Applications de la géométrie paramétrique des nombres à l'approximation diophantienne

Anthony Poëls

▶ **To cite this version:**

Anthony Poëls. Applications de la géométrie paramétrique des nombres à l'approximation diophantienne. Théorie des nombres [math.NT]. Université Paris Saclay (COmUE), 2018. Français. NNT : 2018SACLS115 . tel-01827304

HAL Id: tel-01827304
https://theses.hal.science/tel-01827304

Submitted on 2 Jul 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NNT : 2018SACLS115

THÈSE DE DOCTORAT

de

L'Université Paris-Saclay

École Doctorale de Mathématiques Hadamard (EDMH, ED 574)

Établissement d'inscription : Université Paris-Sud

Laboratoire d'accueil : Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, UMR 8628 CNRS

Spécialité de doctorat : Mathématiques fondamentales

Anthony POELS

Applications de la géométrie paramétrique des nombres à l'approximation diophantienne

Date soutenance : 18 Mai 2018

Après avis des rapporteurs : Patrice PHILIPPON(Institut de Mathématiques de Jussieu)
Damien ROY(Université d'Ottawa)

Jury de soutenance :

Yann BUGEAUD	(Université de Strasbourg) Président du Jury
Stéphane FISCHLER	(Université Paris-Sud) Directeur de thèse
Etienne FOUVRY	(Université Paris-Sud) Examinateur
Patrice PHILIPPON	(Institut de Mathématiques de Jussieu) Rapporteur
Damien ROY	(Université d'Ottawa) Rapporteur
Michel WALDSCHMIDT	(Institut de Mathématiques de Jussieu) Examinateur

À Alain Grison.

Remerciements

Tout d'abord, c'est à mon directeur Stéphane Fischler que j'aimerais adresser un grand merci. Je mesure la chance d'avoir trouvé en lui quelqu'un de toujours présent et attentif, qui a eu la patience de relire les versions successives de ma thèse et de mes articles le long de ces trois années ; ses nombreux retours m'ont été très précieux. Merci pour ses conseils, pour la liberté qu'il m'a laissée dans ma recherche et pour son grand investissement.

Je remercie également les deux rapporteurs de ma thèse : Patrice Philippon pour avoir accepté ce travail malgré les délais peut-être un peu courts, pour m'avoir donné l'opportunité d'exposer une partie de mes travaux au GEPbD et pour son écoute ; Damien Roy pour ses retours nombreux et toujours pertinents (et ce, bien avant d'accepter d'être l'un de mes rapporteurs), ses discussions et sa gentillesse. Je suis également reconnaissant envers Yann Bugeaud, Etienne Fouvry et Michel Waldschmidt pour avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse, c'est un honneur pour moi. Sans tous les nommer, je remercie tous les chercheurs que j'ai croisés et avec qui j'ai pu échanger au cours de conférences, de séminaires ou plus simplement par mail. Il en va de même des doctorants d'ici et d'ailleurs, à commencer par mes co-bureaux François, Mor et Pierre, ainsi que tous les autres qui ne se reconnaîtront peut-être pas (merci notamment à Hugo pour m'avoir permis de garder un pied à Jussieu). Sur un plan plus linguistique, je suis reconnaissant envers Liana pour m'avoir aidé à corriger une bonne partie de mes articles en anglais. Sur un plan administratif, je ne mentionnerai pas ADUM mais toutes les secrétaires qui m'ont aidé au cours de ces années, en particulier Christelle Pires.

Je tiens à exprimer mon respect et ma gratitude pour plusieurs enseignants qui ont joué un rôle important dans mon parcours, même si pour cela il me faut remonter de quinze ans dans le temps. Ma pensée première va d'abord à Alain Grison : c'est sans doute grâce à lui que j'ai eu mon premier contact avec le monde de la recherche à travers la conception, la construction et la programmation (sur disquette !) de ses robots. J'ai temporairement renoncé à concevoir le T-800 pour faire des mathématiques à la place. Ma reconnaissance va aussi à son collègue en mathématiques Luc Pentecouteau, à ma professeure de lycée Dominique Mogica (mention spéciale et toute mon affection !), à son collègue Serge Bertrand et enfin à mes professeurs en classe préparatoire Serge Dupont et Yves Duval.

Le cercle amical est peut-être le plus ardu à parcourir car il est rarement connexe par bien des aspects. Merci à mes vieux amis du collège, entre autres Yann et Arnoul pour les restaurants qui servent du tarama-pas-bon, aux amis du lycée que je n'ai pas complètement perdus de vue grâce à YO, à mes amis de prépa qui se reconnaîtront, à Marie et Aurélien restés à Lyon, et puis enfin à tous les autres qui n'entrent pas dans l'une des catégories susnommées. J'aimerais aussi remercier des amis plus insolites tels

que Corsaire, Dagmar et Osvalda, même s'il est probable que ce texte ne s'égare jamais entre leurs pattes ou leurs mimines.

Enfin, je remercie ma famille : mes frères, mes parents, mes aïeuls, mon papy et ma mamy.

Table des matières

Remerciements **i**

Introduction **vii**
0.1 Approximation rationnelle vii
0.2 Approximation de $(1, \xi, \ldots, \xi^n)$ viii
0.3 Approximation d'un nombre et de son carré xi
0.4 Construction des nombres de type sturmien xiii
0.5 Résultats réciproques xvi
0.6 Géométrie paramétrique des nombres de Schmidt et Summerer xx
0.6.1 Présentation générale xx
0.6.2 3-système associé à un nombre de type sturmien xxii
0.6.3 Exemples de 3-systèmes ne représentant aucun réel xxiii
0.6.4 Propriétés des points minimaux xxiv
0.7 Généralisations à $\mathbb{R}^n$ et à un corps de nombres K xxv
0.7.1 Le Théorème du going-down de Schmidt xxv
0.8 Plan de la thèse xxvi

1 Rappels et Notations **1**
1.1 Notations $\ll, \gg, \asymp \ldots$ 2
1.2 Combinatoire des mots et fractions continues 2
1.3 Nombres de type Fibonacci de Roy 3
1.3.1 Nombres extrémaux 3
1.3.2 Exemples de nombres extrémaux : fractions continues de Fibonacci 4
1.3.3 Construction généralisée : nombres de type Fibonacci 5
1.4 Fractions sturmiennes de Bugeaud et Laurent 6
1.5 Travaux de Fischler sur l'approximation d'un nombre et de son carré . . 7
1.5.1 Mots à préfixes palindromes abondants 7
1.5.2 Crochet de Roy 9
1.5.3 Exposants β_ε 9
1.5.4 Fractions continues à préfixes palindromes 11
1.6 Géométrie paramétrique des nombres 12
1.7 Suites de points minimaux 16
1.7.1 Une définition paramétrique 17
1.7.2 Définition équivalente 21
1.7.3 Propriétés spécifiques au cas $n = 3$ 22
1.8 Propriétés des points minimaux et quelques définitions supplémentaires . 24

1.9 Propriétés des exposants paramétriques 29
1.9.1 Propriétés générales 29
1.9.2 Cas où $\mathbf{u} = (1, \xi, \xi^2)$ 31
1.9.3 Outils pratiques de calcul des exposants 32

2 Construction des nombres de type Sturmien **37**
2.1 Introduction et résultats principaux 37
2.2 Notations 41
2.3 Suites ψ-sturmiennes de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ 42
2.4 Suites ψ-sturmiennes admissibles 45
2.5 Suites ψ-sturmiennes à croissance multiplicative 50
2.6 Construction des nombres de type sturmien 56
2.7 3-système associé à un nombre ψ-sturmien 63
2.7.1 Construction d'un 3-système représentant partiellement ξ 63
2.7.2 Discussion sur les zones d'incertitude 72
2.7.3 Preuve des Propositions 2.7.5 et 2.7.9 78
2.8 Exemples de nombres ψ-sturmiens propres 84
2.8.1 Exemples de Roy 84
2.8.2 Exemples de Bugeaud et Laurent 85
2.9 Preuve du Théorème 2.1.2 et du Corollaire 2.1.3 86

3 Contenus des suites ψ-sturmiennes **89**
3.1 Introduction et énoncé du résultat principal 89
3.2 Définitions et notations 91
3.3 Estimation des déterminants 93
3.4 Norme des $\mathbf{z}_i$ 96
3.5 Contenus des suites $\mathbf{y}_\mathbf{w}$ 98
3.6 Contenus des suites $\mathbf{z}_\mathbf{w}$ 103
3.7 Preuve des Théorèmes 3.1.1 et 3.1.2 106

4 Considérations réciproques **109**
4.1 Introduction et principaux résultats 109
4.2 Rappels sur les exposants β_ε 112
4.3 Exposants κ_α^* et κ^* 114
4.4 Rappels sur la construction des nombres de type sturmien 115
4.5 Suite ψ-sturmienne associée à ξ 117
4.5.1 Énoncé du résultat principal 117
4.5.2 Suite ψ-sturmienne admissible associée à $(\mathbf{u}_i)$ 118
4.5.3 Propriété de croissance multiplicative 121
4.5.4 Preuve de la Proposition 4.5.1 123
4.6 Construction du 3-système $\mathbf{P}$ 124
4.7 Lien entre ξ et le 3-système $\mathbf{P}$ 132
4.8 Application au calcul des exposants diophantiens de ξ 135
4.9 Maximalité des déterminants 139

5 3-systèmes ne représentant aucun réel ξ 145
5.1 Introduction et résultat principal 145
5.2 Preuve du Théorème 5.1.1 146

6 Inégalités entre exposants paramétriques 151
6.1 Introduction et résultats principaux 151
6.2 Preuve de la Proposition 6.1.3 153
6.3 Preuve du Théorème 6.1.1 et du Corollaire 6.1.2 160

7 Propriétés des points minimaux 167
7.1 Introduction 167
7.2 Définitions et Notations 170
7.3 Graphe conjoint générique d'un 3-système dual représentant ξ 171
7.4 Estimations de la hauteur de $\mathcal{V}_k$ 178
7.5 Une propriété des points minimaux 179
7.6 Propriétés d'indépendance linéaire 184

8 Le cas complexe du Théorème du going-down de Schmidt 189
8.1 Avant-Propos 189
8.1.1 Résumé 189
8.1.2 Abstract 189
8.2 Introduction 190
8.3 Multilinear algebra, distance and height of subspaces 192
8.4 Specific notation in the complex case 195
8.5 Proof of the going-down Theorem in the complex case 196
8.5.1 Construction of W 196
8.5.2 Properties of W 197
8.5.3 Definition and properties of B^{e-1} 198
8.5.4 Proof of the second part of the theorem 200
8.6 Exponents of Diophantine Approximation 202

Introduction

0.1 Approximation rationnelle

Cette thèse s'inscrit dans le cadre de l'approximation diophantienne et traite plus précisément de certains problèmes relatifs aux exposants diophantiens. Une question à la base de l'approximation diophantienne est la suivante : étant donné un réel $\xi \notin \mathbb{Q}$, quels sont les rationnels p/q qui approchent "bien" ξ ? Intuitivement, une "bonne" approximation p/q est un rationnel qui est à la fois proche de ξ (mais cette condition seule n'est pas très intéressante par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$) et de numérateur et dénominateur pas trop grands. Ces problèmes ont donné naissance à la théorie des fractions continues – le lecteur pourra consulter les ouvrages [14] ou [28] pour une introduction à ce joli domaine – qui fournit la suite des meilleures approximations rationnelles d'un réel ξ et assure qu'il y a une infinité de rationnels p/q avec $q \geq 1$ tels que

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}.$$

Plus précisément, le Théorème de Dirichlet affirme que pour tout entier $Q \geq 1$ il existe des entiers p et q tels que $1 \leq q \leq Q$ et

$$|q\xi - p| \leq Q^{-1}.$$

Une question arrive alors naturellement : peut-on mesurer plus finement les propriétés d'approximation d'un réel ξ fixé ? Cela conduit au problème suivant :

Problème $E_{\omega,Q}$ **:** On cherche les solutions $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$ du système

$$\begin{cases} 1 \leq q \leq Q \\ |p\xi - q| \leq Q^{-\omega}. \end{cases}$$

Définition. Soit ξ un réel. On définit $\omega_1(\xi)$ (resp. $\widehat{\omega}_1(\xi)$) comme la borne supérieure de l'ensemble des réels ω tels que le problème $E_{\omega,Q}$ associé à ξ ait une solution pour des valeurs de Q arbitrairement grandes (resp. pour tout Q assez grand).

Notons que l'exposant $\omega_1(\xi)+1$ est appelé plus classiquement l'*exposant d'irrationalité* de ξ. Le Théorème de Dirichlet implique que pour tout réel $\xi \notin \mathbb{Q}$ on a $\widehat{\omega}_1(\xi) \geq 1$. Par ailleurs, Khintchine [30] observe que pour tout réel $\xi \notin \mathbb{Q}$, il existe des Q arbitrairement grands pour lesquels les inégalités $1 \leq q \leq Q$ et $|p\xi - q| \leq 1/(2Q)$ n'ont pas de solutions $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$. Donc pour tout réel $\xi \notin \mathbb{Q}$ on a

$$\widehat{\omega}_1(\xi) = 1$$

(voir aussi la preuve de la Proposition 2.4 de [7]). La situation est différente pour l'exposant ω_1 et la théorie des fractions continues montre que

$$\{\omega_1(\xi) \mid \xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\} = [1, +\infty].$$

Notons que les nombres de Liouville sont exactement les réels ξ tels que $\omega_1(\xi) = +\infty$. Par ailleurs, pour presque tout réel au sens de la mesure de Lebesgue on a $\omega_1(\xi) = 1$, et le Théorème de Roth (voir par exemple le Chapitre 3 de [41]) montre que tout nombre algébrique de degré ≥ 2 vérifie cette propriété.

0.2 Approximation de $(1, \xi, \ldots, \xi^n)$

Dans le cas le plus général, on considère un vecteur $\mathbf{u} = (1, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ et on impose uniquement que ses coordonnées soient linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$ (sinon on peut se ramener à un problème en dimension inférieure) ; voir aussi le livre de Cassels [14] pour des généralisations avec des matrices. Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire associé à la norme euclidienne canonique $\| \cdot \|$ de $\mathbb{R}^{n+1}$. On munit l'algèbre extérieure $\bigwedge^2 \mathbb{R}^{n+1}$ de la structure d'espace euclidien telle que pour toute base orthonormée $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n+1})$ de $\mathbb{R}^{n+1}$, l'ensemble des produits extérieurs $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j$ avec $1 \leq i < j \leq n+1$ forme une base orthonormée de $\bigwedge^2 \mathbb{R}^{n+1}$. On note encore $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée.
On peut associer à $\mathbf{u}$ plusieurs exposants diophantiens qui mesurent comment $\mathbf{u}$ peut être approché par des sous-espaces de $\mathbb{R}^{n+1}$ d'une dimension fixée d, ces quantités ont été introduites par Khintchine [31], [30], Jarník [27] et Bugeaud et Laurent [9],[10] (voir aussi [11], [34], [64]). Pour $d = n$, on note $\omega(\mathbf{u})$ (resp. $\widehat{\omega}(\mathbf{u})$) la borne supérieure de l'ensemble des réels $\omega > 0$ tels que le système d'inégalités

$$\|\mathbf{x}\| \leq X \quad \text{et} \quad |\langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle| \leq X^{-\omega}$$

admette une solution $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^{n+1}$ non nulle pour des valeurs de X arbitrairement grandes (resp. pour tout X assez grand).
De même, dans le cas $d = 1$ on note $\lambda(\mathbf{u})$ (resp. $\widehat{\lambda}(\mathbf{u})$) la borne supérieure de l'ensemble des réels $\lambda > 0$ tels que le système d'inégalités

$$\|\mathbf{x}\| \leq X \quad \text{et} \quad \|\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}\| \leq X^{-\lambda}$$

admette une solution $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^{n+1}$ non nulle pour des valeurs de X arbitrairement grandes (resp. pour tout X assez grand).

On peut se poser la question de savoir ce que deviennent les exposants diophantiens associés à $\mathbf{u}$ lorsque les coordonnées de ce dernier vérifient des relations algébriques. L'un des cas les plus naturels à étudier est le cas où $\mathbf{u}$ appartient à la courbe de Véronèse, *i.e.* le cas où il existe ξ tel que $\mathbf{u} = (1, \xi, \ldots, \xi^n)$. L'indépendance sur $\mathbb{Q}$ des coordonnées de $\mathbf{u}$ se traduit alors simplement par l'hypothèse que ξ n'est pas algébrique de degré $\leq n$.

Fixons maintenant un entier $n \geq 2$ et $\xi \in \mathbb{R}$ qui n'est pas algébrique de degré $\leq n$. On considère les deux problèmes suivants :

Problème $E_{\omega,X}$ **:** On cherche les solutions $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ non nulles du système

$$\begin{cases} \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|) \leq X \\ |x_0 + x_1\xi + \cdots + x_n\xi^n| \leq X^{-\omega}. \end{cases}$$

Problème $E'_{\lambda,X}$ **:** On cherche les solutions $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ non nulles du système

$$\begin{cases} |x_0| \leq X \\ \max_{1\leq j\leq n}(|x_0\xi^j - x_j|) \leq X^{-\lambda}. \end{cases}$$

On définit $\omega_n(\xi)$ (resp. $\widehat{\omega}_n(\xi)$) comme la borne supérieure de l'ensemble des réels ω tels que le problème $E_{\omega,X}$ ait une solution non triviale pour des valeurs de X arbitrairement grandes (resp. pour tout X assez grand).
On définit $\lambda_n(\xi)$ (resp. $\widehat{\lambda}_n(\xi)$) comme la borne supérieure de l'ensemble des réels λ tels que le problème $E'_{\lambda,X}$ ait une solution non triviale pour des valeurs de X arbitrairement grandes (resp. pour tout X assez grand).
Avec les notations précédentes, en notant $\mathbf{u} = (1, \xi, \dots, \xi^n)$ on a

$$\Big(\omega_n(\xi), \widehat{\omega}_n(\xi), \lambda_n(\xi), \widehat{\lambda}_n(\xi)\Big) = \Big(\omega(\mathbf{u}), \widehat{\omega}(\mathbf{u}), \lambda(\mathbf{u}), \widehat{\lambda}(\mathbf{u})\Big).$$

Notons aussi que le problème $E'_{\lambda,X}$ est un problème d'approximation simultanée : il revient à approcher les réels $\xi, \xi^2, \dots, \xi^n$ par des rationnels de même dénominateur. Signalons qu'il existe également deux autres exposants classiques $\omega^*_n(\xi)$ et $\widehat{\omega}^*_n(\xi)$ qui mesurent la qualité d'approximation de ξ par des nombres algébriques de degré $\leq n$, et qui entretiennent de nombreux liens avec les exposants précédents (voir par exemple [5], [7]). Nous ne les considérons toutefois pas dans cette thèse et ne les mentionnerons plus par la suite.

On appelle *spectre* d'un exposant l'ensemble des valeurs qu'il prend lorsque son paramètre décrit l'ensemble des réels transcendants ou algébriques de degré $> n$. On appelle aussi *spectre joint* d'une famille d'exposants diophantiens $(\nu_1, \nu_2, \dots)$ l'ensemble des valeurs possibles du vecteur $(\nu_1(\xi), \nu_2(\xi), \dots)$ lorsque ξ décrit l'ensemble des réels transcendants ou algébriques de degré $> n$. On notera alors $\mathrm{spec}(\nu_1, \nu_2, \dots)$ cet ensemble.

Les quatre exposants précédents ont fait l'objet de nombreuses études. Le lecteur pourra consulter [7] pour un résumé fourni sur le sujet. Rappelons quelques-uns des résultats classiques les concernant. Pour commencer, le principe des tiroirs de Dirichlet permet de montrer que

$$\widehat{\lambda}_n(\xi) \geq \frac{1}{n}.$$

On a aussi le théorème suivant (voir [65, Ch. VI, Corollaries 1C, 1E] ou [8, Theorem 2.3]).

Théorème. *Pour presque tout réel* ξ *au sens de la mesure de Lebesgue, on a*

$$\omega_n(\xi) = \widehat{\omega}_n(\xi) = n \quad \textit{et} \quad \lambda_n(\xi) = \widehat{\lambda}_n(\xi) = \frac{1}{n}.$$

Ces égalités sont également satisfaites pour tout réel ξ algébrique de degré $> n$ par le théorème des sous-espaces de Schmidt [65], comme le montre le Théorème suivant (voir aussi [7, Theorem 2.10]) :

Théorème. *Soit ξ un nombre algébrique de degré $d \geq n+1$. Alors*

$$\omega_n(\xi) = \widehat{\omega}_n(\xi) = n \quad et \quad \lambda_n(\xi) = \widehat{\lambda}_n(\xi) = \frac{1}{n}.$$

Du point de vue des exposants diophantiens considérés, les nombres algébriques de degré $> n$ se comportent donc comme presque tous les réels (au sens de la mesure de Lebesgue). Dans les Chapitres 2 et 4 de cette thèse, tous les nombres considérés (entre autres les nombres *de type sturmien* construits dans le Chapitre 2) ont des exposants diophantiens qui ont des valeurs différentes des valeurs génériques, donc en particulier tous ces nombres sont transcendants.

Plusieurs relations existent entre les exposants (un grand nombre d'entre elles sont rappelées dans [7]). Les inégalités suivantes découlent du principe de transfert de Khintchine [30] :

$$\frac{\omega_n}{((n-1)\omega_n + n)} \leq \lambda_n \leq \frac{\omega_n - n + 1}{n}, \tag{0.2.1}$$

pour tout $n \geq 2$ et tout réel ξ qui n'est pas algébrique de degré $\leq n$. On a aussi les inégalités suivantes, dues à German [25] :

$$\frac{1}{n} \leq \frac{\widehat{\omega}_n - 1}{(n-1)\widehat{\omega}_n} \leq \widehat{\lambda}_n \leq \frac{\widehat{\omega}_n - n + 1}{\widehat{\omega}_n} \tag{0.2.2}$$

pour tout $n \geq 2$ et pour tout réel ξ qui n'est pas algébrique de degré $\leq n$.
Les estimations (0.2.1) ont été améliorées par Bugeaud et Laurent qui introduisent les exposants uniformes (voir [11], [34], [7, Theorem 3.2]) : on a

$$\frac{(\widehat{\omega}_n - 1)\omega_n}{((n-2)\widehat{\omega}_n + 1)\omega_n + (n-1)\widehat{\omega}_n} \leq \lambda_n \leq \frac{(1 - \widehat{\lambda}_n)\omega_n - n + 2 - \widehat{\lambda}_n}{n-1}, \tag{0.2.3}$$

pour tout $n \geq 2$ et pour tout ξ transcendant. Ce résultat a été redémontré très récemment à l'aide de la géométrie paramétrique des nombres par Schmidt et Summerer (l'inégalité de gauche est équivalente à l'équation (1.17) de [67, Theorem 1.1], et l'inégalité de droite est équivalente à l'équation (1.17′) de [67, Theorem 1.2]). Ces auteurs ont également établi de nouvelles inégalités reliant les exposants diophantiens à l'aide de la géométrie paramétrique des nombres ; nous ne les réécrivons pas ici (voir [67]). Voir aussi les articles de Davenport et Schmidt [17], Bugeaud et Laurent [10] et Laurent [32] pour d'autres inégalités générales sur les exposants uniformes notamment. Plus récemment, certains résultats ont été améliorés par Bugeaud et Schleischitz [12] et Schleischitz [61], [62]. A noter que des inégalités parfois plus fines sont connues pour le cas $n = 3$ [17], [52], [57], [68] (voir aussi les travaux de Moshchevitin [43],[42]).

Nous utiliserons également souvent le résultat suivant. Il peut s'obtenir à partir des travaux de Davenport et Schmidt en généralisant les Lemmes 2 et 6 de [17]. Il découle aussi d'un théorème récent dû à Schleischitz [59, Theorem 1.6] :

Proposition 0.2.1. *On suppose* $\widehat{\lambda}_n(\xi) > \frac{1}{n}$. *Alors*

$$\lambda_n(\xi) \leq 1.$$

Remarque. En termes d'exposants paramétriques (voir Partie 0.6 de cette introduction), la propriété précédente se réécrit $\underline{\psi}_n > \frac{1}{n+1} \Rightarrow \overline{\psi}_n \leq \frac{1}{2}$. Dans le cas $n = 2$ cela se réécrit $\overline{\psi}_1^* < -\frac{1}{3} \Rightarrow \underline{\psi}_1^* \geq -\frac{1}{2}$. Cela conduit à une première contrainte très forte sur les 3-systèmes représentant un nombre ξ pour lequel $\widehat{\lambda}_2(\xi) \neq \frac{1}{2}$ (voir à ce sujet le Chapitre 5). Nous donnerons une preuve détaillée de la Proposition 0.2.1 dans le cas $n = 2$ (voir le Corollaire 6.2.7 au Chapitre 6).

Concernant les spectres de ces exposants, on a

$$\mathrm{spec}(\omega_n) = [n, +\infty].$$

Cette égalité est prouvée par Bernik dans [4], en calculant pour tout $\omega \geq 2$ la dimension de Hausdorff de l'ensemble des réels ξ tels que $\omega_n(\xi) = \omega$. Notons de plus que pour tout $\omega \geq 2n - 1$, on dispose d'une construction explicite donnant un réel ξ_ω vérifiant $\omega_n(\xi_\omega) = \omega$ (voir la preuve du Théorème 5.1 de [7]). On sait aussi certaines choses sur le spectre de λ_n (voir Théorème 5.6 de [7]), par exemple l'inclusion

$$[1, +\infty] \subset \mathrm{spec}(\lambda_n).$$

Voir aussi Bugeaud [6] et Schleischitz [59] qui étudient le spectre joint des exposants $(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$. Les spectres de $\widehat{\omega}_n$ et $\widehat{\lambda}_n$ pour $n \geq 3$ demeurent en revanche encore très mystérieux à l'heure actuelle : on ne sait même pas s'ils sont ou non réduits à un singleton.

Dans cette thèse nous nous focalisons sur le cas particulier $n = 2$ – l'un des plus étudiés à ce jour. On dispose dans ce cas de constructions de réels ξ dont on sait calculer la suite des meilleures approximations rationnelles et les quatre exposants associés $\lambda_2(\xi)$, $\widehat{\lambda}_2(\xi)$, $\omega_2(\xi)$, $\widehat{\omega}_2(\xi)$, ce qui fournit des informations supplémentaires sur les spectres.

0.3 Approximation d'un nombre et de son carré

Rappelons pour commencer les propriétés et théorèmes spécifiques au cas $n = 2$. Notons pour commencer l'identité de Jarník [27, Theorem 1] qui lie $\widehat{\lambda}_2$ et $\widehat{\omega}_2$:

Proposition 0.3.1 (Identité de Jarník)**.** *Pour tout réel* ξ *qui n'est pas algébrique de degré* ≤ 2, *on a*

$$\widehat{\lambda}_2(\xi) = 1 - \frac{1}{\widehat{\omega}_2(\xi)}, \tag{0.3.1}$$

où le membre de droite vaut 1 *si* $\widehat{\omega}_2(\xi) = +\infty$.

Plus généralement, $\widehat{\lambda}(\mathbf{u}) = 1 - \frac{1}{\widehat{\omega}(\mathbf{u})}$ pour tout vecteur non nul $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. Il est intéressant de remarquer qu'un résultat de Marnat [40] assure que pour $n \geq 3$ il n'existe aucune relation algébrique entre les exposants $\widehat{\omega}$ et $\widehat{\lambda}$ définis sur $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.

On note $\gamma = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ le nombre d'or. On a alors les encadrements suivants :

$$\frac{1}{2} \leq \widehat{\lambda}_2(\xi) \leq \frac{1}{\gamma} = 0.618... \quad \text{et} \quad 2 \leq \widehat{\omega}_2(\xi) \leq \gamma^2 = 2.618... \tag{0.3.2}$$

pour tout réel ξ qui n'est pas algébrique de degré ≤ 2. Les minorations sont obtenues par le principe des tiroirs de Dirichlet (ou de manière équivalente par le premier théorème de Minkowski) ; les majorations viennent du Théorème 1a de [17] et de l'identité de Jarník (voir aussi [2]). Jusqu'au début des années 2000, la conjecture la plus répandue était que $\widehat{\lambda}_2(\xi) = \frac{1}{2}$ pour tout réel ξ transcendant. Contre toute attente, Roy a prouvé [48] l'existence de réels ξ appelés *nombres extrémaux* tels que $\widehat{\lambda}_2(\xi) = \frac{1}{\gamma}$ et $\widehat{\omega}_2(\xi) = \gamma^2$ (voir [48] pour la définition précise de ces nombres). Bugeaud et Laurent ont généralisé certaines méthodes de Roy pour calculer les exposants de fractions sturmiennes [8] et obtenir de nouveaux éléments des spectres de $\widehat{\lambda}_2$ et $\widehat{\omega}_2$ (voir ci-dessous). D'un autre côté, en généralisant d'une autre manière ses méthodes, Roy a prouvé [51] que le spectre de $\widehat{\lambda}_2$ (resp. $\widehat{\omega}_2$) était dense dans $[\frac{1}{2}, \frac{1}{\gamma}]$ (resp. $[2, \gamma^2]$). Les nombres issus de sa construction généralisée sont dits *de type Fibonacci*. C'est encore un problème ouvert de décrire précisément le spectre des deux exposants $\widehat{\lambda}_2, \widehat{\omega}_2$.

On sait davantage de choses sur les spectres de λ_2 et ω_2 :

$$\mathrm{spec}(\lambda_2) = [\frac{1}{2}, +\infty] \quad \text{et} \quad \mathrm{spec}(\omega_2) = [2, +\infty]. \tag{0.3.3}$$

La première égalité de (0.3.3) est une conséquence des travaux de Beresnevich, Dickinson, Vaughan et Velani [3], [71], qui calculent la dimension de Hausdorff de l'ensemble des réels ξ tels que $\lambda_2(\xi) = \lambda$. La deuxième égalité de (0.3.3) a déjà été évoquée dans le paragraphe précédent (plus généralement on connaît le spectre de ω_n).

Plusieurs inégalités relient les quatre exposants précédents entre eux (voir par exemple les inégalités (0.2.1), (0.2.2) et (0.2.3) dans le cas $n = 2$). Dans le Chapitre 6 nous établissons l'inégalité suivante qui se déduit aussi de l'équation de gauche (avec $n = 2$) de (0.2.3) :

Proposition A. *Supposons* $\widehat{\lambda}_2(\xi) > \frac{1}{2}$. *Alors*

$$(\omega_2(\xi) - 1)(\widehat{\omega}_2(\xi) - 2) \leq 2. \tag{0.3.4}$$

L'intérêt de la Proposition A réside davantage dans les outils mis en place pour la démontrer que dans le résultat lui-même (conséquence des travaux de Laurent [34]). La démarche que nous employons est duale en un certain sens de la démarche qu'on peut employer pour démontrer le cas $n = 2$ de la Proposition 0.2.1 (voir l'introduction du Chapitre 6 pour plus de détails).

Dans le Chapitre 2 de cette thèse, nous construisons des nombres *de type sturmien* qui généralisent à la fois les nombres de type Fibonacci de Roy et les fractions sturmiennes de Bugeaud et Laurent, et fournissent une nouvelle famille de réels pour lesquels

on sait calculer les exposants et un 3-système les représentant (partiellement). Cela nous permet d'obtenir de nouvelles informations sur le spectre joint de $(\lambda_2, \widehat{\lambda}_2, \omega_2, \widehat{\omega}_2)$ (voir Partie 0.4). Avant d'évoquer les nombres de type sturmien, mentionnons que des détails supplémentaires sur les constructions des fractions de Fibonacci de Roy, des fractions sturmiennes de Bugeaud et Laurent, et des nombres de type Fibonacci de Roy sont donnés dans les Parties 1.3 et 1.4 du Chapitre 1.

Nombres de type Fibonacci de Roy

Pour construire des nombres extrémaux (qui sont des nombres vérifiant entre autres $\widehat{\lambda}_2(\xi) = 1/\gamma$ où γ est le nombre d'or), Roy [48] associe à deux entiers $a, b > 0$ distincts le réel $\xi_{a,b}$ dont la suite des quotients partiels du développement en fraction continue est le mot de Fibonacci $w = abaaba\ldots$ construit sur $\{a, b\}$ (*i.e.* $\xi_{a,b} = [0; a, b, a, a, b, \ldots]$). Voir par exemple [36] ou la Partie 1.3 du Chapitre 1 pour les détails relatifs à la combinatoire des mots. La qualité d'approximation des nombres extrémaux vient du fait que le mot de Fibonacci a beaucoup de préfixes palindromes, et chacun d'entre eux donne lieu à une bonne approximation du vecteur $(1, \xi_{a,b}, \xi_{a,b}^2)$. Notons que pour tout nombre extrémal ξ on a $\lambda_2(\xi) = 1$.

Pour les nombres de *type Fibonacci*, Roy a généralisé [51] la construction ci-dessus en utilisant des récurrences de Fibonacci sur des matrices de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ mais en ne considérant plus directement le développement en fraction continue, ce qui lui a permis de "relâcher" la condition $\lambda_2(\xi) = 1$ et de montrer la densité des spectres des exposants $\widehat{\lambda}_2$ et $\widehat{\omega}_2$ dans les intervalles définis par (0.3.2).
Les constructions des nombres $\xi_{a,b}$ et des nombres de type Fibonacci de Roy sont expliquées plus en détails dans la Partie 1.3 du Chapitre 1.

Fractions sturmiennes de Bugeaud et Laurent

En généralisant la construction des nombres extrémaux $\xi_{a,b}$ de Roy (voir ci-dessus), Bugeaud et Laurent ont calculé entre autres les exposants $\lambda_2(\xi), \widehat{\lambda}_2(\xi), \omega_2(\xi)$ et $\widehat{\omega}_2(\xi)$ pour des réels ξ dont le développement en fraction continue est un mot sturmien caractéristique (voir [8] et [47] ; notons aussi que Schleischitz a traité ensuite le cas de l'approximation cubique de tels nombres dans [60], [63]). Encore une fois, le fait que les mots sturmiens caractéristiques aient beaucoup de préfixes palindromes que l'on sait décrire précisément [36], [20], [19] joue un rôle essentiel. Notons que pour les nombres extrémaux et les nombres ξ ainsi construits par Bugeaud et Laurent, on a $\lambda_2(\xi) = 1$.
La construction des fractions sturmiennes de Bugeaud et Laurent est expliquée plus en détails dans la Partie 1.4 du Chapitre 1.

0.4 Construction des nombres de type sturmien

A l'heure actuelle, il y a peu d'exemples de constructions de nombres ξ dont on sait calculer les exposants associés et la suite des meilleures approximations rationnelles de $(1, \xi, \xi^2)$. Si on impose $\widehat{\omega}_2(\xi) > 2$, on trouve essentiellement les trois exemples précédents :

les nombres extrémaux de Roy [48], les fractions sturmiennes de Bugeaud et Laurent [8], et les nombres de type Fibonacci de Roy [51]. Notons aussi qu'on sait construire pour tout $\omega \geq 3$ un nombre ξ vérifiant $\omega_2(\xi) = \omega$ (cf preuve du Théorème 5.1 et le Théorème 5.5 de [7]).

Dans le Chapitre 2 de cette thèse – qui correspond essentiellement à un article soumis [45] – nous généralisons la construction des nombres de type Fibonacci de Roy à une récurrence sturmienne et nous appelons les nombres ainsi produits des nombres de *type sturmien* (voir Partie 2.6 du Chapitre 2). Notre construction généralise aussi les fractions sturmiennes de Bugeaud et Laurent. L'un des résultats principaux du Chapitre 2 est le Théorème B qui donne les quatre exposants $\widehat{\lambda}_2(\xi)$, $\widehat{\omega}_2(\xi)$, $\omega_2(\xi)$ et $\lambda_2(\xi)$ d'un nombre ξ de type sturmien. La construction des nombres de type sturmien est intimement liée à des suites de matrices particulières de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ appelées suites ψ-sturmiennes de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Les Théorèmes B et F sont prouvés grâce à une étude fine de ces suites.

Soit $(s_k)_{k\geq 0}$ une suite d'entiers, strictement positifs pour $k \geq 1$ et avec $s_0 = -1, s_1 = 1$. Pour $k \geq 0$, on pose $t_k = s_0 + s_1 + \cdots + s_k$, et on associe à $(s_k)_k$ une fonction ψ (appelée fonction *sturmienne*, voir Définition 2.2.3 du Chapitre 2) définie sur $\mathbb{N}$ par $\psi(t_k) = t_{k-1} - 1$ pour $k \geq 1$, et $\psi(i) = i - 1$ si $i \in \mathbb{N}^*$ n'est pas parmi les t_k. On note $\mathcal{F}_{stur}$ l'ensemble des fonctions sturmiennes pour lesquelles la suite d'entiers $(s_k)_k$ correspondante est bornée. Pour définir un nombre ψ-sturmien propre on a besoin des deux définitions suivantes (les nombres de type sturmien sont exactement l'ensemble des nombres ψ-sturmiens propres pour ψ décrivant $\mathcal{F}_{stur}$).

Définition. Une suite *ψ-sturmienne* de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ est une suite de matrices $(\mathbf{w}_i)_{i\geq 0}$ telle que

$$\mathbf{w}_{i+1} = \mathbf{w}_i^{s_{i+1}}\mathbf{w}_{i-1} \quad (i \geq 1).$$

Une telle suite est *admissible* s'il existe une matrice $N \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $\mathbf{w}_1 N, \mathbf{w}_0 {}^t\!N$ et $\mathbf{w}_1\mathbf{w}_0 {}^t\!N$ soient symétriques (voir Définition 2.4.1). On pose alors $N_k = N$ si k est pair, $N_k = {}^t\!N$ si k est impair.

On définit la norme $\|\mathbf{w}\|$ d'une matrice $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ par la formule $\|\mathbf{w}\| = \sqrt{a^2 + (b^2 + c^2)/2 + d^2}$, et on dit qu'une suite ψ-sturmienne $(\mathbf{w}_i)_{i\geq 0}$ est à *croissance multiplicative* s'il existe $c > 0$ telle que

$$c^{-1}\|\mathbf{w}_k^l\mathbf{w}_{k-1}\| \leq \|\mathbf{w}_k\| \times \|\mathbf{w}_k^{l-1}\mathbf{w}_{k-1}\| \leq c\|\mathbf{w}_k^l\mathbf{w}_{k-1}\|$$

pour tous $k \geq 1$ et $1 \leq l \leq s_{k+1} + 1$.

Remarquons que le choix de la norme n'importe pas réellement ici (puisque toutes nos estimations seront à constante multiplicative près). Le choix que nous faisons de $\|\cdot\|$ présente toutefois l'avantage d'être compatible via l'identification présentée ci-dessous avec la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^3$. Les suites à croissance multiplicative sont étudiées dans la Partie 2.5 du Chapitre 2 (voir aussi la Partie 4.5.3 du Chapitre 4). Dans la suite on identifie $\mathbb{R}^3$ (resp. $\mathbb{Z}^3$) à l'espace des matrices symétriques 2×2 à coefficients réels (resp. entiers) via l'isomorphisme

$$(x_0, x_1, x_2) \longmapsto \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on peut considérer le déterminant $\det(\mathbf{x})$ d'un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. De manière similaire étant données deux matrices symétriques $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$ désigne le produit vectoriel des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ correspondants.
Tout nombre ψ-sturmien propre sera donné par une suite admissible ψ-sturmienne de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z})$ à croissance multiplicative, telle que le contenu des $\mathbf{w}_i$ soit borné et que la suite $(\|\mathbf{w}_i\|)_i$ diverge vers l'infini. Par exemples les suites ψ-sturmiennes définies par les matrices de Roy [51]

$$\mathbf{w}_0 = \begin{pmatrix} 1 & b \\ a & a(b+1) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 & c \\ a & a(c+1) \end{pmatrix}$$

avec $a \geq 2$ et $1 \leq b \leq c$ vérifient les hypothèses précédentes (voir Partie 2.8.1).
A une telle suite ψ-sturmienne $(\mathbf{w}_i)_{i\geq 0}$ on associe deux suites de matrices symétriques $(\mathbf{y}_i)_i$ et $(\mathbf{z}_i)_i$ définies par les formules

$$\mathbf{y}_{t_k+l} = \mathbf{w}_k^{l+1}\mathbf{w}_{k-1}N_k \quad \text{et} \quad \mathbf{z}_{t_k+l} = \frac{1}{\det(\mathbf{w}_k)}\mathbf{y}_{\psi(t_{k+1})} \wedge \mathbf{y}_{t_k+l} \quad (0 \leq k, 0 \leq l < s_{k+1}) \quad (0.4.1)$$

Les propriétés combinatoires de ces suites sont étudiées dans les Parties 2.3 et 2.4 du Chapitre 2. Si $(a_i)_{i\geq 1}$, $(b_i)_{i\geq 1}$ sont deux suites de réels > 0, on note $a_i \asymp b_i$ s'il existe $c > 0$ telle que $c^{-1}a_i \leq b_i \leq ca_i$ pour tout i assez grand. Par croissance multiplicative (et parce que $(\|\mathbf{w}_i\|)_i$ diverge vers l'infini) nous montrons qu'il existe δ tel que

$$|\det(\mathbf{w}_i)| \asymp \|\mathbf{w}_i\|^{\delta}.$$

Si $\delta < \frac{\sigma}{1+\sigma}$, avec $\sigma = 1/\limsup_{k\to\infty}[s_{k+1}; s_k, \dots, s_1]$, alors la suite $(\mathbf{y}_i)_i$ associée converge dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ vers un vecteur $\mathbf{y} = (1, \xi, \xi^2)$. Le nombre ξ ainsi produit est appelé un nombre ψ-sturmien propre. Nous montrons alors que les suites $(\mathbf{y}_i)_i$ et $(\mathbf{z}_i)_i$ sont de "bonnes" solutions des Problèmes $E'_{\lambda,X}$ et $E_{\omega,X}$ respectivement. Pour cela, nous donnons des estimations précises des quantités $\|\mathbf{y}_i\|$, $\|\mathbf{z}_i\|$, $|\langle \mathbf{z}_i, \mathbf{y}\rangle|$ et $\|\mathbf{y}_i \wedge \mathbf{y}\|$ qui nous permettent de construire un 3-système qui représente partiellement ξ : voir la Figure 1 de la Partie 0.6.2. Finalement, nous déduisons de ce 3-système les exposants diophantiens associés à ξ, ce qui démontre le Théorème B ci-dessous. Pour énoncer ce résultat on a besoin des notations suivantes.
Soit $\underline{s} = (s_k)_{k\geq 0}$ une suite d'entiers naturels non nuls. On lui associe alors la quantité

$$\sigma(\underline{s}) = \frac{1}{\limsup_{k\to+\infty}[s_{k+1}; s_k, \dots, s_1]},$$

où de manière classique $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ représente la fraction continue dont la suite des quotients partiels est $(a_0, a_1, \dots)$. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des suites bornées d'entiers naturels non nuls et comme dans [8], on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des $\sigma(\underline{s})$ pour $\underline{s} \in \mathcal{A}$.
Cassaigne a étudié les éléments de $\mathcal{S}$ dans [13]. Cet ensemble est également lié au spectre de l'exposant $\beta_0(\xi)$ de Fischler [23] (voir les Parties 1.4 et 1.5 du Chapitre 1 pour plus de précisions).

Théorème B. *Pour tout $\underline{s} \in \mathcal{A}$, il existe un ensemble $\Delta_{\underline{s}}$ contenant 0 et dense dans $[0, \frac{\sigma}{1+\sigma}[$ (avec $\sigma = \sigma(\underline{s})$) tel que pour tout $\delta \in \Delta_{\underline{s}}$, il existe un réel ξ de type sturmien*

vérifiant

$$\begin{aligned}
&\omega_2(\xi) = \frac{2-\delta}{\sigma} + 1 - \delta,\\
&\widehat{\omega}_2(\xi) = 1 + (1-\delta)(1+\sigma),\\
&\widehat{\lambda}_2(\xi) = \frac{(1-\delta)(1+\sigma)}{1+(1-\delta)(1+\sigma)},\\
&1-\delta \leq \lambda_2(\xi) \leq \max\left(1-\delta, \frac{1}{1-\delta+\sigma}\right).
\end{aligned}$$

En particulier, si δ vérifie l'inégalité plus forte $\delta \leq h(\sigma)$ avec $h(\sigma) = \frac{\sigma}{2} + 1 - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + 1}$, alors

$$\lambda_2(\xi) = 1 - \delta.$$

La condition $\delta \leq h(\sigma)$ est nécessaire pour pouvoir ignorer les zones d'incertitude du 3-système dont nous nous servons pour calculer les exposants (voir Partie 0.6.2 et Figure 1). Cette condition n'est sans doute pas optimale. La condition $\delta < \frac{\sigma}{1+\sigma}$ apparaît en revanche naturellement : si $\delta = \frac{\sigma}{1+\sigma}$ alors la formule ci-dessus donnant la valeur de $\widehat{\lambda}_2(\xi)$ donnerait $\widehat{\lambda}_2(\xi) = \frac{1}{2}$ (valeur minimale du spectre de $\widehat{\lambda}_2$). On pourra noter que le cas $\delta = 0$ de notre théorème correspond aux valeurs de ces quatre exposants pour les ξ_φ du Théorème 3.1 de Bugeaud et Laurent [8] (voir Partie 1.4 du Chapitre 1), qui sont des cas particuliers de nombres de type sturmiens dont le δ correspondant est nul. Remarquons aussi que dans le cas d'un nombre de type Fibonacci de Roy on a $s_k = 1$ pour tout $k \geq 1$ et que le σ associé est $\sigma = 1/\gamma$.

Un corollaire immédiat du Théorème B – également prouvé dans le Chapitre 2 – est le suivant.

Corollaire C. *Pour tout $\sigma \in \mathcal{S}$, il existe $c = c(\sigma)$ vérifiant $0 \leq c < 1$ tel que le spectre joint de $(\lambda_2, \widehat{\lambda}_2, \omega_2, \widehat{\omega}_2)$ soit dense dans la courbe*

$$\left\{\left(x, 1 - \frac{1}{1+(1+\sigma)x}, \frac{1+(1+\sigma)x}{\sigma}, 1+(1+\sigma)x\right) \;\middle|\; x \in [c,1]\right\}.$$

Schmidt et Summerer ont montré grâce aux nouveaux et puissants outils de la géométrie paramétrique des nombres ([66], [67] ; voir aussi Partie 0.6 ci-dessous) que l'étude des exposants diophantiens classiques précédents se ramenait à l'étude de ce qu'ils appellent un $(3,\gamma)$-système. Roy a montré qu'on pouvait se restreindre au cas d'un $(3,0)$-système qu'il appelle plus simplement 3-système dans [55], cf Définition 1.6.8 du Chapitre 1. Dans le Chapitre 2 nous donnons une description presque complète du 3-système associé à un nombre ξ de type sturmien (voir Figure 2.2 de la Partie 2.7 du Chapitre 2, ainsi que la Figure 1 de la Partie 0.6.2). C'est en s'appuyant sur ce 3-système que nous calculons les exposants du Théorème B.

0.5 Résultats réciproques

L'objectif est maintenant différent. Pour la construction de nombres ψ-sturmiens (voir paragraphe 0.4), nous avons considéré une suite ψ-sturmienne à partir de laquelle

nous avons déduit (entre autres) une suite $(\mathbf{y}_i)_i$ de points de $\mathbb{Z}^3$ qui tend dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ vers un vecteur $(1, \xi, \xi^2)$. La suite $(\mathbf{y}_i)_i$ se trouve être une sous-suite de la suite des points minimaux associés à ξ (qui est de manière un peu informelle la suite donnant les meilleures approximations rationnelles de $(1, \xi, \xi^2)$). De plus, $(\mathbf{y}_i)_i$ suit la récurrence particulière $\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i \mathbf{y}_{\psi(i)}^{-1} \mathbf{y}_i$. Dans le Chapitre 4 nous avons une démarche "réciproque" : nous considérons un nombre ξ en supposant uniquement qu'il existe une sous-suite $(\mathbf{v}_i)_i$ de la suite de ses points minimaux qui vérifie que $\mathbf{v}_{i+1}$ est proportionnel à $\mathbf{v}_i \mathbf{v}_{\psi(i)}^{-1} \mathbf{v}_i$ pour i assez grand, et nous démontrons alors qu'il provient d'une construction essentiellement similaire à celle d'un nombre ψ-sturmien. Les motivations pour considérer ce genre de problème sont expliquées ci-après.

Fixons ξ un réel qui n'est pas algébrique de degré ≤ 2. Pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ on note $\|\mathbf{x}\|_\infty$ sa norme définie comme le maximum des valeurs absolues de ses coefficients. Pour étudier la qualité de l'approximation rationnelle simultanée de ξ et ξ^2 on introduit la quantité

$$M(\mathbf{x}) = \max\left(|x_0\xi - x_1|, |x_0\xi^2 - x_2|\right)$$

qui est notée $L(\mathbf{x})$ dans [23]. Dans [23], Fischler introduit de nouveaux exposants diophantiens β_ε dont la définition est donnée ci-dessous.
Pour $\varepsilon \in]0, 1]$ on note $\beta_\varepsilon(\xi)$ la borne inférieure de l'ensemble des β tels que, pour tout B suffisamment grand, il existe $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^3$ tel que

$$1 \leq |x_0| \leq B \quad \text{et} \quad M(\mathbf{x}) \leq \min\left(B^{-1/\beta}, |x_0|^{\varepsilon-1}\right).$$

Si l'ensemble des β est vide, on pose $\beta_\varepsilon(\xi) = +\infty$. Clairement, la fonction $\varepsilon \mapsto \beta_\varepsilon(\xi)$ est décroissante et on a $\beta_1(\xi) = 1/\widehat{\lambda}_2(\xi) \leq 2$. On pose

$$\beta_0(\xi) = \sup_{0<\varepsilon<1} \beta_\varepsilon(\xi) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \beta_\varepsilon(\xi).$$

Le lecteur est invité à consulter la Partie 1.5 du Chapitre 1 dans laquelle sont rappelés certains résultats de [23]. Fischler pose la question suivante :

Question : a-t-on l'égalité $\beta_0(\xi) = \beta_1(\xi)$ pour tout réel ξ tel que $\beta_0(\xi) < 2$?

Fischler a montré que si $\beta_0(\xi) < 2$ alors il existe $\varepsilon_1 > 0$ qui ne dépend que de $\beta_0(\xi)$ et $\beta_1(\xi)$ et tel que $\beta_\varepsilon(\xi) = \beta_0(\xi)$ pour tout $\varepsilon < \varepsilon_1$ (voir le Théorème 1.5.2 du Chapitre 1). L'un des résultats-clefs de son article est le suivant : pour tout réel ξ vérifiant $\beta_0(\xi) < 2$, il existe une fonction ψ *asymptotiquement réduite* – au sens de la Définition 1.5.1 – et une sous-suite de points minimaux $(\mathbf{v}_i)_i$ telles que $\mathbf{v}_{i+1}$ soit colinéaire à $\mathbf{v}_i \mathbf{v}_{\psi(i)}^{-1} \mathbf{v}_i$ pour i assez grand (voir le Théorème 1.8.1 du Chapitre 1). Par ailleurs si $\beta_0(\xi) < \sqrt{3}$ alors on peut supposer que ψ est *sturmienne* (voir Théorème 1.5.4). Le cas des fonctions sturmiennes apparaît ainsi naturellement. Notons que tout nombre de type sturmien (que nous construisons dans le Chapitre 2) est associé à une fonction ψ sturmienne, et réciproquement à toute fonction ψ sturmienne sont associés des nombres de type sturmien particuliers. Dans le Chapitre 4, nous montrons le résultat suivant qui répond partiellement à la question de Fischler :

Théorème D. *Soit ξ un réel tel que $\beta_0(\xi) < 2$. Si l'une des fonctions ψ associées par le Théorème 1.8.1 est sturmienne, alors*

$$\beta_0(\xi) = \beta_1(\xi). \tag{0.5.1}$$

En particulier, pour ξ tel que $\beta_0(\xi) < \sqrt{3}$ l'égalité (0.5.1) *est satisfaite.*

La question reste ouverte pour les ξ tels que $\beta_0(\xi) \geq \sqrt{3}$ et tels qu'aucune des fonctions ψ associées n'est sturmienne. Afin de montrer le Théorème D nous définissons un exposant paramétrique κ^* (voir Définition 4.3.1) lié aux exposants β_ε de Fischler. Plus précisément, nous posons

$$\kappa^*(\xi) = \lim_{\varepsilon \to \varepsilon_0^+} -\frac{1}{\beta_\varepsilon(\xi) + 1},$$

où $\varepsilon_0 = 1 - \lambda_2(\xi)$. L'intérêt de considérer $\kappa^*(\xi)$ plutôt que $\beta_0(\xi)$ est de pouvoir traiter le cas général en ignorant la contrainte $\lambda_2(\xi) = 1$ qu'impose la condition $\beta_0(\xi) < +\infty$. Notons que si $\lambda_2(\xi) = 1$ alors $\varepsilon_0 = 0$ et $\kappa^*(\xi) = -\frac{1}{1+\beta_0(\xi)}$.

L'exposant κ^* peut être calculé explicitement pour certains nombres de type sturmien. Notamment, en calculant κ^* pour les nombres de type Fibonacci de Roy, nous obtenons le résultat suivant sur le spectre de κ^*, *i.e.* l'ensemble des valeurs que peut prendre $\kappa^*(\xi)$ lorsque ξ est un nombre réel qui n'est pas algébrique de degré ≤ 2 :

Théorème E. *Le spectre de κ^* est dense dans l'intervalle $[-\frac{1}{\gamma+1}, \kappa_\gamma]$, avec*

$$\kappa_\gamma = -\frac{(1 - h(\frac{1}{\gamma}))\gamma}{1 + (2 - h(\frac{1}{\gamma}))\gamma} = -0.3131334\cdots > -\frac{1}{3}.$$

Ce Théorème est prouvé dans le Chapitre 4. Motivé par ce qui précède nous considérons dans le Chapitre 4 le problème suivant qui nous permettra entre autres de mettre en place les outils pour prouver le Théorème D : peut-on décrire l'ensemble des nombres transcendants ξ pour lesquels il existe une sous-suite de points minimaux $(\mathbf{v}_i)_i$ associés à la famille $\mathcal{C}^*_{\mathbf{u}}(e^q)$ (voir la Partie 1.7 du Chapitre 1 pour la définition précise de points minimaux) et une fonction ψ asymptotiquement réduite telles que pour tout i, le point $\mathbf{v}_{i+1}$ soit colinéaire à $\mathbf{v}_i\mathbf{v}_{\psi(i)}^{-1}\mathbf{v}_i$? Nous restreignons notre étude au cas où ψ est une fonction sturmienne (en gardant en tête qu'on peut toujours faire cette hypothèse si $\beta_0(\xi) < \sqrt{3}$). Dans ces conditions, les résultats du Chapitre 2 montrent que cet ensemble contient tous les nombres de type sturmien ; on peut espérer que ces deux ensembles soient égaux. Le Chapitre 4 avance en direction de cette conjecture en montrant que de tels nombres partagent beaucoup de propriétés avec les nombres de type sturmiens construits dans le Chapitre 2. On montre notamment que le 3-système associé à un tel nombre ξ est du type de celui d'un nombre de type sturmien à $o(q)$ près (voir Théorème 4.7.1). Pour construire ce 3-système nous avons besoin d'établir des estimations fines des contenus de suites de matrices particulières : les résultats concernant ces problématiques sont groupés dans le Chapitre 3. Le Théorème F ci-dessous – prouvé dans le Chapitre 4 – assure que les exposants diophantiens associés à ξ sont exactement de la forme de ceux d'un nombre de type sturmien. Ce Théorème joue un rôle essentiel dans la preuve du Théorème D.

Théorème F. *Soit ξ un nombre réel tel que $\widehat{\lambda}_2(\xi) > \frac{1}{2}$. On suppose qu'il existe une fonction sturmienne $\psi \in \mathcal{F}_{stur}$ et une suite de points minimaux $(\mathbf{v}_i)_i$ associée à la famille $\mathcal{C}^*_{\mathbf{u}}(e^q)$ (voir la Partie 1.7 du Chapitre 1) avec $\mathbf{u} = (1, \xi, \xi^2)$ telle que*

$$\mathbf{v}_{i+1} \propto \mathbf{v}_i \mathbf{v}_{\psi(i)}^{-1} \mathbf{v}_i$$

pour i assez grand. Alors $\frac{\log(|\det(\mathbf{v}_i)|)}{\log(\|\mathbf{v}_i\|)}$ converge quand i tend vers l'infini. On pose

$$\delta = \lim_{i \to +\infty} \frac{\log(|\det(\mathbf{v}_i)|)}{\log(\|\mathbf{v}_i\|)} \quad et \quad \sigma = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty}[s_{k+1}; s_k, \ldots, s_1]} \tag{0.5.2}$$

(avec $(s_i)_i$ la suite associée à ψ, voir notamment la Définition 2.2.3 où intervient cette quantité). Alors $\delta < \frac{\sigma}{1+\sigma}$ et

$$\begin{aligned}
&\omega_2(\xi) = \frac{2-\delta}{\sigma} + 1 - \delta, \\
&\widehat{\omega}_2(\xi) = 1 + (1-\delta)(1+\sigma), \\
&\widehat{\lambda}_2(\xi) = \frac{(1-\delta)(1+\sigma)}{1+(1-\delta)(1+\sigma)}, \\
&1 - \delta \leq \lambda_2(\xi) \leq \max\left(1-\delta, \frac{1}{1-\delta+\sigma}\right).
\end{aligned}$$

Si δ vérifie la condition plus forte $\delta < h(\sigma)$ avec $h(\sigma) = \frac{\sigma}{2} + 1 - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + 1}$, alors

$$\lambda_2(\xi) = 1 - \delta \quad et \quad \kappa^*(\xi) = -\frac{(1-\delta)(1+\sigma)}{1+(2-\delta)(1+\sigma)},$$

l'égalité de gauche étant encore valable si $\delta = h(\sigma)$.

Considérons $(\mathbf{v}_i)_i$ et δ comme dans l'énoncé du Théorème F. L'étude conduite dans le Chapitre 3 sur les suites ψ-sturmiennes $(\mathbf{w}_k)_k$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telles que $\mathbf{w}_k$ est proportionnelle à un élément de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z})$ pour tout k permet essentiellement de pouvoir contrôler les contenus des éléments d'une telle suite admissible quelconque (sous la "seule" hypothèse de croissance multiplicative). Elle permet d'établir le résultat suivant – version faible du résultat principal du Chapitre 3 – qui est l'un des ingrédients-clefs pour montrer le Théorème F.

Théorème G. *Sous les hypothèses du Théorème F, il existe $\underline{\mathbf{w}} = (\mathbf{w}_k)_{k\geq 0}$ une suite ψ-sturmienne de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ admissible, à croissance multiplicative et telle que $(\|\mathbf{w}_k\|)_k$ diverge vers l'infini et vérifiant les propriétés suivantes. On note $\underline{\mathbf{y}} = (\mathbf{y}_i)_i$ et $\underline{\mathbf{z}} = (\mathbf{z}_i)_i$ les suites de matrices symétriques associées à $\underline{\mathbf{w}}$ par (0.4.1). Alors*

(a) Pour tout indice i assez grand, $\mathbf{y}_i$ est colinéaire à $\mathbf{v}_i$, et on a l'estimation $\|\mathbf{v}_i\| = \|\mathbf{y}_i\|^{1+o(1)}$.

(b) Les suites $\underline{\mathbf{y}}$ et $\underline{\mathbf{z}}$ vérifient

$$\|\mathbf{y}_i\|^{o(1)}\mathbf{y}_i \in \mathbb{Z}^3 \quad et \quad \|\mathbf{z}_i\|^{o(1)}\mathbf{z}_i \in \mathbb{Z}^3$$

quand i tend vers l'infini, et ce sont des vecteurs primitifs de $\mathbb{Z}^3$.

Remarquons que la suite $(\mathbf{w}_k)_k$ du Théorème G n'est pas nécessairement à coefficients entiers.

0.6 Géométrie paramétrique des nombres de Schmidt et Summerer

0.6.1 Présentation générale

Dans cette thèse – et notamment dans les Chapitres 2, 4, 5, 6 et 7 – nous utilisons les outils récents de la géométrie paramétrique des nombres de Schmidt et Summerer. Des rappels plus détaillés sont effectués dans la Partie 1.6 du Chapitre 1. Rappelons qu'un corps convexe symétrique de $\mathbb{R}^n$ est un ensemble C compact, convexe, symétrique par rapport à l'origine (i.e. $x \in C \Rightarrow -x \in C$) et d'intérieur non vide. Étant donné un corps convexe symétrique $C \subset \mathbb{R}^n$ et un réseau Λ de $\mathbb{R}^n$, on peut considérer les n minima successifs associés à C et Λ : le i-ème minimum $\lambda_i(C, \Lambda)$ est le plus petit réel r tel que le sous-espace vectoriel engendré par $(rC) \cap \Lambda$ soit de dimension $\geq i$. Les questions relatives à l'étude des minima successifs associés à un corps convexe C et un réseau Λ sont traitées par la géométrie des nombres (voir par exemple [15] pour une introduction à ce domaine). L'idée fondatrice de la géométrie paramétrique des nombres développée par Schmidt et Summerer dans [66] et [67] est d'étudier le n-uplet $\mathbf{L}_\mathbf{u}(Q)$ formé par les minima successifs (plus précisément, les logarithmes en base Q de ces minima) d'une famille de corps convexes paramétrée par un réel $Q > 1$ pour un réseau fixé construit à partir d'un vecteur $\mathbf{u} = (1, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ dont les coordonnées sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$. Les auteurs montrent alors d'une part comment leurs travaux permettent de retrouver plusieurs résultats classiques portant sur des exposants diophantiens, et d'autre part comment cela leur permet de démontrer toute une série de nouvelles inégalités sur ces exposants. L'un des points clef de la théorie est que la fonction $\mathbf{L}_\mathbf{u}$ peut être approchée à une différence bornée près par une fonction d'une certaine classe appelée (n, γ)-système. Les problèmes d'exposants sont alors ramenés à des problèmes combinatoires – *a priori* plus simples à aborder – portant sur ces (n, γ)-systèmes. Les détails (trop longs et techniques pour cette introduction) concernant la fonction $\mathbf{L}_\mathbf{u}$ sont regroupés dans la Partie 1.6 du Chapitre 1. Roy montre dans [55] que la fonction $\mathbf{L}_\mathbf{u}$ peut être approchée par un élément de la sous-classe des $(n, 0)$-systèmes – que Roy appelle n-systèmes – et résout une conjecture de Schmidt et Summerer en montrant le résultat majeur suivant :

Théorème (Roy, 2015). *Pour tout n-système $\mathbf{P}$ sur $[q_0, +\infty[$, il existe un vecteur $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $\|\mathbf{L}_\mathbf{u} - \mathbf{P}\|_\infty$ soit borné sur $[q_0, +\infty[$.*

Voir la Partie 1.6 du Chapitre 1 pour la définition précise d'un n-système. Plusieurs paramétrisations de la famille de corps convexes sont possibles pour étudier les exposants $\omega(\mathbf{u})$, $\widehat{\omega}(\mathbf{u})$, $\lambda(\mathbf{u})$ et $\widehat{\lambda}(\mathbf{u})$ de la Partie 0.2. Dans cette thèse, nous travaillons avec les mêmes paramétrisations que Roy [55], [56]. On désigne par $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$, et par $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée. On munit l'espace $\bigwedge^2 \mathbb{R}^n$ de la structure d'espace euclidien telle que pour toute base orthonormée $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ de $\mathbb{R}^n$, l'ensemble des produits extérieurs $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j$ avec $1 \leq i < j \leq n$ forme une base orthonormée de $\bigwedge^2 \mathbb{R}^n$, et on note encore $\| \cdot \|$ la norme associée (voir Partie 1.6 du Chapitre 1).

Définition. Soit $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ dont les coordonnées sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$. On pose

$$\mathcal{C}_\mathbf{u}(e^q) \ := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ ; \ \|\mathbf{x}\| \leq 1, |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq e^{-q}\}$$

et

$$\mathcal{C}^*_{\mathbf{u}}(e^q) \ := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ ; \ \|\mathbf{x}\| \leq e^q, \|\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}\| \leq 1\}.$$

Pour $j = 1, \ldots, n$, on note $\lambda_j(q)$ (resp. $\lambda^*_j(q)$) le j-ème minimum successif du corps convexe $\mathcal{C}_{\mathbf{u}}(e^q)$ (resp. $\mathcal{C}^*_{\mathbf{u}}(e^q)$) pour le réseau $\mathbb{Z}^n$. On définit également

$$\mathrm{L}_j(q) = \log \lambda_j(q) \qquad \psi_j(q) = \frac{\mathrm{L}_j(q)}{q}$$

$$\overline{\psi}_j = \limsup_{q\to\infty} \psi_j(q) \qquad \underline{\psi}_j = \liminf_{q\to\infty} \psi_j(q),$$

ainsi que $\mathrm{L}^*_j(q)$, $\psi^*_j(q)$, $\overline{\psi}^*_j$, $\underline{\psi}^*_j$ associés aux $\lambda^*_j(q)$. On regroupe les L_j (resp. L^*_j) en une unique fonction $\mathbf{L}_{\mathbf{u}} = (\mathrm{L}_1, \ldots, \mathrm{L}_n)$ (resp. $\mathbf{L}^*_{\mathbf{u}} = (\mathrm{L}^*_1, \ldots, \mathrm{L}^*_n)$).

On peut alors montrer qu'on a la correspondance suivante :

$$\left(\underline{\psi}_1, \overline{\psi}_1, \underline{\psi}_n, \overline{\psi}_n\right) = \left(\frac{1}{1+\omega_{n-1}(\mathbf{u})}, \frac{1}{1+\widehat{\omega}_{n-1}(\mathbf{u})}, \frac{\widehat{\lambda}_{n-1}(\mathbf{u})}{1+\widehat{\lambda}_{n-1}(\mathbf{u})}, \frac{\lambda_{n-1}(\mathbf{u})}{1+\lambda_{n-1}(\mathbf{u})}\right) \qquad (0.6.1)$$

(voir par exemple le Corollaire 1.4 de [55]). Dans l'état actuel de la théorie on ne peut traiter que certains exposants – dont la plupart des exposants classiques, entre autres $\lambda_2, \widehat{\lambda}_2, \omega_2$ et $\widehat{\omega}_2$ ainsi que les exposants β_ε de Fischler (comme nous le montrons dans le Chapitre 4). C'est aussi le cas des exposants intermédiaires de Laurent, voir [11], [34] et [56, Proposition 3.1]. L'étude asymptotique des fonctions $\mathbf{L}_{\mathbf{u}}$ – donc des exposants diophantiens admettant un équivalent paramétrique – est dès lors entièrement réduite à l'étude combinatoire des n-systèmes. C'est notamment grâce à son théorème ci-dessus que Roy [56] détermine le spectre joint des exposants $\omega_j(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ de Laurent : il construit des n-systèmes aux "bonnes" propriétés et en déduit l'existence de vecteurs $\mathbf{u}$ avec les "bons" exposants. La topologie du spectre joint des exposants paramétriques a été étudiée par Roy dans [57] (voir aussi [24], [69]). Il donne également une description complète du spectre dans le cas $n = 3$. Notons que dans ce cas, Laurent [33] avait déjà donné une description complète du spectre joint de $(\underline{\psi}_1, \overline{\psi}_1, \underline{\psi}_3, \overline{\psi}_3)$. Notons également que certaines inégalités apparaissant dans la description de Roy du spectre joint de $(\underline{\psi}_1, \overline{\psi}_1, \underline{\psi}_2, \overline{\psi}_2, \underline{\psi}_3, \overline{\psi}_3)$ ont été obtenues très récemment de manière indépendante par Schmidt et Summerer [70].

On suppose $\mathbf{u}$ de la forme $(1, \xi, \xi^2)$. Dans le Chapitre 6 nous montrons deux inégalités ((0.6.2) et (0.6.3) ci-dessous) faisant intervenir les exposants $\underline{\psi}^*_2$ et $\overline{\psi}^*_2$. Comme elles sont valables pour tout vecteur $\mathbf{u} = (1, \xi_1, \xi_2)$ dont les coordonnées sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$ et vérifiant $\overline{\psi}^*_1 < -\frac{1}{3}$ et $\underline{\psi}^*_1 \geq -\frac{1}{2}$, et puisque Roy a décrit complètement le spectre joint des six exposants paramétriques lorsque $\mathbf{u}$ décrit l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ dont les coordonnées sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$ [57], elles ne sont pas nouvelles. En revanche, il est intéressant de remarquer que l'inégalité 0.6.2 est une égalité pour certains vecteurs $\mathbf{u} = (1, \xi, \xi^2)$ avec ξ de type sturmien. Elles sont formulées en termes paramétriques car elles n'admettent pas d'équivalents en termes d'exposants classiques, à cause des exposants paramétriques intermédiaires $\underline{\psi}_2$ et $\overline{\psi}_2$ qui interviennent. Certains nombres de type sturmien du Chapitre 2 réalisent l'égalité pour l'une d'entre elles. Remarquons aussi que la condition $\overline{\psi}^*_1 < -1/3$ du Théorème H est équivalente à la condition $\widehat{\lambda}_2(\xi) > \frac{1}{2}$ (hypothèse que l'on sera souvent amené à faire).

Théorème H. *On suppose $\overline{\psi}_1^* < -1/3$. On a les inégalités*

$$-\frac{\underline{\psi}_2^*}{1+\underline{\psi}_2^*} \leq \frac{\underline{\psi}_1^*}{1+\underline{\psi}_1^*} \cdot \frac{1+2\overline{\psi}_1^*}{\overline{\psi}_1^*} \tag{0.6.2}$$

$$-\frac{\overline{\psi}_2^*}{1+\overline{\psi}_2^*} \geq \frac{\overline{\psi}_3^*}{1+\overline{\psi}_3^*} \cdot \frac{1+2\underline{\psi}_3^*}{\underline{\psi}_3^*}. \tag{0.6.3}$$

De plus, dans (0.6.2) *l'égalité est atteinte pour tout nombre de type sturmien ξ vérifiant l'inégalité $\delta \leq h(\sigma) = \frac{\sigma}{2}+1-\sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2+1}$, où σ et δ sont les quantités associées à ξ comme dans le Chapitre 2 ; voir Notations de la Partie 2.6 et la Définition 2.6.3.*

Remarquons que les inégalités (0.6.2) et (0.6.3) restent vraies dans le cas plus général de l'approximation d'un vecteur $\mathbf{u} = (1, \xi, \eta)$ dès que l'exposant $\underline{\psi}_1^*$ associé vérifie $\underline{\psi}_1^* \geq -1/2$ en plus de l'hypothèse $\overline{\psi}_1^* < -\frac{1}{3}$. La preuve du Théorème H repose sur la géométrie paramétrique des nombres de Schmidt et Summerer. Une deuxième preuve de (0.6.2) est donnée dans le Chapitre 7 (voir (0.6.5) ci-dessous). Le Théorème H implique le Corollaire suivant qui est également prouvé dans le Chapitre 6 :

Corollaire I. *On suppose $\overline{\psi}_1^* < -1/3$. Alors on a*

$$\underline{\psi}_1^* < \underline{\psi}_2^* \quad \textit{et} \quad \overline{\psi}_2^* < \overline{\psi}_3^*. \tag{0.6.4}$$

Rappelons que le Théorème de Roy montre que pour tout $(n+1)$-système $\mathbf{P}$, il existe un vecteur $\mathbf{u} = (1, u_1, \ldots, u_n)$ tel que $\mathbf{P}$ approche $\mathbf{L_u}$ à une différence bornée près. Imposer à $\mathbf{u}$ d'appartenir à la courbe de Véronèse ajoute de fortes contraintes qui excluent certaines formes de $(n+1)$-systèmes. L'une des motivations de cette thèse est d'essayer de mieux comprendre dans le cas $n = 2$ quels 3-systèmes $\mathbf{P}$ *représentent* un réel ξ, *i.e.* sont tels que $|\mathbf{P} - \mathbf{L_u}|$ soit borné (ou au moins en $o(q)$) avec $\mathbf{u} = (1, \xi, \xi^2, \ldots, \xi^n)$, et d'apporter quelques lumières sur le problème suivant directement inspiré du Théorème de Roy et de sa notion de $(n+1)$-systèmes [55] :

Problème. Peut-on trouver une sous-classe "simple" $\mathcal{C}$ de $(n+1)$-systèmes telle que

(a) pour tout ξ il existe $\mathbf{P} \in \mathcal{C}$ représentant ξ,

(b) pour tout $\mathbf{P} \in \mathcal{C}$ il existe ξ tel que $\mathbf{P}$ représente ξ ?

Résoudre ce problème difficile permettrait très certainement de faire de grands progrès sur la compréhension des exposants $\lambda_n, \widehat{\lambda}_n, \omega_n$ et $\widehat{\omega}_n$ ainsi que sur leur spectre joint. Le Théorème J de la Partie 0.6.3 ci-dessous illustre la difficulté de décrire la classe $\mathcal{C}$. Dans la suite de cette partie on se restreint au cas $n = 2$.

0.6.2 3-système associé à un nombre de type sturmien

Soit ξ un nombre de type sturmien et $\mathbf{u} = (1, \xi, \xi^2)$. Dans le Chapitre 2 nous construisons un 3-système $\mathbf{P} = (\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3)$ associé à ξ. L'union des graphes de ses composantes – appelée *graphe conjoint* de $\mathbf{P}$ – a l'allure de la Figure 1.

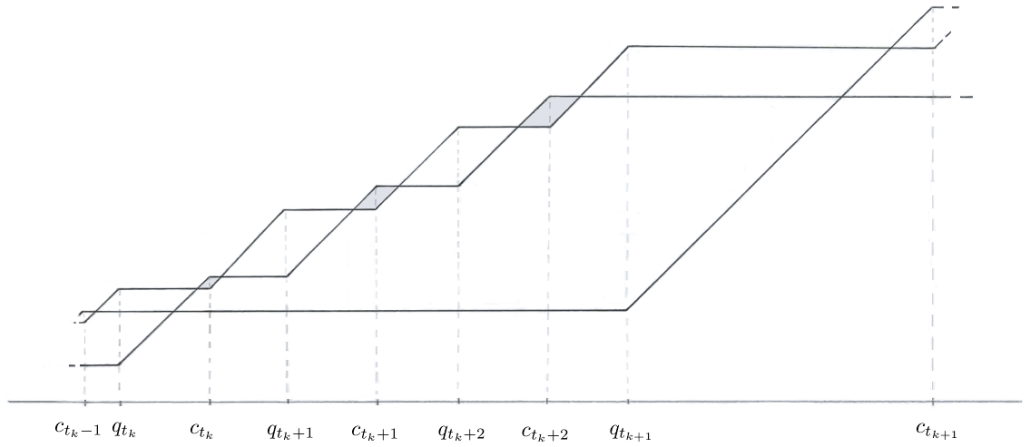

FIGURE 1 – Graphe conjoint du 3-système $\mathbf{P}$

De manière un peu informelle, nous montrons que le graphe conjoint de $\mathbf{L_u}$ correspond à $\mathcal{O}(1)$ près à celui de $\mathbf{P}$, sauf en au niveau des zones grisées de la Figure 1 que nous appelons "zones d'incertitude" (elles sont étudiées dans la Partie 2.7.2 du Chapitre 2). Leur "taille" dépend directement de l'exposant δ associé à ξ (si $\delta = 0$ les zones d'incertitude sont réduites à des points). Pour le calcul de la plupart des exposants elles peuvent être ignorées et les exposants de $\mathbf{L_u}$ correspondent à ceux qu'on peut associer à $\mathbf{P}$. En revanche, pour $\overline{\psi}_3$ (qui correspond à $\lambda_2(\xi)$) et $\underline{\psi}_2$, on ne peut les ignorer que si δ est suffisamment petit, ce qui donne lieu à la condition $\delta \leq h(\sigma)$ du Théorème B.

0.6.3 Exemples de 3-systèmes ne représentant aucun réel

Dans le Chapitre 5 nous construisons des 3-systèmes qui ne représentent aucun réel ξ. Plus précisément, nous montrons le résultat suivant :

Théorème J. *Il existe un ensemble Δ non dénombrable et dense dans l'intervalle $[\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}] \subset [\frac{1}{3}, \frac{1}{\gamma^2}]$ tel que pour tout $\psi \in \Delta$ il existe un 3-système $\mathbf{P} = (\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3)$ vérifiant*

$$\limsup_{q\to+\infty} \frac{\mathrm{P}_3(q)}{q} = \frac{1}{2} \quad \textit{et} \quad \liminf_{q\to+\infty} \frac{\mathrm{P}_3(q)}{q} = \psi$$

et qui ne représente aucun réel ξ.

Notons qu'un 3-système $\mathbf{P}$ représentant un réel ξ vérifie toujours $\liminf_{q\to+\infty} \frac{\mathrm{P}_3(q)}{q} \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{\gamma^2}]$.
Pour montrer le Théorème J, nous utilisons l'exposant paramétrique κ^* (voir Partie 0.5) qui est soumis à certaines contraintes que ne respectent pas les 3-systèmes du Théorème J.

0.6.4 Propriétés des points minimaux

Après avoir défini l'exposant κ^* (voir Partie 0.5 de cette introduction), une question arrive naturellement : peut-on généraliser les résultats de Fischler, notamment le Théorème 1.8.1, à κ^* ? Plus précisément, existe-t-il une constante κ_1 telle que pour tout nombre ξ vérifiant $\kappa^*(\xi) < \kappa_1$ on ait l'existence d'une fonction sturmienne ψ et d'une sous-suite $(\mathbf{v}_i)$ telle que $\mathbf{v}_{i+1}$ soit colinéaire à $\mathbf{v}_i\mathbf{v}_{\psi(i)}^{-1}\mathbf{v}_i$ pour tout i assez grand ? Nos résultats du Chapitre 4 pourraient alors permettre de montrer que les exposants d'un réel ξ tel que $\kappa^*(\xi) < \kappa_1$ sont de la forme de ceux d'un nombre de type sturmien (et ne dépendent que de deux paramètres δ et σ).
Dans cette optique, le Chapitre 7 est consacré à la généralisation partielle des travaux de Fischler [23], en veillant à prendre en compte la possibilité que l'exposant $\lambda_2(\xi)$ soit < 1. A l'aide notamment des outils de la géométrie paramétrique des nombres nous déterminons les exposants optimaux de plusieurs énoncés et nous donnons une interprétation paramétrique de certaines quantités.

Fixons un réel ξ tel que $\widehat{\lambda}_2(\xi) > \frac{1}{2}$ (*i.e.* tel que $\overline{\psi}_1^*(\xi) < -\frac{1}{3}$). On note $(\mathbf{a}_i)_i$ la suite des points minimaux relatifs à la famille $\mathcal{C}_{\mathbf{u}}^*(e^q)$, où $\mathbf{u} = (1, \xi, \xi^2)$. Voir la Partie 1.7 pour la définition précise des points minimaux ; intuitivement ce sont les "meilleurs" $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3$ qui réalisent le premier minimum L_1^* en au moins un point $q > 0$. On note $(\mathbf{d}_k)_k$ la sous-suite de $(\mathbf{a}_i)_i$ constituée des points $\mathbf{a}_i$ tels que la famille $(\mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1})$ soit libre. Enfin, on définit $\mathcal{A}_\alpha^*$ par

$$\mathcal{A}_\alpha^* = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\} \mid \frac{\log(\|\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}\|)}{\log(\|\mathbf{x}\|) - \log(\|\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}\|)} \leq \alpha\}.$$

Écrite dans le langage de la géométrie paramétrique des nombres, la Proposition 3.6 de [23] devient

Proposition 0.6.1 (Fischler 2007)**.** *Supposons $\underline{\psi}_1^* = -\frac{1}{2}$. Soit α tel que $\underline{\psi}_1^* < \alpha < -\frac{1+2\overline{\psi}_1^*}{1+\overline{\psi}_1^*}$. Soit $\mathbf{x} \in \mathcal{A}_\alpha^*$ avec $\|\mathbf{x}\|$ assez grand. Alors $\mathbf{x}$ est colinéaire à un point minimal.*

Fischler pose alors la question suivante (reformulée ici en termes paramétriques) : peut-on affaiblir la condition $\alpha < -\frac{1+2\overline{\psi}_1^*}{1+\overline{\psi}_1^*}$ en $\alpha < \overline{\psi}_1^*$?
L'énoncé suivant - qui est l'un des résultats principaux du Chapitre 7 – apporte une réponse négative à cette question en utilisant le fait que $\underline{\psi}_2^*(\xi) < \overline{\psi}_1^*(\xi)$ pour les nombres ξ de type sturmien construits dans le Chapitre 2 qui ne sont pas extrémaux (voir la Proposition 7.5.2).

Théorème K. *Soit α tel que $\underline{\psi}_1^* < \alpha < \underline{\psi}_2^*$. Soit $\mathbf{x} \in \mathcal{A}_\alpha^*$ avec $\|\mathbf{x}\|$ assez grand. Alors $\mathbf{x}$ est colinéaire à un point minimal. De plus l'exposant $\underline{\psi}_2^*$ est optimal : pour tout $\alpha > \underline{\psi}_2^*$ il existe des $\mathbf{x} \in \mathcal{A}_\alpha^*$ avec $\|\mathbf{x}\|$ arbitrairement grande qui ne sont colinéaires à aucun point minimal.*

Remarquons que dans l'énoncé du Théorème K on ne suppose plus $\underline{\psi}_1^* = -\frac{1}{2}$. Nous reprenons ensuite les arguments de la preuve de Fischler pour généraliser la Proposition 0.6.1 d'une autre manière (voir la Proposition 7.5.3). On montre que la conclusion

de cette proposition est valable pour tout $\alpha < -\frac{(1+2\overline{\psi_1^*})\underline{\psi_1^*}}{\overline{\psi_1^*}+\underline{\psi_1^*}+3\underline{\psi_1^*}\overline{\psi_1^*}}$. Le caractère optimal de $\underline{\psi_2^*}$ fourni par le Théorème K nous assure que cette borne est $\leq \underline{\psi_2^*}$. On en déduit alors l'inégalité

$$-\frac{(1+2\overline{\psi_1^*})\underline{\psi_1^*}}{\overline{\psi_1^*}+\underline{\psi_1^*}+3\underline{\psi_1^*}\overline{\psi_1^*}} \leq \underline{\psi_2^*}. \tag{0.6.5}$$

Cette inégalité est équivalente à l'inégalité (0.6.2) du Théorème H ci-dessus que l'on prouve dans le Chapitre 6. On dispose ainsi d'une nouvelle preuve de ce résultat. Nous montrons également dans le Chapitre 7 le résultat suivant, qui améliore le Lemme 3.8 et la Proposition 3.7 de [23].

Proposition L. *Soit $(\mathbf{u}_i)_i$ une sous-suite de $(\mathbf{a}_i)_i$ telle que*

$$\limsup_{i\to+\infty} \frac{\log(\|\mathbf{u}_{i+1}\|)}{-\log(\|\mathbf{u}_i \wedge \mathbf{u}\|)} < \widehat{\omega}_2(\xi).$$

Alors :

(a) A un nombre fini de termes près, $(\mathbf{d}_k)_k$ est une sous-suite de $(\mathbf{u}_i)_i$.

(b) Pour tout i assez grand, $\mathbf{u}_i$ est parmi les $\mathbf{d}_k$ si et seulement si $\mathbf{u}_{i-1}, \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{i+1}$ sont linéairement indépendants.

(c) Soit i assez grand et n, m tels que $\mathbf{u}_i = \mathbf{a}_n$ et $\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{a}_m$. Alors l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_{n+1}, \ldots, \mathbf{a}_m$ est de dimension 2.

Dans le Lemme 7.6.1 du Chapitre 7 nous démontrons une version raffinée de la Proposition L, dans laquelle le majorant $\widehat{\omega}_2(\xi)$ est remplacée par une valeur qui est optimale. Notons que dans [23], Fischler prouve ces résultats avec l'exposant 2 à la place de $\widehat{\omega}_2(\xi)$.

0.7 Généralisations à $\mathbb{R}^n$ et à un corps de nombres K

Les problèmes précédents et quelques-uns des résultats ont été généralisés à la dimension supérieure et au cas plus général d'un corps de nombres K à la place de $\mathbb{Q}$. Dans les Chapitres 2 à 7 de cette thèse nous nous concentrons sur le cas $n = 2$ et $K = \mathbb{Q}$. Le Chapitre 8 (qui est rédigé en anglais) traite de la situation générale de l'approximation de sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ par des sous-espaces définis sur un corps de nombres K. Le Chapitre 8 a donné lieu à la publication [46].

0.7.1 Le Théorème du going-down de Schmidt

Dans [64] Schmidt considère les problèmes diophantiens pour un corps de nombres K plongé dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Plus précisément, il traite le problème de l'approximation d'un sous-espace vectoriel A de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ de dimension d, par des sous-espaces vectoriels B de dimension e définis sur le corps de nombres K, *i.e.* admettant une base de vecteurs à coordonnées dans K. Comme pour le cas $K = \mathbb{Q}$, on peut alors définir la notion de hauteur d'un sous-espace B défini sur K qui représente la "complexité" de B. Dans son article, Schmidt établit plusieurs théorèmes de transfert de type Perron-Khintchine (voir par exemple [29], [30], [44]). Ceux-ci permettent de montrer que si un sous-espace A est

bien approché par des sous-espaces de dimension e ($0 < e < n$), alors il est aussi bien approché par des sous-espaces de dimension e'. Le Théorème du going-down de Schmidt ([64] Théorème 10) est l'un de ces théorèmes : il traite du cas $e' < e$. Il s'avère très utile pour prouver certains résultats d'approximation diophantienne (comme [64, Theorem 13] par exemple). Plus récemment, ses travaux ont été revisités par Laurent [34] et Bugeaud et Laurent [11] dans le cas où A est une droite de $\mathbb{R}^n$ et $K = \mathbb{Q}$. Suivant Laurent [34], on définit pour tout entier j compris entre 1 et $n-1$ l'exposant diophantien $\omega_j(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ comme étant la borne supérieure (éventuellement infinie) de l'ensemble des $\omega > 0$ pour lesquels il existe une infinité de sous-espaces vectoriels F de $\mathbb{R}^n$ de dimension j définis sur $\mathbb{Q}$ tels que

$$\mathrm{dist}(u, F) \leq H(F)^{-\omega-1}.$$

Ici $u = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $H(F)$ est la hauteur exponentielle de F et $\mathrm{dist}(u, F)$ est la distance projective entre u et F – définie par exemple comme étant le sinus de l'angle entre u et F. Lorsque $n = 2$, on constate que $\omega_1(1, \xi) = \omega_1(\xi)$ pour tout nombre réel irrationnel ξ. Les Théorèmes du going-up et du going-down de Schmidt montrent que pour $\xi_1, \ldots, \xi_n$ fixés, les exposants $\omega_j(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ sont reliés entre eux par certaines inégalités lorsque j varie entre 1 et $n-1$. La question naturelle – formulée par Laurent – est alors de savoir si pour tout $(n-1)$-uplet $(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1})$ de nombres réels vérifiant ces inégalités il existe $\xi_1, \ldots, \xi_n$ tels que $\omega_j(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \omega_j$ pour tout j. Une réponse positive à cette question a été apportée récemment par Roy [56] en utilisant la géométrie paramétrique des nombres.

Dans le Chapitre 8 nous généralisons les exposants précédents à un corps de nombres arbitraire K, et en utilisant les Théorèmes du going-up et du going-down on montre que les inégalités de Laurent restent valides pour ce contexte plus général. Le Théorème du going-down, qui est l'un des théorèmes principaux de l'article de Schmidt, est valide dans deux cas qui dépendent de la nature du plongement – réel ou complexe – du corps K dans le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$. Dans le cas d'un plongement complexe, et plus généralement dès que K n'est pas totalement réel, à un endroit de la preuve les arguments de [64] ne semblent pas fonctionner exactement comme annoncé. Dans le Chapitre 8 nous présentons en détails les idées de Schmidt et sa preuve du cas complexe en résolvant le problème mentionné précédemment. Certaines définitions de Schmidt sont reformulées à l'aide des outils de l'algèbre multilinéaire et du produit vectoriel, suivant ainsi les approches de Laurent [34], Bugeaud et Laurent [11] et Roy [54], [56].

0.8 Plan de la thèse

Chapitre 1

Dans ce premier chapitre nous effectuons quelques rappels sur les constructions des fractions de Fibonacci de Roy, des fractions sturmiennes de Bugeaud et Laurent et des nombres de type Fibonacci de Roy (voir Paragraphe 0.3). Nous rappelons également la définition des exposants β_ε de Fischler du Paragraphe 0.5, et les énoncés des principaux résultats les concernant auxquels nous faisons référence. Enfin, ce chapitre est également consacré aux rappels de géométrie paramétrique des nombres et à la définition du cadre dans lequel nous nous plaçons (puisque plusieurs paramétrisations sont possibles).

Chapitre 2

Ce chapitre reprend essentiellement – avec un peu plus de détails – l'article soumis [45]. Nous y prouvons le Théorème B et le Corollaire C. Nous construisons les nombres de *type sturmien* et nous donnons une description presque complète du graphe conjoint de la fonction des minima successifs définie par Schmidt et Summerer associée au vecteur $(1, \xi, \xi^2)$ pour ξ de type sturmien (voir Paragraphes 0.4 et 0.6.2). Ces résultats permettent d'obtenir une nouvelle famille de réels dont on sait calculer les exposants et la suite des meilleures approximations rationnelles. On en déduit de nouvelles informations sur le spectre joint des exposants précédents.

Chapitre 3

Ce chapitre permet de prouver le Théorème G. Nous y estimons précisément les contenus des éléments de suites ψ-sturmiennes de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ particulières.

Chapitre 4

Dans ce chapitre sont prouvés les Théorèmes D, E et F. Nous définissons et étudions l'exposant κ^*. Nous étudions également les réels ξ qui possèdent une sous-suite $(\mathbf{v}_i)_i$ de la suite des points minimaux duaux vérifiant une récurrence sturmienne du type $\mathbf{v}_{i+1} \propto \mathbf{v}_i \mathbf{v}_{\psi(i)}^{-1} \mathbf{v}_i$ (voir Paragraphe 0.5). Nous montrons – à l'aide notamment des résultats du Chapitre 3 – qu'à un tel nombre on peut associer un 3-système qui est exactement du type de celui qu'on associe à un nombre de type sturmien dans le Chapitre 2. Nous en déduisons alors l'expression de ses exposants diophantiens.

Chapitre 5

Dans ce court chapitre nous prouvons le Théorème J qui donne des exemples de 3-systèmes qui ne représentent aucun réel ξ.

Chapitre 6

La Proposition A, le Théorème H et le Corollaire I sont prouvés dans ce chapitre. Les inégalités en elles-mêmes sont démontrées de manière indépendante des autres chapitres, et la construction des nombres de type sturmien du Chapitre 2 permet d'obtenir pour certaines d'entre elles des cas d'égalité.

Chapitre 7

Dans ce chapitre nous généralisons certains des résultats de Fischler [23] et prouvons le Théorème K et la Proposition L. Nous donnons également quelques informations détaillées sur l'allure générique d'un 3-système représentant un réel ξ qui vérifie $\widehat{\lambda}_2(\xi) > \frac{1}{2}$, et les liens qu'il entretient avec la suite des points minimaux duaux associé à ξ.

Chapitre 8

Ce dernier chapitre est rédigé en anglais (et muni d'un résumé en français). Il correspond à la publication [46]. Nous y présentons une preuve du Théorème du going-down de Schmidt dans le cas complexe, et nous généralisons certains exposants diophantiens au cas d'un corps de nombres K.

Chapitre 1

Rappels et Notations

Ce chapitre s'articule autour de deux axes. D'un côté il est consacré à des rappels sur les travaux qui existent déjà dans le domaine de l'approximation diophantienne et qui motivent nos problématiques. D'un autre côté, c'est ici que nous définissons la plupart des notations et que nous présentons les définitions – parfois nouvelles, comme c'est le cas dans les Parties 1.7 et 1.8, parfois classiques – qui seront utilisées dans les chapitres ultérieurs.

Dans la Partie 1.1 nous donnons les notations employées pour décrire certains comportements asymptotiques. La Partie 1.2 présente une passerelle qui existe entre combinatoire des mots et approximation diophantienne, et qui est l'origine de la construction de certains *nombres extrémaux* de Roy (voir Partie 1.3), des fractions sturmiennes de Bugeaud et Laurent (voir Partie 1.4), et enfin de nombres associés à des mots à préfixes palindromes abondants étudiés par Fischler [23] (voir Partie 1.5.1). Dans la Partie 1.5 nous présentons la plupart des résultats de Fischler auxquels nous ferons référence par la suite, et notamment les exposants β_ε et β_0 qui sont au cœur de [23] (voir Partie 0.5 de l'introduction).

A partir de la Partie 1.6 commencent les rappels de géométrie paramétrique des nombres qui seront employés tout au long de cette thèse. Nous présentons la notion utile de *point minimal* dans la Partie 1.7 : cette notion a été introduite par Davenport et Schmidt (voir [16] et [17]), mais celle que nous employons diffère quelque peu et nous nous efforçons de clarifier au maximum les liens entre les deux définitions (voir notamment la Remarque 1.8.10 et la Proposition 1.8.11). Dans la Partie 1.8 nous introduisons de nouvelles notations liées à la géométrie paramétrique des nombres qui seront utiles pour certaines preuves concernant de très bonnes approximations simultanées de ξ et ξ^2. Nous énonçons également une version adaptée à notre contexte du résultat principal de l'article de Fischler [23] (voir Théorème 1.8.1). Enfin, la Partie 1.9 résume un certain nombre de relations qui existent entre les exposants paramétriques – notamment la Partie 1.9.2 qui traite du cas de l'approximation simultanée d'un nombre et de son carré (c'est le contexte principal de cette thèse). Nous utiliserons fréquemment ces relations au cours des preuves sans toujours nous y référer. Nous explicitons également la correspondance qui existe entre les exposants paramétriques utilisés dans cette thèse et ceux considérés par Schmidt et Summerer dans [66] et [67].

1.1 Notations $\ll, \gg, \asymp \ldots$

Soit I un ensemble (*ensemble des indices* , typiquement, I de la forme $\mathbb{N}^r$), $(a_{\underline{i}})_{\underline{i}\in I}$ et $(b_{\underline{i}})_{\underline{i}\in I}$ suites de réels positifs indexées par I. Soit $J \subset I$ (*ensemble des conditions*). On note « $a_{\underline{i}} \ll b_{\underline{i}}$ pour $\underline{i} \in J$ » ou « $b_{\underline{i}} \gg a_{\underline{i}}$ pour $\underline{i} \in J$ » s'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $\underline{i} \in J$ on ait $a_{\underline{i}} \leq c b_{\underline{i}}$. On écrit « $a_{\underline{i}} \asymp b_{\underline{i}}$ pour $\underline{i} \in J$ » si $a_{\underline{i}} \ll b_{\underline{i}}$ pour $\underline{i} \in J$ et $b_{\underline{i}} \ll a_{\underline{i}}$ pour $\underline{i} \in J$.
Dans le cas particulier $I = \mathbb{N}$, en l'absence de précision supplémentaire on prendra toujours J de la forme $[\![j_0 \,; +\infty [\![$ pour j_0 assez grand et on écrira simplement $a_{\underline{i}} \ll b_{\underline{i}}$, $b_{\underline{i}} \gg a_{\underline{i}}$ et $a_{\underline{i}} \asymp b_{\underline{i}}$.

De manière classique, si f et g sont deux fonctions définies sur un intervalle $I = [q_0, +\infty[$, on notera $f(q) = \mathcal{O}(g(q))$ quand q tend vers l'infini (resp. $f(q) = o(g(q))$ quand q tend vers l'infini) s'il existe une fonction $c \geq 0$ définie I qui est bornée sur I (resp. qui tend vers 0 en $+\infty$) et telle que $|f(q)| \leq c(q)|g(q)|$ pour tout q assez grand.

1.2 Combinatoire des mots et fractions continues

Dans les parties qui suivent on utilisera parfois des propriétés classiques des fractions continues ; le lecteur les trouvera par exemple dans [65, Chapter I]. Dans cette thèse, nous utiliserons certaines propriétés des mots *sturmiens* (voir par exemple [19] et [20]) qui sont issues de la combinatoire des mots ; voir par exemple [36], [37] et [38] pour un aperçu de ce domaine et de ses applications.
Rappelons que dans cette thèse on note $\gamma = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\ldots$ le nombre d'or. Les exemples de constructions de nombres extrémaux de la Partie 1.3.2, les fractions sturmiennes de Bugeaud et Laurent de la Partie 1.4 et les nombres construits par Fischler dans la Partie 1.5 trouvent leurs racines dans la combinatoire des mots. Une manière de présenter les choses est la suivante. Choisissons $E = \{a, b\}$ un alphabet de deux lettres avec a et b deux entiers > 0 distincts. On note E^* le monoïde des mots (finis) sur E avec pour produit la concaténation de mots. On a alors (en munissant $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z})$ de la multiplication matricielle) un morphisme de monoïdes

$$\Phi \ : \begin{cases} E^* \longrightarrow \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z}) \\ w = a_1 \ldots a_n \longmapsto \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{1.2.1}$$

Soit maintenant $w = a_1 a_2 \ldots$ un mot (éventuellement infini). On définit le réel ξ_w dont la suite des quotients partiels est 0 suivi des lettres $a_1, a_2, \ldots$ composant w :

$$\xi_w = [0; w] = [0; a_1, a_2, a_3, \ldots] = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}}.$$

Pour tout $j \geq 1$ on note $\frac{p_j}{q_j} = [0; a_1, a_2, \ldots, a_j]$ la j-ème réduite de ξ_w. On a la propriété classique suivante :

$$|q_j \xi_w - p_j| \leq q_j^{-1} \quad (j \geq 1). \tag{1.2.2}$$

De plus, les propriétés de récurrence des réduites montrent que

$$M_j := \begin{pmatrix} q_j & q_{j-1} \\ p_j & p_{j-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} a_j & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \Phi(a_1 \dots a_j). \tag{1.2.3}$$

Supposons maintenant que le préfixe $m_j = a_1 a_2 \dots a_j$ soit un palindrome (*i.e.* $a_1 = a_j$, $a_2 = a_{j-1}$ etc.). Alors la matrice M_j ci-dessus est symétrique : elle s'écrit sous la forme $M_j = \begin{pmatrix} x_{0,j} & x_{1,j} \\ x_{1,j} & x_{2,j} \end{pmatrix}$, et (1.2.2) assure que $|x_{0,j}\xi - x_{1,j}| \leq \frac{1}{x_{0,j}}$ et $|x_{1,j}\xi - x_{2,j}| \leq \frac{1}{x_{1,j}}$. En particulier il existe $c = c(\xi_w)$ telle que

$$\max\left(|x_{0,j}\xi_w - x_{1,j}|, |x_{0,j}\xi_w^2 - x_{2,j}|\right) \leq c x_{0,j}^{-1}. \tag{1.2.4}$$

Autrement dit, $\mathbf{x}_j = (x_{0,j}, x_{1,j}, x_{2,j})$ fournit une "bonne" approximation rationnelle simultanée de ξ_w et ξ_w^2. Si le mot w possède une infinité de préfixes palindromes (ce qui est le cas des mots considérés par Roy, Bugeaud et Laurent et Fischler) alors (1.2.4) est valable pour des $x_{0,j}$ arbitrairement grands et cela impose directement que

$$\lambda_2(\xi_w) \geq 1.$$

D'une manière générale, le morphisme de monoïdes Φ permet de transposer certaines propriétés combinatoires du mot w en propriétés matricielles (avec entre autres l'importante propriété "m palindrome implique $\Phi(m)$ symétrique") qui elles-mêmes permettent de fournir des informations sur les "bonnes approximations" de ξ_w. Dans le cas des fractions sturmiennes, on en déduit la valeur de l'exposant $\widehat{\lambda}_2(\xi_w)$ (voir Parties 1.3.2 et 1.4). Dans le cas plus général d'un mot avec suffisamment de préfixes palindromes, Fischler en déduit la valeur de l'exposant $\beta_0(\xi_w)$ (voir Partie 1.5).

1.3 Nombres de type Fibonacci de Roy

Nous présentons ici un exemple de nombre extrémal construit par Roy, et la généralisation de sa construction qui donne naissance aux nombres de type Fibonacci. Rappelons que dans cette thèse on note $\gamma = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\dots$ le nombre d'or.

1.3.1 Nombres extrémaux

Soit ξ un nombre réel qui n'est pas algébrique de degré ≤ 2 et $\varphi : [1, +\infty[\longrightarrow]0, +\infty[$ décroissante. On considère le problème suivant (voir aussi [48]) :

Problème $E_{\varphi,Q}$: On cherche les solutions $(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^3$ du système

$$\begin{cases} 0 < x_0 \leq Q \\ \max\left(|x_0\xi - x_1|, |x_0\xi^2 - x_2|\right) \leq \varphi(Q). \end{cases}$$

Rappelons que le principe des tiroirs de Dirichlet permet de montrer qu'en prenant $\varphi(Q) = \lfloor\sqrt{Q}\rfloor^{-1}$ (où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x) le Problème $E_{\varphi,Q}$ admet des solutions pour tout $Q \geq 1$ (voir par exemple le Théorème 1A du Chapitre II de [65]). En

particulier, cela montre que $\widehat{\lambda}_2(\xi) \geq \frac{1}{2}$ pour tout réel ξ qui n'est pas algébrique de degré ≤ 2.
D'un autre côté, Davenport et Schmidt ont montré (voir [17, Theorem 1a]) que pour tout réel ξ qui n'est pas algébrique de degré ≤ 2 il existe une constante $c = c(\xi)$ telle qu'en définissant φ par $\varphi(Q) = cQ^{-\frac{1}{\gamma}}$ le Problème $E_{\varphi,Q}$ n'a aucune solution pour des valeurs de Q arbitrairement grandes. En particulier cela assure que pour tout ξ qui n'est pas algébrique de degré ≤ 2 on a $\widehat{\lambda}_2(\xi) \leq \frac{1}{\gamma} = 0.618\ldots$.
Roy construit dans [49] des réels ξ transcendants sur $\mathbb{Q}$ – appelés *nombres extrémaux* – pour lesquels il existe une constante $c = c(\xi)$ telle que le Problème $E_{\varphi,Q}$ associé à ξ avec la fonction φ définie par $\varphi(Q) = cQ^{-\frac{1}{\gamma}}$ ait une solution pour tout $Q \geq 1$. En particulier on a $\widehat{\lambda}_2(\xi) = \frac{1}{\gamma}$ pour tout nombre extrémal, et cela prouve que la majoration de Davenport et Schmidt est optimale.
Nous présentons dans la Partie 1.3.2 un exemple de construction de nombre extrémal (voir [49] et [53] pour une étude générale).

1.3.2 Exemples de nombres extrémaux : fractions continues de Fibonacci

Nous reprenons le résumé fait par Roy dans [48]. Comme dans la Partie 1.2 on considère $E = \{a, b\}$ un alphabet de deux lettres et E^* le monoïde des mots sur E (avec pour produit la concaténation de mots). La suite de Fibonacci dans E^* est la suite de mots $(w_i)_{i\geq 0}$ définie récursivement par :

$$\begin{cases} w_0 = b, w_1 = a, \\ w_{i+1} = w_i w_{i-1} \quad (i \geq 1). \end{cases} \tag{1.3.1}$$

(voir l'Exemple 1.3.6 de [36]). Comme w_i est un préfixe de w_{i+1} (pour tout $i \geq 1$), cette suite converge vers un mot infini $w = abaababa\ldots$ appelé le *mot de Fibonacci* sur $\{a, b\}$. On suppose maintenant que a, b sont deux entiers > 0 distincts et on considère la fraction continue de Fibonacci dont la suite des quotients partiels est 0 suivi des lettres du mot w de Fibonacci sur $\{a, b\}$:

$$\xi_{a,b} = [0; w] = [0; a, b, a, a, b, \ldots] = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cdots}}}}.$$

La fraction continue $\xi_{a,b}$ est un exemple de fraction continue sturmienne au sens d'Allouche, Davison, Queffélec et Zamboni [1] ; ces auteurs ont notamment montré que de tels nombres sont transcendants sur $\mathbb{Q}$. Roy montre alors que $\xi_{a,b}$ est un nombre extrémal ; en particulier on a $\widehat{\lambda}_2(\xi_{a,b}) = \frac{1}{\gamma}$.

Pour tout mot u d'au moins deux lettres on note u' le mot u privé de ses deux dernières lettres. Roy utilise alors la propriété suivante du mot de Fibonacci attribuée à Berstel (voir la Proposition 1 de [18]) : pour tout $i \geq 3$, le mot w_i' est un palindrome $a_1 a_2 \ldots a_{r_i}$.

La matrice $M_{r_i} = \Phi(w_i') = \begin{pmatrix} x_{0,i} & x_{1,i} \\ x_{1,i} & x_{2,i} \end{pmatrix}$ définie par (1.2.3) est alors symétrique et fournit une "bonne approximation" simultanée $\mathbf{x}_i$ de $\xi_{a,b}$ et $\xi_{a,b}^2$ (voir la Partie 1.2). De plus, Roy montre que $x_{0,i+1}^{1/\gamma} \asymp x_{0,i}$. En utilisant cette estimation et (1.2.4) on peut alors montrer qu'il existe $c = c(\xi_{a,b})$ tel que pour tout Q assez grand, si on note i l'indice tel que $x_{0,i} \leq Q < x_{0,i+1}$, alors $\mathbf{x}_i$ vérifie les inégalités

$$\begin{cases} 0 < x_{0,i} \leq Q \\ \max\left(|x_{0,i}\xi_{a,b} - x_{1,i}|, |x_{0,i}\xi_{a,b}^2 - x_{2,i}|\right) \leq cQ^{-\frac{1}{\gamma}}. \end{cases}$$

Cela montre que $\xi_{a,b}$ est extrémal et que $\widehat{\lambda}_2(\xi_{a,b}) \geq \frac{1}{\gamma}$, donc $\widehat{\lambda}_2(\xi_{a,b}) = \frac{1}{\gamma}$ compte tenu de la majoration de Davenport et Schmidt.

1.3.3 Construction généralisée : nombres de type Fibonacci

Reprenons la construction de la fraction continue de Fibonacci $\xi_{a,b}$ de la Partie 1.3.2. Soit $(w_i)_{i\geq 0}$ la suite des mots définis par (1.3.1). On note $\mathbf{w}_i = \Phi(w_i)$ et $\mathbf{y}_i = \Phi(w_i')$ la "bonne" approximation simultanée de $\xi_{a,b}$ et $\xi_{a,b}^2$ associée, où Φ est le morphisme de monoïdes défini par (1.2.1) et u' est désigne le mot u privé de ses deux dernières lettres. Notons que le mot w_i (pour $i \geq 2$) se termine par ab si i est pair et par ba si i est impair. On définit la matrice N par

$$N = \left[\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]^{-1},$$

et on pose $N_i = N$ si i est pair et $N = {}^t\!N$ si i est impair. Alors puisque Φ est un morphisme de monoïdes, on a les deux relations suivantes :

$$\mathbf{w}_{i+1} = \mathbf{w}_i\mathbf{w}_{i-1} \quad (i \geq 1) \tag{1.3.2}$$

et

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{w}_i N_i \quad (i \geq 2). \tag{1.3.3}$$

Notons aussi que $\det(\mathbf{w}_i) = 1$ pour tout i (d'une certaine manière on peut voir cette contrainte comme traduisant la contrainte $\lambda_2(\xi) = 1$).
L'idée de Roy dans [51] est la suivante : il considère directement une suite $(\mathbf{w}_i)_{i\geq 0}$ de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z}) \cap \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) =: \mathcal{M}$ définie par $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1 \in \mathcal{M}$ et vérifiant (1.3.2). Il montre alors que pour $\mathbf{w}_0$ et $\mathbf{w}_1$ bien choisies il existe une matrice $N \in \mathcal{M}$ telle que

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{w}_i N_i$$

soit symétrique pour tout $i \geq 0$ (où on a posé $N_i = N$ si i est pair et $N = {}^t\!N$ si i est impair). Dans le cas des nombres extrémaux, on avait $\det(\mathbf{w}_i) = \mathcal{O}(1)$ pour tout i. Dans le cas général, la Proposition 2.5.9 du Chapitre 2 montre (sous des hypothèses assez faibles) qu'il existe $\delta \geq 0$ tel que $|\det(\mathbf{w}_i)| \asymp \|\mathbf{w}_i\|_\infty^\delta$ (où $\|\mathbf{w}\|_\infty$ est défini comme le maximum des valeurs absolues des coefficients de $\mathbf{w}$). Roy ne travaille pas directement avec δ mais avec un encadrement $\|\mathbf{w}_i\|_\infty^\alpha \ll |\det(\mathbf{w}_i)| \ll \|\mathbf{w}_i\|_\infty^\beta$ (voir Exemple 5.4 de [51]). Il montre alors que sous certaines hypothèses, la suite de matrices $(\mathbf{y}_i)_i$ converge dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ vers

un vecteur $\mathbf{y} = (1, \xi, \xi^2)$, et que chaque $\mathbf{y}_i$ est une "bonne" approximation simultanée de ξ et ξ^2. Le nombre ξ ainsi produit est appelé un nombre de type Fibonacci, et son exposant $\widehat{\lambda}_2(\xi)$ ne dépend que de δ. Plus précisément nous montrons dans le Chapitre 2 que

$$\widehat{\lambda}_2(\xi) = \frac{(1-\delta)\gamma}{1+(1-\delta)\gamma} \tag{1.3.4}$$

(voir Théorème 2.1.2 du Chapitre 2). Grâce à ces nombres, en montrant essentiellement qu'on peut prendre δ dans un ensemble dense dans $[0, \frac{1}{\gamma^2}]$, Roy montre finalement la densité du spectre de $\widehat{\lambda}_2$ dans l'intervalle $[\frac{1}{2}, \frac{1}{\gamma}]$. Remarquons qu'avec $\delta = 0$ l'équation (1.3.4) donne $\widehat{\lambda}_2(\xi) = \frac{1}{\gamma}$, et avec $\delta = \frac{1}{\gamma^2}$ elle donne $\widehat{\lambda}_2(\xi) = \frac{1}{2}$.

1.4 Fractions sturmiennes de Bugeaud et Laurent

Dans cette partie on présente rapidement les exemples de Bugeaud et Laurent [8] qui généralisent la construction des fractions continues de Fibonacci de Roy [49], voir Partie 1.3.2.

Soit $\underline{s} = (s_i)_{i\geq 1}$ une suite d'entiers naturels non nuls. Fixons a et b deux entiers distincts > 0. On définit par récurrence une suite de mots $(w_i)_{i\geq 0}$ par les formules

$$\begin{cases} w_0 = b, w_1 = b^{s_1-1}a, \\ w_{i+1} = w_i^{s_{i+1}} w_{i-1} \quad (i \geq 1). \end{cases}$$

Cette suite converge vers un mot infini

$$w_\varphi = \lim_{i\to+\infty} w_i = (b^{s_1-1}a)^{s_2} b \ldots,$$

qu'on appelle classiquement *mot sturmien caractéristique d'angle* (ou de *pente*) $\varphi := [0; s_1, s_2, s_3, \ldots]$, construit sur l'alphabet $\{a, b\}$. Ces mots possèdent beaucoup de propriétés combinatoires et sont fondamentaux en combinatoire des mots (voir le livre de Lothaire [36] pour un aperçu du domaine, et les articles de Lucas [19], [20] pour quelques propriétés des mots sturmiens). Comme dans la Partie 1.2 on note $\xi_\varphi = [0; w_\varphi]$ le réel dont les quotients partiels sont successivement 0 et les lettres du mot infini w_φ. Remarquons qu'on retrouve l'exemple de la fraction de Fibonacci de Roy en prenant la suite $(s_i)_{i\geq 1}$ définie par $s_i = 1$ pour tout i.
On associe à $\underline{s} = (s_i)_i$ la quantité

$$\sigma(\underline{s}) = \sigma = \frac{1}{\limsup_{i\to+\infty}[s_{i+1}; s_i, \ldots, s_1]}.$$

Définition 1.4.1. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des $\sigma(\underline{s})$ lorsque $\underline{s}$ décrit l'ensemble des suites d'entiers naturels non nuls.

Lorsque $\underline{s}$ est non bornée, on a $\sigma(\underline{s}) = 0$. Le cas qui nous intéresse est celui où $\sigma(\underline{s}) > 0$, donc on fera souvent l'hypothèse que $\underline{s}$ est bornée. Cassaigne a étudié les éléments de $\mathcal{S}$ dans [13]. Cet ensemble est également lié au spectre de l'exposant $\beta_0(\xi)$

de Fischler [23] (voir Partie 1.5).

Le Théorème 3.1 de Bugeaud et Laurent [8] implique alors le résultat suivant :

$$\lambda_2(\xi_\varphi) = 1, \quad \omega_2(\xi_\varphi) = 1 + \frac{2}{\sigma},$$
$$\widehat{\lambda}_2(\xi_\varphi) = \frac{1+\sigma}{2+\sigma}, \quad \widehat{\omega}_2(\xi_\varphi) = 2 + \sigma.$$

De plus, Bugeaud et Laurent décrivent complètement la suite des meilleures approximations rationnelles simultanées de ξ_φ et ξ_φ^2. L'un des points-clefs pour montrer ces résultats est le fait qu'on peut décrire parfaitement les préfixes palindromes du mot w_φ. Si pour tout mot u d'au moins deux lettres on note u' le mot u privé de ses deux dernières lettres, alors

$$(w_i^l w_{i-1})' \quad \text{avec } i \geq 1 \text{ et } 1 \leq l \leq s_{i+1}$$

est la suite des préfixes palindromes du mot w_φ (voir la Partie 5 de [8], notamment le Lemme 5.3 qui montre que ces mots sont bien des palindromes, ainsi que [22, Sect.3.1] où la suite de tous les palindromes d'un tel mot est étudiée). A ces palindromes correspondent des matrices symétriques $\Phi\Big((w_i^l w_{i-1})'\Big)$ qui fournissent de bonnes approximations simultanées de ξ_φ et ξ_φ^2 (voir Partie 1.3.2). Bugeaud et Laurent utilisent ces approximations simultanées pour calculer $\widehat{\lambda}_2(\xi_\varphi)$; pour les exposants ω_2 et $\widehat{\omega}_2$ ils se servent des réels quadratiques $\alpha_k = [0; w_k, w_k, w_k, \dots]$.

1.5 Travaux de Fischler sur l'approximation d'un nombre et de son carré

Nous rappelons ici certains certaines définitions et certains résultats des articles de Fischler [22] et [23].

1.5.1 Mots à préfixes palindromes abondants

Les résultats présentés ici sont issus de [22] et [23, Section 2.1].
Soit $\psi : \mathbb{N}^* \to [\![-1\,; +\infty[\![$ une fonction telle que

$$\psi(n) \leq n - 1 \quad (n \geq 1). \tag{1.5.1}$$

On note $(t_k)_{k\geq 1}$ la suite des indices $n \geq 1$ (ordonnés dans l'ordre croissant) tels que $\psi(n) \leq n-2$. Cette suite peut être finie ou infinie (seul le cas où cette suite est infinie nous intéresse ici). La Définition suivante reprend la Définition 2.1 de [23] (voir aussi [22, Definition 4.9]).

Définition 1.5.1. Une fonction ψ est dite *asymptotiquement réduite* si (1.5.1) est vérifiée et si la suite $(t_k)_{k\geq 1}$ associée est telle que

$$\psi(t_k) < t_{k-1} \quad \text{et} \quad \psi(t_k) \neq \psi(t_{k-1})$$

pour tout k assez grand. Quand la suite (t_k) est finie, on dit aussi par convention que ψ est asymptotiquement réduite.

Suivant la notation de Fischler, on note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions $\psi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ telles que

$$\begin{cases} \psi \text{ est asymptotiquement réduite} \\ \text{Il existe } c \text{ tel que } i - c \leq \psi(i) \leq i - 1 \text{ pour tout } i \geq 1 \\ \text{Il existe une infinité de } i \text{ tels que } \psi(i) \leq i - 2. \end{cases} \tag{1.5.2}$$

Dans cette thèse, on considère les fonctions dites *sturmiennes* qui sont des fonctions asymptotiquement réduites particulières vérifiant entre autres $\psi(t_k) = t_{k-1} - 1$ pour tout k assez grand (voir la Définition 1.5.1).

Définition 1.5.2. Soit $(s_k)_{k\geq 0}$ une suite d'entiers strictement positifs pour $k \geq 1$, avec $s_0 = -1, s_1 = 1$. Pour $k \geq 0$, on pose $t_k = s_0 + s_1 + \cdots + s_k$, et on associe à $(s_k)_k$ une fonction $\psi : [\![0\,; +\infty[\![\to [\![-1\,; +\infty[\![$ définie par

$$\begin{cases} \psi(t_k) = t_{k-1} - 1 \text{ pour } k \geq 1 \\ \psi(i) = i - 1 \text{ si } i \text{ n'est pas parmi les } t_k. \end{cases}$$

On dit que ψ est une fonction *sturmienne*.
Remarquons qu'une fonction sturmienne (restreinte à $\mathbb{N}^*$) est une fonction asymptotiquement réduite, et que la suite $(t_k)_{k\geq 0}$ privée de son premier terme t_0 coïncide avec la suite $(t_k)_{k\geq 1}$ de la Définition 1.5.1. On note $\mathcal{F}_{stur} \subset \mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions sturmiennes dont la suite $(s_k)_k$ associée est bornée.

Étant donné un mot infini $w = w_1 w_2 \ldots$ écrit sur un alphabet $\mathcal{A}$, on note $(\pi_i)_{i\geq 1}$ la suite (finie ou infinie) des préfixes palindromes de w (*i.e.* des mots $w_1 w_2 \ldots w_n$ tels que $w_1 = w_n$, $w_2 = w_{n-1}$ etc), et n_i la longueur de π_i (de sorte que $\pi_i = w_1 w_2 \ldots w_{n_i}$ est un palindrome pour tout $i \geq 1$). On pose alors

$$\delta(w) = \limsup_{i\to+\infty} \frac{n_{i+1}}{n_i}$$

(avec la convention $\delta(w) = +\infty$ si la suite $(n_i)_i$ est finie). La quantité $1/\delta(w)$ mesure la "densité" des préfixes palindromes de w. Fischler étudie dans [22] les mots w tels que $\delta(w) < 2$, *i.e.* les mots avec "beaucoup" de préfixes palindromes.
Pour $i' \leq i$, $\pi_{i'}$ est un préfixe de π_i et il existe un mot $b = w_{n_{i'}+1} \ldots w_{n_i}$ tel que $\pi_i = \pi_{i'} b$. On note $\pi_{i'}^{-1}\pi_i$ ce mot b. On note $\mathcal{X}$ l'ensemble des mots w qui ne sont pas ultimement périodiques et tels que $\delta(w) < 2$ (en particulier la suite $(n_i)_i$ est alors infinie). Fischler prouve [22] le résultat suivant (voir le Théorème 2.2 de [23]) :

Théorème 1.5.1. *(a) Pour tout $w \in \mathcal{X}$ il existe $\psi \in \mathcal{F}$ telle que*

$$\pi_{i+1} = \pi_i \pi_{\psi(i)}^{-1} \pi_i \quad \textit{pour tout } i \textit{ assez grand.} \tag{1.5.3}$$

(b) Pour tout $\psi \in \mathcal{F}$ il existe $w \in \mathcal{X}$ tel que l'équation (1.5.3) *soit vérifiée.*

Le Théorème 1.5.1 implique que tout $w \in \mathcal{X}$ peut être écrit sur un alphabet fini. Remarquons aussi que l'équation (1.5.3) implique

$$n_{i+1} = 2n_i - n_{\psi(i)} \quad \text{pour tout } i \text{ assez grand.}$$

Définition 1.5.3. Soit $\psi \in \mathcal{F}$. On pose

$$\delta(\psi) = \limsup_{i \to +\infty} \frac{m_{i+1}}{m_i}$$

où $(m_i)_{i \geq 1}$ est n'importe quelle suite croissante d'entiers naturels telle que $m_{i+1} = 2m_i - m_{\psi(i)}$ pour tout i assez grand.

Remarque. La valeur de $\delta(\psi)$ ne dépend pas du choix de la suite $(m_i)_i$ (voir Proposition 6.2 de [22]). En particulier, si ψ correspond à un mot w comme dans le Théorème 1.5.1 on peut choisir la suite $(n_i)_i$ des longueurs des préfixes palindromes de w, donc $\delta(\psi) = \delta(w)$.

1.5.2 Crochet de Roy

Dans cette thèse on identifie $\mathbb{R}^3$ (resp. $\mathbb{Z}^3$) à l'espace des matrices symétriques 2×2 à coefficients réels (resp. entiers) via l'isomorphisme

$$\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2) \longmapsto \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on peut considérer le déterminant $\det(\mathbf{x})$ d'un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, le produit $\mathbf{xy}$ de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ ainsi que l'inverse de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ si la matrice correspondante est inversible. Dans [49], Roy introduit l'opération crochet $[\cdot, \cdot, \cdot]$ entre 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ (voir ci-dessous). Dans [23] Fischler généralise son utilisation et s'en sert d'une manière cruciale (voir notamment le Théorème 4.1 de [23] et sa preuve).

