Théorie de l'indice pour les familles d'opérateurs G-transversalement elliptiques

Alexandre Baldare

THÈSE POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

En Mathématiques et Modélisation

École doctorale I2S – Information, Structures, Systèmes

Unité de recherche UMR 5149 – IMAG – Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck

Théorie de l'indice pour les familles d'opérateurs G-transversalement elliptiques

Présentée par Alexandre BALDARE
Le 16 Février 2018

Sous la direction de Moulay Tahar BENAMEUR

Devant le jury composé de

Georges SKANDALIS	Professeur	Université Paris Diderot	Président du jury
Michel HILSUM	DR du CNRS	Institut de Mathématiques Jussieu	Rapporteur
Michael PUSCHNIGG	Professeur	Université Aix-Marseille	Rapporteur
Paul-Emile PARADAN	Professeur	Université de Montpellier	Examinateur
Paolo PIAZZA	Professeur	La Sapienza (Rome)	Examinateur
Moulay Tahar BENAMEUR	Professeur	Université de Montpellier	Directeur

UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

Remerciements

Je souhaite commencer par exprimer ma profonde gratitude à mon directeur de thèse, Moulay-Tahar Benameur d'avoir accepté de m'encadrer et de m'avoir proposé un sujet de recherche passionnant. J'aimerais le remercier pour tout le temps qu'il m'a consacré et toutes les discussions enrichissantes que nous avons eues. Je souhaiterais mettre à l'honneur ses qualités exceptionnelles en termes de pédagogie.

Je remercie Michel Hilsum et Michael Puschnigg d'avoir bien voulu rapporter ma thèse. Je vous remercie pour le temps que vous avez passé à cette relecture ainsi que pour les conseils que vous m'avez donnés. Je remercie également Paul-Émile Paradan, Paolo Piazza et Georges Skandalis pour avoir accepté de faire partie de mon jury.

Je tiens à remercier l'Université de Montpellier pour m'avoir accompagné depuis la licence 3 et en particulier tous les enseignants-chercheurs de l'IMAG pour leurs grandes qualités pédagogiques. Je remercie tous les membres de l'IMAG pour leur bonne humeur et leur joie de vivre. En particulier, je tiens à remercier encore une fois Paul-Émile Paradan d'avoir toujours accepté de répondre à mes questions.

Pour leur disponibilité et leur aide précieuse dans mes démarches administratives, un grand merci à Sophie Cazanave-Pin, Myriam Debus, Éric Hugounenq, Bernadette Lacan, Carmela Madonia, Nathalie Quintin et Laurence Roux.

Je n'oublie pas ma petite CPGE du Lycée François Arago de Perpignan qui m'a initié aux mathématiques et à la rigueur scientifique, en particulier Emmanuel Amiot, Sylvie Benet, Monnet Lilian, Luc Valette ainsi que tous les khôlleurs.

J'aimerais remercier les doctorants et postdoctorants de l'IMAG ainsi que tous ceux rencontré en conférence pour tous les bons moments que nous avons passés ensemble. Je citerai parmi eux Paul-Marie Grollemund, Roberta tittarelli et Vito Zennobi.

Je tiens à remercier particulièrement Florent Chave et Paul Bartholmey pour toute l'aide qu'ils m'ont fournie. Un très grand merci à Wenran Liu pour toutes les discussions et échanges que nous avons eus au bureau et en dehors qui m'ont permis d'avancer très vite.

Je voudrais remercier chaleureusement mes parents et tous les membres de ma famille pour m'avoir toujours poussé et soutenu. Je les remercie pour l'éducation qu'ils m'ont donné et pour avoir fait tout ce qui était possible pour faciliter ma réussite. Je ne pourrai faire la liste de tout ce qu'ils ont accompli pour moi. Sans eux je n'aurai jamais eu l'occasion de faire des études. Pour tout cela et bien d'autres choses, je tiens à leur témoigner ma plus profonde gratitude.

J'aimerais remercier tous mes amis qui m'ont soutenu et accompagné pendant toutes ces années. L'importance de leur écoute ne pourra jamais être quantifiée. Parmi eux, je citerai Maryline Aymerich, Guillem Bassegana, Julie Bonnard, Michele Botti, Swan Brun, Fabien Cabrera, Julien Chancho, Jérôme Cuxard, Aurélie Creus, David Dasilva, Gaetan Fernandez, Gabriel Gérard, Yacine Guendouzi, Anthony Jougit, Aboubakr Khallad, Cynthia Knoderer, Anaïs-Taos Himeur, Cindy Lopez, Sonia Lopez, Timothée Mauranyapin, Anthony Milloz, Arnaud Moline, Lucie Morin, Aurélien Moya, Laurent Mula, Lionel Oeillet, Joel Oms, Joan Ortiz, Sébastien Pacault, Matthieu Padilla, Quentin Paron, Adrien Peñas, Alexandre Puyguiraud, Allan Ramon, Rita Riedlebeck, Florian Roméro, Bastien Rongier et Jean-Batiste Vivenzi.

Quelques derniers mots pour remercier Chloé Michelluti qui a su m'épauler et me faire garder le sourire durant la dernière ligne droite. Je te remercie d'avoir été à mes côtés.

Table des matières

Chapitre 0

Introduction

Cette thèse s'inscrit dans le domaine de la théorie de l'indice. Commençons par faire quelques rappels sur ce sujet. Le but est de faire un lien entre des invariants topologiques et des invariants analytiques. Le problème de l'indice est de calculer l'indice d'un opérateur elliptique en termes topologiques. Ce problème fut résolu par M. Atiyah et I. Singer en 1963 dans [6], en particulier ils obtiennent la célèbre formule d'Atiyah-Singer pour l'opérateur de Dirac twisté par un fibré E sur une variété M

$$\mathrm{Ind}(\partial_E) = \int_M \mathrm{Ch}(E) \wedge \hat{A}(M),$$

où $\mathrm{Ch}(E)$ est le caractère de Chern du fibré E et $\hat{A}(M)$ est le $\hat{A}$-genre de M. Quelques années plus tard, ces auteurs ont écrit une série d'articles fournissant une nouvelle preuve qui permettait plusieurs généralisations et applications. La première est la prise en compte de l'action d'un groupe compact G [3]. Dans le cas où un opérateur P est elliptique et G-invariant sur une variété M, l'indice de l'opérateur P est un élément de l'anneau $R(G)$ des représentations virtuelles de G. Dans ce cadre M. Atiyah et I. Singer démontrent le théorème de l'indice

$$\mathrm{Ind}_a^{G,M} = \mathrm{Ind}_t^{G,M},$$

où $\mathrm{Ind}_a^{G,M}$ désigne l'indice analytique donné par la différence formelle du noyau de P et du conoyau de P et $\mathrm{Ind}_t^{G,M}$ désigne l'indice topologique qui est construit en utilisant un G-plongement de M dans un espace euclidien [3]. Par la suite, M. Atiyah et G. Segal ont alors déduit de ce théorème des formules topologiques pour les nombres de Lefschetz associés aux isométries de M, en utilisant un théorème de localisation en K-théorie équivariante [2]. Dans un troisième article [4], M. Atiyah et I. Singer ont déduit la formule cohomologique pour l'indice d'un opérateur elliptique ainsi que des formules cohomologiques pour la formule de Lefschetz. Cette preuve de la formule de l'indice cohomologique fournit une nouvelle preuve du théorème de l'indice obtenu dans [6]. Le quatrième article de cette série est dévoué à la généralisation du théorème de l'indice dans le cadre d'une famille d'opérateurs elliptiques paramétrée par un espace compact, dans ce cas le théorème de l'indice fournit une égalité entre l'indice topologique et l'indice analytique qui a lieu dans la K-théorie de la base de la fibration [5]. Enfin une généralisation importante du théorème de l'indice est le théorème de l'indice pour les feuilletages de A. Connes et G. Skandalis, ici le théorème de l'indice est une égalité dans la K-théorie de la C^*-algèbre du feuilletage [25], voir aussi [23].

Une autre généralisation importante est celle des opérateurs transversalement elliptiques par rapport à l'action d'un groupe, c'est-à-dire elliptiques dans le sens transverse aux orbites de l'action d'un groupe sur une variété. Ce problème a été étudié pour la première fois dans le cadre d'un opérateur P agissant sur une variété M par M. Atiyah (et I. Singer) dans [1], en 1974. Dans [1], M. Atiyah a défini une classe indice et a montré qu'elle vérifie plusieurs propriétés qui la caractérisent. Plus précisément, soient G un groupe de Lie compact, M une G-variété compacte et $P : C^\infty(M, E^+) \to C^\infty(M, E^-)$ un opérateur pseudodifférentiel G-invariant. Notons $\pi : T^*M \to M$ la projection du fibré cotangent et $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ l'algèbre de Lie de G. Rappelons qu'un élément $X \in \mathfrak{g}$ engendre un champ de vecteurs X^*_M sur M.
L'espace transverse $T^*_G M$ est défini comme le sous-espace fermé des covecteurs $\alpha \in T^*M$ qui s'annulent sur les vecteurs tangents aux orbites, c'est-à-dire

$$T^*_G M := \{\alpha \in T^*M | \forall X \in \mathfrak{g},\ \alpha(X^*_M) = 0\}.$$

Définition 0.0.1. L'opérateur P est dit G-transversalement elliptique si son symbole principal $\sigma(P) : \pi^*E^+ \to \pi^*E^-$ est inversible $\forall \xi \in T^*_G M \setminus M$.

Dans [1], M. Atiyah définit l'indice $\mathrm{Ind}_a^{M,G}(P)$ comme une distribution sur G définie par

$$\mathrm{Ind}_a^{M,G}(P)(\varphi) = \int_G \varphi(g)(\mathrm{Tr}_{|\ker P}(g) - \mathrm{Tr}_{|\mathrm{coker} P}(g))dg,\ \forall \varphi \in C^\infty(G).$$

Ensuite, M. Atiyah démontre que l'indice ne dépend que de la classe du symbole de P en K_G-théorie, qu'il vérifie une propriété de multiplicativité, une propriété d'excision et que si l'action de G est libre alors on peut décomposer l'indice comme une somme d'indices d'opérateurs elliptiques sur la variété quotient M/G. Ces différentes propriétés permettent alors de ramener le calcul de l'indice au cas d'un espace euclidien sur lequel un tore agit. M. Atiyah vérifie aussi des conditions de normalisation et montre que toutes ces propriétés permettent de caractériser la flèche indice.
Par la suite, en 1975 G. Kasparov introduit la K-homologie des algèbres de Banach involutive et montre un théorème d'Atiyah-Singer généralisé dans [42]. Par la suite, en 1980, il introduit la K-théorie bivariante pour les C^*-algèbres [43]. C'est cette notion qui a permis de nombreuses généralisations du théorème d'Atiyah-Singer, par exemple le théorème de l'indice pour les feuilletages ([25]) est démontré en utilisant la K-théorie bivariante de Kasparov.
En 1982 dans [41], P. Julg associe à un opérateur G-transversalement elliptique sur la variété compacte M une classe $[P]$ du groupe $\mathrm{KK}(C(M) \rtimes G, \mathbb{C})$ de K-théorie bivariante de Kasparov [43]. La classe indice peut alors être définie comme l'élément de $\mathrm{KK}(C^*G, \mathbb{C})$ obtenu à partir de $[P]$ par restriction de $C(M) \rtimes G$ à C^*G. Dans [41], P. Julg construit pour l'inclusion $H \hookrightarrow G$ d'un tore maximal dans un groupe de Lie compact connexe des éléments $i^* \in \mathrm{KK}(C(X) \rtimes G, C(X) \rtimes H)$ et $i! \in \mathrm{KK}(C(X) \rtimes H, C(X) \rtimes G)$ vérifiant $i^* \otimes_{C(X) \rtimes H} i! = 1_{C(X) \rtimes G}$. L'élément i^* traduit l'inclusion de H dans G tandis que l'élément $i!$ est l'induction. En utilisant ces éléments, P. Julg fournit une nouvelle preuve d'un théorème d'induction donné par M. Atiyah dans [1].
Plus récemment, en 2016, G. Kasparov a étendu cette construction au cadre des actions propres pour un opérateur G-transversalement elliptique d'ordre 0. Dans ce cas, la classe d'un tel opérateur P vit dans le groupe $\mathrm{KK}(C_0(M) \rtimes G, \mathbb{C})$ [45]. Dans cet article, G. Kasparov obtient même un théorème d'indice pour les opérateurs transversalement elliptiques dans le cadre très général des

actions propres, il montre que l'indice d'un opérateur transversalement elliptique peut être obtenu en effectuant un produit de Kasparov de la descente du symbole de l'opérateur par un certain élément qu'il construit.

Parallèlement, cette classe d'opérateurs a été étudié du point de vu de la cohomologie équivariante. La caractérisation axiomatique de l'indice à permis à N. Berline et M. Vergne de démontrer une formule cohomologique pour l'indice d'un opérateur P G-invariant, G-transversalement elliptique en cohomologie équivariante [17]. Pour ce faire, elles introduisent ce qu'elles appellent les symboles transversalement bons. Ces derniers permettent de représenter n'importe quel élément de $\mathrm{K_G}(T^*_G M)$ et de définir un caractère de Chern ayant de bonnes propriétés. Elles obtiennent alors les deux théorèmes suivants :

Théorème 0.0.2 ([17], 1996)**.** *Soit σ un symbole G-transversalement bon. Soit $s \in G$. Notons M^s la sous-variété des points fixes de s et N le fibré normal à M^s dans M et $n_s = \dim M^s$. Il existe une fonction généralisée $\mathrm{Ad}G$-invariante sur G et une seule notée $\mathrm{Ind}^{G,M}_{coh}(\sigma)$, vérifiant la formule intégrale au sens généralisé suivante :*

$$\mathrm{Ind}^{G,M}_{coh}(\sigma)(se^Y) = (2i\pi)^{-n_s} \int_{T^*M^s} \frac{\mathrm{Ch}_s(\mathbb{A}^\omega(\sigma), Y) \wedge \hat{A}^2(T^*M^s, Y)}{D_s(N, Y)}, \text{ pour } Y \in \mathfrak{g}(s) \text{ assez petit.}$$

De plus, la fonction généralisée $\mathrm{Ind}^{G,M}_{coh}(\sigma)$ ne dépend que de la classe de σ dans $\mathrm{K_G}(T^*_G M)$.

Théorème 0.0.3 ([17], 1996)**.** *Pour toute G-variété compacte M, on a :*

$$\mathrm{Ind}^{G,M}_a = \mathrm{Ind}^{G,M}_{coh}.$$

Plus récemment dans [67], P-E. Paradan et M. Vergne ont fourni une relecture de ces formules, utilisant la cohomologie équivariante à coefficients généralisés. L'utilisation de la cohomologie à coefficients généralisés permet en effet de se passer de la notion de symbole transversalement bon.

Dans cette thèse, nous abordons l'étude de la théorie de l'indice pour les familles d'opérateurs pseudodifférentiels G-invariants, G-transversalement elliptiques. Nous avons d'abord démontré toutes les propriétés axiomatiques de notre flèches d'indice énoncées dans [1], et qui deviennent ici des conséquences de plusieurs calculs de produits de Kasparov, ensuite nous avons aussi abordé l'aspect cohomologique de ses résultats et avons obtenu les généralisations attendues des théorèmes de Berline-Vergne-Paradan. Plus précisément, nous avons obtenu les résultats suivant :

— définition d'une flèche indice

— vérification des différentes propriétés : action libre, multiplicativité, excision

— naturalité de la flèche indice
On obtient ici un théorème d'induction ainsi que la compatibilité de la flèche d'indice avec les applications de Gysin.

— indice distributionnel à valeurs dans la cohomologie de la base

— formule de Berline-Vergne dans le cadre des familles G-équivariantes d'opérateurs elliptiques

— formule de Berline-Vergne-Paradan pour les familles G-transversalement elliptiques.

0.1 Résumé des résultats

Ce texte se découpe en quatre chapitres que nous allons à présent décrire plus précisément. Il contient aussi trois annexes.

Chapitre 1

Le but de ce premier chapitre est d'étudier les familles d'opérateurs transversalement elliptiques le long des fibres par rapport à l'action d'un groupe compact du point de vu de la K-théorie bivariante. On se donne un groupe de Lie compact G et une fibration G-équivariante $p : M \to B$. On suppose que G agit trivialement sur B. On commence par rappeler les outils nécessaires à l'étude de cette classe d'opérateurs. Dans un premier temps, on fait un bref rappel sur les familles d'opérateurs pseudodifférentiels sur une fibration et sur l'indice analytique [5].
Ensuite, on rappelle la définition de la C^*-algèbre d'un groupe compact en s'appuyant sur [27], on fait ensuite le lien entre représentation unitaire irréductible de G et C^*G-module projectif de type fini [40]. On rappelle ensuite la construction du $C(B)$-module de Hilbert $\mathcal{E} = \mathcal{E}^{\pm}$ associé à une famille de super-fibrés hermitiens. Le $C(B)$-module hilbertien $\mathcal{E}$ est utilisé dans la définition de la classe indice d'une famille d'opérateurs G-transversalement elliptique le long des fibres.

La classe indice est définie plus précisèment en suivant l'approche de Kasparov [45] et on obtient :

Théorème 0.1.1. *[45] Le triplet* $\Big(\mathcal{E}, \pi, P\Big)$ *définit une classe de* $\mathrm{KK_G}(C^*G, C(B))$ *qui est notre classe indice. Ici* $\pi : C^*G \to \mathcal{L}_{C(B)}(\mathcal{E})$ *est la représentation* G*-équivariante de* C^*G *induite par l'action de* G *sur le super-fibré* $E^{\pm}$*.*

Ainsi, $\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}(P)$ est défini comme la classe $[\mathcal{E}, \pi, P] \in \mathrm{KK_G}(C^*G, C(B))$ et $\mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}(P)$ désigne son image dans $\mathrm{KK}(C^*G, C(B))$.

Supposons que l'action de G commute avec l'action d'un deuxième groupe compact H et que la famille P est invariante par rapport à l'action de H alors on obtient une classe indice $\mathrm{Ind}_{\mathrm{G\times H}}^{M|B}(P) \in \mathrm{KK_{G\times H}}(C^*G, C(B))$. On note $\mathrm{Ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{M|B}}(P)$ sont image dans $\mathrm{KK_H}(C^*G, C(B))$. Cette classe sera utile afin de montrer une propriété de multiplicativité de la classe indice qui est une généralisation de [1].

En utilisant la version non bornée de la KK-théorie [7], on définit une classe indice pour les familles d'opérateurs pseudodifférentiels d'ordre positif G-transversalement elliptiques le long des fibres comme dans le cadre d'un seul opérateur [41], voir aussi [36]. Donnons une définition de famille d'opérateurs pseudodifférentiels d'ordre positif G-transversalement elliptique le long des fibres.

Définition 0.1.2. Soit $P : C^{\infty,0}(M, E^+) \to C^{\infty,0}(M, E^-)$ une famille d'opérateurs pseudodifférentiels d'ordre 1, G-invariante. On dit que P est G-transversalement elliptique le long des fibres si son symbol $\sigma(P) : \pi^*E^+ \to \pi^*E^-$ est inversible sur $T^V_G M$.

On peut alors définir une classe indice en posant :

Définition 0.1.3. On définit la classe indice d'une famille d'opérateurs pseudodifférentiels d'ordre positif, G-invariante, G-transversalement elliptique le long des fibres P, par :

$$\mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}_{\mathrm{G}}(P) = [\mathcal{E}, \pi, P].$$

Remarque 0.1.4. Le lien avec la version borné est fait dans [7], par l'intermédiaire de la transformation de Woronowicz (voir théorème A.3.10). C'est à dire si P est une famille d'opérateurs pseudodifférentiels d'ordre positif, G-invariant transversalement elliptique le long des fibres P, la version borné de son indice est donnée par $\Big[\mathcal{E}, \pi, \dfrac{P}{(1+P^2)^{1/2}}\Big]$.

Une fois la définition de la classe indice posée, suivant [1] l'étape suivante naturelle est de s'intéresser aux propriétés qu'elle possède. On commence par définir les K-multiplicités de la classe indice. Pour ce faire, on définit pour toute représentation irréductible V de G un $C(B)$-module $\mathcal{E}^G_V$ en posant $\mathcal{E}^G_V := (V \otimes \mathcal{E})^G$ et un opérateur P^G_V de $\mathcal{L}_{C(B)}(\mathcal{E}^G_V)$ en posant $P^G_V := (\mathrm{id}_V \otimes P)_{|\mathcal{E}^G_V}$. Le cycle $\left(\mathcal{E}^G_V, P^G_V\right)$ définit alors une classe de $\mathrm{KK}(\mathbb{C}, C(B))$.

Définition 0.1.5. On définit la K-multiplicité $m_P(V)$ dans $\mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}(P)$ d'une représentation irréductible V de G comme le fibré virtuel image de la classe

$$[(\mathcal{E}^G_V, P^G_V)] \in \mathrm{KK}(\mathbb{C}, C(B)),$$

par l'isomorphisme $\mathrm{KK}(\mathbb{C}, C(B)) \cong \mathrm{K}(B)$. Il s'agit donc d'un élément du groupe de K-théorie topologique $\mathrm{K}(B)$ de B.

On montre ensuite que cette classe n'est autre que le produit de Kasparov de $[V] \in \mathrm{KK}(\mathbb{C}, C^*G)$ et de la classe indice $\mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}(P)$.

Proposition 0.1.6. *La classe* $[\mathcal{E}^G_V, P^G_V]$ *est donnée par produit de Kasparov*

$$[V] \underset{C^*G}{\otimes} \mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}(P) \in \mathrm{KK}(\mathbb{C}, C(B)),$$

où V est le C^*G-module projectif de type fini décrit dans [40]. Ainsi la K*-multiplicité de V dans l'indice de P est l'élément de* $\mathrm{K}(B)$ *correspondant à ce produit de Kasparov via l'isomorphisme* $\mathrm{KK}(\mathbb{C}, C(B)) \cong \mathrm{K}(B)$.

On passe ensuite aux diverses propriétés fonctorielles de la classe indice. On commence par vérifier que la classe indice ne dépend que du symbole en $\mathrm{K_G}$-théorie de la famille d'opérateurs P. On a alors la proposition suivante.

Proposition 0.1.7. *La classe indice* $\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}(P)$ *ne dépend que de la classe de* $[\sigma(P)]$ *dans* $\mathrm{K_G}(T_G^V M)$ *et l'indice induit alors un homomorphisme de groupe :*

$$\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}} : \mathrm{K_G}(T_G^V M) \longrightarrow \mathrm{KK_G}(C^*G, C(B)).$$

Plus précisément, la flèche $[\sigma] \mapsto \mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}(P(\sigma))$ *est bien définie. Ici* $P(\sigma)$ *est l'opérateur obtenu par quantification de* σ*.*

L'étape suivante est le cas des actions libres. On suppose que la fibration $p : M \to B$ est une fibration $G \times H$-équivariante et que l'action de $G \times H$ est triviale sur B et que H agit librement sur M. On relie alors l'indice d'un opérateur $G \times H$-transversalement elliptique le long des fibres sur M à l'indice d'un opérateur G-transversalement elliptique le long des fibres sur M/H. On note $\pi^H : M \to M/H$ la projection.

Théorème 0.1.8. *[1] Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{K_G}(T_G^V(M/H)) \arrow[r, "\pi^{H*}"] \arrow[d, "\underline{W}_\alpha^* \otimes"'] & \mathrm{K_{G\times H}}(T_{G\times H}^V M) \arrow[r, "\mathrm{Ind}_G^{\mathrm{M|B}}"] & \mathrm{KK_G}(C^*(G\times H), C(B)) \arrow[d, "\tilde{\chi}_\alpha \otimes_{C^*H}"] \\ \mathrm{K_G}(T_G^V(M/H)) \arrow[rr, "\mathrm{Ind}_G^{\mathrm{M/H|B}}"'] & & \mathrm{KK_G}(C^*G, C(B)). \end{tikzcd}$$

Dit autrement, si $a \in \mathrm{K_G}(T_G^{*V}(M/H))$*, alors* $\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M/H|B}}(\underline{W}_\alpha^* \otimes a) = \tilde{\chi}_\alpha \otimes_{C^*H} \mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}(\pi^{H*}a)$*. En particulier, comme élément de* $\mathrm{Hom}_{R(G)}\Big(R(H) \otimes R(G), \mathrm{KK_G}(C^*G, C(B))\Big)$ *on a :*

$$\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}(\pi^{H*}a) = \sum_{\alpha \in \hat{H}} \tilde{\hat{\chi}}_\alpha \otimes \mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M/H|B}}(\underline{W}_\alpha^* \otimes a),$$

où $\hat{\chi}_\alpha$ *est l'élément associé à* W_α *dans* $\mathrm{KK}(C^*H, \mathbb{C})$ *et* $\tilde{\hat{\chi}}_\alpha$ *son image dans* $\mathrm{KK_G}(C^*H, \mathbb{C})$*.*

On obtient le corollaire suivant faisant le lien avec le cas où la famille est elliptique sur M/H.

Corollaire 0.1.9. *Soit* $p : M \to B$ *une fibration* $G \times H$*-équivariante. Supposons que l'action de* $G \times H$ *soit triviale sur* B *et que l'action de* H *soit libre sur* M*. Alors pour* $a \in \mathrm{K_G}(T^V(M/H))$*, on l'égalité suivante :*

$$\tilde{\chi}_\alpha \otimes_{C^*G} \mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}(\pi^{H*}a) = \mathrm{Ind}_G^{\mathrm{M/H|B}}(\underline{W}_\alpha^* \otimes a),$$

où $\pi^H : M \to M/H$ *est la projection et* $\mathrm{Ind}_G^{\mathrm{M/H|B}}(\underline{W}_\alpha^* \otimes a)$ *est donné par l'indice* G*-équivariant des familles elliptiques le long des fibres de* $M/H \to B$*.*
En particulier, comme élément de $\mathrm{Hom}_{R(G)}\Big(R(H) \otimes R(G), \mathrm{KK_G}(\mathbb{C}, C(B))\Big)$ *on a :*

$$\mathrm{Ind}_G^{\mathrm{M|B}}(\pi^{H*}a) = \sum_{\alpha \in \hat{H}} \tilde{\hat{\chi}}_\alpha \otimes \mathrm{Ind}_G^{\mathrm{M/H|B}}(\underline{W}_\alpha^* \otimes a),$$

où $\hat{\chi}_\alpha$ *est l'élément associé à* W_α *dans* $\mathrm{KK_G}(C^*H, \mathbb{C})$*.*

On étudie ensuite le caractère multiplicatif de la classe indice. Ce théorème est en deux parties. Dans la première partie, on se donne deux fibrations et deux groupes compacts. Soient donc G et H deux groupes compacts, $p : M \to B$ une fibration G-équivariante et $p' : M' \to B'$ une fibration $G \times H$-équivariante. On suppose que l'action de G est triviale sur B et B' et que l'action de H est triviale sur B'. On obtient le théorème de multiplicativité suivant. Dans la seconde partie, on suppose que $B = B'$.

Théorème 0.1.10. *Soient $a \in \mathrm{K_G}(T^V_G M)$ et $b \in \mathrm{K_{G\times H}}(T^V_H M')$. Lorsque $B = B'$ on note $i : M \times_B M' \hookrightarrow M \times M'$.*

1. *L'indice de $a \sharp b \in \mathrm{K_{G\times H}}(T^V_{G\times H}(M \times M'))$ est donné par le produit extérieur des classes indices, c'est-à-dire*
$$\mathrm{Ind}^{\mathrm{M\times M'|B\times B'}}(a\sharp b) = j^G \mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}_{\mathrm{G}}(b) \otimes \mathrm{Ind}^{\mathrm{M'|B'}}(a) \in \mathrm{KK}(C^*H \otimes C^*G, C(B) \otimes C(B')).$$
L'inclusion $T^V_{G\times H}(M \times_B M') \hookrightarrow T^V_{G\times H}(M\times M')$ est une inclusion fermée ($G\times H$-équivariante).
2. *L'indice de $i^*(a\sharp b) \in \mathrm{K_{G\times H}}(T^V_{G\times H}(M \times_B M'))$ est donné par :*
$$\mathrm{Ind}^{\mathrm{M\times_B M'|B}}(i^* a\sharp b) = \mathrm{Ind}^{\mathrm{M\times M'|B\times B}}(a\sharp b) \otimes_{C(B\times B)} [\Delta_B].$$

Dans ce théorème, on suppose que la classe a représente une famille d'opérateurs A G-invariante, G-transversalement elliptiques le long des fibres. Pour la classe b on suppose que la la famille est $G \times H$-invariante mais seulement H-transversalement elliptique le long des fibres. L'application j^G est l'application descente de Kasparov de la KK-théorie G-équivariante d'un couple de G-C^*-algèbres (A, B) vers la KK-théorie du couple de C^*-algèbres $(A \rtimes G, B \rtimes G)$.

On termine notre investigation sur les propriétés de l'indice en regardant la propriété d'excision. On a le théorème suivant :

Théorème 0.1.11. *Soit $j : U \hookrightarrow M$ un G-plongement ouvert. On suppose que $p : M \to B$ est une G-fibration de variétés compactes et que l'action de G sur B est triviale.*

Alors la composition $\mathrm{K_G}(T^V_G U) \xrightarrow{j_*} \mathrm{K_G}(T^V_G M) \xrightarrow{\mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}} \mathrm{KK}(C^*G, C(B))$ *ne dépend pas de j.*

Ce travail sur les propriétés de l'indice donne une version KK-théorique des propriétés de l'indice démontrées dans [1] lorsque la base B de la fibration est réduite à un point.
Lorsqu'on combine les différentes propriétés de l'indice, on peut ramener le problème du calcul de l'indice à une fibration euclidienne $B \times V \to B$ sur laquelle un tore agit sur V et trivialement sur B. Dans un premier temps, on peut supposer que le groupe G est connexe. En effet, notons $i : H \hookrightarrow G$ l'inclusion. Le groupe G est une $G \times H$-variété pour l'action donnée pour g, $g' \in G$ et $h \in H$ par $(g, h) \cdot g' = gg'h^{-1}$. On dispose d'un produit [1] :
$$\mathrm{K_H}\Big(T^V_H M\Big) \otimes \mathrm{K_{G\times H}}\Big(T^*_G G\Big) \to \mathrm{K_{G\times H}}\Big(T^V_{G\times H}(G \times M)\Big).$$
Comme H agit librement sur $G \times M$, l'espace $Y = G \times_H M$ est une variété qui fibre sur B et
$$\mathrm{K_{G\times H}}\Big(T^V_{G\times H}(G \times M)\Big) \cong \mathrm{K_G}\Big(T^V_G Y\Big).$$

L'opérateur $0 : C^\infty(G) \to 0$ est G-transversalement elliptique et $T^*_G G = G \times \{0\}$. De plus, $[\sigma(0)] \in \mathrm{K}_{\mathrm{G}\times\mathrm{H}}(T^*_G G) \cong R(H)$ est la classe du fibré trivial. On peut alors définir une application i_* : $\mathrm{K}_\mathrm{H}(T^V_H M) \to \mathrm{K}_\mathrm{G}(T^V_G Y)$ en composant le produit par $[\sigma(0)]$ avec l'isomorphisme $\mathrm{K}_{\mathrm{G}\times\mathrm{H}}\Big(T^V_{G\times H}(G \times M)\Big) \cong \mathrm{K}_\mathrm{G}\Big(T^V_G Y\Big)$. On obtient alors le théorème suivant :

Théorème 0.1.12. *[1] Le diagramme suivant est commutatif.*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{K}_\mathrm{H}\Big(T^V_H M\Big) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\mathrm{Ind}^{\mathrm{M}|\mathrm{B}}"'] & \mathrm{K}_\mathrm{G}\Big(T^V_G Y\Big) \arrow[d, "\mathrm{Ind}^{\mathrm{Y}|\mathrm{B}}"] \\
\mathrm{KK}(C^*H, C(B)) \arrow[r, "i_*"'] & \mathrm{KK}(C^*G, C(B))
\end{tikzcd}$$

Ici, l'application $i_* : \mathrm{KK}(C^*H, C(B)) \to \mathrm{KK}(C^*G, C(B))$ est le produit par l'élément $i^* \in \mathrm{KK}(C^*H, C^*G)$ construit dans [41].

Dans [1] l'auteur fait la remarque suivante.

Remarque 0.1.13. [1] Tout groupe compact peut être plongé dans un groupe unitaire donc par le théorème précédent, on peut ramener le calcul de l'indice à un groupe G connexe. Il n'est pas en général possible de restreindre à un sous-groupe fermé quelconque. Toutefois si G_0 est la composante de l'identité d'un groupe de Lie compact G alors $T_G M = T_{G_0} M$ et on peut alors restreindre à G_0. Il y a malheureusement une perte d'information puisque l'application naturelle $C^{-\infty}(G) \to C^{-\infty}(G_0)$ n'est pas injective (si G est par exemple fini, c'est la différence entre le nombre de Lefschetz et l'indice).

En utilisant le théorème précèdent, on est alors ramené au cas où le groupe G est connexe. On peut démontrer le théorème suivant qui permet de ramener le calcul de l'indice à celui où le groupe est un tore.

Théorème 0.1.14. *Soit H un tore maximal d'un groupe connexe G. Notons $r = (i_*)^{-1} \circ k$: $\mathrm{K}_\mathrm{G}(T^V_G M) \to \mathrm{K}_\mathrm{H}(T^V_H M)$ la composition de l'homomorphisme k avec l'inverse de i_*. Le digramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{K}_\mathrm{G}(T^V_G M) \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\mathrm{Ind}^{\mathrm{M}|\mathrm{B}}"'] & \mathrm{K}_H(T^V_H M) \arrow[d, "\mathrm{Ind}^{\mathrm{M}|\mathrm{B}}"] \\
\mathrm{KK}(C^*G, C(B)) & \mathrm{KK}(C^*H, C(B)). \arrow[l, "i_*"]
\end{tikzcd}$$

Explicitons les construction du théorème précédent. Si G est un groupe de Lie connexe et H est un tore maximal alors l'espace homogène G/H est une variété complexe donc K-orientée. On dispose alors d'un opérateur de Dolbeaut $\overline{\partial}$ sur G/H dont l'indice G-équivariant est $\mathrm{Ind}(\overline{\partial}) = 1 \in R(G)$. Par multiplicativité de l'indice, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{K}_\mathrm{G}(T^V_G M) \arrow[d, "\mathrm{Ind}^{\mathrm{M}|\mathrm{B}}"'] & \otimes & \mathrm{K}_\mathrm{G}(T^*(G/H)) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Ind}^{\mathrm{G/H}|\star}"] & \mathrm{K}_\mathrm{G}(T^V_G Y) \arrow[d, "\mathrm{Ind}^{\mathrm{Y}|\mathrm{B}}"] \\
\mathrm{KK}(C^*G, C(B)) & \otimes & \mathrm{KK}_\mathrm{G}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \arrow[r] & \mathrm{KK}(C^*G, C(B)).
\end{tikzcd}$$

La multiplication par le symbole $[\sigma(\overline{\partial})] \in \mathrm{K_G}(T^*(G/H))$ induit donc un morphisme

$$k : \mathrm{K_G}(T_G^V M) \to \mathrm{K_G}(T_G^V Y)$$

qui respecte la flèche d'indice.

Le théorème suivant permet de ramener le calcul de l'indice à celui d'une fibration euclidienne $B \times V \to B$, où V est une représentation de G.

Théorème 0.1.15. *[1] Soit $j : M \hookrightarrow M'$ un G-plongement de fibrations sur B avec M compact. Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{K_G}(T_G^V M) \arrow[r, "j_!"] \arrow[d, "\mathrm{Ind^{M|B}}"'] & \mathrm{K_G}(T_G^V M') \arrow[d, "\mathrm{Ind^{M'|B}}"] \\
\mathrm{KK}(C^*G, C(B)) \arrow[r, "="'] & \mathrm{KK}(C^*G, C(B))
\end{tikzcd}$$

L'application $j_!$ est une application de Gysin associée à l'inclusion $j : M \hookrightarrow M'$.. En combinant ces différents théorèmes, le calcul de l'indice se ramène au cas d'une fibration euclidienne $B \times V \to B$ pour l'action d'un tore qui agit trivialement sur B.

Une fois ce travail terminé, notre but était de savoir si l'on pouvait définir un caractère de Chern de la classe indice qui aurait un sens en tant que distribution généralisée, c'est-à-dire à coefficients dans la cohomologie de de Rham $H(B)$ de la base B.

Chapitre 2

Dans ce chapitre, on a commencé par faire un rappel du calcul de la cohomologie cyclique de $C^\infty(G)$. Ensuite, nous avons exploité la puissance du théorème de coefficients universels en KK-théorie [73] et la puissance de l'homologie cyclique local bivariante de M. Puschnigg [70]. En homologie cyclique locale bivariante, nous disposons d'un théorème de coefficients universels [58]. Dans notre cadre nos C^*-algèbres vérifient ces théorèmes de coefficients universels. On obtient alors :

Proposition 0.1.16. *L'indice d'une famille d'opérateurs G-équivariante G-transversalement elliptique est totalement déterminée par ses multiplicités et on a :*

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Ind^{M|B}}(P)) = \sum_{V \in \hat{G}} m_P(V)\chi_V,$$

où $\mathrm{Hom}(\mathrm{Ind^{M|B}}(P))$ désigne l'image de $\mathrm{Ind^{M|B}}(P)$ dans $\mathrm{Hom}(R(G), \mathrm{K}(B))$.

En appliquant le théorème de coefficients universels en homologie locale cyclique bivariante, il vient comme corolaire :

Corollaire 0.1.17. *Le caractère de Chern en homologie locale cyclique de la classe indice* $\mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}(P)$ *d'une famille* G*-invariante* P *d'opérateurs,* G *transversalement elliptique est donné par :*

$$\mathrm{Ch}(\mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}(P)) = \sum_{V\in\hat{G}} \mathrm{Ch}(m_P(V))\chi_V,$$

où $\mathrm{Ch}(m_p(V)) \in H(B)$ *est le caractère de Chern usuel de l'élément* $m_P(V) \in \mathrm{K}(B)$ (*ici on utilise* $\mathrm{HL}(C(B)) \simeq H(B)$).

La suite de notre investigation est de déterminer si ce caractère de Chern converge au sens des distributions à valeurs dans la cohomologie de de Rham $H(B)$ de la base B. Pour ce faire, on utilise un résultat de M. Hilsum et de G. Skandalis [37] qui permet de ramener le problème au cas d'un opérateur pseudodifférentiel G-transversalement elliptique sur l'espace total M. Dans ce cadre, on sait par [1] que l'indice est une distribution sur le groupe G. Plus précisément, on couple la classe indice avec une classe de K-homologie de la base B, cette dernière se représente par un opérateur elliptique sur B. On calcule ce produit de Kasparov en utilisant [37], on obtient alors que ce produit est représenté par un opérateur pseudodifférentiel G-transversalement elliptique. De ce fait, on déduit que la somme des multiplicités de ce produit de Kasparov entre la classe indice d'une famille d'opérateurs pseudodifférentiels G-transversalement elliptique le long des fibres avec un opérateur elliptique sur la base converge au sens des distributions. En utilisant le fait que le caractère de Chern en homologie locale cyclique bivariante est une application naturelle, on déduit par dualité de Poincaré sur B le théorème suivant si la variété B est orientée.

Théorème 0.1.18. *On suppose que* B *est orientée. Le caractère de Chern en homologie locale cyclique de la classe indice d'un opérateur pseudodifférentiel* P G*-invariant,* G*-transversalement elliptique le long des fibres est une distribution à valeurs dans la cohomologie de de Rham paire de* B*. On a alors*

$$\mathrm{Ch}(\mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}(P)) = \sum_{V\in\hat{G}} \mathrm{Ch}(m_P(V))\chi_V \in C^{-\infty}(G, H^{2*}(B)).$$

On utilise ici le fait que la cohomologie de de Rham d'une variété est isomorphe à sa K-théorie tensorisée par $\mathbb{C}$ et que l'homologie de de Rham d'une variété est isomorphe à la K-homologie tensorisée par $\mathbb{C}$. Remarquons que dans le cas où B est un point, on retrouve le fait que le caractère de Chern-Connes de la classe indice d'un opérateur G-invariant, G-transversalement elliptique en cohomologie cyclique périodique, coïncide avec la distribution d'Atiyah, vue comme trace sur $C^\infty(G)$.

Chapitre 3

Le troisième chapitre est une étape dans le but d'appréhender les formules de Berline-Vergne dans le cadre transversalement elliptique le long des fibres. On se donne une fibration G-équivariante $p : M \to B$. Le but de ce chapitre est d'obtenir des formules de Berline-Vergne dans le cas elliptique le long des fibres de p. Pour ce faire, on suit l'approche de N. Berline et M. Vergne de [15]. Plus précisément, dans une première partie on rappelle la formule de localisation de J.-M.-Bismut en cohomologie équivariante. Dans une deuxième partie, on fait quelques rappels sur la localisation de M. Atiyah et G. Segal en K-théorie équivariante. Dans une troisième partie, on donne les définitions des différentes cohomologies équivariantes que l'on utilisera. On aborde ensuite les classes caractéristiques équivariantes définies à l'aide de super-connexions équivariantes. En particulier, on rappelle la définition des classes de Chern équivariantes, du $\hat{A}$-genre équivariant ainsi que les définitions des formes équivariantes de localisation. Dans une quatrième partie, on arrive aux formules de Berline-Vergne en cohomologie équivariante. Cette troisième partie se découpe en deux parties. Dans une première on commence par regarder le cas où l'action du groupe sur la base est triviale, dans une seconde, on traite le cas général. Énonçons la formule obtenue dans le cas général.

Théorème 0.1.19. *On suppose que B est orientée. Soient $s \in G$ et $X \in \mathfrak{g}(s)$, on note g l'élément se^X. On suppose que X est assez petit, de sorte que $(M^s)^X = M^g$. On note N_s le fibré normal de M^s dans M. L'égalité suivante est alors vérifiée dans la cohomologie $H(B^s, d_X)$:*

$$\mathrm{Ch}_s\Big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}(\sigma), X\Big) = \int_{T^V M^s|B^s} \frac{\mathrm{Ch}_s(\sigma, X) \wedge \mathrm{Td}(T^V M^s \otimes \mathbb{C}, X)}{D_s(N_s \cap T^V M, X)}.$$

Cette formule est une généralisation de la formule de N. Berline et M. Vergne de [15] au cadre des familles d'opérateurs. La preuve repose sur un théorème de Lefschetz pour les familles prouvé dans [11], ce dernier est une conséquence du procédé de localisation d'Atiyah-Segal en K-théorie équivariante. On applique ensuite la formule cohomologique calculant le caractère de Chern de l'indice d'une famille d'opérateurs d'Atiyah et Singer [5]. On termine ensuite la preuve en appliquant la formule de localisation de Bismut qui généralise au cadre des fibrations, la formule de localisation décrite dans [15]. Cette formule permet d'espérer obtenir une formule similaire dans le cadre transversalement elliptique le long des fibres comme dans le cadre d'un opérateur sur une variété [17]. Ce projet est réalisé dans le chapitre 4.
Dans une dernière partie, on fait le lien entre la formule de [15] et celle obtenue dans le cas particulier d'une G-fibration homogène $p : M := P \times_H F \to B$, où P est un H-fibré principal sur B. On obtient alors le résultat suivant.

Corollaire 0.1.20. *Soit $X \in \mathfrak{g}(s)$ assez petit. On a l'égalité suivante dans $H(B^s, d_X)$:*

$$\mathrm{Ch}_s(\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}(\tilde{A}), X) = \int_{TF^s} \frac{\mathrm{Ch}_s(\sigma(A), X, \Theta(X)) \wedge \hat{A}^2(TF^s, X, \Theta(X))}{D(\mathcal{N}(F^s, F), X, \Theta(X))}.$$

Ici, $\tilde{A}$ est l'opérateur induit par A sur M et Θ désigne la courbure équivariante d'une 1-forme de connexion G-invariante θ sur P. Donc dans ce cas particulier, la formule obtenue dans le théorème 0.1.19 ci-dessus est une conséquence de la formule de [15].

Chapitre 4

Le dernier chapitre est consacré à la formule de Berline-Vergne-Paradan pour les familles. C'est une application du chapitre 2. On suppose que la variété B est orientée. Le théorème principal de ce chapitre est le suivant.

Théorème 0.1.21. *Soit σ un symbole G-transversalement elliptique le long des fibres de la G-fibration compacte $p : M \to B$ avec B orientée et G-triviale. Notons N^s le fibré normal à M^s dans M.*

1. *Il existe une fonction $\mathrm{Ind}_{coh}^{G,M|B} : \mathrm{K_G}(T_G^V M) \to C^{-\infty}(G, H(B))^G$ et une seule vérifiant les relations locales suivantes :*
$$\mathrm{Ind}_{coh}^{G,M|B}([\sigma])\|_s(Y) = (2i\pi)^{-\dim(M^s|B)} \int_{T^V M^s|B} \frac{\mathrm{Ch}_s(\mathbb{A}^{r^*\omega_s}(\sigma), Y) \wedge \hat{A}^2(T^V M^s, Y)}{D(N^s, Y)},$$
$\forall s \in G$, $\forall Y \in \mathfrak{g}(s)$ assez petit de sorte que les classes équivariantes $\hat{A}^2(T^V M^s, Y)$ et $D(N^s, Y)$ soient définies.
2. *De plus, on a la formule d'indice suivante :*
$$\mathrm{Ind}_{coh}^{G,M|B}([\sigma]) = \mathrm{Ch}(\mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}([\sigma])) \in C^{-\infty}(G, H(B))^G.$$

Dans ce théorème, r désigne l'inclusion de $T^V M^*$ dans T^*M en utilisant la métrique riemannienne et ω désigne la 1-forme de Liouville. On utilise le caractère de Chern construit dans [66] pour une super-connexion particulière. La preuve repose sur la méthode du chapitre 3 qui nous a permis de définir un caractère de Chern distributionnel pour la classe indice. On utilise alors la formule de Berline-Vergne-Paradan démontré dans [67]. Dans [66], les auteurs définissent un caractère de Chern équivariant d'un morphisme de fibrés $\sigma : E^+ \oplus E^-$ sur toute variété N possédant une 1-forme G-invariante λ. Ce caractère de Chern est à support dans l'intersection du support du morphisme σ et des zéros de l'application moment $f_\lambda : N \to \mathfrak{g}$ définie par la 1-forme G-invariante λ par $< f_\lambda(n), X >=< \lambda(n), X_N^*(n) >$, $\forall n \in N$. En particulier, lorsque $N = T^*M$ le caractère de Chern d'un symbole G-transversalement elliptique est défini en utilisant la 1-forme de Liouville. Ce caractère de Chern est donc à support compact, ce qui permet de donner un sens à l'intégration. Les auteurs de [66] montrent aussi que l'on possède une certaine liberté dans le choix de la 1-forme G-invariante utilisée. Cette liberté nous permet alors de modifier la 1-forme de Liouville afin d'obtenir un caractère de Chern pour les symboles G-transversalement elliptiques le long des fibres et de donner un sens à l'intégration.

Annexes

Dans la première annexe on rappelle l'essentiel de la théorie des opérateurs sur les C^*-modules de Hilbert sur la base d'un cours de G. Skandalis [75]. Dans une seconde annexe on fait un bilan sur les théorèmes de coefficients universels en KK-théorie et en homologie cyclique locale de M. Puschnigg [70] dont nous nous servons dans le chapitre 2 afin d'obtenir un caractère de Chern pour la classe indice bien défini. Dans la troisième annexe, on fait quelques rappels d'analyse harmonique. Ces derniers sont utilisés dans le chapitre 2 dans le calcul de la cohomologie cyclique périodique d'un groupe de Lie compact suivant [61], et qui permet d'identifier l'indice distributionnel d'un opérateur avec une classe de cohomologie cyclique périodique. Dans la dernière annexe, on fait de multiples rappels sur la cohomologie équivariante et les classes caractéristiques équivariantes en suivant [12]. On commence par rappeler les différentes notions de base sur les super-espaces et la théorie des super-connexions. On introduit ensuite les différentes notions que l'on utilise dans les formules cohomologiques de l'indice.

Chapitre 1

Familles G-transversalement elliptiques

1.1 Rappels sur les familles d'opérateurs pseudodifférentiels

On reprend ici quelques éléments de [3] et [5]. Soit G un groupe compact. Soit $p : M \to B$ une fibration G-équivariante de variétés compactes, de fibre F une variété compacte. On note $M_b = p^{-1}(b)$ la fibre au-dessus d'un point $b \in B$. On note $T^V M = \ker p_*$ le fibré tangent vertical, c'est un sous-fibré vectoriel de TM et $T^V M^*$ son dual que l'on identifie à un sous-fibré de T^*M, en utilisant une métrique riemannienne G-invariante fixée sur M.

Définition 1.1.1. On appelle famille continue G-équivariante de fibrés vectoriels sur M un fibré vectoriel $\pi : E \to M$ G-équivariant tel que $p \circ \pi : E \to B$ soit une fibration qui pour tout $b \in B$ se restreint en un fibré vectoriel G-équivariant sur la fibre de p.
Ainsi, $\forall b \in B$, $\pi_{|M_b} : E_{|M_b} \to M_b$ est un fibré vectoriel isomorphe à un fibré vectoriel $\tilde{E} \to F$. On notera par la suite E_b la restriction de E à la fibre M_b.

On utilise les notations standards $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N) \in (\mathbb{Z}^+)^N$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i$, $\alpha! = \alpha_1!\alpha_2! \cdots \alpha_N!$, $\partial_x^\alpha = (-i)^{|\alpha|} \dfrac{\partial^{\alpha^1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \dfrac{\partial^{\alpha^N}}{\partial x_N^{\alpha_N}}$ et $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_N^{\alpha_N}$. On note $\mathcal{P}^m(F, \tilde{E}^+, \tilde{E}^-)$ l'ensemble des opérateurs pseudodifférentiels classiques d'ordre m, $P : C^\infty(F, \tilde{E}^+) \to C^\infty(F, \tilde{E}^-)$ et $\overline{\mathcal{P}}^m(F, \tilde{E}^+, \tilde{E}^-)$ sa fermeture relativement à la famille de semi-normes $\|P\|_s$ des opérateurs bornés $P_s : H_s(F, \tilde{E}^+) \to H_{s-m}(F, \tilde{E}^-)$ induits par $P \in \mathcal{P}^m(F, \tilde{E}^+, \tilde{E}^-)$ sur les espaces de Sobolev [3]. On note $\mathrm{Diff}(\tilde{E}^+ \oplus \tilde{E}^-; F)$ le groupe des difféomorphismes de $\tilde{E}^+ \oplus \tilde{E}^-$ qui envoient fibres sur fibres linéairement, $\mathrm{Diff}(\tilde{E}^+, \tilde{E}^-; F)$ le sous-groupe de $\mathrm{Diff}(\tilde{E}^+ \oplus \tilde{E}^-; F)$ des difféomorphismes de $\tilde{E}^+ \oplus \tilde{E}^-$ qui envoient $\tilde{E}^+$ sur $\tilde{E}^+$ et $\tilde{E}^-$ sur $\tilde{E}^-$. Le groupe $\mathrm{Diff}(\tilde{E}^+, \tilde{E}^-; F)$ agit naturellement sur $\mathcal{P}^m(F, \tilde{E}^+, \tilde{E}^-)$ et sur $\overline{\mathcal{P}}^m(F, \tilde{E}^+, \tilde{E}^-)$ par $(g_1, g_2) \cdot P = g_2 \circ P \circ g_1^{-1}$ (voir [5]). On peut alors définir des $\mathrm{Diff}(\tilde{E}^+, \tilde{E}^-; F)$-fibrés principaux sur B, $\mathcal{P}^m(M, E^+, E^-) \to B$ et $\overline{\mathcal{P}}^m(M, E^+, E^-) \to B$ de fibre type $\mathcal{P}^m(F, \tilde{E}^+, \tilde{E}^-)$ et $\overline{\mathcal{P}}^m(F, \tilde{E}^+, \tilde{E}^-)$.

Définition 1.1.2. Une famille continue d'opérateurs P d'ordre m sur M est la donnée d'une section continue de $\mathcal{P}^m(M, E^+, E^-)$, on écrit $P = (P_b)_{b \in B}$.

On dit qu'une famille P est G-équivariante si $g \cdot P = g \circ P \circ g^{-1} = P$, $\forall g \in G$.
On dit que la famille G-équivariante P est elliptique (respectivement G-transversalement elliptique) le long des fibres si pour tout b, l'opérateur P_b est elliptique (respectivement G-transversalement elliptique).

Dire que la famille P est elliptique revient à dire que son symbole principal $\sigma_B(P)$, qui est donné sur chaque fibre par $\sigma(P_b)$ est inversible sur $T^V M^* \setminus M$.

Remarque 1.1.3. Une famille continue P s'identifie localement, sur un ouvert V trivialisant M en $V \times F$, avec une application continue $P_{|V} : V \to \mathcal{P}^m(F, \tilde{E}^+, \tilde{E}^-)$ appelée famille produit.

On note $C^{\infty,0}(M, E)$ les sections de E qui sont C^∞ le long des fibres de p et continues par rapport à la base. Soit P une famille continue G-équivariante et elliptique d'ordre 0. Chaque opérateur P_b se prolonge alors en un opérateur de Fredholm G-invariant sur $L^2(M_b, E_b)$. Ainsi, $\forall b \in B$, $\ker P_b$ est de dimension finie. En supposant que la dimension de $\ker(P_b)$ soit constante sur chaque composante connexe de B, il est facile de vérifier que la famille $\ker P := \Big(\ker(P_b)\Big)_{b \in B}$ définit un fibré vectoriel G-équivariant au-dessus de B. De même $\mathrm{coker} P := \Big(\mathrm{coker}(P_b)\Big)_{b \in B}$ définit alors un fibré vectoriel G-équivariant au-dessus de B. Dans ce cas, on définit l'indice équivariant de P, comme la classe $[\ker(P)] - [\mathrm{coker}(P)] \in \mathrm{K_G}(B)$. Lorsque la dimension de $\ker(P_b)$ n'est pas localement constante, on peut modifier la famille P en une famille $\tilde{P} : C^{\infty,0}(M, E^+) \oplus \mathbb{C}^q \to C^{\infty,0}(M, E^-)$, telle que chaque $\tilde{P}_b$ soit surjectif, voir [5] pour plus de détails.

Définition 1.1.4. L'indice analytique G-équivariant $\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}(P)$ de P est alors défini comme $[\ker \tilde{P}] - [\mathbb{C}^q]$ et cette classe ne dépend pas de la perturbation choisie.

Remarque 1.1.5. Ces constructions sont encore valides même si B n'est pas une variété, il suffit de remplacer $T^V M$ par le fibré tangent le long des fibres de p.

1.2 Indice d'une famille d'opérateurs transversalement elliptiques le long des fibres

Soit encore G un groupe compact. Soit comme avant $p : M \to B$ une fibration G-équivariante de variétés compactes, de fibre F, une variété compacte. On note encore $C^{\infty,0}(M,E)$ les sections de E qui sont C^∞ le long des fibres de p et continues par rapport à la base.
Soit $\tilde{P} : C^{\infty,0}(M,E^+) \to C^{\infty,0}(M,E^-)$ une famille continue d'opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 0 qui est G-équivariante. On suppose que l'opérateur P est G-transversalement elliptique le long des fibres de p. On construit ci-dessous une classe indice associée à P, et vivant dans le groupe $\mathrm{KK}(C^*G, C(B))$ de K-théorie bivariante de G. Kasparov [43]. On commence par rappeler la définition de la C^*-algèbre du groupe C^*G [27]. Puis nous rappellerons comment une représentation irréductible de G peut être vue comme un $L^1(G)$-module projectif de type fini [40].
On adopte comme avant la convention de linéarité en la seconde variable pour les produits scalaires hermitiens.

1.2.1 La C^*-algèbre d'un groupe compact

Il existe sur G une mesure de Haar normalisée invariante par translations à droite et à gauche. Soit $L^1(G)$ l'algèbre de convolution involutive des fonctions intégrables sur G pour cette mesure de Haar. On note $\star$ le produit de convolution. On rappelle que pour tout $f_1,\ f_2 \in L^1(G)$:

$$f_1 \star f_2(g) = \int_G f_1(h) f_2(h^{-1}g)dh \text{ et } f_1^*(g) = \overline{f_1}(g^{-1}).$$

Définition 1.2.1. Soit H un espace de Hilbert. On appelle représentation unitaire continue de G dans H un morphisme du groupe G dans le groupe des unitaires de H qui est continu pour la topologie normique, c'est-à-dire l'application $g \mapsto \pi(g)\xi$ est continue pour la topologie forte de H, $\forall \xi \in H$.
Les fonctions $g \mapsto C_{v,w}(g) = \langle v, \pi(g)w\rangle$ s'appellent les coefficients de la représentation π.
On dit que deux représentations π et π' sont équivalentes s'il existe un unitaire U de H' dans H tel que $U^*\pi U = \pi'$.
La représentation π est dite irréductible si les seuls sous-espaces vectoriels fermés de H stables par π sont $\{0\}$ et H.
On note $\hat{G}$ le dual de G, c'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalence de représentations unitaires irréductibles de G.

Remarque 1.2.2.
Toute représentation unitaire irréductible d'un groupe compact est de dimension finie [72].

Le lemme suivant est classique.

Lemme 1.2.3. *[72] Les coefficients d'une représentation unitaire irréductible (V,π) vérifient la relation*

$$C_{v,w} \star C_{v',w'} = \frac{1}{\dim \pi}\langle v', w\rangle C_{v,w'}.$$

Rappelons que $L^2(G)$ est une représentation unitaire continue λ de G.

Théorème 1.2.4 (Peter-Weyl [69] voir aussi [21])**.** *Soit G un groupe compact. Alors*

$$L^2(G) \simeq \bigoplus_{V \in \hat{G}} V^* \otimes V.$$

Lemme 1.2.5. *Toute représentation unitaire de G s'étend en une $\star$-représentation continue de $L^1(G)$ selon :*

$$\pi(\varphi) = \int_G \varphi(g)\pi(g)dg,\ \forall \varphi \in L^1(G).$$

Pour $v,\ w \in H$, on pose plus précisément $\langle v, \pi(\varphi)w\rangle = \int_G \varphi(g)\langle v, \pi(g)w\rangle dg$.
On définit alors une norme sur $L^1(G)$ en posant :

$$\|f\| := \sup_{\pi \in \hat{G}} \|\pi(f)\|,$$

qui vérifie $\|f\| \leq \|f\|_{L^1}$, $\|f^*\| = \|f\|$ et $\|f^* f\| = \|f^2\|$.

Démonstration. Soient $\varphi,\ \psi \in L^1(G)$. L'opérateur $\pi(\varphi)$ est borné. En effet, d'une part :

$$\begin{array}{ll} |\langle v, \pi(\varphi)w\rangle| & = |\int_G \varphi(g)\langle v, \pi(g)w\rangle dg| \\ & \leq \int_G |\varphi(g)||\langle v, \pi(g)w\rangle| dg. \end{array}$$

D'autre part, π est unitaire, il vient donc :

$$\begin{array}{ll} |\langle v, \pi(\varphi)w\rangle| & \leq \int_G |\varphi(g)|\|v\|\|w\| dg \\ & = \|\varphi\|_{L^1}\|v\|\|w\|. \end{array}$$

Cette inégalité prouve aussi que $\|\pi(\varphi)\| \leq \|\varphi\|_{L^1}$. En utilisant le théorème de Peter-Weyl, on obtient que $\|f\| = 0$ si et seulement si $f = 0$. On a pour $\varphi,\ \psi \in L^1(G)$:

$$\begin{array}{ll} \langle v, \pi(\varphi \star \psi)w\rangle & = \int_G \varphi \star \psi(g)\langle v, \pi(g)w\rangle dg \\ & = \int_G \Big(\int_G \varphi(h)\psi(h^{-1}g)\langle v, \pi(g)w\rangle dh \Big) dg. \end{array}$$

En posant $k = h^{-1}g$ et par un argument classique de Fubini, il vient :

$$\begin{array}{ll} \langle v, \pi(\varphi \star \psi)w\rangle & = \int_G \int_G \varphi(h)\psi(k)\langle v, \pi(hk)w\rangle dh dk \\ & = \langle v, \pi(\varphi) \circ \pi(\psi)w\rangle. \end{array}$$

De même $\pi(\varphi^*) = \pi(\varphi)^*$. En effet :

$$\begin{array}{ll} \langle v, \pi(\varphi^*)w\rangle & = \int_G \bar{\varphi}(h^{-1})\langle v, \pi(h)w\rangle dh \\ & = \int_G \bar{\varphi}(h^{-1})\langle \pi(h^{-1})v, w\rangle dh. \end{array}$$

En changeant h^{-1} en h, le résultat découle. En appliquant le fait que π soit une $\star$-représentation aux propriétés de la norme d'opérateur sur un espace de Hilbert, on obtient le fait que la norme définie est une C^*-norme. □

Définition 1.2.6. La C^*-algèbre du groupe C^*G est définie comme étant la complétion de $L^1(G)$ pour la norme :

$$\|f\| := \sup_{\pi \in \hat{G}} \|\pi(f)\|$$

définie dans le lemme précédent.

Remarque 1.2.7. Par le théorème de Peter-Weyl, on sait que toute représentation unitaire irréductible d'un groupe compact peut être vu comme une sous-représentation de la représentation régulière gauche dans $L^2(G)$, notée λ, donnée par $\lambda(g)\varphi(h) = \varphi(g^{-1}h)$. Donc la norme définie précédemment est équivalente à la norme donnée par :

$$\|f\| = \|\lambda(f)\|_{B(L^2G)}.$$

1.2.2 Représentation irréductible comme $L^1(G)$-module projectif de type fini

Soit (V, ρ) une représentation unitaire irréductible de G. Une représentation unitaire irréductible s'identifie à un sous-module projectif de type fini de $L^1(G)$, à l'aide de la théorie des représentations des groupes compacts [40]. En utilisant le lemme 1.2.3, on voit que l'élément $\frac{\dim \rho}{\|v\|^2} C_{v,v}$ est un projecteur de $L^1(G)$.

Lemme 1.2.8. *On définit une structure de $L^1(G)$-module à droite sur V, en posant :*

$$v \cdot \varphi = \int_G \varphi(g)\rho(g^{-1})v dg, \ \forall \varphi \in L^1(G) \text{ et } v \in V,$$

de sorte que $\|v \cdot \varphi\| \leq \|\varphi\|_{L^1}\|v\|$. De plus, le module V s'identifie à un sous-module projectif de type fini de $L^1(G)$, vu comme module à droite sur l'algèbre $L^1(G)$:

$$\begin{array}{rccc} \phi_v : & V & \rightarrow & L^1(G) \\ & w & \mapsto & C_{v,w}, \end{array}$$

où $C_{v,w}(g) = \langle v, \rho(g)w \rangle$ est un coefficient de ρ. L'application ϕ_v est un isomorphisme de $L^1(G)$-module entre V et $(\frac{\dim \rho}{\|v\|^2} C_{v,v})L^1(G)$.

Démonstration. Soient $\varphi, \psi \in L^1(G)$. Vérifions que l'on a bien $v \cdot (\varphi \star \psi) = (v \cdot \varphi) \cdot \psi$. On a :

$$\begin{array}{rl} v \cdot (\varphi \star \psi) & = \int_G \varphi \star \psi(g)\rho(g^{-1})v dg \\ & = \int_G \int_G \varphi(h)\psi(h^{-1}g)\rho(g^{-1})v dh dg. \end{array}$$

En effectuant le changement de variables classique $k = h^{-1}g$, il vient :

$$\begin{array}{rl} v \cdot (\varphi \star \psi) & = \int_G \int_G \varphi(h)\psi(k)\rho(k^{-1})\rho(h^{-1})v dh dk \\ & = (v \cdot \varphi) \cdot \psi. \end{array}$$

Vérifions que pour tout $w \in V$ l'application ϕ_v est $L^1(G)$-linéaire. Soit $\varphi \in L^1(G)$. On a :

$$\begin{aligned} C_{v,w\cdot\varphi}(g) &= \langle v, \rho(g)(w\cdot\varphi)\rangle \\ &= \int_G \langle v, \rho(gh^{-1})w\rangle \varphi(h)dh. \end{aligned}$$

En appliquant le changement de variable $k = gh^{-1}$, il vient :

$$\begin{aligned} C_{v,w\cdot\varphi}(g) &= \int_G \langle v, \rho(k)w\rangle \varphi(k^{-1}g)dk \\ &= C_{v,w} \star \varphi(g). \end{aligned}$$

Montrons que φ_v est injective. Soit $w \in \ker(\phi_v)$ alors $\forall g \in G$, on a $C_{v,w}(g) = \langle v, \rho(g)w\rangle = 0$. Donc $G \cdot w$ est un sous-espace vectoriel de V stable par G qui est orthogonal à v, donc ne contient pas v. Comme V est irréductible, ce n'est possible que si $G \cdot w = 0$ et donc $w = 0$.
Montrons que φ_v est surjective. Soit $\varphi \in L^1(G)$. On a :

$$\begin{aligned} \tfrac{\dim\rho}{\|v\|^2} C_{v,v} \star \varphi &= \tfrac{\dim\rho}{\|v\|^2} C_{v,v\cdot\varphi} \\ &= C_{v,\frac{\dim\rho}{\|v\|^2} v\cdot\varphi} \\ &= \phi_v(\tfrac{\dim\rho}{\|v\|^2} w\cdot\varphi). \end{aligned}$$

De plus, l'image d'une famille génératrice de V donne une famille génératrice pour $\left(\frac{\dim\rho\ C_{v,v}}{\|v\|^2}\right)L^1(G)$. Comme V est de dimension finie, $\left(\frac{\dim\rho\ C_{v,v}}{\|v\|^2}\right)L^1(G)$ est bien de type fini et il est projectif car c'est l'image d'un projecteur. □

Remarque 1.2.9. Dans toute cette partie, on peut remplacer $L^1(G)$ par C^*G car l'action de C^*G sur V est continue puisque $\|v\cdot\varphi\| = \|\rho(\varphi)v\| \le \|\rho(\varphi)\|\|v\| \le \|\varphi\|\|v\|$ et car $L^1(G)$ s'identifie avec une sous-algèbre dense de C^*G.

1.2.3 Classe indice

On renvoie à [50] et [75] pour les différentes notions sur les C^*-modules hilbertiens et les opérateurs non bornés entre C^*-modules hilbertiens, voir aussi l'annexe A. On utilise ici des constructions similaires à celles utilisées dans [33], [36] et [39]. Le théorème principal est le théorème 1.2.44.
Soit G un groupe compact. Soit $p : M \to B$ une fibration G-équivariante de variétés compactes, de fibre F. On garde les notations précédentes.
Soient $E^\pm \to M$ des familles G-équivariantes de fibrés vectoriels munies de métriques G-invariantes. Soit $\tilde{P} : C^\infty(M, E^+) \to C^\infty(M, E^-)$ une famille d'opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 0, G-équivariante. On suppose que l'opérateur $\tilde{P}$ est G-transversalement elliptique le long des fibres de p.

Le $C(B)$-module $\mathcal{E}$ et l'adjoint formel comme opérateur non borné

Définition 1.2.10. On appelle famille continue de mesures boréliennes toute famille de mesures $\{\mu_b\}_{b\in B}$ telle que le support de μ_b soit dans M_b, $\forall b \in B$ et telle que $\forall f \in C(M)$, la fonction $b \to \int_{M_b} f(m)d\mu_b(m)$ soit continue sur B.

