu à une décroissance plus lente que la décroissance exponentielle de l’onde acoustique à proprement parler.

Cela renforce les résultats de la section précédente montrant qu’il est crucial de bien filtrer les signaux autour d’une unique fréquence pour étudier le transport et extraire des paramètres de transport pertinents.

3.2.6 Conclusions sur les apports du modèle numérique à l'étude du transport

S'il est illusoire d'espérer retrouver quantitativement les résultats expérimentaux dans nos milieux granulaires avec un modèle si naïf, il est en revanche intéressant de constater que ce dernier rend tout de même qualitativement bien compte de résultats expérimentaux principaux. En effet, nous avons montré que tout comme dans les expériences (section 3.1), l'énergie élastique moyenne se propageait sous la forme d'un halo diffusif, bien approximé par l'équation de la diffusion scalaire. Il est alors possible d'extraire les paramètres de diffusion de notre modèle (coefficient de diffusion D et facteur de qualité Q_a – ou de façon équivalente le temps caractéristique de décroissance de l'intensité τ_a) et d'étudier leurs variations en fonction de la fréquence ou – luxe de la simulation numérique – de la dissipation.

Nous retrouvons alors notamment que lorsque la dissipation augmente, la décroissance temporelle de l'intensité se fait plus rapide (figures 3.21 comparée aux figures 3.2 et 3.3). De même, nous retrouvons le fait que le coefficient de diffusion D diminue avec la fréquence, signe que l'onde a de plus en plus de mal à se propager de façon balistique lorsque la fréquence augmente (figure 3.16 comparée à la figure 3.4(b)).

Nous avons de plus trouvé que le facteur de qualité Q_a diminuait avec la fréquence à basses fréquences (figure 3.24(c)), ce qui est physiquement attendu et confirme le caractère anormal des résultats expérimentaux trouvés par le passé (figure 3.4(c)). Le modèle fournit alors une nouvelle piste pour expliquer l'anomalie expérimentale pointée, en mettant en évidence une variation importante du temps d'absorption τ_a avec la fréquence (figure 3.24(b)), et donc de la pente aux temps longs. Concrètement, si les signaux expérimentaux sont mal filtrés, la décroissance du signal fait intervenir plusieurs valeurs de pentes au cours du temps, et donc une estimation de Q_a surévaluée (la pente la plus petite dominant aux temps très longs). Sans être quantitatif, cela va dans le sens d'un facteur de qualité anormalement élevé dans les expériences précédentes (figure 3.4(c)). Par ailleurs, nous avons aussi mis en évidence une importante dépendance du spectre transmis en fonction de l'amplitude à la source, montrant explicitement que pour des amplitudes de source importantes, un excès de basses fréquences apparaissait, qui favorise alors l'anomalie de la décroissance non-exponentielle aux temps longs (figure 3.25(d)). Cependant, nous notons qu'à hautes fréquences, notre modèle numérique présente un facteur de qualité croissant, ce qui reste à comprendre.

3.3 Transport et retournement temporel dans les milieux granulaires immergés

Dans cette troisième partie de chapitre, nous nous intéressons de façon expérimentale au transport des ondes acoustiques dans les milieux granulaires totalement immergés dans de l'eau. Contrairement à la première partie, où les ondes se propageaient *dans les grains*, les ondes se propagent ici *dans l'eau* et sont diffusées par les grains durant leur propagation. Dans un premier temps, nous déterminons les paramètres de transport des ondes multiplement diffusées (coefficient de diffusion D et libre parcours moyen de transport l^*) grâce à l'étude du cône de rétrodiffusion cohérente. Dans un second temps, nous montrons qu'une expérience de retournement temporel effectuée dans une configuration bien choisie est sensible à la taille du halo diffusif dans le milieu.

Nous tenons ici à remercier Gabriel Guyard, étudiant à l'ESPCI Paris, pour son assistance dans la réalisation des expériences.

3.3.1 Rétrodiffusion cohérente en champ lointain

Cadre

Le cône de rétrodiffusion cohérente se manifeste lorsque l'on envoie une onde sur un milieu multiplement diffusant et que l'on observe l'intensité diffusée vers l'arrière (i.e. vers la source, voir figure 3.26(a)). On pourrait s'attendre à ce que l'intensité diffusée vers l'arrière soit en moyenne distribuée de façon homogène dans toutes les directions, de par les multiples diffusions qui ont lieu dans le milieu, menant à une redistribution des vecteurs d'onde de l'onde incidente. Cependant, il n'en est rien, et

l'on observe en général une sur-intensité dans la direction précise de l'onde incidente. Par invariance par rotation (en moyenne) autour de la direction incidente, on observe alors un cône de sur-intensité, appelé « cône de rétro-diffusion cohérente ». Cet effet est en fait à attribuer au fait que pour un chemin de l'onde dans le milieu (chemin en bleu sur la figure 3.26(b)), il existe son réciproque (en orange), qui passe par les mêmes diffuseurs, mais dans l'ordre inverse. En sortie de l'échantillon, les deux ondes correspondantes interfèrent alors nécessairement constructivement, la phase accumulée lors des deux chemins étant identique. Ainsi, il y a en moyenne deux fois plus d'intensité dans la direction incidente que dans les autres directions. Une autre façon de dire cela est que la probabilité de retour à la source est deux fois plus grande pour une onde multiples fois diffusée que pour un marcheur aléatoire (sans mémoire). Une conséquence macroscopique de cet effet est que l'intensité moyenne transmise diminue (par conservation de l'énergie), ce qui mène à une décroissance du coefficient de diffusion, précurseur de la localisation d'Anderson (« forte »), d'où le nom de localisation « faible » pour désigner la rétrodiffusion cohérente.

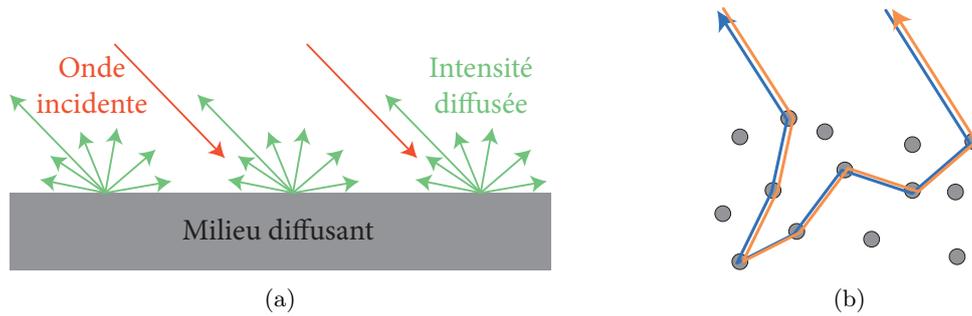


FIGURE 3.26 – Rétrodiffusion cohérente en champ lointain. (a) L'intensité diffusée dans la direction de la source est deux fois plus importante que celle diffusée dans les autres directions. (b) Le cône de rétrodiffusion cohérente se manifeste à cause de l'interférence constructive entre des chemins de propagation réciproques dans le milieu.

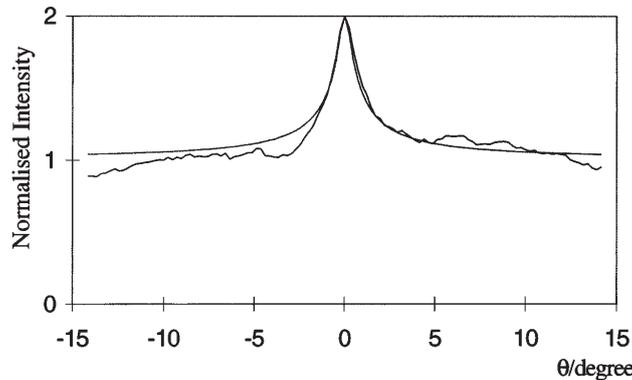


FIGURE 3.27 – Cône stationnaire de rétrodiffusion cohérente dans des tiges métalliques. L'intensité moyenne retrodiffusée dans la direction incidente ($\theta = 0$) est deux fois plus importante que celle diffusée dans les autres directions. Figure extraite de [Tou97].

Cet effet est en fait très général et a été observé pour de nombreux types d'onde. Il a d'abord été théorisé [Lan66, Wat69, Abr79, Gor79] et mis en évidence expérimentalement [Ber83] dans le cadre du transport (quantique) des électrons dans les métaux, et notamment grâce à la diminution de la conductance dans les métaux à très basses températures. L'effet a ensuite été rapidement observé dans beaucoup d'autres systèmes et avec d'autres types d'onde : pour la lumière dans des billes de polystyrène et de latex [Kug84, Wol85, Alb85], les ondes acoustiques dans des tiges métalliques (figure 3.27) ou du gravier [Bay93, Tou97], les ondes élastiques dans un wafer de silicium [dR00] ou dans des billes frittées [Cob17], et même en sismologie [Mar01, Lar04, Mar08] et en physique des atomes froids (ondes de matière) [Jen12].

L'effet de rétro-diffusion cohérente est en fait très robuste dès lors que le désordre dans le milieu

est assez important. L'ingrédient principal est la réciprocité spatiale de la propagation, i.e. l'égalité entre les fonctions de Green entre deux points du milieu dans les deux sens de propagation : $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(\mathbf{r}', \mathbf{r})$. Pour briser le cône, il faut alors nécessairement induire une brisure de réciprocité dans la propagation. Cela peut par exemple être réalisé avec un écoulement [dR05] dans le cas des ondes acoustiques, un champ magnétique dans le cas des électrons [Ber83], ou la rotation de la Terre (force de Coriolis) pour les ondes sismiques [Ons31a, Ons31b].

Largeur du cône On peut montrer qu'en champ lointain, la largeur à mi-hauteur du cône de rétro-diffusion cohérente diminue au cours du temps (la figure 3.28 montre l'exemple des ondes acoustiques diffusées dans des tiges d'acier [Tou97, Tou00]) comme

$$\delta(t) \simeq \frac{\lambda a}{2\pi\sqrt{Dt}} \quad (3.16)$$

où :

- a est la distance entre la source et le milieu
- λ est la longueur d'onde
- D est le coefficient de diffusion.

La formule comprend rigoureusement un pré-facteur qui dépend de la géométrie de l'expérience, et qui est *a priori* proche de l'unité. Qualitativement, on comprend bien que plus la constante de diffusion D est élevée et plus la largeur du cône va varier rapidement. De plus, la variation en \sqrt{Dt} est caractéristique des phénomènes de diffusion.

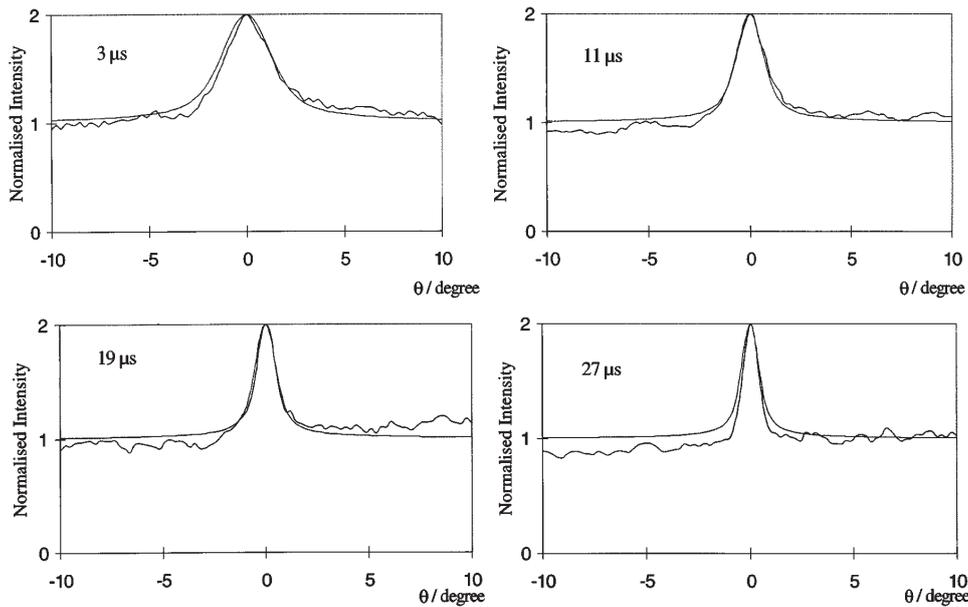


FIGURE 3.28 – Affinement au cours du temps du cône de rétrodiffusion cohérente dans le cas d'une onde acoustique se propageant dans une forêt de tiges métalliques. Figure extraite de [Tou97].

Dans le cas stationnaire, on peut de plus montrer que la largeur à mi-hauteur du cône est [Tou00]

$$\delta_0 \simeq \frac{\lambda a}{2\pi l^*} \quad (3.17)$$

où l^* est le libre parcours moyen de transport. Là encore, il faudrait en toute rigueur prendre en compte un pré-facteur géométrique, *a priori* proche de l'unité toutefois.

Mise en œuvre

Nous nous plaçons dans un premier temps en champ lointain : la distance d'observation $a = 55$ mm est beaucoup plus grande que la longueur d'onde $\lambda \simeq 0.75$ mm et plus grande que la taille du halo diffusif, de l'ordre de $\sqrt{4Dt}$ (sera vérifié *a posteriori*). Nous envoyons alors un train d'onde composé

de 15 périodes de sinusoïde centrées autour de 2 MHz avec un unique élément de la barrette (figure 3.29(a)) et enregistrons avec 32 éléments de la barrette l'onde qui revient (figure 3.29(b)).

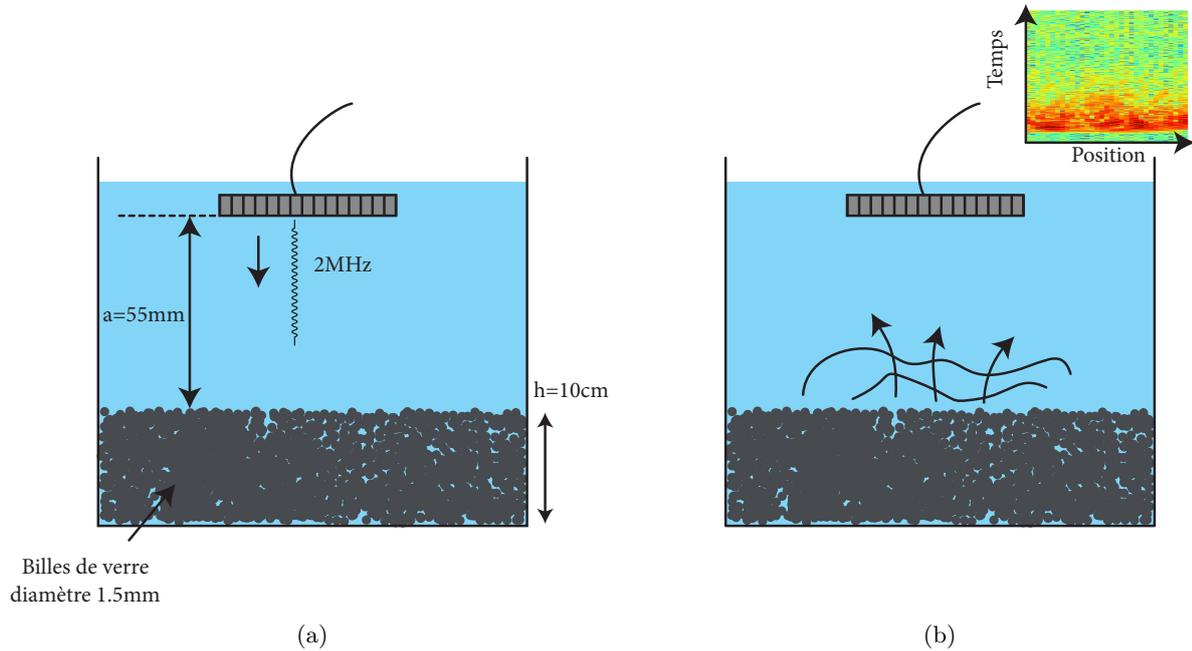


FIGURE 3.29 – Schéma de l'expérience de rétrodiffusion cohérente en champ lointain. (a) On envoie un train d'onde composé de 15 périodes de sinusoïde centré autour de 2 MHz, avec une unique voie de la barrette. (b) On enregistre sur les différentes voies de la barrette les signaux qui reviennent, et on les affiche sous la forme d'une image en couleurs. En encart : exemple de B-Scan en intensité (échelle logarithmique) enregistré.

La figure 3.30 présente une onde typique enregistrée. Nous constatons que l'intensité rétrodiffusée (figure 3.30(a), en échelle logarithmique) s'étale sur une durée très longue, et semble répartie de façon relativement homogène sur toutes les voies. Nous présentons un signal reçu sur une voie (figure 3.30(b)) ainsi que l'effet d'un filtrage passe-bande entre 1.9 MHz et 2.1 MHz. Comme nous le constatons, le filtrage ne change pas radicalement le profil de l'onde rétrodiffusée. En effet, nous n'avons ici pas d'onde cohérente réfléchie sur le fond de la cuve, car l'épaisseur de la couche de grains est trop importante pour que cette dernière ressorte avec une amplitude suffisante. Nous vérifions d'ailleurs sur le spectrogramme (figure 3.30(c)) l'absence de composante basse fréquence, contrairement au cas de la transmission (figure 3.46(d)).

Nous réalisons ensuite une moyenne des B-scans en intensité rétrodiffusés, sur dix configurations du désordre, en translatant la cuve (figure 3.31(a)). Le halo diffusif apparaît alors clairement. Cependant, la voie centrale ne semble pas présenter de surintensité par rapport aux autres voies. Nous normalisons alors à chaque instant le B-Scan par l'intensité reçue par la voie émettrice (située à $x = 6$ mm). Le B-Scan (figure 3.31(b), en échelle logarithmique) prend alors une toute autre allure : la voie centrale présente effectivement une surintensité par rapport aux autres voies. Ainsi, nous avons bien une diffusion plus importante dans la direction incidente, autrement dit un cône de rétrodiffusion cohérente. De plus, la résolution temporelle permise par les éléments de la barrette nous permet d'observer un affinement du cône au cours du temps.

Cône dynamique

Nous pouvons alors sélectionner des tranches du B-Scan pour suivre l'évolution du cône en fonction du temps (figure 3.32). Nous considérons donc des tranches de $5 \mu\text{s}$ (en noir, dans la colonne de gauche de la figure), et nous moyennons pour chaque voie l'intensité reçue pendant cette durée. Nous obtenons alors le profil moyen du cône pendant ces intervalles de temps (deuxième colonne, en échelle linéaire). Il faut noter ici que les profils ont été symétrisés pour augmenter l'effet de moyenne. La première

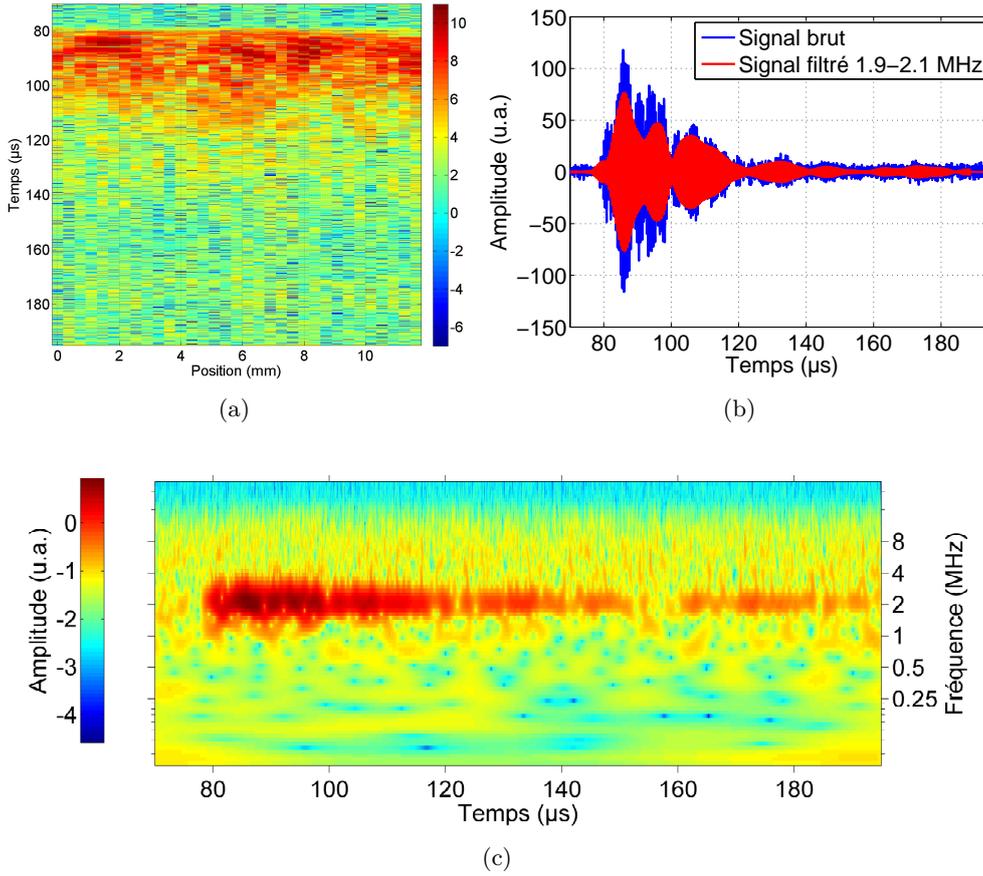


FIGURE 3.30 – Signaux rétrodiffusés par un milieu granulaire immergé, pour une configuration. (a) L’intensité (en échelle logarithmique) s’étale sur une longue durée, et malgré son caractère complexe, semble répartie de façon homogène entre les différentes voies. (b) L’effet d’un filtrage passe-bande autour de la fréquence envoyée ne change pas grand chose au signal car il n’y a ici pas d’onde cohérente, à cause de la trop grande profondeur de grains. (c) Cela est confirmé par le spectrogramme, sur lequel on peut constater l’absence de composante basse fréquence, contrairement à celui de la transmission (figure 3.46(d)).

constatation est que nous avons bien deux fois plus d’intensité sur les voies centrales que sur les voies aux bords de la barrette, conformément à ce que nous avons expliqué plus haut.

La deuxième constatation est que le cône s’affine au cours du temps. Nous pouvons expliciter cela en mesurant pour chaque position de la fenêtre temporelle la largeur à mi-hauteur du cône (figure 3.33).

Nous trouvons que la meilleure régression en $1/\sqrt{t - t_0}$ donne

$$\delta(t) = \frac{6 \text{ mm} \cdot \mu\text{s}^{1/2}}{\sqrt{t - 94.32\mu\text{s}}}. \quad (3.18)$$

Nous vérifions que le temps t_0 est du même ordre que le début du signal rétro-diffusé (voir figure 3.30). Par comparaison avec la formule (3.16), on peut alors en déduire une estimation du coefficient de diffusion D :

$$D \simeq 1.2 \text{ mm}^2 \cdot \mu\text{s}^{-1}. \quad (3.19)$$

Même si nous avons fait remarquer précédemment que la formule (3.16) comprend en toute rigueur un pré-facteur (*a priori* voisin de l’unité), nous notons que la valeur de D extraite est du même ordre que celle trouvée par Page et al. [Pag95] dans le cas de billes de diamètre 0.5 mm à une fréquence d’environ 2.45 MHz ($D = 0.43 \text{ mm}^2 \mu\text{s}^{-1}$).

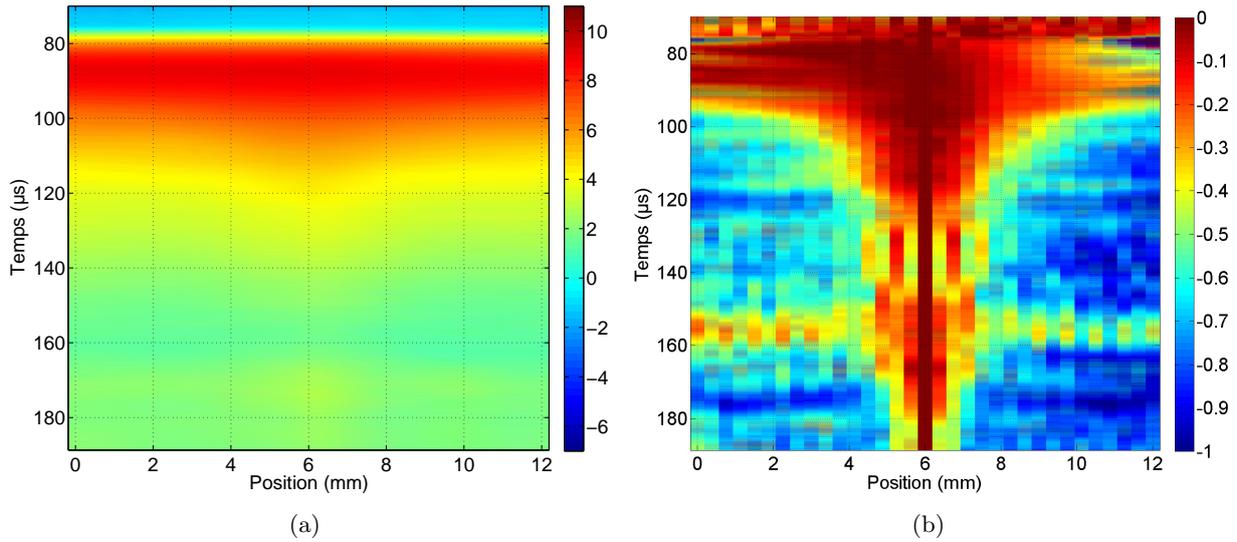


FIGURE 3.31 – B-scan de l’intensité moyenne retrodiffusée après moyenne sur dix configurations, avant et après normalisation par l’intensité reçue à chaque instant par la voie émettrice ($x = 6$ mm). (a) Après moyennage sur dix configurations, le halo diffusif (en échelle logarithmique) est bien plus propre que celui de la figure 3.30(a), mais le cône de rétrodiffusion cohérente semble absent. (b) Après normalisation du B-Scan à chaque instant par l’intensité reçue sur la voie émettrice, le cône de rétrodiffusion apparaît : la surintensité sur la voie centrale est indéniable. De plus, la résolution temporelle des signaux nous permet d’observer l’affinement du cône au cours du temps.

Cône stationnaire

Nous pouvons de plus nous intéresser au « cône stationnaire », i.e. à l’intensité totale au cours du temps reçue par chacune des voies (figure 3.34).

Nous trouvons alors que la largeur du cône stationnaire vaut 3.62 mm soit environ 4.8λ . Grâce à la formule (3.17), nous pouvons alors en déduire une estimation du libre parcours moyen de transport

$$l^* \simeq 1.8 \text{ mm.} \quad (3.20)$$

Cette valeur est très proche de la taille de nos billes (1.5 mm). Par ailleurs, si nous utilisons cette valeur de libre parcours moyen de transport, et que nous prenons en première approximation une vitesse de transport v_e égale à la vitesse des ondes dans l’eau ($\sim 1.5 \text{ mm}/\mu\text{s}$), nous pouvons extraire une constante de diffusion

$$D \simeq 0.9 \text{ mm}^2 \cdot \mu\text{s}^{-1}, \quad (3.21)$$

du même ordre que la constante de diffusion trouvée grâce au cône dynamique ($D \simeq 1.2 \text{ mm}^2 \cdot \mu\text{s}^{-1}$). Cela confirme que malgré les approximations effectuées (pré-facteurs voisins de l’unité, notamment), notre calcul semble consistant et fournit un ordre de grandeur raisonnable des paramètres de transport D et l^* .

Par ailleurs, nous pouvons vérifier *a posteriori* que nous avons bien $a = 55 \text{ mm} > \sqrt{4Dt} \simeq 25 \text{ mm}$ aux temps les plus longs de l’expérience.

Enfin, nous pouvons en déduire une estimation de la vitesse de transport

$$v_e = \frac{3D}{l^*} \simeq 1.6 \text{ mm} \cdot \mu\text{s}^{-1}, \quad (3.22)$$

du même ordre que la vitesse des ondes dans l’eau.

3.3.2 Rétrodiffusion cohérente en champ proche

En champ proche, i.e. quand la source est très proche du milieu diffusant (figure 3.35(a)), une manifestation de la rétrodiffusion cohérente est l’écart au profil gaussien de l’intensité diffusée. En

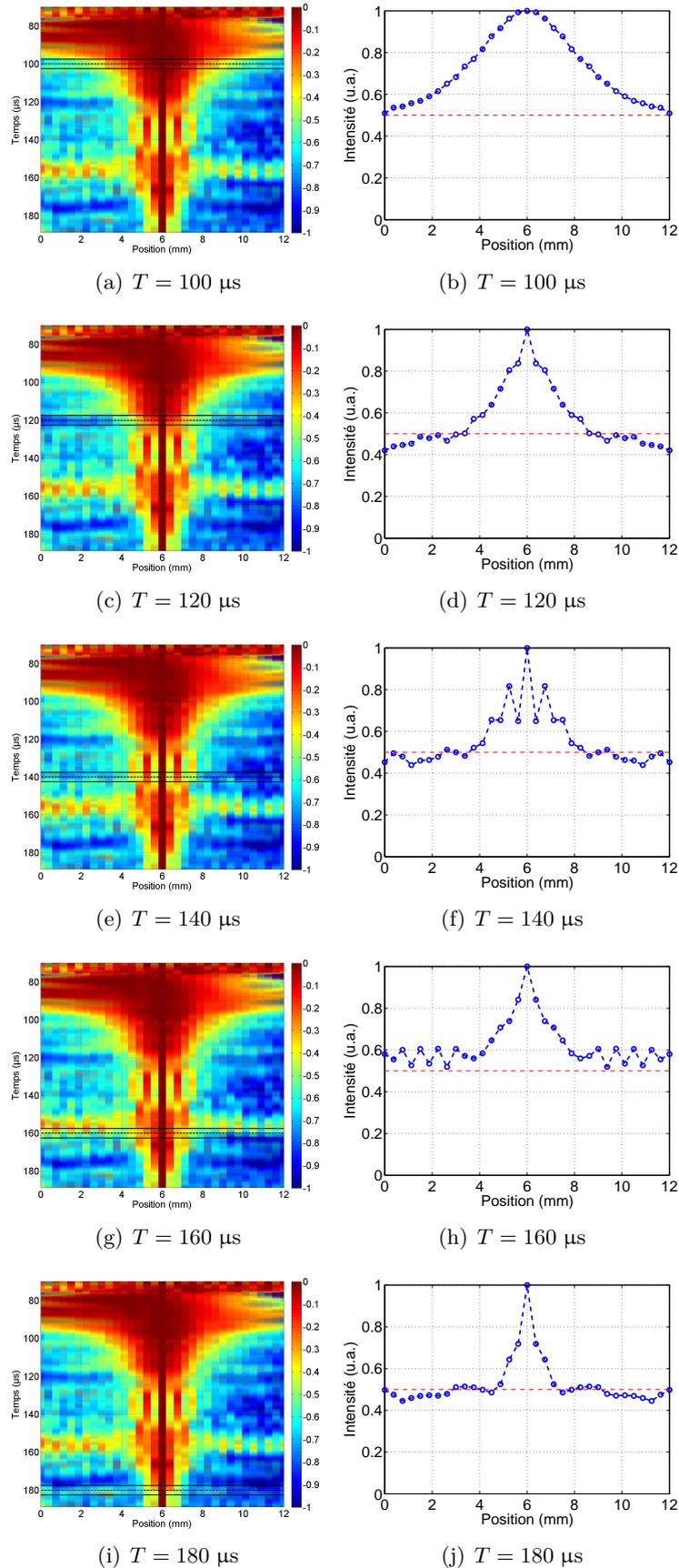


FIGURE 3.32 – Évolution de l'intensité rétrodiffusée avec le temps en champ lointain. On constate que l'intensité dans la direction de la source ($x = 6 \text{ mm}$) est environ deux fois plus importante que celle sur les autres voies : c'est le cône de rétrodiffusion cohérente. De plus, la largeur du cône décroît avec le temps (voir figure 3.33).

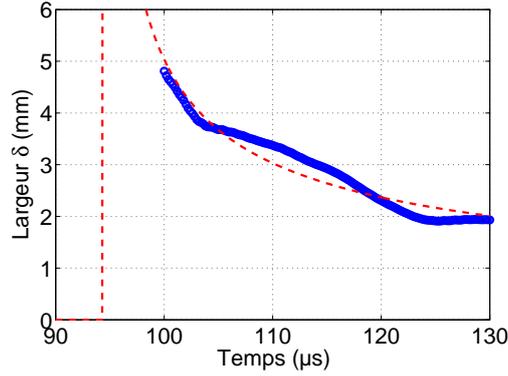


FIGURE 3.33 – Évolution de la largeur δ du cône de rétrodiffusion cohérente en fonction du temps. On trouve $\delta(t) \simeq 6 \text{ mm} \cdot \mu\text{s}^{1/2} (t - 94.32 \mu\text{s})^{-1/2}$. Cela permet d’en déduire une estimation du coefficient de diffusion $D \simeq 1.2 \text{ mm}^2 \cdot \mu\text{s}^{-1}$.

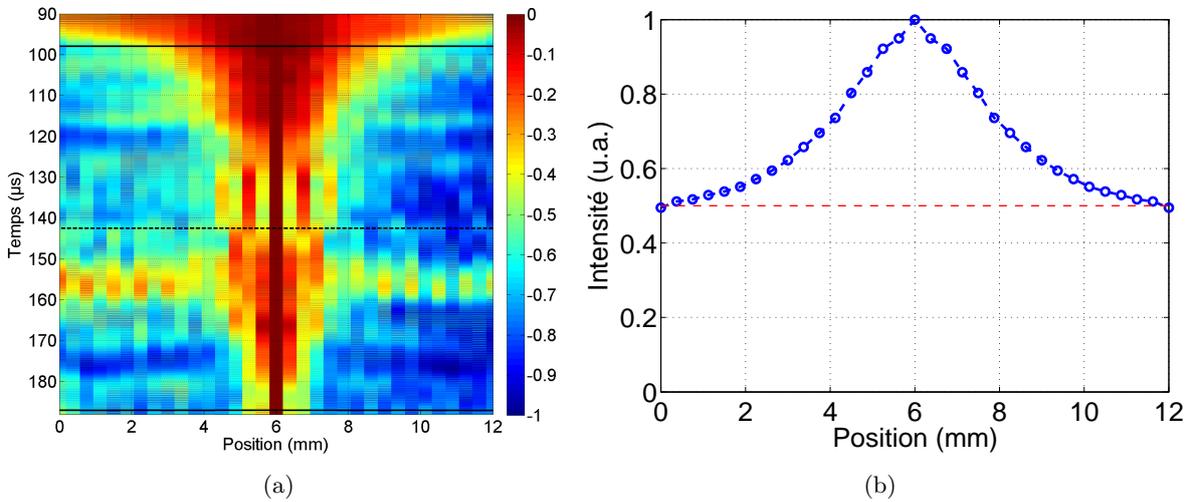


FIGURE 3.34 – Cône de rétrodiffusion stationnaire en champ lointain. (a) B-Scan de l’intensité rétrodiffusée (échelle logarithmique). (b) Profil du cône (échelle linéaire). La largeur du cône vaut $\delta = 3.62 \text{ mm} \simeq 4.8\lambda$ et permet d’en déduire une estimation du libre parcours moyen de transport $l^* \simeq 1.8 \text{ mm}$.

effet, toujours par effet d’interférences constructives entre les chemins réciproques (figure 3.35(b)), l’intensité à la position de la source doit être deux fois plus importante que ce qu’elle serait dans le cas diffusif théorique (incohérent). On obtient donc un profil spatial gaussien (solution de l’équation de la diffusion) auquel s’ajoute un pic de surintensité autour de la source (contribution cohérente des chemins réciproques non prise en compte par l’équation de la diffusion, voir une allure du profil en vert sur la figure 3.35(a)).

Intéressons-nous à cette configuration et plaçons la barrette directement au contact du milieu granulaire (figure 3.36). Nous envoyons alors dans une première phase deux périodes de sinusoïde centrée autour de 2 MHz avec un élément de la barrette (figure 3.36(a)) et enregistrons les signaux rétrodiffusés avec les éléments adjacents (figure 3.36(b)). Nous obtenons alors un B-Scan de l’intensité rétrodiffusée (encart de la même figure).

Nous émettons alors successivement avec différentes voies assez éloignées pour pouvoir considérer les signaux transmis comme décorrélés et déplaçons la cuve par rapport à la barrette pour sonder dix configurations indépendantes. Nous moyennons alors les B-Scans en intensité obtenus et normalisons le B-Scan obtenu à chaque instant par l’intensité de la voie émettrice (figure 3.37).

Nous observons alors très bien le halo diffusif, mais aussi une franche surintensité au niveau de la voie source ($x = 0 \text{ mm}$). Précisons que dans cette expérience, les B-Scans ont été enregistrés avec les éléments d’un même côté de la source, ce qui conduit à des B-Scans d’extension spatiale plus grande,



FIGURE 3.35 – Rétrodiffusion cohérente en champ proche (a) En champ proche, le cône de rétrodiffusion cohérente se manifeste par un profil spatial anormal de l’intensité par rapport à la solution de l’équation de la diffusion (pointillés). À ce profil se superpose en effet un pic centré sur la source correspondant aux contributions cohérentes des chemins réciproques non prises en compte dans l’équation de la diffusion (figure (b)).

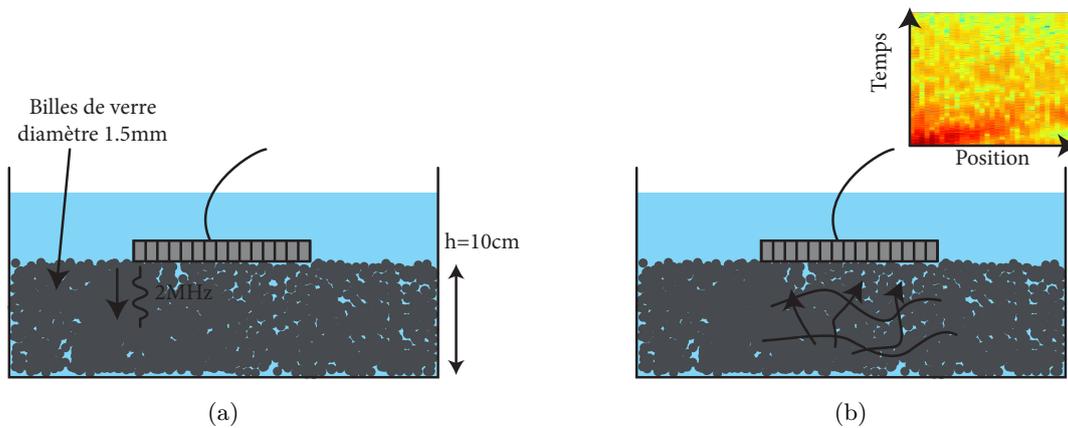


FIGURE 3.36 – Schéma de l’expérience de rétrodiffusion cohérente en champ proche. (a) On envoie une brève impulsion grâce à un élément de la barrette, cette dernière étant au contact du milieu granulaire. (b) On enregistre le signal rétrodiffusé à chaque élément de la barrette, et on forme une image en couleurs (B-Scan en encart, en échelle logarithmique).

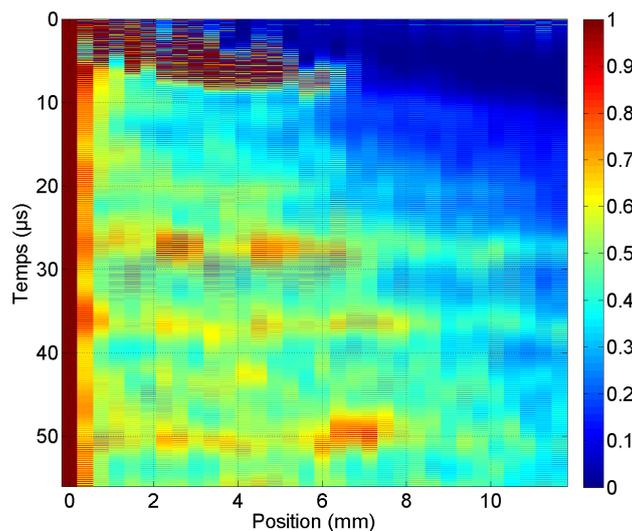


FIGURE 3.37 – B-scan de l’intensité moyenne retrodiffusée en champ proche (échelle linéaire). Le halo diffusif est bien visible, mais on constate que l’intensité au voisinage de la source est environ deux fois plus importante que sur les autres voies, signe de rétrodiffusion cohérente.

mais aussi à une perte de symétrie spatiale des B-Scans, contrairement aux cas précédents.