On note J la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Si $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ sont trois vecteurs linéairement dépendants de $\mathbb{R}^3$ (identifiés à des matrices symétriques), alors la matrice $-\mathbf{x}J\mathbf{z}J\mathbf{y}$ est aussi symétrique et on note $[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]$ le vecteur de $\mathbb{R}^3$ correspondant. Rappelons quelques identités utiles. Pour commencer, puisque pour toute matrice $\mathbf{x}$ symétrique inversible on a $J\mathbf{x}J = -\det(\mathbf{x})\mathbf{x}^{-1}$, si $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ est inversible (vu comme matrice) il s'ensuit que

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] = -\det(\mathbf{z})\mathbf{x}\mathbf{z}^{-1}\mathbf{y}.$$

En particulier on a

$$\det([\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]) = \det(\mathbf{x}) \det(\mathbf{y}) \det(\mathbf{z}).$$

De plus $\mathbf{z}$ peut être retrouvé à partir de $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ et $[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]$ en utilisant la formule

$$\det(\mathbf{x}) \det(\mathbf{y})\mathbf{z} = [\mathbf{x}, \mathbf{y}, [\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]].$$

1.5.3 Exposants β_ε

On fixe un réel ξ qui n'est pas algébrique de degré ≤ 2. Pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ on note $\|\mathbf{x}\|_\infty$ sa norme définie comme le maximum des valeurs absolues de ses coefficients. Pour étudier la qualité de l'approximation rationnelle simultanée de ξ et ξ^2 on introduit la quantité

$$M(\mathbf{x}) = \max\left(|x_0\xi - x_1|, |x_0\xi^2 - x_2|\right)$$

qui est notée $L(\mathbf{x})$ dans [23]. Dans [23], Fischler introduit de nouveaux exposants diophantiens β_ε dont la définition est la suivante.

Définition 1.5.4. Soit $\varepsilon \in]0,1]$. On note $\beta_\varepsilon(\xi)$ la borne inférieure de l'ensemble des β tels que, pour tout B suffisamment grand, il existe $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^3$ tel que

$$1 \leq |x_0| \leq B \quad \text{et} \quad M(\mathbf{x}) \leq \min\Big(B^{-1/\beta}, |x_0|^{\varepsilon-1}\Big).$$

Si l'ensemble des β est vide, on pose $\beta_\varepsilon(\xi) = +\infty$. Clairement, la fonction $\varepsilon \mapsto \beta_\varepsilon(\xi)$ est décroissante. On pose

$$\beta_0(\xi) = \sup_{0<\varepsilon<1} \beta_\varepsilon(\xi) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \beta_\varepsilon(\xi).$$

Remarque 1.5.5. En particulier, pour $\varepsilon = 1$, on a $\beta_1(\xi) = 1/\widehat{\lambda}_2(\xi)$.

Pour tout $X \geq 1$, l'ensemble des vecteurs $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^3$ tels que $1 \leq a_0 \leq X$ et $M(\mathbf{a}) \leq 1$ est fini et contient exactement un élément pour lequel $M(\mathbf{a})$ est minimal. Suivant la terminologie de [16] et [17], on appelle dans cette partie uniquement cet élément le *point minimal* correspondant à X (la définition de point minimal qu'on utilisera dans cette thèse est celle de la Définition 1.7.4 ; la différence vient du fait que les quantités considérées ne sont pas exactement les mêmes, voir Remarque 1.8.10). On note $(\mathbf{a}_i)_i$ la suite des points minimaux ordonnés par norme croissante.
En considérant l'ensemble $\mathcal{A}_\varepsilon$ défini par

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \{\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\} \mid M(\mathbf{x}) \leq \|\mathbf{x}\|_\infty^{-(1-\varepsilon)}\}, \tag{1.5.4}$$

Fischler montre que pour tout $\varepsilon \in]0,1]$ on a

$$\beta_\varepsilon(\xi) = \limsup_{i \to +\infty} \frac{\log(\|\mathbf{u}_{i+1}\|_\infty)}{-\log(M(\mathbf{u}_i))}, \tag{1.5.5}$$

en notant $(\mathbf{u}_i)_i$ la suite des points minimaux qui sont dans $\mathcal{A}_\varepsilon$ ordonnés par norme croissante (voir (11) de [23]).
Fischler montre (voir le Théorème 1.3 de [23]) le résultat suivant.

Théorème 1.5.2. *Soit ξ tel que $\beta_0(\xi) < 2$. On définit ε_1 par*

$$\varepsilon_1 = \Big(2 - \beta_1(\xi)\Big)\Big(2 - \beta_1(\xi) + (2 - \beta_0(\xi))\beta_1(\xi)\Big).$$

Alors $\beta_\varepsilon(\xi) = \beta_0(\xi)$ pour tout $\varepsilon < \varepsilon_1$.

Remarque. Comme le fait remarquer Fischler, puisque $\beta_1(\xi) \leq \beta_0(\xi)$ on a $\varepsilon_1 \geq (2 - \beta_0(\xi))^2(1 + \beta_0(\xi))$.

Le Théorème 4.1 et la Proposition 5.1 de [23] impliquent :

Théorème 1.5.3. *Soit ξ un réel qui n'est pas algébrique de degré ≤ 2 et tel que $\beta_0(\xi) < 2$. Soit ε tel que $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ où ε_1 est la constante du Théorème 1.5.2. On note $(\mathbf{u}_i)_i$ la suite des points minimaux de $\mathcal{A}_\varepsilon$ ordonnés par norme croissante. Alors*

$$M(\mathbf{u}_i) = \|\mathbf{u}_i\|_\infty^{-1+o(1)}, \tag{1.5.6}$$

et il existe une fonction $\psi \in \mathcal{F}$ telle que

$$\mathbf{u}_{i+1} \propto \mathbf{u}_i \mathbf{u}_{\psi(i)}^{-1} \mathbf{u}_i \quad \textit{pour tout } i \textit{ assez grand.} \tag{1.5.7}$$

De plus on a l'égalité

$$\beta_0(\xi) = \delta(\psi).$$

Remarque. L'équation (1.5.7) se réécrit $\mathbf{u}_{\psi(i)} \propto [\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{i+1}]$ pour i assez grand (où $[\cdot,\cdot,\cdot]$ est le crochet de Roy de la Partie 1.5.2).

Remarque 1.5.6. La fonction ψ du Théorème 1.5.3 n'est pas unique. En revanche, deux fonctions ψ, ψ' vérifiant le Théorème 1.5.3 sont équivalentes modulo la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{F}$ définie par $\psi\mathcal{R}\psi'$ si et seulement si il existe deux entiers m et i_1 tels que $\psi(i) - i = \psi'(i-m) - (i-m)$ pour tout $i \geq i_1$; voir la Définition 2.5 de [23]. Si $\psi\mathcal{R}\psi'$ on a $\delta(\psi) = \delta(\psi')$.

Le Lemme 7.1 de [22] et le Théorème 1.5.3 donnent :

Théorème 1.5.4. *Supposons que $\beta_0(\xi) < \sqrt{3}$. Alors il existe une fonction ψ associée à ξ par le Théorème 1.5.3 qui est sturmienne (voir Définition 1.5.2).*

Définition 1.5.7. On note $\mathcal{S}_0$ le spectre de β_0, *i.e.* l'ensemble des valeurs $\beta_0(\xi)$ lorsque ξ décrit l'ensemble des réels qui ne sont pas algébriques de degré ≤ 2.
On note $\mathcal{S}'$ l'ensemble des $1 + \frac{1}{1+\sigma}$ lorsque σ décrit $\mathcal{S}$ (où $\mathcal{S}$ est l'ensemble de la Définition 1.4.1) ; rappelons que pour les fractions sturmiennes ξ_φ de Bugeaud et Laurent on a $\beta_0(\xi_\varphi) = \beta_1(\xi_\varphi) = 1/\widehat{\lambda}_2(\xi_\varphi) = 1 + \frac{1}{1+\sigma}$ avec $\sigma = \sigma_\varphi \in \mathcal{S}$.

Cassaigne a étudié $\mathcal{S}'$ (voir notamment le Corollaire 1 et le Théorème 2 de [13]), et a montré qu'il existe une suite infinie strictement croissante $(\sigma_n)_n$ qui converge vers $\sigma_\infty = 1.721\cdots \in \mathcal{S}'$ telle que $\mathcal{S}' \cap [1, \sigma_\infty[$ soit exactement égal à l'ensemble des σ_n. En particulier σ_∞ est le plus petit point d'accumulation de $\mathcal{S}'$. On a $\sigma_1 = \gamma = 1.618\ldots$, $\sigma_2 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = 1.707\ldots$, $\sigma_3 = \frac{2+\sqrt{10}}{3} = 1.720\ldots$ etc.

Le Théorème 1.5.3, le Théorème 1.5.1 et la Proposition 5.1 de [23] permettent de montrer le résultat suivant.

Théorème 1.5.5. *On a*

$$\mathcal{S}_0 \cap [\gamma, \sqrt{3}[= \mathcal{S}' \cap [\gamma, \sqrt{3}[.$$

Plus généralement, Fischler montre [23, Theorem 1.1] le théorème suivant

Théorème 1.5.6. *On a*

$$\{\beta_0(\xi) \mid \xi \in \mathbb{R}, \deg_{\mathbb{Q}}(\xi) \geq 3\} \cap]1,2[= \{\delta(w) \mid w \textit{ mot infini}\} \cap]1,2[.$$

1.5.4 Fractions continues à préfixes palindromes

En utilisant la construction présentée dans la Partie 1.2, Fischler construit des réels ξ_w tels que $\beta_0(\xi_w) < 2$ vérifiant son Théorème 1.8.1.
Soit w un mot infini écrit sur $\mathbb{N}^*$ qui n'est pas ultimement périodique et tel que $\delta(w) < 2$ (*i.e.* w a "suffisamment" de palindromes). Comme dans la Partie 1.5.1 on note $(n_i)_{i\geq 1}$ la suite croissante des longueurs des préfixes palindromes de w, et comme mentionné on peut supposer w écrit sur un alphabet fini $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}^*$. On considère alors réel ξ_w de la Partie 1.2 :

$$\xi_w = [0; w] = [0; w_1, w_2, w_3, \ldots] = \cfrac{1}{w_1 + \cfrac{1}{w_2 + \cfrac{1}{w_3 + \cdots}}}.$$

Comme w n'est pas fini ni ultimement périodique, le réel ξ_w n'est pas algébrique de degré ≤ 2. Comme étudié dans la Partie 1.2, chaque préfixe palindrome fournit une "bonne" approximation rationnelle simultanée de ξ_w et ξ_w^2. Fischler montre alors que

$$\beta_0(\xi_w) = \delta(w) < 2,$$

donc ξ_w vérifie les hypothèses du Théorème 1.5.3. De plus, la fonction ψ associée à w par le Théorème 1.5.1 lui est aussi associée par le Théorème 1.5.3. Si ψ est sturmienne (*i.e.* si le mot w est sturmien caractéristique), cela redonne les fractions de Bugeaud et Laurent.

1.6 Géométrie paramétrique des nombres

Cette partie est consacrée à quelques rappels sur la géométrie paramétrique des nombres de Schmidt et Summerer et sur la notion de 3-système (voir Définition 1.6.8). Le lecteur pourra peu familier de la géométrie des nombres pourra consulter [35] (voir aussi [39] pour des propriétés plus spécifiques aux corps convexes composés).

Soit $n \geq 2$ un entier et $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur dont les coordonnées sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$; dans la suite on aura $n = 3$ et $\mathbf{u} = (1, \xi, \xi^2)$. Dans cette partie on effectue de rapides rappels sur les outils de la géométrie paramétrique des nombres (cf [66] et [67]), et on énonce le résultat majeur dû à Roy [55], [56] (voir le Théorème 1.6.1 ci-dessous qui résout une conjecture de Schmidt and Summerer).

Notation. Soit I un ensemble de réels positifs non borné et $(K_q)_{q\in I}$, $(C_q)_{q\in I}$ deux familles de corps convexes de $\mathbb{R}^n$ indexées par I. On note $K_q \asymp C_q$ et on dit que $(K_q)_{q\in I}$ et $(C_q)_{q\in I}$ sont *équivalentes* s'il existe $c > 0$ telle que pour tout indice q assez grand on ait

$$\frac{1}{c}K_q \subset C_q \subset cK_q.$$

Dans la suite, la lettre q désigne toujours un réel > 0. Pour tous vecteurs $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ on note $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$ le produit scalaire de $\mathbf{x}$ avec $\mathbf{y}$, et $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne associée au produit scalaire. C'est toujours la norme qu'on considérera sur $\mathbb{R}^n$, sauf mention explicite du contraire.

L'une des idées fondatrices de la géométrie paramétrique des nombres est de considérer une famille de corps convexes paramétrée par un réel q et d'étudier les minima successifs associés à cette famille. Plusieurs choix de familles sont possibles ; nous choisissons ici de considérer les familles de corps convexes de [56].
Pour cela, on munit l'algèbre extérieure $\bigwedge \mathbb{R}^n = \oplus_{k=1}^n \bigwedge^k \mathbb{R}^n$ de la structure d'espace euclidien telle que pour toute base orthonormée $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ de $\mathbb{R}^n$, l'ensemble des produits extérieurs $\mathbf{e}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_{i_k}$ avec $0 \leq k \leq n$ et $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ forme une base orthonormée de $\bigwedge^k \mathbb{R}^n$, dont on note encore $\|\cdot\|$ la norme. Pour $k = 0, \ldots, n$ on note $\bigwedge^k \mathbb{Z}^n$ le réseau de $\bigwedge^k \mathbb{R}^n$ engendré par les produits extérieurs de la forme $\mathbf{x}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_n$ avec $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in \mathbb{Z}^n$ (pour $k = 0$ on a $\bigwedge^k \mathbb{R}^n = \mathbb{R}$ et on pose $\bigwedge^0 \mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}$). Via les bases canoniques on peut identifier $\bigwedge^k \mathbb{R}^n$ avec l'espace euclidien $\mathbb{R}^N$ (où $N = \binom{n}{k}$) muni de sa structure euclidienne canonique et $\bigwedge^k \mathbb{Z}^n$ avec $\mathbb{Z}^N$. Notons qu'on identifie ainsi $\left(\bigwedge^{n-1} \mathbb{R}^n, \bigwedge^{n-1} \mathbb{Z}^n\right)$ avec $\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{Z}^n\right)$.

Définition 1.6.1. On pose

$$\mathcal{C}_{\mathbf{u}}(e^q) \ := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ ; \ \|\mathbf{x}\| \leq 1, |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq e^{-q}\}$$

et

$$\mathcal{C}^*_{\mathbf{u}}(e^q) \ := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ ; \ \|\mathbf{x}\| \leq e^q, \|\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}\| \leq 1\}.$$

Pour $j = 1, \ldots, n$, on note $\lambda_j(q)$ (resp. $\lambda^*_j(q)$) le j-ème minimum successif du corps convexe $\mathcal{C}_{\mathbf{u}}(e^q)$ (resp. $\mathcal{C}^*_{\mathbf{u}}(e^q)$) pour le réseau $\mathbb{Z}^n$. On définit également

$$\mathrm{L}_j(q) = \log \lambda_j(q) \qquad \psi_j(q) = \frac{\mathrm{L}_j(q)}{q}$$
$$\overline{\psi}_j = \limsup_{q \to \infty} \psi_j(q) \qquad \underline{\psi}_j = \liminf_{q \to \infty} \psi_j(q),$$

ainsi que $\mathrm{L}^*_j(q)$, $\psi^*_j(q)$, $\overline{\psi}^*_j$, $\underline{\psi}^*_j$ associés aux $\lambda^*_j(q)$. On regroupe les L_j (resp. L^*_j) en une unique fonction $\mathbf{L}_{\mathbf{u}} = (\mathrm{L}_1, \ldots, \mathrm{L}_n)$ (resp. $\mathbf{L}^*_{\mathbf{u}} = (\mathrm{L}^*_1, \ldots, \mathrm{L}^*_n)$).

Définition 1.6.2. On pose pour $N \geq 1$

$$\Delta_N := \{(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N \ ; \ x_1 \leq \cdots \leq x_N\}$$

et

$$\Phi_N : \mathbb{R}^N \to \Delta_N$$

l'application continue qui réarrange les coordonnées d'un vecteur dans l'ordre croissant.

Définition 1.6.3. On suit [67, §3] et on définit le *graphe conjoint* d'un ensemble de fonctions à valeurs réelles définies sur un intervalle I comme étant l'union de leurs graphes dans $I \times \mathbb{R}$. Pour une fonction $\mathbf{P} : [c, +\infty[\to \Delta_n$ et un intervalle $I \subset [c, +\infty[$, on définit également le *graphe conjoint de* $\mathbf{P}$ *sur* I comme étant le graphe conjoint de ses composantes $P_1, \ldots, P_n$ restreintes à I.

Définition 1.6.4. Afin de pouvoir tracer le graphe conjoint de la fonction $\mathbf{L}_{\mathbf{u}}$, il est utile de définir pour tout vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ la quantité $\lambda_{\mathbf{x}}(q)$ (resp. $\lambda^*_{\mathbf{x}}(q)$) comme étant le plus petit réel $\lambda > 0$ tel que $\mathbf{x} \in \lambda \mathcal{C}_{\mathbf{u}}(e^q)$ (resp. $\mathbf{x} \in \lambda \mathcal{C}^*_{\mathbf{u}}(e^q)$). On pose alors

$$\mathrm{L}_{\mathbf{x}}(q) = \log(\lambda_{\mathbf{x}}(q)) \quad \text{et} \quad \mathrm{L}^*_{\mathbf{x}}(q) = \log(\lambda^*_{\mathbf{x}}(q)).$$

Roy appelle le graphe de $\mathrm{L}_{\mathbf{x}}$ (ou de $\mathrm{L}^*_{\mathbf{x}}$) la *trajectoire* de $\mathbf{x}$. Localement, le graphe conjoint de $\mathbf{L}_{\mathbf{u}}$ est inclus dans le graphe conjoint d'un ensemble fini de $\mathrm{L}_{\mathbf{x}}$, et pour tout $\mathbf{x} \neq 0$ on a

$$\mathrm{L}_{\mathbf{x}}(q) = \max\Big(\log(\|\mathbf{x}\|), \log(\|\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}\|) + q\Big)$$
$$\mathrm{L}^*_{\mathbf{x}}(q) = \max\Big(\log(\|\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}\|), \log(\|\mathbf{x}\|) - q\Big).$$

La fonction $\mathrm{L}_{\mathbf{x}}$ est constante sur $[0, q_{\mathbf{x}}]$, puis de pente 1 sur $[q_{\mathbf{x}}, +\infty[$, où $q_{\mathbf{x}}$, appelé point de changement de pente de $\mathrm{L}_{\mathbf{x}}$, est donné par la formule

$$q_{\mathbf{x}} = \log(\|\mathbf{x}\|) - \log(|\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}|).$$

De même, la fonction $\mathrm{L}^*_{\mathbf{x}}$ est décroissante de pente -1 sur $[0, q^*_{\mathbf{x}}]$, puis constante sur $[q^*_{\mathbf{x}}, +\infty[$, où $q^*_{\mathbf{x}}$, appelé point de changement de pente de $\mathrm{L}^*_{\mathbf{x}}$, est donné par la formule

$$q^*_{\mathbf{x}} = \log(\|\mathbf{x}\|) - \log(\|\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}\|).$$

Remarquons qu'on a

$$\mathrm{L}_1(q) = \min_{\mathbf{x}\neq 0} \mathrm{L}_{\mathbf{x}}(q) \quad \text{et} \quad \mathrm{L}^*_1(q) = \min_{\mathbf{x}\neq 0} \mathrm{L}^*_{\mathbf{x}}(q). \tag{1.6.1}$$

Énonçons quelques propriétés classiques vérifiées par les fonctions $\mathbf{L}_{\mathbf{u}}$ et $\mathbf{L}^*_{\mathbf{u}}$.

Proposition 1.6.5. *Les fonctions* L_j *sont continues affines par morceaux, croissantes de pentes* 0 *ou* 1*, et vérifient les propriétés suivantes*

(a) $\mathrm{L}_1(q) \leq \cdots \leq \mathrm{L}_n(q)$.

(b) $\mathrm{L}_1(q) + \cdots + \mathrm{L}_n(q) = q + \mathcal{O}(1)$.

De manière duale, les fonctions L^*_j *sont continues affines par morceaux, décroissantes de pentes* 0 *ou* -1 *et vérifient*

(a') $\mathrm{L}^*_1(q) \leq \cdots \leq \mathrm{L}^*_n(q)$.

(b') $\mathrm{L}^*_1(q) + \cdots + \mathrm{L}^*_n(q) = -q + \mathcal{O}(1)$.

Notons que les assertions (b) et (b') viennent du second théorème de Minkowski, en utilisant le fait que $\mathrm{Vol}(\mathcal{C}_{\mathbf{u}}(e^q)) \asymp e^{-q}$ et $\mathrm{Vol}(\mathcal{C}^*_{\mathbf{u}}(e^q)) \asymp e^q$, les constantes implicites des symboles $\asymp$ ne dépendant que de $\mathbf{u}$ (où $\mathrm{Vol}(K)$ désigne la mesure de Lebesgue d'un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$).

Si K est un corps convexe de $\mathbb{R}^n$, pour $0 < p < n$ Mahler [39] définit le corps composé p-ème $K^{(p)} \subset \bigwedge^p \mathbb{R}^n$ de K comme étant l'enveloppe convexe de l'ensemble des $\mathbf{x}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_p$ avec $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p \in K$. C'est un corps convexe de $\bigwedge^p \mathbb{R}^n$, et Mahler montre que les minima successifs de $K^{(p)}$ pour le réseau $\bigwedge^p \mathbb{Z}^n$ s'expriment en fonction des minima successifs de K pour le réseau $\mathbb{Z}^n$. Plus généralement à partir d'une famille libre $(x_1, \ldots, x_n)$ réalisant (à constante multiplicative absolue près) les minima successifs de K, la preuve de Mahler permet de construire une famille de vecteurs de $\bigwedge^p \mathbb{Z}^n$ réalisant (à constante multiplicative absolue près) les minima successifs de $K^{(p)}$.

En remarquant que les composés $(n-1)$-ème $\left(\mathcal{C}_{\mathbf{u}}(e^q)\right)^{(n-1)}$ et $\left(\mathcal{C}^*_{\mathbf{u}}(e^q)\right)^{(n-1)}$ vérifient

$$\left(\mathcal{C}_{\mathbf{u}}(e^q)\right)^{(n-1)} \asymp e^{-q}\mathcal{C}^*_{\mathbf{u}}(e^q) \quad \text{et} \quad \left(\mathcal{C}^*_{\mathbf{u}}(e^q)\right)^{(n-1)} \asymp e^q \mathcal{C}_{\mathbf{u}}(e^q) \tag{1.6.2}$$

on peut alors déduire grâce aux travaux de Mahler [39] la proposition suivante (classique en géométrie paramétrique des nombres) qui relie les minima successifs des familles $\left(\mathcal{C}_{\mathbf{u}}(e^q)\right)_{q\geq 0}$ et $\left(\mathcal{C}^*_{\mathbf{u}}(e^q)\right)_{q\geq 0}$ (voir aussi [35] pour des rappels sur la géométrie des nombres et les minima successifs du corps convexe dual – "équivalent" au corps composé $(n-1)$-ème). Généralement, la Proposition 1.6.6 est énoncée simplement sous la forme (1.6.3) mais nous nous servirons parfois de l'énoncé complet.

Proposition 1.6.6 (Mahler). *Pour $j = 1, \dots, n$ on a*

$$\mathrm{L}_j(q) = -\mathrm{L}^*_{n+1-j}(q) + \mathcal{O}(1) \tag{1.6.3}$$

pour tout $q > 0$.
De plus, on a les propriétés suivantes. Soient $C > 0$ une constante fixée et $q > 0$. Soit $(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n)$ une famille libre de vecteurs de $\mathbb{Z}^n$ qui réalise $(\mathrm{L}_1, \dots, \mathrm{L}_n)$ à C près en q, i.e. telle que

$$|\mathrm{L}_{\mathbf{z}_i}(q) - \mathrm{L}_i(q)| \le C \quad \textit{pour } i = 1, \dots, n.$$

Pour $i = 1, \dots, n$ on pose $\mathbf{y}_i = \mathbf{z}_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathbf{z}}_{n-i+1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{z}_n \in \mathbb{Z}^n$, où le chapeau sur $\mathbf{z}_{n-i+1}$ signifie qu'il n'est pas pris en compte dans le produit extérieur définissant $\mathbf{y}_i$. Alors il existe $C' > 0$ qui ne dépend que de C et $\mathbf{u}$ telle que $(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n)$ réalise $(\mathrm{L}^*_1, \dots, \mathrm{L}^*_n)$ à C' près en q, i.e. telle que

$$|\mathrm{L}^*_{\mathbf{y}_i}(q) - \mathrm{L}^*_i(q)| \le C' \quad i = 1, \dots, n.$$

Réciproquement, si $(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n)$ est une famille libre de vecteurs de $\mathbb{Z}^n$ qui réalise $(\mathrm{L}^*_1, \dots, \mathrm{L}^*_n)$ à C près en q, pour $i = 1, \dots, n$ on pose $\mathbf{z}_i = \mathbf{y}_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathbf{y}}_{n-i+1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{y}_n \in \mathbb{Z}^n$ (où le chapeau sur $\mathbf{y}_{n-i+1}$ signifie qu'il n'est pas pris en compte dans le produit extérieur). Alors il existe $C' > 0$ qui ne dépend que de C et $\mathbf{u}$ telle que $(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n)$ réalise $(\mathrm{L}_1, \dots, \mathrm{L}_n)$ à C' près.

La Proposition 1.6.6 implique directement les relations suivantes qu'on sera souvent amené à utiliser.

Corollaire 1.6.7. *Les fonctions $\mathbf{L}_\mathbf{u} = (\mathrm{L}_1 \dots, \mathrm{L}_n)$ et $\mathbf{L}^*_\mathbf{u} = (\mathrm{L}^*_1 \dots, \mathrm{L}^*_n)$ vérifient*

$$\mathbf{L}^*_\mathbf{u} = (-\mathrm{L}_n, \dots, -\mathrm{L}_1) + \mathcal{O}(1) \quad \textit{et} \quad \mathbf{L}_\mathbf{u} = (-\mathrm{L}^*_n, \dots, -\mathrm{L}^*_1) + \mathcal{O}(1). \tag{1.6.4}$$

Pour tout $j = 1, \dots, n$ on a

$$\underline{\psi}_j = -\overline{\psi}^*_{n+1-j} \quad \textit{et} \quad \overline{\psi}_j = -\underline{\psi}^*_{n+1-j} \tag{1.6.5}$$

Schmidt et Summerer décrivent de manière plus précise le comportement des L_j en introduisant la définition de (n, γ)-système dans [67]. Dans [56] Roy donne la Définition 1.6.8 – équivalente à celle d'un $(n, 0)$-système – et il montre qu'on peut en fait se limiter à l'étude de cette classe plus petite et plus simple pour étudier le comportement des L_j (voir aussi [55] pour la définition de *n-système rigide* qui constitue également une classe de fonctions qu'on peut utiliser pour approcher les L_j).

Définition 1.6.8. Soit $q_0 \ge 0$. Un n-système (ou $(n, 0)$-système) sur $[q_0, +\infty[$ est une fonction $\mathbf{P} = (\mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_n) : [q_0, +\infty[\to \mathbb{R}^n$ continue affine par morceaux vérifiant les conditions suivantes :

(a) Pour tout $q \ge q_0$, on a $0 \le \mathrm{P}_1(q) \le \cdots \le \mathrm{P}_n(q)$ et $\mathrm{P}_1(q) + \cdots + \mathrm{P}_n(q) = q$,

(b) Si H est un intervalle ouvert non vide de $[q_0, +\infty[$ sur lequel $\mathbf{P}$ est différentiable, alors il existe un entier r $(1 \le r \le n)$, tel que P_r est de pente 1 sur H et les autres composantes P_j de $\mathbf{P}$ $(j \ne r)$ sont constantes sur H.

(c) Si $q > q_0$ est un point où $\mathbf{P}$ n'est pas différentiable, et si r et s les entiers tels que P_r est de pente 1 sur $]q-\varepsilon, q[$ et P_s est de pente 1 sur $]q, q+\varepsilon[$ (avec $\varepsilon > 0$ assez petit) vérifient $r < s$, alors on a $\mathrm{P}_r(q) = \mathrm{P}_{r+1}(q) = \cdots = \mathrm{P}_s(q)$.

Etant donné une partie A de $\mathbb{R}$, on appelle *intervalle de A* tout intervalle de $\mathbb{R}$ inclus dans A. Ici, la condition « $\mathbf{P}$ est affine par morceaux » signifie que pour tout intervalle borné $J \subset [q_0, +\infty[$, l'intersection de J avec l'ensemble D des points de $[q_0, +\infty[$ où $\mathbf{P}$ n'est pas différentiable est fini, et que la dérivée de $\mathbf{P}$ est localement constante sur $[q_0, +\infty[\backslash D$. La pente d'une composante P_j de $\mathbf{P}$ sur un intervalle ouvert non vide H de $[q_0, +\infty[\backslash D$ est alors la valeur constante de sa dérivée sur H, ou de manière équivalente la pente de son graphe sur H.

Définition 1.6.9. Soit $q_0 \geq 0$. Un n-système dual sur $[q_0, +\infty)$ est une fonction $\mathbf{P} : [q_0, +\infty[\to \mathbb{R}^n$ telle que $(-\mathrm{P}_n, \ldots, -\mathrm{P}_1)$ soit un n-système sur $[q_0, +\infty)$.

Théorème 1.6.1 (Roy, 2015)**.** *Pour tout vecteur $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ non nul, il existe $q_0 > 0$ et un n-système $\mathbf{P}$ (resp. un n-système dual $\mathbf{P}^*$) sur $[q_0, +\infty[$ tel que $\|\mathbf{L}_\mathbf{u} - \mathbf{P}\|_\infty$ (resp. $\|\mathbf{L}^*_\mathbf{u} - \mathbf{P}^*\|_\infty$)soit borné sur $[q_0, +\infty[$. Réciproquement pour tout n-système $\mathbf{P}$ (resp. tout n-système dual $\mathbf{P}^*$) sur $[q_0, +\infty[$, il existe un vecteur $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $\|\mathbf{L}_\mathbf{u} - \mathbf{P}\|_\infty$ (resp. $\|\mathbf{L}^*_\mathbf{u} - \mathbf{P}^*\|_\infty$) soit borné sur $[q_0, +\infty[$.*

Remarque 1.6.10. Concernant la première partie du Théorème 1.6.1, Schmidt et Summerer en avaient déjà montré une version plus faible [67], à savoir que pour tout $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ non nul, il existe $q_0 > 0$ et un (n, γ)-système $\mathbf{P}$ sur $[q_0, +\infty[$ (avec $\gamma \geq 0$) tel que $\|\mathbf{L}_\mathbf{u} - \mathbf{P}\|_\infty$ soit borné sur $[0, +\infty[$; voir [67] pour la définition d'un (n, γ)-système. Un n-système est un $(n, 0)$-système au sens de Schmidt et Summerer. Les $(n, 0)$-systèmes sont les (n, γ)-systèmes les plus simples. La seconde partie du Théorème 1.6.1 a été démontrée par Roy dans [55], où il résout une conjecture de Schmidt et Summerer.

1.7 Suites de points minimaux

Rappelons que $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. La notion de point minimal est un outil fondamental dans l'approche de Davenport et Schmidt [16], [17] ; elle est utilisée notamment par Fischler [23] et Roy [49], [50]. Cependant, elle ne s'inscrit pas immédiatement dans le contexte de la géométrie paramétrique des nombres (avec le choix que nous faisons de la famille de corps convexes symétriques). Dans cette partie, nous proposons une notion de point minimal voisine de celle de Davenport et Schmidt mais compatible avec la géométrie paramétrique des nombres dans notre contexte. Une première définition est donnée dans la Partie 1.7, puis une seconde (équivalente) dans la Partie 1.7.2 pour faire le lien avec la notion de Davenport et Schmidt [16, Sect. 3] et expliquer la différence. L'idée naïve est de définir un point minimal comme étant un point $\mathbf{x}$ réalisant le premier minimum L_1 ou L^*_1. La remarque suivante nous invite à ne considérer que les points dont la première coordonnée non nulle est > 0 pour éviter la redondance.

Remarque 1.7.1. Si $\mathrm{L}_1(q) = \mathrm{L}_\mathbf{x}(q)$ (ou $\mathrm{L}^*_1(q) = \mathrm{L}^*_\mathbf{x}(q)$), comme $\mathbf{x}$ et $-\mathbf{x}$ ont même trajectoire, quitte à changer $\mathbf{x}$ en $-\mathbf{x}$ on peut supposer que la première coordonnée non nulle de $\mathbf{x}$ est > 0.

A priori en un point q quelconque rien ne garantit qu'un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3$ réalisant L_1 (resp. L_1^*) en q soit unique ; or il est agréable de pouvoir parler *du* point minimal réalisant $\mathrm{L}_1(q)$ ou $\mathrm{L}_1^*(q)$. Une telle unicité est clairement impossible aux points en lesquels la pente de L_1 passe de 1 à 0 (resp. la pente de L_1^* passe de pente -1 à 0) puisqu'en ces points L_1 et L_2 (resp. L_1^* et L_2^*) coïncident et donc il y a au moins deux points linéairement indépendants qui réalisent le premier minimum. En-dehors de ces points particuliers on aimerait pouvoir considérer *le* point qui réalise L_1 ou L_1^*. Or, rien n'empêche a priori des situations similaires à celle de la Figure 1.2 du paragraphe 1.7.1 ci-dessous. Dans le cas de la Figure 1.2, on préfère dire que $\mathbf{y}$ est "meilleur" que $\mathbf{x}$ dans le sens où $\mathrm{L}_{\mathbf{y}}^*$ réalise L_1^* en tous les points où $\mathrm{L}_{\mathbf{x}}^*$ réalise L_1^*, et aussi en d'autres points.

1.7.1 Une définition paramétrique

Avant de définir les points minimaux, énonçons un lemme qui sera utile pour montrer les résultats d'unicité. Dans cette thèse les conditions de ce lemme seront systématiquement vérifiées.

Lemme 1.7.2. *On suppose que les coordonnées de* $\mathbf{u}$ *sont linéairement indépendantes sur* $\mathbb{Q}$. *Si deux points non nuls* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^3$ *vérifient* $\mathrm{L}_{\mathbf{x}} = \mathrm{L}_{\mathbf{y}}$ *ou* $\mathrm{L}_{\mathbf{x}}^* = \mathrm{L}_{\mathbf{y}}^*$ *alors* $\mathbf{x} = \pm\mathbf{y}$. *Autrement dit, deux points qui ont même trajectoire sont égaux au signe près.*

Preuve Supposons pour commencer que $\mathrm{L}_{\mathbf{x}} = \mathrm{L}_{\mathbf{y}}$. Cela implique $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| = |\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}|$, donc par hypothèse sur $\mathbf{u}$ on a nécessairement $\mathbf{x} \pm \mathbf{y} = 0$.
Supposons que $\mathrm{L}_{\mathbf{x}}^* = \mathrm{L}_{\mathbf{y}}^*$. Alors on a $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\|$ et $\|\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}\| = \|\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}\|$. Or d'après l'identité de Lagrange, pour tous vecteurs $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ on a

$$\|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}\|^2 + |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|^2 = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|,$$

donc on a $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| = |\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}|$. D'après ce qui précède cela implique encore une fois que $\mathbf{x} = \pm\mathbf{y}$. □

On va se servir de la proposition suivante pour définir la notion de point minimal.

Proposition 1.7.3. *Soit* $q > 0$ *un point en lequel la pente de* L_1 *passe de* 0 *à* 1. *Alors il existe un point* $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}$ *de première coordonnée non nulle* > 0 *tel que* $\mathrm{L}_{\mathbf{x}}(q) = \mathrm{L}_1(q)$ *et tel que le point* $q_{\mathbf{x}}$ *de changement de pente de* $\mathrm{L}_{\mathbf{x}}$ *vérifie* $q_{\mathbf{x}} = q$. *Si les coordonnées de* $\mathbf{u}$ *sont linéairement indépendantes sur* $\mathbb{Q}$ *alors ce point est unique.*
De manière duale, soit $q > 0$ *un point en lequel en lequel la pente de* L_1^* *passe de* -1 *à* 0. *Alors il existe un point* $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}$ *de première coordonnée non nulle* > 0 *tel que* $\mathrm{L}_{\mathbf{x}}^*(q) = \mathrm{L}_1^*(q)$ *et tel que le point* $q_{\mathbf{x}}^*$ *de changement de pente de* $\mathrm{L}_{\mathbf{x}}^*$ *vérifie* $q_{\mathbf{x}} = q$. *Si les coordonnées de* $\mathbf{u}$ *sont linéairement indépendantes sur* $\mathbb{Q}$ *alors ce point est unique.*

Preuve Nous montrons les questions d'unicité à la fin de la preuve.
Soit $q > 0$ un point en lequel L_1 passe de pente 0 à 1. D'après (1.6.1) il existe $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3$ non nul (qu'on peut supposer de première coordonnée non nulle > 0 d'après la Remarque 1.7.1) tel que $\mathrm{L}_{\mathbf{x}}(q) = \mathrm{L}_1(q)$. Comme $\mathrm{L}_1 \leq \mathrm{L}_{\mathbf{x}}$ et que par hypothèse il existe $c > 0$ tel que L_1 soit constante sur $[q-c, q]$ et croissante de pente 1 sur $[q, q+c]$, nécessairement q est le point de changement de pente de $\mathrm{L}_{\mathbf{x}}$, *i.e.* $q = q_{\mathbf{x}}$.

De même, si $q > 0$ un point en lequel L_1^* passe de pente -1 à 0, par (1.6.1) il existe $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3$ non nul (qu'on peut toujours supposer de première coordonnée non nulle > 0) tel que $\mathrm{L}_{\mathbf{x}}^*(q) = \mathrm{L}_1^*(q)$. Comme dans le cas précédent, on montre qu'on a nécessairement $q = q_{\mathbf{x}}^*$.

Montrons l'unicité en supposant maintenant que les coordonnées de $\mathbf{u}$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$. Si deux points non nuls $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^3$ sont tels que $\mathrm{L}_{\mathbf{x}}$ et $\mathrm{L}_{\mathbf{y}}$ (resp. $\mathrm{L}_{\mathbf{x}}^*$ et $\mathrm{L}_{\mathbf{y}}^*$) coïncident en un point et $q_{\mathbf{x}} = q_{\mathbf{y}}$ (resp. $q_{\mathbf{x}}^* = q_{\mathbf{y}}^*$), alors on a $\mathrm{L}_{\mathbf{x}} = \mathrm{L}_{\mathbf{y}}$ (resp. $\mathrm{L}_{\mathbf{x}}^* = \mathrm{L}_{\mathbf{y}}^*$). D'après le Lemme 1.7.2 cela implique que $\mathbf{x} = \pm\mathbf{y}$, et si on impose que la première coordonnée non nulle de ces vecteurs soit > 0, alors on a $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. D'où l'unicité.

□

Définissons maintenant la notion de *point minimal*.

Définition 1.7.4. On appelle *point minimal (relatif à la famille* $\left(\mathcal{C}_{\mathbf{u}}(e^q)\right)_{q\geq 0}$*)* tout vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}$ de première coordonnée non nulle > 0 tel que le point $q_{\mathbf{x}}$ de changement de pente de $\mathrm{L}_{\mathbf{x}}$ vérifie :
- Le point $\mathbf{x}$ réalise L_1 au point $q_{\mathbf{x}}$, *i.e.* $\mathrm{L}_1(q_{\mathbf{x}}) = \mathrm{L}_{\mathbf{x}}(q_{\mathbf{x}})$
- La pente de la fonction L_1 passe de 0 à 1 au point $q_{\mathbf{x}}$.

De manière duale, on appelle *point minimal (relatif à la famille* $\left(\mathcal{C}_{\mathbf{u}}^*(e^q)\right)_{q\geq 0}$*)* (ou *point minimal dual*) tout vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}$ de première coordonnée non nulle > 0 tel que le point $q_{\mathbf{x}}^*$ de changement de pente de $\mathrm{L}_{\mathbf{x}}^*$ vérifie :
- Le point $\mathbf{x}$ réalise L_1^* au point $q_{\mathbf{x}}^*$, *i.e.* $\mathrm{L}_1^*(q_{\mathbf{x}}^*) = \mathrm{L}_{\mathbf{x}}^*(q_{\mathbf{x}}^*)$
- La pente de la fonction L_1^* passe de -1 à 0 au point $q_{\mathbf{x}}^*$.

Remarque 1.7.5. D'après la Proposition 1.7.3, un point q est un point en lequel L_1 passe de pente 0 à 1 (resp. L_1^* passe de pente -1 à 0) si et seulement si c'est le point de changement de pente d'un point minimal relatif à la famille $\left(\mathcal{C}_{\mathbf{u}}(e^q)\right)_{q\geq 0}$ (resp. la famille $\left(\mathcal{C}_{\mathbf{u}}^*(e^q)\right)_{q\geq 0}$).

Remarque 1.7.6. Deux points minimaux (ou minimaux duaux) de même norme ont même trajectoire. En effet supposons que deux points minimaux $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ relatifs à la famille $\left(\mathcal{C}_{\mathbf{u}}(e^q)\right)_{q\geq 0}$ vérifient $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\|$. On pose $q = \min(q_{\mathbf{x}}, q_{\mathbf{y}})$ et par symétrie on suppose $q = q_{\mathbf{x}}$. La situation est illustrée à la Figure 1.1.

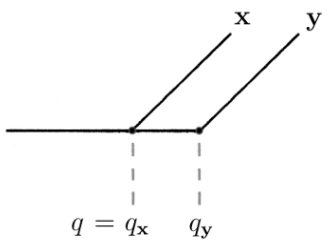

FIGURE 1.1 – trajectoires des points $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$

Comme L_1 passe de pente 0 à pente 1 en q et que $L_1 \leq L^*_{\mathbf{y}}$ on a nécessairement $q_{\mathbf{y}} = q_{\mathbf{x}}$ et par suite $L_{\mathbf{x}} = L_{\mathbf{y}}$. De même, si deux points minimaux $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ relatifs à la famille $\left(\mathcal{C}^*_{\mathbf{u}}(e^q)\right)_{q\geq 0}$ vérifient $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\|$, on pose $q = \min(q^*_{\mathbf{x}}, q^*_{\mathbf{y}})$ et par symétrie on suppose $q = q^*_{\mathbf{x}}$. La situation est illustrée à la Figure 1.2.

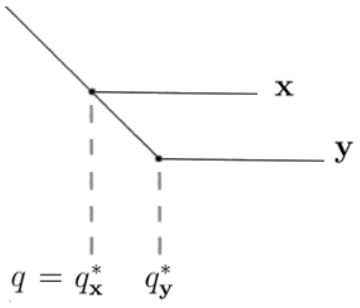

FIGURE 1.2 – trajectoires des points duaux $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$

Comme L^*_1 passe de pente -1 à 0 en q et que $L^*_1 \leq L_{\mathbf{y}}$ on en déduit que $q^*_{\mathbf{x}} = q^*_{\mathbf{y}}$, et par suite $L^*_{\mathbf{x}} = L^*_{\mathbf{y}}$.

Notation. Remarquons qu'un point minimal est toujours un élément primitif de $\mathbb{Z}^3$ et que deux points minimaux distincts sont toujours linéairement indépendants. On suppose désormais que les coordonnées de $\mathbf{u}$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$. D'après la Remarque 1.7.6 et le Lemme 1.7.2, deux points minimaux distincts ont toujours des normes distinctes.
On note $(\mathbf{a}_i)_{i\geq 1}$ la suite des points minimaux ordonnés par norme croissante. Pour tout $i \geq 1$ on note $q_i = q_{\mathbf{a}_i}$ le point de changement de pente de $L_{\mathbf{a}_i}$. On note m_i l'unique point de changement de pente de L_1 appartenant à $]q_i, q_{i+1}[$; c'est aussi l'abscisse du point d'intersection des trajectoires de $\mathbf{a}_i$ et $\mathbf{a}_{i+1}$. Remarquons que $(q_i)_i$ (resp. $(m_i)_i$) est la suite strictement croissante des points en lesquels L_1 change de pente 0 à 1 (resp. de pente 1 à 0).
De même on note $(\mathbf{a}^*_i)_{i\geq 1}$ la suite des points minimaux duaux ordonnés par norme croissante. Pour tout $i \geq 1$ on note $q^*_i = q^*_{\mathbf{a}^*_i}$ le point de changement de pente de $L^*_{\mathbf{a}^*_i}$. On note aussi m^*_i l'unique point de changement de pente de L^*_1 appartenant à $]q^*_i, q^*_{i+1}[$; c'est aussi l'abscisse du point d'intersection des trajectoires de $\mathbf{a}^*_i$ et $\mathbf{a}^*_{i+1}$. Les suites $(q^*_i)_i$ (resp. $(m^*_i)_i$) est la suite croissante des points en lesquels L^*_1 change de pente -1 à 0 (resp. de pente 0 à -1).

La situation est illustrée aux Figures 1.3 et 1.4. Les graphes de L_1 et L^*_1 sont en traits pleins. Les trajectoires des points minimaux (resp. points minimaux duaux) sont poursuivies en pointillés en-dehors des zones où elles coïncident avec le graphe de L_1 (resp. L^*_1).

Remarque 1.7.7. Notons que $\mathbf{a}^*_i$ converge dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ vers $\mathbf{u}$, et que si les coordonnées de $\mathbf{u}$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$ alors en particulier elles ne sont pas nulles. Cela assure que pour i assez grand aucune des coordonnées de $\mathbf{a}^*_i$ n'est nulle.

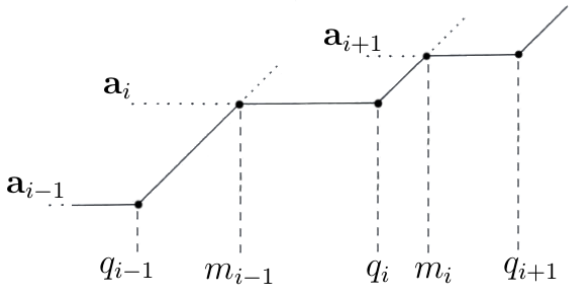

FIGURE 1.3 – Points minimaux et graphe de L_1

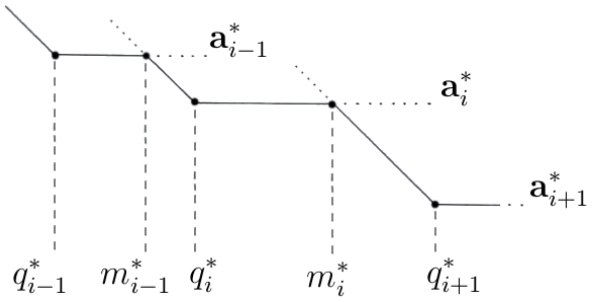

FIGURE 1.4 – Points minimaux duaux et graphe de L^*_1

Il est clair que pour tout $q > 0$ on a les formules suivantes (qui précisent (1.6.1))

$$\mathrm{L}_1(q) = \min_{i\geq 1} \mathrm{L}_{\mathbf{a}_i}(q) \quad \text{et} \quad \mathrm{L}^*_1(q) = \min_{i\geq 1} \mathrm{L}^*_{\mathbf{a}^*_i}(q). \tag{1.7.1}$$

Avec ce qui précède, il n'est pas difficile alors de montrer les propriétés suivantes.

Proposition 1.7.8. *On a*

(a) $\|\mathbf{a}_1\| < \|\mathbf{a}_2\| < \dots$ *et* $|\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{u}| > |\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{u}| > \dots$.

(b) Pour tout vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}$*, si* $\|\mathbf{x}\| < \|\mathbf{a}_{i+1}\|$ *alors* $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \geq |\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{u}|$.

(c) $\|\mathbf{a}^*_1\| < \|\mathbf{a}^*_2\| < \dots$ *et* $\|\mathbf{a}^*_1 \wedge \mathbf{u}\| > \|\mathbf{a}^*_2 \wedge \mathbf{u}\| > \dots$.

(d) Pour tout vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}$*, si* $\|\mathbf{x}\| < \|\mathbf{a}^*_{i+1}\|$ *alors* $\|\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}\| \geq \|\mathbf{a}^*_i \wedge \mathbf{u}\|$.

Remarque 1.7.9. L'assertion (b) signifie si la partie horizontale de la trajectoire de $\mathbf{x}$ est située strictement en-dessous de la trajectoire de $\mathbf{a}_{i+1}$, alors la trajectoire complète de $\mathbf{x}$ est située à gauche de la droite d'équation $y = \log(|\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{u}|) + q$ qui contient la partie oblique de la trajectoire de $\mathbf{a}_i$.
L'assertion (d) signifie si la partie oblique de la trajectoire de $\mathbf{x}$ est située strictement en-dessous de la trajectoire de $\mathbf{a}^*_{i+1}$, alors la trajectoire complète de $\mathbf{x}$ est située au-dessus de la droite horizontale d'équation $y = \log(\|\mathbf{a}^*_i \wedge \mathbf{u}\|)$ qui contient la partie horizontale de la trajectoire de $\mathbf{a}^*_i$.

Remarquons que c'est avec des propriétés du type de celles de la Proposition 1.7.8 que Roy définit la suite des points minimaux dans [50, Sect. 3].

1.7.2 Définition équivalente

On peut définir la notion de "point minimal" d'une manière plus similaire à celle de Davenport et Schmidt [16, Sect. 3], [17, Sect. 3].

On suppose que les coordonnées de $\mathbf{u}$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$. Soit $q > 0$. L'ensemble des vecteurs $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}$ de première coordonnée non nulle > 0 vérifiant $\mathrm{L}_1(q) = \mathrm{L}_{\mathbf{x}}(q)$ est non vide (voir Remarque 1.7.1) et fini. Puisque les coordonnées de $\mathbf{u}$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$, pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}$ on a $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| = |\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}|$ si et seulement si $\mathbf{x} = \pm\mathbf{y}$, donc il existe un unique vecteur $\mathbf{a}$ parmi les vecteurs précédents tel que $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}|$ soit minimal. On appelle $\mathbf{a}$ le *point minimal* (relatif à la famille $\left(\mathcal{C}_{\mathbf{u}}(e^q)\right)_{q\geq 0}$) *correspondant* à q.

D'une manière similaire, l'ensemble des vecteurs $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}$ de première coordonnée non nulle > 0 vérifiant $\mathrm{L}_1^*(q) = \mathrm{L}_{\mathbf{x}}^*(q)$ est non vide et fini. On note M_q le sous-ensemble de ces vecteurs tels que $\|\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}\|$ soit minimal. Il existe vecteur $\mathbf{a} \in M_q$ de norme minimale, unique d'après le Lemme 1.7.2. On l'appelle le *point minimal* (relatif à la famille $\left(\mathcal{C}_{\mathbf{u}}^*(e^q)\right)_{q\geq 0}$) *correspondant* à q, ou plus simplement *le point minimal dual correspondant* à q.

La Proposition suivante montre que cette construction redonne la suite des points minimaux de la Partie précédente. Rappelons qu'on note $(\mathbf{a}_i)_{i\geq 1}$ (resp. $(\mathbf{a}_i^*)_{i\geq 1}$) la suite des points minimaux – au sens de la Définition 1.7.4 – relatifs à la famille $\left(\mathcal{C}_{\mathbf{u}}(e^q)\right)_{q\geq 0}$ (resp. la famille $\left(\mathcal{C}_{\mathbf{u}}^*(e^q)\right)_{q\geq 0}$), ordonnés par norme croissante. Pour tout $i \geq 1$, m_i (resp. m_i^*) est l'abscisse du point d'intersection des trajectoires de $\mathbf{a}_i$ et $\mathbf{a}_{i+1}$ (resp. des trajectoires (duales) de $\mathbf{a}_i^*$ et $\mathbf{a}_{i+1}^*$). Voir les Figures 1.3 et 1.4 au paragraphe 1.7.1 ci-dessus.

Proposition 1.7.10. *Soit $i \geq 1$. Alors pour tout $q \in [m_{i-1}, m_i[$, $\mathbf{a}_i$ est le point minimal correspondant à q. De même, pour tout $q \in [m_{i-1}^*, m_i^*[$, $\mathbf{a}_i^*$ est le point minimal dual correspondant à q.*

Preuve Pour commencer, remarquons que $\mathrm{L}_{\mathbf{a}_i}$ (resp. $\mathrm{L}_{\mathbf{a}_i^*}^*$) coïncide avec L_1 sur $[m_i, m_{i+1}]$ (resp. avec L_1^* sur $[m_i^*, m_{i+1}^*]$) ; voir Figures 1.3 et 1.4.
Soient $q \in [m_i, m_{i+1}[$, et $\mathbf{x}$ tel que $\mathrm{L}_{\mathbf{x}}(q) = \mathrm{L}_1(q)$. Par la remarque précédente on a $\mathrm{L}_{\mathbf{a}_i}(q) = \mathrm{L}_1(q)$. Le point du graphe de L_1 d'abscisse q est strictement en-dessous de la partie horizontale de la trajectoire de $\mathbf{a}_{i+1}$. Cela implique que $\|\mathbf{x}\| < \|\mathbf{a}_{i+1}\|$ et par la Proposition 1.7.8 on a donc $|\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{u}| \leq |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}|$. Le point $\mathbf{a}_i$ minimise donc la valeur de $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}|$ parmi les points $\mathbf{x}$ réalisant L_1 au point q : il s'agit du point minimal correspondant à q (au sens de cette partie).
Prouvons maintenant le résultat dual. Soient $q \in [m_i^*, m_{i+1}^*[$, et $\mathbf{x}$ tel que $\mathrm{L}_{\mathbf{x}}^*(q) = \mathrm{L}_1^*(q)$. Par la remarque au début de la preuve, on a $\mathrm{L}_{\mathbf{a}_i^*}^*(q) = \mathrm{L}_1^*(q)$. Le point du graphe de L_1^* d'abscisse q est strictement en-dessous de la partie oblique de la trajectoire de $\mathbf{a}_{i+1}^*$. Cela implique que $\|\mathbf{x}\| < \|\mathbf{a}_{i+1}\|$ et par la Proposition 1.7.8 on a donc $\|\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}\| \geq \|\mathbf{a}_i^* \wedge \mathbf{u}\|$. Le point $\mathbf{a}_i^*$ minimise donc la valeur de $\|\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}\|$ parmi les points $\mathbf{x}$ réalisant L_1^* au point q. De plus, si $\|\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}\| = \|\mathbf{a}_i^* \wedge \mathbf{u}\|$ alors puisque le point q_i^* de changement de pente de

$\mathrm{L}^*_{\mathbf{a}^*_i}$ est aussi le point de changement de pente de L^*_1 et que $\mathrm{L}^*_1 \leq \mathrm{L}^*_{\mathbf{x}}$, on a nécessairement $q^*_i \leq q_{\mathbf{x}}$, ce qui implique $\|\mathbf{a}^*_i\| \leq \|\mathbf{x}\|$. Autrement dit, $\mathbf{a}^*_i$ est de norme minimale parmi les points $\mathbf{x}$ qui vérifient $\mathrm{L}^*_{\mathbf{x}}(q) = \mathrm{L}^*_1(q)$ et qui minimisent $\|\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}\|$. C'est donc le point minimal dual correspondant à q (au sens de cette partie). □

Remarque 1.7.11. Rappelons qu'un point minimal est toujours un point primitif de $\mathbb{Z}^3$ et que deux points minimaux sont toujours linéairement indépendants. Ces remarques s'appliquent aussi aux points minimaux duaux.

Remarque 1.7.12. On suppose $\mathbf{u}$ de la forme $(1, \xi, \xi^2)$. Davenport et Schmidt définissent les points minimaux de la manière suivante [16, Sect.3] : le point minimal correspondant à $X > 1$ est l'unique vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3$ non nul tel que $\|\mathbf{x}\|_\infty \leq X$ et tel que $\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}$ soit positif et minimal. Au signe près et en considérant la norme euclidienne $\|\cdot\|$ à la place de $\|\cdot\|_\infty$ (définie comme le maximum des valeurs absolues des coordonnées), on voit que cette définition est très proche de celle d'un point minimal relatif à la famille $\left(\mathcal{C}_{\mathbf{u}}(e^q)\right)_{q\geq 0}$. Cependant, a priori un point minimal au sens de Davenport et Schmidt pourrait ne pas être un point minimal relatif à la famille $\left(\mathcal{C}_{\mathbf{u}}(e^q)\right)_{q\geq 0}$, et réciproquement.
Dans [17, Sect.3], Davenport et Schmidt définissent les points minimaux "duaux" : le point minimal correspondant à $X > 1$ est l'unique vecteur $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^3$ non nul tel que $1 \leq x_0 \leq X$ et tel que $\max(|x_0\xi - x_1|, |x_0\xi^2 - x_2|)$ soit minimal.
Si $\mathbf{x}$ est le point minimal correspondant à X, alors on a $x_0 \asymp \|\mathbf{x}\|$ et $\max(|x_0\xi - x_1|, |x_0\xi^2 - x_2| \asymp \|\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}\|$, et on voit que cette définition est très proche de celle de point minimal relatif à la famille $\left(\mathcal{C}^*_{\mathbf{u}}(e^q)\right)_{q\geq 0}$. Toutefois, comme précédemment a priori un point minimal au sens de Davenport et Schmidt pourrait ne pas être un point minimal relatif à la famille $\left(\mathcal{C}^*_{\mathbf{u}}(e^q)\right)_{q\geq 0}$, et réciproquement.

1.7.3 Propriétés spécifiques au cas $n = 3$

Nous donnons ici quelques propriétés utiles spécifiques au cas $n = 3$. On suppose que les coordonnées de $\mathbf{u}$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$ et on conserve les notations des parties précédentes – en particulier on note $(\mathbf{a}_i)_{i\geq 1}$, resp. $(\mathbf{a}^*_i)_{i\geq 1}$, les suites des points minimaux, resp. points minimaux duaux, associées à $\mathbf{u}$.
En reprenant la preuve du Lemme 4.1 de [49] (voir aussi le Lemme 2 de [16]) nous établissons le Lemme 1.7.13. La structure de preuve pour montrer que $(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1})$ (resp. $(\mathbf{a}^*_i, \mathbf{a}^*_{i+1})$) est une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{V}$ (resp. $\mathcal{V}^*$) est identique à celle du Lemme 4.1 de [49], mais nous la redonnons puisque les quantités manipulées ne sont pas exactement les mêmes et que le Lemme 4.1 de [49] traite le cas de $\mathbf{u} = (1, \xi, \xi^2)$ – même si les arguments se généralisent immédiatement. Notons que la preuve de Roy sur l'estimation de la hauteur $H(\mathcal{V}^*)$ ne s'adapte pas immédiatement à notre cas (voir Proposition 7.3.3 du Chapitre 7 où nous résolvons ce problème à l'aide de la géométrie paramétrique des nombres).

Lemme 1.7.13. *On suppose que les coordonnées de* $\mathbf{u}$ *sont linéairement indépendantes sur* $\mathbb{Q}$. *Soit* $i \geq 1$. *On pose* $\mathcal{V} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1})$ *le sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$ *engendré par les deux points minimaux consécutifs* $\mathbf{a}_i$ *et* $\mathbf{a}_{i+1}$. *Alors* $(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1})$ *forme une* $\mathbb{Z}$*-base du* $\mathbb{Z}$*-module* $\mathcal{V} \cap \mathbb{Z}^3$.
De même, on pose $\mathcal{V}^* = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\mathbf{a}^*_i, \mathbf{a}^*_{i+1}\right)$ *le sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$ *engendré par les*

deux points minimaux duaux consécutifs $\mathbf{a}_i^*$ *et* $\mathbf{a}_{i+1}^*$*. Alors* $(\mathbf{a}_i^*, \mathbf{a}_{i+1}^*)$ *forme une* $\mathbb{Z}$*-base du* $\mathbb{Z}$*-module* $\mathcal{V}^* \cap \mathbb{Z}^3$*.*

Preuve Supposons par l'absurde que $(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1})$ n'est pas une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{V} \cap \mathbb{Z}^3$. Alors il existe un point $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}$ de première coordonnée non nulle > 0 qui s'écrit sous la forme $\mathbf{z} = r\mathbf{a}_i + s\mathbf{a}_{i+1}$ avec r, s deux rationnels tels que $\max(|r|, |s|) \leq \frac{1}{2}$. Alors $\mathbf{z}$ vérifie d'une part

$$\|\mathbf{z}\| \leq |r|\|\mathbf{a}_i\| + |s|\|\mathbf{a}_{i+1}\| < \|\mathbf{a}_{i+1}\|,$$

et de l'autre

$$|\mathbf{z} \cdot \mathbf{u}| \leq |r||\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{u}| + |s||\mathbf{a}_{i+1} \cdot \mathbf{u}| < |\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{u}|.$$

Cela contredit l'assertion (b) de la Proposition 1.7.8.
On raisonne de même avec $\mathbf{a}_i^*$ et $\mathbf{a}_{i+1}^*$. Si $(\mathbf{a}_i^*, \mathbf{a}_{i+1}^*)$ n'est pas une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{V} \cap \mathbb{Z}^3$, alors il existe un point $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}$ de première coordonnées non nulle > 0 qui s'écrit sous la forme $\mathbf{z} = r\mathbf{a}_i^* + s\mathbf{a}_{i+1}^*$ avec r, s deux rationnels tels que $\max(|r|, |s|) \leq \frac{1}{2}$ et on obtient

$$\|\mathbf{z}\| \leq |r|\|\mathbf{a}_i^*\| + |s|\|\mathbf{a}_{i+1}^*\| < \|\mathbf{a}_{i+1}^*\| \quad \text{et} \quad \|\mathbf{z} \wedge \mathbf{u}\| \leq |r|\|\mathbf{a}_i \wedge \mathbf{u}\| + |s|\|\mathbf{a}_{i+1} \wedge \mathbf{u}\| < \|\mathbf{a}_i \wedge \mathbf{u}\|,$$

ce qui contredit l'assertion (d) de la Proposition 1.7.8.
Donc $(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1})$ (resp. $(\mathbf{a}_i^*, \mathbf{a}_{i+1}^*)$) forme une $\mathbb{Z}$-base du $\mathbb{Z}$-module $\mathcal{V} \cap \mathbb{Z}^3$ (resp. $\mathcal{V}^* \cap \mathbb{Z}^3$). □

Le lemme suivant permet de donner un sens géométrique à la quantité $\|\mathbf{a}_{i+1}^*\|\|\mathbf{a}_i^* \wedge \mathbf{u}\|$. Notons que c'est cette quantité qui apparaît naturellement comme la hauteur du sous espace $\mathcal{V}_k$ du Lemme 4.1 de [49], dont nous définissons un équivalent adapté à notre contexte dans le Chapitre 7 (voir notamment le Lemme 7.2.2 du Chapitre 7).

Lemme 1.7.14. *On note* $m_i^* = \log(\|\mathbf{a}_{i+1}^*\|) - \log(\|\mathbf{a}_i^* \wedge \mathbf{u}\|)$ *l'abscisse du point d'intersection des graphes de* $\mathrm{L}^*_{\mathbf{a}_i^*}$ *et* $\mathrm{L}^*_{\mathbf{a}_{i+1}^*}$*. On a l'estimation*

$$\log(\mathbf{a}_{i+1}^*) + \log(\|\mathbf{a}_i^* \wedge \mathbf{u}\|) = -\mathrm{L}_3^*(m_i^*) + \mathcal{O}(1). \tag{1.7.2}$$

De manière duale, si on note $m_i = \log(\|\mathbf{a}_{i+1}\|) - \log|\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{u}|$ *l'abscisse du point d'intersection des graphes de* $\mathrm{L}_{\mathbf{a}_i}$ *et* $\mathrm{L}_{\mathbf{a}_{i+1}}$*, alors on a l'estimation*

$$\log(\|\mathbf{a}_{i+1}\|) + \log|\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{u}| = -\mathrm{L}_3(m_i) + \mathcal{O}(1). \tag{1.7.3}$$

Preuve Au point m_i^*, on a d'après la Proposition 1.6.5 (qui utilise notamment le fait que la famille $(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1})$ est libre) :

$$\mathrm{L}_1^*(m_i^*) + \mathrm{L}_2^*(m_i^*) + \mathrm{L}_3^*(m_i^*) = -m_i^* + \mathcal{O}(1) \quad \text{et} \quad \mathrm{L}_1^*(m_i^*) = \log(\|\mathbf{a}_i^* \wedge \mathbf{u}\|) = \mathrm{L}_2^*(m_i^*).$$

On déduit de ces deux équations

$$\begin{aligned} 2\log(\|\mathbf{a}_i \wedge \mathbf{u}\|) + \mathrm{L}_3^*(m_i^*) &= \mathrm{L}_1^*(m_i^*) + \mathrm{L}_2^*(m_i^*) + \mathrm{L}_3^*(m_i^*) \\ &= -m_i^* + \mathcal{O}(1) \\ &= -\log(\|\mathbf{a}_{i+1}^*\|) + \log(\|\mathbf{a}_i^* \wedge \mathbf{u}\|) + \mathcal{O}(1), \end{aligned}$$

d'où on tire (1.7.2). De manière duale, au point m_i on a

$$\mathrm{L}_1(m_i) + \mathrm{L}_2(m_i) + \mathrm{L}_3(m_i) = m_i + \mathcal{O}(1) \quad \text{et} \quad \mathrm{L}_1(m_i) = \log(\|\mathbf{a}_{i+1}\|) = \mathrm{L}_2(m_i).$$

On déduit de ces deux équations

$$\begin{aligned} 2\log(\|\mathbf{a}_{i+1}\|) + \mathrm{L}_3(m_i) &= \mathrm{L}_1(m_i) + \mathrm{L}_2(m_i) + \mathrm{L}_3(m_i) \\ &= m_i + \mathcal{O}(1) \\ &= \log(\|\mathbf{a}_{i+1}\|) - \log|\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{u}| + \mathcal{O}(1), \end{aligned}$$

ce qui est équivalent à (1.7.3). □

1.8 Propriétés des points minimaux et quelques définitions supplémentaires

Ce paragraphe contient des éléments nouveaux : il s'agit de définitions et notations liées à la géométrie paramétrique des nombres (voir Partie 1.6). Rappelons que $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.8.1. Soit $\xi \in \mathbb{R}$. On pose $\mathbf{u} = (1, \xi, \dots, \xi^n)$. On dit qu'un n-système $\mathbf{P}$ sur $[q_0, +\infty[$ (resp. un n-système dual $\mathbf{P}$ sur $[q_0, +\infty[$) *représente* ξ, ou est un *représentant de* ξ, si $\|\mathbf{L}_\mathbf{u} - \mathbf{P}\|_\infty$ (resp. $\|\mathbf{L}^*_\mathbf{u} - \mathbf{P}\|_\infty$) est bornée sur $[q_0, +\infty[$.
Le Théorème 1.6.1 de Roy assure qu'il existe toujours un n-système représentant ξ.

Remarque 1.8.2. Si $\mathbf{P} = (\mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_n)$ est un n-système et qu'on note $\mathrm{P}^* = (-\mathrm{P}_n, \dots, -\mathrm{P}_1)$ le n-système dual correspondant, alors $\mathbf{P}$ représente ξ si et seulement si $\mathbf{P}^*$ représente ξ.

Remarque 1.8.3. Si $\mathbf{P} = (\mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_n)$ est un n-système qui représente ξ, et qu'on note $\underline{\psi}_i, \overline{\psi}_i$ les exposants paramétriques associés à ξ, alors on a immédiatement pour $i = 1, \dots, n$:

$$\liminf_{q\to+\infty} \frac{\mathrm{P}_i(q)}{q} = \underline{\psi}_i \quad \text{et} \quad \limsup_{q\to+\infty} \frac{\mathrm{P}_i(q)}{q} = \overline{\psi}_i.$$

De manière un peu informelle, les exposants paramétriques associés à $\mathbf{P}$ sont les mêmes que ceux associés à ξ. De même, si $\mathbf{P}^* = (\mathrm{P}^*_1, \dots, \mathrm{P}^*_n)$ est un n-système dual qui représente ξ, alors on a pour $i = 1, \dots, n$:

$$\liminf_{q\to+\infty} \frac{\mathrm{P}^*_i(q)}{q} = \underline{\psi}^*_i \quad \text{et} \quad \limsup_{q\to+\infty} \frac{\mathrm{P}^*_i(q)}{q} = \overline{\psi}^*_i.$$

On fixe un réel ξ qui n'est pas algébrique de degré $\leq n$ et on note $\mathbf{u} = (1, \xi, \dots, \xi^n)$. On note $(\mathbf{a}_i)_i$ la suite des points minimaux duaux associés à la famille $\left(\mathcal{C}^*_\mathbf{u}(e^q)\right)_{q\geq 0}$. Les notations suivantes permettent de manipuler plus facilement des quantités liées aux trajectoires de points de $\mathbb{Z}^n$.

Définition 1.8.4. Pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ non nuls tels que $\|\mathbf{x}\| < \|\mathbf{y}\|$ et $\|\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}\| > \|\mathbf{y} \wedge \mathbf{u}\|$ on pose

$$\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\log(\|\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}\|)}{\log(\|\mathbf{y}\|) - \log(\|\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}\|)}. \tag{1.8.1}$$

Pour $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$ non nul on pose

$$\alpha(\mathbf{x}) = \frac{\log(\|\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}\|)}{\log(\|\mathbf{x}\|) - \log(\|\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}\|)}.$$

La situation est illustrée à la figure ci-dessous. Géométriquement $\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est le coefficient directeur de la droite passant par l'origine et par le point d'intersection des trajectoires de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$. La quantité $\alpha(\mathbf{x})$ est le coefficient directeur de la droite passant par l'origine et par le point de changement de pente de la trajectoire de $\mathbf{x}$: en notant $q^*_{\mathbf{x}}$ l'abscisse de ce point, on a

$$\alpha(\mathbf{x}) = \frac{\mathrm{L}^*_{\mathbf{x}}(q^*_{\mathbf{x}})}{q^*_{\mathbf{x}}}.$$

Remarque 1.8.5. On pourrait définir des quantités analogues pour la suite des points minimaux associés à la famille $\left(\mathcal{C}_{\mathbf{u}}(e^q)\right)_{q \geq 0}$ mais nous n'en avons pas l'utilité.

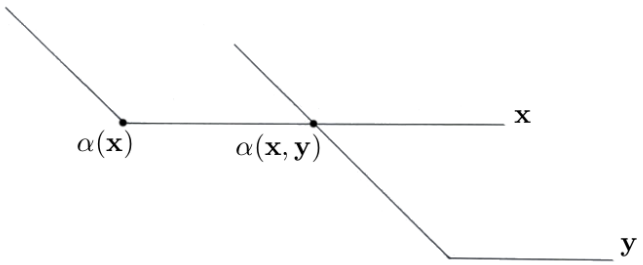

FIGURE 1.5 – trajectoires des points $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$

La proposition suivante explique l'intérêt des notations précédentes.

Proposition 1.8.6. *Si on note q^*_i l'abscisse où $\mathrm{L}^*_{\mathbf{a}_i}$ change de pente et m^*_i l'abscisse du point d'intersection des trajectoires de $\mathbf{a}_i$ et $\mathbf{a}_{i+1}$ on a*

$$\underline{\psi}^*_1(\xi) = \liminf_{i \to +\infty} \frac{\mathrm{L}^*_1(q^*_i)}{q^*_i} \quad \textit{et} \quad \overline{\psi}^*_1(\xi) = \limsup_{i \to +\infty} \frac{\mathrm{L}^*_1(m^*_i)}{m^*_i}.$$

Avec les notations introduites précédemment cela se réécrit

$$\underline{\psi}^*_1(\xi) = \liminf_{i \to +\infty} \alpha(\mathbf{a}_i) \quad \textit{et} \quad \overline{\psi}^*_1(\xi) = \limsup_{i \to +\infty} \alpha(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1}).$$

Remarque 1.8.7. On a bien sûr une propriété équivalente pour la suite $(\mathbf{b}_i)_i$ des points minimaux associés à la famille $\left(\mathcal{C}_{\mathbf{u}}(e^q)\right)_{q \geq 0}$. Si on note q_i l'abscisse où $\mathrm{L}_{\mathbf{b}_i}$ change de pente et m_i l'abscisse du point d'intersection des trajectoires de $\mathbf{b}_i$ et $\mathbf{b}_{i+1}$ on a

$$\underline{\psi}_1(\xi) = \liminf_{i \to +\infty} \frac{\mathrm{L}_1(q_i)}{q_i} \quad \text{et} \quad \overline{\psi}_1(\xi) = \limsup_{i \to +\infty} \frac{\mathrm{L}_1(m_i)}{m_i}.$$

Preuve Par (1.7.1) on a pour tout $q > 0$

$$\mathrm{L}_1^*(q) = \inf_{i\geq 1} \mathrm{L}_{\mathbf{a}_i}^*(q).$$

D'après la formule précédente, sur le segment $I_i = [q_i^*, q_{i+1}^*]$ on a

$$\mathrm{L}_1^*(q) = \min\left(\mathrm{L}_{\mathbf{a}_i}^*(q), \mathrm{L}_{\mathbf{a}_{i+1}}^*(q)\right)$$

et comme L_1^* est de pente 0 ou -1, $\psi_1^*(q) = \frac{\mathrm{L}_1^*(q)}{q}$ atteint son minium sur I_i en $q = q_i^*$ ou en $q = q_{i+1}^*$. Or on a $\psi_1^*(q_i^*) = \frac{\mathrm{L}_{\mathbf{a}_i}^*(q_i^*)}{q_i^*} = \alpha(\mathbf{a}_i)$. Donc

$$\underline{\psi}_1^* = \liminf_{q\to+\infty} \frac{\mathrm{L}_1^*(q_i^*)}{q_i^*} = \liminf_{i\to+\infty} \alpha(\mathbf{a}_i).$$

De même, on remarque que $\psi_1^*(q)$ atteint son maximum sur I_i en $q = m_i^*$, et en ce point on a $\psi_1^*(m_i^*) = \alpha(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1})$, donc

$$\overline{\psi}_1^* = \limsup_{q\to+\infty} \frac{\mathrm{L}_1^*(m_i^*)}{m_i^*} = \limsup_{i\to+\infty} \alpha(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1}).$$

Le schéma de preuve est identique si on travaille avec la suite $(\mathbf{b}_i)_i$ de la Remarque 1.8.7. □

On suppose désormais que $n = 3$.

Définition 1.8.8. Pour tout $\alpha > \underline{\psi}_1^*$, on pose

$$\mathcal{A}_\alpha^* = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\} \mid \alpha(\mathbf{x}) \leq \alpha\}.$$

Géométriquement, $\mathcal{A}_\alpha^*$ est l'ensemble des points $\mathbf{x}$ dont la trajectoire passe en-dessous de la droite passant par l'origine et de pente α, et on a l'équivalence

$$\text{Il existe } q > 0 \text{ tel que } \frac{\mathrm{L}_{\mathbf{x}}^*(q)}{q} \leq \alpha \Leftrightarrow \mathbf{x} \in \mathcal{A}_\alpha^*. \tag{1.8.2}$$

Preuve Le sens réciproque de (1.8.2) est évident en prenant $q = q_{\mathbf{x}}^*$, le point de changement de pente de $\mathrm{L}_{\mathbf{x}}^*$, par définition de $\mathcal{A}_\alpha^*$ et $\alpha(\mathbf{x})$.
Montrons le sens direct. Soit $q' > 0$ tel que $\mathrm{L}_{\mathbf{x}}^*(q')/q' \leq \alpha$. On distingue deux cas.
Dans un premier cas supposons $q' \geq q_{\mathbf{x}}^*$. Comme $\mathrm{L}_{\mathbf{x}}^*$ est constante et négative sur $[q_{\mathbf{x}}^*, +\infty[$, la fonction $q \mapsto \frac{\mathrm{L}_{\mathbf{x}}^*(q)}{q}$ est croissante sur cet intervalle, et on a immédiatement l'estimation

$$\alpha(\mathbf{x}) = \frac{\mathrm{L}_{\mathbf{x}}^*(q_{\mathbf{x}}^*)}{q_{\mathbf{x}}^*} \leq \frac{\mathrm{L}_{\mathbf{x}}^*(q')}{q'} \leq \alpha,$$

donc $\mathbf{x} \in \mathcal{A}_\alpha^*$.
Dans un second cas supposons $q' \leq q_{\mathbf{x}}$. Comme $\mathrm{L}_{\mathbf{x}}^*$ est décroissante de pente -1 sur $]0, q_{\mathbf{x}}^*]$, on a $\mathrm{L}_{\mathbf{x}}^*(q_{\mathbf{x}}^*) = \mathrm{L}_{\mathbf{x}}^*(q') - (q_{\mathbf{x}}^* - q')$. Si on a $\mathrm{L}_{\mathbf{x}}^*(q')/q' \leq -1$, *i.e.* $\mathrm{L}_{\mathbf{x}}^*(q') \leq -q'$, alors cela

conduit immédiatement à $\mathrm{L}^*_{\mathbf{x}}(q^*_{\mathbf{x}}) \leq -q^*_{\mathbf{x}}$, et donc $\alpha(\mathbf{x}) \leq -1 \leq \underline{\psi}^*_1 \leq \alpha$. Si au contraire $\mathrm{L}^*_{\mathbf{x}}(q')/q' > -1$, alors on a

$$\alpha(\mathbf{x}) = \frac{\mathrm{L}^*_{\mathbf{x}}(q^*_{\mathbf{x}})}{q^*_{\mathbf{x}}} = \frac{\mathrm{L}^*_{\mathbf{x}}(q')}{q'} - \frac{q^*_{\mathbf{x}} - q'}{q^*_{\mathbf{x}}}\Big(\frac{\mathrm{L}^*_{\mathbf{x}}(q')}{q'} + 1\Big) \leq \frac{\mathrm{L}^*_{\mathbf{x}}(q')}{q'} \leq \alpha,$$

et dans les deux cas on a montré $\alpha(\mathbf{x}) \leq \alpha$, donc $\mathbf{x} \in \mathcal{A}^*_\alpha$. □

On définit les fonctions $\widetilde{\varepsilon}$ et $\widetilde{\alpha}$ (réciproques l'une de l'autre) par

$$\widetilde{\varepsilon}(\alpha) = \frac{1+2\alpha}{1+\alpha} \quad \text{et} \quad \widetilde{\alpha}(\varepsilon) = -\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}. \tag{1.8.3}$$

Un calcul immédiat montre que pour tout $\alpha > \underline{\psi}^*_1$, on a

$$\mathcal{A}^*_\alpha = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\} \mid \|\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}\| \leq \|\mathbf{x}\|^{-(1-\widetilde{\varepsilon}(\alpha))}\}. \tag{1.8.4}$$

Le calcul qui mène à (1.8.4) permet de montrer la proposition suivante.

Proposition 1.8.9. *Soient $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^3$ non nuls tels que $\|\mathbf{x}\| < \|\mathbf{y}\|$ et $\|\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}\| > \|\mathbf{y} \wedge \mathbf{u}\|$. Alors on a l'équivalence suivante :*

$$\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \alpha \Leftrightarrow \|\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}\| \leq \|\mathbf{y}\|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} = \|\mathbf{y}\|^{-1+\widetilde{\varepsilon}(\alpha)}. \tag{1.8.5}$$

De même, on a

$$\alpha(\mathbf{x}) \leq \alpha \Leftrightarrow \|\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}\| \leq \|\mathbf{x}\|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} = \|\mathbf{x}\|^{-1+\widetilde{\varepsilon}(\alpha)}. \tag{1.8.6}$$

Remarque 1.8.10. Comme $\|\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}\| \asymp M(\mathbf{x})$ (la quantité $M(\mathbf{x})$ est définie dans la Partie 1.5.3) et que les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes, pour tout $\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_2$ on a (à un nombre fini de termes près)

$$\mathcal{A}^*_{\widetilde{\alpha}(\varepsilon_1)} \subset \mathcal{A}_\varepsilon \subset \mathcal{A}^*_{\widetilde{\alpha}(\varepsilon_2)},$$

où $\mathcal{A}_\varepsilon$ défini par (1.5.4) est l'ensemble considéré par Fischler dans [23].

La proposition suivante permet d'utiliser les résultats principaux de Fischler [23] en permettant d'identifier – sous certaines conditions – la notion de point minimal au sens de Davenport et Schmidt (c'est celle considérée par Fischler et présentée dans la Partie 1.5.3), et celle au sens de la Partie 1.7 (qui est la définition que nous utilisons dans cette thèse, voir Définition 1.7.4).

Proposition 1.8.11. *Soit ξ un nombre réel qui n'est pas algébrique de degré ≤ 2 ; on note $\mathbf{u} = (1, \xi, \xi^2)$. On suppose que $\lambda_2(\xi) = 1$ (ce qui équivaut à $\underline{\psi}^*_1 = -\frac{1}{2}$). Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < 2 - \frac{1}{\widetilde{\lambda}_2}$.*

(a) On note $(\mathbf{u}'_i)_{i\geq 1}$ la suite des points minimaux au sens de Davenport et Schmidt qui sont dans $\mathcal{A}_\varepsilon$. Alors pour tout i assez grand, $\mathbf{u}'_i$ est un point minimal relatif à la famille $(\mathcal{C}^*_{\mathbf{u}}(e^q))_q$.

(b) On note $(\mathbf{u}_i)_{i\geq 1}$ la suite des points minimaux relatifs à la famille $(\mathcal{C}^*_{\mathbf{u}}(e^q))_q$ qui sont dans $\mathcal{A}^*_{\widetilde{\alpha}(\varepsilon)}$. Alors pour tout i assez grand, $\mathbf{u}_i$ est un point minimal au sens de Davenport et Schmidt.

Remarque 1.8.12. Rappelons qu'avec les notations de Fischler (voir Partie 1.5.3) on a $\frac{1}{\widetilde{\lambda_2}(\xi)} = \beta_1(\xi)$.

Preuve Soit ε' tel que $\varepsilon < \varepsilon' < 2 - \frac{1}{\widetilde{\lambda}_2}$. D'après la Remarque 1.8.10, pour i assez grand on a $\mathbf{u}'_i \in \mathcal{A}^*_{\widetilde{\alpha}(\varepsilon')}$. De plus, on a

$$\widetilde{\alpha}(\varepsilon') < \widetilde{\alpha}\Big(2 - \frac{1}{\widetilde{\lambda}_2}\Big) = \widetilde{\alpha}\Big(3 + \frac{1}{\overline{\psi}^*_1}\Big) = -\frac{1 + 2\overline{\psi}^*_1}{1 + \overline{\psi}^*_1}.$$

D'après la Proposition 7.5.1 du Chapitre 7 (qui est un cas particulier de la Proposition 7.5.3), on en déduit que pour i assez grand $\mathbf{u}'_i$ est proportionnel à un point minimal relatif à la famille $(\mathcal{C}^*_{\mathbf{u}}(e^q))_q$. Comme ces vecteurs sont tous deux des points primitifs de $\mathbb{Z}^3$ de première coordonnée > 0 (voir Remarque 1.7.7), on en déduit qu'ils sont égaux, ce qui montre le premier point de cette proposition.
De même, d'après la Remarque 1.8.10, pour i assez grand on a $\mathbf{u}_i \in \mathcal{A}_{\varepsilon'}$. D'après la Proposition 3.6 de [23], si i est assez grand alors $\mathbf{u}_i$ est colinéaire à un point minimal au sens de Davenport et Schmidt et on conclut encore qu'ils sont égaux. Ceci achève la démonstration de la proposition. □

On note

$$\varepsilon'_1 = (2 - \beta_1(\xi))(2 - \beta_0(\xi))(1 + \beta_0(\xi)).$$

Puisque $\beta_1(\xi) \leq \beta_0(\xi)$ et que $\beta_0(\xi) \geq 1$, la constante ε_1 du Théorème 1.5.2 vérifie $\varepsilon_1 \geq \varepsilon'_1$ (c'est le même argument que pour la Remarque 1.5.3). Par ailleurs, on a $\beta_0(\xi) \geq \gamma$ (où γ désigne le nombre d'or), qui implique $(2 - \beta_0(\xi))(1 + \beta_0(\xi)) \leq 1$. On en déduit qu'on a toujours

$$\varepsilon'_1 \leq 2 - \beta_1(\xi) = 2 - \frac{1}{\widetilde{\lambda}_2(\xi)}.$$

La Proposition 1.8.11 permet de donner immédiatement une version du Théorème 1.5.3 adaptée à notre contexte (*i.e.* avec la suite des points minimaux au sens de la Partie 1.7).

Théorème 1.8.1. *Soit ξ un réel qui n'est pas algébrique de degré ≤ 2 et tel que $\beta_0(\xi) < 2$. On note $\mathbf{u} = (1, \xi, \xi^2)$. Soit ε tel que $0 < \varepsilon < \varepsilon'_1$. On note $(\mathbf{u}_i)_i$ la suite des points minimaux de $\mathcal{A}^*_{\widetilde{\alpha}(\varepsilon)}$ associée à $\big(\mathcal{C}^*_{\mathbf{u}}(e^q)\big)_{q\geq 0}$ et ordonnés par norme croissante. Alors*

$$\|\mathbf{u}_i \wedge \mathbf{u}\| = \|\mathbf{u}_i\|^{-1+o(1)}, \tag{1.8.7}$$

et il existe une fonction $\psi \in \mathcal{F}$ telle que

$$\mathbf{u}_{i+1} \propto \mathbf{u}_i \mathbf{u}^{-1}_{\psi(i)} \mathbf{u}_i \quad \textit{pour tout } i \textit{ assez grand.} \tag{1.8.8}$$

De plus on a l'égalité

$$\beta_0(\xi) = \delta(\psi).$$

Remarque 1.8.13. Comme signalé dans la Remarque 1.5.6, la fonction ψ du Théorème 1.8.1 n'est pas unique (elle est unique à équivalence près). Comme nous nous intéressons uniquement aux comportements asymptotiques et que deux fonctions ψ et ψ' ne diffèrent "grosso modo" que par leurs premières valeurs et un décalage de la variable près (notons par exemple que si ψ et ψ' sont équivalentes on a $\delta(\psi) = \delta(\psi')$), on parlera parfois par abus de langage de "la" fonction ψ fournie par le Théorème 1.8.1.

Remarque 1.8.14. Il est très probable que la preuve de Fischler du Théorème 4.1 de [23] fonctionne avec les quantités de notre contexte (notamment les points minimaux relatifs à la famille $(\mathcal{C}^*_{\mathbf{u}}(e^q))_q$) ; cela montrerait que le Théorème 1.8.1 reste vrai en remplaçant la constante ε'_1 par la constante ε_1 du Théorème 1.5.2. Toutefois nous n'avons pas besoin de cette version plus forte.

1.9 Propriétés des exposants paramétriques

1.9.1 Propriétés générales

Nous rappelons ici quelques propriétés connues et des relations qu'entretiennent les exposants paramétriques étudiés dans cette thèse, dans le cadre d'un vecteur $\mathbf{u} = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ dont les coordonnées sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$. Les énoncés sont formulés avec les exposants paramétriques duaux $\underline{\psi}^*_j, \overline{\psi}^*_j$ et se traduisent immédiatement en termes d'exposants $\underline{\psi}_j, \overline{\psi}_j$ à l'aide de la correspondance (1.6.5). La plupart des relations sont énoncées sous une forme équivalente dans [66] ou [67]. Comme signalé dans la Partie 1.6, plusieurs choix de paramétrisations de la famille de corps convexes considérée sont possibles, et nous avons choisi la même que [56] (voir Définition 1.6.1) :

$$\mathcal{C}_{\mathbf{u}}(e^q) \ := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ ; \ \|\mathbf{x}\| \leq 1, |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| \leq e^{-q}\}$$

et

$$\mathcal{C}^*_{\mathbf{u}}(e^q) \ := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ ; \ \|\mathbf{x}\| \leq e^q, \|\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}\| \leq 1\}.$$

On a toutefois une correspondance simple entre les exposants de ces différents articles, que nous donnons ci-après à titre informatif (nous ne nous en servirons pas vraiment dans la suite de cette thèse).
On fixe $n \geq 2$.

Correspondance avec les exposants de Schmidt et Summerer

(I) Fixons $\mathbf{u} = (1, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$. Dans [66], Schmidt et Summerer considèrent la famille de corps convexes $(\mathcal{C}(Q))_{Q \geq 1}$ où pour tout réel $Q \geq 1$, le corps convexe $\mathcal{C}(Q)$ est l'ensemble des vecteurs $\mathbf{x} = (x, y_1, \dots, y_{n-1})$ tels que $|x| \leq Q$ et $|y_i| \leq Q^{-\frac{1}{n-1}}$ pour $i \geq 1$. Ils étudient alors les minima successifs associés à $\mathcal{C}(Q)$ et relatifs au réseau $\Lambda_{\mathbf{u}}$ des vecteurs $\mathbf{p}$ de la forme $(x, \xi_1 x - y_1, \dots, \xi_{n-1} x - y_{n-1})$ avec $(x, y_1, \dots, y_{n-1})$. Ces minima successifs sont les mêmes que ceux associés au corps convexe

$$\mathcal{C}'(Q) = \{\mathbf{x} = (x, y_1, \dots, y_{n-1}) \ \Big| \ |x| \leq Q \text{ et } |x\xi_i - y_i| \leq Q^{-\frac{1}{n-1}} \text{ pour } i \geq 1\}$$

et relatifs au réseau $\mathbb{Z}^n$ (rappelons que si on note $\lambda_i(K,\Lambda)$ le i-ème minimum associé au corps convexe K et relatif au réseau Λ, on a pour tout endomorphisme f inversible de $\mathbb{R}^n$ la formule $\lambda_i(K,\Lambda) = \lambda_i(f(K), f(\Lambda))$). Avec ces notations, on a alors

$$\begin{aligned}\mathcal{C}'(e^q) &\asymp \{\mathbf{x} \;\Big|\; \|\mathbf{x}\| \leq e^q \text{ et } \|\mathbf{x}\wedge\mathbf{u}\| \leq e^{-\frac{1}{n-1}}\}.\\ &\asymp e^{-\frac{1}{n-1}q}\mathcal{C}^*_{\mathbf{u}}(e^{\frac{n}{n-1}q}).\end{aligned}$$

Si on note $\underline{\vartheta}_i, \overline{\vartheta}_i$ les exposants paramétriques associés à la famille $(\mathcal{C}'(e^q))_q$ (qui sont noté $\underline{\psi}_i$, $\overline{\psi}_i$ dans [66]), alors on a la correspondance

$$\underline{\vartheta}_i = \frac{n}{n-1}\underline{\psi}^*_i + \frac{1}{n-1} \quad \text{et} \quad \overline{\vartheta}_i = \frac{n}{n-1}\overline{\psi}^*_i + \frac{1}{n-1}. \tag{1.9.1}$$

(II) Dans [67], Schmidt et Summerer considèrent la famille de corps convexes $(\mathcal{C}(e^{(n-1)q}))_{q\geq 0}$ et étudient les minima successifs relatifs au réseau $\Lambda_{\mathbf{u}}$. Ils notent $\overline{\varphi}_i, \underline{\varphi}_i$ les exposants paramétriques associés et font remarquer qu'on a les correspondances

$$\underline{\varphi}_i = (n-1)\underline{\vartheta}_i \quad \text{et} \quad \overline{\varphi}_i = (n-1)\overline{\vartheta}_i.$$

Avec les remarques précédentes, cela revient à considérer les minima successifs de la famille de corps convexes $(e^{-q}\mathcal{C}^*_{\mathbf{u}}(e^{nq}))_q$ relatifs au réseau $\mathbb{Z}^n$, et on a la correspondance

$$\underline{\varphi}_i = n\underline{\psi}^*_i + 1 \quad \text{et} \quad \overline{\varphi}_i = n\overline{\psi}^*_i + 1. \tag{1.9.2}$$

Relations générales entre les exposants

Les deux estimations qui suivent correspondent aux équations (1.10) et (1.11) de [67]. Pour $0 \leq j < n$ on a

$$j\underline{\psi}^*_1 + (n-j)\overline{\psi}^*_{j+1} \leq -1 \quad \text{et} \quad j\overline{\psi}^*_1 + (n-j)\underline{\psi}^*_{j+1} \leq -1, \tag{1.9.3}$$

ainsi que

$$j\underline{\psi}^*_j + (n-j)\overline{\psi}^*_n \geq -1 \quad \text{et} \quad j\overline{\psi}^*_j + (n-j)\underline{\psi}^*_n \geq -1. \tag{1.9.4}$$

L'équation (1.14) de [67] (qui se prouve à l'aide des estimations précédentes et en utilisant le fait que $\overline{\psi}^*_n \leq 0$) assure que pour $1 \leq j \leq n$ on a

$$\underline{\psi}^*_j \geq -\frac{1}{j} \quad \text{pour } 1 \leq j \leq n-1. \tag{1.9.5}$$

De plus, si les coordonnées de $\mathbf{u}$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$, l'équation (1.15) de [67] s'écrit

$$\underline{\psi}^*_{j+1} \leq \overline{\psi}^*_j \quad \text{pour } 1 \leq j \leq n-1, \tag{1.9.6}$$

ce qui permet de démontrer l'équation (1.16) de [67] :

$$\overline{\psi}^*_j \geq \frac{1}{j+1} \quad \text{pour } 1 \leq j \leq n-1. \tag{1.9.7}$$

Spectre des exposants

Rappelons que la topologie du spectre joint des exposants paramétriques a été étudiée par Roy dans [57] (voir aussi [24], [69]). Il donne également une description complète du spectre dans le cas $n = 3$. Notons que dans ce cas, Laurent [33] avait déjà donné une description complète du spectre joint de $(\underline{\psi}_1, \overline{\psi}_1, \underline{\psi}_3, \overline{\psi}_3)$.

1.9.2 Cas où $\mathbf{u} = (1, \xi, \xi^2)$

On suppose $\mathbf{u}$ de la forme $\mathbf{u} = (1, \xi, \xi^2)$ et on considère les exposants $\underline{\psi}_i, \overline{\psi}_i, \underline{\psi}_i^*, \overline{\psi}_i^*$ $(i = 1, 2, 3)$ associés.
La proposition suivante est la réécriture de (0.6.1) dans le cas $n = 3$. Elle établit un dictionnaire entre les exposants diophantiens classiques $\widehat{\lambda}_2(\xi), \lambda_2(\xi), \widehat{\omega}_2(\xi), \omega_2(\xi)$ et les exposants diophantiens provenant de la géométrie paramétrique des nombres $\underline{\psi}_1, \overline{\psi}_1, \underline{\psi}_3, \overline{\psi}_3$ pour le vecteur $\mathbf{u} = (1, \xi, \xi^2)$. Cf [66] et [55] (notons que $\lambda_2(\xi), \widehat{\lambda}_2(\xi), \omega_2(\xi), \widehat{\omega}_2(\xi)$ sont respectivement notés $\lambda(\mathbf{u}), \widehat{\lambda}(\mathbf{u}), \tau(\mathbf{u}), \widehat{\tau}(\mathbf{u})$ dans [55]).

Proposition 1.9.1. *On a*

$$\left(\underline{\psi}_1, \overline{\psi}_1, \underline{\psi}_3, \overline{\psi}_3\right) = \left(\frac{1}{\omega_2(\xi)+1}, \frac{1}{\widehat{\omega}_2(\xi)+1}, \frac{\widehat{\lambda}_2(\xi)}{\widehat{\lambda}_2(\xi)+1}, \frac{\lambda_2(\xi)}{\lambda_2(\xi)+1}\right). \tag{1.9.8}$$

En particulier, l'équation (0.3.1) de Jarník se réécrit

$$2\underline{\psi}_3(\xi) + 2\overline{\psi}_1(\xi) - 3\underline{\psi}_3(\xi)\overline{\psi}_1(\xi) - 1 = 0. \tag{1.9.9}$$

Remarquons que $\underline{\psi}_2$ et $\overline{\psi}_2$ ne s'expriment pas en fonction des exposants diophantiens classiques.
Par ailleurs, on a les encadrements suivants (voir équation (0.3.2) de l'introduction) :

$$-0.381\cdots = -\frac{1}{\gamma^2} \leq \overline{\psi}_1^* \quad \text{et} \quad \underline{\psi}_3^* \leq -\frac{1}{1+\gamma^2} = -0.276\ldots \tag{1.9.10}$$

pour tout réel ξ qui n'est pas algébrique de degré ≤ 2 (rappelons qu'on note $\gamma = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ le nombre d'or).

Dans cette thèse, on fera très souvent l'hypothèse $\widehat{\lambda}_2 > \frac{1}{2}$, *i.e.* $\overline{\psi}_1^* < -\frac{1}{3}$, ce qui implique entre autres que ξ est transcendant (voir le Théorème 0.2 de l'introduction). La Proposition 0.2.1 implique alors que $\underline{\psi}_1^* \geq -\frac{1}{2}$. Dans la proposition suivante, on récapitule les majorations qu'on a dans ce cas particulier.

Proposition 1.9.2. *On suppose $\overline{\psi}_1^* < -\frac{1}{3}$. Alors on a les encadrements suivants*

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \leq \underline{\psi}_1^* \leq -\frac{1}{3} \quad et \quad -\frac{1}{\gamma^2} \leq \overline{\psi}_1^* \leq -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} \leq \underline{\psi}_2^* \leq -\frac{1}{3} \quad et \quad -\frac{1}{3} \leq \overline{\psi}_2^* \leq 0 \\ -\frac{1}{3} \leq \underline{\psi}_3^* \leq -\frac{1}{1+\gamma^2} \quad et \quad -\frac{1}{3} \leq \overline{\psi}_3^* \leq 0. \end{cases}$$

De plus, on a $\underline{\psi}_1^* \leq \underline{\psi}_2^* \leq \underline{\psi}_3^*$ et $\overline{\psi}_1^* \leq \overline{\psi}_2^* \leq \overline{\psi}_3^*$, ainsi que

$$\underline{\psi}_2^* \leq \overline{\psi}_1^* \quad et \quad \underline{\psi}_3^* \leq \overline{\psi}_2^*.$$

La proposition suivante reprend le Corollaire 9.2 de [66] avec les exposants $\underline{\psi}_i^*, \overline{\psi}_i^*$.

Proposition 1.9.3. *Si $\underline{\psi}_1^* = \overline{\psi}_1^*$ ou si $\underline{\psi}_2^* = \overline{\psi}_2^*$ alors*

$$\underline{\psi}_i^* = \overline{\psi}_i^* = -\frac{1}{3} \quad \textit{pour } i = 1, 2, 3. \tag{1.9.11}$$

Si $\underline{\psi}_3^* = \overline{\psi}_3^*$ alors ou bien on a (1.9.11)*, ou bien*

$$\underline{\psi}_1^* = -1, \quad \overline{\psi}_1^* = \underline{\psi}_2^* = -\frac{1}{2}, \quad \overline{\psi}_2^* = \underline{\psi}_3^* = \overline{\psi}_3^* = 0. \tag{1.9.12}$$

En particulier, si $\underline{\psi}_1^* < -\frac{1}{3}$, on a $\overline{\psi}_1^* \geq -\frac{1}{2}$ et ni (1.9.11) ni (1.9.12) ne peuvent être vérifiées, et donc

$$\underline{\psi}_1^* < \overline{\psi}_1^*, \quad \underline{\psi}_2^* < \overline{\psi}_2^*, \quad \underline{\psi}_3^* < \overline{\psi}_3^*. \tag{1.9.13}$$

Enfin, signalons que le Corollaire I (démontré dans le Chapitre 6 de manière indépendante des autres chapitres) permet de montrer que pour tout réel ξ tel que $\overline{\psi}_1^* < -\frac{1}{3}$, on a

$$\underline{\psi}_1^* < \underline{\psi}_2^* \quad \text{et} \quad \overline{\psi}_2^* < \overline{\psi}_3^*. \tag{1.9.14}$$

1.9.3 Outils pratiques de calcul des exposants

Les résultats présentés dans cette partie apparaissent déjà sous une forme un peu différente dans les travaux de Schmidt et Summerer [66] (la notion de 3-système n'ayant pas encore été développée), à l'exception du Corollaire 1.9.12.
On fixe ξ un nombre réel qui n'est pas algébrique de degré ≤ 2, et $\mathbf{P} = (\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3)$ un 3-système sur $[q_0, +\infty[$ représentant ξ. On note $\mathbf{P}^* = (\mathrm{P}_1^*, \mathrm{P}_2^*, \mathrm{P}_3^*) = (-\mathrm{P}_3, -\mathrm{P}_2, -\mathrm{P}_1)$ le 3-système dual correspondant. Pour $i = 1, 2, 3$ on définit une fonction χ_i (resp. χ_i^*) en posant pour tout $q > q_0$

$$\chi_i(q) = \frac{\mathrm{P}_i(q)}{q} \quad \Big(\text{resp. } \chi_i^*(q) = \frac{\mathrm{P}_i^*(q)}{q}\Big).$$

Rappelons que puisque $\mathbf{P}$ représente ξ, on a $\chi_i(q) = \psi_i(q) + \mathcal{O}\big(\frac{1}{q}\big)$ pour $i = 1, 2, 3$, et en particulier

$$\liminf_{q \to +\infty} \chi_i(q) = \underline{\psi}_i \quad \text{et} \quad \limsup_{q \to +\infty} \chi_i(q) = \overline{\psi}_i.$$

De manière duale, pour $i = 1, 2, 3$ on a

$$\liminf_{q \to +\infty} \chi_i^*(q) = \underline{\psi}_i^* \quad \text{et} \quad \limsup_{q \to +\infty} \chi_i^*(q) = \overline{\psi}_i^*.$$

Nous évoquons ici quelques propriétés générales qui permettent de calculer plus facilement les exposants d'un 3-système représentant un réel ξ. Nous déterminons notamment les points où les fonctions χ_i atteignent leur minimum ou leur maximum sur un intervalle donné, en fonction de l'allure de leur graphe ou du graphe conjoint de $\mathbf{P}$ sur cet intervalle. La propriété suivante se déduit de l'estimation (4.9) de [66] :

Proposition 1.9.4. *Les fonctions* P_1 *et* $q \mapsto q - \mathrm{P}_3(q)$ *tendent vers* $+\infty$ *quand* q *tend vers l'infini. De manière duale, les fonctions* P_3^* *et* $q \mapsto -q - \mathrm{P}_1^*(q)$ *tendent vers* $-\infty$ *quand* q *tend vers l'infini. En particulier, aucune des composantes de* $\mathbf{P}$ *(resp.* $\mathbf{P}^*$*) ne stationne jusqu'à l'infini, et pour tout* q *assez grand on a*

$$0 < \chi_i(q) < 1 \quad et \quad -1 < \chi_i^*(q) < 0 \quad (pour\ i = 1, 2, 3). \tag{1.9.15}$$

Remarque 1.9.5. L'encadrement (1.9.15) est encore vrai en remplaçant χ_i (resp. χ_i^*) par ψ_i (resp. ψ_i^*).

Cette proposition implique le résultat suivant, déjà remarqué par Schmidt et Summerer pour les fonctions ψ_i à la place de χ_i (voir [66, Lemma 2.7]) :

Proposition 1.9.6. *Il existe* $X > q_0$ *tel que pour tout segment* $I \subset [X, +\infty[$*, si* P_i *est constante (resp. croissante de pente* 1*) sur* I*, alors* χ_i *est strictement décroissante (resp. strictement croissante) sur* I*.*
En particulier, si le graphe de P_i *a l'allure du dessin de gauche de la Figure 1.6 (avec* $a \geq X$*), alors* $\frac{\mathrm{P}_i(q)}{q}$ *atteint son minimum sur* $[a, b]$ *en* $q = x$*. Si le graphe de* P_i *a l'allure du dessin de droite de la Figure 1.6, alors* $\frac{\mathrm{P}_i(q)}{q}$ *atteint son maximum sur* $[a, b]$ *en* $q = x$*.*

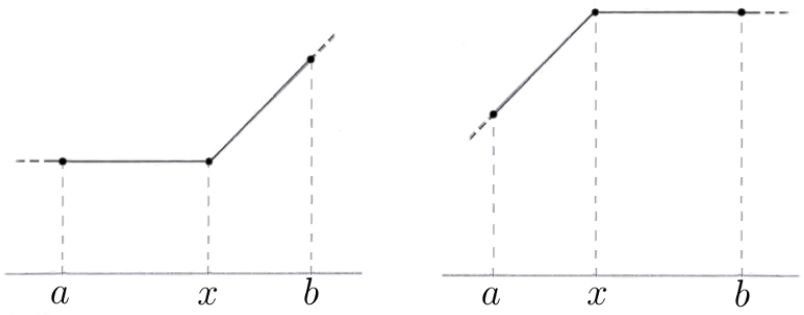

FIGURE 1.6 – Graphe d'une composante P_i

De manière duale, si P_i^* *est constante (resp. décroissante de pente* -1*) sur* I*, alors* χ_i^* *est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur* I*.*
En particulier, si le graphe de P_i^* *a l'allure du dessin de gauche de la Figure 1.7 (avec* $a \geq X$*), alors* $\frac{\mathrm{P}_i^*(q)}{q}$ *atteint son maximum sur* $[a, b]$ *en* $q = x$*. Si le graphe de* P_i^* *a l'allure du dessin de droite de la Figure 1.7, alors* $\frac{\mathrm{P}_i^*(q)}{q}$ *atteint son minimum sur* $[a, b]$ *en* $q = x$*.*

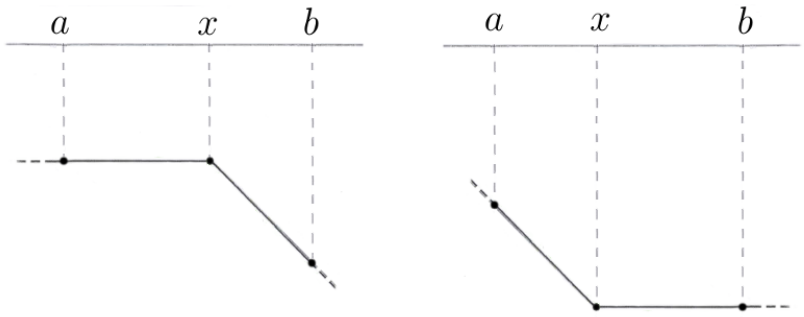

FIGURE 1.7 – Graphe d'une composante P_i^*

Preuve Les résultats duaux se déduisent immédiatement des premiers en utilisant les identités $\chi_i^* = -\chi_{4-i}$.
Par définition d'un 3-système, on ait $\mathrm{P}_i \geq 0$ pour tout i. Par la Proposition 1.9.4, il existe $X_1 > q_0$ tel que pour tout $q \geq X_1$ on a $\mathrm{P}_i(q) > 0$ (pour $i = 1, 2, 3$).
Si P_i est constante sur un intervalle I, il est immédiat que χ_i est strictement décroissante sur I.
On choisit $X \geq X_1$ tel que pour tout $q \geq X$ l'estimation (1.9.15) soit satisfaite par χ_i. Soit $I \subset [X, +\infty[$ tel que P_i soit croissante de pente 1 sur I, et soit $q < q'$ dans cette intervalle. Comme P_i est croissante de pente 1 sur I, on a $\mathrm{P}_i(q') = \mathrm{P}_i(q) + q' - q$. Cela implique l'égalité

$$\chi_i(q') = \chi_i(q) + \frac{q' - q}{q'}(1 - \chi_i(q)),$$

et (1.9.15) implique directement $\chi_i(q') > \chi_i(q)$. □

Définition 1.9.7. Soit i, j, k tels que $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Soit $I \subset [q_0, +\infty[$ un intervalle sur lequel P_i est constante. Puisque par définition des 3-systèmes $\mathrm{P}_1(q)+\mathrm{P}_2(q)+\mathrm{P}_3(q) = q$ sur $[q_0, +\infty[$, on en déduit que $\frac{\mathrm{P}_k+\mathrm{P}_j}{2}$ est affine de pente $\frac{1}{2}$ sur I : son graphe coïncide avec celui d'une droite $\mathcal{D}$ de pente $\frac{1}{2}$ sur cette intervalle. Si $j < k$, alors le graphe de P_j est toujours situé en-dessous de la droite $\mathcal{D}$ tandis que celui de P_k est situé au-dessus. On dit que les composantes P_j et P_k *zigzaguent autour d'une droite de pente* $\frac{1}{2}$ *sur l'intervalle* I.
De la même manière, si P_i^* est constante sur I, alors $\frac{\mathrm{P}_k^*+\mathrm{P}_j^*}{2}$ est affine de pente $-\frac{1}{2}$ sur I : son graphe coïncide avec celui d'une droite $\mathcal{D}^*$ de pente $-\frac{1}{2}$ sur cette intervalle. On dit que les composantes P_j^* et P_k^* *zigzaguent autour d'une droite de pente* $-\frac{1}{2}$ *sur l'intervalle* I.

Remarque 1.9.8. Quand on étudiera des intervalles sur lequel les composantes P_j et P_k zigzaguent autour d'une droite de pente $\frac{1}{2}$, on sera essentiellement dans la situation où $(\mathrm{P}_j, \mathrm{P}_k) = (\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2)$ ou $(\mathrm{P}_j, \mathrm{P}_k) = (\mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3)$. D'autre part, la plupart du temps P_j et P_k coïncideront aux extrémités de l'intervalle $[a, b]$ considéré. La situation est alors illustrée aux Figures 1.8 et 1.9.

Remarque 1.9.9. Puisque $\mathbf{P}$ approche $\mathbf{L_u}$ à $\mathcal{O}(1)$ près, par abus de langage on dira parfois que les composantes de L_j et L_k zigzaguent autour d'une droite de pente $\frac{1}{2}$ lorsque c'est le cas des composantes P_j et P_k.

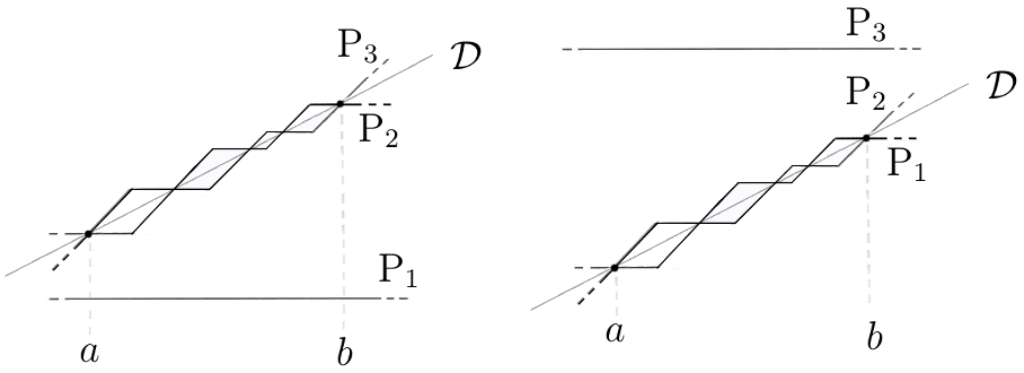

FIGURE 1.8 – "Zigzags" des composantes P_j et P_k autour de la droite $\mathcal{D}$

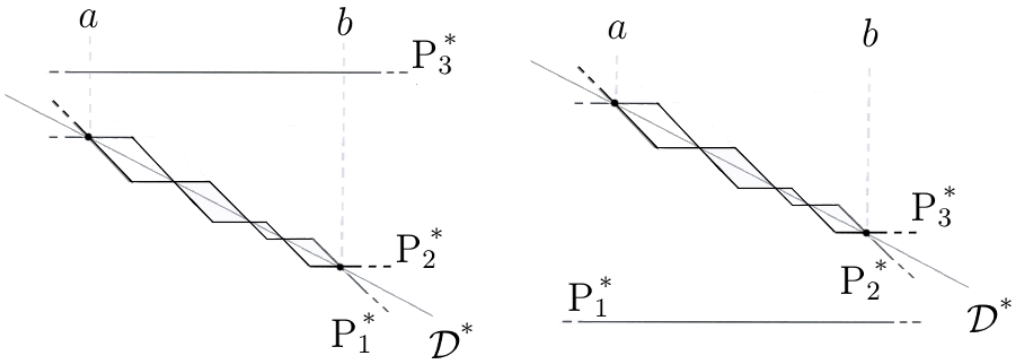

FIGURE 1.9 – "Zigzags" des composantes P_j^* et P_k^* autour de la droite $\mathcal{D}^*$

Proposition 1.9.10. *Soit $(j,k) \in \{(1,2),(2,3)\}$. On suppose que P_j et P_k zigzaguent autour d'une droite $\mathcal{D}$ de pente $\frac{1}{2}$ sur le segment $I = [a,b]$ et que $\mathrm{P}_j(a) = \mathrm{P}_k(a)$ et $\mathrm{P}_j(b) = \mathrm{P}_k(b)$ (voir Figure 1.8). Alors on a les propriétés suivantes :*

(a) Si $\max_I \chi_j \leq \frac{1}{2}$ alors $\max_I \chi_j = \chi_j(b)$.

(b) Si $\min_I \chi_k \leq \frac{1}{2}$ alors $\min_I \chi_k = \chi_k(a)$.

De manière duale, on suppose que P_j^* et P_k^* zigzaguent autour d'une droite $\mathcal{D}^*$ de pente $-\frac{1}{2}$ sur le segment $I = [a,b]$ et que $\mathrm{P}_j^*(a) = \mathrm{P}_k^*(a)$ et $\mathrm{P}_j^*(b) = \mathrm{P}_k^*(b)$ (voir Figure 1.9). Alors on a les propriétés suivantes :

(a') Si $\min_I \chi_k^* \geq -\frac{1}{2}$ alors $\min_I \chi_k^* = \chi_k^*(b)$.

(b') Si $\max_I \chi_j^* \geq -\frac{1}{2}$ alors $\max_I \chi_j^* = \chi_j^*(a)$.

Preuve Encore une fois, les énoncés duaux se déduisent des premiers énoncés.
Supposons que $\max_I \chi_j \leq \frac{1}{2}$, et montrons la première assertion de la proposition. D'après la Proposition 1.9.6, le maximum de χ_j est atteint en un point q tel que $(q, \chi_j(q))$ appartienne à la droite $\mathcal{D}$. Or, en deux abscisses $q < q'$ vérifiant cette condition, on a

$\mathrm{P}_j(q') = \mathrm{P}_j(q) + \frac{1}{2}(q'-q)$, ce qui conduit à

$$\chi_j(q') = \frac{\mathrm{P}_j(q')}{q'} = \frac{\mathrm{P}_j(q)}{q} + \frac{q'-q}{q'}\Big(\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{P}_j(q)}{q}\Big) = \chi_j(q) + \frac{q'-q}{q'}\Big(\frac{1}{2} - \chi_j(q)\Big)$$
$$\geq \chi_j(q),$$

puisque par hypothèse $\frac{1}{2} - \chi_j(q) \geq 0$, donc $\max_I \chi_j = \chi_j(b)$.
Supposons $\min_I \chi_k \leq \frac{1}{2}$. On va montrer d'une manière similaire la deuxième assertion de la proposition : d'après la Proposition 1.9.6, le minimum de χ_k est atteint en un point q tel que $(q, \chi_k(q))$ appartienne à la droite $\mathcal{D}$, et on a $\chi_k(q) \leq \frac{1}{2}$. Or le point $(a, \chi_k(a))$ appartient à la droite $\mathcal{D}$ et $\mathrm{P}_k(a) = \mathrm{P}_k(q) - (q-a)$. On trouve alors

$$\chi_k(a) = \frac{\mathrm{P}_k(a)}{a} = \frac{\mathrm{P}_k(q)}{q} - \frac{q-a}{a}\Big(\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{P}_k(q)}{q}\Big) = \chi_k(q) - \frac{q-a}{a}\Big(\frac{1}{2} - \chi_k(q)\Big)$$
$$\leq \chi_k(a),$$

puisque $\frac{1}{2} - \chi_k(q) \geq 0$, donc $\min_I \chi_k = \chi_k(a)$. □

Remarque 1.9.11. Dans les Chapitres 6 et 7, on considère des réels ξ vérifiant $\overline{\psi}_1^* < -\frac{1}{3}$. La Proposition 0.2.1 montre qu'on a alors $\underline{\psi}_1^* \geq -\frac{1}{2}$, ou de manière équivalente par la relation de Mahler, $\overline{\psi}_3 \leq \frac{1}{2}$. Les conditions $\min_I \chi_k \leq \frac{1}{2}$ et $\max_I \chi_j \leq \frac{1}{2}$ seront alors automatiquement vérifiées (au pire à $o(1)$ près) si l'extrémité gauche de I est assez grande.

Corollaire 1.9.12. *On suppose que $\overline{\psi}_3 \leq \frac{1}{2}$ (ou de manière équivalente, que $\underline{\psi}_1^* \geq -\frac{1}{2}$). Soit $(j,k) \in \{(1,2),(2,3)\}$. Supposons que P_j et P_k zigzaguent autour d'une droite $\mathcal{D}$ de pente $\frac{1}{2}$ sur le segment $I = [a,b]$, et que $\mathrm{P}_j(a) = \mathrm{P}_k(a)$ et $\mathrm{P}_j(b) = \mathrm{P}_k(b)$ (voir Figure 1.8). Alors quand a tend vers l'infini, on a :*

$$\max_I \chi_j = \chi_j(b) + o(1) \quad \textit{et} \quad \min_I \chi_k = \chi_k(a) + o(1). \tag{1.9.16}$$

De manière duale, supposons que P_j^* et P_k^* zigzaguent autour d'une droite $\mathcal{D}^*$ de pente $-\frac{1}{2}$ sur le segment $I = [a,b]$, et que $\mathrm{P}_j^*(a) = \mathrm{P}_k^*(a)$ et $\mathrm{P}_j^*(b) = \mathrm{P}_k^*(b)$ (voir Figure 1.9). Alors quand a tend vers l'infini, on a :

$$\min_I \chi_k^* = \chi_k^*(b) + o(1) \quad \textit{et} \quad \max_I \chi_j^* = \chi_j^*(a) + o(1). \tag{1.9.17}$$

Preuve Les estimations (1.9.16) se déduisent immédiatement des estimations duales (1.9.17). Montrons l'estimation de gauche de (1.9.17).
Si $\min_I \chi_k^* \geq -\frac{1}{2}$ la Proposition 1.9.10 donne directement $\min_I \chi_k^* = \chi_k^*(b)$. Supposons $\min_I \chi_k^* < -\frac{1}{2}$ pour des a arbitrairement grands. D'après la Proposition 1.9.6, le minimum de χ_k^* est atteint en un point q tel que $(q, \chi_k^*(q))$ appartienne à la droite $\mathcal{D}^*$. En ce point, on a donc $\mathrm{P}_k^*(q) < -\frac{q}{2}$. Par ailleurs, comme le point $(b, \mathrm{P}_k^*(b))$ appartient aussi à $\mathcal{D}^*$ on a

$$\mathrm{P}_k^*(b) = \mathrm{P}_k^*(q) - \frac{1}{2}(b-q) < -\frac{b}{2},$$

d'où on tire $\chi_k^*(b) < -\frac{1}{2}$. Or comme $\liminf_{q\to+\infty} \chi_k^* = \underline{\psi}_k^* \geq \underline{\psi}_1^* \geq -\frac{1}{2}$, on en déduit $\underline{\psi}_k^* = \underline{\psi}_1^* = -\frac{1}{2}$, et par suite $\chi_k^*(q) \geq -\frac{1}{2} + o(1) = \chi_k^*(b) + o(1)$ pour tout $q \in I$. Donc on a bien $\min_I \chi_k^* = \chi_k^*(b) + o(1)$.
On procède d'une manière similaire pour l'égalité de droite de (1.9.17), les détails sont laissés au lecteur. □

Chapitre 2

Construction des nombres de type Sturmien

2.1 Introduction et résultats principaux

Ce chapitre est un article soumis [45] que nous avons modifié et complété légèrement pour l'insérer dans cette thèse. Le lecteur est invité à consulter l'introduction de cette thèse (notamment la Partie 0.3) pour un rappel sur les propriétés des quatre exposants $\lambda_2, \widehat{\lambda}_2, \omega_2, \widehat{\omega}_2$.
Dans ce chapitre nous généralisons la construction des nombres de type Fibonacci de Roy (voir Partie 1.3 du Chapitre 1) en considérant des récurrences sturmiennes dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z})$, et nous appelons les nombres ainsi produits des nombres de *type sturmien* (voir la fin de cette introduction pour plus de détails, et la Partie 2.6). Notre construction généralise aussi les fractions sturmiennes de Bugeaud et Laurent (voir Partie 1.4 du Chapitre 1). Notre résultat principal est le calcul des quatre exposants $\widehat{\lambda}_2(\xi)$,$\lambda_2(\xi)$, $\widehat{\omega}_2(\xi)$ et $\omega_2(\xi)$ pour un nombre ξ de type sturmien. Pour énoncer ce résultat on a besoin des notations suivantes.

Définition 2.1.1. Soit $\underline{s} = (s_k)_{k\geq 0}$ une suite d'entiers non nuls (positifs à partir de $k = 1$). On lui associe alors la quantité

$$\sigma(\underline{s}) = \frac{1}{\limsup_{k\to+\infty}[s_{k+1}; s_k, \dots, s_1]},$$

où de manière classique $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ représente la fraction continue dont la suite des quotients partiels est $(a_0, a_1, \dots)$. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des suites bornées d'entiers naturels non nuls et comme dans [8], on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des $\sigma(\underline{s})$ pour $\underline{s} \in \mathcal{A}$.