Remarque 1.2.11. Si $M = B \times F$, l'ensemble des familles continues de mesures boréliennes $\mathcal{M}^0(M|B) = C(B, \mathcal{M}(F))$ pour la topologie donnée par :
$\mu_i \to \mu$ si et seulement si $\forall \varphi \in C(M) \sup\limits_{b \in B} \left| \int_F \varphi(b,f) d\mu_i(f) - \int_F \varphi(b,f') d\mu(f') \right|$ tend vers 0.

Lemme 1.2.12. *Il existe toujours une famille continue de mesures boréliennes sur M.*

Remarque 1.2.13. C'est un système de Haar sur $M \times_B M$ qui existe par la théorie générale et puisque π est ouverte.

Démonstration. Soit $\{V_i\}_{i \in I}$ un recouvrement ouvert localement fini de trivialisation de M. Soit $\{\varphi\}_{i \in I}$ une partition de l'unité sur B subordonnée à $\{V_i\}_{i \in I}$. Notons $\psi_i : M_i = M_{|V_i} \to V_i \times F$ les trivialisations locales données par $\{V_i\}_{i \in I}$.
Soit μ_F une mesure borélienne sur F (de support F si l'on veut). On peut définir une famille continue sur M_i, au-dessus de V_i en prenant la mesure image par ψ_i^{-1} de la famille continue de mesures constantes sur V_i égale à μ_F, c'est-à-dire : pour $b \in V_i$, on prend $(\psi_{i|M_b})_*^{-1} \mu_F$.
Notons μ_i cette famille continue de mesures sur M_i. Si $f \in C(M_i)$ alors pour $b \in V_i$:

$$\int_{M_b} f(m) d\mu_i(m) = \int_F f \circ \psi_i^{-1}(b, \alpha) d\mu_F(\alpha),$$

où $(b, \alpha) = \psi_i(m)$. La fonction de $b \in V_i$ obtenue est alors continue grâce au théorème de continuité sous le signe intégrale en théorie de la mesure.
Posons $\mu := \sum\limits_{i \in I} \phi_i \mu_i$. On a alors pour tout $b \in B$, $\mu_b = \sum\limits_{i \in I} \phi_i(b) \mu_{i|M_b}$ qui est une somme finie de mesures boréliennes puisque le recouvrement est localement fini donc est borélienne. Supposons que $f \in C(M)$ alors il existe un sous-ensemble J_f de I fini (car le recouvrement de B est localement fini) tel que $\forall b \in B$,

$$\int f d\mu_b = \sum_{i \in J_f} \phi_i \int f d\mu_i,$$

qui est continue en b comme somme finie de fonctions continues.

$\square$

Remarque 1.2.14. Si on note $|\Lambda|^1(T^V M)$ le fibré des 1-densités verticales alors un exemple est fourni par une section.

Remarque 1.2.15. Si $T^V M$ est orienté, alors une forme volume fournie un exemple.

Définition 1.2.16. Soit E une famille continue de fibrés vectoriel sur M. L'ensemble $C^{\infty,0}(M, E)$ désigne l'ensemble des sections C^∞ le long des fibres de p et continues par rapport à la base B.

Fixons une famille continue G-invariante de mesures boréliennes (μ_b) de support maximal.

Proposition 1.2.17. *On définit sur $C^{\infty,0}(M, E^\pm)$ un produit scalaire hermitien à valeurs dans $C(B)$, en posant :*

$$\langle s, s' \rangle(b) = \int_{M_b} \langle s(m), s'(m) \rangle_{E_m^\pm} d\mu_b(m).$$

La structure de module étant donnée par $f \cdot s(m) = p^* f(m) s(m) = (f \circ p)(m) s(m)$, $\forall f \in C(B)$ et $s \in C^{\infty,0}(M, E^\pm)$. Ce produit scalaire est unitaire pour l'action de G.

Démonstration. Soient $\lambda \in \mathbb{C}$, $f \in C(B)$ et s, s' et $s'' \in C^{\infty,0}(M, E^{\pm})$.
La linéarité est évidente ainsi que la relation $\langle s, s' \rangle = \overline{\langle s', s \rangle}$.
De plus, si $\forall b \in B$, $\langle s, s \rangle(b) = 0$ alors $\langle s(m), s(m) \rangle = 0$, $\forall m \in M_b$. Donc $\forall b \in B$ et $m \in M_b$, $s(m) = 0$ et donc $s = 0$. Ce produit scalaire est unitaire car la métrique sur E et la famille de mesures sont G-invariantes. □

Définition 1.2.18. On définit une norme sur $C^{\infty,0}(M, E^{\pm})$, en posant :

$$\|s\| = \|\langle s, s \rangle\|_{C(B)}^{1/2} = \sup_{b \in B} |\langle s, s \rangle(b)|^{1/2} = \sup_{b \in B} \|s_{|M_b}\|_{L^2(M_b, E_b^{\pm})}.$$

On note la complétion de $C^{\infty,0}(M, E^{\pm})$ par rapport à cette norme par $\mathcal{E}^{\pm}$. Les espaces $\mathcal{E}^+$ et $\mathcal{E}^-$ sont alors des $C(B)$-modules de Hilbert.

Remarque 1.2.19. D'après [28], les $C(B)$-modules de Hilbert $\mathcal{E}^+$ et $\mathcal{E}^-$ sont associés aux champs continus d'espaces de Hilbert $(\prod_{b \in B} L^2(M_b, E_b), \Delta)$, où Δ est l'ensemble des sections continues du fibré E au-dessus de B.

Remarque 1.2.20. Nous utiliserons une famille de mesure de type Lebesgue dans la suite.

On rappelle que le graphe d'un opérateur non borné $(T, Dom(T))$ est donné par $G(T) = \{(x, Tx), x \in \mathrm{dom}(T)\}$, où $\mathrm{dom}(T)$ est le domaine de T.
Par définition de $\mathcal{E}^+$, on a $C^{\infty,0}(M, E^+)^{\perp} = \{0\}$, on peut donc définir l'adjoint formel d'une famille d'opérateurs pseudodifférentiels Q d'ordre m, en prenant pour domaine initial $C^{\infty,0}(M, E^+)$.

Définition-proposition 1.2.21. On définit l'adjoint formel d'une famille d'opérateurs pseudodifférentiels Q, de symbole q, comme l'opérateur $C(B)$-linéaire Q^* de $\mathcal{E}^-$ dans $\mathcal{E}^+$ obtenu en posant :

$$G(Q^*) = \{(s', s) \in \mathcal{E}^- \times \mathcal{E}^+, \forall s'' \in C^{\infty,0}(M, E^+), \langle s, s'' \rangle = \langle s', Qs'' \rangle\},$$

son domaine est

$$Dom(Q^*) = \{s \in \mathcal{E}^- / \exists s' \in \mathcal{E}^+ \text{ tel que } \langle Qs'', s \rangle = \langle s'', s' \rangle,\ s'' \in Dom(Q)\}.$$

Cet opérateur coïncide avec l'adjoint formel de $Q = (Q_b)$ qui est une famille d'opérateurs pseudodifférentiels d'ordre m, dont le symbole est $q_b^*(m, \xi)$. Si Q est G-invariant alors Q^* est G-invariant.

Démonstration. La famille d'opérateurs pseudodifférentiels $R = (Q_b^*)_{b \in B}$ satisfait $\langle Rs, s' \rangle = \langle s, Qs' \rangle$, $\forall s \in C^{\infty,0}(M, E^-)$, $s' \in C^{\infty,0}(M, E^+)$. Donc par unicité de l'adjoint formel, $R = Q^*$.
□

Quelques constructions de Kasparov pour une fibration compacte

On reprend ici l'étude proposée par G. Kasparov dans [45], partie 6, dans le cadre d'une fibration compacte. On utilisera en grande partie les notations utilisées dans [45]. Tous les opérateurs considérés sont des opérateurs pseudodifférentiels classiques. En particulier, on va montrer qu'une famille d'opérateurs d'ordre 0 dont le symbole tend uniformément par rapport à M vers 0 à l'infini

est un opérateur compact. On utilisera ensuite ce résultat pour définir la classe indice d'une famille d'opérateurs G-invariante, G-transversalement elliptique le long des fibres.
Désormais G est un groupe de Lie compact. On suppose que G agit par isométrie et que l'action de G sur la base B est triviale. Soit $m \in M$. On note $f_m : G \to M$ l'application donnée par l'action de G sur M définie par $f_m(g) = g \cdot m$, $f_m^{'} : \mathfrak{g} \to T_m M$ son application tangente en l'élément neutre de G et $f_m^{'*} : T_m^* M \to \mathfrak{g}^*$ son application duale. On fixe une famille continue de mesures boréliennes G-invariante $(\mu_b)_{b\in B}$ de support maximal, construite à partir d'une mesure de type Lebesgue sur la fibre typique F.

Lemme 1.2.22. *[45] L'application f'_m est donnée par $f'_m(X) = X_M^*(m)$ et on a $g \cdot f_m^{'}(X) = f_{g\cdot m}^{'}(Ad(g)X)$. De plus, f'_m est à valeurs dans $T^V M$.*

Démonstration. Soit $X \in \mathfrak{g}$. On a :

$$f'_m(X) = T_e f_m X = \frac{d}{dt}_{|t=0} f_m(e^{tX}) = \frac{d}{dt}_{|t=0} e^{tX} \cdot m = X_M^*(m).$$

Soit $g \in G$. On a :

$$g \cdot f_m^{'}(X) = g \cdot \frac{d}{dt}_{|t=0} f_m(e^{tX}) = \frac{d}{dt}_{|t=0} g \cdot e^{tX} \cdot m = \frac{d}{dt}_{|t=0} g e^{tX} g^{-1}\ g \cdot m = f_{g\cdot m}^{'}(\mathrm{Ad}(g)X).$$

On a bien $p_* f_m^{'}(X) = 0$, puisque l'action sur B est triviale. □

Soit $\mathfrak{g}_M := M \times \mathfrak{g}$ le fibré vectoriel trivial G-équivariant sur M, associé à $\mathfrak{g}$ pour l'action $g\cdot(m, v) = (g\cdot m, \mathrm{Ad}(g)v)$. C'est une famille de fibrés vectoriels au sens de la définition 1.1.1. Le groupe G étant compact, on peut munir $\mathfrak{g}_M$ d'une métrique G-invariante. On notera $\| \cdot \|_m$ la famille de normes euclidiennes associées. Par le lemme précédent, on voit que l'application $f^{'} : \mathfrak{g}_M \to TM$ définie par $f^{'}(m, v) = f_m^{'}(v)$ est G-équivariante. Quitte à multiplier $\| \cdot \|_m$ par une fonction G-invariante positive, on peut supposer que $\forall v \in \mathfrak{g}$, $\|f_m^{'}(v)\| \leq \|v\|_m$, où $\|f_m^{'}(v)\|$ est la norme donnée par la métrique riemannienne au point m. On a donc que $\|f_m^{'}\| \leq 1$, $\forall m \in M$. En utilisant les métriques sur $\mathfrak{g}_M$ et TM, on identifie $\mathfrak{g}_M$ à $\mathfrak{g}_M^*$ et TM à T^*M. Par l'intermédiaire de ces identifications, on peut définir une application $\phi : T^*M \to T^*M$ par $\phi_m = f_m^{'} f_m^{'*}$. On définit enfin une forme quadratique sur T^*M, en posant $\forall (m, \xi) \in T^*M$:

$$q_m(\xi) = |\langle f_m^{'} f_m^{'*}(\xi), \xi\rangle| = \|f_m^{'*}(\xi)\|_m^2.$$

On a $q_m(\xi) \leq \|\xi\|^2$, $\forall (m, \xi) \in T^*M$.

Lemme 1.2.23. *Soit $\xi \in T_m^*M$. On a équivalence entre ξ est orthogonal à l'orbite par G de m et $q_m(\xi) = 0$.*

Démonstration. En effet, si ξ est orthogonal à l'orbite de m alors en particulier il est orthogonal à $f_m^{'} f_m^{'*}\xi \in T_m(G \cdot m)$ et donc $q_m(\xi) = 0$. Maintenant, si $q_m(\xi) = 0$ alors $f^{'*}\xi = 0$ donc $\forall v \in \mathfrak{g}$, $\langle f^{'*}\xi, v\rangle = 0$ et donc ξ est orthogonal à l'orbite de m. □

Définition 1.2.24. On identifie $T^V M$ et son dual par la métrique riemannienne. On définit alors la famille Δ_G d'opérateur associée à la famille de symbole $q_m(\xi)$, pour $(m, \xi) \in T^V M$.

On redéfinit maintenant la notion d'opérateur G-transversalement elliptique le long des fibres en adaptant [1] et [45]. On va énoncer deux définitions que l'on appellera comme dans [45], définition naïve pour la première et définition technique pour la seconde.

Définition 1.2.25. On note $T_G M := \{(x, \xi) \in TM / q_m(\xi) = 0\}$, c'est un sous-ensemble fermé de TM. On définit alors

$$T_G^V M = T_G M \cap T^V M.$$

Remarque 1.2.26. Dans la suite, les symboles considérés sont de types Clifford comme dans l'approche de [45], voir aussi [25].

Définition 1.2.27 (définition naïve)**.** On dira qu'une famille G-invariante A d'opérateurs pseudodifférentiels d'ordre 0 agissant sur un fibré $E = E^+ \oplus E^-$, auto-adjointe et impaire pour la graduation de E est transversalement elliptique ou que A est transversalement elliptique le long des fibres si

$$\sup_{m \in M} \|\sigma_A(m, \xi)^2 - 1_{E_m}\| \to 0$$

quand $(m, \xi) \to \infty$ dans $T_G^V M$.

Remarque 1.2.28. Rappelons que par un résultat classique, le symbole d'un opérateur comme dans la définition 1.2.27 définit une classe de $\mathrm{KK_G}(\mathbb{C}, C_0(T_G^V M))$ donnée par $(C_0(\pi^* E), \sigma_A)$ où $C_0(\pi^* E)$ est l'ensemble des sections de $\pi^* E \to T_G^V M$ tendant vers 0 à l'infini.

Définition 1.2.29 (définition technique)**.** On dira qu'une famille G-invariante d'opérateurs pseudodifférentiels, auto-adjoints, d'ordre 0, A est transversalement elliptique ou que A est transversalement elliptique le long des fibres si son symbole σ_A satisfait la condition : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists c > 0$ tel que $\forall m \in M$ et $\xi \in T_m^V M$, on a :

$$\|\sigma_A^2(m, \xi) - 1\|_{(m,\xi)} \leq c(1 + q_m(\xi))(1 + \|\xi\|^2)^{-1} + \varepsilon,$$

où $\| \cdot \|_{(m,\xi)}$ désigne la norme d'endomorphismes sur E_m.

On commence par rappeler deux résultats démontrés dans [38] proposition 2.2.2. (voir aussi [74] proposition 6.1 et [45] théorème 3.2) dans le cadre des familles d'opérateurs.

Théorème 1.2.30 ([45], théorème 3.2)**.** *Soit P une famille d'opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 0, G-invariante. Supposons que son symbole principal σ_P soit borné à l'infini dans la direction cotangente verticale par une constante $C > 0$, c'est-à-dire $\forall K \subset M$ compact*

$$\overline{\lim_{\substack{|\xi| \to \infty \\ \xi \in T^V M^*}}} \|\sigma_P(x, \xi)\| := \lim_{t \to \infty} \sup_{\substack{|\xi| \geq t \\ x \in K}} \|\sigma_P(x, \xi)\| < C.$$

Alors il existe une famille d'opérateurs pseudo-différentiels S d'ordre 0, G-invariante et une famille continue d'opérateurs intégraux R à noyaux continus, G-invariante tels que $P^* P + S^* S - C^2 = R$.

Proposition 1.2.31 ([45], proposition 3.3)**.** *Soit Q une famille d'opérateurs pseudodifférentiels d'ordre 0, G-invariante telle que $Q^* = Q$. Supposons que son symbole principal σ_Q vérifie que pour tout sous-ensemble compact $K \subset M$:*

$$\underset{\substack{|\xi|\to\infty \\ \xi\in T^V M^*}}{\underline{\lim}} \operatorname{Re}\Big(\sigma_Q(x,\xi)\Big) := \lim_{t\to\infty} \inf_{\substack{|\xi|\geq t \\ x\in K}} \operatorname{Re}\Big(\sigma_Q(x,\xi)\Big) > 0.$$

Alors il existe une famille d'opérateurs S d'ordre 0, G-invariante telle que

$$R = S^*S - Q$$

ait un noyau continu.

Avant de démontrer ces deux résultats, quelques remarques s'imposent.

Remarque 1.2.32.

1. Dans le théorème 1.2.30, la constante C ne dépend pas du compact K, de même dans la proposition 1.2.31 la limite inférieur est strictement positive indépendamment de K.
2. Les deux énoncés précédents portent sur le symbole principal des opérateurs en jeu. Mais en regardant de plus près, on se rend compte que dans des trivialisations locales par des cartes de M, ils sont équivalents aux énoncés où l'on aurait remplacé le symbole principal par le symbole total. En effet, dans toute carte locale, le symbole total $\sigma^t_P(x,\xi)$ d'un opérateur P d'ordre 0 peut s'écrire, de la manière suivante :

$$\sigma^t_P(x,\xi) = \sigma^0_P(x,\xi) + \sigma^{<0}_P(x,\xi),$$

où $\sigma^0_P(x,\xi)$ désigne la partie d'ordre 0 qui est le symbole principal et $\sigma^{<0}_P(x,\xi)$ qui est la partie d'ordre strictement négatif.
D'une part, on a $\forall K \subset U$ compact :

$$\begin{aligned} \|\sigma^t_P(x,\xi)\| &\leq \|\sigma^0_P(x,\xi)\| + \|\sigma^{<0}_P(x,\xi)\| \\ &\leq \|\sigma^0_P(x,\xi)\| + C_K(1+|\xi|)^{-1} \\ &\leq \sup_{x\in K} \|\sigma^0_P(x,\xi)\| + C_K(1+|\xi|)^{-1}. \end{aligned}$$

On a donc $\sup_{x\in K} \|\sigma^t_P(x,\xi)\| \leq \sup_{x\in K} \|\sigma^0_P(x,\xi)\| + C_K(1+|\xi|)^{-1}$. De plus, on sait que si b_i est une suite généralisée de réels convergente vers b et si a_i est une suite généralisée de réels alors

$$\underline{\lim}_{i\in I}(a_i+b_i) = \underline{\lim}_{i\in I} a_i + b$$

et

$$\overline{\lim}_{i\in I}(a_i+b_i) = \overline{\lim}_{i\in I} a_i + b.$$

En appliquant ce résultat à l'inégalité $\sup_{x\in K} \|\sigma^t_P(x,\xi)\| \leq \sup_{x\in K} \|\sigma^0_P(x,\xi)\| + C_K(1+|\xi|)^{-1}$, il vient :

$$\overline{\lim}_{\xi\to\infty} \sup_{x\in K} \|\sigma^t_P(x,\xi)\| \leq \overline{\lim}_{\xi\to\infty} \sup_{x\in K} \|\sigma^0_P(x,\xi)\|.$$

D'autre part, on a $\|\sigma_P^0(x,\xi)\| = \|\sigma_P^0(x,\xi) + \sigma_S^{<0}(x,\xi) - \sigma_P^{<0}(x,\xi)\|$, d'où

$$\|\sigma_P^0(x,\xi)\| \leq \|\sigma_P^t(x,\xi)\| + \|\sigma_P^{<0}(x,\xi)\|,$$

donc comme précédemment, on obtient :

$$\overline{\lim_{\xi\to\infty}} \sup_{x\in K} \|\sigma_P^0(x,\xi)\| \leq \overline{\lim_{\xi\to\infty}} \sup_{x\in K} \|\sigma_P^t(x,\xi)\|.$$

Pour l'énoncé avec la partie réelle de σ_Q l'ordre utilisé est celui induit par les endomorphismes positifs agissant sur des espaces vectoriels hermitiens, c'est-à-dire si A est un endomorphisme alors A est positif si $\langle Ax, x\rangle$ est positif pour tout x. On peut calquer ce qui précède, en utilisant les parties réelles au lieu des normes et en majorant Re $\sigma_Q^{<0}(x,\xi)$ par $\|\sigma_Q^{<0}(x,\xi)\| Id$. En effet, on a alors que la limite inférieure de la partie négative est la limite de la partie réelle qui est 0 et ne dépend alors pas du compact K.

Démonstration. On se place sur une carte locale de M trivialisant le fibré vectoriel que l'on suppose quitte à restreindre l'ouvert de la forme $V \times U$ où V est un ouvert trivialisant la fibration et U un ouvert de la fibre. On peut alors considérer le symbole total au lieu du symbole principal. On va construire une suite de familles produits S_j^V d'opérateurs pseudodifférentiels d'ordre $-j$ et on choisira S^V équivalent à $\sum S_j^V$, au sens pseudodifférentiel. On souhaite faire chuter l'ordre de la famille Q de 1 à chaque j. Au degré 0, on remarque que la partie imaginaire de Q a un symbole total d'ordre négatif. Pour faire baisser le degré de -1, il suffit de faire baisser le degré de la partie réelle de 1. Par hypothèse, on sait que

$$\underline{\lim}_{|\xi|\to\infty} \operatorname{Re}\Big(\sigma_Q(x,\xi)\Big) > 0$$

donc il existe un symbole $s_0(x,\xi)$ d'ordre 0 tel que pour $|\xi|$ grand

$$s_0(x,\xi)^2 = \operatorname{Re}\Big(\sigma_Q(x,\xi)\Big).$$

Il suffit de prendre $s_0(x,\xi) = \sqrt{\operatorname{Re}\Big(\sigma_Q(x,\xi)\Big)}$ qui est bien défini comme opérateur d'ordre 0 car pour $|\xi|$ grand $\operatorname{Re}\Big(\sigma_Q(x,\xi)\Big) > 0$ donc on peut inverser sa racine carrée et obtenir par la formule de la chaine les inégalités pour l'ordre 0. On va construire les S_k par récurrence, de manière que

$$R_j = Q - (S_0 + \cdots + S_{j-1})^*(S_0 + \cdots + S_{j-1}),$$

soit d'ordre $-j$. Pour $j = 1$, on a $R_1 = Q - S_0^* S_0$ qui est bien d'ordre -1. Comme R_j est autoadjoint, la partie imaginaire de σ_{R_j} est d'ordre $-(j+1)$. Si S_j existe, il doit vérifier :

$$R_{j+1} = Q - (S_0 + \cdots + S_j)^*(S_0 + \cdots + S_j) = 0,$$

modulo l'ordre $-(j+1)$. On a :

$$Q - (S_0 + \cdots + S_j)^*(S_0 + \cdots + S_j) = R_j - (S_j^* S_0 + S_0^* S_j),$$

modulo l'ordre $-(j+1)$. Donc modulo l'ordre $-(j+1)$, on doit avoir pour $|\xi|$ grand

$$\sigma_{R_j}(x,\xi) = \sigma^*_{S_j}(x,\xi)\sigma_{S_0}(x,\xi) + \sigma^*_{S_0}(x,\xi)\sigma_{S_j}(x,\xi).$$

En prenant, $\sigma_{S_j} = \frac{1}{2}(\sigma^*_{S_0}(x,\xi))^{-1}\sigma_{R_j}(x,\xi)$, il vient :

$$\begin{aligned} & \sigma^*_{S_j}(x,\xi)\sigma_{S_0}(x,\xi) + \sigma^*_{S_0}(x,\xi)\sigma_{S_j}(x,\xi) \\ = \ & \tfrac{1}{2}\sigma_{R_j}(x,\xi)^*(\sigma_{S_0}(x,\xi))^{-1}\sigma_{S_0}(x,\xi) + \sigma^*_{S_0}(x,\xi)\tfrac{1}{2}(\sigma^*_{S_0}(x,\xi))^{-1}\sigma_{R_j}(x,\xi) \\ = \ & \sigma_{R_j}(x,\xi). \end{aligned}$$

De plus, σ_{S_j} est bien d'ordre $-j$ puisque $\sigma^{*-1}_{S_0}$ est d'ordre 0 et σ_{R_j} est d'ordre $-j$. Soit $\{\phi_U\}$ une partition de l'unité finie sur la fibre trivialisant M au-dessus de V telle que $\sum \phi_U^2 = 1$. Sur chaque U, on construit une suite S_j^U comme précédemment. On construit une suite d'opérateurs S_j sur $p^{-1}(V)$ par $S_j = \sum \phi_U S_j^U \phi_U$. On obtient bien une famille produit continue d'opérateurs pseudodifférentiels S^V sur V par somme finie de familles produits continues (la racine carrée est continue et l'inversion est continue). Ensuite, on utilise une partition de l'unité finie sur B, $\{\phi_V^2\}$ subordonnée à un recouvrement par des ouverts V comme précedemment de B telle que $\sum \phi_V^2 = 1$, pour construire une suite de familles d'opérateurs $S_j = \sum \phi_V S_j^V \phi_V$. D'après la remarque à la fin de la démonstration de la proposition 3.3 dans [45], on n'est pas obligé de faire une récurrence infinie, on peut s'arrêter lorsque l'ordre de R_j est inférieur à moins la dimension de la fibre de la fibration. On prend $S = \sum_{j=0}^{\dim F} S_j$, on a alors $Q - S^*S = R_{\dim F+1}$. Pour que R et S soit G-invariante, on remplace S_j par $\tilde{S}_j = \int_G g \cdot S_j$. $\square$

Démonstration du théorème 1.2.30. On applique la proposition 1.2.31 à la famille d'opérateurs $Q = C^2 - P^*P$. En effet, on a $\mathrm{Re}(\sigma_{P^*P}) \leq \|\sigma_P\|^2$. Il vient $\mathrm{Re}(\sigma_Q) = C^2 - \sigma_{P^*P} \geq C^2 - \|\sigma_P\|^2$. On obtient $\inf_{\substack{|\xi|\geq t \\ x\in K}} \mathrm{Re}\Big(\sigma_Q(x,\xi)\Big) \geq \inf_{\substack{|\xi|\geq t \\ x\in K}} \Big(C^2 - \sigma_{P^*P}(x,\xi)\Big) = C^2 - \sup_{\substack{|\xi|\geq t \\ x\in K}} \Big(\sigma_{P^*P}(x,\xi)\Big) > 0.$ $\square$

La proposition suivante est énoncée dans [45] pour le cas d'un opérateur :

Proposition 1.2.33. *Soit T une famille d'opérateurs pseudodifférentiels auto-adjoints d'ordre* 0 *sur M, de symbole $\sigma_T(m,\xi)$. Notons F la famille d'opérateurs pseudodifférentiels auto-adjoints de symbole $\sigma_F(m,\xi) = (1+q_m(\xi))(1+|\xi|^2)^{-1}$. Supposons que $\forall\varepsilon > 0$, il existe $c > 0$ tel que $\forall m \in M$ et $\forall \xi \in T^V_m M$:*

$$\|\sigma_T(m,\xi)\| \leq c\ \sigma_F(m,\xi) + \varepsilon.$$

Alors $\forall\varepsilon > 0$, il existe c_1, $c_2 > 0$ et deux familles d'opérateurs pseudodifférentiels auto-adjoints intégraux, à noyaux continus tels que

$$-(c_1 F + \varepsilon + R_1) \leq T \leq c_2 F + \varepsilon + R_2.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon' > \varepsilon$. On a :

$$\varliminf_{\substack{\xi\to\infty \\ \xi\in T^V M^*}} \mathrm{Re}\Big(c\sigma_F(m,\xi) + \varepsilon' - \sigma_T(m,\xi)\Big) > 0, \tag{1.1}$$

puisque $\mathrm{Re}\Big(\sigma_T(m,\xi)\Big) \leq \|\sigma_T\|_{(m,\xi)} id$. En effet, on a pour $\varepsilon' > \varepsilon$:

$$0 < c\ \sigma_F(m,\xi) + \varepsilon' - \mathrm{Re}\Big(\sigma_T(m,\xi)\Big) = \mathrm{Re}\Big(c\ \sigma_F(m,\xi) + \varepsilon' - \sigma_T(m,\xi)\Big).$$

Par la proposition 1.2.31, il vient qu'il existe des familles d'opérateurs S_2 d'ordre 0 et R_2 à noyau continu telles que $S_2^* S_2 - (cF + \varepsilon' - T) = R_2$ donc que $0 \leq -T + cF + \varepsilon' + R_2$. En changeant T en $-T$, l'inégalité (1.1) reste vraie, il vient qu'il existe des familles d'opérateurs S_1 d'ordre 0 et R_1 à noyau continu telles que $0 \leq T + cF + \varepsilon' + R_1$. En faisant tendre ε' vers ε, on obtient le résultat. $\square$

Soit $\tilde{P} : C^{\infty,0}(M, E^+) \to C^{\infty,0}(M, E^-)$ une famille G-invariante d'opérateurs d'ordre 0 transversalement elliptique le long des fibres. On notera $P : C^{\infty,0}(M, E) \to C^{\infty,0}(M, E)$, la famille d'opérateurs $\begin{pmatrix} 0 & \tilde{P}^* \\ \tilde{P} & 0 \end{pmatrix}$.

Lemme 1.2.34. *Soit R une famille continue d'opérateurs intégraux à noyaux continus.*

1. *La famille R s'étend en un opérateur borné sur $\mathcal{E}$.*
2. *On a $R \in k(\mathcal{E})$.*

Démonstration.

1. En effet, notons $(k_R^b(x,y))_{b\in B}$ la famille continue de noyaux continus associés à R. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\|Rs(m)\|^2_{E_m} \leq \int_{M_b} \|k_R^b(x,y)\|^2 d\mu_b(x) \int_{M_b} \|s_b(x)\|^2 d\mu_b(x).$$

   Donc en intégrant sur M_b, il vient :

$$\int_{M_b} \|Rs(m)\|^2 d\mu_b(m) \leq \int_{M_b}\int_{M_b} \|k_R^b(x,y)\|^2 d\mu_b(x) d\mu_b(y) \int_{M_b} \|s(m)\|^2 d\mu_b(m),$$

   comme $\int_{M_b}\int_{M_b} \|k_R^b(x,y)\|^2 d\mu_b(x)d\mu_b(y)$ est continue en b par hypothèse sur $(\mu_b)_{b\in B}$, on a :

$$\int_{M_b} \|Rs(m)\|^2 d\mu_b(m) \leq \sup_b \int_{M_b}\int_{M_b} \|k_R^b(x,y)\|^2 d\mu_b(x) d\mu_b(y) \sup_b \int_{M_b} \|s(m)\|^2 d\mu_b(m),$$

   et donc

$$\|Rs\|^2_{\mathcal{E}} \leq \sup_b \int_{M_b}\int_{M_b} \|k_R^b(x,y)\|^2 d\mu_b(x) d\mu_b(y) \|s(m)\|^2_{\mathcal{E}}.$$

   De plus, l'opérateur R est adjoignable car

$$\begin{aligned} \langle Rs, s'\rangle(b) &= \textstyle\int_{M_b}\int_{M_b} \langle k_R^b(x,y) s_b(x), s'_b(y)\rangle d\mu_b(x) d\mu_b(y) \\ &= \textstyle\int_{M_b}\int_{M_b} \langle s_b(x), k_R^b(x,y)^* s'_b(y)\rangle d\mu_b(x) d\mu_b(y) = \langle s, R^* s'\rangle(b). \end{aligned}$$

2. Soit $\{U_i\}_{i=1}^N$ un recouvrement ouvert par des ouverts trivialisant M. La famille produit
$$R_{|U_i} : U_i \to \mathcal{P}^{-\infty}(F, E_{|F})$$
devient une famille continue d'opérateurs de Hilbert-Schmidt puisque
$$\int_{M_b \times M_b} \|k_{R_{|U_i}}(m,n)\|^2 d\mu_b(m) d\mu_b(n)$$
est une fonction continue de b par hypothèse sur $(\mu_b)_{b\in B}$. On sait qu'un opérateur de Hilbert-Schmidt est compact donc $R_{|U_i} \in C_0(U_i, k(L^2(F, E_{|F})) = C_0(U_i)\hat{\otimes} k(L^2(F, E_{|F}))$. Un argument classique montre alors que $R \in k(\mathcal{E})$.

□

Remarque 1.2.35. [28] Si $\Big((H_b)_{b\in B}, \Delta\Big)$ est un champ continu d'espaces de Hilbert associé à un $C(B)$-module de Hilbert $\mathcal{E}$ alors $T \in k(\mathcal{E})$ si et seulement si $\forall u \in k(\mathcal{E})$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\|T_b - u(b)\| < \varepsilon$, $\exists V$ voisinage de b tel que $\forall b' \in V$ $\|T_{b'} - u(b')\| < \varepsilon$.

Exemple 1.2.36. Si pour tout $b \in B$ $H_b = H$ alors $\mathcal{E} = C(B) \otimes H$ et $k(\mathcal{E}) = C(B, k(H))$, où $k(H)$ est munie de la norme d'opérateur.

Proposition 1.2.37. *Soit $\tilde{P} : C^{\infty,0}(M, E^+) \to C^{\infty,0}(M, E^-)$ une famille G-invariante d'opérateurs d'ordre 0 transversalement elliptique le long des fibres. On notera $P : C^{\infty,0}(M, E) \to C^{\infty,0}(M, E)$, la famille d'opérateurs $\begin{pmatrix} 0 & \tilde{P}^* \\ \tilde{P} & 0 \end{pmatrix}$. La famille d'opérateurs P s'étend en un opérateur borné, G-invariant de $\mathcal{L}_{C(B)}(\mathcal{E})$.*

Démonstration. La famille d'opérateurs P est d'ordre 0 donc pour une constante C assez grande, on a par le théorème 1.2.30, qu'il existe une famille d'opérateurs S d'ordre 0, G-invariante et une famille continue d'opérateurs intégraux à noyaux continus R, G-invariante telles que
$$P^*P = R + C^2 - S^*S.$$
Il vient que pour tout $s \in C^{\infty,0}(M, E)$, on a :
$$\langle P^*Ps, s\rangle = \langle Rs, s\rangle + C^2\langle s, s\rangle - \langle S^*Ss, s\rangle,$$
donc
$$\langle Ps, Ps\rangle \leq \langle Rs, s\rangle + C^2\langle s, s\rangle \leq \|Rs\|_{\mathcal{E}}\|s\|_{\mathcal{E}} + C^2\|s\|^2_{\mathcal{E}}.$$
La famille d'opérateurs R est une famille d'opérateurs intégrale donc elle est bornée. On a alors
$$\langle Ps, Ps\rangle \leq \|R\|\|s\|^2_{\mathcal{E}} + C^2\|s\|^2_{\mathcal{E}},$$
et donc $\|Ps\|^2_{\mathcal{E}} \leq (\|R\| + C^2)\|s\|^2_{\mathcal{E}}$. On pose alors $\forall s \in \mathcal{E}$, $Ps = \lim_{n\to\infty} Ps_n$, pour (s_n) une suite d'éléments de $C^{\infty,0}(M, E)$ convergente vers s. Cette limite a un sens car par ce qui précède, (Ps_n) converge puisqu'elle est de Cauchy. □

Théorème 1.2.38. *Soit P une famille d'opérateurs d'ordre 0. Supposons que $\lim_{\xi\to\infty} \sup_m \|\sigma_P(m,\xi)\| = 0$ alors $P \in k(\mathcal{E})$.*

Démonstration. Par le théorème 1.2.30, on sait que $\forall\varepsilon > 0$, il existe des familles d'opérateurs S_ε et R_ε telles que $P^*P + S_\varepsilon^* S_\varepsilon - \varepsilon^2 = R_\varepsilon$. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il vient que $P^*P \leq \varepsilon^2 + R_\varepsilon$. De plus, R_ε est un opérateur compact. Donc dans l'algèbre de Calkin $\mathcal{L}(\mathcal{E})/k(\mathcal{E})$, on a $\|\overline{P}\| \leq \varepsilon$, $\forall\varepsilon > 0$. Et donc $P \in k(\mathcal{E})$. □

Corollaire 1.2.39. *Soit P une famille d'opérateurs d'ordre négatif. Alors P s'étend en un opérateur compact, c'est-à-dire $P \in k(\mathcal{E})$.*

Démonstration. On a $\sup_{m\in M} \|\sigma_P(m,\xi)\|$ qui tend vers 0 lorsque ξ tend vers l'infini. En appliquant le théorème 1.2.38, on obtient le résultat. □

Proposition 1.2.40. *On définit une $\star$-représentation π de C^*G dans $\mathcal{E}$ en posant pour $\varphi \in L^1(G)$:*

$$(\pi(\varphi)s)(m) := \int_G \varphi(g)(g\cdot s)(m)dg, \ \forall s \in \mathcal{E}$$

L'intégrale étant définie par $\langle s', \pi(\varphi)s\rangle = \int_G \varphi(g)\langle s', (g\cdot s)\rangle dg$, $\forall s' \in \mathcal{E}$.

Démonstration. Soient s, $s' \in \mathcal{E}$ et $\varphi \in L^1(G)$ alors on a :

$$\begin{aligned} |\langle s', \pi(\varphi)s\rangle| &= |\textstyle\int_G \varphi(g)\langle s', (g\cdot s)\rangle dg| \\ &\leq \textstyle\int_G |\varphi(g)| \|s'\| \|(g\cdot s)\| dg, \end{aligned}$$

par G-invariance de la métrique sur E, il vient :

$$\begin{aligned} |\langle s', \pi(\varphi)s\rangle| &\leq \textstyle\int_G |\varphi(g)| \|s\| \|s'\| dg \\ &\leq \|\varphi\|_{L^1} \|s\| \|s'\|. \end{aligned}$$

Cet opérateur est $C(B)$-linéaire, en effet l'action de G sur B est triviale donc $\forall f \in C(B)$, on a :

$$\begin{aligned} (\pi(\varphi)p^*fs)(m) &= \textstyle\int_G \varphi(g)(g\cdot p^*fs)(m)dg \\ &= \textstyle\int_G \varphi(g)f(p(g^{-1}\cdot m))(g\cdot s)(m)dg \\ &= \textstyle\int_G \varphi(g)f(g^{-1}\cdot p(m))(g\cdot s)(m)dg \\ &= p^*f(m)\textstyle\int_G \varphi(g)(g\cdot s)(m)dg \\ &= (p^*f\pi(\varphi)s)(m). \end{aligned}$$

Par G-invariance de la métrique sur E et de la famille de mesures, on obtient que $\pi(\varphi)^* = \pi(\varphi^*)$. En effet, on a :

$$\begin{aligned} \langle \pi(\varphi^*)s, s'\rangle &= \textstyle\int_G \varphi(g^{-1})\langle g\cdot s, s'\rangle dg \\ &= \textstyle\int_G \varphi(g^{-1})\langle s, g^{-1}\cdot s'\rangle dg \\ &= \langle s, \pi(\varphi)s'\rangle. \end{aligned}$$

L'égalité $\pi(\varphi \star \psi) = \pi(\varphi)\circ\pi(\psi)$ est vérifiée. Développons les deux membres de l'égalité, on a :

$$\begin{aligned} \pi(\varphi\star\psi)s &= \textstyle\int_G (\varphi\star\psi)(g) g\cdot s \ dg \\ &= \textstyle\int_G\int_G \varphi(h)\psi(h^{-1}g) g\cdot s \ dgdh \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\pi(\varphi)\circ\pi(\psi)s &= \int_G \varphi(h)h\cdot(\pi(\psi)s)dh \\ &= \int_G \varphi(h)h\cdot(\int_G \psi(k)k\cdot s)dhdk \\ &= \int_G\int_G \varphi(h)\psi(k)hk\cdot s\ dhdk.\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $hk = g$, il vient :

$$\pi(\varphi)\circ\pi(\psi)s = \int_G\int_G \varphi(h)\psi(h^{-1}g)g\cdot s\ dhdg,$$

d'où l'égalité. Par densité de l'image de $L^1(G)$ dans C^*G, on obtient le résultat $\forall\varphi \in C^*G$. $\square$

Lemme 1.2.41. *La représentation π est G-équivariante pour l'action par conjugaison sur C^*G.*

Démonstration. Vérifions que π est G-équivariante. On a :

$$\pi(g\cdot\varphi)s = \int_G \varphi(g^{-1}hg)h\cdot sdh,$$

en effectuant le changement de variable $k = g^{-1}hg$, il vient :

$$\begin{aligned}\pi(g\cdot\varphi)s &= \int_G \varphi(k)gkg^{-1}\cdot sdk \\ &= (g\cdot\pi(\varphi))s.\end{aligned}$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned}(g\cdot\varphi g\cdot\psi)(h) &= \int_G (g\cdot\varphi)(k)(g\cdot\psi)(k^{-1}h)dk \\ &= \int_G \varphi(g^{-1}kg)\psi(g^{-1}k^{-1}hg)dk,\end{aligned}$$

en posant $g^{-1}hg = t$, il vient :

$$\begin{aligned}(g\cdot\varphi g\cdot\psi)(h) &= \int_G \varphi(t)\psi(t^{-1}g^{-1}hg)dt \\ &= (g\cdot(\varphi\star\psi))(h).\end{aligned}$$

$\square$

Remarque 1.2.42. Puisque P est G-invariant, il est facile de vérifier que pour tout $\varphi \in C^*G$, on a $[\pi(\varphi), P] = 0$.

Proposition 1.2.43. *[45] Soit $\{v_k\}$ une base de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et $\{v_k^*\}$ la base duale de $\mathfrak{g}^*$.*

1. *On définit une famille d'opérateurs*

$$d_G = (d_{G,b})_{b\in B} : C^{\infty,0}(M,E) \to C^{\infty,0}(M, E\otimes\mathfrak{g}_M^*),$$

   par $d_G(s) = \sum\limits_k \mathcal{L}(v_k^*)s\otimes v_k^*$.

2. *Si on étend π aux 1-formes sur G en posant $\pi(d\varphi)s = \sum\limits_k \int_G \frac{\partial\varphi}{\partial v_k}(h)h\cdot s\otimes v_k^* dh$, alors pour tout $\varphi \in C^\infty(G)$ et tout $s \in C^{\infty,0}(M,E)$, on a $d_G(\pi(\varphi)s) = \pi(d\varphi)s$.*

Démonstration. Calculons $d_G(\pi(\varphi)s)$. On a :

$$\begin{aligned} d_G(\pi(\varphi)s) &= \sum_k \mathcal{L}(v_k^*)\pi(\varphi)s \otimes v_k^* \\ &= \sum_k \frac{d}{dt}_{t=0} e^{tv_k}\pi(\varphi)s \otimes v_k^* \\ &= \sum_k \int_G \frac{d}{dt}_{t=0} \varphi(g)(e^{tv_k}g) \cdot s \otimes v_k^* \; dg. \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $e^{tv_k}g = h$, il vient :

$$\begin{aligned} d_G(\pi(\varphi)s) &= \sum_k \int_G \frac{d}{dt}_{t=0} \varphi(e^{-tv_k}h)h \cdot s \otimes v_k^* \; dg \\ &= \sum_k \int_G \frac{\partial \varphi}{\partial v_k}(h)h \cdot s \otimes v_k^* \; dh \\ &= \pi(d\varphi)s. \end{aligned}$$

□

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat principal de cette section :

Théorème 1.2.44. *[45] Le triplet $\Big(\mathcal{E}, \pi, P\Big)$ définit une classe de* $\mathrm{KK_G}(C^*G, C(B))$*.*

Démonstration. D'après la proposition 1.2.40, la représentation π est G-équivariante et par la proposition 1.2.37, l'opérateur $P \in \mathcal{L}_{C(B)}(\mathcal{E})$. Par la remarque 1.2.42, on sait que $[\pi(\varphi), P] = 0$. De plus, P est auto-adjoint donc $(P^* - P) \circ \pi(\varphi) = 0$. Il reste à vérifier que $(1 - P^2) \circ \pi(\varphi) \in k(\mathcal{E})$. On note σ_P le symbole principal de P. Comme P est transversalement elliptique le long des fibres, le symbole de $1 - P^2$ qui est équivalent à $1 - \sigma_P^2$, vérifie l'hypothèse de la proposition 1.2.33. Donc $\forall \varepsilon > 0$, il existe c_1, $c_2 > 0$ et deux opérateurs intégraux, auto-adjoints, à noyaux continus R_1 et R_2 tels que

$$-(c_1 F + \varepsilon + R_1) \leq 1 - P^2 \leq c_2 F + \varepsilon + R_2,$$

où F est une famille continue d'opérateurs de symbole $\sigma_F(m, \xi) = (1 + q_m(\xi))(1 + |\xi|^2)^{-1}$. On note Δ_G et Δ les familles d'opérateurs de symboles respectifs $q_m(\xi)$ et $\|\xi\|^2$. On a modulo des familles d'opérateurs d'ordre 1 que $\Delta_G = d_G^* d_G$. En effet, le symbole de d_G en $(m, \xi) \in T^V M$ est donné par $\sum\limits_k i\langle \xi, f'_m(v_k)\rangle \mathrm{ext}(v_k^*) = \sum\limits_k i\langle f'^*_m(\xi), (v_k)\rangle \mathrm{ext}(v_k^*) = i \; \mathrm{ext}(f'^*_m(\xi))$. Donc le symbole de d_G^* est donné par $-i \; \mathrm{int}(f'^*_m(\xi))$. On obtient alors que le symbole de $d_G^* d_G$ est donné par $\langle f'^*_m(\xi), f'^*_m(\xi)\rangle = q_m(\xi)$ modulo des symboles d'ordre 1. Modulo des familles d'opérateurs d'ordre négatif, la famille d'opérateurs F est donnée par $d_G^*(1 + \Delta)^{-1} d_G$. Par la proposition 1.2.43, on sait que $d_G \circ \pi(\varphi) = \pi(d\varphi)$ est un opérateur borné sur $\mathcal{E}$. De plus, $d_G^*(1 + \Delta)^{-1}$ est d'ordre -1 donc par le corollaire 1.2.39, c'est un opérateur compact. Il vient que $d_G^*(1 + \Delta)^{-1} d_G \pi(\varphi)$ est compact. Pour $\psi = \varphi^* \star \varphi$, on a :

$$-\pi(\varphi)^* \circ (c_1 F + \varepsilon + R_1) \circ \pi(\varphi) \leq \pi(\varphi)^* \circ (1 - P^2) \circ \pi(\varphi) \leq \pi(\varphi)^* \circ (c_2 F + \varepsilon + R_2) \circ \pi(\varphi),$$

c'est-à-dire

$$-(c_1 F + \varepsilon + R_1) \circ \pi(\psi) \leq (1 - P^2) \circ \pi(\psi) \leq (c_2 F + \varepsilon + R_2) \circ \pi(\psi),$$

puisque tous les opérateurs sont G-invariants. En décomposant ψ en $\mathrm{Re}(\psi) + i\mathrm{Im}(\psi)$, on voit que ces inégalités restent vraies $\forall \psi \in C^*G$. En passant dans l'algèbre de Calkin $\mathcal{L}(\mathcal{E})/k(\mathcal{E})$, on obtient que $-\varepsilon\|\overline{\pi(\psi)}\| \leq \|\overline{(1+P^2)\circ\pi(\psi)}\| \leq \varepsilon\|\overline{\pi(\psi)}\|$, $\forall \psi \in C^*G$ et donc que $(1+P^2)\circ\pi(\psi)$ est compact. □

Définition 1.2.45. On définit la classe indice $\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}(P)$ d'une famille d'opérateurs G-invariante P, G-transversalement elliptique le long des fibres de $p : M \to B$, par :

$$\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}(P) = [\mathcal{E}, \pi, P] \in \mathrm{KK}_{\mathrm{G}}(C^*G, C(B))$$

et $\mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}(P)$ son image dans $\mathrm{KK}(C^*G, C(B))$.

Remarque 1.2.46.

1. Si la famille P est invariante par rapport à l'action d'un deuxième groupe compact H dont l'action commute avec celle de G alors on obtient une classe

$$\mathrm{Ind}_{G\times H}^{\mathrm{M|B}}(P) \in \mathrm{KK}_{G\times H}(C^*G, C(B))$$

car l'opérateur P est H-invariant et que la représentation est H-équivariante de manière évidente puisque les actions de G et H commutent.

2. On notera $\mathrm{Ind}_{H}^{\mathrm{M|B}}(P)$ son image dans $\mathrm{KK}_H(C^*G, C(B))$.

Version non bornée de la classe indice

On commence par rappeler des résultats sur les opérateurs non bornés d'un C^*-module de Hilbert sur $C_0(X)$, pour X un espace localement compact [35]. Soient X un espace localement compact, $\mathcal{F}$ un $C_0(X)$-module de Hilbert. On note $\mathcal{F}_t$ la fibre en $t \in X$ et pour $\xi \in \mathcal{F}$, $\xi_t \in \mathcal{F}$ sa valeur en t. Si $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ est un sous-ensemble, on pose $\mathcal{G}_t = \{\xi_t, \xi \in \mathcal{G}\}$.

Lemme 1.2.47. *[35] Soit $\mathcal{G}$ un sous-module de $\mathcal{F}$, on a alors $\overline{\mathcal{G}_t} = (\overline{\mathcal{G}})_t$. En particulier, $\mathcal{G}$ est dense dans $\mathcal{F}$ si et seulement si $\mathcal{F}_t$ est dense dans $\mathcal{G}_t$, $\forall t \in X$.*

Démonstration. On commence par montrer que $(\overline{\mathcal{G}})_t \subset \overline{\mathcal{G}_t}$. Soit $\eta \in \overline{\mathcal{G}}$. Soit $(\eta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de $\mathcal{G}$ convergente vers η. Par définition de $\eta^n \to \eta$, on sait que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$ si $n \geq N$ alors $\forall t \in X$, on a $\|\eta_t^n - \eta_t\| \leq \varepsilon$. Donc en particulier, $\eta_{t_0}^n \to \eta_{t_0}$ et donc $\eta_{t_0} \in \overline{\mathcal{G}_{t_0}}$. Montrons maintenant l'autre inclusion. On a $\mathcal{G}_t \subset \mathcal{G} \subset \overline{\mathcal{G}}$ donc $\overline{\mathcal{G}_t} \subset \overline{\mathcal{G}}$ et on a $\overline{\mathcal{G}_t} \subset \mathcal{F}_t$ donc $\overline{\mathcal{G}_t} \subset (\overline{\mathcal{G}})_t$. □

Pour chaque $t \in X$, soit T_t un opérateur non borné sur $\mathcal{F}_t$. On a alors un opérateur non borné dans $\mathcal{F}$ défini par $(T\xi)_t = T_t\xi_t$ avec

$$\mathrm{dom}(T) = \{\xi \in \mathcal{F}/\xi_t \in \mathrm{dom}(T_t), \forall t \in T \text{ et } T\xi \in \mathcal{F}\}.$$

Proposition 1.2.48. *[35] Supposons que T_t soit auto-adjoint, pour tout $t \in X$ et que T soit densément défini. Alors T est auto-adjoint et les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *T est régulier ;*
2. *pour tout $t \in X$, $(\mathrm{dom}(T))_t$ est un domaine essentiel pour T_t ;*

3. *pour tout $t \in X$, on a $(\mathrm{dom}(T))_t = \mathrm{dom}(T_t)$.*

Démonstration. On a que T est régulier si et seulement si $\mathrm{Im}(i+T) = \mathcal{F}$. Donc par le lemme précédent T est régulier si et seulement si $\mathrm{Im}(i+T)_t = \mathcal{F}_t$ et donc si et seulement si $(\mathrm{dom}(T))_t = \mathrm{dom}(T_t)$, donc (1) $\Leftrightarrow$ (2). L'équivalence (2) $\Leftrightarrow$ (3) provient du fait que $(\mathrm{dom}(T))_t$ est toujours T_t-fermé. $\square$

Donnons la définition de famille d'opérateurs pseudodifférentiels G-invariante G-transversalement elliptiques le long des fibres.

Définition 1.2.49. Soit $P : C^{\infty,0}(M, E^+) \to C^{\infty,0}(M, E^-)$ une famille d'opérateurs pseudodifférentiels d'ordre 1, G-invariante. On dit que P est G-transversalement elliptique le long des fibres si son symbole $\sigma(P) : \pi^*E^+ \to \pi^*E^-$ est inversible sur $T^V_G M \setminus M$.

Proposition 1.2.50. *[33] Soit X une G-variété compacte. Soit $W \to X$ un G-fibré vectoriel hermitien. Soit $A_0 : C^\infty(X, W^+) \to C^\infty(X, W)$ un opérateur pseudodifférentiel G-invariant, d'ordre positif qui est G-transversalement elliptique. Alors l'opérateur $A = \begin{pmatrix} 0 & A_0^* \\ A_0 & 0 \end{pmatrix}$ est essentiellement auto-adjoint.*

Soit $P_0 : C^{\infty,0}(M, E^+) \to C^{\infty,0}(M, E^-)$ une famille d'opérateurs pseudodifférentiels d'ordre 1, G-invariante et G-transversalement elliptique le long des fibres. Notons $\hat{P} = \begin{pmatrix} 0 & P_0^* \\ P_0 & 0 \end{pmatrix}$ l'opérateur obtenu en posant pour chaque $b \in B$, $\hat{P}_b = \begin{pmatrix} 0 & (P_0^*)_b \\ (P_0)_b & 0 \end{pmatrix}$, où P_b^* désigne l'adjoint formel le long des fibres. On note $\bar{P}_b$ l'extension auto-adjointe de l'opérateur G-transversalement elliptiques P_b.

Proposition 1.2.51. *Soit $P_0 C^\infty(M, E^+) \to C^\infty(M, E^-)$ une famille G-invariante d'opérateurs pseudodifférentiels G-transversalement elliptiques d'ordre 1, et soit $\hat{P} = \begin{pmatrix} 0 & P_0^* \\ P_0 & 0 \end{pmatrix}$ comme avant. Alors avec le domaine*

$$\mathrm{dom}(\hat{P}) := \{\xi \in \mathcal{E}/\xi_b \in \mathrm{dom}(\hat{P}_b),\ \forall b \in B \text{ et } \hat{P}\xi \in \mathcal{E}\}$$

, l'opérateur non borné $\hat{P} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est essentiellement auto-adjoint. Donc si on note P sa fermeture alors P est régulier et auto-adjoint.

Démonstration. Clairement $\hat{P}$ est alors densément défini sur $\mathcal{E}$ car $\mathrm{dom}(\hat{P})$ contient $C^{\infty,0}(M, E)$. Pour tout $b \in B$, l'opérateur $\hat{P}_b$ avec le domaine $C^\infty(M_b, E_b)$ est essentiellement auto-adjoint d'après la proposition 1.2.50, voir [33]. Comme $\mathrm{dom}(P) = \{\xi \in \mathcal{E}, \xi_b \in \mathrm{dom}(\bar{P}_b) \text{ et } \bar{P}\xi \in \mathcal{E}\}$, on obtient par la proposition 1.2.48 que P est auto-adjoint et il reste à vérifier que P est régulier. Par la proposition 1.2.48, il suffit de vérifier que pour tout $b \in B$, $(\mathrm{dom}(P))_b$ est un domaine essentiel pour P_b. On a $C^\infty(M_b, E_b) \subset (\mathrm{dom}(P))_b$, donc P est régulier. $\square$

Définition 1.2.52. [7][Module de Kasparov non borné] Soient A et B des C^*-algèbres. Un (A, B)-module de Kasparov non borné (E, ϕ, D) est la donnée d'un B-module de Hilbert E, d'un $\star$-homomorphisme gradué $\phi : A \to \mathcal{L}(E)$ et d'un opérateur non borné auto-adjoint régulier D tels que :

1. $(1+D^2)^{-1}\phi(a) \in k(E)$, $\forall a \in A$,
2. l'ensemble des $a \in A$ tels que $[D, \phi(a)]$ est densément défini et s'étend en un opérateur borné est dense dans A.

On rappelle que G agit par conjugaison sur C^*G.

Théorème 1.2.53. *Le triplet* $(\mathcal{E}, \pi, P)$*, où* $\pi : C^*G \to \mathcal{L}_{C(B)}(\mathcal{E})$ *est la représentation définie dans la proposition 1.2.40, définit un élément de* $\mathrm{KK_G}(C^*G, C(B))$*.*

Démonstration. D'après la proposition 1.2.40, la représentation π est G-équivariante et par le lemme 1.2.42, on a $[\pi(\varphi), P] = 0\ \forall \varphi \in C^*G$. Il reste à vérifier que $(1+P^2)^{-1} \circ \pi(\varphi) \in k(\mathcal{E})$. Notons Δ_G le Casimir qui est un opérateur pseudo-différentiel le long des fibres d'ordre 2. L'opérateur $1 + P^2 + \Delta_G$ est elliptique le long des fibres, en effet $\sigma_b(1 + P^2 + \Delta_G)$ est inversible $\forall b \in B$ car $\sigma(P)$ est inversible dans le sens transverse aux orbites et $\sigma(\Delta_G)$ est inversible dans le sens des orbites [1]. On rappelle que la résolvante d'une famille d'opérateur elliptique est compact (voir par exemple [68]). On en déduit que sa résolvante $(1 + P^2 + \Delta_G)^{-1}$ est compacte. On va montrer que

$$(1 + P^2 + \Delta_G)^{-1} \circ \pi(\varphi) - (1 + P^2)^{-1} \circ \pi(\varphi) \in k(\mathcal{E})$$

et donc que $(1+P^2)\circ\pi(\varphi)$ est compact. On note Δ le Laplacien sur G. En utilisant que $\Delta_G\pi(\varphi) = \pi(\Delta\phi)$ et que $[\pi(\varphi), P] = 0$, on a :

$$\begin{aligned} (1 + P^2 + \Delta_G)^{-1} \circ \pi(\varphi) - (1 + P^2)^{-1} \circ \pi(\varphi) &= -(1 + P^2 + \Delta_G)^{-1}\Delta_G(1 + P^2)^{-1} \circ \pi(\varphi) \\ &= -(1 + P^2 + \Delta_G)^{-1}\pi(\Delta\varphi)(1 + P^2)^{-1}. \end{aligned}$$

Maintenant comme $\pi(\Delta\varphi)$ et $(1 + P^2)^{-1}$ sont bornés et que $(1 + P^2 + \Delta_G)^{-1}$ est compact, on a bien que $(1 + P^2 + \Delta_G)^{-1} \circ \pi(\varphi) - (1 + P^2)^{-1} \circ \pi(\varphi) \in k(\mathcal{E})$. □

Définition 1.2.54. On définit la classe indice d'une famille d'opérateurs pseudodifférentiels d'ordre positif, G-invariante, G-transversalement elliptique le long des fibres P, par :

$$\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}(P) = [\mathcal{E}, \pi, P].$$

Remarque 1.2.55. Le lien avec la version bornée est fait dans [7], par l'intermédiaire de la transformation de Woronowicz (voir théorème A.3.10). C'est à dire si P est une famille d'opérateurs pseudodifférentiels d'ordre positif, G-invariant transversalement elliptique le long des fibres, la version borné de son indice est donnée par $[\mathcal{E}, \pi, \frac{P}{(1+P^2)^{1/2}}]$.

1.2.4 K-Multiplicité

La classe indice de la section précédente peut être vue comme une classe indice $\mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}(P)$ dans $\mathrm{KK}(C^*G, C(B))$, en oubliant que la représentation π est G-équivariante. On souhaite, pour une représentation irréductible V de G, définir une classe $m_P(V) \in \mathrm{K}(B)$ donnant la multiplicité de V dans $\mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}(P)$. Une fois cette classe définie, on vérifiera que la classe obtenue en effectuant le produit de Kasparov de la représentation V et de la classe indice $\mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}(P)$ redonne bien $m_P(V)$. Soit V une représentation irréductible de G. On définit un $C(B)$-module $\mathcal{E}_V^G$ en posant

$$\mathcal{E}_V^G := (V \otimes \mathcal{E})^G.$$

La structure de $C(B)$-module étant celle induite par celle de $\mathcal{E}$. En tant que champ continu d'espaces de Hilbert, il est associé à $\Big((L^2(M_b, V\otimes E_b)^G)_{b\in B}, \Delta^G\Big)$, où Δ^G est l'ensemble des sections continues de $V\otimes E$ au-dessus de B qui sont G-invariante. Le produit scalaire est alors donné par

$$\begin{aligned}
\langle v\otimes s, w\otimes t\rangle(b) &= \textstyle\int_{M_b}\langle \int_G (g\cdot(v\otimes s))(m)dg, \int_G (h\cdot (w\otimes t))(m)dh\rangle_{(\underline{V}\otimes E)_m} d\mu_b(m)\\
&= \textstyle\int_{M_b}\int_G\int_G \langle g\cdot v, h\cdot w\rangle_V \langle (g\cdot s)(m), (h\cdot t)(m)\rangle_{E_m} dg dh d\mu_b(m)\\
&= \textstyle\int_{M_b}\langle s(m), \pi(C_{v,w})t(m)\rangle_{E_m} d\mu_b(m)\\
&= \langle s, \pi(C_{v,w})t\rangle(b).
\end{aligned}$$

On définit un opérateur P_V^G de $\mathcal{L}_{C(B)}(\mathcal{E}_V^G)$ en posant

$$P_V^G := (\mathrm{id}_V \otimes P)_{|\mathcal{E}_V^G}.$$

Lemme 1.2.56. $\Big(\mathcal{E}_V^G, P_V^G\Big)$ *est un cycle de Kasparov qui définit une classe de* $\mathrm{KK}(\mathbb{C}, C(B))$.

Démonstration. L'opérateur P_V^G est auto-adjoint et linéaire, il suffit donc de vérifier que $(P_V^G)^2-1$ est compact. On a $(P_V^G)^2-1 = (\mathrm{id}_V\otimes(P^2-1))_{|\mathcal{E}_V^G}$. Soit $(e_1,\cdots,e_n)$ une base de V. Soit $s=\sum\limits_i e_i\otimes s_i$ un élément de $\mathcal{E}_V^G$. On a alors $\int_G g\cdot s = s$ donc

$$\begin{aligned}
s &= \textstyle\int_G \sum\limits_i \rho(g)e_i\otimes g\cdot s_i dg\\
&= \sum\limits_i \textstyle\int_G \sum\limits_j C_{e_j,e_i}(g)e_j\otimes g\cdot s_i dg\\
&= \sum\limits_{i,j} e_j\otimes \textstyle\int_G C_{e_j,e_i}(g)g\cdot s_i dg\\
&= \sum\limits_{i,j} e_j\otimes\pi(C_{e_j,e_i})s_i.
\end{aligned}$$

Il vient alors que $(P_V^G)^2-1 = \sum\limits_{t,j} e_j\otimes e_t^*\otimes(P^2-1)\circ\pi(C_{e_j,e_t})$. En effet,

$$\begin{aligned}
((P_V^G)^2-1)s &= (\mathrm{id}_V\otimes(P^2-1))(\sum\limits_{i,j} e_j\otimes\pi(C_{e_j,e_i})s_i)\\
&= \sum\limits_{i,j} e_j\otimes(P^2-1)\circ\pi(C_{e_j,e_i})s_i\\
&= \sum\limits_{t,j} e_j\otimes e_t^*\otimes(P^2-1)\circ\pi(C_{e_j,e_t})(\sum\limits_i e_i\otimes s_i).
\end{aligned}$$

De plus, on sait que $(\dim V)C_{e_j,e_j}\star C_{e_j,e_t} = C_{e_j,e_t}$ et que $(P^2-1)\circ\pi(C_{e_j,e_j})$ est compact. Soit $(R_n^j)_n$ une suite d'opérateurs de rang fini sur $\mathcal{E}$ convergente vers $(P^2-1)\circ\pi(C_{e_j,e_j})$. On définit la suite d'opérateurs de rang fini $(e_j\otimes R_n^j\circ\pi(C_{e_j,-}))$, alors celle-ci converge vers $e_j\otimes(P^2-1)\pi(C_{e_j,e_j})\circ\pi(C_{e_j,-})$ pour la norme d'opérateur issue du produit scalaire sur $\mathcal{E}_V^G$. En effet, on a

$$\begin{aligned}
&\langle e_j\otimes\Big((P^2-1)\circ\pi(C_{e_j,e_j}) - R_n^j\Big)\circ\pi(C_{e_j,-})\sum\limits_k e_k\otimes s_k, \sum\limits_t e_t\otimes s_t\rangle_{(V\otimes\mathcal{E})^G}\\
&= \langle\Big((P^2-1)\circ\pi(C_{e_j,e_j}) - R_n^j\Big)\sum\limits_k \pi(C_{e_j,e_k})s_k, \sum\limits_t \pi(C_{e_j,e_t})s_t\rangle_{\mathcal{E}},
\end{aligned}$$

d'où la convergence. On obtient que $(P_V^G)^2 - 1$ est limite d'opérateurs de rang fini et donc est compact. On conclut que $\left(\mathcal{E}_V^G, P_V^G\right)$ définit bien une classe de $\mathrm{KK}(\mathbb{C}, C(B))$.

$\square$

Définition 1.2.57. On définit la K-multiplicité $m_P(V)$ dans $\mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}(P)$ d'une représentation irréductible V de G comme le fibré virtuel image de la classe

$$[(\mathcal{E}_V^G, P_V^G)] \in \mathrm{KK}(\mathbb{C}, C(B)),$$

par l'isomorphisme $\mathrm{KK}(\mathbb{C}, C(B)) \cong \mathrm{K}(B)$. Il s'agit donc d'un élément du groupe de K-théorie topologique $\mathrm{K}(B)$ de B.

Proposition 1.2.58. *La classe $[\mathcal{E}_V^G, P_V^G]$ est donnée par produit de Kasparov*

$$[V] \underset{C^*G}{\otimes} \mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}(P) \in \mathrm{KK}(\mathbb{C}, C(B)),$$

où V est le C^*G-module projectif de type fini décrit dans [40]. Ainsi la K*-multiplicité de V dans l'indice de P est l'élément de* $\mathrm{K}(B)$ *correspondant à ce produit de Kasparov via l'isomorphisme* $\mathrm{KK}(\mathbb{C}, C(B)) \cong \mathrm{K}(B)$*.*

Remarque 1.2.59. Il s'agit aussi de la différence formelle de deux champs hilbertiens de dimensions finies au-dessus de B.

Démonstration. La classe $[V]$ est donnée par le cycle $[(V, 0)] \in \mathrm{KK}(\mathbb{C}, C^*G)$. L'opérateur $\mathrm{id}_V \underset{C^*G}{\otimes} P$ a un sens puisque P commute avec l'action de C^*G. En utilisant la structure de C^*G-module sur V, il vient que $\forall v \in V$, $v = \sum\limits_k e_k \cdot C_{e_k,v}$. Donc $\forall s = \sum\limits_i v_i \otimes s_i \in V \underset{C^*G}{\otimes} \mathcal{E}$, on a $s = \sum\limits_k e_k \otimes \sum\limits_i \pi(C_{e_k,v_i}) s_i$. En utilisant comme dans la proposition précédente que $\dim V C_{e_j,e_j} \star C_{e_j,v} = C_{e_j,v}$, on déduit de la même manière que $(\mathrm{id}_V \underset{C^*G}{\otimes} P)^2 - 1$ est compact. En effet, le produit scalaire sur $V \underset{C^*G}{\otimes} \mathcal{E}$ est donné par $\langle v \otimes s, w \otimes t\rangle_{V \underset{C^*G}{\otimes} \mathcal{E}}(b) = \langle s, \pi(C_{v,w})t\rangle_{\mathcal{E}}(b)$ comme dans la proposition précédente. De plus, les $C(B)$-modules $V \underset{C^*G}{\otimes} \mathcal{E}$ et $(V \otimes \mathcal{E})^G$ sont isomorphes. L'isomorphisme est donné par

$$\begin{array}{ccc} V \underset{C^*G}{\otimes} \mathcal{E} & \to & (V \otimes \mathcal{E})^G \\ \sum v_i \otimes s_i & \mapsto & \sum\limits_i \int_G g \cdot (v_i \otimes s_i) dg. \end{array}$$

Cette application est bien définie car on a bien $\int_G g \cdot (v \cdot \varphi \otimes s) dg = \int_G g \cdot (v \otimes \pi(\varphi)s) dg$. Calculons le premier membre,

$$\begin{aligned} \int_G g \cdot (v \cdot \varphi \otimes s) dg &= \int_G \int_G \varphi(h) g h^{-1} v \otimes g s dh dg \\ &= \int_G \int_G k v \otimes \varphi(h) k h s dh dk \\ &= \int_G k(v \otimes \pi(\varphi) s) dk. \end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} \int_G g \cdot (v \otimes s) dg &= \int_G \sum_k e_k C_{e_k,v}(g) \otimes g s dg \\ &= \int_G \sum_k e_k \otimes C_{e_k,v}(g) g s dg \\ &= \sum_k e_k \otimes \int_G C_{e_k,v}(g) g s dg \\ &= \sum_k e_k \otimes \pi(C_{e_k,v}) s, \end{aligned}$$

et donc l'isomorphisme est l'identité puisque $v \otimes s = \sum_k e_k \cdot C_{e_k,v} \otimes s = \sum_k e_k \otimes \pi(C_{e_k,v})s$. On a donc bien l'égalité $[\mathcal{E}_V^G, P_V^G] = [V] \underset{C^*G}{\otimes} \mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}(P)$ modulo l'isomorphisme $\mathrm{K}(B) \cong \mathrm{KK}(\mathbb{C}, C(B))$. □

1.3 Propriétés de l'indice

On note comme avant $T_G^V M := T^V M \cap T_G M$.