Cône dynamique

Nous pouvons alors appliquer le même traitement que précédemment, à savoir le calcul du profil de l'intensité reçue moyenné sur différentes fenêtres (nous considérons ici toujours des fenêtres de 5 μs). La figure 3.38 fait alors apparaître les profils d'intensité, qui présentent une importante composante anormalement élevée au voisinage de la source. Bien sûr, ces profils sont caractéristique de la rétrodiffusion cohérente (figure 3.35(a)). Notons au passage que l'onde qui se propage le long de la barrette est bien visible (entre 0 μs et 10 μs).

Une propriété intéressante qui distingue la rétrodiffusion cohérente en champ lointain par rapport à celle en champ proche est que dans le cadre de cette dernière, le largeur du cône de rétrodiffusion ne dépend pas du temps et est de l'ordre de la longueur d'onde λ [dR00, Wea00]. En traçant la largeur à mi-hauteur du cône pour chaque fenêtre (figure 3.39) nous constatons effectivement que la largeur est à peu près constante (à comparer à l'évolution de la largeur en champ lointain, figure 3.33) et proche de $\lambda \simeq 0.75$ mm (trait en pointillés rouges).

Cône stationnaire

Nous pouvons enfin montrer le cône stationnaire en intégrant sur une fenêtre temporelle incluant l'intégralité du B-Scan (figure 3.40). Nous obtenons alors une largeur du cône stationnaire de 0.64 mm, valeur effectivement proche de la longueur d'onde $\lambda \simeq 0.75$ mm.

3.3.3 Étude du transport par retournement temporel

Nous avons vu dans la première partie de ce chapitre que la constante de diffusion D pouvait être déterminée en analysant la dépendance temporelle de l'intensité moyenne transmise à travers un milieu multiplement diffusant. Nous venons de plus de voir dans la section précédente que les paramètres de transport pouvaient aussi être déterminés en étudiant l'effet de rétrodiffusion cohérente. Nous voulons ici montrer que, de façon plus originale, la technique du retournement temporel pourrait elle aussi fournir une façon d'étudier le transport des ondes.

Idée générale Julien de Rosny et al. et Bart van Tiggelen ont mis en évidence les liens qui existent entre le retournement temporel et la rétrodiffusion cohérente [dR04], mais le retournement temporel n'a jamais été utilisé pour mesurer les propriétés du transport. Une telle mesure doit pourtant être possible en utilisant une configuration décrite dans [vT03] (figure 3.41).

Dans cette situation, on considère une source S située à l'extérieur d'un milieu multiplement diffusant. L'idée clef consiste à placer le miroir à retournement temporel M dans le milieu (figure 3.41). La largeur de la tache focale va alors dépendre directement de la taille du halo de diffusion à la sortie du milieu. Si nous n'avons pas encore la théorie complète, nous pouvons néanmoins justifier ce résultat de façon qualitative.

Calcul qualitatif Soit donc la configuration de la figure 3.41. On considère une source située en S , à une distance a d'un milieu multiplement diffusant, et un détecteur (miroir à retournement temporel) enfoui à une profondeur z dans le milieu, à la position M .

Dans un premier temps, on fait émettre à la source un Dirac. Le miroir à retournement temporel reçoit alors la fonction de Green de S à M : $G(S, M, t)$. Dans un second temps, on fait émettre au miroir le retourné temporel $G(S, M, -t)$ du signal reçu.

Le champ $s(R, t)$ (tache focale) enregistré en un point R du plan (II) de la source est alors

$$s(R, t) = G(S, M, -t) \star_t G(M, R, t). \quad (3.23)$$

où \star_t désigne la convolution temporelle.

Mais par réciprocity spatiale on a $G(S, M, -t) = G(M, S, -t)$ (tout se passe comme si c'était M qui avait émis le Dirac), et on a donc

$$s(R, t) = G(M, S, -t) \star_t G(M, R, t) = \int G(M, S, \tau) G(M, R, \tau + t) d\tau. \quad (3.24)$$

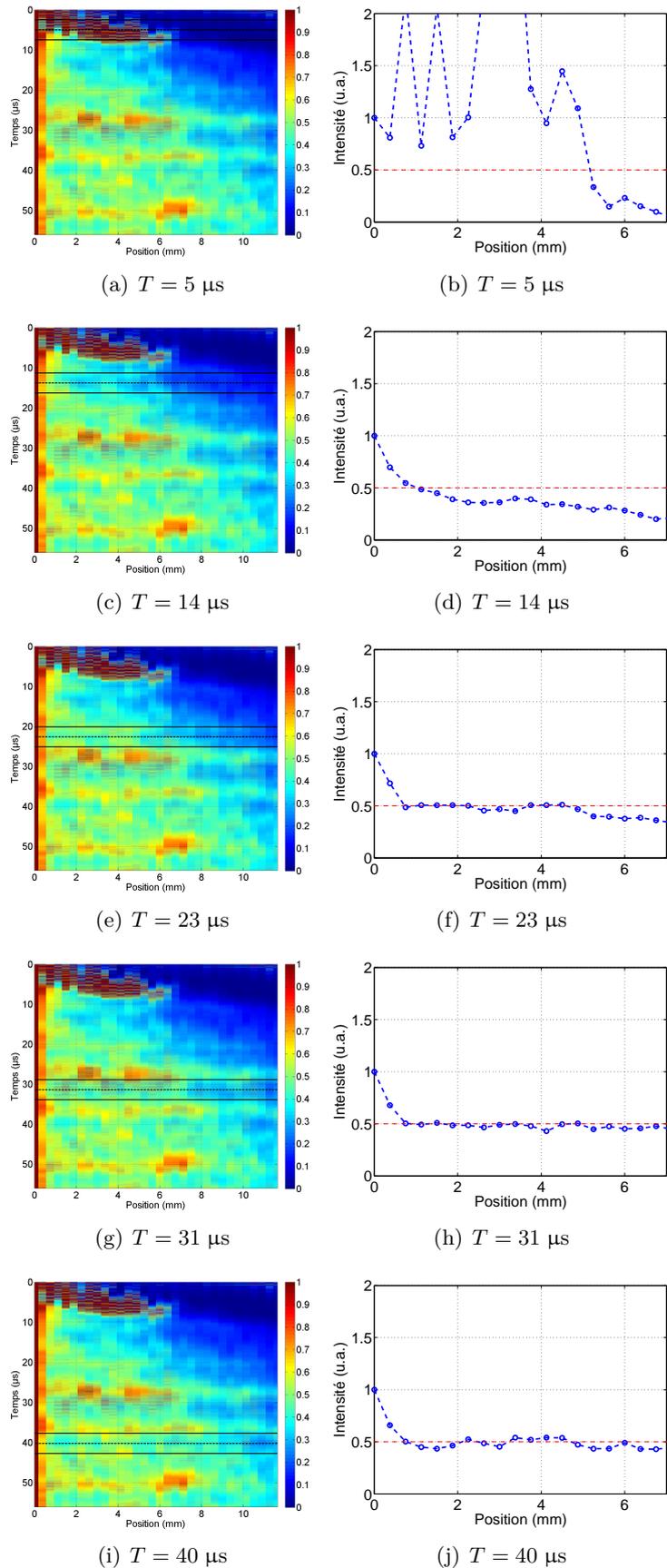


FIGURE 3.38 – Évolution de l'intensité rétrodiffusée avec le temps en champ proche. On constate que l'intensité au voisinage de la source ($x = 0$ mm) est environ deux fois plus importante que celle sur les autres voies : c'est le cône de rétrodiffusion cohérente. La largeur de ce cône est de plus indépendante du temps (voir figure 3.39).

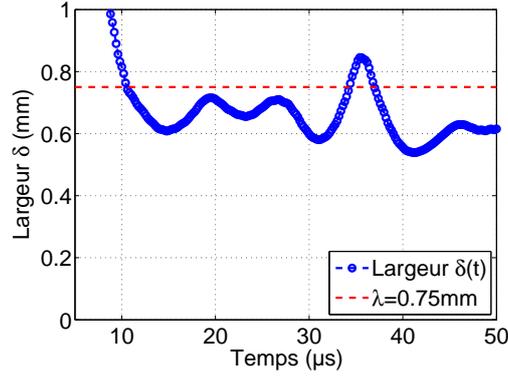


FIGURE 3.39 – Évolution de la largeur δ du cône de rétrodiffusion cohérente en champ proche en fonction du temps et comparaison avec la longueur d’onde $\lambda \simeq 0.75$ mm (pointillés rouges). Le fait que la largeur du cône ne dépende pas du temps est caractéristique de la rétrodiffusion cohérente en champ proche.

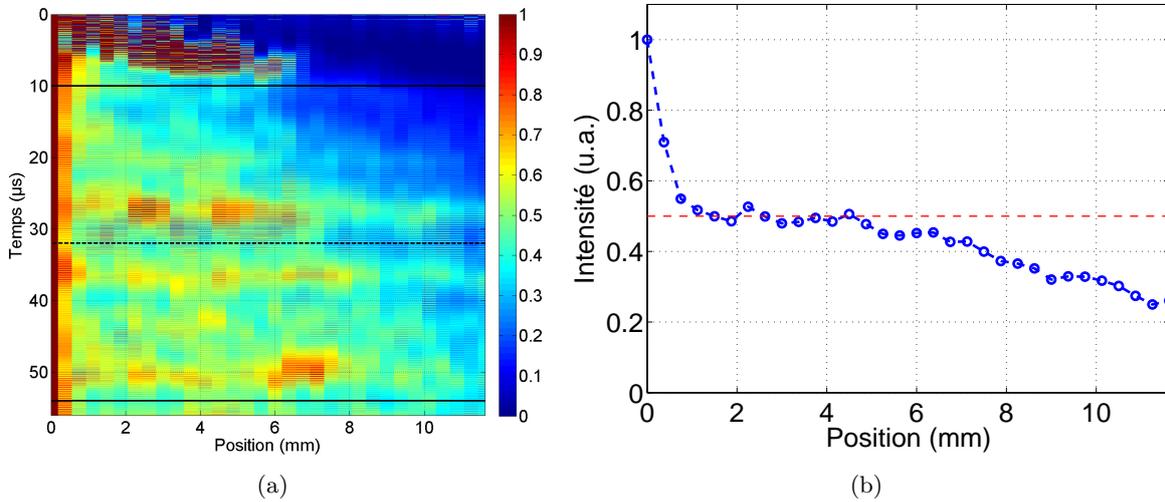


FIGURE 3.40 – Cône de rétrodiffusion stationnaire en champ proche. (a) B-Scan de l’intensité rétrodiffusée (échelle linéaire). (b) Profil du cône (échelle linéaire). Comme attendu, la largeur du cône vaut $\delta = 0.64$ mm $\simeq \lambda$.

$s(R, 0) = \int G(M, S, \tau)G(M, R, \tau)d\tau$ est alors un estimateur de la corrélation spatiale du champ diffusé et mesuré dans le plan (II), pour une *source* enfouie dans le milieu (tout se passe comme si le miroir était maintenant la source, par réciprocité). La largeur de la tache focale est donc donnée par la longueur de corrélation du champ dans le plan (II).

Or, d’après le théorème de Van Cittert-Zernike, pour une source incohérente de taille L , la longueur de corrélation l_c du champ observé à une distance a très grande la taille de la zone d’observation varie en [Goo15]

$$l_c \propto \frac{\lambda a}{L}. \quad (3.25)$$

Cas stationnaire Dans le cas d’une source enfouie à une profondeur z dans un milieu situé à une distance a du plan d’observation (figure 3.41), si la propagation est diffusif (incohérente), on s’attend à ce que le halo diffusif stationnaire (i.e. moyenné sur toute la propagation) ait une taille en sortie du milieu qui varie à peu près en $\propto z$, par isotropie du halo diffusif (figure 3.42). Tout se passe alors comme si l’on avait une source incohérente de taille $L = z$ observée à une distance a .

D’après le théorème de Van Cittert-Zernike (formule (3.25)), on sait alors que la longueur de corrélation du champ dans le plan (II) – et donc la taille de la tache focale, d’après l’équation (3.24) – va varier en [vT03]

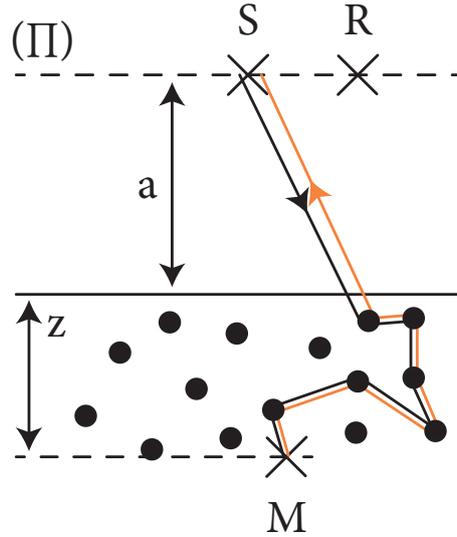


FIGURE 3.41 – Schéma d’une configuration permettant d’étudier le transport grâce au retournement temporel. Une source S émet une brève onde, qui se propage librement sur une distance a puis rencontre un milieu multiplément diffusant. Un transducteur enfoui *dans* le milieu diffusant, à une position M enregistre alors le signal reçu (trait noir, schématiquement). Dans un second temps, le signal est retourné temporellement puis ré-émis. Le champ est alors enregistré à la source S (trait orange) et en un point R dans le plan (II) de la source. Figure adaptée de [vT03].

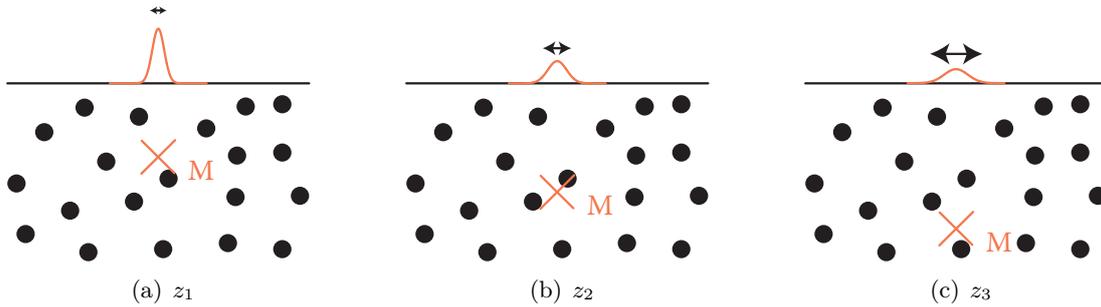


FIGURE 3.42 – Représentation schématique de l’évolution du halo diffusif stationnaire en fonction de la profondeur de la source. Plus la source est enfouie profondément et plus le halo diffusif en sortie du milieu (représenté schématiquement en orange) est grand.

$$\delta(z) \propto \frac{\lambda a}{z}. \quad (3.26)$$

Notons cependant que pour des profondeurs z trop petites, le régime n’est pas diffusif, et donc le champ n’est pas totalement incohérent (le théorème de Van Cittert-Zernike ne s’applique alors pas). Au contraire, pour des profondeurs trop grandes, la taille de la tache focale est limitée par la longueur d’onde, et donc la formule n’est plus valable.

Cas dynamique Pour une source enfouie à une profondeur fixée, le halo diffusif croît typiquement en \sqrt{Dt} (figure 3.43). Ainsi, on peut s’attendre à ce que la taille de la tache focale décroisse en $1/\sqrt{Dt}$ au cours du temps.

Pour les mêmes raisons que dans le cas stationnaire, cette prédiction n’est pas valable pour des temps trop petits (lorsque le régime diffusif n’est pas encore établi), ni pour des temps trop grands (lorsque la taille de la tache est de l’ordre de la demi longueur d’onde).

Nous nous proposons dans la suite de vérifier ces deux prédictions qualitatives : la taille de la tache focale s’affine lorsque le miroir à retournement temporel est de plus en plus profond, et lorsque la fenêtre retournée devient de plus en plus tardive.

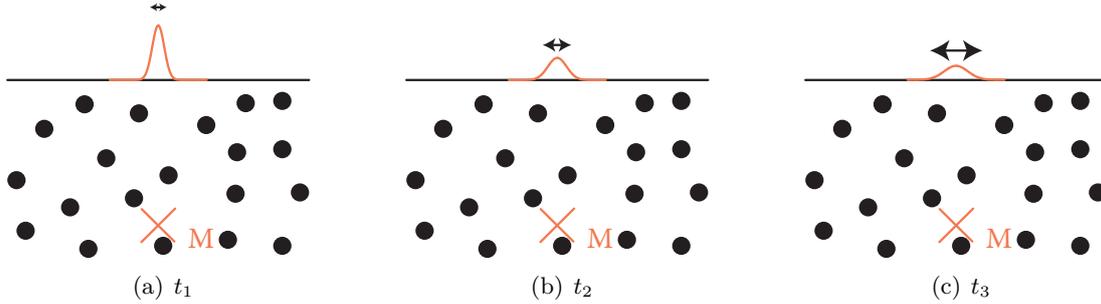


FIGURE 3.43 – Représentation schématique de l'évolution du halo diffusif en fonction du temps, à profondeur de source fixée. Pour une source enfouie à une profondeur fixée, le halo diffusif croît en \sqrt{Dt} (représenté schématiquement en orange), et donc on peut espérer un affinement de la tache focale au cours du temps.

3.3.4 Retournement temporel en régime stationnaire

Description du dispositif expérimental

Le dispositif qui sera utilisé dans toute cette troisième partie de chapitre est celui de la figure 3.44. Ce dernier se compose d'une cuve (figure 3.44(a)) en plexiglas de dimensions de base 15 cm \times 40 cm et 20 cm de haut. Au fond de cette cuve est placé un transducteur circulaire, composé d'un élément piezo-électrique rectangulaire de dimensions 0.5 mm \times 12 mm (fréquence centrale 1.5 MHz), pointant vers le haut et enchâssé dans un support fixé au fond de la cuve (figure 3.44(c)).

La cuve est alors remplie de billes de verre de diamètre 1.5 mm – de façon à ce que la surface libre soit plus haute que le transducteur – et d'eau jusqu'à une hauteur dépassant le niveau des billes. Une barrette échographique (figure 3.44(d)) est ensuite fixée près de la surface libre de l'eau, à la verticale du transducteur, et pointe vers ce dernier. La barrette est constituée de 128 éléments piézoélectriques rectangulaires de tailles 0.315 mm \times 15 mm de fréquence centrale 2 MHz. La distance entre les centres de deux éléments voisins est de 0.375 mm, soit environ la moitié de la longueur d'onde $\lambda \simeq 0.75$ mm. L'électronique multi-voies utilisée n'étant composée « que » de 64 voies, nous n'utilisons en fait que la moitié de la barrette.

Description de l'expérience

Le transducteur est immergé sous une profondeur de billes z variant entre 15 mm et 50 mm. La barrette échographique est placée à une distance fixe $a = 89$ mm de la surface libre des billes, de façon à s'assurer d'être en champ lointain par rapport aux billes ($\lambda \simeq 0.75$ mm). Le principe de l'expérience de retournement temporel (figure 3.45) est le même que celui du chapitre précédent (section 2.1.5).

Dans un premier temps (figure 3.45(a)), nous faisons émettre à l'élément central de la barrette (voie 32) deux périodes de sinusoïde centrée autour de 2 MHz, et nous enregistrons le signal reçu par le transducteur. La figure 3.46 montre un signal typique transmis. Ce dernier est très long, environ 400 μ s, soit 400 fois plus long que le signal source. De plus, nous constatons la présence d'une onde cohérente (voir figure 3.46(b) pour une vue rapprochée sur la première arrivée), bien visible sur le spectre (figure 3.46(c)) et le spectrogramme (figure 3.46(d)). Ainsi, tout comme dans nos empilements granulaires secs, le régime est ici fortement diffusant. Puisque nous sommes ici intéressés par le retournement temporel de l'onde multiple diffusée uniquement et que cette dernière est spectralement bien distincte de l'onde cohérente, nous filtrons le signal reçu au moyen d'un filtre passe-haut, avec une fréquence de coupure de 1 MHz. L'effet du filtrage est bien visible sur le signal temporel (figure 3.46(b)) et le spectre (figure 3.46(c)) : l'onde cohérente a disparu.

Dans un second temps (figure 3.45(b)), nous faisons ré-émettre au transducteur le signal reçu et retourné temporellement, et enregistrons en même temps les 64 signaux reçus par la barrette échographique. Nous pouvons alors représenter ces 64 signaux sous la forme d'une image bidimensionnelle avec code couleurs, nommée *B-Scan*.

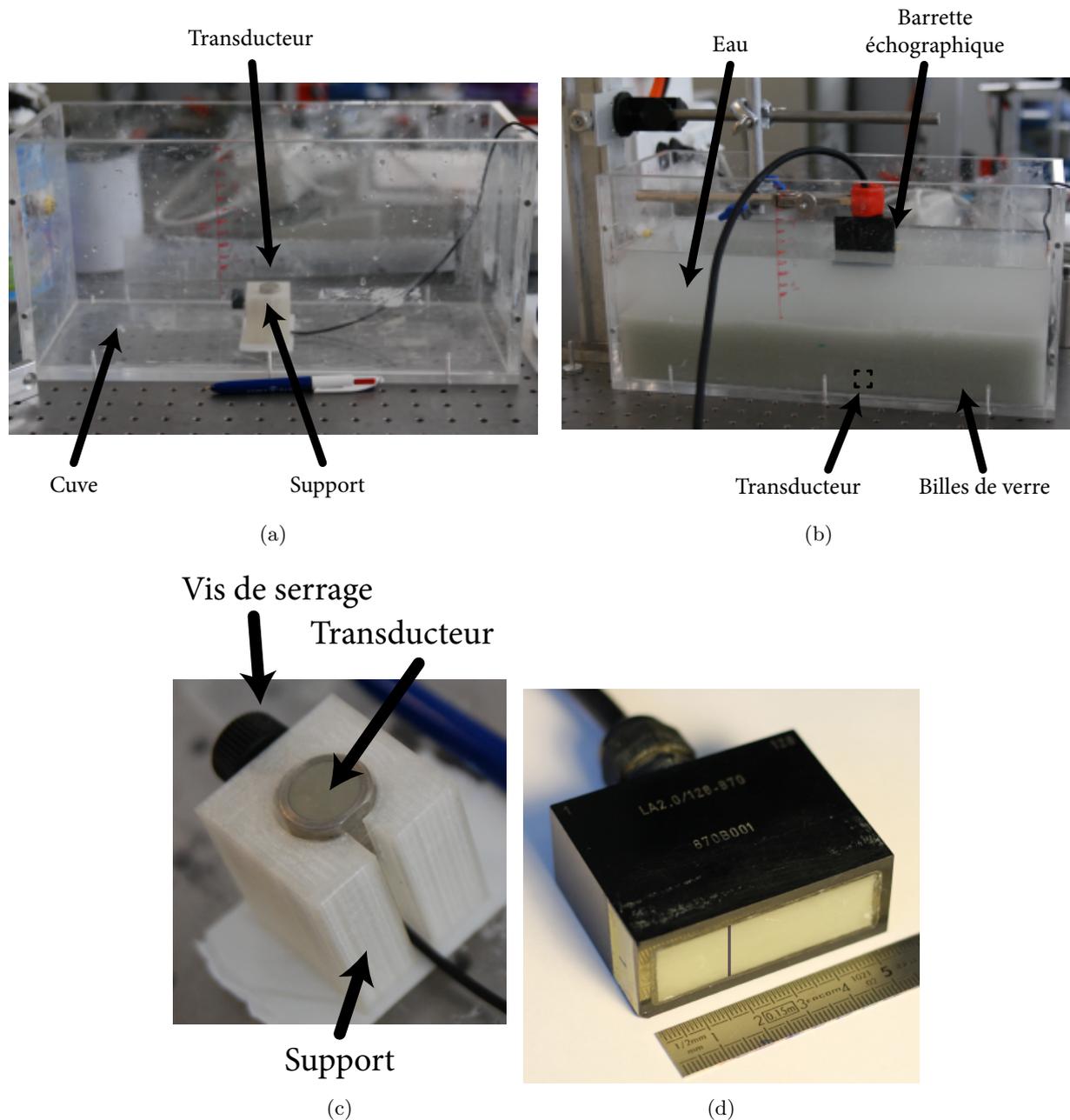


FIGURE 3.44 – Photographies de l’expérience. (a) Des billes sont placées dans une cuve en plexiglas de dimensions de bases $15\text{ cm} \times 40\text{ cm}$ et 20 cm de haut. Un transducteur pointant vers le haut est fixé au fond de la cuve grâce à un support. (b) La cuve est remplie d’eau et de billes de diamètre 1.5 mm au fond (le transducteur est alors recouvert de billes). Une barrette échographique pointant vers le transducteur est fixée dans l’eau, au voisinage de la surface libre. (c) Le transducteur est placé dans un support imprimé en impression 3D et fixé grâce à une vis de serrage. Le support est alors scotché au fond de la cuve. (d) Photographie de la barrette ultrasonore utilisée. Cette dernière est composée de 128 éléments piezoélectriques rectangulaires de dimensions $0.315\text{ mm} \times 15\text{ mm}$ (deux traits noirs verticaux indiquent les dimensions d’un élément), avec une distance centre à centre des éléments voisins de 0.375 mm . La fréquence de résonance des éléments est de 2 MHz , et la longueur d’onde correspondante dans l’eau est d’environ 0.75 mm . Deux éléments voisins de la barrette sont donc espacés d’environ $\lambda/2$. L’électronique multi-voies utilisée ne possédant « que » 64 voies, nous n’utilisons en fait que la moitié de la barrette.

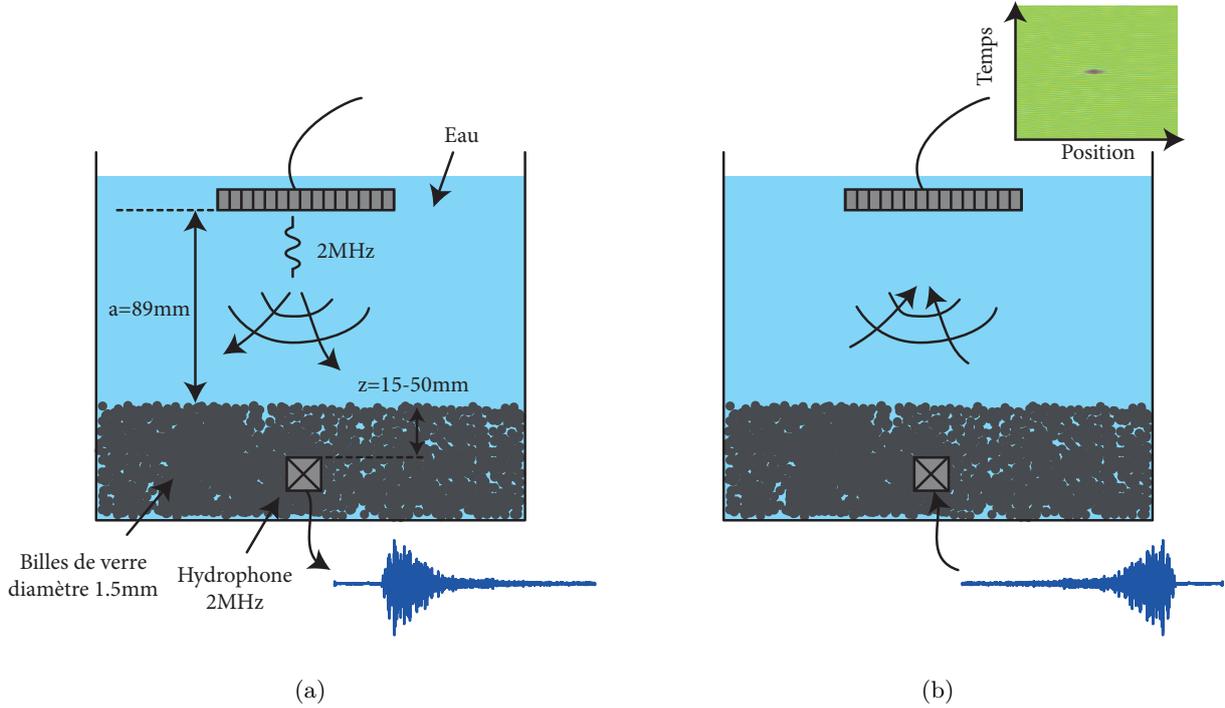


FIGURE 3.45 – Schéma de l'expérience de retournement temporel dans l'empilement de billes immergées. (a) On envoie une brève impulsion avec un des éléments de la barrette, et on enregistre le signal sur le transducteur enfoui. (b) Le signal enregistré est alors retourné et renvoyé avec le transducteur. On observe alors le champ reconstruit grâce à la barrette sous la forme d'une image en couleurs (Bscan, en encart).

Résultats

En pratique, nous effectuons 16 émissions dans la phase aller et 16 ré-émissions dans la phase retour pour diminuer le bruit. On obtient alors typiquement un B-Scan du type de celui de la figure 3.47(a) et un signal recompressé sur la voie 32 comme celui de la figure 3.48. Nous constatons que l'onde est effectivement recompressée temporellement. De plus, l'utilisation de la barrette nous permet d'observer la focalisation spatiale de façon quantitative, et notamment de déterminer la largeur δ à mi-hauteur de la tache focale en prenant une coupe du B-Scan le long du front d'onde d'amplitude maximale au voisinage de l'instant focal $t = 0$.

Nous pouvons alors faire varier la profondeur z du transducteur enfoui en augmentant l'épaisseur de la couche de billes (la distance a entre la barrette et la surface des billes restant fixe), et suivre l'évolution de la tache focale, et donc de sa largeur à mi-hauteur δ en fonction de z . La figure 3.47 présente les B-Scans obtenus pour différentes profondeurs z comprises entre 15 mm et 50 mm.

Nous constatons alors que la largeur à mi-hauteur de la tache diminue lorsque la profondeur augmente, ce qui est confirmé par le tracé des profils des taches (figure 3.49(a)). De façon plus quantitative, la figure 3.49(b) montre alors l'évolution de la largeur $\delta(z)$, moyennée sur dix configurations différentes pour chaque valeur de z (le milieu est mélangé manuellement pour réaliser une nouvelle configuration).

D'après la formule (3.26), la taille de la tache focale doit varier en $1/z$. Nous trouvons alors que la meilleure régression par une fonction inverse donne (courbe en pointillés noirs) :

$$\delta(z) \simeq \frac{67 \text{ mm}^2}{z}. \quad (3.27)$$

Nous constatons cependant que la régression est mauvaise ($R^2 = 0.40$).

Il semblerait que la courbe présente en fait une origine à l'ordonnée non-nulle, et on constate qu'une régression avec ordonnée non-nulle à l'origine donne (courbe en pointillés rouges) :

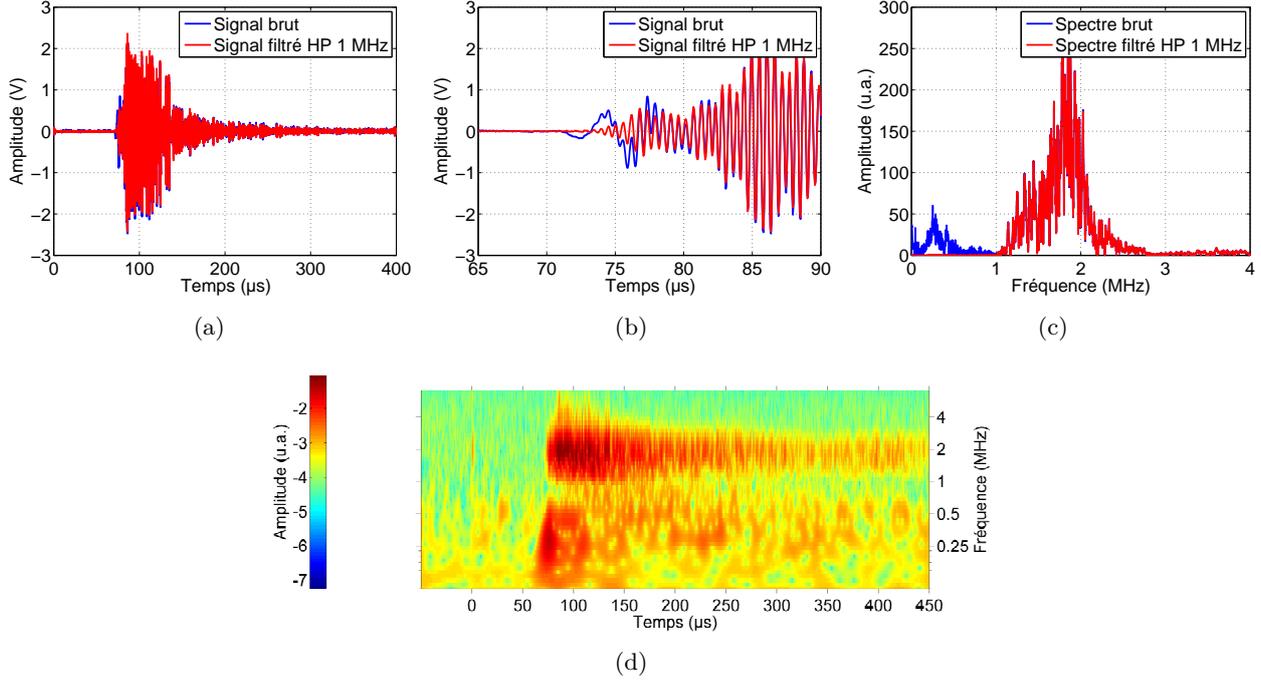


FIGURE 3.46 – Signal mesuré sur le récepteur enfoui. Le signal source consiste en quatre périodes de sinusoïdes centrées autour de 2 MHz. (a) On obtient un signal beaucoup plus long que le signal source, à cause de la diffusion multiple. (b) On observe la présence d’une onde cohérente, qui disparaît après filtrage par un filtre passe-bande entre 1.9 MHz et 2.1 MHz. (c) Le spectre du signal est caractéristique et le filtrage met bien en évidence le fait que l’onde cohérente est basse fréquence, ce qui est confirmé par le spectrogramme du signal (figure (d), en échelle logarithmique).

$$\delta(z) \simeq \frac{39 \text{ mm}^2}{z} + 1.27 \text{ mm}. \quad (3.28)$$

Cette fois-ci, on a $R^2 = 0.99$.

Si cette ordonnée à l’origine reste à expliquer théoriquement, rappelons néanmoins que la largeur δ ne peut *a priori* par être plus petite que la demi longueur d’onde.

Cela étant, le fait que la taille de la tache focale diminue lorsque la profondeur du miroir à retournement temporel augmente est consistant avec le fait que plus le miroir est enfoui profondément et plus le halo diffusif stationnaire est grand en sortie du milieu (figure 3.42) [vT03]. Ainsi, lors de l’opération de retournement temporel, tout se passe alors comme si en sortie de l’échantillon (à la surface libre des grains), l’on avait recréé une source virtuelle dont l’ouverture est d’autant plus grande que la profondeur augmente. Cela mène alors logiquement à une tache focale plus petite.

3.3.5 Retournement temporel dynamique

Dans la section précédente, nous avons renvoyé l’intégralité du signal transmis dans la phase aller. Nous voulons maintenant étudier l’évolution de la tache focale en fonction de la position de la fenêtre retournée temporellement, comme nous l’avons fait dans le modèle numérique (section 2.2.6). Rappelons que cette étude nous était expérimentalement inaccessible dans le cas des granulaires secs par manque de résolution spatiale suffisante.

Méthode

Nous fixons donc la profondeur z et la distance a entre la barrette échographique et la surface libre des grains. Dans un premier temps, nous envoyons 4 périodes de sinusoïdes centrées autour de 2 MHz avec un des éléments de la barrette et enregistrons le signal transmis au transducteur enfoui. Ensuite, nous sélectionnons des fenêtres de durées 10 μs que nous renvoyons successivement (après

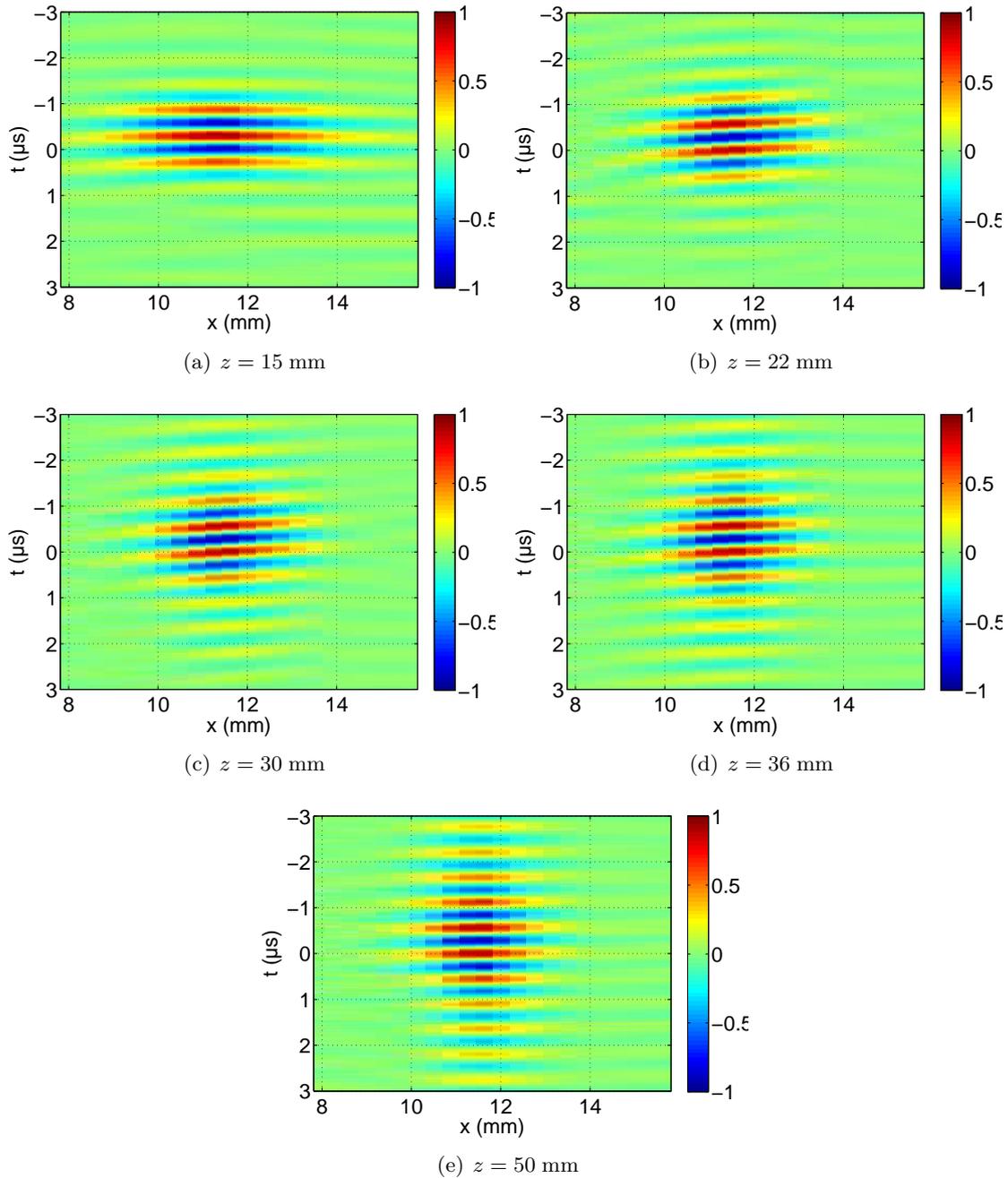


FIGURE 3.47 – Influence de la profondeur z du miroir à retournement temporel sur la tache focale de recompressée. On observe un affinement de la tache focale à mesure que la profondeur du miroir augmente.

les avoir filtrées entre 1 MHz et 3 MHz pour supprimer l'onde cohérente et diminuer au maximum le bruit), tout en enregistrant les B-Scans reçus à la barrette. Cependant, les signaux reçus à la barrette étant très faibles (de par les courtes fenêtres renvoyées), nous moyennons les amplitudes de chaque B-Scan reçu sur différentes configurations, i.e. réalisations du désordre sur la position des grains. Pour simplifier la réalisation des expériences, nous décidons alors de sonder ces différentes configurations en envoyant simplement le signal source de la phase aller avec différents éléments de la barrette. Nous choisissons donc 13 éléments uniformément distribués sur la barrette, en vérifiant que les signaux transmis au transducteur enfoui sont bien décorrélés, et effectuons le processus décrit ci-dessus avec comme élément source tour à tour chacun des 13 éléments. Pour chacune des tranches et chacun des éléments, nous moyennons alors les B-Scans reçus à l'issue de l'opération de retournement temporel, en prenant bien sûr soin de translater les B-Scans de façon à ce que les taches focales se recouvrent

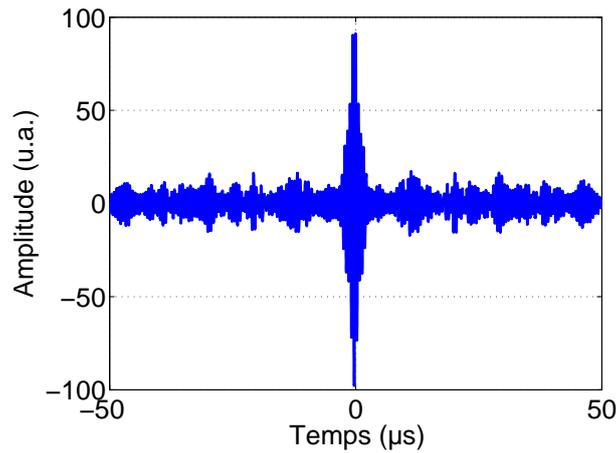
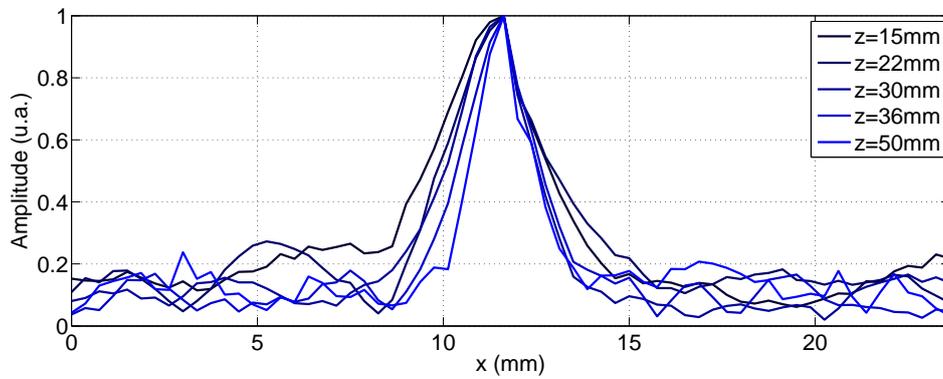
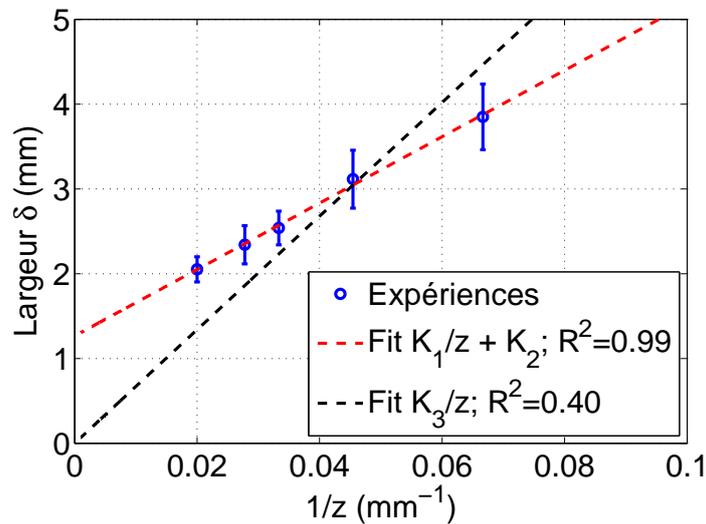


FIGURE 3.48 – Signal temporel recompressé sur l'élément de la barrette qui a servi de source dans la phase aller.



