

Sur des problèmes de lubrification stationnaires et instationnaires non isothermes

Hanene Debbiche

▶ **To cite this version:**

Hanene Debbiche. Sur des problèmes de lubrification stationnaires et instationnaires non isothermes. Physique mathématique [math-ph]. Université de Lyon, 2016. Français. NNT : 2016LYSES027 . tel-01845063

HAL Id: tel-01845063
https://theses.hal.science/tel-01845063

Submitted on 20 Jul 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Institut Camille Jordan, UMR CNRS 5208
Université Jean Monnet, Saint-Étienne
École Doctorale Sciences, Ingénierie, Santé : ED SIS 488

Thèse de doctorat

Spécialité : **Mathématiques Appliquées**

Sur des problèmes de lubrification stationnaires et instationnaires non isothermes

---

Soutenue publiquement le 29 Juin 2016 par

Hanene DEBBICHE

Devant le Jury composé de :

Pr. Chérif AMROUCHE	Université de Pau et des Pays de l'Adour	Rapporteur
Pr. Grzegorz ŁUKASZEWICZ	Université de Varsovie	Rapporteur
Pr. Toufik SASSI	Université de Caen Normandie	Examinateur
Pr. Mircea SOFONEA	Université de Perpignan	Examinateur
Pr. Mahdi BOUKROUCHE	Université de Saint-Étienne	Directeur de thèse
Pr. Laetitia PAOLI	Université de Saint-Étienne	Co-directrice de thèse

À mes parents qui n'ont cessé de me combler par leur amour et leur tendresse.

*R*emerciements

Tout d'abord, je remercie Dieu qui m'a donné le courage, la volonté, l'espérance et la patience pour finaliser ce travail.

Je tiens à remercier très sincèrement mes directeurs de thèse Mr. Mahdi Boukrouche et Mme. Laetitia Paoli, Professeurs à l'université Jean Monnet de Saint Étienne, pour la confiance qu'ils m'ont accordé en acceptant d'encadrer ce travail de thèse, pour leurs multiples conseils, leurs encouragements et leur patience. Je leur suis reconnaissante d'avoir su rester très disponibles jusqu'à la fin de ma thèse, malgré une vie professionnelle chargée.

J'exprime ma profonde gratitude à Mr. Chérif Amrouche, Professeur à l'université de Pau et des Pays de l'Adour et Mr. Grzegorz Łukaszewicz, Professeur à l'université de Varsovie d'avoir accepté le rôle de rapporteur. D'autant que je ne leur ai pas rendu la tâche facile.

Je remercie très vivement Mr. Toufik Sassi, Professeur à l'université de Caen Normandie et Mr. Mircea Sofonea, Professeur à l'université de Perpignan d'avoir bien voulu me faire l'honneur de faire partie de mon jury de thèse.

Je tiens également à remercier mes collègues du bureau des doctorants Irina, Nohra et Clément et tous les membres du laboratoire ICJ de l'université Jean Monnet de Saint-Étienne.

Merci à mes amies Hanane, Imane Boussetouan, Zahraa et son marie Hassan, Messaouda, Fatima, Assia, Imane Reghioua qui m'ont soutenue et qui ont toujours cru en moi. Elles ont rendu ces trois années faciles à vivre et m'ont fait oublier la distance. Elles sont devenues ma deuxième famille.
Merci à tous les libanais que j'ai rencontrés à Saint-Étienne.

Je remercie l'État algérien qui a financé cette thèse. Merci à Mr. Selmani Larbi l'ancien Vice Recteur des Relations Extérieures de l'université Bordj Bou Arréridj et Mme. Seray pour leur aide.

J'ai gardé pour la fin ceux qui me sont les plus chers : mes parents Moussa et Khadidja, mes soeurs et mes frères Ahlem, Afaf, Fadhila, Khalil et Khier, ainsi que ma grand-mère Kafia et mon oncle Madani.

Résumé :

L'objectif de ce travail de thèse est d'étudier quelques problèmes elliptiques et paraboliques d'écoulement de fluides non-Newtoniens incompressibles et non isothermes gouvernés par l'équation aux dérivées partielles de Stokes avec la condition de Tresca sur une partie du bord quand la viscosité dépend à la fois de la température, de la vitesse et du module du tenseur des taux de déformations.
Dans le premier chapitre, on a fait une introduction générale.
Dans le deuxième chapitre, nous nous intéressons au couplage entre le système de Stokes et l'équation de la chaleur en régime stationnaire. On montre l'existence de la solution de l'inéquation variationnelle décrivant le sytème de Stokes pour une température donnée quand la viscosité dépend à la fois de la température, de la vitesse et du module du tenseur des taux de déformations en utilisant la méthode de monotonie pour la vitesse et le théorème de De Rham pour la pression. Dans un deuxième temps, on étudie l'existence et l'unicité de la température solution de l'équation de la chaleur avec un terme $L^1(\Omega)$ au second membre quand la viscosité dépend à la fois de la température, de la vitesse et du module du tenseur des taux de déformations. On montre ensuite l'existence de la solution du problème variationnel couplé avec la viscosité dépend de la température et du module du tenseur des taux de déformations, en utilisant le théorème de point fixe de Schauder.
Dans le troisième et le quatrième chapitre, on traite l'existence et l'unicité de la solution du sytème de Stokes en régime instationnaire quand la viscosité dépend de la température et du module du tenseur des taux de déformations dans les cas $p = 2$, $p > 2$ et $\frac{6}{5} < p < 2$ en utilisant la notion des semi-groupes et la méthode de monotonie pour la vitesse et le théorème de De Rham pour la pression. Par contre, lorsque la viscosité dépend de plus de la vitesse on obtient seulement l'existence par le théorème de point fixe de Schauder.

Mots-clés : Système de Stokes, la loi de Tresca, semi-groupes, théorème de point fixe de Schauder.

Abstract :

The objective of this thesis is to study some elliptic and parabolic problems of the non-Newtonian flow of an incompressible and non isothermal fluid governed by partial differential equation of Stokes with Tresca's condition on a part of the boundary when the fluid viscosity depends on temperature and also on the modulus of strain rate tensor and the velocity of the fluid.
In the first chapter, we did a general introduction.
In the second chapter, we consider the coupling between the Stokes system and the heat equation in steady state. We prove the existence of a solution of the variational inequality describing the Stokes system when the fluid viscosity depends on temperature and also on the modulus of strain rate tensor and the velocity of the fluid of a given temperature by using the monotony methods for the velocity and De Rham's theorem for the pressure. We study the existence and uniqueness of the temperature solution of the heat equation with $L^1(\Omega)$ term to the second member when the fluid viscosity depends on temperature and also on the modulus of strain rate tensor and the velocity of the fluid. We show the existence of a solution of the coupled variational problem when the fluid viscosity depends on temperature and also on the modulus of strain rate tensor by using Schauder fixed point theorem.
In the third and the fourth chapter, we treate the existence and uniqueness of a solution of the Stokes system in unsteady state when the fluid viscosity depends only on temperature and on the modulus of strain rate tensor in the cases $p = 2$, $p > 2$ and $\frac{6}{5} < p < 2$ by using the notion of semigroup and monotony methods for the velocity and De Rham's theorem for the pressure. However, when the fluid viscosity depends also on the velocity of the fluid we obtain only the existence by Schauder fixed point theorem.

Keywords : Stokes systems, Tresca's law, semigroup, Schauder fixed point theorem.

Table des matières

1 Introduction générale **9**

2 Problème couplé stationnaire **18**
2.1 Formulation variationnelle 22
2.2 Premier problème intermédiaire 28
2.2.1 Résultats préliminaires 29
2.2.2 Recherche de la pression 41
2.3 Second problème intermédiaire (cas $p > 3$) 44
2.3.1 Résultat d'existence (cas $1 < q < \frac{3}{2}$) 44
2.3.2 Résultat d'unicité (cas $1 < q < \frac{3}{2}$) 57
2.4 Étude du problème couplé (cas $1 < q < \frac{3}{2}$) 59

3 Problème d'écoulement instationnaire **83**
3.1 Position du problème 84
3.2 Formulation variationnelle 89
3.3 Résultats préliminaires 94
3.4 Problème intermédiaire 99
3.5 Résultat d'existence pour le problème $(\mathbf{P}_0)$ 100
3.6 Résultat d'existence et d'unicité pour le problème 3.2 115
3.6.1 Résultat d'existence 115
3.6.2 Résultat d'unicité 121
3.7 Recherche de la pression 123
3.8 Étude du problème dont la viscosité dépend de la vitesse . . . 134

4 Problème instationnaire généralisé **145**
4.1 Formulation variationnelle 150

4.2 Résultats préliminaires 153
4.3 Cas $p > 2$ 167
4.3.1 Problème intermédiaire 167
4.3.2 Résultat d'existence pour le problème $(\mathbf{P_f})$ 169
4.3.3 Résultat d'existence pour le problème 4.4 178
4.3.4 Résultat d'unicité pour le problème 4.4 185
4.3.5 Résultats d'existence pour le problème 4.3 187
4.4 Cas $\frac{6}{5} < p < 2$ 199
4.4.1 Résultat d'existence et d'unicité pour le problème $(\mathbf{P}^1_\varepsilon)$ 205
4.4.2 Estimations sur $\overline{v}_\varepsilon$ et π_ε 206
4.4.3 La limite du problème $(\mathbf{P}^2_\varepsilon)$ $\varepsilon \to 0$ 215
4.4.4 Résultats d'existence pour le problème 4.3 229
4.4.5 Résultat d'existence et d'unicité pour le problème 4.4 . 236
4.5 Étude du problème dont la viscosité dépend de la vitesse . . . 241

5 Rappels d'analyse fonctionnelle 258
5.1 Topologie faible 258
5.2 Espace fonctionnels 259
5.2.1 Les espaces $L^p(\Omega)$ 259
5.2.2 L'espace de Sobolev à valeurs réelles $W^{1,p}(\Omega)$ 263
5.2.3 L'espace $W^{1,p}_0(\Omega)$ 265
5.2.4 L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ 266
5.2.5 Espaces de Sobolev fractionnaires $W^{s,p}(\Omega)$ 267
5.2.6 Trace des fonctions des espaces de Sobolev 267
5.2.7 Espace de fonctions nulles sur une partie du bord de Ω 268
5.2.8 Les espaces $L^p(0,T;B)$ 273
5.2.9 Espaces de Sobolev à valeurs vectorielles 275
5.3 Inéquations Variationnelles Elliptiques 276
5.4 Semi groupes d'opérateurs 278
5.4.1 Générateur infinitésimal de semi-groupe 278
5.5 Opérateurs compacts 278

Conclusion et Perspectives 280

Bibliographie 289

Chapitre 1

Introduction générale

En 1822, le mathématicien Claude Louis Marie Henri Navier (1785 -1836) à la suite des travaux d'Euler, présente dans un rapport à l'Académie des Sciences, les équations générales du mouvement d'un fluide en tenant compte pour la première fois, du frottement intérieur du fluide, c'est-à-dire de la viscosité. Ces lois sont acceptées et utilisées par les ingénieurs et les physiciens et sont connues sous le nom d'équations de Navier-Stokes, car Stokes (1819 – 1903), le premier, les a intégrées dans différents cas relativement simples ([80], [38], [65]).

La résolution des équations de Navier-Stokes ou Stokes (quand le terme de convection est négligé) nécessite des conditions aux limites :
- Les conditions aux limites de non-glissement (par exemple les conditions aux limites de type Dirichlet pour le champ de vitesse) sont des hypothèses fondamentales et sont généralement acceptées en mécanique des fluides avec un fort soutien expérimental, les premiers expérimentateurs n'ayant pas observé de glissement de liquides à la frontière de la surface solide ;
- Les conditions aux limites de glissement : le fluide ne peut traverser la surface solide. Sa vitesse est forcément nulle dans la direction perpendiculaire à la surface. En revanche, elle n'est pas forcément nulle dans les directions tangentielles. En toute rigueur, il y a toujours un glissement ([68], [69], [79], [35], [67]).

Le glissement du fluide à la paroi du solide peut être sans frottement ainsi qu'avec frottement en fonction du système de fluide-solide et des conditions ambiantes ([7], [47]). La nature du frottement à la paroi doit être fortement liée au type de glissement [32] (pour plus de détails sur les aspects physiques du phénomène de glissement, voir [68], [74], [82] et [63]) et peut être modélisé par des différentes lois de frottement. En effet, en 1827, C.L. Navier [62] a proposé une condition dite de glissement avec frottement à la paroi qui permet de prendre en compte le glissement du fluide près du bord et de mesurer l'effet du frottement en considérant la composante tangentielle du tenseur des contraintes proportionnelle à la composante tangentielle du champ de vitesse.
Dans [31] on trouve d'autres types des lois de frottement :
- La loi de Tresca : lorsque le fluide et le solide sont en contact, l'effort tangentiel ne peut pas dépasser un certain seuil appelé le seuil de frottement qui est supposé connu et qui ne dépend pas de la contrainte normale.
1) Lorsque la composante tangentielle du tenseur des contraintes atteint le seuil de frottement, le fluide et la surface se déplacent tangentiellement l'une par rapport à l'autre et il y a glissement. La contrainte tangentielle s'oppose à la vitesse.
2) Lorsque la composante tangentielle du tenseur des contraintes n'atteint pas le seuil de frottement, le fluide se déforme sans couler la paroi (il n'y a pas de glissement le long de la paroi) et la vitesse du fluide est égale à la vitesse de cisaillement de la paroi.
- La loi de Coulomb : cette loi introduit la dépendance entre le seuil de frottement et la composante normale du tenseur des contraintes qui sont supposés proportionnels.

L'étude mathématique des équations de Navier-Stokes ou Stokes a été faite par beaucoup de chercheurs dans le cas des fluides Newtoniens et non- Newtoniens en régime stationnaire et instationnaire avec un glissement donnée par les différentes lois de frottement :
- Concernant la loi de frottement de Navier on peut citer les travaux de A. Tani [76], A. Tani, S. Itoh, N. Tanaka [77], S. Itoh, A. Tani [48], J. Neustupa, P. Penel [64], C. Amrouche, N.E.H. Seloula [4], A. Rejaiba [70], H. Al Baba

[2].
- La loi de Coulomb est moins utilisable que la loi de Tresca et les autres lois de glissement. H. Fujita est le premier qui a étudié la loi de Tresca ([39]-[44]), on cite aussi les travaux de G. Bayada, M. Boukrouche [8], M. Boukrouche, G. Łukaszewicz [13], C. Le Roux et A. Tani [53]-[55], M. Boukrouche, R. El Mir [14], M. Ayadi, M. K. Gdoura, T. Sassi [5], F. Messelmi, B. Merouani, F. Bouzeghay [60], A. Bensedik, M. Boukrouche [9], I. Boussetouan [18], F. Bouzeghaya [19], K. Takahito [75], M. Boukrouche, I. Boussetouan, L. Paoli [15]-[17] (**Tresca**), M. Boukrouche, G. Łukaszewicz [12], L. Consiglieri [24] (**Coulomb**), F. Saidi [71], [72] (**Tresca** et **Coulomb**).

Cette thèse concerne l'étude théorique mathématique de quelques problèmes elliptiques et paraboliques d'écoulement de fluides non-Newtoniens incompressibles et non isothermes gouvernés par l'équation aux dérivées partielles de Stokes avec la condition de Tresca sur une partie du bord. Notre problème est motivé par lubrification et aussi par les phénomènes injection/extrusion ([69], [47]). La nouveauté dans notre travail par rapport aux travaux récents est que la viscosité du fluide est une fonction dépendant de sa température, sa vitesse et du module de son tenseur des taux de déformations comme dans [9] mais nos problèmes sont en régime instationnaire et stationnaire avec un terme de type p-laplacien. Ce choix nous permet de discuter sur les valeurs de p.
On considère ces problèmes dans un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ donné par

$$\Omega = \{(x', x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad x' = (x_1, x_2) \in \omega \quad \text{et} \quad 0 < x_3 < h(x')\}.$$

La frontière de Ω sera notée $\partial\Omega = \overline{\omega} \cup \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_L$ avec

- Γ_1 la surface supérieure d'équation $x_3 = h(x')$ où h est une fonction continue lipschitzienne vérifiant

$$\exists h_0, h_1 \in \mathbb{R} \quad 0 < h_0 \leq h(x') \leq h_1.$$

- ω un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ qui constitue la surface inférieure du domaine Ω, et sa frontière est lipschitzienne.

— Γ_L la frontière latérale.

L'ensemble des lois de conservation nous fournit trois équations (voir ([31], [78], [59])

1) L'équation de conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + div(\rho_0 \upsilon) = 0 \qquad \text{dans} \quad \Omega\times]0,T[, \tag{1.1}$$

2) l'équation de conservation de la quantité du mouvement

$$\rho_0\Big(\frac{\partial \upsilon}{\partial t} + \upsilon \cdot \nabla \upsilon\Big) = div(\sigma) + \rho_0 f \qquad \text{dans} \quad \Omega\times]0,T[, \tag{1.2}$$

2) l'équation de conservation de l'énergie

$$\rho_0\Big(\frac{\partial e}{\partial t} + \upsilon \cdot \nabla e\Big) = \sigma : D(\upsilon) + \rho_0 r(\theta) - div(q) \qquad \text{dans} \quad \Omega\times]0,T[, \tag{1.3}$$

où υ, θ, ρ_0 désignent respectivement la vitesse, la température et la densité du fluide, $f = (f_1, f_2, f_3)$ est le vecteur des forces extérieures donné, e représente l'énergie interne spécifique du milieu continu, r est une fonction réelle qui dépend de la température θ et représente l'apport d'énergie par unité de masse et de temps, q est le vecteur transport d'énergie, $\sigma = (\sigma_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}$ est le tenseur des contraintes, et $D(\upsilon) = (d_{ij}(\upsilon))_{1\leq i,j\leq 3}$ est le tenseur des taux de déformations défini par

$$d_{ij}(\upsilon) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_i}\Big) \quad 1 \leq i,j \leq 3,$$

et avec la convention de sommation d'Einstein on note

$$|D(\upsilon)| = \Big(d_{ij}(\upsilon) d_{ij}(\upsilon)\Big)^{\frac{1}{2}},$$

la norme euclidienne de $D(\upsilon)$.

Le produit de deux tenseurs σ et $D(\upsilon)$ est défini par

$$\sigma : D(\upsilon) = \sigma_{ij} d_{ij}(\upsilon).$$

Si la densité ρ_0 est constante (on prend $\rho_0 = 1$), le fluide est alors incompressible et les équations (1.1)-(1.3) deviennent

$$div(\upsilon) = 0 \qquad \text{dans} \quad \Omega\times]0,T[, \tag{1.4}$$

$$\Big(\frac{\partial \upsilon}{\partial t} + \upsilon \cdot \nabla \upsilon\Big) = div(\sigma) + f \qquad \text{dans} \quad \Omega \times]0, T[, \tag{1.5}$$

$$\Big(\frac{\partial e}{\partial t} + \upsilon \cdot \nabla e\Big) = \sigma : D(\upsilon) + r(\theta) - div(q) \qquad \text{dans} \quad \Omega \times]0, T[. \tag{1.6}$$

Le tenseur des contraintes est donné par la loi de puissance

$$\sigma_{ij} = l\dot{\gamma}^{n-1} d_{ij}(\upsilon) - \pi \delta_{ij},$$

où l est une fonction positive donnée qui peut dépendre de la température (voir [33]), π désigne la pression du fluide,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

est le symbole de Kronecker et

$$\dot{\gamma} = 2|D(\upsilon)|.$$

(1) Si $0 < n < 1$, le fluide est rhéofluidifiant ou pseudoplastique,
(2) si $n = 1$, il est Newtonien,
(3) si $n > 1$, il est rhéoépaississant ou dilatant.
Pour avoir le tenseur des contraintes on prend $n = p - 1$, l dépend de plus de la vitesse et du module du tenseur des taux de déformations et on pose

$$\mu(\theta, \upsilon, |D(\upsilon)|) = 2^{p-3} l(\theta, \upsilon, |D(\upsilon)|),$$

on obtient que le tenseur des contraintes s'écrit

$$\sigma_{ij} = 2\mu(\theta, \upsilon, |D(\upsilon)|)|D(\upsilon)|^{p-2} d_{ij}(\upsilon) - \pi \delta_{ij}.$$

Donc, avec les trois cas précédents on a
- Si $p = 2$ le fluide est non-Newtonien car μ est non-linéaire par rapport au tenseur des taux de déformations,
- si $1 < p < 2$ notre fluide est de type (1),
- si $p > 2$ notre fluide est de type (3).
D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \sigma : D(\upsilon) &= 2\mu(\theta, \upsilon, |D(\upsilon)|)|D(\upsilon)|^{p-2} d_{ij}(\upsilon) d_{ij}(\upsilon) - \pi \delta_{ij} d_{ij}(\upsilon) \\ &= 2\mu(\theta, \upsilon, |D(\upsilon)|)|D(\upsilon)|^{p} - \pi Tr(D(\upsilon)), \end{aligned}$$

où $Tr(D(\upsilon))$ désigne la trace de $D(\upsilon)$ définie par

$$Tr(D(\upsilon)) = d_{ii} = div(\upsilon).$$

Avec (1.4) on a $Tr(D(\upsilon)) = 0$ d'où

$$\sigma : D(\upsilon) \quad = \quad 2\mu(\theta, \upsilon, |D(\upsilon)|)|D(\upsilon)|^p.$$

Donc, les équations (1.5), (1.6) deviennent

$$\begin{aligned} \Big(\frac{\partial \upsilon}{\partial t} + \upsilon \cdot \nabla \upsilon\Big) - \quad & 2div(\mu(\theta, \upsilon, |D(\upsilon)|)|D(\upsilon)|^{p-2} D(\upsilon)) + \nabla \pi = f \\ & \text{dans} \quad \Omega \times]0, T[, \end{aligned} \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned} \Big(\frac{\partial e}{\partial t} + \upsilon \cdot \nabla e\Big) \quad & = 2\mu(\theta, \upsilon, |D(\upsilon)|)|D(\upsilon)|^p + r(\theta) - div(q) \\ & \text{dans} \quad \Omega \times]0, T[. \end{aligned} \tag{1.8}$$

L'énergie interne du fluide est donnée par $e = c\theta$, où le coefficient c est une chaleur spécifique, scalaire strictement positif. Dans la réalité c dépend plus ou moins, selon les matériaux, de la température. Ici, on supposera que c est constante (on prend $c = 1$). De plus, on suppose que le phénomène de conduction de la chaleur est décrit par la loi de Fourier ([37], [31])

$$q = -K \nabla \theta,$$

où K est une fonction positive qui représente la conductivité thermique du matériau. Donc, l'équation (1.8) devient

$$\begin{aligned} \Big(\frac{\partial \theta}{\partial t} + \upsilon \cdot \nabla \theta\Big) \quad & = 2\mu(\theta, \upsilon, |D(\upsilon)|)|D(\upsilon)|^p + r(\theta) + div(K \nabla \theta) \\ & \text{dans} \quad \Omega \times]0, T[. \end{aligned}$$

De plus, on néglige le terme de convection dans (1.7) on obtient l'équation de Stokes suivante

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t} - \quad 2div(\mu(\theta, \upsilon, |D(\upsilon)|)|D(\upsilon)|^{p-2} D(\upsilon)) + \nabla \pi = f \quad \text{dans} \quad \Omega \times]0, T[.$$

Dans notre travail, on s'intéresse l'étude de deux problèmes, le problème couplé entre le système de Stokes et l'équation de la chaleur dans le cas

stationnaire où la vitesse et toutes les variables décrivant le mouvement (θ, π, ...) ne dépendent pas explicitement du temps c-à-d $\Big(\dfrac{\partial \upsilon}{\partial t} = 0,\ \dfrac{\partial \theta}{\partial t} = 0\Big)$. Donc,

$$\begin{cases} -2div(\mu(\theta, \upsilon, |D(\upsilon)|)|D(\upsilon)|^{p-2}D(\upsilon)) + \nabla\pi = f \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ div(\upsilon) = 0 \qquad \text{dans} \quad \Omega, \\ \upsilon \cdot \nabla\theta = 2\mu(\theta, \upsilon, |D(\upsilon)|)|D(\upsilon)|^{p} + div(K\nabla\theta) + r(\theta) \quad \text{dans} \quad \Omega, \end{cases} \tag{1.9}$$

et pour une température donnée le problème instationnaire

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \upsilon}{\partial t} - 2div(\mu(\theta, \upsilon, |D(\upsilon)|)|D(\upsilon)|^{p-2}D(\upsilon)) + \nabla\pi = f \quad \text{dans} \quad \Omega\times]0, T[, \\ div(\upsilon) = 0 \qquad \text{dans} \quad \Omega\times]0, T[. \end{cases} \tag{1.10}$$

Dans le deuxième chapitre, on étudie le problème couplé (1.9) quand la viscosité ne dépend pas de la vitesse. Pour compléter la description du problème fort, on rajoute les conditions aux limites sur la vitesse et la température. On suppose que la vitesse satisfait les conditions aux limites suivantes :

$$\upsilon = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1, \tag{1.11}$$

$$\upsilon = g \quad \text{sur} \quad \Gamma_L, \tag{1.12}$$

où g est une fonction vectorielle vérifiant

$$\int_{\partial\Omega} g \cdot n \, dY = 0, \quad g = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1, \quad g \cdot n = 0 \quad \text{sur} \quad \omega,$$

où n est la normale unitaire à $\partial\Omega$ extérieure à Ω.
On définit les composantes normales et tangentielles υ_n et υ_τ de la vitesse par

$$\upsilon_n = \upsilon \cdot n = \upsilon_i n_i, \quad \upsilon_{\tau_i} = \upsilon_i - \upsilon_n n_i.$$

La composante normale de la vitesse est nulle sur ω

$$\upsilon \cdot n = 0 \qquad \text{sur} \quad \omega, \tag{1.13}$$

et sa composante tangentielle υ_τ est inconnue et satisfait la loi de Tresca [31]

$$\left.\begin{array}{l} |\sigma_\tau| = k \Rightarrow \exists\lambda \geq 0 \quad \upsilon_\tau = s - \lambda\sigma_\tau, \\ |\sigma_\tau| < k \Rightarrow \upsilon_\tau = s, \end{array}\right\} \quad \text{sur} \quad \omega, \tag{1.14}$$

où

— s est la vitesse cisaillement de la surface ω qui dépend de la position $x \in \omega$,

— σ_τ est la composante tangentielle de σn donnée par

$$\sigma_{\tau_i} = \sigma_{ij} n_j - \sigma_n n_i \quad \text{où} \quad \sigma_n = \sigma_{ij} n_j n_i,$$

— k est une fonction strictement positive dépendante de x appelée le seuil limite pour cette contrainte tangentielle.

Pour les conditions aux limites relatives à la température, on rajoute les conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann suivantes

$$\theta = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \cup \Gamma_L, \tag{1.15}$$

$$K \frac{\partial \theta}{\partial n} = K \nabla \theta \cdot n = \theta_b \quad \text{sur} \quad \omega, \tag{1.16}$$

respectivement.
On traite pour une température donnée le système de Stokes $(1.9)_1 - (1.9)_2$, (1.11)-(1.14). Avec la condition de Tresca on obtient que la formulation variationnelle du problème est donnée par une inéquation variationnelle elliptique. On démontre l'existence d'une solution de l'inéquation variationnelle elliptique associée à ce problème par la méthode de monotonie. On traite deux cas $p \geq 2$ et $1 < p \leq 2$. Ensuite, on montre l'existence de la pression en utilisant le théorème de De Rham.
Dans un deuxième temps on étudie le problème $(1.9)_3$, (1.15) et (1.16) avec $p > 3$. On montre l'existence et l'unicité de la température solution de l'équation variationnelle elliptique associée à ce problème, en utilisant les théorèmes de Lax-Milgram et de point fixe de Schauder. Puis, on montre l'existence de la solution du problème couplé quand la viscosité ne dépend pas de la vitesse, en utilisant le théorème de point fixe de Schauder.

Dans le troisième chapitre, on traite le problème instationnaire donné par (1.10) dans le cas $p = 2$. Pour compléter la formulation du problème, on rajoute les conditions aux limites homogènes sur $\Gamma_1 \times]0, T[$, non homogènes sur $\Gamma_L \times]0, T[$, et de type Tresca sur $\omega \times]0, T[$, et la condition initiale en $t = 0$.
Pour montrer l'existence d'une solution pour l'inéquation variationnelle parabolique associée à ce problème, on étudie ce problème quand la viscosité

ne dépend pas de la vitesse. On montre l'existence de la solution de l'inéquation variationnelle parabolique, en utilisant la méthode de la monotonie et la notion des semi-groupes, on démontre également l'unicité de la solution obtenue. Puis, on montre l'existence et l'unicité (à une constante près car Ω est connexe) de la pression en utilisant le théorème de De Rham. Ensuite, lorsque la viscosité dépend de plus de la vitesse, on traite l'existence de la solution par le théorème de point fixe de Schauder.

Dans le quatrième chapitre, on traite le problème instationnaire (1.10) dans les deux cas $p > 2$ et $\frac{6}{5} < p < 2$ avec les conditions aux limites homogènes sur $\Gamma_1 \times]0, T[$, non homogènes sur $\Gamma_L \times]0, T[$, et de type Tresca sur $\omega \times]0, T[$, et la condition initiale en $t = 0$. Pour montrer l'existence de la solution de l'inéquation variationnelle parabolique associée à ce problème dans le cas $p > 2$, on utilise un principe analogue à celui du chapitre 3 (cas $p = 2$). Ensuite, on montre l'existence de la solution dans le cas $\frac{6}{5} < p < 2$, ce cas donne lieu à quelques complications techniques. En effet, si on veut utiliser la méthode de la monotonie pour montrer l'existence et l'unicité de la vitesse solution de l'inéquation variationnelle parabolique quand la viscosité ne dépend pas de la vitesse comme dans les cas précédents on a besoin d'un espace de Hilbert intermédiaire entre l'espace où on cherche la vitesse et son dual mais malheureusement dans ce cas on n'a pas cette condition. Pour cela, pour tout $0 < \varepsilon < 1$ avec $\mu = \mu(\theta, |D(\upsilon)|)$ on régularise notre problème et on revient au cas $p = 2$. Puis, on traite le problème approché pour ε fixé, en utilisant les résultats obtenus dans le cas $p = 2$ et on en déduit l'existence et l'unicité d'une solution pour l'inéquation variationnelle parabolique associée à ce problème approché. Ensuite, on fait des estimations sur les solutions des problèmes approchés indépendamment de ε, puis on passe à la limite quand $\varepsilon \to 0$ et on obtient que le problème original en vitesse admet une solution. Ensuite, on montre l'existence et l'unicité (à une constante près car Ω est connexe) de la pression en utilisant le théorème de De Rham. Puis, en prenant la fonction-test à divergence nulle dans le problème en vitesse et pression, on montre l'unicité de la vitesse. Lorsque la viscosité dépend de plus de la vitesse, on traite l'existence de la solution par le théorème de point fixe de Schauder.

Chapitre 2

Problème couplé stationnaire

Dans ce chapitre, on considère un problème variationnel couplé décrivant le mouvement d'un fluide incompressible non-Newtonien soumis à des conditions de frottements de type Tresca et des effets thermiques particuliers où la viscosité dépend de la température, de la vitesse du fluide ainsi que du module du tenseur des taux de déformations. On considère ce problème dans le domaine Ω donné par

$$\Omega = \{(x', x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad x' = (x_1, x_2) \in \omega \quad \text{et} \quad 0 < x_3 < h(x')\}.$$

La frontière de Ω sera notée $\partial\Omega = \overline{\omega} \cup \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_L$ avec

— Γ_1 la surface supérieure d'équation $x_3 = h(x')$ où h est une fonction continue lipschitzienne vérifiant

$$\exists h_0, h_1 \in \mathbb{R} \quad 0 < h_0 \leq h(x') \leq h_1.$$

— ω un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ qui constitue la surface inférieure du domaine Ω et sa frontière supposée lipschitzienne.

— Γ_L la frontière latérale.

Le terme stationnaire en mécanique des fluides ne signifie pas absence de mouvement, mais independence de la vitesse et toutes les variables décrivant le mouvement (θ, π, ...) par rapport au temps.

On désigne par $D(u) = (d_{ij}(u)_{1\leq i,j\leq 3}$ le tenseur des taux de déformations

défini par

$$d_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j) \quad 1 \leq i, j \leq 3,$$

et avec la convention de sommation d'Einstein on a

$$D(u) : D(u) = d_{ij}(u) d_{ij}(u) = |D(u)|^2,$$

où $|D(u)|$ est la norme euclidienne de $D(u)$.
On note $\sigma = (\sigma_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3}$ le tenseur des contraintes donné par

$$\sigma_{ij} = 2\mu(\theta, u, |D(u)|)|D(u)|^{p-2} d_{ij}(u) - \pi \delta_{ij}, \tag{2.1}$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker, π est la pression du fluide, u sa vitesse, θ sa température qui sont les inconnues du problème, μ sa viscosité. On suppose que la viscosité μ est définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$, et vérifiant

$$\exists \mu_0, \mu_1 \in \mathbb{R} : \quad 0 < \mu_0 \leq \mu(o, e, d) \leq \mu_1, \quad \forall (o, e, d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+, \tag{2.2}$$

$$\text{la fonction} \quad d \mapsto \mu(., ., d) \quad \text{est monotone croissante sur} \quad \mathbb{R}_+, \tag{2.3}$$

$$\text{la fonction} \quad (o, e, d) \mapsto \mu(o, e, d) \quad \text{est continue sur} \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+. \tag{2.4}$$

Dans toute la suite de ce chapitre, avec la convention de sommation d'Einstein on note

$$u \cdot v = u_i v_i, \quad 1 \leq i \leq 3,$$

le produit scalaire de deux vecteurs dans $\mathbb{R}^3$.
Le problème est décrit par l'équation de conservation de la quantité de mouvement

$$-2div(\mu(\theta, u, |D(u)|)|D(u)|^{p-2} D(u)) + \nabla \pi = f, \qquad \text{dans} \quad \Omega, \tag{2.5}$$

l'équation de conservation de la masse (la condition d'incompressibilité)

$$div(u) = 0 \qquad \text{dans} \quad \Omega, \tag{2.6}$$

le phénomène de conduction de la chaleur est décrit par la loi de Fourier, reliant flux de la chaleur à la température θ, d'où l'équation de conservation d'énergie

$$2\mu(\theta, u, |D(u)|)|D(u)|^p + div(K \nabla \theta) + r(\theta) = u \cdot \nabla \theta \quad \text{dans} \quad \Omega, \tag{2.7}$$

où $p \in \mathbb{R}$, tel que $p > 1$, $f = (f_1, f_2, f_3)$ représente les forces extérieures supposées données, r est une fonction à valeurs réelles, et K est une fonction sur Ω vérifiant

$$\exists k_0, k_1 \in \mathbb{R} \quad 0 < k_0 \leq K \leq k_1 \quad \forall x \in \Omega. \tag{2.8}$$

Pour compléter la description du problème, il est nécessaire de donner les conditions aux bords pour la température θ et la vitesse u. On rajoute au système (2.5)-(2.6) les conditions aux limites pour la vitesse données par :

$$u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1, \tag{2.9}$$

$$u = g \quad \text{sur} \quad \Gamma_L, \tag{2.10}$$

où g est une fonction vectorielle vérifiant

$$\int_{\partial\Omega} g \cdot n \, dY = 0, \;\; g = 0 \;\text{ sur }\; \Gamma_1, \;\; g \neq 0 \;\text{ sur}\, \Gamma_L, \;\; g \cdot n = 0 \;\text{ sur }\; \omega, \tag{2.11}$$

où $n = (n_1, n_2, n_3) = (0, 0, -1)$ est le vecteur normal unitaire extérieur à ω. On définit les composantes normales et tangentielles u_n et u_τ de la vitesse par

$$u_n = u \cdot n = u_i n_i, \quad u_{\tau_i} = u_i - u_n n_i.$$

La composante normale de la vitesse est nulle sur ω

$$u \cdot n = 0 \qquad \text{sur} \quad \omega, \tag{2.12}$$

et sa composante tangentielle u_τ est inconnue et satisfait la loi de Tresca [31]

$$\left.\begin{array}{l} |\sigma_\tau| = k \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \quad u_\tau = s - \lambda \sigma_\tau, \\ |\sigma_\tau| < k \Rightarrow u_\tau = s, \end{array}\right\} \quad \text{sur} \quad \omega, \tag{2.13}$$

où

- s est la vitesse de cisaillement de la surface ω qui dépend de la position $x \in \omega$,
- σ_τ est la composante tangentielle de σn donnée par

$$\sigma_{\tau_i} = \sigma_{ij} n_j - \sigma_n n_i \quad \text{où} \quad \sigma_n = \sigma_{ij} n_j n_i,$$

— k est une fonction strictement positive dépendante de x appelée le seuil limite pour cette contrainte tangentielle.

Pour les conditions aux bords relatives à la température, on rajoute les conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann à l'équation (2.7) suivantes :

$$\theta = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \cup \Gamma_L, \tag{2.14}$$

$$K\frac{\partial \theta}{\partial n} = K\nabla\theta \cdot n = \theta_b \quad \text{sur} \quad \omega, \tag{2.15}$$

respectivement, où θ_b est un flux de température donné fixé sur ω vérifiant

$$\exists C_b > 0, \quad |\theta_b| \leq C_b. \tag{2.16}$$

Selon le signe de la fonction θ_b, on peut distinguer les trois phénomènes physiques suivantes :

(1) Si la fonction θ_b est strictement négative, le gradient de la température est orienté vers la zone fluide, d'où l'échauffement,
(2) si la fonction θ_b est égale zéro, pas d'échange de chaleur à travers ω,
(3) si la fonction θ_b est strictement positive, le gradient de la température est orienté à l'exterieur de la zone fluide.

Le plan de ce chapitre est comme suit :

On établit la formulation variationnelle de ce problème. Ensuite, on commence l'étude par le premier problème intermédiaire, on montre l'existence de la solution du premier problème intermédiaire où la température est une donnée gouverné par une inéquation variationnelle elliptique en appliquant la méthode de monotonie, on démontre l'existence et l'unicité (à une constante près car Ω est connexe) de la pression en utilisant le théorème de De Rham [3]. Puis, on étudie le second problème intermédiaire où la vitesse et la pression données, on montre l'existence et l'unicité de la température solution de l'équation variationnelle elliptique associée à ce problème, en utilisant les théorèmes de Lax-Milgram et de point fixe de Schauder. Finalement, on montre l'existence de la solution du problème variationnel couplé vitesse-pression-température avec la viscosité dépend de la température et du module du tenseur des taux de déformations, en utilisant le théorème de point fixe de Schauder.

2.1 Formulation variationnelle

Soient p, q deux nombres réels supérieurs strictement à 1 et p', q' leurs conjugués c-à-d $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ et $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$ respectivement.
Dans toute la suite de ce chapitre on notera $\mathbf{X}$ en gras l'espace fonctionnel X^3.
Pour tout $g \in \mathbf{W}^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ vérifiant (2.11), il existe (voir [3]) une fonction G dans $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ telle que

$$\begin{aligned} &div(G)=0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \quad G=g \quad \text{sur} \quad \Gamma_L, \\ &G=0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1, \quad G\cdot n=0 \quad \text{sur} \quad \omega. \end{aligned} \tag{2.17}$$

On considère les sous-espaces vectoriels des fonctions de $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ suivants

$$V_0^p=\{\varphi \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega); \quad \varphi=0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1\cup\Gamma_L \quad \text{et} \quad \varphi\cdot n=0 \quad \text{sur} \quad \omega\},$$

$$V_{0.div}^p=\{\varphi \in V_0^p; \quad div(\varphi)=0 \quad \text{dans} \quad \Omega\},$$

$$W_{0.div}^{1,p}=\{\varphi \in \mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega); \quad div(\varphi)=0 \quad \text{dans} \quad \Omega\},$$

$$V_{\Gamma_1}^p=\{\varphi \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega); \quad \varphi=0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1\},$$

et on pose

$$L_0^{p'}(\Omega)=\{u \in L^{p'}(\Omega); \quad \int_\Omega u(x)\,dx=0\}.$$

On définit les espaces suivants :

$$\mathcal{Y}^{p'}=\{\tilde{\sigma}=(\tilde{\sigma}_{ij})_{1\le i,j\le 3} \in (L^{p'}(\Omega))^9, \quad div(\tilde{\sigma})=(\partial_j\tilde{\sigma}_{ij})_{1\le i,j\le 3} \in \mathbf{L}^{p'}(\Omega)\},$$

$$W_{\Gamma_1\cup\Gamma_L}^{1,q}(\Omega)=\{w \in W^{1.q}(\Omega); \quad w=0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1\cup\Gamma_L\},$$

$$W=\{w \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}); \quad w=0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1\cup\Gamma_L\}.$$

On utilisera la notation bien usuelle :

$$\|u\|_{1.p}=\Big(\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

En vue d'établir la formulation faible du problème, nous procédons à un changement d'inconnue pour nous ramener à la condition aux limites de Dirichlet homogène sur $\Gamma_1\cup\Gamma_L$, on pose

$$v=u-G. \tag{2.18}$$

La relation (2.1) devient

$$\tilde{\sigma}_{ij} = 2\mu(\theta, \upsilon + G, |D(\upsilon + G)|)|D(\upsilon + G)|^{p-2} d_{ij}(\upsilon + G) - \pi\delta_{ij}. \qquad (2.19)$$

Avec (2.18) l'équation (2.5) devient

$$-\partial_j \tilde{\sigma}_{ij} = f_i, \quad i = 1, 2, 3, \qquad (2.20)$$

avec (2.17), l'équation de conservation de la masse ne change pas, elle s'écrit :

$$div(\upsilon) = 0 \qquad \text{dans} \quad \Omega. \qquad (2.21)$$

Nous avons une nouvelle condition aux limites de Dirichlet homogène sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_L$

$$\upsilon = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \cup \Gamma_L. \qquad (2.22)$$

La condition aux limites pour la composante normale sur ω ne change pas, elle s'écrit :

$$\upsilon \cdot n = 0 \quad \text{sur} \quad \omega. \qquad (2.23)$$

La condition aux limites (2.13) devient :

$$\left.\begin{array}{l} |\tilde{\sigma}_\tau| = k \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \quad \upsilon_\tau = \mathbf{s} - \lambda\tilde{\sigma}_\tau, \\ |\tilde{\sigma}_\tau| < k \Rightarrow \upsilon_\tau = \mathbf{s}, \end{array}\right\} \quad \text{sur} \quad \omega, \qquad (2.24)$$

où $\mathbf{s} = s - G$.
L'équation (2.7) devient

$$\begin{array}{l} 2\mu(\theta, \upsilon + G, |D(\upsilon + G)|)|D(\upsilon + G)|^p + div(K\nabla\theta) + r(\theta) \\ = (\upsilon + G) \cdot \nabla\theta \quad \text{dans} \quad \Omega. \end{array} \qquad (2.25)$$

Pour la formulation variationnelle du problème (2.20)-(2.25) avec (2.14)-(2.15), on aura besoin du lemme suivant

Lemme 2.1 *La condition de Tresca* (2.24) *est équivalente à la relation suivante*

$$|\tilde{\sigma}_\tau| \leq k, \quad (\upsilon_\tau - \boldsymbol{s}) \cdot \tilde{\sigma}_\tau + k|\upsilon_\tau - \boldsymbol{s}| = 0, \quad \textit{sur} \quad \omega. \qquad (2.26)$$

Preuve. Si (2.24) est vérifiée alors, si $|\tilde{\sigma}_\tau| = k$, on a $v_\tau = \mathbf{s} - \lambda\tilde{\sigma}_\tau$ pour un certain $\lambda \geqslant 0$, en conséquence

$$(v_\tau - \mathbf{s}) \cdot \tilde{\sigma}_\tau + k|v_\tau - \mathbf{s}| = -\lambda\tilde{\sigma}_\tau \cdot \tilde{\sigma}_\tau + k\lambda|\tilde{\sigma}_\tau| = -\lambda|\tilde{\sigma}_\tau|^2 + \lambda|\tilde{\sigma}_\tau|^2 = 0.$$

Si $|\tilde{\sigma}_\tau| < k$, d'après (2.24) $v_\tau = \mathbf{s}$ et (2.26) en résulte.
Réciproquement, si $|\tilde{\sigma}_\tau| = k$, alors de (2.26) découle

$$(v_\tau - \mathbf{s}) \cdot \tilde{\sigma}_\tau = -|\tilde{\sigma}_\tau||v_\tau - \mathbf{s}| = |\tilde{\sigma}_\tau||v_\tau - \mathbf{s}|cos((v_\tau - \mathbf{s}), \tilde{\sigma}_\tau),$$

d'où

$$|\tilde{\sigma}_\tau||v_\tau - \mathbf{s}|(1 + cos((v_\tau - \mathbf{s}), \tilde{\sigma}_\tau)) = 0.$$

On a $|\tilde{\sigma}_\tau| = k \neq 0$, donc

$$|v_\tau - \mathbf{s}| = 0, \quad \text{ou} \quad 1 + cos((v_\tau - \mathbf{s}), \tilde{\sigma}_\tau) = 0.$$

Si $|v_\tau - \mathbf{s}| = 0$ alors $v_\tau - \mathbf{s} = 0$ (dans ce cas $\lambda = 0$).
Si $1 + cos((v_\tau - \mathbf{s}), \tilde{\sigma}_\tau) = 0$ alors $cos((v_\tau - \mathbf{s}), \tilde{\sigma}_\tau) = -1$ ce qui montre que $(v_\tau - \mathbf{s})$ et $\tilde{\sigma}_\tau$ sont colinéaires et de sens opposés c-à-d,

$$\exists\lambda \geq 0 \quad \text{tel que} \quad v_\tau - \mathbf{s} = -\lambda\tilde{\sigma}_\tau \quad \text{i.e} \quad v_\tau = \mathbf{s} - \lambda\tilde{\sigma}_\tau,$$

donc la première partie de (2.24) est montrée. Si $|\tilde{\sigma}_\tau| < k$, alors de (2.26) on a

$$0 = (v_\tau - \mathbf{s}) \cdot \tilde{\sigma}_\tau + k|v_\tau - \mathbf{s}| \geq -|v_\tau - \mathbf{s}||\tilde{\sigma}_\tau| + k|v_\tau - \mathbf{s}| = |v_\tau - \mathbf{s}|(k - |\tilde{\sigma}_\tau|),$$

d'où $v_\tau - \mathbf{s} = 0$ car $|\tilde{\sigma}_\tau| < k$, la deuxième partie de (2.24) est prouvée. □

Maintenant, on considère le problème couplé suivant

Problème 2.1 *Pour $p > 3$, $1 < q < \frac{3}{2}$, $\theta_b \in L^q(\omega)$, $r \in L^\infty(\Omega)$, K vérifiant (2.8), $f \in \boldsymbol{L}^{p'}(\Omega)$, $k \in L^{p'}_+(\omega)$, $G \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$ vérifiant (2.17), $s \in \boldsymbol{L}^p(\omega)$ et μ vérifiant (2.2)-(2.4). Supposons aussi que les fonctions $o \mapsto \mu(o, ., .)$ et r sont décroissantes et de plus r est lipschitzienne. On cherche $\theta \in W^{1,q}_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega)$, $v \in V^p_{0.div}$ et $\pi \in L^{p'}_0(\Omega)$ vérifiant pour tout $\varphi \in V^p_0$*

$$a(\theta; v, \varphi - v) - (\pi, div(\varphi)) + \Psi(\varphi) - \Psi(v) \geq \int_\Omega f \cdot (\varphi - v)\, dx, \quad (2.27)$$

couplé avec l'équation variationnelle

$$B(\theta, w) = L(\theta, w), \quad \forall w \in W^{1,q'}_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega). \quad (2.28)$$

Où

$$a(\theta;u,v)=\int_\Omega 2\mu(\theta,u+G,|D(u+G)|)|D(u+G)|^{p-2}d_{ij}(u+G)d_{ij}(v)dx,$$

$$\Psi(\varphi)=\int_\omega k|\varphi-\mathbf{s}|\,dx',$$

$$B(\theta,w)=\int_\Omega K\nabla\theta\cdot\nabla w\,dx+\int_\Omega((v+G)\cdot\nabla\theta)w\,dx,$$

$$\begin{aligned}L(\theta,w) &= \int_\Omega 2\mu(\theta,v+G,|D(v+G)|)|D(v+G)|^p w\,dx\\ &+ \int_\Omega r(\theta)w\,dx+\int_\omega \theta_b w\,dx'.\end{aligned}$$

Proposition 2.1 *Le problème fort* (2.20)-(2.25) *avec* (2.14)-(2.15) *conduit au problème* 2.1.

Preuve. Observons d'abord que la fonctionnelle $a(\theta;u,v)$ est bien définie, en effet, de (2.2) on a

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |2\mu(\theta,u+G,|D(u+G)|)|D(u+G)|^{p-2}d_{ij}(u+G)d_{ij}(v)|dx\\ &\leq 2\mu_1\int_\Omega |D(u+G)|^{p-2}|d_{ij}(u+G)d_{ij}(v)|\,dx.\end{aligned}$$

Du fait que

$$|d_{ij}(u+G)d_{ij}(v)|=|D(u+G):D(v)|\leq|D(u+G)||D(v)|,$$

on obtient

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |2\mu(\theta,u+G,|D(u+G)|)|D(u+G)|^{p-2}d_{ij}(u+G)d_{ij}(v)|dx\\ &\leq 2\mu_1\int_\Omega |D(u+G)|^{p-1}|D(v)|\,dx.\end{aligned}$$

Nous avons $|D(u+G)|^{p-1}\in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$ et $|D(v)|\in L^p(\Omega)$, donc on déduit que $2\mu(\theta,u+G,|D(u+G)|)|D(u+G)|^{p-2}d_{ij}(u+G)d_{ij}(v)\in L^1(\Omega)$.

Pour $1<p\leq 3$, w dans $W^{1,s}_{\Gamma_1\cup\Gamma_L}(\Omega)$, θ dans $W^{1,q}_{\Gamma_1\cup\Gamma_L}(\Omega)$ et $v+G$

dans $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ avec $\frac{1}{s}+\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\leq 1$ on a $((v+G)\cdot\nabla\theta)w$ dans $L^1(\Omega)$ donc l'intégrale de ce terme est bien définie.

Pour $p>3$, en utilisant l'injection de Sobolev $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ dans $(L^\infty(\Omega))^3$, on peut considérer la fonction test w dans $W^{1,q'}_{\Gamma_1\cup\Gamma_L}(\Omega)$, et cette intégrale sera aussi bien définie.
Comme $q'>3$, par l'injection de Sobolev $W^{1,q'}_{\Gamma_1\cup\Gamma_L}(\Omega)$ dans $L^\infty(\Omega)$, le premier terme au second membre de L est bien définie.

Pour obtenir l'inéquation variationnelle (2.27), supposons que υ,π sont suffissamment régulières, par exemple la fonction $\upsilon\in V_0^p$, $\pi\in L^{p'}(\Omega)$ et $\tilde{\sigma}\in\mathcal{Y}^{p'}$. Alors, pour $\varphi\in V_0^p$, on multiplie les deux côtés de l'équation (2.20) par $(\varphi_i-\upsilon_i)$, puis on intègre sur Ω en utilisant formellement la formule de Green, d'où

$$\int_\Omega \tilde{\sigma}_{ij}\partial_j(\varphi_i-\upsilon_i)\,dx-\int_{\partial\Omega}\tilde{\sigma}_{ij}(\varphi_i-\upsilon_i)n_j\,dY=\int_\Omega f_i(\varphi_i-\upsilon_i)\,dx. \quad (2.29)$$

Comme $\varphi_i-\upsilon_i=0$ sur $\Gamma_1\cup\Gamma_L$ alors

$$\int_{\partial\Omega}\tilde{\sigma}_{ij}(\varphi_i-\upsilon_i)n_j\,dY=\int_\omega\tilde{\sigma}_{ij}(\varphi_i-\upsilon_i)n_j\,dx'.$$

Observons que $\tilde{\sigma}_{ij}n_j$ est la i-ème composante du vecteur $\tilde{\sigma}n$, qui peut être mis sous la forme $\tilde{\sigma}n=\tilde{\sigma}_\tau+\tilde{\sigma}_n n$ avec $\tilde{\sigma}_\tau=(\tilde{\sigma}_{\tau_1},\tilde{\sigma}_{\tau_2},\tilde{\sigma}_{\tau_3})$ et $\tilde{\sigma}_n=\tilde{\sigma}n\cdot n$, d'où $\tilde{\sigma}_{ij}n_j=\tilde{\sigma}_{\tau_i}+\tilde{\sigma}_n n_i$. En utilisant cette égalité, on obtient

$$\int_\omega\tilde{\sigma}_{ij}(\varphi_i-\upsilon_i)n_j\,dx'=\int_\omega\tilde{\sigma}_{\tau_i}(\varphi_i-\upsilon_i)\,dx'+\int_\omega\tilde{\sigma}_n n_i(\varphi_i-\upsilon_i)\,dx'.$$

Puisque $(\varphi_i-\upsilon_i)n_i=0$ sur ω alors

$$\int_\omega\tilde{\sigma}_{ij}(\varphi_i-\upsilon_i)n_j\,dx'=\int_\omega\tilde{\sigma}_{\tau_i}(\varphi_i-\upsilon_i)\,dx',$$

et (2.29) devient

$$\int_\Omega\tilde{\sigma}_{ij}\partial_j(\varphi_i-\upsilon_i)\,dx=\int_\omega\tilde{\sigma}_{\tau_i}(\varphi_i-\upsilon_i)\,dx'+\int_\Omega f_i(\varphi_i-\upsilon_i)\,dx. \quad (2.30)$$

Introduisons à présent la condition de Tresca (2.24). Pour cela on ajoute aux deux membres de (2.30) le terme

$$\int_\omega k(|\varphi-\mathbf{s}|-|\upsilon-\mathbf{s}|)\,dx',$$

d'où

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \tilde{\sigma}_{ij}\partial_j(\varphi_i - \upsilon_i)\,dx + \int_\omega k(|\varphi - \mathbf{s}| - |\upsilon - \mathbf{s}|)\,dx' \\ &= \int_\Omega f_i(\varphi_i - \upsilon_i)\,dx + A,\end{aligned} \tag{2.31}$$

avec

$$\begin{aligned}A &= \int_\omega \tilde{\sigma}_{\tau_i}(\varphi_i - \upsilon_i) + k(|\varphi - \mathbf{s}| - |\upsilon - \ \mathbf{s}|)\,dx' \\ &= \int_\omega \tilde{\sigma}_{\tau_i}(\varphi_i - \mathbf{s}_i) + \tilde{\sigma}_{\tau_i}(\mathbf{s}_i - \upsilon_i) + k(|\varphi - \mathbf{s}| - |\upsilon - \mathbf{s}|)\,dx'.\end{aligned}$$

Montrons que A est positif. On déduit de (2.23) que $\upsilon = \upsilon_\tau$ sur ω, et d'après le lemme 2.1, le terme A devient

$$A = \int_\omega (\tilde{\sigma}_\tau \cdot (\varphi - \mathbf{s}) + k|\varphi - \mathbf{s}|)\,dx'.$$

Or $\tilde{\sigma}_\tau \cdot (\varphi - \mathbf{s}) \geq -|\tilde{\sigma}_\tau||\varphi - \mathbf{s}|$, et $|\tilde{\sigma}_\tau| \leq k$ sur ω, il s'ensuit que

$$\tilde{\sigma}_\tau \cdot (\varphi - \mathbf{s}) + k|\varphi - \mathbf{s}| \geq 0 \text{ sur } \omega.$$

Donc A est positif, et (2.31) devient

$$\int_\Omega \tilde{\sigma}_{ij}\partial_j(\varphi_i - \upsilon_i)\,dx + \int_\omega k(|\varphi - \mathbf{s}| - |\upsilon - \mathbf{s}|)\,dx' \geq \int_\Omega f_i(\varphi_i - \upsilon_i)\,dx.$$

En remplaçant $\tilde{\sigma}_{ij}$ par son expression (2.19), nous obtenons l'inéquation variationnelle suivante :

$$\begin{aligned}&\int_\Omega 2\mu(\theta, \upsilon + G, |D(\upsilon + G|)|D(\upsilon + G|^{p-2} d_{ij}(\upsilon + G)\partial_j(\varphi_i - \upsilon_i)\,dx \\ &- \int_\Omega \pi div(\varphi)\,dx + \int_\omega k(|\varphi - \mathbf{s}| - |\upsilon - \mathbf{s}|)\,dx' \geq \int_\Omega f_i(\varphi_i - \upsilon_i)\,dx,\end{aligned}$$

d'où (2.27).

Maintenant, pour obtenir l'équation variationnelle (2.28), multiplions les deux côtés de l'équation (2.25) par $w \in W^{1,q'}_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega)$, intégrons sur Ω en utili-

sant la formule de Green et (2.14) on obtient

$$
\begin{aligned}
&2\int_\Omega \mu(\theta, \upsilon+G, |D(\upsilon+G)|)|D(\upsilon+G)|^p w\,dx \\
&+\int_\omega \Big(K\nabla\theta\cdot n\Big) w\,dx' - \int_\Omega K\nabla\theta\cdot\nabla w\,dx + \int_\Omega r(\theta) w\,dx \\
&= \int_\Omega ((\upsilon+G)\cdot\nabla\theta) w\,dx,
\end{aligned}
$$

avec (2.15) l'équation ci-dessus devient

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega K\nabla\theta\cdot\nabla w\,dx + \int_\Omega ((\upsilon+G)\cdot\nabla\theta) w\,dx \\
&= \int_\Omega 2\mu(\theta, \upsilon+G, |D(\upsilon+G)|)|D(\upsilon+G)|^p w\,dx \\
&+\int_\Omega r(\theta) w\,dx + \int_\omega \theta_b w\,dx'.
\end{aligned}
$$

□

2.2 Premier problème intermédiaire

Dans cette section pour une température θ donnée, on montre l'existence de la solution de l'inéquation variationnelle (2.27). Pour cela, on considère l'opérateur $\mathbf{A} : V^p_{0.div} \to (V^p_{0.div})'$ qui à $u \in V^p_{0.div}$ associe $\mathbf{A}u$ défini par

$$\langle \mathbf{A}u, \varphi\rangle = a(\theta; u, \varphi), \quad \varphi \in V^p_{0.div},$$

où $\langle .,. \rangle$ désigne les crochets de dualité entre $V^p_{0.div}$ et $(V^p_{0.div})'$.
Maintenant, on introduit le problème en vitesse suivant :

Problème 2.2 *Pour $p > 1$, $f \in (V^p_{0.div})'$, $k \in L^{p'}_+(\omega)$, $G \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$ vérifiant (2.17), $s \in \boldsymbol{L}^p(\omega)$, μ vérifiant (2.2)-(2.4), et $\theta \in W^{1,q}_{\Gamma_1\cup\Gamma_L}(\Omega)$, on cherche $\upsilon \in V^p_{0.div}$ vérifiant l'inéquation variationnelle elliptique suivante*

$$\langle \mathbf{A}\upsilon, \varphi-\upsilon\rangle + \Psi(\varphi) - \Psi(\upsilon) \geq \langle f, \varphi-\upsilon\rangle, \quad \forall\varphi \in V^p_{0.div}. \tag{2.32}$$

2.2.1 Résultats préliminaires

Lemme 2.2 *On a le résultat classique pour tout* $u \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$

$$\int_\Omega |D(u)|^p \, dx \leq \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx.$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} \int_\Omega |D(u)|^p \, dx &= \int_\Omega \Big| \frac{1}{2}\nabla u + \frac{1}{2}(\nabla u)^t \Big|^p \, dx \\ &\leq \int_\Omega \Big(\frac{1}{2}|\nabla u| + \frac{1}{2}|(\nabla u)^t| \Big)^p \, dx. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Considérons la fonction ν_p définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\nu_p(z) = z^p,$$

on a

$$\nu_p'(z) = pz^{p-1}, \quad \nu_p''(z) = p(p-1)z^{p-2},$$

pour $p > 1$ on a $\nu_p''(z) \geq 0$ donc ν_p est convexe donc, pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{R}_+^*$ on a

$$\nu_p\Big(\frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{2}z_2\Big) \leq \frac{1}{2}\nu_p(z_1) + \frac{1}{2}\nu_p(z_2).$$

Avec cette inégalité la formule (2.33) devient

$$\int_\Omega |D(u)|^p \, dx \leq \int_\Omega \Big(\frac{1}{2}|\nabla u|^p + \frac{1}{2}|(\nabla u)^t|^p \Big) \, dx, \tag{2.34}$$

et de

$$|\nabla u|^p = \sum_{1 \leq i,j \leq 3} |\partial_j u_i|^p = \sum_{1 \leq i,j \leq 3} |\partial_i u_j|^p = |(\nabla u)^t|^p,$$

on termine la preuve. □

Du fait que notre viscosité n'est pas constante et dépend de la température, la vitesse et du module du tenseur des taux de déformations on introduit la fonction $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{3\times 3} \to \mathbb{R}^{3\times 3}$ définie par

$$\mathcal{F}(\lambda_1, \lambda_2) = 2\mu(., \lambda_1, |\lambda_2|)|\lambda_2|^{p-2}\lambda_2.$$

Avec (2.2) on a

$$|\mathcal{F}(\lambda_1, \lambda_2)| \quad \leq \quad 2\mu_1 |\lambda_2|^{p-1}, \tag{2.35}$$

et avec (2.4) pour tout réel $p > 1$ on a la fonction

$$(\lambda_1, \lambda_2) \mapsto \mathcal{F}(\lambda_1, \lambda_2) \quad \text{est continue sur} \quad \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{3\times 3}. \tag{2.36}$$

Lemme 2.3 *Sous l'hypothèse* (2.3) *la fonction* $(., \lambda_2) \mapsto \mathcal{F}(., \lambda_2)$ *est monotone sur* $\mathbb{R}^{3\times 3}$ *pour tout réel* $p > 1$.

Preuve. La fonction $(., \lambda_2) \mapsto \mathcal{F}(., \lambda_2)$ est montone c-à-d,

$$(\mathcal{F}(\lambda_1, \lambda_2') - \mathcal{F}(\lambda_1, \lambda_2'')) : (\lambda_2' - \lambda_2'') \geq 0, \quad \forall \lambda_2', \lambda_2'' \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

En effet, distinguons les cas suivantes :
1) Si $\lambda_2' = 0_{3,3}$ et $\lambda_2'' \neq 0_{3,3}$, avec (2.2) on a

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}(\lambda_1, 0_{3,3}) - \mathcal{F}(\lambda_1, \lambda_2'')) : (-\lambda_2'') &= \mathcal{F}(\lambda_1, \lambda_2'') : \lambda_2'' \\ &\geq 2\mu_0 |\lambda_2''|^p \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Quite à modifier les rôles de λ_2', λ_2'' dès le départ, on peut se ramener au cas précédent si $\lambda_2' \neq 0_{3,3}$ et $\lambda_2'' = 0_{3,3}$.
2) Si $\lambda_2' = \lambda_2'' = 0_{3,3}$ on a

$$(\mathcal{F}(\lambda_1, \lambda_2') - \mathcal{F}(\lambda_1, \lambda_2'')) : (\lambda_2' - \lambda_2'') = 0.$$

3) Si λ_2', λ_2'' non nuls, considérons les deux cas $p \geq 2$ et $1 < p \leq 2$ séparément :
i) Pour $p \geq 2$, on a

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}(\lambda_1, \lambda_2') - \mathcal{F}(\lambda_1, \lambda_2'')) : (\lambda_2' - \lambda_2'') &= 2\mu(\theta, \lambda_1, |\lambda_2'|)|\lambda_2'|^{p-2}\lambda_2' : (\lambda_2' - \lambda_2'') \\ &- 2\mu(\theta, \lambda_1, |\lambda_2''|)|\lambda_2''|^{p-2}\lambda_2'' : (\lambda_2' - \lambda_2''). \end{aligned}$$

On note

$$F_1 = \mu(\theta, \lambda_1, |\lambda_2'|)|\lambda_2'|^{p-2}, \quad F_2 = \mu(\theta, \lambda_1, |\lambda_2''|)|\lambda_2''|^{p-2}, \tag{2.37}$$

on obtient

$$\begin{aligned} &(\mathcal{F}(\lambda_1, \lambda_2') - \mathcal{F}(\lambda_1, \lambda_2'')) : (\lambda_2' - \lambda_2'') \\ &= 2F_1\lambda_2' : (\lambda_2' - \lambda_2'')) - 2F_2\lambda_2'' : (\lambda_2' - \lambda_2'') \\ &= 2F_1|\lambda_2'|^2 - 2F_1\lambda_2' : \lambda_2'' - 2F_2\lambda_2' : \lambda_2'' + 2F_2|\lambda_2''|^2. \end{aligned}$$

Du fait que

$$\lambda_2' : \lambda_2'' \leq |\lambda_2'||\lambda_2''|,$$

on obtient

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}(\lambda_1,\lambda_2') - \mathcal{F}(\lambda_1,\lambda_2'')) : (\lambda_2' - \lambda_2'') &\geq 2F_1|\lambda_2'|^2 - 2F_1|\lambda_2'||\lambda_2''| \\ &- 2F_2|\lambda_2'||\lambda_2''| + 2F_2|\lambda_2''|^2 \\ &= 2F_1|\lambda_2'|^2 - 2(F_1+F_2)|\lambda_2'||\lambda_2''| \\ &+ 2F_2|\lambda_2''|^2,\end{aligned}$$

en utilisant

$$2|\lambda_2'||\lambda_2''| \leq |\lambda_2'|^2 + |\lambda_2''|^2,$$

on trouve

$$\begin{aligned}&(\mathcal{F}(\lambda_1,\lambda_2') - \mathcal{F}(\lambda_1,\lambda_2'')) : (\lambda_2' - \lambda_2'') \\ &\geq 2F_1|\lambda_2'|^2 - (F_1+F_2)(|\lambda_2'|^2 + |\lambda_2''|^2) + 2F_2|\lambda_2''|^2 \\ &= F_1|\lambda_2'|^2 - F_1|\lambda_2''|^2 - F_2|\lambda_2'|^2 + F_2|\lambda_2''|^2,\end{aligned}$$

d'où

$$(\mathcal{F}(\lambda_1,\lambda_2') - \mathcal{F}(\lambda_1,\lambda_2'')) : (\lambda_2' - \lambda_2'') \quad \geq \quad (F_1 - F_2)(|\lambda_2'|^2 - |\lambda_2''|^2).$$

Posons

$$\phi_0(\lambda_2',\lambda_2'') = (\mathcal{F}(\lambda_1,\lambda_2') - \mathcal{F}(\lambda_1,\lambda_2'')) : (\lambda_2' - \lambda_2''),$$

en remplaçant F_1, F_2 par ses expressions (2.37) on obtient

$$\begin{aligned}&\phi_0(\lambda_2',\lambda_2'') \geq (\mu(\theta,\lambda_1,|\lambda_2'|)|\lambda_2'|^{p-2} - \mu(\theta,\lambda_1,|\lambda_2''|)|\lambda_2''|^{p-2})(|\lambda_2'|^2 - |\lambda_2''|^2) \\ &= \Big(\mu(\theta,\lambda_1,|\lambda_2'|) - \mu(\theta,\lambda_1,|\lambda_2''|)\Big)\Big(|\lambda_2'|^2 - |\lambda_2''|^2\Big)|\lambda_2'|^{p-2} \\ &+\Big(\mu(\theta,\lambda_1,|\lambda_2''|)|\lambda_2'|^{p-2} - \mu(\theta,\lambda_1,|\lambda_2''|)|\lambda_2''|^{p-2}\Big)\Big(|\lambda_2'|^2 - |\lambda_2''|^2\Big),\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}&\phi_0(\lambda_2',\lambda_2'') \geq |\lambda_2'|^{p-2}\Big(\mu(\theta,\lambda_1,|\lambda_2'|) - \mu(\theta,\lambda_1,|\lambda_2''|)\Big)\Big(|\lambda_2'|^2 - |\lambda_2''|^2\Big) \\ &+\mu(\theta,\lambda_1,|\lambda_2''|)\Big(|\lambda_2'|^{p-2} - |\lambda_2''|^{p-2}\Big)\Big(|\lambda_2'|^2 - |\lambda_2''|^2\Big) \\ &\geq |\lambda_2'|^{p-2}\Big(\mu(\theta,\lambda_1,|\lambda_2'|) - \mu(\theta,\lambda_1,|\lambda_2''|)\Big)\Big(|\lambda_2'| - |\lambda_2''|\Big)\Big(|\lambda_2'| + |\lambda_2''|\Big) \\ &+\mu(\theta,\lambda_1,|\lambda_2''|)\Big(|\lambda_2'|^{p-2} - |\lambda_2''|^{p-2}\Big)\Big(|\lambda_2'|^2 - |\lambda_2''|^2\Big),\end{aligned}$$

avec (2.2), (2.3) et la monotonie de la fonction $w \mapsto w^{p-2}$ sur $\mathbb{R}^+$ car $p-2 \geq 0$ on a

$$(\mathcal{F}(\lambda_1, \lambda_2') - \mathcal{F}(\lambda_1, \lambda_2'')) : (\lambda_2' - \lambda_2'') = \phi_0(\lambda_2', \lambda_2'') \geq 0,$$

ce qui montre que $(., \lambda_2) \mapsto \mathcal{F}(., \lambda_2)$ est monotone.
ii) Pour $1 < p \leq 2$, on a

$$\phi_0(\lambda_2', \lambda_2'') = (2\mu(\theta, \lambda_1, |\lambda_2'|)|\lambda_2'|^{p-2}\lambda_2' - 2\mu(\theta, \lambda_1, |\lambda_2''|)|\lambda_2''|^{p-2}\lambda_2'') : (\lambda_2' - \lambda_2''),$$

notons

$$\alpha = 2\mu(\theta, \lambda_1, |\lambda_2'|), \quad \beta = 2\mu(\theta, \lambda_1, |\lambda_2''|), \tag{2.38}$$

on obtient

$$\phi_0(\lambda_2', \lambda_2'') = (\alpha|\lambda_2'|^{p-2}\lambda_2' - \beta|\lambda_2''|^{p-2}\lambda_2'') : (\lambda_2' - \lambda_2''),$$

en utilisant l'expression $2\lambda_2' : \lambda_2'' = |\lambda_2'|^2 + |\lambda_2''|^2 - |\lambda_2' - \lambda_2''|^2$ on obtient

$$\begin{aligned} \phi_0(\lambda_2', \lambda_2'') &= \frac{1}{2}\Big((\alpha|\lambda_2'|^{p-2} + \beta|\lambda_2''|^{p-2})|\lambda_2' - \lambda_2''|^2 \\ &+ (|\lambda_2'|^2 - |\lambda_2''|^2)(\alpha|\lambda_2'|^{p-2} - \beta|\lambda_2''|^{p-2})\Big). \end{aligned}$$

Notons $r = 2 - p$ tel que $0 \leq r < 1$, pour $|\lambda_2'|, |\lambda_2''|$ non nuls, on trouve

$$\begin{aligned} \phi_0(\lambda_2', \lambda_2'') &= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{|\lambda_2'||\lambda_2''|}\Big)^r\Big((\beta|\lambda_2'|^r + \alpha|\lambda_2''|^r)|\lambda_2' - \lambda_2''|^2 \\ &- (\beta|\lambda_2'|^r - \alpha|\lambda_2''|^r)(|\lambda_2'|^2 - |\lambda_2''|^2)\Big). \end{aligned}$$

En utilisant le fait que

$$|\lambda_2' - \lambda_2''| \geq |\lambda_2'| - |\lambda_2''|,$$

on obtient

$$\begin{aligned} \phi_0(\lambda_2', \lambda_2'') &\geq \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{|\lambda_2'||\lambda_2''|}\Big)^r\Big((\beta|\lambda_2'|^r + \alpha|\lambda_2''|^r)(|\lambda_2'| - |\lambda_2''|)^2 \\ &- (\beta|\lambda_2'|^r - \alpha|\lambda_2''|^r)(|\lambda_2'|^2 - |\lambda_2''|^2)\Big) \\ &\geq \frac{1}{2}(|\lambda_2'| - |\lambda_2''|)\Big(\frac{1}{|\lambda_2'||\lambda_2''|}\Big)^r\Big((\beta|\lambda_2'|^r + \alpha|\lambda_2''|^r)(|\lambda_2'| - |\lambda_2''|) \\ &- (\beta|\lambda_2'|^r - \alpha|\lambda_2''|^r)(|\lambda_2'| + |\lambda_2''|)\Big). \end{aligned}$$

On a deux cas : soit $|\lambda_2'| \geq |\lambda_2''|$ ou $|\lambda_2''| \geq |\lambda_2'|$ mais comme λ_2' et λ_2'' jouent le même rôle, on traite un seul cas.
Si $|\lambda_2'| \geq |\lambda_2''|$, on note $t = \dfrac{|\lambda_2'|}{|\lambda_2''|} \geq 1$, d'où

$$\begin{aligned}\phi_0(\lambda_2', \lambda_2'') &\geq \frac{|\lambda_2''|^2}{2|\lambda_2'|^r}(t-1)\Big((\beta t^r + \alpha)(t-1) - (\beta t^r - \alpha)(t+1)\Big) \\ &= \frac{|\lambda_2''|^2}{|\lambda_2'|^r}(t-1)(\alpha t - \beta t^r).\end{aligned}$$

Comme $|\lambda_2''| \leq |\lambda_2'|$ et d'après l'hypothèse (2.3) on obtient

$$0 < \beta = 2\mu(\theta, \lambda_1, |\lambda_2''|) \leq 2\mu(\theta, \lambda_1, |\lambda_2'|) = \alpha.$$

Comme $0 < r = 2 - p < 1$ (car $1 < p \leq 2$) et $t \geq 1$ on a $t^r \leq t$ et puisque $\beta \leq \alpha$ on obtient

$$\beta t^r \leq \alpha t \Rightarrow \alpha t - \beta t^r \geq 0.$$

On déduit donc que

$$(\mathcal{F}(\lambda_1, \lambda_2') - \mathcal{F}(\lambda_1, \lambda_2'')) : (\lambda_2' - \lambda_2'') = \phi_0(\lambda_2', \lambda_2'') \geq 0.$$

d'où le résultat.

□

Avec le lemme 2.3, on peut faire un raisonnement analogue à celui du Théorème 8.9 chap 8 [51], mais la différence dans ce travail est qu'on travaille dans l'espace $V^p_{0.div}$ au lieu $W_0^{1,p}(\Omega)$ et à la place du gradient on a le tenseur des taux de déformations.

Lemme 2.4 *Sous les hypothèses* (2.2)-(2.4) *l'opérateur* $\mathbf{A}$ *est borné et pseudo-monotone.*

Preuve. Soient υ, $\varphi \in V^p_{0.div}$, avec (2.2) on a

$$\begin{aligned}|\langle \mathbf{A}\upsilon, \varphi\rangle| &= \Big|\int_\Omega 2\mu(\theta, \upsilon + G, |D(\upsilon + G)|)|D(\upsilon + G)|^{p-2} d_{ij}(\upsilon + G) d_{ij}(\varphi) dx\Big| \\ &\leq 2\mu_1 \int_\Omega |D(\upsilon + G)|^{p-1} |D(\varphi)|\, dx.\end{aligned}$$

En utilisant le lemme 2.2 et l'inégalité de Hölder on obtient

$$\begin{aligned} |\langle \mathbf{A}v, \varphi\rangle| &\leq 2\mu_1 \|v+G\|_{1.p}^{p-1} \|\varphi\|_{1.p} \\ &\leq 2\mu_1 (\|v\|_{1.p} + \|G\|_{1.p})^{p-1} \|\varphi\|_{1.p}, \end{aligned}$$

d'où

$$\sup_{\varphi \neq 0} \frac{|\langle \mathbf{A}v, \varphi\rangle|}{\|\varphi\|_{1.p}} \leq 2\mu_1 (\|v\|_{1.p} + \|G\|_{1.p})^{p-1},$$

alors

$$\|\mathbf{A}v\|_{(V^p_{0.div})'} \leq 2\mu_1 (\|v\|_{1.p} + \|G\|_{1.p})^{p-1}, \tag{2.39}$$

donc l'opérateur $\mathbf{A}$ est borné.
Maintenant, montrons que $\mathbf{A}$ est pseudo-monotone, pour cela on réécrit $\mathbf{A}$ comme suit :

$$\langle \mathbf{A}u, v\rangle = \int_\Omega \mathcal{F}(u+G, D(u+G)) : D(v)\, dx, \tag{2.40}$$

où

$$\mathcal{F}(u+G, D(u+G)) = 2\mu(\theta, u+G, |D(u+G)|)|D(u+G)|^{p-2} D(u+G).$$

Soit p' l'exposant conjugué de p, on a $\mathcal{F}(u+G, D(u+G)) \in L^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^{3\times 3})$. En effet, de (2.35) on a

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}(u+G, D(u+G))|^{p'} &\leq (2\mu_1 |D(u+G)|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}} \\ &= (2\mu_1)^{\frac{p}{p-1}} |D(u+G)|^p \in L^1(\Omega). \end{aligned}$$

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite qui converge faiblement vers u dans $V^p_{0.div}$ telle que

$$\mathbf{A}u_n \rightharpoonup \chi \quad \text{faiblement dans} \quad (V^p_{0.div})', \tag{2.41}$$

et

$$\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega \mathcal{F}(u_n+G, D(u_n+G)) : D(u_n)\, dx \leq \langle \chi, u\rangle, \tag{2.42}$$

par la définition de la pseudo-monotonie (au sens 1) (voir [51] page 206) de l'opérateur $\mathbf{A}$ on doit vérifier que

$$\chi = \mathbf{A}u \quad \text{et} \quad \langle \mathbf{A}u_n, u_n\rangle \longrightarrow \langle \mathbf{A}u, u\rangle.$$

De (2.35) on a $\mathcal{F}(u_n + G, D(u_n + G))$ est bornée dans $L^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^{3\times 3})$, donc on peut extraire de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ une sous-suite notée encore $(u_n)_{n\geq 0}$ telle que

$$\mathcal{F}(u_n + G, D(u_n + G)) = \mathbf{g}_n \rightharpoonup \mathbf{g} \quad \text{dans} \quad L^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^{3\times 3}). \tag{2.43}$$

Avec (2.41), pour tout $v \in V^p_{0.div}$ on a

$$\langle \mathbf{A}u_n, v\rangle \to \langle \chi, v\rangle, \tag{2.44}$$

d'autre part, pour tout $v \in V^p_{0.div}$ on a

$$\langle \mathbf{A}u_n, v\rangle = \int_\Omega \mathcal{F}(u_n + G, D(u_n + G)) : D(v)\, dx = \int_\Omega \mathbf{g}_n : D(v)\, dx,$$

avec (2.43) on a donc pour tout $v \in V^p_{0.div}$

$$\int_\Omega \mathbf{g}_n : D(v)\, dx \to \int_\Omega \mathbf{g} : D(v)\, dx, \tag{2.45}$$

avec (2.44), (2.45) et l'unicité de la limite on obtient

$$\langle \chi, v\rangle = \int_\Omega \mathbf{g} : D(v)\, dx, \tag{2.46}$$

on prend $v = u$ dans (2.46) on obtient

$$\langle \chi, u\rangle = \int_\Omega \mathbf{g} : D(u)\, dx.$$

Avec l'égalité ci-dessus et (2.43) la formule (2.42) devient

$$\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega \mathbf{g}_n : D(u_n)\, dx \leq \int_\Omega \mathbf{g} : D(u)\, dx. \tag{2.47}$$

Maintenant, on utilise le lemme 2.3 on trouve pour tout $\Phi \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^{3\times 3})$

$$\int_\Omega (\mathcal{F}(u_n + G, D(u_n + G)) - \mathcal{F}(u_n + G, \Phi)) : (D(u_n + G) - \Phi)\, dx \geq 0,$$

d'où

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \mathbf{g}_n : D(u_n)\, dx + \int_\Omega \mathbf{g}_n : D(G)\, dx - \int_\Omega \mathbf{g}_n : \Phi\, dx \\ &- \int_\Omega \mathcal{F}(u_n + G, \Phi) : (D(u_n + G) - \Phi)\, dx \geq 0. \end{aligned} \tag{2.48}$$

En utilisant le théorème de Rellich-Kondrachov (l'injection de $V^p_{0.div}$ dans $\mathbf{L}^p(\Omega)$ étant compacte) d'où $u_n \to u$ fortement dans $\mathbf{L}^p(\Omega)$. Donc on peut extraire une autre sous-suite $u_n \to u$ presque partout dans Ω.
Avec (2.36) on a

$$\mathcal{F}(u_n + G, \Phi) \longrightarrow \mathcal{F}(u + G, \Phi) \quad \text{presque partout,}$$

avec (2.35) on a

$$|\mathcal{F}(u_n + G, \Phi)| \leq 2\mu_1 |\Phi|^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega) = L^{p'}(\Omega),$$

en utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$\mathcal{F}(u_n + G, \Phi) \longrightarrow \mathcal{F}(u + G, \Phi) \quad \text{dans} \quad \mathbf{L}^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^{3\times 3}) \quad \text{fort,} \tag{2.49}$$

(c-à-d $\displaystyle\int_\Omega |\mathcal{F}(u_n + G, \Phi) - \mathcal{F}(u + G, \Phi)|^{p'}\, dx \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$)
donc,

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \mathcal{F}(u_n + G, \Phi) : (D(u_n + G) - \Phi)\, dx \\ &\longrightarrow \int_\Omega \mathcal{F}(u + G, \Phi) : (D(u + G) - \Phi)\, dx. \end{aligned} \tag{2.50}$$

On passe à la limite supérieure dans (2.48) et on utilise les convergences (2.43), (2.50) et l'inégalité (2.47) on trouve

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \mathbf{g} : D(u)\, dx + \int_\Omega \mathbf{g} : (D(G) - \Phi)\, dx \\ &- \int_\Omega \mathcal{F}(u + G, \Phi) : (D(u + G) - \Phi)\, dx \\ &\geq \limsup_{n\to+\infty} \int_\Omega \mathbf{g}_n : D(u_n)\, dx + \int_\Omega \mathbf{g} : (D(G) - \Phi)\, dx \\ &- \int_\Omega \mathcal{F}(u + G, \Phi) : (D(u + G) - \Phi)\, dx \geq 0, \end{aligned}$$

d'où

$$\int_\Omega \mathbf{g} : (D(u + G) - \Phi)\, dx - \int_\Omega \mathcal{F}(u + G, \Phi) : (D(u + G) - \Phi)\, dx \geq 0,$$

donc

$$\int_\Omega (\mathbf{g} - \mathcal{F}(u+G,\Phi)) : (D(u+G) - \Phi)\, dx \geq 0. \tag{2.51}$$

On prend $\Phi = D(u+G) + \kappa\Theta$ dans (2.51) avec $\kappa > 0$ et $\Theta \in \mathcal{D}(\Omega;\mathbb{R}^{3\times 3})$, après la division par $-\kappa$ on obtient

$$\int_\Omega (\mathbf{g} - \mathcal{F}(u+G, D(u+G) + \kappa\Theta)) : \Theta\, dx \leq 0, \tag{2.52}$$

et avec $\Phi = D(u+G) - \kappa\Theta$, après la division par κ on obtient

$$\int_\Omega (\mathbf{g} - \mathcal{F}(u+G, D(u+G) - \kappa\Theta)) : \Theta\, dx \geq 0. \tag{2.53}$$

D'autre part, de (2.36) on a pour presque tout $x \in \Omega$

$$\mathcal{F}(u+G, D(u+G) \pm \kappa\Theta) : \Theta \to \mathcal{F}(u+G, D(u+G)) : \Theta \quad \text{quand} \quad \kappa \to 0,$$

et avec (2.35) on a

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}(u+G, D(u+G) \pm \kappa\Theta) : \Theta| &\leq |\mathcal{F}(u+G, D(u+G) \pm \kappa\Theta)||\Theta| \\ &\leq 2\mu_1 |D(u+G) \pm \kappa\Theta|^{p-1}|\Theta| \\ &\leq 2\mu_1 \big(|D(u+G)| + \kappa|\Theta|\big)^{p-1}|\Theta|, \end{aligned}$$

donc, pour $0 < \kappa < 1$ on obtient

$$|\mathcal{F}(u+G, D(u+G) \pm \kappa\Theta) : \Theta| \leq 2\mu_1 \big(|D(u+G)| + |\Theta|\big)^{p-1}|\Theta| \in L^1(\Omega),$$

par le théorème de convergence dominée de Lebesgue quand $\kappa \to 0$, on en déduit que

$$\int_\Omega \mathcal{F}(u+G, D(u+G) \pm \kappa\Theta) : \Theta\, dx \to \int_\Omega \mathcal{F}(u+G, D(u+G)) : \Theta\, dx. \tag{2.54}$$

Maintenant, on passe à la limite quand $\kappa \to 0$ dans (2.52), (2.53), en utilisant (2.54) on obtient

$$\int_\Omega (\mathbf{g} - \mathcal{F}(u+G, D(u+G))) : \Theta\, dx = 0 \quad \forall \Theta \in \mathcal{D}(\Omega;\mathbb{R}^{3\times 3}),$$

d'où

$$\mathbf{g} = \mathcal{F}(u+G, D(u+G)). \tag{2.55}$$

Avec (2.46) on a

$$\begin{aligned}\langle \chi, v\rangle &= \int_\Omega \mathbf{g} : D(v)\, dx \\ &= \int_\Omega \mathcal{F}(u+G, D(u+G)) : D(v)\, dx,\end{aligned}$$

et de (2.40) on trouve

$$\langle \chi, v\rangle = \langle \mathbf{A}u, v\rangle,$$

d'où

$$\chi = \mathbf{A}u. \tag{2.56}$$

Reste à vérifier que $\langle \mathbf{A}u_n, u_n\rangle \to \langle \mathbf{A}u, u\rangle$, pour cela du lemme 2.3 on a

$$\int_\Omega (\mathcal{F}(u_n+G, D(u_n+G)) - \mathcal{F}(u_n+G, D(u+G)) : (D(u_n) - D(u))\, dx \geq 0,$$

d'où

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \mathcal{F}(u_n+G, D(u_n+G)) : D(u_n)\, dx \\ &\geq \int_\Omega \mathcal{F}(u_n+G, D(u_n+G)) : D(u)\, dx \\ &+ \int_\Omega \mathcal{F}(u_n+G, D(u+G)) : (D(u_n) - D(u))\, dx.\end{aligned} \tag{2.57}$$

Avec (2.49)

$$\int_\Omega \mathcal{F}(u_n+G, D(u+G)) : (D(u_n) - D(u))\, dx \longrightarrow 0, \tag{2.58}$$

avec (2.43), (2.55)

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \mathcal{F}(u_n+G, D(u_n+G)) : D(u)\, dx = \int_\Omega \mathbf{g}_n : D(u)\, dx \\ &\to \int_\Omega \mathbf{g} : D(u)\, dx = \int_\Omega \mathcal{F}(u+G, D(u+G)) : D(u)\, dx.\end{aligned} \tag{2.59}$$

En passant à la limite inférieure dans (2.57), en utilisant (2.58), (2.59) on obtient

$$\begin{aligned}&\liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega \mathcal{F}(u_n+G, D(u_n+G)) : D(u_n)\, dx \\ &\geq \int_\Omega \mathcal{F}(u+G, D(u+G)) : D(u)\, dx = \langle \mathbf{A}u, u\rangle.\end{aligned}$$

De (2.42), (2.56) on obtient

$$\limsup_{n\to+\infty}\int_\Omega \mathcal{F}(u_n+G,D(u_n+G)):D(u_n)\,dx \;\leq\; \langle\chi,u\rangle=\langle\mathbf{A}u,u\rangle.$$

Nous avons donc montré que

$$\int_\Omega \mathcal{F}(u_n+G,D(u_n+G)):D(u_n)\,dx=\langle\mathbf{A}u_n,u_n\rangle\to\langle\mathbf{A}u,u\rangle,$$

ce qui montre que l'opérateur $\mathbf{A}$ est pseudo-monotone (au sens 1) et comme il est borné donc $\mathbf{A}$ est pseudo-monotone (au sens 2) (voir [51]). □

Théorème 2.1 *Pour $f\in(V^p_{0.div})'$, $k\in L^{p'}_+(\omega)$, $G\in\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$ vérifiant (2.17), $s\in\boldsymbol{L}^p(\omega)$, μ vérifiant (2.2)-(2.4) et $\theta\in W^{1,q}_{\Gamma_1\cup\Gamma_L}(\Omega)$, il existe $v\in V^p_{0.div}$ solution du problème 2.2.*

Preuve. Du lemme 2.4 on a l'opérateur $\mathbf{A}$ est pseudo-monotone.
La fonction Ψ est convexe, propre et semi-continue inférieurement.
Reste à montrer que $\mathbf{A}$ est coercif c-à-d,

$$\exists v^*\in V^p_{0.div}\quad\text{tel que}\quad\Psi(v^*)<\infty,$$

et

$$\lim_{\|v\|_{1.p}\to+\infty}\frac{\langle\mathbf{A}v,v-v^*\rangle+\Psi(v)}{\|v\|_{1.p}}=+\infty.$$

Vérifions que $v^*=0$ convient. Notons

$$\overline{\mu}(\theta,v)=\mu(\theta,v+G,|D(v+G)|),\tag{2.60}$$

on a

$$\begin{aligned}\langle\mathbf{A}v,v\rangle &= \int_\Omega 2\overline{\mu}(\theta,v)|D(v+G)|^{p-2}D(v+G):D(v+G)\,dx\\ &- \int_\Omega 2\overline{\mu}(\theta,v)|D(v+G)|^{p-2}D(v+G):D(G)\,dx,\end{aligned}$$

d'après (2.2) on a

$$\langle\mathbf{A}v,v\rangle \;\geq\; 2\mu_0\int_\Omega|D(v+G)|^p\,dx-2\mu_1\int_\Omega|D(v+G)|^{p-1}|D(G)|\,dx.$$

En utilisant l'inégalité de Korn, il existe $C_{Korn} > 0$ telle que

$$|u|_{1.p} \geq C_{Korn}\|u\|_{1.p} \quad \forall u \in V^p_{\Gamma_1}, \tag{2.61}$$

où

$$|u|^p_{1.p} = \int_\Omega |D(u)|^p \, dx.$$

On obtient

$$\langle \mathbf{A}v, v\rangle \;\geq\; 2\mu_0(C_{Korn})^p\|v+G\|^p_{1.p} - 2\mu_1\int_\Omega |D(v+G)|^{p-1}|D(G)|\, dx.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder le lemme 2.2, on obtient

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{A}v, v\rangle &\geq 2\mu_0(C_{Korn})^p\|v+G\|^p_{1.p} \\
&- 2\mu_1\|v+G\|^{p-1}_{1.p}\|G\|_{1.p} \\
&\geq 2\mu_0(C_{Korn})^p\big|\|v\|_{1.p} - \|G\|_{1.p}\big|^p \\
&- 2\mu_1(\|v\|_{1.p} + \|G\|_{1.p})^{p-1}\|G\|_{1.p},
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\frac{\langle \mathbf{A}v, v\rangle}{\|v\|_{1.p}} &\geq 2\mu_0(C_{Korn})^p\frac{\big|\|v\|_{1.p} - \|G\|_{1.p}\big|^p}{\|v\|_{1.p}} \\
&- 2\mu_1\frac{(\|v\|_{1.p} + \|G\|_{1.p})^{p-1}}{\|v\|_{1.p}}\|G\|_{1.p} \\
&= 2\mu_0(C_{Korn})^p\|v\|^{p-1}_{1.p}\Big|1 - \frac{\|G\|_{1.p}}{\|v\|_{1.p}}\Big|^p \\
&- 2\mu_1\|v\|^{p-2}_{1.p}\Big(1 + \frac{\|G\|_{1.p}}{\|v\|_{1.p}}\Big)^{p-1}\|G\|_{1.p},
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\frac{\langle \mathbf{A}v, v\rangle}{\|v\|_{1.p}} \geq \|v\|^{p-1}_{1.p}\Bigg(&2\mu_0(C_{Korn})^p\Big|1 - \frac{\|G\|_{1.p}}{\|v\|_{1.p}}\Big|^p \\
&-\frac{2\mu_1}{\|v\|_{1.p}}\Big(1 + \frac{\|G\|_{1.p}}{\|v\|_{1.p}}\Big)^{p-1}\|G\|_{1.p}\Bigg),
\end{aligned} \tag{2.62}$$

alors, pour $p > 1$ on a

$$\lim_{\|v\|_{1.p}\to+\infty} \frac{\langle \mathbf{A}v, v\rangle + \Psi(v)}{\|v\|_{1.p}} = +\infty,$$

ce qui montre que l'opérateur **A** est coercif. Par application du Théorème 8.5 page 251 [56] on conclut que le problème 2.2 a au moins une solution. □

2.2.2 Recherche de la pression

Dans cette section on va montrer l'existence et l'unicité (à une constante près) de la pression associée à la vitesse solution de l'inéquation (2.27).

Théorème 2.2 *Sous les hypothèses du Théorème* 2.1*, pour* $f \in \boldsymbol{L}^{p'}(\Omega)$ *il existe un unique (à une constante près)* $\pi \in L_0^{p'}(\Omega)$ *vérifiant l'inéquation variationnelle elliptique* (2.27).

Preuve. Soit υ la solution du problème 2.2, pour tout $\psi \in W^{1,p}_{0.div}(\Omega)$ on prend $\varphi = \upsilon \pm \psi$ dans (2.32) on obtient l'équation variationnelle suivante :

$$a(\theta; \upsilon, \psi) = \langle f, \psi \rangle. \tag{2.63}$$

Considérons la forme linéaire $\mathcal{L}$ définie sur V_0^p par

$$\mathcal{L}(\psi) = \int_\Omega f \cdot \psi \, dx - a(\theta; \upsilon, \psi). \tag{2.64}$$

Pour tout ψ dans V_0^p on a

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(\psi)| &= \Big| \int_\Omega f \cdot \psi \, dx - a(\theta; \upsilon, \psi) \Big| \\ &\leq \Big| \int_\Omega f \cdot \psi \, dx \Big| + |a(\theta; \upsilon, \psi)|. \end{aligned} \tag{2.65}$$

D'autre part, pour tout $(\upsilon, \psi) \in (V_0^p)^2$ on a

$$\begin{aligned} |a(\theta; \upsilon, \psi)| &= \Big| \int_\Omega 2\mu(\theta, \upsilon + G, |D(\upsilon + G)|) |D(\upsilon + G)|^{p-2} d_{ij}(\upsilon + G) d_{ij}(\psi) dx \Big| \\ &\leq 2\mu_1 \int_\Omega |D(\upsilon + G)|^{p-1} |D(\psi)| \, dx. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder et le lemme 2.2 on obtient

$$|a(\theta; \upsilon, \psi)| \leq 2\mu_1 \|\upsilon + G\|_{1.p}^{p-1} \|\psi\|_{1.p}. \tag{2.66}$$

Avec (2.66) l'inéquation (2.65) devient

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(\psi)| &\leq \|f\|_{\mathbf{L}^{p'}(\Omega)}\|\psi\|_{\mathbf{L}^{p}(\Omega)} + 2\mu_1\|\upsilon + G\|_{1.p}^{p-1}\|\psi\|_{1.p} \\ &\leq \big(C'\|f\|_{\mathbf{L}^{p'}(\Omega)} + 2\mu_1(\|\upsilon\|_{1.p} + \|G\|_{1.p})^{p-1}\big)\|\psi\|_{1.p}, \end{aligned}$$

où C' désigne la constante de Poincaré.
Donc, $\mathcal{L}$ est continue sur $\mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega)$ et $\mathcal{L} \in (\mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega))' = \mathbf{W}^{-1,p'}(\Omega)$. Avec (2.63) on a

$$\mathcal{L}(\psi) = 0, \quad \forall \psi \in W_{0.div}^{1,p}(\Omega),$$

d'où

$$\mathcal{L}(\psi) = < \nabla\pi, \psi >_{\mathbf{W}^{-1,p'}(\Omega),\mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega)} \quad \forall \psi \in \mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega).$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} a(\theta;\upsilon,\psi) &= 2\int_\Omega \mu(\theta,\upsilon+G,|D(\upsilon+G)|)|D(\upsilon+G)|^{p-2}d_{ij}(\upsilon+G)d_{ij}(\psi)dx \\ &= 2\int_\Omega \mu(\theta,\upsilon+G,|D(\upsilon+G)|)|D(\upsilon+G)|^{p-2}d_{ij}(\upsilon+G)\partial_j\psi_i dx. \end{aligned}$$

Pour tout $\psi \in \mathbf{D}(\Omega)$, avec la notation (2.60) en utilisant la formule de Green on obtient

$$a(\theta;\upsilon,\psi) = - < div\big(2\overline{\mu}(\theta,\upsilon)|D(\upsilon+G)|^{p-2}D(\upsilon+G)\big), \psi >_{\mathbf{D}'(\Omega),\mathbf{D}(\Omega)} .$$

De (2.64) on obtient

$$\begin{aligned} \int_\Omega f\cdot\psi\, dx &+ < div\big(2\overline{\mu}(\theta,\upsilon)|D(\upsilon+G)|^{p-2}D(\upsilon+G)\big), \psi >_{\mathbf{D}'(\Omega),\mathbf{D}(\Omega)} \\ &= < \nabla\pi, \psi >_{\mathbf{D}'(\Omega),\mathbf{D}(\Omega)}, \end{aligned}$$

d'où

$$- < div(\tilde{\sigma}), \psi >_{\mathbf{D}'(\Omega),\mathbf{D}(\Omega)} = \int_\Omega f\cdot\psi\, dx. \tag{2.67}$$

Donc

$$-div(\tilde{\sigma}) = f \quad \text{dans} \quad \mathbf{D}'(\Omega).$$

Alors, comme $f \in \mathbf{L}^{p'}(\Omega)$ on a

$$-div(\tilde{\sigma}) = f \quad \text{dans} \quad \mathbf{L}^{p'}(\Omega),$$

c-à-d,

$$-\partial_j \tilde{\sigma}_{ij} = f_i.$$

On multiplie les deux cotés de cette dernière par $\varphi_i - \upsilon_i \in V_0^p$, on fait les mêmes calculs que pour obtenir (2.30) on obtient aussi

$$\int_\Omega \tilde{\sigma}_{ij} \partial_j(\varphi_i - \upsilon_i)\, dx = \int_\omega \tilde{\sigma}_{\tau_i}(\varphi_i - \upsilon_i)\, dx' + \int_\Omega f_i(\varphi_i - \upsilon_i)\, dx.$$

En remplaçant $\tilde{\sigma}_{ij}$ par son expression (2.19) dans l'équation ci-dessus on obtient

$$a(\theta; \upsilon, \varphi - \upsilon) - (\pi, div(\varphi)) - \int_\Omega f_i(\varphi_i - \upsilon_i)\, dx = \int_\omega \tilde{\sigma}_{\tau_i}(\varphi_i - \upsilon_i)\, dx'.$$

On ajoute aux deux membres de l'équation ci-dessus le terme $\Psi(\varphi) - \Psi(\upsilon)$ on obtient

$$\begin{array}{ll} a(\theta; \upsilon, \varphi - \upsilon) & -(\pi, div(\varphi)) - \displaystyle\int_\Omega f \cdot (\varphi - \upsilon)\, dx + \Psi(\varphi) - \Psi(\upsilon) \\ & = \tilde{B}(\upsilon, \varphi), \end{array} \tag{2.68}$$

où

$$\tilde{B}(\upsilon, \varphi) = \int_\omega \tilde{\sigma}_{\tau_i}(\varphi_i - \upsilon_i)\, dx' + \Psi(\varphi) - \Psi(\upsilon).$$

D'autre part, on a

$$\int_{\partial\Omega} \varphi \cdot n\, dY = 0 \quad \forall \varphi \in V_0^p,$$

donc, suivant [3], il existe $\hat{\varphi} \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ vérifiant

$$div(\hat{\varphi}) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \quad \hat{\varphi} = \varphi \quad \text{sur} \quad \partial\Omega.$$

Donc, $\hat{\varphi} \in V_{0.div}^p$ et avec (2.68) on a

$$a(\theta; \upsilon, \hat{\varphi} - \upsilon) - \int_\Omega f \cdot (\hat{\varphi} - \upsilon)\, dx + \Psi(\hat{\varphi}) - \Psi(\upsilon) = \tilde{B}(\upsilon, \hat{\varphi}). \tag{2.69}$$

Or υ vérifiant le problème 2.2 donc avec (2.32) on a

$$a(\theta; \upsilon, \hat{\varphi} - \upsilon) - \langle f, \hat{\varphi} - \upsilon \rangle + \Psi(\hat{\varphi}) - \Psi(\upsilon) \geq 0,$$

comme $f \in \mathbf{L}^{p'}(\Omega) \subset (V^p_{0.div})'$ on peut écrire

$$\langle f, \hat{\varphi} - \upsilon \rangle = \int_\Omega f \cdot (\hat{\varphi} - \upsilon)\, dx,$$

donc,

$$\tilde{B}(\upsilon, \hat{\varphi}) \geq 0.$$

Comme $\tilde{B}(\upsilon, \hat{\varphi}) = \tilde{B}(\upsilon, \varphi)$ car $\hat{\varphi} = \varphi$ sur $\partial\Omega$ on a

$$\tilde{B}(\upsilon, \varphi) \geq 0,$$

d'où (2.68) devient

$$a(\theta; \upsilon, \varphi - \upsilon) - (\pi, div(\varphi)) + \Psi(\varphi) - \Psi(\upsilon) \geq \int_\Omega f \cdot (\varphi - \upsilon)\, dx,$$

ce qui montre que $(\upsilon, \pi) \in V^p_{0.div} \times L^{p'}_0(\Omega)$ est solution de l'inéquation variationelle (2.27). □

2.3 Second problème intermédiaire (cas $p > 3$)

Rappelons que la température satisfait l'équation variationnelle (2.28).

2.3.1 Résultat d'existence (cas $1 < q < \frac{3}{2}$)

Dans notre travail le second membre du problème en température est dans $L^1(\Omega)$. ([11], [61]) étudient l'existence et l'unicité de la solution de ce genre du problème avec la condition de Dirichlet homogène sur la frontière de Ω donné par

$$-div(a(x, \nabla u)) = f \quad \text{dans} \quad \Omega,$$

avec $f \in L^1(\Omega)$ et a vérifiant

$$a(x, y)y \geq c|y|^p,$$

donc, pour suivre ces travaux on a besoin de choisir la conductivité thermique $K = K(x, \nabla\theta)$ mais dans notre travail on a choisi K dépend seulement de

x. Pour cela dans notre cas on utilise l'approximation m_{δ_1} que l'on va définir dans la suite pour montrer l'existence de la solution de l'équation variationnelle (2.28) comme dans [14] (où le terme de convection est négligé) et [19] (où le terme de convection existe avec la conductivité thermique constante), la différence dans notre travail est que la viscosité du fluide dépend de la température, de la vitesse du fluide ainsi que du module du tenseur des taux de déformations au lieu seulement de la température comme les travaux ci-dessus.

Soit $\delta_1 > 0$, pour tout $(\lambda^*, u) \in L^2(\Omega) \times V^p_{0.div}$ et $G \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ vérifiant (2.17), on définit la fonction suivante

$$(\lambda^*, u) \mapsto m_{\delta_1}(\lambda^*, u) = \frac{2\mu(\lambda^*, u+G, |D(u+G)|)|D(u+G)|^p}{1 + 2\delta_1\mu(\lambda^*, u+G, |D(u+G)|)|D(u+G)|^p},$$

d'où

$$|m_{\delta_1}(\lambda^*, u)| \leq \frac{1}{\delta_1}, \tag{2.70}$$

ce qui montre que $m_{\delta_1}(\lambda^*, u) \in L^\infty(\Omega)$. D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \|m_{\delta_1}(\lambda^*, u)\|_{L^1(\Omega)} &= \int_\Omega \frac{2\mu(\lambda^*, u+G, |D(u+G)|)|D(u+G)|^p}{1 + 2\delta_1\mu(\lambda^*, u+G, |D(u+G)|)|D(u+G)|^p}\, dx \\ &\leq 2\mu_1 \|D(u+G)\|^p_{(L^p(\Omega))^{3\times 3}}. \end{aligned}$$

Avec le lemme 2.2 on a

$$\|m_{\delta_1}(\lambda^*, u)\|_{L^1(\Omega)} \leq C_{01}, \tag{2.71}$$

où $C_{01} = 2\mu_1 \|\nabla(u+G)\|^p_{(L^p(\Omega))^{3\times 3}}$.
Maintenant, on considère le problème intermédiaire suivant :

Problème 2.3 *Pour $p > 3$, $\upsilon \in V^p_{0.div}$, $G \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$ vérifiant (2.17), $\theta_b \in H^{\frac{1}{2}}(\omega)$, $r \in L^\infty(\Omega)$, K vérifiant (2.8), trouver $\theta_{\delta_1} \in H^1_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega)$ telle que*

$$B(\theta_{\delta_1}, w) = \hat{L}(\theta_{\delta_1}, w) \quad \forall w \in H^1_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega), \tag{2.72}$$

où

$$\hat{L}(\theta_{\delta_1}, w) = \int_\Omega m_{\delta_1}(\theta_{\delta_1}, \upsilon) w\, dx + \int_\Omega r(\theta_{\delta_1}) w\, dx + \int_\omega \theta_b w\, dx'.$$

Pour étudier ce problème non linéaire, on considère le problème linéarisé correspondant suivant :

Problème 2.4 *Pour $\upsilon \in V^p_{0.div}$, $G \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$ vérifiant (2.17), $\theta_b \in L^2(\omega)$, $r \in L^\infty(\Omega)$, K vérifiant (2.8), $\tilde{\theta} \in L^2(\Omega)$, trouver $\theta_{\delta_1} \in H^1_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega)$ telle que*

$$B(\theta_{\delta_1}, w) = \hat{L}(\tilde{\theta}, w) \quad \forall w \in H^1_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega). \tag{2.73}$$

Théorème 2.3 *Pour $\tilde{\theta} \in L^2(\Omega)$, $\upsilon \in V^p_{0.div}$, $G \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$ vérifiant (2.17), μ vérifiant (2.4), $\theta_b \in L^2(\omega)$, $r \in L^\infty(\Omega)$, K vérifiant (2.8), il existe un unique $\theta_{\delta_1} \in H^1_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega)$ solution du problème 2.4.*

Preuve. De (2.8) et puisque $\upsilon + G \in (L^\infty(\Omega))^3$, il existe $M > 0$ tel que

$$|B(\theta_{\delta_1}, w)| \leq k_1 \|\theta_{\delta_1}\|_{1.2} \|w\|_{1.2} + M \|\theta_{\delta_1}\|_{1.2} \|w\|_{L^2(\Omega)},$$

en utilisant l'inégalité de Poincaré on obtient

$$|B(\theta_{\delta_1}, w)| \leq (k_1 + MC^*) \|\theta_{\delta_1}\|_{1.2} \|w\|_{1.2}, \tag{2.74}$$

où C^* désigne la constante de Poincaré. Donc la forme B est continue.
Montrons qu'elle est coercive, de (2.8), pour tout $\theta_{\delta_1} \in H^1_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega)$ on a

$$\begin{aligned} B(\theta_{\delta_1}, \theta_{\delta_1}) &= \int_\Omega K |\nabla \theta_{\delta_1}|^2 \, dx + \int_\Omega \Big((\upsilon + G) \cdot \nabla \theta_{\delta_1} \Big) \theta_{\delta_1} \, dx \\ &\geq k_0 \|\theta_{\delta_1}\|^2_{1.2} + \int_\Omega \Big((\upsilon + G)_i \partial_i \theta_{\delta_1} \Big) \theta_{\delta_1} \, dx \\ &\geq k_0 \|\theta_{\delta_1}\|^2_{1.2} + \frac{1}{2} \int_\Omega (\upsilon + G)_i \partial_i (\theta^2_{\delta_1}) \, dx. \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Green on obtient

$$\begin{aligned} I := \int_\Omega (\upsilon + G)_i \partial_i (\theta^2_{\delta_1}) \, dx &= \int_{\partial\Omega} \theta^2_{\delta_1} (\upsilon + G)_i n_i \, dY \\ &\quad - \int_\Omega \theta^2_{\delta_1} \partial_i (\upsilon + G)_i \, dx. \end{aligned} \tag{2.75}$$

Pour tout $\theta_{\delta_1} \in H^1_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega)$, $\upsilon \in V^p_{0.div}$ et $G \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ vérifiant (2.17), on a $I = 0$, d'où

$$B(\theta_{\delta_1}, \theta_{\delta_1}) \geq k_0 \|\theta_{\delta_1}\|^2_{1.2}, \tag{2.76}$$

donc B est coercive.
Maintenant, on montre que la forme linéaire $\hat{L}$ est continue sur $H^1_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega)$. En effet, soit $w \in H^1_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega)$, comme la fonction $r \in L^\infty(\Omega)$ on a

$$\exists c_1 > 0, \quad |r(\theta_{\delta_1})| \leq c_1, \tag{2.77}$$

et de (2.70) en utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Poincaré on obtient

$$|\hat{L}(\tilde{\theta}, w)| \leq \Big(C^*|\Omega|^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{1}{\delta_1} + c_1\Big) + C_{02}\|\theta_b\|_{L^2(\omega)}\Big)\|w\|_{1.2},$$

où C_{02} désigne la constante de la continuité de l'application trace de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$. Donc $\hat{L}$ est continue.
D'après le théorème de Lax-Milgram, il existe un unique $\theta_{\delta_1} \in H^1_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega)$ solution du problème linéarisé 2.4. □

Dans le théorème suivant on montre que le problème 2.3 admet au moins une solution.