Cassaigne a étudié les éléments de $\mathcal{S}$ dans [13]. Cet ensemble est également lié au spectre de l'exposant $\beta_0(\xi)$ de Fischler [23] (voir Partie 1.5.3 du Chapitre 1).

Le résultat principal de ce chapitre est la construction de nombres de type sturmien, et le calcul de leurs exposants diophantiens dont les valeurs sont données par les formules du Théorème 2.1.1 ci-dessous, en fonction de réels $\sigma \in \mathcal{S}$ et $0 \leq \delta < \frac{\sigma}{1+\sigma}$ associés à ξ. Ce théorème est impliqué par le Théorème 2.7.1 (qui est une version paramétrique de ce résultat). L'exposant κ^* qui intervient est défini après le Théorème 2.1.2 ci-dessous.

Théorème 2.1.1. *Pour tout nombre de type sturmien ξ, il existe $\sigma \in \mathcal{S}$ et $0 \leq \delta < \frac{\sigma}{1+\sigma}$ tels que*

$$\begin{aligned}
\omega_2(\xi) &= \frac{2-\delta}{\sigma} + 1 - \delta, \\
\widehat{\omega}_2(\xi) &= 1 + (1-\delta)(1+\sigma), \\
\widehat{\lambda}_2(\xi) &= \frac{(1-\delta)(1+\sigma)}{1+(1-\delta)(1+\sigma)}, \\
1 - \delta \leq \lambda_2(\xi) &\leq \max\left(1-\delta, \frac{1}{1-\delta+\sigma}\right).
\end{aligned}$$

En outre, si δ vérifie la condition plus forte $\delta < h(\sigma)$ avec $h(\sigma) = \frac{\sigma}{2} + 1 - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + 1}$ alors

$$\lambda_2(\xi) = 1 - \delta \quad et \quad \kappa^*(\xi) = -\frac{(1-\delta)(1+\sigma)}{1+(2-\delta)(1+\sigma)},$$

l'égalité de gauche étant encore valable si $\delta = h(\sigma)$.

A l'aide d'exemples explicites, on en déduit notamment le résultat suivant.

Théorème 2.1.2. *Pour tout $\sigma \in \mathcal{S}$, il existe un ensemble Δ_σ contenant 0 et dense dans $[0, \frac{\sigma}{1+\sigma}[$ tel que pour tout $\delta \in \Delta_\sigma$, il existe un réel ξ de type sturmien dont les exposants sont ceux donnés par le Théorème 2.1.1.*

Remarquons que ce théorème est nouveau même sans la précision que ξ est de type sturmien.
Les Théorèmes 2.1.1 et 2.1.2 ci-dessus impliquent le Théorème B de l'introduction de cette thèse.
L'exposant paramétrique κ^* apparaissant dans l'énoncé du Théorème 2.1.1 est défini par

$$\kappa^*(\xi) = \lim_{\varepsilon \to \varepsilon_0^+} -\frac{1}{\beta_\varepsilon(\xi)+1},$$

avec $\varepsilon_0 = 1 - \lambda_2(\xi)$ (voir Définition 4.3.1 au Chapitre 4). Si $\varepsilon_0 = 0$ on a l'égalité $\kappa^*(\xi) = -1/(\beta_0(\xi)+1)$. Le lecteur est invité à consulter la Partie 1.5.3 du Chapitre 1 pour la définition des exposants β_ε de Fischler. Nous de démontrons pas l'assertion sur κ^* dans ce chapitre mais dans le Chapitre 4 (voir le Théorème 4.1.2 qui découle du Théorème 4.8.1). Notons que nous ne mentionnons pas l'exposant κ^* dans [45].

Remarque 2.1.2. La borne $h(\sigma)$ n'est sans doute pas optimale. En revanche la condition $\delta < \frac{\sigma}{1+\sigma}$ apparaît naturellement, et notre construction ne permet pas de déterminer les exposants diophantiens sans cette hypothèse. Voir la Remarque 2.7.10 pour plus de détails.

On pourra noter que le cas $\delta = 0$ de notre théorème correspond aux valeurs de ces quatre exposants pour les ξ_φ du Théorème 3.1 de [8], voir la Partie 1.4 du Chapitre 1. La construction de Bugeaud-Laurent est un cas particulier de notre construction générale, voir la Partie 2.8.2 pour les détails. Remarquons aussi que les nombres de type Fibonacci de Roy correspondent à notre construction en prenant $s_k = 1$ pour tout $k \geq 1$. Dans ce cas le σ associé est $\sigma = 1/\gamma$.

On peut déduire du Théorème 2.1.2 le corollaire suivant sur le spectre de ω_2 :

Corollaire 2.1.3. *On a*

$$\overline{\{\omega_2(\xi) \mid \xi \text{ de type sturmien}\}} = [1+\sqrt{5}, 2+\sqrt{5}] \cup [2+2\sqrt{2}, 3+2\sqrt{3}] \cup [3+\sqrt{13}+\infty[,$$

où $\overline{A}$ *désigne la fermeture topologique de* $A \subset \mathbb{R}$.

Voir Partie 2.9 pour la preuve de cet énoncé. Notons que $\overline{\{\omega_2(\xi) \mid \xi \text{ de type Fibonacci}\}} = [1+\sqrt{5}, 2+\sqrt{5}]$.

A priori, ces nouvelles constructions n'apportent pas d'informations supplémentaires sur les spectres individuels de chaque exposant (les spectres de λ_2 et ω_2 sont déjà parfaitement déterminés – voir (0.3.3) de l'introduction de cette thèse – et les nombres de type Fibonacci de Roy permettent de montrer les résultats de densité des spectres de $\widehat{\lambda}_2$ et $\widehat{\omega}_2$ dans les plus grands intervalles possibles) ; en revanche, ils apportent des informations nouvelles sur leurs spectres joints. En effet, un autre corollaire immédiat du Théorème 2.1.2 est le suivant. Il correspond au Corollaire C de l'introduction de cette thèse.

Corollaire 2.1.4. *Pour tout* $\sigma \in \mathcal{S}$, *il existe* $c = c(\sigma)$ *vérifiant* $0 \leq c < 1$ *tel que le spectre joint de* $(\lambda_2, \widehat{\lambda}_2, \omega_2, \widehat{\omega}_2)$ *soit dense dans la courbe*

$$\left\{ \left(x, 1 - \frac{1}{1+(1+\sigma)x}, \frac{1+(1+\sigma)x}{\sigma}, 1+(1+\sigma)x \right) \;\middle|\; x \in [c,1] \right\}.$$

Dans ce chapitre on détermine un 3-système $\mathbf{P}$ qui approche la fonction $\mathbf{L_u}$ associée à un nombre ξ de type sturmien (avec $\mathbf{u} = (1, \xi, \xi^2)$, voir Partie 1.6) à $\mathcal{O}(1)$ près, sauf au niveau de certaines zones spécifiques appelées *zones d'incertitude* (voir la Figure 2.2 de la Partie 2.7). C'est en s'appuyant sur ce 3-système que nous calculons les exposants du Théorème 2.1.2, et c'est à cause des zones d'incertitude susmentionnées que nous devons supposer $\delta \leq h(\sigma)$ pour pouvoir les ignorer et calculer $\lambda_2(\xi)$ (et $\kappa^*(\xi)$ sous l'hypothèse $\delta < h(\sigma)$). Nous discutons du comportement de $\mathbf{L_u}$ au niveau des zones d'incertitude dans la Partie 2.7.2. Des tests numériques effectués avec les matrices de Roy laissent penser que le graphe de $\mathbf{L_u}$ est "loin" du contour de ces zones, donc que pour ces suites la condition $\delta \leq h(\sigma)$ pourrait être affaiblie (voir Remarque 2.7.17 pour plus de détails). Ces zones ne sont pas mentionnées dans les travaux de Roy [51] sur les nombres de type Fibonacci car elles n'interviennent pas dans le calcul des exposants $\widehat{\lambda}_2$ et $\widehat{\omega}_2$ (qui sont les seuls exposants calculés dans [51]) et peuvent être ignorées – bien sûr la géométrie paramétrique des nombres et la notion de 3-système n'avaient pas non plus encore été développées à cette époque.

Résumons maintenant la construction des nombres de type sturmien. Soit $(s_k)_{k\geq 0}$ une suite d'entiers strictement positifs (excepté pour s_0) avec $s_0 = -1, s_1 = 1$. Pour $k \geq 0$, on pose $t_k = s_0 + s_1 + \cdots + s_k$, et on associe à $(s_k)_k$ une fonction ψ (appelée fonction *sturmienne*, voir Définition 2.2.3) définie sur $[\![0\,; +\infty[\![$ par $\psi(t_k) = t_{k-1} - 1$ pour $k \geq 1$, et $\psi(i) = i-1$ si i n'est pas parmi les t_k. On note $\mathcal{F}_{stur}$ l'ensemble des fonctions sturmiennes pour lesquelles la suite d'entiers $(s_k)_k$ correspondante est bornée.
Une suite *ψ-sturmienne* de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ est une suite $(\mathbf{w}_i)_{i\geq 0}$ de matrices appartenant à $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$\mathbf{w}_{i+1} = \mathbf{w}_i^{s_{i+1}} \mathbf{w}_{i-1} \quad (i \geq 1).$$

Dans ce chapitre, on travaillera avec des suites ψ-sturmiennes $(\mathbf{w}_i)_{i\geq 0}$ de $\mathcal{M} = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z})$, *i.e.* telles que $\mathbf{w}_i \in \mathcal{M}$ pour tout i. Dans le Chapitre 4, les matrices considérées ne seront plus forcément à coefficients entiers (mais proportionnelles à des matrices à coefficients entiers) ; la plupart des résultats (notamment les relations de récurrence et les comportements asymptotiques) concernant les suites étudiées restent vraies dans le cadre plus général des suites ψ-sturmiennes de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Une suite comme ci-dessus est *admissible* s'il existe une matrice $N \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $\mathbf{w}_1 N, \mathbf{w}_0 {}^tN$ et $\mathbf{w}_1\mathbf{w}_0 {}^tN$ soient symétriques (voir Définition 2.4.1). On pose alors $N_k = N$ si k est pair, $N_k = {}^tN$ si k est impair.

On définit la norme d'une matrice $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ par la formule $\|\mathbf{w}\| = \sqrt{a^2 + (b^2+c^2)/2 + d^2}$. On dit qu'une suite ψ-sturmienne $(\mathbf{w}_i)_{i\geq 0}$ est à *croissance multiplicative* si

$$\|\mathbf{w}_k^l \mathbf{w}_{k-1}\| \asymp \|\mathbf{w}_k\| \times \|\mathbf{w}_k^{l-1}\mathbf{w}_{k-1}\|$$

pour $k \geq 1$, $1 \leq l \leq s_{k+1}+1$, (voir Définition 2.5.1). Les suites à croissance multiplicative sont étudiées dans la Partie 2.5. Dans la suite on identifie $\mathbb{R}^3$ (resp. $\mathbb{Z}^3$) à l'espace vectoriel des matrices symétriques 2×2 à coefficients réels (resp. entiers) via l'isomorphisme $(x_0,x_1,x_2) \longmapsto \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}$. Remarquons que la norme euclidienne $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^3$ et la norme $\|\cdot\|$ définie ci-dessus sur l'espace des matrices sont compatibles via l'identification précédente. On peut aussi considérer le déterminant $\det(\mathbf{x})$ d'un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. De manière similaire étant données $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, deux matrices symétriques, $\mathbf{x}\wedge\mathbf{y}$ désigne le produit vectoriel des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ correspondants.

Tout nombre ψ-sturmien propre sera donné par une suite admissible ψ-sturmienne de $\mathcal{M}$ à croissance multiplicative et telle que le contenu des $\mathbf{w}_i$ soit borné et que la suite $(\|\mathbf{w}_i\|)_i$ diverge vers l'infini. Par exemples les suites ψ-sturmiennes définies par les matrices de Roy [51]

$$\mathbf{w}_0 = \begin{pmatrix} 1 & b \\ a & a(b+1) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 & c \\ a & a(c+1) \end{pmatrix}$$

avec $a \geq 2$ et $c \geq b \geq 1$ vérifient ces hypothèses (voir Partie 2.8.1).

A une telle suite ψ-sturmienne $(\mathbf{w}_i)_{i\geq 0}$ on associe deux suites de matrices symétriques $(\mathbf{y}_i)_i$ et $(\mathbf{z}_i)_i$ définies par les formules

$$\mathbf{y}_{t_k+l} = \mathbf{w}_k^{l+1}\mathbf{w}_{k-1}N_k \quad \text{et} \quad \mathbf{z}_{t_k+l} = \frac{1}{\det(\mathbf{w}_k)}\mathbf{y}_{\psi(t_{k+1})} \wedge \mathbf{y}_{t_k+l} \quad (0 \leq k, 0 \leq l < s_{k+1})$$

(voir Définitions 2.3.6 et 2.4.3). Les propriétés combinatoires de ces suites sont étudiées dans les Parties 2.3 et 2.4. Par croissance multiplicative (et parce que $(\|\mathbf{w}_i\|)_i$ diverge vers l'infini) nous montrons dans la Proposition 2.5.9 qu'il existe $\delta \geq 0$ tel que $|\det(\mathbf{w}_i)| \asymp \|\mathbf{w}_i\|^\delta$. Si $\delta < 1$, alors la Proposition 2.6.1 assure que la suite $(\mathbf{y}_i)_i$ associée converge dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ vers un vecteur $\mathbf{y} = (1,\xi,\xi^2)$. Tout réel ξ ainsi obtenu, avec $\delta < \frac{\sigma}{1+\sigma}$ et tel que le contenu des $\mathbf{y}_i$ soit borné, est dit ψ-sturmien propre. Les nombres de type sturmien sont exactement les nombres ψ-sturmiens propres pour ψ décrivant $\mathcal{F}_{stur}$; voir Définition 2.6.3. Nous montrons alors que les suites $(\mathbf{y}_i)_i$ et $(\mathbf{z}_i)_i$ sont de "bonnes" solutions des Problèmes $E'_{\lambda,X}$ et $E_{\omega,X}$ respectivement, et c'est ici qu'intervient naturellement la condition $\delta < \frac{\sigma}{1+\sigma}$ (voir la Partie 0.2 de l'introduction de cette thèse). Dans la

Partie 2.6 (voir Proposition 2.6.8) nous donnons des estimations précises des quantités $\|\mathbf{y}_i\|$, $\|\mathbf{z}_i\|$, $|\langle \mathbf{z}_i, \mathbf{y}\rangle|$ et $\|\mathbf{y}_i \wedge \mathbf{y}\|$. Cela nous permet de construire dans la Partie 2.7 (voir Propositions 2.7.5, 2.7.9 et Figure 2.2) un 3-système qui représente ξ (sauf peut-être au niveau des zones d'incertitude). Finalement, nous déduisons de ce 3-système les exposants diophantiens associés à ξ (voir Théorème 2.7.1).

2.2 Notations

Dans cette partie on rappelle quelques notations de l'introduction, en particulier la suite $(s_k)_{k\geq 0}$ et la fonction ψ associée qui seront constamment utilisées le long de ce chapitre). Rappelons qu'on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sur $\mathbb{R}^3$, et nous notons de la même manière la norme euclidienne sur $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3$ (voir Partie 1.6 du Chapitre 1 pour les détails de la structure d'espace euclidien dont on munit $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3$).

Notation. Soit I un ensemble (*ensemble des indices* : typiquement, I est de la forme $\mathbb{N}^r$), $(a_{\underline{i}})_{\underline{i}\in I}$ et $(b_{\underline{i}})_{\underline{i}\in I}$ deux suites de réels positifs indexées par I. Soit $J \subset I$ (*ensemble des conditions*). On note « $a_{\underline{i}} \ll b_{\underline{i}}$ pour $\underline{i} \in J$ » ou « $b_{\underline{i}} \gg a_{\underline{i}}$ pour $\underline{i} \in J$ » s'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $\underline{i} \in J$ on ait $a_{\underline{i}} \leq c b_{\underline{i}}$. On écrit « $a_{\underline{i}} \asymp b_{\underline{i}}$ pour $\underline{i} \in J$ » si $a_{\underline{i}} \ll b_{\underline{i}}$ pour $\underline{i} \in J$ et $b_{\underline{i}} \ll a_{\underline{i}}$ pour $\underline{i} \in J$.
Dans le cas particulier $I = \mathbb{N}$, en l'absence de précision supplémentaire on prendra toujours J de la forme $[\![j_0\,;+\infty[\![$ pour j_0 assez grand et on écrira simplement $a_{\underline{i}} \ll b_{\underline{i}}$, $b_{\underline{i}} \gg a_{\underline{i}}$ et $a_{\underline{i}} \asymp b_{\underline{i}}$.

Définition 2.2.1. Pour tout vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ non nul, on note $[\mathbf{x}]$ le point de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ayant pour coordonnées homogènes $\mathbf{x}$. On définit la distance projective entre deux vecteurs non nuls $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ de $\mathbb{R}^3$ par

$$\operatorname{dist}([\mathbf{x}],[\mathbf{y}]) = \operatorname{dist}(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \frac{\|\mathbf{x}\wedge\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|}.$$

La distance projective vérifie l'inégalité triangulaire

$$\operatorname{dist}(\mathbf{x},\mathbf{z}) \leq \operatorname{dist}(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \operatorname{dist}(\mathbf{y},\mathbf{z}) \quad \text{pour tous } \mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.$$

Rappelons les inégalités suivantes, valides pour $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ (voir [51, Lemma 2.2]) :

Lemme 2.2.2. *Soient $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$. On a*

$$\|\langle \mathbf{x},\mathbf{z}\rangle\,\mathbf{y} - \langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle\,\mathbf{z}\| \ll \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\wedge\mathbf{z}\|, \tag{2.2.1}$$

$$\|\mathbf{y}\|\,\|\mathbf{x}\wedge\mathbf{z}\| \ll \|\mathbf{z}\|\,\|\mathbf{x}\wedge\mathbf{y}\| + \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\wedge\mathbf{z}\|, \tag{2.2.2}$$

où les constantes implicites des symboles $\ll$ ne dépendent pas de $\mathbf{x},\mathbf{y}$ et $\mathbf{z}$.

Définition 2.2.3. Soit $(s_k)_{k\geq 0}$ une suite d'entiers strictement positifs pour $k \geq 1$, avec $s_0 = -1, s_1 = 1$. Pour $k \geq 0$, on pose $t_k = s_0 + s_1 + \cdots + s_k$, et on associe à $(s_k)_k$ une fonction ψ définie sur $[\![0\,;+\infty[\![$ par

$$\begin{cases} \psi(t_k) = t_{k-1} - 1 \text{ pour } k \geq 1 \\ \psi(i) = i - 1 \text{ si } i \text{ n'est pas parmi les } t_k. \end{cases}$$

On dit que ψ est une fonction *sturmienne*.
On note $\mathcal{F}_{stur}$ l'ensemble des fonctions sturmiennes dont la suite $(s_k)_k$ associée est bornée.

Remarque. Une suite $(s_k)_k$ d'entiers strictement positifs pour $k \geq 1$ (avec $s_0 = -1, s_1 = 1$) est entièrement caractérisée par sa fonction sturmienne associée (la suite croissante des $(t_k)_{k\geq 1}$ étant exactement formée par les entiers n tels que $\psi(n) \leq n-2$).
Les fonctions sturmiennes $\psi \in \mathcal{F}_{stur}$ (restreintes à $\mathbb{N}^*$) font partie d'une classe plus large de fonctions appelées fonctions *asymptotiquement réduites* et étudiées par Fischler dans [22] et [23] (voir Définition 1.5.1 du Chapitre 1). L'auteur montre en généralisant la construction de Roy (cf [48] et [49]) et l'utilisation de son crochet, qu'à chaque mot w à *préfixes palindromes abondants*, on peut associer une fonction ψ asymptotiquement réduite (si w est un mot *sturmien*, la fonction ψ associée est sturmienne), et construire un réel ξ dont certains exposants d'approximation diophantienne sont intimement liés à ψ. Voir Partie 1.5.1 du Chapitre 1 pour plus de détails.

Notation. Pour toute la suite, on fixe $(s_k)_{k\geq 0}$ une suite strictement positifs pour $k \geq 1$ avec $s_0 = -1, s_1 = 1$ (ce n'est qu'à la Partie 2.7 qu'on la supposera bornée). On note $t_k = s_0 + \cdots + s_k$ et ψ la fonction sturmienne associée. On note également $\varphi = [0; s_2, s_3, \dots]$.

2.3 Suites ψ-sturmiennes de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$

Le but de cette Partie est de généraliser la définition de suite de Fibonacci dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ de Roy (cf [51, §3]) et de dégager dans la Propriété 2.3.7 quelques propriétés utiles de la suite $(\mathbf{y}_i)_i$ (voir Définition 2.3.6). Cette suite donnera de "bonnes" solutions du Problème $E'_{\lambda,X}$. Plusieurs de ces propriétés ont des analogues combinatoires pour les mots sturmiens caractéristiques (voir [8, §5]).

Définition 2.3.1. Une suite *ψ-sturmienne* dans un monoïde est une suite $(\mathbf{w}_i)_{i\geq 0}$ telle que

$$\mathbf{w}_{i+1} = \mathbf{w}_i^{s_{i+1}} \mathbf{w}_{i-1} \quad (i \geq 1).$$

Une telle suite est entièrement déterminée par $\mathbf{w}_0$ et $\mathbf{w}_1$. On dit aussi qu'une suite ψ-sturmienne est une *suite d'angle* (ou pente) φ (où $\varphi = [0; s_2, s_3, \dots]$).

Exemple 2.3.2. Dans le cas particulier $\varphi = [0; 1, 1, 1, \dots] = (\sqrt{5}-1)/2$ (on a alors $(t_k)_{k\geq 0} = (k-1)_{k\geq 0}$ et $\psi(n) = n-2$ pour tout n), une suite sturmienne d'angle φ dans un monoïde est une suite de Fibonacci selon la terminologie de Roy (cf début du §3 de [51]).

Proposition 2.3.3 (Roy, 2007)**.** *Il existe un ouvert de Zariski non vide $\mathcal{U}$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^2$ tel que pour tout $(\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1) \in \mathcal{U}$, il existe $N \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ tel que $\mathbf{w}_1 N, \mathbf{w}_0 {}^t N$ et $\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_0 {}^t N$ soient symétriques. Si de plus $\mathbf{w}_0$ et $\mathbf{w}_1$ sont à coefficients entiers, alors on peut prendre N à coefficients entiers.*

Preuve Cela se déduit directement de la Proposition 3.1 de [51]. Les arguments de Roy sont les suivants : les conditions que $\mathbf{w}_1 N, \mathbf{w}_0 {}^t N$ et $\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_0 {}^t N$ soient symétriques représentent un système de trois équations à quatre inconnues (les coefficients de N). Pour peu que ce système soit de rang 3 (cela définit un premier ouvert de Zariski), il existe une solution N polynomiale (avec des coefficients entiers) en les coefficients de $\mathbf{w}_0$ et $\mathbf{w}_1$. Il suffit ensuite de remarquer qu'en rajoutant la condition $\det(N) \neq 0$ l'ouvert de Zariski ainsi défini

n'est pas vide car il contient le couple formé par $\mathbf{w}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Voir [51, Proposition 3.1] pour plus de détails. □

Proposition 2.3.4.

(a) Soit $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, N \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telles que $\mathbf{w}_1 N, \mathbf{w}_0 {}^t N$ et $\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_0 {}^t N$ soient symétriques. Alors $\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_0 {}^t N = \mathbf{w}_0 \mathbf{w}_1 N$.

(b) Soit $(\mathbf{w}_i)_{i \geq 0}$ une suite ψ-sturmienne de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et soit $N \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. On note $N_k = N$ si k est pair, $N_k = {}^t N$ si k est impair. Supposons que $\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_0 {}^t N = \mathbf{w}_0 \mathbf{w}_1 N$. Alors pour tout $k \geq 1$ on a

$$\mathbf{w}_{k-1} \mathbf{w}_k N_{k+1} = \mathbf{w}_k \mathbf{w}_{k-1} N_k. \tag{2.3.1}$$

Preuve Pour (a) : on a l'égalité $\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_0 {}^t N = \Big(\mathbf{w}_1 N\Big) N^{-1} \Big(\mathbf{w}_0 {}^t N\Big)$. En prenant la transposée de ces expressions et en utilisant le fait que $\mathbf{w}_1 N, \mathbf{w}_0 {}^t N$ et $\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_0 {}^t N$ sont symétriques, on trouve

$$\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_0 {}^t N = \Big(\mathbf{w}_0 {}^t N\Big) {}^t N^{-1} \Big(\mathbf{w}_1 N\Big) = \mathbf{w}_0 \mathbf{w}_1 N.$$

Pour (b) (on pourra comparer cette proposition avec le Lemme 5.1 de [8]) : on reprend les arguments de la Proposition 1 de [1] pour les adapter à notre contexte.
La preuve se fait par récurrence sur k. Le cas $k = 1$ est vrai par hypothèse. Supposons que pour un $k \geq 1$ on ait $\mathbf{w}_{k-1} \mathbf{w}_k N_{k+1} = \mathbf{w}_k \mathbf{w}_{k-1} N_k$. On a

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_k \mathbf{w}_{k+1} N_{k+2} = \mathbf{w}_k \Big(\mathbf{w}_k^{s_{k+1}} \mathbf{w}_{k-1} N_{k+2}\Big) &= \mathbf{w}_k^{s_{k+1}} \Big(\mathbf{w}_k \mathbf{w}_{k-1} N_k\Big) \\ &= \mathbf{w}_k^{s_{k+1}} \Big(\mathbf{w}_{k-1} \mathbf{w}_k N_{k+1}\Big) \\ &= \mathbf{w}_{k+1} \mathbf{w}_k N_{k+1}, \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Le Lemme suivant – qui n'apparaît pas dans [45] – complète la Proposition 2.3.4. Il sert dans la preuve de la Proposition 2.4.2, qu'on utilisera uniquement au Chapitre 4.

Lemme 2.3.5. *Soit $(\mathbf{w}_k)_{k \geq 0}$ une suite ψ-sturmienne de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $N \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et un indice $k_0 \geq 1$ pour lequel on a*

$$\mathbf{w}_{k-1} \mathbf{w}_k N_{k+1} = \mathbf{w}_k \mathbf{w}_{k-1} N_k, \tag{2.3.2}$$

où on a posé $N_k = N$ si k est pair, $N_k = {}^t N$ si k est impair. Alors l'égalité (2.3.2) est satisfaite pour tout $k \geq 1$.

Preuve D'après l'assertion (b) de la Proposition 2.3.4, si l'égalité (2.3.2) est vérifiée pour $k = 1$, alors elle est vérifiée pour tout $k \geq 1$.
Supposons que (2.3.2) est vérifiée pour un indice k, $1 < k \leq k_0$. Alors en utilisant l'identité $\mathbf{w}_{k-2} = \mathbf{w}_{k-1}^{-s_k} \mathbf{w}_k$, on trouve

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{k-2} \mathbf{w}_{k-1} N_k = \mathbf{w}_{k-1}^{-s_k} \Big(\mathbf{w}_k \mathbf{w}_{k-1} N_k\Big) &= \mathbf{w}_{k-1}^{-s_k} \Big(\mathbf{w}_{k-1} \mathbf{w}_k N_{k+1}\Big) \\ &= \mathbf{w}_{k-1} \Big(\mathbf{w}_{k-1}^{-s_k} \mathbf{w}_k\Big) N_{k+1} \\ &= \mathbf{w}_{k-1} \mathbf{w}_{k-2} N_{k-1}, \end{aligned}$$

donc (2.3.2) est vérifiée pour $k-1$. Par récurrence descendante, (2.3.2) est satisfaite pour $k=1$, ce qui achève la démonstration de ce Lemme par ce qui précède. □

Définition 2.3.6. Soit $(\mathbf{w}_i)_{i\geq 0}$ une suite ψ-sturmienne de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et $N \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $\mathbf{w}_1\mathbf{w}_0{}^tN = \mathbf{w}_0\mathbf{w}_1N$. On pose $N_k = N$ si k pair, $N_k = {}^tN$ si k impair. On définit alors une suite $(\mathbf{y}_j)_{j\geq -2}$ de la manière suivante : on pose $\mathbf{y}_{-2} = \mathbf{w}_0{}^tN$, $\mathbf{y}_{-1} = \mathbf{w}_1N$, et pour $1 \leq k$, $0 \leq l < s_{k+1}$, on définit

$$\mathbf{y}_{t_k+l} = \mathbf{w}_k^{l+1}\mathbf{w}_{k-1}N_k. \tag{2.3.3}$$

Remarquons ici que l'équation (2.3.1) assure la validité de cette expression également pour $l = s_{k+1}$.
En particulier, on a

$$\mathbf{y}_{\psi(t_k)} = \mathbf{w}_{k-1}N_k \quad (k \geq 1). \tag{2.3.4}$$

Preuve de (2.3.4) Si $k \geq 3$, il suffit de remarquer que $\psi(t_k) = t_{k-1} - 1 = t_{k-2} + s_{k-1} - 1$, donc

$$\mathbf{y}_{\psi(t_k)} = \mathbf{w}_{k-2}^{s_{k-1}}\mathbf{w}_{k-3}N_{k-2} = \mathbf{w}_{k-1}N_k.$$

Si $k = 2$ (resp. $k = 1$) l'égalité est encore satisfaite puisque $\mathbf{y}_{\psi(t_2)} = \mathbf{y}_{-1}$ (resp. $\mathbf{y}_{\psi(t_1)} = \mathbf{y}_{-2}$). □

Proposition 2.3.7. *On a les propriétés suivantes :*

(a) $\mathbf{y}_{t_k+l} = \mathbf{w}_k^{l+1}\mathbf{y}_{\psi(t_k)}$ *pour* $k \geq 1$ *et* $0 \leq l \leq s_{k+1}$

(b) $\mathbf{y}_{j+1} = \mathbf{w}_k\mathbf{y}_j$, *pour* $k \geq 0$ *et* $t_k \leq j < t_{k+1}$

(c) $\mathbf{y}_j = \mathbf{w}_k\mathbf{y}_{\psi(j)}$, *pour* $k \geq 1$, $t_k \leq j < t_{k+1}$

(d) Pour tout $j \geq 0$, *on a*

$$\mathbf{y}_{j+1} = \mathbf{y}_j\mathbf{y}_{\psi(j)}^{-1}\mathbf{y}_j. \tag{2.3.5}$$

En particulier, si $\mathbf{w}_1N, \mathbf{w}_0{}^tN$ *et* $\mathbf{w}_1\mathbf{w}_0{}^tN$ *sont symétriques, alors pour tout* $j \geq -2$, $\mathbf{y}_j$ *est une matrice symétrique.*

Preuve (a) et (b) découlent de la définition des $\mathbf{y}_m$ et de (2.3.4), compte tenu du fait que (2.3.3) est encore valable pour $l = s_{k+1}$.
La propriété (c) est impliquée par le point (b) si $j > t_k$ (puisqu'on a alors $\psi(j) = j-1$), et par le point (a) si $j = t_k$.
Enfin (2.3.5) découle de (b) et (c) Par ailleurs, $\mathbf{w}_0{}^tN$, $\mathbf{w}_1N$ et $\mathbf{w}_1\mathbf{w}_0{}^tN$ symétriques est équivalent par définition à $\mathbf{y}_{-2}$, $\mathbf{y}_{-1}$ et $\mathbf{y}_0$ symétriques : on conclut par récurrence immédiate en utilisant (2.3.5). □

Remarque. L'équation (2.3.5) peut se réécrire

$$\det(\mathbf{y}_{\psi(j)})\mathbf{y}_{j+1} = [\mathbf{y}_j, \mathbf{y}_j, \mathbf{y}_{\psi(j)}], \tag{2.3.6}$$

où $[\cdot,\cdot,\cdot]$ est le crochet de Roy introduit dans [49]. Ce crochet a été utilisé d'une manière cruciale dans [23] par Fischler (voir la Partie 1.5.2 du Chapitre 1 et la première remarque après le Théorème 4.1 de [23], qu'on pourra mettre en lien avec (2.3.6) notamment). L'équation (2.3.5) est le reflet de propriétés combinatoires classiques sur les mots sturmiens, on pourra par exemple la comparer à l'équation (4) de [23].

2.4 Suites ψ-sturmiennes admissibles

Dans cette Partie on établit plusieurs propriétés arithmétiques des suites ψ-sturmiennes de $\mathcal{M}$ admissibles (voir Définition 2.4.1). Entre autres on généralise les récurrences utilisées par Bugeaud et Laurent (cf Lemme 7.1 de [8] et sa preuve). Nous généralisons aussi dans la Définition 2.4.3 la construction de la suite $(\mathbf{z}_i)_i$ de [51, Proposition 4.1]. Cette suite donnera de "bonnes" solutions du Problème $E_{\omega,X}$ et jouera un rôle essentiel dans la construction d'un 3-système associé à un nombre ψ-sturmien propre. Le résultat principal de cette partie est la Proposition 2.4.4.
Dans le contexte de ce chapitre on considère principalement des suites ψ-sturmiennes de $\mathcal{M}$ (bien que plusieurs résultats soient formulés dans le cadre plus général des suites ψ-sturmiennes de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$). Dans le Chapitre 4 on considérera des suites ψ-sturmiennes de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ qui ne sont pas forcément à coefficients entiers (ni même rationnels). Notons que la plupart des résultats présentés dans ce chapitre restent vrais pour une suite ψ-sturmienne de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$; parmi les rares exceptions ne vérifiant pas cela, on trouve les propriétés concernant les contenus (comme le Corollaire 2.4.5 ci-dessous par exemple).

La définition suivante reprend [51, Definition 3.2].

Définition 2.4.1. Soit $\mathcal{M} = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z}) \cap \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ le monoïde des matrices 2×2 à coefficients entiers de déterminant non nul. On dit qu'une suite ψ-sturmienne $(\mathbf{w}_k)_k$ de $\mathcal{M}$ est *admissible* s'il existe une matrice $N \in \mathcal{M}$ telle que $\mathbf{w}_1 N, \mathbf{w}_0 {}^t N$ et $\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_0 {}^t N$ soient symétriques. En particulier, dans ce cas les matrices de la suite $(\mathbf{y}_i)_{i\geq -2}$ associée par la Définition 2.3.6 sont symétriques.
D'une manière plus générale, une suite ψ-sturmienne $(\mathbf{w}_k)_k$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ est *admissible* s'il existe une matrice $N \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $\mathbf{w}_1 N, \mathbf{w}_0 {}^t N$ et $\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_0 {}^t N$ soient symétriques.

La proposition suivante ne figure pas dans [45] et sert uniquement dans le Chapitre 4 (voir preuve de la Proposition 4.5.5 de la Partie 4.5.2).

Proposition 2.4.2. *Soit $(\mathbf{w}_k)_{k\geq 0}$ une suite ψ-sturmienne de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, $N \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $k \geq 1$ tel que $\mathbf{w}_{k-1}N_k$, $\mathbf{w}_k N_{k-1}$, $\mathbf{w}_k \mathbf{w}_{k-1} N_k$ soient symétriques (où on a posé $N_k = N$ si k est pair, $N_k = {}^t N$ si k impair). Alors $(\mathbf{w}_k)_{k\geq 0}$ est admissible avec la matrice N.*

Preuve L'assertion (a) de la Proposition 2.3.4 utilisée avec $\mathbf{w}_{k-1}$ et $\mathbf{w}_k$ à la place de $\mathbf{w}_0$ et $\mathbf{w}_1$ respectivement, donne immédiatement l'égalité $\mathbf{w}_{k-1}\mathbf{w}_k N_{k+1} = \mathbf{w}_k \mathbf{w}_{k-1} N_k$. Le Lemme 2.3.5 montre que cette relation est encore vraie pour $k = 1$.
On peut alors considérer la suite de matrices $(\mathbf{y}_i)_{i\geq -2}$ associée à $(\mathbf{w}_k)_k$ par la Définition 2.3.6. D'après la Proposition 2.3.7, la suite $(\mathbf{y}_i)_i$ suit la récurrence (2.3.5) :

$$\mathbf{y}_{j+1} = \mathbf{y}_j \mathbf{y}_{\psi(j)}^{-1} \mathbf{y}_j \quad \text{et} \quad \mathbf{y}_{\psi(j)} = \mathbf{y}_j \mathbf{y}_{j+1}^{-1} \mathbf{y}_j \quad (j \geq 0). \tag{2.4.1}$$

Notons que d'après (2.4.1) et par définition des $\mathbf{y}_i$ on a $\mathbf{y}_{\psi(t_k)} = \mathbf{w}_{k-1}N_k$, $\mathbf{y}_{t_k - 1} = \mathbf{w}_k N_{k-1}$, $\mathbf{y}_{t_k} = \mathbf{w}_k \mathbf{w}_{k-1} N_k$, et par hypothèse ces matrices sont symétriques. L'équation de gauche de (2.4.1) utilisée avec $j = t_k$ montre alors que $\mathbf{y}_{t_k+1}$ est symétrique.

Par récurrence descendante, montrons que pour tout m vérifiant $0 \leq m \leq k$, les

matrices $\mathbf{y}_{t_m-1}, \mathbf{y}_{t_m}, \mathbf{y}_{t_m+1}$ sont symétriques (rappelons que $t_0 = -1$ et $t_1 = 0$). On vient de montrer que c'est vrai pour $m = k$. Supposons que ce soit vrai pour un indice m, $0 < m$. Alors l'équation de droite de (2.4.1) utilisée avec $j = t_m \geq 0$ montre que $\mathbf{y}_{t_{m-1}-1}$ est symétrique. D'autre part, en utilisant successivement l'équation de droite de (2.4.1) avec $j = t_m - 1 > \cdots > t_{m-1} + 1 \geq 0$, on montre que $\mathbf{y}_{t_m-2}, \ldots, \mathbf{y}_{t_{m-1}+1}, \mathbf{y}_{t_{m-1}}$ sont symétriques. Donc finalement on a bien $\mathbf{y}_{t_{m-1}-1}, \mathbf{y}_{t_{m-1}}, \mathbf{y}_{t_{m-1}+1}$ symétriques.
Cette propriété est donc vraie pour $k = 0$, ce qui signifie exactement que $\mathbf{w}_1 N, \mathbf{w}_0 {}^t N$ et $\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_0 {}^t N$ sont symétriques, et donc que la suite $(\mathbf{w}_k)_k$ est admissible. □

Les suites admissibles utilisées par Roy dans [51] sont des exemples de suites ψ-sturmiennes admissibles : pour les détails voir la Partie 2.8.1. Nous suivons ici la démarche de Roy (cf §4 de [51]) en identifiant $\mathbb{R}^3$ (resp. $\mathbb{Z}^3$) à l'espace des matrices symétriques de taille 2×2 à coefficients réels (resp. entiers) grâce à la bijection

$$\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2) \longrightarrow \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}.$$

Si $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3$, on notera alors $\det(\mathbf{x}) = x_0 x_2 - x_1^2$ et $\mathrm{Tr}(\mathbf{x}) = x_0 + x_2$. De même, étant données trois matrices symétriques $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$, on notera $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ et $\det(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ respectivement le produit vectoriel, le produit scalaire et le déterminant des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ correspondants. On définit le *contenu* d'une matrice $\mathbf{w} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z})$ ou d'un vecteur $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^3$ comme le plus grand diviseur commun de leurs coefficients. On dit qu'une matrice ou qu'un vecteur est *primitif* si son contenu est égal à 1.

Notation. Dans cette partie, $(\mathbf{w}_i)_{i\geq 0}$ est une suite ψ-sturmienne de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ admissible. On note $N \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et $(\mathbf{y}_j)_{j\geq -2}$ les matrices définies dans la Définition 2.3.6 (si $(\mathbf{w}_i)_{i\geq 0}$ est une suite ψ-sturmienne de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, on prend $N \in \mathcal{M}$).
Par ailleurs on note J la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Définition 2.4.3. On définit la suite $(\mathbf{z}_j)_{j\geq -1}$ de la manière suivante :

$$\mathbf{z}_{t_k+l} = \frac{1}{\det(\mathbf{w}_k)} \mathbf{y}_{\psi(t_{k+1})} \wedge \mathbf{y}_{t_k+l}, \quad 0 \leq k \ \text{ et } 0 \leq l < s_{k+1}. \tag{2.4.2}$$

La Proposition 2.4.4 suivante et le Corollaire 2.4.5 généralisent les résultats de la Proposition 4.1 et du Corollaire 4.2 de [51].

Proposition 2.4.4.

(a) Formule de récurrence pour la suite $(\mathrm{Tr}(\mathbf{w}_i))_i$ *:*

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{w}_k^l \mathbf{w}_{k-1}) = \mathrm{Tr}(\mathbf{w}_k)\mathrm{Tr}(\mathbf{w}_k^{l-1}\mathbf{w}_{k-1}) - \det(\mathbf{w}_k)\mathrm{Tr}(\mathbf{w}_k^{l-2}\mathbf{w}_{k-1}) \tag{2.4.3}$$

où $k \geq 1$ *et* $l \geq 2$*. En particulier, si* $(\mathbf{w}_i)_i$ *est une suite* ψ*-sturmienne de* $\mathcal{M}$*, on a*

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{w}_k^l \mathbf{w}_{k-1}) \equiv \mathrm{Tr}(\mathbf{w}_k)^{l-1}\mathrm{Tr}(\mathbf{w}_k\mathbf{w}_{k-1}) \mod \det(\mathbf{w}_k) \tag{2.4.4}$$

(b) Formule de récurrence pour la suite $(\mathbf{y}_i)_i$ *:*

$$\mathbf{y}_{t_k+l+1} = \mathrm{Tr}(\mathbf{w}_k)\mathbf{y}_{t_k+l} - \det(\mathbf{w}_k)\mathbf{y}_{\psi(t_k+l)}, \quad 0 \leq l < s_{k+1}, \tag{2.4.5}$$

avec $k \geq 1$*. En particulier, le cas* $k-1$ *appliqué avec* $l = s_k - 1$ *donne*

$$\mathbf{y}_{t_k} = \mathrm{Tr}(\mathbf{w}_{k-1})\mathbf{y}_{t_k-1} - \det(\mathbf{w}_{k-1})\mathbf{y}_{\psi(t_k-1)}, \quad k \geq 2, \tag{2.4.6}$$

(c) Formule de récurrence pour la suite $(\mathbf{z}_i)_i$ *:*

$$\begin{cases} \mathbf{z}_{t_k+l+1} = \mathrm{Tr}(\mathbf{w}_k)\mathbf{z}_{t_k+l} - \mathbf{y}_{\psi(t_{k+1})} \wedge \mathbf{y}_{\psi(t_k+l)} & (0 \leq l < s_{k+1} - 1) \\ \mathbf{z}_{t_{k+1}} = \mathrm{Tr}(\mathbf{w}_{k-1})\mathbf{z}_{t_k-1} - \mathbf{y}_{\psi(t_k)} \wedge \mathbf{y}_{\psi(t_k-1)} & (k \geq 2), \end{cases} \tag{2.4.7}$$

la première relation étant valable pour $k \geq 1$*.*

(d) Pour $k \geq 0$ *on a*

$$\det(\mathbf{y}_{t_k-1}, \mathbf{y}_{t_k}, \mathbf{y}_{t_k+1}) = -\det(\mathbf{w}_k)\det(\mathbf{y}_{t_k})\mathrm{Tr}(JN_{k+1}), \tag{2.4.8}$$

en particulier, si N *est non symétrique (ce qui équivaut à* $\mathrm{Tr}(JN) \neq 0$*), alors* $\mathbf{y}_{t_k-1}$*,* $\mathbf{y}_{t_k}$ *et* $\mathbf{y}_{t_k+1}$ *sont linéairement indépendants pour tout* $k \geq 0$*.*

(e) Pour $k \geq 0$ *on a*

$$\mathbf{z}_{t_{k+1}} \wedge \mathbf{z}_{t_k+l} = \det(N_k)\mathrm{Tr}(JN_{k+1})\mathbf{y}_{t_k+l} \quad (0 \leq l < s_{k+1}). \tag{2.4.9}$$

Preuve Soit $k \geq 1$. On suit l'idée de Roy, et en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton pour $\mathbf{w}_k$, on trouve

$$\mathbf{w}_k^2 = \mathrm{Tr}(\mathbf{w}_k)\mathbf{w}_k - \det(\mathbf{w}_k)\mathrm{I}_2, \tag{2.4.10}$$

où I_2 est la matrice identité de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. On prouve alors (2.4.3) en multipliant chaque côté de cette égalité à gauche par $\mathbf{w}_k^{l-2}$, à droite par $\mathbf{w}_{k-1}$ (avec $l \geq 2$), puis en prenant la trace. L'équation (2.4.4) s'obtient par récurrence immédiate en regardant (2.4.3) modulo $\det(\mathbf{w}_k)$.
Pour la récurrence (2.4.5), on part de nouveau de (2.4.10), et en multipliant chaque côté de l'égalité à gauche par $\mathbf{w}_k^l$ (avec $k \geq 1$, $0 \leq l < s_{k+1}$), à droite par $\mathbf{w}_{k-1}N_k$, on trouve

$$\mathbf{w}_k^{l+2}\mathbf{w}_{k-1}N_k = \mathrm{Tr}(\mathbf{w}_k)\mathbf{w}_k^{l+1}\mathbf{w}_{k-1}N_k - \det(\mathbf{w}_k)\mathbf{w}_k^l\mathbf{w}_{k-1}N_k,$$

ce qui, par définition des $\mathbf{y}_i$, se réécrit sous la forme

$$\mathbf{y}_{t_k+l+1} = \mathrm{Tr}(\mathbf{w}_k)\mathbf{y}_{t_k+l} - \det(\mathbf{w}_k)\mathbf{w}_k^l\mathbf{y}_{\psi(t_k)}.$$

Pour conclure il suffit de remarquer que pour $0 < l < s_{k+1}$, on a $\mathbf{y}_{\psi(t_k+l)} = \mathbf{y}_{t_k+l-1} = \mathbf{w}_k^l\mathbf{y}_{\psi(t_k)}$. Remarquons aussi que (2.4.5) est équivalente à (19) de [8].
Montrons (2.4.7). Si $0 \leq l < s_{k+1} - 1$, alors en utilisant (2.4.5) on trouve

$$\mathbf{z}_{t_k+l+1} = \frac{1}{\det(\mathbf{w}_k)}\mathbf{y}_{\psi(t_{k+1})} \wedge \mathbf{y}_{t_k+l+1} = \mathrm{Tr}(\mathbf{w}_k)\mathbf{z}_{t_k+l} - \mathbf{y}_{\psi(t_{k+1})} \wedge \mathbf{y}_{\psi(t_k+l)},$$

ce qui prouve la première relation de (2.4.7). Pour la deuxième relation, en utilisant (2.4.5), on obtient par récurrence sur l, $0 \leq l < s_{k+1}$,

$$\mathbf{y}_{t_k+l} \wedge \mathbf{y}_{t_k+l+1} = \det(\mathbf{w}_k)^l\mathbf{y}_{t_k} \wedge \mathbf{y}_{t_k+1} = \det(\mathbf{w}_k)^{l+1}\mathbf{y}_{\psi(t_k)} \wedge \mathbf{y}_{t_k}. \tag{2.4.11}$$

On en déduit que pour tout vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$,

$$\det(\mathbf{x}, \mathbf{y}_{t_k+l}, \mathbf{y}_{t_k+l+1}) = \det(\mathbf{w}_k)^l \det(\mathbf{x}, \mathbf{y}_{t_k}, \mathbf{y}_{t_k+1}). \tag{2.4.12}$$

L'équation (2.4.11) implique

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{w}_{k+1})\mathbf{z}_{t_{k+1}} = \mathbf{y}_{\psi(t_{k+2})} \wedge \mathbf{y}_{t_{k+1}} &= \mathbf{y}_{t_k+s_{k+1}-1} \wedge \mathbf{y}_{t_k+s_{k+1}} \\ &= \det(\mathbf{w}_k)^{s_{k+1}} \mathbf{y}_{\psi(t_k)} \wedge \mathbf{y}_{t_k}.\end{aligned}$$

Si $k \geq 2$, l'équation (2.4.6) fournit la relation

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_{\psi(t_k)} \wedge \mathbf{y}_{t_k} &= \mathbf{y}_{\psi(t_k)} \wedge \Big(\mathrm{Tr}(\mathbf{w}_{k-1})\mathbf{y}_{t_k-1} - \det(\mathbf{w}_{k-1})\mathbf{y}_{\psi(t_k-1)}\Big) \\ &= \mathrm{Tr}(\mathbf{w}_{k-1}) \det(\mathbf{w}_{k-1})\mathbf{z}_{t_k-1} - \det(\mathbf{w}_{k-1})\mathbf{y}_{\psi(t_k)} \wedge \mathbf{y}_{\psi(t_k-1)}.\end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbf{z}_{t_{k+1}} &= \frac{\det(\mathbf{w}_k)^{s_{k+1}} \det(\mathbf{w}_{k-1})}{\det(\mathbf{w}_{k+1})} \times \Big(\mathrm{Tr}(\mathbf{w}_{k-1})\mathbf{z}_{t_k-1} - \mathbf{y}_{\psi(t_k)} \wedge \mathbf{y}_{\psi(t_k-1)}\Big) \\ &= \mathrm{Tr}(\mathbf{w}_{k-1})\mathbf{z}_{t_k-1} - \mathbf{y}_{\psi(t_k)} \wedge \mathbf{y}_{\psi(t_k-1)},\end{aligned}$$

puisque $\det(\mathbf{w}_{k+1}) = \det(\mathbf{w}_k)^{s_{k+1}} \det(\mathbf{w}_{k-1})$.
Pour prouver (2.4.8), on utilise la formule (2.1) de [49] :

$$\det(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \mathrm{Tr}(J\mathbf{x}J\mathbf{y}J\mathbf{z}),$$

valable pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$. Si $k \geq 1$, on a alors en notant que $J\mathbf{x}J\mathbf{x} = -\det(\mathbf{x})\mathrm{I}_2$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ (cf [49]),

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{y}_{t_k-1}, \mathbf{y}_{t_k}, \mathbf{y}_{t_k+1}) &= \det(\mathbf{y}_{t_k}, \mathbf{y}_{t_k+1}, \mathbf{y}_{t_k-1}) \\ &= \mathrm{Tr}(J\mathbf{y}_{t_k}(J\mathbf{y}_{t_k+1}J)\mathbf{y}_{\psi(t_{k+1})}) \\ &= -\det(\mathbf{y}_{t_k+1})\mathrm{Tr}(J\mathbf{y}_{t_k}\mathbf{y}_{t_k+1}^{-1}\mathbf{y}_{\psi(t_{k+1})}) \\ &= -\det(\mathbf{w}_k\mathbf{y}_{t_k})\mathrm{Tr}\Big(J\mathbf{y}_{t_k}(\mathbf{w}_k\mathbf{y}_{t_k})^{-1}(\mathbf{w}_k N_{k+1})\Big) \\ &= -\det(\mathbf{w}_k)\det(\mathbf{y}_{t_k})\mathrm{Tr}(JN_{k+1}).\end{aligned}$$

Montrons pour finir (2.4.9). Soit $k \geq 0$ et $0 \leq l < s_{k+1}$. L'équation (2.4.11) (pour les deux entiers $s_{k+1} - 1$ et l) fournit l'identité

$$\mathbf{y}_{t_{k+1}-1} \wedge \mathbf{y}_{t_{k+1}} = \det(\mathbf{w}_k)^{s_{k+1}-l-1}\mathbf{y}_{t_k+l} \wedge \mathbf{y}_{t_k+l+1},$$

et en utilisant l'identité $(\mathbf{x}\wedge\mathbf{y})\wedge(\mathbf{y}\wedge\mathbf{z}) = \det(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})\mathbf{y}$ (valable pour tous vecteurs $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ de $\mathbb{R}^3$), on obtient

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{w}_{k+1})\det(\mathbf{w}_k)\mathbf{z}_{t_{k+1}} \wedge \mathbf{z}_{t_k+l} &= (\mathbf{y}_{t_{k+1}-1} \wedge \mathbf{y}_{t_{k+1}}) \wedge (\mathbf{y}_{t_k-1} \wedge \mathbf{y}_{t_k+l}) \\ &= \det(\mathbf{w}_k)^{s_{k+1}-l-1}(\mathbf{y}_{t_k+l} \wedge \mathbf{y}_{t_k+l+1}) \wedge (\mathbf{y}_{t_k-1} \wedge \mathbf{y}_{t_k+l}) \\ &= -\det(\mathbf{w}_k)^{s_{k+1}-l-1}\det(\mathbf{y}_{t_k-1}, \mathbf{y}_{t_k+l}, \mathbf{y}_{t_k+l+1})\mathbf{y}_{t_k+l} \\ &= -\det(\mathbf{w}_k)^{s_{k+1}-1}\det(\mathbf{y}_{t_k-1}, \mathbf{y}_{t_k}, \mathbf{y}_{t_k+1})\mathbf{y}_{t_k+l},\end{aligned}$$

en utilisant (2.4.12) avec $\mathbf{x} = \mathbf{y}_{t_k-1}$ pour obtenir la dernière égalité. Finalement (2.4.8) donne

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{y}_{t_k-1}, \mathbf{y}_{t_k}, \mathbf{y}_{t_k+1}) &= -\det(\mathbf{w}_k)\det(\mathbf{y}_{t_k})\mathrm{Tr}(JN_{k+1}) \\ &= -\det(\mathbf{w}_k)^2\det(\mathbf{w}_{k-1})\det(N)\mathrm{Tr}(JN_{k+1}),\end{aligned}$$

et comme $\det(\mathbf{w}_{k+1}) = \det(\mathbf{w}_k)^{s_{k+1}}\det(\mathbf{w}_{k-1})$, ceci achève la démonstration de (2.4.9). □

Corollaire 2.4.5. *On suppose que $(\mathbf{w}_i)_i$ est une suite ψ-sturmienne de $\mathcal{M}$. Supposons de plus que $\mathrm{Tr}(\mathbf{w}_1^l\mathbf{w}_0)$ et $\det(\mathbf{w}_1^l\mathbf{w}_0)$ soient premiers entre eux pour $l = 0, 1, \ldots, s_2+1$, ainsi que $\mathrm{Tr}(\mathbf{w}_1)$ et $\det(\mathbf{w}_1)$. Alors*

(a) pour tous $k \geq 1$, $0 \leq l \leq s_{k+1}+1$, $\mathrm{Tr}(\mathbf{w}_k^l\mathbf{w}_{k-1})$ et $\det(\mathbf{w}_k^l\mathbf{w}_{k-1})$ sont premiers entre eux,

(b) pour tous $k \geq 1$, $0 \leq l \leq s_{k+1}+1$, la matrice $\mathbf{w}_k^l\mathbf{w}_{k-1}$ est primitive,

(c) le contenu de $\mathbf{y}_j$ divise $\det(N)$ ($j \geq -2$),

(d) le vecteur $\det(\mathbf{w}_2)\mathbf{z}_j$ appartient à $\mathbb{Z}^3$ ($j \geq -1$), et son contenu divise $\det(\mathbf{w}_2)^2\det(N)^2\mathrm{Tr}(JN)$.

Preuve On adapte les arguments de [51, Corollary 4.2] à notre contexte.
On montre (a) par récurrence. Soit $\mathcal{P}(k)$ la propriété « $\mathrm{Tr}(\mathbf{w}_k^l\mathbf{w}_{k-1})$ et $\det(\mathbf{w}_k^l\mathbf{w}_{k-1})$ sont premiers entre eux pour $l = 0, \ldots, s_{k+1}+1$, ainsi que $\mathrm{Tr}(\mathbf{w}_k)$ et $\det(\mathbf{w}_k)$ ». Par hypothèse $\mathcal{P}(1)$ est vraie. Supposons $\mathcal{P}(k_0)$ vraie pour un $k_0 \geq 1$ fixé. Alors les équations fournies par $\mathcal{P}(k_0)$ correspondant à $l = s_{k_0+1}$ et $l = s_{k_0+1}+1$ assurent que $\mathrm{Tr}(\mathbf{w}_{k_0+1})$ et $\det(\mathbf{w}_{k_0+1})$ sont premiers entre eux, ainsi que $\mathrm{Tr}(\mathbf{w}_{k_0}\mathbf{w}_{k_0+1}) = \mathrm{Tr}(\mathbf{w}_{k_0+1}\mathbf{w}_{k_0})$ et $\det(\mathbf{w}_{k_0+1}\mathbf{w}_{k_0})$. Par (2.4.4), on a

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{w}_{k_0+1}^l\mathbf{w}_{k_0}) \equiv \mathrm{Tr}(\mathbf{w}_{k_0+1})^{l-1}\mathrm{Tr}(\mathbf{w}_{k_0+1}\mathbf{w}_{k_0}) \mod \det(\mathbf{w}_{k_0+1}) \quad (l \geq 2).$$

Il suffit maintenant de remarquer que pour tout $l \geq 2$, $\det(\mathbf{w}_{k_0+1}^l\mathbf{w}_{k_0})$ a les mêmes facteurs premiers que $\det(\mathbf{w}_{k_0+1})$ (et que $\det(\mathbf{w}_2)$), donc l'équation précédente assure que $\mathrm{Tr}(\mathbf{w}_{k_0+1}^l\mathbf{w}_{k_0})$ et $\det(\mathbf{w}_{k_0+1}^l\mathbf{w}_{k_0})$ sont premiers entre eux. Donc $\mathcal{P}(k_0+1)$ est vraie, ce qui achève la récurrence.
L'assertion (b) découle immédiatement de (a) puisque le contenu d'une matrice $\mathbf{w}$ divise toujours sa trace et son déterminant.
Soit $k \geq 0$ et $0 \leq l < s_{k+1}$. Par définition, on a $\mathbf{y}_{t_k+l} = \mathbf{w}_k^{l+1}\mathbf{w}_{k-1}N_k$, donc

$$\mathbf{y}_{t_k+l}\mathrm{Adj}(N_k) = \det(N)\mathbf{w}_k^{l+1}\mathbf{w}_{k-1},$$

où $\mathrm{Adj}(N_k)$ désigne la transposée de la comatrice de N_k. En particulier, comme $\mathbf{w}_k^{l+1}\mathbf{w}_{k-1}$ est primitive, le contenu de $\mathbf{y}_{t_k+l}$ divise $\det(N)$ (le même argument permet de traiter les cas y_{-1} et y_{-2}) ce qui prouve (c).
Montrons enfin (d). Le fait que $\det(\mathbf{w}_2)\mathbf{z}_{t_k+l}$ appartienne à $\mathbb{Z}^3$ pour $k = 0, 1, 2$ et $0 \leq l < s_{k+1}$ est immédiat par définition de $\mathbf{z}_{t_k+l}$ et parce que $\det(\mathbf{w}_1)$ et $\det(\mathbf{w}_0)$ divisent $\det(\mathbf{w}_2)$. Les récurrences de (2.4.7) montrent alors que $\det(\mathbf{w}_2)\mathbf{z}_j \in \mathbb{Z}^3$ pour tout $j \geq 0$. De plus, le contenu de $\det(\mathbf{w}_2)\mathbf{z}_{t_k+l}$ divise celui de $\det(\mathbf{w}_2)^2\mathbf{z}_{t_{k+1}} \wedge \mathbf{z}_{t_k+l}$, donc par (2.4.9) et par (c), divise $\det(\mathbf{w}_2)^2\det(N)^2\mathrm{Tr}(JN)$. □

2.5 Suites ψ-sturmiennes à croissance multiplicative

Dans cette partie nous montrons que sous une hypothèse de croissance multiplicative il existe un réel $\delta \geq 0$ tel que $|\det(\omega_k)| \asymp \|\omega_k\|^\delta$ (voir Proposition 2.5.9). Ce réel δ jouera un rôle essentiel pour déterminer les exposants diophantiens associés à ξ, et il est nécessaire pour définir les nombres ψ-sturmiens propres. Rappelons qu'on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^3$.

Définition 2.5.1. On définit la norme $\|\mathbf{w}\|$ d'une matrice $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ par la formule $\|\mathbf{w}\| = \sqrt{a^2 + (b^2+c^2)/2 + d^2}$. Avec cette définition, il n'y a pas d'ambiguïté quand on note $\|\mathbf{y}\|$, avec $\mathbf{y}$ vu comme un vecteur de $\mathbb{R}^3$ ou comme la matrice symétrique de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ associée.
Soit $(\mathbf{w}_i)_{i\geq 0}$ une suite ψ-sturmienne de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. On dit que $(\mathbf{w}_i)_i$ est *à croissance multiplicative* s'il existe deux constantes c_1 et $c_2 > 0$ telles que pour tout entier $k \geq 1$, pour tout $1 \leq l \leq s_{k+1}+1$, on ait

$$c_1\|\mathbf{w}_k\| \times \|\mathbf{w}_k^{l-1}\mathbf{w}_{k-1}\| \leq \|\mathbf{w}_k^l\mathbf{w}_{k-1}\| \leq c_2\|\mathbf{w}_k\| \times \|\mathbf{w}_k^{l-1}\mathbf{w}_{k-1}\|, \tag{2.5.1}$$

ce qu'on peut écrire de manière plus condensée

$$\|\mathbf{w}_k^l\mathbf{w}_{k-1}\| \asymp \|\mathbf{w}_k\| \times \|\mathbf{w}_k^{l-1}\mathbf{w}_{k-1}\|$$

pour $k \geq 1$, $1 \leq l \leq s_{k+1}+1$.

Remarque 2.5.2. Comme en dimension finie toutes les normes sont équivalentes, la propriété d'être à croissance multiplicative ne dépend pas du choix de la norme : si $\|\cdot\|'$ est une autre norme sur $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, alors $\|\mathbf{w}_k^l\mathbf{w}_{k-1}\| \asymp \|\mathbf{w}_k\| \times \|\mathbf{w}_k^{l-1}\mathbf{w}_{k-1}\|$ si et seulement si $\|\mathbf{w}_k^l\mathbf{w}_{k-1}\|' \asymp \|\mathbf{w}_k\|' \times \|\mathbf{w}_k^{l-1}\mathbf{w}_{k-1}\|'$ (les constantes implicites des symboles $\asymp$ dépendant des normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$).
Toutes les propositions et estimations de cette partie restent vraies en remplaçant la norme $\|\cdot\|$ par la norme de son choix (et en adaptant les constantes implicites quand elles sont utilisées d'une manière explicite comme dans la Proposition 2.5.9 ci-dessous).

Il n'est pas évident a priori de montrer qu'une suite ψ-sturmienne donnée est à croissance multiplicative. Une condition suffisante sera démontrée et utilisée au Chapitre 4 (voir la Proposition 4.5.9 de la Partie 4.5.3). Dans le contexte actuel le plus important est de pouvoir construire des exemples de suites ψ-sturmiennes à croissance multiplicative. Pour cela on utilise le lemme suivant, qui découle de la preuve de [51, Lemma 5.1] ; voir Partie 2.8.1 pour davantage de détails.

Lemme 2.5.3. *Soit $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1 \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ toutes deux de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $1 \leq a \leq \min\{b,c\} \leq \max\{b,c\} \leq d$. Alors la suite ψ-sturmienne définie par $\mathbf{w}_0$ et $\mathbf{w}_1$ est à croissance multiplicative. Avec $\|\cdot\|_\infty$ (définie comme le maximum des valeurs absolues des coefficients) à la place de $\|\cdot\|$, on peut prendre $c_1 = 1$ et $c_2 = 2$ dans* (2.5.1).

On utilisera aussi de façon cruciale le résultat suivant [8, Lemma 4.1]. Par ailleurs, nous donnons dans le Lemme 2.5.8 une version améliorée et optimale de ce résultat.

Lemme 2.5.4 (Bugeaud-Laurent, 2005)**.** *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels > 0 qui diverge vers l'infini, et $(s_n)_{n\geq 1}$ une suite d'entiers naturels non nuls. Supposons qu'il existe $c \geq 1$ tel que*

$$c^{-s_{n+1}} X_n^{s_{n+1}} X_{n-1} \leq X_{n+1} \leq c^{s_{n+1}} X_n^{s_{n+1}} X_{n-1} \quad (n \geq 1).$$

Pour $n \geq 0$, on définit μ_n par $X_{n+1} = X_n^{\mu_n}$. Alors quand n tend vers l'infini, on a

$$\mu_n = [s_{n+1}\,; s_n, \ldots, s_1](1 + o(1)).$$

Le lemme suivant complète le Lemme 2.5.4 ; c'est un lemme technique que nous utiliserons pour avoir des informations sur l'asymptotique de suites ψ-sturmiennes à croissance multiplicative. Il servira principalement dans la preuve de la Proposition 2.5.6.

Lemme 2.5.5. *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels > 0 qui vérifie les hypothèses du Lemme 2.5.4. Alors*

(a) La suite $(\log(X_n))_n$ est strictement croissante à partir d'un certain rang.

(b) On a $\liminf_{n\to+\infty} \frac{\log(X_{n+2})}{\log(X_n)} > 1$.

(c) Il existe $\lambda > 1$ tel que $\log(X_n) \gg \lambda^n$.

(d) La suite $(1/\log(X_n))_n$ est sommable et on a

$$\sum_{k\geq n} \frac{1}{\log(X_k)} \asymp \frac{1}{\log(X_n)},$$

quand n tend vers l'infini.

Preuve Commençons par (a). Comme la suite $(\log(X_n))_n$ diverge vers $+\infty$, il existe $N \geq 1$ tel que pour tout $n \geq N$, $\log(X_{n-1}) + \log(c) > 0$, où c est la constante intervenant dans le Lemme 2.5.4. Pour tout $n \geq N$, par hypothèse de croissance sur $(X_n)_n$ on a

$$\begin{aligned}\log(X_{n+1}) &\geq s_{n+1}\Big(\log(X_n) + \log(c)\Big) + \log(X_{n-1}) \\ &\geq \Big(\log(X_n) + \log(c)\Big) + \log(X_{n-1}) \\ &> \log(X_n),\end{aligned}$$

par choix de N. Donc la suite $(\log(X_n))_n$ est strictement croissante à partir du rang N. Montrons maintenant (b). Pour cela, on définit μ_n par la relation $\log(X_{n+1}) = \mu_n \log(X_n)$. D'après le Lemme 2.5.4 on a $\mu_n = (1 + o(1))[s_{n+1}; s_n, \ldots, s_1]$. En particulier

$$\begin{aligned}\frac{\log(X_{n+2})}{\log(X_n)} = \mu_{n+1}\mu_n &= (1 + o(1))[s_{n+2}; s_{n+1}, \ldots, s_1][s_{n+1}; s_n, \ldots, s_1] \\ &\geq (1 + o(1))\Big(1 + \frac{1}{s_{n+1} + 1}\Big) \times s_{n+1} \\ &\geq (1 + o(1)) \times \frac{3}{2},\end{aligned}$$

par croissance de la fonction $x \to \Big(1+1/(x+1)\Big)\times x$ sur $[1, +\infty[$, d'où le résultat annoncé. On en déduit l'existence de $\lambda > 1$ tel que

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{\log(X_{n+2})}{\log(X_n)} > \lambda^2 > 1, \tag{2.5.2}$$

et un tel réel λ vérifie $\log(X_n) \gg (\lambda^2)^{n/2} = \lambda^n$, d'où (c). En particulier, la suite $(1/\log(X_n))_n$ est sommable. On pose

$$R_n = \sum_{k \geq n} \frac{1}{\log(X_k)} < +\infty.$$

Pour n assez grand on a la minoration triviale $R_n \geq 1/\log(X_n)$. D'autre part, on a (pour n assez grand et en choisissant λ qui vérifie (2.5.2))

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{1}{\log(X_n)} + \frac{1}{\log(X_{n+1})} + \sum_{k \geq n} \frac{1}{\log(X_{k+2})} \\ &\leq \frac{1}{\log(X_n)} + \frac{1}{\log(X_{n+1})} + \sum_{k \geq n} \frac{1}{\lambda^2 \log(X_k)} \\ &\leq \frac{2}{\log(X_n)} + \frac{1}{\lambda^2} R_n, \end{aligned}$$

d'où

$$(1 - \frac{1}{\lambda^2}) R_n \leq \frac{2}{\log(X_n)},$$

ce qui achève la démonstration de l'assertion (d). □

La propriété suivante est essentielle pour permettre de construire le 3-système de la Partie 2.7 (cf Figure 2.2), étape cruciale dans le calcul des exposants $\lambda_2, \widehat{\lambda}_2, \omega_2$ et $\widehat{\omega}_2$ d'un nombre ψ-sturmien propre.

Proposition 2.5.6. *Soit $(\mathbf{w}_k)_{k \geq 0}$ une suite ψ-sturmienne de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ à croissance multiplicative telle que $(\|\mathbf{w}_k\|)_k$ diverge vers l'infini, et $(D_k)_{k \geq 0}$ une suite de réels supérieurs ou égaux à 1 vérifiant la récurrence*

$$D_{k+1} = D_k^{s_{k+1}} D_{k-1} \quad \textit{pour tout } k \geq 1. \tag{2.5.3}$$

Alors il existe un réel $\delta \geq 0$ tel que

$$D_k \asymp \|\mathbf{w}_k\|^{\delta}. \tag{2.5.4}$$

En particulier, il existe une suite $(\widehat{W}_k)_{k \geq 0}$ de réels strictement positifs, vérifiant (2.5.3) *et telle que*

$$\widehat{W}_k \asymp \|\mathbf{w}_k\|.$$

Remarque 2.5.7. Comme en dimension finie toutes les normes sont équivalentes, les estimations de la Proposition 2.5.6 restent vraies pour le choix de n'importe quelle norme (les constantes implicites des symboles $\asymp$ dépendant bien sûr de la norme choisie). Par ailleurs, puisque $(\|\mathbf{w}_k\|)$ diverge vers l'infini (cette propriété restant vraie pour n'importe quel choix de norme), la constante δ de l'équation (2.5.4) ne dépend pas du choix de la norme considérée. Voir aussi la Remarque 2.5.2 faite en début de partie.

L'intérêt de cette proposition est de pouvoir "remplacer" la suite $(\|\mathbf{w}_k\|)_k$ qui vérifie à constante multiplicative près la relation de récurrence (2.5.3) par la suite $(\widehat{W}_k)_{k \geq 0}$ qui la vérifie exactement. C'est aussi elle qui permet d'établir l'existence d'un réel δ tel

que $|\det(\mathbf{w}_k)| \asymp \|\mathbf{w}_k\|^\delta$ (voir Proposition 2.5.9). L'une des difficultés consiste à montrer qu'on obtient des constantes multiplicatives $\asymp 1$.

Preuve Pour tout $k \geq 0$, on note $W_k = \|\mathbf{w}_k\|$ et on fixe $(D_k)_{k\geq 0}$ une suite de réels supérieurs à 1 satisfaisant la récurrence (2.5.3). Quitte à supprimer un nombre fini de termes, on peut supposer $W_k \geq 2$ pour tout k. Par croissance multiplicative, la suite $(W_k)_k$ satisfait les hypothèses du Lemme 2.5.5. Commençons par montrer que

$$\log(D_k) = \mathcal{O}(\log(W_k)). \tag{2.5.5}$$

Par croissance multiplicative, il existe une constante $M > 0$ telle que

$$s_{k+1}(\log(W_k) - M) + \log(W_{k-1}) \leq \log(W_{k+1}), \tag{2.5.6}$$

pour tout k assez grand. D'après l'assertion (c) du Lemme 2.5.5, il existe $k_0 \geq 1$ tel que

$$\Big(1 - \frac{1}{k}\Big)\log(W_k) \leq \Big(1 - \frac{1}{k+1}\Big)\Big(\log(W_k) - M\Big), \tag{2.5.7}$$

pour tout $k \geq k_0$. Soit maintenant $C > 0$ tel que

$$C\log(D_k) \leq \Big(1 - \frac{1}{k}\Big)\log(W_k) \tag{2.5.8}$$

pour $k = k_0 - 1, k_0$. Montrons par récurrence sur k que (2.5.8) est valable pour tout $k \geq k_0$. Supposons que cela soit vrai pour $k-1$ et k. Alors

$$\begin{aligned}
C\log(D_{k+1}) &= s_{k+1}C\log(D_k) + C\log(D_{k-1}) \\
&\leq s_{k+1}\Big(1 - \frac{1}{k}\Big)\log(W_k) + \Big(1 - \frac{1}{k-1}\Big)\log(W_{k-1}) \\
&\leq s_{k+1}\Big(1 - \frac{1}{k+1}\Big)\Big(\log(W_k) - M\Big) + \Big(1 - \frac{1}{k+1}\Big)\log(W_{k-1}) \\
&\leq \Big(1 - \frac{1}{k+1}\Big)\log(W_{k+1})\ ;
\end{aligned}$$

en effet la première inégalité est donnée par l'hypothèse de récurrence (pour k et $k-1$), la deuxième provient de (2.5.7), et la troisième de (2.5.6). Donc (2.5.8) est vraie pour tout $k \geq k_0$; en particulier cela prouve (2.5.5).
On définit maintenant ε_k par

$$\varepsilon_k = \log(W_k) \times \Big(\frac{\log(D_{k+1})}{\log(W_{k+1})} - \frac{\log(D_k)}{\log(W_k)}\Big).$$

Montrons que $\varepsilon_k = \mathcal{O}(1)$. Pour tout $k \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
\varepsilon_k &= \frac{\log(W_k)\log(D_{k+1}) - \log(D_k)\log(W_{k+1})}{\log(W_{k+1})} \\
&= \frac{\log(W_k)\Big(s_{k+1}\log(D_k) + \log(D_{k-1})\Big) - \log(D_k)\Big(s_{k+1}\log(W_k) + \log(W_{k-1}) + \mathcal{O}(s_{k+1})\Big)}{\log(W_{k+1})} \\
&= \frac{\log(W_k)\log(D_{k-1}) - \log(D_k)\log(W_{k-1})}{\log(W_{k+1})} + \mathcal{O}\Big(\frac{s_{k+1}\log(D_k)}{\log(W_{k+1})}\Big) \\
&= -\frac{\log(W_k)}{\log(W_{k+1})}\varepsilon_{k-1} + \mathcal{O}(1),
\end{aligned}$$

puisque $s_{k+1}\log(D_k)/\log(W_{k+1}) \leq \log(D_{k+1})/\log(W_{k+1}) = \mathcal{O}(1)$ par (2.5.5). Cela implique immédiatement

$$\varepsilon_k = \frac{\log(W_{k-1})}{\log(W_{k+1})}\varepsilon_{k-2} + \mathcal{O}(1).$$

Par l'assertion (b) du Lemme 2.5.5, il existe $\mu > 0$ et $k_0 \geq 1$ tels que

$$\frac{\log(W_k)}{\log(W_{k+2})} < \mu < 1$$

pour tout $k \geq k_0$. D'après les calculs précédents, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|\varepsilon_{k+2}| \leq \mu|\varepsilon_k| + C,$$

pour tout k. Remarquons que d'un côté on a

$$|\varepsilon_k| \geq \frac{C}{1-\mu} \Rightarrow |\varepsilon_{k+2}| \leq |\varepsilon_k|,$$

et de l'autre

$$|\varepsilon_k| \leq \frac{C}{1-\mu} \Rightarrow |\varepsilon_{k+2}| \leq \frac{C}{1-\mu}.$$

Ceci assure que pour tout $k \geq k_0$,

$$|\varepsilon_k| \leq \max\left\{|\varepsilon_{k_0}|, |\varepsilon_{k_0+1}|, \frac{C}{1-\mu}\right\},$$

donc on a bien $\varepsilon_k = \mathcal{O}(1)$.
Finalement, comme $1/\log(W_k)$ est sommable par l'assertion (d) du Lemme 2.5.5, il en va de même de

$$\frac{\varepsilon_k}{\log(W_k)} = \frac{\log(D_{k+1})}{\log(W_{k+1})} - \frac{\log(D_k)}{\log(W_k)},$$

et ceci assure l'existence d'un réel $\delta \geq 0$ tel que $\log(D_k)/\log(W_k) \to \delta$ quand k tend vers l'infini. En outre on a

$$\begin{aligned}\left|\delta - \frac{\log(D_k)}{\log(W_k)}\right| &\leq \left|\sum_{j\geq k}\frac{\varepsilon_j}{\log(W_j)}\right| \\ &\leq \mathcal{O}\Big(\sum_{j\geq k}\frac{1}{\log(W_j)}\Big) \\ &\leq \mathcal{O}\Big(\frac{1}{\log(W_k)}\Big).\end{aligned}$$

Finalement, on a bien $\log(D_k) = \delta\log(W_k) + \mathcal{O}(1)$, ce qui prouve la première partie du lemme.
Pour la deuxième assertion, il suffit de prendre $(D_k)_k$ une suite suivant la récurrence (2.5.3), de premiers termes $D_0, D_1 > 1$. Une telle suite diverge vers $+\infty$, et donc le réel $\delta \geq 0$ précédent ne peut pas être nul. On pose alors $\widehat{W}_k := D_k^{1/\delta}$. □

Comme Damien Roy, rapporteur de cette thèse, nous l'a fait aimablement remarquer – et nous l'en remercions – la preuve de la Proposition 2.5.6 permet de donner un énoncé amélioré et optimal du Lemme 2.5.4 de Bugeaud et Laurent en remplaçant le $X_n^{o(1)}$ qui apparaît implicitement par un $\mathcal{O}(1)$:

Lemme 2.5.8. *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels > 0 qui diverge vers l'infini, et $(s_n)_{n\geq 1}$ une suite d'entiers naturels non nuls. Supposons qu'il existe $c \geq 1$ tel que*

$$c^{-s_{n+1}} X_n^{s_{n+1}} X_{n-1} \leq X_{n+1} \leq c^{s_{n+1}} X_n^{s_{n+1}} X_{n-1} \quad (n \geq 1).$$

Pour $n \geq 0$, on définit μ_n par

$$\mu_n = [s_{n+1}\ ; s_n, \ldots, s_1].$$

Alors quand n tend vers l'infini, on a $X_{n+1} \asymp X_n^{\mu_n}$.

Preuve Comme nous l'a fait remarquer Roy, un exemple de suite D_k qui satisfait la relation de récurrence (2.5.3) et qui est non bornée est la suite $\exp(q_k)$ où q_k désigne le dénominateur de la k-ième réduite de la pente $\varphi = [0; s_1, s_2, \ldots]$. Donc sous les hypothèses du lemme 2.5.4, la preuve de la Proposition 2.5.6 nous assure l'existence d'une constante $c > 0$ telle que $X_k \asymp \exp(c.q_k)$, et par suite en posant

$$\mu_n = q_{n+1}/q_n = [s_{n+1}, s_n, \ldots, s_1],$$

on obtient $X_{n+1}^{1/\mu_n} \asymp X_n$ (que $(s_k)_k$ soit bornée ou non), ce qui généralise un résultat de Roy pour la récurrence de Fibonacci.

□

Proposition 2.5.9. *Soit $(\mathbf{w}_k)_{k\geq 0}$ une suite ψ-sturmienne de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z})$ à croissance multiplicative telle que $(\|\mathbf{w}_k\|)_k$ diverge vers l'infini. Alors il existe $0 \leq \delta \leq 2$ tel que*

$$|\det(\mathbf{w}_k)| \asymp \|\mathbf{w}_k\|^{\delta}. \tag{2.5.9}$$

Soient c_1, c_2 des constantes implicites de la croissance multiplicative telles que (2.5.1) soit vérifiée. Supposons qu'il existe $\alpha, \beta \geq 0$ telles que la relation

$$(c_2\|\mathbf{w}_k\|)^{\alpha} \leq |\det(\mathbf{w}_k)| \leq (c_1\|\mathbf{w}_k\|)^{\beta}, \tag{2.5.10}$$

soit vraie pour $k = 0, 1$. Alors cette relation est vraie pour tout $k \geq 0$; en particulier on a l'encadrement

$$\alpha \leq \delta \leq \beta.$$

Remarque 2.5.10. La Proposition 2.5.9 reste vraie en remplaçant la norme $\|\cdot\|$ par la norme de son choix, et en remplaçant les constantes c_1 et c_2 de (2.5.10) par des constantes telles que (2.5.1) soit vérifiée avec le choix de cette nouvelle norme. Par ailleurs, puisque $(\|\mathbf{w}_k\|)$ diverge vers l'infini (cette propriété restant vraie pour n'importe quelle choix de norme), la constante δ de l'équation (2.5.9) ne dépend pas du choix de la norme considérée. Voir aussi la Remarque 2.5.2 faite en début de partie.

Remarque 2.5.11. Dans la Proposition 3.3.1 du Chapitre 3 on donne une version un peu plus générale de la première partie de la Proposition 2.5.9 donnant l'existence de δ : on peut affaiblir l'hypothèse $\mathbf{w}_k \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z})$ pour tout k.

Preuve Dans cette preuve, on fixe une $\|\cdot\|$ sur $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, qui n'est nécessairement définie comme dans la Définition 2.5.1.
La Proposition 2.5.6 appliquée à la suite $(D_k)_{k\geq 0} = (|\det(\mathbf{w}_k)|)_{k\geq 0}$ fournit l'existence de $\delta \geq 0$ tel que $|\det(\mathbf{w}_k)| \asymp \|\mathbf{w}_k\|^\delta$. De plus, puisque $|\det(\mathbf{w}_k)| \ll \|\mathbf{w}_k\|^2$, on a toujours $\delta \leq 2$.
Pour prouver la seconde assertion, on reprend les arguments de Roy (cf [51, Proposition 5.3]) et on procède par récurrence, (2.5.10) étant vraie pour $k = 0, 1$. Rappelons que la croissance multiplicative nous donne

$$(c_1\|\mathbf{w}_{k+1}\|)^{s_{k+2}}\|\mathbf{w}_k\| \leq \|\mathbf{w}_{k+2}\| \leq (c_2\|\mathbf{w}_{k+1}\|)^{s_{k+2}}\|\mathbf{w}_k\| \quad (k \geq 0).$$

Supposons que la relation (2.5.10) soit vérifiée pour $k = j$ et $k = j + 1$ (pour un indice $j \geq 0$). On a alors

$$\begin{aligned}|\det(\mathbf{w}_{j+2})| = |\det(\mathbf{w}_{j+1})|^{s_{j+2}}|\det(\mathbf{w}_j)| &\leq \Big((c_1\|\mathbf{w}_{j+1}\|)^{s_{j+2}}(c_1\|\mathbf{w}_j\|)\Big)^\beta \\ &\leq (c_1\|\mathbf{w}_{j+2}\|)^\beta,\end{aligned}$$

et de manière similaire $|\det(\mathbf{w}_{j+2})| \geq (c_2\|\mathbf{w}_{j+2}\|)^\alpha$. Donc (2.5.10) est valable pour $k = j + 2$, ce qui achève la récurrence. □

Remarque. Dans la Partie 2.8.1, on verra que les exemples de Roy (cf [51, Example 5.4]) satisfont à (2.5.10) (qui correspond à (12) de [51]).

2.6 Construction des nombres de type sturmien

Le but principal de cette Partie est d'établir la notion de nombre ψ-sturmien propre et d'en démontrer l'existence (voir Proposition 2.6.1). Rappelons que $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^3$, et qu'on a défini la norme $\|\mathbf{w}\|$ d'une matrice $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ par la formule $\|\mathbf{w}\| = \sqrt{a^2 + (b^2 + c^2)/2 + d^2}$. Avec cette définition, il n'y a pas d'ambiguïté quand on note $\|\mathbf{y}\|$, avec $\mathbf{y}$ vu comme un vecteur de $\mathbb{R}^3$ ou comme la matrice symétrique de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ associée. Toutes les estimations des énoncés de cette partie restent vraies en prenant une autre norme à la place de $\|\cdot\|$ (les constantes implicites des symboles $\ll$, $\gg$ et $\asymp$ dépendent alors du choix de cette norme).
Dans le contexte de ce chapitre – notamment dans cette partie – on considère principalement des suites ψ-sturmiennes de $\mathcal{M}$ (voir Définition 2.4.1). Dans le Chapitre 4 on considérera cependant des suites ψ-sturmiennes de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ qui ne sont pas forcément à coefficients entiers (ni même rationnels). Notons que la plupart des résultats présentés dans ce chapitre restent vrais pour une suite ψ-sturmienne de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, notamment les propriétés asymptotiques des suites ψ-sturmiennes. L'une des différences les plus notables entre les deux cas est la deuxième partie de la Proposition 2.6.1 : si on enlève l'hypothèse que la suite $(\mathbf{w}_i)_i$ est constituée de matrices à coefficients entiers, le vecteur limite $\mathbf{y}$ n'est pas forcément de la forme $\mathbf{y} = (1, \xi, \xi^2)$, avec ξ qui n'est pas algébrique de degré ≤ 2. Ce n'est toutefois guère gênant puisque dans le Chapitre 4 on part en quelque sorte d'un vecteur limite de cette forme pour construire une suite ψ-sturmienne associée.

Notation. Dans cette partie, $(\mathbf{w}_i)_{i\geq 0}$ est une suite ψ-sturmienne de $\mathcal{M}$, admissible et à croissance multiplicative telle que $(\|\mathbf{w}_i\|)_i$ diverge vers $+\infty$. On note N, $(\mathbf{y}_i)_{i\geq -2}$ et $(\mathbf{z}_i)_{i\geq -1}$ la matrice de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et les suites de matrices symétriques qui lui sont associées par la Définition 2.3.6 et par (2.4.2). On suppose par ailleurs que $\mathrm{Tr}(JN) \neq 0$ (*i.e.* N n'est pas symétrique). Enfin, on note $\delta \geq 0$ l'exposant donné par la Proposition 2.5.9 vérifiant

$$|\det(\mathbf{w}_i)| \asymp \|\mathbf{w}_i\|^{\delta}.$$

Proposition 2.6.1. *On suppose $\delta < 2$. Alors il existe $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ tel que $\det(\mathbf{y}) = 0$ et*

$$\|\mathbf{y}_i \wedge \mathbf{y}\| \ll \frac{|\det(\mathbf{y}_i)|}{\|\mathbf{y}_i\|}.$$

Si on a $\delta < 1$, les coordonnées de $\mathbf{y}$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$ et on peut supposer $\mathbf{y} = (1, \xi, \xi^2)$ pour un réel ξ vérifiant $[\mathbb{Q}(\xi) : \mathbb{Q}] > 2$. Un tel nombre ξ est appelé nombre ψ-sturmien. Si $\delta < \frac{\sigma}{1+\sigma}$, où

$$\sigma = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty}[s_{k+1}; s_k, \ldots, s_1]},$$

et si le contenu des $\mathbf{y}_i$ est borné, on dit que ξ est propre.

Remarque 2.6.2. Les estimations de la Proposition 2.6.1 restent vraies pour le choix de n'importe quelle norme (la constante implicite du symbole $\ll$ dépend bien sûr de la norme choisie).

Définition 2.6.3. On dit qu'un nombre ξ est de *type sturmien* s'il existe $\psi \in \mathcal{F}_{stur}$ telle que ξ soit un nombre ψ-sturmien propre.

Remarque 2.6.4. Dans la définition de nombre ψ-sturmien propre, on peut remplacer l'hypothèse "le contenu des $\mathbf{y}_i$ borné" par "le contenu des $\mathbf{w}_k$ borné" (c'est équivalent). En effet, par (2.3.4) le contenu des $\mathbf{w}_k$ est borné si et seulement si celui des $\mathbf{y}_{\psi(t_{k+1})}$ l'est, et on conclut en remarquant que le contenu de $\mathbf{y}_i$ divise toujours celui de $\mathbf{y}_{i+1}$ (en vertu de l'assertion (b) de la Proposition 2.3.7).

Remarque 2.6.5. Le Corollaire 2.4.5 montre que si $\mathrm{Tr}(\mathbf{w}_1^l\mathbf{w}_0)$ et $\det(\mathbf{w}_1^l\mathbf{w}_0)$ sont premiers entre eux pour $l = 0, 1, \ldots, s_2 + 1$, ainsi que $\mathrm{Tr}(\mathbf{w}_1)$ et $\det(\mathbf{w}_1)$, alors le contenu des $\mathbf{y}_i$ est borné. Cette hypothèse est satisfaite pour les matrices de la Partie 2.8.1.

Preuve Si la Proposition 2.6.1 est vraie pour une norme particulière, alors elle est vraie pour n'importe quel choix de norme. Nous choisissons de la prouver ici avec la norme $\|\cdot\|_\infty$ (définie comme étant le maximum des valeurs absolues des coefficients) plutôt que la norme $\|\cdot\|$.
On adapte les arguments de la démonstration de la Proposition 6.1 de [51]. Soit $i \geq 0$. On écrit $i = t_k + l$ avec $k \geq 0$ et $0 \leq l < s_{k+1}$. Montrons que

$$\|\mathbf{y}_i \wedge \mathbf{y}_{i+1}\|_\infty \ll |\det(\mathbf{y}_i)| \times \|\mathbf{w}_k\|_\infty. \tag{2.6.1}$$

En effet, comme le fait remarquer Roy, on a

$$\|\mathbf{x}\wedge\mathbf{z}\|_\infty \le 2\|\mathbf{x}J\mathbf{z}\|_\infty \quad \text{pour tous } \mathbf{x},\mathbf{z}\in\mathbb{R}^3, \tag{2.6.2}$$

puisque les coefficients de la diagonale de $\mathbf{x}J\mathbf{z}$ coïncident avec le premier et troisième coefficients de $\mathbf{x}\wedge\mathbf{z}$, et parce qu'au signe près, le deuxième coefficient de $\mathbf{x}\wedge\mathbf{z}$ est égal à la somme des coefficients anti-diagonaux de $\mathbf{x}J\mathbf{z}$. Or d'après la Proposition 2.3.7 (b) et en utilisant le fait que $\mathbf{y}_{i+1}$ et $\mathbf{y}_i$ sont symétriques, on a

$$\|\mathbf{y}_i J\mathbf{y}_{i+1}\|_\infty = \|\mathbf{y}_i J(\mathbf{y}_i{}^t\mathbf{w}_k)\|_\infty = \|\det(\mathbf{y}_i)J{}^t\mathbf{w}_k\|_\infty = |\det(\mathbf{y}_i)|\,\|\mathbf{w}_k\|_\infty$$

(rappelons qu'on a la formule $\mathbf{x}J\mathbf{x}=\det(\mathbf{x})J$ pour tout vecteur $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$). En utilisant l'estimation précédente et (2.6.2) avec $\mathbf{x}=\mathbf{y}_i$ et $\mathbf{z}=\mathbf{y}_{i+1}$, on trouve (2.6.1), qu'on pourra comparer à (16) de [51].
On définit $\delta_i = |\det(\mathbf{y}_i)|/\|\mathbf{y}_i\|_\infty^2$. Montrons qu'il existe $c>0$ telle que

$$\operatorname{dist}(\mathbf{y}_i,\mathbf{y}_{i+1}) \le c\delta_i \tag{2.6.3}$$

(on pourra comparer cette estimation avec (19) de [51]). En effet, par (2.3.3) et par croissance multiplicative, en notant $c_1,c_2>0$ les constantes de (2.5.1), on a

$$\begin{aligned}\|\mathbf{y}_{i+1}\|_\infty = \|\mathbf{w}_k^{l+2}\mathbf{w}_{k-1}N_k\|_\infty &\le 2\|N\|_\infty\,\|\mathbf{w}_k^{l+2}\mathbf{w}_{k-1}\|_\infty\\ &\le 2c_2\|N\|_\infty\,\|\mathbf{w}_k\|_\infty\,\|\mathbf{w}_k^{l+1}\mathbf{w}_{k-1}\|_\infty\\ &\le (4c_2\|N\|_\infty\,\|N^{-1}\|_\infty)\,\|\mathbf{w}_k\|_\infty\,\|\mathbf{w}_k^{l+1}\mathbf{w}_{k-1}N_k\|_\infty\\ &= (4c_2\|N\|_\infty\,\|N^{-1}\|_\infty)\,\|\mathbf{w}_k\|_\infty\,\|\mathbf{y}_i\|_\infty,\end{aligned}$$

et de même on montre que

$$\|\mathbf{y}_{i+1}\|_\infty \ge \left(4c_1^{-1}\|N\|_\infty\,\|N^{-1}\|_\infty\right)^{-1}\|\mathbf{w}_k\|_\infty\,\|\mathbf{y}_i\|_\infty,$$

donc

$$\|\mathbf{y}_{i+1}\|_\infty \asymp \|\mathbf{w}_k\|_\infty\,\|\mathbf{y}_i\|_\infty. \tag{2.6.4}$$

On conclut alors la preuve de (2.6.3) en appliquant (2.6.1). Par ailleurs, le quotient δ_{i+1}/δ_i tend vers 0 lorsque i tend vers l'infini puisque

$$\frac{\delta_{i+1}}{\delta_i} = \left(\frac{\|\mathbf{y}_i\|_\infty}{\|\mathbf{y}_{i+1}\|_\infty}\right)^2\frac{|\det(\mathbf{y}_{i+1})|}{|\det(\mathbf{y}_i)|} \asymp \frac{|\det(\mathbf{w}_k)|}{\|\mathbf{w}_k\|_\infty^2} \asymp \|\mathbf{w}_k\|_\infty^{\delta-2} \longrightarrow 0 \quad \text{car } \delta<2.$$

On suit les arguments de Roy : par ce qui précède, il existe un indice $i_0\ge 1$ tel que $\delta_{i+1}\le\delta_i/2$ pour tout $i\ge i_0$. On trouve alors pour $j>i>i_0$

$$\operatorname{dist}(\mathbf{y}_i,\mathbf{y}_j) \le \sum_{m=i}^{j-1}\operatorname{dist}(\mathbf{y}_m,\mathbf{y}_{m+1}) \le c\sum_{m=i}^{j-1}\delta_m \le 2c\delta_i. \tag{2.6.5}$$

Donc la suite $([\mathbf{y}_i])_{i\ge0}$ converge dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ vers un point $[\mathbf{y}]$ avec $\mathbf{y}\in\mathbb{R}^3$ non nul. En outre, le quotient $\delta_i = |\det(\mathbf{y}_i)|/\|\mathbf{y}_i\|_\infty^2$ ne dépend que de la classe $[\mathbf{y}_i]$ de $\mathbf{y}_i$ dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ et tend vers 0 quand i tend vers l'infini ; on en déduit par continuité que $|\det(\mathbf{y})|/\|\mathbf{y}\|_\infty^2=0$,

i.e. que $\det(\mathbf{y}) = 0$. Par continuité en faisant tendre j vers l'infini, on déduit également de (2.6.5) l'estimation

$$\|\mathbf{y}_i \wedge \mathbf{y}\|_\infty \ll \frac{|\det(\mathbf{y}_i)|}{\|\mathbf{y}_i\|_\infty}.$$

Supposons maintenant que $\delta < 1$ et soit $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}^3$ tel que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{y} \rangle = 0$. Comme pour δ_i, si on définit $\delta_i' = |\det(\mathbf{y}_i)|/\|\mathbf{y}_i\|_\infty$, alors on a $\delta_{i+1}'/\delta_i' \asymp |\det(\mathbf{w}_k)|/\|\mathbf{w}_k\|_\infty \asymp \|\mathbf{w}_k\|_\infty^{\delta-1}$, qui tend vers 0 quand i tend vers l'infini. Il en va donc de même de δ_i'. Par (2.2.1) on a

$$\|\mathbf{u}\|_\infty \|\mathbf{y}_i \wedge \mathbf{y}\|_\infty \gg \|\langle \mathbf{u}, \mathbf{y} \rangle \mathbf{y}_i - \langle \mathbf{u}, \mathbf{y}_i \rangle \mathbf{y}\|_\infty = |\langle \mathbf{u}, \mathbf{y}_i \rangle| \, \|\mathbf{y}\|_\infty$$

pour tout $i \geq 0$. Or comme le membre de gauche tend vers 0 par ce qui précède, nécessairement l'entier $\langle \mathbf{u}, \mathbf{y}_i \rangle$ est nul pour i assez grand. Cela implique $\mathbf{u} = 0$ car l'hypothèse $\mathrm{Tr}(JN) \neq 0$ implique par (2.4.8) de la Proposition 2.4.4 que $\mathbf{y}_{t_k-1}$, $\mathbf{y}_{t_k}$ et $\mathbf{y}_{t_k+1}$ sont linéairement indépendants pour tout k. Ainsi, les coordonnées de $\mathbf{y}$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$. En particulier, la première coordonnée de $\mathbf{y}$ est non nulle, et en divisant $\mathbf{y}$ par cette coordonnée, on peut supposer qu'elle est égale à 1. Dans ce cas, en notant ξ la deuxième coordonnée de $\mathbf{y}$, la condition $\det(\mathbf{y}) = 0$ implique que $\mathbf{y} = (1, \xi, \xi^2)$, et l'indépendance sur $\mathbb{Q}$ de ces trois nombres assure que $[\mathbb{Q}(\xi) : \mathbb{Q}] > 2$. □

Corollaire 2.6.6. *On suppose $\delta < 2$ et que le vecteur $\mathbf{y}$ donné par la Proposition 2.6.1 est de la forme $\mathbf{y} = (1, \xi, \xi^2)$. Alors*

$$\|\mathbf{y}_i \wedge \mathbf{y}\| \asymp \frac{|\det(\mathbf{y}_i)|}{\|\mathbf{y}_i\|}.$$

De plus

$$\|\mathbf{y}_{i+1}\| \asymp \|\mathbf{w}_k\| \, \|\mathbf{y}_i\| \quad \textit{et} \quad \|\mathbf{y}_{i+1} \wedge \mathbf{y}\| \asymp \|\mathbf{w}_k\|^{\delta-1} \|\mathbf{y}_i \wedge \mathbf{y}\|,$$

pour $i \geq 0$ et k tel que $t_k \leq i < t_{k+1}$. En particulier on a on a $\|\mathbf{y}_i\| = o(\|\mathbf{y}_{i+1}\|)$ et si $\delta < 1$, on a aussi $\|\mathbf{y}_{i+1} \wedge \mathbf{y}\| = o(\|\mathbf{y}_i \wedge \mathbf{y}\|)$ quand i tend vers l'infini.

Preuve L'estimation de $\|\mathbf{y}_i \wedge \mathbf{y}\|$ découle essentiellement de la Proposition 2.6.1 qui fournit l'estimation $|\det(\mathbf{y}_i)| \gg \|\mathbf{y}_i\| \, \|\mathbf{y}_i \wedge \mathbf{y}\|$. En effet on écrit $\mathbf{y}_i = (y_{i,0}, y_{i,1}, y_{i,2})$ et pour conclure on procède de manière classique

$$\det(\mathbf{y}_i) = \begin{vmatrix} y_{i,0} & y_{i,1} \\ y_{i,1} & y_{i,2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_{i,0} & y_{i,1} - \xi y_{i,0} \\ y_{i,1} & y_{i,2} - \xi y_{i,1} \end{vmatrix} = y_{i,0}(y_{i,2} - \xi y_{i,1}) - y_{i,1}(y_{i,1} - \xi y_{i,0}),$$

ce qui donne

$$|\det(\mathbf{y}_i)| \ll \|\mathbf{y}_i\| \, \|\mathbf{y}_i \wedge \mathbf{y}\|, \tag{2.6.6}$$

d'où le résultat.
L'équation (2.6.4) donne directement $\|\mathbf{y}_{i+1}\| \asymp \|\mathbf{w}_k\| \, \|\mathbf{y}_i\|$, et en utilisant les relations $\det(\mathbf{y}_{i+1}) = \det(\mathbf{w}_k) \det(\mathbf{y}_i)$, $|\det(\mathbf{w}_k)| \asymp \|\mathbf{w}_k\|^\delta$ et la première partie du corollaire, on trouve la dernière estimation : $\|\mathbf{y}_{i+1} \wedge \mathbf{y}\| \asymp \|\mathbf{w}_k\|^{\delta-1} \|\mathbf{y}_i \wedge \mathbf{y}\|$. □

Lemme 2.6.7. *On suppose $\delta < 1$ et on note $\mathbf{y} = (1, \xi, \xi^2)$ le vecteur donné par la Proposition 2.6.1. On a les estimations*

$$\|\mathbf{y}_i\| = o(\|\mathbf{y}_{i+1}\|) \quad et \quad \|\mathbf{y}_{i+1} \wedge \mathbf{y}\| = o(\|\mathbf{y}_i \wedge \mathbf{y}\|) \tag{2.6.7}$$

quand i tend vers l'infini, et pour tous i, j assez grands, $i > j$, on a

$$\frac{\|\mathbf{y}_i \wedge \mathbf{y}_j\|}{|\det(\mathbf{y}_j)|} \asymp \|\mathbf{y}_i \mathbf{y}_j^{-1}\| \asymp \|\mathbf{y}_i\| \frac{\|\mathbf{y}_j \wedge \mathbf{y}\|}{|\det(\mathbf{y}_j)|} \asymp \frac{\|\mathbf{y}_i\|}{\|\mathbf{y}_j\|}. \tag{2.6.8}$$

Preuve Si les estimations du Lemme 2.6.7 sont vraies pour une norme particulière, alors elles sont vraies pour n'importe quel choix de norme. Nous choisissons de les prouver ici avec la norme $\|\cdot\|_\infty$ (définie comme étant le maximum des valeurs absolues des coefficients) plutôt que la norme $\|\cdot\|$.
Les estimations (2.6.7) et la dernière estimation de (2.6.8) sont des conséquences directes du Corollaire 2.6.6. Pour tout $i \geq -2$, on écrit $\mathbf{y}_i = (y_{0,i}, y_{1,i}, y_{2,i})$ et on pose

$$\mathrm{L}_i^{(1)} = y_{0,i}\xi - y_{1,i} \quad \text{et} \quad \mathrm{L}_i^{(2)} = y_{0,i}\xi^2 - y_{2,i}.$$

Remarquons que $y_{1,i}\xi - y_{2,i} = \mathrm{L}_i^{(2)} - \xi \mathrm{L}_i^{(1)}$ et qu'il existe $c_0 > 0$ telle que

$$c_0^{-1}\|\mathbf{y}_i \wedge \mathbf{y}\|_\infty \leq \max(|\mathrm{L}_i^{(1)}|, |\mathrm{L}_i^{(2)}|) \leq c_0 \|\mathbf{y}_i \wedge \mathbf{y}\|_\infty.$$

On écrit $\mathbf{w} := \det(\mathbf{y}_j)\mathbf{y}_i\mathbf{y}_j^{-1} = \begin{pmatrix} w_{0,0} & w_{0,1} \\ w_{1,0} & w_{1,1} \end{pmatrix}$. On a

$$\begin{aligned}
\mathbf{w} &= \begin{pmatrix} y_{0,i} & y_{1,i} \\ y_{1,i} & y_{2,i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{2,j} & -y_{1,j} \\ -y_{1,j} & y_{0,j} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} y_{0,i}y_{2,j} - y_{1,i}y_{1,j} & y_{1,i}y_{0,j} - y_{0,i}y_{1,j} \\ y_{1,i}y_{2,j} - y_{2,i}y_{1,j} & y_{2,i}y_{0,j} - y_{1,i}y_{1,j} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} y_{0,i}\big(\xi \mathrm{L}_j^{(1)} - \mathrm{L}_j^{(2)}\big) + y_{1,j}\mathrm{L}_i^{(1)} & y_{0,i}\mathrm{L}_j^{(1)} - y_{0,j}\mathrm{L}_i^{(1)} \\ y_{1,i}\big(\xi \mathrm{L}_j^{(1)} - \mathrm{L}_j^{(2)}\big) + y_{1,j}\big(\mathrm{L}_i^{(2)} - \xi \mathrm{L}_i^{(1)}\big) & y_{1,i}\mathrm{L}_j^{(1)} - y_{0,j}\big(\mathrm{L}_i^{(2)} - \xi \mathrm{L}_i^{(1)}\big) \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{2.6.9}$$

la dernière égalité étant obtenue en réécrivant les coefficients de $\mathbf{w}$ à l'aide de déterminants, par exemple

$$\begin{aligned}
w_{0,0} = y_{0,i}y_{2,j} - y_{1,i}y_{1,j} = \begin{vmatrix} y_{0,i} & y_{1,j} \\ y_{1,i} & y_{2,j} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} y_{0,i} & y_{1,j} \\ y_{1,i} - \xi y_{0,i} & y_{2,j} - \xi y_{1,j} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} y_{0,i} & y_{1,j} \\ -\mathrm{L}_i^{(1)} & \xi \mathrm{L}_j^{(1)} - \mathrm{L}_j^{(2)} \end{vmatrix} \\
&= y_{0,i}\big(\xi \mathrm{L}_j^{(1)} - \mathrm{L}_j^{(2)}\big) + y_{1,j}\mathrm{L}_i^{(1)}
\end{aligned}$$

(et on procède de même pour exprimer les autres coefficients de la matrice $\mathbf{w}$). Puisque $\|\mathbf{y}_j\|_\infty \|\mathbf{y}_i \wedge \mathbf{y}\|_\infty = o(\|\mathbf{y}_i\|_\infty \|\mathbf{y}_j \wedge \mathbf{y}\|_\infty)$ quand j tend vers l'infini uniformément par rapport à i tel que $i > j$, l'équation (2.6.9) implique directement que

$$\|\mathbf{w}\|_\infty \ll \|\mathbf{y}_i\|_\infty \|\mathbf{y}_j \wedge \mathbf{y}\|_\infty$$

pour $i > j$ avec i, j assez grands. Supposons maintenant que $|\xi|\,|\mathrm{L}_j^{(1)}| \geq |\mathrm{L}_j^{(2)}|/2$, de sorte que pour tout $c \geq \max(1, 2|\xi|)$ on a

$$|\mathrm{L}_j^{(1)}| \geq c^{-1}\max(|\mathrm{L}_j^{(1)}|, |\mathrm{L}_j^{(2)}|) \geq (cc_0)^{-1}\|\mathbf{y}_j \wedge \mathbf{y}\|_\infty.$$

Étant donné l'expression du coefficient $w_{0,1}$ dans (2.6.9) et les propriétés de croissance données par (2.6.7), il existe donc $c' > 0$, constante qui ne dépend que de ξ, telle que pour j assez grand, on ait

$$\|\mathbf{w}\|_\infty \geq |w_{0,1}| \geq c'\|\mathbf{y}_i\|_\infty \|\mathbf{y}_j \wedge \mathbf{y}\|_\infty.$$

Si au contraire $|\xi||\mathrm{L}_j^{(1)}| \leq |\mathrm{L}_j^{(2)}|/2$, alors pour tout $c \geq \max(1, (2|\xi|)^{-1})$

$$|\xi\mathrm{L}_j^{(1)} - \mathrm{L}_j^{(2)}| \geq \frac{1}{2}|\mathrm{L}_j^{(2)}| \geq (2c)^{-1}\max(|\mathrm{L}_j^{(1)}|, |\mathrm{L}_j^{(2)}|) \geq (2cc_0)^{-1}\|\mathbf{y}_j \wedge \mathbf{y}\|_\infty,$$

et en considérant cette fois-ci le coefficient $w_{1,0}$ de (2.6.9), on peut montrer l'existence de $c'' > 0$, constante qui ne dépend que de ξ, telle que

$$\|\mathbf{w}\|_\infty \geq |w_{1,0}| \geq \frac{1}{4}|y_{1,i}||\mathrm{L}_j^{(2)}| \geq c''\|\mathbf{y}_i\|_\infty \|\mathbf{y}_j \wedge \mathbf{y}\|_\infty.$$

Cela assure que

$$\|\mathbf{w}\|_\infty \gg \|\mathbf{y}_i\|_\infty \|\mathbf{y}_j \wedge \mathbf{y}\|_\infty$$

quand j tend vers l'infini uniformément en $i > j$, et donc que $\|\mathbf{w}\|_\infty \asymp \|\mathbf{y}_i\|_\infty \|\mathbf{y}_j \wedge \mathbf{y}\|_\infty$ sous ces mêmes conditions. Ceci équivaut à l'estimation centrale de (2.6.8). De plus par la discussion précédente, soit $|w_{0,1}| \geq c'\|\mathbf{y}_i\|_\infty \|\mathbf{y}_j \wedge \mathbf{y}\|_\infty$, soit $|w_{1,0}| \geq c''\|\mathbf{y}_i\|_\infty \|\mathbf{y}_j \wedge \mathbf{y}\|_\infty$, donc $\|\mathbf{w}\|_\infty \asymp \max(|w_{0,1}|, |w_{1,0}|)$. Or, on a l'identité

$$\mathbf{y}_i \wedge \mathbf{y}_j = (w_{1,0}, w_{1,1} - w_{0,0}, -w_{0,1}),$$

donc, comme au signe près $|w_{0,1}|$ et $|w_{1,0}|$ sont deux coefficients de $\mathbf{y}_i \wedge \mathbf{y}_j$, cela assure que $\|\mathbf{y}_i \wedge \mathbf{y}_j\|_\infty \gg \|\mathbf{w}\|_\infty$. D'autre part, l'expression précédente de $\|\mathbf{y}_i \wedge \mathbf{y}_j\|_\infty$ fournit directement l'estimation $\|\mathbf{y}_i \wedge \mathbf{y}_j\|_\infty \ll \|\mathbf{w}\|_\infty$. Finalement

$$\|\mathbf{y}_i \wedge \mathbf{y}_j\|_\infty \asymp \|\mathbf{w}\|_\infty = |\det(\mathbf{y}_j)|\,\|\mathbf{y}_i\mathbf{y}_j^{-1}\|_\infty$$

pour j assez grand, $i > j$, ce qui achève la démonstration de ce lemme. □

Les estimations de la proposition suivante ont été établies par Roy dans le cas de Fibonacci, bien que formulées d'une manière un peu différente (voir notamment la Proposition 6.1 de [51] et sa preuve). Elles sont au cœur de la construction du 3-système associé à un nombre ψ-sturmien (cf Figure 2.2).

Proposition 2.6.8. *On suppose $\delta < 1$ et on note $\mathbf{y} = (1, \xi, \xi^2)$ le vecteur donné par la Proposition 2.6.1. Alors on a les estimations suivantes :*

(a) $\|\mathbf{y}_i \wedge \mathbf{y}\| \asymp \frac{|\det(\mathbf{y}_i)|}{\|\mathbf{y}_i\|}$,

(b) $\|\mathbf{y}_{i+1}\| \asymp \|\mathbf{y}_i\|^2\|\mathbf{y}_{\psi(i)}\|^{-1}$,

(c) $\|\mathbf{z}_i\| \asymp \|\mathbf{y}_{\psi(i)}\|$,
(d) $|\langle \mathbf{z}_i, \mathbf{y}_{i+1}\rangle| \asymp |\det(\mathbf{y}_i)|$,
(e) $|\langle \mathbf{z}_i, \mathbf{y}\rangle| \asymp \frac{|\det(\mathbf{y}_i)|}{\|\mathbf{y}_{i+1}\|}$.

Remarque 2.6.9. Comme en dimension finie toutes les normes sont équivalentes et que les estimations de type $\asymp$ sont valables à constantes multiplicatives près, comme d'habitude on peut supposer que la norme de la Proposition 2.6.8 est la norme de notre choix (les constantes implicites des symboles $\asymp$ dépendent alors du choix de la norme).

Preuve Le point (a) découle du Corollaire 2.6.6.
Pour (b), il suffit en considérant (2.3.5) d'appliquer le Lemme 2.6.7 à $(i+1, i)$ et $(i, \psi(i))$:

$$\|\mathbf{y}_{i+1}\| \, \|\mathbf{y}_i\|^{-1} \asymp \|\mathbf{y}_{i+1}\mathbf{y}_i^{-1}\| = \|\mathbf{y}_i\mathbf{y}_{\psi(i)}^{-1}\| \asymp \|\mathbf{y}_i\| \, \|\mathbf{y}_{\psi(i)}\|^{-1}.$$

Pour la suite, on fixe $k \geq 0$ et $0 \leq l < s_{k+1}$.
Pour (c), par le Corollaire 2.6.6 et le Lemme 2.6.7 (en prenant la transposée), on a

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{z}_{t_k+l}\| \times |\det(\mathbf{w}_k)| &= \|\mathbf{y}_{\psi(t_{k+1})} \wedge \mathbf{y}_{t_k+l}\| \\
&\asymp |\det(\mathbf{y}_{\psi(t_{k+1})})| \, \|\mathbf{y}_{\psi(t_{k+1})}^{-1}\mathbf{y}_{t_k+l}\| \\
&\asymp |\det(\mathbf{y}_{\psi(t_{k+1})})| \, \|N_{k+1}^{-1}\mathbf{w}_k^l\mathbf{w}_{k-1}N_k\| \\
&\asymp |\det(\mathbf{w}_k)| \, \|\mathbf{w}_k^l\mathbf{w}_{k-1}N_k\|,
\end{aligned}$$

la deuxième estimation s'obtenant en utilisant (2.3.4) et (2.3.3). On conclut en remarquant que

$$\mathbf{w}_k^l\mathbf{w}_{k-1}N_k = \begin{cases} \mathbf{y}_{t_k+l-1} = \mathbf{y}_{\psi(t_k+l)} & \text{si } l \geq 1 \\ \mathbf{y}_{\psi(t_k)} & \text{si } l = 0. \end{cases}$$

Montrons (d). Par (2.4.12) (avec $\mathbf{x} = \mathbf{y}_{t_k-1}$) et en utilisant l'identité $\langle \mathbf{x} \wedge \mathbf{y}, \mathbf{z}\rangle = \det(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ (valable pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$) on a

$$\begin{aligned}
|\langle \mathbf{z}_{t_k+l}, \mathbf{y}_{t_k+l+1}\rangle| &= |\det(\mathbf{w}_k)|^{-1} |\det(\mathbf{y}_{t_k-1}, \mathbf{y}_{t_k+l}, \mathbf{y}_{t_k+l+1})| \\
&= |\det(\mathbf{w}_k)|^{l-1} |\det(\mathbf{y}_{t_k-1}, \mathbf{y}_{t_k}, \mathbf{y}_{t_k+1})| \\
&\asymp |\det(\mathbf{w}_k)|^l \det(\mathbf{y}_{t_k}) \asymp \det(\mathbf{y}_{t_k+l}),
\end{aligned}$$

par (2.4.8).
Enfin pour (e) on utilise la propriété (2.2.1) du produit vectoriel. On obtient alors par (a) et (c)

$$\begin{aligned}
\|\langle \mathbf{z}_{t_k+l}, \mathbf{y}\rangle \, \mathbf{y}_{t_k+l+1} - \langle \mathbf{z}_{t_k+l}, \mathbf{y}_{t_k+l+1}\rangle \, \mathbf{y}\| &\ll \|\mathbf{z}_{t_k+l}\| \, \|\mathbf{y}_{t_k+l+1} \wedge \mathbf{y}\| \\
&\ll \|\mathbf{y}_{\psi(t_k+l)}\| \frac{|\det(\mathbf{y}_{t_k+l+1})|}{\|\mathbf{y}_{t_k+l+1}\|} \\
&\ll \frac{|\det(\mathbf{y}_{t_k+l+1})|}{\|\mathbf{w}_k\|^2},
\end{aligned}$$

puisque par croissance multiplicative on a $\|\mathbf{y}_{t_k+l+1}\| \asymp \|\mathbf{w}_k^{l+2}\mathbf{w}_{k-1}\| \asymp \|\mathbf{w}_k\|^2\|\mathbf{w}_k^l\mathbf{w}_{k-1}\| \asymp \|\mathbf{w}_k\|^2\|\mathbf{y}_{\psi(t_k+l)}\|$. Or, par (d) on a

$$\frac{|\det(\mathbf{y}_{t_k+l+1})|}{\|\mathbf{w}_k\|^2} = o\Big(|\det(\mathbf{y}_{t_k+l})|\Big) = o\Big(\|\langle \mathbf{z}_{t_k+l}, \mathbf{y}_{t_k+l+1}\rangle \, \mathbf{y}\|\Big),$$

donc nécessairement,

$$\| \langle \mathbf{z}_{t_k+l}, \mathbf{y} \rangle \, \mathbf{y}_{t_k+l+1} \| \sim \| \langle \mathbf{z}_{t_k+l}, \mathbf{y}_{t_k+l+1} \rangle \, \mathbf{y} \| \asymp |\det(\mathbf{y}_{t_k+l})|$$

quand k tend vers l'infini. □

2.7 3-système associé à un nombre ψ-sturmien

Nous supposons désormais que la suite $(s_i)_i$ associée à notre récurrence sturmienne est bornée ; notons que tous les résultats précédents sont valides sans cette hypothèse. Nous utilisons les définitions et les notations de la géométrie paramétrique des nombres (voir les Parties 1.6 et 1.8 du Chapitre 1). Rappelons que $\| \cdot \|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^3$, et qu'on a défini la norme $\|\mathbf{w}\|$ d'une matrice $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ par la formule $\|\mathbf{w}\| = \sqrt{a^2 + (b^2+c^2)/2 + d^2}$ (avec cette définition, il n'y a pas d'ambiguïté quand on note $\|\mathbf{y}\|$, avec $\mathbf{y}$ vu comme un vecteur de $\mathbb{R}^3$ ou comme la matrice symétrique de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ associée).

Nous construisons un 3-système qui représente partiellement un nombre ψ-sturmien (voir Figure 2.2). Les Propositions 2.7.5 et 2.7.9 joue un rôle central dans ce chapitre ; leurs preuves sont présentées dans la Partie 2.7.3. Cela nous permet de déterminer les six exposants diophantiens paramétriques associés à ξ : voir les Théorèmes 2.7.1 et 2.7.2 qui forment le résultat principal de ce chapitre. Pour deux de ces exposants ($\underline{\psi}_2$ et $\overline{\psi}_3$) nous avons besoin d'une hypothèse supplémentaire sur δ pour pouvoir déterminer leur valeur précise, en ignorant les *zones d'incertitude* du 3-système représentant ξ. Finalement dans la Partie 2.7.2 nous discutons en détails les problèmes soulevés par ces zones d'incertitude et nous construisons des points particuliers de $\mathbb{Z}^3$ dont les trajectoires passent dans ces zones. Ils imposent des conditions fortes pour que les zones d'incertitude puissent être maximales.

2.7.1 Construction d'un 3-système représentant partiellement ξ

Dans cette partie, sous l'hypothèse que la suite $(s_i)_i$ associée à notre récurrence sturmienne est bornée (notons que tous les résultats précédents sont valides sans cette hypothèse), nous construisons un 3-système qui représente partiellement un nombre ψ-sturmien ξ (voir Figure 2.2). On déduit de la Proposition 2.7.9 notre résultat principal, à savoir le Théorème 2.7.1.

Notation. Nous gardons les notations (et les hypothèses) de la Partie 2.6 : $(\mathbf{w}_i)_{i\geq 0}$ est une suite ψ-sturmienne de $\mathcal{M}$ admissible, à croissance multiplicative, et telle que $(\|\mathbf{w}_i\|)_i$ tende vers $+\infty$. On note N, $(\mathbf{y}_i)_{i\geq -2}$ et $(\mathbf{z}_i)_{i\geq -1}$ la matrice de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et les deux suites de matrices symétriques qui sont associées à $(\mathbf{w}_i)_{i\geq 0}$ par la Définition 2.3.6 et par (2.4.2). On suppose que $\mathrm{Tr}(JN) \neq 0$ (*i.e.* N n'est pas symétrique). Finalement, $\delta \geq 0$ est l'exposant donné par la Proposition 2.5.9 et vérifiant

$$|\det(\mathbf{w}_i)| \asymp \|\mathbf{w}_i\|^{\delta}.$$

Dans cette partie on fait l'hypothèse supplémentaire $\delta < 1$, et on suppose que la suite $(s_i)_{i\geq 0}$ associée à ψ est bornée.

Soit $\mathbf{y} = (1, \xi, \xi^2)$ le vecteur donné par la Proposition 2.6.1. Dans la suite $\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2, \mathrm{L}_3$ et $\mathrm{L}_{\mathbf{u}} = (\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2, \mathrm{L}_3)$ désignent les fonctions définies dans la Partie 1.6 du Chapitre 1 pour le vecteur $\mathbf{u} = \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$. Comme $(s_i)_{i\geq 0}$ est bornée et par croissance multiplicative, la Proposition 2.5.9 implique directement l'estimation suivante

$$|\det(\mathbf{y}_i)| \asymp \|\mathbf{y}_i\|^{\delta}. \tag{2.7.1}$$

On pose

$$\sigma = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty}[s_{k+1}; s_k, \ldots, s_1]} = \liminf_{k\to\infty} \frac{\log(\|\mathbf{w}_k\|)}{\log(\|\mathbf{w}_{k+1}\|)}. \tag{2.7.2}$$

Soit $(\widehat{W}_k)_{k\geq 0}$ une suite de réels > 0 (dont l'existence est donnée par la Proposition 2.5.6) vérifiant

(a) $\widehat{W}_{k+1} = \widehat{W}_k^{s_{k+1}} \widehat{W}_{k-1}$ (pour $k \geq 1$),

(b) $\widehat{W}_k \asymp \|\mathbf{w}_k\|$.

Soit $k_0 \geq 1$ un entier tel que pour tout $k \geq k_0 - 1$ on ait $\widehat{W}_k > 1$ (en particulier $(\log(\widehat{W}_k))_k$ est strictement croissante à partir de k_0).