(a)



(b)

FIGURE 3.49 – Évolution de la largeur de la tache focale en fonction de la profondeur du miroir à retournement temporel. La largeur de la tache diminue lorsque la profondeur du miroir augmente, ce qui est consistant avec l'idée que plus le miroir est enfoui profondément, et plus le halo diffusif en sortie du milieu est grand, ce qui mène à une focalisation plus fine.

correctement. De cette manière, les B-Scans interfèrent de façon cohérente au niveau des taches focales, et de façon incohérente en dehors. Cela nous permet donc d'obtenir pour chaque fenêtre retournée un rapport d'énergie beaucoup plus important entre les taches focales et le champ en dehors.

Résultats

La figure 3.50 présente les résultats pour des fenêtres de durée 10 μs . La première colonne présente les fenêtres renvoyées (avant retournement temporel des signaux), la seconde les taches focales, et la troisième les profils des taches focales. Nous constatons que la taille de la tache diminue à mesure que la fenêtre devient plus tardive.

Cela est confirmé par la superposition des profils et le tracé de l'évolution de la largeur à mi-hauteur de la tache (figure 3.51).

Comme expliqué plus haut, on s'attend à ce que la largeur de la tache focale diminue en $1/\sqrt{Dt}$. On trouve alors que le meilleur fit en racine inverse du temps est :

$$\delta(t) \simeq \frac{14.5 \text{ mm} \cdot \mu\text{s}^{1/2}}{\sqrt{t - 68.3 \mu\text{s}}} \quad (3.29)$$

Notons que l'origine des temps trouvée par la régression linéaire (68.3 μs) correspond à peu près au début du signal. Cela est consistant avec le fait que la largeur de la tache a tendance à diverger lorsque la fenêtre renvoyée se rapproche du début du signal (le halo diffusif est alors très petit).

Lorsqu'on effectue l'opération de retournement temporel dynamique en ne sélectionnant qu'une partie du signal au voisinage de l'instant t , tout se passe alors comme si on essayait de focaliser sur l'élément source de la barrette grâce à une source de taille $\propto \sqrt{Dt}$. Cela prouve que le retournement temporel est ici sensible à la diffusion du halo au cours du temps. Avec un modèle théorique, on pourrait alors espérer extraire de la variation de la tache focale au cours du temps une valeur du coefficient de diffusion D .

3.4 Conclusions

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés au transport de l'énergie dans les milieux granulaires secs et légèrement mouillés, puis totalement immergés dans l'eau.

Nous avons dans un premier temps rappelé les résultats obtenus dans le passé montrant que le modèle diffusif modélisait généralement très bien l'intensité moyenne³ diffusée dans un échantillon granulaire sec ou mouillé confiné (section 3.1). Cela est d'autant plus intéressant qu'en l'absence de théorie analytique pour décrire la propagation de l'amplitude dans ces milieux, la théorie de la diffusion permet néanmoins de définir des paramètres de transport : le coefficient de diffusion D et le temps d'absorption τ_a (ou de façon équivalente le facteur de qualité Q_a), qui peuvent être à leur tour reliés à des paramètres physiques tels que le libre parcours moyen (distance typique entre deux événements de diffusion), la vitesse de transport (vitesse de propagation effective de l'énergie) ou la dissipation. Ces paramètres fournissent alors de précieux renseignements sur le milieu étudié, notamment la taille caractéristique des hétérogénéités et leur contraste par rapport au milieu environnant, ou encore l'état du contact entre les grains (mouillage éventuel, par exemple).

Dans un second temps, nous avons cependant pointé une anomalie dans les résultats expérimentaux, à savoir une décroissance non-exponentielle de l'intensité moyenne diffusée aux temps longs (section 3.1.3), qui s'accompagne d'une évolution du facteur de qualité Q avec la fréquence difficile à interpréter physiquement (figure 3.4(c)). Nous avons alors utilisé notre modèle numérique pour éclairer les résultats expérimentaux, et apporter une explication possible à l'anomalie expérimentale. Nous avons tout d'abord montré que le modèle numérique présentait bien un régime diffusif pour des fréquences assez élevées, puis mis en évidence l'importance du filtrage des signaux avant le calcul de l'intensité moyenne diffusée. En effet, nous avons constaté que le temps caractéristique de décroissance τ_a dépendait fortement de la fréquence centrale des signaux (figure 3.2.4). Nous avons par ailleurs remarqué que le spectre des signaux transmis dépendait de l'amplitude de la source, en particulier qu'à grande amplitude de source, les signaux transmis s'enrichissaient fortement en basses fréquences, ce qui mène alors à une difficulté de filtrer efficacement les signaux autour de la fréquence centrale de la source, et donc à une décroissance non-exponentielle de l'intensité transmise (figure 3.25(d)).

3. Au sens de la moyenne sur les réalisations du désordre du milieu.

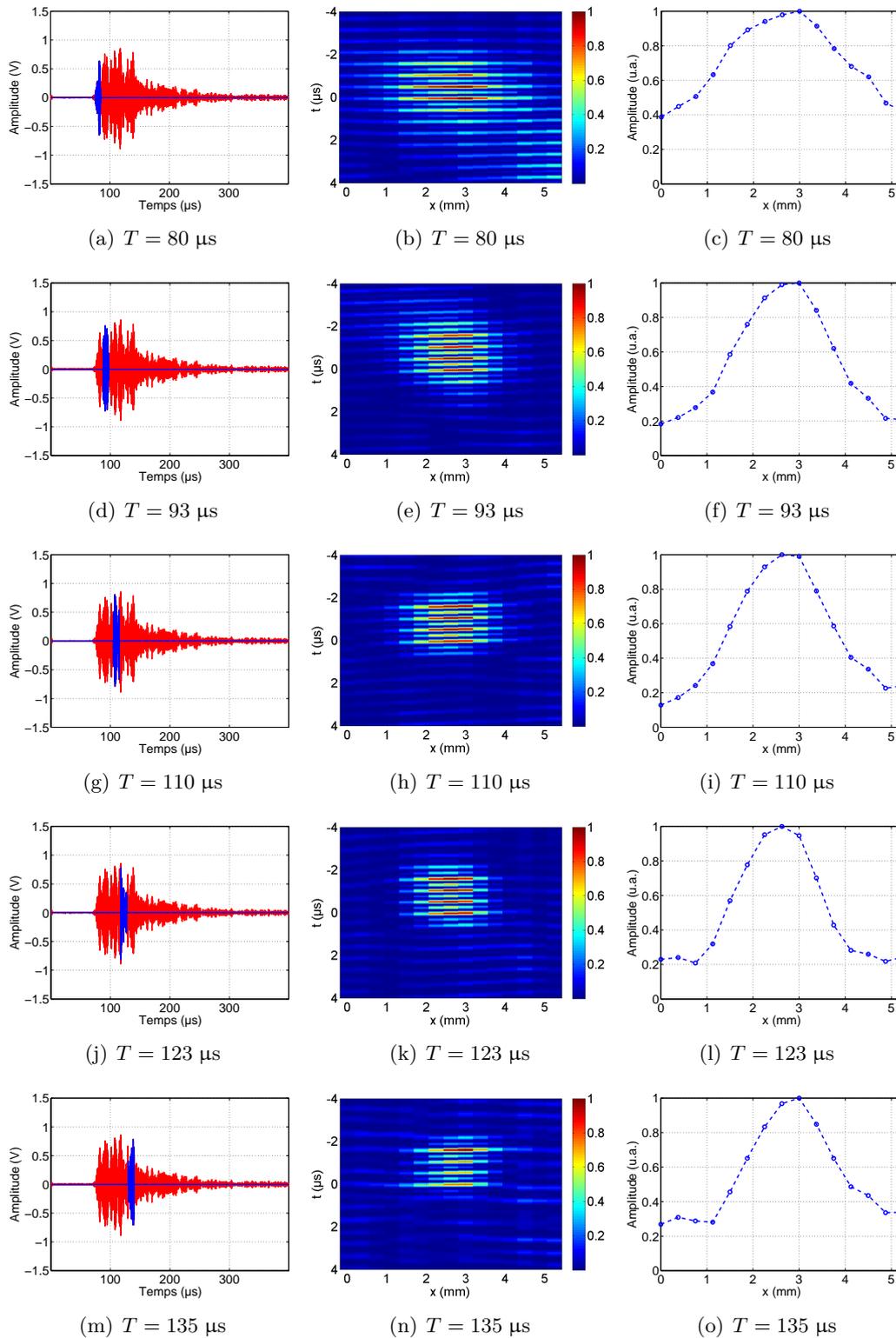
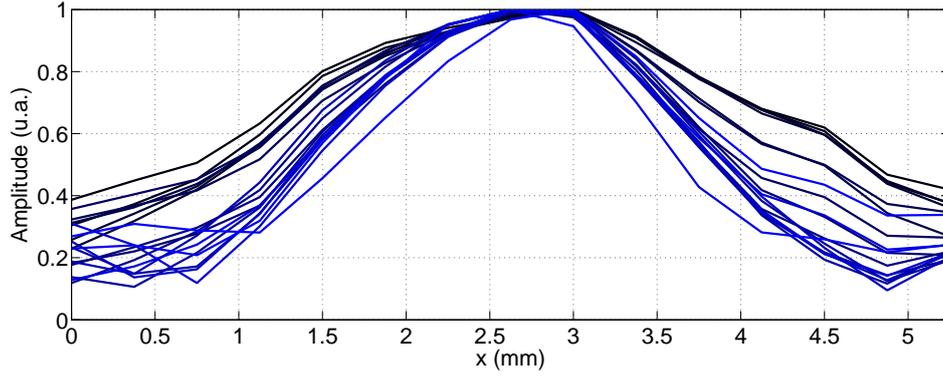
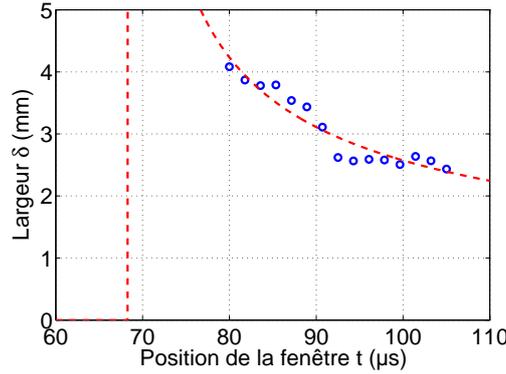


FIGURE 3.50 – Influence de la position temporelle de la fenêtre retournée sur la tache focale recompressée. On représente ici de façon normalisée l'intensité de la moyenne des amplitudes reçues sur les treize configurations utilisées pour chaque valeur de T . La première colonne présente les fenêtres utilisées (durée $10 \mu\text{s}$) pour le retournement temporel. La seconde colonne présente les taches focales recompressées sur la barrette. La troisième colonne montre le profil des taches focales. On observe un affinement de la tache focale au fur et à mesure que la fenêtre devient tardive. Cela est consistant avec le fait que plus la fenêtre utilisée est tardive, et plus l'on renvoie une onde correspondant à un grand halo diffusif, donc à une source spatialement plus grande.



(a)



(b)

FIGURE 3.51 – Évolution de la largeur de la tache focale de recompressée avec la position temporelle de la fenêtre retournée, pour des fenêtres de durées $10 \mu\text{s}$. La meilleure régression par une fonction de la forme $P_1(t - P_2)^{-1/2}$ – avec P_1 et P_2 les paramètres du fit – donne $\delta(t) \simeq 14.5 \text{ mm} \cdot \mu\text{s}^{1/2} (t - 68.3 \mu\text{s})^{-1/2}$, en accord avec le début du signal (voir figure 3.46(b)).

Enfin, nous avons étudié le transport des ondes multiples diffusées dans un milieu granulaire totalement immergé. Nous avons d’abord déterminé les paramètres de transport (coefficient de diffusion D et libre parcours moyen de transport l^*) grâce à l’étude du cône de rétro-diffusion cohérente. Ensuite, nous avons mis en place une expérience de retournement temporel dans une configuration originale, dans laquelle le miroir à retournement temporel est *dans* le milieu granulaire. Nous avons alors montré que la taille de la tache focale reconstruite dépendait de la profondeur du miroir à retournement temporel et de la position de la fenêtre temporelle retournée. Ces résultats constituent une première en cela qu’ils montrent qu’une expérience de retournement temporel réalisée dans cette configuration semble être sensible à la taille du halo de diffusion dans le milieu.

Perspectives Ces éléments en main, il serait intéressant de revenir au cas sec, malgré la plus grande difficulté expérimentale (moyenne sur les configurations plus difficile à effectuer et absorption plus importante), pour par exemple mettre en évidence l’étalement *spatial* du halo diffusif – et donc une mesure alternative du coefficient de diffusion – ou une éventuelle rétrodiffusion cohérente. De même, il pourrait être intéressant de chercher à savoir si le modèle numérique présente ou non de la rétrodiffusion cohérente (en champ proche).

Il pourrait par ailleurs être intéressant de prolonger l’utilisation du modèle numérique, par exemple en essayant d’appliquer la formule de Kubo pour extraire le coefficient de diffusion grâce aux modes [All93, Vit10]. Enfin, une autre piste pourrait être d’augmenter le désordre pour voir jusqu’à quel point le coefficient de diffusion peut être abaissé. Une façon évidente de faire cela serait d’utiliser un modèle tri-dimensionnel, mais il pourrait aussi être intéressant de diminuer la percolation en dessous de $p = 0.91$. Des essais préliminaires ont montré qu’en faisant cela nous rendions le réseau instable, mais Vitelli et al. [Vit10] ont montré que le retrait des masses « solitaires », i.e. étant connecté au

reste du réseau par un nombre très faible de ressorts, pouvait stabiliser le réseau.

Enfin, le retournement temporel avec le miroir *dans* le milieu doit être étudié plus finement pour permettre d'extraire un coefficient de diffusion. En particulier la théorie prenant en compte la géométrie de l'expérience reste à écrire. Il pourra alors être intéressant de vérifier la valeur du coefficient de diffusion ainsi extraite à celle trouvée par des méthodes plus classiques (rétrodiffusion cohérente ou étalement du halo).

Bibliographie

- [Abr79] E. ABRAHAMS, P. W. ANDERSON, D. C. LICCIARDELLO & T. V. RAMAKRISHNAN. ‘Scaling Theory of Localization : Absence of Quantum Diffusion in Two Dimensions.’ *Physical Review Letters*, **42** (10), 673–676. 1979.
- [Alb85] M. P. V. ALBADA & A. LAGENDIJK. ‘Observation of Weak Localization of Light in a Random Medium.’ *Physical Review Letters*, **55** (24), 2692–2695. 1985.
- [All93] P. B. ALLEN & J. L. FELDMAN. ‘Thermal conductivity of disordered harmonic solids.’ *Physical Review B*, **48** (17), 12581–12588. 1993.
- [Bay93] G. BAYER & T. NIEDERDRÄNK. ‘Weak localization of acoustic waves in strongly scattering media.’ *Physical Review Letters*, **70** (25), 3884–3887. 1993.
- [Ber83] G. BERGMANN. ‘Physical interpretation of weak localization : A time-of-flight experiment with conduction electrons.’ *Physical Review B*, **28** (6), 2914–2920. 1983.
- [Bru06] T. BRUNET. *Etude des milieux granulaires secs et mouillés à l’aide des ondes ultrasonores*. Thèse, Université de Marne la Vallée. 2006.
- [Bru08] T. BRUNET, X. JIA & P. MILLS. ‘Mechanisms for Acoustic Absorption in Dry and Weakly Wet Granular Media.’ *Physical Review Letters*, **101** (13), 138001. 2008.
- [Cob17] L. A. COBUS, B. A. V. TIGGELEN, A. DERODE & J. H. PAGE. ‘Dynamic coherent backscattering of ultrasound in three-dimensional strongly-scattering media.’ *The European Physical Journal Special Topics*, **226** (7), 1549–1561. 2017.
- [dR00] J. DE ROSNY, A. TOURIN & M. FINK. ‘Coherent Backscattering of an Elastic Wave in a Chaotic Cavity.’ *Physical Review Letters*, **84** (8), 1693–1695. 2000.
- [dR04] J. DE ROSNY, A. TOURIN, A. DERODE, B. VAN TIGGELEN & M. FINK. ‘Relation between time reversal focusing and coherent backscattering in multiple scattering media : A diagrammatic approach.’ *Physical Review E*, **70** (4), 046601. 2004.
- [dR05] J. DE ROSNY, A. TOURIN, A. DERODE, P. ROUX & M. FINK. ‘Weak Localization and Time Reversal of Ultrasound in a Rotational Flow.’ *Physical Review Letters*, **95** (7), 074301. 2005.
- [Goo15] J. W. GOODMAN. *Statistical Optics*, John Wiley & Sons. 2015.
- [Gor79] L. P. GOR’KOV, A. I. LARKIN & D. E. KHMEL’NITSKII. ‘Particle conductivity in a two-dimensional random potential.’ *JETP Lett.*, **30** (4), 248–252. 1979.
- [Hu08] H. HU, A. STRYBULEVYCH, J. H. PAGE, S. E. SKIPETROV & B. A. VAN TIGGELEN. ‘Localization of ultrasound in a three-dimensional elastic network.’ *Nature Physics*, **4** (12), 945–948. 2008.
- [Jen12] F. JENDRZEJEWSKI, K. MÜLLER, J. RICHARD, A. DATE, T. PLISSON, P. BOUYER, A. ASPECT & V. JOSSE. ‘Coherent Backscattering of Ultracold Atoms.’ *Physical Review Letters*, **109** (19), 195302. 2012.

- [Jia99] X. JIA, C. CAROLI & B. VELICKY. ‘Ultrasound Propagation in Externally Stressed Granular Media.’ *Physical Review Letters*, **82** (9), 1863–1866. 1999.
- [Jia01] X. JIA & P. MILLS. ‘Sound propagation in dense granular materials.’ in Y. K. (ED.), édition, *Powders and Grains 2001*, p. 105–112, Balkema, Rotterdam, France. 2001.
- [Jia04] X. JIA. ‘Codalike Multiple Scattering of Elastic Waves in Dense Granular Media.’ *Physical Review Letters*, **93** (15), 154303. 2004.
- [Kug84] Y. KUGA & A. ISHIMARU. ‘Retroreflectance from a dense distribution of spherical particles.’ *JOSA A*, **1** (8), 831–835. 1984.
- [Lag89] A. LAGENDIJK, R. VREEKER & P. DE VRIES. ‘Influence of internal reflection on diffusive transport in strongly scattering media.’ *Physics Letters A*, **136** (1), 81–88. 1989.
- [Lan66] J. S. LANGER & T. NEAL. ‘Breakdown of the Concentration Expansion for the Impurity Resistivity of Metals.’ *Physical Review Letters*, **16** (22), 984–986. 1966.
- [Lar04] E. LAROSE, L. MARGERIN, B. A. VAN TIGGELEN & M. CAMPILLO. ‘Weak Localization of Seismic Waves.’ *Physical Review Letters*, **93** (4), 048501. 2004.
- [Lau11] J. LAURENT. *Étude d’un matériau granulaire sec par ondes ultrasonores : effet non linéaire, atténuation et diffusion*. Thèse, Université Paris-Est. 2011.
- [Mar01] L. MARGERIN, M. CAMPILLO & B. A. V. TIGGELEN. ‘Coherent backscattering of acoustic waves in the near field.’ *Geophysical Journal International*, **145** (3), 593–603. 2001.
- [Mar08] L. MARGERIN. ‘Chapter 1 Coherent Back-Scattering and Weak Localization of Seismic Waves.’ in R. DMOWSKA, édition, *Advances in Geophysics*, vol. 50 de *Earth Heterogeneity and Scattering Effects on Seismic Waves*, p. 1–19, Elsevier. 2008.
- [Mas99] T. G. MASON, A. J. LEVINE, D. ERTAS & T. C. HALSEY. ‘Critical angle of wet sand-piles.’ *Physical Review. E, Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics*, **60** (5 Pt A), R5044–5047. 1999.
- [Ons31a] L. ONSAGER. ‘Reciprocal Relations in Irreversible Processes. I.’ *Physical Review*, **37** (4), 405–426. 1931.
- [Ons31b] L. ONSAGER. ‘Reciprocal Relations in Irreversible Processes. II.’ *Physical Review*, **38** (12), 2265–2279. 1931.
- [Pag95] J. H. PAGE, H. P. SCHRIEMER, A. E. BAILEY & D. A. WEITZ. ‘Experimental test of the diffusion approximation for multiply scattered sound.’ *Physical Review E*, **52** (3), 3106–3114. 1995.
- [Sch13] F. SCHEFFOLD & D. WIERSMA. ‘Inelastic scattering puts in question recent claims of Anderson localization of light.’ *Nature Photonics*, **7** (12), 934–934. 2013.
- [She91] P. SHENG & M. ZHOU. ‘Heat conductivity of amorphous solids : simulation results on model structures.’ *Science (New York, N.Y.)*, **253** (5019), 539–542. 1991.
- [Stö06] M. STÖRZER, P. GROSS, C. M. AEGERTER & G. MARET. ‘Observation of the Critical Regime Near Anderson Localization of Light.’ *Physical Review Letters*, **96** (6), 063904. 2006.
- [Tou97] A. TOURIN, A. DERODE, P. ROUX, B. A. VAN TIGGELEN & M. FINK. ‘Time-Dependent Coherent Backscattering of Acoustic Waves.’ *Physical Review Letters*, **79** (19), 3637–3639. 1997.
- [Tou00] A. TOURIN, A. DERODE, A. PEYRE & M. FINK. ‘Transport parameters for an ultrasonic pulsed wave propagating in a multiple scattering medium.’ *The Journal of the Acoustical Society of America*, **108** (2), 503–512. 2000.
- [vdM88] M. B. VAN DER MARK, M. P. VAN ALBADA & A. LAGENDIJK. ‘Light scattering in strongly scattering media : Multiple scattering and weak localization.’ *Physical Review B*, **37** (7), 3575–3592. 1988.
- [Vit10] V. VITELLI, N. XU, M. WYART, A. J. LIU & S. R. NAGEL. ‘Heat transport in model jammed solids.’ *Physical Review E*, **81** (2), 021301. 2010.

- [vT03] B. A. VAN TIGGELEN. ‘Green Function Retrieval and Time Reversal in a Disordered World.’ *Physical Review Letters*, **91** (24), 243904. 2003.
- [Wat69] K. M. WATSON. ‘Multiple Scattering of Electromagnetic Waves in an Underdense Plasma.’ *Journal of Mathematical Physics*, **10** (4), 688–702. 1969.
- [Wea00] R. L. WEAVER & O. I. LOBKIS. ‘Enhanced Backscattering and Modal Echo of Reverberant Elastic Waves.’ *Physical Review Letters*, **84** (21), 4942–4945. 2000.
- [Wol85] P.-E. WOLF & G. MARET. ‘Weak Localization and Coherent Backscattering of Photons in Disordered Media.’ *Physical Review Letters*, **55** (24), 2696–2699. 1985.
- [Yan13] Y. YANG. *Propagation des ondes acoustiques dans les milieux granulaires confinés*. Thèse, Université Paris-Est. 2013.
- [Zhu91] J. X. ZHU, D. J. PINE & D. A. WEITZ. ‘Internal reflection of diffusive light in random media.’ *Physical Review A*, **44** (6), 3948–3959. 1991.

Retournement temporel en régime non-linéaire dans les milieux granulaires secs

Who controls the past controls the future.

George Orwell, 1984, 1949

Sommaire

4.1 Non-linéarité dans la phase aller : expériences et simulations	126
4.1.1 Influence de l'amplitude source sur le retournement temporel	126
4.1.2 Localisation des réarrangements	129
4.1.3 Cas d'un échantillon vieilli	132
4.1.4 Simulations numériques	132
4.2 Non-linéarité dans la phase retour : déclenchement contrôlé des réarrangements sous forte contrainte	137
4.2.1 Influence de l'amplitude au miroir à retournement temporel	137
4.2.2 Localisation des réarrangements	142
4.2.3 Influence de la taille des billes	143
4.2.4 Cas d'un échantillon vieilli	144
4.3 Déclenchement sous faible contrainte	145
4.3.1 Dispositif expérimental	145
4.3.2 Signal transmis	147
4.3.3 Vieillissement	147
4.3.4 Déclenchement des réarrangements	148
4.4 Conclusions	152

Dans ce chapitre, nous voulons tirer parti de la capacité de focaliser de l'énergie acoustique – dans l'espace et dans le temps – grâce au retournement temporel (dont la faisabilité a été apportée au chapitre 2) pour provoquer des réarrangements du réseau des contacts dans un empilement granulaire fortement contraint ou sous simple gravité. En effet, contrairement à un solide plus classique, la rigidité d'un empilement granulaire réside dans la contrainte qui lui est appliquée et on peut espérer que pour de petites modifications des forces au sein du milieu – induites par une onde focalisée – des réarrangements irréversibles apparaissent [Cat99].

Dans un premier temps nous nous intéressons à l'étude du retournement temporel en fonction de l'amplitude utilisée à la source, i.e. dans la phase *aller* de l'onde. Les résultats sont alors comparés à ceux obtenus grâce à un modèle simple de réarrangements dans notre simulation numérique.

Dans un second temps, nous déclenchons de façon ciblée des réarrangements du réseau des contacts dans un empilement granulaire sec sous forte contrainte, dans la phase *retour* du retournement temporel. Dans la dernière partie, nous montrons finalement une expérience de déclenchement de réarrangements dans un empilement sous la contrainte gravitaire uniquement.

4.1 Non-linéarité dans la phase aller : expériences et simulations

4.1.1 Influence de l'amplitude source sur le retournement temporel

Description de l'expérience

Nous reprenons le dispositif présenté dans le chapitre 2 (section 2.1.1). Puisque nous souhaitons ici *focaliser* les ondes par retournement temporel, nous voulons nous concentrer sur l'onde multiplement diffusée. En effet, comme nous l'avons vu dans la section 2.1.5, il n'est pas possible avec un transducteur unique de focaliser spatialement l'onde cohérente à la source (malgré la présence d'une recompression temporelle), alors que l'onde multiplement diffusée revient à la source de façon focalisée. Dans le but de diminuer le poids de l'onde cohérente par rapport à l'onde multiplement diffusée, nous considérons alors des billes de diamètre 3 mm au lieu des billes de 1.5 mm précédemment utilisées. Faisant cela, nous diminuons le nombre moyen de billes en contact avec les détecteurs, et donc augmentons le poids relatif de l'onde multiplement diffusée enregistrée par rapport à l'onde cohérente (voir section 1.3.5 du chapitre introductif). Cela mène alors à une onde cohérente très faible par rapport à l'onde multiplement diffusée. De plus, nous imposons sur l'échantillon la même contrainte de 113 kPa.

Nous considérons alors un unique transducteur S_1 sur une des face de la cellule (figure 4.1(a)), qui servira de source (en phase aller), et un second transducteur D_1 , qui servira de miroir à retournement temporel (à un seul élément, donc). Les deux transducteurs sont volontairement choisis pour ne pas être en face l'un de l'autre (distance latérale de 39 mm), de façon s'assurer que les éventuels réarrangements observés soient bien dûs à la refocalisation de l'onde multiplement diffusée, et non à un simple effet d'une éventuelle onde cohérente qui pourrait résister à la propagation balistique.

L'échantillon est soumis à une contrainte d'environ 113 kPa et – sauf mention contraire – est laissé au repos sous cette contrainte durant 2 min avant chacune des expériences, pour s'assurer que les effets du vieillissement ne nuisent pas à la reproductibilité de l'expérience (voir section 2.1.3).

Dans un premier temps (figure 4.1(a)), nous envoyons dans le transducteur S_1 un signal électrique composé de trois périodes de sinusoïde de fréquence 100 kHz d'amplitude pic-pic notée A_1 amplifié de 50 dB. Nous enregistrons alors le signal reçu par le transducteur D_1 , en l'ayant au préalable amplifié et filtré entre 30 kHz et 150 kHz pour diminuer respectivement l'amplitude d'une éventuelle onde cohérente résiduelle d'une part, et d'autre part pour diminuer le bruit électronique. Un exemple de signal transmis filtré est donné en figure 4.2(g).

Dans un second temps (figure 4.1(b)), nous retournons temporellement le signal reçu (de type « coda »), fixons son amplitude pic-pic à 10 mV, l'amplifions de 50 dB et le renvoyons grâce à D_1 . Cette amplitude de ré-émission a été choisie de façon à s'assurer de rester dans le régime linéaire dans la phase retour (voir section suivante 4.1.2).

Il est important de noter ici que l'amplitude des signaux renvoyés est *fixée*, de façon à s'assurer que la phase retour s'effectue en régime linéaire et à se focaliser sur les réarrangements en phase *aller*. De cette façon, si le processus est totalement linéaire, l'amplitude du pic de recompression ne doit pas dépendre de l'amplitude de la source.

Résultats

La figure 4.2 présente les signaux de recompression enregistrés par S_1 pour différentes amplitudes de source A_1 comprises entre $A_1 = 10$ mV et $A_1 = 500$ mV (avant amplification de 50 dB). Précisons ici que la première étape (phase aller) a été réalisée pour chaque valeur de A_1 . Cependant, l'échantillon n'a pas été rafraîchi entre les expériences (on garde le même échantillon, sans faire varier la contrainte), et on peut donc s'attendre à une stabilisation de ce dernier au cours de l'expérience dans son ensemble, ce qui ne modifie cependant pas les principaux résultats de cette étude.

La première observation est que dans tous les cas, nous obtenons une recompression temporelle à la source S_1 .

Nous constatons cependant que l'amplitude du pic de recompression *diminue* à mesure que l'amplitude source A_1 augmente (figure 4.3). Or, comme nous l'avons expliqué précédemment, si le processus était totalement linéaire, l'amplitude devrait être constante (puisque l'amplitude de ré-émission est

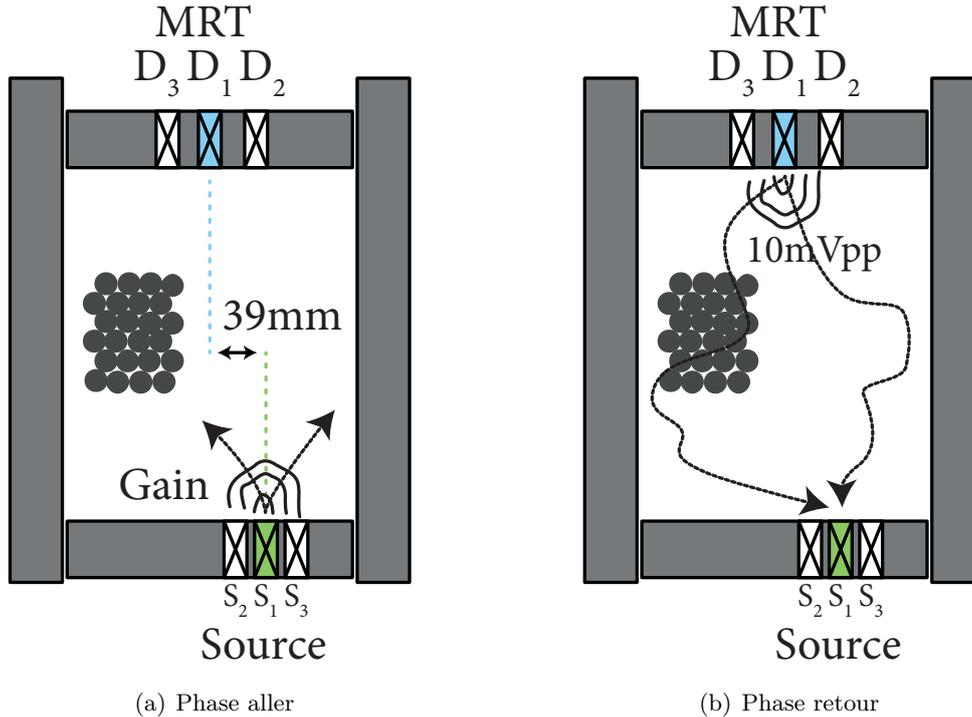


FIGURE 4.1 – Schéma de l'expérience de retournement temporel avec amplification dans la phase aller (effet non-linéaire). (a) Phase aller : une impulsion composée de trois périodes de sinusoïde de fréquence centrale 100 kHz et d'amplitude A_1 est émise par un unique transducteur source S_1 . L'onde est alors enregistrée par un second transducteur D_1 situé sur la face opposée, à une distance latérale de 39 mm de S_1 . (b) L'onde transmise (de type coda) est normalisée de façon à ce que l'amplitude entre son minimum et son maximum soit de 10 mV puis amplifiée de 50 dB, de façon à rester en régime linéaire, et re-émise par D_1 . Si tout se passe bien, l'onde doit alors revenir à la source S_1 .

fixée). Les deux derniers points sur la figure 4.3 montrent une augmentation de l'amplitude du pic, probablement à attribuer au fait que l'échantillon n'a pas été rafraîchi entre les différentes acquisitions.

Nous constatons par ailleurs que plus l'amplitude A_1 de la source est élevée, et plus la qualité de la recompression semble faible : en effet, pour une valeur $A_1 = 10$ mV (figure 4.2(b)), l'amplitude du pic est plus importante que celle pour le cas $A_1 = 500$ mV (figure 4.2(h)), alors que l'amplitude des lobes semble globalement constante. Pour être plus quantitatif, nous calculons pour chaque valeur d'amplitude source A_1 le rapport entre l'amplitude du pic de recompression (maximum du signal au voisinage de l'instant focal $t = 0$) et l'écart-type du signal dans une fenêtre temporelle fixe (en rouge sur les signaux de la figure 4.2).

Comme nous le voyons sur la figure 4.4, le rapport diminue à mesure que l'amplitude A_1 de la source augmente. Ainsi, plus la source émet une onde d'amplitude élevée, et moins la qualité de la recompression temporelle est bonne. Là encore, en régime totalement linéaire, le rapport pic/lobes devrait être constant.

Ces résultats montrent qu'un phénomène non-linéaire est ici à l'œuvre et que la probabilité de retour à la source de l'onde diminue à mesure que l'amplitude source augmente.

Cette non-linéarité a nécessairement lieu dans la phase *aller* de la propagation, puisque nous avons pris soin d'utiliser une amplitude très faible en phase retour et que la durée entre la phase aller et la phase retour est prise de telle façon que le vieillissement ne joue pas un rôle important (voir section suivante 4.1.2). Nous l'interprétons alors comme une modification du milieu induite par la propagation de l'onde elle-même. En effet, comme expliqué dans la section 1.3.4, le milieu est fragile, dans le sens où des réarrangements irréversibles peuvent apparaître dans le milieu pour certaines sollicitations externes mêmes faibles. Dans notre cas, l'échantillon étant fortement contraint et l'amplitude acoustique de la source étant négligeable devant la taille des grains (vibration à la surface du transducteur de l'ordre du nanomètre, contre une taille millimétrique des grains), les grains ne peuvent pas se déplacer, et

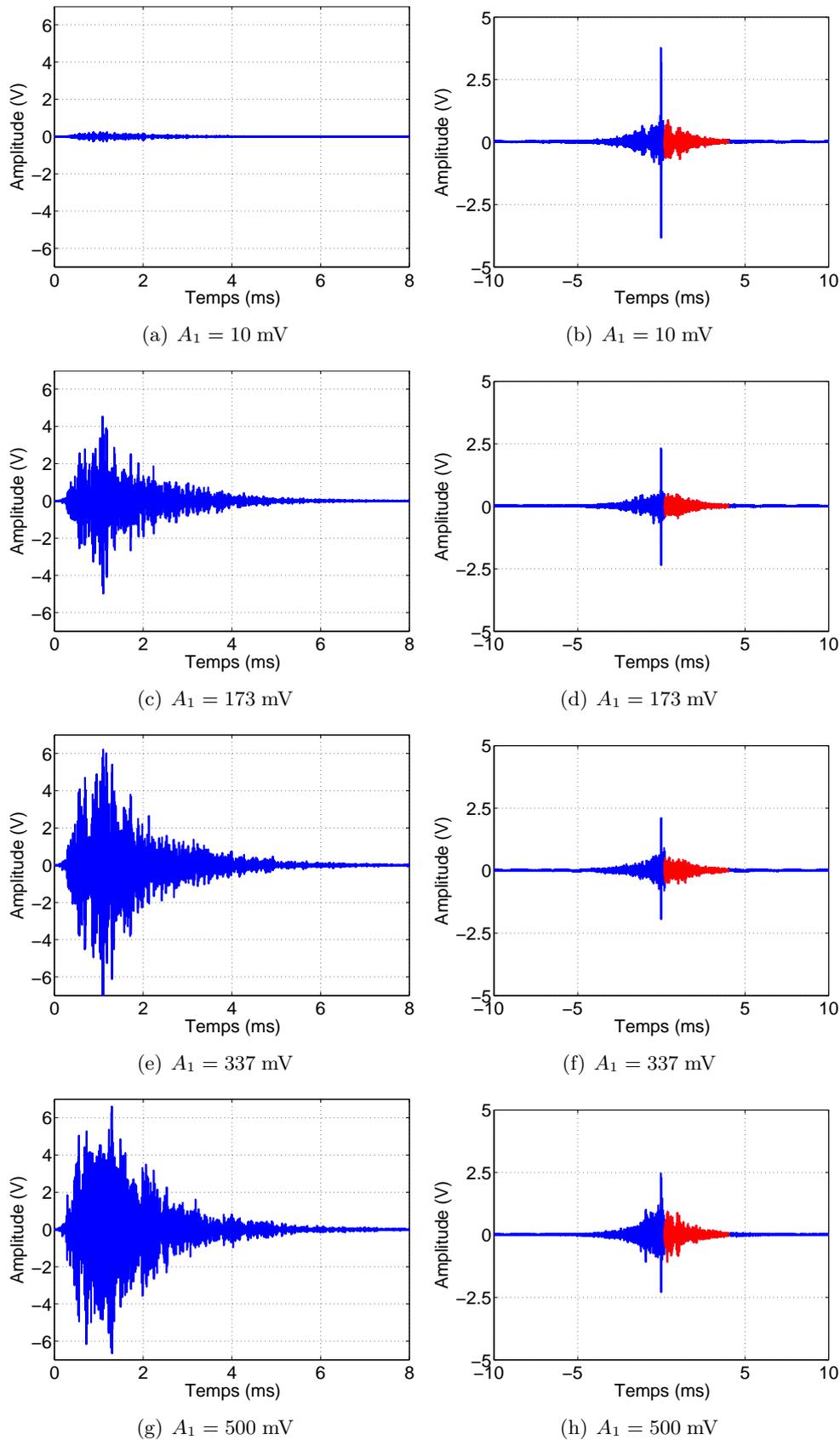


FIGURE 4.2 – Évolution des signaux transmis (colonne de gauche) et des signaux recompressés (colonne de droite) en fonction de l'amplitude de la source. La qualité de la recompression est évaluée en calculant le rapport de l'amplitude du pic de recompression sur l'écart-type des lobes (en rouge). Il faut bien noter ici que l'amplitude de ré-émission est fixée, et qu'en conséquence dans un processus totalement linéaire, l'amplitude du pic de recompression devrait être constante. Or nous constatons que l'amplitude du pic diminue, ce qui est donc le signe d'une non-linéarité.