Théorème 2.4 *Sous les hypothèses du théorème* 2.3. *On suppose en plus que la fonction r est lipschitzienne, alors le problème* 2.3 *admet au moins une solution.*

Preuve. Pour $\tilde{\theta} \in L^2(\Omega)$, le théorème 2.3 assure l'existence et l'unicité de $\theta_{\delta_1} \in H^1_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega)$ solution du problème linéarisé 2.4. On peut alors définir l'opérateur

$$\begin{array}{rl} \tilde{T}: & L^2(\Omega) \to L^2(\Omega) \\ & \tilde{\theta} \qquad \mapsto \theta_{\delta_1}, \end{array}$$

où θ_{δ_1} est l'unique solution du problème linéarisé 2.4.
On cherche $R_0 > 0$ tel que $\tilde{T}(Z^*) \subset Z^*$ où

$$Z^* = \{w \in L^2(\Omega); \|w\|_{L^2(\Omega)} \leq R_0\}.$$

D'après le théorème 2.3, $\tilde{T}(\tilde{\theta})$ est solution du problème 2.4 c-à-d,

$$B(\tilde{T}(\tilde{\theta}), w) = \hat{L}(\tilde{\theta}, w), \quad \forall w \in H^1_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega).$$

On prend $w = \tilde{T}(\tilde{\theta})$ et de la coercivité de B et la continuité de $\hat{L}$ on obtient

$$k_0\|\tilde{T}(\tilde{\theta})\|^2_{1.2} \leq C_{03}\|\tilde{T}(\tilde{\theta})\|_{1.2},$$

où

$$C_{03} = \Big(C^*|\Omega|^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{1}{\delta_1} + c_1\Big) + C_{02}\|\theta_b\|_{L^2(\omega)}\Big).$$

Donc,

$$\|\tilde{T}(\tilde{\theta})\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C^* C_{03}}{k_0}. \tag{2.78}$$

Alors, pour assurer que $\tilde{T}(Z^*) \subset Z^*$, il suffit de prendre $R_0 = \dfrac{C^* C_{03}}{k_0}$.
L'ensemble $\tilde{T}(Z^*)$ est relativement compact. En effet, pour montrer que $\tilde{T}(Z^*)$ est relativement compact, on doit établir que pour toute suite $(\theta_{\delta_1}^n)_{n\geq 0}$ de $\tilde{T}(Z^*)$ (c-à-d, il existe $\tilde{\theta}_n \in Z^*$ tel que $\theta_{\delta_1}^n = \tilde{T}(\tilde{\theta}_n)$), on peut extraire une sous-suite qui converge fortement dans $L^2(\Omega)$. En effet, on a

$$B(\theta_{\delta_1}^n, w) = \hat{L}(\tilde{\theta}_n, w), \quad \forall w \in H^1_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega), \tag{2.79}$$

on prend $w = \theta_{\delta_1}^n$ dans (2.79) et en utilisant la coercivité de la forme bilinéaire B et la continuité de $\hat{L}$ on obtient

$$\|\theta_{\delta_1}^n\|_{1.2} \leq \frac{C_{03}}{k_0}. \tag{2.80}$$

Donc, la suite $(\theta_{\delta_1}^n)_{n\geq 0}$ possède une sous-suite notée encore $(\theta_{\delta_1}^n)_{n\geq 0}$ telle que

$$\theta_{\delta_1}^n \rightharpoonup \theta_{\delta_1} \quad \text{faiblement dans} \quad H^1_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega).$$

Par l'injection compacte de $H^1_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ on obtient

$$\theta_{\delta_1}^n \to \theta_{\delta_1} \quad \text{fortement dans} \quad L^2(\Omega),$$

ce qui montre que $\tilde{T}(Z^*)$ est relativement compact.
Reste à montrer que l'opérateur $\tilde{T}$ est continu. En effet, soit $(\tilde{\theta}_n)_{n\geq 0}$ une suite dans $L^2(\Omega)$ qui converge fortement vers $\tilde{\theta}$. On doit donc montrer que

$$\tilde{T}(\tilde{\theta}_n) \to \tilde{T}(\tilde{\theta}) \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega). \tag{2.81}$$

A $(\tilde{\theta}_n)_{n\geq 0}$ (resp. $\tilde{\theta}$), on associe $\theta_{\delta_1}^n = \tilde{T}(\tilde{\theta}_n)$ (resp. $\theta_{\delta_1} = \tilde{T}(\tilde{\theta})$) vérifiant (2.79) (resp. (2.73)). La suite $(\theta_{\delta_1}^n)_{n\geq 0}$ vérifiant (2.80) donc elle possède des sous-suites fortement convergentes dans $L^2(\Omega)$. On considère une telle sous-suite notée encore $(\theta_{\delta_1}^n)_{n\geq 0}$. En soustrayant les deux équations variationnelles (2.73), (2.79) on obtient

$$B(\theta_{\delta_1}^n - \theta_{\delta_1}, w) = \hat{L}(\tilde{\theta}_n, w) - \hat{L}(\tilde{\theta}, w), \quad \forall w \in H^1_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega). \tag{2.82}$$

En prenant $w = \theta^n_{\delta_1} - \theta_{\delta_1}$ dans (2.82) on obtient

$$\int_\Omega K|\nabla(\theta^n_{\delta_1} - \theta_{\delta_1})|^2\,dx + G_1 = G_2 + G_3, \tag{2.83}$$

où

$$G_1 = \int_\Omega \big((\upsilon + G)\cdot\nabla(\theta^n_{\delta_1} - \theta_{\delta_1})\big)(\theta^n_{\delta_1} - \theta_{\delta_1})\,dx,$$

$$G_2 = \int_\Omega \Big(m_{\delta_1}(\tilde{\theta}_n, \upsilon) - m_{\delta_1}(\tilde{\theta}, \upsilon)\Big)\Big(\theta^n_{\delta_1} - \theta_{\delta_1}\Big)\,dx,$$

et

$$G_3 = \int_\Omega (r(\tilde{\theta}_n) - r(\tilde{\theta}))(\theta^n_{\delta_1} - \theta_{\delta_1})\,dx.$$

On fait les mêmes calculs pour obtenir $I = 0$, on obtient aussi $G_1 = 0$.
En évaluant le terme G_2, on a

$$|G_2| \leq \|m_{\delta_1}(\tilde{\theta}_n, \upsilon) - m_{\delta_1}(\tilde{\theta}, \upsilon)\|_{L^2(\Omega)}\|\theta^n_{\delta_1} - \theta_{\delta_1}\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.84}$$

En utilisant l'inégalités de Cauchy-Schwarz on obtient

$$|G_3| \leq C_r\|\tilde{\theta}_n - \tilde{\theta}\|_{L^2(\Omega)}\|\theta^n_{\delta_1} - \theta_{\delta_1}\|_{L^2(\Omega)}, \tag{2.85}$$

où C_r désigne la constante de Lipschitz de la fonction r.
Des relations (2.8), (2.83), (2.84), (2.85) et $G_1 = 0$, on obtient

$$k_0\|\theta^n_{\delta_1} - \theta_{\delta_1}\|^2_{1.2} \leq \Big(\|m_{\delta_1}(\tilde{\theta}_n, \upsilon) - m_{\delta_1}(\tilde{\theta}, \upsilon)\|_{L^2(\Omega)} + C_r\|\tilde{\theta}_n - \tilde{\theta}\|_{L^2(\Omega)}\Big)\|\theta^n_{\delta_1} - \theta_{\delta_1}\|_{L^2(\Omega)},$$

d'où

$$\begin{aligned}\|\theta^n_{\delta_1} - \theta_{\delta_1}\|_{L^2(\Omega)} \;&\leq \frac{(C^*)^2}{k_0}\Big(\|m_{\delta_1}(\tilde{\theta}_n, \upsilon) - m_{\delta_1}(\tilde{\theta}, \upsilon)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + C_r\|\tilde{\theta}_n - \tilde{\theta}\|_{L^2(\Omega)}\Big),\end{aligned} \tag{2.86}$$

rappelons que C^* désigne la constante de Poincaré.
D'autre part, on a

$$\|m_{\delta_1}(\tilde{\theta}_n, \upsilon) - m_{\delta_1}(\tilde{\theta}, \upsilon)\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |m_{\delta_1}(\tilde{\theta}_n, \upsilon) - m_{\delta_1}(\tilde{\theta}, \upsilon)|^2\,dx,$$

notons

$$\xi_n = |m_{\delta_1}(\tilde{\theta}_n, \upsilon) - m_{\delta_1}(\tilde{\theta}, \upsilon)|^2,$$

comme la suite $\tilde{\theta}_n \to \tilde{\theta}$ fortement dans $L^2(\Omega)$ lorsque $n \to +\infty$, on obtient qu'il existe une sous-suite de $(\tilde{\theta}_n)_{n\geq 0}$ qui converge presque partout dans Ω et avec (2.4) on a

$$\xi_n \to 0, \quad \text{presque partout dans} \quad \Omega,$$

de plus, avec (2.70) on a

$$\begin{aligned} |\xi_n| &\leq (|m_{\delta_1}(\tilde{\theta}_n, \upsilon)| + |m_{\delta_1}(\tilde{\theta}, \upsilon)|)^2 \\ &\leq \frac{4}{(\delta_1)^2}, \end{aligned}$$

par le théorème de la convergence dominée, on en déduit que

$$\int_\Omega \xi_n \, dx \to 0.$$

Maintenant, en passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans (2.86) on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \|\theta^n_{\delta_1} - \theta_{\delta_1}\|_{L^2(\Omega)} \leq 0,$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty} \|\theta^n_{\delta_1} - \theta_{\delta_1}\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

On a donc obtenu que toutes les sous-suites de $(\theta^n_{\delta_1})_{n\geq 0}$ qui sont fortement convergentes dans $L^2(\Omega)$ ont θ_{δ_1} pour limite. Donc avec (2.80) on peut conclure que toute la suite est convergente vers $\theta_{\delta_1} = \tilde{T}(\tilde{\theta})$ dans $L^2(\Omega)$, ce qui montre la continuité de $\tilde{T}$.
D'après le théorème du point fixe de Schauder, on en déduit que l'opérateur $\tilde{T}$ admet au moins un point fixe (c-à-d, $\tilde{T}(\tilde{\theta}) = \tilde{\theta}$). Avec la notation $\tilde{T}(\tilde{\theta}) = \theta_{\delta_1}$ on obtient

$$\tilde{\theta} = \theta_{\delta_1},$$

donc le problème 2.3 admet au moins une solution. □

Maintenant, on considère le théorème suivant qui montre que l'équation variationnelle (2.28) admet au moins une solution.

Théorème 2.5 *Pour* $1 < q < \frac{3}{2}$, $\upsilon \in V^p_{0.div}$, $G \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$ *vérifiant* (2.17), $\theta_b \in L^2(\omega)$, $r \in L^\infty(\Omega)$, K *vérifiant* (2.8), μ *vérifiant* (2.4) *et* r *est lipschitzienne alors l'équation variationnelle* (2.28) *admet au moins une solution.*

Preuve. L'idée ici est de faire tendre δ_1 vers 0 dans l'équation variationnelle (2.72) mais pas tout fait à cause de q. Pour cela, on prend (voir [14], [19])

$$w = \phi(\theta_{\delta_1}) = Sign(\theta_{\delta_1})\Big(1 - \frac{1}{(1+|\theta_{\delta_1}|)^{\zeta}}\Big), \quad \zeta > 0,$$

dans (2.72) avec

$$\nabla\phi(\theta_{\delta_1}) \;=\; \phi'(\theta_{\delta_1})\nabla\theta_{\delta_1} = \frac{\zeta\nabla\theta_{\delta_1}}{(1+|\theta_{\delta_1}|)^{\zeta+1}},$$

on obtient

$$\begin{aligned}
&\zeta\int_\Omega K\frac{|\nabla\theta_{\delta_1}|^2}{(1+|\theta_{\delta_1}|)^{\zeta+1}}\,dx + \int_\Omega((\upsilon+G)\cdot\nabla\theta_{\delta_1})\phi(\theta_{\delta_1})\,dx \\
&= \int_\Omega m_{\delta_1}(\theta_{\delta_1},\upsilon)\phi(\theta_{\delta_1})\,dx + \int_\Omega r(\theta_{\delta_1})\phi(\theta_{\delta_1})\,dx \qquad (2.87)\\
&+ \int_\omega \theta_b\phi(\theta_{\delta_1})\,dx'.
\end{aligned}$$

De (2.8) on obtient

$$\zeta\int_\Omega K\frac{|\nabla\theta_{\delta_1}|^2}{(1+|\theta_{\delta_1}|)^{\zeta+1}}\,dx \geq \zeta k_0\int_\Omega\frac{|\nabla\theta_{\delta_1}|^2}{(1+|\theta_{\delta_1}|)^{\zeta+1}}\,dx. \qquad (2.88)$$

Notons

$$E(\upsilon,\theta_{\delta_1},\phi(\theta_{\delta_1})) = \int_\Omega((\upsilon+G)\cdot\nabla\theta_{\delta_1})\phi(\theta_{\delta_1})\,dx,$$

montrons que $E(\upsilon,\theta_{\delta_1},\phi(\theta_{\delta_1})) = 0$, en effet, on fait les même calculs pour obtenir $I = 0$ on obtient aussi, $E(\upsilon,\theta_{\delta_1},\theta_{\delta_1}) = 0$ donc,

$$\begin{aligned}
0 \;&=\; E(\upsilon,\theta_{\delta_1}+w,\theta_{\delta_1}+w) = E(\upsilon,\theta_{\delta_1},\theta_{\delta_1}+w) + E(\upsilon,w,\theta_{\delta_1}+w)\\
&=\; E(\upsilon,\theta_{\delta_1},\theta_{\delta_1}) + E(\upsilon,\theta_{\delta_1},w) + E(\upsilon,w,w) + E(\upsilon,w,\theta_{\delta_1}),
\end{aligned}$$

d'où

$$E(\upsilon,\theta_{\delta_1},w) = -E(\upsilon,w,\theta_{\delta_1}).$$

Soit ζ_0 une fonction quelconque de $C^1(\mathbb{R})$ (voir [19]), on a

$$E(\upsilon,\theta_{\delta_1},\zeta_0(\theta_{\delta_1}) + \theta_{\delta_1}\zeta_0'(\theta_{\delta_1})) = 0.$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} E(\upsilon, \theta_{\delta_1}, \zeta_0(\theta_{\delta_1}) + \theta_{\delta_1}\zeta_0'(\theta_{\delta_1})) &= E(\upsilon, \theta_{\delta_1}, \zeta_0(\theta_{\delta_1})) + E(\upsilon, \theta_{\delta_1}, \theta_{\delta_1}\zeta_0'(\theta_{\delta_1})) \\ &= -E(\upsilon, \zeta_0(\theta_{\delta_1}), \theta_{\delta_1}) + E(\upsilon, \theta_{\delta_1}, \theta_{\delta_1}\zeta_0'(\theta_{\delta_1})) \\ &= -\int_\Omega ((\upsilon + G)\cdot\nabla\theta_{\delta_1})\zeta_0'(\theta_{\delta_1})\theta_{\delta_1}\, dx \\ &+ \int_\Omega ((\upsilon + G)\cdot\nabla\theta_{\delta_1})\theta_{\delta_1}\zeta_0'(\theta_{\delta_1})\, dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'autre part, d'après les théories classiques des EDO, l'équation différentielle ordinaire suivante

$$\zeta_0(t) + t\zeta_0'(t) = Sign(t)\Big(1 - \frac{1}{(1+|t|)^\zeta}\Big),$$

admet une solution réelle, donc on obtient

$$E(\upsilon, \theta_{\delta_1}, \phi(\theta_{\delta_1})) = 0. \tag{2.89}$$

Maintenant, comme

$$\Big(1 - \frac{1}{(1+|\theta_{\delta_1}|)^\zeta}\Big) \leq 1,$$

et de plus positive on obtient

$$\begin{aligned} |\phi(\theta_{\delta_1})| &= \Big|Sign(\theta_{\delta_1})\Big(1 - \frac{1}{(1+|\theta_{\delta_1}|)^\zeta}\Big)\Big| \\ &\leq |Sign(\theta_{\delta_1})|\Big(1 - \frac{1}{(1+|\theta_{\delta_1}|)^\zeta}\Big) \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \Big|\int_\Omega r(\theta_{\delta_1})\phi(\theta_{\delta_1})\, dx\Big| &\leq \int_\Omega |r(\theta_{\delta_1})||\phi(\theta_{\delta_1})|\, dx \\ &\leq \int_\Omega |r(\theta_{\delta_1})|\, dx, \end{aligned}$$

de (2.77) on obtient

$$\Big|\int_\Omega r(\theta_{\delta_1})\phi(\theta_{\delta_1})\, dx\Big| \leq c_1|\Omega|. \tag{2.90}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\Big|\int_\Omega m_{\delta_1}(\theta_{\delta_1},\upsilon)\phi(\theta_{\delta_1})\,dx\Big| &\leq \int_\Omega |m_{\delta_1}(\theta_{\delta_1},\upsilon)||\phi(\theta_{\delta_1})|\,dx\\ &\leq \int_\Omega |m_{\delta_1}(\theta_{\delta_1},\upsilon)|\,dx = \|m_{\delta_1}(\theta_{\delta_1},\upsilon)\|_{L^1(\Omega)},\end{aligned}$$

de (2.71) on obtient

$$\Big|\int_\Omega m_{\delta_1}(\theta_{\delta_1},\upsilon)\phi(\theta_{\delta_1})\,dx\Big| \leq C_{01}. \tag{2.91}$$

On a

$$\begin{aligned}\Big|\int_\omega \theta_b\phi(\theta_{\delta_1})\,dx'\Big| &\leq \int_\omega |\theta_b||\phi(\theta_{\delta_1})|\,dx'\\ &\leq \int_\omega |\theta_b|\,dx',\end{aligned}$$

de (2.16) on obtient

$$\Big|\int_\omega \theta_b\phi(\theta_{\delta_1})\,dx'\Big| \leq C_b|\omega|. \tag{2.92}$$

Finalement, avec (2.87)-(2.92) on a

$$\int_\Omega \frac{|\nabla\theta_{\delta_1}|^2}{(1+|\theta_{\delta_1}|)^{\zeta+1}}\,dx \leq \frac{C_{04}}{\zeta k_0}, \tag{2.93}$$

où

$$C_{04} = C_{01} + c_1|\Omega| + C_b|\omega|.$$

Maintenant, pour obtenir que la suite $(\theta_{\delta_1})_{\delta_1>0}$ est bornée dans $W^{1,q}_{\Gamma_1\cup\Gamma_L}(\Omega)$ indépendamment de δ_1, on fait les mêmes calculs comme dans [14]. En effet, on a

$$\int_\Omega |\nabla\theta_{\delta_1}|^q\,dx = \Big(\int_\Omega \frac{|\nabla\theta_{\delta_1}|^q}{(1+|\theta_{\delta_1}|)^{\frac{(\zeta+1)q}{2}}}(1+|\theta_{\delta_1}|)^{\frac{(\zeta+1)q}{2}}\,dx\Big),$$

en utilisant l'inégalité de Hölder on obtient

$$\int_\Omega |\nabla\theta_{\delta_1}|^q\,dx \leq \Big(\int_\Omega \frac{|\nabla\theta_{\delta_1}|^2}{(1+|\theta_{\delta_1}|)^{\zeta+1}}\,dx\Big)^{\frac{q}{2}}\Big(\int_\Omega (1+|\theta_{\delta_1}|)^{\frac{(\zeta+1)q}{2-q}}\,dx\Big)^{\frac{2-q}{2}}, \tag{2.94}$$

on choisi ζ tel que

$$\frac{(\zeta+1)q}{2-q} \leq q^* = \frac{3q}{3-q},$$

en utilisant (2.93) on obtient

$$\int_\Omega |\nabla\theta_{\delta_1}|^q\,dx \leq \Big(\frac{C_{04}}{\zeta k_0}\Big)^{\frac{q}{2}}\Big(\int_\Omega (1+|\theta_{\delta_1}|)^{q^*}\,dx\Big)^{\frac{2-q}{2}}. \tag{2.95}$$

On a l'inégalité

$$(a+b)^{p_*} \leq 2^{p^*-1}(a^{p^*}+b^{p^*}), \quad \forall (a,b)\in\mathbb{R}_+^*, \quad \forall p^*>1, \tag{2.96}$$

qui découle de la convexité de la fonction ν_{p^*} définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\nu_{p^*}(z)=z^{p^*}$ pour $p^*>1$ (voir le lemme 2.2). En effet, on a

$$\begin{aligned}(a+b)^{p_*} &= 2^{p^*}\Big(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b\Big)^{p_*}\\ &= 2^{p^*}\nu_{p^*}\Big(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b\Big)\\ &\leq 2^{p^*-1}\big(\nu_{p^*}(a)+\nu_{p^*}(b)\big)\\ &= 2^{p^*-1}(a^{p^*}+b^{p^*}).\end{aligned}$$

En utilisant cette inégalité on obtient

$$(1+|\theta_{\delta_1}|)^{q^*} \leq 2^{q^*-1}(1+|\theta_{\delta_1}|^{q^*}).$$

Donc, (2.95) devient

$$\int_\Omega |\nabla\theta_{\delta_1}|^q\,dx \leq \Big(\frac{C_{04}}{\zeta k_0}\Big)^{\frac{q}{2}}\Big(2^{q^*-1}\int_\Omega (1+|\theta_{\delta_1}|^{q^*})\,dx\Big)^{\frac{2-q}{2}}. \tag{2.97}$$

D'autre part, on a

$$(a+b)^{p_*} \leq (a^{p^*}+b^{p^*}), \quad \forall (a,b)\in\mathbb{R}_+^*, \quad \forall p^*\in]0,1[, \tag{2.98}$$

en effet, comme $0<p^*<1$ on a

$$\frac{a}{a+b}\leq 1 \quad \text{alors} \quad \Big(\frac{a}{a+b}\Big)^{p^*} \geq \frac{a}{a+b},$$

et

$$\frac{b}{a+b}\leq 1 \quad \text{alors} \quad \Big(\frac{b}{a+b}\Big)^{p^*} \geq \frac{b}{a+b},$$

d'où

$$\Big(\frac{a}{a+b}\Big)^{p^*}+\Big(\frac{b}{a+b}\Big)^{p^*}\geq 1,$$

(car $\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{a+b}=1$). D'où le résultat.
En appliquant l'inégalité (2.98) dans (2.97) avec $p^*=\frac{2-q}{2}$ on obtient

$$\int_\Omega|\nabla\theta_{\delta_1}|^q\,dx\leq 2^{\frac{(q^*-1)(2-q)}{2}}\Big(\frac{C_{04}}{\zeta k_0}\Big)^{\frac{q}{2}}\Big(|\Omega|^{\frac{2-q}{2}}+\Big(\int_\Omega|\theta_{\delta_1}|^{q^*}\,dx\Big)^{\frac{2-q}{2}}\Big).\quad(2.99)$$

D'autre part, en utilisant l'injection de Sobolev $W^{1,q}_{\Gamma_1\cup\Gamma_L}(\Omega)\subset L^{q^*}(\Omega)$ (car $q<\frac{3}{2}<3$) on obtient

$$\Big(\int_\Omega|\theta_{\delta_1}|^{q^*}\,dx\Big)^{\frac{1}{q^*}}\leq C_{05}\|\theta_{\delta_1}\|_{1.q},$$

avec (2.99) on a

$$\Big(\int_\Omega|\theta_{\delta_1}|^{q^*}\,dx\Big)^{\frac{1}{q^*}}\leq C_{05}2^{\frac{(q^*-1)(2-q)}{2q}}\Big(\frac{C_{04}}{\zeta k_0}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(|\Omega|^{\frac{2-q}{2q}}+\Big(\int_\Omega|\theta_{\delta_1}|^{q^*}\,dx\Big)^{\frac{2-q}{2q}}\Big).$$

D'autre part, pour tout $a_1>0$, $a_2>0$, $a_3>0$ et $0<s_1<t_1$ on a (voir [14])

$$\text{Si}\quad (a_1)^{t_1}\leq a_2+a_3(a_1)^{s_1}\quad\text{alors}\quad a_1\leq\max\Big(1,(a_2+a_3)^{\frac{1}{t_1-s_1}}\Big).\quad(2.100)$$

Pour $t_1=\frac{1}{q_*}$, $s_1=\frac{2-q}{2q}$ on a bien $0<s_1<t_1$, en effet, on a

$$t_1-s_1=\frac{3-q}{3q}-\frac{2-q}{2q}=\frac{1}{6}>0,$$

d'où le résultat. Donc, avec

$$\begin{aligned}
&a_1=\Big(\int_\Omega|\theta_{\delta_1}|^{q^*}\,dx\Big),\\
&a_2=C_{05}2^{\frac{(q^*-1)(2-q)}{2q}}\Big(\frac{C_{04}}{\zeta k_0}\Big)^{\frac{1}{2}}|\Omega|^{\frac{2-q}{2q}},\\
&\text{et}\quad a_3=C_{05}2^{\frac{(q^*-1)(2-q)}{2q}}\Big(\frac{C_{04}}{\zeta k_0}\Big)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

de (2.100) on obtient

$$\int_\Omega|\theta_{\delta_1}|^{q^*}\,dx\leq A_0,$$

où

$$A_0 = \max\Big(1, \Big(C_{05} 2^{\frac{(q^*-1)(2-q)}{2q}} \Big(\frac{C_{04}}{\zeta k_0}\Big)^{\frac{1}{2}} \big(|\Omega|^{\frac{2-q}{2q}}) + 1\big)\Big)^6\Big),$$

A_0 est une constante ne dépend pas de δ_1.
Du fait que $\frac{2-q}{2} > 0$, on déduit que

$$\Big(\int_\Omega |\theta_{\delta_1}|^{q^*}\, dx\Big)^{\frac{2-q}{2}} \leq A_0^{\frac{2-q}{2}},$$

en remplaçant dans (2.99) on obtient

$$\int_\Omega |\nabla \theta_{\delta_1}|^q\, dx \leq 2^{\frac{(q^*-1)(2-q)}{2}} \Big(\frac{C_{04}}{\zeta k_0}\Big)^{\frac{q}{2}} \Big(|\Omega|^{\frac{2-q}{2}} + A_0^{\frac{2-q}{2}}\Big),$$

d'où

$$\|\theta_{\delta_1}\|_{1.q} \leq C_{06}, \tag{2.101}$$

où

$$C_{06} = \left(2^{\frac{(q^*-1)(2-q)}{2}} \Big(\frac{C_{04}}{\zeta k_0}\Big)^{\frac{q}{2}} \Big(|\Omega|^{\frac{2-q}{2}} + A_0^{\frac{2-q}{2}}\Big)\right)^{\frac{1}{q}}.$$

De (2.101), on déduit que la suite $(\theta_{\delta_1})_{\delta_1>0}$ est bornée dans $W^{1,q}_{\Gamma_1\cup\Gamma_L}(\Omega)$, donc il existe une sous-suite de $(\theta_{\delta_1})_{\delta_1>0}$ notée encore $(\theta_{\delta_1})_{\delta_1>0}$ telle que pour $\delta_1 \to 0$ on a

$$\theta_{\delta_1} \rightharpoonup \theta \quad \text{faiblement dans} \quad W^{1,q}_{\Gamma_1\cup\Gamma_L}(\Omega). \tag{2.102}$$

D'après l'injection compacte de $W^{1,q}_{\Gamma_1\cup\Gamma_L}(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$, on en déduit que

$$\theta_{\delta_1} \to \theta \quad \text{fortement dans} \quad L^q(\Omega). \tag{2.103}$$

De (2.4), (2.103) on obtient pour $\delta_1 \to 0$

$$\mu(\theta_{\delta_1}, \upsilon+G, |D(\upsilon+G)|) \to \mu(\theta, \upsilon+G, |D(\upsilon+G)|) \quad \text{presque partout dans } \Omega.$$

Donc, pour $\delta_1 \to 0$ on a

$$m_{\delta_1}(\theta_{\delta_1}, \upsilon) \to 2\mu(\theta, \upsilon+G, |D(\upsilon+G)|)|D(\upsilon+G)|^p \quad \text{dans} \quad L^1(\Omega). \tag{2.104}$$

Comme la fonction r est continue on a

$$r(\theta_{\delta_1}) \to r(\theta), \quad \text{quand} \quad \delta_1 \to 0, \quad \text{presque partout dans } \Omega,$$

et avec (2.77), on peut appliquer le théorème de la convergence dominée, d'où

$$\int_\Omega r(\theta_{\delta_1})w\,dx \to \int_\Omega r(\theta)w\,dx, \quad \text{quand} \quad \delta_1 \to 0. \tag{2.105}$$

En passant à la limite dans (2.72) pour $\delta_1 \to 0$ et en utilisant les convergences (2.102)-(2.105) on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega K\nabla\theta\cdot\nabla w\,dx + \int_\Omega ((\upsilon+G)\cdot\nabla\theta)w\,dx\\
&= \int_\Omega 2\mu(\theta,\upsilon+G,|D(\upsilon+G)|)|D(\upsilon+G)|^p w\,dx\\
&+ \int_\Omega r(\theta)w\,dx + \int_\omega \theta_b w\,dx', \quad \forall w\in W^{1,q'}_{\Gamma_1\cup\Gamma_L}(\Omega),
\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

2.3.2 Résultat d'unicité (cas $1 < q < \frac{3}{2}$)

Dans le théorème suivant, on établira l'unicité de la solution de l'équation variationnelle (2.28).

Théorème 2.6 *Pour $p > 3$, $\upsilon \in V^p_{0.div}$, $G \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$ vérifiant (2.17), $\theta_b \in L^q(\omega)$, $r \in L^\infty(\Omega)$, K vérifiant (2.8). Supposons aussi que les fonctions $\theta \mapsto \mu(\theta,.,.)$, r sont décroissantes et de plus r est lipschitzienne. Alors l'équation variationnelle (2.28) admet une unique solution.*

Preuve. Supposons que l'équation variationnelle (2.28) admet deux solutions θ_1, $\theta_2 \in W^{1,q}_{\Gamma_1\cup\Gamma_L}(\Omega)$. En notant $\tilde\Theta = \theta_1 - \theta_2$, avec la notation (2.60) on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega K\nabla\tilde\Theta\cdot\nabla w\,dx + \int_\Omega ((\upsilon+G)\cdot\nabla\tilde\Theta)w\,dx\\
&= \int_\Omega 2\Big(\overline{\mu}(\theta_1,\upsilon) - \overline{\mu}(\theta_2,\upsilon)\Big)|D(\upsilon+G)|^p w\,dx\\
&+ \int_\Omega (r(\theta_1)-r(\theta_2))w\,dx \quad \forall w\in W^{1,q'}_{\Gamma_1\cup\Gamma_L}(\Omega).
\end{aligned} \tag{2.106}$$

Comme $q' > q$ on a $W \subset W^{1,q'}_{\Gamma_1\cup\Gamma_L}(\Omega) \subset W^{1,q}_{\Gamma_1\cup\Gamma_L}(\Omega)$ avec W dense dans $W^{1,q'}_{\Gamma_1\cup\Gamma_L}(\Omega)$ et aussi dans $W^{1,q}_{\Gamma_1\cup\Gamma_L}(\Omega)$ (voir chapitre 5) on obtient $W^{1,q'}_{\Gamma_1\cup\Gamma_L}(\Omega)$ dense dans $W^{1,q}_{\Gamma_1\cup\Gamma_L}(\Omega)$, on prend

$$w = \phi(\tilde\Theta) = Sign(\tilde\Theta)\Big(1 - \frac{1}{(1+|\tilde\Theta|)^\zeta}\Big), \quad \zeta > 0,$$

on obtient

$$\begin{aligned}
&\zeta \int_\Omega K \frac{|\nabla \tilde{\Theta}|^2}{(1+|\tilde{\Theta}|)^{\zeta+1}}\, dx + \int_\Omega ((\upsilon + G)\cdot \nabla \tilde{\Theta})\phi(\tilde{\Theta})\, dx \\
&= \int_\Omega 2\Big(\overline{\mu}(\theta_1, \upsilon) - \overline{\mu}(\theta_2, \upsilon)\Big)|D(\upsilon + G)|^p \phi(\tilde{\Theta})\, dx \\
&+ \int_\Omega (r(\theta_1) - r(\theta_2))\phi(\tilde{\Theta})\, dx.
\end{aligned} \tag{2.107}$$

D'après ce qui précède (cf. (2.88)) on obtient

$$\zeta \int_\Omega K \frac{|\nabla \tilde{\Theta}|^2}{(1+|\tilde{\Theta}|)^{\zeta+1}}\, dx \geq \zeta k_0 \int_\Omega \frac{|\nabla \tilde{\Theta}|^2}{(1+|\tilde{\Theta}|)^{\zeta+1}}\, dx, \tag{2.108}$$

d'après ce qui précède (cf. (2.89)) on obtient

$$\int_\Omega ((\upsilon + G)\cdot \nabla \tilde{\Theta})\phi(\tilde{\Theta})\, dx = 0. \tag{2.109}$$

Maintenant, comme les fonctions $\theta \mapsto \mu(\theta, ., .)$ et r étant décroissantes, il vient

$$(\overline{\mu}(\theta_1, \upsilon) - \overline{\mu}(\theta_2, \upsilon))(\theta_1 - \theta_2) \leq 0, \tag{2.110}$$

$$(r(\theta_1) - r(\theta_2))(\theta_1 - \theta_2) \leq 0. \tag{2.111}$$

- Si $Sign(\tilde{\Theta}) = Sign(\theta_1 - \theta_2) = 1$ alors $\theta_1 - \theta_2 \geq 0$, de (2.110), (2.111) on obtient

$$\big(\overline{\mu}(\theta_1, \upsilon) - \overline{\mu}(\theta_2, \upsilon)\big) \leq 0,$$

et

$$(r(\theta_1) - r(\theta_2)) \leq 0,$$

donc,

$$\int_\Omega 2\Big(\overline{\mu}(\theta_1, \upsilon) - \overline{\mu}(\theta_2, \upsilon)\Big)|D(\upsilon + G)|^p \phi(\tilde{\Theta})\, dx \leq 0, \tag{2.112}$$

et,

$$\int_\Omega (r(\theta_1) - r(\theta_2))\phi(\tilde{\Theta})\, dx \leq 0. \tag{2.113}$$

- Si $Sign(\tilde{\Theta}) = Sign(\theta_1 - \theta_2) = -1$ alors $\theta_1 - \theta_2 < 0$, de (2.110), (2.111) on obtient

$$\big(\overline{\mu}(\theta_1, \upsilon) - \overline{\mu}(\theta_2, \upsilon)\big) \geq 0,$$

et

$$(r(\theta_1) - r(\theta_2)) \geq 0.$$

Donc, on obtient aussi (2.112), (2.113).
Avec (2.107), (2.108), (2.109), (2.112) et (2.113) on obtient

$$\int_\Omega \frac{|\nabla\tilde{\Theta}|^2}{(1+|\tilde{\Theta}|)^{\zeta+1}}\, dx \leq 0,$$

d'après (2.94) on obtient

$$\|\tilde{\Theta}\|_{1,q}^q = \int_\Omega |\nabla\tilde{\Theta}|^q\, dx \;\leq\; \Big(\int_\Omega \frac{|\nabla\tilde{\Theta}|^2}{(1+|\tilde{\Theta}|)^{\zeta+1}}\, dx\Big)^{\frac{q}{2}} \Big(\int_\Omega (1+|\tilde{\Theta}|)^{\frac{(\zeta+1)q}{2-q}}\Big)^{\frac{2-q}{2}},$$

d'où

$$\begin{aligned}\|\tilde{\Theta}\|_{1,q}^2 &\leq \Big(\int_\Omega \frac{|\nabla\tilde{\Theta}|^2}{(1+|\tilde{\Theta}|)^{\zeta+1}}\, dx\Big)\Big(\int_\Omega (1+|\tilde{\Theta}|)^{\frac{(\zeta+1)q}{2-q}}\Big)^{\frac{2-q}{q}} \\ &\leq 0,\end{aligned}$$

alors $\|\tilde{\Theta}\|_{1.q} = 0$ donc $\tilde{\Theta} = \theta_1 - \theta_2 = 0$ c-à-d $\theta_1 = \theta_2$, donc on a l'unicité de la solution de l'équation (2.28) à condition de choisir $\frac{(\zeta+1)q}{2-q} \leq q^* = \frac{3q}{3-q}$ ce qui est possible. □

2.4 Étude du problème couplé (cas $1 < q < \frac{3}{2}$)

Pour montrer l'existence du problème couplé 2.1, on considère le problème suivant :

Problème 2.5 *Sous les hypothèses du problème* 2.1 *et pour tout* $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^p(\Omega)$. *On cherche* $\theta \in W^{1,q}_{\Gamma_1\cup\Gamma_L}(\Omega)$, $\upsilon \in V^p_{0.div}$ *et* $\pi \in L^{p'}_0(\Omega)$ *vérifiant pour tout* $\varphi \in V^p_0$

$$a(\theta, \boldsymbol{u}; \upsilon, \varphi - \upsilon) - (\pi, div(\varphi)) + \Psi(\varphi) - \Psi(\upsilon) \geq \int_\Omega f\cdot(\varphi - \upsilon)\, dx, \quad (2.114)$$

couplé avec l'équation variationnelle

$$B(\theta, w) = L_{\boldsymbol{u}}(\theta, w), \quad \forall w \in W^{1,q'}_{\Gamma_1\cup\Gamma_L}(\Omega), \quad (2.115)$$

où

$$
\begin{aligned}
&a(\theta, \mathbf{u}; \upsilon, \varphi) \\
&= \int_\Omega 2\mu(\theta, \mathbf{u}+G, |D(\upsilon+G)|)|D(\upsilon+G)|^{p-2} d_{ij}(\upsilon+G) d_{ij}(\varphi) dx,
\end{aligned}
$$

$$
B(\theta, w) = \int_\Omega K \nabla\theta \cdot \nabla w \, dx + \int_\Omega ((\upsilon+G)\cdot\nabla\theta) w \, dx,
$$

$$
\begin{aligned}
L_{\mathbf{u}}(\theta, w) &= \int_\Omega 2\mu(\theta, \mathbf{u}+G, |D(\upsilon+G)|)|D(\upsilon+G)|^p w \, dx \\
&+ \int_\Omega r(\theta) w \, dx + \int_\omega \theta_b w \, dx'.
\end{aligned}
$$

Avant de montrer l'existence des solutions du problème 2.5, on a besoin du théorème suivant :

Théorème 2.7 *Pour $p > 3$, $f \in \boldsymbol{L}^{p'}(\Omega)$, $k \in L^{p'}_+(\omega)$, $G \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$ vérifiant* (2.17)*, $s \in \boldsymbol{L}^p(\omega)$, μ vérifiant* (2.2)-(2.4) *et $\theta \in L^2(\Omega)$, $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^p(\Omega)$ l'inéquation variationnelle* (2.114) *admet une solution $(\upsilon, \pi) \in V^p_{0.div} \times L^{p'}_0(\Omega)$.*

Preuve. Pour tout $\varphi \in V^p_{0.div}$ on obtient l'inéquation variationnelle en vitesse suivante :

$$
\langle \mathbf{A}_{\mathbf{u}} \upsilon, \varphi - \upsilon \rangle + \Psi(\varphi) - \Psi(\upsilon) \geq \langle f, \varphi - \upsilon \rangle, \tag{2.116}
$$

où

$$
\langle \mathbf{A}_{\mathbf{u}} \upsilon, \varphi - \upsilon \rangle = a(\theta, \mathbf{u}; \upsilon, \varphi - \upsilon).
$$

Montrons que l'opérateur $\mathbf{A}_{\mathbf{u}}$ est borné, hémicontinue, monotone et coercif. En effet, d'après ce qui précède (cf. (2.39)) on obtient que l'opérateur $\mathbf{A}_{\mathbf{u}}$ est borné.

Pour montrer que $\mathbf{A}_{\mathbf{u}}$ est hémicontinu, il faut montrer que pour tout $\varphi, \upsilon, w \in V^p_{0.div}$, la fonction :

$$
\begin{aligned}
\alpha_0 \quad &: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\
&\qquad \lambda \mapsto \alpha_0(\lambda) = \langle \mathbf{A}_{\mathbf{u}}(\varphi + \lambda\upsilon), w \rangle
\end{aligned}
$$

est continue. On a

$$
\begin{aligned}
\alpha_0(\lambda) &= \int_\Omega 2\mu(\theta, \mathbf{u}+G, |D((\varphi+\lambda\upsilon)+G)|)|D((\varphi+\lambda\upsilon)+G)|^{p-2} \\
&\times \quad (D((\varphi+\lambda\upsilon)+G) : D(w)) \, dx.
\end{aligned}
$$

D'après (2.4) et pour presque tout $x \in \Omega$ la fonction

$$S(\lambda) = 2\mu(\theta, \mathbf{u}+G, |D((\varphi+\lambda\upsilon)+G)|)|D((\varphi+\lambda\upsilon)+G)|^{p-2}D((\varphi+\lambda\upsilon)+G) : D(w)$$

est clairement continue sur $\mathbb{R}$. Soit $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ une suite convergente vers λ dans $\mathbb{R}$, alors $S_n := S(\lambda_n) \in L^1(\Omega)$ et S_n converge vers $S(\lambda)$ quand $n \to +\infty$ dans $L^1(\Omega)$. En effet, la suite $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ étant bornée, il existe $\mathcal{M} > 0$ tel que $|\lambda_n| < \mathcal{M}$, pour tout $n \geq 0$. Ainsi

$$\begin{aligned} |S_n| &\leq 2\mu_1|D((\varphi + \lambda_n\upsilon) + G)|^{p-1}|D(w)| \\ &\leq 2\mu_1(|D(\varphi)| + |\lambda_n||D(\upsilon)| + |D(G)|)^{p-1}|D(w)| \\ &\leq 2\mu_1(|D(\varphi)| + \mathcal{M}|D(\upsilon)| + |D(G)|)^{p-1}|D(w)|, \end{aligned}$$

d'où

$$|S_n| \leq \mathcal{O} := 2\mu_1(|D(\varphi)| + \mathcal{M}|D(\upsilon)| + |D(G)|)^{p-1}|D(w)|,$$

comme $\mathcal{O} \in L^1(\Omega)$ et est positive, par le théorème de la convergence dominée, on en déduit que $S(\lambda) \in L^1(\Omega)$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega S_n \, dx = \int_\Omega S(\lambda) \, dx,$$

c-à-d

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_0(\lambda_n) = \alpha_0(\lambda).$$

L'opérateur $\mathbf{A_u}$ est donc hémicontinu.
Pour la monotonie de $\mathbf{A_u}$, on doit établir que

$$\langle \mathbf{A_u}v_1 - \mathbf{A_u}v_2, v_1 - v_2\rangle \geq 0 \qquad \forall v_1, v_2 \in V^p_{0.div}.$$

On réécrit $\mathbf{A_u}$ comme suit :

$$\langle \mathbf{A_u}\upsilon, \varphi\rangle = \int_\Omega \mathcal{F}(\mathbf{u} + G, D(\upsilon + G)) : D(\varphi) \, dx, \tag{2.117}$$

où

$$\mathcal{F}(\mathbf{u} + G, D(\upsilon + G)) = 2\mu(\theta, \mathbf{u} + G, |D(\upsilon + G)|)|D(\upsilon + G)|^{p-2}D(\upsilon + G).$$

Donc, on a

$$\langle \mathbf{A_u} v_1 - \mathbf{A_u} v_2, v_1 - v_2 \rangle = \int_\Omega \Big(\mathcal{F}(\mathbf{u} + G, D(v_1 + G)) \\ - \mathcal{F}(\mathbf{u} + G, D(v_2 + G)) \Big) : D(v_1 - v_2)\, dx.$$

En appliquant le lemme 2.3 avec

$$\lambda_1 = \mathbf{u} + G, \quad \lambda_2' = D(v_1 + G), \quad \lambda_2'' = D(v_2 + G),$$

on obtient

$$\langle \mathbf{A_u} v_1 - \mathbf{A_u} v_2, v_1 - v_2 \rangle \geq 0,$$

ce qui montre que l'opérateur $\mathbf{A_u}$ est monotone.
Reste à montrer que l'opérateur $\mathbf{A_u}$ est coercif. En effet, d'après l'hypothèse sur la viscosité (2.2), en utilisant le même raisonnement que pour obtenir que l'opérateur $\mathbf{A}$ est coercif on obtient aussi que l'opérateur $\mathbf{A_u}$ est coercif. Par application du Théorème 8.5 page 251 [56] on conclut que l'inéquation variationnelle (2.116) admet au moins une solution.
Maintenant, montrons l'unicité de la solution de l'inéquation variationnelle (2.116). En effet, on suppose que l'inéquation variationnelle (2.116) admet deux solutions v_1 et v_2. Donc, elles vérifiant les deux inéquations variationnelles suivantes :

$$\langle \mathbf{A_u} v_1, \varphi - v_1 \rangle + \Psi(\varphi) - \Psi(v_1) \geq \langle f, \varphi - v_1 \rangle, \quad \forall \varphi \in V^p_{0.div}, \quad (2.118)$$

$$\langle \mathbf{A_u} v_2, \varphi - v_2 \rangle + \Psi(\varphi) - \Psi(v_2) \geq \langle f, \varphi - v_2 \rangle, \quad \forall \varphi \in V^p_{0.div}, \quad (2.119)$$

prenons $\varphi = v_2$ dans (2.118) et $\varphi = v_1$ dans (2.119), puis en additionnant les deux inéquations variationnelles, on aura :

$$\langle \mathbf{A_u} v_1 - \mathbf{A_u} v_2, v_1 - v_2 \rangle \leq 0. \quad (2.120)$$

D'autre part,

$$\langle \mathbf{A_u} v_1 - \mathbf{A_u} v_2, v_1 - v_2 \rangle = a(\theta, \mathbf{u}; v_1, v_1 - v_2) - a(\theta, \mathbf{u}; v_2, v_1 - v_2)$$
$$= \int_\Omega 2\mu(\theta, \mathbf{u} + G, |D(v_1 + G)|) |D(v_1 + G)|^{p-2} D(v_1 + G) : D(v_1 - v_2) dx$$
$$- \int_\Omega 2\mu(\theta, \mathbf{u} + G, |D(v_2 + G)|) |D(v_2 + G)|^{p-2} D(v_2 + G) : D(v_1 - v_2) dx.$$

On pose

$$\mu(o,e,d) = \tilde{\mu}(o,e,d) + \frac{\mu_0}{2}, \tag{2.121}$$

où $\tilde{\mu}$ est définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$.
Avec (2.2) on a

$$0 < \frac{\mu_0}{2} \leq \tilde{\mu}(o,e,d) \leq \mu_1 - \frac{\mu_0}{2}, \quad \forall (o,e,d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+, \tag{2.122}$$

avec (2.3) on a

$$\text{la fonction} \quad d \mapsto \tilde{\mu}(.,.,d) \quad \text{est monotone croissante sur} \quad \mathbb{R}_+, \tag{2.123}$$

avec (2.4) on a

$$\text{la fonction} \quad (o,e,d) \mapsto \tilde{\mu}(o,e,d) \quad \text{est continue sur} \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+. \tag{2.124}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
&\langle \mathbf{A_u} v_1 - \mathbf{A_u} v_2, v_1 - v_2 \rangle \\
&= \mu_0 \int_\Omega |D(v_1+G)|^{p-2} D(v_1+G) : D(v_1 - v_2) dx \\
&+ \int_\Omega 2\tilde{\mu}(\theta, \mathbf{u}+G, |D(v_1+G)|) |D(v_1+G)|^{p-2} D(v_1+G) : D(v_1 - v_2) dx \\
&- \mu_0 \int_\Omega |D(v_2+G)|^{p-2} D(v_2+G) : D(v_1 - v_2) dx \\
&- \int_\Omega 2\tilde{\mu}(\theta, \mathbf{u}+G, |D(v_2+G)|) |D(v_2+G)|^{p-2} D(v_2+G) : D(v_1 - v_2) dx,
\end{aligned}$$

avec la notation

$$F(v_i) = |D(v_i+G)|^{p-2} D(v_i+G), \quad i = 1,2,$$

on obtient

$$\begin{aligned}
&\langle \mathbf{A_u} v_1 - \mathbf{A_u} v_2, v_1 - v_2 \rangle = \mu_0 \int_\Omega \Big(F(v_1) - F(v_2) \Big) : D(v_1 - v_2) dx \\
&+ \int_\Omega 2\tilde{\mu}(\theta, \mathbf{u}+G, |D(v_1+G)|) |D(v_1+G)|^{p-2} D(v_1+G) : D(v_1 - v_2) dx \\
&- \int_\Omega 2\tilde{\mu}(\theta, \mathbf{u}+G, |D(v_2+G)|) |D(v_2+G)|^{p-2} D(v_2+G) : D(v_1 - v_2) dx.
\end{aligned}$$

D'après (2.123), en utilisant le même raisonnement que dans l'étude de la monotonie de $\mathbf{A_u}$, on a aussi

$$\begin{aligned}&\int_\Omega 2\tilde{\mu}(\theta, \mathbf{u}+G, |D(\upsilon_1+G)|)|D(\upsilon_1+G)|^{p-2}D(\upsilon_1+G) : D(\upsilon_1-\upsilon_2)dx\\ &-\int_\Omega 2\tilde{\mu}(\theta, \mathbf{u}+G, |D(\upsilon_2+G)|)|D(\upsilon_2+G)|^{p-2}D(\upsilon_2+G) : D(\upsilon_1-\upsilon_2)dx\\ &\geq 0,\end{aligned}$$

d'où

$$\langle \mathbf{A_u}\upsilon_1 - \mathbf{A_u}\upsilon_2, \upsilon_1-\upsilon_2\rangle \geq \mu_0 \int_\Omega \Big(F(\upsilon_1)-F(\upsilon_2)\Big) : D(\upsilon_1-\upsilon_2)dx.$$

En utilisant l'inégalité suivante (voir [66])

$$(|\hat{x}|^{p-2}\hat{x} - |\hat{y}|^{p-2}\hat{y}, \hat{x}-\hat{y}) \geq \Big(\frac{1}{2}\Big)^{p-1}|\hat{x}-\hat{y}|^p, \quad \forall \hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}^3 \quad \forall p>2, \ (2.125)$$

on obtient

$$\langle \mathbf{A_u}\upsilon_1 - \mathbf{A_u}\upsilon_2, \upsilon_1-\upsilon_2\rangle \geq \Big(\frac{1}{2}\Big)^{p-1}\mu_0 \int_\Omega |D(\upsilon_1-\upsilon_2)|^p dx,$$

de (2.61) on obtient

$$\langle \mathbf{A_u}\upsilon_1 - \mathbf{A_u}\upsilon_2, \upsilon_1-\upsilon_2\rangle \geq \Big(\frac{1}{2}\Big)^{p-1}\mu_0 (C_{Korn})^p \|\upsilon_1-\upsilon_2\|_{1.p}^p. \quad (2.126)$$

De (2.120), (2.126) on obtient

$$\Big(\frac{1}{2}\Big)^{p-1}\mu_0 (C_{Korn})^p \|\upsilon_1-\upsilon_2\|_{1.p}^p \leq 0,$$

d'où

$$\|\upsilon_1-\upsilon_2\|_{1.p} = 0,$$

ce qui montre l'unicité de la solution de l'inéquation variationnelle (2.116). Finalement, pour montrer l'existence de la solution de l'inéquation variationnelle (2.114), on montre en utilisant le même raisonnement que dans le théorème 2.2 les résultats suivants : Pour $f \in \mathbf{L}^{p'}(\Omega)$, il existe une distribution π sur Ω vérifiant

$$\mathcal{L}_{\mathbf{u}}(\psi) = < \nabla\pi, \psi >_{\mathbf{D}'(\Omega),\mathbf{D}(\Omega)} \quad \forall \psi \in \mathbf{D}(\Omega), \quad (2.127)$$

où

$$\mathcal{L}_{\mathbf{u}}(\psi) = \int_{\Omega} f \cdot \psi \, dx - a(\theta, \mathbf{u}; \upsilon, \psi).$$

Par densité de $\mathbf{D}(\Omega)$ dans $\mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega)$ on a aussi

$$\mathcal{L}_{\mathbf{u}}(\psi) =< \nabla\pi, \psi >_{\mathbf{W}^{-1,p'}(\Omega),\, \mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega)} \quad \forall \psi \in \mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega).$$

Avec (2.127) on montre que $(\upsilon, \pi) \in V_{0.div}^p \times L_0^{p'}(\Omega)$ est solution de l'inéquation variationnelle (2.114). □

Dans le théorème suivant on montre que le problème 2.5 admet au moins une solution.

Théorème 2.8 *Pour $p > 3$, $1 < q < \frac{3}{2}$, $\theta_b \in L^2(\omega)$, $r \in L^\infty(\Omega)$, K vérifiant (2.8), $f \in \boldsymbol{L}^{p'}(\Omega)$, $k \in L_+^{p'}(\omega)$, $G \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$ vérifiant (2.17), $s \in \boldsymbol{L}^p(\omega)$, μ vérifiant (2.2)-(2.4) et $\boldsymbol{u} \in V_{0.div}^p$. Supposons aussi que les fonctions $\theta \mapsto \mu(\theta, ., .)$, r sont décroissantes et que la fonction r est lipschitzienne alors le problème 2.5 admet au moins une solution.*

Preuve. La démonstration de ce théorème est décomposée en 7 étapes :
Étape 1 : Pour $\tilde{\theta} \in L^2(\Omega)$, le théorème 2.7 assure l'existence et l'unicité de $\upsilon = \upsilon_{\tilde{\theta}} \in V_{0.div}^p$ vérifiant pour tout $\varphi \in V_{0.div}^p$

$$a(\tilde{\theta}, \mathbf{u}; \upsilon_{\tilde{\theta}}, \varphi - \upsilon_{\tilde{\theta}}) + \Psi(\varphi) - \Psi(\upsilon_{\tilde{\theta}}) \geq \int_{\Omega} f \cdot (\varphi - \upsilon_{\tilde{\theta}}) \, dx.$$

Maintenant, on montre que $\upsilon_{\tilde{\theta}}$ est bornée indépendamment de $\tilde{\theta}$. On prend $\varphi = 0$ dans l'inéquation variationnelle ci-dessus on obtient

$$a(\tilde{\theta}, \mathbf{u}; \upsilon_{\tilde{\theta}}, \upsilon_{\tilde{\theta}}) \leq \int_{\Omega} f \cdot \upsilon_{\tilde{\theta}} \, dx + \Psi(0). \tag{2.128}$$

On a

$$\begin{aligned}
&a(\tilde{\theta}, \mathbf{u}; \upsilon_{\tilde{\theta}}, \upsilon_{\tilde{\theta}}) \\
&= \int_{\Omega} 2\mu(\theta, \mathbf{u} + G, |D(\upsilon_{\tilde{\theta}} + G|)|D(\upsilon_{\tilde{\theta}} + G)|^{p-2} D(\upsilon_{\tilde{\theta}} + G) : D(\upsilon_{\tilde{\theta}}) \, dx \\
&= \int_{\Omega} 2\mu(\tilde{\theta}, \mathbf{u} + G, |D(\upsilon_{\tilde{\theta}} + G)|)|D(\upsilon_{\tilde{\theta}} + G)|^p \, dx \\
&- \int_{\Omega} 2\mu(\tilde{\theta}, \mathbf{u} + G, |D(\upsilon_{\tilde{\theta}} + G)|)|D(\upsilon_{\tilde{\theta}} + G)|^{p-2} D(\upsilon_{\tilde{\theta}} + G) : D(G) \, dx.
\end{aligned}$$

En utilisant (2.2) et l'inégalité de Korn (2.61) on obtient

$$a(\tilde{\theta},\mathbf{u};\upsilon_{\tilde{\theta}},\upsilon_{\tilde{\theta}}) \;\geq\; 2(C_{Korn})^p\mu_0\|\upsilon_{\tilde{\theta}}+G\|_{1.p}^p - 2\mu_1\int_\Omega |D(\upsilon_{\tilde{\theta}}+G)|^{p-1}|D(G)|\,dx.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder et le lemme 2.2 on obtient

$$\begin{aligned} a(\tilde{\theta},\mathbf{u};\upsilon_{\tilde{\theta}},\upsilon_{\tilde{\theta}}) &\geq 2(C_{Korn})^p\mu_0\|\upsilon_{\tilde{\theta}}+G\|_{1.p}^p \\ &\quad -2\mu_1\|\upsilon_{\tilde{\theta}}+G\|_{1.p}^{p-1}\|G\|_{1.p}. \end{aligned} \tag{2.129}$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité de Hölder dans (2.128) et l'inégalité de Poincaré, on obtient

$$a(\tilde{\theta},\mathbf{u};\upsilon_{\tilde{\theta}},\upsilon_{\tilde{\theta}}) \leq C'\|f\|_{\mathbf{L}^{p'}(\Omega)}\|\upsilon_{\tilde{\theta}}\|_{1.p}+\Psi(0), \tag{2.130}$$

où C' désigne la constante de Poincaré.
De (2.129), (2.130) on obtient

$$2(C_{Korn})^p\mu_0\|\upsilon_{\tilde{\theta}}+G\|_{1.p}^p \leq C'\|f\|_{\mathbf{L}^{p'}(\Omega)}\|\upsilon_{\tilde{\theta}}\|_{1.p}+\Psi(0)+2\mu_1\|\upsilon_{\tilde{\theta}}+G\|_{1.p}^{p-1}\|G\|_{1.p},$$

d'où

$$\begin{aligned} 2(C_{Korn})^p\mu_0\Big|\|\upsilon_{\tilde{\theta}}\|_{1.p}-\|G\|_{1.p}\Big|^p &\leq C'\|f\|_{\mathbf{L}^{p'}(\Omega)}\|\upsilon_{\tilde{\theta}}\|_{1.p}+\Psi(0) \\ &+ 2\mu_1\big(\|\upsilon_{\tilde{\theta}}\|_{1.p}+\|G\|_{1.p}\big)^{p-1}\|G\|_{1.p}. \end{aligned}$$

En divisant les deux membres de l'inéquation ci-dessus par $\|\upsilon_{\tilde{\theta}}\|_{1.p}^p$ (avec $\|\upsilon_{\tilde{\theta}}\|_{1.p}\neq 0$) on obtient

$$\begin{aligned} 2(C_{Korn})^p\mu_0\Big|1-\frac{\|G\|_{1.p}}{\|\upsilon_{\tilde{\theta}}\|_{1.p}}\Big|^p &\leq C'\|f\|_{\mathbf{L}^{p'}(\Omega)}\|\upsilon_{\tilde{\theta}}\|_{1.p}^{1-p}+\frac{\Psi(0)}{\|\upsilon_{\tilde{\theta}}\|_{1.p}^p} \\ &+\frac{2\mu_1}{\|\upsilon_{\tilde{\theta}}\|_{1.p}}\Big(1+\frac{\|G\|_{1.p}}{\|\upsilon_{\tilde{\theta}}\|_{1.p}}\Big)^{p-1}\|G\|_{1.p}. \end{aligned} \tag{2.131}$$

Maintenant, on définit l'ensemble suivant :
$E=\Big\{\hat{z}\in\mathbb{R}_+^*,\quad$ vérifiant l'inéquation suivante

$$\begin{aligned} 2(C_{Korn})^p\mu_0\Big|1-\frac{\|G\|_{1.p}}{\hat{z}}\Big|^p &\leq C'\|f\|_{\mathbf{L}^{p'}(\Omega)}\hat{z}^{1-p}+\frac{\Psi(0)}{\hat{z}^p} \\ &+\frac{2\mu_1}{\hat{z}}\Big(1+\frac{\|G\|_{1.p}}{\hat{z}}\Big)^{p-1}\|G\|_{1.p}\Big\}. \end{aligned} \tag{2.132}$$

Montrons que cet ensemble est borné. En effet, pour $\hat{z} \in E$ en faisant $\hat{z} \to +\infty$ dans (2.132) nous arrivons à $\mu_0 \leq 0$. C'est une contradiction avec le fait que $\mu_0 > 0$. Ainsi

$$\exists \mathcal{C}^* > 0, \quad \hat{z} \leq \mathcal{C}^*, \tag{2.133}$$

d'où l'ensemble E est borné.
Comme $\|\upsilon_{\tilde{\theta}}\|_{1.p}$ vérifiant l'inéquation (2.131) on obtient que $\|\upsilon_{\tilde{\theta}}\|_{1.p} \in E \cup \{0\}$ donc

$$\exists \mathcal{C}^* > 0, \quad \|\upsilon_{\tilde{\theta}}\|_{1.p} \leq \mathcal{C}^*, \tag{2.134}$$

où $\mathcal{C}^*$ indépendamment de $\tilde{\theta}$.

Étape 2 : On considère le problème intermédiaire linéairisé suivant

Trouver $\theta_{\delta_1} \in H^1_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega)$ telle que

$$B(\theta_{\delta_1}, w) = \hat{L}_{\mathbf{u}}(\tilde{\theta}, w) \quad \forall w \in H^1_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega), \tag{2.135}$$

où

$$\hat{L}_{\mathbf{u}}(\tilde{\theta}, w) \;=\; \int_\Omega m_{\delta_1,\mathbf{u}}(\tilde{\theta}, \upsilon_{\tilde{\theta}}) w \, dx + \int_\Omega r(\tilde{\theta}) w \, dx + \int_\omega \theta_b w \, dx',$$

avec

$$m_{\delta_1,\mathbf{u}}(\tilde{\theta}, \upsilon_{\tilde{\theta}}) = \frac{2\mu(\tilde{\theta}, \mathbf{u}+G, |D(\upsilon_{\tilde{\theta}}+G)|)|D(\upsilon_{\tilde{\theta}}+G)|^p}{1 + 2\delta_1 \mu(\tilde{\theta}, \mathbf{u}+G, |D(\upsilon_{\tilde{\theta}}+G)|)|D(\upsilon_{\tilde{\theta}}+G)|^p}.$$

D'autre part, on a

$$\|m_{\delta_1,\mathbf{u}}(\tilde{\theta}, \upsilon_{\tilde{\theta}})\|_{L^1(\Omega)} \leq 2\mu_1 \|D(\upsilon_{\tilde{\theta}}+G)\|^p_{(L^p(\Omega))^{3\times 3}}.$$

Avec le lemme 2.2 et (2.134) on a

$$\|m_{\delta_1,\mathbf{u}}(\tilde{\theta}, \upsilon_{\tilde{\theta}})\|_{L^1(\Omega)} \leq \mathcal{C}_1, \tag{2.136}$$

où $\mathcal{C}_1 = 2\mu_1(\mathcal{C}^* + \|G\|_{1.p})^p$.
Le problème linéairisé 2.4 modifié avec $\hat{L}_{\mathbf{u}}(\tilde{\theta}, w)$ au lieu $\hat{L}(\tilde{\theta}, w)$ admet une unique solution $\theta_{\delta_1} \in H^1_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega)$ (voir le théorème 2.3).

Étape 3 : Définissons maintenant l'opérateur $\hat{T}$ par

$$\begin{array}{rccc} \hat{T}: & L^2(\Omega) & \to V^p_{0.div} & \to L^2(\Omega) \\ & \tilde{\theta} & \mapsto \upsilon_{\tilde{\theta}} & \mapsto \theta_{\delta_1}. \end{array}$$

Montrons que l'opérateur $\hat{T}$ admet au moins un point fixe. En effet, rappelons que l'ensemble Z^* donné par

$$Z^* = \{w \in L^2(\Omega); \|w\|_{L^2(\Omega)} \leq R_0\}.$$

D'après ce qui précède (cf. (2.78), (2.80)) on a aussi

$$\|\hat{T}(\tilde{\theta})\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C^* C_{03}}{k_0}, \tag{2.137}$$

et

$$\|\theta^n_{\delta_1}\|_{1.2} \leq \frac{C_{03}}{k_0}, \tag{2.138}$$

avec $\theta^n_{\delta_1}$ vérifiant

$$B(\theta^n_{\delta_1}, w) = \hat{L}_{\mathbf{u}}(\tilde{\theta}_n, w) \quad \forall w \in H^1_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega), \tag{2.139}$$

où $(\tilde{\theta}_n)_{n\geq 0}$ est une suite dans $L^2(\Omega)$ qui converge fortement vers $\tilde{\theta}$.
Donc, on déduit que $\hat{T}(Z^*) \subset Z^*$ pour $R_0 = \dfrac{C_{03}}{k_0}$ et $\hat{T}(Z^*)$ est relativement compact (même raisonnement comme dans le théorème 2.4).
Reste à montrer que l'opérateur $\hat{T}$ est continu. En effet, soit $(\tilde{\theta}_n)_{n\geq 0}$ une suite dans $L^2(\Omega)$ qui converge fortement vers $\tilde{\theta}$. On doit donc montrer que

$$\hat{T}(\tilde{\theta}_n) \to \hat{T}(\tilde{\theta}) \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega).$$

A $(\tilde{\theta}_n)_{n\geq 0}$ (resp. $\tilde{\theta}$), on associe $\theta^n_{\delta_1} = \hat{T}(\tilde{\theta}_n)$ (resp. $\theta_{\delta_1} = \hat{T}(\tilde{\theta})$) vérifiant (2.139) (resp. (2.135)). La suite $(\theta^n_{\delta_1})_{n\geq 0}$ vérifiant (2.138) donc elle possède des sous-suites fortement convergentes dans $L^2(\Omega)$. On considère une telle sous-suite notée encore $(\theta^n_{\delta_1})_{n\geq 0}$. En soustrayant les deux équations variationnelles (2.135), (2.139) on obtient

$$B(\theta^n_{\delta_1} - \theta_{\delta_1}, w) = \hat{L}_{\mathbf{u}}(\tilde{\theta}_n, w) - \hat{L}_{\mathbf{u}}(\tilde{\theta}, w), \quad \forall w \in H^1_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega). \tag{2.140}$$

En prenant $w = \theta^n_{\delta_1} - \theta_{\delta_1}$ dans (2.140) on obtient

$$\int_\Omega K|\nabla(\theta^n_{\delta_1} - \theta_{\delta_1})|^2\,dx + S_1 = S_2 + S_3, \tag{2.141}$$

où

$$S_1 = \int_\Omega \big((\upsilon_{\tilde\theta_n} + G)\cdot\nabla\theta^n_{\delta_1}\big)(\theta^n_{\delta_1} - \theta_{\delta_1})\,dx - \int_\Omega \big((\upsilon_{\tilde\theta} + G)\cdot\nabla\theta_{\delta_1})(\theta^n_{\delta_1} - \theta_{\delta_1})\,dx,$$

$$S_2 = \int_\Omega \Big(m_{\delta_1,\mathbf{u}}(\tilde\theta_n, \upsilon_{\tilde\theta_n}) - m_{\delta_1,\mathbf{u}}(\tilde\theta, \upsilon_{\tilde\theta})\Big)\Big(\theta^n_{\delta_1} - \theta_{\delta_1}\Big)\,dx,$$

et

$$S_3 = \int_\Omega (r(\tilde\theta_n) - r(\tilde\theta))(\theta^n_{\delta_1} - \theta_{\delta_1})\,dx.$$

On a

$$\begin{aligned}
S_1 &= \int_\Omega \big((\upsilon_{\tilde\theta_n} + G)\cdot\nabla\theta^n_{\delta_1}\big)(\theta^n_{\delta_1} - \theta_{\delta_1})\,dx \\
&- \int_\Omega \big((\upsilon_{\tilde\theta} + G)\cdot\nabla\theta_{\delta_1}\big)(\theta^n_{\delta_1} - \theta_{\delta_1})\,dx \\
&= \int_\Omega \big((\upsilon_{\tilde\theta_n} + G)\cdot\nabla(\theta^n_{\delta_1} - \theta_{\delta_1})\big)(\theta^n_{\delta_1} - \theta_{\delta_1})\,dx \\
&+ \int_\Omega \big((\upsilon_{\tilde\theta_n} + G)\cdot\nabla\theta_{\delta_1}\big)(\theta^n_{\delta_1} - \theta_{\delta_1})\,dx \\
&- \int_\Omega \big((\upsilon_{\tilde\theta} + G)\cdot\nabla\theta_{\delta_1}\big)(\theta^n_{\delta_1} - \theta_{\delta_1})\,dx,
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
S_1 &= \int_\Omega \big((\upsilon_{\tilde\theta_n} + G)\cdot\nabla(\theta^n_{\delta_1} - \theta_{\delta_1})\big)(\theta^n_{\delta_1} - \theta_{\delta_1})\,dx \\
&+ \int_\Omega \big((\upsilon_{\tilde\theta_n} - \upsilon_{\tilde\theta})\cdot\nabla\theta_{\delta_1}\big)(\theta^n_{\delta_1} - \theta_{\delta_1})\,dx \\
&= \int_\Omega \big((\upsilon_{\tilde\theta_n} + G)\cdot\nabla(\theta^n_{\delta_1} - \theta_{\delta_1})\big)(\theta^n_{\delta_1} - \theta_{\delta_1})\,dx \\
&+ \int_\Omega \big((\upsilon_{\tilde\theta_n} - \upsilon_{\tilde\theta})\cdot\nabla\theta_{\delta_1}\big)\theta^n_{\delta_1}\,dx - \int_\Omega \big((\upsilon_{\tilde\theta_n} - \upsilon_{\tilde\theta})\cdot\nabla\theta_{\delta_1}\big)\theta_{\delta_1}\,dx.
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \big((\upsilon_{\tilde{\theta}_n} + G)\cdot\nabla(\theta^n_{\delta_1} - \theta_{\delta_1})\big)(\theta^n_{\delta_1} - \theta_{\delta_1})\,dx \\
&= \int_\Omega \big((\upsilon_{\tilde{\theta}_n} + G)_i\partial_i(\theta^n_{\delta_1} - \theta_{\delta_1})\big)(\theta^n_{\delta_1} - \theta_{\delta_1})\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega (\upsilon_{\tilde{\theta}_n} + G)_i\partial_i\big((\theta^n_{\delta_1} - \theta_{\delta_1})^2\big)\,dx,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \big((\upsilon_{\tilde{\theta}_n} - \upsilon_{\tilde{\theta}})\cdot\nabla\theta_{\delta_1}\big)\theta_{\delta_1}\,dx &= \int_\Omega \big((\upsilon_{\tilde{\theta}_n} - \upsilon_{\tilde{\theta}})_i\partial_i\theta_{\delta_1}\big)\theta_{\delta_1}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega (\upsilon_{\tilde{\theta}_n} - \upsilon_{\tilde{\theta}})_i\partial_i\big(\theta^2_{\delta_1}\big)\,dx.
\end{aligned}$$

Donc, on fait les mêmes calculs que celles pour obtenir $I = 0$ (voir la preuve du Théorème 2.3), on obtient aussi

$$\int_\Omega \big((\upsilon_{\tilde{\theta}_n} + G)\cdot\nabla(\theta^n_{\delta_1} - \theta_{\delta_1})\big)(\theta^n_{\delta_1} - \theta_{\delta_1})\,dx = 0,$$

et

$$\int_\Omega \big((\upsilon_{\tilde{\theta}_n} - \upsilon_{\tilde{\theta}})\cdot\nabla\theta_{\delta_1}\big)\theta_{\delta_1}\,dx = 0.$$

Ainsi,

$$S_1 = \int_\Omega \big((\upsilon_{\tilde{\theta}_n} - \upsilon_{\tilde{\theta}})\cdot\nabla\theta_{\delta_1}\big)\theta^n_{\delta_1}\,dx, \tag{2.142}$$

d'où

$$\begin{aligned}
|S_1| &\leq \int_\Omega |\upsilon_{\tilde{\theta}_n} - \upsilon_{\tilde{\theta}}||\nabla\theta_{\delta_1}||\theta^n_{\delta_1}|\,dx \\
&\leq \|\upsilon_{\tilde{\theta}_n} - \upsilon_{\tilde{\theta}}\|_{(L^\infty(\Omega))^3}\int_\Omega |\nabla\theta_{\delta_1}||\theta^n_{\delta_1}|\,dx \\
&\leq M^*\hat{M}\|\upsilon_{\tilde{\theta}_n} - \upsilon_{\tilde{\theta}}\|_{1.p}\int_\Omega |\nabla\theta_{\delta_1}||\theta^n_{\delta_1}|\,dx,
\end{aligned}$$

où M^*, $\hat{M}$ désignent les constantes de l'injection continue de $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ dans $(L^\infty(\Omega))^3$ (car $p > 3$) et de Poincaré dans l'espace $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ respectivement. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient

$$|S_1| \leq M^*\hat{M}\|\upsilon_{\tilde{\theta}_n} - \upsilon_{\tilde{\theta}}\|_{1.p}\|\theta_{\delta_1}\|_{1.2}\|\theta^n_{\delta_1}\|_{L^2(\Omega)}.$$

D'après (2.138) et l'inégalité de Poincaré on obtient

$$\|\theta_{\delta_1}^n\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C^* C_{03}}{k_0}, \tag{2.143}$$

donc, de (2.137), (2.143) on a

$$|S_1| \leq \tilde{M} \|\upsilon_{\tilde{\theta}_n} - \upsilon_{\tilde{\theta}}\|_{1.p}, \tag{2.144}$$

où $\tilde{M} = M^* \hat{M} \dfrac{C^* C_{03}^2}{k_0^2}$.
En évaluant le terme S_2, d'après ce qui précède (cf. (2.84)) on obtient

$$|S_2| \leq \|m_{\delta_1,\mathbf{u}}(\tilde{\theta}_n, \upsilon_{\tilde{\theta}_n}) - m_{\delta_1,\mathbf{u}}(\tilde{\theta}, \upsilon_{\tilde{\theta}})\|_{L^2(\Omega)} \|\theta_{\delta_1}^n - \theta_{\delta_1}\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.145}$$

D'autre part, on a

$$|S_3| \leq C_r \|\tilde{\theta}_n - \tilde{\theta}\|_{L^2(\Omega)} \| \ \theta_{\delta_1}^n - \theta_{\delta_1}\|_{L^2(\Omega)}, \tag{2.146}$$

où C_r désigne la constante de Lipschitz de la fonction r.
De (2.8), (2.141), (2.144), (2.145) et (2.146) on obtient

$$\begin{aligned}
&k_0 \|\theta_{\delta_1}^n - \theta_{\delta_1}\|_{1.2}^2 \\
&\leq \Big(\|m_{\delta_1,\mathbf{u}}(\tilde{\theta}_n, \upsilon_{\tilde{\theta}_n}) - m_{\delta_1,\mathbf{u}}(\tilde{\theta}, \upsilon_{\tilde{\theta}})\|_{L^2(\Omega)} + C_r \|\tilde{\theta}_n - \tilde{\theta}\|_{L^2(\Omega)} \Big) \|\theta_{\delta_1}^n - \theta_{\delta_1}\|_{L^2(\Omega)} \\
&+ \tilde{M} \|\upsilon_{\tilde{\theta}_n} - \upsilon_{\tilde{\theta}}\|_{1.p},
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
&\frac{k_0}{(C^*)^2} \|\theta_{\delta_1}^n - \theta_{\delta_1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\leq \Big(\|m_{\delta_1,\mathbf{u}}(\tilde{\theta}_n, \upsilon_{\tilde{\theta}_n}) - m_{\delta_1,\mathbf{u}}(\tilde{\theta}, \upsilon_{\tilde{\theta}})\|_{L^2(\Omega)} + C_r \|\tilde{\theta}_n - \tilde{\theta}\|_{L^2(\Omega)} \Big) \|\theta_{\delta_1}^n - \theta_{\delta_1}\|_{L^2(\Omega)} \\
&+ \tilde{M} \|\upsilon_{\tilde{\theta}_n} - \upsilon_{\tilde{\theta}}\|_{1.p},
\end{aligned}$$

rappelons C^* désigne la constante de Poincaré.
En appliquant l'inégalité de Young

$$\mathbf{ab} \leq \frac{\varrho}{2} \ \mathbf{a}^2 + \frac{1}{2\varrho} \mathbf{b}^2, \quad \forall \ \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}, \quad \forall \varrho > 0,$$

on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{k_0}{2(C^*)^2}\|\theta^n_{\delta_1}-\theta_{\delta_1}\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&\leq \frac{(C^*)^2}{2k_0}\Big(\|m_{\delta_1,\mathbf{u}}(\tilde{\theta}_n,\upsilon_{\tilde{\theta}_n})-m_{\delta_1,\mathbf{u}}(\tilde{\theta},\upsilon_{\tilde{\theta}})\|_{L^2(\Omega)}+C_r\|\tilde{\theta}_n-\tilde{\theta}\|_{L^2(\Omega)}\Big)^2\\
&+\tilde{M}\|\upsilon_{\tilde{\theta}_n}-\upsilon_{\tilde{\theta}}\|_{1.p},
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
&\|\theta^n_{\delta_1}-\theta_{\delta_1}\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&\leq \frac{(C^*)^4}{k_0^2}\Big(\|m_{\delta_1,\mathbf{u}}(\tilde{\theta}_n,\upsilon_{\tilde{\theta}_n})-m_{\delta_1,\mathbf{u}}(\tilde{\theta},\upsilon_{\tilde{\theta}})\|_{L^2(\Omega)}+C_r\|\tilde{\theta}_n-\tilde{\theta}\|_{L^2(\Omega)}\Big)^2\\
&+\frac{(C^*)^2\tilde{M}}{2k_0}\|\upsilon_{\tilde{\theta}_n}-\upsilon_{\tilde{\theta}}\|_{1.p}.
\end{aligned}\tag{2.147}$$

Étape 4 : Montrons que $\|\upsilon_{\tilde{\theta}_n}-\upsilon_{\tilde{\theta}}\|_{1.p}\to 0$ quand $n\to+\infty$ (c-à-d, l'application $\tilde{\theta}\mapsto\upsilon_{\tilde{\theta}}\in V^p_{0.div}$ est continue pour la topologie forte). En effet, de (2.134) on déduit qu'il existe $\hat{\chi}\in V^p_{0.div}$ telle que $\upsilon_{\tilde{\theta}_n}\rightharpoonup\hat{\chi}$, montrons d'abord que $\hat{\chi}=\upsilon_{\tilde{\theta}}$. En effet, on a

$$a(\tilde{\theta}_n,\mathbf{u};\upsilon_{\tilde{\theta}_n},\varphi-\upsilon_{\tilde{\theta}_n})+\Psi(\varphi)-\Psi(\upsilon_{\tilde{\theta}_n})\geq\int_\Omega f\cdot(\varphi-\upsilon_{\tilde{\theta}_n})\,dx,\quad\forall\varphi\in V^p_{0.div}$$

en appliquant le lemme de Minty [6] cette inéquation variationnelle est équivalente à

$$\begin{aligned}
&a(\tilde{\theta}_n,\mathbf{u};\varphi,\varphi-\upsilon_{\tilde{\theta}_n})+\Psi(\varphi)-\Psi(\upsilon_{\tilde{\theta}_n})\geq\int_\Omega f\cdot(\varphi-\upsilon_{\tilde{\theta}_n})\,dx,\\
&\forall\varphi\in V^p_{0.div}.
\end{aligned}\tag{2.148}$$

Comme $\tilde{\theta}_n\to\tilde{\theta}$ fortement dans $L^2(\Omega)$ et $\theta\mapsto\mu(\theta,.,.)$ est continue, alors on peut extraire une sous-suite notée encore $(\tilde{\theta}_n)_{n\geq0}$ telle que

$$\mu(\tilde{\theta}_n,\mathbf{u}+G,|D(\varphi+G)|)\to\mu(\tilde{\theta},\mathbf{u}+G,|D(\varphi+G)|)\quad\text{presque partout.}$$

En passant à la limite dans (2.148) on obtient

$$a(\tilde{\theta},\mathbf{u};\varphi,\varphi-\hat{\chi})+\Psi(\varphi)-\int_\Omega f\cdot(\varphi-\hat{\chi})\,dx\geq\liminf_{n\to+\infty}\Psi(\upsilon_{\tilde{\theta}_n}).$$

Comme la fonctionnelle Ψ est semi-continue inférieurement et convexe pour la topologie forte, alors, d'après le corollaire III.8 [21] page 38, elle est semi-continue inférieurement pour la topologie faible c-à-d,

$$\liminf_{n\to+\infty} \Psi(v_{\tilde{\theta}_n}) \geq \Psi(\hat{\chi}),$$

d'où

$$a(\tilde{\theta}, \mathbf{u}; \varphi, \varphi - \hat{\chi}) + \Psi(\varphi) - \int_\Omega f \cdot (\varphi - \hat{\chi})\, dx \geq \Psi(\hat{\chi}).$$

En appliquant une deuxième fois le lemme de Minty on obtient

$$a(\tilde{\theta}, \mathbf{u}; \hat{\chi}, \varphi - \hat{\chi}) + \Psi(\varphi) - \Psi(\hat{\chi}) \geq \int_\Omega f \cdot (\varphi - \hat{\chi})\, dx, \quad \forall \varphi \in V^p_{0.div}.$$

Cette dernière inéquation admet une solution unique, donc $\hat{\chi} = v_{\tilde{\theta}}$.
D'autre part, pour tout $\varphi \in V^p_{0.div}$ on a

$$a(\tilde{\theta}_n, \mathbf{u}; v_{\tilde{\theta}_n}, \varphi - v_{\tilde{\theta}_n}) + \Psi(\varphi) - \Psi(v_{\tilde{\theta}_n}) \geq \int_\Omega f \cdot (\varphi - v_{\tilde{\theta}_n})\, dx, \qquad (2.149)$$

$$a(\tilde{\theta}, \mathbf{u}; v_{\tilde{\theta}}, \varphi - v_{\tilde{\theta}}) + \Psi(\varphi) - \Psi(v_{\tilde{\theta}}) \geq \int_\Omega f \cdot (\varphi - v_{\tilde{\theta}})\, dx. \qquad (2.150)$$

On prend $\varphi = v_{\tilde{\theta}}$ dans (2.149) et $\varphi = v_{\tilde{\theta}_n}$ dans (2.150) puis en additionnant les deux inéquations, on aura

$$a(\tilde{\theta}_n, \mathbf{u}; v_{\tilde{\theta}_n}, v_{\tilde{\theta}_n} - v_{\tilde{\theta}}) - a(\tilde{\theta}, \mathbf{u}; v_{\tilde{\theta}}, v_{\tilde{\theta}_n} - v_{\tilde{\theta}}) \leq 0. \qquad (2.151)$$

$$\begin{aligned}
&a(\tilde{\theta}_n, \mathbf{u}; v_{\tilde{\theta}_n}, v_{\tilde{\theta}_n} - v_{\tilde{\theta}}) - a(\tilde{\theta}, \mathbf{u}; v_{\tilde{\theta}}, v_{\tilde{\theta}_n} - v_{\tilde{\theta}}) \\
&= \int_\Omega 2\mu(\tilde{\theta}_n, \mathbf{u} + G, |D(v_{\tilde{\theta}_n} + G|)|D(v_{\tilde{\theta}_n} + G)|^{p-2} D(v_{\tilde{\theta}_n} + G) : D(v_{\tilde{\theta}_n} - v_{\tilde{\theta}})\, dx \\
&- \int_\Omega 2\mu(\tilde{\theta}, \mathbf{u} + G, |D(v_{\tilde{\theta}} + G|)|D(v_{\tilde{\theta}} + G)|^{p-2} D(v_{\tilde{\theta}} + G) : D(v_{\tilde{\theta}_n} - v_{\tilde{\theta}})\, dx,
\end{aligned}$$

or

$$a(\tilde{\theta}_n, \mathbf{u}; v_{\tilde{\theta}_n}, v_{\tilde{\theta}_n} - v_{\tilde{\theta}}) - a(\tilde{\theta}, \mathbf{u}; v_{\tilde{\theta}}, v_{\tilde{\theta}_n} - v_{\tilde{\theta}}) = I_1 - I_2, \qquad (2.152)$$

où

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_\Omega 2\mu(\tilde{\theta}_n, \mathbf{u}+G, |D(v_{\tilde{\theta}_n}+G)|)|D(v_{\tilde{\theta}_n}+G)|^{p-2} \\ &\times D(v_{\tilde{\theta}_n}+G) : D(v_{\tilde{\theta}_n}-v_{\tilde{\theta}})\,dx \\ &- \int_\Omega 2\mu(\tilde{\theta}_n, \mathbf{u}+G, |D(v_{\tilde{\theta}}+G)|)|D(v_{\tilde{\theta}}+G)|^{p-2} \\ &\times D(v_{\tilde{\theta}}+G) : D(v_{\tilde{\theta}_n}-v_{\tilde{\theta}})\,dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_\Omega 2\Big(\mu(\tilde{\theta}, \mathbf{u}+G, |D(v_{\tilde{\theta}}+G)|) - \mu(\tilde{\theta}_n, \mathbf{u}+G, |D(v_{\tilde{\theta}}+G)|)\Big) \\ &\times |D(v_{\tilde{\theta}}+G)|^{p-2}D(v_{\tilde{\theta}}+G) : D(v_{\tilde{\theta}_n}-v_{\tilde{\theta}})\,dx. \end{aligned}$$

En remplaçant μ par $\tilde{\mu} + \dfrac{\mu_0}{2}$ (cf. (2.121)) dans I_1 on obtient

$$\begin{aligned} I_1 &= \mu_0 \int_\Omega |D(v_{\tilde{\theta}_n}+G)|^{p-2}D(v_{\tilde{\theta}_n}+G) : D(v_{\tilde{\theta}_n}-v_{\tilde{\theta}})\,dx \\ &+ \int_\Omega 2\tilde{\mu}(\tilde{\theta}_n, \mathbf{u}+G, |D(v_{\tilde{\theta}_n}+G|)|D(v_{\tilde{\theta}_n}+G)|^{p-2}D(v_{\tilde{\theta}_n}+G) : D(v_{\tilde{\theta}_n}-v_{\tilde{\theta}})\,dx \\ &- \int_\Omega \mu_0|D(v_{\tilde{\theta}}+G)|^{p-2}D(v_{\tilde{\theta}}+G) : D(v_{\tilde{\theta}_n}-v_{\tilde{\theta}})\,dx \\ &- \int_\Omega 2\tilde{\mu}(\tilde{\theta}_n, \mathbf{u}+G, |D(v_{\tilde{\theta}}+G|)|D(v_{\tilde{\theta}}+G)|^{p-2}D(v_{\tilde{\theta}}+G) : D(v_{\tilde{\theta}_n}-v_{\tilde{\theta}})\,dx, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} I_1 &= \mu_0 \int_\Omega |D(v_{\tilde{\theta}_n}+G)|^{p-2}D(v_{\tilde{\theta}_n}+G)) : D(v_{\tilde{\theta}_n}-v_{\tilde{\theta}})\,dx \\ &-\mu_0 \int_\Omega |D(v_{\tilde{\theta}}+G)|^{p-2}D(v_{\tilde{\theta}}+G) : D(v_{\tilde{\theta}_n}-v_{\tilde{\theta}})\,dx \\ &+ \int_\Omega 2\tilde{\mu}(\tilde{\theta}_n, \mathbf{u}+G, |D(v_{\tilde{\theta}_n}+G|)|D(v_{\tilde{\theta}_n}+G)|^{p-2}D(v_{\tilde{\theta}_n}+G) : D(v_{\tilde{\theta}_n}-v_{\tilde{\theta}})\,dx \\ &- \int_\Omega 2\tilde{\mu}(\tilde{\theta}_n, \mathbf{u}+G, |D(v_{\tilde{\theta}}+G|)|D(v_{\tilde{\theta}}+G)|^{p-2}D(v_{\tilde{\theta}}+G) : D(v_{\tilde{\theta}_n}-v_{\tilde{\theta}})\,dx. \end{aligned}$$

Considérons la fonction $\tilde{\mathcal{F}} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{3\times 3} \to \mathbb{R}^{3\times 3}$ définie par

$$\tilde{\mathcal{F}}(\lambda_1, \lambda_2) = 2\tilde{\mu}(., \lambda_1, |\lambda_2|)|\lambda_2|^{p-2}\lambda_2.$$

Pour $\lambda_1 = \mathbf{u} + G$, $\lambda_2' = D(\upsilon_{\tilde{\theta}_n} + G)$, $\lambda_2'' = D(\upsilon_{\tilde{\theta}} + G)$ on obtient

$$I_1 = \mu_0 \int_\Omega |D(\upsilon_{\tilde{\theta}_n} + G)|^{p-2} D(\upsilon_{\tilde{\theta}_n} + G) : D(\upsilon_{\tilde{\theta}_n} - \upsilon_{\tilde{\theta}})\, dx$$
$$-\mu_0 \int_\Omega |D(\upsilon_{\tilde{\theta}} + G)|^{p-2} D(\upsilon_{\tilde{\theta}} + G) : D(\upsilon_{\tilde{\theta}_n} - \upsilon_{\tilde{\theta}})\, dx$$
$$+2 \int_\Omega (\tilde{\mathcal{F}}(\lambda_1, \lambda_2') - \tilde{\mathcal{F}}(\lambda_1, \lambda_2'')) : (\lambda_2' - \lambda_2'')\, dx.$$

On fait les mêmes calculs pour obtenir la monotonie de la fonction $(., \lambda_2) \mapsto \mathcal{F}(., \lambda_2)$ sur $\mathbb{R}^{3\times 3}$ pour tout réel $p > 1$ (voir le lemme 2.3), on obtient aussi la monotonie de la fonction $(., \lambda_2) \mapsto \tilde{\mathcal{F}}(., \lambda_2)$ sur $\mathbb{R}^{3\times 3}$ pour tout réel $p > 1$, donc

$$I_1 \geq \mu_0 \int_\Omega |D(\upsilon_{\tilde{\theta}_n} + G)|^{p-2} D(\upsilon_{\tilde{\theta}_n} + G) : D(\upsilon_{\tilde{\theta}_n} - \upsilon_{\tilde{\theta}})$$
$$-\mu_0 \int_\Omega |D(\upsilon_{\tilde{\theta}} + G)|^{p-2} D(\upsilon_{\tilde{\theta}} + G) : D(\upsilon_{\tilde{\theta}_n} - \upsilon_{\tilde{\theta}})\, dx.$$

En utilisant (2.125) on obtient

$$I_1 \geq \mu_0 \Big(\frac{1}{2}\Big)^{p-1} \int_\Omega |D(\upsilon_{\tilde{\theta}_n} - \upsilon_{\tilde{\theta}})|^p\, dx.$$

De (2.151), (2.152) on obtient

$$\mu_0 \Big(\frac{1}{2}\Big)^{p-1} \int_\Omega |D(\upsilon_{\tilde{\theta}_n} - \upsilon_{\tilde{\theta}})|^p\, dx \leq \int_\Omega 2\Big(\mu(\tilde{\theta}, \mathbf{u} + G, |D(\upsilon_{\tilde{\theta}} + G|)$$
$$-\mu(\tilde{\theta}_n, \mathbf{u} + G, |D(\upsilon_{\tilde{\theta}} + G|)\Big) |D(\upsilon_{\tilde{\theta}} + G)|^{p-2} D(\upsilon_{\tilde{\theta}} + G) : D(\upsilon_{\tilde{\theta}_n} - \upsilon_{\tilde{\theta}})\, dx$$
$$\leq \int_\Omega 2\Big|\mu(\tilde{\theta}, \mathbf{u} + G, |D(\upsilon_{\tilde{\theta}} + G|) - \mu(\tilde{\theta}_n, \mathbf{u} + G, |D(\upsilon_{\tilde{\theta}} + G|)\Big|$$
$$\times |D(\upsilon_{\tilde{\theta}} + G)|^{p-1} |D(\upsilon_{\tilde{\theta}_n} - \upsilon_{\tilde{\theta}})|\, dx.$$

En utilisant l'inégalité de Young ([21] page 56)

$$ab \leq \hat{\epsilon} a^p + C_{\hat{\epsilon}} b^{p'}, \quad C_{\hat{\epsilon}} = \hat{\epsilon}^{\frac{-1}{p-1}}, \quad p' = \frac{p}{p-1},$$

avec

$$a = |D(\upsilon_{\tilde{\theta}_n} - \upsilon_{\tilde{\theta}})|, \hat{\epsilon} = \frac{\mu_0}{4}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{p-1}, C_{\hat{\epsilon}} = \Big(\frac{\mu_0}{4}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{p-1}\Big)^{-\frac{1}{p-1}},$$
$$b = \Big|\mu(\tilde{\theta}, \mathbf{u} + G, |D(\upsilon_{\tilde{\theta}} + G|) - \mu(\tilde{\theta}_n, \mathbf{u} + G, |D(\upsilon_{\tilde{\theta}} + G|)\Big| |D(\upsilon_{\tilde{\theta}} + G)|^{p-1},$$

on obtient

$$\frac{\mu_0}{2}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{p-1}\int_\Omega |D(\upsilon_{\tilde{\theta}_n}-\upsilon_{\tilde{\theta}})|^p\,dx \le 2C_{\hat{\epsilon}}\int_\Omega \Big|\mu(\tilde{\theta},\mathbf{u}+G,|D(\upsilon_{\tilde{\theta}}+G|)$$
$$-\mu(\tilde{\theta}_n,\mathbf{u}+G,|D(\upsilon_{\tilde{\theta}}+G|)\Big|^{p'}|D(\upsilon_{\tilde{\theta}}+G)|^p\,dx.$$

En utilisant l'inégalité de Korn (2.61) on obtient

$$\frac{\mu_0}{2}(C_{Korn})^p\Big(\frac{1}{2}\Big)^{p-1}\|\upsilon_{\tilde{\theta}_n}-\upsilon_{\tilde{\theta}}\|_{1.p}^p \le 2C_{\hat{\epsilon}}\int_\Omega \Big|\mu(\tilde{\theta},\mathbf{u}+G,|D(\upsilon_{\tilde{\theta}}+G|)$$
$$-\mu(\tilde{\theta}_n,\mathbf{u}+G,|D(\upsilon_{\tilde{\theta}}+G|)\Big|^{p'}|D(\upsilon_{\tilde{\theta}}+G)|^p\,dx. \tag{2.153}$$

On pose

$$\mathcal{C}_n = \Big|\mu(\tilde{\theta},\mathbf{u}+G,|D(\upsilon_{\tilde{\theta}}+G|)-\mu(\tilde{\theta}_n,\mathbf{u}+G,|D(\upsilon_{\tilde{\theta}}+G|)\Big|^{p'}|D(\upsilon_{\tilde{\theta}}+G)|^p.$$

Comme la suite $\tilde{\theta}_n \to \tilde{\theta}$ fortement dans $L^2(\Omega)$ lorsque $n \to +\infty$ on obtient qu'il existe une sous-suite de $(\tilde{\theta}_n)_{n\ge 0}$ qui converge presque partout dans Ω. De (2.4), on obtient

$$\mathcal{C}_n \to 0 \quad \text{presque partout dans} \quad \Omega.$$

Avec (2.2) on a

$$|\mathcal{C}_n| \le (2\mu_1)^{p'}|D(\upsilon_{\tilde{\theta}}+G)|^p \in L^1(\Omega),$$

par le théorème de la convergence dominée, on en déduit que

$$\int_\Omega \mathcal{C}_n\,dx \to 0.$$

En passant à la limite dans (2.153) quand $n \to +\infty$ on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\|\upsilon_{\tilde{\theta}_n}-\upsilon_{\tilde{\theta}}\|_{1.p} \le 0,$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty}\|\upsilon_{\tilde{\theta}_n}-\upsilon_{\tilde{\theta}}\|_{1.p} = 0. \tag{2.154}$$

Étape 5 : En utilisant la convergence (2.154) et on fait les mêmes calculs que pour obtenir (voir le théorème 2.4)

$$\|m_{\delta_1}(\tilde{\theta}_n,\upsilon)-m_{\delta_1}(\tilde{\theta},\upsilon)\|_{L^2(\Omega)} \to 0, \quad n \to +\infty,$$

on obtient aussi

$$\|m_{\delta_1,\mathbf{u}}(\tilde{\theta}_n, \upsilon_{\tilde{\theta}_n}) - m_{\delta_1,\mathbf{u}}(\tilde{\theta}, \upsilon_{\tilde{\theta}})\|_{L^2(\Omega)} \to 0, \quad n \to +\infty. \tag{2.155}$$

Maintenant, en passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans (2.147) avec les convergences (2.154), (2.155) on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \|\theta^n_{\delta_1} - \theta_{\delta_1}\|_{L^2(\Omega)} \leq 0,$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty} \|\theta^n_{\delta_1} - \theta_{\delta_1}\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

On a donc obtenu que toutes les sous-suites de $(\theta^n_{\delta_1})_{n\geq 0}$ qui sont fortement convergentes dans $L^2(\Omega)$ ont θ_{δ_1} pour limite. Donc avec (2.138) on peut conclure que toute la suite est convergente vers $\theta_{\delta_1} = \hat{T}(\tilde{\theta})$ dans $L^2(\Omega)$, ce qui montre la continuité de $\hat{T}$.
D'après le théorème du point fixe de Schauder, on en déduit que l'opérateur $\hat{T}$ admet au moins un point fixe (c-à-d, $\hat{T}(\tilde{\theta}) = \tilde{\theta}$). Avec la notation $\hat{T}(\tilde{\theta}) = \theta_{\delta_1}$ on obtient

$$\tilde{\theta} = \theta_{\delta_1},$$

d'où $(\theta_{\delta_1}, \upsilon_{\theta_{\delta_1}}) \in H^1_{\Gamma_1\cup\Gamma_L}(\Omega) \times V^p_{0.div}$ vérifiant

$$a(\theta_{\delta_1}, \mathbf{u}; \upsilon_{\theta_{\delta_1}}, \varphi - \upsilon_{\theta_{\delta_1}}) + \Psi(\varphi) - \Psi(\upsilon_{\theta_{\delta_1}}) \geq \int_\Omega f \cdot (\varphi - \upsilon_{\theta_{\delta_1}})\, dx, \tag{2.156}$$

et

$$B(\theta_{\delta_1}, w) = \hat{L}_{\mathbf{u}}(\theta_{\delta_1}, w) \quad \forall w \in H^1_{\Gamma_1\cup\Gamma_L}(\Omega). \tag{2.157}$$

Étape 6 : **Passage à la limite**. On prend

$$w = \phi(\theta_{\delta_1}) = Sign(\theta_{\delta_1})\Big(1 - \frac{1}{(1+|\theta_{\delta_1}|)^\zeta}\Big), \quad \zeta > 0,$$

dans l'équation (2.157) et avec (2.136) on fait les mêmes calculs que pour obtenir (2.101) on obtient aussi

$$\|\theta_{\delta_1}\|_{1,q} \leq \mathcal{C}_2, \tag{2.158}$$

où $\mathcal{C}_2$ est une constante indépendant de δ_1.
Donc, comme dans le théorème 2.5 on a les convergences (2.102)-(2.103) et

(2.105).
D'après ce qui précède (cf. (2.134)) on obtient

$$\|\upsilon_{\theta_{\delta_1}}\|_{1.p} \leq \mathcal{C}^*. \tag{2.159}$$

Par le même argument que dans la preuve de $\upsilon_{\tilde{\theta}_n} \to \upsilon_{\tilde{\theta}}$ dans $V^p_{0.div}$ on obtient aussi

$$\upsilon_{\theta_{\delta_1}} \to \upsilon_\theta \quad \text{fortement dans} \quad V^p_{0.div}. \tag{2.160}$$

De (2.4), (2.103) et (2.160) on obtient pour $\delta_1 \to 0$

$\mu(\theta_{\delta_1}, \mathbf{u}+G, |D(\upsilon_{\theta_{\delta_1}}+G)|) \to \mu(\theta, \mathbf{u}+G, |D(\upsilon_\theta+G)|)$ presque partout dans Ω,

d'où

$$m_{\delta_1,\mathbf{u}}(\theta_{\delta_1}, \upsilon_{\theta_{\delta_1}}) \to 2\mu(\theta, \mathbf{u}+G, |D(\upsilon_\theta+G)|)|D(\upsilon_\theta+G)|^p \quad \text{dans} \quad L^1(\Omega),$$

avec cette convergence et les convergences (2.102)-(2.103), (2.105), (2.160) on passe à la limite quand $\delta_1 \to 0$ dans (2.156) et (2.157) on obtient que $(\theta, \upsilon_\theta) \in W^{1,q}_{\Gamma_1\cup\Gamma_L}(\Omega) \times V^p_{0.div}$ vérifiant

$$a(\theta, \mathbf{u}; \upsilon_\theta, \varphi - \upsilon_\theta) + \Psi(\varphi) - \Psi(\upsilon_\theta) \geq \int_\Omega f \cdot (\varphi - \upsilon_\theta)\, dx, \tag{2.161}$$

et

$$B(\theta, w) = L_{\mathbf{u}}(\theta, w), \quad \forall w \in W^{1,q'}_{\Gamma_1\cup\Gamma_L}(\Omega).$$

Étape 7 : **Recherche de la pression**. Avec (2.161), on montre en utilisant le même raisonnement que dans le théorème 2.2 les résultats suivants : Pour $f \in \mathbf{L}^{p'}(\Omega)$, il existe une distribution π_θ, sur Ω vérifiant

$$\mathcal{L}_{\mathbf{u},\theta}(\psi) = < \nabla\pi_\theta, \psi >_{\mathbf{D}'(\Omega),\mathbf{D}(\Omega)} \quad \forall \psi \in \mathbf{D}(\Omega), \tag{2.162}$$

où

$$\mathcal{L}_{\mathbf{u},\theta}(\psi) = \int_\Omega f \cdot \psi\, dx - a(\theta, \mathbf{u}; \upsilon_\theta, , \psi).$$

Par densité de $\mathbf{D}(\Omega)$ dans $\mathbf{W}^{1,p}_0(\Omega)$ on a aussi

$$\mathcal{L}_{\mathbf{u},\theta}(\psi) = < \nabla\pi_\theta, \psi >_{\mathbf{W}^{-1,p'}(\Omega),\, \mathbf{W}^{1,p}_0(\Omega)} \quad \forall \psi \in \mathbf{W}^{1,p}_0(\Omega).$$

Avec (2.162) on montre que $(\upsilon_\theta, \pi_\theta) \in V^p_{0.div} \times L^{p'}_0(\Omega)$ est solution de l'inéquation variationnelle (2.114). Donc, on déduit que $(\theta, \upsilon_\theta, \pi_\theta) \in W^{1,q}_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega) \times V^p_{0.div} \times L^{p'}_0(\Omega)$ est solution du problème couplé 2.5.
On fait les mêmes calculs que pour obtenir que l'équation variationnelle (2.28) admet une unique solution on obtient aussi que l'équation variationnelle (2.115) admet une unique solution. La diffférence est que dans l'équation (2.28) on a $\mu = \mu(\theta, \upsilon + G, |D(\upsilon + G)|)$ et dans (2.115) on a $\mu = \mu(\theta, \mathbf{u} + G, |D(\upsilon + G)|)$. □

On rajoute le théorème suivant dont sa preuve n'est pas complètement terminé.