1.3.1 La flèche d'indice

Proposition 1.3.1. *La classe indice* $\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}(P)$ *ne dépend que de la classe de* $[\sigma(P)]$ *dans* $\mathrm{K_G}(T_G^V M)$ *et l'indice induit alors un homomorphisme de groupe :*

$$\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}} : \mathrm{K_G}(T_G^V M) \longrightarrow \mathrm{KK_G}(C^*G, C(B)).$$

Plus précisément, la flèche $[\sigma] \mapsto \mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}(P(\sigma))$ *est bien définie. Ici* $P(\sigma)$ *est l'opérateur obtenu par quantification de* σ*.*

Démonstration. On suit [3] et [1]. Soit $C(T_G^V M)$ le semi-groupe des classes d'homotopies de symboles transversalement elliptiques, d'ordres 0 et $C_\phi(T_G^V M) \subset C(T_G^V M)$ les éléments représentés par des symboles dont la restriction au fibré en sphère de $T_G^V M$ est induite par un isomorphisme de fibrés sur M. On sait que $\mathrm{K_G}(T_G^V M) := C(T_G^V M)/C_\phi(T_G^V M)$, [3]. Il suffit de vérifier que :

1. si $[\sigma] = [\sigma']$ dans $C(T_G^V M)$ alors $\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}\sigma = \mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}\sigma'$,
2. pour P et Q des opérateurs transversalement elliptiques le long des fibres, on a $\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}(P \oplus Q) = \mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}(P) + \mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}(Q)$,
3. si P est induit par un isomorphisme de fibrés alors $\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}(P) = 0$.

1. Si $[\sigma] = [\sigma']$ alors il existe une homotopie σ_t entre σ et σ' de symboles transversalement elliptiques, la quantification de cette homotopie donne une homotopie opératorielle qui donne la même classe dans $\mathrm{KK_G}(C^*G, C(B))$, par définition du groupe de Kasparov $\mathrm{KK_G}(C^*G, C(B))$.
2. Si $P : C^{\infty,0}(M,E) \to C^{\infty,0}(M,E)$ et $Q : C^{\infty,0}(M,F) \to C^{\infty,0}(M,F)$ sont des opérateurs transversalement elliptiques le long des fibres alors on a $\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}(P \oplus Q) = (\mathcal{E} \oplus \mathcal{F}, \pi_{\mathcal{E}} \oplus \pi_{\mathcal{F}}, P \oplus Q) = (\mathcal{E}, \pi_{\mathcal{E}}, P) + (\mathcal{F}, \pi_{\mathcal{F}}, Q) = \mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}(P) + \mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}(Q)$.
3. Si P est induit par un isomorphisme de fibrés sur M alors $\sigma(P)$ est nulle dans $\mathrm{K_G}(T^V M)$ et donc son indice est nulle dans $\mathrm{KK_G}(\mathbb{C}, C(B))$. De plus, ici la classe de $\sigma(P)$ dans $\mathrm{K_G}(T_G^V M)$ est juste la restriction de celle dans $\mathrm{K_G}(T^V M)$ à $T_G^V M$. Puisque l'indice dans $\mathrm{KK_G}(\mathbb{C}, C(B))$ de P est nul, il existe une homotopie opératorielle $(\mathcal{E}, S_t)$, avec S_t auto-adjoint et G-invariant, entre $(\mathcal{E}, S_0 = P)$ et $(\mathcal{E}, S_1 = \begin{pmatrix} 0 & U^* \\ U & 0 \end{pmatrix})$, où U est un unitaire G-invariant. On a alors $\forall \varphi \in C^*G$ $[\pi(\varphi), S_t] = 0$, $(S_t^2 - 1)\pi(\varphi) = 0$ et $S_t^* = S_t$ car $(S_t^2 - 1) \in k(\mathcal{E})$. Le cycle $(\mathcal{E}, \pi, S_t)$ fourni alors une homotopie opératorielle entre $(\mathcal{E}, \pi, P)$ et $(\mathcal{E}, \pi, S_1) \in \mathrm{KK_G}(C^*G, C(B))$. □

Produit extérieur de familles d'opérateurs pseudodifférentielles d'ordre positif

On commence par rappeler un théorème classique sur les opérateurs pseudodifférentiels d'ordre positif (voir par exemple [3] paragraphe 9).

Théorème 1.3.2 ([3])**.** *Soient $M \to B$ et $M' \to B$ deux fibrations G-équivariantes. Soient $E \to M$ et $E' \to M'$ des familles de fibrés vectoriels. Si $P \in \mathcal{P}^m(M,E)$ est une famille d'opérateurs pseudodifférentiels d'ordre strictement positif sur E alors la famille d'opérateurs $\tilde{P} = P \otimes id \in \overline{\mathcal{P}}^m(M \times M', E \boxtimes E')$ et se restreint en une famille d'opérateurs de $\overline{\mathcal{P}}^m(M \times_B M', E \boxtimes E'_{|M\times_B M'})$. De plus, $\sigma_{(\xi,\eta)}(P)(e\otimes e') = \sigma_\xi(P)(e) \otimes e'$, $\forall (\xi,\eta) \in T^V M \times T^V M'$ et $e \otimes e' \in E \boxtimes E'$.*

Démonstration. Comme $\mathcal{P}^m$ est une classe d'opérateurs locaux, par partition de l'unité, on peut se ramener au cas de familles produits sur $M = U \times V \to V$ et $M' = U' \times V' \to V'$, où U et U' sont des ouverts respectivement de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^{n'}$. On peut aussi supposer que les fibrés vectoriels sont triviaux de rang 1. Alors pour $f \in C^\infty(M \times M')$, K_U et $K_{U'}$ des compacts respectivement de U et U', on a pour $|\alpha| + |\beta| = s - m \geq 0$:

$$\begin{aligned} \int_{K_U \times K_{U'}} \left|\partial_u^\alpha \partial_{u'}^\beta \tilde{P}_{v,v'} f_{(v,v')}(u,u')\right|^2 dudu' &\leq C_{v,v'} \int_{K_U} du' \sum_{|\gamma|\leq m+\alpha} \left|\partial_u^\gamma \partial_{u'}^\beta f_{(v,v')}(u,u')\right|^2 du \\ &\leq C_{v,v'} \int_{K_U \times K'_U} \sum_{|\beta|+|\gamma|\leq s} \left|\partial_u^\gamma \partial_{u'}^\beta f_{(v,v')}(u,u')\right|^2 dudu'. \end{aligned}$$

Le dernier membre est continu par rapport à (v,v'), donc pour $K_V \subset V$ et $K'_V \subset V'$ des compacts, on obtient que :

$$\begin{aligned} &\sup_{(v,v')\in K_V\times K_{V'}} \int_{K_U \times K_{U'}} \left|\partial_u^\alpha \partial_{u'}^\beta \tilde{P}_{v,v'} f_{(v,v')}(u,u')\right|^2 dudu' \\ &\qquad \leq C \sup_{(v,v')\in K_V\times K_{V'}} \int_{K_U \times K'_U} \sum_{|\beta|+|\gamma|\leq s} \left|\partial_u^\gamma \partial_{u'}^\beta f_{(v,v')}(u,u')\right|^2 dudu'. \end{aligned}$$

On désigne respectivement par $H^{s,cpt}_{vert}(M \times M')$ et $H^{s,loc}_{vert}(M \times M')$ les espaces de Sovolev verticaux des fonctions à support compact le long des fibres et des fonctions à dérivées partielles d'ordre inférieur à s dans $L^{2,loc}$. On note $\mathrm{Op}^m_{vert}(M \times M')$ les opérateurs bornés $C^\infty(M \times M') \to C^{-\infty}(M \times M')$. On a donc que si $s \geq m$, $\tilde{P}$ est continu en tant que famille produits

$$H^{s,cpt}_{vert}(M \times M') \to H^{s-m,loc}_{vert}(M \times M')$$

et que $P \mapsto \tilde{P}$ est continue de $\mathrm{Op}^m_{vert}(M) \to \mathrm{Op}^m_{vert}(M \times M')$.
Comme $\overline{\mathcal{P}}^m$ est une classe locale, il suffit de montrer que pour φ, $\psi \in C_0(V, C^\infty_c(U))$ et φ_1, $\psi_1 \in C_0(V', C^\infty_c(U'))$, la famille $Q_{v,v'} = \varphi_v \varphi_{1,v'} \tilde{P}_{v,v'} \psi_v \psi_{1,v'} \in \overline{\mathcal{P}}^m_{vert}(M \times M')$. Pour cela, on construit une famille $R^t \in \mathcal{P}^0_{vert}(M \times M')$, définie pour $t > 0$ par :

(i) $Q \circ R^t \in \mathcal{P}^m_{vert}(M \times M')$,

(ii) $Q \circ R^t \to Q$ quand $t \to 0$ dans $\mathrm{Op}^m_{vert}(M \times M')$.

On commence par choisir une famille de fonctions $\sigma^t(\xi,\eta)$, $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n'}$, à valeurs dans $[0,1]$ telle que

(a) σ^t est homogène de degré 0 et C^∞ hors de $(0,0)$,

(b) $\begin{aligned} \sigma^t &= 1 \text{ pour } |\xi| < t|\eta| \\ &= 0 \text{ pour } |\xi| > 2t|\eta|. \end{aligned}$

Soit aussi $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞ telle que

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= 0 \text{ pour } |\lambda| \leq 1 \\ &= 1 \text{ pour } |\lambda| \geq 2. \end{aligned}$$

Posons alors

$$\rho^t(\xi,\eta) = 1 - \chi(t||(\xi,\eta)||)\sigma^t(\xi,\eta).$$

On définit alors R^t par

$$R^t_{v,v'} f_{v,v'}(u,u') = (2\pi)^{-n-n'} \int \rho^t(\xi,\eta) \hat{f}_{v,v'}(\xi,\eta) e^{i\langle u,\xi\rangle + i\langle u',\eta\rangle} d\xi d\eta$$

et $Q^t = Q \circ R^t$ est alors donné par

$$Q^t_{v,v'} f_{v,v'}(u,u') = (2\pi)^{-n-n'} \int \varphi_{1,v}(u')\varphi_v(u) p_{v,v',\psi_v}(u,\xi)\rho^t(\xi,\eta)\widehat{\psi_{1,v'} f}_{v,v'}(\xi,\eta) d\xi d\eta$$

De plus, $p_{v,v',\psi_v}\rho^t$ est une famille continue de symboles d'ordre m telle que $Q^t \in \mathcal{P}^m_{vert}(M \times M')$.
Pour $m > 0$, on a

$$\left| \frac{\partial^\beta_u \Big(p_{v,v',\psi_v}(u,\xi)(\rho^t(\xi,\eta) - 1) \Big)}{(1 + |\xi| + |\eta|)^m} \right| < C_{\beta,v,v'} t^m,$$

donc quand $t \to 0$, $Q^t \to Q$ dans $\mathrm{Op}^m_{vert}(M \times M')$.
Et on a $\sigma(Q^t) = \varphi_1\varphi\sigma(p_\psi)(1-\sigma^t)\psi_1 = \varphi_1\varphi\tilde{\sigma}(P)(1-\sigma^t)\psi\psi_1$ qui tend vers $\varphi_1\varphi\tilde{\sigma}(P)\psi\psi_1$, comme le symbole est un objet local, on a que $\tilde{\sigma}(P) = \sigma(\tilde{P})$.
Maintenant, en prenant $V' = V$ et $v' = v$ dans ce qui précède, on a que $\tilde{P}$ se restreint en une famille de $\overline{\mathcal{P}}^m(M \times_B M', E \boxtimes E'_{|M\times_B M'})$. □

1.3.2 Le cas des actions libres

Soit $p : M \to B$ une fibration $G \times H$-équivariante de variétés compactes. On suppose que l'action de $G \times H$ est triviale sur B et que H agit librement sur M. Notons $\pi^H : M \to M/H$ la projection, d'après [1], on sait qu'on a un isomorphisme

$$\pi^{H*} : \mathrm{K_G}(T^{*V}_G(M/H)) \to \mathrm{K}_{G\times H}(T^{*V}_{G\times H}M),$$

qui identifie les symboles d'opérateurs G-équivariants, G-transversalement elliptiques le long des fibres de $M/H \to B$ avec les symboles d'opérateurs $G \times H$-équivariant, $G \times H$-transversalement elliptiques le long des fibres de $M \to B$. Notons $\pi : T^V M \to M$ et $\bar{\pi} : T^V(M/H) \to M/H$ les projections. L'application inverse de π^*_H est donnée comme suit. Soit $\sigma : \pi^*E^+ \to \pi^*E^-$ un symbole $G\times H$-transversalement elliptique sur M. Alors on définit sans ambiguïté un symbole G-équivariant sur $T^V M$ G-transversalement elliptique $\overline{\sigma} : \bar{\pi}^*(E^+/H) \to \bar{\pi}^*(E^-/H)$ par $\overline{\sigma}(\bar{m}, \bar{\xi})(\bar{v}) = \sigma(m, \xi)(v)$, où $\bar{m} = \pi^H(m) \in M/H$, $\bar{\xi} = \pi^H_*(\xi) \in T^V_{\bar{m}}(M/H)$, $\bar{v} = \pi^H(v) \in (E/H)_{\bar{m}}$.

Soit $\hat{H}$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations unitaires irréductibles de H. On note χ_α le caractère associé à α et W_α l'espace de la représentation α. On a une application naturelle :

$$\begin{array}{ccc} R(H \times G) & \longrightarrow & \mathrm{K_G}(M/H) \\ V & \longmapsto & \underline{V}^* \end{array}$$

où $\underline{V}^* = M \times_H V^*$ est le G-fibré vectoriel associé à V^* sur M/H. On notera $\tilde{\chi}_\alpha$ le caractère associé à χ_α dans $R(G \times H)$ c'est-à-dire le caractère associé à la représentation W_α tensorisée par la représentation trivial de G. On a donc une application :

$$\mathrm{KK}(\mathbb{C}, C^*H) \to \mathrm{KK_G}(\mathbb{C}, C^*H).$$

De plus, on peut définir une application :

$$\mathrm{KK}(C^*H, \mathbb{C}) \to \mathrm{KK_G}(C^*H, \mathbb{C})$$

en moyennant l'opérateur et la représentation est automatiquement équivariante car l'action de G commute avec l'action de H.

Théorème 1.3.3. *[1] Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{K_G}(T^V_G(M/H)) \arrow[r, "\pi^{H*}"] \arrow[d, "\underline{W}^*_\alpha \otimes"'] & \mathrm{K_{G\times H}}(T^V_{G\times H}M) \arrow[r, "\mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}_{\mathrm{G}}"] & \mathrm{KK_G}(C^*(G \times H), C(B)) \arrow[d, "\tilde{\chi}_\alpha \otimes_{C^*H}"] \\ \mathrm{K_G}(T^V_G(M/H)) \arrow[rr, "\mathrm{Ind}^{\mathrm{M/H|B}}_{\mathrm{G}}"'] & & \mathrm{KK_G}(C^*G, C(B)). \end{tikzcd}$$

Dit autrement, si $a \in \mathrm{K_G}(T^{*V}_G(M/H))$, alors $\mathrm{Ind}^{M/H|B}_G(\underline{W}^*_\alpha \otimes a) = \tilde{\chi}_\alpha \otimes_{C^*H} \mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}_{\mathrm{G}}(\pi^{H*}a)$. En particulier, comme élément de $\mathrm{Hom}_{R(G)}\Big(R(H) \otimes R(G), \mathrm{KK_G}(C^*G, C(B))\Big)$ on a :

$$\mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}_{\mathrm{G}}(\pi^{H*}a) = \sum_{\alpha \in \hat{H}} \tilde{\hat{\chi}}_\alpha \otimes \mathrm{Ind}^{M/H|B}_{\mathrm{G}}(\underline{W}^*_\alpha \otimes a),$$

où $\hat{\chi}_\alpha$ est l'élément associé à W_α dans $\mathrm{KK}(C^*H, \mathbb{C})$ et $\tilde{\hat{\chi}}_\alpha$ son image dans $\mathrm{KK_G}(C^*H, \mathbb{C})$.

Démonstration. Soit $\tilde{A} : C^{\infty,0}(M, \pi^{H*}E^+) \to C^{\infty,0}(M, \pi^{H*}E^-)$ une famille d'opérateurs $G \times H$-transversalement elliptique le long des fibres associées à $\pi^{H*}a \in \mathrm{K_{G\times H}}(T^{*V}_{G\times H}M)$. Notons $\pi^{H*}\mathcal{E}$ la C^*-complétion de $C^{\infty,0}(M, \pi^{H*}E)$ en tant que $C(B)$-module de Hilbert. On a :

$$\mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}_{\mathrm{G\times H}}(\pi^{H*}a) = [\pi^{H*}\mathcal{E}, \pi_{G\times H}, \tilde{A}] = \sum_{\alpha \in \hat{H}} \chi_\alpha \otimes [(W_\alpha \otimes \pi^{H*}\mathcal{E})^H, \pi_G, (id_{W^*_\alpha} \otimes \tilde{A})_{|G-inv}].$$

On a l'isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} C^{\infty,0}(M, W^*_\alpha \otimes \pi^{H*}E)^H & \longrightarrow & C^{\infty,0}(M/H, \underline{W}^*_\alpha \otimes E) \\ s & \longmapsto & s_{M/H}, \end{array}$$

donné par $s_{M/H}(x) = [m, s(m)]$, $x = \pi^H(m)$. On a donc un isomorphisme entre $(W^*_\alpha \otimes \pi^{H*}\mathcal{E})^H$ et $\overline{C^{\infty,0}(M/H, \underline{W}^*_\alpha \otimes E)}^{C(B)}$.
Il reste a montrer que pour un certain choix de $id_{W^*_\alpha} \otimes \tilde{A}$, la famille d'opérateurs $id_{\underline{W}^*_\alpha} \otimes A$ est une famille d'opérateurs pseudodifférentiels associée à $\underline{W}^*_\alpha \otimes a \in \mathrm{K_G}(T^{*V}_G(M/H))$.
Soit $A_1 : C^{\infty,0}(M/H, \pi^{H*}E^+) \to C^{\infty,0}(M/H, \pi^{H*}E^-)$ une famille d'opérateurs pseudodifférentiels d'ordre 1 associée à a. Choisissons $\{O_j\}$ un système de trivialisations de $\pi^H : M \to M/H$ et $\{\phi_j^2\}$ une partition de l'unité. Soit $M_j = (\pi^H)^{-1}(O_j) = O_j \times H$, notons $A_1^j = \phi_j A_1 \phi_j$ la famille d'opérateurs pseudodifférentiels d'ordre 1 induite sur O_j, elle se relève en une famille d'opérateurs pseudodifférentiels $\tilde{A}_1^j \in \mathcal{P}^1(M_j, \pi^{H*}E)$ sur M_j, par le théorème 1.3.2. Par l'intermédiaire des ϕ_j, cette famille d'opérateurs pseudodifférentiels peut être vue comme une famille d'opérateurs pseudodifférentiels sur M. En moyennant la somme des $\tilde{A}_1^j$ sur G, on obtient :

$$\tilde{A} = \int_G g \cdot \sum_j \tilde{A}_1^j dg,$$

qui est une famille d'opérateurs pseudodifférentiels d'ordre 1 sur M. Comme prendre le symbole principal commute avec le fait de relever et avec la moyenne, il vient que $\sigma(\tilde{A})$ représente $\pi^{H*}a$. De plus, si on restreint $\tilde{A}_1^j$ aux sections provenant de M/H, on retrouve la famille A_1^j et la restriction de $\tilde{A}$ aux sections H-invariantes est juste la famille d'opérateurs G-invariants, d'ordre 1, $A = \int_G g \cdot \sum_j A_1^j dg$.
Donc la famille d'opérateurs pseudodifférentiels d'ordre 1, $A : C^{\infty,0}(M/H, E^+) \to C^{\infty,0}(M/H, E^+)$ avec $[\sigma(A)] = a$ se relève en une famille d'opérateurs pseudodifférentiels $\tilde{A}$, d'ordre 1 avec $[\sigma(\tilde{A})] = \pi^{H*}a$ et en restreignant $\tilde{A}$ en l'application $\tilde{A} : C^{\infty,0}(M, \pi^{H*}E^+) \to C^{\infty,0}(M, \pi^{H*}E^-)$, on retrouve A. On a bien que $[(\pi^{H*}\mathcal{E})^H, \pi_G, \tilde{A}_{|H-inv}] = \mathrm{Ind_G^{M|B}}(a)$, en remplaçant a par $\underline{W}^*_\alpha \otimes a$, on obtient le résultat. □

Corollaire 1.3.4. *Soit $p : M \to B$ une fibration $G \times H$-équivariante. Supposons que l'action de $G \times H$ soit triviale sur B et que l'action de H soit libre sur M. Alors pour $a \in \mathrm{K_G}(T^{*V}(M/H))$, on l'égalité suivante :*

$$\tilde{\chi}_\alpha \otimes_{C^*G} \mathrm{Ind_G^{M|B}}(\pi^{H*}a) = \mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{M/H|B}(\underline{W}^*_\alpha \otimes a),$$

où $\pi^H : M \to M/H$ est la projection et $\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{M/H|B}(\underline{W}^*_\alpha \otimes a)$ est donné par l'indice G-équivariant des familles elliptiques le long des fibres de $M/H \to B$.
En particulier, comme élément de $\mathrm{Hom}_{R(G)}\Big(R(H) \otimes R(G), \mathrm{KK_G}(\mathbb{C}, C(B))\Big)$ *on a :*

$$\mathrm{Ind_G^{M|B}}(\pi^{H*}a) = \sum_{\alpha \in \hat{H}} \tilde{\tilde{\chi}}_\alpha \otimes \mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{M/H|B}(\underline{W}^*_\alpha \otimes a),$$

où $\tilde{\tilde{\chi}}_\alpha$ est l'élément associé à W_α dans $\mathrm{KK_G}(C^*H, \mathbb{C})$.

1.3.3 Multiplicativité

Soient G et H deux groupes de Lie compacts. Soient $p : M \to B$ une fibration G-équivariante de variétés compactes et $p' : M' \to B'$ une fibration $G \times H$-équivariante de variétés compactes. On

suppose que l'action de G sur B est triviale et que les actions de G et H sont triviales sur B'. Si $B = B'$ alors le produit fibré $M \times_B M'$ est une fibration $G \times H$-équivariante sur B. On souhaite que l'indice du produit de $a \in \mathrm{K_G}(T^{*V}_G M)$ et $b \in \mathrm{K_{G\times H}}(T^{*V}_H M')$ dans $\mathrm{K_{G\times H}}(T^{*V}_{G\times H}(M \times_B M'))$ soit calculé par un produit de l'indice de a et de l'indice de b.
Le produit de a et b est donné par le sharp-produit $a\sharp b = \begin{pmatrix} a\otimes 1 & -1\otimes b^* \\ 1\otimes b & a^*\otimes 1\end{pmatrix}$ [1], voir aussi [3], que l'on restreint à $T^{*V}_{G\times H}(M \times_B M')$. Ce produit est bien défini car tout élément de $\mathrm{K_G}(T^{*V}_G M)$ peut être représenté par un symbole sur $T^V M$ inversible sur $T^{*V}_G M$ sauf pour la section nulle [1].
Soit $\Delta_B : B \to B \times B$ l'application diagonale. On note $[\Delta_B]$ l'élément du groupe de Kasparov $\mathrm{KK_G}(C(B) \otimes C(B), C(B))$ associé au cycle $(C(B), \Delta^*_B, 0)$.
Rappelons l'application de descente de Kasparov [44]. Soient A et D des G-C^*-algèbres. Rappelons tout d'abord que si A est une G-C^*-algèbre alors on peut définir une C^*-algèbre $A \rtimes G$. En effet, l'algèbre $C(G, A)$ est une algèbre involutive pour le produit et l'involution qui suivent $a_1 \cdot a_2(t) = \int_G a_1(s) \cdot s(a_2(s^{-1}t))ds$ et $a^*(t) = t(a(t^{-1}))^*$, où a, a_1, $a_2 \in C(G, A)$. En complétant l'image de $C(G, A)$ par la représentation régulière $C(G, A) \to \mathcal{L}(L^2(G, A))$ donnée par la formule $(a \cdot l)(t) = \int_G t^{-1}(b(s)) \cdot l(s^{-1}t)ds$ où $a \in C(G, A)$, $l \in L^2(G, A)$, on obtient la C^*-algèbre $A \rtimes G$.
Soit $\mathcal{E}$ un G-D-module de Hilbert alors on peut définir un $D \rtimes G$-module de Hilbert en posant $e \cdot d(s) = \int_G e(t)t(d(t^{-1}s))dt$ et $\langle e_1, e_2\rangle(s) = \int_G t^{-1}(\langle e_1(t), e_2(ts)\rangle_{\mathcal{E}})dt$, où e, e_1, $e_2 \in C(G, \mathcal{E})$ et $d \in C(G, D)$. Si $\pi : A \to \mathcal{L}_D(\mathcal{E})$ est un $*$-morphisme alors l'application $\pi^{\rtimes G} : A \rtimes G \to \mathcal{L}_D(\mathcal{E})$ donnée par $(\pi^{\rtimes G}(a)e)(t) = \int_G \pi(a(s))s(e(s^{-1}t))ds$ est un $*$-morphisme. Si $T \in \mathcal{L}_D(\mathcal{E})$ alors il induit un opérateur $\tilde{T} \in \mathcal{L}_{D\rtimes G}(\mathcal{E} \rtimes G)$ défini par $(\tilde{T}e)(s) = T(e(s))$.
L'application de descente $j^G : \mathrm{KK_G}(A, D) \to \mathrm{KK}(A \rtimes G, D \rtimes G)$ est donnée par $[(\mathcal{E}, \pi, T)] \to [(\mathcal{E} \rtimes G, \pi^{\rtimes G}, \tilde{T}]$.

Théorème 1.3.5. *Soient $a \in \mathrm{K_G}(T^{*V}_G M)$ et $b \in \mathrm{K_{G\times H}}(T^{*V}_H M')$. Lorsque $B = B'$ on note $i : M \times_B M' \hookrightarrow M \times M'$.*

1. *L'indice de $a\sharp b \in \mathrm{K_{G\times H}}(T^{*V}_{G\times H}(M \times M'))$ est donné par le produit suivant :*

$$\mathrm{Ind}^{\mathrm{M\times M'|B\times B'}}(a\sharp b) = j^G \mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}_{\mathrm{G}}(b) \otimes_{C^*G} \mathrm{Ind}^{\mathrm{M'|B}}(a) \in \mathrm{KK}(C^*H \otimes C^*G, C(B) \otimes C(B')).$$

   L'inclusion $T^{*V}_{G\times H}(M\times_B M') \hookrightarrow T^{*V}_{G\times H}(M\times M')$ est une inclusion fermée ($G\times H$-équivariante).

2. *L'indice de $i^*(a\sharp b) \in \mathrm{K_{G\times H}}(T^{*V}_{G\times H}(M \times_B M'))$ est donné par :*

$$\mathrm{Ind}^{\mathrm{M\times_B M'|B}}(i^*a\sharp b) = \mathrm{Ind}^{\mathrm{M\times M'|B\times B}}(a\sharp b) \otimes_{C(B\times B)} [\Delta_B].$$

Démonstration.
1. Soient $A_0 : C^{\infty,0}(M, E_2^+) \to C^{\infty,0}(M, E_2^-)$ une famille d'opérateurs d'ordre 1 G-invariante, G-transversalement elliptique représentant a et $(\mathcal{E}_2, \pi_G, A)$ le $(C^*G,\ C(B'))$-cycle de Kasparov non borné associé défini à la définition 1.2.54. Soient $B_0 : C^{\infty,0}(M, E_1^+) \to C^{\infty,0}(M, E_1^-)$ une famille d'opérateurs d'ordre 1 $G\times H$-invariante, H-transversalement elliptique représentant b et $(\mathcal{E}_1, \pi_H, B)$ le $(C^*H,\ C(B))$-cycle G-équivariant de Kasparov non borné associé défini à la définition 1.2.54.
On note $Q(T) = T(1+T^2)^{-1}$ la transformation de Woronowicz d'un opérateur régulier autoadjoint T. Rappelons que les classes indices associées respectivement à $(\mathcal{E}_1, \pi_G, A)$ et $(\mathcal{E}_2, \pi_H, B)$ sont

respectivement $\mathrm{Ind}^{\mathrm{M'|B'}}(A_0) = [(\mathcal{E}_2, \pi_G, Q(A))]$ et $\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}(b) = [(\mathcal{E}_2, \pi_H, Q(B))]$. Remarquons que l'opérateur $1 \otimes_{\pi_G} A$ est bien défini puisque A commute avec π_G. On va montrer que le cycle $(\mathcal{E}_1 \rtimes G \otimes_{\pi_G} \mathcal{E}_2, \pi_H^{\rtimes G} \otimes_{\pi_G} 1, Q(\tilde{B} \otimes_{\pi_G} 1 + 1 \otimes_{\pi_G} A))$ est le produit de Kasparov de $j^G \mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}(B)$ et $\mathrm{Ind}^{\mathrm{M'|B'}}(A)$.
Rappelons que si P_0 est une famille d'opérateur pseudodifférentiels d'ordre positif entre deux fibrés, on note $\hat{P}$ la famille d'opérateurs $\begin{pmatrix} 0 & P_0^* \\ P_0 & 0 \end{pmatrix}$. Remarquons que $B \otimes 1 + 1 \otimes A$ est bien l'opérateur obtenu à partir $\hat{B} \otimes 1 + 1 \otimes \hat{A}$ pour définir la classe indice puisque ce sont deux extensions auto-adjointe de $\hat{B} \otimes 1 + 1 \otimes \hat{A}$ qui est essentiellement auto-adjoint d'après la proposition 1.2.51. Vérifions que $\mathrm{Ind}^{\mathrm{M \times M'|B \times B'}}(A \sharp B) = [(\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_\in, \pi_{G \times H}, B \otimes 1 + 1 \otimes A)]$ est bien donné par $[(\mathcal{E}_1 \rtimes G \otimes_{\pi_G} \mathcal{E}_2, \pi_H \rtimes G \otimes_{\pi_G} 1, Q(\tilde{B} \otimes_{\pi_G} 1 + 1 \otimes_{\pi_G} A))]$.
Soit $U : C^\infty(G, C^{\infty,0}(M, E_1)) \otimes C^{\infty,0}(M', E_2) \to C^{\infty,0}(M \times M', E_1 \boxtimes E_2)$ l'application définie par $U(s \otimes s') = \int_G s(t) \otimes g \cdot s' dg$. On vérifie facilement que $U(s \cdot \varphi \otimes s') = U(s \otimes \pi_G(\varphi) s')$, $\forall s \in C^\infty(G, C^{\infty,0}(M, E_1))$, $\varphi \in C^\infty(G)$ et $s' \in C^{\infty,0}(M', E_2)$ donc U induit une application encore noté U de $C^\infty(G, C^{\infty,0}(M, E_1)) \otimes_{\pi_G} C^{\infty,0}(M', E_2)$ dans $C^{\infty,0}(M \times M', E_1 \boxtimes E_2)$. Cette application s'étend en un isomorphisme unitaire de $\mathcal{E}_1 \rtimes G \otimes_{\pi_G} \mathcal{E}_2$ dans $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$. En effet, $U(C^\infty(G, C^{\infty,0}(M, E_1)) \otimes_{\pi_G} C^{\infty,0}(M', E_2))$ est dense dans $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ et on a l'égalité $\langle U(s_1 \otimes_{\pi_G} s_2), U(s_1' \otimes_{\pi_G} s_2') \rangle_{\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2} = \langle s_1 \otimes_{\pi_G} s_2, s_1' \otimes_{\pi_G} s_2' \rangle_{\mathcal{E}_1 \rtimes G \otimes_{\pi_G} \mathcal{E}_2}$, $\forall s_1, s_1' \in \mathcal{E}_1 \rtimes G$ et $s_2, s_2' \in \mathcal{E}_2$. Vérifions l'égalité $\langle U(s_1 \otimes_{\pi_G} s_2), U(s_1' \otimes_{\pi_G} s_2') \rangle_{\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2} = \langle s_1 \otimes_{\pi_G} s_2, s_1' \otimes_{\pi_G} s_2' \rangle_{\mathcal{E}_1 \rtimes G \otimes_{\pi_G} \mathcal{E}_2}$. On a :

$$\begin{aligned} \langle U(s_1 \otimes_{\pi_G} s_2), U(s_1' \otimes_{\pi_G} s_2') \rangle_{\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2} &= \int_G \int_G \langle s_1(h) \otimes h \cdot s_2, s_1'(k) \otimes k \cdot s_2' \rangle_{\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2} dh dk \\ &= \int_G \int_G \langle s_1(h), s_1'(k) \rangle_{\mathcal{E}_1} \langle s_2, h^{-1} k \cdot s_2' \rangle_{\mathcal{E}_2} dh dk. \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable classique $g = h^{-1}k$, il vient :

$$\begin{aligned} \langle U(s_1 \otimes_{\pi_G} s_2), U(s_1' \otimes_{\pi_G} s_2') \rangle_{\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2} &= \int_G \int_G \langle s_1(h), s_1'(hg) \rangle_{\mathcal{E}_1} \langle s_2, g \cdot s_2' \rangle_{\mathcal{E}_2} dh dg \\ &= \int_G \int_G \langle s_2, \langle s_1(h), s_1'(hg) \rangle_{\mathcal{E}_1} g \cdot s_2' \rangle_{\mathcal{E}_2} dh dg \\ &= \langle s_1 \otimes_{\pi_G} s_2, s_1' \otimes_{\pi_G} s_2' \rangle_{\mathcal{E}_1 \rtimes G \otimes_{\pi_G} \mathcal{E}_2}. \end{aligned}$$

Il reste à vérifier que U entrelace les représentations et les opérateurs. Soient $\psi \in C^\infty(H)$ et $\varphi \in C^\infty(G)$, $s_1 \in C^\infty(G, C^{\infty,0}(M, E_1)$ et $s_2 \in C^{\infty,0}(M', E_2)$. On a :

$$\begin{aligned} \pi_{H \times G}(\psi \otimes \phi)\Big(U(s_1 \otimes s_2)\Big) &= \pi_{H \times G}(\psi \otimes \varphi)\Big(\int_G s_1(t) \otimes t \cdot s_2 dt\Big) \\ &= \int_{H \times G} \int_G \psi(h) \varphi(g)(h, g) \cdot (s_1(t)) \otimes (gt) \cdot s_2 dt dh dg. \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $gt = u$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\pi_{H\times G}(\psi\otimes\phi)\big(U(s_1\otimes s_2)\big) &= \int_{H\times G}\int_G \psi(h)\varphi(g)(h,g)\cdot(s_1(g^{-1}u))\otimes(u)\cdot s_2 dudhdg\\
&= \int_G\int_G \pi_H(\psi\otimes\varphi(g))g\cdot(s_1(g^{-1}u))\otimes(u)\cdot s_2 dudg\\
&= \int_G (\pi_H^{\rtimes G}(\psi\otimes\varphi)(s_1))(u)\otimes(u)\cdot s_2 du\\
&= U(\pi_H^{\rtimes G}(\psi\otimes\varphi)\otimes_{\pi_G} 1(s_1\otimes_{\pi_G} s_2)),
\end{aligned}$$

donc U entrelace les représentations. Calculons $(B\otimes 1+1\otimes A)(U(s_1\otimes_{\pi_G} s_2))$. On a :

$$\begin{aligned}
(B\otimes 1+1\otimes A)(U(s_1\otimes_{\pi_G} s_2)) &= (B\otimes 1+1\otimes A)(\textstyle\int_G s_1(t)\otimes t\cdot s_2 dt)\\
&= \textstyle\int_G B(s_1(t))\otimes t\cdot s_2 + s_1(t)\otimes t\cdot A(s_2)dt\\
&= \textstyle\int_G (\tilde{B}s_1)(t)\otimes t\cdot s_2 + s_1(t)\otimes t\cdot A(s_2)dt\\
&= U((\tilde{B}\otimes_{\pi_G} 1+1\otimes_{\pi_G} A)(s_1\otimes_{\pi_G} s_2)),
\end{aligned}$$

donc U entrelace les opérateurs.
On va montrer que l'opérateur $Q(\tilde{B}\otimes_{\pi_G} 1+1\otimes_{\pi_G} A)$ est une $Q(A)$-connexion sur $\mathcal{E}_1\rtimes G\otimes_{\pi_G}\mathcal{E}_2$. Écrivons

$$Q(\tilde{B}\otimes_{\pi_G} 1+1\otimes_{\pi_G} A) = M^{1/2}Q(\tilde{B})\otimes_{\pi_G} 1 + N^{1/2}1\otimes_{\pi_G} Q(A),$$

où $M = \dfrac{1+\tilde{B}^2\otimes_{\pi_G} 1}{1+\tilde{B}^2\otimes_{\pi_G} 1+1\otimes_{\pi_G} A^2}$ et $N = \dfrac{1+1\otimes_{\pi_G}\tilde{A}^2}{1+\tilde{B}^2\otimes_{\pi_G} 1+1\otimes_{\pi_G} A^2}$. Remarquons que les opérateurs M et N sont bornés autoadjoint, qu'ils commutent et que leur somme $M+N$ est égale à $1+(1+\tilde{B}^2\otimes_{\pi_G} 1+1\otimes_{\pi_G} A^2)^{-1}$. Pour montrer que l'opérateur $Q(\tilde{B}\otimes_{\pi_G} 1+1\otimes_{\pi_G} A)$ est une $Q(A)$-connexion sur $\mathcal{E}_1\rtimes G\otimes_{\pi_G}\mathcal{E}_2$ il suffit de montrer que M est une 0-connexion et que N est une 1-connexion. On obtient alors par un résultat classique sur les connexions que $M^{1/2}$ est une 0-connexion et que $N^{1/2}$ est une 1-connexion, donc que $Q(\tilde{B}\otimes_{\pi_G} 1+1\otimes_{\pi_G} A)$ est une $Q(A)$-connexion puisque $1\otimes_{\pi_G} Q(A)$ est une $Q(A)$-connexion.
Vérifions que M est une 0-connexion. Il faut montrer que $M\circ T_s\in k(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_1\rtimes G\otimes_{\pi_G}\mathcal{E}_2)$, $\forall s\in\mathcal{E}_1\rtimes G$. Soient $\varphi\in C^\infty(G)$ et $s\in C^{\infty,0}(M,E_1)$, on a :

$$\begin{aligned}
M\circ T_{s\otimes\varphi} &= \frac{1+B^2\otimes_{\pi_G} 1}{1+B^2\otimes_{\pi_G} 1+1\otimes_{\pi_G} A^2}\circ T_s\circ\pi_G(\varphi)\\
&= \frac{1+1\otimes_{\pi_G} A}{1+B^2\otimes_{\pi_G} 1+1\otimes_{\pi_G} A^2}\circ T_{(1+B^2)s}\circ(1+A^2)^{-1}\circ\pi_G(\varphi)\\
&= N\circ T_{(1+B^2)s}\circ(1+A^2)^{-1}\circ\pi_G(\varphi).
\end{aligned}$$

Comme $(1+A^2)^{-1}\circ\pi_G(\varphi)$ est compact, on déduit que $M\circ T_{s\otimes\varphi}$ est compact car $N\in\mathcal{L}(\mathcal{E}_\rtimes G\otimes_{\pi_G}\mathcal{E}_2)$ et $T_{(1+B^2)s}\in\mathcal{L}(\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_\rtimes G\otimes_{\pi_G}\mathcal{E}_2)$. De plus, l'application qui a $s\in\mathcal{E}_1\rtimes G$ associe $M\circ T_s$ est continue donc on obtient que $\forall s\in\mathcal{E}_1\rtimes G$, $M\circ T_s$ est compact. On en déduit que M est une 0-connexion. Pour montrer que N est une 1-connexion il suffit de vérifier que $(1+B^2\otimes_{\pi_G} 1+1\otimes_{\pi_G} A^2)^{-1}$ est une 0-connexion puisque $M+N = 1+(1+B^2\otimes_{\pi_G} 1+1\otimes_{\pi_G} A^2)^{-1}$. On conclut de la même manière que précédemment puisque $(1+B^2\otimes_{\pi_G} 1+1\otimes_{\pi_G} A^2)^{-1} = N\circ(1+1\otimes_{\pi_G} A)^{-1}$.
Il reste à vérifier la condition de positivité pour les connexions. On a :

$$[Q(B\otimes_{\pi_G} 1+1\otimes_{\pi_G} A), Q(B)\otimes_{\pi_G} 1] = 2MQ(B)^2\otimes_{\pi_G} 1$$

donc $\pi_H^{\rtimes G}(\theta)\otimes_{\pi_G}1[Q(B\otimes_{\pi_G}1+1\otimes_{\pi_G}A),Q(B)\otimes_{\pi_G}1]\pi_H^{\rtimes G}\otimes_{\pi_G}1$ est positif modulo $k(\mathcal{E}_1\rtimes G\otimes_{\pi_G}\mathcal{E}_2)$.

2. Pour la deuxième égalité, le produit à droite de $\mathrm{Ind}_G^{M\times M'|B}(a\sharp b)$ par $[\Delta_B]$ permet de voir le module $\mathcal{E}_1\otimes\mathcal{E}_2$ comme un module sur $C(B)$. □

1.3.4 Excision de la classe indice

Dans cette section, on montre une propriété d'excision qui permet de ramener le calcul de l'indice d'une famille d'opérateurs G-transversalement elliptique le long des fibres sur un ouvert au-dessus de B au calcul de l'indice d'une famille d'opérateurs G-transversalement elliptique sur une G-fibration compacte.

On commence par un rappel de [25]. Ce dernier contient les idées utilisées dans la preuve du théorème d'excision.

Lemme 1.3.6. *[25] Soit $(\mathcal{E},\pi,F)$ un (A,B)-bimodule de Kasparov. Soit $\mathcal{K}_1$ la C^*-sous-algèbre de $k(\mathcal{E})$ engendrée par $[\pi(a),F]$, $\pi(a)(F^2-1)$ et $\pi(a)(F-F^*)$ pour $a\in A$ et les multiples par A, F et F^*. Soit $\mathcal{E}_1$ le B-sous-module fermé de $\mathcal{E}$ engendré par $\mathcal{K}_1\mathcal{E}$. Ce module $\mathcal{E}_1$ est appelé le support de $(\mathcal{E},\pi,F)$. Il est stable par l'action de A et de F. Notons F_1 la restriction de F à $\mathcal{E}_1$. Les classes de $(\mathcal{E}_1,\pi,F_1)$ et $(\mathcal{E},\pi,F)$ coïncident dans $\mathrm{KK}(A,B)$.*

Démonstration. Soit $\tilde{\mathcal{E}}$ le sous-$C(B)\otimes C([0,1])$-module hilbertien de $\mathcal{E}\otimes C([0,1])$ donné par $\tilde{\mathcal{E}}=\{e\in\tilde{\mathcal{E}}|e(1)\in\mathcal{E}_1\}$. Soit $\tilde{F}$ l'opérateur définit par $\tilde{F}(e)(t)=F(e(t))$, $\forall e\in\tilde{\mathcal{E}}$ et soit $\tilde{\pi}:A\to\mathcal{L}(\tilde{\mathcal{E}})$ défini par $\tilde{\pi}(\varphi)(e)(t)=\pi(\varphi)(e(t))$. Alors $(\tilde{\mathcal{E}},\tilde{\pi},\tilde{F})$ définit une homotopie entre $(\mathcal{E},\pi,F)$ et $(\mathcal{E}_1,\pi,F_{|\mathcal{E}_1})$. □

Nous utilisons le lemme suivant démontré dans [1] lemme 3.6 dans le cadre où B est le point, voir aussi [3]. La preuve étant identique est omise ici. Soit U un ouvert d'une G-fibration compacte $p:M\to B$, l'action de G sur B étant triviale. Notons $j:U\hookrightarrow M$ l'inclusion. Soit $\pi:T^VU\to U$ la projection du fibré tangent vertical défini par $T^VU=\ker((p\circ j)_*)$, T^VU est alors un ouvert de T^VM. On note $T_G^VU=T^VU\cap T_GM$.

Lemme 1.3.7. *Chaque élément $a\in\mathrm{K_G}(T_G^VU)$ peut être représenté par un complexe homogène sur T^VU de degré 0*

$$0\longrightarrow\pi^*E^0\xrightarrow{a}\pi^*E^1\longrightarrow 0$$

tel qu'en dehors d'un compact de U, les fibrés E^0 et E^1 sont triviaux et a est l'identité.

On a le théorème d'excision suivant.

Théorème 1.3.8. *Soit $j:U\hookrightarrow M$ un G-plongement ouvert. On suppose que $p:M\to B$ est une G-fibration de variétés compactes et que l'action de G sur B est triviale.*

Alors la composition $\mathrm{K_G}(T_G^VU)\xrightarrow{j_*}\mathrm{K_G}(T_G^VM)\xrightarrow{\mathrm{Ind^{M|B}}}\mathrm{KK}(C^*G,C(B))$ *ne dépend pas de j.*

Démonstration. Soit $a\in\mathrm{K_G}(T_G^VU)$. On note $\pi^V:T^VU\to U$ la projection. On commence par représenter a par un symbole d'ordre 0 sur T^VU

$$0\longrightarrow\pi^{V*}E^+\xrightarrow{\sigma}\pi^{V*}E^-\longrightarrow 0\ ,$$

trivial en dehors d'un compact K de U en utilisant le lemme 1.3.7. On note $E = E^+ \oplus E^-$. L'inclusion j définit une application j_* en $\mathrm{K_G}$-théorie :

$$j_* : \mathrm{K_G}(T^V_G U) \to \mathrm{K_G}(T^V_G M).$$

L'application j_* consiste à prendre la classe de l'extension de σ trivialement en dehors de U sur M.
On note j_*E le fibré E étendu trivialement en dehors de U, $\mathcal{E} = \overline{C^{\infty,0}(M, j_*E)}^{C(B)}$. On choisit une famille $\tilde{P}$ d'opérateurs pseudodifférentiels associée à σ sur U tel que $\tilde{P}$ est l'identité en dehors du support L de σ, c'est à dire si $s \in C^{\infty,0}_c(U \setminus L, E^+)$ alors $\tilde{P}s \in C^{\infty,0}_c(U \setminus L, E^-)$ et est donné par

$$P(s)(x) = (\psi^-_x)^{-1} \circ \psi^+_x)(s(x)),$$

où $\psi^\pm$ sont les trivialisations de $E^\pm$ en dehors de L. On note comme d'habitude P l'opérateur $\begin{pmatrix} 0 & \tilde{P}^* \\ P & 0 \end{pmatrix}$. Soit $\theta \in C^{\infty,0}_c(U, [0,1])$ une fonction égale à 1 sur L et dont le support est noté L'. En utilisant une telle fonction θ, on étend par l'identité la famille d'opérateurs P sur M, et on note j_*P cet opérateur sur M. Cette famille j_*P a pour symbole $j_*\sigma$ et est G-transversalement elliptique le long des fibres de $p : M \to B$. Soit $\mathcal{E}$ la complétion de $C^{\infty,0}(M, j^*E)$ comme $C(B)$-module hilbertien défini comme à la section 1.2.3. On obtient alors une classe indice $\mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}(j_*P) = [\mathcal{E}, \pi, j_*P]$. L'application j permet de voir $C^{\infty,0}_c(U, E)$ comme sous-module de $\mathcal{E}$. On note $\mathcal{E}_{U\subset M}$ la complétion de $C^{\infty,0}_c(U, E)$ dans $\mathcal{E}$. L'opérateur j_*P préserve le sous-module fermé $\mathcal{E}_{U\subset M}$. En effet, si $s \in C^{\infty,0}_c(U, E)$ alors $j_*P(s) = P(s) \in C^{\infty,0}_c(U, E)$. De plus, la représentation π de C^*G préserve $\mathcal{E}_{U\subset M}$. En effet, π préserve $C^{\infty,0}_c(U, E)$ puisque U est un ouvert G-invariant de M donc $\mathcal{E}_{U\subset M}$. On obtient donc une classe bien définie $[\mathcal{E}_{U\subset M}, \pi, j_*P_{|\mathcal{E}_{U\subset M}}] \in \mathrm{KK}(C^*G, C(B))$. Le cycle ainsi obtenu est aussi un représentant de la classe indice $\mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}(j_*P)$ de j_*P. En effet, grâce au lemme de Connes-Skandalis rappelé ci-dessus (voir Lemme 1.3.6), il suffit de montrer que les deux cycles admettent même support, car alors les opérateurs restreints coïncideront comme nous allons le voir. Or cela est clair dans notre situation puisque si $\chi \in C^{\infty,0}_c(U, [0,1])$ est une fonction égale à 1 sur le support de θ alors $((j_*P)^2 - id)(s) = ((j_*P)^2 - id)(\chi s)$.
Soit maintenant U' un ouvert d'une fibration $p' : M' \to B$ difféomorphe à U, on note $j' : U' \hookrightarrow M'$ l'inclusion. Notons $f : U \to U'$ le difféomorphisme, on suppose en outre que $p \circ j = (p \circ j') \circ f$. La classe de l'élément $a \in \mathrm{K_G}(T^V_G U)$ vu comme élément de $\mathrm{K_G}(T^V_G U')$ en utilisant f peut être représentée par $(f^{-1})^*\sigma$. On associe à $(f^{-1})^*\sigma$ l'opérateur $(f^{-1})^*Pf^*$ que l'on étend par l'identité sur M' en un opérateur j'_*P. On obtient alors comme pour U encore une classe indice $\mathrm{Ind}^{M'|B}(j'_*P) = [\mathcal{E}', \pi', j'_*P]$ en complétant $C^{\infty,0}(M', j'_*(f^{-1})^*E)$. On définit un sous-module fermé $\mathcal{E}'_{U'\subset M'}$ de manière similaire à $\mathcal{E}_{U\subset M}$. On obtient alors que $\mathrm{Ind}^{M'B}(j'_*P) = [\mathcal{E}'_{U'\subset M'}, \pi', j'_*P_{|\mathcal{E}'_{U'\subset M'}}]$.
Mais le cycle $(\mathcal{E}'_{U'\subset M'}, \pi', j'_*P_{|\mathcal{E}'_{U'\subset M'}})$ est alors unitairement équivalent au cycle $(\mathcal{E}_{U\subset M}, \pi, j_*P_{|\mathcal{E}_{U\subset M}})$.
En effet, si $(\mu_b)_{b\in B}$ et $(\mu'_b)_{b\in B}$ désignent respectivement les familles de mesures de type Lebesgue sur respectivement M et M' utilisées dans la définition des classes indices précédentes alors on note $h = (h_b)_{b\in B}$ la famille continue de dérivée de Radon-Nikodym associée au-dessus de U identifié à U' en utilisant f. On obtient alors un unitaire $V : \mathcal{E}_{U\subset M} \to \mathcal{E}_{U'\subset M'}$ donné par $s \to \sqrt{h}(f^{-1})^*s$. De plus, $V^{-1}(f^{-1})^*Pf^*V = \frac{1}{\sqrt{f^*h}}P\sqrt{f^*h}$ et $V^{-1}\pi'(\varphi)V = \frac{1}{\sqrt{f^*h}}\pi(\varphi)\sqrt{f^*h}$ qui donne un cycle

unitairement équivalent à $(\mathcal{E}_{U\subset M}, \pi, j_*P_{|\mathcal{E}_{U\subset M}})$. Donc la classe indice ne dépend pas du plongement j choisi. □

Remarque 1.3.9. L'équivalence entre les cycles $(\mathcal{E}, \pi, j_*P)$ et $(\mathcal{E}_{U\subset M}, \pi, j_*P_{|\mathcal{E}_{U\subset M}})$ peut être déduite plus immédiatement en s'inspirant de la preuve du lemme 1.3.6, voir appendice A [25]. En effet, soit $\tilde{\mathcal{E}}$ le sous-$C(B)\otimes C([0,1])$-module hilbertien de $\mathcal{E}\otimes C([0,1])$ donné par $\tilde{\mathcal{E}} = \{e, e(1) \in \mathcal{E}_{U\subset M}\}$. Soit $\tilde{\pi} : C^*G \to \mathcal{L}(\tilde{\mathcal{E}})$ la représentation déduite de π en posant $(\tilde{\pi}(\varphi)e)(t) = \pi(\varphi)(e(t))$ et soit F l'opérateur déduit de j_*P en posant $F(e)(t) = j_*P(e(t))$. On vérifie facilement que le cycle $(\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\pi}, F)$ est une homotopie entre $(\mathcal{E}, \pi, j_*P)$ et $(\mathcal{E}_{U\subset M}, \pi, j_*P_{|\mathcal{E}_{U\subset M}})$.

1.3.5 Naturalité de l'indice et induction

On reprend ici quelques constructions de [1]. Soit G un groupe de Lie compact. Soit H un sous-groupe fermé de G. Notons $i : H \hookrightarrow G$ l'inclusion. Le groupe G est une $G\times H$-variété pour l'action donnée pour g, $g' \in G$ et $h \in H$ par $(g,h)\cdot g' = gg'h^{-1}$. Soit $p : M \to B$ une fibration G-équivariante. On suppose encore que l'action de G sur B est triviale. On dispose d'un produit [1] (voir aussi la section précédente) :

$$\mathrm{K_H}\Big(T^V_H M\Big) \otimes \mathrm{K_{G\times H}}\Big(T^*_G G\Big) \to \mathrm{K_{G\times H}}\Big(T^V_{G\times H}(G\times M)\Big).$$

Comme H agit librement sur $G\times M$, l'espace $Y = G\times_H M$ est une variété qui fibre sur B et

$$\mathrm{K_{G\times H}}\Big(T^V_{G\times H}(G\times M)\Big) \cong \mathrm{K_G}\Big(T^V_G Y\Big).$$

L'opérateur $0 : C^\infty(G) \to 0$ est G-transversalement elliptique et $T^*_G G = G\times\{0\}$. De plus, $[\sigma(0)] \in \mathrm{K}_{G\times H}(T^*_G G) \cong R(H)$ est la classe du fibré trivial. On peut alors définir une application $i_* : \mathrm{K_H}(T^V_H M) \to \mathrm{K_G}(T^V_G Y)$ en composant le produit par $[\sigma(0)]$ avec l'isomorphisme $\mathrm{K_{G\times H}}\Big(T^V_{G\times H}(G\times M)\Big) \cong \mathrm{K_G}\Big(T^V_G Y\Big)$.
Rappelons maintenant la définition de l'élément $i^* \in \mathrm{KK}(C^*G, C^*H)$ construit dans [41]. On fixe des mesures de Haar sur H et G. On considère sur l'espace $C(G)$ des fonctions continues sur G à valeurs dans $\mathbb{C}$ la structure de $L^1(H)$-module à droite induite par l'action de H à droite sur G :

$$\varphi\cdot\psi(g) = \int_H \varphi(gh^{-1})\psi(h)dh,\ \forall\varphi \in C(G) \text{ et} \psi \in L^1(H)$$

et la structure hermitienne à valeur dans $L^1(H)$ suivante :

$$\langle f_1, f_2\rangle(h) = \int_G \bar{f}_1(g) f_2(gh)dg.$$

On note $J(G)$ la complétion de $C(G)$ pour la norme $\|f\| = \|\langle f, f\rangle\|^{1/2}_{C^*H}$ induite par la structure hermitienne. Notons $\pi_G : C^*G \to \mathcal{L}_{C^*H}(J(G))$ la représentation naturelle de C^*G induite par l'action de G sur G à gauche.

Définition 1.3.10. [41] L'élément $i^* \in \mathrm{KK}(C^*G, C^*H)$ est défini comme la classe du cycle $(J(G), \pi_G, 0)$.

Lemme 1.3.11. *L'élément i^* est l'image par l'équivalence de Morita entre $C(G/H) \rtimes G$ et C^*H de la représentation triviale de H vu comme fibré trivial G-équivariant sur G/H.*

Démonstration. Dans $\mathrm{KK_G}(\mathbb{C}, C(G/H))$ la représentation triviale de H est donnée par le cycle $(C(G/H), 0)$. Son image par la descente de Kasparov $j^G([C(G/H), 0]) = [C(G/H) \rtimes G, \pi_G, 0]$ est un élément de $\mathrm{KK}(C^*G, C(G/H) \rtimes G)$. Le cycle fourni par l'équivalence de Morita est $[J(G), \rho, 0]$, où $\rho : C(G/H) \rtimes G \to \mathcal{L}_{C^*H}(J(G))$ est donnée par $\rho(\theta)s(g) = \int_G \theta(t, g)s(t^{-1}g)dt$ pour $\theta \in C(G, C(G/H))$ et $s \in C(G)$. $\square$

Lemme 1.3.12. *Notons χ_0^H la classe dans $\mathrm{KK}(\mathbb{C}, C^*H)$ de la représentation triviale de H. On a l'égalité suivante :*

$$i^* = \chi_0^H \otimes_{C^*H} j^H\Big(\mathrm{Ind}^{\mathrm{G}|\star}([\sigma(0)])\Big) \in \mathrm{KK}(C^*G, C^*H).$$

Démonstration. Montrons que $\mathbb{C} \otimes_{C^*H} (L^2(G) \rtimes H)$ est unitairement isomorphe à $J(G)$. Soit $U : \mathbb{C} \otimes C(H, C(G)) \to C(G)$ l'application linéaire définie par $U(\lambda \otimes s)(g) = \lambda \int_H s(h, gh^{-1})dh$, pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $s \in C(H, C(G))$. L'action ρ_H de C^*H sur $L^2(G) \rtimes H$ déduite de $\pi_G^{\rtimes H}$ est donnée par

$$\rho_H(\psi)s(h, g) = \int_H \psi(k)s(k^{-1}h, k^{-1}g)dk, \text{ pour } \psi \in C^\infty(H) \text{ et } s \in C^\infty(H, C(G)).$$

Ici $\lambda \cdot \psi$ est le scalaire $\lambda \int_H \psi(k)dk$. Soient $\lambda \in \mathbb{C}$, $\psi \in C^\infty(H)$ et $s \in C^\infty(H, C(G))$, on a alors

$$U(\lambda \otimes \rho_H(\psi)s)(t) = \lambda \int_H \int_H \psi(k)s(k^{-1}u, tu^{-1}k)dkdu,$$

en effectuant le changement de variable classique $k^{-1}u = r$, il vient :

$$U(\lambda \otimes \rho_H(\psi)s)(t) = \lambda \int_H \int_H \psi(k)s(r, tr^{-1})dkdu = U(\lambda \cdot \psi \otimes s)(t).$$

On en déduit que U induit une application sur $\mathbb{C} \otimes_{C^*H} L^2(G) \rtimes H$ que l'on note encore U. L'application U est C^*H-linéaire. En effet, pour $\psi \in C(H)$ et $s \in L^2(G) \rtimes H$, on a :

$$U(s \cdot \psi)(g) = \int_H \int_H s(h, gh^{-1}k^{-1})\psi(k)dkdh = U(s) \cdot \psi(g).$$

Vérifions que U est unitaire. Soient s et $s' \in \mathbb{C} \otimes C(H, C(G))$. D'une part, on a :

$$\langle U(s), U(s')\rangle_{J(G)}(h) = \int_G \overline{U(s)}(g)U(s')(gh)dg = \int_G \int_H \int_H \overline{s(k, gk^{-1})}s'(t, ght^{-1})dkdtdg,$$

d'autre part, on a :

$$\begin{aligned}\langle s, s'\rangle_{\mathbb{C}\otimes_{C^*H}L^2(G)\rtimes H}(h) &= \textstyle\int_H \langle s(k), \rho_H(1)s'(kh)\rangle_{L^2(G)}dk \\ &= \textstyle\int_H \int_H \int_G \int_H \overline{s(k, g_1)}s'(u^{-1}kh, g_1u)dkdudg_1.\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variables $t = u^{-1}kh$, il vient :

$$\langle s, s'\rangle_{\mathbb{C}\otimes_{C^*H}L^2(G)\rtimes H}(h) = \int_H \int_G \int_H \overline{s(k, g_1)}s'(t, g_1kht^{-1})dkdtdg_1.$$

En effectuant le changement de variable $g = g_1 k$, il vient :

$$\langle s, s'\rangle_{\mathbb{C}\otimes_{C^*H}L^2(G)\rtimes H}(h) = \int_H\int_G\int_H \overline{s(k, gk^{-1})}s'(t, ght^{-1})dtdgdk,$$

d'où $\langle s, s'\rangle_{\mathbb{C}\otimes_{C^*H}L^2(G)\rtimes H} = \langle U(s), U(s')\rangle_{J(G)}$.
Vérifions enfin que $U(\mathbb{C}\otimes_{\rho_H} C(H, C(G))$ est dense dans $C(G)$. Soit $\phi \in C(G)$. Soit u_n une unité approchée pour l'algèbre de convolution $C(H)$. Notons $s_n = 1\otimes_{\rho_H}(u_n\otimes\phi)$. On a alors $\|U(s_n) - \phi\|_{J(G)}$ qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini. En effet, $\|(U(s_n)-\phi)^* \star (U(s_n)-\phi)\|_{L^1(H)} \leq \|U(s_n)-\phi\|_2^2$ et on a :

$$\begin{aligned}\|U(s_n)-\phi\|_2^2 &= \int_G\Big|\int_H u_n(h)^{1/2}u_n(h)^{1/2}\phi(gh^{-1}) - \phi(g)dh\Big|^2 dg\\ &\leq \int_G\int_H u_n(h)dh\int_H u_n(h)\Big|\phi(gh^{-1})-\phi(g)\Big|^2 dhdg\\ &= \int_H u_n(h)\|\tau_{h_{-1}}(\phi)-\phi\|_2^2 dh,\end{aligned}$$

où $\tau_{h^{-1}}$ est la translation à droite par h^{-1} qui est une application continue de $C(G)$ vers $C(G)$ en norme 2. De plus, le support de u_n se concentre sur l'élément neutre de H quand n tend vers l'infini donc $\|U(s_n)-\phi\|_2^2$ tend vers 0 puisque $\|\tau_{h_{-1}}(\phi)-\phi\|_2^2$ tend vers 0 lorsque h tend vers l'élément neutre de H.
Il est clair aussi que, l'opérateur U entrelace $\lambda\otimes_{\rho_H} 1$ et π_G. En effet, l'action de G est à gauche et l'action de H est à droite de sorte que $U\circ\pi_G^{\rtimes H}(\theta) = \pi_G(\int_H\theta(h)dh)\circ U$, $\forall\theta\in C(H, C(G))$. Rappelons pour finir cette preuve que le produit de Kasparov de deux cycles $(\mathcal{E}_1, \pi_1, 0)\in E(A, B)$ et $(\mathcal{E}_2, \pi_2, 0)\in E(B, C)$ est donné par $(\mathcal{E}_1\otimes_{\pi_2}\mathcal{E}_\in, \pi_1\otimes_{\pi_2} 1, 0)\in E(A, C)$ puisque $\pi_1\otimes_{\pi_2} 1$ est alors compact, voir par exemple [50] [Proposition 4.7]. □

On note aussi $i_* : \mathrm{KK}(C^*H, C(B)) \to \mathrm{KK}(C^*G, C(B))$ le produit de Kasparov à gauche par $i^*\in\mathrm{KK}(C^*H, C^*G)$.

Théorème 1.3.13. *[1] Le diagramme suivant est commutatif.*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{K_H}\Big(T_H^V M\Big) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\mathrm{Ind^{M|B}}"'] & \mathrm{K_G}\Big(T_G^V Y\Big) \arrow[d, "\mathrm{Ind^{Y|B}}"] \\ \mathrm{KK}(C^*H, C(B)) \arrow[r, "i_*"'] & \mathrm{KK}(C^*G, C(B)) \end{tikzcd}$$

Démonstration. Soit $a\in\mathrm{K_H}(T_H^V M)$. Par multiplicativité de l'indice, on a :

$$\mathrm{Ind}^{\mathrm{G\times M|B}}(a\cdot[\sigma(0)]) = j^H\Big(\mathrm{Ind}^{\mathrm{G|\star}}([\sigma(0)])\Big)\otimes_{C^*H}\mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}(a).$$

De plus, l'isomorphisme $\mathrm{K_{G\times H}}\Big(T_{G\times H}^V(G\times M)\Big)\cong\mathrm{K_G}(T_G^V Y)$ envoie $a\cdot[\sigma(0)]$ sur $i_*(a)$ par définition de i_*. Par le théorème 1.3.3, on sait que $\mathrm{Ind}^{\mathrm{Y|B}}(i_*(a)) = \chi_0^H\otimes_{C^*H}\mathrm{Ind}^{\mathrm{G\times M|B}}(a\cdot[\sigma(0)])$. On déduit :

$$\mathrm{Ind}^{\mathrm{Y|B}}(i_*(a)) = \chi_0^H\otimes_{C^*H}\Big[j^H\Big(\mathrm{Ind}^{\mathrm{G|\star}}([\sigma(0)])\Big)\otimes_{C^*H}\mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}(a)\Big].$$

D'après le lemme précédent, on a $i_* = \chi_0^H\otimes_{C^*H} j^H\Big(\mathrm{Ind}^{\mathrm{G|\star}}([\sigma(0)])\Big)\in\mathrm{KK}(C^*G, C^*H)$. On obtient alors le résultat par associativité du produit de Kasparov. □

Remarque 1.3.14. [1] Tout groupe compact peut être plongé dans un groupe unitaire donc par le théorème précédent, on peut ramener le calcul de l'indice à un groupe G connexe. Il n'est pas en général possible de restreindre à un sous-groupe fermé quelconque. Toutefois si G_0 est la composante de l'identité d'un groupe de Lie compact G alors $T^V_G M = T^V_{G_0} M$ et on peut alors restreindre à G_0. Il y a malheureusement une perte d'information puisque l'application naturelle $C^{-\infty}(G) \to C^{-\infty}(G_0)$ n'est pas injective (si G est par exemple fini, c'est la différence entre le nombre de Lefschetz et l'indice).