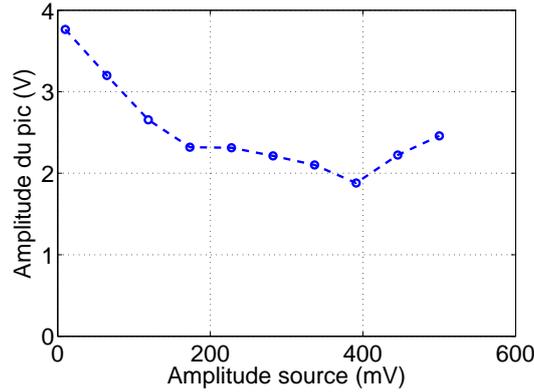


FIGURE 4.3 – Évolution de l’amplitude du pic de recompression temporelle en fonction de l’amplitude de la source A_1 . Comme l’amplitude de ré-émission est fixée, en régime parfaitement linéaire le pic de recompression devrait être d’amplitude constante lorsque l’amplitude de la source A_1 varie. Physiologiquement, lorsque l’amplitude A_1 de la source est trop importante, des réarrangements du réseau des contacts se produisent, empêchant alors l’onde de retrouver en phase retour tous les chemins pris dans la phase aller – la probabilité de retour à la source (et donc l’amplitude du pic de recompression) diminue donc.

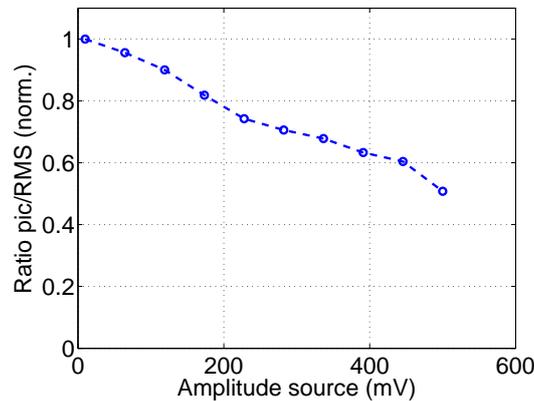


FIGURE 4.4 – Évolution de la qualité de la recompression temporelle en fonction de l’amplitude de la source. La qualité de la recompression est évaluée en calculant le rapport de l’amplitude du pic de recompression (lui-même étant évalué en considérant le maximum du signal au voisinage du temps focal) par l’écart-type de l’amplitude dans une fenêtre temporelle fixée (en rouge). Dans un régime parfaitement linéaire, la qualité ne devrait pas dépendre de l’amplitude de la source.

les réarrangements ne peuvent se produire qu’au sein du réseau des *contacts* entre les grains. La modification des contacts entre les grains provoque alors une modification des chemins locaux, et donc une impossibilité pour l’onde de reproduire parfaitement sa chronologie inverse en phase retour.

En d’autres termes, le milieu est non-stationnaire durant la propagation acoustique, et il n’est alors pas surprenant de constater que le retournement temporel n’est plus parfait puisque la stationnarité est un des ingrédients nécessaires à sa réussite (voir section 1.2.1).

4.1.2 Localisation des réarrangements

Signatures acoustiques

Nous souhaitons maintenant avoir une idée plus précise sur la localisation des réarrangements déclenchés. Pour cela, nous voulons tirer parti de l’effet de sonde des ondes acoustiques. En effet, comme nous le savons, dans nos expériences les ondes se propagent de grains en grains par les *contacts* entre ces derniers. Ainsi, nous pouvons espérer observer une modification des ondes transmises si une modification du réseau des contact a bien lieu [Jia01].

Nous utilisons alors le fait que nous disposons d’un réseau de transducteurs et nous intéressons

à l'évolution au cours du temps des signatures acoustiques (réponse à une impulsion fixée) entre différentes paires de ces derniers. Cette méthode est directement inspirée des méthodes de spectroscopie par diffusion d'ondes (« diffusing-wave spectroscopy » [Mar87, Pin88, Mar97, Sni07]), qui permettent par exemple d'obtenir des mesures quantitatives sur la dynamique de suspensions [Wei89, Cow02], les réarrangements dans les mousses [Ear96] ou encore les écoulements granulaires [Men97].

Pour un couple ij de transducteurs donnés, les signatures S_{ij} avant et S_{ij}^* après l'expérience sont alors comparées, et on peut notamment extraire un coefficient de corrélation C_{ij} , qui permet de quantifier la variation des signatures acoustiques :

$$C_{ij} = \frac{\max_{\tau} \langle S_{ij}(t) S_{ij}^*(t + \tau) \rangle_t}{\sqrt{\langle S_{ij} S_{ij} \rangle_t \langle S_{ij}^* S_{ij}^* \rangle_t}} = \frac{\max_{\tau} \left(\int S_{ij}(t) S_{ij}^*(t + \tau) dt \right)}{\sqrt{\int (S_{ij})^2(t) dt \int (S_{ij}^*)^2(t) dt}}. \quad (4.1)$$

Il est à noter que nous évaluons le coefficient de corrélation entre deux signatures acoustiques en prenant le *maximum* de la corrélation croisée entre les deux signaux, et non sa valeur à $\tau = 0$. Cela permet de s'affranchir d'une éventuelle décorrélation qui serait liée à une simple compaction de l'échantillon (dû au vieillissement), qui aurait pour conséquence un décalage temporel des signaux. Nous ne sommes ici pas intéressés par cette décorrélation, et suivons donc un éventuel décalage temporel du maximum de la corrélation croisée. Par ailleurs, la normalisation implique que si $S_{ij} = S_{ij}^*$, alors $C_{ij} = 1$. En revanche, si le milieu a été modifié entre l'acquisition de S_{ij} et l'acquisition de S_{ij}^* , on aura $C_{ij} < 1$.

De plus, si la diffusion multiple nous empêche de relier les signaux reçus avec la position *exacte* dans le milieu (à l'échelle des grains) – au contraire de l'échographie médicale par exemple – nous verrons néanmoins que la dissipation des ondes dans notre milieu nous permet d'associer une zone spatiale relativement petite à une signature acoustique S_{ij} . En effet, le signal transmis entre deux transducteurs i et j correspond environ à une zone sondée située entre les deux transducteurs, dont la taille est de l'ordre de la distance d'absorption. Pour une dissipation très petite, cette zone correspond à l'ensemble du milieu, et la signature acoustique n'est pas un bon indicateur local (figure 4.5(a)). Lorsque la dissipation devient plus grande, la zone correspondant à la signature devient de plus en plus précise (figure 4.5(b)). Bien sûr, si la dissipation est trop grande, il n'est pas possible d'enregistrer de signature acoustique (figure 4.5(c)).

En utilisant deux paires de transducteurs (figure 4.5), on peut alors avoir une idée de la localisation des réarrangements.

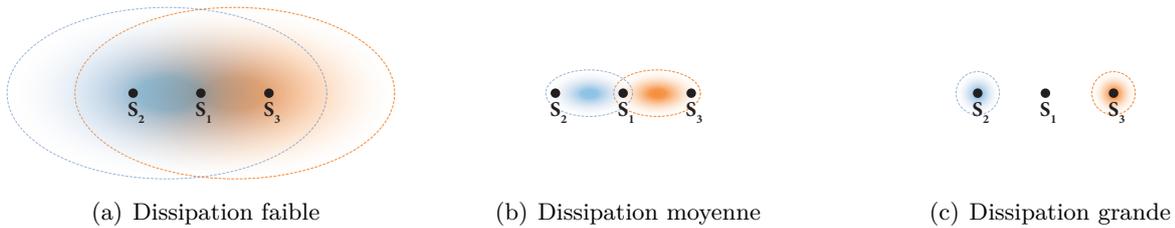


FIGURE 4.5 – Influence de la dissipation (représentation schématique) sur les zones sondées par les signatures acoustiques, entre deux paires de capteurs S_1 - S_2 d'une part (en bleu) et S_1 - S_3 d'autre part (en orange). (a) Pour une dissipation faible, les signatures acoustiques entre les deux paires sondent à peu près la même zone, et ne permettront pas de dire si les réarrangements ont lieu plutôt entre S_1 - S_2 ou entre S_1 - S_3 . (b) Pour une dissipation moyenne, les zones sondées sont bien séparées et les signatures acoustiques permettront de localiser la position des réarrangements. (c) Pour une grande dissipation, l'onde émise par S_2 n'atteint même pas S_1 (de même pour celle émise par S_3 reçue en S_1), et il n'est même pas possible d'enregistrer les signatures acoustiques.

Nous considérons donc les transducteurs S_2 et S_3 voisins de la source S_1 (figure 4.1) et enregistrons la signature acoustique entre ces deux transducteurs avant *et* après l'expérience de retournement temporel. Concrètement, nous faisons émettre au transducteur S_2 trois périodes de sinusoïde de fréquence centrale 100 kHz et d'amplitude 10 mV, que nous amplifions de 50 dB, tout en veillant à rester dans

le régime linéaire, et nous enregistrons le signal reçu par le transducteur S_3 (en l'amplifiant au préalable). Nous enregistrons de même la signature acoustique entre les transducteurs D_2 et D_3 autour du transducteur D_1 constituant le miroir à retournement temporel (mono-élément).

Nous pouvons alors calculer les coefficients de corrélation au voisinage de la source et au voisinage du miroir pour avoir une idée des réarrangements qui se sont produits.

Cas linéaire

Dans un premier temps, nous nous intéressons à la variation des deux signatures acoustiques dans le cas du retournement temporel avec une amplitude source $A_1 = 10$ mV, que nous considérons comme assez petite pour ne pas déclencher de réarrangements (cas linéaire, ou « de référence »).

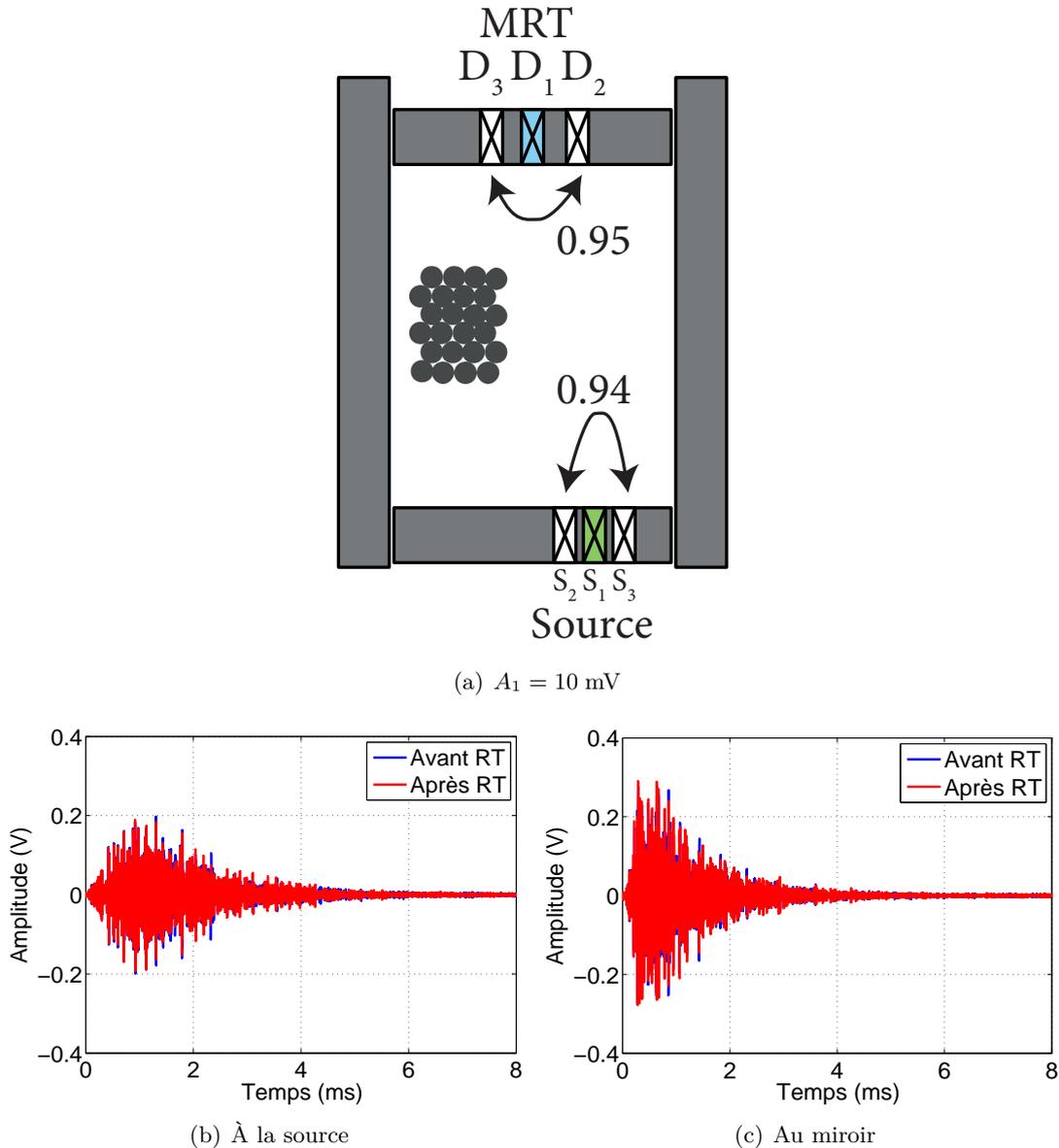


FIGURE 4.6 – Évolution des signatures acoustiques dans le cas de référence (10 mV à la source). La décorrélation observée est très faible et est ici à attribuer au vieillissement de l'échantillon.

Comme nous pouvons le constater (figure 4.6), les signatures acoustiques autour de la source (figure 4.6(b)) et autour du miroir (figure 4.6(c)) évoluent très peu après l'expérience de retournement temporel. Cela est confirmé par les coefficients de corrélation C_{ij} entre les signatures avant et après l'expérience, qui valent respectivement 0.94 et 0.95 à la source et au miroir (figure 4.6(a)).

Nous attribuons la légère décorrélation des signatures au vieillissement de l'échantillon (vieilli 2 min), l'expérience durant au total quelques minutes. Une façon de s'assurer que c'est bien le vieillis-

sement de l'échantillon et non l'onde envoyée qui est responsable de cette décorrélation serait simplement de fixer l'amplitude d'émission à zéro et de suivre l'évolution des signatures acoustiques.

En tous les cas, nous disposons désormais d'un ordre de grandeur de la décorrélation des signatures acoustiques (et donc du réseau des chaînes de force) au voisinage de la source et du miroir à retournement temporel dans le cas d'une très petite amplitude d'excitation A_1 .

Cas non-linéaire

Nous répétons alors maintenant l'expérience avec une amplitude de la source $A_1 = 500$ mV et comparons les signatures acoustiques avant et après l'expérience.

Comme nous le constatons (figure 4.7), la signature autour de la source est fortement modifiée (figures 4.7(a) et 4.7(b)), alors que celle autour du miroir l'est très peu (figures 4.7(c) et 4.7(d)). Les coefficients de corrélation C_{ij} valent respectivement 0.28 et 0.98.

Ainsi, nous montrons que les réarrangements du réseau des contacts ont lieu principalement au voisinage de la source. Cela n'est bien sûr pas surprenant, puisque c'est ici la source qui émet une amplitude importante, le miroir émettant en phase retour une coda normalisée de petite amplitude.

4.1.3 Cas d'un échantillon vieilli

Nous voulons maintenant présenter un aspect intéressant du vieillissement par rapport à la fragilité du milieu. Nous considérons un échantillon vieilli sous contrainte de 113 kPa durant environ 12 h (contre 2 min précédemment), et refaisons l'expérience, toujours avec une amplitude source $A_1 = 500$ mV.

Nous observons alors que cette fois-ci (figure 4.8), les corrélations entre les signatures acoustique avant et après l'expérience sont de 0.99, aussi bien au miroir qu'à la source. Ainsi, quasiment aucun réarrangement n'a lieu dans ce cas.

Cela est à attribuer au fait qu'après 12 h de vieillissement sous contrainte, les contacts entre les grains n'évoluent plus. Il est alors très difficile de les modifier (tout du moins avec nos ondes). Lorsque nous voudrions dans un second temps *déclencher* des réarrangements, il faudra donc avoir cela en tête, et veiller à prendre un échantillon pas trop jeune (pour limiter les réarrangements dûs au vieillissement) mais pas trop vieux non plus (pour faciliter la modification du réseau des contacts grâce aux ondes acoustiques).

4.1.4 Simulations numériques

Dans cette section, nous souhaitons utiliser notre modèle numérique pour modéliser le retournement temporel avec des réarrangements du réseau des contacts. Dans les simulations qui suivent, la dissipation β est fixée à zéro.

Modélisation des réarrangements

La première étape consiste à modéliser les réarrangements dans notre modèle. Physiquement, nous avons expliqué qu'étant donnée la forte contrainte sur le milieu, les réarrangements – engendrés par les fortes amplitudes acoustiques – ont lieu au niveau des *contacts* entre les grains *via* glissement, mais que les centres de masses des grains ne se déplacent pas. Or, notre simulation modélise les contacts entre les grains par des ressorts. Nous décidons donc de modéliser le réarrangement d'un contact comme la modification de la raideur du ressort qui lui est associé. Cependant, le processus physique réel d'attribution de la nouvelle valeur de constante de raideur n'est pas connu. En effet, on pourrait imaginer différents processus : par exemple l'attribution d'une constante de raideur totalement indépendante de la précédente ou bien l'attribution d'une valeur nouvelle du type $k' = k + \Delta k$ où k est la constante de raideur avant réarrangement et Δk est proportionnel à l'amplitude maximale de l'onde au contact, etc. Par simplicité, nous décidons que la nouvelle raideur k' attribuée à un contact modifié est prise de façon aléatoire et indépendante de la précédente valeur k dans la distribution des raideurs initiales (qui, pour rappel, est uniforme entre 0.5 et 1.5).

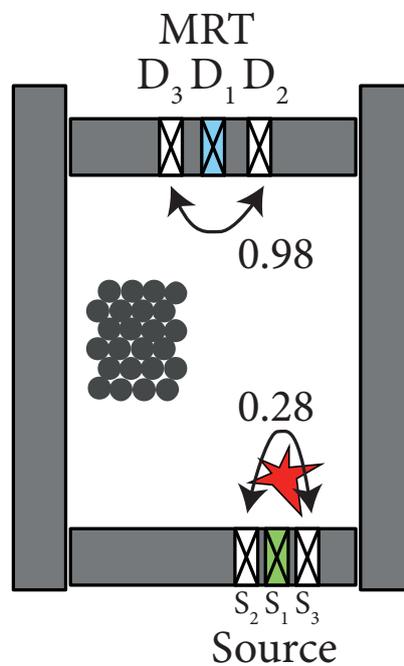
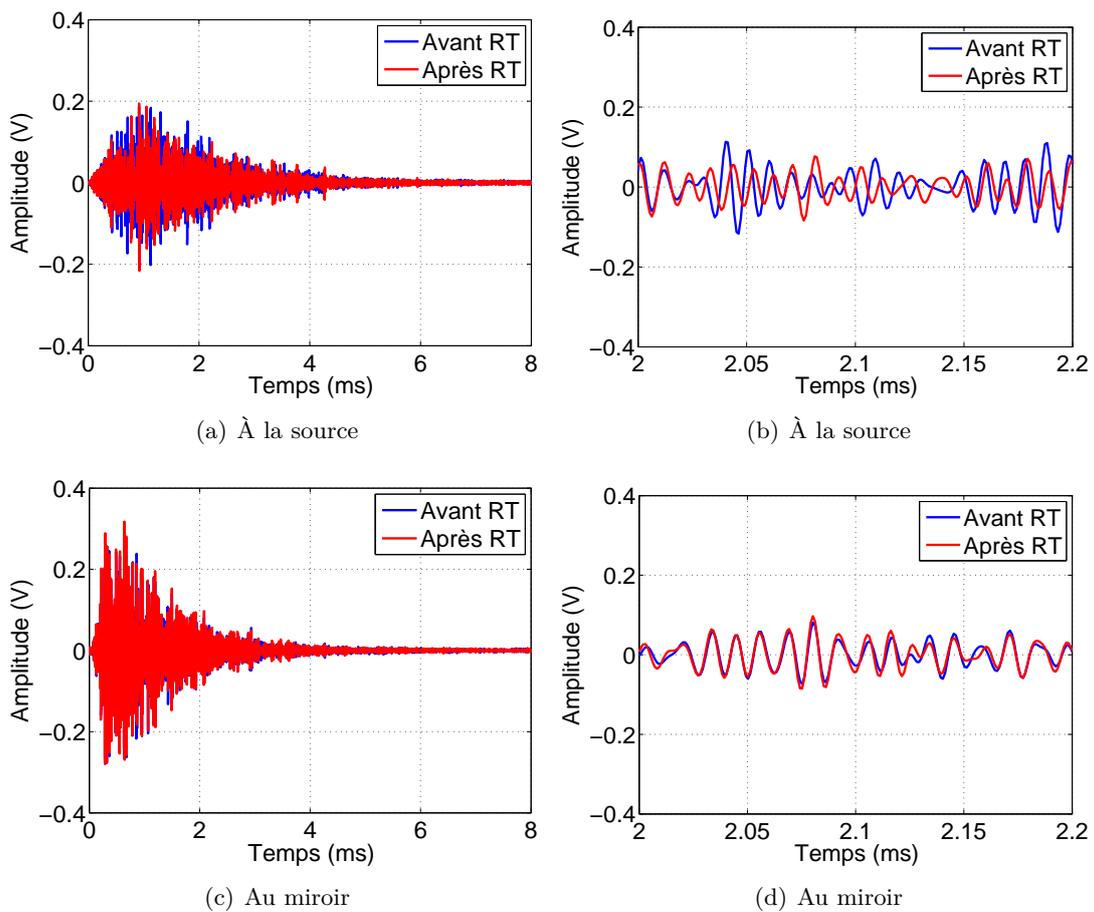

 (e) $A_1 = 500 \text{ mV}$

FIGURE 4.7 – Localisation des réarrangements dans le cas du retournement temporel non-linéaire en phase aller. Ici l'amplitude de la source est de 500 mV à la source S_1 . Une décorrélacion de la signature acoustique au voisinage de la source S_1 est observée (coefficient de corrélation de $C_{ij} = 0.28$), indiquant des réarrangements du réseau des contacts entre les grains au voisinage de cette dernière.

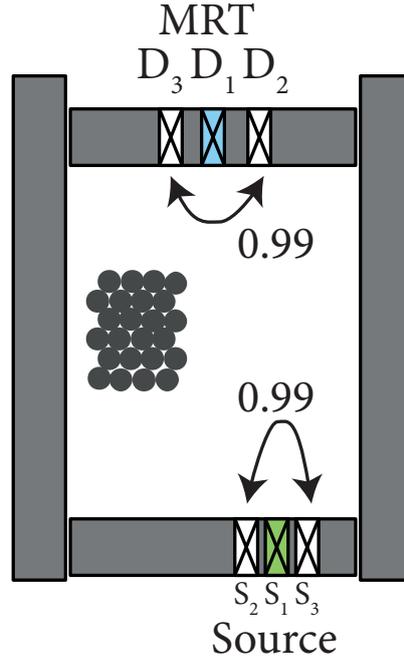


FIGURE 4.8 – Retournement temporel avec une grande amplitude à la source (500 mV) dans le cas d’un échantillon vieilli 12 h. Contrairement à la figure précédente, aucune décorrélation n’est observée au voisinage de la source.

Nous devons maintenant définir la localisation de ces réarrangements dans notre modèle. Là encore, l’expérience nous guide : nous comprenons grâce aux signatures acoustiques que les réarrangements ont lieu là où les ondes ont une amplitude importante. Nous décidons donc de fixer un seuil de déplacement maximal permis avant qu’un réarrangement ait lieu. Ce seuil est fixé de façon arbitraire à 2% de la contrainte statique, mais sa valeur exacte n’a en fait aucune incidence sur les résultats présentés dans la suite, si ce n’est un décalage de l’axe de l’amplitude source. Ainsi, lorsque le déplacement maximal d’une masse sera supérieur à ce seuil de déplacement, nous déclencherons (de façon forcée) un réarrangement pour l’ensemble des ressorts entourant la masse en question. Nous parlerons dans la suite par abus de *masse* réarrangée, signifiant en fait que l’ensemble des ressorts (huit ressorts si tous les voisins de cette masse sont présents dans le réseau) reliés à cette masse ont pris une nouvelle valeur de raideur.

Retournement temporel non-linéaire

Phase aller Dans un premier temps, nous imposons un déplacement composé d’une période d’oscillation selon l’axe x , d’amplitude A_1 et de fréquence centrale $0.2f_0$, aux trois masses situées en $(x = 4, y = 34)$, $(x = 4, y = 35)$ et $(x = 4, y = 36)$. Nous enregistrons alors les champs de déplacement u^x et u^y à chaque instant pendant une durée fixée à $1000T_0$.

Pour chaque masse i du réseau, nous calculons alors son déplacement maximal u_i^{\max} lors de la propagation :

$$u_i^{\max} = \max_{t \in [0, 1000T_0]} \|\mathbf{u}_i(t)\| = \max_{t \in [0, 1000T_0]} \sqrt{(u_i^x)^2 + (u_i^y)^2}. \quad (4.2)$$

On détermine ensuite toutes les masses i telles que

$$u_i^{\max} > 0.02a_0(1 + \varepsilon) \quad (4.3)$$

où a_0 est la longueur à vide des ressorts (identique pour tous les ressorts), et ε est le déformation statique imposée au réseau avant la propagation des ondes (voir section 2.2.2).

La colonne de gauche de la figure 4.9 montre les masses réarrangées pour des amplitudes de source A_1 variant entre $A_1 = 0.005a_0$ et $A_1 = 0.03a_0$. Très logiquement, nous observons que plus l’amplitude

de la source est importante, et plus la zone réarrangée est grande.

Ces réarrangements définissent alors un réseau « réarrangé », qui nous faut tendre à nouveau et relaxer (voir section 2.2.2).

Phase retour Dans un second temps, nous imposons à toutes les masses situées en $x = 66$ le retourné temporel du déplacement qu'elles ont subi en phase aller, et ce dans le réseau non-réarrangé (propagation dite linéaire), puis dans le réseau réarrangé (propagation dite non-linéaire). Cela mène alors à deux pics de recompression différents.

La figure 4.9 montre alors les champs de déplacement u^x obtenus au temps focal (deuxième colonne) ainsi que les signaux u^x recompressés sur une des masses composant la source, située en $(x = 4, y = 35)$ (troisième colonne) dans les cas non réarrangé (en bleu) et réarrangé (en rouge). En effet, un luxe de la simulation numérique est de pouvoir comparer la propagation dans les deux cas, ce qui nous permettra de quantifier les effets non-linéaires.

Comme nous pouvons le constater, la qualité de la focalisation spatiale diminue lorsque l'amplitude source A_1 augmente (figure 4.9(b) à comparer à la figure 4.9(k), par exemple). De même pour la qualité de la recompression temporelle (figures 4.9(c) et 4.9(l)).

Nous pouvons être plus quantitatif et tracer, comme nous l'avons fait dans nos expériences, l'évolution du rapport de l'amplitude du pic de recompression dans le cas linéaire et de l'amplitude du pic dans le cas non-linéaire (figure 4.10(a)) et du rapport entre l'amplitude du pic par l'écart-type des lobes en dehors du temps focal (figure 4.10(b)). Nous constatons effectivement que ces deux rapports diminuent lorsque l'amplitude source A_1 augmente, ce qui est en accord avec le fait que la qualité du retournement temporel décroît à mesure qu'il y a de plus en plus de réarrangements.

Ces résultats numériques sont en très bon accord qualitatif avec les résultats expérimentaux, et reflètent l'idée déjà évoquée que si le milieu a été modifié entre la phase aller et la phase retour, l'onde n'est plus capable de revivre parfaitement sa vie passée, et donc la probabilité de retour à la source est diminuée, ce qui conduit à une diminution de l'amplitude du pic de recompression.

Sensibilité en fonction de la fenêtre retournée

Nous pouvons aussi nous intéresser à la sensibilité du retournement temporel aux réarrangements en fonction de la position temporelle d'un signal fenêtré avant de le renvoyer, à réarrangements fixés. Nous découpons donc les signaux de déplacement u^x et u^y en fenêtres temporelles de durée $50T_0$ (colonne de gauche de la figure 4.11), et renvoyons tour à tour chacune de ces fenêtres.

Comme nous pouvons le constater, plus la fenêtre est tardive, et moins le retournement temporel fonctionne : la focalisation spatiale et la recompression temporelle sont bien visibles pour une fenêtre située au tout début du signal (figures 4.11(b) et 4.11(e)), mais totalement absentes pour une fenêtre plus tardive (figure 4.11(k) et 4.11(l)).

Cela est confirmé par les tracés de l'évolution du rapport entre les pics de recompression avec et sans réarrangements (figure 4.12(a)) ainsi que du rapport de l'amplitude du pic par l'écart-type des lobes en dehors de l'instant focal (figure 4.12(b)).

Cela est compris physiquement et correspond au fait que les fenêtres les plus tardives correspondent à des chemins de propagation plus longs entre la source et le récepteur, qui sont plus sensibles aux réarrangements que les chemins courts (l'effet des réarrangements étant cumulatif lors de la propagation) [Bal96, Sni98, Tou01, Sni07].

Bien sûr, plus l'amplitude source A_1 est importante (et donc plus il y a de réarrangements), et plus l'amplitude du pic de recompression décroît rapidement lorsque la fenêtre renvoyée devient tardive. Nous constatons par exemple sur la figure 4.13 que pour une très faible amplitude source $A_1 = 0.005a_0$ (en bleu), une fenêtre renvoyée située à $900T_0$ entraîne une décroissance du pic de 20% par rapport au cas linéaire, alors que pour une amplitude source $A_1 = 0.03a_0$ (en rouge), la décroissance du pic est d'environ 90%.

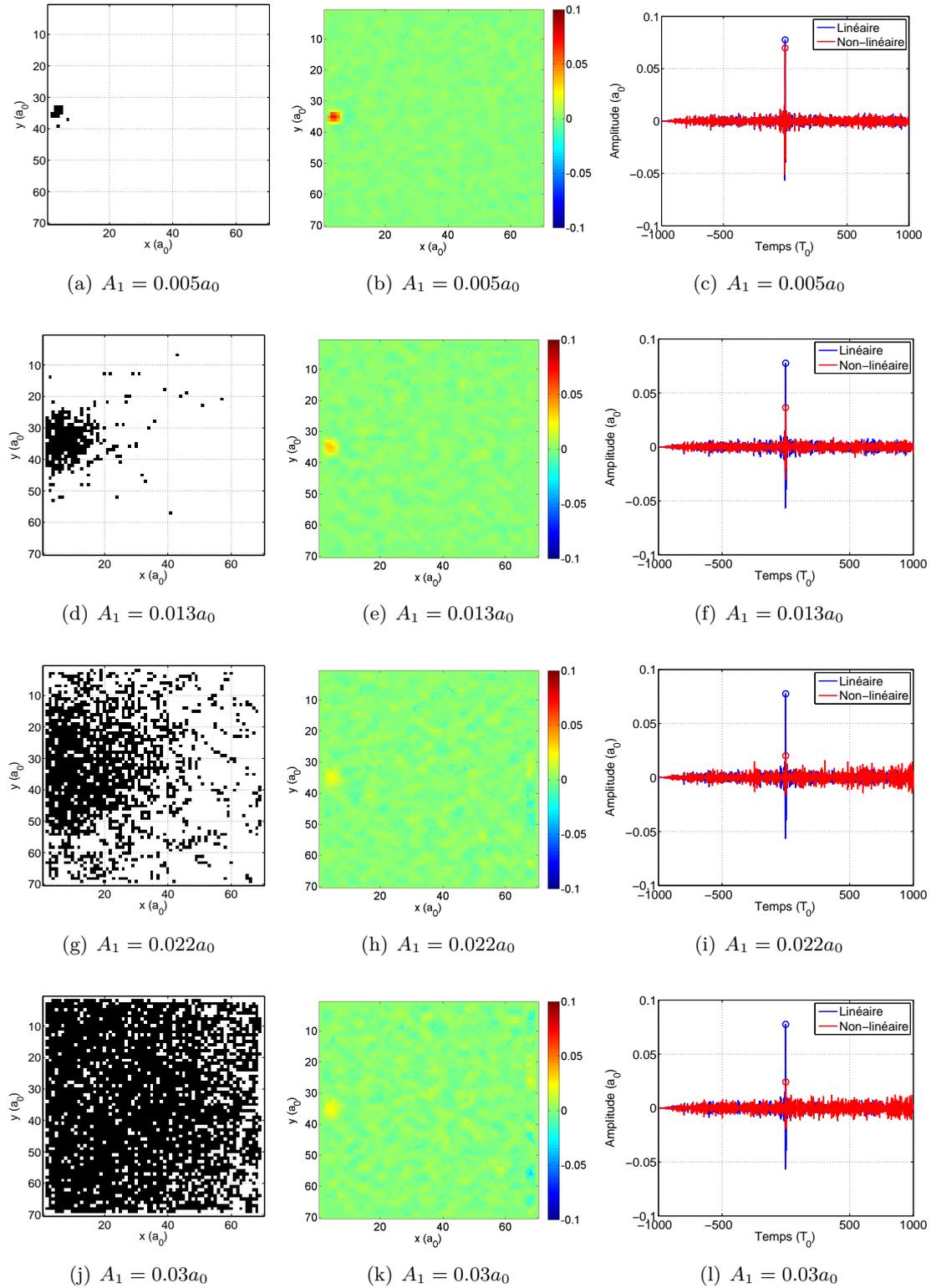


FIGURE 4.9 – Simulation numérique du retournement temporel avec réarrangements, pour différentes amplitudes de réarrangements. La première colonne présente les zones subissant des modifications de raideur. La seconde colonne présente le champ de déplacement u^x à l’instant focal. La troisième colonne montre l’évolution au cours du temps du déplacement u^x d’une masse constituant la source (en $(x = 4, y = 35)$), lors de la phase retour de l’onde, dans le milieu non-réarrangé (en bleu) et dans le milieu réarrangé (en rouge). Plus le nombre de réarrangements est important et moins le retournement temporel fonctionne bien : l’énergie est mal focalisée spatialement et mal recompressée temporellement.

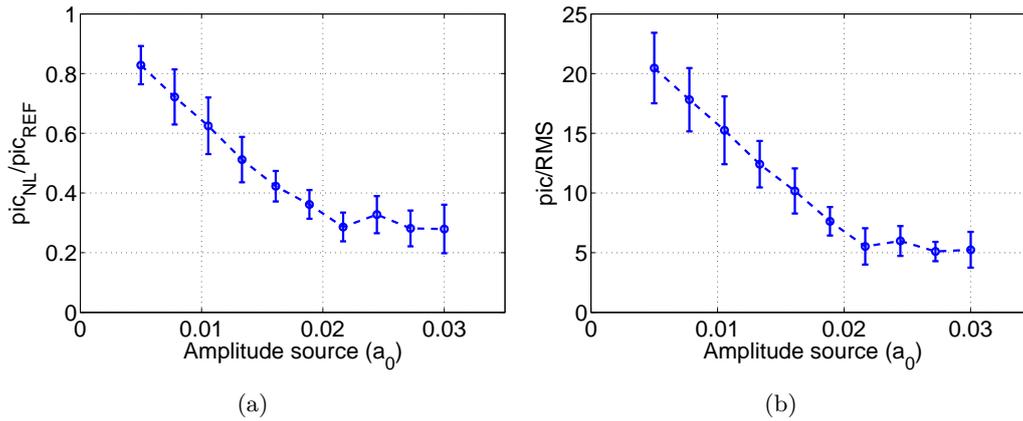


FIGURE 4.10 – Influence de l’amplitude de la source (et donc du nombre de réarrangements) sur le retournement temporel. (a) À amplitude de ré-émission fixée, l’amplitude du pic de recompression diminue, ce qui est bien le signe d’un comportement non-linéaire. (b) De même, l’évolution du rapport entre l’amplitude du pic de recompression et l’écart-type du signal en dehors du pic montre une perte de la qualité de la recompression temporelle. Ces résultats sont en bon accord avec ceux obtenus dans les expériences (figures 4.4 et 4.3). Les barres d’erreur correspondent à une moyenne sur neuf réalisations.

4.2 Non-linéarité dans la phase retour : déclenchement contrôlé des réarrangements sous forte contrainte

Ayant prouvé la possibilité de déclencher des réarrangements du réseau des contacts dans nos empilements granulaires grâce à des ondes acoustiques (section 4.1.1), nous souhaitons maintenant déclencher ces derniers à distance et en un endroit précis, en focalisant de l’énergie acoustique. La technique du retournement temporel est alors parfaitement adaptée pour cet objectif, puisqu’elle permet précisément de concentrer spatialement et temporellement de l’énergie. De plus, son utilisation dans le régime de diffusion multiple permet d’espérer atteindre des amplitudes focalisées importantes par effet de recompression temporelle (voir section 1.2.3), qui faciliteront d’autant plus le déclenchement de réarrangements.

Nous tenons à remercier Yamil Abraham, étudiant à l’Université de la République (Montevideo, Uruguay), pour l’assistance dans la réalisation des expériences.

4.2.1 Influence de l’amplitude au miroir à retournement temporel

Description de l’expérience

Nous reprenons alors le dispositif précédemment présenté (section 4.1.1). Dans le but de préciser la position des réarrangements, nous ajoutons cependant deux nouveaux transducteurs, notés S_4 et S_5 (figure 4.14), autour de la source. Ces derniers seront utilisés dans la section suivante pour obtenir une image plus précise de la position des réarrangements.

Puisque nous voulons déclencher des réarrangements en focalisant de l’énergie par retournement temporel, nous nous plaçons de telle façon que la première phase du retournement temporel soit linéaire, contrairement au cas précédemment présenté. Nous envoyons alors dans un premier temps au transducteur source S_1 une impulsion électrique composée de trois périodes de sinuséide de fréquence centrale 100 kHz et d’amplitude 10 mV, amplifié de 50 dB (figure 4.14(a)), et enregistrons le signal reçu par le transducteur D_1 composant le miroir à retournement temporel.

Dans la seconde phase (figure 4.14(b)), nous retournons temporellement le signal reçu, fixons son amplitude pic-pic à une valeur A_2 (colonne de gauche de la figure 4.15) puis l’amplifions avec un gain de 50 dB, avant de l’injecter au transducteur D_1 . Nous enregistrons alors le signal reçu par le transducteur source S_1 (colonne du milieu de la figure 4.15) en l’ayant au préalable amplifié.