Théorème 2.9 *Sous les hypothèses du Théorème* 2.8*, le problème* 2.1 *admet au moins une solution.*

Preuve. L'existence de solution du problème 2.1 se démontre aussi par l'application du théorème de point fixe de Schauder.
Pour tout $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^p(\Omega)$, le problème 2.5 admet au moins une solution (voir le théorème 2.8).
On définit alors l'application Λ par

$$\begin{array}{rlll} \Lambda: & \mathbf{L}^p(\Omega) & \to W^{1,q}_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega) & \to \mathbf{L}^p(\Omega) \\ & \mathbf{u} & \mapsto \theta_{\mathbf{u}} & \mapsto \upsilon = \Lambda(\mathbf{u}), \end{array}$$

où $\theta_{\mathbf{u}}$ l'unique solution de l'équation variationnelle (2.115) et $\upsilon = \Lambda(\mathbf{u})$ l'uinique solution de l'inéquation variationnelle (2.114).
Maintenant, on cherche $R_* > 0$ tel que $\Lambda(Z) \subset Z$ où

$$Z = \{\varphi \in \mathbf{L}^p(\Omega); \quad \|\varphi\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} \leq R_*\}.$$

D'après ce qui précède (cf. (2.134)) on obtient

$$\|\Lambda(\mathbf{u})\|_{1.p} \leq \mathcal{C}^*, \tag{2.163}$$

par le théorème de Rellich, l'injection de $V^p_{0.div}$ dans $\mathbf{L}^p(\Omega)$ est compacte donc,

$$\exists \tilde{\gamma} > 0, \quad \|\varphi\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} \leq \tilde{\gamma}\|\varphi\|_{1.p}, \quad \forall \varphi \in V^p_{0.div}, \tag{2.164}$$

d'où

$$\|\Lambda(\mathbf{u})\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} \leq \tilde{\gamma}\mathcal{C}^*. \tag{2.165}$$

Pour assurer que $\Lambda(Z) \subset Z$, il suffit de prendre $R_* = \tilde{\gamma}\mathcal{C}^*$.
L'ensemble Z est un convexe fermé de $\mathbf{L}^p(\Omega)$, de plus borné.
Pour montrer que $\Lambda(Z)$ est relativement compact, on doit établir que pour toute suite $(\Lambda(\mathbf{u}_n)_{n\geq 0}$ de $\Lambda(Z)$ (c-à-d, il existe $\mathbf{u}_n \in Z$ tel que $\upsilon_n = \Lambda(\mathbf{u}_n)$), on peut extraire une sous-suite qui converge fortement dans $\mathbf{L}^p(\Omega)$. En effet,

$$\begin{aligned} &a(\theta_{\mathbf{u}_n}, \mathbf{u}_n; \Lambda(\mathbf{u}_n), \varphi - \Lambda(\mathbf{u}_n)) + \Psi(\varphi) - \Psi(\Lambda(\mathbf{u}_n)) \\ &\geq \int_\Omega f \cdot (\varphi - \Lambda(\mathbf{u}_n))\, dx, \quad \forall \varphi \in V^p_{0.div}, \end{aligned} \tag{2.166}$$

en utilisant le même raisonnement que dans (2.134) on obtient

$$\|\Lambda(\mathbf{u}_n)\|_{1.p} \leq \mathcal{C}^*, \tag{2.167}$$

où $\mathcal{C}^*$ indépendamment de n.
Donc, la suite $(\Lambda(\mathbf{u}_n))_{n\geq 0}$ possède une sous-suite notée encore $(\Lambda(\mathbf{u}_n))_{n\geq 0}$ et il existe $P \in V^p_{0.div}$ tel que

$$\Lambda(\mathbf{u}_n) \rightharpoonup P \quad \text{faiblement dans} \quad V^p_{0.div}.$$

Par l'injection compacte de $V^p_{0.div}$ dans $\mathbf{L}^p(\Omega)$ on obtient

$$\Lambda(\mathbf{u}_n) \to P \quad \text{fortement dans} \quad \mathbf{L}^p(\Omega),$$

ce qui montre que $\Lambda(Z)$ est relativement compact.
Reste à montrer que Λ est continue. En effet, soit $(\mathbf{u}_n)_{n\geq 0}$ une suite dans $\mathbf{L}^p(\Omega)$ qui converge fortement vers $\mathbf{u}$ quand $n \to +\infty$. On doit donc montrer que

$$\Lambda(\mathbf{u}_n) \to \Lambda(\mathbf{u}) \quad \text{dans} \quad \mathbf{L}^p(\Omega). \tag{2.168}$$

Montrons que $\theta_{\mathbf{u}_n} \rightharpoonup \theta_{\mathbf{u}}$ faiblement dans $W^{1,q}_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega)$. En effet, on a

$$B(\theta_{\mathbf{u}_n}, w) = L_{\mathbf{u}_n}(\theta_{\mathbf{u}_n}, w), \quad \forall w \in W^{1,q'}_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega). \tag{2.169}$$

On prend

$$w = \phi(\theta_{\mathbf{u}_n}) = Sign(\theta_{\mathbf{u}_n})\Big(1 - \frac{1}{(1 + |\theta_{\mathbf{u}_n}|)^\zeta}\Big), \quad \zeta > 0,$$

dans l'équation (2.169) on obtient

$$\begin{aligned}
&\zeta \int_\Omega K \frac{|\nabla \theta_{\mathbf{u}_n}|^2}{(1+|\theta_{\mathbf{u}_n}|)^{\zeta+1}}\,dx + \int_\Omega ((\Lambda(\mathbf{u}_n)+G)\cdot\nabla\theta_{\mathbf{u}_n})\phi(\theta_{\mathbf{u}_n})\,dx \\
&= \int_\Omega 2\overline{\mu}_{\mathbf{u}_n}(\theta_{\mathbf{u}_n}, \mathbf{u}_n+G)|D(\Lambda(\mathbf{u}_n)+G)|^p \phi(\theta_{\mathbf{u}_n})\,dx \\
&+ \int_\Omega r(\theta_{\mathbf{u}_n})\phi(\theta_{\mathbf{u}_n})\,dx + \int_\omega \theta_b \phi(\theta_{\mathbf{u}_n})\,dx',
\end{aligned} \tag{2.170}$$

où

$$\overline{\mu}_{\mathbf{u}_n}(\theta_{\mathbf{u}_n}, \mathbf{u}_n+G) = \mu(\theta_{\mathbf{u}_n}, \mathbf{u}_n+G, |D(\Lambda(\mathbf{u}_n)+G)|).$$

D'après ce qui précède (cf. (2.88)) on obtient

$$\zeta \int_\Omega K \frac{|\nabla \theta_{\mathbf{u}_n}|^2}{(1+|\theta_{\mathbf{u}_n}|)^{\zeta+1}}\,dx \geq \zeta k_0 \int_\Omega \frac{|\nabla \theta_{\mathbf{u}_n}|^2}{(1+|\theta_{\mathbf{u}_n}|)^{\zeta+1}}\,dx, \tag{2.171}$$

d'après ce qui précède (cf. (2.89)) on obtient

$$\int_\Omega ((\Lambda(\mathbf{u}_n)+G)\cdot\nabla\theta_{\mathbf{u}_n})\phi(\theta_{\mathbf{u}_n})\,dx = 0. \tag{2.172}$$

On a

$$\begin{aligned}
&\Big| \int_\Omega 2\overline{\mu}_{\mathbf{u}_n}(\theta_{\mathbf{u}_n}, \mathbf{u}_n+G)|D(\Lambda(\mathbf{u}_n)+G)|^p \phi(\theta_{\mathbf{u}_n})\,dx \Big| \\
&\leq \int_\Omega 2\overline{\mu}_{\mathbf{u}_n}(\theta_{\mathbf{u}_n}, \mathbf{u}_n+G)|D(\Lambda(\mathbf{u}_n)+G)|^p |\phi(\theta_{\mathbf{u}_n})|\,dx,
\end{aligned}$$

avec (2.2) et (2.167) on obtient

$$\begin{aligned}
&\Big| \int_\Omega 2\overline{\mu}_{\mathbf{u}_n}(\theta_{\mathbf{u}_n}, \mathbf{u}_n+G)|D(\Lambda(\mathbf{u}_n)+G)|^p\,dx \Big| \\
&\leq 2\mu_1 \|\Lambda(\mathbf{u}_n)+G\|_{1.p}^p \\
&\leq 2\mu_1 (\|\Lambda(\mathbf{u}_n)\|_{1.p} + \|G\|_{1.p})^p \\
&\leq 2\mu_1 (\mathcal{C}^* + \|G\|_{1.p})^p.
\end{aligned} \tag{2.173}$$

D'après ce qui précède (2.90) (resp. (2.92)) on obtient

$$\Big| \int_\Omega r(\theta_{\mathbf{u}_n})\phi(\theta_{\mathbf{u}_n})\,dx \Big| \leq c_1 |\Omega|, \tag{2.174}$$

et

$$\Big| \int_{\omega} \theta_b \phi(\theta_{\mathbf{u}_n})\, dx' \Big| \leq C_b |\omega|. \tag{2.175}$$

Avec (2.170)-(2.175) on a

$$\int_{\Omega} \frac{|\nabla \theta_{\mathbf{u}_n}|^2}{(1+|\theta_{\mathbf{u}_n}|)^{\zeta+1}}\, dx \leq \frac{C_*}{\zeta k_0}, \tag{2.176}$$

où

$$C_* = 2\mu_1(\mathcal{C}^* + \|G\|_{1.p})^p + c_1|\Omega| + C_b|\omega|.$$

Maintenant, on fait les mêmes calculs que pour obtenir (2.101) on obtient aussi

$$\|\theta_{\mathbf{u}_n}\|_{1,q} \leq \mathcal{C}_6, \tag{2.177}$$

où $\mathcal{C}_6$ indépendant de n. Avec (2.177), on déduit que la suite $(\theta_{\mathbf{u}_n})_{n\geq 0}$ est bornée dans $W^{1,q}_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega)$, donc il existe une sous-suite de $(\theta_{\mathbf{u}_n})_{n\geq 0}$ notée encore $(\theta_{\mathbf{u}_n})_{n\geq 0}$ telle que

$$\theta_{\mathbf{u}_n} \rightharpoonup \Upsilon \quad \text{faiblement dans} \quad W^{1,q}_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega), \tag{2.178}$$

et

$$\theta_{\mathbf{u}_n} \to \Upsilon \quad \text{fortement dans} \quad L^q(\Omega). \tag{2.179}$$

Les convergences (2.4), (2.179) ne suffit pas de passer à la limite dans

$$\mu(\theta_{\mathbf{u}_n}, \mathbf{u}_n + G, |D(\Lambda(\mathbf{u}_n) + G)|)$$

donc il reste une question ouverte. □

Chapitre 3

Problème d'écoulement instationnaire

Introduction

Dans ce chapitre nous nous intéressons à l'étude de l'écoulement non isotherme d'un fluide non-Newtonien incompressible et instationnaire avec la condition de Tresca sur une partie du bord.

L'écoulement du fluide est dit instationnaire si les variables décrivant le mouvement dépendent du temps.
Les fluides peuvent être classés en deux grandes familles :

— La famille des fluides Newtoniens (comme l'eau, l'air et la plupart des gaz) qui ont une viscosité constante ou qui ne peut varier qu'en fonction de la température.

— La deuxième famille est constituée par les fluides non-Newtoniens (quasiment toute le reste...le sang, le gel,...) qui ont la particularité d'avoir leur viscosité qui varie en fonction de la vitesse et la température. Par conséquent, le tenseur des contraintes n'est plus une fonction linéaire du tenseur des déformations. Dans ce travail on considérera que la viscosité dépend à la fois de la température et du tenseur des

taux de déformations. Ensuite, on va supposer que la viscosité dépend de plus de la vitesse.

Il s'agit donc de démontrer, pour un écoulement donné l'existence et l'unicité de la vitesse et de la pression.

Le plan de ce chapitre est comme suit :
Nous commençons par introduire les équations qui gouvernent cet écoulement, ainsi que les conditions aux limites et initiales. On considère le problème instationnaire décrivant dans un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, le mouvement d'un fluide non-Newtonien incompressible et non isotherme. Ce problème est déduit des lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Ensuite, on établit la formulation variationnelle de ce problème. On étudie l'existence et l'unicité de la solution de l'inéquation variationnelle parabolique associée à ce problème. Pour cela, on approche le problème variationnel parabolique par un problème variationnel elliptique, on utilise la notion des semi-groupes [21] : On montre l'existence de la solution du problème variationnel elliptique en appliquant la méthode de monotonie [56], puis on passe à la limite pour obtenir une solution faible du problème variationnel parabolique, on démontre également l'unicité de la solution obtenue. Ensuite, on montre l'existence et l'unicité (à une constante près car Ω est connexe) de la pression en utilisant le théorème de De Rham [78]. Lorsque la viscosité dépend de plus de la vitesse, on traite l'existence de la solution par le théorème de point fixe de Schauder [45].

3.1 Position du problème

On note $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, le domaine Ω est donné par

$$\Omega = \{(x', x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad x' = (x_1, x_2) \in \omega \quad \text{et} \quad 0 < x_3 < h(x')\}.$$

La frontière de Ω sera notée $\partial\Omega = \overline{\omega} \cup \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_L$ avec

— Γ_1 la surface supérieure d'équation $x_3 = h(x')$ où h est une fonction

continue lipschitzienne vérifiant

$$\exists h_0, h_1 \in \mathbb{R} \quad 0 < h_0 \leq h(x') \leq h_1.$$

— ω un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ qui constitue la surface inférieure du domaine Ω et sa frontière est lipschitzienne.

— Γ_L la frontière latérale.

On désigne par $\sigma = (\sigma_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}$ le tenseur des contraintes défini par

$$\sigma_{ij} = 2\mu(\theta, |D(\upsilon)|)d_{ij}(\upsilon) - \pi\delta_{ij}, \tag{3.1}$$

où

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

est le symbole de Kronecker, $\upsilon : \Omega\times]0,T[\to \mathbb{R}^3$ est la vitesse du fluide, π sa pression, θ désignant sa température est une donnée du problème, μ sa viscosité. On suppose que cette dernière est définie sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$, et vérifie

$$\exists \mu_0, \mu_1 \in \mathbb{R} : \quad 0 < \mu_0 \leq \mu(u^*, \tilde{u}) \leq \mu_1, \quad \forall (u^*, \tilde{u}) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+, \tag{3.2}$$

$$\text{la fonction} \quad \tilde{u} \mapsto \mu(., \tilde{u}) \quad \text{est continue et monotone sur} \quad \mathbb{R}_+. \tag{3.3}$$

On note $D(\upsilon) = (d_{ij}(\upsilon))_{1\leq i,j\leq 3}$ le tenseur des taux de déformations donné par

$$d_{ij}(\upsilon) = \frac{1}{2}(\partial_j \upsilon_i + \partial_i \upsilon_j) \quad 1 \leq i, j \leq 3,$$

et

$$D(\upsilon) : D(\upsilon) = d_{ij}(\upsilon)d_{ij}(\upsilon) = |D(\upsilon)|^2,$$

où $|D(\upsilon)|$ est la norme euclidienne de $D(\upsilon)$.

Dans toute la suite on note indifféremment $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ ou ∂_i, $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ ou u', et on utilise la convention de sommation d'Einstein pour les indices répétés, ces indices sont dit muets par exemple au lieu $(\sum_i a_i b_i)$ on écrit $(a_i b_i)$.

Les lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement sont données respectivement ([31], [78], [59]) par le système :

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + div(\rho_0 \upsilon) = 0 \qquad \text{dans} \quad \Omega\times]0,T[, \tag{3.4}$$

$$\rho_0\Big(\frac{\partial \upsilon}{\partial t} + \upsilon \cdot \nabla \upsilon\Big) = div(\sigma) + \rho_0 f \qquad \text{dans} \quad \Omega\times]0,T[, \tag{3.5}$$

où

— $f = (f_1, f_2, f_3)$ est le vecteur des forces extérieures donné,

— $\rho_0 :]0,T[\times\Omega \to \mathbb{R}$ représente la densité du fluide.

Si la densité ρ_0 est constante (on prend $\rho_0 = 1$), le fluide est alors incompressible. La loi de conservation de la masse (3.4) devient

$$div(\upsilon) = 0 \qquad \text{dans} \quad \Omega\times]0,T[. \tag{3.6}$$

On néglige le terme de convection et on remplace σ par son expression (3.1), l'équation (3.5) devient

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t} - 2div(\mu(\theta, |D(\upsilon)|)D(\upsilon)) + \nabla\pi = f \qquad \text{dans} \quad \Omega\times]0,T[. \tag{3.7}$$

Dans toute la suite de ce chapitre, avec la convention de sommation d'Einstein on note

$$u \cdot v = u_i v_i, \quad 1 \le i \le 3,$$

le produit scalaire de deux vecteurs dans $\mathbb{R}^3$.

Pour compléter la formulation forte du problème, on rajoute les conditions aux limites pour la vitesse υ. Afin de donner les conditions aux limites pour la vitesse sur la frontière de Ω, nous introduisons une fonction vectorielle indépendante du temps $g = (g_1, g_2, g_3)$ telle que

$$\int_{\partial\Omega} g \cdot n \, dY = 0, \quad g = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1, \quad g \neq 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_L, \quad g \cdot n = 0 \quad \text{sur} \quad \omega,$$

où $n = (n_1, n_2, n_3) = (0, 0, -1)$ est le vecteur normal unitaire extérieur à ω.

On suppose que la vitesse est connue sur $(\Gamma_1 \cup \Gamma_L)\times]0,T[$, et vérifie la condition de Dirichlet homogène et non homogène suivantes

$$\upsilon = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1\times]0,T[, \tag{3.8}$$

$$\upsilon = g\xi \quad \text{sur} \quad \Gamma_L\times]0,T[, \tag{3.9}$$

où ξ est une fonction dépendant seulement de t telle que

$$\xi(0) = 1. \tag{3.10}$$

On définit les composantes normales et tangentielles υ_n et υ_τ de la vitesse par

$$\upsilon_n = \upsilon \cdot n = \upsilon_i n_i, \quad \upsilon_{\tau_i} = \upsilon_i - \upsilon_n n_i.$$

On suppose qu'il n'y a pas de flux à travers ω donc la composante normale de la vitesse est nulle

$$\upsilon \cdot n = 0 \qquad \text{sur} \quad \omega \times]0, T[, \tag{3.11}$$

par contre, il y a du frottement, c'est à dire que la composante tangentielle υ_τ de la vitesse est inconnue et satisfait la loi de Tresca [31]

$$\left.\begin{array}{l} |\sigma_\tau| = k \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \quad \upsilon_\tau = s - \lambda \sigma_\tau, \\ |\sigma_\tau| < k \Rightarrow \upsilon_\tau = s, \end{array}\right\} \quad \text{sur} \quad \omega \times]0, T[, \tag{3.12}$$

où

- s est la vitesse cisaillement de la surface ω dépendante de t et x,
- υ_τ est la vitesse tangentielle dépendante de t et x,
- σ_τ la composante tangentielle de σn donnée par

$$\sigma_{\tau_i} = \sigma_{ij} n_j - \sigma_n n_i \quad \text{où} \quad \sigma_n = \sigma_{ij} n_j n_i,$$

- k est une fonction strictement positive dépendante de t et x appelée le seuil limite pour cette contrainte tangentielle.

La loi de Tresca suppose que ce seuil est connu et on a

$$|\sigma_\tau| \leq k \quad \text{sur} \quad \omega \times]0, T[.$$

On adopte la notation

$$\begin{aligned} \upsilon(t) : \Omega &\to \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \upsilon(t)(x) = \upsilon(t, x), \end{aligned}$$

et on rajoute la condition initiale

$$\upsilon(0) = \upsilon_0 \quad \text{dans} \quad \Omega. \tag{3.13}$$

On suppose que $\upsilon_0 \in (H^1(\Omega))^3$ telle que

$$\begin{gathered} div(\upsilon_0) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \quad \upsilon_0 = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1, \quad \upsilon_0 = g \quad \text{sur} \quad \Gamma_L, \\ \upsilon_0 \cdot n = 0 \quad \text{sur} \quad \omega. \end{gathered} \tag{3.14}$$

Pour nous ramener à la condition aux limites de Dirichlet homogène sur $(\Gamma_1 \cup \Gamma_L)\times]0,T[$ et la condition initiale nulle dans Ω, nous procédons à un changement d'inconnue, on pose :

$$\overline{v} = v - v_0\xi. \tag{3.15}$$

La relation (3.1) devient

$$\tilde{\sigma}_{ij} = 2\mu(\theta, |D(\overline{v} + v_0\xi)|)d_{ij}(\overline{v} + v_0\xi) - \pi\delta_{ij}. \tag{3.16}$$

On réécrit (3.7) sous la forme

$$v_i' - \partial_j\sigma_{ij} = f_i, \quad i = 1,2,3, \tag{3.17}$$

donc, de (3.15) on a

$$\overline{v}_i' - \partial_j\tilde{\sigma}_{ij} = \overline{f}_i, \quad i = 1,2,3, \tag{3.18}$$

où $\overline{f}_i = f_i - \dfrac{\partial\xi}{\partial t}(v_0)_i$.
De (3.14), la loi de conservation de la masse (3.6) ne change pas, elle s'écrit :

$$div(\overline{v}) = 0 \qquad \text{dans} \quad \Omega\times]0,T[. \tag{3.19}$$

Nous avons une nouvelle condition aux limites de Dirichlet homogène sur $(\Gamma_1 \cup \Gamma_L)\times]0,T[$

$$\overline{v} = 0 \quad \text{sur} \quad (\Gamma_1 \cup \Gamma_L)\times]0,T[. \tag{3.20}$$

La condition aux limites pour la composante normale sur $\omega\times]0,T[$ ne change pas, elle s'écrit :

$$\overline{v}\cdot n = 0 \quad \text{sur} \quad \omega\times]0,T[. \tag{3.21}$$

La condition aux limites (3.12) devient :

$$\left.\begin{array}{l} |\tilde{\sigma}_\tau| = k \Rightarrow \exists\lambda \geq 0 \quad \overline{v}_\tau = \tilde{s} - \lambda\tilde{\sigma}_\tau, \\ |\tilde{\sigma}_\tau| < k \Rightarrow \overline{v}_\tau = \tilde{s}, \end{array}\right\} \quad \text{sur} \quad \omega\times]0,T[, \tag{3.22}$$

où $\tilde{s} = s - v_0\xi$.
De (3.10) la condition initiale (3.13) devient

$$\overline{v}(0) = v_0 - v_0\xi(0) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega. \tag{3.23}$$

3.2 Formulation variationnelle

On reprend les mêmes notations du chapitre 2 ($\mathbf{X} = X^3$) et on considère les sous-espaces vectoriels des fonctions de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ suivants

$$V_0 = \{\varphi \in \mathbf{H}^1(\Omega); \quad \varphi = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \cup \Gamma_L \quad \text{et} \quad \varphi \cdot n = 0 \quad \text{sur} \quad \omega\},$$

$$V_{0.div} = \{\varphi \in V_0; \quad div(\varphi) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega\},$$

$$H^1_{0.div} = \{\varphi \in \mathbf{H}^1_0(\Omega); \quad div(\varphi) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega\},$$

$$V_{\Gamma_1} = \{\varphi \in \mathbf{H}^1(\Omega); \quad \varphi = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1\},$$

et on pose

$$L^2_0(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); \quad \int_\Omega u(x)\, dx = 0\}.$$

On définit l'espace suivant :

$$\mathcal{Y} = \{\tilde{\sigma} = (\tilde{\sigma}_{ij})_{1\leq i,j\leq 3} \in (L^2(\Omega))^9, \quad div(\tilde{\sigma}) = (\partial_j \tilde{\sigma}_{ij})_{1\leq i\leq 3} \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}.$$

Maintenant, on donne les sous-espaces vectoriels des fonctions de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ suivants (voir [46], [78])

$$E(\Omega) = \{\psi_0 \in \mathbf{L}^2(\Omega); \quad div(\psi_0) \in L^2(\Omega)\},$$

$$E_0(\Omega) = \{\psi_0 \in E(\Omega), \quad \psi_0 \cdot n = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega\},$$

et

$$H = \{\psi_0 \in E_0(\Omega); \quad div(\psi_0) = 0\}.$$

Les normes des espaces de Hilbert $\mathbf{L}^2(\Omega)$, $E(\Omega)$ sont données par

$$\|\upsilon\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = \Big(\int_\Omega |\upsilon|^2\, dx\Big)^{\frac{1}{2}}, \quad \|\upsilon\|_{E(\Omega)} = \Big(\|\upsilon\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|div(\upsilon)\|^2_{L^2(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

H est un sous-espace vectoriel fermé de $E(\Omega)$ et est muni de la norme de $E(\Omega)$ (voir [46]), donc par définition

$$\|\upsilon\|_H = \|\upsilon\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}.$$

Les normes des espaces de Banach $\mathbf{H}^1_0(\Omega)$, $V_{0.div}$, V_0, $H^1_{0.div}$, V_{Γ_1} sont définies par

$$\|\upsilon\|_{1.2} = \Big(\int_\Omega |\nabla \upsilon|^2\, dx\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

On définit l'espace suivant

$$L^2(0,T;B)=\{u:[0,T]\to B,\quad \int_0^T \|u(t)\|_B^2\,dt<\infty\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^2(0,T;B)}=\Big(\int_0^T \|u(t)\|_B^2\,dt\Big)^{\frac{1}{2}},$$

où B est un espace de Banach.
Pour la formulation variationnelle du problème (3.18)-(3.23), on rappelle le lemme suivant (voir chapitre 2)

Lemme 3.1 *La condition de Tresca* (3.22) *est équivalente à la relation suivante*

$$|\tilde{\sigma}_\tau|\le k,\quad (\overline{v}_\tau-\tilde{s})\cdot\tilde{\sigma}_\tau+k|\overline{v}_\tau-\tilde{s}|=0,\quad \textit{sur}\quad \omega\times]0,T[. \tag{3.24}$$

Remarque 3.1 *Soient $X_0=V_{0.div}$, $X=X'=H$, $X_1=V'_{0.div}$, on sait que les injections de X_0 dans X et X dans X_1 sont continues et denses* [46].
Si $\overline{\varphi}\in L^2(0,T;V_{0.div})$, et $\overline{\varphi}'\in L^2(0,T;V'_{0;div})$ donc on peut dire que la fonction $\overline{\varphi}\in C([0,T];H)$ quitte à modifier $\overline{\varphi}$ sur un sous-ensemble de mesure nulle de $[0,T]$ (voir [78] *page* 261*).*
On a $C([0,T];H)\subset C([0,T];\mathbf{L}^2(\Omega))$.

Problème 3.1 *Soient $f\in L^2(0,T;\boldsymbol{L}^2(\Omega))$, $k\in L^2(0,T;L^2_+(\omega))$, μ vérifie* (3.2) *et* (3.3)*, $\theta\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $s\in L^2(0,T;\boldsymbol{L}^2(\omega))$, $\xi\in H^1(0,T)$ vérifiant* (3.10) *et $\upsilon_0\in \boldsymbol{H}^1(\Omega)$ vérifiant* (3.14)*. On cherche $\overline{v}\in C([0,T];\mathbf{L}^2(\Omega))\cap L^2(0,T;V_{0.div})$ avec $\overline{v}'\in L^2(0,T;V'_{0.div})$, et $\pi\in H^{-1}(0,T;L^2_0(\Omega))$, vérifiant l'inéquation variationnelle parabolique suivante*

$$\begin{aligned}&\Big\langle\frac{\partial}{\partial t}(\overline{v},\tilde{\vartheta})_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)},\hat{\chi}\Big\rangle_{\mathcal{D}'(0,T),\mathcal{D}(0,T)}+\int_0^T\Big(a(\theta;\overline{v},\tilde{\vartheta}\hat{\chi})-(\pi,div(\tilde{\vartheta}))\hat{\chi}\Big)\,dt\\&+\int_0^T\Big(j(t,\overline{v}+\tilde{\vartheta}\hat{\chi})-j(t,\overline{v})\Big)\,dt\ge\int_0^T(\overline{f},\tilde{\vartheta})_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}\hat{\chi}\,dt,\\&\forall\tilde{\vartheta}\in V_0\quad\forall\hat{\chi}\in\mathcal{D}(0,T),\end{aligned}\tag{3.25}$$

et la condition initiale (3.23)*,*

où $(.,.)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$ (resp. $(.,.)$) désigne le produit scalaire dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ (resp. dans $L^2(\Omega)$), $\left\langle .,. \right\rangle_{\mathcal{D}'(0,T),\mathcal{D}(0,T)}$ représente le crochet de dualité entre $\mathcal{D}(0,T)$ et $\mathcal{D}'(0,T)$,

$$j(t,.) : \begin{cases} V_0 & \to \mathbb{R} \\ \varphi & \mapsto j(t,\varphi) = \displaystyle\int_\omega k|\varphi - \tilde{s}|\, dx', \end{cases}$$

et

$$a(\theta;.,.) : \begin{cases} & V_0 \times V_0 \to \mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto a(\theta;u,v) \\ & = \displaystyle\int_\Omega 2\mu(\theta,|D(u+\upsilon_0\xi)|)d_{ij}(u+\upsilon_0\xi)d_{ij}(v)dx. \end{cases}$$

Proposition 3.1 *Le problème fort* (3.18)-(3.23) *conduit au problème* 3.1.

Preuve. Supposons les solutions $\overline{v}, \pi$ du problème fort (3.18)-(3.23) suffissamment régulières, par exemple la fonction $\overline{v} \in L^2(0,T;\mathbf{H}^1(\Omega))$ avec $\overline{v}' \in L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$, $\pi \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ et $\tilde{\sigma} \in L^2(0,T;\mathcal{Y})$. Alors, pour $\tilde{\vartheta} \in V_0$, $\hat{\chi} \in \mathcal{D}(0,T)$, on multiplie l'équation (3.18) par $\tilde{\vartheta}\hat{\chi}$, on intègre sur Ω, puis de 0 à T et on utilise la formule de Green. Il vient

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_\Omega \overline{v}_i' \tilde{\vartheta}_i \hat{\chi}\, dx\, dt + \int_0^T \int_\Omega \tilde{\sigma}_{ij} \partial_j(\tilde{\vartheta}_i\hat{\chi})\, dx\, dt - \int_0^T \int_{\partial\Omega} \tilde{\sigma}_{ij}(\tilde{\vartheta}_i\hat{\chi}) n_j\, dY\, dt \\ &= \int_0^T (\overline{f}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \hat{\chi}\, dt. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Pour tout $\tilde{\vartheta} \in V_0$ on a $\tilde{\vartheta}_i = 0$ sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_L$ alors

$$\int_{\partial\Omega} \tilde{\sigma}_{ij}(\tilde{\vartheta}_i\hat{\chi}) n_j\, dY = \int_\omega \tilde{\sigma}_{ij}(\tilde{\vartheta}_i\hat{\chi}) n_j\, dx'.$$

Observons que $\tilde{\sigma}_{ij}n_j$ est la i-ème composante du vecteur $\tilde{\sigma}n$, qui peut être mis sous la forme $\tilde{\sigma}n = \tilde{\sigma}_\tau + \tilde{\sigma}_n n$ avec $\tilde{\sigma}_\tau = (\tilde{\sigma}_{\tau_1}, \tilde{\sigma}_{\tau_2}, \tilde{\sigma}_{\tau_3})$ et $\tilde{\sigma}_n = \tilde{\sigma}n \cdot n$, d'où $\tilde{\sigma}_{ij}n_j = \tilde{\sigma}_{\tau_i} + \tilde{\sigma}_n n_i$. En utilisant cette égalité, on obtient

$$\int_\omega \tilde{\sigma}_{ij}(\tilde{\vartheta}_i\hat{\chi}) n_j\, dx' = \int_\omega \tilde{\sigma}_{\tau_i}(\tilde{\vartheta}_i\hat{\chi})\, dx' + \int_\omega \tilde{\sigma}_n n_i (\tilde{\vartheta}_i\hat{\chi})\, dx'.$$

Pour tout $\tilde{\vartheta} \in V_0$ on a $\tilde{\vartheta}_i n_i = 0$ sur ω alors

$$\int_\omega \tilde{\sigma}_{ij}(\tilde{\vartheta}_i\hat{\chi}) n_j\, dx' = \int_\omega \tilde{\sigma}_{\tau_i}(\tilde{\vartheta}_i\hat{\chi})\, dx',$$

et (3.26) devient

$$\int_0^T \int_\Omega \overline{v}_i' \tilde{\vartheta}_i \hat{\chi}\, dx\, dt + \int_0^T \int_\Omega \tilde{\sigma}_{ij} \partial_j (\tilde{\vartheta}_i \hat{\chi})\, dx\, dt = \int_0^T \int_\omega \tilde{\sigma}_{\tau_i} (\tilde{\vartheta}_i \hat{\chi})\, dx'\, dt + \int_0^T (\overline{f}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \hat{\chi}\, dt. \tag{3.27}$$

Introduisons à présent la condition de Tresca (3.22). Pour cela on ajoute aux deux membres de (3.27) le terme

$$\int_0^T \int_\omega k(|\overline{v} + \tilde{\vartheta}\hat{\chi} - \tilde{s}| - |\overline{v} - \tilde{s}|)\, dx'\, dt,$$

d'où

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_\Omega \overline{v}_i' \tilde{\vartheta}_i \hat{\chi}\, dx\, dt + \int_0^T \int_\Omega \tilde{\sigma}_{ij} \partial_j (\tilde{\vartheta}_i \hat{\chi})\, dx\, dt \\ &+ \int_0^T \int_\omega k(|\overline{v} + \tilde{\vartheta}\hat{\chi} - \tilde{s}| - |\overline{v} - \tilde{s}|)\, dx'\, dt \\ &= \int_0^T (\overline{f}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \hat{\chi}\, dt + \int_0^T A\, dt, \end{aligned} \tag{3.28}$$

avec

$$\begin{aligned} A &= \int_\omega \tilde{\sigma}_{\tau_i} (\tilde{\vartheta}_i \hat{\chi}) + k(|\overline{v} + \tilde{\vartheta}\hat{\chi} - \tilde{s}| - |\overline{v} - \tilde{s}|)\, dx' \\ &= \int_\omega \tilde{\sigma}_{\tau_i} (\overline{v}_i + \tilde{\vartheta}_i \hat{\chi} - \tilde{s}_i) + \tilde{\sigma}_{\tau_i} (\tilde{s}_i - \overline{v}_i) + k(|\overline{v} + \tilde{\vartheta}\hat{\chi} - \tilde{s}| - |\overline{v} - \tilde{s}|)\, dx'. \end{aligned}$$

Montrons que A est positif. On déduit de (3.21) que $\overline{v} = \overline{v}_\tau$ sur $\omega \times]0, T[$, et d'après le lemme 3.1, le terme A devient

$$A = \int_\omega (\tilde{\sigma}_\tau \cdot (\overline{v} + \tilde{\vartheta}\hat{\chi} - \tilde{s}) + k|\overline{v} + \tilde{\vartheta}\hat{\chi} - \tilde{s}|)\, dx'.$$

Or $\tilde{\sigma}_\tau \cdot (\overline{v} + \tilde{\vartheta}\hat{\chi} - \tilde{s}) \geq -|\tilde{\sigma}_\tau||\overline{v} + \tilde{\vartheta}\hat{\chi} - \tilde{s}|$, et $|\tilde{\sigma}_\tau| \leq k$ sur $\omega \times]0, T[$, il s'ensuit que

$$\tilde{\sigma}_\tau \cdot (\overline{v} + \tilde{\vartheta}\hat{\chi} - \tilde{s}) + k|\overline{v} + \tilde{\vartheta}\hat{\chi} - \tilde{s}| \geq 0 \text{ sur } \omega \times]0, T[.$$

Donc A est positif, et (3.28) devient

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_\Omega \overline{v}_i' \tilde{\vartheta}_i \hat{\chi}\, dx\, dt + \int_0^T \int_\Omega \tilde{\sigma}_{ij} \partial_j(\tilde{\vartheta}_i \hat{\chi})\, dx\, dt \\
&+ \int_0^T \int_\omega k(|\overline{v} + \tilde{\vartheta}\hat{\chi} - \tilde{s}| - |\overline{v} - \tilde{s}|)\, dx'\, dt \\
&\geq \int_0^T (\overline{f}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \hat{\chi}\, dt.
\end{aligned}$$

En remplaçant $\tilde{\sigma}_{ij}$ par son expression (3.16), nous obtenons l'inéquation variationnelle suivante :

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_\Omega \overline{v}_i' \tilde{\vartheta}_i \hat{\chi}\, dx\, dt + \int_0^T \int_\Omega 2\mu(\theta, |D(\overline{v} + \upsilon_0\xi)|) d_{ij}(\overline{v} + \upsilon_0\xi)) \partial_j(\tilde{\vartheta}_i \hat{\chi})\, dx\, dt \\
&- \int_0^T \int_\Omega \pi div(\tilde{\vartheta}) \hat{\chi}\, dx\, dt + \int_0^T \int_\omega k(|\overline{v} + \tilde{\vartheta}\hat{\chi} - \tilde{s}| - |\overline{v} - \tilde{s}|)\, dx'\, dt \\
&\geq \int_0^T (\overline{f}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \hat{\chi}\, dt.
\end{aligned}$$

□

Dans toute la suite de ce travail on considère l'opérateur $\mathcal{A} : L^2(0,T;V_{0.div}) \to L^2(0,T;V'_{0.div})$, qui à $u \in L^2(0,T;V_{0.div})$ associe $\mathcal{A}u$ défini par

$$[\mathcal{A}u, \overline{\varphi}] = \int_0^T a(\theta; u, \overline{\varphi}) dt, \quad \forall \overline{\varphi} \in L^2(0,T;V_{0.div}),$$

où [.,.] désigne le crochet de dualité entre $L^2(0,T;V_{0.div})$ et $L^2(0,T;V'_{0.div})$. On note $< .,. >_{V'_{0.div}, V_{0.div}}$ le crochet de dualité entre $V_{0.div}$ et $V'_{0.div}$ et

$$J(\overline{\varphi}) = \int_0^T j(t, \overline{\varphi})\, dt, \quad \forall \overline{\varphi} \in L^2(0,T;V_{0.div}). \tag{3.29}$$

Dans toute la suite de ce chapitre, par abus de notation, on note encore

$$\overline{f} = f + \frac{\partial \xi}{\partial t} L_{\upsilon_0},$$

où L_{υ_0} est une forme linéaire continue définie par

$$< L_{\upsilon_0}, \varphi >_{\mathbf{X}', \mathbf{X}} = (\upsilon_0, \varphi)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \quad \forall \varphi \in \mathbf{X},$$

où $\mathbf{X} = V_{0.div}$ ou V_0 .
Avec ces notations on introduit le problème qui s'obtient de la même façon que le problème 3.1 mais on multiplie l'équation (3.18) par $\overline{\varphi} - \overline{v} \in L^2(0,T;V_{0.div})$ au lieu $\tilde{\vartheta}\hat{\chi}$.

Problème 3.2 *Soient* $f \in L^2(0,T;V'_{0.div})$, $k \in L^2(0,T;L^2_+(\omega))$, μ *vérifie* (3.2) *et* (3.3), $\theta \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $s \in L^2(0,T;\boldsymbol{L}^2(\omega))$, $\xi \in H^1(0,T)$ *vérifiant* (3.10) *et* $v_0 \in \boldsymbol{H}^1(\Omega)$ *vérifiant* (3.14). *On cherche* $\overline{v} \in C([0,T];\mathbf{L}^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;V_{0.div})$ *avec* $\overline{v}' \in L^2(0,T;V'_{0.div})$ *satisfaisant l'inéquation variationnelle parabolique suivante*

$$\begin{aligned} &[\overline{v}', \overline{\varphi} - \overline{v}] + [\mathcal{A}\overline{v}, \overline{\varphi} - \overline{v}] + J(\overline{\varphi}) - J(\overline{v}) \geq [\overline{f}, \overline{\varphi} - \overline{v}], \\ &\forall \overline{\varphi} \in L^2(0,T;V_{0.div}), \end{aligned} \tag{3.30}$$

et la condition initiale (3.23).

3.3 Résultats préliminaires

Lemme 3.2 *Sous les hypothèses* (3.2), (3.3) *l'opérateur* $\mathcal{A}$ *est borné, hémicontinu et monotone.*

Preuve. Soit $(\overline{v}, \overline{\varphi}) \in (L^2(0,T;V_0))^2$, de (3.2) on a

$$\begin{aligned} |a(\theta;\overline{v},\overline{\varphi})| &= \Big| \int_\Omega 2\mu(\theta, |D(\overline{v} + v_0\xi)|) d_{ij}(\overline{v} + v_0\xi) d_{ij}(\overline{\varphi})\, dx \Big| \\ &\leq 2\mu_1 \int_\Omega |d_{ij}(\overline{v} + v_0\xi)||d_{ij}(\overline{\varphi})|\, dx \\ &\leq 2\mu_1 \int_\Omega |d_{ij}(\overline{v})||d_{ij}(\overline{\varphi})|\, dx + 2\mu_1 \int_\Omega |\xi||d_{ij}(v_0)||d_{ij}(\overline{\varphi})|\, dx. \end{aligned}$$

Puisque $\xi \in H^1(0,T) \subset C([0,T])$ avec injection continue on a

$$\exists c > 0, \quad |\xi(t)| \leq c \quad \forall t \in [0,T]. \tag{3.31}$$

En utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz et Minkowski et (3.31), on

obtient

$$\begin{aligned}
|a(\theta;\overline{v},\overline{\varphi})| &\leq 2\mu_1\int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^3 |d_{ij}(\overline{v})|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{i,j=1}^3 |d_{ij}(\overline{\varphi})|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\,dx\\
&+ 2\mu_1 c\int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^3 |d_{ij}(\overline{\varphi})|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{i,j=1}^3 |d_{ij}(\upsilon_0)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq 2\mu_1\int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^3 |\partial_j\overline{v}_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{i,j=1}^3 |\partial_j\overline{\varphi}_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\,dx\\
&+ 2\mu_1 c\int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^3 |\partial_j\overline{\varphi}_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{i,j=1}^3 |\partial_j(\upsilon_0)_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
|a(\theta;\overline{v},\overline{\varphi})| &\leq 2\mu_1\Big(\int_\Omega |\nabla\overline{v}|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_\Omega |\nabla\overline{\varphi}|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&+ 2\mu_1 c\Big(\int_\Omega |\nabla\overline{\varphi}|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_\Omega |\nabla\upsilon_0|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

donc,

$$|a(\theta;\overline{v},\overline{\varphi})| \leq 2\mu_1\|\overline{v}\|_{1.2}\|\overline{\varphi}\|_{1.2} + 2\mu_1 c\|\upsilon_0\|_{1.2}\|\overline{\varphi}\|_{1.2}. \tag{3.32}$$

D'autre part, pour tout $(\overline{v},\overline{\varphi}) \in (L^2(0,T;V_{0.div}))^2$, on a

$$\begin{aligned}
|[\mathcal{A}\overline{v},\overline{\varphi}]| &= \Big|\int_0^T a(\theta;\overline{v},\overline{\varphi})\,dt\Big|\\
&\leq \int_0^T |a(\theta;\overline{v},\overline{\varphi})|\,dt\\
&\leq 2\mu_1\int_0^T \|\overline{v}\|_{1.2}\|\overline{\varphi}\|_{1.2}\,dt + 2\mu_1 c\|\upsilon_0\|_{1.2}\int_0^T \|\overline{\varphi}\|_{1.2}\,dt.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz en temps, on obtient

$$\begin{aligned}
|[\mathcal{A}\overline{v},\overline{\varphi}]| &\leq 2\mu_1\|\overline{\varphi}\|_{L^2(0,T;V_{0.div})}\|\overline{v}\|_{L^2(0,T;V_{0.div})}\\
&+ 2\mu_1 c\|\upsilon_0\|_{1.2}\|\overline{\varphi}\|_{L^1(0,T;V_{0.div})}\\
&\leq 2\mu_1\|\overline{\varphi}\|_{L^2(0,T;V_{0.div})}\|\overline{v}\|_{L^2(0,T;V_{0.div})}\\
&+ 2\mu_1 c\sqrt{T}\|\upsilon_0\|_{1.2}\|\overline{\varphi}\|_{L^2(0,T;V_{0.div})},
\end{aligned}$$

donc

$$|[\mathcal{A}\overline{v},\overline{\varphi}]| \leq 2\mu_1(\|\overline{v}\|_{L^2(0,T;V_{0.div})} + c\sqrt{T}\|v_0\|_{1.2})\|\overline{\varphi}\|_{L^2(0,T;V_{0.div})}, \qquad (3.33)$$

d'où

$$\sup_{\overline{\varphi}\neq 0} \frac{|[\mathcal{A}\overline{v},\overline{\varphi}]|}{\|\overline{\varphi}\|_{L^2(0,T;V_{0.div})}} \leq 2\mu_1(\|\overline{v}\|_{L^2(0,T;V_{0.div})} + c\sqrt{T}\|v_0\|_{1.2}),$$

alors

$$\|\mathcal{A}\overline{v}\|_{L^2(0,T;V'_{0.div})} \leq 2\mu_1(\|\overline{v}\|_{L^2(0,T;V_{0.div})} + c\sqrt{T}\|v_0\|_{1.2}), \qquad (3.34)$$

ce qui montre que $\mathcal{A}$ est borné.
Pour montrer que $\mathcal{A}$ est hémicontinu, il faut montrer que pour tout $u, v, w \in L^2(0,T;V_{0.div})$, la fonction :

$$\begin{aligned} \alpha_1 \quad &: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &\qquad \lambda \mapsto \alpha_1(\lambda) = [\mathcal{A}(u+\lambda v), w] \end{aligned}$$

est continue. On a

$$\alpha_1(\lambda) = \int_0^T \int_\Omega 2\mu(\theta, |D((u+\lambda v)+v_0\xi)|)D((u+\lambda v)+v_0\xi) : D(w)\, dx\, dt$$

D'après (3.3) et pour presque tout $(t,x) \in [0,T]\times\Omega$ la fonction

$$\lambda \to \mathcal{S}(\lambda) = 2\mu(\theta, |D((u+\lambda v)+v_0\xi)|)D((u+\lambda v)+v_0\xi) : D(w)$$

est clairement continue sur $\mathbb{R}$. Soit $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ une suite convergente vers λ dans $\mathbb{R}$, alors $\mathcal{S}_n := \mathcal{S}(\lambda_n) \in L^1(0,T;L^1(\Omega))$ et $\mathcal{S}_n$ converge vers $\mathcal{S}(\lambda)$ quand $n \to +\infty$ dans $L^1(0,T;L^1(\Omega))$. En effet, la suite $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ étant bornée, il existe $M > 0$ tel que $|\lambda_n| < M$, pour tout $n \geq 0$. Ainsi

$$\begin{aligned} |\mathcal{S}_n| &\leq 2\mu_1|D((u+\lambda_n v)+v_0\xi) : D(w)| \\ &\leq 2\mu_1(|D(u)| + |\lambda_n||D(v)| + |\xi||D(v_0)|)|D(w)| \\ &\leq 2\mu_1(|D(u)| + M|D(v)| + c|D(v_0)|)|D(w)| \end{aligned}$$

d'où

$$|\mathcal{S}_n| \leq \mathcal{G} := 2\mu_1(|D(u)||D(w)| + M|D(v)||D(w)| + c|D(v_0)||D(w)|),$$

comme $\mathcal{G} \in L^1(0,T;L^1(\Omega))$ et est positive, par le théorème de la convergence dominée, on en déduit que $\mathcal{S}(\lambda) \in L^1(0,T;L^1(\Omega))$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^T \int_\Omega \mathcal{S}_n \, dx \, dt = \int_0^T \int_\Omega \mathcal{S}(\lambda) \, dx \, dt,$$

c-à-d

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_1(\lambda_n) = \alpha_1(\lambda).$$

L'opérateur $\mathcal{A}$ est donc hémicontinu. Pour la monotonie de $\mathcal{A}$, on doit établir que

$$[\mathcal{A}u - \mathcal{A}v, u - v] \geq 0 \qquad \forall u, v \in L^2(0,T,V_{0.div}).$$

En effet,

$$\begin{aligned}
[\mathcal{A}u - \mathcal{A}v, u - v] &= 2\int_0^T \int_\Omega \mu(\theta, |D(u + v_0\xi)|) d_{ij}(u + v_0\xi) d_{ij}(u) \, dx \, dt \\
&- 2\int_0^T \int_\Omega \mu(\theta, |D(u + v_0\xi)|) d_{ij}(u + v_0\xi) d_{ij}(v) \, dx \, dt \\
&- 2\int_0^T \int_\Omega \mu(\theta, |D(v + v_0\xi)|) d_{ij}(v + v_0\xi) d_{ij}(u) \, dx \, dt \\
&+ 2\int_0^T \int_\Omega \mu(\theta, |D(v + v_0\xi)|) d_{ij}(v + v_0\xi) d_{ij}(v) \, dx \, dt,
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
&[\mathcal{A}u - \mathcal{A}v, u - v] \\
&= 2\int_0^T \int_\Omega \mu(\theta, |D(u + v_0\xi)|) d_{ij}(u + v_0\xi) d_{ij}(u + v_0\xi) \, dx \, dt \\
&-2\int_0^T \int_\Omega \mu(\theta, |D(u + v_0\xi)|) d_{ij}(u + v_0\xi) d_{ij}(v_0\xi) \, dx \, dt \\
&-2\int_0^T \int_\Omega \mu(\theta, |D(u + v_0\xi)|) d_{ij}(u + v_0\xi) d_{ij}(v + v_0\xi) \, dx \, dt \\
&+2\int_0^T \int_\Omega \mu(\theta, |D(u + v_0\xi)|) d_{ij}(u + v_0\xi) d_{ij}(v_0\xi) \, dx \, dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-2\int_0^T\int_\Omega \mu(\theta,|D(\upsilon+\upsilon_0\xi)|)d_{ij}(\upsilon+\upsilon_0\xi)d_{ij}(u+\upsilon_0\xi)\,dx\,dt\\
&+2\int_0^T\int_\Omega \mu(\theta,|D(\upsilon+\upsilon_0\xi)|)d_{ij}(\upsilon+\upsilon_0\xi)d_{ij}(\upsilon_0\xi)\,dx\,dt\\
&+2\int_0^T\int_\Omega \mu(\theta,|D(\upsilon+\upsilon_0\xi)|)d_{ij}(\upsilon+\upsilon_0\xi)d_{ij}(\upsilon+\upsilon_0\xi)\,dx\,dt\\
&-2\int_0^T\int_\Omega \mu(\theta,|D(\upsilon+\upsilon_0\xi)|)d_{ij}(\upsilon+\upsilon_0\xi)d_{ij}(\upsilon_0\xi)\,dx\,dt
\end{aligned}
$$

qui se simplifie en

$$
\begin{aligned}
&[\mathcal{A}u-\mathcal{A}\upsilon,u-\upsilon]\\
&=2\int_0^T\int_\Omega \mu(\theta,|D(u+\upsilon_0\xi)|)d_{ij}(u+\upsilon_0\xi)d_{ij}(u+\upsilon_0\xi)\,dx\,dt\\
&-2\int_0^T\int_\Omega \mu(\theta,|D(u+\upsilon_0\xi)|)d_{ij}(u+\upsilon_0\xi)d_{ij}(\upsilon+\upsilon_0\xi)\,dx\,dt\\
&-2\int_0^T\int_\Omega \mu(\theta,|D(\upsilon+\upsilon_0\xi)|)d_{ij}(\upsilon+\upsilon_0\xi)d_{ij}(u+\upsilon_0\xi)\,dx\,dt\\
&+2\int_0^T\int_\Omega \mu(\theta,|D(\upsilon+\upsilon_0\xi)|)d_{ij}(\upsilon+\upsilon_0\xi)d_{ij}(\upsilon+\upsilon_0\xi)\,dx\,dt.
\end{aligned}
$$

Du fait que

$$
\begin{aligned}
d_{ij}(u+\upsilon_0\xi)d_{ij}(\upsilon+\upsilon_0\xi)&=D(u+\upsilon_0\xi):D(\upsilon+\upsilon_0\xi)\\
&\le |D(u+\upsilon_0\xi)||D(\upsilon+\upsilon_0\xi)|,
\end{aligned}
\tag{3.35}
$$

on obtient

$$
\begin{aligned}
[\mathcal{A}u-\mathcal{A}\upsilon,u-\upsilon]\ge\ &2\int_0^T\int_\Omega \mu(\theta,|D(u+\upsilon_0\xi)|)|D(u+\upsilon_0\xi)|^2\,dx\,dt\\
&+\int_0^T\int_\Omega 2\mu(\theta,|D(\upsilon+\upsilon_0\xi)|)|D(\upsilon+\upsilon_0\xi)|^2\,dx\,dt\\
&-2\int_0^T\int_\Omega \Big(\mu(\theta,|D(u+\upsilon_0\xi)|)+\mu(\theta,|D(\upsilon+\upsilon_0\xi)|)\Big)\\
&\times|D(u+\upsilon_0\xi)||D(\upsilon+\upsilon_0\xi)|\,dx\,dt.
\end{aligned}
$$

Maintenant puisque

$$2|D(u+\upsilon_0\xi)||D(\upsilon+\upsilon_0\xi)| \leq |D(u+\upsilon_0\xi)|^2 + |D(\upsilon+\upsilon_0\xi)|^2,$$

on a

$$\begin{aligned}[\mathcal{A}u - \mathcal{A}\upsilon, u-\upsilon] &\geq \int_0^T \int_\Omega \Big(\mu(\theta, |D(u+\upsilon_0\xi)|) - \mu(\theta, |D(\upsilon+\upsilon_0\xi)|)\Big) \\ &\times \Big(|D(u+\upsilon_0\xi)|^2 - |D(\upsilon+\upsilon_0\xi)|^2\Big)\, dx\, dt,\end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned}[\mathcal{A}u - \mathcal{A}\upsilon, u-\upsilon] &\geq \int_0^T \int_\Omega \Big(\mu(\theta, |D(u+\upsilon_0\xi)|) - \mu(\theta, |D(\upsilon+\upsilon_0\xi)|)\Big) \\ &\times \Big(|D(u+\upsilon_0\xi)| - |D(\upsilon+\upsilon_0\xi)|\Big) \\ &\times \Big(|D(u+\upsilon_0\xi)| + |D(\upsilon+\upsilon_0\xi)|\Big)\, dx\, dt.\end{aligned}$$

De (3.3), on tire

$$[\mathcal{A}u - \mathcal{A}\upsilon, u-\upsilon] \geq 0, \quad \forall u, \upsilon \in L^2(0,T; V_{0.div}),$$

ce qui montre que $\mathcal{A}$ est monotone.

□

3.4 Problème intermédiaire

Il est utile d'introduire une notion de solution "plus faible" que la notion de solution de l'inéquation variationnelle parabolique (3.30), ne faisant pas intervenir la dérivée en temps de la fonction $\overline{v}$.
On pose pour cela

$$\phi = \{\overline{\varphi} \in L^2(0,T; V_{0.div}) : \quad \overline{\varphi}' \in L^2(0,T; V'_{0.div}), \quad \overline{\varphi}(0) = 0\}.$$

Pour tout $\overline{\varphi} \in \phi$ on a

$$\begin{aligned}[\overline{\varphi}', \overline{\varphi} - \overline{v}] + [\mathcal{A}\overline{v}, \overline{\varphi} - \overline{v}] - [\overline{f}, \overline{\varphi} - \overline{v}] + J(\overline{\varphi}) - J(\overline{v}) = [\overline{v}', \overline{\varphi} - \overline{v}] + \\ + [\mathcal{A}\overline{v}, \overline{\varphi} - \overline{v}] - [\overline{f}, \overline{\varphi} - \overline{v}] + J(\overline{\varphi}) - J(\overline{v}) + [\overline{\varphi}' - \overline{v}', \overline{\varphi} - \overline{v}].\end{aligned} \tag{3.36}$$

D'autre part

$$< \overline{\varphi}' - \overline{v}', \overline{\varphi} - \overline{v} >_{V'_{0.div}, V_{0.div}} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\|\overline{\varphi} - \overline{v}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}),$$

et

$$[\overline{\varphi}' - \overline{v}', \overline{\varphi} - \overline{v}] = \int_0^T < \overline{\varphi}' - \overline{v}', \overline{\varphi} - \overline{v} >_{V'_{0.div}, V_{0.div}} \, dt,$$

d'où, pour tout $\overline{\varphi} \in \phi$

$$\begin{aligned} [\overline{\varphi}' - \overline{v}', \overline{\varphi} - \overline{v}] \; &= \frac{1}{2}\|\overline{\varphi}(T) - \overline{v}(T)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ &\quad - \frac{1}{2}\| \underbrace{\overline{\varphi}(0) - \overline{v}(0)}_{=0} \|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \geq 0. \end{aligned} \tag{3.37}$$

De (3.30) et (3.37), l'équation (3.36) conduit à l'inéquation variationnelle parabolique "plus faible" suivante

$$[\overline{\varphi}', \overline{\varphi} - \overline{v}] + [\mathcal{A}\overline{v}, \overline{\varphi} - \overline{v}] + J(\overline{\varphi}) - J(\overline{v}) \geq [\overline{f}, \overline{\varphi} - \overline{v}] \quad \forall \overline{\varphi} \in \phi.$$

Donc, on considère le problème "faible" suivant :

Problème $(\mathbf{P}_0)$

Soient $f \in L^2(0,T;V'_{0.div})$, $k \in L^2(0,T;L^2_+(\omega))$, μ *vérifie* (3.2), (3.3), $\theta \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $s \in L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\omega))$, $\xi \in H^1(0,T)$ *vérifiant* (3.10) *et* $\upsilon_0 \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ *vérifiant* (3.14), *trouver* $\overline{v} \in L^2(0,T;V_{0.div})$ *vérifiant*

$$[\overline{\varphi}', \overline{\varphi} - \overline{v}] + [\mathcal{A}\overline{v}, \overline{\varphi} - \overline{v}] + J(\overline{\varphi}) - J(\overline{v}) \geq [\overline{f}, \overline{\varphi} - \overline{v}] \quad \forall \overline{\varphi} \in \phi. \tag{3.38}$$

3.5 Résultat d'existence pour le problème $(\mathbf{P}_0)$

Dans cette section on utilise une approximation de la dérivée en temps qui permet d'approcher le problème variationnel parabolique intermédiaire $(\mathbf{P}_0)$ par un problème variationnel elliptique (cf dans [56] page 227).

En notant $\mathcal{K} := L^2(0,T;V_{0.div})$, $\mathcal{K}' := L^2(0,T;V'_{0.div})$, $\mathcal{H} := L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$ avec

$$\mathcal{K} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{K}'.$$

On prend $\Lambda = \dfrac{d}{dt}$, on a

$$\Lambda\overline{\varphi}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\overline{\varphi}(t) - \overline{\varphi}(t-h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{I - S(h)}{h}\overline{\varphi}(t), \tag{3.39}$$

où $h \mapsto S(h)$ est le semi groupe dans $\mathcal{K}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}'$ (cf dans [56] page 230) défini par

$$S(h)\overline{\varphi}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < h, \\ \overline{\varphi}(t-h) & \text{si} \quad t \geq h. \end{cases} \tag{3.40}$$

Notons

$$X = L^2(0,T;\tilde{E}), \tilde{E} = V_{0.div}, \mathbf{L}^2(\Omega), V'_{0.div}.$$

Montrons que $S(h)$ est une contraction dans X. En effet, la norme de $S(h)$ est donnée par

$$\|S(h)\|_{\mathcal{L}(X)} = \sup_{\overline{\varphi}\neq 0} \frac{\|S(h)\overline{\varphi}\|_X}{\|\overline{\varphi}\|_X}. \tag{3.41}$$

Si $h = 0$, on a $S(0) = Id$, donc on obtient

$$\|S(0)\|_{\mathcal{L}(X)} = 1.$$

Si $h > 0$, on a de (3.40)

$$\|S(h)\overline{\varphi}\|_X = \Big(\int_0^T \|S(h)\overline{\varphi}(t)\|^2_{\tilde{E}}\, dt\Big)^{\frac{1}{2}} = \Big(\int_h^T \|\overline{\varphi}(t-h)\|^2_{\tilde{E}}\, dt\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

On pose $\tilde{t} = t - h$, on obtient

$$\|S(h)\overline{\varphi}\|_X = \Big(\int_0^{T-h} \|\overline{\varphi}(\tilde{t})\|^2_{\tilde{E}}\, d\tilde{t}\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \Big(\int_0^T \|\overline{\varphi}(\tilde{t})\|^2_{\tilde{E}}\, d\tilde{t}\Big)^{\frac{1}{2}} = \|\overline{\varphi}\|_X,$$

d'où

$$\|S(h)\overline{\varphi}\|_X \leq \|\overline{\varphi}\|_X, \tag{3.42}$$

de (3.41), (3.42) on trouve

$$\|S(h)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1.$$

Toutes les conditions de la définition 5.22 (voir chapitre 5) sont vérifiées pour la famille $(S(h))_{h\geq 0}$ avec $X = \mathcal{K}, \mathcal{H}$, ou $\mathcal{K}'$. En effet

(1) Pour tout $t \in [0,T]$, $\overline{\varphi} \in X$ on a $S(0)\overline{\varphi}(t) = \overline{\varphi}(t)$ alors $S(0) = Id$.

(2) Montrons que pour tout $\overline{\varphi} \in X$ on a

$$(S(h_1) \circ S(h_2))\overline{\varphi} = S(h_1 + h_2)\overline{\varphi},$$

c-à-d, pour tout $t \in [0,T]$

$$S(h_1)(S(h_2)\overline{\varphi})(t) = S(h_1 + h_2)\overline{\varphi}(t).$$

Notons $\hat{\varphi} = S(h_2)\overline{\varphi}$, on doit donc vérifier que

$$S(h_1)(\hat{\varphi})(t) = S(h_1+h_2)\overline{\varphi}(t) \quad \forall t \in [0,T],$$

où

$$S(h_1)(\hat{\varphi})(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < h_1, \\ \hat{\varphi}(t-h_1) & \text{si} \quad t \geq h_1, \end{cases}$$

et

$$S(h_1+h_2)\overline{\varphi}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < h_1+h_2, \\ \overline{\varphi}(t-h_1-h_2) & \text{si} \quad t \geq h_1+h_2. \end{cases}$$

On a $\hat{\varphi} = S(h_2)\overline{\varphi}$ définie par

$$\hat{\varphi}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < h_2, \\ \overline{\varphi}(t-h_2) & \text{si} \quad t \geq h_2. \end{cases}$$

Cas 1 : $t \geq h_1 + h_2$, montrons que $S(h_1)(\hat{\varphi})(t) = \overline{\varphi}(t-h_1-h_2)$,
si $t \geq h_1+h_2$ on a $t \geq h_1$ (car $h_2 \geq 0$) donc

$$S(h_1)(\hat{\varphi})(t) = \hat{\varphi}(t-h_1) = \overline{\varphi}(t-h_1-h_2),$$

(car $t - h_1 \geq h_2$).
Remarquons que : si $h_2 = 0$ on a $S(h_2) = Id$ et le résultat (1) est immédiat.

Cas 2 : $t < h_1 + h_2$, montrons que $S(h_1)(\hat{\varphi})(t) = 0$.
Cas 2.1 : $t < h_1$ alors $S(h_1)(\hat{\varphi})(t) = 0$.
Cas 2.2 : $h_1 \leq t < h_1 + h_2$ alors $S(h_1)(\hat{\varphi})(t) = \hat{\varphi}(t-h_1) = 0$,
(car $t - h_1 < h_2$).

(3) Soit $\overline{\varphi}$ une fonction dans X. Comme $C_c(0,T;\tilde{E})$ est dense dans X (cf. [22] chapitre 1), pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\overline{\varphi}_\epsilon \in C_c(0,T;\tilde{E})$ telle que $\|\overline{\varphi}_\epsilon - \overline{\varphi}\|_X \leq \frac{\epsilon}{3}$. Ainsi

$$\begin{aligned} \|S(h)\overline{\varphi} - \overline{\varphi}\|_X &= \|S(h)(\overline{\varphi} - \overline{\varphi}_\epsilon) - (\overline{\varphi} - \overline{\varphi}_\epsilon) + S(h)\overline{\varphi}_\epsilon - \overline{\varphi}_\epsilon\|_X \\ &\leq \|S(h)(\overline{\varphi} - \overline{\varphi}_\epsilon)\|_X + \|\overline{\varphi} - \overline{\varphi}_\epsilon\|_X + \|S(h)\overline{\varphi}_\epsilon - \overline{\varphi}_\epsilon\|_X. \end{aligned}$$

De (3.42) on trouve

$$\begin{aligned}\|S(h)\overline{\varphi}-\overline{\varphi}\|_X &\leq 2\|\overline{\varphi}-\overline{\varphi}_\epsilon\|_X+\|S(h)\overline{\varphi}_\epsilon-\overline{\varphi}_\epsilon\|_X\\ &\leq \frac{2\epsilon}{3}+\|S(h)\overline{\varphi}_\epsilon-\overline{\varphi}_\epsilon\|_X.\end{aligned}$$

La fonction $\overline{\varphi}_\epsilon$ est continue à support compact c-à-d, il existe $[a_\epsilon,b_\epsilon]\subset]0,T[$ tel que

$$\overline{\varphi}_\epsilon(t)=0,\quad \forall t\notin[a_\epsilon,b_\epsilon].$$

Donc, pour tout $h\in]0,a_\epsilon[$ on a

$$\overline{\varphi}_\epsilon(t)=0,\quad \forall t\in[0,h]. \tag{3.43}$$

De (3.43) on obtient

$$\begin{aligned}\|S(h)\overline{\varphi}_\epsilon-\overline{\varphi}_\epsilon\|_X &= \Big(\int_0^T\|S(h)\overline{\varphi}_\epsilon(t)-\overline{\varphi}_\epsilon(t)\|_{\tilde{E}}^2\,dt\Big)^{\frac{1}{2}}\\ &= \Big(\int_h^T\|\overline{\varphi}_\epsilon(t-h)-\overline{\varphi}_\epsilon(t)\|_{\tilde{E}}^2\,dt\Big)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

d'où

$$\|S(h)\overline{\varphi}_\epsilon-\overline{\varphi}_\epsilon\|_X=\Big(\int_0^{T-h}\|\overline{\varphi}_\epsilon(t')-\overline{\varphi}_\epsilon(t'+h)\|_{\tilde{E}}^2\,dt'\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.44}$$

D'après le théorème de Heine la fonction $\overline{\varphi}_\epsilon$ est uniformément continue (car continue à support compact) c-à-d, pour tout $\epsilon'>0$, il existe $\delta_0(\epsilon')>0$ tel que pour $|t'-t|=|h|\leq\delta_0(\epsilon')$,

$$\|\overline{\varphi}_\epsilon(t')-\overline{\varphi}_\epsilon(t'+h)\|_{\tilde{E}}\leq\epsilon',$$

d'où

$$\int_0^{T-h}\|\overline{\varphi}_\epsilon(t')-\overline{\varphi}_\epsilon(t'+h)\|_{\tilde{E}}^2\,dt'\leq(\epsilon')^2(T-h),$$

donc

$$\int_0^{T-h}\|\overline{\varphi}_\epsilon(t')-\overline{\varphi}_\epsilon(t'+h)\|_{\tilde{E}}^2\,dt'\leq(\epsilon')^2T. \tag{3.45}$$

De (3.44), (3.45) on obtient

$$\|S(h)\overline{\varphi}_\epsilon - \overline{\varphi}_\epsilon\|_X \quad \leq \quad \epsilon'\sqrt{T}.$$

On choisit $\epsilon' = \dfrac{\epsilon}{3\sqrt{T}}$ on trouve

$$\|S(h)\overline{\varphi}_\epsilon - \overline{\varphi}_\epsilon\|_X \quad \leq \quad \frac{\epsilon}{3}.$$

Ainsi, pour $|h| \leq \delta_0(\epsilon')$, on a

$$\|S(h)\overline{\varphi} - \overline{\varphi}\|_X \leq \epsilon.$$

En d'autres termes

$$\|S(h)\overline{\varphi} - \overline{\varphi}\|_X \to 0, \quad \text{quand} \quad h \to 0.$$

Le générateur infinitésimal de $(S(h))_{h\geq 0}$ est $-\Lambda$.
Dans toute la suite de ce travail on a $\phi = \mathcal{K} \cap D(\Lambda, \mathcal{K}')$ d'après [56] page 269.
Montrons que l'opérateur Λ et $\mathcal{K}$ sont compatibles (cf. [56] page 269) c-à-d, $\forall \overline{v} \in \mathcal{K}$, il existe une suite régularisante $(\overline{v}_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \phi$ vérifiant

$$\lim_{j\to+\infty} \overline{v}_j = \overline{v} \quad \text{dans} \quad \mathcal{K}, \quad \text{et,} \quad \limsup_{j\to+\infty} [\Lambda\overline{v}_j, \overline{v}_j - \overline{v}] \leq 0. \tag{3.46}$$

Proposition 3.2 *Le sous-espace vectoriel $\mathcal{K}$ et le semi groupe S vérifient l'inclusion suivante*

$$S(h)\mathcal{K} \subset \mathcal{K}, \quad \forall h \geq 0.$$

Preuve. On a $S(h)\mathcal{K} = \{\overline{\varphi} \quad \text{telle que} \quad \exists y \in \mathcal{K} \quad \text{vérifiant} \quad \overline{\varphi} = S(h)y\}$.
Si $h = 0$, l'inclusion est évidente puisque $S(0) = Id$.
Si $h > 0$, on a $\overline{\varphi} \in S(h)\mathcal{K}$ c-à-d, il existe $y \in \mathcal{K}$ tel que avec (3.40) on ait

$$\overline{\varphi}(t) = S(h)y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < h, \\ y(t-h) & \text{si} \quad t \geq h. \end{cases}$$

On donne l'ensemble suivant

$$E_y = \{t \in [0,T]; \quad y(t) \notin V_{0.div}\},$$

$|E_y| := mesure(E_y) = 0$ (car $y \in \mathcal{K} = L^2(0,T;V_{0.div})$).
Maintenant, on montre que

$$\overline{\varphi}(t) \in V_{0.div} \quad \text{p.p} \quad t \in [0,T],$$

c-à-d on montre que

$$|E_{\overline{\varphi}}| = |\{t \in [0,T]; \quad \overline{\varphi} \notin V_{0.div}\}| = 0.$$

On a

$$\begin{aligned} E_{\overline{\varphi}} &= \{t \in [h,T]; \quad \overline{\varphi}(t) = y(t-h) \notin V_{0.div}\} \\ &= \{t' \in [0,T-h]; \quad y(t') \notin V_{0.div}\} \\ &= E_y \cap [0,T-h], \end{aligned}$$

donc $|E_{\overline{\varphi}}| = |E_y \cap [0,T-h]| \leq |E_y| = 0$, alors

$$|E_{\overline{\varphi}}| = 0,$$

d'où, le résultat.
D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\overline{\varphi}(t)\|^2_{V_{0.div}}\, dt &= \int_h^T \|y(t-h)\|^2_{V_{0.div}}\, dt \\ &= \int_0^{T-h} \|y(t')\|^2_{V_{0.div}}\, dt' \\ &\leq \int_0^T \|y(t')\|^2_{V_{0.div}}\, dt' = \|y\|^2_{\mathcal{K}}, \end{aligned}$$

comme $y \in \mathcal{K}$ donc $\overline{\varphi} \in \mathcal{K}$. On déduit que

$$S(h)\mathcal{K} \subset \mathcal{K}, \quad \forall h \geq 0.$$

□

D'après le théorème 9.1 [56] page 270, la propriété (3.46) est donc vérifiée.
On fait un raisonnement analogue à celui du théorème 9.2 de [56], mais la différence dans ce travail est que l'inéquation variationnelle "faible" (3.38) contient la fonction convexe J due à la condition aux limites de type frottement de Tresca sur ω.

Théorème 3.1 *On suppose que les hypothèses* (3.2), (3.3) *sont satisfaites, alors pour* $f \in L^2(0,T;V'_{0.div})$, $k \in L^2(0,T;L^2_+(\omega))$, $\theta \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $s \in L^2(0,T;\boldsymbol{L}^2(\omega))$, $\xi \in H^1(0,T)$ *vérifiant* (3.10) *et* $\upsilon_0 \in \boldsymbol{H}^1(\Omega)$ *vérifiant* (3.14), *il existe* $\overline{\upsilon} \in \mathcal{K}$ *solution de l'inéquation parabolique variationnelle "faible"* (3.38).

Preuve. On approche le problème variationnel parabolique "faible" ($\mathbf{P}_0$) par une suite de problèmes variationnels elliptiques.
Pour cela, on approche la dérivée en temps comme dans (3.39) et on considère la suite de problèmes variationnels elliptiques dépendant du paramètre $h > 0$ suivante :
Trouver $\overline{\upsilon}_h \in \mathcal{K}$ telle que, pour tout $\overline{\varphi} \in \mathcal{K}$

$$\Big[\frac{I - S(h)}{h}\overline{\upsilon}_h, \overline{\varphi} - \overline{\upsilon}_h\Big] + [\mathcal{A}\overline{\upsilon}_h, \overline{\varphi} - \overline{\upsilon}_h] + J(\overline{\varphi}) - J(\overline{\upsilon}_h) \geq [\overline{f}, \overline{\varphi} - \overline{\upsilon}_h]. \quad (3.47)$$

La fonctionnelle J est convexe et propre.
La fonctionnelle J est lipschitzienne. En effet, soient u, v deux éléments de $\mathcal{K}$, on a

$$\begin{aligned} |J(u) - J(v)| &= \Big| \int_0^T \int_\omega k(|u - \tilde{s}| - |v - \tilde{s}|)\, dx'\, dt \Big| \\ &\leq \int_0^T \int_\omega |k||u - v|\, dx'\, dt. \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz en espace et en temps, on trouve

$$|J(u) - J(v)| \leq \|k\|_{L^2(0,T;L^2(\omega))} \|u - v\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\omega))}.$$

En utilisant la continuité de l'application trace de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\partial\Omega)$ on obtient

$$\exists \gamma > 0, \quad \|u\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\omega))} \leq \gamma \|u\|_{\mathcal{K}}, \quad (3.48)$$

donc

$$|J(u) - J(v)| \leq \gamma \|k\|_{L^2(0,T;L^2(\omega))} \|u - v\|_{\mathcal{K}}, \quad (3.49)$$

ce qui montre que J est lipschitzienne. Alors elle est continue donc elle est semi-continue inférieurement sur $\mathcal{K}$.
Définissons l'opérateur $\mathcal{B}$ de $\mathcal{K} \to \mathcal{K}'$ par

$$\overline{\upsilon} \mapsto \frac{I - S(h)}{h}\overline{\upsilon} + \mathcal{A}\overline{\upsilon} = \mathcal{B}\overline{\upsilon}.$$

L'opérateur $\mathcal{B}$ est pseudo-monotone. En effet, d'après le lemme 3.2 et la proposition 2.5 [56] page 179 l'opérateur $\mathcal{A}$ est pseudo-monotone.
Pour montrer $\dfrac{I-S(h)}{h}$ est hémicontinu, on doit montrer que, pour tout $u, v, w \in \mathcal{K}$, la fonction

$$\alpha_2 : \lambda \mapsto \alpha_2(\lambda) = \Big[\frac{I-S(h)}{h}(u+\lambda v), w\Big]$$

est continue sur $\mathbb{R}$.
Soit $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ une suite convergente vers λ dans $\mathbb{R}$, alors

$$\alpha_2(\lambda_n) = \Big[\frac{I-S(h)}{h}(u+\lambda_n v), w\Big] = \Big[\frac{I-S(h)}{h}u, w\Big] + \lambda_n\Big[\frac{I-S(h)}{h}v, w\Big],$$

converge vers $\alpha_2(\lambda)$. On déduit donc que l'opérateur $\dfrac{I-S(h)}{h}$ est hémicontinu. Pour la monotonie de $\dfrac{I-S(h)}{h}$, il faut montrer que pour tout $u, v \in \mathcal{K}$

$$\Big[\frac{I-S(h)}{h}u - \frac{I-S(h)}{h}v, u-v\Big] \geq 0. \tag{3.50}$$

Comme S est une contraction dans $\mathcal{H}$, on a

$$\Big[\frac{I-S(h)}{h}u, u\Big] = \int_0^T\int_\Omega \Big(\frac{I-S(h)}{h}u\Big)\cdot u\,dx\,dt \geq 0, \tag{3.51}$$

et puisque l'opérateur $\dfrac{I-S(h)}{h}$ est linéaire on déduit que $\dfrac{I-S(h)}{h}$ est monotone.
De plus l'opérateur $\dfrac{I-S(h)}{h}$ est borné. En effet, on a

$$\begin{aligned}
\Big|\Big[\frac{I-S(h)}{h}u, v\Big]\Big| &= \Big|\int_0^T\int_\Omega \Big(\frac{I-S(h)}{h}u\Big)\cdot v\,dx\,dt\Big| \\
&\leq \int_0^T\int_\Omega \Big|\frac{I-S(h)}{h}u\Big||v|\,dx\,dt \\
&\leq \frac{1}{h}\int_0^T\int_\Omega (|u|+|S(h)u|)|v|\,dx\,dt \\
&\leq \frac{1}{h}\Big(\int_0^T\int_\Omega |u||v|\,dx\,dt + \int_0^T\int_\Omega |S(h)u||v|\,dx\,dt\Big),
\end{aligned}$$

en utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz en espace et en temps on obtient

$$\Big|\Big[\frac{I-S(h)}{h}u, v\Big]\Big| \leq \frac{1}{h}\Big(\|u\|_{\mathcal{H}}\|v\|_{\mathcal{H}} + \|S(h)u\|_{\mathcal{H}}\|v\|_{\mathcal{H}}\Big),$$

de (3.42) on obtient

$$\Big|\Big[\frac{I-S(h)}{h}u,v\Big]\Big| \leq \frac{2}{h}C_i^2\|u\|_{\mathcal{K}}\|v\|_{\mathcal{K}},$$

où C_i désigne la constante de l'injection continue de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{H}$.
Donc,

$$\sup_{v\neq 0}\frac{\Big|\Big[\frac{I-S(h)}{h}u,v\Big]\Big|}{\|v\|_{\mathcal{K}}} \leq \frac{2}{h}C_i^2\|u\|_{\mathcal{K}},$$

d'où

$$\Big\|\frac{I-S(h)}{h}u\Big\|_{\mathcal{K}'} \leq C_h\|u\|_{\mathcal{K}}, \tag{3.52}$$

où $C_h = \dfrac{2}{h}C_i^2$. D'où le résultat.
Comme $\mathcal{A}$ est pseudo-monotone, $\dfrac{I-S(h)}{h}$ monotone, hémicontinu et borné d'après la remarque 2.12 [56] page 189, on en déduit que l'opérateur $\mathcal{B}$ est pseudo-monotone.
On réécrit l'inéquation variationnelle (3.47) comme suit

$$\Big[\mathcal{B}\overline{v}_h,\overline{\varphi}-\overline{v}_h\Big] + J(\overline{\varphi}) - J(\overline{v}_h) \geq [\overline{f},\overline{\varphi}-\overline{v}_h], \quad \forall\overline{\varphi}\in\mathcal{K}. \tag{3.53}$$

Pour appliquer le théorème de la monotonie [56] page 251, il reste à montrer que $\mathcal{B}$ est coercif c-à-d

$$\exists\overline{v}_*\in\mathcal{K} \quad \text{tel que} \quad J(\overline{v}_*)<\infty,$$

et

$$\lim_{\|\overline{v}\|_{\mathcal{K}}\to+\infty}\frac{[\mathcal{B}\overline{v},\overline{v}-\overline{v}_*]+J(\overline{v})}{\|\overline{v}\|_{\mathcal{K}}} = +\infty.$$

Or

$$\begin{aligned}
[\mathcal{B}\overline{v},\overline{v}-\overline{v}_*]+J(\overline{v}) &= [\mathcal{A}\overline{v},\overline{v}-\overline{v}_*]+J(\overline{v})\\
&+ \Big[\frac{I-S(h)}{h}(\overline{v}-\overline{v}_*),(\overline{v}-\overline{v}_*)\Big]\\
&+ \Big[\frac{I-S(h)}{h}\overline{v}_*,(\overline{v}-\overline{v}_*)\Big]\\
&\geq [\mathcal{A}\overline{v},\overline{v}-\overline{v}_*]+J(\overline{v})\\
&- \Big[\frac{I-S(h)}{h}\overline{v}_*,(\overline{v}_*-\overline{v})\Big].
\end{aligned}$$

De (3.52) on trouve

$$\begin{aligned}
[\mathcal{B}\overline{v}, \overline{v} - \overline{v}_*] + J(\overline{v}) &\geq [\mathcal{A}\overline{v}, \overline{v} - \overline{v}_*] + J(\overline{v}) \\
&- \left\| \frac{I - S(h)}{h} \overline{v}_* \right\|_{\mathcal{K}'} \|\overline{v}_* - \overline{v}\|_{\mathcal{K}} \\
&\geq [\mathcal{A}\overline{v}, \overline{v} - \overline{v}_*] + J(\overline{v}) \\
&- C_h \|\overline{v}_*\|_{\mathcal{K}} \|\overline{v}_* - \overline{v}\|_{\mathcal{K}} \\
&\geq [\mathcal{A}\overline{v}, \overline{v} - \overline{v}_*] + J(\overline{v}) \\
&- C_h \|\overline{v}_*\|_{\mathcal{K}} (\|\overline{v}_*\|_{\mathcal{K}} + \|\overline{v}\|_{\mathcal{K}}).
\end{aligned}$$

L'opérateur $\mathcal{A}$ est coercif c-à-d

$$\exists \overline{v}_* \in \mathcal{K} \quad \text{tel que} \quad J(\overline{v}_*) < \infty,$$

et

$$\lim_{\|\overline{v}\|_{\mathcal{K}} \to +\infty} \frac{[\mathcal{A}\overline{v}, \overline{v} - \overline{v}_*] + J(\overline{v})}{\|\overline{v}\|_{\mathcal{K}}} = +\infty.$$

En effet,

$$\begin{aligned}
[\mathcal{A}\overline{v}, \overline{v} - \overline{v}_*] &= 2 \int_0^T \int_\Omega \mu(\theta, |D(\overline{v} + \upsilon_0 \xi)|) |D(\overline{v} - \overline{v}_*)|^2 \, dx \, dt \\
&+ 2 \int_0^T \int_\Omega \mu(\theta, |D(\overline{v} + \upsilon_0 \xi)|) D(\overline{v}_* + \upsilon_0 \xi) : D(\overline{v} - \overline{v}_*) \, dx \, dt.
\end{aligned}$$

Pour $\overline{v} \in \mathcal{K}$, de la positivité de la fonction J, (3.2) et (3.33), on obtient

$$\begin{aligned}
[\mathcal{A}\overline{v}, \overline{v} - \overline{v}_*] + J(\overline{v}) &\geq 2\mu_0 \int_0^T \int_\Omega |D(\overline{v} - \overline{v}_*)|^2 \, dx \, dt \\
&- 2\mu_1 (\|\overline{v}_*\|_{\mathcal{K}} + c\sqrt{T} \|\upsilon_0\|_{1.2}) \|\overline{v}_* - \overline{v}\|_{\mathcal{K}}.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Korn, il existe $C_1 > 0$ telle que

$$|u|_{1.2} \geq C_1 \|u\|_{1.2}, \quad \forall u \in V_{\Gamma_1}, \tag{3.54}$$

où

$$|u|_{1.2}^2 = \int_\Omega |D(u)|^2 \, dx.$$

On trouve

$$\begin{aligned}[\mathcal{A}\overline{v},\overline{v}-\overline{v}_*]+J(\overline{v}) &\geq 2C_1^2\mu_0\int_0^T\|\overline{v}-\overline{v}_*\|_{1.2}^2\,dt-c'\|\overline{v}_*-\overline{v}\|_{\mathcal{K}}\\ &= 2C_1^2\mu_0\|\overline{v}-\overline{v}_*\|_{\mathcal{K}}^2-c'\|\overline{v}_*-\overline{v}\|_{\mathcal{K}}\\ &\geq 2C_1^2\mu_0\|\overline{v}-\overline{v}_*\|_{\mathcal{K}}^2-c'(\|\overline{v}_*\|_{\mathcal{K}}+\|\overline{v}\|_{\mathcal{K}}),\end{aligned}$$

où $c'=2\mu_1(\|\overline{v}_*\|_{\mathcal{K}}+c\sqrt{T}\|v_0\|_{1.2})$. Avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$2C_1^2\mu_0\|\overline{v}-\overline{v}_*\|_{\mathcal{K}}^2 \geq 2C_1^2\mu_0(\|\overline{v}\|_{\mathcal{K}}^2-2\|\overline{v}\|_{\mathcal{K}}\|\overline{v}_*\|_{\mathcal{K}}+\|\overline{v}_*\|_{\mathcal{K}}^2),$$

d'où

$$\begin{aligned}&\frac{[\mathcal{A}\overline{v},\overline{v}-\overline{v}_*]+J(\overline{v})}{\|\overline{v}\|_{\mathcal{K}}}\\ &\geq 2C_1^2\mu_0\frac{\|\overline{v}\|_{\mathcal{K}}^2-2\|\overline{v}\|_{\mathcal{K}}\|\overline{v}_*\|_{\mathcal{K}}+\|\overline{v}_*\|_{\mathcal{K}}^2}{\|\overline{v}\|_{\mathcal{K}}}-\frac{c'(\|\overline{v}_*\|_{\mathcal{K}}+\|\overline{v}\|_{\mathcal{K}})}{\|\overline{v}\|_{\mathcal{K}}}.\end{aligned}\tag{3.55}$$

Ainsi

$$\lim_{\|\overline{v}\|_{\mathcal{K}}\to+\infty}\frac{[\mathcal{A}\overline{v},\overline{v}-\overline{v}_*]+J(\overline{v})}{\|\overline{v}\|_{\mathcal{K}}}=+\infty.$$

Ce qui montre que $\mathcal{A}$ est coercif. Donc

$$\lim_{\|\overline{v}\|_{\mathcal{K}}\to+\infty}\frac{[\mathcal{B}\overline{v},\overline{v}-\overline{v}_*]+J(\overline{v})}{\|\overline{v}\|_{\mathcal{K}}}=+\infty.\tag{3.56}$$

Par application du Théorème 8.5 [56] page 251, on conclut que (3.47) a au moins une solution $\overline{v}_h$ dans $\mathcal{K}$.

Il en résulte que la suite $(\overline{v}_h)_{h>0}$ est bornée dans $\mathcal{K}$. En effet, on prend $\overline{\varphi}=0$ dans (3.47) on obtient

$$\Big[\frac{I-S(h)}{h}\overline{v}_h,-\overline{v}_h\Big]+[\mathcal{A}\overline{v}_h,-\overline{v}_h]+J(0)-J(\overline{v}_h)\geq[\overline{f},-\overline{v}_h].$$

Avec (3.51) et la positivité de la fonction J

$$[\mathcal{A}\overline{v}_h,\overline{v}_h]\leq[\overline{f},\overline{v}_h]+J(0).\tag{3.57}$$

En utilisant (3.2) et l'inégalité de Korn (3.54) on obtient

$$\begin{aligned} a(\theta;\overline{\upsilon}_h,\overline{\upsilon}_h) &= \int_\Omega 2\mu(\theta,|D(\overline{\upsilon}_h+\upsilon_0\xi)|)D(\overline{\upsilon}_h+\upsilon_0\xi):D(\overline{\upsilon}_h)\,dx \\ &= \int_\Omega 2\mu(\theta,|D(\overline{\upsilon}_h+\upsilon_0\xi)|)|D(\overline{\upsilon}_h)|^2\,dx \\ &+ \int_\Omega 2\mu(\theta,|D(\overline{\upsilon}_h+\upsilon_0\xi)|)D(\upsilon_0\xi):D(\overline{\upsilon}_h)\,dx \\ &\geq 2C_1^2\mu_0\|\overline{\upsilon}_h\|_{1.2}^2+\int_\Omega 2\mu(\theta,|D(\overline{\upsilon}_h+\upsilon_0\xi)|)D(\upsilon_0\xi):D(\overline{\upsilon}_h)\,dx. \end{aligned}$$

Avec (3.2) on a

$$\begin{aligned} &\Big|\int_\Omega 2\mu(\theta,|D(\overline{\upsilon}_h+\upsilon_0\xi)|)D(\upsilon_0\xi):D(\overline{\upsilon}_h)\,dx\Big| \\ &=\int_\Omega 2\mu(\theta,|D(\overline{\upsilon}_h+\upsilon_0\xi)|)|d_{ij}(\upsilon_0\xi)d_{ij}(\overline{\upsilon}_h)|\,dx \\ &\leq 2\mu_1\int_\Omega |d_{ij}(\upsilon_0\xi)d_{ij}(\overline{\upsilon}_h)|\,dx. \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz et Minkowski on obtient

$$\begin{aligned} &\Big|\int_\Omega 2\mu(\theta,|D(\overline{\upsilon}_h+\upsilon_0\xi)|)D(\upsilon_0\xi):D(\overline{\upsilon}_h)\,dx\Big| \\ &\leq 2\mu_1\int_\Omega\Big(\sum_{i,j=1}^3|d_{ij}(\upsilon_0\xi)|^2\Big)^{\frac12}\Big(\sum_{i,j=1}^3|d_{ij}(\overline{\upsilon}_h)|^2\Big)^{\frac12}dx \\ &\leq 2\mu_1\int_\Omega\Big(\sum_{i,j=1}^3|\partial_j((\upsilon_0)_i\xi)|^2\Big)^{\frac12}\Big(\sum_{i,j=1}^3|\partial_j(\overline{\upsilon}_h)_i|^2\Big)^{\frac12}dx \\ &\leq 2\mu_1\Big(\int_\Omega|\nabla\upsilon_0\xi|^2\,dx\Big)^{\frac12}\Big(\int_\Omega|\nabla\overline{\upsilon}_h|^2\,dx\Big)^{\frac12} \\ &\leq 2\mu_1\|\upsilon_0\xi\|_{1.2}\|\overline{\upsilon}_h\|_{1.2}, \end{aligned}$$

d'où

$$a(\theta;\overline{\upsilon}_h,\overline{\upsilon}_h) \geq 2C_1^2\mu_0\|\overline{\upsilon}_h\|_{1.2}^2-2\mu_1\|\upsilon_0\xi\|_{1.2}\|\overline{\upsilon}_h\|_{1.2}.$$

En utilisant l'inégalité de Young :

$$\alpha\beta\leq\frac{\delta}{2}\alpha^2+\frac{1}{2\delta}\beta^2,\quad\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},\quad\forall\delta>0, \tag{3.58}$$

on obtient

$$\mu_1\|\upsilon_0\xi\|_{1.2}\|\overline{v}_h\|_{1.2} \leq \frac{C_1^2\mu_0}{2}\|\overline{v}_h\|_{1.2}^2 + \frac{\mu_1^2}{2C_1^2\mu_0}\|\upsilon_0\xi\|_{1.2}^2,$$

d'où

$$a(\theta;\overline{v}_h,\overline{v}_h) \geq C_1^2\mu_0\|\overline{v}_h\|_{1.2}^2 - \frac{\mu_1^2}{C_1^2\mu_0}\|\upsilon_0\xi\|_{1.2}^2. \tag{3.59}$$

Donc

$$\begin{aligned}[\mathcal{A}\overline{v}_h,\overline{v}_h] &= \int_0^T a(\theta;\overline{v}_h,\overline{v}_h)\,dt \\ &\geq C_1^2\mu_0\|\overline{v}_h\|_{\mathcal{K}}^2 - \frac{\mu_1^2}{C_1^2\mu_0}\|\upsilon_0\|_{1.2}^2\int_0^T|\xi|^2\,dt.\end{aligned} \tag{3.60}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}|[\overline{f},\overline{v}_h]| &\leq \|\overline{f}\|_{\mathcal{K}'}\|\overline{v}_h\|_{\mathcal{K}} \\ &\leq \frac{1}{2C_1^2\mu_0}\|\overline{f}\|_{\mathcal{K}'}^2 + \frac{C_1^2\mu_0}{2}\|\overline{v}_h\|_{\mathcal{K}}^2,\end{aligned}$$

en remplaçant ces termes dans (3.57) on obtient

$$\frac{1}{2}C_1^2\mu_0\|\overline{v}_h\|_{\mathcal{K}}^2 \leq \frac{1}{2C_1^2\mu_0}\|\overline{f}\|_{\mathcal{K}'}^2 + \frac{\mu_1^2}{C_1^2\mu_0}\|\upsilon_0\|_{1.2}^2\int_0^T|\xi|^2\,dt + J(0),$$

d'où

$$\|\overline{v}_h\|_{\mathcal{K}}^2 \leq C, \tag{3.61}$$

où

$$C = \frac{1}{C_1^4\mu_0^2}\Big[\|\overline{f}\|_{\mathcal{K}'}^2 + 2\mu_1^2\|\upsilon_0\|_{1.2}^2\int_0^T|\xi|^2\,dt + 2C_1^2\mu_0 J(0)\Big],$$

ce qui montre que la suite $(\overline{v}_h)_{h>0}$ est bornée dans $\mathcal{K}$.
On en déduit qu'il existe une sous-suite notée encore $(\overline{v}_h)_{h>0}$ telle que, lorsque $h \to 0$ on ait :

$$\overline{v}_h \rightharpoonup \overline{v} \quad \text{dans} \quad \mathcal{K} \quad \text{faible}, \tag{3.62}$$

et comme $\mathcal{A}$ est borné, on a

$$\mathcal{A}\overline{v}_h \rightharpoonup \chi \quad \text{dans} \quad \mathcal{K}' \quad \text{faible}. \tag{3.63}$$

Comme $\overline{v}_h$ est solution de (3.47) on obtient

$$\begin{aligned}
&\Big[\frac{I-S(h)}{h}\overline{\varphi},\overline{\varphi}-\overline{v}_h\Big]+[\mathcal{A}\overline{v}_h,\overline{\varphi}-\overline{v}_h]+J(\overline{\varphi})-J(\overline{v}_h)-[\overline{f},\overline{\varphi}-\overline{v}_h]\\
&=\Big[\frac{I-S(h)}{h}\overline{v}_h,\overline{\varphi}-\overline{v}_h\Big]+[\mathcal{A}\overline{v}_h,\overline{\varphi}-\overline{v}_h]+J(\overline{\varphi})-J(\overline{v}_h)-[\overline{f},\overline{\varphi}-\overline{v}_h]\\
&+\Big[\frac{I-S(h)}{h}(\overline{\varphi}-\overline{v}_h),\overline{\varphi}-\overline{v}_h\Big]\geq\Big[\frac{I-S(h)}{h}(\overline{\varphi}-\overline{v}_h),\overline{\varphi}-\overline{v}_h\Big],
\end{aligned}$$

d'où avec (3.51)

$$\begin{aligned}
&\Big[\frac{I-S(h)}{h}\overline{\varphi},\overline{\varphi}-\overline{v}_h\Big]+[\mathcal{A}\overline{v}_h,\overline{\varphi}-\overline{v}_h]+J(\overline{\varphi})-J(\overline{v}_h)\geq[\overline{f},\overline{\varphi}-\overline{v}_h],\\
&\forall\overline{\varphi}\in\mathcal{K}.
\end{aligned}\tag{3.64}$$

On en déduit de (3.64) et (3.39), en prenant $\overline{\varphi}\in\phi$, et en utilisant les convergences faibles (3.62) et (3.63) que

$$\begin{aligned}
\limsup_{h\to0}[\mathcal{A}\overline{v}_h,\overline{v}_h] &\leq \limsup_{h\to0}\Big(\Big[\frac{I-S(h)}{h}\overline{\varphi},\overline{\varphi}-\overline{v}_h\Big]+[\mathcal{A}\overline{v}_h,\overline{\varphi}]+J(\overline{\varphi})\\
&- J(\overline{v}_h)-[\overline{f},\overline{\varphi}-\overline{v}_h]\Big),
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\limsup_{h\to0}[\mathcal{A}\overline{v}_h,\overline{v}_h] &\leq \limsup_{h\to0}\Big(\Big[\frac{I-S(h)}{h}\overline{\varphi},\overline{\varphi}-\overline{v}_h\Big]\Big)+\limsup_{h\to0}[\mathcal{A}\overline{v}_h,\overline{\varphi}]+J(\overline{\varphi})\\
&- \liminf_{h\to0}J(\overline{v}_h)-\liminf_{h\to0}[\overline{f},\overline{\varphi}-\overline{v}_h]\\
&\leq [\Lambda\overline{\varphi},\overline{\varphi}-\overline{v}]+[\chi,\overline{\varphi}]+J(\overline{\varphi})-\liminf_{h\to0}J(\overline{v}_h)-[\overline{f},\overline{\varphi}-\overline{v}].
\end{aligned}$$

Comme la fonctionnelle J est semi-continue inférieurement et convexe pour la topologie forte, alors, d'après le corollaire III.8 [21] page 38, elle est semi-continue inférieurement pour la topologie faible c-à-d,

$$\liminf_{h\to0}J(\overline{v}_h)\geq J(\overline{v}),\tag{3.65}$$

donc,

$$\limsup_{h\to0}[\mathcal{A}\overline{v}_h,\overline{v}_h]\leq[\Lambda\overline{\varphi},\overline{\varphi}-\overline{v}]+[\chi,\overline{\varphi}]+J(\overline{\varphi})-J(\overline{v})-[\overline{f},\overline{\varphi}-\overline{v}],\tag{3.66}$$

d'où

$$\limsup_{h\to0}[\mathcal{A}\overline{v}_h,\overline{v}_h-\overline{v}]\leq[\Lambda\overline{\varphi},\overline{\varphi}-\overline{v}]+J(\overline{\varphi})-J(\overline{v})+[\chi-\overline{f},\overline{\varphi}-\overline{v}].\tag{3.67}$$

Or, comme $\overline{v} \in \mathcal{K}$, il existe une suite régularisante $(\overline{v}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ qui vérifie (3.46). En posant la suite $(\overline{v}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ à la place $\overline{\varphi}$ dans (3.67), on obtient

$$\limsup_{h\to 0}[\mathcal{A}\overline{v}_h, \overline{v}_h - \overline{v}] \leq [\Lambda\overline{v}_j, \overline{v}_j - \overline{v}] + J(\overline{v}_j) - J(\overline{v}) + [\chi - \overline{f}, \overline{v}_j - \overline{v}] \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Avec (3.46) et la continuité de la fonctionnelle J on a

$$\limsup_{h\to 0}[\mathcal{A}\overline{v}_h, \overline{v}_h - \overline{v}] \leq 0.$$

Comme $\mathcal{A}$ est pseudo-monotone on obtient

$$\liminf_{h\to 0}[\mathcal{A}\overline{v}_h, \overline{v}_h - \overline{\varphi}] \geq [\mathcal{A}\overline{v}, \overline{v} - \overline{\varphi}], \quad \forall \overline{\varphi} \in \mathcal{K}. \tag{3.68}$$

Mais d'après (3.64) on a

$$\begin{aligned}
[\mathcal{A}\overline{v}, \overline{v} - \overline{\varphi}] &\leq \liminf_{h\to 0}[\mathcal{A}\overline{v}_h, \overline{v}_h - \overline{\varphi}] \\
&\leq \liminf_{h\to 0} \Big(\Big[\frac{I - S(h)}{h}\overline{\varphi}, \overline{\varphi} - \overline{v}_h\Big] + J(\overline{\varphi}) \\
&- J(\overline{v}_h) - [\overline{f}, \overline{\varphi} - \overline{v}_h]\Big) \\
&\leq \limsup_{h\to 0} \Big(\Big[\frac{I - S(h)}{h}\overline{\varphi}, \overline{\varphi} - \overline{v}_h\Big] + J(\overline{\varphi}) \\
&- J(\overline{v}_h) - [\overline{f}, \overline{\varphi} - \overline{v}_h]\Big),
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
[\mathcal{A}\overline{v}, \overline{v} - \overline{\varphi}] &\leq \limsup_{h\to 0} \Big[\frac{I - S(h)}{h}\overline{\varphi}, \overline{\varphi} - \overline{v}_h\Big] + J(\overline{\varphi}) \\
&- \liminf_{h\to 0} J(\overline{v}_h) - \liminf_{h\to 0}[\overline{f}, \overline{\varphi} - \overline{v}_h].
\end{aligned}$$

Avec (3.39), (3.65), et la convergence faible (3.62)

$$[\mathcal{A}\overline{v}, \overline{v} - \overline{\varphi}] \leq [\Lambda\overline{\varphi}, \overline{\varphi} - \overline{v}] + J(\overline{\varphi}) - J(\overline{v}) - [\overline{f}, \overline{\varphi} - \overline{v}],$$

d'où

$$[\Lambda\overline{\varphi}, \overline{\varphi} - \overline{v}] + [\mathcal{A}\overline{v}, \overline{\varphi} - \overline{v}] + J(\overline{\varphi}) - J(\overline{v}) \geq [\overline{f}, \overline{\varphi} - \overline{v}], \quad \forall \overline{\varphi} \in \phi,$$

ce qui montre que $\overline{v}$ vérifie (3.38).

□

3.6 Résultat d'existence et d'unicité pour le problème 3.2

Dans cette section on va montrer l'existence et l'unicité d'une solution forte au sens (3.23), (3.30).