Définition 2.7.1. Soit $0 \leq k$ et $0 \leq l < s_{k+1}$. On définit $\widehat{Y}_{t_k+l}, \mathcal{E}^*_{t_k+l}, \widehat{Z}_{t_k+l}$ et $\mathcal{E}_{t_k+l}$ par

$$\begin{aligned}
\widehat{Y}_{t_k+l} &= \widehat{W}_k^{l+1} \widehat{W}_{k-1} \\
\mathcal{E}^*_{t_k+l} &= \left(\widehat{W}_k^{l+1} \widehat{W}_{k-1}\right)^{\delta-1} \\
\widehat{Z}_{t_k+l} &= \widehat{W}_k^{l} \widehat{W}_{k-1} \\
\mathcal{E}_{t_k+l} &= \widehat{W}_k^{(\delta-1)(l+1)-1} \widehat{W}_{k-1}^{\delta-1}.
\end{aligned}$$

Remarquons que les formules précédentes pour $\widehat{Y}_{t_k+l}$ et $\mathcal{E}^*_{t_k+l}$ sont encore valables pour $l = s_{k+1}$. On a aussi la formule $\widehat{Z}_i = \widehat{Y}_{\psi(i)}$.

Proposition 2.7.2. *Soit $i \geq 0$. On a :*

(a) $\log(\|\mathbf{y}_i\|) = \log(\widehat{Y}_i) + \mathcal{O}(1)$.

(b) $\log(\|\mathbf{y}_i \wedge \mathbf{y}\|) = \log(\mathcal{E}^*_i) + \mathcal{O}(1)$.

(c) $\log(\|\mathbf{z}_i\|) = \log(\widehat{Z}_i) + \mathcal{O}(1)$.

(d) $\log(|\mathbf{z}_i \cdot \mathbf{y}|) = \log(\mathcal{E}_i) + \mathcal{O}(1)$.

Preuve Comme $(s_i)_i$ est bornée, par croissance multiplicative et (2.3.3), on obtient

$$\log(\|\mathbf{y}_{t_k+l}\|) = (l+1)\log(\widehat{W}_k) + \log(\widehat{W}_{k-1}) + \mathcal{O}(1)$$

pour k tendant vers l'infini et $0 \leq l \leq s_{k+1}$. Toutes les assertions s'en déduisent à partir des estimations de la Proposition 2.6.8. □

Définition 2.7.3. Soit $0 \leq k$ et $0 \leq l < s_{k+1}$. On écrit $i = t_k + l$ et on pose pour $q \geq 0$

$$\widehat{\mathrm{L}}_i(q) = \max\Big(\log(\widehat{Z}_i), \log(\mathcal{E}_i) + q\Big),$$
$$\widehat{\mathrm{L}}_i^*(q) = \max\Big(\log(\mathcal{E}_i^*), \log(\widehat{Y}_i) - q\Big),$$

et

$$q_i = \log(\widehat{Z}_i) - \log(\mathcal{E}_i) = \log(\widehat{Y}_i) - \log(\mathcal{E}_i^*) = (2-\delta)\log(\widehat{Y}_i)$$

le point où $\widehat{\mathrm{L}}_i$ et $\widehat{\mathrm{L}}_i^*$ changent de pente. On définit également

$$c_i = \log(\widehat{Y}_{i+1}) - \log(\mathcal{E}_i^*) = q_i + \log(\widehat{W}_k),$$

l'abscisse du point d'intersection des graphes de $\widehat{\mathrm{L}}_i^*$ et $\widehat{\mathrm{L}}_{i+1}^*$. On vérifie que c_i est aussi l'abscisse du point d'intersection des graphes de $\widehat{\mathrm{L}}_i$ et $\widehat{\mathrm{L}}_{\psi^{-1}(i)}$ (rappelons que par définition de ψ, on a $\psi^{-1}(i) = i+1$ si $i < t_{k+1} - 1$ et $\psi^{-1}(t_{k+1}-1) = t_{k+2}$). Notons qu'on a

$$\begin{cases} -\widehat{\mathrm{L}}_i^*(c_i) = -\widehat{\mathrm{L}}_{i+1}^*(c_i) = -\log(\mathcal{E}_i^*) = (1-\delta)\Big((l+1)\log(\widehat{W}_k) + \log(\widehat{W}_{k-1})\Big) \\ \widehat{\mathrm{L}}_i(c_i) = \widehat{\mathrm{L}}_{\psi^{-1}(i)}(c_i) = \log(\widehat{Z}_{\psi^{-1}(i)}) = (l+1)\log(\widehat{W}_k) + \log(\widehat{W}_{k-1}). \end{cases} \tag{2.7.3}$$

Supposons $k \geq k_0$. Puisque sous cette condition $\log(\widehat{W}_k) > 0$ et comme $c_i = q_i + \log(\widehat{W}_k)$ et $q_{i+1} = q_i + (2-\delta)\log(\widehat{W}_k)$ (avec $\delta < 1$ par hypothèse), on a immédiatement l'encadrement suivant

$$q_i < c_i < q_{i+1} < c_{i+1}. \tag{2.7.4}$$

La proposition suivante résume certaines des propriétés géométriques ci-dessus. Elle se déduit immédiatement des estimations de la Proposition 2.7.2, de la Définition 2.7.3 et des remarques précédentes.

Proposition 2.7.4. *On a les propriétés suivantes :*

(a) Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout i et pour tout $q > 0$ on ait

$$|\widehat{\mathrm{L}}_i(q) - \mathrm{L}_{\mathbf{z}_i}(q)| \leq C \quad \textit{et} \quad |\widehat{\mathrm{L}}_i^*(q) - \mathrm{L}_{\mathbf{y}_i}^*(q)| \leq C,$$

i.e. le graphe de $\widehat{\mathrm{L}}_i$ (resp. $\widehat{\mathrm{L}}_i^*$) approche la trajectoire de $\mathbf{z}_i$ (resp. $\mathbf{y}_i$) à $\mathcal{O}(1)$ près, uniformément en i.

(b) Le point q_i est le point où $\widehat{\mathrm{L}}_i$ et $\widehat{\mathrm{L}}_i^*$ changent de pente : la fonction $\widehat{\mathrm{L}}_i$ est continue affine par morceaux, constante sur $[0, q_i]$, et croissante de pente 1 sur $[q_i, +\infty[$ tandis que la fonction $-\widehat{\mathrm{L}}_i^*$ est continue affine par morceaux, croissante de pente 1 sur $[0, q_i]$, et constante sur $[q_i, +\infty[$.

La Proposition suivante est un ingrédient essentiel pour montrer que la fonction $\mathbf{P}$ de la Définition 2.7.8 ci-dessous est bien un 3-système. Elle permet aussi de tracer le graphe conjoint de ses composantes. Sa preuve est présentée dans la Partie 2.7.3.

Proposition 2.7.5. *Supposons vérifiée la condition $\delta < \frac{\sigma}{1+\sigma}$. Alors on a les propriétés suivantes :*

(a) Pour $i = t_k + l$ avec $0 \leq l < s_{k+1} - 1$ et k assez grand, le graphe conjoint de $\widehat{\mathrm{L}}_{t_{k+1}}, -\widehat{\mathrm{L}}^*_{i+1}, \widehat{\mathrm{L}}_{i+1}$ sur $[c_i, c_{i+1}]$ est comme sur le dessin de gauche de la Figure 2.1. Le graphe conjoint de $\widehat{\mathrm{L}}_{t_{k+1}}, -\widehat{\mathrm{L}}^*_{t_k}, \widehat{\mathrm{L}}_{t_k}$ sur $[c_{t_k-1}, c_{t_k}]$ est comme sur le dessin de droite de la Figure 2.1.

(b) Quand $i = t_k + l$ (avec $0 \leq l < s_{k+1}$) tend vers l'infini, on a

$$-\widehat{\mathrm{L}}^*_i(q_i) - \max(\widehat{\mathrm{L}}_i(q_i), \widehat{\mathrm{L}}_{t_{k+1}}(q_i)) \longrightarrow +\infty. \tag{2.7.5}$$

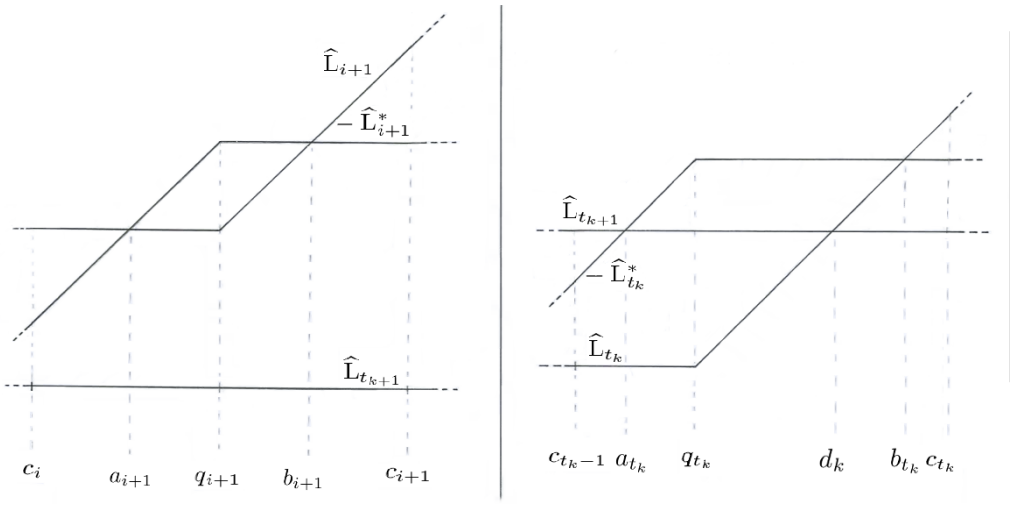

FIGURE 2.1 – Graphe conjoint de $\widehat{\mathrm{L}}_{t_{k+1}}, -\widehat{\mathrm{L}}^*_{i+1}, \widehat{\mathrm{L}}_{i+1}$ sur $[c_i, c_{i+1}]$

Remarque 2.7.6. L'assertion (a) de la Proposition 2.7.5 implique qu'aux points $q = q_i$, en écrivant $i = t_k + l$ (avec $0 \leq l < s_{k+1}$) on a $-\widehat{\mathrm{L}}^*_i(q) \geq \max\left(\widehat{\mathrm{L}}_{t_{k+1}}(q), \widehat{\mathrm{L}}_i(q)\right)$. L'équation (2.7.5) de l'assertion (b) donne un résultat plus précis.

Remarque 2.7.7. Si le nombre de k tel que $s_{k+1} > 1$ est fini – on est alors essentiellement ramené au cas de Fibonacci – l'assertion (a) de la proposition est vide (puisque le nombre d'indices i considérés est alors fini).

Définition 2.7.8. On définit alors $\mathbf{P} = \left(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3\right)$ en posant pour $t_k - 1 \leq i < t_{k+1} - 1$ (avec $k \geq k_0$), et $c_i \leq q < c_{i+1}$:

$$\mathbf{P}(q) = \Phi_3\Big(\widehat{\mathrm{L}}_{t_{k+1}}(q), -\widehat{\mathrm{L}}^*_{i+1}(q), \widehat{\mathrm{L}}_{i+1}(q)\Big),$$

(ou Φ_3 est la fonction qui réarrange les coordonnées dans l'ordre croissant, voir Définition 1.6.2) et on note $I_{i+1} = [a_{i+1}, b_{i+1}] \subset [c_i, c_{i+1}]$ le segment sur lequel $P_3 = -\widehat{\mathrm{L}}^*_{i+1}$ (cf Figure 2.1). On pose aussi $I'_{i+1} = [b_i, a_{i+1}]$.

La proposition suivante assure que $\mathbf{P}$ est un 3-système sous la condition $\delta < \frac{\sigma}{1+\sigma}$ (voir Remarque 2.7.10 pour des précisions sur cette condition ; notons que si $\delta > \frac{\sigma}{1+\sigma}$, la fonction $\mathbf{P}$ n'est plus un 3-système). Nous montrons aussi les liens qu'entretient $\mathbf{P}$

avec ξ : ce 3-système ne représente pas vraiment ξ (au sens de la Définition 1.8.1), mais il le représente "partiellement" : à une différence bornée près, le graphe conjoint de $\mathbf{L_u}$ coïncide avec celui de $\mathbf{P}$ en-dehors des zones d'incertitude (zones grisées sur la Figure 2.2). La preuve de la Proposition 2.7.9 est présentée dans la Partie 2.7.3.

Proposition 2.7.9. *Rappelons qu'on note* $\mathbf{L_u} = (\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2, \mathrm{L}_3)$ *la fonction des minima successifs (voir Définition 1.6.1 avec* $n = 2$ *et* $\mathbf{u} = (1, \xi, \xi^2)$*). Supposons que* ξ *est un nombre* ψ*-sturmien propre, i.e. que* $\delta < \frac{\sigma}{1+\sigma}$ *et que le contenu des* $\mathbf{y}_i$ *est borné (ce qui est en particulier le cas si les hypothèses du Corollaire 2.4.5 sont satisfaites). Alors* $\mathbf{P}$ *est un* 3*-système sur* $[q_{t_{k_0}}, +\infty[$ *et son graphe conjoint est du type de celui de la Figure 2.2 (dans cet exemple on a* $s_{k+1} = 3$*). De plus, il existe* $C > 0$ *ne dépendant que de* ξ *telle que*

(a) $|\mathrm{L}_1(q) - \mathrm{P}_1(q)| \leq C$ *pour tout* q *assez grand,*

(b) $|\mathrm{L}_2(q) - \mathrm{P}_2(q)| \leq C$ *et* $|\mathrm{L}_3(q) - \mathrm{P}_3(q)| \leq C$ *pour tout* $q \in I_j$ *avec* j *assez grand,*

(c) $\mathrm{P}_2(q) - C \leq \mathrm{L}_2(q) \leq \mathrm{L}_3(q) \leq \mathrm{P}_3(q) + C$ *pour tout* $q \in I'_j$ *avec* j *assez grand.*

De manière quelque peu informelle on peut dire qu'à différence bornée près, le graphe conjoint de $\mathbf{L_u}$ *coïncide avec celui de* $\mathbf{P}$ *en-dehors des zones grisées sur la Figure 2.2, et pour tout* j *assez grand, le graphe conjoint de* L_2 *et* L_3 *sur le segment* I'_j *est inclus - à différence bornée près - dans la zone grisée correspondante (on sait aussi que dans cette "zone d'incertidude" les graphes de* L_2 *et* L_3 *zigzaguent autour d'une droite de pente* $1/2$*, mais cela n'importe pas ici).*

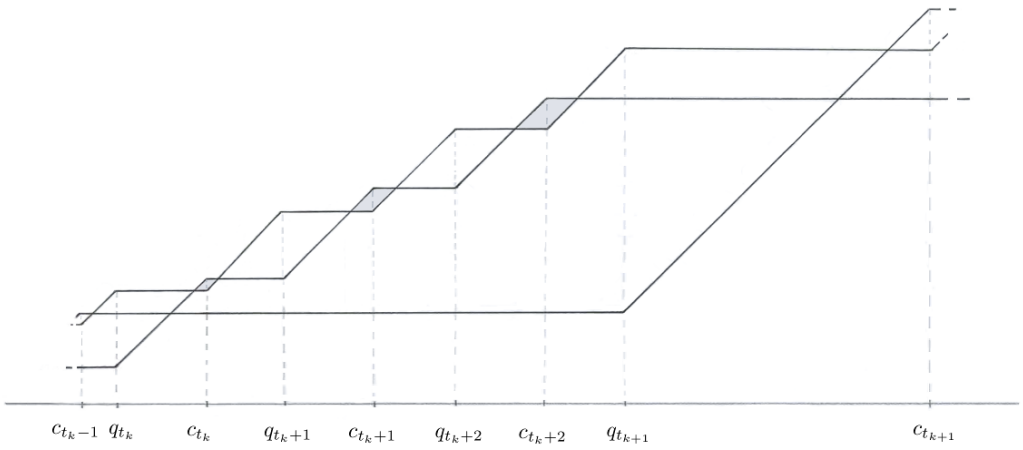

FIGURE 2.2 – Graphe conjoint du 3-système $\mathbf{P}$

Rappelons qu'on a la correspondance suivante (voir Proposition 1.9.1 du Chapitre 1) :

$$\left(\underline{\psi_1}, \overline{\psi_1}, \underline{\psi_3}, \overline{\psi_3}\right) = \left(\frac{1}{\omega_2(\xi)+1}, \frac{1}{\widehat{\omega}_2(\xi)+1}, \frac{\widehat{\lambda}_2(\xi)}{\widehat{\lambda}_2(\xi)+1}, \frac{\lambda_2(\xi)}{\lambda_2(\xi)+1}\right). \tag{2.7.6}$$

On a aussi la version paramétrique suivante de l'équation (0.3.1) de Jarník :

$$2\underline{\psi}_3(\xi) + 2\overline{\psi}_1(\xi) - 3\underline{\psi}_3(\xi)\overline{\psi}_1(\xi) - 1 = 0. \tag{2.7.7}$$

Théorème 2.7.1. *Soit ξ un nombre ψ-sturmien propre. Alors on a*

$$\begin{aligned}
&\underline{\psi}_1 = \frac{\sigma}{(2-\delta)(1+\sigma)}, \quad \overline{\psi}_1 = \frac{1}{(1-\delta)(1+\sigma)+2},\\
&\overline{\psi}_2 = \frac{1}{2+\sigma},\\
&\underline{\psi}_3 = \frac{(1-\delta)(1+\sigma)}{1+2(1-\delta)(1+\sigma)},\\
&\frac{1-\delta}{2-\delta} \le \overline{\psi}_3 \le \max\Big(\frac{1-\delta}{2-\delta}, \frac{1}{2-\delta+\sigma}\Big),
\end{aligned}$$

où σ est défini par (2.7.2) *et les exposants considérés sont comme dans la Définition 1.6.1 (pour $\mathbf{u} = (1, \xi, \xi^2)$). Si de plus δ vérifie la condition plus forte*

$$\delta \le h(\sigma) := \frac{\sigma}{2} + 1 - \sqrt{\Big(\frac{\sigma}{2}\Big)^2 + 1}, \tag{2.7.8}$$

alors on a

$$\overline{\psi}_3 = \frac{1-\delta}{2-\delta}.$$

En utilisant (2.7.6) et les exemples de Roy (voir Partie 2.8.1), le Théorème 2.7.1 implique directement les Théorèmes 2.1.1 et 2.1.2 (voir Partie 2.9 pour les détails).

Remarque 2.7.10. Si le contenu des $\mathbf{y}_i$ est borné mais $\delta > \frac{\sigma}{1+\sigma}$, alors $\mathbf{P}$ (cf Figure 2.2) n'est plus un 3-système (cf la preuve de l'assertion (a) de la Proposition 2.7.5). En fait, pour $\delta > \frac{\sigma}{1+\sigma}$ l'expression donnant la valeur de $\widehat{\lambda}_2(\xi)$ devient $< 1/2$, et une telle valeur de $\widehat{\lambda}_2(\xi)$ est impossible.

Remarque 2.7.11. Nous pensons que la condition $\sigma \le h(\sigma)$ n'est pas la meilleure possible et pourrait être améliorée pour certains nombres ψ-sturmiens. Voir Partie 2.7.2 pour quelques pistes en faveur de cette conjecture.

Pour $\underline{\psi}_2$ (qui est le seul exposant paramétrique non fourni par le Théorème 2.7.1) la situation est plus compliquée et nécessite d'introduire de nouvelles quantités, voir Théorème 2.7.2.

Preuve du Théorème 2.7.1
Pour calculer les exposants recherchés, on utilise les Propositions 2.7.9 et 2.7.5 (cf notamment les Figures 2.1 et 2.2 auxquelles on fera souvent référence).
Ainsi pour calculer l'exposant $\underline{\psi}_1$ il suffit de calculer

$$\underline{\psi}_1 = \liminf_{q\to+\infty} \frac{\mathrm{L}_1(q)}{q} = \liminf_{q\to+\infty} \frac{\mathrm{P}_1(q)}{q} = \liminf_{k\to\infty} \frac{\mathrm{P}_1(q_{t_k})}{q_{t_k}},$$

(rappelons que q_{t_k} est l'abscisse de changement de pente de $\widehat{\mathrm{L}}_{t_k}$). Or, par les Définitions 2.7.1 et 2.7.3, on a

$$\frac{\mathrm{P}_1(q_{t_k})}{q_{t_k}} = \frac{\log(\widehat{Z}_{t_k})}{q_{t_k}} = \frac{\log(\widehat{W}_{k-1})}{(2-\delta)(\log(\widehat{W}_k)+\log(\widehat{W}_{k-1})} = \frac{1}{(2-\delta)(1+\frac{\log(\widehat{W}_k)}{\log(\widehat{W}_{k-1})})},$$

qui est décroissant en $\frac{\log(\widehat{W}_k)}{\log(\widehat{W}_{k-1})}$, et en passant à la limite inférieure on en déduit

$$\underline{\psi}_1 = \frac{1}{(2-\delta)(1+\frac{1}{\sigma})}.$$

Pour $\overline{\psi}_1$, on a cette fois-ci

$$\overline{\psi}_1 = \limsup_{q\to+\infty} \frac{\mathrm{P}_1(q)}{q} = \limsup_{k\to\infty} \frac{\mathrm{P}_1(d_k)}{d_k},$$

où $d_k = (3-\delta)\log(\widehat{W}_k) + (1-\delta)\log(\widehat{W}_{k-1})$ est l'abscisse du point d'intersection des graphes de $\widehat{\mathrm{L}}_{t_k}$ et $\widehat{\mathrm{L}}_{t_{k+1}}$ (cf Figure 2.1). On a alors

$$\frac{\mathrm{P}_1(d_k)}{d_k} = \frac{\log(\widehat{Z}_{t_{k+1}})}{d_k} = \frac{1}{3-\delta+(1-\delta)\frac{\log(\widehat{W}_{k-1})}{\log(\widehat{W}_k)}}, \tag{2.7.9}$$

et en passant à la limite supérieure on trouve bien

$$\overline{\psi}_1 = \frac{1}{3-\delta+(1-\delta)\sigma}.$$

Pour le calcul de $\overline{\psi}_2$ il suffit de remarquer qu'on a

$$\overline{\psi}_2 = \limsup_{k\to+\infty} \frac{\mathrm{L}_2(a_{t_k})}{a_{t_k}}.$$

Ceci vient du fait que $\overline{\psi}_2 \le 1/2$ et que L_2 est toujours en-dessous (à $\mathcal{O}(1)$ près) de la droite de pente $1/2$ passant par la diagonale des s_{k+1} zones grisées situées entre q_{t_k} et $q_{t_{k+1}}$, cf Figure 2.2 (c'est une conséquence de la Proposition 2.7.9 et du point (b) de la Proposition 1.6.5). Voir également la Partie 1.9.3 du Chapitre 1 (P_2 et P_3 zigzaguent autour d'une droite de pente $\frac{1}{2}$ sur le segment $[b_{t_k}, a_{t_{k+1}}] \subset [q_{t_k}, q_{t_{k+1}}]$).
Rappelons que a_{t_k} est le point d'intersection des graphes de $\widehat{\mathrm{L}}_{t_{k+1}}$ et de $-\widehat{\mathrm{L}}^*_{t_k}$ (cf Figure 2.1), et donc que $a_{t_k} = \log(\widehat{Z}_{t_{k+1}}) + \log(\widehat{Y}_{t_k}) = 2\log(\widehat{W}_k) + \log(\widehat{W}_{k-1})$. Par ailleurs on a $\mathrm{P}_2(a_{t_k}) = \widehat{\mathrm{L}}_{t_{k+1}}(a_{t_k}) = \log(\widehat{Z}_{t_{k+1}})$. On a donc

$$\overline{\psi}_2 = \limsup_{k\to+\infty} \frac{\mathrm{L}_2(a_{t_k})}{a_{t_k}} = \limsup_{k\to+\infty} \frac{\mathrm{P}_2(a_{t_k})}{a_{t_k}} = \limsup_{k\to+\infty} \frac{1}{2+\frac{\log(\widehat{W}_{k-1})}{\log(\widehat{W}_k)}} = \frac{1}{2+\sigma}.$$

Pour $\underline{\psi}_3$, en utilisant le fait que $\underline{\psi}_3 \leq \overline{\psi}_2 \leq 1/2$, on peut montrer qu'il suffit de calculer

$$\underline{\psi}_3 = \liminf_{k\to\infty} \frac{\mathrm{P}_3(b_{t_k})}{b_{t_k}},$$

ou on peut directement utiliser l'identité de Jarník (2.7.7) et l'expression de $\overline{\psi}_1$ calculée précédemment pour trouver le résultat annoncé.
Le calcul de $\overline{\psi}_3$ est un peu plus délicat car il faut montrer que les zones grisées de la Figure 2.2 peuvent être ignorées sous la condition (2.7.8). D'après l'allure du 3-système $\mathbf{P}$ (cf Figure 2.2), on a

$$\limsup_{q\to+\infty} \frac{\mathrm{P}_3(q)}{q} = \max\Big(\limsup_{i\to\infty} \frac{\mathrm{P}_3(c_i)}{c_i}, \limsup_{i\to\infty} \frac{\mathrm{P}_3(q_i)}{q_i} \Big).$$

D'un côté, on a

$$\frac{\mathrm{P}_3(q_i)}{q_i} = \frac{-\widehat{\mathrm{L}}_i^*(q_i)}{q_i} = \frac{-\log(\mathcal{E}_i^*)}{q_i} = \frac{1-\delta}{2-\delta}.$$

D'un autre côté nous prétendons que la valeur maximale de $\mathrm{P}_3(c_i)/c_i$ pour $i = t_k + l$ avec $0 \leq l \leq s_{k+1} - 1$ est atteinte en $l = s_{k+1} - 1$. En effet, d'après la Figure 2.1, pour $i = t_k + s_{k+1} - 1 = t_{k+1} - 1$, on a

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{P}_3(c_{t_{k+1}-1})}{c_{t_{k+1}-1}} = \frac{\widehat{\mathrm{L}}_{t_{k+2}}(c_{t_{k+1}-1})}{c_{t_{k+1}-1}} &= \frac{\log(\widehat{Z}_{t_{k+2}})}{q_{t_{k+1}-1} + \log(\widehat{W}_k)} \\ &= \frac{\log(\widehat{W}_{k+1})}{(2-\delta)\log(\widehat{W}_{k+1}) + \log(\widehat{W}_k)},\end{aligned}$$

alors que pour $i < t_k + s_{k+1} - 1$ on a :

$$\frac{\mathrm{P}_3(c_i)}{c_i} = \frac{\log(\widehat{Z}_{i+1})}{q_i + \log(\widehat{W}_k)} = \frac{(l+1)\log(\widehat{W}_k) + \log(\widehat{W}_{k-1})}{(2-\delta)\Big((l+1)\log(\widehat{W}_k) + \log(\widehat{W}_{k-1})\Big) + \log(\widehat{W}_k)},$$

et le membre de droite de la dernière inégalité est croissant en l, donc atteint son maximum pour $l = s_{k+1} - 1$. Finalement, on a

$$\begin{aligned}\limsup_{i\to\infty} \frac{\mathrm{P}_3(c_i)}{c_i} = \limsup_{k\to\infty} \frac{\mathrm{P}_3(c_{t_{k+1}-1})}{c_{t_{k+1}-1}} &= \limsup_{k\to\infty} \frac{\log(\widehat{W}_{k+1})}{(2-\delta)\log(\widehat{W}_{k+1}) + \log(\widehat{W}_k)} \\ &= \frac{1}{2-\delta+\sigma}. \qquad (2.7.10)\end{aligned}$$

Donc

$$\limsup_{q\to+\infty} \frac{\mathrm{P}_3(q)}{q} = \max\Big(\frac{1}{2-\delta+\sigma}, \frac{1-\delta}{2-\delta}\Big).$$

Maintenant, remarquons que si $\delta \leq h(\sigma)$, alors $\delta^2 - (\sigma+2)\delta + \sigma \geq 0$, de sorte que nous avons $\max\Big(\frac{1}{2-\delta+\sigma}, \frac{1-\delta}{2-\delta}\Big) = \frac{1-\delta}{2-\delta}$. Cela achève la preuve que sous l'hypothèse (2.7.8) nous avons

$$\limsup_{q\to+\infty} \frac{\mathrm{P}_3(q)}{q} = \limsup_{k\to\infty} \frac{\mathrm{P}_3(q_{t_k})}{q_{t_k}} = \frac{1-\delta}{2-\delta},$$

et puisque $\mathrm{P}_3(q) \le \mathrm{L}_3(q) + \mathcal{O}(1)$ et $\mathrm{P}_3(q_{t_k}) = \mathrm{L}_3(q_{t_k}) + \mathcal{O}(1)$ par la Proposition 2.7.9, nous déduisons que sous cette condition on a

$$\overline{\psi}_3 = \frac{1-\delta}{2-\delta}.$$

□

Rappelons que par définition on a $\sigma = \liminf_{k\to\infty} \frac{1}{[s_k; s_{k-1}, \dots, s_1]}$. On pose

$$\tau = \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{[s_k; s_{k-1}, \dots, s_1]} \quad \text{et} \quad \sigma' = \liminf_{\substack{k\to\infty \\ s_{k+1}>1}} \frac{1}{[s_k; s_{k-1}, \dots, s_1]},$$

avec la convention que $\sigma' = +\infty$ si $s_{k+1} = 1$ pour tout k assez grand. Remarquons au passage que l'inégalité (2.7.22) donne exactement $\tau \le \frac{1}{1+\sigma}$ (nous n'avons toutefois pas besoin de ce résultat ici). Définissons

$$\theta(\delta) = \min\Big(\frac{1+\sigma'}{(2-\delta)(2+\sigma')}, \frac{1}{2+(1-\delta)(1+\tau)}\Big).$$

Théorème 2.7.2. *Supposons $\delta < \frac{\sigma}{1+\sigma}$ et que le contenu des $\mathbf{y}_i$ est borné. Alors on a*

$$\min\Big(\frac{(1-\delta)(1+\sigma)}{(2-\delta)(1+\sigma)+1}, \theta(\delta)\Big) \le \underline{\psi}_2 \le \theta(\delta).$$

En particulier, il existe une constante $c > 0$, qui dépend uniquement de la fonction sturmienne ψ, telle que si $\delta \le c$, alors

$$\underline{\psi}_2 = \theta(\delta).$$

Preuve Montrons qu'un point en lequel la fonction $\mathrm{P}_2(q)/q$ atteint son minimum sur l'intervalle $[q_{t_k}, q_{t_{k+1}}]$ appartient à l'ensemble $\{d_k, c_{t_k}\}$ si $s_{k+1} = 1$, et appartient à $\{d_k, c_{t_k}, q_{t_k+1}\}$ si $s_{k+1} > 1$ (voir Figures 2.1 et 2.2).
En effet, si q est un minimum de $\mathrm{P}_2(q)/q$ sur $[q_{t_k}, q_{t_{k+1}}]$, alors q est nécessairement d_k, ou l'un des c_{t_k+l} (avec $0 \le l < s_{k+1}$), ou l'un des q_{t_k+l} (avec $0 < l < s_{k+1}$).
Pour les points c_{t_k+l} (avec $0 \le l < s_{k+1}$) qui viennent des zones d'incertitude, on a

$$\frac{\mathrm{P}_2(c_{t_k+l})}{c_{t_k+l}} = -\frac{\log(\mathcal{E}^*_{t_k+l})}{q_{t_k+l} + \log(\widehat{W}_k)} = \frac{(1-\delta)\Big((l+1)\log(\widehat{W}_k) + \log(\widehat{W}_{k-1})\Big)}{(2-\delta)\Big((l+1)\log(\widehat{W}_k) + \log(\widehat{W}_{k-1})\Big) + \log(\widehat{W}_k)},$$

qui croît avec l, donc qui est toujours supérieur ou égal à

$$\frac{\mathrm{P}_2(c_{t_k})}{c_{t_k}} = \frac{(1-\delta)\Big(1 + \frac{\log(\widehat{W}_{k-1})}{\log(\widehat{W}_k)}\Big)}{(2-\delta)\Big(1 + \frac{\log(\widehat{W}_{k-1})}{\log(\widehat{W}_k)}\Big) + 1}. \tag{2.7.11}$$

Pour les points q_{t_k+l}, avec $0 < l < s_{k+1}$ et k tel que $s_{k+1} > 1$ (il y a une infinité de tels k si et seulement si ξ n'est pas de type Fibonacci), on a

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{P}_2(q_{t_k+l})}{q_{t_k+l}} = \frac{\log(\widehat{Z}_{t_k+l})}{q_{t_k+l}} &= \frac{(l+1)\log(\widehat{W}_k) + \log(\widehat{W}_{k-1}) - \log(\widehat{W}_k)}{(2-\delta)\Big((l+1)\log(\widehat{W}_k) + \log(\widehat{W}_{k-1})\Big)} \\ &= \frac{1}{2-\delta}\Big(1 - \frac{\log(\widehat{W}_k)}{(l+1)\log(\widehat{W}_k) + \log(\widehat{W}_{k-1})}\Big)\end{aligned}$$

qui croît avec l, donc qui atteint sa valeur minimale pour $l = 1$. Cela donne

$$\frac{\mathrm{P}_2(q_{t_k+l})}{q_{t_k+l}} \geq \frac{\mathrm{P}_2(q_{t_k+1})}{q_{t_k+1}} = \frac{1}{2-\delta}\Big(1 - \frac{1}{2 + \frac{\log(\widehat{W}_{k-1})}{\log(\widehat{W}_k)}}\Big). \tag{2.7.12}$$

Pour les points d_k, par (2.7.9) on a

$$\frac{\mathrm{P}_2(d_k)}{d_k} = \frac{\mathrm{P}_1(d_k)}{d_k} = \frac{1}{3 - \delta + (1-\delta)\frac{\log(\widehat{W}_{k-1})}{\log(\widehat{W}_k)}}. \tag{2.7.13}$$

On conclut en prenant la limite inférieure de (2.7.11), (2.7.12) and (2.7.13).
Si $\delta = 0$, alors on a

$$\frac{(1-\delta)(1+\sigma)}{(2-\delta)(1+\sigma)+1} = \frac{1+\sigma}{3+2\sigma} > \theta(0) = \min\Big(\frac{1+\sigma'}{4+2\sigma'}, \frac{1}{3+\tau}\Big),$$

en utilisant les inégalités $\sigma', \tau \geq \sigma$. Donc par continuité il existe $c > 0$, qui dépend uniquement de σ, σ', τ, tel que

$$\min\Big(\frac{(1-\delta)(1+\sigma)}{(2-\delta)(1+\sigma)+1}, \theta(\delta)\Big) = \theta(\delta) \quad (0 \leq \delta \leq c).$$

□

2.7.2 Discussion sur les zones d'incertitude

Dans cette partie on étudie la condition $\delta \leq h(\sigma)$ des Théorèmes 2.1.2 et 2.7.1. Il est attendu que cette condition puisse être améliorée au moins pour certaines classes de nombres ψ-sturmiens, comme le suggère la construction ci-dessous. En effet, nous allons définir des points particuliers $\mathbf{x}_m^{(i)} \in \mathbb{Z}^3$ (voir Définition 2.7.13) dont les trajectoires passent dans les zones d'incertitude (voir Figure 2.4). La Proposition 2.7.16 montre que ces points imposent de fortes conditions pour qu'une zone d'incertitude soit maximale (dans le sens où le dessin du graphe conjoint de $\mathbf{L_u}$ corresponde (à $o(q)$ près) aux contours de cette zone). Des tests numériques effectués avec les matrices de Roy suggèrent que les conditions auxquelles nous faisons allusion ne sont pas satisfaites pour ces suites particulières, voir Remarque 2.7.17 pour plus de détails.

La question est la suivante : à quoi ressemble le graphe conjoint de $\mathbf{L_u}$ dans les zones d'incertitude du 3-système $\mathbf{P}$ (qui sont grisées dans la Figure 2.2) ? L'optimalité de la condition $\delta \leq h(\sigma)$ dans le Théorème 2.7.1 est équivalente à l'existence de nombres ψ-sturmiens pour lesquels le graphe conjoint de la fonction $\mathbf{L_u}$ associée coïncide à $o(q)$ près avec le graphe conjoint de $\mathbf{P}$ en une infinité de zones d'incertitude "appropriées" (en d'autres mots, au niveau de ces zones d'incertitude appropriées, le dessin du graphe conjoint de $\mathbf{L_u}$ correspond précisément (à $o(q)$ près) aux contours de la zone d'incertitude correspondante).

Dans cette partie, on considère le 3-système dual $(-\mathrm{P}_3, -\mathrm{P}_2, -\mathrm{P}_1)$ (et la fonction $\mathbf{L}^*_{\mathbf{u}}$) plutôt que $\mathbf{P}$ (et $\mathbf{L}_{\mathbf{u}}$). Nous allons maintenant construire des points $\mathbf{x}^{(i)}_m \in \mathbb{Z}^3$ dont les trajectoires traversent la i-ème zone d'incertitude et qui imposent au moins deux conditions (que nous pensons difficiles à satisfaire) sur la suite $(\mathbf{w}_k)_k$ pour que le graphe conjoint de $\mathbf{L}^*_{\mathbf{u}}$ coïncide précisément avec le contour de la i-ème zone d'incertitude. La Proposition 2.7.16 formalise cette idée. Commençons par une propriété générale concernant les points minimaux.

Notation. Soit $(\mathbf{w}_k)_{k\geq 0}$ une suite ψ-sturmienne de $\mathcal{M}$ admissible, à croissance multiplicative, et telle que $(\|\mathbf{w}_k\|)_k$ tende vers $+\infty$. On note N, $(\mathbf{y}_i)_{i\geq -2}$ et $(\mathbf{z}_i)_{i\geq -1}$ la matrice de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et les deux suites de matrices symétriques qui sont associées à $(\mathbf{w}_k)_{k\geq 0}$ par la Définition 2.3.6 et par (2.4.2). On suppose que $\mathrm{Tr}(JN) \neq 0$ (*i.e.* N n'est pas symétrique). Finalement, $\delta \geq 0$ est l'exposant donné par la Proposition 2.5.9 et vérifiant

$$|\det(\mathbf{w}_k)| \asymp \|\mathbf{w}_k\|^\delta.$$

On suppose que le contenu des $\mathbf{y}_i$ est borné et que $\delta < \frac{\sigma}{1+\sigma}$, de sorte que par la Proposition 2.6.1 $(\mathbf{y}_i)_i$ converge dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ vers $\mathbf{y} = (1, \xi, \xi^2)$ avec ξ de type sturmien (voir Définition 2.6.3).

Notons que la proposition suivante ne figure pas dans la version de ce chapitre soumise pour la publication [45].

Proposition 2.7.12. *Soit $i = t_k + l$ (avec $k \geq 0$ et $0 \leq l < s_{k+1}$) et $\mathbf{v}$ un point minimal tel que $\|\mathbf{y}_i\| < \|\mathbf{v}\| < \|\mathbf{y}_{i+1}\|$. Alors il existe α, β non nuls tels que $\lambda\alpha, \lambda\beta \in \mathbb{Z}$ (avec $\lambda = \det(\mathbf{w}_2)\det(N)|\mathrm{Tr}(JN)|$), vérifiant*

$$|\alpha\beta| \ll |\det(\mathbf{y}_i)|$$

et

$$\mathbf{v} = \frac{\alpha\mathbf{y}_i + \beta\mathbf{y}_{i+1}}{\det(\mathbf{y}_i)}.$$

En particulier, on a les estimations

$$\|\mathbf{v}\| \asymp \frac{|\beta|}{|\det(\mathbf{y}_i)|}\|\mathbf{y}_{i+1}\| \quad et \quad \|\mathbf{v}\wedge\mathbf{y}\| \asymp \frac{|\alpha|}{|\det(\mathbf{y}_i)|}\|\mathbf{y}_i\wedge\mathbf{y}\|. \tag{2.7.14}$$

Preuve La famille $(\mathbf{v}, \mathbf{y}_i, \mathbf{y}_{i+1})$ est liée pour i assez grand, car sinon on aurait $\mathrm{L}^*_3(c_i) \leq \log(\|\mathbf{y}_i \wedge \mathbf{y}\|)$, ce qui est impossible étant donné l'allure du 3-système $\mathbf{P}$ (voir Figure 2.2). Donc il existe deux réels α et β non nuls tels que

$$\mathbf{v} = \frac{\alpha\mathbf{y}_i + \beta\mathbf{y}_{i+1}}{\det(\mathbf{y}_i)}.$$

Puisque $\mathbf{v}$ est un point minimal de norme comprise entre celles de $\mathbf{y}_i$ et $\mathbf{y}_{i+1}$ on a

$$\|\mathbf{y}_{i+1}\wedge\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{v}\wedge\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{y}_i\wedge\mathbf{y}\|.$$

Montrons que $|\alpha|, |\beta| \ll |\det(\mathbf{y}_i)|$. Supposons d'abord $|\beta| \geq 2|\det(\mathbf{y}_i)|$. Alors puisque $\|\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{y}_{i+1}\|$ on a nécessairement $|\alpha/\beta| \asymp \|\mathbf{y}_{i+1}\|/\|\mathbf{y}_i\|$. En particulier $|\alpha| \geq 2|\det(\mathbf{y}_i)|$

pour i assez grand, et de $\|\mathbf{v}\wedge\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{y}_i\wedge\mathbf{y}\|$ on déduit $|\alpha/\beta| \asymp \|\mathbf{y}_{i+1}\wedge\mathbf{y}\|/\|\mathbf{y}_i\wedge\mathbf{y}\|$. Ces deux estimations conduisent à

$$\frac{\|\mathbf{y}_{i+1}\|}{\|\mathbf{y}_i\|} \asymp \frac{\|\mathbf{y}_{i+1}\wedge\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{y}_i\wedge\mathbf{y}\|} \asymp \Big(\frac{\|\mathbf{y}_{i+1}\|}{\|\mathbf{y}_i\|}\Big)^{\delta-1},$$

ce qui est impossible sous l'hypothèse $\delta < \frac{\sigma}{1+\sigma} < 2$. De même, si on suppose $|\alpha| \geq 2|\det(\mathbf{y}_i)|$ alors puisque $\|\mathbf{v}\wedge\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{y}_i\|$ on a nécessairement $|\beta| > 2|\det(\mathbf{y}_i)|$ pour i assez grand, ce qui est impossible d'après ce qui précède. Donc on a bien $|\alpha|, |\beta| \ll |\det(\mathbf{y}_i)|$. Montrons maintenant que $\lambda\alpha, \lambda\beta \in \mathbb{Z}$. On a

$$\frac{\alpha}{\det(\mathbf{y}_i)}\mathbf{y}_i\wedge\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{v}\wedge\mathbf{y}_{i+1} \in \mathbb{Z}^3,$$

et par (2.4.11) on a

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_{i+1}\wedge\mathbf{y}_i = \det(\mathbf{w}_k)^{l+1}\mathbf{y}_{\psi(t_k)}\wedge\mathbf{y}_{t_k} &= \det(\mathbf{w}_k)^{l+1}\det(\mathbf{w}_{k-1})\mathbf{z}_{t_{k+1}}\\ &= \det(\mathbf{y}_i)\det(N)^{-1}\mathbf{z}_{t_{k+1}}.\end{aligned}$$

D'après l'assertion (d) du Corollaire 2.4.5, on a $\lambda\alpha \in \mathbb{Z}$. De même, en considérant $\mathbf{v}\wedge\mathbf{y}_i \in \mathbb{Z}^3$ on déduit $\lambda\beta \in \mathbb{Z}$.
Montrons (2.7.14). Comme on a $\|\mathbf{y}_{i+1}\| \asymp \|\mathbf{y}_i\|^{s_{i+1}}\|\mathbf{y}_{i-1}\| \gg \|\mathbf{y}_i\|\,\|\mathbf{y}_{i-1}\|$ par récurrence immédiate on a l'estimation

$$\|\mathbf{y}_{i+1}\| \gg \|\mathbf{y}_i\|^{\gamma}. \tag{2.7.15}$$

En utilisant cette estimation la majoration $\delta < \frac{\sigma}{1+\sigma} \leq \frac{1}{\gamma^2}$ (puisque la plus grande valeur possible de σ est $1/\gamma$, voir Partie 1.5.3 et les résultats de Cassaigne à ce sujet) on trouve

$$\frac{|\beta|}{|\det(\mathbf{y}_i)|}\|\mathbf{y}_{i+1}\| \gg \frac{\|\mathbf{y}_{i+1}\|}{|\det(\mathbf{y}_i)|} \asymp \frac{\|\mathbf{y}_{i+1}\|}{\|\mathbf{y}_i\|^{\delta}} \gg \|\mathbf{y}_i\|^{\gamma-\frac{1}{\gamma^2}},$$

avec $\gamma - \frac{1}{\gamma^2} > 1$. Comme $\frac{|\alpha|}{|\det(\mathbf{y}_i)|}\|\mathbf{y}_i\| \ll \|\mathbf{y}_i\|$, on a donc $\|\mathbf{v}\| \asymp \frac{|\beta|}{|\det(\mathbf{y}_i)|}\|\mathbf{y}_{i+1}\|$. De même, on a

$$\frac{|\alpha|}{|\det(\mathbf{y}_i)|}\|\mathbf{v}\wedge\mathbf{y}_i\| \gg \frac{\|\mathbf{v}\wedge\mathbf{y}_i\|}{|\det(\mathbf{y}_i)|} \gg \|\mathbf{y}_i\|^{-1},$$

et

$$\frac{|\beta|}{|\det(\mathbf{y}_i)|}\|\mathbf{v}\wedge\mathbf{y}_{i+1}\| \ll \|\mathbf{v}\wedge\mathbf{y}_{i+1}\| \asymp \|\mathbf{y}_{i+1}\|^{\delta-1} \ll \|\mathbf{y}_i\|^{\gamma(\delta-1)}$$

avec $\gamma(\delta-1) < \gamma(\frac{1}{\gamma^2}-1) = -1$. D'où $\|\mathbf{v}\wedge\mathbf{y}\| \asymp \frac{|\alpha|}{|\det(\mathbf{y}_i)|}\|\mathbf{y}_i\wedge\mathbf{y}\|$, ce qui achève la démonstration de (2.7.14).
Enfin, il reste à montrer la dernière estimation $|\alpha\beta| \ll |\det(\mathbf{y}_i)|$. Elle provient du fait que la trajectoire de $\mathbf{v}$ doit passer en-dessous de la diagonale descendante de la zone d'incertitude délimitée par les trajectoires de $\mathbf{y}_i$ et $\mathbf{y}_{i+1}$. En effet, notons $d_i = |\det(\mathbf{y}_i)|$. La i-ème zone d'incertitude a pour hauteur $\widehat{\mathrm{L}}_i^*(c_i) - (-\widehat{\mathrm{L}}_i(c_i)) = \delta\log(\widehat{Y}_i) = \log(d_i) + \mathcal{O}(1)$, la première égalité étant obtenue en utilisant (2.7.3). On note aussi $\ell_x = \log(\|\mathbf{y}_{i+1}\|) - \log(\|\mathbf{v}\|)$ et $\ell_y = \log(\|\mathbf{y}_i\wedge\mathbf{u}\|) - \log(\|\mathbf{v}\wedge\mathbf{u}\|)$. D'après les estimations (2.7.14) on a $\ell_x = -\log(\frac{|\beta|}{d_i}) + \mathcal{O}(1)$ et $\ell_y = -\log(\frac{|\alpha|}{d_i}) + \mathcal{O}(1)$. De plus, les estimations $1 \ll |\alpha|, |\beta| \ll d_i$ assure que $\mathcal{O}(1) \leq \ell_x, \ell_y \leq \log(d_i) + \mathcal{O}(1)$. La situation est illustrée à la Figure 2.3.

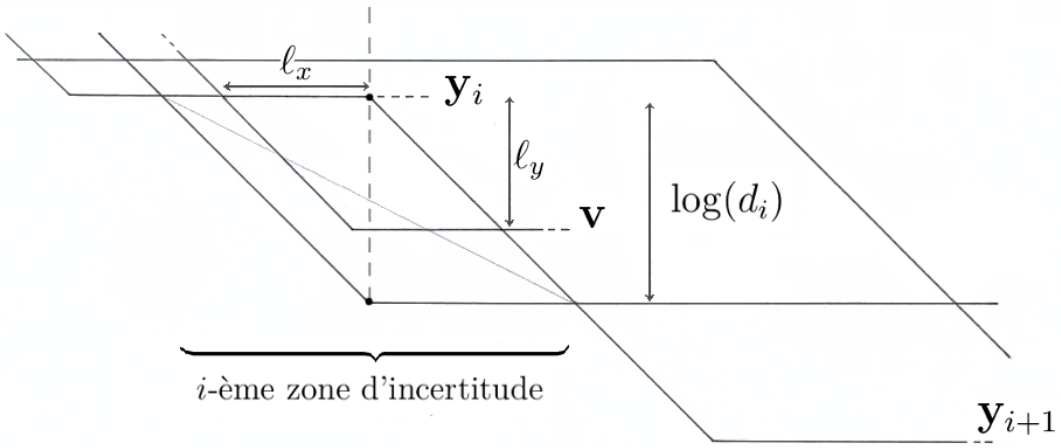

FIGURE 2.3 – Graphe conjoint des trajectoires de $\mathbf{y}_i$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{y}_{i+1}$

Le fait que la trajectoire de $\mathbf{v}$ doit passer en-dessous de la diagonale descendante (qui est de pente $-\frac{1}{2}$) de la zone d'incertitude délimitée par les trajectoires de $\mathbf{y}_i$ et $\mathbf{y}_{i+1}$ signifie que $\ell_x + \ell_y \geq \log(d_i) + \mathcal{O}(1)$, ce qui équivaut à $\frac{|\alpha\beta|}{d_i} \ll 1$. □

Pour plus de simplicité, nous nous focalisons maintenant sur le cas de Fibonacci (même nos constructions peuvent être étendues au cas d'une récurrence sturmienne quelconque). Dans ce contexte, on a $s_k = 1$ pour tout $k \geq 1$, donc $t_k = k - 1$ pour tout $k \geq 0$. Par définition $(\mathbf{w}_i)_i$ vérifie

$$\mathbf{w}_{i+1} = \mathbf{w}_i \mathbf{w}_{i-1} \quad (i \geq 1),$$

et les suites de matrices symétriques associées $(\mathbf{y}_i)_i$, $(\mathbf{z}_i)_i$ sont définies par

$$\begin{cases} \mathbf{y}_i = \mathbf{w}_{i+2} N_i & \text{pour } i \geq -2, \\ \mathbf{z}_i = \frac{1}{\det(\mathbf{w}_{i+1})} \mathbf{y}_{i-1} \wedge \mathbf{y}_i & \text{pour } i \geq -1. \end{cases}$$

Notons qu'à un décalage d'indice près, ces suites sont exactement les mêmes que celles de Roy dans [51]. Pour tout $i \geq 0$, posons

$$t_i = \mathrm{Tr}(\mathbf{w}_i) \quad \text{et} \quad d_i = \det(\mathbf{w}_i).$$

Rappelons également que dans le cas de Fibonacci on a $\sigma = \frac{1}{\gamma}$ où γ désigne le nombre d'or. Par la Proposition 2.4.4, la suite $(\mathbf{y}_i)_i$ vérifie la récurrence suivante

$$\mathbf{y}_{i+1} = t_{i+1}\mathbf{y}_i - d_{i+1}\mathbf{y}_{i-2} \quad (i \geq 0). \tag{2.7.16}$$

Définition 2.7.13. Soit $\left(p_m^{(i)}/q_m^{(i)}\right)_{-1 \leq m \leq r_i}$ la suite (finie) des réduites du rationnel t_{i+1}/d_{i+1}. Par convention on pose $p_{-1}^{(i)} = 1$ et $q_{-1}^{(i)} = 0$. On note $a_0^{(i)} = \lfloor t_{i+1}/d_{i+1} \rfloor, a_1^{(i)}, \ldots$ les quotients partiels de t_{i+1}/d_{i+1}. Pour $-1 \leq m \leq r_i$ nous définissons le point

$$\mathbf{x}_m^{(i)} = p_m^{(i)}\mathbf{y}_i - q_m^{(i)}\mathbf{y}_{i-2} \in \mathbb{Z}^3. \tag{2.7.17}$$

Notons que cette suite commence avec $\mathbf{x}_{-1}^{(i)} = \mathbf{y}_i$ et termine avec $\mathbf{x}_{r_i}^{(i)} = \mathbf{y}_{i+1}$. Il est connu que $(p_m^{(i)})_m$, $(q_m^{(i)})_m$ vérifient la récurrence $u_{m+1} = a_{m+1}^{(i)} u_m + u_{m-1}$ $(m \geq 0)$ (voir par exemple [65, Chapter I]). Donc la suite $(\mathbf{x}_m^{(i)})_m$ vérifie

$$\mathbf{x}_{m+1}^{(i)} = a_{m+1}^{(i)} \mathbf{x}_m^{(i)} + \mathbf{x}_{m-1}^{(i)} \quad (m \geq 0). \tag{2.7.18}$$

Par (2.7.16) et en utilisant l'identité $d_{i+2} = d_{i+1} d_i$, l'équation (2.7.17) peut être réécrite sous la forme

$$\mathbf{x}_m^{(i)} = \frac{\alpha_m^{(i)} \mathbf{y}_i + \beta_m^{(i)} \mathbf{y}_{i+1}}{d_{i+2}}, \tag{2.7.19}$$

avec $\alpha_m^{(i)} = d_i \big(d_{i+1} p_m^{(i)} - t_{i+1} q_m^{(i)} \big)$ et $\beta_m^{(i)} = d_i q_m^{(i)}$. De plus, la théorie des fractions continues assure que pour $m < r_i$

$$|\alpha_m^{(i)}| \asymp \frac{|d_{i+2}|}{q_{m+1}^{(i)}} \ll |d_{i+2}|. \tag{2.7.20}$$

D'un autre côté on a

$$|\beta_m^{(i)}| = |d_i q_m^{(i)}| \leq |d_{i+2}|, \tag{2.7.21}$$

puisque $q_m^{(i)} \leq |d_{i+1}|$. D'où, au regard de la croissance de $(\|\mathbf{y}_i\|)_i$ on déduit de (2.7.19) et des estimations précédentes que

$$\|\mathbf{x}_m^{(i)}\| \asymp \frac{|\beta_m^{(i)}|}{|d_{i+2}|} \|\mathbf{y}_{i+1}\| \ll \|\mathbf{y}_{i+1}\| \quad \text{et} \quad \|\mathbf{x}_m^{(i)} \wedge \mathbf{y}\| \asymp \frac{|\alpha_m^{(i)}|}{|d_{i+2}|} \|\mathbf{y}_i \wedge \mathbf{y}\| \ll \|\mathbf{y}_i \wedge \mathbf{y}\|,$$

ce qui signifie précisément que la trajectoire de $\mathbf{x}_m^{(i)}$ passe au travers de la zone d'incertitude associée à $\mathbf{y}_i$ et $\mathbf{y}_{i+1}$. En fait, grâce à (2.7.20) et (2.7.21), on peut prouver que les trajectoires de $\mathbf{x}_m^{(i)}$, $m = -1, \ldots, r_i$ "zigzaguent" autour d'une droite de pente $-1/2$ (qui est le translaté vertical de la diagonale descendante de la zone d'incertitude par $\frac{1}{2} \log |d_i|$) ; voir Figure 2.4 ci-dessous.

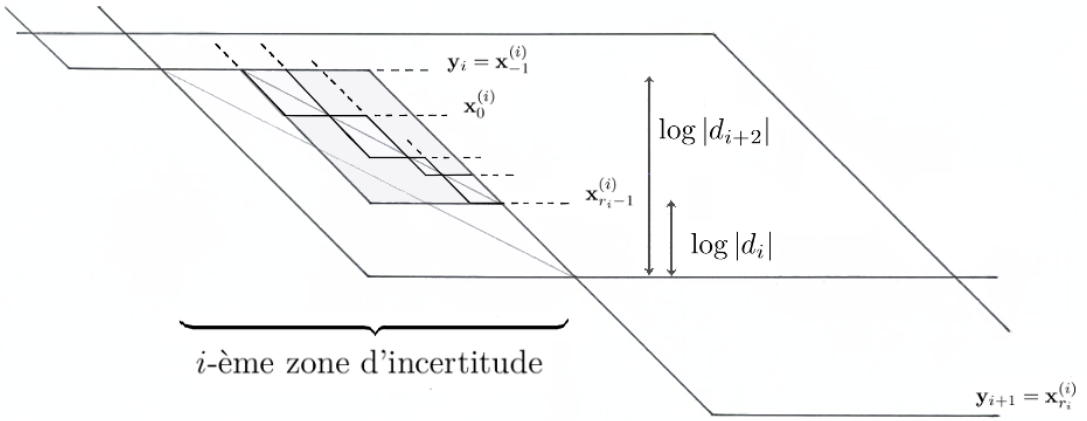

FIGURE 2.4 – Graphe conjoint des $\mathbf{x}_m^{(i)}$ dans la i-ème zone d'incertitude

Notons que les graphes de L_1^* et L_2^* zigzaguent autour de la diagonale descendante de la i-ème zone d'incertitude. Donc le graphe conjoint des points $\mathbf{x}_m^{(i)}$ ne correspond pas à celui de L_1^* et L_2^*.

Proposition 2.7.14. *On note $c_m^{(i)}$ le contenu de $\mathbf{x}_m^{(i)}$. Alors*

(a) Le produit $c_m^{(i)} c_{m+1}^{(i)}$ divise d_i.

(b) Le pgcd de $c_m^{(i)}$ et $c_{m+1}^{(i)}$ divise le contenu de $\mathbf{y}_i$.

Remarque. En particulier, s'il existe un nombre premier p tel que $d_i = p^{\alpha_i}$ pour tout i (ce qui est possible en prenant $a = p$ dans les exemples de Roy, voir Partie 2.8.1), alors au moins la moitié des $\mathbf{x}_m^{(i)}$ sont primitifs (à un facteur multiplicatif borné près).

Preuve La récurrence (2.7.16) et l'identité $d_{i+2} = d_{i+1} d_i$ impliquent $\mathbf{y}_{i-2} \wedge \mathbf{y}_i = d_i \mathbf{z}_{i+1}$. Notons aussi que $\begin{vmatrix} p_m^{(i)} & p_{m+1}^{(i)} \\ q_m^{(i)} & q_{m+1}^{(i)} \end{vmatrix} = \pm 1$ par la théorie des fractions continues. Donc $\mathbf{x}_m^{(i)} \wedge \mathbf{x}_{m+1}^{(i)} = \pm d_i \mathbf{z}_{i+1}$, ce qui prouve l'assertion (a).
L'assertion (b) est une conséquence directe de (2.7.18). Si d divise à la fois le contenu de $\mathbf{x}_m^{(i)}$ et $\mathbf{x}_{m+1}^{(i)}$, alors il divise le contenu de tous les $\mathbf{x}_m^{(i)}$, en particulier celui de $x_{-1}^{(i)} = \mathbf{y}_i$. □

Les propositions suivantes montrent que tout point minimal $\mathbf{v}$ dont la trajectoire passe assez près du contour inférieur de la i-ème zone d'incertitude est nécessairement proportionnel à l'un des $\mathbf{x}_m^{(i)}$. Notons que $\{\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_{i+1}\}$ constitue une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par tous les points minimaux dont la trajectoire passe par la i-ème zone d'incertitude. C'est le même argument que dans la preuve de la Proposition 2.7.12 : si $\mathbf{v}$ est un point minimal comme ci-dessus, alors nécessairement on a $\|\mathbf{y}_i\| < \|\mathbf{v}\|$ et $\|\mathbf{v} \wedge \mathbf{y}\| < \|\mathbf{y}_i \wedge \mathbf{y}\|$. Si la famille $(\mathbf{v}, \mathbf{y}_i, \mathbf{y}_{i+1})$ était libre on aurait $\mathrm{L}_3^*(c_i) \leq \log(\|\mathbf{y}_i \wedge \mathbf{y}\|)$ (rappelons que c_i est l'abscisse du point d'intersection des trajectoires de $\mathbf{y}_i$ et $\mathbf{y}_{i+1}$), ce qui est impossible étant donné l'allure du 3-système $\mathbf{P}$ (voir Figure 2.2).

Proposition 2.7.15. *Soit $\mathbf{v}$ un point minimal dont la trajectoire passe par la i-ème zone d'incertitude. Ecrivons*

$$\mathbf{v} = \frac{\alpha \mathbf{y}_i + \beta \mathbf{y}_{i+1}}{d_{i+2}}.$$

On pose $\lambda = \det(\mathbf{w}_2) \det(N)^2 |\mathrm{Tr}(JN)|$ et on suppose que $|\alpha\beta| < \frac{|d_{i+1}|}{2\lambda}$. Alors $\mathbf{v}$ est proportionnel à l'un des $\mathbf{x}_m^{(i)}$ (avec $-1 \leq m \leq r_i$).

Preuve Nous avons $\alpha \mathbf{z}_{i+1} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{y}_{i+1} \in \mathbb{Z}^3$ et $\beta \mathbf{z}_{i+1} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{y}_i \in \mathbb{Z}^3$. D'après l'assertion (d) du Corollaire 2.4.5, on a $\lambda\alpha, \lambda\beta \in \mathbb{Z}$. Ecrivons $\mathbf{v} = (a\mathbf{y}_i - b\mathbf{y}_{i-2})/d_i$. De manière similaire, en considérant $-b\mathbf{z}_{i+1} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{y}_i \in \mathbb{Z}^3$ et $a\mathbf{z}_{i+1} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{y}_{i-2} \in \mathbb{Z}^3$, on peut montrer que $\lambda a, \lambda b \in \mathbb{Z}$. Notons aussi – grâce à (2.7.16) – que l'on a

$$\mathbf{v} = \frac{(ad_{i+1} - bt_{i+1})\mathbf{y}_i + b\mathbf{y}_{i+2}}{d_{i+2}},$$

donc $\alpha = ad_{i+1} - bt_{i+1}$ et $\beta = b$. Puisque $\mathbf{v}$ est un point minimal on a $1 \ll |\alpha\beta| \ll |d_{i+2}|$. Supposons maintenant que $|\alpha\beta| < \frac{|d_{i+1}|}{2\lambda}$. On suppose aussi que $b \neq 0$ (sinon $\mathbf{v}$ est directement proportionnel à $\mathbf{y}_i$). Sous ces hypothèses on a

$$\left| \frac{a'}{b'} - \frac{t_{i+1}}{d_{i+1}} \right| < \frac{1}{2b'^2},$$

où $a' = \lambda a, b' = \lambda b \in \mathbb{Z}$. Cela prouve que a'/b' est une réduite $p_m^{(i)}/q_m^{(i)}$ de t_{i+1}/d_{i+1}, et que $\mathbf{v}$ est proportionnel à $\mathbf{x}_m^{(i)}$. □

Proposition 2.7.16. *Supposons qu'à une différence bornée près le graphe conjoint de* $\mathbf{L}_\mathbf{u}^*$ *coïncide avec le contour de la i-ème zone d'incertitude (voir Figure 2.4). Alors*

(a) Il existe $0 \leq m < r_i$ *tel que* $\mathbf{x}_m^{(i)}/c_m^{(i)}$ *est un point minimal et sa trajectoire coïncide à une différence bornée près avec le contour inférieur de la i-ème zone d'incertitude (où* $c_m^{(i)}$ *désigne le contenu de* $\mathbf{x}_m^{(i)}$ *). De plus, le* $(m+1)$*-ème quotient partiel* $a_{m+1}^{(i)}$ *de* t_{i+1}/d_{i+1} *vérifie l'estimation* $a_{m+1}^{(i)} \asymp |d_{i+1}|$.

(b) L'entier $c_m^{(i)}$ *vérifie l'estimation* $c_m^{(i)} \asymp |d_i|$ *(il est donc maximal).*

Preuve Supposons que le graphe conjoint de $\mathbf{L}_\mathbf{u}^*$ coïncide à une différence bornée près avec le contour de la i-ème zone d'incertitude. Ceci est équivalent à l'existence d'un point minimal $\mathbf{v}$ dont la trajectoire coïncide (à une différence bornée près) avec le contour inférieur de la i-ème zone d'incertitude. Si on écrit

$$\mathbf{v} = \frac{\alpha \mathbf{y}_i + \beta \mathbf{y}_{i+1}}{d_{i+2}},$$

alors on a $\alpha \asymp \beta \asymp 1$. D'après la Proposition 2.7.15 il existe $0 \leq m < r_i$ tel que $\mathbf{v}$ soit proportionnel à $\mathbf{x}_m^{(i)}$ si i est assez grand. Plus précisément, on a $\mathbf{v} = \pm \mathbf{x}_m^{(i)}/c_m^{(i)}$, où $c_m^{(i)}$ désigne le contenu de $\mathbf{x}_m^{(i)}$. Au regard de la trajectoire de $\mathbf{x}_m^{(i)}$ (voir Figure 2.4) et par la Proposition 2.7.14, le contenu de $\mathbf{x}_m^{(i)}$ doit être $\asymp |d_i|$. De plus, en utilisant (2.7.19), on peut en déduire

$$\left|\alpha_m^{(i)}/d_i\right| = \left|d_{i+1}p_m^{(i)} - t_{i+1}q_m^{(i)}\right| \asymp |\alpha| \asymp 1,$$

et

$$\left|\beta_m^{(i)}/d_i\right| = q_m^{(i)} \asymp |\beta| \asymp 1.$$

Finalement par les estimations classiques

$$\left|\frac{p_m^{(i)}}{q_m^{(i)}} - \frac{t_{i+1}}{d_{i+1}}\right| \asymp \frac{1}{\left(q_m^{(i)}\right)^2 a_{m+1}^{(i)}},$$

on conclut que $a_{m+1}^{(i)} \asymp |d_{i+1}|$. □

Remarque 2.7.17. Des tests numériques effectués avec les matrices de Roy (voir Partie 2.8.1) semblent indiquer que les quotients partiels $a_m^{(i)}$ sont petits, de même que le contenu des $\mathbf{x}_m^{(i)}$ donc que le graphe conjoint de $\mathbf{L}_\mathbf{u}$ ne correspond pas au contour des zones d'incertitude. Une étude plus précise de ces quantités pourraient mener à une meilleure compréhension du graphe conjoint de $\mathbf{L}_\mathbf{u}$ dans les zones d'incertitude.

2.7.3 Preuve des Propositions 2.7.5 et 2.7.9

Cette partie est essentiellement consacrée aux preuves des Propositions 2.7.5 et 2.7.9 de la Partie 2.7.1.

Lemme 2.7.18. *On a l'inégalité*

$$\limsup_{k \to +\infty} \frac{1}{[s_{k+1}; s_k, \ldots, s_1]} \leq \frac{1}{1+\sigma}. \tag{2.7.22}$$

Cette inégalité implique l'inégalité

$$\frac{\sigma}{1+\sigma} \leq 1 - \limsup_{k\to+\infty} \frac{\log(\widehat{W}_{k-1})}{\log(\widehat{W}_k)}. \tag{2.7.23}$$

Remarquons que (2.7.22) et (2.7.23) sont des égalités si la suite $(s_k)_k$ est égale à la suite constante $(1, 1, 1, \dots)$ (cas de Fibonacci).

Preuve On a par définition de σ

$$\frac{1}{[s_{k+1}; s_k, \dots, s_1]} = \frac{1}{s_{k+1} + \frac{1}{[s_k; s_{k-1}, \dots, s_1]}} \leq \frac{1}{1 + \frac{1}{[s_k; s_{k-1}, \dots, s_1]}} \leq \frac{1}{1+\sigma} + o(1),$$

et en passant à la limite supérieure sur le terme de gauche on trouve la première inégalité du lemme. L'égalité est atteinte dans le cas où $(s_n)_n = (1, 1, \dots)$, puisqu'on a alors

$$\limsup_{k\to+\infty} \frac{1}{[s_{k+1}; s_k, \dots, s_1]} = \liminf_{k\to+\infty} \frac{1}{[s_{k+1}; s_k, \dots, s_1]} = \frac{1}{\gamma}$$

(rappelons que γ désigne le nombre d'or), et un rapide calcul assure

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\gamma}}.$$

La seconde inégalité se déduit de la première en utilisant le Lemme 2.5.4 qui donne

$$\begin{aligned} 1 - \limsup_{k\to+\infty} \frac{\log(\widehat{W}_{k-1})}{\log(\widehat{W}_k)} &= 1 - \limsup_{k\to+\infty} \frac{1}{[s_{k+1}; s_k, \dots, s_1]} \\ &\geq 1 - \frac{1}{1+\sigma} = \frac{\sigma}{1+\sigma}. \end{aligned}$$

□

Preuve de la Proposition 2.7.5
Soit $k \geq k_0$ et $i = t_k + l$ avec $0 \leq l < s_{k+1}$. Prouvons (a). Supposons pour commencer que $0 \leq l < s_{k+1} - 1$ et montrons que le graphe conjoint de $\widehat{\mathrm{L}}_{t_{k+1}}, -\widehat{\mathrm{L}}^*_{i+1}, \widehat{\mathrm{L}}_{i+1}$ sur $[c_i, c_{i+1}]$ est comme sur le dessin de gauche de la Figure 2.1. D'après la Remarque 2.7.7 on peut supposer qu'il y a une infinité de k tels que $s_{k+1} > 1$. Puisque l'inégalité $c_{i+1} < q_{t_{k+1}}$ implique que $\widehat{\mathrm{L}}_{t_{k+1}}$ est constant sur $[c_i, c_{i+1}]$, il suffit de prouver que

$$\widehat{\mathrm{L}}_{i+1}(q_{i+1}) < -\widehat{\mathrm{L}}^*_{i+1}(q_{i+1}), \tag{2.7.24}$$

$$-\widehat{\mathrm{L}}^*_{i+1}(c_i) \leq \widehat{\mathrm{L}}_{i+1}(c_i) \quad \text{et} \quad -\widehat{\mathrm{L}}^*_{i+1}(c_{i+1}) \leq \widehat{\mathrm{L}}_{i+1}(c_{i+1}), \tag{2.7.25}$$

$$\widehat{\mathrm{L}}_{t_{k+1}}(c_i) < -\widehat{\mathrm{L}}^*_{i+1}(c_i). \tag{2.7.26}$$

La première inégalité (2.7.24) assure que les graphes de $-\widehat{\mathrm{L}}^*_{i+1}$ et $\widehat{\mathrm{L}}_{i+1}$ s'intersectent. Les inégalités (2.7.25) signifient alors que les abscisses des points d'intersection des deux graphes précédents sont bien situés dans l'intervalle $]c_i, c_{i+1}[$. Enfin, prise avec les inégalités précédentes la dernière inégalité (2.7.26) signifie que les graphes de $-\widehat{\mathrm{L}}^*_{i+1}$ et $\widehat{\mathrm{L}}_{i+1}$ sont

bien situés au-dessus du graphe de $\widehat{\mathrm{L}}_{t_{k+1}}$ sur $[c_i, c_{i+1}]$. Nous allons montrer que l'inégalité (2.7.24) est vérifiée dès que $\delta < \sigma$ (donc impliquée par l'hypothèse $\delta < \frac{\sigma}{1+\sigma}$), les inégalités de (2.7.25) sous la seule hypothèse $\delta \geq 0$ (avec égalité si et seulement si $\delta = 0$), et la dernière inégalité (2.7.26) sous l'hypothèse $\delta < \frac{\sigma}{1+\sigma}$.
Pour montrer (2.7.24) nous allons montrer sous la condition plus faible $\delta < \sigma$ la propriété suivante :

$$-\widehat{\mathrm{L}}^*_{i+1}(q_{i+1}) - \widehat{\mathrm{L}}_{i+1}(q_{i+1}) \longrightarrow +\infty \tag{2.7.27}$$

quand i tend vers l'infini avec $i = t_k + l$ et $0 \leq l < s_{k+1} - 1$. Pour cela on part de l'équation suivante (la deuxième égalité vient de la Définition 2.7.1) :

$$\frac{-\widehat{\mathrm{L}}^*_{i+1}(q_{i+1})}{\widehat{\mathrm{L}}_{i+1}(q_{i+1})} = \frac{-\log(\mathcal{E}^*_{i+1})}{\log(\widehat{Z}_{i+1})} = \frac{(1-\delta)\Big((l+2)\log(\widehat{W}_k) + \log(\widehat{W}_{k-1})\Big)}{(l+1)\log(\widehat{W}_k) + \log(\widehat{W}_{k-1})}. \tag{2.7.28}$$

L'expression du membre de droite de cette égalité est décroissante en l, donc minimale pour $l = s_{k+1} - 2$. Rappelons que d'après le Lemme 2.5.4 et par définition de σ on a $\sigma = \liminf_{k\to+\infty} \frac{\log(\widehat{W}_k)}{\log(\widehat{W}_{k+1})}$. En utilisant l'identité $\log(\widehat{W}_{k+1}) = s_{k+1}\log(\widehat{W}_k) + \log(\widehat{W}_{k-1})$ et en passant à la limite inférieure sur k, l'équation (2.7.28) donne

$$\frac{-\widehat{\mathrm{L}}^*_{i+1}(q_{i+1})}{\widehat{\mathrm{L}}_{i+1}(q_{i+1})} \geq \frac{(1-\delta)\log(\widehat{W}_{k+1})}{\log(\widehat{W}_{k+1}) - \log(\widehat{W}_k)} = \frac{1-\delta}{1 - \frac{\log(\widehat{W}_k)}{\log(\widehat{W}_{k+1})}} \geq \frac{1-\delta}{1-\sigma} + o(1).$$

En particulier puisque $\widehat{\mathrm{L}}_{i+1}(q_{i+1})$ tend vers $+\infty$, si $\delta < \sigma$ on a bien (2.7.27), ce qui implique (2.7.24).
Rappelons que $i = t_k + l$ avec $0 \leq l < s_{k+1} - 1$. Pour montrer que les inégalités (2.7.25) sont satisfaites dès que $\delta \geq 0$, il suffit de remarquer que les équations (2.7.3) impliquent directement

$$-\widehat{\mathrm{L}}^*_{i+1}(c_i) = (1-\delta)\widehat{\mathrm{L}}_{i+1}(c_i), \tag{2.7.29}$$

$$-\widehat{\mathrm{L}}^*_{i+1}(c_{i+1}) = (1-\delta)\widehat{\mathrm{L}}_{i+1}(c_{i+1}), \tag{2.7.30}$$

l'égalité (2.7.30) étant encore valable pour $l = s_{k+1} - 1$.
Enfin, montrons que l'hypothèse $\delta < \frac{\sigma}{1+\sigma}$ implique (2.7.26). Comme c_i est l'abscisse du point d'intersection des graphes de $\widehat{\mathrm{L}}^*_i$ et $\widehat{\mathrm{L}}^*_{i+1}$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{-\widehat{\mathrm{L}}^*_{i+1}(c_i)}{\widehat{\mathrm{L}}_{t_{k+1}}(c_i)} = \frac{-\widehat{\mathrm{L}}^*_{i}(c_i)}{\widehat{\mathrm{L}}_{t_{k+1}}(c_i)} = \frac{-\log(\mathcal{E}^*_i)}{\log(\widehat{W}_k)} &= (1-\delta)\Big((l+1) + \frac{\log(\widehat{W}_{k-1})}{\log(\widehat{W}_k)}\Big) \\
&\geq (1-\delta)\Big(1 + \frac{\log(\widehat{W}_{k-1})}{\log(\widehat{W}_k)}\Big) \\
&\geq (1-\delta)(1+\sigma) + o(1).
\end{aligned}$$

En particulier si $\delta < \frac{\sigma}{1+\sigma}$ on a $(1-\delta)(1+\sigma) > 1$, ce qui achève la démonstration de (2.7.26).
On vient donc de montrer que l'allure du graphe conjoint de $\widehat{\mathrm{L}}_{t_{k+1}}, -\widehat{\mathrm{L}}^*_{i+1}, \widehat{\mathrm{L}}_{i+1}$ sur $[c_i, c_{i+1}]$ est comme sur le dessin de gauche de la Figure 2.1, dans le cas $t_k \leq i < t_{k+1} - 1$.

Pour montrer que l'allure du graphe conjoint de $\widehat{\mathrm{L}}_{t_{k+1}}, -\widehat{\mathrm{L}}^*_{t_k}, \widehat{\mathrm{L}}_{t_k}$ sur $[c_{t_k-1}, c_{t_k}]$ est comme sur le dessin de droite de la Figure 2.1, il s'agit cette fois-ci de montrer que

$$\widehat{\mathrm{L}}_{t_k}(c_{t_k-1}) \leq -\widehat{\mathrm{L}}^*_{t_k}(c_{t_k-1}) \leq \widehat{\mathrm{L}}_{t_{k+1}}(c_{t_k-1}), \tag{2.7.31}$$

et

$$\widehat{\mathrm{L}}_{t_{k+1}}(c_{t_k}) \leq -\widehat{\mathrm{L}}^*_{t_k}(c_{t_k}) \leq \widehat{\mathrm{L}}_{t_k}(c_{t_k}). \tag{2.7.32}$$

Si $t_k+1 < t_{k+1}$ (*i.e.* $s_{k+1} > 1$), puisque $-\widehat{\mathrm{L}}^*_{t_k}(c_{t_k}) = -\widehat{\mathrm{L}}^*_{t_k+1}(c_{t_k})$ et $\widehat{\mathrm{L}}_{t_k}(c_{t_k}) = \widehat{\mathrm{L}}_{t_k+1}(c_{t_k})$, les inégalités (2.7.32) viennent de l'allure du graphe conjoint sur $[c_i, c_{i+1}]$ pour $i = t_k$ au point c_i, ce qui a été traité précédemment. Si $t_k + 1 = t_{k+1}$, puisque $-\widehat{\mathrm{L}}^*_{t_k}(c_{t_k}) = -\widehat{\mathrm{L}}^*_{t_k+1}(c_{t_k})$ et $\widehat{\mathrm{L}}_{t_k}(c_{t_k}) = \widehat{\mathrm{L}}_{t_{k+2}}(c_{t_k})$, les inégalités (2.7.32) sont les inégalités (2.7.31) en $k+1$. Il ne reste donc qu'à montrer (2.7.31). Au point $i = t_k - 1$, (2.7.3) donne

$$-\widehat{\mathrm{L}}^*_{t_k}(c_{t_k-1}) = (1-\delta)\log(\widehat{W}_k) = (1-\delta)\widehat{\mathrm{L}}_{t_{k+1}}(c_{t_k-1}), \tag{2.7.33}$$

d'où on tire immédiatement $-\widehat{\mathrm{L}}^*_{t_k}(c_{t_k-1}) \leq \widehat{\mathrm{L}}_{t_{k+1}}(c_{t_k-1})$, avec égalité si et seulement si $\delta = 0$. Par ailleurs, on a

$$\widehat{\mathrm{L}}_{t_k}(c_{t_k-1}) = \log(\widehat{W}_{k-1}),$$

donc la relation (2.7.33) montre que l'inégalité de gauche de (2.7.31) découle de la majoration

$$\delta < 1 - \frac{\log(\widehat{W}_{k-1})}{\log(\widehat{W}_k)},$$

qui provient de l'hypothèse $\delta < \frac{\sigma}{1+\sigma}$ et de l'inégalité (2.7.23). Cela permet de terminer la preuve de (2.7.31), donc le graphe conjoint de $\widehat{\mathrm{L}}_{t_{k+1}}, -\widehat{\mathrm{L}}^*_{t_k}, \widehat{\mathrm{L}}_{t_k}$ sur $[c_{t_k-1}, c_{t_k}]$ a bien l'allure annoncée. De plus, les inégalités (2.7.31) et (2.7.32) sont strictes si $\delta > 0$.
Montrons finalement l'assertion (b), *i.e.* l'estimation (2.7.5). D'après l'assertion (a) (cf Figure 2.1) pour $i = t_k + l$ avec $0 < l < s_{k+1}$, on a

$$\max\left(\widehat{\mathrm{L}}_i(q_i), \widehat{\mathrm{L}}_{t_{k+1}}(q_i)\right) = \widehat{\mathrm{L}}_i(q_i),$$

et par (2.7.27), l'estimation (2.7.5) est vérifiée si i est de la forme $i = t_k + l$ avec $0 < l < s_{k+1}$. Pour $i = t_k$ on a

$$\max\left(\widehat{\mathrm{L}}_i(q_i), \widehat{\mathrm{L}}_{t_{k+1}}(q_i)\right) = \widehat{\mathrm{L}}_{t_{k+1}}(q_i),$$

et pour k assez grand

$$\frac{-\widehat{\mathrm{L}}^*_{t_k}(q_{t_k})}{\widehat{\mathrm{L}}_{t_{k+1}}(q_{t_k})} = \frac{(1-\delta)(\log(\widehat{W}_k) + \log(\widehat{W}_{k-1}))}{\log(\widehat{W}_k)} \geq (1-\delta)(1+\sigma) - o(1).$$

L'hypothèse $\delta < \frac{\sigma}{1+\sigma}$ est équivalente à $(1-\delta)(1+\sigma) > 1$, et comme $\widehat{\mathrm{L}}_{t_{k+1}}(q_{t_k})$ tend vers l'infini, ceci prouve (2.7.5) pour i de la forme $i = t_k$, ce qui achève la démonstration de (b). □

Preuve de la Proposition 2.7.9
On commence par prouver que **P** est bien un 3-système. Montrons déjà que **P** est continue.

Pour cela, il suffit de vérifier le bon recollement aux points c_i. Rappelons que pour $t_k \leq i < t_{k+1} - 1$, on a

$$-\widehat{\mathrm{L}}_i^*(c_i) = -\widehat{\mathrm{L}}_{i+1}^*(c_i) \quad \text{et} \quad \widehat{\mathrm{L}}_i(c_i) = \widehat{\mathrm{L}}_{i+1}(c_i).$$

Cela assure immédiatement la continuité de $\mathbf{P}$ sur $[c_{t_k-1}, c_{t_{k+1}-1}[$. Avec $i = t_{k+1} - 2$, au point c_{i+1}, on a

$$-\widehat{\mathrm{L}}_{i+1}^*(c_{i+1}) = -\widehat{\mathrm{L}}_{t_{k+1}}^*(c_{i+1}) \quad \text{et} \quad \widehat{\mathrm{L}}_{i+1}(c_{i+1}) = \widehat{\mathrm{L}}_{t_{k+2}}(c_{i+1}).$$

Or par définition de $\mathbf{P}$, on a

$$\mathbf{P}(c_{i+1}) = \Phi_3\Big(\widehat{\mathrm{L}}_{t_{k+1}}(c_{i+1}), \widehat{\mathrm{L}}_{t_{k+2}}(c_{i+1}), -\widehat{\mathrm{L}}_{t_{k+1}}^*(c_{i+1})\Big),$$

donc là encore le recollement s'effectue correctement. La fonction $\mathbf{P} : [q_{t_{k_0}}, +\infty[$ est donc continue, affine par morceaux, et ses composantes P_i ont pour pentes 1 ou 0. D'après l'assertion (a) de la Proposition 2.7.5 et les graphes conjoints de la Figure 2.1, le dessin du graphe conjoint de $\mathbf{P}$ est celui de la Figure 2.2.
Soit $k \geq k_0$ et $t_k - 1 \leq i < t_{k+1} - 1$. Rappelons que $c_i < q_{i+1} < c_{i+1}$. Par ailleurs, on sait que $\widehat{\mathrm{L}}_{i+1}$ est constante sur $[c_i, q_{i+1}]$ et croissante de pente 1 sur $[q_{i+1}, c_{i+1}]$, tandis que $-\widehat{\mathrm{L}}_{i+1}^*$ est croissante de pente 1 sur $[c_i, q_{i+1}]$, et constante sur $[q_{i+1}, c_{i+1}]$. Comme $c_{i+1} < q_{t_{k+1}}$, $\widehat{\mathrm{L}}_{t_{k+1}}$ est constante sur $[c_i, c_{i+1}]$. On en déduit que $\mathbf{P}$ vérifie le point (b) de la Définition 1.6.8. En particulier, $\mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2 + \mathrm{P}_3$ est affine de pente 1.
Comme par définition de $\mathbf{P}$ on a $\mathrm{P}_1 \leq \mathrm{P}_2 \leq \mathrm{P}_3$, pour montrer que $\mathbf{P}$ satisfait au point (a) de la Définition 1.6.8, il suffit de montrer que $\mathrm{P}_1(q) + \mathrm{P}_2(q) + \mathrm{P}_3(q) = q$ pour $q \geq q_{t_{k_0}}$, et puisque $\mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2 + \mathrm{P}_3$ est affine de pente 1 par ce qui précède, il suffit que cela soit vérifié en un point q particulier. Or pour $k \geq k_0$, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_1(q_{t_k}) + \mathrm{P}_2(q_{t_k}) + \mathrm{P}_3(q_{t_k}) &= \widehat{\mathrm{L}}_{t_k}(q_{t_k}) + \widehat{\mathrm{L}}_{t_{k+1}}(q_{t_k}) - \widehat{\mathrm{L}}_{t_k}^*(q_{t_k}) \\
&= \log(\widehat{W}_{k-1}) + \log(\widehat{W}_k) - (\delta - 1)(\log(\widehat{W}_k) + \log(\widehat{W}_{k-1})) \\
&= q_{t_k}.
\end{aligned}$$

Enfin, il est clair d'après l'allure de son graphe conjoint donné à la Figure 2.2 que $\mathbf{P}$ vérifie le point (c) de la Définition 1.6.8. Donc $\mathbf{P}$ est bien un 3-système.

Montrons maintenant les assertions sur $\mathbf{L_u}$ et $\mathbf{P}$. Remarquons d'abord que si $i \neq j$ (avec i et j assez grands) alors $\mathbf{z}_i$ et $\mathbf{z}_j$ sont linéairement indépendants. En effet si $\mathbf{z}_i$ et $\mathbf{z}_j$ étaient proportionnels, alors il existerait une constante λ telle que $\mathrm{L}_{\mathbf{z}_i} = \mathrm{L}_{\mathbf{z}_j} + \lambda$, et il est clair d'après la Figure 2.2 que ceci n'est jamais vérifié. Soit $i = t_k + l$ avec $0 \leq l < s_{k+1}$ et k assez grand. Par définition des minima successifs, on déduit de ce qui précède et de l'assertion (a) de la Proposition 2.7.4 que pour $q \in I_i = [a_i, b_i]$ on a

$$\mathrm{L}_1(q) \leq \min(\mathrm{L}_{\mathbf{z}_i}(q), \mathrm{L}_{\mathbf{z}_{t_{k+1}}}(q)) = \mathrm{P}_1(q) + \mathcal{O}(1), \tag{2.7.34}$$

$$\mathrm{L}_2(q) \leq \max(\mathrm{L}_{\mathbf{z}_i}(q), \mathrm{L}_{\mathbf{z}_{t_{k+1}}}(q)) = \mathrm{P}_2(q) + \mathcal{O}(1). \tag{2.7.35}$$

D'un autre côté, on a aussi $\mathrm{L}_1^*(q) \leq \mathrm{L}_{\mathbf{y}_i}^*(q)$. Montrons que $\mathbf{y}_i$ est proportionnel à un point minimal et qu'il existe une constante $c > 0$ ne dépendant que de ξ telle que pour i assez grand et pour tout $q \in I_i$, on a :

$$|\mathrm{L}_1^*(q) - \widehat{\mathrm{L}}_i^*(q)| \leq c, \tag{2.7.36}$$

i.e. $\mathbf{y}_i$ réalise L_1^* sur I_i à $\mathcal{O}(1)$ près. En effet, soient $q \in I_i$ et $\mathbf{x} \neq 0$ (qui dépend de q *a priori*) tel que $\mathrm{L}_1^*(q) = \mathrm{L}_{\mathbf{x}}^*(q)$, et supposons que $\mathbf{y}_i$ n'est pas proportionnel à $\mathbf{x}$. Alors on a nécessairement $\mathrm{L}_{\mathbf{x}}^*(q) \leq \mathrm{L}_{\mathbf{y}_i}^*(q)$, et on en déduit par définition des minima successifs que $\mathrm{L}_2^*(q) \leq \mathrm{L}_{\mathbf{y}_i}^*(q)$. Donc, puisque $\mathrm{L}_2 = -\mathrm{L}_2^* + \mathcal{O}(1)$ par la Proposition 1.6.6, on a l'inégalité

$$-\mathrm{L}_{\mathbf{y}_i}^*(q) + \mathcal{O}(1) \leq \mathrm{L}_2(q).$$

Cette inégalité combinée avec l'inégalité (2.7.35) et l'assertion (a) de la Proposition 2.7.4 donne :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_3(q) = -\widehat{\mathrm{L}}_i^*(q) &= -\mathrm{L}_{\mathbf{y}_i}^*(q) + \mathcal{O}(1) \\ &\leq \mathrm{P}_2(q) + \mathcal{O}(1) = \max\left(\widehat{\mathrm{L}}_i(q), \widehat{\mathrm{L}}_{t_{k+1}}(q)\right) + \mathcal{O}(1), \end{aligned} \tag{2.7.37}$$

pour $q \in I_i$. D'après l'assertion (a) de la Proposition 2.7.5 (cf Figure 2.1) et par (2.7.5), il existe $c' > 0$ indépendante de i telle que l'inégalité (2.7.37) soit impossible si $q \in [a_i + c', b_i - c']$. Si q appartient à cet intervalle, on en déduit que $\mathbf{y}_i$ est proportionnel au vecteur $\mathbf{x}$ (qui est un point minimal), et comme le contenu de $\mathbf{y}_i$ est borné par hypothèse, on en déduit que $|\widehat{\mathrm{L}}_i^*(q) - \mathrm{L}_{\mathbf{x}}^*(q)| \leq \mathcal{O}(1)$, et donc par choix de $\mathbf{x}$, cela se réécrit

$$|\widehat{\mathrm{L}}_i^*(q) - \mathrm{L}_1^*(q)| \leq \mathcal{O}(1).$$

Cette inégalité étant valable sur $[a_i + c', b_i - c']$, par caractère 1-lipschitzien de $\widehat{\mathrm{L}}_i^*$ et L_1^* elle se prolonge immédiatement à I_i, ce qui prouve (2.7.36). Par la Proposition 1.6.6, ceci implique

$$\mathrm{L}_3(q) + \mathcal{O}(1) \leq -\widehat{\mathrm{L}}_i^*(q) = \mathrm{P}_3(q),$$

pour $q \in I_i$. De (2.7.34), (2.7.35) et de l'inégalité précédente on tire

$$\mathrm{L}_j(q) \leq \mathrm{P}_j(q) + \mathcal{O}(1) \quad \text{pour } j = 1, 2, 3.$$

Par ailleurs par l'assertion (b) de la Proposition 1.6.5 et le point (a) de la Définition 1.6.8 d'un 3-système, ceci implique

$$\mathrm{L}_j(q) = \mathrm{P}_j(q) + \mathcal{O}(1) \quad \text{pour } j = 1, 2, 3, \tag{2.7.38}$$

pour $q \in I_i$. Ceci prouve l'assertion (b) de la Proposition. L'assertion (a) découle de la croissance de L_1 et de (2.7.38). En effet, pour $i = t_k + l$ avec $0 < l \leq s_{k+1}$, on a (cf Figures 2.1 et 2.2)

$$\mathrm{L}_1(b_{i-1}) + \mathcal{O}(1) = \mathrm{P}_1(b_{i-1}) = \widehat{\mathrm{L}}_{t_{k+1}}(b_{i-1}) = \log(\widehat{W}_k),$$

et

$$\mathrm{L}_1(a_i) + \mathcal{O}(1) = \mathrm{P}_1(a_i) = \widehat{\mathrm{L}}_{t_{k+1}}(a_i) = \log(\widehat{W}_k) = \mathrm{L}_1(b_{i-1}) + \mathcal{O}(1),$$

donc

$$\mathrm{L}_1(q) + \mathcal{O}(1) = \mathrm{P}_1(q)$$

pour $q \in [b_i, a_{i+1}] = I_i'$, et comme les familles $(I_j)_j$ et $(I_j')_j$ recouvrent $[M, +\infty[$ pour M assez grand, cela prouve (a).
L'assertion (c) se déduit également de (2.7.38). En effet, ces égalités impliquent pour $q = b_j, a_{j+1}$:

$$\mathrm{L}_2(q) + \mathcal{O}(1) = \mathrm{L}_3(q) + \mathcal{O}(1) = \mathrm{P}_2(q) = \mathrm{P}_3(q)$$

et on conclut en remarquant que $\mathrm{L}_2, \mathrm{L}_3$ sont continues affines par morceaux de pente 0 ou 1. □

2.8 Exemples de nombres ψ-sturmiens propres

Dans la Partie 2.8.1 on montre que les matrices de Roy [51, Example 3.3] donnent des nombres ψ-sturmiens propres (donc de nombres de type sturmien). Grâce à ces exemples on peut déduire le Théorème 2.1.2 du Théorème 2.7.1 (voir Partie 2.9).
Dans la Partie 2.8.2 nous présentons les exemples de Bugeaud et Laurent : ce sont des cas particuliers de nombres ψ-sturmiens propres pour lesquels le δ associé est égal à 0.

2.8.1 Exemples de Roy

Soit $\psi \in \mathcal{F}_{stur}$ une fonction sturmienne. On note σ le réel défini par (2.7.2). Dans cette partie on montre que les exemples de Roy (voir Exemple 3.3, Exemple 4.3, Exemple 5.4 de [51]) fournissent des exemples de nombres ψ-sturmiens propres. Rappelons qu'on note $\|\cdot\|_\infty$ la norme sur $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ définie comme le maximum des valeurs absolues des coefficients d'une matrice.

Exemple 2.8.1 (Roy, 2007). Fixons un triplet d'entiers $\underline{A} = (a, b, c)$ tels que $a \geq 2$ et $c > b \geq 1$; alors la suite ψ-sturmienne $(\mathbf{w}_i)_{i\geq 0}$ définie par

$$\mathbf{w}_0 = \begin{pmatrix} 1 & b \\ a & a(b+1) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 & c \\ a & a(c+1) \end{pmatrix}$$

est admissible, avec la matrice

$${}^tN = \begin{pmatrix} -1 + a(b+1)(c+1) & -a(b+1) \\ -a(c+1) & a \end{pmatrix}.$$

En effet ces matrices appartiennent à $\mathcal{M}$ et Roy montre par un calcul direct que $\mathbf{w}_0{}^tN, \mathbf{w}_1N$ et $\mathbf{w}_1\mathbf{w}_0{}^tN$ sont symétriques.
Dans la proposition suivante (démontrée par Roy dans le cas de Fibonacci) on utilise ces valeurs de $\mathbf{w}_0$ et $\mathbf{w}_1$ pour constuire une suite ψ-sturmienne $(\mathbf{w}_i)_i$.

Proposition 2.8.2. *La suite ψ-sturmienne $(\mathbf{w}_i)_i$ est à croissance multiplicative ; on peut prendre les constantes $c_1 = 1$ et $c_2 = 2$ dans* (2.5.1) *avec la norme $\|\cdot\|_\infty$. De plus $(\|\mathbf{w}_i\|_\infty)_i$ tend vers l'infini. Enfin pour tout $i \geq 0$ la matrice $\mathbf{w}_i$ est primitive et $\mathrm{Tr}(\mathbf{w}_i)$ et $\det(\mathbf{w}_i)$ sont premiers entre eux. En particulier, $(\mathbf{w}_i)_i$ donne un nombre ψ-sturmien $\xi_{\underline{A}}$.*

Remarque. En particulier, les hypothèses du Corollaire 2.4.5 sont satisfaites. Comme le fait aussi remarquer Roy [51, Example 5.4], comme $\det(\mathbf{w}_0) = \det(\mathbf{w}_1) = a$, la condition (2.5.10) est vraie pour $i = 0, 1$ avec

$$\alpha = \frac{\log(a)}{\log\Big(2a(c+1)\Big)} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\log(a)}{\log\Big(2a(b+1)\Big)}.$$

Preuve La croissance multiplicative avec les constantes implicites annoncées découle du Lemme 2.5.3. Le fait que $(\|\mathbf{w}_i\|_\infty)_i$ diverge vers l'infini vient du fait que $c_1 = 1$ et que $\|\mathbf{w}_0\|_\infty, \|\mathbf{w}_1\|_\infty > 1$ (puisque $a > 1$). En considérant les matrices de l'exemple ci-dessus modulo a, Roy montre [51, Example 4.3] que $\mathrm{Tr}(\mathbf{w}_i)$ et $\det(\mathbf{w}_i)$ sont premiers entre eux, ce qui implique que $\mathbf{w}_i$ est primitive. □

On note $\delta_{\underline{A}} \geq 0$ le réel fourni par la Proposition 2.5.9. On a l'encadrement

$$\alpha \leq \delta_{\underline{A}} \leq \beta. \tag{2.8.1}$$

Proposition 2.8.3. *L'ensemble* $\{\delta_{\underline{A}} \mid \underline{A} = (a,b,c)$ *avec* $a \geq 2$ *et* $c > b \geq 1\}$ *est dense dans* $[0, \frac{\sigma}{1+\sigma}]$.

Preuve On suit [51, Proof of Corollary 7.2]. Soit $\delta \in]0, \frac{\sigma}{1+\sigma}[$ et $\varepsilon > 0$. Alors il existe deux entiers k et l avec $0 < l < k$ et

$$\delta - \varepsilon \leq \frac{l}{k+2} \leq \frac{l}{k} \leq \delta.$$

Considérons alors le triplet d'entiers $\underline{A} = (a,b,c)$ avec $a = 2^l, b = 2^{k-l} - 1$ et $c = 2^{k-l}$. Avec ce choix, on a $\alpha = l/(k+2)$ et $\beta = l/k$. Donc par (2.8.1) $\delta_{\underline{A}}$ vérifie

$$|\delta - \delta_{\underline{A}}| \leq \varepsilon.$$

□

Mentionnons également le résultat suivant (qui ne figure pas dans [45]).

Proposition 2.8.4. *Soit* ξ *un nombre de type sturmien. On note* σ *et* δ *les quantités associées. Alors* ξ *est un nombre extrémal si et seulement si* $\sigma = \frac{1}{\gamma}$ *et* $\delta = 0$.

Preuve D'après le Théorème 2.1.1 on a $\widehat{\omega}_2(\xi) = 1 + (1-\delta)(1+\sigma)$. Si ξ est extrémal, on doit avoir $\widehat{\omega}_2(\xi) = \gamma^2$: comme $\delta \geq 0$ et $\sigma \leq \frac{1}{\gamma}$, cette valeur maximale n'est atteignable que si $\sigma = \frac{1}{\gamma}$ et $\delta = 0$. Réciproquement, supposons que $\sigma = \frac{1}{\gamma}$ et $\delta = 0$. Alors en utilisant les estimations de la Proposition 2.6.8, on peut montrer que la suite de matrices symétriques $(\mathbf{y}_i)_i$ associée à ξ vérifie les hypothèses du Théorème 3.1 de [50], donc ξ est extrémal. □

2.8.2 Exemples de Bugeaud et Laurent

Dans cette partie on présente rapidement les exemples de Bugeaud et Laurent (voir Partie 1.4 du Chapitre 1) et on montre que leurs nombres $\xi_{\varphi'}$ [8] sont des nombres ψ-sturmiens propres pour lesquels le δ associé est égal à 0.

Soit $\underline{s}' = (s'_k)_{k\geq 1}$ une suite d'entiers naturels non nuls. Fixons a et b deux entiers distincts > 0. On définit par récurrence une suite de mots $(m_k)_{k\geq 0}$ par les formules

$$m_0 = b, \quad m_1 = b^{s'_1 - 1}a \quad \text{et} \quad m_{k+1} = m_k^{s'_{k+1}} m_{k-1} \quad (k \geq 1).$$

Cette suite converge vers un mot infini

$$m_\varphi = \lim_{k\to+\infty} m_k = b^{s'_1-1}a\ldots,$$

qu'on appelle classiquement *mot sturmien caractéristique d'angle* (ou de *pente*) $\varphi' := [0; s'_1, s'_2, s'_3, \ldots]$, construit sur l'alphabet $\{a,b\}$. On note $\xi_{\varphi'} = [0; m_{\varphi'}]$ le réel dont

les quotients partiels sont successivement 0 et les lettres du mot infini $m_{\varphi'}$.

Maintenant soit $\underline{s} = (s_k)_{k\geq 0}$ la suite définie par $s_0 = -1$, $s_1 = 1$ et $s_k = s'_k$ $(k \geq 2)$. On note ψ la fonction sturmienne associée à $\underline{s}$ et σ le nombre réel défini par (2.7.2). On définit la suite ψ-sturmienne $(\mathbf{w}_i)_{i\geq 0}$ dont les deux premiers termes sont donnés par

$$\mathbf{w}_0 = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{s'_1-1} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors grâce au Lemme 5.3 de [8], la suite $(\mathbf{w}_i)_i$ est admissible avec la matrice

$$N = \left[\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]^{-1}.$$

Proposition 2.8.5. *La suite $(\mathbf{w}_i)_i$ satisfait les hypothèses de la Proposition 2.6.1 et le nombre ψ-sturmien propre associé est précisément $\xi_{\varphi'}$ (défini précédemment). De plus, le nombre δ associé (donné par la Proposition 2.5.9) est égal à 0.*

Preuve Pour commencer, notons que $(\mathbf{w}_i)_i$ est à croissance multiplicative d'après le Lemme 2.5.3, que la suite $(\|\mathbf{w}_i\|)_i$ diverge vers l'infini et que $|\det(\mathbf{w}_i)| = 1$ pour tout i (de sorte que le nombre δ associé est égal à 0). On note $(\mathbf{y}_i)_i$ la suite des matrices symétriques associées à $(\mathbf{w}_i)_i$ et $l_1, l_2, \ldots$ les lettres du mot infini $m_{\varphi'}$. Soit p_n/q_n la n-ème réduite de $\xi_{\varphi'}$. Les propriétés classiques des fractions continues donnent (voir par exemple [65, Chapter I])

$$\begin{pmatrix} q_n & q_{n-1} \\ p_n & p_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} l_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Puisque chaque matrice $\mathbf{y}_i$ est de la forme du produit de droite pour un n particulier (par le Lemme 5.3 de [8]), cela implique que le nombre ψ-sturmien donné par la Proposition 2.6.1 est égal à $\xi_{\varphi'}$. □

2.9 Preuve du Théorème 2.1.2 et du Corollaire 2.1.3

Soit $\psi \in \mathcal{F}_{stur}$ une fonction sturmienne. On note σ le nombre réel défini par (2.7.2). Dans cette partie on prouve le Théorème 2.1.2 et le Corollaire 2.1.3 énoncés dans l'introduction.

Preuve du Théorème 2.1.2
On pose

$$\Delta_\psi = \{\delta_{\underline{A}} \mid \underline{A} = (a, b, c) \text{ avec } a \geq 2,\ c \geq b \geq 1 \text{ et } \delta_{\underline{A}} < \frac{\sigma}{1+\sigma}\} \cup \{0\}.$$

La Proposition 2.8.3 implique que Δ_ψ est dense dans $[0, \sigma/(1+\sigma)]$. D'après les Propositions 2.8.2 et 2.8.5, pour chaque $\delta \in \Delta_\psi$, il existe un nombre ψ-sturmien propre ξ tel que

δ est le nombre associé à ξ par la Proposition 2.5.9. On conclut par le Théorème 2.7.1 et par (2.7.6). □

Preuve du Corollaire 2.1.3
Pour établir certains résultats, Cassaigne [13] montre que

$$\mathcal{S} = \{1/[\mathbf{b}] \mid \mathbf{b} \in (\mathbb{Z}_{\geq 1})^{\mathbb{N}} \text{ tel que pour tout } k \geq 0 \text{ on a } [\mathbf{b}] \geq [\mathrm{T}^{\mathrm{k}}\mathbf{b}]\}, \tag{2.9.1}$$

où $[\mathbf{b}]$ est la fraction continue $[b_0; b_1, \dots]$ et T est l'opérateur de décalage à droite ($[\mathrm{T}^{\mathrm{k}}\mathbf{b}]$ est donc le réel $[b_k; b_{k+1}, \dots]$).
D'après le Théorème 2.1.2, pour tout $\sigma \in \mathcal{S}$, l'ensemble des $\omega_2(\xi)$ avec ξ ψ-sturmien propre et $\sigma(\psi) = \sigma$ est dense dans l'intervalle $\left]2/\sigma, 1 + 2/\sigma\right[$. Il s'agit donc de montrer que

$$\bigcup_{\sigma \in \mathcal{S}} \left]\frac{2}{\sigma}, \frac{2}{\sigma} + 1\right[=]1 + \sqrt{5}, 2 + \sqrt{5}[\cup]2 + 2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{3}[\cup]3 + \sqrt{13}, +\infty[.$$

Pour $n \geq 1$ et $1 \leq a \leq n$ on définit la suite $\mathbf{u}_{a,n} = (s_k)_{k \geq 0}$ par

$$\begin{cases} s_{2k} = n, \\ s_{2k+1} = a, \end{cases}$$

pour tout $k \geq 0$. Il est clair que pour $k \geq 0$ on a $[\mathbf{u}_{a,n}] \geq [\mathrm{T}^{\mathrm{k}}\mathbf{u}_{\mathrm{a,n}}]$, donc $1/[\mathbf{u}_{a,n}] \in \mathcal{S}$, et

$$[\mathbf{u}_{a,n}] = [n; \overline{a, n}] = \frac{an + \sqrt{(an)^2 + 4an}}{2a}.$$

On définit alors

$$\delta_{a,n} = 2[\mathbf{u}_{a,n}] = n + n\sqrt{1 + \frac{4}{an}}.$$

Étudions la réunion des intervalles $[\delta_{a,n}, \delta_{a,n} + 1]$ lorsque $n \geq 1$ et $1 \leq a \leq n$.
D'après le développement de Taylor-Lagrange à l'ordre 2, pour tout $x \geq 0$ il existe $0 \leq c \leq x$ tel que

$$\sqrt{1 + x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8(1 + c)^{3/2}}.$$

On en déduit qu'il existe un réel positif $\varepsilon_{a,n}$ vérifiant

$$0 \leq \frac{2}{a^2 n (1 + \frac{4}{an})^{3/2}} \leq \varepsilon_{a,n} \leq \frac{2}{a^2 n},$$

tel que

$$\delta_{a,n} = 2n + \frac{2}{a} - \varepsilon_{a,n}. \tag{2.9.2}$$

Soit $n \geq 4$ et $1 \leq a < n$. On a

$$\delta_{a,n} - \delta_{a+1,n} = \frac{2}{a(a+1)} + \varepsilon_{a+1,n} - \varepsilon_{a,n},$$

avec

$$\begin{aligned}-\frac{2}{a^2n} \le \varepsilon_{a+1,n} - \varepsilon_{a,n} &\le \frac{2}{(a+1)^2n} - \frac{2}{a^2n(1+\frac{4}{an})^{3/2}} \\ &\le \frac{2}{(a+1)^2n} - \frac{2}{a^2n(1+\frac{4}{an})^{2}} \\ &\le 0,\end{aligned}$$

puisque $n \ge 4$. En particulier, on en déduit que pour $n \ge 4$

$$0 \le \delta_{a,n} - \delta_{a+1,n} \le 1, \quad 1 \le a < n, \tag{2.9.3}$$

et il n'est pas difficile de voir que cette relation est encore vraie pour $n = 2, 3$. D'un autre côté, par (2.9.2) on a

$$|\delta_{n+1,n+1} - \delta_{1,n}| = \Big|\frac{2}{n+1} + \varepsilon_{1,n} - \varepsilon_{n+1,n+1}\Big| \le \frac{2}{n+1} + \frac{2}{n} < 1 \tag{2.9.4}$$

si $n \ge 4$, et pour $n = 3$, comme $\delta_{4,4} = 4 + 2\sqrt{5} = 8.47\ldots$ et $\delta_{1,3} = 3 + \sqrt{21} = 7.58\ldots$, on a encore $|\delta_{n+1,n+1} - \delta_{1,n}| \le 1$. On déduit de (2.9.3) et (2.9.4) que

$$\begin{aligned}\bigcup_{\substack{1\le n\\ 1\le a\le n}} [\delta_{a,n}, \delta_{a,n}+1] &= [\delta_{1,1}, \delta_{1,1}+1] \cup [\delta_{2,2}, \delta_{1,2}+1] \cup [\delta_{3,3}, +\infty[\\ &= [1+\sqrt{5}, 2+\sqrt{5}] \cup [2+2\sqrt{2}, 3+2\sqrt{3}] \cup [3+\sqrt{13}, +\infty[.\end{aligned}$$

Comme le font remarquer Bugeaud et Laurent dans [8], les deux plus grandes valeurs de $\sigma \in \mathcal{S}$ sont $(-1+\sqrt{5})/2$ et $-1+\sqrt{2}$. On en déduit que les deux plus petites valeurs de $2/\sigma$ pour $\sigma \in \mathcal{S}$ sont $\delta_{1,1} = 1+\sqrt{5} = 3.23\ldots$ et $\delta_{2,2} = 2+2\sqrt{2} = 4.82\ldots$. Pour conclure, il suffit donc de montrer qu'il n'existe aucun $\sigma \in \mathcal{S}$ tel que $\delta_{1,2} < 2/\sigma < \delta_{3,3}$. D'après (2.9.1), il suffit de montrer que si $\mathbf{b} \in (\mathbb{Z}_{\ge 1})^{\mathbb{N}}$ vérifie $[\mathbf{b}] \ge [\mathrm{T}^k\mathbf{b}]$ pour tout $k \ge 0$ et

$$[2; \overline{1,2}] \le [b_0; b_1, \ldots] \le [3; \overline{3}],$$

alors nécessairement $[b_0; b_1, \ldots] = [2; \overline{1,2}]$ ou $[b_0; b_1, \ldots] = [3; \overline{3}]$.
Remarquons que si $\mathbf{a} = (a_k)_{k\ge 0}$ et $\mathbf{a}' = (a'_k)_{k\ge 0}$ sont deux suites distinctes d'entiers naturels non nuls et si k est le plus petit indice pour lequel $a_k \ne a'_k$, alors $[\mathbf{a}] > [\mathbf{a}']$ si et seulement si $a_k > a'_k$ si k est pair, et $a_k < a'_k$ si k est impair.
Notons $x = [b_0; b_1, \ldots]$. La partie entière de x est b_0 et est égale à 2 ou 3, et comme $x \ge [\mathrm{T}^k\mathbf{b}]$ pour tout $k \ge 0$, on a $1 \le b_k \le b_0$ pour tout k. Supposons $b_0 = 2$. Alors avec la remarque qui précède on montre par récurrence immédiate que $x = [2; \overline{1,2}]$. De manière similaire, si $b_0 = 3$ on montre que $x = [3; \overline{3}]$. □

Chapitre 3

Contenus des suites ψ-sturmiennes

3.1 Introduction et énoncé du résultat principal

Soit $\psi \in \mathcal{F}_{stur}$ une fonction sturmienne (voir Définition 2.2.3 du Chapitre 2 ; en particulier la suite $(s_i)_i$ associée est bornée). Rappelons qu'on identifie $\mathbb{R}^3$ avec l'espace des matrices symétriques 2×2 à coefficients réels via l'isomorphisme $(x_0, x_1, x_2) \longmapsto \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}$. On note aussi $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^3$, et on a défini la norme $\|\mathbf{w}\|$ d'une matrice $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ par la formule $\|\mathbf{w}\| = \sqrt{a^2 + (b^2+c^2)/2 + d^2}$ (avec cette définition, il n'y a pas d'ambiguïté quand on note $\|\mathbf{y}\|$, avec $\mathbf{y}$ vu comme un vecteur de $\mathbb{R}^3$ ou comme la matrice symétrique de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ associée). Notons enfin que toutes les estimations de ce chapitre restent vraies en remplaçant les normes $\|\cdot\|$ par des normes équivalentes (les constantes implicites des symboles $\ll, \gg$ et $\asymp$ dépendent alors des normes considérées).

Le but de ce Chapitre est de démontrer le Théorème 3.1.2 ci-dessous. Pour l'énoncer, introduisons les notations suivantes.
Soit $\underline{\mathbf{w}} = (\mathbf{w}_k)_{k\geq 0}$ une suite ψ-sturmienne de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ admissible, à croissance multiplicative et telle que $(\|\mathbf{w}_k\|)_k$ diverge vers l'infini. On suppose que la quantité $\delta = \delta(\underline{\mathbf{w}})$ donnée par la Proposition 3.3.1 et vérifiant $|\det(\mathbf{w}_k)| \asymp \|\mathbf{w}_k\|^{\delta(\underline{\mathbf{w}})}$ est < 2. On note $\underline{\mathbf{y}} = (\mathbf{y}_i)_i$ et $\underline{\mathbf{z}} = (\mathbf{z}_i)_i$ les suites de matrices symétriques associées respectivement par les Définitions 2.3.6 et 2.4.3. On suppose qu'il existe $(\mathbf{v}_i)_i$ une suite de vecteurs primitifs de $\mathbb{Z}^3$ telle que pour tout i le vecteur $\mathbf{y}_i$ soit proportionnel à $\mathbf{v}_i$. Par définition de $\underline{\mathbf{z}}$, cela implique qu'il existe aussi $(\mathbf{t}_i)_i$ une suite de vecteurs primitifs de $\mathbb{Z}^3$ telle que pour tout i le vecteur $\mathbf{z}_i$ soit proportionnel à $\mathbf{t}_i$.

Cette situation apparaît au Chapitre 2 (voir la construction des 3-systèmes associés aux nombres de type sturmien dans la Partie 2.7) et elle occupera aussi une place centrale au Chapitre 4 (voir les Parties 4.5 et 4.6). Dans les deux cas, il est nécessaire de contrôler le *contenu* des vecteurs $\mathbf{y}_i$ et $\mathbf{z}_i$, c'est-à-dire les réels $\lambda_i, \mu_i > 0$ tels que $\mathbf{y}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$ et $\mathbf{z}_i = \mu_i \mathbf{t}_i$. En effet, quand on cherche le 3-système ou les exposants diophantiens de ξ, ce sont les vecteurs primitifs $\mathbf{v}_i$ et $\mathbf{t}_i$ qui interviennent et non les vecteurs $\mathbf{y}_i$ et $\mathbf{z}_i$ (dont on sait estimer la croissance grâce aux relations de récurrence). Dans le contexte

du chapitre 2, il semble difficile de déterminer ces contenus lorsque les matrices $\mathbf{w}_0$ et $\mathbf{w}_1$ sont quelconques : des pgcd non triviaux peuvent apparaître, sans raison apparente, entre les coefficients d'un produit de matrices. A la suite de Roy nous avons contourné ce problème en choisissant $\mathbf{w}_0$ et $\mathbf{w}_1$ de façon très particulière et explicite (voir Partie 2.8.1) ; dans la définition d'un nombre de type sturmien, nous avons supposé que le contenu des $\mathbf{w}_k$ (donc des $\mathbf{y}_i$) est borné. Dans le contexte du Chapitre 4, on ne peut pas choisir $\mathbf{w}_0$ et $\mathbf{w}_1$, donc il faut procéder autrement.
On utilise donc le résultat suivant pour contrôler la croissance de ces contenus. Rappelons que λ_i et μ_i sont les contenus de $\mathbf{y}_i$ et $\mathbf{z}_i$ respectivement.

Théorème 3.1.1. *Il existe $\omega \leq \frac{\delta}{2}$ tel que*

$$\lambda_i = \|\mathbf{y}_i\|^{\omega+o(1)} \quad et \quad \mu_i = \|\mathbf{z}_i\|^{\omega+o(1)}.$$

La difficulté réside dans le fait que les suites $(\lambda_i)_i$ et $(\mu_i)_i$ ne satisfont, en général, aucune relation de récurrence. Pour démontrer le Théorème 3.1.1 on procède donc à l'envers, en considérant pour tout réel $\omega < 1$ la suite ψ-sturmienne formée par les matrices $\widehat{W}_k^{-\omega}\mathbf{w}_k$, où $(\widehat{W}_k)_k$ est une suite de réels > 0 vérifiant $\widehat{W}_k \asymp \|\mathbf{w}_k\|$ et $\widehat{W}_{k+1} = \widehat{W}_k^{s_{k+1}}\widehat{W}_{k-1}$ (voir notamment le Lemme 3.3.4 et la définition de $\mathbf{W}\!\diagup_{\sim}$). Ceci nécessite de travailler avec des matrices à coefficients réels, et non plus rationnels. On démontre le Théorème 3.1.1 sous la forme équivalente suivante (les hypothèses sur la suite $(\mathbf{w}_k)_k$ restant les mêmes que précédemment).

Théorème 3.1.2. *Il existe $\underline{\mathbf{w}}^{(0)} = (\mathbf{w}_k^{(0)})_{k\geq 0}$ une suite ψ-sturmienne de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ admissible, à croissance multiplicative et telle que $(\|\mathbf{w}_k^{(0)}\|)_k$ diverge vers l'infini et vérifiant les propriétés suivantes.*

(a) Il existe $\delta_0 < 2$ tel que $|\det(\mathbf{w}_k^{(0)})| \asymp \|\mathbf{w}_k^{(0)}\|^{\delta_0}$.

(b) On note $\underline{\mathbf{y}}^{(0)} = (\mathbf{y}_i^{(0)})_i$ et $\underline{\mathbf{z}}^{(0)} = (\mathbf{z}_i^{(0)})_i$ les suites de matrices symétriques associées. Alors pour tous indices i, j, $\mathbf{y}_i^{(0)}$ est colinéaire à $\mathbf{v}_i$ et $\mathbf{z}_j^{(0)}$ est colinéaire à $\mathbf{t}_j$.

(c) On a les estimations

$$\|\mathbf{v}_i\| = \|\mathbf{y}_i^{(0)}\|^{1+o(1)} \quad et \quad \|\mathbf{t}_i\| = \|\mathbf{z}_i^{(0)}\|^{1+o(1)}$$

quand i tend vers l'infini.

En particulier, il existe des suites de réels non nuls $(\alpha_i)_i$, $(\beta_i)_i$ telles que les vecteurs $\alpha_i^{-1}\mathbf{y}_i^{(0)}$ et $\beta_i^{-1}\mathbf{z}_i^{(0)}$ soient des éléments primitifs de $\mathbb{Z}^3$, avec $\alpha_i = \|\mathbf{y}_i^{(0)}\|^{o(1)}$ et $\beta_i = \|\mathbf{z}_i^{(0)}\|^{o(1)}$ quand i tend vers l'infini. De même, il existe une suite de réels $(\gamma_k)_k$ telle que $\gamma_k^{-1}\mathbf{w}_k^{(0)}$ soit un élément primitif de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z})$, avec $\gamma_k = \|\mathbf{w}_k^{(0)}\|^{o(1)}$ quand k tend vers l'infini.

L'intérêt de ce théorème – qui implique le Théorème G de l'introduction de cette thèse – est qu'il fournit le comportement asymptotique des suites $(\mathbf{v}_i)_i$ et $(\mathbf{t}_i)_i$ (à un terme d'erreur près, qui est suffisamment petit pour ne pas empêcher le calcul des exposants diophantiens). Ces suites de vecteurs primitifs sont au cœur de la construction du 3-système qui représente ξ ; c'est donc le Théorème 3.1.2 qui sera utilisé au Chapitre 4.

Pour démontrer ce théorème, on définit une relation d'équivalence $\sim$ sur l'ensemble des suites de matrices ψ-sturmiennes de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ par $(\mathbf{w}_k)_k \sim (\mathbf{w}'_k)_k$ si et seulement si $\mathbf{w}_k$ est proportionnelle à $\mathbf{w}'_k$ pour tout k. Dans la Partie 3.2 on introduit les notations et définitions qui serviront à établir les relations qui lient les suites d'une classe d'équivalence donnée ; l'étude est restreinte aux suites $(\mathbf{w}_k)_k$ *définies sur* $\mathbb{Q}$, *i.e.* telles que $\mathbf{w}_k$ est proportionnelle à un élément de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Q})$ pour tout k. Dans les Parties 3.3 et 3.4 on généralise certaines estimations du Chapitre 2 pour montrer qu'elles restent valables dans le cadre plus général de ce chapitre. Dans la Partie 3.5 on étudie les propriétés des suites $\underline{\mathbf{y}}$ associées par la Définition 2.3.6 aux suites ψ-sturmiennes d'une même classe d'équivalence. Nous prouvons alors qu'étant donnée une telle suite $\underline{\mathbf{y}} = (\mathbf{y}_i)_i$, le contenu $\mathrm{cont}(\mathbf{y}_i)$ de $\mathbf{y}_i$ est bien contrôlé par $\|\mathbf{y}_i\|$ (si on appelle "contenu" de $\mathbf{y}_i$ le réel $\lambda > 0$ – pas nécessairement rationnel – tel que le vecteur $\lambda^{-1}\mathbf{y}_i$ soit un élément primitif de $\mathbb{Z}^3$). Plus précisément, on montre qu'il existe un exposant $\mu = \mu_{\underline{\mathbf{y}}}$ tel que $\mathrm{cont}(\mathbf{y}_i) = \|\mathbf{y}_i\|^{\mu+o(1)}$. Dans la Partie 3.6, on effectue la même étude mais pour les suites $\underline{\mathbf{z}} = (\mathbf{z}_i)_i$ associées par la Définition 2.4.3 aux suites ψ-sturmiennes d'une même classe d'équivalence. De même, on montre que le contenu de $\mathbf{z}_i$ est bien contrôlé par $\|\mathbf{z}_i\|$, *i.e.* il existe un exposant $\mu = \mu_{\underline{\mathbf{z}}}$ tel que $\mathrm{cont}(\mathbf{z}_i) = \|\mathbf{z}_i\|^{\mu+o(1)}$. Par ailleurs, si $\underline{\mathbf{y}}$ et $\underline{\mathbf{z}}$ sont associées à une même suite $\underline{\mathbf{w}}$, alors on a $\mu_{\underline{\mathbf{y}}} = \mu_{\underline{\mathbf{z}}}$: il s'agit de l'exposant noté ω dans le Théorème 3.1.1. Enfin dans la Partie 3.7 on démontre les Théorèmes 3.1.1 et 3.1.2.