Le milieu étant susceptible de subir des réarrangements entre chaque valeur de ré-émission A_2

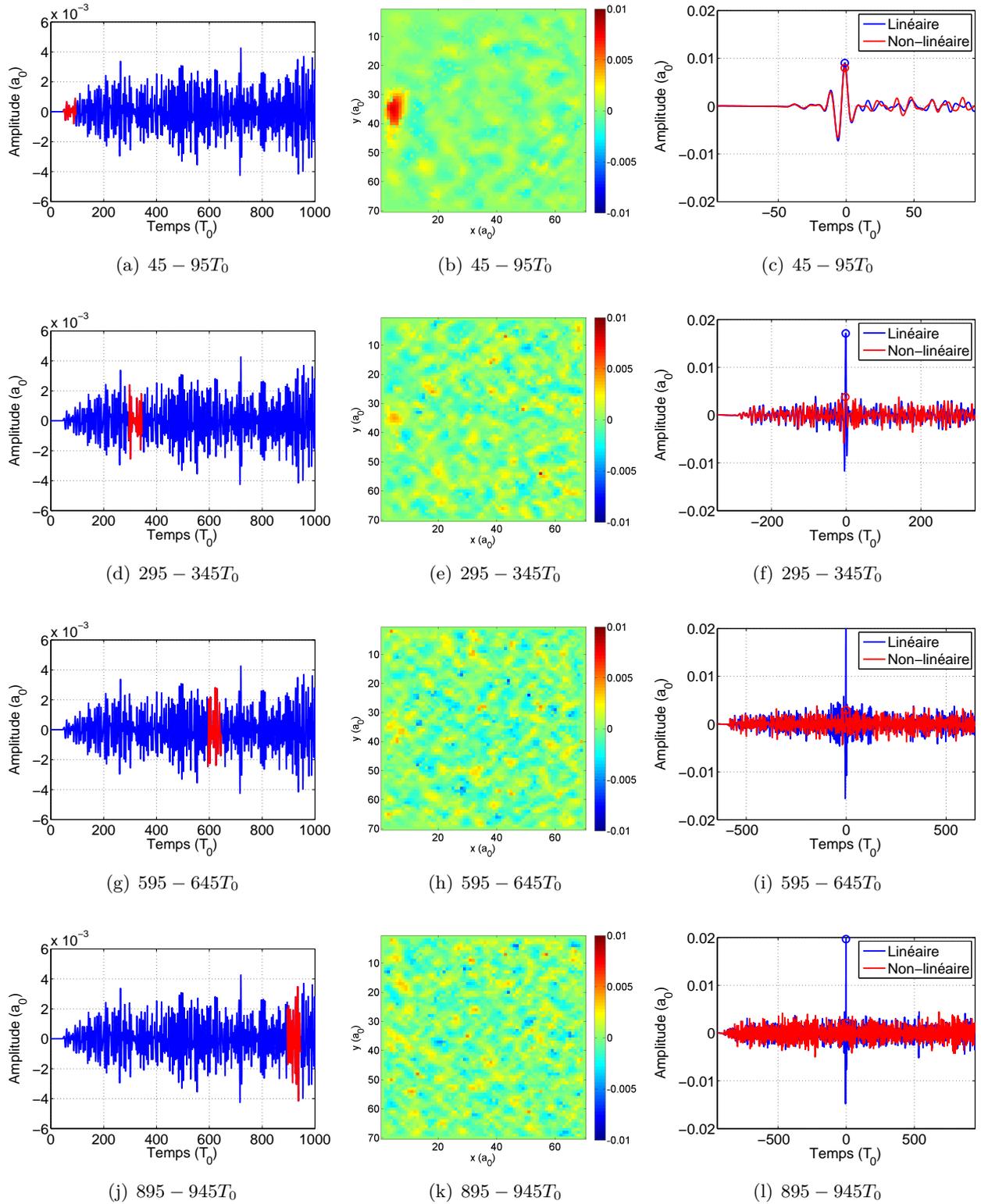


FIGURE 4.11 – Influence de la fenêtre renvoyée sur le retournement temporel en régime non-linéaire (l'amplitude source est ici de $0.03a_0$, les réarrangements sont fixés). La première colonne montre les fenêtres renvoyées (en rouge). La seconde colonne montre le champ de déplacement u^x à l'instant focal (défini par l'instant du maximum du signal recompressé au voisinage de l'instant $t = 0$). La troisième colonne montre l'évolution du champ de déplacement recompressé u^x d'une des masses source située en $(x = 4, y = 35)$, sans (en bleu) et avec (en rouge) réarrangements. On constate que plus la fenêtre est tardive, et plus la qualité de la refocalisation spatiale et de la recompression temporelle se dégrade. Cela est à attribuer au fait que les fenêtres les plus tardives correspondent à des chemins de propagation plus longs, donc plus sensibles aux réarrangements.

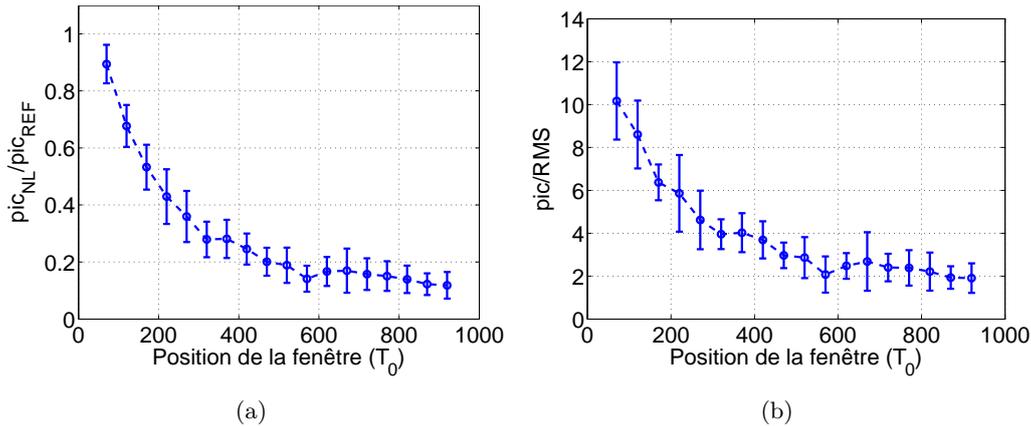


FIGURE 4.12 – Influence de la fenêtre renvoyée sur le retournement temporel en régime non-linéaire (l’amplitude source est ici $0.03a_0$). (a) Évolution du rapport du pic de recompression avec réarrangements et sans réarrangements. On constate que plus la fenêtre est tardive et moins l’amplitude du pic est importante. (b) Évolution de la qualité de la recompression temporelle (rapport entre l’amplitude du pic de recompression et l’écart-type du signal de recompression en dehors de l’instant focal) en fonction de la fenêtre renvoyée. On constate ici aussi qu’à réarrangements fixés, plus la fenêtre est tardive et moins la qualité de la recompression temporelle est bonne. Les barres d’erreur correspondent à une moyenne sur neuf configurations.

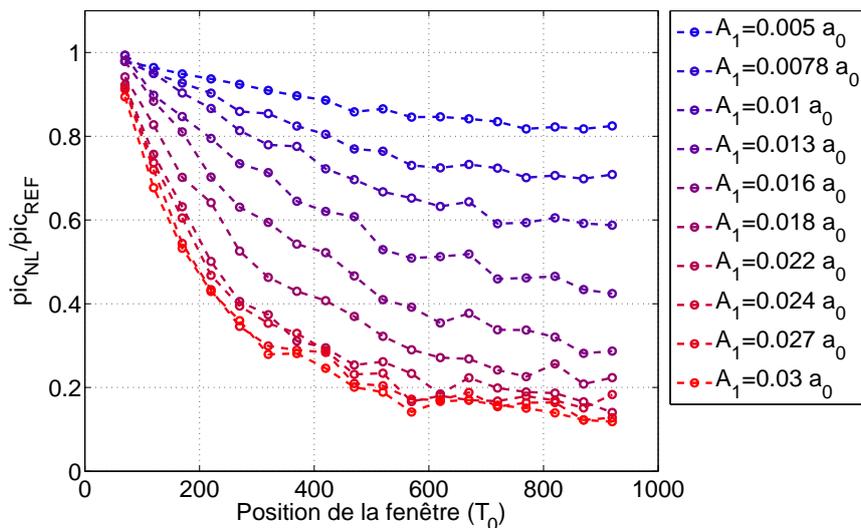


FIGURE 4.13 – Influence de l’amplitude source A_1 sur l’évolution de l’amplitude du pic de recompression en fonction de la position temporelle de la fenêtre renvoyée. Les barres d’erreur ont été cachées par souci de lisibilité, mais les valeurs présentées correspondent à des moyennes sur neuf configurations.

sonnée, nous effectuons ces *deux* étapes pour chaque valeur d’amplitude de ré-émission A_2 que nous souhaitons tester. Cependant, tout comme dans le cas de l’amplification en phase aller (section 4.1.1), pour simplifier la réalisation de l’expérience nous gardons le même échantillon pour les différentes amplitudes A_2 sondées, en ayant en tête que cela implique nécessairement une stabilisation de l’échantillon au cours de l’expérience – que nous supposons néanmoins négligeable devant la stabilité initiale (l’échantillon étant vieilli 2 min sous contrainte au début de l’expérience).

Enfin, avant chaque ré-émission avec amplification, nous renvoyons la coda retournée avec une faible amplitude de référence, notée $A_0 = 10$ mV, de façon à disposer d’un signal de recompression qui correspond à une expérience que nous supposons parfaitement linéaire. Si la ré-émission à l’amplitude A_2 qui s’en suit juste après est linéaire, le signal de recompression divisé par A_2 doit coïncider avec celui obtenu dans le cas de référence divisé par A_0 .

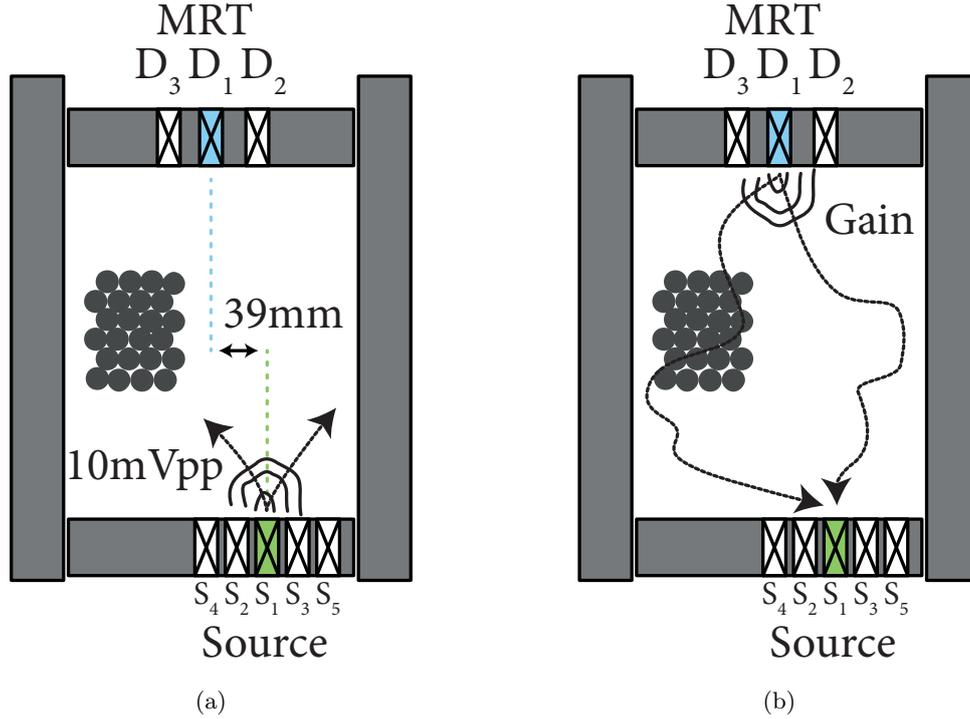


FIGURE 4.14 – Schéma de l’expérience de retournement temporel avec amplification dans la phase retour. (a) Phase aller : une impulsion composée de trois périodes de sinusöide de fréquence centrale 100 kHz et d’amplitude 10 mV (de façon à être en régime linéaire dans cette phase), amplifiée de 50 dB, est émise par la source S_1 . Le signal reçu par le transducteur D_1 est alors enregistré. (b) Phase retour : la signal reçu par D_1 est normalisé, retourné temporellement, puis multiplié par une amplitude A_2 , amplifié de 50 dB et enfin ré-émis par D_1 . On peut alors suivre l’évolution des signatures acoustiques avant et après l’expérience au voisinage de la source S_1 et du miroir à retournement temporel (à un seul élément) D_1 .

Résultats

Comme nous pouvons le constater, pour une petite amplitude de ré-émission (figure 4.15(b)), nous observons un pic de recompression sur la source S_1 . De plus, la superposition du signal recompressé de référence normalisé par l’amplitude de référence A_0 renvoyée et du pic enregistré avec l’émission de l’amplitude A_2 normalisé par A_2 , respectivement en bleu et rouge sur la figure 4.15(c), montre que les deux signaux recompressés coïncident. Cela prouve que pour la valeur de ré-émission $A_2 = 35$ mV la propagation est bien linéaire.

Cependant, nous constatons qu’à mesure que nous augmentons l’amplitude de ré-émission A_2 , malgré le fait que le pic de recompression semble augmenter en amplitude (deuxième colonne), un écart de plus en plus grand apparaît entre le pic recompressé de référence normalisé et le pic recompressé normalisé (par exemple figure 4.15(1)). Cela indique donc l’apparition d’un régime non-linéaire.

Pour être plus quantitatif, nous représentons pour chaque valeur A_2 d’amplitude renvoyée l’évolution du rapport entre le pic de recompression de référence normalisé par A_0 et du pic recompressé normalisé par A_2 (figure 4.16). Encore une fois, dans le cas linéaire, ce rapport devrait valoir l’unité. Pour des valeurs A_2 d’amplitudes de ré-émission inférieures à 60 mV, nous constatons effectivement que le rapport est très proche de 1, indiquant donc un régime linéaire. Nous constatons cependant qu’à partir de $A_2 = 60$ mV, le rapport diminue lorsque l’amplitude source A_2 augmente, jusqu’à atteindre une valeur de 0.2 pour une valeur de $A_2 = 485$ mV, indiquant un régime non-linéaire.

Nous pouvons de plus nous intéresser à l’évolution de l’amplitude du pic de recompression en fonction de l’amplitude de ré-émission (figure 4.17(a)), en fixant à 1 la valeur du pic pour la plus petite valeur de A_2 sondée. Nous constatons effectivement que l’amplitude du pic augmente linéairement jusqu’à $A_2 = 60$ mV, puis croît plus lentement ensuite. Aux grandes amplitudes, nous observons

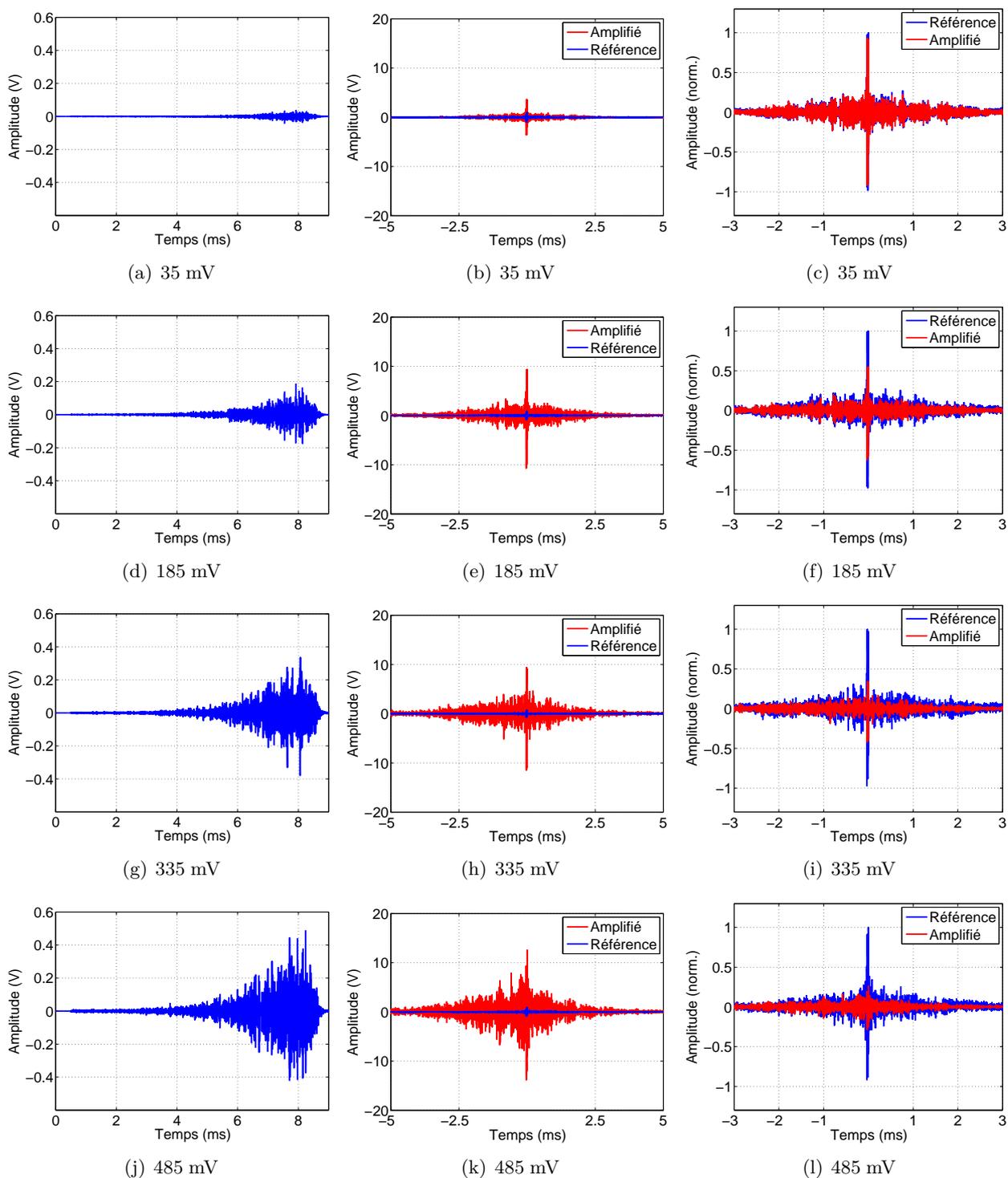


FIGURE 4.15 – Signaux recompressés en fonction de l’amplitude au miroir à retournement temporel. La première colonne présente les signaux amplifiés renvoyés. La seconde colonne présente les signaux recompressés avec – pour référence – une amplitude maximale renvoyée de 10 mV (en bleu) et avec une amplitude maximale renvoyée amplifiée (en rouge). La troisième colonne présente les pics recompressés dans le cas de référence (en bleu) et dans le cas amplifié (en rouge), normalisés par les amplitudes renvoyées et l’amplitude du pic dans le cas de référence. Si la propagation est linéaire, les pics du cas de référence et du cas amplifié doivent se superposer (figure 4.15(c)).

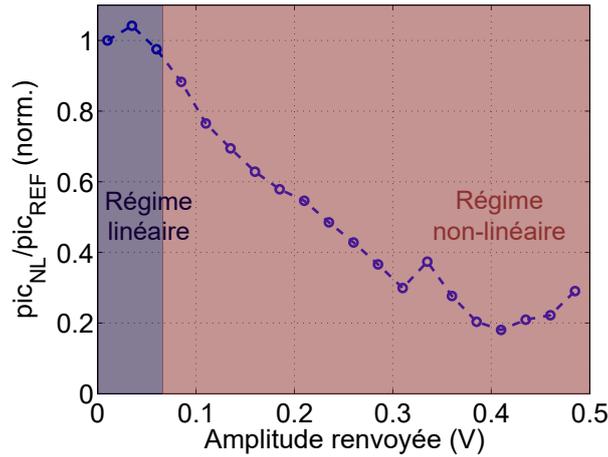


FIGURE 4.16 – Évolution du rapport de l’amplitude du pic normalisé par l’amplitude de ré-émission A_2 et du pic de référence normalisé par $A_0 = 10$ mV. Dans le cas linéaire, le rapport doit être égal à l’unité. Nous constatons alors que c’est le cas jusqu’à 60 mV environ, mais que le rapport décroît pour des amplitudes de ré-émission plus grandes, signe d’un régime non-linéaire.

d’importantes fluctuations dans l’amplitude du pic recompressé, signe d’un comportement hautement non-linéaire, qui demanderait probablement une moyenne sur plusieurs échantillons pour faire apparaître une tendance plus générale, et peut-être une saturation.

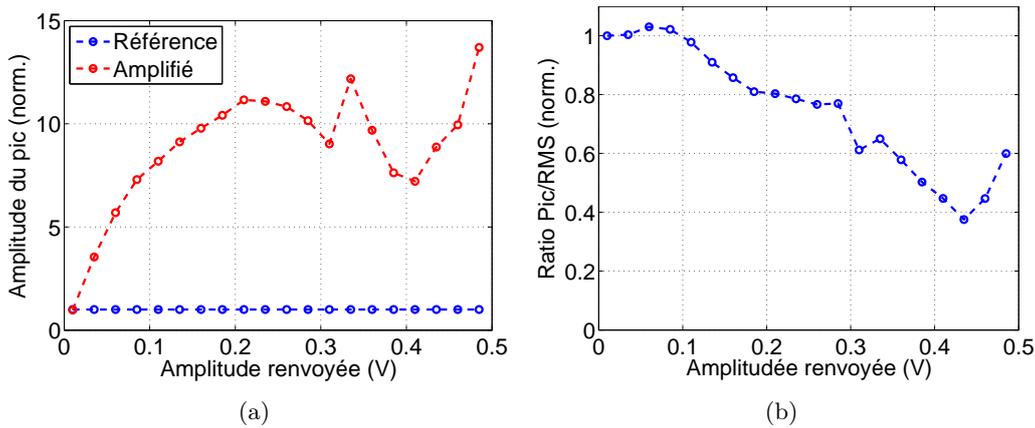


FIGURE 4.17 – Influence de l’amplitude A_2 renvoyée sur le retournement temporel. (a) L’amplitude du pic de recompression augmente linéairement lorsque $A_2 < 60$ mV puis augmente plus lentement pour des amplitudes de ré-émission plus grandes, signe d’un comportement non-linéaire. (b) De même, l’évolution du rapport entre l’amplitude du pic de recompression et l’écart-type du signal en dehors du pic montre une perte de la qualité de la recompression temporelle pour des valeurs de ré-émission $A_2 > 60$ mV.

Enfin, nous pouvons comme précédemment tracer l’évolution du rapport entre l’amplitude du pic et l’écart-type du signal recompressé en dehors du temps focal (figure 4.17(b)), ce qui fournit un indicateur de la qualité de la recompression temporelle. Tout comme dans le cas de l’amplification en phase aller, nous observons une décroissance du rapport à mesure que l’amplitude de ré-émission A_2 augmente. Cela rejoint le fait que des réarrangements ont lieu dans le milieu, empêchant une partie de l’onde de retourner en phase à la source au temps focal.

4.2.2 Localisation des réarrangements

Nous appliquons alors la méthode de corrélation des signatures acoustiques avant et après l’expérience dans le but de localiser les réarrangements du réseau des contacts qui ont eu lieu durant la phase retour.

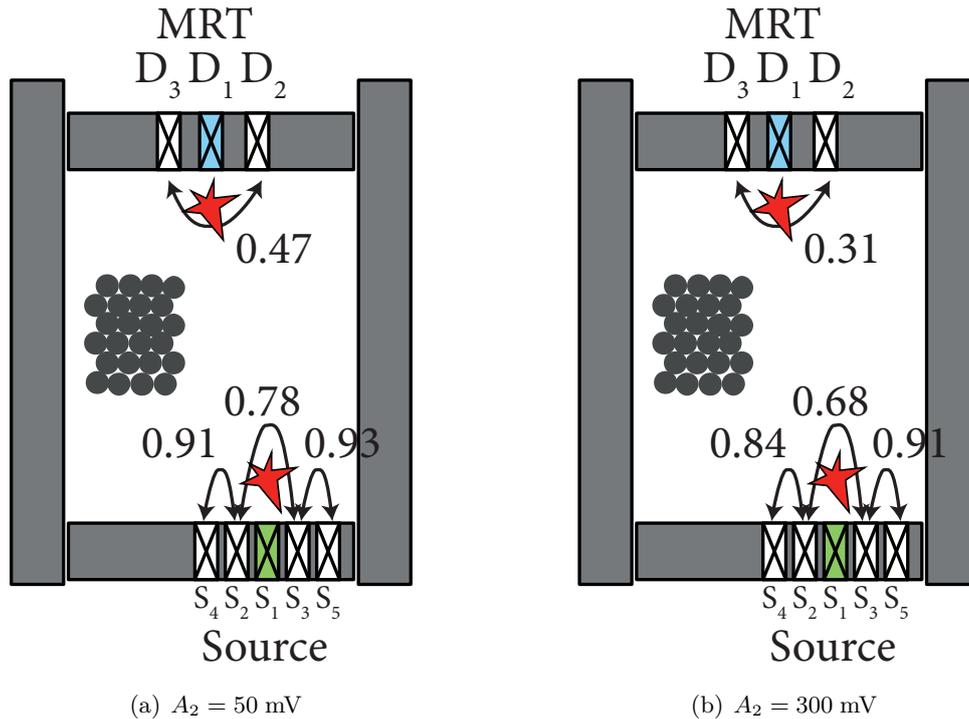


FIGURE 4.18 – Localisation des réarrangements dans le cas du retournement temporel non-linéaire en phase retour, sous forte contrainte, avec des billes de 3 mm. (a) Amplitude renvoyée $A_2 = 50$ mV : les réarrangements sont localisés au voisinage de la source S_1 et du miroir à retournement temporel D_1 . (b) Amplitude renvoyée $A_2 = 300$ mV : les réarrangements ont lieu aux mêmes endroits, mais sont d'amplitude plus importante.

La figure 4.18 présente les corrélations obtenues dans le cas d'une ré-émission à $A_2 = 50$ mV (figure 4.18(a)) et $A_2 = 300$ mV (figure 4.18(b)). Nous constatons que dans les deux cas la décorrélation est localisée au voisinage du miroir à retournement temporel D_1 et de la source S_1 . De plus, nous constatons que la décorrélation à la source est plus importante dans le cas $A_2 = 500$ mV. Par ailleurs, en effectuant la corrélation des signatures sur des transducteurs voisins de la source S_1 (paire S_2 - S_4 d'une part et paire S_3 - S_5 d'autre part), nous observons que la décorrélation est très localisée : pour $A_2 = 300$ mV, nous avons par exemple une corrélation des signatures de 0.68 en S_1 , contre respectivement de 0.84 et 0.91 à gauche et à droite de S_1 . Cela prouve bien que les réarrangements ont eu lieu par focalisation de l'onde multiples fois diffusée.

Nous venons donc de déclencher des réarrangements à distance (à la source S en renvoyant un signal amplifié, ce qui constituait l'objectif principal). Nous constatons cependant que nous avons aussi déclenché des réarrangements au voisinage du miroir à retournement temporel. Ces réarrangements au voisinage du miroir pourraient très certainement être diminués en utilisant plus d'éléments dans ce dernier, de façon à pouvoir diminuer l'amplitude ré-émise par chaque transducteur tout en conservant une amplitude recompressée importante.

4.2.3 Influence de la taille des billes

Nous considérons maintenant la même expérience, en changeant uniquement la taille des billes utilisées. Nous considérons alors des billes de diamètre 1.5 mm (au lieu de 3 mm précédemment) et refaisons l'expérience avec respectivement une amplitude de ré-émission $A_2 = 10$ mV et $A_2 = 100$ mV. Bien sûr, le poids relatif de l'onde cohérente est alors considérablement augmenté dans les signaux transmis, mais nous vérifions que notre filtrage (entre 30 kHz et 150 kHz) élimine quasiment la totalité de cette dernière, ce qui nous assure que nous ne renvoyons quasiment que l'onde multiples fois diffusée.

Nous constatons alors (figure 4.19) que bien que les amplitudes ré-émises soient plus faibles que dans le cas précédent (respectivement d'un facteur 5 et 3), les décorrélations observées en S_1 sont

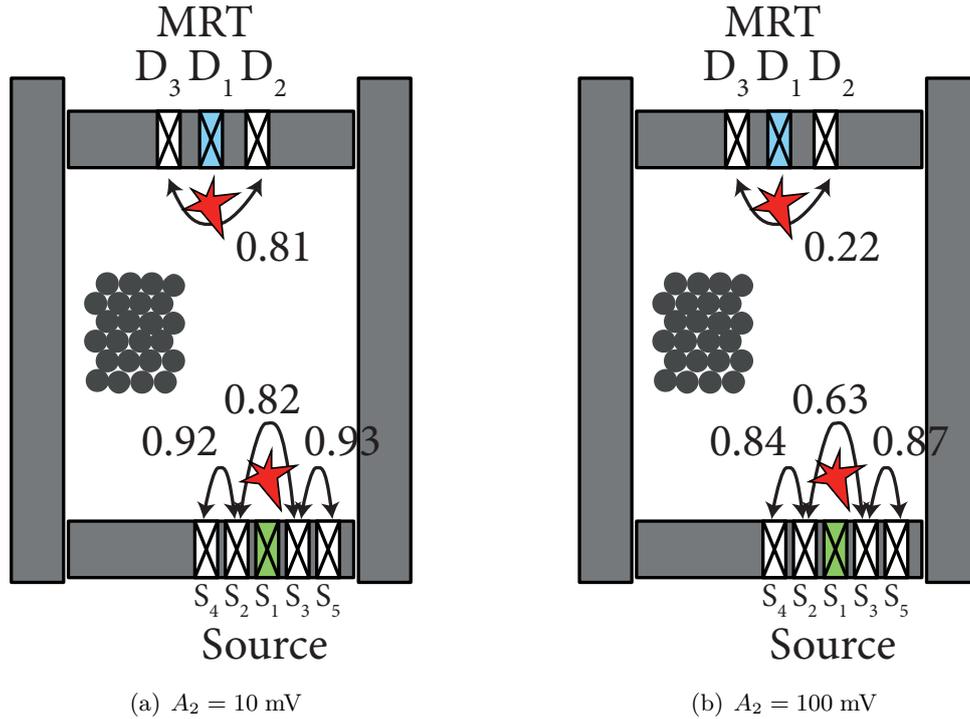


FIGURE 4.19 – Localisation des réarrangements dans le cas du retournement temporel non-linéaire en phase retour, sous forte contrainte, avec des billes de 1.5 mm. Les décorrélatons sont du même ordre que dans le cas précédent (billes de 3 mm) bien que les amplitudes renvoyées soient respectivement 5 et 3 fois plus petites. Il semble donc plus facile de déclencher des réarrangements avec des billes plus petites.

du même ordre (5% d'écart environ). Cela est d'autant plus remarquable que l'atténuation des ondes augmente lorsque la taille des billes diminue (puisqu'il y a plus de contacts entre les billes). On peut donc imaginer qu'à amplitude de ré-émission A_2 fixée, le pic de recompression créé en S_1 soit plus petit dans le cas des petites billes que dans le cas des grandes billes, alors même que les réarrangements observés sont du même ordre.

Cela nous conduit alors à penser qu'il est d'autant plus facile de déclencher des réarrangements que la taille des billes est petite (les autres conditions étant fixées). Cependant, il faut bien avoir en tête que d'un autre côté, plus la taille des billes est petite, et plus il est difficile d'enregistrer l'onde multiplement diffusée (à cause de la moyenne spatiale à la surface du capteur).

4.2.4 Cas d'un échantillon vieilli

Nous voulons maintenant reprendre le cas d'un échantillon vieilli, puisque nous avons vu dans la première partie que l'âge de l'échantillon était important pour la facilité de déclenchement des réarrangements.

Nous revenons alors aux billes de diamètre 3 mm et considérons donc un échantillon vieilli pendant 12 h sous une contrainte de 113 kPa. Nous faisons alors expérience avec une amplitude de ré-émission $A_2 = 300$ mV et calculons les corrélations entre les signatures acoustiques avant et après l'expérience (figure 4.20).

Nous constatons alors que contrairement au cas précédent (échantillon frais, i.e. vieilli 2 min), nous n'observons une décorrélation qu'au voisinage du miroir D_1 , d'une valeur de 0.28, soit du même ordre que celle observée dans le cas frais (figure 4.18(b)). Au voisinage de la source S_1 , nous n'avons plus aucun réarrangement alors que pour le même amplitude nous avons une décorrélation de 0.68 dans le cas frais.

Ces résultats rejoignent ceux trouvés dans l'expérience du retournement temporel avec amplification en phase aller (section 4.1.3) : il est plus difficile de déclencher des réarrangements dans un

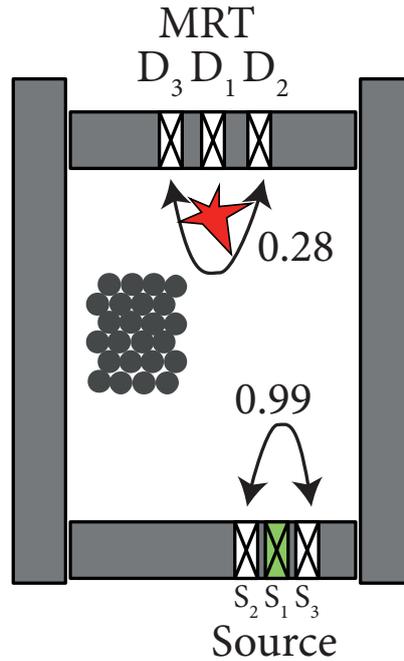


FIGURE 4.20 – Tentative de déclenchement en phase retour ($A_2 = 300$ mV) avec un échantillon vieilli (billes de diamètre 3 mm). Contrairement au cas d'un échantillon frais (figure 4.18(b)), aucune décorrélation à la source n'est observée. Cela est probablement à attribuer au fait qu'au fil du temps les contacts entre les grains se stabilisent et se bloquent, rendant difficile leurs réarrangements.

échantillon vieilli. Cela est probablement lié au fait que dans ce cas, les contacts entre les grains sont alors renforcés.

4.3 Déclenchement sous faible contrainte

Dans la section précédente, nous avons apporté la preuve de la possibilité de déclencher des réarrangements du réseau des contacts dans un empilement granulaire sec sous contrainte, en utilisant la technique du retournement temporel pour focaliser en espace et en temps de l'énergie acoustique.

Dans cette section, nous souhaitons étudier la possibilité de déclencher des réarrangements à la surface libre d'un milieu granulaire sous gravité (faible contrainte). Cela représente en effet un enjeu intéressant, puisqu'on peut s'attendre à ce que les réarrangements soient plus faciles à déclencher, la contrainte sur le milieu étant plus faible. D'un autre côté, une contrainte plus faible implique aussi une transmission de l'onde de grain à grain plus difficile, et donc des signaux transmis plus faibles, à amplitude de la source fixée.

Nous tenons à remercier Tanguy de Lavigerie, étudiant à l'ESPCI Paris, pour l'assistance dans la réalisation des expériences.

4.3.1 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental est composé de la même cellule que précédemment (figures 4.21 et 4.22), mais nous enlevons cette fois-ci le piston supérieur (figure 4.21(a)). La cellule est alors remplie de billes de diamètre 5 mm (figure 4.21(c)), et un transducteur sphérique de diamètre 8 mm et de fréquence de résonance d'environ 235 kHz (figure 4.21(d)) est positionné au voisinage de la surface libre grâce à une tige verticale elle-même fixée à une potence de hauteur réglable *via* une vis micrométrique (figure 4.21(b)). Le transducteur sphérique est situé approximativement en face du transducteur central de la face inférieure, qui servira de miroir à retournement temporel.

Nous avons dans cette expérience utilisé des billes de diamètre 5 mm – contre 3 mm précédemment – de façon à maximiser l'amplitude des signaux transmis (la dissipation diminuant lorsque la taille des billes augmente, grâce à la diminution du nombre de contacts). Bien sûr, un compromis est alors

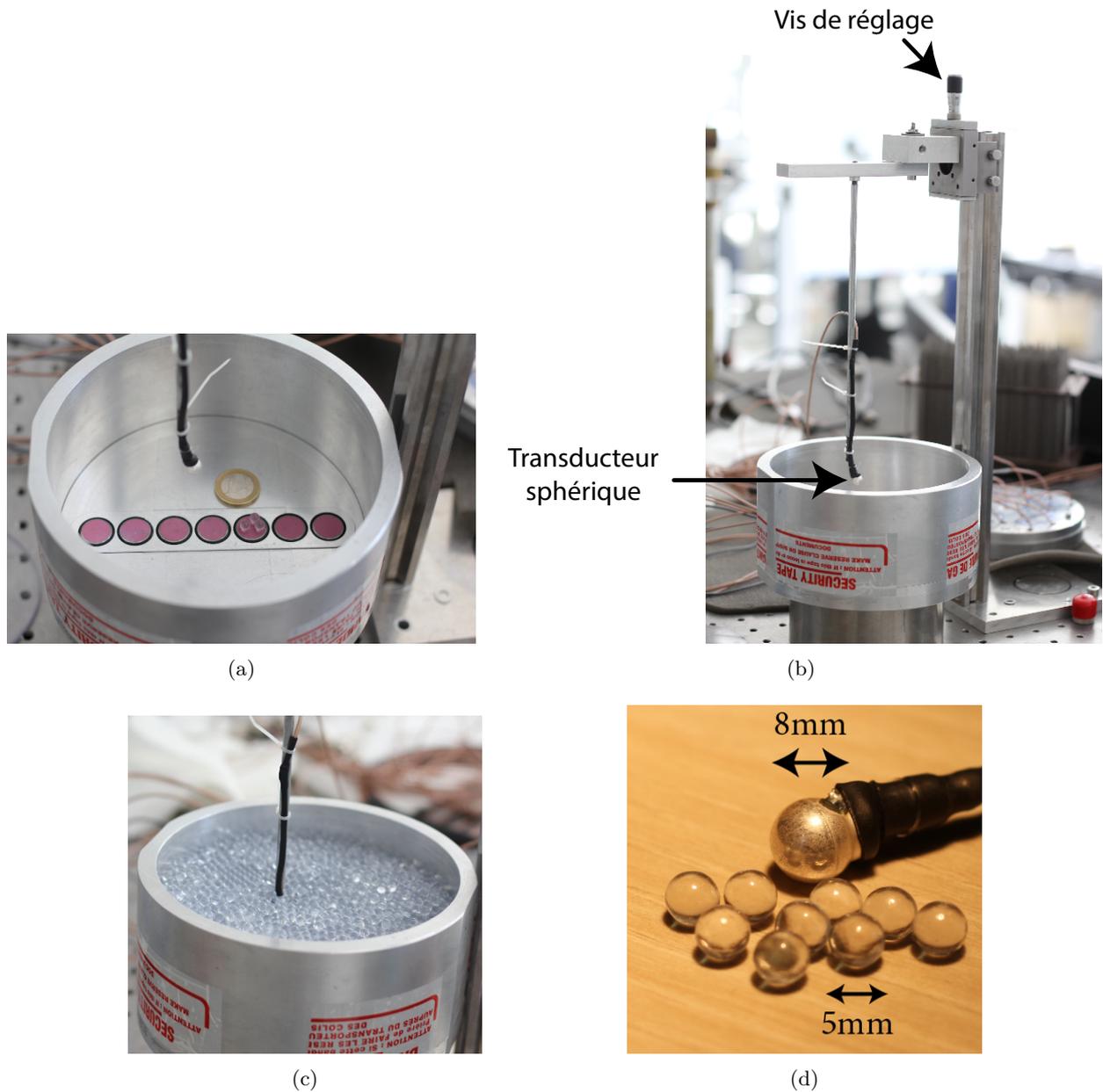


FIGURE 4.21 – Dispositif expérimental utilisé pour le déclenchement des réarrangements dans un empilement granulaire sous faible contrainte. La cellule est remplie de billes de diamètre 5 mm et n'est pas refermée. Un transducteur sphérique de diamètre 8 mm, attaché à une potence, est introduit dans le milieu, au voisinage de la surface libre et une vis de réglage permet de régler sa profondeur.

à trouver car une taille de billes plus grande implique d'une part un nombre réduit de contact aux capteurs, et donc une amplitude reçue plus petite ; et d'autre part, une masse des billes plus importante, réduisant possiblement la possibilité de réarrangement (ce qui reste non prouvé).

4.3.2 Signal transmis

Dans un premier temps, étant donné le caractère nouveau du système, nous nous intéressons au signal transmis. Nous considérons alors une impulsion composée d'une période de sinusoïde de fréquence centrale 10 kHz (durée 0.1 ms) et d'amplitude 50 mV puis amplifiée de 50 dB. Nous injectons ce signal dans le transducteur sphérique, noté S et enregistrons le signal reçu par le transducteur qui lui fait face, sur la face inférieure de la cellule, noté D (figure 4.22).

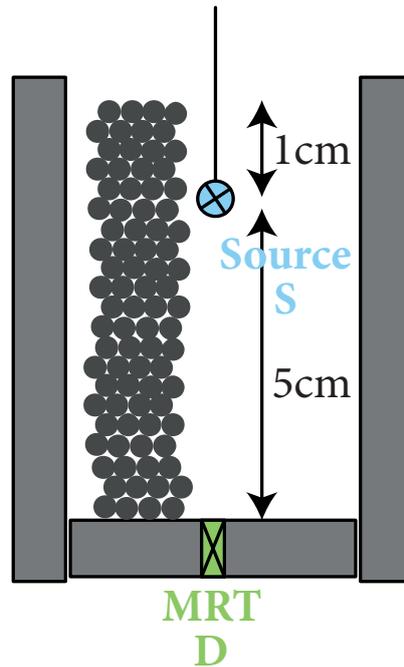


FIGURE 4.22 – Schéma de l'expérience de transmission à la surface libre d'un échantillon faiblement contraint. Le transducteur source S est enfoui sous environ 1 cm de billes. Une distance verticale d'environ 5 cm sépare les deux transducteurs.