3.6.1 Résultat d'existence

Théorème 3.2 *Sous les hypothèses du Théorème* 3.1*, le problème* 3.2 *admet au moins une solution.*

Preuve. On prend $\overline{\varphi} = \overline{v}_h \pm \tilde{\psi}\zeta \in \mathcal{K}$ avec $\tilde{\psi} \in V_{0.div}$ et $\zeta \in \mathcal{D}(0,T)$ dans (3.47) on obtient

$$\Big[\frac{I-S(h)}{h}\overline{v}_h, \pm\tilde{\psi}\zeta\Big] + [\mathcal{A}\overline{v}_h, \pm\tilde{\psi}\zeta] + J(\overline{v}_h \pm \tilde{\psi}\zeta) - J(\overline{v}_h) \geq [\overline{f}, \pm\tilde{\psi}\zeta]. \quad (3.69)$$

Avec la première inégalité on a

$$\Big[\frac{I-S(h)}{h}\overline{v}_h, \tilde{\psi}\zeta\Big] \geq [\overline{f}, \tilde{\psi}\zeta] - [\mathcal{A}\overline{v}_h, \tilde{\psi}\zeta] - J(\overline{v}_h + \tilde{\psi}\zeta) + J(\overline{v}_h).$$

En utilisant (3.49)

$$\Big[\frac{I-S(h)}{h}\overline{v}_h, \tilde{\psi}\zeta\Big] \geq -(\|\overline{f}\|_{\mathcal{K}'} + \|\mathcal{A}\overline{v}_h\|_{\mathcal{K}'} + \gamma\|k\|_{L^2(0,T;L^2(\omega))})\|\tilde{\psi}\zeta\|_{\mathcal{K}}. \quad (3.70)$$

De la deuxième inégalité on a

$$\Big[\frac{I-S(h)}{h}\overline{v}_h, \tilde{\psi}\zeta\Big] \leq [\overline{f}, \tilde{\psi}\zeta] - [\mathcal{A}\overline{v}_h, \tilde{\psi}\zeta] + J(\overline{v}_h - \tilde{\psi}\zeta) - J(\overline{v}_h),$$

et avec (3.49)

$$\Big[\frac{I-S(h)}{h}\overline{v}_h, \tilde{\psi}\zeta\Big] \leq (\|\overline{f}\|_{\mathcal{K}'} + \|\mathcal{A}\overline{v}_h\|_{\mathcal{K}'} + \gamma\|k\|_{L^2(0,T;L^2(\omega))})\|\tilde{\psi}\zeta\|_{\mathcal{K}}. \quad (3.71)$$

D'après (3.70), (3.71) on a

$$\Big|\Big[\frac{I-S(h)}{h}\overline{v}_h, \tilde{\psi}\zeta\Big]\Big| \leq (\|\overline{f}\|_{\mathcal{K}'} + \|\mathcal{A}\overline{v}_h\|_{\mathcal{K}'} + \gamma\|k\|_{L^2(0,T;L^2(\omega))})\|\tilde{\psi}\zeta\|_{\mathcal{K}}.$$

Rappelons que l'opérateur $\mathcal{A}$ est borné et $(\overline{v}_h)_{h>0}$ est bornée dans $\mathcal{K}$, donc

$$\Big|\Big[\frac{I-S(h)}{h}\overline{v}_h, \tilde{\psi}\zeta\Big]\Big| \leq C\|\tilde{\psi}\zeta\|_{\mathcal{K}}, \quad (3.72)$$

où C est indépendant de h.
D'autre part,

$$\Big[\frac{I-S(h)}{h}\overline{v}_h,\tilde{\psi}\zeta\Big]=\int_0^T\int_\Omega\Big(\Big(\frac{I-S(h)}{h}\overline{v}_h(t)\Big)\cdot\tilde{\psi}\Big)\zeta(t)\,dx\,dt$$
$$=\frac{1}{h}\Big(\int_0^T\int_\Omega(\overline{v}_h(t)\cdot\tilde{\psi})\zeta(t)\,dx\,dt-\int_h^T\int_\Omega(\overline{v}_h(t-h)\cdot\tilde{\psi})\zeta(t)\,dx\,dt\Big)$$
$$=\frac{1}{h}\Big(\int_0^T\int_\Omega(\overline{v}_h(t')\cdot\tilde{\psi})\zeta(t')\,dx\,dt'-\int_0^{T-h}\int_\Omega(\overline{v}_h(t')\cdot\tilde{\psi})\zeta(t'+h)\,dx\,dt'\Big)$$
$$=\frac{1}{h}\Big(\int_0^{T-h}\int_\Omega(\overline{v}_h(t')\cdot\tilde{\psi})\big(\zeta(t')-\zeta(t'+h)\big)\,dx\,dt'$$
$$+\int_{T-h}^T\int_\Omega(\overline{v}_h(t')\cdot\tilde{\psi})\zeta(t')\,dx\,dt'\Big).$$

Comme $\zeta\in\mathcal{D}(0,T)$ on a $supp(\zeta)$ compact inclus dans $]0,T[$ c-à-d, il existe $[a,b]\subset]0,T[$ tel que

$$\zeta(t)=0\quad\forall t\notin[a,b].$$

Donc pour tout $h\in]0,T-b[$ on a

$$\zeta(t)=0\quad\forall t\in[T-h,T],\tag{3.73}$$

De (3.73) on obtient

$$\Big[\frac{I-S(h)}{h}\overline{v}_h,\tilde{\psi}\zeta\Big]=\frac{1}{h}\Big(\int_0^{T-h}\int_\Omega(\overline{v}_h(t')\cdot\tilde{\psi})\big(\zeta(t')-\zeta(t'+h)\big)\,dx\,dt'\Big).$$

D'après la formule de Taylor on a

$$\zeta(t'+h)-\zeta(t')=h\zeta'(t')+\frac{h^2}{2}\zeta''(t'+c_{t'}h),\quad 0\le c_{t'}\le 1,$$

d'où

$$\begin{aligned}\Big[\frac{I-S(h)}{h}\overline{v}_h,\tilde{\psi}\zeta\Big]&=-\frac{1}{h}\Big(\int_0^{T-h}\int_\Omega(\overline{v}_h(t')\cdot\tilde{\psi})\big(h\zeta'(t')\\&\quad+\frac{h^2}{2}\zeta''(t'+c_{t'}h)\big)\,dx\,dt'\Big)\\&=-\Big(\int_0^{T-h}\int_\Omega(\overline{v}_h(t')\cdot\tilde{\psi})\zeta'(t')\,dx\,dt'\\&\quad+\frac{h}{2}\int_0^{T-h}\int_\Omega(\overline{v}_h(t')\cdot\tilde{\psi})\zeta''(t'+c_{t'}h)\,dx\,dt'\Big),\end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned}\Big[\frac{I-S(h)}{h}\overline{v}_h,\tilde{\psi}\zeta\Big] &= -\Big(\int_0^T\int_\Omega(\overline{v}_h(t')\cdot\tilde{\psi})\zeta'(t')\,dx\,dt'\\ &\quad-\int_{T-h}^T\int_\Omega(\overline{v}_h(t')\cdot\tilde{\psi})\zeta'(t')\,dx\,dt'\\ &\quad+\frac{h}{2}\int_0^{T-h}\int_\Omega(\overline{v}_h(t')\cdot\tilde{\psi})\zeta''(t'+c_{t'}h)\,dx\,dt'\Big).\end{aligned}$$

En utilisant (3.73), on obtient

$$\begin{aligned}\Big[\frac{I-S(h)}{h}\overline{v}_h,\tilde{\psi}\zeta\Big] &= -\Big(\int_0^T\int_\Omega(\overline{v}_h(t')\cdot\tilde{\psi})\zeta'(t')\,dx\,dt'\\ &+\frac{h}{2}\int_0^{T-h}\int_\Omega(\overline{v}_h(t')\cdot\tilde{\psi})\zeta''(t'+c_{t'}h)\,dx\,dt'\Big).\end{aligned}\tag{3.74}$$

On a

$$\begin{aligned}&\Big|\frac{h}{2}\int_0^{T-h}\int_\Omega(\overline{v}_h(t')\cdot\tilde{\psi})\zeta''(t'+c_{t'}h)\,dx\,dt'\Big|\\ &\le\frac{h}{2}\int_0^T\int_\Omega|\overline{v}_h(t')||\tilde{\psi}||\zeta''(t'+c_{t'}h)|\,dx\,dt'\\ &\le\frac{h}{2}C_0\int_0^T\int_\Omega|\overline{v}_h(t')||\tilde{\psi}|\,dx\,dt',\end{aligned}$$

où $C_0=\|\zeta''\|_{C([0,T])}$.
En utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz en espace et en temps on obtient

$$\Big|\frac{h}{2}\int_0^{T-h}\int_\Omega(\overline{v}_h(t')\cdot\tilde{\psi})\zeta''(t'+ch)\,dx\,dt'\Big|\le\frac{h}{2}C_0\sqrt{T}\|\overline{v}_h\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}\|\tilde{\psi}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}.$$

Comme l'injection de $\mathcal{K}$ dans $L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$ est continue et la suite $(\overline{v}_h)_{h>0}$ est bornée dans $\mathcal{K}$ on a

$$\Big|\frac{h}{2}\int_0^{T-h}\int_\Omega(\overline{v}_h(t')\cdot\tilde{\psi})\zeta''(t'+ch)\,dx\,dt'\Big|\le C_*h,\tag{3.75}$$

où C_* est indépendant de h.
De (3.74)

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega(\overline{v}_h(t')\cdot\tilde{\psi})\zeta'(t')\,dx\,dt' &= -\Big[\frac{I-S(h)}{h}\overline{v}_h,\tilde{\psi}\zeta\Big]\\ -\frac{h}{2}\int_0^{T-h}\int_\Omega(\overline{v}_h(t')\cdot\tilde{\psi})\zeta''(t'+c_{t'}h)\,dx\,dt'.&\end{aligned}$$

Donc,

$$\Big|\int_0^T\int_\Omega(\overline{v}_h(t')\cdot\tilde{\psi})\zeta'(t')\,dx\,dt'\Big| \le \Big|\Big[\frac{I-S(h)}{h}\overline{v}_h,\tilde{\psi}\zeta\Big]\Big|$$
$$+\Big|\frac{h}{2}\int_0^{T-h}\int_\Omega(\overline{v}_h(t')\cdot\tilde{\psi})\zeta''(t'+c_{t'}h)\,dx\,dt'\Big|,$$

d'après (3.72) et (3.75) on a

$$\Big|\int_0^T\int_\Omega(\overline{v}_h(t')\cdot\tilde{\psi})\zeta'(t')\,dx\,dt'\Big| \le C\|\tilde{\psi}\zeta\|_{\mathcal{K}}+C_*h.$$

On passe à la limite quand $h\to 0$, on obtient

$$\Big|\int_0^T\int_\Omega(\overline{v}(t')\cdot\tilde{\psi})\zeta'(t')\,dx\,dt'\Big| \le C\|\tilde{\psi}\zeta\|_{\mathcal{K}}, \tag{3.76}$$

d'où $\overline{v}'$ est dans $\mathcal{K}'$ et

$$\|\overline{v}'\|_{\mathcal{K}'}\le C. \tag{3.77}$$

D'autre part, pour tout $\overline{\varphi}\in\phi$ on a

$$\begin{aligned}&[\overline{v}',\overline{\varphi}-\overline{v}]+[\mathcal{A}\overline{v},\overline{\varphi}-\overline{v}]+J(\overline{\varphi})-J(\overline{v})-[\overline{f},\overline{\varphi}-\overline{v}]\\ &=[\overline{\varphi}',\overline{\varphi}-\overline{v}]+[\mathcal{A}\overline{v},\overline{\varphi}-\overline{v}]+J(\overline{\varphi})-J(\overline{v})-[\overline{f},\overline{\varphi}-\overline{v}]\\ &-\int_0^T<\overline{\varphi}'-\overline{v}',\overline{\varphi}-\overline{v}>_{V'_{0.div},V_{0.div}}\,dt,\end{aligned} \tag{3.78}$$

or

$$\begin{aligned}&-\int_0^T<\overline{\varphi}'-\overline{v}',\overline{\varphi}-\overline{v}>_{V'_{0.div},V_{0.div}}\,dt=-\frac{1}{2}\int_0^T\frac{\partial}{\partial t}\|\overline{\varphi}-\overline{v}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,dt\\ &=-\frac{1}{2}\|\overline{\varphi}(T)-\overline{v}(T)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}+\frac{1}{2}\|\overline{\varphi}(0)-\overline{v}(0)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\\ &\ge-\frac{1}{2}\|\overline{\varphi}(T)-\overline{v}(T)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)},\quad\forall\overline{\varphi}\in\phi,\end{aligned} \tag{3.79}$$

de (3.38) et (3.79),

$$[\overline{v}',\overline{\varphi}-\overline{v}]+[\mathcal{A}\overline{v},\overline{\varphi}-\overline{v}]+J(\overline{\varphi})-J(\overline{v})-[\overline{f},\overline{\varphi}-\overline{v}]\ge-\frac{1}{2}\|\overline{\varphi}(T)-\overline{v}(T)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}.$$

Si $\overline{\varphi}(T)=\overline{v}(T)$ on a bien

$$[\overline{v}',\overline{\varphi}-\overline{v}]+[\mathcal{A}\overline{v},\overline{\varphi}-\overline{v}]+J(\overline{\varphi})-J(\overline{v})\ge[\overline{f},\overline{\varphi}-\overline{v}].$$

Soit $\overline{\varphi} \in \phi$, on modifie $\overline{\varphi}$ avec

$$\overline{\varphi}_\epsilon = \overline{\varphi}\mathcal{X}_\epsilon + \overline{v}(1 - \mathcal{X}_\epsilon),$$

où $\mathcal{X}_\epsilon \in C^\infty([0,T];\mathbb{R})$ tel que

$$\mathcal{X}_\epsilon = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \in [0, T-\epsilon], \\ 0 & \text{si } t \in [T - \frac{\epsilon}{2}, T], \end{cases}$$

et $\mathcal{X}_\epsilon(t) \in [0,1]$ si $t \in [T-\epsilon, T-\frac{\epsilon}{2}]$.
On a $\overline{\varphi}_\epsilon \in \mathcal{K}$, $\overline{\varphi}'_\epsilon \in \mathcal{K}'$ (car $\overline{\varphi}'_\epsilon = \overline{\varphi}'\mathcal{X}_\epsilon + \overline{\varphi}\mathcal{X}'_\epsilon + \overline{v}'(1-\mathcal{X}_\epsilon) - \overline{v}\mathcal{X}'_\epsilon$), et $\overline{\varphi}_\epsilon(0) = \overline{\varphi}(0) = 0$ d'où $\overline{\varphi}_\epsilon \in \phi$.
Comme $\overline{\varphi}_\epsilon(T) = \overline{v}(T)$, on a

$$[\overline{v}', \overline{\varphi}_\epsilon - \overline{v}] + [\mathcal{A}\overline{v}, \overline{\varphi}_\epsilon - \overline{v}] + J(\overline{\varphi}_\epsilon) - J(\overline{v}) \geq [\overline{f}, \overline{\varphi}_\epsilon - \overline{v}], \quad \forall \epsilon \in \left(0, \frac{T}{2}\right), \tag{3.80}$$

d'autre part, on a

$$\begin{aligned} \|\overline{\varphi}_\epsilon - \overline{\varphi}\|^2_{\mathcal{K}} &= \int_0^T \|\overline{\varphi}_\epsilon - \overline{\varphi}\|^2_{V_{0.div}}\, dt \\ &= \int_0^T (1-\mathcal{X}_\epsilon)^2 \|\overline{v} - \overline{\varphi}\|^2_{V_{0.div}}\, dt. \end{aligned}$$

La fonction $F_\epsilon = (1-\mathcal{X}_\epsilon)^2\|\overline{v} - \overline{\varphi}\|^2_{V_{0.div}} \in L^1(0,T)$, et vérifie

$$|F_\epsilon(t)| \leq \|\overline{v} - \overline{\varphi}\|^2_{V_{0.div}}(t), \quad \forall t \in [0,T]$$

(car $|1 - \mathcal{X}_\epsilon| \leq 1$) où $\|\overline{v} - \overline{\varphi}\|^2_{V_{0.div}} \in L^1(0,T)$, de plus pour presque tout $t \in [0,T]$ on a $F_\epsilon \to 0$ lorsque $\epsilon \to 0$. Avec le théorème de la convergence dominée, on a $\overline{\varphi}_\epsilon \to \overline{\varphi}$ dans $\mathcal{K}$ fort. On peut donc passer à la limite dans (3.80) on obtient

$$[\overline{v}', \overline{\varphi} - \overline{v}] + [\mathcal{A}\overline{v}, \overline{\varphi} - \overline{v}] + J(\overline{\varphi}) - J(\overline{v}) \geq [\overline{f}, \overline{\varphi} - \overline{v}], \quad \forall \overline{\varphi} \in \phi.$$

D'après (3.46) ϕ est dense dans $\mathcal{K}$ donc on a

$$[\overline{v}', \overline{\varphi} - \overline{v}] + [\mathcal{A}\overline{v}, \overline{\varphi} - \overline{v}] + J(\overline{\varphi}) - J(\overline{v}) \geq [\overline{f}, \overline{\varphi} - \overline{v}], \quad \forall \overline{\varphi} \in \mathcal{K}. \tag{3.81}$$

Donc il reste seulement à montrer que $\overline{v}(0) = 0$, on sait déjà que $\overline{v} \in \mathcal{K}$, $\overline{v}' \in \mathcal{K}'$ donc $\overline{v} \in C([0,T];H) \subset C([0,T];\mathbf{L}^2(\Omega))$.

On choisit $\overline{\varphi} = \overline{v}_h \pm \tilde{\psi}\zeta \in \mathcal{K}$ avec $\tilde{\psi} \in H^1_{0.div}$ et $\zeta \in L^2(0,T)$ dans (3.47) et $J(\overline{v}_h \pm \tilde{\psi}\zeta) = J(\overline{v}_h)$, on obtient

$$\Big[\frac{I - S(h)}{h}\overline{v}_h, \tilde{\psi}\zeta\Big] + [\mathcal{A}\overline{v}_h, \tilde{\psi}\zeta] = [\overline{f}, \tilde{\psi}\zeta]. \tag{3.82}$$

Pour $\zeta \in C^\infty([0,T])$, avec $\zeta = 0$ sur $[b,T]$ tel que $0 < b < T$ on utilise (3.74) on obtient

$$-\int_0^T \int_\Omega (\overline{v}_h(t') \cdot \tilde{\psi})\zeta'(t')\, dx\, dt' - \frac{h}{2}\int_0^{T-h} \int_\Omega (\overline{v}_h(t') \cdot \tilde{\psi})\zeta''(t' + c_{t'}h)\, dx\, dt'$$
$$+[\mathcal{A}\overline{v}_h, \tilde{\psi}\zeta] = [\overline{f}, \tilde{\psi}\zeta],$$

on passe à la limite quand $h \to 0$ et en utilisant (3.75), on trouve

$$-\int_0^T \int_\Omega (\overline{v}(t') \cdot \tilde{\psi})\zeta'(t')\, dx\, dt' + [\chi, \tilde{\psi}\zeta] = [\overline{f}, \tilde{\psi}\zeta]. \tag{3.83}$$

On utilise (3.81) avec $\overline{\varphi} = \overline{v} \pm \tilde{\psi}\zeta \in \mathcal{K}$ où $\tilde{\psi} \in H^1_{0.div}$ et $\zeta \in C^\infty([0,T])$, avec $\zeta = 0$ sur $[b,T]$ tel que $0 < b < T$ on obtient

$$[\overline{v}', \tilde{\psi}\zeta] + [\mathcal{A}\overline{v}, \tilde{\psi}\zeta] = [\overline{f}, \tilde{\psi}\zeta], \tag{3.84}$$

de (3.83), (3.84) on a

$$[\chi, \tilde{\psi}\zeta] = [\mathcal{A}\overline{v}, \tilde{\psi}\zeta] \quad \forall \tilde{\psi} \in H^1_{0.div}, \quad \forall \zeta \in \mathcal{D}(0,T),$$

puisque $\chi - \mathcal{A}\overline{v} \in \mathcal{K}' = L^2(0,T; V'_{0.div}) \subset L^2(0,T; (H^1_{0.div})')$ (car $H^1_{0.div} \subset V_{0.div}$), on a

$$[\chi - \mathcal{A}\overline{v}, \tilde{\psi}\zeta] = 0 \quad \forall \tilde{\psi} \in H^1_{0.div}, \quad \forall \zeta \in \mathcal{D}(0,T), \tag{3.85}$$

on a $\mathcal{D}(0,T) \otimes H^1_{0.div}$ est dense dans $L^2(0,T; H^1_{0.div})$, d'où

$$\chi = \mathcal{A}\overline{v} \quad \text{dans} \quad L^2(0,T; (H^1_{0.div})').$$

De (3.83), on tire

$$-\int_0^T \int_\Omega (\overline{v}(t') \cdot \tilde{\psi})\zeta'(t')\, dx\, dt' + [\mathcal{A}\overline{v}, \tilde{\psi}\zeta] = [\overline{f}, \tilde{\psi}\zeta], \quad \forall \tilde{\psi} \in H^1_{0.div},$$
$$\forall \zeta \in C^\infty([0,T]), \quad \zeta = 0 \quad \text{sur} \quad [b,T] \quad \text{tel que} \quad 0 < b < T,$$

et avec (3.84) on obtient

$$-\int_0^T \int_\Omega (\overline{v}(t') \cdot \tilde{\psi})\zeta'(t')\, dx\, dt' = [\overline{v}', \tilde{\psi}\zeta], \quad \forall \tilde{\psi} \in H^1_{0.div}, \quad \forall \zeta \in C^\infty([0,T]),$$
$$\zeta = 0 \quad \text{sur} \quad [b,T] \quad \text{tel que} \quad 0 < b < T.$$

Par une intégration par parties on trouve

$$\int_\Omega (\overline{v}(T) \cdot \tilde{\psi})\zeta(T)\, dx - \int_\Omega (\overline{v}(0) \cdot \tilde{\psi})\zeta(0)\, dx = 0,$$

comme $\zeta(T) = 0$ on a

$$\int_\Omega \overline{v}(0) \cdot \tilde{\psi}\, dx = 0, \quad \forall \tilde{\psi} \in H^1_{0.div}. \tag{3.86}$$

Comme $H^1_{0.div}$ est dense dans H (cf corollaire 2.5 et le théorème 2.8 chap I [46]) alors pour tout $\overline{v}(0) \in H$, il existe $(\tilde{\psi}_j)_{j\in\mathbb{N}} \in H^1_{0.div}$ telle que

$$\lim_{j\to+\infty} \tilde{\psi}_j = \overline{v}(0) \quad \text{dans} \quad H,$$

en remplaçant $\tilde{\psi}$ par $\tilde{\psi}_j$ dans (3.86) on obtient

$$\int_\Omega \overline{v}(0) \cdot \tilde{\psi}_j\, dx = 0.$$

Par le passage à la limite quand $j \to +\infty$ on trouve

$$\int_\Omega |\overline{v}(0)|^2\, dx = \|\overline{v}(0)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = 0,$$

d'où

$$\overline{v}(0) = 0.$$

Ce qui montre que le problème 3.2 admet au moins une solution.

□

3.6.2 Résultat d'unicité

Théorème 3.3 *Sous les hypothèses du Théorème* 3.1*, la solution du problème* 3.2 *est unique.*

Preuve. On suppose que le problème 3.2 admet deux solutions $\overline{v}_1$ et $\overline{v}_2$. Donc, elles vérifient les deux inéquations suivantes

$$[\overline{v}_1', \overline{\varphi} - \overline{v}_1] + [\mathcal{A}\overline{v}_1, \overline{\varphi} - \overline{v}_1] + J(\overline{\varphi}) - J(\overline{v}_1) \geq [\overline{f}, \overline{\varphi} - \overline{v}_1] \quad \forall \overline{\varphi} \in \mathcal{K}, \quad (3.87)$$

$$[\overline{v}_2', \overline{\varphi} - \overline{v}_2] + [\mathcal{A}\overline{v}_2, \overline{\varphi} - \overline{v}_2] + J(\overline{\varphi}) - J(\overline{v}_2) \geq [\overline{f}, \overline{\varphi} - \overline{v}_2] \quad \forall \overline{\varphi} \in \mathcal{K}. \quad (3.88)$$

Fixons $t \in]0, T]$, prenons $\overline{\varphi} = \overline{v}_2 1_{[0,t]} + \overline{v}_1 1_{]t,T]}$ dans la première inéquation et $\overline{\varphi} = \overline{v}_1 1_{[0,t]} + \overline{v}_2 1_{]t,T]}$ dans la deuxième avec

$$1_{[0,t]} = \begin{cases} 1 & \text{sur } [0,t], \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

puis en additionnant les deux inéquations, on aura :

$$[\overline{v}_1' - \overline{v}_2', (\overline{v}_2 - \overline{v}_1)1_{[0,t]}] + [\mathcal{A}\overline{v}_1 - \mathcal{A}\overline{v}_2, (\overline{v}_2 - \overline{v}_1)1_{[0,t]}] \geq 0,$$

c-à-d

$$[\overline{v}_1' - \overline{v}_2', (\overline{v}_1 - \overline{v}_2)1_{[0,t]}] + [\mathcal{A}\overline{v}_1 - \mathcal{A}\overline{v}_2, (\overline{v}_1 - \overline{v}_2)1_{[0,t]}] \leq 0.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} [\mathcal{A}\overline{v}_1 - \mathcal{A}\overline{v}_2, (\overline{v}_1 - \overline{v}_2)1_{[0,t]}] &= \int_0^T \Big(a(\theta; \overline{v}_1, (\overline{v}_1 - \overline{v}_2)1_{[0,t]}) \\ &- a(\theta; \overline{v}_2, (\overline{v}_1 - \overline{v}_2)1_{[0,t]} \Big) d\tilde{t} \\ &= \int_0^t (a(\theta; \overline{v}_1, (\overline{v}_1 - \overline{v}_2)) - a(\theta; \overline{v}_2, (\overline{v}_1 - \overline{v}_2)) \, d\tilde{t}. \end{aligned}$$

En utilisant le même raisonnement que dans l'étude de la monotonie de $\mathcal{A}$, on a aussi

$$\begin{aligned} &\int_0^t (a(\theta; \overline{v}_1, (\overline{v}_1 - \overline{v}_2)) - a(\theta; \overline{v}_2, (\overline{v}_1 - \overline{v}_2)) \, d\tilde{t} \\ &\geq \int_0^t \int_\Omega \Big(\mu(\theta, |D(\overline{v}_1 + \upsilon_0 \xi)|) - \mu(\theta, |D(\overline{v}_2 + \upsilon_0 \xi)|) \Big) \\ &\times \Big(|D(\overline{v}_1 + \upsilon_0 \xi)| - |D(\overline{v}_2 + \upsilon_0 \xi)| \Big) \Big(|D(\overline{v}_1 + \upsilon_0 \xi)| + |D(\overline{v}_2 + \upsilon_0 \xi)| \Big) \, dx \, d\tilde{t}. \end{aligned}$$

Avec (3.3) on a

$$\int_0^t (a(\theta; \overline{v}_1, (\overline{v}_1 - \overline{v}_2)) - a(\theta; \overline{v}_2, (\overline{v}_1 - \overline{v}_2)) \, d\tilde{t} \geq 0,$$

d'où

$$[\mathcal{A}\overline{v}_1 - \mathcal{A}\overline{v}_2, (\overline{v}_1 - \overline{v}_2)1_{[0,t]}] \geq 0.$$

Donc,

$$\int_0^t < \overline{v}_1' - \overline{v}_2', \overline{v}_1 - \overline{v}_2 >_{V_{0.div}', V_{0.div}} \, d\tilde{t} \leq 0.$$

D'autre part,

$$\int_0^t < \overline{v}_1' - \overline{v}_2', \overline{v}_1 - \overline{v}_2 >_{V_{0.div}', V_{0.div}} \, d\tilde{t} = \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\|\overline{v}_1 - \overline{v}_2\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\, d\tilde{t}$$
$$= \frac{1}{2}\Big(\|\overline{v}_1(t) - \overline{v}_2(t)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - \|\overline{v}_1(0) - \overline{v}_2(0)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\Big) \leq 0,$$

d'où

$$\|\overline{v}_1(t) - \overline{v}_2(t)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq \|\overline{v}_1(0) - \overline{v}_2(0)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}.$$

Or $\|\overline{v}_1(0) - \overline{v}_2(0)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = 0$, ce qui montre l'unicité de la solution du problème 3.2. □

3.7 Recherche de la pression

Dans cette section on étudie l'existence de la pression solution du problème 3.1.

Lemme 3.3 ([57], [46]) *Il existe une application $P \in \mathcal{L}(L^2_0(\Omega), \boldsymbol{H}^1_0(\Omega))$ vérifiant*

$$div(P(\boldsymbol{g})) = \boldsymbol{g}, \quad \forall \boldsymbol{g} \in L^2_0(\Omega).$$

Proposition 3.3 *On suppose que les hypothèses* (3.2), (3.3) *sont satisfaites, alors pour $f \in L^2(0,T;V_0')$, $k \in L^2(0,T;L^2_+(\omega))$, $\theta \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $s \in L^2(0,T;\boldsymbol{L}^2(\omega))$, $\xi \in H^1(0,T)$ vérifiant* (3.10) *et $\upsilon_0 \in \boldsymbol{H}^1(\Omega)$ vérifiant* (3.14)*, il existe une distribution π sur $\Omega\times]0,T[$ vérifiant pour tout $\tilde{\vartheta} \in \boldsymbol{H}^1_0(\Omega)$*

$$< \overline{f}, \tilde{\vartheta} >_{V_0', V_0} - \frac{\partial}{\partial t}(\overline{v}, \tilde{\vartheta})_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} - a(\theta; \overline{v}, \tilde{\vartheta}) = -(\pi, div(\tilde{\vartheta})), \tag{3.89}$$

et de plus

$$\int_\Omega \pi dx = 0. \tag{3.90}$$

Preuve. Soit $\overline{v}$ l'unique solution du problème 3.2. En prenant $\overline{\varphi} = \overline{v} \pm \vartheta$ pour ϑ variant dans $L^2(0,T;H^1_{0.div})$ dans l'inéquation variationnelle (3.30), on obtient l'équation variationelle suivante,

$$\begin{aligned} &\int_0^T < \overline{v}', \vartheta >_{V'_{0.div},V_{0.div}} \, dt + \int_0^T a(\theta;\overline{v},\vartheta)\, dt \\ &= \int_0^T < \overline{f}, \vartheta >_{V'_{0.div},V_{0.div}} \, dt. \end{aligned} \tag{3.91}$$

Soit $\tilde{\vartheta} \in H^1_{0.div}$ indépendante du temps, pour tout $t \in [0,T]$ on définit

$$\vartheta = \begin{cases} \tilde{\vartheta} & \text{sur} \quad [0,t], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc, (3.91) devient

$$\int_0^t < \overline{v}', \tilde{\vartheta} >_{V'_{0.div},V_{0.div}} \, d\mathbf{s} + \int_0^t a(\theta;\overline{v},\tilde{\vartheta})\, d\mathbf{s} = \int_0^t < \overline{f}, \tilde{\vartheta} >_{V'_{0.div},V_{0.div}} \, d\mathbf{s},$$

c-à-d,

$$(\overline{v}(t),\tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \int_0^t a(\theta;\overline{v},\tilde{\vartheta})\, d\mathbf{s} =< \int_0^t \overline{f}\, d\mathbf{s}, \tilde{\vartheta} >_{V'_{0.div},V_{0.div}} .$$

Considérons la forme linéaire $\tilde{F}(t)$ définie sur V_0 par

$$\tilde{F}(t)(\tilde{\vartheta}) =< \int_0^t \overline{f}\, d\mathbf{s}, \tilde{\vartheta} >_{V'_0,V_0} -(\overline{v}(t),\tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - \int_0^t a(\theta;\overline{v},\tilde{\vartheta})\, d\mathbf{s} \quad \forall \tilde{\vartheta} \in V_0.$$

De (3.32) on a

$$\Big| \int_0^t a(\theta;\overline{v},\tilde{\vartheta})\, d\mathbf{s} \Big| \;\leq\; 2\mu_1 \big(\|\overline{v}\|_{L^2(0,T;V_0)} + c\sqrt{t}\|v_0\|_{1.2} \big) \|\vartheta\|_{L^2(0,T;V_0)}.$$

Comme

$$\|\vartheta\|_{L^2(0,T;V_0)} = \sqrt{t}\|\tilde{\vartheta}\|_{1.2},$$

on obtient

$$\Big| \int_0^t a(\theta;\overline{v},\tilde{\vartheta})\, d\mathbf{s} \Big| \;\leq\; 2\mu_1 \big(\sqrt{t}\|\overline{v}\|_{L^2(0,T;V_0)} + ct\|v_0\|_{1.2} \big) \|\tilde{\vartheta}\|_{1.2}. \tag{3.92}$$

Montrons que $\tilde{F}(t)$ est continue sur V_0. Pour tout $\tilde{\vartheta} \in V_0$ on a

$$|\tilde{F}(t)(\tilde{\vartheta})| \leq \Big| < \int_0^t \overline{f}\, d\mathbf{s}, \tilde{\vartheta} >_{V'_0,V_0} \Big| + |(\overline{v}(t),\tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}| + \Big| \int_0^t a(\theta;\overline{v},\tilde{\vartheta})\, d\mathbf{s} \Big|,$$

de (3.92), en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz en espace on trouve

$$\begin{aligned} |\tilde{F}(t)(\tilde{\vartheta})| &\leq \Big\| \int_0^t \overline{f}\, d\mathbf{s} \Big\|_{V_0'} \|\tilde{\vartheta}\|_{1.2} + \|\overline{\upsilon}(t)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|\tilde{\vartheta}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ &+ 2\mu_1 \big(\sqrt{t}\|\overline{\upsilon}\|_{L^2(0,T;V_0)} + ct\|\upsilon_0\|_{1.2}\big) \|\tilde{\vartheta}\|_{1.2}. \end{aligned}$$

D'après l'injection continue de V_0 dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ on obtient

$$|\tilde{F}(t)(\tilde{\vartheta})| \leq C\|\tilde{\vartheta}\|_{1.2},$$

ce qui montre que $\tilde{F}(t)$ est continue sur V_0. Remarquons que

$$\tilde{F}(t)(\tilde{\vartheta}) = 0 \quad \forall \tilde{\vartheta} \in H^1_{0.div}.$$

En utilisant la propositions I.1.1 et la proposition I.1.2 (voir [78] page 14), on obtient pour chaque $t \in [0,T]$, l'existence et l'unicité (à une constante près) d'une fonction $\tilde{\pi}(t) \in L^2(\Omega)$ telle que

$$\tilde{F}(t) = \nabla \tilde{\pi}(t). \tag{3.93}$$

D'après la remarque I.1.4 (voir [78] page 15), l'opérateur gradient est un isomorphisme (linéaire, bijective et bicontinue) de $L^2_0(\Omega)$ dans $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)$.
De (3.93), on conclut que $\nabla\tilde{\pi} \in C([0,T];\mathbf{H}^{-1}(\Omega))$, et

$$\tilde{\pi} \in C([0,T];L^2_0(\Omega)).$$

Donc

$$\tilde{F}(t)(\tilde{\vartheta}) =< \nabla\tilde{\pi}(t), \tilde{\vartheta} >_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega),\mathbf{H}^1_0(\Omega)} \quad \forall \tilde{\vartheta} \in \mathbf{H}^1_0(\Omega).$$

De plus

$$\tilde{F}(t)(\tilde{\vartheta}) =< \nabla\tilde{\pi}(t), \tilde{\vartheta} >_{\mathbf{D}'(\Omega),\mathbf{D}(\Omega)} \quad \forall \tilde{\vartheta} \in \mathbf{D}(\Omega)) = (\mathcal{D}(\Omega))^3. \tag{3.94}$$

Pour tout $\tilde{\vartheta} \in \mathbf{D}(\Omega) = (\mathcal{D}(\Omega))^3$, en utilisant la formule de Green dans (3.94) on obtient

$$< \int_0^t \overline{f}\, d\mathbf{s}, \tilde{\vartheta} >_{V_0',V_0} - (\overline{\upsilon}(t), \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - \int_0^t a(\theta; \overline{\upsilon}, \tilde{\vartheta})\, d\mathbf{s} = -(\tilde{\pi}(t), div(\tilde{\vartheta})).$$

Par la densité de $\mathbf{D}(\Omega)$ dans $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ on a aussi pour tout $\tilde{\vartheta} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$

$$< \int_0^t \overline{f}\, d\mathbf{s}, \tilde{\vartheta} >_{V_0',V_0} -(\overline{v}(t), \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - \int_0^t a(\theta; \overline{v}, \tilde{\vartheta})\, d\mathbf{s} = -(\tilde{\pi}(t), div(\tilde{\vartheta})).$$

En dérivant l'équation ci-dessus par rapport à t au sens des distributions, et en posant

$$\pi = \frac{\partial \tilde{\pi}}{\partial t}, \tag{3.95}$$

on obtient (3.89).
Avec (3.95) on a

$$\int_\Omega \pi dx = \int_\Omega \frac{\partial \tilde{\pi}}{\partial t}\, dx,$$

comme $\tilde{\pi} \in C([0,T]; L_0^2(\Omega))$ on a (3.90). □

Lemme 3.4 *On a* $\pi \in H^{-1}(0,T; L_0^2(\Omega))$.

Preuve. Multiplions (3.89) par $\xi^* \in \mathcal{D}(0,T)$ et intégrons entre 0 et T on obtient

$$\begin{aligned} &\int_0^T \frac{\partial}{\partial t}(\overline{v}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \xi^*\, dt + \int_0^T a(\theta; \overline{v}, \tilde{\vartheta}\xi^*)\, dt - \int_0^T (\pi, div(\tilde{\vartheta}))\xi^*\, dt \\ &= \int_0^T < \overline{f}, \tilde{\vartheta} >_{V_0',V_0} \xi^*\, dt. \end{aligned} \tag{3.96}$$

Considérons $\varpi \in L_0^2(\Omega)$ et

$$\tilde{\vartheta} = P(\varpi),$$

où P est l'opérateur linéaire continu de $L_0^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$ défini dans le lemme 3.3. On obtient que

$$div(\tilde{\vartheta}) = \varpi.$$

En prenant $\tilde{\vartheta}\xi^* = \eta$ dans (3.96), on obtient

$$\begin{aligned} &\int_0^T (\pi, \varpi)\xi^*\, dt = \int_0^T \frac{\partial}{\partial t}(\overline{v}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \xi^*\, dt + \int_0^T a(\theta; \overline{v}, \eta)\, dt \\ &- \int_0^T < \overline{f}, \eta >_{V_0',V_0}\, dt. \end{aligned} \tag{3.97}$$

Pour tout $\xi^* \in \mathcal{D}(0,T)$ on a

$$\int_0^T \frac{\partial}{\partial t}(\overline{v},\tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\xi^*\,dt = -\int_0^T (\overline{v},\tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}(\xi^*)'\,dt,$$

d'où

$$\int_0^T \frac{\partial}{\partial t}(\overline{v},\eta)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,dt = -\int_0^T (\overline{v},\eta')_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,dt. \tag{3.98}$$

Avec (3.32) on a

$$\begin{aligned}\Big|\int_0^T a(\theta;\overline{v},\eta)\,dt\Big| &\le 2\mu_1(\sqrt{T}\|\overline{v}\|_{L^2(0,T;V_0)} \\ &+Tc\|\upsilon_0\|_{1.2})\|\eta\|_{L^\infty(0,T;V_0)}.\end{aligned} \tag{3.99}$$

De (3.97) et en utilisant (3.98), (3.99) on obtient

$$\begin{aligned}\Big|\int_0^T (\pi,\varpi)\xi^*\,dt\Big| &\le \|\overline{v}\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}\|\eta'\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))} \\ &+ 2\mu_1(\sqrt{T}\|\overline{v}\|_{L^2(0,T;V_0)} + Tc\|\upsilon_0\|_{1.2})\|\eta\|_{L^\infty(0,T;V_0)} \\ &+ \sqrt{T}\|\overline{f}\|_{L^2(0,T;V_0')}\|\eta\|_{L^\infty(0,T;V_0)},\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\Big|\int_0^T (\pi,\varpi)\xi^*\,dt\Big| &\le \|\overline{v}\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}\|\eta'\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))} \\ &+ 2\mu_1(\sqrt{T}\|\overline{v}\|_{L^2(0,T;V_0)} + Tc\|\upsilon_0\|_{1.2})\|\eta\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{H}_0^1(\Omega))} \\ &+ \sqrt{T}\|\overline{f}\|_{L^2(0,T;V_0')}\|\eta\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{H}_0^1(\Omega))}.\end{aligned}$$

En utilisant la continuité de l'application P et l'injection continue de $H^1(0,T)$ dans $L^\infty(0,T)$ (voir [21] page 129) on obtient

$$\|\eta\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{H}_0^1(\Omega))} = \|\xi^*\|_{L^\infty(0,T)}\|P\varpi\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)} \le C_7\|\varpi\xi^*\|_{H^1(0,T;L^2(\Omega))}. \tag{3.100}$$

Donc, pour tout $\varpi \in L_0^2(\Omega)$, $\xi^* \in \mathcal{D}(0,T)$ on a

$$\Big|\int_0^T (\pi,\varpi)\xi^*\,dt\Big| \le C_8\|\varpi\xi^*\|_{H^1(0,T;L^2(\Omega))}. \tag{3.101}$$

D'autre part, pour tout $\varpi^* \in L^2(\Omega)$, on peut appliquer (3.101) en prenant

$$\varpi = \varpi^* - \frac{1}{mes\Omega}\int_\Omega \varpi^*\,dx,$$

car on a $\varpi \in L^2_0(\Omega)$.
D'autre part, en utilisant (3.90) on obtient

$$\begin{aligned}
&\Big| \int_0^T (\pi, (\varpi^* - \frac{1}{mes\Omega} \int_\Omega \varpi^* \, dx))\xi^* \, dt \Big| \\
&= \Big| \int_0^T (\pi, \varpi^*)\xi^* \, dt - \frac{1}{mes\Omega} \int_0^T \Big(\int_\Omega \pi \, dx \Big) \Big(\int_\Omega \varpi^* \, dx \Big) \xi^* \, dt \Big| \\
&= \Big| \int_0^T (\pi, \varpi^*)\xi^* \, dt \Big|.
\end{aligned}$$

Remarquons

$$\|\varpi\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\varpi^*\|_{L^2(\Omega)},$$

donc, pour tout $\varpi^* \in L^2(\Omega)$, $\xi^* \in \mathcal{D}(0,T)$ on obtient

$$\Big| \int_0^T (\pi, \varpi)\xi^* \, dt \Big| = \Big| \int_0^T (\pi, \varpi^*)\xi^* \, dt \Big| \leq C_8 \|\varpi^* \xi^*\|_{H^1(0,T;L^2(\Omega))}.$$

Alors, de la densité de $\mathcal{D}(0,T) \otimes L^2(\Omega)$ dans $H^1_0(0,T;L^2(\Omega))$ et de (3.90) on conclut que $\pi \in H^{-1}(0,T;L^2_0(\Omega))$. De plus $\nabla\pi \in H^{-1}(0,T;E'(\Omega))$.

□

Théorème 3.4 *On suppose que les hypothèses* (3.2), (3.3) *sont satisfaites, alors pour* $f \in L^2(0,T;\boldsymbol{L}^2(\Omega))$, $k \in L^2(0,T;L^2_+(\omega))$, $\theta \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $s \in L^2(0,T;\boldsymbol{L}^2(\omega))$, $\xi \in H^1(0,T)$ *vérifiant* (3.10) *et* $\upsilon_0 \in \boldsymbol{H}^1(\Omega)$ *vérifiant* (3.14)*, il existe* $\overline{\upsilon} \in C([0,T];\mathbf{L}^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;V_{0.div})$ *avec* $\overline{\upsilon}' \in L^2(0,T;V'_{0.div})$ *et* $\pi \in H^{-1}(0,T;L^2_0(\Omega))$ *solution du problème* 3.1.

Preuve. De la proposition 3.3 on a pour tout $\tilde{\vartheta} \in \mathbf{D}(\Omega)$

$$< \overline{f}, \tilde{\vartheta} >_{V'_0,V_0} - \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\upsilon}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - a(\theta; \overline{\upsilon}, \tilde{\vartheta}) =< \nabla\pi, \tilde{\vartheta} >_{\mathbf{D}'(\Omega),\mathbf{D}(\Omega)} . \quad (3.102)$$

Pour $\overline{f} \in L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$ et comme $V_0 \subset \mathbf{L}^2(\Omega) \subset V'_0$ tel que l'injection de V_0 dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ est continue et dense, d'après [78] page 248, on a

$$< \overline{f}, \tilde{\vartheta} >_{V'_0,V_0} = (\overline{f}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \quad \forall \overline{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \forall \tilde{\vartheta} \in V_0,$$

donc (3.102) devient

$$(\overline{f}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\upsilon}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - a(\theta; \overline{\upsilon}, \tilde{\vartheta}) =< \nabla\pi, \tilde{\vartheta} >_{\mathbf{D}'(\Omega),\mathbf{D}(\Omega)} . \quad (3.103)$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} a(\theta;\overline{\upsilon},\tilde{\vartheta}) &= \int_\Omega 2\mu(\theta,|D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)|)d_{ij}(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)d_{ij}(\tilde{\vartheta})dx \\ &= \int_\Omega 2\mu(\theta,|D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)|)d_{ij}(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)\partial_j\tilde{\vartheta}_i dx. \end{aligned}$$

Pour tout $\tilde{\vartheta}\in\mathbf{D}(\Omega)$, en utilisant la formule de Green on obtient

$$a(\theta;\overline{\upsilon},\tilde{\vartheta}) = - < div(2\mu(\theta,|D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)|)D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)),\tilde{\vartheta} >_{\mathbf{D}'(\Omega),\mathbf{D}(\Omega)} .$$

En remplaçant dans (3.103) on obtient pour tout $\tilde{\vartheta}\in\mathbf{D}(\Omega)$

$$(\overline{f},\tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\upsilon},\tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = - < div(\tilde{\sigma}),\tilde{\vartheta} >_{\mathbf{D}'(\Omega),\mathbf{D}(\Omega)} . \tag{3.104}$$

Montrons que $div(\tilde{\sigma})\in H^{-1}(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$. En effet, multiplions (3.104) par $\hat{\chi}\in\mathcal{D}(0,T)$ et intégrons de 0 à T on obtient

$$\begin{aligned} &\int_0^T (\overline{f},\tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\hat{\chi}\,dt - \int_0^T \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\upsilon},\tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\hat{\chi}\,dt \\ &= -\int_0^T < div(\tilde{\sigma}),\tilde{\vartheta} >_{\mathbf{D}'(\Omega),\mathbf{D}(\Omega)} \hat{\chi}\,dt, \quad \forall\tilde{\vartheta}\in\mathbf{D}(\Omega). \end{aligned} \tag{3.105}$$

On a

$$\begin{aligned} &\Big|\int_0^T < div(\tilde{\sigma}),\tilde{\vartheta} >_{\mathbf{D}'(\Omega),\mathbf{D}(\Omega)} \hat{\chi}\,dt\Big| = \Big|\int_0^T (\overline{f},\tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\hat{\chi}\,dt \\ &-\int_0^T \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\upsilon},\tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\hat{\chi}\,dt\Big| \le \Big|\int_0^T (\overline{f},\tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\hat{\chi}\,dt\Big| + \Big|\int_0^T \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\upsilon},\tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\hat{\chi}\,dt\Big|. \end{aligned} \tag{3.106}$$

Pour $\overline{f}\in L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$, en utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz en espace et en temps on obtient

$$\Big|\int_0^T (\overline{f},\tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\hat{\chi}\,dt\Big| \le \|\overline{f}\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}\|\tilde{\vartheta}\hat{\chi}\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))},$$

d'où

$$\Big|\int_0^T (\overline{f},\tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\hat{\chi}\,dt\Big| \le \|\overline{f}\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}\|\tilde{\vartheta}\hat{\chi}\|_{H^1(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}. \tag{3.107}$$

D'autre part, on a

$$\Big|\int_0^T \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\upsilon},\tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\hat{\chi}\,dt\Big| = \Big|-\int_0^T (\overline{\upsilon},\tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\hat{\chi}'\,dt\Big|,$$

en utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz en espace et en temps on obtient

$$\Big| \int_0^T \frac{\partial}{\partial t}(\overline{v}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \hat{\chi}\, dt \Big| \leq \|\overline{v}\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))} \|\tilde{\vartheta}\hat{\chi}'\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))},$$

d'où

$$\Big| \int_0^T \frac{\partial}{\partial t}(\overline{v}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \hat{\chi}\, dt \Big| \leq \|\overline{v}\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))} \|\tilde{\vartheta}\hat{\chi}\|_{H^1(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}. \tag{3.108}$$

En remplaçant (3.107), (3.108) dans (3.106) on obtient

$$\begin{aligned} &\Big| \int_0^T < div(\tilde{\sigma}), \tilde{\vartheta} >_{\mathbf{D}'(\Omega),\mathbf{D}(\Omega)} \hat{\chi}\, dt \Big| \\ &\leq (\|\overline{f}\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))} + \|\overline{v}\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}) \|\tilde{\vartheta}\hat{\chi}\|_{H^1(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}. \end{aligned}$$

Alors, de la densité de $\mathcal{D}(0,T) \otimes \mathbf{D}(\Omega)$ dans $H_0^1(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$ pour la topologie de $H^1(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$ on obtient $div(\tilde{\sigma}) \in H^{-1}(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$. Donc $\tilde{\sigma} \in H^{-1}(0,T;\mathcal{Y})$. Ainsi (3.105) devient

$$\begin{aligned} &\int_0^T (\overline{f}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \hat{\chi}\, dt - \int_0^T \frac{\partial}{\partial t}(\overline{v}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \hat{\chi}\, dt \\ &= -\int_0^T \int_\Omega div(\tilde{\sigma}) \tilde{\vartheta} \hat{\chi}\, dx\, dt, \quad \forall \tilde{\vartheta} \in \mathbf{D}(\Omega), \quad \forall \hat{\chi} \in \mathcal{D}(0,T). \end{aligned} \tag{3.109}$$

Comme $\mathbf{D}(\Omega)$ est dense dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ c-à-d il existe $\tilde{\vartheta}_n \in \mathbf{D}(\Omega)$ telle que

$$\lim_{n \to +\infty} \tilde{\vartheta}_n = \tilde{\vartheta} \quad \text{dans} \quad \mathbf{L}^2(\Omega), \tag{3.110}$$

en remplaçant $\tilde{\vartheta}$ par $\tilde{\vartheta}_n$ dans (3.109) on obtient

$$\begin{aligned} &\int_0^T (\overline{f}, \tilde{\vartheta}_n)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \hat{\chi}\, dt - \int_0^T \frac{\partial}{\partial t}(\overline{v}, \tilde{\vartheta}_n)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \hat{\chi}\, dt \\ &= -\int_0^T \int_\Omega div(\tilde{\sigma}) \tilde{\vartheta}_n \hat{\chi}\, dx\, dt. \end{aligned} \tag{3.111}$$

Pour $\overline{f} \in L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$, en utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz en espace et en temps on obtient

$$\begin{aligned} \Big| \int_0^T (\overline{f}, \tilde{\vartheta}_n - \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \hat{\chi}\, dt \Big| &\leq \|\overline{f}\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))} \|(\tilde{\vartheta}_n - \tilde{\vartheta})\hat{\chi}\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))} \\ &\leq \|\overline{f}\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))} \|\hat{\chi}\|_{L^2(0,T)} \|\tilde{\vartheta}_n - \tilde{\vartheta}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

en passant à la limite quand $n \to +\infty$, en utilisant (3.110) on obtient

$$\int_0^T (\overline{f}, \tilde{\vartheta}_n)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \hat{\chi}\, dt \to \int_0^T (\overline{f}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \hat{\chi}\, dt. \tag{3.112}$$

On a

$$\Big| \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} (\overline{v}, \tilde{\vartheta}_n - \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \hat{\chi}\, dt \Big| = \Big| - \int_0^T (\overline{v}, \tilde{\vartheta}_n - \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \hat{\chi}'\, dt \Big|,$$

en utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz en espace et en temps on obtient

$$\Big| \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} (\overline{v}, \tilde{\vartheta}_n - \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \hat{\chi}\, dt \Big| \leq \sqrt{T} \|\overline{v}\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))} \|\hat{\chi}'\|_{L^\infty(0,T)} \|\tilde{\vartheta}_n - \tilde{\vartheta}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)},$$

en passant à la limite quand $n \to +\infty$, en utilisant (3.110) on obtient

$$\int_0^T \frac{\partial}{\partial t} (\overline{v}, \tilde{\vartheta}_n)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \hat{\chi}\, dt \to \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} (\overline{v}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \hat{\chi}\, dt. \tag{3.113}$$

On a

$$\begin{aligned} &\Big| \int_0^T \int_\Omega div(\tilde{\sigma})(\tilde{\vartheta}_n - \tilde{\vartheta}) \hat{\chi}\, dx\, dt \Big| \\ &\leq \|div(\tilde{\sigma})\|_{H^{-1}(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))} \|\hat{\chi}\|_{H_0^1(0,T)} \|\tilde{\vartheta}_n - \tilde{\vartheta}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

en passant à la limite quand $n \to +\infty$, en utilisant (3.110) on obtient

$$\int_0^T \int_\Omega div(\tilde{\sigma}) \tilde{\vartheta}_n \hat{\chi}\, dx\, dt \to \int_0^T \int_\Omega div(\tilde{\sigma}) \tilde{\vartheta} \hat{\chi}\, dx\, dt. \tag{3.114}$$

En passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans (3.111) avec les convergences (3.112), (3.113) et (3.114) on obtient

$$\begin{aligned} &\int_0^T (\overline{f}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \hat{\chi}\, dt - \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} (\overline{v}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \hat{\chi}\, dt \\ &= - \int_0^T \int_\Omega div(\tilde{\sigma}) \tilde{\vartheta} \hat{\chi}\, dx\, dt \quad \forall \tilde{\vartheta} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \quad \forall \hat{\chi} \in \mathcal{D}(0,T). \end{aligned} \tag{3.115}$$

Maintenant, en reprenant $\tilde{\vartheta} \in V_0$ et comme $\tilde{\sigma} \in H^{-1}(0,T;\mathcal{Y})$, $\overline{v} \in L^2(0,T;V_{0.div})$ en utilisant la formule de Green on obtient

$$\begin{aligned} &\int_0^T (\overline{f}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \hat{\chi}\, dt - \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} (\overline{v}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \hat{\chi}\, dt \\ &= \int_0^T \int_\Omega \tilde{\sigma}_{ij} \partial_j \tilde{\vartheta}_i \hat{\chi}\, dx\, dt - \int_0^T \int_{\partial\Omega} \tilde{\sigma}_{ij} n_j (\tilde{\vartheta}_i \hat{\chi})\, dY\, dt. \end{aligned} \tag{3.116}$$

Pour tout $\tilde{\vartheta} \in V_0$ on a $\tilde{\vartheta}_i = 0$ sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_L$ alors

$$\int_0^T \int_{\partial\Omega} \tilde{\sigma}_{ij}(\tilde{\vartheta}_i\hat{\chi}) n_j \, dY \, dt = \int_0^T \int_{\omega} \tilde{\sigma}_{ij}(\tilde{\vartheta}_i\hat{\chi}) n_j \, dx' \, dt.$$

En utilisant l'égalité $\tilde{\sigma}_{ij} n_j = \tilde{\sigma}_{\tau_i} + \tilde{\sigma}_n n_i$ on obtient

$$\int_0^T \int_{\omega} \tilde{\sigma}_{ij}(\tilde{\vartheta}_i\hat{\chi}) n_j \, dx' \, dt = \int_0^T \int_{\omega} \tilde{\sigma}_{\tau_i}(\tilde{\vartheta}_i\hat{\chi}) \, dx' + \int_{\omega} \tilde{\sigma}_n n_i(\tilde{\vartheta}_i\hat{\chi}) \, dx' \, dt.$$

Pour tout $\tilde{\vartheta} \in V_0$ on a $\tilde{\vartheta}_i n_i = 0$ sur ω alors

$$\int_0^T \int_{\omega} \tilde{\sigma}_{ij}(\tilde{\vartheta}_i\hat{\chi}) n_j \, dx' \, dt = \int_0^T \int_{\omega} \tilde{\sigma}_{\tau_i}(\tilde{\vartheta}_i\hat{\chi}) \, dx' \, dt,$$

et (3.116) devient

$$\begin{aligned} &\int_0^T (\overline{f}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \hat{\chi} \, dt - \int_0^T \frac{\partial}{\partial t}(\overline{v}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \hat{\chi} \, dt \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{\sigma}_{ij} \partial_j \tilde{\vartheta}_i \hat{\chi} \, dx \, dt - \int_0^T \int_{\omega} \tilde{\sigma}_{\tau_i}(\tilde{\vartheta}_i\hat{\chi}) \, dx' \, dt. \end{aligned}$$

On ajoute aux deux membres le terme $\displaystyle\int_0^T j(t, \overline{v} + \tilde{\vartheta}\hat{\chi}) \, dt - \int_0^T j(t, \overline{v}) \, dt$ on obtient

$$\begin{aligned} &\int_0^T \frac{\partial}{\partial t}(\overline{v}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \hat{\chi} \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{\sigma}_{ij} \partial_j \tilde{\vartheta}_i \hat{\chi} \, dx \, dt \\ &+ \int_0^T j(t, \overline{v} + \tilde{\vartheta}\hat{\chi}) \, dt - \int_0^T j(t, \overline{v}) \, dt \\ &= \int_0^T (\overline{f}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \hat{\chi} \, dt + \hat{A}(\overline{v}, \tilde{\vartheta}), \end{aligned} \tag{3.117}$$

où

$$\hat{A}(\overline{v}, \tilde{\vartheta}) = \int_0^T \Big(\int_{\omega} \tilde{\sigma}_{\tau_i}(\tilde{\vartheta}_i\hat{\chi}) \, dx' + j(t, \overline{v} + \tilde{\vartheta}\hat{\chi}) - j(t, \overline{v}) \Big) \, dt.$$

En remplaçant $\tilde{\sigma}_{ij}$ par son expression (3.16) dans (3.117) on obtient

$$\begin{aligned} &\int_0^T \frac{\partial}{\partial t}(\overline{v}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \hat{\chi} \, dt + \int_0^T a(\theta; \overline{v}, \tilde{\vartheta}\hat{\chi}) \, dt - \int_0^T (\pi, div(\tilde{\vartheta})) \hat{\chi} \, dt \\ &+ \int_0^T j(t, \overline{v} + \tilde{\vartheta}\hat{\chi}) \, dt - \int_0^T j(t, \overline{v}) \, dt = \int_0^T (\overline{f}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \hat{\chi} \, dt + \hat{A}(\overline{v}, \tilde{\vartheta}). \end{aligned} \tag{3.118}$$

On a

$$\int_{\partial\Omega} \tilde{\vartheta} \cdot n \, dY = 0, \quad \forall \tilde{\vartheta} \in V_0,$$

du lemme 2.2 [46], il existe $\hat{\vartheta} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ vérifiant

$$div(\hat{\vartheta}) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \quad \hat{\vartheta} = \tilde{\vartheta} \quad \text{sur} \quad \partial\Omega.$$

Donc, $\hat{\vartheta} \in V_{0.div}$ et on a

$$\int_0^T \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\upsilon}, \hat{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \hat{\chi} \, dt + \int_0^T a(\theta; \overline{\upsilon}, \hat{\vartheta}\hat{\chi}) \, dt + \int_0^T \Big(j(t, \overline{\upsilon} + \hat{\vartheta}\hat{\chi}) - j(t, \overline{\upsilon}) \Big) \, dt$$
$$= \int_0^T (\overline{f}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \hat{\chi} \, dt + \hat{A}(\overline{\upsilon}, \hat{\vartheta}).$$

On prend $\overline{\varphi} = \overline{\upsilon} + \hat{\vartheta}\hat{\chi}$ dans (3.30) on obtient

$$\int_0^T \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\upsilon}, \hat{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \hat{\chi} \, dt + \int_0^T a(\theta; \overline{\upsilon}, \hat{\vartheta}\hat{\chi}) \, dt + \int_0^T \Big(j(t, \overline{\upsilon} + \hat{\vartheta}\hat{\chi}) - j(t, \overline{\upsilon}) \Big) \, dt$$
$$- \int_0^T < \overline{f}, \hat{\vartheta}\hat{\chi} >_{V'_{0.div}, V_{0.div}} \, dt \geq 0.$$

Comme $\overline{f} \in L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$ on a

$$\int_0^T < \overline{f}, \hat{\vartheta}\hat{\chi} >_{V'_{0.div}, V_{0.div}} \, dt = \int_0^T (\overline{f}, \hat{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \hat{\chi} \, dt,$$

donc

$$\hat{A}(\overline{\upsilon}, \hat{\vartheta}) \geq 0.$$

Comme $\hat{A}(\overline{\upsilon}, \hat{\vartheta}) = \hat{A}(\overline{\upsilon}, \tilde{\vartheta})$ car $\hat{\vartheta} = \tilde{\vartheta}$ sur $\partial\Omega$ on a

$$\hat{A}(\overline{\upsilon}, \tilde{\vartheta}) \geq 0.$$

Donc (3.118) devient

$$\int_0^T \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\upsilon}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \hat{\chi} \, dt + \int_0^T a(\theta; \overline{\upsilon}, \tilde{\vartheta}\hat{\chi}) \, dt - \int_0^T (\pi, div(\tilde{\vartheta}\hat{\chi})) \, dt$$
$$+ \int_0^T \Big(j(t, \overline{\upsilon} + \tilde{\vartheta}\hat{\chi}) - j(t, \overline{\upsilon}) \Big) \, dt \geq \int_0^T (\overline{f}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \hat{\chi} \, dt,$$
$$\forall \tilde{\vartheta} \in V_0 \quad \forall \hat{\chi} \in \mathcal{D}(0, T),$$

de plus

$$\overline{\upsilon}(0) = 0,$$

ce qui montre que $(\overline{\upsilon}, \pi) \in \Big(C([0, T]; \mathbf{L}^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; V_{0.div}) \Big) \times H^{-1}(0, T; L^2_0(\Omega))$ est solution du problème 3.1 avec $\overline{\upsilon}' \in L^2(0, T; V'_{0.div})$. □

3.8 Étude du problème dont la viscosité dépend de la vitesse

On considère désormais que la viscosité dépend à la fois de la température, de la vitesse et du tenseur des taux de déformations. Plus précisément, on suppose que μ est définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$, et vérifie

$$\exists \mu_0, \mu_1 \in \mathbb{R} : \quad 0 < \mu_0 \leq \mu(u, \tilde{v}, w) \leq \mu_1, \quad \forall (u, \tilde{v}, w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+, \tag{3.119}$$

$$\text{la fonction} \quad v \mapsto \mu(., \tilde{v}, .) \quad \text{est continue} \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^3, \tag{3.120}$$

$$\text{la fonction} \quad w \mapsto \mu(., ., w) \quad \text{est continue et monotone sur} \quad \mathbb{R}_+. \tag{3.121}$$

On considère les équations générales de l'écoulement non isotherme d'un fluide non-Newtonien incompressible et instationnaire dont la viscosité dépend également de la vitesse

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t} - 2div(\mu(\theta, \upsilon, |D(\upsilon)|)D(\upsilon)) + \nabla \pi = f \qquad \text{dans} \quad \Omega \times]0, T[,$$

$$div(\upsilon) = 0 \qquad \text{dans} \quad \Omega \times]0, T[.$$

Pour compléter la formulation forte du problème, on rajoute les conditions aux limites (3.8)-(3.12) et la condition initiale (3.13).
La formulation variationnelle du problème est donnée par

Problème 3.3 *Soient $f \in L^2(0, T; \boldsymbol{L}^2(\Omega))$, $k \in L^2(0, T; L^2_+(\omega))$, μ vérifie* (3.119)-(3.121)*, $\theta \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, $s \in L^2(0, T; \boldsymbol{L}^2(\omega))$, $\xi \in H^1(0, T)$ vérifiant* (3.10) *et $\upsilon_0 \in \boldsymbol{H}^1(\Omega)$ vérifiant* (3.14)*. On cherche $\overline{v} \in C([0, T]; \mathbf{L}^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; V_{0.div})$ avec $\overline{v}' \in L^2(0, T; V'_{0.div})$, et $\pi \in H^{-1}(0, T; L^2_0(\Omega))$, vérifiant l'inéquation variationnelle parabolique suivante*

$$\begin{aligned} &\Big\langle \frac{\partial}{\partial t}(\overline{v}, \tilde{\vartheta})_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}, \hat{\chi} \Big\rangle_{\mathcal{D}'(0,T), \mathcal{D}(0,T)} + \int_0^T \Big(a_*(\theta; \overline{v}, \tilde{\vartheta}\hat{\chi}) - (\pi, div(\tilde{\vartheta}))\hat{\chi} \Big) \, dt \\ &+ \int_0^T \Big(j(t, \overline{v} + \tilde{\vartheta}\hat{\chi}) - j(t, \overline{v}) \Big) \, dt \geq \int_0^T (\overline{f}, \tilde{\vartheta})_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} \hat{\chi} \, dt, \\ &\forall \tilde{\vartheta} \in V_0 \quad \forall \hat{\chi} \in \mathcal{D}(0, T), \end{aligned} \tag{3.122}$$

et la condition initiale (3.23)*,*

où

$$a_*(\theta;.,.) : \begin{cases} V_0 \times V_0 \to \mathbb{R} \\ (u,v) \mapsto a_*(\theta;u,v) \\ = \displaystyle\int_\Omega 2\mu(\theta, u+\upsilon_0\xi, |D(u+\upsilon_0\xi)|) d_{ij}(u+\upsilon_0\xi) d_{ij}(v) dx. \end{cases}$$

Maintenant, on considère le problème en vitesse suivant

Problème 3.4 *Soient* $f \in L^2(0,T;V'_{0.div})$, $k \in L^2(0,T;L^2_+(\omega))$, μ *vérifie* (3.119)-(3.121), $\theta \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $s \in L^2(0,T;\boldsymbol{L}^2(\omega))$, $\xi \in H^1(0,T)$ *vérifiant* (3.10) *et* $\upsilon_0 \in \boldsymbol{H}^1(\Omega)$ *vérifiant* (3.14). *On cherche* $\overline{v} \in C([0,T];\mathbf{L}^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;V_{0.div})$ *avec* $\overline{v}' \in L^2(0,T;V'_{0.div})$ *satisfaisant l'inéquation variationnelle parabolique suivante*

$$\begin{aligned} &[\overline{v}', \overline{\varphi} - \overline{v}] + [\mathcal{A}_* \overline{v}, \overline{\varphi} - \overline{v}] + J(\overline{\varphi}) - J(\overline{v}) \geq [\overline{f}, \overline{\varphi} - \overline{v}], \\ &\forall \overline{\varphi} \in L^2(0,T;V_{0.div}), \end{aligned} \tag{3.123}$$

et la condition initiale (3.23),

où

$$[\mathcal{A}_* \overline{v}, \overline{\varphi}] = \int_0^T a_*(\theta; \overline{v}, \overline{\varphi})\, dt.$$

Théorème 3.5 *Sous les hypothèses précédentes, le problème* 3.4 *admet au moins une solution.*

Preuve. L'existence de solution du problème 3.4 se démontre par l'application du théorème de point fixe de Schauder.
Pour tout $\mathbf{u} \in L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$ le problème 3.2 modifié avec $a(\theta,\mathbf{u};.,.)$ au lieu de $a(\theta;.,.)$ admet une unique solution $\overline{v} \in C([0,T];\mathbf{L}^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;V_{0.div})$, $\overline{v}' \in L^2(0,T;V'_{0.div})$ (voir les théorèmes 3.1, 3.2 et 3.3). On a donc

$$\begin{aligned} &[\overline{v}', \overline{\varphi} - \overline{v}] + [\mathcal{A}_{\mathbf{u}} \overline{v}, \overline{\varphi} - \overline{v}] + J(\overline{\varphi}) - J(\overline{v}) \geq [\overline{f}, \overline{\varphi} - \overline{v}], \\ &\forall \overline{\varphi} \in L^2(0,T;V_{0.div}), \end{aligned} \tag{3.124}$$

et la condition initiale (3.23), avec

$$a(\theta,\mathbf{u};u,v) = \int_\Omega 2\mu(\theta, \mathbf{u}+\upsilon_0\xi, |D(u+\upsilon_0\xi)|) d_{ij}(u+\upsilon_0\xi) d_{ij}(v) dx,$$

et

$$[\mathcal{A}_{\mathbf{u}}u, v] = \int_0^T a(\theta, \mathbf{u}; u, v)\, dt.$$

On définit l'application $\tilde{\Lambda}$ par

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}: \quad L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)) &\to L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)) \\ \mathbf{u} &\mapsto \overline{v}. \end{aligned}$$

Maintenant, on cherche $R > 0$ tel que $\tilde{\Lambda}(Z) \subset Z$ où

$$Z = \{\overline{\varphi} \in L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)); \|\overline{\varphi}\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))} \leq R\}.$$

Soit $\mathbf{u} \in L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$ quelconque, on prend $\overline{\varphi} = 0$ dans (3.124) on obtient

$$[\overline{v}', \overline{v}] + [\mathcal{A}_{\mathbf{u}}\overline{v}, \overline{v}] \leq [\overline{f}, \overline{v}] + J(0). \tag{3.125}$$

Puis on remarque que l'on a

$$\begin{aligned} [\overline{v}', \overline{v}] = \int_0^T < \overline{v}', \overline{v} >_{V'_{0.div}, V_{0.div}}\, dt &= \frac{1}{2}\int_0^T \frac{\partial}{\partial t}\|\overline{v}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\, dt \\ &= \frac{1}{2}\Big(\|\overline{v}(T)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - \|\overline{v}(0)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\Big), \end{aligned}$$

d'où

$$[\overline{v}', \overline{v}] = \frac{1}{2}\|\overline{v}(T)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \tag{3.126}$$

(car $\overline{v}(0) = 0$ (voir (3.23)). D'autre part on a

$$[\overline{f}, \overline{v}] \leq \frac{1}{2C_1^2\mu_0}\|\overline{f}\|^2_{L^2(0,T;V'_{0.div})} + \frac{C_1^2\mu_0}{2}\|\overline{v}\|^2_{L^2(0,T;V_{0.div})}, \tag{3.127}$$

où C_1 désigne la constante de Korn.
D'après ce qui précède (cf. (3.60)) on a

$$[\mathcal{A}_{\mathbf{u}}\overline{v}, \overline{v}] = \int_0^T a(\theta, \mathbf{u}; \overline{v}, \overline{v})\, dt \geq C_1^2\mu_0\|\overline{v}\|^2_{L^2(0,T;V_{0.div})} - \frac{\mu_1^2}{C_1^2\mu_0}\|\upsilon_0\|^2_{1.2}\int_0^T |\xi|^2\, dt.$$

En remplaçant ce terme et (3.126), (3.127) dans (3.125) on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\|\overline{v}(T)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \frac{1}{2}C_1^2\mu_0\|\overline{v}\|^2_{L^2(0,T;V_{0.div})} \leq \frac{1}{2C_1^2\mu_0}\|\overline{f}\|^2_{L^2(0,T;V'_{0.div})} \\ &+\frac{\mu_1^2}{C_1^2\mu_0}\|\upsilon_0\|^2_{1.2}\int_0^T |\xi|^2\, dt + J(0), \end{aligned}$$

d'où

$$\|\overline{v}\|_{L^2(0,T;V_{0.div})} \leq \sqrt{C_5}, \tag{3.128}$$

où

$$C_5 = \frac{1}{C_1^4 \mu_0^2}\Big[\|\overline{f}\|^2_{L^2(0,T;V'_{0.div})} + 2\mu_1^2\|\upsilon_0\|^2_{1.2}\int_0^T |\xi|^2\, dt + 2C_1^2\mu_0 J(0)\Big].$$

Or l'injection de $L^2(0,T;V_{0.div})$ dans $L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$ est continue, c-à-d

$$\exists \gamma_1 > 0, \quad \|\overline{v}\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))} \leq \gamma_1 \|\overline{v}\|_{L^2(0,T;V_{0.div})}, \tag{3.129}$$

d'où

$$\|\overline{v}\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))} \leq \gamma_1\sqrt{C_5},$$

c-à-d,

$$\|\tilde{\Lambda}(\mathbf{u})\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))} \leq \gamma_1\sqrt{C_5}.$$

Pour assurer que $\tilde{\Lambda}(Z) \subset Z$, il suffit de prendre $R = \gamma_1\sqrt{C_5}$.
L'ensemble Z est un convexe fermé de $L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$, de plus borné.
Pour montrer que $\tilde{\Lambda}(Z)$ est relativement compact, on doit établir que pour toute suite $(\overline{v}_n)_{n\geq 0}$ de $\tilde{\Lambda}(Z)$ (c-à-d, il existe $\mathbf{u}_n \in Z$ tel que $\overline{v}_n = \tilde{\Lambda}(\mathbf{u}_n)$), on peut extraire une sous-suite qui converge fortement dans $L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$.
En effet, pour tout $\overline{\varphi} \in L^2(0,T;V_{0.div})$ on a

$$[\overline{v}'_n, \overline{\varphi} - \overline{v}_n] + [\mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{v}_n, \overline{\varphi} - \overline{v}_n] + J(\overline{\varphi}) - J(\overline{v}_n) \geq [\overline{f}, \overline{\varphi} - \overline{v}_n], \tag{3.130}$$

donc, d'après ce qui précède (cf. (3.128)) on a

$$\|\overline{v}_n\|_{L^2(0,T;V_{0.div})} \leq \sqrt{C_5}. \tag{3.131}$$

D'autre part, on prend $\overline{\varphi} = \overline{v}_n \pm \vartheta^*\zeta$ avec $\vartheta^* \in V_{0.div}$ et $\zeta \in \mathcal{D}(0,T)$ dans (3.130) on obtient

$$[\overline{v}'_n, \pm\vartheta^*\zeta] + [\mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{v}_n, \pm\vartheta^*\zeta] + J(\overline{v}_n \pm \vartheta^*\zeta) - J(\overline{v}_n) \geq [\overline{f}, \pm\vartheta^*\zeta]. \tag{3.132}$$

Avec la première inégalité on a

$$[\overline{v}'_n, \vartheta^*\zeta] \geq [\overline{f}, \vartheta^*\zeta] - [\mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{v}_n, \vartheta^*\zeta] - J(\overline{v}_n + \vartheta^*\zeta) + J(\overline{v}_n).$$

En utilisant (3.49)

$$\begin{aligned}[\overline{\upsilon}'_n, \vartheta^*\zeta] \quad &\geq -(\|\overline{f}\|_{L^2(0,T;V'_{0.div})} + \|\mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{\upsilon}_n\|_{L^2(0,T;V'_{0.div})} \\ &+\gamma\|k\|_{L^2(0,T;L^2(\omega))})\|\vartheta^*\zeta\|_{L^2(0,T;V_{0.div})}.\end{aligned} \tag{3.133}$$

Avec la deuxième inégalité on a

$$[\overline{\upsilon}'_n, \vartheta^*\zeta] \leq [\overline{f}, \vartheta^*\zeta] - [\mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{\upsilon}_n, \vartheta^*\zeta] + J(\overline{\upsilon}_n - \vartheta^*\zeta) - J(\overline{\upsilon}_n),$$

et avec (3.49)

$$\begin{aligned}[\overline{\upsilon}'_n, \vartheta^*\zeta] \quad &\leq (\|\overline{f}\|_{L^2(0,T;V'_{0.div})} + \|\mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{\upsilon}_n\|_{L^2(0,T;V'_{0.div})} \\ &+\gamma\|k\|_{L^2(0,T;L^2(\omega))})\|\vartheta^*\zeta\|_{L^2(0,T;V_{0.div})}.\end{aligned} \tag{3.134}$$

D'après (3.133), (3.134) on a

$$\begin{aligned}|[\overline{\upsilon}'_n, \vartheta^*\zeta]| \quad &\leq (\|\overline{f}\|_{L^2(0,T;V'_{0.div})} + \|\mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{\upsilon}_n\|_{L^2(0,T;V'_{0.div})} \\ &+\gamma\|k\|_{L^2(0,T;L^2(\omega))})\|\vartheta^*\zeta\|_{L^2(0,T;V_{0.div})}.\end{aligned}$$

D'après ce que précède (cf (3.34)) on a

$$\|\mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{\upsilon}_n\|_{L^2(0,T;V'_{0.div})} \leq 2\mu_1(\|\overline{\upsilon}_n\|_{L^2(0,T;V_{0.div})} + c\sqrt{T}\|\upsilon_0\|_{1.2}),$$

où $c > 0$ est une constante qui ne dépend que de ξ (relation (3.31)).
De (3.131) on obtient

$$\|\mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{\upsilon}_n\|_{L^2(0,T;V'_{0.div})} \leq 2\mu_1(\sqrt{C_5} + c\sqrt{T}\|\upsilon_0\|_{1.2}). \tag{3.135}$$

De (3.135) on obtient

$$|[\overline{\upsilon}'_n, \vartheta^*\zeta]| \leq C_6\|\vartheta^*\zeta\|_{L^2(0,T;V_{0.div})}, \tag{3.136}$$

d'où

$$\|\overline{\upsilon}'_n\|_{L^2(0,T;V'_{0.div})} \leq C_6. \tag{3.137}$$

En utilisant le lemme d'Aubin [36] et (3.131), (3.137) avec $X_0 = V_{0.div}$, $X = \mathbf{L}^2(\Omega)$ et $X_1 = V'_{0.div}$ on obtient qu'il existe une sous-suite de $(\overline{\upsilon}_n)_{n\geq 0}$ notée encore $(\overline{\upsilon}_n)_{n\geq 0}$ vérifiant

$$\overline{\upsilon}_n \to \overline{\upsilon} \quad \text{fortement dans} \quad L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)), \tag{3.138}$$

ce qui montre que $\tilde{\Lambda}(Z)$ est relativement compact.
Reste à montrer que l'application $\tilde{\Lambda}$ est continue. En effet, soit $(\mathbf{u}_n)_{n\geq 0}$ une suite dans $L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$ qui converge vers $\mathbf{u}$. On doit donc montrer que

$$\tilde{\Lambda}(\mathbf{u}_n) \to \tilde{\Lambda}(\mathbf{u}) \quad \text{dans} \quad L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)).$$

A $(\mathbf{u}_n)_{n\geq 0}$ (resp. $\mathbf{u}$), on associe $\overline{\upsilon}_n = \tilde{\Lambda}(\mathbf{u}_n)$ (resp. $\overline{\upsilon} = \tilde{\Lambda}(\mathbf{u})$) vérifiant (3.130) (resp. (3.124)) et la condition initiale (3.23). La suite $(\overline{\upsilon}_n)_{n\geq 0}$ vérifie (3.131) et (3.137) donc elle possède des sous-suites fortement convergentes dans $L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$. On considère une telle sous-suite encore notée $(\overline{\upsilon}_n)_{n\geq 0}$. Fixons $t \in]0,T]$, en utilisant le même raisonnement que dans l'étude de l'unicité de la solution du problème 3.2 on a aussi

$$[\overline{\upsilon}_n' - \overline{\upsilon}', (\overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon})1_{[0,t]}] + [\mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{\upsilon}_n - \mathcal{A}_{\mathbf{u}}\overline{\upsilon}, (\overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon})1_{[0,t]}] \leq 0. \tag{3.139}$$

On a

$$\begin{aligned}
[\overline{\upsilon}_n' - \overline{\upsilon}', (\overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon})1_{[0,t]}] &= \int_0^t < \overline{\upsilon}_n' - \overline{\upsilon}', \overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon} >_{V_{0.div}', V_{0.div}} \, d\tilde{t} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\|\overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \, d\tilde{t} \\
&= \frac{1}{2}\Big(\|\overline{\upsilon}_n(t) - \overline{\upsilon}(t)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - \|\overline{\upsilon}_n(0) - \overline{\upsilon}(0)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\Big),
\end{aligned}$$

d'où

$$[\overline{\upsilon}_n' - \overline{\upsilon}', (\overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon})1_{[0,t]}] = \frac{1}{2}\|\overline{\upsilon}_n(t) - \overline{\upsilon}(t)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}. \tag{3.140}$$

(car $\overline{\upsilon}_n(0) = \overline{\upsilon}(0) = 0$).
D'autre part,

$$\begin{aligned}
[\mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{\upsilon}_n - \mathcal{A}_{\mathbf{u}}\overline{\upsilon}, (\overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon})1_{[0,t]}] &= [\mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{\upsilon}_n - \mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{\upsilon}, (\overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon})1_{[0,t]}] \\
&\quad -[\mathcal{A}_{\mathbf{u}}\overline{\upsilon} - \mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{\upsilon}, (\overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon})1_{[0,t]}].
\end{aligned} \tag{3.141}$$

Avec (3.140), (3.141), l'inéquation (3.139) devient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\|\overline{\upsilon}_n(t) - \overline{\upsilon}(t)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + [\mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{\upsilon}_n - \mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{\upsilon}, (\overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon})1_{[0,t]}] \\
&\leq [\mathcal{A}_{\mathbf{u}}\overline{\upsilon} - \mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{\upsilon}, (\overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon})1_{[0,t]}].
\end{aligned} \tag{3.142}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
&[\mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{\upsilon}_n - \mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{\upsilon}, (\overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon})1_{[0,t]}] \\
&= \int_0^T \Big(a(\theta, \mathbf{u}_n; \overline{\upsilon}_n, (\overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon})1_{[0,t]}) - a(\theta, \mathbf{u}_n; \overline{\upsilon}, (\overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon})1_{[0,t]}\Big) \, d\tilde{t} \\
&= \int_0^t (a(\theta, \mathbf{u}_n; \overline{\upsilon}_n, (\overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon})) - a(\theta, \mathbf{u}_n; \overline{\upsilon}, (\overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon})) \, d\tilde{t},
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
[\mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{\upsilon}_n - \mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{\upsilon}, (\overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon})1_{[0,t]}] \; &= 2\int_0^t \int_\Omega \mu(\theta, \mathbf{u}_n + \upsilon_0\xi, |D(\overline{\upsilon}_n + \upsilon_0\xi)|) \\
&\quad \times D(\overline{\upsilon}_n + \upsilon_0\xi) : D(\overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon}) dx \, d\tilde{t} \\
&\quad -2\int_0^t \int_\Omega \mu(\theta, \mathbf{u}_n + \upsilon_0\xi, |D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi)|) \\
&\quad \times D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi) : D(\overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon}) dx \, d\tilde{t}.
\end{aligned} \tag{3.143}$$

On pose

$$\mu(u, v, w) = \tilde{\mu}(u, v, w) + \frac{\mu_0}{2}, \tag{3.144}$$

où $\tilde{\mu}$ est définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$, et d'après (3.119)-(3.121) la fonction $\tilde{\mu}$ vérifie

$$0 < \frac{\mu_0}{2} \leq \tilde{\mu}(u, v, w) \leq \mu_1 - \frac{\mu_0}{2}, \quad \forall (u, v, w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+, \tag{3.145}$$

$$\text{la fonction} \quad v \mapsto \tilde{\mu}(., v, .) \quad \text{est continue} \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^3, \tag{3.146}$$

$$\text{la fonction} \quad w \mapsto \tilde{\mu}(., ., w) \quad \text{est continue et monotone sur} \quad \mathbb{R}_+. \tag{3.147}$$

En remplaçant (3.144) dans (3.143) on obtient

$$\begin{aligned}
&[\mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{\upsilon}_n - \mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{\upsilon}, (\overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon})1_{[0,t]}] = \mu_0 \int_0^t \int_\Omega D(\overline{\upsilon}_n + \upsilon_0\xi) : D(\overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon}) dx \, d\tilde{t} \\
&+2\int_0^t \int_\Omega \tilde{\mu}(\theta, \mathbf{u}_n + \upsilon_0\xi, |D(\overline{\upsilon}_n + \upsilon_0\xi)|) D(\overline{\upsilon}_n + \upsilon_0\xi) : D(\overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon}) dx \, d\tilde{t} \\
&-\mu_0 \int_0^t \int_\Omega D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi) : D(\overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon}) dx \, d\tilde{t} \\
&-2\int_0^t \int_\Omega \tilde{\mu}(\theta, \mathbf{u}_n + \upsilon_0\xi, |D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi)|) D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi) : D(\overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon}) dx \, d\tilde{t},
\end{aligned}$$

d'où

$$[\mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{\upsilon}_n - \mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{\upsilon}, (\overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon})1_{[0,t]}] = \mu_0 \int_0^t \int_\Omega |D(\overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon})|^2 dx\, d\tilde{t}$$
$$+2\int_0^t \int_\Omega \tilde{\mu}(\theta, \mathbf{u}_n + \upsilon_0\xi, |D(\overline{\upsilon}_n + \upsilon_0\xi)|)D(\overline{\upsilon}_n + \upsilon_0\xi) : D(\overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon})dx\, d\tilde{t}$$
$$-2\int_0^t \int_\Omega \tilde{\mu}(\theta, \mathbf{u}_n + \upsilon_0\xi, |D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi)|)D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi) : D(\overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon})dx\, d\tilde{t}.$$

En utilisant le même raisonnement que dans l'étude de la monotonie de $\mathcal{A}$, on a aussi

$$[\mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{\upsilon}_n - \mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{\upsilon}, (\overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon})1_{[0,t]}] \geq \mu_0 \int_0^t \|D(\overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon})\|^2_{(L^2(\Omega))^{3\times 3}}\, d\tilde{t}$$
$$+\int_0^t \int_\Omega \Big(\tilde{\mu}(\theta, \mathbf{u}_n + \upsilon_0\xi, |D(\overline{\upsilon}_n + \upsilon_0\xi)|) - \tilde{\mu}(\theta, \mathbf{u}_n + \upsilon_0\xi, |D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi)|)\Big)$$
$$\times\Big(|D(\overline{\upsilon}_n + \upsilon_0\xi)| - |D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi)|\Big)\Big(|D(\overline{\upsilon}_n + \upsilon_0\xi)| + |D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi)|\Big)\, dx\, d\tilde{t},$$

de (3.147) on obtient

$$[\mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{\upsilon}_n - \mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{\upsilon}, (\overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon})1_{[0,t]}] \geq \mu_0 \int_0^t \|D(\overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon})\|^2_{(L^2(\Omega))^{3\times 3}}\, d\tilde{t}. \quad (3.148)$$

D'autre part,

$$[\mathcal{A}_{\mathbf{u}}\overline{\upsilon} - \mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{\upsilon}, (\overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon})1_{[0,t]}] = 2\int_0^t \int_\Omega \Big(\mu(\theta, \mathbf{u} + \upsilon_0\xi, |D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi)|)$$
$$-\mu(\theta, \mathbf{u}_n + \upsilon_0\xi, |D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi)|)\Big)D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi) : D(\overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon})dx\, d\tilde{t}$$
$$\leq 2\int_0^t \int_\Omega \big|\mu(\theta, \mathbf{u} + \upsilon_0\xi, |D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi)|)$$
$$-\mu(\theta, \mathbf{u}_n + \upsilon_0\xi, |D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi)|)\big||D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi)||D(\overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon})|dx\, d\tilde{t}.$$

En utilisant l'inégalité de Young (3.58) on obtient

$$\begin{aligned}
&[\mathcal{A}_{\mathbf{u}}\overline{\upsilon} - \mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{\upsilon}, (\overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon})1_{[0,t]}] \\
&\leq \frac{2}{\mu_0}\int_0^t \int_\Omega \big|\mu(\theta, \mathbf{u} + \upsilon_0\xi, |D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi)|) \\
&-\mu(\theta, \mathbf{u}_n + \upsilon_0\xi, |D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi)|)\big|^2|D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi)|^2 dx\, d\tilde{t} \\
&+\frac{\mu_0}{2}\int_0^t \int_\Omega |D(\overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon})|^2\, dx\, d\tilde{t}.
\end{aligned} \quad (3.149)$$

En remplaçant (3.148), (3.149) dans (3.142) on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\|\overline{\upsilon}_n(t)-\overline{\upsilon}(t)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}+\frac{\mu_0}{2}\int_0^t\|D(\overline{\upsilon}_n-\overline{\upsilon})\|^2_{(L^2(\Omega))^{3\times 3}}\,d\tilde{t}\\
&\leq\frac{2}{\mu_0}\int_0^t\int_\Omega\big|\mu(\theta,\mathbf{u}+\upsilon_0\xi,|D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)|)\\
&-\mu(\theta,\mathbf{u}_n+\upsilon_0\xi,|D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)|)\big|^2|D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)|^2dx\,d\tilde{t}.
\end{aligned}\tag{3.150}$$

On intègre de 0 à T (3.150) on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\|\overline{\upsilon}_n-\overline{\upsilon}\|^2_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}+\frac{\mu_0 T}{2}\int_0^t\|D(\overline{\upsilon}_n-\overline{\upsilon})\|^2_{(L^2(\Omega))^{3\times 3}}\,d\tilde{t}\\
&\leq\frac{2T}{\mu_0}\int_0^T\int_\Omega\big|\mu(\theta,\mathbf{u}+\upsilon_0\xi,|D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)|)\\
&-\mu(\theta,\mathbf{u}_n+\upsilon_0\xi,|D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)|)\big|^2|D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)|^2dx\,dt.
\end{aligned}\tag{3.151}$$

On pose

$$\mathcal{C}_n=\big|\mu(\theta,\mathbf{u}+\upsilon_0\xi,|D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)|)-\mu(\theta,\mathbf{u}_n+\upsilon_0\xi,|D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)|)\big|^2|D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)|^2,$$

comme la suite $\mathbf{u}_n\to\mathbf{u}$ fortement dans $L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$ lorsque $n\to+\infty$ on obtient qu'il existe une sous-suite de $(\mathbf{u}_n)_{n\geq 0}$ qui converge presque partout dans $\Omega\times[0,T]$ et de (3.146) on a

$$\mathcal{C}_n\to 0\quad\text{presque partout dans}\quad\Omega\times[0,T].$$

Avec (3.119) on a

$$|\mathcal{C}_n|\leq 4\mu_1^2|D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)|^2\in L^1(0,T;L^1(\Omega)),$$

par le théorème de la convergence dominée, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^T\int_\Omega\mathcal{C}_n\,dx\,dt=0.$$

En passant à la limite dans (3.151) on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\|\overline{\upsilon}_n-\overline{\upsilon}\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}\leq 0,$$

c-à-d,

$$\lim_{n\to+\infty}\|\overline{\upsilon}_n-\overline{\upsilon}\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}=0.$$

On a donc obtenu que toutes les sous-suites de $(\overline{v}_n)_{n\geq 0}$ qui sont fortement convergentes dans $L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$ ont $\overline{v}$ pour limite. Donc avec (3.131) et (3.137) on peut conclure que toute la suite $(\overline{v}_n)_{n\geq 0}$ est convergente vers $\overline{v} = \tilde{\Lambda}(\mathbf{u})$ dans $L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$, ce qui montre la continuité de $\tilde{\Lambda}$.
Avec théorème du point fixe de Schauder [45], on obtient que $\tilde{\Lambda}$ admet un point fixe (c-à-d $\tilde{\Lambda}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$). Avec la notation $\tilde{\Lambda}(\mathbf{u}) = \overline{v}$ on obtient

$$\mathbf{u} = \overline{v},$$

et

$$[\overline{v}', \overline{\varphi} - \overline{v}] + [\mathcal{A}_{\overline{v}}\overline{v}, \overline{\varphi} - \overline{v}] + J(\overline{\varphi}) - J(\overline{v}) \geq [\overline{f}, \overline{\varphi} - \overline{v}],$$

donc le problème 3.4 admet au moins une solution $\overline{v} \in C(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;V_{0.div})$ avec $\overline{v}' \in L^2(0,T;V'_{0.div})$. □

Théorème 3.6 *On suppose que les hypothèses* (3.119)-(3.121) *sont satisfaites, alors pour* $f \in L^2(0,T;\boldsymbol{L}^2(\Omega))$, $k \in L^2(0,T;L^2_+(\omega))$, $\theta \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $s \in L^2(0,T;\boldsymbol{L}^2(\omega))$, $\xi \in H^1(0,T)$ *vérifiant* (3.10), $\upsilon_0 \in \boldsymbol{H}^1(\Omega)$ *vérifiant* (3.14), *il existe* $\overline{v} \in C([0,T];\mathbf{L}^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;V_{0.div})$ *avec* $\overline{v}' \in L^2(0,T;V'_{0.div})$ *et* $\pi \in H^{-1}(0,T;L^2_0(\Omega))$ *solution du problème* 3.3.

Preuve. D'après l'hypothèse (3.119) sur la viscosité on vérifie que les estimations (3.92), (3.99) dans la proposition 3.3 et le lemme 3.4 respectivement sont encore vrais. Donc, en utilisant le même raisonnement que dans la proposition 3.3, le lemme 3.4 et le théorème 3.4, on montre les résultats suivantes : Pour tout $f \in L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)) \subset L^2(0,T;V'_0)$, on obtient l'existence et l'unicité (à une constante près) d'une fonction $\tilde{\pi}(t) \in L^2(\Omega)$ et de plus $\tilde{\pi} \in C([0,T];L^2_0(\Omega))$ vérifiant pour tout $\tilde{\vartheta} \in \mathbf{D}(\Omega)$

$$< \int_0^t \overline{f}\, d\mathbf{s}, \tilde{\vartheta} >_{V'_0,V_0} -(\overline{v}(t), \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - \int_0^t a^*(\theta;\overline{v},\tilde{\vartheta})\, d\mathbf{s} = -(\tilde{\pi}(t), div(\tilde{\vartheta})).$$

Par la densité de $\mathbf{D}(\Omega)$ dans $\mathbf{H}^1_0(\Omega)$ on a aussi pour tout $\tilde{\vartheta} \in \mathbf{H}^1_0(\Omega)$

$$< \int_0^t \overline{f}\, d\mathbf{s}, \tilde{\vartheta} >_{V'_0,V_0} -(\overline{v}(t), \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - \int_0^t a^*(\theta;\overline{v},\tilde{\vartheta})\, d\mathbf{s} = -(\tilde{\pi}(t), div(\tilde{\vartheta})).$$

On dérive l'équation ci-dessus par rapport à t au sens des distributions, donc avec

$$\pi = \frac{\partial \tilde{\pi}}{\partial t},$$

on obtient pour tout $\tilde{\vartheta} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$

$$< \overline{f}, \tilde{\vartheta} >_{V_0', V_0} - (\overline{v}(t), \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - a^*(\theta; \overline{v}, \tilde{\vartheta}) = -(\pi, div(\tilde{\vartheta})).$$

De plus,

$$\int_\Omega \pi dx = 0,$$

et on montre que $\pi \in H^{-1}(0, T; L_0^2(\Omega))$. Finalement, on démontre que $(\overline{v}, \pi)$ est solution du problème 3.3. □

Chapitre 4

Problème instationnaire généralisé

Dans ce chapitre, on généralise le problème traité dans le chapitre 3. En effet, il s'agit d'utiliser ici la formule du tenseur des contraintes $\sigma = (\sigma_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}$ généralisée ainsi

$$\sigma_{ij} = 2\mu(\theta, |D(\upsilon)|)|D(\upsilon)|^{p-2}d_{ij}(\upsilon) - \pi\delta_{ij}, \tag{4.1}$$

où

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

est le symbole de Kronecker, $p \in \mathbb{R}$ tel que $p > 1$ avec $p \neq 2$ $\big($contrairement au chapitre précédent où le cas $p = 2$ a été étudié$\big)$, υ est la vitesse du fluide, π sa pression, θ désignant sa température est une donnée du problème, μ sa viscosité. On suppose que cette dernière est définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, et vérifie

$$\exists \mu_0, \mu_1 \in \mathbb{R} : \quad 0 < \mu_0 \leq \mu(u, \tilde{u}) \leq \mu_1, \quad \forall (u, \tilde{u}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned} &\text{la fonction} \quad \tilde{u} \mapsto \mu(., \tilde{u}) \quad \text{est continue} \\ &\text{et monotone croissante sur} \quad \mathbb{R}_+, \end{aligned} \tag{4.3}$$

et $D(\upsilon) = (d_{ij}(\upsilon))_{1\leq i,j\leq 3}$ désigne le tenseur des taux de déformations défini par

$$d_{ij}(\upsilon) = \frac{1}{2}(\partial_j \upsilon_i + \partial_i \upsilon_j) \quad 1 \leq i, j \leq 3.$$

Avec la convention de sommation d'Einstein on a

$$D(\upsilon) : D(\upsilon) = d_{ij}(\upsilon)d_{ij}(\upsilon) = |D(\upsilon)|^2,$$

où $|D(\upsilon)|$ est la norme euclidienne de $D(\upsilon)$.
On considère ce problème dans un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ donné par

$$\Omega = \{(x', x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad x' = (x_1, x_2) \in \omega \quad \text{et} \quad 0 < x_3 < h(x')\}.$$

La frontière de Ω sera notée $\partial\Omega = \overline{\omega} \cup \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_L$ avec

— Γ_1 la surface supérieure d'équation $x_3 = h(x')$ où h est une fonction continue lipschitzienne vérifiant

$$\exists h_0, h_1 \in \mathbb{R} \quad 0 < h_0 \leq h(x') \leq h_1.$$

— ω un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ qui constitue la surface inférieure du domaine Ω, et sa frontière est lipschitzienne.

— Γ_L la frontière latérale.

L'écoulement est gouverné par le système de Stokes suivant :
- L'équation de conservation de la quantité du mouvement

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t} - 2div(\mu(\theta, |D(\upsilon)|)|D(\upsilon)|^{p-2}D(\upsilon)) + \nabla\pi = f \quad \text{dans} \quad \Omega\times]0, T[, \quad (4.4)$$

- l'équation de conservation de la masse (la condition d'incompressibilité)

$$div(\upsilon) = 0 \qquad \text{dans} \quad \Omega\times]0, T[, \quad (4.5)$$

où $f = (f_1, f_2, f_3)$ est le vecteur des forces extérieures donné.

Dans toute la suite de ce chapitre, avec la convention de sommation d'Einstein on note

$$u \cdot v = u_i v_i, \quad 1 \leq i \leq 3,$$

le produit scalaire de deux vecteurs dans $\mathbb{R}^3$.

Pour compléter la description du problème, on rajoute au système (4.4)-(4.5) les conditions aux limites données par :

$$\upsilon = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times]0, T[, \tag{4.6}$$

$$\upsilon = g\xi \quad \text{sur} \quad \Gamma_L \times]0, T[, \tag{4.7}$$

où ξ est une fonction dépendant seulement de t telle que

$$\xi(0) = 1, \tag{4.8}$$

et g est une fonction vectorielle vérifiant

$$\int_{\partial\Omega} g \cdot n \, dY = 0, \quad g = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1, \quad g \cdot n = 0 \quad \text{sur} \quad \omega, \tag{4.9}$$

où n est la normale unitaire à $\partial\Omega$ extérieure à Ω.
On définit les composantes normales et tangentielles υ_n et υ_τ de la vitesse par

$$\upsilon_n = \upsilon \cdot n = \upsilon_i n_i, \quad \upsilon_{\tau_i} = \upsilon_i - \upsilon_n n_i.$$

La composante normale de la vitesse est nulle sur $\omega \times]0, T[$

$$\upsilon \cdot n = 0 \qquad \text{sur} \quad \omega \times]0, T[, \tag{4.10}$$

et sa composante tangentielle υ_τ est inconnue et satisfait la loi de Tresca [31]

$$\left.\begin{array}{l} |\sigma_\tau| = k \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \quad \upsilon_\tau = s - \lambda\sigma_\tau, \\ |\sigma_\tau| < k \Rightarrow \upsilon_\tau = s, \end{array}\right\} \quad \text{sur} \quad \omega \times]0, T[, \tag{4.11}$$

où

- s est la vitesse cisaillement de la surface ω qui dépend de la position $x \in \omega$ et t,
- σ_τ est la composante tangentielle de σn donnée par

$$\sigma_{\tau_i} = \sigma_{ij} n_j - \sigma_n n_i \quad \text{où} \quad \sigma_n = \sigma_{ij} n_j n_i,$$

- k est une fonction strictement positive dépendante de x et t appelée le seuil limite pour cette contrainte tangentielle.

On rajoute la condition initiale

$$\upsilon(0) = \upsilon_0 \quad \text{dans} \quad \Omega. \tag{4.12}$$

On suppose que $\upsilon_0 \in (W^{1,p}(\Omega))^3$ telle que

$$\begin{gathered} div(\upsilon_0) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \quad \upsilon_0 = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1, \quad \upsilon_0 = g \quad \text{sur} \quad \Gamma_L, \\ \upsilon_0 \cdot n = 0 \quad \text{sur} \quad \omega. \end{gathered} \tag{4.13}$$

Pour nous ramener à la condition aux limites de Dirichlet homogène sur $(\Gamma_1 \cup \Gamma_L)\times]0,T[$ et la condition initiale nulle dans Ω, nous procédons à un changement d'inconnue, on pose :

$$\overline{\upsilon} = \upsilon - \upsilon_0\xi. \tag{4.14}$$

La relation (4.1) devient

$$\tilde{\sigma}_{ij} = 2\mu(\theta, |D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi)|)|D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi)|^{p-2} d_{ij}(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi) - \pi\delta_{ij}. \tag{4.15}$$

On réécrit (4.4) sous la forme

$$\upsilon_i' - \partial_j\sigma_{ij} = f_i, \quad i = 1,2,3, \tag{4.16}$$

donc, avec (4.14) on a

$$\overline{\upsilon}_i' - \partial_j\tilde{\sigma}_{ij} = \overline{f}_i, \quad i = 1,2,3, \tag{4.17}$$

où $\overline{f}_i = f_i - \dfrac{\partial\xi}{\partial t}(\upsilon_0)_i$.

Avec (4.13), la loi de conservation de la masse (4.5) ne change pas, elle s'écrit :

$$div(\overline{\upsilon}) = 0 \qquad \text{dans} \quad \Omega\times]0,T[. \tag{4.18}$$

Nous avons une nouvelle condition aux limites de Dirichlet homogène sur $(\Gamma_1 \cup \Gamma_L)\times]0,T[$

$$\overline{\upsilon} = 0 \quad \text{sur} \quad (\Gamma_1 \cup \Gamma_L)\times]0,T[. \tag{4.19}$$

La condition aux limites pour la composante normale sur $\omega\times]0,T[$ ne change pas, elle s'écrit :

$$\overline{\upsilon} \cdot n = 0 \quad \text{sur} \quad \omega\times]0,T[. \tag{4.20}$$

La condition aux limites (4.11) devient :

$$\left.\begin{array}{l} |\tilde{\sigma}_\tau| = k \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \quad \overline{\upsilon}_\tau = \tilde{s} - \lambda \tilde{\sigma}_\tau, \\ |\tilde{\sigma}_\tau| < k \Rightarrow \overline{\upsilon}_\tau = \tilde{s}, \end{array}\right\} \quad \text{sur} \quad \omega \times]0, T[, \tag{4.21}$$

où $\tilde{s} = s - (\upsilon_0)_\tau \xi$.
Avec (4.8) la condition initiale (4.12) devient

$$\overline{\upsilon}(0) = \upsilon_0 - \upsilon_0 \xi(0) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega. \tag{4.22}$$

Après avoir énoncé le problème, on établit sa formulation variationnelle. Ensuite, pour montrer l'existence et l'unicité de solutions de l'inéquation variationnelle parabolique associée à ce problème, on distingue deux cas : $p > 2$ et $\frac{6}{5} < p < 2$. On commence notre étude par le cas $p > 2$: dans ce cas on utilise un principe analogue à celui du chapitre 3 (cas $p = 2$) et on obtient l'existence et l'unicité d'une solution pour cette inéquation. Par contre, lorsque la viscosité dépend de plus de la vitesse on obtient seulement l'existence par le théorème de point fixe de Schauder [45]. Ensuite, on traite le cas $\frac{6}{5} < p < 2$ qui donne lieu à quelques complications techniques. En effet, si on veut utiliser la méthode de la monotonie pour montrer l'existence et l'unicité de la vitesse solution de l'inéquation variationnelle parabolique comme dans les cas précédents on a besoin d'un espace de Hilbert intermédiaire entre l'espace où on cherche la vitesse et son dual mais malheureusement dans ce cas on n'a pas cette condition. Pour cela, on régularise notre problème. En effet, pour tout $0 < \varepsilon < 1$ on modifie (4.17) avec $\tilde{\sigma}_{ij}^\varepsilon$ au lieu $\tilde{\sigma}_{ij}$ où

$$\tilde{\sigma}_{ij}^\varepsilon = 2(\mu(\theta, |D(\overline{\upsilon}_\varepsilon + \upsilon_0 \xi)|)|D(\overline{\upsilon}_\varepsilon + \upsilon_0 \xi)|^{p-2} + \varepsilon) d_{ij}(\overline{\upsilon}_\varepsilon + \upsilon_0 \xi) - \pi_\varepsilon \delta_{ij}. \tag{4.23}$$

Avec cette modification, on traite le problème approché pour ε fixé, en utilisant les résultats obtenus dans le chapitre 3 et on en déduit l'existence et l'unicité d'une solution pour l'inéquation variationnelle parabolique associée à ce problème approché. Ensuite, on fait des estimations sur les solutions des problèmes approchés indépendamment de ε, puis on passe à la limite quand $\varepsilon \to 0$ et on obtient que le problème original en vitesse admet une solution. On montre l'existence et l'unicité (à une constante près car Ω est connexe) de la pression en utilisant le théorème de De Rham [3]. Puis, en prenant la fonction-test à divergence nulle dans le problème en vitesse et pression, on

montre l'unicité de la vitesse. Finalement, lorsque la viscosité dépend de plus de la vitesse, on traite l'existence de la solution par le théorème de point fixe de Schauder [45].

4.1 Formulation variationnelle

Soient p, q deux nombres réels supérieurs strictement à 1, et p', q' leurs conjugués c-à-d, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$ respectivement.
On reprend les mêmes notations du chapitre 2 et on rappelle les sous-espaces vectoriels des fonctions de $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ suivant :

$$V_0^p=\{\varphi\in\mathbf{W}^{1,p}(\Omega);\quad \varphi=0\quad \text{sur}\quad \Gamma_1\cup\Gamma_L\quad \text{et}\quad \varphi\cdot n=0\quad \text{sur}\quad \omega\},$$

$$V_{0.div}^p=\{\varphi\in V_0^p;\quad div(\varphi)=0\quad \text{dans}\quad \Omega\},$$
$$W_{0.div}^{1,p}=\{\varphi\in\mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega);\quad div(\varphi)=0\quad \text{dans}\quad \Omega\},$$
$$V_{\Gamma_1}^p=\{\varphi\in\mathbf{W}^{1,p}(\Omega);\quad \varphi=0\quad \text{sur}\quad \Gamma_1\},$$

et on pose

$$L_0^{p'}(\Omega)=\{u\in L^{p'}(\Omega);\quad \int_\Omega u(x)\,dx=0\},$$

$$\mathcal{Y}^{p'}=\{\tilde\sigma=(\tilde\sigma_{ij})_{1\le i,j\le 3}\in(L^{p'}(\Omega))^9,\quad div(\tilde\sigma)=(\partial_j\tilde\sigma_{ij})_{1\le i,j\le 3}\in\mathbf{L}^{p'}(\Omega)\}.$$

Maintenant, on donne les sous-espaces vectoriels des fonctions de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ suivants (voir [46], [78])

$$E(\Omega)=\{\psi_0\in\mathbf{L}^2(\Omega);\quad div(\psi_0)\in L^2(\Omega)\},$$

$$H=\{\psi_0\in\mathbf{L}^2(\Omega);\quad div(\psi_0)=0,\quad \psi_0\cdot n=0\quad \text{sur}\quad \partial\Omega\}.$$

Les normes des espaces de Hilbert $\mathbf{L}^2(\Omega)$, $E(\Omega)$ sont données par

$$\|v\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}=\Big(\int_\Omega |v|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}},\quad \|v\|_{E(\Omega)}=\Big(\|v\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}+\|div(v)\|^2_{L^2(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

H est un sous-espace vectoriel fermé de $E(\Omega)$ et est muni de la norme de $E(\Omega)$ (voir [46]), donc par définition

$$\|v\|_H=\|v\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}.$$

Les normes des espaces de Banach $\mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega)$, $V_{0.div}^p$, V_0^p, $W_{0.div}^{1,p}$, $V_{\Gamma_1}^p$ sont définies par

$$\|\upsilon\|_{1.p} = \Big(\int_\Omega |\nabla \upsilon|^p \, dx \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Remarque 4.1 *Soient* $X_0 = V_{0.div}^p$, $X = X' = H$, $X_1 = (V_{0.div}^p)'$. *Pour* $p \geq \frac{6}{5}$ *les injections de* X_0 *dans* X *et* X *dans* X_1 *sont continues (voir le théoreme d'injection de Sobolev* 1.42 [25] pages 34-35 *avec* $n = 3$*) et denses* [46]. *De plus, pour* $p > \frac{6}{5}$ *l'injection de* X_0 *dans* X *est compacte (voir le théoreme de compacité de Rellich-Kondrachov* 1.43 [25] page 35 *avec* $n = 3$*). Considérons l'espace suivant :*

$$\hat{\mathcal{E}} = \{\overline{\varphi} \in L^q(0,T; V_{0.div}^p) \mid \overline{\varphi}' \in L^{q'}(0,T; (V_{0.div}^p)')\},$$

avec $q > 1$ *muni de la norme*

$$\|\overline{\varphi}\|_{\hat{\mathcal{E}}} = \|\overline{\varphi}\|_{L^q(0,T;V_{0.div}^p)} + \|\overline{\varphi}'\|_{L^{q'}(0,T;(V_{0.div}^p)')}, \quad \forall \overline{\varphi} \in \hat{\mathcal{E}}.$$

Suivant [29] pages 54-56 *on a la fonction* $\overline{\varphi} \in C([0,T]; H) \subset C([0,T]; \mathbf{L}^2(\Omega))$ *quitte à modifier* $\overline{\varphi}$ *sur un sous-ensemble de mesure nulle de* $[0,T]$. *De plus, on a*

$$\int_0^T < \overline{\varphi}', \overline{\varphi} >_{(V_{0.div}^p)', V_{0.div}^p} \, dt = \frac{1}{2}\|\overline{\varphi}(T)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - \frac{1}{2}\|\overline{\varphi}(0)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \qquad (4.24)$$

où $< ., . >_{(V_{0.div}^p)', V_{0.div}^p}$ *est le crochet de dualité entre* $V_{0.div}^p$ *et* $(V_{0.div}^p)'$.

Problème 4.1 *Soient* $f \in L^{q'}(0,T; \boldsymbol{L}^2(\Omega))$, $k \in L^{q'}(0,T; L_+^{p'}(\omega))$, μ *vérifie* (4.2), (4.3), $\theta \in L^2(0,T; L^2(\Omega))$, $s \in L^q(0,T; \boldsymbol{L}^p(\omega))$, $\xi \in W^{1,q'}(0,T)$ *vérifiant* (4.8) *et* $\upsilon_0 \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$ *vérifiant* (4.13). *On cherche* $\overline{\upsilon} \in C([0,T]; \mathbf{L}^2(\Omega)) \cap L^q(0,T; V_{0.div}^p)$ *avec* $\overline{\upsilon}' \in L^{q'}(0,T; (V_{0.div}^p)')$, *et* $\pi \in H^{-1}(0,T; L_0^{p'}(\Omega))$, *vérifiant l'inéquation variationnelle parabolique suivante*

$$\begin{aligned} &\Big\langle \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\upsilon}, \tilde{\vartheta})_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}, \zeta \Big\rangle_{\mathcal{D}'(0,T), \mathcal{D}(0,T)} + \int_0^T \Big(a(\theta; \overline{\upsilon}, \tilde{\vartheta}\zeta) - (\pi, div(\tilde{\vartheta}))\zeta \Big) \, dt \\ &+ \int_0^T \Big(j(t, \overline{\upsilon} + \tilde{\vartheta}\zeta) - j(t, \overline{\upsilon}) \Big) \, dt \geq \int_0^T (\overline{f}, \tilde{\vartheta})_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} \zeta \, dt, \\ &\forall \tilde{\vartheta} \in V_0^p \quad \forall \zeta \in \mathcal{D}(0,T), \end{aligned} \qquad (4.25)$$

et la condition initiale (4.22),

où $(.,.)$ désigne le crochet de dualité entre $L^p(\Omega)$ et $L^{p'}(\Omega)$, $(.,.)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$ désigne le produit scalaire dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$, $\left\langle .,. \right\rangle_{\mathcal{D}'(0,T),\mathcal{D}(0,T)}$ représente le crochet de dualité entre $\mathcal{D}(0,T)$ et $\mathcal{D}'(0,T)$,

$$j(t,.) : \begin{cases} V_0^p & \to \mathbb{R} \\ \overline{\varphi} & \mapsto j(t,\overline{\varphi}) = \displaystyle\int_\omega k|\overline{\varphi} - \tilde{s}|\, dx', \end{cases}$$

et

$$a(\theta;.,.) : \begin{cases} V_0^p \times V_0^p \to \mathbb{R} \\ (u,v) \qquad \mapsto a(\theta;u,v) \\ = \displaystyle\int_\Omega 2\mu(\theta,|D(u+\upsilon_0\xi)|)|D(u+\upsilon_0\xi)|^{p-2} d_{ij}(u+\upsilon_0\xi) d_{ij}(v) dx. \end{cases}$$

Proposition 4.1 *Le problème fort* (4.17)-(4.22) *conduit au problème* 4.1.