Il est aussi possible de ramener le calcul de la flèche d'indice à celui correspondant à un tore, et on procède maintenant à la construction de la flèche d'induction. Notons d'abord que si M est une G-fibration compacte alors l'application $(g, m) \to (gH, g \cdot m)$ est un difféomorphisme G-équivariant de la G-fibration $Y = G \times_H M$ sur $G/H \times M$. Supposons donc que G est connexe et que H est un tore maximal de sorte que l'espace homogène G/H est une variété complexe donc K-orientée. On dispose alors d'un opérateur de Dolbeault $\overline{\partial}$ sur G/H dont l'indice G-équivariant est $\mathrm{Ind}(\overline{\partial}) = 1 \in R(G)$. Par multiplicativité de l'indice, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{K_G}(T^V_G M) \arrow[d, "\mathrm{Ind^{M|B}}"'] & \otimes & \mathrm{K_G}(T^*(G/H)) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Ind^{G/H|\star}}"] & \mathrm{K_G}(T^V_G Y) \arrow[d, "\mathrm{Ind^{Y|B}}"] \\
\mathrm{KK}(C^*G, C(B)) & \otimes & \mathrm{KK_G}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \arrow[r] & \mathrm{KK}(C^*G, C(B)).
\end{tikzcd}$$

La multiplication par le symbole $[\sigma(\overline{\partial})] \in \mathrm{K_G}(T^*(G/H))$ induit donc un morphisme

$$k : \mathrm{K_G}(T^V_G M) \to \mathrm{K_G}(T^V_G Y)$$

qui respecte la flèche d'indice.

Théorème 1.3.15. *Soit H un tore maximal d'un groupe connexe G. Notons $r = (i_*)^{-1} \circ k$: $\mathrm{K_G}(T^V_G M) \to \mathrm{K_H}(T^V_H M)$ la composition de l'homomorphisme k avec l'inverse de i_*. Le digramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{K_G}(T^V_G M) \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\mathrm{Ind^{M|B}}"'] & \mathrm{K_H}(T^V_H M) \arrow[d, "\mathrm{Ind^{M|B}}"] \\
\mathrm{KK}(C^*G, C(B)) & \mathrm{KK}(C^*H, C(B)). \arrow[l, "i_*"]
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{K_G}(T^V_G M) \arrow[r, "k"] \arrow[d, "\mathrm{Ind^{M|B}}"'] & \mathrm{K_G}(T^V_G Y) \arrow[d, "\mathrm{Ind^{Y|B}}"] \\
\mathrm{KK}(C^*G, C(B)) \arrow[r, "="'] & \mathrm{KK}(C^*G, C(B)).
\end{tikzcd}$$

En effet, si $a \in \mathrm{K}_{\mathrm{G}}(T_G^V M)$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ind}^{\mathrm{Y|B}}(k(a)) &= \mathrm{Ind}^{\mathrm{Y|B}}(a \cdot [\sigma(\overline{\partial})]) \\
&= j^G\Big(\mathrm{Ind}(\overline{\partial})\Big) \otimes_{C^*G} \mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}(a) \\
&= j^G\Big(1\Big) \otimes_{C^*G} \mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}(a) \\
&= 1 \otimes_{C^*G} \mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}(a) \\
&= \mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}(a).
\end{aligned}$$

En appliquant le théorème précédent, on obtient que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{K}_{\mathrm{G}}(T_G^V M) \arrow[r, "k"] \arrow[d, "\mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}"'] & \mathrm{K}_{\mathrm{G}}(T_G^V Y) \arrow[d, "\mathrm{Ind}^{\mathrm{Y|B}}"] & \mathrm{K}_{\mathrm{H}}(T_H^V M) \arrow[l, "i_*"'] \arrow[d, "\mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}"] \\
\mathrm{KK}(C^*G, C(B)) \arrow[r, "="'] & \mathrm{KK}(C^*G, C(B)) & \mathrm{KK}(C^*H, C(B)). \arrow[l, "i_*"]
\end{tikzcd}$$

□

Nous terminons ce chapitre par le théorème 1.3.16 ci-dessous qui montre la compatibilité de la flèche d'indice G-transverse avec les flèches de Gysin. Soit donc $j : M \hookrightarrow M'$ une inclusion de G-variétés compatible avec les projections $p : M \to B$ et $p' : M' \to B$, avec M compacte. Suivant [1], on va définir un morphisme de $R(G)$-modules $j_! : \mathrm{K}_{\mathrm{G}}(T_G^V M) \to \mathrm{K}_{\mathrm{G}}(T_G^V M')$.
Soit N un voisinage tubulaire ouvert G-invariant de M dans M'. Alors N est une G-variété et elle peut être identifiée avec le fibré normal de M dans M'. Le fibré $T^V M$ est une sous-G-variété fermée de $T^V M'$ et le voisinage tubulaire U de $T^V M$ dans $T^V M'$ peut être identifié avec le fibré vectoriel sur $T^V M$ obtenu en relevant $N \oplus N$ par la projection $\pi : T^V M \to M$. L'algèbre extérieure de $\pi^*(N \otimes \mathbb{C})$ définit un complexe sur $T^V N$ qui est exact en-dehors de la section nulle $T^V M \subset T^V N$. Il est noté $\bigwedge(T^V N)$. Notons $q : T_G^V N \to T_G^V M$ la projection. Si E est un complexe sur $T_G^V M$ à support compact alors le produit $\bigwedge(T^V N)_{|T_G N} \otimes q^* E$ est à support compact sur $T_G^V N$. La multiplication par $\bigwedge(T^V N)$ définit un morphisme de $R(G)$-modules

$$\phi : \mathrm{K}_{\mathrm{G}}(T_G^V M) \to \mathrm{K}_{\mathrm{G}}(T_G^V N),$$

appelé homomorphisme de Thom. Comme $T_G^V N$ est un ouvert de $T_G^V M'$, l'inclusion induit une application

$$k_* : \mathrm{K}_{\mathrm{G}}(T_G^V N) \to \mathrm{K}_{\mathrm{G}}(T_G^V M').$$

La composition de ces deux morphismes donne l'application de Gysin désirée

$$j_! : \mathrm{K}_{\mathrm{G}}(T_G^V M) \to \mathrm{K}_{\mathrm{G}}(T_G^V M').$$

Théorème 1.3.16. *[1] Soit $j : M \hookrightarrow M'$ un G-plongement de fibrations sur B avec M compacte. Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{K}_{\mathrm{G}}(T_G^V M) \arrow[r, "j_!"] \arrow[d, "\mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}"'] & \mathrm{K}_{\mathrm{G}}(T_G^V M') \arrow[d, "\mathrm{Ind}^{\mathrm{M'|B}}"] \\
\mathrm{KK}(C^*G, C(B)) \arrow[r, "="'] & \mathrm{KK}(C^*G, C(B))
\end{tikzcd}$$

où $\mathrm{Ind}^{\mathrm{M}'|\mathrm{B}}$ *est bien définie grâce au théorème d'excision 1.3.8.*

Démonstration. Par la propriété d'excision, l'indice commute avec k_*. Il suffit donc de montrer le théorème dans le cas d'un G-fibré vectoriel réel N sur M et où $j : \mathrm{K_G}(T_G^V M) \to \mathrm{K_G}(T_G^V N)$ est le morphisme de Thom. On peut écrire $N = P \times_{O(n)} \mathbb{R}^n$, où P est un $O(n)$-fibré principal sur M. L'action de G sur P commutent avec l'action de $O(n)$ et l'action de G sur $\mathbb{R}^n$ est triviale. On a le produit suivant :

$$\mathrm{K_{G\times O(n)}}(T^V_{G\times O(n)}P) \otimes \mathrm{K_{G\times O(n)}}(T\mathbb{R}^n) \to \mathrm{K_{G\times O(n)}}(T^V_{G\times O(n)}(P\times\mathbb{R}^n)).$$

On a les isomorphismes suivants :

$$\begin{aligned} q_1^* : \mathrm{K_G}(T_G^V M) &\to \mathrm{K_{G\times O(n)}}(T^V_{G\times O(n)}P) \\ q_2^* : \mathrm{K_G}(T_G^V N) &\to \mathrm{K_{G\times O(n)}}(T^V_{G\times O(n)}(P\times\mathbb{R}^n)). \end{aligned}$$

On obtient donc un produit

$$\mathrm{K_G}(T_G^V M) \otimes \mathrm{K_{G\times O(n)}}(T\mathbb{R}^n) \to \mathrm{K_G}(T_G^V N).$$

L'inclusion de l'origine dans $\mathbb{R}^n$ induit un morphisme de Bott $i_! : R(O(n)) \to \mathrm{K_{O(n)}}(T\mathbb{R}^n)$ et on a $\mathrm{Ind}(i_!(1)) = 1 \in \mathrm{KK_{O(n)}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ d'après [3]. Comme G agit trivialement sur $\mathbb{R}^n$, il vient que $\mathrm{Ind}(i_!(1)) = 1 \in \mathrm{KK_{G\times O(n)}}(\mathbb{C},\mathbb{C})$. Le produit par $i_!(1)$ fait commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{K_G}(T_G^V M) \arrow[r, "j_!"] \arrow[d, "q_1^*"'] & \mathrm{K_G}(T_G^V N) \arrow[d, "q_2^*"] \\ \mathrm{K_{G\times O(n)}}(T^V_{G\times O(n)}P) \arrow[r, "\cdot i_!(1)"'] & \mathrm{K_{G\times O(n)}}(T^V_{G\times O(n)}(P\times\mathbb{R}^n)) \end{tikzcd}$$

on en déduit que si $a \in \mathrm{K_G}(T_G^V M)$,

$$\mathrm{Ind}^{\mathrm{P}\times\mathbb{R}^n|\mathrm{B}}(q_2^*(j_!(a)) = \mathrm{Ind}^{\mathrm{P}\times\mathbb{R}^n|\mathrm{B}}(q_1^*(a)\cdot i_!(1)).$$

Par multiplicativité de l'indice, il vient :

$$\mathrm{Ind}^{\mathrm{P}\times\mathbb{R}^n|\mathrm{B}}(q_2^*(j_!(a)) = j^{G\times O(n)}\Big(1\Big) \otimes_{C^*G\otimes C^*O(n)} \mathrm{Ind}^{\mathrm{P}|\mathrm{B}}(q_1^*(a)).$$

De plus, on a les égalités suivantes par 1.3.3 :

$$\mathrm{Ind}^{\mathrm{M}|\mathrm{B}}(a) = \chi_0^{O(n)} \otimes_{C^*O(n)} \mathrm{Ind}^{\mathrm{P}|\mathrm{B}}(q_1^*(a)),$$

$$\mathrm{Ind}^{N|B}(j_!(a)) = \chi_0^{O(n)} \otimes_{C^*O(n)} \mathrm{Ind}^{\mathrm{P}\times\mathbb{R}^n|\mathrm{B}}(q_2^*(j_!(a)),$$

où $\chi_0^{O(n)}$ est la représentation triviale de $O(n)$. On obtient finalement que $\mathrm{Ind}^{\mathrm{M}|\mathrm{B}}(a) = \mathrm{Ind}^{\mathrm{N}|\mathrm{B}}(j_!(a))$ car $j^{G\times O(n)}(1) = 1$.

□

Remarque 1.3.17. — Les différentes propriétés de naturalité de l'indice permettent de ramener le problème du calcul de l'indice à une fibration du type $B \times \mathbb{R}^n \to B$ et l'action d'un tore H sur $\mathbb{R}^n$.

— Dans ce chapitre, nous avons supposé que B est une variété pour simplifier. Toutes les constructions présentées se transposent en utilisant le formalisme de [5].

Chapitre 2

Passage en homologie cyclique

On souhaite obtenir des formules en cohomologie pour l'indice d'une familles d'opérateurs G-invariantes G-transversalement elliptique le long des fibres. On va utiliser la cohomologie locale [70] comme théorie cohomologique. On va utiliser les théorèmes de coefficients universels en KK-théorie [73] et en HL-théorie [58] pour la classe indice d'une famille d'opérateurs G-invariants G-transversalement elliptiques le long des fibres. Les théorèmes de coefficients universels (UCT) sont rappelés en annexe.

2.1 Calcul de la cohomologie cyclique périodique de $C^\infty(G)$ (d'après Natsume-Nest)

On note $H^n_\lambda(A)$ le n-ième groupe de cohomologie cyclique introduit dans [26].

Définition 2.1.1. Soit e un projecteur non nul d'une C^*-algèbre A. On dit que e est un projecteur minimal si $eAe = \mathbb{C}e$.

Pour tout $\pi \in \hat{G}$ choisissons un projecteur minimal $e_\pi \in \mathrm{End}(V_\pi)$. Notons e_0 le projecteur minimal correspondant à la représentation triviale de dimension 1. Soient α et β les deux applications de $\mathcal{S}(\hat{G})$ dans $\mathcal{S}(\hat{G}) \otimes \mathcal{K}$ définies par :

$$\begin{aligned} \alpha(A)_\pi &= A_\pi \otimes e_0 \\ \beta(A)_\pi &= e_\pi \otimes A_\pi. \end{aligned}$$

L'algèbre $\mathcal{K}$ est contenue dans les opérateurs traçables. On note Tr la trace sur $\mathcal{K}$.

Proposition 2.1.2 ([60]). *1. Soit φ un cocycle cyclique sur $\mathcal{S}(\hat{G})$, alors on a :*

$$[\alpha^*(\varphi\sharp\mathrm{Tr})] = [\varphi] \text{ dans } H^n_\lambda(\mathcal{S}(\hat{G}))$$

2. a. Si n est impair alors $[\beta^*(\varphi\sharp\mathrm{Tr})] = 0$.

b. Si $n = 2k$ est pair alors $[\beta^*(\varphi\sharp\mathrm{Tr})] = \dfrac{1}{(2\pi i)^k k!}\displaystyle\sum_{\pi\in\hat{G}} \varphi(e_\pi, \cdots, e_\pi) S^k \chi_\pi$ dans $H^n_\lambda(\mathcal{S}(\hat{G}))$.

Démonstration. 1. On a

$$\begin{aligned}\alpha^*(\varphi\sharp\mathrm{Tr})(A^0,\cdots,A^n) &= \varphi\sharp\mathrm{Tr}(A^0\otimes e_0,\cdots,A^n\otimes e_0)=\varphi(A^0,\cdots,A^n)\mathrm{Tr}((e_0)^n)\\ &=\varphi(A^0,\cdots,A^n)\end{aligned}.$$

2. On identifie $\mathrm{End}(V_\pi)$ avec $\mathrm{Hom}(\mathbb{C},\mathrm{End}(V_\pi))$, on a alors :

$$\begin{aligned}\beta^*(\varphi\sharp\mathrm{Tr})(A^0,\cdots,A^n) &= \varphi\sharp\mathrm{Tr}(e\otimes A^0,\cdots,e\otimes A^n)\\ &=\sum_{\pi_0,\cdots,\pi_n}\varphi(e_{\pi_0},\cdots,e_{\pi_n})\mathrm{Tr}(A^0_{\pi_0}\cdots A^n_{\pi_n}),\end{aligned}$$

mais $A^0_{\pi_0}\cdots A^n_{\pi_n}\neq 0$ si et seulement si $\pi_0=\pi_1=\cdots=\pi_n$. On obtient donc que

$$\beta^*(\varphi\sharp\mathrm{Tr})(A^0,\cdots,A^n)=\sum_\pi\varphi(e_\pi,\cdots,e_\pi)\mathrm{Tr}(A^0_\pi\cdots A^n_\pi).$$

Maintenant, comme φ est cyclique, il vient que si n est impair alors

$$\varphi(e_\pi,\cdots,e_\pi)=(-1)^n\varphi(e_\pi,\cdots,e_\pi)=-\varphi(e_\pi,\cdots,e_\pi)$$

donc $\varphi(e_\pi,\cdots,e_\pi)=0$, $\forall\pi\in\hat{G}$. De plus, d'après [24], on sait que $S^k\chi_\pi(A^0,\cdots,A^n)=(2i\pi)^k k!\mathrm{Tr}(A^0_\pi\cdots A^n_\pi)$.

□

Proposition 2.1.3 ([60])**.** *Il existe un chemin d'homomorphismes $\rho_t:\mathcal{S}(\hat{G})\to\mathcal{S}(\hat{G})\otimes\mathcal{K}$ avec $\rho_0=\alpha$ et $\rho_1=\beta$ tel que $\forall A\in\mathcal{S}(\hat{G})$, l'application qui à $t\in[0,1]$ associe $\rho_t(A)$ est différentiable.*

Démonstration. Soient respectivement $\epsilon_{\pi,0}$ et $\epsilon_{0,\pi}$ les isométries partielles respectivement de e_0 vers e_π et de e_π vers e_0. On a $\epsilon^*_{0,\pi}=\epsilon_{\pi,0}$, $\epsilon_{\pi,0}\epsilon_{0,\pi}=e_\pi$, $\epsilon_{0,\pi}\epsilon_{\pi,0}=e_0$, $\epsilon_{0,\pi}e_\pi=e_0\epsilon_{0,\pi}$ et $e_\pi\epsilon_{\pi,0}=\epsilon_{\pi,0}e_0$. Notons 1_π l'identité de V_π et 1 l'identité de $L^2(\hat{G})\otimes L^2(\hat{G})$. Posons

$$U=\sum_\pi 1_\pi\otimes(\epsilon_{\pi,0}+\epsilon_{0,\pi})+1-\sum_\pi 1_\pi\otimes(e_0+e_\pi).$$

L'opérateur U est auto-adjoint et unitaire, l'opération d'adjonction étant prise dans l'algèbre des multiplicateurs de $\mathcal{S}(\hat{G})\otimes\mathcal{K}$. En effet,

$$\begin{aligned}U^*U=&\sum_\pi 1_\pi\otimes(\epsilon_{0,\pi}+\epsilon_{\pi,0})(\epsilon_{0,\pi}+\epsilon_{\pi,0})+\sum_\pi 1_\pi\otimes(\epsilon_{0,\pi}+\epsilon_{\pi,0})-\sum_\pi 1_\pi\otimes(\epsilon_{0,\pi}+\epsilon_{\pi,0})(e_0+e_\pi)\\ &+\sum_\pi 1_\pi\otimes(\epsilon_{0,\pi}+\epsilon_{\pi,0})+1-\sum_\pi 1_\pi\otimes(e_0+e_\pi)-\sum_\pi 1_\pi\otimes(e_0+e_\pi)(\epsilon_{0,\pi}+\epsilon_{\pi,0})\\ &-\sum_\pi 1_\pi\otimes(e_0+e_\pi)+\sum_\pi 1_\pi\otimes(e_0+e_\pi).\end{aligned}\tag{2.1}$$

On a alors le premier terme qui se simplifie avec le sixième, le second avec le troisième, le quatrième avec le septième et le huitième avec le neuvième. On a donc bien $U^*U=1$. Soit W_π l'unitaire de $\mathrm{End}(V_\pi\otimes V_\pi)$ tel que $\mathrm{Ad}(W_\pi)$ soit donné par $\mathrm{Ad}(W_\pi)(A_\pi\otimes B_\pi)=B_\pi\otimes A_\pi$ dans $\mathrm{End}(V_\pi)\otimes\mathrm{End}(V_\pi)$. Posons

$$V=\sum_\pi W_\pi+1-\sum_\pi 1_\pi\otimes 1_\pi,$$

c'est un élément de $B(L^2(\hat{G}) \otimes L^2(\hat{G}))$ qui est unitaire. En effet, on a :

$$\begin{aligned} V^*V = &\sum_\pi W_\pi^* W_\pi + \sum_\pi W_\pi^* - \sum_\pi W_\pi^*(1_\pi \otimes 1_\pi) + \sum_\pi W_\pi + 1 \\ &- \sum_\pi 1_\pi \otimes 1_\pi - \sum_\pi (1_\pi \otimes 1_\pi) W_\pi - \sum_\pi 1_\pi \otimes 1_\pi + \sum_\pi 1_\pi \otimes 1_\pi. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Ici le premier terme se simplifie avec le cinquième, le deuxième avec le troisième, le quatrième avec le septième et le huitième avec le neuvième. On obtient bien $V^*V = 1$. Maintenant, vérifions que $\mathrm{Ad}(VU)\alpha(A) = \beta(A)$, $\forall A \in \mathcal{S}(\hat{G})$. On commence par calculer $\mathrm{Ad}(U)\alpha(A)$, on a :

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ad}(U)\alpha(A) \\ &= (\sum_\pi 1_\pi \otimes (\epsilon_{\pi,0} + \epsilon_{0,\pi}) + 1 - \sum_\pi 1_\pi \otimes (e_0 + e_\pi))A \otimes e_0 (\sum_\pi 1_\pi \otimes (\epsilon_{\pi,0} + \epsilon_{0,\pi}) + 1 - \sum_\pi 1_\pi \otimes (e_0 + e_\pi)) \\ &= (\sum_\pi A_\pi \otimes \epsilon_{\pi,0} + A \otimes e_0 - \sum_\pi A_\pi \otimes e_0)(\sum_\pi 1 \otimes (\epsilon_{\pi,0} + \epsilon_{0,\pi}) + 1 - \sum_\pi 1_\pi \otimes (e_0 + e_\pi)). \end{aligned}$$

En simplifiant $A \otimes e_0$ avec $\sum_\pi A_\pi \otimes e_0$, il vient :

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ad}(U)\alpha(A) \\ &= \sum_\pi A_\pi \otimes \epsilon_{\pi,0} (\sum_\pi 1_\pi \otimes (\epsilon_{\pi,0} + \epsilon_{0,\pi}) + 1 - \sum_\pi 1_\pi \otimes (e_0 + e_\pi)) \\ &= \sum_\pi A_\pi \otimes e_\pi + \sum_\pi A_\pi \otimes \epsilon_{\pi,0} - \sum_\pi A_\pi \otimes \epsilon_{\pi,0} \\ &= \sum_\pi A_\pi \otimes e_\pi. \end{aligned}$$

Calculons $\mathrm{Ad}(V) \sum_\pi A_\pi \otimes e_\pi$. On a :

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}(VU)\alpha(A) &= V(\sum_\pi A_\pi \otimes e_\pi)V^* \\ &= (\sum_\pi W_\pi A_\pi \otimes e_\pi + \sum_\pi A_\pi \otimes e_\pi - \sum_\pi A_\pi \otimes e_\pi)(\sum_\pi W_\pi^* + 1 - \sum_\pi 1_\pi \otimes 1_\pi) \\ &= \sum_\pi W_\pi (A_\pi \otimes e_\pi) W_\pi^* \\ &= \sum_\pi e_\pi \otimes A_\pi. \end{aligned}$$

On a donc bien $\mathrm{Ad}(VU)\alpha(A) = \beta(A)$.
De plus, $\mathrm{Ad}(VU)$ est connecté à l'identité par un chemin C^∞ dans les multiplicateurs de $\mathcal{S}(\hat{G}) \otimes \mathcal{K}$. En effet, VU est unitaire donc connecté à l'identité par [48] et ce chemin H_t d'unitaires est bien dans $\mathrm{Aut}(\mathcal{S}(\hat{G}) \otimes \mathcal{K})$ car $\forall t$ sa norme est 1 donc $(1 + \lambda_\pi + \lambda_{\pi'})^k \|H_t u\| \leq (1 + \lambda_\pi + \lambda_{\pi'})^k \|u\|$. En utilisant le calcul fonctionnel borélien, si on écrit $VU = e^{iA}$ avec A auto-adjoint alors e^{itA} est une homotopie C^∞ entre l'identité et VU dans $\mathrm{Aut}(\mathcal{S}(\hat{G}) \otimes \mathcal{K})$. □

Théorème 2.1.4 ([60]).

1. *Si m est impair alors $SH_\lambda^m(C^\infty(G))$ est réduit à zéro dans $H_\lambda^{m+2}(C^\infty(G))$. En particulier, $HP^1(C^\infty(G)) = 0$.*
2. *Si $m = 2n$ est pair alors $SH_\lambda^m(C^\infty(G)) = S^{n+1}(\mathcal{O}(\hat{G}))$ dans $H_\lambda^{2n+2}(C^\infty(G))$. De plus, l'application canonique définie à la proposition C.0.7*

$$\mathcal{O}(\hat{G}) \longrightarrow HP^0(C^\infty(G))$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Soit $\varphi \in H^m_\lambda(C^\infty(G))$. D'après la proposition précédente, on sait que $\alpha^*(\varphi\sharp\mathrm{Tr}) - \beta^*(\varphi\sharp\mathrm{Tr}) \in \ker(S)$ donc que

$$S\varphi = S(\beta^*(\varphi\sharp\mathrm{Tr})).$$

1. Si m est impair alors $\beta^*(\varphi\sharp\mathrm{Tr}) = 0$ donc $S\varphi = 0$.
2. Si $m = 2n$ est pair alors $S\varphi = S\left(\frac{1}{(2\pi i)^n n!}\sum_\pi \varphi(e_\pi, \cdots, e_\pi) S^n\chi_\pi\right)$. Il reste à vérifier que l'application qui à π associe $\varphi(e_\pi, \cdots, e_\pi)\dim V_\pi$ est dans $\mathcal{O}(\hat{G})$, c'est-à-dire

   $$\sup_\pi |\varphi(e_\pi, \cdots, e_\pi)| \dim V_\pi (1+\lambda_\pi)^{-n} < \infty.$$

   Comme φ est continue, on a que $|\varphi(e_\pi, \cdots, e_\pi)| \leq C\|e_\pi\|^n_k$ donc puisque $\dim V_\pi$ est dans $\mathcal{O}(\hat{G})$, on obtient que $\varphi(e_\pi, \cdots, e_\pi)\dim V_\pi \in \mathcal{O}(\hat{G})$.
   Maintenant, montrons que $\mathcal{O}(\hat{G}) \longrightarrow HP^0(C^\infty(G))$ est un isomorphisme. La surjectivité découle de ce qui précède. Montrons donc l'injectivité. Soit $f \in \mathcal{O}(\hat{G})$ tel que $\tau_f = 0$ dans $HP(C^\infty(G))$. Il existe n tel que $S^n\tau_f = 0$, c'est-à-dire tel que $\sum_\pi \dim V_\pi f(\pi) S^n \chi_\pi = 0$. Soit $\{\rho_\pi\}_{\pi\in\hat{G}}$ une famille de projecteurs engendrant $\mathrm{K}_0(C^*G) = \bigoplus_\pi \mathbb{Z}$. On a $\chi_\pi(\rho_{\pi'}) = \delta_{\pi,\pi'}$. Par [26] proposition 14, on a que

   $$S^n\chi_\pi(\rho_{\pi'}, \cdots, \rho_{\pi'}) = (2\pi i)^n n! \chi_\pi(\rho_{\pi'}) = (2\pi i)^n n! \delta_{\pi,\pi'},$$

   donc on obtient que $f(\pi) = 0\ \forall\pi$ et donc que $f = 0$.

□

2.2 Application à la classe indice

On note $\mathrm{HL}(A,B)$ l'homologie cyclique locale bivariante de la paire de C^*-algèbres (A,B) introduite par M. Puschnigg dans [70]. On dispose d'un caractère de Chern-Connes en homologie cyclique locale bivariante. Ce caractère de Chern-Connes dispose de toutes les bonnes propriétés attendues. En effet, on a le théorème suivant :

Théorème 2.2.1. *[70] Soient A et C des C^*-algèbres séparables. Il existe une transformation naturelle*

$$\mathrm{Ch}^{\mathrm{HL}} : \mathrm{KK}(A,C) \to \mathrm{HL}(A,C).$$

On souhaite appliquer les théorèmes de coefficients universels en K-théorie bivariante et en homologie local cyclique bivariante rappelés en Annexe B. On doit alors vérifier que C^*G est dans la classe N.

Lemme 2.2.2. *Soit K un groupe compact. On note $(V_\pi)_{\pi\in\hat{K}}$ les représentations unitaires irréductibles de K et $\widehat{\bigoplus_{\pi\in\hat{K}}}\mathrm{End}(V_\pi)$ la complétion de la somme directe des $\mathrm{End}(V_\pi)$ pour la norme uniforme* *correspondant à la structure hermitienne sur V_π. La C^*-algèbre du groupe K est isomorphe à* $\widehat{\bigoplus_{\pi\in\hat{K}}}\mathrm{End}(V_\pi)$.

Démonstration. [72] On va montrer que l'image par la représentation régulière gauche de K est donnée par les opérateurs de la forme $\sum A_\pi \otimes id_\pi$, avec $A_\pi \in \mathrm{End}(V_\pi)$ et $\|A_\pi\| \to 0$ quand $\pi \to \infty$, c'est-à-dire $\forall\varepsilon > 0$ $\exists J \subset \hat{K}$ fini tel que $\sup_{\pi\notin J}\|A_\pi\| < \varepsilon$. On note $\|A\|_2$ la norme de Hilbert-Schmidt. Si $f \in L^2(K)$ alors on a $\sum_\pi \dim V_\pi \|\pi(f)\|_2^2 = \|f\|^2_{L^2(K)} < \infty$ donc on obtient que $\|\pi(f)\|_2 \to 0$ quand π tend vers l'infini. Comme la norme d'endomorphismes est majorée par la norme de Hilbert-Schmidt, on obtient que $\|\pi(f)\|$ tend vers 0 quand π tend vers l'infini. De plus, $L^2(K)$ est dense dans $L^1(K)$ car on a les inclusions $C(K) \subset L^2(K) \subset L^1(K)$ donc pour toute f dans $L^1(K)$ on a $\|\pi(f)\|$ qui tend vers 0 quand π tend vers l'infini. Et donc $\forall f \in C^*K$, $\|\pi(f)\| \to 0$ quand $\pi \to \infty$. Donc l'image de C^*K par la représentation régulière gauche de K est contenue dans l'ensemble des opérateurs de la forme $\sum A_\pi \otimes id_\pi$ avec $A_\pi \in \mathrm{End}(V_\pi)$ et $\|A_\pi\| \to 0$ quand $\pi \to \infty$, car on a $\lambda(f) = \sum \pi(f) \otimes id_\pi$ avec $\|\pi(f)\| \to 0$.
Réciproquement, il suffit de vérifier que l'image de C^*K par la représentation régulière gauche contient la somme directe algébrique des $\mathrm{End}(V_\pi)$. On a que $\lambda(C^\pi_{e_i,e_j}\sqrt{\dim V_\pi})$ est donné par $\frac{1}{\sqrt{\dim V_\pi}}E^\pi_{ij} \otimes id_\pi$, où E^π_{ij} est la matrice élémentaire. En effet, on a :

$$\lambda(\sqrt{\dim V_\pi}C^\pi_{e_i,e_j})\sqrt{\dim V_{\pi'}}C^{\pi'}_{e_k,e_l} \quad = C^\pi_{e_i,e_l}\delta_{jk}\delta_{\pi,\pi'},$$

par le lemme 1.2.3. Comme les E^π_{ij} engendrent $\bigoplus \mathrm{End}(V_\pi)$, on obtient le résultat. □

Lemme 2.2.3. [*58*] *La C^*-algèbre d'un groupe compact métrisable K appartient à N.*

Démonstration. La C^*-algèbre d'un groupe compact K est isomorphe à $\widehat{\bigoplus_{\pi\in\hat{K}}}\mathrm{End}(V_\pi)$. Comme une somme directe est une limite inductive et que le dual d'un groupe compact métrisable est dénombrable [72] proposition (5.11), on a bien que C^*K est dans N.

□

Remarque 2.2.4. Si K est de Lie, alors il est métrisable.

Proposition 2.2.5. *L'application qui à $\alpha \in \mathrm{KK}(C^*G, C(B))$ associe le produit de Kasparov $\otimes_{C^*G}$ par α est un isomorphisme entre les groupes $\mathrm{KK}(C^*G, C(B))$ et $\mathrm{Hom}(R(G), \mathrm{K}(B))$.*

Démonstration. Par le lemme 2.2.3, la C^*-algèbre de G est dans N. On peut donc appliquer le théorème de coefficients universels en KK-théorie. De plus, $R(G)$ est libre car $R(G) \simeq \bigoplus_{\pi\in\hat{G}}\mathbb{Z}$. Donc on obtient par le théorème de coefficients universels que $\mathrm{KK}(C^*(G), C(B)) \simeq \mathrm{Hom}(R(G), K(B))$.
□

Corollaire 2.2.6. *Le groupe d'homologie locale cyclique bivariante $\mathrm{HL}(C^*G, C(B))$ est isomorphe à $\mathrm{Hom}(\mathrm{HL}(C^*G), \mathrm{HL}(C(B)))$.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème B.0.7 puisque $(C^*G,\ C(B))$ satisfait le théorème de coefficients universels en KK-théorie car $C^*G \in N$ et qu $R(G)$ est libre. $\square$

On note $\mathrm{Hom}(\mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}(P))$ l'image de la classe indice $\mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}(P)$ dans $\mathrm{Hom}(R(G), \mathrm{K}(B))$. La somme $\sum_{V\in\hat{G}} m_P(V)\chi_V$ peut être vue dans $\mathrm{Hom}(R(G), \mathrm{K}(B))$ de la manière suivante :
si $W = \bigoplus_{i\in I\ \text{fini}} V_i$ est la décomposition en représentations irréductibles d'une représentation W de G alors

$$\sum_{V\in\hat{G}} m_P(V)\chi_V : W = \bigoplus_{i\in I\ \text{fini}} V_i \to \sum_{i\in I\ \text{fini}} m_P(V_i).$$

Proposition 2.2.7. *L'indice d'une famille d'opérateurs G-équivariante G-transversalement elliptique est totalement déterminée par ses multiplicités et on a :*

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}(P)) = \sum_{V\in\hat{G}} m_P(V)\chi_V.$$

Démonstration. Par le théorème de coefficients universels B.0.6, on sait que

$$\mathrm{KK}(C^*G, C(B)) \simeq \mathrm{Hom}(R(G), \mathrm{K}(B)).$$

De plus, $R(G)$ est un module libre isomorphe à $\bigoplus_{V\in\hat{G}} \mathbb{Z}$. $\square$

Corollaire 2.2.8. *Le caractère de Chern en homologie locale cyclique de la classe indice* $\mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}(P)$ *d'une famille d'opérateurs P G-invariante, G transversalement elliptique est donné par :*

$$\mathrm{Ch}^{\mathrm{HL}}(\mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}(P)) = \sum_{V\in\hat{G}} \mathrm{Ch}(m_P(V))\chi_V,$$

où $\mathrm{Ch}(m_p(V)) \in H(B)$ *est le caractère de Chern usuel de l'élément* $m_P(V) \in \mathrm{K}(B)$ (*ici on utilise* $\mathrm{HL}(C(B)) \simeq H(B)$).

Démonstration. D'après le corollaire 2.2.6, on sait que $\mathrm{HL}(C^*G, C(B)) \simeq \mathrm{Hom}(\mathrm{HL}(C^*G), \mathrm{HL}(C(B))$. Donc $\mathrm{Ch}(\mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}(P))$ est totalement déterminée par ses valeurs sur les représentations irréductibles. On sait que le caractère de Chern en homologie locale est une transformation naturelle, donc qu'elle respecte les produits. On a donc

$$\mathrm{Ch}^{\mathrm{HL}}(\mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}(P)) \circ \mathrm{Ch}^{\mathrm{HL}}(V) = \mathrm{Ch}^{\mathrm{HL}}([V] \otimes_{C*G} \mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}(P)) = \mathrm{Ch}(m_P(V)).$$

$\square$

2.3 Indice distributionel à valeurs dans $H(B)$

On suppose dans cette partie que B est une variété orientée. Suivant [1], on souhaite obtenir un caractère de Chern distributionnel pour les familles d'opérateurs G-transversalement elliptiques le long des fibres. Plus précisément, si $\varphi \in C^\infty(G)$ on souhaite savoir si la série

$\sum_{V\in\hat{G}} \mathrm{Ch}(m_P(V))\langle\chi_V,\varphi\rangle_{L^2(G)}$ est convergente. Ici la série est à valeurs dans $H(B)$ alors que dans [1] la série est à valeurs dans $\mathbb{C}$. On va montrer que le caractère de Chern de la classe indice converge en tant que distribution sur $C^\infty(G)$ à valeurs dans la cohomologie de B si la variété B est orientée. Pour cela, on va coupler la classe indice avec un élément de la K-homologie de B. On commence par rappeler quelques définitions et résultats de [37].

Soit $T \to M$ un fibré vectoriel réel de dimension n'. Soit $m \in \mathbb{R}$. Soit a une fonction complexe de classe C^∞ sur l'espace total T. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Pour toute carte locale : $\phi : \Omega \times \mathbb{R}^{n'} \to T$ (Ω ouvert de $\mathbb{R}^{\dim M}$; ϕ application de fibrés), pour tout compact K de Ω et toute paire $p \in \mathbb{N}^{\dim M}$, $q \in \mathbb{N}^{n'}$ de multiindices, il existe une constante C avec
$$\left|\frac{\partial^p}{\partial x^p}\frac{\partial^q}{\partial \xi^q}(a\circ\phi)(x,\xi)\right| \le C(1+\|\xi\|)^{(m-|q|)},$$
pour tout $x \in K$, $\xi \in \mathbb{R}^{n'}$.

(ii) Il existe un recouvrement de M par des cartes vérifiant (i).

On dit que a est un symbole d'ordre m. Si a est un symbole son support $\mathrm{Supp}(a)$ est l'adhérence dans M de l'ensemble $\{x \in M/\exists\xi \in T_x, a(x,\xi) \neq 0\}$. Soit $\mathcal{S}^m(M,T)$ l'espace des symboles d'ordre m à support compact. L'algèbre $\mathcal{S}^0(M,T)$ est une sous-algèbre involutive de l'algèbre $C_b(T)$ des fonctions continues bornées sur l'espace total T, son adhérence dans $C_b(T)$ est notée $\overline{\mathcal{S}}^0$. On pose alors
$$\Sigma(M,T) = \overline{\mathcal{S}}^0/C_0(T)$$
où $C_0(T)$ est l'espace des fonctions continues nulles à l'infini sur T. Si E est un fibré hermitien sur M, on note $\mathcal{S}^m(M,T,\mathcal{L}(E))$, $\Sigma(M,T,\mathcal{L}(E))$ les algèbres correspondantes.

Définition 2.3.1 ([37] définition A.7.1)**.** Soit $A : C^\infty(M,E) \to C^\infty(M,E)$ un opérateur pseudodifférentiel d'ordre 0 sur M. Le symbole transverse $\sigma_{T^VM^\perp}(A) \in \Sigma(M,p^*T^*B,\mathcal{L}(E))$ est la restriction de $\sigma(A)$ à $T^VM^\perp = (TM/T^VM)^* \simeq p^*T^*B$.

Définition 2.3.2 ([37] définition A.7.2)**.** Un opérateur pseudodifférentiel $A : C^\infty(M,E) \to C^\infty(M,E)$ d'ordre 0 est dit transverse si son symbole transverse est constant le long des fibres, c'est-à-dire
$$\sigma_{p^*T^*B}(A)(m,\xi) = \sigma_{p^*T^*B}(A)(m',\xi),$$
quand $p(m) = p(m')$ et $\xi \in T^*_{p(m)}B$.

Proposition 2.3.3 ([37] Proposition A.8)**.** *Soient E_1 et E_2 des fibrés hermitiens sur M (et supposons que le groupoïde $\mathcal{G}_1 = M \times_B M$ agit par isométrie sur E_2). Soit $Q : C^\infty(M,E_2) \to C^\infty(M,E_2)$ un opérateur pseudodifférentiel transverse sur M, d'ordre 0. Soit $Q' : C^\infty(M,E_1 \otimes E_2) \to C^\infty(M,E_1\otimes E_2)$ un opérateur pseudodifférentiel, d'ordre 0 tel que*
$$\sigma_{p^*T^*B}(Q') = 1_{E_1}\hat{\otimes}\sigma_{p^*T^*B}(Q) \in \Sigma(M,p^*T^*B,\mathcal{L}(E_1\hat{\otimes}E_2)).$$
Alors Q' est une Q-connexion pour $\mathcal{E}_1$, où $\mathcal{E}_1$ est le $C(B)$-module des sections L^2 le long des fibres de E_1.

Proposition 2.3.4 ([37] proposition A.10.2)**.** *Soit $P : C^{\infty,0}(M, E_1) \to C^{\infty,0}(M, E_1)$ une famille d'opérateurs pseudodifférentiels d'ordre 0 sur M. Soit Q' un opérateur pseudodifférentiel d'ordre 0 sur M tel que*

$$\sigma_{p^*T^*B}(Q') = 1_{E_1}\hat{\otimes}\sigma',$$

où $\sigma' \in \Sigma(M, p^*T^*B, \mathcal{L}(E_2))$ est constant le long des fibres. Alors $[P\hat{\otimes}1, Q'] : C^\infty(M, E_1\hat{\otimes}E_2) \to C^\infty(M, E_1\hat{\otimes}E_2)$ est un opérateur pseudodifférentiel d'ordre 0 et

$$\sigma([P\hat{\otimes}1, Q']) = [\sigma(P)\hat{\otimes}1, \sigma(Q')].$$

Remarque 2.3.5. Dans ce qui précède tous les opérateurs et tous les symboles peuvent être pris G-invariants car G est compact.

Vérifions que l'on a un produit en K-théorie entre les symboles G-transversalement elliptiques le long des fibres et les symboles elliptiques sur la base donnant des symboles G-transversalement elliptiques sur M.

Lemme 2.3.6. *L'application*

$$\mathrm{K_G}(T_G^{*V}M) \otimes \mathrm{K}(T^*B) \to \mathrm{K_G}(T_G^*M)$$

définie par

$$(\sigma\hat{\otimes}1 + 1\hat{\otimes}\sigma')(m, \xi) = \sigma(m, \xi - p_*\xi)\hat{\otimes}1 + 1\hat{\otimes}\sigma'(p(m), p_*\xi),$$

pour $\sigma \in \mathrm{K_G}(T_G^{*V}M)$, $\sigma' \in \mathrm{K}(T^*B)$ et $(m, \xi) \in T_G^*M$ induit un produit en K*-théorie.*

Démonstration. D'une part, l'application $\mathrm{K_G}(T_G^{*V}M) \otimes \mathrm{K}(T^*B) \to \mathrm{K_G}(T_G^{*V}M \times T^*B)$ définie par $(\sigma, \sigma') \mapsto \sigma\hat{\otimes}1 + 1\hat{\otimes}\sigma'$ induit un produit (c'est un produit de Kasparov). D'autre part, $T_G^*M = T_G^{*V}M \times_M p^*T^*B$ donc par restriction du produit dans $T_G^{*V}M \times p^*T^*B$ à $T_G^{*V}M \times_M p^*T^*B$, on définit un produit en K-théorie à valeurs dans $\mathrm{K_G}(T_G^*M)$. □

On peut maintenant énoncer le résultat qui nous intéresse afin de pouvoir définir un indice distributionnel. On note $C^{\infty,0}$ pour désigner des applications C^∞ le long des fibres et continues par rapport à la base de $p : M \to B$.

Théorème 2.3.7. *Soit $P : C^{\infty,0}(M, E_1) \to C^{\infty,0}(M, E_1)$ une famille autoadjointe d'opérateurs pseudodifférentiels d'ordre 0 G-invariante, G-transversalement elliptique le long des fibres. Soit $Q : C^\infty(B, E_2)$ un opérateur pseudodifférentiel d'ordre 0 elliptique sur B. Le produit de Kasparov de la classe $[\mathcal{E}_1, \pi, P] = \mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}(P)$ par $[Q] \in \mathrm{KK}(C(B), \mathbb{C})$ est donnée par $[\mathcal{E}_1\hat{\otimes}_{C(B)}\mathcal{E}_2, Q']$, où Q' est un opérateur pseudodifférentiel G-invariant, G-transversalement elliptique sur M d'ordre 0 dont le symbole est donné par*

$$\sigma(Q') = \sigma(P)\hat{\otimes}1 + 1\hat{\otimes}p^*\sigma(Q).$$

Démonstration. Si Q' est n'importe quel opérateur G-invariant, G-transversalement elliptique sur M alors $\mathrm{Ind}^M(Q') \in \mathrm{KK}(C^*G, \mathbb{C})$ est bien défini et ne dépend que de $[\sigma(Q')]$ son symbole étant G-transversalement elliptique. Il reste à vérifier qu'un tel Q' est une Q-connexion pour $\mathcal{E}_1$ et que

$\forall\varphi \in C^*G$, $\pi(\varphi)[P\hat{\otimes}1, Q']\pi(\varphi)^*$ est positif modulo les compacts. D'une part, puisque $\sigma(Q')_{|p^*T^*B} = 1\hat{\otimes}p^*\sigma(Q) \in \Sigma(M, p^*T^*B, \mathcal{L}(E_1\hat{\otimes}E_2))$, on obtient par la proposition 2.3.3 que Q' est une Q-connexion pour $\mathcal{E}_1$. D'autre part, on obtient par la proposition 2.3.4 que $[P\hat{\otimes}1, Q']$ est un opérateur pseudodifférentiel sur M et que son symbole est donné par

$$\sigma([P\hat{\otimes}1, Q']) = [\sigma(P)\hat{\otimes}1, \sigma(Q')] = \sigma(P)^2\hat{\otimes}1,$$

qui est positif. De plus, Q' et $P\hat{\otimes}1$ sont G-invariants donc ils commutent avec $\pi(\varphi)$. Il reste à vérifier que $[P\hat{\otimes}1, Q']$ est positif modulo les compacts. Mais $\sigma([P\hat{\otimes}1, Q']) \geq 0$ donc $[P\hat{\otimes}1, Q'] \geq 0$ modulo les compacts si on prend des opérateurs d'ordre 0. □

Corollaire 2.3.8. *Le couplage de la classe indice d'une famille d'opérateurs pseudodifférentiels P d'ordre 0, G-invariante, G-transversalement elliptique le long des fibres avec un élément de la* K*-homologie* $\mathrm{KK}(C(B), \mathbb{C})$ *de B est donné par la classe indice d'un opérateur G-invariant, G-transversalement elliptique sur M.*

Corollaire 2.3.9. *Si α est un élément de* K*-homologie de B alors la classe $[\mathcal{E}, \pi, P] \otimes_{C(B)} \alpha \in$* $\mathrm{KK}(C^*G, \mathbb{C}) \simeq \mathrm{Hom}(R(G), \mathbb{C})$ *est donnée par l'indice distributionnel d'Atiyah [1], c'est-à-dire les multiplicités de* $\mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}(P) \otimes_{C(B)} \alpha$ *sont sommables au sens des distributions sur G. Notons* $m([V] \otimes_{C*G} \mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}(P) \otimes_{C(B)} \alpha)$ *l'entier associé à la multiplicité* $[V] \otimes_{C*G} \mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}(P) \otimes_{C(B)} \alpha$ *de V dans* $\mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}(P) \otimes_{C(B)} \alpha$*. On a alors,*

$$\sum_{V\in\hat{G}} m\Big([V] \otimes_{C*G} \mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}(P) \otimes_{C(B)} \alpha\Big)\langle\chi_V, \varphi\rangle_{L^2(G)},\ \forall\varphi \in C^\infty(G)^G$$

est convergente.

Démonstration. En effet, par la proposition précédente $\mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}(P) \otimes_{C(B)} \alpha$ est représenté par la classe indice d'un opérateur pseudodifférentiel G-transversalement elliptique sur M. Par [1], on sait que l'indice distributionnel d'un opérateur G-transversalement elliptique Q est tempéré sur G et est totalement déterminé par ses multiplicités, c'est-à-dire $\mathrm{Ind}^M(Q) = \sum_{V\in\hat{G}} m_Q(V)\chi_V$ est bien défini comme distribution. □

On va à présent déduire de l'étude précédente que le caractère de Chern de la classe indice d'une famille G-invariante d'opérateurs pseudodifférentiels G-transversalement elliptique est une distribution sur G à valeurs dans la cohomologie de la base B. Pour cela, on utilise le caractère de Chern multiplicatif bivariant en homologie locale [70]. On montre ensuite que la somme formelle $\sum_{V\in\hat{G}} \mathrm{Ch}(m_P(V))\chi_V$ converge au sens des distributions à valeurs dans $H(B)$ si la variété B est orientée.

Théorème 2.3.10. *Supposons que la variété B est orientée. Le caractère de Chern en homologie locale cyclique de la classe indice d'un opérateur pseudodifférentiel P G-invariant, G-transversalement elliptique le long des fibres est une distribution à valeurs dans la cohomologie de de Rham paire de B. On a alors*

$$\mathrm{Ch}(\mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}(P)) = \sum_{V\in\hat{G}} \mathrm{Ch}(m_P(V))\chi_V \in C^{-\infty}(G, H^{2*}(B))^G.$$

Démonstration. Pour montrer que $\mathrm{Ch}(\mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}(P)) = \sum_{V\in\hat{G}} \mathrm{Ch}(m_P(V))\chi_V$ converge au sens des distributions dans $C^{-\infty}(G, H^{2*}(B))^G$, on va montrer que pour toute classe $C \in H_*(B)$ d'un courant de de Rham fermé sur B, le couplage $\langle \mathrm{Ch}(\mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}(P)), C\rangle$ est une distribution sur G. Soit $C \in H_*(B)$ la classe d'un courant de de Rham sur B. Comme le caractère de Chern est un isomorphisme après tensorisation par $\mathbb{C}$, on obtient qu'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des éléments de $\mathrm{K}_*(B)$ tels que $C = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathrm{Ch}(\alpha_i)$. On a alors $\langle \mathrm{Ch}(\mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}(P)), C\rangle = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \langle \mathrm{Ch}(\mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}(P)), \mathrm{Ch}(\alpha_i)\rangle$. Donc il suffit de vérifier que ce couplage est une distribution pour les éléments du type $\mathrm{Ch}(\alpha)$, avec $\alpha \in \mathrm{K}_*(B)$. Maintenant si $\alpha \in \mathrm{K}_*(B)$ alors on a $\langle \mathrm{Ch}(\mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}(P)), \mathrm{Ch}(\alpha)\rangle \simeq \mathrm{Ch}^{\mathrm{HL}}([\mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}(P)] \otimes_{C(B)} \alpha)$ par multiplicativité du caractère de Chern en homologie locale. D'une part, si $\alpha \in \mathrm{K}_1(B)$ alors $[\mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}(P)] \otimes_{C(B)} \alpha \in \mathrm{KK}^1(C^*G, \mathbb{C}) = 0$ et donc $\langle \mathrm{Ch}(\mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}(P)), \mathrm{Ch}(\alpha)\rangle = \mathrm{Ch}([\mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}(P)] \otimes_{C(B)} \alpha) = 0$. D'autre part, si $\alpha \in \mathrm{K}_0(B)$ alors on sait par le corollaire 2.3.9 que $[\mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}(P)] \otimes_{C(B)} \alpha = \mathrm{Ch}^{\mathrm{HL}}([\mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}(P)] \otimes_{C(B)} \alpha)$ est une distribution sur G. Le caractère de Chern est bien une distribution à valeurs dans la cohomologie paire car en utilisant le théorème de coefficients universels en homologie locale, on a $\mathrm{Ch}^{\mathrm{HL}}(E, \pi, P) \in HL(C^*G, C(B)) \simeq \mathrm{Hom}(R(G) \otimes \mathbb{C}, \mathrm{K}^0(B) \otimes \mathbb{C}) \simeq \mathrm{Hom}(R(G) \otimes \mathbb{C}, H^{2*}(B))$. $\square$

Remarque 2.3.11. Dans le cas $B = \{\star\}$, on retrouve le résultat standard (voir [61]) que le caractère de Chern-Connes de la classe indice d'un opérateur G-invariant, G-transversalement elliptique en cohomologie cyclique périodique, coïncide avec la distribution d'Atiyah, vue comme trace sur $C^\infty(G)$. De plus, on a $\mathrm{Hom}\Big(\mathrm{HP}_0(C^\infty(G)), \mathrm{HP}_0(C^\infty(B))\Big) = C^{-\infty}(G, H^{2*}(B))$.

Chapitre 3

Formule délocalisée pour les familles elliptiques

Dans ce chapitre, on va montrer une formule d'indice délocalisée en cohomologie équivariante pour une famille d'opérateurs G-invariante, elliptique le long des fibres d'une fibration G-équivariante $p : M \to B$, où G est un groupe de Lie compact. Dans une première section, on commence par rappeler la formule de localisation de Bismut [18]. Ensuite, dans une deuxième section, on rappelle la localisation d'Atiyah-Segal [2] en K-théorie équivariante. Enfin, dans une troisième partie, on montre la formule d'indice délocalisée qui nous intéresse. Le théorème principal de ce chapitre est le théorème 3.4.22.

3.1 Formule de localisation de Bismut

On revoit ici les résultats de [18] dans notre cadre.
Soit G un groupe de Lie compact. Soient $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie et $X \in \mathfrak{g}$. Soit $p : M \to B$ une fibration G-équivariante de variétés compactes, connexes, orientées. On note X_M et X_B, les champs de vecteurs engendrés par X sur M et B respectivement. On considère $B^X = \{b \in B / X_B(b) = 0\}$ et $M^X = \{m \in M / X_M(m) = 0\}$.

Lemme 3.1.1.

1. *Avec les notations ci-dessus, on a $p_* X_M = X_B$.*
2. *La fibration $p : M \to B$ se restreint en une fibration $p^X : M^X \to B^X$.*

Démonstration.

1. On a $X_B(p(m)) = \dfrac{d}{dt}_{|t=0} e^{tX} \cdot p(m) = \dfrac{d}{dt}_{|t=0} p(e^{tX} \cdot m) = p_* X_M(m)$.
2. En effet, $p(M^X)$ est ouvert et fermé car M^X est fermé dans M donc compact, ce qui implique que $p(M^X)$ est compact et donc fermé. L'application $p : p^{-1}(p(M^X)) \to p(M^X)$ est une submersion en tout point, donc $p^{-1}(p(M^X))$ est ouvert, on en déduit que $p(p^{-1}(p(M^X))) = p(M^X) \cap \mathrm{Im}(p) = p(M^X)$ est ouvert car p est ouverte. Donc sur chaque composante connexe

de B^X qui est atteinte l'application p se restreint en une fibration par le théorème de fibration de Ehresmann [32] .

$\square$

On note $T^V M = \ker p_*$ le fibré tangent vertical, qui est un sous-fibré vectoriel de TM. On se donne une métrique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ G-invariante sur M, c'est-à-dire

$$\forall Y_1,\ Y_2\ \langle g \cdot Y_1, g \cdot Y_2 \rangle = \langle Y_1, \cdot Y_2 \rangle,$$

il en existe car G est compact. On note $T^H M$ le supplémentaire orthogonal à $T^V M$. On note N_M^X le fibré normal à M^X dans M et N_B^X le fibré normal à B^X dans B. On peut relever N_B^X par p_* en un sous-fibré de $T^H M$ au-dessus de M dans $T^H M$. On le note $p^* N_B^X$.

Théorème 3.1.2. *[18]*

1. *Le fibré normal vertical $N_M^X \cap T^V M$ à M^X s'identifie avec le fibré normal $\mathcal{N}(p^{-1}(b) \cap M^X, p^{-1}(b))$ à $p^{-1}(b) \cap M^X$ dans $p^{-1}(b)$.*
2. *Le fibré normal vertical $N_M^X \cap T^V M$ à M^X s'identifie avec le fibré normal $\mathcal{N}(M^X, p^{-1}(B^X))$ à M^X dans $p^{-1}(B^X)$.*
3. *De plus, on a $N_M^X = N_M^X \cap T^V M \oplus N_B^X$.*

Démonstration.

1. Soit $m \in p^{-1}(b) \cap M^X$. On a :
$$T_m p^{-1}(b) = T_m^V M = T_m(p^{-1}(b) \cap M^X) \oplus \mathcal{N}_m(p^{-1}(b) \cap M^X, p^{-1}(b)).$$
Soit $w \in T_m^V M$ alors $w \in (N_M^X \cap T^V M)_m$ si et seulement si w est orthogonal à $T_m^V M^X = T_m\Big(p^{-1}(b) \cap M^X\Big)$ et donc si et seulement si $w \in \mathcal{N}_m(p^{-1}(b) \cap M^X, p^{-1}(b))$.
2. Soit $m \in M^X$. On a :
$$T_m p^{-1}(B^X) = T_m M^X \oplus \mathcal{N}_m(M^X, p^{-1}(B^X)),$$
et
$$T_m^V M = T_m^V M^X \oplus (N_M^X)_m \cap T_m^V M.$$
Alors si $v \in N_m^X \cap T_m^V M$, on a que v est orthogonal à $T_m^V M^X$ mais v est vertical donc sa partie horizontale est nulle et donc v est orthogonal à $T_m M^X$, c'est-à-dire $v \in \mathcal{N}_m(M^X, p^{-1}(B^X))$. Maintenant, si $v \in \mathcal{N}_m(M^X, p^{-1}(B^X))$ alors v est orthogonal à $T_m M^X$ et donc à $T_m^V M^X$, c'est-à -dire $v \in N_m^X \cap T_m^V M$.
3. Soit $m \in M^X$. On a $T_m M = T_m p^{-1}(B^X) \oplus \mathcal{N}_m(p^{-1}(B^X), M) = T_m M^X \oplus N_m^X \cap T_m^V M \oplus \mathcal{N}_m(p^{-1}(B^X), M)$, de plus $\mathcal{N}_m(p^{-1}(B^X), M) = (N_B^X)_{p(m)}$ car $v \in (p_*^{-1} N_B^X)_m$ si et seulement si $p_* v$ est orthogonal à $T_{p(m)} B^X$ c'est-à-dire si et seulement si $v \in T_m^H p^{-1}(B^X)$ donc si et seulement si $v \in T_m p^{-1}(B^X)$. On a donc bien $N_M^X = N_M^X \cap T^V M \oplus p^* N_B^X$.

$\square$

Lemme 3.1.3. *[[46]] Soit H un tore. Soit V une H-variété. Notons V^H l'ensemble des points fixes de V sous l'action de H. Alors le fibré normal N à V^H dans V est orienté par une structure complexe.*

Remarque 3.1.4. Dans ce cas, on peut donc définir la classe d'Euler équivariante $\mathrm{Eul}(N)$ du fibré normal N.

Démonstration. En effet, la dérivée de Lie $\mathscr{L}(X)$ par un élément X générateur de l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ de H induit un endomorphisme antisymétrique et inversible sur le fibré normal N. Cet endomorphisme est inversible car les champs sur lesquels il est nul sont les champs tangents aux points fixes de H qui sont donnés par $TV^H = (TV)^H$. L'endomorphisme induit par $\mathscr{L}(X)$ est antisymétrique puisqu'en prenant comme d'habitude une métrique H-invariante $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sur V, on a pour Y et Z normaux à TV^H et $v \in V^H$:

$$\mathscr{L}(X)\langle Y, Z\rangle(v) = \frac{d}{dt}_{|t=0} e^{tX} \cdot \langle Y, Z\rangle(v) = \frac{d}{dt}_{|t=0} \langle Y, Z\rangle(e^{-tX} \cdot v) = \frac{d}{dt}_{|t=0} \langle Y, Z\rangle(v) = 0,$$

car v est un point fixe pour H et en utilisant la H-invariance de la métrique, il vient

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(X)\langle Y, Z\rangle(v) &= \frac{d}{dt}_{|t=0} e^{tX} \cdot \langle Y, Z\rangle(v) = \frac{d}{dt}_{|t=0} \langle Y_{|_{e^{-tX}\cdot b}}, Z_{|_{e^{-tX}\cdot v}}\rangle_{|_{e^{-tX}\cdot v}} \\
&= \frac{d}{dt}_{|t=0} \langle e^{tX} \cdot Y_{|_{e^{-tX}\cdot v}}, e^{tX} \cdot Z_{|_{e^{-tX}\cdot v}}\rangle_{|v} \\
&= \frac{d}{dt}_{|t=0} \langle e^{tX} \cdot Y, e^{tX} \cdot Z\rangle(v) \\
&= \langle \mathscr{L}(X)Y, Z\rangle(v) + \langle Y, \mathscr{L}(X)Z\rangle(v).
\end{aligned}$$

On sait qu'un endomorphisme antisymétrique induit une structure complexe. □

Théorème 3.1.5 (Formule de localisation de Bismut, 1986 [18])**.**
On note $j : B^X \hookrightarrow B$, $i : M^X \hookrightarrow M$, $\mathrm{Eul}(N_M^X \cap T^V M, X)$ la classe d'Euler équivariante du fibré $N_M^X \cap T^V M$ au-dessus de M et $\int_{M|B}$ l'intégration le long des fibres [20]. Soit $\alpha \in \mathcal{A}(M)$ une forme $(d + \iota(X))$-fermée. Alors on a l'égalité suivante dans $H(B^X)$:

$$j^* \int_{M|B} \alpha = \int_{M^X|B^X} \frac{i^*\alpha}{\mathrm{Eul}(N_M^X \cap T^V M, X)}.$$

Remarque 3.1.6. Par le lemme 3.1.3, les classes d'Euler des fibrés N_M^X, N_B^X sont bien définies car les zéros de X_M et X_B coïncident avec les points fixes du tore engendré par e^X. La classe d'Euler de $N_M^X \cap T^V M$ est bien définie car $N_M^X \cap T^V M$ est orienté par la structure complexe induite par celle de N_M^X.

Démonstration. Soit $\beta \in \mathcal{A}(B)$ une forme $(d + \iota(X))$-fermée alors $j^*\beta$ est une forme fermée dans $\mathcal{A}(B^X)$ et $p^*\beta$ est une forme $(d+\iota(X))$-fermée dans $\mathcal{A}(M)$. Par la formule de localisation classique, voir [15], on a :

$$\int_M p^*\beta \wedge \alpha = \int_{M^X} \frac{i^*(p^*\beta \wedge \alpha)}{\mathrm{Eul}(N_M^X, X)}, \tag{3.1}$$

où $\mathrm{Eul}(N_M^X, X)$ est la classe d'Euler équivariante du fibré N_M^X au-dessus de M^X. De plus, on a la relation $p \circ i = j \circ p$ donc $i^* p^* = p^* j^*$, par intégration le long des fibres de M^X sur B^X, il vient :

$$\int_{M^X} \frac{i^*(p^*\beta \wedge \alpha)}{\mathrm{Eul}(N_M^X, X)} = \int_{B^X} j^*\beta \wedge \int_{M^X|B^X} \frac{i^*\alpha}{\mathrm{Eul}(N_M^X, X)}. \tag{3.2}$$

D'autre part, par intégration le long des fibres, on a la relation classique suivante :

$$\int_M p^*\beta \wedge \alpha = \int_B \beta \wedge \int_{M|B} \alpha, \tag{3.3}$$

et $\int_{M|B} \alpha$ est $(d+\iota(X))$-fermée car $(d+\iota(X)) \circ \int_{M|B} = \int_{M|B} \circ (d+\iota(X))$. On a donc que $\beta \wedge \int_{M|B} \alpha$ est $(d+\iota(X))$-fermée et par la formule de localisation appliquée à B, on a :

$$\int_B \beta \wedge \int_{M|B} \alpha = \int_{B^X} \frac{j^*(\beta \wedge \int_{M|B} \alpha)}{\mathrm{Eul}(N_B^X, X)}. \tag{3.4}$$

En prenant le membre de droite de (3.2) qui par (3.1) et (3.3) est égal au membre de gauche de (3.4), il vient :

$$\int_{B^X} \frac{j^*(\beta \wedge \int_{M|B} \alpha)}{\mathrm{Eul}(N_B^X, X)} = \int_{B^X} j^*\beta \wedge \int_{M^X|B^X} \frac{i^*\alpha}{\mathrm{Eul}(N_M^X, X)}. \tag{3.5}$$

On identifie N_B^X avec un voisinage tubulaire e^X-invariant. On a $(\pi^{N_B^X})^* \circ (d+\iota(X)) = (d+\iota(X)) \circ (\pi^{N_B^X})^*$ car $\pi^{N_B^X}$ est e^X-équivariante. Donc $(\pi^{N_B^X})^*$ est une section de j^* et donc j^* est surjective entre les formes $(d+\iota(X))$-fermées de B et les formes fermées de B^X. Maintenant, en appliquant la dualité de Poincaré à B^X, on obtient :

$$\frac{j^*(\int_{M|B} \alpha)}{\mathrm{Eul}(N_B^X, X)} = \int_{M^X|B^X} \frac{i^*\alpha}{\mathrm{Eul}(N_M^X, X)},$$

et donc, puisque $\mathrm{Eul}(N_M^X) = p^*\mathrm{Eul}(N_B^X) \wedge \mathrm{Eul}(N_M^X \cap T^V M)$, on a :

$$j^* \int_{M|B} \alpha = \int_{M^X|B^X} \frac{i^*\alpha}{\mathrm{Eul}(N_M^X \cap T^V M, X)}.$$

$\square$

3.2 Rappels sur le théorème d'Atiyah-Segal

Soit G un groupe de Lie compact. Soit $i : Z \hookrightarrow Y$ un G-plongement. Ici $\mathrm{K_G}(X)$ désigne comme d'habitude le groupe de K-théorie G-équivariante de X et $R(G)$ est l'anneau des représentations virtuelles de G. Rappelons que $\mathrm{K_G}(X)$ est muni d'une structure de $R(G)$-module.

Théorème 3.2.1 (Atiyah-Singer)**.** *[3]*
On peut définir une application

$$i_! : \mathrm{K_G}(TZ) \to \mathrm{K_G}(TY)$$

telle que :

1. *si $j : Z' \hookrightarrow Z$ est un autre G-plongement alors on a $(i \circ j)_! = i_! \circ j_!$;*
2. *si $k : Y \hookrightarrow Y$ est l'identité alors $k_! = id$.*

La preuve de ce théorème est faite dans [3], on la rappelle ici brièvement car elle sera importante dans la suite.

Démonstration. On identifie Z et $i(Z)$. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ une métrique G-invariante sur Y. On peut voir le fibré normal N à Z dans Y comme un voisinage tubulaire de Z dans Y. Le fibré vectoriel N est alors une sous-G-variété ouverte de Y et un sous-G-fibré vectoriel de $TY_{|Z}$. Le fibré vectoriel $T(TY)$ tangent à TY est isomorphe au fibré $\pi^*TY \oplus \pi^*TY$ en identifiant la partie tangente à Y avec le premier facteur de $\pi^*TY \oplus \pi^*TY$ et la partie tangente à la fibre avec le second facteur (si $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ est une courbe en un point (x, v) de TY de vecteur tangent w alors on associe à w le vecteur $\gamma_1'(0) \oplus \gamma_2'(0)$ dans $(\pi^*TY \oplus \pi^*TY)_{(x,v)}$). Le fibré vectoriel tangent à TY peut alors être muni d'une structure complexe. De plus, $TN = TY_{|N}$ est une sous-G-variété ouverte de TY puisque N s'identifie à un ouvert de Y, et donc le fibré vectoriel TN est muni d'une structure complexe induite par celle de $T(TY)$. On peut donc définir un homomorphisme de Thom $\varphi : \mathrm{K_G}(TZ) \to \mathrm{K_G}(TN)$ qui est donné par $\varphi(\xi) = (T\pi^N)^*\xi \cdot \Lambda_{-1}$, où $\pi^N : N \to Z$ est la projection, $\Lambda_{-1} = [(T\pi^N)^* \bigwedge^{pair} TN, (T\pi^N)^* \bigwedge^{impair} TN, \sigma]$ et σ est donné par la multiplication de Clifford. De plus, comme TN est un ouvert de TY, tout élément de $\mathrm{K_G}(TN)$ peut être vu comme un élément de $\mathrm{K_G}(TY)$ par un morphisme d'excision.
On définit $i_! : \mathrm{K_G}(TZ) \to \mathrm{K_G}(TY)$ comme la composée de l'isomorphisme de Thom et du morphisme d'excision. Ce morphisme est alors indépendant de tous les choix.
Si k est l'identité alors on peut prendre Y comme voisinage tubulaire et donc le morphisme de Thom et le morphisme d'extension sont tous les deux le morphisme identité de $\mathrm{K_G}(TY)$. Maintenant, si on a $j : Z' \hookrightarrow Z$ et $i : Z \hookrightarrow Y$, en notant N' le fibré normal de Z' dans Z et $N'' = N_{|N'}$ la restriction, qui coïncide avec le fibré normal à Z dans Y, on a alors le diagramme commutatif suivant (voir encore [3]) :

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{K_G}(TN'') \arrow[drr, "\text{ext}"] \arrow[dr, "\text{ext}"'] & & \\
\mathrm{K_G}(TZ') \arrow[urr, "Thom"] \arrow[r, "Thom"'] & \mathrm{K_G}(TN') \arrow[ur, "Thom"'] \arrow[r, "\text{ext}"'] & \mathrm{K_G}(TZ) \arrow[r, "Thom"'] & \mathrm{K_G}(TN) \arrow[r, "\text{ext}"'] & \mathrm{K_G}(TY)
\end{tikzcd}$$

la composée $i_! \circ j_!$ est donnée par la composition des flèches du bas et $(i \circ j)_!$ est donnée par la composition des flèches bordantes entre $\mathrm{K_G}(TZ'), \mathrm{K_G}(TN'')$ et $\mathrm{K_G}(TY)$.