Le signal reçu par le transducteur D est donné par la figure 4.23. Nous constatons alors qu'il dure environ 3 ms (figure 4.23(a)), soit trente fois plus longtemps que le signal source, et présente un profil complexe. Une décomposition en ondelette continue (figure 4.23(b), en échelle logarithmique) montre un décalage du spectre vers les hautes fréquences aux temps courts, cependant moins net quand dans les cas précédents.

Sans pouvoir affirmer être dans le régime totalement diffusif, nous pouvons affirmer que la propagation n'est alors pas totalement cohérente (au sens balistique), et pouvons alors espérer être en mesure de refocaliser l'onde à sa source par retournement temporel.

4.3.3 Vieillessement

Puisque nous voulons dans la suite provoquer des réarrangements dans le réseau des contacts, nous cherchons dans un premier temps à obtenir un ordre de grandeur des réarrangements induits naturellement par le vieillissement de l'échantillon.

Nous faisons alors émettre à la source S – à intervalle régulier durant une trentaine de minutes – une période de sinusoïde centrée autour de 10 kHz d'amplitude 50 mV, amplifiée de 50 dB, et suivons l'évolution du signal transmis et mesuré sur le miroir à retournement temporel D (figure 4.24, du bleu au rouge, des premiers aux derniers instants).

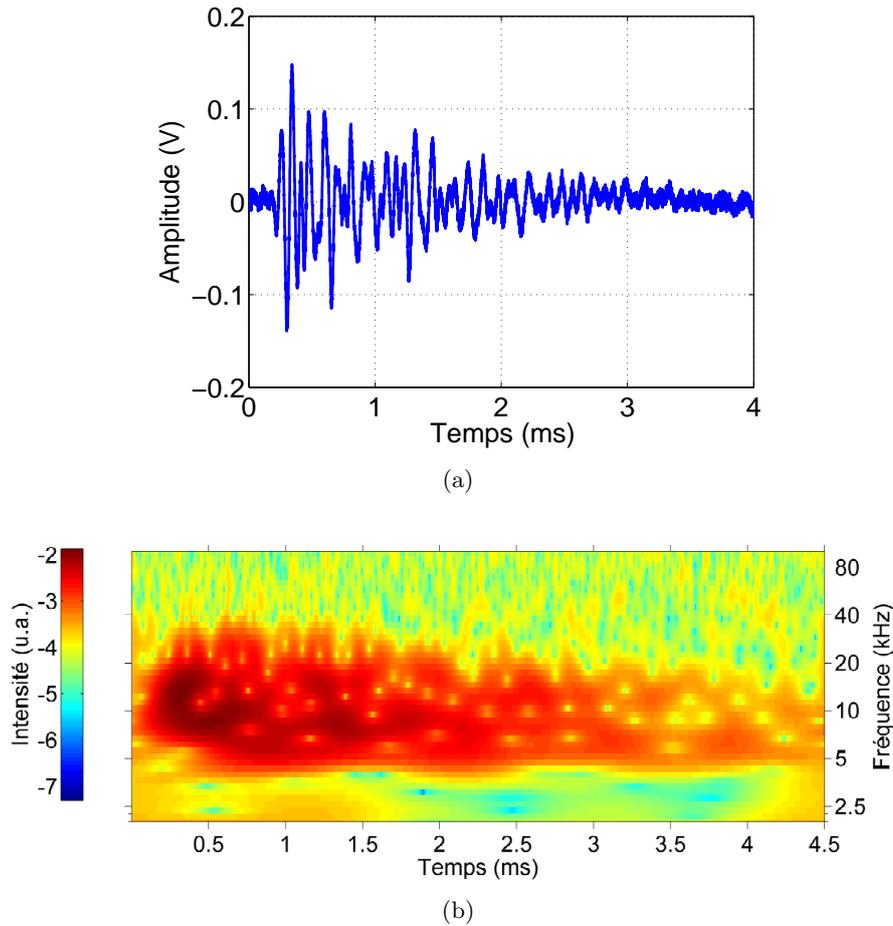


FIGURE 4.23 – Signal typique transmis dans un milieu granulaire faiblement contraint composé de billes de diamètre 5 mm. Le signal source est une période de sinusoïde de fréquence centrale 10 kHz (durée 0.1 ms) et d’amplitude 50 mV puis amplifié de 50 dB. (a) Le signal transmis au travers de l’échantillon dure environ 3 ms, soit 30 fois plus long que le signal source, et présente un profil vraisemblablement dû à la diffusion multiple. (b) La décomposition en ondelettes continue (échelle logarithmique) montre une légère augmentation vers les hautes fréquences au début du signal.

Nous constatons alors effectivement une légère modification du signal transmis au cours du temps, avec une tendance de l’onde à arriver plus tôt (bien visible sur la figure 4.24(c)) à mesure que le temps de l’expérience augmente. Cela est consistant avec l’effet de compaction habituellement observé lors du vieillissement (fluage) [Jia11].

Finalement, nous pouvons quantifier le vieillissement du réseau – à l’échelle des ondes qui nous concernent, en calculant la corrélation entre le premier signal transmis et les signaux transmis à chaque instant (figure 4.24(d)). Nous constatons logiquement que la corrélation diminue, mais cependant très lentement (coefficient de corrélation de 0.8 au bout de 30 min).

4.3.4 Déclenchement des réarrangements

Description de l’expérience

Maintenant que nous avons une idée du vieillissement de notre milieu, au moins à la sensibilité près de nos ondes, nous tentons de déclencher des réarrangements à la surface libre par retournement temporel. Nous reprenons alors le protocole utilisé dans la section 4.2.1, appliqué à notre nouvelle configuration (figure 4.25).

Dans un premier temps (phase aller), nous faisons émettre au transducteur source S une brève impulsion composée d’une période de sinusoïde centrée autour de 10 kHz, et d’amplitude 50 mV, amplifiée de 50 dB. Nous enregistrons alors le signal reçu par le transducteur D, que nous filtrons

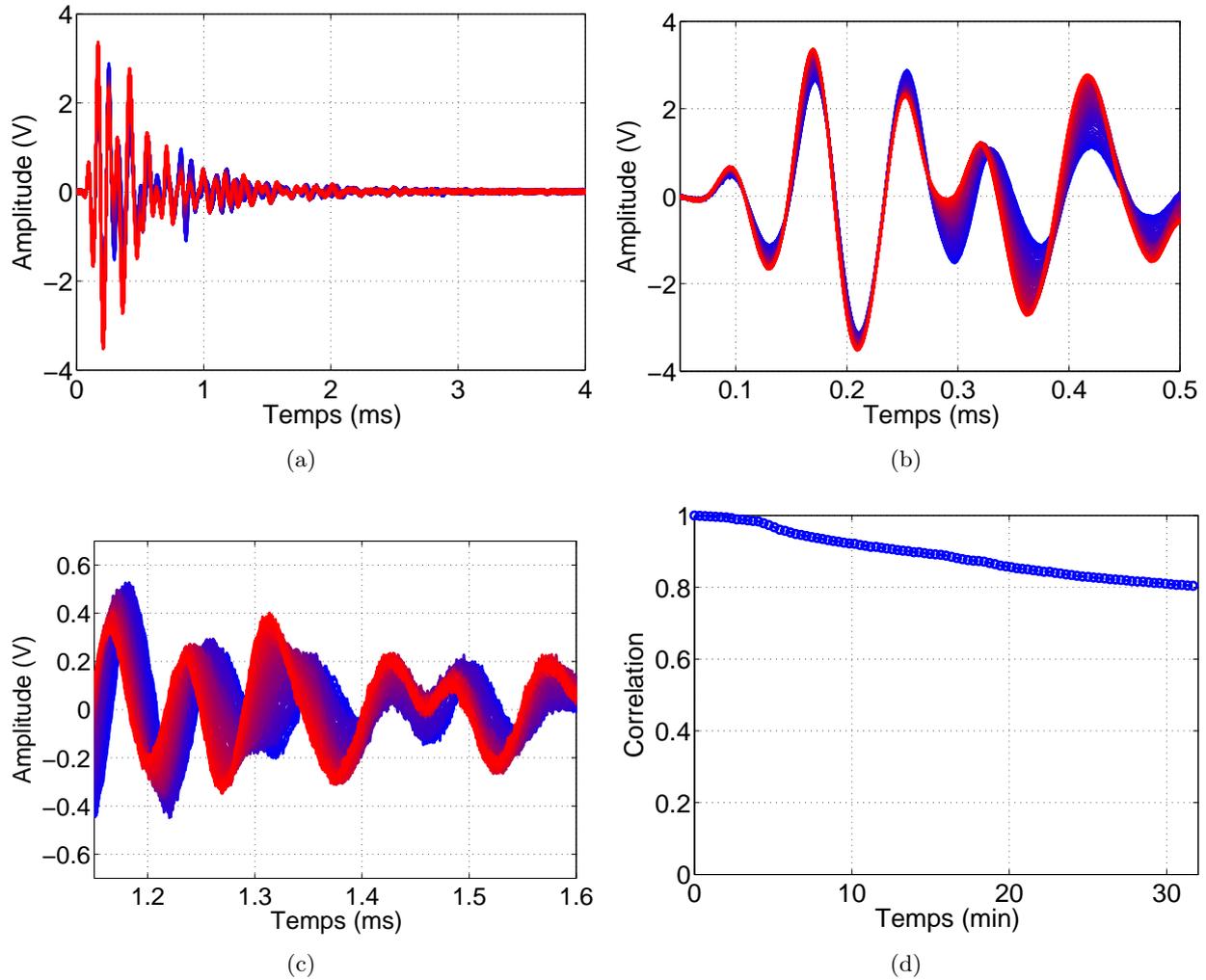


FIGURE 4.24 – Vieillescence d’un échantillon faiblement contraint composé de billes de diamètre 5 mm. (a) On émet à intervalles réguliers, pendant une trentaine de minutes, une brève impulsion depuis le transducteur source S et l’on enregistre le signal reçu par le transducteur D. Les signaux vont du bleu au rouge, des premiers aux derniers instants. (b)-(c) On constate une légère variation du signal transmis au cours du temps, avec une tendance générale de l’onde à arriver plus précocement, ce qui est consistant avec l’image d’une compaction progressive de l’échantillon durant son vieillissement. (d) Le coefficient de corrélation (maximum de la corrélation croisée) entre le premier signal transmis et le signal transmis à un instant donné montre que le temps caractéristique de décorrélation (de l’ordre de l’heure) est beaucoup plus long que la durée de nos expériences (moins de 5 min).

grâce à un filtre passe-bas de fréquence de coupure 50 kHz de façon à diminuer le bruit électronique.

Dans un second temps (phase retour), nous retournons alors le signal temporellement, le divisons par son amplitude maximale et l’injectons dans le transducteur D en l’ayant au préalable multiplié par une amplitude A_2 et amplifié de 50 dB. Nous enregistrons alors le signal reçu par la source S.

Précisons que dans cette expérience aussi, nous n’avons pas rafraîchi l’échantillon entre les envois aux différentes valeurs de ré-émission A_2 . Nous avons en revanche bien sûr effectué la phase aller avant chaque phase retour, de façon à pallier toute éventuelle modification du milieu entre les envois aux différentes valeurs d’amplitude de ré-émission.

Enfin, tout comme dans l’expérience sous forte contrainte, avant chaque ré-émission à l’amplitude A_2 , une ré-émission de « référence » à l’amplitude fixe de 50 mV est effectuée. La comparaison du pic de référence normalisé par 50 mV au pic reçu après émission avec l’amplitude A_2 normalisé par A_2 nous permettra de vérifier si le régime est linéaire ou non, puisque dans le régime linéaire, les deux pics normalisés doivent se superposer.

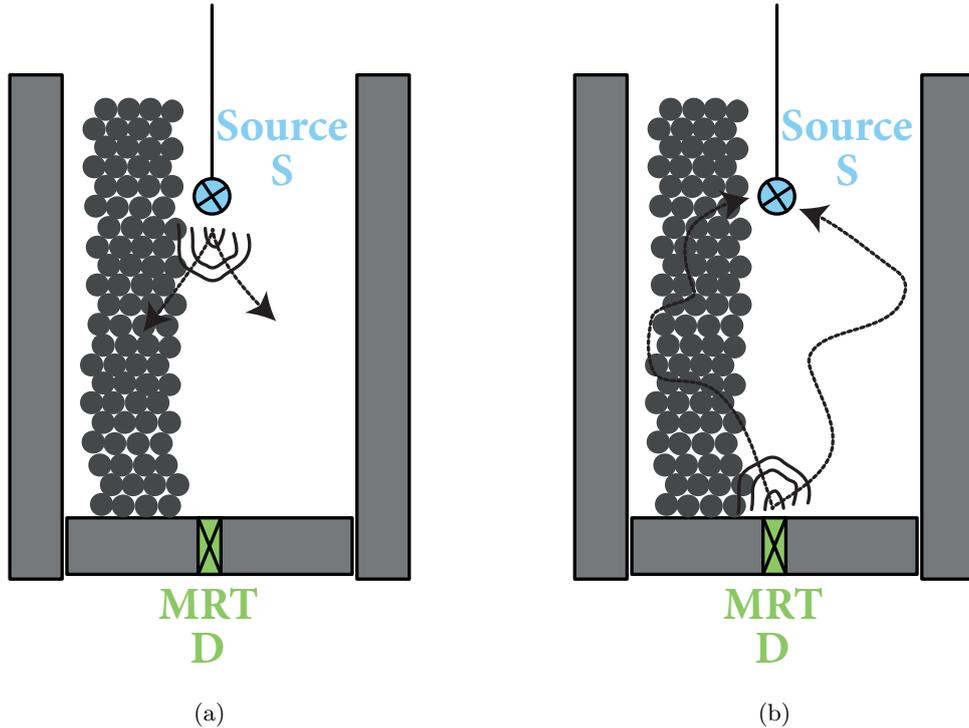


FIGURE 4.25 – Schéma de l’expérience de déclenchement des réarrangements par retournement temporel à la surface libre d’un échantillon faiblement contraint. (a) Phase aller : on envoie une brève impulsion de petite amplitude grâce au transducteur source S. On enregistre alors le signal reçu par le transducteur D. (b) On retourne temporellement le signal, on le normalise et on le multiplie par une amplitude de ré-émission A_2 avant de l’amplifier de 50 dB et de l’injecter dans D. On peut alors enregistrer le signal de recompression reçu par la source S.

Résultats

La figure 4.26 présente les signaux renvoyés et les pics de recompression correspondants, pour différentes amplitudes de ré-émission A_2 comprises entre 50 mV et 500 mV. La présentation est la même que celle de la figure 4.15 : la colonne de gauche montre les signaux renvoyés, la colonne centrale montre les signaux de recompression reçus après re-émission à l’amplitude 50 mV (en bleu) et l’amplitude A_2 (en rouge), et la colonne de droite montre les signaux de recompression divisés respectivement par 50 mV et A_2 .

La première observation est que pour les quatre valeurs de A_2 présentées, nous observons un maximum du signal recompressé au voisinage de l’instant focal $t = 0$ (deuxième colonne). De plus, nous observons logiquement que l’amplitude du pic recompressé augmente à mesure que l’amplitude renvoyée augmente. Nous vérifions aussi que pour l’amplitude de ré-émission $A_2 = 50$ mV, l’opération est bien linéaire : les deux pics normalisés se superposent parfaitement (figure 4.26(c)). En revanche, dès que l’amplitude se fait plus importante, un écart apparaît (figure 4.26(i) par exemple), signe d’une non-linéarité.

Nous pouvons être plus quantitatifs et représenter l’évolution du rapport des deux pics normalisés (figure 4.27(a)). Nous constatons alors effectivement que ce rapport décroît, alors qu’il devrait rester constant égal à l’unité dans le cas linéaire. De plus, contrairement au cas fortement contraint (figure 4.16), nous n’observons pas de zone linéaire pour les faibles amplitudes sondées. Cela est probablement à attribuer au fait que le milieu est plus fragile ici que dans le cas fortement contraint, et donc qu’une amplitude très faible suffit à déclencher des réarrangements.

Nous constatons aussi que l’amplitude du pic de recompression augmente de façon non-linéaire avec l’amplitude de ré-émission A_2 (figure 4.27(b)). Une saturation de l’amplitude du pic semble apparaître aux grandes amplitudes, mais il serait nécessaire de refaire l’expérience sur plusieurs autres réalisations du désordre pour pouvoir l’affirmer de manière certaine.

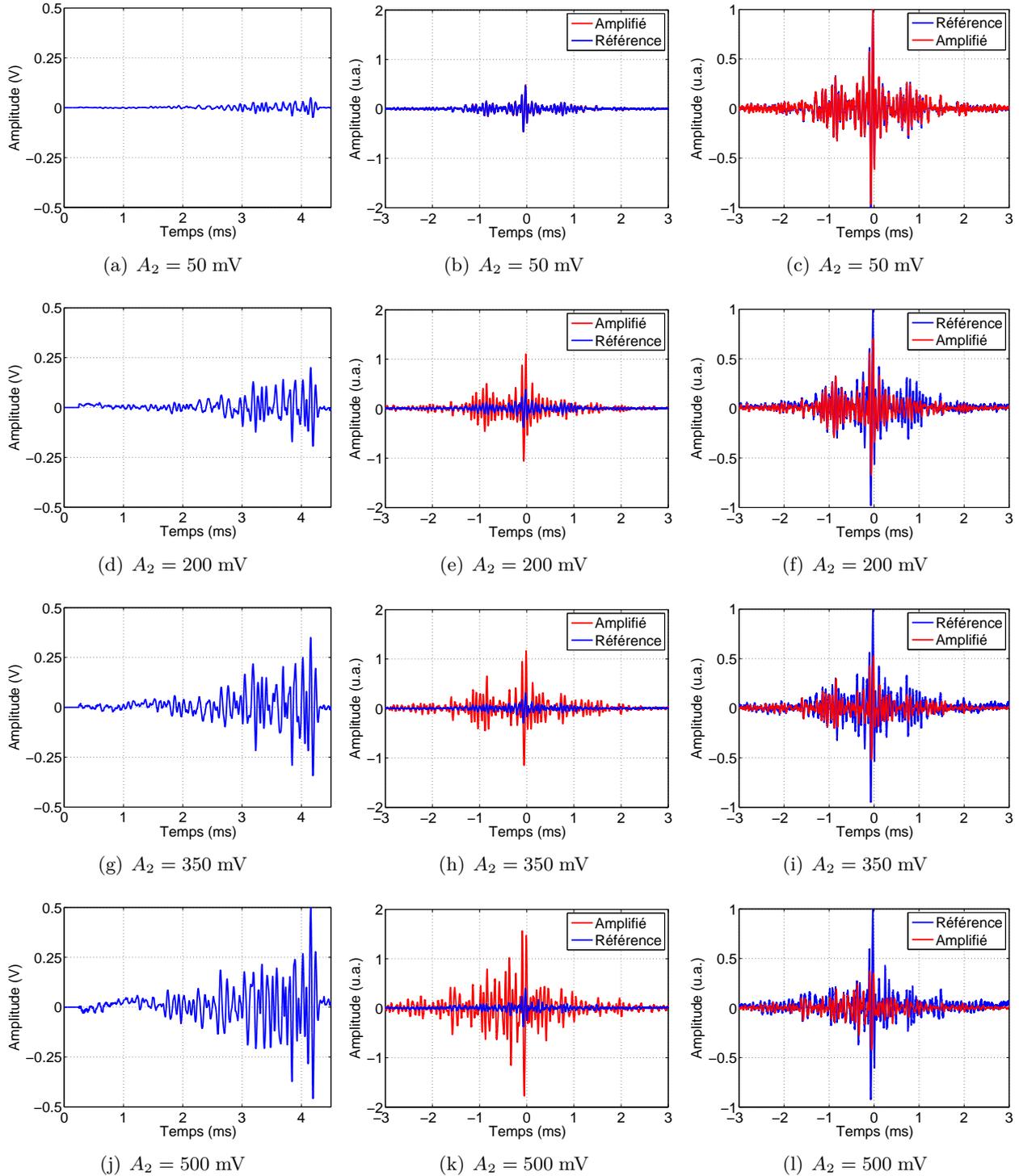


FIGURE 4.26 – Signaux recompressés à la surface libre en fonction de l’amplitude de ré-émission. La première colonne présente les signaux amplifiés renvoyés. La seconde colonne présente les signaux recompressés avec – pour référence – une amplitude renvoyée de 50 mV (en bleu) et avec une amplitude amplifiée (en rouge). La troisième colonne présente les pics recompressés correspondants, normalisés par les amplitudes renvoyées et l’amplitude du pic dans le cas de référence. Si la propagation est linéaire, les pics du cas de référence et du cas amplifié normalisés doivent se superposer (figure (c)).

Comme nous l’avons fait dans le cas fortement contraint, nous pouvons nous intéresser à la qualité de la recompression temporelle, i.e. le rapport entre l’amplitude du pic de recompression et l’écart-type du signal recompressé en dehors de l’instant focal (figure 4.27(c)). Nous constatons effectivement que cette dernière décroît fortement avec l’amplitude de ré-émission A_2 , ce qui est consistant avec

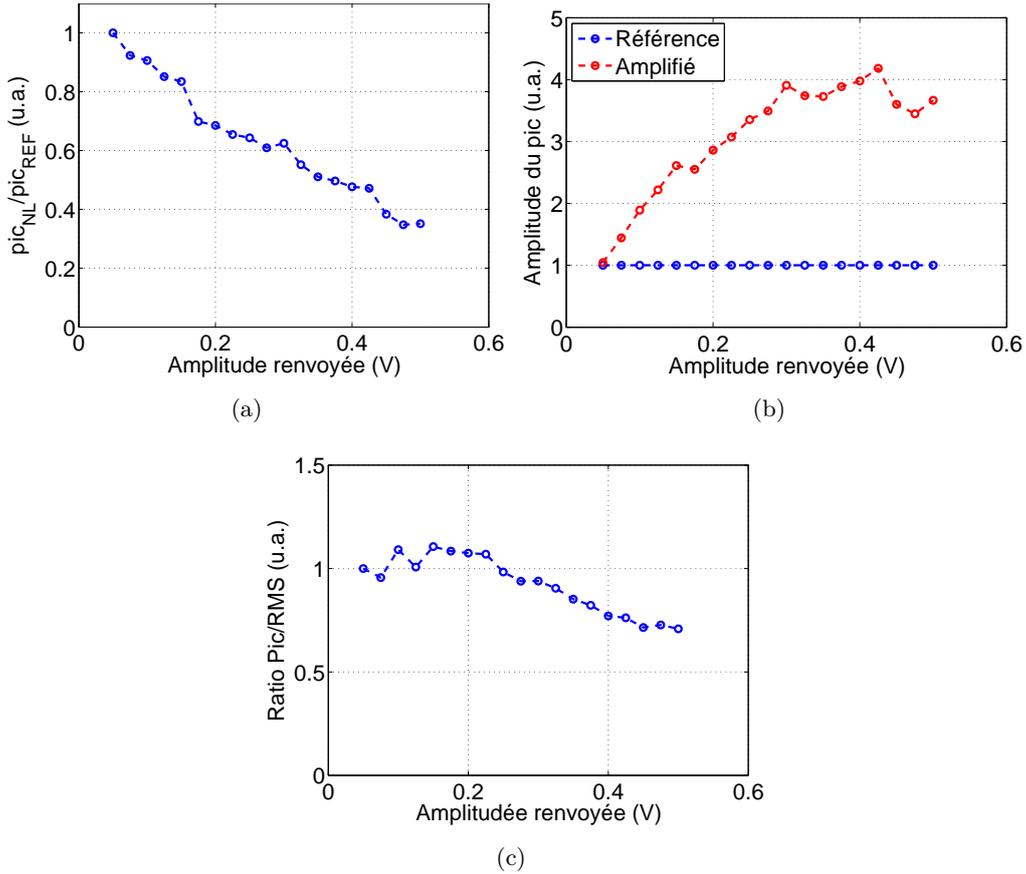


FIGURE 4.27 – Influence de l’amplitude de ré-émission sur le retournement temporel à la surface libre de l’échantillon faiblement contraint. (a) Le rapport de l’amplitude du pic de recompression normalisé par l’amplitude de ré-émission A_2 et du pic de référence normalisé par $A_0 = 50$ mV montre que le régime est non-linéaire. (b) L’amplitude du pic de recompression croît avec l’amplitude A_2 de la ré-émission, mais de façon non-linéaire, et semble même saturer à grande amplitude. (c) La qualité de la recompression temporelle (quantifiée par le rapport entre l’amplitude du pic de recompression et l’écart-type des lobes en dehors de l’instant focal) semble relativement constante jusqu’à une amplitude de ré-émission $A_2 = 200$ mV, puis décroît. Notons tout de même qu’étant donné le faible facteur de qualité des signaux, l’estimation précise de l’écart-type nécessiterait une moyenne sur les configurations du milieu.

un comportement non-linéaire. Physiquement, le milieu étant réarrangé durant la propagation, l’onde n’est plus totalement capable de revivre sa vie passée pour retourner en phase à la source, et une part de l’énergie se retrouve en dehors du temps focal et de la tache focale.

Localisation des réarrangements

Ainsi, nous sommes bien en mesure de déclencher des réarrangements du réseau des contacts dans le cas d’un empilement granulaire sec faiblement contraint, et de mesurer leur influence sur les ondes transmises. Même si nous ne savons actuellement pas *où* les réarrangements ont lieu, nous pouvons supposer – par similarité avec le cas fortement contraint (section 4.2) – qu’ils ont lieu autour du miroir à retournement temporel et de la source. La configuration de la figure 4.28 pourrait apporter une réponse plus claire à cette question.

4.4 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons tiré parti de la capacité du retournement temporel à focaliser une onde spatialement et temporellement pour déclencher des réarrangements du réseau des contacts dans

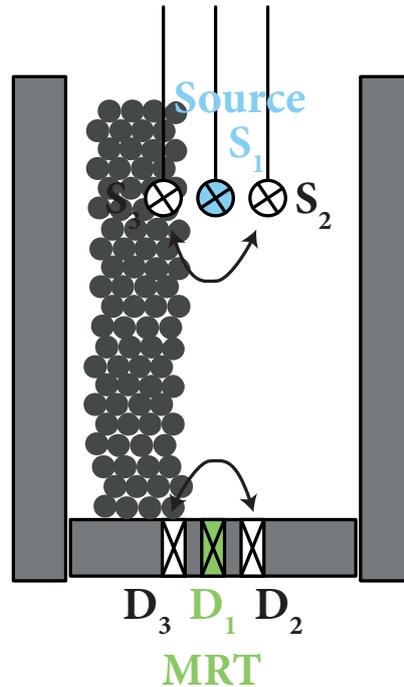


FIGURE 4.28 – Configuration qui permettrait de localiser les réarrangements dans le cas faiblement contraint.

un milieu granulaire sec fortement ou faiblement contraint.

Une première expérience sous forte contrainte nous a permis de constater qu’une onde de grande amplitude pouvait déclencher des réarrangements du réseau des contacts au voisinage de sa source, ce qui empêche alors l’onde transmise de revivre exactement sa vie en chronologie inverse et de revenir parfaitement à sa source. Nous avons proposé une modélisation de ces réarrangements du réseau des contacts dans notre simulation numérique et trouvé un très bon accord qualitatif avec les résultats expérimentaux, en montrant au passage la perte de focalisation spatiale et l’augmentation de la sensibilité des ondes aux réarrangements en fonction du temps de leur temps d’arrivée (ce qui est difficilement accessible dans nos expériences).

Dans une seconde expérience, toujours sous forte contrainte, nous avons déclenché des réarrangements *à distance*, en augmentant l’amplitude de l’onde renvoyée en phase *retour* du retournement temporel. La technique du retournement temporel utilisée ici est particulièrement bien adaptée à cet effet, puisqu’elle permet – par recompression temporelle – de tirer parti de la diffusion multiple pour recréer des impulsions de très grandes amplitudes à la source (voir section 1.2.3), favorisant par là même le déclenchement des réarrangements. Nous avons de plus montré que les réarrangements produits étaient localisés au voisinage immédiats de la source (et du miroir) grâce à la fonction de corrélation des ondes diffuses. Là encore, l’utilisation du retournement temporel en régime fortement diffusant nous permet de provoquer des réarrangements dans une zone spatiale très réduite, et non liée à l’ouverture du miroir à retournement temporel utilisé.

Enfin, nous avons montré dans une dernière expérience qu’il était possible de déclencher des réarrangements du réseau des contacts dans un milieu granulaire sous gravité (faible contrainte). Cela représentait *a priori* une difficulté importante car dans ce cas la transmission des ondes est fortement affaiblie, du fait de la mauvaise qualité des contacts entre les grains, contrairement au cas fortement contraint. Nous avons levé cette difficulté en considérant des billes assez grandes pour que les signaux transmis soient assez longs (la dissipation diminuant lorsque la taille des billes augmente), mais assez petites pour être sûr d’avoir un nombre suffisant de contacts au niveau des transducteurs. Même sans savoir exactement où les réarrangements ont été déclenchés (à la source et/ou au miroir), le simple fait d’avoir montré la *possibilité* d’en déclencher à la surface libre d’un milieu granulaire, i.e. à très faible contrainte, n’était pas trivial et représente donc un résultat intéressant.

Contrairement à la plupart des travaux s’intéressant à la sensibilité des ondes en fonction de perturbations dans le milieu [Bal96, Sni98, Tou01, Lar06], une originalité de nos expériences réside

dans le fait que les perturbations (réarrangements) du milieu sont créées par l'onde elle-même, lors de sa propagation (que l'amplification soit en phase aller ou retour). C'est là une manifestation spectaculaire de l'effet de *pompe* que les ondes acoustiques peuvent induire sur les milieux granulaires.

Perspectives Ces résultats originaux prouvent la possibilité de déclencher des réarrangements à distance dans le réseau des contacts d'un matériau granulaire et ouvrent la voie à de potentielles applications de déclenchements macroscopiques (avalanches ou glissements, par exemple [Joh05]). Une stratégie possible pour atteindre cet objectif pourrait passer par l'augmentation de l'amplitude du pic de recompression, par exemple en utilisant plus d'éléments dans le miroir à retournement temporel (ce qui aurait aussi pour avantage de réduire les réarrangements au niveau du miroir à retournement temporel), ou en appliquant un traitement 1-bit aux signaux avant de les renvoyer [Der99]. Une autre stratégie pourrait consister à considérer un milieu granulaire à la limite de blocage, de façon à réduire le seuil d'amplitude acoustique nécessaire pour le débloquer (par exemple un tas de sable au repos). Par ailleurs, il pourrait être intéressant d'étudier numériquement l'influence de la dissipation sur la localisation des réarrangements par corrélation des signatures acoustiques.

Bibliographie

- [Bal96] L. E. BALLENTINE & J. P. ZIBIN. ‘Classical state sensitivity from quantum mechanics.’ *Physical Review A*, **54** (5), 3813–3819. 1996.
- [Cat99] M. E. CATES, J. P. WITTMER, J.-P. BOUCHAUD & P. CLAUDIN. ‘Jamming and static stress transmission in granular materials.’ *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **9** (3), 511–522. 1999.
- [Cow02] M. L. COWAN, I. P. JONES, J. H. PAGE & D. A. WEITZ. ‘Diffusing acoustic wave spectroscopy.’ *Physical Review E*, **65** (6), 066605. 2002.
- [Der99] A. DERODE, A. TOURIN & M. FINK. ‘Ultrasonic pulse compression with one-bit time reversal through multiple scattering.’ *Journal of Applied Physics*, **85** (9), 6343–6352. 1999.
- [Ear96] J. EARNSHAW & M. WILSON. ‘A Diffusing Wave Spectroscopy Study of Constrictive Flow of Foam.’ *Journal de Physique II*, **6** (5), 713–722. 1996.
- [Jia01] X. JIA & P. MILLS. ‘Sound propagation in dense granular materials.’ in Y. K. (ED.), édition, *Powders and Grains 2001*, p. 105–112, Balkema, Rotterdam, France. 2001.
- [Jia11] X. JIA, T. BRUNET & J. LAURENT. ‘Elastic weakening of a dense granular pack by acoustic fluidization : Slipping, compaction, and aging.’ *Physical Review E*, **84** (2), 020301. 2011.
- [Joh05] P. A. JOHNSON & X. JIA. ‘Nonlinear dynamics, granular media and dynamic earthquake triggering.’ *Nature*, **437** (7060), 871–874. 2005.
- [Lar06] E. LAROSE, J. DE ROSNY, L. MARGERIN, D. ANACHE, P. GOUEDARD, M. CAMPILLO & B. VAN TIGGELEN. ‘Observation of multiple scattering of kHz vibrations in a concrete structure and application to monitoring weak changes.’ *Physical Review E*, **73** (1), 016609. 2006.
- [Mar87] G. MARET & P. E. WOLF. ‘Multiple light scattering from disordered media. The effect of brownian motion of scatterers.’ *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, **65** (4), 409–413. 1987.
- [Mar97] G. MARET. ‘Diffusing-wave spectroscopy.’ *Current Opinion in Colloid & Interface Science*, **2** (3), 251–257. 1997.
- [Men97] N. MENON & D. J. DURIAN. ‘Diffusing-Wave Spectroscopy of Dynamics in a Three-Dimensional Granular Flow.’ *Science*, **275** (5308), 1920–1922. 1997.
- [Pin88] D. J. PINE, D. A. WEITZ, P. M. CHAIKIN & E. HERBOLZHEIMER. ‘Diffusing wave spectroscopy.’ *Physical Review Letters*, **60** (12), 1134–1137. 1988.
- [Sni98] R. K. SNIEDER & J. A. SCALES. ‘Time-reversed imaging as a diagnostic of wave and particle chaos.’ *Physical Review E*, **58** (5), 5668–5675. 1998.
- [Sni07] R. SNIEDER & J. PAGE. ‘Multiple scattering in evolving media.’ *Physics Today*, **60** (5), 49–55. 2007.

- [Tou01] A. TOURIN, A. DERODE & M. FINK. ‘Sensitivity to Perturbations of a Time-Reversed Acoustic Wave in a Multiple Scattering Medium.’ *Physical Review Letters*, **87** (27), 274301. 2001.
- [Wei89] D. A. WEITZ, D. J. PINE, P. N. PUSEY & R. J. A. TOUGH. ‘Nondiffusive Brownian motion studied by diffusing-wave spectroscopy.’ *Physical Review Letters*, **63** (16), 1747–1750. 1989.

5.1 Synthèse des résultats

Cette thèse visait à étudier le retournement temporel des ondes élastiques en régime de diffusion multiple dans les milieux granulaires secs et immergés.

Dans le premier chapitre, nous avons introduit les trois sujets principaux en jeu : les milieux granulaires, la diffusion multiple des ondes, et le retournement temporel. Nous avons notamment décrit l'aspect fragile des milieux granulaires, dans le sens où ils ne peuvent pas résister à certaines perturbations mécaniques – même faibles – sans subir de réarrangements irréversibles. Puis, après avoir présenté les caractéristiques principales de la diffusion multiple des ondes et sa manifestation dans les milieux granulaires, nous avons expliqué en quoi la technique du retournement temporel pouvait être intéressante pour déclencher des instabilités dans un milieu granulaire.

Nous avons montré dans le second chapitre que, malgré la complexité des milieux granulaires – de par leur hétérogénéité spatiale et l'absence de modèle analytique pour décrire la propagation des ondes élastiques – il était possible de faire revivre aux ondes élastiques leurs vies passées et de les faire reconverger sur leurs sources, grâce au retournement temporel. Nous avons de plus développé un modèle numérique simple mais original basé sur un réseau percolé de masses ponctuelles reliées par des ressorts de raideurs aléatoires, qui nous a permis de retrouver qualitativement nos résultats expérimentaux.

Dans le troisième chapitre, nous nous sommes intéressés au transport de l'énergie acoustique dans les milieux granulaires secs et immergés. Dans un premier temps, nous avons rappelé les résultats expérimentaux principaux, qui montrent notamment que la propagation de l'énergie élastique dans un milieu granulaire suit en général l'équation de la diffusion. Puis, après avoir vérifié que notre modèle numérique reproduisait correctement la propagation diffusive des ondes élastiques, nous l'avons utilisé pour apporter un éclairage nouveau sur certains résultats expérimentaux mal compris par le passé, tels que la variation de l'absorption en fonction de la fréquence. Dans une seconde partie, nous avons étudié le transport des ondes dans un milieu granulaire totalement immergé. Grâce à la rétrodiffusion cohérente, nous avons déterminé le libre parcours moyen de transport et la constante de diffusion. Puis nous avons examiné le transport grâce au retournement temporel, en montrant que la taille de la tache focale dépendait de la profondeur du miroir à retournement temporel et de la position de la fenêtre retournée.

Dans le quatrième et dernier chapitre, nous avons étudié le retournement temporel en régime non-linéaire dans des milieux granulaires secs fortement puis faiblement contraints. Nous avons commencé par étudier la qualité du retournement temporel en fonction de l'amplitude de la source (en phase *aller*) et avons effectivement constaté qu'elle diminuait à grandes amplitudes, du fait des réarrangements qui empêchent alors l'onde de revivre exactement sa vie passée et donc de revenir parfaitement à sa source. Nous avons proposé une modélisation des réarrangements dans notre modèle numérique, qui a fourni des résultats en bon accord qualitatif avec nos résultats expérimentaux. Ensuite, nous avons tiré profit de la capacité du retournement temporel à focaliser spatialement et temporellement une impulsion acoustique de grande amplitude pour déclencher à *distance* des réarrangements dans

un milieu granulaire sec fortement contraint en amplifiant l'onde renvoyée (phase *retour*). Nous avons alors prouvé, grâce à la fonction de corrélation des ondes diffuses, que des réarrangements au voisinage de la cible (la source) avaient bien lieu. Enfin, nous nous sommes intéressés au déclenchement de réarrangements dans un milieu granulaire sec sous gravité (faible contrainte). Nous avons effectivement constaté une diminution de la qualité du retournement temporel à mesure que l'amplitude renvoyée devenait plus grande, sans toutefois localiser avec certitude les réarrangements.

5.2 Conclusion et perspectives

La démonstration de la réversibilité des ondes élastiques dans un milieu granulaire constitue un résultat intéressant en soi car, comme nous l'avons dit, l'absence de modèle analytique permettant de décrire la propagation des ondes dans ces milieux rend non triviale la possibilité de faire revivre aux ondes leurs vies passées. Mais de façon plus fondamentale, il est intéressant de constater que, malgré le caractère *discret* et *métastable* de notre milieu, et donc une propagation des perturbations élastiques à mi-chemin entre celle d'une onde et celle d'une particule, il est possible de faire reconverger une onde à sa source ; alors que cela est impossible avec des particules, du fait de l'extrême sensibilité aux conditions initiales¹. Il serait d'ailleurs intéressant d'étudier finement l'influence de la dissipation ou des perturbations (bruit ou température, par exemple) sur la capacité de retourner les ondes dans notre modèle numérique.

Concernant le transport des ondes, notre modèle numérique naïf nous a permis d'apporter une réponse à une anomalie expérimentale mal comprise par le passé. Même si cela représente une difficulté expérimentale importante, il serait maintenant intéressant de voir si nous pouvons mettre en évidence l'étalement *spatial* du halo diffusif dans le cas des granulaires secs contraints, voire une éventuelle rétro-diffusion cohérente. Il est aussi tentant de chercher à savoir si notre modèle numérique peut présenter des régimes de localisation faible ou forte. Une stratégie pour cela pourrait être de diminuer le libre parcours moyen l_e en augmentant le désordre, soit par exemple en passant à un réseau tri-dimensionnel, soit en diminuant la percolation p . Par ailleurs, il pourrait être intéressant d'obtenir un modèle théorique du transport des ondes dans le cas immergé, pour extraire avec précision les paramètres de transport grâce au retournement temporel, qui pourraient alors être comparés à ceux obtenus par les méthodes classiques (rétrodiffusion cohérente ou étalement du halo diffusif).