Preuve. On refait les mêmes calculs pour obtenir l'inéquation variationnelle parabolique que dans le cas $p = 2$, $q = 2$ (voir chapitre 3) : on obtient ainsi l'inéquation variationnelle (4.25). □

Notons $q_* = \frac{q}{q-p+1}$, $q'_* = \frac{q}{p-1}$ avec $q - p + 1 > 0$ et $\frac{1}{q_*} + \frac{1}{q'_*} = 1$.
Si $u \in L^q(0,T;V_0^p)$ alors

$$\mu(\theta,|D(u+\upsilon_0\xi)|)|D(u+\upsilon_0\xi)|^{p-2} D(u+\upsilon_0\xi) \in L^{q'_*}(0,T;(L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega))^9),$$

donc $\displaystyle\int_0^T a(\theta;u,\overline{\varphi})$ est défini dès que $\overline{\varphi} \in L^{q_*}(0,T;V_0^p)$.
D'autre part, pour $q \geq p > 1$ on a $q \geq q_* > 1$ donc $L^q(0,T;V_{0.div}^p) \subset L^{q_*}(0,T;V_{0.div}^p)$ et $L^{q'_*}(0,T;(V_{0.div}^p)') \subset L^{q'}(0,T;(V_{0.div}^p)')$.
Dans toute la suite de cette section on considère l'opérateur $\mathcal{A}$ suivant :
$\mathcal{A} : L^q(0,T;V_{0.div}^p) \to L^{q'}(0,T;(V_{0.div}^p)')$, qui à $u \in L^q(0,T;V_{0.div}^p)$ associe $\mathcal{A}u$ défini par

$$[\mathcal{A}u,\overline{\varphi}] = \int_0^T a(\theta;u,\overline{\varphi})dt, \quad \forall \overline{\varphi} \in L^q(0,T;V_{0.div}^p),$$

où $[.,.]$ désigne le crochet de dualité entre $L^q(0,T;V_{0.div}^p)$ et $L^{q'}(0,T;(V_{0.div}^p)')$.
On note

$$J(\overline{\varphi}) = \int_0^T j(t,\overline{\varphi})\, dt, \quad \forall \overline{\varphi} \in L^q(0,T;V_{0.div}^p).$$

Maintenant, on introduit le problème suivant :

Problème 4.2 *Soient* $f \in L^{q'}(0,T;\boldsymbol{L}^2(\Omega))$, $k \in L^{q'}(0,T;L^{p'}_+(\omega))$, μ *vérifie* (4.2), (4.3), $\theta \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $s \in L^q(0,T;\boldsymbol{L}^p(\omega))$, $\xi \in W^{1,q'}(0,T)$ *vérifiant* (4.8) *et* $\upsilon_0 \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$ *vérifiant* (4.13). *On cherche* $\overline{v} \in C([0,T];\mathbf{L}^2(\Omega)) \cap L^q(0,T;V^p_{0.div})$ *avec* $\overline{v}' \in L^{q'}(0,T;(V^p_{0.div})')$, *vérifiant l'inéquation variationnelle parabolique suivante*

$$\begin{aligned} &[\overline{v}', \tilde{\vartheta}\zeta] + [\mathcal{A}\overline{v}, \tilde{\vartheta}\zeta] + J(\overline{v} + \tilde{\vartheta}\zeta) - J(\overline{v}) \geq \int_0^T (\overline{f}, \tilde{\vartheta})_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} \zeta \, dt, \\ &\forall \tilde{\vartheta} \in V^p_{0.div}, \quad \forall \zeta \in \mathcal{D}(0,T). \end{aligned} \tag{4.26}$$

et la condition initiale (4.22).

4.2 Résultats préliminaires

Lemme 4.1 *Pour tout* $u \in L^p(0,T;\boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega))$ *et* $p > 1$ *on a*

$$\int_\Omega |D(u)|^p \, dx \leq \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx. \tag{4.27}$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} &\int_\Omega |D(u)|^p \, dx = \int_\Omega \Big|\frac{1}{2}\nabla u + \frac{1}{2}(\nabla u)^t\Big|^p \, dx \\ &\leq \int_\Omega \Big(\frac{1}{2}|\nabla u| + \frac{1}{2}|(\nabla u)^t|\Big)^p \, dx. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Considérons la fonction ν_p définie sur $\mathbb{R}^*_+$ par

$$\nu_p(z) = z^p,$$

on a

$$\nu_p'(z) = pz^{p-1}, \quad \nu_p''(z) = p(p-1)z^{p-2},$$

pour $p > 1$ on a $\nu_p''(z) \geq 0$ donc ν_p est convexe donc, pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^*_+$ on a

$$\nu_p\Big(\frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{2}z_2\Big) \leq \frac{1}{2}\nu_p(z_1) + \frac{1}{2}\nu_p(z_2). \tag{4.29}$$

Avec (4.29) la formule (4.28) devient

$$\int_\Omega |D(u)|^p \, dx \leq \int_\Omega \Big(\frac{1}{2}|\nabla u|^p + \frac{1}{2}|(\nabla u)^t|^p\Big) \, dx. \tag{4.30}$$

Comme

$$|\nabla u|^p = \sum_{1\leq i,j\leq 3} |\partial_j u_i|^p = \sum_{1\leq i,j\leq 3} |\partial_i u_j|^p = |(\nabla u)^t|^p,$$

on obtient (4.27). □

Lemme 4.2 *Sous les hypothèses* (4.2), (4.3), $\xi \in W^{1,q'}(0,T)$, $\upsilon_0 \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$ *vérifiant* (4.13), $p > 1$ *et* $q \geq p$ *l'opérateur* $\mathcal{A}$ *est borné, hémicontinu et monotone.*

Preuve. La démonstration est décomposée en deux cas.
1) **Cas** $p > 2$:
Soit $(\overline{\upsilon}, \overline{\varphi}) \in (L^q(0,T;V_0^p))^2$, avec (4.2) et pour presque tout $t \in [0,T]$ on a

$$\begin{aligned} |a(\theta;\overline{\upsilon},\overline{\varphi})| &= \Big| \int_\Omega 2\mu(\theta,|D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)|)|D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)|^{p-2} d_{ij}(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi) d_{ij}(\overline{\varphi})\, dx \Big| \\ &\leq 2\mu_1 \int_\Omega |D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)|^{p-1} |D(\overline{\varphi})|\, dx. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder et (4.27), on obtient

$$|a(\theta;\overline{\upsilon},\overline{\varphi})| \leq 2\mu_1 \|\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi\|_{1.p}^{p-1} \|\overline{\varphi}\|_{1.p},$$

d'où

$$|a(\theta;\overline{\upsilon},\overline{\varphi})| \leq 2\mu_1 (\|\overline{\upsilon}\|_{1.p} + \|\upsilon_0\xi\|_{1.p})^{p-1} \|\overline{\varphi}\|_{1.p}. \tag{4.31}$$

Puisque $\xi \in W^{1,q'}(0,T) \subset C([0,T])$ avec injection continue on a

$$\exists c > 0, \quad |\xi(t)| \leq c \quad \forall t \in [0,T]. \tag{4.32}$$

Comme

$$(a+b)^{p_*} \leq 2^{p_*-1}(a^{p_*} + b^{p_*}) \quad \forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall p_* > 1, \tag{4.33}$$

en appliquant cette inégalité pour $p_* = p-1$ (car $p > 2$) dans (4.31) et en utilisant (4.32) on obtient

$$\begin{aligned} |a(\theta;\overline{\upsilon},\overline{\varphi})| &\leq 2^{p-1}\mu_1 (\|\overline{\upsilon}\|_{1.p}^{p-1} + \|\upsilon_0\xi\|_{1.p}^{p-1}) \|\overline{\varphi}\|_{1.p} \\ &\leq 2^{p-1}\mu_1 \|\overline{\upsilon}\|_{1.p}^{p-1} \|\overline{\varphi}\|_{1.p} + 2^{p-1}\mu_1 c^{p-1} \|\upsilon_0\|_{1.p}^{p-1} \|\overline{\varphi}\|_{1.p}. \end{aligned} \tag{4.34}$$

D'autre part, pour tout $(\overline{v},\overline{\varphi}) \in (L^q(0,T;V^p_{0.div}))^2$, on a

$$\begin{aligned}
|[\mathcal{A}\overline{v},\overline{\varphi}]| &= \Big|\int_0^T a(\theta;\overline{v},\overline{\varphi})\,dt\Big| \\
&\leq \int_0^T |a(\theta;\overline{v},\overline{\varphi})|\,dt \\
&\leq 2^{p-1}\mu_1 \int_0^T \|\overline{v}\|_{1.p}^{p-1}\|\overline{\varphi}\|_{1.p}\,dt + 2^{p-1}\mu_1 c^{p-1}\|\upsilon_0\|_{1.p}^{p-1}\int_0^T \|\overline{\varphi}\|_{1.p}\,dt.
\end{aligned}$$

Or l'injection de $L^q(0,T;V^p_{0.div})$ dans $L^{q_*}(0,T;V^p_{0.div})$ est continue (car $q \geq q_*$) c-à-d,

$$\exists c_0 > 0, \quad \|u\|_{L^{q_*}(0,T;V^p_{0.div})} \leq c_0\|u\|_{L^q(0,T;V^p_{0.div})}, \tag{4.35}$$

en utilisant l'inégalité de Hölder en temps et (4.35) on obtient

$$|[\mathcal{A}\overline{v},\overline{\varphi}]| \leq 2^{p-1}c_0\mu_1(\|\overline{v}\|^{p-1}_{L^q(0,T;V^p_{0.div})} + c^{p-1}T^{\frac{1}{q'_*}}\|\upsilon_0\|_{1.p}^{p-1})\|\overline{\varphi}\|_{L^q(0,T;V^p_{0.div})}. \tag{4.36}$$

Donc

$$\sup_{\overline{\varphi}\neq 0}\frac{|[\mathcal{A}\overline{v},\overline{\varphi}]|}{\|\overline{\varphi}\|_{L^q(0,T;V^p_{0.div})}} \leq 2^{p-1}c_0\mu_1(\|\overline{v}\|^{p-1}_{L^q(0,T;V^p_{0.div})} + c^{p-1}T^{\frac{1}{q'_*}}\|\upsilon_0\|_{1.p}^{p-1}),$$

d'où

$$\|\mathcal{A}\overline{v}\|_{L^{q'}(0,T;(V^p_{0.div})')} \leq 2^{p-1}c_0\mu_1(\|\overline{v}\|^{p-1}_{L^q(0,T;V^p_{0.div})} + c^{p-1}T^{\frac{1}{q'_*}}\|\upsilon_0\|_{1.p}^{p-1}), \tag{4.37}$$

ce qui montre que $\mathcal{A}$ est borné.
Pour montrer que $\mathcal{A}$ est hémicontinu, il faut montrer que pour tout $u,\upsilon,w \in L^q(0,T;V^p_{0.div})$, la fonction :

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\
&\lambda \mapsto \alpha_0(\lambda) = [\mathcal{A}(u+\lambda\upsilon), w]
\end{aligned}$$

est continue. On a

$$\begin{aligned}
\alpha_0(\lambda) &= \int_0^T\int_\Omega 2\mu(\theta,|D((u+\lambda\upsilon)+\upsilon_0\xi)|)|D((u+\lambda\upsilon)+\upsilon_0\xi)|^{p-2} \\
&\times (D((u+\lambda\upsilon)+\upsilon_0\xi) : D(w))\,dx\,dt.
\end{aligned}$$

D'après (4.3) et pour presque tout $(t,x) \in [0,T]\times\Omega$ la fonction

$$S(\lambda) = 2\mu(\theta,|D((u+\lambda\upsilon)+\upsilon_0\xi)|)|D((u+\lambda\upsilon)+\upsilon_0\xi)|^{p-2}D((u+\lambda\upsilon)+\upsilon_0\xi) : D(w)$$

est clairement continue sur $\mathbb{R}$. Soit $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ une suite convergente vers λ dans $\mathbb{R}$, alors $S_n := S(\lambda_n) \in L^1(0,T;L^1(\Omega))$ et S_n converge vers $S(\lambda)$ quand $n \to +\infty$ dans $L^1(0,T;L^1(\Omega))$. En effet, la suite $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ étant bornée, il existe $\mathcal{M} > 0$ tel que $|\lambda_n| < \mathcal{M}$, pour tout $n \geq 0$. Ainsi

$$\begin{aligned} |S_n| &\leq 2\mu_1|D((u+\lambda_n\upsilon)+\upsilon_0\xi)|^{p-1}|D(w)| \\ &\leq 2\mu_1(|D(u)|+|\lambda_n||D(\upsilon)|+|\xi||D(\upsilon_0)|)^{p-1}|D(w)| \\ &\leq 2\mu_1(|D(u)|+\mathcal{M}|D(\upsilon)|+c|D(\upsilon_0)|)^{p-1}|D(w)|, \end{aligned}$$

d'où

$$|S_n| \leq \mathcal{O} := 2\mu_1(|D(u)|+\mathcal{M}|D(\upsilon)|+c|D(\upsilon_0)|)^{p-1}|D(w)|,$$

comme $\mathcal{O} \in L^1(0,T;L^1(\Omega))$ et est positive, par le théorème de la convergence dominée, on en déduit que $S(\lambda) \in L^1(0,T;L^1(\Omega))$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^T \int_\Omega S_n \, dx \, dt = \int_0^T \int_\Omega S(\lambda) \, dx \, dt,$$

c-à-d

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_0(\lambda_n) = \alpha_0(\lambda).$$

L'opérateur $\mathcal{A}$ est donc hémicontinu. Pour la monotonie de $\mathcal{A}$, on doit établir que

$$[\mathcal{A}u - \mathcal{A}v, u-v] \geq 0 \qquad \forall u, v \in L^q(0,T;V^p_{0.div}).$$

En effet,

$$\begin{aligned} &[\mathcal{A}u - \mathcal{A}v, u-v] \\ &= 2\int_0^T \int_\Omega \mu(\theta,|D(u+\upsilon_0\xi)|)|D(u+\upsilon_0\xi)|^{p-2}d_{ij}(u+\upsilon_0\xi)d_{ij}(u-v)\,dx\,dt \\ &-2\int_0^T \int_\Omega \mu(\theta,|D(\upsilon+\upsilon_0\xi)|)|D(\upsilon+\upsilon_0\xi)|^{p-2}d_{ij}(\upsilon+\upsilon_0\xi)d_{ij}(u-v)\,dx\,dt. \end{aligned}$$

Notons

$$F_1 = \mu(\theta,|D(u+\upsilon_0\xi)|)|D(u+\upsilon_0\xi)|^{p-2}, \tag{4.38}$$

$$F_2 = \mu(\theta,|D(\upsilon+\upsilon_0\xi)|)|D(\upsilon+\upsilon_0\xi)|^{p-2}, \tag{4.39}$$

d'où

$$
\begin{aligned}
&[\mathcal{A}u - \mathcal{A}v, u - v] \\
&= \int_0^T \int_\Omega \Big(2F_1 |D(u + \upsilon_0\xi)|^2 - 2F_1 D(u + \upsilon_0\xi) : D(v + \upsilon_0\xi) \\
&+ 2F_2 |D(v + \upsilon_0\xi)|^2 - 2F_2 D(u + \upsilon_0\xi) : D(v + \upsilon_0\xi) \Big)\, dx\, dt.
\end{aligned}
$$

Du fait que $F_1 \geq 0$, $F_2 \geq 0$ et

$$
D(u + \upsilon_0\xi) : D(v + \upsilon_0\xi) \leq |D(u + \upsilon_0\xi)||D(v + \upsilon_0\xi)|,
$$

on obtient

$$
\begin{aligned}
&[\mathcal{A}u - \mathcal{A}v, u - v] \\
&\geq \int_0^T \int_\Omega \Big(2F_1 |D(u + \upsilon_0\xi)|^2 - 2F_1 |D(u + \upsilon_0\xi)||D(v + \upsilon_0\xi)| \\
&+ 2F_2 |D(v + \upsilon_0\xi)|^2 - 2F_2 |D(u + \upsilon_0\xi)||D(v + \upsilon_0\xi)| \Big)\, dx\, dt.
\end{aligned}
$$

En utilisant

$$
2|D(u + \upsilon_0\xi)||D(v + \upsilon_0\xi)| \leq |D(u + \upsilon_0\xi)|^2 + |D(v + \upsilon_0\xi)|^2,
$$

on obtient

$$
\begin{aligned}
&[\mathcal{A}u - \mathcal{A}v, u - v] \geq \int_0^T \int_\Omega \Big(2F_1 |D(u + \upsilon_0\xi)|^2 - (F_1 + F_2) \\
&\times (|D(u + \upsilon_0\xi)|^2 + |D(v + \upsilon_0\xi)|^2) + 2F_2 |D(v + \upsilon_0\xi)|^2 \Big)\, dx\, dt \\
&= \int_0^T \int_\Omega \Big(F_1 |D(u + \upsilon_0\xi)|^2 - F_1 |D(v + \upsilon_0\xi)|^2 \\
&+ F_2 |D(v + \upsilon_0\xi)|^2 - F_2 |D(u + \upsilon_0\xi)|^2 \Big)\, dx\, dt \\
&= \int_0^T \int_\Omega (F_1 - F_2)(|D(u + \upsilon_0\xi)|^2 - |D(v + \upsilon_0\xi)|^2)\, dx\, dt.
\end{aligned}
$$

Avec (4.38), (4.39) on obtient

$$
\begin{aligned}
&[\mathcal{A}u-\mathcal{A}v,u-v]\\
&\geq\int_0^T\int_\Omega\Big(\mu(\theta,|D(u+\upsilon_0\xi)|)|D(u+\upsilon_0\xi)|^{p-2}\\
&-\mu(\theta,|D(v+\upsilon_0\xi)|)|D(v+\upsilon_0\xi)|^{p-2}\Big)\\
&\times\Big(|D(u+\upsilon_0\xi)|^2-|D(v+\upsilon_0\xi)|^2\Big)\,dx\,dt\\
&=\int_0^T\int_\Omega\bigg(\Big(\mu(\theta,|D(u+\upsilon_0\xi)|)-\mu(\theta,|D(v+\upsilon_0\xi)|)\Big)|D(u+\upsilon_0\xi)|^{p-2}\\
&+\mu(\theta,|D(v+\upsilon_0\xi)|)\Big(|D(u+\upsilon_0\xi)|^{p-2}-|D(v+\upsilon_0\xi)|^{p-2}\Big)\bigg)\\
&\times\Big(|D(u+\upsilon_0\xi)|^2-|D(v+\upsilon_0\xi)|^2\Big)\,dx\,dt,
\end{aligned}
$$

d'où

$$
\begin{aligned}
&[\mathcal{A}u-\mathcal{A}v,u-v]\geq\int_0^T\int_\Omega|D(u+\upsilon_0\xi)|^{p-2}\\
&\times\Big(\mu(\theta,|D(u+\upsilon_0\xi)|)-\mu(\theta,|D(v+\upsilon_0\xi)|)\Big)\\
&\times\Big(|D(u+\upsilon_0\xi)|^2-|D(v+\upsilon_0\xi)|^2\Big)\,dx\,dt\\
&+\int_0^T\int_\Omega\mu(\theta,|D(v+\upsilon_0\xi)|)\Big(|D(u+\upsilon_0\xi)|^{p-2}-|D(v+\upsilon_0\xi)|^{p-2}\Big)\\
&\times\Big(|D(u+\upsilon_0\xi)|^2-|D(v+\upsilon_0\xi)|^2\Big)\,dx\,dt.
\end{aligned}
$$

Avec (4.2), (4.3) et la monotonie de la fonction $w\mapsto w^{p-2}$ sur $\mathbb{R}^+$ car $p-2>0$ on a

$$[\mathcal{A}u-\mathcal{A}v,u-v]\geq 0,$$

ce qui montre que l'opérateur $\mathcal{A}$ est monotone.

2) **Cas** $1<p<2$: Comme

$$(a+b)^{p_*}\leq a^{p_*}+b^{p_*}\quad\forall(a,b)\in\mathbb{R}_+^*\quad\forall p_*\in]0,1[, \tag{4.40}$$

en appliquant cette inégalité pour $p_*=p-1$ (car $1<p<2$) dans (4.31) et en utilisant (4.32) on obtient

$$
\begin{aligned}
|a(\theta;\overline{v},\overline{\varphi})|&\leq 2\mu_1(\|\overline{v}\|_{1.p}^{p-1}+\|\upsilon_0\xi\|_{1.p}^{p-1})\|\overline{\varphi}\|_{1.p}\\
&\leq 2\mu_1\|\overline{v}\|_{1.p}^{p-1}\|\overline{\varphi}\|_{1.p}+2\mu_1 c^{p-1}\|\upsilon_0\|_{1.p}^{p-1}\|\overline{\varphi}\|_{1.p}.
\end{aligned}
\tag{4.41}
$$

D'autre part, pour tout $(\overline{v},\overline{\varphi}) \in (L^q(0,T;V^p_{0.div}))^2$, on a

$$\begin{aligned}
|[\mathcal{A}\overline{v},\overline{\varphi}]| &= \Big|\int_0^T a(\theta;\overline{v},\overline{\varphi})\,dt\Big| \\
&\leq \int_0^T |a(\theta;\overline{v},\overline{\varphi})|\,dt \\
&\leq 2\mu_1 \int_0^T \|\overline{v}\|^{p-1}_{1.p}\|\overline{\varphi}\|_{1.p}\,dt + 2\mu_1 c^{p-1}\|\upsilon_0\|^{p-1}_{1.p}\int_0^T \|\overline{\varphi}\|_{1.p}\,dt.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder en temps et (4.35) on obtient

$$|[\mathcal{A}\overline{v},\overline{\varphi}]| \leq 2c_0\mu_1(\|\overline{v}\|^{p-1}_{L^q(0,T;V^p_{0.div})} + c^{p-1}T^{\frac{1}{q_*}}\|\upsilon_0\|^{p-1}_{1.p})\|\overline{\varphi}\|_{L^q(0,T;V^p_{0.div})}. \quad (4.42)$$

Donc

$$\sup_{\overline{\varphi}\neq 0}\frac{|[\mathcal{A}\overline{v},\overline{\varphi}]|}{\|\overline{\varphi}\|_{L^q(0,T;V^p_{0.div})}} \leq 2c_0\mu_1(\|\overline{v}\|^{p-1}_{L^q(0,T;V^p_{0.div})} + c^{p-1}T^{\frac{1}{q_*}}\|\upsilon_0\|^{p-1}_{1.p}),$$

d'où

$$\|\mathcal{A}\overline{v}\|_{L^{q'}(0,T;(V^p_{0.div})')} \leq 2c_0\mu_1(\|\overline{v}\|^{p-1}_{L^q(0,T;V^p_{0.div})} + c^{p-1}T^{\frac{1}{q'_*}}\|\upsilon_0\|^{p-1}_{1.p}), \quad (4.43)$$

ce qui montre que $\mathcal{A}$ est borné.
Pour $1 < p < 2$ l'opérateur $\mathcal{A}$ est hémicontinu. En effet, on fait les mêmes calculs pour avoir l'hémicontinuité de $\mathcal{A}$ que dans le cas $p > 2$ et on a aussi $\mathcal{A}$ hémicontinu dans le cas $1 < p < 2$.
Pour la monotonie de $\mathcal{A}$, on doit établir que

$$[\mathcal{A}u - \mathcal{A}v, u - v] \geq 0 \qquad \forall u, v \in L^q(0,T;V^p_{0.div}).$$

On a

$$\begin{aligned}
&[\mathcal{A}u - \mathcal{A}v, u - v] \\
&= \int_0^T\int_\Omega \Big(2\mu(\theta,|D(u+\upsilon_0\xi)|)|D(u+\upsilon_0\xi)|^{p-2}D(u+\upsilon_0\xi) \\
&-2\mu(\theta,|D(v+\upsilon_0\xi)|)|D(v+\upsilon_0\xi)|^{p-2}D(v+\upsilon_0\xi)\Big) : \big(D(u+\upsilon_0\xi) \\
&-D(v+\upsilon_0\xi)\big)\,dx\,dt.
\end{aligned}$$

Notons

$$\alpha = 2\mu(\theta, |D(u+\upsilon_0\xi)|), \quad \beta = 2\mu(\theta, |D(v+\upsilon_0\xi)|),$$

on obtient

$$[\mathcal{A}u - \mathcal{A}v, u-v] = \int_0^T \int_\Omega \Big(\alpha|D(u+\upsilon_0\xi)|^{p-2}D(u+\upsilon_0\xi)$$
$$-\beta|D(v+\upsilon_0\xi)|^{p-2}D(v+\upsilon_0\xi)\Big) : (D(u+\upsilon_0\xi) - D(v+\upsilon_0\xi))\, dx\, dt.$$

En utilisant l'expression

$$\begin{aligned} 2D(u+\upsilon_0\xi) : D(v+\upsilon_0\xi) &= |D(u+\upsilon_0\xi)|^2 + |D(v+\upsilon_0\xi)|^2 \\ &- |D(u+\upsilon_0\xi) - D(v+\upsilon_0\xi)|^2, \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} [\mathcal{A}u - \mathcal{A}v, u-v] = \int_0^T \int_\Omega \frac{1}{2}\Big((\alpha|D(u+\upsilon_0\xi)|^{p-2} + \beta|D(v+\upsilon_0\xi)|^{p-2}) \\ \times|D(u+\upsilon_0\xi) - D(v+\upsilon_0\xi)|^2 + (|D(u+\upsilon_0\xi)|^2 - |D(v+\upsilon_0\xi)|^2) \\ \times(\alpha|D(u+\upsilon_0\xi)|^{p-2} - \beta|D(v+\upsilon_0\xi)|^{p-2})\Big)\, dx\, dt. \end{aligned} \tag{4.44}$$

Notons $r = 2-p$ tel que $0 < r < 1$ (car $1 < p < 2$). Pour $|D(u+\upsilon_0\xi)|$ et $|D(v+\upsilon_0\xi)|$ non nuls, on trouve

$$\begin{aligned} [\mathcal{A}u - \mathcal{A}v, u-v] &= \int_0^T \int_\Omega \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{|D(u+\upsilon_0\xi)||D(v+\upsilon_0\xi)|}\Big)^r \\ &\times\Big((\beta|D(u+\upsilon_0\xi)|^r + \alpha|D(v+\upsilon_0\xi)|^r) \\ &\times|D(u+\upsilon_0\xi) - D(v+\upsilon_0\xi)|^2 \\ &-(\beta|D(u+\upsilon_0\xi)|^r - \alpha|D(v+\upsilon_0\xi)|^r) \\ &\times(|D(u+\upsilon_0\xi)|^2 - |D(v+\upsilon_0\xi)|^2)\Big)\, dx\, dt, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}[\mathcal{A}u-\mathcal{A}v,u-v] \;&\geq \int_0^T\int_\Omega \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{|D(u+\upsilon_0\xi)||D(v+\upsilon_0\xi)|}\Big)^r\\ &\times\Big((\beta|D(u+\upsilon_0\xi)|^r+\alpha|D(v+\upsilon_0\xi)|^r)\\ &\times(|D(u+\upsilon_0\xi)|-|D(v+\upsilon_0\xi)|)^2\\ &-(\beta|D(u+\upsilon_0\xi)|^r-\alpha|D(v+\upsilon_0\xi)|^r)\\ &\times(|D(u+\upsilon_0\xi)|^2-|D(v+\upsilon_0\xi)|^2)\Big)\,dx\,dt,\end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned}&[\mathcal{A}u-\mathcal{A}v,u-v]\\ &\geq \int_0^T\int_\Omega \frac{1}{2}(|D(u+\upsilon_0\xi)|-|D(v+\upsilon_0\xi)|)\Big(\frac{1}{|D(u+\upsilon_0\xi)||D(v+\upsilon_0\xi)|}\Big)^r\\ &\times\Big((\beta|D(u+\upsilon_0\xi)|^r+\alpha|D(v+\upsilon_0\xi)|^r)(|D(u+\upsilon_0\xi)|-|D(v+\upsilon_0\xi)|)\\ &-(\beta|D(u+\upsilon_0\xi)|^r-\alpha|D(v+\upsilon_0\xi)|^r)(|D(u+\upsilon_0\xi)|+|D(v+\upsilon_0\xi)|)\Big)\,dx\,dt.\end{aligned}$$

- Si $|D(u+\upsilon_0\xi)|\geq|D(v+\upsilon_0\xi)|>0$, on note $\tilde{S}=\dfrac{|D(u+\upsilon_0\xi)|}{|D(v+\upsilon_0\xi)|}\geq 1$, d'où

$$\begin{aligned}[\mathcal{A}u-\mathcal{A}v,u-v] \;&\geq\; \int_0^T\int_\Omega \frac{|D(v+\upsilon_0\xi)|^2}{2|D(u+\upsilon_0\xi)|^r}(\tilde{S}-1)\\ &\times\;\Big((\beta\tilde{S}^r+\alpha)(\tilde{S}-1)-(\beta\tilde{S}^r-\alpha)(\tilde{S}+1)\Big)\,dx\,dt\\ &=\; \int_0^T\int_\Omega \frac{|D(v+\upsilon_0\xi)|^2}{|D(u+\upsilon_0\xi)|^r}(\tilde{S}-1)(\alpha\tilde{S}-\beta\tilde{S}^r)\,dx\,dt.\end{aligned}$$

Comme $0<|D(v+\upsilon_0\xi)|\leq|D(u+\upsilon_0\xi)|$ et d'après l'hypothèse (4.3) on obtient

$$0<\beta=2\mu(\theta,|D(v+\upsilon_0\xi)|)\leq 2\mu(\theta,|D(u+\upsilon_0\xi)|)=\alpha.$$

Pour $0<r<1$ on a $\tilde{S}^r\leq\tilde{S}$ et comme $\beta\leq\alpha$ on a

$$\beta\tilde{S}^r\leq\alpha\tilde{S}\Rightarrow\alpha\tilde{S}-\beta\tilde{S}^r\geq 0. \tag{4.45}$$

On déduit donc que

$$[\mathcal{A}u - \mathcal{A}v, u - v] \geq 0.$$

Quitte à modifier les rôles de u et v dès le départ, on peut se ramener au cas précédent si $|D(v + \upsilon_0\xi)| \geq |D(u + \upsilon_0\xi)| > 0$.

- Si $|D(u + \upsilon_0\xi)| = |D(v + \upsilon_0\xi)| = 0$, de (4.44) on obtient

$$[\mathcal{A}u - \mathcal{A}v, u - v] = 0.$$

- Si $|D(u + \upsilon_0\xi)| \neq 0$ et $|D(v + \upsilon_0\xi)| = 0$, de (4.44) et comme $\alpha > 0$ on obtient

$$[\mathcal{A}u - \mathcal{A}v, u - v] = \int_0^T \int_\Omega \alpha |D(u + \upsilon_0\xi)|^p \, dx \, dt \geq 0.$$

Quitte à modifier les rôles de u et v dès le départ, on peut se ramener au cas précédent si $|D(u + \upsilon_0\xi)| = 0$ et $|D(v + \upsilon_0\xi)| \neq 0$.
Donc l'opérateur $\mathcal{A}$ est monotone. □

Remarque 4.2 *Dans le cas où $q > p$ on ne peut pas établir la coercivité de l'opérateur $\mathcal{A}$ qui est une propriété importante pour montrer l'existence de la solution. En effet, l'opérateur $\mathcal{A}$ est coercif ssi,*

$$\exists \hat{v} \in L^q(0, T; V^p_{0.div}) \quad tel\ que \quad J(\hat{v}) < \infty,$$

et

$$\lim_{\|u\|_{L^q(0,T;V^p_{0.div})} \to +\infty} \frac{[\mathcal{A}u, u - \hat{v}] + J(u)}{\|u\|_{L^q(0,T;V^p_{0.div})}} = +\infty.$$

On a

$$\begin{aligned}
&[\mathcal{A}u, u - \hat{v}] \\
&= 2 \int_0^T \int_\Omega \mu(\theta, |D(u + \upsilon_0\xi)|) |D(u + \upsilon_0\xi)|^{p-2} d_{ij}(u + \upsilon_0\xi) d_{ij}(u - \hat{v}) \, dx \, dt \\
&= 2 \int_0^T \int_\Omega \mu(\theta, |D(u + \upsilon_0\xi)|) |D(u + \upsilon_0\xi)|^p \, dx \, dt \\
&-2 \int_0^T \int_\Omega \mu(\theta, |D(u + \upsilon_0\xi)|) |D(u + \upsilon_0\xi)|^{p-2} d_{ij}(u + \upsilon_0\xi) d_{ij}(\upsilon_0\xi + \hat{v}) \, dx \, dt.
\end{aligned}$$

Du fait que

$$d_{ij}(u+\upsilon_0\xi)d_{ij}(\upsilon_0\xi+\hat{\upsilon}) = D(u+\upsilon_0\xi) : D(\upsilon_0\xi+\hat{\upsilon}) \leq |D(u+\upsilon_0\xi)||D(\upsilon_0\xi+\hat{\upsilon})|,$$

et de (4.2) *on obtient*

$$\begin{aligned}[\mathcal{A}u, u-\hat{\upsilon}] &\geq 2\mu_0 \int_0^T \int_\Omega |D(u+\upsilon_0\xi)|^p \, dx \, dt \\ &-2\mu_1 \int_0^T \int_\Omega |D(u+\upsilon_0\xi)|^{p-1} |D(\upsilon_0\xi+\hat{\upsilon})| \, dx \, dt,\end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Hölder en espace et avec (4.27), (4.32) *on obtient*

$$\begin{aligned}&[\mathcal{A}u, u-\hat{\upsilon}] \geq 2\mu_0 \int_0^T \int_\Omega |D(u+\upsilon_0\xi)|^p \, dx \, dt \\ &-2\mu_1 c\|\upsilon_0\|_{1.p} \int_0^T \|u+\upsilon_0\xi\|_{1.p}^{p-1} \, dt - 2\mu_1 \int_0^T \|u+\upsilon_0\xi\|_{1.p}^{p-1} \|\hat{\upsilon}\|_{1.p} \, dt.\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Korn, il existe $C_{Korn} > 0$ *telle que*

$$|u|_{1.p} \geq C_{Korn}\|u\|_{1.p} \quad \forall u \in V^p_{\Gamma_1}, \tag{4.46}$$

où

$$|u|^p_{1.p} = \int_\Omega |D(u)|^p \, dx.$$

On obtient

$$\begin{aligned}[\mathcal{A}u, u-\hat{\upsilon}] \quad &\geq 2(C_{Korn})^p\mu_0\|u+\upsilon_0\xi\|^p_{L^p(0,T;V^p_{\Gamma_1})} \\ &-2\mu_1 c \int_0^T \|u+\upsilon_0\xi\|_{1.p}^{p-1}\|\upsilon_0\|_{1.p} \, dt \\ &-2\mu_1 \int_0^T \|u+\upsilon_0\xi\|_{1.p}^{p-1}\|\hat{\upsilon}\|_{1.p} \, dt.\end{aligned} \tag{4.47}$$

Comme $L^p(0,T;V^p_{0.div}) \subset L^p(0,T;V^p_{\Gamma_1})$ *et puisque ils ont la même norme on a*

$$\begin{aligned}&[\mathcal{A}u, u-\hat{\upsilon}] \geq 2(C_{Korn})^p\mu_0 \Big| \|u\|_{L^p(0,T;V^p_{0.div})} - \|\upsilon_0\xi\|_{L^p(0,T;V^p_{\Gamma_1})} \Big|^p \\ &-2\mu_1 c\|\upsilon_0\|_{1.p} \int_0^T (\|u\|_{1.p} + c\|\upsilon_0\|_{1.p})^{p-1} \, dt \\ &-2\mu_1 \int_0^T (\|u\|_{1.p} + c\|\upsilon_0\|_{1.p})^{p-1}\|\hat{\upsilon}\|_{1.p} \, dt.\end{aligned} \tag{4.48}$$

- *Pour $p > 2$, en utilisant* (4.33) *on obtient*

$$\begin{aligned}
[\mathcal{A}u, u - \hat{v}] &\geq 2(C_{Korn})^p \mu_0 \Big| \|u\|_{L^p(0,T;V^p_{0.div})} - \|\upsilon_0 \xi\|_{L^p(0,T;V^p_{\Gamma_1})} \Big|^p \\
&- 2^{p-1} \mu_1 c \|\upsilon_0\|_{1.p} \int_0^T (\|u\|^{p-1}_{1.p} + c^{p-1} \|\upsilon_0\|^{p-1}_{1.p})\, dt \\
&- 2^{p-1} \mu_1 \int_0^T (\|u\|^{p-1}_{1.p} + c^{p-1} \|\upsilon_0\|^{p-1}_{1.p}) \|\hat{v}\|_{1.p}\, dt.
\end{aligned}$$

On a $\hat{v} \in L^q(0,T;V^p_{0.div}) \subset L^{q_*}(0,T;V^p_{0.div})$, en utilisant l'inégalité de Hölder en temps on obtient

$$\begin{aligned}
[\mathcal{A}u, u - \hat{v}] &\geq 2(C_{Korn})^p \mu_0 \Big| \|u\|_{L^p(0,T;V^p_{0.div})} - \|\upsilon_0 \xi\|_{L^p(0,T;V^p_{\Gamma_1})} \Big|^p \\
&- 2^{p-1} \mu_1 \Big((c\|\upsilon_0\|_{1.p} T^{\frac{1}{q_*}} + \|\hat{v}\|_{L^{q_*}(0,T;V^p_{0.div})}) \|u\|^{p-1}_{L^q(0,T;V^p_{0.div})} \\
&+ T c^p \|\upsilon_0\|^p_{1.p} + c^{p-1} T^{\frac{1}{q'_*}} \|\upsilon_0\|^{p-1}_{1.p} \|\hat{v}\|_{L^{q_*}(0,T;V^p_{0.div})} \Big),
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
&\frac{[\mathcal{A}u, u - \hat{v}]}{\|u\|_{L^q(0,T;V^p_{0.div})}} \geq 2(C_{Korn})^p \mu_0 \frac{\Big| \|u\|_{L^p(0,T;V^p_{0.div})} - \|\upsilon_0 \xi\|_{L^p(0,T;V^p_{\Gamma_1})} \Big|^p}{\|u\|_{L^q(0,T;V^p_{0.div})}} \\
&-2^{p-1} \mu_1 \Big((c\|\upsilon_0\|_{1.p} T^{\frac{1}{q_*}} + \|\hat{v}\|_{L^{q_*}(0,T;V^p_{0.div})}) \|u\|^{p-2}_{L^q(0,T;V^p_{0.div})} \\
&+ \frac{1}{\|u\|_{L^q(0,T;V^p_{0.div})}} \big(T c^p \|\upsilon_0\|^p_{1.p} + c^{p-1} T^{\frac{1}{q'_*}} \|\upsilon_0\|^{p-1}_{1.p} \|\hat{v}\|_{L^{q_*}(0,T;V^p_{0.div})} \big) \Big),
\end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned}
&\frac{[\mathcal{A}u, u - \hat{v}]}{\|u\|_{L^q(0,T;V^p_{0.div})}} \geq 2(C_{Korn})^p \mu_0 \frac{\|u\|^p_{L^p(0,T;V^p_{0.div})}}{\|u\|_{L^q(0,T;V^p_{0.div})}} \Big| 1 - \frac{\|\upsilon_0 \xi\|_{L^p(0,T;V^p_{\Gamma_1})}}{\|u\|_{L^p(0,T;V^p_{0.div})}} \Big|^p \\
&-2^{p-1} \mu_1 \Big((c\|\upsilon_0\|_{1.p} T^{\frac{1}{q_*}} + \|\hat{v}\|_{L^{q_*}(0,T;V^p_{0.div})}) \|u\|^{p-2}_{L^q(0,T;V^p_{0.div})} \\
&+ \frac{1}{\|u\|_{L^q(0,T;V^p_{0.div})}} \big(T c^p \|\upsilon_0\|^p_{1.p} + c^{p-1} T^{\frac{1}{q'_*}} \|\upsilon_0\|^{p-1}_{1.p} \|\hat{v}\|_{L^{q_*}(0,T;V^p_{0.div})} \big) \Big).
\end{aligned} \tag{4.49}$$

D'autre part, pour $1 < p < 2$, en appliquant l'inégalité (4.40) *dans* (4.48) *on*

obtient

$$\frac{[\mathcal{A}u, u-\hat{v}]}{\|u\|_{L^q(0,T;V^p_{0.div})}} \geq 2(C_{Korn})^p\mu_0\frac{\|u\|^p_{L^p(0,T;V^p_{0.div})}}{\|u\|_{L^q(0,T;V^p_{0.div})}}\Big|1-\frac{\|\upsilon_0\xi\|_{L^p(0,T;V^p_{\Gamma_1})}}{\|u\|_{L^p(0,T;V^p_{0.div})}}\Big|^p$$
$$-2\mu_1\Big((c\|\upsilon_0\|_{1.p}T^{\frac{1}{q_*}}+\|\hat{v}\|_{L^{q_*}(0,T;V^p_{0.div})})\|u\|^{p-2}_{L^q(0,T;V^p_{0.div})} \tag{4.50}$$
$$+\frac{1}{\|u\|_{L^q(0,T;V^p_{0.div})}}\big(Tc^p\|\upsilon_0\|^p_{1.p}+c^{p-1}T^{\frac{1}{q'_*}}\|\upsilon_0\|^{p-1}_{1.p}\|\hat{v}\|_{L^{q_*}(0,T;V^p_{0.div})}\big)\Big).$$

Pour $q>p$ on a l'injection de $L^q(0,T;V^p_{0.div})$ dans $L^p(0,T;V^p_{0.div})$ continue c-à-d,

$$\exists c_q>0,\quad \|u\|_{L^p(0,T;V^p_{0.div})}\leq c_q\|u\|_{L^q(0,T;V^p_{0.div})},\quad \forall u\in L^q(0,T;V^p_{0.div}),$$

d'où

$$\frac{\|u\|^p_{L^p(0,T;V^p_{0.div})}}{\|u\|_{L^q(0,T;V^p_{0.div})}}\leq c_q\|u\|^{p-1}_{L^p(0,T;V^p_{0.div})},$$

donc, il est difficile de prévoir vers quoi va tendre le deuxième membre de (4.49) (resp. (4.50)) *quand $\|u\|_{L^q(0,T;V^p_{0.div})}\to+\infty$. Donc, on en déduit que on peut pas établir la coercivité de l'opérateur $\mathcal{A}$ dans le cas $q>p$.*

D'autre part, pour $p=q$ on a $q_*=p$ et $q'_*=\frac{p}{p-1}=p'$ donc,
$\mathcal{A}: L^p(0,T;V^p_{0.div})\to L^{p'}(0,T;(V^p_{0.div})')$, qui à $u\in L^p(0,T;V^p_{0.div})$ associe $\mathcal{A}u$ défini par

$$[\mathcal{A}u,\overline{\varphi}]=\int_0^T a(\theta;u,\overline{\varphi})dt,\quad \forall\overline{\varphi}\in L^p(0,T;V^p_{0.div}),$$

où $[.,.]$ désigne le crochet de dualité entre $L^p(0,T;V^p_{0.div})$ et $L^{p'}(0,T;(V^p_{0.div})')$. Dans ce cas, les inéquations (4.36), (4.37), (4.42), (4.43) *deviennent*

$$|[\mathcal{A}\overline{v},\overline{\varphi}]|\leq 2^{p-1}\mu_1(\|\overline{v}\|^{p-1}_{L^p(0,T;V^p_{0.div})}+c^{p-1}T^{\frac{1}{p'}}\|\upsilon_0\|^{p-1}_{1.p})\|\overline{\varphi}\|_{L^p(0,T;V^p_{0.div})}, \tag{4.51}$$

donc,

$$\|\mathcal{A}\overline{v}\|_{L^{p'}(0,T;(V^p_{0.div})')}\leq 2^{p-1}\mu_1(\|\overline{v}\|^{p-1}_{L^p(0,T;V^p_{0.div})}+c^{p-1}T^{\frac{1}{p'}}\|\upsilon_0\|^{p-1}_{1.p}), \tag{4.52}$$

pour $p>2$ et

$$|[\mathcal{A}\overline{v},\overline{\varphi}]|\leq 2\mu_1(\|\overline{v}\|^{p-1}_{L^p(0,T;V^p_{0.div})}+c^{p-1}T^{\frac{1}{p'}}\|\upsilon_0\|^{p-1}_{1.p})\|\overline{\varphi}\|_{L^p(0,T;V^p_{0.div})}, \tag{4.53}$$

et

$$\|\mathcal{A}\overline{v}\|_{L^{p'}(0,T;(V^p_{0.div})')} \leq 2\mu_1(\|\overline{v}\|^{p-1}_{L^p(0,T;V^p_{0.div})} + c^{p-1}T^{\frac{1}{p'}}\|\upsilon_0\|^{p-1}_{1.p}), \qquad (4.54)$$

pour $1 < p < 2$ *respectivement.*
De plus, l'opérateur $\mathcal{A}$ *est coercif. En effet, de* (4.49) (resp. (4.50)) *on obtient*

$$\begin{aligned}
&\frac{[\mathcal{A}u, u-\hat{v}]}{\|u\|_{L^p(0,T;V^p_{0.div})}} \geq \|u\|^{p-1}_{L^p(0,T;V^p_{0.div})}\Big(2(C_{Korn})^p\mu_0\Big|1 - \frac{\|\upsilon_0\xi\|_{L^p(0,T;V^p_{\Gamma_1})}}{\|u\|_{L^p(0,T;V^p_{0.div})}}\Big|^p \\
&-2^{p-1}\mu_1\frac{(c\|\upsilon_0\|_{1.p}T^{\frac{1}{p}} + \|\hat{v}\|_{L^p(0,T;V^p_{0.div})})}{\|u\|_{L^p(0,T;V^p_{0.div})}}\Big) + \frac{2^{p-1}\mu_1}{\|u\|_{L^p(0,T;V^p_{0.div})}} \qquad (4.55)\\
&\times\big(Tc^p\|\upsilon_0\|^p_{1.p} + c^{p-1}T^{\frac{1}{p'}}\|\upsilon_0\|^{p-1}_{1.p}\|\hat{v}\|_{L^p(0,T;V^p_{0.div})})\big)\Big),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\frac{[\mathcal{A}u, u-\hat{v}]}{\|u\|_{L^p(0,T;V^p_{0.div})}} \geq \|u\|^{p-1}_{L^p(0,T;V^p_{0.div})}\Big(2(C_{Korn})^p\mu_0\Big|1 - \frac{\|\upsilon_0\xi\|_{L^p(0,T;V^p_{\Gamma_1})}}{\|u\|_{L^p(0,T;V^p_{0.div})}}\Big|^p \\
&-2\mu_1\frac{(c\|\upsilon_0\|_{1.p}T^{\frac{1}{p}} + \|\hat{v}\|_{L^p(0,T;V^p_{0.div})})}{\|u\|_{L^p(0,T;V^p_{0.div})}}\Big) + \frac{2\mu_1}{\|u\|_{L^p(0,T;V^p_{0.div})}} \qquad (4.56)\\
&\times\big(Tc^p\|\upsilon_0\|^p_{1.p} + c^{p-1}T^{\frac{1}{p'}}\|\upsilon_0\|^{p-1}_{1.p}\|\hat{v}\|_{L^p(0,T;V^p_{0.div})})\big)\Big).
\end{aligned}$$

respectivement.
Donc, pour $p > 1$ *on a*

$$\lim_{\|u\|_{L^p(0,T;V^p_{0.div})}\to+\infty} \frac{[\mathcal{A}u, u-\hat{v}] + J(u)}{\|u\|_{L^p(0,T;V^p_{0.div})}} = +\infty,$$

ce qui montre que l'opérateur $\mathcal{A}$ *est coercif.*

Pour cela, nous considérons dans la suite uniquement le cas $p = q$. On considère la formulation variationnelle du problème (4.17)-(4.22) avec $p = q$:

Problème 4.3 *Soient* $f \in L^{p'}(0,T;\boldsymbol{L}^2(\Omega))$, $k \in L^{p'}(0,T;L^{p'}_+(\omega))$, μ *vérifie* (4.2), (4.3), $\theta \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $s \in L^p(0,T;\boldsymbol{L}^p(\omega))$, $\xi \in W^{1,p'}(0,T)$ *vérifiant* (4.8) *et* $\upsilon_0 \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$ *vérifiant* (4.13). *On cherche* $\overline{v} \in C([0,T];\mathbf{L}^2(\Omega))\cap$

$L^p(0,T;V^p_{0.div})$ *avec* $\overline{v}' \in L^{p'}(0,T;(V^p_{0.div})')$, $\pi \in H^{-1}(0,T;L^{p'}_0(\Omega))$ *vérifiant l'inéquation variationnelle parabolique suivante*

$$\begin{aligned}
&\Big\langle \frac{\partial}{\partial t}(\overline{v},\tilde{\vartheta})_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)},\zeta\Big\rangle_{\mathcal{D}'(0,T),\mathcal{D}(0,T)} + \int_0^T \Big(a(\theta;\overline{v},\tilde{\vartheta}\zeta) - (\pi, div(\tilde{\vartheta}))\zeta\Big)\,dt \\
&+ \int_0^T \Big(j(t,\overline{v}+\tilde{\vartheta}\zeta) - j(t,\overline{v})\Big)\,dt \geq \int_0^T (\overline{f},\tilde{\vartheta})_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}\zeta\,dt, \\
&\forall \tilde{\vartheta} \in V^p_0 \quad \forall \zeta \in \mathcal{D}(0,T),
\end{aligned} \tag{4.57}$$

et la condition initiale (4.22).

Dans toute la suite de ce chapitre, par abus de notation, on note encore

$$\overline{f} = f + \frac{\partial \xi}{\partial t} L_{\upsilon_0},$$

où L_{υ_0} est une forme linéaire continue définie par

$$< L_{\upsilon_0}, \varphi >_{\mathbf{X}',\mathbf{X}} = (\upsilon_0,\varphi)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \quad \forall \varphi \in \mathbf{X},$$

avec $\mathbf{X} = V^p_{0.div}$, $V^2_{0.div}$ ou V^p_0.
Maintenant, on introduit le problème en vitesse suivant :

Problème 4.4 *Soient* $f \in L^{p'}(0,T;(V^p_{0.div})')$, $k \in L^{p'}(0,T;L^{p'}_+(\omega))$, μ *vérifie* (4.2), (4.3), $\theta \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $s \in L^p(0,T;\boldsymbol{L}^p(\omega))$, $\xi \in W^{1,p'}(0,T)$ *vérifiant* (4.8) *et* $\upsilon_0 \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$ *vérifiant* (4.13). *On cherche* $\overline{v} \in C([0,T];\mathbf{L}^2(\Omega)) \cap L^p(0,T;V^p_{0.div})$ *avec* $\overline{v}' \in L^{p'}(0,T;(V^p_{0.div})')$, *vérifiant l'inéquation variationnelle parabolique suivante*

$$\begin{aligned}
&[\overline{v}',\overline{\varphi}-\overline{v}] + [\mathcal{A}\overline{v},\overline{\varphi}-\overline{v}] + J(\overline{\varphi}) - J(\overline{v}) \geq [\overline{f},\overline{\varphi}-\overline{v}] \\
&\forall \overline{\varphi} \in L^p(0,T;V^p_{0.div}).
\end{aligned} \tag{4.58}$$

et la condition initiale (4.22).

4.3 Cas $p > 2$

4.3.1 Problème intermédiaire

Dans cette section, on introduit une notion de solution "plus faible" que la notion de solution de l'inéquation variationnelle parabolique (4.58), ne faisant pas intervenir la dérivée en temps de la fonction $\overline{v}$.

Notons $\mathcal{K}^p := L^p(0,T;V^p_{0.div})$, $(\mathcal{K}^p)' := L^{p'}(0,T;(V^p_{0.div})')$, $\mathcal{H} := L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$. Comme $p > 2$ on a

$$\mathcal{K}^p \subset \mathcal{H} \subset (\mathcal{K}^p)'.$$

On pose

$$\phi^p = \{\overline{\varphi} \in \mathcal{K}^p : \quad \overline{\varphi}' \in (\mathcal{K}^p)', \quad \overline{\varphi}(0) = 0\}.$$

Pour tout $\overline{\varphi} \in \phi^p$ on a

$$\begin{array}{ll} [\overline{\varphi}', \overline{\varphi} - \overline{v}] & +[\mathcal{A}\overline{v}, \overline{\varphi} - \overline{v}] - [\overline{f}, \overline{\varphi} - \overline{v}] + J(\overline{\varphi}) - J(\overline{v}) = [\overline{v}', \overline{\varphi} - \overline{v}] \\ & +[\mathcal{A}\overline{v}, \overline{\varphi} - \overline{v}] - [\overline{f}, \overline{\varphi} - \overline{v}] + J(\overline{\varphi}) - J(\overline{v}) + [\overline{\varphi}' - \overline{v}', \overline{\varphi} - \overline{v}]. \end{array} \tag{4.59}$$

D'autre part, on a

$$[\overline{\varphi}' - \overline{v}', \overline{\varphi} - \overline{v}] = \int_0^T < \overline{\varphi}' - \overline{v}', \overline{\varphi} - \overline{v} >_{(V^p_{0.div})', V^p_{0.div}} \, dt,$$

donc avec (4.24), pour tout $\overline{\varphi} \in \phi^p$ on a

$$\begin{array}{ll} [\overline{\varphi}' - \overline{v}', \overline{\varphi} - \overline{v}] & = \dfrac{1}{2}\|\overline{\varphi}(T) - \overline{v}(T)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ & -\dfrac{1}{2}\| \underbrace{\overline{\varphi}(0) - \overline{v}(0)}_{=0} \|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \geq 0. \end{array} \tag{4.60}$$

Avec (4.58) et (4.60), l'équation (4.59) conduit à l'inéquation variationnelle parabolique "plus faible" suivante

$$[\overline{\varphi}', \overline{\varphi} - \overline{v}] + [\mathcal{A}\overline{v}, \overline{\varphi} - \overline{v}] + J(\overline{\varphi}) - J(\overline{v}) \geq [\overline{f}, \overline{\varphi} - \overline{v}] \quad \forall \overline{\varphi} \in \phi^p.$$

Donc, on considère le problème "faible" suivant :

Problème ($\mathbf{P_f}$)

Soient $f \in L^{p'}(0,T;(V^p_{0.div})')$, $k \in L^{p'}(0,T;L^{p'}_+(\omega))$, μ *vérifie* (4.2), (4.3), $\theta \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $s \in L^p(0,T;\mathbf{L}^p(\omega))$, $\xi \in W^{1,p'}(0,T)$ *vérifiant* (4.8), *et* $v_0 \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ *vérifiant* (4.13), *trouver* $\overline{v} \in \mathcal{K}^p$ *vérifiant*

$$[\overline{\varphi}', \overline{\varphi} - \overline{v}] + [\mathcal{A}\overline{v}, \overline{\varphi} - \overline{v}] + J(\overline{\varphi}) - J(\overline{v}) \geq [\overline{f}, \overline{\varphi} - \overline{v}] \quad \forall \overline{\varphi} \in \phi^p. \tag{4.61}$$

4.3.2 Résultat d'existence pour le problème $(\mathbf{P_f})$

Dans cette section on utilise une approximation de la dérivée en temps qui permet d'approcher le problème variationnel parabolique intermédiaire $(\mathbf{P_f})$ par un problème variationnel elliptique (cf. dans [56] page 227).
On prend $\Lambda = \dfrac{d}{dt}$, on a

$$\Lambda\overline{\varphi}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\overline{\varphi}(t) - \overline{\varphi}(t-h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{I - S(h)}{h}\overline{\varphi}(t), \tag{4.62}$$

où $h \mapsto S(h)$ est le semi groupe dans $\mathcal{K}^p$, $\mathcal{H}$, $(\mathcal{K}^p)'$ (cf dans [56] page 230) défini par

$$S(h)\overline{\varphi}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < h, \\ \overline{\varphi}(t-h) & \text{si} \quad t \geq h. \end{cases} \tag{4.63}$$

D'après ce que précède (cf. chapitre 3) on a bien que la famille $(S(h))_{h\geq 0}$ est un semi-groupe de contractions dans $X = \mathcal{K}^p, \mathcal{H}$ ou $(\mathcal{K}^p)'$ vérifiant

$$\|S(h)\overline{\varphi}\|_X \leq \|\overline{\varphi}\|_X. \tag{4.64}$$

Dans toute la suite de ce travail on a $\phi^p = \mathcal{K}^p \cap D(\Lambda, (\mathcal{K}^p)')$ d'après [56] page 269.
Montrons que l'opérateur Λ et $\mathcal{K}^p$ sont compatibles (cf. [56] page 269) c-à-d, pour tout $\overline{v} \in \mathcal{K}^p$, il existe une suite régularisante $(\overline{v}_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \phi^p$ vérifiant

$$\lim_{j\to+\infty} \overline{v}_j = \overline{v} \quad \text{dans} \quad \mathcal{K}^p, \quad \text{et,} \quad \limsup_{j\to+\infty} [\Lambda\overline{v}_j, \overline{v}_j - \overline{v}] \leq 0. \tag{4.65}$$

Proposition 4.2 *Le sous-espace vectoriel $\mathcal{K}^p$ et le semi groupe S vérifient l'inclusion suivante*

$$S(h)\mathcal{K}^p \subset \mathcal{K}^p, \quad \forall h \geq 0.$$

Preuve. On a $S(h)\mathcal{K}^p = \{\overline{\varphi} \quad \text{telle que} \quad \exists y \in \mathcal{K}^p \quad \text{vérifiant} \quad \overline{\varphi} = S(h)y\}$.
Si $h = 0$, l'inclusion est évidente puisque $S(0) = Id$.
Si $h > 0$, on a $\overline{\varphi} \in S(h)\mathcal{K}^p$ c-à-d, il existe $y \in \mathcal{K}^p$ tel que avec (4.63) on ait

$$\overline{\varphi}(t) = S(h)y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < h, \\ y(t-h) & \text{si} \quad t \geq h. \end{cases}$$

On donne l'ensemble suivant

$$E_y = \{t \in [0,T]; \quad y(t) \notin V^p_{0.div}\},$$

$|E_y| := mesure(E_y) = 0$ (car $y \in \mathcal{K}^p = L^p(0,T;V^p_{0.div})$).
Maintenant, on montre que

$$\overline{\varphi}(t) \in V^p_{0.div} \quad \text{p.p} \quad t \in [0,T],$$

c-à-d on montre que

$$|E_{\overline{\varphi}}| = |\{t \in [0,T]; \quad \overline{\varphi} \notin V^p_{0.div}\}| = 0.$$

On a

$$\begin{aligned} E_{\overline{\varphi}} &= \{t \in [h,T]; \quad \overline{\varphi}(t) = y(t-h) \notin V^p_{0.div}\} \\ &= \{t' \in [0,T-h]; \quad y(t') \notin V^p_{0.div}\} \\ &= E_y \cap [0,T-h], \end{aligned}$$

donc $|E_{\overline{\varphi}}| = |E_y \cap [0,T-h]| \leq |E_y| = 0$, alors

$$|E_{\overline{\varphi}}| = 0,$$

d'où, le résultat.
D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\overline{\varphi}(t)\|^p_{V^p_{0.div}}\, dt &= \int_h^T \|y(t-h)\|^p_{V^p_{0.div}}\, dt \\ &= \int_0^{T-h} \|y(t')\|^p_{V^p_{0.div}}\, dt' \\ &\leq \int_0^T \|y(t')\|^p_{V^p_{0.div}}\, dt' = \|y\|^p_{\mathcal{K}^p}, \end{aligned}$$

comme $y \in \mathcal{K}^p$ donc $\overline{\varphi} \in \mathcal{K}^p$. On déduit que

$$S(h)\mathcal{K}^p \subset \mathcal{K}^p, \quad \forall h \geq 0.$$

□

D'après le théorème 9.1 [56] page 270, la propriété (4.65) est donc vérifiée. On utilise un principe analogue à celui du chapitre 3 (cas $p = 2$), mais la différence dans cette section est que notre $p > 2$.

Théorème 4.1 *On suppose que les hypothèses* (4.2), (4.3) *sont satisfaites, alors pour* $f \in L^{p'}(0,T;(V^p_{0.div})')$, $k \in L^{p'}(0,T;L^{p'}_+(\omega))$, $\theta \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $s \in L^p(0,T;\boldsymbol{L}^p(\omega))$, $\xi \in W^{1,p'}(0,T)$ *vérifiant* (4.8), *et* $\upsilon_0 \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$ *vérifiant* (4.13), *il existe* $\overline{\upsilon} \in \mathcal{K}^p$ *solution de l'inéquation parabolique variationnelle "faible"* (4.61).

Preuve. On approche le problème variationnel parabolique "faible" ($\mathbf{P_f}$) par une suite de problèmes variationnels elliptiques.
Pour cela, on approche la dérivée en temps comme dans (4.62) et on considère la suite de problèmes variationnels elliptiques dépendant du paramètre $h > 0$ suivante :
Trouver $\overline{\upsilon}_h \in \mathcal{K}^p$ telle que, pour tout $\overline{\varphi} \in \mathcal{K}^p$

$$\Big[\frac{I - S(h)}{h}\overline{\upsilon}_h, \overline{\varphi} - \overline{\upsilon}_h\Big] + [\mathcal{A}\overline{\upsilon}_h, \overline{\varphi} - \overline{\upsilon}_h] + J(\overline{\varphi}) - J(\overline{\upsilon}_h) \geq [\overline{f}, \overline{\varphi} - \overline{\upsilon}_h]. \quad (4.66)$$

La fonctionnelle J est convexe et propre.
La fonctionnelle J est lipschitzienne. En effet, soient u, v deux éléments de $\mathcal{K}^p$, on a

$$\begin{aligned} |J(u) - J(v)| &= \Big| \int_0^T \int_\omega k(|u - \tilde{s}| - |v - \tilde{s}|)\, dx'\, dt \Big| \\ &\leq \int_0^T \int_\omega |k||u - v|\, dx'\, dt. \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités de Hölder en espace et en temps, on trouve

$$|J(u) - J(v)| \leq \|k\|_{L^{p'}(0,T;L^{p'}(\omega))} \|u - v\|_{L^p(0,T;\mathbf{L}^p(\omega))}. \quad (4.67)$$

En utilisant la continuité de l'application trace de $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ dans $\mathbf{L}^p(\partial\Omega)$ on obtient

$$\exists \gamma > 0 \quad \|u\|_{L^p(0,T;\mathbf{L}^p(\omega))} \leq \gamma \|u\|_{\mathcal{K}^p}, \quad \forall u \in \mathcal{K}^p, \quad (4.68)$$

donc

$$|J(u) - J(v)| \leq \gamma \|k\|_{L^{p'}(0,T;L^{p'}(\omega))} \|u - v\|_{\mathcal{K}^p}, \quad (4.69)$$

ce qui montre que J est lipschitzienne. Alors elle est continue donc elle est semi-continue inférieurement sur $\mathcal{K}^p$.
Définissons l'opérateur $\mathcal{B}$ de $\mathcal{K}^p \to (\mathcal{K}^p)'$ par

$$\overline{\upsilon} \mapsto \frac{I - S(h)}{h}\overline{\upsilon} + \mathcal{A}\overline{\upsilon} = \mathcal{B}\overline{\upsilon}.$$

L'opérateur $\mathcal{B}$ est monotone, hémicontinu et borné. En effet, d'après le lemme 4.2 l'opérateur $\mathcal{A}$ monotone, hémicontinu et borné.
Pour montrer $\dfrac{I-S(h)}{h}$ est hémicontinu, on doit montrer que, pour tout $u, v, w \in \mathcal{K}^p$, la fonction

$$\alpha_2 : \lambda \mapsto \alpha_2(\lambda) = \Big[\frac{I-S(h)}{h}(u+\lambda v), w\Big]$$

est continue sur $\mathbb{R}$.
Soit $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ une suite convergente vers λ dans $\mathbb{R}$, alors

$$\alpha_2(\lambda_n) = \Big[\frac{I-S(h)}{h}(u+\lambda_n v), w\Big] = \Big[\frac{I-S(h)}{h}u, w\Big] + \lambda_n\Big[\frac{I-S(h)}{h}v, w\Big],$$

converge vers $\alpha_2(\lambda)$. On déduit donc que l'opérateur $\dfrac{I-S(h)}{h}$ est hémicontinu. Pour la monotonie de $\dfrac{I-S(h)}{h}$, il faut montrer que pour tout $u, v \in \mathcal{K}^p$

$$\Big[\frac{I-S(h)}{h}u - \frac{I-S(h)}{h}v, u-v\Big] \geq 0. \tag{4.70}$$

Comme S est une contraction dans $\mathcal{H}$, on a

$$\Big[\frac{I-S(h)}{h}u, u\Big] = \int_0^T \int_\Omega \Big(\frac{I-S(h)}{h}u\Big)\cdot u\, dx\, dt \geq 0, \tag{4.71}$$

et puisque l'opérateur $\dfrac{I-S(h)}{h}$ est linéaire, on déduit que $\dfrac{I-S(h)}{h}$ est monotone.
De plus l'opérateur $\dfrac{I-S(h)}{h}$ est borné. En effet, on a

$$\begin{aligned}
\Big|\Big[\frac{I-S(h)}{h}u, v\Big]\Big| &= \Big|\int_0^T\int_\Omega \Big(\frac{I-S(h)}{h}u\Big)\cdot v\, dx\, dt\Big| \\
&\leq \int_0^T\int_\Omega \Big|\frac{I-S(h)}{h}u\Big||v|\, dx\, dt \\
&\leq \frac{1}{h}\int_0^T\int_\Omega (|u| + |S(h)u|)|v|\, dx\, dt \\
&\leq \frac{1}{h}\Big(\int_0^T\int_\Omega |u||v|\, dx\, dt + \int_0^T\int_\Omega |S(h)u||v|\, dx\, dt\Big),
\end{aligned}$$

en utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz en espace et en temps on obtient

$$\Big|\Big[\frac{I-S(h)}{h}u, v\Big]\Big| \leq \frac{1}{h}\Big(\|u\|_{\mathcal{H}}\|v\|_{\mathcal{H}} + \|S(h)u\|_{\mathcal{H}}\|v\|_{\mathcal{H}}\Big),$$

avec (4.64) on a

$$\left|\left[\frac{I-S(h)}{h}u,v\right]\right| \leq \frac{2}{h}C_i^2\|u\|_{\mathcal{K}^p}\|v\|_{\mathcal{K}^p},$$

où C_i désigne la constante de l'injection continue de $\mathcal{K}^p$ dans $\mathcal{H}$.
Donc,

$$\sup_{v\neq 0}\frac{\left|\left[\frac{I-S(h)}{h}u,v\right]\right|}{\|v\|_{\mathcal{K}^p}} \leq \frac{2}{h}C_i^2\|u\|_{\mathcal{K}^p},$$

d'où

$$\left\|\frac{I-S(h)}{h}u\right\|_{(\mathcal{K}^p)'} \leq C_h\|u\|_{\mathcal{K}^p}, \tag{4.72}$$

où $C_h = \dfrac{2}{h}C_i^2$. D'où le résultat.

Comme $\mathcal{A}$ monotone, hémicontinu et borné, $\dfrac{I-S(h)}{h}$ monotone, hémicontinu et borné, on en déduit que l'opérateur $\mathcal{B}$ est monotone, hémicontinu et borné. Donc, il est pseudo-monotone (cf. la proposition 2.5 [56] page 179).
On réécrit l'inéquation variationnelle (4.66) comme suit

$$\Big[\mathcal{B}\overline{v}_h,\overline{\varphi}-\overline{v}_h\Big] + J(\overline{\varphi}) - J(\overline{v}_h) \geq [\overline{f},\overline{\varphi}-\overline{v}_h], \quad \forall\overline{\varphi}\in\mathcal{K}^p. \tag{4.73}$$

Pour appliquer le théorème de la monotonie [56] page 251, il reste à montrer que $\mathcal{B}$ est coercif c-à-d

$$\exists\overline{v}_*\in\mathcal{K}^p \quad \text{tel que} \quad J(\overline{v}_*)<\infty,$$

$$\lim_{\|\overline{v}\|_{\mathcal{K}^p}\to+\infty}\frac{[\mathcal{B}\overline{v},\overline{v}-\overline{v}_*]+J(\overline{v})}{\|\overline{v}\|_{\mathcal{K}^p}} = +\infty.$$

Or

$$\begin{aligned}
[\mathcal{B}\overline{v},\overline{v}-\overline{v}_*]+J(\overline{v}) &= [\mathcal{A}\overline{v},\overline{v}-\overline{v}_*]+J(\overline{v})\\
&+ \Big[\frac{I-S(h)}{h}(\overline{v}-\overline{v}_*),(\overline{v}-\overline{v}_*)\Big]\\
&+ \Big[\frac{I-S(h)}{h}\overline{v}_*,(\overline{v}-\overline{v}_*)\Big]\\
&\geq [\mathcal{A}\overline{v},\overline{v}-\overline{v}_*]+J(\overline{v})\\
&- \Big[\frac{I-S(h)}{h}\overline{v}_*,(\overline{v}_*-\overline{v})\Big].
\end{aligned}$$

Avec (4.72) on trouve

$$\begin{aligned}
[\mathcal{B}\overline{v}, \overline{v} - \overline{v}_*] + J(\overline{v}) &\geq [\mathcal{A}\overline{v}, \overline{v} - \overline{v}_*] + J(\overline{v}) \\
&- \left\| \frac{I - S(h)}{h} \overline{v}_* \right\|_{(\mathcal{K}^p)'} \|\overline{v}_* - \overline{v}\|_{\mathcal{K}^p} \\
&\geq [\mathcal{A}\overline{v}, \overline{v} - \overline{v}_*] + J(\overline{v}) \\
&- C_h \|\overline{v}_*\|_{\mathcal{K}^p} \|\overline{v}_* - \overline{v}\|_{\mathcal{K}^p} \\
&\geq [\mathcal{A}\overline{v}, \overline{v} - \overline{v}_*] + J(\overline{v}) \\
&- C_h \|\overline{v}_*\|_{\mathcal{K}^p} (\|\overline{v}_*\|_{\mathcal{K}^p} + \|\overline{v}\|_{\mathcal{K}^p}).
\end{aligned}$$

D'après la remarque 4.2 on sait que $\mathcal{A}$ est coercif. Donc

$$\lim_{\|\overline{v}\|_{\mathcal{K}^p} \to +\infty} \frac{[\mathcal{B}\overline{v}, \overline{v} - \overline{v}_*] + J(\overline{v})}{\|\overline{v}\|_{\mathcal{K}^p}} = +\infty.$$

Par application du Théorème 8.5 [56] page 251, on conclut que (4.66) a au moins une solution $\overline{v}_h$ dans $\mathcal{K}^p$.

Il en résulte que la suite $(\overline{v}_h)_{h>0}$ est bornée dans $\mathcal{K}^p$. En effet, on prend $\overline{\varphi} = 0$ dans (4.66) on obtient

$$\Big[\frac{I - S(h)}{h} \overline{v}_h, -\overline{v}_h\Big] + [\mathcal{A}\overline{v}_h, -\overline{v}_h] + J(0) - J(\overline{v}_h) \geq [\overline{f}, -\overline{v}_h].$$

Avec (4.71) et la positivité de la fonction J

$$[\mathcal{A}\overline{v}_h, \overline{v}_h] \leq [\overline{f}, \overline{v}_h] + J(0). \tag{4.74}$$

Pour presque tout $t \in [0, T]$, on a

$$\begin{aligned}
&a(\theta; \overline{v}_h, \overline{v}_h) \\
&= \int_\Omega 2\mu(\theta, |D(\overline{v}_h + \upsilon_0\xi)|) |D(\overline{v}_h + \upsilon_0\xi)|^{p-2} D(\overline{v}_h + \upsilon_0\xi) : D(\overline{v}_h)\, dx \\
&= \int_\Omega 2\mu(\theta, |D(\overline{v}_h + \upsilon_0\xi)|) |D(\overline{v}_h + \upsilon_0\xi)|^{p}\, dx \\
&- \int_\Omega 2\mu(\theta, |D(\overline{v}_h + \upsilon_0\xi)|) |D(\overline{v}_h + \upsilon_0\xi)|^{p-2} D(\overline{v}_h + \upsilon_0\xi) : D(\upsilon_0\xi)\, dx.
\end{aligned}$$

En utilisant (4.2) et l'inégalité de Korn (4.46) on obtient

$$\begin{aligned} a(\theta;\overline{\upsilon}_h,\overline{\upsilon}_h) &\geq 2(C_{Korn})^p\mu_0\|\overline{\upsilon}_h+\upsilon_0\xi\|_{1.p}^p \\ &\quad -2\mu_1\int_\Omega |D(\overline{\upsilon}_h+\upsilon_0\xi)|^{p-1}|D(\upsilon_0\xi)|\,dx. \end{aligned} \tag{4.75}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder on obtient

$$\begin{aligned} a(\theta;\overline{\upsilon}_h,\overline{\upsilon}_h) &\geq 2(C_{Korn})^p\mu_0\|\overline{\upsilon}_h+\upsilon_0\xi\|_{1.p}^p \\ &\quad -2\mu_1 c\|\overline{\upsilon}_h+\upsilon_0\xi\|_{1.p}^{p-1}\|\upsilon_0\|_{1.p}. \end{aligned} \tag{4.76}$$

Donc,

$$\begin{aligned} [\mathcal{A}\overline{\upsilon}_h,\overline{\upsilon}_h] &= \int_0^T a(\theta;\overline{\upsilon}_h,\overline{\upsilon}_h)\,dt \\ &\geq 2(C_{Korn})^p\mu_0\int_0^T \|\overline{\upsilon}_h+\upsilon_0\xi\|_{1.p}^p\,dt \\ &- 2\mu_1 c\|\upsilon_0\|_{1.p}\int_0^T \|\overline{\upsilon}_h+\upsilon_0\xi\|_{1.p}^{p-1}\,dt, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} &[\mathcal{A}\overline{\upsilon}_h,\overline{\upsilon}_h] \geq 2(C_{Korn})^p\mu_0\|\overline{\upsilon}_h+\upsilon_0\xi\|^p_{L^p(0,T;V^p_{\Gamma_1})} \\ &-2\mu_1 c\|\upsilon_0\|_{1.p}T^{\frac{1}{p}}\|\overline{\upsilon}_h+\upsilon_0\xi\|^{p-1}_{L^p(0,T;V^p_{\Gamma_1})}. \end{aligned}$$

D'autre part, avec (4.74) on a

$$[\mathcal{A}\overline{\upsilon}_h,\overline{\upsilon}_h] \leq \|\overline{f}\|_{(\mathcal{K}^p)'}\|\overline{\upsilon}_h\|_{\mathcal{K}^p}+J(0),$$

d'où

$$\begin{aligned} 2(C_{Korn})^p\mu_0\|\overline{\upsilon}_h+\upsilon_0\xi\|^p_{L^p(0,T;V^p_{\Gamma_1})} &\leq \|\overline{f}\|_{(\mathcal{K}^p)'}\|\overline{\upsilon}_h\|_{\mathcal{K}^p}+J(0) \\ &+ 2\mu_1 c\|\upsilon_0\|_{1.p}T^{\frac{1}{p}}\|\overline{\upsilon}_h+\upsilon_0\xi\|^{p-1}_{L^p(0,T;V^p_{\Gamma_1})}. \end{aligned}$$

De (4.33) on obtient

$$\begin{aligned} &2(C_{Korn})^p\mu_0\Big|\|\overline{\upsilon}_h\|_{\mathcal{K}^p}-\|\upsilon_0\xi\|_{L^p(0,T;V^p_{\Gamma_1})}\Big|^p \leq \|\overline{f}\|_{(\mathcal{K}^p)'}\|\overline{\upsilon}_h\|_{\mathcal{K}^p}+J(0) \\ &+2^{p-1}\mu_1 c\|\upsilon_0\|_{1.p}T^{\frac{1}{p}}(\|\overline{\upsilon}_h\|^{p-1}_{\mathcal{K}^p}+\|\upsilon_0\xi\|^{p-1}_{L^p(0,T;V^p_{\Gamma_1})}). \end{aligned}$$

En divisant les deux membres de l'inégalité ci-dessus par $\|\overline{v}_h\|^p_{\mathcal{K}^p}$ (avec $\|\overline{v}_h\|^p_{\mathcal{K}^p} \neq 0$) on obtient

$$\begin{aligned} &2(C_{Korn})^p\mu_0\Big|1-\frac{\|\upsilon_0\xi\|_{L^p(0,T;V^p_{\Gamma_1})}}{\|\overline{v}_h\|_{\mathcal{K}^p}}\Big|^p \leq \|\overline{f}\|_{(\mathcal{K}^p)'}\|\overline{v}_h\|^{1-p}_{\mathcal{K}^p}+\frac{J(0)}{\|\overline{v}_h\|^p_{\mathcal{K}^p}} \\ &+\frac{2^{p-1}\mu_1 c\|\upsilon_0\|_{1.p}T^{\frac{1}{p}}}{\|\overline{v}_h\|_{\mathcal{K}^p}}\Big(1+\Big(\frac{\|\upsilon_0\xi\|_{L^p(0,T;V^p_{\Gamma_1})}}{\|\overline{v}_h\|_{\mathcal{K}^p}}\Big)^{p-1}\Big). \end{aligned} \tag{4.77}$$

D'autre part, on définit l'ensemble suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}=\Big\{&\hat{z}\in\mathbb{R}^*_+, \quad \text{tel que} \quad \hat{z} \quad \text{vérifie l'inéquation suivante} \\ &2(C_{Korn})^p\mu_0\Big|1-\frac{\|\upsilon_0\xi\|_{L^p(0,T;V^p_{\Gamma_1})}}{\hat{z}}\Big|^p \leq \|\overline{f}\|_{(\mathcal{K}^p)'}\hat{z}^{1-p}+\frac{J(0)}{\hat{z}^p} \\ &+\frac{2^{p-1}\mu_1 c\|\upsilon_0\|_{1.p}T^{\frac{1}{p}}}{\hat{z}}\Big(1+\Big(\frac{\|\upsilon_0\xi\|_{L^p(0,T;V^p_{\Gamma_1})}}{\hat{z}}\Big)^{p-1}\Big)\Big\}. \end{aligned} \tag{4.78}$$

Montrons que l'ensemble $\mathbf{E}$ est borné. En effet, pour $\hat{z}\in\mathbf{E}$, en faisant $\hat{z}\to+\infty$ dans (4.78) nous arrivons à $\mu_0\leq 0$. C'est une contradiction avec le fait que $\mu_0>0$. Ainsi

$$\exists\mathcal{C}>0, \quad \hat{z}\leq\mathcal{C},$$

ce qui montre que l'ensemble $\mathbf{E}$ est borné.
De (4.77) on obtient que $\|\overline{v}_h\|_{\mathcal{K}^p}\in\mathbf{E}\cup\{0\}$ donc

$$\|\overline{v}_h\|_{\mathcal{K}^p}\leq\mathcal{C}, \tag{4.79}$$

ce qui montre que la suite $(\overline{v}_h)_{h>0}$ est bornée dans $\mathcal{K}^p$. Donc la suite $(\overline{v}_h)_{h>0}$ admet une sous-suite, notée encore $(\overline{v}_h)_{h>0}$, telle que, lorsque $h\to 0$ on ait :

$$\overline{v}_h \rightharpoonup \overline{v} \quad \text{dans} \quad \mathcal{K}^p \quad \text{faible}, \tag{4.80}$$

et comme $\mathcal{A}$ est borné, on a

$$\mathcal{A}\overline{v}_h \rightharpoonup \chi \quad \text{dans} \quad (\mathcal{K}^p)' \quad \text{faible}. \tag{4.81}$$

Comme $\overline{v}_h$ est solution de (4.66) on obtient

$$\begin{aligned} &\Big[\frac{I-S(h)}{h}\overline{\varphi},\overline{\varphi}-\overline{v}_h\Big]+[\mathcal{A}\overline{v}_h,\overline{\varphi}-\overline{v}_h]+J(\overline{\varphi})-J(\overline{v}_h)-[\overline{f},\overline{\varphi}-\overline{v}_h] \\ &=\Big[\frac{I-S(h)}{h}\overline{v}_h,\overline{\varphi}-\overline{v}_h\Big]+[\mathcal{A}\overline{v}_h,\overline{\varphi}-\overline{v}_h]+J(\overline{\varphi})-J(\overline{v}_h)-[\overline{f},\overline{\varphi}-\overline{v}_h] \\ &+\Big[\frac{I-S(h)}{h}(\overline{\varphi}-\overline{v}_h),\overline{\varphi}-\overline{v}_h\Big]\geq\Big[\frac{I-S(h)}{h}(\overline{\varphi}-\overline{v}_h),\overline{\varphi}-\overline{v}_h\Big], \end{aligned}$$

d'où avec (4.71)

$$\Big[\frac{I-S(h)}{h}\overline{\varphi},\overline{\varphi}-\overline{v}_h\Big]+[\mathcal{A}\overline{v}_h,\overline{\varphi}-\overline{v}_h]+J(\overline{\varphi})-J(\overline{v}_h)\geq[\overline{f},\overline{\varphi}-\overline{v}_h],\quad \forall\overline{\varphi}\in\mathcal{K}^p. \tag{4.82}$$

On déduit de (4.82) et (4.62), en prenant $\overline{\varphi}\in\phi^p$, et en utilisant les convergences faibles (4.80) et (4.81) que

$$\begin{aligned}
\limsup_{h\to 0}[\mathcal{A}\overline{v}_h,\overline{v}_h] &\leq \limsup_{h\to 0}\Big(\Big[\frac{I-S(h)}{h}\overline{\varphi},\overline{\varphi}-\overline{v}_h\Big]+[\mathcal{A}\overline{v}_h,\overline{\varphi}]+J(\overline{\varphi})\\
&- J(\overline{v}_h)-[\overline{f},\overline{\varphi}-\overline{v}_h]\Big)\\
&\leq \limsup_{h\to 0}\Big(\Big[\frac{I-S(h)}{h}\overline{\varphi},\overline{\varphi}-\overline{v}_h\Big]\Big)+\limsup_{h\to 0}[\mathcal{A}\overline{v}_h,\overline{\varphi}]\\
&+ J(\overline{\varphi})-\liminf_{h\to 0}J(\overline{v}_h)-\liminf_{h\to 0}[\overline{f},\overline{\varphi}-\overline{v}_h]\\
&\leq [\Lambda\overline{\varphi},\overline{\varphi}-\overline{v}]+[\chi,\overline{\varphi}]+J(\overline{\varphi})-\liminf_{h\to 0}J(\overline{v}_h)-[\overline{f},\overline{\varphi}-\overline{v}].
\end{aligned}$$

Comme la fonctionnelle J est semi-continue inférieurement et convexe pour la topologie forte, alors, d'après le corollaire III.8 [21] page 38, elle est semi-continue inférieurement pour la topologie faible c-à-d,

$$J(\overline{v})\leq\liminf_{h\to 0}J(\overline{v}_h). \tag{4.83}$$

Donc,

$$\limsup_{h\to 0}[\mathcal{A}\overline{v}_h,\overline{v}_h]\leq[\Lambda\overline{\varphi},\overline{\varphi}-\overline{v}]+[\chi,\overline{\varphi}]+J(\overline{\varphi})-J(\overline{v})-[\overline{f},\overline{\varphi}-\overline{v}], \tag{4.84}$$

d'où

$$\limsup_{h\to 0}[\mathcal{A}\overline{v}_h,\overline{v}_h-\overline{v}]\leq[\Lambda\overline{\varphi},\overline{\varphi}-\overline{v}]+J(\overline{\varphi})-J(\overline{v})+[\chi-\overline{f},\overline{\varphi}-\overline{v}]. \tag{4.85}$$

Or, comme $\overline{v}\in\mathcal{K}^p$, il existe une suite régularisante $(\overline{v}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ qui vérifie (4.65). En posant la suite $(\overline{v}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ à la place $\overline{\varphi}$ dans (4.85), on obtient

$$\limsup_{h\to 0}[\mathcal{A}\overline{v}_h,\overline{v}_h-\overline{v}]\leq[\Lambda\overline{v}_j,\overline{v}_j-\overline{v}]+J(\overline{v}_j)-J(\overline{v})+[\chi-\overline{f},\overline{v}_j-\overline{v}]\quad\forall j\in\mathbb{N}.$$

Avec (4.65) et la continuité de la fonctionnelle J on a

$$\limsup_{h\to 0}[\mathcal{A}\overline{v}_h,\overline{v}_h-\overline{v}]\leq 0.$$

Comme $\mathcal{A}$ est pseudo-monotone on obtient

$$\liminf_{h\to 0}[\mathcal{A}\overline{v}_h, \overline{v}_h - \overline{\varphi}] \geq [\mathcal{A}\overline{v}, \overline{v} - \overline{\varphi}], \quad \forall \overline{\varphi} \in \mathcal{K}^p. \tag{4.86}$$

Mais d'après (4.82) on a

$$\begin{aligned}
[\mathcal{A}\overline{v}, \overline{v} - \overline{\varphi}] &\leq \liminf_{h\to 0}[\mathcal{A}\overline{v}_h, \overline{v}_h - \overline{\varphi}] \\
&\leq \liminf_{h\to 0} \Big(\Big[\frac{I - S(h)}{h}\overline{\varphi}, \overline{\varphi} - \overline{v}_h\Big] + J(\overline{\varphi}) \\
&- J(\overline{v}_h) - [\overline{f}, \overline{\varphi} - \overline{v}_h]\Big) \\
&\leq \limsup_{h\to 0} \Big(\Big[\frac{I - S(h)}{h}\overline{\varphi}, \overline{\varphi} - \overline{v}_h\Big] + J(\overline{\varphi}) \\
&- J(\overline{v}_h) - [\overline{f}, \overline{\varphi} - \overline{v}_h]\Big),
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
[\mathcal{A}\overline{v}, \overline{v} - \overline{\varphi}] &\leq \limsup_{h\to 0} \Big[\frac{I - S(h)}{h}\overline{\varphi}, \overline{\varphi} - \overline{v}_h\Big] + J(\overline{\varphi}) \\
&- \liminf_{h\to 0} J(\overline{v}_h) - \liminf_{h\to 0}[\overline{f}, \overline{\varphi} - \overline{v}_h].
\end{aligned}$$

Avec (4.62), (4.83), et la convergence faible (4.80)

$$[\mathcal{A}\overline{v}, \overline{v} - \overline{\varphi}] \leq [\Lambda\overline{\varphi}, \overline{\varphi} - \overline{v}] + J(\overline{\varphi}) - J(\overline{v}) - [\overline{f}, \overline{\varphi} - \overline{v}],$$

d'où

$$[\Lambda\overline{\varphi}, \overline{\varphi} - \overline{v}] + [\mathcal{A}\overline{v}, \overline{\varphi} - \overline{v}] + J(\overline{\varphi}) - J(\overline{v}) \geq [\overline{f}, \overline{\varphi} - \overline{v}], \quad \forall \overline{\varphi} \in \phi^p,$$

ce qui montre que $\overline{v}$ vérifie (4.61).

□

4.3.3 Résultat d'existence pour le problème 4.4

On va montrer l'existence d'une solution forte au sens (4.58), (4.22).

Théorème 4.2 *Sous les hypothèses du Théorème* 4.1*, le problème* 4.4 *admet au moins une solution.*

Preuve. On prend $\overline{\varphi} = \overline{v}_h \pm \tilde{\psi}\zeta \in \mathcal{K}^p$ avec $\tilde{\psi} \in V^p_{0.div}$ et $\zeta \in \mathcal{D}(0,T)$ dans (4.66), on obtient

$$\Big[\frac{I-S(h)}{h}\overline{v}_h, \pm\tilde{\psi}\zeta\Big] + [\mathcal{A}\overline{v}_h, \pm\tilde{\psi}\zeta] + J(\overline{v}_h \pm \tilde{\psi}\zeta) - J(\overline{v}_h) \geq [\overline{f}, \pm\tilde{\psi}\zeta].$$

Avec la première inégalité on a

$$\Big[\frac{I-S(h)}{h}\overline{v}_h, \tilde{\psi}\zeta\Big] \geq [\overline{f}, \tilde{\psi}\zeta] - [\mathcal{A}\overline{v}_h, \tilde{\psi}\zeta] - J(\overline{v}_h + \tilde{\psi}\zeta) + J(\overline{v}_h).$$

En utilisant (4.69)

$$\begin{aligned}\Big[\frac{I-S(h)}{h}\overline{v}_h, \tilde{\psi}\zeta\Big] \geq -(&\|\overline{f}\|_{(\mathcal{K}^p)'} + \|\mathcal{A}\overline{v}_h\|_{(\mathcal{K}^p)'} \\ &+\gamma\|k\|_{L^{p'}(0,T;L^{p'}(\omega))})\|\tilde{\psi}\zeta\|_{\mathcal{K}^p}.\end{aligned} \tag{4.87}$$

De la deuxième inégalité on a

$$\Big[\frac{I-S(h)}{h}\overline{v}_h, \tilde{\psi}\zeta\Big] \leq [\overline{f}, \tilde{\psi}\zeta] - [\mathcal{A}\overline{v}_h, \tilde{\psi}\zeta] + J(\overline{v}_h - \tilde{\psi}\zeta) - J(\overline{v}_h),$$

et avec (4.69)

$$\begin{aligned}\Big[\frac{I-S(h)}{h}\overline{v}_h, \tilde{\psi}\zeta\Big] \leq (&\|\overline{f}\|_{(\mathcal{K}^p)'} + \|\mathcal{A}\overline{v}_h\|_{(\mathcal{K}^p)'} \\ &+\gamma\|k\|_{L^{p'}(0,T;L^{p'}(\omega))})\|\tilde{\psi}\zeta\|_{\mathcal{K}^p}.\end{aligned} \tag{4.88}$$

D'après (4.87), (4.88) on a

$$\Big|\Big[\frac{I-S(h)}{h}\overline{v}_h, \tilde{\psi}\zeta\Big]\Big| \leq (\|\overline{f}\|_{(\mathcal{K}^p)'} + \|\mathcal{A}\overline{v}_h\|_{(\mathcal{K}^p)'} + \gamma\|k\|_{L^{p'}(0,T;L^{p'}(\omega))})\|\tilde{\psi}\zeta\|_{\mathcal{K}^p}.$$

Rappelons que l'opérateur $\mathcal{A}$ est borné et $(\overline{v}_h)_{h>0}$ est bornée dans $\mathcal{K}^p$, donc

$$\Big|\Big[\frac{I-S(h)}{h}\overline{v}_h, \tilde{\psi}\zeta\Big]\Big| \leq C\|\tilde{\psi}\zeta\|_{\mathcal{K}^p}, \tag{4.89}$$

où C est indépendant de h.

D'autre part,

$$\begin{aligned}&\Big[\frac{I-S(h)}{h}\overline{v}_h, \tilde{\psi}\zeta\Big] = \int_0^T\int_\Omega \Big(\Big(\frac{I-S(h)}{h}\overline{v}_h(t)\Big)\cdot\tilde{\psi}\Big)\zeta(t)\,dx\,dt \\ &= \frac{1}{h}\Big(\int_0^T\int_\Omega (\overline{v}_h(t)\cdot\tilde{\psi})\zeta(t)\,dx\,dt - \int_h^T\int_\Omega (\overline{v}_h(t-h)\cdot\tilde{\psi})\zeta(t)\,dx\,dt\Big) \\ &= \frac{1}{h}\Big(\int_0^T\int_\Omega (\overline{v}_h(t')\cdot\tilde{\psi})\zeta(t')\,dx\,dt' - \int_0^{T-h}\int_\Omega (\overline{v}_h(t')\cdot\tilde{\psi})\zeta(t'+h)\,dx\,dt'\Big) \\ &= \frac{1}{h}\Big(\int_0^{T-h}\int_\Omega (\overline{v}_h(t')\cdot\tilde{\psi})\big(\zeta(t') - \zeta(t'+h)\big)\,dx\,dt' \\ &+ \int_{T-h}^T\int_\Omega (\overline{v}_h(t')\cdot\tilde{\psi})\zeta(t')\,dx\,dt'\Big).\end{aligned}$$

Comme $\zeta \in \mathcal{D}(0,T)$ on a $supp(\zeta)$ compact inclus dans $]0,T[$ c-à-d, il existe $[a,b] \subset]0,T[$ tel que

$$\zeta(t) = 0 \quad \forall t \notin [a,b].$$

Donc pour tout $h \in]0, T-b[$ on a

$$\zeta(t) = 0 \quad \forall t \in [T-h, T]. \tag{4.90}$$

Avec (4.90) on obtient

$$\Big[\frac{I-S(h)}{h}\overline{v}_h, \tilde{\psi}\zeta\Big] = \frac{1}{h}\Big(\int_0^{T-h}\int_\Omega (\overline{v}_h(t')\cdot\tilde{\psi})\big(\zeta(t') - \zeta(t'+h)\big)\,dx\,dt'\Big).$$

D'après la formule de Taylor on a

$$\zeta(t'+h) - \zeta(t') = h\zeta'(t') + \frac{h^2}{2}\zeta''(t'+c_{t'}h), \quad 0 \le c_{t'} \le 1,$$

d'où

$$\begin{aligned}\Big[\frac{I-S(h)}{h}\overline{v}_h, \tilde{\psi}\zeta\Big] &= -\frac{1}{h}\Big(\int_0^{T-h}\int_\Omega (\overline{v}_h(t')\cdot\tilde{\psi})\big(h\zeta'(t') \\ &\quad + \frac{h^2}{2}\zeta''(t'+c_{t'}h)\big)\,dx\,dt'\Big) \\ &= -\int_0^{T-h}\int_\Omega (\overline{v}_h(t')\cdot\tilde{\psi})\zeta'(t')\,dx\,dt' \\ &\quad -\frac{h}{2}\int_0^{T-h}\int_\Omega (\overline{v}_h(t')\cdot\tilde{\psi})\zeta''(t'+c_{t'}h)\,dx\,dt',\end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned}\Big[\frac{I-S(h)}{h}\overline{v}_h, \tilde{\psi}\zeta\Big] &= -\int_0^{T}\int_\Omega (\overline{v}_h(t')\cdot\tilde{\psi})\zeta'(t')\,dx\,dt' \\ &\quad + \int_{T-h}^{T}\int_\Omega (\overline{v}_h(t')\cdot\tilde{\psi})\zeta'(t')\,dx\,dt' \\ &\quad -\frac{h}{2}\int_0^{T-h}\int_\Omega (\overline{v}_h(t')\cdot\tilde{\psi})\zeta''(t'+c_{t'}h)\,dx\,dt'.\end{aligned}$$

En utilisant (4.90), on obtient

$$\begin{aligned}\Big[\frac{I-S(h)}{h}\overline{v}_h, \tilde{\psi}\zeta\Big] &= -\Big(\int_0^{T}\int_\Omega (\overline{v}_h(t')\cdot\tilde{\psi})\zeta'(t')\,dx\,dt' \\ &+\frac{h}{2}\int_0^{T-h}\int_\Omega (\overline{v}_h(t')\cdot\tilde{\psi})\zeta''(t'+c_{t'}h)\,dx\,dt'\Big).\end{aligned} \tag{4.91}$$

On a

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{h}{2}\int_0^{T-h}\int_\Omega(\overline{v}_h(t')\cdot\tilde{\psi})\zeta''(t'+c_{t'}h)\,dx\,dt'\Big|\\
&\leq\frac{h}{2}\int_0^{T}\int_\Omega|\overline{v}_h(t')||\tilde{\psi}||\zeta''(t'+c_{t'}h)|\,dx\,dt'\\
&\leq\frac{h}{2}C_0\int_0^{T}\int_\Omega|\overline{v}_h(t')||\tilde{\psi}|\,dx\,dt',
\end{aligned}$$

où $C_0=\|\zeta''\|_{C([0,T])}$.
Comme $p>2$, en utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz en espace et en temps on obtient

$$\Big|\frac{h}{2}\int_0^{T-h}\int_\Omega(\overline{v}_h(t')\cdot\tilde{\psi})\zeta''(t'+ch)\,dx\,dt'\Big|\leq\frac{h}{2}C_0\sqrt{T}\|\overline{v}_h\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}\|\tilde{\psi}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}.$$

Comme l'injection de $\mathcal{K}^p$ dans $L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$ est continue et la suite $(\overline{v}_h)_{h>0}$ est bornée dans $\mathcal{K}^p$ on a

$$\Big|\frac{h}{2}\int_0^{T-h}\int_\Omega(\overline{v}_h(t')\cdot\tilde{\psi})\zeta''(t'+ch)\,dx\,dt'\Big|\leq C_*h, \tag{4.92}$$

où C_* est indépendant de h.
Avec (4.91)

$$\begin{aligned}
&\int_0^{T}\int_\Omega(\overline{v}_h(t')\cdot\tilde{\psi})\zeta'(t')\,dx\,dt'=-\Big[\frac{I-S(h)}{h}\overline{v}_h,\tilde{\psi}\zeta\Big]\\
&-\frac{h}{2}\int_0^{T-h}\int_\Omega(\overline{v}_h(t')\cdot\tilde{\psi})\zeta''(t'+c_{t'}h)\,dx\,dt'.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_0^{T}\int_\Omega(\overline{v}_h(t')\cdot\tilde{\psi})\zeta'(t')\,dx\,dt'\Big|\leq\Big|\Big[\frac{I-S(h)}{h}\overline{v}_h,\tilde{\psi}\zeta\Big]\Big|\\
&+\Big|\frac{h}{2}\int_0^{T-h}\int_\Omega(\overline{v}_h(t')\cdot\tilde{\psi})\zeta''(t'+c_{t'}h)\,dx\,dt'\Big|,
\end{aligned}$$

d'après (4.89) et (4.92) on a

$$\Big|\int_0^{T}\int_\Omega(\overline{v}_h(t')\cdot\tilde{\psi})\zeta'(t')\,dx\,dt'\Big|\leq C\|\tilde{\psi}\zeta\|_{\mathcal{K}^p}+C_*h.$$

On passe à la limite quand $h \to 0$, on obtient

$$\Big| \int_0^T \int_\Omega (\overline{v}(t') \cdot \tilde{\psi}) \zeta'(t') \, dx \, dt' \Big| \leq C \|\tilde{\psi}\zeta\|_{\mathcal{K}^p},$$

d'où $\overline{v}'$ est dans $(\mathcal{K}^p)'$ et

$$\|\overline{v}'\|_{(\mathcal{K}^p)'} \leq C. \tag{4.93}$$

D'autre part, pour tout $\overline{\varphi} \in \phi^p$ on a

$$\begin{aligned} &[\overline{v}', \overline{\varphi} - \overline{v}] + [\mathcal{A}\overline{v}, \overline{\varphi} - \overline{v}] + J(\overline{\varphi}) - J(\overline{v}) - [\overline{f}, \overline{\varphi} - \overline{v}] \\ &= [\overline{\varphi}', \overline{\varphi} - \overline{v}] + [\mathcal{A}\overline{v}, \overline{\varphi} - \overline{v}] + J(\overline{\varphi}) - J(\overline{v}) - [\overline{f}, \overline{\varphi} - \overline{v}] \\ &- \int_0^T < \overline{\varphi}' - \overline{v}', \overline{\varphi} - \overline{v} >_{(V^p_{0.div})', V^p_{0.div}} \, dt, \end{aligned} \tag{4.94}$$

or

$$\begin{aligned} &- \int_0^T < \overline{\varphi}' - \overline{v}', \overline{\varphi} - \overline{v} >_{(V^p_{0.div})', V^p_{0.div}} \, dt = -\frac{1}{2} \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} \|\overline{\varphi} - \overline{v}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \, dt \\ &= -\frac{1}{2} \|\overline{\varphi}(T) - \overline{v}(T)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \frac{1}{2} \|\overline{\varphi}(0) - \overline{v}(0)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ &\geq -\frac{1}{2} \|\overline{\varphi}(T) - \overline{v}(T)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \quad \forall \overline{\varphi} \in \phi^p, \end{aligned} \tag{4.95}$$

et avec (4.61) et (4.95),

$$[\overline{v}', \overline{\varphi} - \overline{v}] + [\mathcal{A}\overline{v}, \overline{\varphi} - \overline{v}] + J(\overline{\varphi}) - J(\overline{v}) - [\overline{f}, \overline{\varphi} - \overline{v}] \geq -\frac{1}{2} \|\overline{\varphi}(T) - \overline{v}(T)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}.$$

Si $\overline{\varphi}(T) = \overline{v}(T)$ on a bien

$$[\overline{v}', \overline{\varphi} - \overline{v}] + [\mathcal{A}\overline{v}, \overline{\varphi} - \overline{v}] + J(\overline{\varphi}) - J(\overline{v}) \geq [\overline{f}, \overline{\varphi} - \overline{v}].$$

Soit $\overline{\varphi} \in \phi^p$, on modifie $\overline{\varphi}$ avec

$$\overline{\varphi}_\epsilon = \overline{\varphi} \mathcal{X}_\epsilon + \overline{v}(1 - \mathcal{X}_\epsilon),$$

où $\mathcal{X}_\epsilon \in C^\infty([0,T]; \mathbb{R})$ tel que

$$\mathcal{X}_\epsilon = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \in [0, T - \epsilon], \\ 0 & \text{si } t \in [T - \frac{\epsilon}{2}, T], \end{cases}$$

et $\mathcal{X}_\epsilon(t) \in [0,1]$ si $t \in [T-\epsilon, T-\frac{\epsilon}{2}]$.
On a $\overline{\varphi}_\epsilon \in \mathcal{K}^p$, $\overline{\varphi}'_\epsilon \in (\mathcal{K}^p)'$ (car $\overline{\varphi}'_\epsilon = \overline{\varphi}'\mathcal{X}_\epsilon + \overline{\varphi}\mathcal{X}'_\epsilon + \overline{v}'(1-\mathcal{X}_\epsilon) - \overline{v}\mathcal{X}'_\epsilon$), et $\overline{\varphi}_\epsilon(0) = \overline{\varphi}(0) = 0$ d'où $\overline{\varphi}_\epsilon \in \phi^p$.
Comme $\overline{\varphi}_\epsilon(T) = \overline{v}(T)$, on a

$$[\overline{v}', \overline{\varphi}_\epsilon - \overline{v}] + [\mathcal{A}\overline{v}, \overline{\varphi}_\epsilon - \overline{v}] + J(\overline{\varphi}_\epsilon) - J(\overline{v}) \geq [\overline{f}, \overline{\varphi}_\epsilon - \overline{v}], \quad \forall \epsilon \in \Big(0, \frac{T}{2}\Big), \tag{4.96}$$

d'autre part, on a

$$\begin{aligned} \|\overline{\varphi}_\epsilon - \overline{\varphi}\|^p_{\mathcal{K}^p} &= \int_0^T \|\overline{\varphi}_\epsilon - \overline{\varphi}\|^p_{V^p_{0.div}}\, dt \\ &= \int_0^T |1-\mathcal{X}_\epsilon|^p \|\overline{v} - \overline{\varphi}\|^p_{V^p_{0.div}}\, dt. \end{aligned}$$

La fonction $F_\epsilon = |1-\mathcal{X}_\epsilon|^p \|\overline{v} - \overline{\varphi}\|^p_{V^p_{0.div}} \in L^1(0,T)$, et vérifie

$$|F_\epsilon(t)| \leq \|\overline{v} - \overline{\varphi}\|^p_{V^p_{0.div}}(t), \quad \forall t \in [0,T],$$

(car $|1-\mathcal{X}_\epsilon| \leq 1$) où $\|\overline{v} - \overline{\varphi}\|^p_{V^p_{0.div}} \in L^1(0,T)$, de plus pour presque tout $t \in [0,T]$ on a $F_\epsilon \to 0$ lorsque $\epsilon \to 0$. Avec le théorème de la convergence dominée, on a $\overline{\varphi}_\epsilon \to \overline{\varphi}$ dans $\mathcal{K}^p$ fort. On peut donc passer à la limite dans (4.96) on obtient

$$[\overline{v}', \overline{\varphi} - \overline{v}] + [\mathcal{A}\overline{v}, \overline{\varphi} - \overline{v}] + J(\overline{\varphi}) - J(\overline{v}) \geq [\overline{f}, \overline{\varphi} - \overline{v}], \quad \forall \overline{\varphi} \in \phi^p.$$

D'après (4.65) ϕ^p est dense dans $\mathcal{K}^p$, donc on a

$$[\overline{v}', \overline{\varphi} - \overline{v}] + [\mathcal{A}\overline{v}, \overline{\varphi} - \overline{v}] + J(\overline{\varphi}) - J(\overline{v}) \geq [\overline{f}, \overline{\varphi} - \overline{v}], \quad \forall \overline{\varphi} \in \mathcal{K}^p. \tag{4.97}$$

Donc, il reste seulement à montrer que $\overline{v}(0) = 0$. On choisit $\overline{\varphi} = \overline{v}_h \pm \tilde{\psi}\zeta \in \mathcal{K}^p$ avec $\tilde{\psi} \in W^{1,p}_{0.div}$ et $\zeta \in L^p(0,T)$ dans (4.66) et $J(\overline{v}_h \pm \tilde{\psi}\zeta) = J(\overline{v}_h)$, on obtient

$$\Big[\frac{I - S(h)}{h}\overline{v}_h, \tilde{\psi}\zeta\Big] + [\mathcal{A}\overline{v}_h, \tilde{\psi}\zeta] = [\overline{f}, \tilde{\psi}\zeta]. \tag{4.98}$$

Pour $\zeta \in C^\infty([0,T])$, avec $\zeta = 0$ sur $[b,T]$ tel que $0 < b < T$ on utilise (4.91) on obtient

$$\begin{aligned} &-\int_0^T \int_\Omega (\overline{v}_h(t') \cdot \tilde{\psi})\zeta'(t')\, dx\, dt' - \frac{h}{2}\int_0^{T-h} \int_\Omega (\overline{v}_h(t') \cdot \tilde{\psi})\zeta''(t' + c_{t'}h)\, dx\, dt' \\ &+[\mathcal{A}\overline{v}_h, \tilde{\psi}\zeta] = [\overline{f}, \tilde{\psi}\zeta], \quad \forall h \in]0, T-b[. \end{aligned}$$

On passe à la limite quand $h \to 0$ et en utilisant (4.92), on trouve

$$-\int_0^T \int_\Omega (\overline{v}(t') \cdot \tilde{\psi})\zeta'(t')\, dx\, dt' + [\chi, \tilde{\psi}\zeta] = [\overline{f}, \tilde{\psi}\zeta]. \tag{4.99}$$

On utilise (4.97) avec $\overline{\varphi} = \overline{v} \pm \tilde{\psi}\zeta \in \mathcal{K}^p$ où $\tilde{\psi} \in W^{1,p}_{0.div}$ et $\zeta \in C^\infty([0,T])$, avec $\zeta = 0$ sur $[b,T]$ tel que $0 < b < T$ on obtient

$$[\overline{v}', \tilde{\psi}\zeta] + [\mathcal{A}\overline{v}, \tilde{\psi}\zeta] = [\overline{f}, \tilde{\psi}\zeta], \tag{4.100}$$

avec (4.99), (4.100) on a

$$[\chi, \tilde{\psi}\zeta] = [\mathcal{A}\overline{v}, \tilde{\psi}\zeta] \quad \forall \tilde{\psi} \in W^{1,p}_{0.div}, \quad \forall \zeta \in \mathcal{D}(0,T).$$

Puisque $\chi - \mathcal{A}\overline{v} \in (\mathcal{K}^p)' = L^{p'}(0,T;(V^p_{0.div})') \subset L^{p'}(0,T;(W^{1,p}_{0.div})')$ (car $W^{1,p}_{0.div} \subset V^p_{0.div}$), on a

$$[\chi - \mathcal{A}\overline{v}, \tilde{\psi}\zeta] = 0 \quad \forall \tilde{\psi} \in W^{1,p}_{0.div}, \quad \forall \zeta \in \mathcal{D}(0,T), \tag{4.101}$$

et $\mathcal{D}(0,T) \otimes W^{1,p}_{0.div}$ est dense dans $L^p(0,T;W^{1,p}_{0.div})$, d'où

$$\chi = \mathcal{A}\overline{v} \quad \text{dans} \quad L^{p'}(0,T;(W^{1,p}_{0.div})').$$

De (4.99), on tire

$$-\int_0^T \int_\Omega (\overline{v}(t') \cdot \tilde{\psi})\zeta'(t')\, dx\, dt' + [\mathcal{A}\overline{v}, \tilde{\psi}\zeta] = [\overline{f}, \tilde{\psi}\zeta], \quad \forall \tilde{\psi} \in W^{1,p}_{0.div},$$
$$\forall \zeta \in C^\infty([0,T]), \quad \zeta = 0 \quad \text{sur} \quad [b,T] \quad \text{tel que} \quad 0 < b < T,$$

et avec (4.100) on obtient

$$-\int_0^T \int_\Omega (\overline{v}(t') \cdot \tilde{\psi})\zeta'(t')\, dx\, dt' = [\overline{v}', \tilde{\psi}\zeta], \ \forall \tilde{\psi} \in W^{1,p}_{0.div}, \ \forall \zeta \in C^\infty([0,T]),$$
$$\zeta = 0 \quad \text{sur} \quad [b,T] \quad \text{tel que} \quad 0 < b < T.$$

Par une intégration par parties on trouve

$$\int_\Omega (\overline{v}(T) \cdot \tilde{\psi})\zeta(T)\, dx - \int_\Omega (\overline{v}(0) \cdot \tilde{\psi})\zeta(0)\, dx = 0,$$

comme $\zeta(T) = 0$ on a

$$\int_\Omega (\overline{v}(0) \cdot \tilde{\psi})\, dx = 0, \quad \forall \tilde{\psi} \in W^{1,p}_{0.div}. \tag{4.102}$$

Comme $W^{1,p}_{0.div}$ est dense dans H (cf théorème 2.9 avec $m = 1$, $r = p$ [3] page 117 et le théorème 2.8 chap I [46]) alors pour tout $\overline{v}(0) \in H$, il existe $(\tilde{\psi}_j)_{j\in\mathbb{N}} \in W^{1,p}_{0.div}$ telle que

$$\lim_{j\to+\infty} \tilde{\psi}_j = \overline{v}(0) \quad \text{dans} \quad H,$$

en remplaçant $\tilde{\psi}$ par $\tilde{\psi}_j$ dans (4.102) on obtient

$$\int_\Omega (\overline{v}(0) \cdot \tilde{\psi}_j)\, dx = 0.$$

Par le passage à la limite quand $j \to +\infty$ on trouve

$$\int_\Omega |\overline{v}(0)|^2\, dx = \|\overline{v}(0)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = 0,$$

d'où

$$\overline{v}(0) = 0.$$

Ce qui montre que le problème 4.4 admet au moins une solution.