□

Remarque 3.2.2. L'application $i_!$ est en faite un morphisme de $R(G)$-modules car l'homomorphisme de Thom et le morphisme d'excision le sont.

On rappelle que si E est un G-fibré vectoriel de base Z, une variété compacte, alors $\mathrm{K_G}(E)$ est un $\mathrm{K_G}(Z)$-module. On note $\lambda_{-1}(E)$ l'élément de $\mathrm{K}(Z)$ donné par $[\bigwedge^{\mathrm{pair}} E] - [\bigwedge^{\mathrm{impaire}} E]$.

Théorème 3.2.3 (Atiyah-Segal)**.** *[2]*
Supposons que G soit topologiquement engendré par un seul élément g. Soit Y une G-variété

compacte. On note $i : Y^G \hookrightarrow Y$ l'inclusion de la sous-variété des points fixes sous l'action de G. On note N le fibré normal à Y^G dans Y. Soit $I_g = \{\chi \in R(G)/\chi(g) = 0\}$ l'idéal premier de $R(G)$. On note encore i^* l'application induite par fonctorialité par l'application tangente $i_* : TY^G \to TY$ en $\mathrm{K_G}$-théorie.

1. *La composition $i^* i_!$ est donnée par la multiplication par $\lambda_{-1}(N \otimes \mathbb{C}) \in \mathrm{K_G}(Y^G)$, en utilisant le fait que $\mathrm{K_G}(TY^G)$ est un $\mathrm{K_G}(Y^G)$-module.*
2. *Après localisation en I_g, l'élément $\lambda_{-1}(N \otimes \mathbb{C})$ devient une unité dans le localisé $\mathrm{K_G}(Y^G)_{I_g}$.*
3. *L'application localisée $(i_!)_{I_g} : \mathrm{K_G}(TY^G)_{I_g} \to \mathrm{K_G}(TY)_{I_g}$ est un isomorphisme de $R(G)_{I_g}$-modules, d'inverse*
$$\frac{i^*}{\lambda_{-1}(N \otimes \mathbb{C})}.$$

La preuve de ce théorème est faite en détails dans [2], on en rappelle ici brièvement les idées.

Démonstration.

1. On a $i^* i_!(\xi) = i^* \circ \mathrm{ext}((T\pi^N)^* \xi \cdot \Lambda_{-1}) = \xi \cdot \lambda_{-1}(N \otimes \mathbb{C})$ car $i^* \circ \mathrm{ext}\Lambda_{-1}$ est la restriction à la section nulle de $TN \to TY^G$.
2. On a que $\chi \in R(G)$ devient une unité dans $R(G)_{I_g}$ si $\chi(g) \neq 0$. On a en $y \in TY^G$,
$$\begin{array}{rcl} Tr(g|\lambda_{-1}(N \otimes \mathbb{C}_y)) & = & \sum(-1)^i Tr(\lambda^i(g)|(N \otimes \mathbb{C})_y) \\ & = & \det_{\mathbb{C}}(1 - g|(N \otimes \mathbb{C})_y) \\ & = & \det_{\mathbb{R}}(1 - g|N_y) \\ & \neq & 0 \end{array}$$
car G agit sur N_y par $dg : N_y \to N_y$ et comme g est une isométrie, on a pour $v \neq 0 \in N_y$, $g \cdot \exp_y(v) = \exp_y(dg \cdot v) \neq \exp_y(v)$ puisque $\exp_y(v) \in Y^G$ que si $v = 0$.

$\square$

3.3 Cohomologies équivariantes et classes caractéristiques équivariantes

On rappelle ici les différentes notions de cohomologies équivariantes qui seront utilisées par la suite. On commence par rappeler la définition de la cohomologie équivariante à coefficients polynomiaux, on introduit ensuite la cohomologie équivariante à coefficients C^∞ et on termine avec les notions de super-connexion G-invariante et de courbure équivariante. On termine en définissant les différentes classes caractéristiques qui sont utilisées par la suite dans les formules d'indices délocalisées.
Soit M une variété C^∞ sur laquelle un groupe de Lie G agit à gauche par difféomorphismes C^∞. On note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. Le groupe G agit sur $C^\infty(M)$ par la formule :

$$(g \cdot f)(x) = f(g^{-1} \cdot x),$$

où $f \in C^\infty(M)$ et $g \in G$. De même, G agit comme d'habitude sur $\mathcal{A}(M)$.
Pour $X \in \mathfrak{g}$, on définit un champ de vecteurs sur M, noté X_M par la formule :

$$(X_M \cdot f)(x) = \frac{d}{dt}_{|t=0} f(\exp(-tX) \cdot x),$$

où $\exp(-tX)$ désigne le flot de X en l'élément neutre de G. Si G agit à droite, on pose similairement :

$$(X_M \cdot f)(x) = \frac{d}{dt}_{|t=0} f(x \cdot \exp(tX)).$$

Soit $S(\mathfrak{g}^*)$ l'algèbre symétrique de $\mathfrak{g}^*$, c'est l'algèbre des fonctions polynomiales sur $\mathfrak{g}$. Le produit tensoriel $S(\mathfrak{g}^*) \otimes \mathcal{A}(M)$ peut être vu comme l'algèbre des applications polynomiales de $\mathfrak{g}$ dans $\mathcal{A}(M)$. Le groupe G agit sur $S(\mathfrak{g}^*) \otimes \mathcal{A}(M)$ par la formule :

$$(g \cdot \alpha)(X) = g \cdot (\alpha(g^{-1} \cdot X)),$$

où $\alpha \in S(\mathfrak{g}^*) \otimes \mathcal{A}(M)$.

Définition 3.3.1. On définit $\mathcal{A}_G(M) = (S(\mathfrak{g}^*) \otimes \mathcal{A}(M))^G$ comme la sous-algèbre des éléments G-invariants de l'algèbre $S(\mathfrak{g}^*) \otimes \mathcal{A}(M)$, c'est-à-dire les éléments α de $\mathcal{A}_G(M)$ sont les éléments de $S(\mathfrak{g}^*) \otimes \mathcal{A}(M)$ tels que :

$$\alpha(g \cdot X) = g \cdot \alpha(X),$$

on appelle ces éléments les formes différentielles équivariantes.

L'algèbre $S(\mathfrak{g}^*) \otimes \mathcal{A}(M)$ est $\mathbb{Z}$-graduée par :

$$deg(P \otimes \alpha) = 2deg(P) + deg(\alpha),$$

où $P \in S(\mathfrak{g}^*)$ et $\alpha \in \mathcal{A}(M)$.

Définition 3.3.2. La différentielle équivariante $d_\mathfrak{g} : S(\mathfrak{g}^*) \otimes \mathcal{A}(M) \to S(\mathfrak{g}^*) \otimes \mathcal{A}(M)$ est définie par :

$$(d_\mathfrak{g}\alpha)(X) = d(\alpha(X)) - \iota(X_M)(\alpha(X)),$$

où $\iota(X_M)$ est la contraction par le champ de vecteurs X_M et d est la différentielle de de Rham sur M.

Lemme 3.3.3.
1. *L'opérateur $d_\mathfrak{g}$ augmente le degré total de 1 et préserve $\mathcal{A}_G(M)$.*
2. *L'opérateur $d_\mathfrak{g}$ vérifie $(d_\mathfrak{g}^2\alpha)(X) = -\mathscr{L}(X_M)(\alpha(X))$, où $\mathscr{L}(X_M)$ est la dérivée de Lie par le champ de vecteurs X_M.*
3. *Sur $\mathcal{A}_G(M)$ l'opérateur $d_\mathfrak{g}$ est de carré nul et donc $(\mathcal{A}_G(M), d_\mathfrak{g})$ est un complexe.*

Démonstration.
1. En effet, notons E_i une base de $\mathfrak{g}$ et E^i sa base dual. Alors $d_\mathfrak{g} = d - \iota = d - \sum_{i=1}^{\dim \mathfrak{g}} E^i \iota((E_i)_M)$. La différentielle de de Rham d augmente le degré extérieur de 1 et l'opérateur ι augmente le degré total de 1 puisque la contraction par $(E_i)_M$ diminue le degré extérieur de 1 et que l'indéterminée E^i augmente le degré du polynôme de 1. L'opérateur $d_\mathfrak{g}$ préserve $\mathcal{A}_G(M)$ puisqu'on a pour $\alpha \in \mathcal{A}_G(M)$:

$$\begin{aligned}(d_\mathfrak{g}\alpha)(g\cdot X) &= d(\alpha(g\cdot X)) - \iota((g\cdot X)_M)(\alpha(g\cdot X)) \\ &= d(g\cdot\alpha(X)) - \iota(g\cdot X_M)(g\cdot\alpha(X)) \\ &= g\cdot(d(\alpha(X)) - g\cdot(\iota(X_M)(\alpha(X)) \\ &= g\cdot((d_\mathfrak{g}\alpha)(X)).\end{aligned}$$

   Donc $d_\mathfrak{g}\alpha \in \mathcal{A}_G(M)$.
2. On a $(d_\mathfrak{g}^2\alpha)(X) = -\mathscr{L}(X_M)(\alpha(X))$ car

$$d_\mathfrak{g}^2(\alpha(X)) = d^2(\alpha(X)) - \iota(X_M)d(\alpha(X)) - d(\iota(X_M)\alpha(X))) + \iota(X_M)^2(\alpha(X)) = -\mathscr{L}(X_M)(\alpha(X)),$$

   puisque $d^2 = 0$ et $\iota(X_M)^2 = 0$.
3. Sur $\mathcal{A}_G(M)$, on a $(e^{tX}\cdot\alpha)(X) = \alpha(X)$ donc la dérivée par rapport au temps est nulle.

□

Définition 3.3.4. La cohomologie équivariante $\mathcal{H}_G^{pol}(\mathfrak{g}, M)$ de M est la cohomologie du complexe $(\mathcal{A}_G(M), d_\mathfrak{g})$. Il s'agit donc de la cohomologie polynomiale. C'est un module sur $\mathcal{H}_G^{pol}(\mathfrak{g}, \bullet) = S(\mathfrak{g}^*)^G$.

Remarque 3.3.5. L'espace de cohomologie $\mathcal{H}_G^{pol}(\mathfrak{g}, M)$ se note aussi $H_G(M)$ [12] ou $\mathcal{H}_G(\mathfrak{g}, M)$ [29] ou encore $\mathcal{H}^{pol}(\mathfrak{g}, M)$ [64]. Lorsque G est compact et connexe c'est la cohomologie équivariante usuelle de M.

Définition 3.3.6. Soit $C^\infty(\mathfrak{g})$ l'algèbre des fonctions C^∞ sur $\mathfrak{g}$, on définit l'algèbre $\mathcal{A}^\infty(\mathfrak{g}, M)$ des fonctions de classe C^∞ sur $\mathfrak{g}$ à valeurs dans $\mathcal{A}(M)$ par $C^\infty(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{A}(M)$. On note encore $\mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}, M)$ la sous-algèbre des éléments G-invariants.

L'algèbre $C^\infty(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{A}(M)$ est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduée. On définit de manière analogue au cas polynomial la différentielle équivariante.

Lemme 3.3.7. *1. L'opérateur $d_\mathfrak{g}$ est de degré 1 et préserve $\mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}, M)$.*

2. L'opérateur $d_\mathfrak{g}$ vérifie $(d_\mathfrak{g}^2\alpha)(X) = -\mathscr{L}(X_M)(\alpha(X))$, où $\mathscr{L}(X_M)$ est la dérivée de Lie par le champ de vecteurs X_M.

3. Sur $\mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}, M)$ l'opérateur $d_\mathfrak{g}$ est de carré nul et donc $(\mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}, M), d_\mathfrak{g})$ est un complexe.

Définition 3.3.8. La cohomologie équivariante $\mathcal{H}_G^\infty(\mathfrak{g}, M)$ à coefficients C^∞ de M est la cohomologie du complexe $(\mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}, M), d_\mathfrak{g})$.

Définition 3.3.9. Si M est une variété compacte orientée sans bord, alors on peut intégrer les formes différentielles équivariantes sur M, en définissant :

$$\int_M : \mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}, M) \to C^\infty(\mathfrak{g}), \ (\int_M \alpha)(X) = \int_M \alpha(X).$$

Si $\alpha = d_\mathfrak{g}\nu$ pour $\nu \in \mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}, M)$ alors $\alpha(X)_{[\dim M]} = d(\nu(X)_{[\dim M]})$, où $_{[\cdot]}$ désigne la composante de degré $\cdot$, et donc $\int_M \alpha(X) = 0$. Donc si α est fermée de manière équivariante, $\int_M \alpha$ est un élément de $C^\infty(\mathfrak{g})$ qui ne dépend que de la classe de cohomologie équivariante de α et on note de même

$$\int_M : \mathcal{H}^{pol}(\mathfrak{g}, M) \to C^\infty(\mathfrak{g})^G.$$

On peut aussi définir une cohomologie équivariante en ne considérant que des fonctions de classes C^∞ sur un ouvert G-invariant de $\mathfrak{g}$ [29].

Définition 3.3.10. Soit U un ouvert G-invariant de $\mathfrak{g}$. Soit $C^\infty(U, \mathcal{A}(M))$ l'algèbre des formes $\alpha(X)$ sur M dépendant de manière C^∞ de $X \in U$. Le groupe G agit sur $C^\infty(U, \mathcal{A}(M))$ par $(g \cdot \alpha)(X) = g \cdot (\alpha g^{-1} \cdot X))$ pour $g \in G$, $\alpha \in C^\infty(U, \mathcal{A}(M))$, $\forall X \in \mathfrak{g}$. On note $\mathcal{A}_G^\infty(U, M) = C^\infty(U, \mathcal{A}(M))^G$ la sous-algèbre des formes équivariantes. La cohomologie équivariante $\mathcal{H}_G^\infty(U, M)$ à coefficients dans $C^\infty(U)$ de M est la cohomologie du complexe $(\mathcal{A}_G^\infty(U, M), d_\mathfrak{g})$.

Définition 3.3.11. Un fibré vectoriel G-équivariant $\pi : E \to M$ est la donnée d'un fibré vectoriel $\pi : E \to M$ muni d'une action du groupe de Lie G qui envoie fibre sur fibre de façon linéaire et de façon compatible avec l'action sur M, c'est-à-dire $g \cdot \pi = \pi \cdot g$ et $g^E : E_x \to E_{g\cdot x}$ est linéaire.
Un super-fibré vectoriel G-équivariant est un super-fibré vectoriel tel que E^+ et E^- soient des fibrés G-équivariants.

Définition 3.3.12. Soit E un super-fibré vectoriel G-équivariant. Soit U un ouvert G-invariant de $\mathfrak{g}$. L'espace des formes différentielles équivariantes à valeurs dans E est donné par

$$\mathcal{A}_G(M, E) = \Big(S(\mathfrak{g}^*) \otimes \mathcal{A}(M, E)\Big)^G.$$

L'espace des formes différentielles équivariantes à coefficients C^∞ à valeurs dans E est donné par

$$\mathcal{A}_G^\infty(M, E) = \Big(C^\infty(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{A}(M, E)\Big)^G.$$

L'espace des formes différentielles équivariantes à coefficients dans $C^\infty(U)$ à valeurs dans E est donné par

$$\mathcal{A}_G^\infty(U;M,E) = \Big(C^\infty(U)\otimes\mathcal{A}(M,E)\Big)^G.$$

L'action de G sur les sections $C^\infty(M,E)$ d'un fibré G-équivariant E sur M est donnée par

$$(g\cdot s)(m) = g^E\cdot s(g^{-1}\cdot m),\ g\in G,\ s\in C^\infty(M,E).$$

Pour $X\in\mathfrak{g}$, on note $\mathscr{L}^E(X)$ l'action infinitésimal de X sur $C^\infty(M,E)$ donnée par

$$\mathscr{L}^E(X) = \frac{d}{dt}_{t=0} e^{tX}\cdot s,$$

elle est appelée la dérivé de Lie.

Lemme 3.3.13. *Si $\mathbb{A}$ est une super-connexion qui commute avec l'action de G sur $\mathcal{A}(M,E)$ alors $[\mathbb{A},\mathscr{L}^E(X)]=0$, $\forall X\in\mathfrak{g}$.*

Démonstration. En dérivant en $t=0$ l'expression $e^{tX}\cdot\mathbb{A}-\mathbb{A}e^{tX}=0$ on a $[\mathbb{A},\mathscr{L}^E(X)]=0$. □

Définition 3.3.14. La super-connexion équivariante $\mathbb{A}_\mathfrak{g}$ correspondant à une super-connexion G-invariante $\mathbb{A}$ est l'opérateur sur $C^\infty(\mathfrak{g})\otimes\mathcal{A}(M,E)$ défini par :

$$(\mathbb{A}_\mathfrak{g}\alpha)(X) = (\mathbb{A}-\iota(X_M))(\alpha(X)),\ X\in\mathfrak{g}.$$

Lemme 3.3.15. *1. On a l'égalité $\mathbb{A}_\mathfrak{g}(\alpha\wedge\theta) = d_\mathfrak{g}\alpha\wedge\theta+(-1)^{|\alpha|}\alpha\wedge\mathbb{A}_\mathfrak{g}\theta$, $\forall\alpha C^\infty(\mathfrak{g})\otimes\mathcal{A}(M)$ et $\theta\in C^\infty(\mathfrak{g})\otimes\mathcal{A}(M,E)$..*

2. La super-connexion équivariante $\mathbb{A}_\mathfrak{g}$ est bien équivariante au sens que $\mathfrak{A}_\mathfrak{g}(g\cdot\alpha)=g\cdot\mathfrak{A}_\mathfrak{g}(\alpha)$, $\forall g\in G$ et $\alpha\in\mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g},M)$.

Démonstration. 1. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{A}_\mathfrak{g}(\alpha\wedge\theta)(X) &= \mathbb{A}(\alpha(X)\wedge\theta(X))-\iota(X_M)(\alpha(X)\wedge\theta(X))\\ &= d(\alpha(X))\wedge\theta(X)+(-1)^{|\alpha|}\alpha(X)\wedge\mathbb{A}(\theta(X))\\ &\quad -\iota(X_M)(\alpha(X))\wedge\theta(X)-(-1)^{|\alpha|}\alpha(X)\wedge\iota(X_M)(\theta(X))\\ &= d_\mathfrak{g}\alpha\wedge\theta+(-1)^{|\alpha|}\alpha\wedge\mathbb{A}_\mathfrak{g}\theta.\end{aligned}$$

2. Commençons par vérifier que $\mathbb{A}_\mathfrak{g}$ est équivariante pour les sections de E. Soit $s\in C^\infty(M,E)$ une section de E. On a $\mathbb{A}_\mathfrak{g}(g\cdot s)=(\mathbb{A}-\iota(X_M))(g\cdot s)(X)=g\cdot\mathbb{A}(s)=(g\cdot(\mathbb{A}_\mathfrak{g}s))(X)$ car $\mathbb{A}$ est G-équivariante et car la contraction par un champ de vecteurs d'une section est nulle. Maintenant si $\alpha\in\mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g},M)$ alors

$$\begin{aligned}\mathbb{A}_\mathfrak{g}(g\cdot\alpha\otimes s) &= d_\mathfrak{g}(g\cdot\alpha))\otimes g\cdot s+(-1)^{|\alpha|}g\cdot\alpha(X)\otimes\mathbb{A}_\mathfrak{g}(g\cdot s)\\ &= g\cdot(d_\mathfrak{g}\alpha)\otimes s+(-1)^{|\alpha|}g\cdot(\alpha(X)\otimes\mathbb{A}_\mathfrak{g}s)\\ &= g\cdot\mathbb{A}_\mathfrak{g}(\alpha\otimes s).\end{aligned}$$

□

Définition 3.3.16. On définit la courbure équivariante $F_{\mathfrak{g}} \in \mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}, \mathrm{End}(E))$ de la super-connexion $\mathbb{A}_{\mathfrak{g}}$ par la formule :

$$\varepsilon(F_{\mathfrak{g}}(X)) = \mathbb{A}_{\mathfrak{g}}(X)^2 + \mathscr{L}^E(X),$$

ε désignant l'opérateur de multiplication.
Pour $\theta \in \mathcal{A}_G^\infty(M, \mathrm{End}(E))$, on définit $\mathbb{A}_{\mathfrak{g}}\theta$ comme l'élément de $\mathcal{A}_G^\infty(M, \mathrm{End}(E))$ vérifiant $\varepsilon(\mathbb{A}_{\mathfrak{g}}\theta) = [\mathbb{A}_{\mathfrak{g}}, \varepsilon(\theta)]$

Proposition 3.3.17. *La coubure équivariante $F_{\mathfrak{g}}$ est un élément de $\mathcal{A}_G(M, \mathrm{End}(E))$ qui vérifie l'identité de Bianchi équivariante $\mathbb{A}_{\mathfrak{g}}F_{\mathfrak{g}} = 0$.*

Démonstration. La courbure équivariante est équivariante puisque d'une part $\mathbb{A}_{\mathfrak{g}}$ est équivariante donc son carré aussi et d'autre part $\mathscr{L}^E(X)$ est équivariant. Montrons que $F_{\mathfrak{g}}(X)$ commute avec la multiplication par un élément $\alpha \in C^\infty(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{A}(M)$. On a :

$$\begin{array}{rcl} [\mathbb{A}_{\mathfrak{g}}(X)^2 + \mathscr{L}^E(X), \varepsilon(\alpha(X))] & = & [\mathbb{A}_{\mathfrak{g}}(X)^2, \varepsilon(\alpha(X))] + [\mathscr{L}^E(X), \varepsilon(\alpha(X))] \\ & = & [\mathbb{A}_{\mathfrak{g}}(X), [\mathbb{A}_{\mathfrak{g}}(X), \varepsilon(\alpha(X))]] + \varepsilon(\mathscr{L}(X)\alpha(X)) \\ & = & [\mathbb{A}_{\mathfrak{g}}(X), \varepsilon(d_{\mathfrak{g}}\alpha(X))] + \varepsilon(\mathscr{L}(X)\alpha(X)) \\ & = & \varepsilon(d_{\mathfrak{g}}^2\alpha(X)) + \varepsilon(\mathscr{L}(X)\alpha(X)) \\ & = & 0, \end{array}$$

car

$$\begin{array}{rcl} [\mathscr{L}^E(X), \varepsilon(\alpha(X))] & = & \mathscr{L}^E(X)(\alpha(X) \otimes id) - \alpha(X)\mathscr{L}^E(X) \\ & = & (\mathscr{L}^E(X)\alpha(X)) \otimes id + \alpha(X) \otimes \mathscr{L}^E(X) - \alpha(X) \otimes \mathscr{L}^E(X) \\ & = & \varepsilon(\mathscr{L}(X)\alpha(X)) \end{array}$$

et $d_{\mathfrak{g}}^2\alpha(X) - \mathscr{L}(X)\alpha(X) = 0$, $\forall \alpha \in C^\infty(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{A}(M)$.
Montrons que $\mathbb{A}_{\mathfrak{g}}F_{\mathfrak{g}} = 0$. On a

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{A}_{\mathfrak{g}}F_{\mathfrak{g}} & = & [\mathbb{A}_{\mathfrak{g}}, F_{\mathfrak{g}}] \\ & = & [\mathbb{A}_{\mathfrak{g}}, \mathbb{A}_{\mathfrak{g}}^2 + \mathscr{L}^E(X)] \\ & = & [\mathbb{A}_{\mathfrak{g}}, \mathbb{A}_{\mathfrak{g}}^2] + [\mathbb{A}_{\mathfrak{g}}, \mathscr{L}^E(X)] \\ & = & 0 \end{array}$$

car $\mathbb{A}_{\mathfrak{g}}$ est G-équivariante. □

Définition 3.3.18. On définit le moment $\mu(X)$ de $X \in \mathfrak{g}$ par rapport à la super-connexion $\mathbb{A}$ comme l'élément de $\mathcal{A}^+(M, \mathrm{End}(E))$ donné par

$$\mu(X) = \mathscr{L}^E(X) - [\iota(X), \mathbb{A}]$$

.

Remarque 3.3.19. On a

$$\begin{array}{rcl} F_{\mathfrak{g}}(X) & = & (\mathbb{A} - \iota(X))^2 + \mathscr{L}^E(X) \\ & = & F - [\mathbb{A}, \iota(X)] + \mathscr{L}^E(X) \end{array}$$

car $\iota(X)$ et $\mathbb{A}$ sont de degré impaire. Donc $\mu(X) = F_{\mathfrak{g}}(X) - F \in \mathcal{A}_G(M, \mathrm{End}(E))$ ou encore

$$F_{\mathfrak{g}}(X) = F + \mu(X), \ \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Proposition 3.3.20 (Identité de Bianchi (2))**.**

$$\mathbb{A}\mu(X) = \iota(X)F$$

Démonstration. On a $(\mathbb{A}-\iota(X))F_{\mathfrak{g}}(X) = 0$ par l'identité de Bianchi. Donc $(\mathbb{A}-\iota(X))(\mu(X)+F) = 0$, d'où $\mathbb{A}\mu(X) = \iota(X)F$. □

Remarque 3.3.21. Si $\mathbb{A} = \nabla$ est une connexion alors on a $[\nabla, \iota(X)] = \nabla_X$ donc $\mu(X) = \mathscr{L}^E(X) - \nabla_X \in C^\infty(M, \mathrm{End}(E))$. On a donc $\mu \in (\mathfrak{g}^* \otimes C^\infty(M, \mathrm{End}(E))^G \subset \mathcal{A}^2_G(M, \mathrm{End}(E))$.
Si $\mathbb{A}$ est seulement une super-connexion alors μ est linéaire en X.

3.3.1 Fonction analytique de la courbure

Soit f une fonction holomorphe sur un disque ouvert de rayon R. Soit U un ouvert de $\mathfrak{g}$ tel que $\left\|F_{\mathfrak{g}}(X)\right\| < R, \forall X \in U$. On note $\mathcal{A}^{\infty,+}_G(U; M, \mathrm{End}(E))$ la sous-algèbre des éléments de degré positif de $\mathcal{A}^\infty_G(U; M, \mathrm{End}(E))$. On peut alors définir un opérateur $f(F_{\mathfrak{g}}) \in \mathcal{A}^{\infty,+}_G(U; M, \mathrm{End}(E))$, par

$$f(F_{\mathfrak{g}}) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} F^k_{\mathfrak{g}}.$$

Pour donner un sens à $f(F_{\mathfrak{g}})$, il faut montrer que la série converge dans $(C^\infty(U) \otimes C^\infty(M, \bigwedge T^*M \otimes \mathrm{End}(E)))^G$ pour sa topologie naturelle.
Pour cela, on rappelle la définition des semi-normes qui engendrent la topologie $C^{0,\infty}$ sur $C^\infty(U, C^\infty(M, \bigwedge T^*M \otimes \mathrm{End}(E)))$, le caractère C^∞ étant pris sur la variété.

Définition 3.3.22. La topologie C^∞ est engendrée par les semi-normes :

$$p_K(T) = \sup\{\|T(X)\|_{C^d}, X \in K \subset \mathfrak{g}\}, \text{où}$$

$$\|S\|_{C^d} = \sup_{\|Y_i\|=1} \sup\{\|\nabla_{Y_l} \cdots \nabla_{Y_1} S\|_\infty, 0 \leq l \leq d\},$$
$$\|S\|_\infty = \sup\{\|S(m)\|_{\mathrm{End}(E_m)\otimes\wedge T^*_m M}, m \in M\},$$

K décrivant les compacts de U et ∇ étant une connexion fixée sur E.

Proposition 3.3.23. *La forme différentielle $f(F_{\mathfrak{g}})$ est bien définie et équivariante. C'est bien un élément de $\mathcal{A}^\infty_G(U; M, \mathrm{End}(E))$. Si $R = +\infty$ alors $f(F_{\mathfrak{g}})$ est bien défini dans $\mathcal{A}^\infty_G(M, \mathrm{End}(E))$.*

Démonstration. On se place sur un compact de U. Vérifions que $f(F_{\mathfrak{g}})$ est bien définie. On a $\left\|\sum_{k=n}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} F_{\mathfrak{g}}(X)^k\right\|_\infty \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} \left\|F_{\mathfrak{g}}(X)\right\|^k_\infty$, donc le reste de $\sum \frac{f^{(k)}(0)}{k!} F_{\mathfrak{g}}(X)^k$ converge uniformément sur les compacts de $\mathfrak{g}$, puisque $\sum \frac{f^{(k)}(0) z^k}{k!}$ converge normalement sur tout compact de

$D(0,R) \subset \mathbb{C}$. Pour tout k, $F_{\mathfrak{g}}(g^{-1}X)^k = F_{\mathfrak{g}}(g^{-1}X)\cdots F_{\mathfrak{g}}(g^{-1}X) = gF_g(X)\cdots gF_{\mathfrak{g}}(X) = gF_{\mathfrak{g}}(X)^k$ car $F_{\mathfrak{g}}$ est G-équivariante. Donc $f(F_{\mathfrak{g}})$ est G-équivariante puisqu'alors

$$\begin{aligned}
&\Big\|(g\cdot f(F_{\mathfrak{g}}))(X) - f(F_{\mathfrak{g}})(X)\Big\|_\infty\\
&= \Big\|(g\cdot f(F_{\mathfrak{g}}))(X) - (g\cdot \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}F_{\mathfrak{g}}^k)(X) + (g\cdot \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}F_{\mathfrak{g}}^k)(X)) - f(F_{\mathfrak{g}})(X)\Big\|_\infty\\
&= \Big\|(g\cdot f(F_{\mathfrak{g}}))(X) - (g\cdot \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}F_{\mathfrak{g}}^k)(X) + \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}F_{\mathfrak{g}}^k(X) - f(F_{\mathfrak{g}})(X)\Big\|_\infty\\
&\le \Big\|(g\cdot f(F_{\mathfrak{g}}))(X) - (g\cdot \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}F_{\mathfrak{g}}^k)(X)\Big\|_\infty + \| \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}F_{\mathfrak{g}}^k(X) - f(F_{\mathfrak{g}})(X)\Big\|_\infty\\
&\le 2\Big\|\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}F_{\mathfrak{g}}^k(X) - f(F_{\mathfrak{g}})(X)\Big\|_\infty
\end{aligned}$$

car G agit par isométrie et ce dernier terme tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
Lorsque l'on calcul $\nabla_{Y_d}\nabla_{Y_{d-1}}\cdots\nabla_{Y_1}F_{\mathfrak{g}}(X)^k$, on obtient au plus une somme de termes sur toutes les façons de placer les d dérivations ∇_{Y_i} devant les k dérivations $F_{\mathfrak{g}}(X)$. Cette somme contient des termes de la forme $F_{\mathfrak{g}}(X)^{k_0}\nabla_{J_1}F_{\mathfrak{g}}(X)F_{\mathfrak{g}}(X)^{k_1}\cdots\nabla_{J_r}F_{\mathfrak{g}}(X)F_{\mathfrak{g}}(X)^{k_r}$, où $\nabla_{J_i}F_{\mathfrak{g}}(X)$ désigne un élément de la forme $\nabla_{Y_{i_s}}\cdots\nabla_{Y_{i_1}}F_{\mathfrak{g}}(X)$, où $i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_s$. On peut majorer tous les termes de cette somme par le même élément, $\|F_{\mathfrak{g}}(X)\|_{C^d}^d\|F_{\mathfrak{g}}(X)\|_\infty^{k-d}$ car on a au plus d termes avec du ∇. On a donc $\Big\|\nabla_{Y_d}\nabla_{Y_{d-1}}\cdots\nabla_{Y_1}F_{\mathfrak{g}}(X)^k\Big\|_\infty \le \sum_{\sigma\in T_d^k}\Big\|F_{\mathfrak{g}}(X)\Big\|_\infty^{k-d}\Big\|F_{\mathfrak{g}}(X)\Big\|_{C^d}^d \le k^d\Big\|F_{\mathfrak{g}}(X)\Big\|_{C^d}^d\Big\|F_{\mathfrak{g}}(X)\Big\|_\infty^{k-d}$, où T_d^k est l'ensemble des applications d'un ensemble fini à d éléments dans un ensemble fini à k éléments. De plus, la série $\sum\frac{f^{(k)}(0)k^dz^k}{k!}$ a même rayon de convergence que $\sum\frac{f^{(k)}(0)z^k}{k!}$. On obtient donc que la convergence sur tout compact de U est C^∞ par rapport à M.
Maintenant, si $\alpha \in \mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}, M)$ alors

$$\begin{aligned}
&\Big\|(\alpha\otimes id)f(F_{\mathfrak{g}})(X) - f(F_{\mathfrak{g}})(\alpha\otimes id)(X)\Big\|_\infty\\
&= \Big\|(\alpha\otimes id)f(F_{\mathfrak{g}})(X) - (\alpha\otimes id)\Big(\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}F_{\mathfrak{g}}^k\Big)(X)\\
&\qquad\qquad + \Big(\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}F_{\mathfrak{g}}^k\Big)(\alpha\otimes id)(X) - f(F_{\mathfrak{g}})(\alpha\otimes id)(X)\Big\|_\infty\\
&\le \Big\|(\alpha\otimes id)\Big(f(F_{\mathfrak{g}}) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}F_{\mathfrak{g}}^k\Big)(X)\Big\|_\infty + \Big\|\Big(\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}F_{\mathfrak{g}}^k - f(F_{\mathfrak{g}}\Big)(\alpha\otimes id)(X)\Big\|_\infty\\
&\le 2\Big\|\alpha(X)\otimes id\Big\|\Big\|\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}F_{\mathfrak{g}}^k(X) - f(F_{\mathfrak{g}})(X)\Big\|_\infty,
\end{aligned}$$

et ce dernier terme tend vers 0 quand n tend vers l'infini, on a donc bien $f(F_{\mathfrak{g}}) \in \mathcal{A}_G^\infty(U; M, \mathrm{End}(E))$. □

Définition 3.3.24. On peut définir une super-trace sur $\mathcal{A}_G^\infty(M, \mathrm{End}(E))$ puisque $C^\infty(\mathfrak{g})$ est commutative. On commence par définir :

$$\mathrm{Str} : C^\infty(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{A}(M, \mathrm{End}(E)) \to C^\infty(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{A}(M),$$

en étendant la super-trace sur $\mathcal{A}(M, \mathrm{End}(E))$ par $\mathrm{Str}(h \otimes \alpha) = h \otimes \mathrm{Str}(\alpha)$, où $h \in C^\infty(\mathfrak{g})$ et $\alpha \in \mathcal{A}(M, \mathrm{End}(E))$. Cette super-trace se restreint en une super-trace

$$\mathrm{Str} : (C^\infty(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{A}(M, \mathrm{End}(E)))^G \to (C^\infty(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{A}(M))^G,$$

car $\mathrm{Str}(g \cdot \alpha(X)) = \mathrm{Str}(\alpha)(g \cdot X)$ et $g \cdot \mathrm{Str}(\alpha(X)) = \mathrm{Str}(g \cdot \alpha(X))$.

Proposition 3.3.25. *Soit f une fonction entière. La forme différentielle équivariante* $\mathrm{Str}(f(F_\mathfrak{g}))$ *est fermée de manière équivariante et ne dépend pas de la super-connexion $\mathbb{A}$ choisie.*

Démonstration. Si $\alpha \in \mathcal{A}^\infty_G(M, \mathrm{End}(E))$, on a :

$$d\mathrm{Str}(\alpha(X)) = \mathrm{Str}(\mathbb{A}\alpha(X)) \text{ et } -\iota(X_M)\mathrm{Str}(\alpha(X)) = \mathrm{Str}(-\iota(X_M)\alpha(X))$$

en sommant ces deux égalités, on a :

$$d_\mathfrak{g}\mathrm{Str}(\alpha) = \mathrm{Str}(\mathbb{A}_\mathfrak{g}\alpha).$$

De plus, $d_\mathfrak{g}(\mathrm{Str}(f(F_\mathfrak{g})) = \mathrm{Str}([\mathbb{A}_\mathfrak{g}, f(F_\mathfrak{g}]) = 0$ car $[\mathbb{A}_\mathfrak{g}, f(F_\mathfrak{g})] = 0$.
Maintenant, supposons que $\mathbb{A}^t$ soit une famille de super-connexions G-invariantes de courbure équivariante $F^t_\mathfrak{g}$ alors on a :

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Str}(f(F^t_\mathfrak{g})) = \mathrm{Str}\left(\left[\mathbb{A}^t_\mathfrak{g}, \frac{d\mathbb{A}^t_\mathfrak{g}}{dt}\right] f'(F^t_\mathfrak{g})\right) = d_\mathfrak{g}\mathrm{Str}\left(\frac{d\mathbb{A}^t_\mathfrak{g}}{dt} f'(F^t_\mathfrak{g})\right)$$

car $\dfrac{df(F^t_\mathfrak{g})}{dt} = \dfrac{dF^t_\mathfrak{g}}{dt} f'(F^t_\mathfrak{g})$ puisque la fonction f est analytique et

$$\begin{aligned}
\frac{dF^t_\mathfrak{g}}{dt} &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}((\mathbb{A}^{t+h}_\mathfrak{g})^2 + \mu^E - ((\mathbb{A}^t_\mathfrak{g})^2 + \mu^E)) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}((\mathbb{A}^{t+h}_\mathfrak{g})^2 - \mathbb{A}^{t+h}_\mathfrak{g}\mathbb{A}^t_\mathfrak{g} + \mathbb{A}^{t+h}_\mathfrak{g}\mathbb{A}^t_\mathfrak{g} - (\mathbb{A}^t_\mathfrak{g})^2) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}((\mathbb{A}^{t+h}_\mathfrak{g})((\mathbb{A}^{t+h}_\mathfrak{g}) - \mathbb{A}^t_\mathfrak{g}) + (\mathbb{A}^{t+h}_\mathfrak{g} - \mathbb{A}^t_\mathfrak{g})\mathbb{A}^t_\mathfrak{g}) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}((\mathbb{A}^{t+h}_\mathfrak{g})((\mathbb{A}^{t+h}_\mathfrak{g}) - \mathbb{A}^t_\mathfrak{g}) + \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(\mathbb{A}^{t+h}_\mathfrak{g} - \mathbb{A}^t_\mathfrak{g})\mathbb{A}^t_\mathfrak{g}) \\
&= \mathbb{A}^t_\mathfrak{g}\frac{d\mathbb{A}^t_\mathfrak{g}}{dt} + \frac{d\mathbb{A}^t_\mathfrak{g}}{dt}\mathbb{A}^t_\mathfrak{g} \\
&= [\mathbb{A}^t_\mathfrak{g}, \frac{d\mathbb{A}^t_\mathfrak{g}}{dt}]
\end{aligned}$$

car $\mathbb{A}^t_\mathfrak{g}$ et $\dfrac{d\mathbb{A}^t_\mathfrak{g}}{dt}$ sont de degrés impairs.
D'où :

$$\mathrm{Str}(f(F^1_\mathfrak{g})) - \mathrm{Str}(f(F^0_\mathfrak{g})) = d\left(\int_0^1 \mathrm{Str}\left(\frac{d\mathbb{A}^t_\mathfrak{g}}{dt} f'(F^t_\mathfrak{g})\right)\right).$$

□

3.3.2 Caractère de Chern équivariant

Soit comme avant M une variété C^∞ sur laquelle un groupe de Lie G agit par difféomorphismes C^∞. Soit $E = E^+ \oplus E^-$ un super-fibré vectoriel G-équivariant et soit $\mathbb{A}$ une super-connexion G-invariante sur E. On va définir dans un premier temps le caractère de Chern, puis nous définirons le caractère de Chern d'un morphisme de fibrés G-équivariant à support compact.

Définition 3.3.26. On définit le caractère de Chern équivariant d'une super-connexion G-invariante $\mathbb{A}$ par :

$$\mathrm{Ch}(\mathbb{A}, X) = \mathrm{Str}\Big(e^{-F_{\mathfrak{g}}(X)}\Big),$$

où $F_{\mathfrak{g}}$ est la courbure équivariante de $\mathbb{A}$ et $X \in \mathfrak{g}$.

Proposition 3.3.27.
1. *La classe de cohomologie associée au caractère de Chern équivariant* $\mathrm{Ch}(\mathbb{A}, X)$ *de la super-connexion* $\mathbb{A}$ *dépend seulement du fibré vectoriel considéré. On peut donc noté* $\mathrm{Ch}(E, X)$ *la classe dans* $\mathcal{H}^\infty_G(\mathfrak{g}, M)$ *du caractère de Chern équivariant associé à une super-connexion* G*-invariante* $\mathbb{A}$ *sur* E.
2. *On a :* $\mathrm{Ch}(E \oplus F, X) = \mathrm{Ch}(E, X) + \mathrm{Ch}(F, X)$.
3. *On a :* $\mathrm{Ch}(E \otimes F, X) = \mathrm{Ch}(E, X) \wedge \mathrm{Ch}(F, X)$.
4. *Soit* $f : N \to M$ *une application différentiable* G*-équivariante entre deux* G*-variétés* M *et* N*, alors* $\mathrm{Ch}(f^*E, X) = f^*\mathrm{Ch}(E, X)$.

Soit $\sigma : E^+ \to E^-$ un morphisme G-équivariant. On sait que σ est elliptique si et seulement si son support $\mathrm{supp}(\sigma) = \{x \in M | \det(\sigma) = 0\}$ est compact. Soit U un ouvert de M d'adhérence compact tel que $\mathrm{supp}(\sigma) \subset U$. On sait que σ réalise un isomorphisme entre les restrictions de E^+ et E^- à $M \setminus \mathrm{supp}(\sigma)$. Soient ∇^- une connexion G-invariante sur E^- et ∇^{E^+} une connexion G-invariante sur E^+, on définit une connexion sur E^+ dite compatible avec ∇^- par

$$\nabla^+ = \varphi_{M\setminus\mathrm{supp}(\sigma)}\sigma^*\nabla^-_{|M\setminus\mathrm{supp}(\sigma)} + \varphi_U \nabla^{E^+},$$

où $(\varphi_{M\setminus\mathrm{supp}(\sigma)},\ \varphi_U)$ est une partition de l'unité associée au recouvrement $(M \setminus \mathrm{supp}(\sigma)) \cup U$.
Le moment sur $E^\pm$ est donné par

$$\mu^{E^\pm}(X) = \mathscr{L}^{E^\pm}(X) - \nabla^\pm_X.$$

Définition 3.3.28. On définit le caractère de Chern équivariant d'un morphisme G-équivariant σ comme ci-dessus par :

$$\mathrm{Ch}(\sigma, X) := \mathrm{Ch}(\nabla^+)(X) - \mathrm{Ch}(\nabla^-)(X),$$

où $\mathrm{Ch}(E^\pm, \nabla^\pm)(X) = \mathrm{Tr}\Big(e^{-F_{\mathfrak{g}}^{E^\pm}(X)}\Big)$.

Proposition 3.3.29. $\mathrm{Ch}(\sigma, X)$ *est une forme différentielle équivariante à support compact.*

Démonstration. En dehors de $\overline{U}$, ∇^+ est définie par ∇^- et donc il en est de même pour $(\nabla^+)^2$. Calculons $\mathscr{L}^{E^+}(X)s^+ = \frac{d}{dt}_{|t=0} e^{tX}\cdot s^+$, pour s^+ une section de E^+. Comme σ est un isomorphisme en dehors de $\overline{U}$, on a $s^+ = \sigma^{-1}s^-$, pour s^- une section de E^-.
Donc $\mathscr{L}^{E^+}(X)s^+_{|_{M\setminus\overline{U}}} = \frac{d}{dt}_{|t=0} e^{tX}\cdot\sigma^{-1}s^-_{|_{M\setminus\overline{U}}} = \frac{d}{dt}_{|t=0}\sigma^{-1}e^{tX}\cdot s^-_{|_{M\setminus\overline{U}}} = \sigma^{-1}\mathscr{L}^{E^-}(X)s^-_{|_{M\setminus\overline{U}}}$, la troisième égalité découlant de la G-équivariance de σ.

□

On suppose maintenant que E^+ et E^- sont des fibrés hermitiens G-équivariants munis de connexions hermitiennes ∇^+ et ∇^- G-invariantes. Soit $\sigma^* : E^- \to E^+$ le morphisme adjoint de σ pour la métrique. On construit une super-connexion $\mathbb{A}$ particulière sur $E = E^+ \oplus E^-$ par la formule [64], [66] :

$$\mathbb{A} := \nabla + v_\sigma,$$

où $\nabla = \begin{pmatrix}\nabla^+ & 0\\ 0 & \nabla^-\end{pmatrix}$ et $v_\sigma = \begin{pmatrix}0 & \sigma^*\\ \sigma & 0\end{pmatrix}$.
Soit $\mathbb{A}_t := \nabla + tv_\sigma$ la famille à un paramètre de super-connexions. On note $F_t = \mathbb{A}_t^2 = \nabla^2 + t[\nabla, v_\sigma] + t^2v_\sigma^2$ la courbure de la famille $\mathbb{A}_t$ et $\mu_t(X) = \mathscr{L}^E - [\mathbb{A}_t, \iota(X)]$ le moment. La courbure équivariante est alors

$$F^t_{\mathfrak{g}}(X) = F_t + \mu_t(X) = \nabla^2 + t[\nabla, v_\sigma] + t^2v_\sigma^2 + \mathscr{L}^E(X) - [\mathbb{A}_t, \iota(X)],$$

et $[v_\sigma, \iota(X)] = 0$ donc $[\mathbb{A}_t, \iota(X)] = \nabla_X$.
Soit $\mathrm{Ch}(\sigma, \nabla, t, X) := \mathrm{Str}\Big(e^{-F^t_{\mathfrak{g}}(X)}\Big)$ la forme caractère de Chern équivariant de la famille de super-connexions. On sait que

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Ch}(\sigma, \nabla, t, X) = -d_{\mathfrak{g}}\mathrm{Str}\bigg(\frac{d\mathbb{A}^t_{\mathfrak{g}}}{dt}e^{-F^t_{\mathfrak{g}}}\bigg)(X) = -d_{\mathfrak{g}}\eta(\sigma, \nabla, t, X),$$

où $\mathbb{A}^t_{\mathfrak{g}} = \mathbb{A}_t - \iota$, donc $\frac{d\mathbb{A}^t_{\mathfrak{g}}}{dt} = v_\sigma$ et $\eta(\sigma, \nabla, t, X) = \mathrm{Str}\Big(v_\sigma e^{-F^t_{\mathfrak{g}}}\Big)(X)$. De plus,

$$e^{-F^t_{\mathfrak{g}}(X)} = \exp\Big(-t^2 - t[\nabla, v_\sigma] - (\nabla^2 + \nabla_X + \mathscr{L}^E(X))\Big)$$

décroit exponentiellement lorsque t tend vers $+\infty$ sur $M \setminus \mathrm{supp}(\sigma)$. On a donc sur $M \setminus \mathrm{supp}(\sigma)$ que $\mathrm{Ch}(\sigma, \nabla, t, X)$ et $\eta(\sigma, \nabla, t, X)$ tendent vers 0. Maintenant, en intégrant entre 0 et t, on a

$$\mathrm{Ch}(\sigma, \nabla, 0, X) - \mathrm{Ch}(\sigma, \nabla, t, X) = d_{\mathfrak{g}}\bigg(\int_0^t \eta(\sigma, \nabla, s, X)ds\bigg).$$

Il est facile de voir que cette intégrale reste bien définie quand t tend vers $+\infty$ puisque η décroit exponentiellement. On a alors $\mathrm{Ch}(\sigma, \nabla, 0, X)_{|U} = \mathrm{Ch}(\sigma, \nabla, X)_{|U} = d_{\mathfrak{g}}\beta$ avec $\beta = \int_0^\infty \eta(\sigma, \nabla, s, X)ds$.

On peut maintenant définir le caractère de Chern à support. Pour tout voisinage ouvert G-invariant U de $\mathrm{supp}(\sigma)$, on considère l'algèbre $\mathcal{A}_U(M)$ des formes différentielles sur M qui sont supportées dans U. Soit $\mathcal{A}_U^\infty(\mathfrak{g}, M)$ l'espace des formes différentielles G-équivariantes à support dans U, c'est-à-dire les applications $\alpha : \mathfrak{g} \to \mathcal{A}_U(M)$ G-équivariantes. L'espace $\mathcal{A}_U^\infty(\mathfrak{g}, M)$ est un sous-espace de $\mathcal{A}^\infty(\mathfrak{g}, M)$ qui est stable par la différentielle $d_\mathfrak{g}$. On note $\mathcal{H}_{G,U}^\infty(\mathfrak{g}, M)$ l'espace de cohomologie correspondant.

Proposition 3.3.30 ([64])**.** *Soit U un voisinage ouvert G-invariant de* $\mathrm{supp}(\sigma)$*. Soit $\chi \in C^\infty(M)$ une fonction G-invariante, à support contenu dans U et égale à 1 sur un voisinage de* $\mathrm{supp}(\sigma)$*. La forme différentielle équivariante sur M*

$$c(\sigma, \mathbb{A}, \chi) = \chi \mathrm{Ch}(\mathbb{A}) + d\chi\beta(\sigma, \mathbb{A})$$

est fermée de manière équivariante et supportée dans U. Sa classe de cohomologie $\mathrm{Ch}_U(\sigma) \in \mathcal{H}_{G,U}(\mathfrak{g}, M)$ ne dépend pas du choix de $(\mathbb{A}, \chi)$, ni du choix de la structure hermitienne sur E.

Définition 3.3.31. On définit le caractère de Chern avec support $\mathrm{Ch}_{\mathrm{sup}}(\sigma)$ comme la collection $(\mathrm{Ch}_U(\sigma))_U$, où V parcourt les voisinages ouverts G-invariants de $\mathrm{supp}(\sigma)$.

En pratique, le caractère de Chern avec support $\mathrm{Ch}_{\mathrm{sup}}(\sigma)$ est identifié avec une classe $\mathrm{Ch}_U(\sigma) \in \mathcal{H}_{G,U}^\infty(\mathfrak{g}, M)$, où U est un voisinage ouvert de $\mathrm{supp}(\sigma)$ assez petit.
On note π la projection du fibré cotangent (respectivement π^V la projection du fibré tangent vertical). Quand $\sigma : \pi^*E^+ \to \pi^*E^-$ (respectivement $\sigma : \pi^V E^+ \to \pi^V E^-$) est un symbole elliptique (respectivement elliptique le long des fibres), c'est-à-dire $\mathrm{supp}(\sigma)$ est compact, on peut choisir $\chi \in C^\infty(T^*M)^G$ (respectivement dans $C^\infty(T^V M)^G$) à support compact, et on note

$$\mathrm{Ch}_c(\sigma) \in \mathcal{H}_{G,c}^\infty(\mathfrak{g}, T^*M) \text{ (respectivement dans } \mathcal{H}_{G,c}^\infty(\mathfrak{g}, T^V M))$$

la classe définie par la forme équivariante à support compact $c(\sigma, \mathbb{A}, \chi)$.

3.3.3 Le J-genre et le $\hat{A}$-genre

On rappelle dans cette section la définition du J-genre et de son inverse le $\hat{A}$-genre qui est défini au voisinage de $0 \in \mathfrak{g}$.

Définition 3.3.32. Soit $\mathcal{V} \to M$ un fibré vectoriel réel G-équivariant sur une G-variété M. Supposons que $\mathcal{V} \to M$ est muni d'une connexion G-invariante ∇ de courbure équivariante $R(X)$ alors le J-genre $J(M, \mathcal{V}, \nabla) \in \mathcal{A}_G^\infty(\mathfrak{g}, M)$ est défini par la forme différentielle équivariante

$$J(M, \mathcal{V}, \nabla)(X) = \det\left(\frac{e^{R(X)/2} - e^{-R(X)/2}}{R(X)}\right).$$

Proposition 3.3.33. *La forme différentielle équivariante $J(M, \mathcal{V}, \nabla)$ est fermée et sa classe de cohomologie $J(M, \mathcal{V})$ ne dépend pas de la connexion G-invariante ∇ choisie. De plus, si M est compact alors $J(M, \mathcal{V})(X)$ est inversible pour X suffisamment petit.*

Démonstration. Soit A un endomorphisme, on a $\det A = \exp(\mathrm{Tr}(A))$. On peut donc appliquer la section 3.3.1 à la fonction $\exp\left(\mathrm{Tr}\left(\frac{\sinh(z/2)}{z/2}\right)\right)$. Donc la forme $J(\mathcal{V}, M, \nabla)$ est fermée et sa classe $J(\mathcal{V}, M)$ ne dépend pas de ∇. De plus, si M est compact alors $J(\mathcal{V}, M)(0) = \hat{A}^{-2}(\mathcal{V})$ qui est l'inverse du $\hat{A}$-genre au carré donc est inversible. On rappelle que la topologie sur $\mathcal{A}^\infty(\mathfrak{g}, M)$ est une topologie de Fréchet. Comme dans une algèbre de Fréchet l'ensemble des éléments inversibles est un ouvert, il vient par continuité de $J(M, \mathcal{V}, \nabla)$ par rapport à $X \in \mathfrak{g}$ que $J(M, \mathcal{V}, \nabla)(X)$ est inversible pour X dans un voisinage assez petit de $0 \in \mathfrak{g}$. □

Définition 3.3.34. Soit $\mathcal{V} \to M$ un fibré vectoriel réel G-équivariant sur une G-variété M. Supposons que $\mathcal{V} \to M$ est muni d'une connexion G-invariante ∇ de courbure équivariante $R(X)$ alors le $\hat{A}$-genre équivariant $\hat{A}(M, \mathcal{V}, \nabla)$ est défini par

$$\hat{A}(M, \mathcal{V}, \nabla)(X) = \det{}^{1/2}\left(\frac{R(X)}{e^{R(X)/2} - e^{-R(X)/2}}\right),$$

pour X dans un voisinage assez petit de $0 \in \mathfrak{g}$.

Remarque 3.3.35. $\hat{A}(M, \mathcal{V}, \nabla)$ est une forme différentielle équivariante, fermée et sa classe de cohomologie $\hat{A}(M, \mathcal{V})$ ne dépend pas de la connexion G-invariante ∇ d'après la proposition précédente.
Lorsque la variété sera fixée, on notera simplement $\hat{A}(\mathcal{V}) = \hat{A}(M, \mathcal{V})$.

3.3.4 Les formes de localisation

Ici on introduit les formes différentielles équivariantes qui interviennent dans les formules de localisation et délocalisation [15], [12], voir aussi [16].

Soit U une G-variété, non nécessairement compacte. Soit $s \in G$, on note U^s l'ensemble des points fixes $\{x \in U / sx = x\}$. Soit $G(s)$ le centralisateur de s, c'est-à-dire l'ensemble des éléments $g \in G$ tels que $gs = sg$. Notons $\mathfrak{g}(s)$ l'algèbre de Lie de $G(s)$.

Définition 3.3.36. Soit $s \in G$. Notons N le fibré normal à M^s dans M et $R_N(X)$, $X \in \mathfrak{g}(s)$, la courbure équivariante de N par rapport à une connexion $G(s)$-invariant. On définit une forme $G(s)$-équivariante fermée sur M^s par

$$D_s(N)(X) = \det\Big(1 - s^N \exp(R_N(X))\Big), \ X \in \mathfrak{g}(s).$$

Définition 3.3.37. Soit $E \to M$ un fibré vectoriel euclidien orienté, d'orientation notée o. Notons $F(X)$ la courbure équivariante associée à une connexion métrique G-invariante. La classe d'Euler équivariante est définie par

$$\mathrm{Eul}_o(E)(X) = (-2\pi)^{rg(E)/2} \det{}_o^{1/2}(F(X)),$$

où $\det_o^{1/2}$ désigne le Pfaffien donné par l'orientation de E.

Proposition 3.3.38. *Les formes $D_s(N)$ et $\mathrm{Eul}_o(E)$ sont équivariantes et fermées. La forme $D_s(N)$ ne dépend pas de la connexion choisie. La forme $\mathrm{Eul}_o(E)$ ne dépend que de l'orientation o de E.*

3.4 Formule de l'indice cohomologique pour les familles équivariantes

3.4.1 Cas d'une action triviale sur la base

Soit G un groupe de Lie compact. On note $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Soit $p : M \to B$ une fibration G-équivariante entre variétés compactes, connexes, orientées. On suppose que l'action sur B est triviale. On note encore $T^V M = \ker(p_*)$ le fibré tangent vertical à M.

Par [63] il existe des G-plongements $f : M \hookrightarrow B \times V$ pour V une représentation de G de dimension k assez grande tels que la restriction $f_b : p^{-1}(b) \hookrightarrow \{b\} \times V$ soit un G-plongement, $\forall b \in B$. Ce G-plongement f induit une application $T^V M \to B \times TV$ qui pour tout $b \in B$ se restreint en un G-plongement $Tp^{-1}(b) \to \{b\} \times TV$. Soit $b \in B$. En notant N_b le fibré normal à $f_b(p^{-1}(b))$ dans V, on a que le fibré normal à $Tp^{-1}(b) \to \{b\} \times TV$ est $N_b \oplus N_b \simeq N_b \otimes \mathbb{C}$. Par l'intermédiaire d'un tel G-plongement, on peut définir une application $f_! : \mathrm{K_G}(T^V M) \to \mathrm{K_G}(B \times TV)$, en composant l'isomorphisme de Thom $\mathrm{K_G}(T^V M) \to \mathrm{K_G}(N \otimes \mathbb{C})$ avec le morphisme d'extension $\mathrm{K_G}(N \otimes \mathbb{C}) \to \mathrm{K_G}(B \times TV)$ induit par l'identification de $N_b \otimes \mathbb{C}$ avec un voisinage tubulaire de $f_b(p^{-1}(b))$ dans $\{b\} \times TV$. En identifiant TV avec $\mathbb{C}^k$, on obtient un isomorphisme de Bott $q_! : \mathrm{K_G}(B \times \mathbb{C}^k) \to \mathrm{K_G}(B)$.

Proposition 3.4.1. *[5] La composition $q_! f_!$ ne dépend pas du G-plongement f choisi. Elle sera notée $p_!$.*

Soient $\pi : E^\pm \to M$ une famille continue de G-fibré vectoriels. Soit P une famille d'opérateurs G-équivariante paramétrée par la base compacte B elliptique le long des fibres, c'est-à-dire $P : C^{\infty,0}(M, E^+) \to C^{\infty,0}(M, E^-)$ vérifie :

1. $\forall g \in G$ et $s \in C^{\infty,0}(M, E^+)$, $Pg \cdot s = g \cdot Ps$, où $(g \cdot s_\pm)(m) = g^{E^\pm} \cdot (s_\pm(g^{-1} \cdot m))$ est l'action de G sur les sections de $E^\pm$;
2. $\forall \xi \neq 0 \in T^V_m M$, $\sigma_\xi(P) : E^+_m \to E^-_m$ est inversible, où $\sigma(P)$ désigne le symbole principal de P, qui définit une classe de $\mathrm{K_G}(T^V M)$.

Définition 3.4.2. L'indice topologique de P est $\mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}_{G,t}(P) = p_!([\sigma(P)]) \in \mathrm{K_G}(B)$, où $[\sigma(P)]$ est la classe de $\sigma(P)$ dans $\mathrm{K_G}(T^V M)$.

On rappelle le théorème de l'indice pour les familles de [5].

Théorème 3.4.3. *[5] L'indice analytique $\mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}_{\mathrm{G}}$ défini dans la définition 1.1.4 et l'indice topologique $\mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}_{G,t}$ coïncident.*

Remarque 3.4.4. L'indice topologique est un morphisme de $R(G)$-modules car l'isomorphisme de Thom et le morphisme d'extension le sont. De plus, on sait que $\mathrm{K_G}(Y^G) \simeq \mathrm{K}(Y^G) \otimes R(G)$ donc en appliquant cet isomorphisme à $T^V M^G$ et B, on obtient $\mathrm{Ind}^{\mathrm{M^G|B}}_{\mathrm{G}} \simeq \mathrm{Ind}^{\mathrm{M^G|B}} \otimes id_{R(G)}$.

On souhaite localiser l'indice équivariant d'un symbole de $\mathrm{K_G}(T^V M)$, généralisant l'approche de [15] et [2]. On procède en deux étapes, on commence par une localisation d'Atiyah-Segal en

$\mathrm{K_G}$-théorie suivi d'une délocalisation de Berline-Vergne en cohomologie. Pour cela, on commence par supposer que G est un groupe topologiquement cyclique engendré par un seul élément g. On note $(T^VM)^G = \ker(p_*)^G$ les points fixes de T^VM sous l'action de G et $i : M^G \to M$ l'inclusion de la sous-variété des points fixes sous l'action de G. Les points fixes de T^VM sont donnés par $T^VM^G = ker(p_{*|_{M^G}})$ car p_* commute avec l'action du groupe et on sait que les points fixes de TM coïncident avec TM^G. Il faut définir l'application $i_! : \mathrm{K_G}(T^VM^G) \to \mathrm{K_G}(T^VM)$. En notant $\pi^{T^VM} : T(T^VM) \to T^VM$ la projection du fibré tangent à l'espace total du fibré tangent vertical, on a $T(T^VM) \simeq (\pi^{T^VM})^*T^VM \oplus (\pi^{T^VM})^*TM$. On a de même $T(T^VM^G) \simeq (\pi^{T^VM})^*T^VM^G \oplus (\pi^{T^VM})^*TM^G$. On note N le fibré normal $\mathcal{N}(M^G, M)$ à M^G dans M. Le fibré normal à T^VM^G dans T^VM est alors donné par $\mathcal{N}(T^VM^G, T^VM) = (\pi^{T^VM})^*(N \cap T^VM) \oplus (\pi^{T^VM})^*N = (\pi^{T^VM})^*(N \cap T^VM \otimes \mathbb{C})$, la dernière égalité provient du fait que N est vertical puisque l'action sur B est triviale. Le fibré normal $\mathcal{N}(T^VM^G, T^VM)$ est donc muni d'une structure complexe. On peut définir une application $i_! : \mathrm{K_G}(T^VM^G) \to \mathrm{K_G}(T^VM)$ comme composée de l'isomorphisme de Thom et du morphisme d'excision, comme expliqué plus haut.

Proposition 3.4.5. *[10] et [11] Le diagramme suivant est commutatif.*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{K_G}(T^VM^G) \arrow[r, "i_!"] \arrow[dr, "\mathrm{Ind_G^{M^G|B}}"'] & \mathrm{K_G}(T^VM) \arrow[d, "\mathrm{Ind_G^{M|B}}"] \\ & \mathrm{K_G}(B) \end{tikzcd}$$

Démonstration. Par le théorème de l'indice pour les familles [5] rappelé au théorème 3.4.3, on sait que $\mathrm{Ind}_{G,t}^{\mathrm{M|B}} = \mathrm{Ind_G^{M|B}}$. Comme on l'a vu dans 3.4.1 l'indice topologique ne dépend pas du plongement utilisé, on peut donc prendre la composée de l'inclusion de T^VM^G dans T^VM et du plongement de T^VM dans $B \times V$ comme plongement pour T^VM^G. On a alors $\mathrm{Ind_G^{M^G|B}} = q_!f_!i_! = \mathrm{Ind_G^{M|B}} \circ i_!$ et donc le diagramme est commutatif. ☐

Comme dans la partie précédente et par [2] :

Proposition 3.4.6. *Soit $I_g = \{\chi \in R(G)/\chi(g) = 0\}$ l'idéal premier de $R(G)$.*

1. *La composition $i^*i_!$ est donnée par la multiplication par $\lambda_{-1}(N \cap T^VM \otimes \mathbb{C}) \in \mathrm{K_G}(T^VM^G)$, en utilisant le fait que $\mathrm{K_G}(T^VM^G)$ est un $\mathrm{K_G}(M^G)$-module.*
2. *L'élément $\lambda_{-1}(N \cap T^VM \otimes \mathbb{C})$ devient une unité dans le localisé $\mathrm{K_G}(T^VM^G)_{I_g}$ après localisation en I_g.*
3. *L'application localisée $(i_!)_{I_g} : \mathrm{K_G}(T^VM^G)_{I_g} \to \mathrm{K_G}(T^VM^G)_{I_g}$ est un isomorphisme, d'inverse*

$$\frac{i^*}{\lambda_{-1}(N \cap T^VM \otimes \mathbb{C})}.$$

On va avoir besoin du théorème suivant qui est démontré dans [3].

Théorème 3.4.7. *[4] Si $\pi : E \to X$ est un fibré vectoriel complexe de rang n au-dessus de X alors le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{K}(X) \arrow[r, "i_!"] \arrow[d, "\mathrm{Ch}\wedge\mathrm{Td}(E)^{-1}"'] & \mathrm{K}(E) \arrow[d, "\mathrm{Ch}"] \\ H(X) \arrow[r, "i_!"] & H_{cpt}(E), \end{tikzcd}$$

où les applications $i_!$ désignent les isomorphismes de Thom en K*-théorie et en cohomologie.*

Démonstration. On note $\pi_!$ l'intégration le long des fibres de E en cohomologie et $\Lambda_{-1}E = [\pi^*\Lambda^{pair}E, \pi^*\Lambda^{impair}E, \sigma] = i_!(1)$ l'élément de Thom en K-théorie permettant de définir l'isomorphisme de Thom. Soit ξ un élément de $\mathrm{K}(X)$, on a :

$$\pi_!\mathrm{Ch}(i_!\xi) = \pi_!\mathrm{Ch}(\pi^*\xi \cdot \Lambda_{-1}E) = \pi_!\Big(\pi^*\mathrm{Ch}(\xi) \cdot \mathrm{Ch}(\Lambda_{-1}E)\Big) = \mathrm{Ch}(\xi) \cdot \pi_!\mathrm{Ch}(\Lambda_{-1}E).$$

Calculons $\pi_!\mathrm{Ch}(\Lambda_{-1}E)$.

$$\begin{aligned} i^*i_!\pi_!\mathrm{Ch}(\Lambda_{-1}E) &= \pi_!\mathrm{Ch}(\Lambda_{-1}E) \wedge \mathrm{Eul}(E) \\ &= i^*\mathrm{Ch}(\Lambda_{-1}E) \\ &= \mathrm{Ch}(\lambda_{-1}E) \end{aligned}$$

donc $\pi_!\mathrm{Ch}(\Lambda_{-1}E) = \dfrac{\mathrm{Ch}(\lambda_{-1}E)}{\mathrm{Eul}(E)}$. On a $\dfrac{\mathrm{Ch}(\lambda_{-1}E)}{\mathrm{Eul}(E)} = \mathrm{Td}(E)^{-1}$ car si on se donne ∇^E une connexion sur E, on a $\mathrm{Ch}(\lambda_{-1}E) = \mathrm{Tr}\Big(\sum(-1)^i\lambda^i(e^{\nabla^{E,2}})\Big) = \det\Big(1 - e^{\nabla^{E,2}}\Big)$ et $\mathrm{Eul}(E) = \det(-\nabla^{E,2})$ et $\mathrm{Td}(E) = \det\left(\dfrac{\nabla^{E,2}}{e^{\nabla^{E,2}} - 1}\right)$. □

Après localisation, en utilisant la remarque 3.4.4, on a $(\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M^G|B}})_{I_g} \simeq \mathrm{Ind}^{\mathrm{M^G|B}} \otimes id_{R(G)_{I_g}}$ donc le morphisme d'évaluation commute avec le caractére de Chern de l'indice $\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M^G|B}}$. On a alors, en notant χ le morphisme caractére qui à une représentation de G associe son caractére, l'égalité suivante $\mathrm{Ch}((\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M^G|B}})_{I_g}(g)) \simeq \mathrm{Ch}(\mathrm{Ind}^{\mathrm{M^G|B}})\cdot\chi(g)$. Après localisation, on peut donc calculer l'indice d'un symbol de $\mathrm{K_G}(T^VM)$, en utilisant la formule cohomologique d'Atiyah-Singer de l'indice des familles donnée dans [5]. On a :

On va maintenant regarder le lien entre le caractère de Chern tensorisé par le morphisme caractère en $g = e^X$ pour $X \in \mathfrak{g}$ et le caractère de Chern en cohomologie équivariante sur une G-variété à action triviale.