Enfin, les résultats que nous avons démontrés concernant le déclenchement à distance de réarrangements dans le réseau des contacts entre les grains ouvrent la voie à des déclenchements de perturbations macroscopiques. Il pourrait par exemple être intéressant d'essayer de déclencher un mouvement macroscopique des grains en les plaçant au préalable à la limite du déblocage, par exemple en considérant un tas de sable au repos, une avalanche sur le point d'être déclenchée, une bande de cisaillement à la limite de rupture, voire une faille sismique à la limite du glissement². Cette piste pourrait bien sûr être complétée par une stratégie d'augmentation de l'amplitude du pic de recompression, en augmentant le nombre d'éléments dans le miroir à retournement temporel par exemple, ou en appliquant un traitement 1-bit aux signaux avant leur ré-émission.

Fini, c'est fini, ça va finir, ça va peut-être finir. Les grains s'ajoutent aux grains, un à un, et un jour, soudain, c'est un tas, un petit tas, l'impossible tas.

Samuel Beckett, *Fin de partie*, 1957

1. R. K. Snieder and J. A. Scales, Time-reversed imaging as a diagnostic of wave and particle chaos, *Physical Review E*, 58 (1998)

2. P. A. Johnson and X. Jia, Nonlinear dynamics, granular media and dynamic earthquake triggering, *Nature*, 437 (2005)

Appendices

Implémentation de l'expérience numérique

Nous présentons ici le programme et les fonctions principales permettant de calculer la réponse élastique à une excitation d'un réseau bidimensionnel percolé de masses reliées par des ressorts ainsi que d'effectuer l'opération de retournement temporel.

Le langage utilisé est MATLAB.

A.1 Retournement temporel linéaire

Le script suivant utilise un réseau déjà tendu (ligne 8). Pour obtenir un tel réseau, une matrice d'adjacence est créée (section A.5) puis les bords du réseau sont tendus et l'équation de la dynamique est appliquée (section A.3) avec dissipation de façon à ce que le réseau atteigne un état d'équilibre (sections A.4).

Dans un premier temps, la phase *aller* du retournement temporel est effectuée (ligne 66 à 74) (section A.2). La source utilisée est définie aux lignes 15 à 17, les dissipations frictionnelle et visqueuse aux lignes 29 et 30. Les signaux (déplacements et vitesses) reçus au miroir à retournement temporel (défini à la ligne 26) sont alors stockés (lignes 76 à 88).

Dans un second temps, la phase *retour* est effectuée (ligne 90 à 126), éventuellement avec de la dissipation (lignes 32 et 33). Nous présentons ici le script permettant de ne renvoyer qu'une fenêtre temporelle donnée (lignes 23) du signal transmis total. Les déplacements et vitesses reçus au miroir sont tronqués (lignes 102 et 103), retournés temporellement (lignes 106 et 107) et formatés pour être compris par la fonction `wave.m` (lignes 109 à 115). Puis l'équation de la dynamique est appliquée, en imposant aux éléments du miroir les déplacements correspondants (ligne 126).

La composante selon x du champ de déplacement résultant est alors enregistrée dans la variable `U_x_RT_store` sous la forme d'une matrice tri-dimensionnelle, la première dimension étant le temps, la deuxième y , et la troisième x . Le champ de déplacement, noté $\mathbf{u} = u^x \mathbf{e}_x + u^y \mathbf{e}_y$ est pris par rapport à l'état du réseau régulier non-tendu (voir section 2.2.2 et figure A.1).

```

1  %% Linear Time-Reversal in a 2D masses-springs percolated network
2
3  clear all
4  close all
5  clc
6
7  %% Loading the sample
8  load('sample_1.mat')
9
10 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
11 % Parameters %
12 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
13
14 % Source signal
15 source_frequency=0.35*f_0;
16 source_nb_cycles=1;
17 source_amplitude=0.05; %(in units of a_0)

```

```

18
19 % Sources positions
20 sources_positions=[34,4;35,4;36,4]; %first column is y, second column is x
21
22 % TR windows
23 TR_window=[70,100]; % in units of T_0=1/f_0
24
25 % Time Reversal Mirror (TRM) location
26 TRM=horzcat((1:n)',ones(n,1)*66); %first column is y, second column is x
27
28 % Damping
29 alpha_wave=0; %viscous friction f=- alpha * v
30 beta_wave=0; %contact friction f = beta*v_slip
31
32 beta_RT=beta_wave; %viscous friction f= -alpha*v
33 alpha_RT=alpha_wave; %contact friction f = beta*v_slip
34
35 %% Monitoring
36
37 % Live plot
38 live_plot_pulling_walls=0;
39 live_plot_relaxation=0;
40 live_plot_wave=0;
41 live_plot_RT=0;
42
43 window_center=[floor(n/2),25];
44 window_range=15;
45
46 %% Internal variables
47 nb_elem_in_TRM=size(TRM,1);
48
49 % Numerical parameters
50 source_period=1/source_frequency;
51 delta_t_wave=source_period/10; %Time step
52 duration_wave_record=1000;
53 nb_steps_wave=floor(duration_wave_record/delta_t_wave);
54
55 delta_t_RT=delta_t_wave;
56
57 store_Ux=1;
58 store_Uy=1;
59 store_Upx=1;
60 store_Upy=1;
61 store_probes=0;
62
63 % Grid
64 [X,Y] = meshgrid(a:a:n*a,a:a:n*a); %axis
65
66 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
67 %% Forward propagation %%
68 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
69
70 % Creating the source signals
71 [ sources_mat_ref,sources_mat_p_ref,time_source,time_wave ] = sources_burst_mat( source_frequency,
    source_amplitude,source_nb_cycles,sources_positions,delta_t_wave,duration_wave_record );
72
73 % Applying dynamic equation
74 [ U_x,U_y,U_p_x,U_p_y,U_x_wave_store,U_y_wave_store,U_p_x_wave_store,U_p_y_wave_store,~,~,~,~ ] = wave(
    U_x_relaxed,U_y_relaxed,zeros(n), zeros(n), wall_displacement,delta_t_wave,alpha_wave,beta_wave,
    cluster,K_mat,m_mat,live_plot_wave,X,Y,a>window_center, window_range,sources_positions,
    sources_mat_ref,sources_mat_p_ref,time_wave,time_source,U_x_relaxed,U_y_relaxed,store_Ux,store_Uy,
    store_Upx,store_Upy,0,[] );
75
76 % Storing the signals at the Time Reversal Mirror (TRM)
77 TRM_signal_ref=zeros(nb_steps_wave,nb_elem_in_TRM,2);
78 TRM_signal_p_ref=zeros(nb_steps_wave,nb_elem_in_TRM,2);

```

```

79
80 for p=1:nb_elem_in_TRM
81     % Storing the displacements
82     TRM_signal_ref(:,p,1)=U_x_wave_store(:,TRM(p,1),TRM(p,2))-U_x_relaxed(TRM(p,1),TRM(p,2)); %x
        component
83     TRM_signal_ref(:,p,2)=U_y_wave_store(:,TRM(p,1),TRM(p,2))-U_y_relaxed(TRM(p,1),TRM(p,2)); %y
        component
84
85     % Storing the velocities
86     TRM_signal_p_ref(:,p,1)=U_p_x_wave_store(:,TRM(p,1),TRM(p,2)); %x component
87     TRM_signal_p_ref(:,p,2)=U_p_y_wave_store(:,TRM(p,1),TRM(p,2)); %y component
88 end
89
90 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
91 %% Backward propagation (Time Reversal) %%
92 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
93
94 % Looking for the index of the start and end of the window
95 TR_window_start_time=TR_window(1);
96 TR_window_end_time=TR_window(2);
97 duration_TR_window=TR_window_end_time-TR_window_start_time;
98 [~,TR_slice_start_index]=find_closest(TR_window_start_time,time_wave);
99 [~,TR_slice_end_index]=find_closest(TR_window_end_time,time_wave);
100
101 % Windowing the signals at TRM (x and y components)
102 TRM_signal_window=TRM_signal_ref(TR_slice_start_index:TR_slice_end_index,:);
103 TRM_signal_p_window=TRM_signal_p_ref(TR_slice_start_index:TR_slice_end_index,:);
104
105 % Time reversing the signals recorded at TRM
106 TRM_signal_window_flipped_mat=flipud(TRM_signal_window);
107 TRM_signal_p_window_flipped_mat=flipud(TRM_signal_p_window);
108
109 % Putting the TRM signal in cells
110 TRM_signal_window_flipped=cell(1,nb_elem_in_TRM);
111 TRM_signal_p_window_flipped=cell(1,nb_elem_in_TRM);
112 for TRM_element=1:nb_elem_in_TRM
113     TRM_signal_window_flipped{TRM_element}=squeeze(TRM_signal_window_flipped_mat(:,TRM_element,:));
114     TRM_signal_p_window_flipped{TRM_element}=squeeze(TRM_signal_p_window_flipped_mat(:,TRM_element,:));
115 end
116
117 % Time vectors
118 time_RT_window_record=-TR_window_end_time:delta_t_RT:TR_window_end_time;
119 time_RT_window_source=0:delta_t_RT:duration_TR_window;
120
121 % Initial velocities set to zero before TR
122 U_p_x_init=zeros(n,n);
123 U_p_y_init=zeros(n,n);
124
125 % Applying dynamic equation
126 [ U_x_RT,U_y_RT,U_p_x_RT,U_p_y_RT,U_x_RT_store,~,~,~,~,~,~ ] = wave( U_x_relaxed,U_y_relaxed,U_p_x_init
    , U_p_y_init, wall_displacement,delta_t_RT,alpha_RT,beta_RT,cluster,K_mat,m_mat,live_plot_wave,X,Y,a,
    window_center, window_range,TRM,TRM_signal_window_flipped,TRM_signal_p_window_flipped,
    time_RT_window_record,time_RT_window_source,U_x_relaxed,U_y_relaxed,1,1,1,1,0,[] );

```

A.2 Propagation d'une onde

La fonction `wave.m` applique l'équation de la dynamique (voir section A.3) dans un réseau donné, pour des paramètres de source donnés, pendant un temps fixé. Elle renvoie l'état du réseau final (positions U_x et U_y , et vitesses U_{p_x} et U_{p_y} des masses). Elle peut aussi fournir l'état du réseau à chaque instant de la propagation sous la forme d'une matrice 3D (U_x_store , U_y_store , etc.) ainsi que l'évolution au cours du temps des déplacements et vitesses de certaines masses données (`probe_U` et `probe_Up`).

Pour chaque pas de temps, les positions et vitesses des murs sont fixées (lignes 54 à 77 et 126 à 149). Les longueurs des ressorts sont calculées (ligne 91 et section A.6), puis les accélérations déduites (ligne 94). L'équation de la dynamique est alors appliquée, grâce à la méthode d'Euler (lignes 105 à 113), pour en déduire les vitesses et positions au pas de temps suivant. Les signaux sont alors stockés (lignes 151 à 180).

```

1 function [ U_x,U_y,U_p_x,U_p_y,U_x_store,U_y_store,U_p_x_store,U_p_y_store,probe_U,probe_Up,Ep,Ec ] =
    wave( U_x_init,U_y_init,U_p_x_init, U_p_y_init, wall_displacement,delta_t_wave,alpha_wave,beta_wave,
        cluster,K_mat,m_mat,live_plot_wave,X,Y,a>window_center, window_range,sources_positions,sources_mat,
        sources_mat_p,time_record,time_source,U_x_relaxed,U_y_relaxed,store_Ux,store_Uy,store_Upx,store_Upy,
        store_probes,probes )
2 % Propagates a wave in a 2D masses and springs percolated network
3
4 %% Number of sites in each direction
5 n=length(U_x_init);
6
7 % Initial state of the network
8 U_x=U_x_init; %x displacements
9 U_y=U_y_init; %y displacements
10
11 U_p_x=U_p_x_init; % x velocities
12 U_p_y=U_p_y_init; % y velocities
13
14 %% Parameters for the time vector
15 nb_steps_record=length(time_record); % number of time steps during recording
16 nb_steps_source=length(time_source); % number of time steps during source emission
17
18 %% Array storing the wavefield
19 U_x_store=zeros(nb_steps_record,n,n); % (time,y,x)
20 U_y_store=zeros(nb_steps_record,n,n);
21 U_p_x_store=zeros(nb_steps_record,n,n);
22 U_p_y_store=zeros(nb_steps_record,n,n);
23
24 %% Wall displacements vector
25 walls_displacements_vector=linspace(-wall_displacement,wall_displacement,n);
26
27 %% Damping
28 alpha_wave_mat=ones(n).*alpha_wave.*cluster; %
29 beta_wave_mat=ones(n).*beta_wave.*cluster;
30
31 %% Formatting the stiffnesses matrix
32 [ K_left,K_up,K_right,K_down,K_up_left,K_up_right,K_down_right,K_down_left ] = K_sym_separate( K_mat );
33
34 %% Energy vectors
35 Ec=zeros(n,1);
36 Ep=zeros(n,1);
37
38 %% Probes
39 nb_probes=size(probes,1);
40 probe_U=zeros(nb_steps_record,nb_probes,2);
41 probe_Up=zeros(nb_steps_record,nb_probes,2);
42
43 %% Starting of the simulation
44 disp('Wave propagation...')
45 disp(['Number of steps : ' num2str(nb_steps_record)])
46

```

```

47 if live_plot_wave==1
48     figure
49 end
50
51
52 for t=1:nb_steps_record % For each time step
53
54     % Fixing the walls
55     %Left wall
56     U_x(:,1)=-wall_displacement; % x displacement
57     U_p_x(:,1)=0; % x velocity
58     U_y(:,1)=walls_displacements_vector; % x velocity
59     U_p_y(:,1)=0; % y velocity
60
61     %Right Wall
62     U_x(:,n)=wall_displacement;
63     U_p_x(:,n)=0;
64     U_y(:,n)=walls_displacements_vector;
65     U_p_y(:,n)=0;
66
67     %Bottom wall
68     U_x(1,:)=walls_displacements_vector;
69     U_p_x(1,:)=0;
70     U_y(1,:)=wall_displacement;
71     U_p_y(1,:)=0;
72
73     %Top wall
74     U_x(n,:)=walls_displacements_vector;
75     U_p_x(n,:)=0;
76     U_y(n,:)=wall_displacement;
77     U_p_y(n,:)=0;
78
79     % Fixing the source
80     if t<nb_steps_source % when the source is emitting
81         for s=1:size(sources_positions,1) % for every source mass
82             U_x(sources_positions(s,1),sources_positions(s,2))=U_x_relaxed(sources_positions(s,1),
83                 sources_positions(s,2))+sources_mat{s}(t,1); % x displacement
84             U_y(sources_positions(s,1),sources_positions(s,2))=U_y_relaxed(sources_positions(s,1),
85                 sources_positions(s,2))+sources_mat{s}(t,2); % y displacement
86
87             U_p_x(sources_positions(s,1),sources_positions(s,2))=sources_mat_p{s}(t,1); % x velocity
88             U_p_y(sources_positions(s,1),sources_positions(s,2))=sources_mat_p{s}(t,2); % y velocity
89         end
90     end
91
92     %% Computing the springs lengths
93     [ lengths_down_left_x,lengths_down_left_y ,lengths_down_x,lengths_down_y,lengths_down_right_x,
94         lengths_down_right_y, lengths_right_x,lengths_right_y,lengths_up_right_x,lengths_up_right_y,
95         lengths_up_x,lengths_up_y,lengths_up_left_x,lengths_up_left_y,lengths_left_x,lengths_left_y,
96         lengths_down_left,lengths_down,lengths_down_right,lengths_right,lengths_up_right,lengths_up,
97         lengths_up_left,lengths_left] = lengths_vectors( U_x,U_y,a );
98
99     %% Computing the acceleration matrices
100    [acce_l_x,acce_l_y]=acceleration_diago( alpha_wave_mat,beta_wave_mat,lengths_left,lengths_left_x,
101        lengths_left_y,lengths_up,lengths_up_x,lengths_up_y,lengths_right,lengths_right_x,lengths_right_y,
102        lengths_down,lengths_down_x,lengths_down_y,lengths_up_left,lengths_up_left_x,lengths_up_left_y,
103        lengths_up_right,lengths_up_right_x,lengths_up_right_y,lengths_down_right,lengths_down_right_x,
104        lengths_down_right_y,lengths_down_left,lengths_down_left_x,lengths_down_left_y,U_p_x,U_p_y,a,
105        K_left,K_up,K_right,K_down,K_up_left,K_up_right,K_down_right,K_down_left,m_mat );
106
107     %% Live plot
108     if live_plot_wave==1
109         live_plot_diago( X,Y,a,sources_positions>window_center, window_range, time_record,t,U_x,U_y,
110             K_left,K_up,K_right,K_down,lengths_left,lengths_left_x,lengths_left_y,lengths_up,lengths_up_x,
111             lengths_up_y,lengths_right,lengths_right_x,lengths_right_y,lengths_down,lengths_down_x,
112             lengths_down_y,lengths_up_left,lengths_up_left_x,lengths_up_left_y,lengths_up_right,

```

```

        lengths_up_right_x,lengths_up_right_y,lengths_down_right,lengths_down_right_x,
        lengths_down_right_y,lengths_down_left,lengths_down_left_x,lengths_down_left_y );
99     end
100
101     %% Computing the total energy
102     Ec(t)=total_Ec( U_p_x,U_p_y,m_mat);
103     Ep(t)=total_Ep( K_down,K_right,a,lengths_down,lengths_right);
104
105     %% Applying the dynamic equation (Euler's Method)
106
107     % Updating the velocities
108     U_p_x=U_p_x+accel_x*delta_t_wave; % U_n+1' = U_n' + U_n'' * Delta_T
109     U_p_y=U_p_y+accel_y*delta_t_wave;
110
111     % Updating the positions
112     U_x=U_x+U_p_x*delta_t_wave; % U_n+1 = U_n + U_n' * Delta_T
113     U_y=U_y+U_p_y*delta_t_wave;
114
115     % Fixing the source
116     if t<nb_steps_source
117         for s=1:size(sources_positions,1)
118             U_x(sources_positions(s,1),sources_positions(s,2))=U_x_relaxed(sources_positions(s,1),
119                 sources_positions(s,2))+sources_mat{s}(t,1);
120             U_y(sources_positions(s,1),sources_positions(s,2))=U_y_relaxed(sources_positions(s,1),
121                 sources_positions(s,2))+sources_mat{s}(t,2);
122             U_p_x(sources_positions(s,1),sources_positions(s,2))=sources_mat_p{s}(t,1);
123             U_p_y(sources_positions(s,1),sources_positions(s,2))=sources_mat_p{s}(t,2);
124         end
125     end
126
127     % Fixing the walls
128     %Left wall
129     U_x(:,1)=-wall_displacement;
130     U_p_x(:,1)=0;
131     U_y(:,1)=walls_displacements_vector;
132     U_p_y(:,1)=0;
133
134     %Right Wall
135     U_x(:,n)=wall_displacement;
136     U_p_x(:,n)=0;
137     U_y(:,n)=walls_displacements_vector;
138     U_p_y(:,n)=0;
139
140     %Bottom wall
141     U_x(1,:)=walls_displacements_vector;
142     U_p_x(1,:)=0;
143     U_y(1,:)=-wall_displacement;
144     U_p_y(1,:)=0;
145
146     %Top wall
147     U_x(n,:)=walls_displacements_vector;
148     U_p_x(n,:)=0;
149     U_y(n,:)=wall_displacement;
150     U_p_y(n,:)=0;
151
152     % Storing
153     if store_Ux==1
154         U_x_store(t,:,:)=U_x;
155     end
156
157     if store_Uy==1
158         U_y_store(t,:,:)=U_y;
159     end
160
161     if store_Upx==1

```

```
161     U_p_x_store(t, :, :) = U_p_x;
162 end
163
164 if store_Upy == 1
165     U_p_y_store(t, :, :) = U_p_y;
166 end
167
168 % Storing signal at specific locations
169 if store_probes == 1
170     for p = 1:nb_probes % for each probe
171         % Storing the displacement
172         probe_U(p, t, 1) = U_x(probes(p, 1), probes(p, 2)) - U_x_relaxed(probes(p, 1), probes(p, 2)); % x
            component
173         probe_U(p, t, 2) = U_y(probes(p, 1), probes(p, 2)) - U_y_relaxed(probes(p, 1), probes(p, 2)); % y
            component
174
175         % Storing the velocity
176         probe_Up(p, t, 1) = U_p_x(probes(p, 1), probes(p, 2)); % x component
177         probe_Up(p, t, 2) = U_p_y(probes(p, 1), probes(p, 2)); % y component
178     end
179 end
180 end
181
182 end
```

A.3 Calcul de l'accélération

La fonction `acceleration_diago.m` calcule les accélérations de toutes les masses d'un réseau donné.

Les accélérations sont la somme des accélérations dues aux forces des ressorts, à la dissipation frictionnelle et de la dissipation visqueuse (ligne 25 et 48), conformément à l'équation (2.4) que nous donnons ici avec le terme de dissipation visqueuse¹ :

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \underbrace{\frac{1}{m} \sum_{i' \in V_i} K_{ii'} (r_{ii'} - a_0) \frac{\mathbf{r}_{ii'}}{r_{ii'}}}_{\text{accel}} + \underbrace{\frac{1}{m} \sum_{i'} \beta \left(\frac{d\mathbf{r}_{i'}}{dt} - \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right)}_{\text{contact_friction}} - \underbrace{\frac{1}{m} \alpha \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}}_{\text{viscous_friction}}. \quad (\text{A.1})$$

```

1 function [ accel_x,accel_y ] = acceleration_diago( alpha,beta,lengths_left,lengths_left_x,lengths_left_y,
lengths_up,lengths_up_x,lengths_up_y,lengths_right,lengths_right_x,lengths_right_y,lengths_down,
lengths_down_x,lengths_down_y,lengths_up_left,lengths_up_left_x,lengths_up_left_y,lengths_up_right,
lengths_up_right_x,lengths_up_right_y,lengths_down_right,lengths_down_right_x,lengths_down_right_y,
lengths_down_left,lengths_down_left_x,lengths_down_left_y,U_p_x,U_p_y,a,K_left,K_up,K_right,K_down,
K_up_left,K_up_right,K_down_right,K_down_left,m_mat )
2 %acceleration_diago Returns the accelerations for a given state of the network
3
4 %% x component
5 accel_x=(K_left.*(1-a./lengths_left).*lengths_left_x b@x...
6 + K_up.*(1-a./lengths_up).*lengths_up_x ...
7 + K_right.*(1-a./lengths_right).*lengths_right_x ...
8 + K_down.*(1-a./lengths_down).*lengths_down_x ...
9 + K_up_left.*(1-a*sqrt(2)./lengths_up_left).*lengths_up_left_x ...
10 + K_up_right.*(1-a*sqrt(2)./lengths_up_right).*lengths_up_right_x ...
11 + K_down_right.*(1-a*sqrt(2)./lengths_down_right).*lengths_down_right_x ...
12 + K_down_left.*(1-a*sqrt(2)./lengths_down_left).*lengths_down_left_x )./m_mat;
13
14 contact_friction_x=beta.*((circshift(U_p_x,[1 0]) - U_p_x) ...
15 + (circshift(U_p_x,[0 1]) - U_p_x) ...
16 + (circshift(U_p_x,[-1 0]) - U_p_x) ...
17 + (circshift(U_p_x,[0 -1]) - U_p_x) ...
18 + (circshift(U_p_x,[-1 -1]) - U_p_x) ...
19 + (circshift(U_p_x,[-1 1]) - U_p_x) ...
20 + (circshift(U_p_x,[1 1]) - U_p_x) ...
21 + (circshift(U_p_x,[1 -1]) - U_p_x) )./m_mat;
22
23 viscous_friction_x = - alpha .* U_p_x./m_mat;
24
25 accel_x=accel_x+contact_friction_x+viscous_friction_x;
26
27 %% y component
28 accel_y=(K_left.*(1-a./lengths_left).*lengths_left_y ...
29 + K_up.*(1-a./lengths_up).*lengths_up_y ...
30 + K_right.*(1-a./lengths_right).*lengths_right_y ...
31 + K_down.*(1-a./lengths_down).*lengths_down_y ...
32 + K_up_left.*(1-a*sqrt(2)./lengths_up_left).*lengths_up_left_y ...
33 + K_up_right.*(1-a*sqrt(2)./lengths_up_right).*lengths_up_right_y ...
34 + K_down_right.*(1-a*sqrt(2)./lengths_down_right).*lengths_down_right_y ...
35 + K_down_left.*(1-a*sqrt(2)./lengths_down_left).*lengths_down_left_y )./m_mat;
36
37 contact_friction_y=beta.*((circshift(U_p_y,[1 0]) - U_p_y) ...
38 + (circshift(U_p_y,[0 1]) - U_p_y) ...
39 + (circshift(U_p_y,[-1 0]) - U_p_y) ...
40 + (circshift(U_p_y,[0 -1]) - U_p_y) ...
41 + (circshift(U_p_y,[-1 -1]) - U_p_y) ...
42 + (circshift(U_p_y,[-1 1]) - U_p_y) ...
43 + (circshift(U_p_y,[1 1]) - U_p_y) ...
44 + (circshift(U_p_y,[1 -1]) - U_p_y) )./m_mat;
45

```

1. Non considérée dans la thèse.

```
46 viscous_friction_y = - alpha .* U_p_y./m_mat;  
47  
48 accel_y=accel_y+contact_friction_y + viscous_friction_y;  
49  
50 end
```

A.4 Création d'un réseau tendu

Le script suivant permet de créer un réseau bidimensionnel percolé tendu et équilibré. Le réseau percolant est défini entre les lignes 61 et 85. On crée d'abord une matrice d'adjacence (voir section A.5) sur le réseau $n \times n$ (ligne 62) puis on cherche un réseau percolant de taille $n \times n$ (lignes 84 à 71), en forçant éventuellement certains sites à être remplis (lignes 74 à 76). On annule ensuite dans la matrice d'adjacence `K_mat` les raideurs des ressorts qui ne sont pas dans le réseau percolé (lignes 82 à 85). La fonction `spanning_cluster` prend en argument une dimension latérale n de réseau et un taux de percolation p et renvoie soit un réseau percolant soit un réseau vide.

```

1 %% Program to create a sample
2
3 clear all
4 close all
5 clc
6
7 %% Parameters
8
9 n=70; % Number of particles in each direction
10 percolation=0.91; %percolation parameter (probability for a site to be filled with a mass; p=1 mean
    masses at each site).
11 a=1; % Rest length of springs
12
13 % Disorder on the masses
14 m0=1; %mean of the particles masses
15 m_rand=0; %uniform distribution between m0-l_rand and m0+m_rand
16
17 % Disorder on the stiffnesses
18 K0=1; %mean of the spring constants
19 K_rand=0.5; %uniform distribution between K0-K_rand and K0+K_rand
20
21 % Strain
22 strain=0.2; %strain=1 means that the sample will double in size (100% elongation in each direction)
23
24 % Masses to force on the network
25 masses_to_add=[]; %to be used to force presence of masses at the source or time reversal mirror, for
    example
26
27 % Monitoring
28 live_plot_pulling_walls=0; %do you want to have a live view of the "pulling wall" phase?
29 live_plot_relaxation=0; %do you want to have a live view of the relaxatio?
30 window_center=[floor(n/2),25]; %center of the live view window
31 window_range=15; %rand of the live view window
32
33 %% The following parameters do not require modification
34 %% Units
35 T_inertia=sqrt(m0/K0);
36 f_0=1/T_inertia;
37
38 %% Grid
39 [X,Y] = meshgrid(a:a*(1+strain):n*a*(1+strain),a:a*(1+strain):n*a*(1+strain));
40
41 %% Damping
42 alpha_pulling_walls=0; %viscous friction f=- alpha * v
43 beta_pulling_walls=4; %contact friction f = beta * v_slip
44
45 alpha_relaxation = alpha_pulling_walls;
46 beta_relaxation = beta_pulling_walls;
47
48 %% Strain
49 wall_displacement=1/2*strain*a*(n-1);
50 wall_speed=1*a/T_inertia;
51
52 %% Numerical parameters
53 delta_t_pulling_walls=T_inertia/100;

```

```

54
55 delta_t_relaxation=delta_t_pulling_walls;
56 duration_relaxation=4000*T_inertia;
57
58 %% Construction of the masses matrix
59 m_mat=m0*(ones(n,n)+2*m_rand*(rand(n,n)-0.5));
60
61 %% Construction of the adjacency matrix
62 K_mat = K_mat_create( K0,K_rand,n );
63
64 %% Searching for a percolating network
65 cluster=zeros(n);
66 cluster_attempts=0;
67
68 while max(max(cluster))==0
69     cluster=spanning_cluster(n,percolation);
70     cluster_attempts=cluster_attempts+1;
71 end
72
73 %% Force masses on given locations
74 for i=1:size(masses_to_add,1)
75     cluster(masses_to_add(i,1),masses_to_add(i,2))=1;
76 end
77
78 %% Removing the masses out of the network
79 missing_masses=find(not(cluster));
80
81 % Removing the springs of missing masses
82 for missing_mass=missing_masses
83     K_mat(:,missing_mass)=0;
84     K_mat(missing_mass,:)=0;
85 end
86
87 %% Separating the adjacency matrix in eight different matrices
88 [ K_left,K_up,K_right,K_down,K_up_left,K_up_right,K_down_right,K_down_left ] = K_sym_separate( K_mat );
89
90 %% Pulling the walls
91 [ U_x,U_y,~,~,~,~ ] = pulling_walls( zeros(n),zeros(n),zeros(n), zeros(n), wall_displacement,wall_speed
    ,delta_t_pulling_walls,alpha_pulling_walls,beta_pulling_walls,cluster,K_mat,m_mat,
    live_plot_pulling_walls,X,Y,a,[35 35],window_center, window_range );
92
93 %% Relaxation of the network %%
94 [ U_x_relaxed,U_y_relaxed,U_p_x_relaxed,U_p_y_relaxed,~,~,~ ] = relaxation( U_x,U_y,zeros(n,n), zeros(n,n)
    ), wall_displacement,duration_relaxation,delta_t_relaxation,alpha_relaxation,beta_relaxation,cluster,
    K_mat,m_mat,live_plot_relaxation,X,Y,a,[35 35],window_center, window_range);

```

A.5 Création de la matrice d'adjacence

La fonction `K_mat_create.m` permet de créer une matrice d'adjacence, i.e. la matrice K de terme générale (k_{ij}) , où k_{ij} est la raideur du ressort reliant les masses i et j .

Si le réseau est de dimension n sites \times n sites, la matrice K est de dimension $n^2 \times n^2$, puisque chaque ligne i correspond à un site du réseau et indique quelles masses sont connectées au site i . Par définition, $k_{ij} = k_{ji}$ pour tout indice i et j , et la matrice K est donc symétrique. La distribution des raideurs est ici uniforme entre $K_0 - K_rand$ et $K_0 + K_rand$ (ligne 22). Pour chaque site p (ligne 19), on tire alors 8 valeurs aléatoires de raideurs (ligne 22), que l'on distribue aux 8 ressorts entourant le site, en n'oubliant pas de symétriser la matrice à chaque attribution d'une raideur (lignes 27 à 49).

Les fonctions `neighbour_down_left`, `neighbour_down`, etc. permettent simplement d'obtenir les indices des voisins d'un site p et ne sont pas montrés ici.

La sortie de la fonction est la matrice d'adjacence, notée K_sym .

```

1 function [ K_sym ] = K_mat_create( K0,K_rand,n )
2 % K_mat_create Creates an adjacency matrix for a 2D regular network of
3 % masses and uniformly distributed springs. Each mass is connected to its 8
4 % closest neighbours (North, South, East, West, NE, NW, SE, SW).
5
6 %% Input
7 % K0 is the mean of the spring distribution
8 % K_rand is the half-width of the distribution
9 % n is the lateral size of the network (n*n sites)
10
11 %% Output
12 % K_sym is a n*n columns and n*n rows matrix
13
14 %%
15 K_sym=zeros(n*n);
16
17 figure
18
19 for p=1:n*n %For each site
20     % Pick 8 random numbers uniformly distributed between K0-K_rand and
21     % K_0+K_rand
22     alea=K0+rand(8,1)*2*K_rand-K_rand;
23
24     % Distribute these numbers to the 8 springs and make sure that the
25     % adjacency matrix is symmetric
26     K_sym(p,neighbour_down_left(p,n))=alea(1);
27     K_sym(neighbour_down_left(p,n),p)=K_sym(p,neighbour_down_left(p,n));
28
29     K_sym(p,neighbour_down(p,n))=alea(2);
30     K_sym(neighbour_down(p,n),p)=K_sym(p,neighbour_down(p,n));
31
32     K_sym(p,neighbour_down_right(p,n))=alea(3);
33     K_sym(neighbour_down_right(p,n),p)=K_sym(p,neighbour_down_right(p,n));
34
35     K_sym(p,neighbour_right(p,n))=alea(4);
36     K_sym(neighbour_right(p,n),p)=K_sym(p,neighbour_right(p,n));
37
38     K_sym(p,neighbour_up_right(p,n))=alea(5);
39     K_sym(neighbour_up_right(p,n),p)=K_sym(p,neighbour_up_right(p,n));
40
41     K_sym(p,neighbour_up(p,n))=alea(6);
42     K_sym(neighbour_up(p,n),p)=K_sym(p,neighbour_up(p,n));
43
44     K_sym(p,neighbour_up_left(p,n))=alea(7);
45     K_sym(neighbour_up_left(p,n),p)=K_sym(p,neighbour_up_left(p,n));
46
47     K_sym(p,neighbour_left(p,n))=alea(8);
48     K_sym(neighbour_left(p,n),p)=K_sym(p,neighbour_left(p,n));
49 end
50 end

```

A.6 Calcul des longueurs des ressorts

Pour deux masses i et j reliées par un ressort, nous notons \mathbf{l}_{ij} le vecteur allant de la masse i à la masse j . Ce vecteur a pour longueur la longueur du ressort, et nous l'appelons « vecteur-longueur ».

Comme nous sommes partis d'un réseau carré et que nous avons organisé les grandeurs correspondantes à chacune des masses dans des matrices carrées de façon biunivoque, le calcul des vecteurs-longueurs des ressorts est très simple.

Rappelons que les déplacements $\mathbf{u}_n = u_n^x \mathbf{e}_x + u_n^y \mathbf{e}_y$ des masses sont pris par rapport à l'état du réseau non-tendu, de paramètre de maille a (qui est aussi la longueur à vide des ressorts). Si on note $\mathbf{l}_{n\swarrow}$, $\mathbf{l}_{n\downarrow}$, $\mathbf{l}_{n\searrow}$, $\mathbf{l}_{n\rightarrow}$ les vecteurs-longueurs d'une masse n des quatre ressorts allant dans les directions indiquées par les flèches en indices (figure A.1), on a alors

$$\begin{cases} \mathbf{l}_{n\swarrow} = \mathbf{u}_{n\swarrow} - \mathbf{u}_n - a\mathbf{e}_x - a\mathbf{e}_y & (\text{A.2}) \\ \mathbf{l}_{n\downarrow} = \mathbf{u}_{n\downarrow} - \mathbf{u}_n - a\mathbf{e}_y & (\text{A.3}) \\ \mathbf{l}_{n\searrow} = \mathbf{u}_{n\searrow} - \mathbf{u}_n + a\mathbf{e}_x - a\mathbf{e}_y & (\text{A.4}) \\ \mathbf{l}_{n\rightarrow} = \mathbf{u}_{n\rightarrow} - \mathbf{u}_n + a\mathbf{e}_x & (\text{A.5}) \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

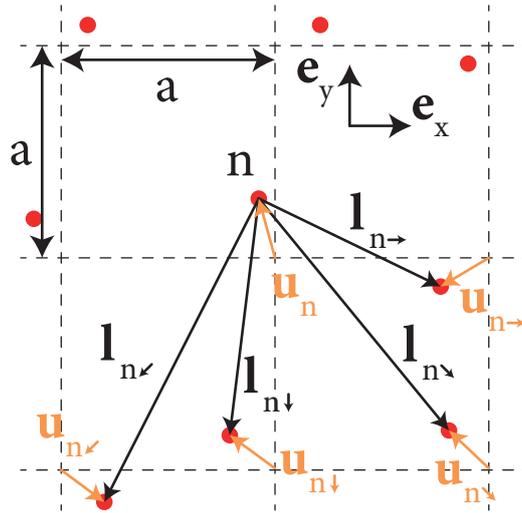


FIGURE A.1 – Définition des grandeurs. Les déplacements \mathbf{u} (en orange) des masses (en rouge) sont pris par rapport à l'état régulier du réseau (pointillés), de paramètre de maille a . Les vecteurs-longueurs \mathbf{l} (en noir) sont les vecteurs reliant les masses connectées, de longueurs les longueurs des ressorts.

Par ailleurs, nous ne calculons de façon explicite que la moitié des vecteurs-longueurs pour une masse donnée, puisque pour deux masses n et p connectées on a

$$\begin{cases} \mathbf{l}_{n\swarrow} = -\mathbf{l}_{p\nearrow} & (\text{A.7}) \\ \mathbf{l}_{n\downarrow} = -\mathbf{l}_{p\uparrow} & (\text{A.8}) \\ \mathbf{l}_{n\searrow} = -\mathbf{l}_{p\swarrow} & (\text{A.9}) \\ \mathbf{l}_{n\rightarrow} = -\mathbf{l}_{p\leftarrow} & (\text{A.10}) \end{cases}$$

```

1 function [ l_down_left_x, l_down_left_y ] = length_down_left(Ux,Uy,a)
2 %Returns matrices with the x and y components of the lengths vectors of 'left' springs
3 % a is the lattice parameter (distances between sites in the regular
4 % network, which is the reference state for the measure of displacements Ux and Uy)
5
6 l_down_left_x=circshift(Ux,[1,1])-Ux-a; % x components
7 l_down_left_y=circshift(Uy,[1,1])-Uy-a; % y components
8 end

```

```

1 function [ l_down_x,l_down_y ] = length_down(Ux,Uy,a)
2 %Returns matrices with the x and y components of the lengths vectors of 'down' springs
3 % a is the lattice parameter (distances between sites in the regular
4 % network, which is the reference state for the measure of displacements Ux and Uy)
5
6 l_down_x=circshift(Ux,[1,0])-Ux;
7 l_down_y=circshift(Uy,[1,0])-Uy-a;
8 end

```

```

1 function [ l_down_right_x,l_down_right_y ] = length_down_right(Ux,Uy,a)
2 %Returns matrices with the x and y components of the lengths vectors of 'down-right' springs
3 % a is the lattice parameter (distances between sites in the regular
4 % network, which is the reference state for the measure of displacements Ux and Uy)
5
6 l_down_right_x=circshift(Ux,[1,-1])-Ux+a;
7 l_down_right_y=circshift(Uy,[1,-1])-Uy-a;
8 end

```

```

1 function [ l_right_x,l_right_y ] = length_right(Ux,Uy,a)
2 %Returns matrices with the x and y components of the lengths vectors of 'right' springs
3 % a is the lattice parameter (distances between sites in the regular
4 % network, which is the reference state for the measure of displacements Ux and Uy)
5
6 l_right_x=circshift(Ux,[0,-1])-Ux+a;
7 l_right_y=circshift(Uy,[0,-1])-Uy;
8 end

```

Calcul des modes propres d'un système masses-ressorts désordonné en géométrie quelconque

B.1 Mise sous la forme d'un système linéaire

On se donne un réseau quelconque de masses reliées par des ressorts linéaires, en dimension quelconque. Pour deux masses m_n et m_p , on appelle k_{np} la raideur du ressort qui les relie et l_{np}^0 sa longueur à vide. Pour toute masse n , on note V_n l'ensemble des masses liées à la masse n (on considère que la masse n n'est pas reliée à elle-même, i.e. $n \notin V_n$).

On tend ensuite le réseau (réseau en pointillés sur la figure B.1). Le ressort k_{np} se tend alors, pour prendre une longueur à l'équilibre notée l_{np}^{eq} (vecteur reliant la masse n à la masse p). On note ce réseau tendu et à l'équilibre \mathcal{R}^{eq} .

On émet ensuite une petite vibration dans \mathcal{R}^{eq} , qui se déforme alors (réseau en rouge sur la figure B.1). À l'instant t , on note ce réseau $\mathcal{R}(t)$. Le déplacement de la masse n , mesuré par rapport à la position à l'équilibre est noté \mathbf{u}_n . Le ressort reliant les masses n et p prend une nouvelle longueur, notée $l_{np}(t)$ (vecteur reliant la masse n à la masse p), abrégé en l_{np} dans la suite.