□

4.3.4 Résultat d'unicité pour le problème 4.4

Théorème 4.3 *Sous les hypothèses du Théorème* 4.1*, la solution du problème* 4.4 *est unique.*

Preuve. On suppose que le problème 4.4 admet deux solutions $\overline{v}_1$ et $\overline{v}_2$. Donc, elles vérifient les deux inéquations suivantes

$$[\overline{v}'_1, \overline{\varphi} - \overline{v}_1] + [\mathcal{A}\overline{v}_1, \overline{\varphi} - \overline{v}_1] + J(\overline{\varphi}) - J(\overline{v}_1) \geq [\overline{f}, \overline{\varphi} - \overline{v}_1] \quad \forall \overline{\varphi} \in L^p(0,T; V^p_{0.div}),$$

$$[\overline{v}'_2, \overline{\varphi} - \overline{v}_2] + [\mathcal{A}\overline{v}_2, \overline{\varphi} - \overline{v}_2] + J(\overline{\varphi}) - J(\overline{v}_2) \geq [\overline{f}, \overline{\varphi} - \overline{v}_2] \quad \forall \overline{\varphi} \in L^p(0,T; V^p_{0.div}).$$

Fixons $t \in]0,T]$, prenons $\overline{\varphi} = \overline{v}_2 1_{[0,t]} + \overline{v}_1 1_{]t,T]}$ dans la première inéquation et $\overline{\varphi} = \overline{v}_1 1_{[0,t]} + \overline{v}_2 1_{]t,T]}$ dans la deuxième avec

$$1_{[0,t]} = \begin{cases} 1 & \text{sur } [0,t], \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

En additionnant les deux inéquations, on aura :

$$[\overline{v}_1' - \overline{v}_2', (\overline{v}_2 - \overline{v}_1)1_{[0,t]}] + [\mathcal{A}\overline{v}_1 - \mathcal{A}\overline{v}_2, (\overline{v}_2 - \overline{v}_1)1_{[0,t]}] \geq 0,$$

c-à-d

$$[\overline{v}_1' - \overline{v}_2', (\overline{v}_1 - \overline{v}_2)1_{[0,t]}] + [\mathcal{A}\overline{v}_1 - \mathcal{A}\overline{v}_2, (\overline{v}_1 - \overline{v}_2)1_{[0,t]}] \leq 0.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
&[\mathcal{A}\overline{v}_1 - \mathcal{A}\overline{v}_2, (\overline{v}_1 - \overline{v}_2)1_{[0,t]}] \\
&= \int_0^T \Big(a(\theta; \overline{v}_1, (\overline{v}_1 - \overline{v}_2)1_{[0,t]}) - a(\theta; \overline{v}_2, (\overline{v}_1 - \overline{v}_2)1_{[0,t]}\Big)\, d\tilde{t} \\
&= \int_0^t (a(\theta; \overline{v}_1, (\overline{v}_1 - \overline{v}_2)) - a(\theta; \overline{v}_2, (\overline{v}_1 - \overline{v}_2))\, d\tilde{t},
\end{aligned}$$

en utilisant le même raisonnement que dans l'étude de la monotonie de $\mathcal{A}$, on a aussi

$$\begin{aligned}
&\int_0^t (a(\theta; \overline{v}_1, (\overline{v}_1 - \overline{v}_2)) - a(\theta; \overline{v}_2, (\overline{v}_1 - \overline{v}_2))\, d\tilde{t} \\
&\geq \int_0^t \int_\Omega |D(\overline{v}_1 + \upsilon_0\xi)|^{p-2}\Big(\mu(\theta, |D(\overline{v}_1 + \upsilon_0\xi)|) - \mu(\theta, |D(\overline{v}_2 + \upsilon_0\xi)|)\Big) \\
&\times \Big(|D(\overline{v}_1 + \upsilon_0\xi)|^2 - |D(\overline{v}_2 + \upsilon_0\xi)|^2\Big)\, dx\, d\tilde{t} \\
&+ \int_0^t \int_\Omega \mu(\theta, |D(\overline{v}_2 + \upsilon_0\xi)|)\Big(|D(\overline{v}_1 + \upsilon_0\xi)|^{p-2} - |D(\overline{v}_2 + \upsilon_0\xi)|^{p-2}\Big) \\
&\times \Big(|D(\overline{v}_1 + \upsilon_0\xi)|^2 - |D(\overline{v}_2 + \upsilon_0\xi)|^2\Big)\, dx\, d\tilde{t}.
\end{aligned}$$

Avec (4.2), (4.3) et monotonie de la fonction $w \mapsto w^{p-2}$ sur $\mathbb{R}^+$ car $p-2 > 0$ on a

$$\int_0^t (a(\theta; \overline{v}_1, (\overline{v}_1 - \overline{v}_2)) - a(\theta; \overline{v}_2, (\overline{v}_1 - \overline{v}_2))\, d\tilde{t} \geq 0,$$

d'où

$$[\mathcal{A}\overline{v}_1 - \mathcal{A}\overline{v}_2, (\overline{v}_1 - \overline{v}_2)1_{[0,t]}] \geq 0.$$

Donc,

$$\int_0^t < \overline{v}_1' - \overline{v}_2', \overline{v}_1 - \overline{v}_2 >_{(V^p_{0.div})', V^p_{0.div}}\, d\tilde{t} \leq 0.$$

D'autre part,

$$\int_0^t < \overline{v}_1' - \overline{v}_2', \overline{v}_1 - \overline{v}_2 >_{(V_{0.div}^p)', V_{0.div}^p} \, d\tilde{t} = \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\|\overline{v}_1 - \overline{v}_2\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \, d\tilde{t}$$
$$= \frac{1}{2}\Big(\|\overline{v}_1(t) - \overline{v}_2(t)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - \|\overline{v}_1(0) - \overline{v}_2(0)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\Big) \leq 0,$$

d'où

$$\|\overline{v}_1(t) - \overline{v}_2(t)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq \|\overline{v}_1(0) - \overline{v}_2(0)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}.$$

Or $\|\overline{v}_1(0) - \overline{v}_2(0)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = 0$, ce qui montre l'unicité de la solution du problème 4.4. □

4.3.5 Résultats d'existence pour le problème 4.3

Recherche de la pression

Dans cette section on étudie l'existence de la pression solution du problème 4.3.
Maintenant, on déduit du corollaire 3.1 [3] page 118 avec $m = 0$ le lemme suivant :

Lemme 4.3 *Soit $p > 1$, il existe une application $\boldsymbol{P} \in \mathcal{L}(L_0^p(\Omega), \boldsymbol{W}_0^{1,p}(\Omega))$ vérifiant*

$$div(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{g})) = \boldsymbol{g}, \quad \forall \boldsymbol{g} \in L_0^p(\Omega).$$

Proposition 4.3 *On suppose que les hypothèses* (4.2), (4.3) *sont satisfaites, alors pour $f \in L^{p'}(0,T;(V_0^p)')$, $k \in L^{p'}(0,T;L_+^{p'}(\omega))$, $\theta \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $s \in L^p(0,T;\boldsymbol{L}^p(\omega))$, $\xi \in W^{1,p'}(0,T)$ vérifiant* (4.8)*, et $v_0 \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$ vérifiant* (4.13)*, il existe une distribution π sur $\Omega\times]0,T[$ telle que pour tout $\tilde{\vartheta} \in \mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega)$ on a*

$$< \overline{f}, \tilde{\vartheta} >_{(V_0^p)', V_0^p} - \frac{\partial}{\partial t}(\overline{v}, \tilde{\vartheta})_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)} - a(\theta; \overline{v}, \tilde{\vartheta}) = -(\pi, div(\tilde{\vartheta})), \tag{4.103}$$

et

$$\int_\Omega \pi dx = 0, \tag{4.104}$$

où $\overline{v}$ est l'unique solution du problème 4.4.

Preuve. Soit $\overline{v}$ l'unique solution du problème 4.4. En prenant $\overline{\varphi} = \overline{v} \pm \vartheta$ pour ϑ variant dans $L^p(0,T;W^{1,p}_{0.div})$ dans l'inéquation variationnelle (4.58), on obtient l'équation variationelle suivante,

$$\begin{aligned} &\int_0^T < \overline{v}', \vartheta >_{(V^p_{0.div})', V^p_{0.div}} \, dt + \int_0^T a(\theta; \overline{v}, \vartheta)\, dt \\ &= \int_0^T < \overline{f}, \vartheta >_{(V^p_{0.div})', V^p_{0.div}} \, dt. \end{aligned} \tag{4.105}$$

Soit $\tilde{\vartheta} \in W^{1,p}_{0.div}$ indépendante du temps, pour tout $t \in [0,T]$ on définit

$$\vartheta = \begin{cases} \tilde{\vartheta} & \text{sur} \quad [0,t], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc, (4.105) devient

$$\int_0^t < \overline{v}', \tilde{\vartheta} >_{(V^p_{0.div})', V^p_{0.div}} \, d\mathbf{s} + \int_0^t a(\theta; \overline{v}, \tilde{\vartheta})\, d\mathbf{s} = \int_0^t < \overline{f}, \tilde{\vartheta} >_{(V^p_{0.div})', V^p_{0.div}} \, d\mathbf{s},$$

c-à-d,

$$(\overline{v}(t), \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \int_0^t a(\theta; \overline{v}, \tilde{\vartheta})\, d\mathbf{s} =< \int_0^t \overline{f}\, d\mathbf{s}, \tilde{\vartheta} >_{(V^p_{0.div})', V^p_{0.div}} .$$

Considérons la forme linéaire $\tilde{F}(t)$ définie sur V^p_0 par

$$\tilde{F}(t)(\tilde{\vartheta}) =< \int_0^t \overline{f}\, d\mathbf{s}, \tilde{\vartheta} >_{(V^p_0)', V^p_0} - (\overline{v}(t), \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - \int_0^t a(\theta; \overline{v}, \tilde{\vartheta})\, d\mathbf{s}.$$

Puisque $p > 2$, avec (4.34) on obtient

$$\Big| \int_0^t a(\theta; \overline{v}, \tilde{\vartheta})\, d\mathbf{s} \Big| \quad \leq \quad 2^{p-1}\mu_1(\|\overline{v}\|^{p-1}_{L^p(0,T;V^p_0)} + c^{p-1}t^{\frac{1}{p'}}\|v_0\|^{p-1}_{1.p})\|\vartheta\|_{L^p(0,T;V^p_0)}.$$

Comme

$$\|\vartheta\|_{L^p(0,T;V^p_0)} = t^{\frac{1}{p}}\|\tilde{\vartheta}\|_{1.p}, \tag{4.106}$$

on obtient

$$\Big| \int_0^t a(\theta; \overline{v}, \tilde{\vartheta})\, d\mathbf{s} \Big| \leq 2^{p-1}\mu_1(t^{\frac{1}{p}}\|\overline{v}\|^{p-1}_{L^p(0,T;V^p_0)} + c^{p-1}t\|v_0\|^{p-1}_{1.p})\|\tilde{\vartheta}\|_{1.p}. \tag{4.107}$$

Montrons que $\tilde{F}(t)$ est continue sur V_0^p. Pour tout $\tilde{\vartheta} \in V_0^p$ on a

$$|\tilde{F}(t)(\tilde{\vartheta})| \leq \Big| < \int_0^t \overline{f}\, d\mathbf{s}, \tilde{\vartheta} >_{(V_0^p)',V_0^p} \Big| + |(\overline{\upsilon}(t), \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}| + \Big| \int_0^t a(\theta; \overline{\upsilon}, \tilde{\vartheta})\, d\mathbf{s} \Big|.$$

Avec (4.107), en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz en espace on trouve

$$\begin{aligned} |\tilde{F}(t)(\tilde{\vartheta})| &\leq \Big\| \int_0^t \overline{f}\, d\mathbf{s} \Big\|_{(V_0^p)'} \|\tilde{\vartheta}\|_{1.p} + \|\overline{\upsilon}(t)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|\tilde{\vartheta}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ &+ 2^{p-1}\mu_1 (t^{\frac{1}{p}} \|\overline{\upsilon}\|^{p-1}_{L^p(0,T;V_0^p)} + c^{p-1} t \|\upsilon_0\|^{p-1}_{1.p}) \|\tilde{\vartheta}\|_{1.p}. \end{aligned}$$

D'après l'injection continue de V_0^p dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ on obtient

$$|\tilde{F}(t)(\tilde{\vartheta})| \leq C \|\tilde{\vartheta}\|_{1.p},$$

ce qui montre que $\tilde{F}(t)$ est continue sur V_0^p. Maintenant, remarquons que

$$\tilde{F}(t)(\tilde{\vartheta}) = 0 \quad \forall \tilde{\vartheta} \in W^{1,p}_{0.div},$$

en utilisant le lemme 2.7 (voir [3] page 115) avec $m = 1$, $r' = p$, $r = p'$, on obtient pour chaque $t \in [0, T]$, l'existence et l'unicité (à une constante près) d'une fonction $\tilde{\pi}(t) \in L^{p'}(\Omega)$ telle que

$$\tilde{F}(t) = \nabla \tilde{\pi}(t), \tag{4.108}$$

d'où

$$\tilde{F}(t)(\tilde{\vartheta}) = < \nabla \tilde{\pi}(t), \tilde{\vartheta} >_{\mathbf{D}'(\Omega),\mathbf{D}(\Omega)} \quad \forall \tilde{\vartheta} \in \mathbf{D}(\Omega). \tag{4.109}$$

D'après le corollaire 2.5 (voir [3] page 114) avec $m = 0$, l'opérateur gradient est un isomorphisme de $L_0^{p'}(\Omega)$ dans $\mathbf{W}^{-1,p'}(\Omega)$. De (4.108), on conclut que $\nabla \tilde{\pi} \in C([0, T]; \mathbf{W}^{-1,p'}(\Omega))$, et de plus

$$\tilde{\pi} \in C([0, T]; L_0^{p'}(\Omega)).$$

Pour tout $\tilde{\vartheta} \in \mathbf{D}(\Omega) = (\mathcal{D}(\Omega))^3$, en utilisant la formule de Green dans (4.109) on obtient

$$< \int_0^t \overline{f}\, d\mathbf{s}, \tilde{\vartheta} >_{(V_0^p)',V_0^p} - (\overline{\upsilon}(t), \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - \int_0^t a(\theta; \overline{\upsilon}, \tilde{\vartheta})\, d\mathbf{s} = -(\tilde{\pi}(t), div(\tilde{\vartheta})).$$

Par la densité de $\mathbf{D}(\Omega)$ dans $\mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega)$ on a aussi pour tout $\tilde{\vartheta} \in \mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega)$

$$< \int_0^t \overline{f}\, d\mathbf{s}, \tilde{\vartheta} >_{(V_0^p)',V_0^p} - (\overline{\upsilon}(t), \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - \int_0^t a(\theta; \overline{\upsilon}, \tilde{\vartheta})\, d\mathbf{s} = -(\tilde{\pi}(t), div(\tilde{\vartheta})).$$

On dérive l'équation ci-dessus par rapport à t au sens des distributions, et on pose

$$\pi = \frac{\partial \tilde{\pi}}{\partial t}. \tag{4.110}$$

On obtient (4.103).
Avec (4.110) on a

$$\int_\Omega \pi dx = \int_\Omega \frac{\partial \tilde{\pi}}{\partial t}\, dx,$$

comme $\tilde{\pi} \in C([0,T]; L_0^{p'}(\Omega))$ on a (4.104). □

Lemme 4.4 *On a* $\pi \in H^{-1}(0,T; L_0^{p'}(\Omega))$.

Preuve. Multiplions (4.103) par $\zeta \in \mathcal{D}(0,T)$ et intégrons entre 0 et T on obtient

$$\begin{aligned} &\int_0^T \frac{\partial}{\partial t}(\overline{v}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta\, dt + \int_0^T a(\theta; \overline{v}, \tilde{\vartheta}\zeta)\, dt - \int_0^T (\pi, div(\tilde{\vartheta}))\zeta\, dt \\ &= \int_0^T < \overline{f}, \tilde{\vartheta} >_{(V_0^p)', V_0^p} \zeta\, dt. \end{aligned} \tag{4.111}$$

Considérons $\varpi \in L_0^p(\Omega)$ et

$$\tilde{\vartheta} = \mathbf{P}(\varpi),$$

où $\mathbf{P}$ est l'opérateur linéaire continu de $L_0^p(\Omega)$ dans $\mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega)$ défini dans le lemme 4.3. On obtient que

$$div(\tilde{\vartheta}) = \varpi.$$

En prenant $\tilde{\vartheta}\zeta = \eta$ dans (4.111), on obtient

$$\begin{aligned} &\int_0^T (\pi, \varpi)\zeta\, dt = \int_0^T \frac{\partial}{\partial t}(\overline{v}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta\, dt + \int_0^T a(\theta; \overline{v}, \eta)\, dt \\ &- \int_0^T < \overline{f}, \eta >_{(V_0^p)', V_0^p}\, dt. \end{aligned} \tag{4.112}$$

Pour tout $\zeta \in \mathcal{D}(0,T)$ on a

$$\int_0^T \frac{\partial}{\partial t}(\overline{v}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta\, dt = -\int_0^T (\overline{v}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta'\, dt. \tag{4.113}$$

Puisque $p > 2$, avec (4.34) on a

$$\begin{aligned}\Big|\int_0^T a(\theta;\overline{v},\eta)\,dt\Big| &\le 2^{p-1}\mu_1(T^{\frac{1}{p}}\|\overline{v}\|^{p-1}_{L^p(0,T;V_0^p)}\\ &+Tc^{p-1}\|\upsilon_0\|^{p-1}_{1.p})\|\eta\|_{L^\infty(0,T;V_0^p)},\end{aligned} \tag{4.114}$$

on obtient

$$\begin{aligned}\Big|\int_0^T (\pi,\varpi)\zeta\,dt\Big| &\le \|\overline{v}\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}\|\eta'\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}\\ &+ 2^{p-1}\mu_1(T^{\frac{1}{p}}\|\overline{v}\|^{p-1}_{L^p(0,T;V_0^p)} + Tc^{p-1}\|\upsilon_0\|^{p-1}_{1.p})\|\eta\|_{L^\infty(0,T;V_0^p)}\\ &+ T^{\frac{1}{p}}\|\overline{f}\|_{L^{p'}(0,T;(V_0^p)')}\|\eta\|_{L^\infty(0,T;V_0^p)},\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\Big|\int_0^T (\pi,\varpi)\zeta\,dt\Big| &\le \rho_*\|\overline{v}\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}\|\eta\|_{H^1(0,T;V_0^p)}\\ &+ 2^{p-1}\mu_1(T^{\frac{1}{p}}\|\overline{v}\|^{p-1}_{L^p(0,T;V_0^p)} + Tc^{p-1}\|\upsilon_0\|^{p-1}_{1.p})\|\eta\|_{L^\infty(0,T;V_0^p)}\\ &+ T^{\frac{1}{p}}\|\overline{f}\|_{L^{p'}(0,T;(V_0^p)')}\|\eta\|_{L^\infty(0,T;V_0^p)},\end{aligned}$$

où ρ_* désigne la constante de l'injection continue de V_0^p dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Donc

$$\begin{aligned}&\Big|\int_0^T (\pi,\varpi)\zeta\,dt\Big| \le \rho_*\|\overline{v}\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}\|\eta\|_{H^1(0,T;\mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega))}\\ &+2^{p-1}\mu_1(T^{\frac{1}{p}}\|\overline{v}\|^{p-1}_{L^p(0,T;V_0^p)} + Tc^{p-1}\|\upsilon_0\|^{p-1}_{1.p})\|\eta\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega))}\\ &+T^{\frac{1}{p}}\|\overline{f}\|_{L^{p'}(0,T;(V_0^p)')}\|\eta\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega))}.\end{aligned}$$

En utilisant la continuité de l'application $\mathbf{P}$ et l'injection continue de $H^1(0,T)$ dans $L^\infty(0,T)$ (voir [21] page 129) on obtient

$$\|\eta\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega))} = \|\zeta\|_{L^\infty(0,T)}\|\mathbf{P}\varpi\|_{\mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega)} \le C'\|\varpi\zeta\|_{H^1(0,T;L^p(\Omega))}.$$

Donc, pour tout $\varpi \in L^p_0(\Omega)$, $\zeta \in \mathcal{D}(0,T)$ on a

$$\Big|\int_0^T (\pi,\varpi)\zeta\,dt\Big| \le C^*\|\varpi\zeta\|_{H^1(0,T;L^p(\Omega))}. \tag{4.115}$$

D'autre part, pour tout $\varpi^* \in L^p(\Omega)$, on peut appliquer (4.115) en prenant

$$\varpi = \varpi^* - \frac{1}{mes\Omega}\int_\Omega \varpi^*\,dx,$$

car on a $\varpi \in L_0^p(\Omega)$.
En utilisant (4.104) on obtient

$$\begin{aligned}
&\Big| \int_0^T (\pi, (\varpi^* - \frac{1}{mes\Omega} \int_\Omega \varpi^* \, dx))\zeta \, dt \Big| \\
&= \Big| \int_0^T (\pi, \varpi^*)\zeta \, dt - \frac{1}{mes\Omega} \int_0^T \Big(\int_\Omega \pi \, dx \Big) \Big(\int_\Omega \varpi^* \, dx \Big) \zeta \, dt \Big| \qquad (4.116) \\
&= \Big| \int_0^T (\pi, \varpi^*)\zeta \, dt \Big|.
\end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\varpi|^p \, dx &= \int_\Omega \Big| \varpi^* - \frac{1}{mes\Omega} \int_\Omega \varpi^* \, dx \Big|^p \, dx \\
&\leq \int_\Omega \Big(|\varpi^*| + \frac{1}{mes\Omega} \Big| \int_\Omega \varpi^* \, dx \Big| \Big)^p \, dx,
\end{aligned}$$

de (4.33) on obtient

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\varpi|^p \, dx &\leq 2^{p-1} \int_\Omega \Big(|\varpi^*|^p + \frac{1}{(mes\Omega)^p} \Big| \int_\Omega \varpi^* \, dx \Big|^p \Big) \, dx \\
&= 2^{p-1} \Big(\int_\Omega |\varpi^*|^p \, dx + \frac{1}{(mes\Omega)^{p-1}} \Big| \int_\Omega \varpi^* \, dx \Big|^p \Big),
\end{aligned}$$

d'où

$$\int_\Omega |\varpi|^p \, dx \leq 2^{p-1} \Big(\|\varpi^*\|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{(mes\Omega)^{p-1}} \Big| \int_\Omega \varpi^* \, dx \Big|^p \Big). \qquad (4.117)$$

On a

$$\Big| \int_\Omega \varpi^* \, dx \Big|^p \leq \Big(\int_\Omega |\varpi^*| \, dx \Big)^p,$$

en utilisant l'inégalité de Hölder on obtient

$$\Big| \int_\Omega \varpi^* \, dx \Big|^p \leq \Big((mes\Omega)^{\frac{1}{p'}} \|\varpi^*\|_{L^p(\Omega)} \Big)^p,$$

comme p et p' sont conjugués on a $\dfrac{p}{p'} = p - 1$ donc

$$\Big| \int_\Omega \varpi^* \, dx \Big|^p \leq (mes\Omega)^{p-1} \|\varpi^*\|^p_{L^p(\Omega)}.$$

En remplaçant dans (4.117) on obtient

$$\int_\Omega |\varpi|^p \, dx \leq 2^p \|\varpi^*\|^p_{L^p(\Omega)},$$

d'où

$$\|\varpi\|_{L^p(\Omega)} \leq 2\|\varpi^*\|_{L^p(\Omega)}, \tag{4.118}$$

donc, pour tout $\varpi^* \in L^p(\Omega)$, $\zeta \in \mathcal{D}(0,T)$ on obtient

$$\Big| \int_0^T (\pi, \varpi)\zeta \, dt \Big| = \Big| \int_0^T (\pi, \varpi^*)\zeta \, dt \Big| \leq 2C^* \|\varpi^* \zeta\|_{H^1(0,T;L^p(\Omega))}.$$

Alors, avec la densité de $\mathcal{D}(0,T) \otimes L^p(\Omega)$ dans $H^1_0(0,T;L^p(\Omega))$ et avec (4.104) on conclut que $\pi \in H^{-1}(0,T;L^{p'}_0(\Omega))$. □

Théorème 4.4 *On suppose que les hypothèses* (4.2), (4.3) *sont satisfaites, alors pour* $f \in L^{p'}(0,T;\boldsymbol{L}^2(\Omega))$, $k \in L^{p'}(0,T;L^{p'}_+(\omega))$, $\theta \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $s \in L^p(0,T;\boldsymbol{L}^p(\omega))$, $\xi \in W^{1,p'}(0,T)$ *vérifiant* (4.8), *et* $\upsilon_0 \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega)$ *vérifiant* (4.13), *et pour* $p > 2$, *il existe* $\overline{\upsilon} \in C([0,T];\mathbf{L}^2(\Omega)) \cap L^p(0,T;V^p_{0.div})$ *avec* $\overline{\upsilon}' \in L^{p'}(0,T;(V^p_{0.div})')$, $\pi \in H^{-1}(0,T;L^{p'}_0(\Omega))$ *solution du problème* 4.3.

Preuve. Avec la proposition 4.3 on a pour tout $\tilde{\vartheta} \in \mathbf{D}(\Omega)$

$$< \overline{f}, \tilde{\vartheta} >_{(V^p_0)',V^p_0} - \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\upsilon}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - a(\theta; \overline{\upsilon}, \tilde{\vartheta}) =< \nabla\pi, \tilde{\vartheta} >_{\mathbf{D}'(\Omega),\mathbf{D}(\Omega)} . \tag{4.119}$$

Comme $V^p_0 \subset \mathbf{L}^2(\Omega) \subset (V^p_0)'$ et que l'injection de V^p_0 dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ est continue et dense, d'après [29] page 54, on a

$$< \overline{f}, \tilde{\vartheta} >_{(V^p_0)',V^p_0} = (\overline{f}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)},$$

donc (4.119) devient

$$(\overline{f}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\upsilon}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - a(\theta; \overline{\upsilon}, \tilde{\vartheta}) =< \nabla\pi, \tilde{\vartheta} >_{\mathbf{D}'(\Omega),\mathbf{D}(\Omega)} . \tag{4.120}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} a(\theta; \overline{\upsilon}, \tilde{\vartheta}) &= \int_\Omega 2\mu(\theta, |D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi)|)|D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi)|^{p-2} d_{ij}(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi) d_{ij}(\tilde{\vartheta}) dx \\ &= \int_\Omega 2\mu(\theta, |D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi)|)|D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi)|^{p-2} d_{ij}(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi) \partial_j \tilde{\vartheta}_i dx. \end{aligned}$$

Pour tout $\tilde{\vartheta} \in \mathbf{D}(\Omega)$, en utilisant la formule de Green on obtient

$$
\begin{aligned}
&a(\theta; \overline{\upsilon}, \tilde{\vartheta}) \\
&= - < div(2\mu(\theta, |D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi)|)|D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi)|^{p-2} D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi)), \tilde{\vartheta} >_{\mathbf{D}'(\Omega),\mathbf{D}(\Omega)} .
\end{aligned}
$$

En remplaçant dans (4.120) on obtient pour tout $\tilde{\vartheta} \in \mathbf{D}(\Omega)$

$$
(\overline{f}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\upsilon}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = - < div(\tilde{\sigma}), \tilde{\vartheta} >_{\mathbf{D}'(\Omega),\mathbf{D}(\Omega)} . \tag{4.121}
$$

Montrons que $div(\tilde{\sigma}) \in H^{-1}(0, T; \mathbf{L}^{p'}(\Omega))$. En effet, multiplions (4.121) par $\zeta \in \mathcal{D}(0, T)$ et intégrons de 0 à T on obtient

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T (\overline{f}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta \, dt - \int_0^T \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\upsilon}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta \, dt \\
&= - \int_0^T < div(\tilde{\sigma}), \tilde{\vartheta} >_{\mathbf{D}'(\Omega),\mathbf{D}(\Omega)} \zeta \, dt, \quad \forall \tilde{\vartheta} \in \mathbf{D}(\Omega).
\end{aligned} \tag{4.122}
$$

On a

$$
\begin{aligned}
&\Big| \int_0^T < div(\tilde{\sigma}), \tilde{\vartheta} >_{\mathbf{D}'(\Omega),\mathbf{D}(\Omega)} \zeta \, dt \Big| \\
&= \Big| \int_0^T (\overline{f}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta \, dt - \int_0^T \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\upsilon}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta \, dt \Big| \\
&\leq \Big| \int_0^T (\overline{f}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta \, dt \Big| + \Big| \int_0^T \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\upsilon}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta \, dt \Big|.
\end{aligned} \tag{4.123}
$$

En utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz en espace et de Hölder en temps on obtient

$$
\Big| \int_0^T (\overline{f}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta \, dt \Big| \leq T^{\frac{1}{p}} \|\overline{f}\|_{L^{p'}(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))} \|\tilde{\vartheta}\zeta\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))},
$$

d'où,

$$
\Big| \int_0^T (\overline{f}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta \, dt \Big| \leq \mathbf{c} c_\infty T^{\frac{1}{p}} \|\overline{f}\|_{L^{p'}(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))} \|\tilde{\vartheta}\zeta\|_{H^1(0,T;\mathbf{L}^p(\Omega))} \tag{4.124}
$$

où $\mathbf{c}$, c_∞ désignent les constantes de l'injection continue de $\mathbf{L}^p(\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ et de $H^1(0, T)$ dans $L^\infty(0, T)$.
D'autre part, on a

$$
\Big| \int_0^T \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\upsilon}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta \, dt \Big| = \Big| - \int_0^T (\overline{\upsilon}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta' \, dt \Big|, \tag{4.125}
$$

en utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz en espace et en temps on obtient

$$\Big| \int_0^T \frac{\partial}{\partial t}(\overline{v}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta \, dt \Big| \leq \|\overline{v}\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))} \|\tilde{\vartheta}\zeta'\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))},$$

d'où

$$\Big| \int_0^T \frac{\partial}{\partial t}(\overline{v}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta \, dt \Big| \leq \mathbf{c}\|\overline{v}\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))} \|\tilde{\vartheta}\zeta\|_{H^1(0,T;\mathbf{L}^p(\Omega))}. \tag{4.126}$$

En remplaçant (4.124), (4.126) dans (4.123) on obtient

$$\begin{aligned} &\Big| \int_0^T < div(\tilde{\sigma}), \tilde{\vartheta} >_{\mathbf{D}'(\Omega),\mathbf{D}(\Omega)} \zeta \, dt \Big| \\ &\leq (\mathbf{c}c_\infty T^{\frac{1}{p}} \|\overline{f}\|_{L^{p'}(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))} + \mathbf{c}\|\overline{v}\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}) \|\tilde{\vartheta}\zeta\|_{H^1(0,T;\mathbf{L}^p(\Omega))}. \end{aligned}$$

Alors, avec la densité de $\mathcal{D}(0,T) \otimes \mathbf{D}(\Omega)$ dans $H_0^1(0,T;\mathbf{L}^p(\Omega))$ pour la topologie de $H^1(0,T;\mathbf{L}^p(\Omega))$ on obtient $div(\tilde{\sigma}) \in H^{-1}(0,T;\mathbf{L}^{p'}(\Omega))$. Donc $\tilde{\sigma} \in H^{-1}(0,T;\mathcal{Y}^{p'})$. Ainsi (4.122) devient

$$\begin{aligned} &\int_0^T (\overline{f}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta \, dt - \int_0^T \frac{\partial}{\partial t}(\overline{v}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta \, dt \\ &= -\int_0^T \int_\Omega (div(\tilde{\sigma}) \cdot \tilde{\vartheta}) \zeta \, dx \, dt, \quad \forall \tilde{\vartheta} \in \mathbf{D}(\Omega), \quad \forall \zeta \in \mathcal{D}(0,T). \end{aligned} \tag{4.127}$$

Comme $\mathbf{D}(\Omega)$ est dense dans $\mathbf{L}^p(\Omega)$ c-à-d pour tout $\tilde{\vartheta} \in \mathbf{L}^p(\Omega)$, il existe $\tilde{\vartheta}_n \in \mathbf{D}(\Omega)$ telle que

$$\lim_{n \to +\infty} \tilde{\vartheta}_n = \tilde{\vartheta} \quad \text{dans} \quad \mathbf{L}^p(\Omega), \tag{4.128}$$

en remplaçant $\tilde{\vartheta}$ par $\tilde{\vartheta}_n$ dans (4.127) on obtient

$$\begin{aligned} &\int_0^T (\overline{f}, \tilde{\vartheta}_n)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta \, dt - \int_0^T \frac{\partial}{\partial t}(\overline{v}, \tilde{\vartheta}_n)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta \, dt \\ &= -\int_0^T \int_\Omega (div(\tilde{\sigma}) \cdot \tilde{\vartheta}_n) \zeta \, dx \, dt. \end{aligned} \tag{4.129}$$

En utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz en espace et de Hölder en temps on obtient

$$\begin{aligned} \Big| \int_0^T (\overline{f}, \tilde{\vartheta}_n - \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta \, dt \Big| &\leq T^{\frac{1}{p}} \|\overline{f}\|_{L^{p'}(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))} \|(\tilde{\vartheta}_n - \tilde{\vartheta})\zeta\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))} \\ &\leq T^{\frac{1}{p}} \|\overline{f}\|_{L^{p'}(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))} \|\zeta\|_{L^\infty(0,T)} \|\tilde{\vartheta}_n - \tilde{\vartheta}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ &\leq \mathbf{c}T^{\frac{1}{p}} \|\overline{f}\|_{L^{p'}(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))} \|\zeta\|_{L^\infty(0,T)} \|\tilde{\vartheta}_n - \tilde{\vartheta}\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

En passant à la limite quand $n \to +\infty$, en utilisant (4.128) on obtient

$$\int_0^T (\overline{f}, \tilde{\vartheta}_n)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta \, dt \to \int_0^T (\overline{f}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta \, dt. \tag{4.130}$$

On a

$$\Big| \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} (\overline{v}, \tilde{\vartheta}_n - \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta \, dt \Big| = \Big| - \int_0^T (\overline{v}, \tilde{\vartheta}_n - \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta' \, dt \Big|,$$

en utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz en espace et en temps on obtient

$$\begin{aligned} \Big| \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} (\overline{v}, \tilde{\vartheta}_n - \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta \, dt \Big| &\leq \sqrt{T} \|\overline{v}\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))} \|\zeta'\|_{L^\infty(0,T)} \|\tilde{\vartheta}_n - \tilde{\vartheta}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ &\leq \mathbf{c}\sqrt{T} \|\overline{v}\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))} \|\zeta'\|_{L^\infty(0,T)} \|\tilde{\vartheta}_n - \tilde{\vartheta}\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}, \end{aligned}$$

en passant à la limite quand $n \to +\infty$, en utilisant (4.128) on obtient

$$\int_0^T \frac{\partial}{\partial t} (\overline{v}, \tilde{\vartheta}_n)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta \, dt \to \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} (\overline{v}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta \, dt. \tag{4.131}$$

On a

$$\begin{aligned} &\Big| \int_0^T \int_\Omega \big(div(\tilde{\sigma}) \cdot (\tilde{\vartheta}_n - \tilde{\vartheta}) \big) \zeta \, dx \, dt \Big| \\ &\leq \|div(\tilde{\sigma})\|_{H^{-1}(0,T;\mathbf{L}^{p'}(\Omega))} \|\zeta\|_{H_0^1(0,T)} \|\tilde{\vartheta}_n - \tilde{\vartheta}\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

En passant à la limite quand $n \to +\infty$, en utilisant (4.128) on obtient

$$\int_0^T \int_\Omega (div(\tilde{\sigma}) \cdot \tilde{\vartheta}_n) \zeta \, dx \, dt \to \int_0^T \int_\Omega (div(\tilde{\sigma}) \cdot \tilde{\vartheta}) \zeta \, dx \, dt. \tag{4.132}$$

En passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans (4.129) avec les convergences (4.130), (4.131) et (4.132) on obtient

$$\begin{aligned} &\int_0^T (\overline{f}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta \, dt - \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} (\overline{v}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta \, dt \\ &= - \int_0^T \int_\Omega (div(\tilde{\sigma}) \cdot \tilde{\vartheta}) \zeta \, dx \, dt \quad \forall \tilde{\vartheta} \in \mathbf{L}^p(\Omega), \quad \forall \zeta \in \mathcal{D}(0,T). \end{aligned}$$

Maintenant, en reprenant $\tilde{\vartheta} \in V_0^p$ et comme $\tilde{\sigma} \in H^{-1}(0,T;\mathcal{Y}^{p'})$ en utilisant la formule de Green on obtient

$$\begin{aligned} &\int_0^T (\overline{f}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta \, dt - \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} (\overline{v}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta \, dt \\ &= \int_0^T \int_\Omega \tilde{\sigma}_{ij} \partial_j \tilde{\vartheta}_i \zeta \, dx \, dt - \int_0^T \int_{\partial\Omega} \tilde{\sigma}_{ij} n_j (\tilde{\vartheta}_i \zeta) \, dY \, dt. \end{aligned} \tag{4.133}$$

Pour tout $\tilde{\vartheta} \in V_0^p$ on a $\tilde{\vartheta}_i = 0$ sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_L$ alors

$$\int_0^T \int_{\partial\Omega} \tilde{\sigma}_{ij}(\tilde{\vartheta}_i\zeta) n_j \, dY \, dt = \int_0^T \int_{\omega} \tilde{\sigma}_{ij}(\tilde{\vartheta}_i\zeta) n_j \, dx' \, dt.$$

En utilisant l'égalité $\tilde{\sigma}_{ij} n_j = \tilde{\sigma}_{\tau_i} + \tilde{\sigma}_n n_i$ on obtient

$$\int_0^T \int_{\omega} \tilde{\sigma}_{ij}(\tilde{\vartheta}_i\zeta) n_j \, dx' \, dt = \int_0^T \int_{\omega} \tilde{\sigma}_{\tau_i}(\tilde{\vartheta}_i\zeta) \, dx' + \int_{\omega} \tilde{\sigma}_n n_i(\tilde{\vartheta}_i\zeta) \, dx' \, dt.$$

Pour tout $\tilde{\vartheta} \in V_0^p$ on a $\tilde{\vartheta}_i n_i = 0$ sur ω alors

$$\int_0^T \int_{\omega} \tilde{\sigma}_{ij}(\tilde{\vartheta}_i\zeta) n_j \, dx' \, dt = \int_0^T \int_{\omega} \tilde{\sigma}_{\tau_i}(\tilde{\vartheta}_i\zeta) \, dx' \, dt,$$

et (4.133) devient

$$\begin{aligned} &\int_0^T (\overline{f}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta \, dt - \int_0^T \frac{\partial}{\partial t}(\overline{v}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta \, dt \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{\sigma}_{ij} \partial_j \tilde{\vartheta}_i \zeta \, dx \, dt - \int_0^T \int_{\omega} \tilde{\sigma}_{\tau_i}(\tilde{\vartheta}_i\zeta) \, dx' \, dt. \end{aligned}$$

On ajoute aux deux membres le terme $\displaystyle\int_0^T j(t, \overline{v} + \tilde{\vartheta}\zeta) \, dt - \int_0^T j(t, \overline{v}) \, dt$, on obtient

$$\begin{aligned} &\int_0^T \frac{\partial}{\partial t}(\overline{v}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta \, dt + \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{\sigma}_{ij} \partial_j \tilde{\vartheta}_i \zeta \, dx \, dt + \int_0^T j(t, \overline{v} + \tilde{\vartheta}\zeta) \, dt \\ &- \int_0^T j(t, \overline{v}) \, dt = \int_0^T (\overline{f}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta \, dt + \hat{A}(\overline{v}, \tilde{\vartheta}), \end{aligned} \tag{4.134}$$

où

$$\hat{A}(\overline{v}, \tilde{\vartheta}) = \int_0^T \Big(\int_{\omega} \tilde{\sigma}_{\tau_i}(\tilde{\vartheta}_i\zeta) \, dx' + j(t, \overline{v} + \tilde{\vartheta}\zeta) - j(t, \overline{v}) \Big) \, dt.$$

En remplaçant $\tilde{\sigma}_{ij}$ par son expression (4.15) dans (4.134) on obtient

$$\begin{aligned} &\int_0^T \frac{\partial}{\partial t}(\overline{v}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta \, dt + \int_0^T a(\theta; \overline{v}, \tilde{\vartheta}\zeta) \, dt - \int_0^T (\pi, div(\tilde{\vartheta}))\zeta \, dt \\ &+ \int_0^T j(t, \overline{v} + \tilde{\vartheta}\zeta) \, dt - \int_0^T j(t, \overline{v}) \, dt = \int_0^T (\overline{f}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta \, dt + \hat{A}(\overline{v}, \tilde{\vartheta}). \end{aligned} \tag{4.135}$$

On a

$$\int_{\partial\Omega} \tilde{\vartheta} \cdot n \, dY = 0, \quad \forall \tilde{\vartheta} \in V_0^p.$$

Du lemme 3.3 [3], on en déduit qu'il existe $\hat{\vartheta} \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ vérifiant

$$div(\hat{\vartheta}) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \quad \hat{\vartheta} = \tilde{\vartheta} \quad \text{sur} \quad \partial\Omega.$$

Donc, $\hat{\vartheta} \in V^p_{0.div}$ et on a

$$\int_0^T \frac{\partial}{\partial t}(\overline{v}, \hat{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta \, dt + \int_0^T a(\theta; \overline{v}, \hat{\vartheta}\zeta) \, dt + \int_0^T \Big(j(t, \overline{v} + \hat{\vartheta}\zeta) - j(t, \overline{v}) \Big) \, dt$$
$$= \int_0^T (\overline{f}, \hat{\vartheta}\zeta)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \, dt + \hat{A}(\overline{v}, \hat{\vartheta}).$$

On prend $\overline{\varphi} = \overline{v} + \hat{\vartheta}\zeta$ dans (4.58) on obtient

$$\int_0^T \frac{\partial}{\partial t}(\overline{v}, \hat{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta \, dt + \int_0^T a(\theta; \overline{v}, \hat{\vartheta}\zeta) \, dt + \int_0^T \Big(j(t, \overline{v} + \hat{\vartheta}\zeta) - j(t, \overline{v}) \Big) \, dt$$
$$- \int_0^T < \overline{f}, \hat{\vartheta}\zeta >_{(V^p_{0.div})', V^p_{0.div}} \, dt \geq 0.$$

Comme $\overline{f} \in L^{p'}(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$ on a

$$\int_0^T < \overline{f}, \hat{\vartheta}\zeta >_{(V^p_{0.div})', V^p_{0.div}} \, dt = \int_0^T (\overline{f}, \hat{\vartheta}\zeta)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \tag{4.136}$$

donc

$$\hat{A}(\overline{v}, \hat{\vartheta}) \geq 0.$$

Comme $\hat{A}(\overline{v}, \hat{\vartheta}) = \hat{A}(\overline{v}, \tilde{\vartheta})$ car $\hat{\vartheta} = \tilde{\vartheta}$ sur $\partial\Omega$ on a

$$\hat{A}(\overline{v}, \tilde{\vartheta}) \geq 0.$$

Donc (4.135) devient

$$\int_0^T \frac{\partial}{\partial t}(\overline{v}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta \, dt + \int_0^T a(\theta; \overline{v}, \tilde{\vartheta}\zeta) \, dt - \int_0^T (\pi, div(\tilde{\vartheta}\zeta)) \, dt$$
$$+ \int_0^T \Big(j(t, \overline{v} + \tilde{\vartheta}\zeta) - j(t, \overline{v}) \Big) \, dt \geq \int_0^T (\overline{f}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta \, dt,$$
$$\forall \tilde{\vartheta} \in V^p_0 \quad \forall \zeta \in \mathcal{D}(0, T),$$

de plus $\overline{v}(0) = 0$, ce qui montre que $(\overline{v}, \pi) \in \Big(C([0, T]; \mathbf{L}^2(\Omega)) \cap L^p(0, T; V^p_{0.div}) \Big) \times H^{-1}(0, T; L^{p'}_0(\Omega))$ est solution du problème 4.3 avec $\overline{v}' \in L^{p'}(0, T; (V^p_{0.div})')$. □

4.4 Cas $\frac{6}{5} < p < 2$

Dans cette section, on traite le cas $\frac{6}{5} < p < 2$ où l'espace $\mathcal{K}^p = L^p(0,T; V^p_{0.div})$ n'est pas contenu dans l'espace $\mathcal{H} = L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$. Ce cas donne lieu à quelques complications techniques. Pour cela, pour tout $0 < \varepsilon < 1$, on modifie (4.17) avec $\tilde{\sigma}^{\varepsilon}_{ij}$ donné par (4.23) au lieu $\tilde{\sigma}_{ij}$ on obtient le problème approché suivant :

Problème $(\mathbf{P}^1_{\varepsilon})$
Soient $f \in L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$, $k \in L^2(0,T;L^2_+(\omega))$, μ *vérifie* (4.2), (4.3), $\theta \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $s \in L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\omega))$, $\xi \in H^1(0,T)$ *vérifiant* (4.8) *et* $\upsilon_0 \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ *vérifiant* (4.13). *On cherche* $\overline{v}_{\varepsilon} \in C([0,T];\mathbf{L}^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;V^2_{0.div})$ *avec* $\overline{v}'_{\varepsilon} \in L^2(0,T;(V^2_{0.div})')$, $\pi_{\varepsilon} \in H^{-1}(0,T;L^2_0(\Omega))$ *satisfaisant l'inéquation variationnelle parabolique suivante*

$$\begin{aligned}
&\Big\langle \frac{\partial}{\partial t}(\overline{v}_{\varepsilon}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \zeta \Big\rangle_{\mathcal{D}'(0,T),\mathcal{D}(0,T)} + \int_0^T \Big(a_{\varepsilon}(\theta; \overline{v}_{\varepsilon}, \tilde{\vartheta}\zeta) - (\pi_{\varepsilon}, div(\tilde{\vartheta}))\zeta \Big)\, dt \\
&+ \int_0^T \Big(j(t, \overline{v}_{\varepsilon} + \tilde{\vartheta}\zeta) - j(t, \overline{v}_{\varepsilon}) \Big)\, dt \geq \int_0^T (\overline{f}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta \, dt, \\
&\forall \tilde{\vartheta} \in V^2_0 \quad \forall \zeta \in \mathcal{D}(0,T),
\end{aligned} \tag{4.137}$$

et la condition initiale

$$\overline{v}_{\varepsilon}(0) = 0, \tag{4.138}$$

où

$$a_{\varepsilon}(\theta; u, \overline{\varphi}) = \int_{\Omega} 2\big(\mu(\theta, |D(u + \upsilon_0\xi)|)|D(u + \upsilon_0\xi)|^{p-2} + \varepsilon\big) d_{ij}(u + \upsilon_0\xi) d_{ij}(\overline{\varphi}) dx.$$

Maintenant, on considère le problème en vitesse suivant :
Problème $(\mathbf{P}^2_{\varepsilon})$
Soient $f \in L^2(0,T;(V^2_{0.div})')$, $k \in L^2(0,T;L^2_+(\omega))$, μ *vérifie* (4.2), (4.3), $\theta \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $s \in L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\omega))$, $\xi \in H^1(0,T)$ *vérifiant* (4.8) *et* $\upsilon_0 \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ *vérifiant* (4.13). *On cherche* $\overline{v}_{\varepsilon} \in C([0,T];\mathbf{L}^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;V^2_{0.div})$ *avec* $\overline{v}'_{\varepsilon} \in L^2(0,T;(V^2_{0.div})')$ *satisfaisant l'inéquation variationnelle parabolique suivante*

$$\begin{aligned}
&[[\overline{v}'_{\varepsilon}, \overline{\varphi} - \overline{v}_{\varepsilon}]] + [[\mathcal{A}_{\varepsilon}\overline{v}_{\varepsilon}, \overline{\varphi} - \overline{v}_{\varepsilon}]] + J(\overline{\varphi}) - J(\overline{v}_{\varepsilon}) \geq [[\overline{f}, \overline{\varphi} - \overline{v}_{\varepsilon}]], \\
&\forall \overline{\varphi} \in L^2(0,T;V^2_{0.div}),
\end{aligned} \tag{4.139}$$

et la condition initiale (4.138),
où $\mathcal{A}_\varepsilon$ est un opérateur donné par
$\mathcal{A}_\varepsilon : L^2(0,T;V^2_{0.div}) \to L^2(0,T;(V^2_{0.div})')$, qui à $u \in L^2(0,T;V^2_{0.div})$ associe $\mathcal{A}_\varepsilon u$ défini par

$$[[\mathcal{A}_\varepsilon u, \overline{\varphi}]] \;=\; \int_0^T a_\varepsilon(\theta; u, \overline{\varphi})dt \quad \forall \overline{\varphi} \in L^2(0,T;V^2_{0.div}),$$

où $[[.,.]]$ désigne le crochet de dualité entre $L^2(0,T;V^2_{0.div})$ et $L^2(0,T;(V^2_{0.div})')$.
On note $< .,. >_{(V^2_{0.div})',V^2_{0.div}}$ le crochet de dualité entre $V^2_{0.div}$ et $(V^2_{0.div})'$.
Dans toute la suite, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 4.5 *Sous les hypothèses* (4.2), (4.3), $\xi \in H^1(0,T)$, $\upsilon_0 \in \boldsymbol{H}^1(\Omega)$ *vérifiant* (4.13), *l'opérateur* $\mathcal{A}_\varepsilon$ *est borné, hémicontinu, monotone et coercif.*

Preuve. Soit $(\overline{v}, \overline{\varphi}) \in (L^2(0,T;V^2_0))^2$, pour presque tout $t \in [0,T]$ on a

$$\Big| \int_\Omega d_{ij}(\overline{v} + \upsilon_0\xi) d_{ij}(\overline{\varphi})\, dx \Big| \;\leq\; \int_\Omega |D(\overline{v} + \upsilon_0\xi)||D(\overline{\varphi})|\, dx,$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient

$$\Big| \int_\Omega d_{ij}(\overline{v} + \upsilon_0\xi) d_{ij}(\overline{\varphi})\, dx \Big| \;\leq\; \|\overline{v} + \upsilon_0\xi\|_{1.2} \|\overline{\varphi}\|_{1.2}.$$

Puisque $\xi \in H^1(0,T) \subset C([0,T])$ avec injection continue donc elle vérifie (4.32) et on a

$$\Big| \int_\Omega d_{ij}(\overline{v} + \upsilon_0\xi) d_{ij}(\overline{\varphi})\, dx \Big| \;\leq\; (\|\overline{v}\|_{1.2} + c\|\upsilon_0\|_{1.2}) \|\overline{\varphi}\|_{1.2}. \qquad (4.140)$$

Donc, pour tout $(\overline{v}, \overline{\varphi}) \in (L^2(0,T;V^2_{0.div}))^2$, on a

$$\begin{aligned}
\Big| 2\varepsilon \int_0^T \int_\Omega d_{ij}(\overline{v} + \upsilon_0\xi) d_{ij}(\overline{\varphi})\, dx\, dt \Big| \;&\leq\; 2\varepsilon \int_0^T \Big| \int_\Omega d_{ij}(\overline{v} + \upsilon_0\xi) d_{ij}(\overline{\varphi})\, dx \Big| dt \\
&\leq\; 2\varepsilon \int_0^T \|\overline{v}\|_{1.2} \|\overline{\varphi}\|_{1.2}\, dt \\
&+\; 2\varepsilon c \|\upsilon_0\|_{1.2} \int_0^T \|\overline{\varphi}\|_{1.2}\, dt,
\end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz en temps, on obtient

$$\begin{aligned}
\Big| 2\varepsilon \int_0^T \int_\Omega d_{ij}(\overline{v} + \upsilon_0\xi) d_{ij}(\overline{\varphi})\, dx\, dt \Big| \;&\leq\; 2\varepsilon \|\overline{v}\|_{L^2(0,T;V^2_{0.div})} \|\overline{\varphi}\|_{L^2(0,T;V^2_{0.div})} \\
&+\; 2c\varepsilon \|\upsilon_0\|_{1.2} \|\overline{\varphi}\|_{L^1(0,T;V^2_{0.div})},
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}&\Big|2\varepsilon\int_0^T\int_\Omega d_{ij}(\overline{v}+v_0\xi)d_{ij}(\overline{\varphi})\,dx\,dt\Big|\\&\leq 2\varepsilon\|\overline{v}\|_{L^2(0,T;V^2_{0.div})}\|\overline{\varphi}\|_{L^2(0,T;V^2_{0.div})}\\&+2\varepsilon c\sqrt{T}\|v_0\|_{1.2}\|\overline{\varphi}\|_{L^2(0,T;V^2_{0.div})}.\end{aligned}\tag{4.141}$$

Comme $1<p<2$ on a $L^2(0,T;V^2_{0.div})\subset L^p(0,T;V^p_{0.div})$ avec injection continue c-à-d,

$$\exists\hat{\rho}>0,\quad \|u\|_{L^p(0,T;V^p_{0.div})}\leq\hat{\rho}\|u\|_{L^2(0,T;V^2_{0.div})}\quad\forall u\in L^2(0,T;V^2_{0.div}).\tag{4.142}$$

D'autre part, pour tout $(\overline{v},\overline{\varphi})\in(L^2(0,T;V^2_{0.div}))^2$, on a

$$\begin{aligned}|[[\mathcal{A}_\varepsilon\overline{v},\overline{\varphi}]]| &= \Big|[\mathcal{A}\overline{v},\overline{\varphi}]+2\varepsilon\int_0^T\int_\Omega d_{ij}(\overline{v}+v_0\xi)d_{ij}(\overline{\varphi})\,dx\,dt\Big|\\&\leq |[\mathcal{A}\overline{v},\overline{\varphi}]|+\Big|2\varepsilon\int_0^T\int_\Omega d_{ij}(\overline{v}+v_0\xi)d_{ij}(\overline{\varphi})\,dx,dt\Big|,\end{aligned}$$

avec (4.53), (4.141) on obtient

$$\begin{aligned}|[[\mathcal{A}_\varepsilon\overline{v},\overline{\varphi}]]| &\leq 2\mu_1(\|\overline{v}\|^{p-1}_{L^p(0,T;V^p_{0.div})}+c^{p-1}T^{\frac{1}{p'}}\|v_0\|^{p-1}_{1.p})\|\overline{\varphi}\|_{L^p(0,T;V^p_{0.div})}\\&+2\varepsilon(\|\overline{v}\|_{L^2(0,T;V^2_{0.div})}+c\sqrt{T}\|v_0\|_{1.2})\|\overline{\varphi}\|_{L^2(0,T;V^2_{0.div})}.\end{aligned}\tag{4.143}$$

Avec (4.142), pour $0<\varepsilon<1$ on a

$$\begin{aligned}[[\mathcal{A}_\varepsilon\overline{v},\overline{\varphi}]]| &\leq \Big(2\mu_1\big(\hat{\rho}^p\|\overline{v}\|^{p-1}_{L^2(0,T;V^2_{0.div})}+c^{p-1}T^{\frac{1}{p'}}\|v_0\|^{p-1}_{1.p}\hat{\rho}\big)\\&+2\big(\|\overline{v}\|_{L^2(0,T;V^2_{0.div})}+c\sqrt{T}\|v_0\|_{1.2}\big)\Big)\|\overline{\varphi}\|_{L^2(0,T;V^2_{0.div})},\end{aligned}\tag{4.144}$$

d'où

$$\begin{aligned}\sup_{\overline{\varphi}\neq0}\frac{[[\mathcal{A}_\varepsilon\overline{v},\overline{\varphi}]]|}{\|\overline{\varphi}\|_{L^2(0,T;V^2_{0.div})}} &\leq 2\mu_1\big(\hat{\rho}^p\|\overline{v}\|^{p-1}_{L^2(0,T;V^2_{0.div})}+c^{p-1}T^{\frac{1}{p'}}\|v_0\|^{p-1}_{1.p}\hat{\rho}\big)\\&+ 2\big(\|\overline{v}\|_{L^2(0,T;V^2_{0.div})}+c\sqrt{T}\|v_0\|_{1.2}\big),\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\|\mathcal{A}_\varepsilon\overline{v}\|_{L^2(0,T;(V^2_{0.div})')} &\leq 2\mu_1\big(\hat{\rho}^p\|\overline{v}\|^{p-1}_{L^2(0,T;V^2_{0.div})}+c^{p-1}T^{\frac{1}{p'}}\|v_0\|^{p-1}_{1.p}\hat{\rho}\big)\\&+2\big(\|\overline{v}\|_{L^2(0,T;V^2_{0.div})}+c\sqrt{T}\|v_0\|_{1.2}\big),\end{aligned}\tag{4.145}$$

ce qui montre que $\mathcal{A}_\varepsilon$ est borné.
Pour montrer que $\mathcal{A}_\varepsilon$ est hémicontinu, il faut montrer que pour tout $u, v, w \in L^2(0,T;V^2_{0.div})$, la fonction :

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha} \quad &: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &\lambda \mapsto \tilde{\alpha}(\lambda) = [[\mathcal{A}_\varepsilon(u+\lambda v), w]]\end{aligned}$$

est continue. On a

$$\tilde{\alpha}(\lambda) = \alpha_0(\lambda) + \alpha_1(\lambda),$$

où

$$\alpha_0(\lambda) = [\mathcal{A}(u+\lambda v), w], \quad \alpha_1(\lambda) = 2\varepsilon \int_0^T \int_\Omega D((u+\lambda v) + v_0\xi) : D(w)\, dx\, dt.$$

On a montré dans le lemme 4.2 que α_0 est continue, donc reste à montrer que α_1 est continue. En effet, soit $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ une suite convergente vers λ dans $\mathbb{R}$, comme $\lambda \mapsto \alpha_1(\lambda)$ est une fonction affine en λ, on en déduit que $\alpha_1(\lambda_n)$ converge vers $\alpha_1(\lambda)$. Donc, la fonction $\tilde{\alpha}$ est continue, ce qui montre que l'opérateur $\mathcal{A}_\varepsilon$ est hémicontinu. Pour la monotonie de $\mathcal{A}_\varepsilon$, on doit établir que

$$[[\mathcal{A}_\varepsilon u - \mathcal{A}_\varepsilon v, u - v|] \geq 0 \qquad \forall u, v \in L^2(0,T;V^2_{0.div}).$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}[[\mathcal{A}_\varepsilon u - \mathcal{A}_\varepsilon v, u - v]] \;&=\; [\mathcal{A}u - \mathcal{A}v, u - v] \\ &+\; 2\varepsilon \int_0^T \int_\Omega D(u + v_0\xi) : D(u - v)\, dx\, dt \\ &-\; 2\varepsilon \int_0^T \int_\Omega D(v + v_0\xi) : D(u - v)\, dx\, dt,\end{aligned}$$

d'où

$$[[\mathcal{A}_\varepsilon u - \mathcal{A}_\varepsilon v, u - v]] = \; [\mathcal{A}u - \mathcal{A}v, u - v] + 2\varepsilon \int_0^T \int_\Omega |D(u-v)|^2\, dx\, dt.$$

On a montré dans le lemme 4.2 (cas $1 < p < 2$) que l'opérateur $\mathcal{A}$ est monotone dans $L^p(0,T;V^p_{0.div})$ donc,

$$[[\mathcal{A}_\varepsilon u - \mathcal{A}_\varepsilon v, u - v]] \geq 0,$$

ce qui montre que l'opérateur $\mathcal{A}_\varepsilon$ est monotone.
L'opérateur $\mathcal{A}_\varepsilon$ est coercif c-à-d,

$$\exists \hat{v} \in L^2(0,T;V^2_{0.div}) \quad \text{tel que} \quad J(\hat{v}) < \infty,$$

et

$$\lim_{\|u\|_{L^2(0,T;V^2_{0.div})} \to +\infty} \frac{[[\mathcal{A}_\varepsilon u, u-\hat{v}]] + J(u)}{\|u\|_{L^2(0,T;V^2_{0.div})}} = +\infty.$$

En effet, on a

$$[[\mathcal{A}_\varepsilon u, u-\hat{v}]] = [\mathcal{A}u, u-\hat{v}] + 2\varepsilon \int_0^T \int_\Omega D(u+\upsilon_0\xi) : D(u-\hat{v})\, dx\, dt.$$

D'autre part, comme $\frac{6}{5} < p < 2$, en appliquant l'inégalité (4.40) dans (4.48) et en utilisant l'inégalité de Hölder en temps on obtient

$$\begin{aligned}[\mathcal{A}u, u-\hat{v}] \quad &\geq -2\mu_1(c\|\upsilon_0\|_{1.p}T^{\frac{1}{p}} + \|\hat{v}\|_{L^p(0,T;V^p_{0.div})})\|u\|^{p-1}_{L^p(0,T;V^p_{0.div})} \\ &\quad -2\mu_1\big(Tc^p\|\upsilon_0\|^p_{1.p} + c^{p-1}T^{\frac{1}{p'}}\|\upsilon_0\|^{p-1}_{1.p}\|\hat{v}\|_{L^p(0,T;V^p_{0.div})}\big),\end{aligned}$$

de (4.142) on obtient

$$\begin{aligned}&[\mathcal{A}u, u-\hat{v}] \\ &\geq -2\mu_1\hat{\rho}^{p-1}(c\|\upsilon_0\|_{1.p}T^{\frac{1}{p}} + \hat{\rho}\|\hat{v}\|_{L^2(0,T;V^2_{0.div})})\|u\|^{p-1}_{L^2(0,T;V^2_{0.div})} \\ &-2\mu_1\big(Tc^p\|\upsilon_0\|^p_{1.p} + \hat{\rho}c^{p-1}T^{\frac{1}{p'}}\|\upsilon_0\|^{p-1}_{1.p}\|\hat{v}\|_{L^2(0,T;V^2_{0.div})}\big).\end{aligned} \tag{4.146}$$

Maintenant, on a

$$\begin{aligned}&2\varepsilon \int_0^T \int_\Omega D(u+\upsilon_0\xi) : D(u-\hat{v})\, dx\, dt = 2\varepsilon \int_0^T \int_\Omega |D(u-\hat{v})|^2\, dx\, dt \\ &+2\varepsilon \int_0^T \int_\Omega D(\hat{v}+\upsilon_0\xi) : D(u-\hat{v})\, dx\, dt,\end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Korn, il existe $C_1 > 0$ telle que

$$|u|_{1.2} \geq C_1\|u\|_{1.2} \quad \forall u \in V^2_{\Gamma_1}, \tag{4.147}$$

où

$$|u|^2_{1.2} = \int_\Omega |D(u)|^2\, dx.$$

Avec les inégalités de Cauchy-Schwarz en espace et en temps on obtient

$$2\varepsilon\int_0^T\int_\Omega D(u+v_0\xi):D(u-\hat{v})\,dx\,dt \geq 2\varepsilon C_1^2\|u-\hat{v}\|^2_{L^2(0,T;V^2_{0.div})}$$
$$-2\varepsilon(\|\hat{v}\|_{L^2(0,T;V^2_{0.div})}+c\sqrt{T}\|v_0\|_{1.2})\|u-\hat{v}\|_{L^2(0,T;V^2_{0.div})},$$

d'où

$$2\varepsilon\int_0^T\int_\Omega D(u+v_0\xi):D(u-\hat{v})\,dx\,dt$$
$$\geq 2\varepsilon C_1^2\|u-\hat{v}\|^2_{L^2(0,T;V^2_{0.div})}-c'\varepsilon(\|u\|_{L^2(0,T;V^2_{0.div})}+\|\hat{v}\|_{L^2(0,T;V^2_{0.div})}),$$

où $c'=2(\|\hat{v}\|_{L^2(0,T;V^2_{0.div})}+c\sqrt{T}\|v_0\|_{1.2})$.
Avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient

$$2\varepsilon C_1^2\|u-\hat{v}\|^2_{L^2(0,T;V^2_{0.div})}$$
$$\geq 2\varepsilon C_1^2\Big(\|u\|^2_{L^2(0,T;V^2_{0.div})}-2\|u\|_{L^2(0,T;V^2_{0.div})}\|\hat{v}\|_{L^2(0,T;V^2_{0.div})}$$
$$+\|\hat{v}\|^2_{L^2(0,T;V^2_{0.div})}\Big),$$

d'où

$$2\varepsilon\int_0^T\int_\Omega D(u+v_0\xi):D(u-\hat{v})\,dx\,dt$$
$$\geq 2\varepsilon C_1^2\Big(\|u\|^2_{L^2(0,T;V^2_{0.div})}-2\|u\|_{L^2(0,T;V^2_{0.div})}\|\hat{v}\|_{L^2(0,T;V^2_{0.div})} \qquad (4.148)$$
$$+\|\hat{v}\|^2_{L^2(0,T;V^2_{0.div})}\Big)-c'\varepsilon(\|u\|_{L^2(0,T;V^2_{0.div})}+\|\hat{v}\|_{L^2(0,T;V^2_{0.div})}).$$

Avec (4.146) et (4.148) on obtient

$$[[\mathcal{A}_\varepsilon u,u-\hat{v}]]\geq -2\mu_1\hat{\rho}^{p-1}(c\|v_0\|_{1.p}T^{\frac{1}{p}}+\hat{\rho}\|\hat{v}\|_{L^2(0,T;V^2_{0.div})})\|u\|^{p-1}_{L^2(0,T;V^2_{0.div})}$$
$$-2\mu_1\big(Tc^p\|v_0\|^p_{1.p}+\hat{\rho}c^{p-1}T^{\frac{1}{p'}}\|v_0\|^{p-1}_{1.p}\|\hat{v}\|_{L^2(0,T;V^2_{0.div})}\big)$$
$$+2\varepsilon C_1^2\Big(\|u\|^2_{L^2(0,T;V^2_{0.div})}-2\|u\|_{L^2(0,T;V^2_{0.div})}\|\hat{v}\|_{L^2(0,T;V^2_{0.div})}$$
$$+\|\hat{v}\|^2_{L^2(0,T;V^2_{0.div})}\Big)-c'\varepsilon(\|u\|_{L^2(0,T;V^2_{0.div})}+\|\hat{v}\|_{L^2(0,T;V^2_{0.div})}),$$

d'où

$$\begin{aligned}
&\frac{[[\mathcal{A}_\varepsilon u, u-\hat{v}]]}{\|u\|_{L^2(0,T;V^2_{0.div})}}\\
&\geq -2\mu_1\hat{\rho}^{p-1}(c\|\upsilon_0\|_{1.p}T^{\frac{1}{p}}+\hat{\rho}\|\hat{v}\|_{L^2(0,T;V^2_{0.div})})\|u\|^{p-2}_{L^2(0,T;V^2_{0.div})}\\
&-\frac{2\mu_1}{\|u\|_{L^2(0,T;V^2_{0.div})}}\big(Tc^p\|\upsilon_0\|^p_{1.p}+\hat{\rho}c^{p-1}T^{\frac{1}{p'}}\|\upsilon_0\|^{p-1}_{1.p}\|\hat{v}\|_{L^2(0,T;V^2_{0.div})}\big)\\
&+\frac{2\varepsilon C_1^2}{\|u\|_{L^2(0,T;V^2_{0.div})}}\Big(\|u\|^2_{L^2(0,T;V^2_{0.div})}-2\|u\|_{L^2(0,T;V^2_{0.div})}\|\hat{v}\|_{L^2(0,T;V^2_{0.div})}\\
&+\|\hat{v}\|^2_{L^2(0,T;V^2_{0.div})}\Big)-\frac{c'\varepsilon}{\|u\|_{L^2(0,T;V^2_{0.div})}}(\|u\|_{L^2(0,T;V^2_{0.div})}+\|\hat{v}\|_{L^2(0,T;V^2_{0.div})}).
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\lim_{\|u\|_{L^2(0,T;V^2_{0.div})}\to+\infty}\frac{[[\mathcal{A}_\varepsilon u, u-\hat{v}]]+J(u)}{\|u\|_{L^2(0,T;V^2_{0.div})}}=+\infty,$$

ce qui montre que $\mathcal{A}_\varepsilon$ est coercif. □

4.4.1 Résultat d'existence et d'unicité pour le problème $(\mathbf{P}^1_\varepsilon)$

Rappelons que dans le chapitre 3 on a étudié le cas $p=2$, on a pris la fonction $f\in L^2(0,T;(V^2_{0.div})')=L^2(0,T;(V_{0.div})')$ pour montrer l'existence et l'unicité de la vitesse solution du problème en vitesse (ce choix nous permet d'utiliser le théorème de la monotonie) et pour $f\in L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$ on a montré l'existence et l'unicité de la solution du problème en vitesse et pression, donc comme on a les mêmes hypothèses que dans le chapitre 3, donc on peut considérer les deux théorèmes qui montrent l'existence et l'unicité de la solution des problèmes $(\mathbf{P}^2_\varepsilon)$ et $(\mathbf{P}^1_\varepsilon)$ suivants :

Théorème 4.5 *On suppose que les hypothèses* (4.2), (4.3) *sont satisfaites, alors pour* $f\in L^2(0,T;(V^2_{0.div})')$, $k\in L^2(0,T;L^2_+(\omega))$, $\theta\in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $s\in L^2(0,T;\boldsymbol{L}^2(\omega))$, $\xi\in H^1(0,T)$ *vérifiant* (4.8), *et* $\upsilon_0\in\boldsymbol{H}^1(\Omega)$ *vérifiant* (4.13). *Alors, le problème* $(\boldsymbol{P}^2_\varepsilon)$ *admet une unique solution.*

Théorème 4.6 *Supposons que les hypothèses du Théorème* 4.5 *sont satisfaites,* $f\in L^2(0,T;\boldsymbol{L}^2(\Omega))$, *il existe* $\overline{\upsilon}_\varepsilon\in C(0,T;\boldsymbol{L}^2(\Omega))\cap L^2(0,T;V^2_{0.div})$ *avec* $\overline{\upsilon}'_\varepsilon\in L^2(0,T;(V^2_{0.div})')$ *et* $\pi_\varepsilon\in H^{-1}(0,T;L^2_0(\Omega))$ *solution du problème* $(\boldsymbol{P}^1_\varepsilon)$.

Preuve. L'existence et l'unicité de la solution des problèmes $(\mathbf{P}_\varepsilon^2)$ et $(\mathbf{P}_\varepsilon^1)$ découle directement du chapitre 3. □

4.4.2 Estimations sur $\overline{v}_\varepsilon$ et π_ε

Lemme 4.6 *On suppose que les hypothèses* (4.2), (4.3) *sont satisfaites, alors pour* $f \in L^{p'}(0,T;\boldsymbol{L}^2(\Omega))$, $k \in L^{p'}(0,T;L^{p'}_+(\omega)) \subset L^2(0,T;L^2_+(\omega))$, $\theta \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $s \in L^2(0,T;\boldsymbol{L}^2(\omega))$, $\xi \in H^1(0,T)$ *vérifiant* (4.8), *et* $v_0 \in \boldsymbol{H}^1(\Omega)$ *vérifiant* (4.13), *en notant par* C *différentes constantes indépendantes de* ε, *alors la solution du problème* $(\boldsymbol{P}_\varepsilon^2)$ *vérifie les estimations suivantes :*

$$\|\overline{v}_\varepsilon\|_{L^p(0,T;V^p_{0.div})} \leq C, \tag{4.149}$$

$$\sqrt{\varepsilon}\|\overline{v}_\varepsilon\|_{L^2(0,T;V^2_{0.div})} \leq C, \tag{4.150}$$

$$\|\overline{v}_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;\boldsymbol{L}^2(\Omega))} \leq C, \tag{4.151}$$

$$\|\overline{v}'_\varepsilon\|_{L^2(0,T;(V^2_{0.div})')} \leq C, \tag{4.152}$$

et

$$\|\pi_\varepsilon\|_{H^{-1}(0,T;L^2(\Omega))} \leq C. \tag{4.153}$$

Preuve. Fixons $t \in]0,T]$, on prend

$$\overline{\varphi} = \begin{cases} 0 & \text{sur } [0,t], \\ \overline{v}_\varepsilon & \text{sur }]t,T], \end{cases}$$

dans (4.139) et avec la positivité de la fonction $j(t,.)$ on obtient

$$\begin{aligned} &\int_0^t < \overline{v}'_\varepsilon, \overline{v}_\varepsilon >_{(V^2_{0.div})',V^2_{0.div}} \, d\tilde{t} + \int_0^t a_\varepsilon(\theta;\overline{v}_\varepsilon,\overline{v}_\varepsilon)\, d\tilde{t} \\ &\leq \int_0^t < \overline{f}, \overline{v}_\varepsilon >_{(V^2_{0.div})',V^2_{0.div}} \, dt + \int_0^t j(t,0)\, d\tilde{t}. \end{aligned} \tag{4.154}$$

On a

$$\begin{aligned} \int_0^t < \overline{v}'_\varepsilon, \overline{v}_\varepsilon >_{(V^2_{0.div})',V^2_{0.div}} \, d\tilde{t} &= \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\|\overline{v}_\varepsilon\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\, d\tilde{t} \\ &= \frac{1}{2}\Big(\|\overline{v}_\varepsilon(t)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - \|\overline{v}_\varepsilon(0)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\Big), \end{aligned}$$

d'où

$$\int_0^t < \overline{v}'_\varepsilon, \overline{v}_\varepsilon >_{(V^2_{0.div})',V^2_{0.div}} \, d\tilde{t} = \frac{1}{2}\|\overline{v}_\varepsilon(t)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \tag{4.155}$$

(car $\overline{v}_\varepsilon(0) = 0$ (voir (4.138)). D'autre part, on a

$$\int_0^t a_\varepsilon(\theta; \overline{v}_\varepsilon, \overline{v}_\varepsilon)\, d\tilde{t} = \int_0^t a(\theta; \overline{v}_\varepsilon, \overline{v}_\varepsilon)\, d\tilde{t} + 2\varepsilon \int_0^t \int_\Omega D(\overline{v}_\varepsilon + v_0\xi) : D(\overline{v}_\varepsilon)\, dx\, d\tilde{t}.$$

D'après ce qui précède (cf. (4.47)) on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^t a(\theta; \overline{v}_\varepsilon, \overline{v}_\varepsilon)\, d\tilde{t} \;&\geq 2(C_{Korn})^p \mu_0 \int_0^t \|\overline{v}_\varepsilon + v_0\xi\|^p_{1.p}\, d\tilde{t} \\ &\quad -2\mu_1 c\|v_0\|_{1.p} \int_0^t \|\overline{v}_\varepsilon + v_0\xi\|^{p-1}_{1.p}\, d\tilde{t}. \end{aligned} \tag{4.156}$$

Maintenant, on a

$$2\varepsilon \int_\Omega D(\overline{v}_\varepsilon + v_0\xi) : D(\overline{v}_\varepsilon)\, dx = 2\varepsilon \int_\Omega |D(\overline{v}_\varepsilon)|^2\, dx + 2\varepsilon \int_\Omega D(v_0\xi) : D(\overline{v}_\varepsilon)\, dx.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient

$$\left|2\varepsilon \int_\Omega D(v_0\xi) : D(\overline{v}_\varepsilon)\, dx\right| \leq 2\varepsilon \|\overline{v}_\varepsilon\|_{1.2}\|v_0\xi\|_{1.2}.$$

Avec l'inégalité de Korn (4.147) on obtient

$$2\varepsilon \int_\Omega D(\overline{v}_\varepsilon + v_0\xi) : D(\overline{v}_\varepsilon)\, dx \geq 2\varepsilon C_1^2 \|\overline{v}_\varepsilon\|^2_{1.2} - 2\varepsilon \|\overline{v}_\varepsilon\|_{1.2}\|v_0\xi\|_{1.2},$$

et en utilisant l'inégalité de Young

$$\alpha\beta \leq \frac{\delta}{2}\alpha^2 + \frac{1}{2\delta}\beta^2, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall \delta > 0,$$

on obtient

$$\|\overline{v}_\varepsilon\|_{1.2}\|v_0\xi\|_{1.2} \leq \frac{C_1^2}{2}\|\overline{v}_\varepsilon\|^2_{1.2} + \frac{1}{2C_1^2}\|v_0\xi\|^2_{1.2},$$

d'où

$$2\varepsilon \int_\Omega D(\overline{v}_\varepsilon + v_0\xi) : D(\overline{v}_\varepsilon)\, dx \geq \varepsilon C_1^2 \|\overline{v}_\varepsilon\|^2_{1.2} - \frac{\varepsilon}{C_1^2}\|v_0\xi\|^2_{1.2},$$

donc

$$\begin{aligned} &2\varepsilon \int_0^t \int_\Omega D(\overline{v}_\varepsilon + \upsilon_0\xi) : D(\overline{v}_\varepsilon)\, dx\, d\tilde{t} \\ &\geq \varepsilon C_1^2 \int_0^t \|\overline{v}_\varepsilon\|_{1.2}^2\, d\tilde{t} - \frac{\varepsilon}{C_1^2}\|\upsilon_0\|_{1.2}^2 \int_0^t |\xi|^2\, d\tilde{t}. \end{aligned} \tag{4.157}$$

Avec (4.156), (4.157) on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^t a_\varepsilon(\theta; \overline{v}_\varepsilon, \overline{v}_\varepsilon)\, d\tilde{t} \;&\geq 2(C_{Korn})^p \mu_0 \int_0^t \|\overline{v}_\varepsilon + \upsilon_0\xi\|_{1.p}^p\, d\tilde{t} \\ &\quad -2\mu_1 c\|\upsilon_0\|_{1.p} \int_0^t \|\overline{v}_\varepsilon + \upsilon_0\xi\|_{1.p}^{p-1}\, d\tilde{t} \\ &\quad +\varepsilon C_1^2 \int_0^t \|\overline{v}_\varepsilon\|_{1.2}^2\, d\tilde{t} - \frac{\varepsilon}{C_1^2}\|\upsilon_0\|_{1.2}^2 \int_0^t |\xi|^2\, d\tilde{t}. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité (4.40) pour $p_* = p - 1$ (car $\frac{6}{5} < p < 2$) on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^t a_\varepsilon(\theta; \overline{v}_\varepsilon, \overline{v}_\varepsilon)\, d\tilde{t} \;&\geq 2(C_{Korn})^p \mu_0 \int_0^t \|\overline{v}_\varepsilon + \upsilon_0\xi\|_{1.p}^p\, d\tilde{t} \\ &\quad -2\mu_1 c\|\upsilon_0\|_{1.p} \int_0^t (\|\overline{v}_\varepsilon\|_{1.p}^{p-1} + \|\upsilon_0\xi\|_{1.p}^{p-1})\, d\tilde{t} \\ &\quad +\varepsilon C_1^2 \int_0^t \|\overline{v}_\varepsilon\|_{1.2}^2\, d\tilde{t} - \frac{\varepsilon}{C_1^2}\|\upsilon_0\|_{1.2}^2 \int_0^t |\xi|^2\, d\tilde{t}. \end{aligned} \tag{4.158}$$

D'autre part, comme on a $\overline{f} \in L^{p'}(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$ et on a $\overline{v}_\varepsilon \in L^2(0,T;V_{0.div}^2) \subset L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$ on peut écrire

$$\int_0^t < \overline{f}, \overline{v}_\varepsilon >_{(V_{0.div}^2)',V_{0.div}^2}\, d\tilde{t} = \int_0^t (\overline{f}, \overline{v}_\varepsilon)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\, d\tilde{t}.$$

Donc, on obtient

$$\Big| \int_0^t < \overline{f}, \overline{v}_\varepsilon >_{(V_{0.div}^2)',V_{0.div}^2}\, d\tilde{t} \Big| \leq \tilde{c} \int_0^t \|\overline{f}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|\overline{v}_\varepsilon\|_{1.p}\, d\tilde{t}, \tag{4.159}$$

où $\tilde{c}$ désigne la constante de l'injection continue de $V_{0.div}^p$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$.
Pour $0 < \varepsilon < 1$ et de (4.154), (4.155), (4.158) et (4.159) on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\|\overline{v}_\varepsilon(t)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + 2(C_{Korn})^p \mu_0 \int_0^t \|\overline{v}_\varepsilon + \upsilon_0\xi\|_{1.p}^p\, d\tilde{t} \\ &+\varepsilon C_1^2 \int_0^t \|\overline{v}_\varepsilon\|_{1.2}^2\, d\tilde{t} \leq \tilde{c} \int_0^t \|\overline{f}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|\overline{v}_\varepsilon\|_{1.p}\, d\tilde{t} + \int_0^t j(t,0)\, d\tilde{t} \\ &+2\mu_1 c\|\upsilon_0\|_{1.p} \int_0^t (\|\overline{v}_\varepsilon\|_{1.p}^{p-1} + \|\upsilon_0\xi\|_{1.p}^{p-1})\, d\tilde{t} + \frac{1}{C_1^2}\|\upsilon_0\|_{1.2}^2 \int_0^t |\xi|^2\, d\tilde{t}. \end{aligned} \tag{4.160}$$

Avec $t = T$, en utilisant les inégalités de Hölder en espace et en temps on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\|\overline{\upsilon}_\varepsilon(T)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + 2(C_{Korn})^p\mu_0\Big|\|\overline{\upsilon}_\varepsilon\|_{L^p(0,T;V^p_{0.div})} - \|\upsilon_0\xi\|_{L^p(0,T;V^p_{\Gamma_1})}\Big|^p \\
&+\varepsilon C_1^2\|\overline{\upsilon}_\varepsilon\|^2_{L^2(0,T;V^2_{0.div})} \leq \tilde{c}\|\overline{f}\|_{L^{p'}(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}\|\overline{\upsilon}_\varepsilon\|_{L^p(0,T;V^p_{0.div})} \\
&+J(0) + 2\mu_1 c\|\upsilon_0\|_{1.p}T^{\frac{1}{p}}\big(\|\overline{\upsilon}_\varepsilon\|^{p-1}_{L^p(0,T;V^p_{0.div})} + \|\upsilon_0\xi\|^{p-1}_{L^p(0,T;V^p_{\Gamma_1})}\big) \\
&+\frac{1}{C_1^2}\|\upsilon_0\|^2_{1.2}\int_0^T |\xi|^2\,dt,
\end{aligned} \tag{4.161}$$

d'où

$$\begin{aligned}
&2(C_{Korn})^p\mu_0\Big|\|\overline{\upsilon}_\varepsilon\|_{L^p(0,T;V^p_{0.div})} - \|\upsilon_0\xi\|_{L^p(0,T;V^p_{\Gamma_1})}\Big|^p \\
&\leq \tilde{c}\|\overline{f}\|_{L^{p'}(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}\|\overline{\upsilon}_\varepsilon\|_{L^p(0,T;V^p_{0.div})} + J(0) \\
&+2\mu_1 c\|\upsilon_0\|_{1.p}T^{\frac{1}{p}}\big(\|\overline{\upsilon}_\varepsilon\|^{p-1}_{L^p(0,T;V^p_{0.div})} + \|\upsilon_0\xi\|^{p-1}_{L^p(0,T;V^p_{\Gamma_1})}\big) \\
&+\frac{1}{C_1^2}\|\upsilon_0\|^2_{1.2}\int_0^T |\xi|^2\,dt.
\end{aligned}$$

En divisant les deux membres de l'inéquation ci-dessus par $\|\overline{\upsilon}_\varepsilon\|^p_{L^p(0,T;V^p_{0.div})}$ (avec $\|\overline{\upsilon}_\varepsilon\|_{L^p(0,T;V^p_{0.div})} \neq 0$) on obtient

$$\begin{aligned}
&2(C_{Korn})^p\mu_0\Big|1 - \frac{\|\upsilon_0\xi\|_{L^p(0,T;V^p_{\Gamma_1})}}{\|\overline{\upsilon}_\varepsilon\|_{L^p(0,T;V^p_{0.div})}}\Big|^p \\
&\leq \tilde{c}\|\overline{f}\|_{L^{p'}(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}\|\overline{\upsilon}_\varepsilon\|^{1-p}_{L^p(0,T;V^p_{0.div})} + \frac{J(0)}{\|\overline{\upsilon}_\varepsilon\|^p_{L^p(0,T;V^p_{0.div})}} \\
&+\frac{2\mu_1 c\|\upsilon_0\|_{1.p}T^{\frac{1}{p}}}{\|\overline{\upsilon}_\varepsilon\|_{L^p(0,T;V^p_{0.div})}}\Big(1 + \Big(\frac{\|\upsilon_0\xi\|_{L^p(0,T;V^p_{\Gamma_1})}}{\|\overline{\upsilon}_\varepsilon\|_{L^p(0,T;V^p_{0.div})}}\Big)^{p-1}\Big) \\
&+\frac{1}{C_1^2\|\overline{\upsilon}_\varepsilon\|^p_{L^p(0,T;V^p_{0.div})}}\|\upsilon_0\|^2_{1.2}\int_0^T |\xi|^2\,dt.
\end{aligned} \tag{4.162}$$

D'autre part, on définit l'ensemble suivant :

$$\mathcal{E} = \Big\{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^*_+, \quad \text{tel que} \quad \mathbf{z} \quad \text{vérifie l'inéquation suivante}$$

$$2(C_{Korn})^p\mu_0\Big|1-\frac{\|\upsilon_0\xi\|_{L^p(0,T;V^p_{\Gamma_1})}}{\mathbf{z}}\Big|^p\leq\tilde{c}\|\overline{f}\|_{L^{p'}(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}\mathbf{z}^{1-p}+\frac{J(0)}{\mathbf{z}^p}$$
$$+\frac{2\mu_1c\|\upsilon_0\|_{1.p}T^{\frac{1}{p}}}{\mathbf{z}}\Big(1+\Big(\frac{\|\upsilon_0\xi\|_{L^p(0,T;V^p_{\Gamma_1})}}{\mathbf{z}}\Big)^{p-1}\Big) \tag{4.163}$$
$$+\frac{1}{C_1^2\mathbf{z}^p}\|\upsilon_0\|^2_{1.2}\int_0^T|\xi|^2\,dt\Big\}.$$

Montrons que l'ensemble $\mathcal{E}$ est borné. En effet, pour $\mathbf{z}\in\mathcal{E}$, en faisant $\mathbf{z}\to+\infty$ dans (4.163) nous arrivons à $\mu_0\leq 0$. C'est une contraduction avec le fait que $\mu_0>0$. Ainsi

$$\exists C>0,\quad \mathbf{z}\leq C, \tag{4.164}$$

ce qui montre que l'ensemble $\mathcal{E}$ est borné.
De (4.162) on obtient que $\|\overline{\upsilon}_\varepsilon\|_{L^p(0,T;V^p_{0.div})}\in\mathcal{E}\cup\{0\}$ d'où (4.149).
Avec (4.149), (4.161) on a

$$\varepsilon C_1^2\|\overline{\upsilon}_\varepsilon\|^2_{L^2(0,T;V^2_{0.div})}\leq\tilde{c}C\|\overline{f}\|_{L^{p'}(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}+J(0)$$
$$+2\mu_1c\|\upsilon_0\|_{1.p}T^{\frac{1}{p}}\Big(C^{p-1}+\|\upsilon_0\xi\|^{p-1}_{L^p(0,T;V^p_{\Gamma_1})}\Big)$$
$$+\frac{1}{C_1^2}\|\upsilon_0\|^2_{1.2}\int_0^T|\xi|^2\,dt,$$

d'où (4.150).
D'autre part, avec (4.160) on a

$$\frac{1}{2}\|\overline{\upsilon}_\varepsilon(t)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\leq\tilde{c}\int_0^T\|\overline{f}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\|\overline{\upsilon}_\varepsilon\|_{1.p}\,d\tilde{t}+J(0)$$
$$+2\mu_1c\|\upsilon_0\|_{1.p}\int_0^T(\|\overline{\upsilon}_\varepsilon\|^{p-1}_{1.p}+\|\upsilon_0\xi\|^{p-1}_{1.p})\,d\tilde{t}+\frac{1}{C_1^2}\|\upsilon_0\|^2_{1.2}\int_0^T|\xi|^2\,d\tilde{t},$$

en utilisant les inégalités de Hölder en espace et en temps et (4.149) on obtient

$$\frac{1}{2}\|\overline{\upsilon}_\varepsilon(t)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\leq\tilde{c}C\|\overline{f}\|_{L^{p'}(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}+J(0)$$
$$+2\mu_1c\|\upsilon_0\|_{1.p}T^{\frac{1}{p}}\big(C^{p-1}+\|\upsilon_0\xi\|^{p-1}_{L^p(0,T;V^p_{\Gamma_1})}\big)$$
$$+\frac{1}{C_1^2}\|\upsilon_0\|^2_{1.2}\int_0^T|\xi|^2\,dt.$$

En prenant le sup sur $t\in[0,T]$ on obtient (4.151).

Montrons (4.152). En effet, on prend $\overline{\varphi} = \overline{\upsilon}_\varepsilon \pm \tilde{\psi}\zeta \in L^2(0,T;V^2_{0.div})$ avec $\tilde{\psi} \in V^2_{0.div}$ et $\zeta \in \mathcal{D}(0,T)$ dans (4.139) on obtient

$$[[\overline{\upsilon}'_\varepsilon, \pm\tilde{\psi}\zeta]] + [[\mathcal{A}_\varepsilon \overline{\upsilon}_\varepsilon, \pm\tilde{\psi}\zeta]] + J(\overline{\upsilon}_\varepsilon \pm \tilde{\varphi}\zeta) - J(\overline{\upsilon}_\varepsilon) \geq [[\overline{f}, \pm\tilde{\psi}\zeta]]. \quad (4.165)$$

Avec la première inégalité on a

$$[[\overline{\upsilon}'_\varepsilon, \tilde{\psi}\zeta]] \geq [[\overline{f}, \tilde{\psi}\zeta]] - [[\mathcal{A}_\varepsilon \overline{\upsilon}_\varepsilon, \tilde{\psi}\zeta]] - J(\overline{\upsilon}_\varepsilon + \tilde{\psi}\zeta) + J(\overline{\upsilon}_\varepsilon).$$

Comme la fonction J est lipschitzienne sur $\mathcal{K}^2 = L^2(0,T;V^2_{0.div}) = \mathcal{K}$ (voir chapitre 3) c-à-d, il existe $\gamma_* > 0$ tel que

$$|J(u) - J(v)| \leq \gamma_* \|k\|_{L^2(0,T;L^2(\omega))} \|u - v\|_{\mathcal{K}^2}, \ \forall u, v \in \mathcal{K}^2 \quad (4.166)$$

on obtient

$$\begin{aligned} [[\overline{\upsilon}'_\varepsilon, \tilde{\psi}\zeta]] \ &\geq -(\|\overline{f}\|_{L^2(0,T;(V^2_{0.div})')} + \|\mathcal{A}_\varepsilon \overline{\upsilon}_\varepsilon\|_{L^2(0,T;(V^2_{0.div})')} \\ &\quad + \gamma_* \|k\|_{L^2(0,T;L^2(\omega))}) \|\tilde{\psi}\zeta\|_{L^2(0,T;V^2_{0.div})}. \end{aligned} \quad (4.167)$$

Avec la deuxième inégalité de l'inéquation (4.165) on a

$$[[\overline{\upsilon}'_\varepsilon, \tilde{\psi}\zeta]] \leq [[\overline{f}, \tilde{\psi}\zeta]] - [[\mathcal{A}_\varepsilon \overline{\upsilon}_\varepsilon, \tilde{\psi}\zeta]] + J(\overline{\upsilon}_\varepsilon - \tilde{\psi}\zeta) - J(\overline{\upsilon}_\varepsilon),$$

avec (4.166)

$$\begin{aligned} [[\overline{\upsilon}'_\varepsilon, \tilde{\psi}\zeta]] \ &\leq (\|\overline{f}\|_{L^2(0,T;(V^2_{0.div})')} + \|\mathcal{A}_\varepsilon \overline{\upsilon}_\varepsilon\|_{L^2(0,T;(V^2_{0.div})')} \\ &\quad + \gamma_* \|k\|_{L^2(0,T;L^2(\omega))}) \|\tilde{\psi}\zeta\|_{L^2(0,T;V^2_{0.div})}. \end{aligned} \quad (4.168)$$

D'après (4.167), (4.168) on a

$$\begin{aligned} |[[\overline{\upsilon}'_\varepsilon, \tilde{\psi}\zeta]]| \ &\leq (\|\overline{f}\|_{L^2(0,T;(V^2_{0.div})')} + \|\mathcal{A}_\varepsilon \overline{\upsilon}_\varepsilon\|_{L^2(0,T;(V^2_{0.div})')} \\ &\quad + \gamma_* \|k\|_{L^2(0,T;L^2(\omega))}) \|\tilde{\psi}\zeta\|_{L^2(0,T;V^2_{0.div})}. \end{aligned} \quad (4.169)$$

D'autre part, d'après ce qui précède (cf. (4.143)) et avec (4.142) on obtient

$$\begin{aligned} |[[\mathcal{A}_\varepsilon \overline{\upsilon}_\varepsilon, \tilde{\psi}\zeta]]| \ &\leq 2\mu_1 \hat{\rho}(\|\overline{\upsilon}_\varepsilon\|^{p-1}_{L^p(0,T;V^p_{0.div})} + c^{p-1} T^{\frac{1}{p'}} \|\upsilon_0\|^{p-1}_{1.p}) \|\tilde{\psi}\zeta\|_{L^2(0,T;V^2_{0.div})} \\ &\quad + 2\sqrt{\varepsilon}(\sqrt{\varepsilon}\|\overline{\upsilon}_\varepsilon\|_{L^2(0,T;V^2_{0.div})} + \sqrt{\varepsilon} c\sqrt{T}\|\upsilon_0\|_{1.2}) \|\tilde{\psi}\zeta\|_{L^2(0,T;V^2_{0.div})}. \end{aligned}$$

En utilisant (4.149), (4.150) on obtient

$$\begin{aligned} |[[\mathcal{A}_\varepsilon \overline{\upsilon}_\varepsilon, \tilde{\psi}\zeta]]| \ &\leq 2\mu_1 \hat{\rho}(C^{p-1} + c^{p-1} T^{\frac{1}{p'}} \|\upsilon_0\|^{p-1}_{1.p}) \|\tilde{\psi}\zeta\|_{L^2(0,T;V^2_{0.div})} \\ &\quad + 2\sqrt{\varepsilon}(C + \sqrt{\varepsilon} c\sqrt{T}\|\upsilon_0\|_{1.2}) \|\tilde{\psi}\zeta\|_{L^2(0,T;V^2_{0.div})}. \end{aligned}$$

Pour $0 < \varepsilon < 1$ on obtient

$$\begin{aligned}|[[\mathcal{A}_\varepsilon \overline{\upsilon}_\varepsilon, \tilde{\psi}\zeta]]| \quad &\leq 2\mu_1\hat{\rho}(C^{p-1} + c^{p-1}T^{\frac{1}{p'}}\|\upsilon_0\|_{1.p}^{p-1})\|\tilde{\psi}\zeta\|_{L^2(0,T;V^2_{0.div})} \\ &+2(C + c\sqrt{T}\|\upsilon_0\|_{1.2})\|\tilde{\psi}\zeta\|_{L^2(0,T;V^2_{0.div})},\end{aligned}$$

d'où

$$|[[\mathcal{A}_\varepsilon \overline{\upsilon}_\varepsilon, \tilde{\psi}\zeta]]| \leq \mathcal{C}_1\|\tilde{\psi}\zeta\|_{L^2(0,T;V^2_{0.div})}, \tag{4.170}$$

où

$$\mathcal{C}_1 = 2\mu_1\hat{\rho}(C^{p-1} + c^{p-1}T^{\frac{1}{p'}}\|\upsilon_0\|_{1.p}^{p-1}) + 2(C + c\sqrt{T}\|\upsilon_0\|_{1.2}).$$

Donc,

$$\sup_{\tilde{\psi}\zeta \neq 0} \frac{|[[\mathcal{A}_\varepsilon \overline{\upsilon}_\varepsilon, \tilde{\psi}\zeta]]|}{\|\tilde{\psi}\zeta\|_{L^2(0,T;V^2_{0.div})}} \leq \mathcal{C}_1,$$

d'où

$$\|\mathcal{A}_\varepsilon \overline{\upsilon}_\varepsilon\|_{L^2(0,T;(V^2_{0.div})')} \leq \mathcal{C}_1,$$

et en remplaçant dans (4.169), on en déduit (4.152).
Montrons (4.153). En effet, on prend $\pm\tilde{\vartheta}\zeta$ avec $\tilde{\vartheta} \in \mathbf{H}^1_0(\Omega)$ et $\zeta \in \mathcal{D}(0,T)$ dans (4.137) on obtient

$$\begin{aligned}&-\int_0^T (\overline{\upsilon}_\varepsilon, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\zeta'\,dt + \int_0^T a_\varepsilon(\theta; \overline{\upsilon}_\varepsilon, \tilde{\vartheta}\zeta)\,dt - \int_0^T (\pi_\varepsilon, div(\tilde{\vartheta}))\zeta\,dt \\ &= \int_0^T (\overline{f}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\zeta\,dt.\end{aligned} \tag{4.171}$$

Considérons $\varpi \in L^2_0(\Omega)$ et

$$\tilde{\vartheta} = P(\varpi),$$

où P est l'opérateur linéaire continu de $L^2_0(\Omega)$ dans $\mathbf{H}^1_0(\Omega)$ défini dans le chapitre 3. On obtient que

$$div(\tilde{\vartheta}) = \varpi.$$

En prenant $\tilde{\vartheta}\zeta = \eta$ dans (4.171), on obtient

$$\begin{aligned}&\int_0^T (\pi_\varepsilon, \varpi)\zeta\,dt = -\int_0^T (\overline{\upsilon}_\varepsilon, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\zeta'\,dt + \int_0^T a_\varepsilon(\theta; \overline{\upsilon}_\varepsilon, \eta)\,dt \\ &-\int_0^T (\overline{f}, \eta)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,dt.\end{aligned} \tag{4.172}$$

Avec (4.41), (4.140) on obtient

$$\begin{aligned}
&\Big| \int_0^T a_\varepsilon(\theta; \overline{\upsilon}_\varepsilon, \eta)\, dt \Big| \\
&= \Big| \int_0^T a(\theta; \overline{\upsilon}_\varepsilon, \eta)\, dt + 2\varepsilon \int_0^T \int_\Omega d_{ij}(\overline{\upsilon}_\varepsilon + \upsilon_0 \xi) d_{ij}(\eta)\, dx\, dt \Big| \\
&\leq \Big| \int_0^T a(\theta; \overline{\upsilon}_\varepsilon, \eta)\, dt \Big| + \Big| 2\varepsilon \int_0^T \int_\Omega d_{ij}(\overline{\upsilon}_\varepsilon + \upsilon_0 \xi) d_{ij}(\eta)\, dx\, dt \Big| \\
&\leq 2\mu_1 (T^{\frac{1}{p}} \|\overline{\upsilon}_\varepsilon\|^{p-1}_{L^p(0,T;V_0^p)} + Tc^{p-1} \|\upsilon_0\|^{p-1}_{1.p}) \|\eta\|_{L^\infty(0,T;V_0^p)} \\
&+ 2\sqrt{\varepsilon}(\sqrt{T}\sqrt{\varepsilon} \|\overline{\upsilon}_\varepsilon\|_{L^2(0,T;V_0^2)} + \sqrt{\varepsilon} Tc \|\upsilon_0\|_{1.2}) \|\eta\|_{L^\infty(0,T;V_0^2)}.
\end{aligned}$$

Pour $0 < \varepsilon < 1$, (4.149), (4.150) on obtient

$$\begin{aligned}
\Big| \int_0^T a_\varepsilon(\theta; \overline{\upsilon}_\varepsilon, \eta)\, dt \Big| \quad &\leq 2\mu_1 (T^{\frac{1}{p}} C^{p-1} + Tc^{p-1} \|\upsilon_0\|^{p-1}_{1.p}) \|\eta\|_{L^\infty(0,T;V_0^p)} \\
&+ 2(\sqrt{T} C + Tc \|\upsilon_0\|_{1.2}) \|\eta\|_{L^\infty(0,T;V_0^2)}.
\end{aligned} \tag{4.173}$$

Avec (4.172), (4.173)

$$\begin{aligned}
\Big| \int_0^T (\pi_\varepsilon, \varpi) \zeta\, dt \Big| \quad &\leq \quad \|\overline{\upsilon}_\varepsilon\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))} \|\eta'\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))} \\
&+ \quad 2\rho_1 \mu_1 (T^{\frac{1}{p}} C^{p-1} + Tc^{p-1} \|\upsilon_0\|^{p-1}_{1.p}) \|\eta\|_{L^\infty(0,T;V_0^2)} \\
&+ \quad 2(\sqrt{T} C + Tc \|\upsilon_0\|_{1.2}) \|\eta\|_{L^\infty(0,T;V_0^2)} \\
&+ \quad \sqrt{T} \rho_0 \|\overline{f}\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))} \|\eta\|_{L^\infty(0,T;V_0^2)},
\end{aligned}$$

où ρ_0, ρ_1 désignent les constantes de l'injection continue de V_0^2 dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ et de V_0^2 dans V_0^p respectivement.
Avec (4.151) on obtient

$$\begin{aligned}
\Big| \int_0^T (\pi_\varepsilon, \varpi) \zeta\, dt \Big| \quad &\leq \quad \sqrt{T} \rho_0 C \|\eta\|_{H^1(0,T;V_0^2)} \\
&+ \quad 2\rho_1 \mu_1 (T^{\frac{1}{p}} C^{p-1} + Tc^{p-1} \|\upsilon_0\|^{p-1}_{1.p}) \|\eta\|_{L^\infty(0,T;V_0^2)} \\
&+ \quad 2(\sqrt{T} C + Tc \|\upsilon_0\|_{1.2}) \|\eta\|_{L^\infty(0,T;V_0^2)} \\
&+ \quad \sqrt{T} \rho_0 \|\overline{f}\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))} \|\eta\|_{L^\infty(0,T;V_0^2)}.
\end{aligned}$$

Donc, comme $V_0^2 = V_0$ et $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ ont la même norme (voir chapitre 3) on

obtient

$$\begin{aligned}\Big|\int_0^T(\pi_\varepsilon,\varpi)\zeta\,dt\Big| &\leq \sqrt{T}\rho_0 C\|\eta\|_{H^1(0,T;\mathbf{H}_0^1(\Omega))}\\ &+ 2\rho_1\mu_1(T^{\frac{1}{p}}C^{p-1}+Tc^{p-1}\|\upsilon_0\|_{1.p}^{p-1})\|\eta\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{H}_0^1(\Omega))}\\ &+ 2(\sqrt{T}C+Tc\|\upsilon_0\|_{1.2})\|\eta\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{H}_0^1(\Omega))}\\ &+ \sqrt{T}\rho_0\|\overline{f}\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}\|\eta\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{H}_0^1(\Omega))}.\end{aligned}$$

En utilisant la continuité de l'application P et l'injection continue de $H^1(0,T)$ dans $L^\infty(0,T)$ (voir [21] page 129) on obtient

$$\|\eta\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{H}_0^1(\Omega))}=\|\zeta\|_{L^\infty(0,T)}\|P\varpi\|_{\mathbf{H}_0^1(\Omega)}\leq C''\|\varpi\zeta\|_{H^1(0,T;L^2(\Omega))}. \quad (4.174)$$

Donc, pour tout $\varpi\in L_0^2(\Omega)$, $\zeta\in\mathcal{D}(0,T)$ on a

$$\Big|\int_0^T(\pi_\varepsilon,\varpi)\zeta\,dt\Big|\leq C\|\varpi\zeta\|_{H^1(0,T;L^2(\Omega))}. \quad (4.175)$$

D'autre part, pour tout $\varpi^*\in L^2(\Omega)$, on peut appliquer (4.175) en prenant

$$\varpi=\varpi^*-\frac{1}{mes\Omega}\int_\Omega\varpi^*\,dx,$$

car on a $\varpi\in L_0^2(\Omega)$.
D'autre part, comme dans le chapitre 3 on a montré que

$$\int_\Omega\pi_\varepsilon\,dx=0, \quad (4.176)$$

on obtient

$$\begin{aligned}&\Big|\int_0^T(\pi_\varepsilon,(\varpi^*-\frac{1}{mes\Omega}\int_\Omega\varpi^*\,dx))\zeta\,dt\Big|\\ &=\Big|\int_0^T(\pi_\varepsilon,\varpi^*)\zeta\,dt-\frac{1}{mes\Omega}\int_0^T\Big(\int_\Omega\pi_\varepsilon\,dx\Big)\Big(\int_\Omega\varpi^*\,dx\Big)\zeta\,dt\Big|\\ &=\Big|\int_0^T(\pi_\varepsilon,\varpi^*)\zeta\,dt\Big|.\end{aligned}$$

Remarquons

$$\|\varpi\|_{L^2(\Omega)}\leq\|\varpi^*\|_{L^2(\Omega)},$$

donc, pour tout $\varpi^* \in L^2(\Omega)$, $\zeta \in \mathcal{D}(0,T)$ on a

$$\Big| \int_0^T (\pi_\varepsilon, \varpi)\zeta \, dt \Big| = \Big| \int_0^T (\pi_\varepsilon, \varpi^*)\zeta \, dt \Big| \leq C \|\varpi^* \zeta\|_{H^1(0,T;L^2(\Omega))},$$

où C est une constante indépendante de ε. Alors, avec la densité de $\mathcal{D}(0,T) \otimes L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(0,T;L^2(\Omega))$ et (4.176) on obtient (4.153). □

4.4.3 La limite du problème $(\mathbf{P}_\varepsilon^2)$ $\varepsilon \to 0$

Dans cette sous section, on s'intéresse au passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$ dans le problème $(\mathbf{P}_\varepsilon^2)$. Nous utiliserons les estimations du lemme 4.6 ainsi que le lemme d'Aubin pour déduire le problème limite lorsque $\varepsilon \to 0$.
On considère la proposition suivante :

Proposition 4.4 *Il existe une sous-suite de $(\overline{v}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, notée encore $(\overline{v}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, telles que les convergences suivantes ont lieu*

$$\overline{v}_\varepsilon \rightharpoonup \overline{v} \quad \textit{faiblement dans} \quad L^p(0,T;V_{0.div}^p), \tag{4.177}$$

$$\overline{v}_\varepsilon \rightharpoonup \overline{v} \quad \textit{faible* dans} \quad L^\infty(0,T;\boldsymbol{L}^2(\Omega)), \tag{4.178}$$

$$\overline{v}'_\varepsilon \rightharpoonup \overline{v}' \quad \textit{faiblement dans} \quad L^2(0,T;(V_{0.div}^2)'), \tag{4.179}$$

$$\overline{v}_\varepsilon \to \overline{v} \quad \textit{fortement dans} \quad L^p(0,T;\boldsymbol{L}^p(\partial\Omega)), \tag{4.180}$$

et

$$\overline{v}_\varepsilon \to \overline{v} \quad \textit{fortement dans} \quad C([0,T];\tilde{H}), \tag{4.181}$$

où $\tilde{H}$ est un espace de Banach tel que $\boldsymbol{L}^2(\Omega) \subset \tilde{H} \subset (V_{0.div}^2)'$ et l'injection de $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ dans $\tilde{H}$ est compacte.
De plus, il existe une sous-suite notée encore $(\pi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ vérifiant

$$\pi_\varepsilon \rightharpoonup \hat{\pi} \quad \textit{faiblement dans} \quad H^{-1}(0,T;L_0^2(\Omega)). \tag{4.182}$$

Preuve. Notons que les estimations obtenues dans le lemme 4.6 sont indépendantes de ε. Des estimations (4.149), (4.151), on en déduit que la suite $(\overline{v}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $L^p(0,T;V_{0.div}^p) \cap L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$, donc il existe une sous-suite de $(\overline{v}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, notée encore $(\overline{v}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, vérifiant les convergences (4.177) et (4.178). Avec l'estimation (4.152), $(\overline{v}'_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans

$L^2(0,T;(V^2_{0.div})')$, donc quitte à extraire à nouveau une sous-suite de $(\overline{v}'_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, notée encore $(\overline{v}'_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, on obtient (4.179).