Lemme 3.4.8. *Supposons que G agit trivialement sur une variété Y. Alors on a les isomorphismes :*

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{K}(Y) & \otimes & R(G) & \to & \mathrm{K_G}(Y) \\ ([E]-[E']) & \otimes & V & \mapsto & [E\otimes \underline{V}] - [E'\otimes\underline{V}] \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccccc} H(Y) & \otimes & C^\infty(\mathfrak{g})^G & \to & \mathcal{H}^\infty_G(\mathfrak{g}, Y). \\ [\omega] & \otimes & \varphi & \mapsto & [X \mapsto \omega\varphi(X)] \end{array}$$

Ici $\underline{V} = Y \times V$ désigne le G-fibré trivial associé à la représentation de dimension finie V de G, On note χ le morphisme caractère qui associe à une représentation V son caractère χ_V. Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{K}_{\mathrm{G}}(Y) \arrow[r, "\mathrm{Ch}"] \arrow[d] & \mathcal{H}^{\infty}_{G}(\mathfrak{g}, Y) \\
\mathrm{K}(Y) \otimes R(G) \arrow[r, "\mathrm{Ch}\otimes\chi"'] & H(Y) \otimes C^{\infty}(\mathfrak{g})^{G}. \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

On rappelle que $\mathrm{Ch} : \mathrm{K}_{\mathrm{G}}(Y) \to \mathcal{H}^{\infty}_{G}(\mathfrak{g}, Y)$ est donné par $\mathrm{Ch}(E)(X) = [\mathrm{Str}(e^{R(X)})]$, où $R(X)$ est la courbure équivariante d'une connexion G-invariante sur le super-fibré E.

Démonstration. Soient $E \to Y$ un fibré vectoriel et V une représentation de G. Soient ∇^E une connexion sur E et $\nabla^{\underline{V}} = d \otimes id_V$ la connexion triviale sur $Y \times V$. Considérons la connexion produit sur $E \otimes \underline{V}$ donnée par :

$$\nabla^{E\otimes\underline{V}} = \nabla^E \otimes 1 + 1 \otimes \nabla^{\underline{V}}.$$

On a

$$\left(\nabla^{E\otimes\underline{V}}\right)^2 = \left(\nabla^E\right)^2 \otimes 1 + 1 \otimes \left(\nabla^{\underline{V}}\right)^2 = \left(\nabla^E\right)^2 \otimes 1,$$

car $d^2 = 0$. De plus, le moment de $\nabla^{E\otimes\underline{V}}$ est donné pour tout $X \in \mathfrak{g}$ par :

$$\mu^{E\otimes\underline{V}}(X) = \mathscr{L}^{E\otimes\underline{V}}(X) - \nabla^{E\otimes\underline{V}}_{X_Y} = \frac{d}{dt}_{|t=0} e^{tX} \otimes e^{tX} \cdot \; -0 = \frac{d}{dt}_{|t=0} 1 \otimes e^{tX} \cdot \; = id_{C^{\infty}(Y,E)} \otimes_{C^{\infty}(Y)} X,$$

donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ch}(E \otimes \underline{V}, X) &= \mathrm{Tr}\left(e^{\left(\nabla^{E\otimes\underline{V}}\right)^2 + \mu^{E\otimes\underline{V}}(X)}\right) \\
&= \mathrm{Tr}\left(e^{\left(\nabla^{E}\right)^2 \otimes 1 + id_{C^{\infty}(Y,E)} \otimes_{C^{\infty}(Y)} X}\right) \\
&= \mathrm{Tr}\left(e^{\left(\nabla^{E}\right)^2 \otimes 1} e^{id_{C^{\infty}(Y,E)} \otimes_{C^{\infty}(Y)} X}\right) \\
&= \mathrm{Tr}\left((e^{\left(\nabla^{E}\right)^2} \otimes 1)(1 \otimes e^X)\right) \\
&= \mathrm{Tr}\left(e^{\left(\nabla^{E}\right)^2} \otimes e^X\right) \\
&= \mathrm{Ch}(E)\chi_V(e^X)
\end{aligned}$$

□

Lemme 3.4.9. *Soit $\nabla^{N\cap T^VM\otimes\mathbb{C}}$ une connexion G-invariante sur $N\cap T^VM\otimes\mathbb{C}$ et $R_0(X)$ sa courbure équivariante. On a en $g=e^X$:*

1. $$\mathrm{Ch}\Big(\lambda_{-1}(N\cap T^VM\otimes\mathbb{C})(e^X)\Big)=\mathrm{Ch}\Big(\lambda_{-1}(N\cap T^VM\otimes\mathbb{C}),X\Big)=\det\Big(1-e^{R_0(X)}\Big), \tag{3.6a}$$
2. $$\mathrm{Ch}\Big(\lambda_{-1}(N\cap T^VM\otimes\mathbb{C}),X\Big)=\mathrm{Td}(N\cap T^VM\otimes\mathbb{C},X)^{-1}\wedge\mathrm{Eul}(N\cap T^VM\otimes\mathbb{C},X). \tag{3.6b}$$

Démonstration.

1. Comme l'action est triviale sur M^G, par le lemme 3.4.8, on a :
$$\mathrm{Ch}\Big(\lambda_{-1}(N\cap T^VM\otimes\mathbb{C})(e^X)\Big)=\mathrm{Ch}\Big(\lambda_{-1}(N\cap T^VM\otimes\mathbb{C}),X\Big).$$
De plus, pour toute application linéaire A sur $\mathbb{R}^n$, si on note $\Lambda^i(A)$ l'application linéaire induite sur $\Lambda^i\mathbb{R}^n$ alors on rappelle que :
$$\sum(-1)^i\mathrm{Tr}\bigg(\Lambda^i\Big(A\Big)\bigg)=\det\Big(1-A\Big).$$
Il vient donc :
$$\begin{aligned}\mathrm{Ch}\Big(\lambda_{-1}(N\cap T^VM\otimes\mathbb{C}),X\Big)&=\mathrm{Tr}\bigg(\sum(-1)^i\Lambda^i\Big(e^{R_0(X)}\Big)\bigg)\\&=\sum(-1)^i\mathrm{Tr}\bigg(\Lambda^i\Big(e^{R_0(X)}\Big)\bigg)\\&=\det\Big(1-e^{R_0(X)}\Big).\end{aligned}$$
2. On a :
$$\begin{aligned}\mathrm{Td}(N\cap T^VM\otimes\mathbb{C},X)^{-1}\wedge\mathrm{Eul}(N\cap T^VM\otimes\mathbb{C},X)&=\det\bigg(\frac{-(1-e^{R_0(X)})}{R_0(X)}\bigg)\det\Big(-R_0(X)\Big)\\&=\det\Big(1-e^{R_0(X)}\Big)\\&=\mathrm{Ch}(\lambda_{-1}(N\cap T^VM\otimes\mathbb{C}),X).\end{aligned}$$

□

Le théorème suivant est une conséquence de la formule de Lefschetz pour les fibrations et de la localisation de Bismut.

Théorème 3.4.10. *Pour $X\in\mathfrak{g}$ assez petit, l'égalité suivante est vérifiée dans $H(B,\mathbb{C})$:*
$$\mathrm{Ch}\Big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}(\sigma),X\Big)=\int_{T^VM|B}\mathrm{Ch}(\sigma,X)\wedge\mathrm{Td}(T^VM\otimes\mathbb{C},X).$$

Démonstration. Par le théorème 8 de [11], on a l'égalité suivante dans la cohomologie de B :

$$\mathrm{Ch}\Big((\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}})_{I_g}(\sigma(e^X)\Big) = \int_{T^VM^G|B} \frac{\mathrm{Ch}\Big(i^*\sigma(e^X)\Big)}{\mathrm{Ch}\Big(\lambda_{-1}(N\cap T^VM\otimes\mathbb{C})(e^X)\Big)} \wedge \mathrm{Td}(T^VM^G\otimes\mathbb{C}).$$

On a $\mathrm{Ch}\Big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}(\sigma(e^X))\Big) = \mathrm{Ch}\Big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}(\sigma), X\Big)$ puisque l'action est trivial sur B. En réinjectant dans l'équation, il vient :

$$\mathrm{Ch}\Big((\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}})_{I_g}(\sigma), X\Big) = \int_{T^VM^G|B} \frac{\mathrm{Ch}\Big(i^*\sigma(e^X)\Big)}{\mathrm{Ch}\Big(\lambda_{-1}(N\cap T^VM\otimes\mathbb{C})(e^X)\Big)} \wedge \mathrm{Td}(T^VM^G\otimes\mathbb{C})$$

En utilisant les lemmes 3.4.8 et 3.4.9, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{Ch}\Big(i^*\sigma(e^X)\Big)}{\mathrm{Ch}\Big(\lambda_{-1}(N\cap T^VM\otimes\mathbb{C})(e^X)\Big)} &= \frac{\mathrm{Ch}(i^*\sigma, X)}{\mathrm{Td}(N\cap T^VM\otimes\mathbb{C}, X)^{-1}\wedge \mathrm{Eul}(N\cap T^VM\otimes\mathbb{C}, X)} \\
&= \frac{i^*\mathrm{Ch}(\sigma, X)}{\mathrm{Td}(N\cap T^VM\otimes\mathbb{C}, X)^{-1}\wedge \mathrm{Eul}(N\cap T^VM\otimes\mathbb{C}, X)} \\
&= \frac{i^*\mathrm{Ch}(\sigma, X)}{\mathrm{Eul}(N\cap T^VM\otimes\mathbb{C}, X)} \wedge \mathrm{Td}(N\cap T^VM\otimes\mathbb{C}, X).
\end{aligned}$$

On peut donc écrire les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Ch}\Big((\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}})_{I_g}(\sigma), X\Big) \\
&\quad= \int_{T^VM^G|B} \frac{i^*\mathrm{Ch}(\sigma, X)}{\mathrm{Eul}(N\cap T^VM\otimes\mathbb{C}, X)} \wedge \mathrm{Td}(N\cap T^VM\otimes\mathbb{C}, X)\wedge \mathrm{Td}(T^VM^G\otimes\mathbb{C}) \\
&\quad= \int_{T^VM^G|B} \frac{i^*\mathrm{Ch}(\sigma, X)}{\mathrm{Eul}(N\cap T^VM\otimes\mathbb{C}, X)} \wedge \mathrm{Td}\Big((T^VM^G\otimes\mathbb{C})\oplus(N\cap T^VM\otimes\mathbb{C}), X\Big) \\
&\quad= \int_{T^VM^G|B} \frac{i^*\mathrm{Ch}(\sigma, X)}{\mathrm{Eul}(N\cap T^VM\otimes\mathbb{C}, X)} \wedge i^*\mathrm{Td}(T^VM\otimes\mathbb{C}, X) \\
&\quad= \int_{T^VM^G|B} \frac{i^*\Big(\mathrm{Ch}(\sigma, X)\wedge \mathrm{Td}(T^VM\otimes\mathbb{C}, X)\Big)}{\mathrm{Eul}(N\cap T^VM\otimes\mathbb{C}, X)}.
\end{aligned}$$

De plus, pour $X\in\mathfrak{g}$ assez petit, les zéros du champ engendré par X et les points fixes de e^X coïncident donc

$$\mathrm{Ch}\Big((\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}})_{I_g}(\sigma), X\Big) = \int_{T^VM^X|B} \frac{i^*\Big(\mathrm{Ch}(\sigma, X)\wedge \mathrm{Td}(T^VM^G\otimes\mathbb{C}, X)\Big)}{\mathrm{Eul}(N\cap T^VM\otimes\mathbb{C}, X)}.$$

Puisque $\mathrm{Ch}(\sigma, X)$ est à support compact, on peut appliquer la formule de localisation de Bismut (théorème 3.1.5), il vient :

$$\int_{T^V M^X|B} \frac{i^*\Big(\mathrm{Ch}(\sigma, X) \wedge \mathrm{Td}(T^V M^G \otimes \mathbb{C}, X)\Big)}{\mathrm{Eul}(N \cap T^V M \otimes \mathbb{C}, X)} = \int_{T^V M|B} \mathrm{Ch}(\sigma, X) \wedge \mathrm{Td}(T^V M \otimes \mathbb{C}, X),$$

ce qui donne le résultat souhaité. □

Remarque 3.4.11. [2] Pour enlever l'hypothèse que G est un groupe topologiquement engendré par un seul élément, il suffit de remplacer G par l'adhérence du groupe engendré par l'élément g. En effet, si l'on note $\varphi : H = \overline{< g >} \hookrightarrow G$ l'inclusion de l'adhérence du groupe topologiquement engendré par l'élément g dans G alors le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} \mathrm{K_G}(T^V M) \arrow[r, "\varphi^*"] \arrow[d, "\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M^G|B}}"'] & \mathrm{K_H}(T^V M) \arrow[d, "\mathrm{Ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{M^H|B}}"] \\ \mathrm{K_G}(B) \arrow[r, "\varphi^*"'] & \mathrm{K_H}(B) \end{tikzcd} .$$

Suivant l'approche de Berline-Vergne, on va essayer de donner une formule similaire en cohomologie pour l'indice d'un opérateur au voisinage d'un point $s \in G$ différent de l'identité. Soit donc G un groupe de Lie compact. Soit $s \in G$, on considère le sous-groupe $G(s)$ de G des éléments qui commutent avec s. On note $\mathfrak{g}(s)$ l'algèbre de Lie de $G(s)$, elle consiste en les éléments $X \in \mathfrak{g}$ tels que $s \cdot X = X$. Les G-variétés M et B sont aussi des $G(s)$-variétés et la fibration se restreint en une fibration $G(s)$-équivariante. On a besoin pour calculer l'indice en un point $g = se^X$ pour $X \in \mathfrak{g}(s)$, assez petit, d'une modification du caractère de Chern [14].

Définition 3.4.12. Soit E un fibré G-équivariant muni d'une connexion ∇ de courbure équivariante $R(X)$. Sur l'ensemble des points fixes de s, noté M^s, l'action de s sur $E_{|M^s}$, noté s^E, agit le long des fibres.

Le caractère de Chern s-équivariant Ch_s pour $s \in G$ et $X \in \mathfrak{g}(s)$ est défini par :

$$\mathrm{Ch}_s(E, X) = \mathrm{Tr}\Big(s^E \cdot e^{R(X)_{|M^s}}\Big) \in \mathcal{H}^\infty_{G(s)}(\mathfrak{g}(s), M^s).$$

Soient $s \in G$ et $X \in \mathfrak{g}(s)$ assez petit de sorte que le flot e^{tX} de X_M et e^X aient la même action sur M pour t proche de 0. Par [15], on sait que $(M^s)^X = M^g$. D'une part si $m \in (M^s)^X$ alors $s \cdot m = m$ et $X_M(m) = 0$ donc $e^X \cdot s \cdot m = m$ et donc $g \cdot m = m$ car $e^X s = se^X$. D'autre part, si $m \in M^g$ alors $se^X \cdot m = m$ donc $s_* X_M(m) = 0$. On a alors $X_M(m) = 0$ car s_* est un isomorphisme donc $m \in M^X$, on en déduit que $e^X \cdot m = m$. Or $s \cdot m = se^X \cdot m = m$ donc $m \in M^s$. On a bien que $m \in (M^s)^X$ puisque $(M^s)^X = M^s \cap M^X$.

On peut étendre le lemme 3.4.8 comme suit :

Lemme 3.4.13. *Soit Y est une G-variété.*

1. *Supposons que G agit trivialement sur Y. Si E est un fibré vectoriel sur Y et si $\underline{V} = Y \times V$ désigne le fibré trivial associé à une représentation V de G alors*

$$\mathrm{Ch}(E \otimes \underline{V}(se^X)) = \mathrm{Ch}_s(E \otimes \underline{V}, X).$$

2. *On note $g = se^X$. Soit Y^g la sous-variété des points fixes sous l'action du groupe $H := \overline{< g >}$ topologiquement engendré par g. On note Y^s la sous-variété des points fixés par s. On a pour X assez petit les inclusions $Y^g \xhookrightarrow{i_{g,s}} Y^s \xhookrightarrow{i_s} Y$, on note i_g l'inclusion composée de Y^g dans Y. Si E est un fibré vectoriel sur Y et si $\underline{V} = Y \times V$ désigne le fibré trivial associé à une représentation V de H alors*

$$\mathrm{Ch}_{se^X}(E \otimes \underline{V}) = i^*_{g,s}\mathrm{Ch}_s(E \otimes \underline{V}, X).$$

Démonstration. Soit ∇^E une connexion G-invariante sur E, on note R sa courbure. Soit $\nabla^{\underline{V}}$ la connexion triviale sur $\underline{V}$. On note $R^{E\otimes\underline{V}}$ la courbure associé sur $E \otimes \underline{V}$ et $R^{E\otimes\underline{V}}(X)$ sa courbure équivariante.

1. On a :

$$\begin{aligned}\mathrm{Ch}_s(E \otimes \underline{V}, X) &= \mathrm{Tr}(s^{E\otimes\underline{V}} \cdot e^{R^{E\otimes\underline{V}}(X)}) \\ &= \mathrm{Tr}(1 \otimes s^{\underline{V}} \cdot e^R \otimes e^X) \\ &= \mathrm{Tr}(e^R \otimes s^V \cdot e^X).\end{aligned}$$

De plus, $\mathrm{Tr}(s^V e^X) = \chi(se^X)$, donc

$$\begin{aligned}\mathrm{Ch}_s(E \otimes \underline{V}, X) &= \mathrm{Ch}(E)\chi(se^X) \\ &= \mathrm{Ch}(E \otimes \underline{V}(se^X)).\end{aligned}$$

2. En effet l'action de $g = se^X$ sur Y^g est triviale. On a les égalités :

$$\begin{aligned}\mathrm{Ch}_{se^X}(E \otimes \underline{V}) &= \mathrm{Tr}\Big(se^X \cdot e^{R^{E\otimes\underline{V}}_{|Y^g}}\Big) \\ &= \mathrm{Tr}\Big(se^X \cdot e^{R^E} \otimes 1_{|Y^g}\Big) \\ &= \mathrm{Tr}\Big(s \cdot e^{R^E} \otimes e^X_{|Y^g}\Big).\end{aligned}$$

L'action de X sur M^g est triviale donc par la preuve du lemme 3.4.9, on sait que :

$$\mathrm{Tr}\Big(s \cdot e^{R^E} \otimes e^X_{|Y^g}\Big) = \mathrm{Tr}\Big(s \cdot e^{R^{E\otimes\underline{V}}(X)_{|Y^g}}\Big).$$

De plus, $\mathrm{Tr}\Big(s \cdot e^{R^{E\otimes\underline{V}}(X)_{|Y^g}}\Big) = i^*_{g,s}\mathrm{Tr}\Big(s \cdot e^{R^{E\otimes\underline{V}}(X)_{|Y^s}}\Big) = i^*_{g,s}\mathrm{Ch}_s(E \otimes \underline{V}, X)$.

□

Définition 3.4.14. [14] Soit $s \in G$. Soit $E \to M^s$ un fibré vectoriel euclidien G-équivariant. Soit ∇ une connexion G-invariante. On note $R(X)$ sa courbure équivariante. On définit pour $X \in \mathfrak{g}(s)$, la forme sur M^s, $G(s)$-équivariante $D_s(E, X)$ donnée par :

$$D_s(E, X) = \det(1 - se^{R(X)}).$$

Lemme 3.4.15. *Soient $s \in G$ et $X \in \mathfrak{g}(s)$, on note g l'élément se^X. On suppose X assez petit, de sorte que $(M^s)^X = M^g$. On a les inclusions $M^g \xhookrightarrow{i_{g,s}} M^s \xhookrightarrow{i_s} M$, on note i_g l'inclusion de M^g dans M. On note N_g le fibré normal de M^g dans M, N_g^s le fibré normal de M^g dans M^s et N_s le fibré normal de M^s dans M. On a :*

1. $$\mathrm{Ch}\Big(\lambda_{-1}(N_g \cap T^V M \otimes \mathbb{C})(se^X)\Big) = \mathrm{Ch}\Big(\lambda_{-1}(N_g^s \cap T^V M \otimes \mathbb{C}), X\Big) i_{g,s}^* \mathrm{Ch}_s\Big(\lambda_{-1}(N_s \cap T^V M \otimes \mathbb{C}), X\Big), \tag{3.7a}$$
2. $$\mathrm{Ch}\Big(\lambda_{-1}(N_g^s \cap T^V M \otimes \mathbb{C}), X\Big) = \mathrm{Eul}(N_g^s \cap T^V M \otimes \mathbb{C}, X) \wedge \mathrm{Td}(N_g^s \cap T^V M \otimes \mathbb{C}, X)^{-1}, \tag{3.7b}$$
3. $$\mathrm{Ch}_s\Big(\lambda_{-1}(N^s \cap T^V M \otimes \mathbb{C}), X\Big) = D_s(N^s \cap T^V M, X). \tag{3.7c}$$

Démonstration. 1. L'action de se^X est triviale sur M^g. D'une part, on a les identifications suivantes :

- $TM_{|M^s} = TM^s \oplus N_s$,
- $TM_{|M^g} = TM^g \oplus N_g = (TM^s)_{|M^g} \oplus (N_s)_{|M^g} = TM^g \oplus N_g^s \oplus (N_s)_{|M^g}$,

donc $N_g \cap T^V M = N_g^s \cap T^V M \oplus (N_s)_{|M^g} \cap T^V M$. On sait que $\Lambda(E \oplus E') = \Lambda E \otimes \Lambda E'$ et que le caractère de Chern est multiplicatif donc

$$\mathrm{Ch}\Big(\lambda_{-1}(N_g \cap T^V M \otimes \mathbb{C})(se^X)\Big) = \mathrm{Ch}\Big(\lambda_{-1}(N_g^s \cap T^V M \otimes \mathbb{C})(se^X)\Big) \wedge \mathrm{Ch}\Big(i_g^* \lambda_{-1}(N_s \cap T^V M \otimes \mathbb{C})(se^X)\Big).$$

D'autre part, le fibré vectoriel N_g^s est un sous-fibré vectoriel du fibré vectoriel TM^s sur lequel s agit trivialement donc l'action sur N_g^s est triviale. On en déduit que l'action de s sur $\lambda_{-1}(N_g^s \cap T^V M \otimes \mathbb{C})$ est triviale et on a :

$$\mathrm{Ch}_{se^X}\Big(\lambda_{-1} N_g^s \cap T^V M \otimes \mathbb{C}\Big) = \mathrm{Ch}\Big(\lambda_{-1} N_g^s \cap T^V M \otimes \mathbb{C}(se^X)\Big) = \mathrm{Ch}\Big(\lambda_{-1} N_g^s \cap T^V M \otimes \mathbb{C}, X\Big),$$

car si on note R la courbure d'une connexion G-invariante sur $\lambda_{-1} N_g^s \cap T^V M \otimes \mathbb{C}$ et $R(X)$ sa courbure équivariante alors

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\Big(se^X \cdot e^R\Big) &= \mathrm{Tr}\Big(e^X \cdot (s \cdot e^R)\Big) \\ &= \mathrm{Tr}\Big(e^X \cdot e^R\Big) \\ &= \mathrm{Tr}\Big(e^{R(X)}\Big). \end{aligned}$$

De plus, en utilisant le lemme 3.4.13, on a :

$$\mathrm{Ch}\Big(i_g^* \lambda_{-1}(N_s \cap T^V M \otimes \mathbb{C})(se^X)\Big) = \mathrm{Ch}_{se^X}\Big(\lambda_{-1}(N_s \cap T^V M \otimes \mathbb{C})\Big) = i_{g,s}^* \mathrm{Ch}_s\Big(\lambda_{-1}(N_s \cap T^V M \otimes \mathbb{C}), X\Big).$$

2. On a par le calcul du lemme 3.4.9 :

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ch}\Big(\lambda_{-1}(N_g^s \cap T^V M \otimes \mathbb{C}), X\Big) = \mathrm{Ch}\Big(\lambda_{-1}(N_g^s \cap T^V M \otimes \mathbb{C}), X\Big) \\ &= \mathrm{Eul}(N_g^s \cap T^V M \otimes \mathbb{C}, X) \wedge \mathrm{Td}(N_g^s \cap T^V M \otimes \mathbb{C}, X)^{-1}. \end{aligned}$$

3. En notant $R(X)$ une courbure équivariante sur $N^s \cap T^V M$ et $R(X)\otimes\mathbb{C}$ la courbure équivariante associée sur $N^s \cap T^V M \otimes \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{Ch}_s(\lambda_{-1}N^s \cap T^V M \otimes \mathbb{C}, X) &= \sum(-1)^i \mathrm{Tr}\Big(\bigwedge(se^{R(X)\otimes\mathbb{C}})\Big)\\ &= \det{}_{N^s\cap T^V M\otimes\mathbb{C}}\Big(1 - se^{R(X)\otimes\mathbb{C}}\Big)\\ &= \det{}_{N^s\cap T^V M}\Big(1 - se^{R(X)}\Big)\\ &= D_s(N^s \cap T^V M, X).\end{aligned}$$

□

On peut maintenant énoncer le résultat suivant :

Théorème 3.4.16. *Pour $X \in \mathfrak{g}$ assez petit, l'égalité suivante est vérifiée dans la cohomologie de B à coefficients complexes $H(B,\mathbb{C})$:*

$$\mathrm{Ch}_s\Big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}(\sigma), X\Big) = \int_{T^V M^s|B} \frac{\mathrm{Ch}_s(\sigma, X) \wedge \mathrm{Td}(T^V M^s \otimes \mathbb{C}, X)}{D_s(N_s \cap T^V M, X)}.$$

Démonstration. On a $\mathrm{Ch}_s(\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}(\sigma), X) = \mathrm{Ch}(\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}(\sigma)(se^X))$ car l'action sur B est triviale. En appliquant, la formule de Lefschetz pour g, on obtient :

$$\mathrm{Ch}_s\Big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}(\sigma), X\Big) = \int_{T^V M^g|B} \frac{\mathrm{Ch}\Big(i_g^*\sigma(g)\Big)}{\mathrm{Ch}\Big(\lambda_{-1}(N_g \cap T^V M \otimes \mathbb{C})(g)\Big)} \wedge \mathrm{Td}(T^V M^g \otimes \mathbb{C}).$$

Par le lemme 3.4.13, on a l'égalité $i_{g,s}^*\mathrm{Ch}_s(\sigma, X) = \mathrm{Ch}\Big(i_g^*\sigma(g)\Big)$. En utilisant le lemme 3.4.15 (3.7a), il vient :

$$\mathrm{Ch}_s\Big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}(\sigma), X\Big) = \int_{T^V M^g|B} \frac{i_{g,s}^*\mathrm{Ch}_s(\sigma, X) \wedge \mathrm{Td}(T^V M^g \otimes \mathbb{C})}{\mathrm{Ch}_s(\lambda_{-1}(N_g^s \cap T^V M \otimes \mathbb{C}), X) i_{g,s}^* D_s(N_s \cap T^V M, X)}.$$

En appliquant (3.7b) du lemme 3.4.15, on obtient :

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ch}_s\Big((\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}})_{I_g}(\sigma), X\Big)\\ &= \int_{T^V M^g|B} \frac{i_{g,s}^*\mathrm{Ch}_s(\sigma, X) \wedge \mathrm{Td}(T^V M^g \otimes \mathbb{C})}{\mathrm{Eul}(N_g^s \cap T^V M \otimes \mathbb{C}, X) \wedge \mathrm{Td}(N_g^s \cap T^V M \otimes \mathbb{C}, X)^{-1} i_{g,s}^* D_s(N_s \cap T^V M, X)}\\ &= \int_{T^V M^g|B} \frac{i_{g,s}^*\mathrm{Ch}_s(\sigma, X) \wedge \mathrm{Td}(T^V M^g \otimes \mathbb{C}) \wedge \mathrm{Td}(N_g^s \cap T^V M \otimes \mathbb{C}, X)}{\mathrm{Eul}(N_g^s \cap T^V M \otimes \mathbb{C}, X) \wedge i_{g,s}^* D_s(N_s \cap T^V M, X)}\\ &= \int_{T^V M^g|B} \frac{i_{g,s}^*\mathrm{Ch}_s(\sigma, X) \wedge \mathrm{Td}((T^V M^g \otimes \mathbb{C}) \oplus (N_g^s \cap T^V M \otimes \mathbb{C}), X)}{\mathrm{Eul}(N_g^s \cap T^V M \otimes \mathbb{C}, X) \wedge i_{g,s}^* D_s(N_s \cap T^V M, X)}.\end{aligned}$$

De plus, on a l'égalité $T^VM^g \oplus N_g^s = T^VM^s$ donc :

$$\begin{aligned}\mathrm{Ch}_s\Big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}(\sigma), X\Big) &= \int_{T^VM^g|B} \frac{i_{g,s}^*\mathrm{Ch}_s(\sigma, X) \wedge i_{g,s}^*\mathrm{Td}(T^VM^s \otimes \mathbb{C}, X)}{\mathrm{Eul}(N_g^s \cap T^VM \otimes \mathbb{C}, X) \wedge i_{g,s}^* D_s(N_s \cap T^VM, X)} \\ &= \int_{T^VM^g|B} \frac{i_{g,s}^*\Big(\mathrm{Ch}_s(\sigma, X) \wedge \mathrm{Td}(T^VM^s \otimes \mathbb{C}, X) \wedge D_s(N_s \cap T^VM, X)^{-1}\Big)}{\mathrm{Eul}(N_g^s \cap T^VM \otimes \mathbb{C}, X)}\end{aligned}$$

Maintenant, pour $X \in \mathfrak{g}(s)$ assez petit, on a $M^g = (M^s)^X$ et $T^VM^g = (T^VM^s)^X$, donc :

$$\mathrm{Ch}_s\Big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}(\sigma), X\Big) = \int_{(T^VM^s)^X|B} \frac{i_{g,s}^*\Big(\mathrm{Ch}_s(\sigma, X) \wedge \mathrm{Td}(T^VM^s \otimes \mathbb{C}, X) \wedge D_s(N_s \cap T^VM, X)^{-1}\Big)}{\mathrm{Eul}(N_g^s \cap T^VM \otimes \mathbb{C}, X)},$$

par le théorème 3.1.5), il vient :

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ch}_s\Big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}(\sigma), X\Big) \\ &= \int_{(T^VM^s)^X|B} \frac{i_{g,s}^*\Big(\mathrm{Ch}_s(\sigma, X) \wedge \mathrm{Td}(T^VM^s \otimes \mathbb{C}, X) \wedge D_s(N_s \cap T^VM, X)^{-1}\Big)}{\mathrm{Eul}(N_g^s \cap T^VM \otimes \mathbb{C}, X)} \\ &= \int_{T^VM^s|B} \mathrm{Ch}_s(\sigma, X) \wedge \mathrm{Td}(T^VM^s \otimes \mathbb{C}, X) \wedge D_s(N_s \cap T^VM, X)^{-1}.\end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\mathrm{Ch}_s\Big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}(\sigma), X\Big) = \int_{T^VM^s|B} \frac{\mathrm{Ch}_s(\sigma, X) \wedge \mathrm{Td}(T^VM^s \otimes \mathbb{C}, X)}{D_s(N_s \cap T^VM, X)}.$$

□

3.4.2 Action non-triviale sur la base

Soit G un groupe de Lie compact. On note $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Soit $p : M \to B$ une fibration G-équivariante entre variétés compactes, connexes, orientées. On note encore $T^VM = \ker(p_*)$ le fibré tangent vertical à M et T^HM son supplémentaire horizontal relativement à une métrique G-invariante. On souhaite généraliser les calculs de la section précédente au cas où l'action sur la base de la fibration B est non-trivial. On suppose que le groupe G est topologiquement engendré par un seul élément g. On peut en effet toujours se ramener à ce cas en utilisant la remarque 3.4.11. Lorsque l'inclusion $B^G \hookrightarrow B$ est K-orientée, il est possible d'étendre les théorèmes 3.4.21 et 3.4.16 au cas où l'action sur B n'est pas triviale. Pour simplifier, nous supposons que G est un tore dans cette section de sorte que le fibré normal à $B^G \hookrightarrow B$ est complexe.

Proposition 3.4.17. *[10] Si G est un tore les inclusions $i : T^VM^G \hookrightarrow T^VM$ et $j : B^G \hookrightarrow B$ sont $\mathrm{K_G}$-orientées par des structures complexes.*

Démonstration. On note N le fibré normal à M^G dans M et p^*N_B le relèvement du fibré normal N_B à B^G dans B par p_* en un sous-fibré de T^HM au-dessus de M. D'une part, le fibré normal N_B à B^G dans B est muni d'une structure complexe puisque G est un tore (voir lemme 3.1.3). Donc l'application j est $\mathrm{K_G}$-orientée et par conséquent en identifiant N_B avec un voisinage tubulaire de B^G dans B, on peut définir une application de Gysin [25]

$$j_! : \mathrm{K_G}(B^G) \to \mathrm{K_G}(B).$$

D'autre part, le fibré normal $\mathcal{N} = \mathcal{N}(T^VM^G, T^VM)$ à l'espace total T^VM^G dans T^VM est donné par $(\pi^{\mathcal{N}})^*(N \cap T^VM \otimes \mathbb{C}) \oplus (\pi^{\mathcal{N}})^*(p^*N_B)$. En effet, on a les isomorphismes suivants :

$$\begin{aligned} T(T^VM) &\simeq (\pi^{T^VM})^*T^VM \oplus (\pi^{T^VM})^*TM, \\ T(T^VM^G) &\simeq (\pi^{T^VM^G})^*T^VM^G \oplus (\pi^{T^VM^G})^*TM^G \end{aligned}$$

et le fibré normal à M^G dans M est donné par $N = N \cap T^VM \oplus p^*(N_B)$, d'après le théorème 3.1.2. Le fibré normal à T^VM^G dans T^VM est bien muni d'une structure complexe. Donc l'application i est $\mathrm{K_G}$-orientée et par conséquent en identifiant $\mathcal{N}$ avec un voisinage tubulaire de T^VM^G dans T^VM, on peut définir une application de Gysin [3]

$$i_! : \mathrm{K_G}(T^VM^G) \to \mathrm{K_G}(T^VM).$$

□

Proposition 3.4.18. *[10] Si G est un tore, alors le diagramme suivant est commutatif.*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{K_G}(T^VM^G) \arrow[r, "i_!"] \arrow[d, "\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M^G|B^G}}"'] & \mathrm{K_G}(T^VM) \arrow[d, "\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}"] \\ \mathrm{K_G}(B^G) \arrow[r, "j_!"] & \mathrm{K_G}(B) \end{tikzcd}$$

Démonstration. D'après le théorème de l'indice d'Atiyah-Singer pour les familles équivariantes [5], les flèches $p_!$ et $p_!^G$, qui sont les indices topologiques correspondant respectivement aux fibrations $M \to B$ et $M^G \to B^G$, coïncident avec les indices analytiques de sorte que

$$p_! = \mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}} \text{ et } p_!^G = \mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M^G|B^G}}.$$

Ainsi pour prouver la commutativité du diagramme, il suffit de montrer que $j_! \circ p_!^G = p_! \circ i_!$. Mais rappelons d'après [25][Theorem 2.6] (voir aussi [11] pour la version équivariante), on a précisément pour toutes applications $\mathrm{K_G}$-orientées G-équivariantes f et g, $g \circ f$ est $\mathrm{K_G}$-orientée et $(g \circ f)_! = g_! \circ f_!$. En appliquant ce résultat on déduit que

$$j_! \circ p_!^G = (j \circ p^G)_! = (p \circ i)_! = p_! \circ i_!.$$

Ainsi la preuve est terminée.

□

On va, ici, encore utiliser la localisation en $\mathrm{K_G}$-théorie (voir [2]) et utiliser le caractère de Chern tensorisé par le morphisme caractère de représentation.

Théorème 3.4.19. *[11] L'égalité suivante est vérifiée dans la cohomologie de B^G à coefficients complexes $H(B^G, \mathbb{C})$:*

$$\frac{\mathrm{Ch}\Big(j^*\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}(\sigma(g))\Big)}{\mathrm{Ch}(\lambda_{-1}N^B(g))} = \int_{T^VM^G|B^G} \frac{\mathrm{Ch}\Big(i^*\sigma(g)\Big)}{\mathrm{Ch}\Big(\lambda_{-1}(N\cap T^VM\otimes\mathbb{C}\oplus p^*N^B)(g)\Big)} \wedge \mathrm{Td}(T^VM^G\otimes\mathbb{C}).$$

Démonstration. Après localisation, les applications $i_!$ et $j_!$ deviennent des isomorphismes par le théorème 3.2.3, d'inverses $\dfrac{i^*}{\lambda_{-1}(N\cap T^VM\otimes\mathbb{C}\oplus p^*N^B)}$ et $\dfrac{j^*}{\lambda_{-1}N^B}$. On a alors :

$$\frac{j^*\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}(\sigma)(g)}{\lambda_{-1}N^B(g)} = \mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M^G|B^G}}\Big(\frac{i^*\sigma(g)}{\lambda_{-1}(N\cap T^VM\otimes\mathbb{C}\oplus p^*N^B)(g)}\Big). \tag{3.8}$$

L'action de G sur T^VM^G et B^G est triviale, en utilisant le théorème 8 de [11], pour calculer le caractère de Chern de $\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M^G|B^G}}\left(\dfrac{i^*\sigma(g)}{\lambda_{-1}(N\cap T^VM\otimes\mathbb{C}\oplus p^*N^B)(g)}\right)$, il vient :

$$\begin{aligned}\mathrm{Ch}\left(\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M^G|B^G}}\left(\frac{i^*\sigma(g)}{\lambda_{-1}(N\cap T^VM\otimes\mathbb{C}\oplus p^*N^B)(g)}\right)\right)&\\ = \int_{T^VM^G|B^G} \frac{\mathrm{Ch}\Big(i^*\sigma(g)\Big)}{\mathrm{Ch}\Big(\lambda_{-1}(N\cap T^VM\otimes\mathbb{C}\oplus p^*N^B)(g)\Big)} &\wedge \mathrm{Td}(T^VM^G\otimes\mathbb{C}).\end{aligned}$$

Et donc, en utilisant (3.8), on obtient :

$$\frac{\mathrm{Ch}\Big(j^*\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}(\sigma)\Big)}{\mathrm{Ch}\Big(\lambda_{-1}N^B\Big)} = \int_{T^VM^G|B^G} \frac{\mathrm{Ch}\Big(i^*\sigma(g)\Big)}{\mathrm{Ch}\Big(\lambda_{-1}(N\cap T^VM\otimes\mathbb{C}\oplus p^*N^B)(g)\Big)} \wedge \mathrm{Td}(T^VM^G\otimes\mathbb{C}).$$

□

Lemme 3.4.20. *Dans la cohomologie à coefficients complexes de B^G, l'égalité suivante est vérifiée en $g = e^X$:*

$$\mathrm{Ch}\Big(\lambda_{-1}(N\cap T^VM\otimes\mathbb{C}\oplus p^*N^B)(e^X)\Big) = \mathrm{Ch}\Big(\lambda_{-1}(N\cap T^VM\otimes\mathbb{C}), X\Big)\wedge p^*\mathrm{Ch}(\lambda_{-1}N^B, X). \tag{3.9}$$

Démonstration. D'une part, on a l'égalité :

$$\lambda_{-1}(N\cap T^VM\otimes\mathbb{C}\oplus p^*N^B) = \lambda_{-1}(N\cap T^VM\otimes\mathbb{C})\otimes p^*\lambda_{-1}N^B,$$

en utilisant la multiplicativité du caractère de Chern, il vient :

$$\mathrm{Ch}\Big(\lambda_{-1}(N\cap T^VM\otimes\mathbb{C}\oplus p^*N^B)(e^X)\Big) = \mathrm{Ch}\Big(\lambda_{-1}(N\cap T^VM\otimes\mathbb{C})(e^X)\Big)\wedge p^*\mathrm{Ch}\Big(\lambda_{-1}N^B(e^X)\Big).$$

D'autre part, l'action est triviale sur M^G, par le lemme 3.4.8, on a :

$$\mathrm{Ch}\Big(\lambda_{-1}(N\cap T^VM\otimes\mathbb{C})(e^X)\Big) = \mathrm{Ch}\Big(\lambda_{-1}(N\cap T^VM\otimes\mathbb{C}), X\Big)$$

et
$$\mathrm{Ch}\Big(\lambda_{-1}N^B(e^X)\Big) = \mathrm{Ch}\Big(\lambda_{-1}N^B, X\Big)$$
$\square$

Théorème 3.4.21. *Pour $X \in \mathfrak{g}$ assez petit, l'égalité suivante est vérifiée dans la cohomologie $H(B, d_X)$:*
$$\mathrm{Ch}\Big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}(\sigma), X\Big) = \int_{T^V M|B} \mathrm{Ch}(\sigma, X) \wedge \mathrm{Td}(T^V M \otimes \mathbb{C}, X).$$

Démonstration. Par le théorème 3.4.19, on a l'égalité suivante dans la cohomologie de B^G :
$$\frac{\mathrm{Ch}\Big(j^*\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}(\sigma(e^X))\Big)}{\mathrm{Ch}(\lambda_{-1}N^B(e^X))} = \int_{T^V M^G|B^G} \frac{\mathrm{Ch}\Big(i^*\sigma(e^X)\Big)}{\mathrm{Ch}\Big(\lambda_{-1}(N \cap T^V M \otimes \mathbb{C} \oplus p^*N^B)(e^X)\Big)} \wedge \mathrm{Td}(T^V M^G \otimes \mathbb{C}). \tag{3.10}$$
D'une part, par le lemme 3.4.20, on a :
$$\frac{\mathrm{Ch}\Big(i^*\sigma(e^X)\Big)}{\mathrm{Ch}\Big(\lambda_{-1}(N \cap T^V M \otimes \mathbb{C} \oplus p^*N^B)(e^X)\Big)} = \frac{\mathrm{Ch}(i^*\sigma, X)}{\mathrm{Ch}\Big(\lambda_{-1}(N \cap T^V M \otimes \mathbb{C}), X\Big) \wedge p^*\mathrm{Ch}(\lambda_{-1}N^B, X)}.$$
D'autre part, par le lemme 3.4.9, on a :
$$\mathrm{Ch}\Big(\lambda_{-1}(N \cap T^V M \otimes \mathbb{C}), X\Big) = \mathrm{Td}(N \cap T^V M \otimes \mathbb{C}, X)^{-1} \wedge \mathrm{Eul}(N \cap T^V M \otimes \mathbb{C}, X).$$
On a $\mathrm{Ch}\Big(j^*\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}(\sigma(e^X))\Big) = \mathrm{Ch}\Big(j^*\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}(\sigma), X\Big)$ puisque l'action est triviale sur B^G. En réinjectant dans l'équation (3.10), il vient :
$$\frac{\mathrm{Ch}\Big(j^*\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}(\sigma), X\Big)}{\mathrm{Ch}(\lambda_{-1}N^B, X)} = \int_{T^V M^G|B^G} \frac{\mathrm{Ch}(i^*\sigma, X) \wedge \mathrm{Td}(N \cap T^V M \otimes \mathbb{C}, X)}{\mathrm{Eul}(N \cap T^V M \otimes \mathbb{C}, X) \wedge p^*\mathrm{Ch}(\lambda_{-1}N^B, X)} \wedge \mathrm{Td}(T^V M^G \otimes \mathbb{C}).$$
De plus, on sait que $\mathrm{Td}(N \cap T^V M \otimes \mathbb{C}, X) \wedge \mathrm{Td}(T^V M^G \otimes \mathbb{C}) = i^*\mathrm{Td}(T^V M \otimes \mathbb{C}, X)$, donc :
$$\frac{j^*\mathrm{Ch}\Big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}(\sigma), X\Big)}{\mathrm{Ch}(\lambda_{-1}N^B, X)} = \mathrm{Ch}(\lambda_{-1}N^B, X)^{-1} \wedge \int_{T^V M^G|B^G} \frac{i^*\Big(\mathrm{Ch}(\sigma, X) \wedge \mathrm{Td}(T^V M \otimes \mathbb{C}, X)\Big)}{\mathrm{Eul}(N \cap T^V M \otimes \mathbb{C}, X)}.$$
De plus, pour $X \in \mathfrak{g}$ assez petit, les zéros du champ engendré par X et les points fixes de e^X coïncident donc
$$\frac{j^*\mathrm{Ch}\Big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}(\sigma), X\Big)}{\mathrm{Ch}(\lambda_{-1}N^B, X)} = \mathrm{Ch}(\lambda_{-1}N^B, X)^{-1} \wedge \int_{T^V M^X|B^X} \frac{i^*\Big(\mathrm{Ch}(\sigma, X) \wedge \mathrm{Td}(T^V M \otimes \mathbb{C}, X)\Big)}{\mathrm{Eul}(N \cap T^V M \otimes \mathbb{C}, X)}.$$
Puisque $\mathrm{Ch}(\sigma, X)$ est à support compact, on peut appliquer la formule de localisation de Bismut (théorème 3.1.5), il vient :
$$\int_{T^V M^X|B^X} \frac{i^*\Big(\mathrm{Ch}(\sigma, X) \wedge \mathrm{Td}(T^V M^G \otimes \mathbb{C}, X)\Big)}{\mathrm{Eul}(N \cap T^V M \otimes \mathbb{C}, X)} = j^* \int_{T^V M|B} \mathrm{Ch}(\sigma, X) \wedge \mathrm{Td}(T^V M \otimes \mathbb{C}, X).$$

Maintenant, en simplifiant par l'élément inversible $\mathrm{Ch}(\lambda_{-1}N^B, X)$ et en utilisant la proposition 2.1 de [15] qui affirme que la restriction $j^* : H(B, d_X) \to H(B^X, \mathbb{C})$ est un isomorphisme, on obtient le résultat souhaité. □

Comme dans le cas où l'action sur la base est triviale, on va donner une formule similaire en cohomologie pour l'indice d'un opérateur au voisinage d'un point $s \in G$ différent de l'identité. Soit donc G un groupe de Lie compact. Soit $s \in G$, on considère le sous-groupe $G(s)$ de G des éléments qui commutent avec s. On note $\mathfrak{g}(s)$ l'algèbre de Lie de $G(s)$, elle consiste en les éléments $X \in \mathfrak{g}$ tels que $s \cdot X = X$. Les G-variétés M et B sont aussi des $G(s)$-variétés et la fibration se restreint en une fibration $G(s)$-équivariante.

Théorème 3.4.22. *Soient $s \in G$ et $X \in \mathfrak{g}(s)$, on note g l'élément se^X. On suppose encore que X est assez petit, de sorte que $(M^s)^X = M^g$. On note N_s le fibré normal de M^s dans M. L'égalité suivante est alors vérifiée dans la cohomologie d_X de B^s, $H(B^s, d_X)$:*

$$\mathrm{Ch}_s\Big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}(\sigma), X\Big) = \int_{T^V M^s|B^s} \frac{\mathrm{Ch}_s(\sigma, X) \wedge \mathrm{Td}(T^V M^s \otimes \mathbb{C}, X)}{D_s(N_s \cap T^V M, X)}.$$

Démonstration. On a les inclusions $M^g \overset{i_{g,s}}{\hookrightarrow} M^s \overset{i_s}{\hookrightarrow} M$, on note i_g l'inclusion de M^g dans M. De même, on a les inclusions $B^g \overset{j_{g,s}}{\hookrightarrow} B^s \overset{j_s}{\hookrightarrow} B$, on note j_g l'inclusion de B^g dans B. On note N_g le fibré normal de M^g dans M et N_g^s le fibré normal de M^g dans M^s. En appliquant, le théorème 3.4.19 pour g, au-dessus de B^g, on obtient :

$$\frac{\mathrm{Ch}\Big(j_g^*\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}(\sigma(g))\Big)}{\mathrm{Ch}(\lambda_{-1}N^B(g))} = \int_{T^V M^g|B^g} \frac{\mathrm{Ch}\Big(i_g^*\sigma(g)\Big)}{\mathrm{Ch}\Big(\lambda_{-1}(N_g \cap T^V M \otimes \mathbb{C} \oplus p^* N^B)(g)\Big)} \wedge \mathrm{Td}(T^V M^G \otimes \mathbb{C}).$$

En utilisant le lemme 3.4.13, on a $\mathrm{Ch}\Big(j_g^*\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}(\sigma(g))\Big) = j_{g,s}^*\mathrm{Ch}_s\Big((\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}})(\sigma), X\Big)$ et $\mathrm{Ch}\Big(i_g^*\sigma(g)\Big) = i_{g,s}^*\mathrm{Ch}_s(\sigma, X)$. En appliquant le lemme 3.4.20, il vient :

$$\frac{j_{g,s}^*\mathrm{Ch}_s\Big((\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}})_{I_g}(\sigma), X\Big)}{\mathrm{Ch}(\lambda_{-1}N^B(g))} = \int_{T^V M^g|B^g} \frac{i_{g,s}^*\mathrm{Ch}_s(\sigma, X) \wedge \mathrm{Td}(T^V M^G \otimes \mathbb{C})}{\mathrm{Ch}\Big(\lambda_{-1}(N_g \cap T^V M \otimes \mathbb{C})(g)\Big) \wedge p^*\mathrm{Ch}\Big(\lambda_{-1}N^B(g)\Big)}.$$

En simplifiant par $\mathrm{Ch}\Big(\lambda_{-1}N^B(g)\Big)$ et en appliquant (3.7b) du lemme 3.4.15, on obtient :

$$\begin{aligned}
&j_{g,s}^*\mathrm{Ch}_s\Big((\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}})_{I_g}(\sigma), X\Big) \\
&= \int_{T^V M^g|B^g} \frac{i_{g,s}^*\mathrm{Ch}_s(\sigma, X) \wedge \mathrm{Td}(T^V M^g \otimes \mathbb{C})}{\mathrm{Eul}(N_g^s \cap T^V M \otimes \mathbb{C}, X) \wedge \mathrm{Td}(N_g^s \cap T^V M \otimes \mathbb{C}, X)^{-1} i_{g,s}^* D_s(N_s \cap T^V M, X)} \\
&= \int_{T^V M^g|B^g} \frac{i_{g,s}^*\mathrm{Ch}_s(\sigma, X) \wedge \mathrm{Td}(T^V M^g \otimes \mathbb{C}) \wedge \mathrm{Td}(N_g^s \cap T^V M \otimes \mathbb{C}, X)}{\mathrm{Eul}(N_g^s \cap T^V M \otimes \mathbb{C}, X) \wedge i_{g,s}^* D_s(N_s \cap T^V M, X)} \\
&= \int_{T^V M^g|B^g} \frac{i_{g,s}^*\mathrm{Ch}_s(\sigma, X) \wedge \mathrm{Td}((T^V M^g \otimes \mathbb{C}) \oplus (N_g^s \cap T^V M \otimes \mathbb{C}), X)}{\mathrm{Eul}(N_g^s \cap T^V M \otimes \mathbb{C}, X) \wedge i_{g,s}^* D_s(N_s \cap T^V M, X)}.
\end{aligned}$$

De plus, on a l'égalité $T^V M^g \oplus N_g^s = T^V M^s$ donc :

$$
\begin{aligned}
j_{g,s}^* \mathrm{Ch}_s\Big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}(\sigma), X\Big) &= \int_{T^V M^g | B^g} \frac{i_{g,s}^* \mathrm{Ch}_s(\sigma, X) \wedge i_{g,s}^* \mathrm{Td}(T^V M^s \otimes \mathbb{C}, X)}{\mathrm{Eul}(N_g^s \cap T^V M \otimes \mathbb{C}, X) \wedge i_{g,s}^* D_s(N_s \cap T^V M, X)} \\
&= \int_{T^V M^g | B^g} \frac{i_{g,s}^* \Big(\mathrm{Ch}_s(\sigma, X) \wedge \mathrm{Td}(T^V M^s \otimes \mathbb{C}, X) \wedge D_s(N_s \cap T^V M, X)^{-1}\Big)}{\mathrm{Eul}(N_g^s \cap T^V M \otimes \mathbb{C}, X)}
\end{aligned}
$$

Maintenant, pour $X \in \mathfrak{g}(s)$ assez petit, on a $M^g = (M^s)^X$ et $T^V M^g = (T^V M^s)^X$, donc :

$$
j_{g,s}^* \mathrm{Ch}_s\Big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}(\sigma), X\Big) = \int_{(T^V M^s)^X | (B^s)^X} \frac{i_{g,s}^* \Big(\mathrm{Ch}_s(\sigma, X) \wedge \mathrm{Td}(T^V M^s \otimes \mathbb{C}, X) \wedge D_s(N_s \cap T^V M, X)^{-1}\Big)}{\mathrm{Eul}(N_g^s \cap T^V M \otimes \mathbb{C}, X)},
$$

par le théorème 3.1.5), il vient :

$$
\begin{aligned}
& j_{g,s}^* \mathrm{Ch}_s\Big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}(\sigma), X\Big) \\
&= \int_{(T^V M^s)^X | (B^s)^X} \frac{i_{g,s}^* \Big(\mathrm{Ch}_s(\sigma, X) \wedge \mathrm{Td}(T^V M^s \otimes \mathbb{C}, X) \wedge D_s(N_s \cap T^V M, X)^{-1}\Big)}{\mathrm{Eul}(N_g^s \cap T^V M \otimes \mathbb{C}, X)} \\
&= j_{g,s}^* \int_{T^V M^s | B^s} \mathrm{Ch}_s(\sigma, X) \wedge \mathrm{Td}(T^V M^s \otimes \mathbb{C}, X) \wedge D_s(N_s \cap T^V M, X)^{-1}.
\end{aligned}
$$

De plus, la restriction $j_{g,s}^* : H(B^s, d_X) \to H(B^g)$ est un isomorphisme, donc on a bien :

$$
\mathrm{Ch}_s\Big(\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}(\sigma), X\Big) = \int_{T^V M^s | B^s} \frac{\mathrm{Ch}_s(\sigma, X) \wedge \mathrm{Td}(T^V M^s \otimes \mathbb{C}, X)}{D_s(N_s \cap T^V M, X)}.
$$

□

3.4.3 Application au cas d'une G-fibration homogène

Le but de cette section est de faire le lien entre la formule de délocalisation de Berline-Vergne pour un opérateur elliptique $G \times H$-invariant et la formule le long des fibres présentée dans la section précédente. On commence par rappeler une construction classique, voir [3].
Soient G et H deux groupes de Lie compacts. Soit $P \to B$ un H-fibré principal G-équivariant. Soit F une $G \times H$-variété. On définit une fibration $p : M \to B$ G-équivariante, de fibre F et de groupe structurel H en posant $M = P \times_H B$. Soit $A : C^\infty(F, E^+) \to C^\infty(F, E^-)$ un opérateur pseudodifférentiel elliptique $G \times H$-invariant d'ordre 1. Par [3], on sait que l'indice $\mathrm{Ind}_{G\times H}^F(A)$ de l'opérateur A est un élément de $R(G \times H)$. Rappelons ([3],(4.3) page 504) la flèche

$$
\mu_P : R(G \times H) \to \mathrm{K}_{\mathrm{G}}(B)
$$

qui à une $G \times H$-représentation V associe le G-fibré vectoriel sur B donné par $P \times_H V$. On note respectivement p_1 et p_2 les respectivement première et deuxième projections de $P \times F$. Suivant [3] (page 527), on définit un opérateur G-invariant $\tilde{A}$ sur M, elliptique le long des fibres. L'opérateur A se relève en un opérateur $\tilde{A}_1$ sur $P \times F$. Comme $\tilde{A}_1$ est $G \times H$-invariant, il induit un opérateur $\tilde{A}$ sur M. On restreint $\tilde{A}_1$ aux sections constantes le long des fibres de $P \times F \to M$. Comme P est localement un produit, on a que sur les ouverts $p^{-1}(V) \cong V \times F$, la restriction $\tilde{A}_V$ de $\tilde{A}$ est juste le relevé de A, donc $\tilde{A}_V \in \overline{\mathcal{P}}^1(p^{-1}(V))$ et donc $\tilde{A} \in \overline{\mathcal{P}}^1(M)$. Le symbole $\sigma(\tilde{A})$ vérifie $\sigma_{(\eta,\xi)}(\tilde{A}) = \sigma_\xi(A)$ donc il est elliptique le long des fibres de p. De plus, on a la proposition suivante :

Proposition 3.4.23 ([3], page 529)**.** *L'indice de $\tilde{A}$ est donné par :*

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}(\tilde{A}) &= [P \times_H \ker A] - [P \times_H \mathrm{coker}\ A] \in \mathrm{K_G}(B)\\ &= \mu_P(\mathrm{Ind}^F_{G\times H}(A)).\end{aligned}$$

Soit $s \in G$. On note encore $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G et $\mathfrak{g}(s)$ l'algèbre de Lie du centralisateur $G(s)$ de s dans G.

Corollaire 3.4.24. *Soit $X \in \mathfrak{g}(s)$. On a l'égalité suivante dans la cohomologie d_X de B^s, $H(B^s, d_X)$:*

$$\mathrm{Ch}_s(\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}(\tilde{A}), X) = \mathrm{Ch}_s(\mu_P(\mathrm{Ind}^F_{G\times H}(A)), X).$$

Dans la suite, on note indifféremment CW l'homomorphisme de Chern-Weil $C^\infty(\mathfrak{g} \times \mathfrak{h})^{G\times H} \to \mathcal{H}^\infty_G(\mathfrak{g}, B)$ et l'isomorphisme de Chern-Weil $\mathcal{H}^\infty_{G\times H}(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}, P) \to \mathcal{H}^\infty_G(\mathfrak{g}, B)$. On note θ la 1-forme de connexion G-invariante sur P et Θ sa courbure. On note $\Theta(X) = \Theta - \iota(X)\theta$ sa courbure équivariante. L'isomorphisme de Chern-Weil est donné par :

$$CW(\alpha)(X) = \alpha(X, \Theta(X)),\ \forall \alpha \in \mathcal{H}^\infty_{G\times H}(\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}, P) \text{ et } X \in \mathfrak{g}.$$

Pour plus de détails, voir [29] (voir aussi [34] et [57]). On a :

Proposition 3.4.25. *[29] Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd} R(G(s) \times H) \arrow[r, "\mu_P"] \arrow[d, "\mathrm{Ch}_s=\chi_-(se^-)"'] & \mathrm{K}_{G(s)}(B^s) \arrow[d, "\mathrm{Ch}_s"] \\ C^\infty(\mathfrak{g}(s) \times \mathfrak{h})^{G(s)\times H} \arrow[r, "CW"'] & \mathcal{H}^\infty_{G(s)}(\mathfrak{g}(s), B^s) \end{tikzcd}$$

En appliquant cette proposition et la formule de Berline-Vergne [15], il vient :

Corollaire 3.4.26. *Soit $X \in \mathfrak{g}(s)$ assez petit. On a l'égalité suivante dans la cohomologie d_X de B^s, $H(B^s, d_X)$:*

$$\mathrm{Ch}_s(\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}(\tilde{A}), X) = \int_{TF^s} \frac{\mathrm{Ch}_s(\sigma(A), X, \Theta(X)) \wedge \hat{A}^2(TF^s, X, \Theta(X))}{D(\mathcal{N}(F^s, F), X, \Theta(X))}.$$

Démonstration. Par le corollaire 3.4.24, on sait que

$$\mathrm{Ch}_s(\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}(\tilde{A}), X) = \mathrm{Ch}_s(\mu_P(\mathrm{Ind}^F_{G\times H}(A)), X).$$

En utilisant la proposition 3.4.25, il vient que :

$$\mathrm{Ch}_s(\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}(\tilde{A}), X) = CW\Big(\mathrm{Ind}_{G\times H}^{F}(A)\Big)(X).$$

On obtient donc le résultat en appliquant la formule de Berline-Vergne [15] à $\mathrm{Ind}_{G\times H}^{F}(A)$.

□

Soit $s \in G$. On a $T^V M = P \times_H TF$ et $T^V M^s = P^s \times_H TF^s$ puisque l'action de G commute avec l'action de H. Notons $\mathcal{N}(F^s, F)$ le fibré normal à F^s dans F. La partie verticale du fibré normal à $M^s = P^s \times_H F^s$ dans M est alors donnée par $\mathcal{N}(M^s, M) \cap T^V M = P^s \times_H \mathcal{N}(F^s, F)$. Notons $p_1 : P^s \times F^s \to P^s$ et $p_2 : P^s \times F^s \to F^s$ les projections. La 1-forme $p_1^*\theta$ est une connexion sur $P \times F \to P \times_H F$ qui se restreint en une connexion sur $P^s \times F^s \to P^s \times_H F^s$. On note $CW_{P^s\times F^s}$ l'isomorphisme de Chern-Weyl associé au fibré principal $P^s \times H^s \to P^s \times_H F^s$. On a la proposition suivante :

Proposition 3.4.27. *On a les égalités suivantes :*

1. $\hat{A}(P^s \times_H TF^s, X) = p_2^*\hat{A}(TF^s, X, p_1^*\Theta(X))$ *;*
2. $D(\mathcal{N}(M^s, M) \cap T^V M, X) = p_2^* D(\mathcal{N}(F^s, F), X, p_1^*\Theta(X))$ *;*
3. $\mathrm{Ch}_s(\sigma(\tilde{A}), X) = p_2^*\mathrm{Ch}_s(\sigma(A), X, p_1^*\Theta(X))$.

Démonstration. On fait la preuve pour 1.. Les assertions 2. et 3. se montrent de la même façon.
1. On a :

$$\hat{A}(P^s \times_H TF^s, X) = CW_{P^s\times F^s}\Big(\hat{A}(P^s \times TF^s, -, -)\Big)(X).$$

Comme $P^s \times TF^s$ est le tiré en arrière par p_2 de TF^s, il vient :

$$\hat{A}(P^s \times_H TF^s, X) = CW_{P^s\times F^s}\Big(p_2^*\hat{A}(TF^s, -, -)\Big)(X).$$

On obtient alors le résultat en appliquant l'isomorphisme de Chern-Weyl pour la courbure équivariante $p_1^*\Theta(X)$. □

On va vérifier que la formule d'indice pour les familles coïncide bien avec celle obtenue dans le corollaire 3.4.26 par un calcul direct.

Corollaire 3.4.28. *Soit $X \in \mathfrak{g}(s)$ assez petit. On a l'égalité suivante dans la cohomologie d_X de B^s, $H(B^s, d_X)$:*

$$\mathrm{Ch}_s(\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}(\tilde{A}), X) = \int_{TF^s} \frac{\mathrm{Ch}_s(\sigma(A), X, \Theta(X)) \wedge \hat{A}^2(TF^s, X, \Theta(X))}{D(\mathcal{N}(F^s, F), X, \Theta(X))}.$$

Démonstration. On commence par appliquer la formule obtenue dans le théorème 3.4.22 pour calculer le caractère de Chern de $\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}(\tilde{A})$. On a :

$$\mathrm{Ch}_s(\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}(\tilde{A}), X) = \int_{P^s\times_H TF^s|B^s} \frac{\mathrm{Ch}_s(\sigma(\tilde{A}), X) \wedge \hat{A}^2(P^s \times_H TF^s, X)}{D(P^s \times_H \mathcal{N}(F^s, F), X)}.$$

En appliquant la proposition 3.4.27, on obtient :

$$\mathrm{Ch}_s(\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}(\tilde{A}), X) = \int_{P^s \times_H TF^s | B^s} \frac{p_2^* \mathrm{Ch}_s(\sigma(A), X, p_1^* \Theta(X)) \wedge p_2^* \hat{A}^2(TF^s, X, p_1^* \Theta(X))}{p_2^* D(\mathcal{N}(F^s, F), X, p_1^* \Theta(X))}.$$

En notant $q : P^s \times TF^s \to P^s \times_H TF^s$ la projection, il vient :

$$\begin{aligned} \mathrm{Ch}_s(\mathrm{Ind}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{M|B}}(\tilde{A}), X) &= \int_{P^s \times TF^s | B^s} q^* \left(\frac{p_2^* \mathrm{Ch}_s(\sigma(A), X, p_1^* \Theta(X)) \wedge p_2^* \hat{A}^2(TF^s, X, p_1^* \Theta(X))}{p_2^* D(\mathcal{N}(F^s, F), X, p_1^* \Theta(X))} \right) \\ &= \int_{TF^s} \frac{\mathrm{Ch}_s(\sigma(A), X, \Theta(X)) \wedge \hat{A}^2(TF^s, X, \Theta(X))}{D(\mathcal{N}(F^s, F), X, \Theta(X))}. \end{aligned}$$

$\square$

Chapitre 4

Formule de Berline-Vergne pour les familles G-transversalement elliptiques

Dans ce chapitre B est encore une variété orientée.

4.1 Caractère de Chern à coefficients $C^{-\infty}$

Ce chapitre est une application de la formule cohomologique du chapitre 2. On utilise la formule de Berline-Vergne-Paradan [17] et [67] afin de démontrer un résultat similaire pour les familles. Le théorème que l'on souhaite démontrer est le suivant.

Théorème. 4.2.4 *Soit σ un symbole G-transversalement elliptique le long des fibres de la G-fibration compacte $p : M \to B$ avec B orientée et G-triviale. Notons N^s le fibré normal à M^s dans M.*

1. *Il existe une fonction $\mathrm{Ind}_{coh}^{G,M|B} : \mathrm{K_G}(T^V_G M) \to C^{-\infty}(G, H(B))^G$ et une seule vérifiant les relations locales suivantes :*

$$\mathrm{Ind}_{coh}^{G,M|B}([\sigma])\|_s(Y) = (2i\pi)^{-\dim(M^s|B)} \int_{T^V M^s|B} \frac{\mathrm{Ch}_s(\mathbb{A}^{r^*\omega_s}(\sigma), Y) \wedge \hat{A}^2(T^V M^s, Y)}{D(N^s, Y)},$$

   $\forall s \in G$, $\forall Y \in \mathfrak{g}(s)$ assez petit de sorte que les classes équivariantes $\hat{A}^2(T^V M^s, Y)$ et $D(N^s, Y)$ soient définies.