3.2 Définitions et notations

Définition 3.2.1. On dit qu'une suite ψ-sturmienne $\underline{\mathbf{w}} = (\mathbf{w}_k)_{k\geq 0}$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ est *définie sur* $\mathbb{Q}$ si pour tout entier k il existe un réel non nul λ_k tel que $\lambda_k \mathbf{w}_k \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Q})$.

Remarque 3.2.2. Soit $\underline{\mathbf{w}} = (\mathbf{w}_k)_{k\geq 0}$ une suite ψ-sturmienne de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. Elle est définie sur $\mathbb{Q}$ au sens de la Définition 3.2.1 si et seulement si en la voyant dans l'espace projectif $\mathbb{P}\big(\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})\big)$ elle est définie sur $\mathbb{Q}$ dans le sens où c'est une suite de $\mathbb{P}\big(\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Q})\big)$.

Définition 3.2.3. Si un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ est proportionnel à un élément non nul de $\mathbb{Q}^3$, on appelle *contenu de* $\mathbf{x}$, et on le note $\mathrm{cont}(\mathbf{x})$, le réel $\lambda > 0$ tel que $\lambda^{-1}\mathbf{x}$ soit un vecteur primitif de $\mathbb{Z}^3$. On définit de même le contenu $\mathrm{cont}(\mathbf{w}) > 0$ d'une matrice $\mathbf{w} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ qui est proportionnelle à un élément non nul de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Q})$.

La définition suivante généralise d'une manière immédiate la Définition 2.4.1 du Chapitre 2, qui n'a été donnée que pour une suite ψ-sturmienne de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z})$.

Définition 3.2.4. On dit qu'une suite ψ-sturmienne $\underline{\mathbf{w}} = (\mathbf{w}_k)_k$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ est *admissible* s'il existe une matrice $N \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $\mathbf{w}_1 N, \mathbf{w}_0 {}^t\!N$ et $\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_0 {}^t\!N$ soient symétriques. En particulier, dans ce cas les matrices de la suite $(\mathbf{y}_i)_{i\geq -2}$ associée par la Définition 2.3.6 sont symétriques. Si $\underline{\mathbf{w}}$ est définie sur $\mathbb{Q}$, on peut supposer N à coefficients entiers.

Définition 3.2.5. Si $\underline{\mathbf{w}} = (\mathbf{w}_k)_k$ est une suite ψ-sturmienne définie sur $\mathbb{Q}$, à croissance multiplicative et telle que $(\|\mathbf{w}_k\|)_k$ diverge vers l'infini, on note $\delta(\underline{\mathbf{w}})$ le réel δ vérifiant

$$|\det(\mathbf{w}_k)| \asymp \|\mathbf{w}_k\|^{\delta}.$$

L'existence de δ est donnée par la Proposition 3.3.1 ci-dessous.

On note $\sim$ la relation d'équivalence définie sur l'ensemble des suites ψ-sturmiennes de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ en posant $(\mathbf{w}_k)_k \sim (\mathbf{w}'_k)_k$ si et seulement si $\mathbf{w}_k$ est proportionnelle à $\mathbf{w}'_k$ pour tout k. Être définie sur $\mathbb{Q}$ signifie être équivalente à une suite ψ-sturmienne de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$. Remarquons que les propriétés d'être à croissance multiplicative, d'être définie sur $\mathbb{Q}$ et d'être admissible sont invariantes par la relation $\sim$. On note $\mathbf{W}/_\sim$ le quotient de l'ensemble des suites ψ-sturmiennes $\underline{\mathbf{w}} = (\mathbf{w}_k)_k$ admissibles définies sur $\mathbb{Q}$, à croissance multiplicative avec $\|\mathbf{w}_k\|$ qui diverge vers l'infini, et telles que $\delta(\underline{\mathbf{w}}) < 2$, par la relation d'équivalence $\sim$. On notera $\mathfrak{W}$ une classe d'équivalence générique de $\mathbf{W}/_\sim$.

Pour la suite on fixe $\mathfrak{W} \in \mathbf{W}/_\sim$.

Notation. Par définition de $\sim$, il existe une matrice $N_{\mathfrak{W}}$ ne dépendant que de $\mathfrak{W}$ – que l'on choisit à coefficient entiers – telle que $\underline{\mathbf{w}}$ soit admissible avec la matrice $N_{\mathfrak{W}}$ pour tout $\underline{\mathbf{w}} \in \mathfrak{W}$. Pour la suite on notera simplement N cette matrice. Pour tout $\underline{\mathbf{w}} \in \mathfrak{W}$, on note $\mathbf{y}_{\underline{\mathbf{w}}}$ la suite de matrices symétriques de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ associée à la suite $\underline{\mathbf{w}}$ et à la matrice N par la Définition 2.3.6 du Chapitre 2, et $\mathbf{z}_{\underline{\mathbf{w}}}$ la suite associée par la Définition 2.4.3. Si on note $\underline{\mathbf{w}} = (\mathbf{w}_k)_{k\geq 0}$, $\underline{\mathbf{y}} = (\mathbf{y}_i)_i$ et $\underline{\mathbf{z}} = (\mathbf{z}_i)_i$, rappelons qu'on a les formules

$$\mathbf{y}_{t_k+l} = \mathbf{w}_k^{l+1}\mathbf{w}_{k-1}N_k \quad \text{et} \quad \mathbf{z}_{t_k+l} = \frac{1}{\det(\mathbf{w}_k)}\mathbf{y}_{\psi(t_{k+1})} \wedge \mathbf{y}_{t_k+l} \quad (0 \leq k, 0 \leq l < s_{k+1}),$$

où on a posé $N_k = N$ si k est pair, $N_k = {}^tN$ sinon.
Remarquons qu'étant données $\underline{\mathbf{w}}, \underline{\mathbf{w}}' \in \mathfrak{W}$, si on note $\mathbf{y}_{\underline{\mathbf{w}}} = (\mathbf{y}_i)_i$ et $\mathbf{y}_{\underline{\mathbf{w}}'} = (\mathbf{y}'_i)_i$, pour tout entier i les vecteurs $\mathbf{y}_i$ et $\mathbf{y}'_i$ sont colinéaires à un même vecteur $\mathbf{v}_i$ à coefficients entiers et primitif. On note alors

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\mathfrak{W}} = (\mathbf{v}_i)_i \tag{3.2.1}$$

la suite de ces points entiers primitifs, qui ne dépendent que de $\mathfrak{W}$ et sont uniques à multiplication par -1 près. De même si on note $\mathbf{z}_{\underline{\mathbf{w}}} = (\mathbf{z}_i)_i$ et $\mathbf{z}_{\underline{\mathbf{w}}'} = (\mathbf{z}'_i)_i$, pour tout entier i les vecteurs $\mathbf{z}_i$ et $\mathbf{z}'_i$ sont colinéaires à un même vecteur $\mathbf{t}_i$ à coefficients entiers et primitif. On note alors

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_{\mathfrak{W}} = (\mathbf{t}_i)_i \tag{3.2.2}$$

la suite de ces points entiers primitifs, qui ne dépendent que de $\mathfrak{W}$ et sont uniques à multiplication par -1 près. Notons enfin que d'après la Proposition 2.6.1, pour tout $\underline{\mathbf{w}} \in \mathfrak{W}$, la suite $\mathbf{y}_{\underline{\mathbf{w}}}$ converge dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ vers un point $\mathbf{y}_{\mathfrak{W}} = \mathbf{y} \neq 0$ qui ne dépend que de $\mathfrak{W}$.

Définition 3.2.6. On note $\mathcal{W} \subset \mathfrak{W}$ le sous-ensemble des suites ψ-sturmiennes $\underline{\mathbf{w}} = (\mathbf{w}_k)_k$ de $\mathfrak{W}$ vérifiant $\mathbf{w}_k \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z})$ pour k assez grand, et $\mathcal{U}$ (resp. $\mathcal{U}'$) l'ensemble des suites $\mathbf{y}_{\underline{\mathbf{w}}}$ (resp. $\mathbf{z}_{\underline{\mathbf{w}}}$) lorsque $\underline{\mathbf{w}}$ décrit $\mathcal{W}$.

Remarque 3.2.7. Soit $\underline{\mathbf{w}} \in \mathcal{W}$. On pose $\underline{\mathbf{y}} = (\mathbf{y}_i)_i = \mathbf{y}_{\underline{\mathbf{w}}}$ et $\underline{\mathbf{z}} = (\mathbf{z}_i)_i = \mathbf{z}_{\underline{\mathbf{w}}}$. Comme la suite $\underline{\mathbf{y}}$ est définie à partir de $\underline{\mathbf{w}}$ et de la matrice $N_{\mathfrak{W}}$ qui est à coefficients entiers, on a $\mathbf{y}_i \in \mathbb{Z}^3$ pour tout i assez grand. La récurrence (2.4.7) satisfaite par $\underline{\mathbf{z}}$ permet alors de déduire l'existence d'un entier $\lambda > 0$ qui ne dépend que de $\underline{\mathbf{w}}$ tel que $\lambda\mathbf{z}_i \in \mathbb{Z}^3$ pour tout i assez grand.

Remarque 3.2.8. Les arguments de la Partie 3.3 ci-dessous montrent que l'ensemble $\mathcal{W}$ n'est pas vide. En effet, si on se donne $\underline{\mathbf{w}} \in \mathfrak{W}$, alors il existe une suite $(\alpha_k)_k$ de réels > 1 vérifiant $\alpha_{k+1} = \alpha_k^{s_{k+1}}\alpha_{k-1}$ $(k \geq 1)$ – donc qui diverge vers l'infini – telle que $\mathbf{w}'_k = \alpha_k \mathbf{w}_k \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z})$ pour tout k (il suffit que cela soit vrai pour deux indices consécutifs). Dans ces conditions, l'exposant μ du Lemme 3.3.4 est ≤ 0 et la suite ψ-sturmienne définie par $\underline{\mathbf{w}}' = (\mathbf{w}'_k)_k$ appartient à $\mathfrak{W}$ (notamment grâce à (3.3.8)).

Définition 3.2.9. On définit $\delta_0 = \delta_0(\mathfrak{W})$ le réel

$$\delta_0 = \inf_{\underline{\mathbf{w}} \in \mathcal{W}} \delta(\underline{\mathbf{w}}). \tag{3.2.3}$$

Remarque 3.2.10. L'importance du réel δ_0 apparaît dans les Théorèmes 3.5.1 et 3.6.1 qui impliquent que pour tout $\underline{\mathbf{w}} \in \mathfrak{W}$ on a

$$\lim_{i\to+\infty} \frac{\log(\|\mathbf{y}_i\|)}{\log(\|\mathbf{v}_i\|)} = \lim_{i\to+\infty} \frac{\log(\|\mathbf{z}_i\|)}{\log(\|\mathbf{t}_i\|)} = \frac{2-\delta_0}{2-\delta(\underline{\mathbf{w}})}$$

avec $\mathbf{y}_{\underline{\mathbf{w}}} = (\mathbf{y}_i)_i$ et $\mathbf{z}_{\underline{\mathbf{w}}} = (\mathbf{z}_i)_i$. En outre on a $\delta_0 < 2$ car (par définition de $\mathbf{W}/\!\sim$) on a $\delta(\underline{\mathbf{w}}) < 2$ pour tout $\underline{\mathbf{w}} \in \mathfrak{W}$.

3.3 Estimation des déterminants

La proposition 3.3.1 ci-dessous généralise la première partie de la Proposition 2.5.9 du Chapitre 2 et donne pour tout $\underline{\mathbf{w}} = (\mathbf{w}_k)_k \in \mathfrak{W}$ l'existence d'un réel $\delta = \delta(\underline{\mathbf{w}})$ tel que $|\det(\mathbf{w}_k)| \asymp \|\mathbf{w}_k\|^\delta$. Dans la Proposition 3.3.6 nous déterminons l'ensemble des valeurs que prend $\delta(\underline{\mathbf{w}})$ lorsque $\underline{\mathbf{w}}$ décrit $\mathfrak{W}$.

Proposition 3.3.1. *Soit $(\mathbf{w}_k)_{k\geq 0}$ une suite ψ-sturmienne de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ définie sur $\mathbb{Q}$, à croissance multiplicative et telle que $(\|\mathbf{w}_k\|)_k$ diverge vers l'infini. On note $(\mathbf{y}_i)_i$ la suite de matrices symétriques associées par la Définition 2.3.6. Alors il existe $\delta \leq 2$ (éventuellement négatif) tel que*

$$|\det(\mathbf{w}_k)| \asymp \|\mathbf{w}_k\|^\delta. \tag{3.3.1}$$

Si $\delta < 2$, alors il existe $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ tel que $\det(\mathbf{y}) = 0$ et

$$\|\mathbf{y}_i \wedge \mathbf{y}\| \asymp \frac{|\det(\mathbf{y}_i)|}{\|\mathbf{y}_i\|}. \tag{3.3.2}$$

Notation. Rappelons que si $\underline{\mathbf{w}} = (\mathbf{w}_k)_k$ est une suite ψ-sturmienne définie sur $\mathbb{Q}$, à croissance multiplicative et telle que $(\|\mathbf{w}_k\|)_k$ diverge vers l'infini, on note $\delta(\underline{\mathbf{w}})$ le réel δ vérifiant (3.3.1) (voir Définition 3.2.5). Rappelons également qu'on a fixé $\mathfrak{W} \in \mathbf{W}/\!\sim$.

Remarque 3.3.2. La Proposition 3.3.1 ne suppose pas que $\underline{\mathbf{w}} = (\mathbf{w}_k)_k \in \mathfrak{W}$; l'hypothèse $\delta(\underline{\mathbf{w}}) < 2$ n'y est notamment pas faite.

Remarque 3.3.3. Comme pour la Proposition 2.5.9, la Proposition 3.3.1 reste vraie en remplaçant la norme $\|\cdot\|$ par la norme de son choix. Par ailleurs, puisque $(\|\mathbf{w}_k\|)$ diverge vers l'infini (cette propriété restant vraie pour n'importe quelle choix de norme), la constante δ de l'équation (3.3.1) ne dépend pas du choix de la norme considérée.

Preuve Comme $\underline{\mathbf{w}}$ est définie sur $\mathbb{Q}$, il existe des réels $D_0, D_1 \geq 1$ tels que $D_0\mathbf{w}_1$ et $D_1\mathbf{w}_1$ soient à coefficients entiers. En définissant une suite $(D_k)_{k\geq 0}$ de réels (supérieurs ou égaux à 1) par

$$D_{k+1} = D_k^{s_{k+1}} D_{k-1} \quad \text{pour tout } k \geq 1,$$

alors $\underline{\mathbf{w}}' = (\mathbf{w}'_k)_{k\geq 0}$ définie par $\mathbf{w}'_k = D_k\mathbf{w}_k$ est une suite ψ-sturmienne, et comme $\mathbf{w}'_0$ et $\mathbf{w}'_1$ sont à coefficients entiers, par récurrence sturmienne il en va de même de toutes les matrices $\mathbf{w}'_k$. La suite $\underline{\mathbf{w}}'$ vérifie ainsi les hypothèses de la Proposition 2.5.9 du Chapitre 2. Il existe donc $\delta_1 \in [0, 2]$ tel que

$$D_k^2 |\det(\mathbf{w}_k)| \asymp D_k^{\delta_1} \|\mathbf{w}_k\|^{\delta_1}. \tag{3.3.3}$$

De plus, en appliquant la Proposition 2.5.6 à la suite (D_k), on a l'existence de $\delta_2 \geq 0$ tel que

$$D_k \asymp \|\mathbf{w}_k\|^{\delta_2}. \tag{3.3.4}$$

Les estimations (3.3.3) et (3.3.4) conduisent à

$$|\det(\mathbf{w}_k)| \asymp \|\mathbf{w}_k\|^{\delta},$$

avec $\delta = \delta_1 + \delta_2(\delta_1 - 2) \leq 2$.
Supposons $\delta < 2$. Remarquons d'abord que la propriété $\delta(\underline{\mathbf{w}}) < 2$ est invariante par la relation d'équivalence $\sim$ (voir le Lemme 3.3.4), de même que l'estimation (3.3.2). On peut donc supposer $\underline{\mathbf{w}} \in \mathcal{W}$ (*i.e.* $\mathbf{w}_k$ à coefficients entiers pour k assez grand ; voir aussi la Remarque 3.2.8 pour plus de détails). Dans ces conditions, d'après la Proposition 2.6.1 du Chapitre 2, il existe $\mathbf{y} = (y_0, y_1, y_2)$ tel que $\det(\mathbf{y}) = 0$ vérifiant

$$\|\mathbf{y}_i \wedge \mathbf{y}\| \ll \frac{|\det(\mathbf{y}_i)|}{\|\mathbf{y}_i\|} \asymp \|\mathbf{y}_i\|^{\delta-1}. \tag{3.3.5}$$

Supposons que $y_0 \neq 0$. Alors on peut supposer $\mathbf{y} = (1, \xi, \xi^2)$ et on a l'estimation classique (voir par exemple (2.6.6) qui reste valable même si $\xi = 0$)

$$|\det(\mathbf{y}_i)| \ll \|\mathbf{y}_i \wedge \mathbf{y}\| \|\mathbf{y}_i\|,$$

qui combinée avec (3.3.5) donne (3.3.2).
Si maintenant $y_0 = 0$ alors puisque $\det(\mathbf{y}) = 0$ on peut supposer $\mathbf{y} = (0, 0, 1)$. Écrivons $\mathbf{y}_i = (y_{0,i}, y_{1,i}, y_{2,i})$ pour tout i. On a $\|\mathbf{y}_i \wedge \mathbf{y}\| \asymp \max(|y_{0,i}|, |y_{1,i}|)$, et comme $\max(|y_{0,i}|, |y_{1,i}|) = o(y_{2,i})$ on a aussi $\|\mathbf{y}_i\| \sim |y_{2,i}|$. On en déduit immédiatement que

$$|\det(\mathbf{y}_i)| = |y_{0,i}y_{2,i} - y_{1,i}^2| \ll |y_{2,i}| \max(|y_{0,i}|, |y_{1,i}|) \asymp \|\mathbf{y}_i\| \|\mathbf{y}_i \wedge \mathbf{y}\|,$$

ce qui, combiné encore une fois avec (3.3.5), implique (3.3.2). □

Pour le lemme suivant, on ne se sert que de la première partie (3.3.1) de la Proposition 3.3.1.

Lemme 3.3.4. *Soit $\underline{\mathbf{w}} = (\mathbf{w}_k)_{k\geq 0}$ une suite ψ-sturmienne de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ définie sur $\mathbb{Q}$, à croissance multiplicative et telle que $(\|\mathbf{w}_k\|)_k$ diverge vers l'infini. Soient $\mu < 1$ et $(\alpha_k)_{k\geq 0}$ une suite de réels > 0 vérifiant la récurrence*

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k^{s_{k+1}}\alpha_{k-1} \quad (k \geq 1) \tag{3.3.6}$$

et telle que

$$\alpha_k \asymp \|\mathbf{w}_k\|^{-\mu}.$$

Alors la suite $\underline{\mathbf{w}}' = (\alpha_k\mathbf{w}_k)_k$ est une suite ψ-sturmienne de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ équivalente à $\underline{\mathbf{w}}$ donc définie sur $\mathbb{Q}$, à croissance multiplicative et telle que $(\|\mathbf{w}'_k\|)_k$ diverge vers l'infini ; elle est admissible si $\underline{\mathbf{w}}$ l'est. De plus, on a la formule

$$(1-\mu)(2-\delta(\underline{\mathbf{w}}')) = 2-\delta(\underline{\mathbf{w}}). \tag{3.3.7}$$

En particulier on a l'équivalence

$$\delta(\underline{\mathbf{w}}) < 2 \Leftrightarrow \delta(\underline{\mathbf{w}}') < 2. \tag{3.3.8}$$

Remarque 3.3.5. La preuve du Lemme 3.3.4 est élémentaire et indépendantes des autres résultats de ce chapitre. De plus, on ne suppose pas que $\underline{\mathbf{w}} = (\mathbf{w}_k)_k \in \mathfrak{W}$; l'hypothèse $\delta(\underline{\mathbf{w}}) < 2$ n'y est notamment pas faite.

Preuve La suite $\underline{\mathbf{w}}' = (\mathbf{w}'_k)_k$ est ψ-sturmienne car $(\alpha_k)_k$ suit la récurrence (3.3.6) et $\underline{\mathbf{w}}$ est ψ-sturmienne. Comme $\|\mathbf{w}'_k\| \asymp \|\mathbf{w}_k\|^{1-\mu}$ avec $1-\mu > 0$, la suite $\|\mathbf{w}'_k\|$ diverge vers l'infini. Notons $\delta = \delta(\underline{\mathbf{w}})$ et $\delta' = \delta(\underline{\mathbf{w}}')$. D'un côté on a

$$|\det(\mathbf{w}'_k)| \asymp \|\mathbf{w}'_k\|^{\delta'} = \alpha_k^{\delta'}\|\mathbf{w}_k\|^{\delta'} \asymp \|\mathbf{w}_k\|^{\delta'(1-\mu)},$$

et de l'autre

$$|\det(\mathbf{w}'_k)| = \alpha_k^2|\det(\mathbf{w}_k)| \asymp \alpha_k^2\|\mathbf{w}_k\|^{\delta} \asymp \|\mathbf{w}_k\|^{\delta-2\mu},$$

d'où on déduit l'égalité $\delta'(1-\mu) = \delta - 2\mu$. Ceci prouve (3.3.7).
L'équivalence (3.3.8) est immédiate compte tenu du fait qu'on a toujours l'inégalité $\delta(\underline{\mathbf{w}}) \leq 2$ pour tout $\underline{\mathbf{w}}$. □

Proposition 3.3.6. *On a*

$$\delta(\mathfrak{W}) \ := \{\delta(\underline{\mathbf{w}}) \mid \underline{\mathbf{w}} \in \mathfrak{W}\} =]-\infty, 2[. \tag{3.3.9}$$

La démonstration de la Proposition 3.3.6 repose sur le Lemme 3.3.4 suivant qui permet d'établir un lien entre les quantités $\delta(\underline{\mathbf{w}})$ et $\delta(\underline{\mathbf{w}}')$ associées à deux suites $\underline{\mathbf{w}}, \underline{\mathbf{w}}' \in \mathfrak{W}$ et la croissance du facteur de proportionnalité entre $\mathbf{w}_k$ et $\mathbf{w}'_k$.
Preuve Montrons (3.3.9). On fixe $\underline{\mathbf{w}} = (\mathbf{w}_k)_k \in \mathfrak{W}$ et on note $\mathbf{y}_{\underline{\mathbf{w}}} = \underline{\mathbf{y}} = (\mathbf{y}_i)_i$. On pose $\delta = \delta(\underline{\mathbf{w}})$ (on a $\delta < 2$ par définition de $\mathfrak{W} \in \mathbf{W}/\!\sim$) et on se donne un réel $\delta' \in]-\infty, 2[$. On définit μ par l'équation

$$\mu(2-\delta') = \delta - \delta'$$

(qui est équivalente à $(1-\mu)(2-\delta') = 2-\delta$). La propriété $\delta < 2$ implique $\mu < 1$. Remarquons que pour tout réel ν, il existe une suite de réels strictement positifs $(\alpha_k)_k$ qui vérifie la récurrence (3.3.6) et telle que

$$\alpha_k \asymp \|\mathbf{w}_k\|^{\nu}. \tag{3.3.10}$$

En effet, il suffit de se donner une suite $(D_k)_k$ de réels > 1 vérifiant (3.3.6) ; par la Proposition 2.5.6, il existe δ_1 (nécessairement > 0) tel que $D_k \asymp \|\mathbf{w}_k\|^{\delta_1}$. Il suffit de poser alors $\alpha_k = D_k^{\nu/\delta_1}$.
On se donne ainsi une suite de réels strictement positifs $(\alpha_k)_k$ qui vérifie la récurrence (3.3.6) et telle que $\alpha_k \asymp \|\mathbf{w}_k\|^{-\mu}$. On définit alors la suite $\underline{\mathbf{w}}' = (\mathbf{w}'_k)_k$ par la formule

$$\mathbf{w}'_k = \alpha_k \mathbf{w}_k \quad (k \geq 0).$$

Le Lemme 3.3.4 nous assure que $\underline{\mathbf{w}}' \in \mathfrak{W}$ et $\delta(\underline{\mathbf{w}}') = \delta'$. □

3.4 Norme des $\mathbf{z}_i$

Dans cette partie on prouve que les estimations du Chapitre 2 sur $\|\mathbf{z}_i\|$ restent valables dans le cadre plus large de ce chapitre. Dans le Chapitre 2 on suppose que $\underline{\mathbf{w}}$ est une suite ψ-sturmienne de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z})$; l'hypothèse $\delta(\underline{\mathbf{w}}) < 1$ entraîne entre autres que le vecteur limite $\mathbf{y}$ est de la forme $\mathbf{y} = (1, \xi, \xi^2)$ avec ξ non nul. Dans ce chapitre on suppose seulement que $\underline{\mathbf{w}} \in \mathfrak{W}$, donc le vecteur limite $\mathbf{y}$ peut très bien être de la forme $(1, 0, 0)$, ce qui soulève quelques problèmes techniques. Les détails de la preuve du Lemme 3.4.1 ne sont pas essentiels pour comprendre le reste de ce chapitre.

Lemme 3.4.1. *Soit $\underline{\mathbf{w}} \in \mathfrak{W}$ et $(\mathbf{y}_i)_i = \mathbf{y}_{\underline{\mathbf{w}}}$. On note $\mathbf{y} = \mathbf{y}_{\mathfrak{W}} = (y_0, y_1, y_2)$. Alors pour tous i, j assez grands, $i > j$, on a*

$$\frac{\|\mathbf{y}_i \wedge \mathbf{y}_j\|}{|\det(\mathbf{y}_j)|} \asymp \|\mathbf{y}_i \mathbf{y}_j^{-1}\| \asymp \|\mathbf{y}_i\| \frac{\|\mathbf{y}_j \wedge \mathbf{y}\|}{|\det(\mathbf{y}_j)|} \asymp \frac{\|\mathbf{y}_i\|}{\|\mathbf{y}_j\|}. \tag{3.4.1}$$

En particulier, si on note $\mathbf{z}_{\underline{\mathbf{w}}} = (\mathbf{z}_i)_i$, alors on a l'estimation :

$$\|\mathbf{z}_i\| \asymp \|\mathbf{y}_{\psi(i)}\| \asymp \|\mathbf{w}_k^l \mathbf{w}_{k-1}\|, \tag{3.4.2}$$

en écrivant $i = t_k + l$, $0 \leq l < s_{k+1}$.

Les estimations (3.4.1) généralisent le Lemme 2.6.7 du Chapitre 2. La dernière estimation de (3.4.1) est une conséquence directe de (3.3.2).

Remarque 3.4.2. Comme pour la Proposition 3.3.1, les estimations du Lemme 3.4.1 restent vraies en remplaçant la norme $\|\cdot\|$ par la norme de son choix (les constantes implicites des symboles $\asymp$ dépendent alors du choix de cette norme).

Preuve Commençons par remarquer que si on multiplie chaque $\mathbf{y}_i$ par $\lambda_i > 0$, alors chacun des termes apparaissant dans (3.4.1) est multiplié par λ_i/λ_j. Donc par définition de la relation d'équivalence $\sim$ il suffit d'obtenir ces estimations pour un représentant particulier $\underline{\mathbf{w}} \in \mathfrak{W}$. Par (3.3.9) on se donne $\underline{\mathbf{w}} \in \mathfrak{W}$ telle que $\delta := \delta(\underline{\mathbf{w}}) < 1$.

Supposons maintenant que $y_1 \neq 0$. Alors comme $\det(\mathbf{y}) = 0$ mais $\mathbf{y} \neq 0$ on peut supposer $\mathbf{y} = (1, \xi, \xi^2)$ avec $y_1 = \xi \neq 0$. Le Lemme 2.6.7 du Chapitre 2 donne directement les estimations (3.4.1) (remarquons que pour la démonstration du Lemme 2.6.7 on n'utilise pas le fait que la suite $\underline{\mathbf{w}}$ est dans $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z})$ mais uniquement le fait que $\delta < 1$ et que $\mathbf{y}$ est de la forme $(1, \xi, \xi^2)$ avec $\xi \neq 0$).
Supposons maintenant $y_1 = 0$. Alors $y_0 = 0$ ou $y_2 = 0$. Supposons par exemple $y_2 = 0$. On peut alors supposer $\mathbf{y} = (1, 0, 0)$. On a $\|\mathbf{y}_i\| \sim |y_{0,i}|$ et $|y_{1,i}|, |y_{2,i}| = o(y_{0,i})$. L'estimation (3.3.5) s'écrit

$$\max(|y_{1,i}|, |y_{2,i}|) \asymp \|\mathbf{y}_i \wedge \mathbf{y}\| \ll |\det(\mathbf{y}_i)|/\|\mathbf{y}_i\| = |y_{2,i}| + o(|y_{1,i}|) \asymp |y_{0,i}|^{\delta-1},$$

ce qui conduit à

$$|y_{1,i}| \ll |y_{2,i}| \quad \text{et} \quad |y_{2,i}| \asymp |y_{0,i}|^{\delta-1}, \tag{3.4.3}$$

d'où

$$y_{0,j}y_{2,i} = o(y_{0,i}y_{2,j}) \tag{3.4.4}$$

quand $i > j$ tendent vers l'infini. Comme dans la preuve du Lemme 2.6.7 on écrit $\mathbf{w} := \det(\mathbf{y}_j)\mathbf{y}_i\mathbf{y}_j^{-1} = \begin{pmatrix} w_{0,0} & w_{0,1} \\ w_{1,0} & w_{1,1} \end{pmatrix}$. On a par (3.4.3) et (3.4.4)

$$\begin{aligned}\mathbf{w} = \begin{pmatrix} y_{0,i} & y_{1,i} \\ y_{1,i} & y_{2,i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{2,j} & -y_{1,j} \\ -y_{1,j} & y_{0,j} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y_{0,i}y_{2,j} - y_{1,i}y_{1,j} & y_{1,i}y_{0,j} - y_{0,i}y_{1,j} \\ y_{1,i}y_{2,j} - y_{2,i}y_{1,j} & y_{2,i}y_{0,j} - y_{1,i}y_{1,j} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y_{0,i}y_{2,j} + o(y_{0,i}y_{2,j}) & \mathcal{O}(y_{0,i}y_{2,j}) \\ o(y_{0,i}y_{2,j}) & o(y_{0,i}y_{2,j}) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Donc

$$|\det(\mathbf{y}_j)|\|\mathbf{y}_i\mathbf{y}_j^{-1}\| = \|\mathbf{w}\| \asymp |y_{0,i}y_{2,j}| \asymp \|\mathbf{y}_i\|\|\mathbf{y}_j\|^{\delta-1} \asymp |\det(\mathbf{y}_j)|\frac{\|\mathbf{y}_i\|}{\|\mathbf{y}_j\|}.$$

Il ne reste donc qu'à prouver la première estimation de (3.4.1). Or, on a l'identité

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_i \wedge \mathbf{y}_j &= (w_{1,0}, w_{1,1} - w_{0,0}, -w_{0,1}) \\ &= \Big(o(y_{0,i}y_{2,j}), -y_{0,i}y_{2,j} + o(y_{0,i}y_{2,j}), \mathcal{O}(y_{0,i}y_{2,j})\Big),\end{aligned}$$

donc $\|\mathbf{y}_i \wedge \mathbf{y}_j\| \asymp \|\mathbf{w}\|$. Ce qui achève la démonstration de (3.4.1).

Si $y_0 = 0$ on procède de même avec $\mathbf{y} = (0, 0, 1)$.

Il reste à prouver (3.4.2). Soit $i = t_k + l$ avec $0 \leq l < s_{k+1}$. Remarquons que

$\mathbf{y}_{\psi(t_{k+1})} = \mathbf{w}_k N_{k-1}$, donc $|\det(\mathbf{y}_{\psi(t_{k+1})})| \asymp |\det(\mathbf{w}_k)|$. D'après (3.4.1) on a alors par croissance multiplicative

$$\begin{aligned}\|\mathbf{z}_i\| = \frac{1}{|\det(\mathbf{w}_k)|}\|\mathbf{y}_{t_k+l} \wedge \mathbf{y}_{\psi(t_{k+1})}\| \asymp \frac{\|\mathbf{y}_{t_k+l}\|}{\|\mathbf{y}_{\psi(t_{k+1})}\|} &\asymp \|\mathbf{w}_k\|^l \|\mathbf{w}_{k-1}\| \\ &\asymp \|\mathbf{w}_k^l \mathbf{w}_{k-1}\| \\ &\asymp \|\mathbf{y}_{\psi(i)}\|.\end{aligned}$$

Cela achève la démonstration de l'estimation (3.4.2). □

3.5 Contenus des suites $\mathbf{y}_{\mathbf{w}}$

Rappelons qu'on a noté $\mathcal{W} \subset \mathfrak{W}$ le sous-ensemble des suites ψ-sturmiennes $\underline{\mathbf{w}} = (\mathbf{w}_k)_k$ de $\mathfrak{W}$ vérifiant $\mathbf{w}_k \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z})$ pour k assez grand, et $\mathcal{U}$ (resp. $\mathcal{U}'$) l'ensemble des suites $\mathbf{y}_{\underline{\mathbf{w}}}$ (resp. $\mathbf{z}_{\underline{\mathbf{w}}}$) lorsque $\underline{\mathbf{w}}$ décrit $\mathcal{W}$. Rappelons également que pour tout $\underline{\mathbf{w}} \in \mathfrak{W}$, si on note $\mathbf{y}_{\underline{\mathbf{w}}} = (\mathbf{y}_i)_i$ alors $\mathbf{y}_i$ est colinéaire au point primitif $\mathbf{v}_i \in \mathbb{Z}^3$. Le théorème suivant permet de contrôler le contenu des suites $\mathbf{y}_{\underline{\mathbf{w}}}$.

Théorème 3.5.1. *Soit $\underline{\mathbf{w}} \in \mathfrak{W}$ et $\underline{\mathbf{y}} = \mathbf{y}_{\underline{\mathbf{w}}} = (\mathbf{y}_i)_i$. Alors $\frac{\log(\|\mathbf{y}_i\|)}{\log(\|\mathbf{v}_i\|)}$ converge dans $\mathbb{R}_+^*$. On définit*

$$\varepsilon(\underline{\mathbf{w}}) = \lim_{i\to+\infty} \frac{\log(\|\mathbf{y}_i\|)}{\log(\|\mathbf{v}_i\|)} - 1 = \lim_{i\to+\infty} \frac{\log(\mathrm{cont}(\mathbf{y}_i))}{\log(\|\mathbf{v}_i\|)} \tag{3.5.1}$$

où $\mathrm{cont}(\mathbf{y}_i)$ désigne le contenu de $\mathbf{y}_i$. Alors on a

$$\inf_{\underline{\mathbf{w}}\in\mathcal{W}} \varepsilon(\underline{\mathbf{w}}) = 0, \tag{3.5.2}$$

et la quantité δ_0 définie par (3.2.3) vérifie pour tout $\underline{\mathbf{w}} \in \mathfrak{W}$

$$1 + \varepsilon(\underline{\mathbf{w}}) = \lim_{i\to+\infty} \frac{\log(\|\mathbf{y}_i\|)}{\log(\|\mathbf{v}_i\|)} = \frac{2-\delta_0}{2-\delta(\underline{\mathbf{w}})}. \tag{3.5.3}$$

Remarque 3.5.1. En particulier, on a

$$\delta_0 = \lim_{\substack{\varepsilon(\underline{\mathbf{w}})\to 0 \\ \underline{\mathbf{w}}\in\mathcal{W}}} \delta(\underline{\mathbf{w}}).$$

Remarque 3.5.2. Le fait que $\varepsilon(\underline{\mathbf{w}}) < +\infty$ entraîne que $\|\mathbf{v}_i\|$ diverge vers l'infini.

Preuve du Théorème 3.5.1
La stratégie est la suivante. Nous allons définir (temporairement et dans cette preuve uniquement) pour tout $\underline{\mathbf{w}} \in \mathfrak{W}$ la quantité $\varepsilon(\underline{\mathbf{w}})$ par

$$\varepsilon(\underline{\mathbf{w}}) = \limsup_{i\to+\infty} \frac{\log(\|\mathbf{y}_i\|)}{\log(\|\mathbf{v}_i\|)} - 1 \tag{3.5.4}$$

où on a écrit $\mathbf{y}_{\underline{\mathbf{w}}} = (\mathbf{y}_i)_i$. Remarquons que les vecteurs $\mathbf{v}_i$ sont à coordonnées entières : quitte à prendre une norme équivalente, on peut supposer que $\|\mathbf{v}_i\| > 1$ pour tout i et

les quotients intervenant dans la définition de ε sont alors bien définis et > 0. On verra que $\|\mathbf{v}_i\|$ tend en fait vers l'infini, donc le choix de la norme n'importe pas. Nous ne prouverons qu'à la fin de la preuve que cette limite supérieure est en fait une limite, c'est-à-dire que le quotient $\frac{\log(\|\mathbf{y}_i\|)}{\log(\|\mathbf{v}_i\|)}$ converge. La difficulté est de montrer (3.5.2) (avec la fonction ε définie par (3.5.4)). Une fois cela fait, en utilisant le fait pour tout $\underline{\mathbf{w}} \in \mathcal{W}$ on a $\varepsilon(\underline{\mathbf{w}}) \geq 0$ nous serons en mesure de montrer qu'il existe $\underline{\mathbf{w}} \in \mathfrak{W}$ telle qu'en notant $\mathbf{y}_{\underline{\mathbf{w}}} = \underline{\mathbf{y}} = (\mathbf{y}_i)_i$, on ait $\varepsilon(\underline{\mathbf{w}}) = 0$ et le quotient $\frac{\log(\|\mathbf{y}_i\|)}{\log(\|\mathbf{v}_i\|)}$ qui converge vers 1. Pour montrer que ce quotient converge encore pour $\underline{\mathbf{w}} \in \mathfrak{W}$ quelconque nous nous servirons du fait que la quantité $\Big(2 - \delta(\underline{\mathbf{w}})\Big)\Big(1 + \varepsilon(\underline{\mathbf{w}})\Big)$ ne dépend que de la classe $\mathfrak{W}$ et que le quotient $\frac{\log(\|\mathbf{y}'_i\|)}{\log(\|\mathbf{y}_i\|)}$ converge vers $\frac{2-\delta(\underline{\mathbf{w}})}{2-\delta(\underline{\mathbf{w}}')}$.

La structure de la preuve est la suivante : nous prouvons d'abord la convergence du quotient $\frac{\log(\|\mathbf{y}'_i\|)}{\log(\|\mathbf{y}_i\|)}$ (voir (3.5.5) ci-après). Ensuite, nous montrons que la quantité $\varepsilon(\underline{\mathbf{w}})$ est toujours finie et que $\Big(2 - \delta(\underline{\mathbf{w}})\Big)\Big(1 + \varepsilon(\underline{\mathbf{w}})\Big)$ ne dépend ne dépend que de $\mathfrak{W}$ (voir (3.5.6) ci-après). Après cela nous montrerons que la quantité $\varepsilon_0 = \inf_{\underline{\mathbf{w}} \in \mathcal{W}} \varepsilon(\underline{\mathbf{w}})$ est nulle : c'est l'un des points les plus délicats de la preuve. Grâce à cette égalité nous prouvons enfin que $\varepsilon(\underline{\mathbf{w}})$ est une limite et pas seulement une limite supérieure, et qu'on a le résultat annoncé.

Étape 1
Commençons par montrer que pour tous $\underline{\mathbf{w}}, \underline{\mathbf{w}}' \in \mathfrak{W}$, si on note $\mathbf{y}_{\underline{\mathbf{w}}} = (\mathbf{y}_i)_i$ et $\mathbf{y}_{\underline{\mathbf{w}}'} = (\mathbf{y}'_i)_i$ alors

$$\lim_{i \to +\infty} \frac{\log(\|\mathbf{y}'_i\|)}{\log(\|\mathbf{y}_i\|)} = \frac{2 - \delta(\underline{\mathbf{w}})}{2 - \delta(\underline{\mathbf{w}}')}. \tag{3.5.5}$$

Dans un souci d'alléger les notations, on note simplement δ (resp. δ') le réel $\delta(\underline{\mathbf{w}})$ (resp. $\delta(\underline{\mathbf{w}}')$). Comme $\underline{\mathbf{w}} \sim \underline{\mathbf{w}}'$ et que ce sont des suites ψ-sturmiennes de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, il existe une suite $(\alpha_k)_k$ de réels non nuls qui vérifie la récurrence sturmienne (3.3.6) et telle que

$$\mathbf{w}'_k = \alpha_k \mathbf{w}_k \quad (k \geq 0).$$

La Proposition 2.5.6 appliquée aux suites $(\|\mathbf{w}_k\|)_k$ et $(\|\mathbf{w}'_k\|)_k$ assure l'existence d'un réel μ tel que $\|\mathbf{w}'_k\| \asymp \|\mathbf{w}_k\|^{1-\mu}$ (avec $\mu < 1$ puisque les suites $(\|\mathbf{w}_k\|)_k$ et $(\|\mathbf{w}'_k\|)_k$ divergent vers $+\infty$), ce qui donne immédiatement l'estimation $|\alpha_k| \asymp \|\mathbf{w}_k\|^{-\mu}$. Puisque $\|\mathbf{w}'_k\| \asymp \|\mathbf{w}_k\|^{1-\mu}$, par croissance multiplicative on en déduit qu'on a aussi $\|\mathbf{y}'_i\| \asymp \|\mathbf{y}_i\|^{1-\mu}$, ce qui prouve (3.5.5) puisque $1 - \mu = \frac{2-\delta}{2-\delta'}$ par le Lemme 3.3.4.

Étape 2
Nous allons montrer que la quantité $\varepsilon(\underline{\mathbf{w}})$ est toujours finie et que

$$\Big(2 - \delta(\underline{\mathbf{w}})\Big)\Big(1 + \varepsilon(\underline{\mathbf{w}})\Big) \tag{3.5.6}$$

ne dépend que de $\mathfrak{W}$. Soient $\underline{\mathbf{w}}' \in \mathfrak{W}$. On note $\mathbf{y}_{\underline{\mathbf{w}}'} = (\mathbf{y}'_i)_i$. Montrons d'abord que

$$\Big(2 - \delta(\underline{\mathbf{w}})\Big)\Big(1 + \varepsilon(\underline{\mathbf{w}})\Big) = \Big(2 - \delta(\underline{\mathbf{w}}')\Big)\Big(1 + \varepsilon(\underline{\mathbf{w}}')\Big). \tag{3.5.7}$$

On a d'après (3.5.5)

$$\frac{\log(\|\mathbf{y}'_i\|)}{\log(\|\mathbf{v}_i\|)} = \frac{\log(\|\mathbf{y}'_i\|)}{\log(\|\mathbf{y}_i\|)} \times \frac{\log(\|\mathbf{y}_i\|)}{\log(\|\mathbf{v}_i\|)} = \Big(\frac{2-\delta(\underline{\mathbf{w}})}{2-\delta(\underline{\mathbf{w}}')} + o(1)\Big)\frac{\log(\|\mathbf{y}_i\|)}{\log(\|\mathbf{v}_i\|)}, \tag{3.5.8}$$

et en passant à la limite supérieure (éventuellement infinie) on obtient

$$1+\varepsilon(\underline{\mathbf{w}}') = \frac{2-\delta(\underline{\mathbf{w}})}{2-\delta(\underline{\mathbf{w}}')}\big(1+\varepsilon(\underline{\mathbf{w}})\big),$$

d'où (3.5.7).
Montrons maintenant que $\varepsilon(\underline{\mathbf{w}}) < +\infty$ pour tout $\underline{\mathbf{w}} \in \mathfrak{W}$. En effet, supposons que $\delta' = \delta(\underline{\mathbf{w}}') < 0$, ce qui est possible d'après (3.3.9). Cela implique que $\det(\mathbf{w}'_k)$ tend vers 0 quand k tend vers l'infini, donc $\det(\mathbf{y}'_i)$ tend aussi vers 0 quand i tend vers l'infini par définition de $\underline{\mathbf{y}}'$. Or $|\det(\mathbf{v}_i)|$ est un entier non nul, donc on a $\det(\mathbf{y}'_i) = o(\det(\mathbf{v}_i))$ quand i tend vers l'infini, d'où l'on déduit (puisque $\mathbf{y}'_i$ est proportionnel à $\mathbf{v}_i$) l'estimation $\|\mathbf{y}'_i\| = o(\|\mathbf{v}_i\|)$, ce qui assure $\varepsilon(\underline{\mathbf{w}}') \leq 1 < +\infty$. L'équation (3.5.7) implique alors $\varepsilon(\underline{\mathbf{w}}) < +\infty$.

Étape 3
Posons maintenant

$$\varepsilon_0 \ := \inf_{\underline{\mathbf{w}} \in \mathcal{W}} \varepsilon(\underline{\mathbf{w}})$$

et montrons que $\varepsilon_0 = 0$. C'est l'un des points les plus délicats de la preuve. D'après ce qui précède on a $\varepsilon(\underline{\mathbf{w}}) < +\infty$ pour tout $\underline{\mathbf{w}} \in \mathfrak{W}$. Par la définition (3.5.4) cela implique que $\|\mathbf{v}_i\|$ diverge vers l'infini. Remarquons aussi que pour tout $\underline{\mathbf{w}} \in \mathcal{W}$, si on écrit $\underline{\mathbf{y}}_{\underline{\mathbf{w}}} = (\mathbf{y}_i)_i \in \mathcal{U}$, puisque $\mathbf{y}_i \in \mathbb{Z}^3$ pour i assez grand et que $\mathbf{y}_i$ est colinéaire au vecteur primitif $\mathbf{v}_i \in \mathbb{Z}^3$ on a $\varepsilon(\underline{\mathbf{w}}) \geq 0$. Donc $\varepsilon_0 \geq 0$.
Par l'absurde, supposons maintenant $\varepsilon_0 > 0$. L'idée est la suivante (de manière un peu informelle) : étant donné $(\mathbf{w}_k)_k \in \mathcal{W}$ et $\underline{\mathbf{y}} = (\mathbf{y}_i)_i \in \mathcal{U}$ la suite de matrices associée, si à partir de i_0 les matrices $\mathbf{y}_i$ sont à coefficients entiers (ainsi que les matrices $\mathbf{w}_k$ qui les définissent) et que le contenu de $\mathbf{y}_{i_0}$ est "gros", on peut "relancer" la suite $\underline{\mathbf{y}}$ à partir de i_0 en simplifiant par $\mathrm{cont}(\mathbf{y}_{i_0})$. Plus précisément, si $i_0 = t_{k_0} + l_0$ (avec $0 \leq l_0 < s_{k_0+1}$), alors on peut regarder la suite ψ-sturmienne engendrée à partir de k_0 par $\mathbf{w}_{k_0}$ et $\mathrm{cont}(\mathbf{w}_{k_0}^{l_0+1}\mathbf{w}_{k_0-1})^{-1}\mathbf{w}_{k_0+1}$. La suite $\underline{\mathbf{w}}'$ ainsi obtenue sera à coefficients entiers à partir de k_0, donc encore dans $\mathcal{W}$, et on aura $\varepsilon(\underline{\mathbf{w}}') < \varepsilon(\underline{\mathbf{w}})$. Si $\varepsilon_0 > 0$, en prenant $\underline{\mathbf{w}}$ telle que $\varepsilon(\underline{\mathbf{w}})$ réalise presque ε_0 et en se plaçant à un indice i_0 tel que $\mathrm{cont}(\mathbf{y}_{i_0})$ soit suffisamment gros, on montre alors qu'on arrive à gagner suffisamment pour avoir $\varepsilon(\underline{\mathbf{w}}') < \varepsilon_0$ et ainsi obtenir une contradiction.

Soit $C > 0$ tel que $C > \limsup_{k\to+\infty}[s_{k+1}; s_k, \ldots, s_1] = \frac{1}{\sigma}$. D'après le Lemme 2.5.4 on a

$$\alpha_k \geq \alpha_{k+1}^{\frac{1}{C}}, \tag{3.5.9}$$

pour k assez grand.
Soit $\mu, \varepsilon > 0$ vérifiant $\mu < \varepsilon_0 < \varepsilon$ et

$$(1+\varepsilon)\Big(1 - \frac{\mu}{C^2(1+\varepsilon)}\Big) < 1 + \varepsilon_0. \tag{3.5.10}$$

Soit $\underline{\mathbf{w}} = (\mathbf{w}_k)_k \in \mathcal{W}$ telle que $\varepsilon(\underline{\mathbf{w}}) < \varepsilon$. On note $\underline{\mathbf{y}} = (\mathbf{y}_i)_i \in \mathcal{U}$ la suite $\mathbf{y}_{\underline{\mathbf{w}}}$. Par (3.3.10) il existe $(\alpha_k)_k$ une suite de réels > 0 qui diverge vers l'infini et telle que

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k^{s_{k+1}}\alpha_{k-1} \quad \text{et} \quad \alpha_k \asymp \|\mathbf{w}_k\|^{\frac{\mu}{1+\varepsilon}}. \tag{3.5.11}$$

Par croissance multiplicative, on a pour $i = t_k + l$ tendant vers l'infini $\|\mathbf{y}_i\| \asymp \|\mathbf{w}_k\|^{l+1}\|\mathbf{w}_{k-1}\|$. En combinant avec l'estimation (3.5.10) on obtient

$$\|\mathbf{y}_{t_k+l}\|^{\frac{\mu}{1+\varepsilon}} \asymp \alpha_k^{l+1}\alpha_{k-1}. \tag{3.5.12}$$

Par définition de $\varepsilon(\underline{\mathbf{w}})$,

$$\|\mathbf{y}_i\| \leq \|\mathbf{v}_i\|^{1+\varepsilon} \tag{3.5.13}$$

pour tout i assez grand, et puisque $\mu < \varepsilon_0$, il existe une infinité de i tels que $\|\mathbf{y}_i\| \geq \|\mathbf{v}_i\|^{1+\mu}$, *i.e.* tels que

$$\mathrm{cont}(\mathbf{y}_i) \geq \|\mathbf{v}_i\|^{\mu}. \tag{3.5.14}$$

Soit $i = t_k + l$ avec $0 \leq l < s_{k+1}$. En combinant (3.5.14), (3.5.13) et (3.5.12), et puisque $\mathrm{cont}(\mathbf{y}_i N_k^{-1}) \asymp \mathrm{cont}(\mathbf{y}_i)$ (et que α_{k-1} diverge vers l'infini), on obtient

$$\mathrm{cont}(\mathbf{w}_k^{l+1}\mathbf{w}_{k-1}) = \mathrm{cont}(\mathbf{y}_i N_k^{-1}) \gg \alpha_k^{l+1}\alpha_{k-1} > \alpha_k \tag{3.5.15}$$

pour une infinité d'indices $i = t_k + l$. Soit j_0 tel que pour tout $i = t_k + l \geq j_0$ on ait $\mathbf{w}_k \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z})$ et tel que (3.5.9) soit vérifiée pour tout k tel que $t_k \geq j_0$. Soit $i_0 = t_{k_0} + l_0 \geq j_0$ (avec $0 \leq l_0 < s_{k_0+1}$) tel que (3.5.15) soit vérifiée pour $i = i_0$. On pose $c_{i_0} = \mathrm{cont}(\mathbf{w}_{k_0}^{l_0+1}\mathbf{w}_{k_0-1})$, et on définit une suite $(q_k)_k$ par

$$(q_{k_0}, q_{k_0+1}) = (1, c_{i_0}) \quad \text{et} \quad q_{k+1} = q_k^{s_{k+1}}q_{k-1} \text{ pour tout } k \geq 0.$$

Montrons qu'on a

$$q_k \gg \|\mathbf{w}_k\|^{\frac{\mu}{C^2(1+\varepsilon)}}. \tag{3.5.16}$$

Par (3.5.11), il suffit de montrer qu'on a $q_k \geq \alpha_k^{1/C^2}$ pour tout k assez grand. Par choix de i_0, par (3.5.15) et (3.5.9) on a

$$q_{k_0+1} = c_{i_0} \geq \alpha_{k_0} \geq \alpha_{k_0+1}^{1/C}.$$

En réutilisant cette inégalité et (3.5.9), on obtient ensuite

$$q_{k_0+2} = q_{k_0+1}^{s_{k+2}}q_{k_0} \geq q_{k_0+1} \geq \alpha_{k_0+1}^{1/C} \geq \alpha_{k_0+2}^{1/C^2}.$$

Donc on a $q_k \geq \alpha_k^{1/C^2}$ pour $k = k_0 + 1, k_0 + 2$. Par récurrence immédiate cette inégalité est vraie pour tout $k \geq k_0 + 1$. Définissons maintenant la suite ψ-sturmienne $\underline{\mathbf{w}'} = (\mathbf{w}'_i)_i$ par

$$\mathbf{w}'_k = \frac{1}{q_k}\mathbf{w}_k \quad \text{pour tout } k,$$

et considérons la suite $\underline{\mathbf{y}'} = \mathbf{y}_{\underline{\mathbf{w}'}} = (\mathbf{y}'_i)_i$ associée à $\underline{\mathbf{w}'}$. Remarquons d'abord que $\mathbf{w}'_k$ est à coefficients entiers pour k assez grand. En effet, on a par définition $\mathbf{w}'_{k_0} = \mathbf{w}_{k_0} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z})$. D'autre part

$$\mathbf{w}'_{k_0+1} = (\mathbf{w}_{k_0})^{s_{k_0+1}-(l_0+1)}\Big(\frac{1}{c_{i_0}}\mathbf{w}_{k_0}^{l_0+1}\mathbf{w}_{k_0-1}\Big) \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z}),$$

et on conclut par récurrence puisque $\underline{\mathbf{w}}'$ est une suite ψ-sturmienne. En particulier, pour i assez grand $\mathbf{y}'_i$ est à coefficients entiers, donc diverge en norme vers l'infini (puisque $\|\mathbf{v}_i\|$ tend vers l'infini). Cela implique que $\underline{\mathbf{w}}' \in \mathcal{W}$. Or on a par (3.5.16) (et puisque $\|\mathbf{y}_i\| \asymp \|\mathbf{w}_k\|^{l+1}\|\mathbf{w}_{k-1}\|$) et (3.5.13)

$$\|\mathbf{y}'_i\| = \frac{1}{q_k^{l+1}q_{k-1}}\|\mathbf{y}_i\| \ll \|\mathbf{y}_i\|^{1-\frac{\mu}{C^2(1+\varepsilon)}} \ll \|\mathbf{v}_i\|^{(1+\varepsilon)\left(1-\frac{\mu}{C^2(1+\varepsilon)}\right)},$$

pour tout $i = t_k + l$, $0 \leq l < s_{k+1}$ et $k \geq k_0 + 2$, d'où on tire $\varepsilon(\underline{\mathbf{w}}') \leq (1+\varepsilon)\left(1-\frac{\mu}{C^2(1+\varepsilon)}\right) - 1 < \varepsilon_0$ par (3.5.10) : contradiction. Donc $\varepsilon_0 = 0$.

Étape 4

En nous servant de l'égalité $\varepsilon_0 = 0$, nous allons maintenant montrer que $\varepsilon(\underline{\mathbf{w}})$ est une limite (et pas seulement une limite supérieure). L'égalité

$$\delta_0 = \lim_{\substack{\varepsilon(\underline{\mathbf{w}})\to 0 \\ \underline{\mathbf{w}}\in\mathcal{W}}} \delta(\underline{\mathbf{w}}) \tag{3.5.17}$$

(voir Remarque 3.5.1) vient de (3.5.7) et de l'égalité $\varepsilon_0 = 0$. En particulier, $\delta_0 \leq \delta(\underline{\mathbf{w}}) < 2$ pour tout $\underline{\mathbf{w}} \in \mathcal{W}$. D'après (3.3.9) il existe $\underline{\mathbf{w}} \in \mathfrak{W}$ telle que $\delta(\underline{\mathbf{w}}) = \delta_0$ (attention, rien n'indique que $\underline{\mathbf{w}}$ appartienne à $\mathcal{W}$) et par (3.5.7) on a directement $\varepsilon(\underline{\mathbf{w}}) = 0$. Montrons qu'avec $\underline{\mathbf{y}} = \mathbf{y}_{\underline{\mathbf{w}}} = (\mathbf{y}_i)_i$, on a

$$\lim_{i\to+\infty} \frac{\log(\|\mathbf{y}_i\|)}{\log(\|\mathbf{v}_i\|)} = 1. \tag{3.5.18}$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Soit $\underline{\mathbf{w}}' \in \mathcal{W}$. On note $\underline{\mathbf{y}}' = \mathbf{y}_{\underline{\mathbf{w}}'} = (\mathbf{y}'_i)_i \in \mathcal{U}$. L'un des points clefs est de remarquer que puisque pour i assez grand $\mathbf{y}'_i \in \mathbb{Z}^3$ est colinéaire au vecteur primitif $\mathbf{v}_i \in \mathbb{Z}^3$, on a

$$1 \leq \frac{\log(\|\mathbf{y}'_i\|)}{\log(\|\mathbf{v}_i\|)} \leq 1 + \varepsilon(\underline{\mathbf{w}}') + o(1). \tag{3.5.19}$$

D'après l'équation (3.5.5) le quotient $\frac{\log(\|\mathbf{y}_i\|)}{\log(\|\mathbf{y}'_i\|)}$ converge vers $\frac{2-\delta(\underline{\mathbf{w}}')}{2-\delta_0}$. Puisque $\varepsilon_0 = 0$ et par (3.5.17), on peut choisir $\underline{\mathbf{w}}'$ telle que $\varepsilon(\underline{\mathbf{w}}') < \frac{\varepsilon}{2}$ et $\left|\frac{2-\delta(\underline{\mathbf{w}}')}{2-\delta_0} - 1\right| < \frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}$. Alors avec ce choix de $\underline{\mathbf{w}}'$ et par (3.5.19) on a

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\log(\|\mathbf{y}_i\|)}{\log(\|\mathbf{v}_i\|)} - 1\right| &\leq \left|\left(\frac{\log(\|\mathbf{y}_i\|)}{\log(\|\mathbf{y}'_i\|)} - 1\right)\frac{\log(\|\mathbf{y}'_i\|)}{\log(\|\mathbf{v}_i\|)}\right| + \left|\frac{\log(\|\mathbf{y}'_i\|)}{\log(\|\mathbf{v}_i\|)} - 1\right| \\
&\leq \left|\left(\frac{2-\delta(\underline{\mathbf{w}}')}{2-\delta_0} - 1 + o(1)\right)\left(1+\varepsilon(\underline{\mathbf{w}}')\right)\right| + \varepsilon(\underline{\mathbf{w}}') + o(1) \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

pour i assez grand. D'où (3.5.18). Soit maintenant $\underline{\mathbf{w}}' \in \mathfrak{W}$ quelconque et $\underline{\mathbf{y}}' = \mathbf{y}_{\mathbf{w}'} = (\mathbf{y}'_i)_i$ associée. Alors par (3.5.5) et par (3.5.18) on trouve

$$\frac{\log(\|\mathbf{y}'_i\|)}{\log(\|\mathbf{v}_i\|)} = \frac{\log(\|\mathbf{y}'_i\|)}{\log(\|\mathbf{y}_i\|)} \times \frac{\log(\|\mathbf{y}_i\|)}{\log(\|\mathbf{v}_i\|)} = \left(\frac{2-\delta_0}{2-\delta(\underline{\mathbf{w}}')} + o(1)\right)(1+o(1)),$$

d'où (3.5.3). En particulier on a bien que $\frac{\log(\|\mathbf{y}_i\|)}{\log(\|\mathbf{v}_i\|)}$ converge dans $\mathbb{R}_+^*$ et que $\varepsilon(\underline{\mathbf{w}})$ est une limite. L'égalité $\varepsilon_0 = 0$ donne alors directement (3.5.2), ce qui achève la preuve de ce théorème. □

3.6 Contenus des suites $\mathbf{z_w}$

Rappelons qu'on a fixé $\mathfrak{W} \in \mathbf{W}/\sim$, et qu'on a noté $\mathcal{W} \subset \mathfrak{W}$ le sous-ensemble des suites ψ-sturmiennes $\underline{\mathbf{w}} = (\mathbf{w}_k)_k$ vérifiant $\mathbf{w}_k \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z})$ pour k assez grand, et $\mathcal{U}$ (resp. $\mathcal{U}'$) l'ensemble des suites $\mathbf{y}_{\underline{\mathbf{w}}}$ (resp. $\mathbf{z}_{\underline{\mathbf{w}}}$) lorsque $\underline{\mathbf{w}}$ décrit $\mathcal{W}$. Rappelons également que pour tout $\underline{\mathbf{w}} \in \mathfrak{W}$, si on note $\mathbf{z}_{\underline{\mathbf{w}}} = (\mathbf{z}_i)_i$ alors $\mathbf{z}_i$ est colinéaire au point primitif $\mathbf{t}_i \in \mathbb{Z}^3$. Le théorème suivant – analogue au Théorème 3.5.1 – permet de contrôler le contenu des suites $\mathbf{z}_{\underline{\mathbf{w}}}$.

Théorème 3.6.1. *Soit $\underline{\mathbf{w}} \in \mathfrak{W}$ et $\underline{\mathbf{z}} = \mathbf{z}_{\underline{\mathbf{w}}} = (\mathbf{z}_i)_i$. Alors $\frac{\log(\|\mathbf{z}_i\|)}{\log(\|\mathbf{t}_i\|)}$ converge dans $\mathbb{R}_+^*$, et on a*

$$\lim_{i\to+\infty} \frac{\log(\|\mathbf{z}_i\|)}{\log(\|\mathbf{t}_i\|)} - 1 = \lim_{i\to+\infty} \frac{\log(\mathrm{cont}(\mathbf{z}_i))}{\log(\|\mathbf{t}_i\|)} = \varepsilon(\underline{\mathbf{w}}), \tag{3.6.1}$$

où $\mathrm{cont}(\mathbf{z}_i)$ *désigne le contenu de* $\mathbf{z}_i$ *et* $\varepsilon(\underline{\mathbf{w}})$ *est la quantité du Théorème 3.5.1.*

Remarque 3.6.1. Le fait que $\varepsilon(\underline{\mathbf{w}}) < +\infty$ entraîne que $\|\mathbf{t}_i\|$ diverge vers l'infini.

Preuve du Théorème 3.6.1
Nous définissons (temporairement et dans cette preuve uniquement) pour tout $\underline{\mathbf{w}} \in \mathfrak{W}$ la quantité $\varepsilon'(\underline{\mathbf{w}})$ par

$$\varepsilon'(\underline{\mathbf{w}}) = \limsup_{i\to+\infty} \frac{\log(\|\mathbf{z}_i\|)}{\log(\|\mathbf{t}_i\|)} - 1 \tag{3.6.2}$$

où on a écrit $\mathbf{z}_{\underline{\mathbf{w}}} = (\mathbf{z}_i)_i$. Remarquons que les vecteurs $\mathbf{t}_i$ sont à coordonnées entières : quitte à prendre une norme équivalente, on peut supposer que $\|\mathbf{t}_i\| > 1$ pour tout i (et les quotients intervenant dans la définition de ε' sont alors bien définis et ≥ 0). On verra que comme pour $\|\mathbf{v}_i\|$, $\|\mathbf{t}_i\|$ tend en fait vers l'infini, donc le choix de la norme n'importe pas.
La stratégie et la structure de la preuve sont les mêmes que pour le Théorème 3.5.1. Cette fois-ci, il est plus technique de prouver que $\varepsilon'(\underline{\mathbf{w}})$ est fini pour tout $\underline{\mathbf{w}} \in \mathfrak{W}$. D'un autre côté, le fait que la borne inférieure des $\varepsilon'(\underline{\mathbf{w}})$ (avec $\underline{\mathbf{w}} \in \mathcal{W}$) soit nulle (point-clef pour prouver la convergence du quotient $\frac{\log(\|\mathbf{z}_i\|)}{\log(\|\mathbf{t}_i\|)}$) se déduit assez directement de (3.5.2).

Étape 1
L'estimation (3.4.2) combinée avec (3.5.5), permet de déduire immédiatement l'estimation (3.6.3) suivante : pour tous $\underline{\mathbf{w}} = (\mathbf{w}_k)_k, \underline{\mathbf{w}}' = (\mathbf{w}'_k)_k \in \mathfrak{W}$, si on note $\mathbf{z}_{\underline{\mathbf{w}}} = (\mathbf{z}_i)_i$ et $\mathbf{z}_{\underline{\mathbf{w}}'} = (\mathbf{z}'_i)_i$ alors on a

$$\lim_{i\to+\infty} \frac{\log(\|\mathbf{z}'_i\|)}{\log(\|\mathbf{z}_i\|)} = \frac{2-\delta(\underline{\mathbf{w}})}{2-\delta(\underline{\mathbf{w}}')}. \tag{3.6.3}$$

Étape 2
Montrons maintenant que la quantité $\varepsilon'(\underline{\mathbf{w}})$ est toujours finie et que

$$\Big(2-\delta(\underline{\mathbf{w}})\Big)\Big(1+\varepsilon'(\underline{\mathbf{w}})\Big)=\Big(2-\delta(\underline{\mathbf{w}}')\Big)\Big(1+\varepsilon'(\underline{\mathbf{w}}')\Big) \tag{3.6.4}$$

pour tous $\underline{\mathbf{w}},\underline{\mathbf{w}}'\in\mathfrak{W}$. On commence par prouver (3.6.4) avec $\varepsilon'(\underline{\mathbf{w}})$ et $\varepsilon'(\underline{\mathbf{w}}')$ éventuellement infinis. On procède comme dans la démonstration de (3.5.7). Soient $\underline{\mathbf{w}},\underline{\mathbf{w}}'\in\mathfrak{W}$. On note $\mathbf{z}_{\underline{\mathbf{w}}}=(\mathbf{z}_i)_i$ et $\mathbf{z}_{\underline{\mathbf{w}}'}=(\mathbf{z}'_i)_i$. On a d'après (3.6.3)

$$\frac{\log(\|\mathbf{z}'_i\|)}{\log(\|\mathbf{t}_i\|)}=\Big(\frac{2-\delta(\underline{\mathbf{w}})}{2-\delta(\underline{\mathbf{w}}')}+o(1)\Big)\times\frac{\log(\|\mathbf{z}_i\|)}{\log(\|\mathbf{t}_i\|)}, \tag{3.6.5}$$

et en passant à la limite supérieure on obtient

$$1+\varepsilon'(\underline{\mathbf{w}}')=\frac{2-\delta(\underline{\mathbf{w}})}{2-\delta(\underline{\mathbf{w}}')}\Big(1+\varepsilon'(\underline{\mathbf{w}})\Big),$$

d'où on tire (3.6.4).
Montrons maintenant que $\varepsilon'(\underline{\mathbf{w}})<+\infty$ pour tout $\underline{\mathbf{w}}\in\mathfrak{W}$. Par (3.6.4), il suffit de montrer que c'est vrai pour un $\underline{\mathbf{w}}$ particulier. Soit $\underline{\mathbf{w}}\in\mathcal{W}$. On note $\underline{\mathbf{y}}=\mathbf{y}_{\underline{\mathbf{w}}}=(\mathbf{y}_i)_i$ et $\underline{\mathbf{z}}=\mathbf{z}_{\underline{\mathbf{w}}}=(\mathbf{z}_i)_i$. Soit $\lambda>0$ un entier tel que $\lambda\mathbf{z}_i\in\mathbb{Z}^3$ pour i assez grand (voir Remarque 3.2.7). On a l'égalité au signe près $\mathbf{t}_i=\mathrm{cont}(\lambda\mathbf{z}_i)^{-1}\lambda\mathbf{z}_i$. De plus, par l'équation (2.4.9) de la Proposition 2.4.4, le contenu de $\lambda\mathbf{z}_i$ divise le contenu de $\det(N)\mathrm{Tr}(JN)\lambda^2\mathbf{y}_i$ pour i assez grand. En particulier, par définition de $\varepsilon(\underline{\mathbf{w}})$ on a l'estimation

$$\mathrm{cont}(\lambda\mathbf{z}_i)\leq\mathrm{cont}(\det(N)\mathrm{Tr}(JN)\lambda^2\mathbf{y}_i)=\|\mathbf{v}_i\|^{\varepsilon(\underline{\mathbf{w}})+o(1)}.$$

Rappelons que $\varepsilon(\underline{\mathbf{w}})\geq 0$ puisque $\underline{\mathbf{w}}\in\mathcal{W}$. On déduit de l'estimation précédente que

$$\|\mathbf{t}_i\|\geq\frac{\|\mathbf{z}_i\|}{\|\mathbf{v}_i\|^{\varepsilon(\underline{\mathbf{w}})+o(1)}}. \tag{3.6.6}$$

Remarquons maintenant que par (3.5.3) on a

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}_i\|=\|\mathbf{y}_i\|^{\frac{1}{1+\varepsilon(\underline{\mathbf{w}})}+o(1)}=\|\mathbf{w}_k^{l+1}\mathbf{w}_{k-1}\|^{\frac{1}{1+\varepsilon(\underline{\mathbf{w}})}+o(1)}&\leq\|\mathbf{w}_{k+1}\|^{\frac{1}{1+\varepsilon(\underline{\mathbf{w}})}+o(1)}\\&\leq\|\mathbf{w}_{k-1}\|^{\frac{1}{\sigma^2(1+\varepsilon(\underline{\mathbf{w}}))}+o(1)}\\&\leq\|\mathbf{z}_i\|^{\frac{1}{\sigma^2(1+\varepsilon(\underline{\mathbf{w}}))}+o(1)}\end{aligned} \tag{3.6.7}$$

où k est tel que $i=t_k+l$, $0\leq l<s_{k+1}$, en utilisant l'estimation $\limsup_{k\infty}\frac{\log(\|\mathbf{w}_{k+1}\|)}{\log(\|\mathbf{w}_k\|)}=\frac{1}{\sigma}$ et (3.4.2). En supposant $\varepsilon(\underline{\mathbf{w}})\leq\sigma^2$, les estimations (3.6.6) et (3.6.7) conduisent à

$$\frac{\log(\|\mathbf{z}_i\|)}{\log(\|\mathbf{t}_i\|)}\leq\frac{1}{1-\frac{\varepsilon(\underline{\mathbf{w}})}{\sigma^2(1+\varepsilon(\underline{\mathbf{w}}))}+o(1)}. \tag{3.6.8}$$

On choisit $\underline{\mathbf{w}}\in\mathcal{W}$ tel que $\varepsilon=\varepsilon(\underline{\mathbf{w}})$ vérifie $0<\varepsilon\leq\sigma^2$ et $\frac{\varepsilon}{\sigma^2(1+\varepsilon)}<\frac{1}{2}$; c'est possible d'après (3.5.2). Alors par (3.6.8) on a

$$\frac{\log(\|\mathbf{z}_i\|)}{\log(\|\mathbf{t}_i\|)}\leq 2+o(1),$$

d'où on déduit $\varepsilon'(\underline{\mathbf{w}})\leq 1<+\infty$.

Étape 3
On définit maintenant

$$\varepsilon_0' := \inf_{\underline{\mathbf{w}} \in \mathcal{W}} \varepsilon'(\underline{\mathbf{w}}). \tag{3.6.9}$$

Montrons que $\varepsilon_0' = 0$. La démonstration repose sur l'égalité (3.5.2). Pour tout $\underline{\mathbf{z}} = (\mathbf{z}_i)_i \in \mathcal{U}'$ il existe un entier $\lambda > 0$ tel que $\lambda \mathbf{z}_i \in \mathbb{Z}^3$ pour i assez grand (voir Remarque 3.2.7), et puisque $\lambda \mathbf{z}_i$ est colinéaire au vecteur primitif $\mathbf{t}_i \in \mathbb{Z}^3$, on en déduit que $\varepsilon'(\underline{\mathbf{w}}) \geq 0$, et par suite $\varepsilon_0' \geq 0$.
Soit $\varepsilon > 0$ fixé. D'après (3.5.2) il existe $\underline{\mathbf{w}} \in \mathcal{W}$ telle que

$$\frac{1}{1 - \frac{\varepsilon(\underline{\mathbf{w}})}{\sigma^2(1+\varepsilon(\underline{\mathbf{w}}))}} < 1 + \varepsilon.$$

On écrit $\mathbf{z}_{\underline{\mathbf{w}}} = (\mathbf{z}_i)_i$. Alors l'estimation (3.6.8) entraîne

$$\frac{\log(\|\mathbf{z}_i\|)}{\log(\|\mathbf{t}_i\|)} \leq 1 + \varepsilon + o(1),$$

d'où on déduit immédiatement $\varepsilon'(\underline{\mathbf{w}}) \leq \varepsilon$, et par suite $\varepsilon_0' \leq \varepsilon$. Donc on a bien $\varepsilon_0' = 0$.

Étape 4
Montrons enfin qu'on a

$$\lim_{i \to +\infty} \frac{\log(\|\mathbf{z}_i\|)}{\log(\|\mathbf{t}_i\|)} = 1 + \varepsilon'(\underline{\mathbf{w}}) = \frac{2 - \delta_0}{2 - \delta(\underline{\mathbf{w}})}. \tag{3.6.10}$$

On procède comme pour le Théorème 3.5.1. Puisque $\varepsilon_0' = 0$ et par (3.6.4) on a l'égalité

$$\inf_{\underline{\mathbf{w}} \in \mathcal{W}} \delta(\underline{\mathbf{w}}) = \lim_{\substack{\varepsilon'(\underline{\mathbf{w}}) \to 0 \\ \underline{\mathbf{w}} \in \mathcal{W}}} \delta(\underline{\mathbf{w}}). \tag{3.6.11}$$

D'après (3.3.9) il existe $\underline{\mathbf{w}} \in \mathfrak{W}$ telle que $\delta(\underline{\mathbf{w}}) = \delta_0$ et par (3.6.4) on a directement $\varepsilon'(\underline{\mathbf{w}}) = 0$. Notons $\underline{\mathbf{z}} = \mathbf{z}_{\underline{\mathbf{w}}} = (\mathbf{z}_i)_i$. Comme pour (3.5.18), montrons que

$$\lim_{i \to +\infty} \frac{\log(\|\mathbf{z}_i\|)}{\log(\|\mathbf{t}_i\|)} = 1 \tag{3.6.12}$$

(les arguments utilisés sont similaires). Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Soit $\underline{\mathbf{w}}' \in \mathcal{W}$. On note $\underline{\mathbf{z}}' = \mathbf{z}_{\underline{\mathbf{w}}'} = (\mathbf{z}_i')_i \in \mathcal{U}'$. L'un des points clefs est encore une fois de remarquer que puisque pour i assez grand le vecteur $\lambda \mathbf{z}_i' \in \mathbb{Z}^3$ (avec $\lambda > 0$ indépendant de i ; voir Remarque 3.2.7) est colinéaire au vecteur primitif $\mathbf{t}_i \in \mathbb{Z}^3$, on a

$$1 \leq \frac{\log(\|\mathbf{z}_i'\|)}{\log(\|\mathbf{t}_i\|)} + o(1) \leq 1 + \varepsilon'(\underline{\mathbf{w}}') + o(1). \tag{3.6.13}$$

D'après (3.6.3) le quotient $\frac{\log(\|\mathbf{z}_i\|)}{\log(\|\mathbf{z}_i'\|)}$ converge vers $\frac{2-\delta(\underline{\mathbf{w}}')}{2-\delta_0}$. Puisque $\varepsilon_0' = 0$ et par (3.6.11), on peut choisir $\underline{\mathbf{w}}'$ telle que $\varepsilon'(\underline{\mathbf{w}}') < \frac{\varepsilon}{2}$ et $\left| \frac{2-\delta(\underline{\mathbf{w}}')}{2-\delta_0} - 1 \right| < \frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}$. Alors avec ce choix de $\underline{\mathbf{w}}'$

et par (3.6.13) on a

$$\begin{aligned}\Big|\frac{\log(\|\mathbf{z}_i\|)}{\log(\|\mathbf{t}_i\|)}-1\Big| &\le \Big|\Big(\frac{\log(\|\mathbf{z}_i\|)}{\log(\|\mathbf{z}'_i\|)}-1\Big)\frac{\log(\|\mathbf{z}'_i\|)}{\log(\|\mathbf{t}_i\|)}\Big|+\Big|\frac{\log(\|\mathbf{z}'_i\|)}{\log(\|\mathbf{t}_i\|)}-1\Big| \\ &\le \Big|\Big(\frac{2-\delta(\underline{\mathbf{w}}')}{2-\delta_0}-1+o(1)\Big)\Big(1+\varepsilon(\underline{\mathbf{z}}')\Big)\Big|+\varepsilon(\underline{\mathbf{z}}')+o(1) \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

pour i assez grand. D'où (3.6.12). Soit maintenant $\underline{\mathbf{w}}' \in \mathfrak{W}$ quelconque et $\underline{\mathbf{z}}' = \mathbf{z}_{\mathbf{w}'} = (\mathbf{z}'_i)_i$ associée. Alors par (3.6.3) et par (3.6.12) on trouve

$$\frac{\log(\|\mathbf{z}'_i\|)}{\log(\|\mathbf{t}_i\|)} = \frac{\log(\|\mathbf{z}'_i\|)}{\log(\|\mathbf{z}_i\|)} \times \frac{\log(\|\mathbf{z}_i\|)}{\log(\|\mathbf{t}_i\|)} = \Big(\frac{2-\delta_0}{2-\delta(\underline{\mathbf{w}}')}+o(1)\Big)(1+o(1)),$$

d'où (3.6.10). On déduit immédiatement de (3.5.3) l'égalité $\varepsilon'(\underline{\mathbf{w}}) = \varepsilon(\underline{\mathbf{w}})$, ce qui achève la démonstration de ce théorème. □

3.7 Preuve des Théorèmes 3.1.1 et 3.1.2

Soit $\underline{\mathbf{w}} = (\mathbf{w}_k)_k$ comme au début de la Partie 3.1. On note $\mathfrak{W}$ la classe d'équivalence de $\underline{\mathbf{w}}$.

Preuve du Théorème 3.1.1
Rappelons qu'on note $(\mathbf{y}_i)_i$ et $(\mathbf{z}_i)_i$ les suites de matrices symétriques associées à $\underline{\mathbf{w}}$, et λ_i et μ_i les contenus respectifs des vecteurs $\mathbf{y}_i$ et $\mathbf{z}_i$. Par ailleurs, par hypothèse on a $\delta = \delta(\underline{\mathbf{w}}) < 2$.
Le Théorème 3.5.1 assure que $\|\mathbf{y}_i\| = \|\mathbf{v}_i\|^{1+\varepsilon(\underline{\mathbf{w}})+o(1)}$ et $\lambda_i = \|\mathbf{v}_i\|^{\varepsilon(\underline{\mathbf{w}})+o(1)}$ avec $\varepsilon(\underline{\mathbf{w}}) > -1$ (voir équation (3.5.3) ; c'est une conséquence de $\delta < 2$). On déduit alors des estimations précédentes

$$\lambda_i = \|\mathbf{y}_i\|^{\frac{\varepsilon(\mathbf{w})}{1+\varepsilon(\underline{\mathbf{w}})}+o(1)}.$$

De même, le Théorème 3.6.1 implique que $\|\mathbf{z}_i\| = \|\mathbf{t}_i\|^{1+\varepsilon(\underline{\mathbf{w}})+o(1)}$ et $\mu_i = \|\mathbf{t}_i\|^{\varepsilon(\underline{\mathbf{w}})+o(1)}$, d'où on déduit l'estimation

$$\mu_i = \|\mathbf{z}_i\|^{\frac{\varepsilon(\mathbf{w})}{1+\varepsilon(\underline{\mathbf{w}})}+o(1)}.$$

Ceci achève la démonstration du théorème en posant $\omega = \frac{\varepsilon(\underline{\mathbf{w}})}{1+\varepsilon(\underline{\mathbf{w}})} < 1$. □

Preuve du Théorème 3.1.2
On choisit $\underline{\mathbf{w}}^{(0)} \in \mathfrak{W}$ tel que $\delta(\underline{\mathbf{w}}^{(0)}) = \delta_0 < 2$ (voir (3.2.3)) et on note $\underline{\mathbf{y}}^{(0)} = \mathbf{y}_{\underline{\mathbf{w}}^{(0)}} = (\mathbf{y}_i^{(0)})_i$ et $\underline{\mathbf{z}}^{(0)} = \mathbf{z}_{\underline{\mathbf{w}}^{(0)}} = (\mathbf{z}_i^{(0)})_i$ les suites associées. Par définition de $\delta(\underline{\mathbf{w}}^{(0)})$ on a

$$|\det(\mathbf{w}_k^{(0)})| \asymp \|\mathbf{w}_k^{(0)}\|^{\delta_0}.$$

Les Théorèmes 3.5.1 et 3.6.1 montrent que $\varepsilon(\underline{\mathbf{w}}^{(0)}) = 0$,

$$\|\mathbf{v}_i\| = \|\mathbf{y}_i^{(0)}\|^{1+o(1)} \quad \text{et} \quad \|\mathbf{t}_i\| = \|\mathbf{z}_i^{(0)}\|^{1+o(1)}.$$

Comme $\mathbf{v}_i, \mathbf{t}_j \in \mathbb{Z}^3$ sont primitifs pour tous i, j, on en déduit que

$$\mathrm{cont}(\mathbf{y}_i^{(0)})^{-1}\mathbf{y}_i^{(0)} \in \mathbb{Z}^3 \quad \text{et} \quad \mathrm{cont}(\mathbf{z}_i^{(0)})^{-1}\mathbf{z}_i^{(0)} \in \mathbb{Z}^3$$

sont primitifs, avec $\mathrm{cont}(\mathbf{y}_i^{(0)}) = \|\mathbf{y}_i^{(0)}\|^{o(1)}$ et $\mathrm{cont}(\mathbf{z}_i^{(0)}) = \|\mathbf{z}_i^{(0)}\|^{o(1)}$. Par ailleurs, puisque pour $i = t_k - 1$ on a $\mathbf{y}_i^{(0)} = \mathbf{w}_k^{(0)} N_{k-1}$, cela implique aussi que $\mathrm{cont}(\mathbf{w}_k^{(0)})^{-1}\mathbf{w}_k^{(0)}$ est un élément primitif de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z})$ avec $\mathrm{cont}(\mathbf{w}_k^{(0)}) = \|\mathbf{w}_k^{(0)}\|^{o(1)}$. Alors les suites $\underline{\mathbf{w}}^{(0)} \in \mathfrak{W}$, $\underline{\mathbf{y}}^{(0)}$ et $\underline{\mathbf{z}}^{(0)}$ définies comme ci-dessus donnent le résultat du théorème. □

Chapitre 4

Considérations réciproques

4.1 Introduction et principaux résultats

Rappelons qu'on identifie $\mathbb{R}^3$ avec l'espace des matrices symétriques 2×2 à coefficients réels via l'isomorphisme $(x_0, x_1, x_2) \longmapsto \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}$. On note aussi $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^3$, et on a défini la norme $\|\mathbf{w}\|$ d'une matrice $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ par la formule $\|\mathbf{w}\| = \sqrt{a^2 + (b^2+c^2)/2 + d^2}$ (avec cette définition, il n'y a pas d'ambiguïté quand on note $\|\mathbf{y}\|$, avec $\mathbf{y}$ vu comme un vecteur de $\mathbb{R}^3$ ou comme la matrice symétrique de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ associée).

Le lecteur est invité à consulter la Partie 1.5 du Chapitre 1 dans laquelle sont rappelées les définitions de l'article de Fischler [23] (notamment la définition de l'exposant β_0 et celle des fonctions asymptotiquement réduites). Fischler pose la question suivante :

Question : a-t-on l'égalité $\beta_0(\xi) = \beta_1(\xi)$ pour tout réel ξ tel que $\beta_0(\xi) < 2$? (où suivant les notations de [23] on a posé $\beta_1(\xi) = 1/\widehat{\lambda}_2(\xi)$)

Fischler a montré que si $\beta_0(\xi) < 2$ alors il existe $\varepsilon_1 > 0$ qui ne dépend que de $\beta_0(\xi)$ et $\beta_1(\xi)$ et tel que $\beta_\varepsilon(\xi) = \beta_0(\xi)$ pour tout $\varepsilon < \varepsilon_1$ (voir le Théorème 1.5.2 du Chapitre 1). Par ailleurs on peut associer à tout réel ξ tel que $\beta_0(\xi) < 2$ une fonction asymptotiquement réduite ψ – qui n'est pas unique, voir Remarque 1.8.13 du Chapitre 1 –, et on a $\beta_0(\xi) = \delta(\psi)$ (voir Définition 1.5.3) ; de plus si $\beta_0(\xi) < \sqrt{3}$ alors on peut supposer que ψ est sturmienne (voir Théorème 1.5.4). Le cas des fonctions sturmiennes apparaît ainsi naturellement. Dans ce chapitre, nous montrons le résultat suivant, qui correspond au Théorème D de l'introduction de cette thèse, et qui répond partiellement à la question de Fischler :

Théorème 4.1.1. *Soit ξ un réel tel que $\beta_0(\xi) < 2$. Si l'une des fonctions ψ associées par le Théorème 1.8.1 est sturmienne, alors*

$$\beta_0(\xi) = \beta_1(\xi). \tag{4.1.1}$$

En particulier, pour ξ tel que $\beta_0(\xi) < \sqrt{3}$ l'égalité (4.1.1) *est satisfaite.*

La question de savoir si $\beta_0(\xi) = \beta_1(\xi)$ reste ouverte pour les ξ tels que $\beta_0(\xi) \geq \sqrt{3}$ et tels qu'aucune fonction ψ associée ne soit pas sturmienne. Notons que la seconde partie du Théorème 4.1.1 est énoncée à la fin du Théorème 2.1 de [21], mais aucune preuve de cette assertion ne figure dans [21] ni dans [23].

L'un des résultats-clefs de l'article de Fischler [23] est le point suivant : pour tout réel ξ vérifiant $\beta_0(\xi) < 2$, il existe une fonction ψ asymptotiquement réduite dépendant de ξ et une sous-suite de points minimaux $(\mathbf{v}_i)_i$ associés à ξ telles que $\mathbf{v}_{i+1}$ soit colinéaire à $\mathbf{v}_i\mathbf{v}_{\psi(i)}^{-1}\mathbf{v}_i$ pour i assez grand (voir le Théorème 1.8.1 du Chapitre 1). Motivé par ce qui précède nous considérons le problème plus général suivant, qui nous permettra de mettre en place les outils pour prouver le Théorème 4.1.1 : peut-on décrire l'ensemble des nombres transcendants ξ pour lesquels il existe une sous-suite de points minimaux $(\mathbf{v}_i)_i$ et une fonction ψ asymptotiquement réduite telles que pour tout i, le point $\mathbf{v}_{i+1}$ soit colinéaire à $\mathbf{v}_i\mathbf{v}_{\psi(i)}^{-1}\mathbf{v}_i$? Nous restreignons notre étude au cas où ψ est une fonction sturmienne (en gardant en tête que c'est automatiquement le cas si $\beta_0(\xi) < \sqrt{3}$). Dans ces conditions, on sait déjà que cet ensemble contient tous les nombres de type sturmien, et on peut espérer que ces deux ensembles soient égaux. Ce chapitre avance en direction de cette conjecture en montrant que de tels nombres partagent beaucoup de propriétés avec les nombres de type sturmien. On montre notamment que le 3-système associé à un tel nombre ξ est du type de celui d'un nombre de type sturmien à $o(q)$ près (voir le Théorème 4.7.1). Le Théorème 4.8.1 – analogue au Théorème 2.7.1 du Chapitre 2 – implique le Théorème 4.1.2 ci-dessous qui correspond au Théorème F de l'introduction de cette thèse, et qui assure que les exposants diophantiens associés à ξ sont exactement de la forme de ceux d'un nombre de type sturmien. Le nouvel exposant $\kappa^*(\xi)$ intervenant dans l'énoncé du théorème est défini après.

Théorème 4.1.2. *Soit ξ un nombre réel tel que $\widehat{\lambda}_2(\xi) > \frac{1}{2}$. On suppose qu'il existe une fonction sturmienne $\psi \in \mathcal{F}_{stur}$ et une suite de points minimaux $(\mathbf{v}_i)_i$ associée à la famille $\mathcal{C}^*_{\mathbf{u}}(e^q)$ (voir Partie 1.6 du Chapitre 1) avec $\mathbf{u} = (1, \xi, \xi^2)$ telle que*

$$\mathbf{v}_{i+1} \propto \mathbf{v}_i\mathbf{v}_{\psi(i)}^{-1}\mathbf{v}_i$$

pour i assez grand. Notons

$$\sigma = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty}[s_{k+1}; s_k, \ldots, s_1]} \tag{4.1.2}$$

avec $(s_i)_i$ la suite associée à ψ, voir notamment la Définition 2.2.3 et l'énoncé du Théorème 2.7.1 du Chapitre 2 où intervient cette quantité.
Alors il existe $\delta < \frac{\sigma}{1+\sigma}$ tel que $|\det(\mathbf{v}_i)| = \|\mathbf{v}_i\|^{\delta+o(1)}$. On a alors

$$\begin{aligned}
\omega_2(\xi) &= \frac{2-\delta}{\sigma} + 1 - \delta,\\
\widehat{\omega}_2(\xi) &= 1 + (1-\delta)(1+\sigma),\\
\widehat{\lambda}_2(\xi) &= \frac{(1-\delta)(1+\sigma)}{1+(1-\delta)(1+\sigma)},\\
1-\delta \leq \lambda_2(\xi) &\leq \max\left(1-\delta, \frac{1}{1-\delta+\sigma}\right).
\end{aligned}$$

Si δ vérifie la condition plus forte $\delta < h(\sigma)$ avec $h(\sigma) = \frac{\sigma}{2} + 1 - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + 1}$, alors

$$\lambda_2(\xi) = 1 - \delta \quad et \quad \kappa^*(\xi) = -\frac{(1-\delta)(1+\sigma)}{1 + (2-\delta)(1+\sigma)},$$

l'égalité de gauche étant encore vérifiée si $\delta = h(\sigma)$.

Remarque 4.1.1. Tout nombre ξ de type sturmien vérifie les hypothèses du Théorème 4.1.2, y compris $\delta < \frac{\sigma}{1+\sigma}$, et les valeurs des exposants sont les mêmes que celles données par le Théorème 2.1.1 du Chapitre 2. Le Théorème 4.1.2 donne la valeur de $\kappa^*(\xi)$ pour les nombres de type sturmien qui vérifient la condition $\delta < h(\sigma)$.

Si $\beta_0(\xi) < 2$, alors la suite de points minimaux $(\mathbf{v}_i)_i$ fournie par le Théorème 1.8.1 vérifie $\|\mathbf{v}_i \wedge \mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}_i\|^{-1+o(1)}$. Combinée avec l'inégalité classique $|\det(\mathbf{v}_i)| \ll \|\mathbf{v}_i \wedge \mathbf{u}\| \|\mathbf{v}_i\|$ (voir (2.6.6)), cela donne $1 \ll |\det(\mathbf{v}_i)| \ll \|\mathbf{v}_i\|^{o(1)}$. Si la fonction ψ associée à ξ par le Théorème 1.8.1 est sturmienne, alors le Théorème 4.1.2 s'applique – en particulier on a $|\det(\mathbf{v}_i)| = \|\mathbf{v}_i\|^{\delta+o(1)}$ – et les estimations précédentes assurent que $\delta = 0$: les valeurs des quatre exposants classiques et de κ^* s'expriment immédiatement en fonction de σ. Puisque $\beta_1(\xi) = \frac{1}{\widetilde{\lambda}_2(\xi)}$ et que dans le cas particulier où $\delta = 0$ on a $\lambda_2(\xi) = 1$, et donc $\beta_0(\xi) = -(1 + \frac{1}{\kappa^*(\xi)})$ (voir ci-dessous), on en déduit que

$$\beta_1(\xi) = \frac{2+\sigma}{1+\sigma} = \beta_0(\xi).$$

Donc le Théorème 4.1.2 implique le Théorème 4.1.1.

Dans ce chapitre nous utilisons systématiquement la géométrie paramétrique des nombres (voir Parties 1.6 et 1.8 du Chapitre 1). Afin de montrer le Théorème 4.1.1 nous définissons l'exposant paramétrique κ^* (voir Définition 4.3.1) qui est le pendant paramétrique de l'exposant β_0 de Fischler. Plus précisément, κ^* est la version paramétrique de la limite quand ε tend vers ε_0^+ des exposants $\beta_\varepsilon(\xi)$, où $\varepsilon_0 = \widetilde{\varepsilon}(\underline{\psi}_1^*) = \frac{1+2\underline{\psi}_1^*}{1+\underline{\psi}_1^*} = 1 - \lambda_2(\xi)$; rappelons que la fonction $\widetilde{\varepsilon}$ est définie par (4.2.2). Précisément, on pose :

$$\kappa^*(\xi) = \lim_{\varepsilon \to \varepsilon_0^+} -\frac{1}{\beta_\varepsilon(\xi) + 1}.$$

Notons que si $\varepsilon_0 > 0$ on n'a pas forcément l'égalité $\kappa^*(\xi) = -1/(\beta_{\varepsilon_0}(\xi) + 1)$ car la fonction $\varepsilon \mapsto \beta_\varepsilon(\xi)$ n'est pas forcément continue. La condition $\beta_0(\xi) < 2$ – tous les nombres considérés par Fischler vérifient cette hypothèse – implique $\lambda_2(\xi) = 1$ (qui équivaut à $\underline{\psi}_1^* = -\frac{1}{2}$). L'intérêt de considérer κ^* plutôt que $\beta_0(\xi)$ est de pouvoir traiter le cas général en ignorant la contrainte $\lambda_2(\xi) = 1$. Le réel ε_0 peut être défini comme la limite inférieure des $\varepsilon > 0$ tels que l'ensemble $\mathcal{A}_\varepsilon$ de Fischler défini par (1.5.4) est infini. Notons que si $\lambda_2(\xi) = 1$ alors $\varepsilon_0 = 0$ et $\beta_{\varepsilon_0}(\xi) = \beta_0(\xi)$.

L'exposant κ^* peut être défini pour n'importe quel 3-système dual $\mathbf{P}$ (bien que nous restreignions ici sa définition aux 3-systèmes représentant un réel ξ). Il peut être calculé explicitement pour certains nombres de type sturmien : c'est une conséquence du Théorème 4.1.2. En calculant κ^* pour les nombres de type Fibonacci de Roy, on obtient le

résultat suivant sur le spectre de κ^*, *i.e.* l'ensemble des valeurs que peut prendre $\kappa^*(\xi)$ lorsque ξ est un nombre réel qui n'est pas algébrique de degré ≤ 2. Il correspond au Théorème E de l'introduction de cette thèse.

Théorème 4.1.3. *Le spectre de κ^* est dense dans l'intervalle $[-\frac{1}{\gamma+1}, \kappa_\gamma]$, avec*

$$\kappa_\gamma = -\frac{(1-h(\frac{1}{\gamma}))\gamma}{1+(2-h(\frac{1}{\gamma}))\gamma} = -0.3131334\cdots > -\frac{1}{3}.$$

Le spectre de κ^* est probablement dense dans un intervalle strictement plus grand que $[-\frac{1}{\gamma+1}, \kappa_\gamma]$.

Question : Le spectre de κ^* est-il dense dans l'intervalle $[-\frac{1}{\gamma+1}, -\frac{1}{\gamma+2}]$?

Si les zones d'incertitude du 3-système associé un nombre de type Fibonacci pouvaient toujours être négligées (voir la Partie 2.7.2 du Chapitre 2 à ce propos), le calcul de $\kappa^*(\xi)$ serait valable dès que $\delta < \frac{\sigma}{1+\sigma}$ (sans avoir besoin de l'hypothèse $\delta < h(\sigma)$), et cela fournirait une réponse positive à cette question.

Reformulée avec l'exposant κ^*, la question de Fischler énoncée au début de ce chapitre devient : a-t-on toujours $\overline{\psi}_1^*(\xi) = \kappa^*(\xi)$ pour les ξ tels que $\underline{\psi}_1^*(\xi) = -\frac{1}{2}$? Notons qu'ici la condition $\underline{\psi}_1^*(\xi) = -\frac{1}{2}$ est nécessaire. En effet d'après le Théorème 4.8.1, pour tout nombre ψ-sturmien propre ξ tel que $\underline{\psi}_1^*(\xi) > -\frac{1}{2}$ (voir Définition 2.6.3 du Chapitre 2 ; cette condition équivaut à ce que le δ associé à ξ soit > 0) on a $\overline{\psi}_1^*(\xi) < \kappa^*(\xi)$.

Ce chapitre est organisé comme suit. Les Parties 4.2 et 4.3 sont consacrées aux définitions des exposants β_ε de Fischler – quelques rappels des notations du Chapitre 1 sont aussi effectuées – et de l'exposant κ^*. On établit les liens entre κ^* et les exposants β_ε. Dans les Parties 4.4 et 4.5 nous montrons qu'à partir de la suite des $(\mathbf{v}_i)_i$ nous pouvons construire une ψ-sturmienne $\underline{\mathbf{w}}$ admissible à croissance multiplicative dont la suite des $(\mathbf{y}_i)_i$ vérifie $\mathbf{y}_i \propto \mathbf{v}_i$ pour tout i assez grand. Grâce à cette suite et en utilisant le Théorème 3.1.2 du Chapitre 3, on peut supposer qu'à un facteur multiplicatif $\|\mathbf{v}_i\|^{o(1)}$ près, $\mathbf{v}_i$ est égal à $\mathbf{y}_i$. Dans la Partie 4.6 on associe alors à $\underline{\mathbf{w}}$ un 3-système $\mathbf{P}$ et on montre dans la Partie 4.7 qu'il approche $\mathbf{L_u}$ à $o(q)$ près (en-dehors de certaines zones d'incertitude). Cela permet de montrer que ξ possède les mêmes exposants qu'un nombre ψ-sturmien propre (ce qui est l'énoncé du Théorème 4.1.2) : cela fait l'objet de la Partie 4.8. Les Théorèmes 4.1.1 et 4.1.3 sont prouvés à la fin de la Partie 4.8. Dans la dernière Partie 4.9 nous montrons de manière indépendante des propriétés plus fines de maximalité des déterminants, qui ne sont pas utilisés dans cette thèse mais ont leur intérêt propre. A ce propos, d'autres résultats de ce chapitre sont susceptibles d'avoir d'autres applications, notamment la Proposition 4.5.9 de la Partie 4.5.3 qui donne une condition suffisante très générale pour qu'une suite ψ-sturmienne admissible soit à croissance multiplicative.

4.2 Rappels sur les exposants β_ε

Rappelons quelques résultats des Parties 1.5 et 1.8 du Chapitre 1 où les exposants β_ε et β_0 sont définis. On fixe ξ un réel qui n'est pas algébrique de degré ≤ 2. Pour tout

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ on note $\|\mathbf{x}\|_\infty$ sa norme définie comme le maximum des valeurs absolues de ses coefficients. On pose

$$M(\mathbf{x}) = \max\Big(|x_0\xi - x_1|, |x_0\xi^2 - x_2|\Big)$$

(notons que cette quantité est notée $L(\mathbf{x})$ dans [23]).

Définition 4.2.1. Soit $\varepsilon \in]0,1]$. On note $\beta_\varepsilon(\xi)$ la borne inférieure de l'ensemble des β tels que, pour tout B suffisamment grand, il existe $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^3$ tel que

$$1 \leq |x_0| \leq B \quad \text{et} \quad M(\mathbf{x}) \leq \min\Big(B^{-1/\beta}, |x_0|^{\varepsilon-1}\Big).$$

Si l'ensemble des β est vide, on pose $\beta_\varepsilon(\xi) = +\infty$. Clairement, la fonction $\varepsilon \mapsto \beta_\varepsilon(\xi)$ est décroissante. On pose

$$\beta_0(\xi) = \sup_{0<\varepsilon<1} \beta_\varepsilon(\xi) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \beta_\varepsilon(\xi).$$

Remarque 4.2.2. En particulier, pour $\varepsilon = 1$, on a $\beta_1(\xi) = 1/\widehat{\lambda}_2(\xi)$.

Fischler considère aussi l'ensemble $\mathcal{A}_\varepsilon$ (lié à la définition de β_ε) défini par

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \{\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\} \mid M(\mathbf{x}) \leq \|\mathbf{x}\|_\infty^{-(1-\varepsilon)}\}. \tag{4.2.1}$$

Les notations suivantes sont celles de la Partie 1.8 du Chapitre 1. Pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^3$ non nuls tels que $\|\mathbf{x}\| < \|\mathbf{y}\|$ et $\|\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}\| > \|\mathbf{y} \wedge \mathbf{u}\|$ on pose

$$\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\log(\|\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}\|)}{\log(\|\mathbf{y}\|) - \log(\|\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}\|)} \quad \text{et} \quad \alpha(\mathbf{x}) = \frac{\log(||\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}||)}{\log(||\mathbf{x}||) - \log(||\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}||)}.$$

La situation est illustrée à la Figure 1.5 du Chapitre 1. Géométriquement $\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est le coefficient directeur de la droite passant par l'origine et par le point d'intersection des trajectoires de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$, et $\alpha(\mathbf{x})$ est le coefficient directeur de la droite passant par l'origine et par le point de changement de pente de la trajectoire de $\mathbf{x}$.
On définit les fonctions $\widetilde{\varepsilon}$ et $\widetilde{\alpha}$ (réciproques l'une de l'autre) par

$$\widetilde{\varepsilon}(\alpha) = \frac{1+2\alpha}{1+\alpha} \quad \text{et} \quad \widetilde{\alpha}(\varepsilon) = -\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}, \tag{4.2.2}$$

et pour tout $\alpha > \underline{\psi}_1^*$ on définit :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_\alpha^* &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\} \mid \alpha(\mathbf{x}) \leq \alpha\} \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\} \mid \|\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}\| \leq \|\mathbf{x}\|^{-(1-\widetilde{\varepsilon}(\alpha))}\},\end{aligned}$$

la deuxième égalité étant donnée par (1.8.4). Essentiellement, en posant $\varepsilon = \widetilde{\varepsilon}(\alpha)$, l'ensemble $\mathcal{A}_\alpha^*$ est égal à l'ensemble $\mathcal{A}_\varepsilon$ de Fischler (voir Remarque 1.8.10 pour plus de détails).

4.3 Exposants κ^*_α et κ^*

Soit $\xi \in \mathbb{R}$, $\deg_{\mathbb{Q}}(\xi) \geq 3$, et $\mathbf{u} = (1, \xi, \xi^2)$. Rappelons que dans cette thèse $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. Dans son article, Fischler considère essentiellement les réels ξ vérifiant $\lambda_2(\xi) = 1$ (pour un réel ξ tel que $\lambda_2(\xi) < 1$ on a par définition $\beta_0(\xi) = +\infty$). Pour englober aussi les réels ξ tels que $\lambda_2(\xi) < 1$, il est pertinent de considérer l'exposant $\beta_{\varepsilon_0}(\xi)$, où ε_0 est la borne inférieure des $\varepsilon > 0$ tels que l'ensemble $\mathcal{A}_\varepsilon$ défini par (1.5.4) est infini. On a $\varepsilon_0 = \widetilde{\varepsilon}(\underline{\psi}^*_1) = \frac{1+2\underline{\psi}^*_1}{1+\underline{\psi}^*_1} = 1 - \lambda_2(\xi)$ (rappelons que la fonction $\widetilde{\varepsilon}$ est définie par (4.2.2) ci-dessus). L'exposant $\kappa^*(\xi)$ défini ci-dessous est la version paramétrique de l'exposant $\lim_{\varepsilon \to \varepsilon_0^+} \beta_\varepsilon(\xi)$.

Par définition de $\underline{\psi}^*_1$, pour tout $\alpha > \underline{\psi}^*_1$ l'ensemble $\mathcal{A}^*_\alpha$ (dont la définition est rappelée dans la Partie 4.2) est infini. Géométriquement, $\mathcal{A}^*_\alpha$ est l'ensemble des points $\mathbf{x}$ dont la trajectoire passe en-dessous de la droite passant par l'origine et de pente α. On définit alors la fonction $\mathrm{L}^*_{1,\alpha}$ par

$$\mathrm{L}^*_{1,\alpha}(q) = \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{A}^*_\alpha} \mathrm{L}_{\mathbf{x}}(q).$$

Définition 4.3.1. Pour tout $\alpha > \underline{\psi}^*_1$ on pose

$$\kappa^*_\alpha(\xi) = \kappa^*_\alpha = \limsup_{q \to +\infty} \frac{\mathrm{L}^*_{1,\alpha}(q)}{q},$$

et on définit

$$\kappa^*(\xi) = \sup_{\alpha > \underline{\psi}^*_1} \kappa^*_\alpha = \lim_{\alpha \to \underline{\psi}^{*+}_1} \kappa^*_\alpha.$$

Remarque. Rappelons que pour tout $q \geq 0$, on a $\mathrm{L}^*_1(q) = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\}} \mathrm{L}_{\mathbf{x}}(q)$, de sorte que pour tout $\alpha > \underline{\psi}^*_1$,

$$\kappa^*_\alpha \geq \overline{\psi}^*_1,$$

avec égalité pour tout α tel que $\alpha > \overline{\psi}^*_1$ (puisqu'on a alors $\mathrm{L}^*_1(q) = \mathrm{L}^*_{1,\alpha}(q)$ pour q assez grand). De manière informelle, κ^* correspond à $\overline{\psi}^*_1$ lorsqu'on ignore toutes les "mauvaises" approximations de $\mathbf{u} = (1, \xi, \xi^2)$ (c'est-à-dire les $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3$ tels que $\alpha(\mathbf{x})$ n'est pas "proche" de $\underline{\psi}^*_1$).

Si on note $(\mathbf{u}_i)_i$ la suite des points minimaux (ordonnés par norme croissante) associés à la famille $\mathcal{C}^*_{\mathbf{u}}(e^q)$ qui sont dans $\mathcal{A}^*_\alpha$, alors

$$\kappa^*_\alpha = \limsup_{i \to +\infty} \alpha(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{i+1}). \tag{4.3.1}$$

Remarque 4.3.2. Comme $\|\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}\| \asymp M(\mathbf{x})$ (la quantité $M(\mathbf{x})$ est définie au début de la Partie 4.2) et que les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes, pour tous $\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_2$ on a (à un nombre fini de termes près)

$$\mathcal{A}^*_{\widetilde{\alpha}(\varepsilon_1)} \subset \mathcal{A}_\varepsilon \subset \mathcal{A}^*_{\widetilde{\alpha}(\varepsilon_2)}.$$

Cela implique par (4.3.1) et (1.5.5)

$$-\frac{1}{1+\beta_{\varepsilon_2}(\xi)} \leq \kappa^*_{\widetilde{\alpha}(\varepsilon)} \leq -\frac{1}{1+\beta_{\varepsilon_1}(\xi)}. \tag{4.3.2}$$

Proposition 4.3.3. *On pose $\varepsilon_0 = \widetilde{\varepsilon}(\underline{\psi}_1^*)$, on a alors*

$$\kappa^*(\xi) = \lim_{\varepsilon \to \varepsilon_0^+} -\frac{1}{\beta_\varepsilon(\xi)+1}. \tag{4.3.3}$$

En particulier, si $\underline{\psi}_1^* = -\frac{1}{2}$, alors

$$\kappa^*(\xi) = -\frac{1}{\beta_0(\xi)+1}. \tag{4.3.4}$$

Preuve Soit $\alpha > \underline{\psi}_1^*$. On pose $\varepsilon = \widetilde{\varepsilon}(\alpha) = \frac{1+2\alpha}{1+\alpha} > 0$. Si on avait l'égalité $\mathcal{A}_\alpha^* = \mathcal{A}_\varepsilon$, alors on aurait directement l'égalité

$$\kappa_\alpha^*(\xi) = -\frac{1}{\beta_\varepsilon(\xi)+1}.$$

D'après (4.3.2), on peut toutefois conclure que pour tous $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ tels que $\widetilde{\varepsilon}(\underline{\psi}_1^*) = \varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_2 < 1$, on a

$$-\frac{1}{\beta_{\varepsilon_2}(\xi)+1} \leq \kappa_\alpha^*(\xi) \leq -\frac{1}{\beta_{\varepsilon_1}(\xi)+1},$$

et en faisant tendre $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ vers ε_0 on trouve (4.3.3).
Si $\underline{\psi}_1^* = -\frac{1}{2}$, alors $\varepsilon_0 = 0$. Comme par définition on a $\lim_{\varepsilon \to 0^+} = \beta_0(\xi)$ on obtient (4.3.4). □

Remarque. Comme nous l'avons déjà mentionné, on a $\beta_0(\xi) = +\infty$ (ou de manière équivalente $-1/(\beta_0(\xi)+1) = 0$) dès que $\underline{\psi}_1^* > -1/2$. Toutefois, il existe des réels ξ tels que $\underline{\psi}_1^* > -1/2$ et $\kappa^*(\xi) < 0$. C'est le cas des nombres *de type sturmien* ξ tels que les quantités δ et σ associées vérifient $0 < \delta < h(\sigma)$, avec $h(\sigma)$ défini comme dans le Théorème 2.1.1.

4.4 Rappels sur la construction des nombres de type sturmien

Dans cette partie nous rappelons succinctement la construction des nombres ψ-sturmiens du Chapitre 2 afin de pouvoir établir plus facilement dans la suite les propriétés partagées par les nombres ψ-sturmiens et les nombres ξ pour lesquels il existe $(\mathbf{v}_i)_i$ – une sous-suite de la suite des points minimaux associés à la famille $\mathcal{C}_{\mathbf{u}}^*(e^q)$ – telle que $\mathbf{v}_{i+1}$ soit colinéaire à $\mathbf{v}_i \mathbf{v}_{\psi(i)}^{-1} \mathbf{v}_i$ pour tout i assez grand (voir Proposition 4.5.1).
Soit $(s_k)_{k\geq 0}$ une suite d'entiers strictement positifs (excepté pour s_0) avec $s_0 = -1, s_1 = 1$. Pour $k \geq 0$, on pose $t_k = s_0 + s_1 + \cdots + s_k$, et on associe à $(s_k)_k$ une fonction ψ (appelée fonction *sturmienne*, voir Définition 2.2.3) définie sur $[\![0\,;+\infty[\![$ par $\psi(t_k) = t_{k-1} - 1$ pour $k \geq 1$, et $\psi(i) = i - 1$ si i n'est pas parmi les t_k. On note $\mathcal{F}_{stur}$ l'ensemble des fonctions sturmiennes pour lesquelles la suite d'entiers $(s_k)_k$ correspondante est bornée. Pour la suite on fixe $\psi \in \mathcal{F}_{stur}$.
Pour définir un nombre ψ-sturmien propre on a besoin des deux définitions suivantes. Une suite *ψ-sturmienne* de $\mathcal{M} = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z})$ est une suite de matrices $(\mathbf{w}_i)_{i\geq 0}$ telle que

$$\mathbf{w}_{i+1} = \mathbf{w}_i^{s_{i+1}} \mathbf{w}_{i-1} \quad (i \geq 1).$$

Pour construire des nombres de type sturmien on suppose toujours que $\mathbf{w}_i \in \mathcal{M}$ pour tout i. En revanche, dans ce chapitre on aura besoin de façon cruciale (comme au Chapitre 3) de considérer des suites ψ-sturmiennes formées de matrices $\mathbf{w}_i \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ dont les coefficients ne seront pas entiers (ni même rationnels) ; elles seront toutefois proportionnelles à des éléments de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ de sorte qu'on puisse considérer leur *contenu*. Les définitions et notations qui suivent sont valables dans ce cadre plus général.

Une suite ψ-sturmienne est *admissible* s'il existe une matrice $N \in \mathcal{M}$ telle que $\mathbf{w}_1 N, \mathbf{w}_0 {}^t\!N$ et $\mathbf{w}_1\mathbf{w}_0 {}^t\!N$ soient symétriques (voir Définition 2.4.1). On pose alors $N_k = N$ si k est pair, $N_k = {}^t\!N$ si k est impair.
Rappelons qu'on a défini la norme $\|\mathbf{w}\|$ d'une matrice $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ par la formule $\|\mathbf{w}\| = \sqrt{a^2 + (b^2+c^2)/2 + d^2}$ (avec cette définition, il n'y a pas d'ambiguïté quand on note $\|\mathbf{y}\|$, avec $\mathbf{y}$ vu comme un vecteur de $\mathbb{R}^3$ ou comme la matrice symétrique de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ associée). On dit qu'une suite ψ-sturmienne $(\mathbf{w}_i)_{i\geq 0}$ est à *croissance multiplicative* si

$$\|\mathbf{w}_k^l \mathbf{w}_{k-1}\| \asymp \|\mathbf{w}_k\| \times \|\mathbf{w}_k^{l-1}\mathbf{w}_{k-1}\|$$

pour $k \geq 1$, $1 \leq l \leq s_{k+1}+1$ (voir Définition 2.5.1). Les suites à croissance multiplicative sont étudiées dans la Partie 2.5 du Chapitre 2. Comme toujours on identifie $\mathbb{R}^3$ (resp. $\mathbb{Z}^3$) à l'espace vectoriel des matrices symétriques 2×2 à coefficients réels (resp. entiers) via l'isomorphisme $(x_0,x_1,x_2) \longrightarrow \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}$. Ainsi, on peut définir le déterminant $\det(\mathbf{x})$ d'un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. De manière similaire étant données $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, deux matrices symétriques, $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$ désigne le produit vectoriel des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ correspondants.
A toute suite ψ-sturmienne admissible $(\mathbf{w}_i)_{i\geq 0}$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ on associe une suite de matrices symétriques $(\mathbf{y}_i)_i$ définie par la formule

$$\mathbf{y}_{t_k+l} = \mathbf{w}_k^{l+1}\mathbf{w}_{k-1}N_k \quad (0 \leq k, 0 \leq l < s_{k+1}) \tag{4.4.1}$$

(voir Définition 2.3.6). Notons qu'alors on a pour tout $k \geq 2$ l'identité

$$\mathbf{w}_k = \mathbf{y}_{\psi(t_{k+1})} N_{k+1}^{-1} \tag{4.4.2}$$

(voir (2.3.4)). Les propriétés combinatoires de la suite $(\mathbf{y}_i)_i$ sont étudiées dans les Parties 2.3 et 2.4 du Chapitre 2. En particulier, elle suit la récurrence suivante :

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i \mathbf{y}_{\psi(i)}^{-1} \mathbf{y}_i. \tag{4.4.3}$$

Si $(\mathbf{w}_i)_i$ est une suite de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z})$ à croissance multiplicative, que le contenu des $\mathbf{w}_i$ est borné, et que la suite $(\|\mathbf{w}_i\|)_i$ diverge vers l'infini, alors nous avons montré dans la Proposition 2.5.9 qu'il existe $\delta \geq 0$ tel que $|\det(\mathbf{w}_i)| \asymp \|\mathbf{w}_i\|^\delta$. Si $\delta < \frac{\sigma}{1+\sigma}$, avec

$$\sigma = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty}[s_{k+1}; s_k, \ldots, s_1]}, \tag{4.4.4}$$

alors la Proposition 2.6.1 assure que la suite $(\mathbf{y}_i)_i$ associée converge dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ vers un vecteur $\mathbf{y} = (1, \xi, \xi^2)$. Le nombre ξ ainsi produit est appelé un nombre ψ-sturmien propre

(et les nombres de type sturmien sont exactement les nombres ψ-sturmiens propres pour ψ décrivant $\mathcal{F}_{stur}$; voir Définition 2.6.3). La suite $(\mathbf{y}_i)_i$ est une sous-suite de la suite des points minimaux associés à la famille $\mathcal{C}^*_{\mathbf{y}}(e^q)$. Rappelons qu'on note J la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Remarque 4.4.1. Dans la suite on considérera des suites ψ-sturmiennes $(\mathbf{w}_k)_k$ tels que $\mathbf{w}_k \in \mathcal{M}$ pour k assez grand. Toutes les propositions asymptotiques sur les suites ψ-sturmiennes à valeurs dans $\mathcal{M}$ restent vraies pour ces suites.

4.5 Suite ψ-sturmienne associée à ξ

4.5.1 Énoncé du résultat principal

Soit ξ un nombre réel tel que $\widehat{\lambda}_2(\xi) > \frac{1}{2}$. On suppose qu'il existe une fonction sturmienne $\psi \in \mathcal{F}_{stur}$ (en particulier la suite $(s_i)_i$ associée à ψ est bornée) et une suite de points minimaux $(\mathbf{v}_i)_i$ associée à la famille $\mathcal{C}^*_{\mathbf{u}}(e^q)$ avec $\mathbf{u} = (1, \xi, \xi^2)$ telle que

$$\mathbf{v}_{i+1} \propto \mathbf{v}_i \mathbf{v}_{\psi(i)}^{-1} \mathbf{v}_i$$

pour i assez grand.
Le résultat principal de cette partie est la Proposition 4.5.1 qui montre que ξ provient essentiellement de la même construction que celle donnant un nombre ψ-sturmien, *i.e.* peut être obtenu à partir d'une suite ψ-sturmienne $\underline{\mathbf{w}}$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ vérifiant certaines conditions particulières. De ce fait, ξ partage certaines propriétés fortes avec les nombres de type sturmien. Dans la Partie 4.5.2 nous présentons la construction de la suite $\underline{\mathbf{w}}$, et dans la Partie 4.5.3 nous montrons qu'elle est à croissance multiplicative. Enfin, en combinant les propriétés dégagées dans les deux parties susmentionnées, nous prouvons la Proposition 4.5.1 dans la Partie 4.5.4.

Proposition 4.5.1. *Il existe $(\mathbf{w}_k)_k$ une suite ψ-sturmienne de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ admissible avec une matrice N qui n'est pas proportionnelle à J, à croissance multiplicative, telle que $(\|\mathbf{w}_k\|)$ diverge vers l'infini, et telle que la suite $(\mathbf{y}_i)_i$ associée par (4.4.3) vérifie*

$$\mathbf{y}_i \propto \mathbf{v}_i$$

pour tout i assez grand. De plus le réel δ vérifiant $|\det(\mathbf{w}_k)| \asymp \|\mathbf{w}_k\|^\delta$ est strictement inférieur à 2.

Remarque 4.5.2. Pour que ξ soit de type sturmien il faudrait entre autres que le contenu des $\mathbf{w}_k$ soit borné. La principale obstruction à cette propriété est la difficulté à contrôler $\mathrm{cont}(\mathbf{y}_i)$. L'étude des contenus fait l'objet du Chapitre 3.

Afin de prouver la Proposition 4.5.1, nous construisons une suite de matrices symétriques $\underline{\mathbf{y}} = (\mathbf{y}_i)_i$ à coefficients réels, données par $\mathbf{y}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$ avec $\lambda_i > 0$, vérifiant la relation de récurrence (4.4.3) ; dès cette étape il est utile de passer dans $\mathbb{R}^3$ pour pouvoir prendre des racines carrées. Nous montrons alors qu'elle provient essentiellement d'une suite ψ-sturmienne $\underline{\mathbf{w}}$ (*i.e.* correspond à la suite associée par (4.4.1) à $\underline{\mathbf{w}}$; remarquons

que nos constructions feront intervenir des suites ψ-sturmiennes de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et non de $\mathcal{M}$ ou $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$).

La stratégie est la suivante : si $\underline{\mathbf{w}}$ est une suite ψ-sturmienne de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ admissible avec la matrice N, et si $\underline{\mathbf{y}}$ est la suite des matrices symétriques associée à $\underline{\mathbf{w}}$ par (4.4.1), alors on a d'après la Proposition 2.3.7 du Chapitre 2

$$\mathbf{w}_k = \mathbf{y}_{t_k}\mathbf{y}_{\psi(t_k)}^{-1},$$

et par (4.4.1)

$$N_k = (\mathbf{w}_k\mathbf{w}_{k-1})^{-1}\mathbf{y}_{t_k}.$$

Si $\underline{\mathbf{y}}$ est une suite de matrices symétriques quelconque (ne provenant *a priori* pas d'une suite ψ-sturmienne) qui vérifie la relation de récurrence (4.4.3), l'idée est alors de définir $\underline{\mathbf{w}} = (\mathbf{w}_k)_k$ et N_k par les équations précédentes. On démontre alors dans la Partie 4.5.2 que $\underline{\mathbf{w}}$ est une suite ψ-sturmienne et que les matrices N_k sont de la forme N ou ${}^tN$ suivant la parité de k.

Notation. On fixe $(\mathbf{u}_i)_{i\geq 0}$ une suite de points de $\mathbb{Z}^3$ telle qu'il existe un indice i_0 vérifiant $\det(\mathbf{u}_i) \neq 0$ et

$$\mathbf{u}_{\psi(i)} \propto \mathbf{u}_i\mathbf{u}_{i+1}^{-1}\mathbf{u}_i, \tag{4.5.1}$$

pour tout $i \geq i_0$, où $\mathbf{x} \propto \mathbf{y}$ signifie qu'il existe une constante $\lambda \neq 0$ telle que $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{y}$. Remarquons que (4.5.1) est équivalent à $\mathbf{u}_{i+1} \propto \mathbf{u}_i\mathbf{u}_{\psi(i)}^{-1}\mathbf{u}_i$ puisque toutes les matrices mises en jeu sont inversibles pour i assez grand.