D'autre part, avec le théorème de trace, il existe une application $\hat{\gamma}_0 \in \mathcal{L}(\mathbf{W}^{1,p}(\Omega), \mathbf{W}^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega))$ et l'injection de $\mathbf{W}^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ dans $\mathbf{L}^p(\partial\Omega)$ est compacte [30] où $\mathbf{L}^p(\partial\Omega) = (L^p(\partial\Omega))^3$, $\mathbf{W}^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega) = (W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega))^3$. Dans toute la suite, on utilise la notation

$$\hat{\gamma}_0(\overline{v}) = \overline{v} \quad \text{sur} \quad \partial\Omega.$$

Notons $X_0 = V^p_{0.div}$, $X = \mathbf{L}^2(\Omega)$, $X_1 = (V^2_{0.div})'$ tel que $X_0 \subset X$ avec injection compacte et continue (car $p > \frac{6}{5}$) et $X \subset X_1$ avec injection continue.
Pour montrer la convergence (4.180) on a besoin de l'inégalité suivante : pour tout $\hat{\eta} > 0$, il existe $c_{\hat{\eta}} > 0$ tel que

$$\|\tilde{v}\|_{\mathbf{L}^p(\partial\Omega)} \leq \hat{\eta}\|\tilde{v}\|_{X_0} + c_{\hat{\eta}}\|\tilde{v}\|_{X_1} \quad \forall \tilde{v} \in X_0. \tag{4.183}$$

En effet, raisonnons par l'absurde (voir Lemme 2.1 [78] page 270). On suppose que (4.183) est faux donc il existe $\hat{\eta} > 0$ tel que pour tout $c \in \mathbb{R}^*_+$, il existe $\tilde{v} \in X_0$ tel que

$$\|\tilde{v}\|_{\mathbf{L}^p(\partial\Omega)} > \hat{\eta}\|\tilde{v}\|_{X_0} + c\|\tilde{v}\|_{X_1}.$$

On prend $c = m$, on obtient qu'il existe une suite $(\tilde{v}_m)_{m\geq 1}$ d'éléments de X_0 vérifiant

$$\|\tilde{v}_m\|_{\mathbf{L}^p(\partial\Omega)} > \hat{\eta}\|\tilde{v}_m\|_{X_0} + m\|\tilde{v}_m\|_{X_1}, \quad \forall m \geq 1.$$

D'autre part, on a $\|\tilde{v}_m\|_{X_0} \neq 0$. En effet, supposons que $\|\tilde{v}_m\|_{X_0} = 0$ donc $\tilde{v}_m = 0$, comme l'application trace est continue et linéaire, on en déduit que $\tilde{v}_m = 0$ sur $\partial\Omega$, c'est une contradiction avec le fait que $\|\tilde{v}_m\|_{\mathbf{L}^p(\partial\Omega)} > 0$.
Donc, on considère la suite normalisée

$$w_m = \frac{\tilde{v}_m}{\|\tilde{v}_m\|_{X_0}},$$

qui satisfait

$$\|w_m\|_{\mathbf{L}^p(\partial\Omega)} > \hat{\eta} + m\|w_m\|_{X_1}, \quad \forall m \geq 1. \tag{4.184}$$

Comme $\|w_m\|_{X_0} = 1$, d'après la continuité de la trace on obtient que $(w_m)_{m\geq 1}$ est bornée dans $\mathbf{W}^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ et dans $\mathbf{L}^p(\partial\Omega)$. En passant à la limite dans (4.184) quand $m \to +\infty$ on obtient

$$\|w_m\|_{X_1} \to 0. \tag{4.185}$$

Comme la suite $(w_m)_{m\geq 1}$ est bornée dans X_0 alors $(w_m)_{m\geq 1}$ est bornée dans X. Avec l'injection compacte de X_0 dans X (car $p > \frac{6}{5}$), on en déduit qu'il existe une sous-suite notée encore $(w_m)_{m\geq 1}$ qui converge fortement dans X et faiblement dans X_0. De (4.185) la limite de $(w_m)_{m\geq 1}$ doit égale à 0.
D'autre part, on a

$$w_m \to \overline{w} = 0 \quad \text{dans} \quad X, \tag{4.186}$$

$$w_m \rightharpoonup w_* \quad \text{dans} \quad X_0. \tag{4.187}$$

Montrons que $w_* = 0$. En effet, de (4.187) on a

$$< w_m, \tilde{f} >_{X_0,X_0'} \to < w_*, \tilde{f} >_{X_0,X_0'}, \quad \forall \tilde{f} \in X_0',$$

comme $X_0 \subset X \subset X_0'$, pour tout $\tilde{f} \in X$ on pose $L_{\tilde{f}} \in X_0'$ avec

$$\begin{aligned} L_{\tilde{f}}(w) &= \int_\Omega \tilde{f} w \, dx \\ &= (\tilde{f}, w)_X \quad \forall w \in X_0 \subset X. \end{aligned}$$

On a

$$L_{\tilde{f}}(w_m) \to L_{\tilde{f}}(w_*),$$

donc, de (4.186) on a

$$\lim_{m\to+\infty} |(\tilde{f}, w_m - \overline{w})_X| \leq \lim_{m\to+\infty} \|\tilde{f}\|_X \|w_m - \overline{w}\|_X \to 0,$$

d'où

$$(\tilde{f}, w_* - \overline{w}) = 0 \quad \forall \tilde{f} \in X,$$

c-à-d, $w_* - \overline{w} \in X^\perp$ donc $w_* = \overline{w} = 0$ dans X. Alors, $w_m \rightharpoonup 0 \quad \text{dans} \quad X_0$. Comme l'opérateur trace est linéaire et continu pour la topologie forte (voir Théorème III.9 [21] page 39) on en déduit qu'il est continu pour la topologie faible d'où

$$w_m \rightharpoonup 0 \quad \text{dans} \quad \mathbf{W}^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega).$$

Comme injection de $\mathbf{W}^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ dans $\mathbf{L}^p(\partial\Omega)$ est compacte

$$w_m \to 0 \quad \text{dans} \quad \mathbf{L}^p(\partial\Omega).$$

C'est une contradiction avec (4.184)

$$\|w_m\|_{\mathbf{L}^p(\partial\Omega)} > \hat{\eta} > 0, \quad \forall m \geq 1,$$

d'où le résultat.
Avec (4.183) on obtient

$$\|\overline{v}_\varepsilon - \overline{v}\|_{L^p(0,T;\mathbf{L}^p(\partial\Omega))} \leq \hat{\eta}\|\overline{v}_\varepsilon - \overline{v}\|_{L^p(0,T;X_0)} + c_{\hat{\eta}}\|\overline{v}_\varepsilon - \overline{v}\|_{L^p(0,T;X_1)}.$$

Avec (4.149) on a

$$\begin{aligned} \|\overline{v}_\varepsilon - \overline{v}\|_{L^p(0,T;\mathbf{L}^p(\partial\Omega))} &\leq \hat{\eta}(C + \|\overline{v}\|_{L^p(0,T;X_0)}) \\ &\quad + c_{\hat{\eta}}\|\overline{v}_\varepsilon - \overline{v}\|_{L^p(0,T;X_1)}. \end{aligned} \tag{4.188}$$

De plus, de [78] page 272 on a

$$\overline{v}_\varepsilon \to \overline{v} \quad \text{fortement dans} \quad L^p(0,T;X_1).$$

En passant à la limite dans (4.188) quand $\varepsilon \to 0$ on obtient

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|\overline{v}_\varepsilon - \overline{v}\|_{L^p(0,T;\mathbf{L}^p(\partial\Omega))} \leq \hat{\eta}(C + \|\overline{v}\|_{L^p(0,T;X_0)}). \tag{4.189}$$

Comme $\hat{\eta} > 0$ est arbitraire, on peut passer à la limite quand $\hat{\eta} \to 0$ dans (4.189) on obtient (4.180).
En appliquant le lemme de Simon, on a la convergence (4.181) quitte à extraire à nouveau une sous-suite. Donc, on obtient

$$0 = \lim_{\varepsilon\to 0} \overline{v}_\varepsilon(0) = \overline{v}(0). \tag{4.190}$$

De l'estimation (4.153), on déduit que la suite $(\pi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $H^{-1}(0,T;L^2_0(\Omega))$, et quitte à extraire à nouveau une sous-suite, notée encore $(\pi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, on obtient (4.182). □

Lemme 4.7 *On suppose que les hypothèses* (4.2), (4.3) *sont satisfaites, alors pour* $f \in L^{p'}(0,T;\boldsymbol{L}^2(\Omega))$, $k \in L^{p'}(0,T;L^{p'}_+(\omega))$, $\theta \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $s \in L^2(0,T;\boldsymbol{L}^2(\omega))$, $\xi \in H^1(0,T)$ *vérifiant* (4.8), *et* $\upsilon_0 \in \boldsymbol{H}^1(\Omega)$ *vérifiant* (4.13) *on a* $\hat{\pi} \in H^{-1}(0,T;L^{p'}_0(\Omega))$ *et* $\overline{v}' \in L^{p'}0,T;(V^p_{0.div})')$.

Preuve. Montrons que $\hat{\pi} \in H^{-1}(0,T;L^{p'}_0(\Omega))$. En effet, avec (4.41), (4.140) on obtient pour tout $\tilde{\vartheta} \in \mathbf{H}^1_0(\Omega)$ et $\zeta \in \mathcal{D}(0,T)$

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_0^T a_\varepsilon(\theta;\overline{v}_\varepsilon,\tilde{\vartheta}\zeta)\,dt\Big| \\
&= \Big|\int_0^T a(\theta;\overline{v}_\varepsilon,\tilde{\vartheta}\zeta)\,dt + 2\varepsilon\int_0^T\int_\Omega d_{ij}(\overline{v}_\varepsilon+\upsilon_0\xi)d_{ij}(\tilde{\vartheta}\zeta)\,dx\,dt\Big| \\
&\le \Big|\int_0^T a(\theta;\overline{v}_\varepsilon,\tilde{\vartheta}\zeta)\,dt\Big| + \Big|2\varepsilon\int_0^T\int_\Omega d_{ij}(\overline{v}_\varepsilon+\upsilon_0\xi)d_{ij}(\tilde{\vartheta}\zeta)\,dx\,dt\Big| \\
&\le 2\mu_1(\|\overline{v}_\varepsilon\|^{p-1}_{L^p(0,T;V^p_0)} + T^{\frac{1}{p'}}c^{p-1}\|\upsilon_0\|^{p-1}_{1.p})\|\tilde{\vartheta}\zeta\|_{L^p(0,T;V^p_0)} \\
&+2\sqrt{\varepsilon}(\sqrt{\varepsilon}\|\overline{v}_\varepsilon\|_{L^2(0,T;V^2_0)} + \sqrt{\varepsilon}\sqrt{T}c\|\upsilon_0\|_{1.2})\|\tilde{\vartheta}\zeta\|_{L^2(0,T;V^2_0)}.
\end{aligned}$$

Pour $0<\varepsilon<1$, (4.149), (4.150) on obtient

$$\Big|\int_0^T a_\varepsilon(\theta;\overline{v}_\varepsilon,\tilde{\vartheta}\zeta)\,dt\Big| \le \hat{\mathbf{C}}\|\tilde{\vartheta}\zeta\|_{L^p(0,T;V^p_0)} + \sqrt{\varepsilon}\mathbf{C}\|\tilde{\vartheta}\zeta\|_{L^2(0,T;V^2_0)}. \quad (4.191)$$

où

$$\hat{\mathbf{C}} = 2\mu_1(C^{p-1} + T^{\frac{1}{p'}}c^{p-1}\|\upsilon_0\|^{p-1}_{1.p}),$$
$$\mathbf{C} = 2(C + \sqrt{T}c\|\upsilon_0\|_{1.2}).$$

D'autre part, on a

$$\Big|\int_0^T (\overline{f},\tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\zeta\,dt\Big| \le \rho_*\|\overline{f}\|_{L^{p'}(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}\|\tilde{\vartheta}\zeta\|_{L^p(0,T;V^p_0)}, \quad (4.192)$$

rappelons que ρ_* désigne la constante de l'injection continue de V^p_0 dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$.
De (4.151), (4.171), (4.191) et (4.192) on obtient

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_0^T (\pi_\varepsilon, div(\tilde{\vartheta}))\zeta\,dt\Big| \le \sqrt{T}\rho_* C\|\tilde{\vartheta}\zeta\|_{H^1(0,T;V^p_0)} + \hat{\mathbf{C}}\|\tilde{\vartheta}\zeta\|_{L^p(0,T;V^p_0)} \\
&+\sqrt{\varepsilon}\mathbf{C}\|\tilde{\vartheta}\zeta\|_{L^2(0,T;V^2_0)} + \rho_*\|\overline{f}\|_{L^{p'}(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}\|\tilde{\vartheta}\zeta\|_{L^p(0,T;V^p_0)},
\end{aligned}$$

d'où

$$\Big|\int_0^T (\pi_\varepsilon, div(\tilde{\vartheta}))\zeta\, dt\Big| \;\leq\; C_{11}\|\tilde{\vartheta}\zeta\|_{H^1(0,T;\mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega))} + \sqrt{\varepsilon}\mathbf{C}\|\tilde{\vartheta}\zeta\|_{L^2(0,T;V_0^2)},$$

où

$$C_{11} = \sqrt{T}\rho_* C + \hat{\mathbf{C}}T^{\frac{2-p}{2p}} + \rho_* T^{\frac{2-p}{2p}}\|\overline{f}\|_{L^{p'}(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}.$$

En passant à la limite dans l'inéquation ci-dessus quand $\varepsilon \to 0$ on obtient

$$\Big|\int_0^T (\hat{\pi}, div(\tilde{\vartheta}))\zeta\, dt\Big| \leq C_{11}\|\tilde{\vartheta}\zeta\|_{H^1(0,T;\mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega))},\;\; \forall\tilde{\vartheta}\in\mathbf{H}_0^1(\Omega),\quad \forall\zeta\in\mathcal{D}(0,T).$$

En utilisant la formule de Green on obtient

$$\begin{aligned}&\Big|\int_0^T (\nabla\hat{\pi}, \tilde{\vartheta})\zeta\, dt\Big| \leq C_{11}\|\tilde{\vartheta}\zeta\|_{H^1(0,T;\mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega))}\\ &\forall\tilde{\vartheta}\in\mathbf{D}(\Omega),\quad \forall\zeta\in\mathcal{D}(0,T).\end{aligned} \tag{4.193}$$

Avec la densité de $\mathcal{D}(0,T)\otimes\mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega)$ dans $H_0^1(0,T;\mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega))$ on conclut que $\nabla\hat{\pi}\in H^{-1}(0,T;\mathbf{W}^{-1,p'}(\Omega))$, donc le théorème de De Rham [3] montre que $\hat{\pi}\in H^{-1}(0,T;L^{p'}(\Omega))$. De plus, (4.182) donne que

$$\int_\Omega \hat{\pi}\, dx = 0,$$

d'où $\hat{\pi}\in H^{-1}(0,T;L_0^{p'}(\Omega))$.
Maintenant, on montre que $\overline{v}'\in L^{p'}(0,T;(V_{0.div}^p)')$. En effet, on prend $\pm\tilde{\vartheta}\zeta$ avec $\tilde{\vartheta}\in V_0^2$ et $\zeta\in\mathcal{D}(0,T)$ dans (4.137) on obtient

$$\begin{aligned}&\Big\langle\frac{\partial}{\partial t}(\overline{v}_\varepsilon, \pm\tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \zeta\Big\rangle_{\mathcal{D}'(0,T),\mathcal{D}(0,T)} + \int_0^T a_\varepsilon(\theta;\overline{v}_\varepsilon, \pm\tilde{\vartheta}\zeta)\, dt\\ &-\int_0^T (\pi_\varepsilon, div(\pm\tilde{\vartheta}))\zeta\, dt + \int_0^T \Big(j(t,\overline{v}_\varepsilon\pm\tilde{\vartheta}\zeta) - j(t,\overline{v}_\varepsilon)\Big)\, dt\\ &\geq\; \int_0^T (\overline{f}, \pm\tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\zeta\, dt.\end{aligned} \tag{4.194}$$

De la première inégalité on obtient

$$\begin{aligned}&\Big\langle\frac{\partial}{\partial t}(\overline{v}_\varepsilon, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \zeta\Big\rangle_{\mathcal{D}'(0,T),\mathcal{D}(0,T)} \geq\; \int_0^T (\overline{f}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\zeta\, dt - \int_0^T a_\varepsilon(\theta;\overline{v}_\varepsilon, \tilde{\vartheta}\zeta)\, dt\\ &+\int_0^T (\pi_\varepsilon, div(\tilde{\vartheta}))\zeta\, dt + \int_0^T \Big(j(t,\overline{v}_\varepsilon) - j(t,\overline{v}_\varepsilon+\tilde{\vartheta}\zeta)\Big)\, dt.\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
&\Big| \int_0^T \Big(j(t, \overline{v}_\varepsilon) - j(t, \overline{v}_\varepsilon + \tilde{\vartheta}\zeta)\, dt \Big) \Big| \\
&= \Big| \int_0^T \int_\omega k(|\overline{v}_\varepsilon - \tilde{s}| - |\overline{v}_\varepsilon + \tilde{\vartheta}\zeta - \tilde{s}|)\, dx'\, dt \Big| \\
&\leq \int_0^T \int_\omega |k||\tilde{\vartheta}\zeta|\, dx'\, dt,
\end{aligned}$$

en utilisant les inégalités de Hölder en espace et en temps, on trouve

$$\Big| \int_0^T \Big(j(t, \overline{v}_\varepsilon) - j(t, \overline{v}_\varepsilon + \tilde{\vartheta}\zeta)\, dt \Big) \Big| \leq \|k\|_{L^{p'}(0,T;L^{p'}(\omega))} \|\tilde{\vartheta}\zeta\|_{L^p(0,T;\mathbf{L}^p(\omega))}.$$

En utilisant la continuité de l'application trace de $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ dans $\mathbf{L}^p(\partial\Omega)$ on obtient

$$\Big| \int_0^T \Big(j(t, \overline{v}_\varepsilon) - j(t, \overline{v}_\varepsilon + \tilde{\vartheta}\zeta)\, dt \Big) \Big| \leq \gamma \|k\|_{L^{p'}(0,T;L^{p'}(\omega))} \|\tilde{\vartheta}\zeta\|_{L^p(0,T;V_0^p)} \quad (4.195)$$

et comme (4.191), (4.192) sont encore vraies pour $\tilde{\vartheta} \in V_0^2$, donc

$$\begin{aligned}
-\int_0^T (\overline{v}_\varepsilon, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta'\, dt \;&\geq -\rho_* \|\overline{f}\|_{L^{p'}(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))} \|\tilde{\vartheta}\zeta\|_{L^p(0,T;V_0^p)} - \hat{\mathbf{C}} \|\tilde{\vartheta}\zeta\|_{L^p(0,T;V_0^p)} \\
&\quad - \sqrt{\varepsilon}\mathbf{C} \|\tilde{\vartheta}\zeta\|_{L^2(0,T;V_0^2)} + \int_0^T (\pi_\varepsilon, div(\tilde{\vartheta}))\zeta\, dt \\
&\quad - \gamma \|k\|_{L^{p'}(0,T;L^{p'}(\omega))} \|\tilde{\vartheta}\zeta\|_{L^p(0,T;V_0^p)}.
\end{aligned}$$

En passant à la limite quand $\varepsilon \to 0$ avec (4.178), (4.182) on obtient

$$-\int_0^T (\overline{v}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta'\, dt \;\geq -C_{22} \|\tilde{\vartheta}\zeta\|_{L^p(0,T;V_0^p)} + \int_0^T (\hat{\pi}, div(\tilde{\vartheta}))\zeta\, dt, \quad (4.196)$$

où

$$C_{22} = \rho_* \|\overline{f}\|_{L^{p'}(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))} + \hat{\mathbf{C}} + \gamma \|k\|_{L^{p'}(0,T;L^{p'}(\omega))}.$$

D'autre part, on a

$$\Big| \int_0^T (\hat{\pi}, div(\tilde{\vartheta}))\zeta\, dt \Big| \leq \|\hat{\pi}\|_{H^{-1}(0,T;L^{p'}(\Omega))} \|div(\tilde{\vartheta})\zeta\|_{H_0^1(0,T;L^p(\Omega))}. \quad (4.197)$$

Donc, (4.196) devient

$$\begin{aligned}
\int_0^T (\overline{v}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta'\, dt \;&\leq C_{22} \|\tilde{\vartheta}\zeta\|_{L^p(0,T;V_0^p)} \\
&\quad + \|\hat{\pi}\|_{H^{-1}(0,T;L^{p'}(\Omega))} \|div(\tilde{\vartheta})\zeta\|_{H_0^1(0,T;L^p(\Omega))}.
\end{aligned} \quad (4.198)$$

Avec la deuxième inégalité de l'inéquation (4.194) on obtient

$$
\begin{aligned}
&-\Big\langle \frac{\partial}{\partial t}(\overline{v}_\varepsilon, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \zeta \Big\rangle_{\mathcal{D}'(0,T),\mathcal{D}(0,T)} \geq \ -\int_0^T (\overline{f}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta \, dt \\
&+\int_0^T a_\varepsilon(\theta; \overline{v}_\varepsilon, \tilde{\vartheta}\zeta)\, dt - \int_0^T (\pi_\varepsilon, div(\tilde{\vartheta}))\zeta \, dt \\
&+\int_0^T \Big(j(t, \overline{v}_\varepsilon) - j(t, \overline{v}_\varepsilon - \tilde{\vartheta}\zeta) \Big)\, dt.
\end{aligned}
$$

Avec (4.191), (4.192) et (4.195) on obtient

$$
\begin{aligned}
\int_0^T (\overline{v}_\varepsilon, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta' \, dt \ &\geq -\rho_* \|\overline{f}\|_{L^{p'}(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))} \|\tilde{\vartheta}\zeta\|_{L^p(0,T;V_0^p)} - \hat{\mathbf{C}} \|\tilde{\vartheta}\zeta\|_{L^p(0,T;V_0^p)} \\
&\quad -\sqrt{\varepsilon}\mathbf{C} \|\tilde{\vartheta}\zeta\|_{L^2(0,T;V_0^2)} - \int_0^T (\pi_\varepsilon, div(\tilde{\vartheta}))\zeta \, dt \\
&\quad -\gamma \|k\|_{L^{p'}(0,T;L^{p'}(\omega))} \|\tilde{\vartheta}\zeta\|_{L^p(0,T;V_0^p)}.
\end{aligned}
$$

En passant à la limite quand $\varepsilon \to 0$ avec (4.178), (4.182) on obtient

$$
\int_0^T (\overline{v}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta' \, dt \ \geq -C_{22} \|\tilde{\vartheta}\zeta\|_{L^p(0,T;V_0^p)} - \int_0^T (\hat{\pi}, div(\tilde{\vartheta}))\zeta \, dt.
$$

Avec (4.197) on obtient

$$
\begin{aligned}
\int_0^T (\overline{v}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta' \, dt \ &\geq -\Big(C_{22} \|\tilde{\vartheta}\zeta\|_{L^p(0,T;V_0^p)} \\
&\quad + \|\hat{\pi}\|_{H^{-1}(0,T;L^{p'}(\Omega))} \|div(\tilde{\vartheta})\zeta\|_{H_0^1(0,T;L^p(\Omega))} \Big).
\end{aligned} \tag{4.199}
$$

Avec (4.198), (4.199) on obtient pour tout $\tilde{\vartheta} \in V_0^2, \quad \zeta \in \mathcal{D}(0,T)$

$$
\begin{aligned}
\Big| \int_0^T (\overline{v}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta' \, dt \Big| \ &\leq C_{22} \|\tilde{\vartheta}\zeta\|_{L^p(0,T;V_0^p)} \\
&\quad + \|\hat{\pi}\|_{H^{-1}(0,T;L^{p'}(\Omega))} \|div(\tilde{\vartheta})\zeta\|_{H_0^1(0,T;L^p(\Omega))}.
\end{aligned} \tag{4.200}
$$

Maintenant, montrons que

$$
\|div(\tilde{\vartheta})\|_{L^p(\Omega)} \leq (3)^{\frac{1}{p'}} \|\nabla \tilde{\vartheta}\|_{L^p(\Omega)} = (3)^{\frac{1}{p'}} \|\tilde{\vartheta}\|_{1.p}. \tag{4.201}
$$

En effet, on a

$$
\begin{aligned}
\|div(\tilde{\vartheta})\|^p_{L^p(\Omega)} \ &= \ \int_\Omega |div(\tilde{\vartheta})|^p \, dx \\
&= \ \int_\Omega \Big| \sum_{i=1}^3 \partial_i \tilde{\vartheta}_i \Big|^p \, dx.
\end{aligned}
$$

En utilisant l'inégalité de Hölder on obtient

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{i=1}^{3}(1)\partial_i\tilde{\vartheta}_i\Big| &\leq \Big(\sum_{i=1}^{3}(1)^{p'}\Big)^{\frac{1}{p'}}\Big(\sum_{i=1}^{3}|\partial_i\tilde{\vartheta}_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq 3^{\frac{1}{p'}}\Big(\sum_{i,j=1}^{3}|\partial_j\tilde{\vartheta}_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}} = 3^{\frac{1}{p'}}|\nabla\tilde{\vartheta}|.\end{aligned}$$

Donc,

$$\|div(\tilde{\vartheta})\|^p_{L^p(\Omega)} \leq 3^{\frac{p}{p'}}\int_\Omega|\nabla\tilde{\vartheta}|^p\,dx = 3^{\frac{p}{p'}}\|\nabla\tilde{\vartheta}\|^p_{L^p(\Omega)},$$

d'où (4.201). Alors (4.197) devient

$$\Big|\int_0^T(\hat{\pi},div(\tilde{\vartheta}))\zeta\,dt\Big| \leq 3^{\frac{1}{p'}}\|\hat{\pi}\|_{H^{-1}(0,T;L^{p'}(\Omega))}\|\tilde{\vartheta}\zeta\|_{H^1_0(0,T;V_0^p)}. \tag{4.202}$$

En remplaçant dans (4.200) on obtient

$$\begin{aligned}&\Big|\int_0^T(\overline{v},\tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\zeta'\,dt\Big|\\ &\leq C_{22}\|\tilde{\vartheta}\zeta\|_{L^p(0,T;V_0^p)} + 3^{\frac{1}{p'}}\|\hat{\pi}\|_{H^{-1}(0,T;L^{p'}(\Omega))}\|\tilde{\vartheta}\zeta\|_{H^1_0(0,T;V_0^p)}\\ &\leq C_{22}T^{\frac{2-p}{2p}}\|\tilde{\vartheta}\zeta\|_{L^2(0,T;V_0^p)} + 3^{\frac{1}{p'}}\|\hat{\pi}\|_{H^{-1}(0,T;L^{p'}(\Omega))}\|\tilde{\vartheta}\zeta\|_{H^1_0(0,T;V_0^p)}.\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré en temps on obtient

$$\begin{aligned}&\Big|\int_0^T(\overline{v},\tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\zeta'\,dt\Big| \leq C_{33}\|\tilde{\vartheta}\zeta\|_{H^1_0(0,T;V_0^p)},\\ &\forall\tilde{\vartheta}\in V_0^2,\ \forall\zeta\in\mathcal{D}(0,T),\end{aligned} \tag{4.203}$$

où

$$C_{33} = (C_{22}T^{\frac{2-p}{2p}}c_{Pt} + 3^{\frac{1}{p'}}\|\pi\|_{H^{-1}(0,T;L^{p'}(\Omega))}),$$

avec c_{Pt} désigne la constante de Poincaré.
D'autre part, montrons que V_0^2 est dense dans V_0^p. En effet, rappelons que

$$V_0^p = \{\varphi\in\mathbf{W}^{1,p}(\Omega);\quad \varphi = 0\quad\text{sur}\quad\Gamma_1\cup\Gamma_L\quad\text{et}\quad\varphi\cdot n = 0\quad\text{sur}\quad\omega\},$$

où $n = -e_3$ sur ω. Pour $\varphi = (\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)\in V_0^p$ on obtient $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ sur $\Gamma_1\cup\Gamma_L$ et $\varphi_3 = 0$ sur $\partial\Omega$ donc $\varphi = (\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)\in(W^{1,p}_{\Gamma_1\cup\Gamma_L}(\Omega))^2\otimes W_0^{1,p}(\Omega)$ avec

$$W^{1,p}_{\Gamma_1\cup\Gamma_L}(\Omega) = \{w\in W^{1,p}(\Omega);\quad w = 0\quad\text{sur}\quad\Gamma_1\cup\Gamma_L\}.$$

On définit

$$W = \{w \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}); \quad w = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \cup \Gamma_L\}.$$

Montrons que $W^2 \otimes \mathcal{D}(\Omega)$ dense dans V_0^p. En effet, on a $\mathcal{D}(\Omega)$ dense dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et W^2 dense dans $(W^{1,p}_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega))^2$ (voir chapitre 5). On obtient donc $W^2 \otimes \mathcal{D}(\Omega)$ dense dans V_0^p et comme on a

$$W^2 \otimes \mathcal{D}(\Omega) \subset V_0^2 \subset V_0^p,$$

on en déduit que V_0^2 est dense dans V_0^p. Donc, (4.203) devient

$$\begin{aligned} \Big| \int_0^T (\overline{v}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta' \, dt \Big| \quad & \leq C_{33} \|\tilde{\vartheta}\zeta\|_{H_0^1(0,T;V_0^p)}, \\ & \forall \tilde{\vartheta} \in V_0^p, \, \forall \zeta \in \mathcal{D}(0,T). \end{aligned} \tag{4.204}$$

Avec la densité de $\mathcal{D}(0,T) \otimes V_0^p$ dans $H^1(0,T;V_0^p)$, on en déduit que $\overline{v}' \in H^{-1}(0,T;(V_0^p)')$.
De plus, par densité de V_0^2 dans V_0^p (4.200) devient

$$\begin{aligned} \Big| \int_0^T (\overline{v}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta' \, dt \Big| \quad & \leq C_{22} \|\tilde{\vartheta}\zeta\|_{L^p(0,T;V_0^p)} \\ & + \|\hat{\pi}\|_{H^{-1}(0,T;L^{p'}(\Omega))} \|div(\tilde{\vartheta})\zeta\|_{H_0^1(0,T;L^p(\Omega))} \\ & \forall \tilde{\vartheta} \in V_0^p, \, \forall \zeta \in \mathcal{D}(0,T). \end{aligned} \tag{4.205}$$

On suppose que $div(\tilde{\vartheta}) = 0$ on obtient

$$\begin{aligned} \Big| \int_0^T (\overline{v}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta' \, dt \Big| & \leq C_{22} \|\tilde{\vartheta}\zeta\|_{L^p(0,T;V^p_{0.div})} \\ \forall \tilde{\vartheta} \in V^p_{0.div} \quad & \forall \zeta \in \mathcal{D}(0,T). \end{aligned} \tag{4.206}$$

Avec la densité de $\mathcal{D}(0,T) \otimes V^p_{0.div}$ dans $L^p(0,T;V^p_{0.div})$, on en déduit que $\overline{v}' \in L^{p'}(0,T;(V^p_{0.div})')$. □

Théorème 4.7 *Sous les hypothèses du lemme* 4.7, *il existe* $\overline{v} \in C([0,T]; \mathbf{L}^2(\Omega)) \cap L^p(0,T;V^p_{0.div})$ *avec* $\overline{v}' \in L^{p'}(0,T;(V^p_{0.div})')$ *solution de l'inéquation variationnelle suivante*

$$\begin{aligned} & [\overline{v}', \overline{\varphi} - \overline{v}] + [\mathcal{A}\overline{v}, \overline{\varphi} - \overline{v}] + J(\overline{\varphi}) - J(\overline{v}) \geq \ [\overline{f}, \overline{\varphi} - \overline{v}], \\ & \forall \overline{\varphi} \in L^2(0,T;V^2_{0.div}), \end{aligned} \tag{4.207}$$

avec $\overline{v}(0) = 0$.

Preuve. Soit $\overline{\varphi} \in L^2(0,T;V^2_{0.div})$, comme on a $\overline{f} \in L^{p'}(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)) \subset L^{p'}(0,T;(V^p_{0.div})')$ et $\overline{\varphi}-\overline{\upsilon}_\varepsilon \in L^2(0,T;V^2_{0.div}) \subset L^p(0,T;V^p_{0.div})$ on peut écrire

$$\begin{aligned}[[\overline{f},\overline{\varphi}-\overline{\upsilon}_\varepsilon]] &= \int_0^T (\overline{f},\overline{\varphi}-\overline{\upsilon}_\varepsilon)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,dt \\ &= \int_0^T <\overline{f},\overline{\varphi}-\overline{\upsilon}_\varepsilon>_{(V^p_{0.div})',V^p_{0.div}}\,dt,\end{aligned}$$

d'où

$$[[\overline{f},\overline{\varphi}-\overline{\upsilon}_\varepsilon]] = [\overline{f},\overline{\varphi}-\overline{\upsilon}_\varepsilon], \tag{4.208}$$

rappelons que $[.,.]$ désigne le crochet de dualité entre $L^p(0,T;V^p_{0.div})$ et $L^{p'}(0,T;(V^p_{0.div})')$.
Avec (4.139) on obtient

$$\begin{aligned}&\int_0^T <\overline{\upsilon}'_\varepsilon,\overline{\varphi}-\overline{\upsilon}_\varepsilon>_{(V^2_{0.div})',V^2_{0.div}} +[\mathcal{A}\overline{\upsilon}_\varepsilon,\overline{\varphi}-\overline{\upsilon}_\varepsilon] \\ &+2\varepsilon\int_0^T\int_\Omega D(\overline{\upsilon}_\varepsilon+\upsilon_0\xi):D(\overline{\varphi}-\overline{\upsilon}_\varepsilon)\,dx\,dt + J(\overline{\varphi})-J(\overline{\upsilon}_\varepsilon) \geq [\overline{f},\overline{\varphi}-\overline{\upsilon}_\varepsilon],\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}&[\mathcal{A}\overline{\upsilon}_\varepsilon,\overline{\upsilon}_\varepsilon-\overline{\upsilon}] \leq \int_0^T <\overline{\upsilon}'_\varepsilon,\overline{\varphi}-\overline{\upsilon}_\varepsilon>_{(V^2_{0.div})',V^2_{0.div}} +[\mathcal{A}\overline{\upsilon}_\varepsilon,\overline{\varphi}-\overline{\upsilon}] \\ &+2\varepsilon\int_0^T\int_\Omega D(\overline{\upsilon}_\varepsilon+\upsilon_0\xi):D(\overline{\varphi}-\overline{\upsilon}_\varepsilon)\,dx\,dt + J(\overline{\varphi})-J(\overline{\upsilon}_\varepsilon)-[\overline{f},\overline{\varphi}-\overline{\upsilon}_\varepsilon] \\ &\leq \int_0^T <\overline{\upsilon}'_\varepsilon,\overline{\varphi}-\overline{\upsilon}_\varepsilon>_{(V^2_{0.div})',V^2_{0.div}} +[\mathcal{A}\overline{\upsilon}_\varepsilon,\overline{\varphi}-\overline{\upsilon}] - 2\varepsilon\int_0^T\int_\Omega |D(\overline{\upsilon}_\varepsilon)|^2\,dx\,dt \\ &+2\varepsilon\int_0^T\int_\Omega D(\upsilon_0\xi):D(\overline{\varphi})\,dx\,dt - 2\sqrt{\varepsilon}\int_0^T\int_\Omega D(\upsilon_0\xi):\sqrt{\varepsilon}D(\overline{\upsilon}_\varepsilon)\,dx\,dt \\ &+2\sqrt{\varepsilon}\int_0^T\int_\Omega \sqrt{\varepsilon}D(\overline{\upsilon}_\varepsilon):D(\overline{\varphi})\,dx\,dt + J(\overline{\varphi})-J(\overline{\upsilon}_\varepsilon)-[\overline{f},\overline{\varphi}-\overline{\upsilon}_\varepsilon],\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}&[\mathcal{A}\overline{\upsilon}_\varepsilon,\overline{\upsilon}_\varepsilon-\overline{\upsilon}] \leq \int_0^T <\overline{\upsilon}'_\varepsilon,\overline{\varphi}-\overline{\upsilon}_\varepsilon>_{(V^2_{0.div})',V^2_{0.div}} +[\mathcal{A}\overline{\upsilon}_\varepsilon,\overline{\varphi}-\overline{\upsilon}] \\ &+2\varepsilon\int_0^T\int_\Omega D(\upsilon_0\xi):D(\overline{\varphi})\,dx\,dt - 2\sqrt{\varepsilon}\int_0^T\int_\Omega D(\upsilon_0\xi):\sqrt{\varepsilon}D(\overline{\upsilon}_\varepsilon)\,dx\,dt \\ &+2\sqrt{\varepsilon}\int_0^T\int_\Omega \sqrt{\varepsilon}D(\overline{\upsilon}_\varepsilon):D(\overline{\varphi})\,dx\,dt + J(\overline{\varphi})-J(\overline{\upsilon}_\varepsilon)-[\overline{f},\overline{\varphi}-\overline{\upsilon}_\varepsilon].\end{aligned}$$

On prend $\overline{\varphi} = \hat{\psi}\zeta$ avec $\hat{\psi} \in V^2_{0.div}$ et $\zeta \in \mathcal{D}(0,T)$ on obtient

$$\begin{aligned}
&\limsup_{\varepsilon\to 0}[\mathcal{A}\overline{\upsilon}_\varepsilon, \overline{\upsilon}_\varepsilon - \overline{\upsilon}] \leq \limsup_{\varepsilon\to 0}\Big(- \int_0^T (\overline{\upsilon}_\varepsilon, \hat{\psi})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\zeta'\,dt - \frac{1}{2}\|\overline{\upsilon}_\varepsilon(T)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\
&+[\mathcal{A}\overline{\upsilon}_\varepsilon, \hat{\psi}\zeta - \overline{\upsilon}] + 2\varepsilon\int_0^T\int_\Omega D(\upsilon_0\xi) : D(\hat{\psi}\zeta)\,dx\,dt \\
&-2\sqrt{\varepsilon}\int_0^T\int_\Omega D(\upsilon_0\xi) : \sqrt{\varepsilon}D(\overline{\upsilon}_\varepsilon)\,dx\,dt \\
&+2\sqrt{\varepsilon}\int_0^T\int_\Omega \sqrt{\varepsilon}D(\overline{\upsilon}_\varepsilon) : D(\hat{\psi}\zeta)\,dx\,dt + J(\hat{\psi}\zeta) - J(\overline{\upsilon}_\varepsilon) - [\overline{f}, \hat{\psi}\zeta - \overline{\upsilon}_\varepsilon]\Big),
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
&\limsup_{\varepsilon\to 0}[\mathcal{A}\overline{\upsilon}_\varepsilon, \overline{\upsilon}_\varepsilon - \overline{\upsilon}] \leq -\liminf_{\varepsilon\to 0}\int_0^T (\overline{\upsilon}_\varepsilon, \hat{\psi})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\zeta'\,dt - \frac{1}{2}\liminf_{\varepsilon\to 0}\|\overline{\upsilon}_\varepsilon(T)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\
&+\limsup_{\varepsilon\to 0}[\mathcal{A}\overline{\upsilon}_\varepsilon, \hat{\psi}\zeta - \overline{\upsilon}] + 2\limsup_{\varepsilon\to 0}\Big(\varepsilon\int_0^T\int_\Omega D(\upsilon_0\xi) : D(\hat{\psi}\zeta)\,dx\,dt\Big) \\
&-2\liminf_{\varepsilon\to 0}\Big(\sqrt{\varepsilon}\int_0^T\int_\Omega D(\upsilon_0\xi) : \sqrt{\varepsilon}D(\overline{\upsilon}_\varepsilon)\,dx\,dt\Big) \\
&+2\limsup_{\varepsilon\to 0}\Big(\sqrt{\varepsilon}\int_0^T\int_\Omega \sqrt{\varepsilon}D(\overline{\upsilon}_\varepsilon) : D(\hat{\psi}\zeta)\,dx\,dt\Big) + J(\hat{\psi}\zeta) - \liminf_{\varepsilon\to 0} J(\overline{\upsilon}_\varepsilon) \\
&-\liminf_{\varepsilon\to 0}[\overline{f}, \hat{\psi}\zeta - \overline{\upsilon}_\varepsilon].
\end{aligned}$$

Comme l'opérateur $\mathcal{A}$ est borné et $(\overline{\upsilon}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $L^p(0,T;V^p_{0.div})$ on a

$$\mathcal{A}\overline{\upsilon}_\varepsilon \rightharpoonup \chi \quad \text{faiblement dans} \quad L^{p'}(0,T;(V^p_{0.div})'). \tag{4.209}$$

D'autre part, comme dans (4.67) on a

$$|J(\overline{\upsilon}_\varepsilon) - J(\overline{\upsilon})| \leq \|k\|_{L^{p'}(0,T;L^{p'}(\omega))}\|\overline{\upsilon}_\varepsilon - \overline{\upsilon}\|_{L^p(0,T;\mathbf{L}^p(\omega))},$$

en passant à la limite quand $\varepsilon \to 0$ en utilisant (4.180) on obtient

$$J(\overline{\upsilon}_\varepsilon) \to J(\overline{\upsilon}). \tag{4.210}$$

En utilisant l'estimation (4.150) et les convergences (4.177), (4.178), (4.209) et (4.210) on obtient

$$\begin{aligned}
&\limsup_{\varepsilon\to 0}[\mathcal{A}\overline{\upsilon}_\varepsilon, \overline{\upsilon}_\varepsilon - \overline{\upsilon}] \leq -\int_0^T (\overline{\upsilon}, \hat{\psi})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\zeta'\,dt - \frac{1}{2}\liminf_{\varepsilon\to 0}\|\overline{\upsilon}_\varepsilon(T)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\
&+[\chi, \hat{\psi}\zeta - \overline{\upsilon}] + J(\hat{\psi}\zeta) - J(\overline{\upsilon}) - [\overline{f}, \hat{\psi}\zeta - \overline{\upsilon}], \quad \forall\hat{\psi} \in V^2_{0.div}, \quad \forall\zeta \in \mathcal{D}(0,T).
\end{aligned}$$

Par densité de $\mathcal{D}(0,T)\otimes V^2_{0.div}$ dans $L^2(0,T;V^2_{0.div})$ on obtient

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}[\mathcal{A}\overline{v}_\varepsilon,\overline{v}_\varepsilon-\overline{v}]\leq\int_0^T<\overline{v}',\overline{\varphi}>_{(V^2_{0.div})',V^2_{0.div}}\ dt-\frac{1}{2}\liminf_{\varepsilon\to 0}\|\overline{v}_\varepsilon(T)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$$
$$+[\chi,\overline{\varphi}-\overline{v}]+J(\overline{\varphi})-J(\overline{v})-[\overline{f},\overline{\varphi}-\overline{v}],\quad\forall\overline{\varphi}\in L^2(0,T;V^2_{0.div}).$$

Avec le lemme 4.7 on a $\overline{v}'\in L^{p'}(0,T;(V^p_{0.div})')$ et comme $L^2(0,T;V^2_{0.div})\subset L^p(0,T;V^p_{0.div})$ donc

$$\int_0^T<\overline{v}',\overline{\varphi}>_{(V^2_{0.div})',V^2_{0.div}}\ dt\ =\ \int_0^T<\overline{v}',\overline{\varphi}>_{(V^p_{0.div})',V^p_{0.div}}\ dt,$$

d'où

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}[\mathcal{A}\overline{v}_\varepsilon,\overline{v}_\varepsilon-\overline{v}]\leq\int_0^T<\overline{v}',\overline{\varphi}>_{(V^p_{0.div})',V^p_{0.div}}\ dt-\frac{1}{2}\liminf_{\varepsilon\to 0}\|\overline{v}_\varepsilon(T)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$$
$$+[\chi,\overline{\varphi}-\overline{v}]+J(\overline{\varphi})-J(\overline{v})-[\overline{f},\overline{\varphi}-\overline{v}],\quad\forall\overline{\varphi}\in L^2(0,T;V^2_{0.div}).$$

On prend $\overline{\varphi}=\overline{v}_\varepsilon\in L^2(0,T;V^2_{0.div})$ et en utilisant les convergences (4.177) et (4.210) on obtient

$$\begin{aligned}\limsup_{\varepsilon\to 0}[\mathcal{A}\overline{v}_\varepsilon,\overline{v}_\varepsilon-\overline{v}]\ &\leq\int_0^T<\overline{v}',\overline{v}>_{(V^p_{0.div})',V^p_{0.div}}\ dt\\ &\quad-\frac{1}{2}\liminf_{\varepsilon\to 0}\|\overline{v}_\varepsilon(T)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)},\end{aligned}\tag{4.211}$$

avec (4.24), (4.190) on a

$$\int_0^T<\overline{v}',\overline{v}>_{(V^p_{0.div})',V^p_{0.div}}\ dt=\frac{1}{2}\|\overline{v}(T)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}-\frac{1}{2}\|\underbrace{\overline{v}(0)}_{=0}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)},\tag{4.212}$$

et comme $\overline{v}_\varepsilon(T)\rightharpoonup\overline{v}(T)$ faiblement dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ on a

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\|\overline{v}_\varepsilon(T)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\geq\|\overline{v}(T)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}.\tag{4.213}$$

Donc, de (4.211), (4.212) et (4.213) on obtient

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}[\mathcal{A}\overline{v}_\varepsilon,\overline{v}_\varepsilon-\overline{v}]\leq 0.$$

Comme $\mathcal{A}$ est pseudo-monotone on obtient

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}[\mathcal{A}\overline{\upsilon}_\varepsilon, \overline{\upsilon}_\varepsilon - \overline{\varphi}] \geq [\mathcal{A}\overline{\upsilon}, \overline{\upsilon} - \overline{\varphi}], \quad \forall \overline{\varphi} \in L^p(0,T; V^p_{0.div}). \tag{4.214}$$

Mais d'après (4.139) on a pour tout $\overline{\varphi} \in L^2(0,T; V^2_{0.div})$

$$\begin{aligned}
[\mathcal{A}\overline{\upsilon}, \overline{\upsilon} - \overline{\varphi}] &\leq \liminf_{\varepsilon\to 0}[\mathcal{A}\overline{\upsilon}_\varepsilon, \overline{\upsilon}_\varepsilon - \overline{\varphi}] \\
&\leq \limsup_{\varepsilon\to 0}[\mathcal{A}\overline{\upsilon}_\varepsilon, \overline{\upsilon}_\varepsilon - \overline{\varphi}] \\
&\leq \limsup_{\varepsilon\to 0}\Big(-\frac{1}{2}\|\overline{\upsilon}_\varepsilon(T)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + [[\overline{\upsilon}'_\varepsilon, \overline{\varphi}]] \\
&+ 2\varepsilon\int_0^T\int_\Omega D(\upsilon_0\xi) : D(\overline{\varphi})\,dx\,dt \\
&- 2\sqrt{\varepsilon}\int_0^T\int_\Omega D(\upsilon_0\xi) : \sqrt{\varepsilon}D(\overline{\upsilon}_\varepsilon)\,dx\,dt \\
&+ 2\sqrt{\varepsilon}\int_0^T\int_\Omega \sqrt{\varepsilon}D(\overline{\upsilon}_\varepsilon) : D(\overline{\varphi})\,dx\,dt \\
&+ J(\overline{\varphi}) - J(\overline{\upsilon}_\varepsilon) - [\overline{f}, \overline{\varphi} - \overline{\upsilon}_\varepsilon]\Big),
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
[\mathcal{A}\overline{\upsilon}, \overline{\upsilon} - \overline{\varphi}] &\leq -\frac{1}{2}\liminf_{\varepsilon\to 0}\|\overline{\upsilon}_\varepsilon(T)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \limsup_{\varepsilon\to 0}[[\overline{\upsilon}'_\varepsilon, \overline{\varphi}]] \\
&+ 2\limsup_{\varepsilon\to 0}\Big(\varepsilon\int_0^T\int_\Omega D(\upsilon_0\xi) : D(\overline{\varphi})\,dx\,dt\Big) \\
&- 2\liminf_{\varepsilon\to 0}\Big(\sqrt{\varepsilon}\int_0^T\int_\Omega D(\upsilon_0\xi) : \sqrt{\varepsilon}D(\overline{\upsilon}_\varepsilon)\,dx\,dt\Big) \\
&+ 2\limsup_{\varepsilon\to 0}\Big(\sqrt{\varepsilon}\int_0^T\int_\Omega \sqrt{\varepsilon}D(\overline{\upsilon}_\varepsilon) : D(\overline{\varphi})\,dx\,dt\Big) \\
&+ J(\overline{\varphi}) - \liminf_{\varepsilon\to 0} J(\overline{\upsilon}_\varepsilon) - \liminf_{\varepsilon\to 0}[\overline{f}, \overline{\varphi} - \overline{\upsilon}_\varepsilon]\,dt.
\end{aligned}$$

En utilisant l'estimation (4.150) et les convergences (4.177), (4.179), (4.210) et (4.213) on obtient

$$\begin{aligned}
[\mathcal{A}\overline{\upsilon}, \overline{\upsilon} - \overline{\varphi}] &\leq -\frac{1}{2}\|\overline{\upsilon}(T)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + [[\overline{\upsilon}', \overline{\varphi}]] + J(\overline{\varphi}) - J(\overline{\upsilon}) \\
&\quad -[\overline{f}, \overline{\varphi} - \overline{\upsilon}] \quad \forall \overline{\varphi} \in L^2(0,T; V^2_{0.div}).
\end{aligned} \tag{4.215}$$

Comme $L^2(0,T;V^2_{0.div}) \subset L^p(0,T;V^p_{0.div})$ et $\overline{v}' \in L^{p'}(0,T;(V^p_{0.div})')$ on obtient

$$\begin{aligned}[[\overline{v}',\overline{\varphi}]] &= \int_0^T < \overline{v}',\overline{\varphi} >_{(V^2_{0.div})',V^2_{0.div}} \, dt \\ &= \int_0^T < \overline{v}',\overline{\varphi} >_{(V^p_{0.div})',V^p_{0.div}} \, dt,\end{aligned} \tag{4.216}$$

avec (4.212) on obtient

$$\begin{aligned}[[\overline{v}',\overline{\varphi}]] &= \int_0^T < \overline{v}',\overline{\varphi}-\overline{v} >_{(V^p_{0.div})',V^p_{0.div}} \, dt \\ &+ \int_0^T < \overline{v}',\overline{v} >_{(V^p_{0.div})',V^p_{0.div}} \, dt \\ &= [\overline{v}',\overline{\varphi}-\overline{v}] + \frac{1}{2}\|\overline{v}(T)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)},\end{aligned}$$

En remplaçant dans l'inéquation (4.215) on obtient (4.207).

□

4.4.4 Résultats d'existence pour le problème 4.3

Recherche de la pression

Théorème 4.8 *Sous les hypothèses du lemme* 4.7*, il existe* $\overline{v} \in C([0,T];\mathbf{L}^2(\Omega)) \cap L^p(0,T;V^p_{0.div})$ *avec* $\overline{v}' \in L^{p'}(0,T;(V^p_{0.div})')$ *et* $\pi \in H^{-1}(0,T;L^{p'}_0(\Omega))$ *solution du problème* 4.3*.*

Preuve. En prenant $\overline{\varphi} = \overline{v}_\varepsilon \pm \vartheta \in L^2(0,T;V^2_{0.div})$ pour ϑ variant dans $L^2(0,T;H^1_{0.div})$ dans (4.207) on obtient $J(\overline{v}_\varepsilon \pm \vartheta) = J(\overline{v}_\varepsilon)$ et

$$[\overline{v}',(\overline{v}_\varepsilon-\overline{v})\pm\vartheta] + [\mathcal{A}\overline{v},(\overline{v}_\varepsilon-\overline{v})\pm\vartheta] + J(\overline{v}_\varepsilon) - J(\overline{v}) \geq [\overline{f},(\overline{v}_\varepsilon-\overline{v})\pm\vartheta].$$

En passant à la limite quand $\varepsilon \to 0$, en utilisant les convergences (4.177), (4.210) on obtient l'équation variationelle suivante

$$\begin{aligned}&\int_0^T < \overline{v}',\vartheta >_{(V^p_{0.div})',V^p_{0.div}} \, dt + \int_0^T a(\theta;\overline{v},\vartheta)\,dt \\ &= \int_0^T < \overline{f},\vartheta >_{(V^p_{0.div})',V^p_{0.div}} \, dt.\end{aligned} \tag{4.217}$$

Soit $\tilde{\vartheta} \in H^1_{0.div}$ indépendante du temps, et soit $t \in [0,T]$. On définit

$$\vartheta = \begin{cases} \tilde{\vartheta} & \text{sur} \quad [0,t], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc, (4.217) devient

$$\int_0^t < \overline{v}', \tilde{\vartheta} >_{(V^p_{0.div})',V^p_{0.div}} \, d\mathbf{s} + \int_0^t a(\theta;\overline{v},\tilde{\vartheta})\, d\mathbf{s} = \int_0^t < \overline{f}, \tilde{\vartheta} >_{(V^p_{0.div})',V^p_{0.div}} \, d\mathbf{s},$$

c-à-d,

$$(\overline{v}(t),\tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \int_0^t a(\theta;\overline{v},\tilde{\vartheta})\, d\mathbf{s} =< \int_0^t \overline{f}\, d\mathbf{s}, \tilde{\vartheta} >_{(V^p_{0.div})',V^p_{0.div}}, \quad \forall \tilde{\vartheta} \in H^1_{0.div}.$$

Par densité de

$$\mathcal{V} = \{\varphi \in \mathbf{D}(\Omega), \quad div(\varphi) = 0\},$$

dans $W^{1,p}_{0.div}$ (voir [3]) on obtient

$$(\overline{v}(t),\tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \int_0^t a(\theta;\overline{v},\tilde{\vartheta})\, d\mathbf{s} =< \int_0^t \overline{f}\, d\mathbf{s}, \tilde{\vartheta} >_{(V^p_{0.div})',V^p_{0.div}}, \quad \forall \tilde{\vartheta} \in W^{1,p}_{0.div}.$$

Donc, d'après (4.40) (car $\frac{6}{5} < p < 2$) on vérifie que les estimations (4.107), (4.114) dans la proposition 4.3 et le lemme 4.4 respectivement deviennent

$$\Big| \int_0^t a(\theta;\overline{v},\tilde{\vartheta})\, d\mathbf{s} \Big| \leq 2\mu_1 (t^{\frac{1}{p}} \|\overline{v}\|^{p-1}_{L^p(0,T;V^p_0)} + c^{p-1} t \|\upsilon_0\|^{p-1}_{1.p}) \|\tilde{\vartheta}\|_{1.p}, \quad (4.218)$$

et

$$\begin{aligned} \Big| \int_0^T a(\theta;\overline{v},\eta)\, dt \Big| \quad &\leq 2\mu_1 (T^{\frac{1}{p}} \|\overline{v}\|^{p-1}_{L^p(0,T;V^p_0)} \\ &\quad + T c^{p-1} \|\upsilon_0\|^{p-1}_{1.p}) \|\eta\|_{L^\infty(0,T;V^p_0)}, \end{aligned} \quad (4.219)$$

rappelons que $\eta = \tilde{\vartheta}\zeta$ avec $\zeta \in \mathcal{D}(0,T)$.
Donc, comme $\overline{f} \in L^{p'}(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)) \subset L^{p'}(0,T;(V^p_0)')$ en utilisant le même raisonnement que dans la proposition 4.3, le lemme 4.4 on obtient l'existence et l'unicité (à une constante près) d'une fonction $\tilde{\pi}(t) \in L^{p'}(\Omega)$ et de plus $\tilde{\pi} \in C([0,T];L^{p'}_0(\Omega))$ vérifiant pour tout $\tilde{\vartheta} \in \mathbf{D}(\Omega)$

$$< \int_0^t \overline{f}\, d\mathbf{s}, \tilde{\vartheta} >_{(V^p_0)',V^p_0} - (\overline{v}(t),\tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - \int_0^t a(\theta;\overline{v},\tilde{\vartheta})\, d\mathbf{s} = -(\tilde{\pi}(t), div(\tilde{\vartheta})).$$

Par la densité de $\mathbf{D}(\Omega)$ dans $\mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega)$ on a aussi pour tout $\tilde{\vartheta} \in \mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega)$

$$< \int_0^t \overline{f}\, d\mathbf{s}, \tilde{\vartheta} >_{(V_0^p)',V_0^p} -(\overline{v}(t), \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - \int_0^t a(\theta; \overline{v}, \tilde{\vartheta})\, d\mathbf{s} = -(\tilde{\pi}(t), div(\tilde{\vartheta})).$$

On dérive l'équation ci-dessus par rapport à t au sens des distributions, donc avec

$$\pi = \frac{\partial \tilde{\pi}}{\partial t},$$

on obtient pour tout $\tilde{\vartheta} \in \mathbf{W}_0^{1,p}(\Omega)$

$$< \overline{f}, \tilde{\vartheta} >_{(V_0^p)',V_0^p} -\frac{\partial}{\partial t}(\overline{v}(t), \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - a(\theta; \overline{v}, \tilde{\vartheta}) = -(\pi, div(\tilde{\vartheta})),$$

et

$$\int_\Omega \pi dx = 0.$$

De plus $\pi \in H^{-1}(0,T; L_0^{p'}(\Omega))$.
D'autre part, comme $\overline{f} \in L^{p'}(0,T; \mathbf{L}^2(\Omega))$ on peut écrire

$$< \overline{f}, \tilde{\vartheta} >_{(V_0^p)',V_0^p} = (\overline{f}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)},$$

donc, on fait les mêmes calculs que pour obtenir (4.122) et on obtient aussi

$$\begin{aligned} &\int_0^T (\overline{f}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta\, dt - \int_0^T \frac{\partial}{\partial t}(\overline{v}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta\, dt \\ &= -\int_0^T < div(\tilde{\sigma}), \tilde{\vartheta} >_{\mathbf{D}'(\Omega),\mathbf{D}(\Omega)} \zeta\, dt, \\ &\forall \tilde{\vartheta} \in \mathbf{D}(\Omega), \quad \forall \zeta \in \mathcal{D}(0,T). \end{aligned} \tag{4.220}$$

Puisque $\frac{6}{5} < p < 2$ montrons que $div(\tilde{\sigma}) \in H^{-1}(0,T; \mathbf{L}^2(\Omega))$. En effet, on a

$$\begin{aligned} &\Big| \int_0^T < div(\tilde{\sigma}), \tilde{\vartheta} >_{\mathbf{D}'(\Omega),\mathbf{D}(\Omega)} \zeta\, dt \Big| \\ &= \Big| \int_0^T (\overline{f}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta\, dt - \int_0^T \frac{\partial}{\partial t}(\overline{v}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta\, dt \Big| \\ &\leq \Big| \int_0^T (\overline{f}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta\, dt \Big| + \Big| \int_0^T \frac{\partial}{\partial t}(\overline{v}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta\, dt \Big|. \end{aligned} \tag{4.221}$$

En utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz en espace et de Hölder en temps on obtient

$$\Big| \int_0^T (\overline{f}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta\, dt \Big| \leq c_\infty\, T^{\frac{1}{p}} \|\overline{f}\|_{L^{p'}(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))} \|\tilde{\vartheta}\zeta\|_{H^1(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}, \tag{4.222}$$

rappelons que c_∞ désigne la constante de l'injection continue de $H^1(0,T)$ dans $L^\infty(0,T)$.
En utilisant les inégalités de Cauchy-Schwarz en espace et en temps on obtient

$$\Big| \int_0^T \frac{\partial}{\partial t}(\overline{v}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta \, dt \Big| \leq \|\overline{v}\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))} \|\tilde{\vartheta}\zeta\|_{H^1(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}. \tag{4.223}$$

En remplaçant (4.222), (4.223) dans (4.221) on obtient

$$\begin{aligned} &\Big| \int_0^T < div(\tilde{\sigma}), \tilde{\vartheta} >_{\mathbf{D}'(\Omega),\mathbf{D}(\Omega)} \zeta \, dt \Big| \\ &\leq (c_\infty T^{\frac{1}{p}} \|\overline{f}\|_{L^{p'}(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))} + \|\overline{v}\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}) \|\tilde{\vartheta}\zeta\|_{H^1(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))}. \end{aligned}$$

Alors, avec la densité de $\mathcal{D}(0,T) \otimes \mathbf{D}(\Omega)$ dans $H_0^1(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$ pour la topologie de $H^1(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$ on obtient $div(\tilde{\sigma}) \in H^{-1}(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$. Comme on a

$$2\mu(\theta, |D(\overline{v} + \upsilon_0\xi)|)|D(\overline{v} + \upsilon_0\xi)|^{p-2} D(\overline{v} + \upsilon_0\xi) \in L^{p'}(0,T;(L^{p'}(\Omega))^9),$$

et $\pi \in H^{-1}(0,T;L_0^{p'}(\Omega))$ donc $\tilde{\sigma}$ donné par (4.15) est dans $H^{-1}(0,T;(L^{p'}(\Omega))^9)$ et puisque $p' > 2$ on obtient $\tilde{\sigma} \in H^{-1}(0,T;(L^2(\Omega))^9)$. Donc $\tilde{\sigma} \in H^{-1}(0,T;\mathcal{Y}^2)$. Ainsi (4.220) devient

$$\begin{aligned} &\int_0^T (\overline{f}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta \, dt - \int_0^T \frac{\partial}{\partial t}(\overline{v}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta \, dt \\ &= -\int_0^T \int_\Omega (div(\tilde{\sigma}) \cdot \tilde{\vartheta}) \zeta \, dx \, dt, \quad \forall \tilde{\vartheta} \in \mathbf{D}(\Omega), \quad \forall \zeta \in \mathcal{D}(0,T). \end{aligned} \tag{4.224}$$

Comme $\mathbf{D}(\Omega)$ est dense dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ c-à-d pour tout $\tilde{\vartheta} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, il existe $\tilde{\vartheta}_n \in \mathbf{D}(\Omega)$ telle que

$$\lim_{n \to +\infty} \tilde{\vartheta}_n = \tilde{\vartheta} \quad \text{dans} \quad \mathbf{L}^2(\Omega), \tag{4.225}$$

en remplaçant $\tilde{\vartheta}$ par $\tilde{\vartheta}_n$ dans (4.224) on obtient

$$\begin{aligned} &\int_0^T (\overline{f}, \tilde{\vartheta}_n)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta \, dt - \int_0^T \frac{\partial}{\partial t}(\overline{v}, \tilde{\vartheta}_n)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta \, dt \\ &= -\int_0^T \int_\Omega (div(\tilde{\sigma}) \cdot \tilde{\vartheta}_n) \zeta \, dx \, dt. \end{aligned} \tag{4.226}$$

De (4.222) on obtient

$$\Big| \int_0^T (\overline{f}, \tilde{\vartheta}_n - \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta \, dt \Big| \quad \leq \quad c_\infty T^{\frac{1}{p}} \|\overline{f}\|_{L^{p'}(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))} \|\zeta\|_{H^1(0,T)} \|\tilde{\vartheta}_n - \tilde{\vartheta}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}.$$

En passant à la limite quand $n \to +\infty$, en utilisant (4.225) on obtient

$$\int_0^T (\overline{f}, \tilde{\vartheta}_n)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta \, dt \to \int_0^T (\overline{f}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta \, dt. \tag{4.227}$$

Avec (4.223) on obtient

$$\Big| \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} (\overline{v}, \tilde{\vartheta}_n - \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta \, dt \Big| \quad \leq \quad \|\overline{v}\|_{L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))} \|\zeta\|_{H^1(0,T)} \|\tilde{\vartheta}_n - \tilde{\vartheta}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)},$$

en passant à la limite quand $n \to +\infty$, en utilisant (4.225) on obtient

$$\int_0^T \frac{\partial}{\partial t} (\overline{v}, \tilde{\vartheta}_n)_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta \, dt \to \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} (\overline{v}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta \, dt. \tag{4.228}$$

On a

$$\begin{aligned} &\Big| \int_0^T \int_\Omega \big(div(\tilde{\sigma}) \cdot (\tilde{\vartheta}_n - \tilde{\vartheta}) \big) \zeta \, dx \, dt \Big| \\ &\leq \|div(\tilde{\sigma})\|_{H^{-1}(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))} \|\zeta\|_{H_0^1(0,T)} \|\tilde{\vartheta}_n - \tilde{\vartheta}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

En passant à la limite quand $n \to +\infty$, en utilisant (4.225) on obtient

$$\int_0^T \int_\Omega (div(\tilde{\sigma}) \cdot \tilde{\vartheta}_n) \zeta \, dx \, dt \to \int_0^T \int_\Omega (div(\tilde{\sigma}) \cdot \tilde{\vartheta}) \zeta \, dx \, dt. \tag{4.229}$$

En passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans (4.226) avec les convergences (4.227), (4.228) et (4.229) on obtient

$$\begin{aligned} &\int_0^T (\overline{f}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta \, dt - \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} (\overline{v}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \zeta \, dt \\ &= - \int_0^T \int_\Omega (div(\tilde{\sigma}) \cdot \tilde{\vartheta}) \zeta \, dx \, dt \quad \forall \tilde{\vartheta} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \quad \forall \zeta \in \mathcal{D}(0,T). \end{aligned} \tag{4.230}$$

Maintenant, en reprenant $\tilde{\vartheta} \in V_0^2$ et comme $\tilde{\sigma} \in H^{-1}(0,T;\mathcal{Y}^2)$, on fait les mêmes calculs que pour obtenir (4.135) et on obtient aussi

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \frac{\partial}{\partial t}(\overline{v},\tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\zeta\,dt + \int_0^T a(\theta;\overline{v},\tilde{\vartheta}\zeta)\,dt - \int_0^T (\pi, div(\tilde{\vartheta}))\zeta\,dt \\
&+ \int_0^T j(t,\overline{v}+\tilde{\vartheta}\zeta)\,dt - \int_0^T j(t,\overline{v})\,dt = \int_0^T (\overline{f},\tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\zeta\,dt \\
&+\hat{A}(\overline{v},\tilde{\vartheta}), \quad \forall\tilde{\vartheta}\in V_0^2, \quad \forall\zeta\in\mathcal{D}(0,T),
\end{aligned} \tag{4.231}$$

avec

$$\hat{A}(\overline{v},\tilde{\vartheta}) = \int_0^T \Big(\int_\omega \tilde{\sigma}_{\tau_i}(\tilde{\vartheta}_i\zeta)\,dx' + j(t,\overline{v}+\tilde{\vartheta}\zeta) - j(t,\overline{v})\Big)\,dt.$$

On a

$$\int_{\partial\Omega} \tilde{\vartheta}\cdot n\,dY = 0, \quad \forall\tilde{\vartheta}\in V_0^2.$$

Du lemme 2.2 [46], on déduit qu'il existe $\hat{\vartheta}\in\mathbf{H}^1(\Omega)$ vérifiant

$$div(\hat{\vartheta}) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \quad \hat{\vartheta} = \tilde{\vartheta} \quad \text{sur} \quad \partial\Omega.$$

Donc, $\hat{\vartheta}\in V_{0.div}^2$ et on a

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \frac{\partial}{\partial t}(\overline{v},\hat{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\zeta\,dt + \int_0^T a(\theta;\overline{v},\hat{\vartheta}\zeta)\,dt \\
&+ \int_0^T \Big(j(t,\overline{v}+\hat{\vartheta}\zeta) - j(t,\overline{v})\Big)\,dt \\
&= \int_0^T (\overline{f},\hat{\vartheta}\zeta)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,dt + \hat{A}(\overline{v},\hat{\vartheta}).
\end{aligned} \tag{4.232}$$

On prend $\overline{\varphi} = \overline{v}_\varepsilon + \hat{\vartheta}\zeta \in L^2(0,T;V_{0.div}^2)$ dans (4.207) on obtient

$$\begin{aligned}
&[\overline{v}', \hat{\vartheta}\zeta + (\overline{v}_\varepsilon - \overline{v})] + [\mathcal{A}\overline{v}, \hat{\vartheta}\zeta + (\overline{v}_\varepsilon - \overline{v})] + J(\overline{v}_\varepsilon + \hat{\vartheta}\zeta) - J(\overline{v}) \\
&\geq\ [\overline{f}, \hat{\vartheta}\zeta + (\overline{v}_\varepsilon - \overline{v})].
\end{aligned} \tag{4.233}$$

D'autre part, comme dans (4.67) on a

$$|J(\overline{v}_\varepsilon + \hat{\vartheta}\zeta) - J(\overline{v} + \hat{\vartheta}\zeta)| \leq \|k\|_{L^{p'}(0,T;L^{p'}(\omega))}\|\overline{v}_\varepsilon - \overline{v}\|_{L^p(0,T;\mathbf{L}^p(\omega))},$$

en passant à la limite quand $\varepsilon\to 0$ en utilisant (4.180) on obtient

$$J(\overline{v}_\varepsilon + \hat{\vartheta}\zeta) \to J(\overline{v} + \hat{\vartheta}\zeta). \tag{4.234}$$

En passant à la limite quand $\varepsilon \to 0$ dans (4.233), en utilisant la convergence ci-dessus et (4.177) on obtient

$$[\overline{\upsilon}', \hat{\vartheta}\zeta] + [\mathcal{A}\overline{\upsilon}, \hat{\vartheta}\zeta] + J(\overline{\upsilon} + \hat{\vartheta}\zeta) - J(\overline{\upsilon}) \geq [\overline{f}, \hat{\vartheta}\zeta],$$

d'où

$$\int_0^T \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\upsilon}, \hat{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\zeta \, dt + \int_0^T a(\theta; \overline{\upsilon}, \hat{\vartheta}\zeta) \, dt + \int_0^T \Big(j(t, \overline{\upsilon} + \hat{\vartheta}\zeta) - j(t, \overline{\upsilon}) \Big) \, dt$$
$$- \int_0^T < \overline{f}, \hat{\vartheta}\zeta >_{(V^p_{0.div})', V^p_{0.div}} \, dt \geq 0.$$

Avec (4.136) et (4.232) on obtient

$$\hat{A}(\overline{\upsilon}, \hat{\vartheta}) \geq 0.$$

Comme $\hat{A}(\overline{\upsilon}, \hat{\vartheta}) = \hat{A}(\overline{\upsilon}, \tilde{\vartheta})$ car $\hat{\vartheta} = \tilde{\vartheta}$ sur $\partial\Omega$ on a

$$\hat{A}(\overline{\upsilon}, \tilde{\vartheta}) \geq 0.$$

Donc (4.231) devient

$$\int_0^T \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\upsilon}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\zeta \, dt + \int_0^T a(\theta; \overline{\upsilon}, \tilde{\vartheta}\zeta) \, dt - \int_0^T (\pi, div(\tilde{\vartheta}\zeta)) \, dt$$
$$+ \int_0^T \Big(j(t, \overline{\upsilon} + \tilde{\vartheta}\zeta) - j(t, \overline{\upsilon}) \Big) \, dt \geq \int_0^T (\overline{f}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\zeta \, dt,$$
$$\forall \tilde{\vartheta} \in V_0^2 \quad \forall \zeta \in \mathcal{D}(0, T).$$

Par densité de V_0^2 dans V_0^p on obtient

$$\int_0^T \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\upsilon}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\zeta \, dt + \int_0^T a(\theta; \overline{\upsilon}, \tilde{\vartheta}\zeta) \, dt - \int_0^T (\pi, div(\tilde{\vartheta}\zeta)) \, dt$$
$$+ \int_0^T \Big(j(t, \overline{\upsilon} + \tilde{\vartheta}\zeta) - j(t, \overline{\upsilon}) \Big) \, dt \geq \int_0^T (\overline{f}, \tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\zeta \, dt, \tag{4.235}$$
$$\forall \tilde{\vartheta} \in V_0^p \quad \forall \zeta \in \mathcal{D}(0, T),$$

de plus

$$\overline{\upsilon}(0) = 0,$$

ce qui montre si $s \in L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\omega))$, $\xi \in W^{1,p'}(0, T) \subset H^1(0, T)$ (car $p' > 2$) et $\upsilon_0 \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ alors le problème 4.3 admet une solution $(\overline{\upsilon}, \pi) \in \big(C([0, T]; \mathbf{L}^2(\Omega)) \cap L^p(0, T; V^p_{0.div})\big) \times H^{-1}(0, T; L^{p'}_0(\Omega))$ avec $\overline{\upsilon}' \in L^{p'}(0, T; (V^p_{0.div})')$. □

4.4.5 Résultat d'existence et d'unicité pour le problème 4.4

L'existence de la solution découle de l'existence du problème 4.3. En effet, on considère le théorème suivant

Théorème 4.9 *Sous les hypothèses du lemme* 4.7*, le problème* 4.4 *admet une unique solution.*

Preuve. D'après le théorème 4.8, le problème 4.3 admet une solution donc, avec $\tilde{\vartheta} \in V^p_{0.div}$ et $\zeta \in \mathcal{D}(0,T)$ dans (4.235) on obtient

$$\int_0^T \frac{\partial}{\partial t}(\overline{v},\tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\zeta\, dt + \int_0^T a(\theta;\overline{v},\tilde{\vartheta}\zeta)\, dt + \int_0^T \Big(j(t,\overline{v}+\tilde{\vartheta}\zeta) - j(t,\overline{v})\Big)\, dt$$
$$\geq \int_0^T (\overline{f},\tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\zeta\, dt.$$

Par densité de $\mathcal{D}(0,T)\otimes V^p_{0.div}$ dans $L^p(0,T;V^p_{0.div})$ on obtient

$$[\overline{v}',\overline{\varphi}-\overline{v}] + [\mathcal{A}\overline{v},\overline{\varphi}-\overline{v}] + J(\overline{\varphi}) - J(\overline{v}) \geq\ [\overline{f},\overline{\varphi}-\overline{v}],$$
$$\forall \overline{\varphi} \in L^p(0,T;V^p_{0.div}).$$

de plus

$$\overline{v}(0) = 0,$$

ce qui montre que le problème 4.4 admet au moins une solution.
Maintenant, on montre que ce problème admet une unique solution. En effet, on suppose que ce problème admet deux solutions $\overline{v}_1$ et $\overline{v}_2$. Donc, elles vérifient les deux inéquations suivantes

$$[\overline{v}_1',\overline{\varphi}-\overline{v}_1] + [\mathcal{A}\overline{v}_1,\overline{\varphi}-\overline{v}_1] + J(\overline{\varphi}) - J(\overline{v}_1) \geq [\overline{f},\overline{\varphi}-\overline{v}_1] \quad \forall \overline{\varphi} \in L^p(0,T;V^p_{0.div}),$$

$$[\overline{v}_2',\overline{\varphi}-\overline{v}_2] + [\mathcal{A}\overline{v}_2,\overline{\varphi}-\overline{v}_2] + J(\overline{\varphi}) - J(\overline{v}_2) \geq [\overline{f},\overline{\varphi}-\overline{v}_2] \quad \forall \overline{\varphi} \in L^p(0,T;V^p_{0.div}).$$

Fixons $t \in]0,T]$, prenons $\overline{\varphi} = \overline{v}_2 1_{[0,t]} + \overline{v}_1 1_{]t,T]}$ dans la première inéquation et $\overline{\varphi} = \overline{v}_1 1_{[0,t]} + \overline{v}_2 1_{]t,T]}$ dans la deuxième avec

$$1_{[0,t]} = \begin{cases} 1 & \text{sur } [0,t], \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

En additionnant les deux inéquations, on aura :

$$[\overline{v}_1' - \overline{v}_2', (\overline{v}_2 - \overline{v}_1)1_{[0,t]}] + [\mathcal{A}\overline{v}_1 - \mathcal{A}\overline{v}_2, (\overline{v}_2 - \overline{v}_1)1_{[0,t]}] \geq 0,$$

c-à-d

$$[\overline{v}_1' - \overline{v}_2', (\overline{v}_1 - \overline{v}_2)1_{[0,t]}] + [\mathcal{A}\overline{v}_1 - \mathcal{A}\overline{v}_2, (\overline{v}_1 - \overline{v}_2)1_{[0,t]}] \leq 0.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
[\mathcal{A}\overline{v}_1 - \mathcal{A}\overline{v}_2, (\overline{v}_1 - \overline{v}_2)1_{[0,t]}] &= \int_0^T \Big(a(\theta; \overline{v}_1, (\overline{v}_1 - \overline{v}_2)1_{[0,t]}) \\
&- a(\theta; \overline{v}_2, (\overline{v}_1 - \overline{v}_2)1_{[0,t]} \Big) \, d\tilde{t} \\
&= \int_0^t (a(\theta; \overline{v}_1, (\overline{v}_1 - \overline{v}_2)) - a(\theta; \overline{v}_2, (\overline{v}_1 - \overline{v}_2)) \, d\tilde{t},
\end{aligned}$$

en utilisant le même raisonnement que dans l'étude de la monotonie de $\mathcal{A}$, on a aussi

$$\begin{aligned}
&\int_0^t (a(\theta; \overline{v}_1, (\overline{v}_1 - \overline{v}_2)) - a(\theta; \overline{v}_2, (\overline{v}_1 - \overline{v}_2)) \, d\tilde{t} \\
&= \int_0^t \int_\Omega \frac{1}{2} \Big((\alpha |D(\overline{v}_1 + \upsilon_0 \xi)|^{p-2} + \beta |D(\overline{v}_2 + \upsilon_0 \xi)|^{p-2}) \\
&\times |D(\overline{v}_1 + \upsilon_0 \xi) - D(\overline{v}_2 + \upsilon_0 \xi)|^2 + (|D(\overline{v}_1 + \upsilon_0 \xi)|^2 - |D(\overline{v}_2 + \upsilon_0 \xi)|^2) \\
&\times (\alpha |D(\overline{v}_1 + \upsilon_0 \xi)|^{p-2} - \beta |D(\overline{v}_2 + \upsilon_0 \xi)|^{p-2}) \Big) \, dx \, d\tilde{t},
\end{aligned}$$

où

$$\alpha = 2\mu(\theta, |D(\overline{v}_1 + \upsilon_0 \xi)|), \quad \beta = 2\mu(\theta, |D(\overline{v}_2 + \upsilon_0 \xi)|).$$

- Si $|D(\overline{v}_1 + \upsilon_0 \xi)| \neq 0$ et $|D(\overline{v}_2 + \upsilon_0 \xi)| = 0$ et comme $\alpha > 0$ on obtient

$$\int_0^t (a(\theta; \overline{v}_1, (\overline{v}_1 - \overline{v}_2)) - a(\theta; \overline{v}_2, (\overline{v}_1 - \overline{v}_2)) \, d\tilde{t} = \int_0^t \int_\Omega \alpha |D(\overline{v}_1 + \upsilon_0 \xi)|^p \, dx \, d\tilde{t} \geq 0.$$

Quitte à modifier les rôles de $\overline{v}_1$ et $\overline{v}_2$ dès le départ, on peut se ramener au cas précédent si $|D(\overline{v}_1 + \upsilon_0 \xi)| = 0$ et $|D(\overline{v}_2 + \upsilon_0 \xi)| \neq 0$.

- Si $|D(\overline{v}_2 + \upsilon_0 \xi)| = |D(\overline{v}_1 + \upsilon_0 \xi)| = 0$ on obtient

$$\int_0^t (a(\theta; \overline{v}_1, (\overline{v}_1 - \overline{v}_2)) - a(\theta; \overline{v}_2, (\overline{v}_1 - \overline{v}_2)) \, d\tilde{t} = 0.$$

- Si $|D(\overline{v}_1 + v_0\xi)|$ et $|D(\overline{v}_2 + v_0\xi)|$ non nuls on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_0^t (a(\theta;\overline{v}_1,(\overline{v}_1-\overline{v}_2)) - a(\theta;\overline{v}_2,(\overline{v}_1-\overline{v}_2))\,d\tilde{t}\\
&\geq \int_0^t\int_\Omega \frac{|D(\overline{v}_2+v_0\xi)|^2}{2|D(\overline{v}_1+v_0\xi)|^r}(\tilde{S}-1)\\
&\times\Big((\beta\tilde{S}^r+\alpha)(\tilde{S}-1)-(\beta\tilde{S}^r-\alpha)(\tilde{S}+1)\Big)\,dx\,dt\\
&= \int_0^t\int_\Omega \frac{|D(\overline{v}_2+v_0\xi)|^2}{|D(\overline{v}_1+v_0\xi)|^r}(\tilde{S}-1)(\alpha\tilde{S}-\beta\tilde{S}^r)\,dx\,dt,
\end{aligned}$$

où $\tilde{S} = \dfrac{|D(\overline{v}_1+v_0\xi)|}{|D(\overline{v}_2+v_0\xi)|}$ et $r = 2-p$.

- Si $|D(\overline{v}_1 + v_0\xi)| \geq |D(\overline{v}_2 + v_0\xi)| > 0$ donc avec (4.45) on a

$$\int_0^t (a(\theta;\overline{v}_1,(\overline{v}_1-\overline{v}_2)) - a(\theta;\overline{v}_2,(\overline{v}_1-\overline{v}_2))\,d\tilde{t} \geq 0.$$

Quitte à modifier les rôles de $\overline{v}_1$ et $\overline{v}_2$ dès le départ, on peut se ramener au cas précédent si $|D(\overline{v}_2 + v_0\xi)| \geq |D(\overline{v}_1 + v_0\xi)| > 0$.
Donc,

$$[\mathcal{A}\overline{v}_1 - \mathcal{A}\overline{v}_2, (\overline{v}_1-\overline{v}_2)1_{[0,t]}] \geq 0,$$

d'où

$$\int_0^t < \overline{v}_1' - \overline{v}_2', \overline{v}_1-\overline{v}_2 >_{(V^p_{0.div})',V^p_{0.div}}\ d\tilde{t} \leq 0.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
&\int_0^t < \overline{v}_1' - \overline{v}_2', \overline{v}_1-\overline{v}_2 >_{(V^p_{0.div})',V^p_{0.div}}\ d\tilde{t} = \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\|\overline{v}_1-\overline{v}_2\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\,d\tilde{t}\\
&= \frac{1}{2}\Big(\|\overline{v}_1(t)-\overline{v}_2(t)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - \|\overline{v}_1(0)-\overline{v}_2(0)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\Big) \leq 0,
\end{aligned}$$

d'où

$$\|\overline{v}_1(t)-\overline{v}_2(t)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq \|\overline{v}_1(0)-\overline{v}_2(0)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}.$$

Or $\|\overline{v}_1(0)-\overline{v}_2(0)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = 0$, ce qui montre l'unicité de la solution du problème 4.4.

□

Remarque 4.3 - *Remarquons que dans le lemme* 4.7 *on a montré que* $\hat{\pi} \in H^{-1}(0,T;L_0^{p'}(\Omega))$. *On a* π *est l'unique solution du problème* 4.3 *donc on prend* $\pm\tilde{\vartheta}\zeta$ *avec* $\tilde{\vartheta} \in \boldsymbol{W}_0^{1,p}(\Omega)$ *et* $\zeta \in \mathcal{D}(0,T)$ *dans* (4.235) *on obtient*

$$\begin{aligned}
&-\int_0^T (\overline{\upsilon},\tilde{\vartheta})_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}\zeta'\,dt + \int_0^T a(\theta;\overline{\upsilon},\tilde{\vartheta}\zeta)\,dt - \int_0^T (\pi, div(\tilde{\vartheta}))\zeta\,dt \\
&= \int_0^T (\overline{f},\tilde{\vartheta})_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}\zeta\,dt,
\end{aligned}$$

et on écrit

$$\begin{aligned}
&-\int_0^T (\overline{\upsilon},\tilde{\vartheta})_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}\zeta'\,dt + [\mathcal{A}\overline{\upsilon},\tilde{\vartheta}\zeta] - \int_0^T (\pi, div(\tilde{\vartheta}))\zeta\,dt \\
&= \int_0^T (\overline{f},\tilde{\vartheta})_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}\zeta\,dt.
\end{aligned} \tag{4.236}$$

D'autre part, pour tout $\tilde{\vartheta} \in V_0^2$, $\zeta \in \mathcal{D}(0,T)$ *on a*

$$\begin{aligned}
&\Big\langle \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\upsilon}_\varepsilon,\tilde{\vartheta})_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)},\zeta\Big\rangle_{\mathcal{D}'(0,T),\mathcal{D}(0,T)} + \int_0^T a_\varepsilon(\theta;\overline{\upsilon}_\varepsilon,\tilde{\vartheta}\zeta)\,dt \\
&-\int_0^T (\pi_\varepsilon, div(\tilde{\vartheta}))\zeta\,dt + \int_0^T \Big(j(t,\overline{\upsilon}_\varepsilon+\tilde{\vartheta}\zeta) - j(t,\overline{\upsilon}_\varepsilon)\Big)\,dt \\
&\geq \int_0^T (\overline{f},\tilde{\vartheta})_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}\zeta\,dt.
\end{aligned}$$

en utilisant l'intégration par parties en temps sur le premier terme on obtient

$$\begin{aligned}
&-\int_0^T (\overline{\upsilon}_\varepsilon,\tilde{\vartheta})_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}\zeta'\,dt + \int_0^T a_\varepsilon(\theta;\overline{\upsilon}_\varepsilon,\tilde{\vartheta}\zeta)\,dt \\
&-\int_0^T (\pi_\varepsilon, div(\tilde{\vartheta}))\zeta\,dt + \int_0^T \Big(j(t,\overline{\upsilon}_\varepsilon+\tilde{\vartheta}\zeta) - j(t,\overline{\upsilon}_\varepsilon)\Big)\,dt \\
&\geq \int_0^T (\overline{f},\tilde{\vartheta})_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}\zeta\,dt.
\end{aligned} \tag{4.237}$$

On a

$$\begin{aligned}
\int_0^T a_\varepsilon(\theta;\overline{\upsilon}_\varepsilon,\tilde{\vartheta}\zeta)\,dt &= \int_0^T a(\theta;\overline{\upsilon}_\varepsilon,\tilde{\vartheta}\zeta)\,dt \\
&+ 2\varepsilon\int_0^T\int_\Omega D(\overline{\upsilon}_\varepsilon+\upsilon_0\xi) : D(\tilde{\vartheta}\zeta)\,dx\,dt,
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\int_0^T a_\varepsilon(\theta;\overline{\upsilon}_\varepsilon,\tilde{\vartheta}\hat{\zeta})\,dt &= [\mathcal{A}\overline{\upsilon}_\varepsilon,\tilde{\vartheta}\hat{\zeta}]+2\sqrt{\varepsilon}\int_0^T\int_\Omega \sqrt{\varepsilon}D(\overline{\upsilon}_\varepsilon):D(\tilde{\vartheta}\zeta)\,dx\,dt\\ &+ 2\varepsilon\int_0^T\int_\Omega D(\upsilon_0\xi):D(\tilde{\vartheta}\zeta)\,dx\,dt.\end{aligned}$$

Comme $V^p_{0.div}$ *et* V^p_0 *ont la même norme, on en déduit que* $\mathcal{A}$ *est borné dans* $L^{p'}(0,T;(V^p_0)')$ *et la suite* $(\overline{\upsilon}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ *est bornée dans* $L^p(0,T;V^p_0)$*, on obtient*

$$\mathcal{A}\overline{\upsilon}_\varepsilon \rightharpoonup \chi \quad \textit{faiblement dans} \quad L^{p'}(0,T;(V^p_0)').$$

L'opérateur $\mathcal{A}$ *est continu de* $L^p(0,T;V^p_0)$ *fort dans* $L^{p'}(0,T;(V^p_0)')$ *faible* (voir [56] page 179) *mais ici on n'a pas la convergence forte de la suite* $(\overline{\upsilon}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ *dans* $L^p(0,T;V^p_0)$.
En passant à la limite dans (4.237)*, en utilisant l'estimation* (4.150) *et les convergences* (4.178), (4.182), (4.210), (4.234) *on obtient*

$$\begin{aligned}&\int_0^T(\overline{\upsilon},\tilde{\vartheta})_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}\zeta'\,dt+[\chi,\tilde{\vartheta}\zeta]-\int_0^T(\hat{\pi},div(\tilde{\vartheta}))\zeta\,dt\\ &+\int_0^T\Big(j(t,\overline{\upsilon}+\tilde{\vartheta}\zeta)-j(t,\overline{\upsilon})\Big)\,dt\geq\ \int_0^T(\overline{f},\tilde{\vartheta})_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}\zeta\,dt\\ &\forall\tilde{\vartheta}\in V^2_0,\quad\forall\zeta\in\mathcal{D}(0,T).\end{aligned}$$

par densité de V^2_0 *dans* V^p_0 *on obtient*

$$\begin{aligned}&-\int_0^T(\overline{\upsilon},\tilde{\vartheta})_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}\zeta'\,dt+[\chi,\tilde{\vartheta}\zeta]-\int_0^T(\hat{\pi},div(\tilde{\vartheta}))\zeta\,dt\\ &+\int_0^T\Big(j(t,\overline{\upsilon}+\tilde{\vartheta}\zeta)-j(t,\overline{\upsilon})\Big)\,dt\geq\ \int_0^T(\overline{f},\tilde{\vartheta})_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}\zeta\,dt\\ &\forall\tilde{\vartheta}\in V^p_0,\quad\forall\zeta\in\mathcal{D}(0,T).\end{aligned}\tag{4.238}$$

On prend $\pm\tilde{\vartheta}\zeta$ *avec* $\tilde{\vartheta}\in\boldsymbol{W}^{1,p}_0(\Omega)$ *et* $\zeta\in\mathcal{D}(0,T)$ *dans l'inéquation ci-dessus on obtient*

$$\begin{aligned}&-\int_0^T(\overline{\upsilon},\tilde{\vartheta})_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}\zeta'\,dt+[\chi,\tilde{\vartheta}\zeta]-\int_0^T(\hat{\pi},div(\tilde{\vartheta}))\zeta\,dt\\ &=\int_0^T(\overline{f},\tilde{\vartheta})_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}\zeta\,dt.\end{aligned}\tag{4.239}$$

En soustrayant (4.236), (4.239) *on obtient*

$$[\chi, \tilde{\vartheta}\zeta] - [\mathcal{A}\overline{v}, \tilde{\vartheta}\zeta] + \int_0^T (\pi - \hat{\pi}, div(\tilde{\vartheta}))\zeta \, dt = 0$$
$$\forall \tilde{\vartheta} \in \boldsymbol{W}_0^{1,p}(\Omega), \quad \forall \zeta \in \mathcal{D}(0,T),$$

puisque $\chi - \mathcal{A}\overline{v} \in L^{p'}(0,T;(V_0^p)') \subset L^{p'}(0,T;\boldsymbol{W}^{-1,p'}(\Omega))$ *(car* $\boldsymbol{W}_0^{1,p}(\Omega) \subset V_0^p$*) on obtient*

$$[\chi - \mathcal{A}\overline{v}, \tilde{\vartheta}\zeta] + \int_0^T (\pi - \hat{\pi}, div(\tilde{\vartheta}))\zeta \, dt = 0$$
$$\forall \tilde{\vartheta} \in \boldsymbol{W}_0^{1,p}(\Omega), \quad \forall \zeta \in \mathcal{D}(0,T),$$

donc, pour identifier χ *on a besoin de supposer que* $div(\tilde{\vartheta}) = 0$ *d'où*

$$[\chi - \mathcal{A}\overline{v}, \tilde{\vartheta}\zeta] = 0 \quad \forall \tilde{\vartheta} \in W_{0.div}^{1,p}, \quad \forall \zeta \in \mathcal{D}(0,T).$$

On a $\mathcal{D}(0,T) \otimes W_{0.div}^{1,p}$ *dense dans* $L^p(0,T;W_{0.div}^{1,p})$*, d'où*

$$\chi = \mathcal{A}\overline{v} \quad dans \quad L^{p'}(0,T;(W_{0.div}^{1,p})').$$

On ne peut pas en déduire que

$$[\chi - \mathcal{A}\overline{v}, \tilde{\vartheta}\zeta] = 0 \quad \forall \tilde{\vartheta} \in \boldsymbol{W}_0^{1,p}(\Omega), \quad \forall \zeta \in \mathcal{D}(0,T),$$

car $W_{0.div}^{1,p}$ *n'est pas dense dans* $\boldsymbol{W}_0^{1,p}(\Omega)$*. Donc, on ne peut pas établir que* $\pi = \hat{\pi}$*.*

4.5 Étude du problème dont la viscosité dépend de la vitesse

Dans cette section, on considère désormais que la viscosité dépend à la fois de la température, de la vitesse et du tenseur des taux de déformations. Plus précisément, on suppose que μ est définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$, et vérifie

$$\begin{aligned} &\exists \mu_0, \mu_1 \in \mathbb{R} : \quad 0 < \mu_0 \leq \mu(u, w, \tilde{u}) \leq \mu_1, \\ &\forall (u, w, \tilde{u}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+, \end{aligned} \tag{4.240}$$

$$\text{la fonction} \quad w \mapsto \mu(.,w,.) \quad \text{est continue} \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^3, \tag{4.241}$$

$$\begin{aligned} &\text{la fonction} \quad \tilde{u} \mapsto \mu(.,.,\tilde{u}) \quad \text{est continue} \\ &\text{et monotone croissante sur} \quad \mathbb{R}_+. \end{aligned} \tag{4.242}$$

On considère les équations générales de l'écoulement non isotherme d'un fluide non-Newtonien incompressible et instationnaire dont la viscosité dépend également de la vitesse

$$\begin{aligned} \frac{\partial \upsilon}{\partial t} - 2div(\mu(\theta,\upsilon,|D(\upsilon)|)|D(\upsilon)|^{p-2}D(\upsilon)) + \nabla\pi = f \qquad &\text{dans} \quad \Omega\times]0,T[, \\ div(\upsilon) = 0 \qquad &\text{dans} \quad \Omega\times]0,T[. \end{aligned}$$

Pour compléter la formulation forte du problème, on rajoute les conditions aux limites (4.6)-(4.11) et la condition initiale (4.12).
La formulation variationnelle du problème forte est donnée par

Problème 4.5 *Soient* $f \in L^{p'}(0,T;\boldsymbol{L}^2(\Omega))$, $k \in L^{p'}(0,T;L^{p'}_+(\omega))$, μ *vérifie* (4.240)-(4.242), $\theta \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $s \in L^{p_0}(0,T;\mathbf{L}^{p_0}(\omega))$, $\xi \in W^{1,p'}(0,T)$ *vérifiant* (4.8) *et* $\upsilon_0 \in \boldsymbol{W}^{1,p_0}(\Omega)$ *vérifiant* (4.13). *On cherche* $\overline{\upsilon} \in C([0,T];\mathbf{L}^2(\Omega)) \cap L^p(0,T;V^p_{0.div})$ *avec* $\overline{\upsilon}' \in L^{p'}(0,T;(V^p_{0.div})')$, $\pi \in H^{-1}(0,T;L^{p'}_0(\Omega))$ *vérifiant l'inéquation variationnelle parabolique suivante*

$$\begin{aligned} &\Big\langle \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\upsilon},\tilde{\vartheta})_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)},\zeta\Big\rangle_{\mathcal{D}'(0,T),\mathcal{D}(0,T)} + \int_0^T \Big(a^*(\theta;\overline{\upsilon},\tilde{\vartheta}\zeta) - (\pi, div(\tilde{\vartheta}))\zeta\Big)\,dt \\ &+ \int_0^T \Big(j(t,\overline{\upsilon}+\tilde{\vartheta}\zeta) - j(t,\overline{\upsilon})\Big)\,dt \geq \int_0^T (\overline{f},\tilde{\vartheta})_{\boldsymbol{L}^2(\Omega)}\zeta\,dt, \\ &\forall\tilde{\vartheta} \in V^p_0 \quad \forall\zeta \in \mathcal{D}(0,T), \end{aligned} \tag{4.243}$$

et la condition initiale (4.22),

où $p_0 = \max(p,2)$ et

$$a^*(\theta;.,.) : \begin{cases} V^p_0 \times V^p_0 \to \mathbb{R} \\ (u,v) \qquad \mapsto a(\theta;u,v) \\ = \displaystyle\int_\Omega 2\mu(\theta,u+\upsilon_0\xi,|D(u+\upsilon_0\xi)|)|D(u+\upsilon_0\xi)|^{p-2} \\ \times d_{ij}(u+\upsilon_0\xi)d_{ij}(v)dx. \end{cases}$$

On considère le problème en vitesse suivant :

Problème 4.6 *Soient* $f \in L^{p'}(0,T;(V^p_{0.div})')$, $k \in L^{p'}(0,T;L^{p'}_+(\omega))$, μ *vérifie* (4.240)-(4.242), $\theta \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $s \in L^{p_0}(0,T;\boldsymbol{L}^{p_0}(\omega))$, $\xi \in W^{1,p'}(0,T)$ *vérifiant* (4.8), *et* $\upsilon_0 \in \boldsymbol{W}^{1,p_0}(\Omega)$ *vérifiant* (4.13). *On cherche* $\overline{v} \in C([0,T];\mathbf{L}^2(\Omega)) \cap L^p(0,T;V^p_{0.div})$ *avec* $\overline{v}' \in L^{p'}(0,T;(V^p_{0.div})')$, *vérifiant l'inéquation variationnelle parabolique suivante*

$$\begin{aligned} &[\overline{v}', \overline{\varphi} - \overline{v}] + [\mathcal{A}^*\overline{v}, \overline{\varphi} - \overline{v}] + J(\overline{\varphi}) - J(\overline{v}) \geq [\overline{f}, \overline{\varphi} - \overline{v}] \\ &\forall \overline{\varphi} \in L^p(0,T;V^p_{0.div}). \end{aligned} \tag{4.244}$$

et la condition initiale (4.22).

où

$$[\mathcal{A}^*\overline{v}, \overline{\varphi}] = \int_0^T a^*(\theta; \overline{v}, \overline{\varphi})\, dt.$$

Théorème 4.10 *Sous les hypothèses précédentes, le problème* 4.6 *admet au moins une solution.*

Preuve. L'existence de solution du problème 4.6 se démontre par l'application du théorème de point fixe de Schauder.
Pour tout $\mathbf{u} \in L^p(0,T;\mathbf{L}^p(\Omega))$ le problème 4.4 modifié avec $a(\theta, \mathbf{u}; .,.)$ au lieu de $a(\theta; .,.)$ admet une unique solution $\overline{v} \in C([0,T];\mathbf{L}^2(\Omega)) \cap L^p(0,T;V^p_{0.div})$, $\overline{v}' \in L^{p'}(0,T;(V^p_{0.div})')$ (voir les théorèmes 4.1 et 4.2 (cas $p > 2$) et les théorèmes 4.8 et 4.9 (cas $\frac{6}{5} < p < 2$). On a donc

$$\begin{aligned} &[\overline{v}', \overline{\varphi} - \overline{v}] + [\mathcal{A}_{\mathbf{u}}\overline{v}, \overline{\varphi} - \overline{v}] + J(\overline{\varphi}) - J(\overline{v}) \geq [\overline{f}, \overline{\varphi} - \overline{v}], \\ &\forall \overline{\varphi} \in L^p(0,T;V^p_{0.div}), \end{aligned} \tag{4.245}$$

et la condition initiale (4.22), avec

$$\begin{aligned} &a(\theta, \mathbf{u}; u, v) \\ &= \int_\Omega 2\mu(\theta, \mathbf{u} + \upsilon_0\xi, |D(u + \upsilon_0\xi)|)|D(u + \upsilon_0\xi)|^{p-2} d_{ij}(u + \upsilon_0\xi) d_{ij}(v) dx, \end{aligned}$$

et

$$[\mathcal{A}_{\mathbf{u}}u, v] = \int_0^T a(\theta, \mathbf{u}; u, v)\, dt.$$

On définit l'application $\tilde{\Lambda}$ par

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda} : \quad L^p(0,T;\mathbf{L}^p(\Omega)) &\to L^p(0,T;\mathbf{L}^p(\Omega)) \\ \mathbf{u} &\mapsto \overline{v}. \end{aligned}$$

Maintenant, on cherche $R > 0$ tel que $\tilde{\Lambda}(Z) \subset Z$ où

$$Z = \{\overline{\varphi} \in L^p(0,T;\mathbf{L}^p(\Omega)); \|\overline{\varphi}\|_{L^p(0,T;\mathbf{L}^p(\Omega))} \leq R\}.$$

Soit $\mathbf{u} \in L^p(0,T;\mathbf{L}^p(\Omega))$ quelconque, on prend $\overline{\varphi} = 0$ dans (4.245) on obtient

$$[\overline{v}', \overline{v}] + [\mathcal{A}_{\mathbf{u}}\overline{v}, \overline{v}] \leq [\overline{f}, \overline{v}] + J(0). \tag{4.246}$$

Or

$$\begin{aligned}[\overline{v}', \overline{v}] = \int_0^T < \overline{v}', \overline{v} >_{(V^p_{0.div})', V^p_{0.div}} \, dt &= \frac{1}{2}\int_0^T \frac{\partial}{\partial t}\|\overline{v}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\, dt \\ &= \frac{1}{2}\Big(\|\overline{v}(T)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - \|\overline{v}(0)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\Big),\end{aligned}$$

d'où

$$[\overline{v}', \overline{v}] = \frac{1}{2}\|\overline{v}(T)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \tag{4.247}$$

(car $\overline{v}(0) = 0$ (voir (4.22)).
D'après ce qui précède (cf. (4.47)) on obtient

$$\begin{aligned}&[\mathcal{A}_{\mathbf{u}}\overline{v}, \overline{v}] \geq 2(C_{Korn})^p\mu_0\|\overline{v} + \upsilon_0\xi\|^p_{L^p(0,T;V^p_{\Gamma_1})} \\ &-2\mu_1 c\|\upsilon_0\|_{1.p}T^{\frac{1}{p}}\|\overline{v} + \upsilon_0\xi\|^{p-1}_{L^p(0,T;V^p_{\Gamma_1})}.\end{aligned} \tag{4.248}$$

- Pour $p > 2$, avec (4.33) on obtient

$$\begin{aligned}&[\mathcal{A}_{\mathbf{u}}\overline{v}, \overline{v}] \geq 2(C_{Korn})^p\mu_0\|\overline{v} + \upsilon_0\xi\|^p_{L^p(0,T;V^p_{\Gamma_1})} \\ &-2^{p-1}\mu_1 c\|\upsilon_0\|_{1.p}T^{\frac{1}{p}}(\|\overline{v}\|^{p-1}_{L^p(0,T;V^p_{0.div})} + \|\upsilon_0\xi\|^{p-1}_{L^p(0,T;V^p_{\Gamma_1})}).\end{aligned} \tag{4.249}$$

En remplaçant (4.247), (4.249) dans (4.246) on obtient

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\|\overline{v}(T)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + 2(C_{Korn})^p\mu_0\Big|\|\overline{v}\|_{L^p(0,T;V^p_{0.div})} - \|\upsilon_0\xi\|_{L^p(0,T;V^p_{\Gamma_1})}\Big|^p \\ &\leq \|\overline{f}\|_{L^{p'}(0,T;(V^p_{0.div})')}\|\overline{v}\|_{L^p(0,T;V^p_{0.div})} + J(0) \\ &+2^{p-1}\mu_1 c\|\upsilon_0\|_{1.p}T^{\frac{1}{p}}(\|\overline{v}\|^{p-1}_{L^p(0,T;V^p_{0.div})} + \|\upsilon_0\xi\|^{p-1}_{L^p(0,T;V^p_{\Gamma_1})}),\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}&2(C_{Korn})^p\mu_0\Big|\|\overline{v}\|_{L^p(0,T;V^p_{0.div})} - \|\upsilon_0\xi\|_{L^p(0,T;V^p_{\Gamma_1})}\Big|^p \\ &\leq \|\overline{f}\|_{L^{p'}(0,T;(V^p_{0.div})')}\|\overline{v}\|_{L^p(0,T;V^p_{0.div})} + J(0) \\ &+2^{p-1}\mu_1 c\|\upsilon_0\|_{1.p}T^{\frac{1}{p}}(\|\overline{v}\|^{p-1}_{L^p(0,T;V^p_{0.div})} + \|\upsilon_0\xi\|^{p-1}_{L^p(0,T;V^p_{\Gamma_1})}).\end{aligned} \tag{4.250}$$

En divisant les deux membres de (4.250) par $\|\overline{v}\|^p_{L^p(0,T;V^p_{0.div})}$ (avec $\|\overline{v}\|_{L^p(0,T;V^p_{0.div})} \neq 0$) on obtient

$$2(C_{Korn})^p\mu_0\Big|1-\frac{\|\upsilon_0\xi\|_{L^p(0,T;V_{\Gamma_1})}}{\|\overline{v}\|_{L^p(0,T;V^p_{0.div})}}\Big|^p \leq \|\overline{f}\|_{L^{p'}(0,T;(V^p_{0.div})')}\|\overline{v}\|^{1-p}_{L^p(0,T;V^p_{0.div})}$$
$$+\frac{J(0)}{\|\overline{v}\|^p_{L^p(0,T;V^p_{0.div})}}+\frac{2^{p-1}\mu_1 c\|\upsilon_0\|_{1.p}T^{\frac{1}{p}}}{\|\overline{v}\|_{L^p(0,T;V^p_{0.div})}}\Bigg(1+\Big(\frac{\|\upsilon_0\xi\|_{L^p(0,T;V^p_{\Gamma_1})}}{\|\overline{v}\|_{L^p(0,T;V^p_{0.div})}}\Big)^{p-1}\Bigg). \tag{4.251}$$

Remarquons que $\|\overline{v}\|_{L^p(0,T;V^p_{0.div})} \in \mathbf{E}\cup\{0\}$ donc comme l'ensemble $\mathbf{E}$ est borné (voir (4.78) théorème 4.1) on obtient

$$\exists \mathcal{C}>0, \quad \|\overline{v}\|_{L^p(0,T;V^p_{0.div})} \leq \mathcal{C}, \tag{4.252}$$

d'où

$$\|\overline{v}\|_{L^p(0,T;\mathbf{L}^p(\Omega))} \leq \gamma_1\mathcal{C},$$

où γ_1 désigne la constante de l'injection continue de $L^p(0,T;V^p_{0.div})$ dans $L^p(0,T;\mathbf{L}^p(\Omega))$.
Pour assurer que $\tilde{\Lambda}(Z)\subset Z$, il suffit de prendre $R=\gamma_1\mathcal{C}$.
L'ensemble Z est un convexe fermé de $L^p(0,T;\mathbf{L}^p(\Omega))$, de plus borné.
Pour montrer que $\tilde{\Lambda}(Z)$ est relativement compact, on doit établir que pour toute suite $(\overline{v}_n)_{n\geq 0}$ de $\tilde{\Lambda}(Z)$ (c-à-d, il existe $\mathbf{u}_n\in Z$ tel que $\overline{v}_n=\tilde{\Lambda}(\mathbf{u}_n)$), on peut extraire une sous-suite qui converge fortement dans $L^p(0,T;\mathbf{L}^p(\Omega))$.
En effet, pour tout $\overline{\varphi}\in L^p(0,T;V^p_{0.div})$ on a

$$[\overline{v}'_n,\overline{\varphi}-\overline{v}_n]+[\mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{v}_n,\overline{\varphi}-\overline{v}_n]+J(\overline{\varphi})-J(\overline{v}_n)\geq[\overline{f},\overline{\varphi}-\overline{v}_n], \tag{4.253}$$

donc, d'après ce qui précède (cf. (4.252)) on a

$$\|\overline{v}_n\|_{L^p(0,T;V^p_{0.div})}\leq\mathcal{C}. \tag{4.254}$$

D'autre part, on prend $\overline{\varphi}=\overline{v}_n\pm\vartheta^*\zeta$ avec $\vartheta^*\in V^p_{0.div}$ et $\zeta\in\mathcal{D}(0,T)$ dans (4.253) on obtient

$$[\overline{v}'_n,\pm\vartheta^*\zeta]+[\mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{v}_n,\pm\vartheta^*\zeta]+J(\overline{v}_n\pm\vartheta^*\zeta)-J(\overline{v}_n)\geq[\overline{f},\pm\vartheta^*\zeta]. \tag{4.255}$$

Avec la première inégalité on a

$$[\overline{v}_n', \vartheta^*\zeta] \geq [\overline{f}, \vartheta^*\zeta] - [\mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{v}_n, \vartheta^*\zeta] - J(\overline{v}_n + \vartheta^*\zeta) + J(\overline{v}_n).$$

En utilisant (4.69)

$$\begin{aligned}[\overline{v}_n', \vartheta^*\zeta] \geq -(&\|\overline{f}\|_{L^{p'}(0,T;(V^p_{0.div})')} + \|\mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{v}_n\|_{L^{p'}(0,T;(V^p_{0.div})')} \\ &+\gamma\|k\|_{L^{p'}(0,T;L^{p'}(\omega))})\|\vartheta^*\zeta\|_{L^p(0,T;V^p_{0.div})}.\end{aligned} \tag{4.256}$$

Avec la deuxième inégalité on a

$$[\overline{v}_n', \vartheta^*\zeta] \leq [\overline{f}, \vartheta^*\zeta] - [\mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{v}_n, \vartheta^*\zeta] + J(\overline{v}_n - \vartheta^*\zeta) - J(\overline{v}_n),$$

et avec (4.69)

$$\begin{aligned}[\overline{v}_n', \vartheta^*\zeta] \leq (&\|\overline{f}\|_{L^{p'}(0,T;(V^p_{0.div})')} + \|\mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{v}_n\|_{L^{p'}(0,T;(V^p_{0.div})')} \\ &+\gamma\|k\|_{L^{p'}(0,T;L^{p'}(\omega))})\|\vartheta^*\zeta\|_{L^p(0,T;V^p_{0.div})}.\end{aligned} \tag{4.257}$$

D'après (4.256), (4.257) on a

$$\begin{aligned}|[\overline{v}_n', \vartheta^*\zeta]| \leq (&\|\overline{f}\|_{L^{p'}(0,T;(V^p_{0.div})')} + \|\mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{v}_n\|_{L^{p'}(0,T;(V^p_{0.div})')} \\ &+\gamma\|k\|_{L^{p'}(0,T;L^{p'}(\omega))})\|\vartheta^*\zeta\|_{L^p(0,T;V^p_{0.div})}.\end{aligned} \tag{4.258}$$

D'après ce qui précède (cf. (4.52)) on a

$$\|\mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{v}_n\|_{L^{p'}(0,T;(V^p_{0.div})')} \leq 2^{p-1}\mu_1(\|\overline{v}_n\|^{p-1}_{L^p(0,T;V^p_{0.div})} + c^{p-1}T^{\frac{1}{p'}}\|v_0\|^{p-1}_{1.p}),$$

où $c > 0$ est une constante qui ne dépend que de ξ (relation (4.32)).
De (4.254) on obtient

$$\|\mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{v}_n\|_{L^{p'}(0,T;(V^p_{0.div})')} \leq 2^{p-1}\mu_1(\mathcal{C}^{p-1} + c^{p-1}T^{\frac{1}{p'}}\|v_0\|^{p-1}_{1.p}). \tag{4.259}$$

De (4.259) on obtient

$$|[\overline{v}_n', \vartheta^*\zeta]| \leq \hat{\mathcal{C}}\|\vartheta^*\zeta\|_{L^p(0,T;V^p_{0.div})}, \tag{4.260}$$

d'où

$$\|\overline{v}_n'\|_{L^{p'}(0,T;(V^p_{0.div})')} \leq \hat{\mathcal{C}}. \tag{4.261}$$

En utilisant le lemme d'Aubin [36] et (4.254), (4.261) avec $X_0 = V^p_{0.div}$, $X = \mathbf{L}^p(\Omega)$ et $X_1 = (V^p_{0.div})'$ on obtient qu'il existe une sous-suite de $(\overline{\upsilon}_n)_{n\geq 0}$ notée encore $(\overline{\upsilon}_n)_{n\geq 0}$ vérifiant

$$\overline{\upsilon}_n \to \overline{\upsilon} \quad \text{fortement dans} \quad L^p(0,T;\mathbf{L}^p(\Omega)), \tag{4.262}$$

ce qui montre que $\tilde{\Lambda}(Z)$ est relativement compact.