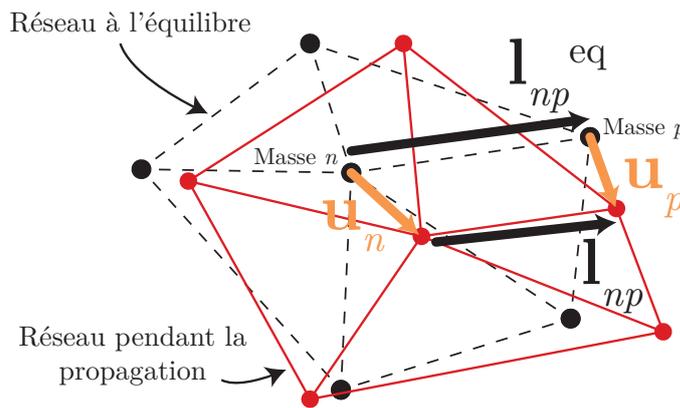


FIGURE B.1 – Définition des grandeurs. Les déplacements \mathbf{u} (en orange) des masses (en rouge) sont pris par rapport à l'état du réseau à l'équilibre (en pointillés). Les vecteurs-longueurs l (en noir) relient les masses connectées, de longueurs les longueurs des ressorts.

Pour toute masse n du réseau, on peut alors écrire :

$$m_n \ddot{\mathbf{u}}_n = \sum_{p \in V_n} k_{np} \left(\|l_{np}\| - \|l_{np}^0\| \right) \frac{l_{np}}{\|l_{np}\|} \quad (\text{B.1})$$

où la somme est prise sur toutes les masses reliées à la masse n et

$$l_{np} = l_{np}^{\text{eq}} + \mathbf{u}_p - \mathbf{u}_n. \quad (\text{B.2})$$

On a donc

$$\|\mathbf{l}_{np}\| = \sqrt{\mathbf{l}_{np} \cdot \mathbf{l}_{np}} \quad (\text{B.3})$$

$$= \sqrt{\|\mathbf{l}_{np}^{\text{eq}}\|^2 + 2\mathbf{l}_{np}^{\text{eq}} \cdot (\mathbf{u}_p - \mathbf{u}_n) + \|\mathbf{u}_p - \mathbf{u}_n\|^2} \quad (\text{B.4})$$

$$= \|\mathbf{l}_{np}^{\text{eq}}\| \sqrt{1 + 2 \frac{\mathbf{l}_{np}^{\text{eq}} \cdot (\mathbf{u}_p - \mathbf{u}_n)}{\|\mathbf{l}_{np}^{\text{eq}}\|^2} + \frac{\|\mathbf{u}_p - \mathbf{u}_n\|^2}{\|\mathbf{l}_{np}^{\text{eq}}\|^2}}. \quad (\text{B.5})$$

$$(\text{B.6})$$

Or si l'on a des petites oscillations,

$$\|\mathbf{u}_n\|, \|\mathbf{u}_p\| \ll \|\mathbf{l}_{np}^{\text{eq}}\| \quad (\text{B.7})$$

et donc à l'ordre 1 :

$$\|\mathbf{l}_{np}\| \approx \|\mathbf{l}_{np}^{\text{eq}}\| \left(1 + \frac{\mathbf{l}_{np}^{\text{eq}} \cdot (\mathbf{u}_p - \mathbf{u}_n)}{\|\mathbf{l}_{np}^{\text{eq}}\|^2} \right). \quad (\text{B.8})$$

De plus, on en déduit :

$$\frac{1}{\|\mathbf{l}_{np}\|} \approx \frac{1}{\|\mathbf{l}_{np}^{\text{eq}}\|} \left(1 - \frac{\mathbf{l}_{np}^{\text{eq}} \cdot (\mathbf{u}_p - \mathbf{u}_n)}{\|\mathbf{l}_{np}^{\text{eq}}\|^2} \right). \quad (\text{B.9})$$

$$(\text{B.10})$$

L'équation de la dynamique donne donc :

$$m_n \ddot{\mathbf{u}}_n \approx \sum_{p \in V_n} k_{np} \left(\|\mathbf{l}_{np}^{\text{eq}}\| - \|\mathbf{l}_{np}^0\| + \frac{\mathbf{l}_{np}^{\text{eq}} \cdot (\mathbf{u}_p - \mathbf{u}_n)}{\|\mathbf{l}_{np}^{\text{eq}}\|} \right) \frac{1}{\|\mathbf{l}_{np}^{\text{eq}}\|} \left(1 - \frac{\mathbf{l}_{np}^{\text{eq}} \cdot (\mathbf{u}_p - \mathbf{u}_n)}{\|\mathbf{l}_{np}^{\text{eq}}\|^2} \right) \left[\mathbf{l}_{np}^{\text{eq}} + \mathbf{u}_p - \mathbf{u}_n \right]. \quad (\text{B.11})$$

Ce produit conduit à des termes d'ordre 0, 1, 2 et 3 en u_n et u_p . Nous nous limitons ici aux termes d'ordre 0 et 1.

Ensuite, cette équation devant être vraie pour toutes valeurs petites de \mathbf{u}_n et \mathbf{u}_p , elle doit en particulier être vraie pour $\mathbf{u}_n = \vec{0}$ et $\mathbf{u}_p = \vec{0}$. Cela mène à l'annulation du terme d'ordre 0 :

$$0 \approx \sum_{p \in V_n} k_{np} \left(\|\mathbf{l}_{np}^{\text{eq}}\| - \|\mathbf{l}_{np}^0\| \right) \frac{1}{\|\mathbf{l}_{np}^{\text{eq}}\|} \mathbf{l}_{np}^{\text{eq}}. \quad (\text{B.12})$$

Cette équation traduit physiquement le fait que pour toute masse n , la somme des forces s'appliquant dessus est nulle lorsqu'il n'y a pas de vibration (réseau à l'équilibre).

Nous pouvons donc nous limiter à l'écriture des termes du premier ordre dans l'expression de la force totale s'exerçant sur la masse n :

$$m_n \ddot{\mathbf{u}}_n \approx \sum_{p \in V_n} k_{np} \left[1 - \frac{\|\mathbf{l}_{np}^0\|}{\|\mathbf{l}_{np}^{\text{eq}}\|} \right] (\mathbf{u}_p - \mathbf{u}_n) + k_{np} \left[\frac{\|\mathbf{l}_{np}^0\|}{\|\mathbf{l}_{np}^{\text{eq}}\|^3} (\mathbf{u}_p - \mathbf{u}_n) \cdot \mathbf{l}_{np}^{\text{eq}} \right] \mathbf{l}_{np}^{\text{eq}}. \quad (\text{B.13})$$

Ce système d'équations est linéaire en les \mathbf{u}_n , et on va donc pouvoir en chercher ses modes propres en le mettant sous une forme matricielle. Notons au passage que le raisonnement que nous avons suivi ne dépend pas de la topologie du réseau ni de sa dimension.

Remarque : On vérifie que si le réseau n'est pas tendu (on a alors $\mathbf{l}_{np}^{\text{eq}} = \mathbf{l}_{np}^0$), on retrouve l'équation classique

$$m_n \ddot{\mathbf{u}}_n \approx \sum_{p \in V_n} k_{np} \left[(\mathbf{u}_p - \mathbf{u}_n) \cdot \frac{\mathbf{l}_{np}^{\text{eq}}}{\|\mathbf{l}_{np}^{\text{eq}}\|} \right] \frac{\mathbf{l}_{np}^{\text{eq}}}{\|\mathbf{l}_{np}^{\text{eq}}\|}. \quad (\text{B.14})$$

Remarque : Si le réseau à l'équilibre est porté par des axes orthogonaux et que les masses sont reliées par des ressorts suivant ces axes (que nous indiquons $\leftarrow, \rightarrow, \uparrow, \downarrow$ – en considérant un cas bidimensionnel pour alléger les écritures), on retrouve que les déplacements selon ces deux axes sont indépendants. En effet, si nous notons \mathbf{e}_x et \mathbf{e}_y les vecteurs unitaires de ces axes, on obtient pour la masse n l'équation du déplacement selon l'axe x :

$$m_n \ddot{u}_n^x \approx k_{n\leftarrow} \left[1 - \frac{\|\mathbf{l}_{n\leftarrow}^0\|}{\|\mathbf{l}_{n\leftarrow}^{\text{eq}}\|} \right] (u_{\leftarrow}^x - u_n^x) + k_{n\leftarrow} \left[\frac{\|\mathbf{l}_{n\leftarrow}^0\|}{\|\mathbf{l}_{n\leftarrow}^{\text{eq}}\|^3} (\mathbf{u}_{\leftarrow} - \mathbf{u}_n) \cdot \mathbf{l}_{n\leftarrow}^{\text{eq}} \right] \mathbf{l}_{n\leftarrow}^{\text{eq}} \cdot \mathbf{e}_x \quad (\text{B.15})$$

$$+ k_{n\rightarrow} \left[1 - \frac{\|\mathbf{l}_{n\rightarrow}^0\|}{\|\mathbf{l}_{n\rightarrow}^{\text{eq}}\|} \right] (u_{\rightarrow}^x - u_n^x) + k_{n\rightarrow} \left[\frac{\|\mathbf{l}_{n\rightarrow}^0\|}{\|\mathbf{l}_{n\rightarrow}^{\text{eq}}\|^3} (\mathbf{u}_{\rightarrow} - \mathbf{u}_n) \cdot \mathbf{l}_{n\rightarrow}^{\text{eq}} \right] \mathbf{l}_{n\rightarrow}^{\text{eq}} \cdot \mathbf{e}_x \quad (\text{B.16})$$

$$+ k_{n\uparrow} \left[1 - \frac{\|\mathbf{l}_{n\uparrow}^0\|}{\|\mathbf{l}_{n\uparrow}^{\text{eq}}\|} \right] (u_{\uparrow}^x - u_n^x) + k_{n\uparrow} \left[\frac{\|\mathbf{l}_{n\uparrow}^0\|}{\|\mathbf{l}_{n\uparrow}^{\text{eq}}\|^3} (\mathbf{u}_{\uparrow} - \mathbf{u}_n) \cdot \mathbf{l}_{n\uparrow}^{\text{eq}} \right] \mathbf{l}_{n\uparrow}^{\text{eq}} \cdot \mathbf{e}_x \quad (\text{B.17})$$

$$+ k_{n\downarrow} \left[1 - \frac{\|\mathbf{l}_{n\downarrow}^0\|}{\|\mathbf{l}_{n\downarrow}^{\text{eq}}\|} \right] (u_{\downarrow}^x - u_n^x) + k_{n\downarrow} \left[\frac{\|\mathbf{l}_{n\downarrow}^0\|}{\|\mathbf{l}_{n\downarrow}^{\text{eq}}\|^3} (\mathbf{u}_{\downarrow} - \mathbf{u}_n) \cdot \mathbf{l}_{n\downarrow}^{\text{eq}} \right] \mathbf{l}_{n\downarrow}^{\text{eq}} \cdot \mathbf{e}_x \quad (\text{B.18})$$

or dans ce cas précis, les ressorts à l'équilibre sont alignés avec les axes x et y donc on a

$$\begin{cases} \mathbf{l}_{n\leftarrow}^{\text{eq}} = l_{n\leftarrow}^{\text{eq}} \mathbf{e}_x & (\text{B.19}) \\ \mathbf{l}_{n\rightarrow}^{\text{eq}} = l_{n\rightarrow}^{\text{eq}} \mathbf{e}_x & (\text{B.20}) \\ \mathbf{l}_{n\uparrow}^{\text{eq}} = l_{n\uparrow}^{\text{eq}} \mathbf{e}_y & (\text{B.21}) \\ \mathbf{l}_{n\downarrow}^{\text{eq}} = l_{n\downarrow}^{\text{eq}} \mathbf{e}_y & (\text{B.22}) \end{cases}$$

(noter que $l_{n\leftarrow}^{\text{eq}} < 0$ et $l_{n\downarrow}^{\text{eq}} < 0$)
et donc l'équation se simplifie en

$$m_n \ddot{u}_n^x \approx k_{n\leftarrow} \left[1 - \frac{\|\mathbf{l}_{n\leftarrow}^0\|}{\|\mathbf{l}_{n\leftarrow}^{\text{eq}}\|} \right] (u_{\leftarrow}^x - u_n^x) + k_{n\leftarrow} \left[\frac{\|\mathbf{l}_{n\leftarrow}^0\|}{\|\mathbf{l}_{n\leftarrow}^{\text{eq}}\|^3} (\mathbf{u}_{\leftarrow} - \mathbf{u}_n) \cdot \mathbf{l}_{n\leftarrow}^{\text{eq}} \right] \mathbf{l}_{n\leftarrow}^{\text{eq}} \cdot \mathbf{e}_x \quad (\text{B.23})$$

$$+ k_{n\rightarrow} \left[1 - \frac{\|\mathbf{l}_{n\rightarrow}^0\|}{\|\mathbf{l}_{n\rightarrow}^{\text{eq}}\|} \right] (u_{\rightarrow}^x - u_n^x) + k_{n\rightarrow} \left[\frac{\|\mathbf{l}_{n\rightarrow}^0\|}{\|\mathbf{l}_{n\rightarrow}^{\text{eq}}\|^3} (\mathbf{u}_{\rightarrow} - \mathbf{u}_n) \cdot \mathbf{l}_{n\rightarrow}^{\text{eq}} \right] \mathbf{l}_{n\rightarrow}^{\text{eq}} \cdot \mathbf{e}_x \quad (\text{B.24})$$

$$+ k_{n\uparrow} \left[1 - \frac{\|\mathbf{l}_{n\uparrow}^0\|}{\|\mathbf{l}_{n\uparrow}^{\text{eq}}\|} \right] (u_{\uparrow}^x - u_n^x) + k_{n\downarrow} \left[1 - \frac{\|\mathbf{l}_{n\downarrow}^0\|}{\|\mathbf{l}_{n\downarrow}^{\text{eq}}\|} \right] (u_{\downarrow}^x - u_n^x) \quad (\text{B.25})$$

soit

$$m_n \ddot{u}_n^x \approx k_{n\leftarrow} \left[1 - \frac{\|\mathbf{l}_{n\leftarrow}^0\|}{\|\mathbf{l}_{n\leftarrow}^{\text{eq}}\|} \right] (u_{\leftarrow}^x - u_n^x) + k_{n\leftarrow} \left[\frac{\|\mathbf{l}_{n\leftarrow}^0\|}{\|\mathbf{l}_{n\leftarrow}^{\text{eq}}\|} (u_{\leftarrow}^x - u_n^x) \right] \quad (\text{B.26})$$

$$+ k_{n\rightarrow} \left[1 - \frac{\|\mathbf{l}_{n\rightarrow}^0\|}{\|\mathbf{l}_{n\rightarrow}^{\text{eq}}\|} \right] (u_{\rightarrow}^x - u_n^x) + k_{n\rightarrow} \left[\frac{\|\mathbf{l}_{n\rightarrow}^0\|}{\|\mathbf{l}_{n\rightarrow}^{\text{eq}}\|} (u_{\rightarrow}^x - u_n^x) \right] \quad (\text{B.27})$$

$$+ k_{n\uparrow} \left[1 - \frac{\|\mathbf{l}_{n\uparrow}^0\|}{\|\mathbf{l}_{n\uparrow}^{\text{eq}}\|} \right] (u_{\uparrow}^x - u_n^x) + k_{n\downarrow} \left[1 - \frac{\|\mathbf{l}_{n\downarrow}^0\|}{\|\mathbf{l}_{n\downarrow}^{\text{eq}}\|} \right] (u_{\downarrow}^x - u_n^x) \quad (\text{B.28})$$

et donc au final

$$m_n \ddot{u}_n^x \approx k_{n\leftarrow} (u_{\leftarrow}^x - u_n^x) + k_{n\rightarrow} (u_{\rightarrow}^x - u_n^x) \quad (\text{B.29})$$

$$+ k_{n\uparrow} \left[1 - \frac{\|\mathbf{l}_{n\uparrow}^0\|}{\|\mathbf{l}_{n\uparrow}^{\text{eq}}\|} \right] (u_{\uparrow}^x - u_n^x) + k_{n\downarrow} \left[1 - \frac{\|\mathbf{l}_{n\downarrow}^0\|}{\|\mathbf{l}_{n\downarrow}^{\text{eq}}\|} \right] (u_{\downarrow}^x - u_n^x) \quad (\text{B.30})$$

On constate alors effectivement que cette équation ne fait pas intervenir les composantes des déplacements selon y .

Le même raisonnement est bien sûr valable pour l'autre axe, et au final, on vérifie donc que les déplacements selon les axes x et y sont totalement indépendants.

B.1.1 Un cas particulier

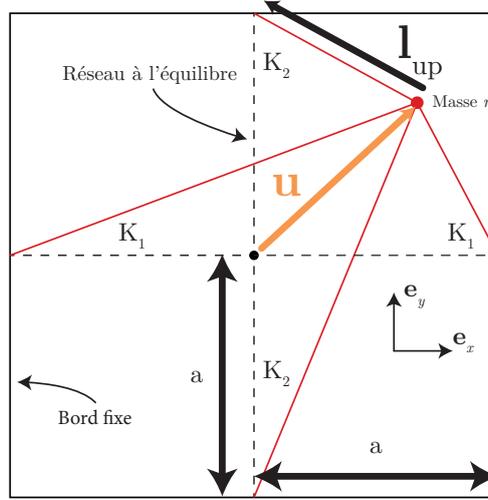


FIGURE B.2 – Définition des grandeurs. Le déplacement de la masse est ici exagérée pour la clarté mais reste petit devant a .

On considère la configuration de la figure B.2 dans laquelle une unique masse est placée au centre d'un domaine carré fixe. On se restreint ici au mouvement dans le plan du carré. La masse est attachée aux milieux des quatre bords du domaine par deux ressorts horizontaux de raideur K_1 et deux ressorts verticaux de raideurs K_2 . On considère ici un système tendu, avec les longueurs des ressorts à l'équilibre notées a , et les longueurs à vide notées a_0 . On s'intéresse toujours aux oscillations $\mathbf{u} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$ petites devant les longueurs des ressorts à l'équilibre. Pour se rapporter au formalisme précédent, on peut voir ce cas comme cinq masses, dont quatre sont fixes (les points d'attache des ressorts aux bords).

On va montrer que dans le cas tendu, la raideur des ressorts verticaux intervient dans le déplacement horizontal de la masse, alors que ça n'est pas le cas dans le cas non-tendu.

Pour cela, on s'intéresse uniquement à la force \mathbf{F} qu'exerce le ressort du haut sur la masse et on va montrer que sa projection horizontale est non-nulle si le système est tendu.

On a

$$\mathbf{F} = K_2 (||\mathbf{l}_{\text{up}}|| - a_0) \frac{\mathbf{l}_{\text{up}}}{||\mathbf{l}_{\text{up}}||} \quad (\text{B.31})$$

or

$$\mathbf{l}_{\text{up}} = -\mathbf{u} + a\mathbf{e}_y \quad (\text{B.32})$$

$$= -x\mathbf{e}_x - y\mathbf{e}_y + a\mathbf{e}_y \quad (\text{B.33})$$

Donc

$$||\mathbf{l}_{\text{up}}|| = \sqrt{x^2 + (a - y)^2} \quad (\text{B.34})$$

$$= \sqrt{a^2x^2 + y^2 - 2ay} \quad (\text{B.35})$$

$$= a\sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{a^2} - 2\frac{y}{a}}. \quad (\text{B.36})$$

Mais comme les oscillations sont petites, $y \ll a$, et donc à l'ordre 1 :

$$||\mathbf{l}_{\text{up}}|| \approx a - y \quad (\text{B.37})$$

et

$$\frac{1}{\|\mathbf{l}_{\text{up}}\|} \approx \frac{1}{a} (1 + y/a). \quad (\text{B.38})$$

Ainsi, on a

$$\mathbf{F} \approx K_2(a - a_0 - y) \frac{1}{a} (1 + y/a) (-\mathbf{u} + a\mathbf{e}_y). \quad (\text{B.39})$$

Cette expression contient des termes d'ordre 0, 1, 2 et 3 en x et y , et on ne s'intéresse ici qu'aux termes d'ordre 0 et 1. On a donc à l'ordre 1 (après simplifications) :

$$\mathbf{F} \approx \underbrace{K_2(a - a_0)\mathbf{e}_y}_{\text{Ordre 0}} - \underbrace{K_2\left(1 - \frac{a_0}{a}\right)x\mathbf{u}_x}_{\text{Ordre 1}} - \underbrace{K_2y\mathbf{e}_y}_{\text{Ordre 1}}. \quad (\text{B.40})$$

Le terme d'ordre 0 va s'annuler avec celui du ressort du bas (non écrit ici), mais on constate que le ressort du *haut* induit toujours une force *horizontale* proportionnelle à x lorsqu'il y a de la tension ($a_0 \neq a$). Cette force correspond précisément à la projection de la pré-contrainte (constante) sur l'axe x .

En revanche, dès que la tension est nulle ($a_0 = a$), ce terme dû à la pré-contrainte disparaît et la force du ressort est alors intégralement portée par \mathbf{e}_y et donc les ressorts verticaux n'ont aucune influence sur le mouvement horizontal.

B.2 Mise sous la forme d'un système matriciel

On revient maintenant au cas d'un réseau quelconque (équation (B.13)), mais à deux dimensions. On considère une base orthonormée directe $(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$.

On pose $\forall n, p$:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_n = u_n^x \mathbf{e}_x + u_n^y \mathbf{e}_y \\ \mathbf{l}_{np}^{\text{eq}} = l_{np}^{\text{eq},x} \mathbf{e}_x + l_{np}^{\text{eq},y} \mathbf{e}_y \end{cases} \quad (\text{B.41})$$

$$\quad (\text{B.42})$$

L'équation (B.13) projetée sur \mathbf{e}_x et \mathbf{e}_y donne alors :

$$\begin{cases} m_n \ddot{u}_n^x \approx \sum_{p \in V_n} k_{np} \left[1 - \frac{\|\mathbf{l}_{np}^0\|}{\|\mathbf{l}_{np}^{\text{eq}}\|} \right] (u_p^x - u_n^x) + k_{np} \frac{\|\mathbf{l}_{np}^0\|}{\|\mathbf{l}_{np}^{\text{eq}}\|^3} \left[(u_p^x - u_n^x) l_{np}^{\text{eq},x} + (u_p^y - u_n^y) l_{np}^{\text{eq},y} \right] l_{np}^{\text{eq},x} \\ m_n \ddot{u}_n^y \approx \sum_{p \in V_n} k_{np} \left[1 - \frac{\|\mathbf{l}_{np}^0\|}{\|\mathbf{l}_{np}^{\text{eq}}\|} \right] (u_p^y - u_n^y) + k_{np} \frac{\|\mathbf{l}_{np}^0\|}{\|\mathbf{l}_{np}^{\text{eq}}\|^3} \left[(u_p^x - u_n^x) l_{np}^{\text{eq},x} + (u_p^y - u_n^y) l_{np}^{\text{eq},y} \right] l_{np}^{\text{eq},y}. \end{cases} \quad (\text{B.43})$$

$$\quad (\text{B.44})$$

En réarrangeant les termes, on obtient :

$$\begin{cases} \ddot{u}_n^x \approx \sum_{p \in V_n} \frac{k_{np}}{m_n} \left(\left[1 - \frac{\|\mathbf{l}_{np}^0\|}{\|\mathbf{l}_{np}^{\text{eq}}\|} \right] + \frac{\|\mathbf{l}_{np}^0\|}{\|\mathbf{l}_{np}^{\text{eq}}\|^3} (l_{np}^{\text{eq},x})^2 \right) (u_p^x - u_n^x) + \frac{k_{np}}{m_n} \frac{\|\mathbf{l}_{np}^0\|}{\|\mathbf{l}_{np}^{\text{eq}}\|^3} l_{np}^{\text{eq},x} l_{np}^{\text{eq},y} (u_p^y - u_n^y) \\ \ddot{u}_n^y \approx \sum_{p \in V_n} \frac{k_{np}}{m_n} \left(\left[1 - \frac{\|\mathbf{l}_{np}^0\|}{\|\mathbf{l}_{np}^{\text{eq}}\|} \right] + \frac{\|\mathbf{l}_{np}^0\|}{\|\mathbf{l}_{np}^{\text{eq}}\|^3} (l_{np}^{\text{eq},y})^2 \right) (u_p^y - u_n^y) + \frac{k_{np}}{m_n} \frac{\|\mathbf{l}_{np}^0\|}{\|\mathbf{l}_{np}^{\text{eq}}\|^3} l_{np}^{\text{eq},x} l_{np}^{\text{eq},y} (u_p^x - u_n^x). \end{cases} \quad (\text{B.45})$$

$$(\text{B.46})$$

Bien sûr, on constate que ces équations sont identiques si l'on remplace x par y , puisque ces axes ont été nommés de façon arbitraire. De plus, on retrouve ce que nous avons déjà constaté : si les ressorts tous portés par les axes x et y , alors le produit $l_{np}^{\text{eq},x} l_{np}^{\text{eq},y}$ est toujours nul, et donc l'équation sur x ne fait pas intervenir les déplacements sur y , et l'équation sur y ne fait pas intervenir les déplacements sur l'axe x .

Introduisons alors quelques notations pour simplifier les écritures. Tout d'abord, pour des masses n et p reliées ($p \in V_n$), on note :

$$\alpha_{np} = \frac{k_{np}}{m_n} \left(\left[1 - \frac{\|\mathbf{l}_{np}^0\|}{\|\mathbf{l}_{np}^{\text{eq}}\|} \right] + \frac{\|\mathbf{l}_{np}^0\|}{\|\mathbf{l}_{np}^{\text{eq}}\|^3} (l_{np}^{\text{eq},x})^2 \right) \quad (\text{B.47})$$

$$\beta_{np} = \frac{k_{np}}{m_n} \left(\left[1 - \frac{\|\mathbf{l}_{np}^0\|}{\|\mathbf{l}_{np}^{\text{eq}}\|} \right] + \frac{\|\mathbf{l}_{np}^0\|}{\|\mathbf{l}_{np}^{\text{eq}}\|^3} (l_{np}^{\text{eq},y})^2 \right) \quad (\text{B.48})$$

$$\gamma_{np} = \frac{k_{np}}{m_n} \frac{\|\mathbf{l}_{np}^0\|}{\|\mathbf{l}_{np}^{\text{eq}}\|^3} l_{np}^{\text{eq},x} l_{np}^{\text{eq},y}. \quad (\text{B.49})$$

Si les masses n et p ne sont pas reliées et sont distinctes ($p \notin V_n$ et $p \neq n$), on pose :

$$\begin{cases} \alpha_{np} = 0 & (\text{B.50}) \\ \beta_{np} = 0 & (\text{B.51}) \\ \gamma_{np} = 0. & (\text{B.52}) \end{cases}$$

Ensuite, on pose pour toute masse n :

$$\alpha_{nn} = - \sum_{p \in V_n} \alpha_{np} \quad (\text{B.53})$$

$$\beta_{nn} = - \sum_{p \in V_n} \beta_{np} \quad (\text{B.54})$$

$$\gamma_{nn} = - \sum_{p \in V_n} \gamma_{np}. \quad (\text{B.55})$$

De cette façon, on vient de définir trois matrices $A = (\alpha_{ij})$, $B = (\beta_{ij})$ et $\Gamma = (\gamma_{ij})$ symétriques de taille $N \times N$ (où N désigne le nombre de masses total dans le réseau), et on peut mettre le système linéaire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \ddot{u}_n^x \approx \sum_{p=1}^N \alpha_{np} u_p^x + \gamma_{np} u_p^y & (\text{B.56}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{u}_n^y \approx \sum_{p=1}^N \beta_{np} u_p^y + \gamma_{np} u_p^x. & (\text{B.57}) \end{cases}$$

Constater ici que le fait d'avoir posé les équations (B.50), (B.51), (B.52) permet de faire courir les sommes sur toutes les masses du réseau.

$$\boxed{DU = -\omega^2 U} \quad (\text{B.66})$$

et on constate alors que U est vecteur propre de la matrice D pour la valeur propre $-\omega^2$.

Chercher les modes propres du système revient donc à chercher les vecteurs propres et valeurs propres de la matrice dynamique D .

B.3.1 Un premier exemple : modes longitudinaux dans une chaîne régulière

On se donne une chaîne unidimensionnelle de N masses selon l'axe (Ox) et on s'intéresse aux mouvements longitudinaux des masses. Dans cet exemple, les masses sont toutes égales à m et les ressorts ont tous la même constante de raideur k .

On retrouve alors la matrice dynamique D de taille $N \times N$ bien connue, indépendante de la tension de la chaîne :

$$D = A = \begin{pmatrix} -2\frac{k}{m} & \frac{k}{m} & 0 & 0 \\ \frac{k}{m} & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \frac{k}{m} \\ 0 & 0 & \frac{k}{m} & -2\frac{k}{m} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.67})$$

B.3.2 Un deuxième exemple : modes transverses dans une chaîne régulière

On se donne maintenant une chaîne unidimensionnelle de N masses selon l'axe (Ox) et on s'intéresse aux mouvements transverses des masses (petites amplitudes). Dans cet exemple, les masses sont toutes égales à m et les ressorts ont tous la même constante de raideur k . On considère une chaîne tendue, avec une longueur à l'équilibre des ressort égale à a , et une longueur à vide égale à a_0 .

La matrice dynamique D est de taille $N \times N$ et vaut ici

$$D = B = \begin{pmatrix} -2\frac{k}{m} \left(1 - \frac{a_0}{a}\right) & \frac{k}{m} \left(1 - \frac{a_0}{a}\right) & 0 & 0 \\ \frac{k}{m} \left(1 - \frac{a_0}{a}\right) & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \frac{k}{m} \left(1 - \frac{a_0}{a}\right) \\ 0 & 0 & \frac{k}{m} \left(1 - \frac{a_0}{a}\right) & -2\frac{k}{m} \left(1 - \frac{a_0}{a}\right) \end{pmatrix}. \quad (\text{B.68})$$

On constate alors que les modes propres dépendent de la tension de la chaîne et que $B = \left(1 - \frac{a_0}{a}\right) A$, où A est la matrice dynamique du cas longitudinal avec le même réseau. Ainsi, on va retrouver les mêmes modes (vecteurs propres), mais avec des pulsations (valeurs propres) multipliées par $\sqrt{1 - a_0/a}$ par rapport au cas longitudinal :

$$\frac{\omega_{\text{long}}}{\omega_{\text{transv}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - a_0/a}}. \quad (\text{B.69})$$

B.3.3 Modes dans un réseau bi-dimensionnel désordonné

Nous considérons un réseau carré régulier bidimensionnel de paramètre de maille a_0 , de dimensions latérales 50 sites par 50 sites. En chaque site du réseau, nous plaçons avec une probabilité $p = 0.91$ des masses identiques ($m_n = 1$). Chaque masse est reliée à ses plus proches voisins, y compris les voisins diagonaux (8 au maximum) par des ressorts de raideurs $k_{np} = 1$ et de longueurs à vide $\|\mathbf{l}_{np}^0\| = a_0 = 1$. Le réseau est ensuite tendu de façon à appliquer une contrainte statique $\varepsilon = 0.2$ (le réseau a alors une taille latérale de $60a_0 \times 60a_0$). On laisse alors le réseau se relaxer (en ajoutant un peu de dissipation) un temps suffisamment long pour que les déplacements des masses soient d'amplitudes négligeables devant a_0 .

On obtient alors le réseau à l'équilibre (qui n'est plus tout à fait régulier), qui correspond au réseau que nous avons précédemment noté \mathcal{R}^{eq} . On peut donc déterminer les vecteurs $\mathbf{l}_{np}^{\text{eq}}$, et donc les composantes $l_{np}^{\text{eq},x}$ et $l_{np}^{\text{eq},y}$ et construire la matrice dynamique D (formule (B.59)). Les modes propres

du système sont alors donnés par les vecteurs propres de D , et les fréquences propres par ses valeurs propres (équation (B.66)).

La figure B.3 montre quelques modes. La première colonne présente pour chacun des modes présentés l'amplitude (vectorielle) de vibration en chaque site du réseau. La seconde colonne présente uniquement la composante selon l'axe x et la troisième colonne la composante selon l'axe y .

On peut de plus tracer la fréquence des modes en fonction du numéro des modes (figure B.4(a)), et en déduire la densité de modes en traçant l'histogramme correspondant (figure B.4(b)).

La densité présentée ici est à comparer à celle de la figure 3.23, en notant cependant deux différences dans les conditions du calcul : ici le réseau est de taille 50×50 (contre 70×70 pour la figure 3.23) et les ressorts ont tous la même raideur $k = 1$ (alors que la figure 3.23 correspond à une distribution uniforme entre 0.5 et 1.5). Nous retrouvons cependant la même variation, avec une fréquence maximale (fréquence de coupure) proche de $f = 0.5f_0$ (où $f_0 = \sqrt{k/m}$).

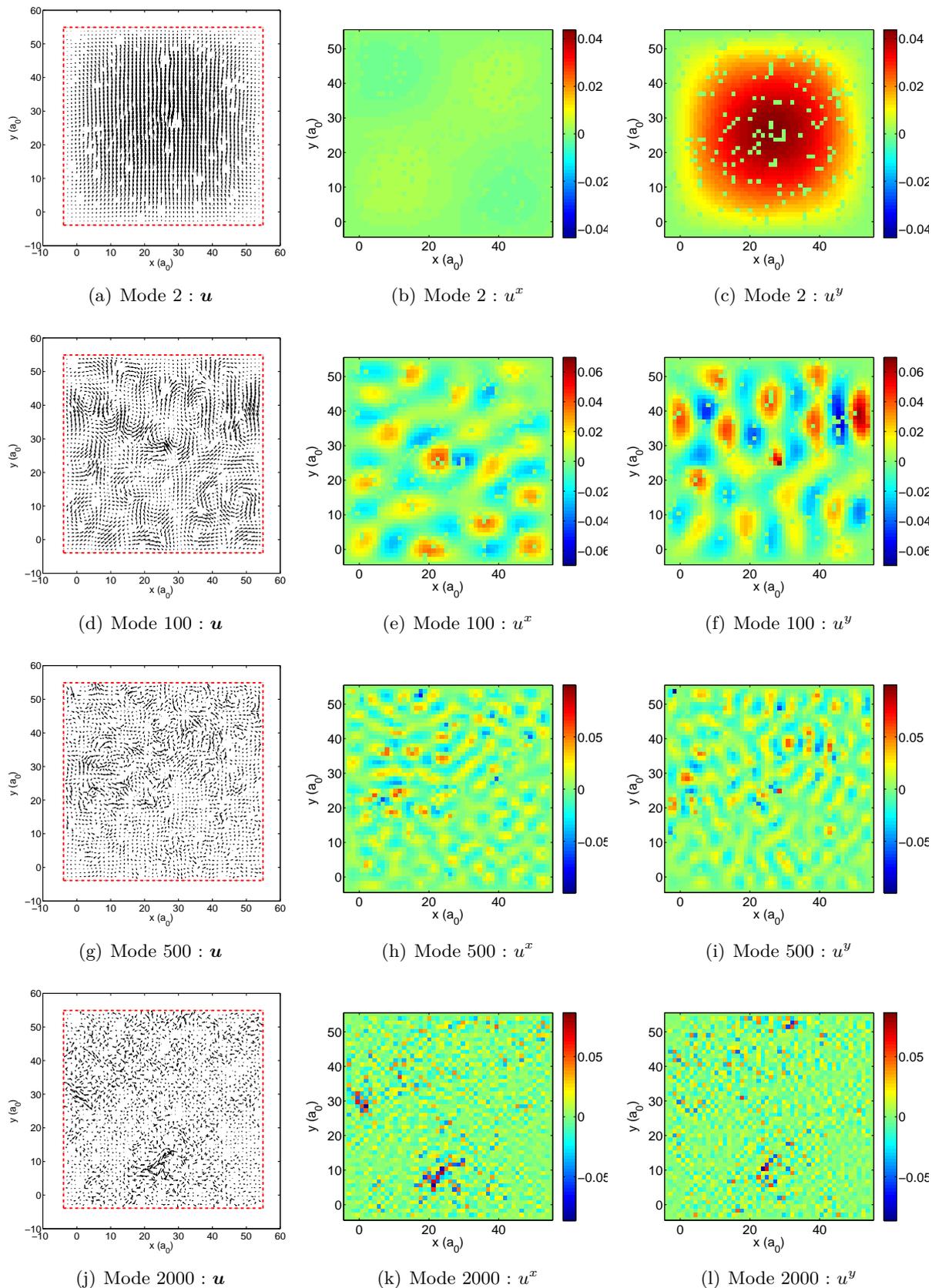


FIGURE B.3 – Quelques modes propres (vectoriels) d'un réseau désordonné. La percolation du réseau est ici $p = 0.91$.

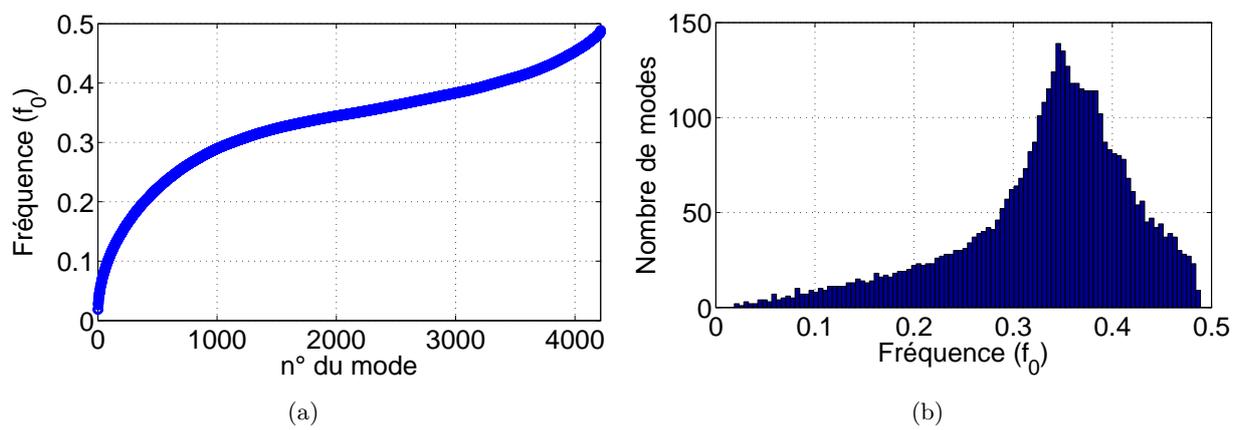


FIGURE B.4 – Fréquences des modes et densité de modes d'un réseau 2D désordonné, avec une percolation $p = 0.91$.

Résumé

Le retournement temporel (RT) est une méthode qui permet de faire revivre à une onde sa vie passée et de la faire ainsi reconverger sur la source qui lui a donné naissance. Au cours de cette thèse, nous avons étudié – expérimentalement et numériquement – le RT des ondes ultrasonores dans des milieux granulaires. En se propageant de grains en grains, les ondes ultrasonores fournissent une sonde unique du réseau hétérogène 3D des contacts. Pour des ondes se propageant en régime de diffusion multiple, nous montrons que la focalisation est globalement robuste mais toutefois sensible à des mouvements des grains à des échelles spatiales bien plus fines que la longueur d’onde. À cet égard, la propagation d’une onde ultrasonore à travers le réseau discret et métastable des contacts entre grains apparaît comme une situation intermédiaire entre l’instabilité du mouvement d’une particule dans un gaz de Lorentz et la propagation d’une onde ultrasonore dans une matrice homogène remplie d’obstacles diffusants. Lorsque l’amplitude de la source augmente, nous entrons dans un régime non-linéaire où l’onde elle-même provoque des réarrangements du milieu, ce qui conduit à la dégradation de la focalisation obtenue par retournement temporel de ladite onde. Celle-ci n’agit alors plus seulement comme une sonde, mais aussi comme une « pompe ». Enfin, nous montrons que le RT d’une onde de faible amplitude, mais allongée dans le temps par la diffusion multiple, peut être utilisé pour focaliser une onde de grande amplitude en un point du milieu et y déclencher ainsi de façon contrôlée des réarrangements irréversibles du réseau des contacts. L’ensemble de ces résultats est supporté par un modèle numérique vectoriel fondé sur un système masses-ressorts percolé bidimensionnel.

Abstract

Time reversal (TR) is a technique which gives the possibility to make a wave relive its life in reverse chronology, and to focus back to its source. In this thesis, TR of ultrasound in granular media has been investigated experimentally and numerically. By propagating from grain to grain, ultrasounds provide a unique probe of the heterogeneous 3D contact network. We show that for multiply scattered waves, the focusing is essentially robust but sensitive to displacements of grains on a scale much smaller than the wavelength. In this respect, the ultrasound propagation through the discrete and metastable contact network between the grains appears to represent an intermediary situation between the instability in the propagation of a particle in a Lorentz gas and the propagation of ultrasounds in an homogeneous medium filled with scatterers. When the source amplitude is increased, a non-linear regime is reached where the wave itself triggers rearrangements in the medium, thus degrading the quality of the TR focusing. In this regime, the wave acts not only as a probe, but also as a « pump ». Finally, we show that the TR of a small-amplitude multiply-scattered wave can be used to focus a high-amplitude wave in the medium and trigger in a controlled way irreversible rearrangements of the contact network. These results are supported by a vectorial numerical model based on a 2D percolated masses-springs network.