Remarque 4.5.3. Pour prouver la Proposition 4.5.1 on prendra $(\mathbf{u}_i)_i = (\mathbf{v}_i)_i$ mais pour nos constructions de la Partie 4.5.2 nous n'avons besoin que des hypothèses ci-dessus sur $(\mathbf{u}_i)_i$. Pour montrer la croissance multiplicative dans la Partie 4.5.3 nous aurons besoin des hypothèses supplémentaires que $\mathbf{u}_i$ et $\mathbf{u}_j$ sont linéairement indépendants pour tous $i \neq j$, et que la suite $(\mathbf{u}_i)_i$ converge dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ vers $\mathbf{y} = (1, \xi, \xi^2)$ avec ξ transcendant ou algébrique de degré ≥ 3. Cette hypothèse permet de prouver les résultats des Parties 4.5.2 et 4.5.3 dans une plus grande généralité, car ils pourraient avoir d'autres applications.

4.5.2 Suite ψ-sturmienne admissible associée à $(\mathbf{u}_i)$

Définition 4.5.4. On définit

$$\mathbf{y}_i = \frac{1}{|\det(\mathbf{u}_i)|^{\frac{1}{2}}}\mathbf{u}_i \quad (i \geq i_0), \tag{4.5.2}$$

de sorte que $\det(\mathbf{y}_i) = 1$ et $\mathbf{y}_{\psi(i)} = \pm\mathbf{y}_i\mathbf{y}_{i+1}^{-1}\mathbf{y}_i$. Quitte à changer $\mathbf{u}_{i+1}$ en $-\mathbf{u}_{i+1}$ lorsque c'est nécessaire, on peut supposer que $(\mathbf{y}_i)_{i\geq i_0}$ vérifie

$$\mathbf{y}_{\psi(i)} = \mathbf{y}_i\mathbf{y}_{i+1}^{-1}\mathbf{y}_i. \tag{4.5.3}$$

Soit k_0 tel que $\psi(t_{k_0}) \geq i_0$. On pose pour tout entier $k \geq k_0$

$$\mathbf{w}_k \ := \mathbf{y}_{t_k}\mathbf{y}_{\psi(t_k)}^{-1}. \tag{4.5.4}$$

Notons que $|\det(\mathbf{w}_k)| = 1$ pour tout $k \geq k_0$. On définit par récurrence descendante les matrices $\mathbf{w}_{k-1}$ pour $1 \leq k \leq k_0$ en utilisant la formule $\mathbf{w}_{k-1} = \mathbf{w}_k^{-s_{k+1}}\mathbf{w}_{k+1}$.
On pourra comparer la propriété suivante avec la Proposition 2.3.7 du Chapitre 2, qui donne les mêmes formules sous l'hypothèse que la suite $(\mathbf{w}_k)_k$ est ψ-sturmienne.

Proposition 4.5.5. *On a les propriétés suivantes :*

(a) $\mathbf{y}_{t_k+l} = \mathbf{w}_k^{l+1}\mathbf{y}_{\psi(t_k)}$ *pour* $k \geq k_0$ *et* $0 \leq l \leq s_{k+1}$.

(b) $\mathbf{y}_{j+1} = \mathbf{w}_k\mathbf{y}_j$, *pour* $k \geq k_0$ *et* $t_k \leq j < t_{k+1}$.

(c) $\mathbf{y}_j = \mathbf{w}_k\mathbf{y}_{\psi(j)}$, *pour* $k \geq k_0$, $t_k \leq j < t_{k+1}$.

Preuve Soit $k \geq k_0$ et $t_k \leq j < t_{k+1}$. Par (4.5.3) on a

$$\mathbf{y}_{j+1}\mathbf{y}_j^{-1} = \mathbf{y}_j\mathbf{y}_{\psi(j)}^{-1} = \cdots = \mathbf{y}_{t_k}\mathbf{y}_{\psi(t_k)}^{-1} = \mathbf{w}_k,$$

ce qui prouve (b) et (c).
Pour (a), il suffit de constater que

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_{t_k+l}\mathbf{y}_{\psi(t_k)}^{-1} &= \underbrace{\left(\mathbf{y}_{t_k+l}\mathbf{y}_{t_k+l-1}^{-1}\right)\left(\mathbf{y}_{t_k+l-1}\mathbf{y}_{t_k+l-2}^{-1}\right)\cdots\left(\mathbf{y}_{t_k+1}\mathbf{y}_{t_k}^{-1}\right)}_{l \text{ facteurs}}\mathbf{y}_{t_k}\mathbf{y}_{\psi(t_k)}^{-1} \\ &= \mathbf{w}_k^{l+1},\end{aligned}$$

d'après l'assertion (b) et par définition de $\mathbf{w}_k$. □

Corollaire 4.5.6. *Pour tout* $k \geq 1$ *on a*

$$\mathbf{w}_{k+1} = \mathbf{w}_k^{s_{k+1}}\mathbf{w}_{k-1}.$$

En particulier $(\mathbf{w}_k)_{k\geq 0}$ *est une suite* ψ*-sturmienne de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

Preuve Par définition de $\mathbf{w}_0$, $\mathbf{w}_1$,...,$\mathbf{w}_{k_0-1}$, il suffit de vérifier cette relation uniquement pour $k > k_0$. Soit $k \geq k_0 + 1$. On a

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_{k+1} = \mathbf{y}_{t_{k+1}}\mathbf{y}_{t_k-1}^{-1} &= \underbrace{\left(\mathbf{y}_{t_{k+1}}\mathbf{y}_{t_{k+1}-1}^{-1}\right)\cdots\left(\mathbf{y}_{t_k+1}\mathbf{y}_{t_k}^{-1}\right)}_{t_{k+1}-t_k \text{ facteurs}}\mathbf{y}_{t_k}\mathbf{y}_{t_k-1}^{-1} \\ &= \mathbf{w}_k^{s_{k+1}}\mathbf{w}_{k-1},\end{aligned}$$

par l'assertion (b) de la Proposition 4.5.5. □

Définition 4.5.7. Pour $k \geq k_0 + 1$ on pose

$$N_k := (\mathbf{w}_k\mathbf{w}_{k-1})^{-1}\mathbf{y}_{t_k}. \tag{4.5.5}$$

Proposition 4.5.8. *Pour tout* $k \geq k_0 + 1$ *on a*

$$N_{k+1} = {}^tN_k. \tag{4.5.6}$$

En particulier, si on pose $N = N_{2k_0}$ on a $N_k = N$ si k est pair, $N_k = {}^tN$ si k est impair. De plus N est proportionnelle à un élément de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$. La suite $(\mathbf{w}_k)_{k\geq 0}$ est admissible avec la matrice N et on a pour tous k et l tels que $k \geq k_0 + 1$, $0 \leq k < s_{k+1}$

$$\mathbf{y}_{t_k+l} = \mathbf{w}_k^{l+1}\mathbf{w}_{k-1}N_k. \tag{4.5.7}$$

En particulier, pour tout k assez grand on a la formule

$$\mathbf{w}_k = \mathbf{y}_{\psi(t_{k+1})}N_{k+1}^{-1}. \tag{4.5.8}$$

Enfin si on suppose que pour tous $i \neq j$, $\mathbf{y}_i$ et $\mathbf{y}_j$ sont linéairement indépendants, alors la matrice N n'est pas proportionnelle à la matrice J.

Preuve Commençons par montrer (4.5.6). Soit $k \geq k_0 + 1$. On a par définition des $\mathbf{w}_k$

$$\begin{aligned} N_{k+1}^{-1}\,{}^tN_k &= \mathbf{y}_{t_{k+1}}^{-1}\left(\mathbf{y}_{t_{k+1}}\mathbf{y}_{t_k-1}^{-1}\right)\left(\mathbf{y}_{t_k}\mathbf{y}_{\psi(t_k)}^{-1}\right) \times \mathbf{y}_{t_k}\left(\mathbf{y}_{t_k}^{-1}\mathbf{y}_{\psi(t_k)}\right)\left(\mathbf{y}_{t_{k-1}}^{-1}\mathbf{y}_{\psi(t_{k-1})}\right) \\ &= \left(\mathbf{y}_{t_k-1}^{-1}\mathbf{y}_{t_k}\right)\left(\mathbf{y}_{t_{k-1}}^{-1}\mathbf{y}_{\psi(t_{k-1})}\right). \end{aligned}$$

Or (4.5.3) implique que pour tout j on a $\mathbf{y}_j^{-1}\mathbf{y}_{j+1} = \mathbf{y}_{\psi(j)}^{-1}\mathbf{y}_j$, donc

$$\mathbf{y}_{t_k-1}^{-1}\mathbf{y}_{t_k} = \cdots = \mathbf{y}_{\psi(t_{k-1})}^{-1}\mathbf{y}_{t_{k-1}},$$

et on en déduit que $N_{k+1}^{-1}\,{}^tN_k = \mathrm{I}_2$. Comme par définition les matrices $\mathbf{y}_i$ sont proportionnelles à des matrices de $\mathcal{M}$ il en va de même des matrices $\mathbf{w}_k$ et de N.

Montrons que la suite $(\mathbf{w}_k)_{k\geq 0}$ est admissible avec la matrice N. Par définition de N_k on a $\mathbf{y}_{t_k} = \mathbf{w}_k\mathbf{w}_{k-1}N_k$ pour tout $k \geq k_0$. L'assertion (b) de la Proposition 4.5.5 montre alors immédiatement (4.5.7). Comme pour tout i assez grand la matrice $\mathbf{y}_i$ est symétrique, cela implique que pour tout k assez grand les matrices $\mathbf{y}_{\psi(t_k)} = \mathbf{w}_{k-1}N_k$, $\mathbf{y}_{t_k} = \mathbf{w}_k\mathbf{w}_{k-1}N_k$ et $\mathbf{y}_{\psi(t_{k+1})} = \mathbf{w}_kN_{k+1}$ sont symétriques, et par la Proposition 2.4.2 du Chapitre 2 cela implique que $(\mathbf{w}_k)_k$ est admissible.

Supposons enfin que pour tous $i \neq j$, $\mathbf{y}_i$ et $\mathbf{y}_j$ sont linéairement indépendants et montrons que N n'est pas proportionnelle à J. Par l'absurde, supposons $N \propto J$. Alors comme $J^{-1} = -J$ l'équation (4.5.7) montre que pour tout $k \geq k_0 + 1$ et pour tout $0 \leq l < s_{k+1}$

$$\mathbf{y}_{t_k+l}J \propto \mathbf{w}_k^{l+1}\mathbf{w}_{k-1}.$$

En utilisant de nouveau (4.5.7) et comme $\mathbf{x}J\mathbf{x}J \propto \mathrm{I}_2$ pour toute matrice $\mathbf{x}$ symétrique, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{t_{k+1}-1}J \propto \mathbf{w}_k^{s_{k+1}}\mathbf{w}_{k-1} &\propto \left(\mathbf{y}_{t_k-1}J\right)^{s_{k+1}}\mathbf{y}_{t_{k-1}-1}J \\ &\propto \left(\mathbf{y}_{t_k-1}J\right)^{s_{k+1} \bmod 2}\mathbf{y}_{t_{k-1}-1}J. \end{aligned}$$

S'il existe des k arbitrairement grands tels que s_{k+1} soit pair, alors on trouve des k arbitrairement grands tels que

$$\mathbf{y}_{t_{k+1}-1} \propto \mathbf{y}_{t_{k-1}-1},$$

ce qui est exclu par hypothèse d'indépendance linéaire entre $\mathbf{y}_{t_{k+1}-1}$ et $\mathbf{y}_{t_{k-1}-1}$. Donc pour tout k assez grand s_{k+1} est impair et on a (en remarquant que $\mathbf{y}_{t_{k+1}-1}$ est symétrique et en prenant la transposée des expressions obtenues)

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_{t_{k+1}-1} \propto \mathbf{y}_{t_k-1} J \mathbf{y}_{t_{k-1}-1} &= -\mathbf{y}_{t_{k-1}-1} J \mathbf{y}_{t_k-1} \\ &\propto \mathbf{y}_{t_{k-1}-1} J (\mathbf{y}_{t_{k-1}-1} J \mathbf{y}_{t_{k-2}-1}) \\ &\propto \mathbf{y}_{t_{k-2}-1},\end{aligned}$$

ce qui contredit une nouvelle fois l'indépendance linéaire entre $\mathbf{y}_{t_{k+1}-1}$ et $\mathbf{y}_{t_{k-2}-1}$. Donc N n'est pas proportionnelle à J. □

4.5.3 Propriété de croissance multiplicative

Une difficulté pour montrer la croissance multiplicative d'une suite ψ-sturmienne admissible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ est l'absence de contrôle des signes des coefficients, car des signes opposés pourraient donner lieu à des simplifications. Un critère pratique et souvent utilisé pour montrer la croissance multiplicative est celui du Lemme 2.5.3 du Chapitre 2. Les exemples donnés par Roy dans [51] (voir Partie 2.8.1) vérifient ce critère et permettent donc d'éviter cette difficulté (voir aussi l'Exemple 2 de [50] pour un exemple de construction de nombres extrémaux qui n'utilise pas le critère du Lemme 2.5.3 pour montrer la croissance multiplicative). Cependant, dans le contexte de ce chapitre où l'on se donne un réel ξ à partir duquel on construit une suite ψ-sturmienne $(\mathbf{w}_k)_k$, on ne peut plus choisir $\mathbf{w}_0$ et $\mathbf{w}_1$ et il faut procéder autrement pour montrer la croissance multiplicative. La Proposition suivante donne une condition suffisante (que vérifieront les suites qu'on considère) pour qu'une suite ψ-sturmienne admissible $\underline{\mathbf{w}}$ soit à croissance multiplicative.

Proposition 4.5.9. *Soit $\underline{\mathbf{w}} = (\mathbf{w}_k)_k$ une suite ψ-sturmienne admissible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et $\underline{\mathbf{y}} = (\mathbf{y}_i)_i$ la suite de matrices symétriques associée à $\underline{\mathbf{w}}$ par (4.4.1). On suppose que la suite $\underline{\mathbf{y}}$ converge dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ vers $\mathbf{y} = (1, \xi, \xi^2)$ avec ξ transcendant ou algébrique de degré ≥ 3, et que pour tous $i \neq j$ les vecteurs $\mathbf{y}_i$ et $\mathbf{y}_j$ sont linéairement indépendants. Alors $\underline{\mathbf{w}}$ est à croissance multiplicative.*

La preuve de la Proposition 4.5.9 est présentée après celle de la Proposition 4.5.11 ci-dessous.

Lemme 4.5.10. *Soit ξ un réel qui est transcendant ou algébrique de degré ≥ 3. On pose $U = \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ \xi & \xi^2 \end{pmatrix}$. Soit $N \geq 1$ et $B_1, \ldots, B_N \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Q}) \setminus \big(\mathbb{Q}J\big)$. Alors*

$$UB_NUB_{N-1}\ldots UB_1 \neq 0.$$

Preuve On a $\mathrm{Im}(U) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ \xi \end{pmatrix}$ et $\ker(U) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -\xi \\ 1 \end{pmatrix}$. En particuler puisque ξ n'est pas rationnel, $UB_1 \neq 0$.
Supposons

$$UB_NUB_{N-1}\ldots UB_1 = 0,$$

avec $N > 1$ minimal avec cette propriété. Alors $UB_{N-1} \dots UB_1 \neq 0$, donc

$$\mathrm{Im}\Big(UB_{N-1} \dots UB_1\Big) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ \xi \end{pmatrix}.$$

Écrivons $B_N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Par ce qui précède on a donc $UB_N \begin{pmatrix} 1 \\ \xi \end{pmatrix} = 0$, ce qui implique

$$a + (b + c)\xi + d\xi^2 = 0.$$

Comme ξ n'est pas algébrique de degré ≤ 2 on en déduit que $B_N \propto J$, ce qui est impossible. D'où le résultat. □

Étant données des matrices $M_1, \dots, M_n$, on note $\prod_{k=1}^n M_k$ le produit $M_1 \dots M_n$ (même si les matrices M_k ne commutent pas).

Proposition 4.5.11. *On se place sous les hypothèses de la Proposition 4.5.9. On fixe $N \geq 1$ et $\mathcal{B}$ une partie finie de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Q}) \setminus \Big(\mathbb{Q}J\Big)$. Alors il existe une constante $c > 0$ et un indice i_0, qui ne dépendent que de $\mathcal{B}$, N et ξ, tels que pour tous indices $j_1, \dots, j_N \geq i_0$ et toutes matrices $B_1, \dots, B_N \in \mathcal{B}$ on ait*

$$c^{-1} \prod_{k=1}^N \|\mathbf{y}_{j_k}\| \leq \| \prod_{k=1}^N \mathbf{y}_{j_k} B_k\| \leq c \prod_{k=1}^N \|\mathbf{y}_{j_k}\|. \tag{4.5.9}$$

En particulier on en déduit que

$$\| \prod_{k=1}^N \mathbf{w}_{j_k}\| \asymp \prod_{k=1}^N \|\mathbf{w}_{j_k}\|, \tag{4.5.10}$$

lorsque $j_1, \dots, j_N$ tendent vers l'infini.

Preuve Remarquons que puisque N et $\mathcal{B}$ sont finis, le nombre de N-uplets de matrices $(B_1, \dots, B_N) \in \mathcal{B}^N$ est lui aussi fini, et d'après le Lemme 4.5.10 il existe une constante $c > 0$ (qui ne dépend que de $\mathcal{B}$, N et ξ), telle que pour tout $(B_1, \dots, B_N) \in \mathcal{B}^N$ on ait

$$\frac{2}{c} \leq \| \prod_{k=1}^N UB_k\| \leq \frac{c}{2}, \tag{4.5.11}$$

où on a posé $U = \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ \xi & \xi^2 \end{pmatrix}$. Ecrivons $\mathbf{y}_i = (y_{i,0}, y_{i,1}, y_{i,2})$. On a $|y_{i_0}| \asymp \|\mathbf{y}_i\|$ et par hypothèse

$$\frac{1}{y_{i,0}} \mathbf{y}_i \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ \xi & \xi^2 \end{pmatrix} = U.$$

Fixons $(B_1, \dots, B_N) \in \mathcal{B}$. Alors d'après ce qui précède, le produit

$$\Big| \prod_{k=1}^N y_{j_k,0} \Big|^{-1} \prod_{k=1}^N \mathbf{y}_{j_k} B_k$$

tend vers $\prod_{k=1}^{N} UB_k$ lorsque i tend vers l'infini, uniformément en $j_1, \dots, j_N \geq i$. Il existe donc d'après (4.5.11) un indice i_0 tel que pour tous $j_1, \dots, j_N \geq i_0$ on ait (4.5.9). Comme $\mathcal{B}^N$ est fini, en prenant i_0 assez grand on peut supposer que cette estimation est vérifiée pour tout $(B_1, \dots, B_N) \in \mathcal{B}^N$, ce qui achève la démonstration de (4.5.9).

L'equation (4.5.10) se déduit de (4.5.9) en utilisant (4.5.8) et en remarquant que N^{-1} et ${}^tN^{-1}$ ne sont pas proportionnelles à J d'après la Proposition 4.5.8 (remarquons aussi que N est proportionnelle à un élément de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$). □

Preuve de la Proposition 4.5.9
Soit $k \geq k_0 + 1$ et $0 \leq l \leq s_{k+1}$. On a $\mathbf{w}_k^{l+1}\mathbf{w}_{k-1} = \mathbf{w}_k \times \mathbf{w}_k^l \mathbf{w}_{k-1}$. Par ailleurs on peut déduire de la Proposition 4.5.5 que $\mathbf{w}_k = \mathbf{y}_{\psi(t_{k+1})} N_{k+1}^{-1}$ et $\mathbf{w}_k^l \mathbf{w}_{k-1} = \mathbf{y}_{\psi(t_k+l)} N_k^{-1}$. On conclut en utilisant (4.5.9) (et en remarquant que N^{-1} et ${}^tN^{-1}$ ne sont pas proportionnelles à J d'après la Proposition 4.5.8). □

4.5.4 Preuve de la Proposition 4.5.1

Preuve La condition $\widehat{\lambda}_2(\xi) > \frac{1}{2}$ assure que $\det(\mathbf{v}_i) \neq 0$ pour i assez grand d'après la Proposition 6.2.3 du Chapitre 6). On utilise la construction de la Partie 4.5.2 en prenant la suite $(\mathbf{u}_i)_i$ égale à la suite $(\mathbf{v}_i)_i$ de l'énoncé de la Proposition 4.5.1. Remarquons que $\mathbf{v}_i$ et $\mathbf{v}_j$ sont linéairement indépendants pour tous $i \neq j$ puisque ce sont des points minimaux distincts. D'après la Proposition 4.5.8, la suite $(\mathbf{w}_k)_k$ fournie par la Partie 4.5.2 est une suite ψ-sturmienne admissible de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et la matrice N n'est pas proportionnelle à J. Par ailleurs la Proposition 4.5.9 assure que $(\mathbf{w}_k)_k$ est à croissance multiplicative, puisque ξ est transcendant (car $\widehat{\lambda}_2(\xi) > \frac{1}{2}$). D'après la définition des $\mathbf{y}_i$ on a

$$\mathbf{v}_i \propto \mathbf{y}_i$$

pour tout i assez grand. Comme $|\det(\mathbf{y}_i)| = 1$ pour tout i, l'exposant δ dont l'existence est donnée par la Proposition 3.3.1 vérifiant $|\det(\mathbf{w}_k)| \asymp \|\mathbf{w}_k\|^\delta$ est nécessairement égal à zéro, donc < 2. Enfin, comme on a l'inégalité

$$|\det(\mathbf{v}_i)| \ll \|\mathbf{v}_i\| \|\mathbf{v}_i \wedge \mathbf{u}\|,$$

la norme $\|\mathbf{y}_i\| = |\det(\mathbf{v}_i)|^{-1/2}\|\mathbf{v}_i\|$ diverge vers l'infini, donc $\|\mathbf{w}_k\|$ diverge aussi vers l'infini. Enfin, remarquons que N est proportionnelle à une matrice de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$, donc quitte à la multiplier par une constante idoine on peut la supposer à coefficients entiers. De même les matrices $\mathbf{w}_k$ sont proportionnelles à des matrices de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$. Il existe donc des réels $\alpha_0, \alpha_1 > 1$ tels $\alpha_0\mathbf{w}_0, \alpha_1\mathbf{w}_1 \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z})$. Alors la suite ψ-sturmienne $(\mathbf{w}'_k)_k$ engendrée par $\mathbf{w}'_0 = \alpha_0\mathbf{w}_0$ et $\mathbf{w}'_1 = \alpha_1\mathbf{w}_1$ est à valeurs dans $\mathcal{M}$. D'après le Chapitre 3 (voir Remarque 3.2.8) le δ' associé à $(\mathbf{w}'_k)_k$ vérifiant $|\det(\mathbf{w}'_k)| \asymp \|\mathbf{w}'_k\|^{\delta'}$ vérifie encore $\delta' < 2$. La suite $(\mathbf{w}'_k)_k$ vérifie donc toutes les propriétés de la Proposition 4.5.1. □

4.6 Construction du 3-système P

Soit ξ un nombre réel tel que $\widehat{\lambda}_2(\xi) > \frac{1}{2}$. On suppose qu'il existe une fonction sturmienne $\psi \in \mathcal{F}_{stur}$ et une suite de points minimaux $(\mathbf{v}_i)_i$ associée à la famille $\mathcal{C}^*_{\mathbf{u}}(e^q)$ avec $\mathbf{u} = (1, \xi, \xi^2)$ telle que

$$\mathbf{v}_{i+1} \propto \mathbf{v}_i \mathbf{v}_{\psi(i)}^{-1} \mathbf{v}_i$$

pour i assez grand. Le Théorème 3.1.2 du Chapitre 3 appliqué à la suite donnée par la Proposition 4.5.1 implique immédiatement la proposition suivante :

Proposition 4.6.1. *Il existe $\underline{\mathbf{w}} = (\mathbf{w}_k)_{k\geq 0}$ une suite admissible ψ-sturmienne de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ à croissance multiplicative et telle que $(\|\mathbf{w}_k\|)_k$ diverge vers $+\infty$, qui vérifie les propriétés suivantes. On note $\underline{\mathbf{y}} = (\mathbf{y}_i)_i$ et $\underline{\mathbf{z}} = (\mathbf{z}_i)_i$ les suites de matrices symétriques associées à $\underline{\mathbf{w}}$ respectivement par les Définitions 2.3.6 et 2.4.3.*

(a) Il existe $\delta_0 < 2$ tel que

$$|\det(\mathbf{w}_k)| \asymp \|\mathbf{w}_k\|^{\delta_0}. \tag{4.6.1}$$

(b) Il existe $(\lambda_i)_i$ une suite de réels non nuls telle que pour tout i assez grand, $\mathbf{y}_i$ vérifie

$$\lambda_i^{-1}\mathbf{y}_i = \mathbf{v}_i \in \mathbb{Z}^3 \text{ est primitif et } \lambda_i = \|\mathbf{y}_i\|^{o(1)}. \tag{4.6.2}$$

(c) Il existe $(\gamma_k)_k$ une suite de réels non nuls telle que pour tout k assez grands la matrice $\gamma_k^{-1}\mathbf{w}_k$ vérifie

$$\gamma_k^{-1}\mathbf{w}_k \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z}) \text{ est primitive et } \gamma_k = \|\mathbf{w}_k\|^{o(1)}.$$

(d) Il existe une suite $(\mu_i)_i$ de réels non nuls telle que pour i assez grand le vecteur $\mu_i^{-1}\mathbf{z}_i \in \mathbb{Z}^3$ vérifie

$$\mu_i^{-1}\mathbf{z}_i \in \mathbb{Z}^3 \text{ est primitif et } \mu_i = \|\mathbf{v}_i\|^{o(1)} = \|\mathbf{z}_i\|^{o(1)}.$$

Remarque 4.6.2. Comme nous l'avions déjà fait remarquer dans le Chapitre 2 (voir (2.7.1)), le fait que la suite $(s_k)_k$ associée à ψ soit bornée, la croissance multiplicative de $(\mathbf{w}_k)_k$ et (4.6.1) impliquent l'estimation

$$|\det(\mathbf{y}_i)| \asymp \|\mathbf{y}_i\|^{\delta_0}. \tag{4.6.3}$$

Remarquons que $\mathbf{w}_k$, $\mathbf{y}_i$ et $\mathbf{z}_i$ ne sont a priori pas à coefficients rationnels. Pour un nombre ψ-sturmien propre ξ, la suite $\underline{\mathbf{w}}$ qui le définit est à valeurs dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z})$, le réel δ vérifie $\delta < \frac{\sigma}{1+\sigma}$ et pour tout i assez grand le vecteur $\mathbf{v}_i$ est égal à $\mathbf{y}_i$ à un facteur $\asymp 1$ près (voir le Chapitre 2 pour les détails de la construction). A partir des suites $(\mathbf{y}_i)_i$ et $(\mathbf{z}_i)_i$ on a donc construit un 3-système qui approche à $\mathcal{O}(1)$ près – en-dehors de certaines zones d'incertitude (voir la Partie 2.7 du Chapitre 2) – la fonction $\mathrm{L}_{\mathbf{u}}$ avec $\mathbf{u} = (1, \xi, \xi^2)$. Dans le contexte de la Proposition 4.6.1 nous allons montrer qu'on a toujours $\delta_0 < \frac{\sigma}{1+\sigma}$ (voir la Proposition 4.6.8 ; c'est un point-clef pour montrer que la fonction $\mathbf{P}$ construite ci-après à partir des suites $(\mathbf{y}_i)_i$ et $(\mathbf{z}_i)_i$ est bien un 3-système). Les facteurs d'erreur $\asymp 1$ sont remplacés par des facteurs $\|\mathbf{v}_i\|^{o(1)}$: c'est à cause d'eux que le 3-système $\mathbf{P}$ n'approche $\mathrm{L}_{\mathbf{u}}$ qu'à $o(q)$ près (voir Partie 4.7).

Lemme 4.6.3. *L'exposant δ_0 vérifie $\delta_0 \leq 1 - \widehat{\lambda}_2(\xi) < \frac{1}{2}$.*

Preuve Par définition de $\widehat{\lambda}_2(\xi)$ on a

$$\|\mathbf{v}_i \wedge \mathbf{u}\| \leq \|\mathbf{v}_i\|^{-\widehat{\lambda}_2(\xi)+o(1)}.$$

Or, la Proposition 4.6.1 et (3.3.2) impliquent

$$\|\mathbf{v}_i \wedge \mathbf{u}\| = \|\mathbf{y}_i \wedge \mathbf{u}\|^{1+o(1)} = \|\mathbf{y}_i\|^{\delta_0-1+o(1)} = \|\mathbf{v}_i\|^{\delta_0-1+o(1)},$$

donc nécessairement $\delta_0 - 1 \leq -\widehat{\lambda}_2(\xi)$. □

Construction de P

On procède maintenant comme dans la Partie 2.7.1 du Chapitre 2. Pour alléger les notations on pose $\delta = \delta_0$, avec $\delta < \frac{1}{2}$ d'après le Lemme 4.6.3.

Définition 4.6.4. On se donne $(\widehat{W}_k)_{k\geq 0}$ une suite de réels > 0 (dont l'existence est donnée par la Proposition 2.5.6) vérifiant

(a) $\widehat{W}_{k+1} = \widehat{W}_k^{s_{k+1}}\widehat{W}_{k-1}$ (pour $k \geq 1$),

(b) $\widehat{W}_k \asymp \|\mathbf{w}_k\|$,

et on définit les quantités $\widehat{Y}_{t_k+l}, \mathcal{E}^*_{t_k+l}, \widehat{Z}_{t_k+l}$ et $\mathcal{E}_{t_k+l}$ comme dans la Définition 2.7.1 :

$$\begin{cases} \widehat{Y}_{t_k+l} = \widehat{W}_k^{l+1}\widehat{W}_{k-1} \\ \mathcal{E}^*_{t_k+l} = \left(\widehat{W}_k^{l+1}\widehat{W}_{k-1}\right)^{\delta-1} \\ \widehat{Z}_{t_k+l} = \widehat{W}_k^{l}\widehat{W}_{k-1} \\ \mathcal{E}_{t_k+l} = \widehat{W}_k^{(\delta-1)(l+1)-1}\widehat{W}_{k-1}^{\delta-1}. \end{cases}$$

Remarquons que les formules précédentes pour $\widehat{Y}_{t_k+l}$ et $\mathcal{E}^*_{t_k+l}$ sont encore valables pour $l = s_{k+1}$. On a aussi $\widehat{Z}_i = \widehat{Y}_{\psi(i)}$. Rappelons la Proposition 2.7.2 du Chapitre 2 qui s'applique ici, puisque la preuve n'utilise pas le fait que $\mathbf{w}_k \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z})$:

Proposition 4.6.5. *Soit $i \geq 0$. On a, quand i tend vers l'infini :*

(a) $\log(\|\mathbf{y}_i\|) = \log(\widehat{Y}_i) + \mathcal{O}(1)$.

(b) $\log(\|\mathbf{y}_i \wedge \mathbf{u}\|) = \log(\mathcal{E}^*_i) + \mathcal{O}(1)$.

(c) $\log(\|\mathbf{z}_i\|) = \log(\widehat{Z}_i) + \mathcal{O}(1)$.

(d) $\log(|\mathbf{z}_i \cdot \mathbf{u}|) = \log(\mathcal{E}_i) + \mathcal{O}(1)$.

On définit aussi $\widehat{\mathrm{L}}_i(q)$, $\widehat{\mathrm{L}}^*_i(q)$, q_i et c_i comme dans la Définition 2.7.3 :

$$\begin{cases} \widehat{\mathrm{L}}_i(q) = \max\Big(\log(\widehat{Z}_i), \log(\mathcal{E}_i) + q\Big), \\ \widehat{\mathrm{L}}^*_i(q) = \max\Big(\log(\mathcal{E}^*_i), \log(\widehat{Y}_i) - q\Big), \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} q_i = \log(\widehat{Z}_i) - \log(\mathcal{E}_i) = \log(\widehat{Y}_i) - \log(\mathcal{E}^*_i) = (2-\delta)\log(\widehat{Y}_i), \\ c_i = \log(\widehat{Y}_{i+1}) - \log(\mathcal{E}^*_i) = q_i + \log(\widehat{W}_k). \end{cases}$$

Notons que c_i est l'abscisse du point d'intersection des graphes de $\widehat{\mathrm{L}}_i^*$ et $\widehat{\mathrm{L}}_{i+1}^*$, qui est aussi l'abscisse du point d'intersection de ceux de $\widehat{\mathrm{L}}_i$ et $\widehat{\mathrm{L}}_{\psi^{-1}(i)}$ (rappelons que par définition de ψ, on a $\psi^{-1}(i) = i+1$ si $i < t_{k+1} - 1$ et $\psi^{-1}(t_{k+1} - 1) = t_{k+2}$). Notons que la propriété $\delta < 1$ assure ici que l'exposant $\delta - 1$ intervenant dans les définitions de $\mathcal{E}_j^*$ et $\mathcal{E}_j^*$ est < 0 (sans cette condition la suite $(\mathcal{E}_j^*)_j$ serait croissante et non pas décroissante pour j assez grand).
On peut alors appliquer la Proposition 2.7.4 (démontrée dans la Partie 2.7.3 sans utiliser le fait que $\mathbf{w}_k \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Z})$), qui donne directement les résultats suivants :

Proposition 4.6.6. *On a les propriétés suivantes :*

(a) Pour tout i assez grand, on a $q_i < c_i < q_{i+1} < c_{i+1}$.

(b) Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout i et pour tout $q > 0$ on ait

$$|\widehat{\mathrm{L}}_i(q) - \mathrm{L}_{\mathbf{z}_i}(q)| \leq C \quad et \quad |\widehat{\mathrm{L}}_i^*(q) - \mathrm{L}_{\mathbf{y}_i}^*(q)| \leq C,$$

i.e. le graphe de $\widehat{\mathrm{L}}_i$ (resp. $\widehat{\mathrm{L}}_i^*$) approche la trajectoire de $\mathbf{z}_i$ (resp. $\mathbf{y}_i$) à $\mathcal{O}(1)$ près, uniformément en i.

(c) Le point q_i est le point où $\widehat{\mathrm{L}}_i$ et $\widehat{\mathrm{L}}_i^*$ changent de pente : la fonction $\widehat{\mathrm{L}}_i$ est continue affine par morceaux, constante sur $[0, q_i]$, et croissante de pente 1 sur $[q_i, +\infty[$ tandis que la fonction $-\widehat{\mathrm{L}}_i^*$ est continue affine par morceaux, croissante de pente 1 sur $[0, q_i]$, et constante sur $[q_i, +\infty[$.

Notons que l'encadrement $q_i < c_i < q_{i+1}$ découle du fait que $\delta < 1$.

Définition 4.6.7. On définit alors la fonction $\mathbf{P} = (\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3)$ sur $[q_0, +\infty[$ (avec q_0 assez grand) comme dans la Définition 2.7.8 : on pose pour $t_k - 1 \leq i < t_{k+1} - 1$ (avec k assez grand), et $c_i \leq q < c_{i+1}$:

$$\mathbf{P}(q) = \Phi_3\Big(\widehat{\mathrm{L}}_{t_{k+1}}(q), -\widehat{\mathrm{L}}_{i+1}^*(q), \widehat{\mathrm{L}}_{i+1}(q)\Big), \tag{4.6.4}$$

où $\Phi_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est la fonction qui ordonne les coordonnées dans l'ordre croissant.

La preuve de la Proposition 2.7.9 montre que la fonction $\mathbf{P}$ est continue (elle est aussi affine par morceaux, et ses composantes P_i ont pour pentes 1 ou 0) et vérifie

$$\mathrm{P}_1(q) + \mathrm{P}_2(q) + \mathrm{P}_3(q) = q \tag{4.6.5}$$

pour tout q assez grand. Notons que si $\delta < \frac{\sigma}{1+\sigma}$ (ce que donne la Proposition 4.6.8 ci-dessous), la Proposition 2.7.9 assure que la fonction $\mathbf{P}$ est un 3-système (si $\delta > \frac{\sigma}{1+\sigma}$ ce n'est pas le cas : au point q_{i+1} on pourrait avoir $\widehat{\mathrm{L}}_{i+1}(q_{i+1}) > -\widehat{\mathrm{L}}_{i+1}^*(q_{i+1})$, voir la Figure 2.1 du Chapitre 2, ce qui est impossible pour un 3-système).

Proposition 4.6.8. *On a l'inégalité*

$$\delta = \delta_0 < \frac{\sigma}{1+\sigma}.$$

La fonction $\mathbf{P}$ est alors un 3-système dont l'allure est donnée par les Figures 4.1 et 4.2 ci-dessous.

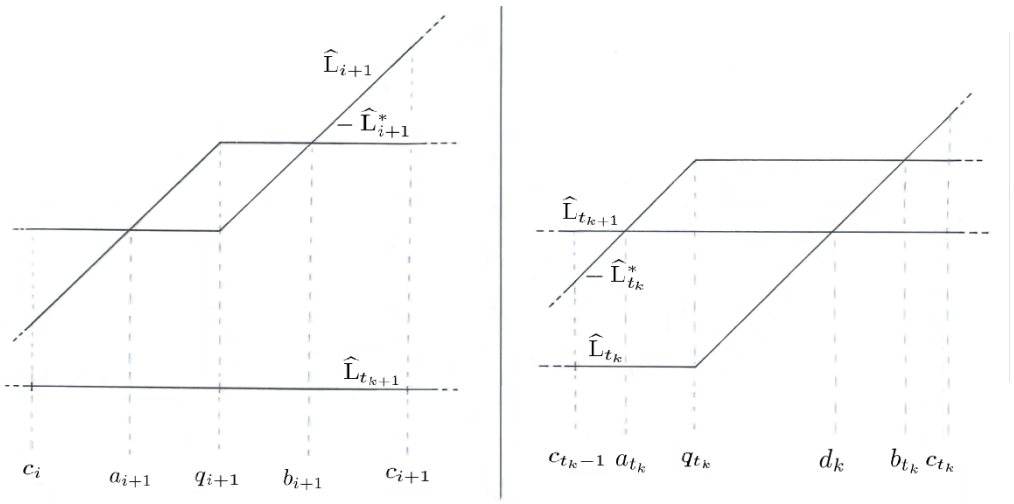

FIGURE 4.1 – Graphe conjoint de $\widehat{\mathrm{L}}_{t_{k+1}}, -\widehat{\mathrm{L}}^*_{i+1}, \widehat{\mathrm{L}}_{i+1}$ sur $[c_i, c_{i+1}]$

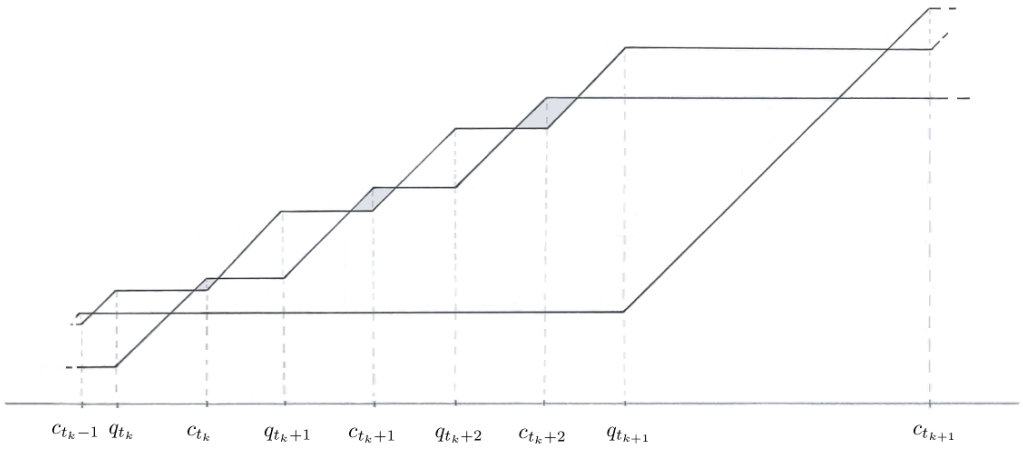

FIGURE 4.2 – Graphe conjoint du 3-système $\mathbf{P}$

Toute la fin de cette partie est consacrée à la preuve de la Proposition 4.6.8.

Rappelons que $\delta_0 < \frac{1}{2}$ d'après le Lemme 4.6.3. On utilise les notations des Définitions 4.6.4 et 4.6.7, notamment pour la fonction $\mathbf{P} = (\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3)$ et les quantités associées. On note $\mathbf{L_u} = (\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2, \mathrm{L}_3)$ et $\mathbf{L^*_u} = (\mathrm{L}^*_1, \mathrm{L}^*_2, \mathrm{L}^*_3)$ les fonctions des minima successifs associées par la géométrie paramétrique des nombres à $\mathbf{u} = (1, \xi, \xi^2)$.

Lemme 4.6.9. *Rappelons que q_{t_k} est l'abscisse de changement de pente de L_{t_k} (et aussi*

de $\mathrm{L}^*_{t_k}$*). On a les estimations suivantes :*

$$\begin{cases} \mathrm{L}_1(q_{t_k}) = \widehat{\mathrm{L}}_{t_k}(q_{t_k}) + o(q_{t_k}) \\ \mathrm{L}_2(q_{t_k}) = \widehat{\mathrm{L}}^*_{t_{k+1}}(q_{t_k}) + o(q_{t_k}) \\ \mathrm{L}_3(q_{t_k}) = -\widehat{\mathrm{L}}^*_{t_k}(q_{t_k}) + o(q_{t_k}). \end{cases} \tag{4.6.6}$$

En particulier au point q_{t_k} *le triplet* $(\widehat{\mathrm{L}}_{t_k}, \widehat{\mathrm{L}}_{t_{k+1}}, -\widehat{\mathrm{L}}^*_{t_k})$ *réalise* $(\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2, \mathrm{L}_3)$ *à* $o(q_{t_k})$ *près.*

Preuve Remarquons que les étapes de calculs développées ci-dessous n'avaient pas besoin d'être considérées dans le Chapitre 2 du fait de l'hypothèse $\delta < \frac{\sigma}{1+\sigma}$.
On a pour k assez grand (et comme $\delta < \frac{1}{2}$)

$$\begin{cases} \log(\widehat{Z}_{t_k}) = \log(\widehat{W}_{k-1}) < \log(\widehat{W}_k) = \log(\widehat{Z}_{t_{k+1}}) \\ \log(\mathcal{E}_{t_k}) = (\delta - 2)\log(\widehat{W}_k) + (\delta - 1)\log(\widehat{W}_{k-1}) > \log(\mathcal{E}_{t_{k+1}}) \\ -\log(\mathcal{E}^*_{t_k}) = (1-\delta)(\log(\widehat{W}_k) + \log(\widehat{W}_{k-1})) > \log(\widehat{W}_{k-1}) = \log(\widehat{Z}_{t_k}). \end{cases}$$

Par définition de $\widehat{\mathrm{L}}_{t_k}$, $\widehat{\mathrm{L}}_{t_{k+1}}$ et $\widehat{\mathrm{L}}^*_{t_k}$, la situation est similaire à l'une de celles illustrées à la Figure 4.3 (le graphe de $-\widehat{\mathrm{L}}^*_{t_k}$ est en pointillés).

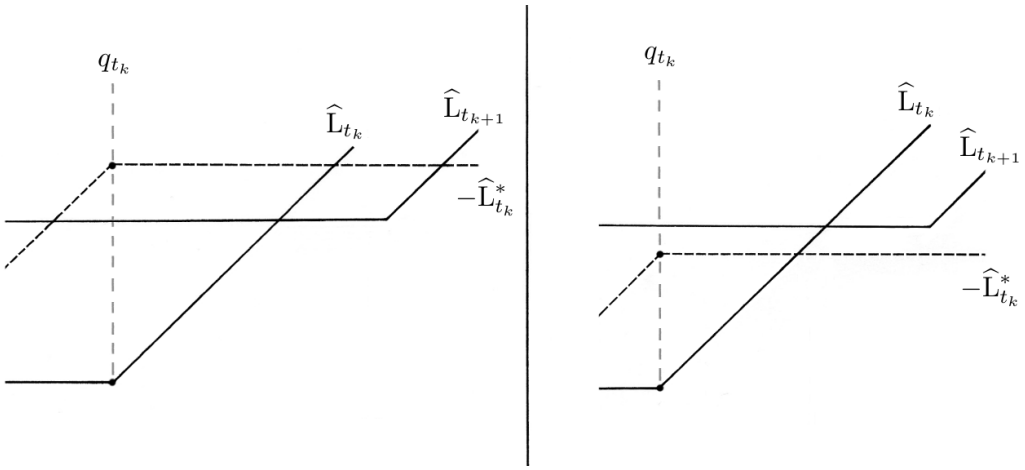

FIGURE 4.3 – Graphe conjoint de $(\widehat{\mathrm{L}}_{t_k}, \widehat{\mathrm{L}}_{t_{k+1}}, -\widehat{\mathrm{L}}^*_{t_k})$

Le dessin de gauche de la Figure 4.3 est similaire au dessin de droite de la Figure 4.1 qui illustre l'allure du graphe conjoint pour un nombre de type sturmien. A priori, les deux allures de la Figure 4.3 sont possibles : le graphe de $-\widehat{\mathrm{L}}^*_{t_k}$ peut passer au-dessus de celui de $\widehat{\mathrm{L}}_{t_{k+1}}$ ou bien être toujours en-dessous. Nous montrerons dans la preuve de la Proposition 4.6.8 qu'en fait nous sommes toujours dans la situation du dessin de gauche.

Pour commencer, remarquons que $o\Big(\log(\|\mathbf{v}_i\|)\Big) = o\Big(\log(\|\widehat{Y}_i\|)\Big) = o(q_i)$. De plus, comme $\log(\widehat{W}_{k+1})/\log(\widehat{W}_k) \leq \frac{1}{\sigma} < +\infty$ (où σ est défini par (4.4.4)), on a aussi

$$o(q_i) = o(q_{i+1}) \tag{4.6.7}$$

pour tout i. En particulier, puisque $t_{k+1} - t_k = s_{k+1}$ est borné, on a $o(q_{t_k}) = o(q_{t_{k+1}})$. La Proposition 4.6.1 implique alors

$$e^{o(q_{t_k})}\mathbf{y}_{t_k}, e^{o(q_{t_k})}\mathbf{z}_{t_k} \text{ et } e^{o(q_{t_k})}\mathbf{z}_{t_{k+1}} \in \mathbb{Z}^3. \tag{4.6.8}$$

Par la Proposition 4.6.6 et par définition de $\widehat{\mathrm{L}}_i$ et $\widehat{\mathrm{L}}_i^*$, le changement de pente q_{t_k} de $\widehat{\mathrm{L}}_{t_k}$ (qui est aussi celui de $\widehat{\mathrm{L}}_{t_k}^*$) vérifie

$$q_{t_k} = q_{\mathbf{v}_{t_k}} + \mathcal{O}(1) \tag{4.6.9}$$

où $q_{\mathbf{v}_{t_k}}$ est l'abscisse de changement de pente de la trajectoire de $\mathbf{y}_{t_k}$ (donc aussi de celle de $\mathbf{v}_{t_k}$), et

$$(\mathrm{L}_{\mathbf{z}_{t_k}}, -\mathrm{L}^*_{\mathbf{y}_{t_k}}, \mathrm{L}_{\mathbf{z}_{t_{k+1}}}) = (\widehat{\mathrm{L}}_{t_k}, -\widehat{\mathrm{L}}^*_{t_k}, \widehat{\mathrm{L}}_{t_{k+1}}) + \mathcal{O}(1). \tag{4.6.10}$$

L'équation (4.6.5) implique alors

$$\mathrm{L}_{\mathbf{z}_{t_k}}(q_{t_k}) - \mathrm{L}^*_{\mathbf{y}_{t_k}}(q_{t_k}) + \mathrm{L}_{\mathbf{z}_{t_{k+1}}}(q_{t_k}) = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{P}_i(q_{t_k}) + \mathcal{O}(1) = q_{t_k} + \mathcal{O}(1). \tag{4.6.11}$$

D'autre part les propriétés de $\mathbf{L_u}$ (voir la Proposition 1.6.5 du Chapitre 1) montrent qu'on a aussi

$$\mathrm{L}_1(q_{t_k}) + \mathrm{L}_2(q_{t_k}) + \mathrm{L}_3(q_{t_k}) = q_{t_k} + \mathcal{O}(1). \tag{4.6.12}$$

D'après (4.6.2) de la Proposition 4.6.1, par (4.6.9) et par définition des minima successifs, on a

$$\begin{aligned} -\mathrm{L}_{\mathbf{y}_{t_k}}(q_{t_k}) = -\mathrm{L}_{\mathbf{y}_{t_k}}(q_{\mathbf{v}_{t_k}}) + \mathcal{O}(1) &= -\mathrm{L}_{\mathbf{v}_{t_k}}(q_{\mathbf{v}_{t_k}}) + o(q_{t_k}) \\ &= -\mathrm{L}_1^*(q_{\mathbf{v}_{t_k}}) + o(q_{t_k}) \\ &= \mathrm{L}_3(q_{\mathbf{v}_{t_k}}) + o(q_{t_k}) \\ &= \mathrm{L}_3(q_{t_k}) + o(q_{t_k}). \end{aligned} \tag{4.6.13}$$

Par (4.6.8), puisque $\mathbf{z}_{t_k}$ et $\mathbf{z}_{t_{k+1}}$ sont linéairement indépendants et que

$$\max\Big(\mathrm{L}_{\mathbf{z}_{t_k}}(q_{t_k}), \mathrm{L}_{\mathbf{z}_{t_{k+1}}}(q_{t_k})\Big) = \mathrm{L}_{\mathbf{z}_{t_{k+1}}}(q_{t_k}),$$

on déduit par définition des minima successifs les estimations

$$\begin{cases} \mathrm{L}_1(q_{t_k}) \le \mathrm{L}_{\mathbf{z}_{t_k}}(q_{t_k}) + o(q_{t_k}), \\ \mathrm{L}_2(q_{t_k}) \le \mathrm{L}_{\mathbf{z}_{t_{k+1}}}(q_{t_k}) + o(q_{t_k}). \end{cases} \tag{4.6.14}$$

Les estimations (4.6.11) et (4.6.12) ensemble conduisent à

$$\mathcal{O}(1) \le \Big(\mathrm{L}_{\mathbf{z}_{t_k}}(q_{t_k}) - \mathrm{L}_1(q_{t_k})\Big) + \Big(\mathrm{L}_{\mathbf{z}_{t_{k+1}}}(q_{t_k}) - \mathrm{L}_2(q_{t_k})\Big) + \Big(- \mathrm{L}_{\mathbf{y}_{t_k}}(q_{t_k}) - \mathrm{L}_3(q_{t_k})\Big) \le \mathcal{O}(1)$$

et par (4.6.13) on en déduit

$$o(q_{t_k}) \le \Big(\mathrm{L}_{\mathbf{z}_{t_k}}(q_{t_k}) - \mathrm{L}_1(q_{t_k})\Big) + \Big(\mathrm{L}_{\mathbf{z}_{t_{k+1}}}(q_{t_k}) - \mathrm{L}_2(q_{t_k})\Big) \le o(q_{t_k}).$$

Comme chacun des deux termes de la somme est minoré par $o(q_{t_k})$ d'après (4.6.14), on en déduit

$$\Big|\mathrm{L}_{\mathbf{z}_{t_k}}(q_{t_k}) - \mathrm{L}_1(q_{t_k})\Big| \le o(q_{t_k}) \quad \text{et} \quad \Big|\mathrm{L}_{\mathbf{z}_{t_{k+1}}}(q_{t_k}) - \mathrm{L}_2(q_{t_k})\Big| \le o(q_{t_k}).$$

Ces dernières estimations et (4.6.13) combinées avec (4.6.10) achèvent la démonstration du lemme, et prouvent qu'au point q_{t_k} le triplet $(\widehat{\mathrm{L}}_{t_k}, \widehat{\mathrm{L}}_{t_{k+1}}, -\widehat{\mathrm{L}}^*_{t_k})$ réalise $(\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2, \mathrm{L}_3)$ à $o(q_{t_k})$ près. □

Lemme 4.6.10. *On définit d_k comme étant l'abscisse du point d'intersection des graphes de $\widehat{\mathrm{L}}_{t_k}$ et $\widehat{\mathrm{L}}_{t_{k+1}}$ (voir la Figure 4.4, ainsi que la Figure 4.3). Alors*

$$\mathrm{L}_1(d_k) = \widehat{\mathrm{L}}_{t_k}(d_k) + o(q_{t_k})$$

lorsque k tend vers l'infini. De manière quelque peu informelle, on peut dire que les points $\mathbf{z}_{t_k}$ réalisent L_1 à $o(q_{t_k})$ près.

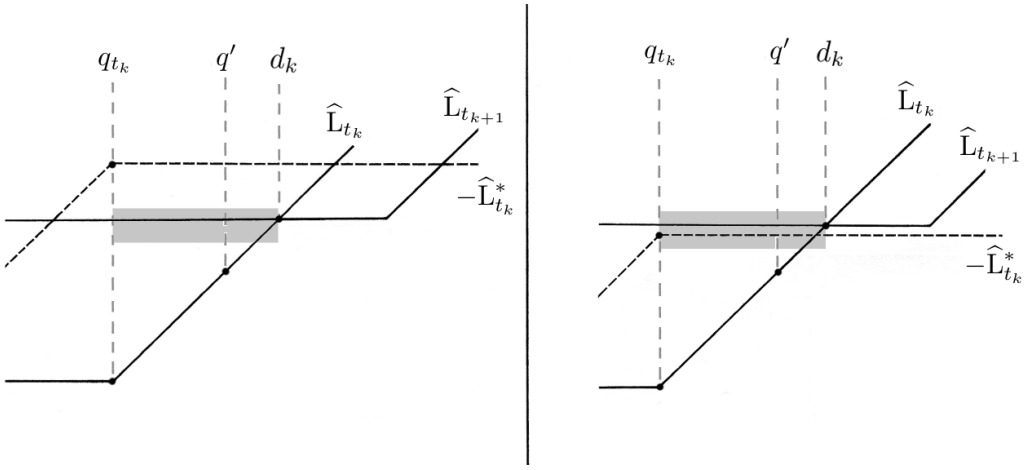

FIGURE 4.4 – Graphe conjoint de $(\widehat{\mathrm{L}}_{t_k}, \widehat{\mathrm{L}}_{t_{k+1}}, -\widehat{\mathrm{L}}^*_{t_k})$

Preuve Remarquons que les étapes de calculs développées ci-dessous n'avaient pas besoin d'être considérées dans le Chapitre 2 du fait de l'hypothèse $\delta < \frac{\sigma}{1+\sigma}$.
Les définitions de $\widehat{\mathrm{L}}_{t_k}$ et $\widehat{\mathrm{L}}_{t_{k+1}}$ donnent la formule

$$d_k = (3-\delta)\log(\widehat{W}_k) + (1-\delta)\log(\widehat{W}_{k-1}) = q_{t_k} + \log(\widehat{W}_k) - \log(\widehat{W}_{k-1}). \tag{4.6.15}$$

Notons que par définition de σ on a $\log(\widehat{W}_k) - \log(\widehat{W}_{k-1}) \geq (1-\sigma+o(1))\log(\widehat{W}_k) \geq (\frac{1-\sigma}{2} + o(1))q_{t_k}$ pour k assez grand. On fixe $\varepsilon > 0$ tel que $d_k - \varepsilon q_{t_k} > q_{t_k}$ pour k assez grand. Soit $\mathbf{x}$ le point minimal qui réalise L_1 au point $q' = d_k - \varepsilon q_{t_k}$. Supposons par l'absurde que $\mathbf{x}$ n'est pas proportionnel à $\mathbf{z}_{t_k}$ avec k assez grand. Intuitivement, l'idée est la suivante : géométriquement, L_2 reste dans le rectangle grisé de la Figure 4.4 (de hauteur $o(q_{t_k})$) et en sortirait au point q' si $\mathbf{x}$ n'était pas colinéaire au point $\mathbf{z}_{t_k}$. Montrons cela : la famille $(\mathbf{z}_{t_k}, \mathbf{x})$ étant libre, au point q' on a d'après (4.6.8) et la Proposition 4.6.6

$$\begin{aligned}\mathrm{L}_2(q') + o(q_{t_k}) \leq \widehat{\mathrm{L}}_{t_k}(q') = \widehat{\mathrm{L}}_{t_k}(d_k) - \varepsilon q_{t_k} &= \widehat{\mathrm{L}}_{t_{k+1}}(d_k) - \varepsilon q_{t_k} \\ &= \widehat{\mathrm{L}}_{t_{k+1}}(q_{t_k}) - \varepsilon q_{t_k},\end{aligned}$$

puisque $\widehat{\mathrm{L}}_{t_k}(d_k) = \widehat{\mathrm{L}}_{t_{k+1}}(d_k)$, et parce que $\widehat{\mathrm{L}}_{t_k}$ est croissante de pente 1 sur $[q_{t_k}, d_k]$ et $\widehat{\mathrm{L}}_{t_{k+1}}$ est constante sur ce même intervalle. Le Lemme 4.6.9 implique alors

$$\mathrm{L}_2(q') \leq \mathrm{L}_2(q_{t_k}) - \varepsilon(\underline{\mathbf{y}})q_k + o(q_{t_k}) < \mathrm{L}_2(q_{t_k})$$

pour k assez grand : cela contredit la croissance de la fonction L_2. Donc $\mathbf{z}_{t_k}$ est proportionnel à $\mathbf{x}$ pour tout k assez grand. En particulier, en notant $q_{\mathbf{x}}$ l'abscisse du point de

changement de pente des trajectoires de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{z}_{t_k}$ (on a $q_{\mathbf{x}} = q_{t_k} + \mathcal{O}(1)$ par la Proposition 4.6.6), on obtient

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{L}_1(q') - \mathrm{L}_{\mathbf{z}_{t_k}}(q')\right| = \left|\mathrm{L}_{\mathbf{x}}(q') - \mathrm{L}_{\mathbf{z}_{t_k}}(q')\right| &= \left|\mathrm{L}_{\mathbf{x}}(q_{\mathbf{x}}) - \mathrm{L}_{\mathbf{z}_{t_k}}(q_{\mathbf{x}})\right| \\ &= \left|\mathrm{L}_{\mathbf{x}}(q_{t_k}) - \mathrm{L}_{\mathbf{z}_{t_k}}(q_{t_k})\right| + \mathcal{O}(1) \\ &= \left|\mathrm{L}_1(q_{t_k}) - \mathrm{L}_{\mathbf{z}_{t_k}}(q_{t_k})\right| + \mathcal{O}(1) = o(q_{t_k}),\end{aligned}$$

la dernière égalité étant assurée par le Lemme 4.6.9. En résumé, pour tout $\varepsilon > 0$ on a pour k assez grand

$$\left|\mathrm{L}_1(d_k) - \widehat{\mathrm{L}}_{t_k}(d_k)\right| \leq \varepsilon q_{t_k}$$

ce qui achève la démonstration de ce lemme. □

Preuve de la Proposition 4.6.8

Rappelons que l'on note $\delta = \delta_0$. D'après le Lemme 4.6.9, au point q_{t_k} de changement de pente de L_{t_k} (qui est aussi l'abscisse du changement de pente de $\mathrm{L}^*_{t_k}$), le triplet $(\widehat{\mathrm{L}}_{t_k}, \widehat{\mathrm{L}}_{t_{k+1}}, -\widehat{\mathrm{L}}^*_{t_k})$ réalise $(\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2, \mathrm{L}_3)$ à $o(q_{t_k})$ près. Comme $\mathrm{L}_2(q) \leq \mathrm{L}_3(q)$ pour tout q, cela implique alors $\widehat{\mathrm{L}}_{t_{k+1}}(q_{t_k}) \leq -\widehat{\mathrm{L}}^*_{t_k}(q_{t_k}) + o(q_{t_k})$, c'est-à-dire

$$\log(\widehat{W}_k) \leq (1-\delta)(\log(\widehat{W}_k) + \log(\widehat{W}_{k-1})) + o(\log(\widehat{W}_k)),$$

d'après les définitions de q_{t_k}, des fonctions $\widehat{\mathrm{L}}_i$ et $\widehat{\mathrm{L}}^*_i$ et puisque $q_{t_k} = (2-\delta)(\log(\widehat{W}_k) + \log(\widehat{W}_{k-1})) \leq 4\log(\widehat{W}_k)$. En divisant par $\log(\widehat{W}_k)$ et en passant à la limite inférieure, on trouve l'estimation $1 \leq (1-\delta)(1+\sigma)$, qui se réécrit

$$\delta \leq \frac{\sigma}{1+\sigma}.$$

Montrons que l'inégalité est stricte. Par l'absurde, supposons $\delta = \frac{\sigma}{1+\sigma}$. Considérons $d_k > q_{t_k}$, l'abscisse du point d'intersection des graphes de $\widehat{\mathrm{L}}_{t_k}$ et $\widehat{\mathrm{L}}_{t_{k+1}}$ (voir Figure 4.4, ainsi que la Figure 4.3). Alors d'après le Lemme 4.6.10 on a

$$\mathrm{L}_1(d_k) = \widehat{\mathrm{L}}_{t_k}(d_k) + o(q_{t_k}) = \widehat{\mathrm{L}}_{t_{k+1}}(d_k) + o(q_{t_k})$$

pour k assez grand. En divisant par d_k, par (4.6.15) et par définition de $\widehat{\mathrm{L}}_{t_{k+1}}$ on en déduit l'estimation

$$\frac{\mathrm{L}_1(d_k)}{d_k} = \frac{\log(\widehat{Z}_{t_{k+1}})}{d_k} + o(1) = \frac{\log(\widehat{W}_k)}{(3-\delta)\log(\widehat{W}_k) + (1-\delta)\log(\widehat{W}_{k-1})} + o(1)$$

et en passant à la limite supérieure on obtient par (2.7.2)

$$\overline{\psi}_1 \geq \frac{1}{(1-\delta)(1+\sigma)+2} = \frac{1}{3}$$

(qu'on pourra comparer à l'exposant $\overline{\psi}_1$ d'un nombre de type sturmien donné par le Théorème 2.7.1 du Chapitre 2), la deuxième égalité venant de l'hypothèse $\delta = \frac{\sigma}{1+\sigma}$. Donc $\overline{\psi}_1 = \frac{1}{3}$ (puisqu'on a toujours $\overline{\psi}_1 \leq \frac{1}{3}$). Cela est équivalent par l'identité de Jarník (2.7.7) à $\underline{\psi}_3 = \frac{1}{3}$, donc $\overline{\psi}^*_1 = -\frac{1}{3}$, c'est-à-dire $\widehat{\lambda}_2(\xi) = \frac{1}{2}$: contradiction. Donc on a bien $\delta_0 < \frac{\sigma}{1+\sigma}$ et ceci achève la preuve de la Proposition 4.6.8. □

4.7 Lien entre ξ et le 3-système P

La Proposition 4.6.8, la propriété (4.6.8) et les Propositions 2.7.5 et 2.7.9 du Chapitre 2 vont permettre de démontrer le Théorème 4.7.1 ci-dessous. Essentiellement, on montre qu'on conserve les résultats du Chapitre 2 en termes d'approximation de $\mathrm{L}_{\mathbf{u}}$ par $\mathbf{P}$, en remplaçant les $\mathcal{O}(1)$ qui apparaissent par des $o(q)$. Ainsi, de manière quelque peu informelle, le 3-système $\mathbf{P}$ coïncide avec $\mathrm{L}_{\mathbf{u}}$ à $o(q)$ près, sauf en certaines zones contrôlées (les zones d'incertitude) que l'on peut ignorer pour calculer la plupart des exposants paramétriques.

Théorème 4.7.1. *Soit ξ un nombre réel tel que $\widehat{\lambda}_2(\xi) > \frac{1}{2}$. On suppose qu'il existe une fonction sturmienne $\psi \in \mathcal{F}_{stur}$ et une suite de points minimaux $(\mathbf{v}_i)_i$ associée à la famille $\mathcal{C}^*_{\mathbf{u}}(e^q)$ avec $\mathbf{u} = (1, \xi, \xi^2)$ telle que*

$$\mathbf{v}_{i+1} \propto \mathbf{v}_i \mathbf{v}_{\psi(i)}^{-1} \mathbf{v}_i$$

pour i assez grand. Alors pour q_0 assez grand, la fonction $\mathbf{P} = (\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3)$ associée à ξ par la Définition 4.6.7 est un 3-système sur $[q_0, +\infty[$ dont le graphe conjoint est du type de celui de la Figure 4.5 (dans cet exemple on a $s_{k+1} = 3$). De plus, en notant pour tout i assez grand $I_{i+1} = [a_{i+1}, b_{i+1}] \subset [c_i, c_{i+1}]$ le segment sur lequel $\mathrm{P}_3 = -\widehat{\mathrm{L}}^*_{i+1}$ (cf Figure 4.6) et $I'_{i+1} = [b_i, a_{i+1}]$, on a

(a) $|\mathrm{L}_1(q) - \mathrm{P}_1(q)| = o(q)$ *quand q tend vers l'infini,*

(b) $|\mathrm{L}_2(q) - \mathrm{P}_2(q)| = o(q)$ *et* $|\mathrm{L}_3(q) - \mathrm{P}_3(q)| = o(q)$ *quand $q \in I_j$ tend vers l'infini,*

(c) $\mathrm{P}_2(q) - o(q) \leq \mathrm{L}_2(q) \leq \mathrm{L}_3(q) \leq \mathrm{P}_3(q) + o(q)$ *quand $q \in I'_j$ tend vers l'infini.*

De manière quelque peu informelle on peut dire qu'à $o(q)$ près, le graphe conjoint de $\mathbf{L}_{\mathbf{u}}$ coïncide avec celui de $\mathbf{P}$ en-dehors des zones grisées sur la Figure 4.5, et pour tout j assez grand, le graphe conjoint de L_2 et L_3 sur le segment I'_j est inclus - à $o(q)$ près - dans la zone grisée correspondante.

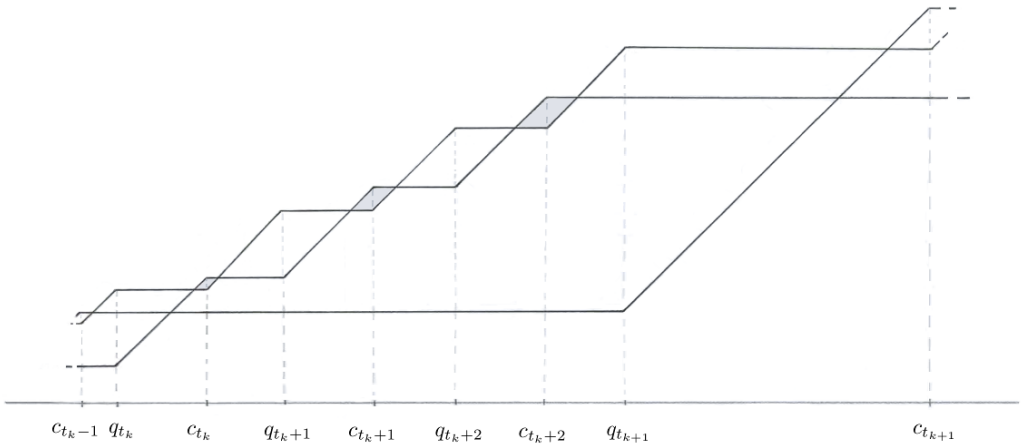

FIGURE 4.5 – Graphe conjoint du 3-système $\mathbf{P}$

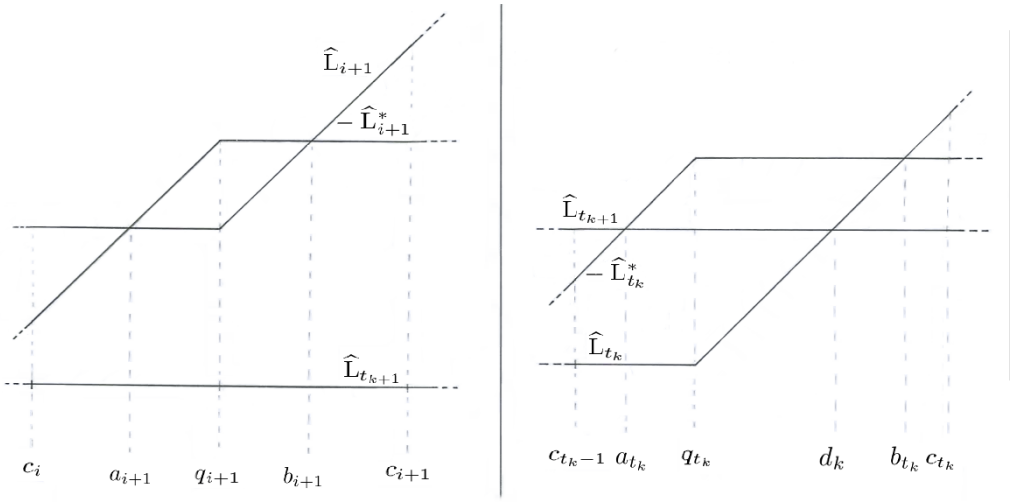

FIGURE 4.6 – Graphe conjoint de $\widehat{\mathrm{L}}_{t_{k+1}}, -\widehat{\mathrm{L}}^*_{i+1}, \widehat{\mathrm{L}}_{i+1}$ sur $[c_i, c_{i+1}]$

PreuveEssentiellement les arguments sont ceux de la preuve de la Proposition 2.7.9 en remplaçant les $\mathcal{O}(1)$ par des $o(q)$ d'une manière similaire aux preuves des Lemmes 4.6.9 et 4.6.10.
La fonction $\mathbf{P}$ est un 3-système : c'est un corollaire de la Proposition 4.6.8. Montrons maintenant les assertions sur $\mathbf{L_u}$ et $\mathbf{P}$. Pour commencer, en utilisant les arguments de la preuve de (4.6.8), on peut montrer que la Proposition 4.6.1 implique que pour tout $i = t_k + l$, $0 \leq l < s_{k+1}$ on a

$$e^{o(q_i)}\mathbf{y}_i, e^{o(q_i)}\mathbf{z}_i \text{ et } e^{o(q_i)}\mathbf{z}_{t_{k+1}} \in \mathbb{Z}^3. \tag{4.7.1}$$

L'équation (4.6.7) assure aussi

$$o(q_i) = o(q_{i+1}). \tag{4.7.2}$$

Notons que si $i \neq j$ (avec i et j assez grands) alors $\mathbf{z}_i$ et $\mathbf{z}_j$ sont linéairement indépendants. Soit $i = t_k + l$ avec $0 \leq l < s_{k+1}$ et k assez grand. Par définition des minima successifs, on déduit de ce qui précède, de l'assertion (b) de la Proposition 4.6.6 et de (4.7.1) que pour $q \in I_i = [a_i, b_i]$ on a

$$\mathrm{L}_1(q) + o(q_i) \leq \min(\mathrm{L}_{\mathbf{z}_i}(q), \mathrm{L}_{\mathbf{z}_{t_{k+1}}}(q)) = \mathrm{P}_1(q) + \mathcal{O}(1), \tag{4.7.3}$$

$$\mathrm{L}_2(q) + o(q_i) \leq \max(\mathrm{L}_{\mathbf{z}_i}(q), \mathrm{L}_{\mathbf{z}_{t_{k+1}}}(q)) = \mathrm{P}_2(q) + \mathcal{O}(1). \tag{4.7.4}$$

D'un autre côté, pour $q \in I_i$ on a aussi $\mathrm{L}^*_1(q) + o(q_i) \leq \mathrm{L}^*_{\mathbf{y}_i}(q)$. On sait que $\mathbf{y}_i$ est proportionnel au point minimal $\mathbf{v}_i$. Montrons que quand i tend vers l'infini on a pour tout $q \in I_i$:

$$\mathrm{L}^*_1(q) = \widehat{\mathrm{L}}^*_i(q) + o(q_i), \tag{4.7.5}$$

i.e. $\mathbf{y}_i$ réalise L^*_1 sur I_i à $o(q_i)$ près. En effet, soient $q \in I_i$ et $\mathbf{x} \neq 0$ (qui dépend de q *a priori*) tel que $\mathrm{L}^*_1(q) = \mathrm{L}^*_{\mathbf{x}}(q)$, et supposons que $\mathbf{y}_i$ n'est pas proportionnel à $\mathbf{x}$. Alors on a nécessairement $\mathrm{L}^*_{\mathbf{x}}(q) \leq \mathrm{L}^*_{\mathbf{y}_i}(q) + o(q_i)$, et on en déduit par définition des minima successifs que $\mathrm{L}^*_2(q) \leq \mathrm{L}^*_{\mathbf{y}_i}(q) + o(q_i)$. Donc, puisque $\mathrm{L}_2 = -\mathrm{L}^*_2 + \mathcal{O}(1)$ par la Proposition 1.6.6, on a l'inégalité

$$-\mathrm{L}^*_{\mathbf{y}_i}(q) + o(q_i) \leq \mathrm{L}_2(q).$$

Cette inégalité combinée avec l'inégalité (4.7.4) et l'assertion (b) de la Proposition 4.6.6 donne :

$$\mathrm{P}_3(q) = -\widehat{\mathrm{L}}_i^*(q) = -\mathrm{L}_{\mathbf{y}_i}^*(q) + \mathcal{O}(1) \leq \mathrm{P}_2(q) + o(q_i) \tag{4.7.6}$$

pour $q \in I_i$. Donc pour tout $\varepsilon > 0$ fixé assez petit, l'inégalité (4.7.6) est impossible pour i assez grand si $q \in [a_i + \varepsilon q_i, b_i - \varepsilon q_i]$. Donc si q est dans cet intervalle, on en déduit que $\mathbf{y}_i$ est proportionnel au vecteur $\mathbf{x}$ qui est nécessairement égal à $\mathbf{v}_i$, et cela prouve que $|\widehat{\mathrm{L}}_i^*(q) - \mathrm{L}_{\mathbf{x}}^*(q)| = |\widehat{\mathrm{L}}_i^*(q) - \mathrm{L}_1^*(q)| \leq o(q_i)$. Cette inégalité étant valable sur $[a_i + \varepsilon q_i, b_i - \varepsilon q_i]$, par caractère 1-lipschitzien de $\widehat{\mathrm{L}}_i^*$ et L_1^* on en déduit que pour tout $q \in I_i$, si i est assez grand on a

$$|\widehat{\mathrm{L}}_i^*(q) - \mathrm{L}_1^*(q)| \leq \varepsilon q_i,$$

ce qui prouve (4.7.5). Par la Proposition 1.6.6, ceci implique

$$\mathrm{L}_3(q) = -\widehat{\mathrm{L}}_i^*(q) + o(q_i),$$

pour $q \in I_i$. De (4.7.3), (4.7.4) et de l'inégalité précédente on tire

$$\mathrm{L}_j(q) \leq \mathrm{P}_j(q) + o(q_i) \quad \text{pour } j = 1, 2, 3.$$

pour tout $q \in I_i$. Par ailleurs par l'assertion (b) de la Proposition 1.6.5 et le point (a) de la Définition 1.6.8 d'un 3-système, ceci implique

$$\mathrm{L}_j(q) = \mathrm{P}_j(q) + o(q_i) \quad \text{pour } j = 1, 2, 3, \tag{4.7.7}$$

pour $q \in I_i$. Remarquons enfin que pour tout $q \in I_i$ on a $q_{i-1} < q < q_{i+1}$ et par (4.7.2) on peut remplacer le $o(q_i)$ par un $o(q)$. L'équation (4.7.7) prouve alors l'assertion (b) du Théorème.
L'assertion (a) découle de la croissance de L_1 et de (4.7.7). En effet, pour $i = t_k + l$ avec $0 < l \leq s_{k+1}$, on a (cf les Figures 4.1 et 4.2)

$$\mathrm{L}_1(b_{i-1}) + o(q_{i-1}) = \mathrm{P}_1(b_{i-1}) = \widehat{\mathrm{L}}_{t_{k+1}}(b_{i-1}) = \log(\widehat{W}_k),$$

et

$$\mathrm{L}_1(a_i) + o(q_i) = \mathrm{P}_1(a_i) = \widehat{\mathrm{L}}_{t_{k+1}}(a_i) = \log(\widehat{W}_k) = \mathrm{L}_1(b_{i-1}) + o(q_{i-1}),$$

donc par croissance de L_1 et P_1 on en déduit

$$\mathrm{L}_1(q) + o(q_{i+1}) = \mathrm{P}_1(q) \tag{4.7.8}$$

pour $q \in [b_i, a_{i+1}] = I_i'$, et comme les familles $(I_j)_j$ et $(I_j')_j$ recouvrent $[M, +\infty[$ pour M assez grand, cela prouve (a) (en remarquant que pour tout $q \in I_i'$ on a $q_i < q < q_{i+1}$ et que par (4.7.2) on peut remplacer le $o(q_{i+1})$ par un $o(q)$ dans (4.7.8)).
L'assertion (c) se déduit également de (4.7.7). En effet, ces égalités impliquent pour $q = b_j, a_{j+1}$:

$$\mathrm{L}_2(q) + o(q_{i+1}) = \mathrm{L}_3(q) + o(q_{i+1}) = \mathrm{P}_2(q) = \mathrm{P}_3(q)$$

et on conclut en remarquant que $\mathrm{L}_2, \mathrm{L}_3$ sont continues affines par morceaux de pente 0 ou 1 (et qu'on peut changer le $o(q_{i+1})$ en $o(q)$ par (4.7.2)). □

4.8 Application au calcul des exposants diophantiens de ξ

Le Théorème 4.7.1 et la preuve du Théorème 2.7.1 du Chapitre 2 impliquent le Théorème 4.8.1 suivant (voir la Définition 1.6.1 du Chapitre 2 avec $\mathbf{u} = (1, \xi, \xi^2)$ pour la définition des exposants paramétriques). Essentiellement, nous montrons que les exposants paramétriques de ξ sont de la forme de ceux d'un nombre ψ-sturmien propre (voir Théorème 2.7.1). Notons que nous donnons en plus la valeur de l'exposant κ^* pour δ assez petit (cet exposant n'était pas étudié dans le Chapitre 2). Dans cette partie nous démontrons le Théorème 4.1.1, puis à la fin nous prouvons le Théorème 4.1.3 énoncé dans l'introduction de ce chapitre.

Théorème 4.8.1. *Soit ξ un nombre réel tel que $\widehat{\lambda}_2(\xi) > \frac{1}{2}$. On suppose qu'il existe une fonction sturmienne $\psi \in \mathcal{F}_{stur}$ et une suite de points minimaux $(\mathbf{v}_i)_i$ associée à la famille $\mathcal{C}^*_{\mathbf{u}}(e^q)$ avec $\mathbf{u} = (1, \xi, \xi^2)$ telle que*

$$\mathbf{v}_{i+1} \propto \mathbf{v}_i \mathbf{v}_{\psi(i)}^{-1} \mathbf{v}_i$$

pour i assez grand. Alors il existe $\delta < \frac{\sigma}{1+\sigma}$ (où σ est défini par (4.4.4)) tel que $|\det(\mathbf{v}_i)| \asymp \|\mathbf{v}_i\|^{\delta+o(1)}$ et on a

$$\begin{aligned}
&\underline{\psi}_1 = \frac{\sigma}{(2-\delta)(1+\sigma)}, \quad \overline{\psi}_1 = \frac{1}{(1-\delta)(1+\sigma)+2}, \\
&\overline{\psi}_2 = \frac{1}{2+\sigma}, \\
&\underline{\psi}_3 = \frac{(1-\delta)(1+\sigma)}{1+2(1-\delta)(1+\sigma)}, \\
&\frac{1-\delta}{2-\delta} \leq \overline{\psi}_3 \leq \max\Big(\frac{1-\delta}{2-\delta}, \frac{1}{2-\delta+\sigma}\Big).
\end{aligned}$$

Si δ vérifie la condition plus forte $\delta < h(\sigma)$ avec

$$h(\sigma) = \frac{\sigma}{2} + 1 - \sqrt{\Big(\frac{\sigma}{2}\Big)^2 + 1},$$

alors on a

$$\overline{\psi}_3 = \frac{1-\delta}{2-\delta} \quad \textit{et} \quad \kappa^* = \frac{(\delta-1)(1+\sigma)}{1+(2-\delta)(1+\sigma)},$$

l'égalité de gauche étant encore vérifiée si $\delta = h(\sigma)$.

Preuve Nous ne donnons qu'une esquisse de preuve, sauf pour l'exposant κ^*, car les détails sont les mêmes qu'au chapitre 2 (en remplaçant les $\mathcal{O}(1)$ par des $o(q)$). On note $\mathbf{P} = (\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3)$ le 3-système du Théorème 4.7.1 et

$$\underline{\vartheta}_i = \liminf_{q\to+\infty} \frac{\mathrm{P}_i(q)}{q} \quad \text{et} \quad \overline{\vartheta}_i = \limsup_{q\to+\infty} \frac{\mathrm{P}_i(q)}{q},$$

pour $i = 1, 2, 3$. Le Théorème 4.7.1 et la preuve du Théorème 2.7.1 du Chapitre 2 montrent alors que

$$\underline{\psi}_i = \underline{\vartheta}_i \quad \text{et} \quad \overline{\psi}_i = \overline{\vartheta}_i$$

pour $i = 1, 2, 3$, sauf éventuellement pour $\underline{\psi}_2$ et $\overline{\psi}_3$ à cause des zones d'incertitude. Si $\delta < h(\sigma)$ on a $\overline{\psi}_3 = \overline{\vartheta}_3$. De plus

$$\begin{aligned}
&\underline{\vartheta}_1 = \frac{\sigma}{(2-\delta)(1+\sigma)}, \quad \overline{\vartheta}_1 = \frac{1}{(1-\delta)(1+\sigma)+2}, \\
&\overline{\vartheta}_2 = \frac{1}{2+\sigma}, \\
&\underline{\vartheta}_3 = \frac{(1-\delta)(1+\sigma)}{1+2(1-\delta)(1+\sigma)}, \\
&\frac{1-\delta}{2-\delta} \leq \overline{\vartheta}_3 \leq \max\left(\frac{1-\delta}{2-\delta}, \frac{1}{2-\delta+\sigma}\right).
\end{aligned}$$

Montrons maintenant que κ^* a bien la valeur annoncée. On conserve les notations de la Partie 4.6, notamment celles associées aux Définitions 4.6.4 et 4.6.7. La fonction $\mathbf{P}^* = (-\mathrm{P}_3, -\mathrm{P}_2, -\mathrm{P}_1) = (\mathrm{P}_1^*, \mathrm{P}_2^*, \mathrm{P}_3^*)$ est alors un 3-système dual dont le graphe est présenté à la Figure 4.7.

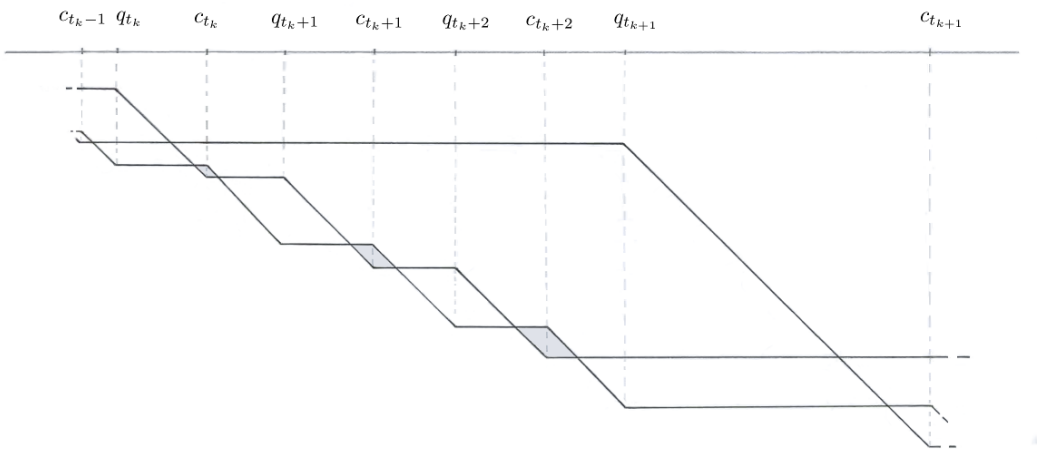

FIGURE 4.7 – Graphe conjoint du 3-système dual $\mathbf{P}^*$

Supposons $\delta < h(\sigma)$, ce qui se réécrit $\frac{1}{2-\delta+\sigma} < \frac{1-\delta}{2-\delta}$. Soit $\alpha > \underline{\psi}_1^*$ tel que

$$\underline{\psi}_1^* = -\frac{1-\delta}{2-\delta} < \alpha < -\frac{1}{2-\delta+\sigma} =: \alpha'. \tag{4.8.1}$$

Pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3$ non nul on note $q_{\mathbf{x}} = \log(\|\mathbf{x}\|) - \log(\|\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}\|)$ le point de changement de pente de la trajectoire de $\mathbf{x}$. Montrons que pour tout point minimal $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3$ avec $\|\mathbf{x}\|$ assez grande, on a $\mathbf{x} \in \mathcal{A}_\alpha^*$ si et seulement si $\mathbf{x}$ est l'un des $\mathbf{v}_i$. Autrement dit, pour tout q assez grand on a

$$\mathrm{L}_{1,\alpha}^*(q) = \min_{i \geq i_0} \mathrm{L}_{\mathbf{v}_i}^*(q). \tag{4.8.2}$$

Pour commencer, remarquons que d'après le Théorème 4.7.1 et (4.8.1) (et puisque le point q_i de la Définition 4.6.4 vérifie $q_i = q_{\mathbf{v}_i} + \mathcal{O}(1)$) on a pour i assez grand

$$\alpha(\mathbf{v}_i) = \frac{\mathrm{L}^*_{\mathbf{v}_i}(q_{\mathbf{v}_i})}{q_{\mathbf{v}_i}} \leq \frac{\mathrm{P}^*_1(q_i)}{q_i} + o(1) = -\frac{1-\delta}{2-\delta} + o(1) < \alpha,$$

donc $\mathbf{v}_i \in \mathcal{A}^*_\alpha$. Considérons maintenant un point minimal $\mathbf{x} \in \mathcal{A}^*_\alpha$ et i tel que $\|\mathbf{v}_i\| \leq \|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{v}_{i+1}\|$; en particulier on a $q_{\mathbf{v}_i} \leq q_{\mathbf{x}} \leq q_{\mathbf{v}_{i+1}}$. On note D_α la droite passant par l'origine et de pente α. On définit $q'_i < q''_i$ les points d'intersection du graphe de P^*_1 avec D_α qui sont situés dans le segment $[q_i, q_{i+1}]$. La situation est illustrée à la Figure 4.8 (comme $\liminf_{i\to+\infty} \frac{\mathrm{P}^*_1(c_i)}{c_i} = \alpha' > \alpha$, la zone d'incertitude – en gris – située entre q_i et q_{i+1} se trouve au-dessus de la droite D_α).

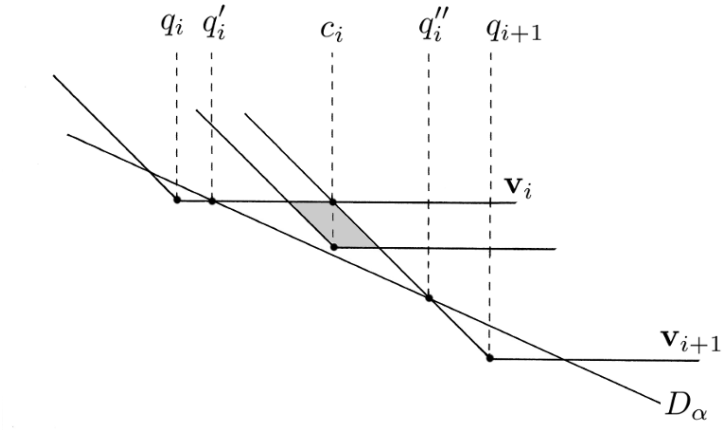

FIGURE 4.8 – Graphe conjoint de $\mathbf{P}^*$ par rapport à la droite D_α

Comme la trajectoire de $\mathbf{x}$ est au-dessus de $\mathrm{P}^*_1(q) - o(q)$ et que $\mathbf{x} \in \mathcal{A}^*_\alpha$, pour i assez grand on a $q_{\mathbf{x}} \notin [q'_i + o(q'_i), q''_i - o(q''_i)]$. Supposons par exemple que $q_i \leq q_{\mathbf{x}} \leq q'_i + o(q'_i)$. Alors au point q'_i on a

$$\max\left(\frac{\mathrm{L}^*_{\mathbf{x}}(q'_i)}{q'_i}, \frac{\mathrm{L}^*_{\mathbf{v}_i}(q'_i)}{q'_i}\right) \leq \frac{\mathrm{P}^*_1(q'_i)}{q'_i} + o(1) = \alpha + o(1) < \alpha' = \frac{1}{2+\sigma-\delta} \leq \frac{1}{2+\sigma} = \underline{\psi}^*_2$$

pour i assez grand. Donc nécessairement $\mathbf{x}$ et $\mathbf{v}_i$ sont colinéaires pour i assez grand, *i.e.* $\mathbf{x} = \pm\mathbf{v}_i$. De même, si $q_{\mathbf{x}} \in [q''_i + o(q''_i), q_{i+1} - o(q_{i+1})]$ on en déduit $\mathbf{x} = \mathbf{v}_{i+1}$ pour i assez grand.

Cela achève la démonstration de (4.8.2). Le graphe de $\mathrm{L}^*_{1,\alpha}$ à $o(q)$ près (pour α assez petit) est représenté à la Figure 4.9. Plus précisément, cette figure présente le graphe de la fonction $\min_j \widehat{\mathrm{L}}^*_j$ (rappelons que le graphe de $\widehat{\mathrm{L}}^*_j$ approche la trajectoire de $\mathbf{v}_j$ à $o(q)$ près, et que pour α assez petit la fonction $\mathrm{L}^*_{1,\alpha}$ est définie à partir des $\mathbf{v}_i$ uniquement). Les parties du graphe conjoint de $\mathrm{L}^*_{\mathbf{u}}$ qui sont ignorées sont représentées en pointillés.

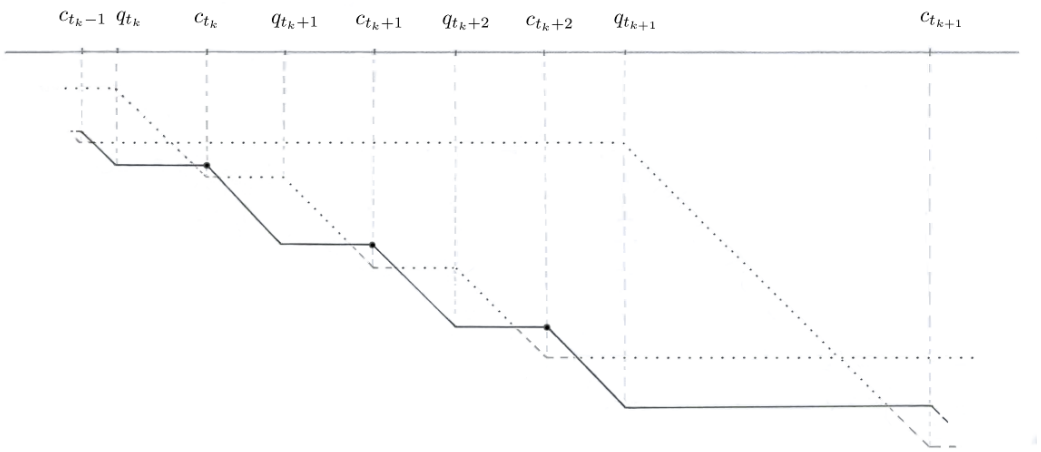

FIGURE 4.9 – Graphe de $\mathrm{L}^*_{1,\alpha}$ à $o(q)$ près

Pour calculer κ^*_α il suffit de se placer aux points c_i qui sont à $\mathcal{O}(1)$ près* les points d'intersection des trajectoires de $\mathbf{v}_i$ et $\mathbf{v}_{i+1}$. Si $i = t_k+l$ avec $0 \leq l < s_{k+1}$ alors l'expression suivante

$$\frac{\mathrm{P}^*_2(c_i)}{c_i} = \frac{\log(\mathcal{E}^*_i)}{q_i + \log(\widehat{W}_k)} = \frac{(\delta-1)\log(\widehat{Y}_i)}{(2-\delta)\log(\widehat{Y}_i) + \log(\widehat{W}_k)}$$

est décroissante en l (puisque $\log(\widehat{Y}_i) = (l+1)\log(\widehat{W}_k)+\log(\widehat{W}_{k-1})$ croît avec l) et est donc maximale pour $l = 0$. Cela implique en utilisant la formule $\log(\widehat{Y}_{t_k}) = \log(\widehat{W}_k)+\log(\widehat{W}_{k-1})$

$$\limsup_{i\to+\infty} \frac{\mathrm{P}^*_2(c_i)}{c_i} = \limsup_{k\to+\infty} \frac{(\delta-1)\Big(1+\frac{\log(\widehat{W}_{k-1})}{\log(\widehat{W}_k)}\Big)}{1+(2-\delta)\Big(1+\frac{\log(\widehat{W}_{k-1})}{\log(\widehat{W}_{k-1})}\Big)} = \frac{(\delta-1)(1+\sigma)}{1+(2-\delta)(1+\sigma)}.$$

De plus comme $\frac{\mathrm{L}^*_{\mathbf{v}_i}(c_i)}{c_i} = \frac{\mathrm{P}^*_2(c_i)}{c_i} + o(c_i)$, on en déduit par (4.8.2) et par définition de κ^*_α

$$\kappa^*_\alpha = \frac{(\delta-1)(1+\sigma)}{1+(2-\delta)(1+\sigma)},$$

d'où on déduit immédiatement $\kappa^* = \frac{(\delta-1)(1+\sigma)}{1+(2-\delta)(1+\sigma)}$. □

Prouvons maintenant les Théorèmes 4.1.1 et 4.1.3 énoncés dans l'introduction de ce chapitre.

∗. Remarquons qu'en général les $o(q)$ qui apparaissent viennent du fait que la trajectoire de $\mathbf{y}_i$ approche celle de $\mathbf{v}_i$ à $o(q)$ près... cependant, comme ces deux points sont colinéaires, ils ont exactement la même abscisse de changement de pente, qui est égale à c_i à $\mathcal{O}(1)$ près

Preuve du Théorème 4.1.1
Soit ξ un réel tel que $\beta_0(\xi) < 2$. D'après le Théorème 1.8.1 du Chapitre 1 il existe $(\mathbf{v}_i)_i$ une sous-suite de la suite des points minimaux attachés à $\mathcal{C}^*_{\mathbf{u}}(e^q)$ et une fonction ψ asymptotiquement réduite telles que $\mathbf{v}_{i+1}$ soit colinéaire à $\mathbf{v}_i\mathbf{v}_{\psi(i)}^{-1}\mathbf{v}_i$ pour tout i assez grand. De plus

$$\|\mathbf{v}_i \wedge \mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}_i\|^{-1+o(1)}, \tag{4.8.3}$$

et $\beta_0(\xi) = \delta(\psi)$. Supposons que ψ soit sturmienne (ce qui est automatiquement le cas si $\beta_0(\delta) = \delta(\psi) < \sqrt{3}$ d'après le Théorème 1.5.4). L'équation (4.8.3) implique que l'exposant δ du Théorème 4.8.1 est nul, donc en particulier $\delta = 0 < h(\sigma)$. Le Théorème 4.8.1 susmentionné implique alors que

$$\overline{\psi}_1^* = -\underline{\psi}_3 = -\frac{(1-\delta)(1+\sigma)}{1+2(1-\delta)(1+\sigma)} = -\frac{1+\sigma}{3+2\sigma} = -\frac{(1-\delta)(1+\sigma)}{1+(2-\delta)(1+\sigma)} = \kappa^*,$$

ce qui signifie exactement que $\beta_0(\xi) = \beta_1(\xi)$. □

Preuve du Théorème 4.1.3
Soit $\psi \in \mathcal{F}_{stur}$ la fonction sturmienne associée aux nombres de type Fibonacci (*i.e.* la suite $\underline{s}$ associée à ψ est définie par $s_i = 1$ pour tout $i \geq 1$). La constante σ associée est alors $\sigma = \frac{1}{\gamma}$. On pose

$$\Delta_\psi = \{\delta_{\underline{A}} \mid \underline{A} = (a,b,c) \text{ avec } a \geq 2,\ c \geq b \geq 1 \text{ et } \delta_{\underline{A}} < h(\sigma)\} \cup \{0\}$$

où $\delta_{\underline{A}}$ est défini comme dans la Partie 2.8.1 du Chapitre 2, et $h(\sigma)$ comme dans le Théorème 4.1.2. La Proposition 2.8.3 implique que Δ_ψ est dense dans $[0, h(\sigma)]$. D'après les Propositions 2.8.2 et 2.8.5, pour chaque $\delta \in \Delta_\psi$, il existe un nombre ψ-sturmien propre ξ tel que δ est le nombre associé à ξ par la Proposition 2.5.9. On conclut par le Théorème 4.8.1. □

4.9 Maximalité des déterminants

Les résultats de cette partie permettent de donner une estimation plus fine reliant $\det(\mathbf{v}_i)$, $\|\mathbf{v}_i\|$ et $\|\mathbf{v}_i \wedge \mathbf{u}\|$. Ils ne sont pas nécessaires pour calculer les exposants diophantiens associés à ξ, mais trouvent peut-être d'autres applications.

Fixons ξ un nombre réel qui n'est pas algébrique de degré ≤ 2, et notons $(\mathbf{u}_i)_{i\geq 0}$ la suite des points minimaux associés à la famille $\mathcal{C}^*_{\mathbf{u}}(e^q)$, avec $\mathbf{u} = (1, \xi, \xi^2)$. Dans le problème de l'approximation simultanée de $(1, \xi, \xi^2)$ par un vecteur $\mathbf{x}$, trois quantités importantes apparaissent naturellement : $\|\mathbf{x}\|$, $\|\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}\|$ et $\det(\mathbf{x})$. L'inégalité classique suivante donne une première relation les reliant (voir (2.6.1) du Chapitre 2 par exemple).

$$|\det(\mathbf{u}_i)| \ll \|\mathbf{u}_i\|\,\|\mathbf{u}_i \wedge \mathbf{u}\|. \tag{4.9.1}$$

La proposition suivante exprime une propriété forte des nombres de type sturmien et montre que les déterminants des points minimaux sont maximaux.

Proposition 4.9.1. *Si ξ est de type sturmien, alors les déterminants précédents sont maximaux, i.e.*

$$|\det(\mathbf{u}_i)| \asymp \|\mathbf{u}_i\|\,\|\mathbf{u}_i \wedge \mathbf{u}\|. \tag{4.9.2}$$

La Proposition suivante montre que cette maximalité est encore en partie vérifiée s'il existe une sous-suite de points minimaux $(\mathbf{v}_i)_i$ vérifiant que $\mathbf{v}_{i+1} \propto \mathbf{v}_i\mathbf{v}_{\psi(i)}^{-1}\mathbf{v}_i$.

Proposition 4.9.2. *Soit ξ un nombre réel tel que $\widehat{\lambda}_2(\xi) > \frac{1}{2}$. On suppose qu'il existe une fonction sturmienne $\psi \in \mathcal{F}_{stur}$ et une suite de points minimaux $(\mathbf{v}_i)_i$ associée à la famille $\mathcal{C}^*_{\mathbf{u}}(e^q)$ avec $\mathbf{u} = (1, \xi, \xi^2)$ telle que $\mathbf{v}_{i+1}$ soit proportionnel à $\mathbf{v}_i\mathbf{v}_{\psi(i)}^{-1}\mathbf{v}_i$ pour i assez grand. Alors les $|\det(\mathbf{v}_i)|$ sont maximaux :*

$$|\det(\mathbf{v}_i)| \asymp \|\mathbf{v}_i\|\|\mathbf{v}_i \wedge \mathbf{u}\|.$$

Les preuves des Propositions 4.9.1 et 4.9.2 sont présentées ci-dessous. Le Lemme 4.9.3 sert pour la preuve de la Proposition 4.9.2 uniquement.

Lemme 4.9.3. *Soit ξ un nombre réel tel que $\widehat{\lambda}_2(\xi) > \frac{1}{2}$. On suppose qu'il existe une fonction sturmienne $\psi \in \mathcal{F}_{stur}$ et une suite de points minimaux $(\mathbf{v}_i)_i$ associée à la famille $\mathcal{C}^*_{\mathbf{u}}(e^q)$ avec $\mathbf{u} = (1, \xi, \xi^2)$ telle que $\mathbf{v}_{i+1}$ soit proportionnel à $\mathbf{v}_i\mathbf{v}_{\psi(i)}^{-1}\mathbf{v}_i$ pour i assez grand. Alors pour i assez grand, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) Les vecteurs $\mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}$ sont linéairement indépendants.

(b) Il existe un entier k tel que $i = t_k$.

Preuve Voir aussi l'assertion (b) de la Proposition 7.6.3 du Chapitre 7 pour un énoncé dans le même esprit.
Remarquons que la condition $\widehat{\lambda}_2(\xi) > \frac{1}{2}$ assure que ξ est transcendant et que $\det(\mathbf{v}_i) \neq 0$ pour tout i assez grand (voir la Proposition 6.2.3 du Chapitre 6). On utilise le crochet de Roy défini pour $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ par

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] = -\mathbf{x}J\mathbf{z}J\mathbf{y}$$

(voir la Partie 1.5.2 du Chapitre 1). Avec ces notations et puisque $-J\mathbf{z}J = \det(\mathbf{z})\mathbf{z}^{-1}$ pour toute matrice $\mathbf{z}$ symétrique inversible, on a

$$\mathbf{v}_{i+1} \propto [\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{\psi(i)}]$$

pour tout i assez grand. En particulier d'après le Lemme 2.1 de [49]

$$\mathbf{v}_{\psi(i)}, \mathbf{v}_i \text{ et } \mathbf{v}_{i+1} \text{ sont linéairement dépendants.} \tag{4.9.3}$$

Si i n'est pas parmi les t_k, on a donc $\mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_i$ et $\mathbf{v}_{i+1}$ linéairement dépendants ce qui montre l'implication $(a) \Rightarrow (b)$.
Montrons $(b) \Rightarrow (a)$. Par l'absurde, supposons $\mathbf{v}_{t_k-1}, \mathbf{v}_{t_k}, \mathbf{v}_{t_k+1}$ linéairement dépendants. Alors la propriété (4.9.3) utilisée successivement avec $i = t_k + 1, \ldots, t_{k+1} - 1$ montre que l'espace vectoriel engendré par $\mathbf{v}_{t_k-1}, \mathbf{v}_{t_k}, \ldots, \mathbf{v}_{t_{k+1}}$ est de dimension 2. Le cas $i = t_{k+1}$ montre que $\mathbf{v}_{t_k-1}, \mathbf{v}_{t_{k+1}}, \mathbf{v}_{t_{k+1}+1}$ sont linéairement dépendants. Donc par ce qui précède et parce que $\mathbf{v}_{t_k-1}$ et $\mathbf{v}_{t_{k+1}}$ ne sont pas colinéaires, $\mathbf{v}_{t_{k+1}-1}, \mathbf{v}_{t_{k+1}}, \mathbf{v}_{t_{k+1}+1}$ sont linéairement dépendants. Par récurrence immédiate, on en déduit que l'espace vectoriel engendré par

les $\mathbf{v}_i$ pour $i \geq t_k - 1$ est de dimension 2. On conclut alors en utilisant des arguments similaires à ceux de Davenport et Schmidt [16] : il existe des entiers a, b, c non tous nuls tels qu'en posant $\mathbf{v}_i = (v_{i,0}, v_{i,1}, v_{i,2})$ on ait

$$v_{i,0}a + v_{i,1}b + v_{i,2}c = 0$$

pour i assez grand. En divisant par $v_{i,0}$ et en faisant tendre i vers l'infini on trouve

$$a + b\xi + c\xi^2 = 0,$$

ce qui contredit le fait que ξ n'est pas algébrique de degré ≤ 2. Donc on a bien $\mathbf{v}_{t_k-1}, \mathbf{v}_{t_k}, \mathbf{v}_{t_k+1}$ linéairement indépendants, ce qui achève la démonstration de l'équivalence entre (a) et (b). □

Preuve de la Proposition 4.9.1
Montrons que si ξ est de type sturmien alors les déterminants sont maximaux. On note $(\mathbf{y}_i)_i$ la suite définie par (4.4.1) et pour tout i on écrit $\mathbf{y}_i = (y_{i,0}, y_{i,1}, y_{i,2})$. Cette suite est une sous-suite de la suite des points minimaux $(\mathbf{u}_i)_i$ associée à $\mathbf{y} = (1, \xi, \xi^2)$. D'après le Corollaire 2.6.6 du Chapitre 2 on a $|\det(\mathbf{y}_i)| \asymp \|\mathbf{y}_i\| \, \|\mathbf{y}_i \wedge \mathbf{y}\|$.
Soit $\mathbf{v}$ un point minimal associé à $\mathbf{y}$ qui n'est pas parmi les $\mathbf{y}_i$. Soit i tel que $\|\mathbf{y}_i\| < \|\mathbf{v}\| < \|\mathbf{y}_{i+1}\|$. D'après la Proposition 2.7.12 du Chapitre 2 il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ vérifiant $\frac{1}{|\det(\mathbf{y}_i)|} \ll |\alpha|, |\beta| \ll 1$ et tels que

$$\mathbf{v} = \alpha\mathbf{y}_i + \beta\mathbf{y}_{i+1}.$$

On a alors la formule

$$\det(\mathbf{v}) = \alpha^2 \det(\mathbf{y}_i) + \beta^2 \det(\mathbf{y}_{i+1}) + \alpha\beta\Big(\begin{vmatrix} y_{i,0} & y_{i+1,1} \\ y_{i,1} & y_{i+1,2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_{i+1,0} & y_{i,1} \\ y_{i+1,1} & y_{i,2} \end{vmatrix} \Big). \tag{4.9.4}$$

Montrons que le terme dominant du membre de droite est le dernier terme en $\alpha\beta$. Pour cela écrivons

$$\mathrm{L}_i^{(1)} = y_{i,0}\xi - y_{i,1} \quad \text{et} \quad \mathrm{L}_i^{(2)} = y_{i,0}\xi^2 - y_{i,2}.$$

On a l'estimation $\|\mathbf{y}_i \wedge \mathbf{y}\| \asymp \max(|\mathrm{L}_i^{(1)}|, |\mathrm{L}_i^{(2)}|)$. De plus remarquons que

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{y}_i) = \begin{vmatrix} y_{i,0} & y_{i,1} \\ y_{i,1} & y_{i,2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_{i,0} & y_{i,1} \\ -\mathrm{L}_i^{(1)} & -\mathrm{L}_i^{(2)} + \xi\mathrm{L}_i^{(1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_{i,0} & \xi y_{i,0} - \mathrm{L}_i^{(1)} \\ -\mathrm{L}_i^{(1)} & -\mathrm{L}_i^{(2)} + \xi\mathrm{L}_i^{(1)} \end{vmatrix} \\ = y_{i,0}(2\xi\mathrm{L}_i^{(1)} - \mathrm{L}_i^{(2)}) + \mathcal{O}(\|\mathbf{y}_i \wedge \mathbf{y}\|^2). \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} y_{i,0} & y_{i+1,1} \\ y_{i,1} & y_{i+1,2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_{i+1,0} & y_{i,1} \\ y_{i+1,1} & y_{i,2} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} y_{i,0} & \xi y_{i+1,0} - \mathrm{L}_{i+1}^{(1)} \\ -\mathrm{L}_i^{(1)} & -\mathrm{L}_{i+1}^{(2)} + \xi\mathrm{L}_{i+1}^{(1)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_{i+1,0} & y_{i,1} \\ -\mathrm{L}_{i+1}^{(1)} & -\mathrm{L}_i^{(2)} + \xi\mathrm{L}_i^{(1)} \end{vmatrix} \\ &= y_{i+1,0}(2\xi\mathrm{L}_i^{(1)} - \mathrm{L}_i^{(2)}) + \mathcal{O}\Big(\|\mathbf{y}_i\| \, \|\mathbf{y}_{i+1} \wedge \mathbf{y}\|\Big) \\ &\sim \frac{\det(\mathbf{y}_i) y_{i+1,0}}{y_{i,0}}. \end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de montrer les deux estimations

$$\alpha^2 \det(\mathbf{y}_i) = o\Big(|\alpha\beta \det(\mathbf{y}_i)| \frac{\|\mathbf{y}_{i+1}\|}{\|\mathbf{y}_i\|}\Big) \tag{4.9.5}$$

et

$$\beta^2 \det(\mathbf{y}_{i+1}) = o\Big(|\alpha\beta \det(\mathbf{y}_i)| \frac{\|\mathbf{y}_{i+1}\|}{\|\mathbf{y}_i\|}\Big). \tag{4.9.6}$$

Rappelons qu'on a les estimations $|\det(\mathbf{y}_i)| \asymp \|\mathbf{y}_i\|^\delta$ (voir Proposition 2.5.9), $\|\mathbf{y}_{i+1}\| \gg \|\mathbf{y}_i\|^\gamma$ (voir (2.7.15) du Chapitre 2) et que $\delta < \frac{\sigma}{1+\sigma} \leq 1/\gamma^2$ (voir (2.7.15) et le paragraphe après (2.7.15)). Pour (4.9.5), il suffit de remarquer que d'un côté on a

$$|\alpha\beta \det(\mathbf{y}_i)| \frac{\|\mathbf{y}_{i+1}\|}{\|\mathbf{y}_i\|} \gg |\alpha| \|\mathbf{y}_i\|^{\gamma-1}$$

et de l'autre $\alpha^2 |\det(\mathbf{y}_i)| \ll |\alpha| \, \|\mathbf{y}_i\|^\delta$. On conclut en remarquant que $\delta < 1/\gamma^2 < \gamma - 1$. Montrons (4.9.6). On a

$$\frac{\beta^2 |\det(\mathbf{y}_{i+1})|}{|\alpha\beta \det(\mathbf{y}_i)| \frac{\|\mathbf{y}_{i+1}\|}{\|\mathbf{y}_i\|}} \ll \frac{|\det(\mathbf{y}_{i+1})| \|\mathbf{y}_i\|}{\|\mathbf{y}_{i+1}\|} \asymp \frac{\|\mathbf{y}_i\|}{\|\mathbf{y}_{i+1}\|^{1-\delta}} \ll \|\mathbf{y}_i\|^{1-\gamma(1-\delta)}.$$

Or on a $1 - \gamma(1-\delta) < 1 - \gamma(1 - 1/\gamma^2) = 0$, donc le membre de droite de la dernière inégalité tend vers 0 lorsque i tend vers l'infini. D'où (4.9.6). Finalement par (4.9.4) (et puisque $|\det(\mathbf{y}_i)| \asymp \|\mathbf{y}_i\| \, \|\mathbf{y}_i \wedge \mathbf{y}\|$), cela fournit l'estimation

$$|\det(\mathbf{v})| \asymp |\alpha\beta| \|\mathbf{y}_{i+1}\| \, \|\mathbf{y}_i \wedge \mathbf{y}\|.$$

Or d'après la Proposition 2.7.12 on a $\|\mathbf{v}\| \asymp |\beta| \|\mathbf{y}_{i+1}\|$ et $\|\mathbf{v} \wedge \mathbf{y}\| \asymp |\alpha| \|\mathbf{y}_i \wedge \mathbf{y}\|$, donc finalement on trouve bien $|\det(\mathbf{v})| \asymp \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{v} \wedge \mathbf{y}\|$, *i.e.* le déterminant de $\mathbf{v}$ est maximal. □

Preuve de la Proposition 4.9.2
La condition $\widehat{\lambda}_2(\xi) > 1/2$ assure que $\det(\mathbf{v}_i) \neq 0$ pour i assez grand (voir la Proposition 6.2.3 du Chapitre 6). On note $(t_k)_k$, $(s_k)_k$ les suites associées à ψ. On définit $(\mathbf{y}_i)_i$ et $(\mathbf{w}_k)_k$ comme dans la Définition 4.5.4 avec $\mathbf{u}_i = \mathbf{v}_i$. On note N la matrice définie dans la Proposition 4.5.8 (qui est proportionnelle à un élément de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$). Comme les points minimaux sont deux à deux linéairement indépendants, par la Proposition 4.5.8 la matrice N n'est pas proportionnelle à la matrice J. Soit $i = t_k + l$ avec $0 \leq l < s_{k+1}$. On a d'après la Proposition 4.5.5

$$\mathbf{y}_{t_{k+2}} \mathbf{y}_i^{-1} = (\mathbf{y}_{t_{k+2}} \mathbf{y}_{t_{k+1}-1}^{-1})(\mathbf{y}_{t_{k+1}-1} \mathbf{y}_i^{-1}) = \mathbf{w}_{k+2} \mathbf{w}_k^{t_{k+1}-1-i}.$$

En utilisant (4.5.8) et puisque N n'est pas proportionnelle à J, on a alors d'après le Corollaire 4.5.11

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y}_{t_{k+2}}\| = \|\mathbf{w}_{k+2} \mathbf{w}_k^{t_{k+1}-1-i} \mathbf{y}_i\| &\asymp \|\mathbf{w}_{k+2}\| \, \|\mathbf{w}_k^{t_{k+1}-1-i}\| \, \|\mathbf{y}_i\| \\ &\asymp \|\mathbf{w}_{k+2} \mathbf{w}_k^{t_{k+1}-1-i}\| \, \|\mathbf{y}_i\|, \end{aligned}$$

ce qui implique $\|\mathbf{y}_{t_{k+2}}\mathbf{y}_i^{-1}\| = \|\mathbf{w}_{k+2}\mathbf{w}_k^{t_{k+1}-1-i}\| \asymp \|\mathbf{y}_{t_{k+2}}\|\,\|\mathbf{y}_i\|^{-1}$, et donc par définition des $\mathbf{y}_i$

$$\|\mathbf{v}_{t_{k+2}}\mathbf{v}_i^{-1}\| \asymp \|\mathbf{v}_{t_{k+2}}\|\,\|\mathbf{v}_i\|^{-1}. \tag{4.9.7}$$

Afin d'estimer $\|\mathbf{v}_{t_{k+2}}\mathbf{v}_i^{-1}\|$ d'une autre manière, montrons que

$$\|\mathbf{v}_i\|\|\mathbf{v}_{t_{k+2}}\wedge\mathbf{u}\| = o\Big(\|\mathbf{v}_{t_{k+2}}\|\|\mathbf{v}_i\wedge\mathbf{u}\|\Big). \tag{4.9.8}$$

Supposons qu'il existe $c>0$ tel que $\|\mathbf{v}_i\|\|\mathbf{v}_{t_{k+2}}\wedge\mathbf{u}\| > c\|\mathbf{v}_{t_{k+2}}\|\|\mathbf{v}_i\wedge\mathbf{u}\|$ pour une infinité de i. Alors par définition des points minimaux cela implique $\|\mathbf{v}_i\| > c\|\mathbf{v}_{t_{k+2}}\|$ et $\|\mathbf{v}_{t_{k+2}}\wedge\mathbf{u}\| > c\|\mathbf{v}_i\wedge\mathbf{u}\|$. On en déduit aussi puisque $i = t_k + l$ avec $0 \leq l < s_{k+1}$ que

$$\|\mathbf{v}_{t_{k+1}+1}\| > \|\mathbf{v}_{t_{k+1}}\| > \|\mathbf{v}_{t_{k+1}-1}\| > c\|\mathbf{v}_{t_{k+1}+1}\|,$$

et

$$\|\mathbf{v}_{t_{k+1}+1}\wedge\mathbf{u}\| < \|\mathbf{v}_{t_{k+1}}\wedge\mathbf{u}\| < \|\mathbf{v}_{t_{k+1}-1}\wedge\mathbf{u}\| < \frac{1}{c}\|\mathbf{v}_{t_{k+1}+1}\wedge\mathbf{u}\|.$$

Cela signifie que les trajectoires des trois vecteurs $\mathbf{v}_{t_{k+1}-1}, \mathbf{v}_{t_{k+1}}, \mathbf{v}_{t_{k+1}+1}$ sont égales à $\mathcal{O}(1)$ près pour une infinité de k. Or ces trois vecteurs sont linéairement indépendants par le Lemme 4.9.3. En notant $\overline{\psi}_i^*, \underline{\psi}_i^*$ $(i=1,2,3)$ les exposants paramétriques associés à $\mathcal{C}_{\mathbf{u}}^*(e^q)$ (voir la Partie 1.6 du Chapitre 1 pour les notations et définitions de la géométrie paramétrique des nombres) on en déduit que $\overline{\psi}_1^* = \underline{\psi}_3^* = -\frac{1}{3}$. En effet, en se plaçant aux points q_k de changement de pente de la trajectoire de $\mathbf{v}_{t_{k+1}}$, on obtient $\mathrm{L}_1^*(q_k) = \mathrm{L}_3^*(q_k) + \mathcal{O}(1)$, donc $\overline{\psi}_1^* \geq \underline{\psi}_3^*$, et on conclut en utilisant le fait qu'on a toujours $\overline{\psi}_1^* \leq -\frac{1}{3} \leq \underline{\psi}_3^*$. Or, $\overline{\psi}_1^* = -\frac{1}{3}$ est équivalent à $\widehat{\lambda}_2(\xi) = \frac{1}{2}$ par la Proposition 2.7.6 (rappelons que $\overline{\psi}_1^* = -\underline{\psi}_3$) : contradiction. Donc on a bien (4.9.8).
Pour conclure, on raisonne comme dans la preuve du Lemme 2.6.7. Pour tout j, on écrit $\mathbf{v}_j = (v_{0,j}, v_{1,j}, v_{2,j})$ et on pose

$$\mathrm{L}_j^{(1)} = v_{0,j}\xi - v_{1,j} \quad \text{et} \quad \mathrm{L}_j^{(2)} = v_{0,j}\xi^2 - v_{2,j}.$$

On écrit $\mathbf{w} := \det(\mathbf{v}_i)\mathbf{v}_{t_{k+2}}\mathbf{v}_i^{-1} = \begin{pmatrix} w_{0,0} & w_{0,1} \\ w_{1,0} & w_{1,1} \end{pmatrix}$. On a d'après (2.6.9)

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} v_{0,t_{k+2}}\Big(\xi\mathrm{L}_i^{(1)} - \mathrm{L}_i^{(2)}\Big) + v_{1,i}\mathrm{L}_{t_{k+2}}^{(1)} & v_{0,t_{k+2}}\mathrm{L}_i^{(1)} - v_{0,i}\mathrm{L}_{t_{k+2}}^{(1)} \\ v_{1,t_{k+2}}\Big(\xi\mathrm{L}_i^{(1)} - \mathrm{L}_i^{(2)}\Big) + v_{1,i}\Big(\mathrm{L}_{t_{k+2}}^{(2)} - \xi\mathrm{L}_{t_{k+2}}^{(1)}\Big) & v_{1,t_{k+2}}\mathrm{L}_i^{(1)} - v_{0,i}\Big(\mathrm{L}_{t_{k+2}}^{(2)} - \xi\mathrm{L}_{t_{k+2}}^{(1)}\Big) \end{pmatrix}.$$

Grâce à (4.9.8) on peut raisonner comme dans la preuve du Lemme 2.6.7 : en considérant les coefficients $w_{1,0}$ et $w_{0,1}$ on obtient alors $\|\mathbf{w}\|_\infty \asymp \|\mathbf{v}_{t_{k+2}}\|_\infty\,\|\mathbf{v}_i\wedge\mathbf{u}\|_\infty$, d'où on déduit immédiatement

$$\|\mathbf{w}\| \asymp \|\mathbf{v}_{t_{k+2}}\|\,\|\mathbf{v}_i\wedge\mathbf{u}\|.$$

En combinant cette dernière estimation avec (4.9.7) on obtient finalement

$$|\det(\mathbf{v}_i)| \asymp \|\mathbf{v}_i\|\,\|\mathbf{v}_i\wedge\mathbf{u}\|.$$

□

Chapitre 5

3-systèmes ne représentant aucun réel ξ

5.1 Introduction et résultat principal

Dans son article [55] Roy donne une description complète de l'ensemble des n-systèmes associés à un n-uplet non nul de $\mathbb{R}^n$ (voir Théorème 1.6.1 du Chapitre 2) : à tout n-système correspond au moins un n-uplet de $\mathbb{R}^n$ (et réciproquement). Cela lui a permis de décrire les spectres de certaines familles d'exposants diophantiens (voir [56]) en construisant des n-systèmes idoines et en en déduisant l'existence de n-uplets aux exposants prescrits. Une question arrive alors naturellement : peut-on décrire (même partiellement) l'ensemble des n-systèmes associés à une famille plus restreinte de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, par exemple l'ensemble des points d'une sous-variété algébrique de $\mathbb{R}^n$? Un cas particulier qui a été beaucoup étudié ces dernières années (et qui est déjà très difficile) est le cas de la courbe de Véronèse $\mathcal{C}_n = \{(1, \xi, \xi^2, \dots, \xi^n) \mid \xi \in \mathbb{R}\}$. Même dans le cas $n = 2$ on ne sait pas décrire entièrement les spectres des exposants $\widehat{\lambda}_2$ et $\widehat{\omega}_2$, et on connaît peu de réels ξ pour lesquels on sache décrire le 3-système associé. Essentiellement on trouve les nombres de type sturmien (voir Chapitre 2) qui, rappelons-le, généralisent à la fois les nombres de type Fibonacci de Roy [51] et les fractions sturmiennes de Bugeaud et Laurent [8] (voir Propositions 2.7.5, 2.7.9 et Figure 2.2).