2. *De plus, on a la formule d'indice suivante :*

$$\mathrm{Ind}_{coh}^{G,M|B}([\sigma]) = \mathrm{Ch}(\mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}([\sigma])) \in C^{-\infty}(G, H(B))^G.$$

On commence par rappeler quelques résultats obtenus dans [66]. Dans une deuxième section on déforme le caractère de Chern de [67]. Dans une dernière section, on démontre le théorème énoncé plus haut.

4.1.1 Cohomologie équivariante à coefficients généralisés

Nous rappelons quelques constructions cohomologiques, notre référence principal est [49]. Soit K un groupe de Lie compact d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$. Soit N une K-variété. Rappelons la définition de la cohomologie équivariante à coefficients $C^{-\infty}$ [31], voir aussi [49]. Soit $C^{-\infty}(\mathfrak{k}, \mathcal{A}(N))$ l'espace des fonctions généralisées sur $\mathfrak{k}$ à valeurs dans $\mathcal{A}(N)$. Par définition, c'est l'espace des applications linéaires continues de l'espace $\mathcal{D}(\mathfrak{k})$ des densités C^∞ à support compact sur $\mathfrak{k}$ vers $\mathcal{A}(N)$, où $\mathcal{D}(\mathfrak{k})$ et $\mathcal{A}(N)$ sont munis des topologies C^∞. Donc si $\alpha \in C^{-\infty}(\mathfrak{k}, \mathcal{A}(N))$ et si $\phi \in \mathcal{D}(\mathfrak{k})$ alors $\langle \alpha, \phi \rangle$ est une forme différentielle sur N notée $\int_{\mathfrak{k}} \alpha(X)\phi(X)dX$. Une densité C^∞ à support compact sur $\mathfrak{k}$ est appelée une densité test et une fonction C^∞ à support compact sur $\mathfrak{k}$ est appelée une fonction test. Notons E^i une base de $\mathfrak{k}$ et E_i sa base duale. Soit d l'opérateur sur $C^{-\infty}(\mathfrak{k}, \mathcal{A}(N))$ défini par

$$\langle d\alpha, \phi \rangle = d\langle \alpha, \phi \rangle, \text{ pour } \phi \in \mathcal{D}(\mathfrak{k}).$$

Soit ι l'opérateur défini par

$$\langle \iota\alpha, \phi \rangle = \sum_i \iota((E^i)^*_N)\langle \alpha, E_i\phi \rangle,$$

où $(E^i)^*_N$ désigne comme d'habitude le champ engendré par $E^i \in \mathfrak{g}$ sur N et où $E_i\phi$ désigne le produit tensoriel $E_i \otimes \phi$. Soit alors $d_{\mathfrak{k}}$ l'opérateur sur $C^{-\infty}(\mathfrak{k}, \mathcal{A}(N))$ défini par

$$d_{\mathfrak{k}}\alpha = d\alpha - \iota\alpha.$$

L'opérateur $d_{\mathfrak{k}}$ coïncide avec la différentielle équivariante sur $C^\infty(\mathfrak{k}, \mathcal{A}(N)) \subset C^{-\infty}(\mathfrak{k}, \mathcal{A}(N))$. Le groupe K agit naturellement sur $C^{-\infty}(\mathfrak{k}, \mathcal{A}(N))$ par $\langle g \cdot \alpha, \phi \rangle = g \cdot \langle \alpha, g^{-1} \cdot \phi \rangle$. L'action de K commute avec les opérateurs d et ι. L'espace des fonctions généralisées de $\mathfrak{k}$ dans $\mathcal{A}(N)$ qui sont K-équivariantes se note

$$\mathcal{A}^{-\infty}_K(\mathfrak{k}, \mathcal{A}(N)) = C^{-\infty}(\mathfrak{k}, \mathcal{A}(N))^K.$$

L'opérateur $d_{\mathfrak{k}}$ préserve $\mathcal{A}^{-\infty}_K(\mathfrak{k}, N)$ et vérifie $d_{\mathfrak{k}}^2 = 0$. De manière similaire, si on remplace $\mathcal{A}(N)$ par $\mathcal{A}_c(N)$ le sous-espaces des formes à support compact alors on peut définir $\mathcal{A}^{-\infty}_{c,K}(\mathfrak{k}, N) = C^{-\infty}(\mathfrak{k}, \mathcal{A}_c(N))^K$.
Nous avons aussi besoin de considérer les formes généralisées K-équivariantes qui sont seulement définies sur un voisinages ouvert de l'origine dans $\mathfrak{k}$. Si O est un ouvert K-invariant de $\mathfrak{k}$, on note $\mathcal{A}^{-\infty}_K(O, N)$ et $\mathcal{A}^{-\infty}_{c,K}(O, N)$ les espaces ainsi obtenus.
Soit similairement U un ouvert de N qui est K-invariant. L'espace des formes à coefficients généralisés à support dans U se note $\mathcal{A}^{-\infty}_U(O, N)$, c'est l'espace des formes différentielles à coefficients généralisés telles qu'il existe un sous-espace fermé K-invariant $C_\alpha \subset U$ de N tel que $\int \alpha(X)\phi(X)dX$ est supportée dans C_α pour toute densité test ϕ.

Notation 4.1.1. La cohomologie du complexe $(\mathcal{A}^{-\infty}_K(\mathfrak{k}, N), d_{\mathfrak{k}})$ se note $\mathcal{H}^{-\infty}_K(\mathfrak{k}, N)$.
La cohomologie du complexe $(\mathcal{A}^{-\infty}_{c,K}(\mathfrak{k}, N), d_{\mathfrak{k}})$ se note $\mathcal{H}^{-\infty}_{c,K}(\mathfrak{k}, N)$.
La cohomologie du complexe $(\mathcal{A}^{-\infty}_K(O, N), d_{\mathfrak{k}})$ se note $\mathcal{H}^{-\infty}_K(O, N)$.
La cohomologie du complexe $(\mathcal{A}^{-\infty}_{c,K}(O, N), d_{\mathfrak{k}})$ se note $\mathcal{H}^{-\infty}_{c,K}(O, N)$.
La cohomologie du complexe $(\mathcal{A}^{-\infty}_U(O, N), d_{\mathfrak{k}})$ se note $\mathcal{H}^{-\infty}_U(O, N)$.

Si $\phi : N' \to N$ est une application K-équivariante de K-variétés alors on obtient une application $\phi^* : \mathcal{A}^{-\infty}(\mathfrak{k}, N) \to \mathcal{A}^{-\infty}(\mathfrak{k}, N')$ définie par

$$\langle \phi^*\alpha, f\rangle = \phi^*\langle \alpha, f\rangle, \ \forall f \in \mathcal{D}(\mathfrak{k}),$$

qui induit

$$\phi^* : \mathcal{H}^{-\infty}(\mathfrak{k}, N) \to \mathcal{H}^{-\infty}(\mathfrak{k}, N').$$

Par ailleurs, il existe une application naturelle

$$\mathcal{H}^{\infty}(\mathfrak{k}, N) \to \mathcal{H}^{-\infty}(\mathfrak{k}, N)$$

induite par l'inclusion $\mathcal{A}^{\infty}_K(\mathfrak{k}, \mathcal{A}(N)) \hookrightarrow \mathcal{A}^{-\infty}_K(\mathfrak{k}, \mathcal{A}(N))$. Si $p : M \to B$ est une fibration K-équivariante orientée, alors l'intégration le long des fibres $\int_{M|B}$ définit une application de $\mathcal{A}^{-\infty}_{c,K}(\mathfrak{k}, M)$ vers $\mathcal{A}^{-\infty}_{c,K}(\mathfrak{k}, B)$:

$$\langle \int_{M|B} \alpha, \phi\rangle := \int_{M|B} \langle \alpha, \phi\rangle, \ \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathfrak{k}),$$

et induit une application bien définie :

$$\int_{M|B} : \mathcal{H}^{-\infty}_{c,K}(\mathfrak{k}, M) \to \mathcal{H}^{-\infty}_{c,K}(\mathfrak{k}, B).$$

Notons enfin que si $\alpha \in \mathcal{H}^{\infty}_{c,K}(\mathfrak{k}, M)$, et $\beta \in \mathcal{H}^{-\infty}_{c,K}(\mathfrak{k}, B)$ alors $\alpha \wedge p^*\beta \in \mathcal{H}^{-\infty}_{c,K}(\mathfrak{k}, M)$ et

$$\int_{M|B} \alpha \wedge p^{\beta} = (\int_{M|B} \alpha) \wedge \beta.$$

Faisons un petit rappel sur les restrictions de fonctions généralisées invariante [29], voir aussi [67]. On rappelle que si $s \in K$ et $S \in \mathfrak{k}$ alors $K(s)$ et $K(S)$ désignent respectivement les centralisateurs de s et S respectivement et que $\mathfrak{k}(s) = \mathrm{Lie}(K(s))$ et $\mathrm{Lie}(K(S)) = \mathfrak{k}(S)$. Pour tout $s \in K$, soit $U_s(0)$ un voisinage ouvert assez petit de $0 \in \mathfrak{g}(s)$ tel que l'application

$$[k, Y] \to kse^Y k^{-1}$$

est un plongement ouvert de $K \times_{K(s)} U_s(0)$ sur un ouvert de la classe de conjugaison $K \cdot s := \{ksk^{-1}, k \in K\} \simeq K/K(s)$. Similairement, pour $S \in \mathfrak{k}$, soit $U_S(0)$ un voisinage ouvert de 0 tel que l'application $[k, Y] \to Ad(k)(S + Y)$ est un plongement ouvert de $K \times_{K(S)} U_S(0)$ sur un voisinage ouvert de l'orbite adjointe $K \cdot S \simeq K/K(S)$. Remarquons que l'application $Y \to [e, Y]$ réalise $U_s(0)$ (respectivement $U_S(0)$) comme sous-variété $K(s)$-invariante de $K \times_{K(s)} U_s(0)$ (respectivement $K \times_{K(S)} U_S(0)$).
Soit Θ une fonction généralisée K-invariante par conjugaison. Pour tout $s \in K$, Θ définit une fonction généralisée K-invariante sur $K \times_{K(s)} U_s(0) \subset K$ qui admet une restriction à la sous-variété $U_s(0)$ qui se note

$$\Theta\|_s \in C^{-\infty}(U_s(0))^{K(s)}.$$

Si Θ est C^∞, on a $\Theta\|_s(Y) = \Theta(se^Y)$, $\forall Y \in U_s(0)$.
Similairement, soit θ une fonction généralisée K-invariante sur $\mathfrak{k}$. Pour tout $S \in \mathfrak{k}$, θ définit une fonction généralisée K-invariante sur $K \times_{K(S)} U_S(0) \hookrightarrow \mathfrak{k}$ qui admet une restriction à la sous-variété $U_S(0)$ qui se note

$$\theta\|_S \in C^{-\infty}(U_S(0))^{K(S)}.$$

Si θ est C^∞ alors $\theta\|_S(Y) = \theta(S+Y)$ $\forall Y \in U_S(0)$.
On a $K(se^S) = K(s) \cap K(S)$ $\forall S \in U_s(0)$. Soit $\Theta\|_s \in C^{-\infty}(U_s(0))^{K(s)}$ la restriction de la fonction généralisée $\Theta \in C^{-\infty}(K)^K$. Pour tout $S \in U_s(0)$, la fonction généralisée $\Theta\|_s$ admet une restriction $(\Theta\|_s)\|_S$ qui est une fonction généralisée $K(se^S)$-invariante définie sur un voisinage de $0 \in \mathfrak{k}(s) \cap \mathfrak{k}(S) = \mathfrak{k}(se^S)$.

Lemme 4.1.2. *[29] Soit $\Theta \in C^{-\infty}(K)^K$.*

— *Pour $s \in K$ et $S \in U_s(0)$, l'égalité suivante de fonctions généralisées définies sur un voisinage de $0 \in \mathfrak{k}(se^S)$ est vérifiée*

$$(\Theta\|_s)\|_S = \Theta\|_{se^S}.$$

Quand $\Theta \in C^{-\infty}(K)^K$ est C^∞ cette condition est facile à vérifier : pour $Y \in \mathfrak{k}(se^S)$, on a

$$(\Theta\|_s)\|_S(Y) = \Theta\|_s(S+Y) = \Theta(se^{S+Y}) = \Theta(se^S e^Y) = \Theta\|_{se^S}(Y).$$

— *Soient $s, k \in K$. l'égalité suivante de fonctions généralisées définies sur un voisinage de $0 \in \mathfrak{k}(s)$ est vérifiée*

$$(\Theta\|_s)\|_S = \Theta\|_{ksk^{-1}} \circ Ad(k).$$

Théorème 4.1.3. *[29] Soit $\theta_s \in C^{-\infty}(U_s(0))^{K(s)}$ une famille de fonctions généralisées. Supposons que les conditions suivantes sont vérifiées dans un voisinage de $0 \in \mathfrak{k}(s)$.*

— *Invariance : $\forall k, s \in K$, l'égalité suivante de fonctions généralisées définies dans un voisinage de $0 \in \mathfrak{k}(s)$ est vérifiée*

$$\theta_s = \theta_{ksk^{-1}} \circ Ad(k).$$

— *Compatibilité : $\forall s \in K$ et $S \in U_s(0)$, l'égalité suivante de fonctions généralisées définies dans un voisinage de $0 \in \mathfrak{k}(se^S)$ est vérifiée*

$$\theta_s\|_S = \theta_{se^S}.$$

Alors il existe une unique fonction généralisée $\Theta \in C^{-\infty}(K)^K$ telle que, $\forall s \in K$, l'égalité $\Theta\|s = \theta_s$ est vérifiée dans $C^{-\infty}(U_s(0))^{K(s)}$.

4.1.2 Le caractère de Chern de [66]

Soit K un groupe de Lie compact. Soit N une K-variété. Soit λ une 1-forme K-invariante réels sur N. Pour tout point $n \in N$, on donc a $\lambda(n) \in T_n^*N$.

Définition 4.1.4. La 1-forme λ définit une application équivariante

$$f_\lambda : N \to \mathfrak{k}^* \text{ donnée par} \langle f_\lambda(n), X\rangle = \langle \lambda(n), X_N^*(n)\rangle.$$

On note C_λ le sous-ensemble fermé K-invariant de N donné par :

$$C_\lambda = \{f_\lambda = 0\}.$$

On se donne un morphisme lisse K-équivariant $\sigma : E^+ \to E^-$ sur N, et on note $C_{\lambda,\sigma}$ le sous-ensemble fermé invariant donné par

$$C_{\lambda,\sigma} = C_\lambda \cap \mathrm{supp}(\sigma) \text{ et } v_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^* \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $\mathbb{A}$ une super-connexion K-invariante sur E (voir section 3.3. On utilisera par la suite les notations suivantes voir [66] :

1. $\mathbb{A}^{\sigma,\lambda}(t) = \mathbb{A} + it(v_\sigma + \lambda)$, $t \in \mathbb{R}$;
2. $F(\sigma,\lambda,\mathbb{A},t)(X) = -t^2 v_\sigma^2 - it < f_\lambda, X > +\mu^{\mathbb{A}}(X) + it[\mathbb{A}, v_\sigma] + \mathbb{A}^2 + itd\lambda$, qui est la courbure équivariante de $\mathbb{A}^{\sigma,\lambda}(t)$;
3. $\eta(\sigma,\lambda,\mathbb{A},t)(X) = -\mathrm{Str}\Big(i(v_\sigma + \lambda)e^{F(\sigma,\lambda,\mathbb{A},t)(X)}\Big) = -e^{itd_{\mathfrak{g}}\lambda(X)}\mathrm{Str}\Big(i(v_\sigma + \lambda)e^{F(\sigma,\mathbb{A},t)(X)}\Big)$, qui est la forme de transgression associée au caractère de Chern de $\mathbb{A}^{\sigma,\lambda}(t)$;
4. $\beta(\sigma,\lambda,\mathbb{A}) = \int_0^\infty \eta(\sigma,\lambda,\mathbb{A},t)dt$, qui est une forme à coefficients généralisés, puisque la convergence de $\int_0^T \eta(\sigma,\lambda,\mathbb{A},t)dt$ quand T tend vers l'infini a bien un sens comme distribution.

Théorème 4.1.5 (Theorem 3.19, [66]). • *Pour tout voisinage ouvert K-invariant U de $C_{\lambda,\sigma}$, prenons $\chi \in C^\infty(N)^K$ qui est égale à 1 sur un voisinage de $C_{\lambda,\sigma}$ et à support contenu dans U. Alors*

1.

$$c(\sigma,\lambda,\mathbb{A},\chi) = \chi\mathrm{Ch}(\mathbb{A}) + d\chi\beta(\sigma,\lambda,\mathbb{A})$$

est une forme équivariante fermée à coefficients généralisés, supportée dans U.

2. Sa classe de cohomologie $c_U(\sigma,\lambda) \in \mathcal{H}_U^{-\infty}(\mathfrak{k}, N)$ ne dépend pas du choix de $\mathbb{A}$, χ ni de la structure hermitienne sur $E^\pm$.

3. De plus, la famille inverse $c_U(\sigma,\lambda)$ quand U parcourt les voisinages de $C_{\lambda,\sigma}$ définit une classe

$$\mathrm{Ch}_{\mathrm{sup}}(\sigma,\lambda) \in \mathcal{H}^{-\infty}_{C_{\lambda,\sigma}}(\mathfrak{k}, N),$$

où $\mathcal{H}^{-\infty}_{C_{\lambda,\sigma}}(\mathfrak{k}, N)$ est la limite projective du système projectif $(\mathcal{H}_U^{-\infty}(\mathfrak{k}, N))_{C_{\lambda,\sigma}\subset U}$.

• *L'image de $\mathrm{Ch}_{\mathrm{sup}}(\sigma,\lambda)$ dans $\mathcal{H}^{-\infty}_{\mathrm{supp}(\sigma)}(\mathfrak{k}, N)$ est égale à $\mathrm{Ch}_{\mathrm{sup}}(\sigma)$.*

• *Soit F un sous-ensemble fermé K-invariant de N. Pour $\tau \in [0,1]$, soit $\sigma_\tau : E^+ \to E^-$ une famille différentiable de morphismes lisses K-équivariants et λ_τ une famille différentiable de 1-formes K-invariantes telle que $C_{\lambda_\tau,\sigma_\tau} \subset F$ $\forall \tau \in [0,1]$. Alors toutes les classes $\mathrm{Ch}_{\mathrm{sup}}(\sigma_\tau,\lambda_\tau)$ coïncident dans $\mathcal{H}_F^{-\infty}(\mathfrak{k}, N)$.*

4.1.3 Déformation verticale

Définition 4.1.6. Lorsque $C_{\lambda,\sigma}$ est un sous-ensemble compact de N, on peut définir [66] :

$$\mathrm{Ch}_c(\sigma, \lambda) \in \mathcal{H}_c^{-\infty}(\mathfrak{k}, N)$$

comme l'image de $\mathrm{Ch}_{\mathrm{sup}}(\sigma, \lambda) \in \mathcal{H}^{-\infty}_{C_{\lambda,\sigma}}(\mathfrak{k}, N)$ dans $\mathcal{H}_c^{-\infty}(\mathfrak{k}, N)$. Un représentant de $\mathrm{Ch}_c(\sigma, \lambda)$ est alors donné par toute forme équivariante $c(\sigma, \lambda, \mathbb{A}, \chi)$ comme ci-dessus, avec χ à support compact.

La 1-forme de Liouville sur T^*M permet de définir par restriction une "1-forme de Liouville verticale". Plus précisément, fixons une métrique riemannienne $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur M. On décompose alors TM selon $TM = T^V M \bigoplus p^*TB$. Notons $\pi : T^*M \to M$ la projection, $j : T^*M \to T^V M^*$ l'application duale de l'inclusion $i : T^V M \hookrightarrow TM$ et $\phi : T^*M \to TM$ l'isomorphisme donné par la métrique sur M et $\phi_{|T^V M} : T^V M^* \to T^V M$ l'isomorphisme induit. Notons $r = \phi^{-1} \circ i \circ \phi_{|T^V M}$ et $k = r \circ j$. La 1-forme de Liouville ω sur T^*M est la 1-forme définie par $\langle \omega(\xi), \zeta \rangle = \langle \xi, T\pi(\zeta) \rangle$, où $\xi \in T^*M$, $\zeta \in T_\xi(T^*M)$ et $\pi : T^*M \to M$ est la projection. On revient maintenant, à notre cadre. Soit comme avant G un groupe de Lie et $p : M \to B$ une fibration G-équivariante de variétés compactes. On suppose que B est orientée.

Lemme 4.1.7. *Soit ω la 1-forme de Liouville sur T^*M. La 1-forme $k^*\omega$ est G-invariante et le sous-ensemble $C_{k^*\omega}$ de T^*M est égal à $C_\omega = T^*_G M$.*

Démonstration. La 1-forme $k^*\omega$ est G-invariante car k est G-équivariante. Soient $\xi \in T^*M$ et $v \in T_\xi(T^*M)$. On a :

$$\langle (k^*\omega)_\xi, v \rangle = \langle \omega_{k(\xi)}, T_\xi k(v) \rangle = \langle k(\xi), T_{k(\xi)}\pi \circ T_\xi k(v) \rangle.$$

De plus, on a l'égalité $\pi \circ k = \pi$ donc on obtient :

$$\langle k^*\omega, v \rangle = \langle k(\xi), T\pi(v) \rangle.$$

Maintenant, si $v = X^*_{T^*M}(\xi)$ est donné par un élément $X \in \mathfrak{g}$ alors $T\pi(v) = X^*_M(\pi(\xi))$ est un vecteur vertical, c'est-à-dire $T\pi(v) \in T^V_{\pi(\xi)}M$ donc $\langle k^*\omega, v \rangle = \langle \omega, X^*_{T^*M}(\xi) \rangle$ puisque la partie horizontale de ξ s'annule sur les vecteurs verticaux. On a donc bien que $C_{k^*\omega}$ est égale à C_ω. □

Corollaire 4.1.8. *Le caractère de Chern dans $\mathcal{H}_G^{-\infty}(\mathfrak{g}, T^*M)$ défini en utilisant la 1-forme de Liouville ω est égal au caractère de Chern défini en utilisant la 1-forme $k^*\omega$.*

Démonstration. Par le théorème 3.19 de [66], on sait que si $\sigma_\tau : E^+ \to E^-$ est une famille de morphismes lisses K-équivariants et λ_τ une famille de 1-formes K-invariantes tels que $C_{\lambda_\tau, \sigma_\tau} \subset F$, pour $\tau \in [0, 1]$ et F un sous-espace fermé de T^*M, alors toutes les classes $\mathrm{Ch}_{\mathrm{sup}}(\sigma_\tau, \lambda_\tau)$ coïncident dans $\mathcal{H}_F^{-\infty}(\mathfrak{k}, N)$. On prend pour σ_τ la famille de morphismes constante et pour λ_τ la famille de 1-formes : $\tau\omega + (1 - \tau)k^*\omega$. Remarquons que la famille λ_τ est G-équivariante. On a pour $v \in T_\xi(T^*M)$:

$$\langle \lambda_\tau, v \rangle = \tau \langle \xi, T\pi(v) \rangle + (1 - \tau)\langle k(\xi), T\pi(v) \rangle$$

donc si v est donné par un élément $X \in \mathfrak{g}$ alors $\langle \lambda_s, v \rangle = 0$ si $\xi \in T^*_G M$. On obtient que $C_{\lambda_\tau} = C_\omega = C_{k^*\omega}$, ce qui termine la preuve. □

Lemme 4.1.9. *Soit ω la 1-forme de Liouville sur T^*M. La 1-forme $r^*\omega$ est G-invariante et le sous-ensemble $C_{r^*\omega}$ de T^VM^* est égal à $T^V_GM^*$.*

Remarque 4.1.10. La forme $r^*\omega$ n'est autre que la restriction de ω à T^VM^* qu'on voit comme sous-variété de T^*M grâce à la métrique.

Démonstration. La 1-forme $r^*\omega$ est G-invariante car r est G-équivariante. Soit $\xi \in T^VM^*$. Soit $v \in T_\xi(T^VM^*)$. On a :

$$\langle r^*\omega, v\rangle = \langle \omega_{r(\xi)}, Tk(v)\rangle = \langle r(\xi), T\pi \circ Tr(v)\rangle = \langle \xi, T\pi(v)\rangle.$$

car r est l'inclusion de T^VM^* dans T^*M et $\pi \circ r$ est la projection π restreinte à T^VM^*. On en déduit que pour que l'application $f_{r^*\omega} : T^VM^* \to \mathfrak{g}^*$ soit nulle il faut que $\xi \in T^V_GM^*$. □

4.2 Formule de Berline-Vergne pour une famille G-transversalement elliptique

On va commencer par énoncer la formule cohomologique de Berline-Vergne-Paradan [67] pour un opérateur G-transversalement elliptique. On déduira de cette dernière, grâce à un produit de Kasparov, la formule pour une famille d'opérateurs G-transversalement elliptiques le long des fibres. On note ω_s la 1-forme de Liouville sur T^*M^s et on utilise les notations du chapitre précédent.

Théorème 4.2.1 ([67], Theorem 3.18)**.** *Soit σ un symbole G-transversalement elliptique sur une variété compacte M. Notons pour tout $s \in G$, N^s le fibré normal à M^s dans M. Il existe une fonction généralisée G-invariante sur G et une seule notée $\mathrm{Ind}^{G,M}_{coh}([\sigma])$, vérifiant les relations locales suivantes.*

$$\mathrm{Ind}^{G,M}_{coh}([\sigma])\|_s(Y) = (2i\pi)^{-\dim M^s} \int_{T^*M^s} \frac{\mathrm{Ch}_s(\mathbb{A}^{\omega_s}(\sigma), Y) \wedge \hat{A}^2(TM^s, Y)}{D(N^s, Y)},$$

$\forall s \in G$ et $\forall Y \in \mathfrak{g}(s)$ assez petit, de sorte que les classes équivariantes $\hat{A}^2(TM^s, Y)$ et $D(N^s, Y)$ soient définies. La fonction généralisée $\mathrm{Ind}^{G,M}_{coh}([\sigma])$ ne dépend que de la classe de σ dans $\mathrm{K_G}(T^*_GM)$.

De plus, on a le théorème suivant qui fait le lien avec l'indice analytique $\mathrm{Ind}^{G,M}_a$ d'Atiyah [1] :

Théorème 4.2.2 ([67], Theorem 4.1)**.** *Les formules précédentes définissent une application*

$$\mathrm{Ind}^{G,M}_{coh} : \mathrm{K_G}(T^*_GM) \to C^{-\infty}(G)^G$$

et on a :

$$\mathrm{Ind}^{G,M}_a = \mathrm{Ind}^{G,M}_{coh}.$$

Lemme 4.2.3. *Notons $j : T^*M \to T^VM^*$ la projection, $r : T^VM^* \hookrightarrow T^*M$ l'inclusion induite par la métrique et $p : M \to B$ la projection. Soient $\sigma \in \mathrm{K_G}(T^V_GM^*)$ et $\sigma' \in \mathrm{K}(T^*B)$. Notons E le super-fibré correspondant à σ et E' le super-fibré correspondant à σ'. On a l'égalité suivante dans $\mathcal{H}_G^{-\infty}(\mathfrak{g}, T^*M^s)$:*

$$\mathrm{Ch}_s(\mathbb{A}^{\omega_s}(\sigma \otimes p^*\sigma'), Y) = j^*\mathrm{Ch}_s(\mathbb{A}^{r^*\omega_s}(\sigma), Y) \wedge p^*\mathrm{Ch}(\sigma').$$

Dans ce lemme, on désigne par $\mathbb{A}^{\omega_s}$ la restriction d'une super-connexion $\mathbb{A}^{\omega}$ sur $E \otimes p^*E'$, par $\mathbb{A}^{r^*\omega_s}$ la restriction de $\mathbb{A}^{r^*\omega}(\sigma) = \mathbb{A} + i(v_\sigma + r^*\omega)$, où $\mathbb{A}$ est une super-connexion sur E et $\mathbb{A}(\sigma') = \mathbb{A}' + iv_{\sigma'}$ où $\mathbb{A}'$ est une super-connexion sur E'.

Démonstration. D'après le corollaire 4.1.8, on a l'égalité :

$$\mathrm{Ch}_s(\mathbb{A}^{\omega_s}(\sigma \otimes p^*\sigma'), Y) = \mathrm{Ch}_s(\mathbb{A}^{j^*r^*\omega_s}(\sigma \otimes p^*\sigma'), Y).$$

De plus, en considérant la super-connexion produit

$$\mathbb{B} = j^*\mathbb{A} \otimes 1 + 1 \otimes p^*\mathbb{A}',$$

on obtient :

$$\mathbb{A}^{j^*r^*\omega}(\sigma \otimes p^*\sigma) = j^*(\mathbb{A}^{r^*\omega}(\sigma) \otimes 1) + 1 \otimes p^*(\mathbb{A}'(\sigma')),$$

car $v_{\sigma\otimes p^*\sigma'} = v_\sigma \otimes 1 + 1 \otimes p^*v_{\sigma'}$. D'où l'égalité énoncée. □

Soit σ un symbole G-transversalement elliptique le long des fibres de la G-fibration compacte $p : M \to B$ avec B G-triviale. Nous avons défini dans le chapitre 2 le caractère de Chern de la classe indice $\mathrm{Ch}^{HL}(\mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}([\sigma]))$. De plus, nous l'avons identifié avec un élément $\mathrm{Ch}(\mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}([\sigma])) \in C^{-\infty}(G, H^{2\bullet}(B))^G$ dans le théorème 2.3.10. On peut restreindre un tel élément en utilisant les restrictions de fonctions généralisées car c'est un élément de $C^{-\infty}(G)^G \otimes H(B)$.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème principal de ce chapitre :

Théorème 4.2.4. *Soit σ un symbole G-transversalement elliptique le long des fibres de la G-fibration compacte $p : M \to B$ avec B orientée et G-triviale. Notons N^s le fibré normal à M^s dans M.*

1. *Il existe une fonction $\mathrm{Ind}^{G,M|B}_{coh} : \mathrm{K_G}(T^V_GM) \to C^{-\infty}(G, H(B))^G$ et une seule vérifiant les relations locales suivantes :*

$$\mathrm{Ind}^{G,M|B}_{coh}([\sigma])\|_s(Y) = (2i\pi)^{-\dim(M^s|B)} \int_{T^VM^s|B} \frac{\mathrm{Ch}_s(\mathbb{A}^{r^*\omega_s}(\sigma), Y) \wedge \hat{A}^2(T^VM^s, Y)}{D(N^s, Y)},$$

$\forall s \in G$, $\forall Y \in \mathfrak{g}(s)$ assez petit de sorte que les classes équivariantes $\hat{A}^2(T^VM^s, Y)$ et $D(N^s, Y)$ soient définies.

2. *De plus, on a la formule d'indice suivante :*

$$\mathrm{Ind}^{G,M|B}_{coh}([\sigma]) = \mathrm{Ch}(\mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}([\sigma])) \in C^{-\infty}(G, H(B))^G.$$

Dans la preuve de ce théorème, on va utiliser la même astuce que dans la section précédente, c'est-à-dire coupler la classe indice avec un opérateur elliptique sur la variété B. Plus précisément, on fait le produit de la classe indice par un opérateur elliptique sur B afin d'obtenir la classe indice d'un opérateur G-transversalement elliptique sur M. On utilise ensuite la puissance du caractère de Chern en homologie cyclique locale bivariante [70] et la formule de Berline-Vergne-Paradan [67] afin de déduire le résultat.

Démonstration. Rappelons que $G(s)$ désigne le centraliseur de s dans G et que $\mathfrak{g}(s)$ désigne son algèbre de Lie. On note $U_s(0) \subset \mathfrak{g}(s)$ un voisinage de 0, $G(s)$-invariant, tel que le $\hat{A}$-genre $\hat{A}(T^VM^s, Y)$ et $\dfrac{1}{D_s(N,Y)}$ soient bien définis sur $U_s(0)$. Notons n_s la dimension de M^s et n la dimension de B. D'après le théorème 2.3.10, on a $\mathrm{Ch}(\mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}([\sigma]))\|_s(Y) \in \mathcal{H}^{-\infty}_{G(s)}(U_s(0), B) \cong C^{-\infty}(U_s(0))^{G(s)} \otimes H(B)$. Pour déterminer $\mathrm{Ch}(\mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}([\sigma]))\|_s(Y)$ il suffit donc de le coupler avec l'homologie de de Rham de B. De plus, l'homologie de de Rham de B est engendrée par l'image du caractère de Chern de la K-homologie de B. Par le corollaire 2.3.9, on sait que le couplage de la classe indice d'une famille G-invariante, G-transversalement elliptique le long des fibres avec la K-homologie de B est représenté par un opérateur G-invariant, G-transversalement elliptique sur M. Soit σ' un symbole sur B alors on peut appliquer la formule de Berline-Vergne-Paradan [17] rappelée au théorème 4.2.1 ci-dessus au symbole G-transversalement elliptique $\sigma \otimes p^*\sigma'$, défini au lemme 2.3.6, on a :

$$\mathrm{Ind}^{G,M}_{coh}([\sigma \odot p^*\sigma'])\|_s(Y) = (2i\pi)^{-n_s} \int_{T^*M^s} \frac{\mathrm{Ch}_s(\mathbb{A}^{\omega_s}(\sigma \odot p^*\sigma'), Y) \wedge \hat{A}^2(TM^s, Y)}{D_s(N,Y)}.$$

Par le théorème 3.1.2 on sait que $TM^s \cong T^VM^s \oplus p^*TB$ et que N est vertical car l'action de G sur B est triviale. On a donc :

$$\hat{A}(TM^s, Y) = \hat{A}(T^VM^s, Y) \wedge p^*\hat{A}(TB).$$

De plus, on a $\mathrm{Ch}_s(\mathbb{A}^{\omega_s}([\sigma \odot p^*\sigma']), Y) = j^*\mathrm{Ch}_s(\mathbb{A}^{r^*\omega_s}([\sigma]), Y) \wedge p^*\mathrm{Ch}(\mathbb{A}([\sigma']))$, où $j : T^*M \to T^VM^*$. On obtient donc

$$\mathrm{Ind}^{G,M}_{coh}([\sigma \odot p^*\sigma'])(se^Y) = (2i\pi)^{-n_s} \int_{T^*M^s} \frac{j^*\mathrm{Ch}_s(\mathbb{A}^{r^*\omega_s}(\sigma), Y)\hat{A}^2(T^VM^s, Y)}{D_s(N,Y)} p^*\Big(\mathrm{Ch}(\mathbb{A}(\sigma'))\hat{A}^2(TB)\Big).$$

Comme B est orientée, il vient :

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ind}^{G,M}_{coh}([\sigma \odot p^*\sigma'])(se^Y)\\ &= \int_{b\in B} (2i\pi)^{-(n_s-n)} \int_{(TM_b)^s} \frac{\mathrm{Ch}_s(\mathbb{A}^{r^*\omega_s}([\sigma]), Y)\hat{A}^2(T^VM^s, Y)}{D_s(N,Y)} \int_{T_bB} (2i\pi)^{-n}\mathrm{Ch}(\mathbb{A}([\sigma']))\hat{A}^2(TB).\end{aligned}$$

Or, $\displaystyle\int_{TB|B}(2i\pi)^{-n}\mathrm{Ch}(\mathbb{A}([\sigma']))\hat{A}^2(TB) = PD(\mathrm{Ch}([P_{\sigma'}]))$ où $[P_{\sigma'}] \in \mathrm{KK}(C(B),\mathbb{C})$ et où $\mathrm{Ch}([P_{\sigma'}])$ est le caractère de Chern de $[P_{\sigma'}]$ en homologie de de Rham de B et PD est la dualité de Poincaré $H_\bullet(B,\mathbb{C}) \to H^\bullet(B,\mathbb{C})$. Donc par dualité de Poincaré, on obtient que

$$\mathrm{Ind}_{coh}^{G,M|B}([\sigma])\|_s(Y) = (2i\pi)^{-\dim(M^s|B)} \int_{T^V M^s|B} \frac{\mathrm{Ch}_s(\mathbb{A}^{r^*\omega_s}(\sigma),Y)\wedge \hat{A}^2(T^V M^s,Y)}{D(N^s,Y)},$$

définit un élément de $C^{-\infty}(G,H(B))^G = C^{-\infty}(G)^G \otimes H(B)$ puisque $\forall \sigma' \in \mathrm{K}(TB)$ les fonctions généralisées $(\mathrm{Ind}_{coh}^{G,M}(\sigma\otimes\sigma')\|_s)_s$ définissent un élément de $C^{-\infty}(G)^G$ d'après le théorème 3.18 de [67].
Par le théorème 2.3.8, on sait que

$$\mathrm{Ind}_a^{G,M}([\sigma \odot p^*\sigma']) = \mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}([\sigma]) \otimes_{C(B)} [P_{\sigma'}].$$

On désigne par $\mathrm{Ch}^{\mathrm{HL}}$ le caractère de Chern en homologie cyclique locale [70]. Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
C^{-\infty}(G,H(B,\mathbb{C}))^G \otimes H_*(B,\mathbb{C}) \arrow[r, "\langle\cdot,\cdot\rangle"] \arrow[d, hook] & C^{-\infty}(G)^G \arrow[d, hook] \\
\mathrm{Hom}(R(G)\otimes\mathbb{C}, H^*(B,\mathbb{C}))\otimes H_*(B,\mathbb{C}) \arrow[r, "\langle\cdot,\cdot\rangle"] \arrow[d, "\cong"'] & \mathrm{Hom}(R(G)\otimes\mathbb{C},\mathbb{C}) \arrow[d, "\cong"] \\
\mathrm{HL}(C^*G, C(B)) \otimes \mathrm{HL}(C(B),\mathbb{C}) \arrow[r, "\circ"] & \mathrm{HL}(C^*G,\mathbb{C}),
\end{tikzcd}$$

ce qui nous permet de déduire que le produit $\mathrm{Ch}^{\mathrm{HL}}(\mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}([\sigma]))\circ \mathrm{Ch}^{\mathrm{HL}}([P_{\sigma'}])$ devient via l'isomorphisme $\mathrm{HL}(C^*G,\mathbb{C}) \simeq \mathrm{Hom}(R(G)\otimes\mathbb{C},\mathbb{C})$:

$$\mathrm{Ch}^{\mathrm{HL}}(\mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}([\sigma]))\circ \mathrm{Ch}^{\mathrm{HL}}([P_{\sigma'}]) \cong \mathrm{Ind}_a^{G,M}([\sigma]\otimes p^*[\sigma'])$$

Maintenant, d'après le théorème 4.2.2 voir [67], on sait que $\mathrm{Ind}_a^{G,M} = \mathrm{Ind}_{coh}^{G,M}$. Donc

$$\mathrm{Ch}^{\mathrm{HL}}(\mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}([\sigma]))\circ \mathrm{Ch}^{\mathrm{HL}}([P_{\sigma'}]) \cong \mathrm{Ind}_{coh}^{G,M}([\sigma]\otimes p^*[\sigma']).$$

Comme $\mathrm{Ind}_{coh}^{G,M}([\sigma]\otimes p^*[\sigma']) = \langle \mathrm{Ind}_{coh}^{G,M|B}([\sigma]), PD(\mathrm{Ch}(P_{[\sigma']}))\rangle$, on obtient par dualité de Poincaré que

$$\mathrm{Ch}^{\mathrm{HL}}(\mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}([\sigma])) \simeq \mathrm{Ind}_{coh}^{G,M|B}([\sigma]).$$

En utilisant l'identification du théorème 2.3.10, il vient donc

$$\mathrm{Ch}(\mathrm{Ind}^{\mathrm{M|B}}([\sigma])) = \mathrm{Ind}_{coh}^{G,M|B}([\sigma]).$$

$\square$

Annexe A

Rappels Stellaires

Dans cette annexe, on rappelle les notions de C^*-algèbres, de modules de Hilbert et de bimodules de Kasparov.

A.1 C^*-algèbres

Les différents rappels faits dans cette section sont des définitions et résultats classiques, ils peuvent être trouvés par exemple dans [27] ou dans [77] (voir aussi [75]). On commence par rappeler la définition d'une C^*-algèbre.

Une algèbre involutive est une $\mathbb{C}$-algèbre A munie d'une involution $* : A \to A$. On rappelle que $*$ est une application anti-linéaire telle que $(xy)^* = y^*x^*$. On rappelle qu'une algèbre de Banach A est une algèbre munie d'une norme pour laquelle elle est complète (c'est-à-dire A un espace de Banach) vérifiant

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|, \ \forall x, y \in A.$$

Définition A.1.1. Une C^*-algèbre est une algèbre de Banach involutive dont la norme vérifie l'égalité suivante appelée C^*-équation :

$$\|x^*x\| = \|x\|^2,$$

$\forall x \in A$.

Exemple A.1.2.

— Soit H un espace de Hilbert. L'ensemble $\mathcal{L}(H)$ des opérateurs linéaires bornés sur H est une C^*-algèbre pour l'involution donnée par l'adjonction et la norme d'opérateur.

— L'ensemble des matrices carrées d'ordre n est donc une C^*-algèbre pour l'involution donnée par $M^* = {}^t\overline{M}$ et la norme subordonnée à la norme 2.

— Soit X un espace localement compact. L'ensemble $C_0(X)$ des fonctions continues sur X à valeurs dans $\mathbb{C}$ qui tendent vers 0 à l'infini est une C^*-algèbre pour la norme et l'involution données par

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)| \text{ et } f^*(x) = \overline{f(x)}.$$

Définition A.1.3. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de C^*-algèbres. Le produit de C^*-algèbres est défini par
$$\prod_{i\in I} A_i = \{(a_i) : \|(a_i)\| = \sup_{i\in I} \|a_i\| < \infty\}.$$
La somme directe de C^*-algèbres est définie par
$$\bigoplus_{i\in I} A_i = \{(a_i) : \lim_{i\to\infty} \|(a_i)\| = 0\},$$
où $\lim\limits_{i\to\infty} \|(a_i)\| = 0$ signifie que $\forall\varepsilon > 0$, $\exists J \subset I$ fini tel que $\forall i \notin J$ $\|a_i\| < \varepsilon$.

Remarque A.1.4.

1. La C^*-algèbre $\bigoplus\limits_{i\in I} A_i$ est l'adhérence de la somme directe algébrique dans le produit $\prod\limits_{i\in I} A_i$.
2. Toutes les C^*-algèbres de dimensions finies sont de la forme
$$A \cong \bigoplus_{i=1}^{n} M_{k_j}(\mathbb{C}).$$

Remarque A.1.5. Soit A une C^*-algèbre. Si A n'est pas unitaire alors $\tilde{A} = A \oplus \mathbb{C}$ est une C^*-algèbre unitaire pour le produit
$$(x \oplus t1)(y \oplus s1) = (xy + sx + ty) \oplus ts1,$$
et la norme
$$\|x \oplus t1\| = \sup_{\substack{z\in A\\ \|z\|\leq 1}} \|xy + ty\|, \ \forall x,\ y \in A \text{ et } s,\ t \in \mathbb{C}.$$

On dit que $\tilde{A}$ est l'algèbre obtenue par adjonction d'une unité.

Remarque A.1.6. La norme d'une C^*-algèbre A supposée unitaire est unique et est totalement déterminée par la relation
$$\|x\| = \sup\{t > 0 \ / \ x^*x - t^2 \notin A^\times\}$$
où $A^\times$ désigne l'ensemble des éléments inversibles de A.

Définition A.1.7. Soit A une C^*-algèbre supposée unitaire. Soit $a \in A$. On appelle spectre de a, noté $\mathrm{Spec}(a)$ ou encore $\sigma(a)$, l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $a - \lambda 1$ n'est pas inversible. On appelle rayon spectral $r(a)$ la valeur
$$r(a) = \sup_{\lambda\in\mathrm{Spec}(A)} |\lambda|.$$

Le rayon spectral est inférieur à la norme d'un élément, on a égalité si l'élément est normal.

Définition A.1.8. Soit A une C^*-algèbre et soit $a \in A$. On dit que

1. a est normal si $a^*a = aa^*$,
2. a est autoadjoint si $a^* = a$,

3. a est positif s'il existe $b \in A$ tel que $a = b^*b$,
4. a est unitaire si $a^*a = 1 = aa^*$.

On note A_+ l'ensemble des éléments positifs de A.

Il existe une relation d'ordre sur les éléments autoadjoints d'une C^*-algèbre A donnée par $a \leq b$ si et seulement si $b - a$ est un élément positif.

Propriété A.1.9. *Soit A une C^*-algèbre et soit $a \in A$.*

1. *Si a est autoadjoint alors* $\mathrm{Spec}(a) \subset \mathbb{R}$.
2. *Si a est positif alors* $\mathrm{Spec}(a) \subset \mathbb{R}_+$.
3. *Si a est unitaire alors* $\mathrm{Spec}(a) \subset S^1$.

Si a est normal alors ces conditions sont des équivalences.

Le théorème suivant permet de décrire les C^*-algèbres commutatives.

Théorème A.1.10 (Gelfand-Naimark)**.** *Soit A une C^*-algèbre commutative. Si A est unitaire alors A est isométriquement $*$-isomorphe à $C(X)$ pour X un espace compact. Si A n'est pas unitaire alors A est isométriquement $*$-isomorphe à $C_0(X)$ pour X un espace localement compact. De plus, si A est unitaire alors $X = \hat{A}$ est l'ensemble des caractères sur A, c'est-à-dire des morphismes d'algèbres unitaires, non nuls $\varphi : A \to \mathbb{C}$.*

Remarque A.1.11.

1. Si A n'est pas unitaire alors φ se prolonge en un morphisme unitaire à $\tilde{A}$.
2. Un morphisme de C^*-algèbre est automatiquement continu.

A.2 Modules de Hilbert

A.2.1 Définitions

Dans cette section, on va rappeler la notion de C^*-module de Hilbert. Nous aurons besoin de cette notion pour utiliser la KK-théorie de Kasparov. Pour plus de détails, on renvoie à [50], [77] et [75].

Définition A.2.1. Soit A une C^*-algèbre. Un A-module préhilbertien est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E qui est un A-module à droite muni d'une application sesquilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to A$ appelée produit scalaire à valeurs dans A satisfaisant les conditions suivantes :

1. $\lambda(xa) = (\lambda x)a = x(\lambda a)$ $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\forall x \in E$ et $a \in A$,
2. $\langle x, ya \rangle = \langle x, y \rangle a$ $\forall x, y \in E$ et $a \in A$,
3. $\langle x, y \rangle^* = \langle y, x \rangle$ $\forall x, y \in E$,
4. $\langle x, x \rangle \geq 0$ $\forall x \in E$.

Remarque A.2.2. 1. La condition 2 impose que le produit scalaire soit linéaire en la seconde variable et la condition 3 implique qu'il soit $*$-linéaire en la première variable. On utilisera cette convention pour les espaces de Hilbert classiques.
2. On définit de manière similaire les A-modules préhilbertiens avec une structure de A-module à gauche.

Soit E un A-module préhilbertien. Pour ce type de A-modules, il existe une version de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Proposition A.2.3. *Soit E un A-module préhilbertien. Soit $x, y \in E$ alors on a dans A :*

$$\langle x, y\rangle\langle y, x\rangle \leq \|\langle x, x\rangle\|\langle y, y\rangle.$$

Définition A.2.4. Soit E un A-module préhilbertien. On définit une semi-norme sur E en posant pour $x \in E$:

$$\|x\| = \|\langle x, x\rangle\|^{1/2}.$$

Un A-module de Hilbert est un A-module préhilbertien séparé complet.

Exemple A.2.5.
1. Si $A = \mathbb{C}$, on retrouve les espaces de Hilbert.
2. Si A est une C^*-algèbre alors c'est un A-module de Hilbert sur elle-même pour le produit scalaire suivant
$$\langle a, b\rangle = a^* b,\ \ a, b \in A.$$
3. Soit X un espace localement compact et soit E un fibré hermitien sur X. Alors l'espace des sections de E nulles à l'infini $C_0(X, E)$ est un $C_0(X)$-module de Hilbert pour le produit scalaire donné par la métrique hermitienne.
4. Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille de A-modules de Hilbert. On définit la somme hilbertienne $\mathcal{E} = \bigoplus\limits_{i\in I} E_i$ des E_i comme le sous-ensemble de $\prod\limits_{i\in I} E_i$ formé des éléments $(x_i)_{i\in I}$ tels que $\sum\limits_{i\in I}\langle x_i, x_i\rangle$ soit convergente dans A, muni du produit scalaire $\langle (x_i), (y_i)\rangle = \sum\limits_{i\in I}\langle x_i, y_i\rangle$.
5. Soit I un ensemble et soit E un A-module de Hilbert. Le A-module de Hilbert $\bigoplus\limits_{i\in I} E$ se note $l^2(I, E)$. On note $\mathcal{H}_E = l^2(\mathbb{N}, E)$.

Définition A.2.6. Soit E un A-module de Hilbert. On définit l'orthogonal $S^\perp$ d'une partie S de E comme le sous-module fermé de E donné par

$$S^\perp = \{y \in E,\ \forall x \in S,\ \langle x, y\rangle = 0\}.$$

Remarque A.2.7. Même si F est un sous-module fermé de E, on n'a pas nécessairement $E = F \oplus F^\perp$. En effet, soient X est un espace compact et Y est une partie fermée de X d'intérieur vide. Posons $E = A = C(X)$ et $F = \{f \in C(X)/f(t) = 0,\ \forall t \in Y\}$. Alors $F^\perp$ est l'ensemble des $f \in C(X)$ telles que $f(t) = 0$ si $t \in X \setminus Y$ donc $F^\perp = \{0\}$.

Définition A.2.8. Soient E un A-module de Hilbert et $F \subset E$ un sous-module fermé de E. Le sous-module F est dit orthocomplémenté si $E = F \oplus F^\perp$.

A.2.2 Morphismes de modules de Hilbert

Définition A.2.9. Soient E, F des A-modules de Hilbert. On dit qu'une application $T : E \to F$ est un morphisme de A-modules de Hilbert s'il existe une application $S : F \to E$ telle que

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Sy\rangle, \ \forall x \in E, \ y \in F.$$

L'application S est appelée adjoint de T et se note T^*. On note $\mathcal{L}_A(E, F)$ l'ensemble des morphismes de E dans F. On dira aussi opérateur adjoignable pour morphisme de A-modules de Hilbert. On note simplement $\mathcal{L}_A(E)$ ou $\mathcal{L}(E)$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté à la place de $\mathcal{L}_A(E, E)$.

Proposition A.2.10. *Soient E, F des A-modules de Hilbert. Soit $T \in \mathcal{L}_A(E, F)$*

1. *On a $T^* \in \mathcal{L}_A(F, E)$ et $(T^*)^* = T$.*
2. *L'opérateur T est A-linéaire et continu.*
   On a $\|T\| = \|T^*\|$ et $\|T\|^2 = \|T^*T\|$.
3. *Soient H un A-module de Hilbert et $S \in \mathcal{L}_A(F, H)$. Alors $ST \in \mathcal{L}_A(E, H)$ et $(ST)^* = T^*S^*$.*
4. *L'ensemble $\mathcal{L}_A(E, F)$ est un sous-espace vectoriel fermé de l'espace des applications linéaires bornées de E dans F vus comme espaces de Banach.*
5. *L'algèbre $\mathcal{L}_A(E)$ est une C^*-algèbre pour la norme d'opérateur.*

Proposition A.2.11. *Soit E un A-module de Hilbert.*

1. *Soient $S, \ T : E \to E$ des applications linéaires telles que pour tout $x \in E$ on ait $\langle x, Tx\rangle = \langle x, Sx\rangle^*$. Alors $T \in \mathcal{L}_A(E)$ et $T^* = S$.*
2. *Soient $T : E \to E$ une application linéaire telle que pour tout $x \in E$ on ait $\langle x, Tx\rangle = \langle x, Tx\rangle^*$. Alors $T \in \mathcal{L}_A(E)$ et $T^* = T$.*
3. *Si $T \in \mathcal{L}_A(E)_+$ est un élement positif alors $\forall x \in E$ on a $\langle x, Tx\rangle \in A_+$ est un élément positif de A et $\|T\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|\langle x, Tx\rangle\|$.*
4. *Réciproquement, soit $T : E \to E$ une application linéaire telle que pour tout $x \in E$ on ait que $\langle x, Tx\rangle \in A_+$ alors $T \in \mathcal{L}_A(E)_+$.*

Définition A.2.12. Soient E, F des A-modules de Hilbert. Soient $x \in F$, $y \in E$. Notons $\theta_{x,y} \in \mathcal{L}_A(E, F)$ l'opérateur défini par

$$\theta_{x,y}(z) = x\langle y, z\rangle, \ z \in E.$$

On définit l'ensemble des opérateurs compacts $k_A(E, F)$ de E dans F comme l'adhérence dans $\mathcal{L}_A(E, F)$ de l'espace vectoriel engendré par les applications $\theta_{x,y}$. On note $k_A(E) = k_A(E, E)$, ou plus simplement $k(E)$.

Exemple A.2.13.

1. Si $E = A$ alors $\mathcal{L}(A) \cong \mathcal{M}(A)$ où $\mathcal{M}(A)$ est l'algèbre des multiplicateurs de A et $k(A) \cong A$. Plus généralement, $\mathcal{L}_A(E) \cong \mathcal{M}(k_A(E))$.
2. Si E et F sont des A-modules de Hilbert alors $\mathcal{L}_A(E^n, F^m) \cong M_{m,n}(\mathcal{L}_A(E, F))$ et $k_A(E^n, F^m) \cong M_{m,n}(k_A(E, F))$.
3. Si $E = \mathcal{H}_A$ alors $k(\mathcal{H}_A) \cong A \otimes k(H)$, où H est un espace de Hilbert dénombrable.
4. Si $A = C(X)$,$E = C(X) \otimes H$ alors $\mathcal{L}_A(E) \cong C(X, \mathcal{L}(H))$, où $\mathcal{L}(H)$ est munie de la topologie $*$-forte et $k_A(E) = C(X, k(H))$, où $k(H)$ est munie de la topologie forte.

A.2.3 Quelques propriétés utiles sur les modules de Hilbert

On énonce maintenant le théorème de stabilisation de Kasparov qui permet de voir tout A-module de Hilbert dénombrablement engendré comme sous-module du A-module $\mathcal{H}_A$.

Théorème A.2.14 (stabilisation de Kasparov)**.** *Soit E un A-module hilbertien dénombrablement engendré. Alors les A-modules hilbertiens $\mathcal{H}_A$ et $E \oplus \mathcal{H}_A$ sont isomorphes.*

On rappelle la définition du produit tensoriel intérieur de module de Hilbert qui est utile dans le calcul de produit de Kasparov.

Proposition A.2.15. *Soient E un A-module de Hilbert, F un B-module de Hilbert et $\phi : A \to \mathcal{L}_B(F)$ un $*$-homomorphisme. Pour $x, y \in E$, $\xi, \eta \in F$ et $b \in B$ posons $(x \otimes \xi)b = x \otimes \xi b$ et $\langle x \otimes \xi, y \otimes \eta \rangle = \langle \xi, \phi(\langle x, y \rangle)\eta \rangle_F$. Muni de la structure de B-module à droite et de l'application sesquilinéaire ainsi définies, le produit tensoriel algébrique $E \otimes F$ est un B-module préhilbertien.*

Définition A.2.16. Soient E un A-module de Hilbert, F un B-module de Hilbert et $\phi : A \to \mathcal{L}_B(F)$ un $*$-homomorphisme. On définit le produit tensoriel intérieur de modules de Hilbert $E \otimes_\phi F$ comme le séparé complété de $E \otimes F$ pour le produit scalaire ci-dessus.

Proposition A.2.17. *Soit $T \in \mathcal{L}_A(E)$. On définit une application $T \otimes_\phi 1 \in \mathcal{L}_B(E \otimes_\phi F)$ par*

$$(T \otimes_\phi 1)(x \otimes_\phi y) = Tx \otimes_\phi y.$$

Cette application est alors bien définie, et est injective dès que ϕ l'est.

Remarque A.2.18. Si $\phi(A) \subset k_B(F)$ alors $k_A(E) \otimes_\phi 1 \subset k_B(E \otimes_\phi F)$.

A.3 Opérateurs réguliers entre modules de Hilbert

Dans cette partie, on rappelle la notion d'opérateurs non bornés entre modules de Hilbert. Cette notion sera utile pour définir des modules de Kasparov à partir d'opérateurs pseudodifférentiels d'ordre positif. Dans un premier temps, on va faire quelques rappels généraux sur les opérateurs non bornés. On renvoie à [75].

A.3.1 Rappels sur les opérateurs non bornés

On rappelle ici les différentes notions indispensables pour définir les opérateurs non bornés :

Soient E et F des espaces vectoriels. Rappelons les définitions classiques suivantes.

- Un opérateur $(T, \mathrm{dom}T)$ de E dans F est donné par un sous-espace vectoriel $\mathrm{dom}T \subset E$ appelé domaine de T et une application linéaire $T : \mathrm{dom}T \to F$. On notera parfois T un opérateur lorsque son domaine est clair.
- On appelle respectivement noyau et image d'un opérateur $(T, \mathrm{dom}T)$ le sous-espace $\ker T = \{x \in \mathrm{dom}T,\ Tx = 0\}$ et le sous-espace $\mathrm{im}T = T(\mathrm{dom}T)$ de F.

- Soit T un opérateur. Le graphe de T est le sous-espace $G(T) = \{(x, Tx),\ x \in \mathrm{dom}T\}$ de $E \times F$. Un opérateur est totalement défini par son graphe. Et si G est un sous-espace de $E \times F$ tels que $G \cap (\{0\} \times F) = \{0\}$ alors en notant $p_1 : G \to E$ et $p_2 : G \to F$ les projections, on définit un opérateur T en posant $\mathrm{dom}T = p_1(G)$ et $T(p_1(x)) = p_2(x)$, $\forall x \in G$.
- On appelle extension de l'opérateur T tout opérateur S tel que $G(T) \subset G(S)$. On écrit alors $T \subset S$.
- Soit G un espace vectoriel et soit S un opérateur de F dans G. On définit l'opérateur $S+T$ en posant $\mathrm{dom}(S+T) = \mathrm{dom}(S) \cap \mathrm{dom}(T)$, cette addition est commutative et associative. On définit l'opérateur ST en posant $\mathrm{dom}(ST) = \{x \in \mathrm{dom}(T),\ Tx \in \mathrm{dom}(S)\}$. De plus, si R est un autre opérateur de F vers G alors on a $(R+S)T = RT + ST$ mais si R et S sont des opérateurs de E dans F et que T est un opérateur de F dans G alors on a $TR + TS \subset T(R+S)$ et il n'y a pas égalité en général.
- Un opérateur T est dit injectif si $\ker T = \{0\}$. Si T est un opérateur injectif de E dans F alors l'ensemble $\{(x, y) \in F \times E,\ (x, y) \in G(T)\}$ est le graphe d'un opérateur T^{-1}, de domaine $\mathrm{im}(T)$, appelé inverse de T. L'opérateur T^{-1} est injectif et $(T^{-1})^{-1} = T$. Si T est injectif et que S est un opérateur injectif de F dans G alors ST est injectif et $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$.

Définition A.3.1. Soient E et F des espaces localement convexes séparés.

1. Un opérateur de E dans F est dit densément défini si son domaine est dense dans E.
2. Un opérateur de E dans F est dit fermé si son graphe est un sous-espace fermé de $E \times F$ et il est dit fermable s'il admet une extension fermée.

Soit S une extension fermée d'un opérateur T. On a $G(T) \subset G(S)$ donc $\overline{G(T)} \subset G(S)$. Donc un opérateur T est fermable si et seulement si $\overline{G(T)}$ est le graphe d'un opérateur. On appelle fermeture et on note $\overline{T}$ l'opérateur tel que $G(\overline{T}) = \overline{G(T)}$.

Définition A.3.2. Soit T un opérateur fermable. Un sous-espace D du domaine de T est appelé domaine essentiel pour T si les opérateurs $(T, \mathrm{dom}(T))$ et $(T_{|D}, D)$ ont même fermeture, c'est-à-dire D est dense dans $\mathrm{dom}T$ pour la topologie du graphe.

Proposition A.3.3. *Soit T un opérateur continu d'un espace vectoriel normé E dans un espace de Banach F. Alors T est fermable et sa fermeture est son prolongement par continuité à l'adhérence de son domaine. En particulier, pour qu'un opérateur continu de E dans F soit fermé, il faut et il suffit que son domaine soit fermé.*

On aborde maintenant le cadre des opérateurs non-bornés entre modules hilbertiens.

A.3.2 Opérateurs réguliers dans les modules de Hilbert

Définition A.3.4. Soit A une C^*-algèbre. Soient E et F des A-modules de Hilbert.

1. On dit qu'un opérateur de E dans F est A-linéaire, si son graphe est un sous-A-module de $E \oplus F$.

2. Soit T un opérateur de E dans F. Supposons que l'orthogonal dans E de dom$T$ soit réduit à $\{0\}$. On définit l'adjoint de T qui est un opérateur A-linéaire T^* de F dans E en posant
$$G(T^*) = \{(y, x) \in F \times E,\ \forall z \in \mathrm{dom}T,\ \langle x, z\rangle = \langle y, Tz\rangle\}.$$
Soit $U_0 \in \mathcal{L}_A(F \oplus E, E \oplus F)$ l'unitaire qui à $(y, x) \in F \oplus E$ associe $(x, -y) \in E \oplus F$. Le graphe $G(T^*)$ de T^* est l'orthogonal dans le A-module $F \oplus E$ de $U_0^* G(T)$.
3. Un opérateur T de E dans lui-même est dit autoadjoint si $T^* = T$.

Remarque A.3.5. L'adjoint T^* est A-linéaire et fermé par définition. Si l'orthogonal de dom$T$ est réduit à $\{0\}$ et l'orthogonal dans F de domT^* est réduit à $\{0\}$ alors $T \subset (T^*)^*$ donc T est fermable.

Proposition A.3.6. *Soient A une C^*-algèbre et E, F et G des A-modules de Hilbert.*

1. *Soient S et T des opérateurs de E dans F. Si* $(\mathrm{dom}T \cap \mathrm{dom}S)^\perp = \{0\}$ *alors $S^* + T^* \subset (S + T)^*$. Si $S \in \mathcal{L}_A(E, F)$ alors $(S + T)^* = S^* + T^*$.*
2. *Soit T un opérateur injectif de E dans F. Si les orthogonaux respectifs de* dom$T$ *dans E et de* im$T$ *dans F sont réduits à $\{0\}$ alors T^* est injectif et $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.*
3. *Soient T un opérateur de E dans F et S un opérateur de F dans G. Si les orthogonaux respectifs de* domST *dans E et de* dom$S$ *dans F sont réduits à $\{0\}$ alors $T^*S^* \subset (ST)^*$. Si $S \in \mathcal{L}_A(F, G)$ ou si T est l'inverse d'un opérateur borné injectif alors $T^*S^* = (ST)^*$.*

On donne maintenant la définition d'opérateur régulier entre A-modules de Hilbert.

Définition A.3.7. Soient A une C^*-algèbre, E et F des A-modules de Hilbert. un opérateur T de E dans F est dit régulier s'il est densément défini ainsi que son adjoint et si son graphe est un sous-module orthocomplémenté du A-module de Hilbert $E \oplus F$.

Proposition A.3.8. *Soient A une C^*-algèbre, E et F des A-modules de Hilbert et T un opérateur fermé de E dans F tel que l'orthogonal dans E de* dom$T$ *soit réduit à $\{0\}$. Notons $U_0 \in \mathcal{L}_A(F \oplus E, E \oplus F)$ l'unitaire qui à $(y, x) \in F \oplus E$ associe $(x, -y) \in E \oplus F$.*

1. *L'image de $(1 + T^*T)$ est $\{x \in E,\ (x, 0) \in G(T) + U_0 G(T^*)\}$. L'image de $(1 + TT^*)$ est $\{y \in F,\ (0, y) \in G(T) + U_0 G(T^*)\}$.*
2. *Si de plus T et T^* sont densément définis, les conditions suivantes sont équivalentes.*
   (i) L'image de $1 + T^*T$ est dense.
   (ii) $1 + T^*T$ est surjectif.
   (iii) $1 + TT^*$ est surjectif.
   (iv) Le graphe de T est un sous-module orthocomplémenté du A-module de Hilbert $E \oplus F$.
   Si T satisfait à ces conditions, il en va de même pour T^* et l'on a $(T^*)^* = T$.

Proposition A.3.9. *Soient A une C^*-algèbre, E, F et G des A-modules de Hilbert.*

1. *Soient $S \in \mathcal{L}_A(E, F)$ et T un opérateur régulier de E dans F alors $S + T$ est régulier.*
2. *Soient T un opérateur régulier de E dans F et $S \in \mathcal{L}_A(F, G)$ un opérateur borné inversible. L'opérateur ST est régulier.*
3. *Soient $T \in \mathcal{L}_A(E, F)$ un opérateur borné inversible et S un opérateur régulier de F dans G. L'opérateur ST est régulier.*

A.3.3 Transformation de Woronowicz

Théorème A.3.10. *Soit A une C^*-algèbre. Soient E et F des A-modules de Hilbert et T un opérateur régulier de E dans F. Notons $Q(T) = Q(1 + T^*T)^{-1/2}$.*

1. *On a $1 - Q(T)^*Q(T) = (1 + T^*T)^{-1}1$ et $Q(T^*) = Q(T)^*$.*
2. *La correspondance $T \mapsto Q(T)$ est une bijection entre l'ensemble des opérateurs fermés réguliers de E dans F et opérateurs $Q \in \mathcal{L}_A(E, F)$ tels que $\|Q\| \leq 1$ et que l'image de $(1 - Q^*Q)$ soit dense dans E. L'application réciproque est $Q \mapsto Q((1 - Q^*Q)^{1/2})^{-1}$.*

Annexe B

Rappels sur l'UCT

On commence par rappeler le formalisme autour du théorème des coefficients universels, entre autre la classe N ou "bootstrap" catégorie NC^*. Ensuite, on rappellera le théorème des coefficients universels (UCT) en KK-théorie [73], voir aussi [19].

Définition B.0.1. Une C^*-algèbre A est dite nucléaire quand, pour toute C^*-algèbre B, il n'y a qu'une C^*-nome sur le produit tensoriel algébrique $A \otimes B$.

Définition B.0.2. Soit N la plus petite classe de C^*-algèbres séparables nucléaires avec les propriétés suivantes :

(N1) N contient $\mathbb{C}$,

(N2) N est stable par limites inductives dénombrables,

(N3) si $0 \to A \to B \to C \to 0$ est une suite exacte et deux des termes sont dans N alors le troisième aussi,

(N4) N est stable par KK-équivalence.

La catégorie "bootstrap" NC^* est la catégorie dont les objets sont les C^*-algèbres dans N et les flèches sont les $\star$-homomorphismes.

On a un théorème utile permettant de décrire la classe N [76], ce théorème est une relecture de [73], voir aussi [19].

Théorème B.0.3. *[76] La classe N est la plus petite classe de C^*-algèbres nucléaires contenant les C^*-algèbres commutatives séparables et stables par* KK*-équivalence.*

Proposition B.0.4. *[19]*

1. *La classe N est stable par isomorphisme (par $(N4)$).*
2. *N contient toutes les C^*-algèbres commutatives séparables.*
3. *N est stable par produit tensoriel.*
4. *N est stable par produits croisés avec $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$.*
5. *N est stable par produits croisés avec tout groupe de Lie résoluble simplement connexe.*

On rappelle rapidement la notion de foncteur Ext_R^i.

Définition B.0.5. Soit R un anneau. La catégorie de tous les R-modules à gauche est une catégorie abélienne contenant assez d'objets injectifs. Si A est un R-module à gauche alors le foncteur $\mathrm{Hom}_R(A, \bullet)$ est exact à gauche et ses foncteurs dérivées à droites sont les foncteurs $\mathrm{Ext}_R^i(A, \bullet)$.