- Pour $\frac{6}{5} < p < 2$, d'après (4.40) on vérifie que l'estimation (4.249), devient

$$\begin{aligned} &[\mathcal{A}_{\mathbf{u}}\overline{\upsilon},\overline{\upsilon}] \geq 2(C_{Korn})^p\mu_0\|\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi\|^p_{L^p(0,T;V^p_{\Gamma_1})} \\ &-2\mu_1 c\|\upsilon_0\|_{1.p}T^{\frac{1}{p}}(\|\overline{\upsilon}\|^{p-1}_{L^p(0,T;V^p_{0.div})}+\|\upsilon_0\xi\|^{p-1}_{L^p(0,T;V^p_{\Gamma_1})}), \end{aligned} \tag{4.263}$$

donc (4.252) est encore vrai et l'estimation (4.259) devient

$$\|\mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{\upsilon}_n\|_{L^{p'}(0,T;(V^p_{0.div})')} \leq 2\mu_1(\mathcal{C}^{p-1}+c^{p-1}T^{\frac{1}{p'}}\|\upsilon_0\|^{p-1}_{1.p}), \tag{4.264}$$

donc (4.254) et (4.261) sont encore vrais.
En utilisant le même raisonnement que dans le cas $p > 2$ on obtient que $\tilde{\Lambda}(Z) \subset Z$ avec $R = \gamma_1\mathcal{C}$ et l'ensemble $\tilde{\Lambda}(Z)$ est relativement compact.

- Reste à montrer que l'application $\tilde{\Lambda}$ est continue. En effet, soit $(\mathbf{u}_n)_{n\geq 0}$ une suite dans $L^p(0,T;\mathbf{L}^p(\Omega))$ qui converge vers $\mathbf{u}$. On doit donc montrer que

$$\tilde{\Lambda}(\mathbf{u}_n) \to \tilde{\Lambda}(\mathbf{u}) \quad \text{dans} \quad L^p(0,T;\mathbf{L}^p(\Omega)).$$

A $(\mathbf{u}_n)_{n\geq 0}$ (resp. $\mathbf{u}$), on associe $\overline{\upsilon}_n = \tilde{\Lambda}(\mathbf{u}_n)$ (resp. $\overline{\upsilon} = \tilde{\Lambda}(\mathbf{u})$) vérifiant (4.253) (resp. (4.245)) et la condition initiale (4.22). La suite $(\overline{\upsilon}_n)_{n\geq 0}$ vérifie (4.254) et (4.261) donc elle possède des sous-suites fortement convergentes dans $L^p(0,T;\mathbf{L}^p(\Omega))$. On considère une telle sous-suite notée encore $(\overline{\upsilon}_n)_{n\geq 0}$. Prenons $\overline{\varphi} = \overline{\upsilon}_n$ dans (4.245) et $\overline{\varphi} = \overline{\upsilon}$ dans (4.253) et en additionnant les deux inéquations on obtient

$$[\overline{\upsilon}'_n - \overline{\upsilon}', \overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon}] + [\mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{\upsilon}_n - \mathcal{A}_{\mathbf{u}}\overline{\upsilon}, \overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon}] \leq 0. \tag{4.265}$$

On a

$$\begin{aligned}[\overline{\upsilon}_n' - \overline{\upsilon}', \overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon}] &= \int_0^T < \overline{\upsilon}_n' - \overline{\upsilon}', \overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon} >_{(V^p_{0.div})', V^p_{0.div}} \, dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^T \frac{\partial}{\partial t}\|\overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\, d\tilde{t} \\ &= \frac{1}{2}\Big(\|\overline{\upsilon}_n(T) - \overline{\upsilon}(T)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - \|\overline{\upsilon}_n(0) - \overline{\upsilon}(0)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\Big),\end{aligned}$$

d'où

$$[\overline{\upsilon}_n' - \overline{\upsilon}', \overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon}] = \frac{1}{2}\|\overline{\upsilon}_n(T) - \overline{\upsilon}(T)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}. \tag{4.266}$$

(car $\overline{\upsilon}_n(0) = \overline{\upsilon}(0) = 0$).
D'autre part,

$$\begin{aligned}[\mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{\upsilon}_n - \mathcal{A}_{\mathbf{u}}\overline{\upsilon}, \overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon}] &= [\mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{\upsilon}_n - \mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{\upsilon}, \overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon}] \\ &\quad -[\mathcal{A}_{\mathbf{u}}\overline{\upsilon} - \mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{\upsilon}, \overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon}].\end{aligned} \tag{4.267}$$

Avec (4.266), (4.267), l'inéquation (4.265) devient

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\|\overline{\upsilon}_n(T) - \overline{\upsilon}(T)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + [\mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{\upsilon}_n - \mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{\upsilon}, \overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon}] \\ &\leq [\mathcal{A}_{\mathbf{u}}\overline{\upsilon} - \mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{\upsilon}, \overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon}].\end{aligned} \tag{4.268}$$

D'autre part,

$$[\mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{\upsilon}_n - \mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{\upsilon}, \overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon}] = \int_0^T \Big(a(\theta, \mathbf{u}_n; \overline{\upsilon}_n, \overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon}) - a(\theta, \mathbf{u}_n; \overline{\upsilon}, \overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon}\Big)\, dt,$$

donc

$$\begin{aligned}&[\mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{\upsilon}_n - \mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{\upsilon}, \overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon}] = 2\int_0^T \int_\Omega \mu(\theta, \mathbf{u}_n + \upsilon_0\xi, |D(\overline{\upsilon}_n + \upsilon_0\xi)|) \\ &\times|D(\overline{\upsilon}_n + \upsilon_0\xi)|^{p-2}D(\overline{\upsilon}_n + \upsilon_0\xi) : D(\overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon})dx\, dt \\ &-2\int_0^T \int_\Omega \mu(\theta, \mathbf{u}_n + \upsilon_0\xi, |D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi)|)|D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi)|^{p-2} \\ &\times D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi) : D(\overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon})dx\, dt.\end{aligned} \tag{4.269}$$

On pose

$$\mu(u, w, \tilde{u}) = \tilde{\mu}(u, w, \tilde{u}) + \frac{\mu_0}{2}, \tag{4.270}$$

où $\tilde{\mu}$ est définie sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}_+$, et d'après (4.240)-(4.242) la fonction $\tilde{\mu}$ vérifie

$$0<\frac{\mu_0}{2}\leq\tilde{\mu}(u,w,\tilde{u})\leq\mu_1-\frac{\mu_0}{2},\quad\forall(u,w,\tilde{u})\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}_+,\tag{4.271}$$

$$\text{la fonction}\quad w\mapsto\tilde{\mu}(.,w,.)\quad\text{est continue}\quad\text{sur}\quad\mathbb{R}^3,\tag{4.272}$$

$$\begin{aligned}&\text{la fonction}\quad\tilde{u}\mapsto\tilde{\mu}(.,.,\tilde{u})\quad\text{est continue}\\&\text{et monotone croissante sur}\quad\mathbb{R}_+.\end{aligned}\tag{4.273}$$

En remplaçant (4.270) dans (4.269) on obtient

$$\begin{aligned}&[\mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{\upsilon}_n-\mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{\upsilon},\overline{\upsilon}_n-\overline{\upsilon}]\\&=\mu_0\int_0^T\int_\Omega|D(\overline{\upsilon}_n+\upsilon_0\xi)|^{p-2}D(\overline{\upsilon}_n+\upsilon_0\xi):D(\overline{\upsilon}_n-\overline{\upsilon})dx\,d\tilde{t}\\&+2\int_0^T\int_\Omega\tilde{\mu}(\theta,\mathbf{u}_n+\upsilon_0\xi,|D(\overline{\upsilon}_n+\upsilon_0\xi)|)|D(\overline{\upsilon}_n+\upsilon_0\xi)|^{p-2}\\&\times D(\overline{\upsilon}_n+\upsilon_0\xi):D(\overline{\upsilon}_n-\overline{\upsilon})dx\,d\tilde{t}\\&-\mu_0\int_0^T\int_\Omega|D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)|^{p-2}D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi):D(\overline{\upsilon}_n-\overline{\upsilon})dx\,d\tilde{t}\\&-2\int_0^T\int_\Omega\tilde{\mu}(\theta,\mathbf{u}_n+\upsilon_0\xi,|D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)|)|D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)|^{p-2}\\&\times D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi):D(\overline{\upsilon}_n-\overline{\upsilon})dx\,d\tilde{t},\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}&[\mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{\upsilon}_n-\mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{\upsilon},\overline{\upsilon}_n-\overline{\upsilon}]\\&=\mu_0\int_0^T\int_\Omega\Big(|D(\overline{\upsilon}_n+\upsilon_0\xi)|^{p-2}D(\overline{\upsilon}_n+\upsilon_0\xi)\\&-|D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)|^{p-2}D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)\Big):(D(\overline{\upsilon}_n+\upsilon_0\xi)-D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi))\,dx\,dt\\&+2\int_0^T\int_\Omega\tilde{\mu}(\theta,\mathbf{u}_n+\upsilon_0\xi,|D(\overline{\upsilon}_n+\upsilon_0\xi)|)|D(\overline{\upsilon}_n+\upsilon_0\xi)|^{p-2}\\&\times D(\overline{\upsilon}_n+\upsilon_0\xi):D(\overline{\upsilon}_n-\overline{\upsilon})dx\,dt\\&-2\int_0^T\int_\Omega\tilde{\mu}(\theta,\mathbf{u}_n+\upsilon_0\xi,|D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)|)|D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)|^{p-2}\\&\times D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi):D(\overline{\upsilon}_n-\overline{\upsilon})dx\,dt.\end{aligned}\tag{4.274}$$

- Pour $p > 2$, en utilisant l'inégalité suivante (voir [66] pages 37-38)

$$(|\hat{x}|^{p-2}\hat{x} - |\hat{y}|^{p-2}\hat{y}, \hat{x} - \hat{y}) \geq \Big(\frac{1}{2}\Big)^{p-1}|\hat{x} - \hat{y}|^p, \quad \forall \hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}^n \quad \forall p > 2,$$

et en utilisant le même raisonnement que dans l'étude de la monotonie de $\mathcal{A}$, on a aussi

$$\begin{aligned}
&[\mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{\upsilon}_n - \mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{\upsilon}, \overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon}] \geq \Big(\frac{1}{2}\Big)^{p-1}\mu_0 \int_0^T \|D(\overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon})\|^p_{(L^p(\Omega))^9}\, dt \\
&+ \int_0^T \int_\Omega |D(\overline{\upsilon}_n + \upsilon_0\xi)|^{p-2}\Big(\tilde{\mu}(\theta, \mathbf{u}_n + \upsilon_0\xi, |D(\overline{\upsilon}_n + \upsilon_0\xi)|) \\
&-\tilde{\mu}(\theta, \mathbf{u}_n + \upsilon_0\xi, |D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi)|)\Big)\Big(|D(\overline{\upsilon}_n + \upsilon_0\xi)| - |D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi)|\Big) \\
&\times\Big(|D(\overline{\upsilon}_n + \upsilon_0\xi)| + |D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi)|\Big)\, dx\, dt \\
&+ \int_0^T \int_\Omega \tilde{\mu}(\theta, \mathbf{u}_n + \upsilon_0\xi, |D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi)|)\big(|D(\overline{\upsilon}_n + \upsilon_0\xi)|^{p-2} \\
&-|D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi)|^{p-2}\big)\big(|D(\overline{\upsilon}_n + \upsilon_0\xi)|^2 - |D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi)|^2\big)\, dx\, dt.
\end{aligned}$$

Avec (4.273) et la monotonie de la fonction $w \mapsto w^{p-2}$ sur $\mathbb{R}^+$ car $p - 2 > 0$ on obtient

$$\begin{aligned}
&[\mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{\upsilon}_n - \mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{\upsilon}, \overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon}] \\
&\geq \Big(\frac{1}{2}\Big)^{p-1}\mu_0 \int_0^T \|D(\overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon})\|^p_{(L^p(\Omega))^9}\, dt.
\end{aligned} \tag{4.275}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
&[\mathcal{A}_{\mathbf{u}}\overline{\upsilon} - \mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{\upsilon}, \overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon}] = 2\int_0^T \int_\Omega \Big(\mu(\theta, \mathbf{u} + \upsilon_0\xi, |D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi)|) \\
&-\mu(\theta, \mathbf{u}_n + \upsilon_0\xi, |D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi)|)\Big)|D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi)|^{p-2} \\
&\times D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi) : D(\overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon})dx\, dt \leq 2\int_0^T \int_\Omega \big|\mu(\theta, \mathbf{u} + \upsilon_0\xi, |D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi)|) \\
&-\mu(\theta, \mathbf{u}_n + \upsilon_0\xi, |D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi)|)\big||D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi)|^{p-1}|D(\overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon})|dx\, dt.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young ([21] page 56)

$$ab \leq \hat{\epsilon}a^p + C_{\hat{\epsilon}}b^{p'}, \quad C_{\hat{\epsilon}} = \hat{\epsilon}^{\frac{-1}{p-1}}, \quad p' = \frac{p}{p-1}, \tag{4.276}$$

avec

$$a = |D(\overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon})|, \hat{\epsilon} = \frac{\mu_0}{4}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{p-1}, C_{\hat{\epsilon}} = \Big(\frac{\mu_0}{4}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{p-1}\Big)^{\frac{-1}{p-1}},$$
$$b = \big|\mu(\theta, \mathbf{u} + \upsilon_0\xi, |D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi)|) - \mu(\theta, \mathbf{u}_n + \upsilon_0\xi, |D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi)|)\big|$$
$$\times |D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi)|^{p-1},$$

on obtient

$$\begin{aligned}
&[\mathcal{A}_{\mathbf{u}}\overline{\upsilon} - \mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{\upsilon}, \overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon}] \leq \frac{\mu_0}{2}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{p-1}\int_0^T\int_\Omega |D(\overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon})|^p\, dx\, dt \\
&+2C_{\hat{\epsilon}}\int_0^T\int_\Omega \big|\mu(\theta, \mathbf{u} + \upsilon_0\xi, |D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi)|) \\
&-\mu(\theta, \mathbf{u}_n + \upsilon_0\xi, |D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi)|)\big|^{p'} |D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi)|^p dx\, dt.
\end{aligned} \tag{4.277}$$

En remplaçant (4.275), (4.277) dans (4.268) on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\|\overline{\upsilon}_n(T) - \overline{\upsilon}(T)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \frac{\mu_0}{2}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{p-1}\int_0^T \|D(\overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon})\|^p_{(L^p(\Omega))^9}\, dt \\
&\leq 2C_{\hat{\epsilon}}\int_0^T\int_\Omega \big|\mu(\theta, \mathbf{u} + \upsilon_0\xi, |D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi)|) \\
&-\mu(\theta, \mathbf{u}_n + \upsilon_0\xi, |D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi)|)\big|^{p'} |D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi)|^p dx\, dt.
\end{aligned} \tag{4.278}$$

En utilisant l'inégalité de Korn (4.46) on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\|\overline{\upsilon}_n(T) - \overline{\upsilon}(T)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \frac{\mu_0}{2\gamma_1^p}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{p-1}(C_{Korn})^p\|\overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon}\|^p_{L^p(0,T;\mathbf{L}^p(\Omega))} \\
&\leq 2C_{\hat{\epsilon}}\int_0^T\int_\Omega \big|\mu(\theta, \mathbf{u} + \upsilon_0\xi, |D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi)|) \\
&-\mu(\theta, \mathbf{u}_n + \upsilon_0\xi, |D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi)|)\big|^{p'} |D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi)|^p dx\, dt,
\end{aligned} \tag{4.279}$$

rappellons que γ_1 désigne la constante de l'injection continue de $L^p(0,T;V^p_{0.div})$ dans $L^p(0,T;\mathbf{L}^p(\Omega))$.

- Pour $\frac{6}{5} < p < 2$, on a l'inégalité suivante (voir [66] pages 146)

$$(|\hat{x}| + |\hat{y}|)^{2-p}(|\hat{x}|^{p-2}\hat{x} - |\hat{y}|^{p-2}\hat{y}, \hat{x} - \hat{y}) \geq (p-1)|\hat{x} - \hat{y}|^2, \quad \forall \hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}^n,$$

d'où

$$\Big(\big(|\hat{x}| + |\hat{y}|\big)^p\Big)^{\frac{2-p}{2}}\Big((|\hat{x}|^{p-2}\hat{x} - |\hat{y}|^{p-2}\hat{y}, \hat{x} - \hat{y})\Big)^{\frac{p}{2}} \geq (p-1)^{\frac{p}{2}}|\hat{x} - \hat{y}|^p,$$

en utilisant l'inégalité (4.33) (car $p > \frac{6}{5} > 1$) on obtient

$$C_p|\hat{x}-\hat{y}|^p \leq \Big((|\hat{x}|^{p-2}\hat{x}-|\hat{y}|^{p-2}\hat{y},\hat{x}-\hat{y})\Big)^{\frac{p}{2}}\Big(|\hat{x}|^p+|\hat{y}|^p\Big)^{\frac{2-p}{2}}, \quad (4.280)$$

où

$$C_p = \frac{(p-1)^{\frac{p}{2}}}{2^{(p-1)\frac{(2-p)}{2}}}.$$

D'autre part, en utilisant le même raisonnement que dans l'étude de la monotonie de $\mathcal{A}$ (cas $1 < p < 2$) avec

$$\alpha = 2\tilde{\mu}(\theta, \mathbf{u}_n + \upsilon_0\xi, |D(\overline{\upsilon}_n + \upsilon_0\xi)|), \quad \beta = 2\tilde{\mu}(\theta, \mathbf{u}_n + \upsilon_0\xi, |D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi)|),$$

dans (4.274) on obtient

$$\begin{aligned}
&[\mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{\upsilon}_n - \mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{\upsilon}, \overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon}] \\
&\geq \mu_0 \int_0^T \int_\Omega \Big(|D(\overline{\upsilon}_n + \upsilon_0\xi)|^{p-2}D(\overline{\upsilon}_n + \upsilon_0\xi) - |D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi)|^{p-2}D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi)\Big) \\
&: (D(\overline{\upsilon}_n + \upsilon_0\xi) - D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi))\, dx\, dt.
\end{aligned}$$

Avec (4.280) on a

$$\begin{aligned}
&C_p \int_0^T \int_\Omega |D(\overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon})|^p\, dx\, dt \\
&\leq \int_0^T \int_\Omega \Big(\Big(|D(\overline{\upsilon}_n + \upsilon_0\xi)|^{p-2}D(\overline{\upsilon}_n + \upsilon_0\xi) - |D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi)|^{p-2}D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi)\Big) \\
&: \big(D(\overline{\upsilon}_n + \upsilon_0\xi) - D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi)\big)\Big)^{\frac{p}{2}}\Big(|D(\overline{\upsilon}_n + \upsilon_0\xi)|^p + |D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi)|^p\Big)^{\frac{2-p}{2}}\, dx\, dt,
\end{aligned}$$

en utilisant les inégalités de Hölder en espace et en temps on obtient

$$\begin{aligned}
&C_p\|D(\overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon})\|^p_{L^p(0,T;(L^p(\Omega))^9)} \\
&\leq \Big(\int_0^T \int_\Omega \big(|D(\overline{\upsilon}_n + \upsilon_0\xi)|^{p-2}D(\overline{\upsilon}_n + \upsilon_0\xi) - |D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi)|^{p-2}D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi)\big) \\
&: \big(D(\overline{\upsilon}_n + \upsilon_0\xi) - D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi)\big)\, dx\, dt\Big)^{\frac{p}{2}} \\
&\times\Big(\int_0^T \int_\Omega \big(|D(\overline{\upsilon}_n + \upsilon_0\xi)|^p + |D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0\xi)|^p\big)\, dx\, dt\Big)^{\frac{2-p}{2}},
\end{aligned}$$

d'où

$$
\begin{aligned}
&(C_p)^{\frac{2}{p}}\|D(\overline{\upsilon}_n-\overline{\upsilon})\|^2_{L^p(0,T;(L^p(\Omega))^9)}\\
&\leq\int_0^T\int_\Omega\Big(|D(\overline{\upsilon}_n+\upsilon_0\xi)|^{p-2}D(\overline{\upsilon}_n+\upsilon_0\xi)-|D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)|^{p-2}D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)\Big)\\
&:\big(D(\overline{\upsilon}_n+\upsilon_0\xi)-D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)\big)\,dx\,dt\\
&\times\Big(\|D(\overline{\upsilon}_n+\upsilon_0\xi)\|^p_{L^p(0,T;(L^p(\Omega))^9)}+\|D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)\|^p_{L^p(0,T;(L^p(\Omega))^9)}\Big)^{\frac{2-p}{p}}.
\end{aligned}
$$

Puisque $0<\frac{2-p}{p}<\frac{2}{3}<1$ (car $\frac{6}{5}<p<2$), en utilisant (4.40) on obtient

$$
\begin{aligned}
&(C_p)^{\frac{2}{p}}\|D(\overline{\upsilon}_n-\overline{\upsilon})\|^2_{L^p(0,T;(L^p(\Omega))^9)}\\
&\leq\int_0^T\int_\Omega\Big(|D(\overline{\upsilon}_n+\upsilon_0\xi)|^{p-2}D(\overline{\upsilon}_n+\upsilon_0\xi)-|D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)|^{p-2}D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)\Big)\\
&:\big(D(\overline{\upsilon}_n+\upsilon_0\xi)-D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)\big)\,dx\,dt\\
&\times\Big(\|D(\overline{\upsilon}_n+\upsilon_0\xi)\|^{2-p}_{L^p(0,T;(L^p(\Omega))^9)}+\|D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)\|^{2-p}_{L^p(0,T;(L^p(\Omega))^9)}\Big).
\end{aligned}
$$

Donc, avec $\|D(\overline{\upsilon}_n+\upsilon_0\xi)\|_{L^p(0,T;(L^p(\Omega))^9)}$ ou $\|D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)\|_{L^p(0,T;(L^p(\Omega))^9)}$ non nul on obtient

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T\int_\Omega\Big(|D(\overline{\upsilon}_n+\upsilon_0\xi)|^{p-2}D(\overline{\upsilon}_n+\upsilon_0\xi)-|D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)|^{p-2}D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)\Big)\\
&:\big(D(\overline{\upsilon}_n+\upsilon_0\xi)-D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)\big)\,dx\,dt\\
&\geq(C_p)^{\frac{2}{p}}\frac{\|D(\overline{\upsilon}_n-\overline{\upsilon})\|^2_{L^p(0,T;(L^p(\Omega))^9)}}{\|D(\overline{\upsilon}_n+\upsilon_0\xi)\|^{2-p}_{L^p(0,T;(L^p(\Omega))^9)}+\|D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)\|^{2-p}_{L^p(0,T;(L^p(\Omega))^9)}},
\end{aligned}
$$

d'où

$$
\begin{aligned}
&[\mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{\upsilon}_n-\mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{\upsilon},\overline{\upsilon}_n-\overline{\upsilon}]\\
&\geq\mu_0(C_p)^{\frac{2}{p}}\frac{\|D(\overline{\upsilon}_n-\overline{\upsilon})\|^2_{L^p(0,T;(L^p(\Omega))^9)}}{\|D(\overline{\upsilon}_n+\upsilon_0\xi)\|^{2-p}_{L^p(0,T;(L^p(\Omega))^9)}+\|D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)\|^{2-p}_{L^p(0,T;(L^p(\Omega))^9)}}.
\end{aligned}
$$

D'autre part, avec (4.27) on a

$$
\begin{aligned}
&\|D(\overline{\upsilon}_n+\upsilon_0\xi)\|^{2-p}_{L^p(0,T;(L^p(\Omega))^9)}+\|D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)\|^{2-p}_{L^p(0,T;(L^p(\Omega))^9)}\\
&\leq\Big(\|\overline{\upsilon}_n\|_{L^p(0,T;V^p_{0.div})}+\|\upsilon_0\xi\|_{L^p(0,T;V^p_{\Gamma_1})}\Big)^{2-p}\\
&+\Big(\|\overline{\upsilon}\|_{L^p(0,T;V^p_{0.div})}+\|\upsilon_0\xi\|_{L^p(0,T;V^p_{\Gamma_1})}\Big)^{2-p},
\end{aligned}
$$

et de (4.252), (4.254) on obtient

$$\|D(\overline{\upsilon}_n+\upsilon_0\xi)\|^{2-p}_{L^p(0,T;(L^p(\Omega))^9)}+\|D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)\|^{2-p}_{L^p(0,T;(L^p(\Omega))^9)}\leq \tilde{\mathbf{C}}_{\mathbf{0}},$$

d'où

$$[\mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{\upsilon}_n-\mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{\upsilon},\overline{\upsilon}_n-\overline{\upsilon}]\geq\frac{\mu_0(C_p)^{\frac{2}{p}}}{\tilde{\mathbf{C}}_{\mathbf{0}}}\|D(\overline{\upsilon}_n-\overline{\upsilon})\|^2_{L^p(0,T;(L^p(\Omega))^9)}. \quad (4.281)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
&[\mathcal{A}_{\mathbf{u}}\overline{\upsilon}-\mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{\upsilon},\overline{\upsilon}_n-\overline{\upsilon}]=2\int_0^T\int_\Omega\Big(\mu(\theta,\mathbf{u}+\upsilon_0\xi,|D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)|)\\
&-\mu(\theta,\mathbf{u}_n+\upsilon_0\xi,|D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)|)\Big)|D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)|^{p-2}D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi):D(\overline{\upsilon}_n-\overline{\upsilon})dx\,dt\\
&\leq 2\int_0^T\int_\Omega\big|\mu(\theta,\mathbf{u}+\upsilon_0\xi,|D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)|)\\
&-\mu(\theta,\mathbf{u}_n+\upsilon_0\xi,|D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)|)\big||D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)|^{p-1}|D(\overline{\upsilon}_n-\overline{\upsilon})|dx\,dt.
\end{aligned}$$

- Si $\|D(\overline{\upsilon}_n-\overline{\upsilon})\|_{L^p(0,T;(L^p(\Omega))^9)}\neq 0$, en utilisant l'inégalité de Young (4.276) avec

$$\begin{aligned}
&a=|D(\overline{\upsilon}_n-\overline{\upsilon})|,\hat{\epsilon}=\|D(\overline{\upsilon}_n-\overline{\upsilon})\|^{2-p}_{L^p(0,T;(L^p(\Omega))^9)}\frac{\mu_0(C_p)^{\frac{2}{p}}}{4\tilde{\mathbf{C}}_{\mathbf{0}}},\\
&C_{\hat{\epsilon}}=\Big(\|D(\overline{\upsilon}_n-\overline{\upsilon})\|^{2-p}_{L^p(0,T;(L^p(\Omega))^9)}\frac{\mu_0(C_p)^{\frac{2}{p}}}{4\tilde{\mathbf{C}}_{\mathbf{0}}}\Big)^{\frac{-1}{p-1}},\\
&b=|\mu(\theta,\mathbf{u}+\upsilon_0\xi,|D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)|)-\mu(\theta,\mathbf{u}_n+\upsilon_0\xi,|D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)|)\big|\\
&\times|D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)|^{p-1},
\end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned}
&[\mathcal{A}_{\mathbf{u}}\overline{\upsilon}-\mathcal{A}_{\mathbf{u}_n}\overline{\upsilon},\overline{\upsilon}_n-\overline{\upsilon}]\leq\frac{\mu_0(C_p)^{\frac{2}{p}}}{2\tilde{\mathbf{C}}_{\mathbf{0}}}\|D(\overline{\upsilon}_n-\overline{\upsilon})\|^2_{L^p(0,T;(L^p(\Omega))^9)}\\
&+2\|D(\overline{\upsilon}_n-\overline{\upsilon})\|^{\frac{p-2}{p-1}}_{L^p(0,T;(L^p(\Omega))^9)}\Big(\frac{\mu_0(C_p)^{\frac{2}{p}}}{4\tilde{\mathbf{C}}_{\mathbf{0}}}\Big)^{\frac{-1}{p-1}}\\
&\times\int_0^T\int_\Omega\big|\mu(\theta,\mathbf{u}+\upsilon_0\xi,|D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)|)\\
&-\mu(\theta,\mathbf{u}_n+\upsilon_0\xi,|D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)|)\big|^{p'}|D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)|^p dx\,dt.
\end{aligned}$$

En remplaçant l'inéquation ci-dessus et (4.281) dans (4.268) on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\|\overline{\upsilon}_n(T)-\overline{\upsilon}(T)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}+\frac{\mu_0(C_p)^{\frac{2}{p}}}{2\tilde{\mathbf{C_0}}}\|D(\overline{\upsilon}_n-\overline{\upsilon})\|^2_{L^p(0,T;(L^p(\Omega))^9)}\\
&\leq 2\|D(\overline{\upsilon}_n-\overline{\upsilon})\|^{\frac{p-2}{p-1}}_{L^p(0,T;(L^p(\Omega))^9)}\Big(\frac{\mu_0(C_p)^{\frac{2}{p}}}{4\tilde{\mathbf{C_0}}}\Big)^{\frac{-1}{p-1}}\\
&\times\int_0^T\int_\Omega\big|\mu(\theta,\mathbf{u}+\upsilon_0\xi,|D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)|)\\
&-\mu(\theta,\mathbf{u}_n+\upsilon_0\xi,|D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)|)\big|^{p'}|D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)|^p dx\,dt.
\end{aligned}$$

En divisant les deux membres de l'inégalité ci-dessus par

$$\|D(\overline{\upsilon}_n-\overline{\upsilon})\|^{\frac{p-2}{p-1}}_{L^p(0,T;(L^p(\Omega))^9)},$$

on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{\mu_0(C_p)^{\frac{2}{p}}}{2\tilde{\mathbf{C_0}}}\|D(\overline{\upsilon}_n-\overline{\upsilon})\|^{p'}_{L^p(0,T;(L^p(\Omega))^9)}\leq 2\Big(\frac{\mu_0(C_p)^{\frac{2}{p}}}{4\tilde{\mathbf{C_0}}}\Big)^{\frac{-1}{p-1}}\\
&\times\int_0^T\int_\Omega\big|\mu(\theta,\mathbf{u}+\upsilon_0\xi,|D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)|)\\
&-\mu(\theta,\mathbf{u}_n+\upsilon_0\xi,|D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)|)\big|^{p'}|D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)|^p dx\,dt.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Korn (4.46) on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{\mu_0(C_p)^{\frac{2}{p}}(C_{Korn})^{p'}}{2\gamma_1^{p'}\tilde{\mathbf{C_0}}}\|\overline{\upsilon}_n-\overline{\upsilon}\|^{p'}_{L^p(0,T;\mathbf{L}^p(\Omega))}\leq 2\Big(\frac{\mu_0(C_p)^{\frac{2}{p}}}{4\tilde{\mathbf{C_0}}}\Big)^{\frac{-1}{p-1}}\\
&\times\int_0^T\int_\Omega\big|\mu(\theta,\mathbf{u}+\upsilon_0\xi,|D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)|)\\
&-\mu(\theta,\mathbf{u}_n+\upsilon_0\xi,|D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)|)\big|^{p'}|D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)|^p dx\,dt,
\end{aligned}\tag{4.282}$$

rappelons que γ_1 désigne la constante de l'injection continue de $L^p(0,T;V^p_{0.div})$ dans $L^p(0,T;\mathbf{L}^p(\Omega))$.
Remarquons que cette inégalité est encore vraie si $\|D(\overline{\upsilon}_n-\overline{\upsilon})\|_{L^p(0,T;(L^p(\Omega))^9)}=0$ ou si $\|D(\overline{\upsilon}_n+\upsilon_0\xi)\|_{L^p(0,T;(L^p(\Omega))^9)}=\|D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)\|_{L^p(0,T;(L^p(\Omega))^9)}=0$.
Maintenant, on pose

$$\mathcal{W}_n=\big|\mu(\theta,\mathbf{u}+\upsilon_0\xi,|D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)|)-\mu(\theta,\mathbf{u}_n+\upsilon_0\xi,|D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)|)\big|^{p'}|D(\overline{\upsilon}+\upsilon_0\xi)|^p,$$

comme la suite $\mathbf{u}_n \to \mathbf{u}$ fortement dans $L^p(0,T;\mathbf{L}^p(\Omega))$ lorsque $n \to +\infty$ on obtient qu'il existe une sous-suite de $(\mathbf{u}_n)_{n\geq 0}$ qui converge presque partout dans $\Omega \times [0,T]$ et de (4.241) on a

$$\mathcal{W}_n \to 0 \quad \text{presque partout dans} \quad \Omega \times [0,T].$$

Avec (4.240) on a

$$|\mathcal{W}_n| \leq (2\mu_1)^{p'} |D(\overline{\upsilon} + \upsilon_0 \xi)|^p \in L^1(0,T;L^1(\Omega)),$$

et par le théorème de la convergence dominée, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^T \int_\Omega \mathcal{W}_n \, dx \, dt = 0. \tag{4.283}$$

En passant à la limite dans (4.279) et (4.282), en utilisant (4.283) on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \|\overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon}\|_{L^p(0,T;\mathbf{L}^p(\Omega))} \leq 0,$$

c-à-d,

$$\lim_{n\to+\infty} \|\overline{\upsilon}_n - \overline{\upsilon}\|_{L^p(0,T;\mathbf{L}^p(\Omega))} = 0.$$

On a donc obtenu que toutes les sous-suites de $(\overline{\upsilon}_n)_{n\geq 0}$ qui sont fortement convergentes dans $L^p(0,T;\mathbf{L}^p(\Omega))$ ont $\overline{\upsilon}$ pour limite dans les deux cas $p > 2$ et $\frac{6}{5} < p < 2$. Donc avec (4.254) et (4.261) on peut conclure que toute la suite $(\overline{\upsilon}_n)_{n\geq 0}$ est convergente vers $\overline{\upsilon} = \tilde{\Lambda}(\mathbf{u})$, ce qui montre la continuité de $\tilde{\Lambda}$.

Avec théorème du point fixe de Schauder, on obtient que $\tilde{\Lambda}$ admet un point fixe (c-à-d $\tilde{\Lambda}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$). Avec la notation $\tilde{\Lambda}(\mathbf{u}) = \overline{\upsilon}$ on obtient

$$\mathbf{u} = \overline{\upsilon},$$

et

$$[\overline{\upsilon}', \overline{\varphi} - \overline{\upsilon}] + [\mathcal{A}_{\overline{\upsilon}} \overline{\upsilon}, \overline{\varphi} - \overline{\upsilon}] + J(\overline{\varphi}) - J(\overline{\upsilon}) \geq [\overline{f}, \overline{\varphi} - \overline{\upsilon}],$$

donc le problème 4.6 admet au moins une solution $\overline{\upsilon} \in C(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)) \cap L^p(0,T;V^p_{0.div})$ avec $\overline{\upsilon}' \in L^{p'}(0,T;(V^p_{0.div})')$.

□

Théorème 4.11 *On suppose que* $f \in L^{p'}(0,T;\boldsymbol{L}^2(\Omega))$, $k \in L^{p'}(0,T;L^{p'}_+(\omega))$, μ *vérifie* (4.240)-(4.242), $\theta \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $s \in L^{p_0}(0,T;\boldsymbol{L}^{p_0}(\omega))$, $\xi \in W^{1,p'}(0,T)$ *vérifiant* (4.8), *et* $\upsilon_0 \in \boldsymbol{W}^{1,p_0}(\Omega)$ *vérifiant* (4.13), *il existe* $\overline{\upsilon} \in C(0,T;\boldsymbol{L}^2(\Omega)) \cap L^p(0,T;V^p_{0.div})$ *avec* $\overline{\upsilon}' \in L^{p'}(0,T;(V^p_{0.div})')$ *et* $\pi \in H^{-1}(0,T;L^{p'}_0(\Omega))$ *solution du problème* 4.5.

Preuve. D'après l'hypothèse (4.240) sur la viscosité on vérifie que les estimations (4.107), (4.114) dans la proposition 4.3 et le lemme 4.4 respectivement (cas $p > 2$) et aussi les estimations (4.218), (4.219) dans le théorème 4.8 respectivement (cas $\frac{6}{5} < p < 2$) sont encore vraies. Donc, en utilisant le même raisonnement que dans la proposition 4.3, le lemme 4.4 et le théorème 4.4 (cas $p > 2$) et le théorème 4.8 (cas $\frac{6}{5} < p < 2$), on montre les résultats suivants : Pour tout $f \in L^{p'}(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)) \subset L^{p'}(0,T;(V^p_0)')$, on obtient l'existence et l'unicité (à une constante près) d'une fonction $\tilde{\pi}(t) \in L^{p'}(\Omega)$ et de plus $\tilde{\pi} \in C([0,T];L^{p'}_0(\Omega))$ vérifiant pour tout $\tilde{\vartheta} \in \mathbf{D}(\Omega)$

$$< \int_0^t \overline{f}\, d\mathbf{s}, \tilde{\vartheta} >_{(V^p_0)',V^p_0} -(\overline{\upsilon}(t),\tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - \int_0^t a^*(\theta;\overline{\upsilon},\tilde{\vartheta})\, d\mathbf{s} = -(\tilde{\pi}(t), div(\tilde{\vartheta})).$$

Par la densité de $\mathbf{D}(\Omega)$ dans $\mathbf{W}^{1,p}_0(\Omega)$ on a aussi pour tout $\tilde{\vartheta} \in \mathbf{W}^{1,p}_0(\Omega)$

$$< \int_0^t \overline{f}\, d\mathbf{s}, \tilde{\vartheta} >_{(V^p_0)',V^p_0} -(\overline{\upsilon}(t),\tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - \int_0^t a^*(\theta;\overline{\upsilon},\tilde{\vartheta})\, d\mathbf{s} = -(\tilde{\pi}(t), div(\tilde{\vartheta})).$$

On dérive l'équation ci-dessus par rapport à t au sens des distributions, donc avec

$$\pi = \frac{\partial \tilde{\pi}}{\partial t},$$

on obtient pour tout $\tilde{\vartheta} \in \mathbf{W}^{1,p}_0(\Omega)$

$$< \overline{f}, \tilde{\vartheta} >_{(V^p_0)',V^p_0} -(\overline{\upsilon}(t),\tilde{\vartheta})_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - a^*(\theta;\overline{\upsilon},\tilde{\vartheta}) = -(\pi, div(\tilde{\vartheta})).$$

De plus,

$$\int_\Omega \pi dx = 0,$$

et on montre que $\pi \in H^{-1}(0,T;L^{p'}_0(\Omega))$. Finalement, on démontre que $(\overline{\upsilon},\pi)$ est solution du problème 4.5. □

Chapitre 5

Rappels d'analyse fonctionnelle

L'objectif de ce chapitre est de rappeler certaines notions et des résultats fondamentaux utilisés dans cette thèse. Pour ce chapitre on peut prendre Ω désignant un domaine borné lipschitzien de $\mathbb{R}^3$ muni de la mesure de Lebesgue dx.
On va rappeler quelques définitions et résultats sur la topologie faible et les espaces de Sobolev à valeurs réelles et à valeurs vectorielles.

5.1 Topologie faible

Définition 5.1 [21] *On note E un espace de Banach, E' son dual topologique. On appelle topologie faible sur E et que l'on note $\sigma(E, E')$, la topologie la moins fine rendant continues toutes les formes linéaires $f \in E'$.*

Définition 5.2 [21] *Si $x_n \to x$ dans $\sigma(E, E')$, on notera et on dira que $x_n \rightharpoonup x$ converge faiblement vers x dans E.*

Proposition 5.1 [21] *Soit E un espace de Banach et x_n une suite d'éléments de E, alors*

$$x_n \rightharpoonup x \quad pour \quad \sigma(E, E') \Leftrightarrow [< f, x_n > \to < f, x_n > \quad \forall f \in E'],$$

si $x_n \rightharpoonup x$ *pour* $\sigma(E, E')$ *alors* $\|x_n\|$ *est bornée et* $\|x\| \leq \liminf_{n \to +\infty} \|x_n\|$.

Définition 5.3 [21] *Soient E un espace de Banach, E'' son bidual et J l'injection canonique de E dans E''. On dit que E est réflexif si $J(E) = E''$.*

Théorème 5.1 (**Kakutani**)[21] *Soit E un espace de Banach. Alors E est réflexif si et seulement si*

$$B_E = \{x \in E; \|x\| \leq 1\}$$

est compact pour la topologie $\sigma(E, E')$.

Définition 5.4 [21] *Un espace métrique séparable est un espace métrique qui contient un sous ensemble dense et dénombrable.*

5.2 Espace fonctionnels

Les espaces de Sobolev jouent un rôle important dans l'étude des équations aux dérivées partielles elliptiques et paraboliques. Dans la théorie des équations d'évolution paraboliques, il y a lieu de faire jouer en général des rôles distincts à la variable temporelle et aux variables d'espace.

Un domaine lipschitzien (ou domaine avec une frontière lipschitzienne) est un domaine dans un espace euclidien dont la frontière est "suffisamment régulière" dans le sens qu'elle peut localement être représentée comme le graphe d'une fonction continue lipschitzienne. Beaucoup de théorèmes de prolongement de Sobolev demandent que le domaine d'étude soit un domaine lipschitzien. Par conséquent, beaucoup d'équations aux dérivées partielles et de problèmes variationnels sont définis sur des domaines lipschitziens.

5.2.1 Les espaces $L^p(\Omega)$

Dans ce paragraphe, nous donnons immédiatement des définitions, des théorèmes ainsi que des résultats de réflexivité, de séparabilité et de dualité concernant l'espace $L^p(\Omega)$.

Définition 5.5 (Les espaces $\mathcal{L}^p(\Omega)$)[34] *Pour $1 \leq p < \infty$, on note $\mathcal{L}^p(\Omega)$ l'espace des fonctions mesurables u à valeurs réelles telles que*

$$\int_\Omega |u|^p \, dx < \infty,$$

et, pour une telle fonction, on pose

$$\|u\|_p = \Big(\int_\Omega |u|^p \, dx \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour $1 \leq p < \infty$, l'application $u \mapsto \|u\|_p$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}^p(\Omega)$ mais en général ce n'est pas une norme. En effet, $\|u\|_p = 0$ ssi u est nulle presque partout. La relation

$$u \mathcal{R} v \quad \text{ssi} \quad u = v \quad \text{presque partout dans} \quad \Omega$$

est une relation d'équivalence sur $\mathcal{L}^p(\Omega)$.

Définition 5.6 (Les espaces $L^p(\Omega)$)[34] *On définit l'espace $L^p(\Omega)$ comme quotient de l'espace $\mathcal{L}^p(\Omega)$, par le sous-espace vectoriel des fonctions nulles presque partout. Ce quotient identifie donc les fonctions qui sont dans la même classe pour la relation d'équivalence $\mathcal{R}$.*

La semi-norme $\|.\|_p$ sur $\mathcal{L}^p(\Omega)$ définit une norme sur $L^p(\Omega)$ (voir par exemple [21]). Donc

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_p.$$

Définition 5.7 [34] *Soit u une fonction mesurable à valeurs réelles, on dit que u est essentiellement bornée s'il existe $C > 0$ tel que $|u(x)| \leq C$ presque partout dans Ω (c-à-d $mes(\{x; |u(x)| > C\}) = 0$).*

Définition 5.8 (L'espace $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$)[34] *L'espace $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ est défini comme l'espace vectoriel des fonctions essentiellement bornées, muni de la semi-norme*

$$\|u\|_\infty = \inf\{C; |u(x)| \leq C \quad \textit{presque partout sur} \quad \Omega\} = \sup ess\{|u(x)|, x \in \Omega\}.$$

Définition 5.9 (L'espace $L^\infty(\Omega)$)[34] *L'espace $L^\infty(\Omega)$ est comme précédemment, le quotient de $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ par le sous-espace des fonctions nulles presque partout.*

La semi-norme $\|.\|_\infty$ sur $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ définit une norme sur $L^\infty(\Omega)$ (voir par exemple [21]). Donc

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \|u\|_\infty.$$

Théorème 5.2 (**Inégalité de Hölder**)[21] *Soient p et p' deux exposants conjugués ($\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$) tels que $1 \leq p, p' \leq \infty$. Si $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$, alors $fg \in L^1(\Omega)$ et on a*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Dans le cas particulier $p = q = 2$ on obtient l'inégalite de Cauchy-Schwarz

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

Théorème 5.3 (**Théorème de convergence dominée de Lebesgue**)[21] *Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonction de $L^1(\Omega)$. On suppose que*

a) $f_n(x) \to f(x)$ presque partout sur Ω,

b) il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ telle que pour chaque n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ presque partout sur Ω.

Alors $f \in L^1(\Omega)$ et $\|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \to 0$.

Théorème 5.4 (**Fischer-Riesz**) [21] *Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach.*

Théorème 5.5 [21] *Pour tout $1 < p < \infty$, $L^p(\Omega)$ est un espace réflexif.*

Théorème 5.6 [21] *Pour tout $1 \leq p < \infty$, $L^p(\Omega)$ est un espace séparable.*

Définition 5.10 *On désigne par $C_c(\Omega)$ l'espace des fonctions continues à support compact, c-à-d :*

$$C_c(\Omega) = \{u \in C(\Omega); u(x) = 0, \forall x \in \Omega \backslash K \quad où \quad K \subset \Omega \quad est\ un\ compact\}.$$

On désigne par $C^k(\Omega)$ l'espace des fonctions k fois continûment différentiables sur Ω

$$C_c^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_c(\Omega),$$

$$C^\infty(\Omega) = \cap_k C^k(\Omega), \quad C_c^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_c(\Omega).$$

Dans toute la suite, on utilise la notation $\mathcal{D}(\Omega)$ au lieu $C_c^\infty(\Omega)$.

Théorème 5.7 (**Densité**)[21] *L'espace $C_c(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour tout $1 \leq p < \infty$.*

Théorème 5.8 (**Densité**)[21] *L'espace* $\mathcal{D}(\Omega)$ *est dense dans* $L^p(\Omega)$ *pour tout* $1 \leq p < \infty$.

Théorème 5.9 (Comparaison entre les espaces $L^p(\Omega)$**)**[1] *Supposons que* Ω *est de mesure finie et* $1 \leq p \leq r \leq \infty$, *si* $u \in L^r(\Omega)$ *alors* $u \in L^p(\Omega)$ *et*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq |\Omega|^{(\frac{1}{p})-(\frac{1}{r})}\|u\|_{L^r(\Omega)}.$$

Donc, $L^r(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ *avec injection continue.*
Si $u \in L^\infty(\Omega)$, *alors*

$$\lim_{p\to\infty} \|u\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Finalement, si $u \in L^p(\Omega)$ *pour* $1 \leq p < \infty$ *et s'il existe une constante* $C > 0$ *telle que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \quad \textit{pour tout} \quad p \geq 1,$$

alors $u \in L^\infty(\Omega)$ *et*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C.$$

Théorème 5.10 (Dualité dans $L^p(\Omega)$**)** [1] *Soit* p *un réel tel que* $1 < p < \infty$. *Le dual topologique de* $L^p(\Omega)$ *est* $L^{p'}(\Omega)$ *où* p' *est le nombre conjugué de* p *(c-à-d,* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$*).*

Proposition 5.2 [1] *Le dual de* $L^1(\Omega)$ *est* $L^\infty(\Omega)$.

Nous tournons maintenant notre attention sur les notions de convergence dans les espaces $L^p(\Omega)$. La notion naturelle, appelée convergence forte, est celle induite par la norme $\|.\|_{L^p(\Omega)}$. Nous aurons souvent besoin d'une notion plus faible de convergence connue sous le nom de convergence faible (cf. Section 1.1).

Théorème 5.11 [25] *On a*

1 *Si* $u_n \to u$ *dans* $L^p(\Omega)$ *alors* $\|u_n\|_{L^p(\Omega)} \to \|u\|_{L^p(\Omega)}$ *quand* n *tend vers* ∞, $1 \leq p \leq \infty$.

2 *Si* $1 \leq p < \infty$ *et si* $u_n \rightharpoonup u$ *dans* $L^p(\Omega)$ *alors, il existe une constante* $\gamma > 0$ *telle que* $\|u_n\|_{L^p(\Omega)} \leq \gamma$, *de plus* $\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|_{L^p(\Omega)}$ (cf. proposition 5.1).

3 *Si* $1 < p < \infty$ *et s'il existe une constante* $\gamma > 0$ *telle que* $\|u_n\|_{L^p(\Omega)} \leq \gamma$, *alors la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet une sous-suite notée encore* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $u \in L^p(\Omega)$ *telle que* $u_n \rightharpoonup u$ *dans* $L^p(\Omega)$ (cf. théorèmes 5.1 et 5.5).

5.2.2 L'espace de Sobolev à valeurs réelles $W^{1,p}(\Omega)$

Définition 5.11 [21] *Soit* $p \in \mathbb{R}$ *avec* $1 \leq p \leq \infty$, *l'espace de Sobolev* $W^{1,p}(\Omega)$ *est défini par*

$$W^{1,p}(\Omega) = \Big\{ u \in L^p(\Omega), \exists \tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \tilde{g}_3 \in L^p(\Omega) \quad \textit{tels que}$$

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega \tilde{g}_i \varphi_0\, dx, \forall \varphi_0 \in \mathcal{D}(\Omega) \quad \forall i = 1,2,3 \Big\}.$$

Pour $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *on note*

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \tilde{g}_i \quad \textit{et} \quad \nabla u = \Big(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3}\Big).$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ *est muni de la norme*

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{3} \Big\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \Big\|_{L^p(\Omega)} \quad \textit{si} \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

ou parfois de la norme équivalente

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \Big(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{3} \Big\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \Big\|^p_{L^p(\Omega)} \Big)^{\frac{1}{p}} \quad \textit{si} \quad 1 \leq p < \infty.$$

On pose

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

L'espace $H^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire

$$(u,v)_{H^1(\Omega)} = (u,v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{3} \Big(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \Big)_{L^2(\Omega)},$$

la norme associée

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \Big(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{3} \Big\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big\|^2_{L^2(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{2}},$$

est équivalente à la norme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{3} \Big\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big\|_{L^2(\Omega)}.$$

Proposition 5.3 [21] *L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$, $W^{1,p}(\Omega)$ est réflexif pour $1 < p < \infty$ et séparable pour $1 \leq p < \infty$.*

Théorème 5.12 (**Théorème d'injection de Sobolev**) [25] *On a*

— *Si $1 \leq p < 3$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ pour tout $q \in [1, p^*]$ où $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{3}$,*

— *si $p = 3$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ pour tout $q \in [1, +\infty[$,*

— *si $p > 3$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$,*

avec injection continue.

Maintenant, on considère le théorème de compacité de Rellich-Kondrachov suivant :

Théorème 5.13 [25] *On a*

— *Si $p < 3$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ pour tout $q \in [1, p^*[$ où $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{3}$,*

— *si $p = 3$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ pour tout $q \in [1, +\infty[$,*

— *si $p > 3$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$,*

avec injection compacte. En particulier $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ avec injection compacte pour tout p.

Remarque 5.1 [21] - *En dimension 1 d'espace, avec $a, b \in \mathbb{R}$, tout élément de $W^{1,p}(]a, b[)$ (qui est donc une classe de fonctions) peut être assimilé à une fonction continue, au sens où il existe un représentant de la classe qui est continu. Ceci tient au fait qu'en dimension 1, toute fonction de $W^{1,p}(]a, b[)$*

peut s'écrire comme l'intégrale de sa dérivée. Soit $u \in W^{1,p}(]a,b[)$ *; alors il existe une fonction* $\tilde{u} \in C([a,b])$ *telle que*

$$u = \tilde{u} \quad \textit{presque partout sur} \quad]a,b[,$$

$$\tilde{u}(x) = \tilde{u}(y) + \int_y^x u'(z)dz, \quad \forall x, y \in [a,b].$$

- Pour $1 \leq p \leq \infty$*, il existe une constante positive* C *telle que*

$$\|u\|_{L^\infty(a,b)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(a,b)}, \quad \forall u \in W^{1,p}(a,b),$$

autrement dit $W^{1,p}(a,b) \subset L^\infty(a,b)$ *avec injection continue pour tout* $1 \leq p \leq \infty$ *.*

5.2.3 L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$

Définition 5.12 [21] *Soit* $p \in \mathbb{R}$ *avec* $1 \leq p < \infty$*, l'espace* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *désigne la fermeture de* $C_c^1(\Omega)$ *dans* $W^{1,p}(\Omega)$*. On note*

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega).$$

L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme induite par $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach séparable, il est réflexif si $1 < p < \infty$. L'espace $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire de $H^1(\Omega)$.

Remarque 5.2 - *On vérifie aisément à l'aide d'une suite régularisante* ρ_n *que* $\mathcal{D}(\Omega)$ *est dense dans* $W_0^{1,p}(\Omega)$*. Autrement dit on peut utiliser indifféremment* $\mathcal{D}(\Omega)$ *au lieu* $C_c^1(\Omega)$ *dans la définition de* $W_0^{1,p}(\Omega)$ (voir [21] remarque 19 page 171)*.*
- Avec la remarque 21 [21] *page* 173-174 *on obtient que les théorèmes* 5.12 *et* 5.13 *sont vrais pour* $W_0^{1,p}(\Omega)$*.*

On désigne par $W^{-1,p'}(\Omega)$, $p' = \frac{p}{p-1}$, $1 \leq p < \infty$ l'espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$ et par $H^{-1}(\Omega)$ l'espace dual de $H_0^1(\Omega)$.
On identifie $L^2(\Omega)$ et son dual. On a le schéma

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega),$$

avec injection continue et dense.
Pour Ω borné et $\frac{6}{5} \leq p < \infty$ on a

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset W^{-1,p'}(\Omega).$$

avec injection continue et dense.
Dans l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ on a l'inégalité suivante :

Théorème 5.14 (**Inégalité de Poincaré**)[21] *Il existe $C > 0$ telle que*

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad (1 \leq p < \infty),$$

où C ne dépend que de Ω et p.

On déduit de cette inégalité :

Corolaire 5.1 [21] *La semi-norme de $W^{1,p}(\Omega)$ définie par*

$$|v|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)},$$

vérifie dans $W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\|\nabla v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq (C+1)\|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

C'est donc une norme sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ équivalente à la norme $\|.\|_{W^{1,p}(\Omega)}$. Sur $H_0^1(\Omega)$ l'expression $(u,v)_{H_0^1(\Omega)} = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)}$ est un produit scalaire qui induit la norme $\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$ équivalente à la norme $\|v\|_{H^1(\Omega)}$.

5.2.4 L'espace $W^{m,p}(\Omega)$

Définition 5.13 [21] *Soit $m \geq 2$ un entier et soit $1 \leq p \leq \infty$. On définit par récurrence*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in W^{m-1,p}(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega), \forall i = 1,2,3\}.$$

Il revient au même d'introduire

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); \forall \alpha \quad avec \quad |\alpha| \leq m, |\alpha| = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i, \exists g_\alpha \in L^p(\Omega) \quad tel\ que$$

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\}.$$

On note $D^\alpha u = g_\alpha$.
L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ *est muni de la norme*

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{0 \le |\alpha| \le m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}.$$

5.2.5 Espaces de Sobolev fractionnaires $W^{s,p}(\Omega)$

On peut définir une famille d'espaces intermédiaires entre $L^p(\Omega)$ et $W^{1,p}(\Omega)$. Plus précisément si $0 < s < 1$ ($s \in \mathbb{R}$) et $1 \le p < \infty$, on pose

$$W^{s,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega); \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{s + \frac{3}{p}}} \in L^p(\Omega \times \Omega) \right\},$$

muni de la norme naturelle (voir [21], [26], [27])

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \Big(\int_\Omega |u|^p \, dx + \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{sp+3}} \, dx \, dy \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

On définit enfin $W^{s,p}(\Omega)$ pour s réel, s non entier, $s > 1$ comme suit : on écrit $s = m + \sigma$ avec m la partie entière de s, $0 < \sigma < 1$, et on pose

$$W^{s,p}(\Omega) = \{u \in W^{m,p}(\Omega); D^\alpha u \in W^{\sigma,p}(\Omega) \, \forall \alpha \quad \text{avec} \quad |\alpha| = m\},$$

muni de la norme (voir [27], [28])

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \Big(\|u\|^p_{W^{m,p}(\Omega)} + \sum_{|\alpha| = m} \|D^\alpha u\|^p_{W^{\sigma,p}(\Omega)} \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

5.2.6 Trace des fonctions des espaces de Sobolev

Théorème 5.15 [46], [51] *Soit* $1 \le p < \infty$. *Il existe une unique application linéaire continue* $\gamma_0 : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ *qui prolonge l'application de restriction* $u \mapsto u|_{\partial\Omega}$ *définie sur un sous-espace dense* $C^1(\overline{\Omega})$.

Proprietés 5.1 [46] *Les propriétés les plus importantes de la trace sont les suivantes :*

i) Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$*, alors, en fait* $u|_{\partial\Omega} \in W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ *et*

$$\|u|_{\partial\Omega}\|_{W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

ii) Le noyau de l'opérateur trace est $W_0^{1,p}(\Omega)$*, c-à-d,*

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega); \quad u|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

iii) On a la formule de Green :

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v\, dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx + \int_{\partial\Omega} uv(\vec{n}, \vec{e_i})\, d\sigma \quad \forall u, v \in H^1(\Omega),$$

où $d\sigma$ *la mesure superficielle sur* $\partial\Omega$ *et* $\vec{n}$ *est le vecteur unitaire de la normale extérieure à* $\partial\Omega$*,* u *et* v *sont à comprendre comme* $\gamma_0(u)$*,* $\gamma_0(v)$*. Noter que l'intégrale de surface a un sens puisque* $u, v \in L^2(\partial\Omega)$*.*

De plus, dans le cas $p \neq 2$ on a la formule de Green suivante (voir [23], [30]) : Pour $1 \leq p, p' < \infty$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et $v \in W^{1,p'}(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v\, dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx + \int_{\partial\Omega} uv(\vec{n}, \vec{e_i})\, d\sigma.$$

Pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et $v \in (W^{1,p'}(\Omega))^3$ on a (voir [20])

$$\int_\Omega u\, div(v)\, dx + \int_\Omega v \cdot \nabla u\, dx = \int_{\partial\Omega} u(v \cdot n)\, d\sigma.$$

- Suivant [30], si $p \in]1, \infty]$, la trace $\gamma_0 : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ est compacte. Il revient au même de dire que $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ s'injecte de façon compacte dans $L^p(\partial\Omega)$.

5.2.7 Espace de fonctions nulles sur une partie du bord de Ω

On définit

$$W_{\Gamma_1}^{1,p}(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega); \quad u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1\}.$$

Théorème 5.16 ([23] page 281) *On suppose que* $|\Gamma_1| = mes(\Gamma_1) > 0$ *alors il existe une constante* $C > 0$ *telle que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W^{1,p}_{\Gamma_1}(\Omega) \quad (1 \leq p < \infty). \tag{5.1}$$

Preuve. En utilisant les indications données dans [26] Exercice 2.9 page 110 on fait un raisonnement analogue à celui du cas $p = 2$ (voir par exemple [50], [58]). En effet, pour montrer l'inégalité (5.1), notons d'abord que d'après la définition de la norme $W^{1,p}(\Omega)$ c'est équivalent à montrer que

$$\exists C > 1, \quad \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W^{1,p}_{\Gamma_1}(\Omega) \quad (1 \leq p < \infty). \tag{5.2}$$

Procédons par l'absurde : supposons au contraire qu'il existe une suite de fonctions $(u_n)_{n\geq 2}$ de $W^{1,p}_{\Gamma_1}(\Omega)$ telle que

$$\|u_n\|_{W^{1,p}(\Omega)} > n\|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)}.$$

Normant cette suite dans $W^{1,p}(\Omega)$, on a la suite $v_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|_{W^{1,p}(\Omega)}}$ telle que

$$\|v_n\|_{W^{1,p}(\Omega)} = 1, \quad \|\nabla v_n\|_{L^p(\Omega)} < \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 2. \tag{5.3}$$

Le théorème 5.13 indique en particulier que l'injection de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$ est compacte $\big($de toute suite bornée de $W^{1,p}(\Omega)$ on peut extraire une sous-suite convergente fortement dans $L^p(\Omega)\big)$. De (5.3) la suite $(v_n)_{n\geq 2}$ est bornée dans $W^{1,p}(\Omega)$, il existe donc une sous-suite notée encore $(v_n)_{n\geq 2}$ qui converge faiblement dans $W^{1,p}(\Omega)$ et fortement dans $L^p(\Omega)$, donc est en particulier de Cauchy dans $L^p(\Omega)$ c-à-d $\|v_n - v_{n'}\|_{L^p(\Omega)} \to 0$ quand n et n' tendent vers $+\infty$. On en déduit avec (5.3)

$$\|v_n - v_{n'}\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|v_n - v_{n'}\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla(v_n - v_{n'})\|_{L^p(\Omega)} \to 0 \quad n, n' \to +\infty$$

donc $(v_n)_{n\geq 2}$ est une suite de Cauchy dans $W^{1,p}_{\Gamma_1}(\Omega)$. Or $W^{1,p}_{\Gamma_1}(\Omega)$ est complet pour la norme de $W^{1,p}(\Omega)$ (car fermé dans $W^{1,p}(\Omega)$ complet), et $(v_n)_{n\geq 2}$ converge fortement vers un élément $v \in W^{1,p}_{\Gamma_1}(\Omega)$ ($\nabla v_n \to \nabla v$ dans $L^p(\Omega)$ quand n tend vers ∞). De (5.3) et l'unicité de la limite on obtient $\nabla v = 0$. Donc, comme Ω ouvert connexe la fonction v est constante et puisque elle est nulle sur une partie du bord on a $v = 0$: en contradiction avec $1 = \|v_n\|_{W^{1,p}(\Omega)} \to \|v\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ quand n tend vers $+\infty$. D'où le résultat.

□

Remarque 5.3 *D'après la définition de la norme de l'espace* $W^{1,p}(\Omega)$ *et l'inégalité* (5.2) *on a*

$$\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W^{1,p}_{\Gamma_1}(\Omega),$$

donc l'expression $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ *est une norme sur* $W^{1,p}_{\Gamma_1}(\Omega)$ *qui est équivalente à la norme* $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Dans toute la suite on note indifféremment $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ ou ∂_i et on utilise la convention de sommation d'Einstein pour les indices répétés, ces indices sont dit muets par exemple au lieu $(\sum_i a_i b_i)$ on écrit $(a_i b_i)$.
On note $D(\upsilon) = (d_{ij}(\upsilon))_{1\leq i,j\leq 3}$ le tenseur des taux de déformations donné par

$$d_{ij}(\upsilon) = \frac{1}{2}(\partial_j \upsilon_i + \partial_i \upsilon_j) \quad 1 \leq i, j \leq 3,$$

et avec la convention de sommation d'Einstein on a

$$D(\upsilon) : D(\upsilon) = d_{ij}(\upsilon) d_{ij}(\upsilon) = |D(\upsilon)|^2,$$

où $|D(\upsilon)|$ est la norme euclidienne de $D(\upsilon)$.
Notons

$$(L^p(\Omega))^3 = \mathbf{L}^p(\Omega), \quad (W^{1,p}(\Omega))^3 = \mathbf{W}^{1,p}(\Omega), \quad (W^{1,p}_{\Gamma_1}(\Omega))^3 = V^p_{\Gamma_1},$$

$$\|\upsilon\|_{1.p} = \Big(\int_\Omega |\nabla \upsilon|^p \, dx \Big)^{\frac{1}{p}},$$

et

$$|\upsilon|_{1.p} = \Big(\int_\Omega |D(\upsilon)|^p \, dx \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

La norme de l'espace $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ est défini par

$$\|\upsilon\|_{\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)} = \|\upsilon\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} + \|\upsilon\|_{1.p}.$$

Théorème 5.17 (Inégalité de Korn dans $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$) [49] theo 5.13) *Soit* p *un réel avec* $1 < p < \infty$ *alors*

$$\exists C > 0, \quad \|\upsilon\|^p_{1.p} \quad \leq C\Big(|\upsilon|^p_{1.p} + \|\upsilon\|^p_{\boldsymbol{L}^p(\Omega)} \Big), \quad \forall \upsilon \in \boldsymbol{W}^{1,p}(\Omega). \tag{5.4}$$

Théorème 5.18 (**Inégalité de Korn dans** $V^p_{\Gamma_1}$) *Soit p un réel avec $1 < p < \infty$ alors*

$$\exists C_{Korn} > 0, \quad |v|_{1.p} \geq C_{Korn}\|v\|_{1.p}, \quad \forall v \in V^p_{\Gamma_1}, \tag{5.5}$$

avec $|\Gamma_1| > 0$.

Preuve.(Voir [81] quand $\Omega \subset \mathbb{R}^2$) Raisonnons par l'absurde. Si le résultat est inexact, il existe une suite $(v_n)_{n>1}$ de $V^p_{\Gamma_1}$ telle que

$$\|v_n\|_{1.p} = 1, \quad |v_n|_{1.p} < \frac{1}{n} \quad \forall n > 1. \tag{5.6}$$

D'où, il existe une sous-suite notée encore $(v_n)_{n>1}$, et $v \in \mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$ telle que

$$v_n \rightharpoonup v \quad \text{faiblement dans} \quad \mathbf{W}^{1,p}(\Omega).$$

L'injection $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega) \subset \mathbf{L}^p(\Omega)$ est compacte, par conséquent quitte à extraire une autre sous-suite notée encore $(v_n)_{n>1}$, on a

$$v_n \to v \quad \text{fortement dans} \quad \mathbf{L}^p(\Omega),$$

donc $(v_n)_{n>1}$ est en particulier de Cauchy dans $\mathbf{L}^p(\Omega)$ c-à-d $\|v_n - v_{n'}\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} \to 0$ quand n et n' tendent vers $+\infty$. On en déduit avec (5.6) et le théorème 5.17

$$\begin{aligned}
&\|v_n - v_{n'}\|_{\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)} = \|v_n - v_{n'}\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} + \|v_n - v_{n'}\|_{1.p} \\
&\leq \|v_n - v_{n'}\|^p_{\mathbf{L}^p(\Omega)} + C^{\frac{1}{p}}\Big(|v_n - v_{n'}|^p_{1.p} + \|v_n - v_{n'}\|^p_{\mathbf{L}^p(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{p}} \to 0 \\
&\text{quand} \quad n, n' \to +\infty
\end{aligned}$$

donc $(v_n)_{n>1}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$, et alors

$$v_n \to v \quad \text{fortement dans} \quad \mathbf{W}^{1,p}(\Omega).$$

Comme $V^p_{\Gamma_1}$ est fermé dans $\mathbf{W}^{1,p}(\Omega)$, on a $v \in V^p_{\Gamma_1}$.
Ainsi,

$$|v_n|_{1.p} \to |v|_{1.p} = \|D(v)\|_{(L^p(\Omega))^{3\times 3}},$$

et la majoration (5.6) implique que $D(v) = 0$. Donc, la fonction v est un déplacement rigide (voir [31]) : il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ tel que

$$v(x) = a + b \wedge x, \quad \text{presque tout} \quad x \in \Omega,$$

où $\wedge$ désigne le produit vectoriel entre b et x.
On a de plus $v = 0$ sur Γ_1. D'après [52], si $b \neq 0$ alors l'ensemble des solutions de l'équation $v(x) = a + b \wedge x = 0$ est au plus une droite, ce qui à nouveau est contradictoire avec le fait que Γ_1 n'est pas réduit à une droite (car $|\Gamma_1| = mes(\Gamma_1) > 0$). Donc $b = 0$, ce qui implique $v(x) = a = 0$ sur Γ_1 d'où $v = 0$, ce qui contredit l'hypothèse $1 = \|v_n\|_{1.p} \to \|v\|_{1.p}$ quand n tend vers ∞, d'où le résultat. □

Maintenant, on définit

$$W = \{w \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}); \quad w = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \cup \Gamma_L\}.$$

$$W^{1,p}_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega) = \{w \in W^{1,p}(\Omega); \quad w = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \cup \Gamma_L\}.$$

Théorème 5.19 *L'espace W est dense dans $W^{1,p}_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega)$.*

Preuve. Montrons que W dense dans $W^{1,p}_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega)$ c-à-d, pour tout $u \in W^{1,p}_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega)$, il existe $u_n \in W$ vérifiant

$$u_n \to u \quad \text{dans} \quad W^{1,p}_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega). \tag{5.7}$$

Notons

$$\Omega_+ = \Omega = \{(x', x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad x' = (x_1, x_2) \in \omega \quad \text{et} \quad 0 < x_3 < h(x')\}.$$

On définit

$$\Omega_- = \{(x', x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad x' = (x_1, x_2) \in \omega \quad \text{et} \quad -h(x') < x_3 < 0\},$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega} &= \Omega_+ \cup \Omega_- \cup \Omega_0 \\ &= \{(x', x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad x' = (x_1, x_2) \in \omega \quad \text{et} \quad -h(x') < x_3 < h(x')\}, \end{aligned}$$

avec

$$\Omega_0 = \{(x', x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad x' = (x_1, x_2) \in \omega \quad \text{et} \quad x_3 = 0\}.$$

En appliquant le lemme IX.2 [21] page 158 avec

$$Q = \tilde{\Omega}, \quad Q_+ = \Omega_+ = \Omega, \quad Q_0 = \Omega_0,$$

on obtient pour $u \in W^{1,p}(\Omega)$ un prolongement par réflexion $u^* \in W^{1,p}(\tilde{\Omega})$ défini par

$$u^*(x', x_3) = \begin{cases} u(x', x_3) & \text{si } x_3 > 0, \\ u(x', -x_3) & \text{si } x_3 < 0. \end{cases}$$

Rappelons que

$$\partial\Omega = \overline{\omega} \cup \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_L,$$

donc par réflexion on obtient

$$\partial\tilde{\Omega} = \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_L \cup \overline{\Gamma}_1^* \cup \overline{\Gamma}_L^*,$$

où $\overline{\Gamma}_1^*$, $\overline{\Gamma}_L^*$ désignent les symétriques de $\overline{\Gamma}_1$, $\overline{\Gamma}_L$ respectivement.
Pour tout $u \in W^{1,p}_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega)$, remarquons que par symétrie on a

$$u^* = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\tilde{\Omega},$$

d'où $u^* \in W_0^{1,p}(\tilde{\Omega})$.
Comme $\mathcal{D}(\tilde{\Omega})$ dense dans $W_0^{1,p}(\tilde{\Omega})$ on sait que pour tout $u^* \in W_0^{1,p}(\tilde{\Omega})$, il existe $u_n^* \in \mathcal{D}(\tilde{\Omega})$ vérifiant

$$u_n^* \to u^* \quad \text{dans} \quad W_0^{1,p}(\tilde{\Omega}),$$

d'où

$$u_n = u_n^*|_\Omega \to u^*|_\Omega = u \quad \text{dans} \quad W^{1,p}_{\Gamma_1 \cup \Gamma_L}(\Omega),$$

d'où (5.7). □

5.2.8 Les espaces $L^p(0, T; B)$

Dans ce paragraphe, on présente brièvement quelques résultats utiles sur les espaces de fonctions à valeurs dans un espace de Banach B. Pour $T > 0$, on définit les espaces suivants :

Définition 5.14 [22] *Soit $1 \leq p \leq \infty$, on note $L^p(0, T; B)$ l'ensemble des (classes de) fonctions $u :]0, T[\to B$ mesurables telles que $t \mapsto \|u(t)\|_B$ est dans $L^p(0, T)$. Pour $u \in L^p(0, T; B)$ on note*

$$\|u\|_{L^p(0,T;B)} = \Big(\int_0^T \|u\|_B^p \, dt \Big)^{\frac{1}{p}}, \quad si \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^\infty(0,T;B)} &= \inf\{C; \|u(t)\|_B \leq C \quad \textit{presque partout sur} \quad]0,T[\} \\ &= \sup_{t\in]0,T[} ess\|u(t)\|_B.\end{aligned}$$

Remarque 5.4 [21] *La plupart des propriétés rencontrées dans le cas à valeurs réelles sont encore valables moyennant des hypothèses convenables sur B (B réflexif, ou bien B séparable). Par exemple, si B réflexif et si $1 < p < \infty$ alors $L^p(0,T;B)$ est réflexif et son dual s'identifie à $L^{p'}(0,T;B')$ où p' est le nombre conjugué de p (c-à-d, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$).*

Théorème 5.20 (**Convergence dominée de Lebesgue**) [29] *Soit $1 \leq p < \infty$ et (f_n) une suite de fonction de $]0,T[\to B$. Si la suite*

a) $f_n(t) \to f(t)$ presque partout sur $]0,T[$,

b) il existe une fonction $g \in L^p(0,T)$ telle que pour chaque $n \geq 1$, $\|f_n(t)\|_B \leq g(t)$ presque partout sur $]0,T[$,

alors $f \in L^p(0,T;B)$ et $f_n \to f$ dans $L^p(0,T;B)$.

Lemme 5.1 (**d'Aubin**)[78], [36] *Soient X_0, X, X_1 trois espaces de Banach, on suppose que X_0 et X_1 sont réflexifs, l'injection $X_0 \subset X$ est continue et compacte, et l'injection $X \subset X_1$ est continue. Soit $T > 0$ et $p_0, p_1 > 1$. On considère l'espace suivant*

$$Y = \{v \in L^{p_0}(0,T;X_0); v' \in L^{p_1}(0,T;X_1)\}$$

muni de la norme

$$\|v\|_Y = \|v\|_{L^{p_0}(0,T;X_0)} + \|v'\|_{L^{p_1}(0,T;X_1)}.$$

Alors, l'injection de Y dans $L^{p_0}(0,T;X)$ est compacte.

Lemme 5.2 (**de Simon**)[73] *Soient X_0, X, X_1 trois espaces de Banach tels que, l'injection $X_0 \subset X$ est continue et compacte, et l'injection $X \subset X_1$ est continue. Si F est borné dans $L^p(0,T;X_0)$ où $1 \leq p < \infty$, et $\frac{\partial F}{\partial t}$ est borné dans $L^1(0,T;X_1)$. Alors F est relativement compact dans $L^p(0,T;X)$.*
Si F est borné dans $L^\infty(0,T;X_0)$ et $\frac{\partial F}{\partial t}$ est borné dans $L^r(0,T;X_1)$ où $r > 1$, alors F est relativement compact dans $C([0,T];X)$.

Proposition 5.4 *Soient B un espace de Banach, B' son dual topologique et H un sous-espace fermé de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ ($\mathbf{L}^2(\Omega) = (L^2(\Omega))^3$) muni du produit scalaire $(.,.)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$ induit par $\mathbf{L}^2(\Omega)$, $H = H'$ son dual topologique. Supposons que $B \subset H$ avec injection continue et dense (d'où $B \subset H = H' \subset B'$). Considérons l'espace*

$$\hat{\mathcal{E}} = \{u \in L^p(0,T;B) \mid u' \in L^{p'}(0,T;B')\},$$

avec $1 < p < \infty$ et p' son exposant conjugué c-à-d $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ muni de la norme

$$\|u\|_{\hat{\mathcal{E}}} = \|u\|_{L^p(0,T;B)} + \|u'\|_{L^{p'}(0,T;B')}.$$

Alors, toutes les fonctions de $\hat{\mathcal{E}}$ admettent un représontant continue de $[0,T] \to H$ et $\hat{\mathcal{E}} \subset C([0,T];H) \subset C([0,T];\mathbf{L}^2(\Omega))$ avec injection continue. Lorsque $\tilde{u}, \tilde{v} \in B \subset B'$ on a

$$< \tilde{u}, \tilde{v} >_{B',B} = (\tilde{u}, \tilde{v})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}.$$

De plus, on a

$$\int_0^T < u', u >_{B',B} \, dt = \frac{1}{2}\|u(T)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} - \frac{1}{2}\|u(0)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}.$$

Preuve. *On fait le même raisonnement que dans* [29] pages 54-56 *où on a $L^2(\Omega)$ au lieu H, d'où le résultat.* □

5.2.9 Espaces de Sobolev à valeurs vectorielles

Définition 5.15 [29] *On note $\mathcal{D}(0,T)$ l'espace des fonctions définies sur $]0,T[$ à valeurs réelles de classe C^∞ et dont le support est compact dans $]0,T[$. Lorsque K est un compact de $]0,T[$, $k \in \mathbb{N}$ et $\phi \in \mathcal{D}(0,T)$, on note*

$$\nu_{k,K}(\phi) = \sup_{0 \le l \le k,\, t \in K} |\phi^{(l)}(t)|.$$

Pour tout compact K de $]0,T[$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\nu_{k,K}$ est une semi-norme sur $\mathcal{D}(0,T)$.

Définition 5.16 [29] *Une distribution vectorielle sur $]0,T[$ à valeurs dans un espace de Banach B est une application linéaire $T : \mathcal{D}(0,T) \to B$ vérifiant :*

pour tout compact K de $]0,T[$, il existe $k \in \mathbb{N}$ et $C_K > 0$ tel que, pour tout $\phi \in \mathcal{D}(0,T)$ à support dans K, on a

$$\|T(\phi)\|_B \leq C_K \nu_{k,K}(\phi).$$

On note $\mathcal{D}'(0,T;B)$ l'espace des distributions sur $]0,T[$ à valeurs dans B.

En théorie des distributions on note en général

$$T(\phi) =< T, \phi >_{\mathcal{D}'(0,T;B),\mathcal{D}(0,T)}, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(0,T).$$

Définition 5.17 [29] *Une suite $(T_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{D}'(0,T;B)$ converge au sens des distributions vers $T \in \mathcal{D}'(0,T;B)$ si, pour tout $\phi \in \mathcal{D}(0,T)$*

$$< T_n, \phi >_{\mathcal{D}'(0,T;B),\mathcal{D}(0,T)} \to < T, \phi >_{\mathcal{D}'(0,T;B),\mathcal{D}(0,T)} .$$

Définition 5.18 [29] *La dérivée d'une distribution $T \in \mathcal{D}'(0,T;B)$ est la distribution $T' \in \mathcal{D}'(0,T;B)$ définie par*

$$< T', \phi >_{\mathcal{D}'(0,T;B),\mathcal{D}(0,T)} = - < T, \phi' >_{\mathcal{D}'(0,T;B),\mathcal{D}(0,T)} \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(0,T).$$

Définition 5.19 [22] *Soit $1 \leq p \leq \infty$. On note $W^{1,p}(0,T;B)$ l'ensemble des (classes de) fonctions $f \in L^p(0,T;B)$ telle que $f' \in L^p(0,T;B)$, au sens de $\mathcal{D}'(0,T;B)$. Pour $f \in W^{1,p}(0,T;B)$ on note*

$$\|f\|_{W^{1,p}(0,T;B)} = \|f\|_{L^p((0,T;B))} + \|f'\|_{L^p((0,T;B)}.$$

Pour $p = 2$ on a

$$H^1(0,T;B) = W^{1,2}(0,T;B).$$

5.3 Inéquations Variationnelles Elliptiques

Soient $\tilde{V}$ un espace de Banach réflexif séparable, $\tilde{V}'$ son dual topologique, $< .,. >_{\tilde{V}',\tilde{V}}$ le crochet de dualité entre $\tilde{V}$ et $\tilde{V}'$.

Définition 5.20 ([56] déf 2.1 page 179)
Un opérateur $A : \tilde{V} \to \tilde{V}'$ est dit pseudo-monotone si :
(i) A est borné,

(ii) lorsque $u_j \rightharpoonup u$ *dans* $\tilde{V}$ *(faible) pour* $j \to +\infty$, *et*

$$\limsup_{j\to+\infty} < Au_j, u_j - u >_{\tilde{V}',\tilde{V}} \leq 0,$$

alors

$$\liminf_{j\to+\infty} < Au_j, u_j - v >_{\tilde{V}',\tilde{V}} \geq < Au, u - v >_{\tilde{V}',\tilde{V}}, \quad \forall v \in \tilde{V}.$$

Proposition 5.5 ([56] propo 2.5 page 179)
Soit $A : \tilde{V} \to \tilde{V}'$. *Alors*

$$A \text{ borné, hémicontinu et monotone} \Rightarrow A \text{ pseudo-monotone.}$$

Définition 5.21 [10] *Soient* $\tilde{X}$ *un espace topologique,* $\tilde{f} : \tilde{X} \to \mathbb{R}$ *une fonction et* $x_0 \in \tilde{X}$. *On dit que* $\tilde{f}$ *est semi-continue supérieurement en* x_0 *si*

$$\limsup_{x\to x_0} \tilde{f}(x) \leq \tilde{f}(x_0).$$

On dit que $\tilde{f}$ *est semi-continue inférieurement en* x_0 *si*

$$\liminf_{x\to x_0} \tilde{f}(x) \geq \tilde{f}(x_0).$$

Remarque 5.5 [10] *Une fonction est continue en un point si et seulement si elle est semi-continue supérieurement et inférieurement en ce point.*

Théorème 5.21 ([56] theo 8.5 page 251)
Soit A *un opérateur pseudo monotone de* $\tilde{V} \to \tilde{V}'$, φ *une fonction convexe propre, semi-continue inférieurement, on suppose qu'il existe* v_* *tel que*

$$\varphi(v_*) < \infty \quad et \quad \lim_{\|v\|\to+\infty} \frac{< Av, v - v_* >_{\tilde{V}',\tilde{V}} + \varphi(v)}{\|v\|} = +\infty.$$

Alors, pour tout $\widehat{f} \in \tilde{V}'$ *il existe* $v \in \tilde{V}$ *solution de l'inéquation variationnelle*

$$< Av, u - v >_{\tilde{V}',\tilde{V}} + \varphi(u) - \varphi(v) \geq < \widehat{f}, u - v >_{\tilde{V}',\tilde{V}}, \quad \forall u \in \tilde{V}.$$

5.4 Semi groupes d'opérateurs

Définition 5.22 ([21] chap 7)
Soit X espace de Banach, on dit que la famille d'opérateurs linéaires $(S(h))_{h\geq 0}$ de $\mathcal{L}(X)$ est un semi groupe (fortement continu) si

(1) $S(0) = Id$,

(2) $\forall h_1, h_2 \geq 0, \quad S(h_1) \circ S(h_2) = S(h_1 + h_2)$,

(3) $\forall x \in X, \quad \lim_{h\to 0} S(h)x = x$,

(3) *est équivalent à* $\lim_{h\to 0} \|S(h)x - x\|_X = 0$.

On dit que $S(h)$ est une contraction si

$$\|S(h)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1.$$

5.4.1 Générateur infinitésimal de semi-groupe

On définit le générateur infinitésimal A de domaine $D(A)$ d'un semi groupe fortement continu $(S(h))_{h\geq 0}$ comme l'opérateur non borné

$$A : D(A) \subset X \to X,$$

où

$$D(A) = \{x \in X : \lim_{h\to 0} \frac{S(h)x - x}{h} \quad \text{existe dans X}\},$$

c-à-d, il existe $x_* \in X$ tel que

$$\left\| \frac{S(h)x - x}{h} - x_* \right\|_X \to 0 \quad \text{quand} \quad h \to 0,$$

et en utilisant cette limite finie on a :

$$\forall x \in D(A), \quad Ax = \lim_{h\to 0} \frac{S(h)x - x}{h}.$$

5.5 Opérateurs compacts

Définition 5.23 *Soient X^* un espace topologique et M une partie de X^*, on dit que M est relativement compacte si son adhérence $\overline{M}$ est une partie compacte de X^*. En d'autres termes, M sous-ensemble de X^* est relativement compact quand de toute suite d'éléments de M on peut extraire une sous-suite convergente, dont la limite est dans X^*.*

Définition 5.24 [21] *Soient E, F deux espaces de Banach, on dit qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}(E,F)$ est compact si $T(B_E)$ est relativement compact pour la topologie forte. En d'autres termes, on dit que T est compact si, pour toute suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E, la suite $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite qui converge.*

Théorème 5.22 *(Théorème de point fixe de Schauder)* [45]
Soient X^* un espace de Banach et Z un ensemble fermé convexe et non vide de X^*. Soit $\mathcal{T}$ une application continue de Z dans Z telle que $\mathcal{T}(Z)$ est relativement compacte. Alors, $\mathcal{T}$ a un point fixe dans Z.

Conclusion et Perspectives

Cette partie conclut la thèse en donnant un bilan du travail effectué et les perspectives envisageables.

Dans notre travail on a traité quelques problèmes elliptiques et paraboliques d'écoulement de fluides non-Newtoniens incompressibles et non isothermes gouvernés par le système de Stokes avec la condition non linéaire de Tresca sur une partie du bord. Le choix de la viscosité dépend à la fois de la température, de la vitesse et du tenseur des taux de déformations et l'apparence du terme de type p-Laplacien dans le tenseur des contraintes se sont avérés être un obstacle majour dans cette thèse pour montrer l'existence et l'unicité.

On a montré :

- L'existence de la solution de l'inéquation variationnelle elliptique décrivant le système de Stokes pour une température donnée quand la viscosité dépend à la fois de la température, de la vitesse et du module du tenseur des taux de déformations.
- L'existence et l'unicité de la température solution de l'équation de la chaleur avec un terme $L^1(\Omega)$ au second membre quand la viscosité dépend à la fois de la température, de la vitesse et du module du tenseur des taux de déformations.
- L'existence d'une solution d'un problème variationnel couplé elliptique entre le système de Stokes et l'équation de la chaleur quand la viscosité ne dépend pas de la vitesse.
- L'existence d'une unique solution d'un problème parabolique quand la viscosité ne dépend pas de la vitesse dans les cas $p = 2$, $p > 2$ et $\frac{6}{5} < p < 2$.
- L'existence de la solution du problème parabolique quand la viscosité dépend à la fois de la température, de la vitesse et du tenseur des taux de déformations dans les cas précédents.

Les principales perspectives de recherche qui apparaissent à l'issue de cette thèse sont diverse. Nous voudrions présenter certains développements possibles des travaux de cette thèse, et plus généralement recenser quelques questions qui sont à notre connaissance ouvertes :

- L'existence de la solution du problème variationnel couplé elliptique

quand la viscosité dépend à la fois de la température, de la vitesse et du tenseur des taux de déformations.

— L'unicité de la solution quand la viscosité dépend à la fois de la température, de la vitesse et du tenseur des taux de déformations.

— L'étude de l'équation de la chaleur parabolique et le couplage avec le système de Stokes instationnaire dans les cas $p = 2$, $p > 2$ et $\frac{6}{5} < p < 2$.

— L'étude asymptotique en espace et en temps des problèmes traités et aussi l'étude numérique de ces problèmes.

— Refaire l'étude du chapitre 2, on néglige le terme $\upsilon \cdot \nabla\theta$ dans notre équation et de prendre la conductivité thermique dépend de la température.

Bibliographie

[1] R.A. Adams. *Sobolev spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[2] H. Al Baba. *Théorie des semi-groupes pour les équations de Stokes et de Navier-Stokes avec des conditions aux limites de type Navier*, thèse de doctorat à l'Université de Pau et des Pays de l'Adour, 2015.

[3] C. Amrouche, V. Girault. *Decomposition of vector spaces and application to the Stokes problem in arbitrary dimension*, Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 44, 109-140, 1994.

[4] C. Amrouche, N.E.H. Seloula. *On the Stokes equations with the Navier–type boundary conditions*, Differential Equations and Applications, Vol. 3, 581-607, 2011.

[5] M. Ayadi, M.K. Gdoura, T. Sassi. *Mixed formulation for Stokes problem with Tresca friction*, Comptes Rendus Mathematique de l'Académie des sciences, Paris, Vol. 348, 1069-1072, 2010.

[6] C. Baiocchi, A. Capelo. *Variational and quasivariational inequalities applications to free boundary problems*, John Wiley and Sons, New York, 1984.

[7] H.A. Barnes. *A review of the slip (wall depletion) of polymer solutions, emulsions and particle suspensions in viscometers : its cause, character, and cure*. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, Vol. 56, 221–251, 1995.

[8] G. Bayada, M. Boukrouche. *On a free boundary problem for Reynolds equation derived from the Stokes system with Tresca boundary conditions*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 282, 212-231, 2003.

[9] A. Bensedik, M. Boukrouche. *Existence result for a strongly coupled problem with heat convection term and Tresca's law*, Journal of Advanced Research in Differential Equations, Vol. 3, 33-53, 2011.

[10] C. Berge. *Espaces topologiques : Fonctions multivoques*, Vol. 3, Dunod, Paris, 1966.

[11] L. Boccardo, T. Gallouët. *Non-linear elliptic and parabolic equations involving measure data*, Journal of Functional Analysis, Vol. 87, 149-169, 1989.

[12] M. Boukrouche, G. Łukaszewicz. *Asymptotic analysis of solutions of a thin film lubrication problem with Coulomb fluid–solid interface law*, International Journal of Engineering Science, Vol. 41, 521–537, 2003.

[13] M. Boukrouche, G. Łukaszewicz. *On a lubrication problem with Fourier and Tresca boundary conditions*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, Vol. 14, 913-941, 2004.

[14] M. Boukrouche, R. El Mir. *On a non-isothermal, non-Newtonian lubrication problem with Tresca law : Existence and the behavior of weak solution*, Nonlinear Analysis Real Worlds Applications, Vol. 9, 674-692, 2008.

[15] M. Boukrouche, I. Boussetouan, L. Paoli. *Non-isothermal Navier-Stokes system with mixed boundary conditions and friction law : uniqueness and regularity properties*, Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications, Vol. 102, 168-185, 2014.

[16] M. Boukrouche, I. Boussetouan, L. Paoli. *Existence for non-isothermal fluid flows with Tresca's friction and Cattaneo's heat law*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 427, 499-514, 2015.

[17] M. Boukrouche, I. Boussetouan, L. Paoli. *Unsteady 3D-Navier-Stokes system with Tresca's friction law*, arXiv preprint arXiv :1512.06607, 2015.

[18] I. Boussetouan. *Etude théorique et numérique de quelques problèmes d'écoulements et de chaleur hyperbolique*, thèse de doctorat à l'Université Jean Monnet de Saint-Etienne, 2012.

[19] F. Bouzeghaya. *Analyse de quelques problèmes aux limites en mécanique des milieux continus*, thèse de doctorat à l'Université Ferhat Abbas de Sétif, 2013.

[20] F. Boyer, P. Fabrie. *Mathematical tools for the study of the incompressible Navier-Stokes equations and related models*, Applied Mathematical Sciences, Vol. 183, Springer, New York, 2013.

[21] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle théorie et applications*, Dunod, Paris, 1999.

[22] T. Cazenave, A. Haraux. *Introduction aux problèmes d'évolution semi-linéaires*, Ellipses, Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles, Paris, 1990.

[23] P.G. Ciarlet. *Mathematical elasticity, Volume I : Three-dimensional elasticity*, Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 20, North Holland, 1988.

[24] L. Consiglieri. *Existence for a class of non–Newtonian fluids with a non-local friction boundary condition*, Acta Mathematica Sinica, Vol. 22, 523-534, 2006.

[25] B. Dacorogna. *Introduction to the calculus of variations*, Vol. 13, Imperial College Press, London, 2004.

[26] F. Demengel, G. Demengel. *Espaces fonctionnels, Utilisation dans la résolution des équations aux dérivées partielles*, EDP Sciences, Paris, 2007.

[27] F. Demengel, G. Demengel. *Functional spaces for the theory of elliptic partial differential equations*, Springer-Verlag, London, 2012.

[28] E. Di Nezza, G. Palatucci, E. Valdinoci. *Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces*, Bulletin des Sciences Mathématiques, Vol. 136, 521-573, 2012.

[29] J. Droniou. *Intégration et espaces de Sobolev à valeurs vectorielles*, http ://www-gm3.univ- mrs.fr/polys/gm3-02/index.html, 2001.

[30] J. Droniou. *Quelques résultats sur les espaces de Sobolev*, http ://www-gm3.univ- mrs.fr/polys/gm3-03/index.html, 2001.

[31] G. Duvaut, J.L. Lions. *Les inéquations en mécanique et physique*, Dunod, Paris, 1972.

[32] N. El Kissi, J.M. Piaua. *Slip and friction of polymer melt flows*, Rheology Series, Vol. 5, 357–388, 1996.

[33] M. Fang, R.P. Gilbert. *Non-isothermal, non-Newtonian Hele–Shaw flows within Cattaneo's heat flux law*, Mathematical and computer modelling, Vol. 46, 765-775, 2007.

[34] J. Faraut. *Calcul intégral*, EDP Sciences, Paris, 2006.

[35] L.L. Ferrás, J.M. Nóbrega, F.T. Pinho, O.S. Carneiro. *Implementation of a slip boundary condition in a finite volume code aimed to predict fluid flows*, II Conferência Nacional de Métodos Numéricos em Mecânica de Fluidos e Termodinâmica, Universidade de Aveiro, 8-9, 2008.

[36] C. Foias, O. Manley, R. Rosa, R. Temam. *Navier-Stokes equations and turbulence*, Cambridge University Press, Vol. 83, 2001.

[37] J. Fourier. *Théorie analytique de la chaleur*, Firmin Didot, père et fils, Paris, 1822.

[38] J. Frène. *Cours de lubrification*, Université de Poitiers, http :// www.unit.eu/nuxeo/site/esupversions/0d1b8d3f-7b52-4212-975d-45d0f82732a6

[39] H. Fujita. *A mathematical analysis of motions of viscous incompressible fluid under leak or slip boundary conditions*, Mathematical Fluid Mechanics and Modeling, Vol. 888, 199-216, 1994.

[40] H. Fujita, H. Kawarada, A. Sasamoto. *Analytical and numerical approaches to stationary flow problems with leak and slip boundary conditions*, Advances in Numerical Mathematics, Vol. 14, 17-31, 1994.

[41] H. Fujita, H. Kawarada. *Variational inequalities for the Stokes equation with boundary conditions of friction type*, Recent Developments in Domain Decomposition Methods and Flow Problems, Vol. 11, 15-33, 1998.

[42] H. Fujita. *Non-stationary Stokes flows under leak boundary conditions of friction type*, Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 19, 1–8, 2001.

[43] H. Fujita. *Remarks on the Stokes flows under slip and leak boundary conditions of friction type*, Topics in Mathematical Fluid Mechanics, Vol. 10, 73-94, 2002.

[44] H. Fujita. *A coherent analysis of Stokes flows under boundary conditions of friction type*, Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 149, 57-69, 2002.

[45] D. Gilbarg, N.S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*, A Series of Comprehensive Studies in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1977.

[46] V. Girault, P.A. Raviart. *Finite element approximation of the Navier Stokes equations*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1986.

[47] H. Hervet, L. Léger. *Flow with slip at the wall : from simple to complex fluids*, Comptes Rendus Physique de l'Académie des Sciences, Paris, Vol. 4, 241-249, 2003.

[48] S. Itoh, A. Tani. *The initial value problem for the non-homogeneous Navier-Stokes equations with general slip boundary condition*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh : Section A Mathematics, Vol. 130, 827-835, 2000.

[49] N. Kikuchi, J.T. Oden. *Contact problems in elasticity : a study of variational inequalities and finite element methods*, Siam, Philadelphia, 1988.

[50] G. Leborgne. *Approximations variationelles de problèmes aux limites elliptiques et éléments finis*, http ://www.icmc.usp.br/ gustavo.buscaglia/cursos/mefverao/leborgne.pdf, 2003.

[51] H. Le Dert. *Equations aux dérivées partielles non linéaires*, Mathématiques et Applications, Vol. 72, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2013.

[52] F. Legoll, M. Lewin. *Mathématiques des modèles multi-échelles*, http ://cermics.enpc.fr/ legoll/matme.html, 2013.

[53] C. Le Roux, A. Tani. *Steady flows of incompressible Newtonian fluids with threshold slip boundary conditions*, Mathematical Analysis in Fluid and Gas Dynamics, Vol. 1353, 21-34, 2004.

[54] C. Le Roux. *Steady Stokes flows with threshold slip boundary conditions*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, Vol. 15, 1141-1168, 2005.

[55] C. Le Roux, A. Tani, *Steady solutions of the Navier–Stokes equations with threshold slip boundary conditions*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, Vol. 30, 595-624, 2007.

[56] J.L. Lions. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Paris, 1969.

[57] J.L. Lions. *Some problems connected with Navier-Stokes equations*, Academic Press, Vol. 40, 59-84, New York, 1978.

[58] E. Maitre. *Note du cours éléments finis*, http ://www-ljk.imag.fr/membres/Emmanuel.Maitre/lib/exe/fetch.php ?media=cours ensimagef.pdf, 2011.

[59] A. Majda. *Compressible fluid flow and systems of conservation laws in several space variables*, Applied Mathematical Sciences, Vol. 53, Springer-Verlag, New York, 1984.

[60] F. Messelmi, B. Merouani, F. Bouzeghay. *Steady-state thermal Herschel-Bulkley flow with Tresca's friction law*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2010, 1-14, 2010.

[61] F. Murat. *Équations elliptiques non linéaires avec second membre L^1 ou mesure*, 26 éme Congrés National d'Analyse numérique. Les Karellis, 1994.

[62] C.L. Navier. *Mémoire sur les lois du mouvement des fluides*, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France, Vol. 6, 389-440, 1822.

[63] C. Neto, D.R. Evans, E. Bonaccurso, H.J. Butt, V.S.J. Craig. *Boundary slip in Newtonian liquids : a review of experimental studies*, Reports on Progress in Physics, Vol. 68, 2859–2897, 2005.

[64] J. Neustupa, P. Penel. *The Navier-Stokes equation with slip boundary conditions*, Mathematical Analysis in Fluid and Gas Dynamics, Vol. 1536, 46-57, 2007.

[65] J.J. O'Connor, E.F. Robertson. *Claude Louis Marie Henri Navier*, http ://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Navier.html.

[66] J.T. Oden. *Qualitative methods in non linear mechanics*, Prentice Hall, New York, 1986.

[67] A.A. Pahlavan, J.B. Freund. *Effect of solid properties on slip at a fluid-solid interface*, Physical Review E, Vol. 83, 021602, 2011.

[68] R. Pit, H. Hervet, L. Léger. *Friction and slip of a simple liquid at solide surface*, Tribology Letters, Vol. 7, 147-152, 1999.

[69] I.J. Rao, K.R. Rajagopal. *The effect of the slip boundary condition on the flow of fluids in a channel*, Acta Mechanica, Vol. 135, 113–126, 1999.

[70] A. Rejaiba. *Equations de Stokes et de Navier-Stokes avec des conditions aux limites de Navier*, thèse de doctorat à l'Université de Pau et des Pays de l'Adour, 2014.

[71] F. Saidi. *Sur quelques problèmes de lubrification par des fluides newtoniens non isothermes avec des conditions aux bords non linéaires. Etude mathématique et numérique*, thèse de doctorat à l'Université Jean Monnet de Saint-Etienne, 2005.

[72] F. Saidi. *Non-Newtonian flow in a thin film with boundary conditions of Coulomb's type*, ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, Vol. 86, 702-721, 2006.

[73] J. Simon. *Compact sets in the space* $L^p(0,T;B)$, Annali di Matematica Pura ed Applicata, Vol. 146, 65-95, 1987.

[74] T. Sochi. *Slip at fluid-solid interface*, Polymer Reviews, Vol. 51, 309-340, 2011.

[75] K. Takahito. *On a strong solution of the non-stationary Navier–Stokes equations under slip or leak boundary conditions of friction type*, Journal of Differential Equations, Vol. 254, 756-778, 2013.

[76] A. Tani. *The initial value problem for the equations of motion of general fluids with general slip boundary condition*, Mathematical Analysis of Fluid and Plasma Dynamics, Vol. 734, 123-142, 1990.

[77] A. Tani, S. Itoh, N. Tanaka. *The initial value problem for the Navier-Stokes equations with general slip boundary condition*, Journal of Advanced Mathematics and Applications, Vol. 4, 51-69, 1994.

[78] R. Temam. *Navier-Stokes equations, theory and numerical analysis*, North Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Oxford, 1979.

[79] D.C. Tretheway, C.D. Meinharta. *Apparent fluid slip at hydrophobic microchannel walls*, Physics of Fluids, Vol. 14, L9-L12, 2002.

[80] P.L. Viollet, J.P. Chabard, P. Esposito, D. Laurence. *Mécanique des fluides appliquée : écoulements incompressibles dans les circuits, canaux et rivières, autour des structures et dans l'environnement*, Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1998.

[81] L. Wang. *On Korn's inequality*, Journal of Computational Mathematics, Vol. 21, 321-324, 2003.

[82] F.M. White. *Fluid mechanics*, McGraw-Hill, New York, 2002.