Soit $\xi \in \mathbb{R}$. On pose $\mathbf{u} = (1, \xi, \xi^2)$. Rappelons qu'on dit qu'un 3-système $\mathbf{P}$ sur $[q_0, +\infty[$ (resp. un 3-système dual $\mathbf{P}$ sur $[q_0, +\infty[$) *représente* ξ, si $\|\mathbf{L}_\mathbf{u} - \mathbf{P}\|_\infty$ (resp. $\|\mathbf{L}^*_\mathbf{u} - \mathbf{P}\|_\infty$) est bornée sur $[q_0, +\infty[$ (voir Définition 1.8.1 du Chapitre 1). Si $\mathbf{P} = (\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3)$ est un 3-système et qu'on note $\mathrm{P}^* = (-\mathrm{P}_3, -\mathrm{P}_2, -\mathrm{P}_1)$ le 3-système dual correspondant, alors $\mathbf{P}$ représente ξ si et seulement si $\mathbf{P}^*$ représente ξ. Une première méthode pour obtenir des 3-systèmes qui ne représentent aucun réel ξ est d'utiliser la Proposition 0.2.1 (voir aussi la remarque qui la suit). Ce résultat assure que si $\widehat{\lambda}_2(\xi)$ est strictement plus grand que la valeur générique $\frac{1}{2}$ alors nécessairement $\lambda_2(\xi) \leq 1$, ce qui se réécrit en termes d'exposants paramétriques : $\overline{\psi}_1^* < -\frac{1}{3} \Rightarrow \underline{\psi}_1^* \geq -\frac{1}{2}$. Autrement dit, si $\underline{\psi}_1^* < -\frac{1}{2}$ alors nécessairement $\overline{\psi}_1^* = -\frac{1}{3}$. Si un 3-système dual $\mathbf{P} = (\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3)$ vérifie $\liminf_{q\to+\infty} \frac{\mathrm{P}_1(q)}{q} < -\frac{1}{2}$ et $\limsup_{q\to+\infty} \frac{\mathrm{P}_1(q)}{q} < -\frac{1}{3}$, alors $\mathbf{P}$ ne peut pas représenter un réel ξ. On peut construire de tels 3-systèmes qui constituent des exemples de 3-systèmes qui ne représentent aucun réel

et qu'on appelle "exemples triviaux". Le but de cette partie est de construire des exemples "non triviaux" de 3-systèmes ne représentant aucun réel ξ (plus précisément, par "non triviaux" nous entendons "$\mathcal{C}_2$-incompatibles non triviaux" ; voir la Définition 5.2.2). Le Théorème 5.1.1 ci-dessous s'obtient à l'aide notamment du Théorème 1.5.5. Ce théorème correspond au Théorème J de l'introduction de cette thèse, à ceci près qu'il est énoncé pour des 3-systèmes duaux.

Théorème 5.1.1. *Il existe un ensemble Δ non dénombrable et dense dans l'intervalle $[-\frac{\sqrt{3}-1}{2}, -\frac{1}{3}] \subset [-\frac{1}{\gamma^2}, -\frac{1}{3}]$ tel que pour tout $\psi \in \Delta$ il existe un 3-système dual $\mathbf{P} = (\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3)$ vérifiant*

$$\liminf_{q\to+\infty} \frac{\mathrm{P}_1(q)}{q} = -\frac{1}{2} \quad \textit{et} \quad \limsup_{q\to+\infty} \frac{\mathrm{P}_1(q)}{q} = \psi$$

et qui ne représente aucun réel ξ.

Notons qu'un 3-système dual $\mathbf{P}$ représentant un réel ξ vérifie toujours $\limsup_{q\to+\infty} \frac{\mathrm{P}_1(q)}{q} \in [-\frac{1}{\gamma^2}, -\frac{1}{3}]$.

Pour montrer le Théorème 5.1.1, nous utilisons l'exposant paramétrique κ^* (voir Définition 4.3.1) qui est le pendant paramétrique de l'exposant β_0 de Fischler. Pour les nombres ξ tels que $\lambda_2(\xi) = 1$ on a

$$\kappa^*(\xi) = -\frac{1}{\beta_0(\xi) + 1}.$$

L'exposant κ^* peut être défini pour n'importe quel 3-système dual $\mathbf{P}$ (bien que nous restreignions ici sa définition aux 3-systèmes représentant un réel ξ). Étant donné un nombre α vérifiant $-\frac{1}{\gamma^2} < \alpha < -\frac{1}{3}$, il existe toujours un 3-système dual $\mathbf{P}$ dont l'exposant κ^* associé est égal à α, et nous en construisons des exemples explicites. Or, les travaux de Fischler [23] montrent que pour un réel ξ donné (tel que $\widehat{\lambda}_2(\xi) = 1$, mais nos constructions prennent en compte cette contrainte), l'exposant κ^* appartient à un ensemble particulier (voir par exemple le Théorème 1.5.5 du Chapitre 1). Cette propriété permet d'obtenir des 3-systèmes (duaux) qui ne représentent aucun ξ.

Dans la suite, on utilisera librement les définitions de la géométrie paramétrique des nombres (voir Partie 1.6 du Chapitre 1 pour des rappels à ce sujet).

5.2 Preuve du Théorème 5.1.1

A l'aide de l'exposant β_0 nous sommes en mesure de construire une infinité (non dénombrable) de 3-systèmes (duaux) $\mathcal{C}_2$-incompatibles non triviaux au sens suivant.

Définition 5.2.1. On note $\mathcal{C}_2$ la courbe de Véronèse de $\mathbb{R}^3$, *i.e.* l'ensemble des triplets de la forme $(1, \xi, \xi^2)$. On dit qu'un 3-système $\mathbf{P}$ (resp. un 3-système dual) est *$\mathcal{C}_2$-incompatible* s'il n'existe aucun $\mathbf{u} \in \mathcal{C}_2$ tel que $\|\mathbf{L}_\mathbf{u} - \mathbf{P}\|_\infty$ (resp. $\|\mathbf{L}^*_\mathbf{u} - \mathbf{P}\|_\infty$) soit borné lorsque q tend vers l'infini (autrement dit, $\mathbf{P}$ est $\mathcal{C}_2$-incompatible s'il ne représente aucun réel ξ).

Définition 5.2.2. Un 3-système dual $\mathbf{P} = (\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3)$ $\mathcal{C}_2$-incompatible est dit *trivial* s'il vérifie

$$\limsup_{q\to+\infty} \frac{\mathrm{P}_1(q)}{q} < -\frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \liminf_{q\to+\infty} \frac{\mathrm{P}_1(q)}{q} < -\frac{1}{2} \tag{5.2.1}$$

La définition de 3-systèmes $\mathcal{C}_2$-incompatibles triviaux est motivée par le fait que tout 3-système dual vérifiant (5.2.1) est $\mathcal{C}_2$-incompatible. En effet pour tout ξ tel que $\overline{\psi}_1^* < -\frac{1}{3}$ on a $\underline{\psi}_1^* \geq -\frac{1}{2}$; voir la Proposition 0.2.1 et la remarque qui la suit.

La construction de 3-systèmes (duaux) $\mathcal{C}_2$-incompatibles non triviaux que nous allons présenter s'inspire directement de la construction des n-systèmes rigides et des canevas de maille δ de Roy (cf [55, Sect. 1]).
Soit α un réel, $-\frac{1}{\gamma^2} < \alpha < -\frac{1}{3}$. On a $-\frac{1}{2} < -(1+\alpha)^2 < \alpha$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$q_{2k} = \Big(-\frac{1}{\alpha} - 1\Big)^k \quad \text{et} \quad q_{2k+1} = -\frac{q_{2k}}{2\alpha}.$$

La suite $(q_k)_{k\geq 0}$ est strictement croissante et diverge vers $+\infty$.
Pour tout $k \geq 0$, on définit un point $\mathbf{a}^{(k)} = (a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, a_3^{(k)}) \in \mathbb{R}^3$ par

$$\mathbf{a}^{(2k)} = \Big(-\frac{1}{2}q_{2k}, -\frac{(1+\alpha)}{2}q_{2k}, \frac{\alpha}{2}q_{2k}\Big),$$

et

$$\mathbf{a}^{(2k+1)} = \Big(\frac{(1+\alpha)^2}{2\alpha}q_{2k}, a_1^{(2k)}, a_2^{(2k)}\Big).$$

On peut vérifier que nos hypothèses sur α entraînent que pour tout k on a

$$a_1^{(k)} < a_2^{(k)} < a_3^{(k)} \quad \text{et} \quad a_1^{(k)} + a_2^{(k)} + a_3^{(k)} = -q_k.$$

On pose $\Delta = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x_1 \leq x_2 \leq x_3\}$ et

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \to \Delta$$

l'application continue qui réarrange les coordonnées d'un vecteur dans l'ordre croissant. On définit alors le 3-système dual $\mathbf{P}_\alpha = (\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3)$ par

$$\mathbf{P}_\alpha(q) = \begin{cases} \Phi\Big(a_1^{(2k)}, a_2^{(2k)}, a_3^{(2k)} - q + q_{2k}\Big) & \text{si } q_{2k} \leq q < q_{2k+1} \\ \Phi\Big(a_1^{(2k+1)}, a_2^{(2k+1)} - q + q_{2k+1}, a_3^{(2k+1)}\Big) & \text{si } q_{2k+1} \leq q < q_{2k+2}. \end{cases}$$

La fonction $\mathbf{P}_\alpha$ est bien un 3-système dual dont le graphe conjoint est représenté à la Figure 5.1. Par ordre de pente décroissante : la première droite en gras passe par l'origine et a pour pente α. La seconde droite en pointillés passe par l'origine et a pour pente $-(1+\alpha)^2$. Enfin la dernière droite en trait fin a pour pente $-\frac{1}{2}$.

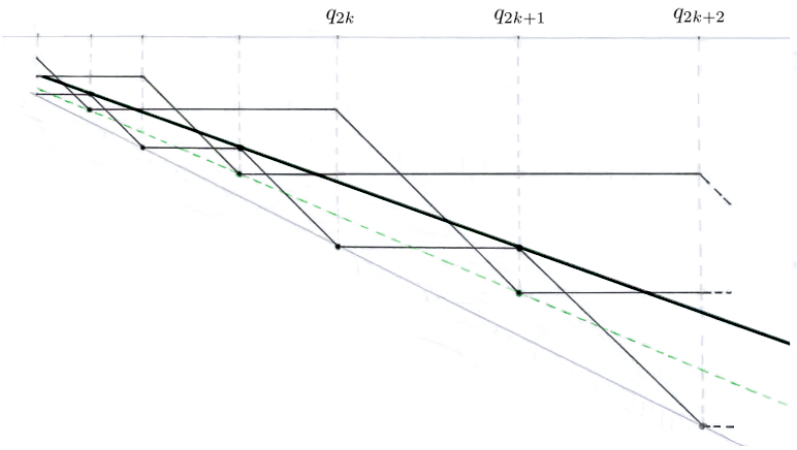

FIGURE 5.1 – 3-système dual $\mathbf{P}_\alpha$

Il est immédiat que

$$\liminf_{q\to+\infty} \frac{\mathrm{P}_1(q)}{q} = -\frac{1}{2}.$$

Montrons que si $\mathbf{P}_\alpha$ représentait le 3-système dual d'un certain réel ξ, alors on aurait

$$\kappa^*(\xi) = \alpha.$$

En effet, si $\mathbf{P}_\alpha$ représente ξ, alors pour tout $\alpha' < -(1+\alpha)^2$ (où $-(1+\alpha)^2$ est la pente de la droite en pointillés), à $\mathcal{O}(1)$ près le graphe de la fonction $\mathrm{L}^*_{1,\alpha'}$ associée à $\mathbf{u} = (1, \xi, \xi^2)$ est celui présenté à la Figure 5.2. Rappelons que la fonction $\mathrm{L}^*_{1,\alpha}$ est définie dans la Partie 4.3 du Chapitre 4.

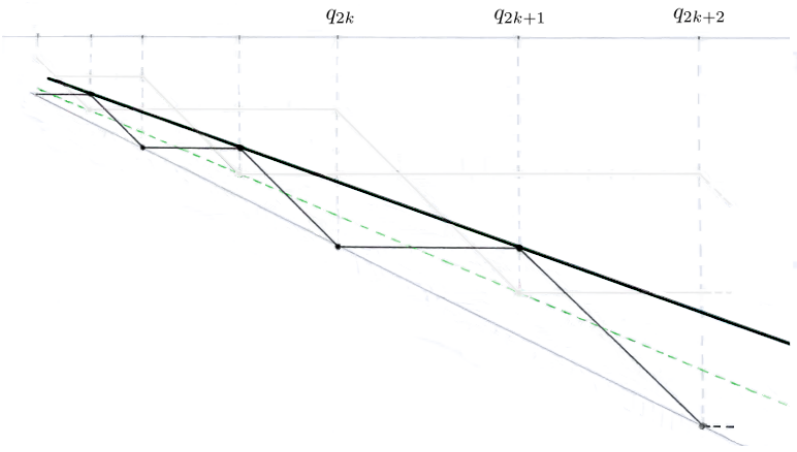

FIGURE 5.2 – graphe de $\mathrm{L}^*_{1,\alpha'}$ pour $\alpha' < -(1+\alpha)^2$

On a donc $\kappa^*_{\alpha'}(\xi) = \alpha$ pour tout $\alpha' < -(1+\alpha)^2$, et par suite $\kappa^*(\xi) = \alpha$. D'après la Proposition 4.3.3, cela signifie que $\beta_0(\xi) = -1 - \frac{1}{\alpha}$, *i.e.* $\alpha = -\frac{1}{\beta_0(\xi)+1}$.
Rappelons que dans la Partie 1.5.3 du Chapitre 1 on a posé

$$\mathcal{S}_0 = \{\beta_0(\xi) \mid \xi \text{ n'est pas algébrique de degré} \leq 2\}.$$

Le Théorème 1.5.5 montre que

$$\mathcal{S}_0 \cap [\gamma, \sqrt{3}[= \mathcal{S}' \cap [\gamma, \sqrt{3}[,$$

où $\mathcal{S}'$ est lié aux fonctions sturmiennes (voir Définition 1.5.7 du Chapitre 1). Cassaigne a montré dans [13] que l'ensemble $\mathcal{S}'$ est d'intérieur vide (voir aussi la dernière remarque de [8]). En particulier, l'ensemble $[\gamma, \sqrt{3}[\setminus \mathcal{S}_0$ est dense dans $[\gamma, \sqrt{3}[$. Cette remarque et la Proposition suivante (qui est une conséquence du Théorème 1.5.5) impliquent le Théorème 5.1.1.

Proposition 5.2.3. *Pour tout $\alpha = -\frac{1}{1+\beta}$ avec $\beta \in [\gamma, \sqrt{3}[\setminus \mathcal{S}_0$ le 3-système dual $\mathbf{P}_\alpha$ ne représente aucun réel ξ.*

Remarque 5.2.4. Posons $\Delta = \{-\frac{1}{1+\beta} \mid \beta \in [\gamma, \sqrt{3}[\setminus \mathcal{S}_0\}$. Notons que $\mathcal{S}' \cap]\gamma, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}[= \varnothing$, donc pour tout $\beta \in]\gamma, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}[$ on a $-\frac{1}{1+\beta} \in \Delta$. En particulier Δ contient un intervalle non réduit à un point, donc n'est pas dénombrable.
Remarquons enfin que c'est un problème ouvert de décrire l'ensemble $\mathcal{S}_0 \cap [\sqrt{3}, +\infty[$.

Chapitre 6

Inégalités entre exposants paramétriques

6.1 Introduction et résultats principaux

Rappelons qu'on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^3$. Dans la suite, on utilisera librement les définitions de la géométrie paramétrique des nombres (voir Partie 1.6 du Chapitre 1 pour des rappels à ce sujet). Dans ce chapitre on montre deux inégalités (voir Théorème 6.1.1). Comme elles sont valables pour tout vecteur $\mathbf{u} = (1, \xi_1, \xi_2)$ dont les coordonnées sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$ et vérifiant $\overline{\psi}_1^* < -\frac{1}{3}$ et $\underline{\psi}_1^* \geq -\frac{1}{2}$, et puisque Roy a décrit complètement le spectre joint des six exposants paramétriques lorsque $\mathbf{u}$ décrit l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ dont les coordonnées sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$ [57], elles ne sont pas nouvelles. En revanche, il est intéressant de remarquer que l'inégalité 6.1.1 est une égalité pour certains vecteurs $\mathbf{u} = (1, \xi, \xi^2)$ avec ξ de type sturmien. Nous proposons également dans ce chapitre une nouvelle preuve d'une inégalité qui est déjà impliquée par des résultats connus (voir Proposition 6.1.3 ci-dessous).

D'abord, nous montrons dans le Théorème 6.1.1 suivant deux inégalités (formulées en termes paramétriques car elles n'admettent pas d'équivalents en termes d'exposants classiques à cause des exposants paramétriques intermédiaires $\underline{\psi}_2$ et $\overline{\psi}_2$ qui interviennent). Pour (6.1.1) certains nombres de type sturmien du Chapitre 2 réalisent l'égalité (ceux dont le δ associé est suffisamment petit), donc elle est optimale en ce sens.

Théorème 6.1.1. *Soit ξ un nombre réel qui n'est pas algébrique de degré ≤ 2 tel que $\overline{\psi}_1^*(\xi) < -1/3$. On a les inégalités*

$$-\frac{\underline{\psi}_2^*}{1+\underline{\psi}_2^*} \leq \frac{\underline{\psi}_1^*}{1+\underline{\psi}_1^*} \cdot \frac{1+2\overline{\psi}_1^*}{\overline{\psi}_1^*} \tag{6.1.1}$$

$$-\frac{\overline{\psi}_2^*}{1+\overline{\psi}_2^*} \geq \frac{\overline{\psi}_3^*}{1+\overline{\psi}_3^*} \cdot \frac{1+2\underline{\psi}_3^*}{\underline{\psi}_3^*}. \tag{6.1.2}$$

De plus, pour (6.1.1) *l'égalité est atteinte pour tout nombre de type sturmien ξ vérifiant*

$$\delta \leq h(\sigma) = \frac{\sigma}{2} + 1 - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + 1}, \tag{6.1.3}$$

où σ et δ sont les quantités associées à ξ comme dans le Chapitre 2; voir Notations de la Partie 2.6 et la Définition 2.6.3.

Ce Théorème correspond au Théorème H de l'introduction de cette thèse.

Remarque 6.1.1. La question de savoir si l'inégalité (6.1.2) est optimale se pose. Pour tout nombre de type Fibonacci qui n'est pas extrémal, l'inégalité (6.1.2) est stricte (et c'est une égalité pour un nombre de type Fibonacci extrémal).

Remarquons que les inégalités (6.1.1) et (6.1.2) restent vraies dans le cas plus général de l'approximation d'un vecteur $\mathbf{u} = (1, \xi, \eta)$ dont les coordonnées sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$ dès que l'exposant $\underline{\psi}_1^*$ associé vérifie $\underline{\psi}_1^* \geq -1/2$ (voir Remarque 6.3.1 pour plus de détails). La preuve du Théorème 6.1.1 repose sur l'étude fine d'un 3-système (dual) représentant ξ. Une deuxième preuve de (6.1.1) est donnée dans le Chapitre 7 (voir (7.1.2), qui découle des Propositions 7.5.1 et 7.5.3).

Le Théorème 6.1.1 implique le Corollaire suivant, qui correspond au Corollaire I de l'introduction de cette thèse :

Corollaire 6.1.2. *On suppose $\overline{\psi}_1^* < -1/3$. Alors on a*

$$\underline{\psi}_1^* < \underline{\psi}_2^* \quad \textit{et} \quad \overline{\psi}_2^* < \overline{\psi}_3^*. \tag{6.1.4}$$

Nous montrons aussi l'inégalité suivante, qui correspond à la Proposition A de l'introduction de cette thèse (rappelons que $\overline{\psi}_1^*(\xi) < -\frac{1}{3}$ équivaut à $\widehat{\lambda}_2(\xi) > \frac{1}{2}$) :

Proposition 6.1.3. *Supposons $\widehat{\lambda}_2(\xi) > \frac{1}{2}$. Alors*

$$(\omega_2(\xi) - 1)(\widehat{\omega}_2(\xi) - 2) \leq 2. \tag{6.1.5}$$

Si ξ est un nombre de type sturmien, alors l'inégalité de la Proposition 6.1.3 est une égalité si et seulement si le δ associé à ξ (voir Partie 2.6) vérifie $\delta = 0$ – c'est le cas par exemple des fractions sturmiennes de Bugeaud et Laurent [8]. Signalons que cette inégalité n'est pas nouvelle. En effet, (6.1.5) se réécrit

$$\omega_2(\xi)\widehat{\omega}_2(\xi) - 2\omega_2(\xi) - \widehat{\omega}_2(\xi) \leq 0,$$

pour tout réel ξ tel que $\widehat{\lambda}_2(\xi) > \frac{1}{2}$, tandis que le cas $n = 2$ de l'inégalité de gauche de (0.2.3) est équivalente à

$$\omega_2(\xi)\widehat{\omega}_2(\xi) - (1 + \lambda_2(\xi))\omega_2(\xi) - \lambda_2(\xi)\widehat{\omega}_2(\xi) \leq 0, \tag{6.1.6}$$

pour tout réel ξ transcendant. Or, l'hypothèse $\widehat{\lambda}_2(\xi) > \frac{1}{2}$ implique que ξ est transcendant et que $\lambda_2(\xi) \leq 1$ (voir Théorème 0.2.1), donc (6.1.6) implique la Proposition 6.1.3. Remarquons aussi que l'inégalité (6.1.6) ci-dessus est une égalité pour tout nombre de type sturmien dont le δ associé est $\leq h(\sigma)$, où $h(\sigma)$ est la quantité du Théorème 2.7.1.

La preuve présentée de la Proposition 6.1.3 – dont nous considérons qu'elle présente un intérêt en soi – est duale en un certain sens d'une preuve possible de l'inégalité

$$\lambda_2(\xi) \leq 1 \tag{6.1.7}$$

valable dès que $\widehat{\lambda}_2(\xi) > \frac{1}{2}$ (l'inégalité (6.1.7) est équivalente au Corollaire 6.2.7). Bien qu'ils ne la démontrent pas directement, (6.1.7) découle des arguments de Davenport et Schmidt [16]. Elle est aussi une conséquence d'un résultat récent de Schleischitz [59, Theorem 1.6]. La stratégie générale de Davenport et Schmidt pour démontrer (6.1.7) revient à montrer que pour un réel ξ vérifiant $\widehat{\lambda}_2(\xi) > 1/2$, si on note $(\mathbf{y}_i)_i$ la suite des points minimaux associés à la famille de corps convexes $\left(\mathcal{C}^*_{\mathbf{u}}(e^q)\right)_{q\geq 0}$ avec $\mathbf{u} = (1, \xi, \xi^2)$ (voir Partie 1.7), alors $\det(\mathbf{y}_i) \neq 0$. L'inégalité classique $|\det(\mathbf{y}_i)| \ll \|\mathbf{y}_i\| \, \|\mathbf{y}_i \wedge \mathbf{u}\|$ permet de conclure. Pour l'inégalité de la Proposition 6.1.3 l'approche est duale : si on note $(\mathrm{P}_i)_i$ la suite des points minimaux (qu'on peut voir comme des polynômes) associés à la famille de corps convexes $\left(\mathcal{C}_{\mathbf{u}}(e^q)\right)_{q\geq 0}$, alors on montre que le résultant $\mathrm{Rés}(\mathrm{P}_i, \mathrm{P}_{i+1})$ est non nul. Cela vient du fait que $\mathrm{P}_i \wedge \mathrm{P}_{i+1}$ est colinéaire à un certain point minimal $\mathbf{y}_j$ et qu'on a alors $\mathrm{Rés}(\mathrm{P}_i, \mathrm{P}_{i+1})$ proportionnel à $\det(\mathbf{y}_j)$ (voir Proposition 6.2.5). On conclut alors à l'aide de l'inégalité (déjà connue) $|\mathrm{Rés}(\mathrm{P}_i, \mathrm{P}_{i+1})| \ll |\langle \mathrm{P}_i, \mathbf{u}\rangle| \, \|\mathrm{P}_i\| \, \|\mathrm{P}_{i+1}\|^2$ (voir Proposition 6.2.6). Dans la preuve nous travaillons avec les exposants paramétriques plutôt qu'avec les exposants classiques ; la correspondance suivante (voir Proposition 1.9.1 du Chapitre 1) permet de déduire l'énoncé de la Proposition 6.1.3 de celui de la Proposition 6.2.8 prouvée au paragraphe 6.2 :

$$\left(\underline{\psi_1}, \overline{\psi_1}, \underline{\psi_3}, \overline{\psi_3}\right) = \left(\frac{1}{\omega_2(\xi)+1}, \frac{1}{\widehat{\omega}_2(\xi)+1}, \frac{\widehat{\lambda}_2(\xi)}{\widehat{\lambda}_2(\xi)+1}, \frac{\lambda_2(\xi)}{\lambda_2(\xi)+1}\right). \tag{6.1.8}$$

Ce chapitre s'organise comme suit. Dans la Partie 6.2 nous démontrons la Proposition 6.2.8 qui est équivalente à la Proposition 6.1.3. La Partie 6.3 est consacrée aux preuves du Théorème 6.1.1 et du Corollaire 6.1.2. Ces deux parties sont indépendantes.

6.2 Preuve de la Proposition 6.1.3

On suppose que le réel ξ n'est pas algébrique de degré ≤ 2.
Comme dans le chapitre précédent, on identifie $\mathbb{R}^3$ (resp. $\mathbb{Z}^3$) à l'espace des matrices symétriques de taille 2×2 à coefficients réels (resp. entiers) grâce à la bijection

$$\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2) \longmapsto \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}.$$

Si $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3$, on note donc $\det(\mathbf{x}) = x_0 x_2 - x_1^2$ et $\mathrm{Tr}(\mathbf{x}) = x_0 + x_2$. De même, étant données trois matrices symétriques $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$, on note $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$ et $\det(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ respectivement le produit vectoriel, le produit scalaire et le déterminant des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ correspondants.
On identifie aussi $\mathbb{R}^3$ à $\mathbb{R}_{\leq 2}[X]$, l'espace des polynômes de degré ≤ 2, via $(a_0, a_1, a_2) \mapsto a_0 + a_1 X + a_2 X^2$ de sorte qu'on peut considérer le déterminant d'un polynôme ou le produit vectoriel entre deux polynômes.

On note $(\mathbf{y}_i)_{i\geq 0}$ la suite des points minimaux (duaux) de $\mathbb{Z}^3$ associés à la famille $\left(\mathcal{C}^*_{\mathbf{u}}(e^q)\right)_{q\geq 0}$ avec $\mathbf{u}=(1,\xi,\xi^2)$ (voir Partie 1.7). Pour tout i, on écrit $\mathbf{y}_i=(y_{i,0},y_{i,1},y_{i,2})$, on note $Y_i=\|\mathbf{y}_i\|$ et on pose

$$\begin{aligned}
&\mathrm{L}_i^{(1)}=y_{i,0}\xi-y_{i,1},\\
&\mathrm{L}_i^{(2)}=y_{i,0}\xi^2-y_{i,2},\\
&\mathcal{L}_i=\|\mathbf{y}_i\wedge\mathbf{u}\|\asymp\max(|\mathrm{L}_i^{(1)}|,|\mathrm{L}_i^{(2)}|),
\end{aligned}$$

avec $\max(|\mathrm{L}_i^{(1)}|,|\mathrm{L}_i^{(2)}|)\leq\mathcal{L}_i$ pour tout i.

On note $(\mathrm{P}_i)_{i\geq 0}$ la suite des points minimaux associés à la famille $\left(\mathcal{C}_{\mathbf{u}}(e^q)\right)_{q\geq 0}$ (voir Partie 1.7) et pour tout i on pose

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}_i=\|\mathrm{P}_i\|\\
&\mathrm{P}_i(\xi)=\langle\mathrm{P}_i,\mathbf{u}\rangle\,.
\end{aligned}$$

Lemme 6.2.1. *Pour tous ψ^+,ψ^- tels que $\psi^+>\overline{\psi}_1^*$ et $\underline{\psi}_1^*>\psi^-$, on a les inégalités*

$$\log(\mathcal{L}_i)\leq\frac{\psi^+}{1+\psi^+}\log(Y_{i+1}),\tag{6.2.1}$$

$$\log(\mathcal{L}_i)\geq\frac{\psi^-}{1+\psi^-}\log(Y_i),\tag{6.2.2}$$

pour tout i assez grand.
De manière duale, pour tous ψ^+,ψ^- tels que $\psi^+>\overline{\psi}_1$ et $\underline{\psi}_1>\psi^-$, on a les inégalités

$$\log(\mathcal{H}_i)\leq-\frac{\psi^+}{1-\psi^+}\log|\mathrm{P}_{i-1}(\xi)|,\tag{6.2.3}$$

$$\log(\mathcal{H}_i)\geq-\frac{\psi^-}{1-\psi^-}\log|\mathrm{P}_i(\xi)|,\tag{6.2.4}$$

pour tout i assez grand.

Preuve Soit $\psi^+>\overline{\psi}_1^*$. L'abscisse du point d'intersection des graphes de $\mathrm{L}^*_{\mathbf{y}_i}$ et $\mathrm{L}^*_{\mathbf{y}_{i+1}}$ est $q_i=\log(Y_{i+1})-\log(\mathcal{L}_i)$, et en ce point on a

$$\frac{\mathrm{L}_1^*(q_i)}{q_i}=\frac{\mathrm{L}^*_{\mathbf{y}_i}(q_i)}{q_i}=\frac{\log(\mathcal{L}_i)}{\log(Y_{i+1})-\log(\mathcal{L}_i)}\leq\psi^+,$$

pour i assez grand, par choix de ψ^+ et définition de $\overline{\psi}_1^*$. Ceci est équivalent à (6.2.1).
Pour (6.2.2) on fixe $\psi^-<\underline{\psi}_1^*$ et on se place au point $q_i=\log(Y_i)-\log(\mathcal{L}_i)$, abscisse où $\mathrm{L}^*_{\mathbf{y}_i}$ change de pente. On a alors

$$\frac{\mathrm{L}_1^*(q_i)}{q_i}=\frac{\mathrm{L}^*_{\mathbf{y}_i}(q_i)}{q_i}=\frac{\log(\mathcal{L}_i)}{\log(Y_i)-\log(\mathcal{L}_i)}\geq\psi^-,$$

pour i assez grand, par choix de ψ^- et définition de $\underline{\psi}_1^*$. Cette inégalité est équivalente à (6.2.2).
Pour (6.2.3) on fixe $\psi^+ > \overline{\psi}_1$. L'abscisse du point d'intersection des graphes de $\mathrm{L}_{\mathrm{P}_{i-1}}$ et $\mathrm{L}_{\mathrm{P}_i}$ est $q_i = \log(\mathcal{H}_i) - \log|\mathrm{P}_{i-1}(\xi)|$, et en ce point on a

$$\frac{\mathrm{L}_1(q_i)}{q_i} = \frac{\log(\mathcal{H}_i)}{\log(\mathcal{H}_i) - \log|\mathrm{P}_{i-1}(\xi)|} \leq \psi^+,$$

pour i assez grand, par choix de ψ^+ et définition de $\overline{\psi}_1$. Ceci est équivalent à (6.2.3).
On procède de manière similaire pour (6.2.4) : si on fixe $\psi^- < \underline{\psi}_1$ et qu'on se place au point $q_i = \log(\mathcal{H}_i) - \log|\mathrm{P}_i(\xi)|$ (abscisse où $\mathrm{L}_{\mathrm{P}_i}$ change de pente), on a

$$\frac{\mathrm{L}_1(q_i)}{q_i} = \frac{\log(\mathcal{H}_i)}{\log(\mathcal{H}_i) - \log|\mathrm{P}_i(\xi)|} \geq \psi^-,$$

pour i assez grand. □

Le lemme suivant est exactement le Lemme 1.7.14 du Chapitre 1 avec $\mathbf{u} = (1, \xi, \xi^2)$; il permet de donner un sens géométrique (vis-à-vis du 3-système représentant ξ) à la quantité $Y_{i+1}\mathcal{L}_i$. Celle-ci apparaît naturellement comme la hauteur d'un certain sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2, défini sur $\mathbb{Q}$ (Fischler le note $\mathcal{V}_k$ dans [23, Sect. 3.1] et il joue un rôle important dans ses preuves ; dans le Chapitre 7 nous en utilisons une version adaptée à notre contexte, voir notamment le Lemme 7.2.2).

Lemme 6.2.2. *On note $q_i^* = \log(Y_{i+1}) - \log(\mathcal{L}_i)$ l'abscisse du point d'intersection des graphes de $\mathrm{L}^*_{\mathbf{y}_i}$ et $\mathrm{L}^*_{\mathbf{y}_{i+1}}$. On a l'estimation*

$$\log(Y_{i+1}) + \log(\mathcal{L}_i) = -\mathrm{L}_3^*(q_i^*) + \mathcal{O}(1). \tag{6.2.5}$$

De manière duale, si on note $q_i = \log(\mathcal{H}_i) - \log|\mathrm{P}_{i-1}(\xi)|$ l'abscisse du point d'intersection des graphes de $\mathrm{L}_{\mathrm{P}_{i-1}}$ et $\mathrm{L}_{\mathrm{P}_i}$, alors on a l'estimation

$$\log(\mathcal{H}_i) + \log|\mathrm{P}_{i-1}(\xi)| = -\mathrm{L}_3(q_i) + \mathcal{O}(1). \tag{6.2.6}$$

Proposition 6.2.3. *Supposons $\overline{\psi}_1^* < -\frac{1}{3}$. Alors pour i assez grand on a $\det(\mathbf{y}_i) \neq 0$.*

Preuve Comme le fait remarquer Fischler dans [23, Eq. (10)], il suffit d'adapter légèrement la démonstration du Lemme 2 de Davenport et Schmidt [17].
On fixe $\psi > \overline{\psi}_1^*$ tel que $\psi < -\frac{1}{3}$ et on pose $\lambda = -\psi/(1+\psi)$. Par choix de ψ on a $\lambda > \frac{1}{2}$. Supposons que $\det(\mathbf{y}_i) = 0$ pour une infinité d'indices i. Pour ces indices, on a donc

$$y_{i,0}y_{i,2} = y_{i,1}^2,$$

et quitte à changer $\mathbf{y}_i$ en $-\mathbf{y}_i$ on peut supposer $y_{i,0} > 0$ (voir aussi la Remarque 1.7.7 du Chapitre 1). Comme $y_{i,0}, y_{i,2}, y_{i,1}$ n'ont aucun facteur commun, il existe des entiers m et n premiers entre eux tels que

$$y_{i,0} = m^2, \quad y_{i,1} = mn, \quad y_{i,2} = n^2.$$

Puisque $m \asymp Y_i^{\frac{1}{2}}$ et que $|m(m\xi - n)| = |\mathrm{L}_i^{(1)}| \leq \mathcal{L}_i$, par (6.2.1) on a

$$|m\xi - n| \ll Y_i^{-1/2} Y_{i+1}^{-\lambda}. \tag{6.2.7}$$

Les vecteurs $\mathbf{y}_{i-1}$ et $\mathbf{y}_i$ sont linéairement indépendants, donc la matrice

$$\begin{pmatrix} y_{i-1,0} & y_{i-1,1} & y_{i-1,2} \\ y_{i,0} & y_{i,1} & y_{i,2} \end{pmatrix} \tag{6.2.8}$$

est de rang 2. Par ailleurs, $y_{i-1,1}$ et $y_{i,1}$ ne sont pas nuls pour i assez grand (puisque $y_{i,1}/y_{i,0}$ converge vers ξ). On en déduit que l'un des deux mineurs

$$\begin{vmatrix} y_{i-1,0} & y_{i-1,1} \\ y_{i,0} & y_{i,1} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} y_{i-1,1} & y_{i-1,2} \\ y_{i,1} & y_{i,2} \end{vmatrix} \tag{6.2.9}$$

est non nul (sinon les colonnes de (6.2.8) seraient toutes proportionnelles à $(y_{i-1,1}, y_{i,1})$, ce qui n'est pas le cas).
Supposons que le deuxième déterminant de (6.2.9) est non nul. Cela implique

$$\begin{vmatrix} y_{i-1,1} & y_{i-1,2} \\ m & n \end{vmatrix} \neq 0. \tag{6.2.10}$$

Par (6.2.1), comme $|y_{i-1,1}\xi - y_{i-1,2}| = |\mathrm{L}_{i-1}^{(2)} - \xi \mathrm{L}_{i-1}^{(1)}| \ll \mathcal{L}_{i-1}$, on a

$$|y_{i-1,1}\xi - y_{i-1,2}| \ll Y_i^{-\lambda}. \tag{6.2.11}$$

Finalement, en utilisant (6.2.7) et (6.2.11) on obtient

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} y_{i-1,1}\xi - y_{i-1,2} & y_{i-1,2} \\ m\xi - n & n \end{vmatrix} &\ll Y_i^{-\lambda} Y_i^{1/2} + Y_{i-1} Y_i^{-1/2} Y_{i+1}^{-\lambda} \\ &\ll Y_i^{1/2-\lambda}, \end{aligned}$$

en majorant $Y_{i-1} Y_i^{-1/2} Y_{i+1}^{-\lambda}$ par $Y_i Y_i^{-1/2} Y_i^{-\lambda}$. Comme le déterminant de gauche est un entier non nul multiplié par ξ, cette inégalité n'est possible que si l'exposant $1/2 - \lambda$ est ≥ 0, ce qui équivaut à $\psi \geq -1/3$: contradiction.
Les arguments sont similaires si on suppose le premier déterminant de (6.2.9) nul. □

Lemme 6.2.4. *Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}^3$, on a*

$$\mathrm{Rés}(P, Q) = -\det(P \wedge Q),$$

où $\mathrm{Rés}(P, Q)$ *désigne le résultant de P et Q.*

Remarque. Avant de démontrer ce lemme, remarquons qu'il n'est pas difficile de voir que si P et Q ont une racine commune, alors $\det(P \wedge Q) = 0$. En effet, supposons P et Q unitaires et écrivons

$$P = (X - \lambda)(X - \mu) \quad \text{et} \quad Q = (X - \lambda)(X - \mu').$$

Alors en posant $e_1 = (0, -\lambda, 1)$ et $e_2 = (\lambda, -1, 0)$ et en identifiant P et Q avec les points de $\mathbb{R}^3$ correspondants on a

$$P = \lambda\mu - (\lambda + \mu)X + X^2 = e_1 + \mu e_2 \quad \text{et} \quad Q = e_1 + \mu' e_2.$$

Le vecteur $P \wedge Q$ est alors égal à $(\mu - \mu')e_2 \wedge e_1$ avec $e_2 \wedge e_1 = (1, \lambda, \lambda^2)$ qui est clairement de déterminant nul.

Preuve Soit $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$ et $Q = b_0 + b_1 X + b_2 X^2$ deux polynômes quelconques. Un calcul direct permet de montrer que

$$\begin{aligned}
\text{Rés}(P, Q) &= \begin{vmatrix} a_0 & 0 & b_0 & 0 \\ a_1 & a_0 & b_1 & b_0 \\ a_2 & a_1 & b_2 & b_1 \\ 0 & a_2 & 0 & b_2 \end{vmatrix} \\
&= a_0^2 b_2^2 - a_0 a_1 b_1 b_2 + a_0 a_2 b_1^2 - 2a_0 a_2 b_2 b_0 + a_1^2 b_2 b_0 - a_1 a_2 b_0 b_1 + a_2^2 b_0^2 \\
&= - \begin{vmatrix} a_1 b_2 - a_2 b_1 & a_2 b_0 - a_0 b_2 \\ a_2 b_0 - a_0 b_2 & a_0 b_1 - a_1 b_0 \end{vmatrix} = -\det(P \wedge Q).
\end{aligned}$$

□

Proposition 6.2.5. *Supposons $\overline{\psi}_1^* < -1/3$. Alors pour tout i assez grand $P_i \wedge P_{i+1}$ est colinéaire à un point minimal dual. En particulier on a* $\text{Rés}(P_i, P_{i+1}) \neq 0$ *pour tout i assez grand.*

Preuve Rappelons qu'on a

$$|\mathrm{L}_1^*(q) + \mathrm{L}_2^*(q) + \mathrm{L}_3^*(q) + q| \ll 1 \tag{6.2.12}$$

pour tout réel $q > 0$. Au point $q_i = \log(\mathcal{H}_i) - \log(|P_{i+1}(\xi)|)$, abscisse du point d'intersection des graphes de L_{P_i} et $\mathrm{L}_{P_{i+1}}$, P_i et P_{i+1} réalisent $\mathrm{L}_1(q_i) = \mathrm{L}_2(q_i)$. Notons que l'égalité $\mathrm{L}_1(q_i) = \mathrm{L}_2(q_i)$ implique d'après Mahler (voir la Proposition 1.6.6 du Chapitre 1)

$$|\mathrm{L}_2^*(q_i) - \mathrm{L}_3^*(q_i)| \ll 1. \tag{6.2.13}$$

De plus, la Proposition 1.6.6 du Chapitre 1 montre que $\mathbf{t}_i = \mathrm{P}_i \wedge \mathrm{P}_{i+1}$ vérifie $|\mathrm{L}_{\mathbf{t}_i}^*(q_i) - \mathrm{L}_1^*(q_i)| \ll 1$. Supposons que $\mathbf{t}_i$ n'est pas colinéaire à un point minimal (dual). Alors on a $|\mathrm{L}_1^*(q_i) - \mathrm{L}_2^*(q_i)| \ll 1$, et cette inégalité combinée avec (6.2.12) et (6.2.13) implique

$$|\mathrm{L}_1^*(q_i) + \frac{q_i}{3}| \ll 1.$$

Si cela était vrai pour une infinité de i, alors on aurait $\overline{\psi}_1^* \geq -1/3$, ce qui est impossible d'après nos hypothèses. Donc $\mathbf{t}_i = P_i \wedge P_{i+1} = \alpha \mathbf{y}_j$ pour un certain j et $\alpha \neq 0$. De ce fait, d'après le Lemme 6.2.4 on a $\text{Rés}(P_i, P_{i+1}) = -\det(P_i \wedge P_{i+1}) = -\alpha^2 \det(\mathbf{y}_j)$ qui est non nul pour i assez grand d'après la Proposition 6.2.3. □

Proposition 6.2.6. *On a*

$$|\det(\mathbf{y}_i)| \ll \mathcal{L}_i Y_i, \tag{6.2.14}$$

et

$$|\text{Rés}(P_i, P_{i+1})| \ll |P_i(\xi)| \mathcal{H}_i \mathcal{H}_{i+1}^2. \tag{6.2.15}$$

Preuve Ces deux inégalités ont déjà été observées auparavant (par exemple dans [17] pour (6.2.14), et dans le Lemme 2 de [2] pour (6.2.15)). Nous rappelons ici rapidement comment les retrouver. Pour (6.2.14), il suffit d'écrire

$$\det(\mathbf{y}_i) = \begin{vmatrix} y_{i,0} & y_{i,1} \\ y_{i,1} & y_{i,2} \end{vmatrix} = \xi^{-1} \begin{vmatrix} y_{i,0}\xi - y_{i,1} & y_{i,1} \\ y_{i,1}\xi - y_{i,2} & y_{i,2} \end{vmatrix}$$

et la conclusion suit facilement.
Pour (6.2.15), on note $L_1, \dots, L_4$ et $C_1, \dots, C_4$ les lignes et les colonnes respectivement du déterminant Sylvester qui définit $\text{Rés}(P_i, P_{i+1})$. En effectuant les opérations suivantes :

$$\begin{aligned} &L_4 \leftarrow \xi^2 L_4 + \xi L_3 + L_2, \\ &C_1 \leftarrow \xi C_1, \\ &C_3 \leftarrow \xi C_3, \\ &L_4 \leftarrow L_4 + \xi^{-1} L_1, \\ &L_3 \leftarrow \xi L_3 + L_2 + \xi^{-1} L_1, \end{aligned}$$

on trouve

$$\begin{aligned} \text{Rés}(P_i, P_{i+1}) &= \begin{vmatrix} a_{i,0} & 0 & a_{i+1,0} & 0 \\ a_{i,1} & a_{i,0} & a_{i+1,1} & a_{i+1,0} \\ a_{i,2} & a_{i,1} & a_{i+1,2} & a_{i+1,1} \\ 0 & a_{i,2} & 0 & a_{i+1,2} \end{vmatrix} \\ &= \xi^{-5} \begin{vmatrix} a_{i,0}\xi & 0 & a_{i+1,0}\xi & 0 \\ a_{i,1}\xi & a_{i,0} & a_{i+1,1}\xi & a_{i+1,0} \\ P_i(\xi) & a_{i,1}\xi + a_{i,0} & P_{i+1}(\xi) & a_{i+1,1}\xi + a_{i+1,0} \\ P_i(\xi) & P_i(\xi) & P_{i+1}(\xi) & P_{i+1}(\xi) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

On conclut en faisant un développement par rapport à la première ligne et en utilisant le fait que $|P_{i+1}(\xi)| \le |P_i(\xi)|$ et $\mathcal{H}_i \le \mathcal{H}_{i+1}$. □

Le corollaire suivant correspond au cas $n = 2$ de la Proposition 0.2.1 de l'introduction de cette thèse.

Corollaire 6.2.7. *Supposons $\overline{\psi}_1^* < -1/3$. Alors*

$$\underline{\psi}_1^* \ge -\frac{1}{2}. \tag{6.2.16}$$

En termes d'exposants classiques, cela se traduit ainsi : si $\widehat{\lambda}_2(\xi) > \frac{1}{2}$, alors $\lambda_2(\xi) \le 1$.

Preuve D'après la Proposition 6.2.3, pour tout i assez grand l'entier $\det(\mathbf{y}_i)$ est non nul. Par (6.2.14) on en déduit donc

$$1 \ll \mathcal{L}_i Y_i. \tag{6.2.17}$$

Notons que cette inégalité est la même que l'équation (10) de [23], sauf qu'on utilise ici les points minimaux de la Partie 1.7 du Chapitre 1.
En posant $q_i := \log(Y_i) - \log(\mathcal{L}_i)$ le point où $\mathrm{L}^*_{\mathbf{y}_i}$ change de pente, on a

$$\underline{\psi}^*_1 = \liminf_{q\to+\infty} \frac{\mathrm{L}^*_1(q)}{q} = \liminf_{i\to\infty} \frac{\mathrm{L}^*_1(q_i)}{q_i} = \liminf_{i\to+\infty} \frac{\log(\mathcal{L}_i)}{\log(Y_i) - \log(\mathcal{L}_i)},$$

et (6.2.17) permet de conclure

$$\underline{\psi}^*_1 \geq -\frac{1}{2}.$$

□

La proposition suivante fournit une inégalité dont la Proposition 6.1.3 découle directement grâce à la correspondance (6.1.8). C'est une conséquence de l'inégalité de gauche de (0.2.3) (voir [11] et [34]) avec $n = 2$, qui a été redémontrée récemment par Schmidt et Summerer à l'aide de la géométrie paramétrique des nombres [67, Theorem 1.1].

Proposition 6.2.8. *On suppose $\overline{\psi}^*_1 < -1/3$. Alors*

$$\overline{\psi}^*_3 \leq -\frac{1 + 3\underline{\psi}^*_3}{2 + 4\underline{\psi}^*_3}. \tag{6.2.18}$$

De manière équivalente, on a

$$\underline{\psi}_1 \geq \frac{1 - 3\overline{\psi}_1}{2 - 4\overline{\psi}_1}. \tag{6.2.19}$$

Preuve Remarquons que l'inégalité (6.2.18) se déduit directement de (6.2.19) en utilisant les identités $\overline{\psi}_1 = -\underline{\psi}^*_3$ et $\underline{\psi}_1 = -\overline{\psi}^*_3$.
Montrons (6.2.19). D'après les Propositions 6.2.5 et 6.2.6, on a

$$1 \ll |P_i(\xi)| \mathcal{H}_i \mathcal{H}^2_{i+1}.$$

On note $q_i = \log(\mathcal{H}_{i+1}) - \log(|P_i(\xi)|)$ l'abscisse du point d'intersection des graphes de L_{P_i} et $\mathrm{L}_{P_{i+1}}$ et on fixe $\psi > \overline{\psi}_1$. Alors comme

$$\overline{\psi}_1 = \limsup_{q\to+\infty} \frac{\mathrm{L}_1(q)}{q} = \limsup_{i\to+\infty} \frac{\mathrm{L}_1(q_i)}{q_i} = \limsup_{i\to+\infty} \frac{\log(\mathcal{H}_{i+1})}{\log(\mathcal{H}_{i+1}) - \log(|P_i(\xi)|)},$$

pour tout i assez grand, on a

$$\frac{\log(\mathcal{H}_{i+1})}{\log(\mathcal{H}_{i+1}) - \log(|P_i(\xi)|)} \leq \psi,$$

ce qui se réécrit

$$\log(\mathcal{H}_{i+1}) \leq -\frac{\psi}{1-\psi} \log(|P_i(\xi)|).$$

En combinant avec (6.2.15) on en déduit

$$\frac{\log(\mathcal{H}_i)}{\log(|P_i(\xi)|)} \leq -\frac{1-3\psi}{1-\psi}. \tag{6.2.20}$$

Or au point $q_i' = \log(\mathcal{H}_i) - \log(|P_i(\xi)|)$ – abscisse de changement de pente de L_{P_i} – on a

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{L}_1(q_i')}{q_i'} = \frac{\log(\mathcal{H}_i)}{\log(\mathcal{H}_i) - \log(|P_i(\xi)|)} &= \frac{\log(\mathcal{H}_i)/\log(|P_i(\xi)|)}{\log(\mathcal{H}_i)/\log(|P_i(\xi)|) - 1} \\ &\geq \frac{-(1-3\psi)/(1-\psi)}{-(1-3\psi)/(1-\psi) - 1} = \frac{1-3\psi}{2-4\psi},\end{aligned}$$

la dernière inégalité étant obtenue grâce à (6.2.20). Comme

$$\underline{\psi}_1 = \liminf_{q\to+\infty} \frac{\mathrm{L}_1(q)}{q} = \liminf_{i\to+\infty} \frac{\mathrm{L}_1(q_i')}{q_i'},$$

on en déduit l'inégalité

$$\underline{\psi}_1 \geq \frac{1-3\psi}{2-4\psi},$$

et on conclut en faisant tendre ψ vers $\overline{\psi}_1$. □

6.3 Preuve du Théorème 6.1.1 et du Corollaire 6.1.2

Preuve du Théorème 6.1.1
On considère à nouveau un réel ξ qui n'est pas algébrique de degré ≤ 2 ; on suppose $\overline{\psi}_1^* < -\frac{1}{3}$. On conserve les notations de la Partie 6.2. Commençons par démontrer (6.1.1). Le lecteur est invité à consulter la Partie 1.9.3 du Chapitre 1 pour un rappel des principes que nous utiliserons pour calculer les exposants. L'allure générale d'un 3-système dual $\mathbf{P} = (\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3)$ défini sur $[q_0, +\infty[$ représentant ξ est celle de la Figure 6.1. Notons qu'on peut toujours supposer qu'il n'existe aucun point q en lequel $\mathrm{P}_1(q) = \mathrm{P}_2(q) = \mathrm{P}_3(q)$, ni aucun intervalle de longueur strictement positive sur lequel $\mathrm{P}_1(q) = \mathrm{P}_2(q)$ ou $\mathrm{P}_2(q) = \mathrm{P}_3(q)$: c'est une conséquence des travaux de Roy [55, Theorem 1.3] (selon la terminologie de Schmidt et Summerer, un 3-système vérifiant ces propriétés est dit *agréable* ; voir [70, Theorem 2.1]).
Avant de poursuivre, nous introduisons des fonctions $\widehat{\mathrm{L}}_i^*$ qui sont à $\mathbf{P}$ ce que les fonctions $\mathrm{L}_{\mathbf{a}_i^*}^*$ sont à $\mathbf{L}_{\mathbf{u}}^*$ (si on note $(\mathbf{a}_i^*)_i$ la suite des points minimaux duaux).

Points minimaux "virtuels" associés à P

On note $(q_i)_{i\geq 1}$ la suite croissante des abscisses où la pente de P_1 passe de -1 à 0. Pour chaque i, on note $\widehat{Y}_i$ et $\widehat{\mathcal{L}}_i$ les réels > 0 tel que le graphe de P_1 coïncide localement en q_i avec celui de la fonction $\widehat{\mathrm{L}}_i^* : q \mapsto \max(\log(\widehat{Y}_i) - q, \log(\widehat{\mathcal{L}}_i))$. Intuitivement, le graphe de $\widehat{\mathrm{L}}_i^*$ est la trajectoire d'un vecteur "virtuel" $\mathbf{y}_i$ qui vérifierait $\|\mathbf{y}_i\| = \widehat{Y}_i$ et $\|\mathbf{y}_i \wedge \mathbf{u}\| = \widehat{\mathcal{L}}_i$ (on peut toujours trouver un tel vecteur, mais rien ne garantit qu'il en existe un qui soit proportionnel à un vecteur de $\mathbb{Z}^3$). Si $\mathbf{P}$ était la fonction $\mathbf{L}_{\mathbf{u}}^*$, on pourrait prendre pour $\mathbf{y}_i$

un point minimal dual. Avec cette définition, comme P_1 est continue, affine par morceaux de pente -1 ou 0, il n'est pas difficile de voir que pour tout $q > q_0$ on a

$$\mathrm{P}_1(q) = \min_{i \geq 1} \widehat{\mathrm{L}}_i^*(q)$$

qui est l'analogue de (1.7.1) du Chapitre 1 pour les points minimaux. Toutes les propriétés géométriques des points minimaux ont généralement des analogues immédiats, et parfois plus précis du fait de l'égalité $\mathrm{P}_1(q)+\mathrm{P}_2(q)+\mathrm{P}_3(q) = -q$, exprimés avec les quantités $\widehat{Y}_i, \widehat{\mathcal{L}}_i$ définies ci-dessus. Remarquons notamment qu'on a les équivalents suivants des équations (6.2.1), (6.2.2) et (6.2.5) (nous ne les redémontrons pas, les raisonnements étant tout à fait identiques en remplaçant $\mathbf{L_u}$ par $\mathbf{P}$, et en utilisant le fait que $\mathbf{L_u}$ et $\mathbf{P}$ on les mêmes exposants paramétriques ; voir la Remarque 1.8.3 du Chapitre 1) : pour tous ψ^+, ψ^- tels que $\psi^+ > \overline{\psi}_1^*$ et $\underline{\psi}_1^* > \psi^-$, on a les inégalités

$$\log(\widehat{\mathcal{L}}_i) \leq \frac{\psi^+}{1+\psi^+} \log(\widehat{Y}_{i+1}), \tag{6.3.1}$$

$$\log(\widehat{\mathcal{L}}_i) \geq \frac{\psi^-}{1+\psi^-} \log(\widehat{Y}_i), \tag{6.3.2}$$

pour tout k assez grand.
De plus, si on note $q_i^* = \log(\widehat{Y}_{i+1}) - \log(\widehat{\mathcal{L}}_i)$ l'abscisse du point d'intersection des graphes de $\widehat{\mathrm{L}}_i^*$ et $\widehat{\mathrm{L}}_{i+1}^*$, on a l'égalité

$$\log(\widehat{Y}_{i+1}) + \log(\widehat{\mathcal{L}}_i) = -\mathrm{P}_3(q_i^*). \tag{6.3.3}$$

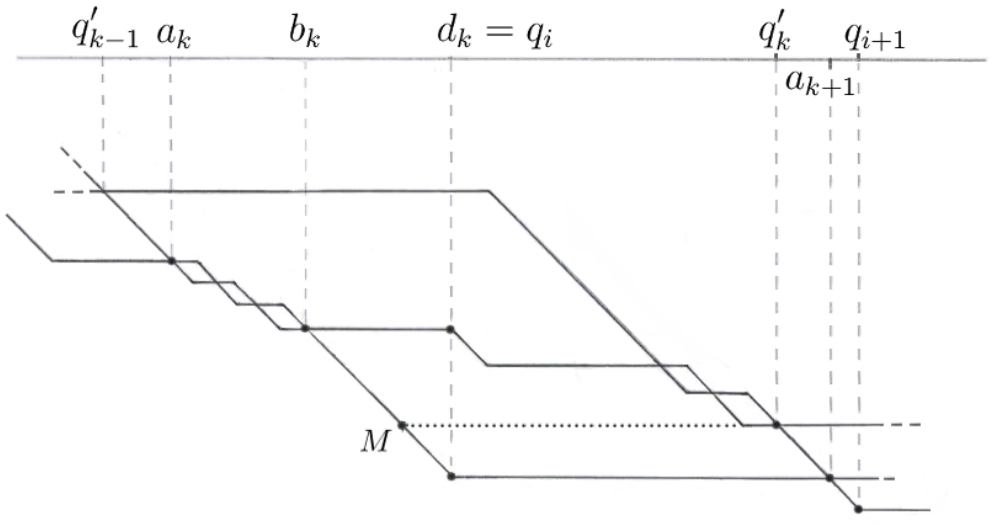

FIGURE 6.1 – Allure générale d'un 3-système dual représentant ξ

Comme sur la Figure 6.1, on note $(d_k)_{k\geq 1}$ la suite ordonnée dans l'ordre croissant des points q où P_1 et P_3 passent respectivement de pente -1 à 0 et de pente 0 à -1, et des points q où P_1 et P_2 passent respectivement de pente -1 à 0 et de pente 0 à -1 et pour lesquels le plus petit $q' > q$ en lequel P_2 change de nouveau de pente est aussi un point de changement de pente de P_3. On note alors q'_k la plus petite abscisse q telle que P_3 soit constante sur $[q, q_{k+1}]$. Le point a_k (resp. b_k) est le plus petit (resp. le plus grand) point $q \in]q'_{k-1}, d_k[$ de changement de pente de P_1. En d'autres termes, la suite $(d_k)_k$ – qui est une sous-suite de la suite $(q_i)_i$ – contient tous les points en lesquels la pente de P_1 passe de -1 à 0, sauf ceux des intervalles sur lesquels P_1 et P_2 "zigzaguent" (comme $[a_k, b_k]$ sur la Figure 6.1).
L'entier k étant fixé (supposé suffisamment grand), on note i l'indice tel que $d_k = q_i$. Notons que P_1 coïncide avec $\widehat{\mathrm{L}}_i^*$ sur $[b_k, a_{k+1}]$, et avec $\widehat{\mathrm{L}}_{i+1}^*$ sur $[a_{k+1}, q_{i+1}]$. Considérons la fonction $\chi_2 : q \mapsto \mathrm{P}_2(q)/q$ sur l'intervalle $[q'_{k-1}, q'_k]$. Comme $\underline{\psi}_1^* \geq -1/2$ (conséquence de l'hypothèse $\overline{\psi}_1^* < -1/3$ et du Corollaire 6.2.7), χ_2 atteint son minimum sur $[q'_{k-1}, b_k]$ en $q = b_k$ (rappelons que sur l'intervalle $[a_k, b_k]$, $(\mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2)/2$ décroît avec pente $-1/2$). Sur l'intervalle $[b_k, q'_k]$, a priori χ_2 pourrait atteindre son minimum en b_k ou en tout point q en lequel P_2 passe de pente -1 à pente 0.
On note $M = (q_M, \mathrm{L}_M)$ le point d'intersection entre la droite horizontale d'équation $y = \mathrm{P}_3(q'_k)$ et le graphe de P_1, de telle sorte que $\mathrm{L}_M = \mathrm{P}_1(q_M) = \mathrm{P}_3(q'_k)$. Il peut arriver que $\mathrm{P}_3(q'_k) = \mathrm{P}_1(b_k)$: dans cette situation le graphe de P_1 contient un segment horizontal d'ordonnée $\mathrm{P}_3(q'_k)$ et l'intersection précédente n'est pas bien définie ; on pose alors $M = (b_k, \mathrm{P}_1(b_k))$. Puisque $q_M \in [b_k, d_k]$ et que sur cet intervalle on a $\mathrm{P}_1 = \widehat{\mathrm{L}}_i^*$, avec les notations précédentes on a $q_M = \log(\widehat{Y}_i) - \mathrm{L}_M$. Au point M, d'après la discussion précédente sur le minimum de χ_2 (voir la Proposition 1.9.6, ainsi que la Proposition 1.9.10 et le Corollaire 1.9.12 du Chapitre 1 pour l'étude des zones où deux composantes zigzaguent), on a toujours

$$\frac{\mathrm{L}_M}{q_M} \leq \inf_{[q'_{k-1}, q'_k]} \chi_2. \tag{6.3.4}$$

On fixe maintenant $\psi_1^+, \psi_1^-, \psi_2^-$ vérifiant

$$\psi_1^+ > \overline{\psi}_1^*, \quad \psi_1^- < \underline{\psi}_1^*, \quad \psi_2^- > \underline{\psi}_2^*.$$

Il existe une infinité de k tels que $\inf_{[q'_{k-1}, q'_k]} \chi_2 \leq \psi_2^-$. Alors par (6.3.4) pour ces k on a directement

$$\frac{\mathrm{L}_M}{q_M} \leq \psi_2^-,$$

et puisque $q_M = \log(\widehat{Y}_i) - \mathrm{L}_M$, on en déduit que

$$\mathrm{L}_M \leq \frac{\psi_2^-}{1 + \psi_2^-} \log(\widehat{Y}_i). \tag{6.3.5}$$

Si on note q_i^* l'abscisse du point d'intersection des graphes de $\widehat{\mathrm{L}}_i^*$ et $\widehat{\mathrm{L}}_{i+1}^*$, par (6.3.3) on a $\log(\widehat{Y}_{i+1}) + \log(\widehat{\mathcal{L}}_i) = -\mathrm{P}_3(q_i^*)$. Puisque P_3 est constante sur $[q'_k, d_{k+1}]$, on a $\mathrm{L}_M = \mathrm{P}_3(q_i^*)$, et cela implique

$$-\log(\widehat{Y}_{i+1}) - \log(\widehat{\mathcal{L}}_i) = \mathrm{L}_M. \tag{6.3.6}$$

Or (6.3.1) et (6.3.2) impliquent

$$-\log(\widehat{Y}_{j+1}) - \log(\widehat{\mathcal{L}}_i) \geq -\frac{1+2\psi_1^+}{\psi_1^+}\log(\widehat{\mathcal{L}}_i) \geq -\frac{1+2\psi_1^+}{\psi_1^+}\frac{\psi_1^-}{1+\psi_1^-}\log(\widehat{Y}_i),$$

et en combinant avec (6.3.6) et (6.3.5), on trouve

$$-\frac{1+2\psi_1^+}{\psi_1^+}\frac{\psi_1^-}{1+\psi_1^-} \leq \frac{\psi_2^-}{1+\psi_2^-}.$$

Pour conclure la preuve de (6.1.1) il suffit de faire tendre $\psi_1^-, \psi_1^+, \psi_2^-$ vers $\underline{\psi}_1^*, \overline{\psi}_1^*, \underline{\psi}_2^*$ respectivement.

Dans le cas d'un nombre ψ-sturmien dont le δ associé vérifie la condition (6.1.3), on a d'après le Théorème 2.7.1

$$\underline{\psi}_1^* = -\frac{1-\delta}{2-\delta}, \quad \overline{\psi}_1^* = -\frac{(1-\delta)(1+\sigma)}{1+2(1-\delta)(1+\sigma)}, \quad \underline{\psi}_2^* = -\frac{1}{2+\sigma}$$

et on vérifie immédiatement que

$$-\frac{\underline{\psi}_2^*}{1+\underline{\psi}_2^*} = \frac{1}{1+\sigma}, \quad \frac{\underline{\psi}_1^*}{1+\underline{\psi}_1^*} = -(1-\delta), \quad \frac{1+2\overline{\psi}_1^*}{\overline{\psi}_1^*} = -\frac{1}{(1-\delta)(1+\sigma)},$$

d'où l'égalité dans (6.1.1).

Montrons maintenant (6.1.2). L'allure générale d'un 3-système $\mathbf{H} = (\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2, \mathrm{H}_3)$ représentant ξ celle de la Figure 6.2. Avant de poursuivre, comme on l'a fait pour $\mathbf{P}$ en début de preuve, nous introduisons des fonctions $\widehat{\mathrm{L}}_i$ qui sont à $\mathbf{H}$ ce que les fonctions $\mathrm{L}_{\mathbf{a}_i}$ sont à $\mathbf{L_u}$ (si on note $(\mathbf{a}_i)_i$ la suite des points minimaux).

Points minimaux "virtuels" associés à H

On note $(q_i)_{i\geq 1}$ la suite croissante des abscisses où la pente de H_1 passe de 0 à 1. Pour chaque i, on note $\widehat{P}_i$ et $\widehat{\mathcal{H}}_i$ les réels > 0 tel que le graphe de H_1 coïncide localement en q_i avec celui de la fonction $\widehat{\mathrm{L}}_i : q \mapsto \max(\log(\widehat{\mathcal{H}}_i), \log(\widehat{P}_i)+q)$. Intuitivement, le graphe de $\widehat{\mathrm{L}}_i$ est la trajectoire d'un polynôme "virtuel" P_i qui vérifierait $H(P_i) = \widehat{\mathcal{H}}_i$ et $|P_i(\xi)| = \widehat{P}_i$ (on peut toujours trouver un tel polynôme, mais rien ne garantit qu'il en existe un qui soit proportionnel à un polynôme à coefficients entiers). Si $\mathbf{H}$ était la fonction $\mathbf{L_u}$, on pourrait prendre pour P_i un point minimal. Avec cette définition, comme H_1 est continue, affine par morceaux de pente 0 ou 1, il n'est pas difficile de voir que pour tout $q > q_0$ on a

$$\mathrm{H}_1(q) = \min_{i\geq 1} \widehat{\mathrm{L}}_i(q)$$

qui est l'analogue de (1.7.1) du Chapitre 1 pour les points minimaux. Remarquons notamment qu'on a les équivalents suivants des équations (6.2.3), (6.2.4) et (6.2.6) (nous ne les redémontrons pas, les raisonnements étant tout à fait identiques et $\mathbf{H}$ ayant les mêmes

exposants paramétriques que ceux associés à ξ ; voir la Remarque 1.8.3 du Chapitre 1) : pour tous ψ^+, ψ^- tels que $\psi^+ > \overline{\psi}_1$ et $\underline{\psi}_1 > \psi^-$, on a les inégalités

$$\log(\widehat{\mathcal{H}}_i) \leq -\frac{\psi^+}{1-\psi^+} \log|\widehat{P}_{i-1}(\xi)|, \tag{6.3.7}$$

$$\log(\widehat{\mathcal{H}}_i) \geq -\frac{\psi^-}{1-\psi^-} \log|\widehat{P}_i(\xi)|, \tag{6.3.8}$$

pour tout i assez grand. De plus, si on note $q_i^* = \log(\widehat{\mathcal{H}}_i) - \log(\widehat{P}_{i-1})$ l'abscisse du point d'intersection des graphes de $\widehat{\mathcal{L}}_{i-1}$ et $\widehat{\mathcal{L}}_i$ on a

$$\log(\widehat{\mathcal{H}}_i) + \log(\widehat{P}_{i-1}) = -\mathrm{H}_3(q_i^*). \tag{6.3.9}$$

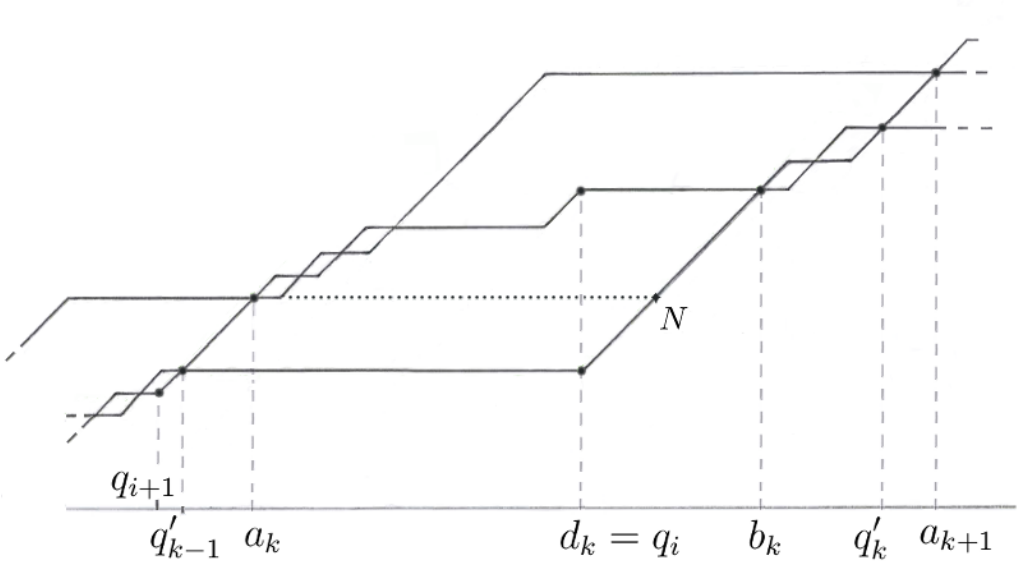

FIGURE 6.2 – Allure générale d'un 3-système représentant ξ

On adapte des notations similaires à celles de la Figure 6.1. On note $(d_k)_k$ la suite ordonnée dans l'ordre croissant des points q où H_1 et H_3 passent respectivement de pente 0 à 1 et de pente 1 à 0, et des points q où H_1 et H_2 passent respectivement de pente 0 à 1 et de pente 1 à 0 et pour lesquels le plus grand $q' < q$ tel que H_2 change de pente est aussi un point de changement de pente de H_3. En d'autres termes, la suite $(d_k)_k$ – qui est une sous-suite de la suite $(q_i)_i$ – contient tous les points en lesquels la pente de H_1 passe de 0 à 1, sauf ceux des intervalles sur lesquels H_1 et H_2 "zigzaguent" (comme sur l'intervalle $[b_k, q'_k]$ sur la Figure 6.2).
On note alors q'_k la plus petite abscisse q telle que H_1 soit constante sur $[q, q_{k+1}]$. Le point a_k est le plus petit point $q \in]q'_{k-1}, d_k[$ de changement de pente de H_3. Le point b_k est le plus petit point $q \in]d_k, q'_k[$ de changement de pente de H_1.
On fixe k assez grand et on note i l'indice tel que $d_k = q_i$. Considérons la fonction $\chi_2 : q \mapsto \mathrm{H}_2(q)/q$. Comme $\overline{\psi}_2 \leq \overline{\psi}_3 \leq 1/2$ (puisque $\overline{\psi}_3 = -\underline{\psi}_1^*$ et d'après le Corollaire 6.2.7),

χ_2 atteint son minimum sur $[b_k, q'_k]$ en $q = b_k$ (rappelons que sur cet intervalle $(\mathrm{H}_1+\mathrm{H}_2)/2$ croît avec pente 1/2). Sur l'intervalle $[a_k, b_k]$, χ_2 atteint son minimum en un point q en lequel H_2 passe de pente 0 à pente 1.
On note $N = (q_N, \mathcal{H}_N)$ le point d'intersection entre la droite horizontale d'équation $y = \mathrm{H}_2(a_k)$ et le graphe de H_1, si bien que $\mathcal{H}_N = \mathrm{H}_1(q_N) = \mathrm{H}_2(a_k)$. Il peut arriver que $\mathrm{H}_2(a_k) = \mathrm{H}_1(b_k)$: dans cette situation le graphe de H_1 contient un segment horizontal d'ordonnée $\mathrm{H}_2(a_k)$ et l'intersection précédente n'est pas bien définie. On prend alors $N = (b_k, \mathrm{H}_1(b_k))$. Puisque $q_N \in [d_k, b_k]$ et que sur cet intervalle on a $\mathrm{H}_1 = \widehat{\mathrm{L}}_i$, avec les notations précédentes on a $q_N = \mathcal{H}_N - \log(\widehat{P}_i)$. Au point N, d'après la discussion précédente sur le minimum de χ_2 (voir aussi la Proposition 1.9.6, ainsi que la Proposition 1.9.10 et le Corollaire 1.9.12 du Chapitre 1 pour l'étude des zones où deux composantes zigzaguent), on a toujours

$$\frac{\mathcal{H}_N}{q_N} \leq \inf_{[a_k,b_k]} \chi_2.$$

On en déduit que

$$\frac{\mathcal{H}_N}{q_N} \leq \inf_{[a_k,a_{k+1}]} \chi_2. \tag{6.3.10}$$

On fixe maintenant $\psi_1^+, \psi_1^-, \psi_2^-$ vérifiant

$$\psi_1^+ > \overline{\psi}_1, \quad \psi_1^- < \underline{\psi}_1, \quad \psi_2^- > \underline{\psi}_2.$$

Il existe une infinité de k tels que $\inf_{[a_k,a_{k+1}]} \chi_2 \leq \psi_2^-$. Alors par (6.3.10) pour de tels k on a directement

$$\frac{\mathcal{H}_N}{q_N} \leq \psi_2^-,$$

et puisque $q_N = \mathcal{H}_N - \log(\widehat{P}_i)$, on en déduit que

$$\mathcal{H}_N \leq -\frac{\psi_2^-}{1-\psi_2^-} \log(\widehat{P}_i). \tag{6.3.11}$$

Si on note q_i^* l'abscisse du point d'intersection entre les graphes de L_{i-1} et L_i, on a $\mathcal{H}_N = \mathrm{H}_3(q_i^*)$ (puisque H_3 est constant sur $[q_i^*, a_k]$), et (6.3.9) implique

$$-\log(\widehat{\mathcal{H}}_i) - \log(\widehat{P}_{i-1}) = \mathcal{H}_N. \tag{6.3.12}$$

Or (6.3.7) et (6.3.8) impliquent

$$-\log(\widehat{\mathcal{H}}_i) - \log(\widehat{P}_{i-1}) \geq \frac{1-2\psi_1^+}{\psi_1^+} \log(\widehat{\mathcal{H}}_i) \geq -\frac{1-2\psi_1^+}{\psi_1^+} \times \frac{\psi_1^-}{1-\psi_1^-} \log(\widehat{P}_i),$$

et en combinant avec (6.3.11) et (6.3.12), on trouve

$$\frac{1-2\psi_1^+}{\psi_1^+} \times \frac{\psi_1^-}{1-\psi_1^-} \leq \frac{\psi_2^-}{1-\psi_2^-}.$$

Pour conclure la preuve de (6.1.2) il suffit de faire tendre $\psi_1^-, \psi_1^+, \psi_2^-$ vers $\underline{\psi}_1, \overline{\psi}_1, \underline{\psi}_2$ respectivement. □

Remarque 6.3.1. Considérons $\mathbf{u} = (1, \xi, \eta)$ dont les coordonnées sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$ et tel que l'exposant $\underline{\psi}_1^*$ associé à la famille $\left(\mathcal{C}_{\mathbf{u}}^*(e^q)\right)_{q\geq 0}$ (voir Partie 1.6 du Chapitre 1) vérifie $\underline{\psi}_1^* \geq \frac{1}{2}$. D'après le Théorème 1.6.1 il existe un 3-système (dual) $\mathbf{P} = (\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3)$ sur $[q_0, +\infty[$ tel que $\|\mathbf{L}_{\mathbf{u}}^* - \mathbf{P}\|_\infty$ soit borné sur $[q_0, +\infty[$. Remarquons pour commencer que la composante P_3 ne peut pas stationner : si c'était le cas, les points minimaux (duaux) $\mathbf{y}_i$ associés à $\left(\mathcal{C}_{\mathbf{u}}^*(e^q)\right)_{q\geq 0}$ appartiendraient tous (sauf éventuellement un nombre fini) à un même plan défini sur $\mathbb{Q}$. Il existerait alors un triplet non nul d'entiers $\mathbf{a} = (a, b, c)$ vérifiant $\langle \mathbf{a}, \mathbf{y}_i \rangle = 0$ pour i assez grand. Comme $\mathbf{y}_i$ converge vers $\mathbf{u}$ dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, on aurait en passant à la limite $\langle \mathbf{a}, \mathbf{u} \rangle = 0$, ce qui contredit l'indépendance sur $\mathbb{Q}$ des coordonnées de $\mathbf{u}$. De même, si on considère un 3-système $\mathbf{H} = (\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2, \mathrm{H}_3)$ sur $[q_0, +\infty[$ tel que $\|\mathbf{L}_{\mathbf{u}} - \mathbf{H}\|_\infty$ soit borné sur $[q_0, +\infty[$, la remarque précédente appliquée au 3-système dual $(-\mathrm{H}_3, -\mathrm{H}_2, -\mathrm{H}_1)$ montre que H_1 ne peut pas stationner. Plus généralement, cette propriété peut aussi se déduire de la propriété plus générale [66, Corollary 2.2].
Ces remarques montrent que les suites des points $(d_k)_k$ définies sur les Figures 6.1 et 6.2 sont infinies. Remarquons enfin que dans la preuve du Théorème 6.1.1, nous n'utilisons que la propriété $\underline{\psi}_1^* \geq \frac{1}{2}$, le fait que les suites $(d_k)_k$ sont infinies et des propriétés générales relatives aux 3-systèmes. Ce théorème est donc vrai dès que les coordonnées de $\mathbf{u} = (1, \xi, \eta)$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$ et que les exposants paramétriques vérifient $\overline{\psi}_1^* < -\frac{1}{3}$ et $\underline{\psi}_1^* \geq -\frac{1}{2}$.

Preuve du Corollaire 6.1.2
Soit ξ un réel tel que $\overline{\psi}_1^* < -\frac{1}{3}$.
Par l'asburde, supposons que $\underline{\psi}_1^* = \underline{\psi}_2^*$. Alors l'inégalité (6.1.1) du Théorème 6.1.1 implique immédiatement en simplifiant par $\frac{\underline{\psi}_2^*}{1+\underline{\psi}_2^*} = \frac{\underline{\psi}_1^*}{1+\underline{\psi}_1^*} < 0$

$$-1 \geq \frac{1 + 2\overline{\psi}_1^*}{\overline{\psi}_1^*},$$

ce qui conduit à $\overline{\psi}_1^* \geq -\frac{1}{3}$: contradiction. Donc $\underline{\psi}_1^* < \underline{\psi}_2^*$.
De même, si on suppose $\overline{\psi}_2^* = \overline{\psi}_3^*$ alors l'inégalité (6.1.2) du Théorème 6.1.1 donne

$$-1 \leq \frac{1 + 2\underline{\psi}_3^*}{\underline{\psi}_3^*},$$

qui conduit à $\underline{\psi}_3^* \leq -\frac{1}{3}$, donc $\underline{\psi}_3^* = -\frac{1}{3}$, ce qui est équivalent à $\overline{\psi}_1^* = -\frac{1}{3}$ par l'identité de Jarník : contradiction. Donc $\overline{\psi}_2^* < \overline{\psi}_3^*$. □

Chapitre 7

Propriétés des points minimaux

7.1 Introduction

Rappelons qu'on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^3$. Dans le Chapitre 4 nous avons considéré des nombres ξ pour lesquels il existe une fonction sturmienne $\psi \in \mathcal{F}_{stur}$ et une sous-suite $(\mathbf{v}_i)_i$ de la suite des points minimaux associée à la famille $\mathcal{C}^*_{\mathbf{u}}(e^q)$ avec $\mathbf{u} = (1, \xi, \xi^2)$ telle que

$$\mathbf{v}_{i+1} \propto \mathbf{v}_i \mathbf{v}_{\psi(i)}^{-1} \mathbf{v}_i \tag{7.1.1}$$

pour i assez grand. Nous avons alors montré que de tels nombres partagent beaucoup de propriétés avec les nombres de type sturmien du Chapitre 2 ; leurs exposants diophantiens paramétriques ont notamment la même forme que ceux d'un nombre de type ψ-sturmien propre, et ne dépendent que d'un paramètre δ et de la constante σ associée à ψ (voir entre autres le Théorème 4.8.1). Outre les nombres de type sturmien, un exemple de nombres ξ pour lesquels il existe une fonction ψ et une suite $(\mathbf{v}_i)$ vérifiant une relation du type (7.1.1) est ceux pour lesquels l'exposant β_0 de Fischler [23] vérifie $\beta_0(\xi) < 2$. De tels nombres vérifient nécessairement la condition $\lambda_2(\xi) = 1$. De plus, si $\beta_0(\xi) < \sqrt{3}$ alors la fonction ψ est sturmienne. Dans le Chapitre 4 nous avons défini un exposant paramétrique κ^* inspiré de l'exposant β_0, qui contrairement à β_0 prend des valeurs non triviales pour des nombres ξ tels que $\lambda_2(\xi) < 1$ (alors que pour ces nombres on a toujours $\beta_0(\xi) = +\infty$). Une question arrive alors naturellement : peut-on généraliser les résultats de Fischler, notamment le Théorème 1.8.1, à κ^* ? Entre autres, existe-t-il une constante κ_1 telle que pour tout nombre ξ vérifiant $\kappa^*(\xi) < \kappa_1$ on ait l'existence d'une fonction sturmienne ψ et d'une sous-suite $(\mathbf{v}_i)$ vérifiant (7.1.1) ? Les résultats du Chapitre 4 pourraient alors permettre de montrer que les exposants d'un réel ξ tel que $\kappa^*(\xi) < \kappa_1$ sont toujours de la forme de ceux d'un nombre de type sturmien (et ne dépendent que de deux paramètres δ et σ).

Dans cette optique, ce chapitre est consacré à la généralisation partielle des travaux de Fischler [23], en veillant à prendre en compte la possibilité que l'exposant $\lambda_2(\xi)$ soit < 1. A l'aide notamment des outils de la géométrie paramétrique des nombres (voir la Partie 1.6 du Chapitre 1), nous déterminons les exposants optimaux de plusieurs énoncés de [23] et nous donnons une interprétation paramétrique de certaines quantités.

Fixons un réel ξ tel que $\widehat{\lambda}_2(\xi) > \frac{1}{2}$. On note $(\mathbf{a}_i)_i$ la suite des points minimaux (or-

donnés par norme croissante) associés à la famille $\mathcal{C}^*_{\mathbf{u}}(e^q)$ définie à la Partie 1.7 du Chapitre 1 avec $\mathbf{u} = (1, \xi, \xi^2)$. Remarquons que dans le Chapitre 1 on notait $(\mathbf{a}^*_i)_i$ cette suite. On note aussi $(\mathbf{d}_k)_k$ la sous-suite de $(\mathbf{a}_i)_i$ constituée des points $\mathbf{a}_i$ tels que la famille $(\mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1})$ soit libre. On considère les exposants $\underline{\psi}^*_i, \overline{\psi}^*_i$ associés à $\mathbf{u}$. Enfin, on définit $\mathcal{A}^*_\alpha$ comme dans le Chapitre 1 (voir Définition 1.8.8) par

$$\mathcal{A}^*_\alpha = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\} \mid \frac{\log(\|\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}\|)}{\log(\|\mathbf{x}\|) - \log(\|\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}\|)} \leq \alpha\}.$$

Écrite dans le langage de la géométrie paramétrique des nombres, la Proposition 3.6 de [23] devient

Proposition 7.1.1 (Fischler 2007)**.** *Supposons $\underline{\psi}^*_1 = -\frac{1}{2}$ et $\overline{\psi}^*_1 < -\frac{1}{3}$, et fixons α tel que $\underline{\psi}^*_1 < \alpha < -\frac{1+2\overline{\psi}^*_1}{1+\overline{\psi}^*_1}$. Soit $\mathbf{x} \in \mathcal{A}^*_\alpha$ avec $\|\mathbf{x}\|$ assez grand. Alors $\mathbf{x}$ est colinéaire à un point minimal $\mathbf{a}_i$.*

Rappelons que l'hypothèse $\overline{\psi}^*_1 < -\frac{1}{3}$ est équivalente à $\widehat{\lambda}_2(\xi) > \frac{1}{2}$ et que sous cette hypothèse on a toujours $\underline{\psi}^*_1 \geq -\frac{1}{2}$ (ou de manière équivalente $\lambda_2(\xi) \leq 1$) : voir Proposition 0.2.1 de l'introduction de cette thèse et la remarque qui la suit. Dans l'énoncé de la Proposition 7.1.1 le sens de "point minimal" est celui de la Partie 1.7. Dans [23], c'est au contraire la notion de point minimal de Davenport et Schmidt qui est utilisée ; pour faire la correspondance on peut utiliser la Proposition 1.8.11 du Chapitre 1. Fischler pose alors la question suivante (reformulée ici en termes paramétriques) : peut-on affaiblir la condition $\alpha < -\frac{1+2\overline{\psi}^*_1}{1+\overline{\psi}^*_1}$ en $\alpha < \overline{\psi}^*_1$?
L'énoncé suivant - qui est l'un des résultats principaux de ce chapitre et correspond au Théorème K de l'introduction de cette thèse – généralise la Proposition 7.1.1 et apporte une réponse négative à cette question, en utilisant le fait que $\underline{\psi}^*_2(\xi) < \overline{\psi}^*_1(\xi)$ pour les nombres ξ de type sturmien qui ne sont pas extrémaux (voir la Proposition 7.5.2).

Théorème 7.1.1. *Suppose $\overline{\psi}^*_1 < -\frac{1}{3}$. Soit α tel que $\underline{\psi}^*_1 < \alpha < \underline{\psi}^*_2$. Soit $\mathbf{x} \in \mathcal{A}^*_\alpha$ avec $\|\mathbf{x}\|$ assez grand. Alors $\mathbf{x}$ est colinéaire à un un point minimal $\mathbf{a}_i$.*
De plus la borne $\underline{\psi}^*_2$ est optimale : pour tout $\alpha > \underline{\psi}^*_2$ il existe des $\mathbf{x} \in \mathcal{A}^*_\alpha$ avec $\|\mathbf{x}\|$ arbitrairement grande qui ne sont colinéaires à aucun point minimal.

Remarquons que dans l'énoncé du Théorème 7.1.1 on ne suppose plus $\underline{\psi}^*_1 = -\frac{1}{2}$. Ce résultat illustre l'intérêt de la géométrie paramétrique des nombres : la borne optimale $\underline{\psi}^*_2$ apparaît naturellement dans le contexte de la géométrie paramétrique des nombres, et permet de répondre à une question antérieure.

Nous reprenons ensuite les arguments de la preuve de Fischler pour généraliser la Proposition 7.1.1 en y remplaçant l'hypothèse $\alpha < -\frac{1+2\overline{\psi}^*_1}{1+\overline{\psi}^*_1}$ par $\alpha < \frac{(\beta_1-1)\underline{\psi}^*_1}{1+(2-\beta_1)\underline{\psi}^*_1}$ (voir Proposition 7.5.3). Le caractère optimal de $\underline{\psi}^*_2$ fourni par le Théorème 7.1.1 nous assure que cette borne est $\leq \underline{\psi}^*_2$. Comme $\beta_1 = 1/\widehat{\lambda}_2 = -\left(1 + \frac{1}{\overline{\psi}^*_1}\right)$ on en déduit alors l'inégalité

$$-\frac{(1+2\overline{\psi}^*_1)\underline{\psi}^*_1}{\overline{\psi}^*_1 + \underline{\psi}^*_1 + 3\underline{\psi}^*_1\overline{\psi}^*_1} \leq \underline{\psi}^*_2. \tag{7.1.2}$$

Cette inégalité est équivalente à l'inégalité (6.1.1) du Théorème 6.1.1 du Chapitre 6. On dispose ainsi d'une nouvelle preuve de ce résultat.

Une étape cruciale dans la preuve du Théorème 7.1.1 est de relier les points minimaux (voir Partie 1.7 du Chapitre 1) au 3-système dual qui représente ξ. Cela permet de combiner des méthodes liées aux points minimaux avec celles venant de la géométrie paramétrique des nombres. Ce lien fait l'objet de la Partie 7.3, dont le résultat principal est la Proposition 7.3.3.

Nous montrons également les deux résultats suivants, qui améliorent respectivement le Lemme 3.8 et la Proposition 3.7 de [23]. Dans ces deux énoncés, la borne $\widehat{\omega}_2(\xi)$ n'est pas optimale : voir le Lemme 7.6.1 et la Proposition 7.6.3 pour des versions plus fortes – et optimales – de ces résultats. Dans [23] cette borne $\widehat{\omega}_2(\xi)$ était remplacée par 2.

Proposition 7.1.2. *Soit $(\mathbf{u}_i)_i$ une sous-suite de $(\mathbf{a}_i)_i$ telle que*

$$\limsup_{i\to+\infty} \frac{\log(\|\mathbf{u}_{i+1}\|)}{-\log(\|\mathbf{u}_i \wedge \mathbf{u}\|)} < \widehat{\omega}_2(\xi).$$

Soit i assez grand et n, m tels que $\mathbf{u}_i = \mathbf{a}_n$ et $\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{a}_m$. Alors l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_{n+1}, \dots, \mathbf{a}_m$ est de dimension 2.

Proposition 7.1.3. *Soit $(\mathbf{u}_i)_i$ une sous-suite de $(\mathbf{a}_i)_i$ telle que*

$$\limsup_{i\to+\infty} \frac{\log(\|\mathbf{u}_{i+1}\|)}{-\log(\|\mathbf{u}_i \wedge \mathbf{u}\|)} < \widehat{\omega}_2(\xi).$$

Alors :

(a) A un nombre fini de termes près, $(\mathbf{d}_k)_k$ est une sous-suite de $(\mathbf{u}_i)_i$.

(b) Pour tout i assez grand, $\mathbf{u}_i$ est parmi les $\mathbf{d}_k$ si et seulement si $\mathbf{u}_{i-1}, \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{i+1}$ sont linéairement indépendants.

Les Propositions 7.1.2 et 7.1.3 impliquent la Proposition L de l'introduction de cette thèse.

Ce Chapitre est organisé comme suit. Nous posons les notations et rappelons quelques estimations classiques dans la Partie 7.2. La Partie 7.3 est consacrée à l'étude de l'allure générique d'un 3-système dual $\mathbf{P}$ représentant ξ et aux liens qu'il entretient avec la suite des points minimaux duaux associés à ξ. Nous montrons dans la Proposition 7.3.3 que les trajectoires de certains points minimaux particuliers et la hauteur de sous-espaces liés à ces points se lisent sur le graphe conjoint de $\mathbf{P}$. C'est grâce à ces propriétés que nous montrons l'optimalité de la borne $\underline{\psi}_2^*$ dans le Théorème 7.1.1 qui est prouvée dans la Partie 7.5. Dans la Partie 7.4 nous redonnons certains résultats de Fischler concernant la hauteur des sous-espaces mentionnés, en les généralisant parfois. Ces résultats ne servent que dans la preuve de la Proposition 7.5.3 (qui rappelons-le est plus faible que le Théorème 7.1.1). Enfin, les versions optimales des Propositions 7.1.2 et 7.1.3 sont énoncées et démontrées dans la Partie 7.6.

7.2 Définitions et Notations

On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^3$. Soit ξ un réel tel que $\overline{\psi}_1^*(\xi) < -\frac{1}{3}$ (ou de manière équivalente, vérifiant $\widehat{\lambda}_2(\xi) > \frac{1}{2}$). Cette condition implique entre autres (voir Corollaire 6.2.7) que $\underline{\psi}_1^*(\xi) \geq -\frac{1}{2}$ et que ξ est transcendant.
On note $(\mathbf{a}_i)_i$ la suite des points minimaux associés à la famille de corps convexes $\mathcal{C}_{\mathbf{u}}^*(e^q)$ avec $\mathbf{u} = (1, \xi, \xi^2)$ (voir Partie 1.7 du Chapitre 1). Les notations $\mathrm{L}_{\mathbf{u}}^*, \underline{\psi}_i^*, \overline{\psi}_i^*, \mathrm{L}_{\mathbf{x}}^* \ldots$ venant de la géométrie paramétrique des nombres sont celles de la Partie 1.6 du Chapitre 1. Rappelons les notations de la Partie 1.8 du Chapitre 1. Pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^3$ non nuls tels que $\|\mathbf{x}\| < \|\mathbf{y}\|$ et $\|\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}\| > \|\mathbf{y} \wedge \mathbf{u}\|$ on pose

$$\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\log(\|\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}\|)}{\log(\|\mathbf{y}\|) - \log(\|\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}\|)} \quad \text{et} \quad \alpha(\mathbf{x}) = \frac{\log(||\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}||)}{\log(||\mathbf{x}||) - \log(||\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}||)}. \tag{7.2.1}$$

Les fonctions $\widetilde{\varepsilon}$ et $\widetilde{\alpha}$ (réciproques l'une de l'autre) sont définies par

$$\widetilde{\varepsilon}(\alpha) = \frac{1 + 2\alpha}{1 + \alpha} \quad \text{et} \quad \widetilde{\alpha}(\varepsilon) = -\frac{1 - \varepsilon}{2 - \varepsilon}. \tag{7.2.2}$$

Rappelons aussi qu'on a posé pour tout $\alpha > \underline{\psi}_1^*$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\alpha^* &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\} \mid \alpha(\mathbf{x}) \leq \alpha\} \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\} \mid ||\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}|| \leq ||\mathbf{x}||^{-(1-\widetilde{\varepsilon}(\alpha))}\}, \end{aligned} \tag{7.2.3}$$

la deuxième égalité étant donnée par (1.8.4). Par la Proposition 1.8.9, on a l'équivalence suivante pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^3$ non nuls tels que $\|\mathbf{x}\| < \|\mathbf{y}\|$ et $\|\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}\| > \|\mathbf{y} \wedge \mathbf{u}\|$:

$$\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \alpha \Leftrightarrow \|\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}\| \leq \|\mathbf{y}\|^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} = \|\mathbf{y}\|^{-1+\widetilde{\varepsilon}(\alpha)}. \tag{7.2.4}$$

On a $\underline{\psi}_1^* = \liminf_{i \to +\infty} \alpha(\mathbf{a}_i)$, donc lorsque i tend vers l'infini on a

$$\|\mathbf{a}_i \wedge \mathbf{u}\| \gg \|\mathbf{a}_i\|^{\frac{\underline{\psi}_1^*}{1+\underline{\psi}_1^*} + o(1)}. \tag{7.2.5}$$

Remarquons que dans l'inégalité correspondante de [23] (notée (10)), l'exposant $\frac{\underline{\psi}_1^*}{1+\underline{\psi}_1^*} + o(1)$ est remplacé par -1. C'est en général moins précis, puisque $\underline{\psi}_1^* \geq -\frac{1}{2}$.
Soit I_0 l'ensemble des indices i tels que $\mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_i$ et $\mathbf{a}_{i+1}$ sont linéairement indépendants. Cet ensemble est infini (voir [17]). Rappelons la définition de la hauteur d'un plan de $\mathbb{R}^3$ défini sur $\mathbb{Q}$ (voir aussi Partie 8.3 du Chapitre 8).

Définition 7.2.1. Soit $\mathcal{V}$ un plan de $\mathbb{R}^3$ défini sur $\mathbb{Q}$. Alors pour toute $\mathbb{Z}$-base $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ de $\mathcal{V} \cap \mathbb{Z}^3$, la quantité $\|\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}\|$ dépend uniquement de $\mathcal{V}$ (et pas du choix de la base). On l'appelle la *hauteur* de $\mathcal{V}$ et on la note $H(\mathcal{V})$.

Remarquons que pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$ non colinéaires on a $\|\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}\| \geq H(\mathcal{V})$. Suivant les notations de [23] on note $(i_k)_k$ la suite croissante des éléments de I_0 et on pose

$$\mathbf{d}_k = \mathbf{a}_{i_k}.$$

On définit aussi le plan de $\mathbb{R}^3$ défini sur $\mathbb{Q}$

$$\mathcal{V}_k = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(\mathbf{d}_k, \mathbf{d}_{k+1}).$$

Le Lemme 1.7.13 du Chapitre 1 et la Proposition 7.3.3 que nous démontrons dans la partie suivante fournissent directement le résultat suivant :

Lemme 7.2.2. *Pour tout k assez grand et tout i tel que $i_k \leq i < i_{k+1}$, les points $\mathbf{a}_i$ et $\mathbf{a}_{i+1}$ forment une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{V}_k \cap \mathbb{Z}^3$ et on a $H(\mathcal{V}_k) \asymp \|\mathbf{a}_{i+1}\|\|\mathbf{a}_i \wedge \mathbf{u}\|$.*
On note $q_i = \log(\|\mathbf{a}_{i+1}\|) - \log(\|\mathbf{a}_i \wedge \mathbf{u}\|)$ l'abscisse du point d'intersection des graphes de $\mathrm{L}^*_{\mathbf{a}_i}$ et $\mathrm{L}^*_{\mathbf{a}_{i+1}}$. Alors on a l'estimation

$$\log(H(\mathcal{V}_k)) = -\mathrm{L}^*_3(q_i) + \mathcal{O}(1) \tag{7.2.6}$$

lorsque k tend vers l'infini, pour tout i tel que $i_k \leq i < i_{k+1}$.

Rappelons par ailleurs le résultat suivant, qui reprend partiellement le Lemme 2.8 de [23] et vient du Lemme 4 de [17].

Lemme 7.2.3. *Soit $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{Z}^3$ tels que $\|\mathbf{x}\| \geq \max(\|\mathbf{y}\|, \|\mathbf{z}\|)$ et $\|\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}\| \leq \min(\|\mathbf{y} \wedge \mathbf{u}\|, \|\mathbf{z} \wedge \mathbf{u}\|)$. Alors on a*

$$|\det(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})| \ll \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y} \wedge \mathbf{u}\|\|\mathbf{z} \wedge \mathbf{u}\|.$$

Enfin, le Lemme 3 de [17] montre que pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^3$ on a

$$\|\mathbf{y} \wedge \mathbf{x}\| \ll \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y} \wedge \mathbf{u}\| + \|\mathbf{y}\|\|\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}\|. \tag{7.2.7}$$

7.3 Graphe conjoint générique d'un 3-système dual représentant ξ

Le résultat principal de cette partie est la Proposition 7.3.3. Nous étudions plus en détails l'allure du graphe conjoint d'un 3-système représentant ξ et nous le mettons en lien avec la suite des points minimaux duaux associés à ξ. On conserve les notations de la Partie 7.2. Rappelons que ξ vérifie $\overline{\psi}^*_1 < -\frac{1}{3}$ (ce qui implique que $\underline{\psi}^*_1 \geq -\frac{1}{2}$), que $(\mathbf{a}_i)_i$ est la suite des points minimaux duaux associés à ξ et que $(\mathbf{d}_k)_k$ est la suite des points minimaux $\mathbf{a}_i$ tels que $(\mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1})$ soit libre (on note alors i_k l'indice tel que $\mathbf{d}_k = \mathbf{a}_{i_k}$). On fixe maintenant un 3-système dual $\mathbf{P} = (\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3)$ qui représente ξ ; son existence est fournie par le Théorème 1.6.1. Autrement dit, il existe $C > 0$ tel que

$$\|\mathbf{P} - \mathbf{L}^*_{\mathbf{u}}\|_\infty \leq C. \tag{7.3.1}$$

La situation générique est illustrée à la figure 7.1. On utilisera les principes présentés dans la Partie 1.9.3 du Chapitre 1 que le lecteur est invité à consulter. On reprend certaines notations de la Partie 6.3 du Chapitre 6 (voir la Figure 6.1), et on en introduit d'autres qui joueront un rôle important dans la suite. Les a_k, b_k, q'_k, d_k de la Figure 6.1 s'appellent maintenant $q^{(1)}_k, q^{(2)}_k, s^{(2)}_k, q_k$ respectivement (voir ci-dessous).
On note $(q_k)_{k\geq 0}$ la suite ordonnée dans l'ordre croissant des points q en lesquels P_1 et P_3 passent respectivement de pente -1 à 0 et de pente 0 à -1, et des points q en lesquels P_1 et P_2 passent respectivement de pente -1 à 0 et de pente 0 à -1 et pour lesquels le plus petit $q' > q$ en lequel P_2 change de nouveau de pente est aussi un point de changement de pente de P_3. Si q_k est l'un de ces derniers points, on note r_k le plus petit $q' > q$ en lequel P_2 change de nouveau de pente, sinon on pose $r_k = q_k$. On note $q^{(1)}_k$ (resp. $q^{(2)}_k$) le plus petit (resp. le plus grand) point $q \in]q_{k-1}, q_k[$ de changement de pente de P_1 (ce sont

nécessairement des points d'intersection de P_1 et P_2). Notons (voir la Définition 1.6.8 d'un 3-système) que P_3 est constante sur $[q_k^{(1)}, r_k]$. De même, on note $s_k^{(1)}$ (resp. $s_k^{(2)}$) le plus petit (resp. le plus grand) point $q \in]r_k, r_{k+1}[$ de changement de pente de P_3 (ce sont nécessairement des points d'intersection de P_2 et P_3). On a toujours

$$q_k^{(1)} \leq q_k^{(2)} \leq q_k \leq r_k \leq s_k^{(1)} \leq s_k^{(2)} \leq q_{k+1}^{(1)}.$$

Notons qu'il est possible que $q_k = r_k$ (dans ce cas P_2 est constant sur l'intervalle $[q_k^{(2)}, s_k^{(1)}]$), et on peut aussi avoir $q_k^{(1)} = q_k^{(1)}$ ou $s_k^{(1)} = s_k^{(2)}$. Remarquons aussi que sur $[q_k^{(1)}, q_k^{(2)}]$ (resp. $[s_k^{(1)}, s_k^{(2)}]$) le graphe conjoint de P_1 et P_2 (resp. P_2 et P_3) zigzague autour d'une droite de pente $-\frac{1}{2}$ (voir la Partie 1.9.3 du Chapitre 1).

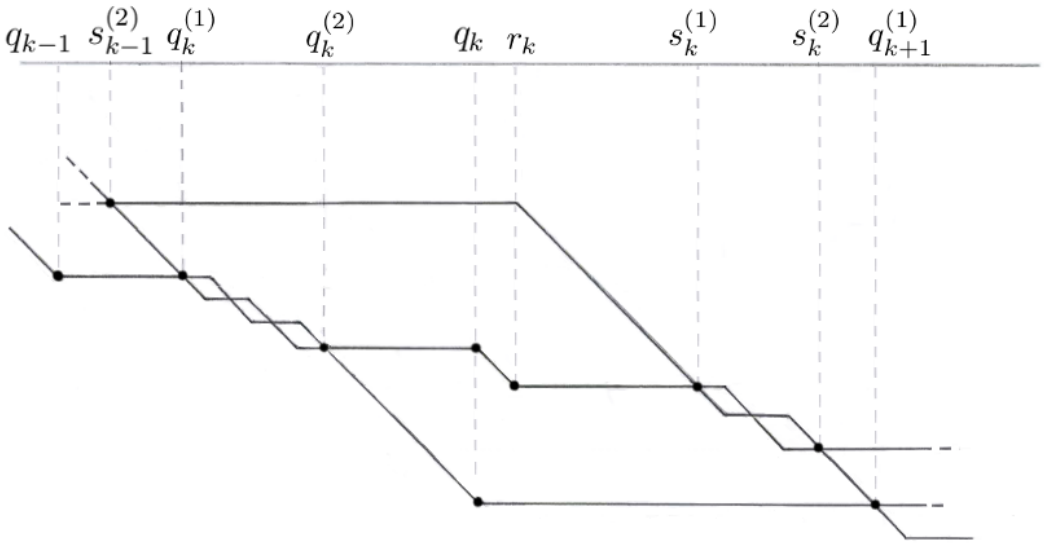

FIGURE 7.1 – 3-système générique représentant ξ

Montrons que l'hypothèse $\overline{\psi}_1^* < -\frac{1}{3}$ implique que

$$q_k^{(1)} - s_{k-1}^{(2)},\ q_k - q_k^{(2)} \text{ et } s_k^{(1)} - r_k \text{ tendent vers l'infini} \tag{7.3.2}$$

quand k tend vers l'infini. La stratégie repose sur le lemme suivant :

Lemme 7.3.1. *Soit $(m_k)_k$ une suite de réels > 0 qui diverge vers l'infini et telle que $L_3^*(m_k) \leq L_1^*(m_k) + o(m_k)$ quand k tend vers l'infini. Alors $\overline{\psi}_1^* = \underline{\psi}_3^* = -\frac{1}{3}$.*

Remarque 7.3.2. Le Lemme 7.3.1 est valide pour tout réel ξ qui n'est pas algébrique de degré 2 (même sans les hypothèses supplémentaires de cette partie).

Preuve Par hypothèse on a au point m_k

$$\frac{L_3^*(m_k)}{m_k} \leq \frac{L_1^*(m_k)}{m_k} + o(1).$$

En passant à la limite inférieure à gauche et à la limite supérieure à droite, on obtient $\underline{\psi}_3^* \leq \overline{\psi}_1^*$. Or on a toujours $\overline{\psi}_1^* \leq -\frac{1}{3} \leq \underline{\psi}_3^*$ (voir Partie 1.9.2 du Chapitre 1), donc l'inégalité précédente implique $\underline{\psi}_3^* = \overline{\psi}_1^* = -\frac{1}{3}$. □

Si l'une des quantités de (7.3.2) ne tend pas vers l'infini, on va montrer qu'il existe suite une de points $(m_k)_k$ vérifiant les hypothèses du Lemme 7.3.1, ce qui contredit notre hypothèse $\overline{\psi}_1^* < -\frac{1}{3}$.

Montrons pour commencer que $q_k^{(1)} - s_{k-1}^{(2)}$ tend vers l'infini. Par l'absurde, supposons que le segment $I = [s_{k-1}^{(2)}, q_k^{(1)}]$ est de longueur $\leq C'$ pour une infinité de k (avec $C' > 0$ qui ne dépend pas de ces indices). Comme P_1 et P_3 sont constantes sur I et que P_2 est décroissante de pente -1 sur I, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_3(q_k^{(1)}) = \mathrm{P}_3(s_{k-1}^{(2)}) = \mathrm{P}_2(s_{k-1}^{(2)}) &= \mathrm{P}_2(q_k^{(1)}) + (q_k^{(1)} - s_{k-1}^{(2)}) \\ &= \mathrm{P}_1(q_k^{(1)}) + (q_k^{(1)} - s_{k-1}^{(2)}) \leq \mathrm{P}_1(q_k^{(1)}) + C'.\end{aligned}$$

On déduit grâce à (7.3.1) l'estimation $\mathrm{L}_3^*(q_k^{(1)}) \leq \mathrm{L}_1^*(q_k^{(1)}) + C' + 2C$. Cette sous-suite des points $(q_k^{(1)})$ vérifie donc les hypothèses du Lemme 7.3.1, ce qui est impossible. Donc $q_k^{(1)} - s_{k-1}^{(2)}$ tend vers l'infini (en fait, on peut même montrer que $\liminf_{k\to\infty} q_k^{(1)}/s_{k-1}^{(2)} > 1$).

Montrons maintenant que $q_k - q_k^{(2)}$ tend vers l'infini. On raisonne encore par l'absurde en supposant que le segment $I = [q_k^{(2)}, q_k]$ est de longueur $\leq C'$ pour une infinité d'indices. Cette fois-ci, comme P_2 est constante sur I, P_1 est décroissante de pente -1 sur I, et P_1 et P_2 coïncident en $q_k^{(2)}$, on a $\mathrm{P}_2(q_k) \leq \mathrm{P}_1(q_k) + C'$. Comme P_1 est constante sur $[q_k, s_k^{(1)}]$ et que P_2 y est décroissante, on trouve alors

$$\mathrm{P}_3(s_k^{(1)}) = \mathrm{P}_2(s_k^{(1)}) \leq \mathrm{P}_2(q_k) \leq \mathrm{P}_1(q_k) + C' = \mathrm{P}_1(s_k^{(1)}) + C'$$

d'où on tire $\mathrm{L}_3^*(s_k^{(1)}) \leq \mathrm{L}_1^*(s_k^{(1)}) + C' + 2C$ grâce à (7.3.1), et on obtient encore une contradiction en appliquant le Lemme 7.3.1 à cette suite de points $s_k^{(1)}$. Donc $q_k - q_k^{(2)}$ tend vers l'infini.

Enfin, montrons maintenant que $s_k^{(1)} - r_k$ tend vers l'infini. Supposons que le segment $I = [r_k, s_k^{(1)}]$ est de longueur $\leq C'$ pour une infinité d'indice. Au point r_k on obtient $\mathrm{P}_3(r_k) \leq \mathrm{P}_2(r_k) + C'$. Comme P_3 est constante sur $[q_k^{(2)}, r_k]$ et que P_2 y est décroissante, on a alors

$$\mathrm{P}_3(q_k^{(2)}) = \mathrm{P}_3(r_k) \leq \mathrm{P}_2(r_k) + C' \leq \mathrm{P}_2(q_k^{(2)}) + C' = \mathrm{P}_1(q_k^{(2)}) + C',$$

et (7.3.1) implique l'estimation $\mathrm{L}_3^*(q_k^{(2)}) \leq \mathrm{L}_1^*(q_k^{(2)}) + C' + 2C$. Le Lemme 7.3.1 appliqué à la suite de ces points $q_k^{(2)}$, mène une nouvelle fois à une contradiction.
Ceci achève la démonstration de (7.3.2).

La proposition suivante permet de "lire" la trajectoires des points $\mathbf{d}_k$ sur le graphe conjoint de $\mathbf{P}$. Rappelons que $(\mathbf{d}_k)_k$ est la suite des points minimaux $\mathbf{a}_i$ tels que $(\mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1})$ soit libre, et qu'on note i_k l'indice tel que $\mathbf{d}_k = \mathbf{a}_{i_k}$.

Proposition 7.3.3. *Rappelons qu'on note $\mathcal{V}_k$ le plan de $\mathbb{R}^3$ engendré par $\mathbf{d}_k = \mathbf{a}_{i_k}, \mathbf{a}_{i_k+1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_{k+1}} = \mathbf{d}_{k+1}$. On a les propriétés suivantes (le lecteur est invité à consulter la Figure 7.1) :*

(a) Quitte à décaler les indices, le point minimal $\mathbf{d}_k$ est le point minimal correspondant aux points q de l'intervalle $[q_k^{(2)}+\mathcal{O}(1), q_{k+1}^{(1)}-\mathcal{O}(1)]$. De plus, le point de changement de pente $q^*_{\mathbf{d}_k}$ de $\mathbf{d}_k$ vérifie $q^*_{\mathbf{d}_k} = q_k + \mathcal{O}(1)$.

(b) On note h_k la valeur de P_3 sur l'intervalle $[s_k^{(2)}, r_{k+1}]$. Alors on a

$$\log(H(\mathcal{V}_k)) = -h_k + \mathcal{O}(1).$$

L'assertion (b) de la Proposition 7.3.3, et les Lemmes 1.7.14 et 1.7.13 du Chapitre 1 impliquent le corollaire suivant :

Corollaire 7.3.4. *On a l'estimation $\|\mathbf{a}_i \wedge \mathbf{a}_{i+1}\| \asymp \|\mathbf{a}_{i+1}\|\|\mathbf{a}_i \wedge \mathbf{u}\|$.*

Remarque 7.3.5. Nous utilisons dans la preuve de la Proposition 7.3.3 uniquement l'hypothèse d'indépendance linéaire sur $\mathbb{Q}$ des coordonnées de $\mathbf{u}$ et l'hypothèse $\overline{\psi}_1^* < -\frac{1}{3}$, mais pas que $\mathbf{u}$ est de la forme $(1, \xi, \xi^2)$. Elle reste donc vraie dans le cadre plus général d'un vecteur $\mathbf{u}$ de la forme (u_0, u_1, u_2).

Preuve La preuve étant assez longue, elle est décomposée en quatre étapes. Commençons par esquisser la stratégie.
On note $\mathbf{x}_k$ le point minimal correspondant à q_k. On suppose k assez grand. Nous allons montrer à la fin de la démonstration la propriété suivante

$$\text{A un nombre fini de termes près, } (\mathbf{x}_k)_k \text{ coïncide avec } (\mathbf{d}_k)_k. \tag{7.3.3}$$

Nous en déduirons les assertions (a) et (b) de la Proposition.
Dans une première étape, nous allons montrer que pour tout $q \in [q_k^{(2)} + 3C, q_{k+1}^{(1)} - 3C]$ et tout $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3$ on a l'implication

$$\mathrm{L}^*_{\mathbf{x}}(q) = \mathrm{L}^*_1(q) \Rightarrow \mathbf{x} = \pm\mathbf{x}_k, \tag{7.3.4}$$

et que le point $q^*_{\mathbf{x}_k}$ de changement de pente de $\mathbf{x}_k$ vérifie pour k assez grand

$$|q^*_{\mathbf{x}_k} - q_k| \leq 3C. \tag{7.3.5}$$

L'implication (7.3.4) montre notamment que $\mathbf{x}_k$ est le point minimal correspondant à q pour tout $q \in [q_k^{(2)} + 3C, q_{k+1}^{(1)} - 3C]$.
On note $\mathcal{V}'_k$ l'espace vectoriel engendré par les points minimaux correspondant aux points $q \in I_k = [q_k, q_{k+1}]$. Remarquons que par (7.3.2) la longueur de cet intervalle tend vers l'infini avec k et qu'il contient l'intervalle $[q_{k+1}^{(1)} - 3C, q_{k+1}^{(2)} + 3C]$. En particulier pour k assez grand $\mathbf{x}_k$ est le point minimal correspondant à q_k et $\mathbf{x}_{k+1}$ celui correspondant à q_{k+1}, et donc $\mathcal{V}'_k$ est l'espace vectoriel engendré par les points minimaux compris entre $\mathbf{x}_k$ et $\mathbf{x}_{k+1}$. Nous montrerons alors à l'étape 2 que pour k assez grand

$$\mathcal{V}'_k = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}\right), \tag{7.3.6}$$

et que la dimension de $\mathcal{V}'_k$ est égale à 2 (*i.e.* que $(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1})$ est libre). Si un point minimal $\mathbf{a}_i$ est compris strictement entre $\mathbf{x}_k$ et $\mathbf{x}_{k+1}$, les vecteurs $\mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_i$ et $\mathbf{a}_{i+1}$ appartiennent à $\mathcal{V}'_k$, donc sont linéairement dépendants et $\mathbf{a}_i$ ne peut pas être parmi les $\mathbf{d}_k$. La suite $(\mathbf{d}_k)_k$ est donc (à un nombre fini de termes près) une sous-suite de la suite $(\mathbf{x}_k)_k$.
Nous montrerons l'estimation suivante dans l'Étape 3 :

$$\log(\|\mathbf{a}_{i+1}\|) + \log(\|\mathbf{a}_i \wedge \mathbf{u}\|) = -h_k + \mathcal{O}(1), \tag{7.3.7}$$

et nous allons alors en déduire que

$$\log(H(\mathcal{V}'_k)) = -h_k + \mathcal{O}(1). \tag{7.3.8}$$

Le dernier point à montrer (qui est plus délicat que les autres) est que si on note Si on note j_k l'indice tel que $\mathbf{x}_k = \mathbf{a}_{j_k}$, alors $(\mathbf{a}_{j_k-1}, \mathbf{a}_{j_k}, \mathbf{a}_{j_k+1})$ est libre pour k assez grand : cela fait l'objet de l'Étape 4. Cela montre qu'à un nombre fini de termes près la suite $(\mathbf{x}_k)$ est une sous-suite de la suite $(\mathbf{d}_k)_k$. Avec ce qui précède (voir la remarque suivant (7.3.6)) cela montre (7.3.3). Quitte à décaler les indices, on a alors $\mathbf{x}_k = \mathbf{d}_k$ pour k assez grand, donc $\mathcal{V}_k = \mathcal{V}'_k$. Les propriétés (7.3.4) et (7.3.5) combinées avec (7.3.3) montrent l'assertion (a) de la proposition. Les estimations (7.3.7) et (7.3.8) combinées avec (7.3.3) montrent l'assertion (b) de la proposition.

Étape 1
Montrons d'abord (7.3.4) et (7.3.5). Notons que la longueur des intervalles $[q_k^{(2)} + 3C, q_k]$ et $[q_k, q_{k+1}^{(1)} - 3C]$ tend vers l'infini d'après (7.3.2). Soit $q \in [q_k^{(2)} + 3C, q_{k+1}^{(1)} - 3C]$ et $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3$ tel que $\mathrm{L}_1^*(q) = \mathrm{L}_{\mathbf{x}}^*(q)$. On distingue deux cas.

Dans un premier cas, supposons $q \leq q_k$. Par l'absurde, si $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x}_k$ sont linéairement indépendants alors par définition des minima successifs et par décroissance de $\mathrm{L}_{\mathbf{x}}^*$, en utilisant l'approximation (7.3.1) on a

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_2(q) - C \leq \mathrm{L}_2^*(q) \leq \mathrm{L}_{\mathbf{x}_k}^*(q) &\leq \mathrm{L}_{\mathbf{x}_k}^*(q_k) + q_k - q \\ &= \mathrm{L}_1^*(q_k) + q_k - q \\ &\leq \mathrm{P}_1(q_k) + q_k - q + C = \mathrm{P}_1(q) + C, \end{aligned}$$

et cette inégalité est impossible si $q > q_k^{(2)} + 2C$ (puisque sur $[q_k^{(2)}, q_k]$, la fonction P_2 est constante tandis que P_1 décroît avec pente -1). Donc $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x}_k$ sont colinéaires, et cela implique que $\mathbf{x} = \pm\mathbf{x}_k$ puisqu'un point réalisant L_1^* est toujours primitif.

Dans un second cas, supposons $q_k \leq q \leq q_{k+1}^{(1)} - 3C$. Par l'absurde, si $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x}_k$ sont linéairement indépendants, alors dans ce cas on a

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_2(q) - C \leq \mathrm{L}_2^*(q) \leq \mathrm{L}_{\mathbf{x}_k}^*(q) &\leq \mathrm{L}_{\mathbf{x}_k}^*(q_k) \\ &= \mathrm{L}_1^*(q_k) \\ &\leq \mathrm{P}_1(q_k) + C = \mathrm{P}_1(q) + C, \end{aligned}$$

et cette inégalité est encore impossible si $q < q_{k+1}^{(1)} - 2C$ (puisque sur $[s_k^{(2)}, q_{k+1}^{(1)}]$, la fonction P_2 est décroissante de pente -1 tandis que P_1 est constante). Donc $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x}_k$ sont

colinéaires, et cela implique que $\mathbf{x} = \pm\mathbf{x}_k$.

Montrons maintenant l'assertion (7.3.5) sur le point $q^*_{\mathbf{x}_k}$ de changement de pente de $\mathbf{x}_k$. Par l'absurde, si $q^*_{\mathbf{x}_k} \leq q_k - 3C$, la fonction $\mathrm{L}^*_{\mathbf{x}_k}$ est constante sur $[q_k - 3C, q_k]$. En utilisant l'approximation (7.3.1) et le fait que $\mathbf{x}_k$ réalise L^*_1 sur $[q_k - 3C, q_k]$ on obtient alors :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_1(q_k - 3C) \geq \mathrm{L}^*_1(q_k - 3C) - C = \mathrm{L}^*_{\mathbf{x}_k}(q_k - 3C) - C &= \mathrm{L}^*_{\mathbf{x}_k}(q_k) - C \\ &= \mathrm{L}^*_1(q_k) - C \\ &\geq \mathrm{P}_1(q_k) - 2C = \mathrm{P}_1(q_k - 3C) + C,\end{aligned}$$

ce qui est contradictoire. De même, on montre que l'inégalité $q^*_{\mathbf{x}_k} \geq q_k + 3C$ est impossible, ce qui prouve (7.3.5).

Étape 2

On fixe k suffisamment grand. Rappelons qu'on note $\mathcal{V}'_k$ l'espace vectoriel engendré par les points minimaux compris entre $\mathbf{x}_k$ et $\mathbf{x}_{k+1}$. Montrons (7.3.6) et que $\dim(\mathcal{V}'_k) = 2$.
Pour commencer, remarquons que les vecteurs $\mathbf{x}_k$ et $\mathbf{x}_{k+1}$ sont linéairement indépendants. En effet, les trajectoires de deux vecteurs colinéaires ont même point de changement de pente, et comme $q_{k+1} - q_k$ tend vers l'infini, par (7.3.5) les points de changement de pente de $\mathbf{x}_k$ et $\mathbf{x}_{k+1}$ sont distincts pour k assez grand. On a donc $\dim(\mathcal{V}'_k) \geq 2$. Pour établir $\dim(\mathcal{V}'_k) \leq 2$ pour k assez grand, l'idée est de montrer que si on a 3 points minimaux linéairement indépendants, alors au point $q^{(1)}_{k+1}$ les fonctions $\mathrm{L}^*_1, \mathrm{L}^*_2, \mathrm{L}^*_3$ coïncident à $\mathcal{O}(1)$ près. On obtiendra alors une contradiction avec le Lemme 7.3.1.
Supposons que $\mathcal{V}'_k$ est de dimension 3. Il existe alors un point minimal $\mathbf{x} \in \mathcal{V}'_k$ tel que $(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}, \mathbf{x}_{k+1})$ soit libre. Comme $\mathbf{x}_k, \mathbf{x}, \mathbf{x}_{k+1}$ sont trois points minimaux qui se "suivent" dans cet ordre, leurs trajectoires sont comme sur la Figure 7.2.