Théorème B.0.6 (Théorème des Coefficients Universels (UCT))**.** *[73] Soient A et B des C^*-algèbres séparables, avec $A \in N$. Il existe une suite exacte courte*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathrm{K}_*(A), \mathrm{K}_*(B)) \xrightarrow{\delta} \mathrm{KK}^*(A, B) \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Hom}(\mathrm{K}_*(A), \mathrm{K}_*(B)) \longrightarrow 0.$$

L'application γ est de degré 0 et δ est de degré 1.
La suite est naturelle en chaque variable et se scinde non naturellement. Donc si $\mathrm{K}_*(A)$ est libre ou si $\mathrm{K}_*(B)$ est divisible alors γ est un isomorphisme.

Démonstration. Voir [19] paragraphe 23.1. □

On note $\mathrm{HL}(A, B)$ l'homologie cyclique locale bivariante de la paire de C^*-algèbres (A, B) introduite par M. Puschnigg dans [70]. On a un analogue du théorème de coefficients universels en homologie cyclique locale [58].

Théorème B.0.7 (Théorème des Coefficients Universels)**.** *[58] Soient A et B des C^*-algèbres séparables satisfaisant le théorème de coefficients universels en* KK*-théorie. Alors il existe un isomorphisme naturel*

$$\mathrm{HL}_*(A, B) \simeq \mathrm{Hom}(\mathrm{HL}_*(A), \mathrm{HL}_*(B)) \simeq \mathrm{Hom}(\mathrm{K}_*(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}, \mathrm{K}_*(B) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C})$$

d'espaces vectoriels gradués.

Annexe C

Rappels d'analyse harmonique

Dans cette annexe, on va faire quelques rappels d'analyse harmonique non commutative [21]. Soient G un groupe de Lie compact et $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$. On note $\hat{G}$ l'ensemble des classes d'équivalences de représentations unitaires irréductibles de G. On note dg la mesure de Haar bi-invariante, normalisée sur G et $F(\hat{G})$ l'algèbre $\prod_{\pi \in \hat{G}} \mathrm{End}(V_\pi)$.

Définition-proposition C.0.1. Soit $L^2(\hat{G}) := \{(A_\pi)_{\pi \in \hat{G}} \in F(\hat{G}) / \sum_{\pi \in \hat{G}} \dim V_\pi \mathrm{Tr}(A_\pi^* A_\pi) < \infty\}$. L'espace $L^2(\hat{G})$ est alors un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle (A_\pi), (B_\pi) \rangle := \sum_{\pi \in \hat{G}} \dim V_\pi \mathrm{Tr}(A_\pi^* B_\pi).$$

Définition C.0.2. Soit $f \in L^1(G)$. On appelle coefficients de Fourier de f les endomorphismes

$$\pi(f) = \int_G f(g)\pi(g)dg$$

et cotransformation de Fourier l'application

$$\bar{\mathcal{F}} : L^1(G) \to F(\hat{G})$$

définie par

$$\bar{\mathcal{F}}(f) = (\pi(f))_{\pi \in \hat{G}}.$$

Théorème C.0.3 (Plancherel)**.** *La cotransformation de Fourier restreinte à $L^2(G)$ est une application linéaire isométrique.*

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence immédiate du théorème de Peter-Weyl. En effet, le théorème de Peter-Weyl nous dit que l'ensemble $\{\sqrt{\dim V_\pi} C_{e_i^\pi, e_j^\pi} / \pi \in \hat{G}, (e_i^\pi) \text{ base orthonormée de } V_\pi\}$ est une base orthonormée de $L^2(G)$. Un calcul direct montre alors que

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{L^2(G)} = \langle \bar{\mathcal{F}}(\varphi), \bar{\mathcal{F}}(\psi) \rangle_{L^2(\hat{G})}.$$

□

Définition C.0.4. Soit $A = (A_\pi) \in F(\hat{G})$. Pour tout $\pi \in \hat{G}$, on définit une fonction $\mathcal{F}_\pi(A)$ sur G par :

$$\mathcal{F}_\pi(A)(g) = \dim V_\pi \mathrm{Tr}(\pi(g)^* A_\pi).$$

Lemme C.0.5. *Les applications $\mathcal{F}_\pi(A)$ vérifient :*

$$\langle \mathcal{F}_\pi(A), \mathcal{F}_{\pi'}(A)\rangle = \dim V_\pi \mathrm{Tr}(A_\pi^* A_\pi)\delta_{\pi,\pi'}.$$

Démonstration. Notons $\pi(g)_{ki}$ et $(A_\pi)_{ki}$ les coefficients de $\pi(g)$ et A_π dans une base orthonormée et $\pi'(g)_{tj}$ et $(A_{\pi'})_{tj}$ les coefficients de $\pi'(g)$ et $A_{\pi'}$ dans une base orthonormée. On a alors

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}_\pi(A), \mathcal{F}_{\pi'}(A)\rangle &= \int_G \dim V_\pi \overline{\mathrm{Tr}(\pi(g)^* A_\pi)} \dim V_{\pi'} \mathrm{Tr}(\pi'(g)^* A_{\pi'}) dg \\
&= \dim V_\pi \dim V_{\pi'} \int_G \overline{\sum_{i,k} \overline{\pi(g)_{ki}} (A_\pi)_{ki}} \sum_{j,t} \overline{\pi'(g)_{tj}} (A_{\pi'})_{tj} dg \\
&= \dim V_\pi \dim V_{\pi'} \int_G \sum_{i,k} \pi(g)_{ki} \overline{(A_\pi)_{ki}} \sum_{j,t} \overline{\pi'(g)_{jt}} (A_{\pi'})_{tj} dg.
\end{aligned}$$

En appliquant le lemme de Schur, il vient :

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}_\pi(A), \mathcal{F}'_\pi(A)\rangle &= \dim V_\pi \dim V_{\pi'} \sum_{i,j,k,t} \frac{\delta_{kt}\delta_{ij}}{\dim V_\pi} \overline{(A_\pi)_{ki}} (A_\pi)_{tj} \delta_{\pi,\pi'} \\
&= \dim V_{\pi'} \sum_{i,t} \overline{(A_\pi)_{ti}} (A_\pi)_{ti} \delta_{\pi,\pi'} \\
&= \dim V_{\pi'} \mathrm{Tr}(A_\pi^* A_\pi)\delta_{\pi,\pi'}
\end{aligned}$$

□

Définition-proposition C.0.6. [21] Si $A \in L^2(\hat{G})$ alors la famille $(\mathcal{F}_\pi(A))$ est sommable dans $L^2(G)$. On appelle transformée de Fourier de A, et on note $\mathcal{F}(A)$, la somme de cette famille. Les applications $\mathcal{F}$ et $\bar{\mathcal{F}}$ sont des isomorphismes réciproques entre les espaces hilbertiens $L^2(G)$ et $L^2(\hat{G})$.

Soit B une forme bilinéaire symétrique négative, séparante et invariante par l'action adjointe sur $\mathfrak{g}$, il en existe car G est compact. On appelle élément de Casimir associé à B l'élément Γ du centre de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$ tel que pour toute base (e_i) de $\mathfrak{g}$ vérifiant $B(e_i, e_j) = -\delta_{ij}$, on ait $\Gamma = -\sum e_i^2$. Si V_π est une représentation irréductible alors Γ_{V_π} est une homothétie de rapport λ_π. Les nombres λ_π sont positifs et même strictement positifs si π n'est pas la représentation triviale.
Notons $\mathcal{S}(\hat{G})$ le sous-espace de $F(\hat{G})$ des éléments, tels que $\forall n \geq 1$:

$$\sup_{\pi \in \hat{G}} (1 + \lambda_\pi)^n \|A_\pi\| < \infty.$$

Le sous-espace $\mathcal{S}(\hat{G})$ ne dépend pas du choix du Casimir et est topologiquement isomorphe à $C^\infty(G)$ lorsqu'il est muni des semi-normes :

$$\|\varphi\|_n = \sup_{\pi \in \hat{G}} (1 + \lambda_\pi)^n \|\pi(\varphi)\|, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Une fonction à valeurs complexes f sur $\hat{G}$ est dite à croissance modérée s'il existe $n > 0$ tel que

$$\sup_{\pi \in \hat{G}} (1 + \lambda_\pi)^{-n} |f(\pi)| < \infty.$$

L'espace des fonctions à croissances modérées est noté $\mathcal{O}(\hat{G})$.

Proposition C.0.7 ([60])**.** *On définit une trace sur $C^\infty(G)$ en posant pour $f \in \mathcal{O}(\hat{G})$*

$$\tau_f(\varphi) = \sum_{\pi \in \hat{G}} \frac{1}{\dim V_\pi} \mathrm{Tr}(\pi(\varphi)) f(\pi).$$

De plus, l'application qui à $f \in \mathcal{O}(\hat{G})$ associe τ_f est injective.

On note $\tilde{\mathcal{S}}(\hat{G} \times \hat{G})$ le sous-espace de $\prod_{\pi, \pi' \in \hat{G}^2} \mathrm{Hom}(\mathrm{End}(V_{\pi'}), \mathrm{End}(V_\pi))$ formé des éléments $f = (f_{\pi,\pi'})_{\pi,\pi' \in \hat{G}}$ tels que $\forall n > 0$

$$\sup_{\pi, \pi'} (1 + \lambda_\pi + \lambda_{\pi'})^n \|f_{\pi,\pi'}\| < \infty,$$

c'est-à-dire

$$\|f\|_n < \infty, \ \forall n > 0$$

Proposition C.0.8. *L'espace $\tilde{\mathcal{S}}(\hat{G} \times \hat{G})$ est une algèbre pour le produit donné par*

$$(fg)_{\pi,\pi'} = \sum_{\pi''} f_{\pi,\pi''} g_{\pi'',\pi'}.$$

Démonstration. En effet, ce produit est bien défini car pour n assez grand, on sait que [] :

$$\sum_{\pi'' \in \hat{G}} (1 + \lambda_{\pi''})^{-n} < \infty$$

donc

$$\sum_{\pi'' \in \hat{G}} \|A_{\pi,\pi''} B_{\pi'',\pi'}\| \leq \sum_{\pi'' \in \hat{G}} (1 + \lambda_\pi + \lambda_{\pi''})^{-k} (1 + \lambda_{\pi'} + \lambda_{\pi''})^{n-k} \|A\|_k \|B\|_{n-k},$$

pour $0 < k < n$. L'inégalité précédente nous dit aussi que $fg \in \tilde{\mathcal{S}}(\hat{G} \times \hat{G})$.

□

Proposition C.0.9. *Soit $f \in \tilde{\mathcal{S}}(\hat{G} \times \hat{G})$. On définit un opérateur T_f sur $L^2(\hat{G})$ en posant :*

$$(T_f A)_\pi = \sum_{\pi' \in \hat{G}} f_{\pi,\pi'} A_{\pi'}.$$

Démonstration. Dans un premier temps, il faut vérifier que $(T_f A)_\pi$ a bien un sens. On a

$$\begin{aligned} \sum_{\pi' \in \hat{G}} \|f_{\pi,\pi'} A_{\pi'}\| &\leq \sum_{\pi' \in \hat{G}} \|f_{\pi,\pi'}\| \|A_{\pi'}\| \\ &\leq \sum_{\pi' \in \hat{G}} \|f_{\pi,\pi'}\|^{1/2} \|f_{\pi,\pi'}\|^{1/2} \|A_{\pi'}\|. \end{aligned}$$

Les applications $s(\pi') = \|f_{\pi,\pi'}\|^{1/2}$ et $s'(\pi') = \|f_{\pi,\pi'}\|^{1/2}\|A_{\pi'}\|$ sont de carré sommables. En effet,

$$\sum_{\pi'} \|f_{\pi,\pi'}\| \leq \|f_{\pi,\pi'}\|_n \sum_{\pi'} (1+\lambda_\pi+\lambda_{\pi'})^{-n},$$

et la dernière somme est finie pour n assez grand car $(1+\lambda_\pi+\lambda_{\pi'})^{-n} \leq (1+\lambda_{\pi'})^{-n}$ qui est sommable indépendamment de π. En particulier, s est de carré sommable et sa somme est bornée en π. L'application s' est de carré sommable car A est dans $L^2(\hat{G})$ et que $f_{\pi,\pi'}$ est bornée. Donc en appliquant Cauchy-Schwartz, il vient :

$$\|(T_f A)_\pi\| \quad \leq (\sum_{\pi'\in\hat{G}} \|f_{\pi,\pi'}\|)^{1/2} (\sum_{\pi''\in\hat{G}} \|f_{\pi,\pi''}\| \|A_{\pi''}\|^2)^{1/2}.$$

Maintenant, vérifions que $T_f A \in L^2(\hat{G})$. D'après ce qui précède, on a :

$$\|(T_f A)_\pi\|^2 \quad \leq \sum_{\pi'\in\hat{G}} \|f_{\pi,\pi'}\| (\sum_{\pi''\in\hat{G}} \|f_{\pi,\pi''}\| \|A_{\pi''}\|^2).$$

On a $\sum_{\pi'\in\hat{G}} \|f_{\pi,\pi'}\| \leq \|f\|_n \sum_{\pi,\pi'\in\hat{G}} (1+\lambda_\pi+\lambda_{\pi'})^{-n}$ donc $\sup_{\pi\in\hat{G}} \sum_{\pi'\in\hat{G}} \|f_{\pi,\pi'}\|$ a bien un sens. En sommant sur π, on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{\pi\in\hat{G}} \|(T_f A)_\pi\|^2 \quad &\leq \sup_{\pi\in\hat{G}} \sum_{\pi'\in\hat{G}} (\|f_{\pi,\pi'}\|) \sum_{\pi\in\hat{G}} (\sum_{\pi''\in\hat{G}} \|f_{\pi,\pi''}\| \|A_{\pi''}\|^2) \\ &\leq \sup_{\pi\in\hat{G}} \sum_{\pi'\in\hat{G}} (\|f_{\pi,\pi'}\|)^2 \sum_{\pi\in\hat{G}} \|A_{\pi''}\|^2\end{aligned}$$

qui est finie car $A \in L^2(\hat{G})$. □

Proposition C.0.10. *L'opérateur T_f défini précédemment pour $f \in \tilde{\mathcal{S}}(\hat{G}\times\hat{G})$ est un opérateur à trace.*

Démonstration. L'opérateur T_f s'écrit comme le produit de l'opérateur $T_{(1+\lambda)^{-N}}$ et de l'opérateur $T_{(1+\lambda)^N f}$, où $(1+\lambda)$ désigne l'élément diagonal $(1+\lambda_\pi\delta_{\pi,\pi'})_{\pi,\pi'\in\hat{G}}$ de $\prod_{\pi,\pi'\in\hat{G}^2} \mathrm{Hom}(\mathrm{End}(V_{\pi'}), \mathrm{End}(V_\pi))$. Ces deux opérateurs sont Hilbert-Schmidt pour N assez grand donc T_f est traçable. En effet, pour $T_{(1+\lambda)^{-N}}$, on a :

$$\sum_\pi \sum_{i,j=1}^{\dim\pi} \left\| (1+\lambda)^{-N} \frac{E_{ij}^\pi}{\sqrt{\dim V_\pi}} \right\|^2_{L^2(\hat{G})} \quad = \sum_\pi \dim V_\pi^2 (1+\lambda_\pi)^{-2N}.$$

On sait que $\dim V_\pi$ est à croissance modérée donc il existe $k > 0$ tel que

$$\sup_\pi \left((1+\lambda_\pi)^{-k} \dim V_\pi^2\right) < \infty,$$

il vient :

$$\sum_\pi \sum_{i,j=1}^{\dim\pi} \left\| (1+\lambda)^{-N} \frac{E_{ij}^\pi}{\sqrt{\dim V_\pi}} \right\|^2_{L^2(\hat{G})} \quad \leq \sup_\pi \left((1+\lambda_\pi)^{-k} \dim V_\pi^2\right) \sum_\pi \frac{1}{(1+\lambda_\pi)^{2N-k}}$$

qui est finie pour N assez grand donc $T_{(1+\lambda)^{-N}}$ est Hilbert-Schmidt. Pour $T_{(1+\lambda)^N f}$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{\pi}\sum_{i,j=1}^{\dim\pi}\|T_{(1+\lambda)^N f}\frac{E_{ij}^{\pi}}{\sqrt{\dim V_\pi}}\|_{L^2(\hat{G})}^2 &= \sum_{\pi}\sum_{i,j=1}^{\dim\pi}\sum_{\pi'}\frac{\dim V_{\pi'}}{\dim V_\pi}\langle(1+\lambda_{\pi'})^N f_{\pi',\pi}E_{ij}^{\pi},(1+\lambda_{\pi'})^N f_{\pi',\pi}E_{ij}^{\pi}\rangle\\ &\leq \sum_{\pi}\sum_{i,j=1}^{\dim\pi}\sum_{\pi'}\dim V_{\pi'}(1+\lambda_{\pi'})^{2N}\|f_{\pi',\pi}\|^2\\ &\leq \sum_{\pi,\pi'}(\dim V_\pi)^2\dim V_{\pi'}(1+\lambda)^{2N}\|f_{\pi,\pi'}\|^2.\end{aligned}$$

Et $(\dim V_\pi)^2 \dim V_{\pi'}$ est à croissance modérée donc $\exists k > 0$ tel que

$$\sup_{\pi,\pi'}\Big((1+\lambda_\pi+\lambda'_\pi)^{-k}\dim V_\pi^2\dim V_{\pi'}\Big) < \infty$$

donc $\forall m \geq 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}&\sum_{\pi}\sum_{i,j=1}^{\dim\pi}\left\|T_{(1+\lambda)^N f}\frac{E_{ij}^{\pi}}{\sqrt{\dim V_\pi}}\right\|_{L^2(\hat{G})}^2\\ &\leq \sup_{\pi,\pi'}\Big((1+\lambda_\pi+\lambda'_\pi)^{-k}\dim V_\pi^2\dim V_{\pi'}\Big)\|f_{\pi,\pi'}\|_{k+2N+m}\sum_{\pi,\pi'}(1+\lambda_\pi+\lambda_{\pi'})^{-m}\end{aligned}$$

qui est finie pour m assez grand. □

Définition C.0.11. On appelle T_f un opérateur intégral à noyau rapidement décroissant f. L'espace total $\mathcal{K}$ de tous les opérateurs T_f est une algèbre de Fréchet avec les semi-normes :

$$\|T_f\|_n = \sup_{\pi,\pi'\in\hat{G}}(1+\lambda_\pi+\lambda_{\pi'})^n\|f_{\pi,\pi'}\|,\ n \geq 0.$$

Annexe D

Superconnexions et Classes caractéristiques

Dans cette section, on rappelle les définitions des différentes classes caractéristiques utiles pour énoncer des formules de l'indice en cohomologie équivariante. L'ouvrage de référence utilisé ici est [12].

D.0.1 Super-espaces

Définition D.0.1. Un super-espace vectoriel E est un espace vectoriel $\mathbb{Z}_2$-gradué $E = E^+ \oplus E^-$ et une super-algèbre est une algèbre A dont l'espace vectoriel sous-jacent est $\mathbb{Z}_2$-gradué et telle que le produit respecte la $\mathbb{Z}_2$-graduation, c'est-à-dire $A_i \cdot A_j \subset A_{i+j}$, i, $j \in \mathbb{Z}_2$.

L'algèbre des endomorphismes d'un super-espace vectoriel E est une super-algèbre avec la graduation

$$\begin{aligned}\mathrm{End}^+(E) &= \mathrm{Hom}(E^+, E^+) \oplus \mathrm{Hom}(E^-, E^-),\\ \mathrm{End}^-(E) &= \mathrm{Hom}(E^+, E^-) \oplus \mathrm{Hom}(E^-, E^+).\end{aligned}$$

Définition D.0.2. Un super-fibré vectoriel sur une variété M est un fibré $E = E^+ \oplus E^-$, où E^+ et E^- sont deux fibrés vectoriels sur M. Donc la fibre de E est un super-espace vectoriel.

Dans un super-espace lorsqu'on fait commuter deux éléments homogènes a et b le signe $(-1)^{|a||b|}$ apparait, où $|a|$ désigne le degré de a. On note $[\cdot,\cdot]$ le super-commutateur défini par

$$[a, b] = ab - (-1)^{|a||b|} ba.$$

On a $[a, b] + (-1)^{|a||b|}[b, a] = 0$ et l'identité de Jacobi donnée par

$$(-1)^{|a||c|}[a, [b, c]] + (-1)^{|b||a|}[b, [c, a]] + (-1)^{|c||b|}[c, [a, b]] = 0.$$

Définition D.0.3. Une super-algèbre est dite super-commutative lorsque son super-commutateur est nul.

Exemple D.0.4. L'algèbre extérieur d'un espace vectoriel est super-commutative.

Définition D.0.5. Une super-trace sur une super-algèbre est une forme linéaire T satisfaisant $T([a,b]) = 0$.

Si $E = E^+ \oplus E^-$ et $F = F^+ \oplus F^-$ sont deux super-espaces alors leur produit tensoriel $E \otimes F$ est un super-espace pour la graduation

$$\begin{aligned}(E \otimes F)^+ &= E^+ \otimes F^+ \oplus E^- \otimes F^- \\ (E \otimes F)^- &= E^+ \otimes F^- \oplus E^- \otimes F^+.\end{aligned}$$

Si A et B sont des super-algèbres alors leur produit tensoriel $A \otimes B$ est la super-algèbre dont l'espace sous-jacent est le produit tensoriel gradué de A et B muni du produit défini par

$$(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) = (-1)^{|b_1||a_2|} a_1 a_2 \otimes b_1 b_2.$$

Ce produit est différent du produit usuel, il est parfois noté $A \hat{\otimes} B$ pour faire la distinction.

Définition D.0.6. On définit une super-trace sur $\mathrm{End}(E)$ par

$$\mathrm{Str}(\varphi) = \mathrm{Tr}_{E^+}(\varphi) - \mathrm{Tr}_{E^-}(\varphi).$$

Définition D.0.7. Soit A une super-algèbre super-commutative et E un super-espace vectoriel, on peut étendre la super-trace sur $\mathrm{End}(E)$ en posant

$$\mathrm{Str} : A \otimes \mathrm{End}(E) \to A,\ \mathrm{Str}(a \otimes \varphi) = a\mathrm{Str}(\varphi),\ \text{pour } a \in A \text{ et } \varphi \in \mathrm{End}(E).$$

Proposition D.0.8. *L'extension* $\mathrm{Str} : A \otimes \mathrm{End}(E) \to A$ *définie ci-dessus, s'annule sur les super-commutateurs.*

Démonstration. Soient $a \otimes \varphi$ et $b \otimes \psi$. Montrons que $\mathrm{Str}[a \otimes \varphi, b \otimes \psi] = 0$. On a

$$\begin{aligned}[][a \otimes \varphi, b \otimes \psi] &= (a \otimes \varphi)(b \otimes \psi) - (-1)^{(|a|+|\varphi|)(|b+|\psi|)}(b \otimes \psi)(a \otimes \varphi) \\ &= (-1)^{|b||\varphi|} ab \otimes \varphi\psi - (-1)^{|a||b|+|a||\psi|+|\varphi||b|+|\varphi||\psi|}(-1)^{|\psi||a|} ba \otimes \psi\varphi \\ &= (-1)^{|\varphi||b|} ab \otimes [\varphi, \psi],\end{aligned}$$

car $ba = (-1)^{|a||b|}ab$. On a donc $\mathrm{Str}[a \otimes \varphi, b \otimes \psi] = (-1)^{|\varphi||b|} ab\mathrm{Str}[\varphi, \psi] = 0$. □

D.0.2 Super-connexions

Soit M une variété et $E = E^+ \oplus E^-$ un super-fibré sur M. Soit $\mathcal{A}(M,E)$ l'espace des formes différentielles sur M à valeurs dans E, c'est-à-dire l'ensemble des sections du fibré $\bigwedge^* T^*M \otimes E$. Cet espace est $\mathbb{Z}$-gradué par le degré des formes, on note la composante de degré extérieur $[i]$ de $\alpha \in \mathcal{A}(M,E)$ par $\alpha_{[i]}$. On a une $\mathbb{Z}_2$-graduation totale donnée par

$$\mathcal{A}(M,E) = \mathcal{A}^+(M,E) \oplus \mathcal{A}^-(M,E),$$

où $\mathcal{A}^+(M,E) = \Big(\bigoplus_i \mathcal{A}^{2i}(M,E^+)\Big) \oplus \Big(\bigoplus_i \mathcal{A}^{2i+1}(M,E^-)\Big)$ et $\mathcal{A}^-(M,E) = \Big(\bigoplus_i \mathcal{A}^{2i}(M,E^-)\Big) \oplus \Big(\bigoplus_i \mathcal{A}^{2i+1}(M,E^+)\Big)$.

Si $\mathfrak{g}$ est un fibré de super-algèbres de Lie sur M, alors $\mathcal{A}(M,\mathfrak{g})$ est une super-algèbre de Lie par rapport au super-crochet de Lie donné par

$$[\alpha_1 \otimes X_1, \alpha_2 \otimes X_2] = (-1)^{|X_1|\cdot|\alpha_1|}(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \otimes [X_1, X_2],$$

$\forall \alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathcal{A}(M)$ et $\forall X_1,\ X_2 \in C^\infty(M,\mathfrak{g})$.

Si E est un super-fibré de modules pour $\mathfrak{g}$, en notant ρ l'action alors $\mathcal{A}(M,E)$ est un super-module pour $\mathcal{A}(M,\mathfrak{g})$ pour l'action

$$\rho(\alpha \otimes X)(\beta \otimes v) = (-1)^{|X|\cdot|\beta|}(\alpha \wedge \beta) \otimes (\rho(X)v).$$

En particulier, cette construction s'applique au fibré de super-algèbres de Lie $\mathrm{End}(E)$. Puisque $\bigwedge T^*M \otimes E$ est un fibré de modules pour la super-algèbre $\bigwedge T^*M \otimes \mathrm{End}(E)$, on obtient que $\mathcal{A}(M,\mathrm{End}(E))$ est une super-algèbre de Lie pour le super-module $\mathcal{A}(M,E)$. Un opérateur différentiel sur $\mathcal{A}(M,E)$ qui super-commute avec l'action de $\mathcal{A}(M)$ est donné par l'action d'un élément de $\mathcal{A}(M,\mathrm{End}(E))$, un tel opérateur est dit local.

Définition D.0.9. Une super-connexion sur E est un opérateur différentiel impair du premier ordre :

$$\mathbb{A} : \mathcal{A}^\pm(M,E) \to \mathcal{A}^\mp(M,E),$$

qui satisfait la règle de Leibniz $\mathbb{Z}_2$-gradué :

$$\mathbb{A}(\alpha \otimes \theta) = d\alpha \wedge \theta + (-1)^{|\alpha|}\alpha \wedge \mathbb{A}\theta,$$

pour $\alpha \in \mathcal{A}(M)$ et $\theta \in \mathcal{A}(M,E)$.

Soit $\mathbb{A}$ une super-connexion sur E. Alors $\mathbb{A}$ peut être étendue en une super-connexion sur $\mathrm{End}(E)$ par la formule :

$$\mathbb{A}\alpha = [\mathbb{A}, \alpha],$$

où $\alpha \in \mathcal{A}\Big(M, \mathrm{End}(E)\Big)$. Notons par exemple que $\mathbb{A}\alpha$ est bien un élément de $\mathcal{A}(M,\mathrm{End}(E))$. Soient en effet $\beta \in \mathcal{A}(M)$ et $\gamma \in \mathcal{A}(M,E)$, alors on a

$$\begin{aligned}
[\mathbb{A},\alpha](\beta\gamma) &= \mathbb{A}(\alpha\beta\gamma) - (-1)^{|\alpha|}\alpha\mathbb{A}(\beta\gamma) \\
&= \mathbb{A}\Big((-1)^{|\alpha||\beta|}\beta\alpha\gamma\Big) - (-1)^{|\alpha|}\Big(\alpha d\beta\gamma + (-1)^{|\beta|}\alpha\beta\mathbb{A}(\gamma)\Big) \\
&= (-1)^{|\alpha||\beta|}\Big(d\beta\alpha\gamma + (-1)^{|\beta|}\beta\mathbb{A}(\alpha\gamma)\Big) - (-1)^{|\alpha|}\Big(\alpha d\beta\gamma + (-1)^{|\beta|}\alpha\beta\mathbb{A}(\gamma)\Big) \\
&= (-1)^{|\alpha||\beta|}\Big((-1)^{|\alpha|(|\beta|+1)}\alpha d\beta\gamma + (-1)^{|\beta|}\beta\mathbb{A}(\alpha\gamma)\Big) - (-1)^{|\alpha|}\Big(\alpha d\beta\gamma + (-1)^{|\beta|}\alpha\beta\mathbb{A}(\gamma)\Big) \\
&= (-1)^{|\alpha||\beta|}(-1)^{|\beta|}\Big(\beta\mathbb{A}(\alpha\gamma) - (-1)^{|\alpha|}\beta\alpha\mathbb{A}(\gamma)\Big) \\
&= (-1)^{|\alpha||\beta|}(-1)^{|\beta|}\beta\Big(\mathbb{A}(\alpha\gamma) - (-1)^{|\alpha|}\alpha\mathbb{A}(\gamma)\Big) \\
&= (-1)^{|\alpha||\beta|}(-1)^{|\beta|}\beta[\mathbb{A},\alpha](\gamma) \\
&= (-1)^{|\alpha||\beta|+|\beta|}\beta[\mathbb{A},\alpha](\gamma),
\end{aligned}$$

ce qui prouve que $[\mathbb{A},\alpha]$ commute avec le produit extérieur par les formes différentielles sur M.

Définition D.0.10. On définit la courbure de la super-connexion $\mathbb{A}$ comme l'opérateur $F_{\mathbb{A}} = \mathbb{A} \circ \mathbb{A} = \mathbb{A}^2$ sur $\mathcal{A}(M,E)$. On notera souvent F pour $F_{\mathbb{A}}$

Proposition D.0.11. *La courbure F est un opérateur local qui est donné par l'action d'une forme différentielle $F \in \mathcal{A}(M, \mathrm{End}(E))$ de degré total pair. De plus, $\mathbb{A}$ satisfait l'identité de Bianchi $\mathbb{A}F = 0$.*

Démonstration. Le degré total de $\mathbb{A}^2$ est pair car on change deux fois la graduation totale.
Montrons que l'opérateur $\mathbb{A}^2$ commute avec la multiplication par les formes $\alpha \in \mathcal{A}(M)$. Notons $\varepsilon(\alpha)$ l'opérateur de multiplication par α. On a :

$$\begin{aligned}
[\mathbb{A}^2, \varepsilon(\alpha)] &= \mathbb{A}^2\varepsilon(\alpha) - (-1)^{2|\alpha|}\varepsilon(\alpha)\mathbb{A}^2 \\
&= \mathbb{A}\varepsilon(d\alpha) - (-1)^{|\alpha|}\mathbb{A}\varepsilon(\alpha)\mathbb{A} - \varepsilon(\alpha)\mathbb{A}^2 \\
&= \varepsilon(d^2\alpha) - (-1)^{|\alpha|+1}\varepsilon(d\alpha)\mathbb{A} - (-1)^{|\alpha|}\varepsilon(d\alpha)\mathbb{A} + (-1)^{|\alpha|}(-1)^{|\alpha|}\varepsilon(\alpha)\mathbb{A}^2 - \varepsilon(\alpha)\mathbb{A} \\
&= \varepsilon(d^2\alpha) = 0.
\end{aligned}$$

Donc l'action sur la partie forme et l'action sur les sections de E données par $\mathbb{A}^2$ commutent. Donc l'action de $\mathbb{A}^2$ est bien donnée par l'action d'une forme $F \in \mathcal{A}(M, \mathrm{End}(E))$.
L'identité de Bianchi se vérifie facilement puisque $\mathbb{A}F = [\mathbb{A}, \mathbb{A}^2] = 0$. □

Lemme D.0.12. *Une super-connexion est totalement déterminée par son action sur $C^\infty(M,E)$.*

Remarque D.0.13. Ainsi, $\mathbb{A}$ est totalement déterminée par sa restriction $\mathbb{A} : C^\infty(M, E^\pm) \to \mathcal{A}^\mp(M,E)$ qui satisfait la règle de Leibniz

$$\mathbb{A}(f \cdot S) = df \cdot S + f \cdot \mathbb{A}s,$$

où $f \in C^\infty(M)$ et $s \in C^\infty(M,E)$.

Démonstration. On pose simplement

$$\mathbb{A}(\alpha \otimes s) = d\alpha \otimes s + (-1)^{|\alpha|}\alpha \otimes \mathbb{A}s, \ \alpha \in \mathcal{A}(M), \ s \in C^\infty(M,E).$$

□

Proposition D.0.14. *On peut décomposer une super-connexion $\mathbb{A}$ en ses composantes homogènes $\mathbb{A}_{[i]}$ qui envoient $C^\infty(M,E)$ dans $\mathcal{A}^i(M,E)$. On a alors $\mathbb{A} = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{A}_{[i]}$.*

1. *La composante homogène de degré 1, $\mathbb{A}_{[1]}$ est une connexion sur E qui préserve les sous-fibrés E^+ et E^-.*
2. *Les opérateurs $\mathbb{A}_{[i]}$, $i \neq 1$, sont donnés par l'action de formes différentielles $\omega_{[i]} \in \mathcal{A}^i(M, \mathrm{End}(E))$ sur $\mathcal{A}(M,E)$. On a $\omega_{[i]} \in \mathcal{A}(M, \mathrm{End}^-(E))$ si i pair et $\omega_{[i]} \in \mathcal{A}(M, \mathrm{End}^+(E))$ si i impair.*

Démonstration. 1. Par la règle de Leibniz, on a $\mathbb{A}(fs) = df \otimes s + f \sum_{i=0}^{n} \mathbb{A}s$. Donc $\mathbb{A}_{[1]}$ est une connexion (augmente le degré de la forme de 1 et vérifie la règle de Leibniz). De plus, $\mathbb{A}_{[1]}$ préserve la graduation de E donc est la somme directe d'une connexion sur E^+ et d'une connexion sur E^-.

2. Pour $i \neq 1$, on a $\mathbb{A}_{[i]}(fs) = f\mathbb{A}_{[i]}s$ donc l'action de $\mathbb{A}_{[i]}$ sur une section de E est donnée par une forme différentielle $\omega_{[i]} \in \mathcal{A}^i(M,E)$. De plus l'action de $\mathbb{A}$ et de $\mathbb{A}_{[1]} + \sum\limits_{i\neq 1} \omega_{[i]}$ coïncident sur $C^\infty(M,E)$ et vérifient la règle de Leibniz donc sont égaux.

□

Corollaire D.0.15. *L'espace des super-connexions est un espace affine modelé sur l'espace vectoriel $\mathcal{A}^-(M, \mathrm{End}(E))$. Donc si $\mathbb{A}_s$ est une famille à un paramètre de super-connexions alors $d\mathbb{A}_s/ds$ est un élément de $\mathcal{A}^-(M, \mathrm{End}(E))$.*

Démonstration. L'espace des connexions est un espace affine modelé sur $\mathcal{A}^1(M, \mathrm{End}(E))$, on obtient donc le corollaire en appliquant la proposition précédente. La deuxième partie du corollaire est claire car la dérivée par rapport à s de la famille de super-connexions est la limite (pour la topologie naturelle de $C^\infty(M, \bigwedge T^*M \otimes \mathrm{End}(E))$) de $(\mathbb{A}_{s+h} - \mathbb{A}_s)/h$ quand h tend vers 0, c'est donc bien un élément de $\mathcal{A}^-(M, \mathrm{End}(E))$. □

Exemple D.0.16. Si $\psi \in C^\infty(M, \mathrm{End}^-(E))$ et $\nabla = \nabla^{E^+} + \nabla^{E^-}$ est une connexion sur E qui préserve la graduation de E alors on peut définir une super-connexion sur E par $\mathbb{A} = \psi + \nabla$. Relativement au scindage $E = E^+ \oplus E^-$, on a $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \nabla^{E^+} & \psi^- \\ \psi^+ & \nabla^{E^+} \end{pmatrix}$ donc la courbure $F = \mathbb{A}^2 = \begin{pmatrix} (\nabla^{E^+})^2 + \psi^-\psi^+ & \nabla^{E^+}\psi^- + \psi^-\nabla^{E^-} \\ \nabla^{E^-}\psi^+ + \psi^+\nabla^{E^+} & (\nabla^{E^-})^2 + \psi^+\psi^- \end{pmatrix}$

Remarque D.0.17.

1. Si E et F sont deux super-fibrés alors $E \otimes F$ est un super-fibré gradué par :
$$\begin{array}{rcl} (E\otimes F)^+ & = & E^+ \otimes F^+ \oplus E^- \otimes F^-, \\ (E\otimes F)^- & = & E^+ \otimes F^- \oplus E^- \otimes F^+. \end{array}$$
Si $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ sont respectivement des super-connexions sur E et F alors on définit une super-connexion $\mathbb{A} \otimes 1 + 1 \otimes \mathbb{B}$ sur $E \otimes F$ par la formule
$$(\mathbb{A} \otimes 1 + 1 \otimes \mathbb{B})(\alpha \wedge \beta) = \mathbb{A}\alpha \wedge \beta + (-1)^{|\alpha|}\alpha \wedge \mathbb{B}\beta,$$
pour $\alpha \in \mathcal{A}(M,E)$ et $\beta \in \mathcal{A}(M,F)$.
2. Si $\phi : M \to N$ est une application lisse entre deux variétés et si E est un super-fibré sur N muni d'une super-connexion $\mathbb{A}$ alors il existe une unique super-connexion $\phi^*\mathbb{A}$ sur ϕ^*E telle que $\phi^*\mathbb{A}(\phi^*\alpha) = \phi^*(\mathbb{A}\alpha)$ pour tout $\alpha \in \mathcal{A}(N,E)$, appelée le tiré en arrière de $\mathbb{A}$ par ϕ.

D.0.3 Classes caractéristiques

Soient M une variété et E un super-fibré sur M. On va définir les classes caractéristiques d'un super-fibré. Soit $\mathbb{A}$ une super-connexion sur E.
Sur le fibré des endomorphismes de E, on a une super-trace définie fibre par fibre
$$\mathrm{Str}_x : \mathrm{End}(E)_x \to \mathbb{C},$$

par $\mathrm{Str}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \mathrm{Tr}(a) - \mathrm{Tr}(d)$.
Comme $\bigwedge T_x^*M$ est une algèbre super-commutative, on peut étendre la Str_x à $\bigwedge T_x^*M \otimes \mathrm{End}(E)_x$ en une super-trace

$$\bigwedge T_x^*M \otimes \mathrm{End}(E)_x \to \bigwedge T_x^*M.$$

En passant au section, on obtient :

Définition D.0.18. On définit une super-trace sur $\mathcal{A}(M, \mathrm{End}(E))$ à valeurs dans $\mathcal{A}(M)$ à l'aide de la super-trace précédente, par la formule

$$\mathrm{Str}(\alpha \otimes \varphi) = \alpha\ \mathrm{Str}\varphi,$$

pour $\alpha \in \mathcal{A}(M)$ et $\varphi \in C^\infty(M, \mathrm{End}(E))$. Cette super-trace préserve la $\mathbb{Z}_2$-graduation car

$$\mathcal{A}^{\pm}(M, \mathrm{End}(E)) = \bigoplus \mathcal{A}^{2p}(M, \mathrm{End}(E)^{\pm}) \oplus \bigoplus \mathcal{A}^{2p+1}(M, \mathrm{End}(E)^{\mp})$$

et les parties provenant de $\mathrm{End}(E)^-$ ont une trace nulle.

Définition D.0.19. Soit $f(X) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^k(0)}{k!} X^k$ un polynôme en X. Soit $\mathbb{A}^2 \in \mathcal{A}(M, \mathrm{End}(E))$ la courbure de la super-connexion $\mathbb{A}$ sur E. On définit $f(\mathbb{A}^2)$ par la formule :

$$f(\mathbb{A}^2) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^k(0)}{k!} (\mathbb{A}^2)^k.$$

On appelle forme caractéristique de E sur M les formes différentielles $\alpha \in \mathcal{A}(M)$ de la forme

$$\mathrm{Str} f(\mathbb{A}^2), \text{pour une super-connexion } \mathbb{A} \text{ sur E.}$$

Lemme D.0.20. *Si* $\alpha \in \mathcal{A}(M, \mathrm{End}(E))$ *alors* $d\mathrm{Str}(\alpha) = \mathrm{Str}([\mathbb{A}, \alpha])$.

Démonstration. En coordonnées locales sur un ouvert trivialisant E, la super-connexion $\mathbb{A}$ s'écrit $d + \omega$ avec $\omega \in \mathcal{A}^-(M, \mathrm{End}(E))$. On a $d\mathrm{Str}(\alpha) = \mathrm{Str}(d\alpha)$ et $\mathrm{Str}[\mathbb{A}, \alpha] = \mathrm{Str}[d, \alpha] + \mathrm{Str}[\omega, \alpha]$ et $\mathrm{Str}[\omega, \alpha] = 0$ car la super-trace s'annule sur les super-commutateurs.
Donc $\mathrm{Str}[\mathbb{A}, \alpha] = \mathrm{Str}[d, \alpha] = \mathrm{Str}(d\alpha) = d\mathrm{Str}(\alpha)$. □

Proposition D.0.21. *Soit f un polynôme. La forme différentielle* $\mathrm{Str}(f(\mathbb{A}^2))$ *est une forme différentielle fermée de degré pair.*

Démonstration. Comme $f(\mathbb{A}^2)$ est de degré pair puisque c'est une somme de puissances de $\mathbb{A}^2$ qui est de degré pair et que la super-trace préserve la $\mathbb{Z}^2$-graduation, on obtient que $\mathrm{Str}(f(\mathbb{A}^2))$ est de degré pair. Montrons que $f(\mathbb{A}^2)$ est une forme fermée.
Par le lemme précédent appliqué à la forme $\alpha = f(\mathbb{A}^2)$, on a $d\mathrm{Str}(f(\mathbb{A}^2)) = \mathrm{Str}[\mathbb{A}, f(\mathbb{A}^2)] = 0$ car $[\mathbb{A}, f(\mathbb{A}^2)] = \mathbb{A} f(\mathbb{A}^2) - f(\mathbb{A}^2)\mathbb{A} = 0$. □

Lemme D.0.22. *Soit $\mathbb{A}_t$ une famille à un paramètre de super-connexions dérivables par rapport à t. On a alors* $\frac{d\mathbb{A}_t^2}{dt} = \left[\mathbb{A}_t, \frac{d\mathbb{A}_t}{dt}\right]$.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbb{A}_t^2}{dt} &= \lim_{h\to 0}\frac{\mathbb{A}_{t+h}^2-\mathbb{A}_t^2}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\mathbb{A}_{t+h}^2-\mathbb{A}_{t+h}\mathbb{A}_t+\mathbb{A}_{t+h}\mathbb{A}_t-\mathbb{A}_t^2}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\mathbb{A}_{t+h}(\mathbb{A}_{t+h}-\mathbb{A}_t)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{(\mathbb{A}_{t+h}-\mathbb{A}_t)\mathbb{A}_t}{h}\\
&= [\mathbb{A}_t,\frac{d\mathbb{A}_t}{dt}],
\end{aligned}$$

car $\mathbb{A}_t$ et $\dfrac{d\mathbb{A}_t}{dt}$ sont impairs. □

Lemme D.0.23. *Soit* $\alpha_t : [0,1] \to \mathcal{A}^+(M, \mathrm{End}(E))$ *une famille de formes différentielles de degrés positifs à valeurs dans les endomorphismes de* E*. Soit* f *un polynôme alors*

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Str}(f(\alpha_t)) = \mathrm{Str}\Big(\frac{d\alpha_t}{dt}f'(\alpha_t)\Big).$$

Démonstration. Il suffit de montrer le lemme pour $g(z) = z^n$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Str}(\alpha_t^n) &= \mathrm{Str}\Big(\frac{d\alpha_t^n}{dt}\Big)\\
&= \mathrm{Str}\Big(\sum_{i=0}^{n}\alpha_t^i\frac{d\alpha_t}{dt}\alpha_t^{n-i-1}\Big)\\
&= n\mathrm{Str}\Big(\frac{d\alpha_t}{dt}\alpha_t^{n-1}\Big).
\end{aligned}$$

□

Proposition D.0.24. *Si* $\mathbb{A}_t$ *est une famille à un paramètre de super-connexions dérivables par rapport à* t *alors*

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Str}(f(\mathbb{A}_t^2)) = d\mathrm{Str}\Big(\frac{d\mathbb{A}_t}{dt}f'(\mathbb{A}_t^2)\Big).$$

Démonstration. En appliquant le lemme précédent à la forme $\alpha_t = \mathbb{A}_t^2$, on a :

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Str}(f(\mathbb{A}_t^2)) = \mathrm{Str}\Big(\frac{d\mathbb{A}_t^2}{dt}f'(\mathbb{A}_t^2)\Big).$$

De plus, on sait par le lemme D.0.22 que $\dfrac{d\mathbb{A}_t^2}{dt} = \Big[\mathbb{A}_t, \dfrac{d\mathbb{A}_t}{dt}\Big]$ donc

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathrm{Str}(f(\mathbb{A}_t^2)) &= \mathrm{Str}\Big(\Big[\mathbb{A}_t,\frac{d\mathbb{A}_t}{dt}\Big]f'(\mathbb{A}_t^2)\Big)\\
&= \mathrm{Str}\Big(\Big(\mathbb{A}_t\frac{d\mathbb{A}_t}{dt}+\frac{d\mathbb{A}_t}{dt}\mathbb{A}_t\Big)f'(\mathbb{A}_t^2)\Big)\\
&= \mathrm{Str}\Big(\mathbb{A}_t\frac{d\mathbb{A}_t}{dt}f'(\mathbb{A}_t^2)+\frac{d\mathbb{A}_t}{dt}f'(\mathbb{A}_t^2)\mathbb{A}_t\Big)\\
&= \mathrm{Str}\Big[\mathbb{A}_t,\frac{d\mathbb{A}_t}{dt}f'(\mathbb{A}_t^2)\Big],
\end{aligned}$$

car $[\mathbb{A}_t, f'(\mathbb{A}_t^2)] = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k+1)}(0)}{k!}[\mathbb{A}_t, (\mathbb{A}_t^2)^k] = 0$ puisque $[\mathbb{A}_t, (\mathbb{A}_t^2)] = 0$. Par le lemme D.0.20, on obtient le résultat car $d\mathrm{Str}\Big(\frac{d\mathbb{A}_t}{dt} f'(\mathbb{A}_t^2)\Big) = \mathrm{Str}\Big[\mathbb{A}_t, \frac{d\mathbb{A}_t}{dt} f'(\mathbb{A}_t^2)\Big]$.

□

Proposition D.0.25. *Soit f un polynôme. La classe de cohomologie de* $\mathrm{Str}(f(\mathbb{A}^2))$ *ne dépend pas de la super-connexion choisie.*

Démonstration. Soient $\mathbb{A}_0$ et $\mathbb{A}_1$ deux super-connexions alors $\mathbb{A}_t = (1-t)\mathbb{A}_0 + t\mathbb{A}_1$ est une famille différentiable de super-connexions. En intégrant entre 0 et 1 la formule de la proposition précédente, on a :

$$\mathrm{Str}(f(\mathbb{A}_1^2)) - \mathrm{Str}(f(\mathbb{A}_0^2)) = d\bigg(\int_0^1 \mathrm{Str}\Big((\mathbb{A}_1 - \mathbb{A}_0) f'(\mathbb{A}_t^2)\Big) dt\bigg)$$

et donc $\mathrm{Str}(f(\mathbb{A}_1^2)) = \mathrm{Str}(f(\mathbb{A}_0^2))$ en cohomologie. □

Définition D.0.26. On définit le caractère de Chern d'une super-connexion $\mathbb{A}$ par :

$$\mathrm{Ch}(\mathbb{A}) = \mathrm{Str}\Big(e^{-\mathbb{A}^2}\Big).$$

Proposition D.0.27.

1. *La classe de cohomologie associée au caractère de Chern* $\mathrm{Ch}(\mathbb{A})$ *de la super-connexion $\mathbb{A}$ dépend seulement du fibré vectoriel considéré, on peut donc noter* $\mathrm{Ch}(E)$ *la classe du caractère de Chern associé à une super-connexion $\mathbb{A}$ sur E.*
2. *Le caractère de Chern est additif, c'est-à-dire* $\mathrm{Ch}(E \oplus F) = \mathrm{Ch}(E) + \mathrm{Ch}(F)$.
3. *Le caractère de Chern est multiplicatif, c'est-à-dire* $\mathrm{Ch}(E \otimes F) = \mathrm{Ch}(E) \wedge \mathrm{Ch}(F)$.
4. *Soit $f : N \to M$ une application différentiable entre deux variétés alors* $\mathrm{Ch}(f^*E) = f^*\mathrm{Ch}(E)$.

Démonstration.

1. On applique la proposition précédente à la série $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ qui est une série de rayon de convergence infini et donc tout ce qui précède a encore un sens puisque l'on peut dériver terme à terme et écrire la série de Taylor.
2. Sur $E \oplus F$, on prend comme super-connexion la super-connexion $\mathbb{A} \oplus \mathbb{B}$ où $\mathbb{A}$ est une super-connexion sur E et $\mathbb{B}$ est une super-connexion sur F. On a alors $\mathrm{Ch}(E \oplus F) = [\mathrm{Ch}(\mathbb{A} \oplus \mathbb{B})] = [\mathrm{Str}(e^{-(\mathbb{A}\oplus\mathbb{B})^2})] = [\mathrm{Str}(e^{-(\mathbb{A}^2\oplus\mathbb{B}^2)})] = [\mathrm{Str}(e^{-\mathbb{A}^2} \oplus e^{-\mathbb{B}^2})] = [\mathrm{Str}(e^{-\mathbb{A}^2})] + [\mathrm{Str}(e^{-\mathbb{B}^2})] = \mathrm{Ch}(E) + \mathrm{Ch}(F)$.
3. Sur $E \otimes F$, on prend comme super-connexion la super-connexion $\mathbb{A} \otimes 1 + 1 \otimes \mathbb{B}$ où $\mathbb{A}$ est une super-connexion sur E et $\mathbb{B}$ est une super-connexion sur F. On a alors $\mathrm{Ch}(E \otimes F) = [\mathrm{Ch}(\mathbb{A} \otimes 1 + 1 \otimes \mathbb{B})] = [\mathrm{Str}(e^{-(\mathbb{A}\otimes 1 + 1\otimes\mathbb{B})^2})] = [\mathrm{Str}(e^{-(\mathbb{A}^2\otimes 1 + 1\otimes\mathbb{B}^2)})]$ car $[\mathbb{A} \otimes 1, 1 \otimes \mathbb{B}] = 0$. Donc $\mathrm{Ch}(E \otimes F) = [\mathrm{Str}((e^{-\mathbb{A}^2} \otimes 1)(1 \otimes e^{-\mathbb{B}^2}))] = [\mathrm{Str}(e^{-\mathbb{A}})][\mathrm{Str}(e^{-\mathbb{B}})] = \mathrm{Ch}(E) \wedge \mathrm{Ch}(F)$.
4. On a $\mathrm{Ch}(f^*E) = [\mathrm{Ch}(f^*\mathbb{A})] = [\mathrm{Str}(e^{-f^*\mathbb{A}^2})] = [\mathrm{Str}(f^* e^{-\mathbb{A}^2})] = f^*\mathrm{Ch}(E)$.

□

Définition D.0.28. Soit E un fibré vectoriel réel muni d'une connexion ∇. On définit le $\hat{A}$-genre de ∇ par :

$$\hat{A}(\nabla) = \det{}^{1/2}\Big(\frac{F/2}{\sinh(F/2)}\Big).$$

En fait, par la formule $\det(A) = \exp(\mathrm{Tr}(\log(A))$, on obtient que le $\hat{A}$-genre est une forme différentielle associée à l'exponentielle de la trace d'un polynôme, on a :

$$\hat{A}(\nabla) = \exp\left(\mathrm{Tr}\Big(\frac{1}{2}\log\Big(\frac{F/2}{\sinh(F/2)}\Big)\Big)\right).$$

Lemme D.0.29. *1. Le $\hat{A}$-genre est bien défini.*

2. Le $\hat{A}$-genre est multiplicatif, c'est-à-dire $\hat{A}(\nabla_1 \oplus \nabla_2) = \hat{A}(\nabla_1) \wedge \hat{A}(\nabla_2)$.

3. La classe de cohomologie du $\hat{A}$-genre ne dépend pas de la connexion choisie.

Démonstration. Notons F_0, F_1 et F_2 les courbures associées à des connexions ∇_0, ∇_1 et ∇_2. Notons aussi $\nabla_t = t\nabla_1 + (1-t)\nabla_0$.

1. Le $\hat{A}$-genre est bien défini car la courbure d'une connexion est un élément nilpotent puisqu'il appartient à $\mathcal{A}^2(M, \mathrm{End}(E))$ et donc s'annule lorsque le degré de la partie forme dépasse la dimension de la variété.
2. On a

$$\begin{aligned}
\hat{A}(\nabla_1 \oplus \nabla_2) &= \det{}^{1/2}\left(\frac{\begin{pmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} \sinh(F_1/2) & 0 \\ 0 & \sinh(F_2/2) \end{pmatrix}}\right) \\
&= \det{}^{1/2}\Big(\frac{F_1/2}{\sinh(F_1/2)}\Big)\det{}^{1/2}\Big(\frac{F_2/2}{\sinh(F_2/2)}\Big) \\
&= \hat{A}(\nabla_1) \wedge \hat{A}(\nabla_2).
\end{aligned}$$

3. On a $\mathrm{Tr}\Big(\frac{1}{2}\log\Big(\frac{F_1/2}{\sinh(F_1/2)}\Big)\Big) - \mathrm{Tr}\Big(\frac{1}{2}\log\Big(\frac{F_0/2}{\sinh(F_0/2)}\Big)\Big) = d\mathrm{Tr}\Big(\int_0^1 \frac{d\nabla_t}{dt} g'(F_t)\Big)$, où $g(z)$ est le polynôme associé à $\frac{1}{2}\log\Big(\frac{F/2}{\sinh(F/2)}\Big)$. Donc

$$\begin{aligned}
\hat{A}(\nabla_1) - \hat{A}(\nabla_0) &= \exp\mathrm{Tr}\Big(\frac{1}{2}\log\Big(\frac{F_1/2}{\sinh(F_1/2)}\Big)\Big) - \exp\mathrm{Tr}\Big(\frac{1}{2}\log\Big(\frac{F_0/2}{\sinh(F_0/2)}\Big)\Big) \\
&= \left(e^{\mathrm{Tr}\Big(\frac{1}{2}\log\Big(\frac{F_1/2}{\sinh(F_1/2)}\Big)\Big) - \mathrm{Tr}\Big(\frac{1}{2}\log\Big(\frac{F_0/2}{\sinh(F_0/2)}\Big)\Big)} - 1\right)\hat{A}(\nabla_0) \\
&= \left(\exp\Big(d\mathrm{Tr}\Big(\int_0^1 \frac{d\nabla_t}{dt} g'(F_t)\Big)\Big) - 1\right)\hat{A}(\nabla_0) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Définition D.0.30. Soit E un fibré vectoriel complexe non gradué de connexion ∇, on définit la classe de Todd de E comme étant la classe de cohomologie associée à la forme fermée

$$\mathrm{Td}(\nabla) = \exp\mathrm{Tr}\left(\log\left(\frac{F}{e^F - 1}\right)\right) = \det\left(\frac{F}{e^F - 1}\right).$$

Lemme D.0.31. *La classe de Todd ne dépend pas de la connexion choisie et est multiplicative.*

Remarque D.0.32. Les deux dernières classes n'ont pas de sens si l'on remplace ∇ par une super-connexion $\mathbb{A}$ avec du degré 0 car dans ce cas il subsiste une partie non nilpotente.

Bibliographie

[1] M.F. Atiyah. *Elliptic operators and compact groups.* Lecture notes in mathematics. Springer Verlag, 1974.

[2] M.F. Atiyah and G.B Segal. The index of elliptic operators II. *Ann. Math.*, 87 :531–545, 1968.

[3] M.F. Atiyah and I.M. Singer. The index of elliptic operators I. *Ann. Math.*, 87 :484–530, 1968.

[4] M.F. Atiyah and I.M. Singer. The index of elliptic operators I. *Ann. Math.*, 87 :546–604, 1968.

[5] M.F. Atiyah and I.M. Singer. The index of elliptic operators IV. *Ann. Math.*, 93 :119–138, 1971.

[6] Michael F Atiyah and Isidor M Singer. The index of elliptic operators on compact manifolds. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 69(3) :422–433, 1963.

[7] Saad Baaj and Pierre Julg. Théorie bivariante de Kasparov et opérateurs non bornés dans les C*-modules hilbertiens. *CR Acad. Sci. Paris Sér. I Math*, 296(21) :875–878, 1983.

[8] Alexandre Baldare. The index of G-transversally elliptic families in cohomology. 2018.

[9] Alexandre Baldare. *Theorie de l'indice pour les familles d'operateurs G-transversalement elliptiques.* PhD thesis, Université de Montpellier, 2018.

[10] M.-T. Benameur. A longitudinal Lefschetz theorem in K-theory. *K-theory*, 12 :227–257, 1997.

[11] M.-T. Benameur. Cyclic cohomology and the family Lefschetz theorem. *Math. Ann.*, 323 :97–121, 2002.

[12] N. Berline, E. Getzler, and M. Vergne. *Heat kernels and Dirac operators*, volume 298. Springer, grundlehen der math. wissenschaft edition, 1991.

[13] N. Berline and M. Vergne. Classes caractéristiques équivariantes. Formule de localisation en cohomologie équivariante. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 295 :539–541, 1982.

[14] N. Berline and M. Vergne. *The equivariant Chern character and index of G-invariant operators. In D-Modules, representation theory and quantum groups*, volume 1565. Springer Lectures Notes in Math., 1992.

[15] Nicole Berline and Michèle Vergne. The equivariant index and Kirillov's character formula. *American Journal of Mathematics*, 107(5) :1159–1190, 1985.

[16] Nicole Berline and Michèle Vergne. The Chern character of a transversally elliptic symbol and the equivariant index. *Inventiones mathematicae*, 124(1) :11–49, 1996.

[17] Nicole Berline and Michéle Vergne. L'indice équivariant des opérateurs transversalement elliptiques. *Inventiones mathematicae*, 124(1) :51–101, 1996.

[18] J.-M. Bismut. Localization formulas, superconnections, and the index theorem for families. *Commun. Math. Phys*, 103 :127–166, 1986.

[19] Bruce Blackadar. *K-theory for operator algebras*, volume 5. Cambridge University Press, 1998.

[20] Raoul Bott and Loring W. Tu. *Differential forms in algebraic topology.* Graduate texts in mathematics. Springer-Verlag, New York, 1982. Includes index.

[21] N. Bourbaki. *Groupes et algèbres de Lie : Chapitre 9 Groupes de Lie réels compacts.* Eléments de mathématique. Springer Berlin Heidelberg, 2006.

[22] Glen E. Bredon. *Introduction to compact transformation groups*, volume 46 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, 1972.

[23] A. Connes. A survey of foliations and operator algebras. *Proc. Symp. Pure Math*, 38 :542–628, 1981.

[24] A. Connes. *Non Commutative Geometry*. 1990.

[25] A. Connes and G. Skandalis. The longitudinal index theorem for foliations. *Publications RIMS Kyoto Univ*, 20 :135–179, 1984.

[26] Alain Connes. Non-commutative differential geometry. *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, 62(1) :41–144, 1985.

[27] J. Dixmier. *Les C*-algébres et leurs représentations*. Cahiers scientifiques. Editions Jacques Gabay, 1969.

[28] Jacques Dixmier and Adrien Douady. Champs continus d'espaces hilbertiens et de C*-algébres. *Bulletin de la Société mathématique de France*, 91 :227–284, 1963.

[29] M. Duflo and M. Vergne. Cohomologie équivariante et descente. *Astérisque*, 215 :5–108, 1993.

[30] Michel Duflo and Michèle Vergne. Une propriété de la représentation coadjointe d'une algèbre de Lie. *Matematika*, 15(2) :8–9, 1971.

[31] Michel Duflo and Michèle Vergne. Orbites coadjointes et cohomologie équivariante. In *The orbit method in representation theory*, pages 11–60. Springer, 1990.

[32] Charles Ehresmann. Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable. *Séminaire Bourbaki*, 1 :153–168, 1948-1951.

[33] Jeffrey Fox and Peter Haskell. The index of transversally elliptic operators for locally free actions. *Pacific Journal of Mathematics*, 164(1) :41–85, 1994.

[34] V. W. Guillemin and S. Sternberg. *Supersymmetry and equivariant de Rham theory*. Springer, 1999.

[35] Michel Hilsum. Fonctorialité en K-théorie bivariante pour les variétés lipschitziennes. *K-theory*, 3(5) :401–440, 1989.

[36] Michel Hilsum. Bordism invariance in KK-theory. *Mathematica Scandinavica*, 107(1) :73–89, 2010.

[37] Michel Hilsum and Georges Skandalis. Morphismes K-orientés d'espaces de feuilles et fonctorialité en théorie de Kasparov (d'après une conjecture d'A. Connes). 20(3) :325–390, 1987.

[38] Lars Hörmander. Fourier integral operators. I. *Acta Mathematica*, 127(1) :79–183, 1971.

[39] P Julg. Indice relatif et K-théorie bivariante de Kasparov. *CR Acad. Sci. Paris*, 307 :243–248, 1988.

[40] Pierre Julg. K-théorie équivariante et produits croisés. *CR Acad. Sci. Paris Sér. I Math*, 292 :629–632, 1981.

[41] Pierre Julg. Induction holomorphe pour le produit croisé d'une C*-algebre par un groupe de Lie compact. *CR Acad. Sci. Paris Sér. I Math*, 294(5) :193–196, 1982.

[42] Gennadi Kasparov. TOPOLOGICAL INVARIANTS OF ELLIPTIC OPERATORS. I : K -HOMOLOGY. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 9(4) :751, 1975.

[43] Gennadi Kasparov. THE OPERATOR K -FUNCTOR AND EXTENSIONS OF C*-ALGEBRAS. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 16(3) :513, 1981.

[44] Gennadi Kasparov. Equivariant KK-theory and the Novikov conjecture. *Inventiones mathematicae*, 91(1) :147–202, 1988.

[45] Gennadi Kasparov. Elliptic and transversally elliptic index theory from the viewpoint of KK-theory. *Journal of Noncommutative Geometry*, 10(4) :1303–1378, 2016.

[46] Shoshichi Kobayashi. Fixed points of isometries. *Nagoya Math. J.*, 13 :63–68, 1958.

[47] Dan Kucerovsky. The KK-Product of Unbounded Modlues. *K-theory*, 11(1) :17–34, 1997.

[48] Nicolaas H. Kuiper. The homotopy type of the unitary group of Hilbert space. *Topology*, 3(1) :19 – 30, 1965.

[49] Shrawan Kumar and Michele Vergne. Equivariant cohomology with generalized coefficients. *Astérisque*, 215 :109–204, 1993.

[50] E.C. Lance. *Hilbert C*-Modules : A Toolkit for Operator Algebraists*. Lecture note series / London mathematical society. Cambridge University Press, 1995.

[51] Robert Lauter, Bertrand Monthubert, and Victor Nistor. Pseudodifferential analysis on continuous family groupoids. *Doc. Math*, 5 :625–655, 2000.

[52] Robert Lauter, Bertrand Monthubert, and Victor Nistor. Spectral invariance for certain algebras of pseudo-differential operators. *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu*, 4(3) :405–442, 2005.

[53] Robert Lauter and Victor Nistor. *Pseudodifferential analysis on groupoids and singular spaces*. Johannes-Gutenberg-Univ., Fachbereich Mathematik, 1999.

[54] H.B. Lawson and M.L. Michelsohn. *Spin Geometry*. Princeton mathematical series. Princeton University Press, 1989.

[55] Renato G. Bettiol Marcos M. Alexandrino. *Lie Groups and Geometric Aspects of Isometric Actions*. Springer, 2015 edition, 2015.

[56] V. Mathai and D. Quillen. Superconnections, Thom classes and equivariant differential forms. *Topology*, 25 :85–110, 1986.

[57] Eckhard Meinrenken. Equivariant cohomology and the Cartan model. *Encyclopedia of mathematical physics*, pages 242–250, 2006.

[58] Ralf Meyer. Comparisons between periodic, analytic and local cyclic cohomology. *arXiv preprint math/0205276*, 2002.

[59] Bertrand Monthubert and François Pierrot. Indice analytique et groupoïdes de lie. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics*, 325(2) :193–198, 1997.

[60] Toshikazu Natsume and Ryszard Nest. The cyclic cohomology of compact Lie groups and the direct sum formula. *Journal of Operator Theory*, pages 43–50, 1990.

[61] TOSHIKAZU NATSUME and RYSZARD NEST. THE CYCLIC COHOMOLOGY OF COMPACT LIE GROUPS AND THE DIRECT SUM FORMULA. *Journal of Operator Theory*, 23(1) :43–50, 1990.

[62] Victor Nistor, Alan Weinstein, and Ping Xu. Pseudodifferential operators on differential groupoids. *Pacific journal of mathematics*, 189(1) :117–152, 1999.

[63] Richard S. Palais. On the Existence of Slices for Actions of Non-Compact Lie Groups. *Annals of Mathematics*, 73(2) :295–323, 1961.

[64] P.-E. Paradan and M. Vergne. Equivariant relative Thom forms and Chern characters. *math.DG/0711.3898v2*, 2007.

[65] P.-E. Paradan and M. Vergne. Quillen's relative Chern character is multiplicative. *math.DG/0702575*, 2007.

[66] Paul-Emile Paradan and Michele Vergne. Equivariant Chern characters with generalized coefficients. *arXiv preprint arXiv :0801.2822*, 2008.

[67] Paul-Emile Paradan and Michele Vergne. Index of transversally elliptic operators. *arXiv preprint arXiv :0804.1225*, 2008.

[68] Alan L. T. Paterson. The equivariant analytic index for proper groupoid actions, 2007.

[69] Fritz Peter and Hermann Weyl. Die vollständigkeit der primitiven darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen gruppe. *Mathematische Annalen*, 97(1) :737–755, 1927.

[70] Michael Puschnigg. Diffeotopy functors of ind-algebras and local cyclic cohomology. *Doc. Math*, 8 :143–245, 2003.

[71] D. Quillen. Superconnectionsand the Chern character. *Topology*, 24 no 1 :89–95, 1985.

[72] Alain Robert. *Introduction to the representation theory of compact and locally compact groups*, volume 80. Cambridge University Press, 1983.

[73] Jonathan Rosenberg, Claude Schochet, et al. The künneth theorem and the universal coefficient theorem for Kasparov's generalized K-functor. *Duke Mathematical Journal*, 55(2) :431–474, 1987.

[74] M.A. Shubin. *Pseudodifferential Operators and Spectral Theory*. Pseudodifferential Operators and Spectral Theory. Springer Berlin Heidelberg, 2001.

[75] G. Skandalis. *C*-algébre, algébre de von Neumann, exemples.*

[76] Georges Skandalis. Une notion de nucléarité en K-théorie (d'après J. Cuntz). *K-theory*, 1(6) :549–573, 1988.

[77] Niels Erik Wegge-Olsen. *K-theory and C*-algebras : a Friendly Approach*, volume 1050. Oxford university press Oxford, 1993.