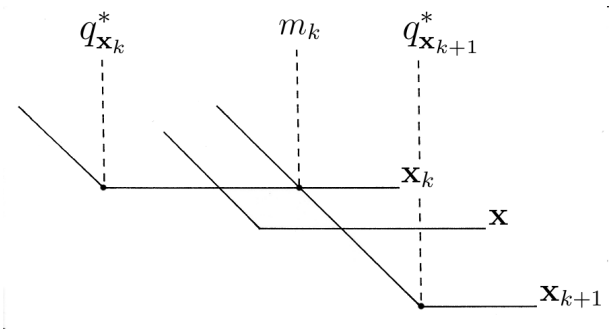

FIGURE 7.2 – Trajectoires des points $\mathbf{x}_k$, $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x}_{k+1}$

On note m_k l'abscisse du point d'intersection des trajectoires de $\mathbf{x}_k$ et $\mathbf{x}_{k+1}$, et $m'_k = q^{(1)}_{k+1} - 3C \leq m_k$ (l'inégalité $m'_k \leq m_k$ vient de (7.3.4) et du fait qu'en m_k les deux points $\mathbf{x}_k$ et $\mathbf{x}_{k+1}$ réalisent L^*_1). En m_k, comme $\mathrm{L}^*_{\mathbf{x}_k}$ est constante sur l'intervalle $[m'_k, m_k]$ (et que $\mathbf{x}_k$ est le point minimal correspondant à m'_k d'après (7.3.4)) on a

$$\mathrm{L}^*_3(m_k) \leq \mathrm{L}^*_{\mathbf{x}_k}(m_k) = \mathrm{L}^*_{\mathbf{x}_k}(m'_k) = \mathrm{L}^*_1(m'_k). \tag{7.3.9}$$

Comme P_3 est constante sur $[s_k^{(2)}, q_{k+1}]$ et que pour k assez grand $s_k^{(2)} \leq m'_k \leq m_k \leq q_{k+1}$ (rappelons $q_{k+1}^{(1)} - s_k^{(2)}$ tend vers l'infini), P_3 est aussi constante sur l'intervalle $[m'_k, m_k]$, et on a en utilisant (7.3.9)

$$\mathrm{L}_3^*(m'_k) \leq \mathrm{P}_3(m'_k) + C = \mathrm{P}_3(m_k) + C \leq \mathrm{L}_3^*(m_k) + 2C \leq \mathrm{L}_1^*(m'_k) + 2C.$$

Si cela est vérifié pour une infinité d'indices k on obtient alors une contradiction en utilisant le Lemme 7.3.1 avec la suite (m'_k). Cela achève la démonstration de (7.3.6) et du fait que $\dim(\mathcal{V}'_k) = 2$.

Étape 3

Montrons (7.3.7). Si on note j_k l'indice tel que $\mathbf{x}_k = \mathbf{a}_{j_k}$, le Lemme 1.7.14 du Chapitre 1 montre que pour tout i tel que $j_k \leq i < j_{k+1}$, en notant $q_i^* = \log(\|\mathbf{a}_{i+1}\|) - \log(\|\mathbf{a}_i \wedge \mathbf{u}\|)$ l'abscisse du point d'intersection des graphes de $\mathrm{L}^*_{\mathbf{a}_i}$ et $\mathrm{L}^*_{\mathbf{a}_{i+1}}$, on a $\log(\|\mathbf{a}_{i+1}\|) + \log(\|\mathbf{a}_i \wedge \mathbf{u}\|) = -\mathrm{L}_3^*(q_i^*) + \mathcal{O}(1)$. Au point q_i^* les deux points minimaux distincts $\mathbf{a}_i$ et $\mathbf{a}_{i+1}$ réalisent L_1^*. Par (7.3.4), $q_i^* \in [q_k, q_{k+1}]$ ne peut appartenir ni à $[q_k, q_{k+1}^{(1)} - 3C]$, ni à $[q_{k+1}^{(2)} + 3C, q_{k+1}]$: on a donc $q_i^* \in [q_{k+1}^{(1)} - 3C, q_{k+1}^{(2)} + 3C]$. Comme $\mathrm{L}_3^* + \mathcal{O}(1)$ est égale à P_3 qui est constante égale à h_k sur cet intervalle, on en déduit (7.3.7).

Rappelons qu'on note h_k la valeur de P_3 pour $[s_k^{(2)}, r_{k+1}]$. Montrons maintenant (7.3.8). On note $\mathbf{x} = \mathbf{x}_k$ et $\mathbf{y}$ le point minimal juste après $\mathbf{x}_k$. Rappelons que le Lemme 1.7.13 implique que $H(\mathcal{V}'_k) = \|\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}\|$. On écrit $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_0, y_1, y_2)$ et $\mathbf{u} = (u_0, u_1, u_2)$ (rappelons qu'aucune des coordonnées de $\mathbf{u}$ n'est nulle puisqu'elles sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{Q}$). Soit l, m deux indices compris entre 0 et 2. Alors on a

$$u_l \begin{vmatrix} x_l & y_l \\ x_m & y_m \end{vmatrix} = y_l \begin{vmatrix} x_l & u_l \\ x_m & u_m \end{vmatrix} - x_l \begin{vmatrix} y_l & u_l \\ y_m & u_m \end{vmatrix}. \tag{7.3.10}$$

Les coordonnées du vecteur $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$ sont de la forme $\pm \begin{vmatrix} x_l & y_l \\ x_m & y_m \end{vmatrix}$, et (7.3.10) implique directement l'estimation $\|\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}\| \ll \|\mathbf{y}\|\|\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}\| + \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y} \wedge \mathbf{u}\| \ll \|\mathbf{y}\|\|\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}\|$. Pour montrer $\|\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}\| \gg \|\mathbf{y}\|\|\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}\|$, le point-clef est de remarquer que $\|\mathbf{x}\| = o(\|\mathbf{y}\|)$ quand k tend vers l'infini. En effet, d'après (7.3.4), l'abscisse du point d'intersection entre les trajectoires de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ est $\geq q_{k+1}^{(1)} - 3C$, autrement dit $q_{k+1}^{(1)} - 3C \leq \log(\|\mathbf{y}\|) - \log(\|\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}\|)$. D'autre part $q_k = \log(\|\mathbf{x}\|) - \log(\|\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}\|)$: le fait que $q_{k+1}^{(1)} - q_k$ tend vers l'infini permet de conclure que $\log(\|\mathbf{y}\|) - \log(\|\mathbf{x}\|)$ diverge vers $+\infty$.

Les coordonnées du vecteur $\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}$ sont de la forme $\pm \begin{vmatrix} x_l & u_l \\ x_m & u_m \end{vmatrix}$, et si on choisit (l, m) tel que la coordonnée de $\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}$ correspondante soit maximale en valeur absolue, alors on a

$$\left| \det \begin{pmatrix} x_l & u_l \\ x_m & u_m \end{pmatrix} \right| \gg \|\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}\|$$

et on déduit de (7.3.10) et des estimations $\|\mathbf{x}\| = o(\|\mathbf{y}\|)$ et $\|\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}\| \geq \|\mathbf{y} \wedge \mathbf{u}\|$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}\| \gg |u_l| \left| \det \begin{pmatrix} x_l & y_l \\ x_m & y_m \end{pmatrix} \right| &\geq |y_l| \left| \det \begin{pmatrix} x_l & u_l \\ x_m & u_m \end{pmatrix} \right| + \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y} \wedge \mathbf{u}\|) \\ &\gg \|\mathbf{y}\|\|\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}\|. \end{aligned}$$

On a alors d'après (7.3.7) $\log(H(\mathcal{V}'_k)) = \log(\|\mathbf{x}\wedge\mathbf{y}\|) = \log(\|\mathbf{y}\|) + \log(\|\mathbf{x}\wedge\mathbf{u}\|) + \mathcal{O}(1) = -h_k + \mathcal{O}(1)$ et ceci achève la démonstration de (7.3.8).

Ce qui précède permet de montrer l'estimation $\|\mathbf{a}_i \wedge \mathbf{a}_{i+1}\| \asymp \|\mathbf{a}_{i+1}\|\|\mathbf{a}_i \wedge \mathbf{u}\|$ de la proposition. En effet, d'après le Lemme 1.7.13 du Chapitre 1 on a pour tout i tel que $j_k \leq i < j_{k+1}$, $\|\mathbf{a}_i \wedge \mathbf{a}_{i+1}\| = H(\mathcal{V}_k)$, donc en combinant les estimations (7.3.7) et (7.3.8) on a en particulier l'estimation $\|\mathbf{a}_i \wedge \mathbf{a}_{i+1}\| \asymp \|\mathbf{a}_{i+1}\|\|\mathbf{a}_i \wedge \mathbf{u}\|$ recherchée.

Étape 4
Montrons que $(\mathbf{a}_{j_k-1}, \mathbf{a}_{j_k}, \mathbf{a}_{j_k+1})$ est libre pour k assez grand. C'est le point délicat dans le sens où il requiert toutes les étapes précédentes.
Soit k tel que $(\mathbf{a}_{j_k-1}, \mathbf{a}_{j_k}, \mathbf{a}_{j_k+1})$ soit liée. Alors $\mathcal{V}'_{k-1} = \mathcal{V}'_k$ et d'après (7.3.8) on a

$$-h_{k-1} + \mathcal{O}(1) = \log(H(\mathcal{V}'_{k-1})) = \log(H(\mathcal{V}'_k)) = -h_k + \mathcal{O}(1).$$

Cela est impossible pour k assez grand car d'après les estimations (7.3.2), $s_k^{(2)} - r_k$ tend vers l'infini, donc $h_{k-1} - h_k$ tend vers l'infini. Donc $(\mathbf{a}_{j_k-1}, \mathbf{a}_{j_k}, \mathbf{a}_{j_k+1})$ est libre pour k assez grand, et cette dernière propriété achève la preuve de la proposition 7.3.3.

□

7.4 Estimations de la hauteur de $\mathcal{V}_k$

Dans cette partie on généralise les Lemmes 3.2, 3.3 et 3.4 de [23]. Les structures des preuves sont identiques à celles de Fischler ; il faut juste prendre en compte le fait qu'on n'a pas forcément $\underline{\psi}_1^* = -\frac{1}{2}$. On suppose toujours $\overline{\psi}_1^*(\xi) < -\frac{1}{3}$, ce qui équivaut à la condition $\beta_1(\xi) = 1/\widehat{\lambda}_2(\xi) < 2$ de Fischler.

Les équations (12) de [23] affirment que pour tout $\alpha > 1/\widehat{\lambda}_2(\xi)$ on a les majorations équivalentes suivantes :

$$\|\mathbf{a}_{i+1}\| \ll \|\mathbf{a}_i \wedge \mathbf{u}\|^{-\alpha} \quad \text{et} \quad \|\mathbf{a}_i \wedge \mathbf{u}\| \ll \|\mathbf{a}_{i+1}\|^{-\frac{1}{\alpha}}. \tag{7.4.1}$$

Remarquons que dans [23] Fischler démontre (7.4.1) sans supposer $\underline{\psi}_1^* = -\frac{1}{2}$. Ces estimations vont servir dans les preuves des lemmes ci-dessous. Mentionnons également que les points minimaux que Fischler considère sont ceux de Davenport et Schmidt qui ne sont pas exactement les mêmes que ceux que l'on considère ici (voir Partie 1.7 du Chapitre 1). En utilisant (7.2.3), le Lemme 7.2.2 fournit immédiatement le résultat suivant

Lemme 7.4.1. *Soit $\varepsilon \in]\widetilde{\varepsilon}(\underline{\psi}_1^*), 1]$. Soit i tel que $\mathbf{a}_i \in \mathcal{A}^*_{\widetilde{\alpha}(\varepsilon)}$ et k tel que $i_k \leq i < i_{k+1}$. Alors*

$$\|\mathbf{a}_{i+1}\| \gg H(\mathcal{V}_k)\|\mathbf{a}_i\|^{1-\varepsilon}$$

Le résultat suivant raffine le Lemme 3.3 de [23], en remplaçant l'exposant $2-\alpha$ par $\frac{1+\alpha\underline{\psi}_1^*}{1+\underline{\psi}_1^*}$; remarquons que $1 + \alpha\underline{\psi}_1^* > 0$ puisque $\alpha < 2$ et $\underline{\psi}_1^* \geq -\frac{1}{2}$, et que $\frac{1+\alpha\underline{\psi}_1^*}{1+\underline{\psi}_1^*} \geq 2 - \alpha$.

Lemme 7.4.2. *Soit α tel que $1/\widehat{\lambda}_2(\xi) < \alpha < 2$. Alors on a pour tout k*

$$H(\mathcal{V}_k) \gg \|\mathbf{d}_{k+1}\|^{\frac{1+\alpha\underline{\psi}_1^*}{1+\underline{\psi}_1^*}}.$$

Preuve On pose $i = i_{k+1}$. Alors d'après le Lemme 7.2.3, le Lemme 7.2.2 et (7.4.1), on a pour $1/\widehat{\lambda}_2(\xi) < \alpha' < \alpha$

$$\begin{aligned} 1 \ll |\det(\mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1})| &\ll \|\mathbf{a}_{i+1}\|\|\mathbf{a}_i \wedge \mathbf{u}\|\|\mathbf{a}_{i-1} \wedge \mathbf{u}\| \\ &\ll \|\mathbf{a}_i \wedge \mathbf{u}\|^{1-\alpha'}\|\mathbf{a}_i\|^{-1} H(\mathcal{V}_k). \end{aligned}$$

Or comme $1 - \alpha' < 0$, (7.2.5) combiné avec l'estimation précédente donne

$$1 \ll \|\mathbf{a}_i\|^{(1-\alpha)\times\frac{\underline{\psi}_1^*}{1+\underline{\psi}_1^*}-1} H(\mathcal{V}_k),$$

en utilisant l'inégalité $\alpha' < \alpha$ pour pouvoir ignorer le $o(1)$ provenant de (7.2.5). On en déduit le résultat annoncé. □

Le dernier lemme de ce paragraphe est simplement le Lemme 3.4 de [23], dont on recopie la preuve par souci de complétude.

Lemme 7.4.3. *Soit $\alpha > 1/\widehat{\lambda}_2(\xi)$. Alors on a*

$$H(\mathcal{V}_k) \gg \|\mathbf{d}_k\|^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Preuve On pose $i = i_k$. Alors d'après le Lemme 7.2.3, le Lemme 7.2.2 et (7.4.1), on a

$$\begin{aligned} 1 \ll |\det(\mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1})| &\ll \|\mathbf{a}_{i+1}\|\|\mathbf{a}_i \wedge \mathbf{u}\|\|\mathbf{a}_{i-1} \wedge \mathbf{u}\| \\ &\ll H(\mathcal{V}_k)\|\mathbf{a}_{i-1} \wedge \mathbf{u}\| \\ &\ll H(\mathcal{V}_k)\|\mathbf{a}_i\|^{-\frac{1}{\alpha}}. \end{aligned}$$

□

7.5 Une propriété des points minimaux

Comme dans tout ce chapitre on suppose systématiquement $\overline{\psi}_1^* < -\frac{1}{3}$. Rappelons la version paramétrique de la Proposition 3.6 de [23].

Proposition 7.5.1 (Fischler 2007)**.** *Supposons $\underline{\psi}_1^* = -\frac{1}{2}$. Soit α tel que $\underline{\psi}_1^* < \alpha < -\frac{1+2\overline{\psi}_1^*}{1+\overline{\psi}_1^*}$. Soit $\mathbf{x} \in \mathcal{A}_\alpha^*$ avec $\|\mathbf{x}\|$ assez grand. Alors $\mathbf{x}$ est colinéaire à un point minimal $\mathbf{a}_i$.*

Dans l'énoncé de la Proposition 7.5.1 le sens de "point minimal" est celui de la Partie 1.7. Dans [23], c'est au contraire la notion de point minimal de Davenport et Schmidt qui est utilisée ; pour faire la correspondance on peut utiliser la Proposition 1.8.11 du Chapitre 1. Fischler pose alors la question suivante (reformulée en termes paramétriques, en utilisant l'identité $\widetilde{\alpha}(1 - 1/\beta_1) = \overline{\psi}_1^*$) : peut-on affaiblir la condition $\alpha < -\frac{1+2\overline{\psi}_1^*}{1+\overline{\psi}_1^*}$ en

$\alpha < \overline{\psi}_1^*$?
Dans le Théorème 7.5.1 on généralise la Proposition 7.5.1 à l'aide de la géométrie paramétrique des nombres : la condition $\underline{\psi}_1^* = -\frac{1}{2}$ n'est plus nécessaire et on montre que la borne optimale sur α est $\underline{\psi}_2^*$. La propriété suivante permet alors de répondre par la négative à la question de Fischler.

Proposition 7.5.2. *Soit ξ un nombre de type sturmien qui n'est pas un nombre extrémal. Alors $\underline{\psi}_2^*(\xi) < \overline{\psi}_1^*(\xi)$.*

Preuve de la Proposition 7.5.2
D'une manière générale, on a toujours $\underline{\psi}_2^* \leq \overline{\psi}_1^*$. Soit maintenant ξ un nombre de type sturmien. Avec les notations du Théorème 2.7.1, il existe σ (de la forme $1/\limsup[s_{k+1}; s_k, \ldots, s_1]$ avec $(s_i)_i$ une suite d'entiers naturels) et $\delta \geq 0$ tels que

$$\underline{\psi}_2^*(\xi) = -\overline{\psi}_2(\xi) = -\frac{1}{2+\sigma} \quad \text{et} \quad \overline{\psi}_1^*(\xi) = -\underline{\psi}_3(\xi) = -\frac{(1-\delta)(1+\sigma)}{1+2(1-\delta)(1+\sigma)}.$$

L'expression de $\overline{\psi}_1^*(\xi)$ étant strictement croissante en δ et $\underline{\psi}_2^*$ ne dépendant pas de δ, on a puisque $\sigma \leq \frac{1}{\gamma}$

$$\underline{\psi}_2^*(\xi) \leq -\frac{1+\sigma}{3+2\sigma} < -\frac{(1-\delta)(1+\sigma)}{1+2(1-\delta)(1+\sigma)} = \overline{\psi}_1^*(\xi)$$

pour tout $\delta > 0$. Pour terminer la preuve il suffit donc de considérer le cas $\delta = 0$. Dans ces conditions, d'après la Proposition 2.8.4 du Chapitre 2, ξ est un nombre extrémal si et seulement si $\sigma = 1/\gamma$. Si on suppose que ξ n'est pas extrémal, alors on a $\sigma < 1/\gamma$ et l'inégalité $\underline{\psi}_2^*(\xi) < -\frac{1+\sigma}{3+2\sigma}$ (qui est équivalente à $\sigma^2 + \sigma - 1 < 0$) est satisfaite. □

Le résultat principal de cette partie, énoncé comme Théorème 7.1.1 dans l'introduction, est le suivant.

Théorème 7.5.1. *Soit α tel que $\underline{\psi}_1^* < \alpha < \underline{\psi}_2^*$. Soit $\mathbf{x} \in \mathcal{A}_\alpha^*$ avec $\|\mathbf{x}\|$ assez grand. Alors $\mathbf{x}$ est colinéaire à un un point minimal. De plus l'exposant $\underline{\psi}_2^*$ est optimal : pour tout $\alpha > \underline{\psi}_2^*$ il existe des $\mathbf{x} \in \mathcal{A}_\alpha^*$ avec $\|\mathbf{x}\|$ arbitrairement grande qui ne sont colinéaires à aucun point minimal.*

Preuve Soit α tel que $\underline{\psi}_1^* < \alpha < \underline{\psi}_2^*$. Soient $\mathbf{x} \in \mathcal{A}_\alpha^*$ avec $\|\mathbf{x}\|$ assez grand et i tel que $\|\mathbf{a}_i\| \leq \|\mathbf{x}\| < \|\mathbf{a}_{i+1}\|$. Par la Proposition 1.7.8 sur les points minimaux on a $\|\mathbf{a}_i \wedge \mathbf{u}\| \leq \|\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}\|$. La Figure 7.3 illustre la situation (la trajectoire de $\mathbf{x}$ est en pointillées, celles de $\mathbf{a}_i$ et $\mathbf{a}_{i+1}$ en traits pleins).

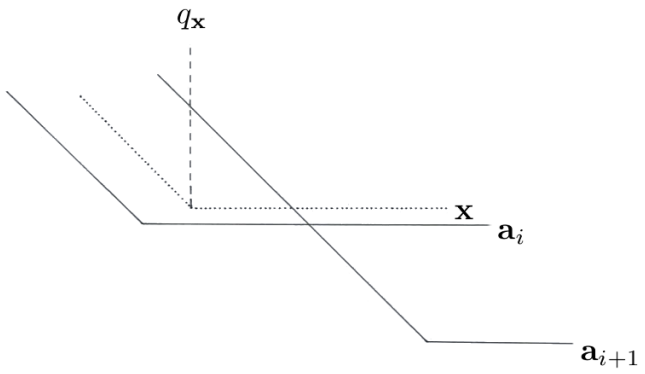

FIGURE 7.3 – Trajectoires des points $\mathbf{x}$, $\mathbf{a}_i$ et $\mathbf{a}_{i+1}$

Supposons que $\mathbf{x}$ ne soit pas colinéaire à $\mathbf{a}_i$. Alors $(\mathbf{x}, \mathbf{a}_i)$ est libre, donc en se plaçant au point $q_{\mathbf{x}} = \log(\|\mathbf{x}\|) - \log(\|\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}\|)$ de changement de pente de $\mathrm{L}^*_{\mathbf{x}}$, puisque $\mathbf{x} \in \mathcal{A}^*_\alpha$ on a

$$\psi^*_2(q_{\mathbf{x}}) \leq \frac{\log(\|\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}\|)}{q_{\mathbf{x}}} = \alpha(\mathbf{x}) \leq \alpha < \underline{\psi}^*_2,$$

ce qui est impossible pour $\|\mathbf{x}\|$ assez grand. Donc $\mathbf{x}$ est bien colinéaire à $\mathbf{a}_i$.

Montrons maintenant l'optimalité de $\underline{\psi}^*_2$. D'après le Théorème 1.6.1 il existe un 3-système dual $\mathbf{P} = (\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3)$ représentant $\mathbf{L}^*_{\mathbf{u}}$.

La situation générique est illustrée à la figure 7.4. Rappelons les notations suivantes, qui sont celles de la Partie 7.3 (voir juste après (7.3.1)). On note $(q_k)_k$ la suite ordonnée dans l'ordre croissant des points q où P_1 et P_3 passent respectivement de pente -1 à 0 et de pente 0 à -1, et des points q où P_1 et P_2 passent respectivement de pente -1 à 0 et de pente 0 à -1 et pour lesquels le plus petit $q' > q$ en lequel P_2 change de nouveau de pente est aussi un point de changement de pente de P_3. Si q_k est l'un de ces derniers points, on note r_k le plus petit $q' > q$ tel que P_2 change de nouveau de pente, sinon on pose $r_k = q_k$. On note $q_k^{(1)}$ (resp. $q_k^{(2)}$) le plus petit (resp. le plus grand) point $q \in]q_{k-1}, q_k[$ de changement de pente de P_1. De même, on note $s_k^{(1)}$ (resp. $s_k^{(2)}$) le plus petit (resp. le plus grand) point $q \in]r_k, r_{k+1}[$ de changement de pente de P_3.

On note A_k le point de coordonnées $(q_k^{(2)}, \mathrm{P}_1(q_k^{(2)}))$ et B_k le point de coordonnées $(r_k, \mathrm{P}_2(r_k))$.
Notons qu'il est possible que P_2 soit constant sur l'intervalle $[q_k^{(2)}, s_k^{(1)}]$ (dans ce cas on a $q_k = r_k$). Remarquons que sur $[q_k^{(1)}, q_k^{(2)}]$ (resp. $[s_k^{(1)}, s_k^{(2)}]$) le graphe conjoint de P_1 et P_2 (resp. P_2 et P_3) zigzague autour d'une droite de pente $-\frac{1}{2}$.
Enfin, d'après la Proposition 7.3.3, quitte à décaler les indices on peut supposer que q_k est le point de changement de pente de la trajectoire de $\mathbf{d}_k$ à $\mathcal{O}(1)$ près. Les trajectoires de $\mathbf{d}_{k-1}$ et $\mathbf{d}_k$ sont représentées en pointillés sur la Figure 7.4.

Comme $-\frac{1}{2} \leq \underline{\psi}^*_1 \leq \underline{\psi}^*_2$, on en déduit (voir les principes de la Partie 1.9.3 du Chapitre 1, notamment la Proposition 1.9.6, ainsi que la Proposition 1.9.10 et le Corollaire 1.9.12

pour l'étude des zones où deux composantes zigzaguent) que pour k assez grand

$$\min_{q\in[s_{k-1}^{(1)},s_k^{(1)}]} \frac{\mathrm{P}_2(q)}{q} = \min\Big(\frac{\mathrm{P}_2(q_k^{(2)})}{q_k^{(2)}} + o(1), \frac{\mathrm{P}_2(r_k)}{r_k}\Big). \tag{7.5.1}$$

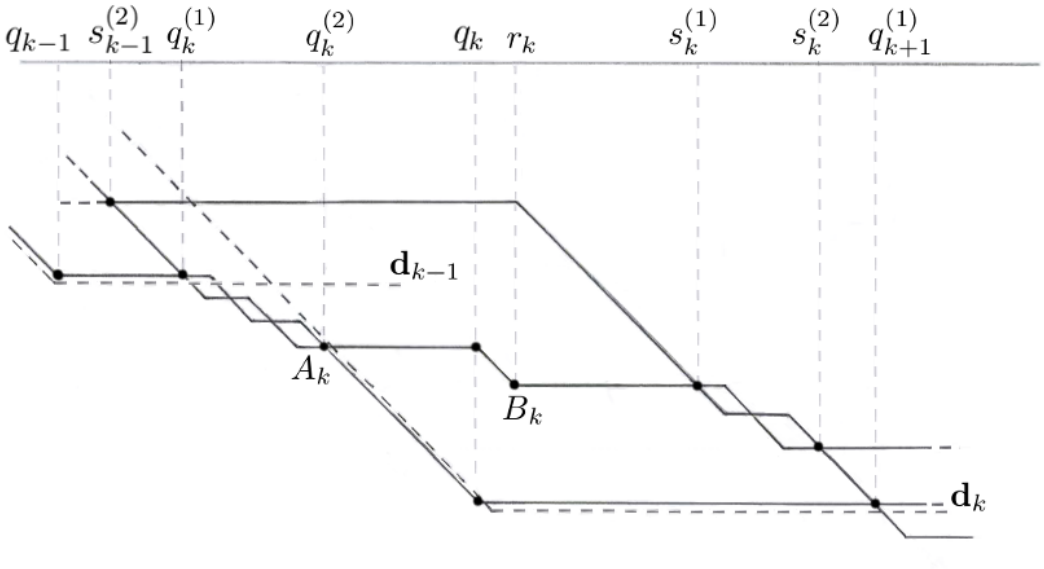

FIGURE 7.4 – Situation générique pour le calcul de $\underline{\psi}_2^*$

Comme $\underline{\psi}_2^* \le \overline{\psi}_1^* < -\frac{1}{3}$ on peut se donner α tel que $\underline{\psi}_2^* < \alpha < -\frac{1}{3}$. On va montrer qu'il existe des $\mathbf{v} \in \mathcal{A}_\alpha^*$ de norme $\|\mathbf{v}\|$ arbitrairement grande.
Par définition de $\underline{\psi}_2^*$ et par (7.5.1) il existe une infinité de k tels que

$$\min\Big(\frac{\mathrm{P}_2(q_k^{(2)})}{q_k^{(2)}}, \frac{\mathrm{P}_2(r_k)}{r_k}\Big) < \alpha.$$

Distinguons deux cas. Tout d'abord, si $\frac{\mathrm{P}_2(r_k)}{r_k} < \frac{\mathrm{P}_2(q_k^{(2)})}{q_k^{(2)}}$ (en particulier le minimum de (7.5.1) est égal à $\frac{\mathrm{P}_2(r_k)}{r_k}$), alors P_2 n'est pas constante sur l'intervalle $[q_k^{(2)}, s_k^{(1)}]$. On choisit $\mathbf{v}$ tel que $(\mathbf{d}_k, \mathbf{v})$ soit libre et réalise $(\mathrm{L}_1^*, \mathrm{L}_2^*) = (\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2) + \mathcal{O}(1)$ au point r_k ; alors on a directement $\mathbf{v} \in \mathcal{A}_\alpha^*$ par (1.8.2). Montrons que $\mathbf{v}$ n'est colinéaire à aucun point minimal. D'après la Proposition 7.3.3, $\mathbf{d}_k$ est le point minimal correspondant à tout $q \in [q_k^{(2)} + \mathcal{O}(1), q_{k+1}^{(1)} - \mathcal{O}(1)]$, donc à $\mathcal{O}(1)$ près, la trajectoire d'un point minimal situé avant $\mathbf{d}_k$ passe au-dessus de la droite horizontale d'équation $y = \mathrm{P}_2(q_k^{(2)}) - C$, et la trajectoire d'un point minimal situé après $\mathbf{d}_k$ est située à $\mathcal{O}(1)$ près à droite de la droite de pente -1 passant par le point $(q_{k+1}^{(1)}, \mathrm{P}_1(q_{k+1}^{(1)}))$. Or la trajectoire de $\mathbf{v}$ ne vérifie aucune de ces deux conditions : cela vient du fait que d'après (7.3.2), on a $r_k - q_k^{(2)}$ et $q_{k+1}^{(1)} - s_k^{(1)}$ qui tendent vers l'infini.

Par exemple, le fait que $r_k - q_k^{(2)}$ tende vers l'infini implique que $\mathrm{P}_2(q_k^{(2)}) - \mathrm{P}_2(r_k)$ tend vers l'infini (voir Figure 7.4). En effet, si on avait $\mathrm{P}_2(q_k^{(2)}) - \mathrm{P}_2(r_k) \leq \mathcal{O}(1)$, cela conduirait à

$$\frac{\mathrm{P}_2(r_k)}{r_k} \geq \frac{\mathrm{P}_2(q_k^{(2)})}{q_k^{(2)}} + \frac{-\frac{\mathrm{P}_2(q_k^{(2)})}{q_k^{(2)}}(r_k - q_k^{(2)}) - \mathcal{O}(1)}{r_k} \geq \frac{\mathrm{P}_2(q_k^{(2)})}{q_k^{(2)}},$$

pour k assez grand : contradiction. On procède de même pour montrer que la trajectoire de $\mathbf{v}$ ne peut pas être située à droite de la droite de pente -1 passant par le point $(q_{k+1}^{(1)}, \mathrm{P}_1(q_{k+1}^{(1)}))$.

Considérons maintenant le deuxième cas. Si le minimum de (7.5.1) est égal à $\frac{\mathrm{P}_2(q_k^{(2)})}{q_k^{(2)}}$, on écrit $\mathbf{d}_k = \mathbf{a}_i$ et on pose

$$\mathbf{v} = \mathbf{a}_{i-1} + \mathbf{a}_i.$$

On utilise les arguments de Fischler (voir preuve de [23, Proposition 3.6]) : le point $\mathbf{v}$ est primitif puisque $(\mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_i)$ est une base de $\mathcal{V}_{k-1} \cap \mathbb{Z}^3 = \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(\mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_i) \cap \mathbb{Z}^3$. Supposons maintenant par l'absurde que $\mathbf{v}$ est colinéaire à un point minimal, donc égal à un point minimal car il est primitif et de première coordonnées non nulle > 0. Comme $\|\mathbf{v}\| > \|\mathbf{a}_i\|$ (les coordonnées de $\mathbf{a}_i$ et $\mathbf{a}_{i-1}$ ont deux à deux même signe, donc les coordonnées de $\mathbf{v}$ sont toutes plus grandes en valeurs absolue que celles de $\mathbf{a}_i$) on en déduit que $\mathbf{v}$ est un point minimal "après" $\mathbf{a}_{i+1}$, et on a

$$\|\mathbf{a}_{i+1}\| \leq \|\mathbf{v}\| \leq 2\|\mathbf{a}_i\|.$$

En outre on a $\|\mathbf{a}_{i+1} \wedge \mathbf{u}\| < \|\mathbf{a}_i \wedge \mathbf{u}\|$, donc à $\mathcal{O}(1)$ près, les trajectoires des points minimaux $\mathbf{a}_{i-1}$, $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{a}_{i+1}$ passent en-dessous du point A_k (voir Figure 7.4). Comme ces trois points sont linéairement indépendants, on en déduit immédiatement l'estimation

$$\underline{\psi}_3^* + o(1) \leq \frac{\mathrm{P}_2(q_k^{(2)})}{q_k^{(2)}} < \alpha < -\frac{1}{3},$$

ce qui est impossible (on a toujours $\underline{\psi}_3^* \geq -\frac{1}{3}$). Donc, $\mathbf{v}$ n'est colinéaire à aucun point minimal, et pourtant $\mathbf{v} \in \mathcal{A}_\alpha^*$ si k est assez grand. En effet, au point $q = q_k^{(2)}$, $\mathbf{v}$ réalise $\mathrm{L}_1^*(q) = \mathrm{L}_2^*(q)$ à $\mathcal{O}(1)$ près, donc $\frac{\mathrm{L}_{\mathbf{v}}^*(q)}{q} \leq \frac{\mathrm{L}_{2*}(q)}{q} + o(1) < \alpha$, et on conclut avec (1.8.2). □

Tout comme le Théorème 7.5.1, la proposition suivante généralise aussi la Proposition 7.5.1 mais en reprenant cette fois-ci les arguments de Fischler. Rappelons que jointe à l'optimalité de la borne $\underline{\psi}_2^*$ dans le Théorème 7.5.1, elle fournit une nouvelle preuve de l'inégalité (6.1.1) du Théorème 6.1.1 sous la forme (7.1.2).

Proposition 7.5.3. *Soit α tel que $\underline{\psi}_1^* < \alpha < \frac{(\beta_1 - 1)\underline{\psi}_1^*}{1 + (2 - \beta_1)\underline{\psi}_1^*} = \widetilde{\alpha}\left(\frac{1 + \beta_1 \underline{\psi}_1^*}{1 + \underline{\psi}_1^*}\right)$ (où $\beta_1 = \beta_1(\xi) = 1/\widehat{\lambda}_2(\xi) = -(1 + 1/\overline{\psi}_1^*(\xi))$). Soit $\mathbf{x} \in \mathcal{A}_\alpha^*$ avec $\|\mathbf{x}\|$ assez grand. Alors $\mathbf{x}$ est colinéaire à un point minimal.*

Preuve Soient α, α' tels que $\underline{\psi}_1^* < \alpha < \widetilde{\alpha}\left(\frac{1 + \beta_1 \underline{\psi}_1^*}{1 + \underline{\psi}_1^*}\right)$ et $1/\widehat{\lambda}_2(\xi) < \alpha' < 2$. Soit $\mathbf{x} \in \mathcal{A}_\alpha^*$ et i tel que $\|\mathbf{a}_i\| \leq \|\mathbf{x}\| < \|\mathbf{a}_{i+1}\|$. Par la Proposition 1.7.8 du Chapitre 1 on a aussi

$\|\mathbf{a}_{i+1}\wedge\mathbf{u}\|<\|\mathbf{a}_i\wedge\mathbf{u}\|\le\|\mathbf{x}\wedge\mathbf{u}\|$. En utilisant (7.4.1) et le fait que $\mathbf{x}\in\mathcal{A}^*_\alpha$ (voir (7.2.3)) on trouve

$$\begin{aligned}\|\mathbf{a}_{i+1}\|\|\mathbf{a}_i\wedge\mathbf{u}\|\|\mathbf{x}\wedge\mathbf{u}\| &\ll \|\mathbf{a}_i\wedge\mathbf{u}\|^{1-\alpha'}\|\mathbf{x}\|^{\widetilde{\varepsilon}(\alpha)-1}\\ &\ll \|\mathbf{a}_i\|^{(1-\alpha')\frac{\underline{\psi}_1^*}{1+\underline{\psi}_1^*}+\widetilde{\varepsilon}(\alpha)-1+o(1)},\end{aligned}$$

la deuxième inégalité étant obtenue en utilisant (7.2.5) (puisque $1-\alpha'<0$). Par ailleurs, par croissance $\widetilde{\varepsilon}$ et puisque $\widetilde{\varepsilon}(\widetilde{\alpha}(\varepsilon))=\varepsilon$ pour tout $\varepsilon\neq-1$, on a $\widetilde{\varepsilon}(\alpha)<\frac{1+\beta_1\underline{\psi}_1^*}{1+\underline{\psi}_1^*}$. Or, α' peut être pris arbitrairement proche de β_1, donc si $\alpha'>\beta_1$ est suffisamment petit, on a

$$\widetilde{\varepsilon}(\alpha)<\frac{1+\alpha'\underline{\psi}_1^*}{1+\underline{\psi}_1^*}, \tag{7.5.2}$$

ce qui implique que l'exposant $(1-\alpha')\frac{\underline{\psi}_1^*}{1+\underline{\psi}_1^*}+\widetilde{\varepsilon}(\alpha)-1+o(1)$ est <0 (pour i assez grand) et donc que $\|\mathbf{a}_{i+1}\|\|\mathbf{a}_i\wedge\mathbf{u}\|\|\mathbf{x}\wedge\mathbf{u}\|=o(1)$. Or d'après le Lemme 7.2.3 on a

$$|\det(\mathbf{x},\mathbf{a}_i,\mathbf{a}_{i+1})|\ll\|\mathbf{a}_{i+1}\|\|\mathbf{a}_i\wedge\mathbf{u}\|\|\mathbf{x}\wedge\mathbf{u}\|$$

donc $\mathbf{x}\in\mathcal{V}_k\cap\mathbb{Z}^3$ pour i assez grand, avec k défini par $i_k\le i<i_{k+1}$.
Supposons maintenant que $\mathbf{x}$ n'est pas colinéaire à $\mathbf{a}_i$. Alors en utilisant (7.2.7) et le Lemme 7.4.2 on a

$$\begin{aligned}H(\mathcal{V}_k)\le\|\mathbf{x}\wedge\mathbf{a}_i\|\ll\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{x}\wedge\mathbf{u}\|\ll\|\mathbf{x}\|^{\widetilde{\varepsilon}(\alpha)} &\ll\|\mathbf{a}_{i+1}\|^{\widetilde{\varepsilon}(\alpha)}\\ &\ll\|\mathbf{d}_{k+1}\|^{\widetilde{\varepsilon}(\alpha)}\\ &\ll H(\mathcal{V}_k)^{\widetilde{\varepsilon}(\alpha)\frac{1+\underline{\psi}_1^*}{1+\alpha'\underline{\psi}_1^*}}.\end{aligned}$$

Or (7.5.2) implique que l'exposant $\widetilde{\varepsilon}(\alpha)\frac{1+\underline{\psi}_1^*}{1+\alpha'\underline{\psi}_1^*}$ est <1 (si $\alpha'>\beta_1$ est suffisamment petit), ce qui amène une contraction pour k assez grand. C'est donc que $\mathbf{x}$ est colinéaire à $\mathbf{a}_i$ pour i assez grand, ce qui achève la preuve de cette proposition. □

7.6 Propriétés d'indépendance linéaire

L'approche de Fischler [23] consiste à partir d'une sous-suite $(\mathbf{u}_i)_i$ de la suite $(\mathbf{a}_i)_i$ des points minimaux telle que $\limsup_{i\to+\infty}\alpha(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_{i+1})$ soit petit (on garde ici les notations de la Partie 7.2), et à démontrer notamment que les $\mathbf{d}_k$ font alors partie de la sous-suite $(\mathbf{u}_i)_i$. Dans ce paragraphe on généralise le Lemme 3.8 et la Proposition 3.7 de [23] en augmentant la borne imposée à $\limsup_{i\to+\infty}\alpha(\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_{i+1})$; on montre que la borne optimale est

$$\psi=\liminf_{k\to+\infty}\alpha(\mathbf{a}_{i_k-1},\mathbf{a}_{i_k+1}), \tag{7.6.1}$$

où $(i_k)_k$ est la suite des indices i tels que $\mathbf{a}_{i-1},\mathbf{a}_i,\mathbf{a}_{i+1}$ sont linéairement indépendants. La principale différence avec [23] vient du lemme suivant, qui raffine le Lemme 3.8 de [23] grâce à l'utilisation de la géométrie paramétrique des nombres. Comme dans le reste de ce chapitre on suppose encore $\overline{\psi}_1^*<-\frac{1}{3}$.

Lemme 7.6.1. *Soit $(\mathbf{u}_i)_i$ une sous-suite de $(\mathbf{a}_i)_i$ telle que*

$$\psi' = \limsup_{i\to+\infty} \alpha(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{i+1}) < \psi,$$

où ψ est défini par (7.6.1)*. Soit i assez grand et n, m tels que $\mathbf{u}_i = \mathbf{a}_n$ et $\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{a}_m$. Alors l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_{n+1}, \ldots, \mathbf{a}_m$ est de dimension 2. De plus dans cette énoncé la borne ψ est optimale.*

Remarque 7.6.2. Remarquons d'abord que $-\frac{1}{3} < \underline{\psi}_3^* \leq \psi$ et que le Lemme 3.8 de [23] fournit la borne $-\frac{1}{3}$ au lieu de ψ, puisque la condition $\psi' < \psi$ du Lemme 7.6.1 se réécrit grâce à (7.2.4)

$$\limsup_{i\to+\infty} \frac{\log(\|\mathbf{u}_{i+1}\|)}{-\log(\|\mathbf{u}_i \wedge \mathbf{u}\|)} < -(1 + \frac{1}{\psi}).$$

D'après la Proposition 1.9.1 du Chapitre 1, l'exposant $\underline{\psi}_3^* = -\overline{\psi}_1$ s'exprime en fonction de l'exposant diophantien classique $\widehat{\omega}_2(\xi)$:

$$\underline{\psi}_3^* = -\frac{1}{\widehat{\omega}_2(\xi) + 1};$$

remarquons aussi que d'après l'identité de Jarník, on peut exprimer cette quantité en fonction de $\widehat{\lambda}_2(\xi)$, voir les Propositions 0.3.1 et 2.7.7 de l'introduction et du Chapitre 2. Comme $\underline{\psi}_3^* \leq \psi$ le Lemme 7.6.1 implique la Proposition 7.1.2 (plus faible mais exprimée en termes d'exposants plus classiques).

Preuve du Lemme 7.6.1
Par l'absurde, supposons qu'il existe une infinité de i tels que l'espace vectoriel engendré par $\mathbf{u}_i = \mathbf{a}_n, \ldots, \mathbf{a}_m = \mathbf{u}_{i+1}$ soit de dimension 3. Comme pour tout k l'espace vectoriel engendré par $\mathbf{a}_{i_k}, \mathbf{a}_{i_k+1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_{k+1}}$ est de dimension 2, on en déduit qu'il existe k tel que $n < i_k < m$. On a alors

$$\alpha(\mathbf{a}_{i_k-1}, \mathbf{a}_{i_k+1}) \leq \alpha(\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_m) = \alpha(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{i+1}) \leq \psi' + o(1) < \psi$$

(pour k assez grand), ce qui est impossible par (7.6.1) (définition de ψ).

Montrons le caractère optimal de ψ. On fixe α tel que

$$\psi < \alpha.$$

On va construire une suite de points minimaux $(\mathbf{u}_l)_l$ vérifiant

$$\limsup_{l\to+\infty} \alpha(\mathbf{u}_l, \mathbf{u}_{l+1}) \leq \alpha \tag{7.6.2}$$

mais telle qu'il existe une infinité d'indices l pour lesquels l'espace vectoriel engendré par $\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_{n+1}, \ldots, \mathbf{a}_m$ (avec n et m tels que $\mathbf{u}_l = \mathbf{a}_n$ et $\mathbf{u}_{l+1} = \mathbf{a}_m$) soit de dimension 3. Puisque l'espace vectoriel engendré par $\mathbf{a}_{i_k-1}$, $\mathbf{a}_{i_k}$, $\mathbf{a}_{i_k+1}$ est toujours de dimension 3 par définition de $i_k \in I_0$, il suffit d'assurer l'existence de k tel que $n < i_k < m$. Par ailleurs on a $\limsup_{i\to+\infty} \alpha(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_{i+1}) = \overline{\psi}_1^* < \underline{\psi}_3^* \leq \psi$ (voir Proposition 1.8.6 du Chapitre 1). L'idée est de considérer la suite de tous les points minimaux $(\mathbf{a}_i)_i$ et d'exclure les points $\mathbf{a}_{i_k}$ tels

que $\alpha(\mathbf{a}_{i_k-1}, \mathbf{a}_{i_k+1}) \leq \alpha$. Cependant, une petite difficulté technique apparaît s'il existe des indices i_k tels que $i_k + 1 = i_{k+1} \in I_0$ et vérifie aussi $\alpha(\mathbf{a}_{i_k}, \mathbf{a}_{i_k+2}) \leq \alpha$: il faut alors garder l'un des deux indices pour que (7.6.2) soit vérifiée avec $\mathbf{u}_l = \mathbf{a}_{i_k-1}$.
On définit

$$J_0 = \{i_k \mid \alpha(\mathbf{a}_{i_k-1}, \mathbf{a}_{i_k+1}) \leq \alpha\}.$$

On a $J_0 \subset I_0$ et J_0 est infini car $\psi < \alpha$. On pose $J' = J_0 \cap (2\mathbb{N})$ si $J_0 \cap (2\mathbb{N})$ est infini, et $J' = J_0 \cap (2\mathbb{N} + 1)$ sinon. Puisque J_0 est infini, J' est aussi infini. Remarquons aussi que puisque J' ne contient que des nombres pairs (ou que des nombres impairs), si $i \in J'$ alors $i + 1 \notin J'$. On utilisera plusieurs fois cette propriété.
On pose alors $(\mathbf{u}_l)_{l\geq 0} = (\mathbf{a}_i)_{i\notin J'}$. Montrons que $(\mathbf{u}_l)_l$ vérifie (7.6.2). Soit l assez grand. On écrit $\mathbf{u}_l = \mathbf{a}_{i-1}$. Si $i \notin J'$ alors $\mathbf{u}_{l+1} = \mathbf{a}_i$ et

$$\begin{aligned}\alpha(\mathbf{u}_l, \mathbf{u}_{l+1}) = \alpha(\mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_i) \leq \limsup_{k\to+\infty} \alpha(\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{k+1}) + o(1) = \overline{\psi}_1^* + o(1) \\ < \underline{\psi}_3^* \leq \psi < \alpha.\end{aligned}$$

Si au contraire $i \in J'$, alors $i + 1 \notin J'$. Cela implique que $\mathbf{u}_{l+1} = \mathbf{a}_{i+1}$ et on en déduit que $\alpha(\mathbf{u}_l, \mathbf{u}_{l+1}) = \alpha(\mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}) \leq \alpha$ puisque $i \in J' \subset J_0$. La suite $(\mathbf{u}_l)_l$ vérifie donc bien (7.6.2).
Soit maintenant $n + 1 \in J'$. Alors $n \notin J'$ et il existe un indice l tel que $\mathbf{u}_l = \mathbf{a}_n$. De plus $n + 2 \notin J'$ et $\mathbf{u}_{l+1} = \mathbf{a}_{n+2}$. Le sous-espace vectoriel engendré par $\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_{n+1}, \mathbf{a}_{n+2}$ est de dimension 3 puisque $n + 1 \in J' \subset I_0$. Ceci achève la preuve de l'optimalité de ψ. □

Le résultat suivant améliore la Proposition 3.7 de [23] en remplaçant $-\frac{1}{3}$ par ψ (voir la Remarque 7.6.2). La nouveauté réside dans l'utilisation du Lemme 7.6.1.

Proposition 7.6.3. *Soit $(\mathbf{u}_i)_i$ une sous-suite de $(\mathbf{a}_i)_i$ telle que*

$$\limsup_{i\to+\infty} \alpha(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{i+1}) < \psi,$$

où ψ est défini par (7.6.1)*. Alors :*

(a) A un nombre fini de termes près, $(\mathbf{d}_k)_k$ est une sous-suite de $(\mathbf{u}_i)_i$.

(b) Pour tout i assez grand, $\mathbf{u}_i$ est parmi les $\mathbf{d}_k$ si et seulement si $\mathbf{u}_{i-1}, \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{i+1}$ sont linéairement indépendants.

Enfin dans cette énoncé la borne ψ est optimale.

Preuve Soit k assez grand ; notons $\mathbf{d}_k = \mathbf{a}_p$. Soit i, n et m tels que $n \leq p \leq m$ et $(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{i+1}) = (\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_m)$. Si $\mathbf{d}_k$ n'est pas parmi les $\mathbf{u}_j$ alors on a $n < p < m$ et d'après le Lemme 7.6.1 les vecteurs $\mathbf{a}_{p-1}, \mathbf{a}_p, \mathbf{a}_{p+1}$ sont linéairement dépendants : contradiction. Ceci montre la première partie de la Proposition.

Montrons maintenant la deuxième partie de la la proposition. Soit $\mathbf{u}_i = \mathbf{a}_p$ un terme qui n'est pas parmi les $\mathbf{d}_k$ (avec i assez grand) ; alors $\mathbf{a}_{p-1}, \mathbf{a}_p, \mathbf{a}_{p+1}$ sont linéairement dépendants et engendrent un plan $\mathcal{H}$. Le Lemme 7.6.1 appliqué à $\mathbf{u}_{i-1}$, $\mathbf{u}_i$ montre que $\mathbf{u}_{i-1} \in \mathcal{H}$ (puisque $(\mathbf{a}_{p-1}, \mathbf{a}_p)$ est une base de $\mathcal{H}$). De même, puisque $(\mathbf{a}_p, \mathbf{a}_{p+1})$ est aussi une base de $\mathcal{H}$, $\mathbf{u}_{i+1} \in \mathcal{H}$. Ceci montre que $\mathbf{u}_{i-1}, \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{i+1}$ sont linéairement dépendants.

Pour montrer la réciproque supposons qu'il existe un plan $\mathcal{H}$ contenant $\mathbf{u}_{i-1}, \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{i+1}$ avec $\mathbf{u}_i = \mathbf{a}_p$ et i assez grand. Alors en appliquant le Lemme 7.6.1 deux fois, on montre que $\mathbf{a}_{p-1}, \mathbf{a}_p, \mathbf{a}_{p+1} \in \mathcal{H}$, donc ces trois vecteurs sont linéairement dépendants, ce qui implique que $\mathbf{a}_p = \mathbf{u}_i$ n'est pas parmi les $\mathbf{d}_k$.

L'optimalité de ψ vient du fait que c'est l'exposant optimal du Lemme 7.6.1. Si on choisit un exposant $\alpha > \psi$ alors la suite $(\mathbf{u}_l)_l = (\mathbf{a}_i)_{i \notin J'}$ construite dans la preuve du Lemme 7.6.1 vérifie

$$\limsup_{i \to +\infty} \alpha(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{i+1}) < \alpha.$$

Or par construction J' est un sous-ensemble infini de I_0, donc le point (a) de la proposition est clairement faux. □

Chapitre 8

Le cas complexe du Théorème du going-down de Schmidt

8.1 Avant-Propos

Ce chapitre est consacré à l'étude du cas complexe du Théorème du going-down de Schmidt et a donné lieu à une publication [46]. Le texte est en anglais.

8.1.1 Résumé

En 1967, Schmidt a écrit un article fondateur [64] sur des problèmes d'approximation diophantienne, et plus particulièrement sur la hauteur des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ définis sur un corps de nombres K. Le Théorème du going-down – l'un des théorèmes principaux de son article – est valide pour deux cas qui dépendent de la nature du plongement – réel ou complexe – du corps K dans le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$. Dans le cas d'un plongement complexe, et plus généralement dès que K n'est pas totalement réel, à un endroit de la preuve les arguments dans [64] ne semblent pas marcher exactement comme annoncé. Dans [46], nous présentons en détails les idées de Schmidt et sa preuve du cas complexe en résolvant le problème mentionné précédemment. Certaines définitions de Schmidt sont reformulées à l'aide des outils de l'algèbre multilinéaire et du produit vectoriel, suivant ainsi les approches de Laurent [34], Bugeaud et Laurent [11] et Roy [54], [56].
Dans [34] Laurent introduit dans le cas particulier $K = \mathbb{Q}$ une famille d'exposants diophantiens et donne plusieurs inégalités qui les relient entre eux. Dans la Partie 8.6 ces exposants sont définis pour un corps de nombres arbitraire K. En utilisant les Théorèmes du going-up et du going-down nous généralisons les inégalités de Laurent à ce contexte.

8.1.2 Abstract

In 1967, Schmidt wrote a seminal paper [64] on heights of subspaces of $\mathbb{R}^n$ or $\mathbb{C}^n$ defined over a number field K, and diophantine approximation problems. The going-down Theorem – one of the main theorems he proved in his paper – remains valid in two cases depending on whether the embedding of K in the complex field $\mathbb{C}$ is a real or a complex non-real embedding. For the latter, and more generally as soon as K is

not totally real, at some point of the proof, the arguments in [64] do not exactly work as announced. In this note, Schmidt's ideas are worked out in details and his proof of the complex case is presented, solving the aforementioned problem. Some definitions of Schmidt are reformulated in terms of multilinear algebra and wedge product, following the approaches of Laurent [34], Bugeaud and Laurent [11] and Roy [54], [56].
In [34] Laurent introduces in the case $K = \mathbb{Q}$ a family of exponents and he gives a series of inequalities relating them. In Section 8.6 these exponents are defined for an arbitrary number field K. Using the going-up and the going-down Theorems Laurent's inequalities are generalized to this setting.

MSC 2010: 11K60 (Primary); 11J99 (Secondary).

Keywords: transference theorems; diophantine approximation exponents; approximation of subspaces

Acknowledgements: I would like to thank Yann Bugeaud, Michel Laurent, Damien Roy, Michel Waldschmidt and the referee for their useful comments. I am also very grateful to Stéphane Fischler for giving me a lot of feedback on this work.

The final publication is available at Springer via http://dx.doi.org/10.1007/s00605-017-1084-4

8.2 Introduction

In a paper [64] written in 1967, Schmidt generalizes the basic diophantine approximation problem « given a real number α, how « well » can it be approximated by rational numbers ? » as follows. Let A be a subspace of a Euclidean or unitary space G^n of dimension n. Suppose that A has dimension $0 < d < n$. How « well » can A be approximated by subspaces B of dimension e defined over a given number field K ? Formulating precisely what « well » means requires some work. Schmidt binds two different notions that are recalled in Section 8.3 below : A is « well » approximated by B if on the one hand A and B are « close » (Schmidt uses several angles of inclination to measure this « closeness », cf. Proposition 8.3.2 and following definitions), and on the other hand B is not too « complicated » (Schmidt uses the notion of the *height* of a subspace to measure its « complicatedness », cf. (8.3.1) and (8.3.4)).
In his article, Schmidt establishes several transference theorems of the Perron-Khintchine-type (see for example [29], [30], [44]). These theorems lead to the conclusion that if a subspace A can be well approximated by subspaces of dimension e ($0 < e < n$), then it can also be well approximated by subspaces of any given dimension e'. Schmidt's going-down Theorem ([64] Theorem 10) is one of these transference theorems (treating the case $e' < e$) and is useful to prove diophantine approximation theorems (as [64] Theorem 13 for example). More recently this work was revisited by Laurent [34] and Bugeaud and Laurent [11] in the case where A is a one-dimensional subspace of $\mathbb{R}^n$ and $K = \mathbb{Q}$. Laurent introduces a family of approximation exponents to points in $\mathbb{R}^n$ by linear subspaces and using going-up and going-down Theorems he proves a series of inequalities relating these exponents [34]. Roy shows [56] that the going-up and going-down transference inequalities of Schmidt and Laurent describe the full spectrum of these exponents. In Section 8.6 these exponents are generalized for an arbitrary number field K. Using the going-up

and the going-down Theorems one shows that Laurent's inequalities remain valid for the aforementioned generalized exponents.

The going-down Theorem remains valid in both the real case (a) and the complex (non-real) case (b) (see below for details). At some point of the proof for (b), Schmidt's arguments do not exactly work as announced; as the referee pointed out, this happens also in case (a) if K is not totally real (see Remarks 8.5.1 and 8.5.2 for more technical details). The main goal of this note is to work out Schmidt's ideas in details and solve this problem.
In case (a), G^n denotes Euclidean space $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, K a number field embedded in $\mathbb{R}$, and $q = 1$.
In case (b), G^n denotes unitary space $(\mathbb{C}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, K a number field embedded in $\mathbb{C}$ (but this embedding is not real), and $q = 2$.
In this paper $C_1, C_2, \dots$ will be positive constants depending only on K and n but independent from the subspaces $A^d, B^e, \dots$ considered. We also keep as far as possible the same numbering as Schmidt (so that the numbering does not start with C_1). The notation A^d (or $B^d, S^d, \dots$) will always mean that A^d (or $B^d, S^d, \dots$) has dimension d.

Theorem 8.2.1 (Schmidt's going-down Theorem)**.**
Let A^d, B^e be subspaces of G^n with B^e defined over K and of height $H(B^e) \le H$ (where $H \ge 1$ is a fixed constant). Let $1 \le h \le f' = \min(d, e-1)$, $c \ge 1$ and assume that

$$H(B^e)\omega_i^q(A^d, B^e) \le c^q H^{-(qy_i-1)} \quad (i = 1, \dots, h). \tag{8.2.1}$$

where $y_1 \ge \cdots \ge y_h \ge (qh)^{-1}$. Put $y = y_1 + \cdots + y_h$ and assume

$$y_i' := y_i e(qy + e - 1)^{-1} \ge q^{-1} \quad (i = 1, \dots, h). \tag{8.2.2}$$

Then there is a subspace $B^{e-1} \subset B^e$, defined over K, of height

$$H(B^{e-1}) \le C_5 H(B^e) H^{(qy-1)/e} \le C_5 H^{(e+qy-1)/e} =: H'$$

having

$$H(B^{e-1})\omega_i^q(A^d, B^{e-1}) \le C_6 c^q H^{-(qy_i'-1)(qy+e-1)/e} = C_7 c^q H'^{-(qy_i'-1)} \quad (i = 1, \dots, h),$$

whence

$$\omega_i(A^d, B^{e-1}) \le C_8 c H(B^{e-1})^{-y_i'} \quad (i = 1, \dots, h).$$

On the other hand, if instead of (8.2.1)*,*

$$\omega_i(A^d, B^e) = 0 \quad (i = 1, \dots, h), \tag{8.2.3}$$

put

$$y_0' := e(qh)^{-1}.$$

Then, for any given $H' \ge C_9 H$ there is a subspace $B^{e-1} \subset B^e$, defined over K, of height $H(B^{e-1}) \le H'$, having

$$H(B^{e-1})\omega_i^q(A^d, B^{e-1}) \le C_{10} H^{qy_0'} H'^{-(qy_0'-1)} \quad (i = 1, \dots, h),$$

whence

$$\omega_i(A^d, B^{e-1}) \le C_{11} H^{y_0'} H(B^{e-1})^{-y_0'} \quad (i = 1, \dots, h).$$

In this theorem, $C_5, \dots, C_{11}$ are positive constants which depend on $K, n, y_1, \dots, y_h$ but not on A^d, B^e, B^{e-1}, H, c.

In Section 8.3 we recall the definitions of the *height* of a subspace and of the functions ω_i which are used to measure the closeness of two subspaces. We also recall results of [64] which we will need in the proof of Theorem 8.2.1. Some definitions of Schmidt are reformulated in terms of multilinear algebra and wedge product – this is the case of the definition of the height of a subspace for instance – following the approaches of Laurent [34], Bugeaud and Laurent [11] and Roy [54], [56]. In Section 8.4 we introduce specific notation for the complex case in order to avoid confusion between the inner product $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum x_i \overline{y_i}$ and the bilinear form $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum x_i y_i$ (which are denoted in the same way in [64]). In Section 8.5 we present Schmidt's proof of the going-down Theorem in the complex case, solving in Section 8.5.2 the problem alluded to above (see also Remarks 8.5.1 and 8.5.2 in Section 8.5.4). In Section 8.6 the generalization of Laurent's exponents is given.

8.3 Multilinear algebra, distance and height of subspaces

In this section one reformulates some definitions of Schmidt [64] – among others the height $H(S)$ of a subspace S and the quantities $\omega_i(A, B)$ which characterize the distance between two subspaces A and B – in terms of multilinear algebra and wedge product. This approach has already been investigated by Laurent in [34] and Bugeaud and Laurent [11] in order to give another proof of the going-up and going-down transfers in the case $K = \mathbb{Q}$ with A^d of dimension $d = 1$. See also Roy [54] and [56] for further examples of the use of such tools in the context of parametric geometry of numbers.

Let $\mathbb{L} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ and let $n \in \mathbb{N}^*$. We endow $G^n := \mathbb{L}^n$ with its usual structure of inner product space. Let $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotes the canonical inner product on G^n (if $\mathbb{L} = \mathbb{C}$, we ask for the linearity of the first argument) and $|| \cdot ||$ its associated norm. If we fix an integer m, $1 \leq m \leq n$, we always endow the vector space $\bigwedge^m(G^n)$ with the unique structure of inner product space such that, for any orthonormal basis $(e_1, \ldots, e_n)$ of G^n, the products $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_m}$ $(i_1 < \cdots < i_m)$ form an orthonormal basis of $\bigwedge^m(G^n)$. We still denote by $\langle \cdot, \cdot \rangle$ its inner product and by $|| \cdot ||$ the associated norm. (Note that with this notation, we have $D(X_1, \ldots, X_m) = ||X_1 \wedge \cdots \wedge X_m||$ for any $X_1, \ldots, X_m \in G^n$, where $D(X_1, \ldots, X_m) = \left(\det \left(\langle X_i, X_j \rangle \right)_{i,j} \right)^{1/2}$ denotes the *generalized determinant* of $(X_1, \ldots, X_m)$, see [64] for more details about this notion).

Let K be an algebraic number field of degree $[K : \mathbb{Q}] = p$ and $\mathcal{O}_K$ be the ring of integers of K. Let $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ be the different embeddings of K into the field $\mathbb{C}$ of complex numbers. For $\xi \in K$, put $\xi^{(i)}$ for the image of ξ under σ_i. Similarly, if $X = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in K^n$, put $X^{(i)} = (\xi_1^{(i)}, \ldots, \xi_n^{(i)})$. Let S^d a subspace of K^n of dimension d. Let $(X_1, \ldots, X_d)$ be a basis of S^d and form the matrix M with row vectors $X_1, \ldots, X_d$. Let $\mathfrak{a}$ be the fractional ideal of K generated by the $\binom{n}{d}$ determinants of all $d \times d$– submatrices of M. The *height* of S^d is defined by

$$H(S^d) = N(\mathfrak{a})^{-1} \prod_{j=1}^{p} ||X_1^{(j)} \wedge \cdots \wedge X_d^{(j)}||, \tag{8.3.1}$$

where $N(\mathfrak{a}) = N_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a}) \in \mathbb{Q}^+$ denotes the *norm* of the ideal $\mathfrak{a}$. This definition does not depend of the choice of the basis $(X_1, \ldots, X_d)$. See [64] §1 for more explanations about this notion.

We suppose now that K is embedded in $\mathbb{L}$. We denote by $\bigwedge^m(\mathcal{O}_K^n)$ $(1 \leq m \leq n)$ the free $\mathcal{O}_K$-module of rank $\binom{n}{m}$ spanned by the products $x_1 \wedge \cdots \wedge x_m$ with $x_1, \ldots, x_m \in \mathcal{O}_K^n$. A subspace S of $\mathbb{C}^n$ is said to be defined over K if it is defined by linear equations with coefficients in K (or equivalently, if there is a basis of S with coordinates in K). If S is defined over K, one can considerer its height as the height of $S \cap K^n$. If $(X_1, \ldots, X_d) \in K^n$ form a basis of S^d, the associated fractional ideal $\mathfrak{a}$ defined above is the fractional ideal generated by the coordinates of $X_1 \wedge \cdots \wedge X_d$ with respect to a basis of $\bigwedge^m(\mathcal{O}_K^n)$. Note that if $K = \mathbb{Q}$ and $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}$, we may suppose that $(X_1, \ldots, X_d)$ form a basis of $S^d \cap \mathbb{Z}^n$ (and so, that it can be extended to a basis $(X_1, \ldots, X_n)$ of $\mathbb{Z}^n$, which is equivalent to asking that $X_1 \wedge \ldots X_d$ is a primitive vector, *i.e* $N(\mathfrak{a}) = 1$). In the general case since $\mathcal{O}_K$ is not necessarily a principal ring, $S^d \cap \mathcal{O}_K^n$ may not be a free $\mathcal{O}_K$-module. However, the ideal class group of K is finite and using a system of representatives consisting of integral ideals, it can be proved that $X_1, \ldots, X_d$ may be chosen such that $X_1, \ldots, X_d \in \mathcal{O}_K^n$ and $N(\mathfrak{a}) \leq C$ where $C > 0$ depends of K only.
Formula (8.3.4) in § 8.3 allows one to consider the height of some subspace more geometrically.

Finally, one has to introduce the functions ω_i used by Schmidt to measure the "closeness" of two subspaces A and B of a Euclidean or unitary space. We define the (projective) distance between two non-zero vectors X and Y of G^n by

$$\operatorname{dist}(X, Y) := \frac{||X \wedge Y||}{||X||\ ||Y||}.$$

Note that in [64] $\operatorname{dist}(X, Y)$ is denoted by $\omega(X, Y)$. It satisfies the triangle inequality

$$\operatorname{dist}(X, Z) \leq \operatorname{dist}(X, Y) + \operatorname{dist}(Y, Z) \quad X, Y, Z \in G^n \setminus \{0\}.$$

For $X \in G^n \setminus \{0\}$ and a subspace $B^e \neq \{0\}$ of G^n, we define the distance from X to B^e by

$$\operatorname{dist}(X, B^e) = \inf_{Y \in B^e \setminus \{0\}} \operatorname{dist}(X, Y).$$

Note that

$$\operatorname{dist}(X, B)^2 + \operatorname{dist}\left(X, B^\perp\right)^2 = 1 \tag{8.3.2}$$

for every subspace B of dimension $0 < e < n$ (see [64, Section 8] formula (8)). Note once again that in [64] $\operatorname{dist}(X, B^e)$ is denoted by $\omega(X, B^e)$ and that this infimum is in fact a minimum.

Definition 8.3.1. Let A^d and B^e be subspaces of G^n of dimensions d and e respectively, with $f := \min(d, e) > 0$. Set

$$\omega_i\left(A^d, B^e\right) := \inf_{F^i \subset A^d} \sup_{X \in F^i \setminus \{0\}} \operatorname{dist}(X, B^e),$$

for $i = 1, \ldots, f$. Here F^i refers to an arbitrary subspace of A of dimension i.

Intuitively, the smaller the ω_i are, the closer A^d and B^e are. These quantities are the same as those introduced by Schmidt in [64, §8] (it is a direct consequence of Schmidt's definitions, his Lemma 12 and Lagrange's identity $||X||^2||Y||^2 = |\langle X, Y\rangle|^2 + ||X \wedge Y||^2$). In particular, we have the useful following result (see [64, Theorem 4 on page 443] noting that $\lambda_i = \sqrt{1-\omega_i^2}$) :

Proposition 8.3.2. *Let A^d and B^e be subspaces of G^n of dimensions d and e respectively, with $f := \min(d, e) > 0$. Then there are orthonormal bases $X_1, \ldots, X_d$ and $Y_1, \ldots, Y_e$ of A^d, B^e respectively, and reals $0 \leq \omega_1 \leq \cdots \leq \omega_f \leq 1$ such that*

$$\operatorname{dist}(X_i, Y_j) = \begin{cases} \omega_i & \text{if } i = j \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad (1 \leq i \leq d,\ 1 \leq j \leq e).$$

The numbers $\omega_1, \ldots, \omega_f$ are independent of any freedom of choice in X_i, Y_j and are invariant under unitary transformations applied simultaneously to A^d, B^e. Moreover, one has

$$\omega_i = \omega_i\left(A^d, B^e\right) \quad (1 \leq i \leq f).$$

If $d + e \leq n$, set

$$\mu(A^d, B^e) := \prod_{k=1}^{f} \omega_k(A^d, B^e).$$

(Although we will not use it in this paper, if $d + e > n$, $\mu(A^d, B^e)$ can be defined as $\prod_{k=1}^{f} \omega_{k+g}(A^d, B^e)$ where $g := d + e - n$. See Sections 7 and 8 of [64] for more details).

The next and last proposition is an equivalent definition of μ in the case $d + e \leq n$ (see [64, § 6-8], especially formula (7)).

Proposition 8.3.3. *If $(X_1, \ldots, X_d)$ and $(Y_1, \ldots, Y_e)$ are arbitrary bases of A^d, B^e, respectively, and $d + e \leq n$, one has*

$$\mu(A^d, B^e) = \frac{||X_1 \wedge \cdots \wedge X_d \wedge Y_1 \wedge \cdots \wedge Y_e||}{||X_1 \wedge \cdots \wedge X_d||\ ||Y_1 \wedge \cdots \wedge Y_e||}.$$

This formula generalizes the formula (4.1) of [11], which describes the special case $d = f = 1$ (in this case, $\mu(A^d, B^e) = \operatorname{dist}(X_1, B^e)$).

For $n \in \mathbb{N}^*$, E^n denotes the Euclidean space $\mathbb{R}^n$ with its canonical scalar product. A *lattice* of E^n will mean a discrete group of vectors of E^n (not necessarily cocompact). The *rank* of a lattice is the maximal number of linearly independent vectors of the lattice. Define the determinant of a lattice Λ of rank m by $d(\Lambda) = ||X_1 \wedge \cdots \wedge X_m||$ where $X_1, \ldots, X_m$ are basis vectors of Λ if $m > 0$, and by $d(\Lambda) = 1$ if $\Lambda = \{0\}$.
Suppose now that $K \subset \mathbb{C}$ but $K \not\subset \mathbb{R}$. Let $p = r_1 + 2r_2$ and $\xi^{(2r_2+j)}$ be real for $1 \leq j \leq r_1$, $\xi^{(j+1)}$ the complex conjugate of $\xi^{(j)}$ for $1 \leq j \leq 2r_2 - 1$, j odd, and every $\xi \in K$. We may assume σ_1 to be the identity map, σ_2 the complex conjugate map (such that $\sigma_1(\xi), \sigma_2(\xi)$ for $\xi \in \mathbb{C}$ – not necessarily in K – can also be considered). Put

$$\Delta = 2^{-r_2}|\delta|^{1/2}$$

where δ is the *discriminant* of K. Set

$$\xi^{[i]} = \begin{cases} \text{Re } \xi^{(i)} & \text{if } 1 \le i \le 2r_2 \text{ and } i \text{ odd}, \\ \text{Im } \xi^{(i)} & \text{if } 1 \le i \le 2r_2 \text{ and } i \text{ even}, \\ \xi^{(i)} & \text{if } 2r_2 + 1 \le i \le p. \end{cases}$$

Here, Re and Im denote real and imaginary parts. Given $1 \le i \le p$ and $X = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in K^n$, write $X^{(i)} := (\xi_1^{(i)}, \dots, \xi_n^{(i)})$ and $X^{[i]} := (\xi_1^{[i]}, \dots, \xi_n^{[i]})$. For $i = 1, 2$ $X^{(i)}$ and $X^{[i]}$ are defined for any $X \in \mathbb{C}^n$. Then, notice that for all $X \in \mathbb{C}^n$ one has $X = X^{[1]} - iX^{[2]}$. Let $\rho : K^n \to E^{np}$ be the $\mathbb{Q}$-linear map defined by

$$\rho(X) = (X^{[1]}, \dots, X^{[p]}) \in E^{np}. \tag{8.3.3}$$

It is the same map ρ as the one defined by Schmidt [64, p. 435] if one rearranges its coordinates; this does not change the main property (8.3.4) recalled below.
Let S^d be a subspace of K^n of dimension d, and $\mathcal{O}_K(S^d)$ be the subset of all of $X \in S^d$ whose components are in $\mathcal{O}_K$. Then $\Lambda(S^d) := \rho(\mathcal{O}_K(S^d))$ is a lattice in E^{np} of rank dp (see [64, §3]). Moreover Theorem 1 on page 435 of [64] asserts that

$$H(S^d) = \Delta^{-d} d\Big(\Lambda(S^d)\Big), \tag{8.3.4}$$

where $d\Big(\Lambda\Big)$ denotes the determinant of the lattice Λ.

8.4 Specific notation in the complex case

In the setting of Section 8.3 let us assume now that K is non-real and $G = \mathbb{C}^n$. We shall distinguish carefully the sesquilinear scalar product $\langle X, Y \rangle$ on $\mathbb{C}^n$ and the canonical bilinear form $\varphi(X, Y)$ on $\mathbb{C}^n$ or K^n. By contrast, both are denoted by XY in [64]. Of course in the real case $\langle X, Y \rangle$ and $\varphi(X, Y)$ coincide. Let $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ be the inner product defined by

$$\langle (x_i)_i, (y_i)_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}.$$

If W is a subspace of $\mathbb{C}^n$, $W^\perp$ denotes the orthogonal complement of W for $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Let K' be the complex conjugate field of K, $K' = \{\overline{z}\ ;\ z \in K\}$. If W is defined over K, note that $W^\perp$ is defined over K', and generally not over K. If S is a subspace of $\mathbb{C}^n$ defined over K, it follows easily from the definition of the height that $H(S') = H(S)$, where S' denotes the set of all $\overline{z}$ with $z \in S$, which is a subspace defined over K'. If $\varphi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ denotes the bilinear form defined by

$$\varphi((x_i)_i, (y_i)_i) = \sum_{k=1}^{n} x_i y_i,$$

and $W^{\varphi,\perp}$ denotes its orthogonal complement with respect to φ, one can show that

$$H(S^{\varphi,\perp}) = H(S)$$

for all subspaces S of $\mathbb{C}^n$ defined over K (see [64] Eq. (4) on page 433 and [26] Theorem 1 on page 294, although it is not expressed in the same language). We may in particular

deduce from the last statement this useful result :
Let S be a subspace of $\mathbb{C}^n$ defined over K. The subspace $S^\perp$ is defined over K' and satisfies

$$H(S) = H(S^\perp). \tag{8.4.1}$$

8.5 Proof of the going-down Theorem in the complex case

Proof In this section one proves Schmidt's going-down Theorem (that is, Theorem 8.2.1 in the introduction), in case (b). In other words, K is a number field embedded in $\mathbb{C}$, with $K \not\subset \mathbb{R}$. We can suppose that $G^n = \left(\mathbb{C}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$; we keep the notation of Sections 8.3 and 8.4. Let K' be the complex conjugate field of K, $K' = \{\overline{z}\ ;\ z \in K\}$.
Write $p = r_1 + 2r_2$. Notation $\xi^{(i)}$, $\xi^{[i]}$, ρ (cf. (8.3.3))... will be used with respect to K' ($\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ denote the different isomorphisms of K' into the field $\mathbb{C}$ of complex numbers etc. Notice that Schmidt does not mention the field K' explicitly).
Let B^e be a subspace of $\mathbb{C}^n$ defined over K. Schmidt first assumes that (8.2.1) holds. Let $m = n - e$ and $B^{e,\perp} := (B^e)^\perp = \text{ Vect}\,(Z_1, \ldots, Z_m)$ with $Z_i \in K'^n$, where $\text{ Vect}\,(T_1, \ldots, T_m)$ denotes the subspace generated by $T_1, \ldots, T_m$. We are going to follow Schmidt's idea in order to construct a vector $W \in K'^n \setminus (B^e)^\perp$ such that

$$B^{e-1} := \text{ Vect}\,(W, Z_1, \ldots, Z_m)^\perp \tag{8.5.1}$$

(which is defined over K) has the required properties.
Let $\lambda_i := \left(1 - \omega_i(A^d, B^e)\right)^{1/2}$ (for $i = 1, \ldots, f := \min(d, e)$) and choose orthonormal bases $(X_1, \ldots, X_d)$, $(Y_1, \ldots, Y_e)$ of A^d and B^e respectively having $\langle X_i, Y_j\rangle = \delta_{ij}\lambda_i$ (such bases are given by Proposition 8.3.2), whence for $i = 1, \ldots, f$ one has $\text{ dist}\,(X_i, Y_i) = \omega_i(A^d, B^e)$. Notice that $\langle Y_i, Z_j\rangle = 0$ ($i = 1, \ldots, e$ and $j = 1, \ldots, m$).

The lattice $\Lambda(B^{e,\perp}) \subset E^{pn}$ (constructed from K' and ρ as in §2) has rank pm and determinant $\Delta^m H(B^{e,\perp}) = \Delta^m H(B^e)$ (by (8.4.1)). Let $\mathfrak{I}_1, \ldots, \mathfrak{I}_{pm}$ be a basis of this lattice and let Π be the set of points $\mathfrak{I} = \sum c_i \mathfrak{I}_i$ with $c_i \in [-1/2, 1/2]$. The set Π has pm-dimensional volume $\Delta^m H(B^e)$ and contains no lattice point of $\Lambda := \Lambda(K'^n)$ but 0. Set $S^* := \text{ Vect}\left(\Lambda(B^{e,\perp})\right) \subset E^{pn}$; it has dimension pm.

8.5.1 Construction of W

Remember that ρ is defined with respect to K' (not K). For all $Y \in \mathbb{C}^n$ and $Z \in K'^n$, one has

$$\langle Y, Z\rangle = \left\langle (Y^{[1]}, Y^{[2]}, 0, \ldots, 0), \rho(Z)\right\rangle + i\left\langle (-Y^{[2]}, Y^{[1]}, 0, \ldots, 0), \rho(Z)\right\rangle.$$

$(Y_j)_j$ is an orthonormal basis and each Y_j is orthogonal to $B^{e,\perp}$, hence

$$\mathfrak{Y}_j^1 := (Y_j^{[1]}, Y_j^{[2]}, 0, \ldots, 0) \quad (j = 1, \ldots, h),$$

and

$$\mathfrak{Y}_j^2 := (-Y_j^{[2]}, Y_j^{[1]}, 0, \dots, 0) \quad (j = 1, \dots, h),$$

form an orthonormal family of $2h$ vectors of E^{pn} which is orthogonal to S^*. Set $T_h :=$ Vect $(\mathfrak{Y}_1^1, \mathfrak{Y}_1^2, \dots, \mathfrak{Y}_h^1, \mathfrak{Y}_h^2)$; then T_h is a subspace of dimension $2h$. A vector $\mathfrak{X} \in E^{pn}$ can be uniquely written as

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^* + \mathfrak{X}_T + \mathfrak{X}_0,$$

with $\mathfrak{X}^* \in S^*$, $\mathfrak{X}_T \in T_h$ and $\mathfrak{X}_0$ orthogonal to S^* and to T_h. The set of all $\mathfrak{X}$ satisfying

$$(i)\ \mathfrak{X}^* \in \Pi$$
$$(ii)\ |\left\langle \mathfrak{X}_T, \mathfrak{Y}_j^i \right\rangle| \le H^{-(y_j-(2y-1)/(ep))}\Big(H/H(B^e)\Big)^{1/(2h)} \quad (j = 1, \dots, h\,;\, i = 1, 2)$$
$$(iii)\ ||\mathfrak{X}_0|| \le C_{12} H^{(2y-1)/(ep)}$$

(where $||\cdot||$ is the norm associated with $\langle \cdot, \cdot \rangle$) is a symmetric convex body which is the product of three symmetric convex bodies from pairwise orthogonal subspaces, hence it has a volume

$$\Delta^m H(B^e) \times \Big(\prod_{j=1}^{h} \Big(2H^{-(y_j-(2y-1)/(ep))}\Big(H/H(B^e)\Big)^{1/(2h)}\Big)^2\Big) \times$$
$$\times \Big(C_{12} H^{(2y-1)/(ep)}\Big)^{pe-2h} V(pe-2h),$$

where $V(l)$ denotes the volume of the unit ball in E^l. Finally its volume is $\Delta^m 4^h V(pe - 2h) C_{12}^{ep-2h} > 2^{pn}\Delta^n$ if C_{12} is large enough. Therefore, by Minkowski's Theorem, there is an $\mathfrak{X} \in \Lambda \setminus \{0\}$ in this set. One may choose W in $\mathcal{O}_{K'}^n$ such that

$$\mathfrak{X} = \rho(W).$$

8.5.2 Properties of W

One has to establish two properties for W (inequalities (8.5.2) and (8.5.3) below) in order to show that B^{e-1} defined by (8.5.1) has all the required properties. More precisely, $|\langle W, Y_j \rangle|$ and $||V_j||$ have to be controlled (where V_j is the orthogonal projection of $W^{(j)}$ on Vect $\Big(Z_1^{(j)}, \dots, Z_m^{(j)}\Big)^{\perp}$) because these quantities will appear directly in the estimate of the height $H(B^{e-1})$ of B^{e-1}.

For $1 \le j \le h$ one has

$$\begin{aligned} |\langle Y_j, W \rangle| &= |\left\langle \mathfrak{Y}_j^1, \rho(W) \right\rangle + i \left\langle \mathfrak{Y}_j^2, \rho(W) \right\rangle| = |\left\langle \mathfrak{Y}_j^1, \mathfrak{X} \right\rangle + i \left\langle \mathfrak{Y}_j^2, \mathfrak{X} \right\rangle| \\ &\le |\left\langle \mathfrak{Y}_j^1, \mathfrak{X}_T \right\rangle| + |\left\langle \mathfrak{Y}_j^2, \mathfrak{X}_T \right\rangle| \\ &\le 2H^{-(y_j-(2y-1)/(ep))}\Big(H/H(B^e)\Big)^{1/(2h)}, \end{aligned} \tag{8.5.2}$$

by (ii).
Also notice that (ii) and (iii) together imply

$$||\mathfrak{X} - \mathfrak{X}^*|| \le C_{14} H^{(2y-1)/(ep)},$$

because by assumption $y_i \geq 1/(2h)$ (which implies that $H^{-(y_j-(2y-1)/(ep))} \times \left(H/H(B^e)\right)^{1/(2h)}$ is bounded from above by $H^{(2y-1)/(ep)}$).
For $1 \leq j \leq p$, write $W^{(j)} = U_j + V_j$ with $U_j \in$ Vect $\left(Z_1^{(j)}, \ldots, Z_m^{(j)}\right)$ and V_j orthogonal to Vect $\left(Z_1^{(j)}, \ldots, Z_m^{(j)}\right)$ (here Schmidt's arguments do not work exactly as he says, and this is what motivates us to introduce V_j, $j = 1, \ldots, p$. See Remarks 8.5.1 and 8.5.2 for more details).
Now if σ_j is real, then $W^{(j)}, Z_1^{(j)}, \ldots, Z_m^{(j)} \in \mathbb{R}^n$, and this implies that $U_j, V_j \in \mathbb{R}^n$. Set $\mathfrak{W}_j := (0, \ldots, \underbrace{V_j}_{j-\text{th block}}, \ldots, 0)$. Then $\mathfrak{W}_j$ is orthogonal to S^*, thus to $\mathfrak{X}^*$, and to $\mathfrak{X} - \mathfrak{W}_j$ (by definition of V_j and U_j). From this one can deduce that $||\mathfrak{W}_j||^2 = |\langle \mathfrak{W}_j, \mathfrak{X} \rangle| = |\langle \mathfrak{W}_j, \mathfrak{X} - \mathfrak{X}^* \rangle| \leq ||\mathfrak{W}_j|| \times C_{14} H^{(2y-1)/(ep)}$. Thus

$$||V_j|| = ||\mathfrak{W}_j|| \leq C_{14} H^{(2y-1)/(ep)}.$$

If σ_j and σ_{j+1} are complex conjugate, then

$$\mathfrak{W}_j^1 := (0, \ldots, 0, \underbrace{V_j^{[1]}, V_j^{[2]}}_{\text{blocks } j \text{ and } j+1}, 0, \ldots, 0) \text{ and } \mathfrak{W}_j^2 := (0, \ldots, 0, \underbrace{-V_j^{[2]}, V_j^{[1]}}_{\text{blocks } j \text{ and } j+1}, 0, \ldots, 0)$$

are orthogonal to S^*, and in particular to $\mathfrak{X}^*$. Then, one has

$$\left| \left\langle W^{[j]}, V_j^{[1]} \right\rangle + \left\langle W^{[j+1]}, V_j^{[2]} \right\rangle \right| = |\left\langle \mathfrak{X}, \mathfrak{W}_j^1 \right\rangle| = |\left\langle \mathfrak{X} - \mathfrak{X}^*, \mathfrak{W}_j^1 \right\rangle| \leq C_{14} H^{(2y-1)/(ep)} ||\mathfrak{W}_j^1||,$$
$$\left| \left\langle W^{[j]}, V_j^{[2]} \right\rangle - \left\langle W^{[j+1]}, V_j^{[1]} \right\rangle \right| = |\left\langle \mathfrak{X}, \mathfrak{W}_j^2 \right\rangle| = |\left\langle \mathfrak{X} - \mathfrak{X}^*, \mathfrak{W}_j^2 \right\rangle| \leq C_{14} H^{(2y-1)/(ep)} ||\mathfrak{W}_j^2||,$$

and since

$$\left| \left\langle W^{(j)}, V_j \right\rangle \right| = \left| \left\langle W^{[j]}, V_j^{[1]} \right\rangle + \left\langle W^{[j+1]}, V_j^{[2]} \right\rangle + i\Big(\left\langle W^{[j]}, V_j^{[2]} \right\rangle - \left\langle W^{[j+1]}, V_j^{[1]} \right\rangle \Big) \right|,$$

one may conclude that

$$||V_j||^2 = \left| \left\langle W^{(j)}, V_j \right\rangle \right| \leq 2C_{14} H^{(2y-1)/(ep)} ||V_j||,$$

and therefore

$$||V_j|| \leq 2C_{14} H^{(2y-1)/(ep)}. \tag{8.5.3}$$

This inequality is satisfied for $j = 1, \ldots, p$.

8.5.3 Definition and properties of B^{e-1}

As announced, let B^{e-1} be defined by (8.5.1). Now one has to show that $H(B^{e-1}) \leq H'$. We follow Schmidt's arguments. Let $\mathfrak{a}$ be the fractional ideal of K' generated by the $\binom{n}{m}$ determinants of all $m \times m$-submatrices of the matrix with row vectors $Z_1, \ldots, Z_m$, and let $\mathfrak{b}$ be the ideal of K' generated by the $\binom{n}{m+1}$ determinants of all $(m+1) \times (m+1)$-submatrices of the matrix with row vectors $W, Z_1, \ldots, Z_m$. Since all coordinates of W

are in $\mathcal{O}_{K'}$ one has $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ (for one can use for every $(m+1) \times (m+1)$-determinant the Laplace expansion along the first row). Thus $N(\mathfrak{b}) \geq N(\mathfrak{a})$. Moreover, $H(B^e) = H(B^{e,\perp}) = N(\mathfrak{a})^{-1} \prod_{i=1}^{p} ||Z_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge Z_m^{(i)}||$. Then, one has

$$\begin{aligned} H(B^{e-1}) = H((B^{e-1})^{\perp}) &= N(\mathfrak{b})^{-1} \prod_{i=1}^{p} ||W^{(i)} \wedge Z_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge Z_m^{(i)}|| \\ &= N(\mathfrak{b})^{-1} \prod_{i=1}^{p} ||V_i||\ ||Z_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge Z_m^{(i)}|| \leq H(B^e) \prod_{i=1}^{p} ||V_i|| \\ &\leq C_5 H(B^e) H^{(2y-1)/e} \leq C_5 H^{(e+2y-1)/e} = H', \end{aligned} \tag{8.5.4}$$

for a sufficiently large C_5.

Now one has to bound $H(B^{e-1})\omega_i^2(A^d, B^{e-1})$ from above (for $i = 1, \ldots, h$). Since $\langle Y_i, Z_j \rangle = 0$ $(j = 1, \ldots, m)$ and $||Y_i|| = 1$, one has

$$\begin{aligned} &\text{dist}\left(Y_i, (B^{e-1})^{\perp}\right)^2 = \\ &= ||Y_i \wedge W \wedge Z_1 \wedge \cdots \wedge Z_m||^2 ||Y_i||^{-2} ||W \wedge Z_1 \wedge \cdots \wedge Z_m||^{-2} \\ &= \Big(||Y_i||^2 ||W \wedge Z_1 \wedge \cdots \wedge Z_m||^2 - |\langle Y_i, W \rangle|^2 ||Z_1 \wedge \cdots \wedge Z_m||^2 \Big) ||W \wedge Z_1 \wedge \cdots \wedge Z_m||^{-2} \\ &= 1 - |\langle Y_i, W \rangle|^2 ||Z_1 \wedge \cdots \wedge Z_m||^2 ||W \wedge Z_1 \wedge \cdots \wedge Z_m||^{-2}, \end{aligned}$$

the first equality is obtained by the special case of Proposition 8.3.3 and the second one is obtained by using Laplace's expansion twice (first for $D^2(Y_i, W, Z_1, \ldots, Z_m)$ defined at the beginning of §8.3 along the first column, then for the second non-zero determinant obtained along the first row).
Using Eq. (8.3.2) one finds

$$\text{dist}\left(Y_i, B^{e-1}\right) = |\langle Y_i, W \rangle|\ ||Z_1 \wedge \cdots \wedge Z_m||\ ||W \wedge Z_1 \wedge \cdots \wedge Z_m||^{-1},$$

hence

$$||W \wedge Z_1 \wedge \cdots \wedge Z_m||^2\ \text{dist}\left(Y_i, B^{e-1}\right)^2 = |\langle Y_i, W \rangle|^2 ||Z_1 \wedge \cdots \wedge Z_m||^2.$$

Finally

$$\begin{aligned} &H(B^{e-1})\ \text{dist}\left(Y_i, B^{e-1}\right)^2 \\ &= N(\mathfrak{b})^{-1} \Big(\prod_{j=3}^{p} ||W^{(j)} \wedge Z_1^{(j)} \wedge \cdots \wedge Z_m^{(j)}|| \Big) ||W \wedge Z_1 \wedge \cdots \wedge Z_m||^2\ \text{dist}\left(Y_i, B^{e-1}\right)^2 \\ &= N(\mathfrak{b})^{-1} \Big(\prod_{j=3}^{p} ||W^{(j)} \wedge Z_1^{(j)} \wedge \cdots \wedge Z_m^{(j)}|| \Big) ||Z_1 \wedge \cdots \wedge Z_m||^2 |\langle Y_i, W \rangle|^2 \\ &\leq C_{15} N(\mathfrak{a})^{-1} \Big(\prod_{j=1}^{p} ||Z_1^{(j)} \wedge \cdots \wedge Z_m^{(j)}|| \Big) \Big(\prod_{j=3}^{p} ||V_j|| \Big) H^{-2(y_i - (2y-1)/(ep))} \Big(H/H(B^e) \Big)^{1/h} \\ &\leq C_{16} H(B^e) H^{(p-2)(2y-1)/(ep) - 2[y_i - (2y-1)/(ep)]} H/H(B^e) \\ &\leq C_{16} H^{(e+2y-1)/e - 2y_i}. \end{aligned}$$

The first inequality follows from (8.5.2) and the second one from (8.5.3). Then, there is a vector $R_i \in B^{e-1} \setminus \{0\}$ having

$$H(B^{e-1})\ \mathrm{dist}\,(Y_i, R_i)^2 \le C_{16} H^{-(2y_i'-1)(2y+e-1)/e},$$

since by definition $y_i' := (y_i e)/(qy+e-1)$.
By assumption, one has

$$H(B^e)\ \mathrm{dist}\,(X_i, Y_i)^2 \le c^2 H^{-2y_i+1},$$

thus, by (8.5.4) :

$$H(B^{e-1})\ \mathrm{dist}\,(X_i, Y_i)^2 \le c^2 C_5 H^{-2y_i+1+(2y-1)/e} = c^2 C_5 H^{-(2y_i'-1)(2y+e-1)/e}.$$

These inequalities and the triangle inequality provide

$$H(B^{e-1})\ \mathrm{dist}\,(X_i, R_i)^2 \le C_{17} c^2 H^{-2y_i+1+(2y-1)/e} = C_{17} c^2 H^{-(2y_i'-1)(2y+e-1)/e} \quad (i=1,\dots,h),$$

and so [64, Theorem 7] (with $\delta = 1$ for instance, since $(X_j)_j$ is an orthonormal family) yields

$$H(B^{e-1})\omega_i^2(A^d, B^{e-1}) \le c^2 C_6 H^{-(2y_i'-1)(2y+e-1)/e} \quad (i=1,\dots,h),$$

for C_6 large enough. This completes the first part of the proof.

8.5.4 Proof of the second part of the theorem

Suppose now that (8.2.3) holds. We follow Schmidt's proof and define $H_1 \ge 1$ by $H' = C_9 H H_1^{2h/e}$ (C_9 will be specified later). For the construction of W, replace (i), (ii), (iii) by

$$\begin{aligned}
&(i')\ \mathfrak{X}^* \in \Pi \\
&(ii')\ |\left\langle \mathfrak{X}_T, \mathfrak{Y}_j^i \right\rangle| \le H_1^{-(1-2h/(ep))} \quad (j=1,\dots,h\,;\, i=1,2) \\
&(iii')\ ||\mathfrak{X}_0|| \le C_{18} H_1^{2h/(ep)}.
\end{aligned}$$

These equations define a symmetric convex body of volume

$$\begin{aligned}
&\Delta^m H(B^e) \times (2H_1^{-(1-2h/(ep))})^{2h} \times (C_{18} H_1^{2h/(ep)})^{ep-2h} V(ep-2h) \\
&= \Delta^m H(B^e) 4^h C_{18}^{ep-2h} V(ep-2h) \\
&> 2^{pn}\Delta^n,
\end{aligned}$$

for C_{18} large enough. By Minkowski's Theorem there is an $\mathfrak{X} \in \Lambda \setminus \{0\}$ in this set. Let W be in $\mathcal{O}_{K'}^n$ such that $\mathfrak{X} = \rho(W)$.
Equation (8.5.2) is replaced by

$$|\langle W, Y_j \rangle| \le 2H_1^{-(1-2h/(ep))}.$$

One also has

$$||\mathfrak{X} - \mathfrak{X}^*|| \leq C_{19} H_1^{2h/(ep)},$$

thus (8.5.3) becomes

$$||V_j|| \leq 2C_{19} H_1^{2h/(ep)}.$$

Computing $H(B^{e-1})$ one finds

$$H(B^{e-1}) \leq H(B^e) \prod_{j=1}^{p} ||V_j|| \leq C H(B^e) H_1^{2h/e}.$$

Now set $C_9 := C$, which implies $H(B^{e-1}) \leq H'$. With these new estimates one finds

$$\begin{aligned} H(B^{e-1}) \text{ dist}\left(Y_i, B^{e-1}\right)^2 &\leq C_{20} H(B^e) \times H_1^{(p-2)2h/(ep)} \times H_1^{-2(1-2h/(ep))} \\ &\leq C_{21} H H_1^{2h/e-2} = C_{21} H H_1^{2h/e(1-e/h)} \\ &= C_{10} H^{e/h} H'^{1-e/h} = C_{10} H^{2y_0'} H'^{-(2y_0'-1)}. \end{aligned}$$

Now, note that (8.2.3) implies that $Y_i = \pm X_i$ (for $i = 1, \ldots, h$) and so $Y_1, \ldots, Y_h$ form an orthonormal subset of A^d; [64, Theorem 7] (with $\delta = 1$) yields the expected result. □

Remark 8.5.1. We give here more details in case (b) about the reasons which lead us to introduce subspaces V_j and the decomposition of vectors $W^{(j)}$ (see Subsection 8.5.2). In his paper [64, p. 455], Schmidt writes (with his notation for the orthogonal complement and for $Z_j \in K^n$) $W = U + V$, where $U \in B^{e\perp} =$ Vect $(Z_1, \ldots, Z_m)$ and $V \in B^e$, in order to have the decomposition $W^{(j)} = U^{(j)} + V^{(j)}$ with $U^{(j)} \in (B^e)^{(j)\perp} =$ Vect $\left(Z_1^{(j)}, \ldots, Z_m^{(j)}\right)$ and $V^{(j)} \in (B^e)^{(j)}$.
Here a problem arises : in the complex case, which orthogonal complement does the symbol $\perp$ denote ? With our notation, suppose that one considers $(B^e)^{\varphi,\perp}$. Then, it is not always true that we have $G^n = B^e \oplus (B^e)^{\varphi,\perp}$ and so the decomposition $W = U + V$ may not be considered. (This is the first but not the only one problematic point : for example with this definition it seems that we could not obtain inequality (15) of Schmidt, because just before in his text the notation $W^{(j)} R^{(j)}$ would refer to $\varphi(W^{(j)}, R^{(j)})$ and not to the inner product $\left\langle W^{(j)}, R^{(j)} \right\rangle$).
Suppose now that $(B^e)^\perp$ denotes the orthogonal complement for the inner product $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Here, the decomposition $W = U + V$ may be considered. However it rises another problem : $(B^e)^\perp$ is no longer defined over K, but over K', and we could not apply the embedding $\sigma_j : K \to \mathbb{C}$ to U. In fact we also have a problem to define $V^{(j)}$ although B^e is defined over K, because we do not have necessarily $V \in K^n$ (the decomposition $(0, 1) = \lambda(1, \alpha) + \lambda(-1, (\overline{\alpha})^{-1})$ with $\lambda = 1/(\alpha + (\overline{\alpha})^{-1})$ and $\alpha \in K \setminus K'$ provides a simple counter-example in dimension two). Furthermore, even if $K = K'$ and that $U^{(j)}$ and $V^{(j)}$ could be considered, it is not true that it implies $\left\langle U^{(j)}, V^{(j)} \right\rangle = 0$, because of the complex conjugation in the inner product. This brings problems to apply Schmidt's arguments.

Remark 8.5.2. In case (a), it makes sense to considerer the decomposition $W^{(j)} = U^{(j)} + V^{(j)}$ of Schmidt, but if K is not totally real and if σ_j is a non-real embedding, with Schmidt's argument it seems that one can only obtain

$$|\varphi(V^{(j)}, V^{(j)})| \leq 2C_{14} H^{(y-1)/(ep)} ||V^{(j)}||,$$

instead of inequality (15) of [64] (which corresponds to inequality (8.5.3) in this paper). To solve this problem, it suffices to apply the argument used for the complex case. It is simpler in case (a) because we have $K' = K$, and B^e is the subspace defined by Schmidt in [58] (defined over K). If we replace the decomposition $U^{(j)} = W^{(j)} + U^{(j)}$ with the decomposition $W^{(j)} = U_j + V_j$ if σ_j is not real, with $U_j \in$ Vect $\left(Z_1^{(j)}, \ldots, Z_m^{(j)}\right)$ and V_j orthogonal to Vect $\left(Z_1^{(j)}, \ldots, Z_m^{(j)}\right)$, as for (8.5.3) we obtain

$$||V_j|| \leq 2C_{14}H^{(y-1)/(ep)}.$$

This inequality is slightly different from (8.5.3) because in case (a) the symmetric convex body defined by (i), (ii) and (iii) at the beginning of the proof is not the same. Now, note that in Section 8.5.3 we use inequalities (8.5.2) and (8.5.3) but not directly the fact that $K \subset \mathbb{R}$ or not, so working with V_j rather than $V^{(j)}$ we may follow Schmidt's arguments to complete the proof of case (a).

8.6 Exponents of Diophantine Approximation

Let $n \geq 1$ and $K \subset \mathbb{C}$ be a number field. We recall that one distinguishes between two cases (a) and (b).
In case (a), K is real, G^{n+1} denotes Euclidean space $\mathbb{R}^{n+1}$, and $q = 1$.
In case (b), K is complex non real, G^{n+1} denotes unitary $\mathbb{C}^{n+1}$, and $q = 2$.

Definition 8.6.1. Let $\mathbf{u} \in G^{n+1} \setminus \{0\}$. For each $j = 0, \ldots, n-1$, we denote by $\omega_{j,K}(\mathbf{u})$ (resp. $\widehat{\omega}_{j,K}(\mathbf{u})$) the supremum of all real numbers ω such that, for arbitrarily large values of Q (resp. for all sufficiently large values of Q), there exists a vector subspace S of G^{n+1}, defined over K, of dimension $j+1$, with

$$H(S) \leq Q \quad \text{and} \quad H(S)\omega_1^q(\mathbf{u}, S) \leq Q^{-\omega}.$$

Laurent introduces this family of exponents in [34] in the case $K = \mathbb{Q}$. He gives a series of inequalities (which may be proved using Schmidt's results [64]) relating these exponents (cf for example [56, Theorem 2.2], and compare to Theorem 8.6.2 below), and gives also a description of the full spectrum of the $2n$ exponents $(\omega_{0,\mathbb{Q}}(\mathbf{u}), \ldots, \omega_{n-1,\mathbb{Q}}(\mathbf{u}), \ldots, \widehat{\omega}_{0,\mathbb{Q}}(\mathbf{u}), \ldots, \widehat{\omega}_{n-1,\mathbb{Q}}(\mathbf{u}))$ for $n = 2$. In [56], Roy gives a description of the full spectrum of the n exponents $(\omega_{0,\mathbb{Q}}(\mathbf{u}), \ldots, \omega_{n-1,\mathbb{Q}}(\mathbf{u}))$ for all $n \geq 1$, proving that the inequalities of Laurent describe completely this spectrum (cf Theorem 2.3 of [56]).

For an arbitrary number field K, the aforementioned inequalities can be generalized : this is Theorem 8.6.2, which is the main application of this section.

Theorem 8.6.1. *Let $\mathbf{u} \in G^{n+1} \setminus \{0\}$ and let j, $0 \leq j \leq n-1$. Then*

$$\omega_{j,K}(\mathbf{u}) \geq \widehat{\omega}_{j,K}(\mathbf{u}) \geq \frac{j+1}{n-j} \quad (0 \leq j \leq n-1). \tag{8.6.1}$$

Proof of Theorem 8.6.1
By [64, Theorem 13] in the case $d = 1$, there exists a constant $c > 0$ which depends only of n and K such that for all $Q \geq 1$, there is a subspace S, defined over K and of dimension $j + 1$, satisfying

$$H(S) \leq Q \quad \text{and} \quad H(S)\omega_1^q(\mathbf{u}, S) \leq cQ^{-(j+1)/(n-j)}.$$

Theorem 8.6.1 follows immediately. Note that in the proof of Theorem 13, Schmidt uses his going-down Theorem. □

Theorem 8.6.2. *Let $n \in \mathbb{N}^*$ and $\mathbf{u} \in G^{n+1}$. Then we have $\omega_{0,K}(\mathbf{u}) \geq \frac{1}{n}$ and*

$$\frac{j\omega_{j,K}(\mathbf{u})}{\omega_{j,K}(\mathbf{u}) + j + 1} \leq \omega_{j-1,K}(\mathbf{u}) \leq \frac{(n-j)\omega_{j,K}(\mathbf{u}) - 1}{n - j + 1} \quad (1 \leq j \leq n-1), \tag{8.6.2}$$

with the convention that the left-most ratio is equal to j if $\omega_{j,K}(\mathbf{u}) = \infty$.

The right inequality in (8.6.2) follows from Schmidt's going-up Theorem [64, Theorem 9], while the left inequality follows from the going-down Theorem. In his paper [34], Laurent introduces the exponents $\omega_{j,\mathbb{Q}}(\mathbf{u})$ and notes that each inequalities in (8.6.2) is best possible (because they allow to find Khinchine's transference inequalities, which are best possible). For $\mathbf{u}$ with $\mathbb{Q}-$linearly independent coordinates and $K = \mathbb{Q}$, Laurent gives an independent proof of the right inequality of (8.6.2) in [34], and both inequalities are proved by Bugeaud and Laurent in [11]. Roy proves that for $K = \mathbb{Q}$, the inequalities of Theorem 8.6.2 describe the set of all possible values of the n-tuples $(\omega_{0,\mathbb{Q}}(\mathbf{u}), \ldots, \omega_{n-1,\mathbb{Q}}(\mathbf{u}))$ (cf [56, Theorem 2.3]). It would be of interest to know if his theorem remains true or not for an arbitrary number field K.

Proof
We show first the left inequality in (8.6.2).
Set $A^1 := \mathrm{Span}(\mathbf{u})$, the line spanned by $\mathbf{u}$ in G^{n+1}. Let j, $1 \leq j \leq n-1$. If $\omega_{j,K}(\mathbf{u}) = \infty$ let $y_1 > q^{-1}$. Otherwise let $y_1 = q^{-1}(\omega_{j,K}(\mathbf{u}) + 1) - \varepsilon$, where $\varepsilon > 0$ is very small; then $y_1 > q^{-1}$ because Theorem 8.6.1 yields $\omega_{j,K}(\mathbf{u}) > 0$. Then, there exist arbitrarily large values of Q for which there exists a subspace S of G^{n+1} of dimension $j+1$ $(1 \leq j \leq n-1)$, such that

$$H(S) \leq Q \quad \text{and} \quad H(S)\omega_1^q(A^1, S) \leq Q^{-(qy_1-1)}. \tag{8.6.3}$$

Set $y_1' := y_1(j+1)/(qy_1 + j)$. The conditions of the going-down Theorem are fulfilled with A^1 and $B^e := S$ (one has $d = i = h = 1$, $e = j + 1$ and we choose $c = 1$). This gives a subspace $S' \subset S$ of height $H(S') \leq Q'$ with $Q' := C_5 Q^{\frac{qy_1+j}{j+1}}$, of dimension j, defined over K, having

$$H(S') \leq Q' \quad \text{and} \quad H(S')\omega_1^q(\mathbf{u}, S') \leq C_7 Q'^{-(qy_1'-1)}. \tag{8.6.4}$$

Since Equation (8.6.3) holds for arbitrarily larges values of Q, (8.6.4) holds also for arbitrarily large values of Q', and one deduces that

$$\omega_{j-1,K}(\mathbf{u}) \geq qy_1' - 1.$$

Letting y_1 tends to $q^{-1}(\omega_{j,K}(\mathbf{u})+1)$ if $\omega_{j,K}(\mathbf{u})<\infty$, and to $+\infty$ otherwise, we deduce the left side of the inequality in (8.6.2).

Only a scheme of proof is given for the right inequality.
Set again $A^1:=\mathrm{Span}(\mathbf{u})$ and let j, $1\le j\le n-1$. We can suppose that for any subspace S of dimension $j+1$, defined over K, we have $\omega_1^q(A^1,S)>0$ (otherwise it means that $\omega_{j,K}(\mathbf{u})=\infty$, and the right inequality in (8.6.2) is obvious). Let y_1, $0<qy_1<\omega_{j-1,K}(\mathbf{u})$. There exist arbitrarily large values $Q\ge 1$ and corresponding subspaces S of dimension j defined over K, having

$$H(S)\le Q \quad \text{and} \quad H(S)\omega_1^q(A^1,S)\le Q^{-qy_1}. \tag{8.6.5}$$

Now, we use Schmidt's going-up Theorem ([64, Theorem 8]) with parameters $n+1$, $x_1=1/q$, y_1, $d=t=i=1$, $c=1$, and $B^e:=S$ (note that in our context we have $\psi_1(A^1,B^e)=\omega_1(A^1,B^e)$ for all B^e of dimension $e<n$). This gives us a subspace $S'\supseteq S$ of dimension $j+1$, defined over K, having

$$H(S')\le Q' \quad \text{and} \quad 0<H(S')^{(n-j+1)/(n-j)}\omega_1^q(A^1,S')\le C_4Q'^{-qy_1(n-j+1)/(n-j)}, \tag{8.6.6}$$

where $Q':=C_3Q^{(n-j)/(n-j+1)}$ and $C_3,C_4>0$ depend of n,K and y_1 only.
Now, since Equation (8.6.5) holds for arbitrarily large values Q, so does (8.6.6) for arbitrarily large values Q'. This implies that there are infinitely many subspaces S' which satisfy (8.6.6). In particular, $H(S')$ is not bounded from above.
To conclude, it suffices to remark that (8.6.6) implies

$$0<H(S')^{(n-j+1)/(n-j)}\omega_1^q(A^1,S')\le C_4H(S')^{-qy_1(n-j+1)/(n-j)}.$$

Then multiplying each side of the inequality by $H(S')^{1-(n-j+1)/(n-j)}$ and writing $Q''=H(S')$, we find that for arbitrarily large values of Q'' there exists S' of dimension $j+1$ defined over K such that

$$H(S')\le Q'' \quad \text{and} \quad H(S')\omega_1^q(A^1,S')\le C_4Q''^{-(qy_1+1)(n-j+1)/(n-j)+1}. \tag{8.6.7}$$

This shows that

$$\omega_{j,K}(\mathbf{u})\ge (qy_1+1)(n-j+1)/(n-j)-1,$$

which gives

$$qy_1\le \frac{(n-j)\omega_{j,K}(\mathbf{u})-1}{n-j+1},$$

and letting qy_1 tend to $\omega_{j-1,K}(\mathbf{u})$ we find the desired result. □

Bibliographie

[1] J.-P. Allouche, J. Davison, M. Queffélec et L. Zamboni : Transcendence of Sturmian or morphic continued fractions. *Journal of Number Theory*, 91(1):39–66, 2001.

[2] B. Arbour et D. Roy : A Gel'fond type criterion in degree two. *Acta Arithmetica*, 111(1):97–103, 2004.

[3] V. Beresnevich, D. Dickinson et S. Velani : Diophantine approximation on planar curves and the distribution of rational points. *Annals of Mathematics*, 166(2): 367–426, 2007.

[4] V. Bernik : Use of Hausdorff dimension in the theory of Diophantine approximations. *Acta Arithmetica*, 42(3):219–253, 1983.

[5] Y. Bugeaud : *Approximation by algebraic numbers*, vol. 160 de *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, 2004.

[6] Y. Bugeaud : On simultaneous rational approximation to a real number and its integral powers. *Annales de l'institut Fourier*, 60(6):2165–2182, 2010.

[7] Y. Bugeaud : Exponents of Diophantine approximation. *In* D. Badziahin, A. Gorodnik et N. Peyerimhoff, éds : *Dynamics and Analytic Number Theory*, vol. 437 de *London Mathematical Society Lecture Note Series*, chap. 2, p. 96–135. Cambridge University Press, 2016.

[8] Y. Bugeaud et M. Laurent : Exponents of Diophantine approximation and Sturmian continued fractions. *Annales de l'institut Fourier*, 55(3):773–804, 2005.

[9] Y. Bugeaud et M. Laurent : On exponents of homogeneous and inhomogeneous Diophantine approximation. *Moscow Math. J*, 5(4):747–766, 2005.

[10] Y. Bugeaud et M. Laurent : Exponents of Diophantine approximation. *Diophantine Geometry Proceedings, Scuola Normale Superiore Pisa, Ser. CRM*, 4:101–121, 2007.

[11] Y. Bugeaud et M. Laurent : On transfer inequalities in Diophantine approximation, II. *Mathematische Zeitschrift*, 265(2):249–262, 2010.

[12] Y. Bugeaud et J. Schleischitz : On uniform approximation to real numbers. *Acta Arith.*, 175(3):255–268, 2016.

[13] J. Cassaigne : Limit values of the recurrence quotient of Sturmian sequences. *Theoretical Computer Science*, 218(1):3–12, 1999.

[14] J. W. S. Cassels : *An introduction to Diophantine approximation*, vol. 99 de *Cambridge tracts in mathematics and mathematical physics*. Cambridge University Press, 1957.

[15] J. W. S. Cassels : *An introduction to the geometry of numbers*. Springer Science & Business Media, 2012.

[16] H. Davenport et W. Schmidt : Approximation to real numbers by quadratic irrationals. *Acta Arithmetica*, 13(2):169–176, 1967.

[17] H. Davenport et W. Schmidt : Approximation to real numbers by algebraic integers. *Acta Arithmetica*, 15(4):393–416, 1969.

[18] A. de Luca : A combinatorial property of the Fibonacci words. *Information Processing Letters*, 12(4):193–195, 1981.

[19] A. de Luca : Sturmian words : Structure, combinatorics, and their arithmetics. *Theoretical Computer Science*, 183(1):45–82, 1997.

[20] A. de Luca et F. Mignosi : Some combinatorial properties of Sturmian words. *Theoretical Computer Science*, 136(2):361–385, 1994.

[21] S. Fischler : Spectres pour l'approximation d'un nombre réel et de son carré. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér I*, 339(10):679–682, 2004.

[22] S. Fischler : Palindromic prefixes and episturmian words. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 113(7):1281–1304, 2006.

[23] S. Fischler : Palindromic prefixes and diophantine approximation. *Monatshefte für Mathematik*, 151(1):11–37, 2007.

[24] O. N. German : Intermediate Diophantine exponents and parametric geometry of numbers. *Acta Arithmetica*, 154:79–101, 2012.

[25] O. N. German : On Diophantine exponents and Khintchine's transference principle. *Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory*, 2:22–51, 2012.

[26] W. Hodge et D. Pedoe : *Methods of Algebraic Geometry*. Camb. Univ. Press, 1947.

[27] V. Jarník : Zum Khintchineschen" Übertragungssatz". *Trudy Tbilisskogo mathematicheskogo instituta im. A. M. Razmadze = Travaux de l'Institut mathématique de Tbilissi*, 3:193–212, 1938.

[28] A. Y. Khinchin : *Continued fractions*. University of Chicago Press, 1964.

[29] A. Khintchine : Zwei Bemerkungen zu einer Arbeit des Herrn Perron. *Mathematische Zeitschrift*, 22(1):274–284, 1925.

[30] A. Khintchine : Über eine Klasse linearer diophantischer Approximationen. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1884-1940)*, 50(2):170–195, 1926.

[31] A. Khintchine : Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximationen. *Mathematische Zeitschrift*, 24(1):706–714, 1926.

[32] M. Laurent : Simultaneous rational approximation to the successive powers of a real number. *Indagationes Mathematicae*, 14(1):45–53, 2003.

[33] M. Laurent : Exponents of Diophantine approximation in dimension two. *Canad. J. Math*, 61:165–189, 2009.

[34] M. Laurent : On transfer inequalities in Diophantine Approximation. *In Analytic Number Theory, Essays in honour of Klaus Roth*, p. 306–314. Cambridge U. Press, 2009.

[35] C. Lekkerkerker : *Geometry of Numbers*, vol. VIII de *Bibliotheca mathematica (Amsterdam. 1952)*. Wolter-Noordhoff, 1969.

[36] M. Lothaire : Combinatorics on words. *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, 17:276–292, 1983.

[37] M. Lothaire : *Algebraic combinatorics on words*, vol. 90 de *Encyclopedia of Mathematics and its applications*. Cambridge University Press, 2002.

[38] M. Lothaire : *Applied combinatorics on words*, vol. 105 de *Encyclopedia of Mathematics and its applications*. Cambridge University Press, 2005.

[39] K. Mahler : On compound convex bodies I. *Proc. London Math. Soc. (*3*)*, 5:358–379, (1955).

[40] A. Marnat : About Jarník's-type relation in higher dimension. *Annales de l'Institut Fourier (to appear)*.

[41] M. Mignotte : *Approximation des nombres algébriques*. Université de Paris-Sud, Département de mathématique, 1977.

[42] N. Moshchevitin : Exponents for three-dimensional simultaneous Diophantine approximations. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 62(1):127–137, 2012.

[43] N. G. Moshchevitin : Khintchine's singular Diophantine systems and their applications. *Russian Mathematical Surveys*, 65(3):433–511, 2010.

[44] O. Perron : Über diophantische approximationen. *Mathematische Annalen*, 83(1): 77–84, 1921.

[45] A. Poëls : Exponents of Diophantine approximation in dimension 2 for numbers of Sturmian type. *arXiv preprint arXiv :1711.07896*, 2017.

[46] A. Poëls : The complex case of Schmidt's going-down Theorem. *Monatshefte für Mathematik*, 184(4):649–666, 2017.

[47] M. Queffélec : Approximations diophantiennes des nombres sturmiens. *J. Théor. Nombres Bordeaux*, 14:613–628, 2002.

[48] D. Roy : Approximation simultanée d'un nombre et de son carré. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 336(1):1–6, 2003.

[49] D. Roy : Approximation to real numbers by cubic algebraic integers I. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 88(1):42–62, 2004.

[50] D. Roy : Diophantine approximation in small degree. *In CRM Proceedings and Lecture Notes*, vol. 36, p. 269–285, 2004.

[51] D. Roy : On two exponents of approximation related to a real number and its square. *Canad. J. Math*, 59(1):211–224, 2007.

[52] D. Roy : On simultaneous rational approximations to a real number, its square, and its cube. *Acta Arithmetica*, 133:185–197, 2008.

[53] D. Roy : On the continued fraction expansion of a class of numbers. *In Diophantine approximation, Festschrift for Wolfgang Schmidt*, vol. 16, p. 347–361. Springer, 2008.

[54] D. Roy : Construction of points realizing the regular systems of Wolfgang Schmidt and Leonard Summerer. *Journal de théorie des nombres de Bordeaux*, 27:591–603, 2015.

[55] D. Roy : On Schmidt and Summerer parametric geometry of numbers. *Annals of Mathematics*, 182:739–786, 2015.

[56] D. Roy : Spectrum of the exponents of best rational approximation. *Mathematische Zeitschrift*, 283(1-2):143–155, 2016.

[57] D. Roy : On the topology of Diophantine approximation spectra. *Compositio Mathematica*, 153(7):1512–1546, 2017.

[58] S. Schanuel : On heights in number fields. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 70(2):262–263, 1964.

[59] J. Schleischitz : On the spectrum of Diophantine approximation constants. *Mathematika*, 62(1):79–100, 2016.

[60] J. Schleischitz : Approximation to an extremal number, its square and its cube. *Pacific Journal of Mathematics*, 287(2):485–510, 2017.

[61] J. Schleischitz : On uniform approximation to successive powers of a real number. *Indagationes Mathematicae*, 28(2):406–423, 2017.

[62] J. Schleischitz : Uniform Diophantine approximation and best approximation polynomials. *arXiv preprint arXiv :1709.00499*, 2017.

[63] J. Schleischitz : Cubic approximation to Sturmian continued fractions. *Journal of Number Theory*, 184:270–299, 2018.

[64] W. M. Schmidt : On heights of algebraic subspaces and Diophantine approximations. *Ann. of Math.*, 85:430–472, 1967.

[65] W. M. Schmidt : *Diophantine Approximation*, vol. 785 de *Lecture Notes in Math.* Springer-Verlag, 1980.

[66] W. M. Schmidt et L. Summerer : Parametric geometry of numbers and applications. *Acta Arith.*, 140:67–91, 2009.

[67] W. M. Schmidt et L. Summerer : Diophantine approximation and parametric geometry of numbers. *Monatshefte für Mathematik*, 169:51–104, 2013.

[68] W. M. Schmidt et L. Summerer : Simultaneous approximation to three numbers. *Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory*, 3(1):84–107, 2013.

[69] W. M. Schmidt et L. Summerer : The generalization of Jarnik's identity. *Acta Arithmetica*, 175:119–136, 2016.

[70] W. M. Schmidt et L. Summerer : Simultaneous approximation to two reals : bounds for the second successive minimum. *Mathematika*, 63(3):1136–1151, 2017.

[71] R. C. Vaughan et S. Velani : Diophantine approximation on planar curves : the convergence theory. *Inventiones mathematicae*, 166(1):103–124, 2006.

université PARIS-SACLAY | École doctorale de mathématiques Hadamard (EDMH)

Titre : Applications de la géométrie paramétrique des nombres à l'approximation diophantienne

Mots-clefs : Approximation diophantienne, Approximation simultanée, Exposants diophantiens, Spectre des exposants, Géométrie paramétrique des nombres.

Résumé :
Pour un réel ξ qui n'est pas algébrique de degré ≤ 2, on peut définir plusieurs exposants diophantiens qui mesurent la qualité d'approximation du vecteur $(1, \xi, \xi^2)$ par des sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ définis sur $\mathbb{Q}$ de dimension donnée. Cette thèse s'inscrit dans l'étude de ces exposants diophantiens et des questions relatives à la détermination de leur spectre. En utilisant notamment les outils modernes de la géométrie paramétrique des nombres, nous construisons une nouvelle famille de réels – appelés nombres de type sturmien – et nous déterminons presque complètement le 3-système qui leur est associé. Comme conséquence, nous en déduisons la valeur de leur exposants diophantiens et certaines informations sur les spectres. Nous considérons également le problème plus général de l'allure d'un 3-système associé à un vecteur de la forme $(1, \xi, \xi^2)$, en formulant entre autres certaines contraintes qui n'existent pas pour un vecteur $(1, \xi, \eta)$ quelconque, et en explicitant les liens qu'il entretient avec la suite des points minimaux associée à ξ. Sous certaines conditions de récurrence sur la suite des points minimaux nous montrons que nous retrouvons les 3-systèmes associés aux nombres de type sturmien.

Title : Applications of parametric geometry of numbers to Diophantine approximation

Keys words : Diophantine approximation, Simultaneous approximation, Diophantine exponents, Spectrum of Diophantine exponents, Parametric geometry of numbers.

Abstract : Given a real number ξ which is not algebraic of degree ≤ 2 one may define several diophantine exponents which measure how "well" the vector $(1, \xi, \xi^2)$ can be approximated by subspaces of fixed dimension defined over $\mathbb{Q}$. This thesis is part of the study of these diophantine exponents and their spectra. Using the parametric geometry of numbers, we construct a new family of numbers – called numbers of sturmian type – and we provide an almost complete description of the associated 3-system. As a consequence, we determine the value of the classical exponents for numbers of sturmian type, and we obtain new information on their joint spectra. We also take into consideration a more general problem consisting in describing a 3-system associated with a vector $(1, \xi, \xi^2)$. For instance we formulate special constraints which do not exist for a general vector $(1, \xi, \eta)$ and we also clarify connections between a 3-system which represents ξ and the sequence of minimal points associated to ξ. Under a specific recurrence relation hypothesis on the sequence of minimal points, we show that the previous 3-system has the shape of a 3-system associated to a number of sturmian type.